

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА
ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ**

Қорақалпоқ Давлат Университети

“Архитектура” кафедраси

**ЧИЗМА ГЕОМЕТРИЯДАН
МАСАЛАЛАР ТҮПЛАМИ**

Нукус-2013 йил

Тузувчилар:

Арзиев Аманбай Сарсенбаевич – Қарақалпоқ Давлат Университети,
“Архитектура” кафедраси катта ўқитувчиси.

Тажибаев Шарап Джуманиязович – Тошкент кимё-технология институти,
Кўнғирот сода заводи қошидаги маҳсус сиртқи бўлим
(устюрт газ-кимё мажмуаси учун кундузги бўлим),
“Фундаментал фанлар” кафедраси катта ўқитувчиси.

Палуаниязова Гаухар Қадирбергеновна – Қарақалпоқ Давлат Университети
қошидаги 3-сонли академик лицей катта ўқитувчиси.

Мазкур тўплам университетнинг 5580200 – Иморат ва иншоатлар қурилиши, 5580100 – Архитектура, 5540900 – Касбий таълим, 5320400-Кимёвий технология (ишлаб чиқариш турлари бўйича), 5321300 – Нефт ва нефт-газни қайта ишлаш технологияси, 5320300 – Технологик машина ва жиҳозлар (тармоқлар бўйича), 5540500 – Тўқимачилик саноати маҳсулотлари технологияси йўналишларида таҳсил олаётган биринчи курс талабаларига мўлжалланган бўлиб, "Чизма геометрия" фанининг наъмунавий дастури асосида тузилган.

Тўпламда "Чизма геометрия" фанининг нуқта, тўғри чизик, текислик ва унинг ортогонал проекциялари, купёқликларнинг тўғри чизик, текислик ва ўзаро кесишишига оид мавзулари бўйича масалалар ечими ва машқ қилиш учун масалалар келтирилган.

Тақризчилар: К.И. Байманов – техника фанлари доктори, профессор.
М. Арзув – техника фанлари номзоди, доцент.

Қарақалпоқ Давлат Университети ўқув услубий кенгаши томонидан 2013 йил 5-апрель 6-сонли байоннома билан тасдиқланган ва чоп этишга тавсия этилган.

Сўз боши

Ўзбекистон Республикаси олий таълим тизими олдида турган асосий вазифалардан бири «Кадрлар тайёрлаш миллий дастури» да белгиланган талаблар асосида фанлар бўйича давлат таълим стандартлари ва намунавий дастурларга мос замонавий дарслик ва ўкув қўлланмалари яратиш ва шу асосда талабаларга чуқур назарий билимлар бериб, уларни етук мутаҳассис қилиб тайёрлашдир.

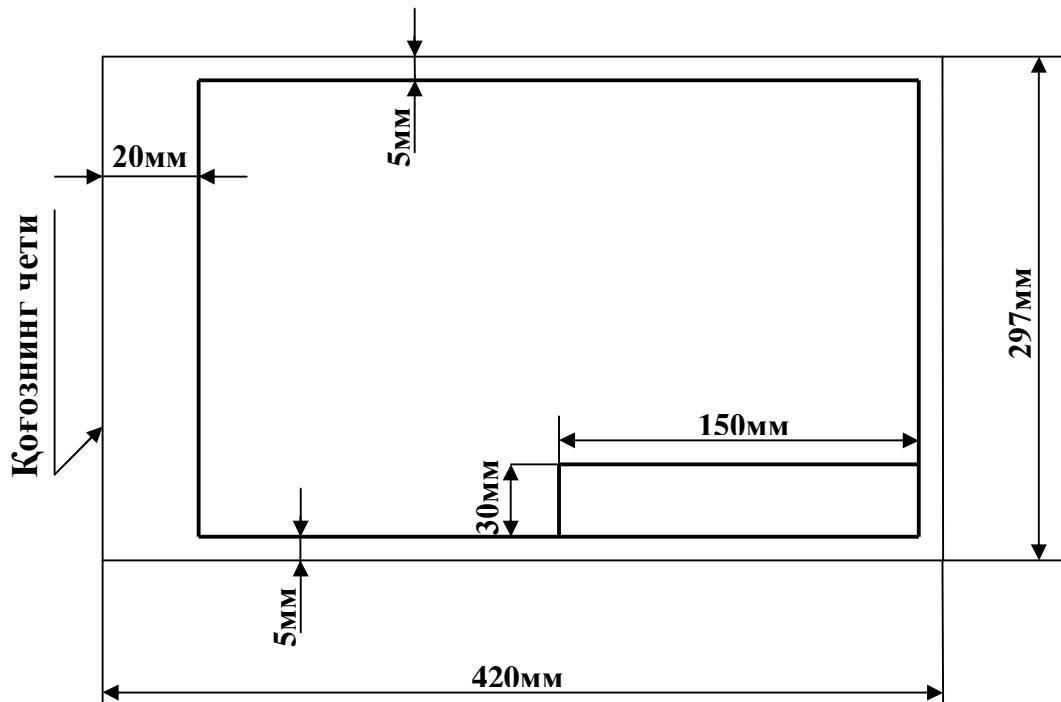
Техник билимларни мукаммал эгаллашнинг шартларидан бири график саводхонликни ошириш, яъни чизмаларни ўқиши ва бажаришни билишдир. Шу боисдан чизмалар чизишнинг асоси бўлган чизма геометрия фанини чуқур ўрганиш талаб этилади.

Чизма геометрия математиканинг бир тармоғи ҳисобланиб, уч ўлчамли фазодаги обьектларнинг текисликдаги график моделини қуриш асосларини ўрганади. Шу туфайли чизмани фазодаги геометрик шаклнинг текисликдаги график модели деб караш мумкин. Бу эса олий техник таълим тизимида чизма геометриянинг ўрни нақадар муҳимлигини белгилайди. Мазкур ўкув қўлланмада фанни ўқитишида унинг назарий асосларини техника ва қурилишда қўллаш билан боғлиқ кўпгина масалалар ечими ва машқ қилиш учун масалалар ёритилган.

Ўкув қўлланмада барча материаллар, жумладан, геометрик шаклларни проекциялаш ва уларнинг ўзаро вазиятларини аниқлашга доир позицион ва метрик масалалар ҳозирги замон геометрияси тараққиёти нуктаи назаридан байён этилган.

Мазкур тўплам ўқитувчиларга амалий машғулотлар ўтказиш учун услугубий қўлланма сифатида ишлатилса, талабалар учун чизма геометриядан масалалар ечиш учун иш дафтари сифатида қўлланилиши мумкин.

**График ишларнинг асосий ёзувларини қуидаги
ўлчамларида бажариш тавсия қилинади.**



1-шакл

| МАВЗУ | | | | | <i>Топш.№</i> |
|------------------|----------------|---------------|-------------|---------------------------------------|---------------|
| <i>Чизди</i> | <i>Фамилия</i> | <i>(имзо)</i> | <i>Сана</i> | <i>Факултет</i> <i>курс, гурӯҳ</i> | |
| <i>Текшириди</i> | <i>Фамилия</i> | <i>(имзо)</i> | <i>Сана</i> | <i>Барак №</i> | <i>M</i> |
| 30 | 40 | 20 | 15 | 20 | 40 |
| 10 | 10 | 185 | | | |

2-шакл

Қабул қилинган шартли белгилар

| | |
|--------------------|------------------|
| Белгиланиши | Номланиши |
|--------------------|------------------|

| | |
|--|---|
| H, V, W | горизонтал, фронтал, профил проекциялар текисликлари |
| H_1, H_2, \dots V_1, V_2, \dots | горизонтал, фронтал, профил проекциялар текисликларининг бир ва икки марта алмаштирилган вазиятлари |
| A, B, C, D, E, \dots $a, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ | фазодаги нұқталар |
| A', B', \dots A'', B'', \dots A''', B''', \dots | фазодаги A, B, \dots нұқталарнинг горизонтал, фронтал, профиль проекциялари |
| A_p, B_p, C_p, \dots | фазодаги A, B, C, \dots нұқталарнинг Р текисликдаги проекциялари |
| a, b, c, d, e, \dots k, m, n | фазодаги түғри ёки эгри чизиқлар |
| a', b', n', \dots a'', b'', n'', \dots a''', b''', n''', \dots | фазодаги a, b, n, \dots түғри ёки эгри чизиқларнинг горизонтал, фронтал, профиль проекциялари |
| h | горизонтал түғри чизиқлар |
| f | фронтал түғри чизиқлар |
| p | профиль түғри чизиқлар |
| P, Q, T, G, F, \dots | фазодаги умумий вазиятдаги текисликлар |
| H_1, H_2, H_3, \dots | горизонтал текисликлар |
| V_1, V_2, V_3, \dots | фронтал текисликлар |
| W_1, W_2, W_3, \dots | профиль текисликлар |
| $P_H, Q_H,$ $P_V, Q_V,$ P_W, Q_W | фазодаги Р ва Q текисликларнинг горизонтал, фронтал, профиль излари |
| $(AVC); a // b; c \cap d$ | геометрик элементлар билан берилган текисликлар |
| $\Delta, \theta, \Phi, \Omega, \Gamma, \dots$ | грек алфавитининг бош ҳарфлари билан белгиланған фазодаги сиртлар |

Қабул қилинған символлар

| Белгиланиши | Номланиши | Мисол |
|--------------------------|---------------------------------------|---|
| $\in (\notin)$ | тегишли (тегишли эмас) | Масалан, $A \in \Phi (A \notin \Phi)$ – А нұқта Φ шаклга тегишли (тегишли эмас) ёки Φ шакл А нұқта орқали ўтади (ўтмайды) |
| $\equiv (\neq)$ | устма-уст тушган (устма-уст тушмаган) | Масалан, $A \equiv B - A$ ва B нұқталар устма-уст тушади |
| \cap | кесишган | Масалан, $a \cap b - a$ ва b түғри чизиқлар ўзаро кесишади |
| $\parallel (\nparallel)$ | параллель (параллель эмас) | Масалан, $a // b (a \nparallel b) - a$ ва b түғри чизиқлар параллель |

| | | |
|---|--|--|
| | | (параллель эмас) |
| \perp | перпендикуляр | Масалан, $a \perp b - a$ ва b түгри чизиқлар ўзаро перпендикуляр |
| \angle | текис ёки иккиёкли бурчак | Масалан, $\angle BAC - AB$ ва AC түгри чизиқлар орасидаги бурчак |
| a^b | икки түгри чизиқ орасидаги бурчак | Масалан, $a^b - a$ ва b түгри чизиқлар орасидаги бурчак |
| a^P | түгри чизиқ ва текислик орасидаги бурчак | Масалан, $a^P - a$ түгри чизиқ ва P текислик орасидаги бурчак |
| P^Q | текисликлар орасидаги иккиёкли бурчак | Масалан, $P^Q - P$ ва Q текисликлари орасидаги иккиёкли бурчак |
|  ёки  | түгри бурчак белгиси | |

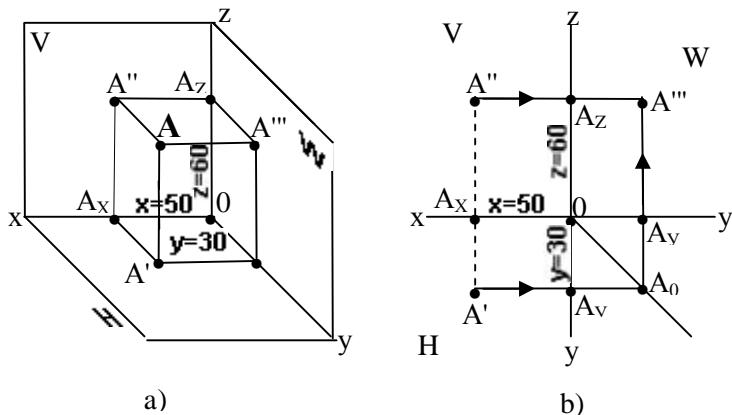
Нуқтанинг ортогонал проекцияси.

1-масала. A(50,30,60)

нуқтанинг берилган координаталари бўйича унинг фазовий вазияти ва чизмаси ясалсин. (1-расм)

Ечиш. А нуқта координаталари ишораларига асосан I октантда жойлашган.

Шунинг учун I октантнинг проекциялар текисликлари фазовий моделини ва проекциялар ўқлари

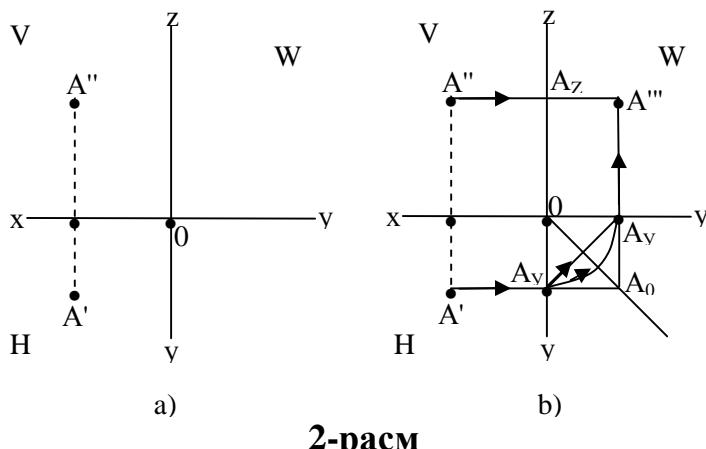


1-расм

системасини чизамиш. (1-а, расм). Координата боши 0 дан 0x ўқига $x_a = 50\text{мм}$, 0y ўқига $y_a = 30\text{мм}$, ва 0z ўқига $z_a = 60\text{мм}$ ўлчаб қўямиз ва A_x, A_y ва A_z нуқталарни белгилаймиз. А нуқтанинг горизонтал A' проекциясини ясаш учун A_x ва A_y нуқталардан 0x ва 0y ўқларига перпендикулярлар ўтказамиз. Бу перпендикулярнинг кесишиш нуқтаси А нуқтанинг горизонтал проекцияси A' бўлади. Худди шунингдек, A_x ва A_z нуқталардан 0x ва 0z ўқларига ўтказилган перпендикулярларнинг кесишиш нуқтаси A'' унинг фронтал проекцияси A_y ва A_z нуқталардан 0y ва 0z ўқларга ўтказилган. Перпендикулярларнинг кесишиш нуқтаси А нуқтанинг профил проекцияси A''' бўлади. А нуқтанинг фазодаги вазиятини аниқлаш учун унинг A', A'' ва A''' проекцияларидан H, V ва W текисликларига перпендикулярлар ўтказамиз. Бу перпендикулярларнинг кесишиш нуқтаси А нуқтанинг фазодаги ўрни бўлади.

А нуқтанинг чизмасини ясаш учун проекциялар ўқлари системасида (1,b-расм) 0x ўқига 40мм, 0y ўқига 30мм ва 0z ўқига 60мм ўлчамларни қўямиз ва A_x , A_y ва A_z нуқталарга эга бўламиз. Бу нуқталардан 0x,0y ва 0z проекциялар ўқларига ўтказилган перпендикулярларнинг кесишиш нуқталари А нуқтанинг A', A'' ва A''' проекцияларини беради, яъни $A(A', A'', A''')$.

2-масала. А(A', A'') нуқтанинг икки ортогонал (горизонтал ва фронтал) проекцияси орқали унинг учинчи (профиль) проекциясини ясанг. (2-расм)



2-расм

Ечиш. Нуқтанинг горизонтал проекциясидан 0x га параллель қилиб чизиқ ўтказилади ва унинг 0y ўқи билан кесишган А нуқтаси аниқланади.

0A_y ни радиус қилиб, A_y нуқтаси W текисликнинг айланиш харакатига мос равиша 90^0 га бурилади ва хосил бўлган A_y нинг янги вазиятидан 0z га параллель

чизиқ чиқарилади.

A'' нуқтадан 0z га перпендикуляр чиқарилиб, уларнинг ўзаро кесишуви A''' нуқта белгиланади.

Машқ қилиш учун масалалар.

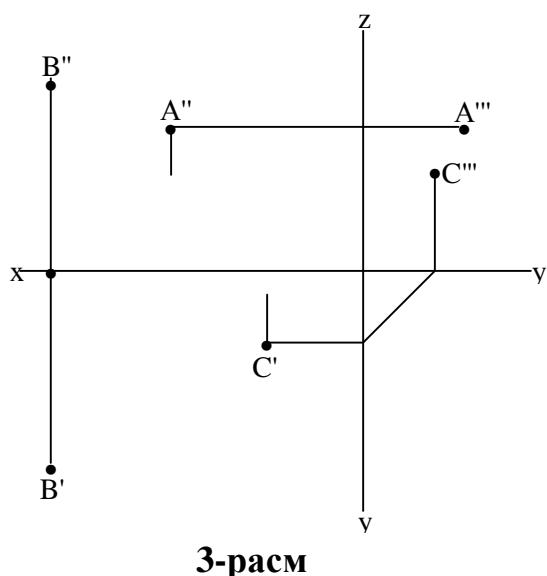
3-масала. Қўйидаги берилган нуқталарнинг ХУZ координаталарига кўра уларнинг фазовий тасвири ва горизонтал, фронтал ва профил проекциялари чизилсин.

$A(x = 12, y = 18, z = 30)$, $B(x = 50, y = 12, z = 18)$

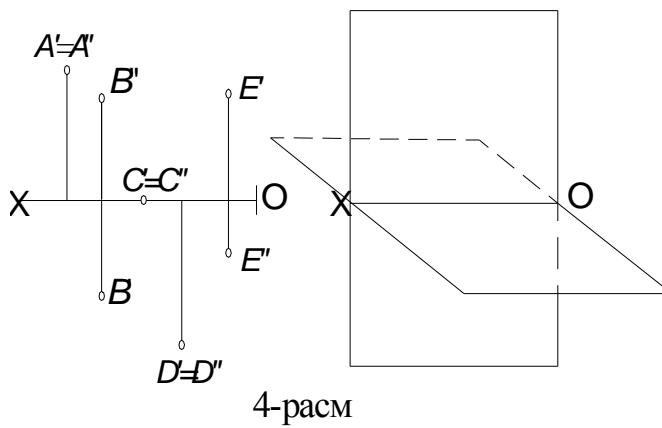
$C(x = 40, y = 20, z = 45)$, $D(x = 55, y = 0, z = 65)$

$K(x = 72, y = 65, z = -25)$, $L(x = -44, y = -10, z = 25)$

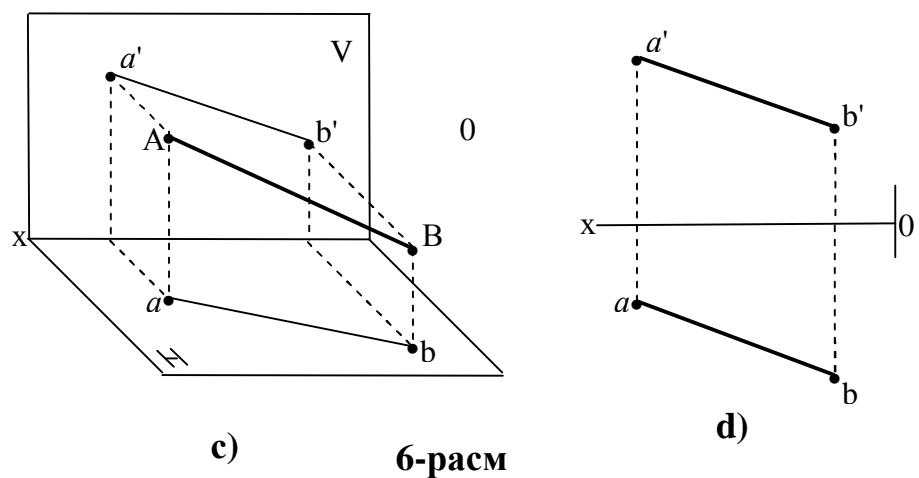
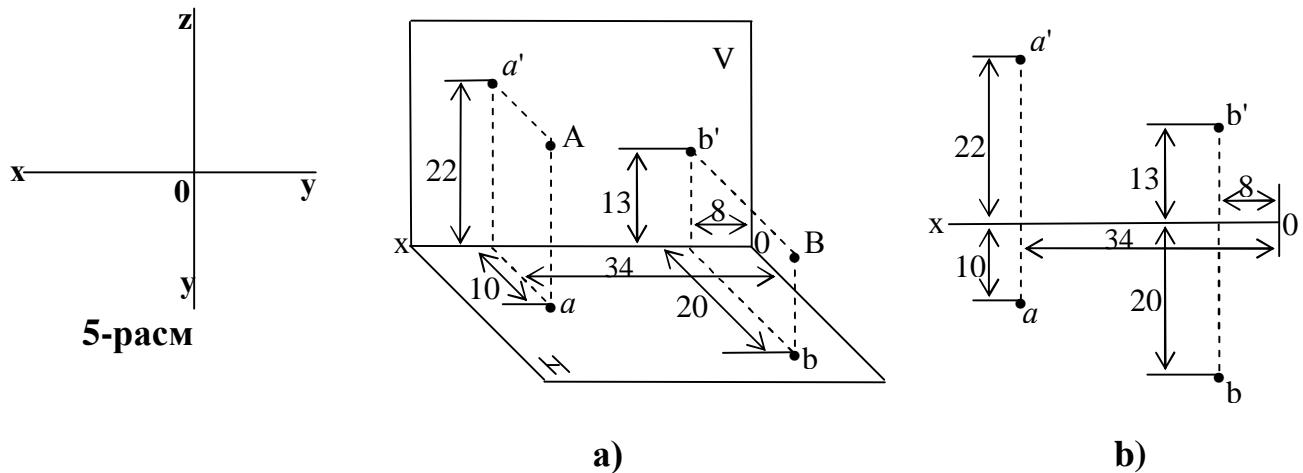
4-масала. Қўйидаги берилган нуқталарнинг икки проекцияларига кўра уларнинг учинчи проекцияларини топинг. (3-расм).



5-масала. Проекциялари билан берилган А, В, С, Д, Е, нуқталарнинг аксонометрияси ясалсин. (4-расм)



6-масала. Н, V текисликларга ва ОХ проекциялар ўқига нисбатан А (40, -20, 10) нүктага симметрик бўлган нуктанинг проекцияси ясалсин. (5-расм)

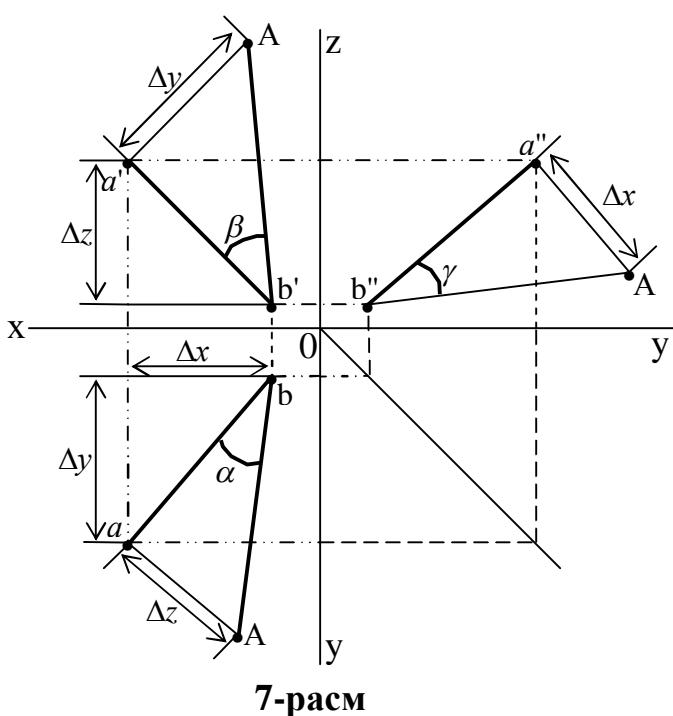


Тўғри чизиқнинг ортогонал проекциялари.

1-масала. А(34,10,22) ва В(8,20,13) нүкталар орқали ўтадиган чизиқнинг фазодаги шакли ва эпюри ясалсин. (6-расм)

Ечиш. Берилган А ва В нүкталарнинг a , a' ва b , b' проекцияларини ҳамда бу нүкталарнинг фазодаги ўринларини аниқлаймиз. (6-a,b расм). Сўнгра a билан b ни, a' билан b' ни, ва А билан В ни туташтирамиз. (6-c,d расм)

2-масала. АВ түғри чизик кесмасининг ҳақиқий узунлигини ва Н ва W текисликлар орасида ҳосил бўлган бурчакларнинг ҳақиқий катталиги аниқлансин. (7-расм)

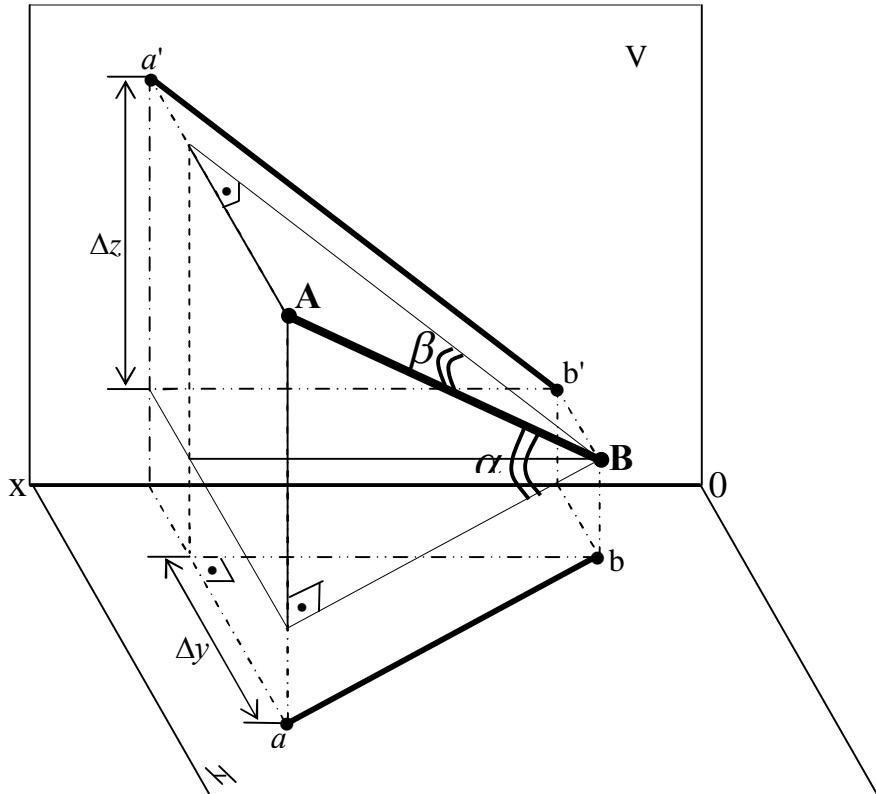


Хақиқий ўлчами $Ab=AB$ бўлиб, $AB^H = \angle abA = \alpha$ бўлади. Кесманинг V текислик билан ҳосил қилган β бурчагини аниқлаш учун түғри бурчакли $Aa'b'$ учбурчак ясалади. Бу учбурчакнинг бир катети кесманинг фронтал $a'b'$ проекциясига, иккинчи катети эса АВ кесма учлари ординаталри айирмаси Δy га тенг бўлади. Ҳосил бўлган $Ab'=AB$ бўлиб, $AB^V = \angle Ab'a' = \beta$ бўлади. АВ кесманинг W текислик билан ҳосил қилган бурчагини аниқлаш учун эса түғри бурчакли $Aa''b''$ учбурчак ясалади. Бу учбурчакнинг бир катети кесманинг профил $a''b''$ проекцияси, иккинчи катети кесма учларининг W текисликтан узоқликларининг абсциссалар айирмаси Δx бўлади. Ҳосил бўлган $Ab''=AB$ бўлиб, $AB^W = \angle Ab''a'' = \gamma$ тенг бўлади. Натижада α, β ва γ бурчаклар ҳосил бўлади. Бу бурчаклар берилган АВ түғри чизик билан Н, V ва W текисликлар орасида ҳосил бўлган оғма бурчакларнинг ҳақиқий катталигини ифода қиласи. Бу түғри чизикнинг фазодаги ўринлари 8-расмда кўрсатилган.

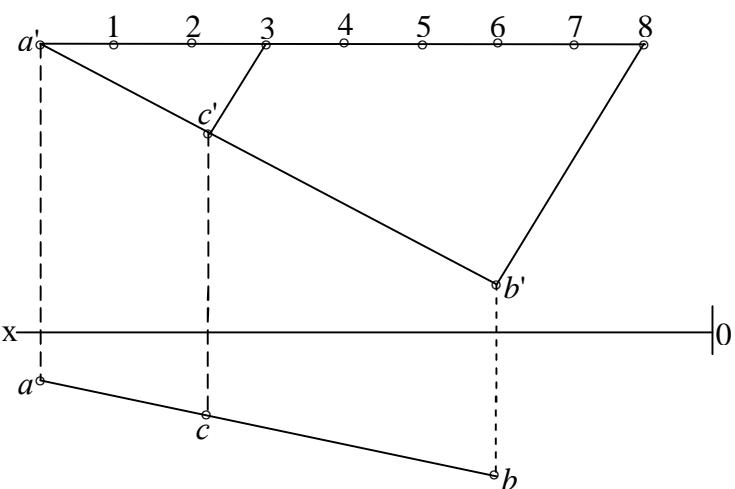
3-масала. АВ түғри чизик кесмасини 3:5 нисбатда бўлувчи нуқта аниқлансин. (9-расм)

Ечиш. Бунинг учун кесманинг охирги бирор нуқтаси, масалан, А нуқтанинг a' проекцияси орқали ёрдамчи түғри чизик ўтказамиз ва унга ихтиёрий катталиқдаги саккизга тенг кесмани қўйиб чиқамиз ($3+5=8$); кейинги кесманинг охирги нуқтасини (8-нуқтани) В нуқтанинг b' проекцияси билан туташтирамиз, $a'8$ кесмани 3:5 нисбатда бўлувчи 3 нуқтадан $b'8$ чизикка параллел чизик ўтказамиз; бу чизикнинг $a'b'$ билан кесишиган c' нуқтаси $a'b'$ кесмани $\frac{a'c'}{c'b'} = \frac{3}{5}$ нисбатда бўлади. Бундан кейин с нуқтани топамиз: у ҳам ab

кесмани $\frac{ac}{cb} = \frac{3}{5}$ нисбатда бўлади. Натижада С нуқта фазода АВ кесмани $\frac{3}{5}$ нисбатда бўлади.



8-расм



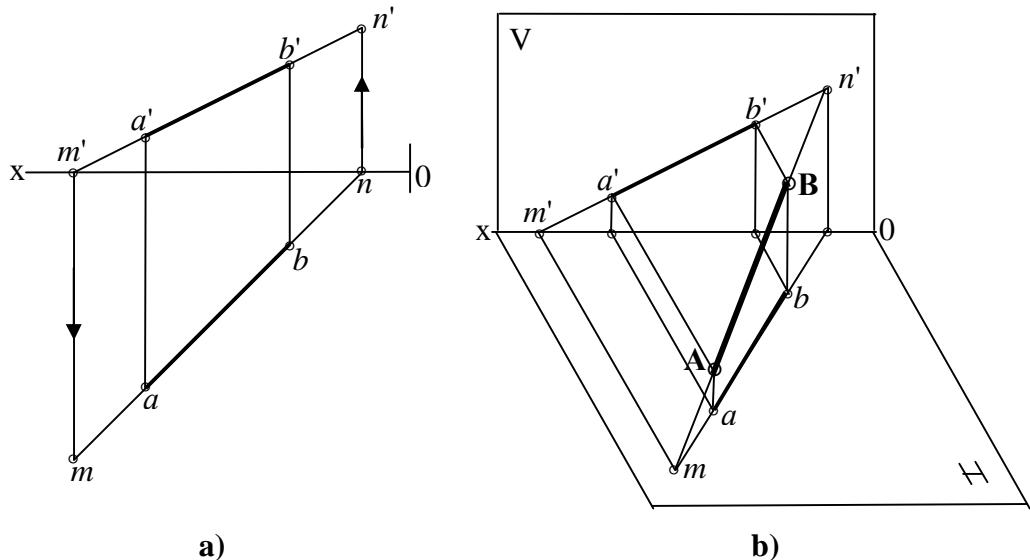
9-расм

4-масала. Берилган АВ тўғри чизиқнинг изларини топинг. (10-а,б расм)

Ечиш. Тўғри чизиқнинг горизонтал изини топиш учун, унинг фронтал проекцияси $a'b'$ ни $0X$ ўқи билан кесишгунча давом эттирилади (10-а расм),

кейин уларнинг кесишигандан m' нуқтасидан Н текислик бўйлаб $0X$ ўқига перпендикуляр чизик ўтказилади ва шу чизик билан тўғри чизиқнинг горизонтал проекцияси кесишигандан нукта m , АВ тўғри чизиқнинг горизонтал изини ифодалайди.

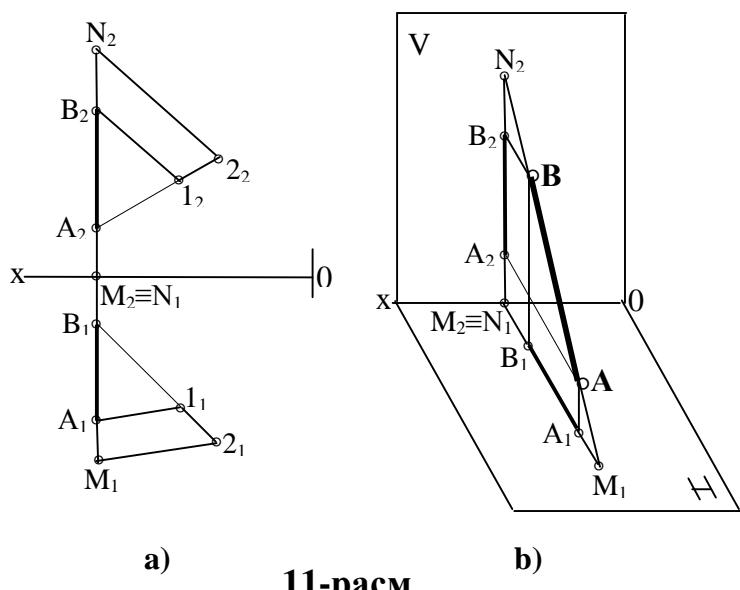
Тўғри чизиқнинг фронтал изини топиш учун, унинг горизонтал проекцияси ab ни $0X$ ўқи билан кесишигунча давом эттирилади ва шу нуқтадан (n) V текислик бўйлаб $0X$ ўқига перпендикуляр чикарилади,



10-расм

шу перпендикуляр билан тўғри чизиқнинг фронтал проекциясини кесишигандан n' нуқтаси аниқланади. АВ тўғри чизик изларининг фазодаги кўриниши 10-б расмда кўрсатилган.

5-масала. Профил АВ тўғри чизик берилган бўлиб, унинг горизонтал ва фронтал изларини топиш лозим (11-а,б расм).



11-расм

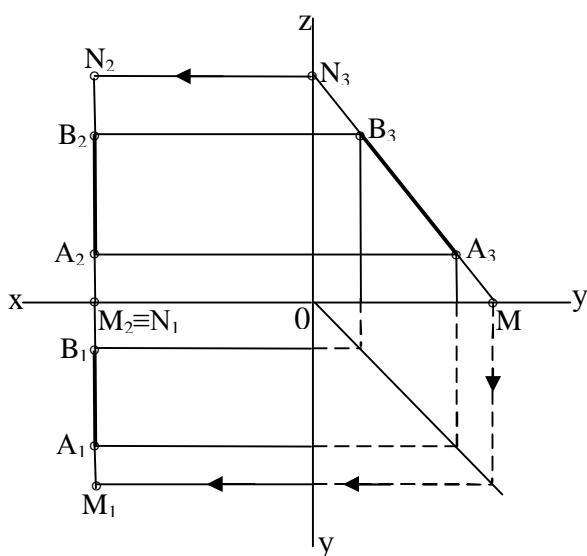
проекцияси (M_2) $0X$ ўқда ётиб, АВ тўғри чизиқни фронтал проекцияси A_2B_2 нинг $M_2A_2:M_2B_2$ нисбатида бўлади. Худди шунингдек, M_1 ҳам, кесманинг горизонтал изини фронтал

Эпюрда бу мисолни ечиш учун АВ кесмани берилган нисбатда бўлиш (11-а расм) қоидасидан фойдаланилади. Чунки кесманинг горизонтал изини фронтал

проекцияси (M_2) $0X$ ўқда ётиб, АВ тўғри чизиқни фронтал проекцияси A_2B_2 нинг $M_2A_2:M_2B_2$ нисбатида бўлади. Худди шунингдек, M_1 ҳам, кесманинг

горизонтал проекцияси ҳам шу нисбатда бўлади, яъни $\frac{M_1A_1}{M_1B_1} = \frac{M_2A_2}{M_2B_2}$. B_1 нуқтадан ихтиёрий бурчак остида тўғри чизик ўтказилади, сўнгра шу B_1 нуқтадан бошлаб, $B_11_1 = A_2B_2$ ва $1_12_1 = A_2M_2$ га тенг бўлган кесмалар ўлчаб қўйилади. 1_1 ва A_1 нуқталар бирлаштирилади. 2 нуқтадан 1_1A_1 чизиқка параллел 2_1M_1 чизик ўтказилади. Ҳосил бўлган M_1 нуқта берилган кесманинг горизонтал изининг горизонтал проекцияси бўлади. Кесманинг фронтал изининг фронтал проекциясини топиш учун $N_1A_1:B_1N_1$ нисбатдан фойдаланамиз. A_2 нуқтадан ихтиёрий тўғри чизик ўтказилади ва шу нуқтадан бошлаб $A_21_2 = A_1B_1$ ва $1_22_2 = B_1N_1$ кесмалар ўлчаб қўйилади. 1_2B_2 нуқталар бирлаштирилади ва 2_1 нуқтадан шу чизиқка параллел тўғри чизик ўтказилади. Бу чизик A_1B_1 чизик билан кесишиб, кесманинг фронтал изининг фронтал проекцияси N_2 ни ҳосил қиласди.

Шу мисолнинг ўзини тўғри чизиқнинг профил проекциясидан фойдаланиб ҳам ечиш мумкин (12-расм). Бунинг учун аввал АВ тўғри чизиқнинг профил проекцияси A_3B_3 топилади ва унинг z ҳамда у ўқлари билан кесишган M_3 ва N_3 нуқталари топилади.



12-расм

Бу ерда N_3 нуқта АВ нинг фронтал изининг профил проекцияси, M_3 эса горизонтал изининг профил проекциясидир. Изларнинг горизонтал ва фронтал проекцияларини топилишини чизмадан тушуниш қийин эмас.

Машқ қилиш учун масалалар.

6-масала. 1-жадвалда кўрсатилган ва координаталари мм ҳисобида берилган нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқларнинг эпюралари ва фазовий вазияти Н, В ва W текисликлар системасида тасвирлансан.

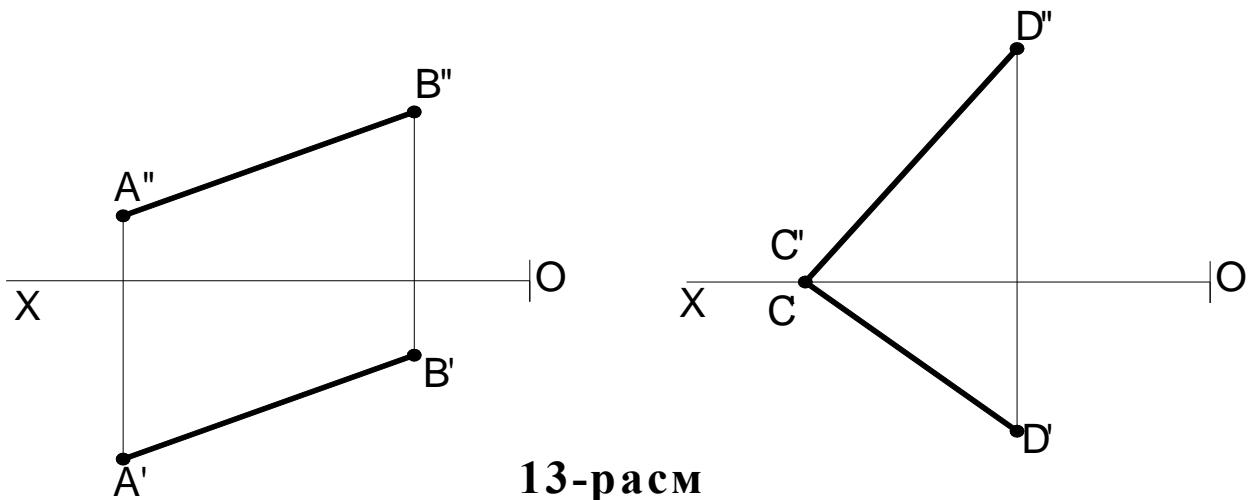
| Тартиб номерлар и | Тўғри чизик нуқталари | Тўғри чизик нуқталарининг координаталари, мм ҳисобида | | |
|-------------------------|--------------------------|--|-----|-----|
| | | x | y | z |
| 1 | A | 40 | 25 | 25 |
| | B | 55 | 30 | 38 |
| 2 | C | 10 | -30 | 50 |
| | D | -15 | -60 | -40 |
| 3 | E | -35 | 55 | 10 |

| | F | 0 | 5 | 45 |
|---|---|-----|-----|-----|
| 4 | Q | 30 | 0 | -25 |
| | R | 0 | 15 | 0 |
| 5 | U | 25 | 25 | -25 |
| | H | 0 | -30 | 30 |
| 6 | O | -45 | 0 | -30 |
| | N | 10 | 50 | 40 |

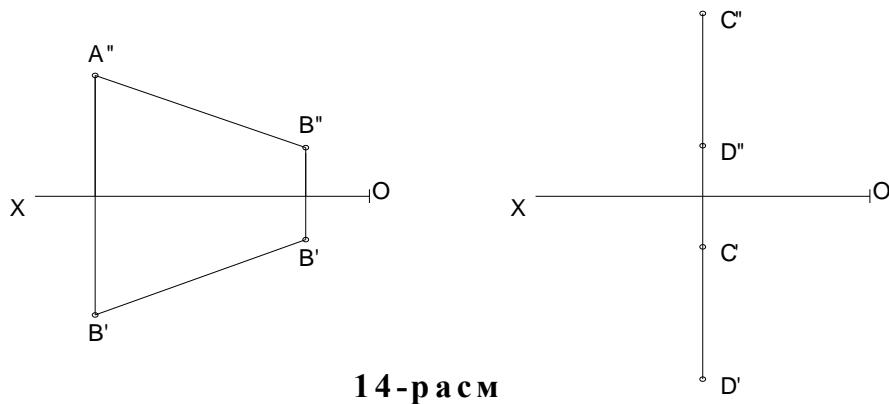
7-масала. АВ кесма, A(50,10,15), B(5,30,35) координаталари билан берилган бўлиб, унинг ҳақиқий катталигини топинг.

8-масала. АВ кесма, A(15,20,10), B(25,40,5) координаталари билан берилган бўлиб, унинг H, V ва W проекциялар текисликларига нисбатан оғиш бурчаклари - α, β, γ ларни аниқланг.

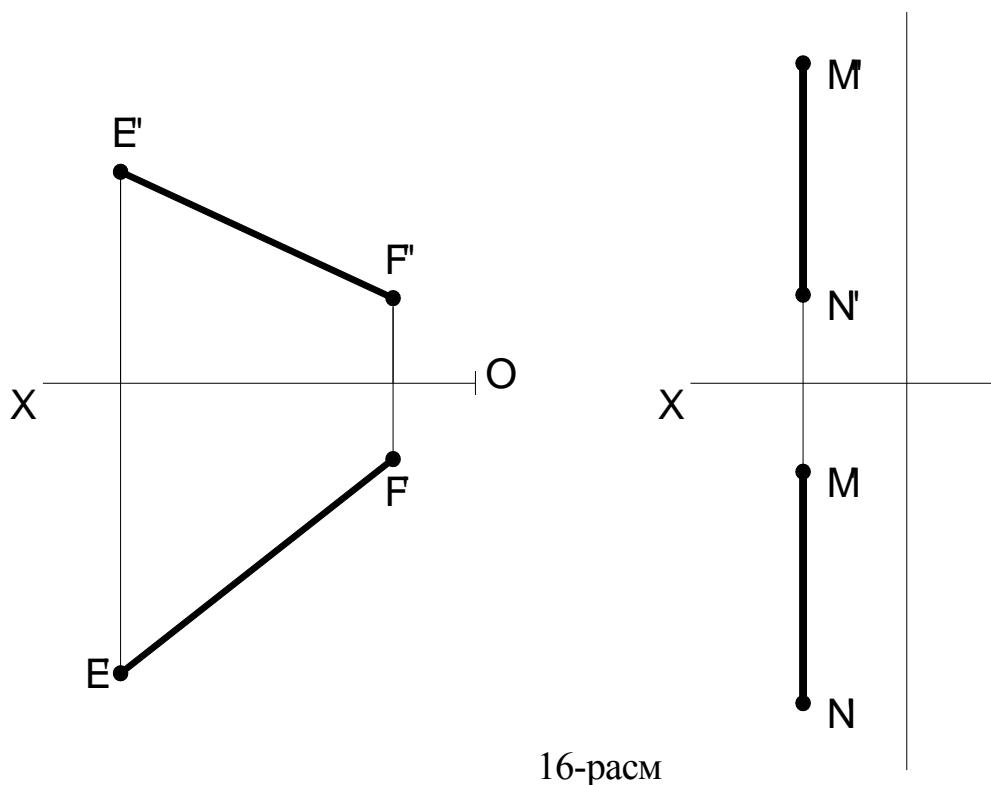
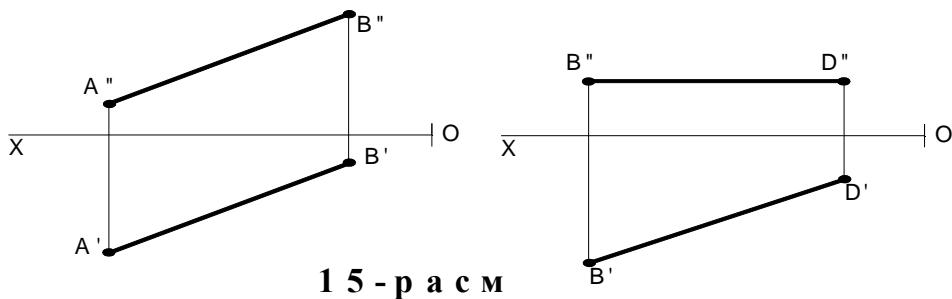
9-масала. АВ ва CD кесмаларнинг ҳақиқий катталиклари, ҳамда АВ нинг H га, CD нинг V га нисбатан оғиш бурчаклари аниқлансин. (13-расм)



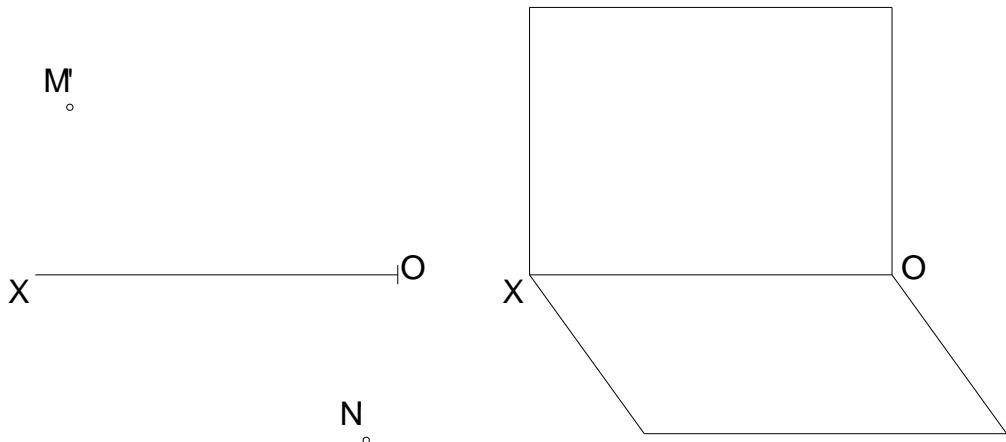
10-масала. АВ ва CD кесмаларни 1:4 нисбатда болинсин. (14-расм)



11-масала. AB, BD, EF ва MN AB ва BD түғри чизикларнинг излари ясалсин. (15,16-расмлар)

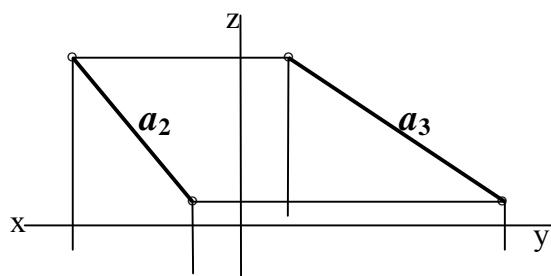


12-масала. Түғри чизикнинг горизонтал ва фронтал излари – M" ва N' нуқталари берилген. Түғри чизик кесмасининг проекциялари ва яққол тасвиририни ясалсин, ҳамда унинг хақиқий катталиги аниқлансин. (17-расм)



17-расм

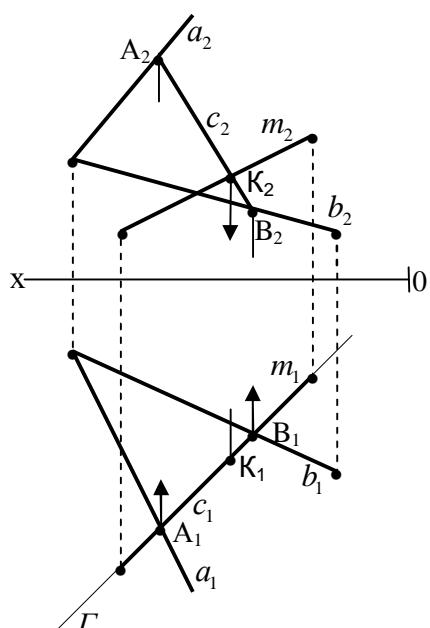
13-масала. a кесманинг профил проекциясидан фойдаланиб, унинг ҳақиқий катталигини топинг. (18-расм)



18-расм

Текислик ва унинг ортогонал проекциялари.

1-масала. Ихтиёрий вазиятдаги $\Phi(a \cap b)$ текислик билан $m(m_1, m_2)$ түғри чизиқнинг кесишиган нүктасини аниқлаш керак (19-расм).
Ечиш. м түғри чизик орқали ёрдамчи горизонтал проекцияловчи Γ текислик ўтказилади. Бунинг учун m_1 орқали текисликнинг горизонтал изи Γ_{Π_1} ўтказилади. Ёрдамчи Γ текислик, берилган Φ текисликларнинг кесишиган чизиги С топилади. Бунда:



19-расм

$$a_1 \cap \Gamma_{\Pi_1} = A_1; \quad A_2 \in a_2$$

$$b_1 \cap \Gamma_{\Pi_1} = B_1; \quad B_2 \in b_2$$

$$AB(A_1B_1, A_2B_1) = \Phi \cap \Gamma = C$$

т түгри чизик билан $C=AB$ чизиқнинг кесишган нуқтаси K аниқланади:

$$c_2 \cap m_2 = K_2; \quad K_1 \in c_1;$$

$$K(K_1, K_2) = m(m_1, m_2) \cap \Phi(a \cap b); \quad K = m \cap c$$

бўлади.

2-масала. $A (A', A'')$ нуқтадан $Q (Q_h, Q_v)$ текисликка параллель түғри чизик ўтказиш талаб қилинсин (20-расм).

Йечиш. A нуқтадан Q текисликка параллель қилиб чексиз кўп түғри чизиқлар утказиш мумкин. Шундай түғри чизиқларнинг ихиёрий биттаси ўтказилади. Бунинг учун Q текисликка тегишли ихиёрий $e (e', e'')$ түғри чизик танланади. Бу түғри чизиқнинг бир номли проекцияларига параллель қилиб A нуқтанинг A' ва A'' проекцияларидан изланган түғри чизиқнинг ℓ' ва ℓ'' проекциялари ўтказилади, яъни $e (e', e'') \in Q(Q', Q'')$ бўлиб, $\ell' \in A'$, $\ell'' \in A''$ бўлганда $\ell // Q$ бўлади.

3-масала. $D(D', D'')$ нуқтадан $ABC (A'B'C', A''B''C'')$ текислиги ва горизонтал проекциялар текислиги H га параллель m түғри чизик ўтказилсин (21-расм).

Йечиш. ΔABC текислигига H га параллель қилиб унинг горизонтали $h(h', h'')$ түғри чизик ўтказилади. Сўнгра D нуқтанинг D' ва D'' проекцияларидан m'/h' ва m''/h'' қилиб изланган түғри чизиқнинг проекциялари ўтказилади.

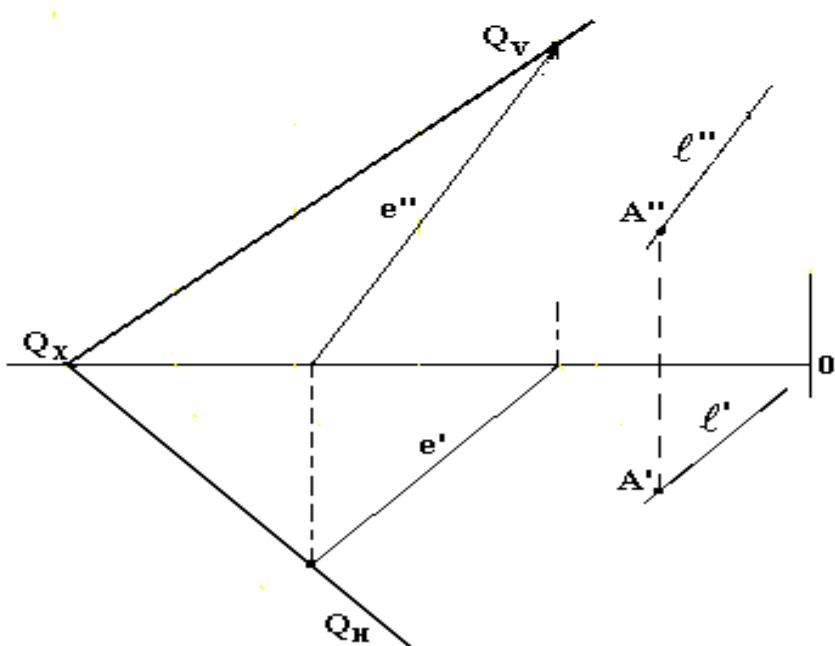
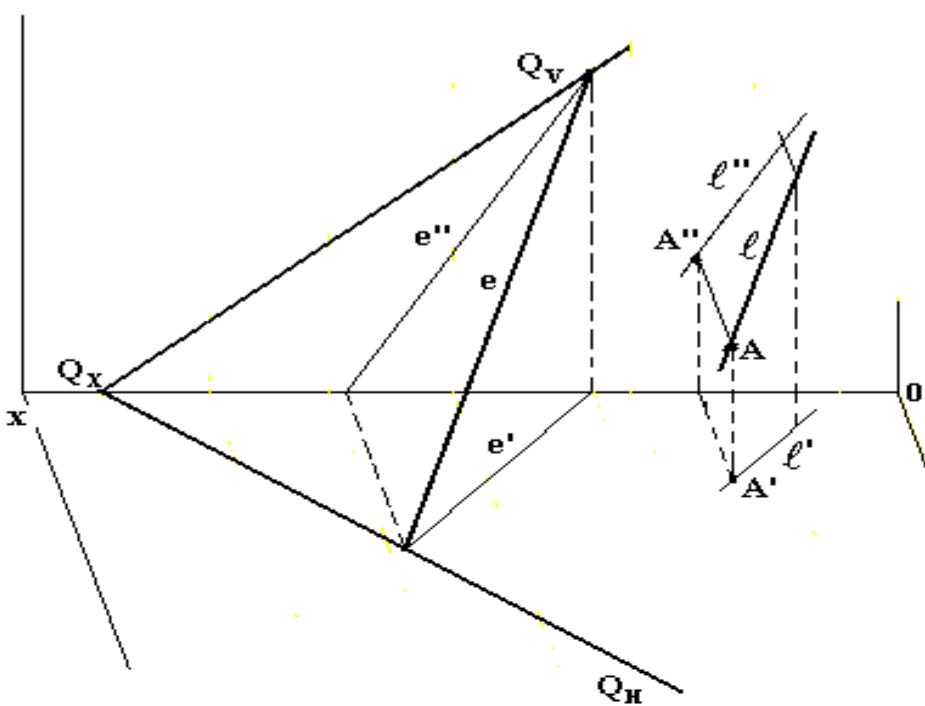
4-масала.

$P(m/n)$

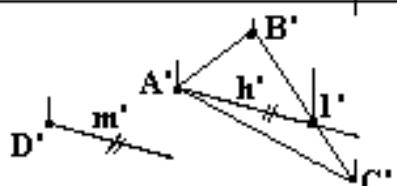
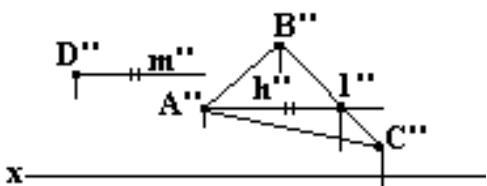
текислик ва $\ell(\ell', \ell'')$ түғри чизиқнинг ўзаро вазияти аниқлансан ин (22-расм).

Йечиш. Түғри чизик ва текисликнинг ўзаро вазиятини аниқлаш учун P текислика $e''/\!/ \ell'$ қилиб түғри чизиқнинг горизонтал проекцияси ясалади.

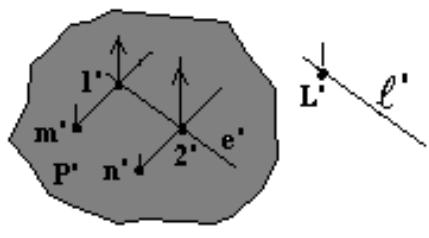
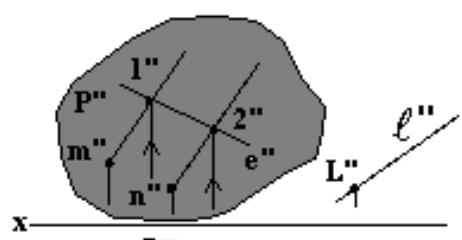
Чизмада e'' түғри чизик ℓ'' га параллель бўлмагани учун ℓ түғри чизик текислика параллель бўлмайди. ℓ ва P ларнинг ўзаро параллелигини $\ell''/\!/ e''$ қилиб ўтказиш билан хам бажариш мумкин.



20 -расм

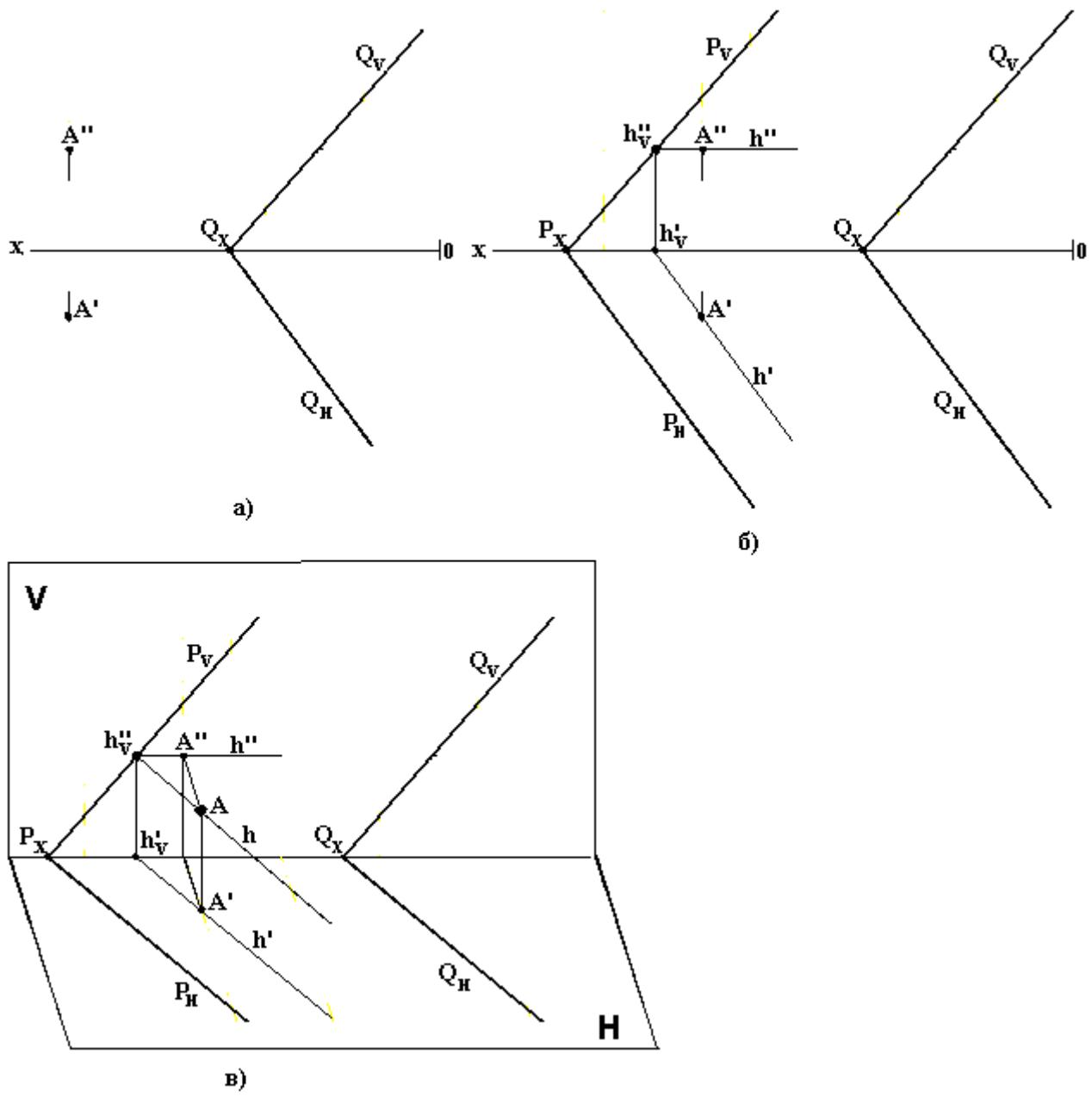


21-расм



22-расм

4-масала. $A(A', A'')$ нүктадан $Q(Q_H, Q_V)$ текисликка параллель $P(P_H, P_V)$ текислик үтказилсін (23-а,б,в расм).

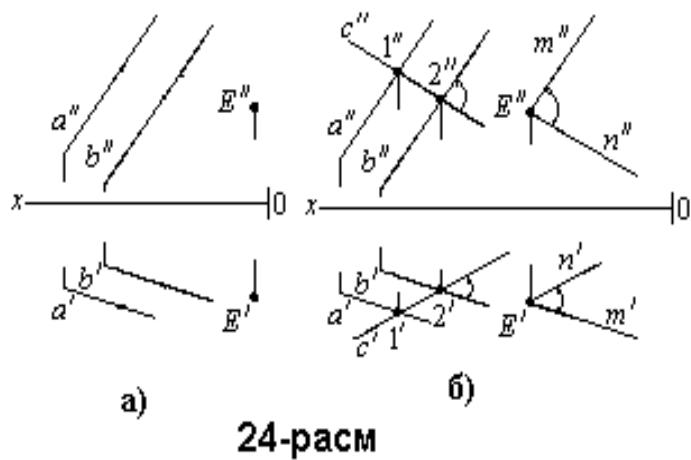


23-расм

Ечиш. Текисликларнинг параллеллик хусусиятларига кўра, P текисликнинг излари $P_H \parallel Q_H$, $Q_V \parallel P_V$ ва $P_W \parallel Q_W$ бўлиши шарт. Масалани йециш учун тўғри чизиқ ва текисликнинг параллеллик шартларидан фойдаланиб, А нүктанинг A' ва A'' проекцияларидан Q текисликка параллель қилиб ихтиёрий тўғри чизиқ, жумладан, $h(h', h'')$ горизонтали үтказилади (23-б,в расм). Бу горизонталнинг фронтал изи h'_V ясалиб, ундан изланган P текисликнинг P_V изи берилган текисликнинг Q_V изига параллель қилиб үтказилади. Сўнгра $P_V \cap 0x = P_X$ нүктасидан Q текисликнинг Q_H изига параллель қилиб изланган текисликнинг P_H изи үтказилади.

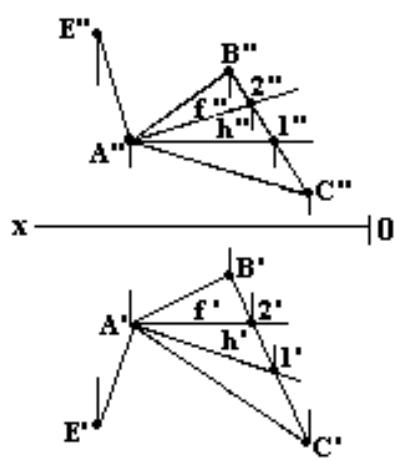
5-масала. Е(Е', Е'') нүктадан $a(a', a'')$ ва $b(b', b'')$ параллель чизиқлар билан берилген текисликка параллель текислик үтказилсın. (24-а,б расм).

Ечиш. Берилген ($a \parallel b$) текисликка тегишли ихтиёрий $c(c', c'')$ түғри чизик үтказиб, сўнгра Е нүктанинг Е' ва Е'' проекцияларидан a ва c чизиқлар проекцияларига мос равища параллель қилиб үтказилган $m' \cap n', m'' \cap n''$ кесишувчи чизиқлар проекциялари изланган текислик проекцияси бўлади.

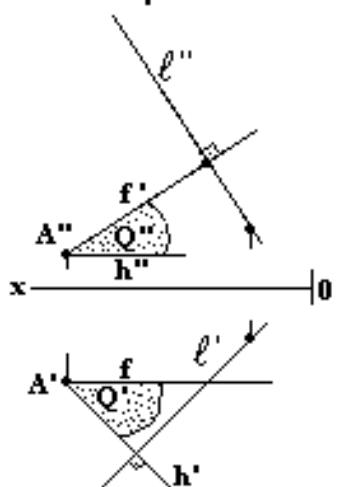


24-расм

параллель бўлган текисликни ифодалайди.



25-расм



26-расм

6-масала. ΔABC билан берилган текисликнинг А учидан унга перпендикуляр үтказилсın. (25-расм).

Ечиш. Масалани қўйидаги алгоритм бўйича йечамиз:

- $\Delta ABC(\Delta A'B'C', \Delta A''B''C'')$ текисликнинг $h(h', h'')$ горизонтали ва $f(f', f'')$ фронтали үтказилади.
- текисликнинг А нүктаси А' ва А'' проекцияларидан ихтиёрий узунлиқда $A'E' \perp h'$ ва $A''E'' \perp f'$ қилиб перпендикулярнинг проекциялари ясалади.

7-масала. $A(A', A'')$ нүкта орқали $\ell(\ell', \ell'')$ түғри чизиқка перпендикуляр текислик үтказилсın (26-расм).

Ечиш. Бунинг учун: • А нүктанинг А' ва А'' проекцияларидан $h' \perp \ell'$ ва $h'' \parallel 0x$ қилиб изланган текислик горизонталининг проекциялари үтказилади;

- А нүктанинг А' ва А'' проекцияларидан $f \parallel 0x$ ва $f' \perp \ell''$ қилиб текислик фронталининг проекциялари үтказилади;
- хосил бўлган $h \cap f (h' \cap f \wedge h'' \cap f')$ кесишувчи чизиқлар изланган текисликни ифода қиласи.

Текисликнинг горизонтали $h \perp \ell$ ва $f \perp \ell$ бўлгани учун бу текислик ℓ түғри чизиқка перпендикуляр

бўлади.

8-масала. $A(A', A'')$ нуқта орқали ўтувчи ва $b(b', b'')$ тўғри чизикка перпендикуляр бўлган текисликнинг излари қурилсин (27-а,б,в расм).

Ечиш. • A нуқтанинг A' ва A'' проекцияларидан $h' \in A'$ ва $h' \perp b'$ ва $h'' \in A''$ ва $h'' \parallel 0x$ қилиб текисликнинг горизонтали ўтказилади;

- горизонталнинг фронтал изининг B' ва B'' проекциялари ясалади;

- Q текисликнинг Q_V фронтал изи $Q_V \in B''$ ва $Q_V \perp b''$, горизонтал изи эса Q_H дан $Q_H \in Q_X$ ва $Q_H \perp b'$ (ёки $Q_H \parallel h'$) қилиб ўтказилади.

Натижада $Q_H \perp b'$ ва $Q_V \perp b''$ бўлгани учун $Q \perp b$ бўлади.

9-масала. Берилган $A(A', A'')$ нуқтадан Q (Q_H , Q_V) текисликкача бўлган масофа аниқлансан (28-расм).

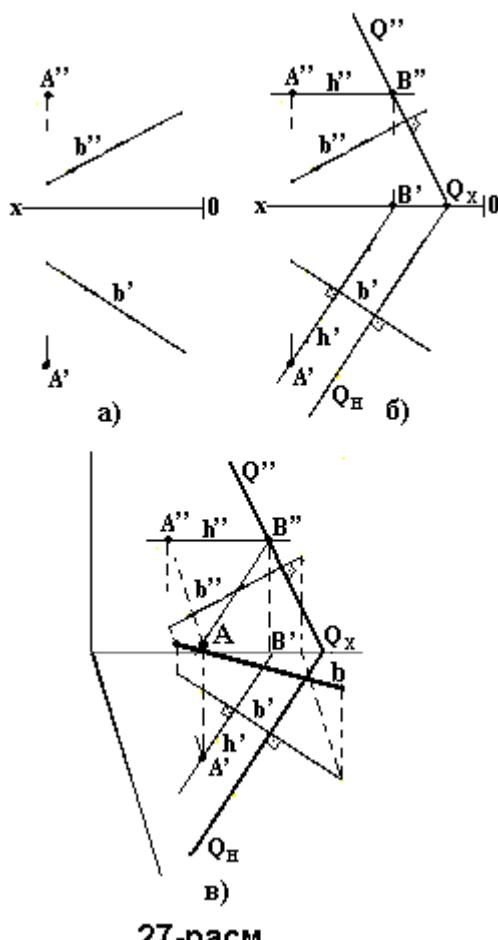
Ечиш. • A нуқтанинг A' ва A''

проекцияларидан Q текисликнинг Q_H ва Q_V изларига мос равишда перпендикулярнинг a' ва a'' проекциялари ўтказилади:

$$a' \in A', a' \perp Q_H \text{ ва } a' \perp Q_H \text{ ва } a'' \perp A'', a'' \perp Q_V.$$

Бу перпендикулярнинг Q текислик билан кесиши нуқтасининг проекцияларини аниқлаш учун:

- a перпендикулярдан ёрдамчи горизонтал проекцияловчи $S(S_H, S_V)$ текислик ўтказилади;

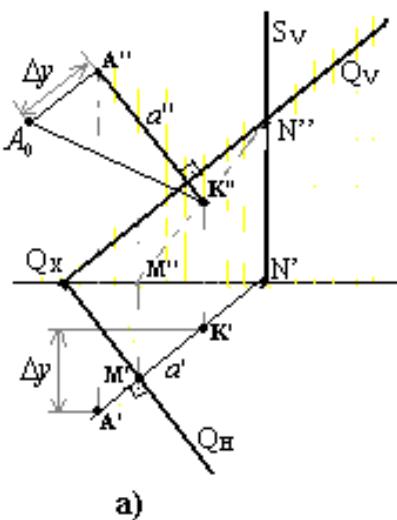


27-расм

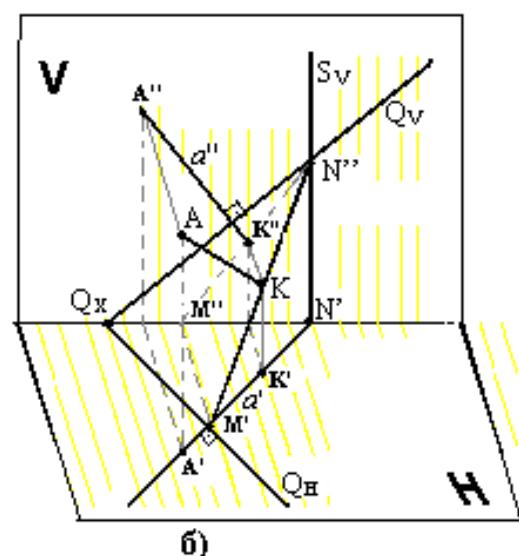
• Q ва S

текисликларнинг кесиши чизиги $MN(M'N', M''N'')$ билан $a(a', a'')$ перпендикулярнинг кесиши нуқтаси K нинг K' ва K'' проекциялари аниқланади;

- чизмада ҳосил бўлган $A'K'$ ва $A''K''$ изланган масофанинг проекциялари



а)



б)

28-расм

бўлади. Бу масофанинг ҳақиқий ўлчами тўғри бурчакли $\Delta A_0 A'' K''$ нинг $A_0 K''$

гипотенузаси бўлади.

10-масала. $D(D', D'')$ нуктадан

$\Delta ABC(\Delta A' B' C', \Delta A'' B'' C'')$

текисликкача бўлган масофа аниқлансин (29-расм).

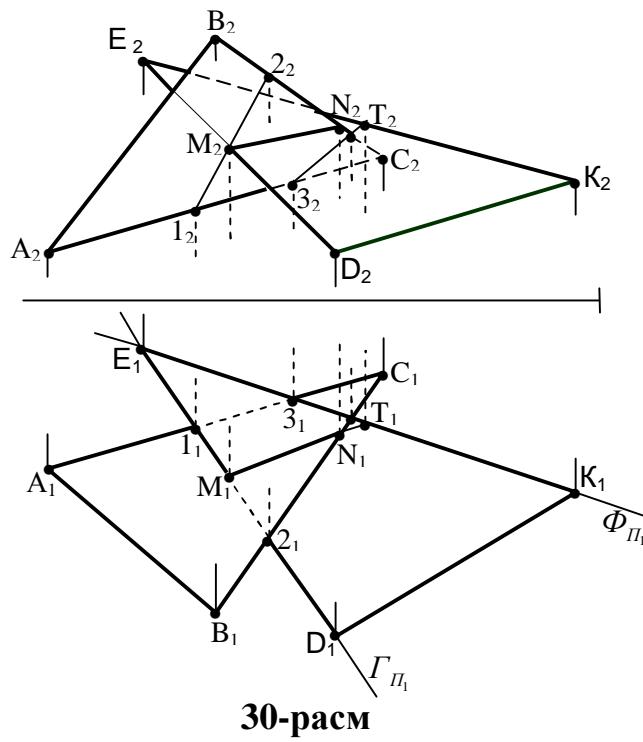
Ечиш. Масала қўйидаги ясаш алгоритми асосида йечилади:

- ΔABC текисликнинг горизонтал ва фронтал чизиклари проекциялари ўтказилади;

• D нуктанинг D' ва D'' проекцияларидан перпендикулярнинг m' ва m'' проекциялари $m' \in D', m' \perp h'$ ва $m'' \in D'', m'' \perp f''$ қилиб ўтказилади;

- перпендикулярнинг ΔABC текислик билан кесишигдан нуктаси D_1 нинг D'_1 ва D''_1 проекциялари аниқланади.
- m перпендикулярдан ёрдамчи горизонтал проекцияловчи $M(M_H, M_V)$ текислик ўтказилади.

- ΔABC ва M текисликлар кесишиш чизигининг $3'4'$ ва $3''4''$ проекциялари ясалади.



- текисликларнинг кесишиш чизиги прекциялари $3'4'$ ва $3''4''$ билан m' , m'' перпендикулярнинг кесишиш D_1 нуктасининг D'_1 ва D''_1 проекциялари аниқланади:

$$D'_1 = m'' \cap 3''4'' \text{ ва } D''_1 \in m''.$$

Чизмада хосил бўлган $D'D'_1$ ва $D''D''_1$ проекциялар изланган DD_1 масофанинг проекциялари бўлади. Унинг ҳақиқий ўлчами тўғри бурчакли $\Delta D_0 D'' D'_1$ нинг $D_0 D''_1$ гипотенузасидан иборат бўлади.

- 11-масала.** Ихтиёрий вазиятда жойлашган $ABC(A_1B_1C_1, A_2B_2C_2)$ ва $EKD(E_1K_1D_1, E_2K_2D_2)$ текисликларнинг ўзаро кесишиш

чизигини топиш керак (30-расм).

Ечиш. Учбурчаклар билан берилган текисликларнинг кесишиш чизигининг проекциялари бир учбурчакнинг икки томонининг иккинчи учбурчак текислиги билан кесишиш нуқталарининг M_1 , M_2 ва N_1 , N_2 проекцияларини аниқлаш орқали топилади. Бунинг учун EKD учбурчакнинг E_1D_1 , E_2D_2 томонидан ёрдамчи Γ_{Π_1} горизонтал проекцияловчи текислик ўтказилади ҳамда ΔABC ва Γ_{Π_1} текисликларнинг кесишиш чизигининг l_{121} ва l_{222} проекциялари аниқланади. Шунда E_1D_1 , E_2D_2 билан ΔABC текисликнинг кесишиганди нуқтаси M_1M_2 бўлади. Худди шунингдек EKD текисликнинг E_1K_1 , E_2K_2 томони орқали Φ_{Π_1} текислик ўтказилади ва бу текислик воситасида ΔABC ва E_1K_1 , E_2K_2 ларнинг кесишиганди нуқтаси T_1T_2 аниқланади. Аниқланган M_1 билан T_1 ва M_2 билан T_2 нуқталар ўзаро туташтирилади. Натижада M_1N_1 , M_2N_2 изланётган чизик ҳосил бўлади. Лекин учбурчаклар чегараланган шакллар бўлгани учун уларнинг кесишиш чизигининг проекциялари M_1M_2 ва N_1N_2 чегарасида бўлишини тушуниш қийин эмас. Учбурчакларнинг ўзаро кесишишида уларнинг томонларини кўринар ёки кўринмаслигини аниқлашда конкурент нуқталардан фойдаланилади.

12-масала. Берилган $AB(A'B', A''B'')$ тугри чизик билан $P(P_V, P_H)$ текисликнинг кесишиш нуқтасини топинг. (31-а, расм).

Ечиш. (31-б, расм). AB тугри чизик орқали горизонтал проекцияловчи $N(N_H, N_V)$ текислик ўтказилади. Ихтиёрий P ва N текисликларни кесишувчи фронтал T текислик ўтказилади ва T текисликнинг P ва N текисликлар билан кесишув чизиқларининг ўзаро кесишув нуқтасини, яъни 3 нуқтани топамиз. P ва N текисликларининг горизонтал текисликтаги кесишиш нуқтаси 2 билан 3 нуқтани туташтириб изланган $1(1', 1'')$ нуқтасини, яъни $AB(A'B', A''B'')$ тугри чизик билан $P(P_V, P_H)$ текисликнинг кесишиш нуқтасини топамиз.

13-масала. Берилган $Q(Q_V, Q_H)$ ва $P(P_V, P_H)$ текисликларнинг кесишиш чизигини топинг. (32-расм).

Ечиш. Текисликларнинг кесишиш чизигини ясаш учун текисликларнинг бир номли излари кесишиш E ва F нуқталарнинг проекциялари аниқланади ва нуқталарнинг бир номли проекциялари ўзаро туташтирилади. Натижада ҳосил бўлган ℓ' ва ℓ'' тўғри чизиқлар Q ва P текисликларнинг кесишиш чизигининг проекциялари бўлади.

14-масала. $P(P_V, P_H)$ текислика перпендикуляр ва Q_X дан ўтувчи Q текислик излари билан ўтказилсин. (33-расм)

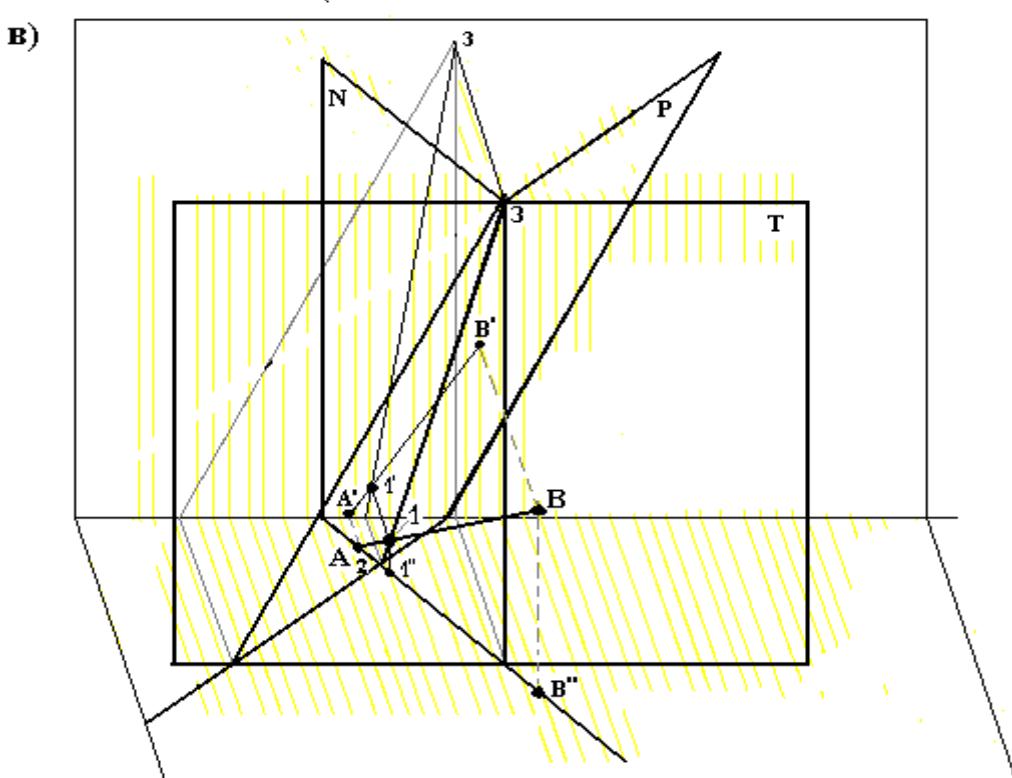
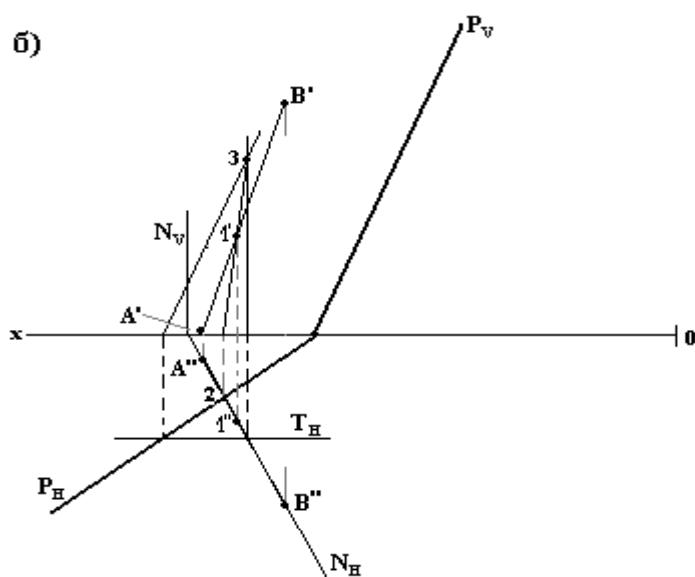
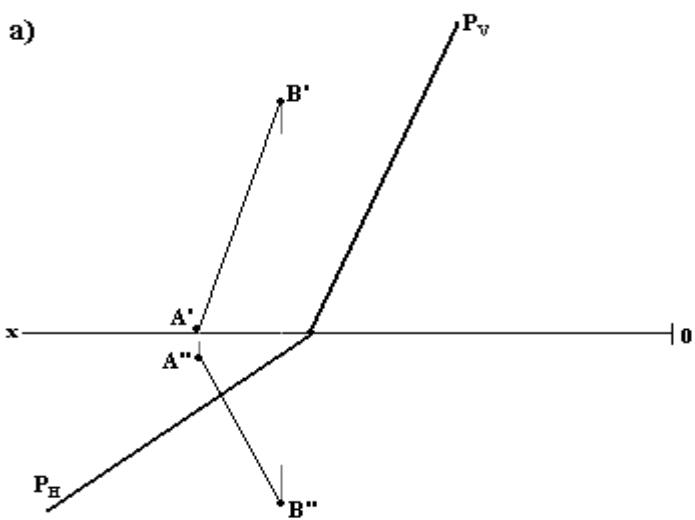
Ечиш. • P текислика перпендикуляр бўлган ихтиёрий a тўғри чизик ўтказилади.

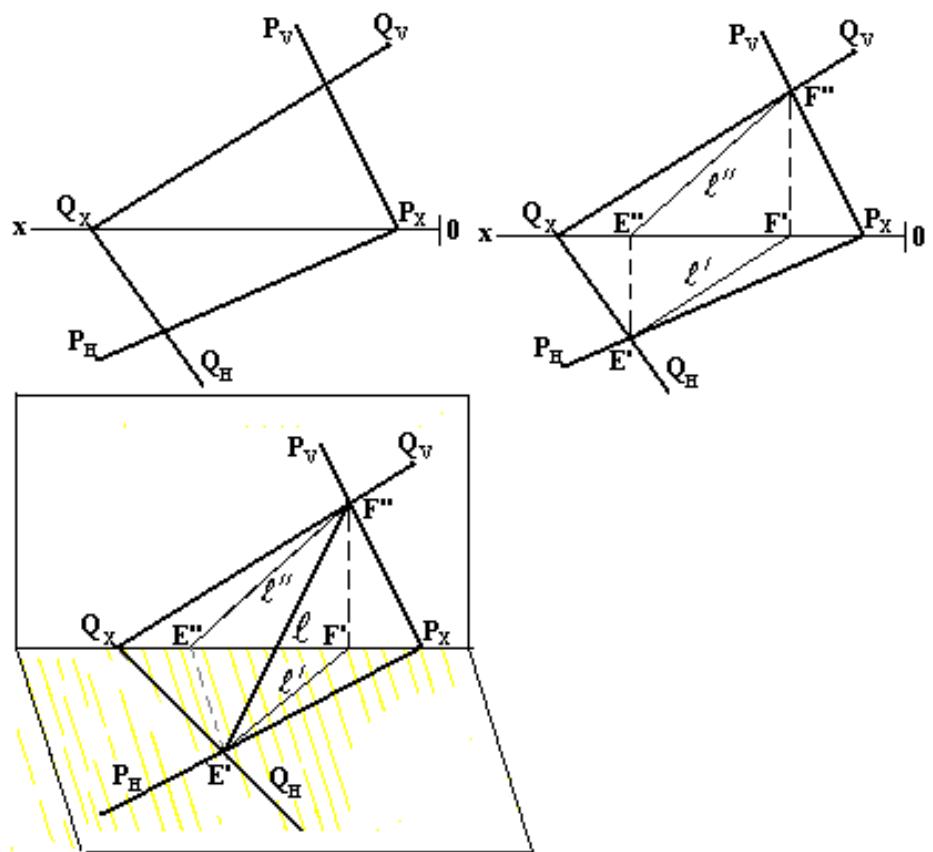
- бу тўғри чизиқнинг a'_H, a''_H ва a'_V, a''_V изларининг проекциялари ясалади.
- изланган Q текисликнинг горизонтал Q_H изи $Q_H \in a'_H$ ва $Q_H \in Q_X$ қилиб, унинг фронтал Q_V изи $Q_V \in a''_V$ ва $Q_V \in Q_X$ қилиб ўтказилади.

15-масала. Кесишувчи $a \cap b(a' \cap b', a'' \cap b'')$ чизиклар билан берилган текисликка $d(d', d'')$ түғри чизикдан ўтuvchi перпендикуляр текислик ўтказиш талаб қилинсин. (34-расм)

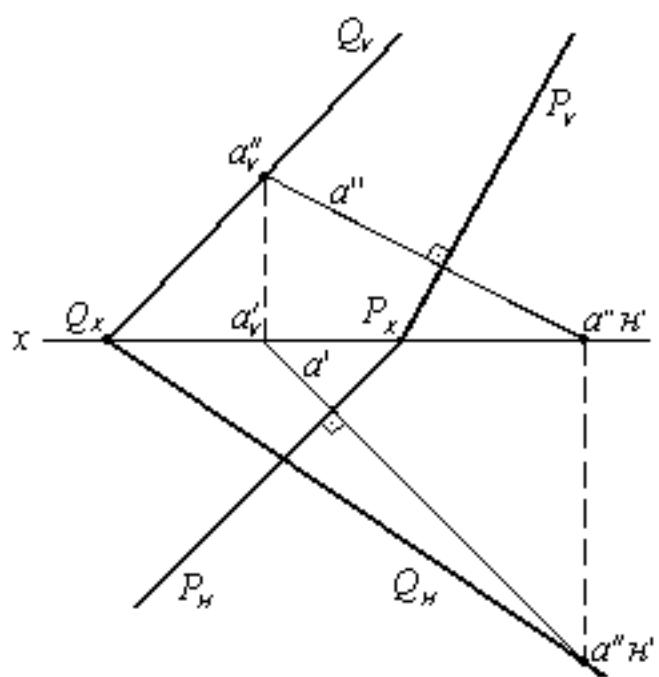
Ечиш. • берилаган текислик горизонтали ва фронталининг h', h'' ва f', f'' чизиклари ўтказилади.

• d түғри чизикнинг ихтиёрий $D(D', D'')$ нуқтасидан $n(n', n'')$ түғри чизикнинг проекциялари $n' \perp h'$ ва $n'' \perp f''$ қилиб ўтказилади. Хосил бўлган $d' \cap n'$ ва $d'' \cap n''$ кесишувчи чизиклар хосил қилган текислик берилган текисликка перпендикуляр текисликнинг проекциялари бўлади.

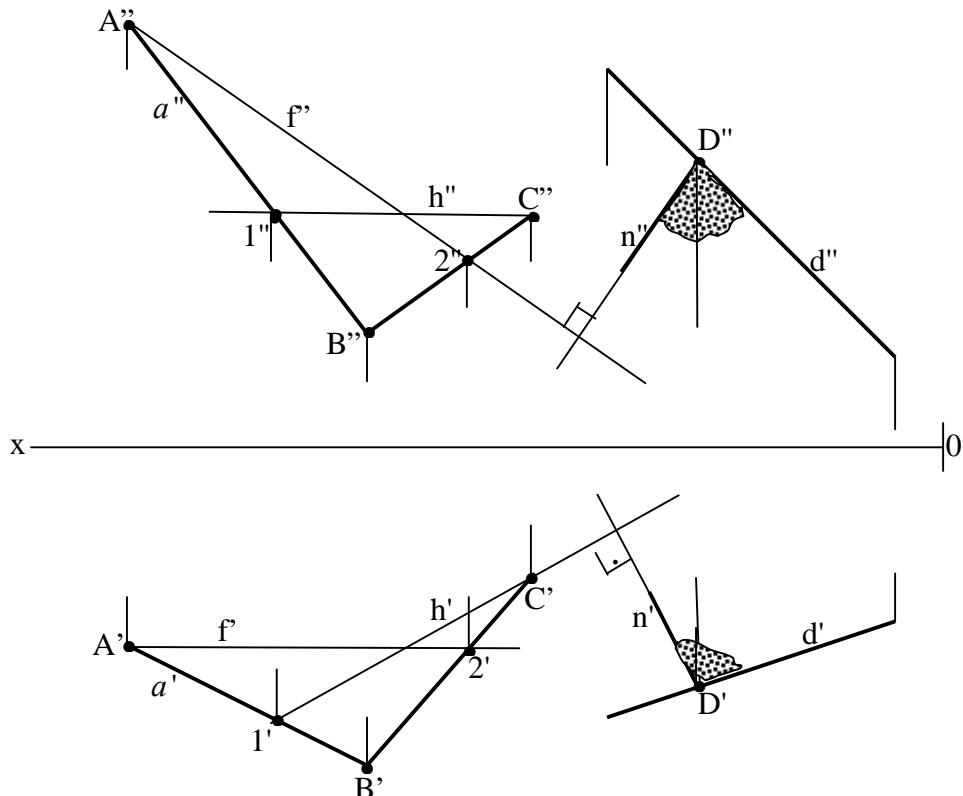




32- расм

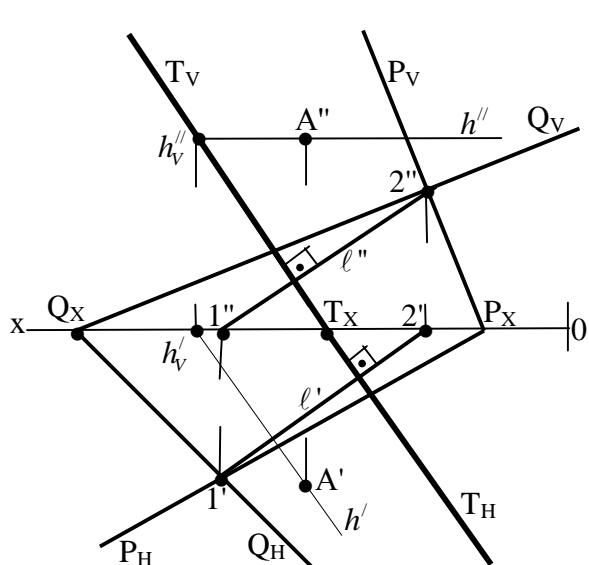


33 .расм



34-расм

16-масала. $A(A', A'')$ нуқтадан $Q(Q_H, Q_V)$ ва $P(P_H, P_V)$ текисликларга перпендикуляр бўлган $T(T_H, T_V)$ текислик ўтказиш талаб қилинсин. (35-расм)
Ечиш. • Q ва P текисликлар чизигининг ℓ', ℓ'' проекциялари ясалади.



35-расм

- A нуқтанинг A' ва A'' проекцияларидан изланган текисликнинг горизонтали (ёки фронтали) текисликларнинг кесишиш чизигига перпендикуляр қилиб ўтказилади:

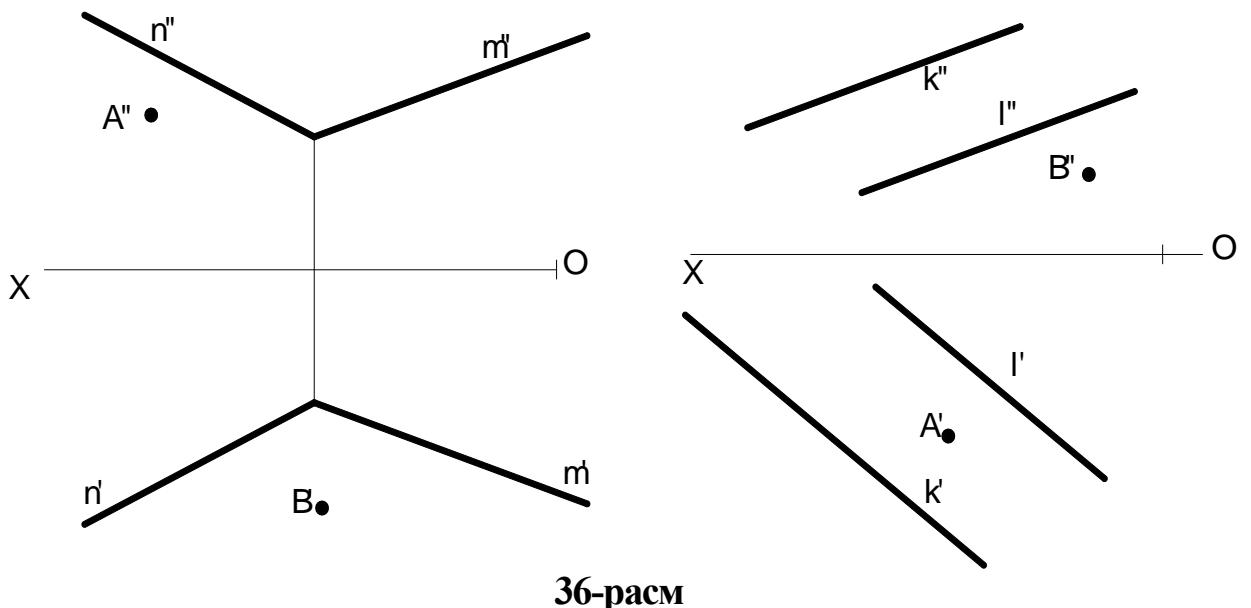
$h' \perp \ell'$ ва $h' \in A'$ хамда $h'' \parallel 0x$, $h'' \in A''$ ва унинг изларининг h'_v, h''_v проекциялари ясалади.

- изланган текисликнинг фронтал изи $T_v \in h'', T_v \perp \ell'', T_h \in T_x, T_h \perp \ell'$ қилиб ўтказилади.

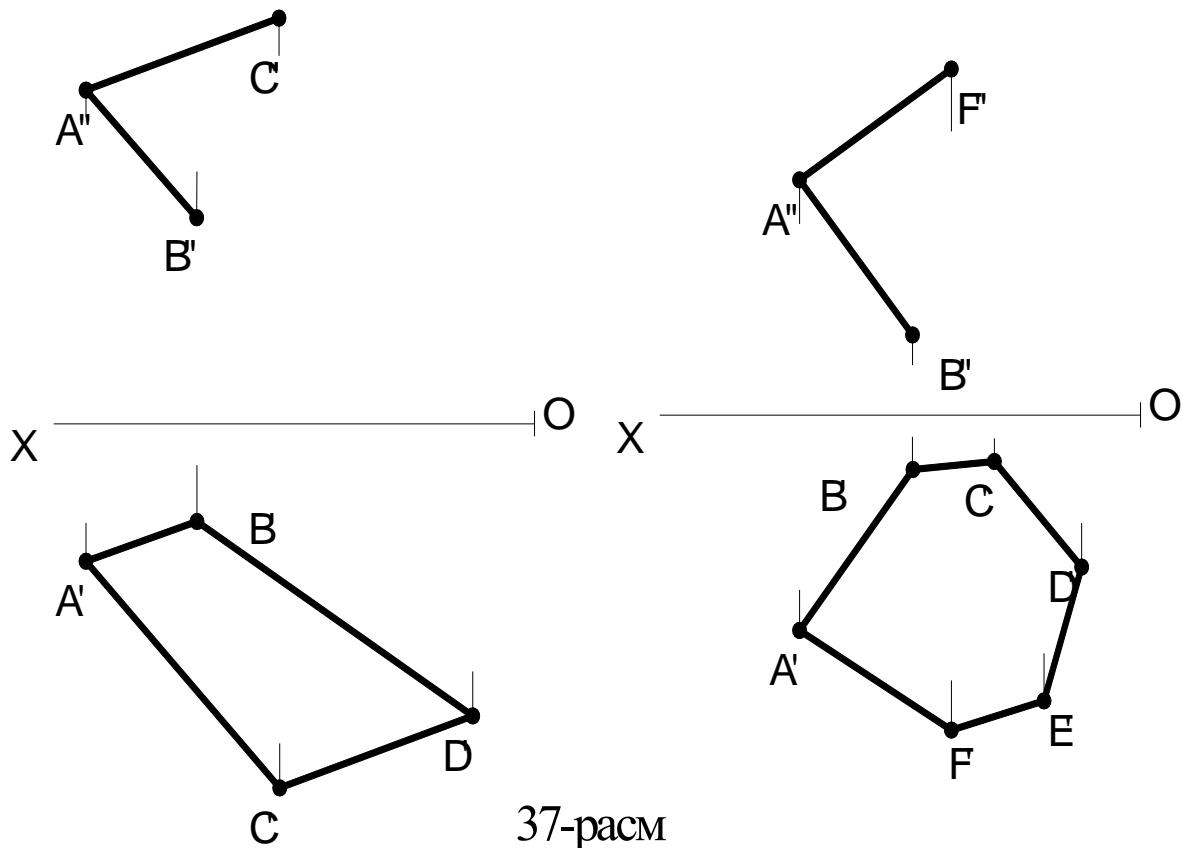
Натижада берилган икки текисликка перпендикуляр бўлган учинчи текислик ясалади: $T \perp Q$ ва $T \perp P$.

Машқ қилиш учун масалалар.

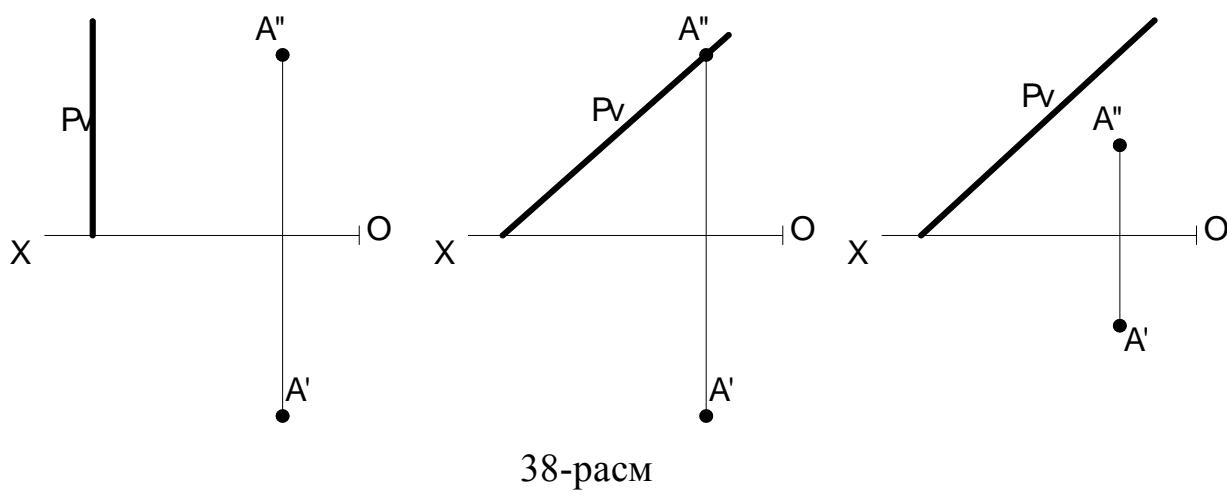
17-масала. Ўзаро кесишувчи текисликлар билан берилган текисликда ётувчи А ва В нуқталарнинг йетишмайдиган проекциялари ясалсин. (36-расм)



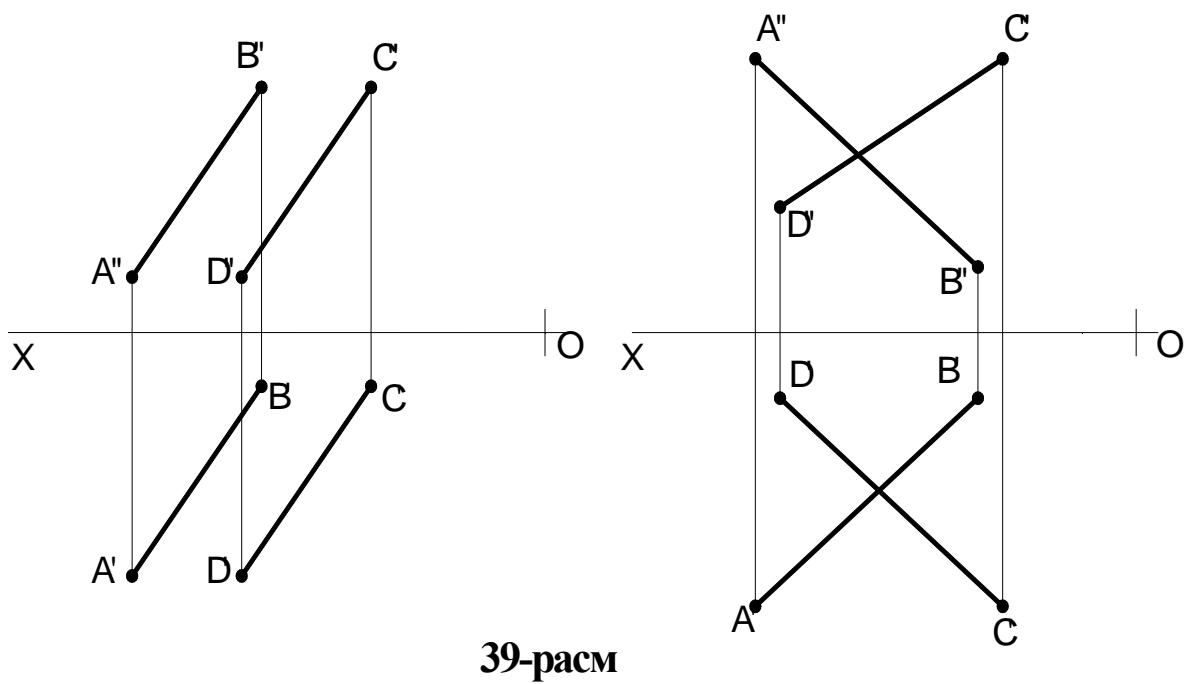
18-масала. Текис тўртбурчак ва олтибурчакларнинг фронтал проекциялари ясалсин. (37-расм)



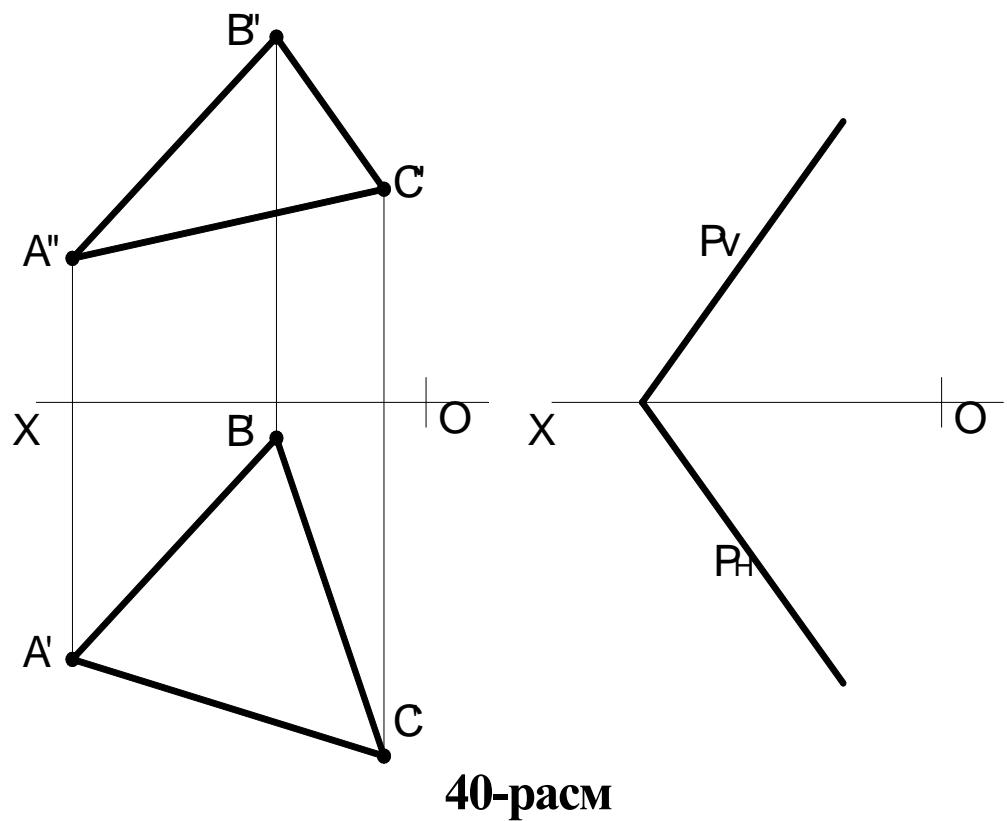
19-масала. Текисликка тегишли бўлган АВ кесманинг етишмайдиган проекцияси ясалсин. (38-расм)



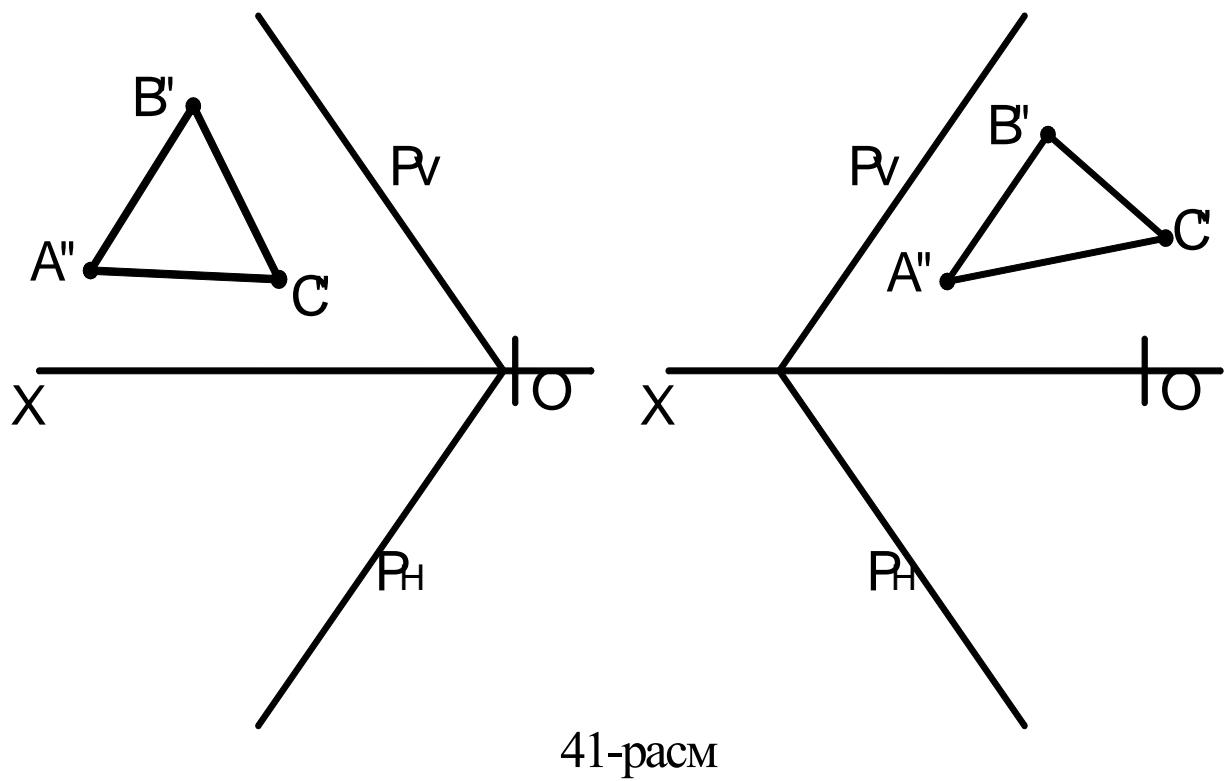
20-масала. Берилган текисликларнинг излари ясалсин. (39-расм)



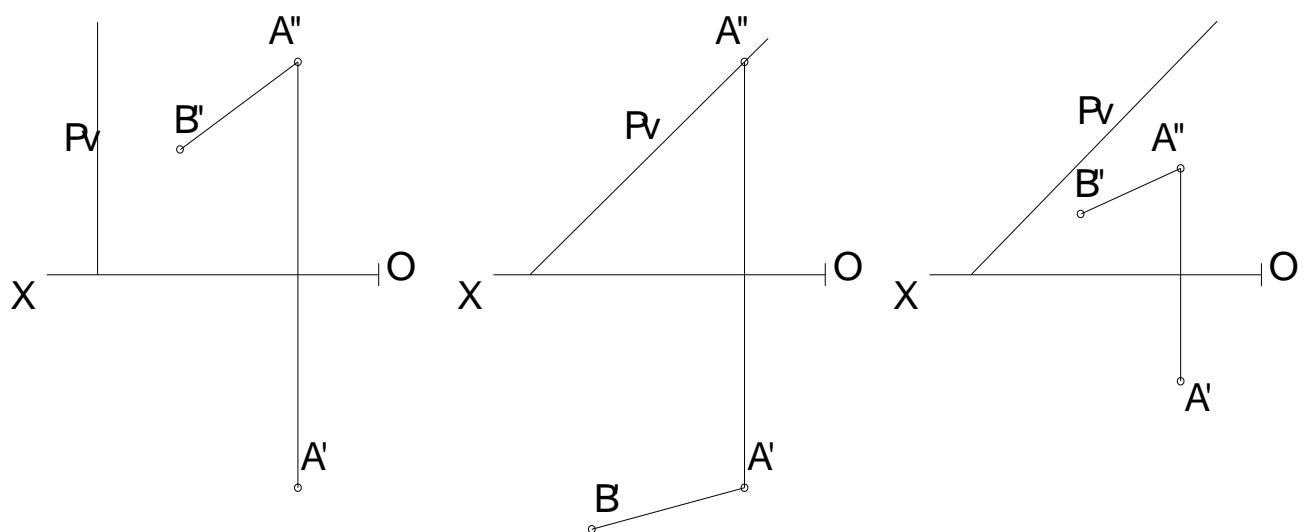
21-масала. Берилган текисликларнинг горизонтали ва фронтали ўтказилсин. (40-расм)



22-масала. Текисликда ётган АВС учурчакнинг горизонтал проекцияси ясалсин. (41-расм)

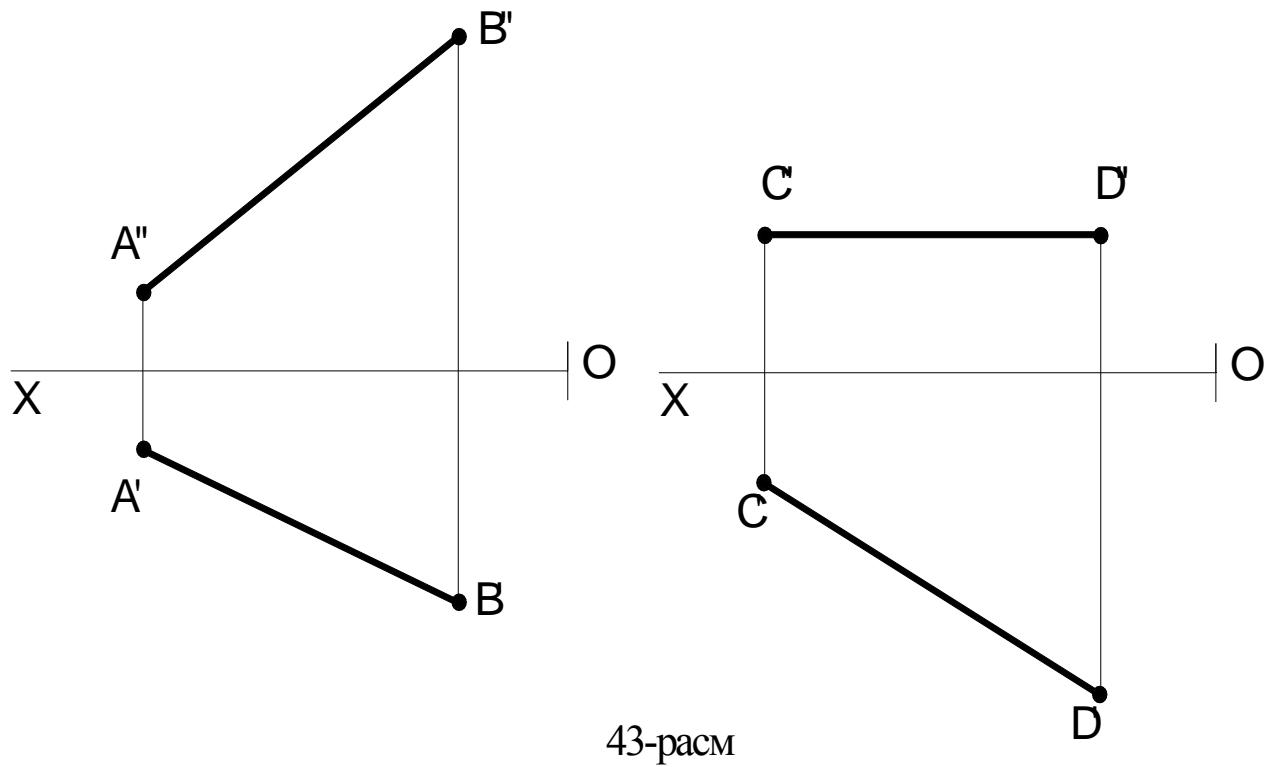


23-масала. Текисликка тегишли бўлган АВ кесманинг йетишмайдиган проекцияси ясалсин. (42-расм)



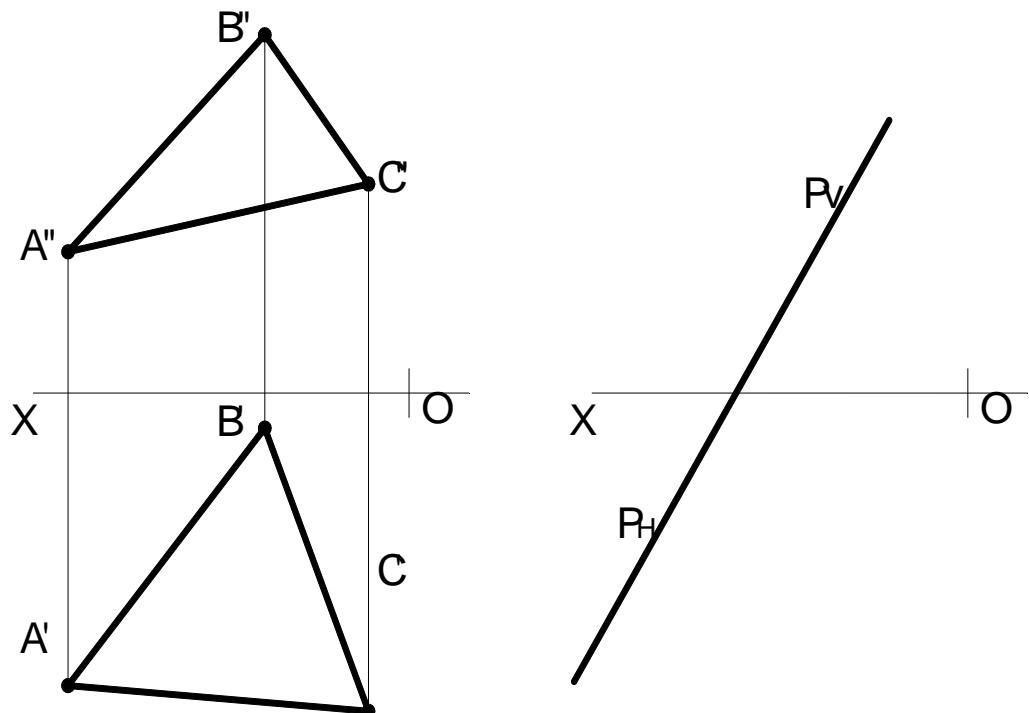
42-расм

24-масала. АВ кесма орқали фронтал проекцияловчи текислик, CD кесма орқали эса бирор умумий ҳолатдаги текислик ўтказилсин. (43-расм)



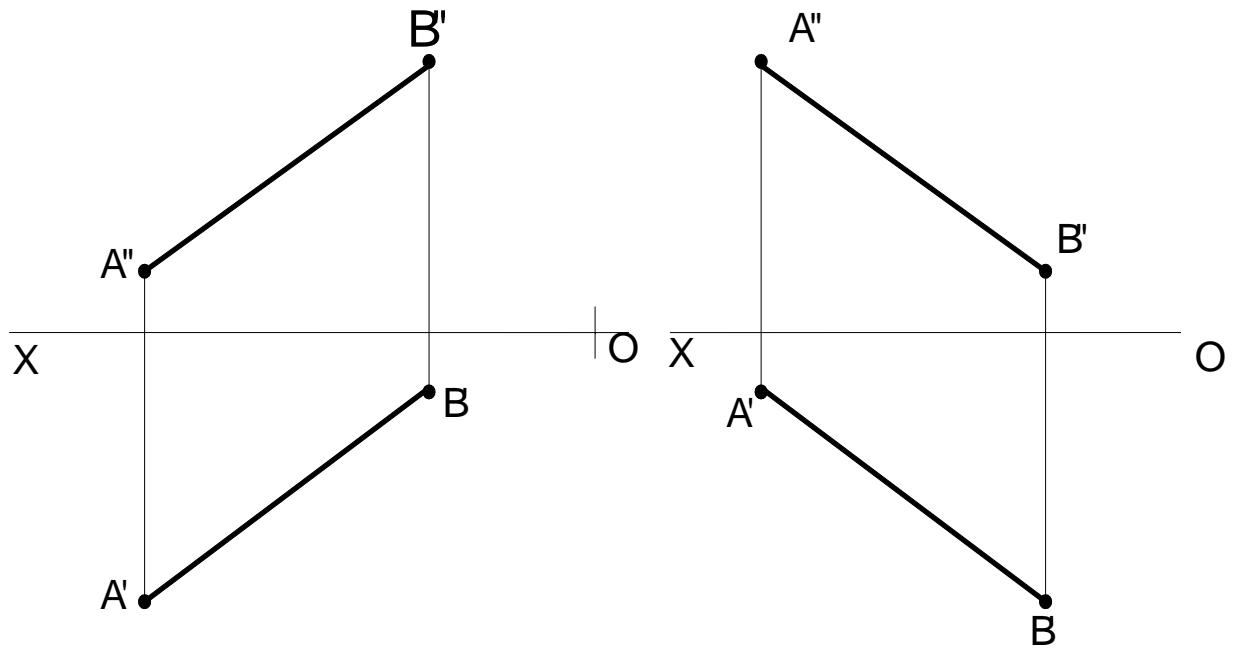
43-расм

25-масала. Берилган текисликнинг енг катта оғиши чизиги ёрдамида Н текислика нисбатан оғиши бурчаги аниқлансин. (44-расм)



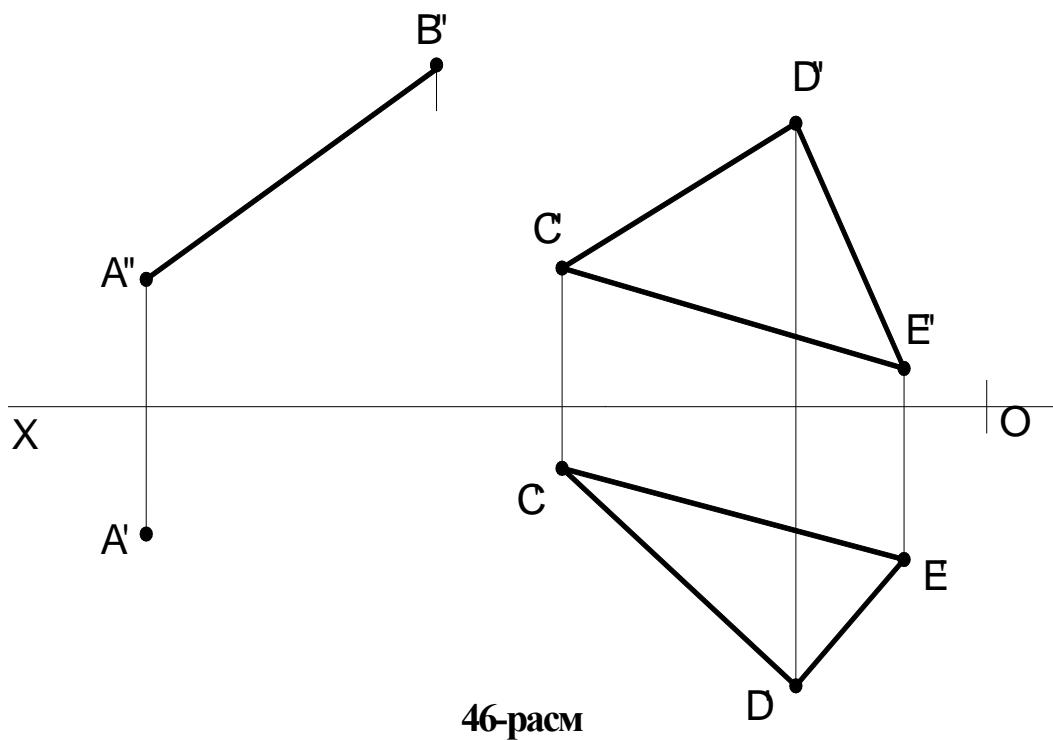
44-расм

26-масала. АВ кесма текисликнинг енг катта оғиши чизиги бўлса, унинг бош чизиклари ўтказилсин. (45-расм)

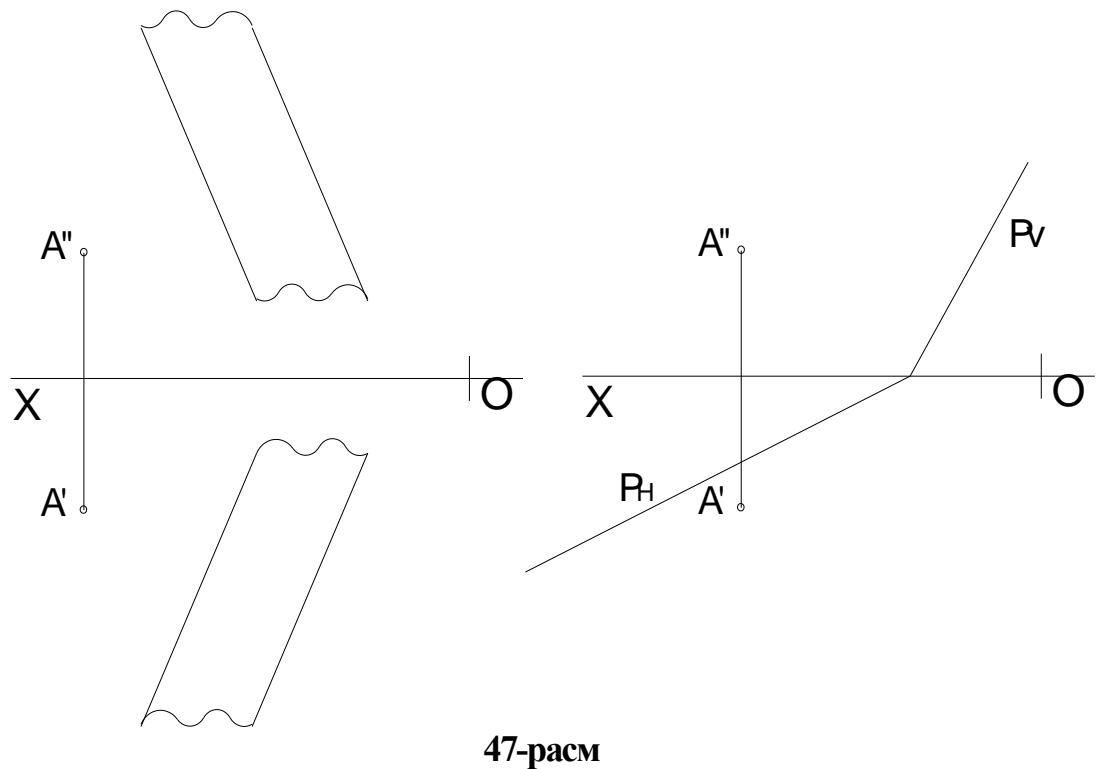


45-расм

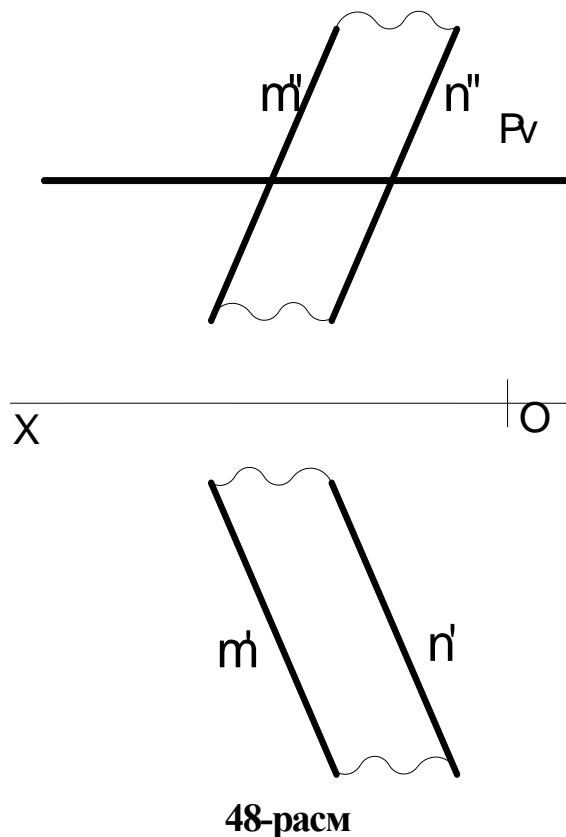
27-масала. СДЕ учбуручак текислигига параллел бўлган АВ кесманинг горизонтал проекцияси тўлиқлигича ясалсин. (46-расм)



28-масала. А нүктадан берилган текисликка параллел бўлган текислик ўтказилсин. (47-расм)

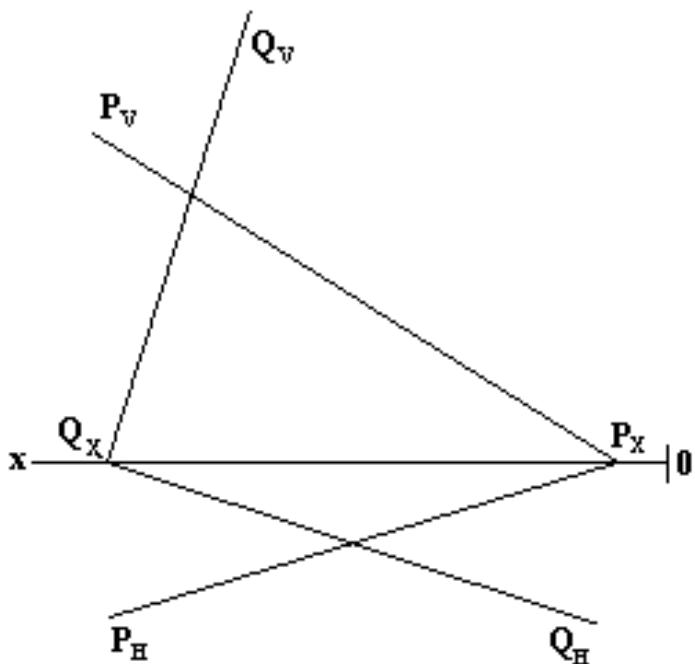


29-масала. Берилган текисликларни кесишиш чизигининг проекциялари ясалсин. (48-расм)



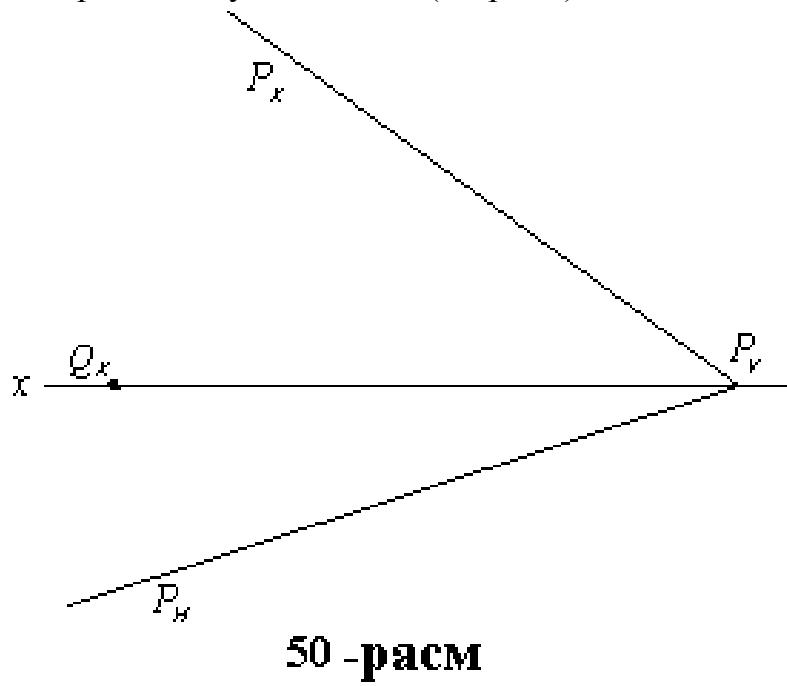
48-расм

30-масала. Берилган $Q(Q_V, Q_H)$ ва $P(P_V, P_H)$ текисликларнинг кесишиш чизигини топинг. (49-расм).



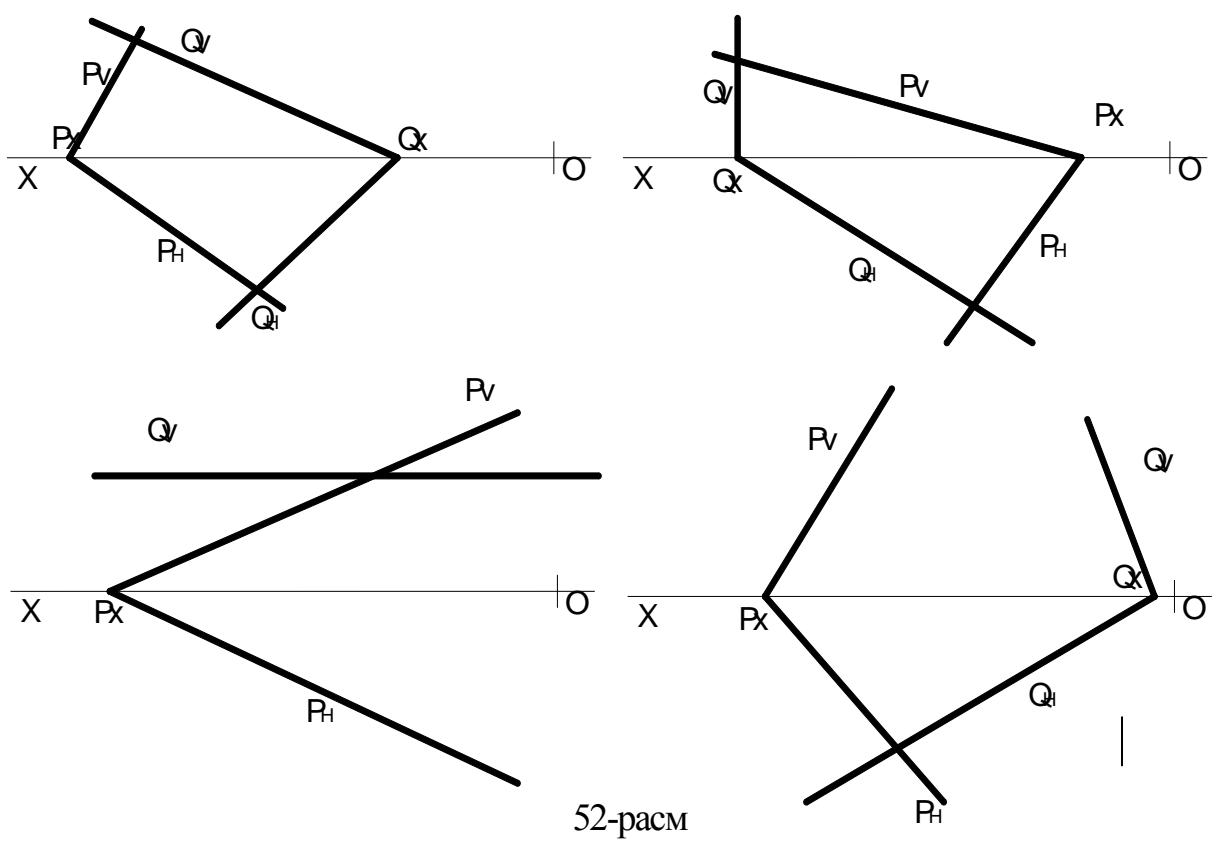
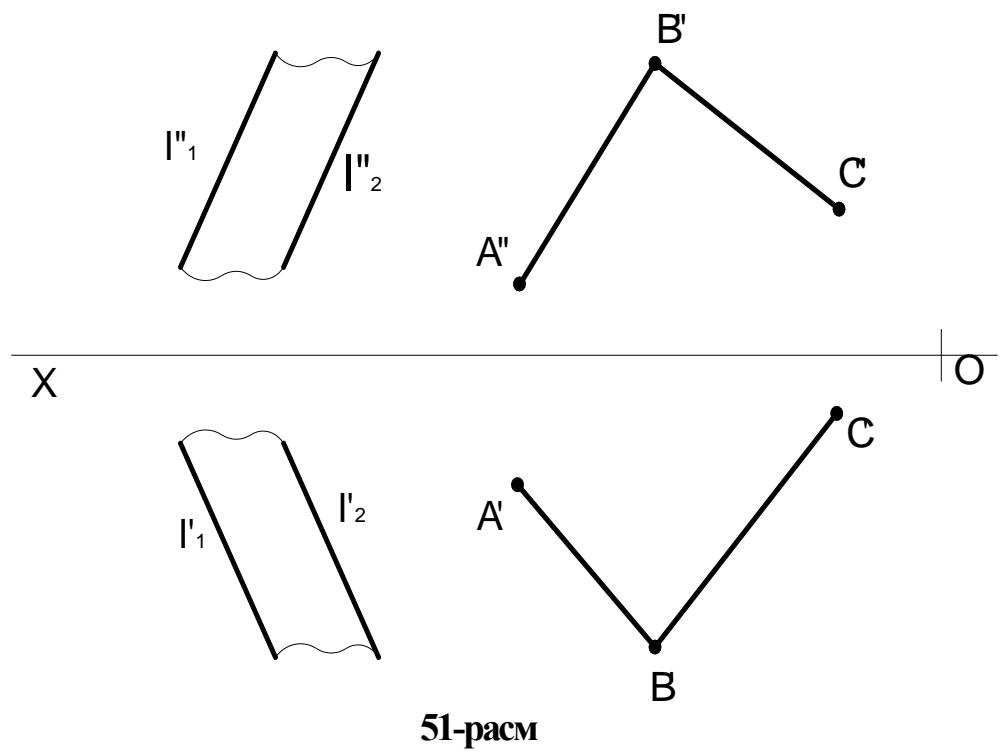
49-расм

31-масала. $P(P_V, P_H)$ текисликка перпендикуляр ва Q_X дан ўтувчи Q текислик излари билан ўтказилсин. (50-расм)



50 -расм

32-масала. Берилган текисликларнинг кесишиш чизигини топинг. (51,52-расмлар).

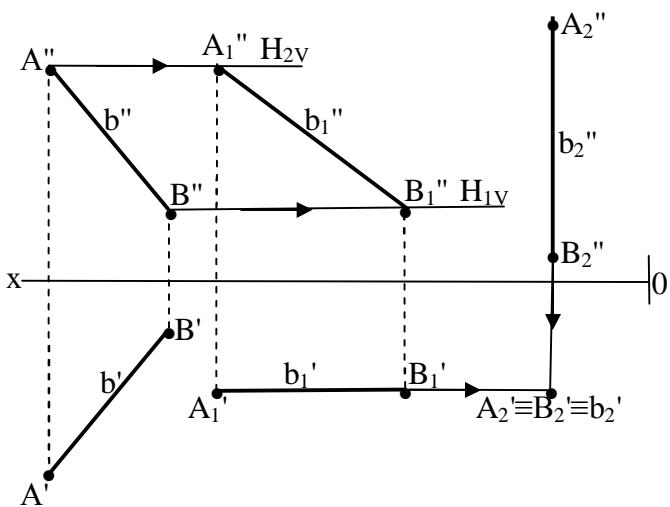


Ортогонал проекцияларни қайта түзиш усуллари

1-масала. Умумий вазиятдаги $AB(A'B', A''B'')$ кесма текис параллел кучириш усулида H текисликка перпендикуляр вазиятга келтирилсін (53-расм)

Ечиш. Даслаб AB кесмани харақатлантириб, V текисликка параллель $A_1B_1(A'_1B'_1, A''_1B''_1)$ вазиятга келтирамиз. Сунгра ихтиёрий B''_2 нұқта танлаб оламиз ва бу нұқтадан $b_2'' \perp 0x$ түрінде чизик ўтказамиз хамда унга $A''_2B''_2 = A''_1B''_1$ кесмани ўлчаб қўямыз.

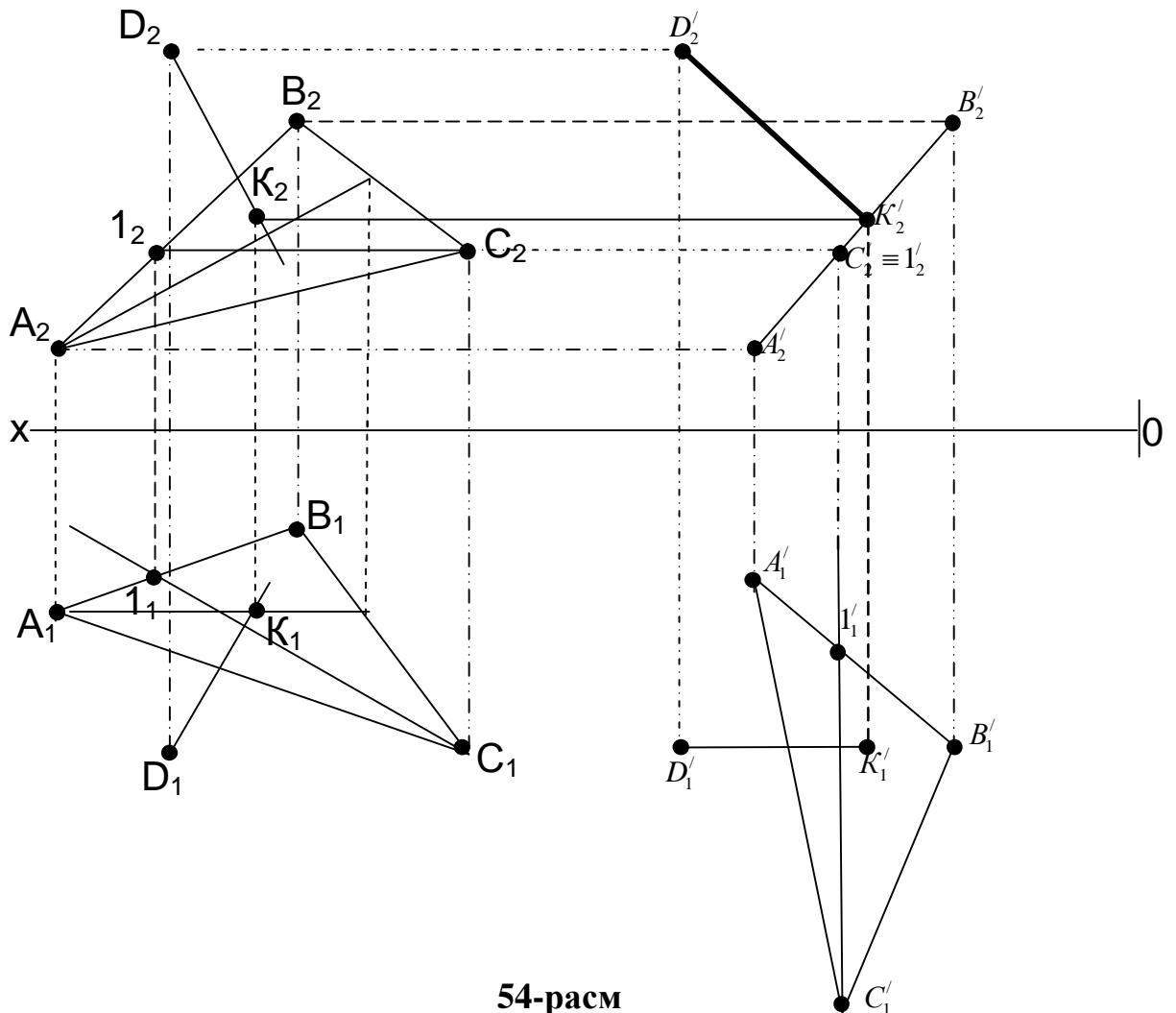
Кесманинг горизонтал проекцияси b'_1 чизик бүйіча харақатланиб, $A'_2 \equiv B'_2 \equiv b'_2$ бўлиб проекцияланади.



53-расм

2-масала. $D(D_1; D_2)$ нұқтадан $ABC(A_1B_1C_1; A_2B_2C_2)$ учбұрчак текислигигача бўлган масофа текис параллель кучириш усулида аниқлансин (54-расм).

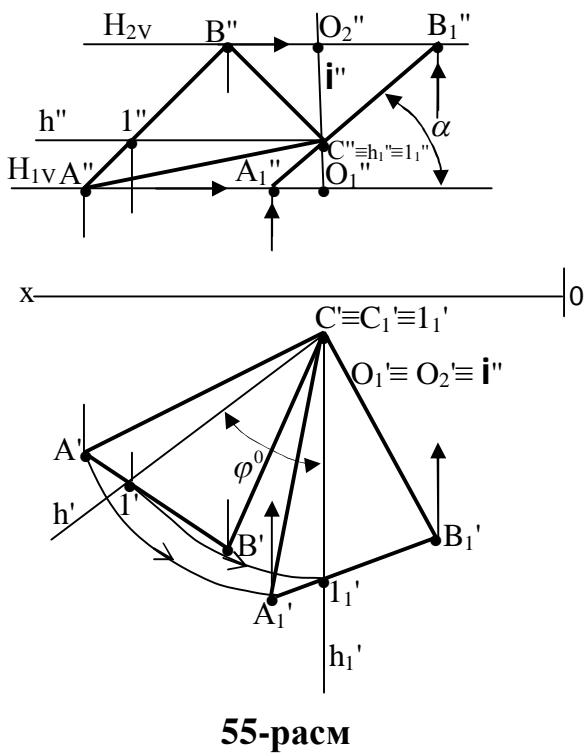
Ечиш. • $D(D_1; D_2)$ нұқтадан $ABC(A_1B_1C_1; A_2B_2C_2)$ учбұрчак текислигигача бўлган енг



қисқа масофани текис параллель күчириш усулида топиш учун текисликни проекцияловчи холатга келтириш керак. Бунинг учун (54-расм) текисликнинг горизонтали $C_1(C_11_1; C_21_2)$ ни фронтал проекциялар текислигига перпендикуляр холатда қоғознинг бўш жойига чизамиз. C_11_1 нинг фронтал проекцияси нуқта кўринишида бўлади ($C_1'1'_1$).

Учурчакнинг $A_1B_1C_1$ горизонтал проекциясини C_11_1 га нисбатан кўчириб чиқамиз ($A'_1B'_1C'_1$), у ҳолда ABC нинг фронтал проекцияси $A'_2B'_2C'_2$ проекцияловчи холатга келади. D нуқтанинг D_1 горизонтал проекциясини горизонтал ҳолда параллель кўчириб, D'_1 дан ўтувчи боғловчи чизикда D'_2 ни хосил қиласиз. Топилган D'_2 дан $A'_2B'_2C'_2$ га тик тушириб K'_2 ни аниқлаймиз. $D'_2K'_2$ масофа изланган масофа бўлади, унинг горизонтал $D'_1K'_1$ проекцияси ОХ ўқига параллель бўлади. DK кесмани бирламчи проекцияларида аниқлаш чизмадан кўриниб турибди. Демак, A_1 , B_1 , C_1 , D_1 нуқталар мажмуини C_1 нуқта атрофида айлантириб параллель кўчириш керак экан.

З-масала. $\Delta ABC(\Delta A'B'C', \Delta A''B''C'')$ текисликнинг Н текислик билан ташкил этган α бурчаги айлантириш усулида аниқлансин. (55-расм)



Бу кесманинг $0x$ ўқи билан ташкил этган α бурчаги ΔABC нинг H текислик билан хосил қилган бурчагига тенг бўлади.

4-масала. ABC учбурчак юзасининг хақиқий катталиги айлантириш усулида топилсин. (56-расм).

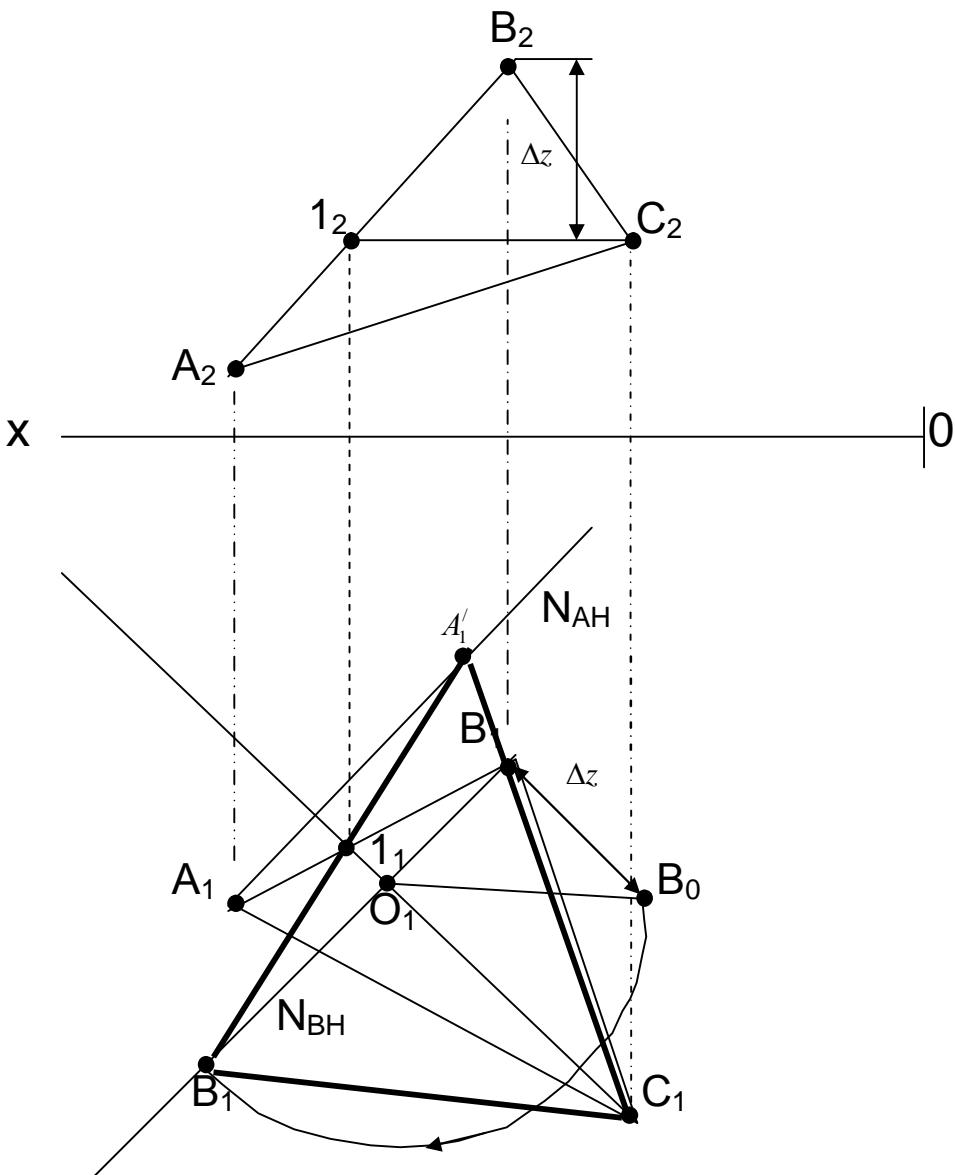
Ечиш. Айлантириш ўқи сифатида текисликнинг $C_1(C_{11}; C_{21})$ горизонталини оламиз. Шу чизик атрофида айлантирсак, у горизонтал проекциялар текислигига ўз хақиқий катталигида проекцияланади. Кузатиш нуқтаси сифатида $B(B_1; B_2)$ нуқта танланади. В нуқтанинг горизонтал B_1 проекцияси орқали айланниш ўқининг горизонтал C_{11} проекциясига перпендикуляр қилиб харакат текислиги N_B нинг горизонтал изи N_{Bn} ўтказилади ва ўқ билан кесишиган нуқтаси O_1 аниқланади. Бу нуқта айлантириш марказидир.

Тўғри бурчакли учбурчак қуриш усулида айлантириш радиуси OB нинг хақиқий катталиги O_1B_0 аниқланади. Айлантириш маркази O_1 ни марказ қилиб O_1B_0 радиусли айлана чизиб, уни харакат текислигининг изи билан кесишиган нуқтаси B'_1 ни топамиз. Топилган B'_1 нуқта В нуқтанинг янги $B'(B'_1; B'_2)$ холатидир. A_1 нуқтадан айлантириш ўқи C_{11} га перпендикуляр N_A харакат текислигининг горизонтал N_{AH} изини ўтказамиз. Айлантириш ўқи C_{11} даги нуқталар қозғалмастир.

B'_1 ни 1_1 билан бирлаштириб A'_1 ни, яъни А нуқтанинг янги $A'(A'_1; A'_2)$ холатини топамиз. Ва нихоят $A'_1B'_1$ ва C_1 нуқталарни ўзаро бирлаштириб ABC учбурчак юзасининг хақиқий катталиги $A'_1B'_1C_1$ ни топамиз.

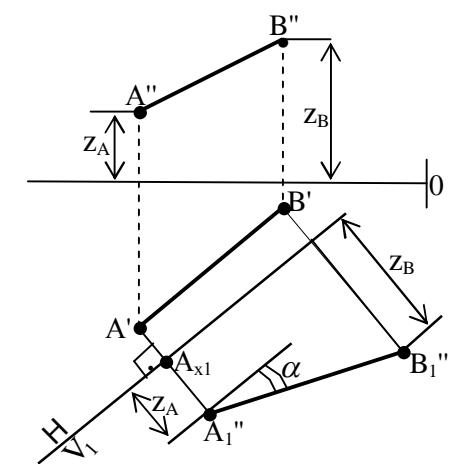
Ечиш. Изланган α бурчакни аниқлаш учун берилган ΔABC текисликни фронтал проекцияловчи вазиятга келтириш керак бўлади. Бунинг учун учбурчакнинг бирор, масалан, С нуқтасидан $i' \perp H$ айланниш ўқи ўтказилади ва бу ўқ атрофида учбурчак $h_i \perp V$ (эпюрда $h'_i \perp V$) вазиятга келгунча айлантирилади.

Бунда учбурчакнинг А, В ва С нуқталари хам φ бурчакка харакатланади. Чизмада учбурчак учларининг янги A'_1, B'_1 ва C'_1 проекциялари орқали унинг $A_1''B_1''C_1''$ фронтал проекциялари аниқланади. Бу нуқталар ўзаро туташтирилса, $A_1''B_1''C_1''$ кесма (учбурчакнинг янги фронтал проекцияси) хосил бўлади.



56-расм

5-масала. Умумий вазиятда берилган $AB(A'B', A''B'')$ кесманинг хақиқий узунлигини проекциялар текисликларини алмаштириш усулида аниқланг.
В" (57-расм)

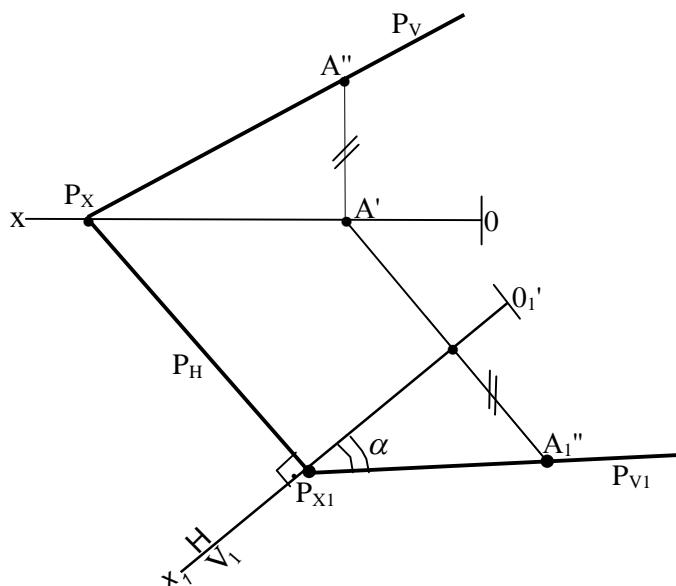


57-pacM

Ечиш. Бунинг учун умумий вазиятда берилган $AB(A'B', A''B'')$ кесмага параллель қилиб горизонтал ёки фронтал проекциялар текислиги янги проекциялар текислиги билан алмаштирилади. Чизмада масалани йешиш учун унинг янги O_1x_1 проекциялар ўқи кесманинг бирор, масалан $A'B'$ горизонтал проекциясига параллель қилиб олинади. Хосил бўлган $\frac{V_1}{H}$ проекциялар текисликлари системасида AB кесма V_1

проекциялар текислигига параллель бўлади ва бу текисликда у хақиқий узунлигига тенг бўлиб проекцияланади.

6-масала. Умумий вазиятдаги $P(P_H, P_V)$ текисликни фронтал проекцияловчи текислик вазиятига келтириш талаб етилсин. (58-расм)

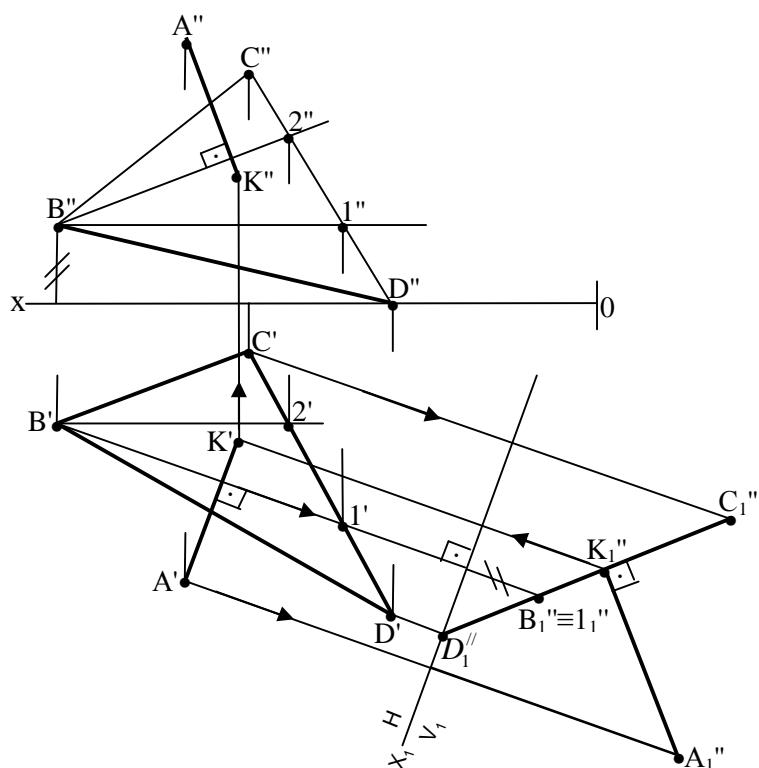


58-расм

проекцияси ясалади. Текисликнинг янги P_{V1} изининг йўналишини аниқлаш учун текисликнинг P_V изига тегишли бирор, масалан $A(A', A'')$ нуқта олиб, унинг янги A_1'' фронтал изи P_{X1} изи A_1'' нуқталардан ўтказилади. Чизмада кўрсатилган α бурчак P текисликнинг Н текислик билан ташкил этган бурчаги бўлади.

7-масала. $A(A', A'')$ нуқтадан $BCD(B'C'D', B''C''D'')$ учбурчак текислигигача бўлган масофа проекциялар текисликларини алмаштириш усулида аниқлансан (59-расм).

Ечиш. Бу масофа А нуқтадан BCD текисликка туширилган перпендикуляр билан ўлчанади. Масалани йешиш учун чизмада янги проекциялар ўки учбурчак текислигининг асосий чизикларидан



59-расм

бирига, масалан горизонталига перпендикуляр, яъни $O_1x_1 \perp B'1'$ қилиб

үтказилади. Сўнгра учурчакнинг тўғри чизик кесмаси шаклида проекцияланган янги проекцияловчи

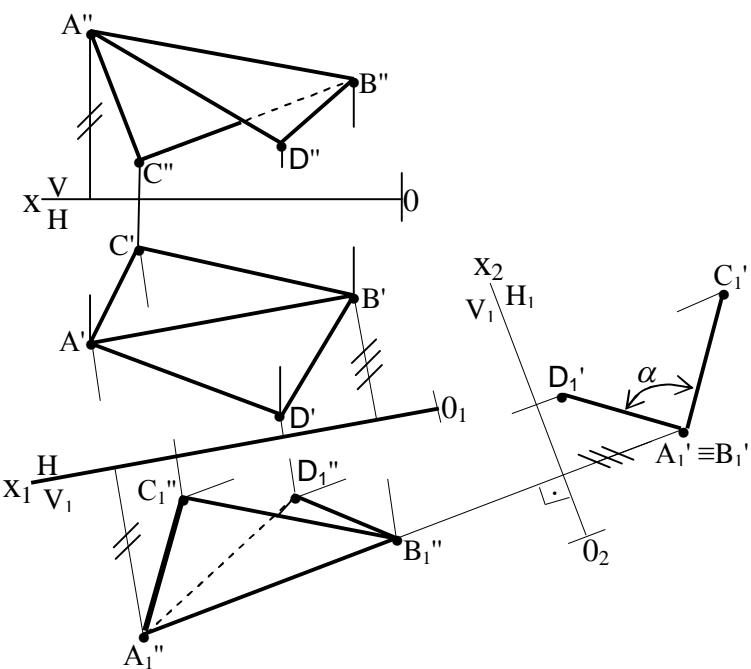
$D_1''B_1'C_1''$ вазияти ва нуқтанинг A'' проекцияси ясалади. Изланган масофанинг хақиқий узунлиги A_1'' дан $D_1''B_1'C_1''$ кесмага ўтказилган $A_1''K_1''$ перпендикуляр бўлади. Бу масофанинг горизонтал ва фронтал проекцияларини тескари проекциялаш билан K' ва K'' проекциялар аниқланади. Мазкур K' ва K'' нуқталар А проекцияларида туширилган перпендикулярнинг проекцияларида бўлади.

8-масала.

$\Delta ABC(A'B'C', A''B''C'')$ ва $\Delta ABD(A'B'D', A''B''D'')$ текисликлари орасидаги иккиси оқли бурчакнинг хақиқий катталиги проекциялар текисликларини алмаштириш усулида аниqlansin (60-расм).

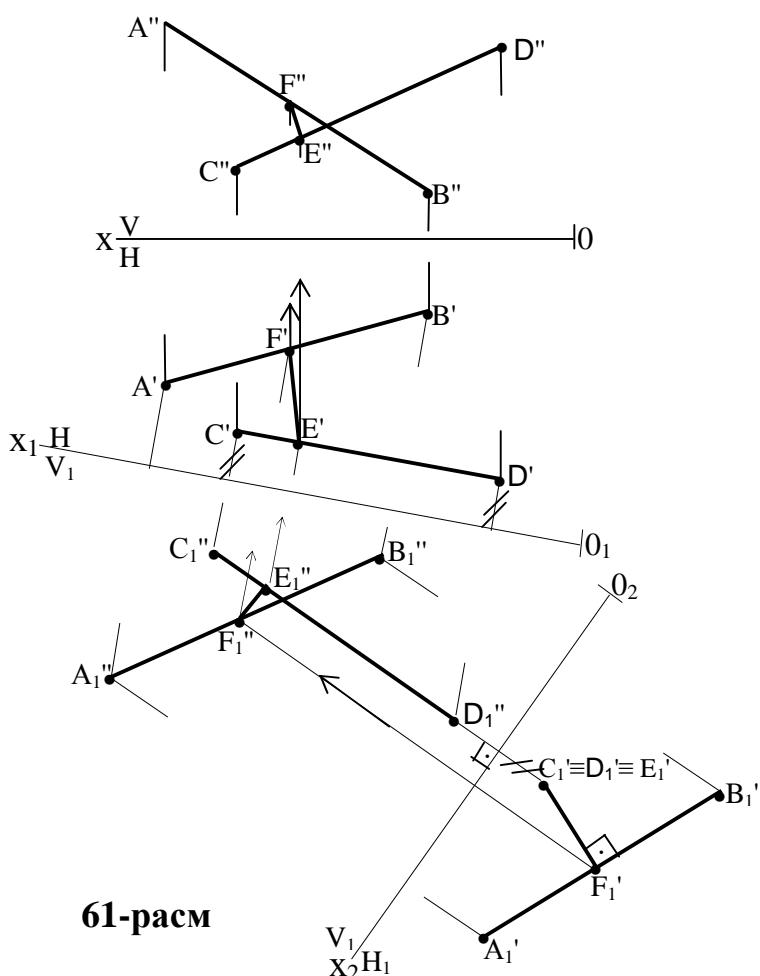
Ечиш. Бу бурчак берилган ΔABC ва ΔABD текисликларига перпендикуляр бўлган текисликлар орасидаги чизиқли бурчак билан ўлчанади.

Шунинг учун хам янги проекциялар текислиги икки текисликнинг умумий АВ кесишиш



60-расм

нуқтанинг A' ва A'' проекцияларидан учурчакнинг горизонтал хамда фронталларига мос равища туширилган перпендикулярнинг проекцияларида бўлади.



61-расм

чилигига перпендикуляр қилиб олинади. Лекин АВ қирра умумий вазиятда бўлгани учун $0x \frac{V}{H}$ проекциялар текисликлари системаси аввал $x_1 // AB$ қилиб (чиzmada $0_1 x_1 // A'B'$), сўнgra $H_1 \perp AB$ қилиб (чиzmada $0_2 x_2 // A''_1 B''_1$) кетма-кет алмаштирилади. Натижада ΔABC ва ΔABD янги H_1 проекциялар текислигига перпендикуляр вазиятда бўлиб қолади ва ўзаро кесишувчи кесмалар шаклида проекцияланади. Бу кесмалар орасидаги α чизиқли ўткир бурчак изланган бурчак бўлади.

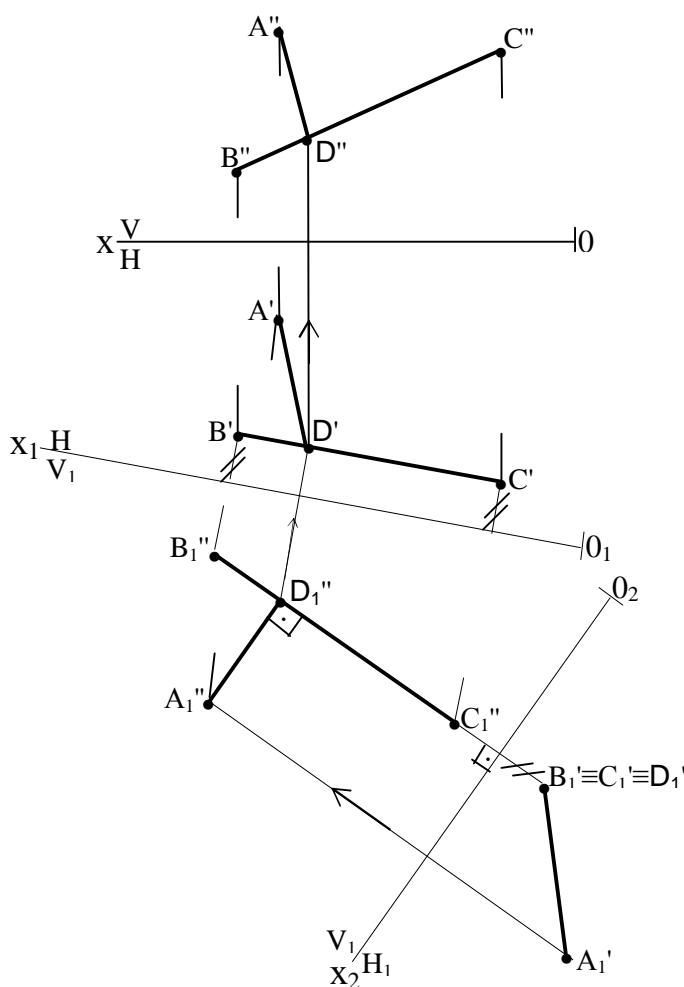
9-масала. $AB(A'B', A''B'')$ ва $CD(C'D', C''D'')$ учрашмас тўғри чизик кесмалари орасидаги масофа проекциялар текисликларини алмаштириш усулида аниқлансан (61-расм).

Ечиш. Бунда CD кесмага параллель қилиб янги V_1 фронтал проекциялар текислиги ўtkазилади. Бу текисликда CD ва AB кесмаларнинг янги фронтал проекциялари $C_1''D_1''$ ва $A_1''B_1''$ ясалади. Сўнgra $C_1''D_1''$ кесмага перпендикуляр қилиб H_1 текислик ўtkазилади. Бу текисликда $C_1''D_1''$ ва $A_1''B_1''$ ларнинг янги горизонтал проекциялари топилади. Бунда CD кесма

$C_1' \equiv D_1'$ нуқта кўринишида проекцияланади. Бу нуқтадан $A_1'B_1'$ кесмага туширилган $E_1'F_1'$ кесманинг узунлиги CD ва AB лар орасидаги масофа бўлади. Тескари проекциялаш билан E ва F нуқталарнинг E', E'' ва F', F'' проекциялари ясалган.

10-масала. Берилган $A(A', A'')$ нуқтадан $BC(B'C', B''C'')$ кесмагача бўлган масофа проекциялар текисликларини алмаштириш усулида аниқлансан (62-расм).

Ечиш. Бунинг учун V текисликни BC кесмага параллель бўлган V_1 текислик билан алмаштирамиз, яъни $V_1 // B'C'$ шарти бажарилсан. BC кесма ва A нуқтанинг V_1 текисликдаги янги $B_1''C_1''$ ва A_1'' фронтал проекциялари хосил қилинади. Сўнgra H текислик H_1 текислик билан алмаштирилади. Бунда



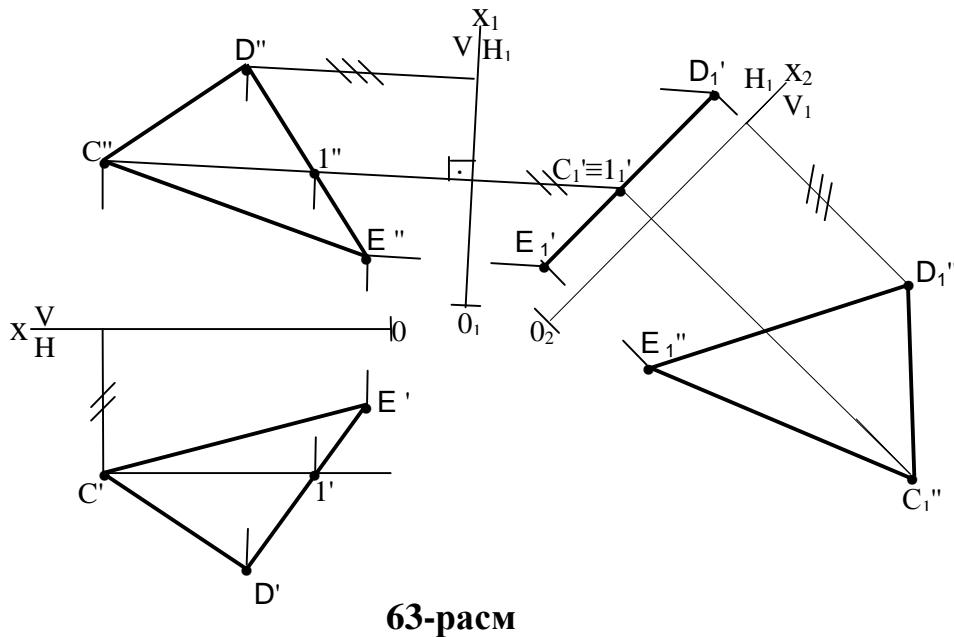
62-расм

$H_1 \perp B_1 C_1$ бўлиши керак.

H_1 текисликда BC ва A ларнинг янги горизонтал проекциялари ясалади. Хосил бўлган A_1' ва $B_1' \equiv C_1'$ нуқталар орасидаги масофа A нуқтадан BC кесмагача бўлган масофа бўлади.

11-масала. $\Delta CDE(\Delta C'D'E', \Delta C''D''E'')$ учбурчакнинг проекцияларига асосан унинг хақиқий катталиги проекциялар текисликларини алмаштириш усулида аниқлансин (63-расм).

Ечиш. Бунда H текисликни H_1 текисликка шундай алмаштирамиз, $H_1 \perp \Delta CDE$ бўлсин. Бунинг учун $H_1 \perp C''1''$ (учбурчак фронталининг фронтал проекцияси) бўлса, кифоя қиласи. Учбурчакнинг учларини H_1 текисликка проекциялаб, янги $C_1'D_1'E_1'$ горизонтал проекция тўғри чизиқ кўринишида хосил қилинади. Сўнгра V текисликни V_1 текислик билан шундай алмаштирамизки, $V_1 // C_1'D_1'E_1'$ бўлсин. C, D, E нуқталарнинг V_1 текисликдаги янги $C_1''D_1''E_1''$ фронтал проекциялари ясалади. Бу нуқталарни ўзаро туташтириб, $\Delta C''D''E'' = \Delta CDE$ хақиқий катталигини хосил қиласи.



Машқ қилиш учун масалалар.

1-жадвалда кўрсатилган нуқта координаталари асосида қуйидаги масалаларни ечинг.

12-масала. Умумий вазиятдаги $AB(A'B', A''B'')$ кесма текис параллел кучириш усулида H текисликка перпендикуляр вазиятга келтирилсин.

13-масала. $D(D_1; D_2)$ нуқтадан $ABC(A_1B_1C_1; A_2B_2C_2)$ учбурчак текислигигача бўлган масофа текис параллель кучириш усулида аниқлансин.

14-масала. $\Delta ABC(\Delta A'B'C', \Delta A''B''C'')$ текисликнинг H текислик билан ташкил этган α бурчаги айлантириш усулида аниқлансин.

15-масала. ABC учбурчак юзасининг хақиқий катталиги айлантириш усулида топилсин.

16-масала. Умумий вазиятда берилган $AB(A'B', A''B'')$ кесманинг хақиқий узунлигини проекциялар текисликларини алмаштириш усулида аниқланг.

17-масала. $A(A', A'')$ нуқтадан $BCD(B'C'D', B''C''D'')$ учбурчак текислигигача бўлган масофа проекциялар текисликларини алмаштириш усулида аниқлансан .

18-масала. $\Delta ABC(A'B'C', A''B''C'')$ ва $\Delta ABD(A'B'D', A''B''D'')$ текисликлари орасидаги иккиси оғли бурчакнинг хақиқий катталиги проекциялар текисликларини алмаштириш усулида аниқлансан .

19-масала. $AB(A'B', A''B'')$ ва $CD(C'D', C''D'')$ учрашмас тўғри чизик кесмалари орасидаги масофа проекциялар текисликларини алмаштириш усулида аниқлансан .

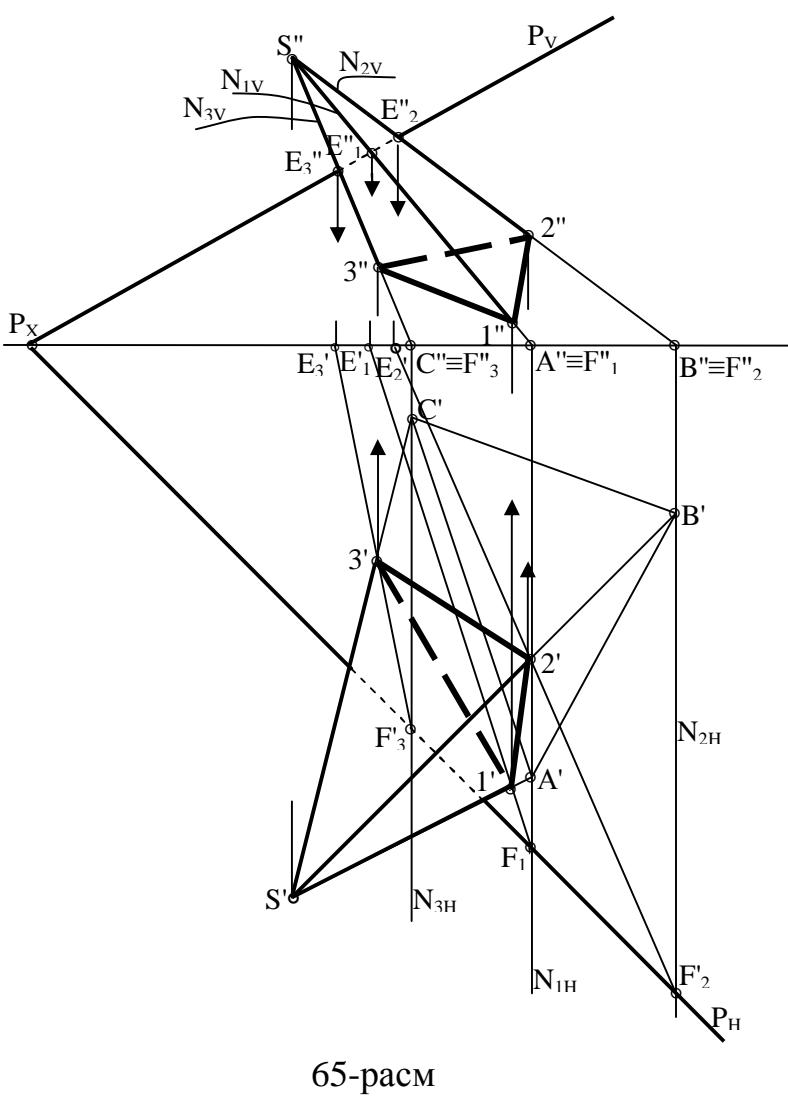
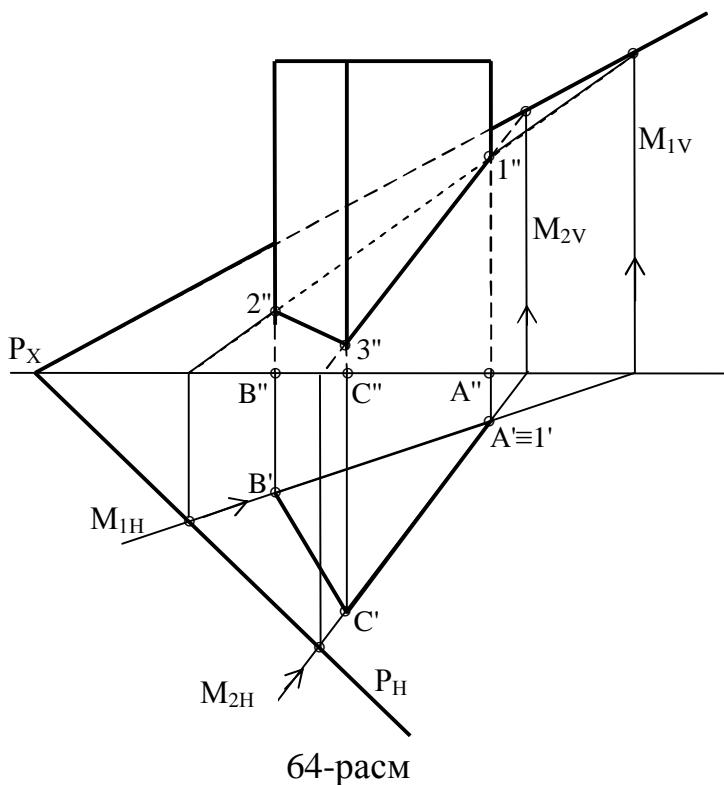
20-масала. Берилган $A(A', A'')$ нуқтадан $BC(B'C', B''C'')$ кесмагача бўлган масофа проекциялар текисликларини алмаштириш усулида аниқлансан .

21-масала. $\Delta CDE(\Delta C'D'E', \Delta C''D''E'')$ учбурчакнинг проекцияларига асосан унинг хақиқий катталиги проекциялар текисликларини алмаштириш усулида аниқлансан .

Жадвал -1.

| вариант | нуқта | Коор-лар | | | вариант | нуқта | Коор-лар | | | вариант | нуқта | Коор-лар | | |
|---------|-------|----------|----|----|---------|-------|----------|----|----|---------|-------|----------|-----|-----|
| | | X | Y | Z | | | X | Y | Z | | | X | Y | Z |
| 1 | A | 50 | 80 | 0 | 10 | A | 20 | 85 | 0 | 19 | A | 0 | 65 | 40 |
| | B | 0 | 40 | 80 | | B | 45 | 10 | 80 | | B | 70 | 65 | 70 |
| | C | 100 | 0 | 25 | | C | 130 | 25 | 45 | | C | 120 | 60 | 20 |
| | D | 40 | 5 | 5 | | D | 70 | 0 | 10 | | D | 0 | 5 | 90 |
| 2 | A | 25 | 70 | 80 | 11 | A | 50 | 90 | 0 | 20 | A | 5 | 10 | 45 |
| | B | 0 | 30 | 15 | | B | 100 | 0 | 25 | | B | 80 | 0 | 0 |
| | C | 75 | 10 | 35 | | C | 100 | 70 | 55 | | C | 120 | 50 | 50 |
| | D | 10 | 0 | 70 | | D | 0 | 60 | 40 | | D | 0 | 100 | 110 |
| 3 | A | 120 | 0 | 40 | 12 | A | 50 | 90 | 0 | 21 | A | 120 | 70 | 85 |
| | B | 80 | 85 | 0 | | B | 0 | 40 | 80 | | B | 80 | 0 | 0 |
| | C | 0 | 40 | 60 | | C | 40 | 80 | 0 | | C | 120 | 50 | 50 |
| | D | 5 | 10 | 5 | | D | 90 | 70 | 15 | | D | 0 | 80 | 30 |
| 4 | A | 150 | 0 | 60 | 13 | A | 80 | 85 | 0 | 22 | A | 35 | 60 | 0 |
| | B | 60 | 90 | 5 | | B | 0 | 40 | 60 | | B | 0 | 10 | 90 |
| | C | 15 | 40 | 85 | | C | 130 | 40 | 10 | | C | 10 | 15 | 30 |
| | D | 0 | 75 | 0 | | D | 60 | 60 | 70 | | D | 80 | 50 | 15 |

| | | | | | | | | | | | | | | |
|----|---|-----|-----|-----|----|---|-----|-----|-----|----|---|-----|-----|----|
| 5 | A | 130 | 80 | 20 | 14 | A | 130 | 0 | 40 | 23 | A | 20 | 85 | 0 |
| | B | 100 | 0 | 110 | | B | 5 | 15 | 5 | | B | 45 | 10 | 80 |
| | C | 0 | 60 | 0 | | C | 40 | 80 | 0 | | C | 10 | 15 | 30 |
| | D | 60 | 10 | 0 | | D | 90 | 70 | 15 | | D | 60 | 0 | 80 |
| 6 | A | 130 | 10 | 20 | 15 | A | 60 | 90 | 5 | 24 | A | 20 | 65 | 0 |
| | B | 40 | 100 | 0 | | B | 5 | 15 | 0 | | B | 130 | 25 | 45 |
| | C | 40 | 10 | 70 | | C | 120 | 60 | 65 | | C | 70 | 0 | 10 |
| | D | 70 | 0 | 0 | | D | 70 | 0 | 100 | | D | 0 | 40 | 60 |
| 7 | A | 0 | 65 | 40 | 16 | A | 15 | 4 | 85 | 25 | A | 70 | 65 | 70 |
| | B | 45 | 0 | 5 | | B | 0 | 70 | 0 | | B | 120 | 60 | 20 |
| | C | 70 | 65 | 70 | | C | 15 | 80 | 80 | | C | 5 | 5 | 90 |
| | D | 120 | 60 | 20 | | D | 120 | 60 | 60 | | D | 60 | 80 | 0 |
| 8 | A | 120 | 70 | 85 | 17 | A | 100 | 0 | 110 | 26 | A | 35 | 55 | 45 |
| | B | 100 | 0 | 45 | | B | 0 | 60 | 0 | | B | 10 | 15 | 30 |
| | C | 65 | 100 | 0 | | C | 15 | 80 | 15 | | C | 60 | 0 | 80 |
| | D | 80 | 0 | 0 | | D | 110 | 20 | 60 | | D | 80 | 50 | 15 |
| 9 | A | 35 | 60 | 0 | 18 | A | 130 | 10 | 25 | 27 | A | 45 | 10 | 70 |
| | B | 0 | 10 | 90 | | B | 40 | 100 | 0 | | B | 70 | 0 | 10 |
| | C | 120 | 30 | 10 | | C | 70 | 0 | 0 | | C | 110 | 60 | 80 |
| | D | 10 | 15 | 30 | | D | 100 | 80 | 30 | | D | 0 | 40 | 60 |
| 28 | A | 100 | 20 | 110 | 29 | A | 120 | 60 | 65 | 30 | A | 40 | 100 | 0 |
| | B | 10 | 5 | 30 | | B | 110 | 40 | 60 | | B | 40 | 10 | 70 |
| | C | 120 | 60 | 30 | | C | 55 | 55 | 45 | | C | 10 | 15 | 30 |
| | D | 10 | 55 | 30 | | D | 65 | 80 | 0 | | D | 80 | 50 | 15 |



Күпёқликларнинг тўғри чизик, текислик ва ўзаро кесишиши.

1-масала. Учоқли тўғри призманинг умумий вазиятдаги P (P_H , P_V) текислик билан кесишувидан ҳосил бўлган кесимининг проекциялари кесим томонларини ясаш усули билан ясалсин. (64-расм)

Ечиш. Бунда призманинг йон йоқлари орқали $M_1(M_{1H}, M_{1V})$ ва $M_2(M_{2H}, M_{2V})$ горизонтал проекцияловчи текисликлар ўтказамиз. Бу

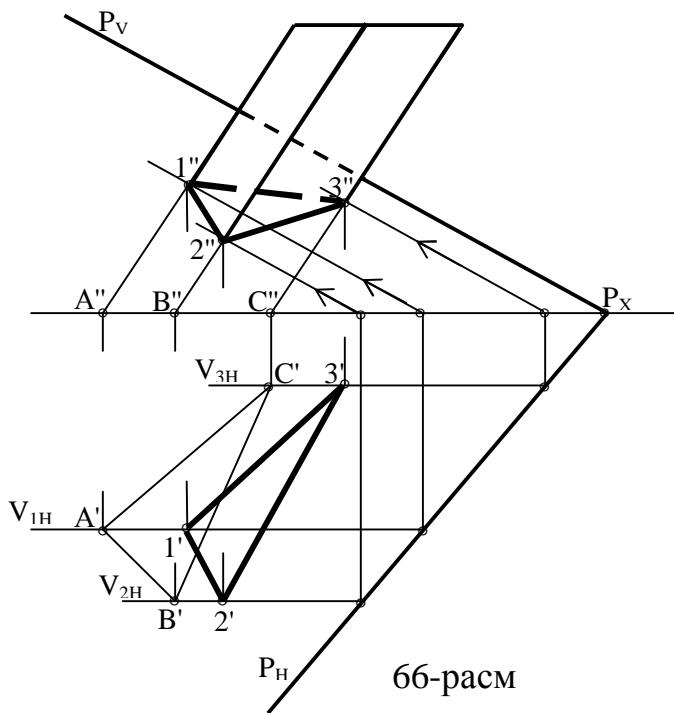
текисликларни берилган P текислик билан кесишган чизиклари йордамида кесим юзасининг 12(1'2', 1"2"), 13(1'3', 1"3") томонлари аниқланади.

2-масала. Асоси H проекциялар текислигида бўлган $SABC(S'A'B'C', S''A''B''C'')$ пирамиданинг излари билан берилган P (P_H , P_V) текислик билан кесишувидан ҳосил бўлган кесимининг проекциялари кесим учларини ясаш усули билан ясалсин. (65-расм)

Ечиш. Бунда кесим

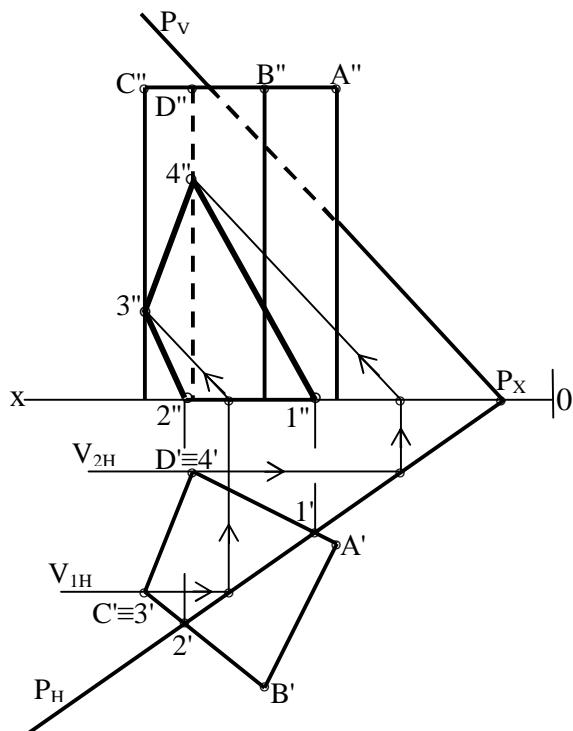
проекциялари $\Delta 1'2'3'$ ва $\Delta 1''2''3''$ ни ясаш алгоритми қуйидагича бўлади:

- SA, SB, SC қирралар орқали йордамчи N_1, N_2, N_3 фронтал проекцияловчи текисликлар ўтказилади;
- бу текисликларнинг Р текислик билан кесишган чизиқлари E_1F_1, E_2F_2, E_3F_3 нинг проекциялари ясалади;



ясаш усули билан ясалсин. (66-расм)

Ечиш. А, В, С призма қирралари орқали йордамчи V_1, V_2, V_3 фронтал проекцияловчи текисликлар ўтказилади; V_1, V_2, V_3 текисликлар билан Р текисликнинг кесишув чизиқларининг призма қирраларининг мос равища кесишув нукталари 1, 2, 3 ларнинг проекциялари аниқланади; ҳосил қилинган 1, 2, 3 нукталар ўзаро бирлаштирилиб, кесим юзасининг проекциялари $\Delta 1'2'3'$ ва $\Delta 1''2''3''$ ясалади.



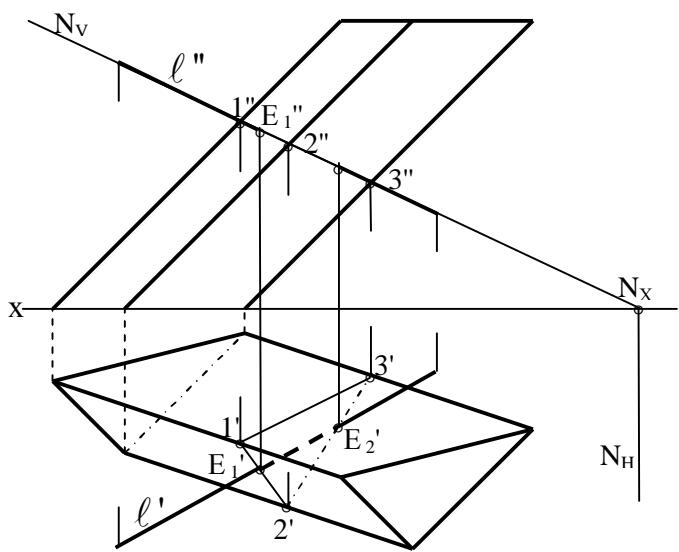
67-расм

- кесишув чизиқлари E_1F_1, E_2F_2, E_3F_3 билан пирамида қирралари SA, SB, SC нинг мос равища кесишув нукталари 1, 2, 3 ларнинг проекциялари аниқланади;
- ҳосил қилинган 1, 2, 3 нукталар ўзаро бирлаштирилиб, кесим юзасининг проекциялари $\Delta 1'2'3'$ ва $\Delta 1''2''3''$ ясалади.

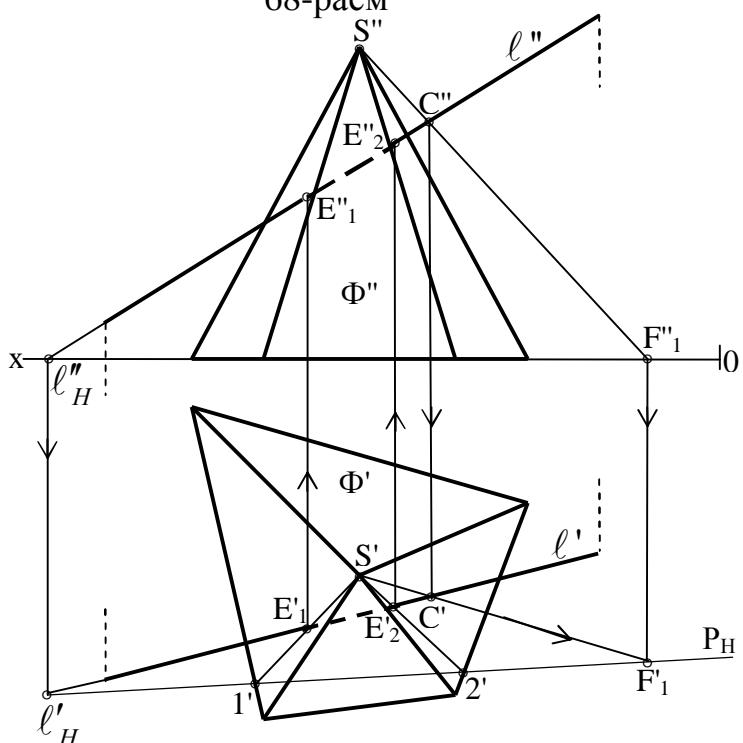
З-масала. Оғма призманинг умумий ҳолатдаги Р (P_H, P_V) текислик билан кесишувидан ҳосил бўлган кесимининг проекциялари кесим учларини

4-масала. Тўғри призманинг умумий ҳолатдаги Р (P_H, P_V) текислик билан кесишувидан ҳосил бўлган кесимининг проекциялари ясалсин. (67-расм)

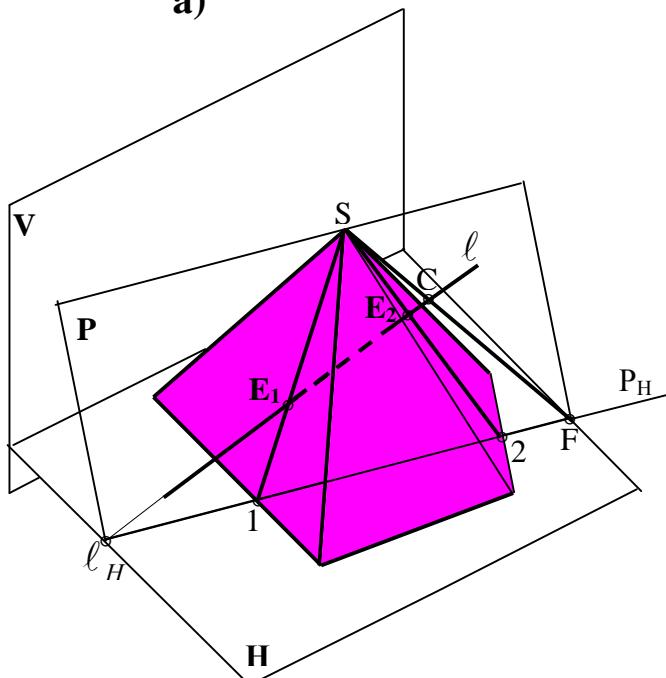
Ечиш. Кесимнинг 1(1', 1'') ва 2(2', 2'') нукталари бевосита призма асоси билан Р текисликнинг P_H изи кесишган нукталарида йотади. С ва D қирралар орқали ўтказилган ёрдамчи кесувчи $V_1(V_{1H}), V_2(V_{2H})$ фронтал текисликлар воситасида 3, 4 нукталар проекциялари аниқланган.



68-расм



a)



5-масала. $\ell(\ell', \ell'')$ түғри чизикнинг учийокли призма сирти билан кесишиш нұқталарини тасвирланг. (68-расм)

Ечиш. • ℓ түғри чизик орқали фронтал проекцияловчи $N(N_H, N_V)$ текислик үтказилади: $\ell'' \in N_V$ ва $N_H \perp 0x$;

• N текислик билан призманинг кесишишидаги кесим юзаси чизиги проекциялари $1'2'3'$ ва $1''2''3''$ ясалади;

Кесим юзаси чизиги $\Delta 123$ билан ℓ түғри чизикнинг учрашиш нұқталари E_1 ва E_2 белгиланади:

$$23 \cap \ell = E_1 \text{ ва } 23 \cap \ell = E_2.$$

Бунда, аввало, $1'2'3' \cap \ell' = E'_1$ ва E'_2 лар аниқланиб, сүнгра проекцион боғланиш чизиги орқали E''_1 ва E''_2 лар ҳолати аниқланади.

6-масала. $\ell(\ell', \ell'')$ түғри чизик билан $\Phi(\Phi', \Phi'')$ пирамиданинг ўзаро кесишиш нұқтасини ясанг. (69-a,b расм)

Ечиш. Бунда пирамиданинг S учи ва ℓ түғри чизик орқали үтүвчи умумий вазиятдаги P текисликнинг P_H изини үтказиш учун:

- берилган ℓ түғри чизикнинг горизонтал ℓ'_H изи ясалади;
- пирамиданинг S учидан түғри чизикни ихтиёрий $C(C', C'')$ нұқтада кесиб үтүвчи $SC(S'C', S''C'')$ түғри чизик үтказиб,

унинг ҳам горизонтал F'_1 изи ясалади;

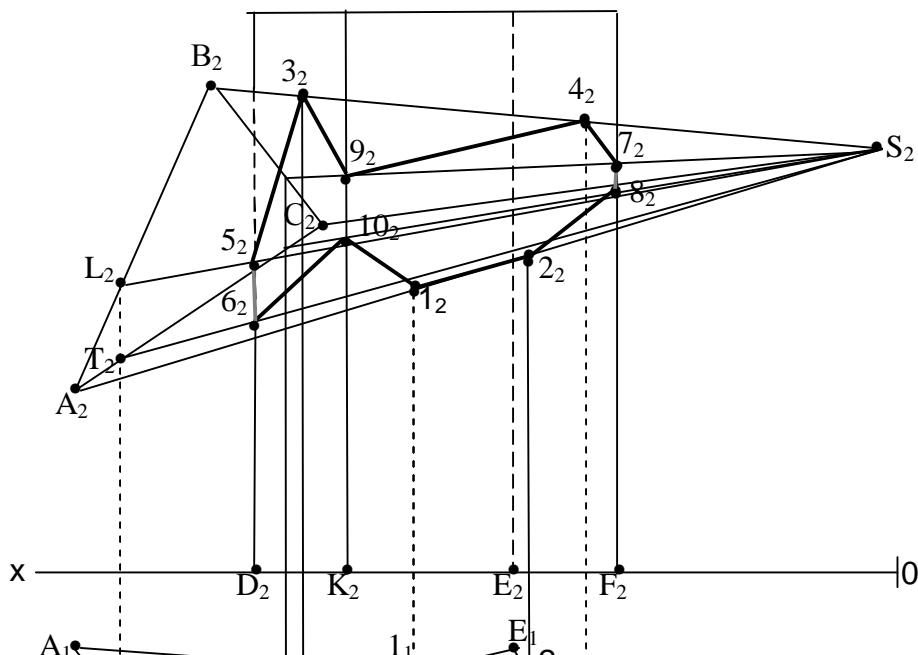
- ℓ'_{H} ва F'_1 излар орқали пирамида асосини кесувчи умумий вазиятдаги Р текисликнинг горизонтал P_H изини ўтказамиш. P_H билан пирамида асосининг кесишиш нуқталари $1'$ ва $2'$ белгиланади;
- S' нуқтани $1'$ ва $2'$ нуқталар билан бирлаштириб, Р текислик билан пирамиданинг кесишиш чизиги $\Delta S'1'2'$ ясалади;
- $\Delta S'1'2'$ билан ℓ тўғри чизикнинг ўзаро учрашиш E'_1 ва E'_2 нуқталари белгиланади. Бу нуқталардан фойдаланиб, уларнинг фронтал E''_1 ва E''_2 проекциялари аниқланади. Ҳосил бўлган E_1 ва E_2 нуқталар ℓ тўғри чизик билан Ф пирамида сиртининг кесишишидаги кириш ва чиқиш нуқталари бўлади.

7-масала. Тўрт бурчакли вертикал $DEFK(D_1E_1F_1K_1; D_2E_2F_2K_2)$ призма билан уч бурчакли $SABC(S_1A_1B_1C_1; S_2A_2B_2C_2)$ пирамиданинг ўзаро кесишиш чизигининг проекцияларини тасвирланг.(70- расм)

Ечиш. Кўрилайотган мисолдаги пирамиданинг $SA(S_1A_1; S_2A_2)$ қирраси призманинг $DE(D_1E_1; D_2E_2)$ йон йоғини $1(1_1; 1_2)$ нуқтада ва $EF(E_1F_1; E_2F_2)$ йон йоғини эса $2(2_1; 2_2)$ нуқтада кесиб ўтади. Пирамиданинг $SB(S_1B_1; S_2B_2)$ қирраси призманинг $DK(D_1K_1; D_2K_2)$ йон йоғини $3(3_1; 3_2)$ ва $EF(E_1F_1; E_2F_2)$ йон йоғини эса $4(4_1; 4_2)$ нуқталарда кесиб ўтади. Шаклдан кўриниб турибдики пирамиданинг $SC(S_1C_1; S_2C_2)$ қирраси кесишувда иштирок этмайди.

Энди призманинг қирраларини пирамида йон йоқлари билан кесишган нуқталарининг проекцияларини топамиш. Бунинг учун призманинг $D(D_1; D_2)$ қирраси ва пирамиданинг $S(S_1; S_2)$ учи орқали горизонтал проекцияловчи N текисликнинг N_H изини ўтказамиш. Бу текислик пирамида асоси ABC нинг AB томонини $L(L_1; L_2)$ нуқтада ва AC($A_1C_1; A_2C_2$) томонини эса T($T_1; T_2$) нуқтада кесиб ўтади. Бу нуқталарни пирамида учи билан бирлаштириб, $D(D_1; D_2)$ қирранинг фронтал D_2 проекциясида мос равища $5(5_1; 5_2)$ ва $6(6_1; 6_2)$ нуқталар аниқланади.

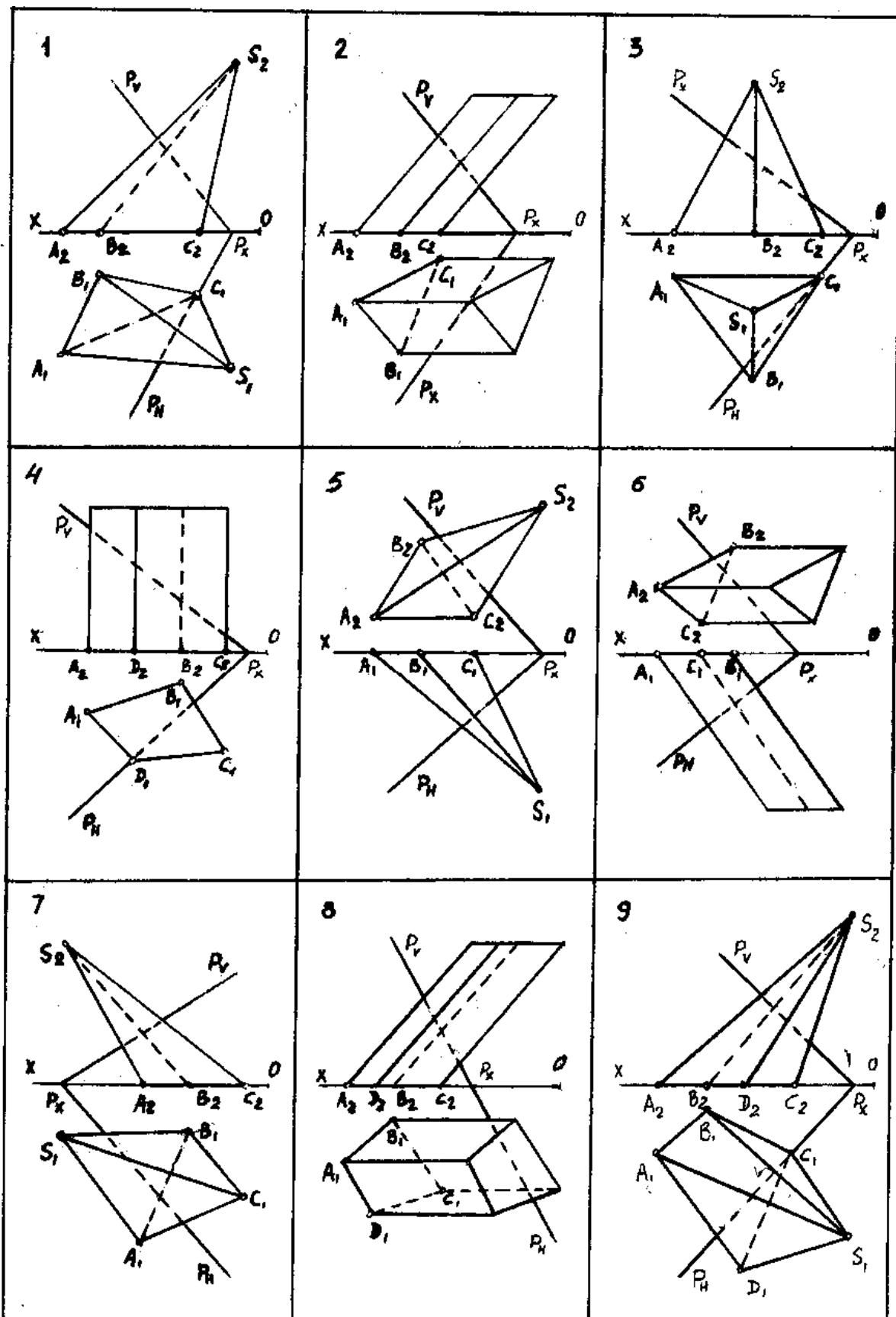
Бу нуқталар изланайотган нуқталардир. Юқоридаги усулдан фойдаланиб пирамиданинг учи $S(S_1; S_2)$ ва призманинг $F(F_1; F_2)$, $K(K_1; K_2)$ қирралари орқали текисликлар ўтказилиб $7(7_1; 7_2)$ ва $8(8_1; 8_2)$ нуқталар $F(F_1; F_2)$ қиррада, $9(9_1; 9_2)$ ва $10(10_1; 10_2)$ нуқталар K қиррада топилади.



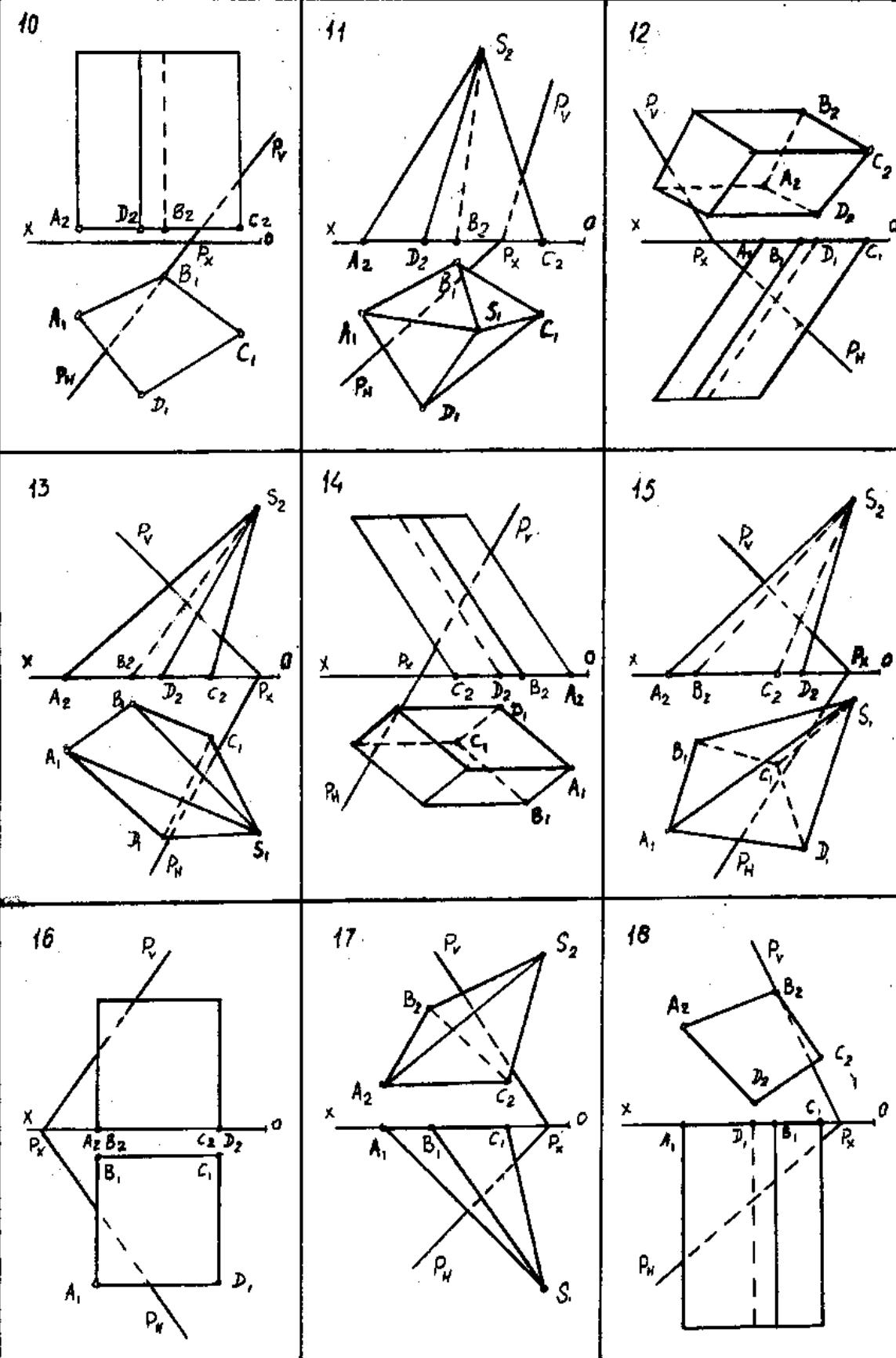
Машқ қилиш учун масалалар.

**2-жадвалда күрсатилған варианtlар асосида күпйоқликнинг
текислик билан кесишишин топинг.**

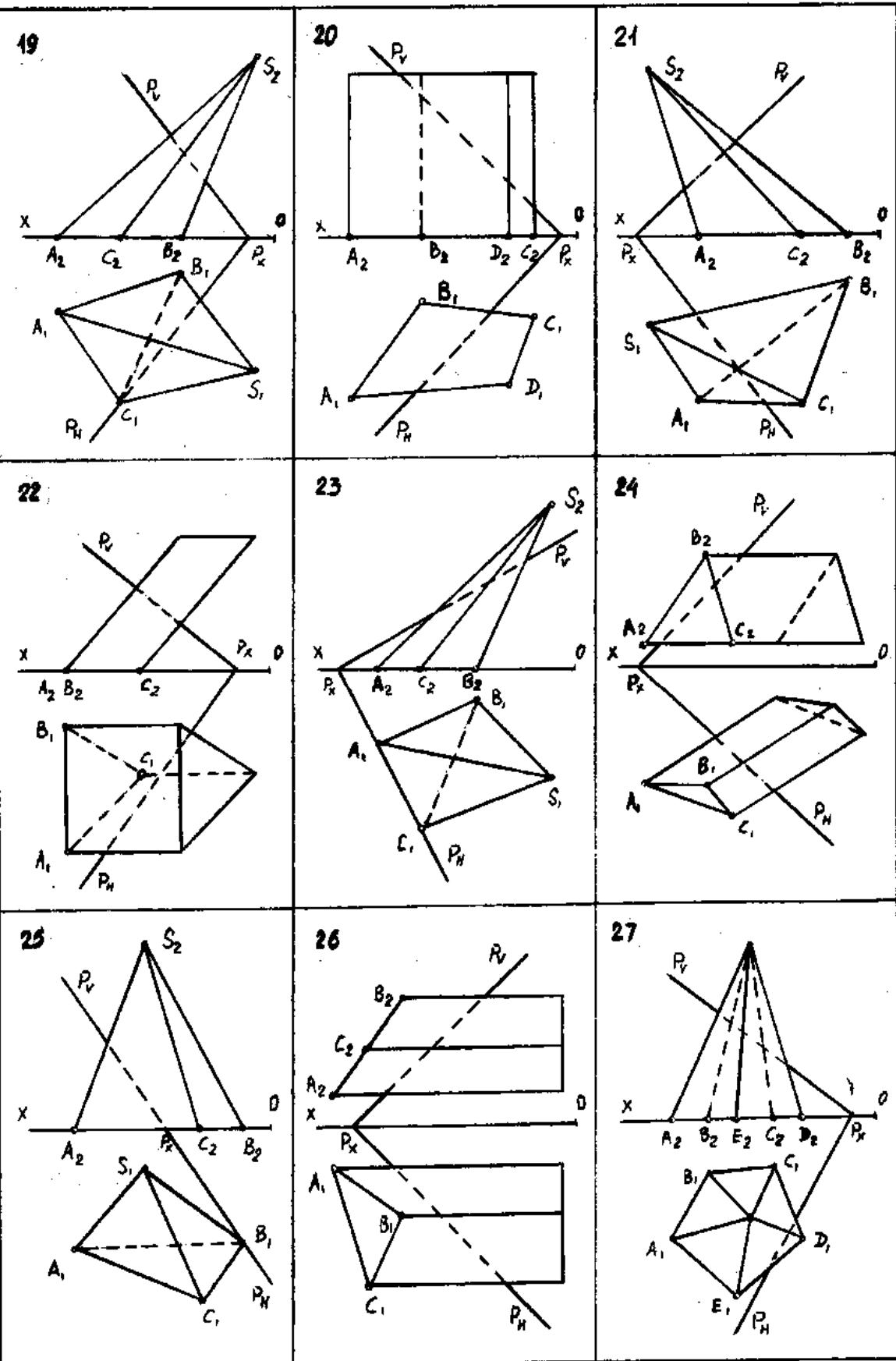
2-жадвал.



2-жадвал. (давоми)

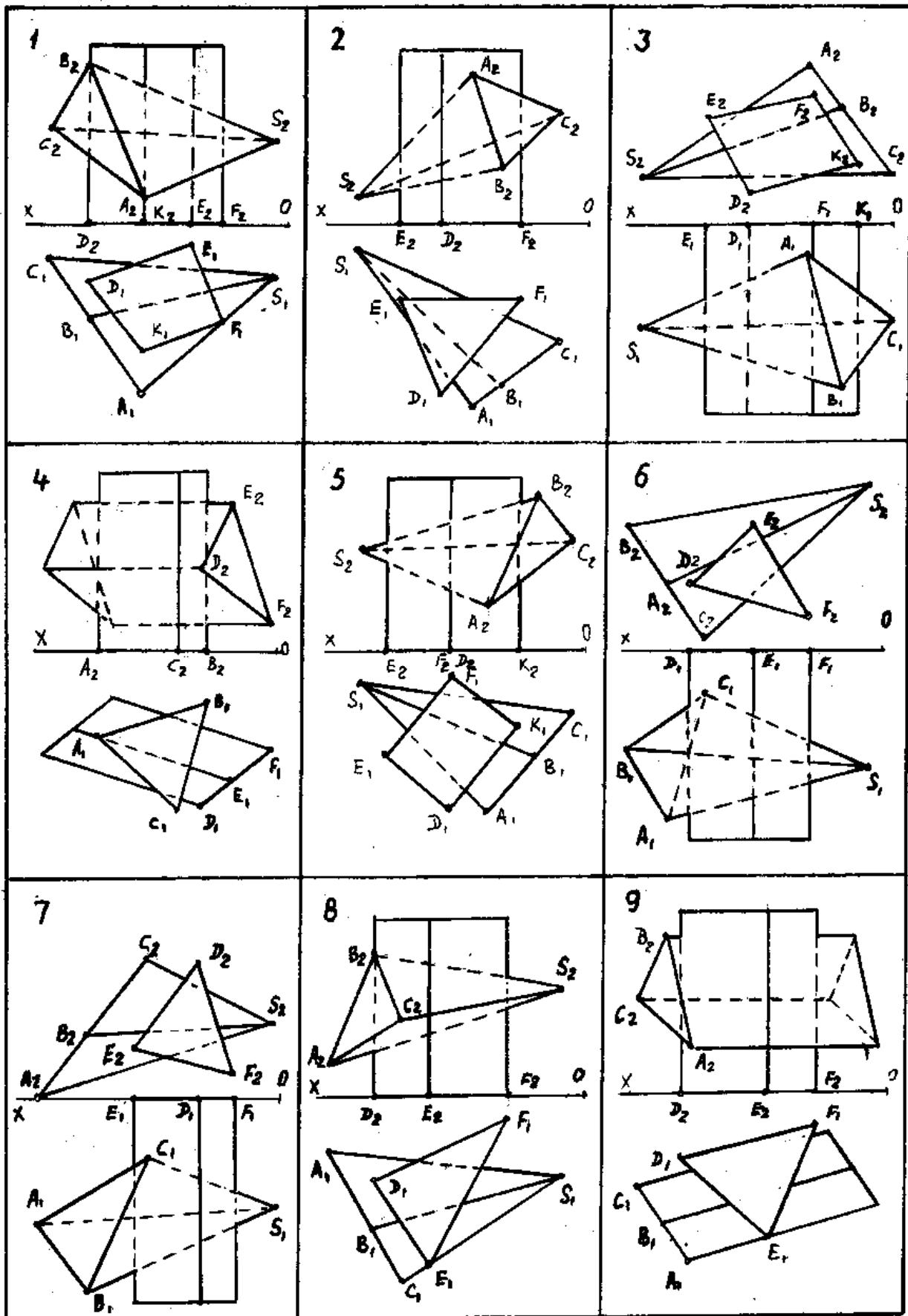


2-жадвал. (давоми)

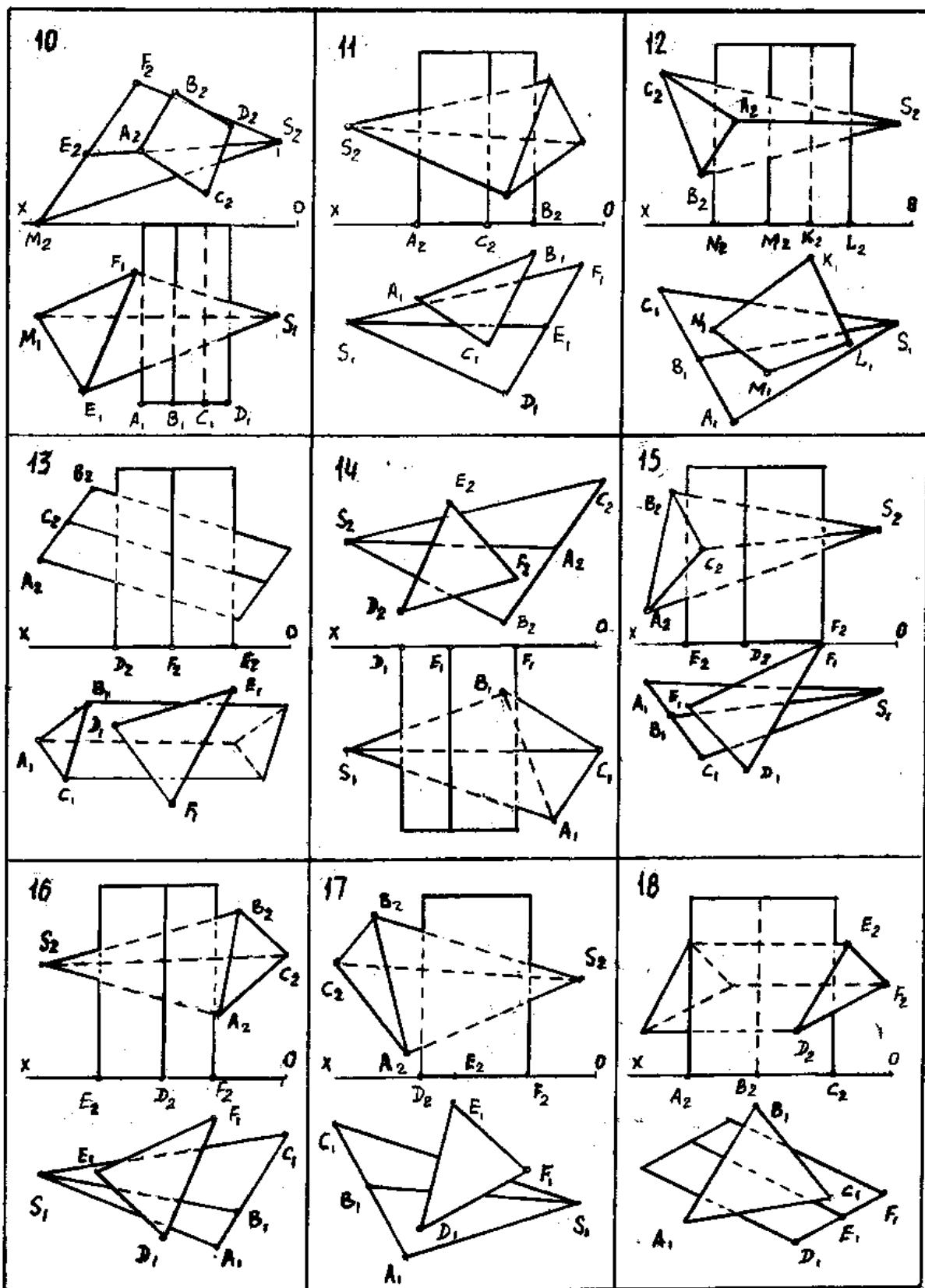


3-жадвалда күрсатылған варианттар асосида күйпойқыннинг ўзаро кесишишин топинг.

3-жадвал.

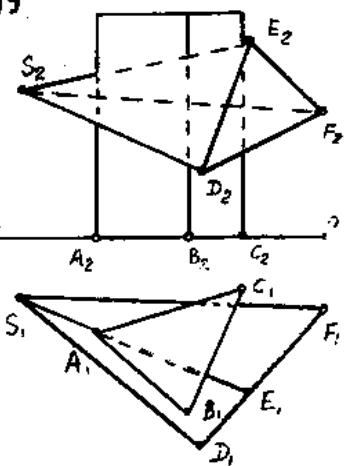


3-жадвал. (давоми)

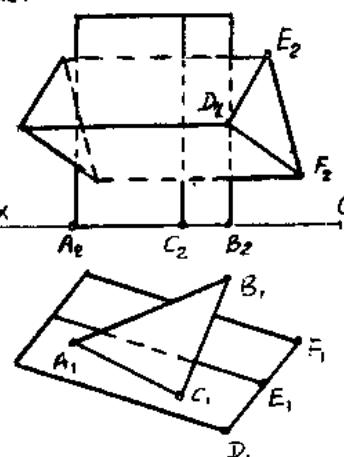


3-жадвал. (давоми)

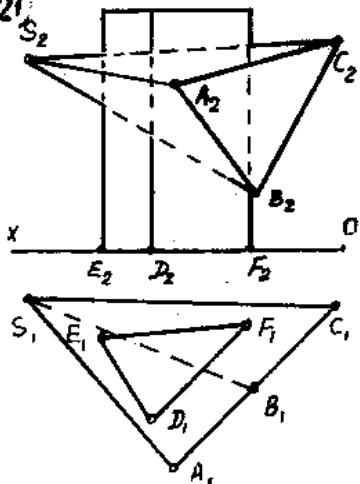
19.



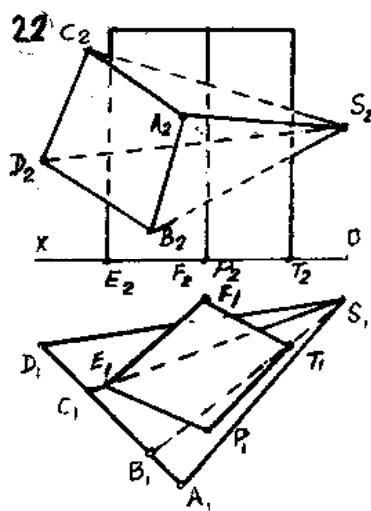
20.



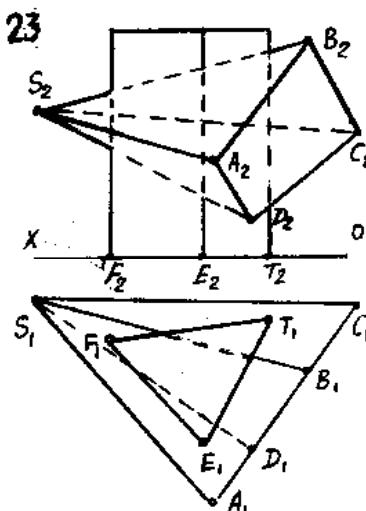
21.



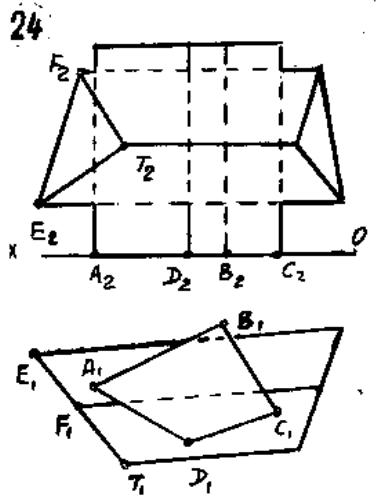
22.



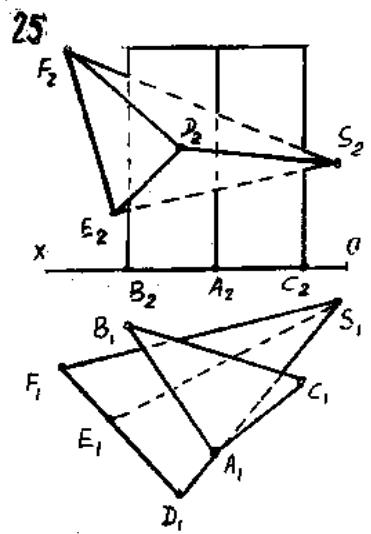
23.



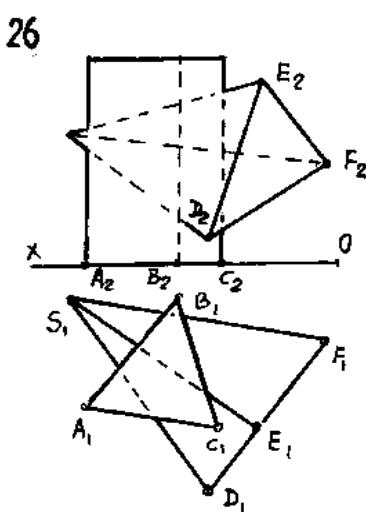
24.



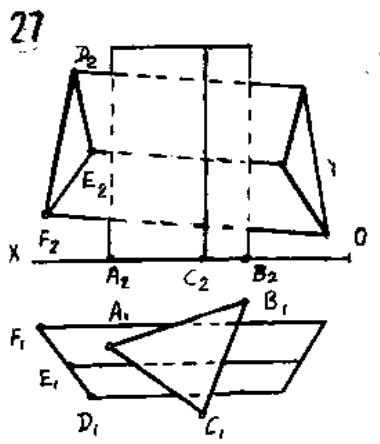
25.



26.



27.



Тавсия этиладиган адабиётлар

1. Ш.Муродов, Л.Хакимов, А.Холмурзаев, М.Жумаев, А.Тўхтаев. Чизма геометрия. Тошкент "Иқтисод-молия". 2006 йил.
2. У.Абдуллаев. Чизма геометрия ва чизмачилик асослари. Тошкент «Ўзбекистон». 1999 йил.
3. Хорунов Р, Акбаров А. Чизма геометриядан масалалар ва уларни йечиш усуслари. Олий ўқув юрти талабалари учун дарслик.
4. Г.Я. Содиқова. Чизма геометрия ва муҳандислик графикаси. Тошкент «Ўзбекистон». 2003 йил.
5. В.О. Гордон, Ю.Б. Иванов, Т.Е. Солнцева. Сборник задач по курсу начертательной геометрии. Издательство “Наука”. 1977 год. 2-нашри. –Т: Ўқитувчи, 1995. – 144 б.
6. Четверухин Н. Ф. и др. Начертательная геометрия. М., «Высшая школа», 1968.
7. Арустамов Х. А. Сборник задач по начертательной геометрии. М., «Машиностроение», 1965.
8. Н. Н. Иванов и И. С. Храмова. Сборник упражнений по начертательной геометрии. РОСВУЗИЗДАТ 1963.
9. С.А. Фролов, А.В. Бубенников, В.С. Левицкий, И.С. Овчинникова. Начертательная геометрия. Инженерная графика. Методические указания и контрольные задания. М., «Высшая школа», 1990.
10. Ю.Кирғизбоев. Чизма геометриядан масалалар тўплами. 1976 йил.

МУНДАРИЖА

| | |
|---|----|
| Сўз боши | 3 |
| Қабул қилинган шартли белгилар ва символлар | 5 |
| Нуқтанинг ортогонал проекцияси. | 5 |
| Тўғри чизиқнинг ортогонал проекциялари. | 8 |
| Текислик ва унинг ортогонал проекциялари. | 15 |
| Ортогонал проекцияларни қайта тузиш усуллари | 33 |
| Купёқликларнинг тўғри чизиқ, текислик ва ўзаро кесишиши | 42 |
| Тавсия этиладиган адабиётлар | 53 |