

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМий ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.27.06.2017.FM.01.02 РАҚАМЛИ ИЛМий КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

БАҚОЕВ МАТЁҚУБ ТЕШАЕВИЧ

**МОЛИЯ ВА БОШҚАРУВ МАСАЛАЛАРИДАГИ ДИФФУЗИОН
ТЕНГЛАМАЛАР ЕЧИМЛАРИНИ СОНЛИ МОДЕЛЛАШТИРИШ**

**05.01.07- Математик моделлаштириш. Сонли усуллар ва дастурлар
мажмуи (физика-математика фанлари)**

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc)
ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ**

Тошкент-2019 йил

Докторлик диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата докторской диссертации

Content of the abstract of the doctoral (DSc) dissertation

Бақоев Матёқуб Тешаевич

Молия ва бошқарув масалаларидаги диффузион тенгламалар ечимларини сонли моделлаштириш	3
--	---

Бақоев Матёқуб Тешаевич

Численное моделирование решений диффузионных уравнений в финансовых и управленческих задачах	27
---	----

Bakoev Matyokub Teshaeovich

Numerical simulation of solutions of diffusion equations in problems of finance and management	53
---	----

Эълон қилинган ишлар рўйхати

Список опубликованных работ

List of published works	59
--------------------------------------	-----------

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ
ЎЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.27.06.2017.FM.01.02 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

БАҚОЕВ МАТЁҚУБ ТЕШАЕВИЧ

**МОЛИЯ ВА БОШҚАРУВ МАСАЛАЛАРИДАГИ ДИФФУЗИОН
ТЕНГЛАМАЛАР ЕЧИМЛАРИНИ СОНЛИ МОДЕЛЛАШТИРИШ**

**05.01.07- Математик моделлаштириш. Сонли усуллар ва дастурлар
мажмуи (физика-математика фанлари)**

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc)
ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ**

Тошкент - 2019 йил

Фан доктори (Doctor of Science) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2017.2.DSc/FM66 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Ўзбекистон Республикаси Фанлар академияси В.И.Романовский номидаги Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (<http://ik-fizmat.nuu.uz/>) ва «ZIYONET» ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий маслаҳатчилар:

Расулов Абдужаббор Саттарович физика-математика
фанлари доктори, профессор

Расмий оппонентлар:

Шакенов Канат Кожоахметович
физика-математика фанлари доктори, профессор

Шадиметов Холматвай Махкамбоевич
физика-математика фанлари доктори, профессор

Маматов Алишер Зулунович
техника фанлари доктори, профессор

Етакчи ташкилот:

**Мухаммад ал-Хоразмий номли Тошкент ахборот
технологиялари университети**

Диссертация химояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги DSc.27.06.2017.FM.01.02 рақамли Илмий кенгашнинг 2019 йил «___» _____ соат _____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 246-02-24.

Диссертация автореферати 2019 йил «___» _____ куни тарқатилди.
(2019 йил «___» _____ даги _____ рақамли реестр баённомаси).

А.Р. Марахимов

Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш раиси, т.ф.д., профессор

З.Р. Рахмонов

Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.д.

М.М.Арипов

Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш ҳузуридаги илмий семинар
раиси, ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (докторлик диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган илмий-амалий тадқиқотларда аксарият жараёнларнинг математик моделлари чизикли ва чизиксиз диффузион тенгламалар учун қўйилган бошланғич-чегаравий масалалар билан таснифланиши ва бундай масалаларни сонли ечиш усуллари тадқиқ этиш долзарб эканлигини кўрсатмоқда. Бундай тенгламалар диффузион типдаги жарёнларни қамраб олувчи математик физика, динамик тизимлар назарияси, биология, экология, иқтисодиёт, молия, бошқарув ва математик моделлаштириш каби соҳалардаги тадқиқотларнинг объектидир. Диффузион параболик ва ультрапараболик тенгламалар иссиқлик ўтказувчанлик, ядро реакторларда химик жараёнлар, динамик тизимлар, сиқилмайдиган суюқликлар оқими ва динамикаси, биологик популяциялар динамикаси ва генетикаси, қимматбаҳо қоғозлар бозоридаги ўзгаришлар динамикаси, инвестицион ва молиявий портфелларни бошқариш, молиявий рискларни баҳолаш ва экологик ўзгариш жараёнларини ўрганишда асос сифатида хизмат қилади. Шунинг учун диффузион жараёнларни тавсифловчи математик моделларни тадқиқ этиш амалий математика, иқтисодиёт ва молия соҳаларининг муҳим вазифаларидан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда бир қатор амалий масалаларни ечишда жумладан: газ динамикаси масалалари, молиявий математика масалалари (қимматбаҳо қоғозлар бозорини ўрганиш ва жараёнлар бошқарувини моделлаштириш), оммавий хизмат кўрсатиш масалалари (мураккаб ишлаб чиқариш тизимлари, алоқа тизимлари ва компьютер тармоқларини моделлаштириш), инвестицион жараёнларни бошқариш (инвестицион оқим, инвестицион риск, кўрсаткичларни башорат қилиш) каби соҳаларда учрайдиган кўплаб жараёнларнинг математик моделларини тасвирловчи диффузион тенгламалар ечимларини сонли моделлаштириш амалий математиканинг долзарб масалаларидан бири ҳисобланади. Бунда статистик моделлаштириш (Монте Карло) усуллари асосланиб сонли ечиш алгоритмларини яратиш муҳим аҳамият касб этади. Шу сабабли диффузион параболик чизиқли, қулай интерфейсга эга дастурий пакетлар мажмуасини яратиш ва уларни татбиқ этиш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг амалий татбиқига эга бўлган амалий математиканинг долзарб йўналишларига алоҳида эътибор кучайтирилди. Бу борада чизикли ва чизиксиз диффузион тенгламалар учун қўйилган бошланғич-чегаравий масалаларни сонли усулда ечиш бўйича математик моделлар қурилиб, уларнинг хоссаларини аниқлашда салмоқли натижаларга эришилди. Дифференциал тенглама ва математик физика, динамик тизимлар назарияси, эҳтимоллар назарияси ва математик статистика, амалий математика ва математик моделлаштириш фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалари ва фаолият

йўналишлари этиб белгиланди¹. Қарор ижросини таъминлашда диффузион параболик ва ультрапараболик тенгламалар учун бошланғич-чегаравий масалалар ечишнинг сонли алгоритмларини қуриш, дастурий пакетлар мажмуасини яратиш ва уларни татбиқ этишни ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисидаги” Фармони, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2017 йил 20 апрелдаги ПҚ-2909-сон «Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ва 2018 йил 27 апрелдаги ПҚ-3682-сон “Инновацион ғоялар, технологиялар ва лойиҳаларни амалиётга жорий қилиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисидаги” қарорлари, Ўзбекистон Республикаси Президенти Ш.М.Мирзиёевнинг 2019 йил 24 май куни Ўзбекистон миллий университетида таълим ва илм-фан соҳаси вакиллари билан бўлиб ўтган учрашувидаги маърузаси ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши-нинг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожлантиришнинг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи².

Диффузион тенгламалар учун бошланғич-чегаравий масалаларни ечиш, ечимларни сонли моделлаштириш усуллари ва уларнинг амалий масалаларга татбиқлари бўйича илмий изланишлар дунёнинг етакчи илмий марказлари ва олий таълим муассасалари, жумладан, University of Bologna (Италия), Centre for Advanced Computing and Emerging Technologies, University of Leicester (Буюк Британия), Institute for Parallel Processing of the Bulgarian Academy of Sciences (Болгария), National Environmental Research Institute (Дания), University of Mainz, Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics (Германия), University of North Carolina at Chapel Hill, Florida State University, Brooklyn College (АҚШ), Москва физика-техника институти,

¹ЎЗР Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-қарори

² Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий тадқиқотлар шарҳи: Journal of Approximation Theory, Applied Mathematics and Computation, BIT Numerical Mathematics, Journal of Computational and Applied Mathematics <http://www.journals.elsevier.com/mathematics>; Calcolo, Numerical Algorithms, Сибирский журнал вычислительной математики, <http://www.springer.com/mathematics>, Журнал вычислительной математики и математической физики, манбалар асосида ишлаб чиқилган.

Санкт-Петербург Давлат университети, РФА Сибирь бўлими ҳисоблаш технологиялари ва математик геофизика институти, Урал федерал университети (Россия), Қозоғистон Миллий Университетларида олиб борилмоқда.

Диффузион параболик ва ультрапараболик тенгламалар учун чегаравий масалаларни сонли ечиш усуллари ривожлантиришга оид жаҳонда олиб борилаётган тадқиқотлар натижасида қатор, жумладан, қуйидаги илмий натижалар олинган: параболик ва ультрапараболик тенгламаларнинг фундаментал ечимлари топилган ва ўрта қиймат формулалари олинган ҳамда амалий татбиқлари ўрганилган (University of Bologna, Москва физика-техника институти), эллиптик ва параболик турдаги ҳусусий ҳосилали тенгламалар ечимлари учун статистик моделлаштириш усуллари орқали тасодифий жараёнлар траекторияларида силжимас баҳолар қурилган (Санкт-Петербург Давлат университети, Россия Фанлар Академияси СБ ҳисоблаш математика ва математик геофизика институти), иссиқлик ўтказувчанлик масалаларини ечишда тасодифий жараёнлар ва уларнинг хоссалари тадқиқ этилган (University of Texas, USA), чегаравий масалаларни стохастик дифференциал тенгламалар системасини аппроксимацияси масалаларига келтириб ечилган (University of Leicester, Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics (WIAS), Урал Давлат университети).

Дунёда бугунги кунда параболик ва ультрапараболик чизиқли ва чизиқсиз тенгламалар учун бошланғич-чегаравий масалалар тадқиқ этилмоқда, шу жумладан, ультрапараболик тенгламалар учун фундаментал ечимларни қуриш, статистик моделлаштириш усуллари орқали чегаравий масалаларни ечиш, бошқарув жараёнларини стохастик дифференциал тенгламалар системаси орқали моделлаштириш, динамикаси стохастик тенгламалар системаси билан ифодаланувчи қимматбаҳо қоғозлар бозори долзарб масалаларини сонли ечиш усуллари қуриш каби устувор йўналишларда илмий тадқиқот ишлари олиб борилмоқда.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Марков жараёнлари билан чизиқли ва чизиқсиз тенгламалар орасидаги боғланишлар қуйидаги муаллифларнинг ишларида ўрганилган: Е.Б.Динкин, А.А.Юшкевич, Б.А.Севостьянов, А.Д.Вентцель, Ю.Л.Далецкий, Л.Т.Заплитная, А.А.Скоро-ход. Бу боғланишларни статистик моделлаштириш усули учун асос қилиб масалаларни ечишда дастлабки асосий натижалар С.М.Ермаков томонидан олинган. Иккинчи тартибли чизиқли ва чизиқсиз тенгламаларга қўйилган чегаравий масалаларни ечиш учун Монте-Карло усули алгоритмларини қуриш ва уларни асослаш Г.А.Михайлов, В.В.Некруткин, А.С.Расулов, Р.Н.Макаров, А.А.Сипин, Г.М.Раимова, А.З.Веселовская, П.Г.Скворцов, Н.А.Симонов ва бошқалар ишларида амалга оширилган. Чегаравий масалаларни стохастик дифференциал тенгламалар системасини ечишга келтириш ёрдамида ечиш усуллари тадқиқ этиш билан Г.Н.Мильштейн, М.В.Третьяков ва Я.И.Белопольскаялар шуғулланишган.

Ультрапараболик тенгламалар биринчи марта А.Н.Колмогоровнинг

тасодифий жараёнларни таҳлил қилишдаги мақоласида киритилган. Кейинчалик ультрапараболик тенгламалар бўйича фундаментал изланишлар куйидаги олимлар томонидан олиб борилган: А.М.Ильин, Н.С.Генчев, О.А.Ладыженская, Л.П.Купцов, И.М. Сонин, Я.И Шати́ро, ҳамда Италия мактаби вакиллари: А. Pascucci , Е. Lanconelli, S.Polidoro, М.Мanfredini, F.Antonelli, Е.Barucci, M.Di Francesco ва бошқалар.

Келтирилган бу ишлар орасида А.А.Сипин, Г.М.Раимова ва А.С.Расулов ишлари диссертация мавзусига энг яқин. Бу ишларда асосан чизикли ва чизиксиз эллиптик тенгламалар учун чегаравий масалалар, чизикли ва чизиксиз параболик тенгламалар системаси учун аралаш масалаларни статистик моделлаштириш (Монте Карло) усуллари орқали ечиш алгоритмлари қурилган. Диффузион параболик ва ультрапараболик, чизикли ва чизиксиз тенгламалар учун бошланғич чегарвий масалалар ечимларини сонли моделлаштириш, молия ва бошқарув масалаларига қўллаш тадқиқ этилмаган.

Диссертация мавзусининг диссертация бажарилаётган илмий тадқиқот муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режаси билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Математика институтининг Ф.1.1.1 «Тасодифий жараёнларнинг стохастик ва статистик таҳлили ва татбиқлари» (2003-2007 йй.), Ф005-Ф008 «Тасодифий жараёнларнинг асимптотик таҳлили ва унинг қарорлар қабул қилиш назариясига татбиқлари» (2007-2011 йй.), Ф4-ФА-Ф009 «Эҳтимоллар тақсимоти учун аппроксимация масалалари ва уларнинг математик статистикада қўлланилиши» (2012-2017 йй.), ОТ-Ф4-83 «Эҳтимолликлар тақсимотлари учун лимит теоремалари ва функционал маълумотларнинг статистик таҳлили» (2017-2019 йй.) мавзуларидаги илмий тадқиқот лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади кўп ўлчовли чизикли ва чизиксиз параболик ва ультрапараболик диффузион тенгламалар учун бошланғич-чегаравий ҳамда Коши масаласи ечимини сонли моделлаштириш алгоритмларини ишлаб чиқишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

кўп ўлчовли ультрапараболик тенгламалар учун бошланғич-чегаравий ва Коши масалаларини ечишда мураккаб соҳаларда "сфероид" ва "шариод"лар бўйича тасодифий ҳаракатлар орқали статистик моделлаштириш алгоритмларини ишлаб чиқиш;

ультрапараболик тенгламалар учун бошланғич-чегаравий ва Коши масалаларининг ечимини сонли моделлаштиришда диффузион тасодифий жараёнлар траекториясида қурилган функционалларни баҳолаш орқали сонли стохастик алгоритмлар ишлаб чиқиш, статистик баҳоларни қуришда стохастик дифференциал тенгламаларни тақрибий ечиш орқали тасодифий жараёнларни моделлаштириш;

чизиксиз параболик ва ультрапараболик тенгламаларга қўйилган аралаш масалалар ечимларини сонли моделлаштириш учун тармоқланучи Марков тасодифий жараёнлари ёрдамида янги стохастик алгоритмлар яратиш;

полиномиал чизиксиз тенгламаларни ечишни чизикли тенгламалар системасига келтириб ечиш бўйича янги алгоритмлар ишлаб чиқиш;

кўп процессорли компьютерлар учун параллел ва асинхрон итерацион усуллар орқали чизикли ва чизиксиз масалалар ечимларини сонли моделлаштиришнинг янги алгоритмларини куриш;

ишлаб чиқилган алгоритмлар асосида амалий компьютер дастурлари мажмуасини яратиш;

ноаниқлик ва риск шароитида бошқарув қарорларини қабул қилиш ва кўп мезонли қарорлар қабул қилиш методикасини такомиллаштириш.

Тадқиқотнинг объекти кўп ўлчовли чизикли ва чизиксиз параболик ва ультрапараболик типдаги диффузион тенгламалар учун бошланғич-чегаравий ва Коши масалалари, стохастик дифференциал тенгламалар, Марков тасодифий жараёнлари, молиявий инструментлар ва бошқарув қарорлари масалаларидан иборат.

Тадқиқотнинг предмети кўп ўлчовли чизикли ва чизиксиз параболик ва ультрапараболик типдаги диффузион тенгламалар учун бошланғич-чегаравий ва Коши масалалари ечимларини статистик сонли моделлаштириш алгоритмлари, стохастик дифференциал тенгламалар ечиш усуллари, Ито алмаштиришлари ва бошқарув қарорларини қабул қилишдаги амалий дастурлар мажмуи ҳамда дастурий воситаларидан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида статистик моделлаштириш (Монте-Карло) усуллари назарияси, эҳтимоллар назарияси, математик статистика, ҳисоблаш математикаси, математик ва функционал анализ, дифференциал тенгламалар назарияси, интеграл тенгламалар назарияси усуллари, чегаравий масалалар ечимларининг статистик баҳолари ва бу баҳолар қурилатган тасодифий ҳаракат траекторияларининг хусусиятларини тадқиқ этишда мартингаллар назариясидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

кўп ўлчовли ультрапараболик тенгламалар учун бошланғич-чегаравий ва Коши масалаларини ечишда мураккаб соҳаларда "сфероид" ва "шариод"лар бўйича тасодифий ҳаракатлар орқали статистик моделлаштириш алгоритмлари ишлаб чиқилган;

ультрапараболик тенгламалар учун бошланғич-чегаравий ва Коши масалалари ечимини сонли моделлаштиришда диффузион тасодифий жараёнлар траекториясида қурилган функционалларни баҳолаш орқали сонли стохастик алгоритмлар ишлаб чиқилган;

статистик баҳоларни қуришда стохастик дифференциал тенгламаларни тақрибий ечиш орқали тасодифий жараёнлар моделлаштирилган;

чизиксиз параболик ва ультрапараболик тенгламаларга қўйилган аралаш масалалар ечимларини сонли моделлаштириш учун янги стохастик алгоритмлар яратилган;

полиномиал чизиксиз тенгламаларни чизикли тенгламалар системасига келтириб ечишнинг самарали алгоритмлари ишлаб чиқилган;

кўп процессорли компьютерлар учун параллел ва асинхрон итерацион

усуллар орқали чизикли ва чизиксиз масалалар ечимларини сонли моделлаштиришнинг самарали алгоритмлари курилган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари параболик ва ультрапараболик турдаги чизикли ва чизиксиз тенгламалар ечимлари учун янги статистик моделлаштириш алгоритмлари ишлаб чиқилиб ҳисоблаш усуллариининг самарали алгоритмларига асосланган дастурлар мажмуаси яратилган. Яратилган сонли алгоритмлар молиявий инструментлар нархини баҳолашда ва бошқарув қарорларини қабул қилишда қўлланилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги эҳтимоллар назарияси, статистик моделлаштириш, ҳисоблаш математикаси ва функционал анализ усуллариининг фойдаланилган ҳолда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланган. Барча ҳулосалар компьютер ёрдамида ҳисоблаш тажрибаларининг натижалари билан тасдиқланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти, олинган натижалар, чизикли ва чизиксиз параболик ва ультрапараболик тенгламалар учун қўйилган масалаларни ечишдаги илмий тадқиқотларда, стохастик дифференциал тенгламалар билан параболик, ультрапараболик тенгламалар орасидаги боғланишлар ва ечимларни сонли моделлаштириш алгоритмларини яратилганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти тадқиқот натижалари параболик ва ультрапараболик турдаги чизикли ва чизиксиз тенгламалар учун қўйилган чегаравий масалалар орқали фойдаланувчи физик, техник, молиявий ва бошқарув жараёнларни ўрганишга асос бўлиши ва амалий масалаларни сонли ечишга хизмат қилади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши.

Молия ва бошқарув масалаларидаги диффузион тенгламалар ечимларини сонли моделлаштириш бўйича олинган илмий натижалар асосида:

квази-чизикли параболик ва ультрапараболик тенгламалар учун бошланғич-чегаравий масалаларни сонли ечиш алгоритми Флорида давлат университети Дирак институтининг «Monte Carlo Methods for partial differential equations» грант лойиҳасида квази-чизикли масалаларнинг ечимига силжимас баҳо куришда фойдаланилган (АҚШ, Флорида давлат университетининг 2019 йил 1 майдаги маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши Монте Карло усули хатолигини камайтириш имконини берган;

ноизотроп (ультрапараболик) тенгламалар учун чегаравий масалаларни сонли ечиш, кўп ўлчовли опционлар нархини параллел ва асинхрон итерацион методлар орқали ҳисоблаш алгоритмлари Болгария Фанлар академияси Ахборот ва коммуникацион технологиялари институтининг DFNI-102/8 рақамли «Development and Investigation of the Quasi-Monte Carlo Algorithms for Extreme Parallel Computer Systems» грант лойиҳасида чегаравий масалалар ечимлари учун силжимас баҳо куришда фойдаланилган (Болгария Фанлар академияси Ахборот ва коммуникацион технологиялари институтининг 2019

йил 8 майдаги маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши чегаравий масалаларни сонли ечишда параллел алгоритм орқали самарадорликни ошириш имконини берган;

диффузион тенгламаларга қўйилган чегаравий масалаларни ечиш учун қурилган параллел ва асинхрон алгоритмлар «Monte Carlo Methods and Big Data Applications» грант лойиҳасида чизиқли ва чизиқсиз чегаравий масалаларнинг ечимлари учун силжимас баҳолар олишда фойдаланилган (АҚШ, Доминион университетининг 2019 йил 3 майдаги маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши чизиқсиз чегаравий масалаларни сонли ечиш ва сонли ечимларнинг хатолигини камайтириш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 22 та илмий-амалий анжуманларда, жумладан 14 та халқаро ва 8 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилиниши. Диссертация мавзуси бўйича жами 42 та илмий иш чоп этилган, шулардан, битта монография ва Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 15 та мақола, жумладан, 3 таси хорижий ва 12 таси республика журналларида нашр этирилган. Ўзбекистон Республикаси адлия вазирлиги ҳузуридаги интеллектуал мулк агентлиги томонидан яратилган дастурлар учун 7 та гувоҳнома олинган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши. Диссертация кириш қисми, тўртта боб, хулоса, фойдаланилган адабиётлар рўйхати ва иловадан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 179 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиқ берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг «Ультрапараболик тенгламалар ечимларини Монте Карло усуллари орқали сонли моделлаштириш» деб номланувчи биринчи бобида ультрапараболик тенгламалар синфи учун қўйилган бошланғич-чегаравий масалаларини ечишнинг статистик моделлаштириш усуллари кўрилган.

$D \subset R^{2k}$ – чегараланган соҳа ва ∂D , $\Omega = D \times [0, T]$ унинг чегараси, $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{2k})$. $f(x, t)$, $f_1(x, t)$, $f_2(x)$ функциялар учун

куйидаги аралаш масала кўрилган:

$$u(x, t) \in C(D \times [0, \infty)) \cap C^{1,2}(D \times [0, \infty))$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^k \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^k x_i \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_{k+i}} = f(x, t), (x, t) \in \Omega \quad (1)$$

бошланғич шарт

$$u(x, 0) = f_2(x), x \in \bar{D} \quad (2)$$

чегаравий шарт

$$u(x, t) = f_1(x, t), \quad x \in \partial D, \quad t \in [0, \infty). \quad (3)$$

Куйидаги мослик шarti бажарилсин $f_1(x, 0) = f_2(x)$, $x \in \partial D$ учун (1)-(3) масала ечими мавжудлигини фараз қилган ҳолда, ечимни сонли моделлаштириш алгоритмини тузамиз. Алгоритм учун асос сифатида параболик тенгламалар ечимлари учун ўрта арифметик формуласи олинади.

Айтайлик, $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m)$, $m = 2k$. Куйидаги $(m \times m)$ ўлчовли матрицани киритамиз ва уларни $(k \times k)$ блокларга бўламиз, бундай блоклар сони тўртта. Улар куйидаги кўринишга эга:

$$\alpha = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_k & 0 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 4I_k & -2I_k \\ -2I_k & \frac{4}{3}I_k \end{pmatrix}, d(\rho) = \begin{pmatrix} \rho^{\frac{1}{2}}I_k & 0 \\ 0 & \rho^{\frac{3}{2}}I_k \end{pmatrix},$$

бунда $I_k - (k \times k)$ бирлик матрица, $d(\rho) -$ диагональ матрица, a матрица симметрик ва уни куйидагича ёзиш мумкин $a = b^T b$, бу ерда $b -$ матрица, $T -$ транспонирлаш.

$$L_Z(x, t; y, \tau) = d\left(\frac{1}{t-\tau}\right)y - e^{-\beta} d\left(\frac{1}{t-\tau}\right)x$$

$Z(x, t; y, \tau) -$ (1) тенгламанинг фундаментал ечими куйидаги кўринишга эга:

$$Z(x, t; y, \tau) = \pi^{-\frac{m}{2}} \|a\|^{\frac{1}{2}} (t - \tau)^{-m} e^{-(L_Z(x, t; y, \tau))^T a L_Z(x, t; y, \tau)},$$

бунда $\|a\| -$ a матрица детерминанти, $e^{-\beta} = I_m - \beta -$ матрица экспонентаси.

Фундаментал ечим ёрдамида куйидаги соҳани аниқлаймиз $Q_r(x, t)$ ва уни шароида деб айтамыз, чегарасини $\partial Q_r(x, t)$ эса сфероида. бунда $r > 0$ маълум бир параметр бўлиб, шароида радиуси маъносини билдиради.

$$\begin{aligned} Q_r(x, t) &= \{(y, \tau): Z(x, t; y, \tau) > \pi^{-\frac{m}{2}} \|a\|^{\frac{1}{2}} r^{-2m}\} = \\ &= \{(y, \tau): (d\left(\frac{1}{t-\tau}\right)y - e^{-\beta} d\left(\frac{1}{t-\tau}\right)x)^T a (d\left(\frac{1}{t-\tau}\right)y - e^{-\beta} d\left(\frac{1}{t-\tau}\right)x) < \\ &< m \ln \frac{r^2}{t-\tau}, \tau < t\} \end{aligned}$$

Айтайлик, $r > 0$ шундай танланганки, $Q_r(x, t) \subset \bar{\Omega}$ бўлсин. У ҳолда масала ечими учун куйидаги формула ўринли:

$$u(x, t) = (E_r u)(x, t) + \iint_{Q_r(x, t)} [Z(x, t; y, \tau) - \pi^{-\frac{m}{2}} \|a\|^{\frac{1}{2}} r^{-2m}] f(y, \tau) dy d\tau \quad (4)$$

бунда

$$(E_r u)(x, t) = \left(\frac{2m}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \int_0^1 \lambda^{2m-1} \left(\ln \frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{m}{2}} d\lambda \iint_{S_1(0)} u(y(\lambda), \tau(\lambda)) 4H^T(\theta) bab^T H(\theta) ds,$$

бу ерда $S_1(0)$ $(m-1)$ -ўлчовли бирлик сфера, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$, $H(\theta) \in S_1(0)$ m – ўлчовли бирлик вектор,

$$y(\lambda) = e^{-r^2 \lambda \beta} x + (2m \ln \frac{1}{\lambda})^{\frac{1}{2}} d(r^2 \lambda^2) b^{-1} H(\theta), \quad \tau(\lambda) = t - r^2 \lambda^2.$$

$R(x)$ – x нуқтадан D нинг чегарасигача бўлган масофа, $|x|_k^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2$, $R_1(x) = e^{-r^2 \beta} x$ нуқтадан D нинг чегарасигача бўлган масофа,

$$r_1(x) = \left(\frac{R(x)}{|x|_k}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad r_2(x) = \left\{2sh\left(\frac{1}{3} \operatorname{Arcsh}\left(\frac{3eR_1(x)^2}{(8m)}\right)\right)\right\}.$$

Лемма 1. Агар $r = r(x, t) = \min\{r_1(x), r_2(x), t^{\frac{1}{2}}\}$, у ҳолда барча $(x, t) \in \Omega$ учун $Q_r(x, t) \subset \Omega$.

Марков занжирини қурамиз $\{(x^j, t^j)\}_{j=0}^{\infty}$.

$\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ $\left(1 + \frac{m}{2}\right)$ параметрли гамма тақсимотли тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги, $\{\omega^j\}_{j=1}^{\infty}$ – қуйидаги зичлик функцияга эга тасодифий векторлар кетма-кетлиги

$$P(H) = P(H_1, H_2, \dots, H_m) = \frac{1}{2\sigma_m} (\sum_{i=1}^k (H_i + 3^{\frac{1}{2}} H_{k+i})^2) \chi_{S_1(0)}(H),$$

бунда $\chi_S(H)$ – S тўплам индикатори, σ_m – бирлик сфера юзи.

Марков занжири координаталарини қуйидаги формулалар орқали аниқлаймиз:

$$x^0 = x, \quad t^0 = t, \tag{5}$$

$$t^j = t^{j-1} - r_{j-1}^2 e^{\left(-\frac{\xi_j}{m}\right)}, \tag{6}$$

$$x_i^j = x_i^{j-1} + 2r_{j-1} e^{\left(-\frac{\xi_j}{m}\right)} \xi_j^{\frac{1}{2}} \omega_i^j, \tag{7}$$

$$x_{k+i}^j = x_{k+i}^{j-1} + \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} r_{j-1}^3 e^{\left(-\frac{3\xi_j}{2m}\right)} \xi_j^{\frac{1}{2}} \omega_{k+i}^j - r_j^2 e^{\left(-\frac{\xi_j}{m}\right)} x_i^{j-1} - r_{j-1}^3 e^{\left(-\frac{3\xi_j}{2m}\right)} \xi_j^{\frac{1}{2}} \omega_i^j, \tag{8}$$

бунда $i = 1, 2, \dots, k$; $j = 1, 2, \dots$; $r_{j-1} = r(x^{j-1}, t^{j-1})$.

(4) формулани қуйидаги шаклда ёзиш мумкин:

$$u(x^n, t^n) = E_{(x^n, t^n)} u(x^{n+1}, t^{n+1}) + \iint_{Q_r(x^n, t^n)} f(y, \tau) \left[Z(x^n, t^n; y, \tau) - \pi^{-\frac{m}{2}} \|a\|^{\frac{1}{2}} r^{-2m} \right] dy d\tau.$$

Лемма 2. Марков занжири $\{(x^n, t^n)\}_{n=0}^{\infty}$ $n \rightarrow \infty$ да I эҳтимоллик билан чегарадаги тасодифий $(x^\infty, t^\infty) \in \partial\Omega = (\partial D \times (0, t)) \cup (\bar{D} \times \{0\})$ нуқтага интилади.

Марков занжирида тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ ни

куйидагича аниқлаймиз:

$$\eta_n = \sum_{k=0}^{n-1} h(x^k, t^k) f(y^k, \tau^k) + u(x^n, t^n), \quad (9)$$

бунда

$$h(x, t) = \iint_{Q_r(x, t)} \left[Z(x, t; y, \tau) - \pi^{-\frac{m}{2}} \|a\|^{\frac{1}{2}} r^{-2m} \right] dy d\tau = \left(\frac{m}{m+1} \right)^{1+\frac{m}{2}} r^2(x, t)$$

ва (y^k, τ^k) шароидадаги тасодифий нукта, қўзғалмас (x^k, t^k) нукта учун куйидаги зичлик функциясига эга

$$\left[Z(x^k, t^k; y, \tau) - \pi^{-\frac{m}{2}} \|a\|^{\frac{1}{2}} r^{-2m} \right] \cdot [h(x^k, t^k)]^{-1}.$$

$\{\mathfrak{I}_i\}_{i=1}^{\infty}$ $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, $(y^0, \tau^0), (y^1, \tau^1), \dots, (y^{l-1}, \tau^{l-1})$ кетма-кетликлар асосида қурилган σ -алгебра бўлсин. $u_{f, f_1, f_2(x, t)}$ (1) – (3) масаланинг $f(x, t), f_1(x, t), f_2(x)$ мос маълумотлардаги ечими.

Теорема 1. а) $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетлик $\{\mathfrak{I}_i\}_{i=1}^{\infty}$ га нисбатан мартингал ташиқил этади.

б) Агарда $u_{f^2, 0, 0}(x, t) < \infty$ и $u_{|f|, 0, 0}(x, t) < \infty$, у ҳолда $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ текис интегралланувчи квадратик мартингал бўлади.

η_n ни сонли татбиқ этиш учун куйидаги интегрални баҳолаш керак бўлади:

$$\bar{f}(x, t) = \iint_{Q_r(x^n, t^n)} f(y, \tau) \left[Z(x^n, t^n; y, \tau) - \pi^{-\frac{m}{2}} |a|^{\frac{1}{2}} r^{-2m} \right] dy d\tau$$

Лемма 3. $\bar{f}(x, t)$ функцияни қуйидаги математик кутилма кўринишда ёзиш мумкин:

$$\bar{f}(x, t) = \left(\frac{m}{m+1} \right)^{1+\frac{m}{2}} r^2 E_{(x, t)} f(y(\xi, \zeta, \omega), \tau(\xi, \zeta)),$$

бунда

$$y(\xi, \zeta, \omega) = e^{-r^2 e^{(-\frac{\xi}{m+1})} \zeta^{\frac{1}{m}} \beta} x + \left(\frac{m\zeta}{m+1} \right)^{\frac{1}{2}} d \left(r^2 e^{(-\frac{\xi}{m+1})} \zeta^{\frac{1}{m}} \right) b^{-1} \omega, \quad (10)$$

$$\tau(\xi, \zeta) = t - r^2 e^{(-\frac{\xi}{m+1})} \zeta^{\frac{1}{m}}, \quad (11)$$

бу ерда ξ - $\left(\frac{m}{2}\right)$ параметрли гамма тақсимотли тасодифий миқдор, ζ - $\left(2, \frac{2}{m}\right)$ параметрли бета тақсимотли тасодифий миқдор ва ω - m ўлчовли бирлик вектор.

Компьютерда ҳисоблаш мумкин бўлган баҳони қураимиз, ε - еталича кичик сон,

$$(\partial\Omega)_{\varepsilon} = (D \times [0, \varepsilon]) \cup ((\partial D)_{\varepsilon} \times [0, t])$$

чегаранинг ички ε – атрофи ва N_{ε} – жараённи $(\partial\Omega)_{\varepsilon}$ га биринчи тушиши вақти.

$$N_{\varepsilon} = \min\{n: (x^n, t^n) \in (\partial\Omega)_{\varepsilon}\}.$$

R_2 координата бошидан D соҳа чегарасигача бўлган масофа,

$$\theta(\varepsilon) = \min \left\{ \frac{\varepsilon^2}{R^2}, \left(2 \operatorname{sh} \left(\frac{1}{3} \operatorname{Arcsh} \left(\frac{3e\varepsilon^2}{8m} \right) \right) \right)^{\frac{1}{2}}, \varepsilon \right\}$$

Лемма 4. *Қуйидаги тенгсизлик ўринли*

$$E_{(x,t)} N_\varepsilon \leq \frac{\left(\frac{m+1}{m} \right)^{1+\frac{m}{2}} t}{\theta(\varepsilon)}.$$

Теорема 2. η_{N_ε} тасодикий миқдор $u(x, t)$ учун чегараланган дисперсияли силжимас баҳо бўлади.

Айтайлик (x^*, t^*) (x, t) учун чегарадаги яқин нуқтаси, $\psi(x, t) = f_2(x)$, агар $t = 0$ и $\psi(x, t) = f_1(x, t)$, агар $(x, t) \in (\partial D)_\varepsilon \times [0, t]$.

η_{N_ε} баҳода $u(x^{N_\varepsilon}, t^{N_\varepsilon})$ ни $\psi(x^{*N_\varepsilon}, t^{*N_\varepsilon})$ га алмаштириб силжиган, лекин ҳисобланадиган

$$\eta_{N_\varepsilon} = \sum_{k=0}^{N_\varepsilon-1} h(x^k, t^k) f(y^k, \tau^k) + \psi(x^{*N_\varepsilon}, t^{*N_\varepsilon}),$$

баҳо оламиз ва унинг дисперсияси $D\eta_\varepsilon$ чегараланган. Ҳисоблаш натижалар келтирилган.

Ушбу бобнинг 1.2 параграфида Колмогоровнинг умумлаштирилган ультрапараболик тенгламаси учун аралаш турдаги масала ечимини сонли моделлаштиришнинг стохастик алгоритми келтирилган. Масалалар ечими учун эҳтимолий баҳолар олишнинг умумий схемаси, сфералар бўйича тасодикий ҳаракатланиш жараёнининг хусусиятлари, баҳоларнинг кўриниши, хоссалари, теоремалар ва сонли ҳисоблаш натижалар келтирилган.

1.3 параграфда умумлаштирилган ноизотроп диффузия тенгламаси учун Коши масаласи қўрилган:

$$Lu = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \sum_{ij=1}^k \alpha^{ij} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{j=1}^k \sum_{m=1}^l \beta_j^m x^j \frac{\partial u(x, t)}{\partial x^{k+m}} = f(x, t), \quad (12)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (13)$$

бунда α^{ij} ва β_j^m ($i = 1, 2, \dots, k$; $j = 1, 2, \dots, k$; $m = 1, 2, \dots, l$) коэффициентлар, $n = k + l$. (12) – (13) масала ечими мавжуд ва ягоналигини фарз қилиб, ечимни сонли моделлаштиришнинг стохастик алгоритми қўрилган.

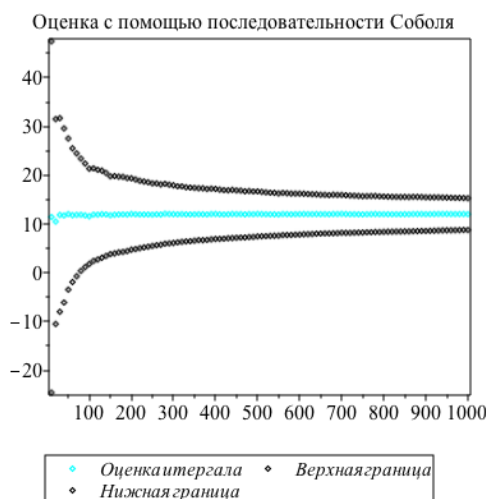
1.4 параграфда (12) тенглама учун бошланғич-чегаравий масаланинг ечимини сонли моделлаштиришнинг стохастик алгоритми келтирилган ва асосланган.

1.5 параграфда параболик ва ультрапараболик типдаги тенгламалар учун чегаравий масалаларни ечишда учрайдиган кўп ўлчовли интегралларни ҳисоблашда тасодикий, квазитасодикий сонларни моделлаштириш алгоритмлари, интегралларни ҳисоблашнинг эффектив параллел алгоритм-

лари ишлаб чиқилган. Холтон, Коробов, Собол ва тасодикий кетма-кетликлар ишлатилган. Олинган натижаларнинг айримлари 1-2 расмларда келтирилган.

Алгоритмлар самарадорлиги таҳлил қилинган. Параллел алгоритмлар учун ҳисоблаш вақтининг процессорлар сонига боғлиқлиги ўрганилган, регрессион модел қурилган.

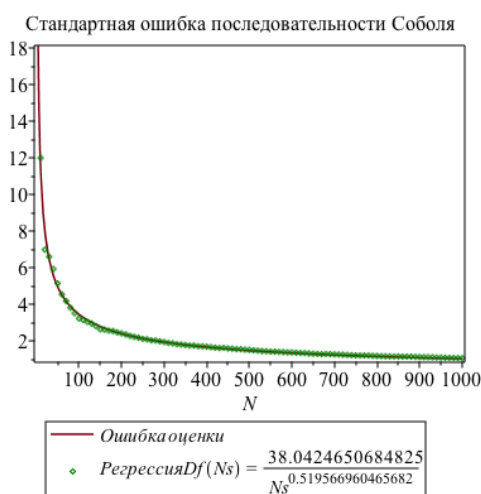
$$t = \alpha \cdot (N_p)^\gamma + \varepsilon \quad (14)$$



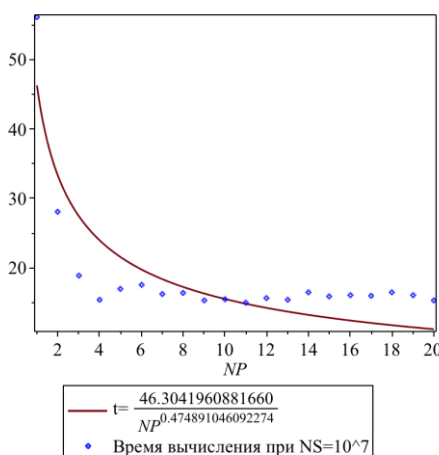
Расм 1: Собол кетма-кетлиги орқали интегрални баҳолаш



Расм 2: Псевдо тасодикий кетма-кетлик орқали интегрални баҳолаш



Расм 3: Хатоликнинг нуқталар сонига боғлиқлиги (N_s)



Расм 4: Ҳисоблаш вақтининг про-цессорлар сонига боғлиқлиги (N_p)

Бу ерда, N_p процессорлар сони, t - ҳисоблаш вақти, α, γ — баҳоладиган параметрлар, ε — хатолик. Натижалар шуни кўрсатдики, параллел алгоритмларнинг самарадорлиги процессорлар сони маълум бир миқдорга етгандан кейин ўртача ўзгармайди. Натижалар 3-4 расмларда берилган.

Диссертациянинг «Ультрапараболик тенгламаларнинг ечимини

стохастик дифференциал тенгламаларни моделлаштириш ёрдамида сонли ечиш» деб номланувчи иккинчи боби махсус стохастик дифференциал тенгламалар ечимларини моделлатириш ёрдамида чизикли, чизиксиз параболик ҳамда ультрапараболик тенгламалар учун қўйилган масалаларнинг ечимига баҳолар куришга бағишланган.

2.1 параграфда турли ультрапараболик тенгламалар учун Коши масаласи қўрилган ва уларнинг ечими учун эҳтимолый қўринишлар олинган.

$$L := \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{p_0} a_{ij}(t, x) \partial_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{p_0} \bar{a}_i(t, x) \partial_{x_i} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i \partial_{x_j}, \quad (15)$$

бунда $(t, x) \in R \times R^m$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $1 \leq p_0 \leq m$.

Фараз қилайлик қуйидаги шартлар бажарилсин:

1. Матрица $A_0(x, t) = (a_{ij}(t, x))_{i,j=1,\dots,p_0}$ R^{p_0} да симметрик ва мусбат аниқланган, $a_{ij}(t, x) = a_{ji}(t, x)$ коэффицентлар узлуксиз ва чегараланган функция.

2. Матрица $B = (b_{ij})$ ўзгармас элементли қуйидаги блокли қўринишга эга:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

бунда B_j - $(p_{j-1} \times p_j)$ ранги p_j булган матрица, бу ерда $p_0 \geq p_1 \geq \dots \geq p_r \geq 1$, $p_0 + p_1 + \dots + p_r = m$.

Қуйидаги $(m \times m)$ ўлчовли блокли матрица ва векторни киритамиз:

$$A(t, x) = \begin{pmatrix} A_0(t, x) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\bar{B}(t, x) = \begin{pmatrix} \bar{a}_1(t, x) \\ \vdots \\ \bar{a}_{p_0}(t, x) \\ x_1 \left(\sum_{j=p_0+1}^{p_0+p_1} b_{1j} \right) \\ x_2 \left(\sum_{j=p_0+1}^{p_0+p_1} b_{2j} \right) \\ \vdots \\ x_{p_0+p_1} \left(\sum_{j=p_0+p_1+1}^{p_0+p_1+p_2} b_{(p_0+p_1)j} \right) \\ \vdots \\ x_{n-p_0} \left(\sum_{j=p_0+p_1+\dots+p_{r-1}+1}^n b_{(n-p_0)j} \right) \end{pmatrix}. \quad (18)$$

У ҳолда L операторни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(t, x) \partial_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^m \bar{b}_i(t, x) \partial_{x_i}, \quad (19)$$

бунда $\bar{b}_i(t, x)$ $\bar{B}(t, x)$ вектор элементи.

Қўйидаги масалани кўрамиз.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + Lu(t, x) &= f(t, x), \quad t < T, \quad x \in R^n, \\ u(T, x) &= \varphi(x)\end{aligned}\quad (20)$$

Масала ечими учун қуйидаги теорема исботланган.

Теорема 3. Агар $\xi_t(\cdot) - A(t, x)$ ва $\bar{B}(t, x)$ диффузион коэффициентли диффузион Марков жараёни бўлса. У ҳолда (20) масала ечими учун қуйидаги эҳтимолий кўриниш ўринли

$$u(t, x) = E_{t,x} \varphi(\xi_t(T)) - E_{t,x} \int_t^T f(s, \xi_t(s)) ds \quad (21)$$

Бу параграфда қуйидаги масалалар ечимлари учун эҳтимолий кўринишлар олинган:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + Lu(t, x) &= f(t, x), \quad 0 \leq t \leq T, \quad x \in R^n, \\ u(0, x) &= \varphi(x).\end{aligned}\quad (22)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + Lu(t, x) + v(t, x)u(t, x) &= f(t, x), \quad t < T, \quad x \in R^n, \\ u(T, x) &= \varphi(x),\end{aligned}\quad (23)$$

бунда $v(t, x)$ – узлуксиз чегараланган функция.

2.2 параграфда турли ультрапараболик тенгламалар учун бошланғич-чегаравий масала кўрилган ва уларнинг ечими учун эҳтимолий кўринишлар олинган, шулардан биттасини келтирамиз.

Айтайлик, $D \subset R^m$ – чегараланган соҳа, ∂D – соҳа чегараси, $\Omega = D \times [0, T]$ унинг чегараси $\partial\Omega = (\partial D \times [0, T]) \cup (\bar{D} \times \{T\})$.

$f(t, x)$, $\psi(t, x)$, $\varphi(x)$ функциялар учун қуйидаги масалани кўрамиз:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + Lu(t, x) &= f(t, x), \quad (t, x) \in \Omega \\ u(t, x) &= \psi(t, x), \quad 0 \leq t < T, \quad x \in \partial D \\ u(T, x) &= \varphi(x).\end{aligned}\quad (24)$$

$\tau_{\partial\Omega}$ орқали $\xi_s(t)$ тасодифий жараённинг Ω соҳадан биринчи чиқиш вақти.

Теорема 4. Агар $\xi_t(\cdot) - A(t, x)$ ва $\bar{B}(t, x)$ диффузион коэффициентли диффузион Марков жараёни бўлса, $I_C - C$ ҳодиса индикатори, $u(t, x) - (24)$ масала ечими бўлса. У ҳолда

$$\begin{aligned}u(x, t) &= E_{t,x} \psi(\tau_{\partial\Omega}, \xi_t(\tau_{\partial\Omega})) I_{\tau_{\partial\Omega} < T} + \\ &+ E_{t,x} \varphi(\xi_t(T)) I_{\tau_{\partial\Omega} = T} - E_{t,x} \int_t^{\tau_{\partial\Omega}} f(\tau, \xi_t(\tau)) d\tau.\end{aligned}\quad (25)$$

2.3 параграфда ечимларнинг эҳтимолий кўринишидаги Марков жараёнларини стохастик дифференциал тенгламалар системасининг ечими сифатида моделлаштириш ва ечимнинг эҳтимолий кўринишлари келтирилган.

(20) масала ечими қуйидагича бўлади:

$$u(t, x) = E_{t,x} \{\varphi(\xi_t(T)) - z_t(T)\}, \quad (26)$$

бунда $\xi_t(s)$, $z_t(s)$, $s \in [t, T]$ – қуйидаги стохастик дифференциал тенгламалар системасининг ечими

$$\begin{cases} d\xi_i(t) = \bar{b}_i(t, \xi)dt + \sum_{j=1}^{p_0} \sigma_{ij}(t, \xi)dw_j(t), & \xi_i(0) = \xi_{i0}, i = 1, \dots, p_0, \\ d\xi_{(p_0+i)}(t) = \bar{b}_{p_0+i}(t, \xi)dt, & \xi_i(0) = x_{i0}, i = 1, \dots, n - p_0 \\ dz_s = f(s, \xi_s)ds, & z_0 = 0. \end{cases} \quad (27)$$

бу ерда $\sigma(t, \xi) = \{\sigma_{ij}(t, \xi)\}_{ij=1,2,\dots,p_0}$ - $p_0 \times p_0$ ўлчовли матрица, $\bar{b}(t, \xi) = \{\bar{b}_i(t, \xi)\}_{i=1,2,\dots,m}$ - вектор, $A(t, \xi) = \sigma(t, \xi)\sigma^T(t, \xi)$.

Умумий ҳолда чизиксиз оператор кўрилган

$$L_t u(t, x) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^m a_{ik}(t, x, u) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{k=1}^m b_k(t, x, u) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x_k}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + L_t u(t, x) + f(t, x, u) &= 0, t_0 \leq t < T, x \in R^n, \\ u(T, x) &= \varphi(x), \end{aligned} \quad (28)$$

масаланинг ечими учун:

$$u(t, x) = E_{t,x}\{\varphi(\xi_t(T)) + z_t(T)\}, \quad (29)$$

ўринли, бунда $\varphi(\xi_t(s)), z_t(s), s \in [t, T]$ – қуйидаги стохастик дифференциал тенгламалар системасининг ечими:

$$\begin{cases} d\xi_s = b(s, \xi_s, u(s, \xi_s))ds + \sigma(s, \xi_s, u(s, \xi_s))dw_s, & \xi_0 = \xi(0); \\ dz_s = f(s, \xi_s, u(s, \xi_s))ds, & z_0 = 0. \end{cases} \quad (30)$$

2.4 параграфда асосан сонли тажриба натижалари келтирилган ва таҳлил қилинган. Ундаги мисоллар аниқ амалиётда учрайдиган молиявий инструментларнинг, хусусан Осиё типигаги опционларнинг нарҳини ҳисоблашга бағишланган. Параллел алгоритмлар қурилган. Масала ечимининг баҳолари ва 99.7% ишонч оралиқлари қурилган.

Диссертациянинг «Квази чизикли диффузион тенгламалар учун бошланғич-чегаравий масалалар ечимларини сонли моделлаштириш» деб номланувчи учинчи бобида статистик моделлаштириш усули орқали квази чизикли диффузион тенгламалар учун бошланғич-чегаравий масалаларни ечиш алгоритмлари келтирилган.

3.1 параграфда масаланинг қўйилиши ва ечимнинг эҳтимолий кўриниши олинган.

Айтайлик $D - R^m$ да чегараланган соҳа, унинг чегараси $\partial D, \Omega = D \times [0, T]$. Берилган $\psi(x, t) \in C(\partial D \times [0, T]), \varphi(x) \in C(\bar{D})$ функциялар учун қуйидаги масалани кўрамиз. Шундай $u(x, t) \in C(\bar{D} \times [0, T])$ функцияни топингки, қуйидаги тенглама ва шартларни қаноатлантирсин:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \Delta u(x, t) + c_1 u(x, t) = c_2 u^2(x, t) + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \quad (31)$$

бошланғич ва чегаравий шартлар

$$u(x, t) = \psi(x, t) \geq 0, \quad (x, t) \in \partial D \times [0, T] \quad (32)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \geq 0, \quad x \in \bar{D} \quad (33)$$

Фараз қилайлик, $f(x, t), \psi(x, t), \varphi(x)$ функциялар ва $c_1 > 0, c_2$ коэффициентлар шундайки, масала ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги таъминланган бўлсин.

(31)-(33) масала ечимининг қуйидаги эҳтимолий кўриниши олинган:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & (1 - q_m)Eu(y(\xi_1, \omega), \tau(\xi_1)) + q_m(1 - rq_{1m}c_1)Eu(y, \tau) + \\ & + q_mrc_2E(((1 - v^{\frac{2}{m}}\exp(-\frac{2\xi}{2+m}))u^2(y_1(\xi, v, \omega), \tau_1(\xi, v)))) + \\ & + q_mrE((1 - v^{\frac{2}{m}}\exp(-\frac{2\xi}{2+m}))f(y_1(\xi, v, \omega), \tau_1(\xi, v))). \end{aligned} \quad (34)$$

Бу ерда

$$q_{1m} = 1 - \frac{1}{2}(\frac{m+2}{m+4})^{1+\frac{m}{2}}, \quad q_m = (1 + \frac{2}{m})^{-(1+\frac{m}{2})},$$

$$g_1(\rho) = \frac{(1 - \exp(-\frac{2\rho}{m}))\rho^{\frac{m}{2}}\exp(-\rho)}{(1 - q_m)\Gamma(1 + \frac{m}{2})}, \quad g_2(\omega) = \frac{1}{\sigma_m} = \frac{\Gamma(\frac{m}{2})}{2\pi^{\frac{m}{2}}}$$

$$y(\rho, \omega) = x + \sqrt{4\tau\rho\exp(-\frac{2\rho}{m})}\omega, \quad \tau(\rho) = t - r\exp(-\frac{2\rho}{m})$$

$$r = r(x, t) = \min\left\{\frac{eR^2(x)}{2m}, t, \frac{1}{c_1}\right\},$$

бунда $R(x)$ – x нуктадан D соҳанинг чегарасигача бўлган масофа, ξ – $g_1(\rho)$ зичлик функцияга эга тасодифий миқдор, ω – $S_1(0)$ сферадаги $g_2(\omega)$ зичлик функцияли тасодифий вектор, $S_1(0)$ – бирлик сфера, ds – бирлик сфера сиртининг элементи.

$$g_3(v) = \frac{(1-v)v^{\frac{2}{m}-1}}{B(2, \frac{2}{m})}, \quad g_4(z) = \frac{e^{-z}z^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma(\frac{m}{2})},$$

бу ерда $g_3(v)$ $(2, \frac{2}{m})$ параметрли бета тақсимот зичлик функцияси, $B(\dots)$ – бета-функция, $g_4(z)$ – $(\frac{2}{m})$ параметрли гамма тақсимот зичлик функцияси, $\Gamma(\dots)$ – гамма-функция,

$$y_1(\xi, v, \omega) = x + (\frac{4m}{2+m}rv^{\frac{2}{m}}\xi\exp(-\frac{2\xi}{2+m}))^{\frac{1}{2}}\omega,$$

$$\tau_1(\xi, v) = t - rv^{\frac{2}{m}}\exp(-\frac{2\xi}{m+2}),$$

бу ерда ξ $g_4(z)$ зичлик функцияли тасодифий миқдор, v $g_3(s)$ зичлик функцияли тасодифий миқдор.

3.2 параграфда (34) эҳтимоллик кўринишга мос келувчи тармоқланувчи тасодифий жараённи моделлаштириш ва унинг таҳлили келтирилган.

Айтайлик, $T_0 = (x, t, 1), T_1, T_2, \dots, T_n$ – тармоқланувчи тасодифий жараённинг траекторияси бўлсин, бунда

$$T_i = (x_i^1, t_n^1, n_i^1; x_i^2, t_n^2, n_i^2; \dots; x_i^{l_i}, t_n^{l_i}, n_i^{l_i}),$$

i моментдаги нуктали тақсимот. Бу (x_i^k, t_i^k) нуктада n_i^k дона частица борлигини билдиради $k = 1, 2, 3, \dots, l_i$ учун.

Теорема 5. T_n жараён бир эҳтимоллик билан Ω соҳа ичида узилади ёки

$T = (x^1, t^1, n^1; x^2, t^2, n^2; \dots; x^k, t^k, n^k)$
 нуқтали тақсимотга интилади, бунда $(x^i, t^i) \in \partial\Omega, i = 1, 2, \dots, k$.

3.3 параграфда (31)-(33) масала ечими мавжудлиги ва яғоналиги таҳлил қилинган.

3.4 параграфда (31)-(33) масала ечими учун силжимаган ва ε – силжиган баҳолар қурилган, уларнинг хусусиятлари ўрганилган.

Тасодифий жараён $T_0, T_1, \dots, T_n$ траекториясида $\theta(x, t, k)$ тасодифий микдор ва $\{\eta_n\}_{n=0}^\infty$ тасодифий микдорлар кетма-кетлиги қуйидагича аниқланган:

$$\theta(x, t, k) = \begin{cases} \frac{3(1-v^{\frac{2}{m}} \exp(-\frac{2\xi}{m+2}))f(x, t)}{2q_{1m}c_1}, & k = 0, \\ 1, & k = 1, \\ \frac{3(1-v^{\frac{2}{m}} \exp(-\frac{2\xi}{m+2}))c_2}{q_{1m}c_1}, & k = 2. \end{cases}$$

$$\eta_n = \prod_{j=1}^{l_n} \theta(x_n^j, t_n^j, n_n^j) (u(x_n^j, t_n^j))^{n_n^j}.$$

Теорема 6. $\{\eta_n\}_{n=0}^\infty$ кетма-кетлик тармоқланувчи жараён траекториясида аниқланган сигма алгебрага нисбатан мартингални ташиқил этади. Агарда $|c_2| \leq \frac{q_{1m}c_1}{3}$, $\max_{(x,t) \in \Omega} |f(x, t)| \leq \frac{2}{3} q_{1m}c_1$ бўлса, унда η_n кетма-кетлик текис интегралланувчи мартингал бўлади.

Айтайлик N_1 – жараённинг Ω соҳа ичида узилиш вақти, N_ε – барча заррачаларнинг $(\partial\Omega)_\varepsilon = D \times [0, \varepsilon] \cup (\partial D)_\varepsilon \times [0, T]$ соҳага тушиш вақти, $N = \min\{N_1, N_2\}$ – жараённинг тўхташ вақти, у ҳолда 5 теоремадан $N < +\infty$ эканлиги келиб чиқади.

Теорема 7. Агарда 6 теорема шартлари бажарилса, у ҳолда η_N $u(x, t)$ учун силжимас баҳо бўлади ва унинг дисперсияси чегараланган.

3.5 параграфда сонли натижалар келтирилган.

3.6 параграфда статистик моделлаштириш алгоритми ихтиёрий тартибли полином учун умумлаштирилган, яъни

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \Delta u(x, t) + c_1 u(x, t) = \sum_{i=2}^K c_i u^i(x, t) + f(x, t), (x, t) \in \Omega, \quad (35)$$

$$u(x, t) = \psi(x, t) \geq 0, x \in \partial D, t \in [0, T], \quad (36)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \geq 0, x \in \bar{D} \quad (37)$$

чегаравий масала ечимини топиш учун статистик моделлаштириш алгоритми ишлаб чиқилган.

3.7 параграфда полиномиал чизиксиз параболик тенгламаларни чизикли тенгламалар системасига келтириб ечимларини моделлаштириш масалалари келтирилган. (31)-(33) масалани ечишда статистик алгоритмлар қуришнинг янгича ёндашуви келтирилган. Масаланинг ечимини ифодаловчи чизиксиз интеграл тенглама олинган, уни чизикли интеграл тенгламалар системасига

алмаштирилган, Марков занжири аниқланган, силжимас ва силжиган баҳолар қурилган.

3.8 параграфда чизиксиз диффузион тенгламаларни асинхрон итерацион усулларда ечиш алгоритмлари келтирилган, олинган натижалар таҳлил қилинган, кўп процессорли компьютерларда асинхрон итерацион усулларнинг самарадорлиги келтирилган.

Диссертациянинг «Чизикли ва чизиксиз диффузион тенгламаларнинг молия ва бошқарув масалаларида қўлланиши» деб номланувчи тўртинчи бобида чизикли ва чизиксиз параболик ва ультрапараболик тенгламалар учун қўйилган бошланғич-чегаравий масалаларни ечимларини баҳолаш алгоритмларини молия ва бошқарув масалаларини ечишга татбиқ этиш имкониятлари кўриб чиқилган. Хусусий ҳосилалар дифференциал тенгламаларни турли хилдаги молиявий деривативларнинг моделларини тайёрлашда, активларнинг нархларини топишда ва бошқарув масалаларини ечишдаги татбиқлари келтирилган.

4.1 параграфда Блэк-Шоулз моделида опционларнинг нархини аниқлашда параболик тенглама учун бошланғич-чегаравий масалалар келтирилган. Европа типидagi сотиш ёки сотиб олиш опционларининг нархи параболик тенглама учун Коши масаласини ечиш орқали келтирилган. Тўсиқли (барьерли) опцион нархи эса параболик тенглама учун бошланғич-чегаравий масала ечими сифатида берилган. Амалий масалаларни ечиш, активлар нархини моделлаштириш ва опционлар нархини топиш учун интерактив дастур яратилган, 5-расмда барьерли опцион учун яратилган интерактив дастурдан лавҳа берилган.

4.2 параграфда стохастик волатилликка эга Хестон модели учун опционлар нархини топиш масалалари қўрилган. Опцион нархларини аниқлаш мурракаб диффузион тенгламалар учун бошланғич-чегаравий масалаларини ечиш орқали топилиши кўрсатилган. Бу модел активлар нархини етарлича тўлиқ акс эттириш имконини беради, инвестицион қарорларни қабул қилишда жуда фойдали, опционлар нархини аниқлашда ўта муҳим инструментлардан бири ҳисобланади. Олдинги бобларда берилган алгоритмлар асосида комплекс амалий дастурлар мажмуаси тузилган.

4.3 параграфда молиявий масалаларни ечишда ультрапараболик тенгламалар учун қўйилган масалалар келтирилган, хусусан Осиё типидagi арифметик ўртачали ва геометрик ўртачали опционларнинг нархини аниқлаш масалалари тўлиқ таҳлил қилинган.

Осиё типидagi опцион нархини $u(t, x_1, x_2)$ орқали белгиласак, K эса T вақтдаги шартномавий нарх, σ^2 – диффузия коэффициенти, r – фоиз ставкаси. Унда арифметик ўртачали Осиё типидagi опцион нархи $u(t, x_1, x_2)$ қуйидаги масала ечими бўлади:

$$-ru(t, x_1, x_2) + \frac{\partial u(t, x_1, x_2)}{\partial t} + rx_1 \frac{\partial u(t, x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \sigma^2 x_1^2 \frac{\partial^2 u(t, x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + x_1 \frac{\partial u(t, x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0$$

сузувчи опцион учун

$$V(T, x_1, x_2) = \max(x_1 - \frac{x_2}{T}, 0) \quad (38)$$

фиксирланган опцион учун

$$V(T, x_1, x_2) = \max(\frac{x_2}{T} - K, 0) \quad (39)$$

Ҳисоблаш натижаси 6-расмда келтирилган.

Геометрик ўртачали Осиё типдаги опцион нархи $u(t, x_1, x_2)$ қуйидаги масала ечими бўлади:

$$-ru(t, x_1, x_2) + \frac{\partial u(t, x_1, x_2)}{\partial t} + rx_1 \frac{\partial u(t, x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \sigma^2 x_1^2 \frac{\partial^2 u(t, x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \log(x_1) \frac{\partial u(t, x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0$$

сузувчи опцион учун

$$V(T, x_1, x_2) = \max(x_1 - e^{\frac{x_2}{T}}, 0) \quad (40)$$

фиксирланган опцион учун

$$V(T, x_1, x_2) = \max(e^{\frac{x_2}{T}} - K, 0) \quad (41)$$

Хобсон–Рожжерс модели учун опцион нархи, қуйидаги масала ечимига келтирилади:

$$\frac{\partial u(\tau, x, y)}{\partial \tau} = a(\tau, x, y) \left(\frac{\partial u(\tau, x, y)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(\tau, x, y)}{\partial x} \right) + x \frac{\partial u(\tau, x, y)}{\partial y} \quad (42)$$

$$u(0, x, y) = \max(1 - e^x, 0), \quad (43)$$

бунда $a(\tau, x, y)$ – берилган детерменистик функция. Қурилган алгоритмлар асосида амалий дастурлар комплекси тузилган, сонли натижалар олинган.

4.4 параграфда кўп ўлчовли (B, S) -бозор таҳлил қилинган, бунда B рисксиз актив, S -вектор, яъни $S = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, бунда $x_i = (x_i(t)), t \geq 0, i = 0, 1, 2, \dots, n$ жараён бўлиб i -чи акция нархи динамикасини беради. μ_i ва σ_i – акция нархи тезлиги ва волатиллиги, $D = (\rho_{ij})_{i,j=1}^n$ корреляцион матрица. Агарда $V = V(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ опцион нархи, $V = \Omega(x_1, x_2, \dots, x_n, T)$ тўлов функцияси бўлса. У ҳолда опцион нархи қуйидаги масала ечими бўлади:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} x_i x_j \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n r x_i \frac{\partial V}{\partial x_i} - rV = 0 \quad (44)$$

чегаравий шарт

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n, T) = \Omega(x_1, x_2, \dots, x_n, T) \quad (45)$$

Қимматбаҳо қоғозлар бозорида портфелнинг нархини аниқлаш масаласи муҳим ҳисобланади. Айтайлик, $SP(t)$ t вақтдаги портфель бўлсин,

$$SP(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t),$$

бунда α_i портфелдаги i -актив салмоғи.

Осиё типдаги портфель нархи портфелнинг ўртача қийматига боғлиқ,

$$\frac{1}{T} \int_0^T SP(t)dt = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t)dt$$

Унда нарх (44) тенгламани қуйидаги чегаравий шарт билан каноатлантиради:

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n, T) = \max\{\frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t)dt - K, 0\} \quad (46)$$

Портфелнинг юқори ва қуйи қийматлари орқали аниқланадиган тўлов функциялари учун опционлар нарҳини аниқлаш масалалари келтирилади.

$$U = \max_{t \leq T}(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t)), \quad D = \min_{t \leq T}(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t)).$$

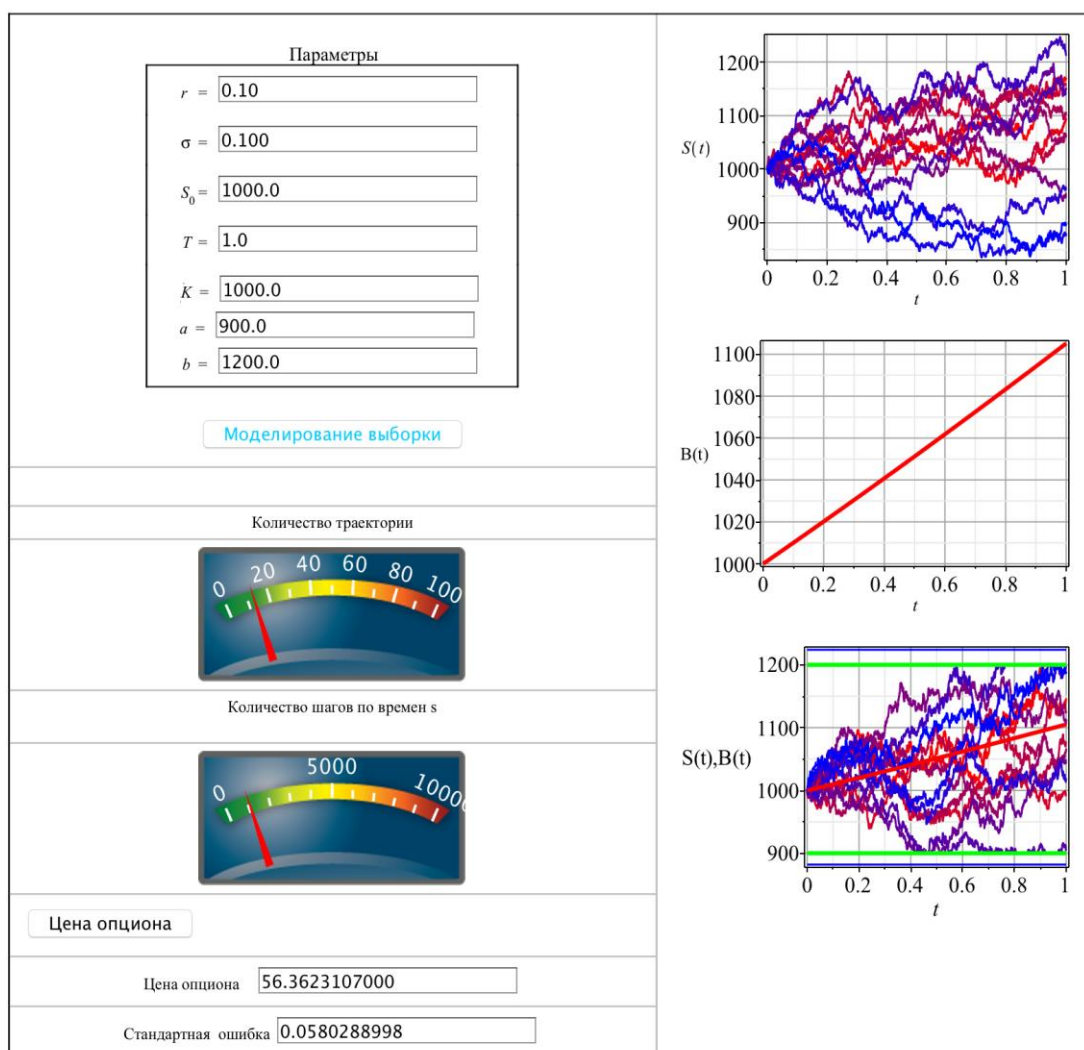
Опцион нарҳи (44) тенглама учун қуйидаги чегаравий шартлар асосида топилади: сотиб олиш опциони учун шарт

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n, T) = \max\{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t)dt - D, 0\} \quad (47)$$

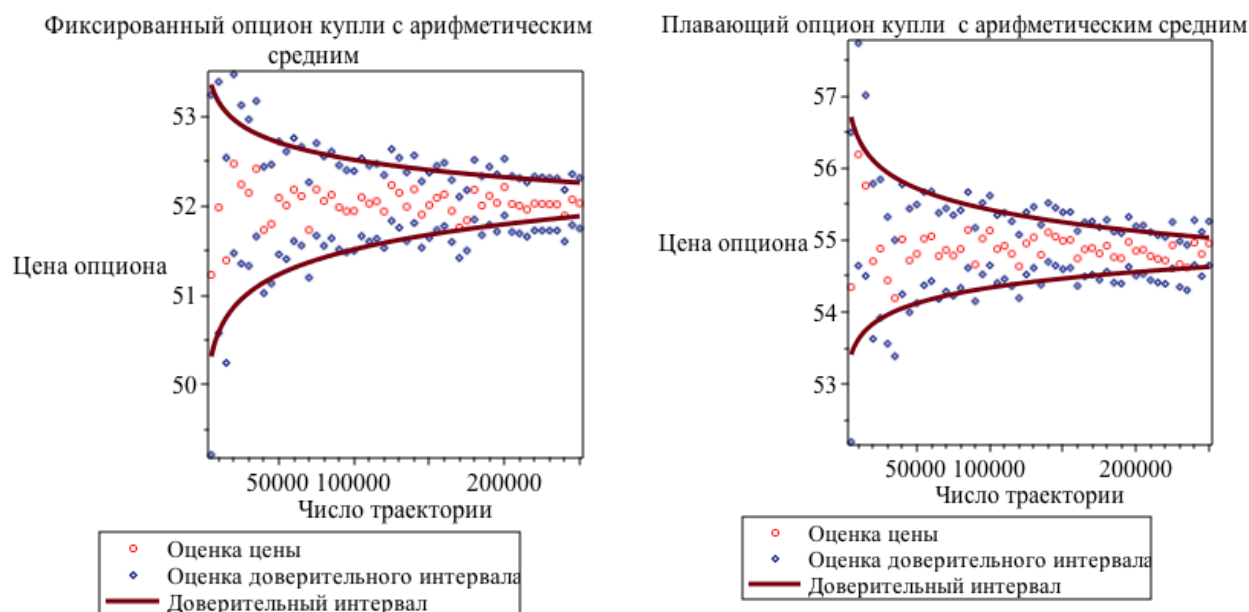
сотиш опциони учун шарт

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n, T) = \max\{U - \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t)dt, 0\} \quad (48)$$

Ҳисоблаш тажрибасининг натижалари берилган.



Расм 5: Тўсиқли опционлар учун актив нарҳи ва опцион нарҳини сонли моделлаштириш дастурининг интерфейси.



Расм 6. Арифметик ўртачали Осиё типдаги опцион нархини моделлаштириш

4.5 параграфда бошқарув қарорларини қабул қилишнинг эҳтимоллик методлари қаралади, ноаниқлик ва риск шароитида ва кўп мезонли бошқарув қарорларини қабул қилишга кўмаклашувчи дастурлар мажмуаси тузилган: «Ноаниқлик ва риск шароитида қарор қабул қилиш (СППУР-НР)», «Иерархик таҳлил усули(СППУР-МАИ)», «Аналитик режалаштириш (СППУР-АП)».

ХУЛОСА

Диссертация диффузион тенгламалар учун қўйилган чегаравий масалалар ечимини сонли моделлаштириш алгоритминини куриш, уларни молиявий ва бошқарув масалаларини ечишдаги татбиқига бағишланган. Асосий натижалар куйидагилардан иборат:

1. Кўп ўлчовли ультрапараболик тенгламалар учун бошланғич-чегаравий ва Коши масалаларини ечишда мураккаб соҳаларда "сфероид" ва "шариод"лар бўйича тасодифий ҳаракатлар орқали статистик моделлаштириш алгоритмлари ишлаб чиқилган.
2. Ультрапараболик тенгламалар учун бошланғич-чегаравий ва Коши масалаларини ечимини сонли моделлаштиришда диффузион тасодифий жараёнлар траекториясида қурилган функционалларни баҳолаш орқали сонли стохастик алгоритмлар ишлаб чиқилган, статистик баҳоларни қуришда стохастик дифференциал тенгламаларни тақрибий ечиш орқали тасодифий жараёнлар моделлаштирилган.
3. Чизиксиз параболик ва ультрапараболик тенгламаларга қўйилган аралаш масалалар ечимларини сонли моделлаштириш учун тармоқланучи Марков тасаддифий жараёнлари ёрдамида янги стохастик алгоритмлар яратилган.

4. Полиномиал чизиксиз тенгламаларни ечишни чизикли тенгламалар системасига келтириб ечиш бўйича янги алгоритмлар ишлаб чиқилган.
5. Кўп процессорли компьютерлар учун параллел ва асинхрон итерацион усуллар орқали чизикли ва чизиксиз масалалар ечимларини сонли моделлаштиришнинг янги алгоритмлари қурилган.
6. Ишлаб чиқилган алгоритмлар асосида амалий компьютер дастурлари мажмуаси яратилган ва амалиётдаги молиявий инструментлар нархини баҳолашда ҳамда бошқарув қарорларини қабул қилишда ишлатилган.
7. Ноаниқлик ва риск шароитида бошқарув қарорларини қабул қилиш ва кўп мезонли қарорлар қабул қилиш методикаси такомиллаштирилган.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.27.06.2017.FM.01.02
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА**

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

БАКОЕВ МАТЁКУБ ТЕШАЕВИЧ

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ДИФФУЗИОННЫХ
УРАВНЕНИЙ В ФИНАНСОВЫХ И УПРАВЛЕНЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ**

05.01.07 Математическое моделирование.
Численные методы и комплекс программ
(физико-математические науки)

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА (DSc)
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК**

Ташкент – 2019 год



Тема диссертации доктора наук (Doctor of Science) зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за №B2017.2.DSc/FM66.

Докторская диссертация выполнена в Институте математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский) размещен на веб-странице Научного совета (<http://fti-kengash.uz/>) и информационно-образовательном портале «ZiyoNet» (www.ziynet.uz).

Научные консультанты:

Расулов Абдужаббор Саттарович

доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты:

Шакенов Канат Кожаяхметович

доктор физико-математических наук, профессор

Шадиметов Холматвай Махкамбоевич

доктор физико-математических наук, профессор

Маматов Алишер Зулунович

доктор технических наук, профессор

Ведущая организация:

Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада аль-Хоразмий

Защита диссертации состоится «___» _____ 2019 года в ___ часов на заседании Научного совета DSc.27.06.2017.FM.01.02 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С докторской диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №___). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «___» _____ 2019 года.
(протокол рассылки №___ от «___» _____ 2019 года).

А.Р.Марахимов

Председатель Научного совета по присуждению научных степеней, д.т.н., профессор

З.Р.Рахмонов

Ученый секретарь Научного совета по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н.

М.М.Арипов

Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научно-прикладные исследования, проводимые на мировом уровне, приводятся к задачам создания математических моделей начально-краевых задач для диффузионных уравнений, следовательно, численное решение таких задач методом статистического моделирования (методом Монте-Карло) имеет важное значение. Диффузионные уравнения (параболические и ультрапараболические) являются объектом исследования в таких областях как, математическая физика, теория динамических систем, биология, экология, экономика, финансы, управление и математическое моделирование. Диффузионные уравнения являются основой при решении широкого круга задач: теплопроводности, ядерной физики, динамических систем, газовой динамики, динамики биологической популяции и генетики, динамики изменения рынка ценных бумаг, управления инвестиционных и финансовых портфелей, управления финансовыми рисками и анализ экологических процессов. Поэтому исследование математических моделей и решения диффузионных уравнений остаётся важной задачей в областях прикладной математики, финансов и управления.

В настоящее время в мире актуальной задачей является расширение и развитие области применения численного моделирования диффузионных уравнений, имеющих необычайно широкий спектр приложений: задачи переноса излучений (ядерные реакторы, атмосферная оптика), задачи газовой динамики, задачи финансовой математики (моделирование управления ценными бумагами и рыночных ситуаций), задачи массового обслуживания (моделирование сложных производственных систем, систем связи и компьютерных сетей), задачи управления инвестиционных процессов. Численное решение таких задач обычно связано со значительными трудностями. Наряду с детерминированными методами, разработка, развитие и применение методов статистического моделирования для решения краевых задач для линейных и нелинейных параболических и ультрапараболических уравнений является важной задачей. Научные и теоретические исследования, проводимые в вышеупомянутых областях, создание пакетов прикладных программ и их применение подтверждают целенаправленность темы диссертации.

В нашей стране усилилось внимание к актуальным научным направлениям, имеющим прикладное значение, в частности, отдельно уделено внимание изучению диффузионных уравнений и их приложениям. В этой связи и в том числе получены весомые результаты по проведению ряда научных исследований, посвященных решению начально-краевых задач для параболических и ультрапараболических уравнений. В постановлении Кабинета Министров Республики Узбекистан обозначены «Основные задачи и направления ведения научных исследований на уровне международных

стандартов по приоритетным направлениям дифференциальных уравнений и математической физики, теория динамических систем, теории вероятностей и математической статистики, прикладной математики и математического моделирования»³. Для обеспечения исполнения постановления имеет важное значение развитие методов численного моделирования решений диффузионных параболических и ультра-параболических уравнений в финансовых и управленческих задачах, создание пакетов прикладных программ и их приложения в прикладных задачах.

Диссертация служит осуществлению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан № УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», Постановлении Президента Республики Узбекистан № ПП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», № ПП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», № ПП-3682 от 27 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов», доклада Президента Республики Узбекистана Ш.Мирзияева 24 мая 2019 года на встречи с представителями науки и образования в Национальном университете Узбекистана, а также в других нормативно-правовых актах по данному направлению.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики.

Настоящее исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации⁴. В настоящее время научные исследования по методам численного моделирования решений начально-краевых задач для диффузионных уравнений и их применению к прикладным задачам ведутся в крупных научных центрах и высших учебных заведениях мира, в частности таких как: University of Bologna(Италия), Centre for Advanced Computing and Emerging Technologies (ACET), University of Leicester, University of Reading

³ Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан» от 18 мая 2017 года.

⁴ Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации: Journal of Approximation Theory, Applied Mathematics and Computation, Journal of Computational and Applied Mathematics <http://www.journals.elsevier.com/mathematics>; Calcolo, Numerical Algorithms, BIT Numerical Mathematics, Сибирский журнал вычислительной математики, Журнал вычислительной математики и математической физики, <http://www.springer.com/mathematics>, также были использованы и другие источники.

(Великобритания), Institute for Parallel Processing, Bulgarian Academy of Sciences, the National Environmental Research Institute, University of North Carolina at Chapel Hill, Florida State University, Brooklyn College (США), University of Mainz, Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics (Германия), Московский физико-технический институт, Санкт-Петербургский Государственный Университет, Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения РАН, Казахский национальный университет, Уральский федеральный университет и др.

В результате исследований, проведенных в мире, по решению краевых задач для диффузионных параболических и ультрапараболических уравнений и численного решения этих задач получены, в том числе, следующие результаты: найдены фундаментальные решения, получены формулы о среднем значении а также изучены прикладные приложения (University of Bologna, Московский физико-технический институт), построены и изучены алгоритмы метода статистического моделирования и получены несмещенные оценки решений для уравнений в частных производных эллиптического и параболического типов (Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Санкт-Петербургский Государственный Университет), изучены свойства процессов блуждания по специальным областям при численном решении задач теплопроводности (University of Texas, USA), построены функционалы от траектории Марковской цепи, слабо аппроксимирующие решения системы стохастических дифференциальных уравнений (University of Leicester, Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics (WIAS), Уральский федеральный университет).

На сегодняшний день в мире широко ведутся научные исследования по решениям краевых задач для линейных и нелинейных диффузионных уравнений. В частности, научные исследования ведутся в приоритетных направлениях таких как построение фундаментальных решений, применение статистического моделирования для решения краевых задач, математического моделирования при помощи стохастических дифференциальных уравнений для параболических и ультрапараболических уравнений, построения вычислительных алгоритмов и численных решений задач рынка ценных бумаг, финансов и управления.

Степень изученности проблемы. Связи между Марковскими процессами, линейными и нелинейными уравнениями известны давно. Эта тема обсуждалась в работах Е.Б.Дынкина, А.А.Юшкевича, А.Д.Вентцель, Ю.Л.Далецкого, Л.Т.Заплитной, А.А.Скорохода, Б.А.Севостьянова, хотя вопрос об использовании ими метода Монте-Карло для них не затрагивался. Впервые в этом направлении оригинальные результаты были получены С.М.Ермаковым. Дальнейшее развитие этой теории осуществлено в работах Г.А.Михайлова, В.В.Некруткина, А.С.Расулова, Р.Н.Макарова, А.А.Сипина,

Г.М.Раимовой, А.З.Веселовской, К.К.Сабельфелда, Н.А.Симонова и др. Решением краевых задач приведением к системам стохастических дифференциальных уравнений занимались Г.Н.Мильштейн, М.В. Третьяков, Я.И. Белополюская.

Ультрапараболические уравнения впервые получены в работах Колмогорова в связи с исследованием теории случайных процессов. Дальнейшие фундаментальные работы по этим направлениям велись следующими авторами: А.М. Ильин, Н.С. Генчев, О.А. Ладыженская, Л.П.Купцов, И.М. Сонин, а также представителями Итальянской математической школы: А. Pascucci, E. Lanconelli, S.Polidoro, M.Manfredini, F.Antonelli, E.Varucci, M.Di Francesco и других .

Среди вышеупомянутых научных работ исследования А.С. Сипина, А.С. Расулова и Г.М. Раимовой ближе к теме диссертации. В их работах в основном исследованы линейные и нелинейные краевые задачи для эллиптических, параболических и систем параболических уравнений методом статистического моделирования. В их работах, однако, не затронуты вопросы численного исследования решения краевых задач для ультрапараболических уравнений и их приложения к финансовым и управленческим задачам.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами научно-исследовательского учреждения, где выполнена диссертация.

Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ Ф.1.1.1 «Стохастический и статистический анализ случайных процессов и их применения» (2003-2007 гг.), Ф005-Ф008 «Асимптотический анализ случайных процессов и его применение в теории принятия решений» (2007-2011 гг.), Ф4-ФА-Ф009 «Задачи аппроксимации для распределения вероятностей и их применения в математической статистике» (2012-2017 гг.), ОТ-Ф4-83 «Предельные теоремы для вероятностных распределений и статистический анализ функциональных данных» (2017-2019) Института математики АН Узбекистана.

Целью исследования является разработка новых алгоритмов численного моделирования для решения многомерных начально-краевых задач и задачи Коши для класса линейных и нелинейных диффузионных уравнений ультрапараболического и параболического типов.

Задачи исследования:

разработать алгоритмы статистического моделирования блуждания по "сфероидам" и "шароидам" в сложных областях для численного решения начально-краевых задач и задачи Коши для широкого класса многомерных ультрапараболических уравнений;

построить стохастические алгоритмы для численного моделирования решений начально-краевых задач и задачи Коши для ультрапараболических уравнений путем оценки математического ожидания функционала от траектории диффузионного случайного процесса, для получения

статистических оценок использовать способы аппроксимации случайного процесса, найденные путем моделирования решения системы стохастических дифференциальных уравнений;

создать новые стохастические алгоритмы для численного моделирования решений начально-краевых задач для квазилинейных параболических и ультрапараболических уравнений;

создать новые алгоритмы статистического моделирования решения задачи с полиномиальной нелинейностью приведением к системам линейных уравнений;

разработать новые методы численного моделирования решений нелинейных задач с использованием параллельных и асинхронных итераций, реализуемых на многопроцессорных компьютерах;

создать пакеты прикладных программ на основе разработанных алгоритмов а также применить разработанные алгоритмы для решения различных конкретных задач оценки стоимости производных финансовых инструментов и принятия управленческих решений;

усовершенствовать методику принятия управленческих решений в условиях неопределённости и риска и многокритериальные методы принятия решений.

Объектом исследования являются начально-краевые задачи в многомерных областях, задачи Коши для линейных и квазилинейных диффузионных уравнений ультрапараболических и параболических типов, стохастические дифференциальные уравнения, Марковские случайные процессы, финансовые модели и задачи принятия управленческих решений.

Предметом исследования являются численные статистические алгоритмы моделирования решений начально-краевых задач, задачи Коши для линейных и квазилинейных диффузионных уравнений ультрапараболических и параболических типов, стохастические дифференциальные уравнения и преобразование Ито, а также пакеты прикладных программ для решений финансовых и управленческих задач.

Методы исследования. В работе используются методы вычислительной математики, классической теории уравнений в частных производных, теория методов Монте-Карло, теория вероятностей, методы математической статистики, методы дифференцирования нелинейных операторов функционального анализа, теория интегральных и дифференциальных уравнений, теории стохастических дифференциальных уравнений. Для исследования свойств траекторий случайных блужданий, на которых строятся численные статистические оценки решений краевых задач и свойств самих оценок, применяется теория мартингалов.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

разработаны алгоритмы статистического моделирования блуждания по "сфероидам" и "шароидам" в сложных областях для численного решения

начально-краевых задач и задачи Коши для широкого класса многомерных ультрапараболических уравнений;

построены стохастические алгоритмы для численного моделирования решений начально-краевых задач и задачи Коши для ультрапараболических уравнений путем оценки математического ожидания функционала от траектории диффузионного случайного процесса, для получения статистических оценок использованы способы аппроксимации случайного процесса, найденные путем моделирования решения системы стохастических дифференциальных ;

созданы новые стохастические алгоритмы для численного моделирования решений начально-краевых задач для квазилинейных параболических и ультрапараболических уравнений с использованием ветвящихся Марковских процессов;

созданы новые алгоритмы статистического моделирования решения задачи с полиномиальной нелинейностью приведением к системам линейных уравнений;

разработаны новые методы численного моделирования решений нелинейных задач с использованием параллельных и асинхронных итераций, реализуемых на многопроцессорных компьютерах.

Практические результаты исследования заключаются в следующем:

разработаны новые алгоритмы статистического моделирования для решения линейных и нелинейных параболических и ультрапараболических уравнений, созданы пакеты прикладных программ на основе предложенных алгоритмов и применены для оценки стоимости производных финансовых инструментов и принятия управленческих решений.

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью математических рассуждений, использованием теории современных методов статистического моделирования, теории вероятностей, вычислительной математики, функционального анализа. Все теоретические результаты подтверждены вычислительными экспериментами.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научное значение результатов исследования заключается в том, что полученные в работе научные результаты могут быть использованы для дальнейших исследований краевых задач для линейных и квазилинейных параболических и ультрапараболических уравнений, для исследования связи между системами стохастических дифференциальных уравнений с уравнениями ультрапараболических типов, а также служить основой для развития разработки алгоритмов численного моделирования.

Практическая значимость диссертации определяется применением полученных в работе научных результатов в изучении физических, технических, управленческих и финансовых процессов, описываемых начально-краевыми задачами для линейных, квазилинейных параболических

и ультра-параболических уравнений, а также в численном моделировании решений краевых задач.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты по численному моделированию решений диффузионных уравнений в финансовых и управленческих задачах были внедрены в практику в следующих направлениях:

разработанные численные алгоритмы решений смешанных краевых задач для квазилинейных параболических и ультрапараболических уравнений использованы в гранте института математики им. Дирака «Monte Carlo Methods for partial differential equations» при построения несмещенных оценок решения линейных уравнений для уменьшения дисперсий оценок. Использование научных результатов диссертации дали уменьшения ошибки вычисления и увеличения эффективности параллельного алгоритма при решение линейных уравнений (Справка от 1 мая 2019 года, Университета Флорида, США);

алгоритмы численного решения краевых задач для ультрапараболических (неизотропных) уравнений, методы оценки цен многомерных опционов с использованием параллельных и асинхронных алгоритмов, в гранте «Application and Parallel Implementation Quasi-Monte Carlo Integration and Financial application: Parallel portfolio optimization» были использованы при конструировании несмещенных оценок решений. Использование научных результатов диссертации позволили значительно уменьшить дисперсию несмещенных оценок решений краевых задач, а также увеличить эффективность вычислительного алгоритма (Справка от 8 мая 2019, Института информационных и коммуникационных технологий, Академии наук Болгарии);

построенные параллельные и асинхронные методы решения краевых задач для диффузионных уравнений использованы в гранте «Monte Carlo Methods and Big Data Applications» для решения задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца при построении несмещенных оценок решений краевых задач. Использование научных результатов позволило решить задачу при помощи метода Монте Карло и уменьшение ошибки вычислительного метода. (справка от 03 мая 2019 года, Department of Computer science, Old Dominion university, Virginia, USA).

Апробация результатов исследования.

Результаты данного исследования были обсуждены на 22 научно-практических конференциях, в том числе на 14 международных и 8 республиканских.

Опубликованность результатов исследования.

По теме диссертации опубликованы 42 научные работы, в том числе одна монография и 15 статей, напечатанных в журналах, входящих в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией

Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций. Из них 3 статьи опубликованы в зарубежных журналах и 12 статей – в республиканских научных изданиях. Получено 7 свидетельств, выданных Агентством по интеллектуальной собственности Республики Узбекистан на программные продукты, разработанные на основе результатов исследования.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованной литературы и приложения. Объем диссертации составляет 179 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследования, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту основные научные положения.

В первой главе диссертации, названной "Численное моделирование решений ультрапараболических уравнений методами Монте-Карло" рассматриваются методы статистического моделирования для решения начально-краевых задач и задачи Коши для класса ультрапараболических уравнений.

В параграфе 1.1 предлагается метод численного моделирования решения смешанной задачи для ультрапараболического уравнения Колмогорова.

Предположим, что $D \subset R^{2k}$ – ограниченная область с границей ∂D , $\Omega = D \times [0, T]$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{2k})$. Для функций $f(x, t)$, $f_1(x, t)$, $f_2(x)$ рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$u(x, t) \in C(D \times [0, \infty)) \cap C^{1,2}(D \times [0, \infty))$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^k \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^k x_i \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_{k+i}} = f(x, t), (x, t) \in \Omega \quad (1)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = f_2(x), x \in \bar{D} \quad (2)$$

и граничным условием

$$u(x, t) = f_1(x, t), x \in \partial D, t \in [0, \infty). \quad (3)$$

Пусть выполняются условия согласования $f_1(x, 0) = f_2(x)$ для $x \in \partial D$. В предположении существования решения задачи (1)-(3) построим численный алгоритм её решения. Основой для построения численного алгоритма является формула параболического среднего.

Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m)$, $m = 2k$. Введём матрицы размера $(m \times m)$ и разобьём их горизонталями и вертикалями на

квадратичные блоки размера $(k \times k)$, число таких блоков равно четырём. Эти матрицы в блочной записи имеют следующий вид:

$$\alpha = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_k & 0 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 4I_k & -2I_k \\ -2I_k & \frac{4}{3}I_k \end{pmatrix}, d(\rho) = \begin{pmatrix} \rho^{\frac{1}{2}}I_k & 0 \\ 0 & \rho^{\frac{3}{2}}I_k \end{pmatrix},$$

где I_k – единичная матрица размера $(k \times k)$, $d(\rho)$ – диагональная матрица, матрица a является симметричной и положительно определенной, поэтому ее можно представить в виде $a = b^T b$, где b – невырожденная матрица, T – операция транспонирования.

Пусть

$$L_Z(x, t; y, \tau) = d\left(\frac{1}{t-\tau}\right)y - e^{-\beta} d\left(\frac{1}{t-\tau}\right)x$$

и $Z(x, t; y, \tau)$ – фундаментальное решение уравнение (1) имеет следующий вид

$$Z(x, t; y, \tau) = \pi^{-\frac{m}{2}} \|a\|^{\frac{1}{2}} (t - \tau)^{-m} e^{-(L_Z(x, t; y, \tau))^T a L_Z(x, t; y, \tau)},$$

где $\|a\|$ – определитель матрицы a , $e^{-\beta} = I_m - \beta$ – экспонента матрицы.

С помощью фундаментального решения определим область $Q_r(x, t)$, которую назовем шароидом, а $\partial Q_r(x, t)$ – сфероидом, где $r > 0$ некоторый параметр, имеющий смысл радиуса

$$\begin{aligned} Q_r(x, t) &= \{(y, \tau): Z(x, t; y, \tau) > \pi^{-\frac{m}{2}} \|a\|^{\frac{1}{2}} r^{-2m}\} = \\ &= \{(y, \tau): (d\left(\frac{1}{t-\tau}\right)y - e^{-\beta} d\left(\frac{1}{t-\tau}\right)x)^T a (d\left(\frac{1}{t-\tau}\right)y - e^{-\beta} d\left(\frac{1}{t-\tau}\right)x) < \\ &< m \ln \frac{r^2}{t-\tau}, \tau < t\} \end{aligned}$$

Пусть $r > 0$ такое, что $Q_r(x, t) \subset \bar{\Omega}$. Тогда для решения задачи справедлива следующая формула:

$$u(x, t) = (E_r u)(x, t) + \iint_{Q_r(x, t)} \left[Z(x, t; y, \tau) - \pi^{-\frac{m}{2}} \|a\|^{\frac{1}{2}} r^{-2m} \right] f(y, \tau) dy d\tau, \quad (4)$$

где

$$(E_r u)(x, t) =$$

$$\left(\frac{2m}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \int_0^1 \lambda^{2m-1} \left(\ln \frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{m}{2}} d\lambda \iint_{S_1(0)} u(y(\lambda), \tau(\lambda)) 4H^T(\theta) b a b^T H(\theta) ds,$$

Здесь $S_1(0) - (m-1)$ -мерная единичная сфера с обычными ортогональными координатами $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$, $H(\theta) \in S_1(0)$, m -мерный единичный вектор,

$$y(\lambda) = e^{-r^2 \lambda \beta} x + (2m \ln \frac{1}{\lambda})^{\frac{1}{2}} d(r^2 \lambda^2) b^{-1} H(\theta), \quad \tau(\lambda) = t - r^2 \lambda^2.$$

Пусть $R(x)$ – расстояние от точки x до границы D , $|x|_k^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2$, $R_1(x)$ – расстояние от точки $e^{-r^2 \beta} x$ до границы D ,

$$r_1(x) = \left(\frac{R(x)}{|x|_k}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad r_2(x) = \left\{2sh\left(\frac{1}{3} \operatorname{Arcsh}\left(\frac{3eR1(x)^2}{(8m)}\right)\right)\right\}.$$

Лемма 1. Если $r = r(x, t) = \min\{r_1(x), r_2(x), t^{\frac{1}{2}}\}$, то $Q_r(x, t) \subset \Omega$ для $(x, t) \in \Omega$.

Построим Марковскую цепь $\{(x^j, t^j)\}_{j=0}^{\infty}$. Пусть $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ последовательность независимых гамма-распределенных случайных величин с параметром $\left(1 + \frac{m}{2}\right)$, $\{\omega^j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность независимых векторов с плотностью распределения

$$P(H) = P(H_1, H_2, \dots, H_m) = \frac{1}{2\sigma_m} \left(\sum_{i=1}^k (H_i + 3^{\frac{1}{2}} H_{k+i})^2\right) \chi_{S_1(0)}(H),$$

где $\chi_S(H)$ — индикатор множества S , σ_m — площадь поверхности единичной сферы.

Определим цепь Маркова в $\bar{\Omega}$ следующими рекуррентными соотношениями:

$$x^0 = x, \quad t^0 = t \quad (5)$$

$$t^j = t^{j-1} - r_{j-1}^2 e^{\left(-\frac{\xi_j}{m}\right)} \quad (6)$$

$$x_i^j = x_i^{j-1} + 2r_{j-1} e^{\left(-\frac{\xi_j}{m}\right)} \xi_j^{\frac{1}{2}} \omega_i^j \quad (7)$$

$$x_{k+i}^j = x_{k+i}^{j-1} + \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} r_{j-1}^3 e^{\left(-\frac{3\xi_j}{2m}\right)} \xi_j^{\frac{1}{2}} \omega_{k+i}^j - r_j^2 e^{\left(-\frac{\xi_j}{m}\right)} x_i^{j-1} - r_{j-1}^3 e^{\left(-\frac{3\xi_j}{2m}\right)} \xi_j^{\frac{1}{2}} \omega_i^j, \quad (8)$$

где $i = 1, 2, \dots, k$; $j = 1, 2, \dots$; $r_{j-1} = r(x^{j-1}, t^{j-1})$

Теперь формулу (4) мы можем записать в следующем виде:

$$u(x^n, t^n) = E_{(x^n, t^n)} u(x^{n+1}, t^{n+1}) + \\ + \iint_{Q_r(x^n, t^n)} f(y, \tau) \left[Z(x^n, t^n; y, \tau) - \pi^{-\frac{m}{2}} \|a\|^{\frac{1}{2}} r^{-2m} \right] dy d\tau$$

Лемма 2. Марковская цепь $\{(x^n, t^n)\}_{n=0}^{\infty}$ сходится при $n \rightarrow \infty$ с вероятностью 1 к случайной точке $(x^{\infty}, t^{\infty}) \in \partial\Omega = (\partial D \times 0, t) \cup (\bar{D} \times \{0\})$.

Определим последовательность случайных величин $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ следующим равенством:

$$\eta_n = \sum_{k=0}^{n-1} h(x^k, t^k) f(y^k, \tau^k) + u(x^n, t^n), \quad (9)$$

где

$$h(x, t) = \iint_{Q_r(x, t)} \left[Z(x, t; y, \tau) - \pi^{-\frac{m}{2}} \|a\|^{\frac{1}{2}} r^{-2m} \right] dy d\tau = \left(\frac{m}{m+1}\right)^{1+\frac{m}{2}} r^2(x, t)$$

и (y^k, τ^k) случайная точка шароида при фиксированном (x^k, t^k) имеющая плотность распределения

$$\left[Z(x^k, t^k; y, \tau) - \pi^{-\frac{m}{2}} \|a\|^{\frac{1}{2}} r^{-2m} \right] \cdot [h(x^k, t^k)]^{-1}.$$

Пусть $\{\mathfrak{F}_i\}_{i=1}^{\infty}$ последовательность σ -алгебр, порожденная случайными величинами $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ последовательностью векторов $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ и случайными точками $(y^0, \tau^0), (y^1, \tau^1), \dots, (y^{l-1}, \tau^{l-1})$, $u_{f, f_1, f_2}(x, t)$ решение задачи (1) – (3), отвечающее данным $f(x, t), f_1(x, t), f_2(x)$.

Теорема 1. а) Последовательность $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует мартингал относительно σ -алгебры $\{\mathfrak{F}_i\}_{i=1}^{\infty}$.

б) Если $u_{f^2, 0, 0}(x, t) < \infty$ и $u_{|f|, 0, 0}(x, t) < \infty$, то $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ является квадратично интегрируемым мартингалом.

Для численной реализации оценки η_n необходимо оценить значение следующего интеграла:

$$\bar{f}(x, t) = \iint_{Q_r(x^n, t^n)} f(y, \tau) \left[Z(x^n, t^n; y, \tau) - \pi^{-\frac{m}{2}} |a|^{\frac{1}{2}} r^{-2m} \right] dy d\tau$$

Лемма 3. Функцию $\bar{f}(x, t)$ можно представить в виде математического ожидания выражения:

$$\bar{f}(x, t) = \left(\frac{m}{m+1} \right)^{1+\frac{m}{2}} r^2 E_{(x, t)} f(y(\xi, \zeta, \omega), \tau(\xi, \zeta)),$$

где

$$y(\xi, \zeta, \omega) = e^{-r^2 e^{(-\frac{\xi}{m+1})} \zeta^{\frac{1}{m}} \beta} x + \left(\frac{m\zeta}{m+1} \right)^{\frac{1}{2}} d \left(r^2 e^{(-\frac{\xi}{m+1})} \zeta^{\frac{1}{m}} \right) b^{-1} \omega, \quad (10)$$

$$\tau(\xi, \zeta) = t - r^2 e^{(-\frac{\xi}{m+1})} \zeta^{\frac{1}{m}}, \quad (11)$$

здесь ξ гамма-распределенная случайная величина с параметром $\left(\frac{m}{2}\right)$, ζ бета-распределенная случайная величина с параметром $\left(2, \frac{2}{m}\right)$ и ω изотропный единичный вектор в R^m .

Вычислительно реализуемая оценка строится следующим образом. Пусть ε -достаточно мала,

$$(\partial\Omega)_{\varepsilon} = (D \times [0, \varepsilon]) \cup ((\partial D)_{\varepsilon} \times [0, t])$$

внутренняя ε – окрестность границы и N_{ε} – момент первого попадания процесса на $(\partial\Omega)_{\varepsilon}$,

$$N_{\varepsilon} = \min\{n: (x^n, t^n) \in (\partial\Omega)_{\varepsilon}\}.$$

Пусть R_2 расстояние от начала координат до границы области D .

$$\theta(\varepsilon) = \min \left\{ \frac{\varepsilon^2}{R_2^2}, \left(2 \operatorname{sh} \left(\frac{1}{3} \operatorname{Arcsh} \left(\frac{3e\varepsilon^2}{8m} \right) \right) \right)^{\frac{1}{2}}, \varepsilon \right\}$$

Лемма 4. Имеет место следующее неравенство

$$E_{(x, t)} N_{\varepsilon} \leq \frac{\left(\frac{m+1}{m} \right)^{1+\frac{m}{2}} t}{\theta(\varepsilon)}.$$

Теорема 2. Случайная величина $\eta_{N_{\varepsilon}}$ является несмещенной оценкой с конечной дисперсией для $u(x, t)$.

Пусть (x^*, t^*) ближайшая точка границы к точке (x, t) , $\psi(x, t) = f_2(x)$, если $t = 0$ и $\psi(x, t) = f_1(x, t)$, если $(x, t) \in (\partial D)_\varepsilon \times [0, t]$.

Заменив $u(x^{N_\varepsilon}, t^{N_\varepsilon})$ на $\psi(x^{*N_\varepsilon}, t^{*N_\varepsilon})$ в η_{N_ε} , получим смещенную, но практически реализуемую оценку для $u(x, t)$, $D\eta_\varepsilon$ которой конечна.

$$\eta_{N_\varepsilon} = \sum_{k=0}^{N_\varepsilon-1} h(x^k, t^k) f(y^k, \tau^k) + \psi(x^{*N_\varepsilon}, t^{*N_\varepsilon}),$$

Приведены результаты численных экспериментов.

В параграфе 1.2 предлагается стохастический алгоритм численного моделирования решения смешенной задачи для обобщенного уравнения Колмогорова. Приведено вероятностное представление решения задачи, сконструирован Марковский процесс, согласованный с вероятностным представлением, получены формулы для моделирования координат Марковского процесса, построены несмещенные и ε – смещенные оценки, доказаны аналогичные теоремы и леммы.

В параграфе 1.3 рассматривается алгоритм численного моделирования решения задачи Коши для обобщенного уравнения неизотропной диффузии.

$$Lu = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \sum_{ij=1}^k \alpha^{ij} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{j=1}^k \sum_{m=1}^l \beta_j^m x^j \frac{\partial u(x, t)}{\partial x^{k+m}} = f(x, t) \quad (12)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (13)$$

где α^{ij} и β_j^m ($i = 1, 2, \dots, k$; $j = 1, 2, \dots, k$; $m = 1, 2, \dots, l$) постоянные коэффициенты, $n = k + l$.

Предполагая существование и единственность решения задач (12) – (13), построен численный стохастический алгоритм для решения.

В параграфе 1.4 предлагается стохастический алгоритм численного моделирования решения начально-краевой задачи для уравнения (12).

В параграфе 1.5 рассматриваются алгоритмы численного моделирования квазислучайных последовательностей для вычисления многомерных интегралов, втекающих при решении краевых задач для параболических и ультрапараболических уравнений.

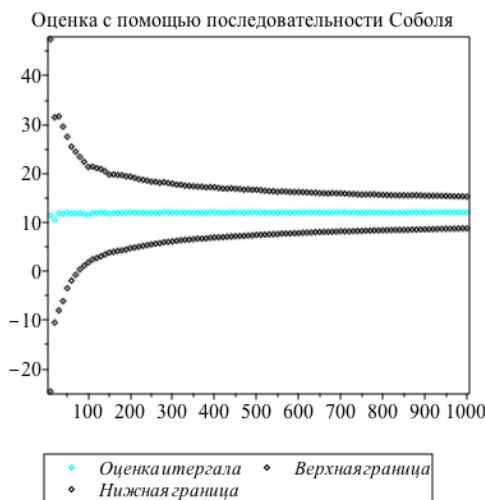


Рис. 1: Оценка интеграла с помощью последовательности Соболя

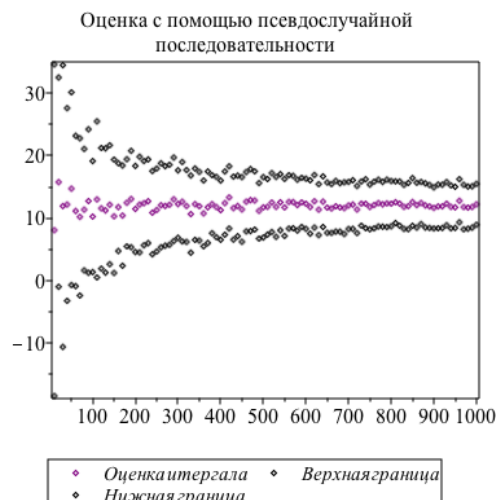


Рис. 2: Оценка интеграла с помощью псевдослучайных последовательностей

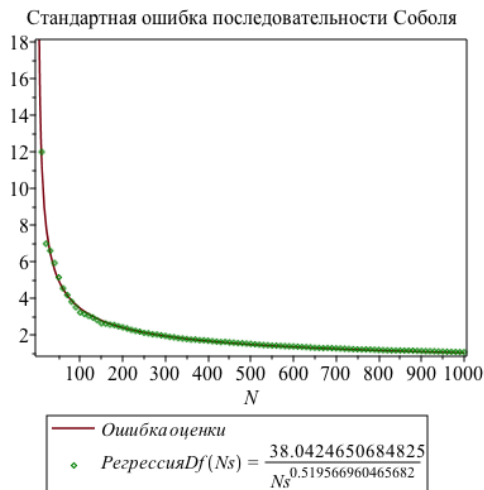


Рис. 3. Зависимость ошибки количества точек (N_s)

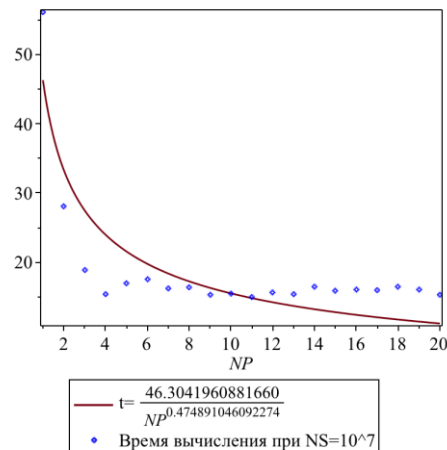


Рис. 4. Зависимость времени вычисления интеграла от количества процессоров (N_p)

Разработан эффективный алгоритм параллельных вычислений для многомерных определенных интегралов. Используя стандартный датчик случайных чисел и квазислучайных последовательностей (Холтона, Коробова и LP_τ – последовательность Соболя), вычислены многомерные интегралы и соответствующее отклонения (Рис.1. и Рис.2). Проанализирована зависимость эффективности алгоритма вычисления значений интегралов от объема выборки и количества процессоров в параллельном алгоритме. Пусть N_p количество процессоров. Построена регрессионная модель для времени расчета t :

$$t = \alpha \cdot (N_p)^\gamma + \varepsilon \quad (14)$$

где α, γ – оцениваемые неизвестные параметры, ε – случайная ошибка. Разработан алгоритм оценки параметров α, γ и произведено графическое сравнение с выборочной оценкой (Рис.3. и Рис.4.).

Результаты численных экспериментов показывают, что эффективность параллельных алгоритмов стабилизируется после определенного количества используемых для вычислений процессоров.

Вторая глава **"Численное решение ультрапараболических уравнений с помощью моделирования стохастических дифференциальных уравнений"** посвящена использованию численных решений специальных систем стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) для нахождения оценок решения краевых задач для линейных и нелинейных ультрапараболических уравнений.

В параграфе 2.1 рассматриваются различные типы задачи Коши для ультрапараболических уравнений и получены соответствующие вероятностные представления их решений.

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L := \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{p_0} a_{ij}(t, x) \partial_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{p_0} \bar{a}_i(t, x) \partial_{x_i} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i \partial_{x_j}, \quad (15)$$

где $(t, x) \in R \times R^m$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $1 \leq p_0 \leq m$.

Предположим, выполняются следующие условия:

1. Матрица $A_0(x, t) = (a_{ij}(t, x))_{i,j=1,\dots,p_0}$ симметрично и положительно определена в R^{p_0} , коэффициенты $a_{ij}(t, x) = a_{ji}(t, x)$ непрерывные ограниченные функции.

2. Матрица $B = (b_{ij})$ с постоянными элементами имеет следующий блочный вид

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где B_j матрица размера $(p_{j-1} \times p_j)$ с рангом p_j , здесь $p_0 \geq p_1 \geq \dots \geq p_r \geq 1$, $p_0 + p_1 + \dots + p_r = m$.

Введём матрицу размера $(m \times m)$ в блочном виде

$$A(t, x) = \begin{pmatrix} A_0(t, x) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

и вектор

$$\bar{B}(t, x) = \begin{pmatrix} \bar{a}_1(t, x) \\ \vdots \\ \bar{a}_{p_0}(t, x) \\ x_1 \left(\sum_{j=p_0+1}^{p_0+p_1} b_{1j} \right) \\ x_2 \left(\sum_{j=p_0+1}^{p_0+p_1} b_{2j} \right) \\ \vdots \\ x_{p_0+p_1} \left(\sum_{j=p_0+p_1+1}^{p_0+p_1+p_2} b_{(p_0+p_1)j} \right) \\ \vdots \\ x_{n-p_0} \left(\sum_{j=p_0+p_1+\dots+p_{r-1}+1}^n b_{(n-p_0)j} \right) \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Тогда оператор L можно переписать следующим образом:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(t, x) \partial_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^m \bar{b}_i(t, x) \partial_{x_i}, \quad (19)$$

где $\bar{b}_i(t, x)$ элементы вектора $\bar{B}(t, x)$.

Рассмотрены следующие задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + Lu(t, x) &= f(t, x), \quad t < T, \quad x \in R^n, \\ u(T, x) &= \varphi(x) \end{aligned} \quad (20)$$

Доказана следующая теорема

Теорема 3. Пусть $\xi_t(\cdot)$ – диффузионный Марковский процесс с диффузионными коэффициентами $A(t, x)$ и $\bar{B}(t, x)$, которые в

естественном базисе R^n имеют координаты $\bar{b}_k$ и матрицу a_{ik} . Тогда для решения задачи (20) справедливо вероятностное представление

$$u(t, x) = E_{t,x} \varphi(\xi_t(T)) - E_{t,x} \int_t^T f(s, \xi_t(s)) ds \quad (21)$$

Далее в качестве приложения приведено вероятностное представление решений следующих задач:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + Lu(t, x) &= f(t, x), \quad 0 \leq t \leq T, \quad x \in R^n, \\ u(0, x) &= \varphi(x). \end{aligned} \quad (22)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + Lu(t, x) + v(t, x)u(t, x) &= f(t, x), \quad t < T, \quad x \in R^n, \\ u(T, x) &= \varphi(x), \end{aligned} \quad (23)$$

где $v(t, x)$ – ограниченная непрерывная функция.

В параграфе 2.2 рассматриваются начально-краевые задачи для ультрапараболических уравнений и получены вероятностные представления их решений. Пусть $D \subset R^m$ – ограниченная область с границей ∂D , $\Omega = D \times [0, T]$ с границей $\partial\Omega = (\partial D \times 0, t) \cup (\bar{D} \times \{T\})$.

Для функций $f(t, x)$, $\psi(t, x)$, $\varphi(x)$ рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + Lu(t, x) &= f(t, x), \quad (t, x) \in \Omega \\ u(t, x) &= \psi(t, x), \quad 0 \leq t < T, \quad x \in \partial D \\ u(T, x) &= \varphi(x). \end{aligned} \quad (24)$$

Функция $\psi(t, x)$ достаточно гладкая, $\varphi(x)$ и $f(t, x)$ непрерывны, $\psi(t, x) = \varphi(x)$ при $x \in D$. Через $\tau_{\partial\Omega}$ будем обозначать момент первого выхода процессов $\xi_s(t)$ из области Ω .

Теорема 4. Пусть $\xi_t(\cdot)$ – диффузионный Марковский процесс с диффузионными коэффициентами $A(t, x)$ и $\bar{B}(t, x)$, I_C – индикатор события C , $u(t, x)$ – решение задачи (24). Тогда

$$\begin{aligned} u(x, t) &= E_{t,x} \psi(\tau_{\partial\Omega}, \xi_t(\tau_{\partial\Omega})) I_{\tau_{\partial\Omega} < T} + \\ &+ E_{t,x} \varphi(\xi_t(T)) I_{\tau_{\partial\Omega} = T} - E_{t,x} \int_t^{\tau_{\partial\Omega}} f(\tau, \xi_t(\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (25)$$

В параграфе 2.3 рассматриваются способы моделирования Марковских процессов, согласованных с вероятностным представлением, которое определяется как решение системы стохастических дифференциальных уравнений.

Решение задачи (20) может быть представлено в виде

$$u(t, x) = E_{t,x} \{\varphi(\xi_t(T)) - z_t(T)\}, \quad (26)$$

где $\xi_t(s), z_t(s), s \in [t, T]$ – решение системы стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} d\xi_i(t) = \bar{b}_i(t, \xi)dt + \sum_{j=1}^{p_0} \sigma_{ij}(t, \xi)dw_i(t), & \xi_i(0) = \xi_{i0}, i = 1, \dots, p_0, \\ d\xi_{(p_0+i)}(t) = \bar{b}_{p_0+i}(t, \xi)dt, & \xi_i(0) = x_{i0}, i = 1, \dots, n - p_0 \\ dz_s = f(s, \xi_s)ds, & z_0 = 0. \end{cases} \quad (27)$$

где $\sigma(t, \xi) = \{\sigma_{ij}(t, \xi)\}_{ij=1,2,\dots,p_0}$ матрица размера $p_0 \times p_0$, $\bar{b}(t, \xi) = \{\bar{b}_i(t, \xi)\}_{i=1,2,\dots,m}$ -вектор, $A(t, \xi) = \sigma(t, \xi)\sigma^T(t, \xi)$.

Пусть

$$L_t u(t, x) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^m a_{ik}(t, x, u) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{k=1}^m b_k(t, x, u) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x_k}.$$

Далее приведен алгоритм решения задачи Коши для квазилинейного параболического уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + L_t u(t, x) + f(t, x, u) &= 0, t_0 \leq t < T, x \in R^n, \\ u(T, x) &= \varphi(x), \end{aligned} \quad (28)$$

Тогда решение задачи (28) допускает следующее вероятностное представление:

$$u(t, x) = E_{t,x}\{\varphi(\xi_t(T)) + z_t(T)\}, \quad (29)$$

где $\varphi(\xi_t(s)), z_t(s), s \in [t, T]$ – решение системы стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} d\xi_s = b(s, \xi_s, u(s, \xi_s))ds + \sigma(s, \xi_s, u(s, \xi_s))dw_s, & \xi_0 = \xi(0); \\ dz_s = f(s, \xi_s, u(s, \xi_s))ds, & z_0 = 0. \end{cases} \quad (30)$$

В параграфе 2.4 предлагается алгоритм конструирования оценки решения и представлены результаты численных экспериментов. Проанализированы стандартные ошибки в зависимости от количества траектории, построен 99.7% доверительный интервал для оценки. В целях повышения эффективности алгоритмов для моделирования решений системы стохастических дифференциальных уравнений использован способ блочных параллельных вычислений. В качестве примеров рассмотрены краевые задачи, к решению которых сводятся прикладные задачи из области финансовых инструментов, в частности, оценка цены азиатских опционов.

В третьей главе **"Численное моделирование решений начально-краевых задач для квазилинейных диффузионных уравнений"** рассматриваются методы статистического моделирования для численного решения начально-краевых задач для квазилинейных диффузионных уравнений.

В параграфе 3.1 дана постановка задачи и получено вероятностное представление решения задачи.

Пусть D – ограниченная область в R^m с границей $\partial D, \Omega = D \times [0, T]$. Для функций $\psi(x, t) \in C(\partial D \times [0, T]), \varphi(x) \in C(\bar{D})$ сформулируем начально-краевую задачу. Необходимо найти функцию $u(x, t) \in C(\bar{D} \times [0, T])$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \Delta u(x,t) + c_1 u(x,t) = c_2 u^2(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \quad (31)$$

с начально-краевыми условиями

$$u(x,t) = \psi(x,t) \geq 0, \quad (x,t) \in \partial D \times [0,T] \quad (32)$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \geq 0, \quad x \in \bar{D} \quad (33)$$

Предположим, что функции $f(x,t), \psi(x,t), \varphi(x)$ и коэффициенты $c_1 > 0, c_2$ таковы, что существует единственное непрерывное решение задачи.

Получено вероятностное представление для решения задачи (31)-(33) следующего вида:

$$\begin{aligned} u(x,t) = & (1 - q_m)Eu(y(\xi_1, \omega), \tau(\xi_1)) + q_m(1 - rq_{1m}c_1)Eu(y, \tau) + \\ & + q_mrc_2E(((1 - v^{\frac{2}{m}}\exp(-\frac{2\xi}{2+m}))u^2(y_1(\xi, v, \omega), \tau_1(\xi, v)))) + \\ & + q_m rE((1 - v^{\frac{2}{m}}\exp(-\frac{2\xi}{2+m}))f(y_1(\xi, v, \omega), \tau_1(\xi, v))). \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь

$$q_{1m} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{m+2}{m+4} \right)^{1+\frac{m}{2}}, \quad q_m = \left(1 + \frac{2}{m} \right)^{-(1+\frac{m}{2})},$$

$$g_1(\rho) = \frac{(1 - \exp(-\frac{2\rho}{m}))\rho^{\frac{m}{2}}\exp(-\rho)}{(1 - q_m)\Gamma(1+\frac{m}{2})}, \quad g_2(\omega) = \frac{1}{\sigma_m} = \frac{\Gamma(\frac{m}{2})}{2\pi^{\frac{m}{2}}}$$

$$y(\rho, \omega) = x + \sqrt{4\tau\rho\exp(-\frac{2\rho}{m})}\omega, \quad \tau(\rho) = t - r\exp(-\frac{2\rho}{m})$$

$$r = r(x,t) = \min \left\{ \frac{eR^2(x)}{2m}, t, \frac{1}{c_1} \right\},$$

где $R(x)$ – расстояние от точки x до границы области D . ξ – случайная величина, имеющая плотность распределения $g_1(\rho)$, ω – случайная точка поверхности $S_1(0)$ с плотностью распределения $g_2(\omega)$, $S_1(0)$ – единичная сфера, ds – элемент поверхности единичной сферы.

$$g_3(v) = \frac{(1-v)v^{\frac{2}{m}-1}}{B(2, \frac{2}{m})}, \quad g_4(z) = \frac{e^{-z}z^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma(\frac{m}{2})},$$

здесь $g_3(v)$ плотность бета распределения с параметром $(2, \frac{2}{m})$, $B(.,.)$ – бета-функция, $g_4(z)$ плотность гамма-распределения с параметром $(\frac{m}{2})$ ($\Gamma(.)$ – гамма-функция),

$$y_1(\xi, v, \omega) = x + \left(\frac{4m}{2+m}rv^{\frac{2}{m}}\xi\exp(-\frac{2\xi}{2+m}) \right)^{\frac{1}{2}}\omega,$$

$$\tau_1(\xi, v) = t - rv^{\frac{2}{m}}\exp(-\frac{2\xi}{m+2}).$$

Здесь ξ – случайная величина с плотностью распределения $g_4(z)$, v – случайная величина с плотностью распределения $g_3(s)$.

В параграфе 3.2 рассматривается алгоритм моделирования случайного ветвящегося процесса, согласованного с вероятностным представлением (34).

Пусть $T_0 = (x, t, 1), T_1, T_2, \dots, T_n$ – траектория ветвящегося процесса, где

$$T_i = (x_i^1, t_n^1, n_i^1; x_i^2, t_n^2, n_i^2; \dots; x_i^{l_i}, t_n^{l_i}, n_i^{l_i}),$$

точечное распределение в момент времени i . Это означает, что в точке (x_i^k, t_i^k) находится n_i^k частиц для $k = 1, 2, 3, \dots, l_i$.

Теорема 5. *Процесс T_n с вероятностью 1 либо обрывается внутри области Ω , либо сходится к точечному распределению*

$$T = (x^1, t^1, n^1; x^2, t^2, n^2; \dots; x^k, t^k, n^k),$$

где $(x^i, t^i) \in \partial\Omega, i = 1, 2, \dots, k$.

В параграфе 3.3 обсуждены вопросы существования и единственности решения задачи (31)-(33).

В параграфе 3.4 рассматривается задача построения несмещенных и ε – смещенных оценок решения задачи (31)-(33).

Определена случайная величина $\theta(x, t, k)$ и последовательность случайных величин $\{\eta_n\}_{n=0}^\infty$ на траектории $T_0, T_1, \dots, T_n$ процесса следующим образом:

$$\theta(x, t, k) = \begin{cases} \frac{3(1-v^{\frac{2}{m}} \exp(-\frac{2\xi}{m+2}))f(x, t)}{2q_{1m}c_1}, & k = 0, \\ 1, & k = 1, \\ \frac{3(1-v^{\frac{2}{m}} \exp(-\frac{2\xi}{m+2}))c_2}{q_{1m}c_1}, & k = 2. \end{cases}$$

$$\eta_n = \prod_{j=1}^{l_n} \theta(x_n^j, t_n^j, n_n^j) (u(x_n^j, t_n^j))^{n_n^j}.$$

Теорема 6. *Последовательность $\{\eta_n\}_{n=0}^\infty$ образует мартингал относительно сигма алгебры, порожденный траекториями ветвящегося процесса. Если $|c_2| \leq \frac{q_{1m}c_1}{3}$, $\max_{(x,t) \in \Omega} |f(x, t)| \leq \frac{2}{3} q_{1m}c_1$, то последовательность η_n равномерно интегрируема.*

Пусть N_1 – момент обрыва процесса внутри области Ω , N_ε – момент первого попадания всех частиц в $(\partial\Omega)_\varepsilon = D \times [0, \varepsilon] \cup (\partial D)_\varepsilon \times [0, T]$, $N = \min\{N_1, N_2\}$ – момент остановки процесса. Из теоремы 5 следует, что $N < +\infty$.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия теоремы 6. Тогда η_N является несмещенной оценкой для $u(x, t)$ с конечной дисперсией.*

В параграфе 3.5 приводятся результаты вычислительного эксперимента. В параграфе 3.6 предлагается обобщение алгоритма на случай полинома произвольного порядка. Рассматривается следующая задача:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \Delta u(x,t) + c_1 u(x,t) = \sum_{i=2}^K c_i u^i(x,t) + f(x,t), (x,t) \in \Omega, \quad (35)$$

$$u(x,t) = \psi(x,t) \geq 0, x \in \partial D, t \in [0, T] \quad (36)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \geq 0, x \in \bar{D} \quad (37)$$

Предположим, что функции $f(x,t), \psi(x,t), \varphi(x)$ и коэффициенты $c_i \geq 0, (i = 1, 2, 3, \dots, K)$ таковы, что существует непрерывное решение задачи (35) - (37) и оно единственно. Разработан статистический алгоритм решения для данной задачи.

В параграфе 3.7 рассматривается моделирование решения задачи с полиномиальной нелинейностью с помощью аппроксимации системой линейных уравнений. Дается новый подход построения статического алгоритма решения задачи (31)-(33). Получено нелинейное интегральное уравнение с полиномиальной нелинейностью, эквивалентное задаче (31)-(33). Далее осуществляется замена нелинейного интегрального уравнения с системой линейных уравнений. Определена Марковская цепь, согласованная системой линейных уравнений. построены несмещенные и смещенные оценки решения рассмотренной задачи.

В параграфе 3.8 предлагаются асинхронные итерационные методы решения задачи для нелинейных диффузионных уравнений. Результаты вычислительных экспериментов для рассмотренных задач показывает эффективность асинхронных алгоритмов при применении многопроцессорных компьютеров.

Четвертая глава "Применение линейных и нелинейных диффузионных уравнений в финансовых и управленческих задачах".

Данная глава содержит возможности применения разработанных алгоритмов построенных несмещенных а также смещенных оценок для решения начально- краевых задач и задачи Коши, связанных с линейными и нелинейными параболическими и ультрапараболическими уравнениями применительно к решению финансовых и управленческих задач. Рассматриваются возможности применения дифференциальных уравнений в частных производных, которые описывают модели поведения различных финансовых деривативов, нахождения стоимости активов, а также приложения к решению управленческих задач.

В параграфе 4.1 рассматриваются диффузионные уравнения и начально-краевые задачи для оценки стоимости опционов модели Блэка-Шоулза. Цена европейского опциона купли и продажи рассматривается как решение задачи

Коши для параболических уравнений. Цена барьерного опциона приводится как решение начально-краевой задачи для параболических уравнений.

В качестве приложения разработанных численных алгоритмов в предыдущих главах, созданы интерактивные программы для численного моделирования цены активов и оценка стоимости опционов. На рисунке 5 приведен один из интерфейсов пакета прикладных программ для барьерного опциона.

В параграфе 4.2 рассматриваются краевые задачи для диффузионных уравнений для оценки стоимости опционов в модели стохастической волатильности Хестона. Эта модель достаточно полно отражает динамику цены акции и очень полезна при принятии инвестиционных решений, поскольку проявляет себя как ценный инструмент для прогнозирования ожидаемых цен. На основе предложенных в предыдущих главах численных алгоритмов создан пакет прикладных программ.

В параграфе 4.3 рассматриваются начально-краевые задачи для ультрапараболических уравнений, которыми описывается решение финансовых задач. Детально исследована оценка стоимости следующих азиатских опционов: фиксированный и плавающий с арифметическим средним, фиксированный и плавающий с геометрическим средним.

Пусть $u(t, x_1, x_2)$ цена азиатского опциона, K — договорная цена актива в момент времени T , σ^2 — коэффициент диффузии, r — постоянная процентная ставка. Тогда цена азиатского опциона с арифметическим средним $u(t, x_1, x_2)$ является решением следующей задачи для ультрапараболического уравнения:

$$-ru(t, x_1, x_2) + \frac{\partial u(t, x_1, x_2)}{\partial t} + rx_1 \frac{\partial u(t, x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\sigma^2 x_1^2 \frac{\partial^2 u(t, x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + x_1 \frac{\partial u(t, x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0$$

удовлетворяющие граничное условие для плавающего опциона

$$V(T, x_1, x_2) = \max(x_1 - \frac{x_2}{T}, 0) \quad (38)$$

удовлетворяющие граничное условие для фиксированного опциона

$$V(T, x_1, x_2) = \max(\frac{x_2}{T} - K, 0) \quad (39)$$

На рисунке 6 приведен результаты вычислительного эксперимента.

Цена азиатского опциона с геометрическим средним $u(t, x_1, x_2)$ является решением следующей задачи для ультрапараболического уравнения:

$$-ru(t, x_1, x_2) + \frac{\partial u(t, x_1, x_2)}{\partial t} + rx_1 \frac{\partial u(t, x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\sigma^2 x_1^2 \frac{\partial^2 u(t, x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \log(x_1) \frac{\partial u(t, x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0$$

удовлетворяющие граничное условие для плавающего опциона

$$V(T, x_1, x_2) = \max(x_1 - e^{\frac{x_2}{T}}, 0) \quad (40)$$

удовлетворяющие граничное условие для фиксированного опциона

$$V(T, x_1, x_2) = \max(e^{\frac{x_2}{T}} - K, 0) \quad (41)$$

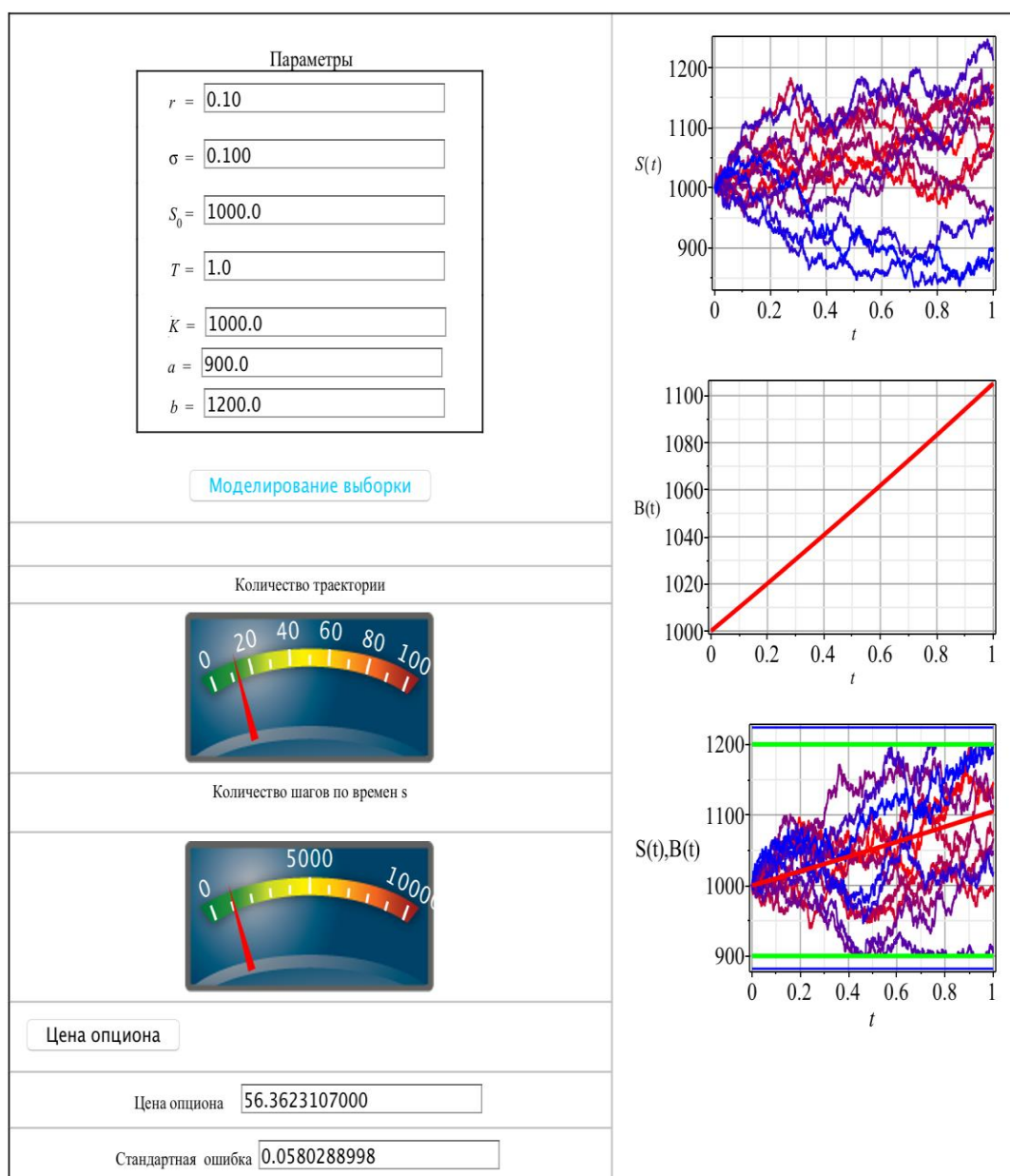


Рис.5. Интерфейс программы для численного моделирования цены активов и оценка стоимости для барьерного опциона.

Далее рассматривается модель Хобсона–Рожжерса, где параметры являются функциями отклонения цены акции от тренда, тогда нахождение цены опциона сводится к решению следующей задачи:

$$\frac{\partial u(\tau, x, y)}{\partial \tau} = a(\tau, x, y) \left(\frac{\partial u(\tau, x, y)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(\tau, x, y)}{\partial x} \right) + x \frac{\partial u(\tau, x, y)}{\partial y} \quad (42)$$

$$u(0, x, y) = \max(1 - e^x, 0), \quad (43)$$

где $a(\tau, x, y)$ – заданная детерминистическая функция. На основе предложенных алгоритмов создан пакет прикладных программ, приведены численные результаты.

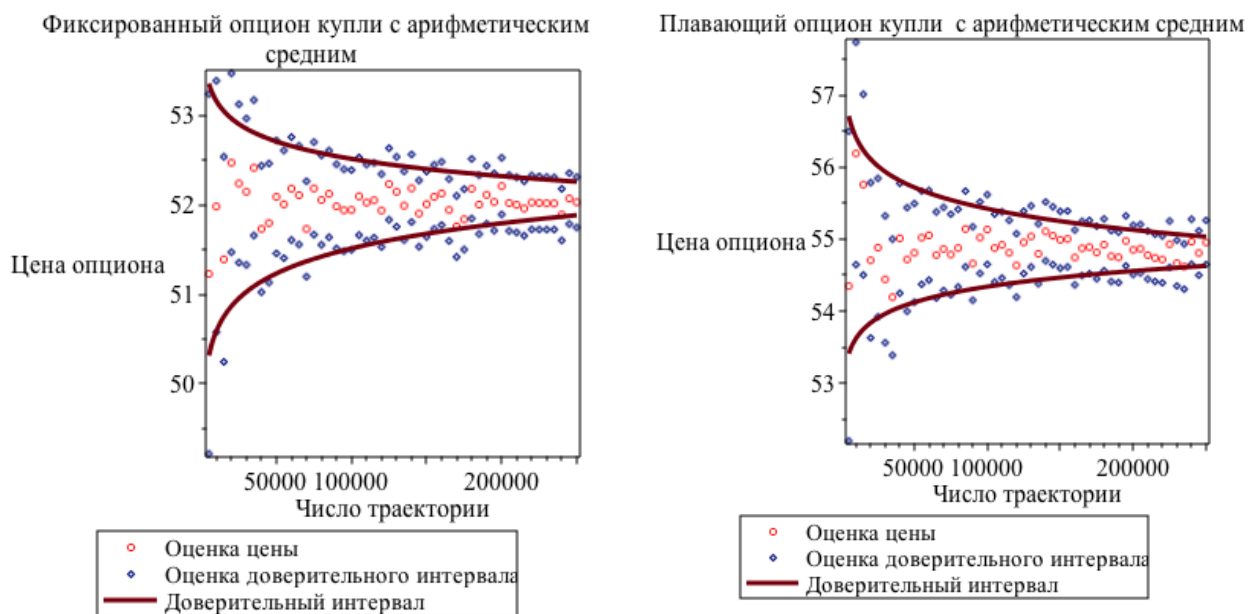


Рис. 6. Численное моделирование цены азиатских опционов с арифметическим средним.

В параграфе 4.4 рассматривается многомерный (B, S) -рынок, где B означает безрисковый актив, S является вектором $S = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где процесс $x_i = (x_i(t)), t \geq 0, i = 0, 1, 2, \dots, n$ описывает поведение цены i -ой акции. μ_i и σ_i – это скорость роста акций и волатильность (непостоянство) акции номером i соответственно и корреляционная матрица $D = (\rho_{ij})_{ij=1}^n$.

Пусть $V = V(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ цена опциона с конечной функцией выплаты

$V = \Omega(x_1, x_2, \dots, x_n, T)$. Тогда цену опциона можно получить как решение следующей задачи:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} x_i x_j \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n r x_i \frac{\partial V}{\partial x_i} - rV = 0 \quad (44)$$

с граничным условием

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n, T) = \Omega(x_1, x_2, \dots, x_n, T) \quad (45)$$

На рынке ценных бумаг интерес к определению стоимости портфеля акции огромен. Пусть $SP(t)$ портфель в момент времени t ,

$$SP(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t),$$

где α_i вес i -того актива в портфеле.

Функция выплаты азиатского опциона для портфеля зависит от средней стоимости портфеля, т.е.

$$\frac{1}{T} \int_0^T SP(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t) dt$$

Тогда цену опциона можно найти путем решения уравнения (44) с граничным условием:

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n, T) = \max\left\{\frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t) dt - K, 0\right\} \quad (46)$$

Далее рассмотрен обратный опцион. Цена исполнения определяется для опциона колл (Call) как низшее значение цены базиса за время до исполнения опциона и для опциона пут (Put) как высшее значение цены базиса за время до исполнения опциона:

$$U = \max_{t \leq T} (\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t)), \quad D = \min_{t \leq T} (\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t)).$$

Тогда цену опциона можно получить как решение уравнения (44) с граничным условием для колл опцион

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n, T) = \max\{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t)dt - D, 0\} \quad (47)$$

и с граничным условием для пут опцион

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n, T) = \max\{U - \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t)dt, 0\} \quad (48)$$

Приводятся результаты численного эксперимента.

В параграфе 4.5 рассматриваются методы численного моделирования и комплекс программ для вероятностных методов принятия управленческих решений. Используя результаты по вероятностным методам принятия управленческих решений, разработаны следующие программные комплексы для системы поддержки принятия управленческих решений: «Принятия решений в условиях неопределенности и риска (СППУР-НР)», «Метод анализа иерархий (СППУР-МАИ)», «Аналитическое планирование (СППУР-АП)».

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена построению алгоритмов численного моделирования решений краевых задач для диффузионных уравнений и их приложениям в физических, технических, финансовых и управленческих задачах. Основные результаты исследования состоят в следующем:

1. Разработаны алгоритмы статистического моделирования блуждания по "сфероидам" и "шароидам" в сложных областях для численного решения начально-краевых задач и задачи Коши для широкого класса многомерных ультрапараболических уравнений.
2. Построены стохастические алгоритмы для численного моделирования решений начально-краевых задач и задачи Коши для ультрапараболических уравнений путем оценки математического ожидания функционала от траектории диффузионного случайного процесса. Для получения статистических оценок использованы способы аппроксимации случайного процесса, найденные путем моделирования решения системы стохастических дифференциальных уравнений.
3. Созданы новые стохастические алгоритмы для численного моделирования решений начально-краевых задач для квазилинейных параболических и ультрапараболических уравнений с использованием ветвящихся Марковских процессов.

4. Созданы новые алгоритмы статистического моделирования решения задачи с полиномиальной нелинейностью приведением к системам линейных уравнений.
5. Разработаны новые методы численного моделирования решений нелинейных задач с использованием параллельных и асинхронных итераций, реализуемых на многопроцессорных компьютерах.
6. Созданы пакеты прикладных программ на основе разработанных алгоритмов и применены разработанные алгоритмы для решения различных конкретных задач оценки стоимости производных финансовых инструментов и принятия управленческих решений.
7. Усовершенствована методика принятия управленческих решений в условиях неопределённости и риска и многокритериальные методы принятия решений.

BAKOEV MATYOKUB TESHAEVICH

**NUMERICAL SIMULATION OF SOLUTIONS OF DIFFUSION
EQUATIONS IN PROBLEMS OF FINANCE AND MANAGEMENT**

05.01.07- Mathematical simulation. Numerical methods and software
(Physical and mathematical science)

**DISSERTATION ABSTRACT OF DOCTORAL DISSERTATION (DSc) ON PHYSICAL
AND MATHEMATICAL SCIENCES**

TASHKENT- 2019

The theme of doctoral dissertation (DSc) was registered in the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan with number № B2017.2.DSc/FM66.

Doctoral dissertation has been prepared at Institute of Mathematics.

Abstract of dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian and English (summary)) on the website <http://ik-fizmat.nuu.uz/> and on the website of «ZiyoNet» Information and educational portal <http://www.ziynet.uz/>.

Scientific consultant: **Rasulov Abdujabbor Sattarovich**
doctor of physical and mathematical Sciences, professor

Official opponents: **Shakenov Kanat Kojaachmetovich**
doctor of physical and mathematical Sciences, professor

Shadimetov Kholmat Makhkamboevich
doctor of physical and mathematical Sciences, professor

Mamatov Alisher Zulunovich
doctor of technical Sciences, professor

Leading organization: Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Kharizmi

Defense will take place on «__»_____2019 at _____ at the meeting of Scientific Council number DSc.27.06.2017.FM.01.02 at National University of Uzbekistan (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar area, University str.4, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №_____) (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar area, University str.4, Ph.: (+99871) 246-02-24.)

Abstract of dissertation sent out on «__»_____2019.
(mailing report № _____ on «__»_____2019)

A.R.Marakhimov
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.T.S., professor

Z.R.Rakhmonov
Scientific Secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.M.S.

M.M.Aripov
Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.M.S., professor

INTRODUCTION (abstract of doctoral (DSc) dissertation)

Actuality and demand of the theme of dissertation. Many scientific and applied researches conducted at the world level are important since, in many cases, they are brought to the problems of creating mathematical models of initial-boundary value problems for diffusion equations and the numerical solution of such problems by the method of statistical modeling (Monte Carlo method) is important. Diffusion equations (parabolic and ultra-parabolic) are the subject of research in areas such as mathematical physics, the theory of dynamical systems, biology, ecology, economics, finance, management, and mathematical modeling.

Parabolic and ultra-parabolic equations are the basis for solving a wide range of problems: heat conduction, nuclear physics, dynamic systems, gas dynamics, the dynamics of the biological population and genetics, the dynamics of changes in the securities market, the management of investment portfolios, risk management and analysis of environmental processes. Therefore, the study of mathematical models of solutions of diffusion equations remains an important task in the fields of applied mathematics, finance and management. Nowadays, in the world, an urgent task is to expand the scope of numerical modeling of diffusion equations, which have an unusually wide range of applications: radiation transfer problems (nuclear reactors, atmospheric optics), gas dynamics problems, financial mathematics problems (modeling securities management and market situations), queuing tasks (modeling of complex production systems, communication systems and computer networks), management problems of investment processes and the development of research Studies in modern science. The numerical solution of such problems is usually associated with significant difficulties. The planning, development and use of statistical modeling methods for solving boundary value problems for linear and nonlinear parabolic and ultra-parabolic equations, along with deterministic methods, is an important task. Scientific research conducted in the above-mentioned areas confirms the focus of the topic of the thesis.

In our country, attention was paid to topical scientific fields of practical importance, in particular, special attention was paid to the study of diffusion equations and their applications. In this regard, among other things, weighty results have been obtained in conducting a number of scientific studies on the solution of initial-boundary value problems for parabolic and ultra-parabolic equations the resolution of the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan outlines. The main tasks and directions for conducting scientific research at the level of international standards in priority areas are differential equations and mathematical physics, the theory of dynamic systems, probability theory and mathematical statistics, applied mathematics and mathematical modeling. Ensuring the decision execution has the importance of the development of methods for the numerical simulation of solutions of diffusion equations in financial and managerial problems and statistical modeling, the creation of software packages and their applications.

The thesis serves the implementation of the tasks identified in the Decree of the President of the Republic of Uzbekistan No. PP-2789 of February 17, 2017. On

measures to further improve the activities of the Academy of Sciences, organization, management and financing of research activities., Decree of the President of the Republic of Uzbekistan No. UP-4997 dated February 7, 2017. On the strategy for further development of the Republic of Uzbekistan. and Resolution of the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan No. 292 dated May 18, 2017. On measures to organize the activities of the newly established research institutions of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, as well as in other regulatory acts in this area.

The aim of research is development of new numerical simulation algorithms for solving multidimensional Initial-boundary value problems and Cauchy problems for a class of linear and nonlinear equations of ultra-parabolic and parabolic types.

The main tasks of the research work:

to get probabilistic representations of solutions of the considered multidimensional problems in the form of the mathematical expectation defined on the trajectories of linear and branching Markov chains;

to construct and numerically simulate unbiased and slightly biased estimators with bounded dispersion of solutions of boundary value problems for linear, quasilinear ultra-parabolic and parabolic equations;

to develop effective methods for modeling the obtained distributions necessary for the implementation of algorithms based on probabilistic computational models;

to develop statistical algorithms based on parallel and asynchronous interaction methods for the numerical simulation of linear and nonlinear boundary value problems;

to justify the created numerical algorithms using the theory of Markov processes, theory martingales and theory of derivatives of nonlinear operators;

to create an application package for computers to the numerical implementation of the constructed computational algorithms and methods for making managerial decisions.

The research object - initial-boundary value problems, Cauchy problems for linear and quasilinear diffusion equations ultra-parabolic and parabolic types, stochastic differential equations, Markov processes, various financial models and problems of decision making under conditions of uncertainty and risk.

The research subject - numerical statistical algorithms for modeling solutions of initial-boundary value problems, Cauchy problems for linear and quasilinear diffusion equations-ultra-parabolic and parabolic types, stochastic differential equations and Ito processes. Application created packages for solving financial and managerial tasks.

The scientific novelty of the research work is as follows: All the obtained results of the dissertation are new. All created algorithms can be effectively implemented on modern multiprocessor computers with parallel structure and in conjunction with cloud technologies. The main results of the study are following:

There have been developed algorithms for statistical simulation of walking on spheroids and on balloids for the numerical solution of initial-boundary value problems and the Cauchy problem for a wide class of ultra-parabolic equations.

There have been developed stochastic algorithms for the numerical simulation of solutions of initial-boundary value problems and the Cauchy problem for ultra-parabolic equations by estimating the expectation of a functional from the trajectory of a diffusion random process.

There have been developed new stochastic algorithms for numerical modeling of solutions of initial-boundary value problems for quasilinear parabolic and ultra-parabolic equations using branching Markov processes.

There have been created new algorithms for statistical modeling of the solution of a problem with a polynomial nonlinearity reduction to a system of linear equations.

Practical results of the research. The developed algorithms are applied to solve various specific problems of evaluation prices of derivatives in financial market and optimal decision making. There were improved management decision-making methods in conditions of uncertainty, risk and multi-criteria decision-making methods. On the basis of the developed computational methods, software were created for the numerical solution of the considered problems.

The reliability of the research results is substantiated by exact mathematical reasoning, the use of the theory of modern methods of statistical modeling, probability theory, computational mathematics, and functional analysis. All theoretical results are confirmed by computational experiments.

Scientific and practical significance of the research results. The scientific significance of the research results is that the scientific results obtained in the work can be used for further research of boundary value problems for linear and quasilinear parabolic and ultra-parabolic equations, for the connection between systems of stochastic differential equations with equations of ultra-parabolic types, and can also serve as the basis for the development operations of numerical simulation algorithms.

The outline of the thesis. The dissertation work is devoted to the construction of probabilistic models of solutions of boundary value problems of linear and nonlinear ultra-parabolic equations. The main results of the study are as follows:

there have been developed algorithms for statistical simulation of random walking on spheroids and on balloids for the numerical solution of initial-boundary value problems and the Cauchy problem for a wide class of ultra-parabolic equations;

the probabilistic representations of the solutions of problems in the form of mathematical expectation of some random variables are obtained. For each of the considered problems in accordance with the probabilistic representations a random process is constructed, simulation formulas for random processes and algorithms for modelling a random process are given;

there have been developed stochastic algorithms for the numerical simulation of solutions of initial-boundary value problems and the Cauchy problem for ultra-parabolic equations by estimating the expectation of a functional from the trajectory of a diffusion random process. We used some methods for approximating a random process to obtain statistical estimates, which were found by simulating a solution of a system of stochastic differential equations;

there have been developed new stochastic algorithms for numerical modeling of solutions of initial-boundary value problems for quasilinear parabolic and ultra-parabolic equations using branching Markov processes.

there were created new algorithms for statistical modeling of the solution of a problem with a polynomial nonlinearity reduction to a system of linear equations;

there have been developed new methods for numerical modeling of solutions to nonlinear problems using parallel and asynchronous iterations by implementing multiprocessor computers. The convergence of the iteration method for the system of integral equations is proved;

there have been constructed effective procedures for numerical simulation of unbiased statistical estimators of the solutions of problems that allow us to estimate in parallel calculation accuracy which significantly reduces the complexity of computational work for a wide class of boundary value problems associated with a linear and nonlinear parabolic and ultra-parabolic operator;

the developed algorithms are applied to solve various specific problems of evaluation prices of derivatives in financial market and optimal decision making. There were improved management decision-making methods in conditions of uncertainty, risk and multi-criteria decision-making methods.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (Часть I; Part I)

1. Rasulov A., Bakoyev M., Raimovav G. Monte Carlo solution of Dirichlet problem for semi- linear equations // Finite Difference Methods. Theory and Applications, Lecture notes in computer science (LNCS) v.11386,2019. doi: 10.1007/978-3-030-11539-5-51. pp. 443–451 (№40. ResearchGate. IF=0.6)
2. Rasulov A., Bakoyev M., Rahmatov M. Monte carlo method for the calculation the price of multi-asset options // AIP Conference Proceedings 1978, 460006 (2018); doi: 10.1063/1.5044068. 340–344. (№40. ResearchGate. IF=0.14)
3. A.Rasulov, M.Bakoev, D.Akabirhodjaeva. Probabilistic approach to the asynchronous iteration. // Journal of applied mathematics and Physics, №1, 2013, pp.32-40. (01.00.00., №6)
4. С.М.Ермаков, А.С.Расулов, М.Т.Бакоев, А.З.Веселовская. Избранные алгоритмы метода Монте-Карло / Ташкент: Университет, 1992. 132с. (Монография)
5. A.S.Rasulov, M.T.Bakoev. Monte carlo approach to solution semilinear nonisotropic diffusion equation // Uzbek mathematical journal.№4, 2018, pp.131–138. (01.00.00., №6)
6. М.Бакоев. Решение смешанной задачи для уравнения Колмогорова. // Проблемы вычислительной и прикладной математики, №2, 2019, С. 60–70. (01.00.00., №9)
7. М.Т.Бакоев. Monte Carlo methods for pricing asian options // Доклады Академии наук Узбекистана, №3, 2018, С.1-6. (01.00.00., №7)
8. А.Расулов, М.Бакоев, Х.Ахмедова. Решение задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца методом асинхронных итераций // Проблемы вычислительной и прикладной математики, №4, 2018, С.106-112. (01.00.00., №9)
9. А.Расулов, М.Бакоев, У.Утабов. Моделирование псевдослучайных последовательностей и применения для вычисления многомерных интегралов // Проблемы вычислительной и прикладной математики, №4, 2018, С.61-66. (01.00.00., №9)
- 10.М.Т.Бакоев, Т.Х.Тожиев. Метод Монте-Карло для решения начально-краевой задачи для обобщенного уравнения неизотропной диффузии // Узбекский математический журнал, №2, 1995, С.14-25. (01.00.00., №6)
- 11.М.Т.Бакоев, Т.Х.Тожиев. Метод Монте-Карло для решения задачи Коши для обобщенного уравнения неизотропной диффузии // Узбекский математический журнал, №3, 1996, С.15-23. (01.00.00., №6)
- 12.М.Т.Бакоев. Построение несмещенной оценки решения смешанной задачи для уравнения неизотропной диффузии // Функционалы от

случайных процессов и статистические выводы. Ташкент. Фан. 1989. 16-27.

- 13.М.Бакоев. Бошқарув қарорлари самарадорлиги ва уни баҳолаш усуллари. // Жамият ва бошқарув, №2, 2015, С.2-34. (08.00.00., №6)
- 14.М.Бақоев. Кадрлар салоҳиятини аниқлаш ва кадрлар танлашда иерархик таҳлил усули. // Жамият ва бошқарув, №3, 2013, С.15-25. (08.00.00., №6)
- 15.М.Бақоев, Г.Раимова, А.Худойназаров. Теория и практика управленческих решений. // Жамият ва бошқарув, №1, 2013, С.25-32. (08.00.00., №6)

II бўлим (Часть II; Part II)

- 16.М.Бакоев. Метод Монте-Карло для решения задачи Коши для обобщенного уравнения неизотропной диффузии. // Агентство по интеллектуальной собственности Республики Узбекистан. Программы для ЭВМ. 2019. DGU 20280536. 28 с.
- 17.М.Бакоев. Метод Монте-Карло для решения задачи Коши для обобщенного уравнения неизотропной диффузии // Агентство по интеллектуальной собственности Республики Узбекистан. Программы для ЭВМ. 2019. DGU 20190082. 26 с.
- 18.М.Бакоев. Алгоритмы решения параболических уравнений с переменными коэффициентами. // Агентство по интеллектуальной собственности Республики Узбекистан. Программы для ЭВМ. 2019. DGU 20190083. 24 с.
- 19.М.Бакоев. Решение смешанной задачи для уравнения неизотропной диффузии. // Агентство по интеллектуальной собственности Республики Узбекистан. Программы для ЭВМ. 2018. DGU 20280736. 23 с.
- 20.М.Бакоев, М.Лолаев. Численное моделирование решения начально-краевых задач для диффузионных уравнений // Агентство по интеллектуальной собственности Республики Узбекистан. Программы для ЭВМ. 2018.. DGU 20280566. 26 с.
- 21.М.Бакоев, Г.Раимова, О.Ахмедов. Система поддержки принятия управленческих решений: Метод анализа иерархии(СППУР-МАИ). // Агентство по интеллектуальной собственности Республики Узбекистан. Программы для ЭВМ. 2016. DGU 20160545. 32с.
- 22.М.Бакоев, Г.Раимова, О.Ахмедов. Система поддержки принятия управленческих решений: Аналитическое планирование(СППУР-АП). // Агентство по интеллектуальной собственности Республики Узбекистан. Программы для ЭВМ. 2016. DGU 20160545. 35 с.
- 23.М.Бакоев, Г.Раимова, О.Ахмедов. Система поддержки принятия управленческих решений: Принятие решений в условиях неопределенности и риска (СППУР-НР). // Агентство по интеллектуальной собственности Республики Узбекистан. Программы для ЭВМ. 2015. DGU 03218. 34 с.

24. Bakoev M. T. A monte carlo methods for pricing asian options. // Proceedings of the Eighth International Conference Computer data analysis and modeling. Complex stochastic data and systems. Minsk, 2007. 2.7.C.48–51.
25. Rasulov A., Bakoev M. Variance reduction techniques in pricing weather derivatives // Proceedings of the 4th International Conference on Computer Science and Computational mathematics (ICCSCM 2015). 2015. Vol. 2. pp. 225–232.
26. A. Rasulov, Bakoev M., X. Axmedova. Application of asynchrone iterations to dirichlet problem for helmholtz equations // The VI international scientific conference "Modern problems of the applied mathematics and information technology-AlKhorezmiy 2018". 2018. Tashkent. pp. 109–109.
27. Monte carlo simulation for estimating the price of the weather derivatives / A. Rasulov, M. Bakoev, M. Rakhmatov, N. Ulmas // The VI international scientific conference "Modern problems of the applied mathematics and information technology-AlKhorezmiy 2018". 2018. Tashkent. pp. 109–110.
28. A. Rasulov, G. Raimova, Bakoev M. Solution of some semi-linear dirichlet problem by monte carlo method application of asynchrone iterations to dirichlet problem for helmholtz equations // The VI international scientific conference "Modern problems of the applied mathematics and information technology-AlKhorezmiy 2018". 2018. Tashkent. pp. 110–110.
29. М.Бақоев. Бошқарув қарорлари самарадорлигини баҳолашни маълумотлар қамрови таҳлили орқали такомиллаштириш. // “Электрон ҳукумат ва бошқарув қарорларини қабул қилишнинг долзарб муаммолари” мавзуидаги республика илмий-амалий конференциянинг маърузалар тўплами. 2016. Тошкент : ДБА, 119–121б.
30. М.Бақоев, Г.Раимова, О.Ахмедов. Кўп мезонли масалаларни иерархик таҳлил усулида ечишга кўмаклашувчи тизимлар // “Электрон ҳукумат ва бошқарув қарорларини қабул қилишнинг долзарб муаммолари” мавзуидаги республика илмий-амалий конференциянинг маърузалар тўплами. 2016. Тошкент : ДБА., 222–225б.
31. М.Бақоев. Қарор қабул қилишга кўмаклашувчи компьютер тизимлари ва уларнинг класификацияси. // “Давлат ва жамият бошқарувида замонавий ахборот технологияларини жорий этишнинг долзарб муаммолари” мавзуидаги республика илмий-амалий конференциянинг маърузалар тўплами. 2015. Тошкент : ДБА. 185–187 б.
32. М.Бақоев, О.Ахмедов. Ноаниқлик ва тавакал шароитида қарор қабул қилишга кўмаклашувчи дастурий таъминот. // “Давлат ва жамият бошқарувида замонавий ахборот технологияларини жорий этишнинг долзарб муаммолари” мавзуидаги республика илмий-амалий конференциянинг маърузалар тўплами. 2015. Тошкент : ДБА.. 180–182 б.
33. М.Бақоев, Г.Раимова, О.Ахмедов. Ноаниқлик ва тавакал шароитида қилишга кўмаклашувчи тизимлар. // Материалы VII Ферганской конференции «Предельные теоремы теории вероятностей и их приложения» г. Наманган. Ташкент : Университет, 2015. С.99–102.

34. M. Bakoev. Degenerate diffusion processes and parabolic partial differential equations with applications // Материалы VII Ферганской конференции «Предельные теоремы теории вероятностей и их приложения» г. Наманган, 11-12 май 2015 г. Ташкент : 2015. С. 136–140 .
35. М. Бақоев, А. Жамолов. Ўзбекистон ташқи савдо самарадорлигининг эконометрик таҳлили // Основные направления дальнейшей модернизации и повышения конкурентоспособности национальной экономики: Материалы VII Форума экономистов. Институт прогнозирования и макроэкономических исследований при Кабинете Министров Республики Узбекистан. 2015 Ташкент : ИПМИ. С. 38–44.
36. М. Бақоев, А. Қобилов. Иқтисодийга тўғридан-тўғри инвестицияларни жалб қилиш: Сингапур тажрибаси. // Жамият ва бошқарув. 2013. № 3. С. 69–74.
37. Бақоев М. Т., Расулов А. С. Несмещенные оценки решений одного класса краевых задач для параболических уравнений. // Управляемые динамические системы и их приложения. 1987. Ташкент. С. 30–34.
38. Бақоев М. Методы статистического моделирования для решения задач линейной и нелинейной диффузии : дисс. канд. физ.-мат. наук / М. Т. Бақоев ; Институт математики им. Романовского АН Уз. 1989.
39. М. Т. Бақоев, А. С. Эргашев. Блэк-Шоулс моделини Монте Карло ва Квази Монте Карло усулида ечиш // Предельные теоремы теории вероятностей и их приложения. Материалы 5-международной Ферганской конференции. 2005. Ташкент . Фан. С. 79–82.
40. Bakoev M. A monte carlo method for pricing asian options // Предельные теоремы теории вероятностей и их приложения. Материалы 5-международной Ферганской конференции. Ташкент. 2005. Фан. С. 8–12.
41. Бақоев М. Т., Расулов А. С. Алгоритмы для решения некоторых линейных и нелинейных уравнений параболического типа. // Методы Монте-Карло в вычислительной математике и математической физике. 1985. Новосибирск. №1. С. 177–180.
42. Bakoev M. Partial differential equation in pricing european geometric average floating and fixed strike call option and monte carlo methods for the solutions // Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики Труды международной научной конференции. 2004. Ташкент. С. 340–344.

Автореферат Жаҳон иқтисодиёти ва дипломатия университети таҳририятида таҳрирдан ўтказилиб, рус, ўзбек ва инглиз тиллардаги матнлар ўзаро мувофиқлаштирилди
(15.06.2019)

Босишга рухсат этилди: 2019 йил « »
Қоғоз бичими 60x45 1/8 , Times New Roman гарнитураси.
Шартли босма табағи 4,2. Адади: 100. Буюртма: № .
Жаҳон иқтисодиёти ва дипломатия университети
босмахонасида чоп этилди.
100051, Тошкент, Мустақиллик шох бекати, 54

