Ё. У СОАТОВ

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА

5-ЖИЛД

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги олий техника ўқув юртлари талабалари учун дарслик сифатида тавсия этган

ТОШКЕНТ «ЎҚИТУВЧИ» 1998

Тақризчилар: Тошкент қишлоқ хўжалигини механизациялаш ва ирригациялаш институтининг «Ҳисоблаш математикаси ва математик моделлаштириш» кафедраси, Тошкент тўқимачилик енгил саноати институти «Амалий математика» кафедраси.

Таҳрир ҳайъати: Физика-математика фанлари номзодлари, доцентлар: *Ё. М. Ҳусанбоев* (масъул), *А. Омонов, А. Абдукаримов* (математик физика тенгламалари); техника фанлари номзоди, доцент *Р. Ж. Исомов.*

Дарслик Олий **техника** ва қишлоқ хўжалик ўқув юртларининг талабалари учун мўлжалланган.

Китоб «Олий математика» дарслигининг бешинчи жилди бўлиб, бу жилдда «Олий математика» курсининг «Математик физика тенгламалари», «Операцион ҳисоб» ва «Сонли усуллар» бўлимлари амалдаги «Дастур»га асосан ёзилган. Унда етарли миқдорда мисол ва масалалар берилган.

С $\frac{1602000000-182}{353\,(04)-98}$ Ахб. хати—97

ISBN 5 — 645 — 03104 — 0

Ўзбекистон — келажаги
буюк давлат.

Ислом Каримов

СЎЗ БОШИ

Китобхон эътиборига ҳавола қилинаётган мазкур «Олий математика» дарслигининг бешинчи жилдига унинг математик физика тенгламалари, операцион ҳисоб ва асосий сонли усуллар каби махсус боблари киритилган.

Дарсликнинг бешинчи жилдини ёзишда ҳам олий ўқув юртларининг муҳандис-техник ва қишлоқ хўжалик мутахассисликлари учун математик фанларнинг амалдаги «Дастур»ида кўзда тутилган ва соатлари меъёрланган махсус боблари учун тавсия қилинган асосий ва қўшимча адабиётлардан ҳамда ўзбек тилида чоп этилган дарслик ва ўқув қўлланмаларидан кенг фойдаланилди.

Муаллиф дарсликни тузишда, унинг махсус бобларини ёзишда берган маслаҳатлари ва ёрдамлари учун Тошкент архитектура-қурилиш институти «Олий ва амалий математика» кафедраси ўқитувчиларига ўз миннатдорчилигини билдиради.

Ўзбекистон ФА нинг ҳақиқий аъзоси, физика-математика фанлари доктори, профессор В. Қ. Қобуловнинг дарсликка киритилган махсус бобларда келтирилган мавзуларни такомиллаштирилган ҳолда баён қилиш борасида берган танқидий фикр ва мулоҳазаларини муаллиф қадрлайди ва унга ўзининг миннатдорчилигини билдиради.

Муаллиф холисона тақриз, танқид ва дарсликни ёзишда йўл қўйилган камчиликларни кўрсатганлари учун Тошкент қишлоқ хўжалигини механизациялаш ва ирригациялаш институти «Ҳисоблаш математикаси ва математик моделлаштириш» кафедраси ўқитувчиларига ва унинг мудири профессор Х. Эшматовга, Тошкент тўқимачилик ва енгил саноат институти «Амалий математика» кафедраси ўқитувчиларига ва унинг мудири доцент Н. Муқимовга, таҳрир ҳайъатининг аъзолари доцентлар: Ё. М. Ҳусанбоев, Р. Ж. Исомов, А. Омоновларга ўз ташаккурини изҳор қилади.

Айниқса, дарсликнинг «Математик физика тенгламалари» махсус бобини ёзишда доцент Н. И. Қидирбоевнинг беминнат ёрдамини муаллиф эътироф этишни ўзининг бурчи деб билади.

Дарслик ҳақидаги танқидий фикр ва мулоҳазаларини билдирган барча китобхонларга муаллиф олдиндан ўз ташаккурини билдиради.

Муаллиф

МАТЕМАТИК ФИЗИКА ТЕНГЛАМАЛАРИ

А. НАЗАРИЙ МАВЗУЛАР

1-§. Асосий физик жараёнлар ва уларнинг тенгламалари.

Умумий тушунчалар

Кўпчилик физик жараёнлар математик физиканинг асосий тенгламаларини ўрганиш заруратига олиб келишини мисолларда кўрсатамиз.

1.1 Иссиқликнинг тарқалиши ва диффузия. Парчаланишли диффузия ва занжир реакцияда диффузия. Изотроп жисм берилган бўлсин: u — жисм температураси, ρ — унинг зичлиги, γ — солиштирма иссиқлик сиғими; f — иссиқлик манбаларининг интенсивлиги, яъни ҳажм бирлигидан вақт бирлигида ажраладиган иссиқлик миқдори.

Жисмнинг ҳажмини тўлдирган зарраларининг вақт бирлигидаги иссиқлик балансини ҳисоблайлик. Тажриба натижаларига мос келадиган Фурье гипотезасига асосан V ҳажмга ΔS сирт элементи орқали келадиган иссиқлик миқдори

$$\Delta Q = -k \frac{\partial u}{\partial n} \Delta S$$

формула билан аниқланади, бу ерда k — мусбат пропорционаллик (мутаносиблик) коэффициенти бўлиб, *иссиқлик ўтказувчанлик коэффициенти* деб аталади. Демак, V га S сирт орқали келувчи иссиқлик миқдори Остроградский формуласига (2-жилдга қаранг) асосан

$$-\iint_S k \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_V \operatorname{div}(k \nabla u)\, d\tau$$

га тенг бўлади, бу ерда ∇u — шу u функциянинг градиенти. V га келадиган жами иссиқлик миқдори

$$Q_1 = \iiint_V \operatorname{div}(k \nabla u)\, d\tau + \iiint_V f\, d\tau$$

тенглик билан аниқланади, бу ерда тенгликнинг ўнг қисмидаги иккинчи қўшилувчи — манбалар ҳисобига келадиган иссиқлик миқдори.

Ҳажмнинг $d\tau$ элементи температурасини Δt вақт ичида du миқдорга ошириш учун

$$\gamma\, du\, \rho\, d\tau = \gamma \rho \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t \cdot d\tau$$

иссиқлик миқдори керак бўлади.

Жисмнинг V ҳажмни эгаллаган зарралари температурасини оширишга сарф бўладиган жами иссиқлик миқдори вақт бирлиги ичида

$$Q_2 = \iiint\limits_V \gamma \rho \frac{\partial u}{\partial t} \, d\tau$$

га тенг бўлади. $Q_1 = Q_2$ десак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\iiint\limits_V [\operatorname{div}(k \nabla u) + f] \, d\tau = \iiint\limits_V \gamma \rho \frac{\partial u}{\partial t} d\tau.$$

V соҳа ихтиёрий эканлигини ҳисобга олиб, ўрта қиймат ҳақидаги теоремага асосан

$$\operatorname{div}(k \nabla u) - \gamma \rho \frac{\partial u}{\partial t} = -f \tag{1.1}$$

ни ҳосил қиламиз. (1.1) тенглик иссиқликнинг бир жинсли бўлмаган жисмда тарқалиши дифференциал тенгламасидан иборат. Муҳит бир жинсли бўлган ҳолда бу тенглама

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{f}{k}, \quad a = \sqrt{\frac{k}{\gamma \rho}} \tag{1.2}$$

кўринишда ёзилади ва математик физиканинг асосий тенгламаси — *иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси* деб аталади. Хусусан, агар иссиқлик оқими стационар, яъни вақтга боғлиқ бўлмаса, у ҳолда бу Пуассон тенгламаси, ва агар бунда иссиқлик манбалари йўқ бўлса, у ҳолда Лаплас тенгламаси бўлади.

Бирор муҳит газ билан нотекис тўлдирилган ёки эритма билан тўлдирилган ҳажмда эритилган модда нотекис тақсимланган бўлсин. Бу ҳолларда газ ёки модданинг зичлик катта бўлган жойлардан зичлик кичик бўлган жойларга диффузияси содир бўлади, бунда концентрация дейилганда

$$u = \frac{dQ}{d\tau}$$

функция тушунилади, бу ерда dQ — газ ёки эритма билан тўлдирилган ҳажмнинг $d\tau$ элементидаги модда ёки газ миқдори.

Нэрнстнинг экспериментал қонунига асосан V ҳажмдан вақт бирлиги ичида сирт элементи ΔS орқали диффузияланувчи газ ёки модда миқдори

$$\Delta Q = -D \frac{\partial u}{\partial n} \Delta S$$

формула орқали аниқланади, бу ерда D — диффузия коэффициенти деб аталадиган мусбат пропорционаллик коэффициенти. Демак, V ҳажмга вақт бирлиги ичида келадиган жами модда ёки газ миқдори

$$-\iint\limits_S D \frac{\partial u}{\partial n} dS + \iiint\limits_V f \, d\tau = \iiint\limits_V [\operatorname{div}(k \nabla u) + f] \, d\tau.$$

бўлади, бу ерда тенгликнинг чап томонидаги иккинчи қўшилувчи манбалар ҳисобига келадиган модда ёки газ миқдори; f — бу манбаларнинг интенсивлиги. $d\tau$ ҳажм элементида Δt вақт ичида концентрациянинг du миқдорга ўзгариши учун

$$c\,du\,d\tau = c\,\frac{\partial u}{\partial t}\,\Delta t\,d\tau$$

миқдорда модда ёки газ талаб қилинади, бу ерда *с — ғоваклик коэффициенти* деб аталадиган мусбат пропорционаллик коэффициенти.

V ҳажмдаги концентрацияни вақт бирлигида ўзгартириш учун сарф бўладиган жами модда ёки газ миқдори

$$\iiint\limits_V c\,\frac{\partial u}{\partial t}\,d\tau$$

бўлади. Энди модданинг сақланиш қонунига асосан

$$\iiint\limits_V [\operatorname{div}(D\nabla u) + f]\,d\tau = \iiint\limits_V c\,\frac{\partial u}{\partial t}\,d\tau$$

га эга бўламиз. Бу ердан, юқоридаги каби, бир жинсли бўлмаган муҳитда диффузия тенгламаси

$$\operatorname{div}(D\nabla u) - c\,\frac{\partial u}{\partial t} = -f \tag{1.3}$$

ни ҳосил қиламиз. Бир жинсли муҳит бўлган ҳолда бу тенглама

$$\Delta u - \frac{1}{a^2}\,\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{f}{D}, \text{ бу ерда } a = \sqrt{\frac{D}{c}} \tag{1.4}$$

кўринишни олади ва у иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси билан устма-уст тушади. Баъзи газларнинг (масалан, радийнинг эманациясида) диффузияланишида бу газлар молекулаларининг парчаланиш реакцияси содир бўлади. Парчаланиш реакциясининг тезлигини газнинг концентрациясига пропорционал деб олиш табиий бўлади, шу сабабли (1.4) диффузия тенгламаси парчаланиш мавжуд бўлганда ушбу кўринишни олади:

$$\Delta u - \frac{1}{a^2}\,\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\beta}{D}\,u = -\frac{f}{D}, \tag{1.5}$$

бу ерда β — мусбат пропорционаллик коэффициенти бўлиб, парчаланиш реакциясининг тезлигини тавсифлайди. Бунга (1.4) тенгламада манбалар интенсивлиги f нинг ўрнига $(f - \beta u)$ ни қўйиб, осон ишонч ҳосил қилиш мумкин. Стационар диффузия бўлган ҳолда (1.5) тенглама ушбу кўринишдаги тенгламага келтирилади:

$$\Delta u - k^2 u = -\frac{f}{D}, \quad k = \sqrt{\frac{\beta}{D}} \tag{1.6}$$

«Занжир реакциялар» мавжуд бўлган диффузия жараёнлари катта қизиқиш уйғотади. Занжир реакцияларга хос нарса шуки, диффузияланаётган газ ёки модда зарралари атроф-муҳит билан реакцияга киришиб (таъсирланиб) «кўпаядилар». Масалан, нейтрон ураннинг «актив» ядролари билан тўқнашганда ядроларнинг бўлиниш реакциялари содир бўлиб, бунда янги нейтронлар пайдо бўлади, улар эса ўз навбатида актив ядролар билан реакцияга киришади ва янги нейтронларнинг пайдо бўлишига олиб келади, бу жараён эса шу тартибда давом этади. Агар тавсифланган бу жараённи «диффузия» нуқтаи назаридан қаралса, реакция тезлиги концентрацияга (нейтронлар зичлигига) пропорционал деб олинса, биз манбалар интенсивлигини $(f+\beta u)$ га тенг деб олишимиз керак, бу ерда u — концентрация, β — занжир реакция тезлигини характерлайдиган мусбат пропорционаллик коэффициенти. Шундай қилиб, (1.4) диффузия тенгламаси занжир реакция бўлган ҳолда

$$\Delta u - \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\beta}{D}u = -\frac{f}{D} \tag{1.7}$$

кўринишни олади.

Агар занжир реакцияли диффузия жараёнини стационар деб ҳисобланса, у ҳолда (1.7) тенглама ушбу кўринишга келади.

$$\Delta u + k^2 u = -\frac{f}{D}, \quad k = \sqrt{\frac{\beta}{D}}, \tag{1.8}$$

1-эслатма. (1.5) тенглама (1.7) тенглама каби номаълум функцияни оддий алмаштириш йўли билан иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасига келтирилади. Ҳақиқатан ҳам, агар

$$\Delta u - \frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} + cu = -\frac{f}{k} \; (a,\ c - \mathrm{const})$$

тенгламада $v = ue^{-a^2ct}$ деб олинса, у ҳолда бу тенглама ушбу кўринишдаги иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасига айланади:

$$\Delta v - \frac{1}{a^2}\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{f}{k}e^{-a^2ct}$$

1.2. Сиқилмайдиган суюқликнинг потенциал оқими. Узлуксизлик тенгламаси. $\vec{v}$ — суюқлик зарралари ҳаракатининг x, y, z, t нинг функцияси сифатида қараладиган тезлик вектори, v_x, v_y, v_z — унинг мос равишда x, y, z — ўқлар йўналиши бўйича компонентлари; ρ — суюқлик зичлиги, f — манбалар интенсивлиги, яъни бирлик вақт ичида бирлик ҳажмдан ажраладиган суюқлик миқдори бўлсин.

V ҳажмга манбалардан S сирт орқали вақт бирлиги ичида келадиган жами суюқлик миқдори

$$Q = \iint_S \rho v_n dS + \iiint_V f d\tau = \iiint_V [(-\operatorname{div}(\rho\vec{v}) + f] d\tau$$

бўлади. $d\tau$ ҳажм элементидаги суюқлик зичлигини Δt вақт ичида $d\rho$ миқдорга орттириш учун $d\rho\, d\tau = \frac{\partial\rho}{\partial t}\Delta t\, d\tau$ суюқлик миқдори керак бўлади, V ҳажмдаги суюқлик миқдорини вақт бирлиги ичида ошириш учун керак бўладиган суюқлик миқдори эса

$$\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t} d\tau$$

бўлади.

Бу суюқлик миқдорини, юқоридаги каби Q га тенглаб, *узлуксизлик тенгламаси* деб аталадиган

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = f \qquad (1.9)$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Бу узлуксизлик тенгламаси ҳаракатланаётган суюқликнинг қандайдир хусусий хоссаларига боғлиқ бўлмай, у умуман ҳаракатда бўлган исталган муҳит учун ўринлидир.

Узлуксизлик тенгламасини $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$, $v_z = \frac{dz}{dt}$ тенгликларга асосан бундай кўринишда ҳам ёзиш мумкин:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = f. \qquad (1.10)$$

Хусусан, агар суюқлик сиқилмайдиган бўлса (ρ — const), у ҳолда

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{f}{\rho}. \qquad (1.11)$$

Потенциал суюқлик оқими бўлган ҳолда

$$\vec{v} = -\nabla u$$

ёки очиб ёзилса,

$$v_x = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad v_y = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad v_z = -\frac{\partial u}{\partial z},$$

бу ерда u — шу x, y, z аргументларнинг функцияси бўлиб, *оқимнинг потенциал функцияси* деб аталади. Сўнгги тенгликларни ҳисобга олган ҳолда узлуксизлик тенгламасидан сиқилмайдиган суюқликнинг ушбу потенциал оқим тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\Delta u = -\frac{f}{\rho}. \qquad (1.12)$$

Бу Пуассон тенгламаси, $f \equiv 0$ бўлганда эса Лаплас тенгламасидир.

1.3. Идеал суюқлик гидродинамикаси тенгламалари. Идеал суюқлик дейилганда зарралари орасида ишқаланиш кучлари бўлмаган, бошқача айтганда, ёпишқоқлик кучлари мавжуд бўлмаган суюқликни тушунилади. $\vec{v}$, ρ ва f — 1.2-банддаги катталиклар, p — босим, $\vec{F}$ — масса кучи, яъни суюқликнинг масса бирлигига ташқаридан қўйилган куч, масалан, оғирлик кучи. Вақтнинг t моментида V ҳажмни тўлдирадиган суюқлик зарраларини тайинлаймиз ва бу зарралар тўпламига ҳаракат миқдорининг ўзгариш қонунини татбиқ этамиз: *системанинг ҳаракат миқдоридан вақт бўйича олинган ҳосила ташқи кучларнинг тенг таъсир этувчисига тенг.* Математика тилида бу қонун шу зарралар тўпламига нисбатан ушбу кўринишга эга бўлади:

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho\vec{v}\,d\tau = \iint_S \vec{n}\,p\,dS + \iiint_V \rho\vec{F}\,d\tau.$$

Бу ерда V ҳажмга S сиртга ўтказилган $\vec{n}$ нормал йўналиши бўйича қўйилган кучларни ҳисоблашда биз идеал суюқликда уринма кучланишлар шартга кўра юзага келмаслигидан қатъий равишда фойдаландик. $\rho\,d\tau$ катталик модданинг сақланиш қонунига асосан вақтга боғлиқ эмас, шу сабабли

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho\vec{v}\,d\tau = \iiint_V \frac{d\vec{v}}{dt}\,\rho\,d\tau.$$

2-эслатма. Бу тенгламанинг мақбуллиги шундаки, унда $t+\Delta t$ вақт моментида ҳажм бўйича интеграллаш ўзгарувчиларни алмаштириш ёрдамида ҳажм бўйича интеграллашга келтирилади.

Қуйидагига эгамиз:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\iiint_{V'} \vec{v}'\rho' d\tau' - \iint_V \vec{v}\rho\,d\tau\right] =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\iint_V \frac{\vec{v}'-\vec{v}}{\Delta t}\,\rho\,d\tau = \iint_V \frac{d\vec{v}}{dt}\,\rho\,d\tau,$$

бу ерда V', $\vec{v}'$, ρ', $d\tau'$ лар мос равишда V, $\vec{v}$, ρ, $d\tau$ лар каби бўлиб, фақат улар t вақт моментида эмас, балки $t+\Delta t$ вақт моментида олинган.

Энди Остраградский формуласига асосан

$$-\iint_S \vec{n}\,p\,dS = \iiint_V \Delta p\,d\tau$$

га эгамиз. Шу сабабли ҳаракат микдорининг ўзгариш қонунини

$$\iiint_V \frac{d\vec{v}}{dt}\,\rho\,dt = -\iiint_V \Delta p\,d\tau + \iiint_V \rho\vec{F}\,d\tau$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Бу ердан V нинг ихтиёрийлигига асосан

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{F} \qquad (1.13)$$

ни ҳосил қиламиз. Бу *Эйлернинг ҳаракат тенгламаси* деб аталадиган тенгламадир.

Агар суюқлик сиқилмайдиган бўлса, у ҳолда (1.11) узлуксизлик тенгламаси ва (1.13) Эйлернинг ҳаракат тенгламаси идеал сиқилмайдиган суюқлик гидродинамикасининг тўла системасини ҳосил қилади. Бу ерда номаълум функциялар $\vec{v}$ ва p дир, тенгламалар сони эси тўртта.

Сиқиладиган суюқлик бўлган ҳолда идеал суюқлик гидродинамикасининг дифференциал тенгламалари тўла системаси (1.10) узлуксизлик тенгламаси, (1.13) Эйлернинг ҳаракат тенгламаси ҳамда *ҳолат тенгламаси* деб аталадиган ва номаълум функциялар: p босим ва ρ зичлик орасидаги берилган боғланишни ифодалайдиган

$$p = \Phi(\rho) \tag{1.14}$$

тенгламадан ёки номаълум функциялар: p босим, ρ зичлик ва T абсолют температура орасидаги берилган боғланишни ифодалайдиган

$$p = \Phi_1(\rho, T), \quad p = \Phi_2(\rho, T) \tag{1.15}$$

тенгламадан иборат бўлади.

1.4. Газ динамикаси ва акустика тенгламалари. Газ ҳаракати идеал суюқлик ҳаракати каби қаралади, шу билан бирга бунда газ манбалари йўқ, масса кучлари эса нолга тенг деб ҳисобланади. Газ ҳаракатининг катта тезликларида (соатига 300 — 400 км дан ортиқ бўлганда) газ сиқилишини ҳисобга олиш зарурати пайдо бўлади. Шу сабабли газ ҳаракати тенгламалари тўла системасини ҳосил қилиш учун узлуксизлик тенгламаси ва Эйлернинг ҳаракат тенгламалари қаторига газ ҳолати тенгламасини ҳам жалб қилиш зарур. Бундай газ ҳолати тенгламаси ҳаракатланаётган газда кетаётган жараёнларнинг катта тезкорлиги сабабли унинг адиабатиклиги ҳақидаги гипотезани қўшимча қилинганда Пуассоннинг ушбу адиабата тенгламаси

$$\frac{p}{\rho^{\chi}} = c = \text{const}, \quad \chi = \frac{c_p}{c_v}$$

дан иборат бўлади, бу ерда p ва ρ — 1.3-банддаги каби катталиклар, c_p ва c_v — газнинг ўзгармас босимдаги ва ўзгармас ҳажмдаги иссиқлик сиғимлари (ҳаво учун $\chi \approx 1{,}41$).

3-эслатма. Газ ҳолати тенгламасини қўшимча номаълум сифатида T абсолют температурани киритиб, бошқача кўринишда ёзиш ҳам мумкин. Бу ҳолда газ ҳолати тенгламаси Пуассон адиабата тенгламаси ва Клапейрон тенгламасидан иборат бўлади:

$$p = \rho R T.$$

бу ерда R — абсолют газ доимийси.

Шундай қилиб, газнинг катта тезликларда адиабатик ҳаракати тенгламалари ушбу

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho},$$

$$\frac{p}{\rho^{\chi}} = c = \text{const}, \quad \chi = \frac{c_p}{c_v} \tag{1.16}$$

кўринишда ёзилади, бу тенгламалар *газ динамикаси тенгламалари тўла системаси* номи билан машҳурдир. Газ ҳаракатининг кичик тезликларида уни сиқилмайдиган идеал суюқлик сифатида қараш мумкин ва бу ҳолда тегишли тенгламалар системаси — аэромеханиканинг тенгламалари тўла системаси 1.3-банддаги хулосаларга асосан ушбу кўринишда ёзилади:

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0, \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho}. \tag{1.17}$$

Фазода товуш тўлқинларининг тарқалишини газ зарраларининг ўз мувозанат вазияти атрофида товуш тўлқинларининг тарқалиш йўналишида адиабатик бўйлама тебранишлар сифатида талқин этиш табиийдир. p_0 ва ρ_0 юқоридаги p ва ρ дан фарқли ўлароқ, тебранаётган газнинг босими ва зичлиги бўлсин. Тебранишлар частотасининг етарлича катталиги сабабли газ конденсацияси $s = \frac{p - p_0}{\rho_0}$, тезлик вектори $\vec{v}$, ва шунингдек $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$, $\frac{\partial \vec{v}}{\partial y}$, $\frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$ ва ∇s лар етарлича кичик бўлади, бу миқдорларга нисбатан юқори кичиклик тартибидаги миқдорларни ҳисобга олмасликни шартлашиб оламиз. Бу шартда $\rho = \rho_0(1 + s)$ тенглик ва адиабата тенгламаси $p = p_0(1 + s)^{\chi}$ га асосан

$$p \simeq p_0(1 + \chi s), \quad \nabla p = p_0 \chi (1 + s)^{\chi - 1} \nabla s \simeq p_0 \chi \nabla s,$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \cong \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

га эга бўламиз ва энди Эйлернинг ҳаракат тенгламаси ушбу кўринишни олади:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -a^2 \nabla s, \quad a = \sqrt{\frac{\chi p_0}{\rho_0}}.$$

Шунга асосан, $\vec{v}$ векторни вақтнинг бошланғич моментида потенциал, яъни

$$\vec{v}\big|_{t=0} = -\nabla \Phi(x, y, z)$$

деб ҳисоблаб,

$$\vec{v} = -\nabla u, \quad u = \Phi(x, y, z) + a^2 \int_0^t s\, dt,$$

$$s = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t}$$

ни ҳосил қиламиз.

Узлуксизлик тенгламаси

$$\operatorname{div} \rho \vec{v} = \rho \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v} \nabla \rho = \rho_0 (1 + s) \operatorname{div} \vec{v} + $$
$$+ \rho_0 \vec{v} \nabla s \simeq \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}$$

тенгликларга асосан ушбу кўринишда ёзилади:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{v} = 0. \qquad (1.18)$$

Бу ердан u потенциал функция *акустика тенгламаси* деб аталадиган

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad a = \sqrt{\frac{\chi p_0}{\rho_0}} \qquad (1.19)$$

тенгламани, яъни математик физиканинг асосий тенгламалари—тўлқин тенгламасини қаноатлантиради. Бу тенгламани яна газ конденсацияси, босими ва зичлиги ҳам қаноатлантиради, чунки улар потенциал функция орқали қуйидагича осон ифодаланади:

$$s = -\frac{1}{a^2}\ \frac{\partial u}{\partial t},\ \rho = \rho_0 \left(1 + \frac{1}{a^2}\ \frac{\partial u}{\partial t}\right), \qquad (1.20)$$

$$p = p_0 \left(1 + \frac{\chi}{a^2}\ \frac{\partial u}{\partial t}\right).$$

4-эслатма. Шуни қайд қиламизки, масса кучлари мавжуд бўлганда, ўша юқорида қилинган фаразларда

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = a^2 \nabla s + \vec{F},$$

$$\vec{v} = -\nabla u + \int_0^t \vec{F} dt$$

бўлади ва (1.19) тенглама (1.18) га асосан ушбу тенглама билан алмашинади:

$$\Delta u - \frac{1}{a^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div} \int_0^t F\, dt.$$

1.5. Электростатика ва ўзгармас электр токи тенгламалари Бирор муҳитда — диэлектрикда берилган электр зарядлари ҳосил қилган доимий электр майдон берилган бўлсин, бунда $\vec{E}$ — электр майдон кучланганлиги, ρ — зарядлар зичлиги, ε — диэлектрик ўзгармас.

Агар муҳит бир жинсли, яъни $\varepsilon = \mathrm{const}$ бўлса, у ҳолда Кулон қонунига асосан нуқтавий электрозаряд интенсивлиги $\vec{e}$ ушбу

$$\vec{e} = \frac{\vec{r}}{\varepsilon r^3} e = -\nabla\left(\frac{e}{\varepsilon\ r}\right)$$

кучланишли потенциал электр майдон ҳосил қилади, бу ерда $\vec{r}$ — фазонинг e заряд турган нуқтасини унинг ихтиёрий нуқтаси билан туташтирувчи вектор, r — бу векторнинг узунлиги. Зарядни ўраб олган исталган ёпиқ S сирт орқали ўтувчи вектор оқими $\varepsilon \vec{e}$ учун ушбу тенгликлар ўринли бўлади:

$$\iint_S \varepsilon e_n\, ds = \iint_{S_1} \left(\frac{\vec{r}}{r^2}\right) e ds = 4\pi e,$$

бу ерда S_1 — маркази заряд турган нуқтада бўлган сфера. $d\tau$ ҳажм элементига жойлаштирилган $\rho d\tau$ зарядни нуқтавий заряд сифатида, берилган электр майдон кучланганлиги $\vec{E}$ ни эса нуқтавий заряд қўшилишидан ҳосил бўлган майдон сифатида қараш мумкин. Бунга асосан $\vec{E}$ вектор потенциал майдонларининг қўшилиши сифатида потенциал майдон бўлади, яъни $\vec{E} = -\nabla u$, бу эса

$$\int_S E_s ds = 0 \qquad (1.21)$$

дир ва, бундан ташқари,

$$-\iint\limits_S \varepsilon E_n\, dS = 4\pi \iiint\limits_V \rho d\tau \qquad (1.22)$$

тенглик ўринли бўлади.

Муҳит бир жинсли бўлмаган ҳолда, яъни $\varepsilon \neq \text{const}$ да (1.21) ва (1.22) тенгликлар бевосита эксперимент орқали аниқланади, улар *Кулон қонунининг умумлашмаси* сифатида қаралиши мумкин. Назарий жиҳатдан (1.21) тенгликни энергия сақланиш принципининг натижаси сифатида қараш мумкин, чунки бу тенгликнинг чап қисми мусбат бирлик заряднинг ёпиқ контурни айланиб ўтишидаги бажарган иши деб қаралиши мумкин, бу иш эса берилган электр майдоннинг ўзгармаслигига асосан нолдан фарқли бўла олмайди.

(1.22) тенглик эса вектор оқими $\varepsilon \vec{E}$ нинг сақланиш қонуни сифатида талқин этилиши мумкин.

(1.21) ва (1.22) тенгликларни Стокс ва Остроградский формулаларига асосан (2-жилдга қаранг)

$$\int\limits_C E_s\, ds = \iint\limits_\sigma (\text{rot}\, \vec{E})_\nu\, d\sigma, \qquad \iiint\limits_V \text{div}\, (\varepsilon \vec{E})\, d\tau = 4\pi \iiint\limits_V \rho d\tau$$

кўринишда ёзиб, V ва σ нинг ихтиёрийлигига асосан *электростатика тенгламалари системаси* деб аталадиган

$$\text{rot}\, \vec{E} = 0, \ \text{div}\ (\varepsilon \vec{E}) = 4\pi\rho \qquad (1.23)$$

системани ҳосил қиламиз.

Бу системадан шу нарса келиб чиқадики, фақатгина $\vec{E}$ вектор потенциал, яъни $E = -\Delta u$ бўлибгина қолмасдан, балки u потенциал функция ҳам электростатика тенгламаси деб аталадиган

$$\text{div}\ (\varepsilon \nabla u) = -4\pi\rho \qquad (1.24)$$

тенгламани қаноатлантиради.

Сўнгги тенглама бир жинсли муҳит бўлган ҳолда *Пуассон тенгламасидан*, зарядлар йўқ бўлганда эса *Лаплас тенгламасидан* иборат бўлади.

Бир жинсли электр ўтказувчи муҳитда ҳажмий зичлиги $\vec{j}(x, y, z)$ бўлган стационар электр токи мавжуд бўлсин. Агар муҳитда ҳажмий ток манбалари бўлмаса, у ҳолда

$$\text{div}\, \vec{j} = 0. \qquad (1.25)$$

$\vec{E}$ электр майдон ток зичлиги орқали дифференциал шаклдаги *Ом қонуни*

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\lambda} \qquad (1.26)$$

дан аниқланади, бу ерда λ — муҳит ўтказувчанлиги. Электр токи бўлган ҳолда $\vec{E}$ вектор потенциал бўлади, яъни шундай $u(x, y, z)'$ функция мавжудки,

$$\vec{E} = -\nabla u$$

бўлади. Буни ҳисобга олиб, (1.26) дан ўзгармас электр токи тенгламаси

$$\Delta u = 0,$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ни ҳосил қиламиз. Бу тенглама Лапласнинг уч ўлчовли тенгламаси билан устма-уст тушади.

2.6 Максвелл тенгламаси. Бирор муҳитда вақтга боғлиқ равишда ўзгарувчи магнит майдони, бу магнит майдоннинг кучланиши $\vec{H}$, диэлектриклик доимийси ε, муҳитдаги магнит ўтувчанлик коэффициенти μ берилган бўлсин. Фарадейнинг тажрибалар орқали олинган қонунига мувофиқ магнит майдонининг ўзгариши электр майдон кучланишини индуктивлайди. $\vec{E}$ — ўзгармас электр майдонига индуктивланган электр майдонининг қўшилиши натижасидаги электр майдоннинг кучланиши бўлсин (агар ўзгармас электр майдони бўлмаса, $\vec{E}$ фақат индуктивланган майдон кучланиши деб қаралади).

Фарадей қонунининг математик ифодаси қуйидагича ёзилади:

$$\int_C E_s\,ds = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\iint_\sigma \mu H_\nu\,d\sigma. \tag{1.27}$$

Бу тенглик Стокс формуласига кўра $\vec{E}$ ва $\vec{H}$ векторлар қаноатлантирадиган тенгламалардан бирини ёзишга имкон беради:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial(\mu\vec{H})}{\partial t}. \tag{1.28}$$

$\vec{E}$ ва $\vec{H}$ ларни аниқлаш учун иккинчи тенглама сифатида, табиийки, магнитостатиканинг биринчи тенгламасини олиш мумкин:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \quad \operatorname{div}(\mu\vec{H}) = 0 \tag{1.29}$$

Бу ерда $\vec{j}$ — $\vec{E}$ вектор ҳисобига пайдо бўладиган ўтказувчанлик токининг зичлиги. У ҳолда вектор анализнинг умумий $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{H} = 0$ формуласига кўра $\operatorname{div}\vec{j} = 0$ бўлиши керак. Умумий ҳолда бунинг бўлиши мумкин эмас, чунки узлуксизлик тенгламасига мувофиқ $\vec{j}$ вектор учун $\operatorname{div}\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$ (ρ — вақтнинг функцияси бўлган зарядлар зичлиги) га эгамиз. Бу зичликни йўқотиш учун (1.29) тенгламани, ўзгарган ушбу

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}(\vec{j} + \vec{j}_{\text{см}})$$

шаклда оламиз. Бу ерда $\vec{j}$—юқорида кўрсатилган ўтказувчанлик токи, $j_{\text{см}}$ эса бундан буён *силжиш токи* деб аталувчи, ҳозирча номаълум қўшилувчи. Бизнинг мақсадимиз (1.29) тенгликдаги зиддиятни йўқотиш бўлганлиги сабабли, бу силжиш токи шундай танланиши керакки, $\operatorname{div}(\vec{j} + \vec{j}_{\text{см}}) = 0$ бўлиши лозим. Бу талабга мувофиқ узлуксизлик тенгламасидан силжиш токини аниқлаш учун

$$\operatorname{div}\vec{j}_{\text{см}} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

шартни ҳосил қиламиз. Лекин, $\varepsilon\vec{E}$ вектор оқимнинг узлуксизлик тенгламасига кўра $\operatorname{div}(\varepsilon\vec{E}) = 4\pi\rho$ га эгамиз. Шу сабабли силжиш токини аниқлаш учун ҳосил қилинган шарт

$$\operatorname{div}\vec{j}_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}(\varepsilon\vec{E})$$

кўринишда ёзилади. Бу шартни ягона бўлмаган усуллар билан қаноатлантириш мумкин. Лекин тайин дифференциал тенгламага эга бўлиш учун силжиш токини табиийки,

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\vec{E})$$

тенглик билан аниқлаш маъқул.

Шундай қилиб,

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\vec{E}) \qquad (1.30)$$

дифференциал тенгламага эга бўламиз.

Бу ерда $\vec{j}$ ўтказувчанлик токи бўлиб, Ом қонунига мувофиқ $\vec{j} = \lambda\vec{E}$ тенглик билан аниқланади, λ — муҳитнинг ўтказувчанлик коэффициенти. (1.28) ва (1.30) тенгламалар электродинамиканинг *Максвелл тенгламалари* деб аталувчи тўлиқ тенгламалар системасидир.

1.7. Симлардаги эркин электр тебранишлар тенгламалари. Чексиз узун тўғри чизиқли ўтказгичдан ток ўтганида электромагнит тебранишлар ҳисобига тескари ўзиндукция электр юритувчи кучлари пайдо бўлади. Айтайлик, ўтказгич Ox ўқи бўйлаб йўналган ва ўтказгичнинг мос равишда сиғими, омик қаршилиги, индуктивлиги, изоляция сирқишини тавсифлайдиган ва ўтказгичнинг узунлик бирлиги учун ҳисобланган C, R, L, G параметрлар x нинг узлуксиз функциялари бўлсин. Агар бу параметрлар берилган деб ҳисобланса, у ҳолда i ва v номаълум функциялар (ток кучи i ва v кучланиши) учун дифференциал тенгламаларни электродинамика умумий тенгламалари (1.28) ва (1.30) дан фойдаланмасдан бевосита тузиш мумкин.

Ҳақиқатан ҳам, Ом қонунига асосан ўтказгичнинг dx элементида кучланиш камайиши электр юритувчи кучлар йиғиндисига тенг, яъни:

$$-\frac{\partial v}{\partial x}\,dx = i\,R\,dx + L\frac{\partial i}{\partial t}\,dx. \qquad (1.31)$$

Вақт бирлиги ичида ўтказгичнинг dx элементига келадиган электр миқдори

$$i\,|_x - i\,|_{x+dx} = -\frac{\partial i}{\partial x}\,dx$$

бўлади, шу вақт ичида dx элементда сарфланган электр миқдори эса

$$C\frac{\partial v}{\partial t}\,dx + G\,v dx$$

бўлади. Шу сабабли электр сақланиш қонунига асосан қуйидагига эга бўламиз:

$$-\frac{\partial i}{\partial x}\,dx = C\frac{\partial v}{\partial t}\,dx + G\,v dx. \qquad (1.32)$$

(1.31) ва (1.32) тенгликлардан *телеграф тенгламалари системаси* деб аталадиган

$$\begin{cases} \dfrac{\partial i}{\partial x} + C\,\dfrac{\partial v}{\partial t} + G\,v = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} + L\,\dfrac{\partial i}{\partial t} + Ri = 0 \end{cases} \qquad (1.33)$$

системани ҳосил қиламиз.

5-эслатма. *Бу тенгламалар электромагнит майдон умумий назарияси нуқтаи назаридан тақрибийдир, чунки улар баъзи қўшимча физик гипотезалар асосида Максвелл умумий тенгламаларидан ҳосил қилиниши мумкин, чунончи бу ҳолда улар ўтказгич параметрларининг берилишига мувофиқ келади.*

Хусусан, бу системанинг коэффициентлари ўзгармас бўлганда биринчи тенгламага $\frac{\partial}{\partial x}$ операторни, иккинчи тенгламага эса $-C\,\frac{\partial}{\partial t}$ операторни татбиқ этиб, i функциялар учун ушбу тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - LC\frac{\partial^2 i^1}{\partial t^2} - (RC + LG)\frac{\partial i}{\partial t} - RGi = 0.$$

v функциялар учун ушбу тенгламалар ҳам шунга ўхшаш ҳосил қилинади:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - LC\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - (RC + LG)\frac{\partial v}{\partial t} - RG\,v = 0.$$

Бу деган сўз, i ва v функцияларнинг ҳар бири телеграф тенгламасини қаноатлантиради:

$$u_{xx} - \frac{1}{a^2}\,u_{tt} - bu_t - cu = 0,\quad a = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad (1.34)$$

бу ерда $b = RC + LG$, $c = RG$. Бу тенглама янги номаълум функция $w = ue^{\frac{a^2b}{2}t}$ ни киритиш билан

$$w_{xx} - \frac{1}{a^2} w_{tt} + k^2 w = 0, \quad a = \frac{1}{\sqrt[3]{LC}} \qquad (1.35)$$

тенгламага келтирилади, бу ерда

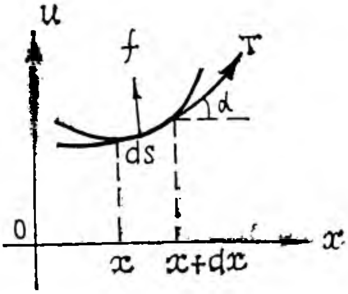
$$k^2 = \frac{1}{4}(a^2b^2 - 4C), \quad k = \frac{1}{2}\frac{RC - LG}{\sqrt{LC}}. \qquad (1.36)$$

1.8. Тор тенгламаси ва мембрана тенгламаси. Айтайлик, x, u текисликда тор, яъни букилишга қаршилиги йўқ ингичка ип x ўқи билан устма-уст тушадиган ўз вазияти атрофида кичик кўндаланг тебранишлар қилаётган бўлсин. T — ипнинг таранглиги, ρ — унинг чизиқли зичлиги, f — масса кучи, яъни торга перпендикуляр қилиб, унинг бирлик массасига қўйилган куч. Тор нуқталарининг мувозанат ҳолатидан оғишини ифодалайдиган $u = u(x, t)$ функция учун тенглама тузишда тебранишлар кичик бўлганлиги сабабли $\frac{\partial u}{\partial x}$ га нисбатан юқори тартибли кичикликдаги миқдорларни ташлаб юборишга келишамиз.

Аввало, шуни қайд этамизки, мувозанат ҳолатида таъсир ва акстаъсирнинг тенглик қонунига асосан T таранглик ўзгармас бўлади. Сўнгра торнинг мувозанат ҳолатида турган dx элементи мувозанат ҳолатидан оғганда $ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}$ (1.1-шакл) узунликка эга бўлади ва, демак, $\Delta = \frac{ds}{dx} - 1 \simeq 0$ узайиш олади. Бу деган сўз, Гук қонунига асосан таранглик ҳамма вақт доимий қолади. Торнинг ds элементига қўйилган барча кучларнинг u ўққа проекцияларини ҳисоблаймиз ва Даламбер принципига асосан нолга тенглаймиз. $x + dx$ нуқтадаги таранглик проекцияси

$$T \sin\alpha \Big|_{x+dx} = T \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2}} \Big|_{x+dx} \simeq$$

$$\simeq T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+dx}$$



1.1- шакл

бўлади, *dэ* элементга қўйилган таранглик кучлари тенг таъсир этувчисининг проекцияси эса

$$T \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+dx} - T \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{x+\theta dx} dx, \quad (0 < \theta < 1).$$

Бунга ds га қўйилган ва $f\rho dx$ га тенг кучни ҳамда $-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\rho dx$ инерция кучини қўшиб, Даламбер принципига асосан

$$T\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x+\theta dx} dx+\rho f dx-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\rho dx=0.$$

Бу тенгликдан, dx га қисқартириб ва $dx\to 0$ да лимитга ўтиб, торнинг кичик кўндаланг тебранишлари тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{T}f \qquad (1.37)$$

ни ҳосил қиламиз.

Хусусан, тор бир жинсли бўлганда, яъни $\rho=\mathrm{const}$ да бу тенглама ушбу кўринишни олади:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\frac{f}{a^2},\quad a=\sqrt{\frac{T}{\rho}}. \qquad (1.38)$$

Бу тенглама битта фазовий координата бўлган ҳол учун тўлқин тенгламаси билан устма-уст тушади ва одатда *тор тенгламаси* деб аталади.

x, y, z фазода мембрана, яъни букилишга қаршилиги йўқ юпқа плёнка x, y текислик билан устма-уст тушувчи ўз мувозанат ҳолати атрофида u ўқ йўналишида кичик кўндаланг тебранишлар бажарсин. Айтайлик, T — мембрананинг таранглиги, яъни мембрана кесимининг бирлик узунлигига бу кесимга перпендикуляр қилиб қўйилган ва мембрананинг уринма текислигида ётадиган куч, ρ — мембрананинг сирт зичлиги, f — мембрананинг масса бирлигига қўйилган ва унга перпендикуляр куч. Мембрана нуқталарининг мувозанат ҳолатидан оғишини берадиган $u=u(x,\ y,\ z,\ t)$ функцияни тузишда тебранишларнинг кичиклигига асосан $\frac{\partial u}{\partial x}$ ва $\frac{\partial u}{\partial y}$ га нисбатан юқори тартибли кичикликдаги миқдорларни ташлаб юборишга келишиб олайлик.

Энг аввало, таъсирнинг акс таъсирга тенглиги қонунини мембрананинг мувозанат ҳолатда чексиз тор тўғри тўрт бурчакли кичик қисмларига татбиқ этамиз. Бу қисмларни аввало x ўқига параллел, кейин эса y ўқига параллел деб ҳисоблаб, мувозанат ҳолатда T таранглик x ва y га боғлиқ эмас деб хулоса чиқарамиз. Сўнгра мембрананинг мувозанат ҳолатидаги ҳар қандай ds чизиқли элементи мувозанат ҳолатдан чиқишда узунлиги

$$ds'=ds\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2}$$

бўлган элементга ўтади ва

$$\Delta=\frac{ds'}{ds}-1\approx 0$$

нисбий узайиш олади. Бу эса Гук қонунига мувофиқ равишда T таранглик ҳамма вақт доимий қолишини англатади. Айтайлик C' — мембрананинг бирор бўлаги D' ни чегаралаб турган контур, C ва

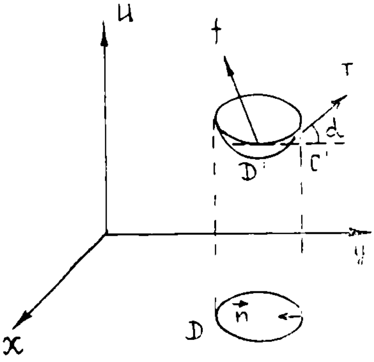
D — уларнинг x ва y ўқларига проекциялари бўлсин. $D' + C'$ га қўйилган кучларнинг тенг таъсир этувчиларини u ўққа проекциялаймиз. C' га қўйилган таранглик кучларининг тенг таъсир этувчисининг проекцияси

$$Q = \int_C T \sin \alpha \, ds = \int_C T \frac{-\frac{\partial u}{\partial n}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2}} ds \approx - \int_C T \cdot \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

бўлади, бу ерда $\vec{n}$ вектор C контурга ўтказилган ички нормал (1.2-шакл). Бу ердан маълум Грин формуласига асосан (2-жилдга қаранг):

$$Q = \iint_D T \operatorname{div} \nabla u dS =$$

$$= \iint_D T (u_{xx} + u_{yy}) dS. \quad (1.39)$$



1.2 - шакл

Бу катталикка D' га қўйилган масса кучларининг тенг таъсир этувчиси

$$\iint_D \rho f dS$$

ни ва мембрана бўлаги D' нинг инерция кучлари тенг таъсир этувчиси

$$\iint_D \left(-\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) dS$$

ни қўшиб,

$$\iint_D \left[T (u_{xx} + u_{yy}) + \rho f - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] dS = 0 \quad (1.40)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу тенгликдан D нинг ихтиёрийлигига асосан ўрта қиймат ҳақидаги теорема бўйича мембрананинг кичик кўндаланг тебранишлари тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{T} f \quad (1.41)$$

ни ҳосил қиламиз.

Мембрана бир жинсли бўлган ҳолда, яъни $\rho = \text{const}$ да мембрана тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{f}{a^2}, \quad a = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \tag{1.42}$$

ни беради, у иккита фазовий координатали тўлқин тенгламасидан иборат.

1.9. Ингичка стерженнинг бўйлама тебранишлари. Ингичка стержен ўзининг Ox ўқи билан мос тушувчи мувозанатига нисбатан бўйлама тебраниш ҳолатида бўлсин. Бунда тебраниш шунчалик кичикки, стерженнинг Ox ўқига перпендикуляр ясси кесимлари яссилигича қолиб, бир-бирларига параллел бўлган ҳолда фақат Ox ўқи бўйлаб силжийди, E — стержен материали учун Юнг модули, s — унинг кўндаланг кесими юзи, ρ — чизиқли зичлиги. T — стерженнинг таранглик кучи, f — Ox ўқи йўналиши бўйича таъсир қилувчи масса кучи, $u(x, t)$ — стерженнинг мувозанат ҳолатида x абсциссага эга бўлган кесимининг силжиш ҳаракатини ифодаловчи номаълум функция бўлсин.

Стерженнинг мувозанат ҳолатда x ва $x+dx$ нуқталардаги кесимлари орасига жойлашган элементини қараймиз.

x нуқтадаги силжиш u, $x+dx$ нуқтадаги силжиш эса $u + \frac{\partial u}{\partial x}dx$ бўлади, шу сабабли абсциссаси x бўлган нуқтада стерженнинг нисбий узайиши $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x$ миқдор билан аниқланади, бу нуқтадаги таранглик, Гук қонунига мувофиқ, $T = Es\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x$ муносабат билан аниқланади. Стерженнинг $x+dx$ абсциссали кесимидаги таранглик кучи $Es\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+dx}$ га тенг бўлиб, стерженнинг dx узунликка эга бўлган элементига тенг таъсир этувчи таранглик кучи

$$Es\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+dx} - Es\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x = \left.\frac{\partial}{\partial x}\left(Es\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x+\theta dx} dx, \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 1)$$

бўлади.

Бу миқдорга стерженнинг абсциссалари x ва $x+dx$ бўлган кесимлари орасидаги элементига таъсир қилаётган бошқа кучларнинг тенг таъсир этувчиларини, яъни масса кучлари $\rho s f dx$ ва инерция кучи $\left(-\rho s\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx\right)$ ни қўшамиз. Сўнгра Даламбер принципига асосан барча кучлар йиғиндисини нолга тенглаб

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}\left(Es\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x+\theta dx} dx + \rho s f\,dx - \rho s\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx = 0 \tag{1.43}$$

муносабатни ҳосил қиламиз.

Бу тенгликда $dx \to 0$ да лимитга ўтиб, стерженнинг бўйлама тебранишлари тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Es\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \rho s\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\rho s f. \tag{1.44}$$

Агар $Es = \text{const}$ дейилса, тенглама

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{E} f \tag{1.45}$$

кўринишни олади. Агар стержен бир жинсли бўлса, охирги тенглама тўлқин тенгламаси билан мос тушади:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{f}{a^2}, \qquad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \tag{1.46}$$

Умумий тушунчалар

Хусусий ҳосилали дифференциал тенглама деб, бир нечта эркли ўзгарувчиларнинг номаълум функцияси ва унинг хусусий ҳосилалари орасидаги боғланишни ифодаловчи

$$F\left(x_1, x_2, \qquad x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \qquad \frac{\partial^k u}{\partial x_m^k}\right) = 0 \tag{1.47}$$

тенгламага айтилади.

Номаълум функциянинг тенгламадаги энг юқори тартибли ҳосиласининг тартиби k —хусусий ҳосилали *тенгламанинг тартиби* дейилади.

Агар тенглама номаълум функция ва унинг барча хусусий ҳосилаларига нисбатан чизиқли бўлса, у *чизиқли хусусий ҳосилали тенглама* дейилади.

Биринчи тартибли, хусусий ҳосилали, чизиқли тенгламанинг умумий кўриниши қуйидагича бўлади:

$$A_1(x_1, x_2, \qquad x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + A_2(x_1, x_2, \qquad x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \qquad +$$

$$+ A_n(x_1, x_2, \qquad x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} + A_{n+1}(x_1, x_2, \qquad x_n) = 0, \tag{1.48}$$

бу ерда $A_1, \quad , A_{n+1}$ берилган функциялар, $u(x_1, x_2, \quad x_n)$ номаълум функция.

Агар (1.48) тенгламада $A_{n+1}(x_1, x_2, \quad x_n) \equiv 0$ бўлса, у *бир жинсли хусусий ҳосилали дифференциал тенглама,* $A_{n+1}(x_1, x_2, \quad , x_n) \neq 0$ бўлса, *бир жинсли бўлмаган тенглама* дейилади.

Бир жинсли бўлмаган тенгламанинг ечимини $v(x_1, x_2, \quad , x_n, u) = c$ кўринишда излаб, бир жинсли тенглама кўринишига келтиришимиз мумкин. Ҳақиқатан ҳам,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial v}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial v}{\partial u}}, \qquad i = \overline{1, n}$$

ҳосилаларни (1.48) тенгламага қўйсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$A_1(x_1, x_2, \quad x_n)\frac{\partial v}{\partial x_1}+A_2(x_1, x_2, \quad x_n)\frac{\partial v}{\partial x_2}+ \quad +$$

$$+A_n(x_1, x_2, \quad x_n)\frac{\partial v}{\partial x_n}-A_{n+1}(x_1, x_2, \quad x_n)\frac{\partial v}{\partial u}=0.$$

Шунинг учун бундан кейин фақат бир жинсли бўлган тенгламалар қаралади. Бундай тенгламанинг ечими $u(x_1, x_2, \quad x_n)$ қуйидаги оддий дифференциал тенгламалар системаси

$$\frac{dx_1}{A_1}=\frac{dx_2}{A_2}= \quad =\frac{dx_n}{A_n} \tag{1.49}$$

нинг интеграли

$$u(x_1, x_2, \quad x_n)=c \tag{1.50}$$

бўлади ва, аксинча, (1.50) систeманинг интеграли бўлса, $u(x_1, x_2, \quad x_n)$ бир жинсли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламанинг ечими бўлади.

Ушбу

$$A_1(x_1, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}+A_2(x_1, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}=0 \tag{1.51}$$

хусусий ҳосилали дифференциал тенглама берилган бўлсин. (1.51) тенгламанинг ечими $u(x_1, x_2)$ бўлса,

$$\frac{dx_1}{A_1}=\frac{dx_2}{A_2} \tag{1.52}$$

тенгламанинг интеграли

$$u(x_1, x_2)=c$$

бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, (1.52) система ечимининг тўлиқ дифференциали

$$du(x_1, x_2)=\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2$$

бўлади. Бу ифодада, (1.52) га асосан, dx_i ларни уларга пропорционал бўлган A_i лар билан алмаштирамиз, яъни $dx_i=\lambda A_i$ $(i = = 1,2)$ (бу ерда λ — пропорционаллик коэффициенти):

$$du(x_1, x_2)=\lambda\left(A_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+A_2\frac{\partial u}{\partial x_2}\right).$$

$u(x_1, x_2)$ (1.51) тенгламанинг ечими бўлганлиги сабабли $du(x_1, x_2) = = 0$ айниятни оламиз.

(1.52) системанинг ечими $u(x_1, x_2)$ ни охирги ифодага қўйганлигимиз сабабли у x_i нинг функцияси бўлади ва унинг дифференциали, демак, ҳосиласи ҳам нолга тенг бўлади, яъни у ўзгармас сон экан.

(1.52) системанинг интеграли (1.51) хусусий ҳосилали тенгламанинг ечими бўлиши ҳам худди шундай кўрсатилади.

Мисол. Қуйидаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламанинг ечимини топинг:

$$xy\frac{\partial u}{\partial x}-(x^2+y^2)\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Бунда

$$A_1(x,\ y)=xy,\qquad A_2(x,\ y)=-(x^2+y^2).$$

Демак, мос оддий дифференциал тенгламалар системаси

$$\frac{dx}{xy}=-\frac{dy}{x^2+y^2}$$

бўлади. Бу тенгламада x эркли ўзгарувчи, y унинг функцияси деб қараб бир жинсли оддий дифференциал тенгламани ечамиз:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x^2+y^2}{xy}\ \text{ёки}\ \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}-\frac{y}{x}.$$

$\frac{y}{x}=v$ деб олиб, $y=vx$ ва $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$ ни топамиз ва тенгламага қўямиз:

$$v+x\frac{dv}{dx}=-\frac{1}{v}-v\ \text{ёки}\ x\frac{dv}{dx}=-\frac{1+2v^2}{v},$$

$$\frac{v}{1+2v^2}\,dv=-\frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{4}\,\frac{d(1+2v^2)}{1+2v^2}=-\frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{4}\ln(1+2v^2)=ln\left|\frac{1}{Cx}\right|,$$

$$1+2v^2=\frac{1}{(Cx)^4}.$$

$$1+2\frac{y^2}{x^2}=\frac{1}{C^4x^2},\quad \frac{1}{C^4}=c\ \text{десак},$$

$$u(x,\ y)=x^4+2x^2y^2.$$

Физик масалаларнинг кўпчилиги иккинчи тартибли чизиқли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларга келтирилади. Иккинчи тартибли чизиқли хусусий ҳосилали тенгламалар умумий ҳолда

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=f(x,\ y)\tag{1.53}$$

кўринишга эга бўлиб, бу ерда A, B, C, D, E, F коэффициентлар x ва y ўзгарувчиларнинг узлуксиз функциялари, $u(x,\ y)$ — номаълум функция, $f(x,\ y)$ — берилган функция.

Агар тенглама коэффициентлари эркли ўзгарувчи x, y ларга боғлиқ бўлмаса, у ҳолда у *ўзгармас коэффициентли тенглама* дейилади. Агар (1.53) тенгламада $f(x,\ y)\equiv 0$ бўлса, у *бир жинсли хусусий ҳосилали дифференциал тенглама*, $f(x,\ y)\neq 0$ бўлса, *бир жинсли бўлмаган тенглама* дейилади.

(1.53) *хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг ечими* деб, тенгламага қўйилганда уни айниятга айлантирадиган x ва y нинг ихтиёрий $u(x, y)$ функциясига айтилади.

Математик физиканинг асосий тенгламалари

I. Тўлқин тенгламаси:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^3}. \tag{1.54}$$

Торнинг кўндаланг тебраниши, стерженнинг бўйлама тебраниши, симдаги электр тебранишлари, айланувчи цилиндрдаги айланма тебранишлар, гидродинамика, газодинамика ва акустиканинг тебраниш билан боғлиқ жараёнларини тадқиқ этиш шундай тенгламага олиб келади.

II. Иссиқлик тарқалиш тенгламаси ёки Фурье тенгламаси:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1.55}$$

Иссиқликнинг бир жинсли муҳитда тарқалиши, диффузия ҳодисалари, фильтрация масалалари, эҳтимоллар назариясининг баъзи масалалари шундай тенгламага келтирилиб ўрганилади.

III. Лаплас тенгламаси:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{1.56}$$

Электр ва магнит майдонлари ҳақидаги масалаларни, стационар иссиқлик ҳолати ҳақидаги масалаларни, гидродинамиканинг сиқилмайдиган суюқликнинг потенциал ҳаракати ва стационар иссиқлик майдонларига тегишли масалаларни ечиш Лаплас тенгламасига келтирилади.

Кўп сонли ўзгарувчиларнинг функциялари учун ҳам тегишли тенгламалар қаралиши мумкин. Масалан, агар изланаётган функция учта эркли ўзгарувчига боғлиқ бўлса, тўлқин тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \tag{1.54'}$$

иссиқлик тарқалиш тенгламаси

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \tag{1.55'}$$

Лаплас тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{1.56'}$$

кўринишда бўлади.

Юқорида келтирилган математик физиканинг асосий тенгламалари тегишли масаланинг физик моҳияти, масаланинг қўйилиши ва ечилиш услублари билан бир-бирларидан фарқланади.

2- §. Иккинчи тартибли икки ўзгарувчили хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг турлари ва каноник кўринишлари

(1.53) тенгламани

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) \tag{2.1}$$

алмаштиришлар ёрдамида соддароқ кўринишга келтириш мумкин. Алмаштириш бажарилаётган бирор D соҳада $\xi(x, y)$ ва $\eta(x, y)$ функциялар узлуксиз, икки марта дифференциалланувчи ва якобиан

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2.2}$$

бўлиши керак. (2.2) шарт тескари алмаштириш

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta) \tag{2.3}$$

мавжудлигининг зарурий ва етарли шартидир. Янги ўзгарувчилар бўйича ҳосилаларни топамиз:

$$\begin{gathered} u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \quad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y, \\ u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\eta \eta_{xx} + \\ + u_{\eta\xi} \eta_x \xi_x = u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}, \\ u_{xy} = u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_\xi \xi_{xy} + u_{\xi\eta} \xi_x \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\eta \eta_x \eta_y + \\ + u_{\xi\eta} \eta_x \xi_y, \\ u_{yy} = u_{\eta\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}. \end{gathered} \tag{2.4.}$$

(2.4) ни (1.53) га қўйиб, қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$a_{11} u_{\xi\xi} + 2a_{12} u_{\xi\eta} + a_{13} u_{\eta\eta} + F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0, \tag{2.5}$$

бу ерда

$$\begin{gathered} a_{11}(\xi, \eta) = A\xi_x^2 + 2B\xi_x \xi_y + C\xi_y^2, \\ a_{13}(\xi, \eta) = A\eta_x^2 + 2B\eta_x \eta_y + C\eta_y^2, \\ a_{12}(\xi, \eta) = A\xi_x \eta_x + B(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + C\xi_y \eta_y. \end{gathered} \tag{2.6}$$

(2.6) да $\xi(x, y)$ ва $\eta(x, y)$ функцияларни шундай танлаймизки, натижада a_{11}, a_{13} коэффициентлар нолга айлансин ёки

$$\begin{gathered} A\xi_x^2 + 2B\xi_x \xi_y + C\xi_y^2 = 0, \\ A\eta_x^2 + 2B\eta_x \eta_y + C\eta_y^2 = 0 \end{gathered} \tag{2.7}$$

бўлсин. Бу тенгламаларни $\frac{\xi_x}{\xi_y}$ ва $\frac{\eta_x}{\eta_y}$ ларга нисбатан ечсак,

$$\frac{\xi_x}{\xi_y} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \quad \frac{\eta_x}{\eta_y} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} \tag{2.8}$$

ифодаларни ҳосил қиламиз. Демак, (2.7) нинг ҳар бир тенгламаси хусусий ҳосилали биринчи тартибли чизиқли

$$A\xi_x + (B - \sqrt{B^2 - AC})\xi_y = 0, \quad A\eta_x + (B + \sqrt{B^2 - AC})\eta_y = 0 \tag{2.9}$$

тенгламаларга ажралади. Бундай тенгламалар олдинги параграфга асосан мос равишда

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B - \sqrt{B^2 - AC}} \quad \text{ва} \quad \frac{dx}{A} = \frac{dy}{B + \sqrt{B^2 - AC}}$$

тенгламаларга эквивалент ёки

$$A\,dy - (B - \sqrt{B^2 - AC})\,dx = 0, \tag{2.10}$$

$$A\,dy - (B + \sqrt{B^2 - AC})\,dx = 0.$$

(2.10) дан кўринадики, иккала тенгламани битта тенглама кўринишида ёзиш мумкин

$$A\,dy^2 - 2B\,dx\,dy + C\,dx^2 = 0. \tag{2.11}$$

2.10) нинг умумий интеграллари $\varphi(x, y) = C_1$, $\psi(x, y) = C_2$ бўлсин. Бу ҳолда улар (1.53) нинг иккита эгри чизиқлар оиласини ташкил қилиб, *тенгламанинг характеристикалари* дейилади. (2.11) тенглама эса (1.53) тенглама *характеристикаларининг дифференциал тенгламаси* дейилади.

(2.10) тенглама интегралларининг қандай бўлиши ва (1.53) тенгламанинг содда кўринишга келтирилиши $\Delta = B^2 - AC$ дискриминантининг ишорасига боғлиқ бўлади.

Дискриминант қийматларига боғлиқ равишда (1.53) тенгламани қуйидаги турларга ажратиш мумкин:

1) Агар D соҳада $\Delta > 0$ бўлса, берилган тенглама шу соҳада *гиперболик* турдаги тенглама дейилади.

2) Агар D соҳада $\Delta < 0$ бўлса, берилган тенглама шу соҳада *эллиптик* турдаги тенглама дейилади.

3) Агар D соҳада $\Delta = 0$ бўлса, берилган тенглама шу соҳада *параболик* турдаги тенглама дейилади.

Кўрсатилган турлардаги ҳар бир тенгламаларнинг ўзларига хос каноник кўринишлари мавжуд. Уларни келтириб чиқариш учун (1.53) ни келтирилган турлар бўйича алоҳида-алоҳида соддалаштирамиз.

1. $\Delta = B^2 - AC > 0$ бўлган ҳол. Бу ҳолда (2.7) га асосан (2.6) дан $a_{11} = 0$, $a_{13} = 0$ ва $a_{12} \neq 0$ эканлиги келиб чиқади. Шунинг учун (2.5) ни $2a_{12}$ га бўлиб

$$u_{\xi\eta} = \overline{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \tag{2.12}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу ерда $\overline{F} = -F/2a_{12}$. (2.12) гиперболик турдаги тенгламанинг каноник кўриниши дейилади.

Агар (2.12) да $\xi = \alpha + \beta$, $\eta = \beta - \alpha$ алмаштиришни бажарсак, гиперболик турдаги тенгламанинг иккинчи содда кўринишига эга бўламиз

$$u_{\alpha\alpha}-u_{\beta\beta}=F_1(\alpha,\ \beta,\ u,\ u_\alpha,\ u_\beta). \qquad (2.13)$$

2. $\Delta=B-AC<0$. Бу ҳолда (2.9) ёки (2.10) нинг коэффициентлари ва умумий интеграллари комплекс катталиклар бўлади. Шунинг учун эллиптик турдаги тенгламалар ҳақиқий характеристикаларга эга бўлмайди. Комплекс ечимлар қўшма бўлиб,

$$\xi=\varphi+i\psi,\quad \eta=\varphi-i\psi \qquad (2.14)$$

кўринишда бўлади; $\varphi(x,\ y)$ ва $\psi(x,\ y)$ функциялар ҳақиқий функциялардир.

(2.14) ни (2.7) га қўйиб, ҳақиқий ва мавҳум қисмларини ажратамиз:

$$A(\varphi_x+i\psi_x)^2+2B(\varphi_x+i\psi_x)(\varphi_y+i\psi_y)+C(\varphi_y+i\psi_y)^2=0,$$
$$A\varphi_x^2-A\psi_x^2+2B\varphi_x\varphi_y-2B\psi_x\psi_y+C\varphi_y^2-C\psi_y^2+$$
$$+i[2A\varphi_x\psi_x-2B(\varphi_x\psi_y+\psi_x\varphi_y)+2C\varphi_y\psi_y]=0.$$

Комплекс функциялар хоссаларига асосан

$$A\varphi_x^2+2B\varphi_x\varphi_y+C\varphi_y^2=A\psi_x^2+2B\psi_x\psi_y+C\psi_y^2,$$
$$A\varphi_x\psi_x+B(\varphi_x\psi_y+\psi_x\varphi_y)+C\varphi_y\psi_y=0$$

тенгликлар келиб чиқади. Бу ердан (2.6) га асосан,

$$a_{11}=a_{13},\quad a_{12}=0.$$

Бу ҳолда (2.5) ни a_{11} га бўлиб

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=F_1(\xi,\ \eta,\ u,\ u_\xi,\ u_\eta) \qquad (2.15)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. $F_1=-\frac{F}{a_{11}}$ Бу эллиптик турдаги тенгламанинг каноник кўринишидир.

3. $\Delta=B^2-AC=0$ бўлсин. Бу ҳолда (2.10) нинг умумий интеграллари ҳақиқий ва тенг бўлади. Икки тенглама бир хил бўлиб, битта тенгламага айланади:

$$A\frac{\partial\xi}{\partial x}+B\frac{\partial\xi}{\partial y}=0. \qquad (2.16)$$

(2.16) нинг ечими

$$\xi=\varphi(x,\ y)=C \qquad (2.17)$$

бўлади.

$\eta(x,y)$ учун якобиани $\frac{D(\xi,\ \eta)}{D(x,\ y)}\neq 0$ бўлган икки марта дифференциалланувчи ихтиёрий функцияни оламиз. Бу ҳолда (2.6) дан $a_{11}=0$, $a_{12}=0$ бўлиши келиб чиқади.

(2.5) ни a_{13} га бўлиб, параболик турдаги тенгламанинг каноник кўринишига эга бўламиз:

$$u_{\eta\eta}=F_1(\xi,\ \eta,\ u,\ u_\xi,\ u_\eta), \qquad (2.18)$$

бу ерда

$$F_1 = -\frac{F}{a_{13}}$$

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни классификациялашни эркли ўзгарувчилар учта ва ундан ортиқ бўлганда ҳам келтириш мумкин. Юқорида келтирилган классификациялашга қараб, шундай хулоса чиқариш мумкин.

1-§ даги тўлқин тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

гиперболик турдаги тенглама, иссиқлик тарқалиш тенгламаси

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

параболик турдаги тенглама, Лаплас тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

эллиптик турдаги тенглама бўлади.

Мисол. Ушбу

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial u}{\partial x \, \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

тенгламани каноник кўринишга келтиринг.

Ечиш. Берилган тенглама учун

$$A = x^2; \quad B = xy, \quad C = y^2,$$
$$\Delta = B^2 - AC = (xy)^2 - x^2y^2 = 0$$

Демак, тенглама параболик кўринишдаги тенглама экан. Унинг характеристик тенгламалари

$$x^2dy^2 - 2\,xy\,dx\,dy + y^2dx^2 = 0$$

ёки

$$(x\,dy - y\,dx)^2 = 0,$$
$$x\,dy - y\,dx = 0$$

кўринишда бўлади. Шундай қилиб характеристикалардан бири

$$\frac{y}{x} = C$$

чизиқдан иборат. Ўзгарувчиларни қуйидагича алмаштирамиз:

$$\xi = \frac{y}{x}, \quad \eta = y$$

(иккинчи ўзгарувчининг ихтиёрийлигидан фойдаландик). Тегишли ҳосилаларни ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{y^2}{x^4} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{2\,y}{x^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\,\frac{y}{x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\,\frac{y}{x^2} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\,\frac{1}{x^2},$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\,\frac{1}{x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\,\frac{1}{x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

Буларни берилган тенгламага қўйиб,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta}\,\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

кўринишдаги каноник тенгламани ҳосил қиламиз.

3-§. Коши масаласи, чегаравий масалалар, аралаш масалаларнинг қўйилиши

Физик жараёнларни математик ифодалашда масаланинг тегишли шартлар билан қўйилиши муҳим аҳамиятга эгадир.

Маълумки, оддий ва хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар, умуман айтганда, чексиз ечимларга эга. Бирор физик масаланинг ягона ечимини топиш жараённи ифодаловчи дифференциал тенгламалар билан биргаликда қараладиган қўшимча шартларнинг аниқ танланишига боғлиқдир. Масаланинг қўйилишига қараб бу шартлар бошланғич, чегаравий, аралаш деб номланган турларга бўлинади.

3.1. Коши масаласи. Тенгламаларнинг турларига қараб, қўшимча шартлар ҳам турлича қўйилади. Агар тенглама биринчи тартибли бўлса, бу ҳолда тенглама ечимини ифодаловчи функциянинг аргументнинг бошланғич қийматига мос келувчи қиймати берилади. Агар тенглама иккинчи тартибли бўлса, у ҳолда функция ва унинг ўзгариш тезлиги (биринчи тартибли ҳосила) нинг аргументнинг бошланғич қийматига мос келувчи қийматлари берилади. Фақат бошланғич шартлари билан берилган масала *Коши масаласи* дейилади.

Тўлқин тенгламалари учун бошланғич шартли масаланинг қўйилишини кўрайлик. Узунлиги чегараланмаган торнинг эркин тебраниш тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (-\infty < x < \infty,\ t > 0) \qquad (3.1)$$

бўлади. Тор нуқталарининг вақтга боғлиқ бўлган ҳолатини аниқлаш учун вақтнинг $t = 0$ бошланғич пайтида унинг ҳар бир нуқтасининг абсцисса ўқидан оғиши u ни ва бошланғич тезлиги $\frac{\partial u}{\partial t}$ ни билиш зарур. Демак, масаланинг қўйилиши қуйидагича таърифланади: иккинчи тартибли хусусий ҳосилали (3.1) дифференциал тенгламанинг

$$u(x,\ 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x,\ 0)}{\partial t} = F(x)\ (-\infty < x < \infty) \qquad (3.2)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин. Шунингдек, кўп ўзгарувчиларга боғлиқ бўлган тўлқин тенгламаси, иссиқлик тарқалиш тенгламалари учун Коши масаласини келтириш мумкин:

1) иккинчи тартибли хусусий ҳосилали

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

дифференциал тенгламанинг $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $t < 0$ соҳада аниқланган ва

$$u(x,\ y,\ 0) = f(x,\ y),\quad \frac{\partial u(x,\ y,\ 0)}{\partial t} = F(x,\ y)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $u(x,\ y,\ t)$ ечими топилсин;

2) Иккинчи тартибли хусусий ҳосилали

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)$$

дифференциал тенгламанинг $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$, $t > 0$ соҳада аниқланган ва

$$u(x,\ y,\ z,\ 0) = f(x,\ y,\ z),\quad \frac{\partial u(x,\ y,\ z,\ 0)}{\partial t} = F(x,\ y,\ z)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $u(x,\ y,\ z,\ t)$ ечими топилсин;

3) иккинчи тартибли хусусий ҳосилали

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

иссиқлик тарқалиш тенгламасининг $-\infty < x < \infty$, $t > 0$ соҳада аниқланган ва

$$u(x,\ 0) = f(x) \quad (-\infty < x < \infty)$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи $u(x,\ t)$ ечими топилсин.

3.2. Чегаравий масалалар. Бирор соҳада Лаплас тенгламасини қаноатлантирувчи ва иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари билан биргаликда узлуксиз бўлган функция шу соҳада *гармоник функция* дейилади. Кўп физик масалаларни кўрилганда уларнинг стационар ҳолатини, яъни физик жараёнларнинг ўзгариши вақтга боғлиқ бўлмаган ҳолатини текширилади. Асосан бундай масалалар эллиптик турдаги тенгламалар орқали ифодаланади. Шунинг учун бу жараёнларнинг стационар ҳолати фақат соҳа чегарасида қўйилган шартларга боғлиқ бўлади. Қуйида эллиптик тенгламалар учун қўйиладиган чегаравий масалаларни кўрамиз.

1) Бирор D соҳанинг ичида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{3.3}$$

Лаплас тенгламасини қаноатлантирувчи ва соҳа чегараси S чизиқ устида берилган

$$u\big|_S = f(x,\ y) \tag{3.4}$$

қийматни қабул қилувчи $u(x,\ y)$ гармоник функция топилсин. Бунда $u(x,\ y)$ ва $f(x,\ y)$ узлуксиз функциялар. Бу масала *Дирехленинг ички масаласи* ёки *биринчи чегаравий масала* дейилади. Агарда

$u(x, y)$ функция S чегаранинг ташқарисида изланса (бу ерда D соҳа чексиз бўлади) бундай масала Дирехленнинг ташқи масаласи дейилади.

2) (3.3) Лаплас тенгламасини қаноатлантирувчи ва соҳа чегараси S чизиқ устида нормал бўйича ҳосиласи берилган

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f(x, y) \tag{3.5}$$

қийматни қабул қилувчи $u(x, y)$ гармоник функция топилсин. Бу масала *Нейман масаласи* (ёки иккинчи чегаравий масала) дейилади.

3.3. Аралаш масалалар. Бундай масалалар чегараланган жисмларда содир бўладиган физик жараёнларни текширишда уларга мос тенгламаларнинг берилган бошланғич ва чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимларини топишда қўйилади.

1) Тўлқин тенгламаси учун аралаш масалани уч ўлчовли тенглама учун ёзамиз (бир ва икки ўлчовли тенгламалар учун шу тарзда ёзилади).

Иккинчи тартибли хусусий ҳосилали

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{3.6}$$

дифференциал тенгламанинг $(x, y, z) \in V$, $t > 0$ соҳасида аниқланган ва

$$u|_{t=0} = f(x, y, z), \tag{3.7}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi(x, y, z)$$

бошланғич шартларни ҳамда

$$\begin{aligned} &\text{I. } u|_S = \mu(x, y, z, t), \\ &\text{II. } \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \mu(x, y, z, t), \\ &\text{III } \left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\right|_S = \mu(x, y, z, t) \end{aligned} \tag{3.8}$$

чегаравий шартлардан бирини қаноатлантирадиган ечими топилсин. Бу ерда S — V соҳанинг сирти, μ ва β функциялар S сиртда аниқланган узлуксиз функциялардир. $\frac{\partial u}{\partial n}$ — сирт нуқтасида нормал бўйича олинган ҳосила.

2) Иккинчи тартибли хусусий ҳосилали

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{3.9}$$

дифференциал тенгламанинг $(x, y, z) \in V$, $t > 0$ соҳада аниқланган

$$u|_{t=0} = f(x, y, z) \tag{3.10}$$

бошланғич шартни ҳамда (3.8) чегаравий шартлардан бирини қаноатлантирадиган ечими топилсин.

Юқорида масалаларнинг қўйилишидан кўрдикки, физик жараёнларни ифодалайдиган тенгламаларнинг ечимлари бошланғич ва чегаравий шартларга боғлиқ бўлади.

Баъзи ҳолларда бу шартларнинг озгина ўзгаришига ечимнинг жуда катта ўзгариши мос келиб қолиши мумкин. Бу эса физик жараённи ўрганишда катта хатоликларга олиб келади. Ечим турғун дейилганда қўйилган шартларнинг озгина ўзгаришига ечимнинг озгина ўзгариши мос келиши тушунилади.

Агар масаланинг ечими мавжуд, ягона ва турғун бўлса, у ҳолда бундай масала (коррект) тўғри қўйилган дейилади.

4-§. Бир ўлчовли тўлқин тенгламасини Даламбер усули билан ечиш. Дьюамель принципи

1. Бир жинсли (3.1) тенгламанинг (3.2) бошланғич шартларда Даламбер усули билан ечилишини кўриб чиқамиз. Тенгламанинг умумий ечими иккита ихтиёрий функциялар йиғиндиси сифатида қидирилади:

$$u(x,\ t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at). \tag{4.1}$$

Бу φ ва ψ функцияларнинг иккинчи тартибли ҳосилалари мавжуд бўлсин. У вақтда, кетма-кет ҳосилалар олсак,

$$\begin{aligned} u'_x &= \varphi'(x - at) + \psi'(x + at), \\ u''_{xx} &= \varphi''(x - at) + \psi''(x + at), \\ u'_t &= -a\varphi'(x - at) + a\psi'(x + at), \\ u''_{tt} &= a^2\varphi''(x - at) + a^2\psi''(x + at) \end{aligned}$$

лар ҳосил бўлиб, натижа (3.1) тенгламани қаноатлантиради. Демак, (4.1) функция умумий ечим бўлади. (3.2) бошланғич шартлардан фойдаланиб, φ ва ψ номаълум функцияларни топамиз:

$$t - 0 \text{ да } \begin{cases} \varphi(x) + \psi(x) = f(x), \\ -a\varphi'(x) + a\psi'(x) = F(x) \end{cases} \tag{4.2}$$

системага келамиз. Иккинчи тенгламани 0 дан x гача бўлган оралиқда интегралласак,

$$-a[\varphi(x) - \varphi(0)] + a[\psi(x) - \psi(0)] = \int_0^x F(x)\,dx$$

ёки

$$-\varphi(x) + \psi(x) = \frac{1}{a}\int_0^x F(x)\,dx + C \tag{4.3}$$

кўринишдаги ифодага келамиз. Бу ерда $C = -\varphi(0) + \psi(0)$ ўзгармас сон. (4.2) ва (4.3) тенгламалардан $\varphi(x)$, $\psi(x)$ номаълум функцияларни аниқлаймиз:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x F(x)\, dx - \frac{C}{2},$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x F(x)\, dx + \frac{C}{2} \tag{4.4}$$

Бу формулаларда аргумент x ни $x - at$ ва $x + at$ ларга алмаштириб, (4.1) формулага қўйсак, $u(x, t)$ функция топилади:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} f(x - at) - \frac{1}{2a} \int_0^{x-at} F(x)\, dx + \frac{1}{2} f(x + at) +$$

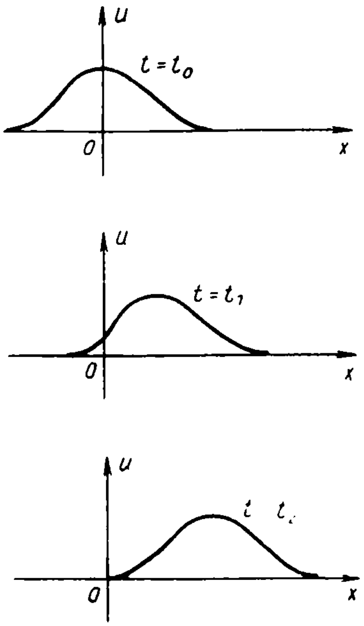
$$+ \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} F(x)\, dx = \frac{f(x - at) + f(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(x)\, dx. \tag{4.5}$$

Бу (4.5) формула тор тебраниш тенгламаси учун *Коши масаласининг Даламбер усули билан топилган ечими* дейилади.

Олинган (4.5) ечимнинг физик маъносини англаш учун $u(x, t)$ ечимга кирган $\varphi(x - at)$ ва $\varphi(x + at)$ функцияларни алоҳида-алоҳида текширамиз. $\varphi(x - at)$ функцияни олиб, t га $t = t_0$, $t = t_1$, $t = t_2$ ва ҳоказо ўсувчи қийматларни бериб, унинг графигини ясаймиз (1.3-шакл).

Шаклдан кўринадики, иккинчи график биринчисига нисбатан at_1 миқдорга, учинчиси at_2 ва ҳоказо миқдорга ўнг томонга сурилган. Агар бу графикларнинг проекцияларини навбат билан экранга туширсак, гўё уларнинг юқоридаги биринчиси ўнг томонга «чопиб» ўтаётгандек бўлади. Торнинг бундай четланиши *тўлқин* деб аталади.

Тенгламадаги $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ коэффициент эса тўлқинларнинг тарқалиш тезлиги дейилади. Энди $\psi(x + at)$ функцияни кўрайлик. t га $t_2 < t_1 < t_0$ қийматларни берсак, 1.3-шаклдаги графикларда биринчи пастдагиси бўлиб, тўлқин ўнгдан чапга a тезлик билан тарқалади. Энди Даламбер формуласи (4.5) ёрдамида олинган ечимни текширамиз.



1.3-шакл

Икки ҳолни кўрамиз. Биринчисида тор нуқталарининг бошланғич тезлиги нолга тенг бўлиб, тор бошланғич четлатиш ҳисобига тебрансин, яъни $F(x) = 0$ деб олсак, (4.5) формуладан қуйидаги ечимни ҳосил қиламиз:

$$u(x, t) = \frac{f(x - at) + f(x + at)}{2}. \qquad (4.6)$$

Бу ерда $f(x)$ берилган функциядир. Формуладан кўринадики, ечим $u(x, t)$ иккита тўлқин йиғиндисидан иборат: биринчи $\frac{1}{2} f(x - at)$ тўлқин a тезлик билан ўнг томонга, иккинчи $\frac{1}{2} f(x + at)$ тўлқин шу тезлик билан чап томонга тарқаладиган тўлқинлардир. $\frac{1}{2} f(x - at)$ тўғри тўлқин, $\frac{1}{2} f(x + at)$ эса тескари тўлқин деб аталади.

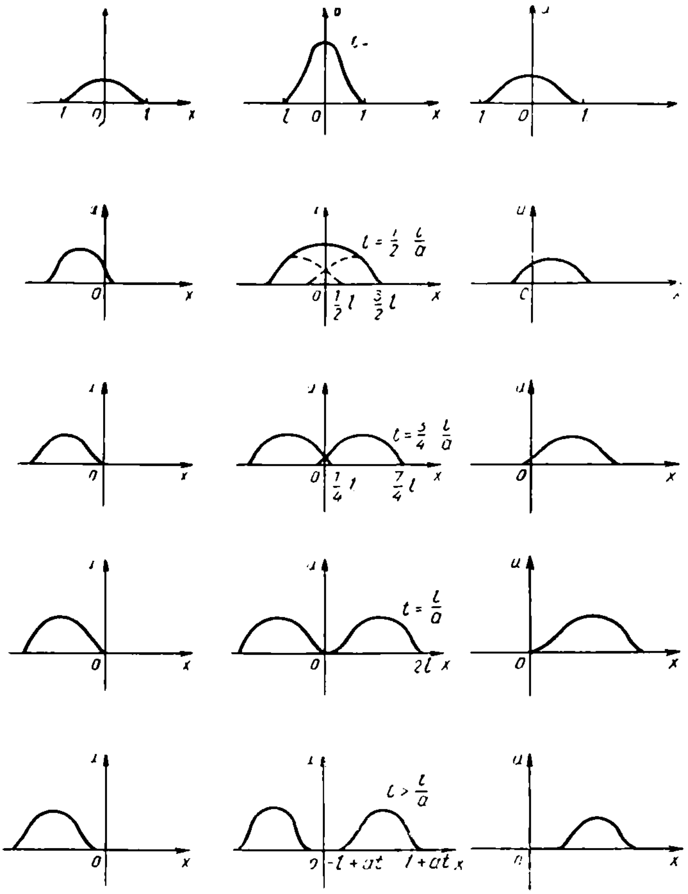
Бошланғич $t = 0$ моментда иккала тўлқин профили устма-уст тушади. Фараз қиламиз, бошланғич моментда $f(x)$ функция $(-l, l)$ оралиқда нолга тенг бўлмасин ҳамда жуфт функция бўлсин. 1.4-шаклдаги чап устунда $\frac{1}{2} f(x + at)$ тўлқиннинг чап томонга тарқалиши, ўнг устунда эса вақтнинг турли моментларида $\frac{1}{2} f(x - at)$ тўлқиннинг ўнг томонга тарқалиши, ўртадаги устунда эса тўлқинлар йиғиндиси, яъни тор нуқталари умумий четланиши кўрсатилган. $t < \frac{l}{a}$ моментда иккала тўлқинлар бир-бири билан устма-уст тушади; $t = \frac{l}{a}$ моментдан бошлаб бу тўлқинлар устма-уст тушмайди ва турли томонга қараб узоқлашади.

Энди иккинчи ҳолни кўрамиз. Торнинг бошланғич четланиши ноль бўлсин ва бошланғич моментда тор нуқталари бошланғич тезлик олиши натижасида тебрансин. Бу ҳолда тор бўйлаб импульс тўлқинлар тарқалади. (4.5) формулага $f(x) = 0$ ни қўйиб, $u(x, t)$ функция учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(x)\,dx = \Phi(x + at) - \Phi(x - at), \qquad (4.7)$$

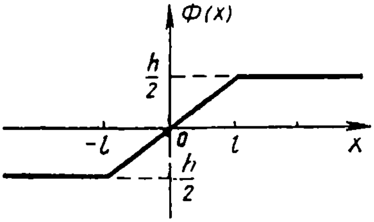
бу ерда

$$\Phi(x) = \frac{1}{2a} \int_{0}^{x} F(x)\,dx \qquad (4.8)$$



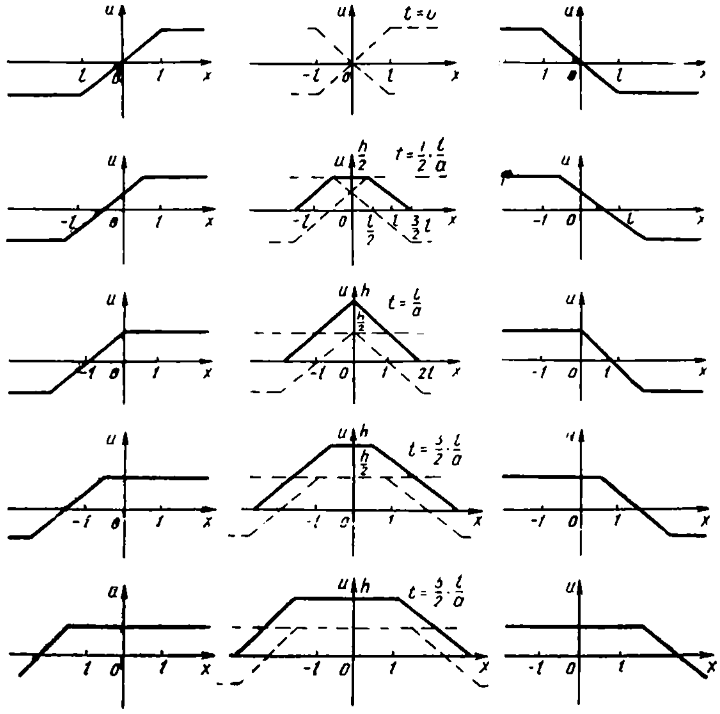
1.4-шакл

Бу формуладан кўринадики, ечим $u(x, t)$ юқоридаги каби, тўғри $u_1 = -\Phi(x - at)$ ва тескари $u_2 = \Phi(x + at)$ тўлқинлардан иборат экан. Бошланғич $t = 0$ моментда $u_1 = -\Phi(x)$, $u_2 = \Phi(x)$ бўлиб, $u(x, 0) = 0$ бўлади. Агар $F(x)$ $(-l, l)$ оралиқда аниқланган бўлиб, $F(x) = v_0$ бошланғич ўзгармас тезликка эга бўлса, у вақтда $\Phi(x) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^x v_0\,dx = \frac{v_0}{2a}x$ бўлиб, бу ерда $-l \leqslant x \leqslant l$ бўлади. $x > l$ қийматларда $\Phi(x) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^{-l} v_0\,dx = \frac{v_0 l}{2a} = \frac{h}{2}$ ва $x > -l$ қийматларда $\Phi(x) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^{-l} v_0\,dx = -\frac{v_0 l}{2a} = -\frac{h}{2}$ бўлади. Бу ерда $h = \frac{v_0 l}{a}$ бўлиб,



1.5- шакл

$\Phi(x)$ узлуксиз ва тоқ функциядир (1.5-шакл). Энди $u(x, t)$ ечимнинг t нинг турли қийматларидаги графигини ясаймиз. 1.6-шаклда чап устунда тескари тўлқин $u_2 = \Phi(x+at)$ нинг турли моментдаги ҳолати, ўнг устунда тўғри тўлқин $u_1 = \Phi(x-at)$ нинг графиги, ўрта устунда эса тор нуқталари умумий четланиши графиги келтирилган. Биринчи ҳолдан фарқли ўлароқ, $t = 0$ да $u(x, 0) = 0$ бўлиб, t катталашиши билан нуқта юқорига кўтарилади, чунки (4.7) формуладаги интеграллаш оралиғи кенгаяди. $t = \frac{l}{a}$ бўлганда

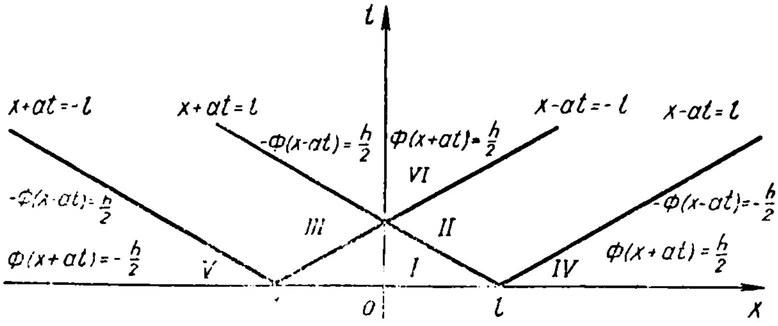


1.6- шакл

$$u\left(0, \frac{l}{a}\right) = \frac{1}{2a}\int_{-l}^{l} v_0\,dx = \frac{v_0 l}{a} = h$$

ҳосил бўлади. $t > \frac{l}{a}$ бўлганда ҳам $u(0, t) = h$ бўлади, чунки $(-l, l)$ дан ташқарида $F(x)$ нолга тенг. Шунинг учун четлашиш функцияси $u(0, t)$ шаклда ўзгармас бўлиб қолади. Мисол учун $x_1 = \frac{l}{2}$ бўлсин. У ҳолда t нинг $\frac{l}{2a}$ дан кичик қийматларида тескари ва тўғри тўлқинларнинг биргаликда таъсири натижасида нуқта кўтарилиб боради. $t > \frac{l}{2a}$ моментда тескари тўлқин четлашиши бу нуқтада доимий $\frac{h}{2}$ га тенг бўлиб, нуқта тўғри тўлқин таъсирида юқорига кўтарилишни давом этади. $t > \frac{3l}{2a}$ моментда иккала тўлқиннинг четланиши $\frac{h}{2}$ га тенг бўлади ва $u\left(\frac{l}{2}, t\right)$ [функциянинг қиймати h га тенг бўлади.

Шундай қилиб, $u(x, t)$ функциянинг графиги t нинг турли қийматларида қуйидагича бўлар экан: $t = 0$ да $u = 0$ — тўғри чизиқ; $0 < t < \frac{l}{a}$ да чизиқ профили трапеция шаклида бўлиб, унинг юқори асоси кўтарилиб, катталиги камаяди; $t = \frac{l}{a}$ да профил учбурчак ва $t > \frac{l}{a}$ да профили кенгаядиган трапеция кўринишида бўлади (1.6-шакл). Шундай қилиб, торга берилган $(-l, l)$ оралиқдаги бошланғич тезланиш натижасида тор тебраниб, h баландликка кўтарилади ва вақт ўтиши билан шу баландликда қолади (силжишининг қолдиғи). Oxt текислигини олиб, $x - at = \pm l$ ва $x + at = \pm l$ — характеристик тўғри чизиқларни юқори ярим текисликда чизамиз (1.7-шакл). $\Phi(x)$ функциянинг ифодасидан фойдалансак, тескари тўлқин $\Phi(x + at)$ нинг II, IV ва VI зоналардаги четланиши ўзгармасга



1.7- шакл

тенглиги келиб чиқади. III, V ва VI зоналарда тўғри тўлқин $-\Phi(x-at)$ нинг четланиши ҳам $\frac{h}{2}$ га тенг. Шунинг учун VI зона силжиш қолдиғидан иборат бўлиб, бу зонага мос келган функциямиз $u(x, t)=\Phi(x+at)-\Phi(x-at)=h$ бўлади. IV зонада тўғри тўлқин четланиши $-\frac{h}{2}$ га тенг; шунақа четланиш V зонада тескари тўлқинда мавжуд. Шунинг учун IV ва V зоналар тор нуқталари учун сокин зоналар бўлади. Нуқта текисликнинг IV зонасидан VI зонасига ўтганда тўғри тўлқиннинг четланиши $-\frac{h}{2}$ дан $\frac{h}{2}$ гача ўзгаради.

Шу мулоҳазалардан фойдаланиб, $x_0>l$ бўлганда $u(x_0, t)$ функциянинг қуйидаги ифодасини ёзамиз:

$$u(x_0, t)=\begin{cases} 0, & 0\leqslant t<\dfrac{x_0-l}{a}, \\ \dfrac{h}{2}\left(1-\dfrac{x_0-at}{a}\right), & \dfrac{x_0-l}{a}<t<\dfrac{x_0+l}{a}, \\ h, & t>\dfrac{x_0+l}{a}. \end{cases}$$

2. Энди Коши масаласини бир жинсли бўлмаган тенгламалар учун кўрамиз. Бир жинсли бўлмаган

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x, t) \tag{4.9}$$

тўлқин тенгламасининг $-\infty<x<\infty$, $t>0$ соҳада аниқланган ва

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\psi(x) \quad (-\infty<x<\infty) \tag{4.10}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин. Бу масалада ҳосил бўлган тебранишни икки тебранишнинг йиғиндиси шаклида қараймиз. Биринчиси, бошланғич оғишдан ҳосил бўлган тебраниш (ташқи куч таъсирисиз), иккинчиси эса фақат ташқи куч таъсирида юз берган тебраниш (бошланғич оғиш ҳисобга олинмайди). Бу ҳолда

$$u(x, t)=v(x, t)+w(x, t) \tag{4.11}$$

бўлиб, $v(x, t)$ функция

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{4.12}$$

тенгламанинг $-\infty<x<\infty$, $t>0$ соҳада

$$v\Big|_{t=0}=\varphi(x), \quad \frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\psi(x) \tag{4.13}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими, $w(x, t)$ функция эса

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,\ t) \tag{4.14}$$

тенгламанинг $-\infty < x < \infty,\ t > 0$ соҳада

$$[w\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \tag{4.15}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими бўлади. (4.12), (4.13) масаланинг ечими маълумки,

$$v(x,\ t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(x)\,dx \tag{4.16}$$

кўринишда бўлади. (4.14), (4.15) нинг ечимини топиш учун қуйидаги қўшимча масалани ечамиз:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \tag{4.17}$$

тенгламанинг

$$\omega\Big|_{t=\tau} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial t}\Big|_{t=\tau} = f(x,\ \tau) \tag{4.18}$$

(τ — параметр) бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин. Бу масала учун бошланғич момент $t=0$ бўлмасдан, балки $t=\tau$ бўлади. У ҳолда (4.16) Даламбер формуласи

$$\omega(x,\ t-\tau) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\ \tau)\,d\xi \tag{4.19}$$

кўринишда ёзилади. (4.19) ечим аниқ бўлса, (4.14) нинг (4.15) ни қаноатлантирувчи ечими

$$w(x,\ t) = \int\limits_0^t \omega(x,\ t-\tau)\,d\tau \tag{4.20}$$

бўлади. (4.20) нинг ҳақиқатан ечим эканлигини (4.14) га қўйиб текширамиз. (4.20) ни t бўйича дифференциялаймиз:

$$w_t(x,\ t) = \omega\big|_{\tau=t} + \int\limits_0^t \omega_t(x,\ t-\tau)\,d\tau$$

(4.18) шартнинг биринчи қисмига асосан:

$$w_t(x,\ t) = \int\limits_0^t \omega_t(x,\ t-\tau)\,d\tau. \tag{4.21}$$

(4.20) ва (4.21) дан кўринадики, $w(x,\ t)$ функция (4.18) бошланғич шартларни қаноатлантиради. (4.21) ни яна t бўйича дифференциаллasак, (4.18) шартнинг иккинчи қисмига асосан

$$w_{tt}(x,\ t) = \omega_t\big|_{\tau=t} + \int\limits_0^t \omega_{tt}(x,\ t-\tau)\,d\tau =$$

$$= f(x,\ t) + \int_0^t \omega_{tt}(x,\ t-\tau)\,d\tau \qquad (4.22)$$

келиб чиқади.

(4.20) ва (4.22) га асосан кўриниб турибдики, $w(x,\ t)$ функция (4.14) тенгламанинг (4.15) бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечими бўлади. Демак,

$$w(x,\ t) = \frac{1}{2a}\int_0^t \left[\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\ \tau)\,d\xi\right] d\tau. \qquad (4.23)$$

Бу ҳолда (4.9) нинг (4.10) бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими

$$u(x,\ t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(x)\,dx +$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t \left[\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\ \tau)\,d\xi\right] d\tau \qquad (4.24)$$

кўринишда бўлади. (4.23) ва (4.24) *Дьюамель принципи*ни ифодалайди.

Мисол. Қуйидаги бир жинсли бўлмаган

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2$$

тўлқин тенгламасининг

$$u\big|_{t=0} = \sin x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = x$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини Дьюамель принципидан фойдаланиб топинг.

Ечиш. $a = 1$ ва

$$f(x,\ t) = x, \quad \varphi(x) = \sin x, \quad \psi(x) = x$$

функциялар учун Дьюамель принципидан фойдаланамиз:

$$u(x,\ t) = \frac{\sin(x-t)+\sin(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} x\,dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t \left[\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} x\,dx\right] d\tau = u_1(x,\ t) + u_2(x,\ t) + u_3(x,\ t).$$

Ҳар қайси қўшилувчини алоҳида-алоҳида ҳисоблаймиз:

$$u_1(x,\ t) = \frac{\sin(x-t)+\sin(x+t)}{2} = \sin x\cos t,$$

$$u_2(x,\ t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_{x-t}^{x+t} = \frac{(x+t)^2-(x-t)^2}{4} =$$

$$= \frac{x^2+2xt+t^2-x^2+2xt-t^2}{4} = xt,$$

$$u_3(x,\ t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \left[\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} x\,dx\right]d\tau = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \left[\frac{(x+t-\tau)^2-(x-t+\tau)^2}{2}\right]d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^t \frac{x^2+t^2+\tau^2+2xt-2x\tau-2t\tau-x^2-t^2-\tau^2+2xt-2x\tau+2t\tau}{2}\,d\tau =$$

$$= \int\limits_0^t (xt-x\tau)\,d\tau = xt\tau\Big|_0^t - x\frac{\tau^2}{2}\Big|_0^t = xt^2-\frac{xt^2}{2} = \frac{xt^2}{2}.$$

Демак, масаланинг ечими

$$u(x,\ t) = \sin x\cos t + xt + \frac{xt^2}{2}$$

бўлар экан.

5- §. Уч ўлчовли тўлқин тенгламаси учун Коши масаласи. Пуассон формуласи. Гюгенс принципи

Уч ўлчовли

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{5.1}$$

тўлқин тенгламасининг

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x,\ y,\ z),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x,\ y,\ z) \tag{5.2}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $u(x,\ y,\ z,\ t)$ ечимини топиш масаласини кўрамиз. Бу ерда $\varphi(x,\ y,\ z)$ функция учинчи тартибгача, $\psi(x,\ y,\ z)$ функция иккинчи тартибгача хусусий ҳосилалари билан биргаликда фазонинг барча нуқталарида узлуксиз функциялар бўлсин деб ҳисоблаймиз. (5.1) ва (5.2) масалани ечиш учун қуйидаги ёрдамчи масалани кўрайлик. (5.1) тенгламанинг хусусий ҳолдаги

$$u_f\Big|_{t=0} = 0,\quad \frac{\partial u_f}{\partial t}\Big|_{t=0} = f(x,y,z) \tag{5.3}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $u_f(x,\ y,\ z,\ t)$ ечими топилсин.

$$\frac{\partial u_f}{\partial t} = v(x,\ y,\ z,\ t)$$

десак, у ҳолда (5.3) га асосан

$$v\big|_{t=0} = f(x,\ y,\ z),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{\partial^2 u_f}{\partial t^2}\Big|_{t=0} = \frac{\partial^2 u_f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_f}{\partial z^2} = 0$$

шартларни қаноатлантиради. Шунинг учун, агар u_f функция учинчи тартибгача узлуксиз ҳосилаларга эга бўлса, (5.1) нинг (5.2) ни қаноатлантирувчи ечими

$$u(x,\ y,\ z,\ t)=\frac{\partial u_f}{\partial t}+u_\psi \tag{5.4}$$

формула орқали ифодаланади. Демак, (5.1) тенглама учун Коши масаласи u_f функцияни аниқлашга келтирилади. Бу функцияни

$$u_f(x,\ y,\ z,\ t)=\frac{1}{4\pi a}\iint\limits_{S_r}\frac{f(\xi,\eta,\zeta)}{r}\,d\sigma_r \tag{5.5}$$

кўринишда ёзамиз. Бу интеграл (5.1) тенгламанинг маркази $M(x,\ y,\ z)$ нуқтада бўлиб, радиуси $r=at$ бўлган S_r сфера сирти бўйича олинган ечими бўлишини кўрсатамиз. $f(\xi,\ \eta,\ \varsigma)$ — ихтиёрий узлуксиз функция, $d\sigma_r$ сферанинг юз элементи. (5.5) дан

$$\left|\iint\limits_{S_r}\frac{f(\xi,\eta,\zeta)}{r}\,d\sigma_r\right|\leqslant\max|f|\ \frac{4\pi r^2}{r}$$

бўлганлиги учун $t\to 0$ да $u_f\to 0$ бўлиб, (5.5) шартларнинг биринчи қисмини қаноатлантиради. Иккинчи қисмини қаноатлантиришини текшириш учун

$$\xi=x+\beta_1 r,\quad \eta=y+\beta_2 r,\quad \varsigma=z+\beta_3 r \tag{5.6}$$

алмаштиришларни бажариб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$u_f=\frac{r}{4\pi a}\iint\limits_{S_1}f(x+\beta_1 r,\ y+\beta_2 r,\ z+\beta_3 r)\,d\sigma_1. \tag{5.7}$$

Бу ерда $\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=1$, $d\sigma_1=\frac{d\sigma_r}{r^2}$ бўлиб, интеграл S_1 бирлик сферанинг барча тайинланган x, y, z нуқталарида ҳисобланади.

(5.7) ни t бўйича дифференциалласак,

$$\frac{\partial u_f}{\partial t}=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_1}f(x+\beta_1 r,\ y+\beta_2 r,\ z+\beta_3 r)\,d\sigma_1+$$

$$+\frac{r}{4\pi a}\iint\limits_{S_1}\left(\beta_1\frac{\partial f}{\partial\xi}+\beta_2\frac{\partial f}{\partial\eta}+\beta_3\frac{\partial f}{\partial\zeta}\right)d\sigma_1 \tag{5.8}$$

бўлади. (5.8) дан $t\to 0$ да $\frac{\partial u_f}{\partial t}\to f\ (x,\ y,\ z)$ эканлиги келиб чиқади. Энди, u_f функциянинг (5.1) ни қаноатлантиришини исбот қилиш кифоядир. (5.7) дан

$$\frac{\partial^2 u_f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_f}{\partial z^2}=\frac{r}{4\pi a}\iint\limits_{S_1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial\varsigma^2}\right)d\sigma_1=$$

$$=\frac{1}{4\pi ar}\iint\limits_{S_r}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial\varsigma^2}\right)d\sigma_r. \tag{5.9}$$

$\frac{\partial^2 u_f}{\partial t^2}$ ифодани ҳисоблаш учун (5.8) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\frac{\partial u_f}{\partial t} = \frac{u_f}{t} + \frac{1}{4\pi r}\iint\limits_{S_r}\left(\beta_1\frac{\partial f}{\partial \xi} + \beta_2\frac{\partial f}{\partial \eta} + \beta_3\frac{\partial f}{\partial \zeta}\right)d\sigma_r =$$

$$= \frac{u_f}{t} + \frac{1}{4\pi r}\iiint\limits_{V_r}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \varsigma^2}\right)d\xi\, d\eta\, d\varsigma = \frac{u_f}{t} + \frac{I(t)}{4\pi r}, \qquad (5\ 10)$$

бу ерда

$$I(t) = \iiint\limits_{V_r}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2}\right)d\xi\, d\eta\ d\varsigma,$$

V_r — маркази (x, y, z) нуқтада бўлиб, радиуси $r = at$ бўлган шар. (5.10) дан:

$$\frac{\partial^2 u_f}{\partial t^2} = -\frac{u_f}{t^2} + \frac{1}{t}\frac{\partial u_f}{\partial t} + \frac{\partial I(t)}{\partial t}\ \frac{1}{4\pi at} - \frac{I(t)}{4\pi at^2} =$$

$$= -\frac{u_f}{t^2} + \frac{u_f}{t^2} + \frac{I(t)}{4\pi at^2} + \frac{1}{4\pi at}\frac{\partial I(t)}{\partial t} - \frac{I(t)}{4\pi at^2} = \frac{1}{4\pi at}\frac{\partial I(t)}{\partial t}.$$

$\frac{\partial I(t)}{\partial t}$ ифодани ҳисоблаш учун сферик координаталар системасига ўтиб, $d\sigma_r = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\psi$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t} = a\iint\limits_{S_r}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2}\right)d\sigma_r$$

тенгликни оламиз. Демак,

$$\frac{\partial^2 u_f}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi t}\iint\limits_{S_r}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2}\right)d\sigma_r \qquad (5.11)$$

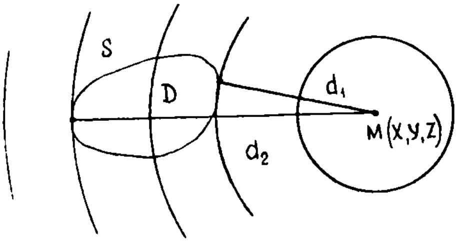
бўлади. (5.11) ва (5.9) ни солиштирсак, (5.5) орқали ифодаланган $u_f(x, y, z, t)$ функция ҳақиқатан ҳам (5.1) тўлқин тенгламасини қаноатлантиради. $\varphi(x, y, z)$ ва $\psi(x, y, z)$ функциялар тўғрисидаги мулоҳазалар ва (5.4) га асосан Коши масаласининг умумлашган ечими

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi a}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[\iint\limits_{S_r}\frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta)}{r}\, d\sigma_r\right] + \right.$$

$$\left. + \iint\limits_{S_r}\frac{\psi(\xi, \eta, \zeta)}{r}\, d\sigma_r\right\} \qquad (5.12)$$

кўринишда ифодаланади. (5.12) ни Пуассон формуласи дейилади.

Фазода Пуассон формуласи орқали ифодаланган тўлқин тарқалишининг физик моҳиятини кўрайлик. Бошланғич тебраниш чегараси S чизиқдан иборат бўлган бирор D соҳада содир бўлсин. Бу соҳа-



1.8- шакл

нинг ташқарисида φ ва ψ функциялар нолга тенг (ички нуқталарда нолдан фарқли). Муҳит ҳолатининг ўзгаришини D соҳа ташқарисида ётувчи тайинланган M нуқтадан кузатайлик (1.8-шакл). M нуқтадан S сиртгача бўлган энг яқин масофа d_1, энг узоқ масофа d_2 бўлсин. Маркази M нуқтада бўлиб, радиуси $r = at$ бўлган S_r сфера $t < \frac{d_1}{a}$ вақтда D соҳага етиб келмайди. Шунинг учун сфера нуқталарида φ ва ψ лар ноль бўлиб, (5.12) га асосан $u(x, y, z, t) = 0$ бўлади ёки $t = \frac{d_1}{a}$ вақтда S_r сфера S сирт билан тўқнашади, ёки тўлқиннинг олдинги фронти M нуқтадан ўтади. Олдинги фронт S сиртнинг ҳар бир нуқтасидан радиуси $r = at$ бўлган сфераларнинг ўрамасидан иборат бўлади (Гюйгенс принципи). $t = \frac{d_1}{a}$ ва $t = \frac{d_2}{a}$ вақтлар орасида S_r сфера D соҳани кесиб ўтади. Шунинг учун бу ораликда, (5.12) га асосан, $u(x, y, z, t) \neq 0$. $t > \frac{d_2}{a}$ вақтда S_r сфера D соҳани ўз ичига олади ва улар умумий нуқтага эга бўлмайди. Шунинг учун бу вақтда, (5.12) га асосан, $u(x, y, z, t) = 0$ бўлади ёки бошланғич тебраниш M нуқтадан ўтиб бўлади. Бу деган сўз, $t = \frac{d_2}{a}$ вақт тўлқиннинг орқа фронтининг M нуқтадан ўтишини аниқлайди. Демак, олдинги фронт тебраниш етиб келмаган нуқталарни ажратиб турувчи чизиқ, орқа фронт эса тебранишдан тўхталган (осойишталашган) нуқталардан тебранаётган нуқталарни ажратиб турувчи чизиқ бўлади.

6-§. Икки ва уч ўлчовли тўлқин тенгламаси учун Коши масаласи. Пасайиш (тушиш) усули. Масалани ечишнинг Дьюамель принципи

Олдинги параграфда кўрилган масаланинг хусусий ҳолини ёки f функция z га боғлиқ бўлмаган ҳолини кўрайлик. Бу ҳолда (5.5) га асосан u функция ҳам z га боғлиқ бўлмайди ва икки ўлчовли

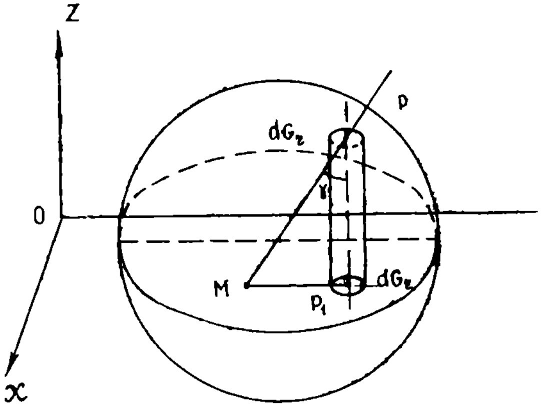
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (6.1)$$

тўлқин тенгламасини

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x,\ y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x,\ y) \qquad (6.2)$$

бошланғич шартларда қаноатлантиради.

Ҳисоблашларни осонлаштириш учун 5-§ даги (5.1) нинг ечимини xOy текислигида ифодалаймиз. Бунинг учун S_r сферанинг юқори ва пастки қисмларини унинг xOy текисликдаги маркази $M(x,\ y)$ нуқтада бўлган катта C_r доирасига проекциялаймиз (1.9-шакл). Бу ҳолда



1.9- шакл

$$d\sigma_r = \frac{dC_r}{\cos\gamma} \qquad (6.3)$$

бўлиб, (5.5) интеграл қуйидагича ёзилади:

$$\iint_{S_r} \frac{f(\xi,\eta,\zeta)}{r}\, d\sigma_r = \iint_{C_r} \frac{f(\xi,\eta_1)}{r}\, \frac{d C_r}{\cos\gamma}; \quad (dC_r = d\xi_1\, d\eta_1).$$

Шаклдан:

$$\cos\gamma = \frac{|PP_1|}{|MP|} = \frac{\sqrt{r^2-|P_1M|^2}}{r} = \frac{\sqrt{r^2-(x-\xi_1)^2-(y-\eta_1)^2}}{r}.$$

Шунинг учун:

$$\iint_{S_r} \frac{f(\xi,\eta,\zeta)}{r}\, d\sigma_r = \iint_{C_r} \frac{f(\xi_1,\eta_1)\, d\xi_1\, d\eta_1}{\sqrt{r^2-(x-\xi_1)^2-(y-\eta_1)^2}}.$$

Демак, бу алмаштиришларга нисбатан (5.12) ни

$$u(x,\ y,\ z)=\frac{1}{2\pi a}\left\{\frac{d}{dt}\left[\iint\limits_{C_r}\frac{\varphi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{r^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}\right]+\iint\limits_{C_r}\frac{\psi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{r^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}\right\} \tag{6.4}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу икки ўлчовли тўлқин тенгламаси учун Пуассон формуласидир. У фазода олдинги фронти бор, орқа фронти йўқ (Гюгенс принципи бажарилмайди), цилиндрик тўлқинларни ифодалайди. Шу тариқа, агар f функция фақат x га боғлиқ бўлса, u функция ҳам x га боғлиқ бўлиб, бир ўлчовли

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6.5}$$

тўлқин тенгламасининг

$$u\Big|_{t=0}=\varphi(x),\qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x) \tag{6.6}$$

бошланғич шартларини қаноатлантирувчи ечими бўлади. Бу ҳолда

$$u_f(x,\ y,\ z,\ t)=\frac{1}{4\pi a}\iint\limits_{S_r}\frac{f(\xi,\eta,\zeta)}{r}\,d\sigma_r=\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}f(\xi)\,d\xi$$

(5.5) кўринишда бўлади ($d\sigma_r=2\pi r\,d\xi$). Шунинг учун, бир ўлчовли тўлқин тенгламасининг (6.6) шартларни қаноатлантирувчи ечими қуйидагича ёзилади:

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2a}\left\{\frac{d}{dt}\left[\int\limits_{x-at}^{x+at}\varphi(\xi)\,d\xi\right]+\int\limits_{x-at}^{x-at}\psi(\xi)\,d\xi\right\}=$$

$$=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi \tag{6.7}$$

Бу Даламбер формуласидир.

Юқоридаги, (5.1)—(5.2) Коши масаласининг (5.12) ечимидан (6.1)—(6.2) ва (6.5)—(6.6) Коши масалаларининг (6.4) ва (6.7) ечимларини келтириб чиқариш усули пасайиш (тушиш) усули дейилади.

Энди уч ўлчовли бир жинсли бўлмаган

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,\ y,\ z,\ t) \tag{6.8}$$

тенгламанинг $-\infty<x,\ y,\ z<\infty,\ t\geqslant 0$ соҳада

$$u(x,\ y,\ z,\ t)\Big|_{t=0}=\varphi(x,\ y,\ z),$$

$$\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x,\ y,\ z) \tag{6.9}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими — узлуксиз $u(x, y, z, t)$ функцияни топиш билан шуғулланамиз. Бундай масала товуш тарқалиш назарияси, электромагнит тўлқинларнинг тарқалиш назарияси ва физиканинг бошқа соҳаларида фундаментал аҳамиятга эга. (6.8) — (6.9) нинг ечими, бир жинсли

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \tag{6.10}$$

тенгламанинг

$$v\Big|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x, y, z) \tag{6.11}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $v(x, y, z, t)$ ечими билан берилган (6.8) кўринишдаги

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + f(x, y, z, t) \tag{6.12}$$

тенгламанинг

$$w\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \tag{6.13}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $w(x, y, z, t)$ ечими йиғиндисидан иборат бўлади, яъни $u = v + w$.

(6.10) — (6.11) Коши масаласининг ечими 5- § да Пуассон формуласи орқали топилган эди.

(6.12) — (6.13) Коши масаласининг ечимини эса Дьюамель принципидан фойдаланиб топамиз.

Биринчидан,

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2}\right) \tag{6.14}$$

тенгламанинг $t > \tau$ учун (τ — параметр)

$$\omega(x, y, z, t, \tau)\Big|_{t=\tau} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial t}\Big|_{t=\tau} = f_1(x, y, z, \tau) \tag{6.15}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топамиз.

(6.14) — (6.15) масаланинг ечими Пуассон формуласи орқали ифодаланади. Фақат формуладаги t ўрнига $t - \tau$ ни қўйиш керак, чунки бу ерда бошланғич момент $t = \tau$. Бу ҳолда (5.7) қуйидаги

$$\omega(x, y, z, \tau) = \frac{t-\tau}{4\pi}\iint\limits_{S_1} f\,[x + \beta,\ a(t-\tau),\ y + \beta_2 a(t-\tau),$$

$$z + \beta_3 a(t-\tau)]\, d\tau \tag{6.16}$$

кўринишда бўлади. Энди,

$$v(x, y, z, t) = \int\limits_0^t \omega(x, y, z, t, \tau)\, d\sigma_1 \tag{6.17}$$

функция (6.12) — (6.13) масаланинг ечими эканлигини кўрсатамиз. (6.17) ни t бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \int\limits_0 \frac{\partial \omega}{\partial t} d\tau + \omega(x, y, z, t, \tau)\Big|_{t=\tau}. \tag{6.18}$$

(6.15) нинг биринчи шартига асосан (6.18) даги иккинчи қўшилувчи нолга тенг, шунинг учун

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \int\limits_0^t \frac{\partial \omega}{\partial t} d\tau. \tag{6.19}$$

(6.17) ва (6.19) формуладан кўринадики, $w(x, y, z, t)$ функция (6.13) бошланғич шартларни қаноатлантиради. (6.19) ни яна t бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \int\limits_0^t \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} d\tau + \frac{\partial \omega}{\partial t}\Big|_{t=t}. \tag{6.20}$$

(6.15) га асосан:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \int\limits_0^t \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} d\tau + f(x, y, z, t). \tag{6.21}$$

Бу ерда ω функцияси (6.14) тенгламани қаноатлантиришини ҳисобга олсак, (6.17) ва (6.21) ларга асосан, w функциянинг (6.12) ни қаноатлантириши келиб чиқади. Демак,

$$w(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^t (t - \tau) d\tau \iint\limits_{S_1} f[x - \beta_1 a(t - \tau),$$

$$y + [\beta_2 a(t - \tau), z + \beta_3 a(t - \tau)] d\sigma_1. \tag{6.22}$$

(6.22) да $r = a(t - \tau)$ белгилаш киритиб, $\xi = x + \beta_1 r$, $\eta = y + \beta_2 r$, $\varsigma = z + \beta_3 r$ формулалар орқали сферик координаталар системасига ўтсак,

$$\left(r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \varsigma)^2} \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1\right),$$

$$w(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \iiint\limits_{V_r} \frac{f\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a}\right)}{r} d\xi\, d\eta\, d\varsigma \tag{6.23}$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу ерда V_r — маркази (x, y, z) нуқтада, радиуси $r = at$ бўлган шар. (6.23) ифода кечикувчи потенциал дейилади.

Шунингдек, Дьюамель принципи ёрдамида икки ўлчовли

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x, y, t) \tag{6.24}$$

тенгламанинг

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x,\ y),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x,\ y) \tag{6.25}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $u(x,\ y,\ t)$ узлуксиз ечимини топиш мумкин.

(6.24) — (6.25) Коши масаласининг ечими, бир жинсли

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{6.26}$$

тенгламанинг

$$v\Big|_{t=0} = \varphi(x,\ y),\quad \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x,\ y) \tag{6.27}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $v(x,\ y,\ t)$ ечими билан

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + f(x,\ y,\ t) \tag{6.28}$$

тенгламанинг

$$w\Big|_{t=0} = 0,\quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \tag{6.29}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $w(x,\ y,\ t)$ ечими йиғиндисидан иборат бўлади: $u = v + w$.

(6.26) — (6.27) масаланинг ечими (6.4) формула орқали ифодаланади. Юқорида келтирилганидек, (6.28) — (6.29) масаланинг ечимини

$$w = \int\limits_0^t \omega(x,\ y,\ \tau)\,d\tau \tag{6.30}$$

кўринишда топамиз. Бу ерда $\omega(x,\ y,\ t)$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)$$

тенгламанинг

$$\omega\Big|_{t=\tau} = 0,\quad \frac{\partial \omega}{\partial t}\Big|_{t=\tau} = f(x,\ y,\ \tau) \tag{6.31}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимидир. Бу ечим

$$\omega(x,\ y,\ t) = \frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^t \left[\iint\limits_{r<a(t-\tau)} \frac{f(\xi,\ \eta,\ \tau)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - r^2}}\right] d\tau \tag{6.32}$$

кўринишда ифодаланади.

7-§. Лаплас ва Пуассон тенгламалари. Грин формуласи. Ўрта қиймат ҳақидаги теорема ва гармоник функциялар учун максимум принципи

Турли стационар физик жараёнларни, жумладан, иссиқлик ўтказиш назарияси, электростатика, гидродинамика масалаларини ўрганишда қуйидаги дифференциал тенгламага келамиз:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \text{ ёки } \Delta u = 0. \qquad (7.1)$$

Бу тенглама *Лаплас тенгламаси* дейилади. Тенгламанинг чап томонидаги ифода u функциянинг лапласиани, Δ белги *Лаплас оператори* дейилади.

Бир жинсли бўлмаган

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z) \text{ ёки } \Delta u = f \qquad (7.2)$$

тенглама *Пуассон тенгламаси* дейилади.

Бу тенгламаларни текширишда Грин формуласи ва гармоник функциялар тушунчаси катта аҳамиятга эга.

Грин формуласи. Вектор майдонлар назариясидан маълумки, вектор майдоннинг ҳажм бўйича тарқалиши (дивергенцияси) ҳажмни чегараловчи ёпиқ сирт орқали майдон оқимига тенг, яъни

$$\iiint\limits_V \operatorname{div} \vec{a}\, dV = \iint\limits_S a_n\, dS \qquad (7.3)$$

Агар $u(x, y, z)$ ва $v(x, y, z)$ функциялар ёпиқ V соҳада узлуксиз ва иккинчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга функциялар бўлиб,

$$a_x = u\frac{\partial v}{\partial x}, \quad a_y = u\frac{\partial v}{\partial y}, \quad a_z = u\frac{\partial v}{\partial z}$$

бўлса, у ҳолда

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) +$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} = u\Delta v + \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v, \qquad a_n = u\frac{\partial v}{\partial n}$$

бўлади, бунда $\vec{n}$ — V соҳанинг S сиртига ўтказилган ташқи нормал. (7.3) га асосан

$$\iiint\limits_V u\Delta v\, dV = \iint\limits_S u\frac{\partial v}{\partial n} ds - \iiint\limits_V \operatorname{grad} u \ \operatorname{grad} v\, dV$$

ёки

$$\iiint\limits_V v\Delta u d\, V = \iint\limits_S v\frac{\partial u}{\partial n} ds - \iiint\limits_V \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} u\, dV.$$

Бу икки тенгликни бир-биридан айирсак,

$$\iiint\limits_V (u\Delta v - v\Delta u) dV = \iint\limits_S \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds \qquad (7.4)$$

формулани ҳосил қиламиз. (7.4) ифода *Грин формуласи* дейилади.

Икки ўлчовли $u(x, y)$ ва $v(x, y)$ функциялар учун C эгри чизиқ билан чегараланган S соҳада Грин формуласи

$$\iint_S (u\Delta v - v\Delta u)\,ds = \int_C \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) dl \qquad (7.5)$$

кўринишда ифодаланади. Бу ерда $ds = dx\ dy$, dl — C эгри чизиқ ёй элементи.

Гармоник функциялар қуйидаги хоссаларга эга:

1-теорема. *Агар u функция C эгри чизиқ билан чегараланган соҳада гармоник функция бўлса, у ҳолда*

$$\iint_S \frac{\partial v}{\partial n} ds = 0 \qquad (7.6)$$

бўлади.

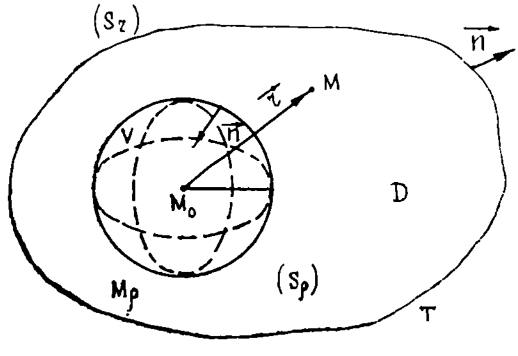
Исбот. Агар (7.4) да $u = 1$ десак, $\Delta v = 0$ тенгликка асосан (7.6) тенглик келиб чиқади.

2-теорема (функциянинг ўрта қиймати ҳақида). *Агар u функция бирор M_0 нуқтани ўз ичига олган бирор V соҳада гармоник функция бўлса, у ҳолда функциянинг шу нуқтадаги қиймати маркази M_0 нуқтада бўлган шарнинг S сирти бўйича олинган қийматларининг ўрта арифметигига тенг бўлади, яъни*

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_S u ds,$$

R — сфера радиуси.

Исбот. $u(x, y, z)$ функция $T + S_r$ соҳада биринчи тартибли ҳосилалари билан биргаликда узлуксиз гармоник функция бўлсин. S_r — T соҳани чегараловчи сирт. Ихтиёрий $M(x, y, z)$ нуқта (1.10-шакл) $D = T - V$ соҳада ётади. V — радиуси ρ бўлган шар, S_ρ — шу шарнинг сирти. M_0 (x, y, z) нуқта V шарнинг маркази. $v = \frac{1}{r}$ функцияни кўрайлик, бу ерда $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ —



1.10- шакл

M ва M_0 нуқталар орасидаги масофа. v функция $M = M_0$ нуқтада узилишга эга бўлганлиги учун T соҳада u ва v функцияларга Грин формуласини қўллаб бўлмайди. Лекин D соҳада $v = \frac{1}{r}$ функция чегараланган. Шунинг учун бу соҳада u ва $v = \frac{1}{r}$ функциялар учун (7.4) формулани қўллаймиз:

$$\iiint\limits_D \left(u\Delta \frac{1}{r} - \frac{1}{r}\Delta u\right)\Delta V = \iint\limits_{S_r} \left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right] ds +$$

$$+ \iint\limits_{S_\rho} u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) ds - \iint\limits_{S_\rho} \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} ds. \qquad (7.7)$$

D соҳанинг ташқи нормали бўйича ҳосила қатнашган охирги иккита қўшилувчини ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_{S_\rho} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_{r=\rho} = \frac{1}{\rho^2}$$

бўлганлиги учун

$$\iint\limits_{S_\rho} u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) ds = \frac{1}{\rho^2}\iint\limits_{S_\rho} u ds = \frac{1}{\rho^2}4\pi\rho^2 u(M_\rho) = 4\pi u(M_\rho), \qquad (7.8)$$

бу ерда M_ρ — S_ρ сиртдаги ихтиёрий нуқта. Шунга ўхшаш

$$\iint\limits_{S_\rho} \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} ds = \frac{1}{\rho}\iint\limits_{S_\rho} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \frac{1}{\rho}4\pi\rho^2\left[\frac{\partial u(M_\rho)}{\partial n}\right] =$$

$$= 4\pi\rho\left[\frac{\partial u(M_\rho)}{\partial u}\right]. \qquad (7.9)$$

D соҳада $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ эканлигини ҳисобга олиб (7.8) ва (7.9) ни (7.7) га қўямиз:

$$\iiint\limits_D \left(-\frac{1}{r}\right)\Delta u dV = \iint\limits_{S_r}\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial n}\right] ds +$$

$$+ 4\pi u(M_\rho) - 4\pi\rho\left[\frac{\partial u(M_\rho)}{\partial n}\right]. \qquad (7.10)$$

$\rho \to 0$ да $M_\rho \to M_0$ бўлганлиги учун

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right] ds - \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_D \frac{\Delta u}{r} dV$$

$$(7.10')$$

бўлади. Бу ерда

$$\lim_{\rho\to 0} 4\pi\rho \frac{\partial u(M_0)}{\partial n} = 0$$

эканлигини ҳисобга олсак,

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi}\iint_{S_r}\left[u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]ds - \iiint_D \frac{\Delta u}{r}\Delta v \tag{7.11}$$

келиб чиқади. u — гармоник функция бўлганлиги учун $\Delta u = 0$. Демак, (7.11) дан

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi}\iint_{S_r}\left[u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]ds \tag{7.12}$$

бўлади. Хусусий ҳолда (7.12) ни маркази M_0 нуқтада, радиуси R бўлган сферага қўллаймиз (u функция сферада ва унинг S_R сиртида биринчи тартибли ҳосилалари билан биргаликда узлуксиз ва гармоник функция). Ташқи $\vec{n}$ нормал сфера радиусига мос келади. Шунинг учун:

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right|_{r=R} = \left.\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r}\right|_{r=R} = -\frac{1}{R^2}.$$

Демак,

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_{S_R}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}\right]ds - \frac{1}{4\pi}\iint_{S_R} u\left(-\frac{1}{R^2}\right)ds.$$

(9.6) ни ҳисобга олсак,

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2}\iint_{S_R} u\,ds \tag{7.13}$$

формулани ҳосил қиламиз.

3-теорема (максимум принципи). *Чегараланган T соҳанинг ичида гармоник бўлган ва $S_r + T$ ёпиқ соҳада узлуксиз бўлган u функция ($u \neq \text{const}$) ўзининг энг катта ва энг кичик қийматларига фақат соҳани чегараловчи сиртда эришади.*

Исбот. Шартга кўра $u \neq \text{const}$. Фараз қилайлик, u функция T соҳанинг ичидаги M_0 нуқтада максимум қийматга эга бўлсин, яъни

$$u_0 = u(M_0) \geqslant u(M). \tag{7.14}$$

$u_0 = u(M)$ эканлигини кўрсатамиз, бунда M — соҳанинг ихтиёрий нуқтаси. Маркази M_0 нуқтада, радиуси ρ бўлган ва T соҳа ичида ётувчи S_ρ сферани оламиз. (7.13) формулада функцияни энг катта қиймати билан алмаштирамиз:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi\,\rho^2}\iint_{S_\rho} u(M)\,ds.$$

Ўрта қиймат ҳақидаги теоремага асосан,

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi\rho^2}\,u(M_\rho)\quad 4\pi\rho^2 = u(M_\rho).$$

M_ρ — S_ρ сиртдаги ихтиёрий нуқта. Бу тенглик ва (7.14) дан

$$u_0 = u(M). \tag{7.15}$$

Шу тариқа (7.15) тенгликнинг T соҳанинг барча нуқталарида бажарилишини исботлаш мумкин (ҳар гал кейинги олинган нуқтада уни марказ қилиб шар чизамиз ва юқоридаги мулоҳазадан фойдаланамиз; бу жараён охирги шар S_r сирт билан уринганигача давом этади).

8-§. Грин функцияси. Унинг чегаравий масалаларни ечишда қўлланилиши. Доира ва шар учун Пуассон формулалари

Дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларни ечишда Грин функцияси усули кўп қўлланиладиган усуллардан ҳисобланади. Унинг моҳияти қуйидагидан иборат: аввало берилган масалага ўхшаш масаланинг махсус ечими топилади ва у ёрдамида берилган масаланинг ечими интеграл орқали ҳисобланади.

Грин функцияси қуйидагича аниқланади. 7-§ да $T + S_r$ соҳада биринчи тартибли ҳосилалари билан биргаликда узлуксиз бўлган ва T соҳа ичида иккинчи тартибли ҳосилага эга бўлган u функцияси учун Гриннинг интеграл формуласи

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_{S_r}\left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial n} - u\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right]ds - \frac{1}{4\pi}\iiint_D \frac{\Delta u}{r}\,dV \tag{8.1}$$

ўринли эканлиги исботланган. Агар $v(x,\ y,\ z)$ ёпиқ D соҳада гармоник функция бўлса,

$$\iiint_D (u\,\Delta v - u\,\Delta u)\,dV = \iint_{S_r}\left(u\,\frac{\partial v}{\partial n} - v\,\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds \tag{8.2}$$

формулани ёзиш мумкин. v — гармоник функция бўлганлиги учун $\Delta v = 0$. Демак,

$$0 = \iint_{S_r}\left(v\,\frac{\partial u}{\partial n} - u\,\frac{\partial v}{\partial n}\right)ds - \iiint_D v\,\Delta u\;dV. \tag{8.3}$$

(8.1) ва (8.3) ларни қўшамиз:

$$u(M_0) = \iint_{S_r}\left[\frac{\partial u}{\partial n}\left(\frac{1}{4\pi r} + v\right) - u\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{4\pi r} + v\right)\right]ds\ -$$

$$-\iiint_D \left(\Delta u \frac{1}{4\pi r} + v \right) dV \tag{8.4}$$

Агар

$$G(M,\ M_0) = \frac{1}{4\pi r} + v, \quad r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \tag{8.5}$$

деб белгиласак,

$$u(M_0) = \iint_{S_r} \left[G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n} \right] ds - \iiint_D G\Delta u\, dV \tag{8.6}$$

бўлади. (8.5) дан кўринадики, G функцияни аниқлаш учун $\Delta v = 0$ тенгламанинг махсус $v\Big|_{S_r} = -\frac{1}{4\pi r}$ чегаравий шартни қаноатлантирувчи ечими v ни топиш кифоядир.

(8.5) кўринишдаги $G(M,\ M_0)$ функция қуйидаги шартлар ёрдамида аниқланади:

1) $G(M,\ M_0)$ функция M нуқтанинг функцияси сифатида аниқланиб, тайинланган M_0 нуқтадан бошқа нуқталарда гармоник функция ёки Лаплас тенгламасини қаноатлантиради.

2) $G(M,\ M_0)$ функция $M = M_0$ нуқтада чексизликка айланади.

3) $G(M,\ M_0)$ функция соҳани чегараловчи S_r сирт устида нолга тенг:

$$G(M,\ M_0) = 0, \quad M \in S_r. \tag{8.7}$$

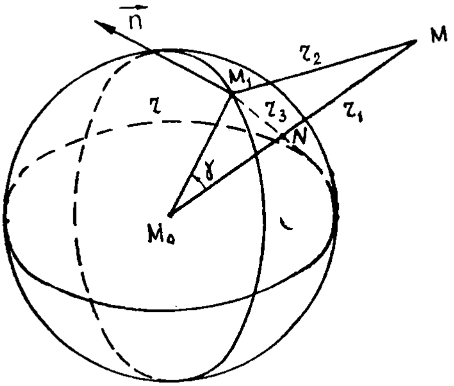
Юқоридаги шартлар ёрдамида аниқланган $G(M,\ M_0)$ функция $\Delta u = 0$ Лаплас тенгламаси учун биринчи чегаравий масаланинг (Дирехле масаласининг) *Грин функцияси* дейилади. (9.6) да $\Delta u = 0$, $u\Big|_{S_r} = f(M)$ бўлса, бу формула

$$u(M_0) = -\iint_{S_r} u\frac{\partial G}{\partial n} ds = -\iint_{S_r} f\frac{\partial G}{\partial n} ds \tag{8.8}$$

кўринишда бўлиб, фақат $G(M,\ M_0)$ функцияга боғлиқ бўлади (биринчи чегаравий масалада $u\Big|_{S_r} = f$, $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{S_r} = 0$ ва иккинчи чегаравий масалада $u\Big|_{S_r} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{S_r} = f(M)$). (8.8) формула биринчи чегаравий масаланинг, яъни Дирехле масаласининг ечимидир.

Грин функцияси Нейман масаласининг ечимини ва учинчи чегаравий масаланинг ечимларини топишда ҳам қўлланилади. Қуйида Грин функцияси ёрдамида ечимлари топиладиган иккита масалани кўрамиз.

Шар учун Дирехле масаласининг ечими. Маркази M_0 нуқтада бўлиб, радиуси r ва S_r сфера билан чегараланган V шарни кўрайлик. $\vec{n}$ — ташқи нормал, M_1 — сферадаги, M — сфера ташқарисидаги ихтиёрий нуқталар бўлиб, M_0M чизиқдаги N нуқта $M_0N \cdot M_0M = r$ тенгликни қаноатлантиради (1.11-шакл). N нуқтага бирлик заряд жойлаштирамиз. (8.7) шарт бажарилиши учун M нуқтага шундай бирлик заряд жойлаштириш керакки, сферада улар бир-бирини йўқотсин. Агар S_n сферада ихтиёрий M_1 нуқтани олсак, $\Delta M_0M_1N \backsim \Delta M_0M_1M$ бўлади, чунки γ иккаласи учун умумий бурчак ва бу бурчак томонлари пропорционал. Демак,



1.11-шакл

$$\frac{M_0N}{M_0M_1} = \frac{M_0M_1}{M_0M} \quad \text{ёки} \quad \frac{r_9}{r} = \frac{r}{r_1} = \frac{r_3}{r_2}. \tag{8.9}$$

Бу ерда $r_3 = \frac{r_0}{r}\ r_2$ бўлиб, $v = -\frac{r}{r_0r_2}$ гармоник функция сферада $u = \frac{1}{r_3}$ гармоник функция қабул қилган қийматларни олади. M нуқтага жойлаштирилган заряд потенциали $-\frac{r}{r_0}$ дан иборат. Демак, Грин функцияси иккита заряд ҳосил қилган майдон потенциали

$$G(M_1,\ N) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r_3} - \frac{r}{r_0r_2}\right] \tag{8.10}$$

кўринишида ифодаланади. Юқорида келтирилгандек, Дирехле масаласининг ечими

$$u(M_0) = -\iint\limits_{S_r} f(M_1)\,\frac{\partial G}{\partial n}\,ds, \quad u\Big|_{S_r} = f \tag{8.11}$$

кўринишда бўлади. Сферага ўтказилган ташқи нормал $\vec{n}$ нинг йўналиши радиус йўналиши билан устма-уст тушади. Шунинг учун $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}\cos(\vec{n}, \vec{r})$. Демак,

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_3}\right) - \frac{r}{r_0}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_3}\right)\right], \quad \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_3}\right) =$$

$$= -\frac{1}{r_3^2}\cos(\widehat{\vec{r}_3, n}), \tag{8.12}$$

$$\frac{r}{r_0}\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r_2}\right)}{\partial n} = -\frac{r}{r_0}\,\frac{1}{r_2^2}\cos(\widehat{\vec{r}_2, \vec{n}}). \tag{8.13}$$

ΔM_0M_1N дан $r_0^2 = r^2 + r_3^2 - 2rr_3\cos(\widehat{r_3, n})$,

ΔM_0M_1M дан $r_1^2 = r^2 + r_2^2 - 2rr_2\cos(\widehat{\vec{r}_2, \vec{n}})$,

ёки

$$\cos(\widehat{\vec{r}_3, \vec{n}}) = \frac{r^2 + r_3^2 - r_0^2}{2rr_3}, \tag{8.14}$$

$$\cos(\widehat{\vec{r}_2, \vec{n}}) = \frac{r^2 + r_2^2 - r_1^2}{2rr_2}. \tag{8.15}$$

$r_2 = \frac{rr_3}{r_0}$, $r_1 = \frac{r^2}{r_0}$ тенгликларга асосан:

$$\cos(\widehat{\vec{r}_3, \vec{n}} =) \frac{r^2 - \frac{r^4}{r_0^2} + \frac{r^2r_3^2}{r_0^2}}{2r\cdot\frac{r_3}{r_0}} =$$

$$= \frac{r^2r_0^2 - r^4 - r^2r_3^2}{2r^2r_3} = \frac{r_0^2 - r^2 + r_3^2}{2r_3r_0}.$$

Энди (8.10), (8.12), (8.13), (8.14), (8.15) формулаларга кўра

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{S_r} = \frac{1}{4\pi}\left[-\frac{1}{r_3^2}\,\frac{r^2 + r_3^2 - r_0^2}{2rr_3} + \frac{r}{r_0}\,\frac{r_0^2}{r_3^2r^2}\,\frac{r_0^2 + r_3^2 - r^2}{2r_3r_0}\right] =$$

$$= -\frac{1}{4\pi r}\,\frac{r - r_0^2}{r_3^3}. \tag{8.16}$$

Демак,

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi r}\iint\limits_{r} f(M_1)\,\frac{r^2 - r_0^2}{r_3^3}\,ds \tag{8.16′}$$

бўлади. Бу формулани сферик координаталар системасида ифодалаймиз. Сфера маркази M_0 нуқтада, $(r,\ \theta,\ \varphi)$ — M_1 нуқтанинг координаталари, $(r_0,\ \theta_0,\ \varphi_0)$ эса N нуқта координаталари, γ — $\overline{M_0M_1}$ ва $\overline{M_0N}$ радиус—векторлар орасидаги бурчак бўлсин. $r_3^2=r^2+r_0^2-2rr_0\cos\gamma$, алмаштириш якобиани $I=r^2\sin\theta$ бўлганлиги учун (10.16′) формула

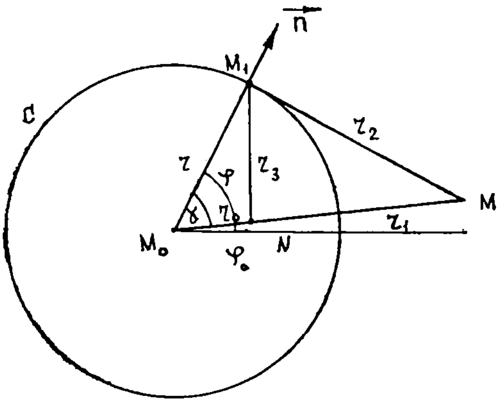
$$u(r_0,\ \theta_0,\ \varphi_0)=\frac{r}{4\pi}\iint\limits_{S_r}\frac{r^2-r_0^2}{(r^2-r_0^2-2rr_0\cos\gamma)^{\frac{1}{2}}}f(\theta,\ \varphi)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi \qquad (8.17)$$

кўринишда бўлади. Бу формула *Пуассон формуласи* дейилади.

Доира учун Дирехле масаласининг ечими. Маркази M_0 нуқтада бўлиб, радиуси r ва C айлана билан чегараланган D доирани кўрайлик (12- шакл) $\vec{n}$ — ташқи нормал, M_1 айланадаги, M айлана ташқарисидаги нуқталар бўлиб, M_0M чизиқдаги N нуқта

$$M_0N \quad M_0M=r^2 \text{ ёки } r_0r_1=r^2 \qquad (8.18)$$

шартни қаноатлантиради. ΔM_0NM_1 билан ΔM_0M_1M ларнинг ўхшашлигидан:



1.12- шакл

$$r_2=\frac{rr_3}{r_0} \text{ ёки } r_3=\frac{r_2r_0}{r}. \qquad (8.19)$$

Демак, юқорида қайд қилинганидек Грин функцияси

$$G(M,\ N)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_3}+v \text{ ёки } G(M_1,\ N)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_3}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{r}{r_0r_2} \qquad (8.20)$$

кўринишда бўлади. Бу ердан $G\Big|_C=0,\ v\Big|_C=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_3}$. Лаплас тенгламасининг ечими

$$u(N) = -\int\limits_{C} f(M_1)\,\frac{\partial G}{\partial n}\,ds \tag{8.21}$$

кўринишда бўлади. Бу ерда

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial r}\cos\widehat{(\vec{n}, \vec{r})} = -\frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{r_3}\cos\widehat{(\vec{n}\ \ \vec{r}_2)} + \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{r_2}\cos\widehat{(\vec{n}, \vec{r}_2)}.$$

M_0M_1N ва M_0M_1M учбурчаклардан

$$\cos(\vec{n}, \vec{r}_3) = \frac{r^2+r_3^2-r_0^2}{2rr_3}, \quad \cos(\vec{n}, \vec{r}_2) = \frac{r^2+r_2^2-r_1^2}{2rr_2}$$

бўлганликлари учун

$$-\frac{\partial G}{\partial n}\bigg|_C = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{r_3}\,\frac{r^2+r_3^2-r_0^2}{2rr_3} - \frac{1}{r_2}\,\frac{r^2+r_2^2-r_1^2}{2rr_2}\right).$$

(8.18) ва (8.19) га асосан

$$-\frac{\partial G}{\partial n}\bigg|_C = \frac{1}{2\pi r}\,\frac{r^2-r_0^2}{r_3^2}$$

бўлади. (r, φ) — M_1 нуқта қутб координаталари, (r_0, φ_0) — N нуқта қутб координаталари бўлса, M_0M_1N учбурчакдан $r_3^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\varphi - \varphi_0)$ бўлганлиги учун

$$-\frac{\partial G}{\partial n}\bigg|_C = \frac{1}{2\pi r}\,\frac{r^2-r_0^2}{r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\varphi-\varphi_0)}$$

бўлиб, $u\big|_C = f(\varphi)$ ва $ds = rd\theta$ эканлигини ҳисобга олсак, ечим

$$u(N) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{r^2-r_0^2}{r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\varphi-\varphi_0)}\,f(\varphi)\,d\varphi \tag{8.22}$$

кўринишда бўлади. Бу формула *доира учун Пуассон формуласи* дейилади.

9-§. Иссиқлик тарқалиш тенгламаси. Коши масаласи. Аралаш масала. Максимум принципи.

Иссиқлик тарқалиши, диффузия ва ёпишқоқ суюқликларнинг ҳаракати жараёнларини ўрганиш масалалари параболик турдаги

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{9.1}$$

тенгламаларни текширишга келтирилади.

Максимум принципи ҳақидаги теорема (исботсиз). D соҳа юқоридан H кесма, ён ва паст томондан Γ билан чегараланган тўғри тўртбурчак бўлсин. Иссиқлик тарқалиш (9.1) тенгламасининг D соҳада узлуксиз бўлган ҳар қандай ечими ўзининг энг катта ва энг кичик қийматига Γ да эришади.

Аралаш масала. Бундай масала тенглама ечимининг $t=0$ да қаноатлантириши керак бўлган бошланғич шарт ва соҳа чегарасида қаноатлантириши керак бўлган чегаравий шартларнинг қўйилишидан иборат бўлади (3- §.).

Чегараланган стерженда иссиқлик тарқалиш масаласини кўрайлик. Иккинчи тартибли хусусий ҳосилали бир жинсли бўлмаган

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,\ t) \tag{9.2}$$

дифференциал тенгламанинг $0\leqslant x\leqslant 1,\ t>0$ соҳада аниқланган ва

$$u\Big|_{t=0}=u(x,\ 0)=\varphi(x) \tag{9.3}$$

бошланғич шарт ҳамда

$$u\Big|_{x=0}=u(0,\ t)=\psi_1(t), \tag{9.4}$$

$$u\Big|_{x=l}=l=u(l,\ t)=\psi_2(t)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $u(x,\ t)$ ечими топилсин. $f(x,\ t)$ функция стержен бўйлаб ташқи иссиқлик манбасининг таъсирини ифодалайди.

Ечимни иккита v ва w функцияларнинг йиғиндиси, яъни $u=v+w$ шаклда ифодалаймиз. Бу ерда v функция

$$\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{9.5}$$

бир жинсли тенгламанинг $v(x,\ 0)=\varphi(x)$ бошланғич шарт ва

$$v\Big|_{x=0}=\psi_1(t),\quad v\Big|_{x=l}=\psi_2(t) \tag{9.6}$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими, w функция эса

$$\frac{\partial w}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+f(x,\ t) \tag{9.7}$$

бир жинсли бўлмаган тенгламанинг

$$w\Big|_{t=0}=0 \tag{9.8}$$

бошланғич шарт ва бир жинсли бўлган

$$w\Big|_{x=0}=0,\quad w\Big|_{x=l}=0 \tag{9.9}$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими бўлади. Ҳар бир тенгламани алоҳида-алоҳида ечамиз. (9.5) — (9.6) масаланинг ечимини

$$v(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}{}' a_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l} \tag{9.10}$$

кўринишда излаймиз. Бу ерда

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l v(x,\ t)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx. \qquad (9.11)$$

(9.11) ни икки марта бўлаклаб интеграллаймиз:

$$\frac{2}{l}\int_0^l v(x,\ t)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = \left|\begin{matrix} v(x,\ t) = u, & \frac{\partial v}{\partial x}dx = du \\ \sin\frac{k\pi x}{l}dx = dv, & v = -\frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{l} \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{2}{l}\left[-\frac{v(x,\ t)\,l}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l + \frac{l}{k\pi}\int_0^l \frac{\partial v}{\partial x}\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx\right] =$$

$$= \left|\begin{matrix} \frac{\partial v(x,\ t)}{\partial x} = u, & \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dx = du \\ \cos\frac{k\pi x}{l}dx = dv, & v = \frac{l}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{l} \end{matrix}\right| = -\frac{2v(l,\ t)}{k\pi}(-1)^k +$$

$$+\frac{2v(0,\ t)}{k\pi} + \frac{2}{k\pi}\left[\frac{l}{k\pi}\frac{\partial v(x,\ t)}{\partial x}\sin\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l - \frac{l}{k\pi}\int_0^l \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx\right] =$$

$$= \frac{2}{k\pi}[v(0,\ t) - (-1)^k v(l,\ t)] - \frac{2l}{k^2\pi^3}\int_0^l \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx.$$

(9.5) ва (9.6) га асосан:

$$a_k(t) = \frac{2}{k\pi}[\psi_1(t) - (-1)^k\psi_2(t)] - \frac{2l}{k^2\pi^2a^2}\int_0^l \frac{\partial v}{\partial t}\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx. \qquad (9.12)$$

(9.11) ни t бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{da_k}{dt} = \frac{2}{l}\int_0^l \frac{\partial v}{\partial t}\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx. \qquad (9.13)$$

(9.12) ва (9.13) дан интегрални йўқотиб, a_k га нисбатан

$$\frac{da_k}{dt} + \frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}a_k = \frac{2k\pi a^2}{l^2}[\psi_1(t) - (-1)^k\psi_2(t)] \qquad (9.14)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. (9.14) нинг умумий ечими

$$a_k(t) = e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}\Big[C_n + \frac{2k\pi a^2}{l^2}\int_0^t e^{\left(\frac{k\pi a}{e}\right)^2\tau}[\psi_1(\tau) -$$

$$-(-1)^k\psi_2(\tau)]\,d\tau\Big], \qquad (9.15)$$

бу ерда $C_n = a_k(0)$. (9.5) га асосан:

$$v(x,\ 0)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k(0)\sin\frac{k\pi x}{l}=\varphi(x).$$

Демак,

$$a_k(0)=C_k=\frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$$

бўлиб, ечим

$$v(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty} e^{\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}\left[\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,\mathrm{d}x+\right.$$

$$\left.+\frac{2k\pi a^2}{l^2}\int_0^t e^{\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 \tau}[\psi_1(\tau)-(-1)^k\psi_2(\tau)]\,d\tau\right] \qquad (9.16)$$

кўринишда бўлади.

(9.7) — (9.9) масаланинг ечимини ҳам (9.10) кўринишда излаймиз:

$$f(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}, \qquad (9.17)$$

бу ерда

$$f_k(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,\ t)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx \qquad (9.18)$$

ёйилмани ҳисобга олган ҳолда (9.7) дан

$$\frac{da_k(t)}{dt}+\omega_k^2 a_k(t)=f_k(t) \qquad (9.19)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу ерда $\omega_k=\frac{k\pi a}{l}$. (9.8) га асосан:

$$a_k(t)=\int_0^t e^{-\omega_k^2(t-\tau)}f_k(\tau)\,d\tau.$$

Топилган ифодани ечимга, (9.18) ни ҳисобга олган ҳолда қўйсак,

$$w(x,\ t)=\int_0^t\int_0^l G(x,\ \xi,\ t-\tau)f(\xi,\ \tau)\,d\xi\,d\tau \qquad (9.20)$$

ифодани ҳосил қиламиз.

Бу ерда

$$G(x,\ \xi,\ t-\tau)=\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty} e^{=\omega_k^2(t-\tau)}\sin\frac{k\pi x}{l}\quad \sin\frac{k\pi\xi}{l}$$

бўлиб, у *Грин функцияси* дейилади.

Демак, (9.12) — (9.13) аралаш масаланинг ечими

$$u(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}\left[\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx+\right.$$

$$+\frac{2k\pi a^2}{l^2}\int_0^t e^{\left(\frac{k\pi a}{e}\right)^2\tau}\,[\psi_1(\tau)-(-1)^k\psi_2(\tau)]\,d\tau]\sin\frac{k\pi a}{l}+$$

$$+\int_0^t\int_0^l G(x,\ \xi,\ t-\tau)f(\xi,\ \tau)\,d\xi\,d\tau \tag{9.21}$$

кўринишда бўлади.

10-§. Штурм — Лиувилл масаласи. Хос функция ва хос қийматлар. Асосий хоссалари

Оддий дифференциал тенгламалар назариясида

$$[\varphi(x)y']'-q(x)y+\lambda\rho(x)y=0 \tag{10.1}$$

кўринишдаги тенгламага *Штурм — Лиувилл тенгламаси* дейилади. Бу ерда $\varphi(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ функциялар $[a,\ b]$ кесмада узлуксиз функциялар бўлиб, $\varphi(x)>0$, $q(x)>0$, $\rho(x)\geqslant 0$ бўлади. λ — тенглама параметри. (10.1) тенгламанинг нолдан фарқли ечимини топиш учун функция

$$\alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)=0,$$
$$\beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b)=0 \tag{10.2}$$

чегаравий шартларни қаноатлантириши зарур.

Биз қуйида математик физика тенгламаларини ечишда кўп қўлланиладиган (10.1) нинг хусусий ҳолини кўрамиз.

λ параметрнинг шундай қийматлари топилсинки, бу қийматларда

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \tag{10.3}$$

дифференциал тенгламанинг

$$X(0)=0,\quad X(l)=0 \tag{10.4}$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи нолдан фарқли ечими мавжуд бўлсин. Бу масала *Штурм — Лиувилл масаласи* дейилади.

$\lambda>0$ бўлсин. Бу ҳолда (10.3) нинг ечими

$$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}\,x+C_2\sin\sqrt{\lambda}\,x \tag{10.5}$$

кўринишда бўлади. (10.4) чегаравий шартларга асосан:

$$\begin{cases} C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0, \\ C_1 \cos \sqrt{\lambda}\, l + C_2 \sin \sqrt{\lambda}\, l = 0. \end{cases}$$

Бу ерда $C_1 = 0$, $C_2 \sin \sqrt{\lambda}\, l = 0$ бўлади. $C_2 \neq 0$ бўлсин (акс ҳолда $X(x) = 0$):

$$\sin \sqrt{\lambda}\, l = 0, \quad \sqrt{\lambda}\, l = k\pi, \quad k \in Z, \quad \sqrt{\lambda} = \frac{k\pi}{l}.$$

Шундай қилиб, (10.3) — (10.4) масаланинг нолдан фарқли ечими

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \tag{10.6}$$

қийматларда мавжуд бўлади. Бу қийматлар масаланинг хос қийматлари, уларга мос келадиган нолдан фарқли

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l} \tag{10.7}$$

ечимлар масаланинг *хос функциялари* дейилади.

(10.6) дан кўринадики, хос қийматлар сони чексиз, манфий эмас ва чегараланмаган

$$X_1(x),\ X_2(x), \qquad X_m(x), \qquad X_n(x), \tag{10.8}$$

кетма-кетликни ташкил қилади.

Хос функциялар қуйидаги хоссаларга эга.

1. *Ҳар бир хос қийматга фақат битта хос функция мос келади* (ўзгармас кўпайтирувчигача аниқлик билан).

Исбот. Битта $\lambda_k = \lambda$ хос қийматга иккита хос функция $X_m(x)$ ва $X_n(x)$ мос келсин. Барча хос функциялар (10.2) чегаравий шартларни қаноатлантиради. Уларнинг биринчисидан

$$\alpha_1 X_m(0) + \alpha_2 X_m'(0) = 0, \quad \alpha_1 X_n(0) + \alpha_2 X_n'(0) = 0 \tag{10.9}$$

келиб чиқади. α_1 ва α_2 лар бир вақтда нолга тенг эмас, шунинг учун (10.9) нинг Вронский детерминанти нолга тенг бўлади:

$$w\,[X_m(0),\quad X_n'(0)] = X_m(0)\,X_n'(0) - X_m'(0)\,X_n(0) = 0.$$

Демак, $X_m(x)$ ва $X_n(x)$ функциялар чизиқли боғлиқ бўлиб, $\lambda = \lambda_k$ бўлганда битта боғлиқмас хос функция мавжуд бўлади, яъни $X_m(x) = CX_n(x)$, $(C = \text{const})$.

2. *Ҳар хил λ_m ва $\lambda_n \neq \lambda_m$ хос қийматларга мос келган иккита $X_m(x)$ ва $X_n(x)$ хос функциялар $[a, b]$ кесмада ортогоналдир ёки*

$$\int_a^b X_m(x) \cdot X_n(x) \quad d(x) = 0. \tag{10.10}$$

3. *Ҳар хил λ_m ва λ_n хос қийматларга мос келган иккита $X_m(x)$ ва $X_n(x)$ хос функциялар $\rho(x)$ вазнли ортогонал бўлса, у ҳолда*

$$\int_a^b X_m(x) \quad X_n(x) \quad \rho(x)dx = 0, \ (m \neq n) \tag{10.11}$$

бўлади.

Биринчи хоссада қайд этилган ўзгармас кўпайтувчини шундай танлаймизки,

$$\left\| X_n \right\|^2 = \int_a^b \rho(x) X_m^2(x) dx = 1 \tag{10.12}$$

бўлсин. Бу шартни қаноатлантирувчи хос функциялар *нормалланган* дейилади.

Агар функциялар системаси (10.10) ва (10.12) шартларни қаноатлантирса, у ҳолда $[a, b]$ кесмада *ортонормалланган система* дейилади:

$$\int_a^{b} \rho(x) X_m(x) \cdot X_n(x) dx = \begin{cases} 0, \text{ агар } m \neq n, \\ 1. \text{ агар } m = n. \end{cases} \tag{10.13}$$

11-§. Чегаравий масалаларни ечишда ўзгарувчиларни ажратиш усули. Унинг татбиқининг умумий схемаси

Математик физикада кенг қўлланиладиган усуллардан бири ўзгарувчиларни ажратиш усули ёки Фурье усули ҳисобланади.

Айниқса, бу усул гиперболик ва параболик турдаги тенгламалар учун ёпиқ соҳадаги чегаравий масалаларни ечишда қўлланилади. Баъзи ҳолларда эллиптик турдаги тенгламаларни ечишда ҳам қўлланилади. Ҳар бир турдаги тенгламалар учун биттадан масалаларни кўрайлик.

11.1. Чегараланган торнинг тебраниши. Биз икки томонидан маҳкамланган торнинг эркин тебраниш тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{11.1}$$

нинг бошланғич шартлар

$$u\Big|_{t=0} = f(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(x) \tag{11.2}$$

ва чегаравий шартлар

$$u\Big|_{x=0} = 0, \quad u\Big|_{x=l} = 0 \tag{11.3}$$

берилгандаги хусусий ечимини топамиз. Бунинг учун Фурье усулидан фойдаланамиз. (11.1) тенгламанинг (айнан 0 га тенг бўлмаган) хусусий ечимини иккита $X(x)$ ва $T(t)$ функциялар кўпайтмаси шаклида қидирамиз:

$$u(x,\ t) = X(x)\cdot T(t). \qquad (11.4)$$

Бундан тегишли ҳосилаларни топиб, (11.1) тенгламага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$X(x)\cdot T''(t) = a^2 X''(x) T(t)$$

ва бу тенгликнинг ҳадларини $a^2 X\cdot T$ га бўлиб

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \qquad (11.5)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу тенглик ўзгармас сонга тенг бўлгандагина ўринли бўлади. Уни $-\lambda$ билан белгилаймиз. Шундай қилиб,

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

Бу тенгликлардан иккита тенглама ҳосил бўлади:

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad (11.6)$$

$$T'' + a^2\lambda T = 0. \qquad (11.7)$$

Бу тенгламаларнинг умумий ечимларини топамиз. Характеристик тенгламанинг илдизлари комплекс бўлганлиги учун

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}\,x + B\sin\sqrt{\lambda}\,x, \qquad (11.8)$$

$$T(t) = C\cos a\sqrt{\lambda}\,t + D\sin a\sqrt{\lambda}\,t \qquad (11.9)$$

ечимларга эга бўламиз. Бунда A, B, C, D — ихтиёрий ўзгармас сонлар. $X(x)$ ва $T(t)$ лар учун топилган ифодаларни (11.4) тенгликка қўямиз:

$$u(x,\ t) = (A\cos\sqrt{\lambda}\,x + B\sin\sqrt{\lambda}\,x)(\cos a\sqrt{\lambda}\,t + D\sin a\sqrt{\lambda}\,t). \qquad (11.10)$$

Энди A ва B ўзгармас сонларни (11.3) шартлардан фойдаланиб топамиз. (11.8) га $x=0$ ва $x=l$ қийматларни қўйсак,

$$0 = A\cdot 1 + B\cdot 0, \quad 0 = A\cos\sqrt{\lambda}\,l + B\sin\sqrt{\lambda}\,l$$

тенгламалар ҳосил бўлиб, биринчисидан $A=0$, иккинчисидан $B\sin\sqrt{\lambda}\,l = 0$ эканлиги келиб чиқади. $B \neq 0$, чунки акс ҳолда $X=0$ бўлиб, $u \equiv 0$ бўлиб қолади. Бу шартга зид. Шунинг учун

$$\sin\sqrt{\lambda}\,l = 0$$

бўлиши керак, бундан $\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ хос қийматларни топамиз. Уларга мос келадиган хос функциялар

$$X = B\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (11.11)$$

тенглик билан ифодаланади. Топилган $\sqrt{\lambda}$ нинг ифодасини (11.9) га қўйсак, у

$$T(t)=C\cos\frac{an\pi}{l}t+D\sin\frac{an\pi}{l}t,\ (n=1,\ 2,\quad .) \tag{11.12}$$

кўринишни олади. n нинг ҳар бир қиймати учун топилган ифодаларни (11.4) га қўйиб, чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $u_n(x,\ t)$ ечимларни ҳосил қиламиз:

$$u_n(x,\ t)=\left(C_n\cos\frac{an\pi}{l}t+D_n\sin\frac{an\pi}{l}\mathrm{t}\right)\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Тенглама чизиқли ва бир жинсли бўлгани учун ечимларнинг йиғиндиси ҳам ечим бўлади ва шунинг учун

$$u(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{an\pi}{l}t+D_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{11.13}$$

қатор билан ёзилган функция ҳам (11.1) тенгламанинг ечими бўлади. C_n ва D_n ўзгармас сонларни аниқлаш учун бошланғич (11.2) шартдан фойдаланамиз. $t=0$ бўлганда

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{11.14}$$

бўлиб; $f(x)$ функциянинг $(0,\ l)$ оралиқда Фурье қаторига ёйилмаси мавжуд деб фараз қилсак,

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \tag{11.15}$$

га тенг бўлади. (11.13) тенгликда t бўйича ҳосила олиб, $t=0$ да

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\frac{an\pi}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу қаторнинг Фурье коэффициентларини аниқлаймиз:

$$D_n\frac{an\pi}{l}=\frac{2}{l}\int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

ёки

$$D_n=\frac{2}{an\pi}\int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx. \tag{11.16}$$

Шундай қилиб, биз C_n ва D_n коэффициентларни аниқладик, демак, чегаравий ва бошланғич шартларни қаноатлантирувчи (11.1) тенгламанинг ечими бўлган $u(x, t)$ функцияни аниқладик. Фурье усули математик физиканинг кўп масалаларини ечишда жуда қўл келади.

Изоҳ: Агар юқорида $-\lambda$ ўрнига $+\lambda = k^2$ ифодани олсак, тенгламанинг умумий ечими (11.8):

$$X = Ae^{kx} + Be^{-kx}$$

бўлиб, (11.2) чегаравий шартларни қаноатлантирмайди.

Хос функцияни $u_k(x, t) = \left(C_n \cos \frac{ak\pi}{l} t + D_n \sin \frac{ak\pi}{l} t\right) \sin \frac{k\pi x}{l}$ кўринишда ҳосил қилган эдик. Уни шаклан ўзгартирсак,

$$u_k(x, t) = F_k \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \left(\frac{k\pi a}{l} t + \varphi_k\right). \tag{11.17}$$

кўринишга келади.

Бу ерда $F_k = \sqrt{C_k^2 + D_k^2}$ ва $\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{C_k}{C_k}$

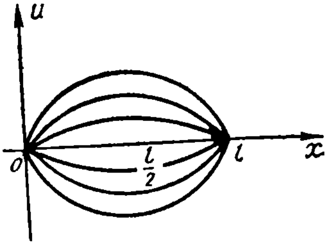
(11.17) формуладан кўринадики, торнинг барча нуқталари бир хил $\omega_k = \frac{k\pi a}{l}$ частота ва φ_k фаза билан гармоник тебранар экан. Тебраниш амплитудаси $F_k \sin \frac{k\pi x}{l}$ га тенг бўлиб, у x га боғлиқ экан. $k = 1$ бўлганда (11.17) формуладан биринчи гармоника учун

$$u_1(x, t) = F_1 \sin \frac{\pi x}{l} \sin \left(\frac{\pi a}{l} t + \varphi_1\right)$$

формулани ҳосил қиламиз. $x = 0$ ва $x = l$ бўлганда қўзғалмас нуқталар торнинг четлари бўлиб, $x = \frac{l}{2}$ да торнинг четланиши энг катта бўлиб, F_1 га тенг бўлади (1.13- шакл). $k = 2$ бўлганда

$$u_2(x, t) = F_2 \sin \frac{2\pi x}{l} \sin \left(\frac{2\pi a}{l} t + \varphi_2\right)$$

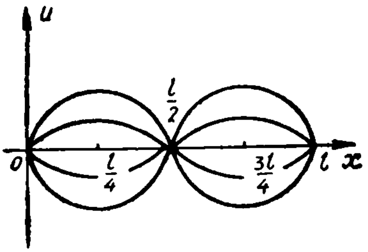
бўлиб, қўзғалмас нуқта учта бўлади:



1.13- шакл

$$x = 0, \quad x = \frac{l}{2}, \quad x = l.$$

Амплитуда энг катта қийматига иккита $x = \frac{l}{4}$ ва $x = \frac{3l}{4}$ нуқтада эришади (1.14-шакл). Умуман $\sin\frac{k\pi x}{l} = 0$ тенгламанинг илдизлари



1.14-шакл

қанча бўлса, [0, l] кесмада шунча қўзғалмас нуқталар бўлади (улар *тугун* нуқталар дейилади). Тугун нуқталар орасида шундай битта нуқта мавжуд бўладики, бу нуқтада четланиш максимумга эришади; бундай нуқталар «*тутамлик*» нуқталари дейилади. Торнинг энг кичик ўз частотаси

$$\omega_1 = \frac{\pi a}{l} = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}} \tag{11.18}$$

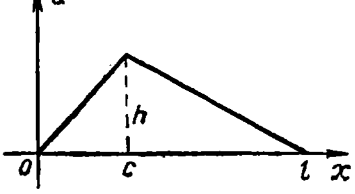
га тенг бўлади, бунда T — тор таранглиги, ρ — зичлиги.

(11.18) формуладан кўринадики, таранглик T қанча катта бўлиб, тор қанча енгил (l ва ρ лар кичик) бўлса, овоз шунча юқори бўлар экан. Қолган ω_k частоталарга мос келган овозлар *обертон* ёки *гормоникалар* дейилади.

Мисол. Четлари $x = 0$ ва $x = l$ маҳкамланган тор берилган бўлиб, тор нуқталарининг бошланғич тезлиги нолга тенг. Бошланғич четланиши учи (c, h) нуқтада бўлган учбурчак шаклида бўлса (1.15-шакл), торнинг тебранишини топинг. (T_0 — таранглик, ρ — зичлик ва $a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$ лар берилган).

Ечиш. $u\big|_{t=0} = f(x)$ функциянинг аналитик ифодаси берилган (1.15-шакл):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{hx}{c}, & 0 \leqslant x \leqslant c, \\ \frac{h(l-x)}{l-c}, & c \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$



1.15-шакл

Масаланинг шарти бўйича $F(x) = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$, демак, (11 16) га асосан ечимда барча D_k коэффициентлар нолга тенг. C_k коэффициентларни (11.15) формула ёрдамида топамиз:

$$C_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx = \frac{2}{l}\left[\frac{h}{c}\int_0^c x \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx + \right.$$

$$\left. + \frac{h}{l-c}\int_0^l (l-x) \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx\right].$$

Ҳар бир интегрални бўлаклаб интеграллаймиз ва ушбу натижага келамиз:

$$\int_0^c x \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx = -\frac{lx}{k\pi}\cos \frac{k\pi x}{l}\Big|_0^c + \frac{l^2}{k^2\pi^2}\sin \frac{k\pi x}{l}\Big|_0^c =$$

$$= -\frac{lc}{k\pi}\cos \frac{k\pi c}{l} + \frac{l^3}{k^2\pi^2}\sin \frac{k\pi c}{l},$$

$$\int_c^l (l-x) \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx = \frac{l(l-c)}{k\pi}\cos \frac{k\pi c}{l} + \frac{l^2}{k^2\pi^2}\sin \frac{k\pi c}{l}.$$

Шундай қилиб,

$$C_k = \frac{2hl^2}{k^2\pi^2 c(l-c)}\sin \frac{k\pi c}{l}$$

эканини аниқладик. C_k нинг ифодасини (11.13) формулага қўямиз ва ушбу ечимни оламиз:

$$u(x, t) - \frac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin \frac{k\pi c}{l}\sin \frac{k\pi x}{l}\cos \frac{k\pi at}{l}.$$

Агар торнинг ўртасидан тортилган бўлса, яъни $c = \frac{l}{2}$ бўлса, $\frac{k\pi c}{l} = \frac{k\pi}{2}$ бўлиб, k нинг барча жуфт қийматларида $\frac{l}{2}$ нуқта қўзғалмас нуқта бўлади. Шунинг учун ечимда тоқ гармоникалар бўлади, яъни:

$$u(x, t) = \frac{8h}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}\cdot\cos \frac{(2n+1)\pi at}{l}.$$

11.2. Чегараланган стерженда иссиқликнинг тарқалиши. Иссиқлик тарқалиши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (11.19)$$

тенгламасининг

$$u\Big|_{t=0} = u(x,\ 0) = \varphi(x) \qquad (11.20)$$

бошланғич шартни ва

$$u\Big|_{x=0} = u(0, t) = 0,\ u\Big|_{x=l} = u(l,\ t) = 0 \qquad (11.21)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $0 < x < 1$, $t > 0$ соҳада $u(x,\ t)$ ечими топилсин. (11.21) чегаравий шартлар бир жинсли бўлганлиги учун Фурье усулини қўллаш мумкин. $u(x,\ t)$ функциянинг $(0,\ 0)$ ва $(0,\ l)$ нуқталарда узлуксиз бўлиши учун $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ бўлиши шарт. Бундан ташқари $\varphi(x)$ функция узлуксиз биринчи тартибли ҳосилага эга бўлсин. (11.19) тенгламанинг ечимини

$$u(x,\ t) = X(x)\,T(t) \qquad (11.22)$$

кўринишда излаймиз. (11.22) ни (11.19) га қўямиз:

$$X(x)\,T''(t) = a^2 X''(x)\,T(t).$$

Бу ердан

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

ёки

$$T'(t) + a^2\lambda\,T(t) = 0, \qquad (11.23)$$

$$X''(x) + \lambda\,X(x) = 0 \qquad (11.24)$$

иккита тенгламани ҳосил қиламиз. (13.23) чегаравий шартлардан

$$X(0) = 0,\ X(l) = 0 \qquad (11.25)$$

тенгликларни ҳосил қиламиз.

(11.24) — (11.25) масала Штурм — Лиувилл масаласи бўлиб, унинг ечими 10- § да ўрганилган ва

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2,\quad X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{l},\quad k \in Z \qquad (11.26)$$

кўринишда бўлади. λ_k нинг қийматини (10.5) га қўйиб,

$$T'(t) + \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 T(t) = 0$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Унинг ечими

$$T(t) = a_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}$$

бўлади. Демак, (11.19) нинг (11.21) ни қаноатлантирувчи ечими

$$u_k(x,\ t) = a_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (11.27)$$

бўлади. Бошланғич шартни қаноатлантириш учун

$$u(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (11.28)$$

қаторни тузамиз. (11.20) га асосан:

$$u(x,\ 0)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi x}{l}=\varphi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l.$$

Агар

$$a_k=\varphi_k=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx \qquad (11.29)$$

ва

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k \sin\frac{k\pi x}{l}=\varphi(x)$$

қаторлар абсолют ва текис яқинлашса, бу тенглик ўринли бўлади. (11.29) ни (11.28) га қўйиб масаланинг ечимини топамиз:

$$u(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{k\pi x}{l}. \qquad (11.30)$$

Бу ечим масаланинг барча шартларини қаноатлантиришини текшириб кўриш қийин эмас.

11.3. Дирехле масаласини доира учун ечиш. $x^2+y^2=R^2$ доира берилган бўлиб, унинг айланасида бирор $f(\varphi)$ функция берилган бўлсин (φ — қутб бурчаги).

Лаплас тенгламасини қутб координаталарида ёзамиз:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0. \qquad (11.\ 31)$$

Функциянинг доира айланасидаги қиймати берилган:

$$u\Big|_{r=R}=f(\varphi). \qquad (11.\ 32)$$

Ечимни

$$u=\Phi(\varphi)\cdot R(r) \qquad (11.\ 33)$$

деб фараз қилиб, Фурье усулидан фойдаланамиз. Ҳосилалар олиб, (11. 31) тенгламага қўямиз:

$$r^2\Phi(\varphi)R''(r)+r(\Phi)(\varphi)R'(r)+\Phi''(\varphi)R(r)=0.$$

Ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=-\frac{r^2R^2(r)+rR'(r)}{R(r)}=-k^2. \qquad (11.\ 34)$$

Бундан иккита тенглама ҳосил бўлади:

$$\Phi''(\varphi)+k^2\Phi(\varphi)=0, \qquad (11.\ 35)$$

$$r^2R''(r) + rR'(r) - k^2R(r) = 0. \qquad (11.36)$$

Биринчи (11. 35) тенгламанинг умумий ечими:

$$\Phi(\varphi) = A\cos k\varphi + B\sin k\varphi. \qquad (11.37)$$

Иккинчи (11. 36) тенгламанинг ечимини $R(r) = r^m$ кўринишда излаймиз. Бу ерда m ни топиш керак. r^m ни (11. 36) тенгламага қўйиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$r^2\, m(m-1)\, r^{m-2} + rmr^{m-1} - k^2r^m = 0$$

ёки

$$m^2 - k^2 = 0.$$

Бундан $m = \pm k$ экани кўринади. Хусусий ечимлар r^k ва r^{-k} бўлиб, умумий ечим:

$$R = Cr^k + Dr^{-k} \qquad (11.38)$$

бўлади. (11. 27) ва (11. 38) ларни (11. 31) формулага қўйсак, ушбу ҳосил бўлади:

$$u_k = (A_k\cos k\varphi + B_k\sin k\varphi)(C_kr^k + D_kr^{-k}). \qquad (11.39)$$

Биз доирада узлуксиз ва чекли ечимни излаймиз. $r = 0$ бўлганда (11. 39) формулада $D_k = 0$ бўлиши керак. Агар $k = 0$ бўлса, (11.35), (11. 36) тенгламалардан:

$$\Phi''(\varphi) = 0, \quad rR''(r) + R'(r) = 0.$$

Буларни интеграллаймиз ва

$$u_0 = (A_0 + B_0\varphi)(C_0 + D_0\ln r)$$

ни ҳосил қиламиз. u_0 ни (11. 39) билан $k = 0$ да солиштириб, $B_0 = 0$, $D_0 = 0$ эканини топамиз. У вақтда $u_0 = \frac{a_0}{2}$ бўлади. Бу ерда $\frac{a_0}{2} = A_0C_0$ деб белгиладик. $k = 1, 2, \quad , n, \quad .$ мусбат қийматлар билан чегараланамиз. Ечимлар йиғиндиси яна ўз навбатида ечим бўлгани учун

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi)\, r^n \qquad (11.40)$$

Бу ерда $a_n = C_n \cdot A_n$, $b_n = C_n \cdot B_n$ деб белгилаш киритдик. Энди ихтиёрий a_n ва b_n ўзгармасларни четки (11. 32) шартдан топамиз.

$r = R$ да (11. 40) дан:

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi)\, R^n. \qquad (11.41)$$

Бу тенгликдан

$$a_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt \qquad (11.42)$$

коэффициентларни аниқлаб, (11. 40) га қўямиз ва баъзи тригонометрик алмаштиришни бажариб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\pi}^{\pi} f(t) \cos n\,(t-\varphi)\, dt \left(\frac{r}{R}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(t-\varphi)\right] dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in(t-\varphi)} + e^{-in(t-\varphi)}}{} \left(\frac{r}{R}\right)^n \right] dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{re^{i(t-\varphi)}}{R}\right)^n + \sum_{n=1} \left(\frac{r}{R} \times\right.\right.$$

$$\left.\left. \times e^{-i(t-\varphi)}\right)^n\right] dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[1 + \frac{\frac{r}{R} e^{i(t-\varphi)}}{1 - \frac{r}{R} e^{i(t-\varphi)}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{r}{R} \cdot e^{-i(t-\varphi)}}{1 - \frac{r}{R} \cdot e^{-i(t-\varphi)}}\right] dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot$$

$$\left[\frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}{1 - 2\frac{r}{R}(t-\varphi) + \left(\frac{r}{R}\right)^2}\right] dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{r^2 - R^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2} dt. \qquad (11.43)$$

Дирехленинг доира учун қўйилган масаласининг $u(r, \varphi)$ ечими Пуассон интегралига келди. Бу формула (12. 31) тенгламани қаноатлантиради ҳамда $r \to R$ да $u(r, \varphi) \to f(\varphi)$, яъни ечим бўлади.

11. 4. Ўзгарувчиларни ажратишнинг умумий схемаси. Фурье усулининг ғояси қуйидагича: бир нечта ўзгарувчиларга боғлиқ бўлган изланаётган функция ҳар бири алоҳида бир ўзгарувчига боғлиқ бўлган функцияларнинг кўпайтмаси шаклида изланади. Бу кўпайтмани берилган тенгламага қўйиб, бир нечта дифференциал тенгламалари ҳосил қиламиз. Булардан баъзилари Штурм — Лиувилл масаласини ташкил қилади.

$$a(t)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+c(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+d(t)\,\frac{\partial u}{\partial t}+e(x)\,\frac{\partial u}{\partial x}+[f_1(t)+f_2(x)]\,u=0 \qquad (11.\ 44)$$

кўринишдаги гиперболик турдаги тенгламани кўрайлик. Бу a, c, d, e, f_1, f_2 коэффициентлар $0\leqslant x\leqslant 1$ ва $0\leqslant t\leqslant T$ соҳада узлуксиз функциялар бўлиб,

$$a(t)>a_0>0,\ c(x)<c_0<0.$$

Берилган соҳада узлуксиз бўлиб (11. 44) ни ва

$$u(x,\ 0)=\varphi_1(x),\ \frac{\partial u\ (x,\ 0)}{\partial t}=\varphi_2(x) \qquad (11.45)$$

бошланғич шартларни ҳамда

$$\alpha_1 u(0,\ t)+\alpha_2\,\frac{\partial u\ (0,\ t)}{\partial x}=0,$$

$$\beta_1 u(l,\ t)+\beta_2\,\frac{\partial u\ (l,\ t)}{\partial x}=0, \qquad (11.\ 46)$$

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2\neq 0,\quad \beta_1^2+\beta_2^2\neq 0$$

бир жинсли чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $u(x,\ t)$ ечимни топайлик.

Аввало, олдинги параграфда кўрганимиздек, (11. 44) нинг нолдан фарқли ечимини

$$u(x,\ t)=T(t)\ X\ (x) \qquad (11.\ 47)$$

кўринишда излаймиз ва бу ечим (11. 46) шартларни қаноатлантиришини талаб қиламиз:

$$a(t)T''(t)X(x)+c(x)T(t)X''(x)+d(t)T'(t)X(x)+e(x)T(t)\ X'(x)+$$
$$+[f_1(t)+f_2(x)]\ T(t)\ X(x)=0$$

ёки

$$\frac{a(t)\ T''\ (t)+d(t)\ T'\ (t)+f_1(t)\ T(t)}{T(t)}=-\frac{c\ (x)\ X''\ (x)+e\ (x)\ X'\ (x)+f_2\ (x)X\ (x)}{X\ (x)}=$$
$$=-\lambda.$$

Бу ердан

$$a(t)T''(t)+d(t)T'(t)+[f_1(t)+\lambda]\,T(t)=0, \qquad (11.48)$$

$$c(x)\ X''(x)+e(x)X'(x)+[f_2(x)+\lambda]\,X(x)=0 \qquad (11.49)$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз. $T(t)\neq 0$ бўлганлиги учун (11. 47) ни (11. 46) га қўйиб, $T(t)$ га қисқартирсак, чегаравий шарт

$$\alpha_1 X(0)+\alpha_2 X'(0)=0,$$

$$\beta_1 X(l)+\beta_2 X'(l)=0 \qquad (11.\ 50)$$

кўринишда бўлади. (11. 49) нинг (11. 50) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи нолдан фарқли ечимини топиш Штурм — Лиувилл масаласидир. Бу масала олдинги параграфда қаралган. Шунинг учун хос қийматлар ва хос функциялар аниқланган, деб фараз қиламиз. Бу ҳолда (11.48)

$$a(t)T''(t)+d(t)T'(t)+[f_1(t)+\lambda_k]T(t)=0 \qquad (11.\ 51)$$

кўринишга келади. Бу тенгламанинг умумий ечими $T_k(t)$ иккита чизиқли боғлиқ бўлмаган $T_k^{(1)}(t)$ ва $T_k^{(2)}(t)$ хусусий ечимларнинг чизиқли комбинациясидан иборат бўлади ёки

$$T_k(t)=C_1^{(k)}T_k^{(1)}(t)+C_2^{(k)}T_k^{(2)}(t). \qquad (11.52)$$

$C_1^{(k)}$ ва $C_2^{(k)}$ лар ихтиёрий ўзгармаслар. Уларни шундай танлаймизки, $t=0$ да

$$T_k^{(1)}(0)=1,\ T_k^{(1)}(0)=0,\ T_k^{(2)}(0)=0,\ T_k^{(2)\prime}(0)=1. \qquad (11.\ 53)$$

Шундай қилиб, (11. 44) нинг (11. 46) ни қаноатлантирувчи ечими

$$u_k(x,t)=[C_1^{(k)}T_k^{(1)}(t)+C_2^{(k)}T_k^{(2)}(t)\,X_k(x),\ k=1,\ 2, \qquad (11.54)$$

кўринишда бўлади. (11.45) бошланғич шартларни қаноатлантириши учун ечимни

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}[C_1^{(k)}T_k^{(1)}(t)+C_2^{(k)}T_k^{(2)}(t)]\,X_k(x) \qquad (11.55)$$

кўринишдаги қатор орқали ифодалаймиз. (11. 55) ни (11.45) га қўйиб, (11.53) ни ҳисобга олсак,

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_k X_k(x)=\varphi_1(x), \qquad (11.56)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}B_k X_k(x)=\varphi_2(x) \qquad (11.57)$$

тенгликларни ҳосил қиламиз. Бу ерда

$$A_k=C_1^{(k)}T_k^{(1)}(0)+C_2^{(k)}T_k^{(2)}(0),\ B_k=C_1^{(k)}T_k^{(1)\prime}(0)+C_2^{(k)}T_k^{(2)\prime}(0). \qquad (11.58)$$

(11.56) ва (11. 57) қаторларни текис яқинлашади деб фараз қилиб, A_k ва B_k коэффициентларни аниқлаш мумкин. Тенгликларнинг иккала томонини $\rho(x)\cdot X(x)$ га кўпайтириб, 0 дан 1 гача интеграллаcак ва (10. 10), (10. 12) ларни ҳисобга олсак,

$$A_k=\int_0^l \rho(x)\varphi_1(x)\varphi_1(x)X_k(x)\,dx,\quad B_k=\int_0^l \rho(x)\varphi_2(x)X_k(x)\,dx$$

бўлади. Бу қийматларни (11. 58) га қўйиб $C_1^{(k)}$ ва $C_2^{(k)}$ ларни аниқлаймиз.

Фурье усулини ўзгарувчилар сони бир нечта бўлганда ҳам қўллаш мумкин.

12- §. Штурм — Лиувилл масаласининг хос функциялари системасининг тўлалиги ва ёпиқлиги. Ейиш ҳақидаги теорема. Ўртача яқинлашиш

Хос функцияларнинг чексиз (улар ичида айнан нолга тенг бўлган функциялар йўқ)

$$X_1(x),\ X_2(x),\qquad X_m(x),\qquad X_n(x), \tag{12.1}$$

кетма-кетлиги берилган бўлсин. Бу кетма-кетлик берилган оралиқда узлуксиз ёки чекли сондаги биринчи тур узилиш нуқталарига эга бўлган $f(x)$ функция мавжуд бўлсин. $X_n(x)$ функцияларнинг ихтиёрий C_n коэффициентларда

$$S_n(x) = C_1X_1(x) + \qquad + C_nX_n(x) = \sum_{m=1}^{n} C_mX_m(x) \tag{12. 2}$$

чизиқли комбинациялардан шундайи топилсинки, у $f(x)$ функцияга ўрта квадратик четланишда яқинлашсин ёки

$$\delta_n = \int_a^b [f(x) - S_n(x)]^2\, dx$$

катталик энг кичик қийматга эга бўлсин. (12. 2) дан

$$\int_b^b [f(x) - \sum_{m=1}^{n} C_mX_m(x)]^2\, dx = \int_a^b [f(x)]^2 dx - 2\sum_{m=1}^{n} C_m \times$$

$$\times \int_a^b f(x)\, X_m(x)\, dx + \sum_{m=1}^{n} C_m^2 \int_a^b X_m^2(x)\, dx,$$

$$\int_a^b X_m^2(x)\, dx = \lambda_m, \quad c_m = \frac{1}{\lambda_m}\int_a^b f(x)\, X_m(x)\, dx$$

деб белгиласак,

$$\delta_n = \int_a^b [f(x)]^2\,]\, dx - 2\sum_{m=1}^{n} \lambda_m\, c_mC_m + \sum_{m=1}^{n} \lambda_mC_m^2,$$

бу ерда охирги икки ифодани тўла квадратга тўлдирсак,

$$\delta_n = \int_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{m=1}^{n} \lambda_m C_m^2 + \sum_{m=1}^{n} \lambda_m (C_m - c_m)^2$$

бўлади, бундан кўринадики, σ_n ифода $C_m = c_m$ бўлганда энг кичик қийматга эга бўлади. Демак,

$$\delta_n = \int_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{m=1}^{n} \lambda_m C_m^2 = \int_a^b [f(x) - S_n(x)^2]\,dx. \qquad (12.\ 3)$$

Бу тенглик *Бессель тенглиги* дейилади. (14. 3) дан $n \to \infty$ да

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_n C_m^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \qquad (12.\ 4)$$

тенгсизлигини ҳосил қиламиз. Бу тенгсизлик *Бессель тенгсизлиги* дейилади. (12. 3) дан кўринадики, $S_n(x)$ функциянинг $f(x)$ функцияга ўртача яқинлашиши учун

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m C_m^2 = \int_a^b f^2(x)\,dx \qquad (12.\ 5)$$

тенглик бажарилиши керак. Бу тенглик ҳар бир узлуксиз $f(x)$ функция учун бажарилса, (12. 1) система *ёпиқ* дейилади.

Агар $[a, b]$ соҳада нолдан фарқли функциялар мавжуд бўлиб, (12. 1) система функцияларига ортогонал бўлса, у ҳолда бу система *тўла* дейилади.

Умуман, (12. 1) системанинг тўлалик ва ёпиқлик тушунчалари тенг кучли маънога эга.

Стеклов теоремаси. *$[a, b]$ кесмада иккинчи тартибгача ҳосилалари билан бирга узлуксиз бўлган ихтиёрий $F(x)$ функция (11. 50) шартларни қаноатлантирса, (12. 1) система бўйича Фурье қаторига ёйилади ва бу қатор текис ва абсолют яқинлашади:*

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k X_k(x). \qquad (12.\ 6)$$

Исбот. Бу қатор текис яқинлашувчи бўлсин. C_k коэффициентларни аниқлаш учун унинг иккала томонини $\rho(x) \cdot X_i(x)$ (i—ихтиёрий номер) ифодага кўпайтириб, натижани $[a, b]$ кесма бўйича интеграллаймиз. Текис яқинлашувчи қаторни ҳадлаб интеграллаш мумкин бўлганлигидан

$$\int_a^b \rho(x) F(x) X_i(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \int_a^b \rho(x) X_k(x) X_i(x) dx \tag{12. 7}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. (10. 11) га асосан ўнг томонда фақат $k = 1$ бўлган ҳадлар қолади. Шунинг учун

$$C_k = F_k = \frac{\int_a^b \rho(x) F(x) X_k(x) dx}{\int_a^b \rho(x) X_k^2(x) dx} \tag{12. 8}$$

бўлади. Демак,

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k X_k(x), \tag{12. 9}$$

у ерда F_k — Фурье коэффициентлари.

13-§. Бессель тенгламаси. Бессель функциялари ва уларнинг асосий хоссалари. Асимптотикалар

Математик физиканинг кўп масалаларини ечишда

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0, \ (\nu - \text{const}) \tag{13. 1}$$

кўринишдаги чизиқли дифференциал тенгламаларга келинади. Бу тенглама *Бессель тенгламаси* дейилади. (13. 1) тенглама $x = 0$ да махсус нуқтага эга. Шунинг учун тенгламанинг ечимини

$$y = x^p (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \quad .) \quad (a_0 \neq 0) \tag{13.2}$$

даражали қатор кўринишида излаймиз. (13. 2) ни (13. 1) га қўйиб, p кўрсаткични ва a_k $(k = 1, 2, \quad .)$ ларни аниқлаймиз:

$$y' = px^{p-1}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \quad .) + x^p (a_1 + 2a_2 x + \quad .)$$

$$y'' = p(p-1) x^{p-2} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \quad . .) + px^{p-1} (a_1 + 2a_2 x +$$
$$+ \quad + px^{p-1} (a_1 + 2a_2 x + \quad .) + x^p (2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + \quad .).$$

x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаштирамиз:

$$\begin{gathered} p^2 - \nu^2 = 0, \\ [(p+1)^2 - \nu^2] a_1 = 0, \\ [(p+2)^2 - \nu^2] a_2 + a_0 = 0, \\ [(p-3)^2 - (2 + \nu^2)] a_3 + a_1 = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ [(p+k)^2 - \nu^2] a_k + a_{k-2} = 0. \end{gathered}$$

Биринчи тенгламадан $p_1 = \nu$ ва $p_2 = -\nu$ ларни аниқлаймиз. $p_1 = \nu$ дан

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{a_0}{2(2\nu - 2)},$$

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(2\nu + k)} \quad (k = 2,\ 3,\ 4, \quad .)$$

$$a_{2k+1} = 0 \quad (k = 0,\ 1,\ 2, \quad .).$$

Жуфт индексли коэффициентларни қуйидагича аниқлаш мумкин:

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2(\nu + 1)\cdot 1!}, \quad a_4 = \frac{a_0}{2^4\ (\nu + 1)\ (\nu + 2)\cdot 2!}, \quad , \tag{13.3}$$

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k}\ (\nu + 1) \quad (\nu + k)\cdot k!} \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

a_0 коэффициент ихтиёрий бўлганлиги учун уни

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma \quad (\nu + 1)} \tag{13.4}$$

$(\Gamma(\nu + 1)$ — гамма — функция) кўринишда танлаймиз. Бу ерда

$$\Gamma(\nu + 1) = \nu\Gamma(\nu) = \nu \int_0^\infty e^{-x} x^{\nu - 1}\, dx, \quad \Gamma(n + 1) = n!. \tag{13. 5}$$

(13. 3), (13. 4) ва (13. 5) тенгликлардан:

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu}\ \Gamma(k + \nu + 1)\ \Gamma(k + 1)}.$$

a_{2k+1} ва a_{2k} коэффициентлар қийматларини (13. 2) қаторга қўйиб, (13. 1) нинг ечимини ҳосил қиламиз. Бу ечим ν- тартибли I *тур Бессель функциялари* дейилади ва $J_\nu(x)$ орқали белгиланади

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k - \nu}}{\Gamma(k+1)\ \Gamma(k+\nu+1)}, \tag{13. 6}$$

$p_2 = -\nu$ қиймат учун

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k - \nu}}{\Gamma(k+1) + \Gamma(k-\nu+1)} \tag{13. 7}$$

бўлади. $J_\nu(x)$ ва $J_{-\nu}(x)$ хусусий ечимлар чизиқли боғлиқ бўлмаганлиги учун умумий ечим

$$J = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x) \tag{13. 8}$$

кўринишда бўлади.

Агар $\nu = n$ (n — бутун сон) бўлса,

$$J_{-\nu}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

бўлиб, функциялар чизиқли боғлиқ бўлади ва (13. 1) нинг умумий ечимини топиш мумкин эмас. Бу ҳолда тенгламанинг хусусий ечими тариқасида $J_\nu(x)$ функция билан чизиқли бўлмаган

$$N_n(x) = \lim_{\lambda \to n} N_\nu(x) = \lim_{\lambda \to n} \frac{J_\nu(x) \cos \lambda \pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu \pi}$$

функция олинади. $N_\nu(x)$ функция *Нейман функцияси* дейилади ва умумий ечим

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 N_\nu(x)$$

кўринишда бўлади.

Бессель функцияларининг қуйидаги хоссаларини кўрамиз: 1) Бессель функциялари учун

$$\pm \frac{dR_\nu(x)}{dx} = R_{\nu \quad 1}(x) - \frac{\nu}{x} R_\nu(x), \qquad (13.9)$$

$$R_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} R_\nu(x) - R_{\nu-1}(x) \qquad (13.10)$$

реккурент муносабатлар ўринли. Бу ерда $R_\nu(x)$ — исталган Бессель функциясини ифодалайди.

2) (13. 6) ва (13. 7) дан

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{\pi x}} \sin x, \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \qquad (13.\ 11)$$

асимптотик формулалар келиб чиқади. Умуман

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-1})\right].$$

3) Ушбу

$$x^2 y'' + xy' + (k^2 x^2 - \nu^2) y = 0 \qquad (13.\ 12)$$

тенгламанинг ечими $y = J_\nu(kx)$ кўринишда ифодаланади. Бу ечим $\rho(x) = x$ вазн билан $[0,\ 1]$ оралиқда ортогоналлик хусусиятга эга ёки

$$\int_0^l x J_\nu\left(\frac{\mu_i}{l} x\right) J_\nu\left(\frac{\mu_j}{l} x\right) dx = 0, \quad i \neq j. \qquad (13.\ 13)$$

μ_i ва μ_j лар $J_\nu(x) = 0$ тенгламанинг мусбат илдизлари. Агар $i = j$ бўлса, (13. 13) нинг ўнг томони

$$\frac{l^2}{2} J^2_{\nu+1}(\mu_i)\ (\nu > -1)$$

бўлади.

14• §. Ханкел функциялари ва уларнинг асосий хсссалари. Ёйилма тўғрисидаги теорема

(13. 1) тенгламанинг $J_\nu(x)$ ва $N_\nu(x)$ функциялардан тузилган

$$H_\nu^{(1)} = J_\nu(x) + i N_\nu(x), \quad H_\nu^{(2)} = J_\nu(x) - i N_\nu(x) \qquad (14.1)$$

чизиқли комбинациялари ҳам унинг хусусий ечимлари бўлади. Бу функциялар *Ханкел функциялари* дейилади.

Ханкел функцияларини биринчи тур цилиндрик функциялар (Бессел функциялари) орқали қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} H_\nu^{(1)} &= J_\nu(x) + i\,\frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} = \frac{J_{-\nu}(x) - e^{-i\nu\pi} J_\nu(x)}{i\sin\nu\pi} \\ H_\nu^{(2)} &= J_\nu(x) - i\,\frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} = \frac{-J_{-\nu}(x) + e^{i\nu\pi} J_\nu(x)}{i\sin\nu\pi} \end{aligned}\right\} (14.2)$$

Бу формулалар ν бутун сон бўлмаган ҳоллардагина ўринлидир; ν бутун сон, яъни $\nu = n$ бўлса, бу муносабатларнинг ўнг томони $\frac{0}{0}$ шаклдаги аниқмасликка айланади. $\nu \to n$ деб, Лопитал қоидасидан фойдаланиб лимитга ўтсак,

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + \frac{i}{\pi}\left\{\left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n} - (-1)^n \left[\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n}\right\}.$$

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - \frac{i}{\pi}\left\{\left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n} - (-1)^n \left[\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n}\right\}$$

ларга эга бўламиз.

ν бутун сонning ярмига тенг бўлган ҳолларда Ханкел функциялари элементар функциялар орқали ифодаланади, хусусан:

$$H^{(1)}_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\frac{e^{ix}}{i},$$

$$H^{(1)'}_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,e^{ix}$$

$$H^{(2)}_{\frac{1}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\frac{e^{-ix}}{i},$$

$$H^{(2)}_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,e^{-ix}$$

Агар (14. 2) да ν ни $-\nu$ га алмаштирсак (ν — ихтиёрий),

$$\left.\begin{aligned} H^{(1)}_{-\nu}(x) &= \frac{J_{\nu}(x) - e^{i\nu\pi} J_{-\nu}(x)}{-i\sin\nu\pi} = e^{i\nu\pi}\,\frac{J_{-\nu}(x) - e^{-i\nu\pi} J_{\nu}(x)}{i\sin\nu\pi} \\ H^{(2)}_{-\nu}(x) &= \frac{-J_{\nu}(x) + e^{-i\nu\pi} J_{-\nu}(x)}{-i\sin\nu\pi} = e^{-i\nu\pi}\,\frac{-J_{-\nu}(x) + e^{i\nu\pi} J_{\nu}(x)}{i\sin\nu\pi} \end{aligned}\right\}$$

ларга ёки

$$H^{(1)}_{-\nu}(x) = e^{i\nu\pi} H^{(1)}_{\nu}(x);$$

$$H^{(2)}_{-\nu}(x) = e^{-i\nu\pi} H^{(2)}_{\nu}(x)$$

ларга эга бўламиз. Агар $\nu = n$ бўлса,

$$H^{(1),\,(2)}_{-n}(x) = (-1)^n H^{(1),\,(2)}_{n}(x).$$

Ханкел функцияларини аниқлайдиган (14. 1) чизиқли комбинациялардан

$$\cos\nu x = \frac{e^{i\nu x} + e^{-i\nu x}}{2},$$

$$\sin\nu x = \frac{e^{i\nu x} - e^{-i\nu x}}{2i}.$$

Эйлер формулаларига ўхшаш ушбу

$$J_{\nu}(x) = \frac{H^{(1)}_{\nu}(x) + H^{(2)}_{\nu}(x)}{2},$$

$$N_{\nu}(x) = \frac{H^{(1)}_{\nu}(x) - H^{(2)}_{\nu}(x)}{2i}$$

тенгликларни келтириб чиқариш мумкин.

Ханкел функциялари ҳам Бессель функциялари каби хоссаларга эга:

$$\left.\begin{aligned} 1)\ \frac{dH^{(1),\,(2)}_{\nu}(x)}{dx} &= -H^{(1),\,(2)}_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} H^{(1),\,(2)}_{\nu}(x), \\ \frac{dH^{(1),\,(2)}_{\nu}(x)}{dx} &= H^{(1),\,(2)}_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} H^{(1),\,(2)}_{\nu}(x), \end{aligned}\right\} \qquad (14.3)$$

$$\left.\begin{aligned} H^{(1),\,(2)}_{\nu+1}(x) &= \frac{2\nu}{x} H^{(1),\,(2)}_{\nu}(x) - H^{(1),\,(2)}_{\nu-1}(x), \\ 2\,\frac{dH^{(1),\,(2)}_{\nu}(x)}{dx} &= H_{\nu-1} - (x) H_{\nu+1}(x). \end{aligned}\right\} \qquad (14.\ 4)$$

(14. 3) формулада $\nu = 0$ деб олсак,

$$H'_0(x) = -H_1(x)$$

бўлади.

2) Ханкел функциялари қуйидаги кўринишдаги асимптотик формулаларга эга:

$$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}[1 + 0(x^{-1})],$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-i\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}[1 + 0(x^{-1})],$$

$$H_\nu^{(1)}(ix) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-x} e^{-\frac{\nu\pi i}{2} - \frac{\pi i}{4}}[1 + 0(x^{-1})],$$

$$H_\nu^{(2)}(ix) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{x} e^{\frac{\nu\pi i}{2} + \frac{\pi i}{4}}[1 + 0(x^{-1})].$$

Энди ихтиёрий $f(x)$ функциянинг Бессель функциялари орқали қаторга ёйилишини кўрайлик. Бу функцияни $(0,\ l)$ оралиқда текис яқинлашувчи

$$f(x) = \sum_{n-1}^{\infty} C_n J_\nu\left(\frac{k_n}{l}x\right) \tag{14.5}$$

қатор кўринишида ифодалаш мумкин бўлсин. Бу ерда $0 < k_1 < k_2 <$ $<$ $< k_n$ лар $J_\nu(x)$ функциянинг илдизлари, $\nu > -1$ ҳақиқий сонлар.

(14.5) ни $xJ_\nu\left(\frac{km}{l}x\right)$ га кўпайтирамиз, бу ерда m бирор бутун сон. Ҳосил бўлган кўпайтмани 0 дан l гача интеграллаймиз:

$$\int_0^l xf(x)\, J_\nu\left(\frac{k_m}{l}x\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^l xJ_\nu\left(\frac{k_n}{l}x\right) J_\nu\left(\frac{k_m}{l}x\right) dx$$

ёки (13.13) ни ва $\int_0^l xJ_\nu^2\left(\frac{k}{l}x\right)dx = \frac{l^2}{2} J_{\nu+1}^2(k)$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$\int_0^l xf(x)J_\nu\left(\frac{k_m}{l}x\right)dx = C_m \int_0^l xJ_\nu^2\left(\frac{k_m}{l}x\right)dx = C_m\frac{l^2}{2} J_{\nu+1}^2(k_m)$$

га эга бўламиз. Бу ердан

$$C_m = \frac{2}{l^2 J_{\nu+1}^2(k_m)} \int_0^l xf(x)\, J_\nu\left(\frac{k_m}{l}x\right) dx, \quad (m = 1,\ 2,\ \ .) \tag{14.6}$$

Бу формула билан *Фурье — Бессель қатори* деб аталувчи (14.5) қаторнинг барча коэффициентлари аниқланади.

Функцияни Фурье-Бессель қаторига ёйилиш шартини аниқловчи теоремани исботсиз келтирамиз: агар

$$\int_0^l t^{\frac{1}{2}} \, |f(t)| \, dt$$

интеграл мавжуд бўлиб, бўлакли узлуксиз $f(x)$ функция $0 < a < b < l$ шартни қаноатлантирувчи (a, b) оралиқда ўзгариши чегараланган функция бўлса, у ҳолда Фурье—Бессель қатори яқинлашувчи бўлиб, $\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$ йиғиндига эга бўлади, яъни қатор $f(x)$ функцияни унинг барча узлуксиз нуқталарида ифодалайди.

Агар $f(x)$ функция (a, b) оралиқни $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ нуқталар билан ихтиёрий равишда бўлакларга бўлганда

$$\sum_{m=1}^{n} |f(x_m) - f(x_{m-1})|$$

йиғинди $x_m (0 < m < n)$ нуқта ихтиёрий танланганда n га боғлиқ бўлмаган M аниқ юқори чегарага эга бўлса, у ҳолда бу функция (a, b) оралиқда *ўзгариши чегараланган функция* деб аталади.

15-§. Цилиндрик соҳада тўлқин тенгламаси. Аралаш масаланинг ечими

Цилиндрик (r, φ, z) координаталар системасида тўлқин тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{15.1}$$

кўринишда бўлади, бундай тенгламаларга доиравий мембрананинг тебраниши, чексиз қувурда газнинг радиал тебраниши ва ҳоказо масалалар келади. Шулардан амалиётда кўп учрайдиган радиуси l бўлган айлана чегараси бўйича маҳкамланган мембрананинг тебранишини кўрайлик. Бу масала

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{15.2}$$

тенгламанинг

$$u|_{r=l} = 0 \tag{15.3}$$

чегаравий шартни ва

$$u|_{t=0} = \varphi(r, \varphi), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(r, \varphi) \tag{15.4}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $u(r, \varphi, t)$ ечимини топиш масаласидир.

Ечимни Фурье усули бўйича

$$u(r, \varphi, t) = T(t)\,v(r, \varphi) \tag{15.5}$$

кўринишда излаймиз. (17.5) ни (17.2) га қўйиб

$$T''(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0, \qquad (15.6)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \lambda^2 v = 0 \qquad (15.\ 7)$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз. (15.6) нинг умумий ечими

$$T(t) = C_1 \cos a\lambda t + C_2 \sin a\lambda t \qquad (15.8)$$

кўринишда бўлади. (15.7) ни *ечишни* $v|_{r=l} = 0$ чегаравий шартни қаноатлантирувчи хос функцияларни топиш масаласига келтирдик. v функиия $r = 0$ нуқтада чегараланган бўлиб, даври 2π бўлган функциядир. Масаланинг ечимини

$$v(r,\ \varphi) = R(r)\ \Phi(\varphi) \qquad (15.9)$$

кўринишда излаймиз. (15.9) ни (15.7) га қўйиб

$$\Phi''(\varphi) + p^2\Phi(\varphi) = 0, \qquad (15.10)$$

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi),\ \Phi'(\varphi) = \Phi'(\varphi + 2\pi), \qquad (16\ 11)$$

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \left(\lambda^2 - \frac{P^2}{r^2}\right)R = 0, \qquad (15.12)$$

$$R(l) = 0, \qquad (15.13)$$

$R(0)$ — чекли катталик, тенгламаларни ҳосил қиламиз. (15.10) — —(15.11) масаланинг нолдан фарқли даврий бўлган ечими $p = n$ бўлганда мавжуддир.

(15.12) нинг умумий ечими $p = n$ бўлганда

$$R_n(r) = D_n J_n(\lambda r) + E_n N_n(\lambda r)$$

кўринишда бўлади. (15.13) шартга асосан

$$J_n(\lambda l) = 0 \text{ ёки } J_n(\mu) = 0 \qquad (15.14)$$

тенглама чексиз кўп

$$\mu_1^{(n)},\ \mu_2^{(n)},$$

ечимларга эга. Бу ҳолда $\lambda_{nm} = \frac{\mu_m^{(n)}}{l}$ $(m = 1,\ 2,\quad n = 0,\ 1,\ 2,\ .)$. Бу хос қийматга

$$R_{nm}(r) = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l}r\right).$$

хос функциялар мос келади. Шунинг учун (15.9) га асосан

$$v_{n,m}(r,\varphi) = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l}r\right)[A_{n,m}\cos n\varphi + B_{n,m}\sin n\varphi].$$

ечимни ҳосил қиламиз. Демак,

$$u_{nm}(r,\varphi,t) = \left[C_{1nm}\cos\frac{\mu_m^{(n)}a}{l}t + C_{2nm}\sin\frac{\mu_m^{(n)}a}{l}t\right]\times$$

$$\times [A_{n,m}\cos n\varphi + B_{n,m}\sin n\varphi] J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l} r\right).$$

(15.4) бошланғич шартларни қаноатлантириши учун қуйидаги қаторни тузамиз:

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(A^{(1)}_{n,m}\cos\frac{\mu_m^{(n)} a}{l} t + A^{(2)}_{n,m}\sin\frac{\mu_m^{(n)} a}{l} t\right)\cos n\varphi + \right.$$

$$\left. + \left(B^{(1)}_{n,m}\cos\frac{\mu_m^{(n)} a}{l} t + B^{(2)}_{n,m}\sin\frac{\mu_m^{(n)} a}{l} t\right)\sin n\varphi\, J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l} r\right). \quad (15.15)$$

(15.4) бошланғич шартлардан, (13.23), (14.2) дан фойдаланиб, умумий ечимни ёзамиз:

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} M_{nm} J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)} r}{l}\right) \sin(n\varphi + \psi_{nm}) \sin\left(\frac{\mu_m^{(n)} at}{l} + \right.$$

$$\left. + \nu_{nm}\right).$$

Бу ерда M_{nm}, ψ_{nm}, ν_{nm} лар $A^{(1)}_{n,m}$, $A^{(2)}_{n,m}$, $B^{(1)}_{n,m}$, $B^{(2)}_{n,m}$ коэффициентлар орқали ифодаланади.

Б. АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР

1-§. Биринчи тартибли икки ўзгарувчили хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар

Ушбу параграфда биринчи тартибли икки ўзгарувчили хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимларини топишга доир мисоллар қаралади.

1-мисол. $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$ тенгламани қаноатлантирувчи $z = z(x, y)$ функцияни топинг.

Ечиш. Берилган тенгламани интеграллаймиз ва

$$z = x + \varphi(y)$$

функцияга эга бўламиз, бу ерда $\varphi(y)$ — ихтиёрий функция. Ҳақиқатан ҳам топилган $z(x, y)$ функция берилган тенгламани қаноатлантирувчи функциядир.

2-мисол.

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$$

тенгламанинг умумий интегралини топинг.

Ечиш.

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

системани қараймиз.

$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$ тенгламани ечиб, $\frac{y}{x}=C_1$ га эга бўламиз. $\frac{dx}{x}=\frac{dz}{z}$ тенгламани ечиб, $\frac{z}{x}=C_2$ га эга бўламиз. Шунинг учун

$$\Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)=0 \text{ ёки } \frac{z}{x}=\Psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

тенгламанинг умумий интегралидир. Бу ерда Φ ва Ψ ихтиёрий функциялар.

3-мисол. $(x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=0$ тенгламанинг умумий интегралини топинг.

Ечиш. Қуйидаги системани қараймиз:

$$\frac{dx}{x^2+y^2}=\frac{dy}{2xy}=\frac{dz}{0}.$$

Пропорциянинг хоссасидан фойдаланиб, $\frac{dx}{x^2+y^2}=\frac{dy}{2xy}$ тенгламани

$$\frac{dx+dy}{x^2+y^2+2xy}=\frac{dx-dy}{x^2+y^2-2xy}$$

ёки

$$\frac{d(x+y)}{(x+y)^2}=\frac{d(x-y)}{(x-y)\cdot}$$

кўринишда ёзиб оламиз.

Юқоридаги тенгламани интеграллаб,

$$-\frac{1}{x+y}=-\frac{1}{x-y}+C, \quad \frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}=C$$

тенгликка эга бўламиз. Бу тенгликдан

$$\frac{2y}{x^2-y^2}=C \text{ ёки } \frac{y}{x^2-y^2}=C_1$$

эканини топамиз.

Системанинг иккинчи тенгламасидан $dz=0$ ёки $z=C_2$ экани келиб чиқади. Шунинг учун умумий интеграл

$$\Phi\left(\frac{y}{x^2-y^2}, z\right)=0 \text{ ёки } z=\Psi\left(\frac{y}{x^2-y^2}\right)$$

кўринишда бўлади. Юқоридагидек Φ ва Ψ — ихтиёрий функциялар.

1-дарсхона топшириқлари

Қуйидаги биринчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг умумий интегралларини топинг:

1. $yz\frac{\partial z}{\partial x}+xz\frac{\partial z}{\partial y}=-2xy.$

Ж: $x^2+\frac{z^2}{2}=\psi(x^2-y^2).$

2. $\frac{\partial z}{\partial x}\sin x + \frac{\partial z}{\partial y}\sin y = \sin z.$

Ж: $\operatorname{tg}\left(\frac{z}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\psi\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{y}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right).$

1-мустақил иш топшириқлари

Қуйидаги биринчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг умумий интегралларини топинг:

1. $yz\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = xy.$

Ж: $z^2 = x^2 + \psi(y^2 - x^2).$

2. $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$

Ж: $z = \psi(x^2 + y^2).$

2-§. Икки ўзгарувчили иккинчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни каноник кўринишга келтириш. Характеристик тенглама

Икки ўзгарувчили иккинчи тартибли хусусий ҳосилали ушбу

$$A(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

тенгламани каноник шаклга келтириш учун

$$A\,dy - (B + \sqrt{B^2 - AC})\,dx = 0,$$

$$A\,dy - (B - \sqrt{B^2 - AC})\,dx = 0$$

тенгламаларга ажралувчи

$$A(dy)^2 - 2Bdxdy + C(dx)^2 = 0$$

характеристик тенглама тузилиб, уларнинг умумий интеграллари топилади.

1-мисол. Ушбу $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ тенгламани каноник кўринишга келтиринг.

Ечиш. $A = x^2$, $B = 0$, $C = -y^2$, $\Delta = B^2 - AC = x^2y^2 > 0$. Демак, бу гиперболик тенгламадир.

Характеристик тенгламани тузамиз:

$$x^2(dy)^2 - y^2(dx)^2 = 0$$

ёки

$$(xdy + ydx)(xdy - ydx) = 0.$$

Бу қуйидаги дифференциал тенгламаларга ажралади:

$$\left.\begin{aligned} xdy + ydx = 0. \\ xdy - ydx = 0 \end{aligned}\right\}$$

Буларни интеграллаб, $xy, = C_1$, $\frac{y}{x} = C_2$ тенгликларга келамиз. Берилган тенгламани каноник кўринишга келтириш учун $\xi = xy$ ва $\eta = \frac{y}{x}$ янги ўзгарувчиларни киритамиз. Улардан фойдаланиб, тегишли ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} y - \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{y^2}{x^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} x + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} y^2 - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{y^2}{x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \frac{y^2}{x^4} + 2 \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{y}{x^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Юқоридагиларни берилган тенгламага қўйиб, соддалаштирсак

$$-4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} y^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{y}{x} = 0$$

ёки

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{1}{xy} = 0$$

ёки

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

каноник кўринишга эга бўламиз.

2-мисол. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \sin^2 x \quad 2y \sin x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ тенгламани каноник кўринишга келтиринг.

Ечиш. $A = \sin^2 x$, $B = -y \sin x$, $C = y^2$ бўлгани учун

$$\Delta = B^2 - AC = y^2 \sin^2 x - y^2 \sin^2 x = 0.$$

Демак, юқоридаги тенглама параболик тенгламадир.

$$\sin^2 x (dy)^2 + 2y \sin x dx dy + y^2 (dx)^2 = 0$$

ёки

$$(\sin x dy + y dx)^2 = 0$$

берилган тенгламанинг характеристик тенгламасидир. $\sin x dy + y dx = 0$ тенгламани интеграллаб,

$$\ln y + \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \ln C \text{ ёки } y \operatorname{tg} \frac{x}{2} = C$$

ни ҳосил қиламиз.

Берилган тенгламани каноник шаклга келтириш учун

$$\left.\begin{aligned}\xi &= y\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2},\\ \eta &= y\end{aligned}\right\}$$

алмаштиришлардан фойдаланиб, тегишли ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial z}{\partial \xi}\,y\sec^2\frac{x}{2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} + \frac{\partial z}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{4}\,\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\,y^2\sec^4\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\,y\,\frac{\partial z}{\partial \xi}\sec^2\frac{x}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial \eta}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial \eta}\right)y\sec^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial z}{\partial \xi}\sec^2\frac{x}{2}.$$

Топилган хусусий ҳосилаларни тенгламага қўйиб,

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial z}{\partial \xi}\,y\sec^2\frac{x}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\,\sin^2 x + y^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} - \frac{\partial z}{\partial \xi}\,y\sec^2\frac{x}{2}\sin x = 0$$

ёки

$$y\,\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = \frac{\partial r}{\partial \xi}\sin x$$

тенгликка эга бўламиз.

$$\sin x = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}},\quad \mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = \frac{\xi}{\eta}$$

бўлганини эътиборга олсак, тенглама

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = \frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2}\,\frac{\partial z}{\partial \xi}$$

шаклдаги каноник кўринишга келади

3-мисол.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

тенгламани каноник кўринишга келтиринг.

Ечиш. $A = 1$, $B = -1$, $C = 2$, $\Delta = B^2 - AC = 1 - 1.\ 2 = -$ $-1 < 0$ бўлгани учун юқоридаги тенглама эллиптик тенгламадир. Энди характеристик тенгламани тузамиз:

$$(dy)^2 + 2dxdy + 2(dx)^2 = 0,$$

бундан $(y')^2+2y'+2=0$ ёки $y'=-1\pm i$ ни ҳосил қиламиз. Демак,

$$\left.\begin{aligned} y+x-ix&=C_1,\\ y+x+ix&=C_2\end{aligned}\right\}$$

характеристеристик тенгламаларга эга бўламиз. Ушбу

$$\begin{aligned}\xi&=y+x,\\ \eta&=x\end{aligned}$$

янги ўзгарувчиларни киритамиз. Булардан фойдаланиб хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial \eta},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+2\,\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial \eta},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}.$$

Буларни берилган тенгламага қўйиб соддалаштирсак, тенглама

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}=0$$

каноник кўринишга келади.

2-дарсхона топшириқлари

Қуйидаги тенгламаларни каноник кўринишга келтиринг:

1. $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

Ж: $\xi=\dfrac{y}{x},\quad \eta=y,\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}=0.$

2. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-3\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\dfrac{\partial z}{\partial x}+6\dfrac{\partial z}{\partial y}=0.$

Ж: $\xi=x+y,\quad \eta=3x+y,\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial \eta}-\dfrac{\partial z}{\partial \xi}=0.$

3. $\dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{1}{y^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

Ж: $\xi=y^2;\ \eta=x^2,$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial z}{\partial \xi}+\frac{1}{\eta}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)=0.$$

2-мустақил иш топшириқлари

Қуйидаги тенгламаларни каноник кўринишга келтиринг:

1. $(1+x^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(1+y^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

Ж: $\xi=\ln(x+\sqrt{1+x^2}),\quad \eta=\ln(y+\sqrt{1+y^2}),$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$$

2. $\sin^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

Ж: $\xi = y \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \eta = y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$

3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (3 + \sin^2 x) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

Ж: $\xi = 2x + \sin x + y,$

$\eta = 2x - \sin x - y,$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\eta - \xi}{32} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0.$$

3- §. Бир жинсли тўлқин тенгламасм учун Коши масаласини Даламбер формуласи билан ечиш

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

бир жинсли тўлқин тенгламасининг

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини (Коши масаласини) топишда Даламбернинг қуйидагн формуласидан фойдаланилади:

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(x)\, dx.$$

1- мисол.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

тенгламанинг

$$u(x, 0) = x^2 \text{ ва } \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

Ечиш: $a = 1$, $\varphi(x) = x^2$ ва $\psi(x) = 0$ эканлигини эътиборга олиб, Даламбер формуласига биноан ечимни топамиз:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left((x - t)^2 + (x + t)^2 \right) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} 0 \cdot dx =$$

2- мисол.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^3}$$

тенгламанинг

$$u(x,\ 0) = \sin 2x,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \cos x$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимининг $t = \frac{\pi}{2}$ вақтдаги қийматини ҳисобланг.

Ечиш. $a = 3$, $\varphi(x) = \sin 2x$, $\psi(x) = \cos x$ эканлигини эътиборга олиб, Даламбер формуласидан фойдаланамиз:

$$u(x,\ t) = \frac{\sin 2(x-3t) + \sin 2(x+3t)}{2} + \frac{1}{2\cdot 3}\int\limits_{x-3t}^{x+3t} \cos x dx =$$

$$= \frac{2\sin 2x\ \cos 6t}{2} + \frac{1}{6}\left(\sin(x+3t) - \sin(x-3t)\right) = \sin 2x \cos 6t +$$

$$+ \frac{1}{3}\ \sin 3t \cos 2x.$$

Топилган $u(x,\ t)$ га $t = \frac{\pi}{2}$ қийматни қўйиб, ечимни ҳосил қиламиз, яъни

$$u\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = \sin\ 2x\ \cos 6\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\ \sin 3\cdot\frac{\pi}{2}\cos 2x = -\sin 2x -$$

$$- \frac{1}{3}\cos 2x.$$

3- дарсхона топшириқлари

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тенгламанинг $u(x,\ 0) = 0$ ва $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = x$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

Ж: $u(x,\ t) = xt$.

2. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тенгламанинг

$$u(x,\ 0) = 0 \text{ ва } \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \cos x$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

Ж: $u(x,\ t) = \frac{1}{a}\cos x \sin at$.

3. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тенгламанинг

$$u(x, 0) = \sin x \text{ ва } \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 1$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимининг $t = \frac{\pi}{2a}$ вақтдаги қийматини ҳисобланг.

Ж: $u\left(x, \frac{\pi}{2a}\right) = \frac{\pi}{2a}$

3- мустақил иш топшириқлари

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тенгламанинг

$$u(x, 0) = \sin x \text{ ва } \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

Ж: $u(x, t) = \sin x \cos t$.

2. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тенгламанинг

$$u(x, 0) = 0 \text{ ва } \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t \Rightarrow 0} = 30 \sin x$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

Ж: $u(x, t) = 6 \sin x \ \sin 5t$.

3. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тенгламанинг

$$u(x, 0) = \frac{x}{1 + x^2} \text{ ва } \left.\frac{\partial u}{\partial i}\right|_{t=0} = \sin x$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимининг $t = \pi$ вақтдаги қийматини ҳисобланг.

Ж: $u(x, \pi) = \frac{1}{2}\left[\frac{x+\pi}{1+(x+\pi)^2} + \frac{x-\pi}{1+(x-\pi)^2}\right]$.

4- §. Бир ўлчовли бир жинсли бўлмаган тўлқин тенгламалари учун Коши масаласини Дьюамель формуласидаи фойдаланиб ечиш

Бир жинсли бўлмаган

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

тўлқин тенгламасининг $-\infty < x < +\infty$, $t > 0$ да аниқланган ва

$$u\,|'_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини (Коши масаласи) топиш учун қуйидаги Дьюамель формуласидан фойдаланилади:

$$u(x,\ t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(x)\,dx+$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\left[\ \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\ \tau)\,d\xi\right]d\tau.$$

Мисол. Қуйидаги бир жинсли бўлмаган

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2x$$

тўлқин тенгламасининг

$$u\Big|_{t=0}=x^2,\quad \frac{\partial u}{\partial t}=\cos x$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини Дьюамель формуласидан фойдаланиб топинг.

Ечиш. $a=2$ деб олиб, Дьюамель формуласини қўллаймиз:

$$u(x,\ t)=\frac{(x-2t)^2+(x+2t)^2}{2}+\frac{1}{4}\int\limits_{x-2t}^{x+2t}\cos x dx+$$

$$+\frac{1}{4}\int\limits_0^t\left[\ \int\limits_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)}2xdx\right]d\tau=u_1(x,\ t)+u_2(x,\ t)+u_3(x,\ t).$$

Ҳар қайси қўшилувчини алоҳида ҳисоблаймиз:

$$u_1(x,\ t)=\frac{x^2-4xt+4t^2+x^2+4xt+4t^2}{2}=x^2+4t^2,$$

$$u_2(x,\ t)=\frac{1}{4}\int\limits_{x-2t}^{x+2t}\cos xdx=\frac{1}{4}\sin x\Big|_{x-2t}^{x+2t}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sin(x+2t)-\sin(x-2t)\right)=\frac{1}{2}\sin 2t\cos x.$$

$$u_3(x,\ t)=\frac{1}{4}\int\limits_0^t\left[2xdx\int\limits_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)}\right]d\tau=\frac{1}{4}\int\limits_0^t\left[x^2\Big|_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-2\tau)}\right]d\tau=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^t[(x+2t-2\tau)^2-(x-2t+2\tau)^2]d\tau=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^t 2x\cdot(4t-4\tau)\,d\tau=2x\int\limits_0^t(t-\tau)\,d\tau=$$

$$=2xt^2-xt^2=xt^2.$$

Топилган $u_1(x, t)_1$ $u_2(x,t)$, $u_3(x,t)$ ларни инобатга олиб, масаланинг ечимини ёзамиз:

$$u(x,t) = x^2 + t^2 + xt^2 + \frac{1}{2}\sin 2t \cos x.$$

4- дарсхона топшириқлари

1. Бир жинсли бўлмаган

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^3 u}{\partial x^2} + 4\,xt$$

тўлқин тенгламасининг

$$u\Big|_{t=0} = e^x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = x$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини Дьюамель формуласидан фойдаланиб топинг.

$$Ж\text{: } u(x, t) = \frac{e^{x+3t} + e^{x-3t}}{2} + xt + \frac{2xt^3}{3}.$$

2. Бир жинсли бўлмаган

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\cdot t$$

тўлқин тенгламасининг

$$u\Big|_{t=0} = e^{-x}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 5x$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини Дьюамель формуласидан фойдаланиб топинг.

$$Ж\text{: } u(x, t) = \frac{e^{-x+4t} + e^{-x-4t}}{2} + 5xt + \frac{xt^3}{6}.$$

4- мустақил иш топшириқлари

1. Бир жинсли бўлмаган

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2t$$

тўлқин тенгламаси учун

$$u\Big|_{t=0} = \sin x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 2$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини Дьюамель формуласидан фойдаланиб топинг. Ж: $u(x, t) = \sin x \cos t + 2t + \frac{t^3}{3}$.

2. Бир жинсли бўлмаган

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\,\frac{\partial^2 u}{\partial x} + xt$$

тўлқин тенгламаси учун

$$u\,\Big|_{t=0} = 2\cos 5x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 8x$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини Дьюамель формуласидан фойдаланиб топинг. Ж: $u(x,\ t) = 2\cos 5x \cos 10t + 8xt + \frac{xt^3}{2}$.

5- §. Лаплас тенгламасининг баъзи содда ечимлари

Қуйида Лаплас тенгламаси учун бир нечта содда ички чегаравий масалаларнинг ечимлари билан танишиб чиқамиз.

1- масала.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Лаплас тенгламасининг

$$u\,\Big|_{x^2+y^2=a^2} = A$$

шартни қаноатлантирувчи $x^2 + y^2 \leqslant a^2$ доирадаги ечимини топинг.

Ечиш. $u = A$, чунки

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

ва

$$u(x,\ y)\,\Big|_{x^2+y^2=a^2} = A\,\Big|_{x^2+y^2\leqslant a^2} = A.$$

2- масала. Лаплас тенгламасининг

$$u\,\Big|_{x^2+y^2\leqslant a^2} = \frac{Ax}{a}$$

шартни қаноатлантирувчи

$$x^2 + y^2 \leqslant a^2$$

доирадаги ечимини топинг.

Ечиш. $u(x,\ y)\Big|_{x^2+y^2=a^2} = \frac{Ax}{a}$, чунки

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{A}{a},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

$$u(x,\ y)\,\Big|_{x^2+y^2\leqslant a^2} = \frac{Ax}{a}.$$

3- масала. Лаплас тенгламасининг

$$u\,\Big|_{x^2+y^2=a^2} = \frac{Ay^2}{a^2} + \frac{Bx^2}{a^2}$$

шартни қаноатлантирувчи,

$$x^2 + y^2 \leqslant a^2$$

доирадаги ечимини топинг.

Ечиш. $v(x,\ y) = \frac{A+B}{2} + \frac{B-A}{2a^2}(x^2 - y^2)$

функцияни оламиз. $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$ десак, чегаравий шарт

$$u\,\Big|_{x^2+y^2=a_2} = A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi$$

кўринишни олади. $v(x,\ y)$ функция эса ушбу $v(x,\ y) = \frac{A+B}{2} + \frac{B-A}{2a^2}(a^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi) = A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi$ кўринишга келади.

Демак, $v(x,\ y)$ чегаравий шартни қаноатлантиради. Энди хусусий ҳосилаларни ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{B-A}{a^2}x,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{BA}{a^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{B-A}{a^2}y,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{A-B}{a^2}.$$

Юқоридан маълумки, $v(x,\ y)$ тенгламани ҳам қаноатлантиради. Демак, $v(x,\ y)$ ечим экан.

5- дарсхона топшириқлари

Лаплас тенгламасининг

1. $u|_{x^2+y^2=a^2} = Axy$

ёки

2. $u|_{x^2+y^2=a^2} = A + \frac{B}{a}y$

шартни қаноатлантирувчи

$$x^2 + y^2 \leqslant a^2$$

доирадаги ечимни топинг.

Ж: 1. $u(x,\ y) = Axy$.

2. $u(x,\ y) = A + \frac{B}{a}y$.

Лаплас тенгламасининг

$$u\big|_{x^2+y^2=a^2} = A + By$$

шартни қаноатлантирувчи

$$x^2 + y^2 \leqslant a^2$$

доирадаги ечимини топинг.

Ж: $u(x,\ y) = A + By$.

6- §. Лаплас тенгламасини тўғри тўртбурчакда ўзгарувчиларни ажратиш усули билан ечиш

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Лаплас тенгламасини $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ тўғри тўртбурчакда

$$u\big|_{y=0} = f(x), \qquad u\big|_{y=b} = \varphi(x),$$

$$u\big|_{x=0} = \psi(y), \qquad u\big|_{x=a} = \chi(y)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини ўзгарувчиларни ажратиш усули билан ечишда (топишда)

$$f(0) = \psi(0), \quad f(a) = \chi(0),$$
$$\chi(b) = \varphi(a), \quad \varphi(0) = \psi(b)$$

шартлар ўринли бўлиши керак.

Агар қўйилган бу шартлар бажарилса, масаланинг ечими ўзгарувчиларни ажратиш усули билан топилади ва у қуйидагига тенг

$$u(x,\ y) = u_0(x,\ y) + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\overline{\varphi}_n \frac{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{a} y}{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}\, \mathrm{b}} + \right.\right.$$

$$\left. + \overline{f}_n \frac{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}(\mathrm{b} - \mathrm{y})}{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}\, \mathrm{b}}\right] \operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}\, x + \left[\overline{\chi}_n \frac{\mathrm{h}\frac{\pi n}{b}\, x}{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{b}\, a} + \right.$$

$$\left.\left. + \overline{\psi}_n \frac{\operatorname{sh}\frac{\pi a}{b}(\quad - \chi)}{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{b}\, a}\right] \mathrm{h}\frac{\pi n}{b}\, y\right\},$$

Бу ерда:

$$u_0(x,\ y) = A + Bx + Cy + Dxy,$$

$$A = f(0),\ B = \frac{f_{(a)} - f_{(0)}}{a},$$

$$C = \frac{\psi(b) - \psi(0)}{b},$$

$$D = \frac{\varphi(a) - \varphi(0) - f(a) + f(0)}{ab},$$

$$\overline{f}_n = \frac{2}{a}\int_0^a (f(x) - u_0(x, 0)) \sin\frac{\pi n}{a} x dx,$$

$$\overline{\varphi}_n = \frac{2}{a}\int_0^a (\varphi(x) - u_0(x, b)) \sin\frac{\pi n}{a} x dx,$$

$$\overline{\chi}_n = \frac{2}{b}\int_0^b (\chi(y) - u_0(0, y)) \sin\frac{\pi n}{b} y dy,$$

$$\psi_n = \frac{\ }{l}\int_0^b (\psi(y) - u_0(0, y)) \sin\frac{\pi n}{b} y dy.$$

Мисол. Лаплас тенгламасининг $0 < x < 1,\ 0 < y < 2$ тўғри тўртбурчакда

$$u\,\Big|_{y=0} = x,\ u\,\Big|_{y=}\ := x + 2,$$

$$u\,\Big|_{x=0} = y,\ u\,\Big|_{x=1} = 1 + y$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

Ечиш. $f(x) = x,\ \varphi(x) = x + 2,$

$$\psi(y) = y,\ \chi(y) = 1 + y,$$
$$a = 1,\ b = 2$$

эканлигини ҳисобга олиб, юқоридаги шартларнинг ўринли бўлишини текширамиз:

$$f(0) = 0,\ \psi(0) = 0,$$
$$f(1) = 1,\ \chi(0) = 1,$$
$$\chi(2) = 3,\ \varphi(1) = 3,$$
$$\varphi(0) = 2,\ \psi(2) = 2.$$

Демак, тегишли шартлар бажарилди.

Энди A, B, C, D коэффициентларни аниқлаймиз:

$$A = f(0) = 0,$$

$$B = \frac{f(a) - f(0)}{1} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$C = \frac{\psi(2)-\psi(0)}{2} = \frac{2-0}{2} = 1,$$
$$D = \frac{\varphi(1)-\varphi(0)-f(1)+f(0)}{2} = 0.$$

Шундай қилиб,

$$u_0(x,\ y) = x + y.$$

Тегишли интегралларни ҳисоблаб, $\overline{\varphi}_n = \overline{f}_n = \overline{\chi}_n = \overline{\psi}_n = 0$ эканлигига ишонч ҳосил қилиш мумкин. Демак, ечим $u(x,\ y) = x + y$ дан иборат бўлади.

6- дарсхона топшириқлари

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ Лаплас тенгламасининг $0 \leqslant x \leqslant 3,\ 0 \leqslant y \leqslant 5$ тўғри тўртбурчакдаги

$$u(x,\ 0) = 0,\ u(x,\ 5) = 0,$$
$$u(0,\ y) = Ay(5-y),$$
$$u(3,\ y) = 0$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

$$Ж\colon\ u(x,\ y) = \frac{200A}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}\frac{(2n+1)(3-x)\pi}{5}}{(2n+1)^2}\ \frac{\sin\frac{(2n+1)\pi y}{5}}{\operatorname{sh}\frac{3(2n+1)\pi}{5}}.$$

2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ Лаплас тенгламасининг $0 \leqslant x \leqslant \pi.\ 0 \leqslant y \leqslant \pi$ тўғри тўртбурчакдаги

$$u(x,\ 0) = 0,\ u(x,\ \pi) = 0,$$
$$u(0,\ y) = Ay(\pi - y),$$
$$u(\pi,\ y) = 0$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

$$Ж\colon\ u(x,\ y) = \frac{8A}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}(2n+1)(\pi - x)}{\operatorname{sh}(2n+1)\pi}\ \frac{\sin(2n+1)y}{(2n+1)^3}.$$

6- мустақил иш топшириқлари

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ Лаплас тенгламасининг $0 \leqslant x \leqslant 10,\ 0 \leqslant y \leqslant 20$ тўғри тўртбурчакдаги

$$u(x,\ 0) = 0,\ u(x,\ 20) = 0,$$
$$u(0,\ y) = 30\,y(20 - y),$$

$$u(10,\ y) = 0$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

$$Ж:\ u(x,\ y) = \frac{96000}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2n+1)\ (10-x)\,\pi}{20}}{(2n+1)^3} \times$$

$$\times \frac{\sin \frac{(2n+1)\,\pi\, y}{20}}{\operatorname{sh} \frac{(2n-1)\,\pi}{2}}$$

2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ Лаплас тенгламасининг $0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi$ тўғри тўртбурчакдаги

$$u(x,\ 0) = 0,\ u(x,\ 2\pi) = 0,$$
$$u(0,\ y) = \pi y\,(2\pi - y),$$
$$u(1,\ y) = 0$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

$$Ж:\ u(x,\ y) = 32 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2n+1)\ (1-x)}{2}\ \ \sin \frac{(2n+1)\,y}{2}}{(2n+1)^3 \cdot \operatorname{sh} \frac{2n+1}{2}}$$

7- §. Чегараланган торнинг эркин ва мажбурий тебраниш тенгламаларини ўзгарувчиларни алмаштириш усули билан ечиш

Чегараланган торнинг эркин тебраниши тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ни ушбу бошланғич шартлар

$$u|_{t=0} = \varphi(x),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$$

ва

$$u|_{x=0} = 0,$$
$$u|_{x=l} = 0$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимини ўзгарувчиларни алмаштириш усулидан фойдаланиб топсак, у

Буни эътиборга олсак, $C_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos x \sin nxdx =$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{\pi(n+1)}, & n — \text{тоқ}, \\ \dfrac{2}{\pi(n-1)}, & n — \text{жуфт} \end{cases}$$

$$D_n = \frac{2}{an\pi}\int\limits_0^{\pi} 2\cos x \sin nxdx = \frac{4}{an\pi} I_n =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4}{an\pi(n+1)}, & n — \text{тоқ}, \\ \dfrac{4}{an\pi(n-1)}, & n — \text{жуфт}. \end{cases}$$

Демак,

$$u(x,\ t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi(k+1)} \cos a(2k-1)t + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{an\pi(k+1)} \sin a(2k-1)t\right) \sin(2k-1)x +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi(2k-1)} \cos 2akt + \frac{4}{an\pi(2k-1)} \sin 2akt\right) \sin 2kx.$$

Энди чегараланган торнинг мажбурий тебраниш тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,\ t)$$

ни ушбу

$$u|_{t=0} = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi\ x)$$

бошланғич ва

$$u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=l} = 0$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топамиз.

Ечимни ушбу кўринишда излаймиз:

$$u(x,\ t) = v(x,\ t) + w(x,\ t).$$

Бу ердаги $v(x,\ t)$ функцияни шундай танлаймизки, у бир жинсли

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

тенгламани

$$v\Big|_{t=0}=\varphi(x),\quad \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x)$$

бошланғич ва

$$v\Big|_{x=0}=0,\ v\Big|_{x=l}=0$$

чегаравий шартларда қаноатлантирсин. $w(x,\ t)$ функция эса

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+f\ (x,\ t)$$

тенгламани

$$w\Big|_{t=0}=0,\quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0}=0$$

бошланғич ва

$$w\Big|_{x=0}=0,\quad w\Big|_{x=l}=0$$

чегаравий шартларда қаноатлантирсин.

Чегараланган торнинг эркин тебраниш тенгламасининг ечими ушбу $w(x,\ t)$ йиғинди кўринишида топилади:

$$w(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k(t)\ \sin\frac{k\pi x}{l},$$

бу ерда

$$\gamma_k(t)=\frac{l}{k\pi a}\int_0^t g_k(\tau)\ \sin\frac{k\pi a(t-\tau)}{l}d\tau,$$

$$g_k(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f\ (x,\ t)\ \sin\frac{k\pi x}{l}dx.$$

7- дарсхона топшириқлари

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тенгламанинг

$$u(x,\ 0)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0$$

бошланғич ҳамда

$$u(0,\ t)=0,\ u\ (l,\ t)=A\ \sin\omega t$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

$$Ж:\ u(x,\ t) = \frac{A\sin\omega x\ \sin x\ \sin\omega t}{\sin\omega l} +$$

$$+\frac{2A\omega}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\omega^2-\frac{n^2\pi^2}{l^2}}\sin\frac{n\pi t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

2. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+5x(x-1)$ тенгламанинг

$$u(x,\ 0)=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0$$

бошланғич ҳамда

$$u(0,\ t)=0,\ u(1,\ t)=0$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

$$Ж:\ u(x,\ t)=-\frac{5}{12}x(x^3-2x^2+1)+$$

$$+\frac{8}{\pi^5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi t\ \ \sin(2n+1)\pi x}{(2n+1)^5}$$

7- мустақил иш топшириқлари

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тенгламанинг

$$u(x,\ 0)=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0$$

бошланғич ҳамда

$$u(0,\ t)=0,\quad u(\pi,\ t)=\sin\frac{1}{2}t$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

$$Ж:\quad u(x,\ t)=\sin\frac{x}{2}\ \sin\frac{t}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\frac{1}{4}-n^2}\sin nt+\sin nx$$

2. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x(x-1)t^2$ тенгламанинг

$$u(x,\ 0)=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0$$

бошланғич ҳамда

$$u(0,\ t)=0,\quad u(l,\ t)=0$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

$$Ж:\ u(x,\ t) = -\frac{8l^2}{\pi^5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\pi x}{(2n+1)^5} +$$

$$+\frac{16}{\pi^7}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\pi x}{(2n+1)^7} -$$

$$-\frac{16}{\pi^7}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\pi x\cos(2n+1)\pi t}{(2n+1)^7}.$$

8- §. Иссиқлик ўтказиш тенгламасини Фурье алмаштиришлари усули билан ечиш

Бу параграфда чегараланмаган ёки бир томондан чегараланган стерженларда иссиқлик тарқалиш тенгламаларининг Фурье алмаштиришлари билан ечилиши қаралади.

8. 1. Чегараланмаган стерженда иссиқлик тарқалиши.

Ушбу

$$\frac{\partial u}{\partial} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty$$

иссиқлик тарқалиш тенгламасининг

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x).$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечими Фурье усули билан топилганда қуйидаги

$$u(x,\ t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{-4a^2t}}\,d\xi$$

Пуассон интегралини ҳисоблашга тўғри келади.

Мисол. Ушбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty$$

иссиқлик тарқалиш тенгламасининг

$$u(x,\ 0) = x$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

Ечиш. Пуассон формуласига биноан ечим

$$u(x,\ t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi\,e^{-\frac{(\xi-x^2)}{4a^2t}}\,d\xi$$

бўлади. Интегрални ҳисоблаш учун $\frac{\xi-x}{2a\sqrt{t}}=\eta$ янги ўзгарувчини киритамиз. У ҳолда:

$$u(x,\ t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+2a\eta\sqrt{t})\,e^{-\eta^2}d\eta=$$

$$=\frac{x}{\sqrt{\pi}}I_1+\frac{2a\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}\cdot I_2$$ бўлиб, бу ерда

$$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\eta^2}d\eta,\quad I_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\eta e^{-\eta^2}d\eta.$$

I_1 Пуассон интеграли ва xe^{-x^2} тоқ функция эканлигидан $I_1=\sqrt{\pi}$ ва $I_2=0$. Демак, ечим $u(x,\ t)=x$ экан.

8. 2. Бир томондан чегараланган стерженда иссиқлик тарқалиши.

Ушбу

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<+\infty$$

иссиқлик тарқалиш тенгламасининг

$$u(x,\ 0)=\varphi(x)$$

бошланғич шартни ҳамда

$$u(0,\ t)=\mu(t)$$

чегаравий шартни қаноатлантирувчи ечими Фурье усули билан топиш қуйидаги интегрални ҳисоблашга келтирилади:

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}\varphi(\xi)\left\{e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4n^2t}}\right\}d\xi+$$

$$+\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\mu(\tau)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{(t-\tau)^2}}d\,\tau.$$

8- дарсхона топшириқлари

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad -\infty<x<+\infty$$

иссиқлик тарқалиш тенгламасининг

1. $u(x,\ 0)=e^{-x^2}$

ёки

$$2.\ u(x,\ 0) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 0 \end{cases}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

$$\text{Ж: } 1.\ u(x,\ t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\tau^2 + \frac{(x-\tau)^2}{4t}\right)} d\tau.$$

$$2.\ u(x,\ t) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} \cos \omega x\, e^{-\omega^2 t}\, d\omega.$$

8- мустақил иш топшириқлари

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ -\infty < x < +\infty$$

иссиқлик тарқалиш тенгламасининг

$1.\ u(x, 0) = e^{-|x|}$ ёки

$$2.\ u(x,\ 0) = \begin{cases} x, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

$$\text{Ж: } 1.\ u(x,\ t) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\omega^2 t}}{\omega^2 + 1} \cos \omega x\, d\omega.$$

$$2.\ u(x,\ t) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \left(\frac{\sin \omega}{\omega} - \cos \omega\right) \sin \omega \cdot \frac{e^{-\omega^2 t}}{\omega}\, d\omega.$$

9-§. Назорат иши

1. Қуйидаги икки ўзгарувчили иккинчи тартибли тенгламаларни каноник кўринишга келтиринг:

1.1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

1.2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\frac{\partial u}{\partial x} + 6\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + 13\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

1.4. $y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

1.5. $y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2x\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$

1.6. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ($x \geqslant 0$ соҳада).

1.7. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + 6\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.8. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.9. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 7\frac{\partial u}{\partial x} + 9\frac{\partial u}{\partial y} + u = 0.$

1.10. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 11\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 10u = 0.$

1.11. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 5\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$

1.12. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 20\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

1.13. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 20\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - 10\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$

1.14. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 15\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 5\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.15. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 15\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 8\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$

1.16. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 12\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 30\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 5\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$

1.17. $8\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 11\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

1.18. $10\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 9\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - 8\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

1.19. $25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

1.20. $8\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 13\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

1.21. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 14\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

1.22. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 7\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

1.23. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

1.24. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

1.25. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 9\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - 19\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

1.26. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 18\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

1.27. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 40\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 11\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

1.28. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 20\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - 13\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

1.29. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 10\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - 29\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

1.30. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 16\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

2. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тор тебраниш тенгламасининг

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини Даламбер формуласидан фойдаланиб топинг:

2.1. $a = 4,\ \varphi(x) = x^4,\ \psi(x) = \cos 2x.$
2.2. $a = 4,\ \varphi(x) = x^3,\ \psi(x) = \sin 2x.$
2.3. $a = 4,\ \varphi(x) = x^2,\ \psi(x) = \cos x.$
2.4. $a = 4,\ \varphi(x) = x^2,\ \psi(x) = \sin x.$
2.5. $a = 9,\ \varphi(x) = x,\ \psi(x) = \cos 3x.$
2.6. $a = 9,\ \varphi(x) = x^2,\ \psi(x) = \sin 3x.$
2.7. $a = 9,\ \varphi(x) = x^3,\ \psi(x) = \cos 4x.$
2.8. $a = 9,\ \varphi(x) = x^4,\ \psi(x) = \sin 4x.$
2.9. $a = 16,\ \varphi(x) = \sin 5x,\ \psi(x) = \cos 2x.$
2.10. $a = 16,\ \varphi(x) = \sin 5x,\ \psi(x) = \sin 2x.$
2.11. $a = 16,\ \varphi(x) = \sin 4x,\ \psi(x) = \cos x.$
2.12. $a = 16,\ \varphi(x) = \sin 4x,\ \psi(x) = \sin x.$
2.13. $a = 4,\ \varphi(x) = \cos 5x,\ \psi(x) = \cos 2x.$
2.14. $a = 4,\ \varphi(x) = \cos 5x,\ \psi(x) = \sin 2x.$
2.15. $a = 4,\ \varphi(x) = \cos 4x,\ \psi(x) = \cos x.$
2.16. $a = 4,\ \varphi(x) = \cos 4x,\ \psi(x) = \sin x.$
2.17. $a = 9,\ \varphi(x) = \cos 5x,\ \psi(x) = e^{5x}.$
2.18. $a = 9,\ \varphi(x) = \sin 5x,\ \psi(x) = e^{6x}$
2.19. $a = 9,\ \varphi(x) = \cos 4x,\ \psi(x) = e^{7x}.$
2.20. $a = 9,\ \varphi(x) = \sin 4x,\ \psi(x) = e^{8x}.$
2.21. $a = 16,\ \varphi(x) = \cos 3x,\ \psi(x) = e^{9x}.$
2.22. $a = 16,\ \varphi(x) = \sin 3x,\ \psi(x) = e^{px}.$
2.23. $a = 16,\ \varphi(x) = e^{5x},\ \psi(x) = \cos 2x.$
2.24. $a = 16,\ \varphi(x) = e^{5x},\ \psi(x) = \sin 2x.$
2.25. $a = 4,\ \varphi(x) = e^{-4x},\ \psi(x) = \sin 3x.$
2.26. $a = 4,\ \varphi(x) = e^{-5x},\ \psi(x) = \cos 2x.$
2.27. $a = 4,\ \varphi(x) = e^{-6x},\ \psi(x) = \cos 3x.$
2.28. $a = 4,\ \varphi(x) = e^{-7x},\ \psi(x) = \sin 4x.$

2.29. $a = 9$, $\varphi(x) = e^{-x}$, $\psi(x) = \sin x + \cos x$.
2.30. $a = 9$, $\varphi(x) = e^{-2x}$, $\psi(x) = \cos 3x$.

10-§. Штурм — Лиувилл масаласи. Лежандр кўпҳадлари

10.1 $[a, b]$ кесмада $(k(x)\,y'(x))' - q(x)\,y(x) + \lambda\beta(x)\,y(x) = 0$ тенгламани

$$\begin{aligned} &y(a) = 0, \ y(b) = 0, \\ &y(a) = 0, \ y'(b) = 0, \\ &y'(a) = 0, \ y(b) = 0, \\ &y'(a) = 0, \ y'(b) = 0 \end{aligned}$$

шартлардан бирини қаноатлантирувчи $y(x)$ функцияни топиш масаласини Штурм — Лиувилл масаласи дейилади, бунда $k(x)$, $q(x)$, $\beta(x)$ — $[a; b]$ кесмада узлуксиз функциялар ва $k(x) > 0$, $q(x) \geqslant 0$, $\rho(x) > 0$. Барча λ лар учун Штурм—Лиувилл масаласининг $y(x) \not\equiv 0$ ечими доимо мавжуд бўлавермайди. $y(x) \not\equiv 0$ ечим мавжуд бўлган λ^* тенгламанинг *хос сони* ва унга мос $y^*(x)$ ечим тенгламанинг *хос функцияси* дейилади.

Мисол. $[0; l]$ да

$$y'' - \lambda y = 0, \ y(0) = y(l) = 0$$

Штурм — Лиувилл масаласининг хос сони ва хос функцияларини топинг.

Ечиш. $k^2 - \lambda = 0$ характеристик тенгламани тузамиз.

Икки ҳолни қараймиз: а) $\lambda > 0$; б) $\lambda < 0$.

а) $k^2 = \lambda$ ёки $k_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$ ва $y = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$
$y(0) = 0$ ва $y(l) = 0$ шартлардан

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{l\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{-l\sqrt{\lambda}} = 0 \end{cases}$$

ёки $C_1 = C_2 = 0$ экани келиб чиқади. Бу ердан $y(x) = 0$ бўлиб, масаланинг ечими йўқ.

б) $k^2 - \lambda = 0$, $\lambda = -\mu^2$,
$k^2 + \mu^2 = 0$, $k_{1,2} = \pm\mu i$,
$y = C_1 \cos\mu x + C_2 \sin\mu x$.

$y(0) = 0$, $y(l) = 0$ шартлардан

$$\begin{cases} C_1 + C_2 \cdot 0 = 0 \\ C_1 \cos\mu l + C_2 \sin\mu l = 0 \end{cases}$$

ёки

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ \mu l = k\pi \end{cases}$$

экани келиб чиқади. Демак, хос сон ва хос функциялар мос равишда

$$\lambda = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \qquad y_k(x) = \sin\frac{k\pi}{l}x$$

га тенг экан.

10.2. Ушбу

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n}$$

Родрига формуласи орқали аниқланган кўпҳадлар *Лежандр кўпҳадлари* дейилади.

Хусусан,

$$\begin{aligned}
&P_0(x) = 1,\\
&P_1(x) = x,\\
&P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1),\\
&P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x),\\
&P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3),\\
&P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x), \ldots
\end{aligned}$$

Лежандр кўпҳадлари учун қуйидаги хоссалар ўринлидир:

1. Бу кўпҳадлар $(-1;\ 1)$ ораликда ортогонал кўпҳадлардир, яъни

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = \delta_{mn},$$

бу ерда $\delta_{mn} = \begin{cases}\dfrac{2}{2n+1}, & m = n,\\ 0, & m \neq n.\end{cases}$

2. Лежандр кўпҳадлари жуфт n лар учун жуфт функция, тоқ n лар учун эса тоқ функциядир.

3. $P_n(1) = 1$ ва $P_n(-1) = (-1)^n$.

4. Бу кўпҳадлар Лежандрнинг

$$((1-x^2)y')' + n(n+1)y = 0$$

дифференциал тенгламасини қаноатлантиради.

10-дарсхона топшириқлари

1. Қуйидаги Штурм — Лиувилл масаласининг хос сон ва хос функцияларини топинг:

$$y'' - \lambda y = 0,\ y'(0) = 0,\ y'(l) = 0.$$

Ж: $\lambda_0 = 0,\ y_0(x) = 1,\ \lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$

$$y_k(x) = \cos\frac{k\pi}{l}x, \quad k = 1, 2,$$

2. Лежандр кўпҳадлари учун

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n \Phi(t, x)}{\partial t^n}\right]_{t=0}$$

эканини исботланг, бу ерда

$$\Phi(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}}.$$

10- мустақил иш топшириқлари

1. Қуйидаги Штурм — Лиувилл масаласининг хос сон ва хос функцияларини топинг:

$$y'' - \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(l) = 0.$$

Ж: $\lambda_0 = 0, \; y_0(x) = 1, \; \lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$

$$y_k(x) = \cos\frac{k\pi}{l}x, \quad k = 1, 2,$$

2. Лежандр кўпҳадлари учун қуйидаги рекуррент формула тўғри эканлигини исботланг:

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0,$$

$$n = 1, 2, 3,$$

11-§. Лаплас тенгламасини доирадаги чегаравий шарт билан ечишда ўзгарувчиларни алмаштириш усули

Қутб координаталарида берилган

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

Лаплас тенгламасининг

$$u(r, \varphi)\big|_{r=R} = f(\varphi)$$

чегаравий шартни қаноатлантирувчи доира ичидаги ечимини топишда Пуассоннинг

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{(R^2 - r^2)\,dt}{R^2 - 2Rr\cos(t - \varphi) + r^2}$$

формуласидан фойдаланилади.

Мисол. Юқоридаги Лаплас тенгламасининг

$$u(r, \varphi)\big|_{r=1} = 2\sin\varphi$$

чегаравий шартни қаноатлантирувчи $r < 1$ доира ичидаги ечимини топинг.

Ечиш. Пуассон формуласига кўра:

$$u(r,\ \varphi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{2(1-r^2)\sin t\,dt}{1-2r\cos(t-\varphi)+r^2}=\frac{1-r^2}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin[(t-\varphi)+\varphi]\,dt}{1-2r\cos(t-\varphi)+r^2}=$$

$$=\frac{(1-r^2)\cos\varphi}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(t-\varphi)\,dt}{1-2r\cos(t-\varphi)+r}+$$

$$+\frac{(1-r^2)\sin\varphi}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(t-\varphi)\,dt}{1-2\cos(t-\varphi)+r^2}=$$

$$=\frac{(1-r^2)\cos\varphi}{\pi}I_1+\frac{(1-r^2)\sin\varphi}{\pi}I_2.$$

Энди I_1 ва I_2 интегралларни ҳисоблаймиз.

Агар I_1 интегралда сурат ва махражни $2r$ га кўпайтирсак, интеграл осон ҳисобланади:

$$I_1=\frac{1}{2r}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{2r\sin(t-\varphi)\,dt}{1-2r\cos(t-\varphi)+r^2}=\frac{1}{2r}\ln(1-2r\cos(t-\varphi)+r^2)\Big|_{-\pi}^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{2r}(\ln(1-2r\cos(\pi-\varphi)+r^2)-\ln(1-2r\cos(-\pi-\varphi)+r^2))=0.$$

I_2 интегрални ҳисоблашда аввал интеграл ости функциясини $-2r$ га кўпайтириб бўламиз, кейин суратга $1+r^2$ ни қўшиб айирамиз, шу билан бирга

$$\int\limits_{0}^{\pi}\frac{dx}{a^2\pm 2ab\cos x+b^2}=\frac{\pi}{|a^2-b^2|}$$

эканини эътиборга олсак:

$$I_2=-\frac{1}{2r}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-2r\cos(t-\varphi+r^2-(1+r^2)}{1-2r\cos(t-\varphi)+r^2}dt=$$

$$=-\frac{1}{2r}\int\limits_{-\pi}^{\pi}dt+\frac{1+r^2}{2r}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{1-2r\cos(t-\varphi)+r^2}=-\frac{\pi}{r}+$$

$$+\frac{1+r^2}{2r}\cdot\frac{2\pi}{1-r^2}=-\frac{\pi}{r}+\frac{\pi(1+r^2)}{r(1-r^2)}.$$

Демак,

$$u(r,\ \varphi)=\frac{1-r^2}{-r}\sin\varphi+\frac{1+r^2}{r}\sin\varphi=2r\sin\varphi.$$

Шундай қилиб, масаланинг ечими $u(r,\ \varphi)=2r\sin\varphi$ бўлади.

11- дарсхона топшириқлари

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0$$

Лаплас тенгламасининг берилган чегаравий шартни қаноатлантирувчи доира ичидаги ечимини Пуассон формуласидан фойдаланиб топинг:

1. $u|_{r=a}=\sin^3\varphi.$

Ж: $u(r,\ \varphi)=\frac{3}{a}r\sin\varphi-4\left(\frac{r}{a}\right)^3\sin 3\varphi.$

2. $u|_{r=5}=2\sin^3\varphi+8.$

Ж: $u(r,\ \varphi)=8+\frac{6}{5}r\sin\varphi-8\left(\frac{r}{5}\right)^3\sin^3\varphi.$

11- мустақил иш топшириқлари

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0$$

Лаплас тенгламасининг берилган чегаравий шартни қаноатлантирувчи доира ичидаги ечимини Пуассон формуласидан фойдаланиб топинг:

1. $u|_{r=2}=5\sin\varphi.$

Ж: $u(r,\ \varphi)=\frac{5}{2}r\sin\varphi.$

2. $u|_{r=1}=\sin^3\varphi.$

Ж. $u(r,\ \varphi)=3\sin\varphi-4r^3\sin 3\varphi.$

12§. Доирадаги чегаравий шарт билан берилган Пуассон тенгламасини ечиш

Ушбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,\ y)$$

Пуассон тенгламасининг

$$u|_{x^2+y^2=R^2}=0$$

шартни қаноатлантирувчи ечими

$$u(x,\ y)=v(x,\ y)+w(x,\ y)$$

кўринишда қидирилади. Бу ерда $v(x,\ y)$ функция Пуассон тенгламасининг хусусий ечими ва $w(x,\ y)$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$$

Лаплас тенгламасининг

$$w|_{x^2+y^2=R^2}=-v|_{x^2+y^2=R^2}$$

чегаравий шартни қаноатлантирувчи ечимидир.

Мисол. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -4$ Пуассон тенгламасининг

$$u\Big|_{x^2+y^2=9} = 0$$

чегаравий шартни қаноатлантирувчи ечимини топинг

Тенгламанинг хусусий ечими

$$v(x, y) = -x^2 - y^2$$

бўлади, чунки

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -2.$$

Энди

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

Лаплас тенгламасининг

$$w\Big|_{x^2+y^2=9} = -v\Big|_{x^2+y^2=9} = (x^2+y^2)\Big|_{x^2+y^2=9} = 9$$

чегаравий шартни қаноатлантирувчи ечимини топамиз. Бу ечимни топишда

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

деб олиб, қутб координаталарига ўтамиз, у ҳолда $w(x, y)$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = 0$$

Лаплас тенгламасининг

$$w\Big|_{r=9} = 9$$

шартни қаноатлантирувчи ечими бўлади. $w(x, y)$ ни топишда Пуассон фоумуласидан фойдаланамиз, яъни:

$$w(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 9 \quad \frac{9-r^2}{9-6r\cos(t-\varphi)+r^2}dt =$$

$$= \frac{9(9-r^2)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{9-6r\cos(t-\varphi)+r^2}$$

Энди $\int_0^{\pi}\frac{dx}{a^2 \pm 2ab\cos x + b^2} = \frac{\pi}{(a^2-b^2)}$ эканини эътиборга олсак,

$$w(r, \varphi) = \frac{9(9-r^2)}{2\pi} \quad \frac{2\pi}{9-r^2} = 9$$

ёки

$$w(x, y) = 9.$$

Демак, $u(x, y) = v(x, y) + w(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ экан.

12- дарсхона топшириғи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -xy$$

Пуассон тенгламасининг

$$u\Big|_{x^2+y^2=16} = 0$$

чегаравий шартни қаноатлантирувчи ечимини $x^2 + y^2 \leqslant 16$ доира ичида топинг.

$$Ж\colon\ u(r, \varphi) = -\frac{r^4}{24}\sin 2\varphi + \frac{16}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{(16 - r^2)\sin 2t\, dt}{16 - 8r\cos(t - \varphi) + r^2}$$

Кўрсатма. $(x;\ y)$ Декарт координаталар системасидан $(r;\ \varphi)$ қутб координаталарига ўтинг.

12- мустақил иш топшириғи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12(x^2 - y^2)$$

Пуассон тенгламасининг $1 \leqslant r \leqslant 2$ ҳалқада

$$u\Big|_{r=1} = u\Big|_{r=2} = 0$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

$$Ж\colon\ u(r, \varphi) = \left(17r^4 - 129r^2 + \frac{112}{r^2}\right)\frac{\cos 2\varphi}{17}$$

13- §. Тўғри тўртбурчак шаклидаги мембрананинг эркин тебраниш масаласини ўзгарувчиларни ажратиш усули билан ечиш

Тўғри тўртбурчак $(0 < x < l,\ 0 < y < m)$ шаклидаги мембрананинг эркин тебраниш тенгламасини

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=l} = u'_{.y=0} = u\Big|_{y=m} = 0$$

чегаравий шартларда ечиш учун ўзгарувчиларни алмаштириш усулидан фойдаланилади. Бу ечим

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{k,n}\cos \pi a\sqrt{\left(\frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2 t} + \right.$$

$$\left. + B_{k,m}\sin \pi a\sqrt{\left(\frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2 t}\right)\sin\frac{\pi k x}{l}\sin\frac{\pi n y}{m}$$

кўринишда бўлиб,

$$A_{k,n} = \frac{4}{lm}\int\limits_0^m\int\limits_0^l \varphi(v, z)\sin\frac{\pi k v}{l}\sin\frac{\pi n z}{m}\,dvdz,$$

$$B_{k,n}=\frac{4}{\pi a l m\sqrt{\left(\frac{k}{l}\right)^2+\left(\frac{n}{m}\right)^2}}\int_0^m\int_0^l \psi(v,z)\sin\frac{\pi k v}{l}\sin\frac{\pi n z}{m}\,dvdz$$

формулалар бўйича ҳисобланади.

Мисол. Юқоридаги масалани $\varphi(x, y)=\sin\frac{3\pi x}{l}\sin\frac{8\pi y}{m}$ ва $\psi(x,y)=0$ бўлган ҳолда ечинг.

Ечиш: $\psi(x,\ y=0$ бўлганидан $B_{k,n}=0\,(k,\ n\in N)$ бўлади.

Энди $A_{k,n}$ ни ҳисоблаймиз:

$$A_{k,n}=\frac{4}{lm}\int_0^m\int_0^l \sin\frac{3\pi v}{l}\cdot\sin\frac{8\pi z}{m}\sin\frac{\pi k v}{l}\cdot\sin\frac{\pi n z}{m}\,dvdz.$$

Агар $k\neq 3$, $n\neq 8$ бўлса, $A_{k,n}=0$. Шунинг учун $A_{3,8}$ ни ҳисоблаймиз:

$$A_{3,8}=\frac{4}{lm}\int_0^m\int_0^l \sin^2\frac{3\pi v}{l}\sin^2\frac{8\pi z}{m}\,dvdz=$$

$$=\frac{1}{lm}\int_0^l\left(1-\cos\frac{6\pi v}{l}\right)dv\cdot\int_0^m\left(1-\cos\frac{16\pi z}{m}\right)dz=$$

$$=\frac{1}{lm}\left[v-\left(\sin\frac{6\pi v}{l}\right)\cdot\frac{l}{6\pi}\right]_0^l\cdot\left[z-\frac{m}{16\pi}\sin\frac{16\pi z}{m}\right]_0^m=$$

$$=\frac{1}{lm}\,[l-0]\cdot[m-0]=1.$$

Демак,

$$u(x,y,t)=A_{3,8}\cos\pi a\sqrt{\frac{9}{l^2}+\frac{64}{m^2}}\,t\sin\frac{3\pi x}{l}\sin\frac{8\pi y}{m};$$

ёки

$$u(x,y,t)=\cos\pi a\sqrt{\frac{9}{l^2}+\frac{64}{m^2}}\,t\sin\frac{3\pi x}{l}\sin\frac{8\pi y}{m}.$$

13-дарсхона топшириғи

Мембрананинг

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right).$$

эркин тебраниш тенгламасининг

$$u_{x=0}=u_{x=1}=u_{y=0}=u|_{y=1}=0,$$

$$u(x,y,0)=xy(1-x)(1-y),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{(x;\,y;\,0)}=0$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

$$Ж:\ u(x, y, t) = \frac{64}{\pi^6} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \cos \sqrt{(2m+1)^2 + (2n+1)^2}\, \pi a t \times$$

$$\times \frac{\sin (2m+1)x \sin (2n+1)y}{(2m+1)^3 (2n+1)3},$$

13- мустақил иш топшириғи

Мембрананинг

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

эркин тебраниш тенгламасини чегаравий шартлар

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{y=0} = u\big|_{x=1} = u\big|_{y=1} = 0,$$

$$u(x, y, 0) = 0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{(x, y, 0)} = xy(1-x)(1-y)$$

бўлгандаги ечимини топинг.

$$Ж:\ u(x, y, t) = \frac{16}{\pi^7 a} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin (2m+1)x}{(2m+1)^3} \times \frac{\sin (2n+1)y}{(2n+1)^3} \times$$

$$\times \frac{\sin \pi a t \sqrt{(2m+1)^2 + (2n+1)^2}}{\sqrt{(2m+1)^2 + (2n+1)^2}}.$$

ОПЕРАЦИОН ҲИСОБ

Назарий мавзулар ва амалий машғулотлар

Операцион ҳисоб математиканинг муҳим бўлимларидан биридир. Физика, механика, автоматика, телемеханика ва электротехниканинг кўпгина масалаларини ечишда операцион ҳисобнинг усулларидан фойдаланилади. Қуйида операцион ҳисобнинг асосий тушунчалари ва унинг баъзи дифференциал тенгламаларни ечишга татбиқлари билан танишасиз.

1-§. Лаплас алмаштириши. Оригинал ва тасвир. Энг содда функцияларнинг тасвирлари

Фараз қилайлик, $t \geqslant 0$ ҳақиқий ўзгарувчининг $f(t)$ комплекс функцияси берилган бўлсин. Баъзан $f(t)$ функцияни чексиз $(-\infty, +\infty)$ оралиқда аниқланган, лекин $t < 0$ да $f(t) = 0$ деб ҳисоблаймиз.

$f(t)$ функциянинг *Лаплас алмаштириши* деб, $p = s + i\tau$ ($s > 0$, τ — ҳақиқий ўзгарувчилар) комплекс ўзгарувчининг

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt}\, dt \qquad (1.1)$$

формула билан аниқланадиган $F(p)$ функцияга айтилади.

(1.1) тенгликнинг ўнг томонидаги хосмас интеграл *Лаплас интеграли* деб аталади. Бу интеграл яқинлашувчи бўлиб, бирор $F(p)$ функцияни аниқлаш учун $f(t)$ функция қуйидаги шартларни қаноатлантиради деб фараз қиламиз:

а) $f(t)$ функция узлуксиз ёки $t \geqslant 0$ даги ихтиёрий чекли оралиқда чекли сондаги I тур узилиш нуқталарига эга;

б) t нинг манфий қийматларида нолга тенг, яъни $t < 0$ да $f(t) \equiv 0$;

в) шундай $M > 0$ ва $s_0 \geqslant 0$ ўзгармас сонлар мавжудки,

$$|f(t)| \leqslant Me^{s_0 t}$$

бўлади. s_0 сон $f(t)$ функциянинг *ўсиш кўрсаткичи* деб аталади.

в) шартни барча чегараланган функциялар, масалан, $\sin t$ ва $\cos t$ лар қаноатлантиради, улар учун $s_0 = 0$, $|f(x)| = M$ деб олиш мумкин.

Шу шартнинг ўзини барча $t^k (k > 0)$ даражали функциялар ҳам қаноатлантиради, чунки уларнинг ҳар бири e^t $(s_0 = 1)$ кўрсаткичли функциядан секинроқ ўсади.

$t < 0$ да $f(t) = 0$ талаб шунинг учун ҳам киритиладики, физика ва техниканинг кўпчилик масалаларида t аргумент вақт сифатида қаралади ва шу сабабли вақтнинг бирор бошланғич моментигача $f(t)$ функция ўзини қандай тутишининг аҳамияти йўқ.

а), б), в) шартларни қаноатлантирадиган исталган функция оригинал (ёки прообраз) деб аталади. (1.1) формула билан аниқланадиган $F(p)$ функция $f(t)$ *функциянинг тасвири* (ёки *образи*) деб аталади. $f(t)$ оригиналнинг тасвири $F(p)$ бўлса, бундай ёзилади:

$$F(p) \to f(t) \text{ ёки } F(p) = L\{f(t)\}.$$

$f(t)$ оригинал $F(p)$ тасвирга эга бўлса, бундай ёзилади:

$$f(t) \leftarrow F(p).$$

(«→» белги ҳамма вақт оригиналга қараб йўналган.)

Агар функция а), б), в) шартларнинг ҳеч бўлмаганда биттасини қаноатлантирмаса, у оригинал бўлмайди. Масалан, $\frac{1}{t}$ ва $\operatorname{tg} t$ функциялар оригинал бўлмайди, чунки улар учун а) шарт бузилади: иккала функция ҳам II тур узилиш нуқталарига эга.

e^{t^2} функция ҳам оригинал бўлиши мумкин эмас, чунки унинг учун в) шарт бузилади: $t \to \infty$ да у исталган M ва s_0 да $Me^{s_0 t}$ функциядан тезроқ ўсади.

(1.1) таърифдан фойдаланиб, ҳақиқий ўзгарувчининг бир қатор элементар функцияларининг тасвирини топамиз.

1-мисол. Хевисайд бирлик функцияси

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{агар } t < 0 \text{ бўлса},\\ 1, & \text{агар } t \geqslant 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

нинг тасвирини топинг.

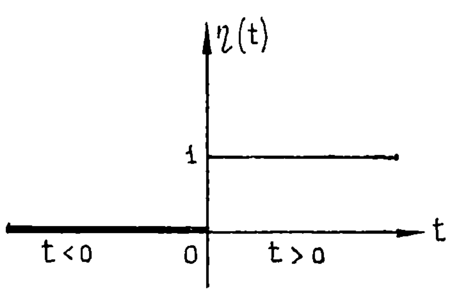
Ечиш. Хевисайд функциясининг графиги 2.1-шаклда тасвирланган. $\eta(t)$ функция оригиналнинг юқоридаги шартларини қаноатлантиради, унинг тасвирини (1.1) формула бўйича топамиз:

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-pt}\,dt =$$

$$= -\frac{e^{-pt}}{p}\Big|_0^\infty = \frac{1}{p}.$$

$\operatorname{Re} p = s > 0$ дан $t \to \infty$ да $e^{-pt} \to 0$.



2.1-шакл

Ҳақиқатан ҳам, агар $|e^{-pt}| = |e^{-s+irt}| = e^{-st}|e^{-irt}| = e^{-st}|\cos rt + |\sin rt| = e^{-st}(\cos^2 rt + \sin^2 rt)^{\frac{1}{2}} = e^{-st}$ бўлса, у ҳолда $t \to \infty$ ва $s = \mathrm{Re}\,p > 0$ дан $t \to \infty$ бўлганда $e^{-pt} \to 0$ га эга бўламиз. Шундай қилиб, $\eta(t)$ Хевисайд бирлик функциясининг $\mathrm{Re}\,o = s > 0$ да Лаплас интеграли яқинлашади ва унинг $F(p)$ тасвири $\frac{1}{p}$ функция бўлади, яъни $\eta(t) \leftarrow \frac{1}{p}$ ёки $1 \leftarrow \frac{1}{p}$.

2-мисол. Ушбу кўрсаткичли функциянинг тасвирини топинг:

$$f(t) = \begin{cases} 0, \text{ агар, } t < 0 \text{ бўлса,} \\ e^{\alpha t} \quad \text{агар, } t \geqslant 0 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

бу ерда α — комплекс сон.

Ечиш. Берилган функция оригиналнинг юқоридаги шартларини қаноатлантиради. Унинг тасвирини (1.1) формула билан топамиз:

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} e^{\alpha t} dt = \int_0^\infty e^{-(p-\alpha)t} dt =$$

$$= \frac{e^{-(p-\alpha)t}}{-(p-\alpha)} \Big|_0^\infty = \frac{1}{p-\alpha} \quad (\mathrm{Re}(p-\alpha) > 0).$$

Демак, берилган функция учун

$$e^{\alpha t} \leftarrow \frac{1}{p-\alpha} (\mathrm{Re}\,p > \mathrm{Re}\,\alpha)$$

га эгамиз. Шунга ўхшаш,

$$e^{-\alpha t} \leftarrow \frac{1}{p+\alpha} (\mathrm{Re}\,p > \mathrm{Re}(-\alpha)).$$

3-мисол. Ушбу функциянинг тасвирини топинг:

$$f(t) = \begin{cases} 0, \text{ агар } t < 0 \text{ бўлса,} \\ \cos \omega t, \text{ агар } t \geqslant 0 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

бу ерда ω — ҳақиқий сон.

Ечиш. Берилган функция оригиналнинг юқоридаги шартларини қаноатлантиради. Унинг тасвирини (1,1) га асосан топамиз:

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty e^{-pt} \cos \omega t \, dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-pt} \cdot \frac{1}{2} [e^{i\omega t} + e^{-it\omega t}] \, dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-(p-i\omega)t} dt +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-(p+i\omega)} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p+i\omega}.$$

Интеграллаш натижасини соддалаштириб,

$$\cos\omega t \leftarrow \frac{p}{p^2+\omega^2}$$

ни ҳосил қиламиз. Шунга ўхшаш, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\sin\omega t \leftarrow \frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

4-мисол. Ушбу функциянинг оригиналини топинг:

$$f(t)=\begin{cases}0, & \text{агар } t<0 \text{ бўлса},\\ \operatorname{sh}\omega t, & \text{агар } t\geqslant 0 \text{ бўлса},\end{cases}$$

бу ерда ω — ҳақиқий сон.

Ечиш. Маълумки, $\operatorname{sh}\omega t=\frac{1}{2}(e^{\omega t}-e^{-\omega t})$,

шу сабабли тасвирни ушбу формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt=\int_0^\infty e^{-pt}\operatorname{sh}\omega t\,dt=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}(e^{\omega t}-e^{-\omega t})\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-(p-\omega)t}dt-\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-(p+\omega)t}dt=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega}-\frac{1}{p+\omega}\right)\ (\operatorname{Re}p>\operatorname{Re}\omega).$$

Шундай қилиб,

$$\operatorname{sh}\omega t\leftarrow\frac{\omega}{p^2-\omega^2}\quad(\operatorname{Re}p>|\operatorname{Re}\omega|).$$

Шунга ўхшаш,

$$\operatorname{ch}\omega t\leftarrow\frac{p}{p^2-\omega^2}\quad(\operatorname{Re}p>|\operatorname{Re}\omega|).$$

5-мисол. Ушбу даражали функциянинг оригиналини топинг:

$$f(t)=\begin{cases}0, & \text{агар } t<0 \text{ бўлса},\\ t^n, & \text{агар } t\geqslant 0 \text{ бўлса}.\end{cases}$$

Ечиш. (1.1) формулага асосан

$$F(p)=\int_0^\infty t^n e^{-pt}dt$$

n марта бўлаклаб интеграллаб ва $\operatorname{Re}p>0$ да $\lim\limits_{t\to\infty}t^k e^{-pt}=0\ (k=\overline{1,n})$ эканини ҳисобга олиб,

$$\int_0^\infty t^n e^{-pt}dt=\frac{n!}{p^{n+1}}$$

ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб,

$$t^n\leftarrow\frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Хусусан, $n = 0$ бўлганда

$$1 \leftarrow \frac{1}{p}$$

га, $n = 1$ бўлганда $t \leftarrow \frac{1}{p^2}$ га эга бўламиз.

Пировардида $F(p)$ тасвир чизиқлилик хоссасига эга эканлигини айтиб ўтамиз, яъни:

а) агар C — const ва $f(t) \leftarrow F(p)$ бўлса, у ҳолда

$$Cf(t) \leftarrow CF(p); \tag{1.2}$$

б) агар $f_1(t) \leftarrow F_1(p)$ ва $f_2(t) \leftarrow F_2(p)$ бўлса, у ҳолда

$$f_1(t) + f_2(t) \leftarrow F_1(p) + F_1(p).$$

Бу муносабатлардан ушбу натижа келиб чиқади:

$$C_1f_1(t) + C_2f_2(t) + \qquad + C_nf_n(t) \leftarrow C_1F_1(p) + C_2F_2(p) + \ldots + C_nF_n(p).$$

Чизиқлилик хоссаси (1.1) дан ва интегралнинг чизиқлилик хоссасидан қуйидаги келиб чиқади:

$$\int_0^\infty Cf(t)e^{-pt}dt = C\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = CF(p),$$

бундан (1.2) формулани ҳосил қиламиз:

$$Cf(t) \leftarrow CF(p).$$

Асосий оригиналлар ва тасвирлар жадвали:

2.1- жадвал.

№	$f(t)$ оригинал	$F(p)$ тасвир
1	1	$\frac{1}{p}$
2	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
3	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$
4	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
5	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
6	$\operatorname{sh} \omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
7	$\operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$

1- дарсхона топшириқлари

1. $f(t)=e^{\alpha t}\sin\omega t$ функциянинг тасвирини таърифдан фойдаланиб ҳисобланг.

Ж: $F(p)=\dfrac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$.

2. Чизиқлилик хоссаси ва тасвирлар жадвалидан фойдаланиб, қуйидаги функцияларнинг тасвирларини топинг:

а) $f(t)=a^t$ г) $f(t)=4t^2-2t+3$;

б) $f(t)=4-5e^{2t}$; д) $f(t)=\cos^3 t$.

в) $f(t)=2\sin 2t+3\,sh\,2t$;

Ж: а) $F(p)=\dfrac{1}{p-\ln a}$; б) $F(p)=\dfrac{4}{p}-5\,\dfrac{1}{p-2}$;

в) $F(p)=\dfrac{4}{p^2+4}+\dfrac{6}{p^2-4}$; г) $F(p)=\dfrac{8}{p^3}-\dfrac{2}{p^2}+\dfrac{3}{p}$;

д) $F(p)=\dfrac{1}{4}\ \dfrac{p}{p^2+9}+\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{p}{p^2+1}$.

1- мустақил иш топшириқлари

1) $f(t)=e^{\alpha t}\cos\omega t$ функциянинг тасвирини таърифга кўра топинг.

Ж: $F(p)=\dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$.

2. Чизиқлилик хоссаси ва тасвирлар жадвалидан фойдаланиб, қуйидаги функцияларнинг тасвирларини топинг:

а) $f(t)=\dfrac{1}{3}t^3+4\cos 2t$;

б) $f(t)=\dfrac{1}{3}\sin 3t-5$;

в) $f(t)=\cos^2 t$;

г) $f(t)=\cos 2t\cdot\sin 3t$.

ж: $F(p)=\dfrac{1}{3}\ \dfrac{3!}{p^1}+\dfrac{4p}{p^2+4}$; б) $F(p)=\dfrac{1}{3}\ \dfrac{3}{p^2+9}-\dfrac{5}{p}$;

в) $F(p)=\dfrac{1}{2p}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{p}{p^2+4}$; г) $F(p)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p^2+1}+\dfrac{25}{p^2+25}\right)$.

2- §. Операцион ҳисобнинг асосий теоремалари

1- § да биз тасвирларнинг чизиқлилик хоссаси билан танишдик. Бу параграфда эса биз Лаплас алмаштиришининг асосий хоссалари билан танишишни давом эттирамиз.

1. Ўхшашлик теоремаси (эркли ўзгарувчи масштабининг ўзгариши). *Агар $f(t)\leftarrow F(p)$ бўлса, у ҳолда $\alpha>0$ бўлганда*

$$f(\alpha t)=\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Исботи. Лаплас алмаштириши таърифига кўра:

$$f(\alpha t) \leftarrow \int_0^\infty f(\alpha t) e^{-pt}\, dt.$$

Бу интегралда $\alpha t = z$, $dt = \frac{dz}{\alpha}$ деб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$f(\alpha t) \leftarrow \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty f(z) e^{-\frac{p}{\alpha} z}\, dz = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Шундай қилиб, оригинал аргументининг α мусбат сонга кўпайтирилиши тасвирни ва унинг аргументини шу α сонга бўлинишига олиб келади.

2. **Кечикиш (ёки силжиш) теоремаси.** *Агар*

$$f(t) \leftarrow F(p)$$

бўлса, у ҳолда $\tau > 0$ *бўлганда*

$$f(t-\tau) \leftarrow e^{-[illegible]\tau} F(p)$$

бўлади.

Исботи. Лаплас алмаштириши таърифига кўра

$$f(t-\tau) \leftarrow \int_0^\infty e^{-[illegible]} f(t-\tau)\, dt.$$

Бу интегралда $t - \tau = z$, $dt = dz$ деб олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$f(t-\tau) \leftarrow \int_{-\tau}^{\infty} e^{-p(\tau+z)} f(z)\, dz =$$

$$= e^{-p\tau} \int_{-\tau}^{\infty} e^{-pz} f(z)\, dz = e^{-p\tau} \int_{-\tau}^{0} e^{-pz} f(z)\, dz +$$

$$+ e^{-p\tau} \int_0^\infty e^{-pz} f(z)\, dz = e^{-p\tau} F(p),$$

чунки биринчи интеграл $\int_{-\tau}^{0} e^{-pz} f(z)\, dz = 0$ ($z < 0$ да $f(z) = 0$).

Демак, оригинал аргументининг τ мусбат миқдорга кечикиши тасвирнинг $e^{-p\tau}$ га кўпайтирилишига олиб келади.

1-**мисол.** $f(t) = (t-1)^2$ оригиналнинг тасвирини топинг.

Ечиш. Тасвирлар жадвалидан даражали функция учун $n = 2$ бўлганда

$$t^2 \leftarrow \frac{2}{p^3}$$

га эгамиз. У ҳолда кечикиш теоремасига асосан $\alpha = 1$ бўлганда

$$(t^2 - 1) \rightarrow \frac{2}{p^3} e^{-p}.$$

3. Силжиш (ёки сўниш) теоремаси. *Агар $f(t) \leftarrow F(p)$ бўлса, у ҳолда исталган α да*

$$a^{\alpha t} f(t) \leftarrow F(p - \alpha).$$

Исботи. Ҳақиқатан ҳам,

$$e^{\alpha t} f(t) \leftarrow \int_0^\infty e^{-pt} e^{+\alpha t} f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(p-\alpha)t} f(t)\,dt = F(p-\alpha).$$

Шундай қилиб, оригиналнинг $e^{\alpha t}$ функцияга кўпайтирилиши p эркли ўзгарувчининг α га силжишига олиб келади.

2-мисол. $f(t) = e^{\alpha t} \sin \omega t$ оригиналнинг тасвирини топинг.

Ечиш. Жадвалдан

$$\sin \omega t \leftarrow \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

га эгамиз, у ҳолда

$$e^{\alpha t} \sin \omega t \leftarrow \frac{\omega}{(p-\alpha)^2 + \omega^2}$$

Шунга ўхшаш,

$$e^{\alpha t} \cos \omega t \leftarrow \frac{p - \alpha}{(p - \omega)^2 + \omega^2}$$

4. Параметр бўйича дифференциаллаш теоремаси. *Агар*

$$f(t, x) \leftarrow F(p, x)$$

бўлса, у ҳолда

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \leftarrow \frac{\partial F(p, x)}{\partial x}.$$

Исботи. Ҳақиқатан ҳам,

$$F(p, x) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t, x)\,dt$$

бўлганлиги учун интегрални x параметр бўйича дифференциаллаб,

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = \int_0^\infty e^{-pt} \frac{\partial f(t, x)}{\partial x}\,dt$$

ни ҳосил қиламиз, бундан,

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \leftarrow \frac{\partial F(p, x)}{\partial x}$$

Бу хосса кўп сондаги тасвирларни ҳосил қилиш имконини беради.

3-мисол. $f(t) = t^n e^{\alpha t}$ оригиналнинг тасвирини топинг.

Ечиш. $e^{\alpha t} \leftarrow \frac{1}{p-\alpha}$ мосликнинг иккала томонини α параметр бўйича дифференциаллаб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$t e^{\alpha t} \leftarrow \frac{1}{(p-\alpha)^2}; \quad t^2 e^{\alpha t} \leftarrow \frac{2}{(p-\alpha)^3};$$

$$t^3 e^{\alpha t} \leftarrow \frac{3\,!}{(p-\alpha)^4}; \quad t^n e^{\alpha t} \leftarrow \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}.$$

4-мисол. $f(t) = t\cos\omega t$ ва $f(t) = t\sin\omega t$ оригиналларнинг тасвирларини топинг.

Ечиш. $\sin\omega t \leftarrow \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$ ва $\cos\omega t \leftarrow \frac{p}{p^2+w^2}$ мосликларнинг иккала томонини ω параметр бўйича дифференциаллаб,

$$t\cos\omega t \leftarrow \frac{p^2+\omega^2-2\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2} \quad \text{ва} \quad t\sin\omega t \leftarrow +\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$$

ларни ҳосил қиламиз.

5. Оригинални дифференциаллаш теоремаси. *Агар $f(t) \leftarrow F(p)$ бўлиб, $f'(t)$ оригинал бўлса, у ҳолда*

$$f'(t) \leftarrow p\,F(p) - f(0)$$

бўлади.

Исботи. $f'(t)$ ҳосила учун Лаплас алмаштиришини ёзамиз:

$$f'(t) \leftarrow \int_0^\infty f'(t)e^{-pt}\,dt.$$

Бўлаклаб интеграллаб ва $u = e^{-pt}$, $du = -pe^{-pt}dt$, $dv = f'(t)dt$, $v = f(t)$ деб олиб,

$$f'(t) \leftarrow f(t)e^{-pt}\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt \qquad (2.1)$$

ни ҳосил қиламиз. $f(t)$ учун 1-§ даги в) шартга асосан

$$f(t) \leqslant Me^{s_0 t}$$

га эгамиз, шу сабабли, агар $\mathrm{Re}\,p > s_0$ бўлса, у ҳолда $t \to \infty$ да

$$|f(t)e^{-pt}| < Me^{(s_0-\mathrm{Re}\,p)\,t} \to 0.$$

Натижада (2.1) мосликда биринчи қўшилувчида $-f(0)$ қолади ва (2.1) муносабат узил-кесил ушбу кўринишни олади:

$$f'(t) \leftarrow pF(p) - f(0). \qquad (2.2)$$

Хусусан, агар $f(0) = 0$ бўлса, у ҳолда

$$f'(t) \leftarrow pF(p).$$

Теоремани такрор татбиқ этиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$f''(t) \leftarrow p\,[pF(p) - f(0)] - f'(0) = p^2F(p) - pf(0) - f'(0),$$

$$f'''(t) \leftarrow p\,[p^2F(p) - pf(0) - f'(0)] - f''(0) = p^3F(p) -$$

$$- p^2f(0) - pf'(0) - f''(0).$$

(2.2) формулани $n-1$ марта татбиқ этиб, қуйидаги умумий формулани ҳосил қиламиз:

$$f^{n}(t) \leftarrow p^{n} F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) -$$
$$- p^{n-3} f''(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0). \qquad (2.3).$$

Хусусий ҳолда функциянинг ва унинг ҳосилаларининг барча бошланғич қийматлари нолга тенг бўлганда

$$f^{n}(t) \leftarrow p^{n} F(p)$$

ни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, бошланғич қийматлар ноль бўлганда оригинални n-карра дифференциаллаш унинг тасвирини p^{n} га кўпайтиришга келтирилади.

6. Оригинални интеграллаш ҳақидаги теорема. *Агар*

$$f(t) \leftarrow F(p)$$

бўлса, у ҳолда

$$\int_{0}^{t} f(t)\,dt \leftarrow \frac{F(p)}{p} \qquad (2.4)$$

Исботи. Дифференциаллаш теоремасини $\int_{0}^{t} f(t)\,dt$ оргиналга татбиқ этамиз ва

$$\int_{0}^{t} f(t)\,dt \leftarrow G(p)$$

деб белгилаймиз.

$$\left(\int_{0}^{t} f(t)\,dt\right)' \leftarrow p\,G(p) - \int_{0}^{0} f(t)\,dt \qquad (2.5)$$

$\left(\int_{0}^{t} f(t)\,dt\right)' = f(t)$ ва $\int_{0}^{0} f(t)\,dt = 0$ бўлганлиги учун (2.5) формула қуйидаги кўринишни олади:

$$f(t) \leftarrow pG(p). \qquad (2.6)$$

Бироқ шартга кўра

$$f(t) \leftarrow F(p). \qquad (2.7)$$

(2.6) ва (2.7) ни таққослаб, қуйидагини ҳосил қиламиз.

$$p\,G(p) = F(p),$$

бундан

$$G(p) = \frac{F(p)}{p}, \qquad (2.8)$$

яъни

$$\int_{0}^{t} f(t)\,dt \leftarrow \frac{F(p)}{p}.$$

Демак, оригиналнн 0 дан t гача интеграллаш тасвирни p га бўлишга келтирилади.

7. Тасвирни дифференциаллаш теоремаси. *Агар $f(t) \leftarrow F(p)$ бўлса, у ҳолда*

$$-tf(t) \leftarrow F'(p). \tag{2.9}$$

Исботи. (2.9) формулани ҳосил қилиш учун

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt$$

функция p параметр бўйича дифференциалланади:

$$F'(p) = \int_0^\infty f(t)(-t)e^{-pt}\,dt,$$

бу эса $-tf(t) \leftarrow F'(p)$ эканлигини англатади. Шундай қилиб, тасвирни дифференциаллаш оригинални $-t$ га кўпайтиришга келтирилади.

Масалан, (2.9) формулани

$$1 \leftarrow \frac{1}{p}$$

мосликка кетма-кет татбиқ этиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:]

$$-t \leftarrow -\frac{1}{p^2}, \text{ яъни } t \rightarrow \frac{1}{p^2};$$

$$-t^2 \leftarrow \frac{2}{p^3}, \text{ яъни } t^2 \leftarrow \frac{2}{p^3} \text{ ва ҳ. к.}$$

Умуман $t^n \leftarrow \frac{n!}{p^{n-1}}$.

8. Тасвирни интеграллаш теоремаси. *Агар $\int_p^\infty F(z)\,dz$ интеграл яқинлашувчи ва $f(t) \leftarrow F(p)$ бўлса, у ҳолда*

$$\frac{f(t)}{t} \leftarrow \int_p^\infty F(z)\,dz,$$

яъни тасвирни p дан ∞ гача интеграллаш оригинални t га бўлишга мос келади.

5-мисол. $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ оригиналнинг тасвирини топинг.

Ечиш. $\sin t \leftarrow \frac{1}{p^2+1}$ ва

$$\int_p^\infty \frac{dz}{z^2+1} = -\operatorname{arcctg} z\Big|_p^\infty = -\operatorname{arcctg}\infty + \operatorname{arcctg} p = \operatorname{arcctg} p$$

бўлганлиги учун

$$\frac{\sin t}{t} \leftarrow \operatorname{arcctg} p. \tag{2.10}$$

Агар (2.10) формулага оригинални интеграллаш ҳақидаги теорема татбиқ этилса,

$$\int_0^t \frac{\sin t}{t}\, dt \leftarrow \frac{\operatorname{arcctg} p}{p}$$

Маълумки, чап томонда турган интеграл элементар функциялар орқали ифодаланмайди ва элементар бўлмаган Sit (интеграл синус) функцияни аниқлайди.

Келтирилган хоссалардан фойдаланиб, тасвирларнинг тўлароқ жадвалини келтирамиз.

2.2-жадвал

№	$f(t)$ оригинал	$F(p)$ тасвир
1	1	$\frac{1}{p}$
2	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
3	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$
4	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
5	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
6	$\operatorname{sh} \omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
7	$\operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
8	$e^{\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$
9	$e^{\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$
10	$t^n\ e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$
11	eos ω	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
12	$t \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
13	$\sin (t-\alpha)$	$e^{-\alpha p} \frac{1}{p^2+1}$

Давоми

№	$f(t)$ оригинал	$P(p)$ тасвир
14	$\cos(t-\alpha)$	$e^{-\alpha p}\,\frac{p}{p^2+1}$
15	$\frac{\sin t}{t}$	$\operatorname{arcctg} p$
16	$\int\limits_0^t \frac{\sin t}{t}\,dt$	$\frac{\operatorname{arcctg} p}{p}$

Операцион ҳисобнинг асосий хоссаларини (теоремаларини) жамлаб келтирайлик:

1. Чизиқлилик хоссаси: $C_1f_1(t)+C_2f_2(t)\leftarrow C_1F_1(p)+C_2F_2(p)$.
2. Ўхшашлик теоремаси: $f(\alpha t)\leftarrow \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$.
3. Кечикиш теоремаси: $f(t-\tau)\leftarrow F(p)\quad e^{-p\tau}$
4. Силжиш теоремаси: $e^{\alpha t}f(t)\leftarrow F(p-\alpha)$.
5. Параметр бўйича дифференциаллаш теоремаси: агар $f(t,\ x)\leftarrow F(p,\ x)$ бўлса, у ҳолда $\frac{\partial f}{\partial x}\leftarrow\frac{\partial F}{\partial x}$.
6. Оригинални дифференциаллаш теоремаси:

$$f'(t)\leftarrow p\,F(p)-f(0),$$
$$f^{(n)}(t)\leftarrow p^n F(p)-p^{n-1}f(0)-\qquad -f^{(n-1)}(0).$$

7. Оригинални интеграллаш теоремаси: $\int\limits_0^t f(t)\,dt\leftarrow\frac{1}{p}\;F(p)$.
8. Тасвирни дифференциаллаш теоремаси: $-t\,f(t)\leftarrow F'(p)$
9. Тасвирни интеграллаш теоремаси: $\frac{f(t)}{t}\leftarrow\int\limits_0^{\infty}F(z)\,dz$.

2-дарсхона топшириқлари

Қуйидаги функцияларнинг тасвирларини топинг:

1. $e^{-5t}\operatorname{sh}5t$. Ж: $\frac{5}{(p+5)^2-25}$
2. $\int\limits_0^t \sin t\,dt$. Ж: $\frac{1}{p(p^2+1)}$
3. $(t-1)^2e^{t-1}$ Ж: $\frac{2}{(p-1)^3}\,e^{-p}$
4. $e^{-7t}\operatorname{ch}7t$. Ж: $\frac{p-7}{(p+7)^2-49}$.

5. $t\,\mathrm{sh}\,3t$. Ж: $\dfrac{6p}{(p^2-9)^2}$.

6. $\int\limits_0^t \cos^2 \omega t\,dt$. Ж: $\dfrac{p^2+2\omega^2}{(p^2+4\omega^2)\,p^2}$.

2-мустақил иш топшириқлари

Қуйидаги функцияларнинг тасвирларини топинг:

1. $\sin 3(t-2)$. Ж: $e^{-2p}\dfrac{3}{p^2+9}$.

2. $\int\limits_0^t \cos \omega t\,dt$. Ж: $\dfrac{1}{p^2+\omega^2}$.

3. $t\cos t$. Ж: $\dfrac{p^2-1}{(p^2+1)^2}$.

4. $\dfrac{e^t-1}{t}$. Ж: $\ln\dfrac{p}{p-1}$.

5. $\dfrac{1-\cos t}{t}$. Ж: $\ln\dfrac{\sqrt{p^2+1}}{p}$.

3-§. Оригинални тасвир бўйича топиш усуллари

Операцион ҳисобда оригинални маълум тасвири бўйича излаш учун ёйиш теоремалари деб аталадиган теоремалардан ҳамда тасвирлар жадвалидан фойдаланилади.

Ёйиш теоремаси. *Агар изланаётган $f(t)$ функциянинг $F(p)$ тасвирини $\frac{1}{p}$ нинг даражалари бўйича даражали қаторга ёйиш мумкин бўлса, яъни*

$$F(p)=\frac{a_0}{p}+\frac{a_1}{p^2}+\quad+\frac{a_n}{p^{n+1}}+ \tag{3.1}$$

бўлиб, у $\frac{1}{|p|}<R$ да $F(p)$ га яқинлашса, у ҳолда оригинал қуйидаги формула бўйича топилади:

$$f(t)=a_0+a_1\frac{t}{1!}+a_2\frac{t^2}{2!}+\quad+a_n\frac{t^n}{n!}+ \tag{3.2}$$

Бу қатор $t>0$ қийматлар учун яқинлашади ва $t<0$ да $f(t)=0$ деб олинади.

Исботи. Теоремани исботлаш учун қуйидаги учта шартларнинг бажарилишини кўрсатиш етарлидир:

а) (3.2) тенгликнинг ўнг томонидаги қатор барча t ларда яқинлашади;

б) унинг $f(t)$ йиғиндиси оригиналнинг б) шарти

$$|f(t)|\leqslant Me^{s_0 t}$$

ни қаноатлантиради;

в) $f(t)$ ва $F(p)$ функциялар орасида

$$f(t)\leftarrow F(p)$$

операцион мослик мавжуд.

(3.1) қатор $F(p)$ функция учун Лоран қатори эканлиги ва у $|p| > \frac{1}{R}$ да яқинлашувчилиги сабабли яқинлашиш соҳасидаги исталган p да яқинлашишнинг зарурийлик аломатига асосан

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|p|^{n+1}} = 0.$$

Бироқ, бу ҳолда қаторнинг барча ҳадлари

$$|p| \geqslant \frac{1}{R_n} > \frac{1}{R}$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган исталган p учун ўз навбатида

$$\frac{a_n}{|p|^{n+1}} \leqslant |a_n| R_1^{n+1} \leqslant M \tag{3.3}$$

тенгсизликни қаноатлантириши лозим, бу ерда $M > 0$ — ўзгармас сон. (3.3) тенгсизликдан (3.1) қатор коэффициентларининг модуллари учун

$$|a_n| \leqslant \frac{M}{R_1^{n+1}}$$

баҳони топамиз, сўнгра R_1 ни R га исталганча яқин қилиб танлаш мумкин бўлганлиги сабабли, бу ердан

$$|a_n| \leqslant \frac{M}{R^{n+1}} \tag{3.4}$$

баҳо келиб чиқади. Демак, оригинални аниқлайдиган (3.2) қатор ҳадларининг абсолют қийматлари ($t > 0$ да)

$$\left| a_n \frac{t^n}{n!} \right| \leqslant \frac{M}{R^{n+1}} \frac{t^n}{n!}$$

баҳони қаноатлантиради. Бироқ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{R^{n+1}} \frac{t^n}{n!} = \frac{M}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{t}{R}\right)^n$$

қатор барча t лар учун яқинлашади ва унинг йиғиндиси $\frac{M}{R} e^{\frac{t}{R}}$ га тенг. Бу эса (3.2) қатор ҳам барча t лар учун яқинлашишини ва унинг $f(t)$ йиғиндиси абсолют қиймати бўйича мажорант қатор йиғиндисидан ортиқ бўлмаслигини исботлайди, яъни

$$|f(t)| < \frac{M}{R} e^{\frac{t}{R}} \tag{3.5}$$

Шундай қилиб, а) ва б) шартлар исботланди, в) шартнинг бажарилишини кўрсатиш учун Лаплас алмаштиришининг чизиқлилигидан келиб чиқадиган исталган k да тўғри бўлган

$$\sum_{n=0}^{k} \frac{a_n}{p^{n+1}} \to \sum_{n=0}^{k} \frac{a_n t^n}{n!} \tag{3.6}$$

операцион муносабатни ёзамиз. Агар бу операцион муносабатда $|p| > \frac{1}{R}$ деб олинса, иккала даражали қаторнинг текис яқинлашувчанлигига асосан $k \to \infty$ да лимитга ўтиш мумкин ва шу билан учинчи шарт в) нинг тўғрилигига ишонч ҳосил қилинади:

$$F(p) \leftarrow f(t). \tag{3.7}$$

Ёйиш теоремаси исботланди.

1-мисол. $F(p) = \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}}$ тасвир учун оригинални топинг.

Ечиш. $F(p)$ функцияни $p\,(p \neq 0)$ комплекс ўзгарувчининг бутун текислигида ушбу Лоран қаторига ёямиз:

$$F(p) = \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\, p^{n+1}} = \frac{1}{p} - \frac{1}{1!p^2} + \frac{1}{2!\,p^3} -$$

Ёйилма биринчи теореманинг шартларини қаноатлантирганлиги сабабли бу функциянинг оригинали қуйидагича бўлади:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{(n!)^2} = 1 - \frac{t}{(1!)^2} + \frac{t^2}{(2!)^2} - \tag{3.8}$$

Бу қаторнинг йиғиндиси ноль индексли I тур Бессель функцияси орқали ифодаланади. Бессель функциясининг z нинг даражалари бўйича қаторга ёйилмаси қуйидаги кўринишдадир:

$$I_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2}. \tag{3.9}$$

Ҳақиқатан ҳам, (3.9) қатор $z = 2\sqrt{t}$ бўлганда (3.8) қаторга айланади. Шундай қилиб

$$f(t) = I_0(2\sqrt{t})$$

ва биз қуйидаги операцион муносабатни ҳосил қиламиз:

$$I_0(2\sqrt{t}) \leftarrow \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}}$$

Энди p нинг каср рационал функцияси бўлган тасвирнинг, яъни

$$F(p) = \frac{Q(p)}{P(p)}$$

нинг $Q(p)$ ва $P(p)$ p га нисбатан мос равишда m ва n даражали $(m < n)$ кўпҳадлар оригиналини топиш усулини кўрсатамиз.

Агар $P(p)$ махражнинг барча илдизлари маълум бўлса, у ҳолда уни энг содда кўпайтувчиларга ёйиш мумкин:

$$P(p) = (p - p_1)^{k_1} (p - p_2)^{k_2} \quad (p - p_r)^{k_r}$$

бу ерда

$$k_1 + k_2 + \quad + k_r = n.$$

Маълумки, бу ҳолда $F(p)$ функцияни қуйидаги кўринишдаги энг содда касрлар йиғиндисига ёйиш мумкин:

$$\frac{A_{js}}{(p-p_i)^{k_j-s+1}},$$

бу ерда j индекс 1 дан r гача бўлган барча қийматларни, s индекс эса 1 дан k_j гача бўлган барча қийматларни қабул қилади.

Шундай қилиб, $F(p)$ ни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$F(p)=\sum_{j=1}^{r}\sum_{s=1}^{k_j}\frac{A_{js}}{(p-p_l)^{kj-s+1}} \tag{3.10}$$

Бу ёйилманинг барча коэффициентларини

$$A_{js}=\frac{1}{(s-1)!}\lim_{p\to p_j}\frac{d^{s-1}}{dp^{s-1}}\left[(p-p_j)^{k_j}\quad F(p)\right] \tag{3.11}$$

формула бўйича аниқлаш мумкин.

A_{js} коэффициентларни аниқлаш учун (3.11) формуланинғ ўрнига интеграл ҳисобда рационал касрларни интеграллашда қўлланиладиган элементар усуллардан фойдаланиш мумкин. Хусусан, бу усулни қўллаш $P(p)$ махражнинг барча илдизлари туб ва жуфт-жуфти билан қўшма бўлганда мақсадга мувофиқдир.

Агар $P(p)$ нинг барча илдизлари туб, яъни $P(p)=(p-p_1)(p-p_2)\quad(p-p_n)$, бу ерда $i\neq k$ да $p_i\neq p_k$ бўлса, ёйилма соддалашади:

$$F(p)=\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{p-p_j},\quad \text{бу ерда } A_j=\frac{Q(p_j)}{P(p_j)}. \tag{3.12}$$

$F(p)$ нинг у ёки бу усул билан туб касрларга ёйилмасини тузишда $f(t)$ оригинал қуйидаги формулалар бўйича изланади:

а) $P(p)$ махражнинг туб илдизлари бўлган ҳолда:

$$f(t)=\sum_{j=1}^{n}\frac{Q(p_j)}{P'(p_j)}e^{p_j t} \tag{3.13}$$

б) $P(p)$ махражнинг каррали илдизлари бўлган ҳолда:

$$f(t)=\sum_{j=1}^{r}\sum_{s=1}^{k_j}A_{js}\frac{t^{k_j-s}}{(k_j-s)!}e^{p_j t} \tag{3.14}$$

2-мисол. $F(p)=\dfrac{p}{p^2-4p+8}$ функциянинг оригиналини топинг.

Ечиш. $p_1=2+2i$ ва $p_2=2-2i$ бўлгани учун, тасвирни оригиналлари маълум бўлган энг содда касрлар йиғиндиси шаклидаги ёйилмасини топиш учун, элементар усуллардан фойдаланамиз:

$$\frac{p}{p^2-4p+8}=\frac{(p-2)+2}{(p-2)^2+4}=\frac{p-2}{(p-2)^2+4}+\frac{2}{(p-2)^2+4}.$$

2.2- жадвалнинг 8 ва 9-формулаларига кўра:

$$\frac{p-2}{(p-2)^2+4}\leftarrow e^{2t}\cos 2t;\qquad \frac{2}{(p-2)^2+4}\leftarrow e^{2t}\sin 2t.$$

Шу сабабли

$$F(p)=\frac{p}{p^2-4p+8}\leftarrow e^{2t}(\cos 2t+\sin 2t).$$

3-мисол. $F(p)=\frac{1}{p^3-8}$ функциянинг оригиналини топинг.

Ечиш. Яна интеграл ҳисобдан маълум бўлган касрлар ёйилмасини топишнинг элементар усулларидан фойдаланамиз. Касрнинг махражи битта $p_1=2$ ҳақиқий илдиз ва иккита қўшма $p_2=-1+i\sqrt{3}$, $p_3=1-i\sqrt{3}$ комплекс илдизга эга бўлганлиги учун (p_2 ва p_3 илдизларга p^2+2p+4 учҳад мос келади) берилган каср энг содда касрларга бундай ёйилади:

$$\frac{1}{p^3-8}=\frac{A}{p-2}+\frac{Bp+C}{p^2+2p+4}$$

A, B, C коэффициентларни топиш учун қуйидаги айниятга эгамиз:

$$1=A(p^2+2p+4)+(p-2)(Bp+C).$$

$p=2$ деб, $1=12A$ ни топамиз, бундан $A=\frac{1}{12}$

p^2 олдидаги коэффициентларни нолга ва озод ҳадни бирга тенглаб, қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases}A+B=0,\\ 4A-2C=1.\end{cases}$$

Бундан $B=-A=\frac{-1}{2}$, $C=2A-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}$. Шундай қилиб,

$$\frac{1}{p^3-8}=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{12}\cdot\frac{p+4}{p^2+2p+4}=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{p-2}-$$

$$-\frac{1}{12}\cdot\frac{(p+1)+3}{(p+1)^2+(\sqrt{3})^2}.$$

Демак,

$$F(p)=\frac{1}{p^3-8}=\frac{1}{12}\;\frac{1}{p-2}-\frac{1}{12}\;\frac{p+1}{(p+1)^2+(\sqrt{3})^2}-$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{12}\;\frac{\sqrt{3}}{(p+1)^2+(\sqrt{3})^2}.$$

2.2-жадвалдаги 3, 8, 9-формулалардан фойдалансак,

$$f(t)=\frac{1}{12}e^{2t}-\frac{1}{12}e^{-t}(\cos\sqrt{3}\,t+\sqrt{3}\sin\sqrt{3}\,t).$$

4-мисол. $F(p)=\frac{p^2+p+1}{p(p^4-1)}$ тасвирнинг оригиналини топинг.

Ечиш. Тасвирнинг махражи $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $p_3 = -1$, $p_4 = i$, $p_5 = -i$ туб илдизларга эга. Бу ҳолда $F(p)$ функциянинг ёйилмаси (3.12) кўринишда бўлади:

$$F(p) = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p-1} + \frac{A_3}{p+1} + \frac{A_4}{p-i} + \frac{A_5}{p+i},$$

A_1, A_2, A_3, A_4 коэффициентлар

$$A_j = \frac{Q(p_j)}{P'(p_j)}$$

формула билан аниқланади, бу ерда $Q(p) = p^2 + p + 1$, $P'(p) = 5p^4 - 1$:

$$A_1 = \frac{Q(0)}{P'(0)} = -1; \; A_2 = \frac{Q(1)}{P'(1)} = \frac{3}{4}; \; A_3 = \frac{Q(-1)}{P'(-1)} = \frac{1}{4},$$

$$A_4 = \frac{Q(i)}{P'(i)} = \frac{i}{4}; \; A_5 = \frac{Q(-i)}{P'(-i)} = -\frac{i}{4}.$$

Энди (3.13) формула бўйича оригинални топамиз:

$$f(t) = -1 \cdot e^{0 \cdot t} + \frac{3}{4} e^{1 \cdot t} + \frac{1}{4} e^{-1 \cdot t} + \frac{i}{4} e^{i \cdot t} - \frac{i}{4} e^{-i \cdot t} = -1 + \frac{1}{4}(3e^t + e^{-t}) - \frac{1}{2}\,\frac{e^{i \cdot t} - e^{-i \cdot t}}{2i} = -1 + \frac{1}{4}(3e^t + e^{-t}) - \frac{1}{2}\sin t.$$

5-мисол. $F(p) = \frac{p^2}{(p^2-1)^3}$ тасвирнинг оригиналини топинг.

Ечиш. $P(p) = (p^2 - 1)^3 = (p-1)^3(p+1)^3$ га эгамиз, шу сабабли $F(p)$ нинг ёйилмаси қуйидаги кўринишга эга:

$$F(p) = \frac{p^2}{(p-1)^3} = \frac{A_{11}}{(p-1)^3} + \frac{A_{12}}{(p-1)^2} + \frac{A_{13}}{p-1} + \frac{A_{21}}{(p+1)^3} + \frac{A_{22}}{(p+1)^2} + \frac{A_{23}}{p+1}.$$

(3.11) формулалар бўйича ёйилманинг A_{js} коэффициентларини топамиз:

$$A_{11} = \frac{1}{0!} \lim_{p \to 1} \left[(p-1)^3 \frac{p^2}{(p^2-1)^3}\right] = \lim_{p \to 1} \frac{p^2}{(p+1)^3} = \frac{1}{8};$$

$$A_{12} = \frac{1}{1!} \lim_{p \to 1} \frac{d}{dp}\left[\frac{p^2}{(p+1)^3}\right] = \lim_{p \to 1}\left[\frac{2p}{(p+1)^3} - \frac{3p^2}{(p+1)^4}\right] = \frac{1}{16};$$

$$A_{13} = \frac{1}{2!} \lim_{p \to 1} \frac{d^2}{dp^2}\left[\frac{p^2}{(p+1)^3}\right] = \frac{1}{2} \lim_{p \to 1}\left[\frac{2}{(p+1)^3} - \frac{12p}{(p+1)^4} + \frac{12p^2}{(p+1)^5} = -\frac{1}{16};\right.$$

$$A_{21} = \frac{1}{0!} \lim_{p \to -1} \left[(p+1)^3 \frac{p^2}{(p^2-1)^3}\right] = \lim_{p \to -1} \frac{p^2}{(p-1)^3} = -\frac{1}{8};$$

$$A_{22} = \frac{1}{1!} \lim_{p \to -1} \frac{d}{dp}\left[\frac{p^2}{(p-1)^3}\right] = \lim_{p \to -1}\left[\frac{2p}{(p-1)^3} - \frac{3p^2}{(p-1)^4}\right] = \frac{1}{16};$$

$$A_{23} = \frac{1}{2!} \lim_{t \to -1} \frac{d^2}{dp^2}\left[\frac{p^2}{(p-1)^3}\right] = \frac{1}{2} \lim_{p \to -1} \left[\frac{2}{(p-1)^3} - \frac{12p}{(p-1)^4} + \frac{12p}{(p-1)^5}\right] = \frac{1}{16}.$$

Берилган тасвирнинг ёйилмаси узил-кесил қуйидагича бўлади:

$$F(p) = \frac{p^2}{(p^2-1)^3} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(p-1)^3} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{p-1} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(p+1)^3} + $$
$$+ \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{p+1}.$$

Энди оригинални (3.14) формуладан (ёки 2.2-жадвалдан) фойдаланиб топамиз:

$$f(t) = \frac{1}{8} \cdot \frac{t^2}{2} e^t + \frac{1}{16} te^t - \frac{1}{16} e^t - \frac{1}{8} \cdot \frac{t^2}{2} e^{-t} + \frac{1}{16} te^{-t} + \frac{1}{16} e^{-t}$$

ёки

$$F(p) = \frac{p^2}{(p^2-1)^3} \to \frac{t^2-1}{8} \operatorname{sh} t + \frac{t}{8} \operatorname{ch} t.$$

3-дарсхона топшириқлари

1. Қуйидаги тасвирларнинг оригиналларини биринчи ёйиш теоремасидан фойдаланиб топинг:

а) $F(p) = \frac{1}{p(1+p^4)}$; б) $F(p) = \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p^2}}$.

Ж: а) $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{4n}}{(4n!)} (-1)^{n+1}$.

б) $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!\,(2n!)}$.

2. Қуйидаги тасвирларнинг оригиналларини иккинчи ёйиш теоремасидан фойдаланиб топинг:

а) $F(p) = \frac{p}{(p^2+1)(p^2+2p+2)}$;

б) $F(p) = \frac{1}{(p-1)(p^2-4)}$;

в) $F(p) = \frac{p^2-1}{p(p^2+4)^2}$.

Ж: а) $f(t) = \frac{1}{5}(\cos t + 2\sin t) - \frac{1}{5} e^{-t}(\cos t + 3\sin t)$;

б) $f(t) = -\frac{1}{3} e^t + \frac{1}{4} e^{2t} + \frac{1}{12} e^{-2t}$;

в) $f(t) = \frac{1}{16}(\cos 2t + 5t \sin 2t - 1)$.

3- мустақил иш топшириқлари

1. Қуйидаги тасвирларнинг оригиналларини биринчи ёйиш теоремасидан фойдаланиб топинг:

а) $F(p)=p-\sin\frac{1}{p}$;

б) $F(p)=p\ln\left(1+\frac{1}{p^2}\right)$.

Ж: а) $f(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{[(2n+1)!]^2}$.

б) $f(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(n+1)(2n!)}$.

2. Қуйидаги тасвирларнинг оригиналларини иккинчи ёйиш теорэмасидан фойдаланиб топинг:

а) $F(p)=\frac{p+3}{p(p^2-4p+3)}$;

б) $F(p)=\frac{1}{p(p^4-5p^2+4)}$;

в) $F(p)=\frac{p^2+p+1}{(p-1)^3(p^2+1)}$.

Ж: а) $f(t)=1-e^{2t}+e^{3t}$; б) $f(t)=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\operatorname{ch}t+\frac{1}{12}\operatorname{ch}2t$;

в) $f(t)=\frac{3t^2-1}{4}e^t+\frac{1}{4}(\sin t+\cos t)$.

4-§. Оригиналлар ўрамаси, унинг хоссалари. Ўраманинг Лаплас алмаштиришлари

Дастлаб ўрама деб аталадиган тушунча билан танишамиз.

$f(t)$ ва $g(t)$ функцияларнинг *ўрамаси* деб

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,dt \tag{4.1}$$

интегралга айтилади. Ўрама интеграл ости ифодасига кирувчи ва (4.1) интегралнинг юқори чегара ўзгарувчиси бўлган t нинг функциясидир.

Функцияларнинг ўрамаси

$$f*g=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,dt,$$

каби белгиланади.

Ўраманинг муҳим хоссаларини келтирамиз:

а) Ўрама $f(t)$ ва $g(t)$ функцияларга нисбатан коммутативдир, яъни

$$f * g = g * f.$$

Ҳақиқатан ҳам, $g * f$ учун интегралда қуйидаги ўрнига қўйишни бажарамиз:

$$t - \tau = \tau_1, d\tau = -d\tau_1;\ \tau = 0 \text{ да } \tau_1 = t \text{ ва } \tau = t \text{ да } \tau_1 = 0,$$

у ҳолда

$$g * f = \int_0^t g(\tau) f(t-\tau)\, d\tau = -\int_t^0 g(t-\tau_1) f(\tau_1)\, d\tau_1 =$$

$$= \int_0^t f(\tau_1) g(t-\tau_1)\, d\tau_1 = f * g.$$

Демак, $g * f = f * g$.

б) Агар $f(t)$ ва $g(t)$ оригиналлар бўлса, у ҳолда $f * g$ йиғма ҳам оригинал бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $f(x)$ ва $g(x)$ оригиналлар бўлса, у ҳолда $f * g$ учун оригиналнинг биринчи ва иккинчи шартлари а), б) ни (1-§) текшириш осон, в) шартни текшириш учун қуйидагидан фойдаланамиз: шундай α_1 ва α_2 сонлар мавжудки, улар учун

$$|f(t)| \leqslant M_1 e^{\alpha_1 t} \text{ ва } |g(t)| \leqslant M_2 e^{\alpha_2 t}$$

бўлади. α_1 ва α_2 сонларнинг энг каттасини α билан белгилаймиз. У ҳолда (4.1) ўрамада интеграл остидаги $f(\tau) g(t-\tau)$ ифода ихтиёрий $(0 \leqslant \tau \leqslant t)\, \tau$ лар учун қуйидаги тенгсизликни қаноатлантиради:

$$|f(\tau) g(t-\tau)| \leqslant M_1 e^{\alpha t} \cdot M_2 e^{\alpha(t-\alpha)} = M e^{\alpha t},$$

бунда $M = M_1 \cdot M_2$. Интегрални баҳолаш ҳақидаги теоремага асосан

$$|f * g| = \left|\int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau\right| \leqslant M e^{\alpha t} \cdot t \leqslant M e^{(\alpha+1)t},$$

чунки барча t ларда $t < e^t$

Шундай қилиб, ўрама оригиналнинг в) шартини ҳам қаноатлантиради, яъни агар берилган $f(t)$ ва $g(t)$ функциялар оригинал бўлса, у ҳолда ўрама оригинал бўлади.

1-мисол. $f(t) = e^t$ ва $g(t) = t$ функцияларнинг ўрамасини топинг.

Ечиш: Иккита функциянинг ўрамаси таърифига кўра;

$$f * g = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t e^\tau (t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = t - \tau, & du = -d\tau \\ dv = e^\tau d\tau, & v = e^\tau \end{matrix}\right\} = e^\tau (t-\tau)\Big|_0^t +$$

$$+ \int_0^t e^\tau dr = -t + e^\tau\Big|_0^t = -t + e^t + 1.$$

Шундай қилиб, $e^t * t = e^t - t - 1$.

Ўраманинг Лаплас алмаштиришини топишга ўтамиз:

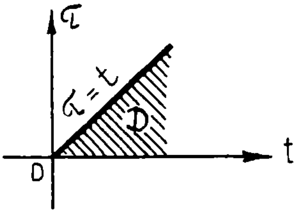
Тасвирларни кўпайтириш теоремаси (оригиналларнинг ўрамаси ҳақидаги теорема). *Агар $f(t) \leftarrow F(p)$, $g(t) \leftarrow G(p)$ бўлса, у ҳолда функцияларнинг $f * g$ ўрамасига тасвирларнинг кўпайтмаси мос келади:*

$$f * g \leftarrow F(p) \cdot G(p). \tag{4.3}$$

Ўрама учун Лаплас интегралини ёзамиз:

$$f * g \leftarrow \int_0^\infty \left[\int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \right] e^{-pt} dt. \tag{4.4}$$

Бу интегрални 2.2-шаклда тасвирланган D чексиз соҳа бўйича олинган икки каррали интеграл сифатида қараймиз. Ташқи интегралда t ўзгарувчи 0 дан ∞ гача, ички интегралда эса τ ўзгарувчи 0 дан t гача ўзгаради. (4.4) икки каррали интегралда интеграллаш тартибини ўзгартирамиз, яъни ташқи интегрални τ ўзгарувчи бўйича 0 дан ∞ гача, ички интегрални эса t ўзгарувчи бўйича τ дан ∞ гача оламиз:



2.2- шакл

$$\int_0^\infty dt \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) e^{-pt} dt =$$

$$= \int_0^\infty d\tau \int_\tau^\infty f(\tau) g(t - \tau) e^{-pt} dt.$$

Ўнг томондаги ички интегралда $t - \tau = t_1$, $dt = dt_1$ ўрнига қўйишни бажарамиз, ҳамда $f(t)$ ва $e^{-p\tau}$ кўпайтувчилар t_1 интеграллаш ўзгарувчисига боғлиқ бўлмаганлиги учун уларни ички интеграл белгисидан ташқарига чиқарамиз. У ҳолда қуйидаги икки каррали интегрални ҳосил қиламиз:

$$f * g = \int_0^\infty f(\tau) e^{-p\tau} d\tau \int_0^\infty g(t_1) e^{-pt_1} dt_1.$$

Бу эса интегралнинг кўпайтмасидан иборат, чунки ички интеграл τ га боғлиқ эмас. Бу интегралларнинг биринчиси $F(p)$, иккинчиси эса $G(p)$ дан иборат, бу эса

$$f * g \leftarrow F(p) G(p)$$

эканлигини билдиради.

Шундай қилиб, иккита оригинал ўрамасининг тасвири уларнинг тасвирлари кўпайтмасига тенг.

(4.3) формуладан кўпинча берилган тасвирни оригиналлари маълум бўлган кўпайтувчиларга ажратиш мумкин бўлган ҳолда фойдаланилади.

2-мисол. $F(p)=\frac{p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$ функция оригиналини ўрама ҳақидаги теоремадан фойдаланиб топинг.

Ечиш. $F(p)$ ни кўпайтма кўринишида ифодалаймиз:

$$F(p)=\frac{p}{p^2+\omega^2}\ \frac{\omega}{p^2+\omega^2}=F_1(p)F_2(p).$$

Тасвирлар жадвалидан фойдаланамиз:

$$F_1(p)=\frac{p}{p^2+\omega^2}\to\cos\omega t=f(t);\quad F_2(p)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\to\sin\omega t=g(t)$$

Шу сабабли $F(p)=F_1(p)F_2(p)\to f*g$, яъни:

$$F(p)\to\int\limits_0^t\sin\omega t\cdot\cos\omega(t-\tau)\,d\tau=\frac{1}{2}\int\limits_0^t\Big[\sin\omega t+\sin(2\omega\tau-\omega t)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\tau\sin\omega t-\frac{1}{2\omega}\cos(2\omega\tau-\omega t)\right]\Bigg|_0^t=\frac{1}{2}\,t\sin\omega t-\frac{1}{2\omega}\Big[\cos(\omega t)-$$

$$-\cos(-\omega t)\Big]=\frac{t\sin\omega t}{2}.$$

Шундай қилиб,

$$F(p)=\frac{p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}\to\frac{t\sin\omega t}{2}$$

ни ҳосил қилдик.

3-мисол. Тасвири $F(p)=\frac{p^2}{(p^2+1)^2}$ формула билан берилган оригиналини ўрама ҳақидаги теоремадан фойдаланиб топинг.

Ечиш. $F(p)$ тасвирни

$$F(p)=\frac{p}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+1}$$

кўпайтма кўринишида ифодалаймиз, бироқ $\frac{p}{p^2+1}\to\cos t$, шу сабабли

$$f(t)=\cos t\ \text{ва}\ g(t)=\cos t.$$

Демак, изланаётган оригинал

$$f*g=\int\limits_0^t\cos\tau\cos(t-\tau)\,d\tau=\frac{1}{2}\int\limits_0^t[\cos t+\cos(2\tau-t)]\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\tau\cos t+\frac{1}{2}\sin(2\tau-t)\right]\Bigg|_0^t=\frac{1}{2}\left(t\cos t+\frac{1}{2}\sin t+\frac{1}{2}\sin t\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\,(t\cos t+\sin t).$$

Шундай қилиб,

$$F(p)=\frac{p^2}{(p^2+1)^2}\rightarrow\frac{1}{2}(t\cos t+\sin t).$$

4- дарсхона топшириқлари

1. Функцияларниг ўрамасини топинг:

а) $f(t)=t$ ва $g(t)=\cos t$; б) $f(t)=t$ ва $g(t)=\sin t$.

Ж: а) $t*\cos t=1-\cos t$; б) $t*\sin t=t-\sin t$.

2. Ўрама теоремасидан фойдаланиб, а) мисолнинг оригиналини топинг, қолган мисолларнинг оригиналиии оригинал бўйича дифференциаллаш ёки интеграллаш теоремаларидан фойдаланиб топинг:

а) $F(p)=\frac{p}{p^4-1}$; в) $F(p)=\frac{1}{p(p^4-1)}$;

б) $F(p)=\frac{1}{p^4-1}$.

Ж: а) $f(t)=\frac{1}{2}(\text{ch}\,t-\cos t)$; в) $f(t)=\frac{1}{2}(\text{ch}\,t+\cos t-2)$;

б) $f(t)=\frac{1}{2}(\text{sh}\,t-\sin t)$.

4- мустақил иш топшириқлари

Ҳар бир топшириқда берилган мисолларнинг биринчиси а) нинг оригиналини оригиналларнинг ўрамаси ҳақидаги теоремадан фойдаланиб топинг. Қолган мисолларнинг оригиналларини шу а) нинг оригинали бўйича оригинални дифференциаллаш ёки интеграллаш теоремасидан фойдаланиб топинг:

1. а) $F(p)=\frac{1}{(p-1)(p^2+1)}$; б) $F(p)=\frac{p}{(p-1)(p^2+1)}$;

в) $F(p)=\frac{1}{p(p-1)\ (p^2+1)}$.

Ж: а) $f(t)=\frac{1}{2}(e^t-\sin t-\cos t)$; б) $f(t)=\frac{1}{2}(e^t+\sin t-\cos t)$;

в) $f(t)=\frac{1}{2}(e^t+\cos t-\sin t-2)$.

2. а) $F(p)=\frac{1}{(p+1)(p^2+2p+2)}$; б) $F(p)=\frac{p}{(p+1)(p^2+2p+2)}$;

в) $F(p)=\frac{1}{p(p+1)(p^2+2p+2)}$.

Ж: а) $f(t)=e^{-t}(1-\cos t)$; б) $f(t)=e^{-t}(\sin t+\cos t-1)$;

в) $f(t)=\frac{1}{2}e^{-t}(\cos t-\sin t-2)+\frac{1}{2}$.

5- §. Дифференциал тенгламалар ва уларнинг системаларини операцион ҳисоб усули билан ечиш.

Энди Лаплас алмаштиришини дифференциал тенгламалар ва уларнинг системаларини ечишга татбиқини кўриб чиқамиз.

5.1 Қуйидаги чизиқли дифференциал тенгламани кўрамиз:

$$x^n(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+\ldots+a_{n-1}x'(t)+a_nx(t)=f(t), \tag{5.1}$$

бу ерда $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — берилган ҳақиқий сонлар, $f(t)$ — маълум функция. Изланаётган $x(t)$ функция, унинг қаралаётган барча ҳосилалари ва $f(t)$ функция оригиналлар бўлсин деб фараз қилайлик. Коши масаласини ечиш, (5.1) тенгламанинг

$$x(0)=0,\ x'(0)=x_0',\ \ldots\ x^{(n-1)}(0)=x_0{}^{(n-1)} \tag{5.2}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечимини топишдан иборат, бу ерда $x_0, x_0', \ldots x_0{}^{(n-1)}$ — берилган сонлар.

$$x(t)\leftarrow X(p) \text{ ва } f(t)\rightarrow F(p)$$

бўлсин. Оригинални дифференциаллаш ҳақидаги теорема ва (5.2) шартларга асосан қуйидагиларга эга бўламиз:

$$x'(t)\leftarrow pX(p)-x_0,$$
$$x''(t)\leftarrow p^2X(p)-px_0-x_0',$$

$$x^{(n-1)}(t)\leftarrow p^{n-1}X(p)-p^{n-2}x_0-p^{n-3}x_0'-\ldots-x_0{}^{(n-2)},$$
$$x^{(n)}(t)\leftarrow p^nX(p)-p^{n-1}x_0-p^{n-2}x_0'-\ldots-x_0^{(n-1)}$$

Тасвирларнинг чизиқлилигидан фойдаланамиз ва (5.1) тенгламада тасвирларга ўтамиз:

$$(p^nX(p)-p^{n-1}x_0-p^{n-1}x_0'-\ldots-x_0{}^{(n-1)})+a_1(p^{n-1}X(p)-$$
$$-p^{n-2}x_0-\ldots-x_0{}^{(n-2)})+a_nX(p)=F(p).$$

(5.1) тенгламага мос тасвирлардаги тенгламани ҳосил қилдик. Уни *тенгламанинг оператори* деб атаймиз. Бу $X(p)$ га нисбатан биринчи даражали алгебраик тенгламадир. Уни бундай ёзамиз:

$$Q_n(p)X(p)=F(p)+R_{n-1}(p), \tag{5.2}$$

бу ерда $Q_n(p)$ ва $R_{n-1}(p)$ — мос равишда n- ва $n-1$-даражали кўпҳадлардир, $Q_n(p)=p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n$ — (5.1) тенгламанинг характеристик тенгламаси, $R_{n-1}(p)$ эса бошланғич шартларга боғлиқ кўпҳад. (5.2) тенгламадан,

$$X(p)=\frac{F(p)+R_{n-1}(p)}{Q_n(p)} \tag{5.3}$$

экани келиб чиқади. Биз (5.1) дифференциал тенгламанинг операторли тенгламасини ҳосил қилдик. (5.3) функция тасвири бўладиган $x(t)$ оригинал (5.1) тенгламанинг (5.2) бошланғич шартларни қаноатлантирадиган изланаётган ечими бўлади.

Хусусан, агар барча бошланғич шартлар нолга тенг, яъни

$$x_0 = x_0' = \qquad = x_0^{(n-1)} = 0$$

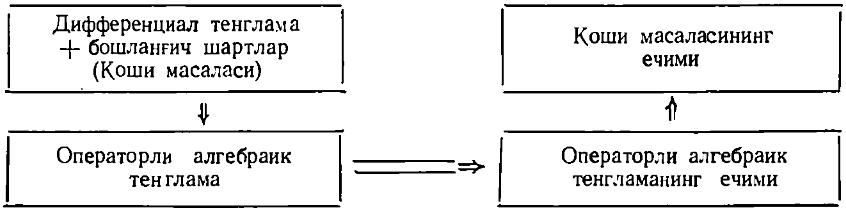
бўлса, у ҳолда $R_{n-1}(p) = 0$ ва

$$X(p) = \frac{F(p)}{Q_n(p)}. \qquad (5.4)$$

(5.3) ва (5.4) формулаларда тасвирлардан оригиналларга ўтиб, изланаётган $x(t)$ ечимни ҳосил қиламиз.

Чизиқли дифференциал тенгламаларни операцион усул билан интеграллашнинг классик усуллардан устунлиги шундаки, биз бу ҳолда дифференциал тенгламанинг берилган бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечимини дарҳол, (умумий ечимни ҳосил қилишни четлаб ўтиб) топамиз.

Шундай қилиб, Коши масаласини ечиш қуйидаги схема бўйича амалга оширилади:



1-мисол. Агар $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ бўлса, $x'' - 2x' - 3x = e^{3t}$ тенгламанинг ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламадан операторли тенгламага ўтамиз:

$$x(t) \leftarrow X(p),$$

у ҳолда

$$x'(t) \leftarrow pX(p), \quad x''(t) \leftarrow p^2X(p).$$

Тасвирлар жадвалидан $e^{3t} \leftarrow \frac{1}{p-3}$ ни топамиз.

Операторли тенглама қуйидаги кўринишда бўлади:

$$p^2X(p) - 2pX(p) - 3X(p) = \frac{1}{p-3}$$

ёки

$$(p^2 - 2p - 3)X(p) = \frac{1}{p-3},$$

бундан:

$$X(p) = \frac{1}{(p-3)^2(p+1)}.$$

Рационал касрни энг содда касрларга ёямиз:

$$\frac{1}{(p-3)^2(p+1)}=\frac{A}{(p-3)^2}+\frac{B}{p-3}+\frac{C}{p+1},$$

$$1=A(p+1)+B(p-3)(p+1)+C(p-3)^2.$$

A, B, C коэффициентларни қуйидаги тенгламалар системасидан топамиз:

$$\begin{array}{l|l} p=-1 & 1=16C, \\ p=+3 & 1=4A, \\ p^2 & 0=B+C. \end{array}$$

Демак,

$$A=\frac{1}{4},\ C=\frac{1}{16},\ B=-\frac{1}{16}.$$

Шундай қилиб,

$$X(p)=\frac{1}{4(p-3)^2}-\frac{1}{16(p-3)}+\frac{1}{16(p+1)}.$$

Тасвирлар жадвалидан фойдаланиб хусусий ечимни (оригиналчи) топамиз:

$$x(t)=\frac{1}{4}te^{3t}-\frac{1}{16}e^{3t}+\frac{1}{16}e^{-t}$$

2-мисол. $x''-3x'+2x=te^t$ тенгламани $x(0)=1$, $x'(0)=-2$ бошланғич шартларда интегралланг.

Ечиш. $x(t)\leftarrow X(p)$ деймиз, у ҳолда берилган бошланғич шартларга асосан

$$x'(t)\leftarrow pX(p)-1,$$
$$x''(t)\leftarrow p^2X(p)-p+2.$$

Тасвирлар жадвалидан тенгламанинг биринчи қисмининг тасвирини топамиз:

$$te^t\leftarrow\frac{1}{(p-1)^2}.$$

Берилган тенгламада барча функцияларни уларнинг тасвирлари билан алмаштириб, қуйидаги операторли тенгламани ҳосил қиламиз:

$$(p^2X(p)-p+2)-3(pX(p)-1)+2X(p)=\frac{1}{(p-1)^2}$$

ёки

$$X(p)(p^2-3p+2)-p+5=\frac{1}{(p-1)^2}.$$

Бу тенгламадан $X(p)$ ни аниқлаймиз:

$$X(p)=\frac{p-5}{p^2-3p+2}+\frac{1}{(p-1)^2(p^2-3p+2)}$$

ёки

$$X(p)=\frac{p^3-7p^2+11p-4}{(p-1)^3(p-2)}.$$

$X(p)$ нинг оригиналини иккинчи ёйиш теоремасидан фойдаланиб аниқлаймиз. Бунинг учун дастлаб рационал касрни энг содда касрларга ёзамиз:

$$X(p)=\frac{A_{11}}{(p-1)^3}+\frac{A_{12}}{(p-1)^2}+\frac{A_{13}}{p-1}+\frac{A_{21}}{p-2}.$$

A_{11}. A_{12}, A_{13}, A_{21} коэффициентларни (3.11) формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$A_{11}=\frac{1}{0!}\lim_{p\to1}(p-1)\frac{p^3-7p^2+11p-4}{(p-1)^3(p-2)}=\lim_{p\to1}\frac{p^3-7p^2+11p-4}{p-2}=-1,$$

$$A_{12}=\frac{1}{1!}\lim_{p\to1}\left(\frac{p^3-7p^2+11p-4}{p-2}\right)=\lim_{p\to1}\left(\frac{3p^2-14p+11}{p-2}-\right.$$

$$\left.-\frac{p^3-7p^2+11p-4}{(p-2)^2}\right)=-1,$$

$$A_{13}=\frac{1}{2!}\lim_{p\to1}\left(\frac{3p^2-14p+11}{p-2}-\frac{p^3-7p^2+11p-4}{(p-2)^2}\right)'=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{p\to1}\left(\frac{6p-14}{p-2}-\frac{3p^2-14p+11}{p-2}-\right.$$

$$\left.-\frac{3p^2-14p+11}{(p-2)^1}+\frac{2(p^3-7p^2+11p-4)}{(p-2)^3}\right)=3,$$

$$A_{21}=\frac{1}{0!}\lim_{p\to2}(p-2)\frac{p^3-7p^2+11p-4}{(p-1)^3(p-2)}=\lim_{p\to2}\frac{p^3-7p^2+11p-4}{(p-1)^3}=-2.$$

Шундай қилиб,

$$X(p)=-\frac{1}{(p-1)^3}-\frac{1}{(p-1)^2}+\frac{3}{p-1}-\frac{2}{p-2}.$$

Тасвирлар жадвалидан фойдаланиб, тенгламанинг ечимини ҳосил қиламиз:

$$x(t)=-\frac{t^2}{2}e^t-te^t+3e^t-2e^{2t}\ \text{ёки}\ x(t)=e^t\left(3-t-\frac{t^2}{2}\right)-2e^{2t}.$$

3-мисол. $x''+4x=2\sin2t$ тенгламани $x(0)=-1$, $x'(0)=0$ бошланғич шартларда интегралланг.

Ечиш. Тасвирлар жадвалига кўра

$$2\sin2t\leftarrow\frac{4}{p^2+4}.$$

$x(t)\leftarrow X(p)$ десак, бошланғич шартларга асосан:

$$x'(t)\leftarrow pX(p)+1,\quad x''(t)\leftarrow p^2X(p)+p.$$

Ушбу операторли тенгламани тузамиз:

$$p^2X(p)+p+4X(p)=\frac{4}{p^2+4}.$$

ёки

$$X(p)(p^2+4)+p=\frac{4}{p^2+4}.$$

Бундан

$$X(p) = \frac{4}{(p^2+4)^2} - \frac{p}{p^2+4}.$$

Ечимни топиш учун бу тенгликнинг ўнг томонини умумий махражга келтириб ўтирмаймиз, чунки иккинчи қўшилувчи учун оригинал маълум:

$$\frac{p}{p^2+4} \to \cos 2t,$$

биринчи қўшилувчини оригиналларнинг йиғиндиси ҳақидаги теоремадан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{2}{p^2+4} \to \sin 2t.$$

Шу сабабли

$$\frac{4}{(p^2+4)^2} = \frac{2}{p^2+4} \cdot \frac{2}{p^2+4} \to \int_0^t \sin 2\tau \sin 2(t-\tau) d\tau.$$

Сўнгги интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int_0^t \sin 2\tau \sin 2(t-\tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t (\cos(4\tau - 2t) - \cos 2t) d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \sin(4\tau - 2\tau) - \tau \cos 2t \right) \Big|_0^t = \frac{\sin 2t}{4} - \frac{t}{2} \cos 2t$$

Бундан узил-кесил

$$X(p) \to x(t) = \frac{\sin 2t}{4} - \frac{t}{2} \cos 2t - \cos 2t.$$

Шундай қилиб, берилган тенгламанинг ечими қуйидагича бўлади:

$$x(t) = \frac{1}{4} \sin 2t - \frac{1}{2} (t+2) \cos 2t.$$

4-мисол. $x'' + 2x' + 5x = te^t$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Умумий ечимни топиш учун қуйидаги ихтиёрий бошланғич шартларни оламиз:

$$x(o) = C_1, \; x'(0) = C.$$

$x(t) \leftarrow X(p)$ деб олиб, бошланғич шартларнинг ихтиёрийлигига асосан

$$x'(t) \leftarrow pX(p) - C_1, \; x''(t) \leftarrow p^2 X(p) - C_1 p - C_2$$

ни топамиз. Тасвирлар жадвалидан:

$$te^t \leftarrow \frac{1}{(p-1)^2}.$$

Қуйидаги операторли тенгламани тузамиз:

$$p^2X(p)-C_1-C_2+2pX(p)-2C_1+5X(p)=\frac{1}{(p-1)^2}$$

ёки

$$(p^2+2p+5)X(p)-C_1(p+2)-C_2=\frac{1}{(p-1)^2},$$

бундан

$$X(p)=\frac{C_1(p+2)}{p^2+2p+5}+\frac{C_2}{p^2+2p+5}+\frac{1}{(p-1)^2\,(p^2+2p+5)}.$$

Тасвирлар жадвалидан фойдаланиб, бир неча айний алмаштиришлардан сўнг биринчи икки қўшилувчининг оригиналини топамиз:

$$C_1\frac{p+2}{p^2+2p+5}=C_1\frac{(p+1)+1}{(p+1)^2+2^2}=C_1\left(\frac{p+1}{(p+1)^2+2^2}+\frac{1}{2}\,\frac{2}{(p+1)^2+2^2}\right)\to$$

$$\to C_1(e^{-t}\cos 2t+\frac{1}{2}\,e^{-t}\sin 2t)=C_1e^{-t}(\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t);$$

$$C_2\frac{1}{p^2+2p+5}=C_2\frac{1}{(p+1)^2+2^2}=\frac{C_2}{2}\,\frac{2}{(p+1)^2+2^2}\to\frac{C_2}{2}\,e^{-t}\sin 2t.$$

Сўнгги қўшилувчининг оригиналини излаш учун уни интеграл ҳисобда рационал касрларни интеграллашда қўлланиладиган одатдаги қоидалар бўйича энг содда касрларга ёямиз:

$$\frac{1}{(p-1)^2\,(p^2+2p+5)}=\frac{A}{(p-1)^2}+\frac{B}{p-1}+\frac{Cp+D}{p^2+2p+5},$$

бундан

$$1=A(p^2+2p+5)+p(p-1)(p^2+2p+5)+(Cp+D)(p-1)^2.$$

Ушбу

$$\begin{array}{l|l} p=+1 & 1=8A, \\ p^3 & 0=B+C, \\ p^2 & 0=A-B+2B+D-2C, \\ p^0 & 1=5A-5B+D, \end{array}$$

тенгламалар системасидан A, B, C, D коэффициентларни топамиз:

$$A=\frac{1}{8},\ B=-\frac{1}{16},\quad C=\frac{1}{16},\ D=\frac{1}{16}.$$

Шундай қилиб,

$$\frac{1}{(p-1)^2\,(p^2+2p+5)}=\frac{1}{8}\,\frac{1}{(p-1)^2}-\frac{1}{16}\,\frac{1}{p-1}+\frac{1}{16}\,\frac{p+1}{(p+1)^2+4}\to$$

$$\to\frac{1}{8}\cdot te^t-\frac{1}{16}\,e^t+\frac{1}{16}\,e^{-t}\cos 2t.$$

Барча қўшилувчиларнинг оригиналларини жамлаб, берилган дифференциал тенгламанинг ечимини ҳосил қиламиз:

$$x(t)=\frac{2t-1}{16}e^t+e^{-t}\left(C_1+\frac{1}{16}\right)\cos 2t+\frac{C_1+C_2}{2}\sin 2t.$$

ёки

$$x(t) = \frac{2t-1}{16} e^{t} + e^{-t}(\overline{C}_1\cos 2t + \overline{C}_2 \sin 2t),$$

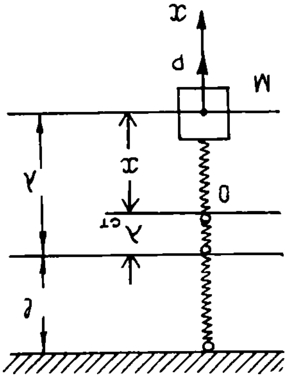
бу ерда

$$\overline{C}_1 = C_1 + \frac{1}{16}, \quad \overline{C}_2 = \frac{C_1 + C_2}{2}.$$

Бир қатор механика ва физика масалаларининг операцион ҳисоб усуллари билан ечилишини келтирайлик.

5.1. 1. Гармоник тебранма ҳаракат. Оғирлиги P бўлган юк тинч турган ҳолатидаги узунлиги l бўлган вертикал пружинага осилган. Юк бироз пастга тортилиб, кейин қўйиб юборилади. Пружина массаси ва ҳаво қаршилигини ҳисобга олмай, юкнинг ҳаракат қонунини топинг.

Ечиш. Ox ўқни юк осилган нуқта орқали пастга вертикал йўналтирамиз. Координаталар боши O ни юк мувозанатда бўлган ҳолатда, яъни юкнинг оғирлиги пружинанинг реакция кучи билан мувозанатлашган нуқтада оламиз (2.3-шакл).



2.3- шакл

λ — пружинанинг айни пайтдаги узайиши, $\lambda_{ст}$ эса статик узайиш, яъни чўзилмаган пружина охиридан мувозанат ҳолатигача бўлган катталик. У ҳолда $\lambda = \lambda_{ст} + x$ ёки $\lambda - \lambda_{ст} = x$.

Ҳаракатнинг дифференциал тенгламасини Ньютоннинг иккинчи қонуни $\vec{F} = m\vec{a}$ дан топамиз, бу ерда $m = \frac{p}{g}$ — юк массаси, $\vec{a}$ — ҳаракат тезланиши, $\vec{F}$ — юкка қўйилган кучларнинг тенг таъсир этувчиси. Қурилаётган ҳолда тенг таъсир этувчи куч пружинанинг таранглик кучи ва оғирлик кучи йиғиндисидан иборат.

Гук қонунига биноан пружинанинг таранглик кучи унинг узайишига пропорционал, яъни $-c\lambda$ га тенг, бунда c — ўзгармас пропорционаллик коэффициенти, у пружинанинг бикрлиги дейилади.

Шунинг учун ҳаракат дифференциал тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = c\lambda + p.$$

Мувозанат ҳолатида пружинанинг таранглик кучи оғирлик кучи билан мувозанатлашгани учун $P = c\lambda_{ст}$ бўлади. Дифференциал тенгламага P нинг ифодасини қўйиб ва $\lambda - \lambda_{ст}$ ни x билан белгилаб, тенгламани

$$m\frac{d^2\hbar}{dt^2} = -cx$$

кўринишда ёки $\frac{c}{m} = k^2$ орқали белгилаб,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$$

кўринишга келтирамиз.

Бу тенглама *юкнинг эркин тебранма ҳаракати тенгламаси* ёки *гармоник осцилляторнинг тенгламаси* дейилади. Бу коэффициентлари ўзгармас бўлган иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенглама. Келтирилган тенгламани операцион усул билан ечайлик. Бошланғич шартлар

$$x(0) = x_0,\ x'(0) = v_0$$

кўринишда бўлсин.

Оператор тенглама

$$[p^2X(p) - (x_0p - v_0)] + k^2X(p) = 0$$

кўринишда, унинг оператор ечими эса

$$X(p) = \frac{x_0p + v_0}{p^2 + k^2} = x_0\frac{p}{p^2 + k^2} + v_0\frac{1}{p^2 + k^2}.$$

кўринишда бўлади. Изланаётган хусусий ечим

$$x(t) = x_0\cos kt + \frac{v_0}{k}\sin kt$$

ёки

$$x(t) = A\sin(kt + \alpha)$$

дан иборат; бунда

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{k}\right)^2},\quad \alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{x_0k}{v_0}\right).$$

Агар $v_0 = 0$ бўлса, $x(t) = x_0\cos kt$ ёки $x(t) = x_0\sin\left(kt + \frac{\pi}{2}\right)$ бўлади.

5.1.2. *Сўнувчи тебранма ҳаракат.* Юкнинг 5.1-масаладаги шартларда ҳаракат қонунини топинг, бу ерда ҳаракат тезлигига пропорционал бўлган ҳаво қаршилигини ҳисобга олинг.

Ечиш. Бу ерда юкка таъсир этадиган кучлар қаторига ҳавонинг қаршилик кучи $\vec{R} = -\mu\vec{v}$ (манфий ишора $\vec{R}$ куч $\vec{v}$ тескари йўналганлигини билдиради) қўшилади. Ҳаракатнинг дифференциал тенгламасининг Ox ўққа проекцияси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx - \mu\frac{dx}{dt},$$

$$\text{ёки } \frac{c}{m} = k^2,\ \frac{\mu}{m} = 2n \text{ деб,}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+k^2x=0$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бошланғич шартлар

$$x(0)=x_0,\ x'(0)=v_0$$

лардан иборат.

Оператор тенглама

$$[p^2X(p)-(x_0p+v_0)]+2n[pX(p)-x_0]+k^2X(p)=0$$

кўринишда, унинг оператор ечими эса

$$X(p)=\frac{x_0p+v_0+2nx_0}{p^2+2np+k^2}=x_0\frac{p}{p^2+2np+k^2}+(v_0+2nx_0)\frac{1}{p^2+2np+k^2}$$

кўринишда бўлади.

$k_1=\sqrt{k^2-n^2}$ белгилаш киритиб, $(k^2-n^2)>0$ да изланаётган хусусий ечимни ёзамиз:

$$x(t)=x_0e^{-nt}\left(\cos k_1t-\frac{n}{k_1}\sin k_1t\right)+\frac{v_0+2nx_0}{k_1}e^{-nt}\sin k_1t=$$

$$=e^{-nt}\left(x_0\cos k_1t+\frac{v_0+nx_0}{k_2}\sin k_1t\right).$$

Қуйидаги

$$A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0+nx_0}{k_2}\right)^2},\quad \alpha=\operatorname{arctg}\frac{x_0k_1}{v_0+nx_0}$$

белгилашни киритиб, ечимни

$$x(t)=Ae^{-nt}\sin(k_1t+\alpha)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Агар $(k^2-n^2)<0$ бўлса, у ҳолда $h=\sqrt{n^2-k^2}$ деб ечимни

$$x(t)=e^{-nt}\left(x_0\mathrm{ch}(ht)+\frac{v_0+nx_0}{h}\mathrm{sh}(ht)\right)$$

кўринишда ҳосил қиламиз.

Агар $x^2-n^2=0$ бўлса, у ҳолда оператор ечим ушбу кўринишни олади:

$$X(p)=x_0\frac{p}{(p+n)^2}+(v_0+2nx_0)\cdot\frac{1}{(p+n)^2}=x_0\frac{p+n-n}{(p+n)^2}+$$

$$+\frac{v_0+2nx_0}{(p+n)^2}=\frac{x_0}{p+n}+\frac{v_0+nx_0}{(p+n)^2},$$

бундан оригиналга ўтсак,

$$x(t)=x_0e^{-nt}+(v_0+nx_0)te^{-nt}=e^{-nt}[x_0+(v_0+nx_0)t]$$

ни ҳосил қиламиз.

5.1.3.*Муҳитнинг қаршилиги ҳисобга олинмагандаги мажбурий тебранма ҳаракат.* Узунлиги l бўлган пружинага P оғирликдаги юк осилган. Юкка қўзғатувчи $Q\sin\omega t$ даврий куч таъсир қилади, бунда

Q ва p — ўзгармаслар. Пружинанинг массасини ва муҳитнинг қаршилигини ҳисобга олмай юкнинг ҳаракат қонунини топинг

Ечиш 5.1-мисолдагига ўхшаш қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$m = \frac{d^2x}{dt^2} = -cx + Q\sin\omega t.$$

$k^2 = \frac{C}{m}$, $q = \frac{Q}{m}$ белгилашлар киритсак, тенгламани

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = q\sin\omega t$$

кўринишда ёза оламиз. Бу тенглама ўзгармас коэффициентли иккинчи тартибли бир жинсли бўлмаган чизиқли тенгламадир. Бошлангич шартлар

$$x(0) = x_0,\ x'(0) = v_0$$

лардан иборат бўлсин.

Оператор тенглама

$$[p^2X(p) - (px_0 - v_0)] + k^2X(p) = \frac{q\omega}{p^2 - \omega^2}$$

кўринишда, оператор ечими эса

$$X(p) = \frac{q\omega}{(p^2 + k^2)(p^2 + \omega^2)} + \frac{x_0p + v_0}{p^2 + k^2}$$

кўринишда бўлади.

Оригиналларга ўтишда қуйидаги икки ҳолни кўрамиз:

1-ҳол. $\omega^2 = k^2$. Бу ҳолда

$$x(t) = \frac{q\omega}{k^2 - \omega^2}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t - \frac{1}{k}\sin kt\right) + x_0\cos kt + \frac{v_0}{k}\sin kt =$$

$$= \frac{q}{k^2\ \ \omega^2}\sin\omega t + x_0\cos kt + \left(\frac{v_0}{k} - \frac{q\omega}{k(k^2 + \omega^2)}\right)\sin kt =$$

$$= \frac{q}{k^2 - \omega^2}\sin\omega t + x_0\cos kt + \frac{1}{k}\left(v_0 - \frac{q\omega}{k^2 - \omega^2}\right)\sin kt.$$

Қуйидаги

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{1}{k^2}\left(v_0 - \frac{q\omega}{k^2 - \omega^2}\right)^2},\quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{x_0k}{v_0 - q\omega(k^2 - \omega^2)}$$

белгилашларни киритиб, ечимни

$$x(t) = \frac{q}{k^2 - \omega^2}\sin\omega t + A\sin(kt + \alpha)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

2-ҳол. $\omega^2 = k^2$. Бу ҳолда оператор ечим қуйидагича бўлади:

$$X(p) = \frac{q\omega}{(p^2 + k^2)^2} + \frac{x_0p + v_0}{p^2 + k^2},$$

хусусий ечим эса

$$x(t) = -\frac{q}{2k} t \cos kt + x_0 \cos kt + \frac{1}{k}\left(v_0 + \frac{q}{2k}\right) \sin kt.$$

кўринишда бўлади.

Агар

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{1}{k^2}\left(v_0 + \frac{q}{2k}\right)^2}, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{x_0 k}{v_0 + \frac{q}{2k}} = \operatorname{arctg} \frac{2x_0k^2}{q + 2kv_0}$$

белгилаш киритсак, хусусий ечимни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$x(t) = -\frac{q}{2k} t \cos kt + A \sin(kt + \alpha).$$

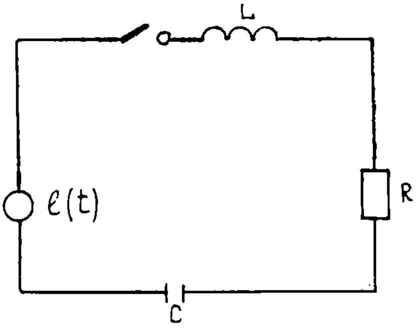
5.1.4. *Электр занжиридаги тебранишлар ҳақидаги масала.*

Электр юритувчи кучи $e(t)$ га тенг бўлган манбага кетма-кет уланган L индуктивлик ғалтаги, $R_{\text{Ом}}$ қаршилик ва C сиғимдан иборат контур уланган. Агар бошланғич пайтда контурдаги ток ва конденсатор заряди нолга тенг бўлса, занжирдаги i токни t вақтнинг функцияси сифатида топинг (2.4-шакл).

Ечиш. Кирхгоф қонунига биноан занжирдаги электр юритувчи куч индуктивликдаги, қаршиликдаги ва сиғимдаги кучланишлар пасайиши йиғиндисига тенг:

$$e(t) = u_L + u_R + u_C,$$

улар i ток билан қуйидаги муносабатлар орқали боғланган:



2.4- шакл

$$u_L = L\frac{di}{dt}, \quad u_R = Ri, \quad u_C = \frac{1}{c}\int_0^t i(\tau)\,d\tau.$$

Эслатма. Бу ерда охирги тенглик ток ва конденсатор заряди орасидаги муносабатдан топилади: $i = \frac{dq}{dt}$, бундан $q = \int_0^t i(\tau)\,d\tau + q_0$; сўнгра $u_C = \frac{q}{c}$ бўлгани учун $u_C = \frac{1}{c}\int_0^t i(\tau)\,d\tau + \frac{q_0}{c}$ берилган масалада шартга кўра $q_0 = 0$.

Шундай қилиб, қуйидаги тенглама ҳосил бўлади:

$$e(t) = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau.$$

Бу интегро-дифференциал тенгламадир, у тенгламаларнинг энг мураккаб турларидан бирига мансубдир. Лекин мазкур ҳолда уни t бўйича дифференциаллаб, ўзгармас коэффициентли иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламага ўтиш мумкин:

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{du}{dt}+\frac{1}{C}i=\frac{de}{dt}$$

Икки ҳолни кўрамиз.

1. $e(t)=E=\text{const}$. Бу ҳолда $\frac{de}{dt}=0$ ва охирги тенглама бир жинсли

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di}{dt}+\frac{1}{LC}i=0$$

тенгламага айланади. Бу дифференциал тенглама ток учун механик тебранишларнинг муҳитнинг қаршилигини ҳисобга олингандаги тенгламасига ўхшайди. Уни

$$i(0)=0,\quad i'(0)=\frac{E}{L}$$

бошланғич шартларда операцион усул ёрдамида ечайлик.

Оператор тенглама

$$\left[p^2I(p)-\frac{E}{L}\right]+\frac{R}{L}pI(p)+\frac{1}{LC}I(p)=0,$$

оператор ечим эса

$$I(p)=\frac{E}{L}\cdot\frac{1}{p^2+\frac{R}{L}p+\frac{1}{LC}}$$

кўринишда бўлади.

$\frac{R}{L}=2\delta$ деб белгилаб, қуйидаги уч ҳолни кўрайлик:

1-ҳол. $\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}=\omega_1^2>0$. Бу ҳолда тасвирдан оригиналга ўтиб $i(t)$ ток учун сўнувчи электр тебранишларни ифодаловчи қуйидаги

$$i(t)=\frac{E}{\omega_1L}e^{-\delta t}\sin\omega_1t$$

ечимни ҳосил қиламиз.

2-ҳол. $\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}=\beta^2>0$. Бу ҳолда

$$i(t)=\frac{E}{\beta L}e^{-\delta t}\sin\beta t.$$

i ток даврий бўлмайди ва занжирда ҳеч қандай тебранишлар содир бўлмайди.

3-ҳол. $\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}=0$. Бу ҳолда оператор ечим

$$I(p) = \frac{E}{L} \quad \frac{1}{(p+\delta)^2},$$

демак,

$$i(t) = \frac{E}{L} te^{-\delta t},$$

яъни бу ҳолда ҳам $i(t)$ ток даврий бўлмай, электр тебранишлар бўлмайди.

II. $e(t) = E \sin \omega t$. Бу ҳолда $\frac{de}{dt} = E \omega \cos \omega t$ ва қуйидаги чизиқли иккинчи тартибли бир жинсли бўлмаган тенглама ҳосил бўлади:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{E}{L} \omega \cos \omega t$$

Бошланғич шартлар қуйидагича:

$$i(0) = 0; \quad i'(0) = 0$$

бўлсин, $\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L} = \omega_1^2 > 0$ бўлган ҳолни кўрайлик. Оператор тенглама

$$p^2 I(p) + \frac{R}{L} pI(p) + \frac{1}{LC} I(p) = \frac{E\omega}{L} \quad \frac{p}{p^2+\omega^2},$$

оператор ечим эса

$$I(p) = \frac{E\omega}{L} \quad \frac{p}{\left(p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC}\right)(p^2+\omega^2)}$$

Қуйидаги

$$\frac{R}{2L} = \delta, \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2, \quad \omega_1^2 = \omega_0^2 - \delta^2$$

белгилашларни киритиб, тасвирдан оригиналга ўтсак:

$$i(t) = \frac{E\omega}{L} \cdot \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2) + 4\delta^2\omega^2} \left\{ e^{-\delta t} [(\omega^2 - \omega_0^2) \cos \omega t - \right.$$

$$\left. - \frac{\delta}{\omega_1} (\omega^2 + \omega_0^2) \sin \omega_1 t] - (\omega^2 - \omega_0^2) \cos \omega t + 2\delta\omega \sin \omega t \right\}.$$

Яна қуйидаги

$$\omega^2 - \omega_0^2 = \omega^2 - \frac{1}{LC} = \frac{\omega}{L}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \frac{\omega}{L} G, \; C = \omega L - \frac{1}{\omega C},$$

$$(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega^2 = \frac{\omega^2}{L^2} G^2 + \frac{R^2}{L^2} \omega^2 = \frac{\omega^2}{L^2}(G^2 + R^2) = \frac{\omega^2}{L^2} \cdot Z^2,$$

$$Z^2 = G^2 + R^2,$$

$$\omega^2 + \omega_0^2 = \omega^2 + \frac{1}{LC} = \frac{\omega}{L}\left(\omega L + \frac{1}{\omega C}\right) = \frac{\omega}{L} G_0, \; G_0 = \omega L + \frac{1}{\omega C}$$

белгилашларни киритсак, у ҳолда

$$i(t)=\frac{EL}{\omega Z^2}\left\{e^{-\delta t}\left[\frac{\omega}{L}G\cos\omega_1 t-\frac{\delta}{\omega_1}\frac{\omega}{L}G_0\sin\omega_1 t\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{\omega}{L}G\cos\omega t+2\delta\omega\sin\omega t\right\}=$$

$$=\frac{E}{Z^3}\left\{\frac{e^{-\delta t}}{\omega_1}\left[\omega_1 G\cos\omega_1 t-\delta G_0\sin\omega_1 t\right]-G\cos\omega t-R\sin\omega_1 t\right\}$$

Энди

$$\frac{R}{Z}=\cos\gamma,\qquad \frac{G}{Z}=\sin\gamma$$

$$\frac{\omega_1 G}{\sqrt{\omega_1^2 G^2+\delta^2 G_0^2}}=\sin\gamma_1,\quad \frac{\delta G_0}{\sqrt{\omega_1^2 G^2+\delta^2 G_0^2}}=\cos\gamma_1,$$

демак, у ҳолда

$$i(t)=\frac{-E\sqrt{\omega_1^2 G^2+\delta G_0^2}}{\omega_1 z^2}e^{-\delta t}\sin(\omega_1 t-\gamma_1)+\frac{E}{Z}\sin(\omega_1 t-\gamma).$$

Қуйидаги

$$\frac{\sqrt{\omega_1^2 G^2+\delta^2 G^{\,2}}}{Z}=\omega_0$$

тенглик ўринли эканини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам, илдиз остидаги ифодани қуйидагича ўзгартирсак,

$$\omega_1^2 G^2+\delta^2 G_0^2=(\omega_0^2-\delta^2)G^2+\delta G_0^2=\omega_0^2 G^2+$$

$$+\delta^2(G_0^2-G^2)=\omega_0^2 G^2+\delta^2(G_0+G)(G_0-G)=$$

$$=\omega_0^2 G_1+\frac{R^2}{4L^2}\cdot 2\omega L\quad\frac{2}{\omega C}=\omega_0^2 G^2+\frac{1}{LC}R^2=$$

$$=\omega_0^2(G^2+R^2)=\omega^2 Z^2$$

ни ҳосил қиламиз, чунки $\frac{1}{LC}=\omega_0^2$.

Демак,

$$\frac{\sqrt{\omega_1^2 G+\delta^2 G_0^2}}{Z}=\frac{\omega_0 Z}{Z}=\omega_0.$$

Юқоридагиларни эътиборга олиб узил-кесил қуйидаги

$$i(t)=\frac{E\omega_0}{\omega_1 Z}e^{-\delta t}\quad\sin(\omega_1 t-\gamma_1)+\frac{E}{Z}\sin(at-\gamma)$$

ни ҳосил қиламиз.

5.2. Ўзгармас коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламаларни ечишнинг операцион усулларини бундай тенгламалар системаларини ечишга ҳам татбиқ қилиш мумкин. Фарқ шундан иборатки, битта оператор тенглама ўрнига изланаётган функцияларнинг тасвирларига нисбатан чизиқли алгебраик оператор тенгламалар системаси ҳосил бўлади. Бундай берилган дифференциал тенгламалар системасини олдиндан ўзгартириб олишга зарурат қолмайди, масалан, уларни нормал шаклга келтириш зарур эмас. Берилган ҳар қандай системани, у қандай берилган бўлса, шу кўринишда операцион усул ёрдамида ечиш мумкин.

Биринчи тартибли тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\left.\begin{aligned} x_1'(t) + \sum_{k=1}^{n} a_{1k} x_k(t) &= f_1(t), \\ x_2'(t) + \sum_{k=1}^{n} a_{2k} x_k(t) &= f_2(t), \\ &\cdot \\ x_n'(t) + \sum_{k=1}^{n} a_{nk} x_k(t) &= f_n(t). \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

Қуйидаги

$$x_k(0) = x_{k_0}, \quad (k = \overline{1, n}) \tag{5.6}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимни топиш талаб қилинсин, бунда

$$L\{f_k\} = F_k(p), \quad L\{x_k(t)\} = X_k(p).$$

Оператор тенгламалар системаси қуйидаги

$$\left.\begin{aligned} pX_1(p) + \sum_{k=1}^{n} a_{1k} X_k(p) &= F_1(p) + x_{10}, \\ pX_2(p) + \sum_{k=1}^{n} a_{2k} X_k(p) &= F_2(p) + x_{20}, \\ \\ pX_n(p) + \sum_{k=1}^{n} a_{nk} X_k(p) &= F_n(p) + x_{n0}, \end{aligned}\right\} \tag{5.7}$$

кўринишда бўлади. (5.7) алгебраик чизиқли тенгламалар системасини $X_k(p)$ тасвирларга нисбатан ечиб, сўнгра топилган тасвирлардан $x_k(t)$ оригиналларга ўтиш керак, улар биргаликда (5.5) дифференциал тенгламалар системасининг (5.6) бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимини беради.

Ўзгармас коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламалар системаларини операцион ҳисоб усуллари ёрдамида ечишга мисоллар кўрамиз.

5-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x' + 3x - 4y = 9e^{2t}, \\ 2x + y' - 3y = 3e^{2t}, \end{cases}$$

чизиқли дифференциал тенгламалар системасини

$$x(0) = 2, \quad y(0) = 0$$

бошланғич шартларда ечинг.

Ечиш. Қуйидагига эгамиз:

$$e^{2t} \leftarrow \frac{1}{p-2}$$

$x(t) \leftarrow X(p)$, $y(t) \leftarrow Y(p)$ деб оламиз. Бошланғич шартларга асосан

$$x'(t) \leftarrow p\,X(p) - 2, \quad y'(t) \leftarrow Y(p)$$

операторли тенгламалар системасини тузамиз:

$$\begin{cases} pX(p) - 2 + 3\,X(p) - 4\,Y(p) = \dfrac{9}{p-2}, \\ 2\,X(p) + pY(p) - 3\,Y(p) = \dfrac{3}{p-2} \end{cases}$$

ёки

$$\begin{cases} X(p)(p+3) - 4\,Y(p) - 2 = \dfrac{9}{p-2}, \\ 2\,X(p) + Y(p)(p-3) = \dfrac{3}{p-2} \end{cases}$$

ёки

$$\begin{cases} X(p)(p+3) - 4\,Y(p) = \dfrac{2p+5}{p-2}, \\ 2\,X(p) + Y(p)(p-3) = \dfrac{3}{p-2} \end{cases}$$

Бу системани $X(p)$ ва $Y(p)$ га нисбатан ечиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$X(p) = \frac{2p^2 - p - 3}{(p^2-1)(p-2)}, \quad Y(p) = -\frac{p+1}{(p^2-1)(p-2)}$$

ёки

$$X(p) = \frac{2p-3}{(p-1)(p-2)}, \quad Y(p) = -\frac{1}{(p-1)(p-2)}.$$

Топилган тасвирларни энг содда касрларга ёйиб, қуйидагини топамиз:

$$X(p) = \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-2}, \quad Y(p) = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p-2}.$$

Тасвирлар жадвалидан:

$$x(t) = e^{t} + e^{2t},$$
$$y(t) = e^{t} - e^{2t}$$

6-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x' + 2x + y' = 0, \\ 3x' - y'' + 2y = 0 \end{cases}$$

бир жинсли системанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Системанинг умумий ечимини топиш талаб этилаётганлиги учун бошланғич шартларни қуйидаги кўринишда оламиз:

$$x(0) = C_1, \; x'(0) = C_2, \; y(0) = C_3, \; y'(0) = C_4$$

$x(t) \leftarrow X(p)$, $y(t) \leftarrow Y(p)$ деб олиб, бошланғич шартларга асосан қуйидагиларни топамиз:

$$x'(t) \leftarrow pX(p) - C_1, \quad y'(t) \leftarrow pY(p) - C_3,$$
$$x''(t) \leftarrow p^2X(p) - C_1p - C_2, \; y''(t) \leftarrow p^2Y(p) - C_3p - C_4.$$

Операторли тенгламалар системасига ўтсак:

$$\begin{cases} (p^2+2)X(p) + pY(p) = C_1p + C_2 + C_3, \\ 3pX(p) - (p^2-2)Y(p) = -C_3p + 3C_1 - C_4. \end{cases}$$

Бу системани ечиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$X(p) = \frac{(p^3+p)C_1 + (p^2-2)C_2 - 2C_3 - pC_4}{(p^2-1)(p^2+4)},$$

$$Y(p) = \frac{-6C_1 + 3pC_2 + (p^2+5p)C_3 + (p^2+2)C_4}{(p^2-1)(p^2+4)}$$

Энди оригиналларни топамиз. Қуйидагига эгамиз:

$$\frac{1}{(p^3-1)(p^2+4)} = \frac{1}{5}\,\frac{(p^2+4)-(p^2-1)}{(p^2-1)(p^2+4)} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{p^2-1} - \frac{1}{p^2+4}\right) \to$$
$$\to \frac{1}{5}\left(\operatorname{sh} t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)$$

Бундан, оригинални дифференциаллаш қоидасига кўра, кетма-кет қуйидагиларни топамиз:

$$\frac{p}{(p^2-1)(p^2+4)} \to \frac{1}{5}(\operatorname{ch} t - \cos 2t),$$
$$\frac{p^2}{(p^2-1)(p^2+4)} \to \frac{1}{5}(\operatorname{sh} t + 2\sin 2t),$$
$$\frac{p^3}{(p^2-1)(p^2+4)} \to \frac{1}{5}(\operatorname{ch} t + 4\cos 2t).$$

Чап томонларда $f(0)$ кўринишдаги қўшилувчилар, $f(0) = 0$ бўлганлиги учун, пайдо бўлмайди. Ҳосил қилинган формулалардан фойдаланиб, $X(p)$ ва $Y(p)$ нинг юқорида келтирилган ифодалари бўйича берилган системанинг умумий ечимини топамиз:

$$x(t) = \frac{2C_1 - C_4}{5}\operatorname{ch} t - \frac{C_2 + 2C_3}{5}\operatorname{sh} t + \frac{3C_1 + C_4}{5}\cos 2t +$$
$$+ \frac{3C_2 + C_3}{5}\sin 2t,$$

$$y(t) = \frac{3(C_2 + 2C_3)}{5}\operatorname{ch} t - \frac{3}{5}(2C_1 - C_4)\operatorname{sh} t -$$

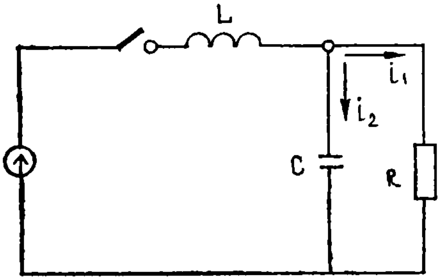
$$-\frac{1}{5}(3C_2+C_3)\cos 2t+\frac{1}{5}(3C_1+C_4)\sin 2t.$$

Интеграллашда операцион усулларнинг классик усуллардан устунлик томонларини таъкидлаб ўтамиз:

а) умумий ечимни топмай туриб, хусусий ечимни топиш имконияти бор (5-мисол);

б) системанинг умумий ечими шундай қулай усулда ёзиладики, берилган исталган бошланғич шартларни бевосита, тўғридан-тўғри ўрнига қўйиб, керакли хусусий ечимни ажратиб олиш мумкин (6-мисол).

5.2.1. *Занжирни электр юритувчи кучи ўзгармас бўлган манбага улаш.* L индуктивлик C сиғим ва R қаршилик 2.5-шаклда тасвирланган схема бўйича уланган. Занжир ўзгармас электр юритувчи кучи E га тенг бўлган манбага уланади, бунда уланишга қадар занжирда ток ва заряд бўлмайди. Ўзиндукция ғалтагидан ўтадиган i токни t вақтнинг функцияси кўринишда топинг.



2.5-шакл

Ечиш. Ўнг контурдаги токларни i_1 ва i_2 орқали белгилаб, Кирхгоф қонуни асосида масаланинг тенгламалар системасини тузамиз:

$$\left.\begin{aligned} &L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int_0^t(i-i_1)\,d\tau=E,\\ &Ri_1-\frac{1}{C}\int_0^t(i-i_1)\,d\tau=0, \end{aligned}\right\} \qquad (5.8)$$

бунда $i-i_1=i_2$.

Бошланғич шартлар

$$i(0)=i_1(0)=0$$

бўлсин. Оператор тенгламалар системаси

$$\left.\begin{aligned} &L_pI(p)+\frac{1}{C\cdot p}\,[I(p)-I_1(p)=\frac{E}{p},\\ &RI_1(p)-\frac{1}{C\cdot p}\,[I(p)-I_1(p)]=0 \end{aligned}\right\}$$

ёки

$$\left.\begin{aligned} &\left(L_p+\frac{1}{C\cdot p}\right)I(p)-\frac{1}{C\cdot p}I(p)=\frac{E}{p},\\ &\frac{1}{C\cdot p}I(p)-\left(R+\frac{1}{C\cdot p}\right)I_1(p)=0 \end{aligned}\right\}$$

кўриинишда бўлади.

Бу алгебраик системанинг иккинчи тенгламасидан $I(p)$ ни топамиз. $I(p)$ нинг бу ифодасини алгебраик системанинг биринчи тенгламасига қўйсак,

$$I_1(p) = \frac{E}{LCR} \quad \frac{1}{p\left(p^2 + \frac{1}{CR} p + \frac{1}{LC}\right)}$$

Икки ҳолни кўрамиз.

1- ҳол. $\frac{1}{LC} - \frac{1}{4C^2R^2} = \omega_1^2 > 0$ бўлсин, бу ҳолда оригиналларга ўтиб, қуйидагини топамиз:

$$i(t = \frac{E}{CR} \quad \frac{1}{\frac{1}{CL}} \left[1 - e^{-\frac{t}{2RC}} \left(\cos\omega_1 t + \frac{1}{2CR\omega_1} \sin\omega_1 t\right)\right] =$$

$$= \frac{EL}{R} \left[1 - e^{-\frac{t}{2RC}} \left(\cos\omega_1 t + \frac{1}{2CR\omega_1} \quad \sin\omega_1 t\right)\right]$$

Юқорида келтирилган $I(p)$ нинг оператор тенгламасини, $I_1(p)$ ифодаси н фойдаланиб, қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$I(p) = \frac{E}{LCR} \left[CR \quad \frac{1}{p^2 + p/(CR) + 1/LC} + \frac{1}{p\,[p^2 + p/CR\,p + 1/LC}\right]$$

Бу ифодадан оригиналга ўтиб, қуйидагини топамиз:

$$i(t) = \frac{E}{LCR} \left\{CR \frac{1}{\omega_1} e^{-\frac{t}{2RC}} \sin\omega_1 t + LC \left[1 - e^{-\frac{t}{2RC}} \left(\cos\omega_1 t + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{1}{2CR\omega_1} \sin\omega_1 t \right)\right]\right\} = \frac{E}{R} \left\{1 - e^{-\frac{t}{2RC}} \left[\cos\omega_1 t + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{\omega_1} \left(\frac{1}{2RC} - \frac{R}{L}\right) \sin\omega_1 t\right]\right\}$$

$i_2(t)$ токнинг қийматини унинг $i(t) - i_1(t)$ айирмага тенглиги ифодасидан топилади.

2- ҳол. $\frac{1}{4C^2R^2} - \frac{1}{LC} = \beta^2 > 0$ бўлсин. Бу ҳолда оригиналларга ўтиб, қуйидаги ифодани топамиз:

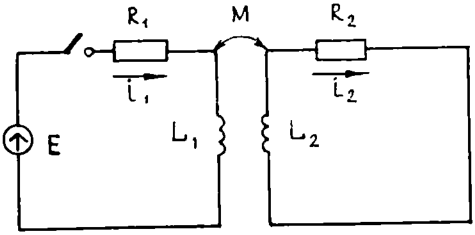
$$i_1(t) = \frac{EL}{R} \left[1 - e^{-\frac{t}{2RC}} \left(\mathrm{ch}\,\beta t + \frac{1}{2CR\beta} \mathrm{sh}\,\beta t\right)\right]$$

$i(t)$ учун ҳам унинг оператор тенгламасидаи фойдаланиб, қуйидаги ифодани ёзиш мумкин:

$$i(t)=\frac{E}{R}\left\{1-e^{-\frac{t}{2RC}}\left[\operatorname{ch}\beta t+\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{2RC}-\frac{R}{L}\right)\operatorname{ch}\beta t\right]\right.$$

5.2.2. *Индуктив боғланган иккита контурдан иборат занжирни улаш.* Электр юритувчи кучи E ўзгармас бўлган манбага 2.6-шаклда тасвирланган индуктив боғланган иккита контурдан иборат занжир уланади. Агар занжирга улаш ноль бошланғич шартларда амалга оширилса, шу билан бирга $L_1L_2 \neq M^2$ бўлса, ҳар иккала контурдаги i_1 ва i_2 токларни t вақтнинг функцияси сифатида топинг.

Ечиш. Кирхгоф қонунига асосан масаланинг дифференциал тенгламалари системаси қуйидаги кўринишда бўлади:



2.6- шакл

$$\left.\begin{aligned} L_1\frac{di_1}{dt}+R_1i_1+M\frac{di_2}{dt}&=E,\\ L_2\frac{di_2}{dt}+R_2i_2+M\frac{di_1}{dt}&=0.\end{aligned}\right\} \qquad (5.9)$$

Бошланғич шартлар

$$i_1(0)=i_2(0)=0$$

дан иборат.

Оператор тенгламалар системаси

$$\left.\begin{aligned} L_1pI_1(p)+R_1I_1(p)+MpI_2(p)&=\frac{E}{p},\\ L_2pI_2(p)+R_2I_2(p)+MpI_1(p)&=0\end{aligned}\right\}$$

ёки

$$\left.\begin{aligned} (L_1p+R_1)I_1(p)+MpI_2(p)&=\frac{E}{p},\\ MpI_1(p)+(L_2p+R_2)I_2(p)&=0\end{aligned}\right\},$$

кўринишда бўлади.

Охирги тенгламалар системасининг иккинчи тенгламасидан

$$I_2(p)=-\frac{Mp}{L_2p+R_2}\,I_1(p)$$

ни топамиз. Буни системанинг биринчи тенгламасига қўйиб,

ёки

$$I_1(p) = \frac{EL_2}{L_1L_2 - M^2} \cdot \frac{p + \frac{R_2}{L_2}}{p\left(p^2 + \frac{L_1R_2 + L_2R_1}{L_1L_2 - M^2}\,p + \frac{R_1R_2}{L_1L_2 - M^2}\right)} =$$

$$= \frac{E}{L_1\left(1 - \frac{M^2}{L_1L_2}\right)} \cdot \frac{p + \frac{R_2}{L_2}}{p\left(p^2 + \frac{\frac{R_2}{L_2} + \frac{R_1}{L_1}}{1 - \frac{M^2}{L_1L_2}}\,p + \frac{\frac{R_1R_2}{L_1L_2}}{1 - \frac{M^2}{L_1L_2}}\right)}$$

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\frac{M^2}{L_1L_2} = k^2, \quad R_1L_1 = 2\alpha_1, \quad \frac{R_2}{L_2} = 2\alpha_2, \quad \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{1 - k^2} = \sigma,$$

у ҳолда

$$I_1(p) = \frac{E}{L_1(1 - k^2)}\left[\frac{1}{p^2 + 2\sigma p + \frac{4\alpha_1\alpha_2}{1 - k^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{R_2}{L_2} \cdot \frac{1}{p\left(p^2 + 2\sigma p + \frac{4\alpha_1\alpha_2}{1 - k^2}\right)}\right]$$

Энди $\sigma^2 - \frac{4\alpha_1\alpha_2}{1 - k^2} = \beta^2 > 0$ бўлгани учун тасвирлардан оригиналларга ўтиб, қуйидаги ифодани топамиз:

$$i_1(t) = \frac{E}{R_1}\left\{1 + e^{-\sigma t}\left[\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta(1 - k^2)}\,\mathrm{sh}\,\beta t - \mathrm{ch}\,\beta t\right]\right\}.$$

Эслатма. β — ҳақиқий сон, чунки

$$\sigma^2 - \frac{4\alpha_1\alpha_2}{1 - k^2} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^2}{(1 - k^2)^2} - \frac{4\alpha_1\alpha_2}{1 - k^2} =$$

$$= \frac{\alpha_1^2 - 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 + 4\alpha_1\alpha_2k^2}{(1 - k^2)^2} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2k^2}{(1 - k^2)^2} > 0.$$

$i_2(t)$ нинг ифодасини топиш учун дастлаб оператор тенгламалар системасидан $I_2(p)$ оператор ечимни топиш зарур ва ундан сўнг тасвирлардан оригиналларга ўтиш керак.

5-дарсхона топшириқлари

1. Берилган дифференциал тенгламаларнинг берилган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимларини топинг:

а) $x''+2x'+x=e^{-t}$, $x(0)=1$, $x'(0)=0$;
б) $x''+4x=\cos 3t$, $x(0)=2$, $x'(0)=-2$;
в) $x''-9x=\operatorname{sh} t$, $x(0)=1$, $x'(0)=3$.

Ж: а) $x(t)=\left(1+t+\frac{t^2}{2}\right)e^{-t}$

б) $x(t)=\frac{11}{5}\cos 2t-\frac{1}{5}\cos 3t+\sin 2t$;

в) $x(t)=\frac{25}{24}\operatorname{sh} 3t-\operatorname{ch} 3t-\frac{1}{5}\operatorname{sh} t$.

2. Берилган дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимларини топинг:

а) $x''+9x=\cos 3t$;

б) $x''+2x'=te^{-2t}$

Ж: а) $x(t)=C_1\cos 3t+C_2\sin 3t+\frac{t}{6}\sin 3t$;

б) $x(t)=C_1+\left(C_2-\frac{t^2+t}{4}\right)e^{-2t}$

3. Берилган дифференциал тенгламалар системаларининг ечимларини берилган бошланғич шартларда топинг:

а) $\begin{cases}2x''+x-y'=-3\sin t,\\ x+y=-\sin t;\end{cases}$ $x(0)=0$, $x'(0)=1$, $y(0)=0$;

б) $\begin{cases}x'+2x+2y=10e^{2t},\\ y'-2x+y=7e^{2t},\end{cases}$ $x(0)=1$, $y(0)=3$.

Ж: а) $x(t)=t\cos t$, $y(t)=-t\sin t$;
б) $x(t)=e^{2t}$, $y(t)=3e^{2t}$

4. Берилган дифференциал тенгламалар системасининг умумий ечимини топинг:

$$\begin{cases}x''+y'=\operatorname{ch} t-\sin t,\\ y''+x'=\operatorname{ch} t-\cos t.\end{cases}$$

Ж: $x(t)=C_1+C_2\operatorname{sh} t+C_3\operatorname{ch} t$,
$y(t)=C_4-C_3\operatorname{sh} t-C_2\operatorname{ch} t+\operatorname{ch} t+\cos t$.

5-мустақил иш топшириқлари

1. Берилган дифференциал тенгламаларнинг ечимларини берилган бошланғич шартларда топинг:
а) $x''+4x=\sin 2t$, $x(0)=1$, $x'(0)=-2$;
б) $x'''-x''=e^t$ $x(0)=1$, $x'(0)=x''(0)=0$.

Ж: а) $x(t)=\cos 2t-\frac{7}{8}\sin 2t-\frac{t}{4}\cos 2t$;

б) $x(t)=3+t+(t-2)e^t$

2. $x''+x'=e^{-t}\sin t$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ж: $x(t) = C_1 + C_2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-t}(\cos t - \sin t)$.

3. Берилган дифференциал тенгламалар системаларининг ечимларини берилган бошланғич шартларда топинг:

$$\begin{cases} x'' - y' = 0, & x(0) = y'(0) = 0, \\ x' - y'' = 2\cos t, & x'(0) = y(0) = 2. \end{cases}$$

Ж: $x(t) = \sin t + \operatorname{sh} t, \quad y(t) = \cos t + \operatorname{ch} t$.

4. Берилган дифференциал тенгламалар системасининг умумий ечимини топинг:

$$\begin{cases} x'' + y' = t, \\ y'' - x' = 0. \end{cases}$$

Ж: $x(t) = C_1 + C_2\sin t + C_3\cos t,$

$y(t) = C_4 + C_3\sin t - C_2\cos t + \frac{t^2}{2}$

6- §. Дьюамель интеграли, унинг татбиқи

Бу параграфда биз йиғма ва тасвирларни кўпайтириш теоремаси билан танишишни давом эттирамиз.

1. $f(t) \leftarrow F(p)$ ва $g(t) \leftarrow G(p)$ бўлсин, у ҳолда $f(t)$ вз $g(t)$ функцияларнинг йиғмаси

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$$

интеграл бўлади. Тасвирларни кўпайтириш теоремасига асосан:

$$F(p)G(p) \to \int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau.$$

Бу ердан оригиналларни дифференциаллаш теоремасига асосан

$$pF(p)\;G(p) \to \frac{d}{dt}\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau, \tag{6.1}$$

чунки

$$\left.\left(\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau\right)\right|_{t=0} = \int_0^0 f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau = 0.$$

(6.1) формуланинг ўнг томонидаги интеграл учун t параметрдир, шу билан бирга унга интеграл остидаги функция ҳам, интеграллашнинг юқори чегараси ҳам боғлиқ.

Математик анализ курсидан аниқ интегралнинг параметр бўйича дифференциаллашнинг қуйидаги қоидаси маълум:

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \varphi(x,t)\,dx = \varphi(x_2,t)\frac{dx_2}{dt} - \varphi(x_1,t)\,\frac{dx_1}{dt} + \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{d\varphi}{dt}\,dx.$$

Буни (6.1) формуланинг ўнг томонига татбиқ этсак:

$$pF(p)\,G(p)\to f(t)\,g(0)+\int_0^t f(\tau)\,g'_t(t-\tau)\,d\tau. \qquad (6.2)$$

Бу формуланинг ўнг томони *Дьюамель интеграли* деб аталади. Йиғманинг ушбу

$$f*g=g*f.$$

ёки

$$\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t g(\tau)\,f(t-\tau)\,d\tau$$

коммутативлик хоссасига асосан (6.2) формулани бундай қайта ёзиш мумкин:

$$pF(p)\,G(p)\to g(t)\,f(0)+\int_0^t g(\tau)\,f'_t(t-\tau)\,d\tau. \qquad (6.3)$$

1-мисол. $\frac{1}{(p^2+1)\,p^3}$ тасвир учун оригинални Дьюамель формуласини татбиқ этиб топинг.

Ечиш. Берилган ифодани кейинги ҳисоблашлар қулай бўладиган шаклга келтирамиз:

$$\frac{1}{(p^2+1)p^3}=p\;\frac{1}{p^2+1}\;\;\frac{1}{p^4}$$

Ифодаларни белгилаймиз:

$$F(p)=\frac{1}{p^2+1},\qquad G(p)=\frac{1}{p^4}.$$

Тасвирлар жадвалидан фойдаланиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$F(p)=\frac{1}{p^2+1}\to\sin t=f(t),$$

$$G(p)=\frac{1}{p^4}\to\frac{t^3}{3!}-g(t).$$

Бундан:

$$g(0)=0,\;\; g'(t)=\frac{t^2}{2}$$

Энди Дьюамель формуласига кўра қуйидагига эга бўламиз:

$$pF(p)\;G(p)=\frac{1}{(p^2+1)\,p^3}\to\sin t\;\;0+\frac{1}{2}\int_0^t\sin\tau\,(t-\tau)\,d\tau.$$

Икки марта бўлаклаб интеграллаб, масаланинг ечимини ҳосил қиламиз:

$$\frac{1}{(p^2+1)\,p^3}\to\frac{t^2}{2}+\cos t-1.$$

2-мисол. Дьюамель формуласини татбиқ этиб,

$$\frac{p}{(p-1)(p+1)}$$

тасвирнинг оригиналини топинг.

Ечиш. Бу ерда

$$\frac{1}{p-1} \to e^{t} = f(t),\ \frac{1}{p+1} \to e^{-t} = g(t),\ f(0) = e^{0} = 1,\ f'(t) = e^{t}$$

бўлганлиги учун (6.3) Дьюамель формуласи бўйича қуйидагига эга бўламиз:

$$pF(p)\,G(p) = p\cdot\frac{1}{p-1}\quad\frac{1}{p+1} \to e^{-t}\quad 1 + \int_{0}^{t} e^{-t}\quad e^{t-\tau}\,d\tau =$$

$$= e^{-t} + e^{t}\int_{0} e^{-2\tau}\,d\tau = e^{-t} - \frac{1}{2}\,e^{t}\quad e^{-2\tau}\Big|_{0}^{t} = e^{-t} - \frac{1}{2}\,e^{t}\,(e^{-2t} - 1) =$$

$$= \frac{1}{2}(2e^{-t} - e^{-t} + e^{t}\ ) = \frac{1}{2}\,(e^{t} + e^{-t}) = \mathrm{ch}\,t.$$

2. Дьюамель интегралидан дифференциал тенгламаларни интеграллашда фойдаланиш мумкин. Бошланғич шартлари ноль бўлган ўзгармас коэффициентли чизиқли дифференциал тенглама учун Коши масаласи Дъюамель формуласи ёрдамида ўнг томони 1 га тенг бўлган ёрдамчи тенглама учун ўша масалани ечишга келтирилади.

Ўзгармас коэффициентли

$$x^{(n)} + a_{1}x^{(n-1)} + \qquad + a_{n-1}x' + a_{n}x = f(t) \tag{6.4}$$

чизиқли дифференциал тенгламанинг

$$x(0) = x'(0) = \qquad = x^{(n-1)}(0) = 0$$

бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечимини топиш талаб этилсин. Бу тенглама билан биргаликда чап томони шу тенгламанинг ўзи, ўнг томони эса 1 га тенг қуйидаги тенгламани ҳам қарайлик:

$$z^{(n)} + a_{1}z^{(n-1)} + \qquad + a_{n-1}z' + a_{n}z = 1. \tag{6.5}$$

Бу тенгламанинг ҳам

$$z(0) = z'(0) = \qquad = z^{(n-1)}(0) = 0$$

бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечимини излаймиз. Энди

$$X(p) \to x(t),,\quad Z(p) \to z(t),\quad F(p) \to f(t);\quad \frac{1}{p} \to 1$$

деб олиб, (6.4) ва (6.5) тенгламаларга мос операторли тенгламаларга ўтамиз:

$$p^{n}X(p) + a_{1}p^{n-1}X(p) + \qquad + a_{n-1}pX(p) + a_{n}\ X(p) = F(p),$$

$$p^n Z(p) + a_1 p^{n-1} Z(p) + \quad + a_{n-1} p Z(p) + a_n Z(p) = \frac{1}{p},$$

бу тенгламаларнинг ечимларини топамиз:

$$X(p) = \frac{F(p)}{Q_n(p)}, \quad Z(p) = \frac{1}{pQ_n(p)}, \tag{6.6}$$

бу ерда $Q_n(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \quad + a_{n-1}p + a_n$. (6.6) муносабатлардан

$$X(p) = pF(p)\, Z(p).$$

(6.2) ёки (6.3) шаклдаги Дьюамель формуласини татбиқ этиб, (6.4) дифференциал тенгламанинг ечимини қуйидаги шаклда ҳосил қиламиз:

$$pF(p)Z(p) = X(p) \to x(t) = \int_0^t f(\tau)\, z'(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= z(t)\, f(0) + \int_0^t z(\tau)\, f'(t-\tau)\, d\tau. \tag{6.7}$$

Бу формулалар ўзгармас коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламанинг бошланғич шартлари ноль бўлгандаги ечимини бу тенгламанинг ўнг томонидаги $f(t)$ функциянинг тасвирини топмасдан туриб аниқлашга имкон беради.

Шундай қилиб, (6.4) дифференциал тенгламанинг ноль бошланғич шартларни қаноатлантирадиган $x(t)$ ечимини, агар чап томони ўшандай, ўнг томони эса 1 га тенг (6.5) тенгламанинг ноль бошланғич шартларни қаноатлантирадиган $z(t)$ ечими маълум бўлса, квадратура шаклида топишга имкон беради. Дьюамель интегралининг чап томонлари бир хил, ўнг томонлари эса турлича бўлган бир неча дифференциал тенгламаларни дифференциаллашда татбиқ этиш айниқса фойдалидир.

3-мисол. $x'' - 5x' + 6x - \sin t$ дифференциал тенгламани $x(0) = x'(0) = 0$ бошланғич шартларда Дьюамель интегралини татбиқ этиб ечинг.

Ечиш. Дастлаб ёрдамчи

$$z'' - 5z' + 6z = 1$$

тенгламанинг $z(0) = z'(0) = 0$ бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечимини топамиз. Мос

$$p^2 Z(p) - 5pZ(p) + 6Z(p) = \frac{1}{p}$$

операторли тенглама

$$Z(p) = \frac{1}{p(p^2 - 5p + 6)} = \frac{1}{p(p-2)(p-3)}$$

ечимга эга. Рационал касрни энг содда касрларга ёямиз:

$$\frac{1}{p(p-2)(p-3)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-2}+\frac{C}{p-3},$$

бунда

$$1=A(p-2)(p-3)+Bp(p-3)+Cp(p-2).$$

A, B, C коэффициентларни қуйидаги системадан ҳисоблаймиз:

$$\begin{array}{r|l} p=0 & 1=6A, \\ p=2 & 1=-2B, \\ p=3 & 1=3C. \end{array}$$

Бундан:

$$A=\frac{1}{6},\quad B=-\frac{1}{2},\quad C=\frac{1}{3}.$$

Шундай қилиб,

$$Z(p)=\frac{1}{6p}-\frac{1}{2(p-2)}+\frac{1}{3(p-3)}$$

Шу сабабли тасвирлар жадвалидан фойдаланиб,

$$z(t)=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{3t}$$

ни ҳосил қиламиз, бундан:

$$z'(t)=-e^{2t}+e^{3t}$$

Берилган тенгламанинг ечимини излаш учун (6.7) нинг биринчи формуласидан фойдаланамиз. Бизнинг ҳолда $f(t)=\sin t$, демак,

$$x(t)=\int_0^t f(\tau)\,z'(t-\tau)\,d\tau=\int_0 \sin\tau\,(e^{3(t-\tau)}-e^{2(t-\tau)})\,d\tau=$$

$$=e^{3t}\int_0^t e^{-3\tau}\sin\tau\,d\tau-e^{2t}\int_0^t e^{-2\tau}\sin\tau\,d\tau. \qquad (6.8)$$

Икки марта бўлаклаб интеграллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$I=\int_0^t e^{\alpha\tau}\sin\tau\,d\tau=\left\{\begin{matrix} u=e^{\alpha\tau} & du=\alpha e^{\alpha\tau}\,d\tau \\ dv=\sin\tau\,d\tau, & v=-\cos\tau \end{matrix}\right\}=$$

$$=-e^{\alpha\tau}\cos\tau\Big|_0^t+\alpha\int_0^t e^{\alpha\tau}\cos\tau\,d\tau=1-e^{\alpha t}\cos t+\alpha\int_0^t e^{\alpha\tau}\cos\tau\,d\tau=$$

$$=\left\{\begin{matrix} u=e^{\alpha\tau} & du=\alpha e^{\alpha\tau}\,d\tau \\ dv=\cos\tau\,d\tau, & v=\sin\tau \end{matrix}\right\}=1-e^{\alpha t}\cos t+\alpha(e^{\alpha\tau}\sin\tau)\Big|_0^t-$$

$$-\alpha\int_0^t e^{\alpha\tau}\sin\tau\,d\tau=1-e^{\alpha t}\cos t+\alpha e^{\alpha t}\sin t-\alpha^2\int_0^t e^{\alpha\tau}\sin\tau\,d\tau,$$

бундан

$$I=1-e^{\alpha t}\cos t+\alpha e^{\alpha'}\sin t-\alpha^2 I,$$

Демак,

$$I = \int_0^t e^{\alpha\tau} \sin\tau\, d\tau = \frac{1}{1+\alpha^2}(1 - e^{\alpha t}\cos t + \alpha e^{\alpha t}\sin t).$$

Бу натижани (6.8) формулага қўйиб, $\alpha = -2$ ва $\alpha = -3$ бўлганда масаланинг ушбv ечимини ҳосил қиламиз:

$$x(t) = \frac{e^{3t}}{10}(1 - e^{-3t}\cos t - 3e^{-3t}\sin t) = -\frac{e^{2t}}{5}(1 - e^{-2t}\cos t -$$

$$- 2e^{-2t}\sin t) = \frac{1}{10}(e^{3t} - 2e^{2t} - \cos t - 3\sin t + 2\cos t +$$

$$+ 4\sin t) = \frac{1}{10}(e^{3t} - 2e^{2t} + \cos t + \sin t).$$

4-мисол. Дьюамель формуласидан фойдаланиб, $x'' + x = e^{\alpha t}$ тенгламани $x(0) = x'(0) = 0$ бошланғич шартларда ечинг.

Ечиш. $z'' + z = 1$ ёрдамчи тенгламани $z(0) = z'(0) = 0$ бошланғич шартларда қараймиз. Унинг

$$p^2Z(p) + Z(p) - \frac{1}{p}$$

операторли тенгламаси

$$Z(p) = \frac{1}{p(p^2+1)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}$$

ечимни беради, бундан $z(t) = 1 - \cos t$ ни ҳосил қиламиз. (6.7) формулага кўра $z'(t) = \sin t$, $f(t) = e^{\alpha t}$ да дастлабки тенгламанинг изланаётган ечимини ҳосил қиламиз:

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) z'(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t e^{\alpha\tau} \sin(t-\tau)\, d\tau =$$

$$- \frac{1}{\alpha^2+1}(e^{\alpha t} - \cos t \quad a\sin t).$$

5-мисол. Ушбу Коши масаласини Дьюамель формуласидан фойдаланиб ечинг:

$$x'' + x = \cos t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Ечиш. Бу тенгламанинг чап томони олдинги мисолдаги тенгламанинг чап томони билан бир хил бўлганлиги учун ёрдамчи тенгламанинг ечими яна ўша функциянинг ўзи бўлади:

$$z(t) = 1 - \cos t, \quad z'(t) = \sin t.$$

(6.7) формула бўйича $f(t) = \cos t$ бўлганда берилган тенгламанинг $x(t)$ ечимини ҳосил қиламиз:

$$x(t) = \int_0^t \cos\tau \sin(t-\tau)\, d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t (\sin t + \sin(t - 2\tau))\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\tau \sin t + \frac{1}{2}\cos(t - 2\tau)\right)\Big|_0^t = \frac{1}{2}\left(t \sin t + \frac{1}{2}\cos t -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\cos t\right) = \frac{1}{2}\, i \sin t.$$

7-§. Лаплас ва Фурье алмаштиришларининг боғланиши

Операцион ҳисоб Лаплас алмаштириши билан боғлиқ бўлиб, у ҳақиқий ўзгарувчининг $f(t)$ функциясига комплекс ўзгарувчининг $F(p)$ функциясини

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\, dt \tag{7.1}$$

муносабат ёрдамида мос қўяди.

Юқорида айтганимиздек, операцион ҳисобда оригиналлар деб аталадиган ва а), б) ва в) шартларни (1-§ га қаранг) қаноатлантирадиган $f(t)$ функциялар қаралади.

Гармоник анализ функцияларни тригонометрик қаторларга ёйиш ҳақидаги тушунча бўлиб, Фурье алмаштиришларига боғлиқ. Математик анализдан маълумки, Фурье алмаштириши $f(t)$ функция $F(\omega)$ функцияни

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \tag{7.2}$$

муносабат ёрдамида мос қўяди.

Фурье алмаштириши барча абсолют интегралланувчи функциялар учун аниқланган, яъни унинг мавжуд бўлиши учун

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt$$

интегралнинг яқинлашувчи бўлиши талаб этилади. Бундан ташқари, оригиналлар қаноатлантирадиган биринчи шарт Фурье алмаштиришидаги мос шарт билан устма-уст тушади. Лаплас ва Фурье алмаштиришлари орасидаги боғланишни аниқлаймиз. Бир томонлама Фурье алмаштиришни қарайлик. Бу алмаштиришда $f(t)$ функция $t < 0$ да нолга тенг деб ҳисобланади. У ҳолда (7.2) формула ушбу кўринишни олади:

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt.$$

Агар (7.1) Лаплас алмаштиришида $p = i\omega$ деб олинса, яъни p комплекс сонни соф мавҳум сон деб ҳисобланса, $F(\omega)$ нинг ўнг томони шу (7.1) Лаплас интеграли билан аниқ устма-уст тушади. Бироқ Лаплас алмаштириши яна в) шарт

$$|f(t)| < Me^{s_0 t}$$

ни ҳам қаноатлантирувчи функциялар учун қўлланишини назарда тутиш лозим, шу билан бир вақтда Фурье бир томонлама алмаштиришининг мавжуд бўлиши учун

$$\int_0^\infty |f(t)|\,dt \tag{7.3}$$

интегралнинг яқинлашиши талаб қилинади. $f(t)$ функцияга унинг ўсиш тезлиги (в) шарт) шартидан ҳам анча қатъий чеклашлар қўяди. Ҳатто содда ва тез-тез учраб турадиган $\eta(t)$ бирлик функция $\sin t$, $\cos t$, t, t^2, функциялар учун ҳам (7.3) интеграл узоқлашувчи бўлади.

Шундай қилиб, Лаплас алмаштиришида $f(t)$ оригинал қўшимча равишда (7.3) интегралнинг яқинлашувчанлиги шартини ҳам қаноатлантирса, у ҳолда унинг учун Фурье алмаштириши ҳам мавжуд ва бу алмаштиришнинг барча хоссалари Лаплас алмаштиришининг хоссаларидан p комплекс ўзгарувчини $i\omega$ соф мавҳум ўзгарувчига алмаштириш билан ҳосил бўлади.

6-дарсхона топшириқлари

1. Берилган тасвирлар учун оригиналларни Дьюамель формуласидан фойдаланиб топинг:

а) $\dfrac{p^2}{(p-1)(p^2+1)}$;

б) $\dfrac{p^2}{p^2+4)(p^2+9)}$.

Ж: а) $\dfrac{1}{2}\left(e^t+\cos t+\sin t\right)$;

б) $\dfrac{1}{2}\operatorname{ch} t+\cos t)$.

2. Дьюамель формуласидан фойдаланиб, Коши масаласининг ечимини топинг:

а) $x''-3x'+2x=e^{2t}, \quad x(0)=x'(0)=0;$
б) $x''-2x'+x=\operatorname{sh} t, \quad x(0)=x'(0)=0;$
в) $x''+x=e^{-t^2} \quad x(0)=x'(0)=0;$

г) $x''+x=\dfrac{1}{2+\cot t}, \quad x(0)=x'(0)=0;$

д) $x''+x=\dfrac{1}{1+e^t}, \quad x(0)=x'(0)=0.$

Ж: а) $x(t)=e^t-e^{2t}+te^{2t}$;

б) $x(t)=\dfrac{1}{4}t^2e^t-\dfrac{1}{4}te^t-\dfrac{1}{4}\operatorname{sh} t$;

в) $x(t)=\int_0^t e^{-(t-\tau)^2}\sin\tau\,d\tau$ — бу интеграл элементар функциялар орқали ифодаланмайди;

г) $x(t) = \sin t \left(t - \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{\sqrt{3}}\right)\right) + \cos t \ln \frac{2 + \cos t}{3}$;

д) $x(t) = \frac{1}{2}(e^t - 1 - te^t) + \operatorname{sh} t \cdot \ln \frac{1 + e^t}{2}$

6- мустақил иш топшириқлари

1. Берилган

$$\frac{p^3}{(p^2 - 1)(p^2 + 1)}$$

тасвир учун оригинални топинг.

Ж: $\frac{1}{5}(3 \sin 3t - 2 \sin 2t)$.

2. Коши масаласининг ечимини Дьюамель формуласидан фойдаланиб топинг:

а) $x'' - x' = te^t \qquad x(0) = x'(0) = 0$;

б) $x''' + x' = e^t \qquad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$;

в) $x'' - x' = \frac{1}{1 + e^t}, \quad x(0) = x'(0) = 0$.

Ж: а) $x(t) = \left(\frac{t^2}{2} - t + 1\right)e^t - 1$;

б) $x(t) = \left(\frac{t^2}{2} - t + 1\right)e^t - 1$;

в) $x(t) = e^t - 1 - (t + \ln 2)(e^t + 1) + (e^t + 1)\ln(e^t + 1)$.

СОНЛИ УСУЛЛАР

Ҳозирги замон техника ва технологиясининг тараққиёти математик услубларнинг муҳандислик тадқиқотларига кенг миқёсдаги татбиқи билан тавсифланади. Халқ хўжалигининг кўпгина илмий-техникавий масалаларининг муваффақиятли ечими ЭҲМ ларнинг омилкорлик билан қўлланишига боғлиқ бўлиб, бу мақсаднинг амалга оширилиши учун математиканинг тегишли сонли усуллари ишлаб чиқилган.

Табиий-илмий муаммоларни ҳисоблаш математикаси воситалари билан тадқиқ қилиш математик моделлаштиришдан бошланади, жараён чекланган аниқликда алгебраик, дифференциал ёки интеграл тенгламалар ёрдамида тасвирланади. Одатда, бу тенгламалар асосий физик миқдорларнинг — энергия, ҳаракат миқдори ва ҳоказоларнинг сақланиш қонунларини ифодалайди. Математик моделлаштириш амалга оширилаётганда албатта масаланинг тўғри қўйилганлиги, бошланғич маълумотларнинг етарлилиги, қўйилган масала ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги текширилади.

Кўпгина ҳолларда энг содда моделлар учун ҳам ечимни аналитик шаклда олиб бўлмайди. Айтайлик, масала ушбу

$$2x - \cos 3x = 0$$

бир ўзгарувчили тенгламани ечишга келтирилган бўлсин. Бу тенгламанинг илдизларини аналитик усуллар билан топиб бўлмайди. График усуллар билан ҳам тегишли аниқликдаги ечимни олиш қийин. Бундай ҳолларда илдизларни топиш имконини берадиган сонли усуллардан фойдаланилади.

Барча сонли усуллар учун бир умумийлик бўлиб, у ҳам бўлса математик масалани чекли ўлчамли масалага келтирилишидир. Қўйилган масала дискретлаштирилади, яъни узлуксиз функциялардан узлукли, дискрет функцияларга ўтилади.

Сонли усуллар билан олинадиган ечим қўйилган масаланинг тақрибий ечими бўлади. Масала ечимининг умумий хатолиги бир неча ташкил этувчилардан иборат бўлиб, улардан биринчиси тадқиқ қилинаётган жараённи ўзининг математик моделига қанчалик мувофиқлиги билан белгиланади. Одатда масаланинг бошланғич ва чегаравий шартлари, тенгламаларнинг коэффициентлари, ўнг томонлари доимо маълум бир хатолик билан берилади. Натижанинг аниқлиги дастлабки маълумотларнинг аниқлигига боғлиқ бўлади.

Бирор масаланинг аниқ ечими R бўлсин. Моделлаштирилиб ўрганилаётган жараённи ўзининг математик моделига тўлиқ мувофиқ келолмаслиги ва дастлабки маълумотлардаги аниқсизликлар натижасида аниқ ечим ўрнига бошқа R_1 ечим олинади. Ҳосил бўладиган $\Delta_1 = R - R_1$ хатоликдан масалани ечиш давомида олиб бориладиган ҳисоблашлар жараёнида қутулиш иложи йўқлиги сабабли бундай хатолик ***йўқотилмас хатолик*** дейилади. Тадқиқотчи бу хатоликларнинг катталигини билиши ва шунга қараб натижанинг йўқотилмас хатосини баҳолаши керак.

Масалани ечишга киришилар экан бирор усул танланади (масалан, сонли усул) ва ҳисоблашларни бошламасдан R_1 ечим ўрнига R_2 ечимга олиб келувчи янги хатоликка йўл қўйилади. $\Delta_2 = R_1 - R_2$ хатолик ***усул хатолиги*** дейилади.

Ва ниҳоят ҳисоблаш жараёнидаги оралиқ натижаларда кўп хонали сонлар ҳосил бўлади ва уларни яхлитлаб олишга тўғри келади (масала ЭҲМда ечилганда ҳам сонлар яхлитланади). Шундай қилиб, масалани ечишда ҳисоблашни аниқ олиб бормаганлигимиз натижасида ҳам хатоликка йўл қўйилади ва R_2 ечимдан фарқли R_3 ечим ҳосил бўлади. $\Delta_3 = R_2 - R_3$ хатолик ***ҳисоблаш хатолиги*** дейилади.

Тўлиқ хатолик юқорида айтиб ўтилган хатоликлар йиғиндисидан иборат бўлади:

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = R - R_1 + R_1 - R_2 + R_2 - R_3 = R - R_3.$$

Масала ечимининг аниқлиги борасида тасаввурга эга бўлиш учун хатоликнинг барча турлари тўлиқ таҳлил қилиниши керак.

IА. НАЗАРИЙ МАВЗУЛАР

1-§. Хатоликлар назариясининг элементлари

1.1. Бирор миқдорнинг аниқ қиймати x, бу миқдорнинг тақрибий қиймати a бўлсин.

x аниқ сон билан унинг a тақрибий қиймати орасидаги $x - a$ айирма x миқдорнинг тақрибий қиймати a нинг ***хатолиги*** деб аталади.

Агар $x - a > 0$, яъни $a < x$ бўлса, у ҳолда a сон x га ***ками билан яқинлашиш***, агар $x - a < 0$, яъни $x < a$ бўлса, у ҳолда a сон x га ***ортиғи билан яқинлашиш*** деб аталади. Масалан, $\sqrt{2}$ учун 1,41 сони ками билан тақрибий қиймат, 1,42 сони эса ортиғи билан тақрибий қиймат бўлади, чунки $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}41$. 3,14 сони π сони учун ками билан тақрибий қиймат бўлади, чунки $\pi > 3{,}14$; 2,72 сони e сонининг ортиғи билан тақрибий қиймати бўлади, чунки $e < 2{,}72$.

Агар a сон аниқ x соннинг тақрибий қиймати бўлса, бу бундай ёзилади: $a \approx x$. Масалан, $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ ёки $\sqrt{2} \approx 1{,}42$, $\pi \approx 3{,}14$; $e \approx 2{,}72$.

Бирор x аниқ сон тақрибий қиймати a нинг *абсолют хатолиги* деб, улар орасидаги айирманинг абсолют қиймати $|x - a|$ га айтилади.

x нинг аниқ қиймати номаълумлиги сабабли $|x - a|$ абсолют хатолик ҳам номаълум бўлади. Лекин абсолют хатонинг ўзгариш чегараларини кўрсатиш мумкин. Шунинг учун ҳам абсолют хатолик ўрнига ***чегаравий абсолют хатолик*** тушунчаси киритилади.

1-таъриф. *a тақрибий сонниng чегаравий абсолют хатолиги деб, бу сонниng абсолют хатолигидан кичик бўлмаган* Δ *сонга айтилади:*

$$|x-a| \leqslant \Delta.$$

Бундан буён «чегаравий» сўзини тушириб қолдирамиз.

Сўнгги тенгсизликдан x аниқ сон қуйидаги оралиқда ётиши келиб чиқади:

$$a-\Delta \leqslant x \leqslant a+\Delta.$$

Демак, $a-\Delta$ сон x сонниng ками билан яқинлашиши, $a+\Delta$ эса ортиғи билан яқинлашишидир. Қисқалик мақсадида қуйидаги ёзувдан фойдаланилади:

$$x=a\pm\Delta.$$

1-мисол. π сонини алмаштирадиган тақрибий $a=3,14$ сонининг чегаравий абсолют хатолигини топинг.

Ечиш. $3,14<\pi<3,15$ тенгсизлик ўринли бўлганлиги учун $|\pi-a|<0,01$ бўлади. Демак, $\Delta=0,01$ ни чегаравий абсолют хатолик учун қабул қилиш мумкин.

Амалиётда кўпинча «0,01 гача аниқлик билан», «1 см гача аниқлик билан» ва ҳоказо ифодалар қўлланилади. Бу нарса абсолют хатолик мос равишда 0,01; 1 см га тенглигини билдиради ва ҳоказо.

Тақрибий сонниng абсолют хатолиги x аниқ сонни унинг a тақрибий қиймати билан яқинлашиш сифатини етарлича тавсифлай олмайди. Масалан, $\Delta=0,5$ м абсолют хатолик хонанинг бўйини ўлчашда ҳаддан ташқари катта, уй қуриш учун ер майдонини ажратишда йўл қўйилиши мумкин, шаҳарлар орасидаги масофани ўлчашда эса сезилмайди ҳам.

Ўлчаш ёки ҳисоблаш натижаси аниқлигининг ҳақиқий кўрсаткичи унинг ***нисбий хатолигидир.***

a тақрибий сонниng нисбий хатолиги деб

$$\frac{|x-a|}{|a|}$$

нисбатга айтилади.

2-таъриф. *a тақрибий сонниng чегаравий нисбий хатолиги деб, нисбий хатоликдан кичик бўлмаган* δ сонга айтилади, яъни

$$\frac{|x-a|}{|a|} \leqslant \delta \quad \text{ёки} \quad \delta=\frac{\Delta}{|a|}.$$

Бундан

$$\Delta=|a|\cdot\delta$$

нисбий хатолик кўпинча процент (фоиз) ларда ифодаланади. Масалан, 3,14 сони π сонининг тақрибий қиймати. Унинг хатолиги 0,00159 га тенг; чегаравий абсолют хатолик $\Delta=0,0016$ га тенг, чегаравий нисбий хатолик эса

$$\delta=\frac{\Delta}{3,14}=0,00051=0,051\ \%$$

га тенг деб ҳисоблаш мумкин.

1. 2. Агар a тақрибий соннинг абсолют хатолиги бу сон охирги рақами хонасининг бир бирлигидан (ярмидан) ортиқ бўлмаса, у ҳолда a соннинг барча рақамлари *кенг маънода ишончли* (*тор маънода ишончли*) *рақамлар* деб аталади.

Тақрибий сонларни фақат ишончли рақамларни сақлаган ҳолда ёзиш лозим. Масалан, $a = 52400$ сонининг абсолют хатолиги $\Delta = 100$ бўлса, у ҳолда бу сонни қуйидаги кўринишда ёзиш керак: $a = 524 \cdot 10^2$ ёки $5{,}24 \cdot 10^3$.

Ишончли рақамлари билан ёзилган 37 10; 370; 370,0; 370,00 тақрибий сонлар турлича аниқлик даражасига эга, уларнинг чегаравий абсолют хатоликлари 10; 1; 0,1; 0,01 га тенг.

Тақрибий соннинг хатолигини, у нечта ишончли қийматли рақамга эга эканлигини кўрсатиш билан баҳолаш мумкин. Қийматли рақамларни санашда биринчи нолдан фарқли рақамдан чапда турган ноллар ҳисобга олинмайди. Соннинг охирида турган ноллар доимо қийматли рақамлардир (акс ҳолда уларни ёзилмайди). Масалан, қийматли рақамлар билан ёзилган $a = 0{,}002080$ сони тўртта қийматли рақам, яъни 2, 0, 8, 0 га эга.

Тақрибий соннинг нисбий хатолиги қийматли рақамлари сони билан боғлиқдир.

Агар a сон n та ишончли қийматли рақамга эга бўлса, у ҳолда унинг δ нисбий хатолиги

$$\delta \leqslant \frac{1}{k}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \qquad (1.\ 1)$$

тенгсизликни қаноатлантиради, бу ерда k шу a соннинг биринчи рақами. Ва аксинча, нисбий хатолиги δ бўлган a соннинг n та рақами ишончли бўлса, у ҳолда n ушбу

$$(1 + k)\,\delta \leqslant \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган энг катта туб сондир.

2-мисол. Агар $a = 47{,}542$ тақрибий соннинг чегаравий нисбий хатолиги $\delta = 0{,}1\ \%$ бўлса, унинг ишончли рақамлари сонини аниқланг.

Ечиш. (1. 1) тенгсизликни тузамиз: бу ерда $k = 4$, $\delta = 0{,}1\% = \frac{1}{10}\,\frac{1}{100} = \frac{1}{1000}$;

$$(1 + k)\,\delta = \frac{5}{1000} = 5 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3 \leqslant \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

Равшанки, $n - 1 = 2$ ёки $n = 3$. Демак, $a = 47{,}542$ сони учта ишончли рақам: 4, 7 ва 5 га эга.

Маълум бир маънода бундай ҳисоблаш мумкин: фақат битта ишончли рақамнинг борлиги 10 % тартибида нисбий хатоликка, иккита ишончли рақамнинг борлиги 1 % тартибида нисбий хатоликка, учта ишончли рақамнинг борлиги 0,1 % тартибида нисбий хатоликка мос келади ва ҳоказо.

Математик жадвалларда барча сонлар ишончли рақамлари билан берилади. Масалан, жадвалда $\lg 2 = 0{,}3010$ берилган бўлса, у ҳолда $\Delta = 0{,}0001$, $\delta = 0{,}03\ \%$.

1.3. Агар тақрибий сонлар ортиқча (ёки ишончсиз) рақамларга эга бўлса, уни яхлитлаш лозим. Яхлитлашда фақат ишончли рақамлар сақланади. Ортиқча рақамлар ташлаб юборилади, шу билан бирга биринчи ташлаб юборилаётган рақам 4 дан катта бўлса, у ҳолда сақлаб қолинаётган охирги рақам битта орттирилади. Агар ташлаб юборилаётган қисм фақат битта 5 рақамидан ёки 5 ва қолганлариноллардан иборат бўлса, у ҳолда одатда охирги сақлаб қолинадиган рақам жуфт сон бўладиган қилиб яхлитланади.

3- мисол Сонларни берилган аниқликда яхлитланг:

а) $a = 10{,}547$ ни $10^{-2} = 0{,}01 = \Delta$ гача аниқликда тўртта ишончли рақам билан;

б) $a = 5{,}1997$ ни $10^{-3} = 0{,}001 = \Delta$ гача аниқликда тўртта ишончли рақам билан;

в) $a = 3{,}855$ ни $10^{-2} = 0{,}01 = \Delta$ гача аниқликда учта ишончли рақам билан.

Ечиш. а) $a = 10{,}5474 \approx 10{,}55$ ортиғи билан;

б) $a = 5{,}1997 \approx 5{,}200$ — ортиғи билан;

в) $a = 3{,}88 \approx 3{,}88$ — ками билан.

1.4. Абсолют ва нисбий хатоликларнинг асосий хоссалари. Қуйидаги иккита масалани қарайлик: аргументнинг абсолют хатолиги бўйича функциянинг абсолют хатолиги топилсин; 2) функциянинг йўл қўйиладиган абсолют хатолиги маълум бўлса, аргументнинг нисбий хатолиги топилсин (тескари масала).

Бу масалаларни ҳал этишда қуйидаги асосий теоремадан фойдаланилади:

Теорема *Функциянинг чегаравий абсолют хатолиги аргумент чегаравий абсолют хатолигини бу функция ҳосиласининг абсолют қиймати билан кўпайтмасига тенг:*

$$\beta = \alpha\,|f'(x)|, \tag{1.2}$$

бу ерда α — шу x аргументнинг чегаравий абсолют хатолиги, β эса $y = f(x)$ функциянинг чегаравий абсолют хатолиги.

Агар x аргументнинг чегаравий нисбий хатолигини δ_x орқали, $y = f(x)$ функциянинг чегаравий нисбий хатолигини δ_y орқали белгиласак, у ҳолда (1.2) тенгликдан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\delta_y = \left| x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right| \delta_x. \tag{1.3}$$

4- мисол. $y = \ln x$ функциянинг чегаравий абсолют хатолигини топинг.

Ечиш. $y = \ln x$ функция учун (1. 2) формуладан фойдаланамиз:

$$y' = \frac{1}{x}.$$

У ҳолда

$$\beta = \alpha \left| \frac{1}{x} \right| = \frac{\alpha}{|x|} = \delta_x.$$

Демак, логарифмнинг чегаравий абсолют хатолиги β, аргументнинг чегаравий нисбий хатолиги δ_x га тенг.

5-мисол. $y = x^n$ функциянинг чегаравий нисбий хатолигини топинг.

Ечиш. $y' = nx^{n-1}$ бўлганлиги учун (1.3) формулага асосан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\delta_y = \left| x \cdot \frac{nx^{n-1}}{x^n} \right| \delta_x = |n|\, \delta_x.$$

Демак, даражанинг чегаравий нисбий хатолиги δ_y асоснинг чегаравий нисбий хатолиги δ_x ни даража кўрсаткичнинг абсолют қийматига кўпайтирилганига тенг.

Хусусан, доира юзининг чегаравий нисбий хатолиги радиуснинг чегаравий нисбий хатолигидан 2 марта катта, чунки $S = \pi r^2$ бўлгани учун:

$$\delta_S = \left| r \frac{S'}{S} \right| \delta_r = \left| r \cdot \frac{2\pi r}{\pi r^2} \right| \delta_r = 2\,\delta_r.$$

Икки ўзгарувчили $u = f(x, y)$ функциянинг чегаравий нисбий хатолигини баҳолашда (1.2) тенгликка ўхшаш ушбу формулани ҳосил қиламиз:

$$\beta = \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \alpha_x + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \alpha_y,$$

бу ерда α_x — ўзгарувчи x нинг чегаравий абсолют хатолиги;

α_y — ўзгарувчи y нинг чегаравий абсолют хатолиги;

β — эса $u = f(x, y)$ функциянинг чегаравий абсолют хатолиги.

Охирги тенглик исталган сондаги аргументлар функцияси учун умумлаштирилиши мумкин. Масалан, $u = x + y + z + \qquad + t$ функция учун

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| = \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| = \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| = \qquad = \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| = 1,$$

шунинг учун

$$\beta = \alpha_x + \alpha_y + \alpha_z + \qquad + \alpha_t,$$

демак, йиғиндининг чегаравий абсолют хатолиги β қўшилувчиларнинг чегаравий абсолют хатоликлари α_x, α_y, α_z, $\qquad \alpha_t$ нинг йиғиндисига тенг.

Йиғиндининг чегаравий нисбий хатолигини аниқлашда ушбу икки ҳолни ажратиш керак:

1) Барча қўшилувчилар бир хил (аниқлик учун — мусбат) ишорали. Йиғиндининг чегаравий нисбий хатолиги

$$\delta = \frac{\alpha_x + \alpha_y + \ldots + \alpha_t}{x + y + \qquad + t}$$

га тенг. δ_x, δ_y, δ_t — мос равишда x, y, t нинг чегаравий нисбий хатоликлари бўлсин. У ҳолда $\alpha_x = \delta_x \cdot x$, $\alpha_y = \delta_y \cdot y$, $\alpha_t = \delta_t \cdot t$. $\delta_{\max}$ ва $\delta_{\min}$ орқали δ_x, δ_y, , δ_t сонларнинг ичида энг каттаси ва энг кичигини белгилаймиз. У ҳолда

$$\delta = \frac{\delta_x \; x + \delta_y \, y + \qquad + \delta_t \cdot t}{x + y + \qquad + t} < \frac{(x + y + \; . . t)\, \delta_{\max}}{x + y \qquad + t} = \delta_{\max},$$

ёки $\delta < \delta_{\max}$. Шунга ўхшаш, $\delta > \delta_{\min}$ ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб,

$$\delta_{\min} < \delta < \delta_{\max}.$$

Демак, бир хил ишорали қўшилувчилар йиғиндисининг чегаравий нисбий хатолиги қўшилувчиларнинг энг кичик ва энг катта чегаравий нисбий хатоликлари орасида ётади.

2) Қўшилувчилар турли ишорали, масалан, агар $u = x - y$ бўлса, у ҳолда унинг чегаравий нисбий хатолиги

$$\delta = \frac{\alpha_x + \alpha_y}{|x - y|}$$

га тенг. Демак, x ва y сонлар бир-бирига яқин бўлса, у ҳолда x ва y сонларнинг чегаравий нисбий хатоликлари, ҳатто жуда кичик бўлганда ҳам, улар айирмасининг чегаравий нисбий хатолиги жуда катта бўлиши мумкин. Масалан, ишончли рақамлар билан ёзилган $x = 1{,}245$ ва $y = 1{,}235$ сонлари учун қуйидагига эга бўламиз:

$$\alpha_x = 0{,}001, \; \alpha_y = 0{,}001; \; \delta_x = 0{,}08\%; \; \delta_y = 0{,}08\%;$$

$$\delta = \frac{0{,}001 + 0{,}001}{0{,}01} \cdot 100\% = 20\%.$$

2-§. Функцияларнинг қийматларини ҳисоблаш. Кўпҳадлар учун Горнер схемаси

2.1. Ҳисоблаш амалиётида кўпинча бирор функциянинг берилган нуқтадаги қийматини ҳисоблашга тўғри келади. Бунда шуни назарда тутиш керакки, математик эквивалент бўлган ифодалар уларнинг қийматларини ҳисоблаш учун зарур бўлган амаллар сони маъносида ҳамма вақт ҳам тенг кучли бўлавермайди. Масалан,

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

айниятнинг чап қисмини ҳисоблашда тўртта кўпайтириш амалини ва иккита қўшиш амалини бажариш зарур. Ўнг қисмини ҳисоблаш учун эса бор-йўғи битта қўшиш ва битта кўпайтириш амалини бажариш зарур.

Функцияларнинг қийматларини ҳисоблаш одатда элементар арифметик амаллар кетма-кетлигига келтирилади. Бу амалларни такрорланувчи циклларга бўлиб, уларнинг сонини камайтириш маъқулдир. Мисол тариқасида Горнер схемасини кўриб чиқайлик.

2.2. Горнер схемаси — бу кўп ҳадни икки ҳадга бўлишда тўлиқмас бўлинма ва қолдиқни топиш усулидир.

Даражали кўп ҳад деб, ушбу

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \qquad + a_{n-1}x + a_n \tag{2.1}$$

кўринишдаги ифодага айтилади, бу ерда $a_0, a_1, \qquad , a_n$ коэффициентлар — ҳақиқий сонлар, шу билан бирга $a_0 \neq 0$; a_n — кўпҳаднинг озод ҳади деб аталади.

(2.1) кўпҳаднинг $x = \xi$ нуқтадаги қийматини ҳисоблаш талаб қилинсин.

$P_n(x)$ ни $(x - \xi)$ га бўламиз, у ҳолда

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \qquad + a_{n-1}x + a_n = (b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \qquad + b_{n-1})(x - \xi) + b_n$$

га эга бўламиз. Бу тенгликда x ўрнига ξ ни қўйсак,

$$b_n = P_n(\xi)$$

келиб чиқади.

Демак $P_n(\xi)$ ни ҳисоблаш учун b_n ни топиш етарли экан. (2.2) тенгликда x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаштириб,

$$\begin{cases} a_0 = b_0, \\ a_1 = b_1 - b_0\xi, \\ a_2 = b_2 - b_1\xi, \\ \quad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ a_n = b_n - b_{n-1}\xi \end{cases}$$

муносабатларга эга бўламиз. Бу тенгликлардан

$$\begin{cases} b_0 = a_0, \\ b_1 = a_1 + b_0\xi, \\ b_2 = a_2 + b_1\xi \\ \qquad \cdot \\ b_n = a_n + b_{n-1}\xi \end{cases} \tag{2.3}$$

ни ҳосил қиламиз.

Ҳисоблаш жараёнида (2.3) тенгликларни ушбу

$$\begin{array}{cccccccc|l} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \cdot & & a_{n-1} & a_n & & \xi \\ \hline & b_0\xi & b_1\xi & b_2\xi & & b_{n-2}\xi & b_{n-1}\xi & & \\ \hline b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & & b_{n-1} & b_{n-2} = P_n(\xi) & & \end{array}$$

жадвал шаклида жойлаштириш ҳисоблаш ишларини енгиллаштиради. Бу ерда $b_0 = a_0$ бўлиб, охирги қатордаги бошқа сонларнинг ҳар бири унинг устида турган иккита соннинг йиғиндисига тенг. Келтирилган усул ***Горнер схемаси*** деб аталади.

Агар фақат $b_n = P_n(\xi)$ ни ҳисоблаш талаб қилинса, у ҳолда Горнер схемасини

$$P_n(\xi) = (\,.\,.\;((a_0\xi + a_1)\xi + a_2) + \qquad + a_{n-1})\xi + a_n \qquad (2.4)$$

кўринишда ёзиб олиш мумкин. Бу усул кўпҳад қийматини ҳисоблашда ҳақиқатан ҳам самарали усулдир. Чунки (2.4) формула ёрдамида $P_n(\xi)$ ни ҳисоблаётганда биз фақат n марта кўпайтириш амалини бажарамиз. Оддий йўл билан ҳисоблаганда эса ξ^2, ξ^3, $\quad \xi^n$ даражаларни ҳисоблаш учун $(n - 1)$ марта кўпайтириш амалини ва $a_0\xi^n$, $a_1\xi^{n-1}$, $\quad a_{n-1}\xi$ кўпайтмаларни ҳосил қилаётганда яна n та кўпайтириш амалини, ҳаммаси бўлиб, $2n - 1$ та кўпайтириш амалини бажаришга тўғри келар эди.

1-мисол. $P_5(x) = x^5 + 3x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 1$ кўпҳаднинг $x=3$ даги қийматини Горнер схемасидан фойдаланиб ҳисобланг.

Ечиш Бу кўпҳад учун Горнер схемасини тузамиз:

1	3	—2	1	—1	1	3
	3	18	48	147	438	
1	6	16	49	146	439	

Шундай қилиб, $P_5(3) = 439$.

Биз Горнер схемаси бўйича ҳисоблашлар бажарганимизда фақат $b_n = P_n(\xi)$ ни ҳисоблабгина қолмасдан, балки $P_n(x)$ кўпҳадни $x - \xi$ икки ҳадга бўлишдан ҳосил бўладиган тўлиқмас бўлинма бўлмиш $Q_{n-1}(x)$ кўпҳаднинг коэффициентларини ҳам аниқлаймиз. Ҳақиқатан ҳам

$$Q_{n-1}(x) = \beta_0 x^{n-1} + \beta_1 x^{n-2} + \qquad + \beta_{n-2} \qquad (2.5)$$

ва

$$P_n(x) = Q_{n-1}(x)(x - \xi) + \beta_n \qquad (2.6)$$

бўлсин, шу билан бирга Безу теоремасига асосан (1-жилд, 267-саҳифага қаранг) бўлишдаги β_n қолдиқ $P_n(\xi)$ га тенг, яъни $\beta_n = P_n(\xi)$. (2.5) ва (2.6) формулалардан

$$P_n(x) = (\beta_0 x^{n-1} + \beta_1 x^{n-2} + \qquad + \beta_{n-1})(x - \xi) + \beta_n$$

ни ҳосил қиламиз. Қавсларни очиб, ўхшаш ҳадларни ихчамласак,

$$P_n(x) = \beta_0 x^n + (\beta_1 - \beta_0\xi)x^{n-1} + (\beta_2 - \beta_1\xi)x^{n-2} + \qquad + $$
$$+ (\beta_{n-1} - \beta_{n-2}\xi)x + (\beta_n - \beta_{n-1})\xi$$

га эга бўламиз. Бу тенгликнинг чап ва ўнг томонларидаги x ўзгарувчининг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни таққослаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} a_0 &= \beta_0, \\ a_1 &= \beta_1 - \beta_0\xi, \\ a_2 &= \beta_2 - \beta_1\xi, \\ & \\ a_{n-1} &= \beta_{n-1} - \beta_{n-2}\xi, \\ a_n &= \beta_n - \beta_{n-1}\xi. \end{aligned}$$

Бундан:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= a_0 = b_0, \\ \beta_1 &= a_1 + \beta_0\xi = b_1, \\ \beta_2 &= a_2 + \beta_1\xi = b_2, \\ &\cdot \qquad \cdot \\ \beta_{n-1} &= a_{n-1} + \beta_{n-2}\xi = b_{n-1}, \\ \beta_n &= a_n + \beta_{n-1}\xi = b_n. \end{aligned}$$

Ана шуни исботлаш талаб этилган эди.

Шундай қилиб, (2.3) формула, ва демак, Горнер схемаси ҳам, бўлишни бажармасдан туриб, $Q_{n-1}(x)$ бўлинманинг коэффициентларини ва $P_n(\xi)$ қолдиқни топиш имконини беради.

2-мисол $P_n(x) = 12x^4 + 19x^3 - 4$ кўпҳаднинг $\xi = -2$ нуқтадаги қийматини ҳисобланг ва $P_4(x)$ ни $x+2$ икки ҳадга бўлишдан чиқадиган $Q_3(x)$ бўлинма кўпҳаднинг коэффициентларини аниқланг.

Ечиш. Бу кўпҳад учун Горнер схемасини тузамиз:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 12 & 19 & 0 & 0 & -4 & -2 \\ & -24 & 10 & -20 & 40 & \\ \hline 12 & -5 & 10 & -20 & 36 & = P(-2) - \text{қолдиқ}. \end{array}$$

Шундай қилиб, $P_4(-2) = 36$ ва $Q_3(x) = 12x^3 - 5x^2 + 10x - 20$ — $P_4(x)$ ни $x+2$ бўлишдан чиқадиган бўлинма кўпҳад.

2.3. Горнер схемасидан фойдаланиб, берилган $P_n(x)$ кўпҳаднинг ҳақиқий илдизлари чегараларини топиш мумкин. Айтайлик $x = \beta\,(\beta > 0)$ да Горнер схемасидаги барча b_i коэффициентлар манфиймас шу билан бирга биринчи коэффициент мусбат бўлсин, яъни

$$b_0 = a_0 > 0 \text{ ва } b_i \geqslant 0 \ (i = \overline{1, n}),$$

у ҳолда $P_n(x)$ кўпҳаднинг барча x_k ҳақиқий илдизлари β дан чапда жойлашган, яъни

$$x_k \leqslant \beta \, (k = \overline{1, m}, \ m \leqslant n)$$

бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

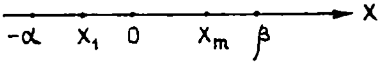
$$P_n(x) = (b_0x^{n-1} + \qquad + b_{n-1})(x - \beta) + b_n$$

бўлганлиги учун исталган $x > \beta$ да юқорида келтирилган шартларга асосан $P_n(x) > 0$ бўлади, яъни β дан катта исталган сон $P_n(x)$ кўпҳаднинг ҳеч қачон илдизи бўла олмайди. Шундай қилиб, кўпҳаднинг x_k ҳақиқий илдизларини юқоридан баҳоладик.

x_k илдизларни қуйидан баҳолаш учун

$$Q_n(x) = (-1)^n P(-x) = a_0x^n - a_1x^{n-1} + \qquad + (-1)^n a_n$$

кўпҳадни тузамиз. Бу янги кўпҳад учун шундай $x = \alpha\,(\alpha > 0)$ сонни топамизки, мос Горнер схемасидаги биринчи коэффициентдан ташқари барча коэффициентлар манфиймас бўлсин, биринчи коэффициент эса равшанки, мусбат бўлади. Юқоридагига ўхшаш мулоҳаза юритиб, $Q_n(x)$ кўпҳаднинг $x_k(k=\overline{1,m})$ ҳақиқий илдизлари учун $-x_k \leqslant \alpha$ тенгсизликни ҳосил қиламиз. Демак, $x_k \geqslant -\alpha$ кўпҳаднинг ҳақиқий илдизлари учун қуйи чегарани ҳосил қилдик. Шундай қилиб, $P_n(x)$ кўпҳаднинг барча ҳақиқий илдизлари $[-x, \beta]$ кесмада жойлашган (3.1-шакл).



3.1-шакл

3-мисол. $P_4(x)=x^4-2x^3+3x^2+4x-1$ кўпҳаднинг ҳақиқий илдизлари чегараларини топинг.

Ечиш. $P_4(x)$ кўпҳаднинг, масалан, $x=2$ даги қийматини ҳисоблаймиз. Горнер схемасини тузамиз.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -2 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ & 2 & 0 & 6 & 20 & \\ \hline 1 & 0 & 3 & 10 & 19 & = P(2). \end{array}$$

Барча коэффициентлар манфиймас бўлганлиги учун $P_4(x)$ кўпҳаднинг ҳақиқий илдизлари, агар улар мавжуд бўлса, $x_k < 2$ тенгсизликни қаноатлантиради. Демак, ҳақиқий илдизларнинг юқори чегараси топилди.

Қуйи чегарани баҳолаш учун янги кўпҳадни тузамиз:

$$Q_4(x) = (-1)^4 P_4(-x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 4x - 1.$$

Унинг қийматини, масалан, $x = 1$ да ҳисоблаймиз. Горнер схемасини тузамиз.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 2 & 3 & -4 & -1 & 1 \\ & 1 & 3 & 6 & 2 & \\ \hline 1 & 3 & 6 & 2 & 1 & \end{array}$$

Барча коэффициентлар мусбат, демак, $-x_k < 1$, яъни $x_k > -1$. Шундай қилиб, ҳақиқий илдизларнинг қуйи чегараси топилди. Демак, берилган $P_4(x)$ кўпҳаднинг барча ҳақиқий илдизлари $[-1, 2]$ кесманинг ичида жойлашган.

2.4. Кўпҳадда ўзгарувчини алмаштириш. Ушбу

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \qquad + a_n$$

кўпҳадда x ўзгарувчини

$$x = y + \xi$$

формула бўйича алмаштириш зарур бўлсин, бу ерда y янги ўзгарувчи, ξ — тайин сон. Ўрнига қўйгандан сўнг унга нисбатан янги

$$P_n(y+\xi) = A_0y^n + A_1y^{n-1} + \qquad + A_n$$

кўпҳадни ҳосил қиламиз. Энди қуйидагиларни кўрсатиш мумкин:

$$A_n = P_n(\xi),$$

$A_{n-1} = P_{n-1}(\xi)$, бу ерда $P_{n-1}(x)$ — берилган $P_n(x)$ кўпҳадни $(x - \xi)$ га бўлишдан чиққан бўлинма;

$A_{n-2} = P_{n-2}(\xi)$, бу ерда $P_{n-2}(x)$ — $P_{n-1}(x)$ ни $x - \xi$ га бўлишдан чиққан бўлинма;

. . . .

$A_0 = P_0(\xi)$, бу ерда $P_0(x)$ — шу $P_n(x)$ ни $x - \xi$ га бўлишдан чиққан бўлинма.

$P_n(\xi), P_{n-1}(\xi), P_{n-2}(\xi),$ $\quad$, $P_0(\xi)$ қийматларни ҳисоблашда ушбу умумлашган Горнер схемасидан фойдаланилади:

$$\begin{array}{llllllll}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & & a_{n-1} & + \; a_n & |\underline{\xi} \\
 & b_0\xi & b_1\xi & b_2\xi & & b_{n-2}\xi & \; b_{n-1}\xi & \\
\hline
a_0 = b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & & b_{n-1} & \underline{b_n = P_n(\xi) = A_n} & \\
 & c_0\xi & c_1\xi & c_2\xi & & c_{n-2}\xi & & \\
\hline
b_0 = c_0 & c_1 & c_2 & c_3\xi & & \multicolumn{2}{l}{c_{n-1} = P_{n-1}(\xi) = A_{n-1}} &
\end{array}$$

4-мисол. $P_4(x) = x^4 - 8x^3 + 5x^2 + 2x - 7$ кўпҳадда ўзгарувчининг учинчи даражасини йўқотиш учун $x = y + 2$ деб олинг ва алмаштирилган кўпҳадни топинг.

Ечиш. Умумлашган Горнер схемасини татбиқ этамиз ($\xi = 2$ да):

$$\begin{array}{rrrrrl}
1 & -8 & 5 & 2 & -7 & |\underline{\xi = 2} \\
 & 2 & -12 & -14 & -24 & \\
\hline
1 & -6 & -7 & -12 & -31 = A_4 & \\
 & 2 & -8 & -30 & & \\
\hline
1 & -4 & -15 & -42 = A_3 & & \\
 & 2 & -4 & & & \\
\hline
1 & -2 & -19 = A_2 & & & \\
 & 2 & & & & \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
1 & 0 = A_1 \\
\hline
1 = A_0 &
\end{array}$$

Демак, $P(y + 2) = y^4 - 19y^2 - 42y - 31$.

3-§. Функцияларни аппроксимациялаш

3.1. Функцияларни аппроксимациялашдан кўпгина амалий масалаларни ҳал этишда фойдаланилади.

Бирор экспериментни ўтказиш жараёнида берилган $x_0, x_1, \quad , x_n$ нуқталарда $y = f(x)$ функциянинг

$$y_0 = f(x_0), \; y_1 = f(x_1), \quad , \; y_n = f(x_n)$$

қийматлари ҳосил қилинган бўлиб, бошқа $x \neq x_i (i = \overline{0, n})$ нуқталарда $f(x)$ функцияни тиклаш талаб қилинсин.

Аппроксимациялашнинг бошқа кенг тарқалган масалаларидан бири берилган $y_i = f(x_i)(i = \overline{o, n})$ қийматлар бўйича $f'(x)$ ҳосилани ва $\int\limits_a^b f(x)dx$ интегрални аниқлашдан иборатдир.

Бу каби масалаларни ҳал этишда классик ёндошув усули шундан иборатки, $f(x)$ функция ҳақида мавжуд маълумотдан фойдаланган ҳолда $f(x)$ га бирор маънода яқин бўлган бошқа $\varphi(x)$ функция қаралади ва $\varphi(x)$ устида тегишли амални бажариб, бундай алмаштириш хатолигини олиш имкони бўлади.

Бундай ёндошувни амалга оширишда ушбу тўртта масалани кўриб чиқиш керак.

1. $f(x)$ функциянинг берилиш шакли ҳақидаги масала. Бу ерда иккита асосий ҳол бўлиши мумкин. Функция ё аналитик усулда, ёки жадвал усулида берилган. Функциянинг график усулда берилишини аниқ масалага боғлиқ равишда ё биринчи ҳолга, ёки иккинчи ҳолга киритилади. Бундан кейин биз $[a, b]$ кесмада ўзининг етарли тартибгача ҳосилалари билан узлуксиз бўлган ва x_i (бунда $a \leqslant x_i \leqslant b$ ва $i = \overline{1, n}$) тугунларда ўзининг $y_i = f(x_0)$ қийматлари билан аниқланган $f(x)$ функцияни қараймиз.

2. Аппроксимацияловчи функциялар синфи, яъни $f(x)$ функция қандай $\varphi(x)$ функциялар билан аппроксимацияланиши ҳақидаги масала. Бунда ушбу икки факторга амал қилинади. Биринчидан, аппроксимацияловчи функция аппроксимацияланувчи функциянинг ўзига хос хусусиятларини акс эттирсин, иккинчидан, унинг устида тегишли амалларни бажариш қулай бўлсин.

Сонли анализда уч гуруҳ аппроксимацияловчи функциялар кенг қўлланилади. Биринчи гуруҳ — бу 1, x, x^2, x^n кўринишдаги функциялар бўлиб, уларнинг чизиқли комбинациялари ёрдамида даражаси n дан юқори бўлмаган барча кўп ҳадлар синфини ҳосил қилиш мумкин.

Иккинчи гуруҳни Фурье қаторлари ва Фурье интегралини ҳосил қиладиган $\sin a_i x$ ва $\cos a_i x$ функциялар ҳосил қилади.

Учинчи гуруҳ $e^{a_i x}$ экспоненциал функциялардан иборат.

Қуйида биз кўпқадлар билан аппроксимациялаш устида батафсилроқ тўхталамиз, яъни аппроксимацияловчи функция устида бирор n-даражали кўпҳадни қараймиз.

3. Аппроксимацияловчи ва аппроксимацияланадиган функцияларнинг яқинлиги масаласи, яъни $\varphi(x)$ функция қаноатлантириши лозим бўлган мувофиқлик мезонини танлаш ҳақидаги масала.

Мувофиқлик мезони ҳақидаги масала шундан иборатки, бунда бирор йўл билан аппроксимациялануви ва аппроксимацияловчи функциялар орасидаги «фарқланиш» аниқланади, кейин эса барча аппроксимацияловчи функциялар синфидан бу «фарқланиш»нинг энг кичик бўлишини таъминлайдиган функция танланади.

Кенг тарқалган мувофиқлик мезонларидан бири *Чебишев мезони* бўлиб, унда «фарқланиш» тушунчаси x_i тугунларда $\varphi(x)$ функциянинг $f(x)$ функциядан четлашишининг максимал миқдори деб қаралишига асосланади:

$$\Delta = \max |f(x_i) - \varphi(x_i)|.$$

Бу ерда аппроксимацияловчи функция учун $\Delta = 0$ бўладиган ҳол энг катта аҳамиятга эга. Бу қуйидагини билдиради: ўзининг $y_i = f(x_i)$ қийматлари билан берилган $y = f(x)$ функция учун (3.1-жадвал) x_i тугунларда шу $y = f(x)$ функциянинг қийматлари билан бир хил, яъни $\varphi(x_i) = y_i$ бўлган аппроксимацияловчи $\varphi(x)$ функцияни тузиш талаб қилинади. $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функцияларнинг x_i тугунларда бир хил бўлиш мезонига асосланган бундай аппроксимациялаш усули *интерполяциялаш* (ёки *интерполяция*) деб аталади.

3.1-жадвал

x	x_0	x_1		x_n
$y = f(x)$	y_0	y_1		y_n

Мувофиқлик мезонига яна бир мисол келтирайлик. Функциялар орасидаги «фарқланиш» тушунчасини x_i тугун нуқталарда улар четланишларини квадратлари йиғиндиси сифатида бундай киритамиз:

$$\rho = \sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - \varphi(x_i)]^2.$$

Энди аппроксимацияловчи функция сифатида бу ρ минимал бўладиган нуқтани танлаймиз. Бу мезондан унча юқори бўлмаган аниқликда берилган катта миқдордаги маълумотлар берилган ҳолларда фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. Бу мезонга асосланган аппроксимациялаш усули кўпинча ***энг кичик квадратлар усули*** деб аталади (2-жилд, 336-саҳифага қаранг).

4. Ҳосил қилинган ечимнинг аниқлик масаласи кўп жиҳатдан асосий масаладир. Бу ерда тақрибий ечим аниқ ечимдан берилган ε дан ортиқ фарқ қилмаслиги лозим. Бу $f(x)$ функцияни исталганча даражада аниқ яқинлаштириш масаласи бўлиб, у юқорида санаб ўтилган «параметрларга» (x_i тугунлар, $\varphi(x)$ функциялар синфи, $f(x)$ ва $\varphi(x)$ нинг мувофиқлик мезони) боғлиқ бўлиб, умумий ҳолда очиқлигича қолади ва ҳар бир тайин аппроксимациялаш жараёнида алоҳида тадқиқ қилиниши керак.

3.2 Бирор тўпламда ўзларининг ҳосилалари билан биргаликда узлуксиз бўлган

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x), \quad ,\varphi_n(x)$$

функциялар системаси берилган бўлсин. Бу функциялар системасини ***асосий система*** деб аталади. Ушбу

$$Q_n(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \qquad + a_n\varphi_n(x)$$

кўринишдаги функция ***n-тартибли умумлашган функция*** деб аталади, бу ерда $a_0, a_1, \qquad, a_n$ ўзгармас коэффициентлар.

Хусусий ҳолда, асосий система x ўзгарувчининг бутун манфиймас даражаларидан иборат, яъни

$$\varphi_0(x) = 1,\ \varphi_1(x) = x,\ \varphi_2(x) = x^2, \qquad \varphi_n(x) = x^n$$

бўлса, у ҳолда одатдаги n-даражали

$$Q_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \qquad + a_nx^n$$

кўпҳадга эга бўламиз. Агарда

$$\varphi_0(x) = 1,\quad \varphi_1(x) = \cos x,\ \varphi_2(x) = \sin x, \qquad \varphi_{2n-1}(x) = \cos nx,$$

$$\varphi_{2n}(x) = \sin nx$$

бўлса, у ҳолда n-тартибли

$$Q_n(x) = a_0 + a_1\cos x + a_2\sin x + \qquad + a_{2n-1}\cos nx + a_{2n}\sin nx$$

тригонометрик кўпҳадга эга бўламиз.

Шундай қилиб, функцияларни аппроксимациялаш масаласи қуйидагича қўйилади: берилган $f(x)$ функцияни берилган n-тартибли $Q_n(x)$ умумлашган $\varphi(x) = Q_n(x)$ кўпҳад билан шундай алмаштириш керакки, $f(x)$ функциянинг $Q_n(x)$ кўпҳаддан (маълум маънода) кўрсатилган тўпламда фарқланиши энг кичик бўлсин. $\varphi(x) = Q_n(x)$ кўпҳад *умумий ҳолда аппроксимацияловчи* кўпҳад деб аталади.

Агар кўрсатилган тўплам алоҳида

$$x_0,\ x_1, \qquad, x_n$$

нуқталардан иборат бўлса, у ҳолда аппроксимациялаш *нуқтавий яқинлаштириш* деб аталади. Агар бу тўплам $a \leqslant x \leqslant b$ кесма бўлса, у ҳолда аппроксимациялаш *интеграл яқинлаштириш* деб аталади.

Амалиётда функцияларни оддий ва тригонометрик кўпҳадлар билан аппроксимациялаш жуда муҳим аҳамиятга эга.

«Иккита функциянинг фарқланиши» атамасига келсак, у вазиятга қараб турлича тушунилади. Шунга мувофиқ аппроксимациялашнинг турлича масалаларига эга бўламиз: ўртача квадратик яқинлаштириш, текис яқинлаштириш ва ҳоказо.

4-§. Энг яхши нуқтавий ва интеграл ўртача квадратик яқинлашишлар

$f(x)$ функцияни $\varphi(x)$ функция билан энг кичик квадратлар усули ёрдамида аппроксимациялаш натижасида бу функциялар орасидаги фарқланиш ўлчови ўртасида нуқтавий яқинлашишлар учун,

$$\rho = \sum_{i=1}^{n}(f(x_i)) - \varphi(x_i))^2,$$

интеграл яқинлаштиришлар учун эса

$$\rho = \int_a^в (f(x) - \varphi(x))^2 dx$$

олинади ва у *ўртача квадратик яқинлашиш* деб аталади.

а) Нуқтавий яқинлашиш. Айрим x_1, x_2, , x_n нуқталардаги y_1, y_2, , y_n қийматлари маълум бўлган $y = f(x)$ функциянинг аппроксимациялайдиган

$$y = \varphi(x,\ a_1,\ a_2,\qquad a_n)$$

функцияни топиш талаб қилинсин. Энг кичик квадратлар усули бўйича $\varphi(x, a_1,\qquad a_m)$ функцияни

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - \varphi(x_i))^2, \text{ бунда } f(x_i) = y_i,$$

миқдор энг кичик бўладиган қилиб танланади. ρ миқдорнинг барча a_1, a_2, a_m ўзгарувчилар бўйича хусусий ҳосилаларини топамиз. Бу хусусий ҳосилаларни нолга тенглаб, a_1, a_2, , a_m номаълумларни топиш учун ушбу m та номаълумли m та

$$\frac{\partial\rho}{\partial a_1} = 0,\quad \frac{\partial\rho}{\partial a_2} = 0,\quad \dots\quad \frac{\partial\rho}{\partial a_m} = 0$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу тенгламалар системасини ечиб, a_1, a_2, , a_m ларни топамиз. Бу коэффициентларга эга бўлган $y = \varphi(x,\ a_1,\ a_2,\ , a_m)$ функция энг кичик ўртача квадратик четланиш $\rho_{\min}$ га эга бўлади.

Хусусий ҳолда

$$y = \varphi(x,\ a,\ b) = ax + b$$

кўринишдаги чизиқли боғланиш изланаётган бўлса, a ва b коэффициентлар ушбу чизиқли тенгламалар системасидан топилади:

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=n}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + b\cdot n = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \tag{4.1}$$

Агар $$y = \varphi(x,\ a,\ b,\ c) = ax^2 + bx + c$$

кўринишдаги ўртача квадратик четланиш изланаётган бўлса, у ҳолда a, b, c коэффициентлар ушбу чизиқли тенгламалар системасидан топилади:

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + c\cdot n = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \tag{4.2}$$

б) Интеграл яқинлашиш. Изланаётган $y = f(x)$ функцняни $[a, b]$ кесмада аппроксимацияловчи $y = \varphi(x, a_1, a_2, \quad , a_m)$ функцияни энг кичик квадратлар усули бўйича топиш талаб қилинсин. $\varphi(x, a_1, a_2, a_3, \quad , a_m)$ функцияни изланаётган $y = f(x)$ функциядан фарқланиш ўлчови сифатида

$$\rho = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx$$

қабул қилинади. Энг яхши ўртача квадратик аппроксимациялашда ρ миқдор энг кичик қиймат қабул қилади.

а) банддаги каби

$$\frac{\partial\rho}{\partial a_1} = 0, \ \frac{\partial\rho}{\partial a_2} = 0, \qquad \frac{\partial\rho}{\partial a_m} = 0$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз ва буни ечиб, $a_1, a_2, \quad , \quad , a_m$ номаълумларнинг ρ минимал бўладиган қийматларини топамиз.

Одатда аппроксимацияловчи функция сифатида кўпҳад танланади. Интегралли аппроксимациялашда аниқ интегралларни ҳисоблашга тўгри келади, улар жуда мураккаб бўлиши ёки элементар функциялар орқали умуман ифодаланмаслиги ҳам мумкин. Шу сабабли нуқтавий аппроксимациялаш усули афзалроқдир.

Мисол. $y = 3^x$ функцияни $[-1; 1]$ кесмада учинчи даражали кўпҳад билан ўртача квадратик аппроксимацияланг.

Ечиш. Изланаётган функцияни

$$Q_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

кўпҳад кўринишида танлаймиз. Ушбу

$$\rho = \int_{-1}^{1}(3^x - a_0 - a_1x - a_2x^2 - a_3x^3)^2dx$$

миқдорнинг энг кичик қийматини

$$\frac{\partial\rho}{\partial a_i} = 0; \ i = \overline{0,3}$$

шартлардан топамиз. Ушбу тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial a_0} = -2\displaystyle\int_{-1}^{1}(3^x - a_0 - a_1x - a_2x^2 - a_3x^3)dx = 0, \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial a_1} = -2\displaystyle\int_{-1}^{1}(3^x - a_0 - a_1x - a_2x^2 - a_3x^3)\,xdx = 0, \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial a_2} = -2\displaystyle\int_{-1}^{1}(3^x - a_0 - a_1x - a_2x^2 - a_3x^3)x^2dx = 0, \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial a_3} = -2\displaystyle\int_{-1}^{1}(3^x - a_0 - a_1x - a_2x^2 - a_3x^3)x^3dx = 0. \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} x^n dx = \begin{cases} 0, & n \text{ тоқ бўлганда,} \\ \frac{2}{n+2}, & n \text{ жуфт бўлганда} \end{cases}$$

эканлигини ҳисобга олиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$2a_0 + \frac{2}{3} a_2 = \int_{-1}^{1} 3^x dx.$$

$$\frac{2}{3} a_1 + \frac{2}{5} a_3 = \int_{-1}^{1} x3^x dx,$$

$$\frac{2}{3} a_0 + \frac{2}{5} a_2 = \int_{-1}^{-1} x^2 3^x dx,$$

$$\frac{2}{5} a_1 + \frac{2}{7} a_3 = \int_{-1}^{1} x^3 3^x dx$$

ёки

$$\begin{aligned} 6a_0 + 2a_2 &= 7{,}2819; \\ 2a_1 + 1{,}2a_3 &= 2{,}4739; \\ 2a_0 + 1{,}2a_3 &= 2{,}7779; \\ 2{,}8a_1 + 2a_3 &= 3{,}5366 \end{aligned}$$

системани ечамиз:

$$a_0 = 0{,}9944; \quad a_1 = 1{,}1000, \quad a_2 = 0{,}6576; \quad a_3 = 0{,}2335.$$

Шундай қилиб, изланаётган функция

$$Q_3(x) = 0{,}9944 + 1{,}1000x + 0{,}6576x^2 + 0{,}2335x^3$$

кўринишга эга бўлади.

5- §. Функцияларга алгебраик кўпҳадлар билан энг яхши текис яқинлашиш

$f(x)$ функцияни $\varphi(x)$ функция билан яқинлаштиришда бу функциялар орасидаги фарқланиш ўлчови сифатида

$$\Delta = \max |f(x) - \varphi(x)|$$

миқдор қабул қилинса, бундай яқинлашиш текис *яқинлашиш* деб аталади.

Яқинлашиш энг яхши бўлиши учун бу миқдор $[a, b]$ кесмада бошқа функцияларга нисбатан энг кичик бўлиши талаб қилинади.

$f(x)$ функцияни $Q_m(x)$ алгебраик кўпҳадлар билан аппроксимациялаш учун ушбу Вейерштрасс теоремаси ўринли: *агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда исталганча кичик $\varepsilon > 0$ учун етарлича катта m-даражали шундай $Q_m(x)$ кўпҳад топиладики, унинг учун*

$$|f(x) - Q_m(x)| < \varepsilon$$

бўлади.

$$\Delta_m = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - Q_m(x)|$$

миқдорга энг кичик қиймат берадиган бундай $Q_m(x)$ кўпҳад $f(x)$ функцияга $[a, b]$ кесмада энг яхши текис яқинлашувчи кўпҳад ёки $f(x)$ функциядан $[a, b]$ кесмада *энг кам фарқланадиган функция* деб аталади.

$$\min\Delta_m = E_m$$

энг кичик фарқланиш $[a, b]$ кесмада $f(x)$ нинг *энг кичик фарқланиши* деб аталади.

Қуйидаги теорема ўринлидир: *ёпиқ чегараланган тўпламда* (бу $[a, b]$ кесма ёки чекли сондаги $x_1, x_2,$, x_n нуқталар системаси бўлиши мумкин) *узлуксиз бўлган исталган $f(x)$ функция ва исталган m натурал сон учун даражаси m дан ортиқ бўлмаган ва энг кичик E_m фарқланишга эга бўлган $Q_m(x)$ кўпҳад мавжуд, шу билан бирга бундай кўпҳад ягонадир.*

$Q_m(x)$ кўпҳадга баъзан қўшимча чеклашлар қилинади, масалан, $a_m = 1$ деб олинади, бу ҳолда

$$Q_m(x) = a_0 + a_1x + \qquad + x^m$$

га эга бўламиз:

Хусусан, $f(x) \equiv 0$ бўлса, у ҳолда

$$\rho_m = \max_{x\in[a,b]} |Q_m(x)|$$

миқдорга энг кичик қиймат берадиган $Q_m(x)$ кўпҳад $[a, b]$ кесмада *нолдан энг кам фарқланадиган кўпҳад* деб аталади. Ана шундай хоссага Чебишев кўпҳадлари эга бўлиб, улар сонли усуллар назарияси ва амалиётида катта аҳамиятга эга.

6-§. Чебишев кўпҳадлари

Чебишев кўпҳадлари $[-1, 1]$ кесмада

$$T_m(x) = \cos(m \arccos x),\ m \geqslant 0 \tag{6.1}$$

формула билан берилади.

Агар $m = 0$ ва $m = 1$ бўлса,

$$T_0(x) = 1 \text{ ва } T_1(x) = x$$

га эга бўламиз. Сўнгра

$$\cos(m - 1)\varphi + \cos(m + 1)\varphi = 2\cos\varphi\cos m\varphi$$

ёки

$$\cos(m + 1)\varphi = 2\cos\varphi\cos m\varphi - \cos(m - 1)\varphi$$

айниятдан фойдаланиб ва $\varphi = \arccos x$ деб олиб, (6.1) га асосан

$$T_{m+1}(x) = 2xT_m(x) - T_{m-1}(x) \tag{6.2}$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда $m = 1, 2, \ldots$

Бутун Ox сон ўқида $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ деб ва (6.2) рекуррент формулани бутун Ox ўқига ёйиб, бу формула бўйича кетма-кет қуйидагиларни топамиз:

$$
\begin{aligned}
T_2(x) &= 2xT_1(x) + T_0(x) = 2x^2 - 1,\\
T_3(x) &= 2xT_2(x) + T_1(x) = 4x^3 - 3x,\\
T_4(x) &= 2xT_3(x) + T_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 6,\\
T_5(x) &= 2xT_4(x) + T_3(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x.
\end{aligned}
$$

Чебишев кўпҳадларининг хоссалари:

1. Чебишев кўпҳадлари m жуфт сон бўлганда жуфт, m тоқ сон бўлганда тоқ функциялардир.

2. $m \geqslant 1$ да $T_m(x)$ кўпҳаднинг юқори коэффициенти 2^{m-1} га тенг.

3. $m \geqslant 1$ да $T_m(x)$ кўпҳад $(-1, 1)$ оралиқда m та турли ҳақиқий илдизга эга ва улар

$$x_k = \cos\frac{2k-1}{2m}\pi, \quad k = \overline{1, m}$$

формула билан аниқланади.

4. $T_m(x)$, $m \geqslant 0$ кўпҳад модулининг $[-1, 1]$ кесмадаги энг катта қиймати 1 га тенг, яъни

$$\max_{x\in[-1,1]} |T_m(x)| = 1.$$

шу билан бирга $x_n = \cos\dfrac{n\pi}{m}$, $n = \overline{0, m}$ да $T_m(x) = (-1)^n$

Бундан барча $x \in [-1, 1]$ учун

$$|T_m(x)| \leqslant 1$$

бўлиши равшан.

$\bar{T}_m(x)$ орқали юқори коэффициенти 1 га тенг бўлган Чебишев кўпҳадини белгилаймиз:

$$\bar{T}_m(x) = 2^{1-m}\ T_m(x),$$

у ҳолда, равшанки,

$$\max_{x\in[-1,1]} |\bar{T}_m(x)| = 2^{1-m}$$

5. m-даражали $(m > 1)$ $\bar{T}_m(x)$ Чебишев кўпҳади $m (m > 1)$ даражали ва юқори коэффициенти бир бўлган бошқа $\bar{Q}_m(x)$ кўпҳадга қараганда нолдан энг кичик фарқ қилади, яъни $\max\limits_{x\in[-1,1]} |\bar{T}_m(x)| \leqslant$ $\leqslant \max\limits_{x\in[-1,1]} |\bar{Q}_m(x)|$. Бу қуйидагини англатади: m-даражали ва юқори коэффициенти бир бўлган исталган $\bar{Q}_m(x)$ кўпҳад учун

$$\max_{x\in[-1,1]} |\bar{Q}_m(x)| \geqslant 2^{1-m}$$

тенгсизлик ўринли.

Бундан ташқари $f(x) = x^m$, $m \geqslant 1$ функция учун $[-1, 1]$ кесмада энг яхши яқинлашувчи $(m-1)$-даражали $Q_{m-1}(x) = a_0 + a_1x + + \quad + a_{m-1}x^{m-1}$ кўпҳад

$$Q_{m-1}(x) = x^m - \overline{T}_m(x) \qquad (6.3)$$

бўлади, бу ерда $\overline{T}_m(x)$ юқори коэффициенти бирга тенг бўлган Чебишев кўпҳади.

Ҳақиқатан ҳам,

$$f(x) - Q_{m-1}(x) = x^m - a_{m-1}x^{m-1} - \qquad - a_1x - a_0$$

айирма масала маъносига кўра $[-1, 1]$ кесмада нолдан энг кичик фарқланадиган кўпҳаддир, яъни у $\overline{T}_m(x)$ Чебишев кўпҳадидан иборат. Бу ердан (6.3) формула келиб чиқади.

5-хоссадан фойдаланиб, ихтиёрий $[a, b]$ кесмада нолдан энг кичик фарқланадиган m-даражали ва юқори коэффициенти 1 га тенг бўлган $\ddot{T}_m(x)$ кўпҳадни тузиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам,

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

алмаштириш $a \leqslant x \leqslant b$ кесмани $-1 \leqslant t \leqslant 1$ кесмага алмаштиради, шу билан бирга t^m олдидаги юқори коэффициент $\left(\frac{b-a}{2}\right)^m$ га тенг. Бу ердан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\widetilde{T}_m(x) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^m \overline{T}_m(t) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^m \overline{T}_m\left(\frac{x - \frac{b+a}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right) \qquad (6.4)$$

(6,4) формуладан $T_m(x)$ кўпҳаднинг нолдан оғиши

$$\breve{E}_m\left(\frac{b-a}{2}\right)2^{1-m} - 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^m$$

га тенглиги келиб чиқади.

Мисол. $f(x) = x^2$ функциянинг $[0, 1]$ кесмада биринчи даражали $Q_1(x) = Ax + B$ кўпҳад ёрдамида энг яхши текис яқинлашишини топинг.

Ечиш. A ва B коэффициентларни

$$E_1 = \max_{x \in [0;\, 1]} |x^2 - Q_1(x)|$$

миқдор энг кичик бўладиган қилиб танлаймиз. Демак,

$$\overline{Q}_2(x) = x^2 - Ax - B$$

кўпҳад $[0, 1]$ кесмада нолдан энг кичик оғади.

$a = 0$, $b = 1$ қийматларни ўрнига қўйиб, (6.4) формуладан қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\bar{Q}_2(x = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \bar{T}_2\left(\frac{x-\frac{b+a}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 2^{1-2} T_2\left(\frac{x-\frac{b+a}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2^{-1} T_2\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{8} T_2(2x-1) = \frac{1}{8}(2(2x-1)^2-1) =$$

$$= \frac{1}{8}(8x^2-8x+1) = x^2 - x + \frac{1}{8} = x^2 - \left(x-\frac{1}{8}\right).$$

Бундан $Q_1(x) = x - \frac{1}{8}$, шу билан бирга $E_1 = 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}$,

$$\bar{Q}_2(0) = \frac{1}{8}, \quad \bar{Q}_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}, \quad \bar{Q}_2(1) = \frac{1}{8},$$

шу сабабли $E_1 = \frac{1}{8}$ оғиш учта нуқтада: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x = 1$ да рўй беради. Бу энг яхши яқинлашиш кўпҳадларнинг ўзига хос хусусиятидир.

Геометрик нуқтаи назардан $y = Q_1(x)$ функциянинг графиги $A(0, 0)$ ва $B(1, 1)$ нуқталар орқали ўтувчи ватар билан бу ватарга параллел уринма ўртасидан уларга параллел бўлиб ўтган тўғри чизиқдир, бунда эгри чизиқ $y = x^2$ функциянинг графигидан иборат (3.2-шакл).

7-§. Функцияларни интерполяциялаш. Хатоликни баҳолаш

7.1. Интерполяциялаш дейилганда функциянинг жадвал усулида берилишидан аналитик усулда берилишига ўтишни тушунилади.

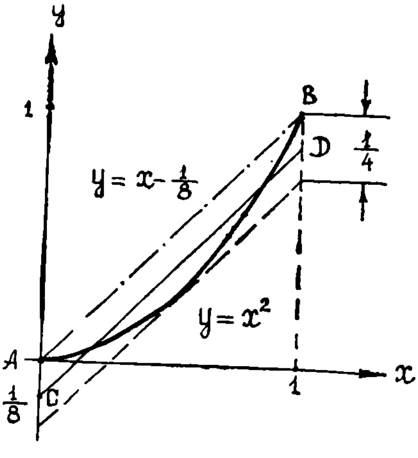
Энг содда интерполяциялаш масаласи қуйидагидан иборат: $[a, b]$ *кесмада интерполяция тугунлари* деб аталадиган $n+1$ та

$$x_0, x_1, x_2, \quad x_n$$

нуқта ва бу нуқталарда бирор $y = f(x)$ функциянинг

$$y_0 = f(x_0), \ y_1 = f(x_1), \ y_2 = ='f_t(x_2), \quad y_n = f(x_n)$$

қийматлари берилган. Бу маълумотлар жадвал шаклида ёзилган бўлсин (3.2-жадвал).



3.2-шакл

3.2- жадвал

x	x_0	x_1	x_2		x_n
y	y_0	y_1	y_2		y_n

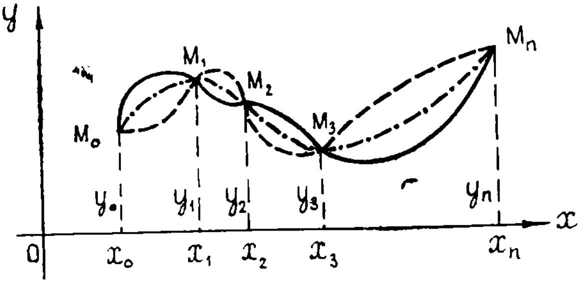
Маълум синфга тегишли бўлган ва интерполяция тугунларида $y = f(x)$ функция қабул қиладиган қийматларни қабул қиладиган, яъни

$$F(x_0) = y_0,\ F(x_1) = y_1,\ F(x_2) = y_2, \qquad F(x_n) = y_n$$

бўлган $y = F(x)$ функцияни (аппроксимацияловчи функцияни) топиш талаб қилинади. Геометрик нуқтаи назардан бу берилган

$$M_0(x_0,\ y_0),\ M_1(x_1,\ y_1),\ M_2(x_2,\ y_2), \qquad M_n(x_n,\ y_n)$$

нуқталардан ўтадиган маълум типдаги эгри чизиқни топиш лозимлигини англатади (3.3- шакл)



3.3- шакл

Масала бундай умумий қўйилганда чексиз кўп ечимлар тўпламига эга бўлиши ёки мутлақо ечимга эга бўлмаслиги мумкин. Бироқ ихтиёрий $F(x)$ функция ўрнига

$$P_n(x_0) = y_0,\ P_n(x_1) = y_1,\ P_n(x_2) = y_2, \ldots,\ P_n(x_n) = y_n$$

шартларни қаноатлантирадиган даражаси n дан ортиқ бўлмаган $P_n(x)$ кўпҳад изланадиган бўлса, масала бир қийматли ечилади. Бу шартлардан фойдаланиб, номаълум a_0, a_1, a_2, $\quad$, a_n коэффициентларни аниқлаш учун қуйидаги $(n+1)$ та номаълумли $(n+1)$ та тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned}
&a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \qquad + a_nx_0^n = y_0,\\
&a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \qquad + a_nx_1^n = y_1,\\
&\\
&a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \qquad + a_nx_n^n = y_n.
\end{aligned}$$

Агар x_0, x_1, x_2, , x_n қийматлар бир-биридан фарқли бўлса, система ягона ечимга эга эканлигини айтиб ўтамиз. Бу системани ечиб, a_0, a_1, a_2, a_n коэффициентларнинг қийматларини аниқлаймиз ва қўйилган масаланинг ечимини берадиган $P_n(x)$ интерполяцион кўпҳадни ҳосил қиламиз.

1-мисол. Ушбу жадвал (3.3-жадвал).

3.3-жадвал

x	0	1	2
y	1	1	3

билан берилган $f(x)$ функция учун интерполяцион кўпҳаднинг даражасини ва ўзини топинг.

Ечиш. Тугунлар сони ва параметрлар сони $n+1=3$ шу сабабли, интерполяцион кўпҳаднинг даражаси $n=2$ бўлади. $P_n(x)$ ни

$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

кўринишда ёзамиз ва жадвалдаги маълумотлар бўйича ушбу чизиқли тенгламалар системасини тузамиз:

$$\begin{aligned} &a_0 + a_1\cdot 0 + a_2\cdot 0 = 1, \\ &a_0 + a_1\cdot 1 + a_2\cdot 1^2 = 1, \\ &a_0 + a_1\cdot 2 + a_2\cdot 2^2 = 3. \end{aligned}$$

Бу системани ечиб, $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_2 = 1$ ни топамиз, демак, интерполяцион кўпҳад бундай кўринишда бўлади:

$$P_2(x) = 1 - x + x^2.$$

У қўйилган шартларни қаноатлантиришини аниқлаш қийин эмас.

7.2. Интерполяциялашда мувофиқлик мезони сифатида $f(x)$ ва $P_n(x)$ функцияларнинг интерполяция тугунларида устма-уст тушиши шарти қабул қилинади.

$f(x)$ функциянинг бирор $\bar{x} \neq x_i$ нуқтадаги қийматини ҳисоблаш зарур бўлган ҳолда интерполяция хатолиги Δ деб, аниқ ва тақрибий қийматлар орасидаги

$$R_n(x) = |f(\bar{x}) - P_n(\bar{x})|$$

айирмага айтилади, бу ерда $R_n(x)$ — интерполяция формуласининг хатолиги.

Тайин $\bar{x}$ нуқта учун хатолик ушбу тенгсизликни қаноатлантиришини исботлаш мумкин:

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_n(\bar{x})|, \tag{7.1}$$

бу ерда

$$\omega_n(\bar{x}) = \prod_{i=0}^{n} (\bar{x} - x_i) = (\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1) \qquad (\bar{x} - x_n),$$

$$M_{n+1} = \max_{x\in[a,\, b]} |f^{n+1}(x)|.$$

$[a,\ b]$ кесмада $f(x)$ функцияни $P_n(x)$ кўпҳад билан интерполяциялаш натижасида ҳосил бўладиган хатолик қуйидаги муносабат орқали аниқланади:

$$|R_n(x)| = \max_{x\in(a,\, b)} |f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{x\in[a,\, b]} |\omega_n(x)|,$$

бу ерда

$$\omega_n = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

2-мисол. Интерполяция тугунлари сифатида

$$x_0 = 100, \quad x_1 = 121, \quad x_2 = 144$$

ни танлаб, $y = \sqrt{x}$ функция учун интерполяцион кўпҳад ёрдамида $\sqrt{117}$ ни қандай аниқликда ҳисоблаш мумкин?

Ечиш. Энг аввал $M_3 = \max_{x\in[100,\, 144]} |(\sqrt{x})'''|$ ни аниқлаймиз. Бунинг учун қуйидагиларни топамиз:

$$y' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \qquad y'' = -\frac{1}{4} x^{-3/2}, \qquad y''' = \frac{3}{8} x^{-5/2}.$$

Бундан:

$$M_3 = \frac{3}{8} 100^{-5/2} = \frac{3}{8} 10^{-5}$$

(7.1) муносабатга асосан:

$$|R_2(117)| \leqslant \frac{3}{8} \cdot 10^{-5} |(117 - 100)(117 - 121)(117 - 144)| \approx 0{,}12 \quad 10^{-2}.$$

8-§. Лагранж ва Ньютоннинг интерполяцион кўпҳадлари

$P_n(x)$ интерполяцион кўпҳаднинг a_i коэффициентларини ҳисоблаш юқори тартибли тенгламалар системасини ечиш билан боғлиқ. Шу сабабли амалий масалаларни ҳал этишда интерполяцион кўпҳаднинг махсус турлари билан иш кўрилади.

8.1. Лагранжнинг интерполяцион формуласи деб ушбу

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)(x-x_1) \quad (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \quad (x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}\, y_i$$

интерполяцион кўпҳадга айтилади. Қаернинг сурат ва махражини $(x-x_i)$ га кўпайтириб ҳамда

$$\omega_n(x) = (x-x_0)(x-x_1) \quad (x-x_n),$$
$$\omega_n'(x_i) = (x_i-x_0)(x_i-x_1) \quad (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \quad (x_i-x_n)$$

ларни ҳисобга олиб, (8.2) Лагранж интерполяцион кўпҳадини бундай кўринишда ёзиш мумкин:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{\omega_n(x)}{(x-x_i)\,\omega_n'(x)} = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x). \qquad (8.3)$$

y_i лар олдида турган $l_i(x) = \dfrac{\omega_n(x)}{(x-x_0)\,\omega_n'(x_i)}$, $i = \overline{0, n}$ коэффициентлар *Лагранж кўпайтувчилари* деб аталади. Улар учун қуйидаги тенглик ўринли:

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(x) = 1.$$

3-мисол. $f(x)$ функция 3.4-жадвал билан берилган.

3.4-жадвал

x	0	1	2	6
y	—1	—3	3	1187

Унинг $x = 4$ нуқтадаги қийматини Лагранж интерполяцион кўпҳадидан фойдаланиб ҳисобланг.

Ечиш. (7.3) формулага x_i ва y_i нинг қийматларини қўйиб, $n = 3$ ва $x = 4$ да қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$L_3(4) = -1 \cdot \frac{(4-1)(4-2)(4-6)}{(-1)(-2)(-6)} - 3 \cdot \frac{4\cdot(4-2)(4-6)}{1\cdot(1-2)(1-6)} +$$
$$+ \frac{4(4-1)(4-6)}{2(2-1)(2-6)} + 1187 \cdot \frac{4(4-1)(4-2)}{6(6-1)(6-2)} = 255.$$

Одатда ҳисоблашлар қулай бўлиши учун ушбу ёрдамчи жадвал тузилади (3.5-жадвал):

3.5-жадвал

$x - x_0$	$x_0 - x_1$	$x_0 - x_2$		$x_0 - x_n$	k_0
$x_1 - x_r$	$x - x_1$	$x_1 - x_2$		$x_1 - x_n$	k_1
$x_2 - x_0$	$x_2 - x_1$	$x - x_2$		$x_2 - x_n$	k_2
$x_n - x_0$	$x_n - x_1$	$x_n - x_2$		$x - x_n$	k_n

Бу ерда x_0, x_1, x_2, , x_n — интерполяция тугунлари, x — аргументнинг қиймати бўлиб, унинг учун Лагранж интерполяцион кўпҳадининг қиймати аниқланади. i-сатр элементлари кўпайтмаларини k $(i = \overline{0, n})$ орқали белгилаймиз:

$$k_0 = (x - x_0)(x_0 - x_1) \qquad (x_0 - x_n),$$

$$k_1 = (x_1 - x_0)(x - x_1) \qquad (x_1 - x_n),$$

$$k_n = (x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2) \qquad (x - x_n).$$

k_0, k_1, k_2, k_n сонларни жадвалнинг ўнгдан охирги устунига жойлаштирамиз. Қўшимча равишда бош диагоналда турган элементлар кўпайтмасини ҳисоблаймиз:

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdot \qquad \cdot (x - x_n).$$

Энди (8.3) Лагранж интерполяцион кўпҳадини бундай кўринишда ёзиш мумкин:

$$L_n(x) = \omega_n(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{k_i}. \tag{8.4}$$

4-мисол. 3-мисолни (8.4) формуладан фойдаланиб ечинг:

Ечиш. Жадвал тузамиз (3.6-жадвал):

3.6-жадвал

4 — 0	0 — 1	0 — 2	0 — 6	$k_0 = -48$
1 — 0	4 — 1	1 — 2	1 — 6	$k_1 = 15$
2 — 0	2 — 1	4 — 2	2 — 6	$k_2 = -16$
6 — 0	6 — 1	6 — 2	4 — 6	$k_3 = -240$

(8.3) формулага ва жадвалга асосан:

$$\omega_3(4) = 4(4 - 1)(4 - 2)(4 - 6) = -48.$$

Функциянинг $x = 4$ нуқтадаги тақрибий қийматини, яъни $f(4) \approx \approx L_3(4)$ ни ушбу формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$L_3(4) = \omega_3(x) \sum_{i=0}^{3} \frac{y_i}{k_i} = -48\left(\frac{-1}{-48} + \frac{-3}{15} + \frac{3}{-16} + \frac{1187}{-240}\right) = 255.$$

8.2. Энг кўп қўлланиладиган интерполяциялаш масаласи тенг узоқликдаги тугунли интерполяциялаш масаласидир. Бу ҳолда интерполяцион кўпҳадларнинг шаклигина эмас, балки ҳисоблаш жараёнининг ўзи ҳам ихчамлашади.

Тенг узоқликдаги тугунли интерполяцион кўпҳадларни тузишда *чекли айирмалар* деб аталадиган миқдорлардан фойдаланилади.

$y = f(x)$ функция тенг узоқликдаги тугунли жадвал билан берилган бўлсин (3.7-жадвал):

3.7-жадвал

x	x_0	x_1	x_2		x_n
y	y_0	y_1	y_2		y_n

Бу ерда $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \quad = x_n - x_{n-1} = h$ — const, h — *қадам* деб аталади,

Биринчи тартибли чекли айирма деб, функциянинг тугундаги ва ундан олдинги тугундаги қийматлари орасидаги айирмага айтилади, яъни:

$$\begin{aligned} \Delta y_0 &= y_1 - y_0, \\ \Delta y_1 &= y_2 - y_1, \\ \Delta y_2 &= y_3 - y_2, \\ &\cdot \\ \Delta y_{n-1} &= y_n - y_{n-1}. \end{aligned}$$

Иккинчи тартибли чекли айирма деб, тугундаги ва ундан олдинги тугундаги биринчи тартибли чекли айирмалар орасидаги айирмага айтилади, яъни:

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_0 &= \Delta y_1 - \Delta y_0, \\ \Delta^2 y_1 &= \Delta y_2 - \Delta y_1, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \Delta^2 y_{n-1} &= \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2}. \end{aligned}$$

Ихтиёрий k-тартибли чекли айирмалар ҳам шунга ўхшаш аниқланади, яъни:

$$\begin{aligned} \Delta^k y_0 &= \Delta^{k-1} y_1 - \Delta^{k-1} y_0, \\ \Delta^k y_1 &= \Delta^{k-1} y_2 = \Delta^{k-1} y_1, \end{aligned}$$

ва ҳоказо.

Чекли айирмаларни жадвал шаклида ёзиш қулай бўлади (3. 8- жадвал):

3. 8- жадвал

i	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	x_0	y_0	$\Delta y_0 = y_1 - y_0$	$\Delta^2 y_0 = \Delta y_2 - \Delta y_1$	$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - - \Delta^2 y_0$
1	x_1	y_1	$\Delta y_1 = y_2 - y_1$	$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$	$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - - \Delta^2 y_1$
2	x_2	y_2	$\Delta y_2 = y_3 - y_2$	$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2$	$\Delta^3 y_2 = \Delta^2 y_3 - - \Delta^2 y_2$
3	x_3	y_3	$\Delta y_3 = y_4 - y_3$	$\Delta^2 y_3 = \Delta y_4 - \Delta y_3$	$\Delta^4 y_3 = \Delta^2 y_4 - - \Delta^2 y_3$
$n-1$	x_{n-1}	y_{n-1}	$\Delta y_{n-1} = y_n - - y_{n-1}$		
n	x_n	y_n			

5- мисол. $y = x^3 + 3x^2 - x - 1$ функциянинг $x_0 = 0$ дан бошлаб $h = 1$ қадам билан 4- тартиблигача чекли айирмалари жадвалини тузинг.

Ечиш. Берилганларга асосан $n = 5$ ва $x_0 = 1$, $x_1 = 1$, , $x_5 = 5$ да $y = x^3 + 3x^2 - x - 1$ функциянинг мос қийматларини топамиз ва жадвалга киритамиз. Чекли айирмаларни бевосита жадвалда ҳисоблаймиз (3. 9- жадвал):

3. 9- жадвал

i	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	0	−1	2—(— 1) = 3	15 — 3 = 12	6	0
1	1	2	17 — 2 = 15	33 — 15 = 18	6	0
2	2	17	50 — 17 = 33	57 — 33 = 24	6	
3	3	50	107—50=57	87 — 57 = 30		

давоми

i	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
4	4	107	194—107=87			
	5	194				

Юқоридаги жадвалдан кўриниб турибдики, учинчи тартибли чекли айирмалар ўзгармас. Бу $f(x)$ функция учинчи тартибли кўпҳад эканлиги билан тушунтирилади. Учинчи тартибли чекли айирмали $\Delta^n P_n(x) = n! a_0 h^n$ формула бўйича ҳисоблаш ҳам мумкин эди.

8.3. Тенг узоқликдаги $x_i = x_0 + ih (i = \overline{0, n})$ қадамлар учун $L_n(x)$ Лагранж кўпҳади Ньютон интерполяцион кўпҳади шаклида ёзилиши мумкин:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\, h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \qquad + \\ + \frac{\Delta^n y_0}{n!\, h^n}(x - x_0)(x - x_1) \qquad (x - x_{n-1}), \qquad (8.5)$$

бу ерда Δy_0, $\Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_0$, $\Delta^n y_0$ — турли тартибли чекли айирмалар.

Энди

$$\frac{x - x_0}{n} = q$$

деб, (8. 5) Ньютон интерполяцион кўпҳадини ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \qquad + \\ + \frac{q(q-1)\ \ldots\ (q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0. \qquad (8.6)$$

(8. 5) ёки (8. 6) Ньютон формуласида $h = 1$ деб олиб, ушбу чизиқли интерполяциялаш формуласини ҳосил қиламиз:

$$P_1(x) = y_0 + q\,\Delta y_0 \quad \text{ёки} \quad P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h}(x - x_0) \qquad (8.7)$$

$n = 2$ бўлганда квадратик интерполяция формуласи ҳосил бўлади:

$$P_2(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2}\Delta^2 y_0$$

ёки

$$P_2(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h}(x - x_0) + \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1). \qquad (8.8)$$

(8. 5) ва (8. 6) формулалар *Ньютоннинг биринчи интерполяцион формулалари* деб аталади. Уларни $[x_0;\ x_1]$ да интерполяциялашда қўлланилади. $[x_{n-1},\ x_n]$ да интерполяциялашда Ньютоннинг ушбу иккинчи интерполяцион кўпҳадларидан фойдаланилади:

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1\cdot h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!\,h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) +$$

$$+ \qquad + \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1) \qquad (8.\ 9)$$

ёки

$$\frac{x - x_n}{h} = t$$

белгилашни киритиб, (8. 9) ни ушбу кўринишда ёзамиз:

$$P_n(x) = y_n + \Delta y_{n-1}\, t + \frac{t(t+1)}{2}\,\Delta^2 \cdot y_{n-2} + \qquad +$$

$$+ \frac{t(t+1)\dots(t+n-1)}{n!}\,\Delta_i^n\, y_0. \qquad (8.\ 10)$$

6-мисол. Жадвал билан берилган $y = 3^x$ функциянинг $x_1 = 0,63$ ва $x_2 = 1,35$ нуқталардаги қийматларини Ньютон кўпҳадлари ёрдамида (тўртта ишончли рақам билан) ҳисобланг (3. 10-жадвал):

3.10-жадвал

x	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50
y	1,732	2,280	3,000	3,948	5,196

Ечиш. Чекли айирмалар жадвалини тузамиз (3.11-жадвал):

3.11-жадвал

i	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	0,50	1,732	0,548	0,172	0,56	0,16
1	0,75	2,280	0,720	0,228	0,72	
2	1,00	3,000	0,948	0,300		
3	1,25	3,948	1,248			
4	1,50	5,196				

Сўнгра $\overline{x_1} = 0{,}63$ жадвалнинг бошида, $\overline{x_2} = 1{,}35$ эса охирида жойлашганлиги учун f (0,63) ни ҳисоблашда Ньютоннинг биринчи интерполяцион кўпҳадидан, f (1,35) ни ҳисоблашда эса иккинчи интерполяцион кўпҳадидан фойдаланиш лозим.

Шундай қилиб, $x_0 = 0{,}5$ деб олиб, q ни ҳисоблаймиз:

$$q = \frac{\overline{x} - x_0}{h} = \frac{0{,}63-0{,}5}{0{,}25} = 0{,}52.$$

q нинг бу қийматини Ньютон биринчи интерполяцион кўпҳадининг (8.6) ифодасига қўйиб ва чекли айирмалардан фойдаланиб қуйидагига эга бўламиз:

$$f(0{,}63) \approx P_4(0{,}52) = 1{,}732 + \frac{0{,}548}{1!}\cdot 0{,}52 + \frac{0{,}172}{2!}\cdot 0{,}52(-0{,}48) +$$

$$+ \frac{0{,}056}{3!}\cdot 0{,}52(-0{,}48)(-1{,}48) + \frac{0{,}16}{4!}(-0{,}48)(-1{,}48)(-2{,}48) \approx$$

$$\approx 1{,}999$$

(тўртта ишончли рақамни қолдириб, қолган рақамларни яхлитлаймиз). Шунга ўхшаш, $x_4 = 1{,}50$ деб,

$$t = \frac{\overline{x_2} - x_4}{h} = \frac{1{,}35 - 0{,}50}{0{,}25} = -0{,}60$$

ни ҳисоблаймиз ва Ньютоннинг иккинчи интерполяцион кўпҳади ифодаси (8.10) дан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$f(1{,}35) \approx P_4(-0{,}60) = 5{,}196 + \frac{1{,}248}{1!}(-0{,}60) +$$

$$+ \frac{0{,}300}{2!}(-0{,}60)\cdot(0{,}40) + \frac{0{,}72}{3!}(-60)\cdot(0{,}40)\cdot(1{,}40) +$$

$$+ \frac{0{,}16}{4!}(-0{,}60)\cdot(0{,}40)(1{,}40)\cdot(2{,}40) \approx 4{,}407.$$

9- §. Сплайнлар билан интерполяциялаш

$[a, b]$ кесма n та тенг $[x_i, x_{i+1}]$ қисмий кесмаларга бўлинган бўлсин, бу ерда $x_i = a + ih$, $i = \overline{0, n}$, $x_n = b$, $h = \frac{b-a}{n}$.

Сплайн деб, бутун $[a, b]$ кесмада бир неча ҳосилалари билан узлуксиз, ҳар бир қисмий кесмада эса алоҳида бирор алгебраик кўпҳаддан иборат бўлган функцияга айтилади.

Барча қисмий кесмалар бўйича кўпҳадларнинг даражаларининг энг каттаси *сплайннинг даражаси*, сплайннинг даражаси билан $[a, b]$ да узлуксиз ҳосилаларнинг энг катта тартиби орасидаги айирма *сплайннинг дефекти* деб аталади. Масалан, узлуксиз бўлакли — чизиқли функция (синиқ чизиқ) дефекти бирга тенг бўлган биринчи даражали сплайндир, чунки фақат функциянинг ўзи (нолинчи тартибли ҳосила) узлуксиз, биринчи ҳосила эса узлукли бўлади.

Амалиётда [a, b] да узлуксиз иккинчи ҳосилага эга бўлган учинчи даражали сплайнлар кенг тарқалган. Бу сплайнлар *кубик сплайнлар* деб аталади ва $S_3(x)$ орқали белгиланади.

Сплайнлар воситасида интерполяциялаш берилган x_i нуқталарда берилган $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$ қийматларни қабул қиладиган ва қўшимча шартларни қаноатлантирадиган интерполяцион кўпҳадни тузишни англатади. Масалан, [a, b] да бир нечта кўпҳадлардан «улаб» тузилган ва узлуксиз иккинчи ҳосилага эга бўлган $S_3(x)$ кубик сплайн учун ушбу шартлар қўйилади:

$$S_3(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0, n} \qquad (9.1)$$

$$S'_3(x_{i+0}) = S'_3(x_{i-0}), \quad i = \overline{1, n-1};$$

$$S''_3(x_{i-0}) = S''_3(x_{i+0}), \quad i = \overline{1, n-1}; \quad S''_3(x_0) = S''_3(x_n) = 0.$$

Демак, ҳар бир қўшни тугунлар жуфти оралиғида интерполяцион функция учинчи даражали кўпҳад бўлиб, уни бундай кўринишда ёзиб олиш қулай бўлади:

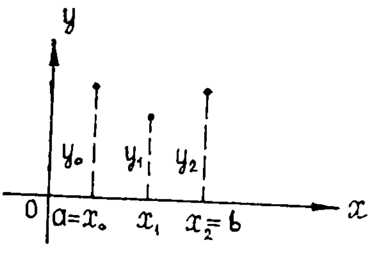
$$S_3(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + di(x - x_{i-1})^3,$$

$$x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i; \quad i = \overline{1, n}.$$

Ҳосилаларни топамиз:

$$\left.\begin{array}{l} S'_3(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2 \\ S''_3(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}). \end{array}\right\} \qquad (9.\ 2)$$

(8. 11) шартларни тузиб, a_i, b_i, c_i, d_i, $i = \overline{1, n}$ ларни топиш учун чизиқли тенглама системасини ҳосил қиламиз. Масалан, $n = 2$ бўлганда тенг узоқликдаги учта x_0, x_1, x_2 тугун нуқталарга ва функциянинг уларга мос y_0, y_1, y_2 қийматлари учун (3.4- шакл) [x_0, x_1] кесмада



3.4- шакл

$$S_3(x) = a_1 + b_1(x - x_0) + c_1(x - x_0)^2 + d_1(x - x_0)^3$$

кўпҳадга, [x_1, x_2] кесмада эса

$$S_3(x) = a_2 + b_2(x - x_1) + c_2(x - x_1)^2 + d_2(x - x_1)^3$$

кўпҳадга эга бўламиз.

(9.1) ни ҳисобга олсак, (9.2) шартлар бундай кўринишни олади:

$$y_0 = a_1, \quad y_1 = a_2,$$

$$y_2 = a_2 + b_2h + c_2h^2 + d_2h^3,$$

$$
\begin{aligned}
y_1 &= a_1 + b_1h + c_1h^2 + d_1h^3,\\
b_2 &= b_1 + 2c_1h + 3d_1h^2,\\
c_2 &= c_1 + 3d_1h, \quad 2c_1 = 0, \quad c_2 + d_2h = 0.
\end{aligned}
$$

Бу 8 номаълумли 8 та тенгламалар системасини ечиб, ҳар бир кесмадаги $S_3(x)$ кўпҳадни топамиз.

10- §. Чизмқли тенгламалар системаларини ечиш усуллари

Чизиқли тенгламалар системаларини ечиш усуллари аниқ усуллар (Крамер қоидаси, Гausсснинг номаълумларни чиқариш усули, Гаусс—Жорданнинг яхшиланган усули) ва итерацион усуллар (уч диагоналли системаларга татбиқ этиладиган «прогонка» усули, оддий итерация усули, Зейдель усули ва бошқалар) га бўлинади.

Итерацион усуллар (тақрибий усуллар) системанинг ечимини берилган аниқликда ҳосил қилиш имконини беради.

11- §. Гаусс — Жордан усули. Матрицаларни алмаштириш ва детерминантларни ҳисоблаш

11.1. Олий математиканинг умумий курсидан маълумки, чизиқли тенгламалар системаларини Гаусс усули билан ечишда бу система учбурчакли система шаклига келтирилади. Номаълумларнинг қийматларини бевосита топишга имкон берадиган Гаусс—Жордан яхшиланган усулини кўриб чиқамиз.

Ушбу ихтиёрий чизиқли тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad + a_{1n}x_n = b_1,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad + a_{2n}x_n = b_2,\\
\quad . \qquad\quad . \qquad\qquad . \qquad\quad .\\
a_{m_1}x_1 + a_{m_2}x_2 + \quad + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
\qquad (11.1)
$$

(11. 1) системанинг кенгайтирилган матрицасини қараймиз:

$$
B = \left(\begin{array}{ccc|c}
a_{11} & a_{12} & a_{1n} & b_1\\
a_{21} & a_{22} & a_{2n} & b_2\\
 & & & \dots\\
a_{m_1} & a_{m_2} & a_{mn} & b_m
\end{array}\right)
$$

B матрицада нолдан фарқли a_{ik} элементни танлаймиз. Уни *ҳал этувчи элемент* деб атаймиз; матрицанинг i- сатрини *ҳал этувчи сатр*, k- устунини эса *ҳал этувчи устун* деб атаймиз. B матрица устида элементар алмаштиришлар бажариб, бу матрицага эквивалент ва k- ҳал этувчи устунида a_{ik} дан бошқа барча элементлари ноллар бўлган янги матрицани ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, сатрлар устида элементар алмаштиришлар ёрдамида, ҳал этувчи элемент сифатида бир хил номерли сатр ва устунларнинг кесишган жойларида турган элементларни танлаш йўли билан B матрица ушбу кўринишга келтирилиши мумкин:

$$B \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & a'_{1,r+1} & & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & 0 & a'_{2,r+1} & & a'_{2n} & b'_2 \\ & & \cdot & \cdot & & \cdot & \dots \\ 0 & 0 & 1 & a'_{r,r+1} & & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & b'_{r+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & b'_m \end{array}\right) \qquad (11.2)$$

(бунда система матрицаси ранги $r \leqslant n$).

(11.2) матрица ушбу системанинг *кенгайтирилган* матрицасидир:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{1,r+1} x_{r+1} + \quad + a'_{1n} x_n = b'_1, \\ x_2 + a'_{2,r+1} x_{r+1} + \quad + a'_{2n} x_n = b'_2, \\ \\ x_r + a'_{r,r+1} x_{r+1} + \quad + a'_{rn} x_n = b'_r \\ \qquad 0 = b'_{r+1} \\ \qquad 0 = b'_m \end{cases} \qquad (11.3)$$

бу система эса (11. 1) системага эквивалентдир.

1) Агар b'_{r+1}, b'_m сонлардан ҳеч бўлмаганда биттаси нолдан фарқли бўлса, у ҳолда (11. 3) система, ва, демак, (11.1) система ҳам биргаликда эмас.

2) Агар $b'_{r+1} = \quad = b'_m = 0$ бўлса, у ҳолда

а) $r < n$ бўлганда система биргаликда ва чексиз кўп ечимлар тўпламига эга ҳамда (11.3) формулалар x_1, x_2, , x_r баъзи номаълумларнинг x_{r+1}, x_{r+2}, x_n озод номаълумлар орқали ошкор ифодаларини беради

б) $r = n$ бўлганда бу системанинг ечимлари ягонадир.

1- мисол. Ушбу тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 3, \\ 3x_1 + 11x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Ечиш. Системани бундай қайта ёзиб оламиз:

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ & 3x_1 + 11x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 6, \\ & 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ & 6x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 3. \end{aligned}$$

Кенгайтирилган матрицани тузамиз:

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 11 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 6 & -5 & 7 & 8 & 3 \end{array}\right)$$

Ҳал этувчи элемент сифатида $a_{11} = 1$ ни (биринчи сатрнинг биринчи элементини) оламиз:

$$B\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -11 & 1 & 8 & 3 \end{array}\right)$$

Олдин учинчи сатрни (— 1) га кўпайтириб, иккинчи ва учинчи сатрларнинг ўринларини алмаштирамиз:

$$B\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 8 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & -11 & 1 & 8 & 3 \end{array}\right)$$

Ҳал этувчи элемент сифатида $a_{12} = 1$ (2- сатрнинг 2- элементи)ни оламиз:

$$B\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 36 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -36 & -8 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -36 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & -36 & -8 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 40 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -36 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

Система биргаликда эмас (а) ҳол).

2-мисол. Ушбу тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 8. \end{cases}$$

Ечиш. Кенгайтирилган матрицани тузамиз ва элементар алмаштиришлар бажарамиз:

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 1 & -2 & 8 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & -15 & -1 \\ 0 & 3 & -7 & -19 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -12 & 8 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 2 & 5 & 0\\ 0 & -1 & -3 & -12 & 8\\ 0 & 3 & -7 & -19 & 6\\ 0 & 4 & -7 & -15 & -1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 2 & 5 & 0\\ 0 & \boxed{1} & 3 & 12 & -8\\ 0 & 3 & -7 & -19 & 6\\ 0 & 4 & -7 & -15 & -1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 5 & 17 & -8\\ 0 & 1 & 3 & 12 & -8\\ 0 & 0 & -16 & -55 & 30\\ 0 & 0 & -19 & -63 & 31\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 5 & 17 & -8\\ 0 & 1 & 3 & 12 & -8\\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{55}{16} & -\frac{15}{8}\\ 0 & 0 & 19 & 63 & -31\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & -\frac{3}{16} & \frac{11}{8}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{27}{16} & -\frac{19}{8}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{55}{16} & -\frac{15}{8}\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{37}{16} & \frac{37}{8}\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & -3/16 & 11/8\\ 0 & 1 & 0 & 27/16 & -19/8\\ 0 & 0 & 1 & 55/16 & -15/8\\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -2\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\end{array}\right)$$

Система биргаликда ва ушбу ягона ечимга эга:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 5,\ x_4 = -2.$$

3-мисол. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 5,\\ x_2 + x_3 + x_1 &= 3,\\ x_1 + x_2 \qquad &= 2.\end{aligned}$$

Ечиш. Кенгайтирилган матрицани тузамиз ва элементар алмаштиришларни бажарамиз:

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c}\boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 1 & 1 & 5\\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

Система биргаликда, иккита параметр $(n - r = 4 - 2 = 2)\,x_3$ ва x_4 га боғлиқ бўлган ушбу чексиз кўп ечимлар тўпламига эга:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_3 + x_4 - 1,\\ x_2 &= 3 - x_3 - x_4.\end{aligned}$$

11.2. Элементар алмаштиришларни бажариб, тескари матрицани топиш мумкин. Бунинг учун берилган n-тартибли A квадрат матрица учун бу матрицанинг ёнига ўнг томондан ўшандай тартибли E бирлик матрицани ёзиб, $n \times 2n$ ўлчамли (A/E) тўғри тўртбурчак матрица тузилади. Агар A матрица махсус матрица бўлса, сатрлар устида элементар алмаштиришлар бажариб, тузилган матрицани ҳар доим (E/B) кўринишга келтириш мумкин. У ҳолда B матрица A матрица учун *тескари матрица* бўлади, яъни $B = A^{-1}$

4-мисол. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ матрица учун тескари матрицани элементар алмаштиришлар усулидан фойдаланиб топинг.

Ечиш. Янги (A/E) матрица тузамиз ва унинг устида элементар алмаштиришлар бажарамиз:

$$(A/E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 2/3 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2/9 & -2/9 & 1/9 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/9 & 2/9 & 2/9 \\ 0 & 1 & 0 & 2/9 & 1/9 & -2/9 \\ 0 & 0 & 1 & 2/9 & -2/9 & 1/9 \end{array}\right)$$

Демак, тескари матрица:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/9 & 2/9 & 2/9 \\ 2/9 & 1/9 & -2/9 \\ 2/9 & -2/9 & 1/9 \end{pmatrix}$$

Детерминантларни ҳисоблашда бунга ўхшаш алмаштиришлардан бош диагоналдан ташқарида ётадиган барча элементларни нолга айлантириш учун фойдаланиш мумкин.

5-мисол. Детерминантни ҳисобланг:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}.$$

Ечиш. Қаралган усулни мазкур детерминантга татбиқ этамиз. Ушбу хоссадан фойдаланамиз: агар детерминантнинг бирор сатри элементларига бошқа сатр элементлари қўшилса (ёки айирилса) детерминант ўзгармайди:

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 9 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -11 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{17} & 3 \\ 0 & 0 & -21 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 40/17 \\ 0 & 1 & 0 & -44/17 \\ 0 & 0 & 17 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 240/17 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 240/17 \end{vmatrix} =$$

$= (-1)\cdot 1\cdot 17\cdot \frac{240}{17} = -240$. Демак, берилган детерминант -240 га тенг.

12-§. Уч диагоналли системаларни ечишнинг «прогонка» усули

Қуйидаги махсус кўринишдаги чизиқли алгебраик тенгламалар системасини кўрайлик:

$$\begin{cases} -b_1x_1 + c_1x_2 = d_1, \\ a_2x_1 - b_2x_2 + c_2x_3 = d_2, \\ a_3x_2 - b_3x_3 + c_3x_4 = d_3, \\ a_4x_3 - b_4x_4 + c_4x_5 = d_4, \\ \cdot \\ a_nx_{n-1} - b_nx_n = d_n, \end{cases} \tag{12.1}$$

бу ерда x_1, x_2, x_3, x_n — номаълумлар, a_i, b_i, d_i, c_i лар маълум сонлар.

(12.1) системанинг A матрицасини тузамиз:

$$A = \begin{pmatrix} -b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & -b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -b_3 & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & -b_4 & c_4 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n & -b_n \end{pmatrix}$$

Уч диагоналли матрицани ҳосил қилдик, унинг бош диагонали ва унга қўшни иккита диагоналида ётмайдиган барча элементлари нолга тенг.

(12.1) тенгламалар *иккинчи тартибли айирмали тенгламалар* ёки *уч нуқтали тенгламалар* деб аталади.

Агар ушбу

$$|b_i| \geqslant |a_i| + |c_i|$$

шарт бажарилса, у ҳолда (12.1) система ягона ечимга эга ва уни *«прогонка»* усули ёрдамида топиш мумкин.

Усулнинг моҳияти қуйидагича: (12.1) системанинг биринчи тенгламасини x_1 га нисбатан ечиб,

$$x_1 = \frac{c_1}{b_1} x_2 - \frac{d_1}{b_1} \quad \text{ёки} \quad x_1 = \alpha_1 x_2 + \beta_1 \tag{12.2}$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда

$$\alpha_1 = \frac{c_1}{b_1} \quad \text{ва} \quad \beta_1 = \frac{-d_1}{b_1}. \tag{12.3}$$

(12.2) ни (12.1) системанинг биринчи тенгламасига қўйиб ва уни x_2 га нисбатан ечиб,

$$x_2 = \alpha_2 x_3 + \beta_2 \tag{12.4}$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда

$$\alpha_2 = \frac{c_2}{b_2 - a_2 \alpha_1}, \quad \beta_2 = \frac{a_2 \beta_1 - d_2}{b_2 - a_2 \alpha_1}$$

x_2 учун топилган (12.4) ифодани (12.1) системанинг навбатдаги тенгламасига қўйиб, x_3 ва x_4 ни боғловчи тенгламани ҳосил қиламиз ва ҳоказо. Энди

$$x_k = \alpha_k x_{k+1} + \beta_k \tag{12.5}$$

ифода топилган деб фараз қилайлик, бу ерда

$$\alpha_k = \frac{c_k}{b_k - a_k \alpha_{k-1}}, \quad \beta_k = \frac{a_k \beta_{k-1} - d_k}{b_k - a_k \alpha_{k-1}} \tag{12.6}$$

Шундай қилиб x_k, x_{k+1}, $k = \overline{1, n-1}$ қўшни қийматларни богловчи (12.5) тенгламаларнинг коэффициентларини [α_1, ва β_1 (12.3) да номаълум бўлганлиги учун] (12.6) рекуррент муносабатлардан $k = \overline{2, n-1}$ да топиш мумкин.

(12.1) системанинг сўнгги тенгламасига x_n нинг [(12.5) формуладан $k = n - 1$ учун] ифодасини қўйиб,

$$x_n = \frac{\beta_n + \alpha_n \beta_{n-1}}{1 - \alpha_n \cdot \alpha_{n-1}} \tag{12.7}$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда

$$a_n = \frac{a_n}{b_n}, \quad \beta_n = -\frac{d_n}{b_n}. \tag{12.8}$$

Сўнгра (12.5) формула бўйича ушбу кетма-кетликдан қолган x_{n-1}, x_{n-2}, , x_1 номаълумларни топамиз.

α_k, β_k $k = \overline{1, n}$ коэффициентларни (12.6) формулалар бўйича ҳисоблаш жараёни «прогонка» нинг *тўғри йўли*, x_k номаълумларни (12.5) ва (12.7) формулалар бўйича топиш эса «прогонка» нинг *тескари ўтиш йўли* деб аталади.

Мисол. «Прогонка» усули билан ушбу тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 = -5,\\ x_1 - 4x_2 - x_3 = 8,\\ 2x_2 - 5x_3 + x_4 = -6,\\ x_3 - 3x_4 = -8. \end{cases}$$

Ечиш. Коэффициентлардан жадвал тузамиз (3.12-жадвал):

3.12-жадвал

	a	b	c	d
1		3	1	—5
2	1	4	—1	8
3	2	5	1	—6
4	1	3		—8

Тўғри «прогонка» йўли α_k ва β_k коэффициентларни (12.3), (12.6) ва (12.8) формулалар бўйича ҳисоблашдан иборат:

$$\alpha_1 = \frac{c_1}{b} = \frac{1}{3}, \quad \beta_1 = \frac{-d_1}{b_1} = \frac{5}{3};$$

$$\alpha_2 = \frac{c_2}{b_2 - a_2\alpha_1} = -\frac{3}{11}; \quad \beta_2 = \frac{a_2\beta_1 - d_2}{b_2 - a_2\alpha_1} = -\frac{19}{11},$$

$$\alpha_3 = \frac{c_3}{b_3 - a_3\alpha_2} = \frac{11}{61}; \quad \beta_3 = \frac{a_3\beta_2 - d_3}{k_3 - a_3\alpha_2} = \frac{28}{61},$$

$$\alpha_4 = \frac{a_4}{b_4} = \frac{1}{3}; \quad \beta_4 = -\frac{d_4}{b_4} = \frac{8}{3}$$

Тескари «прогонка» йўли x_k номаълумларни (12.5) ва (12.7) формулалар бўйича топишдан иборат:

$$x_4 = \frac{\beta_4 - \alpha_4\beta_3}{1 - \alpha_4\alpha_3} = 3;$$

$$x_3 = \alpha_3 x_4 + \beta_3 = 1;$$

$$x_1 = \alpha_1 x_2 + \beta_1 = 1.$$

Иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар учун уч нуқтали айирмали схема уч диагоналли чизиқли системаларга олиб келади.

13-§. Тенгламаларни ечишнинг итерация усуллари. Қўзғалмас нуқта ҳақидаги теорема. Итерация жараёнининг яқинлашиши

13.1. Алгебраик тенгламани ечишнинг энг муҳим усулларидан бири итерация усули ёки кетма-кет яқинлашиш усулидир. Бу усулнинг асосий афзаллиги ҳар бир қадамда бажариладиган операциялар бир хиллиги бўлиб, ЭҲМ лар учун итератив алгоритмларга асосланган дастурлар тузиш ишини жуда осонлаштиради.

Усулнинг моҳияти қуйидагидан иборат. Ушбу тенглама берилган бўлсин:

$$f(x) = 0, \tag{13.1}$$

бу ерда $f(x)$ — узлуксиз функция. Унинг ҳақиқий илдизларини топиш талаб қилинади. Берилган (13.1) тенгламани унга тенг кучли

$$x = \varphi(x). \tag{13.2}$$

тенглама билан алмаштирамиз. Бирор усул билан бу тенгламанинг илдизи яккаланган $[a, b]$ оралиқ (яъни бу тенгламанинг фақат битта илдизини ўз ичига олган оралиқ) ажратилган бўлиб, x_0 бу оралиқнинг исталган нуқтаси бўлсин. Уни илдизнинг *нолинчи яқинлашиши* деб атаймиз. Навбатдаги x_1 яқинлашишни топиш учун (13.2) тенгламанинг ўнг томонида x нинг ўрнига x_0 қийматни қўямиз, яъни

$$x_1 = \varphi(x_0).$$

Кейинги яқинлашишлар ушбу кетма-кетлик бўйича амалга оширилади:

$$\begin{gathered} x_2 = \varphi(x_1), \\ x_3 = \varphi(x_2), \\ . \\ x_n = \varphi(x_{n-1}). \end{gathered} \tag{13.3}$$

1-теорема. *Агар $\varphi(x)$ функция узлуксиз ва (13.3) кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, у ҳолда унинг лимити (13.2) тенгламанинг илдизи бўлади.*

Исботи. Теорема шартига кўра $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашади, демак, $n \to \infty$ да унинг лимити мавжуд, уни $\bar{x}$ орқали белгилаймиз:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \bar{x}. \tag{13.4}$$

(13.3) муносабатларни ҳисобга олиб, (13.4) тенгликни

$$\bar{x} = \lim_{n \to \infty} \varphi(x_{n-1})$$

кўринишда ёзамиз.

$\varphi(x)$ функция узлуксиз бўлганлиги сабабли бу тенгликда функциянинг ва лимитнинг φ ва $\lim$ символларининг ўринларини алмаштириш мумкин, яъни:

$$\bar{x} = \varphi(\lim_{n \to \infty} x_{n-1}),$$

бу ерда (13.4) ни эътиборга олсак,

$$\bar{x} = \varphi(\bar{x})$$

га эга бўламиз. Шуни исботлаш талаб этилган эди.

13.2. Энди (13.3) итерация жараёни қандай шартларда яқинлашишини кўриб чиқайлик.

2-теорема. *Агар $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ кесмада аниқланган ва дифференциалланувчи бўлиб, шу билан бирга унинг барча қийматлари $[a, b]$ га тегишли ва $a < x < b$ да*

$$|\varphi'(x)| \leqslant q < 1 \qquad (13.5)$$

бўлса, у ҳолда (13.3) итерация жараёни исталган $x_0 \in [a, b]$ да яқинлашувчи бўлади.

q сон сифатида ҳосила модули $|\varphi'(x)|$ нинг $0 \leqslant x \leqslant b$ даги энг катта қийматини (ёки юқори чегарасини) олиш мумкин.

Исботи. $[a, b]$ кесма $x = \varphi(x)$ тенглама илдизининг яккаланиши оралиғи бўлиб $\varphi(x)$ функция дифференциалланувчи бўлсин ва унинг ҳосиласи теорема шартини қаноатлантирсин. $x_0 \in [a, b]$ кесманинг исталган нуқтаси ва $x_1 = \varphi(x_0)$ биринчи яқинлашиш бўлсин. Агар $\bar{x}$ бу тенгламанинг аниқ илдизи бўлса, у ҳолда, Лагранж теоремасига кўра,

$$\bar{x} - x_1 = \varphi(\bar{x}) - \varphi(x_0) = (\bar{x} - x_0)\varphi'(\bar{x}_0)$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда $\bar{x}_0$ нуқта $\bar{x}$ ва x_0 нуқталар орасида (яъни $[a, b]$ оралиқда) ётади. (13.5) тенгсизликка асосан,

$$|\bar{x} - x_1| = |\bar{x} - x_0| \cdot |\varphi'(\bar{x}_0)| \leqslant q\,|\bar{x} - x_0|.$$

Шунга ўхшаш, $x_2 = \varphi(x_1)$ иккинчи яқинлашиш учун (теорема шартига кўра x_1 нуқта $[a, b]$ га тегишли)

$$\bar{x} - x_2 = \varphi(\bar{x}) - \varphi(x_1) = (\bar{x} - x_1)\varphi'(\bar{x}_1)$$

га эга бўламиз, бу ерда $\bar{x}_1$ яна a ва b орасида ётади. Олдинги тенгсизликни татбиқ этиб,

$$|\bar{x} - x_2| \leqslant q^2|\bar{x} - x_0|$$

баҳони аниқлаймиз. Бу жараённи давом эттириб,

$$|\bar{x} - x_n| \leqslant q^n|\bar{x} - x_0| \qquad (13.6)$$

ни ҳосил қиламиз. (13.5) га асосан $q < 1$ бўлганлиги учун $n \to \infty$ да $q^n \to 0$. Энди (13.6) тенгсизликда лимитга ўтиб,

$$\lim_{n\to\infty}(\bar{x} - x_n) = 0$$

ни ҳосил қиламиз, яъни

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x},$$

шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Шундай қилиб, итерация жараёнининг яқинлашиши учун қаралаётган оралиқда $|\varphi'(x)| < 1$ бўлиши етарлидир.

13.3. 2-теорема исботининг асосида ётадиган ғоядан итерация жараёнида эришилган аниқликни баҳолаш учун фойдаланиш мумкин.

Илдизнинг аниқ ва тақрибий қийматлари орасидаги айирмани қарайлик:

$$|\bar{x} - x_n| = |\varphi(\bar{x}) - (x_{n-1})| \leqslant q|\bar{x} - x_{n-1}| =$$
$$= q|(\bar{x} - x_n) + (x_n - x_{n-1})| \leqslant q|\bar{x} - x_n| + q|x_n - x_{n-1}|.$$

Бундан қуйидагига эга бўламиз:

$$|\bar{x} - x| \leqslant \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \qquad (13.7)$$

ёки

$$|\bar{x} - x_n| \leqslant \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|. \qquad (13.8)$$

(13.8) муносабат биринчи итерациядан кейиноқ илдизни берилган ε аниқликда ҳисоблаш учун зарур бўлган итерацияларнинг энг катта сони $N(\varepsilon)$ ни топиш имконини беради. Ҳақиқатан ҳам,

$$|\bar{x} - x_n| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилиши учун

$$\frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \leqslant \varepsilon$$

бўлиши етарлидир, бундан

$$N(\varepsilon) \geqslant \frac{\lg \dfrac{\varepsilon(1-q)}{|x_1 - x_0|}}{\lg q}.$$

$q \leqslant \frac{1}{2}$ бўлганда (13.7) хатолик баҳоси соддалашади ва ушбу кўринишни олади:

$$|\bar{x} - x_n| \leqslant |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon. \qquad (13.9)$$

Умумий ҳолда итерация жараёнини иккита кетма-кет яқинлашиш учун

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant \frac{1-q}{q}\varepsilon \qquad (13.10)$$

тенгсизлик бажарилмагунга қадар давом эттириш лозим, бу ерда ε $\bar{x}$ илдизнинг берилган чегаравий абсолют хатолиги ва $|\varphi'(x)| \leqslant q < 1$. У ҳолда (13.7) формулага асосан ушбу тенгсизликка эга бўламиз:

$$|\bar{x} - x_n| \leqslant \varepsilon,$$

яъни $\bar{x} = x_n \pm \varepsilon$.

13.4. Итерация жараёнининг яқинлашиши учун тенгламани

$$x = \varphi(x)$$

шаклда ёзилиши ҳам маълум аҳамиятга эга, чунки $|\varphi'(x)|$ айрим ҳолларда изланаётган илдизнинг атрофларида кичик бўлиши, бошқа бир ҳолларда эса катта бўлиши мумкин. Шу сабабли $f(x) = 0$ тенгламани $x = \varphi(x)$ кўринишга $|\varphi'(x)| \leqslant q < 1$ шарт бажариладиган қилиб келтириш учун уни ушбу

$$x = x + \lambda f(x) \qquad (13.11)$$

эквивалент кўринишда ёзиб оламиз, бу ерда λ сонини

$$|\varphi'(x)| < 1$$

тенгсизлик бажариладиган қилиб танлаш лозим. (13.11) формуладан

$$\varphi(x) = x + \lambda f(x) \qquad (13.12)$$

бўлиши келиб чиқади. λ параметрни итерация жараёнининг яқинлашиши учун етарли бўлган (13.5) шартдан аниқлаш мумкин:

$$|\varphi'(x)| = |1 + \lambda f'(x)| < 1. \qquad (13.13)$$

Агар

$$1 + \lambda f'(x_0) = 0$$

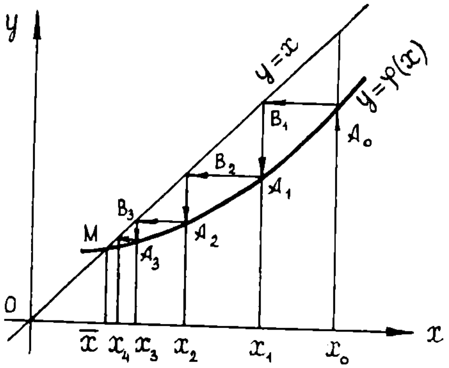
деб олинса, нолинчи яқинлашиш $x = x_0$ атрофида (13.12) тенгсизлик бажарилади ва бундан $f'(x_0) \neq 0$ бўлганда

$$\lambda = -\frac{1}{f'(x_0)} \qquad (13.14)$$

ни ҳосил қиламиз.

13.5. Пировардида итерация жараёнининг геометрик маъносини ва итерация жараёни яқинлашадиган (13.15) шартни кўриб чиқамиз.

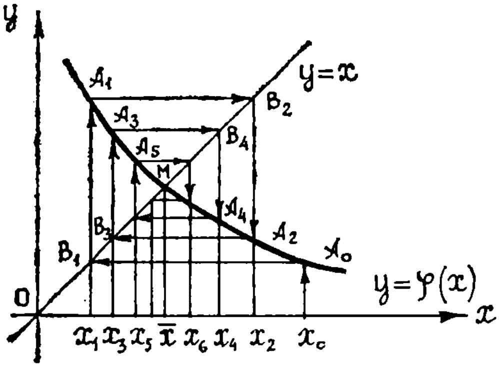
$f(x) = 0$ тенглама берилган бўлсин. Бу тенгламани $x = \varphi(x)$ кўринишга келтирамиз ҳамда $y = x$ ва $y = \varphi(x)$ функцияларнинг графикларини чизамиз (3.5-шакл). Бу функциялар графиклари кесишиш нуқтасининг $\bar{x}$ абсциссаси берилган тенгламанинг илдизи бўлади. Мумкин бўлган тўрт ҳолни кўриб чиқамиз.



3.5-шакл

1) Агар $\varphi'(x) > 0$, $|\varphi'(x)| < 1$ бўлса, у ҳолда жараён яқинлашади (поғонавий яқинлашиш). x_0, x_1, x_2, , кетма-кет яқинлашишлар монотон камаяди, $A_0B_1A_1B_2A_2$ синиқ чизиқ, «поғонавий» шаклда бўлади.

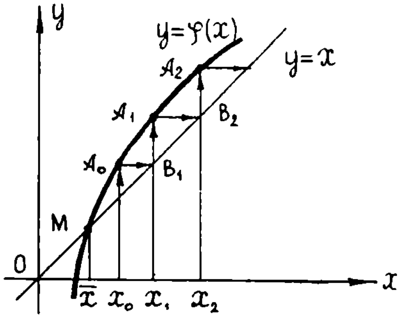
2) Агар $\varphi'(x) < 0$, $|\varphi'(x)| < 1$ бўлса, жараён яқинлашади («спирал» бўйича яқинлашиш). x_0, x_1, x_1, яқинлашишлар $\bar{x}$ илдиз атрофида тебранади. $A_0B_1A_1B_2A_2$, синиқ чизиқ «спирал» шаклида бўлади (3.6-шакл).



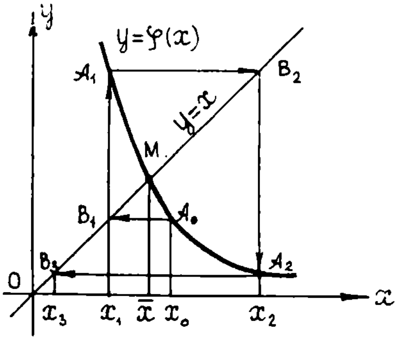
3.6-шакл

Шундай қилиб, агар $\varphi'(x)$ ҳосиланинг ишораси бир хил сақланса ва $|\varphi'(x)| < q < 1$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда кетма-кет яқинлашишлар $\varphi'(x) > 0$ да илдизга монотон яқинлашади ва $\varphi'(x) < 0$ да илдиз атрофида тебраниб яқинлашади.

3) Агар $\varphi'(x) > 0$ ва $\varphi'(x) > 1$ бўлса, у ҳолда жараён узоқлашади. «Яқинлашишлар» $\bar{x}$ илдиздан $A_0B_1A_1B_2A_2$ «поғона» бўйича узоқлашади (3.7-шакл).



3.7-шакл

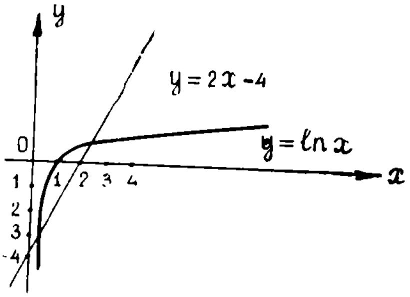


3.8-шакл

4) Агар $\varphi'(x) \le 0$ ва $|\varphi'(x)| > 1$ бўлса ҳам жараён узоқлашади. «Яқинлашишлар» $\bar{x}$ илдиздан $A_0B_1A_1B_2A_2$ «спирал» бўйича узоқлашади (3.8-шакл).

Мисол. $2x - \ln x - 4 = 0$ тенгламанинг катта илдизини $\varepsilon = 0,01$ гача аниқликда ҳисобланг.

Ечиш. Бу тенгламани $2x - 4 = \ln x$ кўринишида ёзиб олиб, $y = 2x - 4$ ва $y = \ln x$ функцияларнинг графикларини битта чизмага чизсак, катта илдиз 2 ва 3 сонлари орасида ётишини кўрамиз (3.9-шакл). Илдизга нолинчи яқинлашиш сифатида $x_0 = 3$ ни оламиз. Берилган тенгламани, бу ерда $f(x) = 2x - \ln x - 4$ эканини ҳисобга олиб, (13.11) кўринишда ёзиб оламиз:



3.9-шакл

$$x = x + \lambda(2x - \ln x - 4). \tag{13.15}$$

λ параметрни (13.14) шартдан топамиз:

$$\lambda = \frac{-1}{f'(x_0)} = -\left.\frac{1}{2 - \frac{1}{x}}\right|_{x_0=3} = -0,6.$$

Ҳисоблашлар қулай бўлиши учун $\lambda = -0,5$ деб оламиз, бунда ҳам жараён яқинлашишининг етарлилик шарти (13.13) бажарилади. Ҳақиқатан, $\lambda = -0,5$ қийматни (13.14) га қўйсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x = \frac{1}{2}\ln x + 2, \tag{13.16}$$

шу билан бирга

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\ln x + 2,$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2x} \text{ ва } [2,\ 3] \text{ кесмада } |\varphi'(x)| < 1.$$

Энди итерация жараёнини [(13.15) формула бўйича $x_0 = 3$ да белгилаймиз:

$$x_1 = \frac{1}{2} \ln 3 + 2 = 2{,}549,$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \ln 2{,}549 + 2 = 2{,}467,$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \ln 2{,}467 + 2 = 2{,}451,$$

$$x_4 = \frac{1}{2} \ln 2{,}451 + 2 = 2{,}448,$$

$$x_5 = \frac{1}{2} \ln 2{,}448 + 2 = 2{,}447.$$

Тўртинчи яқинлашишнинг абсолют хатолиги

$$q = \max_{2<x<3} |\varphi'(x)| = \max_{2<x<3} \left|\frac{1}{2x}\right| = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$$

ни ҳисобга олиниб, (13.9) ва (13.10) формулалар бўйича баҳоланади:

$$|\bar{x} - x_4| \leqslant |x_4 - x_3| = 0{,}003 < 0{,}01.$$

Шундай қилиб, 0,001 гача аниқликда илдиз

$$\bar{x} \approx x_4 = 2{,}448 \approx 2{,}45$$

га эга бўлдик.

14-§. Тенгламалар системаларини ечишнинг итерация усуллари. Оддий итерация усули. Яқинлашишнинг етарлилик шартлари

14.1. Итерация усулини, умуман айтганда, чизиқли бўлмаган тенгламалар системаларини ечишга татбиқ этиш мумкин. Қуйидаги тенгламалар системаси берилган бўлсин, соддалик учун, фақат иккита тенглама билан чекланамиз:

$$\begin{cases} f_1(x,\ y) = 0, \\ f_2(x,\ y) = 0. \end{cases} \tag{14.1}$$

Бу системанинг ечимини берилган аниқликда ҳисоблаш талаб этилади. x_0, y_0—(14.1) система ечимининг нолинчи яқинлашиши бўлсин, уни график усул билан топиш мумкин. (14.1) системани

$$\begin{cases} x = \varphi_1(x,\ y), \\ y = \varphi_2(x,\ y) \end{cases} \tag{14.2}$$

шаклда ёзиб олиб, итерация жараёнини татбиқ этамиз, у маълум шартларда илдизларнинг берилган қийматларини аниқлаштириш имконини беради. Бунинг учун (14.2) система тенгламаларининг ўнг томонларига x ва y нинг ўрнига нолинчи яқинлашиш қийматлари x_0, y_0 ни қўямиз ва биринчи яқинлашишни ҳосил қиламиз:

$$x_1 = \varphi_1(x_0,\ y_0),\quad y_1 = \varphi_2(x_0,\ y_0).$$

Иккинчи яқинлашишлар ҳам шунга ўхшаш ҳосил қилиниб,

$$x_2 = \varphi_1(x_1,\ y_1), \qquad y_2 = \varphi_2(x_1,\ y_1)$$

ва, умуман, n-яқинлашишлар ҳам шу тартибда ҳисобланади:

$$x_n = \varphi_1(x_{n-1}, y_{n-1}), \quad y_n = \varphi_2(x_{n-1}, y_{n-1}).$$

Агар $\varphi_1(x, y)$ ва $\varphi_2(x, y)$ функциялар узлуксиз ҳамда $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ яқинлашишлар кетма-кетликлари яқинлашувчи бўлса, у ҳолда уларнинг лимитлари (14.2) системанинг, ва демак, (14.1) системанинг ҳам ечими бўлишини исботлаш осон. Бу ҳолда итерация жараёни яқинлашади дейилади, яъни

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \bar{y},$$

бу ерда $\bar{x}$, $\bar{y}$ — берилган системанинг ечими.

Агар итерация жараёни узоқлашса, у ҳолда ундан фойдаланиш мумкин эмас.

14.2. Юқорида тавсифланган итерация жараёни яқинлашувчи бўлишининг етарлилик шартларини тавсифлаймиз.

Теорема. *Агар* 1) $R:\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ c \leqslant y \leqslant d \end{cases}$ *ёпиқ соҳада* (*14.2*) *системанинг битта ва фақат битта* $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$ *ечими мавжуд;*

2) $\varphi_1(x, y)$ *ва* $\varphi_2(x, y)$ *функциялар* $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$ *тўғри чизиқлар билан чегараланган тўғри тўртбурчакда аниқланган ва узлуксиз дифференциалланувчи:*

3) x_0, y_0 *бошланғич яқинлашиш ва кейинги барча* x_n, y_n *яқинлашишлар* R *тўғри тўртбурчакка тегишли ва бу тўғри тўртбурчакда*

$$\begin{cases} \left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right| \leqslant q_1 < 1, \\ \left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right| \leqslant q_2 < 1 \end{cases} \tag{14.3}$$

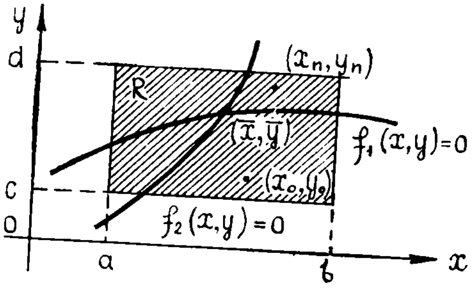
тенгсизликлар бажарилса, у ҳолда итерация жараёни (14.2) системанинг $\bar{x}$, $\bar{y}$ ечимига яқинлашади, яъни

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \bar{y}.$$

Агар (14.3) шартни

$$\begin{cases} \left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right| \leqslant q_1 < 1, \\ \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right| \leqslant q_2 < 1 \end{cases} \tag{14.4}$$

шарт билан алмаштирилса ҳам, теорема тўғри бўлаверади.



3.10- шакл

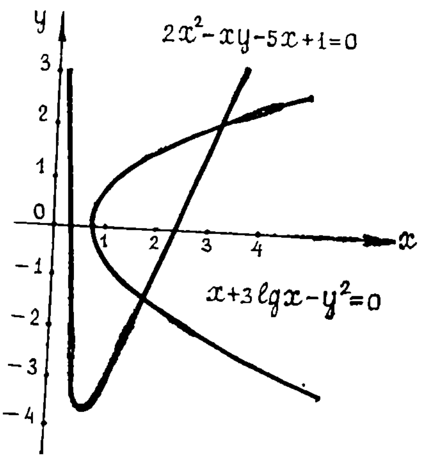
(Теореманинг геометрик талқини (3.10- шаклда тасвирланган).

Мисол. Итерация усули билан

$$\begin{cases} f_1(x,\ y) = x + 3\lg x - y^2 = 0, \\ f_2(x,\ y) = 2x^2 - xy - 5x + 1 = 0 \end{cases} \qquad (14.5)$$

системанинг илдизларини тўртта қийматли рақамлари билан топинг.

Ечиш. График усулда эгри чизиқларнинг кесишиш нуқталарини топамиз (3.11- шакл). Улар иккита нуқта бўлади. Улардан мусбат координаталарга эга бўлган нуқтани қараймиз. Илдизнинг яккаланиш соҳаси сифатида $R:\begin{cases} 3 \leqslant x < 4, \\ 2 \leqslant y < 2{,}5 \end{cases}$ тўғри тўртбурчакни олиш мумкин. Энди системани (14.2) кўринишга келтирамиз. Буни турли усуллар билан амалга ошириш мумкин. Масалан:



3.11- шакл

$$\begin{cases} x = y^2 - 3\lg x, \text{ у ҳолда } \varphi_1(x, y) = y^2 - 3\lg x, \\ y = 2x + \dfrac{1}{x} - 5, \text{ у ҳолда } \varphi_2(x, y) = 2x + \dfrac{1}{x} - 5. \end{cases}$$

Хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = -\frac{3\lg e}{x};\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = 2y;\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} = 2 - \frac{1}{x^2};\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = 0.$$

Булардан кўриниб турибдики, қаралаётган тўғри тўртбурчакда ушбу тенгсизликлар ўринли:

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right| > 1, \quad \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right| > 1.$$

Бу эса система бундай кўринишда бўлганида итерация жараёни узоқлашишини кўрсатади.

Энди x ни (14.5) системанинг иккинчи тенгламасидан, y ни эса бу системанинг биринчи тенгламасидан аниқлаймиз:

$$x = \sqrt{\frac{x(5+y)-1}{2}}, \text{ у ҳолда } \varphi_1(x, y) = \sqrt{\frac{x(5+y)-1}{2}};$$

$$y = \sqrt{3\lg x + x}, \text{ у ҳолда } \varphi_2(x, y) = \sqrt{3\lg x + x}.$$

Бу ерда

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\frac{5+y}{\sqrt[3]{x(5+y)-1}}; \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\frac{x}{\sqrt{x(5+y)-1}};$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} = \frac{1+\frac{3\lg e}{x}}{2\sqrt{x+3\lg x}}; \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = 0.$$

Илдизнинг яккаланиш соҳаси

$$\begin{cases} 3 \leqslant x \leqslant 4, \\ 2 \leqslant y \leqslant 2{,}5 \end{cases}$$

да

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right| < 1, \quad \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right| < 1$$

шартлар бажарилади. Демак, итерация жараёни яқинлашади. Нолинчи яқинлашиш сифатида, масалан, $x_0 = 3{,}4$; ва $y_0 = 2{,}2$ ни оламиз, қолган яқинлашишларни

$$x_n = \sqrt{\frac{x_{n-1}(5+y_{n-1})-1}{2}},$$

$$y_n = \sqrt{x_{n-1} + 3\lg x_{n-1}}$$

формулалар бўйича ҳисоблаймиз. Ҳисоблаш натижаларини 3.13-жадвалга ёзамиз:

3.13-жадвал.

n	x_n	y_n
0	3,4	2,2
1	3,426	2,243
2	3,451	2,2505
3	3,466	2,255
4	3,475	2,258
5	3,480	2,259
6	3,483	2,260

Шундай қилиб, $\bar{x} = 3{,}483$, $\bar{y} = 2{,}260$ деб олиш мумкин.

15- §. Чизиқли системаларни ечишнинг оддий итерация ва Зейдель усуллари

15.1. Номаълумлар сони катта бўлганда чизиқли тенгламалар системаларини ечишда баъзан тақрибий сонли усуллардан фойдаланиш қулайроқ бўлади. Булар жумласига оддий итерация усули, Зейдель усули ва бошқалар хосдир.

n та номаълумли n та чизиқли тенглама системаси берилган бўлсин:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \qquad + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \qquad + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \cdot \qquad\qquad\qquad \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \qquad + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{15.1}$$

Ушбу матрицаларни киритамиз:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Энди (15.1) системани матрицали тенглама шаклида ёзамиз:

$$Ax = b. \tag{15.2}$$

$a_{11}, a_{22}, \qquad a_{nn}$ диагонал элементлар нолга тенг эмас, деб ҳисоблаб, (15.1) системанинг биринчи тенгламасини x_1 га нисбатан, иккинчи тенгламасини x_2 га нисбатан ечамиз ва ҳоказо. Натижада қуйидаги эквивалент системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \qquad + \alpha_{1n}x_n, \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \qquad + \alpha_{2n}x_n, \\ \quad \cdot \quad \cdot \qquad\qquad\qquad \cdot \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \qquad + \alpha_{n\,n-1}x_{n-1}, \end{cases} \tag{15.3}$$

бу ерда

$$\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i \neq j \text{ бўлганда } \alpha_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{ii}} -$$

ва

$$i = j \, (i, \ j = \overline{1, n}) \text{ бўлганда } \alpha_{ij} = 0.$$

Ушбу матрицаларни киритамиз:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} & & \alpha_{2n} \\ & & & & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & & 0 \end{pmatrix} \text{ ва } \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \\ \beta_n \end{pmatrix},$$

бу ерда α матрицанинг бош диагонали элементлари нолга тенг. (15.3) системани

$$x = \beta + \alpha x. \qquad (15.4)$$

матрицали тенглама шаклида ёзиш мумкин.

Ҳосил бўлган (15.4) системани кетма-кет яқинлашишлар усули билан ечамиз. Нолинчи яқинлашиш сифатида, масалан, озод ҳадлар устуни

$$x^{(0)} = \beta$$

ни оламиз. $x^{(0)}$ ни (15.4) нинг ўнг томонига қўйиб,

$$x^{(1)} = \beta + \alpha x^{(0)}$$

биринчи яқинлашишни оламиз. $x^{(1)}$ ни (15.4) нинг ўнг томонига қўйиб, иккинчи яқинлашишни оламиз. Жараённи такрорлаб,

$$x^{(0)}, x^{(1)}, \qquad x^{(k)},$$

яқинлашиш кетма-кетлигини ҳосил қиламиз, бу ерда исталган k-яқинлашиш

$$x^{(k)} = \beta + \alpha \cdot x^{(k-1)} \qquad (15.5)$$

формула бўйича ҳисобланади. Агар $\{x^{(k)}\}$ яқинлашишлар кетма-кетлиги

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$$

га эга бўлса, у ҳолда бу лимит (15.3) системанинг ечими бўлади.

(15.5) формула билан аниқланадиган кетма-кет яқинлашишлар усули *оддий итерация усули* деб аталади.

Агар α матрицанинг элементлари абсолют қийматлари бўйича кичик бўлса, у ҳолда итерация жараёни яхши яқинлашади, яъни (15.1) системанинг ечимини берилган аниқликда ҳосил қилиш учун зарур бўлган яқинлашишлар сони катта бўлмайди. Бошқача сўз билан айтганда, итерация жараёнини муваффақият билан қўлланиш учун A матрица бош диагонали элементларининг модуллари бу матрицанинг шу диагоналидан ташқаридаги элементларига нисбатан катта бўлиши лозим.

Итерация жараёнининг яқинлашиш шартини исботсиз келтирамиз.

Теорема. *Агар* (15.3) *система учун*

$$\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1 \, (i = \overline{1, n}) \text{ ёки } \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1, \, (j = \overline{1, n})$$

шартлардан ҳеч бўлмаганда биттаси бажарилса, у ҳолда итерация жараёни бошланғич яқинлашишнинг танланишига боғлиқ бўлмаган равишда бу системанинг ягона ечимига яқинлашади.

Натижа. (15.1) система учун

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq} |a_{ij}|, \quad i = \overline{1, n} \tag{15.6}$$

тенгсизликлар бажарилса, яъни (15.1) системанинг ҳар бир тенгламаси учун бош диагоналдаги коэффициентлар модули қолган бошқа барча коэффициентлар (озод ҳадларни ҳисобга олмаганда) модуллари йиғиндисидан катта бўлса, итерация жараёни яқинлашувчи бўлади.

Мисол. Чизиқли тенгламалар системасини итерация усули билан ечинг:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 0{,}24x_2 - 0{,}08x_3 &= 8, \\ 0{,}091x_1 + 3x_2 - 0{,}15x_3 &= 9, \\ 0{,}04x_1 - 0{,}08x_2 + 4x_3 &= 20. \end{aligned}$$

Ечиш. Бу системада бош диагоналдаги 4, 3, 4, коэффициентлар (ҳар бир тенгламадаги) номаълумлар олдидаги коэффициентларнинг абсолют қийматлари йиғиндисидан катта. Юқорида таърифланган натижага асосан итерация жараёни яқинлашувчи бўлади. Системани (15.3) кўринишга келтирамиз:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 0{,}06x_2 + 0{,}02x_3. \\ x_2 = 3 - 0{,}03x_1 + 0{,}05x_3, \\ x_3 = 5 - 0{,}01x_1 + 0{,}02x_2. \end{cases} \tag{15.7}$$

Бу системани матрица шаклида бундай ёзиш мумкин:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0{,}06 & 0{,}02 \\ -0{,}03 & 0 & 0{,}05 \\ -0{,}01 & 0{,}02 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Берилган система ечимига нолинчи яқинлашиш сифатида

$$x_1^{(0)} = 2, \quad x_2^{(0)} = 3, \quad x_3^{(0)} = 5$$

қийматларни оламиз.

Бу қийматларни (15.7) тенгламаларнинг ўнг томонларига қўйиб, биринчи яқинлашишни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= 2 - 0{,}06 \cdot 3 + 0{,}02 \cdot 5 = 1{,}92, \\ x_2^{(1)} &= 3 - 0{,}03 \cdot 2 + 0{,}05 \cdot 5 = 3{,}19, \\ x_3^{(1)} &= 5 - 0{,}01 \cdot 2 + 0{,}02 \cdot 3 = 5{,}04. \end{aligned}$$

Сўнгра бу топилган яқинлашишларни (15.7) тенгламаларнинг ўнг томонларига қўйиб, ечимларга иккинчи яқинлашишларни топамиз:

$$x_1^{(2)} = 1{,}9094; \quad x_2^{(2)} = 3{,}1944; \quad x_3^{(2)} = 5{,}0446.$$

Янги ўрнига қўйишдан сўнг учинчи яқинлашишларга эга бўламиз. Натижаларни жадвалга ёзамиз (3.14-жадвал):

3.14-жадвал

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	2	3	5
1	1,92	3,19	5,04
2	1,9094	3,1944	5,0446
3	1,90923	3,19495	5,04485

15.3. Зейдель усули оддий итерация усулининг модификациясидан иборат бўлиб, $x_i (i > 1)$ номаълумнинг $(k + 1)$-яқинлашишини ҳисоблашда x_1, x_2, x_{i-1} номаълумларнинг $(k + 1)$-яқинлашишидаги топилган қийматлари ҳисобга олинади. (15.3) келтирилган тенгламалар системаси берилган бўлсин. Танланган

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \quad , x_n^{(0)}$$

нолинчи яқинлашишни (15.3) системанинг биринчи тенгламасига қўйиб, $x_1^{(1)}$ биринчи яқинлашишни ҳосил қиламиз.

(15.3) системанинг иккинчи тенгламасига

$$x_1^{(1)}, x_2^{0}, x_3^{(0)}, \quad , x_n^{(0)}$$

ни қўямиз ва $x_2^{(1)}$ биринчи яқинлашишни ҳосил қиламиз. Системанинг учинчи тенгламасига

$$x_1^{(1)} \cdot x_2^{(1)}, x_3^{(0)}, \quad , x_n^{(0)}$$

ни қўямиз ҳамда $x_3^{(1)}$ биринчи яқинлашишни ҳосил қиламиз ва ҳоказо, $x_n^{(1)}$ ни ҳосил қилингунга қадар шу жараён давом эттирилади.

Иккинчи, учинчи ва ҳоказо итерацияларни шунга ўхшаш бажарамиз.

Оддий итерация учун яқинлашиш теоремаси Зейдель усули учун ҳам ўринли бўлади.

16-§. Чизиқли бўлмаган системаларни ечишнинг Ньютон усули

Чизиқли бўлмаган системаларни ечишнинг яна бир усулини кўриб чиқамиз. Иккита номаълумли иккита тенглама системаси бўлган ҳолни таҳлил қиламиз:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0. \end{cases} \qquad (16.1)$$

Бу система ечимининг (x_0, y_0) яқинлашишларини маълум деб ҳисоблаймиз. Тегишли аниқликка эга бўлмаган бу қийматларга тузатмаларни h ва k орқали белгилаб, уларни излаймиз. Ечимнинг $\bar{x}$ ва $\bar{y}$ аниқ қийматларини

$$\bar{x} = x_0 + h, \ \bar{y} = y_0 + k$$

кўринишда ёзамиз. Шундай қилиб, (16.1) система ўрнига

$$\begin{cases} f_1(x_0+h,\ y_0+k)=0, \\ f_2(x_0+h,\ y_0+k)=0 \end{cases}$$

га эга бўламиз. $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функцияларни h ва k нинг даражалари бўйича Тейлор қаторига ёямиз:

$$f_1(x_0+h,\ y_0+k)=f_1(x_0,\ y_0)+hf'_{1x}(x_0,\ y_0)+kf'_{1y}(x_0,\ y_0)+O_1(h,\ k)$$

$$f_2(x_0+h,\ y_0+k)=f_2(x_0,\ y_0)+hf'_{2x}(x_0,\ y_0)+kf'_{2y}(x_0,\ y_0)+O_2(h,\ k).$$

Бу ерда $O_1(h, k)$ ва $O_2(h, k)$ лар h ва k га нисбатан юқори тартибли кичик ҳадларни ўз ичига олади. Бу ҳадларни эътиборга олмасдан, яъни h ва k катта эмас деб қабул қилиб, h ва k тузатмаларнинг тақрибий қийматларини аниқлаш учун ушбу чизиқли тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} f_1(x_0,\ y_0)+hf'_{1x}(x_0,\ y_0)+kf'_{1y}(x_0,\ y_0)=0, \\ f_2(x_0,\ y_0)+hf'_{2x}(x_0,\ y_0)+kf'_{2y}(x_0,\ y_0)=0. \end{cases} \tag{16.2}$$

(16.2) системадан тузатмалар учун (Крамер формулалари бўйича) қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} h_1=\dfrac{\begin{vmatrix} -f_1(x_0,\ y_0) & f'_{1y}(x_0,\ y_0) \\ -f_2(x_0,\ y_0) & f'_{2y}(x_0,\ y_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f'_{1x}(x_0,\ y_0) & f'_{1y}(x_0,\ y_0) \\ f'_{2x}(x_0,\ y_0) & f'_{2y}(x_0,\ y_0) \end{vmatrix}}, \\ k_1=\dfrac{\begin{vmatrix} f'_{1x}(x_0,\ y_0) & -f_1(x_0,\ y_0) \\ f'_{2x}(x_0,\ y_0) & -f_2(x_0,\ y_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f'_{1x}(x_0,\ y_0) & f'_{1y}(x_0,\ y_0) \\ f'_{2x}(x_0,\ y_0) & f'_{2y}(x_0,\ y_0) \end{vmatrix}} \end{cases} \tag{16.3}$$

Шундай қилиб, илдизларнинг $(x_0,\ y_0)$ га қараганда аниқроқ ушбу қийматлари ҳосил бўлади:

$$x_1=x_0+h_1,$$
$$y_1=y_0+k_1.$$

Худди шу йўл билан x_1, y_1 ларнинг тақрибий ечимлигини инобатга олиб, кейинги тузатмаларни ҳосил қилиш мумкин. Баён қилинган усул *Ньютон усули* деб аталади.

Мисол. 14-§ даги мисолда келтирилган

$$x+3\lg x-y^2=0,$$
$$2x^2-xy-5x+1=0.$$

тенгламалар системасини Ньютон усули билан ечинг.

Ечиш 14-§ даги мисолдан $x_0=3,4$ ва $y_0=2,2$ га эгамиз. Сўнгра

$$f'_{1x}(x, y) = 1 + \frac{3}{x \ln 10}; \quad f'_{1y}(x, y) = -2y,$$
$$f'_{2x}(x, y) = 4x - y - 5; \quad f'_{2y}(x, y) = -x.$$

$f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ функцияларнинг қийматини ва уларнинг ҳосилаларининг қийматини (x_0, y_0) нуқтада ҳисоблаймиз:

$$f_1(3, 4;\ 2{,}2) = 0{,}1545; \quad f_2(3{,}4;\ 2{,}2) = -0{,}3600,$$
$$f'_{1x}(3{,}4;\ 2{,}2) = 1{,}383; \quad f'_{2x}(3{,}4;\ 2{,}2) = 6{,}400;$$
$$f'_{1y}(3{,}4;\ 2{,}2) = -4{,}400; \quad f'_{2y}(3{,}4;\ 2{,}2) = -3{,}400.$$

Шундай қилиб, (16.2) тенгламалар системаси ушбу кўринишда бўлади:

$$\begin{cases} 0{,}1545 + 1{,}383h_1 - 4{,}4k_1 = 0, \\ -0{,}36 + 6{,}4h_1 - 3{,}4k_1 = 0. \end{cases}$$

(16.3) Крамер формулалари $h_1 = 0{,}089$, $k_1 = 0{,}063$ ечимни беради. Шунинг учун ечимларнинг биринчи яқинлашиши

$$x_1 = 3{,}4 + 0{,}089 = 3{,}483;$$
$$y_1 = 2{,}2 + 0{,}063 = 2{,}263$$

га тенг. Илдизларнинг ҳосил қилинган қийматларини бошланғич қийматлар сифатида олиб, яна бир қадам аниқлаштириш мумкин:

$$f_1(3{,}489;\ 2{,}263) = -0{,}0041, \quad f_2(3{,}489;\ 2{,}263) = 0{,}0056;$$
$$f'_{1x}(3{,}489;\ 2{,}263) = -1{,}3734, \quad f'_{2x}(3{,}489;\ 2{,}263) = 66930;$$
$$f'_{1y}(3{,}489;\ 2{,}263) = -4{,}526; \quad f'_{2y}(3{,}489;\ 2{,}263) = 3{,}489.$$

Топилган қийматларни (16,3) формулаларга қўйиб,

$$h_2 = -0{,}0016, \quad k_2 = -0{,}0014$$

ни ҳосил қиламиз, бундан:

$$x_2 = 3{,}489 - 0{,}0016 = 3{,}4874,$$
$$y_2 = 2{,}263 - 0{,}0014 = 2{,}2616.$$

Агар бу иккинчи яқинлашиш учун шу ишларни яна такрорласак, тўртинчи рақамдан кичик бўлган тузатмаларни оламиз.

17-§. Сонли дифференциаллаш

17.1. Кўпгина амалий масалаларни ҳал этишда жадвал шаклида ёки мураккаб аналитик ифода шаклида берилган $y = f(x)$ функциянинг турли тартибли ҳосилаларининг қийматларини ҳисоблашга тўғри келади. Бундай ҳолларда дифференциал ҳисоб усулларини бевосита татбиқ этишнинг ё иложи бўлмайди, ёки бу жуда қийин бўлади. Шунинг учун уларга *тақрибий сонли дифференциаллаш усуллари* қўлланилади.

Сонли дифференциаллаш формулаларини келтириб чиқариш учун аввал берилган $f(x)$ функцияни бирор $[a, b]$ кесмада $P_n(x)$ кўпҳад билан интерполяцияланади, кейин эса

$$f'(x) \approx P'_n(x)$$

деб олинади.

Агар $P_n(x)$ интерполяция кўпҳади учун

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

бўлса, у ҳолда $P'_n(x)$ ҳосиланинг $r_n(x)$ хатолиги

$$r_n(x) = f'(x) - P'_n(x) = R'_n(x)$$

формула билан топилади (яъни интерполяция кўпҳади ҳосиласининг хатолиги бу кўпҳад хатолигининг ҳосиласига тенг).

Сонли дифференциаллаш интерполяциялашдан кўра камроқ аниқликка эга бўлган операциядир, яъни $[a, b]$ кесмада $y = f(x)$ ва $y = P_n(x)$ эгри чизиқлар ординаталарининг бир-бирига яқинлиги бу кесмада уларнинг $f'(x)$ ва $P'_n(x)$ ҳосилаларининг бир-бирига яқин бўлишлигига кафолат бўла олмайди.

17.2. $y = f(x)$ функциянинг қийматлари $[a, b]$ кесмада тенг узоқликдаги $x_0, x_1, x_2, \quad x_n$ тугунларда берилган бўлсин:

$$y_0 = f(x_0), \; y = f(x_1), \qquad y_n = f(x_n).$$

$[a, b]$ кесмада $y' = f'(x)$, $y'' = f''(x)$ ва ҳоказо ҳосилаларни топиш учун y функцияни шу тугун нуқталар системаси учун тузилган (8.6) Ньютон интерполяцион кўпҳади билан алмаштирамиз.

$$y \approx y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 +$$
$$+ \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\Delta^4 y_0 +$$

бу ерда $q = \frac{x - x_0}{h}$ ва $h = x_{i+1} - x_i$, $i = \overline{0, n}$.

$(q - i)$ кўринишдаги биномларни кўпайтириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y \approx y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q^2 - q}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{6}\Delta^3 y_0 +$$
$$+ \frac{q^4 - 6q^3 + 11q^2 - 6q}{24}\Delta^4 y_0 +$$

Сўнгра

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dq}\frac{dq}{dx} = \frac{1}{h}\frac{dy}{dq}$$

бўлганлиги учун

$$y' \approx \frac{1}{h}\Bigl[\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2 - 6q + 23}{6}\Delta^3 y_0 +$$
$$+ \frac{2q^3 - 9q^2 + 11q - 3}{12}\Delta^4 y_0 + \quad .\Bigr] \qquad (17.1)$$

Шунга ўхшаш

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{dy'}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h}\,\frac{dy'}{dx}$$

бўлганлиги учун

$$y'' = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 + (q-1)\,\Delta^3 y_0 + \frac{6q^2 - 8q + 11}{12}\Delta^4 y_0 + \qquad\right]. \tag{17.2}$$

$y = f(x)$ функциянинг исталган тартибли ҳосилаларини ҳам шунга ўхшаш ҳисоблаш мумкин.

Тайин x нуқтадаги ҳосилаларни топишда x_0 сифатида аргументнинг жадвалдаги шу x_0 га энг яқин қийматини танлаш лозим.

Жадвалдаги x_i нуқталардаги ҳосилаларни топишда сонли дифференциаллаш усуллари соддалашади, чунки жадвалдаги ҳар бир қийматни бошланғич қиймат сифатида олиш мумкин бўлганлиги учун $x = x_0$, $q = 0$ деймиз, у ҳолда (17.1) ва (17.2) дан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y'(x_0) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 u_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \frac{\Delta^6 y_0}{5} - \qquad\right), \tag{17.3}$$

$$y''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 y_0 - \qquad .\right). \tag{17.4}$$

Шунга ўхшаш, учинчи, тўртинчи ва ҳ. к. тартибли ҳосилалар учун тегишли формулаларни ҳосил қилиш мумкин:

$$y'''(x_0) \approx \frac{1}{h^3}\left(\Delta^3 y_0 - \frac{3}{2}\Delta^4 y_0 + \qquad .\right), \tag{17.5}$$

$$y^{\text{IV}}(x_0) \approx \frac{1}{h^4}\left(\Delta^4 y_0 - \qquad\right). \tag{17.6}$$

h кичик бўлганда ушбу тақрибий формулаларни ҳосил қиламиз:

$$y'(x_0) \approx \frac{\Delta y_0}{h}, \quad y''(x_0) \approx \frac{\Delta^2 y_0}{h^2}, \quad y'''(x_0) \approx \frac{\Delta^3 y_0}{h^3},$$

Бу формулалар ҳосилаларни тегишли тартибли чекли айирмалар билан боғлайди.

Биринчи ҳосила учун хатолик ушбу формула бўйича ҳисобланишини айтиб ўтамиз:

$$R'_n(x_0) \approx \frac{(-1)^n\,\Delta^{n+1} y_0}{h(n+1)}$$

1-мисол. 3.15-жадвал билан берилган $y = \lg x$ функциянинг $y'(50)$ ҳосиласини топинг.

3.15-жадвал

x	50	55	60	65
$\lg x$	1,6990	1,7404	1,7782	1,8129

Ечиш. Бу ерда $h = 5 \cdot x = 50$ нуқта интерполяция тугуни $x_0 = 50$ билан устма-уст тушмоқда. Ҳосилани ҳисоблаш учун (17.3) формуладан фойдаланамиз. Аввал чекли айирмалар жадвалини тузамиз (3.16-жадвал).

3.16-жадвал.

x	lg$x$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
50	1,6990	0,0414	—0,0036	0,0005
55	1,7404	0,0378	—0,0031	—
60	1,7782	0,0347	—	—
65	1,8129	—	—	—

Шундай қилиб, (17.3) дан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y'(50) \approx \frac{1}{5}\left(0,0414 - \frac{-0,0036}{2} + \frac{0,0005}{3}\right) = \frac{1}{5}(0,0414 + 0,0018 + + 0,0002) = 0,0087.$$

2-мисол. $y = f(x)$ функция 3.17-жадвал билан берилган.

3.17-жадвал

x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	2	10	30	68	130	222

$f'(3,5)$ ва $f''(3,5)$ ларни ҳисобланг.

Ечиш. Бу ерда $h = 1$. Чекли айирмалар жадвалини тузамиз (3.18-жадвал):

3.18-жадвал

i	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	0	0	2	6	6	0
1	1	2	8	12	6	0
2	2	10	20	18	6	0
3	3	30	38	24	6	
4	4	68	62	30	—	
5	5	130	92			
6	6	222				

x_0 учун $x=3,5$ га энг яқин $x_0=3$ ни олиб, $q = \frac{3,5-3}{1} = 0,5$ га эга бўламиз (17. 1) ва (17. 2) формулаларни татбиқ этиб, ҳосилаларни ҳисоблаймиз:

$$f'(3{,}5)\approx\frac{1}{1}\left(38+\frac{2{,}05-1}{2}\cdot 24+\frac{3\cdot 0{,}5^2-6\cdot 0{,}5+2}{6}\cdot 6\right)=37{,}75;$$

$$f''(3{,}5)\approx\frac{1}{1^2}\ (24+(0{,}5-1)\cdot 6+\frac{6(0{,}5)^2-18\cdot 0{,}5+11}{12}\cdot 0)=21.$$

17.3. Тақрибий дифференциаллаш формулаларини Ньютоннинг иккинчи интерполяция формуласидан ҳам ҳосил қилиш мумкин:

$$y\approx y_n+\Delta y_{n-1}t+\frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2}+\frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-1}+$$

бу ерда

$$t=\frac{x-x_n}{h},$$

$$y'\approx\frac{1}{h}\left[\Delta y_{n-1}+\frac{2t+1}{2}\Delta^2 y_{n-2}+\frac{3t^2+6t+2}{6}\Delta^3 y_{n-3}+\right] \quad (17.7)$$

$$y''\approx\frac{1}{h^2}\Delta^2 y_{n-2}+(t+1)\Delta^2 y_{n-3}+\quad .] \quad (17.8)$$

ва ҳоказо.

3- мисол. $y=f(x)$ функция 3. 19- жадвал билан берилган ($h=$ $=0{,}1$ қадамли):

3.19- жадвал

x	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2
y	1,8221	2,0138	2,2255	2,4596	2,7183	3,0042	3,3201

$f'(1{,}06)$ ни ҳисобланг.

Ечиш. Чекли айирмалар жадвалини тузамиз (3. 20- жадвал):

3. 20- жадвал

i	x	$y=f(x)$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	0,6	1,8221	0,1917	0,0200	0,0024
1	0,7	2,0138	0,2117	0,0224	0,0022
2	0,8	2,2255	0,2341	0,0246	0,0026
3	0,9	2,4596	0,2587	0,0272	0,0028
4	1,0	2,7183	0,2859	0,0300	—
5	1,1	3,0042	0,3159	—	—
6	1,2	3,3201	—	—	—

Энди $x = 1{,}06$ учун ҳосиланинг қийматини аниқлаш талаб қилинаётганлиги туфайли (17.7) формулани татбиқ қиламиз, бунда x_n учун $x = 1{,}06$ ға энг яқин 1,1 ни оламиз:

$$t = \frac{x - x_n}{h} = \frac{1{,}06 - 1{,}1}{0{,}1} = \frac{-0{,}04}{0{,}1} = -0{,}4,$$

ва ниҳоят,

$$f'(1{,}06) = \frac{1}{0{,}1}\left(0{,}2859 + \frac{-0{,}4\cdot 2 + 1}{2}\,0{,}0272 + \right.$$
$$\left. + \frac{3\cdot 0{,}16 - 6\cdot 0{,}4 + 2}{6}\cdot 0{,}0026\right) = 2{,}8865.$$

18 - §. Сонли интеграллаш. Тўғри тўртбурчаклар, трапециялар, Симпсон усуллари.

18.1. Ушбу

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

аниқ интегрални ҳисоблаш талаб этилаётган бўлсин. Математик анализ курсидан маълумки, $[a, b]$ кесмада узлуксиз $f(x)$ функция учун бу интеграл мавжуд ва у $f(x)$ учун бошланғич функция $F(x)$ нинг b ва a нуқталардаги қийматлари айирмасига тенг:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

бу ерда $F'(x) = f(x)$.

Бироқ кўпчилик амалий масалаларда бу бошланғич функцияларни элементар функциялар орқали ифодалашнинг иложи бўлмайди. Бундан ташқари, $f(x)$ функция кўпинча аргументнинг маълум қийматлари бўйича ўзининг қийматлари жадвали орқали берилади. Бу ҳоллар эса интегрални тақрибий ҳисоблаш усулларига бўлган эҳтиёжни юзага келтиради ҳамда бу усуллар шартли равишда аналитик ва сонли усулларга ажралади. Функцияларни, сонли интеграллашнинг айрим усулларини кўриб чиқайлик. Улар интегралнинг сонли қийматини бевосита интеграл остидаги функциянинг тугунлар деб аталаётган нуқталардаги берилган қийматларига асосланиб ҳисоблаш имконини беради.

Интегрални сонли аниқлаш жараёни *квадратура*, тегишли формулалар эса *квадратура формулалари* деб аталади.

Сонли интеграллаш $\int_a^b f(x)\,dx$ интегрални

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$$

квадратура формуласи бўйича топишдан иборат бўлиб, бу ерда x_i нуқталар *формула тугунлари* деб аталади ва улар $[a, b]$ кесмага тегишли, A_i ҳақиқий сонлар *вазнлар* ёки *вазний коэффициентлар* деб аталади. Формуланинг ўнг томонида турган йиғиндининг кўриниши интеграллаш усулини,

$$R_n = \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$$

айирма эса *усулнинг хатолигини* аниқлаб беради.

Квадратура формулалари турли мезонлар асосида тузилади: интегрални интеграл йиғинди кўринишида ифодалаш, интеграл остидаги функцияни аппроксимациялаб ёки интерполяциялаб, кейин интеграллаш ва ҳ. к.

18.2. Олий математика курсидан маълум бўлган энг содда квадратура формулаларини ёдга олайлик. $y = f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада қийматлар жадвали билан берилган бўлсин (3. 21-жадвал):

3. 21- жадвал

x	$a = x_0$	x_1	.	x_{i-1}	x_i	.	$x_n = b$
$y = f(x)$	y_0	y_1	.	y_{i-1}	y_i	.	$y_n = a$

Бу ерда $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \quad = x_i - x_{i-1} = \quad = x_n - x_{n-1} = h$;

$$h = \frac{b-a}{n} \text{ — интеграллаш қадами.}$$

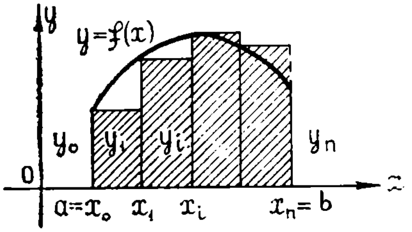
а) $\int_a^b f(x)\,dx$ интегрални ҳисоблаш учун чап тўғри тўртбурчаклар формуласи

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \qquad + y_{n-1}) = h \sum_{=0}^{n-1} y_i$$

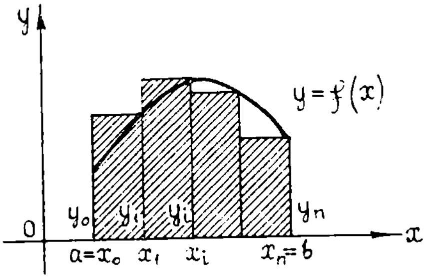
кўринишда, ўнг тўғри тўртбурчаклар формуласи

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1+y_1+ \qquad +y_{n-1}) = h\sum_{i=0}^{n-1} y_i$$

кўринишида бўлади. Бу формулаларнинг номлари интегралнинг геометрик маъноси билан боғлиқ. Агар Oxy текисликда $y=f(x)$ эгри чизиқни чизиб $[a, b]$ кесмани x_i нуқталар билан n та тенг бўлакка бўлинса, у ҳолда чап тўғри тўртбурчаклар формуласи интегралнинг тақрибий қиймати сифатида 3. 12- шаклдаги штрихланган тўғри тўртбурчаклар юзлари йиғиндисини беради, ўнг тўғри тўртбурчаклар формуласи эса 3. 13- шаклдаги штрихланган тўғри тўртбурчак юзлари йиғиндисини беради.



3.12- шакл

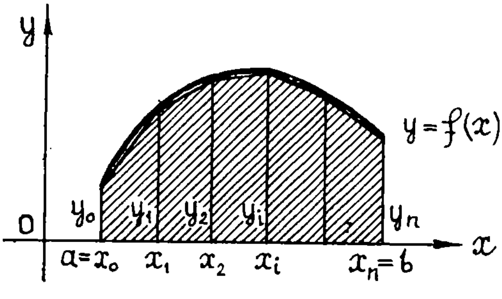


3.13- шакл

б) $\int_a^b f(x)\,dx$ интегрални ҳисоблаш учун трапециялар формуласи ушбу кўринишда бўлади:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+ \qquad +y_{n-1}\right).$$

Геометрик нуқтаи назардан у интегралнинг тақрибий қиймати сифатида 3. 14- шаклда штрихлаб кўрсатилган тўғри бурчакли трапециялар юзлари йиғиндисини беради.



3.14- шакл

в) $\int_a^b f(x)\,dx$ интегрални ҳисоблаш учун Симпсон формуласи ушбу кўринишда бўлади:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\Big(y_0 + y_{2n} + 4\,(y_1 + y_3 + \qquad + y_{2n-1}\Big) +$$

$$+ 2\Big(y_2 + y_4 + \qquad + y_{2n-2}\Big)\Big],$$

бу ерда $[a,\ b]$ кесма $2n$ та тенг бўлакка бўлинган ва

$$h = \frac{b-a}{2n}.$$

Симпсон формуласини бошқача параболик *трапециялар формуласи* деб ҳам аталади, бунга сабаб шуки, уни келтириб чиқаришда функциянинг $[a,\ b]$ кесмадаги графиги y_{2i-2}, y_{2i-1} y_{2i} қийматлар бўйича ясалган парабола билан тақрибий алмаштирилади (интерполяцияланади).

Симпсон формуласи юқори аниқликка эга.

Мисол. $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$ интегрални тўғри тўртбурчаклар, трапециялар ва Симпсон формулалари бўйича ҳисобланг. Натижаларни интегралнинг аниқ қиймати билан таққосланг.

Ечиш. [0, 1] кесмани 10 та тенг бўлакка бўламиз. $y = \sqrt{1+x^2}$ функциянинг бўлиниш нуқталаридаги қийматлари жадвалини тузамиз (3. 22- жадвал):

3. 22- жадвал

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,10
y_i	1,000	1,005	1,020	1,044	1,077	1,118	1,166	1,221	1,281	1,345	1,414

а) Тўғри тўртбурчаклар формуласи:

$$h = \frac{1-0}{10} = 0,1;$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = 0,1\,(1,000 + 1,005 + 1,020 + \qquad + 1,345) \approx 1,128$$

(чап тўғри тўртбурчаклар, 3. 12- шакл);

$$\int_0 \sqrt{1+x^2}\,dx = 0,1\,(1,005 + 1,020 + \qquad + 1,414) = 1,169$$ (ўнг тўғри тўртбурчаклар, 3. 13- шакл);

б) трапециялар формуласи: $h = 0,1$.

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \approx 0,1\left(\frac{1,100 + 1,414}{2} + 1,055 + \qquad + 1,345\right) = 1,158.$$

в) Симпсон формуласи:

$$h = \frac{1-0}{10} = 0,1:$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \approx \frac{0,1}{3}(1,000 + 1,414 + 2\,(1,005 + 1,044 + 1,118 +$$

$$+ 1,221 + 1,345) + 4\,(1,020 + 1,077 + 1,166 + 1,281)\,) = 1,1478.$$

г) аниқ ечим:

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1) = 1,147.$$

Интегралнинг Симпсон формуласи бўйича ҳисобланган қиймати унинг аниқ қийматига энг яқиндир.

18.3. Тўғри тўртбурчаклар, трапециялар ва Симпсон формулаларининг ўнг томонлари тегишли интегралдан R_n хатоликка фарқ қилади. Бу миқдор ушбу тенгсизликлар билан тавсифланади.

Тўғри тўртбурчаклар усули учун:

$$R_n \leqslant \frac{h}{2}(b-a)\,M_1, \text{ бу ерда } M_1 = \max_{[a,\,b]} |f'(x)|. \qquad (18.1)$$

Трапециялар усули учун:

$$R_n \leqslant \frac{h^2}{12}(b-a)\,M_2, \text{ бу ерда } M_2 = \max_{[a,\,b]} |f''_x(x)|. \qquad (18.2)$$

Симпсон усули учун:

$$R_n \leqslant \frac{h^4}{180}(b-a)\,M_4, \text{ бу ерда } M_4 = \max_{[a,\,b]} |f^{(IV)}(x)| \qquad (18.3)$$

Агар $f(x)$ функцияни, m- даражали ихтиёрий алгебраик кўпҳад билан алмаштирилганда

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) \qquad (18.4)$$

тақрибий тенглик аниқ тенгликка айланса, у ҳолда бу квадратура формуласи m- даражали кўпҳадлар учун *аниқ формула* деб аталади.

Қолдиқ ҳадларининг (18. 1), (18. 2), (18. 3) ифодаларидан кўриниб турибдики, тўғри тўртбурчаклар формуласи нолинчи даражали кўпҳад учун, трапециялар формуласи биринчи даражали кўпҳад учун, Симпсон формуласи эса учинчи даражали кўпҳад учун аниқ формулалардир, чунки улар учун қолдиқ ҳад нолга тенг.

Бундай масала юзага келади: (18. 4) квадратура формулалари орасидан n та x_i тугунни $[a, b]$ кесмада шундай жойлаштириш ва A_i вазнларни шундай топиш керакки, уларга мос квадратура формуласи максимал даражали алгебраик кўпҳадлар учун ўринли бўлсин.

19- §. Гаусснинг квадратура формуласи

19.1. Бизга Лежандрнинг кўпҳадлари ҳақида баъзи маълумотлар керак бўлади. Ушбу

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\,[(x^2 - 1)]^n,\quad n = 0,\ 1,\ 2,$$

кўринишдаги кўпҳадлар *Лежандр кўпҳадлари* деб аталади.

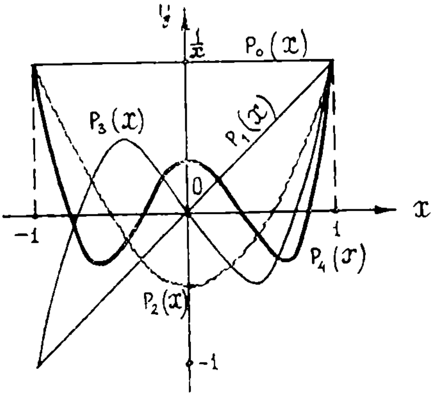
Асосий хоссалари:

а) $P_n(1) = 1,\ P_n(-1) = (-1)^n,\ n = 0,\ 1,\ 2,$

б) $\int\limits_{-1}^{1} P_n(x)\, Q_k(x)\, dx = 0,\ k > 0$ бўлганда, бу ерда $Q_k(x)$ — даражаси n дан кичик бўлган исталган кўпҳад.

в) $P_n(x)$ ($n = 0,\ 1,\ 2,$.) Лежандр кўпҳади (—1, 1) оралиқда n та турли ҳақиқий илдизга эга.

Лежандрнинг биринчи бешта кўпҳадини ва уларнинг графикларини келтирамиз (3. 15- шакл):



3.15- шакл

$$P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x;\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),\ P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3).$$

19.2. Гаусснинг квадратура формуласини келтириб чиқариш. Аввал $[-1, 1]$ кесмада берилган $y = f(t)$ функцияни қараймиз. Умумий ҳолдаги $[a, b]$ кесмани бизнинг ҳолга эркли ўзгарувчини чизиқли алмаштириш йўли билан келтириш мумкин.

Масалани бундай қўямиз: t_i тугунлар ва A_i коэффициентларни шундай танлаш керакки,

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} A_i f(t_i) \tag{19. 1}$$

квадратура формуласи мумкин бўлган энг юқори m-даражали кўпҳадлар учун аниқ бўлсин. Бизнинг ихтиёримизда $2n$ та t_i ва A_i $(i = \overline{1, n})$ ўзгармаслар бўлиб, $(2n - 1)$-даражали кўпҳад эса $2n$ та коэффициентлар билан аниқланганлиги учун, бу энг юқори даража умумий ҳолда $(2n - 1)$ га тенг бўлиши равшан.

(19. 1) тенглик қаноатлантирилиши учун

$$f(t) = 1,\ t,\ t^2,\qquad t^{2n-1}$$

тенгликлар ўринли бўлиши зарур ва етарлидир.

Ҳақиқатан,

$$\int_{-1}^{1} t^k\,dt = \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^k,\quad k = \overline{0,2n-1} \tag{19, 2}$$

ва

$$f(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} C_k t^k$$

деб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{2n-1} C_k \int_{-1}^{1} t^k dt = \sum_{k=0}^{2n-1} C_k \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^k =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} A_i \sum_{k=0}^{2n-1} C_k t_i^k = \sum_{i=1}^{n} A_i f(t_i).$$

Шундай қилиб,

$$\int_{-1}^{1} t^k\,dt = \frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1} = \begin{cases} \dfrac{2}{k+1}, & k \text{ жуфт бўлганда,} \\ 0, & k \text{ тоқ бўлганда} \end{cases}$$

муносабатни ҳисобга олсак, қўйилган масалани ечиш учун t_i ва A_i ларни ушбу $2n$ та тенглама системасидан аниқлаш етарлидир, деган хулосага келамиз:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} A_i = 2, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} A_i t_i = 0, \\ \cdot \\ \sum\limits_{i=1}^{n} A_i\ t_i^{2n-2} = \dfrac{2}{2n-1}, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} A_i\ t_i^{2n-1} = 0. \end{cases} \tag{19 3}$$

(19. 3) система чизиқли эмас ва уни одатдаги йўл билан ечиш катта) математик қийинчиликлар билан боғлиқ. Лекин бу ерда ушбу сунъий усулни қўллаш мумкин.

Ушбу кўпҳадларни қараймиз:

$$f(t) = t^k P_n(t),\ k = \overline{0,\ n-1},$$

бу ерда $P_n(t)$ Лежандр кўдҳадлари.

Бу кўпҳадларнинг даражалари $(2n-1)$ дан ортиқ бўлмаганлиги учун (19. 3) системага асосан улар учун (19. 1) ва

$$\int_{-1}^{1} t^k P_n(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} A_i\, t^k P_n(t_i),\quad k = \overline{0,\ n-1} \tag{19. 4}$$

формула ўринли бўлиши керак. Иккинчи томондан, Лежандр кўпҳадларининг ортогоналлигига асосан (б) хосса)

$$k < n \text{ да } \int_{-1}^{1} t_i^k P_n(t)\,dt = 0$$

тенгликлар бажарилади, шунинг учун

$$\sum_{i=1}^{n} A_i\, t_i^k P_n(t_i) = 0,\ k = \overline{0,\ n-1}. \tag{19.5}$$

(19. 5) тенгликлар, агар

$$P_n(t_i) = 0, \quad i = \overline{1, n} \tag{19.6}$$

деб олинса, ҳеч сўзсиз бажарилади, яъни (19. 1) квадратура формуласи энг юқори аниқликда бўлиши учун t_i нуқталар сифатида тегишли Лежандр кўпҳадларининг нолларини олиш етарлидир. Маълумки, [в) хосса], бу ноллар ҳақиқий сонлар, турли ва $(-1, 1)$ оралиқда жойлашган. t_i абсциссаларни билган ҳолда (19. 3) системанинг биринчи n та чизиқли тенгламасидан A_i, $i = \overline{1, n}$ коэффициентларни топиш осон. Бу системанинг дастлабки n та тенгламасининг детерминанти Вандермонд детерминантидир:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 & & t_n \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 & & t_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_1^{n-1} & t_2^{n-1} & t_3^{n-1} & & t_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i} (t_i - t_j) = 0$$

Демак, A_i лар бир қийматли аниқланади. (19. 1) формула ***Гаусс квадратура формуласи*** деб аталиб, унда t_i лар $P_n(t)$ Лежандр кўпҳадининг ноллари ва A_i, $i = \overline{1, n}$ лар (19.3) системадан аниқланади.

1-мисол. $n = 3$ учун Гаусс квадратура формуласини келтириб чиқаринг.

Ечиш. Учинчи даражали ($n = 3$) Лежандр кўпҳади бундай бўлади:

$$P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t).$$

Бу кўпҳадни нолга тенглаб, илдизларини топамиз:

$$t_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}} \approx -0{,}774597;$$

$$t_2 = 0;$$

$$t_3 = \sqrt{\frac{3}{5}} \approx 0{,}774597$$

A_1, A_2, A_3 коэффициентларни аниқлаш учун, (19.3) га асосан, ушбу тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 2, \\ -\sqrt{\frac{3}{5}} A_1 + \sqrt{\frac{3}{5}} A_3 = 0, \\ \frac{3}{5} A_1 + \frac{3}{5} A_3 = \frac{2}{3}, \end{cases}$$

бундан $A_1 = A_3 = \frac{5}{9}$, $A_2 = \frac{8}{9}$ ни оламиз.

Демак,

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \frac{1}{9}\left[5f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+8f(0)+5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right].$$

Гаусс квадратура формуласининг ноқулайлиги шундаки, t_i тугунлар ва A_i вазнлар, умуман айтганда, иррационал сонлардир. Лежандр кўпҳадининг илдизлари $t = 0$ нуқтага нисбатан симметрик жойлашган, A_i вазнлар эса мусбат ва исталган n да симметрик тугунларда устма-уст тушади. $n = \overline{1, 4}$ учун Гаусс формуласидаги t_i тугунлар ва A_i вазнларнинг қийматлари жадвалини келтирамиз (3.23-жадвал):

3.23-жадвал

n	i	t_i	A_i
1	1	0	2
2	1,2	$\mp$ 0,57735027	1
3	1;3	$\mp$ 0,77459667	$\frac{5}{9}$ = 0,555 555 56
	2	0	$\frac{8}{9}$ = 0,888 888 89
4	1,4	$\mp$ 0,86113631	0,34785484
	2,3	$\mp$ 0,33998104	0,65214516

19.3. Энди Гаусс квадратура формуласини

$$\int_a^b f(x)dx$$

интегрални ҳисоблашга қўллайлик. Ўзгарувчини бундай

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

алмаштириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t\right)dt.$$

Бу интегралга (19.1) Гаусс квадратура формуласини татбиқ қилиб,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) \qquad (19.7)$$

га эга бўламиз, бу ерда

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t_i, \quad i = \overline{1, n}. \qquad (19.8)$$

t_i лар $P_n(t)$ Лежандр кўпҳадининг ноллари, яъни $P_n(t_i) = 0$.

n та тугунли (19.7) Гаусс формуласининг қолдиқ ҳади бундай ифодаланади:

$$R_n \leqslant \frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^n}{[(2n!)]^3(2n+1)} \max_{x\in[a,b]} |f^{(2n)}(x)|, \qquad (19.9)$$

бу ердан қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$R_2 \leqslant \frac{1}{135}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \max_{x\in[a,b]} |f^{(IV)}(x)|,$$

$$R_3 \leqslant \frac{1}{15750}\left(\frac{b-a}{2}\right)^7 \max_{x\in[a,b]} |f^{(6)}(x)|,$$

$$R_4 \leqslant \frac{1}{3472875}\left(\frac{b-a}{2}\right)^9 \max_{x\in[a,b]} |f^{(8)}(x)|$$

ва ҳоказо.

2-мисол. $\int\limits_0^1 \sqrt{1+2x}dx$ интегрални Гаусс формуласини татбиқ этиб ҳисобланг ($n=3$).

Ечиш. $a=0$ ва $b=1$ га эгамиз. (19.8) формула ва келтирилган жадвалга асосан x_i тугунлар (бешта қийматли рақамгача) ушбу қийматларга эга бўлади:

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t_1 = 0,11270;$$

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t_2 = 0,50000;$$

$$x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t_3 = 0,88730.$$

(19.7) формуладаги мос коэффициентлар бизнинг ҳолда бундай бўлади:

$$c_1 = \frac{b-a}{2}A_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9} = \frac{5}{18} = 0,27778;$$

$$c_2 = \frac{b-a}{2}A_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{9} = \frac{4}{9} = 0,44444;$$

$$c_3 = \frac{b-a}{2}A_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9} = \frac{5}{18} = 0,27778.$$

Кейинги ҳисоблашларни жадвалга ёзамиз (3.24-жадвал):

3.24-жадвал

i	x_i	$y_i=\sqrt{1+2x_i}$	c_i	$c\,y_i$
1	0,11270	1,10698	0,27778	0,30747
2	0,60000	1,41421	0,44444	0,62853
3	0,88730	1,66571	0,27778	0,46270
Σ				1,39870

Демак,

$$\int_0^1 \sqrt{1+2x}\,dx = \sum_{i=1}^{3} c_i y_i = 1{,}39870.$$

Хатоликни баҳолаш учун $y = f(x) = \sqrt{1+2x}$ функциянинг олтинчи тартибли ҳосиласини топамиз:

$$f^{(6)}(x) = -945(1+2x)^{-\frac{11}{2}}$$

Бу ердан:

$$\max_{x\in[0,\,1]} |f^{(6)}(x)| = 945.$$

Демак, формуланинг абсолют хатолигн бундай қийматга эга бўлади:

$$R_3 \leqslant \frac{1}{15750}\left(\frac{b-a}{2}\right)^7 \max_{x\in[a,\,b]} |f^{(6)}(x)| = \frac{945}{15750}\left(\frac{1}{2}\right)^7 \approx \frac{1}{2000}.$$

Солиштириш учун интегралнинг аниқ қийматини келтирамиз:

$$\int_0^1 \sqrt{1+2x}\,dx = \sqrt{3} - \frac{1}{3} \approx 1{,}39872.$$

20-§. Монте-Карло усули

20.1. Масалаларни тасодифий миқдорлардан фойдаланиб ечиш усуллари умумий ном билан *Монте-Карло усули* деб аталади. Уларнинг номи Монте-Қарло шаҳри номи билан боғлиқ.

Монте-Қарло усулининг моҳияти қуйидагидан иборат: бирор ўрганилаётган миқдорнинг a қийматини топиш талаб қилинади, бунинг учун математик кутилиши a га тенг бўлган X миқдорни танланади:

$$M(X) = a.$$

Амалда эса бундай йўл тутилади: n та синов ўтказилади, бунинг натижасида X нинг n та мумкин бўлган қиймати олиниб, уларнинг ўрта арифметик қиймати

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

ҳисобланади ва $\overline{X}$ ни изланаётган a соннинг $\overline{a}$ баҳоси (тақрибий қиймати) сифатида қабул қилинади:

$$a \approx \overline{a} = \overline{X}.$$

Монте-Қарло усули кўп сондаги синовлар ўтказилишини талаб этганлиги учун уни кўпинча *статистик синовлар усули* деб аталади. Бу усул назариясида X тасодифий миқдорни қандай қилиб энг мақсадга мувофиқ равишда танлаш, унинг мумкин бўлган қийматларини қандай қилиб топиш кўрсатилади.

20.2. X тасодифий миқдор математик кутилиши a нинг баҳосини ҳосил қилиш учун n та эркли синов ўтказилган ва улар бўйича X танланманинг ўрта қиймати топилган бўлиб, у изланаётган баҳо сифатида қабул қилинган бўлсин: $\bar{a} = \bar{X}$.

Агар синов такрорланадиган бўлса, у ҳолда X нинг бошқа мумкин бўлган қийматлари олиниши равшан, яъни бошқа ўртача қиймат, ва, демак, бошқа $\bar{a}$ баҳо ҳосил бўлади. Бундан математик кутилишнинг аниқ баҳосини ҳосил қилиш мумкин эмаслиги келиб чиқади. Йўл қўйилиши мумкин бўлган хатолик ҳақидаги масала юзага келади. Биз фақат берилган γ эҳтимоллик (ишончлилик) билан йўл қўйилиши мумкин хатоликнинг юқори чегараси δ ни излаш билан чекланамиз:

$$P(|\bar{X} - a| \leqslant \delta) = \gamma.$$

Бизни қизиқтираётган хатоликнинг юқори чегараси δ математик кутилишни танланма ўрта қиймати бўйича ишончлилик оралиқлари ёрдамида баҳолашдир.

Олий математика умумий курси (эҳтимоллик назаарияси) натижаларидан фойдаланиб, ушбу уч ҳолни кўриб чиқамиз:

а) X тасодифий миқдор нормал тақсимланган ва унинг ўрта квадратик четланиши маълум. Бу ҳолда γ ишончлилик билан юқори чегара

$$\delta = \frac{t\delta}{\sqrt{n}} \qquad (20.1)$$

га тенг, бу ерда n — синовлар сони; t — Лаплас функцияси аргументининг $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ бўладиган қиймати, δ — шу X нинг маълум ўрта квадратик четланиши.

1-мисол. Ўрта квадратик четланиши 0,5 га тенглиги маълум бўлган X нормал миқдорнинг математик кутилишини баҳолаш учун 100 та синов ўтказилган бўлса, δ хатоликнинг юқори чегарасини 0,95 ишончлилик билан топинг.

Ечиш. Бу ерда $n = 100$, $\delta = 0{,}5$, $\gamma = 0{,}95$, $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475$. Лаплас функцияси жадвалидан $t = 1{,}96$ ни топамиз. Хатоликнинг изланаётган юқори чегараси:

$$\delta = 1{,}96 \cdot \frac{0{,}5}{\sqrt{100}} = 0{,}098.$$

б) X тасодифий миқдор нормал тақсимланган, шу билан бирга унинг ўрта квадратик четланиши σ номаълум. Бу ҳолда γ ишончлилик билан хатоликнинг юқори чегараси

$$\delta = t_{\gamma} \frac{S}{\sqrt{n}} \qquad (20.2)$$

га тенг, бу ерда n — синовлар сони, S — танланма ўрта квадратик четланиши, t_{γ} — жадвалдан топилади.

2-мисол. Агар нормал тақсимланган X тасодифий миқдорнинг математик кутилишини баҳолаш учун унинг устида 100 та синов ўтказилиб, улар бўйича $S = 0{,}5$ танланма ўрта квадратик четланиш топилган бўлса, хатоликнинг юқори чегарасини 0,95 ишончлилик билан топинг.

Ечиш. Шартга кўра $S = 0{,}5$, $\gamma = 0{,}95$ ва $n = 100$. Шунинг учун $t_\gamma = 1{,}984$ хатоликнинг изланаётган юқори чегараси:

$$\delta = 1{,}984 \cdot \frac{0{,}5}{\sqrt{100}} = 0{,}099.$$

в) X тасодифий миқдор нормал тақсимотдан фарқли тақсимотга эга. Бу ҳолда X тасодифий миқдорнинг ўрта квадратик четланиши δ маълум бўлса, синовлар сони етарлича катта ($n > 30$) бўлганда хатоликнинг юқори чегарасини γ ишончлилик (20.1) формуласи бўйича ҳисоблаш мумкин, агарда δ номаълум бўлса, (20.1) формулага танланма ўрта квадратик четланиш S ни қўйиш мумкин ёки (20.2) формуладан фойдаланиш мумкин.

Агар n қанча катта бўлса, иккала формула берадиган натижалар орасидаги фарқ шунчалик кичик бўлишини айтиб ўтамиз. Хусусан (1 ва 2-мисолларда), $n = 100$ ва $X = 0{,}95$ бўлганда хатоликнинг юқори чегараси (20.1) формула бўйича 0,098 га ва (20.2) формула бўйича 0,098 га тенг, кўриб турибмизки, фарқ унчалик катта эмас.

Хатоликнинг олдиндан берилган δ юқори чегарасини таъмин этадиган энг кичик сондаги синовлар сонини аниқлаш учун n ни (20.1) ва (20.2) формулалардан топиш керак:

$$n = \frac{t^2 \delta^2}{\delta^2}, \quad n = \frac{t_\gamma^2 \cdot S^2}{\delta^2}.$$

Масалан, $\delta = 0{,}098$, $t_\gamma = 1{,}96$, $\sigma = 0{,}5$ бўлса, хатоликнинг 0,088 дан ортмаслигини таъмин этадиган синовлар сони

$$n = \frac{1{,}96^2 \cdot 0{,}5^2}{0{,}098^2} = 100.$$

20.3. Юқорида 20.1-бандда биз Монте—Карло усули тасодифий сонларни татбиқ этишга асосланганлигини айтиб ўтдик. Энди бу сонларни таърифлаймиз.

Тасодифий сонлар деб, $(0,1)$ оралиқда текис тақсимланган R тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган r қийматларини айтилади.

Аслида эса мумкин бўлган қийматлари, умуман айтганда, чексиз сондаги рақамларга эга бўлган текис тақсимланган R тасодифий миқдордан эмас, балки мумкин бўлган қийматлари чекли сондаги рақамлардан иборат бўлган R^* квази текис тасодифий миқдордан фойдаланилади. R ни R^* га алмаштириш натижасида миқдор аниқ тақсимотга эмас, балки тақрибий тақсимотга эга бўлади.

20.4. Узлуксиз X тасодифий миқдорнинг $f(x)$ тақсимот зичлигини билган ҳолда унинг мумкин бўлган $X_i (i = 1, 2, \quad)$ қийматлари кетма-кетлигини топиш талаб қилинаётган бўлсин.

X устида синов ўтказиш қоидасини келтирамиз: $f(x)$ тақсимот зичлиги маълум бўлган узлуксиз X тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган X_i қийматини топиш учун r_i тасодифий сонни танлаш ва

$\int\limits_{-\infty}^{x_i} f(x)dx = r_i$ тенгламани ёки $\int\limits_{c}^{x_i} f(x)dx = r_i$

тенгламани x_i га нисбатан ечиш лозим, бу ерда c — шу X тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган энг кичик қиймати.

3-мисол. Узлуксиз X тасодифий миқдор

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \ x \geqslant 0$$

кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган X нинг мумкин бўлган қийматларини олиш учун ошкор формулани топинг.

Ечиш. Келтирилган қоидага мувофиқ

$$\lambda \int_0^{x_i} e^{-\lambda x} dx = r_i$$

тенгламанн ёзамиз. Интеграллаб,

$$e^{-\lambda x_i} = 1 - r_i$$

ни ҳосил қиламиз. Бу тенгламани X_i га нисбатан ечамиз:

$$X_i = {}^{-\frac{1}{\lambda}}\ln(1 - r_i)$$

r_i тасодифий сон (0, 1) оралиққа тегишли, демак, $1 - r_i$ ҳам тасодифий сон ва (0, 1) оралиққа тегишли. Бошқача айтганда R ва $1 - R$ миқдорлар бир хил тақсимланган. Шу сабабли X_i ни излаш учун яна ҳам соддароқ

$$X_i = -\frac{1}{\lambda} \ln r_i$$

формуладан фойдаланамиз. Масалан, агар $\lambda = 5$ бўлиб, $r_1 = 0,73$ танланган бўлса, у ҳолда мумкин бўлган X_1 қиймат бундай бўлади:

$$X_1 = -\frac{1}{5} \ln 0,73 = 0,2 \cdot 0,31 = 0,062.$$

Нормал тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматларини топиш қоидасини келтирамиз: $a = 0$ ва $\sigma = 1$ параметрли нормал X тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган X_i қийматини топиш учун 12 та эркли тасодифий сонларни қўшиш ва ҳосил бўлган йиғиндидан 6 ни айириш лозим:

$$X_i = \sum_{k=1}^{12} r_k - 6.$$

4-мисол. $a = 0$, $\sigma = 1$ параметрли нормал X тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматини топинг.

Ечиш. Тасодифий сонлар жадвалидан 12 та сонни танлаймиз, уларни қўшамиз ва ҳосил бўлган йиғиндидан 6 ни айирамиз.

$$X_i = (0,10 + 0,09 + \qquad + 0,67) - 6 = 5,01 - 6 = -0,99.$$

Агар $a \neq 0$ ва $\sigma \neq 1$ параметрли нормал тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган Z_i қийматини топиш талаб қилинаётган бўлса, у ҳолда шу банддаги сўнги қоида бўйича мумкин бўлган қийматни топиб, кейин изланаётган мумкин бўлган қийматни

$$Z_i = \sigma X_i + a$$

формула бўйича топамиз.

20.5. Аниқ интегралларни Монте — Карло усули бўйича ҳисоблашнинг кўплаб усуллари яратилган. Улардан бирини — интеграл остидаги функциянинг ўрта қийматини топиш усулини келтирамиз. Ушбу $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ аниқ интегрални ҳисоблаш талаб этилаётган бўлсин.

(a, b) интеграллаш оралиғида $f(x) = \frac{1}{b-a}$ зичлик билан текис тақсимланган X тасодифий миқдорни қараймиз. У ҳолда математик кутилиш

$$M[\varphi(X)] = \int\limits_a^b \varphi(x) f(x)dx = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Бундан

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx = (b-a)\,M[\varphi(X)].$$

$M[\varphi(X)]$ математик кутилишни унинг баҳоси, яъни танланма ўрта қиймати билан алмаштириб, изланаётган интеграл учун ушбу тақрибий тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\int\limits_a^b \varphi(x)dx \approx (b-a)\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi(X_i)}{n}, \tag{20.3}$$

бу ерда X_i — шу X тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қиймати.

X миқдор (a, b) оралиқда $f(x) = \frac{1}{b-a}$ зичлик билан текис тақсимланганлиги учун X_i ни ушбу формула бўйича топилади:

$$\int\limits_a^{x_i} f(x)dx = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^{x_i} dx = r_i.$$

Бундан

$$X_i = a + (b-a)\,r_i; \tag{20.4}$$

бу ерда r_i — тасодифий сон.

Ҳисоблаш натижалари жадвалга ёзилади.

5-мисол $\int\limits_1^3 (x+1)dx$ интегрални Монте — Карло усули билан ҳисобланг: а) ҳисоблашнинг абсолют хатолигини топинг; б) хатоликнинг юқори чегараси $\sigma = 0{,}1$ бўлишини $\gamma = 0{,}1$ ишончлилик билан таъминлаб берадиган синовларнинг энг кичик сонини топинг.

Ечиш. Ушбу

$$\int_1^3 (x+1)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(X_i)$$

формуладан фойдаланамиз, бу ерда $a = 1$, $b = 3$, $\varphi(x) = x + 1$. Соддалик учун синовлар сонини $n = 10$ деб оламиз. У ҳолда

$$\int_1^3 (x+1)dx \approx \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{n}(X_i + 1),$$

бу ерда X_i нинг мумкин бўлган қийматлари ушбу формула бўйича топилади:

$$X_i = a + (b - a)\,r_i \text{ ёки } X_i = 1 + 2r_i.$$

r_i сонлар тасодифий сонлар жадвалидан вергулдан кейин учта рақам билан олинган.

Ўнта синов натижаси жадвалда келтирилган (3.25- жадвал). Жадвалдан кўриниб турибдики,

$$\sum_{i=1}^{10}\varphi(X_i) = \sum_{i=1}^{10}(X_i + 1) = 29{,}834.$$

Демак, изланаётган интеграл:

$$\int_1^3 (x+1)dx \approx \frac{1}{5}\cdot 29{,}834 = 5{,}967.$$

а) Интегралнинг аниқ қиймати:

$$\int_1^3 (x+1)dx = \frac{(x+1)^2}{2}\Big|_1^3 = 6.$$

Шунинг учун абсолют хатолик:

$$6 - 5{,}967 = 0{,}033.$$

б) Хатоликнинг юқори чегараси $\delta = 0{,}1$ бўлишини $\gamma = 0{,}95$ ишончлилик билан таъминлайдиган энг кичик синовлар сонини

$$n = \frac{t^2\,\delta^2}{\delta^2}$$

формула бўйича ҳисоблаймиз. t сонини $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = 0{,}75$ формула бўйича Лаплас функцияси жадвалидан топамиз: $t = 1{,}96$.

X тасодифий миқдор (1,3) оралиқда текис тақсимланганлиги ва унинг дисперсияси

$$D(X) = \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{6}$$

га тенглигини ҳисобга олиб, ўрта қиймати топиладиган $\varphi(x) = x + 1$ функциянинг дисперсиясини топамиз:

3.25-жадвал

i	r_i	$2r_i$	$X_i = 1+2r_i$	$\varphi(X_i)=X_i+1$
1	0,100	0,200	1,200	2,200
2	0,973	1,946	2,946	3,946
3	0,253	0,506	1,506	2,506
4	0,376	0,752	1,752	2,752
5	0,520	1,040	2,040	3,040
6	0,135	0,270	1,270	2,270
7	0,863	1,726	2,726	3,726
8	0,467	0,934	1,934	2,934
9	0,354	0,708	1,708	2,708
10	0,876	1,752	2,752	3,752
$\sum$				29,834

$$\sigma^2 = D(X+1) = D(X) = \frac{1}{3}.$$

Энди изланаётган энг кичик синовлар сонини топамиз:

$$n = \frac{t^2\delta^2}{\delta^2} = \frac{1{,}96^2\left(\frac{1}{3}\right)}{0{,}1} = 128.$$

21-§. Биринчи тартибли оддий дифференциал тенгламаларни Эйлер усули билан ечиш

21.1. Биринчи тартибли

$$y' = f(x, y)$$

дифференциал тенглама текисликда йўналишлар майдонини, яъни текисликнинг $f(x, y)$ функция мавжуд бўлган ҳар бир нуқтасида бу нуқта орқали ўтувчи интеграл эгри чизиқнинг йўналишини аниқлайди. Коши масаласини ечиш, яъни $y' = f(x, y)$ тенгламанинг $y(x_0) = y_0$ бошланғич шартини қаноатлантирадиган ечимини топиш талаб этилаётган бўлсин.

Ҳатто энг содда дифференциал тенглама учун ҳам бу шартларни қаноатлантирадиган ечимни чекли сондаги математик амаллар ёрдамида топиш, умуман, мумкин эмас. Бу нарса дифференциал тенгламаларни тақрибий ечишнинг турли сонли усулларининг яратилишига олиб келди. Бу усулларни уларнинг ечимларини қандай шаклда берилишига қараб асосан уч гуруҳга бўлиш мумкин:

а) аналитик усуллар, дифференциал тенгламанинг тақрибий ечимини аналитик ифода шаклида беради;

б) график усуллар тақрибий ечимни график кўринишида беради;

в) сонли усуллар тақрибий ечимни жадвал шаклида беради

Бундай тавсиф маълум маънода шартли эканлигини айтиб ўтамиз. Масалан, Эйлер синиқ чизиқлари график усули бир вақтда дифференциал тенгламанинг сонли ечимини ҳам беради.

21.2. $y(x_0) = y_0$ бошланғич шарт билан берилган биринчи тартибли

$$y' = f(x, y)$$

дифференциал тенгламани (Коши масаласи) тақрибий интеграллашнинг Эйлер усулини кўриб чиқамиз.

$[x_0, x]$ кесмани, $\frac{x - x_0}{n} = h$ деб олиб, x_1, x_2, . ., $x_n = x$ нуқталар билан n та бўлакка бўламиз, бу ерда h — интеграллаш қадами.

y' функция биринчи кесманинг ичида x_0 дан x_1 гача $f(x_0, y_0)$ ўзгармас қийматни сақлайди, деб фараз қиламиз, у ҳолда интеграл эгри чизиқни бу бўлакда унга $M_0(x_0, y_0)$ нуқтада ўтказилган уринма билан алмаштириб,

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда y_1 — изланаётган функциянинг $x_1 = x_0 + h$ даги қиймати. Юқоридагини такрорлаб, изланаётган ечимнинг кетма-кет қийматларини ҳосил қиламиз:

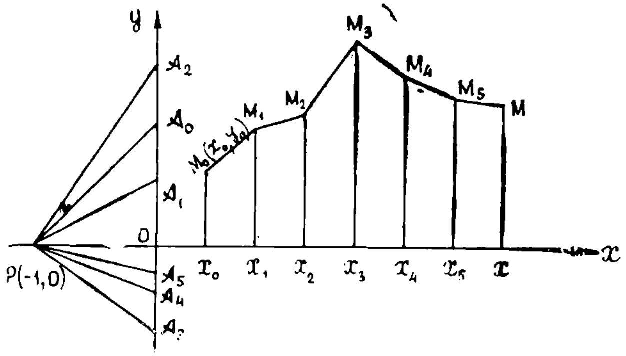
$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + hf(x_1\ y_1), \\ y_3 &= y_2 + hf(x_2, y_2), \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_{i+1} &= y_i + hf(x_i, y_i). \end{aligned}$$

Шундай қилиб, интеграл эгри чизиқ учлари $M_i(x_i, y_i)$ нуқталарда бўлган синиқ чизиқдан иборат бўлади, бу ерда

$$x_{i+1} = x_i + h, \quad y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i). \tag{21.1}$$

Бу усул *Эйлер синиқ чизиқлар усули* ёки оддийгина *Эйлер усули* деб аталади.

Эйлер синиқ чизиғини ҳосил қилиш учун $P(-1, 0)$ қутбни танлаймиз ва ординаталар ўқида $OA_0 = f(x_0, y_0)$ кесмани қўямиз. Равшанки, PA_0 нурнинг бурчак коэффициентн $f(x_0, y_0)$ га тенг, шунинг учун Эйлер синиқ чизиғининг биринчи бўғинини ҳосил қилиш учун $M_0(x_0, y_0)$ нуқтадан M_0M_1 тўғри чизиқни PA_0 га параллел қилиб, $x = x_1$ тўғри чизиқ билан бирор $M_1(x_1, y_1)$ нуқтада кесишгунга қадар ўтказиш етарлидир. Сўнгра $M_1(x_1, y_1)$ нуқтани бошланғич нуқта қилиб олиб, ординаталар ўқида $OA_1 = f_1(x_1, y_1)$ кесмани қўямиз ва M_1 нуқта орқали $M_1M_2 \parallel PA_1$ тўғри чизиқни $x = x_2$ тўғри чизиқ



3.16-шакл

билан M_2 нуқтада кесишгунга қадар ўтказамиз ва ҳоказо (3.16-шакл).

Эйлер усули дифференциал тенгламани энг содда сонли интеграллаш усулидир.

1-мисол. $y(0) = 1$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган

$$y' = \frac{xy}{2}$$

дифференциал тенглама интегралининг [0, 1] кесмадаги қийматлари жадвалини, Эйлер усулидан фойдаланиб, тузинг. $h = 0{,}1$ деб олинг.

Ечиш. Аргументнинг кетма-кет қийматларини тузамиз: $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}1$; $x_2 = 0{,}2$; ; $x_{10} = 1$. Изланаётган функциянинг мос қийматларини (21. 1) формула

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

бўйича ҳисоблаймиз, бу ерда

$$f(x, y) = \frac{xy}{2}.$$

Ҳисоблаш натижалари жадвалда келтирилган (3. 26-жадвал).

Жадвалнинг сўнгги устунида $y = e^{\frac{x^2}{4}}$ аниқ ечимнинг қийматлари таққослаш учун келтирилган.

Жадвалдан кўриниб турибдики, y_{10} қийматнинг абсолют хатолиги

$$1{,}2840 - 1{,}2479 = 0{,}0361,$$

нисбий хатолиги эса тақрибан 3 % га тенг. Эйлер усулининг, умуман айтганда, аниқлиги ҳам ва хатолик маъносида нисбатан қониқарли натижаларни h қадам кичик бўлгандагина беради. Эйлернинг баъзи бир такомиллаштирилган усулларини кўриб чиқамиз.

21.3.

$$y' = f(x, y)$$

3. 26- жадвал

	x	y	$f(x)\,y=\frac{xy}{2}$	$h\cdot f\,(x,\ y)$	$y=e^{x^2/4}$ аниқ ечим
0	0	1	0	0	1
1	0,1	1	0,005	0,005	1,0025
2	0,2	1,005	0,1005	0,0101	1,0100
3	0,3	1,0151	0,1523	0,0152	1,0227
4	0,4	1,0303	0,2067	0,0206	1,0408
5	0,5	1,0509	0,2627	0,0263	1,0645
6	0,6	1,0772	0,3232	0,0323	1,0942
7	0,7	1,1095	0,3883	0,0388	1,1303
8	0,8	1,1483	0,4593	0,0459	1,1735
9	0,9	1,1942	0,5374	0,0537	1,2244
10	1,0	1,2479			1,2840

дифференциал тенгламани

$$y\,(x_0) = y_0$$

бошланғич шарт билан ечиш талаб қилинсин. h қадамни танлаб, Эйлер усулига асосан изланаётган ечимнинг кетма-кет қийматларини $x_i = x_0 + ih,\quad i = \overline{0,\ n}$ лар учун

$$y_{i+1} = y_i + hf\,(x_i;\ y_i)$$

тақрибий формула бўйича ҳисоблаймиз.

Такомиллаштирилган Эйлер синиқ чизиқлари усулининг аниқлиги юқорироқ бўлиб, бунда аввал

$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2},$$

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2}\,f\,(x_i,\ y_i)$$

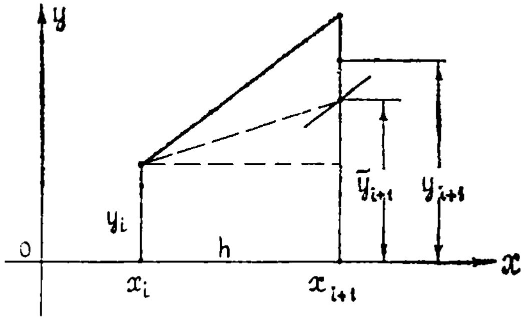
оралиқ қийматлар ҳисобланади ва интеграл эгри чизиқлар йўналишлар майдонининг қиймати $(x_{i+\frac{1}{2}},\ y_{i+\frac{1}{2}})$ ўрта нуқтада топилади, яъни

$$f\left(x_{i+\frac{1}{2}},\ y_{i+\frac{1}{2}}\right)$$

ҳисобланади, кейин эса бундай олинади:

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(x_{i+\frac{1}{2}},\ y_{i+\frac{1}{2}}\right). \qquad (21.2)$$

(3. 17- шаклга қаранг).



3.17- шакл

21.4. Эйлернинг бошқа такомиллаштирилган усулларидан бири Эйлер — Коши усули бўлиб, бунда аввал ечимнинг дастлабки яқинлашиши аниқланади, яъни

$$\overline{y}_{i+1} = y_i + h\,(x_i,\ y_i),$$

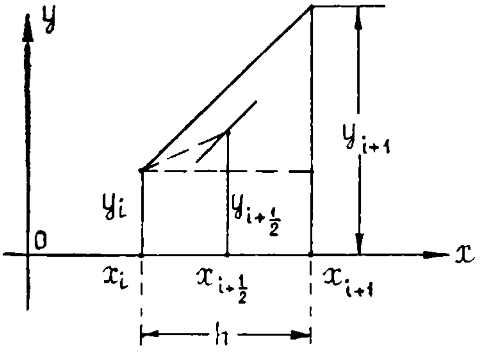
бундан фойдаланиб, интеграл эгри чизиқлар йўналишлари майдони топилади:

$$f\,(x_{i+1}\ \ \overline{y}_{i+1}).$$

Сўнгра

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\,(f\,(x_i,\ y_i) + f\,(x_{i+1}, \overline{y}_{i+1}) \qquad (21.3)$$

бўйича тақрибий ечим ҳисобланади (3.18- шаклга қаранг).



3.18- шакл

2- мисол Бошланғич шартлари $y(0) = 1$ бўлган

$$y' = y - \frac{2x}{y}$$

тенгламани $[0,\ 1]$ кесмада $h = 0{,}2$ қадам билан Эйлернинг биринчи ва иккинчи такомиллаштирилган усуллари билан интегралланг.

Ечиш. Бу ерда $h = 0{,}2$; $f(x,\ y) = y - \frac{2x}{y}$. Бу тенгламанинг такомиллаштирилган синиқ чизиқлар усули (21 2)

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(x_{i+\frac{1}{2}};\ y_{i+\frac{1}{2}}\right)$$

билан ҳисобланган интеграллаш натижалари 3. 27-жадвалда берилган.

3. 27- жадвал

i	x_i	y_i	$\frac{h}{2} f(x_i,\ y_i)$	$x_{i+\frac{1}{2}}$	y_{i+1}	$h \cdot f\left(x_{i+\frac{1}{2}},\ y_{i+\frac{1}{2}}\right)$
0	0	1,0	0,1	0,1	1,1	0,1836
1	0,2	1,1836	0,0846	0,3	1,2682	0,1590
2	0,4	1,3426	0,0747	0,5	1,4173	0,1424
3	0,6	1,4850	0,0677	0,7	1,5527	0,1302
4	0,8	1,6152	0,0625	0,9	1,6777	0,1210
5	1,0	1,7362				

3. 28- жадвалда берилган тенглама интегралини Эйлер — Кошининг такомиллаштирилган усули билан ҳисоблаш натижалари келтирилган, бунда қадам аввалгидек, $h = 0{,}2$ деб олинган.

3. 28- жадвал

i	x_i	y_i	$\frac{h}{2} f(x_i,\ y_i)$	x_{i+1}	y_{i+1}	$\frac{h}{2} f(x_{i+1},\ y_{i+1})$	$\frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}))$
0	0	1,0	0,1	0,2	1,2	0,0867	0,1867
1	0,2	1,1867	0,0850	0,4	1,3566	0,0767	0,1617
2	0,4	1,3484	0,0755	0,6	1,4993	0,0699	0,1454
3	0,6	1,4938	0,0690	0,8	1,6318	0,0651	0,1341
4	0,8	1,6279	0,0645	1,0	1,7569	0,0618	0,1263
5	1,0	1,7542					

Таққослаш учун

$$y = \sqrt{2x + 1}$$

аниқ ечимни келтирамиз, бундан:

$$y(1) = \sqrt{3} \approx 1{,}73205.$$

21.5. Ҳар бир y_i қийматларни итерациялаб Эйлер — Қошининг такомиллаштирилган усулининг аниқлигини ошириш мумкин. Аввал ушбу

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i,\ y_i) \tag{21.4}$$

дастлабки яқинлашиш танланади, сўнгра ушбу

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i;\ y_i) + f(x_{i+1},\ y_{i+1}^{(k-1)})\right] \tag{21. 5}$$

итерация жараёни тузилади.

Итерация жараёнини бирор икки кетма- кет $y_{i+1}^{(m)}$ ва $y_{i+1}^{(m+1)}$ яқинлашишни ҳисоблаш учун керакли рақамларгача устма- уст тушгунга қадар давом эттирилади. Шундан кейин

$$y_{i+1} \approx \overline{y}_{i+1}^{(m)}$$

деб олинади, бу ерда $\overline{y}_{i+1}^{(m)}$ шу $y_{i+1}^{(m)}$ ва $y_{i+1}^{(m+1)}$ яқинлашишларнинг умумий қисми.

Агар h нинг танланган қийматида уч-тўрт итерациялашдан сўнг керакли рақамлар устма-уст тушмаса, у ҳолда h ҳисоблаш қадамини кичрайтириш лозим.

3- мисол. Итерациялаш усулидан фойдаланиб $y(0) = 1{,}5$ бошланғич шарт билан берилган $y' = y - x$ дифференциал тенглама интегралининг $y(1{,}5)$ қийматини тўртта ўнлик рақамнинг устма- уст тушиш аниқлигида топинг.

Ечиш Қадамни $h = 0{,}25$ деб танлаб ва (21. 4), (21. 5) итерация жараёни

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i,\ y_i),$$

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i,\ y_i) + f(x_{i+1},\ y_{i+1}^{(k-1)}\Bigg)\right]$$

ни татбиқ этиб, кетма- кет ҳисоблаймиз:

$$y_1^{(0)} = y_0 + hf(x_0,\ y_0) = 1{,}5 + 0{,}375 = 1{,}8750;$$

$$y_1^{(1)} = y_0 + \frac{h}{2}(f(x_0,\ y_0) + f(x_1,\ y_1^{(0)})) = 1{,}5 + 0{,}125\cdot(1{,}5 + 1{,}8750 - $$
$$- 0{,}25) = 1{,}89062;$$

$$y_1^{(2)} = y_0 + \frac{h}{2}(f(x_0,\ y_0) + f(x_1,\ y_1^{(1)})) = 1{,}5 + 0{,}125\ (1{,}5 + 18962 - $$
$$- 0{,}25) = 1{,}89258;$$

$$y_1^{(3)} = y_0 + \frac{h}{2}(f(x_0,\ y_0) + f(x_1,\ y_1^{(2)})) = 1{,}5 + 0{,}125\ (1{,}5 + $$
$$+ 1{,}89258 - 0{,}25) = 1{,}89282.$$

$$y_1^{(4)} = y_0 + \frac{h}{2}(f(x_0,\ y_0) + f(x_1,\ y_1^{(2)})) = 1{,}5 + 0{,}125\ (1{,}5 + $$
$$+ 1{,}89282 - 0{,}25) = 1{,}89285.$$

Сўнгги икки яқинлашишда тўртта рақам устма-уст тушмоқда. Шунинг учун яхлитлаб,

$$y_1 \approx 1{,}8929$$

деб олиш мумкин.

Яна (21.4) ва (21.5) формулалардан фойдаланиб, қуйидагиларни ҳисоблаймиз:

$$y_2^{(0)} = y_1 + hf(x_1,\ y_1) = 1{,}8929 + 0{,}25\,(1{,}8929 - 0{,}25) = 2{,}3036,$$

$$y_2^{(1)} = y_1 + \frac{h}{2}\,(f(x_1,\ y_1) + f(x_2,\ y_2^{(0)})) = 1{,}8929 + 0{,}125\ \ (1{,}6429 + \\ + 2{,}3036 - 0{,}5) = 2{,}3237;$$

$$y_2^{(2)} = y_1 + \frac{h}{2}\,(f(x_1,\ y_1) + f(x_2,\ y_2^{(1)})) = 1{,}8929 + 0{,}125\,(1{,}6429 + \\ + 2{,}3237 - 0{,}5) = 2{,}32622$$

$$y_2^{(3)} = y_1 + \frac{h}{2}\,(f(x_1,\ y_1) + f(x_2,\ y_2^{(1)}) = 1{,}8929 + 0{,}125\,(1{,}6129 + \\ + 2{,}32622 - 0{,}5) = 2{,}32654.$$

$$y_2^{(4)} = y_1 + \frac{h}{2}\,(f(x_1,\ y_1) + f(x_2,\ y_2^{(3)})) = 1{,}8929 + 0{,}125\ \ (1{,}6429 + \\ + 2{,}32654 - 0{,}5) = 2{,}32658.$$

Итерацияни тўхтатиш ва

$$y_2 \approx 2{,}3266$$

деб қабул қилиш мумкин.

(21. 4) ва (21. 5) формулаларни қўллашни давом эттириб, берилган тенгламанинг ечимини ҳосил қиламиз. Ҳисоблаш натижаларини 3.29-жадвалга жойлаштирамиз.

3. 29-жадвал

i	x_i	y_i	$y_{i+1}^{(0)}$	$y_{i+1}^{(1)}$	$y_{i+1}^{(2)}$	$y_{i+1}^{(3)}$	$y_{i+1}^{(4)}$	y_{i+1}
0	0	1,5000	1,875	1,89062	1,89258	1,89282	1,89285	1,8929
1	0,25	1,8929	2,3036	2,3237	2,32622	2,32654	2,32658	2,3266
2	0,50	2,3266	2,78325	2,80908	2,81231	2,81271	2,81276	2,8128
3	0,75	2,8128	3,3285	3,36171	3,36586	3,3664	3,36645	3,3664
4	1,00	3,3664	3,9580	4,0007	4,00603	4,0067	4,00679	4,0068
5	1,25	4,0068	4,6960	4,7509	4,75776	4,75870	4,75872	4,7587
6	1,50	1,7587						

22- §. Рунге — Кутт усули

Эйлер усули бошланғич шартлари билан берилган дифференциал тенгламани (Коши масаласи) сонли ечишнинг энг содда ва биринчи тартибли аниқликдаги усулидир.

Рунге — Кутт усули юқори аниқликдаги усуллардан биридир.
$[x_0, x]$ кесмада

$$y(x_0) = y_0 \tag{22.1}$$

бошланғич шартлари билан берилган

$$y' = f(x, y) \tag{22. 2}$$

тенгламанинг сонли ечимини топиш талаб қилинсин.

Бу кесмани

$$x_i = x_0 + ih,$$

(бу ерда $i = \overline{1, n}$ ва $h = \dfrac{x - x_0}{n}$ интеграллаш қадами),

нуқталар билан n та тенг бўлакка бўламиз.

Рунге — Кутт усулининг моҳияти изланаётган y_{i+1} қийматларни

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{s=1}^{q} A_s k_s^i$$

кўринишда излашдан иборат бўлиб, бу ерда

$$k_1^i = hf(x_i, y_i),$$

$$k_2^i = hf\,(x_i + \alpha_2 h;\ y_i + \beta_2 h_1),$$

$$k_3^i = hf\,(x_i + \alpha_3 h;\ y_i + \beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2),$$

$$k_4^i = hf\,(x_i + \alpha_4 h;\ y_i + \beta_{41} k_1 + \beta_{42} k_2 + \beta_{43} k_3),$$

$$k_q^i = hf\,(x_i + \alpha_q h;\ y_i + \beta_{q1} k_1 + \qquad + \beta_{q,\,q-1}\, k_{q-1}),$$

A_1, A_2, $\quad A_q$, α_2, $\quad \alpha_q$, β_{21} $\quad \beta_{q,\,q-1}$ — бирор параметрлар.

Рунге — Кутт усули ёрдамида турли тартибли аниқликдаги схемаларин тузиш мумкин. Масалан, $q - 1$, $A = 1$ да ушбу

$$y_{i+1} = y_i + hf\,(x_i;\ y_i)$$

биринчи тартибли аниқликдаги Рунге — Кутт усулига эга бўламиз. Бу усул бизга Эйлернинг синиқ чизиқлар усули номи билан маълум [(21. 1) формула]. Шунга ўхшаш

$$q = 2,\quad A_1 = A_2 = \frac{1}{2},\ \alpha_2 = 1,\ \beta_{21} = 1$$

да иккинчи тартибли аниқликдаги Рунге — Кутт усулига эга бўламиз, яъни

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\,(f\,(x_i,\ y_i) + f\,(x_{i+1},\ y_i) + hf\,(x_i,\ y_i)\ )$$

Бу эса бизга Эйлер — Кошининг такомиллаштирилган усули номи билан маълум [(21. 3) формула].

Шундай қилиб, q ни ва параметрларни танлаш йўли билан турли аниқликдаги ҳисоблаш формулаларини ҳосил қилиш мумкин:

Рунге — Куттнинг ушбу

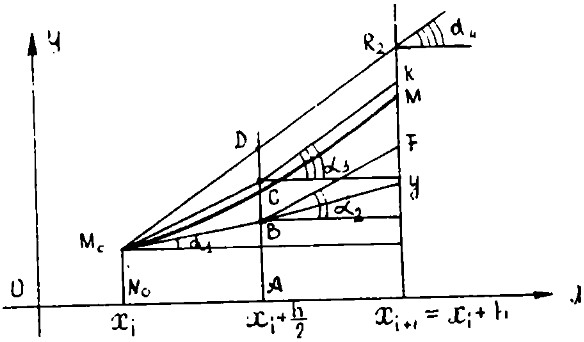
$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1^i + 2k_2^i + 2k_3^i + k_4^i), \quad i = 0, \overline{n-1} \qquad (22.3)$$

тўртинчи тартибли аниқликдаги схемаси кенг қўлланилади, бу ерда

$$\begin{aligned} k_1^i &= hf\,(x_i,\ y_i), \\ k_2^i &= hf\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3^i &= hf\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{k_2}{2}\right), \\ k_4^i &= hf\,(x_i + h,\ y_i + k_3) \end{aligned} \qquad (22.4)$$

k_1^i, k_2^i, k_3^i, k_4^i сонлар геометрик маънога эга.

Айтайлик 3. 19- шаклдаги M_0CM_1 чизиқ (22. 1) бошланғич шартли (22. 2) дифференциал тенгламанинг ечимини ифодаласин. Бу эгри чизиқнинг C нуқтаси Oy ўққа параллел бўлган ва $[x_i,\ x_{i+1}]$ кесмани тенг иккига бўладиган тўғри чизиқда ётади, B ва L эса эгри чизиққа M_0 нуқтада ўтказилган уринманинг AC ва N_1M_1 ординаталар билан кесишиш нуқталари. У ҳолда k_1 сон M_0 нуқтада M_0CM_1 эгри чизиққа ўтказилган уринманинг h кўпайтувчи қадар аниқликдаги бурчак коэффициенти, яъни $k_1^i = hy'_i = hf\,(x_i,\ y_i)$.



3.19- шакл

B нуқта

$$x = x_i + \frac{h}{2},$$

$$y = y_i + \frac{k_1}{2}$$

координаталарга эга, яъни

$$B\left(x_i+\frac{h}{2},\ y_i+\frac{k_1}{2}\right).$$

Демак, k_2 сон интеграл эгри чизиққа B нуқтада ўтказилган уринманинг h кўпайтувчи аниқлигидаги бурчак коэффициенти (BF — бу уринманинг кесмаси).

M_0 нуқта орқали BF кесмага параллел тўғри чизиқ ўтказилади, у ҳолда D нуқта $x=x_i+\frac{h}{2}$, $y=y_i+\frac{k_2}{2}$ координаталарга эга бўлади, яъни:

$$D\left(x_i+\frac{h}{2},\ y_i+\frac{k_2}{2}\right).$$

Демак, k_3^i сон интеграл эгри чизиққа D нуқтада ўтказилган уринманинг h кўпайтувчи аниқлигидаги бурчак коэффициенти (DR_1 — бу уринманинг кесмаси).

Ниҳоят, M_0 нуқта орқали DR_1 га параллел тўғри чизиқ ўтказамиз, у M_1N_1 давомини $R_2(x_i+h,\ y_i+k_3^i)$ нуқтада кесиб ўтади. У ҳолда k_4^i сон интеграл эгри чизиққа R_2 нуқтада ўтказилган уринманинг h кўпайтувчи аниқлигидаги бурчак коэффициенти бўлади.

3. 19-шаклда α_1, α_2, α_3, α_4 шу k_1^i, k_2^i, k_3^i, k_4^i бурчак коэффициентларга мос бурчаклар.

Рунге — Кутт усули бўйича ҳисоблашни ушбу схемага жойлаштириб амалга ошириш қулай бўлади (3. 30- жадвал).

3.30-жадвал

i	x	y	$k_i=hf(x,y)$	Δy
0	x_0	y_0	$k_1^{(0)}$	$k_1^{(0)}$
	$x_0+\frac{h}{2}$	$y_0+\frac{k_1^{(0)}}{2}$	$k_2^{(0)}$	$2k_2^{(0)}$
	$x_0+\frac{h}{2}$	$y_0+\frac{k_2^{(0)}}{2}$	$k_3^{(0)}$	$2k_3^{(0)}$
	x_0+h	$y_0+k_3^{(0)}$	$k_4^{(0)}$	$k_4^{(0)}$
1				$\frac{1}{6}\sum=\Delta y_0$
	x_1	y_1	$k_1^{(1)}$	$k_1^{(1)}$

Мисол. $y(0)=1$ бошланғич шарт билан берилган

$$y'=x+y$$

дифференциал тengламанинг [0,05] кесмадаги қийматини $h=0,1$ деб олиб, Рунге — Кутт усули билан ҳисобланг.

Ечиш: Ҳисоблаш жараёнининг бошланишини кўрсатамиз. y_1 ни ҳисоблаймиз. Кетма-кет қуйидагиларга эга бўламиз:

$$k_1^{(0)} = hf(x_0,\ y_0) = 0,1\,(0+1) = 0,1;$$

$$k_2^{(0)} = hf\left(x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = 0,1\left(0 + \frac{0,1}{2} + 1 + \frac{0,1}{2}\right) = 0,11,$$

$$k_3^{(0)} = hf\left(x_0 + \frac{h}{2},\quad y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = 0,1\left(0 + \frac{0,1}{2} + 1 + \frac{0,11}{2}\right) = 0,1105;$$

$$k_4^{(0)} = hf(x_0 + h,\ y^0 + k_3) = 0,1\,(0 + 0,1 + 1 + 0,1105) = 0,12105.$$

3.31-жадвал

i	x	y	$k = 0,1\,(x+y)$	Δy
0	0 0,05 0,05 0,1	1 1,05 1,055 1,1105	0,1 0,11 0,1105 0,1210	0,1000 0,2200 0,2210 0,1210
				$\frac{1}{6}\cdot 0,6620 = 0,1103$
1	0,1 0,15 0,15 0,2	1,1103 1,1708 1,1763 1,2429	0,1210 0,1321 0,1326 0,1443	0,1210 0,2642 0,2652 0,1443
				$\frac{1}{6}\cdot 0,7947 = 0,1324$
2	0,2 0,25 0,25 0,3	1,2427 1,3149 1,3209 1,3998	0,1443 0,1565 0,1571 0,1700	0,1443 0,3130 0,3142 0,1700
				$\frac{1}{6}\cdot 0,9415 = 0,1569$
3	0,3 0,35 0,35 0,4	1,3996 1,4846 1,4904 1,5836	0,1700 0,1835 0,1840 0,1984	0,1700 0,3670 0,3680 0,1984
				$\frac{1}{6}\cdot 1,1034 = 0,1840$
4	0,4 0,45 0,45 0,5	1,5836 1,6828 1,6902 1,7976	0,1984 0,2133 0,2140 0,2298	0,1984 0,4266 0,4280 0,2298
				$\frac{1}{6}\cdot 1,2828 = 0,2138$
5	0,5	1,7974		

Бу ердан:

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(0,1 + 0,11 + 0,1105 + 0,12105) = 0,1103.$$

Демак,

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0,1103 = 1,1103.$$

Кейинги ҳисоблаш натижалари 267-бетдаги 3.31-жадвалда келтирилган. Шундай қилиб,

$$y(0,5) = 1,7974.$$

Солиштириш учун

$$y = 2e^x - x - 1$$

аниқ ечимни келтирамиз, бундан

$$y(0,5) = 2\sqrt{e} - 1,5 = 1,79744$$

Рунге — Кутт усули, ўзининг сермеҳнатлигига қарамасдан, дифференциал тенгламаларни ЭҲМда сонли ечишда кенг қўлланилади.

23-§. Иккинчи тартибли оддий дифференциал тенглама учун чизиқли чегаравий масалани ечишнинг «прогонка», коллокация ва Галеркин усуллари

23.1. Чегаравий масалада, оддий дифференциал тенглама учун Коши масаласидан фарқли ўлароқ, изланаётган функциянинг қиймати (ёки функция ва унинг ҳосиласи комбинациясининг қиймати) битта нуқтада эмас, балки ечимни аниқлаш талаб этилаётган кесмани чегаралаб турган иккита нуқтада берилади.

Иккинчи тартибли

$$F(x, y, y', y'') = 0 \qquad (23.1)$$

оддий дифференциал тенглама учун чегаравий масалани ечишни кўриб чиқамиз. (23.1) тенглама учун энг содда икки нуқтали чегаравий масала қуйидагича қўйилади: $[a, b]$ кесманинг ичида (23.1) тенгламани, кесманинг охирларида эса

$$\begin{cases} \varphi_1(y(a), y'(a)) = 0, \\ \varphi_2(y(b), y'(b)) = 0 \end{cases} \qquad (23.2)$$

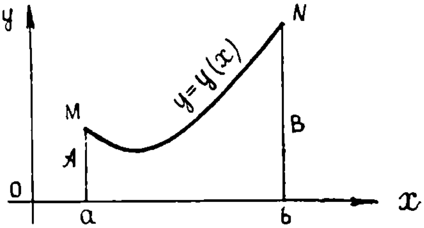
чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $y = y(x)$ функцияни топиш талаб этилади. (23.1) тенглама учун икки нуқтали чегаравий масаланинг баъзи турларини кўриб чиқамиз.

Масалан, иккинчи тартибли

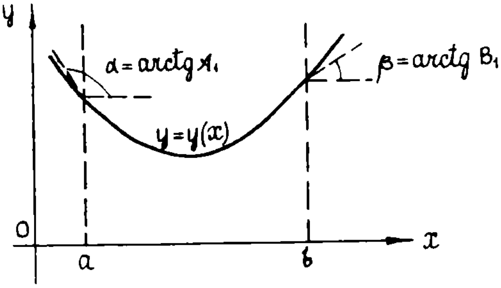
$$y'' = f(x, y, y') \qquad (23.3)$$

дифференциал тенглама $y(a) = A$, $y(b) = B$ $(a < в)$ чегаравий шартлар билан берилган, яъни изланаётган $y = y(x)$ функциянинг $[a, b]$ кесманинг $x = a$ ва $x = b$ чегаравий нуқталаридаги қийматлари маълум бўлсин. Бу ҳолда (23.3) тенгламанинг ечими геометрик нуқтаи назардан берилган $M(a, A)$ ва $N(b, B)$ нуқталардан ўтувчи $y = y(x)$ интеграл эгри чизиқдан иборат бўлади (3.20-шакл).

Энди (23.3) тенглама учун изланаётган функция ҳосиласининг қийматлари чегаравий нуқталарда маълум бўлсин, яъни $y'(a) = A_1$, $y'(b) = B_1$. Бу ҳолда (23.3) геометрик нуқтаи назардан тенгламанинг ечими $x=a$ ва $x = b$ тўғри чизиқларни мос равишда $\alpha=\mathrm{arctg}\,A_1$, $\beta=\mathrm{arctg}\,B_1$ бурчаклар остида кесиб ўтувчи интеграл эгри чизиқдан иборат бўлади (3.21- шакл).

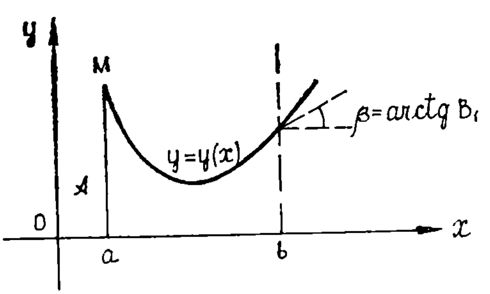


3.20- шакл



3.21 - шакл

Ниҳоят, (23.3) тенглама учун бир чегаравий нуқтада изланаётган функциянинг қиймати $y(a) = A$, иккинчи чегаравий нуқтада бу функция ҳосиласининг қиймати $y'(B)=B_1$ маълум бўлсин. Бундай масала *аралаш чегаравий масала* деб аталади. Бу ҳолда (23.3) тенгламанинг ечими геометрик нуқтаи назардан $M(a, A)$ нуқтадан ўтадиган ва $x=b$ тўғри чизиқни $\beta = \mathrm{arctg}\,B_1$ бурчак остида кесадиган $y = y(x)$ интеграл эгри чизиқдан иборат бўлади (3.22- шакл). Агар дифференциал



3.22- шакл

тенглама ва унинг чегаравий шартлари чизиқли бўлса, у ҳолда бундай масала *чизиқли чегаравий масала* деб аталади ҳамда (23.1) дифференциал тенглама ва (23.2) чегаравий шартлар қуйидагича ёзилади:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{23.4}$$

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = \gamma_1, \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = \gamma_2, \end{cases} \tag{23.5}$$

бу ерда $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ — шу $[a, b]$ кесмада маълум бўлган узлуксиз функциялар; α_0, α_1, β_0, β_1, γ_1 γ_2 — берилган ўзгармас сонлар, шу билан бирга

$$|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0 \text{ ва } |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0.$$

Агар $a \leqslant x \leqslant b$ да $f(x) = 0$ бўлса, тенглама *бир жинсли*, акс ҳолда *бир жинсли бўлмаган* тенглама деб аталади.

Агар $\gamma_1 = 0$ ва $\gamma_2 = 0$ бўлса, у ҳолда мос чегаравий шарт *бир жинслилик шарти* деб аталади.

Агарда дифференциал тенглама ҳам, чегаравий шартлар ҳам бир жинсли бўлса, у ҳолда чегаравий масала *бир жинсли масала* деб аталади.

23.2. (23.4) чизиқли дифференциал тенглама (23.5) икки нуқтали чизиқли чегаравий шартлар билан берилган бўлсин.

Бу чегаравий масалани ечишнинг энг содда усулларидан бири уни чекли айирмали тенгламалар системасига келтиришдан иборат (чекли айирмалар усули). Бунинг учун $[a, b]$ кесмани h узунликдаги n та тенг бўлакка бўламиз, бу ерда $h = \frac{b-a}{n}$ — қадам.

Бўлиниш нуқталари $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_i = x_0 + ih$ $(i = \overline{0, n})$ абсциссаларга эга. $y = y(x)$ функциянинг ва унинг $y' = y'(x)$, $y'' = y''(x)$ ҳосилаларининг x_i бўлиниш нуқталаридаги қийматларини мос равишда $y_i = y(x_i)$, $y'_i = y'(x_i) y''_i = y''(x_i)$ орқали белгилаймиз. Яна $p_i = p(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $f_i = f(x_i)$ белгилашларни ҳам киритамиз. $[a, b]$ кесманинг ҳар бир x_i ички нуқтасида $y'(x_i)$ ва $y''(x_i)$ ҳосилаларни тақрибан

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \qquad y''_i = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2} \tag{23.6}$$

чекли айирмали нисбатлар билан алмаштирамиз, чегаравий $x_0 = a$ ва $x_n = b$ нуқталар учун эса

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{h}, \quad y'_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} \tag{23.7}$$

деб оламиз. (23.6) ва (23.7) формулалардан фойдаланиб, (23.6) тенгламани ва (23.6) чегаравий шартларни ушбу тенгламалар системаси билан тақрибий алмаштирамиз:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+2}-2y_{i+2}+y_i}{h_1}+p_i\dfrac{y_{i+1}-y_i}{h}+q_iy_i=f_i, \\ \alpha_0y_0+\alpha_1\dfrac{y_1-y_0}{h}=\gamma_1, \\ \beta_0y_0+\beta_1\dfrac{y_n-y_{n-1}}{h}=\gamma_2. \end{cases} \tag{23.8}$$

Шундай қилиб, $n+1$ та номаълумли $n+1$ та алгебраик тенглама системасига келдик. Бундай системани ечиш натижасида изланаётган функциянинг тақрибий қийматлари жадвалини ҳосил қиламиз.

Агар $y'(x_i)$ ва $y''(x_i)$ ни

$$y'_i=\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}, \quad y''_i=\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}$$

марказий чекли айирмалар билан алмаштирилса, у ҳолда яна ҳам аниқроқ формулаларни ҳосил қилиш мумкин. Ҳосилалар учун чегаравий нуқталарда (23.7) формулалардан фойдаланиш мумкин. Бу ҳолда ушбу системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2}+p_i\dfrac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}+q_iy_i=f_i, \\ x_0y_0+\alpha_1\dfrac{y_1-y_0}{h}=\gamma_1, \\ \beta_0y_n+\beta_1\dfrac{y_n-y_{n-1}}{h}=\gamma_2, \quad i=\overline{0,\ n-1}. \end{cases} \tag{23.9}$$

1-мисол. Ушбу чегаравий масаланинг ечимини чекли айирмалар усули билан 0,001 гача аниқликда топинг:

$$\begin{cases} y''-xy'+2y=x+1, \\ y(0{,}9)-0{,}5y'(0{,}9)=2, \\ y(1{,}2)=1. \end{cases}$$

Ечиш. [0,9; 1,2] кесмани $h=0{,}1$ қадам билан қисмларга бўламиз. У ҳолда

$$x_0=0{,}9; \quad x_1=1{,}0; \quad x_2=1{,}1; \quad x_3=1{,}2$$

абсциссали тўртта нуқта ҳосил қилинади.

Берилган тенгламани $x_1=1{,}0$ ва $x_2=1{,}1$ ички нуқталарда

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}-x_i\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}+2y_i=x_i+1,\ (i=1,\ 2) \tag{23.10}$$

чекли айирмали тенглама билан алмаштирамиз. Чегаравий шартлардан фойдаланиб, чегаравий нуқталарда чекли айирмали

$$\begin{cases} y_0+0{,}5\dfrac{y_1-y_0}{h}=2, \\ y_3=1 \end{cases} \tag{23.11}$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз.

Ўхшаш ҳадларни ихчамлаб ва $h = 0{,}1$ ни ҳисобга олиб, (23.10) ва (23.11) тенгламаларни мос равишда қуйидагича ёзиб оламиз:

$$y_{i-1}(2+0{,}1x_i) - 4y_i(1-0{,}01) + y_{i+1}(2-0{,}1x_i) = 0{,}02x_i,$$
$$1{,}2y_0 - y_1 = 0{,}4,$$
$$y_3 = 1, \quad i = \overline{1, 2}.$$

Берилган масала

$$\begin{cases} 1{,}2y_0 - y_1 = 0{,}4, \\ 2{,}1y_0 - 3{,}96y_1 + 1{,}9y_2 = 0{,}04, \\ 2{,}11y_1 - 3{,}96y_2 + 1{,}89y_3 = 0{,}042 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечишга келтирилади. Системани ечиб,

$$y_0 = 1{,}406; \; y_1 = 1{,}287; \; y_3 = 1{,}149; \; y_3 = 1{,}000$$

ни ҳосил қиламиз.

23.3. Иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларга чекли айирмалар усулини татбиқ этилганда уч ҳадли чизиқли алгебраик тенгламалар системаси ҳосил бўлиб, уларнинг ҳар бири учта қўшни номаълумни ўз ичига олади. Бундай системани ечиш учун «прогонка» усули деб номланувчи махсус усул мавжуд.

(23.9) чекли-айирмали тенгламалар системаси тегишли алмаштиришлардан сўнг

$$y_{i+1} + m_i y_i + n_i y_{i-1} = \bar{f}_i h^2, \tag{23.12}$$

$$\begin{cases} \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \dfrac{y_i - y_0}{h} = \gamma_1, \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} = \gamma_2, \; i = \overline{1, n-1} \end{cases} \tag{23.13}$$

кўринишга келтирилади, бу ерда

$$m_i = -\frac{2 - q_i h^2}{1 + \frac{p_i}{2}h}, \quad n_i = \frac{1 - \frac{p_i}{2}h}{1 + \frac{p_i}{2}h}, \quad \bar{f}_i = \frac{f_i}{1 + \frac{p_i}{2}h} \tag{23.14}$$

(23.12) — (23.13) чизиқли система y_0, y_1, $, y_n$ номаълумларга нисбатан $(n+1)$ та биринчи даражали тенгламадан иборат. Бу системани одатдаги усуллар билан ҳам ечиш мумкин, аммо биз бу ерда «прогонка» усули билан ечишни кўрсатамиз. (23.12) тенгламани y_i га нисбатан ечсак,

$$y_i = \frac{\bar{f}_i}{m_i} h^2 - \frac{1}{m_i} y_{i+1} - \frac{n_i}{m_i} y_{i-1} \tag{23.15}$$

га эга бўламиз. (23.12) — (23.13) тўлиқ система ёрдамида (23.15) системадан y_{i-1} номаълум йўқотилган, деб фараз қилайлик У ҳолда бу тенглама

$$y_i = c_i(d_i - y_{i+1}) \tag{23.16}$$

кўринишни олади, бу ерда c_i, d_i, $i = \overline{1, n-1}$ — бирор коэффициентлар. Бундан

$$y_{i-1} = c_{i-1}(d_{i-1} - y_i)$$

эканлиги равшан.

Бу ифодани (23.12) га қўйсак,

$$y_{i+1} + m_i y_i + n_i c_{i-1}(d_{i-1} - y_i) = \bar{f}_i h^2,$$

ва, демак,

$$y_i = \frac{(\bar{f}_i h^2 - n_i c_{i-1} d_{i-1}) - y_{i+1}}{m_i - n_i c_{i-1}}. \tag{23.17}$$

(23.16) ва (23.17) формулаларни таққослаб, c_i ва d_i коэффициентларни аниқлаш учун ушбу формулаларни ҳосил қиламиз:

$$c_i = \frac{1}{m_i - n_i c_{i-1}}, \quad d_i = \bar{f}_i h^2 - n_i c_{i-1} d_{i-1} \, (i = \overline{1, n-1}). \tag{23.18}$$

Энди c_0 ва d_0 ни аниқлаймиз. Биринчи чегаравий шарт (23.13) дан

$$y_0 = \frac{\gamma_1 h - \alpha_1 y_1}{\alpha_0 h - \alpha_1}$$

ни ҳосил қиламиз. Иккинчи томондан, $i = 0$ бўлганда (23.16) дан

$$y_0 = c_0(d_0 - y_1) \tag{23.19}$$

га эга бўламиз. Сўнгги икки тенгликни таққослаб,

$$c_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0 h - \alpha_1}, \quad d_0 = \frac{\gamma_1 h}{\alpha_1} \tag{23.20}$$

ни топамиз. (23.18), (23.20) формулаларга асосан c_i, d_i, $i = \overline{1, n-1}$ коэффициентлар c_{n-1} ва d_{n-1} гача (улар ҳам киради) кетма-кет топилади (тўғри йўл).

Тескари йўл y_n ни аниқлашдан бошланади. (23.13) даги иккинчи чегаравий шартдан ва (23.16) формуладан $i = n - 1$ деб, ушбу тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} \beta_0 y_0 + \beta_1 \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} = \gamma_2, \\ y_{n-1} = c_{n-1}(d_{n-1} - y_n). \end{cases} \tag{23.21}$$

Буни y_n га нисбатан ечсак,

$$y_n = \frac{\gamma_2 h + \beta_1 c_{n-1} d_{n-1}}{\beta_0 h + \beta_1 (c_{n-1} + 1)} \qquad (23.22)$$

га эга бўламиз.

Энди (23.16) формула бўйича кетма-кет y_{n-1}, y_{n-2}, , y_0 ларни топамиз.

Назорат қилиш мақсадида биринчи чегаравий шартнинг бажарилишини текшириб кўриш мумкин.

Ҳисоблашларни жадвал кўринишида жойлаштириш қулай бўлади (3.32-жадвал).

3.32-жадвал

i	0	1	2		$n-2$	$n-1$	n
c_i	c_0 (23. 20) дан	c_1	c_2		c_{n-2}	c_{n-1}	
d_i	d_0 (23.20) дан	d_1	d_2		d_{n-2}	d_{n-1}	
x_i	$x_0 = a$	x_1	x_2		x_{n-2}	x_{n-1}	$x_n = b$
y_i	y_0	y_1	y_2		y_{n-2}	y_{n-1}	y_n (23-22) дан

2-мисол. Ушбу

$$y'' = x + y, \qquad (23.23)$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0 \qquad (23.24)$$

чегаравий масалани «прогонка» усули билан ечинг.

Ечиш. $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ ларга эгамиз. $h = 0{,}1$ деб оламиз ҳамда (23.23) тенглама ва (23.24) чегаравий шартлардан тегишли

$$y_{i+1} + m_i y_i + n_i y_{i-1} = \bar{f}_i h^2, \quad i = \overline{1, n-1}$$

$$y_0 = 0, \quad y_1 = 0$$

чекли-айирмали тенгламаларга ўтамиз, бу ерда $m_i = -2 - h^2$, $n_i = 1$, $\bar{f}_i = x_i = ih$.

(23.20) ва (23.18) формулаларга асосан

$$c_0 = 0, \; c_0 d_0 = \gamma_1,$$

бундан

$$c_1 = \frac{1}{m} = -0{,}498; \; d_1 = \bar{f}_1 h^2 - n_1 \gamma_1 = 0{,}001$$

(23.18) формулалар бизнинг ҳолда

$$c_i = \frac{1}{-2-h^2-c_{i-1}}, \quad d_i = ih^3 - c_{i-1}d_{i-1}, \quad i = \overline{1,9}$$

ни беради.

c_i ва $d_i (i = \overline{1,9})$ нинг топилган қийматлари жадвалнинг биринчи иккита сатрида ёзилади. Сўнгра (23.16) формуладан ва маълум $y_{10} = 0$ қийматдан фойдаланиб, y_9, y_8, y_1 ни ҳисоблаймиз. Таққослаш мақсадида жадвалнинг сўнгги сатрида $\bar{y} = \frac{2e}{e^2-1} \times \times \operatorname{sh} x - x$ аниқ ечимнинг қийматлари берилган (3.33-жадвал).

3.33-жадвал

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_i	0	−0,498	−0,662	−0,878	− 0,890	−0,900	−0,908	−0,915	−0,921	−0,926	—
d_i	—	0,001	0,002	0,004	0,008	0,012	0,016	0,022	0,028	0,035	—
y_i	0	−0,025	− 0,049	− 0,072	−0,078	−0,081	−0,078	−0,070	−0,055	0,032	0
$\bar{y}_i$	0	−0,015	−0,029	−0,041	−0,050	−0,057	0,058	−0,054	−0,044	−0,026	0

23.4. Чегаравий масаланинг тақрибий қийматини аналитик ифода шаклида топиш имконини берадиган усул билан танишамиз.

Ушбу чизиқли

$$L[y] \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{23.25}$$

дифференциал тенгламани ва

$$\begin{cases} \Gamma_a[y] \equiv \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = \gamma_1, \\ \Gamma_b[y] \equiv \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = \gamma_2. \end{cases} \tag{23.26}$$

бунда $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$, $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$ чизиқли чегаравий шартларни қаноатлантирадиган $y = y(x)$ функцияни аниқлаш талаб этилаётган бўлсин.

Шундай қилиб бирор чизиқли эркли

$$u_0(x), \; u_1(x), \qquad u_n(x) \tag{23.27}$$

функциялар (базис функциялар) тўпламини танлаймизки, улардан $u_0(x)$ функция бир жинсли бўлмаган чегаравий шартларни қаноатлантирсин, яъни

$$\Gamma_a[u_0] = \gamma_1, \quad \Gamma_b[u_0] = \gamma_2 \tag{23.28}$$

бўлиб, қолган $u_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ функциялар эса мос бир жинсли чегаравий шартларни қаноатлантирсин:

$$\Gamma_a[u_i] = 0, \; \Gamma_b[u_i] = 0, \; i = \overline{1, n}. \tag{23.29}$$

Агар (23.26) чегаравий шартлар бир жинсли ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0$) бўлса, у ҳолда $u_0(x) \equiv 0$ деб олиб,

$$u_i(x), \quad i=\overline{1,\, n}$$

функциялар системасинигина қараш мумкин.

(23.25) — (23.26) чегаравий масаланинг ечимини базис функцияларнинг чизиқли комбинацияси

$$y = u_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x) \tag{23.30}$$

шаклида излаймиз. Бу ҳолда y функция равшанки, (23.26) чегаравий шартларни қаноатлантиради. Ҳақиқатан ҳам, чегаравий шартларнинг чизиқли эканлигига асосан,

$$\Gamma_a[y] = \Gamma_a[u_0] + \sum_{i=1}^{n} c_i \Gamma_a[u_i] = \gamma_1 + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot 0 = \gamma_1$$

га эга бўламиз. Шунга ўхшаш, $\Gamma_b[y] = \gamma_2$.

(23.30) ифодани (23.25) тенгламага қўйиб, ***уйғун бўлмаган функция*** деб аталувчи

$$\begin{aligned} R(x,\ c_1,\ c_2, \qquad c_n) &\equiv L[y] - f(x) = \\ &= L[u_0] - f(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i L[u_i], \end{aligned} \tag{23.31}$$

функцияга эга бўламиз.

Агар $c_i\ (i=\overline{1,\, n})$ ларнинг бирор танланишида

$$a \leqslant x \leqslant b \text{ да } R(x,\ c_1,\ c_2, \qquad c_n) \equiv 0$$

тенглик бажарилса, у функция (23.25) — (23.26) чегаравий масаланинг аниқ ечими бўлади.

Бироқ c_i коэффициентларни бундай муваффақият билан танлаш, умуман айтганда, мумкин эмас. Шу сабабли бундай натижа билан чекланилади: $R(x, c_1, c_2 \quad , c_n)$ функция $[a, b]$ даги берилган етарлича зич нуқталар системаси $x_1, x_2, \quad , x_n$ (коллокация нуқталари) да нолга айланиши талаб қилинади, бу нуқталарда, шундай қилиб, (23.25) дифференциал тенглама аниқ қаноатлантирилади; коллокация нуқталари сифатида, масалан, $[a, b]$ кесмани тенг бўлакларга бўлувчи нуқталар танланиши мумкин. Натижада ушбу

$$\begin{cases} R(x_1,\ c_1,\ c_2, \qquad c_n) = 0, \\ \qquad\qquad . \\ R(x_n,\ c_1,\ c_2 \qquad , c_n) = 0 \end{cases} \tag{23.32}$$

чизиқли тенгламалар системасини ҳосил қиламиз.

(23.32) система биргаликда бўлган ҳолда $c_1, c_2, \qquad c_n$ коэффициентларни одатдаги усуллар билан аниқлаш мумкин, шундан сўнг қаралаётган чегаравий масаланинг тақрибий ечими (23.22) формула билан топилади.

Чизиқли чегаравий масалани бундай ечиш усули *коллокация усули* деб аталади.

3-мисол. Ушбу чегаравий масалани коллокация усули билан ечинг:

$$\begin{cases} y'' + (1+x^2)y + 1 = 0, \\ y(1) = 0, \ y(-1) = 0. \end{cases} \tag{23.33}$$

Ечиш. Базис функциялар сифатида

$$u_n(x) = x^{2n-2}(1-x^2), \ n = 1, \ 2.$$

кўпҳадларни танлаймиз, улар чегаравий шартларни қаноатлантириши равшан:

$$u_n(1) = 0, \ u_n(-1) = 0.$$

Коллокация нуқталари сифатида

$$x_0 = 0, \ x_+ = \frac{1}{2}, \quad x_- = -\frac{1}{2}$$

ларни танлаймиз. Иккита базис функция билан чекланиб,

$$y = c_1(x - x^2) + c_2(x^2 - x^4)$$

деб оламиз. Буни (23.33) дифференциал тенгламага қўямиз:

$$R(x) = -2c_1 + c_2(2 - 12x^2) + (1+x^2)[c_1(1-x^2) + \\ + c_2(x^2 - x^4)] + 1 = 1 - c_1(1+x^4) + c_2(2 - 11x^2 - x^6). \tag{25.34}$$

Коллокация нуқталари

$$x_0 = 0, \ x_+ = \frac{1}{2}, \quad x_- = -\frac{1}{2}$$

да $R(x_0) = 0$, $R(x_+) = 0$, $R(x_-) = 0$. Бундан, (23.34) формуладан фойдаланиб, c_1 ва c_2 коэффициентларни аниқлаш учун ушбу чизиқли тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 1 - c_1 + 2c_2 = 0, \\ 1 - \frac{17}{16}c_1 - \frac{49}{64}c_2 = 0. \end{cases} \tag{23.35}$$

Бу системани ечиб,

$$c_1 = 0{,}957, \quad c_2 = -0{,}022$$

ни топамиз, демак, ушбу

$$y \approx 0{,}957(1-x^2) - 0{,}022(x^2 - x^4) = 0{,}957 - 0{,}979x^2 + 0{,}022x^4$$

тақрибий ечимга эга бўламиз.

Хусусан, $y(0) = 0{,}957$.

23.5. Галёркин усули.

Ушбу

$$L[y] \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{23.36}$$

чизиқли дифференциал тенглама ва

$$\Gamma_a] [y] \equiv \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = \gamma_1, \quad \Gamma_b [y] \equiv \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = \gamma_2 \quad (23.37)$$

берилган, бунда $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$ ва $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$.

Бирор тўла системанинг қисми бўлган базис функцияларнинг чекли системаси

$$u_0(x),\ u_1(x), \qquad ,\ u_n(x)$$

ни танлаймиз, бунда $u_0(x)$ функция бир жинсли бўлмаган чегаравий шартлар $\Gamma_a[u_0] = \gamma_1$, $\Gamma_b[u_0] = \gamma_2$ ни, $u_1(x)$, $\qquad u_n(x)$ функциялар эса

$$\Gamma_a[u_i] = \Gamma_b[u_i], \quad i = \overline{1, n}$$

бир жинсли чегаравий шартларни қаноатлантирсин.

Чегаравий масаланинг ечимини яна

$$y = u_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x) \qquad (23.38)$$

кўринишда излаймиз. Бу y функция u_i базис функцияларнинг танланишига кўра (23.37) чегаравий шартларни c_i коэффициентлар ихтиёрий танланганда ҳам қаноатлантиради. (23.38) ифодани (23.36) тенгламага қўйсак,

$$R(x,\ c_1,\ c_2, \qquad c_n) = L[u_0] + \sum_{i=1}^{n} c_i [u_i] - f(x)$$

оғишни беради. Аниқ ечим y учун $R \equiv 0$. Аниқ ечимга яқин бўлган тақрибий ечимни топиш учун c_i коэффициентларни шундай танлаймизки, R функция бирор маънода кичик бўлсин. Галёркин усулига кўра R ни $u_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ базис функцияларга ортогонал бўлишини талаб қиламиз. Бу эса $u_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ функциялар сони етарлича катта бўлганда R оғишнинг ўртача кичик бўлишини таъминлайди, бироқ бу ерда тақрибий ечимнинг аниқ ечимга қанчалик яқин эканлиги масаласи очиқ қолади.

$c_1,\ c_2, \qquad ,\ c_n$ коэффициентларни топиш учун R ва $u_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ функцияларнинг ортогоналлигидан фойдаланиб, ушбу чизиқли тенгламалар системасини тузамиз:

$$\begin{cases} \int\limits_a^b u_1(x) R(x,\ c_1,\ c_2, \qquad ,\ c_n)\, dx = 0, \\ \int\limits_a^b u_2(x) R(x,\ c_1,\ c_2, \qquad ,\ c_n)\, dx = 0, \\ \\ \int\limits_a^b u_n(x) R(x,\ c_2,\ c_2), \qquad ,\ c_n)\, dx = 0, \end{cases}$$

ёки батафсилроқ ёзилса,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \int_a^b u_i(x) L\,[u_i]\,dx = \int_a^b u_i(x) \left\{ f(x) - L\,[u_0] \right\} dx, \quad i = \overline{1,\, n}$$

4-мисол. $y(0) = 1$, $y(1) = 0$ чегаравий шартларни қаноатлантирадиган

$$y'' + xy' + y = 2x$$

тенгламанинг тақрибий ечимини Галёркин усули билан топинг.

Ечиш. Ушбу функцияларни базис функциялар сифатида танлаймиз:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 1 - x, \\ u_1(x) &= x(1 - x), \\ u_2(x) &= x^2(1 - x), \\ u_3(x) &= x^3(1 - x). \end{aligned}$$

Масаланинг тақрибий ечимини

$$y = (1 - x) + c_1 x (1 - x) + c_2 x^2 (1 - x) + c_3 x^3 (1 - x)$$

кўпҳад шаклида излаймиз. Буни берилган дифференциал тенгламанинг чап томонига қўйиб, ушбу оғишни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} R(x,\ c_1,\ c_2,\quad ,\ c_n) &= (1 - 4x) + c_1(-2 + 2x - 3x^2) + \\ &+ c_2(2 - 6x + 3x^2 - 4x^3) + c_3(6x - 12x^2 + 4x^3 - 5x^4). \end{aligned}$$

R функциянинг u_1, u_2, u_3 функцияларга ортогоналлик шартидан фойдаланиб, ушбу системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} \int_0^1 (x - x^2)\, R(x,\ c_1,\ c_2,\ c_3)\, dx = 0, \\ \int_0^1 (x^2 - x^3)\, R(x,\ c_1,\ c_2,\ c_3)\, dx = 0, \\ \int_0^1 (-x^4 + x^3)\, R(x,\ c_1,\ c_2,\ c_3)\, dx = 0. \end{cases}$$

Бу системага $R(x)$ нинг қийматини қўйиб ва интеграллаб, ушбуга эга бўламиз:

$$\begin{aligned} 133c_1 + 63c_2 + 36c_3 &= -70, \\ 140c_1 + 108c_2 + 79c_3 &= -98, \\ 264c_1 + 252c_2 + 211c_3 &= -210. \end{aligned}$$

Буни ечиб, $c_1 = -0{,}2090$, $c_2 = -0{,}7894$, $c_3 = 0{,}2090$ ни ҳосил қиламиз. Шу сабабли изланаётган ечим

$$y = (1 - x)(1 - 0{,}2090\,x - 0{,}7894x^2 + 0{,}2090x^3)$$

бўлади.

24- §. Математик физиканинг чегаравий масалаларини ечишнинг тўрлар усули. Дифференциал операторларни айирмали аппроксимациялаш. Схеманинг турғунлиги ҳақида тушунча. Ошкор ва ошкормас схемалар

24.1. Маълумки, китобнинг «Математик физика тенгламалари» бўлимида қаралган тўлқин тенгламаси ёки тор тебраниш тенгламаси (1.54), иссиқлик ўтказувчанлик (Фурье) тенгламаси, Лаплас тенгламалари (1.56) нинг ечимларини бир қийматли аниқлаш учун *бошланғич* ва *чегаравий шартлар* деб аталувчи қўшимча шартларнинг ҳам берилиши лозим. Лекин, кўпгина тенгламалар ечимларини аналитик шаклда олишнинг иложи йўқлиги сабабли уларни ечишда тақрибий ёки сонли усулларга мурожаат қилишга тўгри келади.

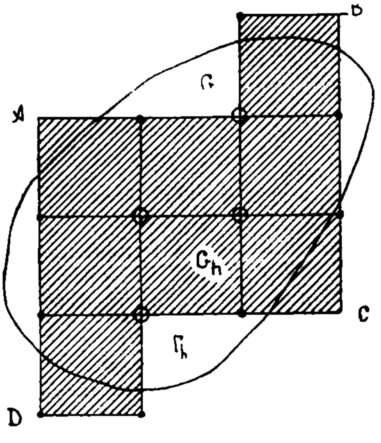
Биз ҳосилаларни айирмали аппроксимациялашга асосланган сонли усулларни кўриб чиқамиз. Бундай ёндашиш айирма усули, ёки чекли айирма усули ёки тўрлар усули деб аталади.

24.2. Тўрлар усулининг моҳияти қуйидагича. Айирмали схемани тузишда олдин берилган тенглама аргументларининг узлуксиз ўзгариш соҳаси G ни уларнинг дискрет ўзгариш соҳасн G_h тўрли соҳа (ёки оддий айтганда тўр) билан, яъни *тўр тугунлари* деб аталадиган $(x_i,\ y_j)$ нуқталар тўплами билан алмаштирилади. Тўр соҳа квадрат, тўғри тўртбурчак, учбурчак ва ҳоказо катаклардан иборат бўлиши мумкин. Тўрли соҳани танлаганда, унинг Γ_h контури берилган G соҳанинг Γ контурини иложи борича яхши аппроксимациялайдиган бўлиши керак.

Мисол сифатида h қадам билан квадрат тўр тузамиз:

$$x_i = x_0 + ih,\quad y_j = y_0 + jh;\quad i,\ j = \pm 1,\ \pm 2,$$

бунда тўрнинг $(x_i,\ y_j)$ тугунлари ё G соҳага тегишли ёки унинг чегарасидан h дан кичик бўлган масофада ётади. Тўр тугунлари ушбу кўринишларда бўлишлари мумкин: қўшни, ички ва чегаравий тугунлар.



3.23- шакл

Қўшни тугунлар бир- биридан координата ўқлари йўналиши бўйича тўр қадами h га тенг масофада ётади.

Ички тугунлар G соҳага, уларга қўшни бўлган тўртта тугун эса тўрга тегишли, акс ҳолда уларни чегаравий тугунлар деб аталади. Бунда чегаравий тугун бу тўрнинг қўшни ички тугунига эга бўлса, у *I тур чегаравий тугун* деб аталади; акс ҳолда *II тур чегаравий* тугунга эга бўламиз. 3.23-шаклда ички тугунлар очиқ доирачалар билан, I тур чегаравий нуқталар қора доирачалар билан белгиланган; A, B, C, D тугунлар II тур чегаравий тугунлардир. Ички тугунлар ва I тур чегаравий тугунларни *ҳисоблаш тугунлари* деб атаймиз. Энди изланаётган $u = u(x, y)$ функциянинг (x_i, y_j) тугундаги қийматини $u_{ij} = u(x_i, y_j)$ орқали белгилаймиз.

24.3. Айирмали схемани тузишда навбатдаги қадам $L[u]$ дифференциал операторни бирор айирмали ифода билан алмаштиришдан иборат. Бу операторларни 24. 1-бандда эслатиб ўтилган тенгламалар учун келтирамиз:

а) ушбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Лаплас тенгламасига мос чекли- айирмали тенгламани ҳосил қилиш учун

$$L[u] \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

дифференциал операторда хусусий ҳосилаларни ушбу формулалар бўйича алмаштириш керак:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h^2}(u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{1}{h^2}(u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}).$$

У ҳолда Лаплас дифференциал тенгламаси ҳар бир (x_i, y_j) нуқтада чекли- айирмали

$$Lu \equiv \frac{1}{h^2}(u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} - 4u_{\ ,j}) = 0 \quad (24.1)$$

тенглама билан аппроксимацияланади. Бундан u_{ij} ларнинг қийматларини ҳосил қиламиз:

$$u_{ij} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}), \quad (24.\ 2)$$

бу ерда (x_{i+1}, y_{j+1}) — ҳисоблаш нуқталари.

Агар берилган масала учун

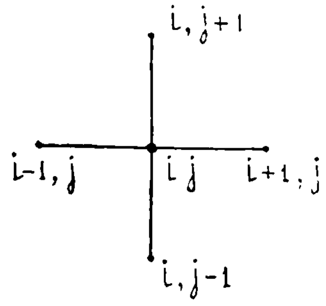
$$(x, y) \in \Gamma \text{ да } u(x, y) = \varphi(x, y)$$

чегаравий шарт берилган бўлса, у ҳолда тўрнинг I тур чегаравий нуқтасида

$$u_{i,j} \equiv u(x_i, y_j) = \varphi(x, y)$$

деб оламиз, бунда (x, y) шу Γ чегаранинг (x_i, y_j) чегаравий нуқтага энг яқин нуқтаси.

Ҳосил қилинган (24. 1) айирмали тенгламалар изланаётган функциянинг тўрнинг айрим тугунларидаги қийматларининг чизиқли комбинациясидан иборат. Айирмали схемани тузиш учун фойдаланиладиган тугунларнинг бундай конфигурацияси «қолип» (шаблон) деб аталади. Бизнинг ҳолда «қолип» бешта тугунга эга (беш нуқтали «қолип»). Бундай «қолип» «хоч» (крест) деб номланади (3. 24- шакл).



3.24- шакл

Шундай қилиб, (24. 1) чизиқли бир жинсли бўлмаган тенгламалар системасини ҳосил қиламиз, унда номаълумлар сони тенгламалар сонига (яъни тўрнинг ички тугунлари сонига) тенг. Бундай система ҳар доим биргаликда ва биргина ечимга эга. Уни ечиб, изланаётган $u = u(x, y)$ функциянинг G_h тўр соҳа тугунларидаги ечимларини ҳосил қиламиз.

1- мисол.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

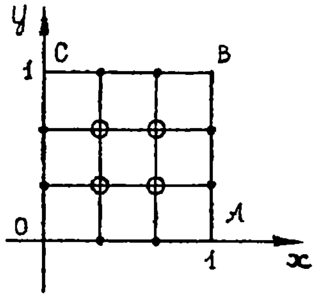
Лаплас тенгламаси учун $G = \{0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$ квадратда Дирихле масаласини қуйидаги чегаравий шартлар билан ечинг:

$$u(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x = 0 \text{ ва } 0 \leqslant y \leqslant 1 \text{ бўлса;} \\ 0, & \text{агар } y = 0 \text{ ва } 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ бўлса;} \\ \frac{1}{2} y(y+1), & \text{агар } x = 1 \text{ ва } 0 \leqslant y \leqslant 1 \text{ бўлса,} \\ \frac{1}{2} x(x+1), & \text{агар } y = 1 \text{ ва } 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Ечиш. $h = \frac{1}{3}$ қадам билан G_h тўрли соҳани тузамиз: $x_i = \frac{i}{3}$, $y_j = \frac{j}{3}$, $i, j = \overline{0, 3}$. O, A, B, C тугунлардан ташқари барча тугунлар ҳисоблаш тугунларидир (3. 25- шакл). Лаплас тенгламаси учун чекли айирмали (24. 2)

$$u_{ij} = \frac{1}{4} (u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}),$$

бу ерда $i, j = 1{,}2$ системага эгамиз. I тур чегаравий нуқталарда чегаравий шартлар ушбу кўринишда бўлади:



3.25- шакл

$$u_{0j} = u_{i0} = 0, \text{ агар } x = 0,\ 0<y<1 \text{ ва } y = 0,\ 0<x<1 \text{ бўлса},$$

$$u_{3j} = \frac{j\,(j+3)}{2\cdot 3^2}, \text{ агар } x = 1,\ 0<y<1 \text{ бўлса},$$

$$u_{i3} = \frac{i\,(i+3)}{2\cdot 3^2}, \text{ агар } y = 1,\ 0<x<1 \text{ бўлса},$$

бу ерда $i,\ j = \overline{1,\ 2}$.

Равшанлик учун чегаравий шартлар ва номаълум қийматларнинг (ҳисоблаш тугунларида) бошланғич жадвалини тузамиз (3.34-жадвал).

3. 34- жадвал

C	$u_{13} = 0222$	$u_{23} = 0{,}556$	B
$u_{02} = 0$	u_{12}	u_{22}	$u_{32} = 0{,}556$
$u_{01} = 0$	u_{11}	u_{21}	$u_{31} = 0{,}222$
0	$u_{10} = 0$	$u_{20} = 0$	A

Бу жадвалдан ва «хоч» қолипидан фойдаланиб, дастлабки (24. 2) тенгламалар системасини ёзамиз:

$$\begin{cases} u_{11} = \frac{1}{4}\,(0 + u_{21} + 0 + u_{12}), \\ u_{12} = \frac{1}{4}\,(0 + u_{22} + u_{11} + 0{,}222) \\ u_{21} = \frac{1}{4}\,(u_{11} + 0{,}222 + u_{22} + 0), \\ u_{22} = \frac{1}{4}\,(u_{12} + 0{,}556 + u_{21} + 0{,}556) \end{cases}$$

Тўртта номаълумли тўртта чизиқли бир жинсли бўлмаган тенгламалар системасини ҳосил қилдик (яъни номаълумлар сони ички тугунлар сонига тенг). Бу системани ечиб,

$$u_{10} = 0{,}084,\ u_{12} = u_{21} = 0{,}166,\ u_{22} = 0{,}362$$

ни ҳосил қиламиз.

б) Иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f\,(x,\ t)$$

га мос чекли-айирмали тенгламани ҳосил қилиш учун соддалаштириш мақсадида $a = 1$ деб оламиз ва

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

дифференциал операторни киритамиз ва унда хусусий ҳосилаларни ушбу формулалар бўйича чекли айирмалар билан алмаштирамиз:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{1}{\tau}\left(u_{i,\,j+1} - u_{ij}\right)$$

ёки

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{1}{\tau}\left(u_{i,\,j} - u_{i,\,j-1}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \frac{1}{h^2}\left(u_{i-1,\,j} - 2u_{i,\,j} + u_{i+1,\,j}\right),$$

бу ерда h — тўрнинг x координата бўйича қадами, τ — тўрнинг t координата бўйича қадами. Бундай аппроксимацияга мувофиқ равишда иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун ушбу иккита айирмали схема тузамиз:

$$Lu \equiv \frac{1}{\tau}\left(u_{i,\,j+1} - u_{ij}\right) - \frac{1}{h^2}\left(u_{i-1,\,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,\,j}\right) = f_{i,\,j} \qquad (24.3)$$

ёки

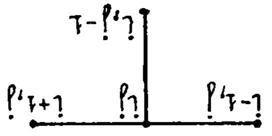
$$Lu \equiv \frac{1}{\tau}\left(u_{ij} - u_{i,\,j-1}\right) - \frac{1}{h^2}\left(u_{i-1,\,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,\,j}\right) = f_{ij}, \qquad (24.4)$$

Бу ерда $f_{ij} = f(x_i,\ t_j)$ шу билан бирга кўпинча (24. 3) схема учун $f_{ij} = f\left(x_i,\ t_j + \frac{\tau}{2}\right)$, (24. 4) схема учун эса $f_{ij} = f\left(x_i,\ t_j - \frac{\tau}{2}\right)$ олинади.

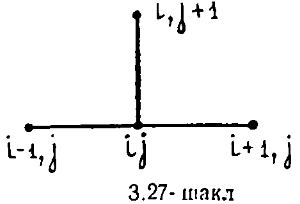
Ҳосил қилинган бу айирмали, схемани тўрт нуқтали «қолипда» тасвирлаймиз. (24. 3) схема *ошкор схема* (3. 26- шакл), (24. 4) схема эса *ошкормас схема* (3. 27- шакл) деб аталади. Бундай деб номланиши шу сабабданки, (24. 3) схема $u(x,\ t)$ функциянинг навбатдаги $(j+1)$- қатлам нуқталаридаги қийматларини функциянинг олдинги j- қатламдаги қийматлари орқали ошкор аниқлайди. Тўр қатлами деганда бирор горизонтал (ёки вертикал) тўғри чизиқда ётувчи тугунлар тўплами тушунилади. Шундай қилиб, ушбу

$$u_{i,\,j+1} = r\left(u_{i-1,j} + u_{i+1,\,j}\right) + (1 - 2r)\,u_{i,j} \qquad (24.5)$$

формула бўйича кетма-кет исталган $u_{i,\,j+1}$ қийматларни ҳосил қилиш мумкин [(24. 3) келиб чиқади], бу ерда



3.26- шакл



3.27- шакл

$$r = \frac{\tau}{h^2}.$$

(24. 4) схема изланаётган функциянинг қийматларини ошкормас кўринишда — тенгламалар системаси орқали беради.

в) Торнинг тебраниш тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

га мос чекли- айирмали тенгламани ҳосил қилиш учун

$$Lu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

дифференциал операторни киритамиз ва ундаги ҳосилаларни ушбу схемалар бўйича чекли айирмалар билан алмаштирамиз:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \frac{1}{\tau^2}(u_{i,\,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,\,j+1}),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h^2}(u_{i-1,\,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,\,j}).$$

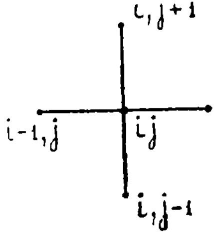
Тор тебраниш тенгламасининг айирмали аппроксимацияси ушбу кўринишни олади·

$$Lu \equiv \frac{1}{\tau^2}(u_{i,\,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,\,j+1}) - \frac{1}{h^2}(u_{i-1,\,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,\,j}) = f_{ij}. \qquad (24.6)$$

Бу айирмали схема беш нуқтали «хоч» «қолип» ида аниқланган (3. 28- шакл) ва изланаётган функциянинг $(j+1)$- қатламдаги қийматларини унинг олдинги j- қатламидаги қийматлари орқали аниқлайдиган ошкор схемадир. Изланаётган функциянинг $u_{i,\,j+1}$ қийматларини ушбу формула бўйича кетма- кет ҳосил қилиш мумкин [(24. 6) дан келиб чиқади] :

$$u_{i,\,j+1} = -u_{i,\,j-1} + \gamma^2(u_{i-1,\,j} + u_{i+1,\,j}) + 2(1-\gamma^2)u_{ij} + \tau^2 f_{ij},$$

бу ерда $\gamma = \frac{\tau}{h}$, $u_{i,\,-1}$ $(j = 0$ да) сохта номаълум бўлиб, уни бошланғич шартлардан аниқлаб, кейин (24. 6) тенгламага қўйиш мумкин.



3.28- шакл

24.4. Чегаравий масалаларни тўр усули билан ечишда чекли- айирмали схеманинг турғунлиги ҳақидаги масала юзага келади.

Агар дифференциал операторни аппроксимациялаш ва ҳисоблашлар жараёнида йўл қўйилган кичик хатоликлар жорий қатламнинг тартиб рақами чекланмаган ҳолда ортганида йўқолиб кетса ёки кичиклигича қолса, бундай чекли айирмали схема *турғун схема* деб аталади. Акс ҳолда схемани *турғунмас схема* деб атаймиз.

Айирмали схемалар назариясида, масалан, Лаплас тенгламаси учун биз кўриб чиққан «Дирихле масаласи»га тузилган (24. 2) «хоч» схеманинг турғун схема эканлиги исботланади.

(24. 3) айирмали ошкор схема $r = \frac{\tau}{h^2} < \frac{1}{2}$ бўлганда биргина ечимга эга ва турғундир, $r > \frac{1}{2}$ да эса турғунмасдир. (24. 4) айирмали ошкормас схема биргина ечимга эга ва ихтиёрий r учун турғундир. Таҳлиллар шуни кўрсатадики, торнинг тебраниш тангламаси учун тузилган (24. 7) айирмали схема $\gamma^2 = \left(\frac{\tau}{h}\right)^2 < \frac{1}{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ да турғундир.

Б. АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР

1- §. Тақрибий сонлар билан амаллар бажариш. Ҳисоблашлардаги хатоликларни баҳолаш

1.1. Мисолларда абсолют ва нисбий хатоликлар, ишончли рақамлар тушунчаларидан фойдаланишни, тақрибий сонларнинг ёзилишини, улар устида амаллар бажарилишини кўрсатиб ўтамиз.

1-мисол. Агар тақрибий соннинг ёзилишида битта ишончли рақами бўлса, унинг нисбий хатоси 10 % дан ортмаслигини кўрсатинг.

Ечиш. Исботлаш учун (1. 1) формуладан фойдаланамиз ($n = 1$; $1 \leqslant k \leqslant 9$):

$$\delta \leqslant \frac{1}{9} \quad \text{ёки} \quad \delta = \frac{1}{10} \cdot 100\,\% = 10\,\%.$$

Ҳақиқатан, битта ишончли рақамда ($n = 1$ да) нисбий хато 10 % дан ортмайди.

2-мисол. Тақрибий сонни унинг барча ишончли рақамларини сақлаган ҳолда ёзинг:

а) 2566 ± 3; б) $40203 \pm 0{,}01$.

Ечиш. а) Тақрибий соннинг чегаравий абсолют хатоси $\Delta = 3 > 1$, шу сабабли берилган тақрибий соннинг охирги рақами 6 ишончсиз, уни яхлитлаш керак.

Қуйидагиларга эгамиз:

$2566 \approx 257$ 10 ёки стандарт шаклда

$2566 \approx 2{,}57$ 10^3.

Соннинг ишончли рақамлари: 2, 5 ва 7.

б) Тақрибий соннинг чегаравий абсолют хатоси $\Delta = 0{,}01$, яъни охирги сақланадиган рақамнинг бирлигига тенг бўлиши керак.

Шунга кўра $40203 \approx 40203{,}00$ ёки стандарт шаклда $40203 \approx 4{,}0203 \cdot 10^4$.

3-мисол. Ёзилган рақамларининг ҳаммаси ишончли бўлган ушбу $a_1 = 25{,}3$ ва $a_2 = 4{,}12$ тақрибий сонларнинг кўпайтмасини топинг.

Чегаравий нисбий хатони ва ишончли рақамлар сонини баҳоланг.

Ечиш. $a_1 = 25{,}3$ сонининг ишончли рақамлари 3 та, шу сабабли (1. 1) формула бўйича δ_1 нисбий хатоликни $n = 3$, $k = 2$ да топамиз:

$$\delta_1 \leqslant \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{100} = \frac{1}{200};$$

$a_2 = 4{,}12$ сони учун $n = 3$, $k = 4$ да:

$$\delta_2 \leqslant \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{400}.$$

a_1 ва a_2 тақрибий сонларнинг кўпайтмаси

$$a = a_1 \cdot a_2 = 104{,}236;$$

унинг нисбий хатоси эса:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{1}{200} + \frac{1}{400} = 0{,}0075.$$

(1. 1) формулага кўра $k = 1$ ва $\delta = 0{,}0075$ да

$$0{,}0075 < \frac{1}{1}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

бунда $n - 1 = 2$ ёки $n = 3$ Бу эса жавобда 3 та ишончли рақам сақланиши кераклигини, қолган рақамларни яхлитлаш зарурлигини билдиради. Шундай қилиб, ками билан $a = 25{,}3 \cdot 4{,}12 = 104$.

1.2. Кам миқдордаги ҳисоблаш ишларини бажариб, етарлича аниқликни олиш имконини берадиган рақамларни ҳисоблаш қоидаларини келтирамиз.

1. Тақрибий маълумотларни уларда ишончли рақамларнигина ва ақалли битта тўла ишончли бўлмаган рақамни сақлаган ҳолда яхлитлаш керак.

2. Тақрибий сонларни қўшиш ва айириш натижасида ҳосил бўладиган сонда ўнли хоналари энг кам бўлган тақрибий сонда улар нечта бўлса шунча ўнли хоналарни сақлаб қолиш керак. (Сонниng ўнли хоналари деб каср белгиси — вергулдан ўнгда турган рақамларга айтилади.)

3. Тақрибий сонларни кўпайтириш ва бўлиш натижасида ҳосил бўладиган сонда қийматли рақамлари энг кам бўлган сонда нечта қийматли рақам бўлса, шунча қийматли рақам қолдириш керак.

4. Тақрибий сонни квадрат ва кубга кўтариш натижасида ҳосил бўлган сонда даражага кўтарилаётган сонда нечта қийматли рақам бўлса, шунча қийматли рақам қолдириш керак (бунда квадратнинг ва айниқса кубнинг охирги рақами, асоснинг окирги рақамига қараганда ишончлилиги кам бўлади).

5. Тақрибий сондан квадрат ва куб илдиз чиқариш натижасида қосил бўлган сонда илдиз остидаги тақрибий сонда нечта қимматли рақам бўлса, шунча қимматли рақам олиш керак (бунда квадрат, айниқса, кубимизнинг охирги рақамидан илдиз остидаги соннинг охирги рақами ишончлироқдир).

6. Оралиқ натижаларни ҳисоблашда юқоридаги қоидаларда айтилганидан битта хона ортиқ олиш керак. Охирги натижада бу заҳира рақам ташлаб юборилади.

4-мисол. Ёзилган рақамлари ишончли бўлган тақрибий сонларни қўшинг:

$215{,}21 + 14{,}182 + 21{,}4$.

Ечиш. 2-қоидани қўллаб, қўшиш натижасида ҳосил бўлган сонда битта ўнли ишорани қолдириб, қолганларини яхлитлаймиз:

$215{,}21 + 14{,}182 + 21{,}4 = 250{,}792 \approx 250{,}8$ (ортиғи билан).

5-мисол. Ёзилган рақамлари ишончли бўлган тақрибий сонларни кўпайтиринг:

$25{,}3 \cdot 4{,}12$.

Ечиш. 3-қоидани қўллаб, кўпайтириш натижасида ҳосил бўлган сонда 3 та ишончли рақам қолдириб, қолганларини яхлитлаймиз:

$25{,}3 \cdot 4{,}12 = 104{,}236 \approx 104$ (ками билан)'

1-дарсхона топшириқлари

1. Қуйидаги сонларни берилган аниқликда яхлитланг:

а) 1,5 783 ни 0,001 гача; б) 23,4997 ни 0,001 гача; в) 0,07964 ни 0,001 гача; г) 15 9734 ни 10^3 гача; д) 471,2583 ни 10^{-2} гача.

Ж: а) 1,578; б) 23,500; в) 0,080; г) $160 \cdot 10^3 = 1{,}60 \cdot 10^5$; д) 471,26.

2. Тақрибий сонни, унинг ҳамма ишончли рақамларини сақлаган ҳолда ёзинг:

а) 2684 ± 3; б) $39804 \pm 0{,}1$; в) $94{,}86 \pm 0{,}1$.

Ж: а) $268 \cdot 10 = 2{,}68 \cdot 10^3$; б) 39804,0; в) 94,9.

3. Ишончли рақамлари билан ёзилган сонларнинг чегаравий нисбий хатоларини топинг:

а) 2; б) 0,02; в) 0,2.

Ж: а) 50 %; б) 50 %; в) 50 %.

4. Ишончли рақамлари билан ёзилган қайси тенглик аниқроқ:

$\sqrt{46} = 6{,}78$ ми ёки $\frac{7}{13} = 0{,}54$ ми?

Ж: биринчиси, чунки

$$\delta_1 = \frac{0{,}01}{6{,}76} < \frac{0{,}01}{0{,}54} = \delta_2.$$

5. Тақрибий сонларнинг ишончли рақамлари сонини аниқланг ва уларнинг ёзилишларини кўрсатинг:

а) 37,542 ни 3 % ли аниқликда;

б) 14,9360 ни 1 % ли аниқликда.

Ж: а) битта; $4 \cdot 10$; б) иккита, 15.

6. Тақрибий сонлар йиғиндисини топинг:

$a_1 = 12{,}5784 \pm 0{,}00005$; $a_2 = 37{,}54 \pm 0{,}003$ ва $a_3 = 2{,}3 \pm 0{,}02$. Йиғиндининг чегаравий абсолют хатосини баҳоланг.

Ж: 52,4; 0,02305.

7. Ишончли рақамлари билан ёзилган сонлар устида амалларни бажаринг:

а) $1{,}038+12{,}5+2{,}34\ 9845$;

б) $2{,}34\cdot 0{,}027$; в) $173:24{,}567$;

г) $0{,}4158^2$; д) $\sqrt{2{,}715}$.

Ж: а) 15,9; б) $6{,}3\cdot 10^{-2}$; в) 7,04; г) 0,1729; д) 1,648.

1- мустақил иш топшириқлари

1. Сонларни берилган аниқликда яхлитланг:

а) 4,761 ни 0,01 гача; б) 31,009 ни 0,01 гача;

в) 28,34 ни 10^3 гача; г) 0,00025 ни 0,001 гача.

Ж: а) 4,76; б) 31,01; в) 0; г) 0,000.

2. Ишончли рақамлари билан ёзилган сонларнинг чегаравий абсолют ва нисбий хатоларини топинг:

а) 38,5; б) 62,215; в) 3,71.

Ж: а) 0,1; 0,26 %; б) 0,001; 0,0016 %; в) 0,01; 0,27 %.

3. Ишончли рақамлари билан ёзилган сонлар учун қайси тенгликнинг аниқлиги юқорироқ:

а) $\sin 15^\circ = 0{,}259$ ми ёки $\sqrt{17} = 4{,}12$ ми?

б) $\lg 31 = 1{,}49$ ми ёки $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = 0{,}414$ ми?

в) $\ln 87 = 4{,}466$ ми ёки $\cos\frac{\pi}{6} = 0{,}87$ ми?

Ж: а) иккинчиси; б) иккинчиси; в) биринчиси.

4. Тақрибий сонларнинг ишончли рақамлари сонини аниқланг ва уларнинг ёзилишларини кўрсатинг:

а) 48361 ни 1% ли аниқликда;

б) 592,8 ни 2% ли аниқликда.

Ж: а) иккита; $48\cdot 10^3$; б) битта; $6\cdot 10^2$.

5. Квадрат томони қўпол ўлчанганда $a \approx 12$ см бўлди. Квадратнинг юзини ҳисоблашда:

а) чегаравий абсолют хато 0,5 см^2 дан;

б) чегаравий нисбий хато 1% дан ошмаслиги учун унинг томони узунлигини қандай аниқликда ўлчаш керак?

Ж: а) 0,021 см; б) 0,06 см.

6. Ишончли рақамлари билан ёзилган сонлар устида амалларни бажаринг:

а) $25{,}386+0{,}49+3{,}10+0{,}5$;

б) $3{,}49\cdot 8{,}6$; в) $0{,}144:1{,}2$;

г) $65{,}2^3$; д) $\sqrt{81{,}1}$.

Ж: а) 29,5; б) 30,0; в) 0,120; г) $277\cdot 10^3$; д) 9,006.

2-§. Кўпҳадларнинг қийматларини ҳисоблаш. Горнер схемаси. Энг кичик квадратлар усули билан эмпирик формулалар тузиш

2.1. *Горнер схемаси* — ихтиёрий даражали $P_n(x)$ кўпҳадни чизиқли иккиҳадга бўлиш усули бўлиб, у $x = \alpha$ да кўпҳаднинг қийматини тез ҳисоблаш ва кўпҳад илдизларининг чегараларини топиш имконини беради (2-§).

1-мисол. $x = -1{,}5$ да $P_5(x) = -x^5 + 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ кўпҳаднинг қийматини ҳисобланг.

Ечиш. Берилган кўпҳад учун Горнер схемасини тузамиз:

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
-1 & 2 & -1 & 3 & -4 & 1 & -1{,}5 \\
 & 1{,}5 & -5{,}25 & -9{,}375 & -18{,}5625 & 33{,}84375 & \\
\hline
-1 & 3{,}5 & -6{,}25 & 12{,}375 & -22{,}5625 & 34{,}84375 = P_n(-1{,}5) &
\end{array}$$

Шундай қилиб, $P_5(-1{,}5) = 34{,}84375$.

2-мисол. $P_5(x) = x^5 - 3x^3 + 5x^2 - 4$ кўпҳаднинг $x = 2$ нуқтадаги қийматини ҳисобланг. $P_5(x)$ кўпҳадни $x - 2$ иккиҳадга бўлишдан чиққан бўлинма — $Q_4(x)$ кўпҳаднинг коэффициентларини аниқланг.

Ечиш. Берилган кўпҳад учун Горнер схемасини тузамиз:

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
1 & 0 & -3 & 5 & 0 & -4 & 2 \\
 & 2 & 4 & 2 & 14 & 28 & \\
\hline
1 & 2 & 1 & 7 & 14 & 24 = P_5(2) &
\end{array}$$

Шундай қилиб, $P_5(x)$ кўпҳаднинг $x = 2$ даги қиймати $P_5(2) = 24$ қолдиққа тенг, изланаётган кўпҳад — бўлинма:

$$Q_4(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 7x + 14.$$

3-мисол. 2-мисолдаги $P_5(x) = x^5 - 3x^3 + 5x^2 - 4$ кўпҳаднинг ҳақиқий илдизларининг чегараларини топинг.

Ечиш. Берилган кўпҳад учун 2-мисолда тузилган Горнер схемасидан фойдаланамиз. Горнер схемасида b_i коэффициентларнинг ҳаммаси мусбат бўлгани сабабли (2-§ нинг 3-бандига қаранг) кўпҳад ҳақиқий илдизларининг юқори чегараси $\beta = 2$ бўлади.

Қуйи чегарани баҳолаш учун янги кўпҳад тузамиз:

$$Q_5(x) = (-1)^5 P_5(-x) = x^5 - 3x^3 - 5x^2 - 4.$$

Бунинг, масалан, $\alpha = 3$ даги қийматини ҳисоблаймиз. Горнер схемасини тузамиз:

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
1 & 0 & -3 & -5 & 0 & -4 & 3 \\
 & 3 & 9 & 18 & 39 & 117 & \\
\hline
1 & 3 & 6 & 13 & 39 & 113 &
\end{array}$$

Горнер схемасида b'_i коэффициентларнинг ҳаммаси мусбат, шунинг учун $P_5(x)$ кўпҳад ҳақиқий илдизларининг қуйи чегараси $-\alpha=-3$ сонидан иборат.

Шундай қилиб, берилган $P_5(x)$ кўпҳаднинг барча ҳақиқий илдизлари $[-3;\ 2]$ кесманинг ичида ётади.

4-мисол. Горнер схемасидан фойдаланиб

$$P_4(x) = 12x^4 + 10x^3 - 5$$

кўпҳадда $x = y - 1$ формула бўйича янги y ўзгарувчига ўтинг.

Ечиш. Масалани ечиш учун $\xi = -1$ да Горнернинг умумий схемасини тузамиз (2-§ нинг 4-бандига қаранг):

$$\begin{array}{cccccl}
12 & 10 & 0 & 0 & -5 & \underline{|\,-1} \\
 & -12 & 2 & -2 & 2 & \\
\hline
12 & -2 & 2 & -2 & -3 & P(-1) = A_4 \\
 & -12 & 14 & -16 & & \\
\hline
12 & -14 & 16 & -18 & P_n(-1) = A_3 & \\
 & -12 & 26 & & & \\
\hline
12 & -26 & 42 & P_2(-1) = A_2 & & \\
 & -12 & & & & \\
\hline
12 & -38 & P_3(-1) = A_1 & & & \\
\hline
12 = A_0 & & & & &
\end{array}$$

A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 қийматлар изланаётган кўпҳаднинг коэффициентларидир:

$$P_4(y - 1) = 12y^4 - 38y^3 + 42y^2 - 18y - 3$$

ёки

$$P_4(x) = 12(x+1)^4 - 38(x+1)^3 + 42(x+1)^2 - 18(x+1) - 3.$$

2.2. Тажрибадан жадвал ёки график кўринишида олинган функционал боғланишларни тасвирловчи формулалар *эмпирик формулалар* дейилади. Берилган $f(x)$ функцияни тақрибий тасвирлаш учун $\varphi(x)$ аппроксимацияловчи функция танланади. Аппроксимациялашни амалга ошириш усулларидан бири энг кичик квадратлар усулидир (4-§).

5-мисол. Энг кичик квадратлар усули билан қийматлари 3·35-жадвалда берилган функцияни аппроксимацияловчи $y = a + bx$ функцияни топинг.

3.35-жадвал

x	1	3	4	5
y	1	2,5	2	3

Ечиш. a ва b параметрлар қуйидаги системадан аниқланади:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2,\quad \sum_{i=1}^{n} x_i,\quad \sum_{i=1}^{n} y_i,\quad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

йиғиндиларни топиш учун $n = 4$ да қуйидаги жадвални тузамиз (3.36-жадвал):

3.36-жадвал

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i\ y_i$
1	1	1	1	1
2	3	2,5	9	7,5
3	4	2	16	8
4	5	3	25	15
$\sum_{i=1}^{n}$	13	8,5	51	31,5

Шундай қилиб, чизиқли тенгламалар системаси қуйидаги кўринишни олади:

$$\begin{cases} a\cdot 51 + b\cdot 13 = 31{,}5, \\ a\cdot 13 + b\cdot 4 = 8{,}5. \end{cases}$$

Бу системани Крамер усули билан ечиб, $a = 0{,}44$ ва $b = 0{,}69$ эканини топамиз. Демак, изланаётган функция

$$y = 0{,}44x + 0{,}69.$$

2-дарсхона топшириқлари

1. $x = \xi$ да $P_n(x)$ кўпҳад қийматини Горнер схемасидан фойдаланиб топинг:

а) $P_5(x) = 3x^5 - 2x^4 + x^3 - 2,\quad \xi = 3;$

б) $P_6(x) = 2x^6 + 3x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 5,\quad \xi = 4.$

Ж: а) 592; б) 10981.

2. $P_n(x)$ кўпҳадни $(x - \alpha)$ иккиҳадга бўлиш натижасида чиқадиган $Q_{n-1}(x)$ бўлинма ва R қолдиқни Горнер схемасидан фойдаланиб топинг:

а) $P_5(x) = 2x^5 - 6x^4 - 3x^2 + 4x$ ни $(x - 3)$ га;

б) $P_4(x) = 10x^4 - 3x^2 + 2x - 5$ ни $(x + 2)$ га.

Ж: а) $Q_4(x) = 2x^4 - 3x - 5$; $R = -15$;

б) $Q_3(x) = 10x^3 - 23x^2 + 46x - 90$; $R = 175$.

3. $P_3(x) = 2x^3 - x^2 - 5$ кўпҳаднинг ҳақиқий илдизлари чегараларини Горнер схемасидан фойдаланиб топинг.

Ж: $[-1; 2]$.

4. Горнер схемасидан фойдаланиб, $P_n(x)$ кўпҳадни $(x - 3)$ нинг даражалари бўйича ёзинг:

а) $P_3(x) = 2x^3 - 18x^2 + 108$;

б) $P_4(x) = x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 54x + 84$.

Ж: а) $P_3(x) = 2(x - 3)^3 - 54(x - 3)$;

б) $P_4(x) = (x - 3)^4 + 6(x - 3)^3 + 18(x - 3)^2 + 3$.

5. Ушбу жадвал билан берилган функциянинг энг яхши аппроксимацияларини (чизиқли ва квадратик) энг кичик квадратлар усулидан фойдаланиб топинг:

3.37-жадвал

x	0,5	1	1,5	2	2,5
y	0,70	0,58	0,82	0,48	0,50

2- мустақил иш топшириқлари

1. Горнер схемасидан фойдаланиб, $P_n(x)$ кўпҳаднинг $x = \xi$ даги қийматларини ҳисобланг:

а) $P(x) = 2x^5 - 4x^4 - x^2 + 1$, $\xi = 7$;

б) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 7$, $\xi = -\frac{1}{2}$.

Ж: а) 23962; б) $\frac{29}{8}$.

2. Горнер схемасидан фойдаланиб, $P_n(x)$ кўпҳадни $(x - \alpha)$ иккиҳадга бўлишдан чиқадиган $Q_{n-1}(x)$ бўлинмани ва R қолдиқни топинг:

а) $P_3(x) = 5x^3 - 26x^2 + 25x - 4$, $(x - 5)$,

б) $P_5(x) = x^5 + 3x^4 - 20x^3 - 48x^2 + 64x$, $(x + 5)$.

Ж: а) $Q_2(2) = 5x^2 - x + 20$; $R = 96$;

б) $Q_4(x) = x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 2x + 54$; $R = -270$.

3. $P_3(x) = 5x^3 - 4x^2 + 3x - 2$ кўпҳаднинг ҳақиқий илдизлари чегараларини Горнер схемасидан фойдаланиб топинг.

Ж: $[-1; 1]$.

4. $P_n(x)$ кўпҳадни, Горнер схемасидан фойдаланиб, $(x + 2)$ нинг даражалари бўйича ёзинг:

а) $P_3(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$;

б) $P_4(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.

Ж: а) $P_3(x) = 2(x+2)^3 - 9(x+2)^2 + 10(x+2) - 3$;

б) $P_4(x) = (x+2)^4 - 8(x+2)^3 + 14(x+2)^2 + 8(x+2) - 15$.

5. Ушбу жадвал билан берилган функциянинг аппроксимацияларини энг кичик квадратлар усулидан фойдаланиб топинг:

3.38-жадвал

x	1	2	3	4	5
y	0,60	0,97	0,84	0,52	0,69

а) $y = ax + b$ — чизиқли функция билан;

б) $y = ax^2 + bx + c$ — квадратик функция билан.

3-§. Интерполяцион кўпҳадларни тузиш. Чизиқли ва квадратик интерполяциялаш

Функцияларни алгебраик кўпҳадлар билан интерполяциялаш яъни x_0, x_1, x_2, x_n интерполяциялаш тугунларида $y_i = P_n(x_i)$, $i = \overline{0,n}$ қийматларни қабул қилувчи даражаси $\leqslant n$ бўлган $P_n(x)$ кўпҳадни тузишга доир мисолларни кўриб чиқайлик.

1-мисол. 3.39-жадвал орқали берилган функциянинг интерполяцион кўпҳадини топинг:

3.39-жадвал

x	0	1	2
y	2	0	2

Ечиш. Интерполяцион тугунлар сони 3 га тенг, шу сабабли изланаётган интерполяцион кўпҳаднинг даражаси $n = 2$ бўлади. $P_2(x)$ ни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

$P_2(x_i) = y_i$ $(i = 2)$ шартни тузамиз. Берилган жадвалдан фойдаланиб, қуйидаги чизиқли тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 = 2, \\ a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 = 0, \\ a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 = 2. \end{cases}$$

Бу тенгламалар системасини ечиб, $a_0 = 2$, $a_1 = -3$, $a_2 = 1$ эканини топамиз:

Шундай қилиб изланаётган интерполяцион кўпҳад қуйидаги кўринишга эга:

$$P_2(x) = 2 - 3x + x^2.$$

2-мисол. 3.40-жадвал билан берилган функция учун Лагранжнинг интреполяцион кўпҳадини тузинг.

3.40-жадвал

x	1	3	6
y	10	16	4

Ечиш. Лагранж кўпҳадини тузиш учун (8.4) формуладан фойдаланамиз:

$$L_n(x) = \omega_n(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{k_i},$$

бунда $\omega_n(x)$ — бош диагоналда жойлашган (уларнинг тагига чизилган) элементлар кўпайтмаси, k_i эса 8-§, 1-бандда келтирилган ёрдамчи жадвалдаги i-сатр элементлари кўпайтмаси.

Берилган масала учун ёрдамчи жадвал тузамиз (3.41-жадвал):

3.41-жадвал

$x - 1$	$1 - 3$	$1 - 6$	$k_0 = (-2)(-5)(x-1) = 10(x-1)$
$3 - 1$	$x - 3$	$3 - 6$	$k_1 = 2(-3)(x-3) = -6(x-3)$
$6 - 1$	$6 - 3$	$x - 6$	$k_2 = 5 \cdot 3(x-6) = 15(x-6)$
			$\omega_2(x) = (x-1)(x-3)(x-6)$

Юқорида келтирилган формула бўйича Лагранж кўпҳадини тузамиз:

$$L_2(x) = \omega_2(x) \sum_{i=0}^{2} \frac{y_i}{k_i} = (x-1)(x-3)(x-6)\left(\frac{10}{10(x-1)} + \frac{16}{-6(x-3)} + \right.$$
$$\left. + \frac{4}{15(x-6)}\right) = (x-3)(x-6) - \frac{8}{3}(x-1)(x-6) +$$
$$+ \frac{4}{15}(x-1)(x-3) = (x^2 - 9x + 18) - \frac{8}{3}(x^2 - 7x + 6) + \frac{4}{15}(x^2 -$$
$$- 4x + 3) = 2{,}8 + 8{,}6x - 1{,}4x^2.$$

3-мисол. $x_0 = 1$ бошланғич қиймат бўйича интерполяция қадамини $h = 0{,}2$ деб олиб,

$$y = x^2 - 3x + 2$$

кўпҳад учун чекли айирмалар жадвалини тузинг.

Ечиш. 8-§, 2-бандда келтирилган формуладан фойдаланамиз. $x_0 = 1$; $x_1 = 1{,}2$;   ; $x_{10} = 3$ деб олиб, функциянинг тегишли қийматларини топамиз ва жадвалга ёзамиз, шу ернинг ўзида чекли айирмаларни ҳисоблаймиз (3.42-жадвал).

3. 42-жадвал

	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	1	0,00	$-0,16-0,00=-0,16$	0,08	0
1	1,2	—0,16	$-0,24-(-0,16)=-0,08$	0,08	0
2	1,4	—0,24	$-0,24-(-0,24)=0,00$	0,08	0
3	1,6	—0,24	$-0,16-(-0,24)=0,08$	0,08	0
4	1,8	—0,16	$0,00-(-0,16)=0,16$	0,08	0
5	2,0	0,00	$0,24-0,00=0,24$	0,08	0
6	2,2	0,24	$0,56-0,24=0,32$	0,08	0
7	2,4	0,56	$0,96-0,56=0,40$	0,08	0
8	2,6	0,96	$1,44-0,96=0,48$	0,08	—
9	2,8	1,44	$2,00-1,44=0,56$	—	—
10	3,0	2,00		—	—

4-мисол. Ньютоннинг интерполяцион кўпҳадидан фойдаланиб, қуйидаги жадвал маълумотлари бўйича $\sin 26^0 15$ ни топинг:

$$\sin 26^0 = 0,43837;$$
$$\sin 27^0 = 0,45399;$$
$$\sin 28^0 = 0,46947.$$

Ечиш. Олдин чекли айирмалар жадвалини тузамиз (3.43-жадвал):

3. 43-жадвал

i	x	y	Δy	$\Delta^2 y$
0	26°	0,43837	0,01562	—0,00014
1	27°	0,45399	0,01548	—
2	28°	0,46947	—	—

Бунда $x = 26°15'$ бўлиб, жадвал бошидаги қийматга яқин, шу сабабли Ньютоннинг биринчи интерполяцион кўпҳади (8.6) ни қўллаймиз:

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \qquad + \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

$x_0 = 26^0$ $h = 1^0 = 60'$, $x = 26^0 15'$ деб олиб ҳисоблаймиз:

$$q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{26°15' - 26°}{60'} = \frac{15'}{60'} = \frac{1}{4}.$$

Энди

$$\sin 26^0 15' = 0{,}43837 + \frac{1}{4}\cdot 0{,}01562 + \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - 1\right)}{2!}(-0{,}00014) = 0{,}44229.$$

3-дарсхона топшириқлари

1. 3.44, 3.45-жадваллар билан берилган функциялар учун интерполяцион кўпҳадларни топинг.

3. 44-жадвал

а)

x	0	1	2
y	1	1	2

3. 45-жадвал

б)

x	0	1	3	4
y	0	2	0	1

Ж: а) $1 - 0{,}5x + 0{,}5x^2$; б) $\frac{17}{4}x - \frac{8}{3}x^2 + \frac{5}{12}x^3$.

2. Биринчи топшириқдаги б) ҳол учун Лагранж интерполяцион функциясини тузинг ва $x = 2$ да унинг қийматини ҳисобланг.

Ж: $\frac{5}{6}x^3 - \frac{13}{3}x^2 + \frac{11}{2}x$; $\frac{1}{3}$.

3. x ва y миқдорларнинг қийматлари жадвали (3.46-жадвал) берилган.

3. 46-жадвал

x	1	2	3	4	5	6
y	3	10	15	12	9	5

Чекли айирмалар жадвалини тузинг.

4. 3. 47-жадвал берилган.

3.47-жадвал

x	1	2	3	4	5
$\lg x$	0,000	0,301	0,477	0,602	0,699

lg1,7; lg2,5; lg3,1; ва lg4,6 сонларни чизиқли интерполяциялаш билан топинг.

Ж: 0,211; 0,389; 0,490; 0,660.

5.3.48-жадвал билан берилган функция учун Ньютоннинг биринчи интерполяцион кўпҳадини тузинг.

3. 48-жадвал

x	0	1	2	3	4
y	1	4	15	40	85

Функцияни $x = 1,5$ да ҳисобланг.

Ж: $1 + x + x^2 + x^3$; 8,125.

6. Функция 3.49-жадвал билан берилган. $x = 5,5$ да унинг қийматини Ньютон кўпҳади ёрдамида топинг.

3.49-жадвал

x	2	4	6	8	10
y	3	11	27	50	83

Ж: 22.

3-мустақил иш топшириқлари

1. 3. 50-жадвал билан берилган функция учун интерполяцион кўпҳадни топинг.

3.50-жадвал

x	0	1	2	8
y	1	—2	0	8

2. 1-топшириқ учун Лагранжнинг интерполяцион кўпҳадини ёзинг.

Ж: $1 - \frac{1033}{168}x + \frac{389}{112}x^2 - \frac{109}{336}x^3$.

3. Функция 3.51-жадвал билан берилган.

3. 51- жадвал

x	-2	1	2	4
y	25	-8	-15	-23

Лагранж кўпҳадини тузинг ва $x = 0$ да функция қийматини топинг.
Ж: $x^2 - 10x + 1$; 0.

4. Функция 3. 52- жадвал билан берилган.

3. 52- жадвал

x	0	1	3	4	5
y	1	-3	25	129	381

Функция қийматини $x = 0,5$ ва $x = 2$ да:
а) чизиқли интерполяциялаш ёрдамида;
б) Ланграж формуласи ёрдамида ҳисобланг.
Ж: а) -1; 11; б) $-\frac{15}{16}$; -3.

5. 3. 53- жадвал берилган.

3. 53- жадвал

x	1000	1010	1020	1030	1040	1050
$\lg x$	3,000	3,004	3,009	3,013	3,017	3,021

Ньютон формуласидан фойдаланиб, $\lg 1014$, ва $\lg 1044$ ни ҳисобланг.
Ж: 3,006; 3,019.

4- §. Гаусс — Жордан усули. Учбурчакли системани «прогонка» усули билан ечиш

Чизиқли тенгламалар системалари ечимларини Гаусс — Жордан ва «прогонка» усуллари билан топишга доир мисоллар кўрамиз.

1- мисол. Ушбу чизиқли тенгламалар системасини Гаусс—Жордан усули билан ечинг:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 8, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -1; \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2. \end{cases}$$

Ечиш. Бу системани ечишда элементар алмаштиришлардан фойдаланилади. Биринчи ва сўнгги тенгламаларнинг ўринларини алмаштириб, B кенгайтирилган матрицани тузамиз:

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{-1} & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 8 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -4 & 7 \end{array}\right).$$

Ҳал қилувчи элемент сифатида биринчи сатрдаги биринчи элементни оламиз. Янги эквивалент системага биринчи (ҳал қилувчи) сатрни ўзгартирмасдан кўчириб ёзиб, биринчи (ҳал қилувчи) устундаги ҳал қилувчи элементдан ташқари барча элементларни ноллар билан алмаштирамиз. Янги матрицанинг қолган элементларини «тўғри тўртбурчак қоидаси» дан фойдаланиб ҳисоблаймиз:

$$B\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & 4 & 10 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 4 & 10 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 4 & 10 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Ҳал қилувчи элемент учун иккинчи сатрдаги иккинчи элементни олиб, бу матрицани ҳам алмаштирамиз:

$$B\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{-5} & 7 & 19 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Ҳал қилувчи элемент сифатида учинчи сатрда учинчи ўринда турган элементни олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$B\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4/5 & 13/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & -16/5 & -32/5 \end{array}\right)$$

Тўртинчи сатрда турган тўртинчи элементни ҳал қилувчи элемент сифатида олиб, қуйидагини қосил қиламиз:

$$B\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -16/5 & -32/5 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Демак, система биргаликда ва у ушбу ягона ечимга эга: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$, $x_4 = 2$.

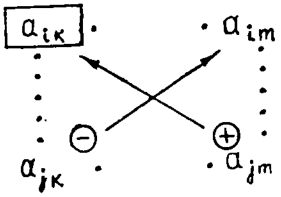
Эслатма «Тўғри тўртбурчак қоидасини» эслатиб ўтамиз (3.29-шакл):

$$a'_{jm} = \frac{a_{jm} \; a_{ik} - a_{jk} \cdot a_{im}}{a_{ik}},$$

бу ерда a_{ik} — ҳал қилувчи элемент,

a_{im} — алмаштирилиши керак бўлган B матрицанинг элементи;

a'_{jm} — алмаштирилган янги матрицанинг элементи.



3.29- шакл

2-мисол. Ушбу чизиқли тенгламалар системасини Гаусс — Жордан усули билан ечинг:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 2,\\ 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 &= 3,\\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 &= 1,\\ x_1 + 5x_2 - 7x_3 &= -1. \end{aligned}$$

Ечиш. Берилган системанинг B кенгайтирилган матрицасини тузамиз ва унинг сатрлари устида элементар алмаштиришлар бажарамиз:

$$B = \left(\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & -2 & 3 & -1 & 2\\ 3 & 1 & -1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -4 & -1 & 1\\ 1 & 5 & -7 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -1 & 2\\ 0 & \boxed{7} & -10 & 1 & -3\\ 0 & 7 & -10 & 1 & -3\\ 0 & 7 & -10 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1/7 & -5/7 & 8/7\\ 0 & 7 & -10 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1/7 & -5/7 & 8/7\\ 0 & 1 & -10/7 & 1/7 & -3/7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Система биргаликда ва у ушбу кўринишда ёзиладиган чексиз кўп ечимлар тўпламига эга:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{8}{7} - \frac{1}{7} x_3 + \frac{5}{7} x_4,\\ x_2 = -\frac{3}{7} + \frac{10}{7} x_3 - \frac{1}{7} x_4. \end{cases}$$

Бу ерда x_1, x_2 — базис номаълумлар, x_3, x_4 — эркли номаълумлар.

3-мисол. Ушбу чизиқли тенгламалар системасини Гаусс — Жордан усули билан ечинг:

$$\begin{cases} x_1-2x_2 \qquad +x_4=-2, \\ x_1-x_2+3x_3-x_4=1, \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4=2, \\ x_1+3x_2-x_3+x_4=3. \end{cases}$$

Ечиш. Берилган системанинг B кенгайтирилган матрицаси устида элементар алмаштиришлар бажарамиз:

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 6 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{-9} & 10 & -9 \\ 0 & 0 & -9 & 10 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 11/3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 10 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 11/3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -10/9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Система биргаликда эмас.

4-мисол. Ушбу чизиқли тенгламалар системасини «прогонка» усули билан ечинг:

$$\begin{cases} 3x_1-x_2 = 5, \\ x_1-4x_2+x_3 = 6, \\ 2x_2-5x_3-x_4 = 10, \\ x_3+4x_4-x_5 = -1, \\ x_4+5x_5 = 11. \end{cases}$$

Ечиш. Коэффициентлар жадвалини тузамиз (3.54-жадвал).

3.54-жадвал

i	a	b	c	d
1	0	—3	—1	5
2	1	4	1	6
3	2	5	—1	10
4	1	—4	1	—1
5	1	—5	0	11

Система ечимга эга, чунки

$$|b_i| \geqslant |a_i| + |c_i|$$

шарти бажарилмоқда. Тўғри «прогонка» йўлини бажарамиз (12-§) (12.2), (12.3), (12.6) ва (12.8) формулалар бўйича α_k ва β_k коэффициентларни ҳисоблаймиз:

$$\alpha_1 = \frac{c_1}{b_1} = \frac{1}{3}, \quad \beta_1 = -\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{5}{3};$$

$$\alpha_2 = \frac{c_2}{b_2 - a_2\alpha_1} = \frac{3}{11}; \quad \beta_2 = \frac{a_2\beta_1 - \alpha_2}{b_2 - a_2\alpha_1} = -\frac{13}{11};$$

$$\alpha_3 = \frac{c_3}{b_3 - a_3\alpha_2} = -\frac{11}{49}, \quad \beta_3 = \frac{a_3\beta_2 - \alpha_3}{b_3 - a_3\alpha_2} = -\frac{136}{49};$$

$$\alpha_4 = \frac{c_4}{b_4 - a_4\alpha_3} = \frac{49}{185}, \quad \beta_4 = \frac{a_4\beta_3 - \alpha_4}{b_4 - a_4\alpha_3} = \frac{87}{185};$$

$$\alpha_5 = \frac{a_5}{b_5} = -\frac{1}{5}, \quad \beta_5 = -\frac{\alpha_5}{b_5} = \frac{11}{5}.$$

Тескари «прогонка» йўли x_5, x_4, x_3, x_2, x_1 номаълумларни (12.5) ва (12.7) формулалар бўйича топишдан иборат:

$$x_5 = \frac{\beta_5 - \alpha_5\beta_4}{1 - \alpha_5\alpha_4} = 2,$$

$$x_4 = \alpha_4 x_5 + \beta_4 = 1,$$

$$x_3 = \alpha_3 x_4 + \beta_3 = -3,$$

$$x_2 = \alpha_2 x_3 + \beta_2 = -2,$$

$$x_1 = \alpha_1 x_2 + \beta_1 = 1.$$

4-дарсхона топшириқлари

1. Чизиқли тенгламалар системасини Гаусс — Жордан усули билан ечинг:

а) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 13, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -9; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = -2, \\ 3x_1 + x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$

Ж: а) $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = -3$, $x_4 = 1$;
б) $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$;
в) чексиз кўп ечимлар тўплами:

$$x_1 = \frac{1}{3}(4 - x_3 - x_4), \quad x_2 = \frac{1}{3}(5 + 7x_3 + 4x_4);$$

г) система биргаликда эмас.

2. Чизиқли тенгламалар системасини «прогонка» усули билан ечинг:

а) $$\begin{cases} -4x_1 + x_2 = 6, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 11, \\ 2x_2 + 5x_3 + x_4 = -5, \\ x_3 - 3x_4 + x_5 = -10, \\ x_4 + 3x_5 = 6; \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 9, \\ x_1 - 4x_2 - x_3 = -11, \\ 2x_2 - 5x_3 + x_4 = -12, \\ x_3 - 4x_4 = 5. \end{cases}$$

Ж: а) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 1$;

б) $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$.

4-мустақил иш топшириқлари

1. Чизиқли тенгламалар системасини Гаусс — Жордан усули билан ечинг:

а) $$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 12, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 17, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -3; \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

Ж: а) $x_1 = 2$, $x_3 = -1$, $x_3 = -3$, $x_4 = 4$;

б) система биргаликда эмас.

2. Чизиқли тенгламалар системасини «прогонка» усули билан ечинг:

а) $$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 13, \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -6, \\ x_2 - 4x_3 + x_4 = -11, \\ 2x_3 + 6x_4 - x_5 = -9, \\ x_4 - 4x_5 = -6: \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} -3x_1 - x_2 = 8, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_2 - 5x_3 + x_4 = -9, \\ x_3 + 3x_4 = -1. \end{cases}$$

Ж: а) $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, $x_4 = -2$, $x_5 = 1$;

б) $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = -1$.

5-§. Тенгламаларни ечишнинг итерация усули

$f(x) = 0$ алгебраик тенгламани ечиш босқичларини, яъни яккалаш оралиғини ажратиш ва уни итерация усули билан торайтиришни мисолларда кўрсатамиз.

1-мисол. $x^3-3x-6=0$ тенгламанинг илдизини ажратинг.

Ечиш. $y=x^3-3x-6=f(x)$ функцияни кўрайлик. $x=0$ да $y=-6<0$ га, $x=3$ да эса $y=12>0$ га эгамиз, яъни [0; 3] кесмада тенгламанинг илдизи мавжуд, чунки яккаланиш оралиғининг маълум биринчи шарти бажарилмоқда:

$$f(0)\cdot f(3)=-6\cdot 3=-12<0.$$

$y'=3x^2-3$ ҳосила $(-\infty;\ -1)\cup(1;\ +\infty)$ соҳада мусбат $(y'>0)$, $(-1;\ 1)$ соҳада манфий $(y'<0)$. Бироқ топилган [0; 3] кесма ҳеч бирига тўлалигича тегишли эмас. Уни [1; 3] кесмагача торайтирамиз, чунки $x=1$ да $y=-8<0$ ва биринчи шарт бажарилмоқда: $f(1)\cdot f(3)<0$, бунда $y'>0$, яъни биринчи ҳосила [1; 3] кесмада ишорасини сақлайди, шунинг учун яккалаш оралиғининг иккинчи шарти ҳам бажарилмоқда. Иккинчи ҳосилани ҳисоблаймиз: $y''=6x$, у кўрсатилган оралиқда мусбат (ишорасини сақлайди). Шундай қилиб, [1; 3] оралиқда учала шарт ҳам бажарилмоқда, шунинг учун у илдизни яккалаш оралиғидир, берилган тенгламанинг илдизи шу оралиққа тегишли.

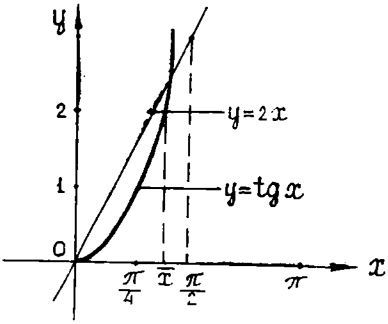
2-мисол. $2x\cos x-\sin x=0$ тенгламанинг энг кичик мусбат илдизини ажратинг.

Ечиш. Тенгламани қуйидаги эквивалент шаклда ёзиб оламиз:

$$2x=\operatorname{tg}x.$$

Битта чизмада $y=2x$ ва $y=\operatorname{tg}x$ функцияларнинг графикларини чизамиз (3.30-шакл).

Чизмадан кўриниб турибдики, изланаётган $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ яккалаш оралиғи битта ва фақат битта энг кичик мусбат илдизни ўз ичига олади.



3.30-шакл

3-мисол. $5x^3-20x+3=0$ тенгламанинг [0; 1] кесмада ётган илдизини итерация усули билан $\varepsilon=0{,}0001$ гача аниқликда топинг.

Ечиш. Берилган тенгламани

$$x=\varphi(x)$$

кўринишга келтириб оламиз. Буни бир неча усуллар билан бажариш мумкин, масалан,

$$x=x+(5x^3-20x+3)$$

десак, у ҳолда $\varphi_1(x)=5x^3-19x+3$;

$$x=\frac{1}{20}(5x^3+3)$$

десак, у ҳолда

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{20}(5x^3 + 3).$$

Кетма-кет яқинлашишларни ҳисоблаш учун ҳосил қилинган $\varphi(x)$ функцияларнинг қайси биридан фойдаланиш лозимлигини аниқлаймиз.

Агар $\varphi(x)$ функция $[a;\ b]$ кесмада

$$|\varphi'(x)| \leqslant q < 1$$

(13.5) ни қаноатлантирса, итерация жараёни яқинлашади.

$$[0;\ 1] \text{ кесмада } |\varphi_1'(x)| = |15x^2 - 19| > 1;$$

$$[0;\ 1] \text{ кесмада } |\varphi_2'(x)| = \frac{15}{20}x^2 = \frac{3}{4}x^2 < 1.$$

Демак, $\varphi_2(x)$ функциядан фойдаланиш ва кетма-кет яқинлашишларни итерация усули билан

$$x_n = \frac{1}{20}(5x_{n-1}^2 + 3)$$

формула бўйича излаш мумкин.

Нолинчи яқинлашиш сифатида $[0;\ 1]$ кесмага тегишли бўлган $x_0 = 0{,}75$ қийматни оламиз.

Энди

$$q = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |\varphi'(x)| = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} \frac{3}{4}x^2 = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

ни ҳисобга олган ҳолда берилган $\varepsilon = 0{,}0001$ аниқликка эришилиши учун иккита кетма-кет яқинлашиш орасидаги айирма қандай бўлиши кераклигини (13.10) дан аниқлаймиз:

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant \frac{1-q}{q}\varepsilon = 0{,}00003.$$

Шундай қилиб, иккита кетма-кет яқинлашиш орасидаги айирма 0,00003 дан ортиқ бўлмаганида итерация жараёнини тўхтатиш ва берилган аниқликка эришилди деб ҳисоблаш мумкин. Ҳисоблашларни ушбу жадвал шаклида олиб бориш қулайдир (**3.55-жадвал**):

3.55-жадвал

n	x_n	x_n^3	$x_{n+1} = \varphi(x_n)$
0	0,75	0,42188	0,25547
1	0,2555	0,016777	0,154144
2	0,1541	0,005652	0,151413
3	0,1514	0,005443	0,151361
4	0,15136	0,005442	0,151361

Мана шу ерда итерация жараёнини тўхтатиш ва $\varepsilon = 0{,}0001$ гача аниқликда

$$\bar{x} = 0,1514$$

деб ҳисоблаш мумкин.

5-дарсхона топшириқлари

1. $x^3 - 9x^2 + 18x - 1 = 0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизларини яккалаш оралиқларини график усулда топинг.

Ж: (0; 1); (2; 3); (6; 7).

2. Тенгламаларни 0,01 гача аниқликда итерация усули билан ечинг:

а) $x^3 - 12x - 5 = 0$;
б) $x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = 0$;
в) $4x = \cos x$.

Ж: а) 0,42; б) 3,62; в) 0,24.

5-мустақил иш топшириқлари

1. $x^3 - 12x + 1 = 0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизларини яккалаш оралиқларини график усул билан топинг.

Ж: (—4; —3); (0; 1) (3; 4).

2. Тенгламаларнинг илдизларини итерация усули билан 0,01 гача аниқликда топинг:

а) $x^3 - 5x + 0,1 = 0$;
б) $x^5 - x - 2 = 0$.

Ж: а) 0,02; б) 1,27.

6-§. Тенгламалар системаларини ечишнинг итерация усуллари

Итерация усулини тенгламалар ечимини аниқлаштиришга татбиқ этамиз.

Мисол. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0, \\ x^3 - y = 0 \end{cases}$

тенгламалар системасини (15.2) кўринишга келтиринг ва уни 0,01 гача аниқликда итерация усули билан ечинг.

Ечиш. Бошланғич яқинлашиш сифатида $x_0 = 0,8$, $y_0 = 0,55$ ни оламиз (уларни график усулда топиш мумкин).

Берилган системани (14.1) формула билан таққослаб,

$$\begin{cases} f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 1, \\ f_2(x, y) = x^3 - y \end{cases}$$

га эга бўламиз. Бу системани (14.3) шартларга риоя қилган ҳолда (14.2) кўринишга келтириш учун бундай йўл тутамиз. Берилган системага эквивалент ушбу тенгламалар системасини тузамиз:

$$x = x + \alpha f_1(x, y) + \beta f_2(x, y) \equiv \varphi_1(x, y),$$
$$y = y + \gamma f_1(x, y) + \delta f_2(x, y) \equiv \varphi_2(x, y).$$

α, β, γ, δ параметрларни шундай танлаймизки, $\varphi_1(x, y)$ ва $\varphi_2(x, y)$ функцияларнинг хусусий ҳосилалари нолинчи яқинлашишда нолга тенг ёки унга яқин бўлсин, яъни α, β, γ, δ ларни ушбу тенгламалар системасининг тақрибий ечими сифатида топамиз:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = 1 + \alpha f'_{1x}(x_0,\ y_0) + \beta f'_{2x}(x_0,\ y_0) = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = \alpha f'_{1y}(x_0,\ y_0) + \beta f'_{2y}(x_0,\ y_0) = 0;$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} = \gamma f'_{1x}(x_0,\ y_0) + \delta f'_{2x}(x_0,\ y_0) = 0;$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = 1 + \gamma f'_{1y}(x_0,\ y_0) + \delta f'_{2y}(x_0,\ y_0) = 0.$$

Бизнинг ҳолда

$$\begin{aligned} f'_{1x}(0{,}8;\ 0{,}55) &= 2\cdot 0{,}8 = 1{,}6;\\ f'_{1y}(0{,}8;\ 0{,}55) &= 2\cdot 0{,}55 = 1{,}1;\\ f'_{2x}(0{,}8;\ 0{,}55) &= 3\cdot 0{,}8^2 = 1{,}92;\\ f'_{2y}(0{,}8;\ 0{,}55) &= -1. \end{aligned}$$

Берилган системага эквивалент системани ушбу кўринишда ёзамиз:

$$\begin{cases} x = x + \alpha(x^2 + y^2 - 1) + \beta(x^3 - y),\\ y = y + \gamma(x^2 + y^2 - 1) + \delta(x^3 - y). \end{cases}$$

α, β, γ, δ нинг мос қийматлари сифатида ушбу

$$\begin{cases} 1 + 1{,}6\alpha + 1{,}92\beta = 0,\\ 1{,}1\alpha - \beta = 0.\\ 1{,}6\gamma + 1{,}92\delta = 0,\\ 1 + 1{,}1\gamma - \delta = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасининг ечимларини танлаймиз, яъни

$$\alpha \sim -0{,}3;\quad \beta \approx -0{,}3;\quad \gamma \approx -0{,}5:\quad \gamma \approx 0{,}4.$$

У ҳолда берилган системага эквивалент бўлган ушбу

$$\begin{aligned} x &= x - 0{,}3(x^2 + y^2 - 1) - 0{,}3(x^3 - y),\\ y &= y - 0{,}5(x^2 + y^2 - 1) + 0{,}4(x^3 - y) \end{aligned}$$

тенгламалар системаси (14.2) кўринишда бўлади, шу билан бирга $x_0 = 0{,}8$, $y_0 = 0{,}55$ нуқтанинг етарлича кичик атрофида (14.3) шарт бажарилади.

Биринчи, иккинчи ва қолган яқинлашишларни, токи иккита қўшни яқинлашиш орасидаги фарқ 0,01 дан кичик бўлмагунча, топишга киришамиз. Ҳисоблаш натижаларини жадвалга ёзамиз (3.56-жадвал).

3.56-жадвал

n	x_n	y_n	x_n^2	x_n^3	y_n^2	$x_n^2+y_n^2$	$x_n^2 \quad y_n^2-1$	$x_n^3-y_n$	Δx	Δy
0	0,8	0,55	0,64	0,512	0,325	0,9425	—0,0575	— 0,038	0,029	0,014
1	0,829	0,564	0,687	0,569	0,318	1,005	0,005	0,005	-0,003	—0,0005
2	0,826	0,5635								

Шундай қилиб, тенгламалар системасининг ечими 0,01 гача аниқликда

$$^{-} \approx 0{,}83; \quad \bar{y} \approx 0{,}56$$

бўлади. Система фақат ишораси билан фарқ қиладиган ечимга ҳам эга: $\bar{\bar{x}} \approx -0{,}83$; $\bar{\bar{y}} \approx -0{,}56$.

6-дарсхона топшириғи

Ушбу тенгламалар системасининг ечимини 0,01 га аниқликда итерация усули билан ҳисобланг, бунда бошланғич яқинлашишни график усулда топинг:

а) $x^2 + y - 4 = 0,$
$y - \lg x - 1 = 0;$

б) $20x^2 = 1 - 2x^3 + 4y^3,$
$10y = 5 + 2x^2 - 3y^2$

(нолинчи яқинлашиш учун $x_0 = 0{,}3$, $y_0 = 0{,}5$ ни олинг).

Ж: а) $\bar{x} = 1{,}67$, $\bar{y} = 1{,}22$,
б) $\bar{x} = 0{,}26$, $\bar{y} = 0{,}48$.

6-мустақил иш топшириғи

Тенгламалар системаси ечимини 0,01 гача аниқликда итерация усули билан топинг:

$$\sin x - y = 1{,}32,$$
$$x - \cos y = 0{,}85$$

(нолинчи яқинлашиш сифатида $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ ни олинг).

Ж: $\bar{x} = 1{,}79$, $\bar{y} = -0{,}34$.

7-§. Чизиқли тенгламалар системаларини оддий итерация усули ва Зейдель усули билан ечиш

Итерация усули ва Зейдель усулининг чизиқли тенгламалар системаларини ечишга татбиқ этилишига оид мисоллар кўрамиз.

1-мисол. Ушбу чизиқли тенгламалар системасини (0,1 гача аниқликда) оддий итерация усули билан ечинг:

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 = 26, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 7. \end{cases}$$

Ечиш. Берилган системани махсус (15.3) кўринишга келтирамиз:

$$\begin{cases} x_1 = 3{,}25 - 0{,}125x_2 - 0{,}125\,x_3, \\ x_2 = 1{,}4 - 0{,}2x_1 + 0{,}2x_3, \\ x_3 = 1{,}4 - 0{,}2x_1 + 0{,}2x_2. \end{cases}$$

Ушбу матрицаларни тузамиз:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}125 & -0{,}125 \\ -0{,}2 & 0 & 0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}, \ \beta = \begin{pmatrix} 3{,}25 \\ 1{,}4 \\ 1{,}4 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Кетма-кет яқинлашишларни амалга оширамиз. Нолинчи яқинлашиш сифатида $x^{(0)} = \beta$ олинади:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}25 \\ 1{,}4 \\ 1{,}4 \end{pmatrix}.$$

Биринчи яқинлашиш: $x^{(1)} = \beta + \alpha\, x^{(0)}$:

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}25 \\ 1{,}4 \\ 1{,}4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0{,}125 & -0{,}125 \\ -0{,}2 & 0 & 0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3{,}25 \\ 1{,}4 \\ 1{,}4 \end{pmatrix} = $$

$$= \begin{pmatrix} 2{,}9 \\ 1{,}03 \\ 1{,}03 \end{pmatrix}.$$

Иккинчи яқинлашиш: $x^{(2)} = \beta + \alpha \cdot x^{(1)}$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}25 \\ 1{,}4 \\ 1{,}4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0{,}125 & -0{,}125 \\ -0{,}2 & 0 & 0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2{,}9 \\ 1{,}03 \\ 1{,}03 \end{pmatrix} = $$

$$= \begin{pmatrix} 2{,}992 \\ 1{,}026 \\ 1{,}026 \end{pmatrix}.$$

Учинчи яқинлашиш:

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}25 \\ 1{,}4 \\ 1{,}4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0{,}125 & -0{,}125 \\ -0{,}2 & 0 & 0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2{,}992 \\ 1{,}026 \\ 1{,}026 \end{pmatrix} = $$

$$=\begin{pmatrix} 2{,}99 \\ 1{,}01 \\ 1{,}01 \end{pmatrix}.$$

Шундай қилиб, $x_1^{(3)} = 2{,}99$, $x_2^{(3)} = 1{,}01$, $x_3^{(3)} = 1{,}01$ ва 0,1 гача аниқликда $x_1 = 3{,}0$, $x_2 = 1{,}0$, $x_3 = 1{,}0$ ни ҳосил қиламиз.

2-мисол. Ушбу тенгламалар системасини 0,001 гача аниқликда Зейдель усули билан ечинг:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13, \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14. \end{cases}$$

Ечиш. Итерация жараёни яқинлашади, чунки ушбу

$$|a_{11}| = 10 > |a_{12}| + |a_{13}| = 2.$$
$$|a_{22}| = 10 > |a_{21}| + |a_{23}| = 3,$$
$$|a_{33}| = 10 > |a_{31}| + |a_{32}| = 4$$

(15. 6) шарт бажарилади.

Берилган системани (15. 3) кўринишга келтирамиз:

$$\begin{cases} x_1 = 1{,}2 - 0{,}1x_2 - 0{,}1x_3, \\ x_2 = 1{,}3 - 0{,}2x_1 - 0{,}1x_3, \\ x_3 = 1{,}4 - 0{,}2x_1 - 0{,}2x_2. \end{cases}$$

Нолинчи яқинлашиш сифатида

$$x_1^{(0)} = 1{,}2; \quad x_2^{(0)} = 1{,}3; \quad x_3^{(0)} = 1{,}4$$

ечимларини оламиз. Зейдель жараёнини (15- §) кетма-кет қўллаб, қуйидагиларни кетма-кет ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1{,}2 - 0{,}1 \cdot 1{,}3 - 0{,}1 \cdot 1{,}4 = 0{,}93; \\ x_2^{(1)} = 1{,}3 - 0{,}2 \cdot 0{,}93 - 0{,}1 \; 1{,}4 = 0{,}974 \\ x_3^{(1)} = 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 0{,}93 - 0{,}2 \cdot 0{,}974 = 1{,}0192; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 1{,}2 - 0{,}1 \cdot 0{,}974 - 0{,}1 \cdot 1{,}092 = 1{,}0007, \\ x_2^{(2)} = 1{,}3 - 0{,}2 \cdot 1{,}0007 - 0{,}1 \; 1{,}0192 = 0{,}9979, \\ x_3^{(2)} = 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 1{,}0007 - 0{,}2 \cdot 0{,}9979 = 1{,}0003; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 1{,}2 - 0{,}1 \cdot 0{,}9979 - 0{,}1 \; 1{,}0003 = 1{,}0002, \\ x_2^{(3)} = 1{,}3 - 0{,}2 \cdot 1{,}0002 - 0{,}1 \; 1{,}0003 = 0{,}9999, \\ x_3^{(3)} = 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 1{,}0002 - 0{,}2 \cdot 0{,}9999 = 1{,}0000. \end{cases}$$

Тенгламалар системасининг ечими сифатида учинчи яқинлашишни қабул қиламиз:

$$x_1 = 1{,}0002; \quad x_2 = 0{,}9999; \quad x_3 = 1{,}0000.$$

0,001 гача аниқликда ечим

$$x_1 = 1{,}000; \quad x_2 = 1{,}000; \quad x_3 = 1{,}000$$

бўлади. Таққослаш учун системанинг аниқ ечимини келтирамиз:

$$x_1 = 1, \ x_2 = 1, \ x_3 = 1.$$

7- дарсхона топшириқлари

1. Берилган чизиқли тенгламалар системасининг ечимини оддий итерация усули билан 0,001 гача аниқликда топинг:

$$\begin{cases} 7{,}6x_1 + 0{,}5x_2 + 2{,}4x_3 = 1{,}9, \\ 2{,}2x_1 + 9{,}1x_2 + 4{,}4x_3 = 9{,}7, \\ -1{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + 5{,}8x_3 = -1{,}4. \end{cases}$$

Ж: $x_1 = 0{,}236$; $x_2 = 1{,}103$; $x_3 = -0{,}214$.

2. Чизиқли тенгламалар системасини Зейдель усули билан 0,001 гача аниқликда ечинг:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ -x_1 + 3x_2 = 1, \\ 2x_1 \quad + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

Ж: $x_1 = 4{,}83$; $x_2 = 1{,}94$; $x_3 = -2{,}91$.

7- мустақил иш топшириқлари

1. Чизиқли тенгламалар системасини оддий итерация усули билан 0,01 гача аниқликда ечинг:

$$\begin{cases} 8{,}3x_1 - 0{,}1x_2 + 0{,}2x_3 = 16{,}1, \\ 0{,}3x_1 + 4{,}5x_2 - 0{,}1x_3 = -3{,}6, \\ 0{,}4x_1 - 0{,}2x_2 + 5{,}5x_3 = -15{,}5. \end{cases}$$

Ж: аниқ ечим $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = -3$.

2. Чизиқли тенгламалар системасини Зейдель усули билан 0,01 гача аниқликда ечинг:

$$\begin{cases} 4{,}3x_1 - x_2 + 2x_3 = 13{,}6, \\ x_1 + 5{,}1x_2 \qquad = -13{,}3, \\ 0{,}3x_1 - 2{,}1x_2 + 6{,}2x_3 = 13{,}1. \end{cases}$$

Ж: аниқ ечим: $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = 1$.

8- §. Сонли интеграллаш. Тўғри тўртбурчаклар, трапециялар, Симпсон формулалари. Гаусс квадратураси

Турли формулалардан фойдаланиб, сонли интеграллашга оид мисоллар кўрамиз.

1- мисол. $\int_1^2 \sqrt{x}\, dx$ интегрални [1, 2] кесмани 10 та тенг қисмга бўлиб, тўғри тўртбурчаклар, трапециялар, Симпсон формулалари бўйича ҳисобланг. Хатоликни баҳоланг.

Ечиш. 18- § даги формулалардан фойдаланамиз. Бизнинг ҳолда $n = 10$, $h = \frac{2-1}{10} = 0,1$. Интеграллаш тугунлари:

$$x_0 = 1;\ x_1 = 1,1;\ x_2 = 1,2; \qquad x_9 = 1,9;\ x_{10} = 2.$$

$y = \sqrt{x}$ функциянинг тегишли қийматлари жадвалини тузамиз (3.57-жадвал):

3.57- жадвал

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
y_i	1	1,049	1,095	1,140	1,183	1,225	1,265	1,304	1,342	1,378	1,414

а) Тўғри тўртбурчаклар формуласидан фойдаланамиз, чап тўғри тўртбурчаклар учун:

$$\int_1^2 \sqrt{x}\, dx \approx 0,1\ (1 + 1,049 + 1,095 + 1,140 + 1,183 + 1,225 +$$

$$+ 1,265 + 1,304 + 1,342 + 1,378) = 0,1 \cdot 11,981 \approx 1,20;$$

ўнг тўғри тўртбурчаклар учун:

$$\int_0^2 \sqrt{x}\, dx = 0,1\ (1,049 + 1,095 + 1,140 + 1,183 + 1,225 + 1,265 +$$

$$+ 1,304 + 1,342 + 1,378 + 1,414) = 0,1 \cdot 12,395 \approx 1,240.$$

Хатоликни (18. 1) формула бўйича баҳолаймиз:

$$R_n < \frac{h}{2}\,(b - a)\, M_1,\ \text{бу ерда}\ M_1 = \max_{x \in [a,\ b]} |f'(x)|.$$

$f(x) = \sqrt{x}$ функциянинг ҳосиласи: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Ҳосила $[0;\ 1]$ кесмада энг катта қийматига $x = 1$ бўлганда эришади.

Шундай қилиб,

$$M_1 = \max_{x \in [1;\ 2]} |f'(x)| = \frac{1}{2}.$$

Абсолют хатолик:

$$R_n \leqslant \frac{0,1}{2}\,(2 - 1)\ \ \frac{1}{2} = 0,025.$$

Демак, чапки тўғри тўртбурчаклар формуласи учун:

$$\int_1^2 \sqrt{x}\,dx \approx 1,20 \pm 0,025$$

га, ўнг тўғри тўртбурчаклар учун

$$\int_1^2 \sqrt{x}\,dx \approx 1,240 \pm 0,025$$

га эгамиз.

б) Трапециялар формуласидан фойдаланамиз:

$$\int_1^2 \sqrt{x}\,dx \approx 0,1\left(\frac{1+1,414}{2} + 1,049 + 1,095 + 1,140 + 1,183 + \right.$$

$$\left. + 1,225 + 1,265 + 1,304 + 1,342 + 1,371\right) = 1,2188.$$

Хатоликни (18. 2) формула бўйича баҳолаймиз:

$$R_n \leqslant \frac{h^2}{12}(b-a)M_2, \text{ бу ерда } M_2 = \max_{x\in[a;\,b]}|f''(x)|.$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

ҳосилага эгамиз. Иккинчи ҳосила энг катта қийматига $x = 1$ бўлганда эришади, шу сабабли $M_2 = \max\limits_{x\in[1;\,2]}|f''(x)| = \frac{1}{4}$. Шундай қилиб, абсолют хатолик учун:

$$R_n \leqslant \frac{0,1^2}{12}\; 1\cdot\frac{1}{4} = 0,0002.$$

Демак, $\int_1^2 \sqrt{x}\,dx \approx 1,2188 \pm 0,0002$ га эга бўлдик.

в) Симпсон формуласидан фойдаланамиз:

$$\int_1^2 \sqrt{x}\,dx \approx \frac{0,1}{3}\Big((1 + 1,414) + 4\,(1,049 + 1,140 + 1,225 + 1,304 +$$

$$+ 1,378) + 2\,(1,095 + 1,183 + 1,265 + 1,342)\Big) = \frac{0,1}{3}\cdot 36,568 =$$

$$= 1,2189333.$$

Хатоликни (18. 3) формула бўйича баҳолаймиз:

$$R_n \leqslant \frac{h^4}{180}(b-a)M_4, \text{ бу ерда } M_4 = \max_{x\in[a;\,b]}|f^{IV}(x)|.$$

Қуйидагиларни ҳисоблаймиз:

$$f'''(x) = \frac{3}{8}\,\frac{1}{\sqrt{x^5}}, \qquad f^{IV}(x) = -\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^7}};$$

$$M_4 = \max_{x \in [1;\ 2]} \left| f^{\text{IV}}(x) \right| = \frac{15}{16}.$$

Абсолют хатоликни ҳисоблаймиз:

$$R_n \leqslant \frac{0,1^4}{180} \quad 1 \quad \frac{15}{16} = 0,0000005.$$

Демак,

$$\int_1^2 \sqrt{x}\, dx \approx 1,218933 \pm 0,0000005.$$

г) Таққослаш мақсадида интегрални Ньютон — Лейбниц формуласи бўйича ҳисоблаймиз:

$$\int_1^2 \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x}\,\Big|_1^2 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1) \approx 1,2189513.$$

Шундай қилиб, интегралнинг аниқ қиймати ҳақиқатан ҳам а), б), в) бандларда топилган оралиқларда ётади. Интегралнинг аниқ қийматига Симпсон формуласи бўйича ҳисобланган қиймат энг яқиндир.

2-мисол. $\int_1^2 \sqrt{x}\, dx$ интегрални Гаусс формуласини $n = 3$ да қўллаб, ҳисобланг.

Ечиш. Гаусс формуласи 19-§ да баён этилган. Бу ерда $a = 1$, $b = 2$ га эгамиз. Тугунларни ушбу формулалар бўйича топамиз:

$$x_i = \frac{b + a}{2} + \frac{b - a}{2} t_i, \quad i = \overline{1,\ 3}$$

19-§ даги жадвал маълумотларидан $n = 3$ да фойдаланиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$x_1 = \frac{2 + 1}{2} + \frac{2 - 1}{2} t_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-0,77459667) \approx 1,11270;$$

$$x_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} t_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0 = 1,50000;$$

$$x_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} t_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(0,77459667) \approx 1,88730.$$

Интеграл Гаусс квадратура формуласи бўйича ҳисобланади:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b - a}{2} \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} C_i f(x_i).$$

Бу формуладаги тегишли A_i коэффициентларнинг қийматларини 19-§ даги жадвалдан оламиз:

$$C_1 = \frac{b-a}{2} A_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{18} = 0,27778;$$

$$C_2 = \frac{b-a}{2} A_2 = \frac{1}{2}\ \ \frac{8}{9} = \frac{4}{9} = 0,44444;$$

$$C_3 = \frac{b-a}{2} A_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{18} = 0,27778.$$

Кейинги ҳисоблашларни 3. 58- жадвалга ёзамиз.

3. 58- жадвал

	x_i	$y_i = \sqrt{x_i}$	C_i	$C_i\ y_i$
1	1,11270	1,05485	0,27778	0,29301
2	1,50000	1,22474	0,44444	0,54431
3	1,88730	1,37379	0,27778	0,38161
				$\Sigma\ C_i\ \ y_i = 1,21893$

Демак,

$$\int_1^2 \sqrt{x}\, dx = \sum_{i=1}^{3} C_i\ y_i = 1,21893.$$

Хатоликни (18. 13) формулаларда $n = 3$ деб баҳолаймиз:

$$R_3 \leqslant \frac{1}{15750} \left(\frac{b-a}{2}\right)^7 \max_{x\in[a;\ b]} \left| f^{\mathrm{IV}}(x) \right|.$$

$y = f(x) = \sqrt{x}$ функциянинг олтинчи тартибли ҳосиласини ҳисоблаймиз:

$$y^{\mathrm{VI}} = -\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\ \ 9}{2^6}\, x^{-\frac{\text{и}}{2}} = f^{\mathrm{VI}}(x),$$

$$\max_{x\in[1;\ 2} \left| f^{\mathrm{VI}}(x) \right| = \frac{945}{2^6} \approx 14,7.$$

Энди абсолют хатоликни ҳисоблаймиз:

$$R_3 \leqslant \frac{1}{15750} \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \frac{945}{2^6} \approx 0,0000078 < 0,00001.$$

Таққослаш мақсадида интегралнинг аниқ қиймати

$$\int_1^2 \sqrt{x}\, dx = 1,2189513$$

ни келтирамиз.

Аниқ қийматга яқин натижа Симпсон формуласи бўйича [1- в) мисол] $n = 10$ да, Гаусс формуласи бўйича $n = 3$ да олинди.

8- дарсхона топшириқлари

Интегрални вергулдан кейинги иккита рақамигача ҳисобланг:

1. $\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$ — трапеция формуласи бўйича, $n = 3$ деб олинг.

Ж: 0,75.

2. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$ — Симпсон формуласи бўйича, $n = 4$ деб олинг.

Ж: 0,24.

3. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ Гаусс формуласи бўйича, $n = 3$ деб олинг. Аниқ қиймат билан солиштиринг.

8- мустақил иш топшириғи

$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ интегрални ҳисобланг ва натижаларни таққосланг (тўғри тўртбурчаклар, трапециялар ва Симпсон формулалари бўйича, $n = 8$ деб олинг ва Гаусс формуласи бўйича $n = 3$ деб олинг). Хатоликларни баҳоланг ва аниқ натижа билан солиштиринг.

9- §. Монте — Карло усули.

Монте — Карло усулини интегралларни ҳисоблашга қўллайлик.

Мисол. $\int_1^2 (2x + 1)\, dx$ интегрални Монте — Карло усули билан ҳисобланг:

а) ҳисоблашнинг абсолют хатолигини топинг;

б) хатоликнинг юқори чегараси $\delta = 0,1$ бўлишини $\gamma = 0,95$ ишончлик билан таъминлайдиган синовларнинг энг кичик сонини топинг.

Ечиш. (20. 3) формула

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx \sim \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)$$

дан фойдаланамиз. Бизнинг ҳолда $a = 1$, $b = 2$, $\varphi(x) = 2x + 1$ га эгамиз. $n = 10$ деб оламиз. У ҳолда

$$\int_1^2 (2x+1)\,dx \approx \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(2x_i+1)$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда мумкин бўлган x_i қийматларни (20. 4) формула

$$x_i = a + (b - a)\,r_i$$

дан топамиз, бизнинг ҳолда

$$x_i = 1 + r_i,$$

бу ерда r_i сонлар тасодифий сонлар жадвалидан вергулдан сўнг учта рақам билан олинади.

Ўнта синов натижасини 3. 59-жадвалда келтирамиз.

3. 59- жадвал

i	r_1^0	$x_i = 1 + r_i$	$2x_i = 2+2r_i$	$\varphi(x_i) = 2xi + 1$
1	0,100	1,100	2,200	3,200
2	0,973	1,973	3,946	4,946
3	0,253	1,253	2,506	3,506
4	0,376	1,376	2,752	3,752
5	0,520	1,520	3,040	4,040
6	0,135	1,135	2,270	3,270
7	0,863	1,863	3,726	4,726
8	0,467	1,467	2,934	3,934
9	0,354	1,354	2,708	3,708
10	0,876	1,876	3,752	4,752
				$\sum_{i=1}^{10}\varphi(x) = 39{,}834$

Жадвалдан $\sum_{i=1}^{10}\varphi(x_i) = 39{,}834$. Демак, изланаётган интеграл

$$\int_1^2 (2x+1)\,dx \approx \frac{1}{10}\cdot 39{,}834 = 3{,}9834.$$

а) Интегралнинг аниқ қиймати:

$$\int_1^2 (2x+1)\,dx = \frac{(2x+1)^2}{4}\Bigg|_1^2 = 4.$$

Шу сабабли ҳисоблашнинг абсолют хатолиги

$$4 - 3{,}9834 = 0{,}0166$$

бўлади.

б) Хатоликнинг юқори чегараси $\delta = 0{,}1$ бўлишини $\gamma = 0{,}95$ ишончлилик билан таъминлайдиган синовларнинг энг кичик сони n ни (20. 1) формула

$$n = \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2}$$

бўйича ҳисоблаймиз. Бу формуладаги t сонни $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = 0{,}475$ тенгликдан Лаплас функцияси жадвали бўйича топамиз: $t = 1{,}96$. Бунда δ нинг қийматини X тасодифий миқдор $[1;\ 2]$ оралиқда текис тақсимланган деган шартдан топамиз, шу сабабли унинг дисперсияси қуйидагига тенг:

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1^2}{12} = \frac{1}{12}.$$

Энди $\Phi(X) = 2X + 1$ функциянинг дисперсиясини топамиз:

$$D(2X+1) = 4D(X) = 4\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{3}.$$

Демак, $\delta^2 = D(2X+1) = \frac{1}{3}$.

Шундай қилиб, изланаётган синовлар энг кичик сонини ҳисоблаймиз:

$$n = \frac{t^2\cdot\delta^2}{\gamma^2} = \frac{(1{,}96)^2\cdot\frac{1}{3}}{(0{,}1)^2} = 128.$$

9- дарсхона топшириқлари

1. $\int\limits_0^1 (1-x^2)\,dx$ аниқ интегрални Монте — Карло усули ёрдамида ҳисобланг, бунда тасодифий сонлар жадвалидан кетма-кет 30 та қийматни вергулдан кейинги учта рақами билан олинг. Абсолют ва нисбий хатоликларни топинг.

Ж: 0,685; 0,018; 2,7 %.

2. $\int\limits_1^2 \ln x\,dx$ аниқ интегрални Монте — Карло усули ёрдамида ҳисобланг, бунда тасодифий сонлар жадвалидан 10 та қийматни вергулдан кейинги учта рақами билан олинг. Абсолют ва нисбий хатоликларни топинг.

Ж: 0,371; 0,015; 3,9 %.

9- мустақил иш топшириқлари

1. Монте — Карло усулидан фойдаланиб,

$$\int\limits_2^3 (x^2 + x^3)\,dx$$

интегрални ҳисобланг, бунда тасодифий сонлар жадвалидан 20 та қийматни олинг. Абсолют ва нисбий хатоликларни топинг.

Ж: 21,894; 0,689; 3,1 %.

2. Монте — Карло усулидан фойдаланиб,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

интегрални ҳисобланг, бунда тасодифий сонлар жадвалидан 10 та қийматни олинг. Абсолют ва нисбий хатоликларни топинг.

Ж: 0,6968; 0,0037; 0,5 %.

10-§. Оддий дифференциал тенглама учун Коши масаласини Эйлер усули билан ечиш

Эйлер усули билан Коши масаласини ечишга мисоллар кўрайлик.

1-мисол. Эйлер усулидан фойдаланиб,

$$y' = \frac{y-x}{y+x}$$

дифференциал тенгламанинг $y(0) = 1$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи y функциясининг қийматларини ҳисобланг, қадамни $h = 0,1$ деб олинг. Унинг биринчи тўртта қийматини топиш билан чекланинг.

Ечиш. Аргументнинг кетма-кет қийматларини топамиз:

$$x_0 = 0;\ x_1 = 0,1;\ x_2 = 0,2;\ x_3 = 0,3:\ x_4 = 0,4.$$

Изланаётган функциянинг мос қийматларини (21.1) формула

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i,\ y_i)$$

бўйича ҳисоблаймиз, бу ерда $i = \overline{0,3}$, $h = 0,1$, $f(x,\ y) = \frac{y-x}{y+x}$

Ҳисоблаш натижаларини 3.60-жадвалга жойлаштирамиз.

3.60-жадвал

i	x	y	$y-x$	$y+x$	$f(x,y)=\frac{y-x}{y+x}$	$h\cdot f(x,y)$
0	0	1,000	1,000	1,000	1,000	0,1000
1	0,1	1,100	1,000	1,200	1,833	0,083
2	0,2	1,183	0,983	1,383	0,711	0,071
3	0,3	1,254	0,954	1,554	0,614	0,061
4	0,4	1,315	—	—	—	

2-мисол. Эйлернинг биринчи ва иккинчи такомиллаштирилган усулларидан фойдаланиб,

$$y' = \frac{y-x}{y+x}$$

дифференциал тенгламанинг $y(0)=1$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи y функциясининг қийматларини топинг, $h=0,1$. Биринчи тўртта қийматни топиш билан чекланинг.

Ечиш. Бу ерда $h=0,1$, $f(x, y)=\frac{y-x}{y+x}$

Бу тенглама интегралини синиқ чизиқлар такомиллаштирилган усули формуласи (21.2)

$$y_{i+1}=y_i+h\cdot f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}),$$

(бу ерда $x_{i+\frac{1}{2}}=x_i+\frac{h}{2}\Big)$

$$y_{i+\frac{1}{2}}=y_i+\frac{h}{2}f(x_i, y_i)$$

билан ҳисобланган натижалари 3.61-жадвалда келтирилган:

3.61-жадвал

i	x_i	y_i	$\frac{h}{2}f(x_i, y_i)$	$x_{i+\frac{1}{2}}$	$y_{i+\frac{1}{2}}$	$hf(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$
0	0	1,000	0,050	0,05	1,050	0,091
1	0,1	1,091	0,042	0,15	1,133	0,077
2	0,2	1,168	0,035	0,25	1,203	0,066
3	0,3	1,234	0,031	0,35	1,265	0,057
4	0,4	1,291	—	—	—	—

Навбатдаги жадвалда (3.62-жадвал) берилган тенгламанинг интегралини Эйлер — Коши такомиллаштирилган усули (21.3) формуласи

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}\left(f(x_i, y_i)+f(x_{i+1}, \breve{y}_{i+1})\right),$$

(бу ерда $\breve{y}_{i+1}=y_i+hf(x_i, y_i)$) бўйича ҳисоблаш натижалари келтирилган.

3.62-жадвал

i	x_i	y_i	$\frac{h}{2}f(x_i,y_i)$	x_{i+1}	y_{i+1}	$\frac{h}{2}f(x_{i+1}, y_{i+1})$	$\frac{h}{2}(f(x_i, y_i)+$ $+f(x_{i+1}, y_{i+1}))$
0	0	1,000	0,050	0,1	1,100	0,042	0,092
1	0,1	1,092	0,042	0,2	1,176	0,036	0,078
2	0,2	1,170	0,035	0,3	1,240	0,031	0,066
3	0,3	1,236	0,031	0,4	1,298	0,027	0,058
4	0,4	1,294	—	—	—	—	—

3-мисол. $y' = 2x - y$ тенглама учун $y(0) = -1$ бошланғич шартли Коши масаласини Эйлернинг итерация усули билан ечинг. Қадамни $h = 0{,}2$ деб олинг. Ечишни учта ўнлик рақамлар устма-уст тушгунга қадар давом эттиринг.

Ечиш. Бу ерда $h = 0{,}2$, $f(x, y) = 2x - y$. Маълум (21.4) $y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i, y_i)$ формулага кўра $i = 0$ бўлганда қуйидаги нолинчи яқинлашишга эга бўламиз:

$$y_1^{(0)} = hf(x_0, y_0) = -1 + 0{,}2(2 \cdot 0 + 1) = -0{,}800.$$

y_1 ни (21.5) формула

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{k-1})]$$

бўйича итерациялаймиз:

$$y_1^{(1)} = y_0 + \frac{h}{2}[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(0)})] = -1 + 0{,}1[1 + 2 \cdot 0{,}2 -$$

$$-(-0{,}800)] = -0{,}780;$$

$$y_1^{(2)} = y_0 + \frac{h}{2}[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(1)})] = -1 + 0{,}1[1 + 2 \cdot 0{,}2 -$$

$$-(-0{,}780)] = -0{,}782;$$

$$y_1^{(3)} = y_0 + \frac{h}{2}[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(2)})] =$$

$$= -1 + 0{,}1[1 + 2 \cdot 0{,}2 - (-0{,}782)] = -0{,}782.$$

$y_1 = -0{,}782$ ни ҳосил қилдик. (21.4) формула бўйича $y_2^{(0)}$ нинг қийматини ҳисоблаймиз:

$$y_2^{(0)} = y_1 + hf(x_1, y_1) = -0{,}782 + 0{,}2(0{,}2 \cdot 2 +$$

$$+ 0{,}782) = -0{,}546.$$

y_2 ни (21.5) формула бўйича итерациялаймиз:

$$y_2^{(1)} = y_1 + \frac{h}{2}[f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^{(0)})] =$$

$$= -0{,}782 + 0{,}1[2 \cdot 0{,}2 + 0{,}782 + 2 \cdot 0{,}4 - (-0{,}546)] = -0{,}529;$$

$$y_2^{(2)} = y_1 + \frac{h}{2}[f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^{(1)})] =$$

$$= -0{,}782 + 0{,}1[2 \cdot 0{,}2 + 0{,}782 + 2 \cdot 0{,}4 - (-0{,}529)] = -0{,}531;$$

$$y_2^{(3)} = y_1 + \frac{h}{2}[f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^{(2)})] =$$

$$= -0{,}782 + 0{,}1[2 \cdot 0{,}2 + 0{,}782 + 2 \cdot 0{,}4 - (-0{,}531)] = -0{,}531.$$

$y_2 = -0{,}531$ ни ҳосил қилдик. Шунга ўхшаш ҳисоблаб, y_3, y_4 y_5 ни топамиз (3.63-жадвал).

3.63-жадвал

i	x_i	y_i	$y^{(0)}_{i+1}$	y^{1}_{i+1}	$y^{(2)}_{i+1}$	$y^{(3)}_{i+1}$
0	0	—1	—0,800	—0,780	—0,782	—0,782
1	0,2	—0,782	—0,546	—0,529	—0,531	—0,531
2	0,4	—0,531	—0,265	—0,252	—0,253	—0,253
3	0,6	—0,253	0,038	0,048	0,047	0,047
4	0,8	0,047	0,358	0,365	0,366	0,366
5	1,0	0,366	—	—	—	—

Топилган y_i қийматлар

$$y = e^{-x} + 2x - 2$$

хусусий ечимнинг [0; 1] кесманинг мос нуқталаридаги қийматлари билан 0,01 гача аниқликда устма-уст тушишини текшириб кўриш қийин эмас.

10-дарсхона топшириқлари

1. Эйлер усули билан

$$y' = \frac{(x+y)(1-xy)}{x+2y}$$

тенгламанинг $y(0) = 1$ бошланғич шартли сонли ечимини [0; 1] кесмада топинг, $h = 0,2$ деб олинг.

Ж: $y(1) = 1,27$.

2. Эйлер усули билан

$$y' = x + y$$

тенгламанинг $y(0) = 1$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини $h = 0,1$ қадам билан тўртта нуқтада ҳисобланг.

Ж: $y(0,4) = 1,52$.

3.2-масалани ушбу уч усул билан ечинг:

а) синиқ чизиқлар такомиллаштирилган усули;
б) Эйлер — Коши такомиллаштирилган усули;
в) итерация усули.

10-мустақил иш топшириқлари

1. Эйлер усули билан

$$y' = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

тенгламанинг $y(0) = 1$ бошланғич шартли сонли ечимини [0; 1] кесмада топинг, $h = 0,2$ деб олинг.

Ж: $y(1) = 1,328$.

2. $y(2) = 4$ бошланғич шартли $y' = y^2 + \frac{y}{x}$ тенгламанинг ечимини $h = 0,1$ қадам билан тўртта қийматини ушбу усуллар билан топинг:

а) Эйлер усули;

б) синиқ чизиқлар такомиллаштирилган усули;
в) Эйлер—Қоши такомиллаштирилган усули;
г) итерация усули.
Ж: а) $y(2,4) = 54,86$.

11-§. Сонли дифференциаллаш. Юқори аниқликдаги сонли дифференциаллаш формулалари

Сонли дифференциаллашга бир нечта мисоллар кўрайлик.

1-мисол. Синуслар жадвали $h = 0,2$ қадам билан берилган. $x = 0,6$ нуқтада биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларни топинг (3.64-жадвал)

3.64-жадвал

i	x	$y = f(x) = \sin x$	i	x	$y = f(x) = \sin x$
0	0	0	5	1,0	0,84147
1	0,2	0,19867	6	1,2	0,93204
2	0,4	0,38942	7	1,4	0,98545
3	0,6	0,56464	8	1,6	0,99957
4	0,8	0,71736	9	1,8	0,97385

Ечиш. Чекли айирмалар жадвалини тузамиз (3.65-жадвал).

3.65-жадвал

i	x	$y = \sin x$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
0	0	0	0,19867	—0,00792	—0,00761	0,00064	0,00022	0,00010
1	0,2	0,19867	0,19075	—0,01553	—0,00967	0,00086	0,00032	—0,0019
2	0,4	0,38942	0,17522	—0,2250	—0,00611	0,00118	0,00013	0,00005
3	0,6	0,56464	0,15272	—0,02861	—0,00493	0,00131	0,00018	—0,00009
4	0,8	0,71736	0,12411	—0,03354	—0,00362	0,00149	0,00009	—
5	1,0	0,84147	0,09057	—0,03716	—0,00213	0,00158	—	—
6	1,2	0,93204	0,05341	—0,03929	—0,00055	—	—	—
7	1,4	0,98545	0,01412	—0,03984	—	—	—	—
8	1,6	0,99957	—0,02572	—	—	—	—	—
9	1,8	0,97385	—	—	—	—	—	—

$x_0 = x_3 = 0,6$ деб олиб, (17.3) ва (17.4) формулалар бўйича ҳосилаларни ҳисоблаймиз:

$$f'(0,6) \approx \frac{1}{0,2}\Big[0,15272 - \frac{1}{2}(-0,02861) + \frac{1}{3}(-0,0493) -$$

$$-\frac{1}{4}\ 0,00131 + \frac{1}{5}\cdot 0,00018 - \frac{1}{6}(-0,00009)\Big] = 0,82540;$$

$$f''(6) \approx \frac{1}{0,2^2}\Big[-0,2861 - (-0,00493) + \frac{11}{2}\cdot 0,00131 -$$

$$-\frac{5}{6}\cdot 0,00018 + \frac{137}{180}(-0,00009)\Big] = -0,56742.$$

2-мисол. Функция 3.66-жадвал билан берилган.

3.66-жадвал

x	0	1	2	3	4	5
y	—5	—1	19	73	179	355

$x = 1{,}5$ ва $x = 4{,}2$ нуқталарда биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларни топинг.

Ечиш. Чекли айирмалар жадвалини тузамиз (3.67-жадвал).

3.67-жадвал

i	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	0	—5	4	16	18	0
1	1	—1	20	34	18	0
2	2	19	54	52	18	—
3	3	73	106	70	—	—
4	4	179	176	—	—	—
5	5	355	—	—	—	—

а) (17.1) ва (17.2) формулалардан фойдаланамиз. Жадвалга кўра $h = 1$. Ҳосилаларни $x = 1{,}5$ нуқтада ҳисоблаш учун $x_0 = 1$ деб оламиз, у ҳолда $q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{1{,}5 - 1}{1} = 0{,}5$;

$$f'(1{,}5) \approx \frac{1}{1}\left(20 + \frac{2 \cdot 0{,}5 - 1}{2}\ 34 + \frac{3 \cdot 0{,}5^2 - 6 \cdot 0{,}5 + 2}{6}\ 18\right) = 19{,}25;$$

$$f''(1{,}5) \approx \frac{1}{1^2}\,(34 + (0{,}5 - 1)\,18) = 25.$$

б) (17.7) ва (17.8) формулалардан фойдаланамиз. $x = 4{,}2$ нуқтада (у ўнг охирига яқинроқ) ҳосилаларни ҳисоблаш учун $x_n = 4$ деб оламиз, у ҳолда

$$t = \frac{x - x_n}{h} = \frac{4{,}2 - 4}{1} = 0{,}2;$$

$$f'(4{,}2) \approx \frac{1}{1}\left[106 + \frac{2 \cdot 0{,}2 + 1}{2} \cdot 52 + \frac{3 \cdot 0{,}2^2 + 6 \cdot 0{,}2 + 2}{6}\ 18\right] = 152{,}36;$$

$$f''(4{,}2) \approx \frac{1}{1^2}\,[52 + (0{,}2 + 1) \cdot 18] = 73{,}6.$$

11-дарсхона топшириқлари

1. $y = f(x)$ функция жадвал билан берилган. (3.68; 3.69; 3.70-жадваллар). Ҳосиланинг қийматини кўрсатилган x_1 ва x_2 нуқталарда топинг:

3. 68- жадвал

а)

x	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
y	1,44013	1,54722	1,67302	1,81973	1,98970	2,18547	2,40978	2,66537

$x_1 = 2{,}03$ ва $x_2 = 2{,}22$.

3. 69- жадвал

б)

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
y	1,0083	1,1134	1,2208	1,3310	1,4449	1,5634	1,6876	1,8186

$x_1 = 1{,}14$ ва $x_2 = 1{,}42$.

3. 70- жадвал

в)

x	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5
y	3,92847	4,41016	4,93828	5,51744	6,15213	6,84782	7,61045	8,44671

$x_1 = 3{,}02$ ва $x_2 = 3{,}31$.

Ж: а) $f'(2{,}03) = 1{,}42249$; $f'(2{,}22) = 1{,}87640$
б) $f'(1{,}14) - 1{,}0704$; $f'(1{,}42) = 1{,}1698$;
в) $f'(3{,}02) = 5{,}63133$; $f'(3{,}31) = 7{,}34833$.

2. $y = f(x)$ функция 3. 71- жадвал билан берилган. $f'(x)$ ва $f''(x)$ ҳосилаларнинг қийматларини $x = 2$ нуқтада ҳисобланг.

3. 71- жадвал

x	1	2	3	4	5	6
y	1	5	21	55	113	201

Ж: $f'(2) = 9$; $f''(2) = 12$.

11- мустақил иш топшириқлари

1. $y = f(x)$ функция 3. 72; 3. 73- жадвал билан берилган. Ҳосиланинг қийматини кўрсатилган x_1 ва x_2 нуқталарда ҳисобланг.

3. 72- жадвал

а)

x	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	1,05	1,10
y	0,2803	0,3186	0,3592	0,4021	0,4472	0,4945	0,5438	0,5952

$$x_1 = 0{,}82 \text{ ва } x_2 = 1{,}03.$$

3. 73- жадвал

а)

x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
y	0,8802	0,9103	0,9340	0,9523	0,9661	0,9764	0,9838	0,9891

$$x_1 = 1{,}34 \text{ ва } x_2 = 1{,}65.$$

Ж: а) $f'(0{,}82) = 0{,}8077$; $f'(1{,}03) = 0{,}9914$;

б) $f'(1{,}34) = 0{,}1873$; $f'(1{,}65) = 0{,}0741$.

2. $y' = f(x)$ функция 3. 74- жадвал билан берилган. $f'(x)$ ва $f''(x)$ ҳосилаларнинг қийматларини $x = 2{,}5$ нуқтада ҳисобланг.

3. 74- жадвал

x	0	1	2	3	4	5
y	1	3	19	85	261	631

Ж: $f'(2{,}5) = 63{,}5$; $f''(2{,}5) = 75$.

12- §. Иккинчи тартибли оддий дифференциал тенглама учун чизиқли чегаравий масалани ечиш

Чегаравий масалаларни ечишга битта мисол кўрайлик.

Мисол. $y'' + x^2 y + 2 = 0$ дифференциал тенглама учун

$$y(-1) = 0, \quad y(1) = 0$$

бошланғич шартли чегаравий масалани $[-1;\ 1]$ кесмада чекли айирмалар усули билан ечинг. Бу кесмани тўртта тенг бўлакка бўлинг.

Ечиш. $[-1;\ 1]$ кесмани $h = 0{,}5$ қадам билан тўртта тенг бўлакка ($n = 4$) бўламиз:

$$x_0 = -1;\ x_1 = -0,5;\ x_2 = 0;\ x_3 = 0,5;\ x_4 = 1.$$

Бунда $y_0 = y(-1) = 0$ ва $y_4 = y(1) = 0$ қийматлар маълум. Ушбу учта қийматни ҳисоблаш лозим:

$$y_1 = y(-0,5);\quad y_2 = y(0);\ y_3 = y(0,5).$$

(23. 9) формулаларда $i = \overline{1, 3}$ деб, y_1, y_2, y_3 қийматларни ҳисоблаш учун тенгламалар системасини тузамиз:

$$\begin{cases} \dfrac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} + x_1^2 y_1 + 2 = 0, \\ \dfrac{y_3 - 2y_2 + y_1}{h^2} + x_2^2 y_2 + 2 = 0, \\ \dfrac{y_4 - 2y_3 + y_2}{h^2} + x_3^2 y_3 + 2 = 0, \\ y_0 = 0, \\ y_4 = 0. \end{cases}$$

$h = 0,5$ ни ўрнига қўйиб ва системани соддалаштириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 16y_0 - 31y_1 + 16y_2 & = -8, \\ \qquad 2y_1 - 4y_2 + 2y_3 & = -1, \\ \qquad\qquad 16y_2 - 31y_3 + 16y_4 & = -8, \\ y_0 & = 0, \\ \qquad\qquad\qquad y_4 & = 0. \end{cases}$$

Бу ердан:

$$y_0 = 0;\ y_1 = 0,8;\ y_2 = 1,05;\ y_3 = 0,8;\ y_4 = 0.$$

12- дарсхона топшириқлари

Берилган кесмани n та тенг бўлакка бўлиб, дифференциал тенгламани кўрсатилган чегаравий шартларда чекли айирмалар усули билан ечинг.

1. $x^2y'' - xy' = 3x^3$;
   $y(1) = 2$; $y(2) = 9$; $[1;\ 2]$; $n = 4$.
   Ж: $y_1 = 2,953$; $y_2 = 4,375$; $y_3 = 6,359$.
2. $x^2y'' + xy' - y = x^2$;
   $y(1) = 1,333$; $y'(3) = 3$; $[1;\ 3]$; $n = 7$.
   Ж: $y_1 = 1,926$; $y_2 = 2,593$; $y_3 = 3,333$;
   $y_4 = 4,148$; $y_5 = 5,037$; $y_6 = 6$.
3. $y'' + (x - 1)y' + 3,125y = 4x$;
   $y(0) = 1$; $y(1) = 1,368$; $[0;\ 1]$; $n = 10$.
   Ж: $y_1 = 1,17$; $y_2 = 1,31$; $y_3 = 1,42$; $y_4 = 1,50$; $y_5 = 1,64$;
   $y_6 = 1,66$; $y_7 = 1,63$; $y_8 = 1,58$; $y_9 = 1,49$.

12- мустақил иш топшириқлари

Берилган кесмани n та тенг бўлакка бўлиб, дифференциал тенгламани кўрсатилган чегаравий шартларда чекли айирмалар усули билан ечинг.

1. $x^2y'' - 2y = 0$;
$y(1) - 2y'(1) = 0$; $y(2) = 4{,}5$; $[1;\ 2]$; $n = 5$.
Ж: $y_0 = 2$; $y_1 = 2{,}273$; $y_2 = 2{,}674$; $y_3 = 3{,}185$; $y_4 = 3{,}796$.
2. $y'' + xy' + y = 2x$;
$y(0) = 1$; $y(1) = 0$; $[0;\ 1]$; $n = 10$.
Ж: $y_1 = 0{,}874$; $y_2 = 0{,}743$; $y_3 = 0{,}611$, $y_4 = 0{,}482$; $y_5 = 0{,}362$; $y_6 = 0{,}253$; $y_7 = 0{,}161$; $y_8 = 0{,}087$, $y_9 = 0{,}033$.

13- §. «Прогонка» ва коллокация усуллари

«Прогонка» ва коллокация усуллари билан бир нечта мисолларнинг ечимларини келтирайлик.

1- мисол. «Прогонка» усули билан

$$y'' + x^2y = -2; \quad y(-1) = 0; \quad y(1) = 0$$

чегаравий масалани (12- § даги 1- мисол) $[-1;\ 1]$ кесмани тенг тўрт бўлакка бўлиб ечинг.

Ечиш. $n = 4$; $h = 0{,}5$; $x_i = x_0 + ih$ га эгамиз. Чегаравий шартлари билан берилган масаладан мос (23. 12) ва (23. 13) чекли айирмали тенгламаларга ўтамиз. Ечилаётган масалада

$$p_i = p(x_i) = 0; \quad q_i = q(x_i) = x_i^2; \quad f_i = f(x_i) = -2;$$

$$\alpha_0 = -1, \ \beta_0 = 1, \ \gamma_1 = 0,$$

$$\alpha_1 = 0, \ \beta_1 = 0, \ \gamma_2 = 0,$$

$$y_0 = y(-1) = 0, \ y_4 = y(1) = 0.$$

m_i, n_i, f_i лар учун (23. 14) формулаларни тузамиз:

$$m_i = q_ih^2 - 2 = 0{,}25x_i^2; \ n_i = 1, \ f_i = -2.$$

Ечимни (23. 16) формула бўйича топамиз:

$$y_i = c_i(d_i - y_{i+1}), \ i = \overline{1,\ 3},$$

бу ерда $c_0 = 0$, $d_0 = 0$ (23. 20)

$$c_i = \frac{1}{0{,}25x_i^2 - 2 - c_{i-1}}$$

$$d_i = -0{,}5 - c_{i-1} \cdot d_{i-1}, \ i = 1{,}3. \qquad (23.18)$$

Жадвални тўлдиришга ўтамиз (3. 75- жадвал).

Аввал c_i, d_i ларни, кейин (23. 16) формулалар бўйича y_i, $i = \overline{1,\ 3}$ ларни ҳисоблаймиз (тескари йўл).

3. 75- жадвал

i	0	1	2	3	4
c_i	0	—0,516	—0,674	—0,791	—
d_i	—	—0,5	—0,758	—1,011	—
x_i	—1	—0,5	—	0,5	1
y_i	0	0,799	1,049	0,799	0

2- мисол 1- мисолдаги чегаравий масалани коллокация усули билан ечинг.

Ечиш. Қуйидагига эгамиз:

$$y'' + x^2 y = -2,$$
$$y(-1) = y(1) = 0.$$

Базис функциялар сифатида $u_n(x) = x^{2n-2}(1 - x^2)$, $n = 1, 2, \dots$ кўпҳадларни оламиз.

Чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ушбу иккита

$$u_1(x) = 1 - x^2, \quad u_2(x) = x^2 - x^4$$

базис функция билан чекланамиз.

У ҳолда

$$y = c_1(1 - x^2) + c_2(x^2 - x^4).$$

Буни дифференциал тенгламага қўйганимиздан сўнг,

$$R(x) = c_1(x^2 - x^4 - 2) + c_2(x^4 - x^6 - 12x^2 + 2) + 2$$

фарқни оламиз. Коллокация нуқталари сифатида

$$x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{1}{2}$$

ни олсак, бу нуқталарда

$$R\left(\pm\frac{1}{2}\right) = 0, \quad R(0) = 0.$$

Шундай қилиб, c_1 ва c_2 коэффициентларни аниқлаш учун

$$c_1 - c_2 - 1 = 0,$$
$$\frac{29}{16}c_1 + \frac{61}{64}c_2 - 2 = 0$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу ердан $c_1 = 1{,}068$ ва $c_2 = 0{,}068$. Шундай қилиб, ушбу тақрибий ечимни ҳосил қилдик:

$$y \approx 1{,}068(1 - x^2) + 0{,}068(x^2 - x^4) = 1{,}068 - x^2 - 0{,}068x^4.$$

13- дарсхона топшириқлари

1. «Прогонка» усули билан чегаравий масалаларни ечинг:

а) $y'' - 2xy' - 2y = -4x;$

$y(0) - y'(0) = 0,\ y(1) = 3{,}718;\ n = 10;$

б) $y'' + y = -x;$

$$y(0) = 0,\ y(1) = 0;\ n = 4.$$

Ж: а) $y_1 = -0{,}025;\quad y_2 = -0{,}049;\quad y_3 = -0{,}072;$

$y_4 = -0{,}078;\quad y_5 = -0{,}081;\quad y_6 = -0{,}078;$

$y_7 = -0{,}070;\quad y_8 = -0{,}055;\quad y_9 = -0{,}032;$

б) $y_1 = 0{,}039;\ y_2 = 0{,}063;\ y_3 = 0{,}055.$

2. Коллокация усули билан ушбу чегаравий масалани ечинг:

$$y'' + y = -x,$$
$$y(0) = 0,\ y(1) = 0;\ n = 4.$$

Натижани 1 (б)- масала ечими ва аниқ ечим билан таққосланг.

13- мустақил иш топшириғи

«Прогонка» ва коллокация усули билан

$$y'' + y = x,$$
$$y(-1) = 0,\ y(1) = 0$$

чегаравий масалани ечинг. Натижаларни аниқ ечим билан таққосланг.

14- §. Лаплас тенгламаси учун тўрлар усули

Тўрлар усули татбиқини битта масала ечиш мисолида кўрсатайлик.

Мисол. Лаплас тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

нинг бирлик квадратдаги

$$u(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ агар } 0 \leqslant x \leqslant 1,\ y = 0 \text{ бўлса}, \\ \frac{8}{3}\, y(64y^2 - 60y + 29), \text{ агар } x = 0,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \text{ бўлса}, \\ \frac{8}{3}(1 - x)(64x^2 - 68x + 3), \text{ агар } 0 \leqslant x \leqslant 1,\ y = 1 \text{ бўлса}, \\ 0, \text{ агар } x = 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \text{ бўлса} \end{cases}$$

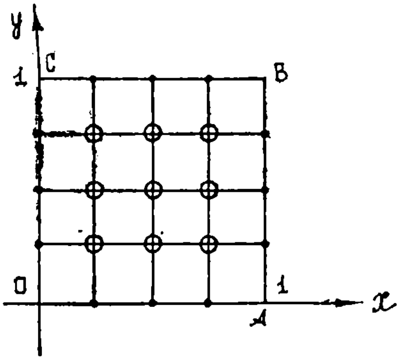
чегаравий шартлар бўйича ечимини топинг.

Ечиш. $h = 0{,}25$ деб олиб,

$$G = \{0 < x < 1,\quad 0 < y < 1\}$$

квадратни $x_i = ih,\ y_j = jh\ (i, j = \overline{0,\ 4})$ тўғри чизиқлар билан G_h тўрли соҳага алмаштирамиз.

3. 31- шаклдаги A, B, C, O тугунлардан ташқари барча тугунлар ҳисоблаш тугунларидир.



3.31- шакл

$x = ih$, $y = jh$ алмаштиришдан сўнг, чегаравий шартлар биринчи тур чегаравий тугунларда (шаклдаги қора доирачалар) ушбу кўринишни олади:

$$u_{i0} = 0,\ u_{4j} = 0\ (i,\ j = \overline{1,\ 3})$$

$$u_{j0} = \frac{8}{3} h \cdot j\,(64\,(h_j)^2 - 60\,(h_j\ ) + 29) = \frac{2j}{3}\,(4j^2 - 15j + 29)\ (j = \overline{1,\ 3}),$$

$$u_{i4} = \frac{8}{3}\,(1 - h_i)\,(64\,(h_i)^2 - 68h_i + 33) = \frac{1}{6}\,(4 - i)\,(16i^2 - 68i + 132). \quad (i = \overline{1,\ 3})$$

Чегаравий шартлар ва номаълум қийматлар (ҳисоблаш тугунларида — шаклда бўялмаган доирачалар) жадвалини келтирамиз (3. 76-жадвал):

3. 76- жадвал

C	$u_{14} = 40$	$u_{24} = 20$	$u_{34} = 12$	B
$u_{03} = 40$	u_{13}	u_{23}	u_{33}	$u_{43} = 0$
$u_{02} = 20$	u_{12}	u_{22}	u_{32}	$u_{42} = 0$
$u_{01} = 10$	u_{11}	u_{21}	u_{31}	$u_{41} = 0$
O	$u_{10} = 0$	$u_{20} = 0$	$u_{30} = 0$	A

Айирмали схемани (24. 2) формула бўйича тузамиз:

$$u_{ij} = \frac{1}{4}\,(u_{i-1,\,j} + u_{i+1,\,j} + u_{i,\,j-1} + u_{i,\,j+1}),$$

бу ерда $(x_{i\pm 1},\ y_{i\pm 1})$ — ҳисоблаш тугунлари.

Келтирилган жадвалдан ва беш нуқтали «хоч» (3. 28- шаклга қ.) «қолип» идан фойдаланиб, ушбу айирмали схемани тузамиз:

$$u_{11}=\frac{1}{4}(12+u_{21}+u_{12}+0),$$
$$u_{21}=\frac{1}{4}(u_{11}+u_{31}+u_{22}+0),$$
$$u_{31}=\frac{1}{4}(u_{21}+0+u_{32}+0),$$
$$u_{12}=\frac{1}{4}(20+u_{22}+u_{11}+u_{13}),$$
$$u_{22}=\frac{1}{4}(u_{12}+u_{32}+u_{21}+u_{23}),$$
$$u_{32}=\frac{1}{4}(u_{22}+0+u_{31}+u_{33}),$$
$$u_{13}=\frac{1}{4}(40+u_{23}+40+u_{12}),$$
$$u_{23}=\frac{1}{4}(u_{13}+u_{23}+20+u_{22}),$$
$$u_{33}=\frac{1}{4}(u_{23}+0+u_{12}+u_{32}).$$

Симметриклик хоссасига асосан:

$$u_{11}=u_{33},\quad u_{12}=u_{23},\ u_{21}=u_{32}.$$

Шу сабабли ҳосил қилинган айирмали схема соддалашади:

$$u_{11}=\frac{1}{4}(12+u_{21}+u_{12}),$$
$$u_{21}=\frac{1}{4}(u_{11}+u_{31}+u_{22}),$$
$$u_{31}=\frac{1}{4}(u_{21}+u_{32})=\frac{1}{2}u_{21},$$
$$u_{12}=\frac{1}{4}(20+u_{22}+u_{11}+u_{13}),$$
$$u_{22}=\frac{1}{4}(u_{12}+u_{32}+u_{23}+u_{21})=\frac{1}{2}(u_{12}+u_{21}),$$
$$u_{13}=\frac{1}{4}(40+u_{23}+u_{12}+40)=20+\frac{1}{2}u_{12}.$$

Бу системани оддий итерация усули ва Зейдель усули билан ечамиз (15- §).

Нолинчи яқинлашишни чегаравий қийматлар бўйича чизиқли интерполяциялаш ёрдамида (8. 7) формула (сатрлар бўйича)

$$u_{ij}^{0}=u_{0i}+(u_{ij}-u_{0j})\frac{i}{4}$$

орқали ҳисоблаймиз.

$j=1$ бўлганда

$$u_{ij}^0 = 12 + (0 - 12)\frac{i}{4} = 12\left(1 - \frac{i}{4}\right)$$

га эга бўламиз, бу ерда $i = \overline{1, 3}$ ни ўзгартириб,

$$u_{11}^0 = 9, \quad u_{21}^0 = 6, \quad u_{31}^0 = 3$$

ни ҳосил қиламиз.

Симметрикликни ҳисобга олиб

$$u_{32}^0 = u_{21}^0 = 6, \quad u_{33}^0 = u_{11}^0 = 9$$

деймиз. u_{12}^0 ва u_{22}^0 ни ҳисоблашда (8. 7) чизиқли интерполяция формуласидан $j = 2$ да ва топилган u_{32}^0 қийматдан фойдаланамиз:

$$u_{i2}^0 = u_{02} + (u_{32}^0 - u_{02})\frac{i}{3} =$$

$$= 20 + (6 - 20)\frac{i}{3} = 20\left(1 - \frac{7}{30}i\right).$$

Бундан $i = \overline{1, 2}$ ни ўзгартириб,

$$u_{12}^0 = 15{,}33; \; u_{22} = 10{,}66$$

ни ҳосил қиламиз. Симметрикликни ҳисобга олиб,

$$u_{23}^0 = u_{12}^0 = 15{,}33$$

деб оламиз.

Сўнгги u_{13}^0 қийматни $j = 3$ сатр учун чизиқли интерполяция формуласи бўйича ҳисоблаймиз ва бунда топилган u_{23}^0 қийматдан фойдаланамиз:

$$u_{03}^0 = u_{03} + (u_{23}^0 - u_{03})\frac{i}{2} = 40 + (15{,}33 - 40)\frac{i}{2},$$

бундан $i = 1$ да $u_{13}^0 = 27{,}67$ ни ҳосил қиламиз.

Топилган нолинчи яқинлашишни жадвал шаклида ёзиш мумкин (3. 77- жадвал):

3. 77- жадвал

$u_{13}^0 = 27{,}67$	$u_{23}^0 = 15{,}33$	$u_{33}^0 = 9$
$u_{12}^0 = 15{,}33$	$u_{22}^0 = 10{,}66$	$u_{32}^0 = 6$
$u_{11}^0 = 9$	$u_{21} = 6$	$u_{31}^0 = 3$

Ҳосил бўлган тенгламалар системасини ечишни икки усул: оддий итерация (15.2- §) ва Зейдель усуллари (15. 3- §) билан амалга оширамиз. Ҳисоблашни то иккита кетма-кет ечим ҳар бир ўзгарувчи бўйича 0,1 гача аниқликда устма-уст тушгунча давом эттирамиз.

Оддий итерация усули бўйича ҳисоблашда тўртта итерация, Зейдель усулида эса 3 та итерация талаб этилди. Ечимлар жадвалларда келтирилган (3.78; 3.79-жадваллар).

3.78-жадвал

	40	20	12	
40	28,5	17,0	8,6	0
20	17,0	11,3	5,6	0
12	8,6	5,6	2,8	0
	0	0	0	

Оддий итерация усули

3.79-жадвал

	40	20	12	
40	28,6	17,0	8,6	0
20	17,0	11,4	5,7	0
12	8,6	5,7	2,8	0
	0	0	0	

Зейдель усули

14-дарсхона топшириғи

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ Лаплас тенгламасининг тақрибий ечимини квадрат учун кўрсатилган чегаравий шартларда ечинг:

а)

	16,18	38,63	
0,00 ●	●	●	● 50,00
0,00 ●	○	○	● 30,10
0,00 ●	○	○	● 12,38
0,00 ●	●	●	● 4,31
	26,15	29,34	

б)

	17,98	39,02	
0,00 ●	●	●	● 50,00
0,00 ●	○	○	● 30,10
0,00 ●	○	○	● 12,38
0,00 ●	●	●	● 4,31
	29,05	29,63	

3.80-жадвал

Ж:

0,00	16,18	38,63	50,00
0,00	14,12	26,09	30,10
0,00	15,20	20,53	12,38
0,00	26,15	29,34	4,31

3.81-жадвал

б)

0,00	17,98	39,92	50,0
0,00	15,18	36,39	30,10
0,00	16,37	21,26	12,38
0,00	29,05	29,63	4,31

14-мустақил иш топшириғи

Лаплас тенгламаси $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ нинг тақрибий ечимини $h=\frac{1}{6}$ қадам билан квадрат учун кўрсатилган шартларда ечинг:

	9,81	19,78	29,12	40,16	42,31	
0,00 ●	●	●	●	●	●	● 50,00
0,00 ●	○	○	○	○	○	● 40,16
0,00 ●	○	○	○	○	○	● 33,11
0,00 ●	○	○	○	○	○	● 19,14
0,00 ●	○	○	○	○	○	● 13,0
0,00 ●	○	○	○	○	○	● 6,98
0,00 ●	●	●	●	●	●	● 4,31
	17,28	31,96	40,00	30,50	17,28	

Ж:

3,82-жадвал

0,00	9,81	19,78	29,12	40,16	42,31	50,00
0,00	8,97	17,58	25,36	32,18	36,11	40,16
0,00	8,68	16,0	22,29	26,86	29,69	33,11
0,00	8,36	15,59	20,71	23,05	22,62	19,11
0,00	9,43	17,22	21,71	21,85	18,55	13,00
0,00	12,20	22,09	26,96	24,01	16,70	6,98
0,00	17,28	31,96	40,00	30,50	17,28	4,31

15-§. Иссиқлик ўтказувчанлик ва тор тебраниш тенгламалари учун тўрлар усули

Иссиқлик ўтказувчанлик ва тор тебраниш тенгламаларини тўрлар усули билан ечишга мисоллар кўрайлик.

1-мисол.

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун

$$G\{0<x<1,0<t<0,1\}$$

тўғри тўртбурчакда $0\leqslant x\leqslant 1$ да $u(x, 0)=x(1-x)$ бошланғич шартлар ва $0\leqslant t\leqslant 0,1$ да

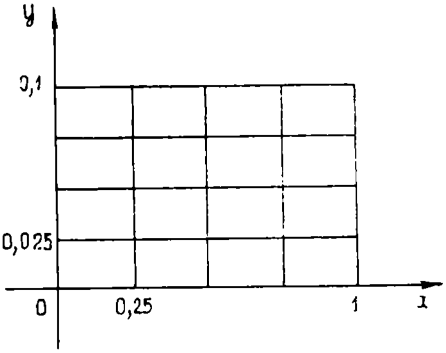
$$u(0,\ t)=0,\ u(1,\ t)=0$$

чегаравий шартлар билан берилган масалани ечинг.

Ечиш. G соҳада x координата бўйича $h=\frac{1}{N}$ қадамли ва t координата бўйича $\tau = \frac{0,1}{M}$ қадамли тўғри тўртбурчакли текис тўр киритамиз: $x_i = ih\,(i = \overline{0,N})$; $t_i = \gamma\tau\ (\tau = \overline{0,m})$. $h = 0,25\,(N = 4)$ деб оламиз. Ошкор схема турғун бўлиши учун (24-§) $r = \frac{\tau}{h^2} \leqslant \frac{1}{2}$ бўлишини талаб қиламиз, бундан

$$\tau \leqslant 0,03.$$

Бўлишлар сони M бутун сон бўлиши учун $\tau = 0,025$ деб танлаймиз ($M = 4$) (3.32 шакл).



3.32- шакл

Ҳисоблаймиз: $r = \frac{\tau}{h^2} = 0,4.$

(24.3) ошкор схема шакл алмаштиришлардан сўнг (24.5) кўринишни олади:

$$u_{i,\,j+1} = r\,(u_{i-1,\,j} + u_{i+1,\,j}) + (1 - 2r)\,u_{ij} + \tau f_{ij}.$$

Бизнинг ҳолда $r = 0,4$; $f_{ij} = 0$ бўлганлиги учун

$$u_{i,\,j+1} = 0,4\,(u_{i-1,\,j} + u_{i+1,\,j}) + 0,2u_{ij}.$$

Бошланғич ва чегаравий шартлардан:

$$u_{i0} = u\,(x,\ 0) + ih\,(1 - ih) = \frac{i}{4}\left(1 - \frac{i}{4}\right) = \frac{i\,(4 - i)}{16},$$

$$u_{0j} = u\,(0,\ j\tau) = 0,\ u_{4j} = u\,(1,\ j\tau) = 0\ (i = \overline{0,3};\ j = \overline{0,3}).$$

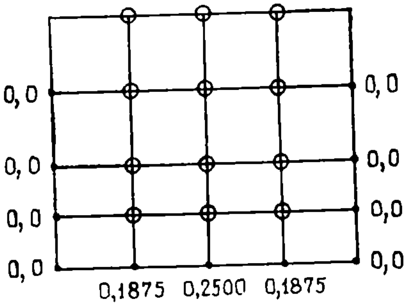
Бу формулалар бўйича изланаётган функциянинг $j = 0$ да нолинчи қатламдаги қийматларини (бошланғич шартлар) ҳисоблаймиз:

$$u_{10} = \frac{1\cdot(4 - 1)}{16} = 0,1875;$$

$$u_{20} = \frac{2\,(4 - 2)}{16} = 0,2500;$$

$$u_{30} = \frac{3(4-3)}{16} = 0,1875.$$

Тўрли G_h соҳа схемасини келтирамиз (схемада изланаётган номаълум қийматлар бўялмаган доирачалар билан белгиланган (3.33-шакл)).



3.33- шакл

Изланаётган функциянинг қийматларини навбатдаги $j = 1$ бўлган қатламда тўрт нуқтали «қолип» дан фойдаланиб ҳисоблашга ўтамиз (3.33-шаклга қ).

$$u_{11} = 0,4(u_{00} + u_{20}) + 0,2u_{10} = 0,4(0 + 0,2500) + + 0,2\cdot 0,1875 = 0,1375;$$

$$u_{21} = 0,4(u_{10} + u_{30}) + 0,2u_{20} = 0,4(0,1875 + 0,1875) + + 0,2\cdot 0,2500 = 0,2000;$$

$$u_{31} = 0,4(u_{20} + u_{40}) + 0,2\cdot u_{30} = 0,4(0,2500 + 0) + + 0,2\cdot 0,1875 = 0,1375$$

Функциянинг навбатдаги $j = 2,4$ бўлган қатламдаги қийматлари ҳам шунга ўхшаш ҳисобланади (3.83-жадвал).

3.83- жадвал

u_{ij} / j	u_{0j}	u_{1j}	u_{2j}	u_{3j}	u_{4j}
0	0	0,1876	0,2500	0,1875	0
1	0	0,1375	0,2000	0,1375	0
2	0	0,1075	0,1500	0,1075	0
3	0	0,0815	0,1160	0,0815	0
4	0	0,0627	0,0884	0,0627	0

2-мисол. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ торнинг тебраниши тенгламаси учун $G\{0< x< 1{,}0< t< 0{,}6\}$ тўғри тўртбурчак

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ да } u(x,\ 0) = x(1-x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

бошланғич шартлар ва

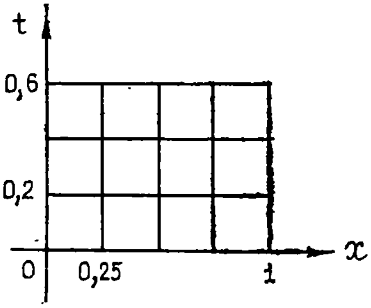
$$0 \leqslant t \leqslant 0{,}6 \text{ да } u(0, t) = 0,\ u(1,\ x) = 0$$

чегаравий шартлар билан берилган масалани ечинг.

Ечиш. G соҳани $x_i = ih$, $t_j = j\cdot\tau$ $(i = \overline{1, N},\ j = \overline{1, M})$ тўр билан қоплаймиз. $h = 0{,}25$ деб оламиз, у ҳолда $\tau < 0{,}25$. $[0;\ 0{,}6]$ кесманинг узунлиги 0,6 бўлгани учун $\tau = 0{,}2$ ни танлаймиз, чунки M бутун сон бўлиши керак (3.34-шакл).

(24.7). Ҳисоблаш формуласидан

$$f_{ij} = 0 \text{ ва } \gamma^2 = \left(\frac{\tau}{h}\right)^2 = 0{,}64,\ u_{i,\ j+1} = -u_{i,\ j-1} + 0{,}64\,(u_{i-1,\ j} - u_{i+1,\ j}) + 0{,}72\,u_{ij}$$
$$(i = \overline{1{,}3};\ j = \overline{0{,}2}).$$



3.34-шакл

Бошланғич ва чегаравий шартлар бундай ёзилади:

$$u_{i,\ 0} = u(x_i,\ 0) = x_i(1 - x_i) = ih(1 - ih) = \frac{i}{4}\left(1 - \frac{i}{4}\right) = \frac{i}{16}(4 - i), \quad (i = \overline{1{,}3}),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{i,\ 1} - u_{i,-1}}{0{,}2} = 0\ (i = \overline{1{,}3}),$$

$$u_{0j} = u(0,\ j\tau) = 0,\ u_{4j} = u(1,\ j\tau) = 0\ (j = \overline{1{,}3})$$

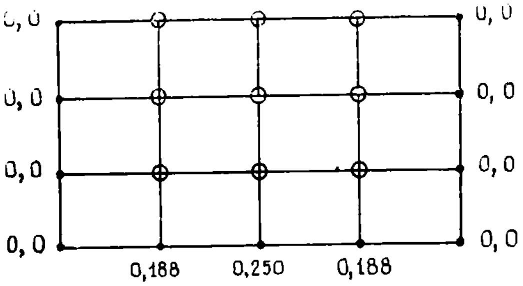
Изланаётган функциянинг нолинчи қатламдаги қийматларини ҳисоблаймиз (бошланғич шартлар):

$$u_{10} = \frac{1\,(4-1)}{16} = 0{,}188;$$

$$u_{20} = \frac{2\,(4-2)}{16} = 0{,}250;$$

$$u_{30} = \frac{3\,(4-3)}{16} = 0{,}188.$$

G_h тўрли соҳа 3.35- шаклда тасвирланган.



3.35- шакл

Энди изланаётган функциянинг навбатдаги қатламдаги қийматларини $\gamma = 0$ да «хоч» қолипи бўйича ҳисоблаймиз, лекин аввал $u_{i,\,-1}$ $(j=0)$ сохта қийматларни бошланғич шартлардан бундай аниқлаб оламиз:

$$u_{i,\,-1} = u_{i1}.$$

Шундай қилиб, биринчи қадамда

$$u_{i1} = -u_{i1} + 0,64\,(u_{i-1,\,0} + u_{i+1,\,0}) + 0,72u_{i0}$$

га эга бўламиз. Бу ердан

$$u_{i1} = 0,32\,(u_{i-1,\,0} + u_{i+1,\,0}) + 0,36u_{i0}.$$

$i = 1$ бўлганда

$$\begin{gathered} u_{11} = 0,32\,(u_{00} + u_{20}) + 0,364_{10} = 0,32\,(0 + 0,250) + \\ + 0,36\cdot 0,188 = 0,148; \end{gathered}$$

$i = 2$ бўлганда

$$\begin{gathered} u_{21} = 0,32\,(u_{10} + u_{30}) + 0,364u_{20} = 0,32\,(0,188 + 0,188) + \\ + 0,36\cdot 0,250 = 0,210; \end{gathered}$$

$i = 3$ бўлганда

$$\begin{gathered} u_{31} = 0,32\,(u_{20} + u_{40}) + 0,36u_{30} = 0,32\,(0,250 + 0) + \\ + 0,36\cdot 0,188 = 0,148. \end{gathered}$$

Изланаётган функциянинг қийматларини иккинчи қадамда ($ij = 1$ да) ҳам шунга ўхшаш ҳосил қиламиз:

$$u_{i2} = -u_{i0} + 0,64\,(u_{i-1,\,1} + u_{i+1,\,1}) + 0,72u_{i,1},$$

бу ердан қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{gathered} u_{12} = -u_{10} + 0,64\,(u_{01} + u_{21}) + 0,72\cdot u_{11} = \\ = -0,188 + 0,64\,(0 + 0,210) + 0,72\cdot 0,148 = 0,053; \end{gathered}$$

$$u_{22} = -u_{20} + 0{,}64\,(u_{11} + u_{31}) + 0{,}72 \cdot u_{21} =$$
$$= -0{,}250 + 0{,}64\,(0{,}148 + 0{,}148) + 0{,}72 \cdot 0{,}210 = 0{,}091.$$
$$u_{32} = u_{12} = 0{,}053.$$

Симметрикликни ҳисобга олсак, ҳисоблашлар кейинги қадамларда ($j = 2$ ва $j = 3$ да) ҳам худди шундай бажарилади. Ҳисоблаш натижаларини жадвалга ёзамиз (3.84- жадвал).

3.84- жадвал

u_{ij} / j	u_{0j}	u_{1j}	u_{2j}	u_{3j}	u_{4j}
0	0	0,188	0,250	0,188	0
1	0	0,148	0,210	0,148	0
2	0	0,053	0,091	0,053	0
3	0	—0,052	—0,077	—0,052	0

15- дарсхона топшириғи

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасининг

$$u(x,\ 0) = (1{,}1x^2 + 1{,}1)\sin \pi x,$$
$$u(0,\ t) = 0,\ u(1,\ t) = 0$$

шартларни қаноатлантирадиган тақрибий ечимини $0 \leqslant t \leqslant 0{,}02$ учун топинг. x аргумент бўйича қадамни $h = 0{,}1$ ва $r = \frac{1}{2}$ деб олинг.

Ж:

3.85- жадвал

x / t	1,0	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	**0,7**	0,8	0,9
0,000	0,343	0,672	0,970	1,213	1,375	1,423	1,237	1,062	0,618
0,005	0,336	0,656	0,943	1,172	1,318	1,351	1,243	0,973	0,531
0,010	0,328	0,639	0,914	1,131	1,262	1,281	1,162	0,887	0,486
0,015	0,320	0,621	0,885	1,088	1,206	1,212	1,084	0,824	0,443
0,020	0,311	0,602	0,855	1,045	1,150	1,145	1,018	0,764	0,412

15- мустақил иш топшириқлари

1. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ исснқлик ўтказувчанлик тенгламасининг

$u(x,\ 0) = (1{,}1x^2 + 2{,}3)e^{-x}$, $u(0,\ t) = 2{,}3$ ва $u(1,\ t) = 3{,}4e^{-1}$ шартларни қаноатлантирадиган тақрибий ечимини $0 \leqslant t \leqslant 0{,}01$ қийматлар учун топинг. x аргумент бўйича қадамни $h = 0{,}1$ ва $r = \frac{1}{6}$ деб олинг.

Ж:

3.86- жадвал

$t \backslash x$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,000	2,091	1,919	1,777	1,660	1,562	1,480	1,410	1,350	1,297
0,0017	2,097	1,924	1,781	1,663	1,564	1,482	1,411	1,351	1,298
0,0033	2,102	1,929	1,785	1,666	1,567	1,484	1,413	1,352	1,299
0,0050	2,106	1,934	1,789	1,670	1,570	1,486	1,415	1,354	1,300
0,0067	2,110	1,939	1,794	1,673	1,572	1,488	1,416	1,355	1,301

2. Ушбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2} t x^2$$

тор тебраниш тенгламасининг

$$G = \{0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

соҳадаги

$$u(x, 0) = x^2,\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \sin x,$$

$$u(0, t) = e^t - 1,\ u(2, t) = 4 \cos t$$

шартларни қаноатлантирадиган тақрибий ечимини топинг. x аргумент бўйича қадамни $h = 0{,}002$, t аргумент бўйича қадамни эса $\tau = 0{,}001$ деб олинг.

Ж:

3.87- жадвал

$t \backslash x$	0,00	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00
0,0	0,0	0,16	0,64	1,44	2,56	4,00
0,2	0,22	0,28	0,82	1,67	2,80	3,98
0,4	0,49	0,48	1,08	1,96	3,10	3,68
0,6	0,82	0,92	1,41	2,33	3,19	3,30
0,8	1,23	1,42	1,82	2,76	3,11	2,79
1,0	1,72	1,97	2,46	2,97	2,88	2,16

Босқич (курс) иши

Талабалар томонидан ЭҲМ да мустақил бажариладиган босқич ишининг мавзуси: **Иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун аралаш масалани ечиш. Ошкор ва ошкормас схемалар.**

Вазифа. Масалани ечиш учун дастур тузиш ва уни синаш. Қадамни танлаш. Ҳисоб ишларини бажариш. Олинган натижаларни таҳлил қилиш.

ИЛОВАЛАР

1- илова

$I_0(\mu) = 0$ ва $I_1(\mu)$ 0 **характеристик тенгламаларнинг илдизлари**

n	$I_0(\mu) = 0$ тенгламанинг илдизлари	$I_1(\mu) = 0$ тенгламанинг илдизлари
1	2,4048	3,8317
2	5,5201	7,0156
3	8,6537	10,1735
4	11,7915	13,3237
5	14,9309	16,4706
6	18,0711	19,6159
7	21,2116	22,7601
8	24,3525	25,9037
9	27,4935	29,0468
10	30,6346	32,1897

2- илова

$\frac{I_0(\mu)}{I_1(\mu)} = \frac{1}{lh}\mu$ **характеристик тенгламанинг илдизлари**

$lh = n$	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
0,0	0,0000	3,8317	7,0156	10,1735	13,3237	16,4706
0,01	0,1412	3,8343	7,0170	10,1745	13,3244	16,4712
0,02	0,1995	3,8369	7,0184	10,1754	13,3252	16,4718
0,03	0,2814	3,8421	7,0213	10,1774	13,3267	16,4731
0,06	0,3438	3,8473	7,0241	10,1794	13,3282	16,4743
0,08	0,3960	3,8525	7,0270	10,1813	13,3297	16,4755
0,10	0,4417	3,8577	7,0298	10,1833	13,3312	16,4767
0,15	0,5376	3,8706	7,0369	10,1882	13,3349	16,4797
0,20	0,6970	3,8835	7,0440	10,1931	13,3387	16,4828
0,30	0,7465	3,9091	7,0582	10,2029	13,3462	16,4888
0,40	0,8516	3,9344	7,0723	10,2127	13,3537	16,4949
0,50	0,9408	3,9594	7,0864	10,2225	13,3611	16,5010
0,60	1,0184	3,9841	7,1004	10,2322	13,3686	16,5070
0,70	1,0873	4,0085	7,1143	10,2419	13,3761	16,5131
0,80	1,1490	4,0325	7,1282	10,2519	13,3835	16,5191
0,90	1,2048	4,0562	7,1421	10,2613	13,3910	16,5251
1,00	1,2558	4,0795	7,1558	10,2710	13,3984	16,5312
1,5	1,4569	4,1902	7,2223	10,3188	13,4353	16,5612
2,0	1,5994	4,2910	7,2884	10,3658	13,4719	16,5910
3,0	1,7887	4,4634	7,4103	10,4566	13,5434	16,6499
4,0	1,9081	4,6018	7,5201	10,5423	13,6125	16,7073
5,0	1,9898	4,7131	7,6177	10,6233	13,6786	16,7630
6,0	2,0490	4,8033	7,7039	10,6964	13,7414	16,8168
7,0	2,0937	4,8772	7,7797	10,7646	13,8008	16,8684
8,0	2,1286	4,9384	7,8464	10,8271	13,8566	16,9179
9,0	2,1566	4,9897	7,9051	10,8842	13,9090	16,9650
10,0	2,1795	5,0332	7,9569	10,9363	13,9580	17,0099
15,0	2,2509	5,1733	8,1422	11,1367	14,1576	17,2008
20,0	2,2880	5,2568	8,2534	11,2677	14,2983	17,3442
30,0	2,3261	5,3410	8,3771	11,4221	14,4748	17,5348

$lh = n$	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
40,0	2,3455	5,3846	8,4432	11,5081	14,5774	17,6508
50,0	2,3572	5,4112	8,4840	11,5621	14,6433	17,7272
60,0	2,3651	5,4291	8,5116	11,5990	14,6889	17,7807
80,0	2,3750	5,4516	8,5466	11,6461	14,7475	17,8502
100,0	2,3809	5,4652	8,5678	11,6747	14,7834	17,8931
∞	2,4048	5,5201	8,6537	11,7915	14,9309	18,0711

3- илова

$I_0(\mu)\ N_0(k\mu) - N_0(\mu)\ I_0(k\mu) = 0$ **характеристик тенгламанинг μ_n илдизлари**

n	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5
1,2	15,7014	31,4126	47,1217	62,8304	78,5385
1,5	6,2702	12,5598	18,8451	25,1294	31,4133
2,0	3,1230	6,2734	9,4182	12,5614	15,7040
2,5	2,0732	4,1773	6,2754	8,3717	10,4672
3,0	1,5485	3,1291	4,7038	6,2767	7,8487
3,5	1,2339	2,5002	3,7608	5,0196	6,2776
4,0	1,0244	2,0809	3,1322	4,1816	5,2306

4- илова

$\operatorname{tg}\mu = -\dfrac{\mu}{h}$ **характеристик тенгламанинг илдизлари**

h	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
0	1,5708	4,7124	7,8540	10,9956	14,1372	17,2788
0,1	1,6320	4,7335	7,8667	11,0047	14,1443	17,2845
0,2	1,6887	4,7544	7,8794	11,0137	14,1513	17,2903
0,3	1,7414	4,7751	7,8920	11,0228	14,1584	17,2961
0,4	1,7906	4,7956	7,9046	11,0318	14,1654	17,3019
0,5	1,8366	4,8158	7,9171	11,0409	14,1724	17,3076
0,6	1,8798	4,8358	7,9295	11,0498	14,1795	17,3134
0,7	1,9203	4,8556	7,9419	11,0588	14,1865	17,3192
0,8	1,9586	4,8751	7,9542	11,0677	14,1935	17,3249
0,9	1,9947	4,8943	7,9665	11,0767	14,2005	17,3306
1,0	2,0288	4,9132	7,9787	11,0856	14,2075	17,3364
1,5	2,1746	5,0037	8,0382	11,1296	14,2421	17,3649
2,0	2,2889	5,0870	8,0965	11,1727	14,2764	17,3932
3,0	2,4557	5,2329	8,2045	11,2560	14,3434	17,4490
4,0	2,5704	5,3540	8,3029	11,3349	14,4080	17,5034
5,0	2,6537	5,4544	8,3914	11,4086	14,4699	17,5562
6,0	2,7165	5,5378	8,4703	11,4773	14,5288	17,6072
7,0	2,7654	5,6078	8,5406	11,5408	14,5847	17,6562
8,0	2,8044	5,6669	8,6031	11,5994	14,6374	17,7032
9,0	2,8363	5,7172	8,6587	11,6532	14,6860	17,7481
10,0	2,8628	5,7606	8,7083	11,7027	14,7335	17,7908

h	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	ρ_6
15,0	2,9476	5,9080	8,8898	11,8959	14,9251	17,9742
20,0	2,9930	5,9921	9,0019	12,0250	15,0652	18,1136
30,0	3,0406	6,0831	9,1294	12,1807	15,2380	18,3018
40,0	3,0651	6,1311	9,1986	12,2688	15,3417	18,4180
50,0	3,0801	6,1606	9,2420	12,3247	15,4090	18,4953
60,0	3,0901	6,1805	9,2715	12,3632	15,4559	18,5497
80,0	3,1028	6,2058	9,3089	12,4124	15,5164	18,6209
100,0	3,1105	6,2211	9,3317	12,4426	15,5537	18,6650
∞	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496

АДАБИЁТ

1. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Қабельков Т. П. Численные методы, М., «Наука», 1987.
2. Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике, М., «Наука», 1972.
3. Волков Е. А. Численные методы, М., «Наука», 1982.
4. Годунов С. Қ. Уравнения математической физики, М., «Наука», 1979.
5. Гутер Р. С., Овчинский Б. В. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта, М., «Наука», 1970.
6. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. М., «Наука», 1970.
7. Демидович Б. П., Марон И. А. Шувалова Э. З. Численные методы анализа, М., «Наука», 1967.
8. Диткин В. А., Прудников А. П. Интетральные преобразования и операционное исчисление, М., «Наука», 1974.
9. Исроилов М. Ҳисоблаш методлари, Т., «Ўқитувчи», 1988.
10. Қалиткин Н. Н. Численные методы, М., «Наука», 1978.
11. Кузнецов Д. С. Специальные функции, М., «Высшая школа», 1965.
12. Положий Г. Н Уравнения математической физики, М., «Высшая школа», 1964.
13. Соатов Ё. У. Олий математика, 1-жилд, Т. «Ўқитувчи», 1992.
14. Соатов Ё. У. Олий матеметика, 2-жилд, Т., «Ўқитувчи», 1994.
15. Соатов Ё. У. Олий математика, 3-жилд, Т., «Ўзбекистон», 1996.
16. Соатов Ё. У. Олий математика, 4-жилд, Т., «Ўқитувчи», 1997.
17. Тешабоева Н. Математик физика методлари, Т., «Ўқитувчи», 1980.
18. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1972.
19. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных, М., Изд-во иностр. литературы, 1957.
20. Қобулов В. Қ. Функционал анализ ва ҳисоблаш математикаси, Т., «Ўқитувчи», 1976.

МУНДАРИЖА

Б. Амалий машғулотлар

Операцион ҳисоб

Назарий мавзулар ва амалий машғулотлар

Сонли усуллар

А. Назарий мавзулар

Б. Амалий машғулотлар

ЁЛҚИН УЧҚУНОВИЧ СОАТОВ

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА

5-жилд

Олий техника ўқув юртлари талабалари учун дарслик

Тошкент «Ўқитувчи» 1998

Таҳририят мудири *М. Пўлатов*
Муҳаррирлар: *Н. Ғоипов, И. Ғ. Аҳмаджонов*
Расмлар муҳаррири *М. Кудряшова*
Тех. муҳаррир *Т. Грешникоза*
Мусаҳҳиҳ *З. Содиқова*

ИБ № 7276

Теришга берилди 16.05.97. Босишга рухсат этилди 31.10.97. Бичими $60 \times 90^1/_{16}$. Литературная гарн. Кегли 10 шпонсиз. Юқори босма усулида босилди. Шартли б. т. 22,0. Шартли кр-отт. 22,87. Нашр. т. 27,68. 2000 нусхада босилди. Буюртма 2928.

«Ўқитувчи» нашриёти. Тошкент, 129. Навоий кўчаси, 30. Шартнома 09-267-97.

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот қўмитасининг Тошполиграфкомбинати. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. 1998.

С 73

Соатов Ё. У.

Олий математика: Олий техника ўқув юртлари талабалари учун дарслик; 5- жилд /Таҳрир ҳайъати: Е. М. Ҳусанбоев (маъсул), А. Омонов, А. Абдукаримов, Р. Ж. Исомов/,—Т.: «Ўқитувчи», 1997.— 352 б.

ББҚ 22.11я73