Мансуров М.

Математикадан қисқача маълумотнома

(Иқтисод мутахассисликлари учун)

Жиззах – 2008

Кириш.

Мазкур “Маълумотнома” Олий техника ўқув юртларида Иқтисод йўналишида таълим олаётган талабаларга мўлжалланган бўлиб, ундан шу йўналишдаги ўрта махсус касб – ҳунар коллежларининг талабалари ҳам фойдаланишлари мумкин.

Республикамизда бу каби маълумотномалар кўп бўлишига қарамай, ўзбек тилида нашрларнинг камчилигини ҳисобга олган ҳолда маълумотнома рус тилидаги маълумотномаларда берилган айриммухим жиҳатлар маълум кетма – кетлик билан жойлаштирилган.

Маълумотноманинг II – XI бобларида “Олий математика”нинг асосий бўлимларига тегишли мавзулар нисбатан кенгроқ ва амалий жиҳатдан тушунарли баён этилган.

Бугунги кунда таълим муассасаларининг барча бўғинларида талабаларнинг мустақил иш билан шуғулланишига асосий эътиборқаратилган бир даврда мазкур қўлланма талабаларни зарурий математик маълумотлар билан қуроллантиришга кўмакчи вазифасини бажаради.

I боб. – Умумий маълумотлар

1 – §. Ўзгармас миқдорлар

Миқдор	Сон қиймати	Миқдор	Сон қиймати
π	3,141 592 654	e	2,218 281 828
π^2	9,869 604 401	$\sqrt{e}$	1,648 721 271
$\sqrt{\pi}$	1,772 453 851	1/e	0, 367 879 441
$\sqrt{2\pi}$	2,506 628 275	$1/\sqrt{e}$	0,606 530 660
$1/\pi$	0,318 309 886	e^{π}	23,140 692 633
$\ln\pi$	1,144 729 886	M=lge	0,434 294 482
$\lg\pi$	0,495 149 872	1/M=ln10	2,302 585 093
$\sqrt{2}$	1,414 213 562	π^e	22,459 157 724
$\sqrt{3}$	1,732 050 808		
1 радиан	$57^0 17^I 44{,}8^{II}$		
1^0	0,017 453 293 радиан		

2 – §. Асосий алгебрик формулалар

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;
2. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
3. $(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$
4. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
5. $a - в = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$
6. $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$
7. $a^n – b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$;
8. $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots a_n^2 + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_1a_n + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n)$;

хусусий холда $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$;

9. $(a \pm b)^n = a^n \pm na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots + b^n$;

бу ерда $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

3–§. Касрлар устида амаллар

Амаллар номи	Амалларни бажарилиш тартиби	Мисол
Қўшиш	Каср сонларни қўшиш учун унга умумий махраж топилади, топилган умумий махраж суратдаги ҳар бир сон устига ёзилади, сўнгра улар кўпайтирилиб қўшилади, касрнинг махражига топилган умумий махраж (у.м) ёзилади.	$\frac{{}^{20}\!/2}{3}+\frac{{}^{12}\!/3}{5}+\frac{{}^{3}\!/7}{20}=\frac{20\cdot 2+12\cdot 3+3\cdot 7}{60}=$ $=\frac{60+36+21}{60}=\frac{117}{60}$
Айириш	Каср сонларни айириш учун худи қўшишдаги каби (у.м)га келтирилади ва камаювчининг суратидан айрилувчининг сурати айрилади.	$\frac{{}^{7}\!/3\;3}{5}-\frac{2}{7}=\frac{7\cdot 3-5\cdot 2}{35}=\frac{21-10}{35}=\frac{11}{35}$
Кўпайтириш	Каср сонни каср сонга кўпайтириш учун сурати суратига, махражи махражига кўпайтирилиб, натижа мос равишда сурати ва махражига ёзилади.	$\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{13}=\frac{56}{313}=\frac{52}{13}=\frac{10}{13}$ $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{9}=\frac{3\cdot 5\cdot 4}{5\cdot 7\cdot 9}=\frac{4}{21}$
Бўлиш	Касрни касрга кўпайтириш учун биринчи касрни иккинчи касрнинг тескарисига кўпайтирилади.	$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}=\frac{ad}{bc}$ $\frac{7}{13}:\frac{9}{26}=\frac{7}{13}\cdot\frac{26}{9}=\frac{7\cdot 2}{9}=\frac{14}{9}=1\frac{5}{9}$

4-§. Пропорциялар

Иккита *a:в* ва *c:d* нисбатнинг тенглигига пропорция дейилади, *a, b, c, d* сонлар пропорциянинг ҳадлари, *a* ва *d* пропорциянинг четки ҳадлари, *b* ва *c* ўрта ҳадлари дейилади.

Пропорциянинг асосий хоссаси: пропорциянинг четки ҳадларини кўпайтмаси ўрта ҳадларнинг кўпайтмасига тенг.

Агар a:b=c:d ёки $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ пропорция ўринли бўлса, у ҳолда қуйидаги пропорциялар ҳам ўринли бўлади ва уларга ҳосилавий пропорциялар дейилади:

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d};\quad \frac{d}{b}=\frac{c}{a};\quad \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d};\quad \frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c};\quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}\quad (a>b);$$

$\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$; $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ Агар $в^2$=ас бўлса, $\frac{a-b}{c-d}=\frac{a}{d}$; $\frac{a-b}{b-d}=\frac{a}{d}$

Агар $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$ бўлса:

1) $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{b_1+b_2+...+b_n}=\frac{a_1}{b_1}$; 2) $\frac{a_1m_1+a_2m_2+...+a_nm_n}{b_1m_1+b_2m_2+...+b_nm_n}=\frac{a_1}{b_1}$;

5 - §. Ўртача қийматлар

$x_{1,}x_2,...x_n$ n-та сонлар берилган бўлса, $A=\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$; $B=\sqrt[n]{x_1\cdot x_2...x_n}$ $(x_к \geq 0)$ мос равишда шу сонларнинг ўрта арифметиги ва ўрта геометриги дейилади.

$H=\dfrac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}\right)}$ шу сонларнинг ўрта гармониги дейилади.

$K=\sqrt{\dfrac{x_1{}^1+x_2{}^2+...+x_n{}^2}{n}}$ шу сонларнинг ўртача квадрати дейилади.

$V=\dfrac{a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n}{a_1+a_2+...+a_n}$ шу сонларнинг вазни ўртача қиймати дейилади.

6-§. Ўнли касрлар

Ўнли каср оддий касрнинг хусусий ҳоли бўлиб, унингнг махражи 10^n кўринишида бўлганда ҳосил бўлади. М: $\frac{38543}{100} = 385{,}43$ ёки $57\frac{69}{100} = 57{,}69$. Ўнли каср сон оддий касрдан фарқли бир қаторда ёзилади ва махражда нечта нол бўлса, соннинг охирги рақамларидан шунча сон ажратилиб, олдидан вергул қўйилади; $\frac{7}{10} = 0{,}7$; $\frac{91}{100} = 0{,}091$, $\frac{113}{1000} = 0{,}113$

Амаллар номи	Қоидаси	Мисол
Қўшиш ва айириш	Худди бутун сонларни қўшиш ва айириш каби бажарилади, фақат сонларни ёзишда бутун ва каср қисми қатъий ўнлик хона ўнлик хона остига, юзлик хона остига юзлик хона ёзилиши керак.	$+\begin{array}{r}418{,}583\\ 42{,}12\\ \hline 460{,}703\end{array}$; $-\begin{array}{r}588{,}12\\ 114{,}6834\\ \hline 473{,}4366\end{array}$
Кўпайтириш	Ўнли касрлар худди бутун сон каби кўпайтирилади, каср қисмидаги ҳадлар саналиб, қанча сон бўлса, шунча ўнгдан чапга қараб рақамлар саналиб, сўнгра вергул қўйилади.	$\begin{array}{r}4{,}07\\ \times\ 1{,}026\\ \hline 2442\\ +814\\ 407\ \ \ \\ \hline 4{,}17582\end{array}$
Ўнли касрни бутун сонга бўлиш	Бутун сонни бутун сонга бўлиш каби бажарилади, фақат вергулдан кейинги биринчи сони тушурмасдан олдин вергул ажратиш керак.	$\begin{array}{l\|l}-417{,}96 & 86\\ \ \ 334 & 4{,}866\\ \hline \ \ -739 & \\ \ \ \ 688 & \\ \hline \ \ -516 & \\ \ \ \ 516 & \\ \hline \ \ \ \ \ 0 & \end{array}$

Агар бўлувчи ўнли каср бўлса, унинг вергулини ташлаб юбориб , бўлинувчининг вергулини ўнгга бўлувчида қанча хона бўлса, шунча суриш керак:

М: 1336,8: 0,12 бўлса, 13,368: 12 деб ёзилади ва ўнли касрни бутун сонга бўлиш каби бажарилади.

Изоҳ: Ўнли каср вергулини ўнгга (чапга) n та хонага сурилса, ўнли каср 10^n марта кўпаяди (камаяди).

Ўнли касрдан оддий касрга қуйидагича ўтилади; $3{,}4=3\frac{4}{10} = 3\frac{2}{5}$;

$37{,}448=37\frac{448}{1000} = 37\ \frac{56}{25}$; $0{,}578=\frac{578}{1000} = \frac{289}{500}$;

Оддий касрни ўнли касрга айлантириш учун ўнли касрни бутун сонга бўлиш қоидасига асосан давом эттириш керак:

М: $\frac{36}{25}$; $\frac{11}{18}$ касрни ўнли касрга келтиринг

$$\begin{array}{r|l} -\,36 & 25 \\ \underline{25} & 1{,}44 \\ -\,100 & \\ \underline{100} & \\ -\,100 & \\ \underline{100} & \\ 0 & \end{array} \quad ; \quad \frac{36}{25}=1{,}44\,; \qquad \begin{array}{r|l} -\,110 & 18 \\ \underline{108} & 0{,}611... \\ -\,20 & \\ \underline{18} & \\ 2 & \end{array}$$

Охирги мисолдан кўринадики оддий касрдан ўнли касрга ўтганда чексиз ўнли каср ҳосил бўлиши мумкин экан.

Бирор жойдан бошлаб, айни бир хил рақамлар такрорланадиган чексиз ўнли каср даврий ўнли каср дейилади. М: 0,333…, 3,555…,1,63111…, 2,183131…, 2,71361361… ва қуйидагича 0,(3); 3, (5); 1,63 (1) белгиланади.

Агар давр бевосита вергулдан кейин бошланса (м: 8,66…) соф даврий ўнли каср (д.ў.к), агар вергулдан кейин давр олдида турадиган сонлар бўлса (3,5082626…) аралаш д.ў.к дейилади.

Агар д. ў. к соф бўлса, даврийй оддий касрни суратига, махражига эса 9 ни касрнинг даври неча хонали бўлса, шунча марта ёзиб оддий касрга келтирилади:

$0,(3) = \frac{3}{9}=\frac{1}{3}$; $1,18 = 1\frac{18}{99}=1\frac{2}{11}$;

Агар д. ў. к аралаш бўлса, суратига вергулдан кейинги сондан даврнинг олдида турган сон айрилади, махражига эса даври неча хонали бўлса, шунча марта 9 ва бутун қисми билан вергул орасидаги сон неча хонали бўлса, шунча нол ёзилади;

$1,31(12)=1\frac{31112-31}{9900}=1\frac{1027}{3300}$; $\qquad 7,4(312)=7\frac{4312-4}{9990}=7\frac{4308}{9990}=7\frac{2154}{4445}$;

7-§. Процентлар (фоизлар)

a соннинг юздан бир қисмига процент (%) дейилади.

М: 35 нинг 20% унингнг $\frac{20}{100}$ қисмини ташкил этади, яъни $35\cdot\frac{20}{100}=35\cdot\frac{1}{5}=727$ тенг. Мисол учун, а соннинг 35%ини топиш учун унинг 0,35 га кўпайтириш кифоя экан.

М: Банкка ойида Р% даромад берадиган а сум қўйилса, t ойдан кейин бу омонат $a(1+\frac{pt}{100})$ сўмни ташкил қилади.

Агар қўйилган омонатга ҳисобот ойи охирида процент даромад қўшилиб, бундан кейин шу орттирилган омонат юзасидан процент

ҳисобланса, бу ҳолда омонатга мураккаб процент (процентга процент) қўшилади дейилади.
М: a=10 000 сум 3% ҳар ойда даромад берадиган банкка қўйилса, у вақтда 15 ойдан кейин $A=10000\left(1+\frac{3}{100}\right)^{15}$ сўмдан иборат бўлади.
Умумий ҳолда омонат кассага қўйилган а сўм ойига Р% даромад берса, мураккаб процент ҳисобида t – ойдан кейин $A=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^{t}$ сўм ҳосил бўлади.

8-§. Прогрессиялар

а) ***Арифметик прогрессия***.

$a_1, a_2,\ldots a_n$ сонлар кетма-кетлиги арифметик прогрессияни ташкил қилади дейилади, агар ҳар бир кейинги ҳади, олдинги ҳадига бирор d узгармас сонни қўшишдан ҳосил бўлса, яъни $a_1,\ a_2=a_1+d,\ a_3=a_2+d,\ldots a_n=a_{n-1}+d$ ёки $a_1,\ a_1+d,\ a_1+2d,\ldots,a_1+(n-1)d$.

Арифметик прогрессия ÷ символ билан белгиланади. Агар $a_1,a_2,\ldots a_n$ сонлар кетма-кетлиги ÷ бўлса, $\frac{a_{n-k}+a_{n+k}}{2}=a_n$; $a_n=a_1+(n-1)d$;

$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n k\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$

М: $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$; $1+2+\ldots+n=\frac{1+n}{2}\cdot n$;

б) ***Геометрик прогрессия***.

$a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n$ сонлар кетма-кетлиги геометрик прогрессияни (∺) ташкил қилади дейилади, агар ҳар бир кейинги ҳади олдинги ҳадини бирор q сонга кўпайтиришдан ҳосил бўлса, яъни $a_1,\ a_2=a_1q,\ a_3=a_2q,\ \ldots,\ a_n=a_{n-1}q$ ёки $a_1, a_1q, a_1q^2, \ldots a_1,q^{n-1}$; q сони ∺ нинг махражи дейилади.

Агар $a_1,a_2,\ldots a_n$ ∺ бўлса

$$a_{n-k}\cdot a_{n+k}=a^2{}_n,\quad a_n=a_1q^{n-1};\quad S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q},\quad q\neq 1$$

Агар ∺ да $|q|<1$ бўлса, бу вақтда $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{a_1}{1-q}$; $S=\frac{a_1}{1-q}$ чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг йиғиндиси дейилади.

Амалиётда қўлланиладиган қуйидаги чекли йиғиндилар исбот қилинган.

1. $1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2. $1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

3. $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{n(4n^2-1)}{3}$

4. $1^3+3^3+\ldots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$

5. $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{(n-1)n}=1-\dfrac{1}{n}$

6. $1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4$қ$\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

7. $(n+1)(n+2)\ldots(n+n)=2^n(2n-1)!!$

8. $1\cdot 4+2\cdot 7+3\cdot 10+\ldots+n(3n+1)=n(n+1)^2$

9. $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+(n-1)n=\dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$

10. $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

11. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\ldots+\dfrac{n}{2^n}=2-\dfrac{n+2}{2^n}$

12. $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$

13. $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{2}{3\cdot 5\cdot 7}+\dfrac{3}{5\cdot 7\cdot 9}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$

9-§. Факториаллар

$a_1, a_2,\ldots,a_n$ лар кўпайтмаси $\prod_{k=1}^{n} a_k$ кўринишида белгиланади. Хусусий ҳолда $a_k=k$ бўлса, $\prod_{k=1}^{n} k=1\cdot 2\cdot\ldots n=n!$ кўринишида белгилинади ва n факториал деб ўқилади. Демак, $3!=1\cdot 2\cdot 3=6,\quad 5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=60,..\quad 0!=1$ деб қабул қилинган.

Факториалнинг хоссалари:

1. $\dfrac{n!}{(n-1)!}=n;\qquad \dfrac{(2n)!}{(2n-2)!}=(2n-1)2n;\qquad \dfrac{(2n+1)!}{(2n-1)!}=2n(2n+1)$

2. n ўсса, n! жуда тез ўсади; М: 10!=3628800; 20!=2432902$\cdot 10^{18}$
$50!=3{,}0414093\cdot 10^{64}$,
$69!=1{,}7112245\cdot 10^{98}$,.... шунингнгдек $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{n!}=0,\quad (k\in N)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0,\quad (a>0)$

3. Катта сонларнинг факториали қуйидаги

$n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}}$, формула Билан =исолбланади бу ерда $0<\theta<1$

Бу формула Стирлинг (1692-1770) формуласи дейилади.

Амалда (2n)!!, (2n+1)!! белгилари ҳам ишлатилади, унинг ишлатишда охирги рақам жуфт ёки тоқ сонлигига қараб 2 ва 1 дан бошлаб жуфт ва тоқ сонлар кўпайтмасини ифодалайди.

М: 7!!=$1\cdot 3\cdot 5\cdot 7=105$, $10!!=2\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 10=19200$, 9!!=$1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9=945$,
12!=$2\cdot 4....12=230400$

10-§. Бирлашмалар (комбинаторика)

Турли нарсалар (предметлар)ни элементлар деб атаймиз. Бирлашмалар (комбинаторика) математиканинг бир бўлими бўлиб, асосан чекли элементли тўпламлар билан иш кўради.

Бирлашма (Б) лар берилишига кўра такрорланадиган ва такрорланмайдиган: ўринлаштириш, ўрин алмаштириш, гуруҳлашларга бўлинади. Турли элементлардан группалар ёки бирлашмалар ҳосил қилиш мумкин. Ҳар бир бирлашмага элементларнинг ҳаммаси ёки уларнинг маълум сондагиси киришига қараб ва элементларнинг тартиби роль уйнаши ёки уйнамаслигига қараб, улар уч турга ажратилади:

1) ўринлаштиришлар; 2) ўрин алмаштиришлар; 3) гуруҳлашлар.

а) Такрорланмайдиган бирлашмалар:

I. Ўринлаштиришлар;

n элементдан m тадан олиб тузилган ўринлаштиришлар деб (n$\geq m$) шундай бирлашмаларга айтиладики, бу бирлашмаларнинг ҳар бирида m та элемент бўлади; бир бирлашма иккинчисидан ё элементларнинг таркиби ёки элементларнинг тартиби билан фарқ қилади. n элементдан m тадан олиб тузилган барча ўринлаштиришлар сони A_n^m символ билан белгиланади ва $A_n^m=\bar{n}\cdot(n-1)(\bar{n}-2)...[n-(m-1)]$;

$$A_n^m=\underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)...[n-(m-1)]}_{m-\text{òà}}\ ;$$

М: $A_n^3=\underbrace{n(n-1)(n-2)}_{3-\text{òà}}$; $A_n^4=\underbrace{n(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}_{4-\text{òà}}$; $A_5^3=\underbrace{5\cdot 4\cdot 3}_{3-ma}=60$;

$A_5^4=\underbrace{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}_{4-ma}=120$; $A_{12}^2=\underbrace{12\cdot 11}_{2-ma}=132$; $A_9^3=\underbrace{9\cdot 8\cdot 7}_{3-ma}=504$;

II. Ўрин алмаштиришлар.

Ҳар бирига берилган n та элементнинг ҳаммаси кирадиган бирлашмалар n элементдан тузилган ўрин алмаштиришлар дейилади; бир ўрин алмаштиришлар бошқасидан фақат элементларининг тартиби билан фарқ қилади; М: a,b,c элементларидан abc, acb, bac, bca, cab, cba 6 та ўрин алмаштириш тузиш мумкин.

n элементдан барча мумкин бўлган ўрин алмаштиришлар сонини Pn билан белгилаш қабул қилинган, яъни

$$Pn=A_n^n=n\cdot(n-1)(n-2)...(n-1)\cdot[n-(n-1)]=n!$$

$$P_4=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24;\ P_{10}=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10=3628800$$

III. Гуруппалашлар.

Элементларнинг тартибига боғлиқ бўлмаган бирлашмалар группалар дейилади, бунда бир группа иккинчисидан ҳеч бўлмаганда битта элементи билан фарқ қилиши лозим.

n элементдан m тадан қилиб тузилган группалашлар сони C_n^m кўринишида белгиланади;

$$C_n^m = A_n^m : P_m = \frac{n!}{m!(n-m)} = \frac{n(n-1)(n-2)...[n-(m-1)]}{m!}$$

Бирлашмалар учун қуйидаги формулалар ўринли:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}; \quad A_n^k = A_{n-1}^k + kA_{n-1}^{k-1}; \quad A_n^m = m!C_{n-1}^k; \quad C_n^m = C_n^{n-m};$$

$$C_{n+1}^m = C_n^{m-1} + C_n^m; \quad C_n^1 + 2C_n^2 + ... + nC_n^n = n2^{n-1}; \quad C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$$

б) Такрорланувчи бирлашмалар.

II. Такрорланувчи ўрин алмаштириш.

n та элементли А тўплам элементлари m та гурхга ажратилган бўлиб, ҳар бир гуруҳга кирган элементлар сони $C_n(k_1,k_2,\ldots k_m)$ кўринишида белгиланади ва

$$C_n(k_1,k_2,...,k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!}$$

М: Иккита кўк ва 4 та қизил ёритгич (лампочка)ни неча хил усул билан бир қаторга териш мумкин. $C_6(2,4) = \frac{6!}{2!4!} = \frac{4!5\cdot 6}{4!2} = 15$

2. Нечта етти хонали сонда 6 рақами 3 марта ва 5 рақами тўрт марта учрайди?

$C_7(3,4) = \frac{7!}{3!4!} = \frac{4!5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4!} = 5\cdot 7 = 35$ та етти хонали сонда учрайди.

I. Такрорий ўринлаштиришлар.

n та элементли А тўпламни ихтиёрий m та элементидан сони m дан катта бўлмаган такрорий ўринлаштиришлар сони $A_n^m(n)$ кўринишда белгиланади ва $A_n^m(T) = n^m$ яъни n элементдан такрорий қилиб мумкин бўлгунча тузилган такрорий ўринлаштиришлар сони n^m га тенг.

М: 1. Саккизта йуловчини уч вагонга неча хил усул билан жойлаштириш мумкин?

$$A_3^8(T) = 3^8 = (3^3)^4 = 9\cdot 9\cdot 9\cdot 9 = 81\cdot 81 = 6561$$

2. Автомобиль давлат номери тўрт хонали сон бўлса, маълум серияга нечта давлат номери тайёрлаш мумкин?

$$A_4^{10}(T) = 4^{10} = 1048576$$

III. Такрорий группалашлар.

n та элементдан бир хил қилиб m тадан тузилган, яъни m.n элементдан m тадан тузилган такрорий группалашлар сони

$C_n^m(T)$ кўринишда белгиланади ва $C_n^m(T)=\dfrac{(m-n-1)}{m!(n-1)!}=C_{m+n-1}^m$ формула билан ҳисобланади.

М: Магазиндан бешта ҳар хил навли торт бор. 4 та торт олмоқчи бўлган ҳаридор унинг неча хил усул билан сотиб олиши мумкин? Бу 5 та элементдан 4 тадан қилиб тузилган такрорий синовдир:

$$C_5^4(T)=C_{4+5-1}^4=\frac{8!}{4!4!}=\frac{4!5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{4!4!}=\frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{2\cdot 3\cdot 4}=70$$

11-§. Ньютон биноми

x – a иккиҳад бином деб аталади. Иккиҳаднинг квадрати ва куби $(x+a)^2=x^2+2xa+a^2$, $(x+a)^3=x^3+3x^2a+3xa^2+a^3$га тенг эканлигини биламиз.

Шунга ўхшаш формулаларни иккиҳаднинг юқори даражалари учун ҳам ҳосил қилиш мумкин:

$$(x\pm a)^n=x^n\pm C_n^1x^{n-1}a+C_m^2x^{n-2}a^2\pm C_n^3x^{n-3}a^3+C_n^4x^{n-4}a^4+...+(-1)^n a^n,$$

$$(x+a)^2=x^2+2xa+a^2$$

Бу формулани 2 - § даги 8 – формула билан солиштиринг, Ушбу формулага Ньютон биноми формуласи дейилади.

12-§. Логарифмлар

Берилган b сонининг a асосга кўра логарифми деб, b сонни ҳосил қилиш учун а асосни кўтариш керак бўлган даража кўрсаткичига айтилади ва $\log_a b=c$ кўринишида ёзилади. $\log_a b=c$ ёзув a асосга кура b соннинг логарифми С га тенг деб ўқилади. (ҳама вақт a≠0, b> 0)

Тенгликдан	**экани келиб чиқади**	**Тенгликдан**	**экани келиб чиқади**
$2^3=8$	$\log_2 8=3$	$7^3=343$	$\log_7 343=3$
$10^3=1000$	$\log_{10}1000=3$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=8$	$\log_{\frac{1}{2}} 8=-3$
$5^2=25$	$\log_5 25=2$	$a^c=b$	$\log_a b=c$

Логарифмнинг таърифидан

$a^{\log_a b}=b$ экани келиб чиқади.

Логарифмнинг асосий хоссалари :

1. $\log_a 1=0$; $\log_a a=1$ 2. $a^{\log_a N}=N$

3. $\log_a(N_1 \cdot N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2$ 4. $\log_a \dfrac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2$

5. $\log_a N^{\alpha} = \alpha \log_a N$; 6. $\log_a N = \dfrac{1}{\log_N a}$ $(N \neq 1)$

7. $\log_a N = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$; 8. $\log_{a^2} N = \dfrac{1}{2}\log_a N$

Агар хусусий ҳолда a=10 бўлса, ўнли логарифм дейилади ва $\log_{10} N = \lg N$ кўринишда белгиланади.

10^1=10 бўлганида lg10=1; 10^{-1}=0,1; lg 0,1=-1
10^2=100 бўлганида lg 100=2; 10^{-2}=0,01; lg 0,01=-2

$10^n = \underbrace{100....0}_{n\cdot ma}$ бўлганидан $\lg\underbrace{100....0}_{n-ma} = n$; $10^{-n} = \underbrace{0{,}00....01}_{n-m}$; lg $\underbrace{0{,}00....01}_{n-ma} = -n$

a=l бўлса, $\log_a N = \log_{\ell} N$ логарифмга натурал логарифм дейилади ва lnN кўринишида белгиланади. (Логарифм тушунчасига асос солганлар: Шотландиялик математик Ж.Непер 1614 й, инглиз математиги И.Бюрги 1620 й, логарифм асосий тушунчасини рус олими асли швецариялик Леонард Эйлер (1707-1783) киритган). Ўнли ва натурал логарифм орасида қуйидаги богланиш мавжуд:

$$\ln N \approx 2{,}3 \cdot \lg N; \quad \lg N \approx 0{,}43 \ln N$$

13-§. Даража ва илдиз

Ўзаро тенг бўлган бир нечта кўпайтувчиларнинг кўпайтмаси даража дейилади:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a ... a}_{n\ \text{ìàðòà}} = a^n$$

Такрорланувчи кўпайтувчи a – даража асоси, асоснинг кўпайтувчи сифатида неча марта такрорланишини кўрсатувчи сон n-даражанинг кўрсаткичи дейилади. М: a соннинг иккинчи даражаси шу соннинг квадрати, учинчи даражаси эса куби дейилади.

Ишоралар қоидаси: $(\pm a)^{2n} = a^{2n}$ $(a > 0)$

$$(\pm a)^{2n+1} = \pm a^{2n+1} \quad (a > 0)$$

бунда 2n – жуфт соннинг умумий ёзилиши, 2n+1 эса тоқ соннинг умумий ёзилишидир.

Даража устида амаллар:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad a^m : a^n = a^{m-n}; \quad (a \cdot b \cdot c)^n = a^n b^n c^n; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n};$$

$$(a^n)^m = a^{n\cdot m;} \quad a^0 = 1 \ (a \neq 0); \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}(a \neq 0); \ (a^{-n})^m = \frac{1}{a^{nm}}; \ (a^{-m})^{-n} = a^{nm}$$

Даражага кутариш амалига тескари амал илдиз чиқариш дейилади; бу амал ёрдамида берилган даража ва унингнг кўрсаткичига кўра даража асоси изланади; М: $a^3 = 27$ бўлса $a = \sqrt[3]{27} = 3;$ a^5= -32 бўлса $a = \sqrt[5]{-32} = -2$

Илдиз чиқариш амали $\sqrt{\ }$ (илдиз белгиси ёки радикал белгиси) белги билан белгиланади, белги тепасига илдиз кўрсаткичи ёзилади, яъни $x^n = a$ бўлса, $x = \sqrt[n]{a}$.

Ишоралар қоидаси:

1. Мусбат сондан чиқарилган жуфт даражали илдиз иккита қарама-қарши ҳақиқий қийматга эга: $\sqrt{25} = \pm 5,$ чунки $(\pm 5)^2 = 25,$ $\sqrt[4]{81} = \pm 3,$ чунки $(\pm 3)^4 = 81$
2. Тоқ даражали илдизнинг ишораси илдиз остидаги соннинг ишораси билан бир хилдир: $\sqrt[3]{64} = 4,$ чунки $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.
3. Манфий соннинг жуфт даражали илдизи мавжуд бўлмайди, $\sqrt{-9} \neq \pm 3,$ чунки $(\pm 3)^2 = 9$

Арифметик илдиз: мусбат соннинг мусбат илдизига арифметик илдиз дейилади.

Илдизнинг асосий хоссалари:

$$(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a; \ \sqrt[n]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}; \ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m \div n}; \ \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}; \ a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m};$$

Изоҳ: Хозирги вақтда ихтиёрий сондан ҳар кандай даражали илдиз чиқаришни компъютерда бажариш қийин эмас.
М: Сондан квадрат илдизни берилган аниқликда ҳисоблаш усули ([11], 87 бет) берилган.

14-§. Тақрибий ҳисоблашлар. Хатолар

Кундалик инсон фаолиятида аниқ сонлар билан бирга тақрибий сонлар билан ҳам иш кўришга тўғри келади. Масалан, бирор ўлчов ишлари олиб борилганда ўлчов хатоси юзага келади, натижада ўлчанаётган микдорнинг аниқ қиймати ўрнига унингнг тақрибий қиймати билан иш кўришга тўғри келади.

Микдорнинг А аниқ қиймати билан а тақрибий қиймати орасидаги айирманинг абсолют қиймати а тақрибий соннинг абсолют хатоси дейилади:

$$\alpha = |A - a|$$

Тақрибий сон абсолют хатосининг шу соннинг ўзига бўлган нисбати шу соннинг нисбий хатоси дейилади, яъни

$$\delta_a = \frac{\alpha}{a} = \frac{|A-a|}{a}$$

δ_a – нисбий хато % ларда берилади.
М: Агар $\pi \approx 3{,}14$ деб олинса, π тақрибий соннинг нисбий хатосини топинг. π нинг бир мунча аниқроқ қиймати 3,141592…. Бўлганидан

$$\alpha = |3{,}141592 - 3{,}14| = 0{,}001592 < 0{,}002$$

$$\delta_{3{,}14} = \frac{0{,}002}{3{,}14} = \frac{1}{1570} = 0{,}000637 \approx 0{,}064\%$$

15-§. Кўпҳадлар

х га нисбатан $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ ифода n-даражали кўпҳад дейилади, бу ерда $a_k (k = \overline{1,n})$ х олдидаги коэффициентлар, a_n озод ҳад, кўпҳаднинг коэффициентлари ва озод ҳади дейилади. Олдидаги коэффициенти нолдан фарқли бўлган кўпҳаднинг энг юқори даражалисининг даражасига кўпҳаднинг даражаси дейилади.

Иккита кўпҳад тенг дейилади, агар X нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентлар тенг бўлса. Кўпҳадни қўшиш, айириш ва кўпайтириш мумкин ва унинг қуйидаги схематик кўринишда бажариш қулай: М: $f(x) = 5x^4 + 3x^2 - x + 3$, $\varphi(x) = 3x^3 - x^2 + 5$ бўлса,

+ (-)	$f(x)$ $\varphi(x)$	$5x^4 + 3x^2 - x + 3$ $3x^3 - x^2 + 5$
	$f(x)+\varphi(x)$ $f(x)-\varphi(x)$	$5x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x + 8$ $5x^4 - 3x^3 + 4x^2 + x - 2$

$f(x)\cdot\varphi(x)$ ни топиш керак бўлса, қуйидаги схематик жадвал тузамиз:

$\varphi(x)$	f (x)= $5x^4 + 3x^2 - x + 3$
$3x^3$ $-x^2$ 5	$15x^7 + 9x^5 - 3x^4 + 9x^3$ $-5x^6 - 3x^4 + x^3 - 3x^2$ $5x^4 - 15x^2$ 15
$f(x)\cdot\varphi(x)$	$15x^7 - 5x^6 + 9x^5 - x^4 + 10x^3 + 12x^2 + 15$

Кўпҳадни кўпҳадга бўлиш эса бутун сонни бутун сонга бўлиш каби бажарилади:

$$\begin{array}{r|l} -364 & 13 \\ \underline{26} & \overline{28} \\ 104 & \\ -\underline{104} & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -3\cdot10^2+6\cdot10+4 & 10+3 \\ \underline{3\cdot10^2+9\cdot10} & \overline{3\cdot10-3+1=28} \\ -3\cdot10+4 & \\ \underline{-3\cdot10+9} & \\ -13 & \\ \underline{13} & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -6x^3+7x^2-1 & 3x-1 \\ \underline{6x^3+2x^2} & \overline{2x^2+3x+1} \\ -9x^2-1 & \\ \underline{3x^2-3x} & \\ -3x-1 & \\ \underline{3x-1} & \\ 0 & \end{array}$$

яъни $(6x^3+7x^2-1):(3x-1)=2x^2+3x+1$; кўпҳадни кўпҳадга бўлганда бўлинувчи ва бўлувчи кўпҳадни стандарт шаклида, яъни X нинг юқори даражаларини пасайиш тартибида ёзиб олиб, худди бутун сонни бутун сонга бўлиш қоидасига асосан бўлиш амали бажарилади.

16 - §. Комплекс сонлар

Z=a+bi кўринишидаги сонлар комплекс сонлар дейилади, бу ерда a,b є R ҳақиқий сонлар, i алоҳида турдаги янги сон бўлиб, унингнг квадрати минус бирга тенг, яъни $i^2=-1$.

Бундан $i^3=i\bullet i^2=i$, $i^4= i^2\bullet i^2=(-1)\bullet(-1)=1$, i^5қ$=i\bullet i^4=i$, $i^6= i^3\bullet i^3=-1,\dots$

Z=a+bi комплекс сон (к.с.)да a-унингнг ҳақиқий қисми (a=Rez), b-сони унингнг мавҳум (b=Imz) қисми дейилади. Комплекс сонларни қўшиш, айириш, кўпайтириш ва бўлиш қуйидаги формулалар билан берилади:

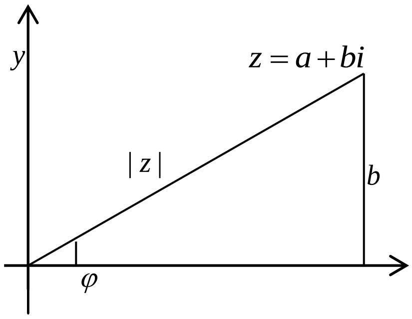
$$(a+ib)\pm(x+iy)=(a\pm x)+i(b+y);$$

$$(a+ib)\bullet(x+iy)= (ax-by)+(ay+bx)i;$$

$$\frac{a+bi}{x+iy}=\frac{ax+by}{x^2+y^2}+i\,\frac{bx-ay}{x^2+y^2}$$

Агар Rez=0 бўлса комплекс сон соф мавҳум сон дейилади. Jm=қ0 бўлса, z=a бўлади, яъни ҳақиқий сон комплекс соннинг хусусий ҳоли экан. XVI асрда куб тенгламаларни ечиш, манфий сондан квадрат илдиз чиқариш масаласи комплекс сон тушунчасини критишга олиб келди.

М: $Z^3+8=0$, бўлса, $Z_1=-2$; $Z_{2,3}=1\pm\sqrt{3}\,i$; $Z^2+4=0$; $Z_{1,2}=\pm2i$



$z=a+bi$ бўлса $\bar{z}=a-bi$ сонга a+bi комплекс сон нисбатан қўшма комплекс сон дейилади.

$\sqrt{a^2+b^2}$ сонга Z комплекс соннинг модули дейилади ва $|z|$ кўринишда белгиланади, яъни

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

a>0 бўлганда $\varphi=arctg\,\frac{b}{a}$ ва a<0 бўлганда $\varphi=\pi+arctg\,\frac{b}{a}$, a=0 бўлганда b>0 бўлса, $\varphi=\frac{\pi}{2}$, b<0 бўлса $\varphi=-\frac{\pi}{2}$ бўлади.

φ комплекс соннинг аргументи дейилади ва $\varphi=\arg z$ кўринишда белгиланади.

Комплекс соннинг модули ва аргументи тушунчасидан фойдаланиб, унинг комплекс соннинг тригонометрик шаклида ёзиш мумкин:

$z=a+bi=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

Комплекс сонлар тригонометрик шаклда берилса, уларни кўпайтириш ва бўлиш жуда осон бажарилади:

$z_1=a_1+b_1i=|z_1|(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $z_2=a_2+b_2i=|z_2|(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ бўлса

$z_1\cdot z_2=|z_1|\cdot|z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$; $\quad \frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$

Комплекс сонларнинг кўпайтириш формуласидан қуйидаги Муавр формуласи деб аталувчи

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$$

формула келиб чиқади.

Комплекс сонни комплекс сонга бўлиш формуласидан

$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi}{n})$; nϵN; k=0,1,2,…, n-1, комплекс сонлардан илдиз чиқариш формуласи келиб чиқади.

Тригонометрик шаклдаги комплекс сон мавҳум аргументли кўрсаткичли функция билан қуйидагича боғланган:

$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$, $\qquad e^{-i\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi \qquad$ (*)

яъни

$$z=a+bi=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)=|z|e^{i\varphi}$$

(*) формулаларга Эйлер (Леонард Эйлер 1707-1783, швецария математиги) формулалари дейилади,

17-§. **Рационал касрлар**

$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ кўринишидаги ифода, бу ерда

$$P_m(x)=a_ox^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m, \quad Q_n(x)=b_ox^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n$$

рационал каср дейилади.

Иккита рационал каср тенг дейилади, агар уларни сурат ва махражлари тенг бўлса, яъни

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{\tilde{P}_m(x)}{\tilde{Q}_n(x)} \text{ бўлса } P_m(x)\tilde{Q}_n(x)=Q_n(x)\tilde{P}_m(x)$$

Икки кўпҳад тенг дейилади, агар X нинг бир даражалари олдидаги коэффициентлар тенг бўлса, яъни $P_3(x)=5x^3+4x+5$ ва $Q_3(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$ кўпҳадлар тенг бўлса, яъни $P_3(x)=Q_3(x)$ бўлса A=3, B=0, C=4 ва D=5 келиб чиқади. Рационал касрлар устида тўртта арифметик амал бажариш мумкин.

Рационал каср тўғри рационал каср дейилади, агар m<n, ва m≥n бўлса, нотўғри рационал каср дейилади.

Агар нотўғри рационал каср берилган бўлса суратини махражига кўпҳадни кўпҳадга бўлиш қоидасига асосан букиб, ягона усул билан кўпҳад ва тўғри касрнинг йиғиндиси сифатида ифодаланади:

Масалан: $\frac{x^3+3}{x-1}=x+1+\frac{4}{x-1}$

Қуйидаги $\frac{A}{x-4}$, $\frac{A}{(x-4)^2}$, $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$ касрларга энг содда элементар касрлар дейилади, бу ерда A, B, M, N номаълум коэффициентлар, $D=P^2-4q<0$, $k>0$, $k\in N$.

Ҳар қандай қандай тўғри касрни келтирилган тўртта энг содда элементар касрларнинг йиғиндиси сифатида ифодалаш мумкинлиги исботланган. Агар $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ тўғри каср (m<n) берилган бўлиб, унингнг махражи $Q_n(x)$ ҳақиқий ва комплекс илдизларга эга бўлса:

Масалан: $Q_n(x)=(x-a)^{k1}(x-c)^{k2}(x2+p_1x+q_1)^{l_1}...(x^2+p_{l_1}x+q_{l_1})^{l_k}$

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+...+\frac{A_{k1}}{(x-a)^k}+\frac{B_1}{x-c}+\frac{B_2}{(x-c)^2}+...+\frac{B_{k2}}{(x-a)^{k2}}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1}+$$
$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+...+\frac{M_{l1}x+N_{l1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l1}}+...+\frac{\tilde{M}_1x+\tilde{N}_1}{x^2+p_{l1}x+q_{l1}}+...+\frac{\tilde{M}_{lk}x+\tilde{N}_{lk}}{(x^2+p_{l1}x+q_{l1})^{lk}}$$

кўринишда ифодаланади, бу ерда A_i, B_j, M_k, N_k лар номаълум ўзгармас коэффициентлар бўлиб, уларни топиш талаб қилинади, $k_1+k_2+l_1+\ldots+l_k=n$. Касрнинг ўнг томонини умумий махражи $Q_n(x)$ бўлади. Икки касрни тенглик шартига асосан $P_m(x)=\tilde{P}_m(x)$ тенглик ҳосил бўлади, бу ерда $P_m(x)$ берилган, яъни коэффициентлари аниқ кўпҳад, $\tilde{P}_m(x)$ эса номаълум, яъни коэффициентлари номаълум кўпҳад. Охирги тенгликда X нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаштириб, номаълум коэффициентларга нисбатан n номаълумли n та чизиқли бир жинслимас тенгламалар системаси ҳосил қилинади. Бу системани ечимини топиб, номаълум коэффициентлар ўрнига қўйилади, натижада тўғри рационал касрнинг энг содда элементар касрлар орқали ифодаланган йиғиндиси ҳосил бўлади.

Масалан: $\frac{3x^3+8}{(x-2)^2(x^2-4x+13)}$ тўғри рационал касрни энг содда элементар касрларни йиғиндиси сифатида ифодаланг.

Ечиш: $\frac{3x^3+8}{(x-2)^2(x^2-4x+13)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{Mx+N}{x^2-4x+13}$

$$A(x-2)(x^2-4x+13)+B(x^2-4x+13)+(x-2)^2(Mx+N)=3x^3+8$$

X нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаштириб, A, B, M, N ларни топсак

$A=\frac{35}{18}$, $B=\frac{32}{9}$, $M=\frac{73}{36}$, $N=\frac{37}{12}$,

демак $\frac{3x^3+8}{(x-2)^2(x^2-4x+13)}=\frac{35}{18(x-2)}+\frac{32}{9(x-2)^2}+\frac{-\frac{73}{36}x+\frac{37}{12}}{x^2-4x+13}$

18-§. **Алгебраик тенгламалар**

Иккита тенглик (**=**) ишораси билан бирлаштирилган математик ифода тенг дейилади. Агар тенгликда баъзи харфлар номаълум бўлса, бундай тенглик тенглама дейилади. Номаълумнинг берилган тенгламанинг қийматига, тенгламанингнг ечими дейилади. Тенгламанинг ечиш бу, тенгликни қаноатлантирувчи номаълумнинг барча қийматларини топишдан иборат.

Тенглама алгебраик дейилади, агар номаълум устида алгебраик амаллар бажариш натижасида ҳосил бўлган бўлса, акс ҳолда трансцендент тенглама дейилади.

Алгебраик тенгламалар ҳам ўз навбатида; бутун алгебраик тенгламалар; каср (рационал) алгебраик ва иррационал тенгламаларга бўлинади. Тенгламада қатнашаётган номаълумнинг энг юқори даражасига тенгламанингнг даражаси дейилади. Энди ечимлари тенгламанингнг коэффициентлари орқали ифодаланадиган баъзи алгебраик тенгламаларни ечишни ўрганамиз.

1. Чизиқли тенглама:

$ax+b=0$, $a,b\in R$, $x=-\frac{b}{a}$, $a\neq 0$

2. Квадрат тенглама:

$ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, $a,b,c\in R$, $X_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Агар $b^2-4ac>0$ бўлса квадрат тенглама иккита ҳар хил ҳақиқий ечимга; $b^2-4ac=0$ бўлса иккита бир хил (каррали) ечимга; $b^2-4ac<0$ бўлса қўшма комплекс илдизга эга бўлади.

Хусусий ҳолда b=0 бўлса, квадрат тенглама чала квадрат тенглама дейилади ва $X_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

$x^2+px+q=0$ тенгламага келтирилган квадрат тенглама дейилади ва бу тенглама $ax^2+bx+c=0$ тенгламанинг ***a*** га бўлишдан ҳосил бўлади.

Келтирилган квадрат тенгламанингнг ечими

$X_{1,2}=-\frac{P}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{P}{2}\right)^2-q}=\frac{-P\pm\sqrt{b^2-4q}}{2}$ формула ёрдамида топилади.

Квадрат тенглама учун қуйидаги Виета (1540-1603 француз математиги) теоремаси ўринли

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Келтирилган квадрат тенглама учун

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$$

Агар x_1 ва x_2 $ax^2 + bx + c = 0$ тенгламанинг илдизи бўлса $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

$x^2 + px + q = 0$ тенгламанингнг илдизи бўлса $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$

3. Учунчи даражали тенглама.

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$, $a, b, c, d \in R$, $x = y - \frac{b}{3a}$ алмаштириш орқали $y^3 + py + q = 0$ тенглама ҳосил қилинади, бу ерда $p = -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}$; $q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2}$

Келтирилган $y^3 + py + q$ куб тенгламанингнг ечими қуйидаги Кордано формуласи билан топилади;

$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$; $y = A + B$ деб белгилаш киритсак, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ тенгламанингнг илдизлари қуйидагича ҳисобланади:

а) $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2 > 0$ бўлса $x_1 = A + B$

$x_2 = -\frac{1}{2}(A + B) + \frac{\sqrt{3}}{2}(A - B)i$, $x_3 = -\frac{1}{2}(A + B) - \frac{\sqrt{3}}{2}(A - B)i$

б) $\left(\frac{p}{q}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$ бўлса $A = B$ бўлади ва $x_1 = 2A$, $x_2 = x_3 = -A$

в) $\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$ бўлса $x_1 = 2r\cos\frac{\varphi}{3}$, $x_2 = 2r\cos\frac{\varphi + 2\pi}{3}$, $x_3 = 2r\cos\frac{\varphi + 4\pi}{3}$

бу ерда $r = \sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}$, $\cos\varphi = -\frac{p}{2r}$

Хусусий ҳолда $ax^3 + bx^2 \pm bx \pm a = 0$ бўлса $(x \pm 1)\left[ax^2 + (b \mp a)x + a\right] = 0$ бўлиб, кубик тенгламанинг ечиш чизиқли ва квадрат тенгламанинг ечишга келтирилади. $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ тенглама учун Виет теоремаси қуйидагича ёзилади:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}$$

4. Тўртинчи даражали тенглама.

Тўртинчи даражали алгебраик тенгламанинг умумий кўриниши

$a_1x^4 + b_1x^3 + c_1x^2 + d_1x + f_1 = 0$, $\quad a \neq 0$

Тенгламанинг **a_1** га бўлсак

$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f = 0$ бўлиб, бу тенглама қуйидаги иккита квадрат тенгламага тенг кучли бўлади;

$$x^2 + (b - A)\frac{x}{2} + \left(y - \frac{by - d}{A}\right) = 0,$$

$x^2 + (b + A)\frac{x}{2} + \left(y + \frac{by - d}{A}\right) = 0$, бу ерда $A = \sqrt{8y + b^2 - 4c}$, **у** эса $8y^3 - 4cy^2 + (2bd - 8f)y + f(4c - b^2) - d^2 = 0$ куб тенгламанингнг қандайдир ҳақиқий ечими.

Агар x_1, x_2, x_3, x_4 тўртинчи даражали тенгламанингнг ечимлари бўлса, $a_1x^4 + b_1x^3 + c_1x^2 + d_1x + f_1 = a_1(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$

Тўртинчи даражали тенглама учун Виет теоремаси

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b_1}{a_1}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{c_1}{a_1}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{d_1}{a_1}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{f_1}{a_1}$$

5. Биквадрат тенглама.

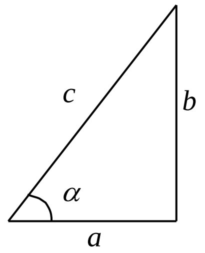
Тўртинчи даражали тенгламада $b_1 = d_1 = 0$ бўлса $ax^4 + bx^2 + c = 0$ $\quad a \neq 0$ тенгламага биквадрат тенглама дейилади. $x^2 = y$ алмаштириш орқали квадрат тенгламага келтирилиб ечилади:

$$X_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Изох. Умумий кўринишда даражаси бешдан юқори бўлган алгебраик тенгламанинг илдизи, унингнг коэффициентлари орқали ифодаланмаслиги Абель (1802-1829 Норвегия математиги) томанидан исботлаган.

19-§. **Тригонометрия**

Тригонометрия-учбурчак томонлари билан бурчаклари орасидаги боғланишни ўрганувчи математик фандир



$$Sin\alpha = \frac{b}{c}; \quad Cos\alpha = \frac{a}{c}; \quad tg\alpha = \frac{b}{a}; \quad ctg\alpha = \frac{a}{b};$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{c}{a}; \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{c}{a}$$

I.Тригонометрик функцияларнинг чораклардаги ишоралари:

Триг.ф-я / Чораклар	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$\sec\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$
I	+	+	+	+	+	+
II	+	-	-	-	-	+
III	-	-	+	+	-	-
IV	-	-	-	-	+	-

II. Тригонометрик функциялар орасидаги асосий муносабатлар.

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$

2. $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1;$

3. $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{ctg\alpha};$

4. $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha;$

5. $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{tg\alpha};$

6. $1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \operatorname{cosec}^2\alpha \quad \left(1 рад = \frac{180^0}{\pi};\ 1^0 = \frac{\pi}{180^0} \cdot рад\right)$

III. Тригонометрик функцияларнинг баъзи бурчаклардаги қийматлари.

Триг.ф-я / Бурчаклар	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
0	0	1	0	∞
$15^0(\pi/12)$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$18^0(\pi/10)$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$
$30^0(\pi/6)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$36^0(\pi/5)$	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$
$45^0(\pi/4)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$54^0(3\pi/10)$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$
$60^0(\pi/3)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$72^0(3\pi/5)$	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$
$75^0(5\pi/12)$	$\frac{\sqrt{3}+4}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
$90^0(\pi/2)$	1	0	∞	0
$120^0(2\pi/3)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$180^0(\pi)$	0	-1	0	∞
$240^0(4\pi/3)$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$270^0(3\pi/2)$	-1	0	∞	0

IV. Бир хил аргументли тригонометрик функцияларнинг ўзаро боғланиши

Функция	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$\sec\alpha$	$\cos ec\alpha$
$\sin\alpha$		$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\dfrac{tg\alpha}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}}{\sec\alpha}$	$\dfrac{1}{\cos ec\alpha}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$		$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}$	$\dfrac{ctg\alpha}{\pm\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\sec\alpha}$	$\dfrac{\pm\sqrt{\cos ec^2\alpha-1}}{\cos ec\alpha}$
$tg\alpha$	$\dfrac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$		$\dfrac{1}{ctg\alpha}$	$\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{\cos ec^2\alpha-1}}$
$ctg\alpha$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\dfrac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{tg\alpha}$		$\dfrac{1}{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	$\pm\sqrt{\cos ec^2\alpha-1}$
$\sec\alpha$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\cos\alpha}$	$\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1+ctg^2\alpha}}{ctg\alpha}$		$\dfrac{\cos ec\alpha}{\pm\sqrt{\cos ec^2\alpha-1}}$
$\cos ec\alpha$	$\dfrac{1}{\sin\alpha}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}{tg\alpha}$	$\pm\sqrt{1+ctg^2\alpha}$	$\dfrac{\sec\alpha}{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	

(*) Квадрат илдизлар олдидаги ишора 19-§. I даги жадвалдан α бурчак қайси чоракка тегишли эканлигига қараб аниқланади.

20-§. **Тригонометрик функцияларнинг даврийлиги. Келтириш формулалари**

$$\left.\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha \\ tg(-\alpha) &= -tg\alpha \\ ctg(-\alpha) &= -ctg\alpha \\ \cos ec(-\alpha) &= -\cos ec\alpha \end{aligned}\right\}\text{ток}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos(-\alpha) &= -\cos\alpha \\ \sec(-\alpha) &= -\sec\alpha \end{aligned}\right\}\text{жуфт}$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+2\pi n) &= \sin\alpha \\ \cos(\alpha+2\pi n) &= \cos\alpha \\ \sec(\alpha+2\pi n) &= \sec\alpha \\ \cos ec(\alpha+2\pi n) &= \cos ec\alpha \qquad n = 0;\pm1;\pm2;\ldots \\ tg(\alpha+\pi n) &= tg\alpha \\ ctg(\alpha+\pi n) &= ctg\alpha \end{aligned}$$

Бурчак / Функция	$-\alpha$	$90^0-\alpha$	$90^0+\alpha$	$180^0-\alpha$	$180^0+\alpha$	$270^0-\alpha$	$270^0+\alpha$	$360^0\cdot k-\alpha$	$360^0\cdot k+\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$-tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$
ctg	$-ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$
sec	$\sec\alpha$	$\cos ec\alpha$	$-\cos ec\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\cos ec\alpha$	$\cos ec\alpha$	$\sec\alpha$	$\sec\alpha$
cosec	$-\cos ec\alpha$	$\sec\alpha$	$\sec\alpha$	$\cos ec\alpha$	$-\cos ec\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\cos ec\alpha$	$\cos ec\alpha$

21-§. Икки бурчак йиғиндиси ва айирмасининг синуси, косинуси, тангенси ва котангенси

1. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$;

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha};$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

2. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$;

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

3. $tg(\alpha \pm \beta) = \dfrac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha tg\beta} = \dfrac{ctg\alpha \pm ctg\beta}{ctg\alpha\, ctg\beta \mp 1}$;

$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{2}{ctg\alpha - tg\alpha};$$

$$tg 3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha};$$

4. $ctg(\alpha \pm \beta) = \dfrac{ctg\alpha \cdot ctg\beta \mp 1}{ctg\alpha \pm ctg\beta} = \dfrac{1 \mp tg\alpha \cdot tg\beta}{tg\alpha \pm tg\beta}$;

$$ctg 2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha} = \frac{ctg\alpha - tg\alpha}{2};$$

$$ctg 3\alpha = \frac{ctg^3\alpha - 3ctg\alpha}{3ctg^2\alpha - 1};$$

5. $\sin 4\alpha = \cos\alpha(4\sin\alpha - 8\sin^3\alpha)$;

$$\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1;$$

$$tg 4\alpha = \frac{4tg\alpha - 4tg^3\alpha}{1 - ctg^2\alpha + tg^4\alpha};$$

$$ctg 4\alpha = \frac{ctg^4\alpha - 6ctg^2\alpha + 1}{4ctg^3\alpha - 4ctg\alpha}.$$

22-§. Тригонометрик функцияларнинг бирини бошқасининг ярим бурчаги орқали ифодалаш

$$\sin\alpha = 2\sin\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\alpha}{2} = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\cos\alpha = \cos^2\tfrac{\alpha}{2} - \sin^2\tfrac{\alpha}{2} = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}; \quad tg\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\sin\tfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\cos\alpha)}; \quad \cos\tfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\cos\alpha)};$$

$tg\,\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$;

$ctg\,\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$; квадрат илдиз олдидаги $\pm$ ишора $\frac{\alpha}{2}$ бурчак қайси чоракка тегишли бўлишига қараб танлаб олинади.

23-§. **Тригонометрик функциянинг кўпайтмасини йиғиндига келтириш формулалари**

$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$;

$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$;

$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$;

$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$; $\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$;

$\sin^3\alpha=\frac{1}{4}(3\sin\alpha-\sin 3\alpha)$; $\cos^3\alpha=\frac{1}{4}(3\cos\alpha+\cos 3\alpha)$

$tg\alpha\cdot tg\beta=\frac{tg\alpha+tg\beta}{ctg\alpha+ctg\beta}=-\frac{tg\alpha-tg\beta}{ctg\alpha-ctg\beta}$; $ctg\alpha\cdot ctg\beta=\frac{ctg\alpha+ctg\beta}{tg\alpha+tg\beta}=-\frac{ctg\alpha-ctg\beta}{tg\alpha-tg\beta}$

$tg\alpha\cdot ctg\beta=\frac{tg\alpha+ctg\beta}{ctg\alpha+tg\beta}=-\frac{tg\alpha-ctg\beta}{ctg\alpha-tg\beta}$

24-§. Йиғинди ва айирмани тригонометрик функциялари

$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$; $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$; $\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$

$\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; $tg\alpha\pm tg\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$;

$ctg\alpha\pm ctg\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$; $tg\alpha+ctg\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\sin\beta}$; $ctg\alpha-tg\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\cos\beta}$

25-§. **Тескари тригонометрик функциялар**

$\sin x$, $\cos x$, tgx, $ctgx$, $\sec x$, $\cos ecx$ функцияларга тескари функциялар $Arc\sin x$, $Arc\cos x$, $Arctgx$, $Arcctgx$, $Arc\sec x$, $Arc\cos ecx$ кўринишда белгиланади ва юқоридаги тригонометрик функцияларга нисбаттан тескари тригонометрик функциялар дейилади.

Агар $Arc\sin x=\alpha$ бўлса, $\sin\alpha=x$ бўлганидан

$\sin(Arc\sin x)=x$

$\cos(Arc\cos x)=x$

$tg(Arctgx)=x$

$ctg(Arcctgx)=x$

Тригонометрик функцияларнинг ўзгариш соҳаси тескари тригонометрик функцияларнинг аниқланиш соҳасига мос келганидан

Функция:	**Аниқланиш соҳаси:**
$Arc\sin x$	$-1 \le x \le 1$
$Arc\cos x$	$-1 \le x \le 1$
$Arctgx$	$-\infty < x < \infty$
$Arcctgx$	$-\infty < x < \infty$

Тригонометрик функцияларнинг даврийлиги сабабли тескари тригонометрик функциялар чексиз кўп қийматлидир.

М: $Arc\sin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}; ...$ Шу сабабли тескари тригонометрик функцияларнинг бош қиймати (қисми) ажратилади, бош қиймати ҳам аввалгиси билан бир хил аниқланиш соҳасига эга бўлади, лекин бир қийматли бўлади ва $\arcsin x$ кўринишида белгиланади.

Функция:	**Аниқланиш соҳаси:**	**Ўзгариш соҳаси:**
$y = \arcsin x$	$-1 \le x \le 1$	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$
$y = \arccos x$	$-1 \le x \le 1$	$0 \le y \le \pi$
$y = arctgx$	$-\infty < x < \infty$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
$y = arcctgx$	$-\infty < x < \infty$	$0 < y < \pi$

Тескари тригонометрик функциялар учун бош қиймат тушунчасидан фойдаланиб, улар орасидаги боғланишни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$Arc\sin x = (-1)^n \arcsin x + n\pi,$$
$$Arc\cos x = \pm\arccos x + 2n\pi,$$
$$Arctgx = arctgx + n\pi,$$
$$Arcctgx = arcctgx + n\pi,$$

Тескари тригонометрик функциялар орасида асосий муносабатлар:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad arctgx + arcctgx = \frac{\pi}{2},$$
$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x = arctg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = arcctg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$arctgx = \frac{\pi}{2} - arcctgx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}; \quad arcctgx = \frac{\pi}{2} - arctgx = \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\sin(\arcsin x) = x; \quad tg(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$$

$tg(\arccos x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$; $\sin(arcctgx)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; $tg(arcctgx)=\dfrac{1}{x}$;

$\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$; $ctg(\arcsin x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$; $\cos(\arccos x)=x$;

$ctg(\arccos x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $\cos(arctgx)=\dfrac{1}{1+x^2}$; $ctg(arctgx)=\dfrac{1}{x}$;

$\cos(arcctgx)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; $ctg(arcctgx)=x$;

$\arcsin(-x)=-\arcsin x$; $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$;

$arctg(-x)=-arctgx$; $arcctg(-x)=\pi-arcctgx$;

$\arcsin x\pm\arccos y=\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}\pm y\sqrt{1-x^2}\right)$; $x^2+y^2\le 1$;

$arctgx+arctgy=arctg\,\dfrac{x+y}{1-xy}$; $xy<1$; $arctgx-arctgy=arctg\,\dfrac{x-y}{1+xy}$; $xy>-1$;

$arcctgx\pm arcctgy=arcctg\,\dfrac{xy\mp y}{\pm x+y}$; $x\neq\mp y$.

26-§. Тригонометрик тенгламалар

Қуйидаги тригонометрик тенгламаларга энг содда тригонометрик тенгламалар дейилади.

Тенгламалар	шартлар	ечимлар
$\sin x=a$	$\lvert a\rvert\le 1$	$x=(-1)^n\arcsin a+n\pi$
$\cos x=a$	$\lvert a\rvert\le 1$	$x=\pm\arccos a+2n\pi$
$tgx=a$	Йўқ	$x=arctga+n\pi$
$ctgx=a$	Йўқ	$x=arcctga+n\pi$

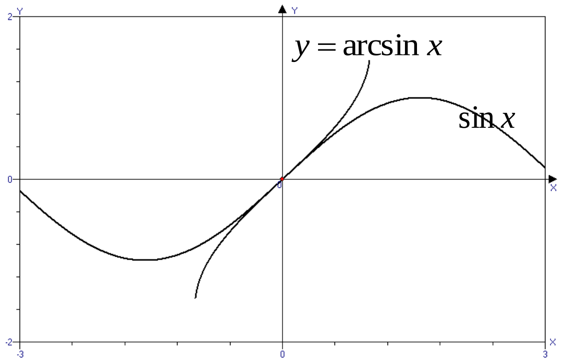
Хусусий ҳоллар:

$\sin x=0$; $x=n\pi$; $\sin x=1$; $x=\dfrac{4n+1}{2}\pi$; $\sin x=-1$; $x=\dfrac{4n-1}{2}\pi$

$\cos x=0$; $x=\dfrac{2n+1}{2}\pi$; $\cos x=1$; $x=2n\pi$; $\cos x=-1$; $x=(2n+1)\pi$

$tgx=0$; $x=n\pi$; $tgx=1$; $x=\dfrac{\pi}{4}+n\pi$; $ctgx=0$; $x=\dfrac{2n+1}{2}\pi$; $ctgx=1$; $x=\dfrac{\pi}{4}+n\pi$

27-§. Тригонометрик ва тескари тригонометрик функцияларнинг графиклари



II-боб. Чизиқли алгебра элементлари.

28-§. Матрицалар

m та қатор ва n та устундан иборат тўғри бурчакли сонлар жадвалига $m\times n$ ўлчовли (размерли) матрица дейилади ва $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ ёки $A=(a_{ij})$ $i=1,2,\dots,m$ $j=1,2,\dots,n$ кўринишда белгиланади, a_{ij} A матрицани элементлари дейилади. Агар m=n бўлса $n\times n$ ўлчовли квадрат матрица дейилади. A квадрат матрица бўлса $a_{11},\ a_{22},\ \dots,\ a_{nn}$ элементлар бош диагонал элементлари, $a_{1n},\ a_{2.n-1},\ \dots,\ a_{n1}$ иккинчи диагонал элементлари дейилади.

Икки $A=(a_{ij})$ ва $B=(b_{ij})$ матрицалар тенг дейилади агар уларни сатрлар ва устунлар сони тенг бўлиб барча i ва j лар учун $a_{ij}=b_{ij}$ тенглик бажарилса.

Иккита бир хил ўлчовли матрицани қўшиш (айириш) мумкин, бунда мос элементлар қўшилади (айирилади), яъни A+B=C бўлиб $C=(c_{ij})$, $c_{ij}=ai_j+b_{ij}$ бўлади.

Матрицани сонга кўпайтириш учун эса, унинг ҳар бир элементини $\lambda\neq$ o сонга кўпайтириб чиқиш керак.

M: $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ бўлса,

$$A+B=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix},\quad 3A=\begin{pmatrix} 6 & 9 & 0 \\ -12 & -3 & 15 \end{pmatrix}$$

Матрицаларни қўшиш (айириш) ва сонга кўпайтириш амалларига, матрицалар устида чизиқли амаллар дейилади.

29-§. Матрицаларни кўпайтириш

Агар $m\times n$ ўлчовли A матрица ва $n\times l$ ўлчовли B матрица берилган бўлса, уларни кўпайтириш мумкин, бунда $A\cdot B$ матрица $m\times l$ ўлчовга эга бўлади ва C=AB матрицани элементлари

$$Cij=(a_{i1},a_{i2},\dots,a_{in})(b_{1j},b_{2j},\dots,b_{nj})=a_{i1},b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj}$$

формула билан топилади.

M: $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ бўлса $A\cdot B$ топилсин.

A 4×3 ўлчовли, B 3×2 ўлчовли бўлганидан уларни кўпайтириш мумкин ва СқАВ 4×2 ўлчовли бўлади.

Ҳақиқатан $A\cdot B=\begin{pmatrix} 0\cdot 3+(-1)\cdot 2+2\cdot 1 & 0\cdot 1+(-1)\cdot 1+2\cdot 0 \\ 2\cdot 3+\ \ 1\cdot 2\ \ +1\cdot 1 & 2\cdot 1+\ \ 1\cdot 1\ \ +1\cdot 0 \\ 3\cdot 3+\ \ 0\cdot 2\ \ +1\cdot 1 & 3\cdot 1+\ \ 0\cdot 1\ \ +1\cdot 0 \\ 3\cdot 3+\ \ 7\cdot 2\ \ +1\cdot 1 & 3\cdot 1+\ \ 7\cdot 1\ \ +1\cdot 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & 3 \\ 10 & 3 \\ 24 & 10 \end{pmatrix}$

Шу мисолда $B\cdot A$ ни топиш мумкин эмас; чунки 3×2 4×3 матрицаларни кўпайтиришда қуйидаги қоидага риоя қилиш керак.

1. А матрицани В матрицага кўпайтириш мумкин бўлиши учун А матрицанинг устунлар сони В матрицанинг сатрлар сонига тенг бўлиши керак.
2. Икки матрицанинг кўпайтирганда, кўпайтма матрицада сатрлар сони биринчи матрицанинг сатрлар сонига, устунлар сони эса иккинчи матрицани устунлар сонига тенг бўлади.

Умуман айтганда $A\cdot B\neq B\cdot A$ ва $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$, $(A+B)C=AC+BC$ хоссалар ўринли.

Сонлар учун ўринли бўлган икки нолдан фарқли соннинг кўпайтмаси нолдан фарқли деган хосса матрицалар учун ўринли эмас.

М: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{AB}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

30-§. Матрицанинг детерминанти

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 2×2 ўлчовли квадрат матрица берилган бўлсин. А матрицанинг иккинчи тартибли детерминанти (аниқловчи) деб $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ сонга айтилади ва символик равишда $\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ қ $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ кўринишда белгиланади.

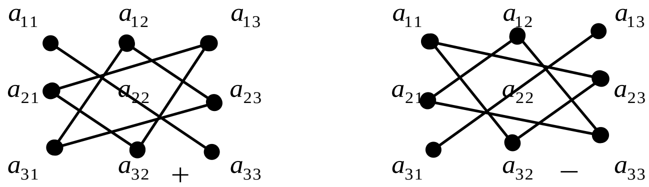
$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 3×3 ўлчовли квадрат матрица берилган бўлсин.

В матрицанинг детерминанти деб қуйидаги сонга айтилади.

$\det A=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{31}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$ ва символик равишда қуйидагича белгиланади.

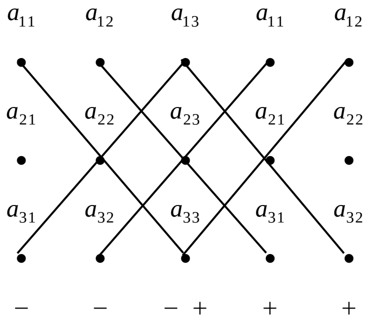
$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Учинчи тартибли детерминантни ҳисоблашда қуйидаги учбурчак қоидаси деб аталувчи усулдан ёки Саррус усулидан фойдаланиш мумкин. Детерминантни ҳисоблашнинг учбурчак усули қуйидагича:

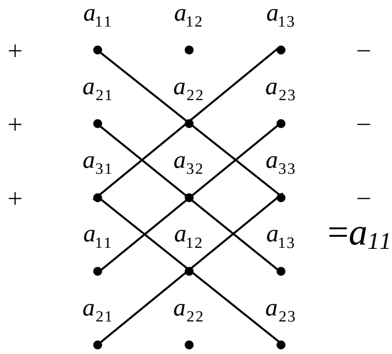


Детерминантни учбурчак усули билан ҳисоблашда учта мусбат ишорали ҳад бош диагонал элементлари ва бир томони бош диагоналга параллел бўлган учбурчак учидаги элементларни кўпайтириш орқали ҳосил бўлади, учта манфий ишорали ҳад эса иккинчи диагонал элементлари ва бир томони иккинчи диагоналга параллел бўлган учбурчак учидаги элементларни кўпайтиришдан ҳосил бўлади.

Саррус усулини қоидаси ва ҳисоблаш схемаси қуйидагича:



$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}$



$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{33}a_{12}a_{21}$

Детерминантни ҳисоблашда ва унинг амалий масалаларни ечишда қўллашда қулайлик туғдирадиган баъзи хоссаларини қулайлик учун иккинчи тартибли детерминантлар мисолида келтирамиз, аслида бу хоссалар ихтиёрий тартибли детерминантлар учун ўринли:

1. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$; М: $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -28-15=-43$

2. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -(-35-12)=47$

3. $\begin{vmatrix} k_1a_{11} & a_{12} \\ k_1a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & k_1a_{12} \\ a_{21} & k_1a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_1a_{11} & k_1a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 3(-5-12)=-51$

4. Детерминант нолга тенг бўлади, агар бир сатр ёки устун элементлари 0; икки сатр ёки устун элементлари тенг ёки пропорционал бўлса.

5. (Асосий) Детерминантнинг бирор сатр ёки устун элементларини ихтиёрий $\lambda \neq$ о сонга кўпайтириб бошқа сатр ёки устун элементларига қўшиишдан унингнг қиймати ўзгармайди.

Агар детерминантни асосий диагоналини пастидаги ёки устидаги барча элементлар нол бўлса, бундай детерминант учбурчак детерминант дейилади.

6. Учбурчак детерминантнинг қиймати бош диагонал элементларининг кўпайтмасига тенг:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}; \qquad \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 0 \\ -8 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 4\cdot 3\cdot 2 = 24$$

31-§. **Детерминант элементларини минорлари ва алгебраик тўлдирувчилари**

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |a_{ij}|, \quad i, j = \overline{1, n}\ ,$$ бўлсин.

D детерминантнинг a_{ij} элементи минори деб, a_{ij} элемент сақлаган сатр ва устунларни ўчиришдан ҳосил бўлган детерминантга айтилади ва M_{ij} кўринишида белгиланади.

М: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$; $M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$; $M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

М: $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ детерминантнинг барча минорларини топинг.

Ечиш:

$M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 12$; $M_{12} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6$; $M_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9$; $M_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -12$; $M_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9$;

$M_{23} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 12$; $M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -12$; $M_{32} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 15 = -23$; $M_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 4$

D детерминантнинг a_{ij} элементининг алгебраик тўлдирувчиси деб $(-1)^{i+j}M_{ij}$

ифодага айтилади ва Aij кўринишда белгиланади.
М: $A_{11}=M_{11}$, $A_{12}=-M_{12}$, $A_{13}=M_{13}$, $A_{32}=M_{32}$ ва ҳ.к. Яъни $i+j$ – жуфт бўлса $A_{ij}=M_{ij}$; $i+j$ –тоқ бўлса $A_{ij}=-M_{ij}$.
Теорема. D детерминант ихтиёрий сатр (устун) элементларининг мос алгебраик тўлдирувчилари кўпайтмасининг йиғиндисига тенг, яъни
$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}$ ёки
$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj}$
2 ва 3-тартибли детерминантларни тўғридан тўғри ҳисоблаш мумкин эди (30-§). Детерминантнинг тартиби учдан кўп бўлганда, унинг ҳисоблашнинг бундай ҳисоблаш қоидалари мавжуд эмас. Шу сабабли тартиби учдан кўп бўлган детерминантлар бирор сатр ёки устун элементлари бўйича ёйиб ҳисобланади.
М: $D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ ҳисоблансин.

Ечиш: Бу детерминантнинг биринчи сатрида иккита нол бўлганидан унинг биринчи сатр элементлари бўйича ёйиб ҳисоблаш қулай.

$D\text{ҳ}3\cdot A_{11}+0\cdot A_{12}+2\cdot A_{13}+0\cdot A_{14}=3A_{11}+2A_{13}=2M_{11}+2M_{13}$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2) + (-1)\cdot 3\cdot 2 - 4\cdot(-2)\cdot 2\cdot 1 - 4(-1)\cdot 1 = -6 - 6 + 16 + 4 = 8$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 4\cdot 1 + 3\cdot 3\cdot 5 - 4\cdot 4\cdot 5 - 2\cdot 2\cdot 3 = 8 + 45 - 80 - 12 = -39$$

$D=3\cdot 8+2\cdot(-39)=24-78=-54$

32-§. **Тескари матрица ва унинг топиш**

A ва B бир хил ўлчовли квадрат матрицалар бўлсин. Агар $A\cdot B = E$ булса, B матрица A га нисбатан тескари матрица куйилади ва $B=A^{-1}$ кўринишда белгиланади, бу ерда E – матрицага бирлик матрица дейилади.

A матрица хосмас (айниган) матрица дейилади, агар $\det A = 0$ бўлса хос (айнимаган) матрица дейилади, агар $\det A \neq 0$ бўлса.

Албатта ҳар қандай ихтиёрий A матрица учун A^{-1} тескари матрица мавжуд бўладими деган савол туғулади?

Теорема. A матрицага тескари матрица мавжуд бўлиши учун у хос (айнимаган) матрица ($\det A \neq 0$) бўлиши зарур ва етарлидир.

Агар

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ бўлса } \det A \neq 0 \text{ бўлса } A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{1n} \\ . & . & . & . \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Хусусий ҳолда n=2 ва n=3 бўлса

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad \Delta=\det A$$

Амалда берилган А матрицага тескари A^{-1} матрицани топишни қуйидаги схема бўйича бажариш қулай:

1. А матрица детерминанти $\Delta=\det A$ ҳисобланади;
2. a_{ij} элементларнинг барча алгебраик тўлдирувчилари топилиб янги матрица тузилади.
3. Тузилган янги матрица транспонирланади;
4. Ҳосил бўлган матрица $\frac{1}{\Delta}$ га кўпацтирилади.

33-§. Чизиқли тенгламалар системасини тескари матрица ёрдамида ечиш

Уч номаълумли учта бир жинслимас тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Шу системанинг номаълумлари олдидаги коэффициентлардан тузилган А матрицани қараймиз:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Системани озод ҳадлари ва номаълумларидан

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$ матрицалар тузамиз.

Матрицани матрицага кўпайтириш қоидасига асосан берилган системани $A \cdot X = B$ матрицали тенглама кўринишида ёзиш мумкин, бундан эса

$$X = A^{-1}B$$

М: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 \\ 3x_1 + 4x_2 = 17 \end{cases}$ системани ёки $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \end{pmatrix}$ матрицали тенгламанинг ечинг:

Е: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$, демак $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ хосмас матрица ва унга тескари матрица мавжуд; A^{-1} ни 32-§ даги схема бўйича топамиз:

$$\begin{matrix} A_{11} = 4 & A_{12} = -3 \\ A_{21} = -2 & A_{22} = 1 \end{matrix}; \quad A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 17 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$x_1 = 3$; $x_2 = 2$ ёки берилган тенглаиалар системасини ечиш (3 ; 2).

34-§. Чизиқли тенгламалар системасини Крамер формуласи ёрдамида ечиш

n номаълумли n та чизиқли бир жинслимас тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \ldots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \ldots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + \ldots + & a_{nn}x_n & = & b_3 \end{cases}; \quad (1)$$

Теорема: Агар (1) тенгламалар системасини детерминанти $\Delta \neq 0$ бўлса, бу система ягона ечимга эга бўлади ва бу ечимлар $X_k = \dfrac{\Delta X_k}{\Delta}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ формула билан топилади, бу ерда

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad \Delta_k=\begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1k-1}\, b_1\, a_{1k+1} \dots a_n \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2k-1}\, b_2\, a_{2k+1} \dots a_n \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ a_{n1}\, a_{n2} \dots a_{nk-1}\, b_n\, a_{nk+1} \dots a_n \end{vmatrix}$$

$X_k=\dfrac{\Delta X_k}{\Delta}$ $\quad (k=1,2,\dots,n)$ (2) формулага Крамер формулалари дейилади.

Хусусий ҳолда n=2 бўлса $\left.\begin{matrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{matrix}\right\}$, $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$,

$$\Delta x_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta x_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

N=3 бўлса

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}, \quad \Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0,$$

$$\Delta x_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta x_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta x_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

$$X_1=\frac{\Delta x_1}{\Delta}; \quad X_2=\frac{\Delta x_2}{\Delta}; \quad X_3=\frac{\Delta x_3}{\Delta}.$$

М:

33-§. даги $\begin{cases} x_1+2x_2=7 \\ 3x_1+4x_2=17 \end{cases}$ тенгламалар системасини Крамер формуласи ёрдамида ечайлик:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=4-6=-2\neq 0, \quad \Delta x_1=\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 17 & 4 \end{vmatrix}=28-34=-6, \quad \Delta x_2=\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 17 \end{vmatrix}=17-21=-4,$$

$x_1=\dfrac{-6}{-2}=3; \quad x_2=\dfrac{-4}{-2}=2$, яъни (3 ; 2).

III боб. Векторлар алгебраси

35-§. Асосий тушунчалар

Кесманинг бош ва охирги нуқтаси аниқланган бўлса, йўналган кесма дейилади. Йўналган кесмага вектор дейилади.

А ва В туташтириб вектор ясалса, у $\overline{AB}$ ёки $\overline{AB} = \overline{a}$ кўринишида белгиланади, бунда А нуқта векторнингнг боши, В нуқта векторнингнг охирги нуқтасини билдиради.

Векторнингнг узунлигига унингнг модули дейилади ва $|\overline{AB}| = |\overline{a}|$ кўринишида белгиланади. Модули бирга тенг векторга бирлик вектор дейилади, яъни $|\overline{a}| = 1$ ва $\overline{a^0}$ кўринишида белгиланади.

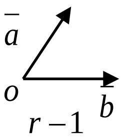
Векторлар бир-бирига параллел ёки бир тўғри чизиқ устида ётса, бундай векторлар коллинеар векторлар дейилади.

Икки вектор тенг $\overline{a} = \overline{b}$ дейилади, агар: 1) модуллари $|\overline{a}| = |\overline{b}|$ тенг; 2) коллинеар; 3) йўналишлари бир хил бўлса.

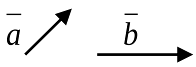
Векторнингнг бош нуқтасини бир нуқтадан иккинчи нуқтага кўчириш мумкин бўлса, бундай векторларга озод векторлар дейилади, биз асосан озод векторларни ўрганамиз.

36-§. Векторлар устида чизиқли амаллар

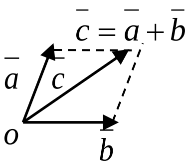
Векторларни қўшиш, айириш ва $\lambda \neq 0$ ўзгармас сонга кўпайтириш амалига, векторлар устида чизиқли амаллар дейилади.



$r-1$



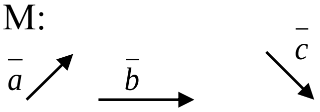
ихтиёрий векторлар берилган бўлса, уларнинг бошини ҳамма вақт бирор О нуқтага келтириб (r-1) шаклда тасвирлаш мумкин. Шунингнгдек хар қандай $\overline{a}$ векторнинг бошини координата бошига келтириб, унинг координата бошидан чикувчи вектор деб қараш мумкин.



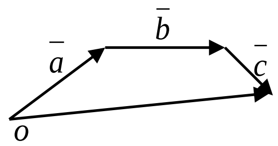
Икки $\overline{a}, \overline{b}$ векторлар йигиндиси деб $\overline{a}$ ва $\overline{b}$ қўшилувчи векторларга ясалган параллелограммнинг умумий О учидан чиқувчи $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$ векторга айтилади.

Бир неча векторнинг қўшиш учун қўшилувчи биринчи векторнингнг охирги учига қўшилувчи иккинчи векторнингнг бошланғич учини келтирамиз, ясалган қўшилувчи иккинчи векторнингнг охирги учига, учинчи векторнингнг бошлангич учини келтирамиз ва х.к., ҳосил бўлган синиқ чизиқнингнг бошлангич нуқтаси билан охирги нуқтасини туташтирувчи вектор (ёпувчи вектор) берилган хамма векторларнинг йигиндиси бўлади.

M:



бўлса,

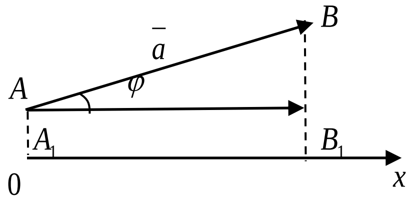


$\overline{d} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$

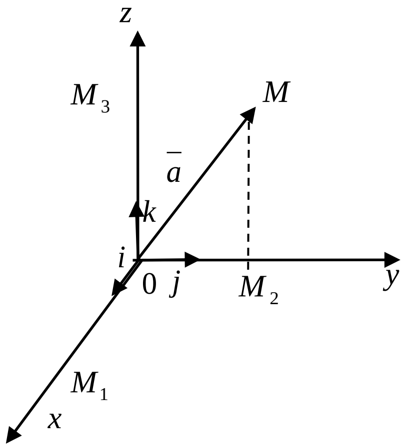
Иккита $\overline{a}$ ва $\overline{b}$ векторнингнг айирмаси деб, шундай учинчи $\overline{c}_1 = \overline{a} - \overline{b}$ векторга айтиладики, унингнг айрилувчи $\overline{b}$ вектор билан йигиндиси $\overline{a}$ векторга тенг бўлади, бошкача айтганда $\overline{a}$ вектордан $\overline{b}$ векторнингнг айирмаси уларга курилган параллелограмнинг О учидан чиқмаган иккинчи диогоналидан иборат векторга тенг бўлиб, стрелка $\overline{a}$ томонга йўналади.

$\overline{a}$ векторнингнг $\lambda \neq 0$ сонга кўпайтмаси деб шундай $\overline{b} = \overline{a}$ векторга айтиладики, $\overline{b}$ қуйидаги шартларни қаноатлантиради: 1) $|\overline{b}| = |\lambda| \, \overline{a}$ 2) $\overline{a}$ ва $\overline{b}$ коллинеар бўлади;
3) агар $\lambda > 0$ бўлса $\overline{b}$ вектор йўналиши $\overline{a}$ вектор йўналиши билан бир хил бўлади, агар $\lambda < 0$ бўлса йўналиши ҳар хил бўлади.

37-§. Векторнингнг компоненти ва проекцияси



$\overline{AB} = \overline{a}$ векторнингнг ўқдаги проекцияси деб, унингнг боши А ва охири В бўлган нуқталарнинг шу ўққа туширилган A_1, B_1 проекцияларини туташтирувчи $\overline{A_1B_1}$ векторнингнг A_1B_1 миқдорига, яъни йўналган $\overline{A_1B_1}$ кесманинг + ёки - ишора билан олинган узунлигига айтилади. $\overline{A_1B_1}$ билан OX ўқ йўналиши бир хил бўлса (+) ишора, акс ҳолда (-) ишора олинади.



$$\overline{np_{ox}AB} = \overline{A_1B_1} = |\overline{AB}| \cos\varphi$$

Тўғри бурчакли Декарт координаталар системасида $\overline{a} = \overline{OM}$ вектор берилган булсин ва $\overline{OM}_1, \overline{OM}_2, \overline{OM}_3$ $\overline{a}$ векторнингнг координата ўқларидаги прокциялари бўлсин, бу вақтда векторларни қўшиш қоидасига асосан $\overline{a} = \overline{OM}_1 + \overline{OM}_2 + \overline{OM}_3$

Координата ўқларидан мос равишда $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ бирлик векторлар танлаб оламиз, бу вақтда

$$\overline{a} = \overline{OM} = \overline{i}\,|\overline{OM}_1| + \overline{j}\,|\overline{OM}_2| + \overline{k}\,|\overline{OM}_3|$$
$$\overline{a} = \overline{OM} = \overline{i}X + \overline{j}Y + \overline{k}Z$$

бўлади.

X, Y, Z сонлар $\bar{a}$ векторнингнг компоненти (координата)лари дейилади. Равшанки, иккинчи томондан X, Y, Z $\bar{a}$ вектор охирининг координаталаридир. Шу сабабли $\bar{a} = \bar{i}X + \bar{j}Y + \bar{k}Z$ векторнинг ясаш учун, М(X, Y, Z) нуқтани топиб, унинг О нуқта билан бирлаштириб $\bar{a} = \overline{OM}$ вектор ясалади.

Изох: $\bar{a}$ вектор йўналган кесма бўлса, $X = np_{ox}\bar{a}, \quad Y = np_{oy}\bar{a}, \quad Z = np_{oz}\bar{a}$ бўлганидан, X, Y, Z лар $\bar{a}$ векторнингнг координата ўқларидаги проекциялари дейилади, механикада $\bar{a}$ вектор кучни билдирса, $\bar{i}X, \bar{j}Y, \bar{k}z$ лар унинг ташкил этувчилари бўлади. Шу сабабли X, Y, Z умумий ҳолда $\bar{a}$ векторнингнг компонентлари дейилади, баъзан $\bar{a} = \bar{i}X + \bar{j}Y + \bar{k}Z$ ёзув ўрнига $\bar{a}\{X, Y, Z\}$ ёзув ҳам кўп ишлатилади.

Агар векторлар компонентлари билан берилган бўлса, яъни $\bar{a} = \bar{i}x_1 + \bar{j}y_1 + \bar{k}z_1$, $\bar{b} = \bar{i}x_2 + \bar{j}y_2 + \bar{k}z_2$, бу вактда улар устида чизикли амаллар.

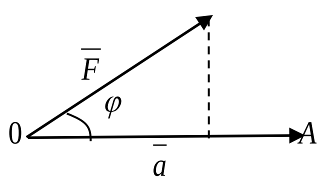
Масала: $A(x_1; y_1; z_1)$ ва $B(x_2; y_2; z_2)$ нуқталар берилган бўлса, бу икки нукта орасидаги кесмани λ нисбатда бўлувчи $C(x; y; z)$ нуқтанинг координаталарини топиш талаб қилинса $\left(\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \lambda\right)$ бу вақтда x, y, z, лар қуйидаги $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$, $z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$ формулалар орқали топилади.

38-§. Векторларни кўпайтириш

Векторларни кўпайтириш амали сонни сонга кўпайтириш амалидан кескин фарқ қилади. Биз икки векторнинг сколяр ва векторли кўпайтириш ва уч векторнинг аралаш кўпайтириш амаллари билан танишамиз ва уларни геометрия масалаларига тадбиқини келтириб ўтамиз.

1. Икки векторнингнг скаляр кўпайтмаси.

Икки $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси деб бу векторларнинг модуллари кўпайтмаси билан улар орасидаги бурчак косинуси кўпайтмасига айтилади ва $\bar{a}\cdot\bar{b}$ ёки $(\bar{a}, \bar{b})$ шаклда ёзилади яъни



$\bar{a}\cdot\bar{b} = (\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi$

Векторнингнг ўққа туширилган проекцияси тарифига асосан

$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi = |\bar{a}|\, np_{\bar{a}}\bar{b} = np_{\bar{b}}\bar{a}$

$(\bar{a}, \bar{F}) = (\overline{OA}, \bar{F})$ скаляр кўпайтма механика нуқтаи назаридан $\bar{F}$ куч тасири остида бирор М материал нуқтани $\overline{MA}$ векторга қадар силжитганда $\bar{F}$ кучнинг бажарган ишини билдиради.

Икки векторнингнг скаляр кўпайтмаси қуйидаги хоссаларга эга:
1. $(\bar{a},\bar{b}) = (\bar{b},\bar{a})$ ўрин алмаштириш коидаси
2. $(\bar{a},\bar{b})\lambda = (\bar{a}\lambda\bar{b}) = (\lambda\bar{a}\bar{b}) = \lambda(\bar{a},\bar{b})$, λ га нисбатан группалаш қонунинг
3. $(\bar{a}+\bar{b},\bar{c}) = (\bar{a},\bar{c}) + (\bar{b},\bar{c})$ тақсимот қонунинг
4. $(\bar{a},\bar{b}) = 0$ бўлади, агар векторлардан биттаси нол ёки улар перпендикуляр бўлса

Агар $\bar{a} = \bar{i}x_1 + \bar{j}y_1 + \bar{k}z_1$, $\bar{b} = \bar{i}x_2 + \bar{j}y_2 + \bar{k}z_2$ компонентлари билан берилган бўлса, уларни скаляр кўпайтмаси бир исмли компоненталар кўпайтмасининг йиғиндисига тенг, яъни

$$(\bar{a},\bar{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Агар $\bar{a} = \bar{b}$ бўлса, яъни $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$ бўлса,

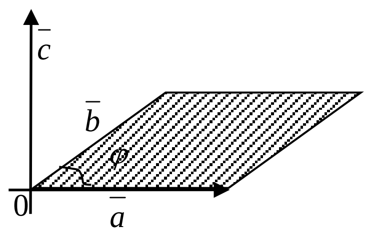
$$(\bar{a},\bar{a}) = |\bar{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \quad \text{бўлиб,} \quad |\bar{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \quad \text{бўлади}$$

$$(\bar{a},\bar{b}) = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi \quad \text{тенгликдан}$$

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Агар $\bar{a} \perp \bar{b}$ бўлса, $\cos\frac{\pi}{2} = \cos 90^0 = 0$ бўлиб, $(\bar{a},\bar{b}) = 0$ бўлади, яъни $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$ икки векторнингнг перпендикулярлик шартидир.

2. Икки векторнингнг векторли кўпайтмаси.



Икки $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторларнинг векторли кўпайтмаси деб шундай $\bar{c}$ векторга айтиладики, бу вектор қуйидагича аниқланади: 1) $\bar{a}+\bar{b}$, 2) $|\bar{c}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi$, 3) йўналиши эса $\bar{c}$ векторнингнг охиридан қараганда (стрелка қўйилган жойи) $\bar{c}$ вектор атрофида $\bar{a}$ вектордан $\bar{b}$ векторгача бўлган энг кичик бурчак соат стрелкасига тескари бўлиши керак. $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторнингнг векторли кўпайтмаси $\bar{a}\times\bar{b}$ ёки $[\bar{a},\bar{b}]$ кўринишида белгиланади.

Вектор кўпайтма қуйидаги хоссаларга эга:
1) $[\bar{a},\bar{b}] = -[\bar{b},\bar{a}]$;
2) $[\lambda\bar{a},\bar{b}] = [\bar{a},\lambda\bar{b}] = \lambda[\bar{a},\bar{b}]$
3) $[\bar{a}+\bar{b},\bar{c}] = [\bar{a},\bar{c}] + [\bar{b},\bar{c}]$
4) Икки векторнинг векторли кўпайтмаси нолга тенг бўлади, агар $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторлардан бири нолга тенг бўлса ёки улар колленеар бўлса.

$\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторларнинг векторли кўпайтмасининг механик маъноси $\bar{a}$ куч таъсир этган нуқтанинг радиус вектори билан $\bar{F}$ кучнинг вектор кўпайтмаси кучнинг нуқтага нисбатан моментига тенг.

Агар $\bar{a} = \bar{i}x_1 + \bar{j}y_1 + \bar{k}z_1$, $\bar{b} = \bar{i}x_2 + \bar{j}y_2 + \bar{k}z_2$ векторлар компонентлари билан берилган бўлса, уларнинг векторли кўпайтмаси учинчи тартибда детерминантга тенг бўлиб, унингнг 1-сатрида $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ бирлик ортлар, 2-сатрида $\bar{a}$ векторнингнг компонентлари, 3-сатрида $\bar{b}$ векторнингнг компонентлари туради, яъни

$$\left[\bar{a}, \bar{b}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

Агар $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ коллинеар бўлса $\left[\bar{a}, \bar{b}\right] = 0$, $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0$ ёки $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$ бўлиб, бу икки векторнингнг коллинеарлик шартидир.

Векторли кўпайтма таърифининг 2) бандига асосан $\bar{a}, \bar{b}$ векторларга қурилган параллелограм ва учбурчакнинг юзалари S□ $= \left|\left[\bar{a}, \bar{b}\right]\right|$, $S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\left[\bar{a}, \bar{b}\right]\right|$ формулалар билан топилади.

3. Уч векторнингнг аралаш кўпайтмаси.

Учта $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ векторлар берилган бўлсин. $\left[\bar{a}, \bar{b}\right]$ вектор билан $\bar{c}$ векторнинг скаляр кўпайтириш ёки векторли кўпайтириш мумкин, биринчи ҳолда кўпайтма аралаш кўпайтма, иккинчи ҳолда қўш вектор кўпайтма дейилади ва $\left(\left[\bar{a}, \bar{b}\right]\bar{c}\right)$, $\left(\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}\right)$ кўринишда, қўш вектор кўпайтма эса $\left[\bar{a}\left[\bar{b}, \bar{c}\right]\right]$ кўринишда белгиланади.

Икки векторнингнг аралаш кўпайтмаси қуйидаги хоссаларига эга:

1. $\left(\left[\bar{a}, \bar{b}\right]\bar{c}\right) = -\left(\left[\bar{b}, \bar{a}\right]\bar{c}\right)$, $\left(\left[\bar{a}, \bar{b}\right]\bar{c}\right) = -\left(\left[\bar{a}, \bar{c}\right]\bar{b}\right)$, $\left(\left[\bar{a}, \bar{b}\right]\bar{c}\right) = -\left(\left[\bar{c}, \bar{b}\right]\bar{a}\right)$, яъни аралаш кўпайтмада икки қўшни вектор ўрни аралаштирилса, аралаш кўпайтманинг ишораси тескарига алмашади.
2. $\left(\left[\bar{a}, \bar{b}\right]\bar{c}\right) = \left(\left[\bar{b}, \bar{c}\right]\bar{a}\right) = \left(\left[\bar{c}, \bar{a}\right]\bar{b}\right)$ яъни уч вектор ўрни доиравий шаклда (циклда) алмаштирилса, аралаш кўпайтма ишораси ўзгармайди.
3. Агар $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ векторлардан исталган иккитаси бир-бирига тенг ёки паралел (коллинеар) бўлса, уларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг.
4. Агар $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ коллинеар векторлар бўлса, уларнинг аралаш кўайтмаси нолга тенг.

Агар $\bar{a} = \bar{i}x_1 + \bar{j}y_1 + \bar{k}z_1$, $\bar{b} = \bar{i}x_2 + \bar{j}y_2 + \bar{k}z_2$, $\bar{c} = \bar{i}x_3 + \bar{j}y_3 + \bar{k}z_3$ яъни учала векторлар компоненталари билан берилган бўлса,

$$\left([\bar{a},\bar{b}]\bar{c}\right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

яъни компоненталари билан берилган уч векторнингнг аралаш кўпайтмаси учинчи тартибда детерминантга тенг бўлиб, унингнг мос равишда биринчи сатрида биринчи кўпайтувчи вектор $\bar{a}$ нинг компоненталари, иккинчи сатрида $\bar{b}$ нинг ва учинчи сатрида $\bar{c}$ векторнингнг компоненталари туради.

Агар $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ векторлар компланар бўлмаса, уларга қурилган паралепипеднинг ҳажмини шу уч вектор аралаш кўпайтмасининг абсолют қийматига тенг.

$$V_{\text{П.П.}} = \left|[\bar{a},\bar{b}]\bar{c}\right| = \pm\left([\bar{a},\bar{b}]\bar{c}\right) = \pm\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ векторларга қурилган пирамида ҳажми $V_{\text{П.}} = \frac{1}{6}V_{\text{П.П.}}$ бўлиб

$$V_{\text{П.}} = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$ формула билан ҳисобланади.

Агар $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ векторлар компланар бўлса, $\left([\bar{a},\bar{b}]\bar{c}\right) = 0$ ёки

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

уч векторнингнг компланарлик шартидир.

Агар A ($x_1y_1z_1$) B ($x_2y_2z_2$) C ($x_3y_3z_3$) ва D ($x_4y_4z_4$) нуқталарда бўлган пирамида ҳажмини топиш керак бўлса,

$$V_{\text{П.}} = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}$$

формула билан топилади.

Агар A, B, C, D нуқталар бир текисликда ётса,

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$ бўлади.

Бу тенглик тўрт нуқтанинг бир текисликда ётиш шартидир.

Энди уч векторнингнг қўш кўпайтмасини ўрганайлик. Исбот қилинганки, учта вектор учун қуйидаги тенглик ўринлидир, яъни $\left[\bar{a},\left[\bar{b},\bar{c}\right]\right]=\left[\left[\bar{a},\bar{c}\right]\bar{b}\right]-\left[\left[\bar{a},\bar{b}\right]\bar{c}\right]$

Уч вектор компоненталари билан берилган бўлса $\left[\bar{a},\left[\bar{b},\bar{c}\right]\right]$ иккита $\bar{a}=\bar{i}x_1+\bar{j}y_1+\bar{k}z_1$ ва $\left[\bar{b},\bar{c}\right]=\bar{i}\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}$ бўлганидан

$$\left[\bar{a},\left[\bar{b},\bar{c}\right]\right]=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$ формула билан ҳисобланади.

IV боб. Текисликда аналитик геометрия

39-§. Чизиқ

x ва y ўзгарувчи миқдорларни боғловчи $y=f(x)$ тенглама берилган бўлсин. Ушбу тенгламанинг ечими бир жуфт (x;y) ҳақиқий сон бўлиб, умуман айтганда бу тенглама чексиз кўп ечимга эга. Агар координаталари $y=f(x)$ тенгламанинг ечимидан иборат нуқталарни бирор Декарт координаталари системасида ясалса, бу вақтда текисликда нуқталар тўплами ҳосил бўлади ва бу нуқталар тўпламига $y=f(x)$ тенгламанингнг графиги дейилади.

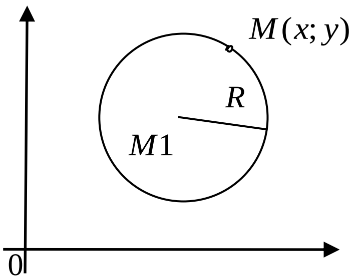
Таъриф $y=f(x)$ тенглама бирор L чизиқнингнг тенгламаси дейилади, агар шу L чизиқ устида турган ҳар бир нуқтанинг координатаси $y=f(x)$ тенгламанинг қаноатлантирса ва шу чизиқ устида ётмаган нуқталарнинг координаталари $y=f(x)$ тенгламанинг қаноатлантирмаса.

$M_1(x_1;y_1)$ нуқтани координаталари $y=f(x)$ тенгламанинг каноатлантиради деймиз, агар $y_1=f(x_1)$ бўлса, $M_2(x_2;y_2)$ нуқтани координаталари шу тенгламанинг қаноатлантирмаса, яъни $y_2 \neq f(x_2)$ булади

М: y=2x^2-5 тенгламанинг M$_1$ (2;3) қаноатлантиради, чунки $3=2\cdot 2^2-5$ ва M$_2$(4;7) қаноатлантирмайди, чунки $7\neq 2\cdot 4^2-5$

Аналитик геометрия фани қуйидаги иккита масалани ечади;

1. Чизиқнингнг таърифи ва хоссаларидан фойдаланиб, унингнг тенгламасини тузади;
2. $y=f(x)$ чизиқ тенгламаси билан берилган бўлса, унингнг графигини ясайди.



Бирор чизиқнинг тенгламасини тузиш учун қуйидаги қоидадан фойдаланиш мумкин: L чизиқ устида координаталари ўзгарувчи бўлган M(x;y) нуқта олинади ва чизиқнинг таърифи ёки бирор хоссаларидан фойдаланиб ўзгарувчи x ва y миқдорлар орасидаги боғланиш топилади. М: Маркази M$_O$(a;b) нуқтада ва радиуси R бўлган айлананинг тенгламаси тузилсин.

Ечиш. Айлана тарифига асосан $|M_1M|=R$ ёки

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R \text{ ёки } (x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad (1)$$

(1) тенгламага маркази M$_O$(a;b) нуқтада ва радиуси R га тенг бўлган айлананинг каноник тенгламаси дейилади.

Хусусий ҳолда a*в*0 бўлса $x^2 + y^2 = R^2$ (2) тенглама ҳосил бўлади. (2) тенгламага маркази координата бошида бўлган айлананинг каноник тенгламаси дейилади.

Агар L_1 ва L_2 чизиқлари берилган бўлиб (/$_1$(x,y)*0, /$_2$(x,y)*0), уларни кесишган нуқтарларини топиш талаб этилса, бу нуқталар ҳар икки L_1 ва L_2 чизиқларга тегишли бўлганлигидан, уларнинг тенгламаларини система қилиб ечиш керак.

40-§. Тўғри чизиқ ҳақида асосий тушунча

Тўғри чизиқ аналитик геометриянинг асосий тушунчаларидан бўлиб, у бевосита таърифланмайди, лекин билвосита тарифланиши мумкин; масалан текисликда тўғри чизиқ деб берилган икки нуқтадан баробар узоқликда турган нуқтанинг геометрик ўрнини тушунингш мумкин.

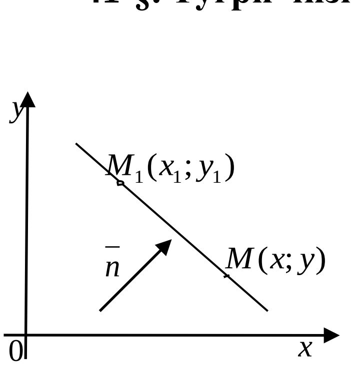
Биз текисликда Евклид геометриясида аналитик геометриянинг биринчи ва иккинчи масалаларини ечишни ўрганамиз. Евклид геометрияси деб, қуйидаги беш пастулат (аксиома)га асосан қурилган геометрияга айтилади:

1. Берилган икки нуқтадан битта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин.
2. Тўғри чизиқ кесмасини чексиз давом эттириш мумкин.
3. Ихтиёрий марказ деб аталувчи нуқтадан радиуси ҳар қандай бўлган айлана ўтказиш мумкин.
4. Ҳамма тўғри бурчаклар ўзаро тенг.
5. Агар бир текисликда ётган икки тўғри чизиқ билан учинчи тўғри чизиқ кесишганда ички бир томонли бурчаклар йиғиндиси 180^0 дан кичик бўлса, бу тўғри чизиқлар ички бир томонли бурчаклар йиғиндиси π дан кичик бўлган томонда кесишади.

Тўғри чизиқ координаталар системасидаги ҳолатини ҳар хил усуллар билан аниқлаш мумкин.

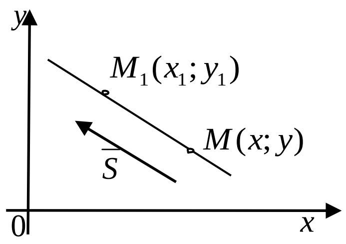
М: Тўғри чизиқ берилган бир нуқтадан ўтиб, берилган йўналиш бўйича йўналган; берилган нуқтадан ўтиб бирор векторга перпендикуляр, икки нуқтадан ўтади, координата ўқлари билан кесишиб, ажратган кесмаларига қараб ва ҳоказо.

41-§. Тўғри чизиқнинг ҳар хил кўринишидаги тенгламалари



1. Берилган $M_1(X_1;У_1)$ нуқтадан ўтиб $\bar{n} = A\bar{i} + B\bar{j}$ векторга перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ тенгламаси $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$ (1) кўринишда бўлади.

Берилган L тўғри чизиқга перпендикуляр бўлган ҳар қандай векторга унингнг нормал вектори дейилади.



М: $M_1(3;-4)$ нуқтадан ўтиб $\overline{n}=5\overline{i}+6\overline{j}$ векторга перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ тенгламаси $5(x-3)+6(y+4)=0$ ёки $5x+6y+9=0$ бўлади.

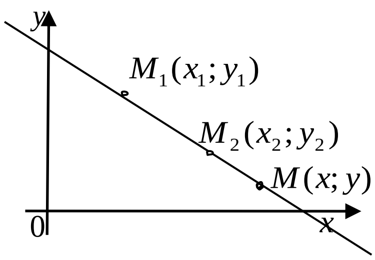
(1) тенгламада қавсларни очиб чиқсак $Ax+By+(-Ax_1-By_1)=0$ ёки $Ax+By+C=0$ (2), бу ерда $C=-Ax_1-By_1$

(2) тенглама тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси дейилади.

2. Тўғри чизиқнингнг каноник тенгламаси.

$M_1(x_1;y_1)$ нуқтадан ўтиб $\overline{S}=m\overline{i}+n\overline{j}$ векторга параллел бўлган тўғри чизиқ тенгламаси. $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}$ (3) кўринишда бўлади.

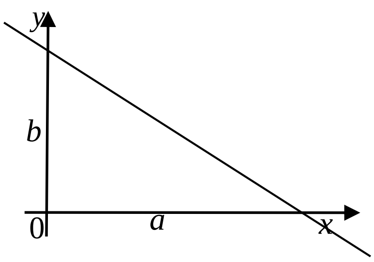
Тўғри чизиқ параллел бўлган ҳар қандай $\overline{S}$ векторга унингнг йўналтирувчи вектори дейилади. М: $M_1(5;-3)$ нуқтадан ўтиб йўналтирувчи



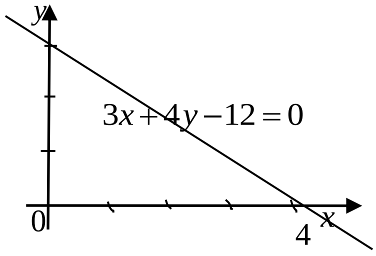
вектори $\overline{S}=4\overline{i}+7\overline{j}$ бўлган тўғри чизиқнингнг каноник тенгламаси $\frac{x-5}{4}=\frac{y+3}{7}$ кўринишда бўлади.

3. Берилган икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси.

Берилган $M_1(x_1;y_1)$ ва $M_2(x_2;y_2)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ (4) кўринишда бўлади, бу ерда $\overline{S}=(x_2-x_1)\overline{i}+(y_2-y_1)\overline{j}$ йўналтирувчи вектор бўлади.



Агар L тўғри чизиқ координата ўқлари билан кесишиб, улардан мос равишда а ва в кесмалар ажратса, унингнг тенгламаси $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ (5) кўринишда бўлади. Тўғри чизиқнинг ясашда (5) тенгламадан фойдаланиш қулай. Шу сабабли тўғри чизиқнинг бошқа тенгламаларини кесмалар шаклдаги тенгламага келтириб ясаш мумкин.



М: $A_x+B_y+C=0$, $A_x+B_y=-C$ (:-с)

$$\frac{x}{-\frac{c}{A}}+\frac{y}{-\frac{c}{B}}=1 \quad \text{ёки} \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Изоҳ: тўғри чизиқ тенгламаси билан берилган бўлса, унинг устида ётувчи иккита нуқта топиб (1 постулат), унинг чизғич ёрдамида туташтириб ясалади. М: $3x+4y-12=0$ тўғри чизиқнинг ясанг.

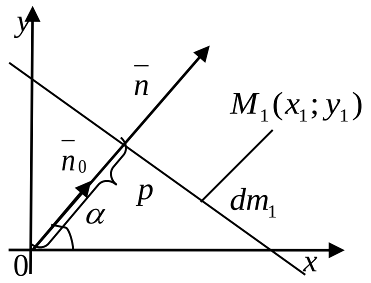
Ечиш: I. 3х+4у=12 (:12) $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$, яъни бу тўғри чизиқ ОХ ўқидан а=4 ва ОУ ўқидан в=3 бирлик ажратар экан.

II. 3х+4у-12=0 тўғри чизиқ координата ўқлари билан кесишган нуқталарининг координаталарини топамиз: х=0 бўлса , 4у-12=0 ёки у=3; у=0 бўлса 3х—12=0 ёки хқ4, яъни бу тўғри чизиқ координата ўқларини А(4;0) ва В(0;3) нуқталарда кесар экан.

4. Тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаси.

$\left.\begin{aligned} x &= mt - x_1 \\ y &= nt - y_1 \end{aligned}\right\}$ (6) тенгламага тўғри чизиқнингнг параметрик тенгламаси дейилади, бу ерда t- параметр. (6) тенгламалардан параметр t ни йўқотсак

$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}$ (3) тўғри чизиқнингнг каноник тенгламаси ҳосил бўлади.



5. Тўғри чизиқнингнг нормал тенгламаси. Нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа.

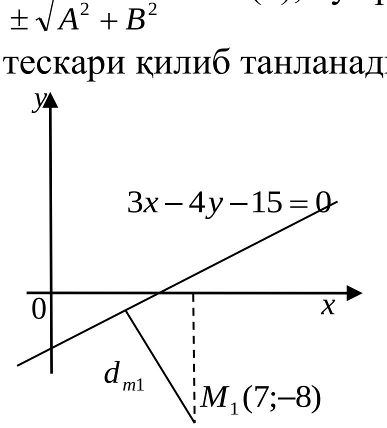
$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ (7) тенгламага тўғри чизиқнингнг нормал тенгламаси дейилади, α -ох ўқи билан $\bar{n}$ нормал вектор орасидаги бурчак, оғиш бурчаги ҳам дейилади. $M_1(x_1;y_1)$ нуқтадан (7) тўғри чизиқгача бўлган масофа $d_{M1}=|x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p|$ формула билан ҳисобланади. $M_1(x_1;y_1)=M_0(0;0)$ бўлса, $d_{M0}=|-p|$ бўлади.

Демак тўғри чизиқнингнг нормал тенгламаси ўзининг қуйидаги икки хоссаси билан бошқа тенгламаларидан ажралиб туради;

1. $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$; 2. p>0 бўлиб, координата бошидан шу тўғри чизиқгача бўлган масофани билдиради.

Тўғри чизиқ нормал тенгламасини шу икки хоссасидан фойдаланиб, унингнг бошқа тенгламаларини нормал кўринишга келтириш мумкин; М: Ах+Ву+С=0 тенгламанинг $\mu=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$ нормалловчи кўпайтувчига кўпайтирсак, натижада тўғри чизиқнингнг нормал тенгламаси ҳосил бўлади:

$\frac{Ax+By+c}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$ (8), бу ерда μ нинг ишораси озод ҳад С нинг ишорасига тескари қилиб танланади.



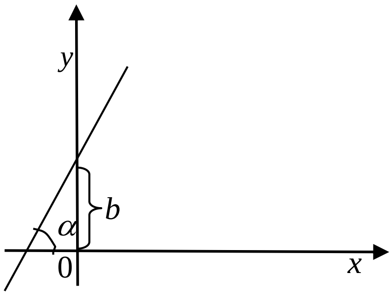
М: 3х-4у-15=0 тўғри чизиқдан $M_1(7;-8)$ нуқтагача бўлган масофа топилсин.

Е: $x=0;\quad y=-\frac{15}{4};\quad y=0;\quad x=5$

$$\mu=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{1}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{1}{5}$$

$$\frac{3x-4y-15}{5}=\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-3=0$$

$$d_{m1}=\left|\frac{3}{5}\cdot 7-\frac{4}{5}(-8)-3\right|=\left|\frac{21}{5}+\frac{32}{5}-3\right|=\left|\frac{53-15}{5}\right|=\frac{38}{5}$$

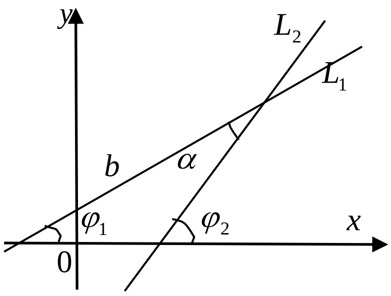


6. Тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси.

y=кх+в (9) тенгламага тўғри чизиқнингнг бурчак коэффициентли тенгламаси дейилади, бу ерда $k=tg\alpha$ бўлиб, у тўғри чизиқнингнг бурчак коэффициенти дейилади.

$y-y_1=k(x-x_1)$ (10) тенгламага $M_1(x_1;y_1)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқлар дастасининг тенгламаси дейилади.

42-§. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак



Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак деб, улар кесишиб ҳосил қилган ўткир бурчакка айтилади.

Агар L_1 ва L_2 тўғри чизиқлар бурчак коэффициенти $y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$ ёки $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ умумий тенгламалари билан берилган бўлса, улар орасидаги бурчак тангенси қуйидаги формула билан топилади:

$$tg\alpha=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\frac{A_2B_1-A_1B_2}{A_1A_2+B_1B_2}, \qquad (11)$$

Агар $L_1||L_2$ бўлса $\alpha=0$, $tg0=0$, бўлиб $A_2B_1-A_1B_2=0$ ёки $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$ (12) тенглик икки тўғри чизиқнингнг паралеллик шартидир; агар $L_1\perp L_2$ бўлса $\alpha=\frac{\pi}{2}$ бўлиб $tg\frac{\pi}{2}=\infty$ ёки $A_1A_2+B_1B_2=0$ (13) бўлади. (13) тенглик икки векторнинг перпендикуляр шартидир.

Изоҳ: Агар икки тўғри чизиқ умумий тенгламаси билан берилганда улар орасидаги бурчакни топиш ўрнига уларнинг нормал ёки йўналтирувчи векторлари орасидаги бурчакнинг косинусини топиш қулай:

М: $\left.\begin{matrix}A_1x+B_1y+C_1=0\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{matrix}\right\}$; $\qquad \cos\alpha=\frac{(\bar{n}_1,\bar{n}_2)}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$;

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}; \quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2} \text{ бўлса } \cos\alpha=\frac{(\bar{S}_1,\bar{S}_2)}{|\bar{S}_1||\bar{S}_2|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2}}$$

43-§. Икки тўғри чизиқнингнг кесишуви

Агар L_1 ва L_2 тўғри чизиқлар параллел бўлмаса, Евклиднинг 5-постулатига асосан кесишади, кесишиш нуқтаси эса ҳар икки тўғри чизиққа тегишли бўлади, шу сабабли икки тўғри чизиқнингнг кесишиш нуқтасини топиш учун, уларни тенгламаларини система қилиб ечиш керак:

М: $\left.\begin{matrix}A_1x+B_1y+C_1=0\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{matrix}\right\}$ ёки $\begin{matrix}A_1x+B_1y=-C_1\\A_2x+B_2y=-C_2\end{matrix}$ тенгламалар системасини Крамер формуласи билан ечсак, уларнинг кесишиш нуқтаси $(x_1;y_1)$ни қуйидаги формула билан топиш мумкин;

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}-c_1 & B_1\\-c_2 & B_2\end{vmatrix}}{\Delta}, \quad y_1=\frac{\begin{vmatrix}A_1 & -c_1\\A_2 & -c_2\end{vmatrix}}{\Delta}, \quad \text{бу ерда} \quad \Delta=\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\A_2 & B_2\end{vmatrix}\neq 0$$

Таъкидлаймизки, $\Delta\neq 0$ бўлганда бу икки тўғри чизиқ кесишади, $\Delta=0$ бўлса улар параллел бўлиб, умуман кесишмайди ёки устма-уст тушса чексиз кўп ечимга эга бўлади.

М: 3x-2y+3=0 тўғри чизиқларни кесишиш нуқтасини топинг.
2x+ y-5 =0

Ечиш: $\begin{cases}3x-2y=-3\\2x+y=5\end{cases} \quad \Delta=\begin{vmatrix}3 & -2\\2 & 1\end{vmatrix}=3-(-2)2=3+4=7\neq 0$,

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}-3 & -2\\5 & 1\end{vmatrix}}{7}=\frac{-3+10}{7}=1; \quad y_1=\frac{\begin{vmatrix}3 & -3\\2 & 5\end{vmatrix}}{7}=\frac{15+6}{7}=3$$

Демак, бу икки тўғри чизиқ (1;3) нуқтада кесишар экан.

V боб. Иккинчи тартибли чизиқлар

$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ (1) тенглама билан ифодаланадиган чизиқларга ($A^2+B^2+C^2 \neq 0$) иккинчи тартибли эгри чизиқлар дейилади, биз асосан B=0 ҳолни, яъни

$$Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \quad (2)$$

тенгламанинг ўрганамиз. A ва B коэффициентнинг аниқ қийматларида ҳосил бўладиган эгри чизиқларни ўрганамиз.

A=C бўлса, $Ax^2+Ay^2+2Dx+2Ey+F=0$ (3) айлана тенгламаси эканлигини, аникроқ қилиб айтсак $\left(x+\frac{D}{A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{A}\right)^2=\frac{D^2}{A}+\frac{E^2}{A^2}-F=R^2$, яъни маркази $\left(-\frac{D}{A};-\frac{E}{A}\right)$ нуқтада ва радиуси R га тенг айлана эканлигини 39-§ да ўрганган эдик. Энди A ва C нинг бошқа қийматларида ҳосил бўладиган эгри чизиқларни ўрганамиз.

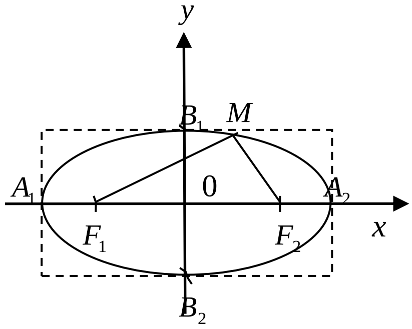
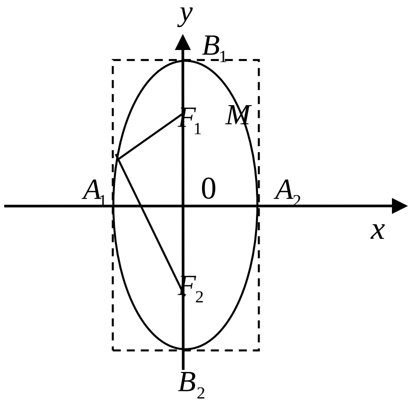
44-§. Эллипс

Текисликда икки нуқтадан ихтиёрий нуқтасигача бўлган масофалар йиғиндиси ўзгармас бўлган нуқталарнинг геометрик ўрнига айтилади.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (4)$$ тенгламага эллипснинг

каноник тенгламаси дейилади, а,в ва с лар $а^2-в^2=с^2$ муносабат билан боғланган. Равшанки, (3) тенгламада $A \neq B$ бўлиб, бир хил ишорали бўлса (4) тенглама ҳосил бўлади.

Биз асосан эллипснинг координата ўқларига нисбатан жойлашишининг икки ҳолини ўрганамиз:

		
Фокусларнинг жойлашиши Фокусларнинг координаталари а ва b орасидаги муносабатлар Катта ўқ Кичик ўқ Фокуслар орасидаги масофа Эксцентриситет a,b ва с орасидаги муносабатлар тенгламалари	$F_1; F_2 \in OX$ $F_1(-c;0),\ \ F_2(c;0)$ $a>b$ $\|A_1A_2\| = 2a$ $\|B_1B_2\| = 2b$ $\|F_1F_2\| = 2c$ $\varepsilon = \frac{c}{a}$ $a^2 - b^2 = c^2$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$F_1; F_2 \in OY$ $F_1(0;c),\ \ F_2(0;-c)$ $a<b$ $\|B_1B_2\| = 2b$ $\|A_1A_2\| = 2a$ $\|F_1F_2\| = 2c$ $\varepsilon = \frac{c}{b}$ $b^2 - a^2 = c^2$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Эллипсни чизишда, аввал $x = \pm a,\ \ y = \pm b$ тўғри чизиқларни ясаб параллелограмм ҳосил қилиб, сўнгра эллипс унингнг ичига «ички» қилиб чизилади.

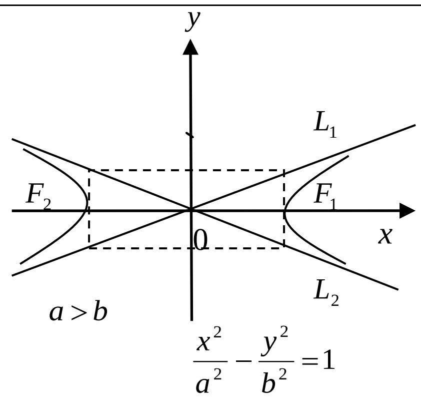
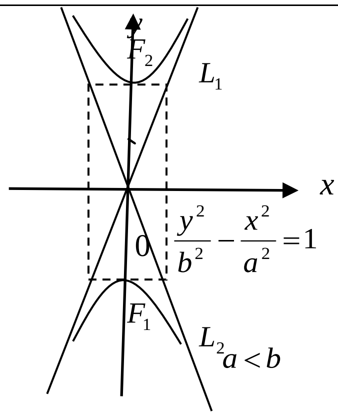
45-§. Гипербола

Текисликда икки нуқтадан ихтиёрий нуқтасигача бўлган масофалар айирмаси ўзгармас бўлган нуқталарнинг геометрик ўрнига гипербола дейилади.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ёки $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ (5) тенгламаларга гиперболанинг каноник тенгламаси дейилади, бу ерда а,в,с коэффициентлар $а^2$+$в^2$=$с^2$ муносабат орқали боғланган.

(3) тенгламада $\text{A} \neq \text{B}$ бўлиб, $\text{A} \cdot B < 0$ бўлганда гиперболанинг каноник тенгламалари ҳосил бўлади.

Энди (5) тенгламалар билан берилган гиперболаларнинг координата ўқларига нисбатан жойлашишини ўрганамиз:

		
Фокусларнинг жойлашиши Фокусларнинг координаталари Ҳақиқий ўқи Мавҳум ўқи Фокуслар орасидаги масофа Эксцентриситет a,b ва c орасидаги боғланиш	$F_1; F_2 \in OX$ $F_1(c;0),\ \ F_2(-c;0)$ $\lvert A_1A_2 \rvert = 2a$ $\lvert B_1B_2 \rvert = 2a$ $\lvert F_1F_2 \rvert = 2c$ $\varepsilon = \frac{c}{a}$ $c^2 - a^2 = b^2$	$F_1; F_2 \in OY$ $F_1(0;c),\ \ F_2(0;-c)$ $\lvert B_1B_2 \rvert = 2b$ $\lvert A_1A_2 \rvert = 2a$ $\lvert F_1F_2 \rvert = 2c$ $\varepsilon = \frac{c}{b}$ $c^2 - a^2 = b^2$

L_1 ва L_2 тўғри чизиқлар гиперболанинг асимптоталари дейилади, уларнинг тенгламалари $y = \pm\frac{b}{a}x$ кўринишда бўлади.

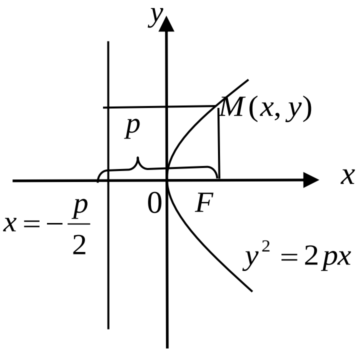
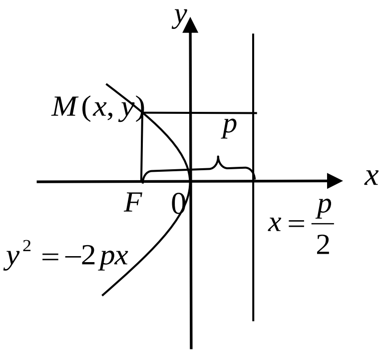
46-§. Парабола

Парабола деб, текисликда берилган нуқтадан (фокус) ва берилган тўғри чизиқдан (директриса) баробар узоқликда тўрган нуқталарнинг геометрик ўрнига айтилади.

Фокуслари ОХ ўқидан бўлган параболанинг каноник тенгламаси:

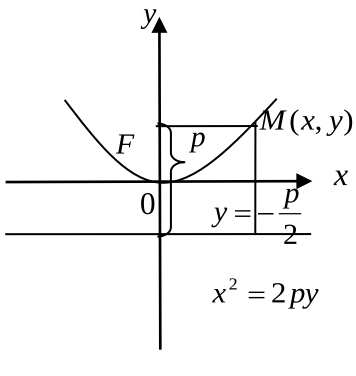
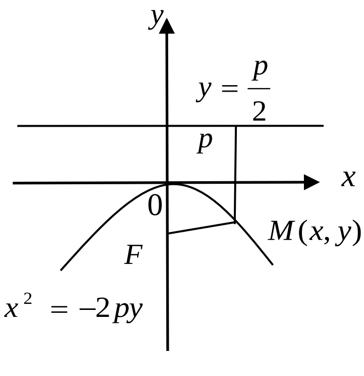
$$y^2 = 2px \quad \text{ва} \quad y^2 = -2px$$

кўринишда бўлади. Бу икки ҳолни қуйидаги жадвалда келтирамиз.

		
Фокуснинг жойлашиши Фокуснинг координаталари Директриса тенгламаси	OX ўқи $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ $x=-\frac{p}{2}$	OX ўқи $F\left(-\frac{p}{2};0\right)$ $x=\frac{p}{2}$

Фокуслари ОУ ўқидан бўлган параболанинг тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади: $y^2=2px$ ва $y^2=-2px$

Бу икки ҳол қуйидаги жадвалда келтирилган.

		
Фокуснинг жойлашиши Фокуснинг координаталари Директриса тенгламаси	OY ўқи $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$ $y=-\frac{p}{2}$	OY ўқи $F\left(0;-\frac{p}{2}\right)$ $y=\frac{p}{2}$

VI боб. Фазода аналитик геометрия

47-§. Текислик ва унингнг ҳар хил кўринишдаги тенгламалари

Фазодаги геометриянинг асосий тушунчаларидан бири текислик тушунчасидир. Текисликнинг бевосита таърифи мавжуд эмас. Лекин билвосита таърифи мавжуд; фазода берилган икки нуктадан баробар узокликда турган нукталарнинг геометрик урни. Одатда текисликни фазода паралеллограм куринишда ясалади ва P, Q, R харфлари билан белгиланади. Текислик тушунчасининг асосий аксиомаларини келтирамиз:

1. Бир тўғри чизиқда ётмаган уч нуқтадан битта текислик ўтади.
2. Агар тўғри чизиқнингнг икки нуқтаси текисликда ётса, бошқа нуқталари ҳам шу текисликда ётади.

Шу икки аксиома ва ундан чиқадиган натижалардан текисликнинг қуйидаги аниқланиш усуллари келиб чиқади:

а) уч нуқтадан бир текислик ўтади;
б) бир тўғри чизиқдан ва унда ётмаган нуқтадан бир текислик утади:
в) иккита кесишувчи тўғри чизиқдан бир текислик утади
г) иккита параллел тўғри чизиқдан битта текислик ўтади.

48-§. Текисликнинг ҳар хил кўринишдаги тенгламалари

1. Берилган $M_o(x_o;y_o;z_o)$ нуқтадан ўтиб $\bar{n} = A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}$ векторга перпендикуляр бўлган текислик тенгламаси:

$$A(x-x_o) + B(y-y_o) + C(z-z_o)=0 \quad (1)$$

кўринишда бўлади. Текисликка перпендикуляр бўлган $\bar{n}$ векторга, унингнг нормал вектори дейилади. (1) тенгликда қавсларини очиб чиқсак $Ax+By+Cz+D= 0$

$D =-(Ax_o+By_o+Cz_o)$ (2) тенгламага текисликни умумий тенгламаси дейилади. M нуқтани радиус векторини $\bar{r}$ ва M_o нуқтасиниқини $\bar{r}_o$ билан белгиласак (1) ва (2) тенгламанинг вектор кўринишида $(\bar{n}, \bar{r} - \bar{r}_0) = 0$ (1’), $(\bar{n}, \bar{r}) + D = 0$ (2’) ёзиш мумкин. (1’) ёки (2’) тенгламада $\bar{r}$ бирлик вектор бўлса, (1’), (2’) тенгламалар текисликнинг нормал тенгламаси дейилади. Агар $\bar{r} = \bar{r}^{\,o}$ бирлик вектор бўлса, унинг $\bar{r}^{\,0} = \cos\alpha\bar{i} + \cos\beta\bar{j} + \cos\gamma\bar{k}$ кўринишда ёзиш мумкин бўлганидан $(x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\cos\beta + (z - z_0)\cos\gamma = 0$ ёки

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \quad (3)$$

(3) га текисликнинг координаталар формасидаги нормал тенгламаси дейилади. Ҳаммавақт $\bar{n}^{\,0} = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$ бўлганидан, (2’)ни $\pm\frac{1}{|\bar{n}|}$ га кўпайтирсак

$$\left(\frac{\bar{n}}{\pm|\bar{n}|}, \bar{r}\right) + \frac{D}{\pm|\bar{n}|} = 0 \qquad (4)$$

(4) текисликнинг вектор кўринишидаги нормал тенгламасидир. $\mu = \pm\frac{1}{|\bar{n}|} = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ сонга нормалловчи кўпайтувчи дейилади. (2) тенгламанинг текисликнинг нормал тенгламасига келтирсак

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0 \qquad (5)$$

кўринишда бўлади, бу ерда μ нинг ишораси D нинг ишорасига тескари. Агар текисликда ётмаган $M_1(x_1;y_1,z_1)$ нуқта берилган бўлса, шу нуқтадан (2) ёки (3) текисликкача бўлган масофа

$$d_{M1} = \left|\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right| = |x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p| \qquad (5)$$

формула билан ҳисобланади.

М: $M_1(5;-3;2)$ нуқтадан 2x-y-2z+5=0 текислигача бўлган масофа ҳисоблансин.

Ечиш: 2x-y-2z+5 =0 тенгламанинг нормал кўринишга келтирамиз;

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}} = -\frac{1}{5}; \quad -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{2}{5}y - 1 = 0$$

$$d_{M1} = \left|-\frac{2}{5}\cdot 5 + \frac{1}{5}(-3) + \frac{2}{5}\cdot 2 - 1\right| = \left|-2 - \frac{3}{5} + \frac{4}{5} - 1\right| = \left|-3 + \frac{4}{5}\right| = \left|\frac{-11}{5}\right| = \frac{11}{5}$$

49-§. Текисликнинг умумий тенгламасини текшириш

Текисликни умумий тенгламасини Ax+By+Cz+D = 0 (2) текшириш деганда A, B, C, D коэффициентларининг ҳар хил хусусий қийматларида текисликнинг фазодаги координаталар системасида тутган вазиятини ўрганиш тушунилади. Энди A,B,C,D коэффициентнинг ҳар хил хусусий қийматларида (2) текисликнинг координаталар системасидаги тутган вазиятини ўрганамиз.

1. A, B, C$\neq$0, D=0; бу вақтда (2) текислик $\bar{n} = A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}$ векторга перпендикуляр бўлиб, координата бошидан ўтади.

Умуман A, B, C ларнинг бошқа қийматларида озод ҳад D=0 бўлиши, текисликни координата бошидан ўтишини билдиради.

2. $A=0,\ B,C,D\neq 0,\ \bar{n} = B\bar{j} + C\bar{k},\ By+Cz+D=0,\ \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1$ ёки $\frac{x}{b} + \frac{z}{c} = 1;$

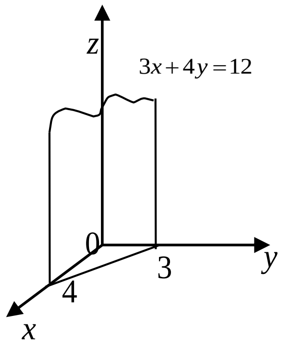
3. $B=0,\ A,C,D\neq 0,\ \bar{n}=A\bar{i}+C\bar{k},\ Ax+Cz+D=0,$ $\qquad \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=1;$

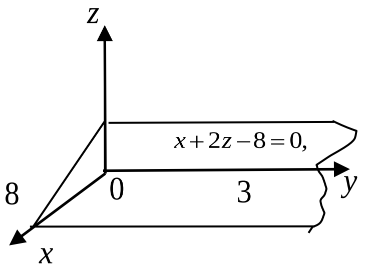
4. $C=0,\ A,B,D\neq 0,\ \bar{n}=A\bar{i}+B\bar{j}\,,$ $\qquad \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1;$

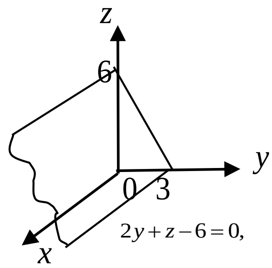
бўлсин
яъни текисликнинг умумий тенгламаси (2) да x,y,z ўзгарувчилардан бирортаси қатнашмасин. Бу ҳолда текислик шу қатнашмаган ўзгарувчига мос келувчи координата ўқига параллел бўлади.

Мисол: $3x+4y-12=0$, $x+2z-8=0$, $2y+z-6=0$, текисликларни ясанг.

$3x+4y=12$ ёки $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=1;$ $\qquad x+2z=8$ ёки $\dfrac{x}{8}+\dfrac{z}{4}=1;$ $\qquad 2y+z=6,$ ёки $\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6}=1;$







5. $A,B=0,\ C,D\neq 0,\ Cz+D=0,\ \bar{n}=C\bar{k},\ z=-\dfrac{D}{C}=c\,,$

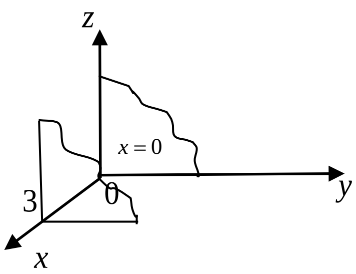
6. $A,C=0,\ B,D\neq 0,\ By+D=0,\ \bar{n}=B\bar{j},\ y=-\dfrac{D}{B}=b$

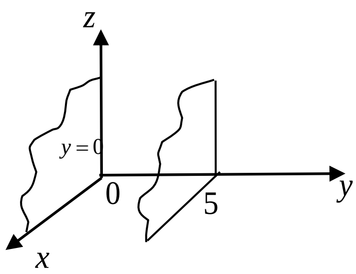
7. $B,C=0,\ A,D\neq 0,\ Ax+D=0,\ \bar{n}=A\bar{i},\ y=-\dfrac{D}{A}=a$

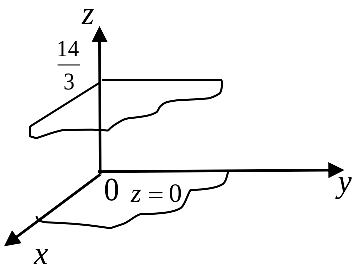
Яъни (2) тенгламада ***x,y,z,*** ўзгарувчилардан иккитаси қатнашмасин. Бу ҳолда шу қатнашмаган ўзгарувчига мос келувчи координата текисликларига параллел бўлади, яъни ***x*** ва ***y*** қатнашмаса ***xoy*** текислигига, ***x*** ва ***z*** қатнашмаса ***xoz*** текислигига ва ***y,z,*** қатнашмаса ***yoz*** текислигига паралел бўлади.

М: $x-3=0$, $y-5=0$, $3z-14=0$ текисликлар ясалсин.

Ечиш: Бу текисликлар мос равишда ***ox*** ўқидан 3 бирлик ажратиб ***yoz*** текислигига паралел; ***oy*** ўқидан 5 бирлик ажратиб ***xoz*** текислигига параллел ва ***oz*** ўқидан $\dfrac{14}{3}$ бирлик ажратиб ***xoy*** текислигига параллел бўлган текисликдир.







8. $A, B, D = 0,\ C \neq 0,\quad \bar{n} = C\bar{k},\ Cz = 0,\quad z = 0$

9. $A, C, D = 0,\ B \neq 0,\quad \bar{n} = B\bar{j},\ By = 0,\quad y = 0$

10. $B, C, D = 0,\ A \neq 0,\quad \bar{n} = A\bar{i},\ Ax = 0,\quad x = 0$

$z = 0$ ***xoy*** координата текислигининг, $y = 0$ ***xoz*** координата текислигининг ва х*=о ***yoz*** координата текисликларининг тенгламаларидир.

50-§. Уч нуқтадан ўтувчи текислик тенгламаси

Агар бир тўғри чизиқда ётмаган учта $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, ва $M_3(x_3; y_3; z_3)$, нуқталар берилган бўлса, шу уч нуқтадан ўтувчи текислик тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

Агар текислик координата ўқлари билан кесишиб улардан мос равишда а, в, с кесмалар ажратса (демак А(а;о;о), В(о;в;о), С(о;о;с) нуқталардан ўтади), унингнг тенгламаси (6) формулага асосан

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (7)$$

кўринишда бўлади. (7) тенгламага текисликнинг кесмалар шаклдаги тенгламаси дейилади.

Берилган $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, нуқталардан ўтиб берилган Ax+By+Cz+D=0 (2) текисликка перпендикуляр бўлган текислик тенгламаси

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

кўринишида бўлади.

$M_1(x_1;y_1;z_1)$, нуқтадан ўтиб иккита ўзаро паралел бўлмаган $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ текисликларга перпендикуляр бўлган текислик тенгламаси

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

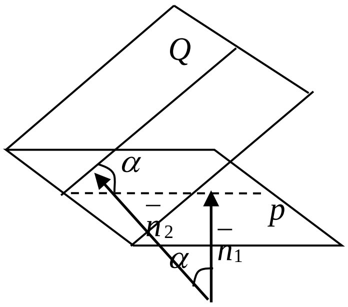
кўринишида бўлади

Берилган $M_1(x_1;y_1;z_1)$, нуқтадан ўтиб $Ax+By+Cz+D=0$ текисликка параллел бўлган текислик тенгламаси

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0 \quad (10)$$

кўринишда бўлади

51-§. Икки текислик орасидаги бурчак Уч текисликнинг кесишуви



Икки текислик орасидаги бурчак деб бу текисликлар орасидаги икки ёқли бурчакка айтилади. Бу икки ёқли бурчак ўзининг чизиқли бурчаги α билан ўлчанади. Бу текисликларнинг нормал векторлари орасидаги бурчак эса шу икки текислик орасидаги бурчакка тенг ёки унинг $\pi(180^0)$ гача тўлдиради.

Шу сабабли икки текислик ўзининг умумий тенгламалари билан берилган бўлса, яъни

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{aligned}\right\}$$

бу икки текислик орасидаги бурчак косинуси

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{n}_1,\bar{n}_2)}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|} = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \quad (11)$$ формула билан

топилади.

Агар $P \parallel Q$ бўлса, $\overline{n}_1 \parallel \overline{n}_2$ бўлиб $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ (12)

(12) тенглик икки текисликни параллеллик шартидир.

Агар $P \perp Q$ бўлса, $\overline{n}_1 \perp \overline{n}_2$ бўлиб $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ (13)

(13) тенглик икки текисликни перпендикулярлик шартидир.

Энди 3 та жуфт-жуфт билан паралел бўлмаган текисликлар берилган бўлсин. Уларнинг ҳар иккитаси ўзаро паралел бўлмаганидан, улар бир нуқтада кесишишади, бу кесишиш нуқтаси эса ҳар учала текисликка тегишли бўлади. Демак ўзаро паралел бўлмаган уч текислик берилган бўлса, уларнинг кесишиш нуқтасини топиш учун уларни тенгламаларини система қилиб ечиш керак экан, яъни

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases} \quad (13)$$

(13) уч номаълумли учта чизиқли бир жинслимас $(D \neq 0,\ k = 1,2,3)$ тенгламалар системасидир.

(13) системанинг Крамер формуласи бўйича ечимини топамиз:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} \quad \text{бу ерда}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \Delta x_1 = \begin{vmatrix} -D_1 & B_1 & C_1 \\ -D_2 & B_2 & C_2 \\ -D_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} A_1 & -D_1 & C_1 \\ A_2 & -D_2 & C_2 \\ A_3 & -D_3 & C_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & -D_3 \end{vmatrix}$$

Агар $\Delta = 0$ бўлса, (13) система ечимга эга бўлмайди, чунки берилган текисликларнинг камида иккитаси паралел бўлади.

52-§. Фазода тўғри чизиқ

Фазода тўғри чизиқнингнг ҳар хил кўринишидаги тенгламалари. Фазода тўғри чизиқнинг билвосита тарифлаб бўлмайди, лекин бевосита таърифлаш мумкин. М: Фазода тўғри чизиқнинг икки ўзаро паралел бўлмаган текисликни кесишидан ҳосил бўлган чизиқ деб қараш мумкин. Фазода тўғри чизиқ текисликда тўғри чизиқ ҳоссаларидан асосан қуйидаги хоссаси билан фарқ қилади; Фазода тўғри чизиқ паралел бўлмаса у кесишмаслиги мумкин. Фазода паралел бўлмасдан кесишмайдиган туғри чизиқларга айқаш тўғри чизиқлар дейилади. Фазода битта нуқтадан чексиз кўп тўғри чизиқ, икки нуқтадан эса ягона тўғри чизиқ ўтади.

Энди фазода тўғри чизиқнинг ҳар хил кўринишдаги тенгламаларини ўрганамиз:

1. $M_0(x_0;y_0;z_0)$, нуқтадан ўтиб $\overline{S}=m\overline{i}+n\overline{j}+p\overline{k}$ векторга паралел бўлган тўғри чизиқ тенгламаси

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \quad (1)$$

кўринишда бўлади. (1) тенгламага фазода тўғри чизиқнингнг каноник тенгламаси дейилади. Тўғри чизиққа параллел бўлган ҳар қандай $\overline{S}$ векторга унингнг йўналтирувчи вектори дейилади.

2. Берилган $M_0(x_0;y_0;z_0)$, ва $M_1(x_1;y_1;z_1)$, нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси

(бунда $\overline{S}=\overline{M_1M_0}=(x_1-x_0)\overline{i}+(y_1-y_0)\overline{j}+(z_1-z_0)\overline{k}$

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0} \quad (2)$$

кўринишида бўлади.

3. $\left.\begin{aligned}x&=mt+x_0\\ y&=nt+y_0\\ z&=pt+z_0\end{aligned}\right\}$ (3) тенгламага фазода $M_0(x_0;y_0;z_0)$, нуқтадан ўтувчи ва йўналтирувчи вектори $\overline{S}=m\overline{i}+n\overline{j}+p\overline{k}$ бўлган тўғри чизиқнингнг параметрик тенгламаси дейилади. Равшанки каноник тенгламадан параметрик тенгламага ўтиш учун (1) тенгламанинг t га тенглаштириб сўнгра нисбатан ечилади.

Параметрик (3) тенгламадан тўғри чизиқнингнг каноник (1) тенгламага ўтиш учун (3) тенгламадаги t топилиб, сўнгра тенгламалар тенглаштирилади.

4. Фазода тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси.

Фазода тўғри чизиқнинг иккита ўзаро параллел бўлмаган текисликларнинг кесишишидан ҳосил бўлган нуқталарнинг геометрик ўрни деб қараш мумкин, яъни

$\left.\begin{aligned}A_1x+B_1y+C_1z+D_1&=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2&=0\end{aligned}\right\}$(4), бу ерда $\begin{vmatrix}A_1B_1\\A_2B_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}A_1C_1\\A_2C_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}B_1C_1\\B_2C_2\end{vmatrix}^2\neq 0$

(4) тенглама билан ифодаланадиган тўғри чизиқнинг ясаш учун, у тўғри чизиқнингнг каноник тенгламасига келтирилади. Бунингнг учун (4) тенгламалар системасини агар $\begin{vmatrix}A_1B_1\\A_2B_2\end{vmatrix}\neq 0$ бўлса x ва y нисбатан, худди шунингнгдек $\begin{vmatrix}A_1C_1\\A_2C_2\end{vmatrix}\neq 0$ бўлса x ва z га нисбатан, $\begin{vmatrix}B_1C_1\\B_2C_2\end{vmatrix}\neq 0$ бўлса, y ва z га нисбатан ечилади.

М: $\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix} \neq 0$ бўлса (4) ни x ва y га нисбатан ечсак $\left.\begin{matrix} x = a_1 z + b_1 \\ y = a_2 z + b_2 \end{matrix}\right\}$ (4’) тенгламалар системаси ҳосил бўлади. (4’) тенгламага фазода тўғри чизиқнингнг проекциялар шаклидаги тенгламаси дейилади. (4’) тенгламалар системасидаги ҳар бир тенгламанинг z га нисбатан ечиб, сўнгра тенглаштирамиз;

$$z = \frac{x - b_1}{a_1}, \quad z = \frac{y - b_2}{a_2} \quad \text{ёки} \quad \frac{x - b_1}{a_1} = \frac{y - b_2}{a_2} = \frac{z - 0}{1} \quad (5)$$

(5) фазода $M_0(x_0; y_0; z_0)$, нуқтадан ўтган ва йўналтирувчи вектори $\bar{S} = a_1 \bar{i} + a_2 \bar{j} + \bar{k}$ бўлган тўғри чизиқнингнг каноник тенгламасидир.

М: $\left.\begin{matrix} 3x + y - 2z + 3 = 0 \\ x + 2y + 3z - 5 = 0 \end{matrix}\right\}$ тўғри чизиқнингнг умумий тенгламаси каноник кўринишга келтирилсин.

Ечиш: $\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5 \neq 0$ бўлганидан тенгламалар системасини x ва y га нисбатан ечамиз:

$$\begin{cases} 3x + y = 2z - 3 \\ x + 2y = -3z + 5 \end{cases}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$

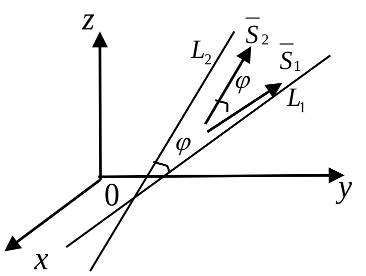
$$\Delta x = \begin{vmatrix} 2z - 3 & 1 \\ -3z + 5 & 2 \end{vmatrix} = 4z - 6 + 3z - 5 = 7z - 11;$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 2z - 3 \\ 1 & -3 + 5 \end{vmatrix} = -3z + 15 - 2z + 3 = -11z + 18$$

$$\left.\begin{matrix} x = \frac{7}{5} z - \frac{11}{5} \\ y = -\frac{11}{5} z + \frac{18}{5} \end{matrix}\right\} \quad z = \frac{x + \frac{11}{5}}{\frac{7}{5}}, \quad z = \frac{y - \frac{18}{5}}{-\frac{11}{5}}, \quad \frac{x + \frac{11}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{y - \frac{18}{5}}{-\frac{11}{5}} = \frac{z - 10}{1}$$

Ҳосил бўлган тўғри чизиқнингнг каноник тенгламаси $M_0(-\frac{11}{5}; \frac{18}{5}; 0)$, нуқтадан ўтувчи ва йўналтирувчи вектори $\bar{S} = \frac{7}{5}\bar{i} + \frac{11}{5}\bar{j} + \bar{k}$ бўлган тўғри чизиқдир.

53-§. Фазода икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак



Икки тўғри чизиқнингнг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари.

Фазода иккита L_1 ва L_2 тўғри чизиқ ўзининг каноник тенгламалари билан берилган бўлсин;

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}; \qquad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

Иккита тўғри чизиқ орасидаги бурчак деб, бу тўғри чизиқларнинг йўналтирувчи векторлари орасидаги бурчакка айтилади. У ҳолда

$$\cos\varphi=\frac{(\overline{S}_1,\overline{S}_2)}{|\overline{S}_1||\overline{S}_2|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} \qquad (6)$$

Агар $L_1 \parallel L_2$ бўлса, $\overline{S}_1 \parallel \overline{S}_2$ бўлиб $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$ (7)

(7) ва (8) тенгликлар мос равишда фазода икки тўғри чизиқнингнг параллеллик ва перпендикулярлик шартларидир.

Агар L_1 ва L_2 тўғри чизиқлар ўзларининг умумий тенгламалари билан берилган бўлса, яъни

$$\left.\begin{matrix} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{matrix}\right\} \quad (9) \quad \text{ва} \quad \left.\begin{matrix} A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0 \\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0 \end{matrix}\right\} \quad (10)$$

бу вақтда уларнинг йўналтирувчи векторларини $\overline{S}_1$ ва $\overline{S}_2$ билан белгиласак, уларни компоненталари

$$\overline{S}_1=[\overline{n}_1,\overline{n}_2]=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \overline{S}_2=[\overline{n}_3,\overline{n}_4]=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix}$$ формулалар

билан ҳисобланади. Бу ҳолда L_1 ва L_2 орасидаги бурчак $\cos\varphi=\frac{(\overline{S}_1,\overline{S}_2)}{|\overline{S}_1||\overline{S}_2|}$

(11)

Берилган $M_0(x_0;y_0;z_0)$, нуқтадан $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ тўғри чизиқ туширилган перпендикуляр тўғри чизиқ тенгламаси

$$\begin{cases} m_1(x-x_0)+n_1(y-y_0)+p_1(z-z_0) \\ \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \end{vmatrix}=0 \end{cases} \qquad (12)$$ кўринишда бўлади.

$M_0(x_0;y_0;z_0)$, нуқтадан $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ тўғри чизиқгача бўлган масофа

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ n_1 & p_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_0-z_1 & x_0-x_1 \\ p_1 & n_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_0-x_1 & z_0-z_1 \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}}$$

формула билан ҳисобланади.

Иккита ўзаро параллел бўлмаган L_1 ва L_2 тўғри чизиқлар

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}; \quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$ тенгламалари

билан берилган бўлса, улар орасидаги энг қисқа масофа

$$d=\frac{\left|\left[(r_2-r_1)\bar{S}_1\right]\bar{S}_2\right|}{\left|\left[\bar{S}_1,\bar{S}_2\right]\right|}$$ формула билан ҳисобланади,

бу ерда

$$\bar{S}_1=m_1\bar{i}+n_1\bar{j}+p_1\bar{k}, \qquad \bar{S}_2=m_2\bar{i}+n_2\bar{j}+p_2\bar{k},$$
$$\bar{r}_1=x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k} \qquad \bar{r}_2=x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k}$$

Агар $L_1 \parallel L_2$ бўлса,

$$d=\frac{\left|\left[(\bar{r}_2-\bar{r}_1)\bar{S}_1\right]\right|}{\left|\bar{S}_1\right|}$$

формула билан ҳисобланади.

54-§. Фазода тўғри чизиқ ва текислик

Фазода L тўғри чизиқ каноник тенгламаси

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \quad (14)$$

билан ва P текислик умумий тенгламаси

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (15)$$

билан берилган бўлсин.

Таъриф. Тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчак деб тўғри чизиқ билан унинг шу текисликдаги проекция орасидаги бурчакка айтилади.

L тўғри чизиқ билан P текислик орасидаги бурчак

$$\cos\left(90^0-\varphi\right)=\sin\varphi=\frac{(\bar{n},\bar{S})}{|\bar{n}||\bar{S}|}=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \quad (16)$$

формула билан топилади.

Агар $L \parallel P$ бўлса $\bar{n}\perp\bar{S}$ бўлиб, Am+Bn+Cp=0 бўлади, агар $L\perp P$ бўлса, $\bar{n}\parallel\bar{S}$ бўлиб, $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$ бўлади.

Бу шартлар мос равишда тўғри чизиқ ва текисликнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартидир.

Агар L ва P параллел бўлмаса, яъни $Am+Bn+Cp\neq 0$ бўлса, улар бир нуқтада кесишади ва кесишиш нуқтаси M_1 нинг координаталари

$$\begin{cases} x_1 = mt + x_0 \\ y_1 = nt + y_0 \\ z_1 = pt + z_0 \end{cases}, \quad \text{бу ерда} \quad t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}$$

формула билан топилади.

55-§. Фазода тўғри чизиқ ва текисликка доир тенгламалар

1. $M_0(x_0;y_0;z_0)$, нуқтадан ўтиб $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ тўғри чизиқга перпендикуляр бўлган текислик тенгламаси:

$$m(x-x_0)+n(y-y_0)+p(z-z_0)=0$$

2. $M_0(x_0;y_0;z_0)$, нуқтадан ўтиб, Ax+By+Cz+D=0 текисликка перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ тенгламаси:

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}$$

3. $M_0(x_0;y_0;z_0)$, нуқтадан ва $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$ тўғри чизиқдан ўтган текислик тенгламаси:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ m & n & p \end{vmatrix}=0$$

4. $M_0(x_0;y_0;z_0)$, нуқтадан ўтиб, иккита ўзаро параллел бўлмаган $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$, $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$ тўғри чизиқларга параллел бўлган текислик тенгламаси:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0$$

5. L_1 ва L_2 фазода параллел бўлмаган тўғри чизиқлар бўлса, L_1: $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ чизиқдан ўтиб L_2: $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$ тўғри чизиққа параллел бўлан тўғри чизиқ тенгламаси:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0$$

6. L: $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ тўғри чизиқдан ўтиб, Ax+By+Cz+D=0 текисликка перпендикуляр бўлган текислик тенгламаси:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ A & B & C \end{vmatrix}=0$$

7. L_1: $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ ва L_2 : $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$ текисликларни бир текисликда ётиш шарти:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0$$

56-§. Иккинчи тартибли сиртлар

Иккинчи тартибли сиртнинг умумий тенгламаси қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2axy+2bxz+2cyz+2a_1x+2b_1y+2c_1z+d=0,$$

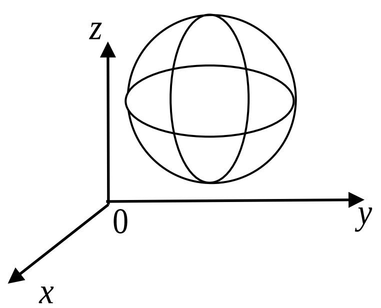
бу ерда $A^2+B^2+C^2\neq 0$

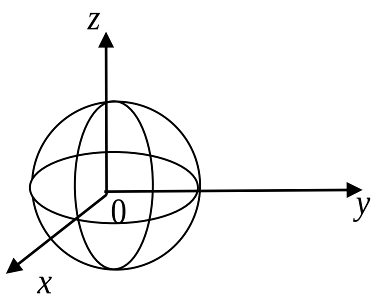
Биз асосан хусусий ҳолда а =в = с = 0 бўлган сиртларни ўрганамиз. Иккинчи тартибли сиртларни ўрганишда асосан аналитик геометриянинг иккинчи масаласи, яъни берилган тенглама асосида сиртни ясаш масаласи ўрганилади.

Сиртни ясашда эса, асосан «параллел кесишиш» усулидан фойдаланилади. Бу усулнинг моҳияти қуйидагидан иборат: $F(x,y,z)=0$ тенглама билан берилган сирт координата текисликлари ($x=0,\ y=0,\ z=0$) билан ва унга параллел бўлган текисликлар ($x=h,\ y=h,\ z=h$) билан кесилади ва кесишишда ҳосил бўлган чизиқ аниқланади. Сўнгра ана шу кесишишдан ҳосил бўлган чизиқларга қараб сиртни ўзи ясалади.

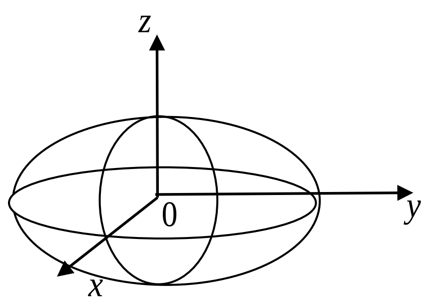
Энди амалиётда кенг қўлланиладиган ва тез-тез учраб турадиган иккинчи тартибнинг сиртларини ва уларнинг тенгламаларини келтирамиз:

1. ***Сфера***: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

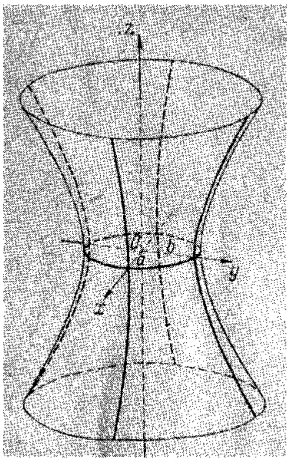


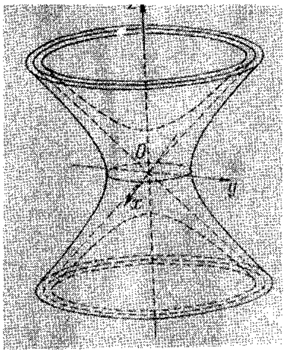


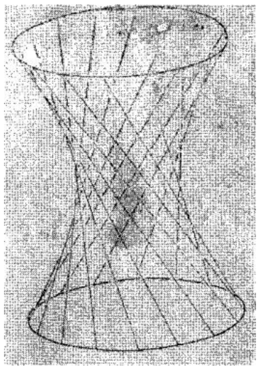
2. ***Эллипсоид***:



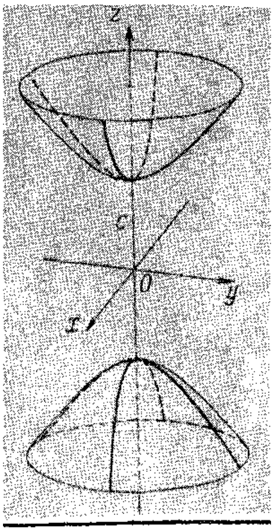
3. ***Бир паллали гипперболоид***:



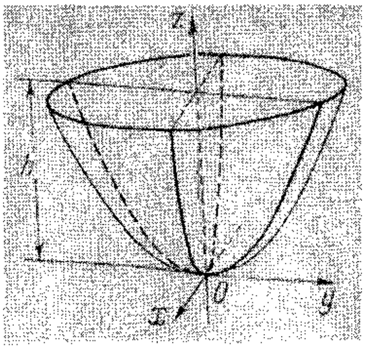




4. ***Икки паллали гипперболоид***:

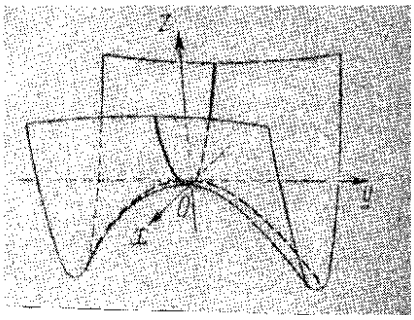


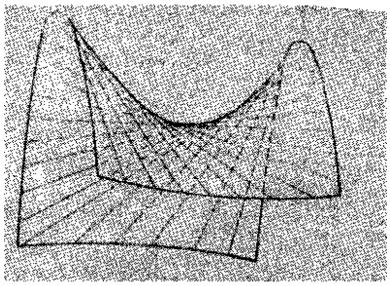
5. ***Эллиптик параболоид***:



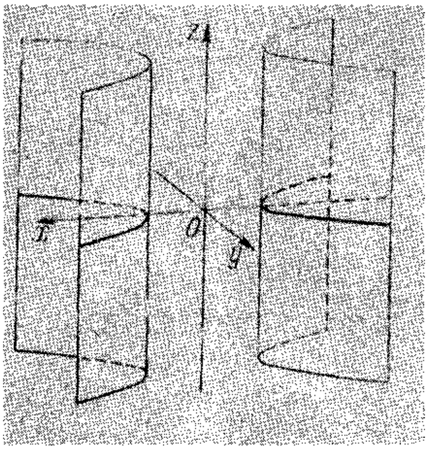
$$\frac{x2}{A}+\frac{y2}{q}=2z;\qquad (A>0, q>0)$$

6. ***Гипперболик параболоид***: $\frac{x2}{p}-\frac{y2}{q}=2z; \quad (p>0, q>0)$



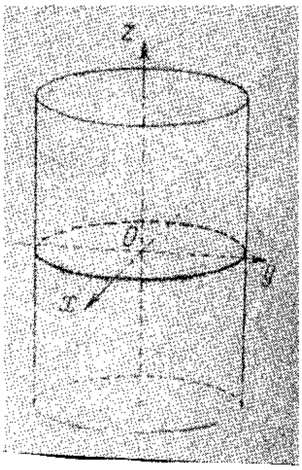


7. ***Цилиндрик сиртлар***.



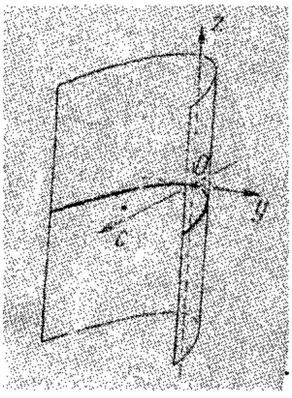
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

Гипперболик цилиндр



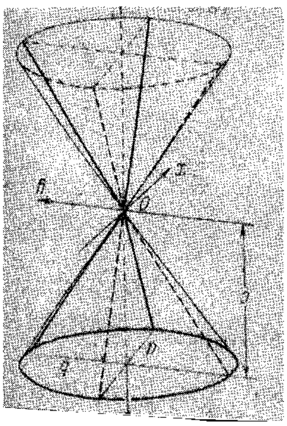
Эллиптик цилиндр

8. ***Параболик цилиндр***.



$y^2=2px$

9. ***Конус сирт.***



$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$