O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

TOSHKENT MOLIYA INSTITUTI

«МАТЕМАТИКА» КАФЕДРАСИ

«OLIY MATEMATIKA» FANIDAN

Amaliy mashg‘ulot

TUZUVCHILAR: Dots.Muminova R., katta o‘qit. Turdaxunova S.

Toshkent- 2010

10. VEKTOR KO`RINISHIDA YOZILGAN CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASINING BIRGALIK VA ANIQLIK SHARTLARI. FUNDAMENTAL YECHIMLAR

m ta noma’lum *n* ta chiziqli *bir jinsli tenglamalar sistemasi* vektor shaklda berilgan bo’lsin:

$\boldsymbol{a}_1x_1+\boldsymbol{a}_2x_2+\ldots+\boldsymbol{a}_mx_m=\theta$

$rang(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_m)=rang(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_m,\theta)$ bo’lgani uchun sistema har doim *birgalikda*. $Rang(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_m)=m$ munosabat o’rinli bo’lsa, sistema *aniq* va yagona nol yechimga ega.

$Rang(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_m)<m$ munosabat o’rinli bo’lsa, sistema *aniqmas* **v**a trivial yechimdan tashqari nol bo’lmagan yechimlarga ham ega bo’ladi. Ushbu holda, har bir nol bo’lmagan yechimga *m* o’lchovli vektor sifatida qaralishi mumkin.

Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining fundamental yechimlari sistemasi yoki tizimi deb, uning chiziqli bog’liq bo’lmagan nol bo’lmagan $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2,\ldots,\boldsymbol{F}_k$ yechimlariga aytiladiki**,** sistemaning har bir yechimi ushbu yechimlarning chiziqli kombinatsiyasi ko’rinishida aniqlanishi mumkin.

Agar $rang(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_m)=r<m$ bo’lsa, sistema o’zining fundamental yechimlari tizimi mavjudligi bilan xarakterlanadi va tizim har biri *m* o’lchovli *m-r* ta nol bo’lmagan vektorlardan tarkib topadi.

Bir jinsli sistemaning fundamental yechimlari tizimi quyidagicha quriladi:

1. Bir jinsli sistemaning umumiy yechimi quriladi;
2. *m-r* o’lchovli *m-r* ta vektorlardan iborat chiziqli erkli vektorlar siatemasi, masalan: $\boldsymbol{e}_1(1;0;\ldots;0)$, $\boldsymbol{e}_2(0;1;0;\ldots;0),\ldots,$ $\boldsymbol{e}_{m-r}(0;0;\ldots;1)$ tanlanadi;
3. Umumiy yechim erkli noma’lumlari o’rniga $\boldsymbol{e}_1$ vektor mos koordinatalarini qo’yib, bazis noma’lumlar aniqlanadi va mos ravishda $\boldsymbol{F}_1$ fundamental yechim quriladi. Shuningdek, $\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \ldots, \boldsymbol{e}_{m-r}$ vektorlardan foydalanib, mos ravishda $\boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \ldots, \boldsymbol{F}_{m-r}$ fundamental yechimlar quriladi.

1. Misol. Bir jinsli sistemaning fundamental yechimlari tizimidan birini quring va uning umumiy yechimini vektor shaklida aniqlang:

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Sistemaning umumiy yechimini Gayss-Jordan usulida quramiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 7 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -5 & 6 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1{,}2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2{,}6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

m=4, *r*=2 bo'lgani uchun *m*-*r*=2 ta chiziqli erkli $\boldsymbol{e}_1$(1;0) va $\boldsymbol{e}_2$(0;1) sistemani tanlaymiz. $\boldsymbol{e}_1$(1;0) vektor koordinatalarini umumiy yechimning mos erkli nomalumlari o'rniga qo'yib, bazis nomalumlarni aniqlaymiz va $\boldsymbol{F}_1$(-2,6;1,2;1;0) fundamental echimni quramiz. $\boldsymbol{e}_2$(0;1) vektor yordamida $\boldsymbol{F}_2$(1;-1;0;1) fundamental yechimni quramiz. Boshqacha qilib aytganda, kengaytirilgan matritsadagi koeffitsiyentlarni sistemaga qo'yamiz:

$$\begin{cases} x_2 - 1{,}2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2{,}6x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -2{,}6x_3 + x_4 \\ x_2 = 1{,}2x_3 - x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

Fundamental yechimlar $\boldsymbol{F}_1$(4,6;1,2;1;0) va $\boldsymbol{F}_2$(1;-1;0;1) quriladi.

Umumiy yechimni tuzamiz:

$$\boldsymbol{X} = \lambda_1 \boldsymbol{F}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{F}_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} -2{,}6 \\ 1{,}2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bu yerda λ_1 va λ_2 lar ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

m ta nomalumli *n* ta chiziqli bir jinsli bo'lmagan tenglamalar sistemasi vektor shaklda berilgan bo'lsin:

$$\boldsymbol{a}_1 x_1 + \boldsymbol{a}_2 x_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_m x_m = \boldsymbol{b} \qquad (\boldsymbol{b} \neq \theta)$$

Sistemaning umumiy yechimini vektor shaklda yozish mumkin:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F}_0 + \lambda_1 \boldsymbol{F}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \lambda_{m-r} \boldsymbol{F}_{m-r}$$

Bu yerda $\boldsymbol{F}_0$ - bir jinsli bo'lmagan sistemaning xususiy yechimlaridan biri, $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_{m-r}$ - berilgan sistemaga mos ravishdagi

$\boldsymbol{a}_1x_1+\boldsymbol{a}_2x_2+\ldots+\boldsymbol{a}_mx_m=\theta$

bir jinsli tenglamalar sistemasining fundamental yechimlari tizimi, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-r}$ -ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

2. Misol. Berilgan sistemaning umumiy yechimini vektor shaklida quring:

$$\begin{cases} 4x_1+7x_2+2x_3+3x_4=8 \\ x_1+3x_2-x_3+2x_4=3 \\ 2x_1+x_2+4x_3-x_4=2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 7 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -5 & 6 & -5 & -4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 6 & -5 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1{,}2 & 1 & 0{,}8 \\ 1 & 0 & 2{,}6 & -1 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\boldsymbol{F_0}(0{,}6;\ 0{,}8;\ 0;\ 0)$ sistemaning xususiy yechimlaridan birini qurdik.

Sistema umumiy yechimi vektor shaklini yozamiz:

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{F_0}+\lambda_1\boldsymbol{F_1}+\lambda_2\boldsymbol{F_2}=\begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\lambda_1\begin{pmatrix} -2{,}6 \\ 1{,}2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bu yerda λ_1 va λ_2 lar ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

Mustaqil yechish uchun misollar

Bir jinsli tenglamalar sistemasini yeching:

10.1. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3-x_4=0 \\ -2x_1-4x_2+2x_3+2x_4=0 \\ 3x_1+6x_2-3x_3-3x_4=0 \end{cases}$

10.2. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2-2x_3=0 \\ 3x_1+2x_2-3x_3=0 \end{cases}$

10.3. $\begin{cases} x_1-7x_2+5x_3-3x_4=0 \\ 2x_1-3x_2+7x_3-x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3-2x_4=0 \\ 5x_2+x_3=0 \end{cases}$

10.4. $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0 \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0 \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0 \end{cases}$

Bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglamalar sistemalarining fundamental yechimlarini toping:

10.5. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3+x_4=1 \\ 2x_1-3x_2-x_3-x_4=-4 \end{cases}$

10.6. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+x_4=1 \\ x_2-x_3+2x_4=2 \\ 2x_2-2x_3+3x_4=3 \end{cases}$

10.7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$ 10.8. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$

10.9. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

Sistemani yeching:

10.10. $\begin{cases} 3x - 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ -3y - 4z = 0 \end{cases}$ 10.11. $\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

10.12. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$ 10.13. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$

Sistemalarni fundamental yechimlarini va umumiy yechimini toping:

10.14. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 18 \\ -x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$ 10.15. $\begin{cases} 3x + 5y + 2z = 0 \\ 5x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$

10.16. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 5x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$ 10.17. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 = 7 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 + 4x_5 = -3 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 4 \end{cases}$

10.18. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$