Б. АБДАЛИМОВ

Олий математика

Ўзбекистон Республикаси Қишлоқ хўжалиги вазирлиги ўқув-услубият кабинети аграр университет ва қишлоқ хўжалик олий ўқув юртлари учун дарслик сифатида тасдиқлаган

ТОШКЕНТ—«ЎҚИТУВЧИ»—1994

Мазкур дарслик аграр университет ва қишлоқ хўжалик олий ўқув юртларининг *олий математика дастури асосида* ёзилган бўлиб, унда текислик ва фазода аналитик геометрия, математик анализ, дифференциал тенгламалар, векторлар ва чизиқли алгебра *элементлари, эҳтимоллар назарияси ва* математик статистика элементлари баён этилган.

Дарслик қишлоқ хўжалик олий ўқув юртлари талабалари учун мўлжалланган бўлиб, ундан иқтисодиёт ва техника олий ўқув юртлари талабалари ҳам фойдаланишлари мумкин.

•

Тақризчи: **Н. Т. ТОШЕВ,** физика-математика фанлари номзоди

Махсус муҳаррир: **Х. МАНСУРОВ,** ТошДУ доценти, физика-математика фанлари номзоди

Нашриёт муҳаррирлари: **У. ҲУСАНОВ, Х. АЛИМОВ**

22.11
А 15

Абдалимов Б.
Олий математика: Аграр университет ва қишлоқ хўжалик олий ўқув юртлари учун дарслик.— Т.: Ўқитувчи, 1994.— 368б.

22.11я73

А $\frac{1602000000-128}{353(04)-94}$ билд. хати — 94

ISBN—5—645—025027—5

Устозим Саъди Хасанович Сирожиддиновнинг ёрқин хотирасига бағишлайман.

СУЗ БОШИ

Олий ўқув юртлари талабаларининг касб эгаллашида ўрганадиган дастлабки фанлардан бири олий математикадир.

Олий математиканинг вазифаси талабаларни математикадан маълумотлар мажмуаси билан таништиришгина эмас, балки талабаларни мантиқий фикрлаш, математик усулларни амалий масалаларни ечишга қўллаш, шунингдек, иқтисодий масалаларнинг математик моделларини қуришга ўргатишдан иборатдир.

Давр талабига асосан қишлоқ хўжалиги олий ўқув юртлари талабаларини иқтисодий масалаларни ечишда зарур бўладиган математик аппарат асослари билан чуқурроқ таништириш, халқ хўжалиги масалаларининг математик моделларини қуришнинг самарадор йўлларини кўрсатиш, муаллифнинг (Ш. Солиҳов билан ҳамкорликда) «Ўқитувчи» нашриёти томонидан 1981 йилда чоп этилган «Олий математика қисқа курси» китобига янгича нуқтаи назардан қарашга ва бу эса ўз навбатида ушбу қўлланманинг ёзилишига олиб келди.

Дарслик қишлоқ хўжалиги олий ўқув юртларининг олий математикадан дастури асосида ёзилган бўлиб, унда текисликда ва фазода аналитик геометрия, математик анализ, дифференциал тенгламалар, векторлар ва чизиқли алгебра элементлари, эҳтимоллар назарияси ва математик статистика элементлари баён этилган.

Шуни таъкидлаш лозимки, китобдаги материалларни иложи борича, қишлоқ хўжалигига оид масалалар билан боғлаб содда, қисқача баён қилишга ҳаракат қилинди.

Мазкур қўлланмани ёзишда олий математикадан ёзилган китоблардан, жумладан Т. Азларов ва Х. Мансуровнинг «Математик анализ» китобидан, Тошкент давлат аграр университетида кўп йиллар давомида ўқиган маърузаларимдан фойдаландим.

Ушбу дарслик гарчанд қишлоқ хўжалиги олий ўқув юртлари талабаларига мўлжалланган бўлса-да, ундан шунингдек, техника ва иқтисодиёт олий ўқув юртлари талабалари ҳам фойдаланишлари мумкин.

Китоб қўлёзмаси билан танишиб, ўз мулоҳазаларини билдирган ва маслаҳатлар берган ҳамкасбларимга, хусусан Тошкент автомобиль йўллари институтининг олий математика кафедраси мудири, профессор *М. У. Ғофуров*, Самарқанд қишлоқ хўжалиги институти Олий математика кафедраси мудири, доцент *Ж. Г. Қулматов* ҳамда Тошкент давлат аграр университетининг Олий математика кафедраси аъзоларига ўз миннатдорчилигимни изҳор этаман. Шунингдек, фойдали маслаҳатлари билан китобни яхшилашга катта ёрдам берган Тошкент давлат университети доценти, физика-математика фанлари номзоди Х. Мансуровга чуқур миннатдорчилик билдираман.

Мазкур дарслик айрим камчиликлардан ҳоли бўлмаслиги мумкин. Бу камчиликларни кўрсатиб, ўз фойдали фикрларини билдирадиган ўртоқларга муаллиф олдиндан ўз ташаккурини билдиради.

Муаллиф

I БОБ. ТЕКИСЛИКДА АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯНИНГ ДАСТЛАБКИ ТУШУНЧАЛАРИ

Аналитик геометрия олий математиканинг бўлимларидан бири. У геометрик шаклларнинг (тўғри чизиқ, айлана, текислик ва ҳ. к.) хусусиятларини алгебра усули (яъни тенгламалар ёрдамида) билан ўрганади.

1-§. Тўғри бурчакли Декарт координаталар системаси

Ҳар қандай геометрик шакл нуқталар тўплами билан аниқланади. Бинобарин, геометрик шаклларни ўрганиш учун уни ташкил этган нуқталарнинг текисликдаги ҳолатини топиш лозим бўлади. Текисликда нуқтанинг ҳолатини аниқлайдиган усул маълум бўлса, текисликда координаталар системаси берилган дейилади. Биз қуйида содда, айни пайтда кенг қўлланадиган Декарт координаталари системасини келтирамиз.

Текисликда иккита ўзаро перпендикуляр тўғри чизиқни олайлик. Бу тўғри чизиқларнинг бири горизонтал, иккинчиси эса вертикал жойлашсин. Тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтасини O ҳарфи билан белгилаб, уни *координата боши* деб атаймиз. Горизонтал тўғри чизиқ *Ox ўқи* ёки *абсцисса ўқи* дейилади. Вертикал тўғри чизиқ эса *Oy ўқи* ёки *ордината ўқи* деб аталади. Ox ва Oy ўқларни *координата ўқлари* дейилади (1-чизма).*

Координата боши Ox ва Oy ўқларнинг ҳар бирини икки қисмга — икки ярим ўққа ажратади. Ярим ўқлардан бирини мусбат, иккинчисини эса манфий деб ҳисоблаймиз. Мусбат ярим ўқлар 1-чизмада стрелкалар билан кўрсатилган.

Координата ўқлари текисликни 4 та қисмга (чоракка) ажратади Улар 2-чизмада кўрсатилганидек номерланади.

Айтайлик, M — текисликдаги бирор нуқта бўлсин. Бу нуқтадан Ox ва Oy ўқларга перпендикулярлар тушириб, уларнинг Ox ва Oy ўқлар билан кесишган нуқталарини M_x ва M_y лар билан белгилаймиз (3-чизма).

Ушбу

$$OM_x = x,\ OM_y = y$$

* Чизмалар китоб охирида илова тарзида берилган.

кесмаларнинг узунликлари M нуқтанинг *координаталари* деб аталади. Бунда M_x нуқта O нуқтадан ўнгда жойлашса, OM_x кесма узунлиги мусбат ишора билан, чапда бўлса, OM_x манфий ишора билан олинади.

Худди шунга ўхшаш, M_y нуқта O нуқтадан юқорида жойлашса, OM_y мусбат, пастда жойлашса, манфий ишора билан олинади. x сон M нуқтанинг биринчи координатаси ёки *абсциссаси*, y сон эса M нуқтанинг иккинчи координатаси ёки *ординатаси* деб аталади. M нуқта координаталари ёрдамида қуйидагича ёзилади: $M(x; y)$.

Юқорида айтилганлардан кўринадики, текисликдаги ҳар бир нуқта $(x; y)$ жуфтликни аниқлайди.

Энди, аксинча иккита x ва y сонлардан иборат $(x; y)$ жуфтлик берилган бўлсин. Ox ўқда x сонга мос келадиган A_x нуқтани (агар x мусбат сон бўлса, бу нуқта O нуқтадан ўнгда, x манфий сон бўлса, O нуқтадан чапда жойлашган бўлади) топамиз. Худди шунга ўхшаш, Oy ўқда y сонга мос келадиган A_y нуқтани (агар y мусбат сон бўлса, нуқта O нуқтадан юқорида, y манфий сон бўлса, O нуқтадан пастда жойлашган бўлади) топамиз. Сўнг A_x нуқтадан Ox ўққа перпендикуляр, A_y нуқтадан Oy ўққа перпендикуляр чиқарамиз. Натижада бу перпендикулярларнинг кесишиш нуқтасига эга бўламиз. Худди шу нуқтанинг координаталари x ва y лар бўлади. Шундай қилиб, $(x; y)$ жуфтлик текисликда битта нуқтани ифодалар экан.

Демак, нуқтани геометрик объект сифатида қарайдиган бўлсак, унинг *аналитик ифодаси* иккита сондан иборат жуфтлик *бўлади*.

Маълумки, координата ўқлари бутун текисликни 4 та чоракка бўлади. Бу чораклардаги нуқталар координаталарининг ишоралари қуйидаги жадвалда кўрсатилган.

Чораклар	$(x; y)$ нуқта координаталари ишораси	
	x (абсцисса)	y (ордината)
I	$x>0$	$y>0$
II	$x<0$	$y>0$
III	$x<0$	$y<0$
IV	$x>0$	$y<0$

Масалан, ушбу $A(2; 3)$, $B(-1; 2)$, $C(-3; -2)$ $D(3; -1)$ нуқталарнинг геометрик тасвирлари 4-чизмада ифодаланган.

Эслатма. Ox ўқдаги нуқталарнинг ординаталари 0 га тенг, Oy ўқдаги нуқталарнинг абсциссалари 0 га тенг. Координата бошининг координаталари $(0; 0)$ бўлади.

Хулоса қилиб шуни айтиш мумкинки, аналитик геометрияда $M(x; y)$ нуқта берилган деганда унинг координаталари x ва y сонлардан тузилган $(x; y)$ жуфтликнинг берилганлигини тушунамиз.

2-§. Икки нуқта орасидаги масофа

Текисликда иккита A_1 ва A_2 нуқталар берилган бўлиб, уларнинг координаталари мос равишда $(x_1; y_1)$ ва $(x_2; y_2)$ бўлсин: $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$ (5-чизма). Бу нуқталар орасидаги масофани топиш талаб этилсин.

$A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$ нуқталар орасидаги масофани d билан белгилайлик: $|A_1A_2| = d$.

A_1 нуқтадан Ox ўққа, A_2 нуқтадан Oy ўққа параллел тўғри чизиқлар ўтказайлик. Бу тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтасини B билан белгилайлик. Натижада A_1A_2B тўғри бурчакли учбурчак ҳосил бўлади. Равшанки, бу $\triangle A_1A_2B$ нинг A_1B ва A_2B томонларининг узунликлари

$$|A_1B| = x_2 - x_1, \quad |A_2B| = y_2 - y_1$$

бўлади. Пифагор теоремасидан фойдаланиб топамиз:

$$|A_1A_2|^2 = |A_1B|^2 + |A_2B|^2.$$

Демак,

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Бу тенгликдан эса

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \tag{1.1}$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, берилган $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$ нуқталар орасидаги масофа бу нуқталарнинг бир хил исмли координаталари айирмалари квадратларининг йиғиндисидан олинган квадрат илдизнинг арифметик қийматига тенг.

Хусусан, координата боши $O(0; 0)$ дан $A(x; y)$ нуқтагача бўлган масофа

$$|OA| = d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

бўлади.

Мисол. Ушбу $A(1; 2)$ ва $B(4; 6)$ нуқталар орасидаги масофа топилсин.

Ечиш. Равшанки, A нуқтанинг координаталари $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, B нуқтанинг координаталари эса $x_2 = 4$, $y_2 = 6$ бўлади. (1.1) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} =$$

$$= \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

3-§. Кесмани берилган нисбатда бўлиш

Текисликда $A(x_1; y_1)$ ва $B(x_2; y_2)$ нуқталар берилган бўлиб, уларни туташтириш натижасида AB кесма ҳосил қилинган. AB кесмада шундай C нуқта топиш керакки, AC кесманинг CB кесмага нисбати берилган λ сонга тенг бўлсин:

$$\frac{AC}{BC} = \lambda.$$

Изланаётган C нуқтанинг координаталарини x ва y дейлик: $C\ (x;\ y)$ (6-чизма).

A, B, C нуқталардан Ox ва Oy координата ўқларига параллел тўғри чизиқлар ўтказамиз. Бу тўғри чизиқларнинг Ox ва Oy ўқлари билан кесишган нуқталарни мос равишда A_1, B_1, C_1 ва A_2, B_2, C_2 дейлик. Равшанки,

$$OA_1 = x_1, \qquad OC_1 = x, \qquad OB_1 = x_2,$$
$$OA_2 = y_1, \qquad OC_2 = y, \qquad OB_2 = y_2$$

бўлиб,

$$A_1C_1 = x - x_1, \qquad C_1B_1 = x_2 - x,$$
$$A_2C_2 = y - y_1, \qquad C_2B_2 = y_2 - y$$

бўлади.

$\triangle ACD$ ҳамда $\triangle CBE$ лар ўхшаш учбурчаклар бўлади. Демак,

$$\frac{AD}{CE} = \frac{CD}{BE} = \frac{AC}{CB}. \qquad (1.2)$$

Агар

$$AD = A_1C_1 = x - x_1, \qquad CD = A_2C_2 = y - y_1,$$
$$CE = C_1B_1 = x_2 - x, \qquad BE = C_2B_2 = y_2 - y$$

бўлишини ҳамда

$$\frac{AC}{CB} = \lambda$$

эканини эътиборга олсак, у ҳолда (1.2) тенгликлардан:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda, \qquad \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda$$

бўлиши келиб чиқади. Энди

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda, \qquad \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda$$

тенгламаларнинг ҳар бирини алоҳида-алоҳида ечамиз:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda \Rightarrow x - x_1 = \lambda (x_2 - x) \Rightarrow x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x \Rightarrow x + \lambda x =$$
$$= x_1 + \lambda x_2 \Rightarrow x(1 + \lambda) = x_1 + \lambda x_2 \Rightarrow x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},$$
$$\frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda \Rightarrow y - y_1 = \lambda (y_2 - y) \Rightarrow y - y_1 = \lambda y_2 - \lambda y \Rightarrow y + \lambda y =$$
$$= y_1 + \lambda y_2 \Rightarrow y (1 + \lambda) = y_1 + \lambda y_2 \Rightarrow y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Демак, AB кесмани берилган λ нисбатда бўлувчи C нуқтанинг x ва y координаталари

$$\boxed{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}} \qquad (1.3)$$

формулалар билан топилади.

Хусусан, $C(x; y)$ нуқта AB кесмани тенг иккига бўлувчи нуқта бўлса ($AB = CB$), у ҳолда

$$\frac{AC}{CB} = \lambda = 1$$

бўлиб, C нуқтанинг координаталари (1.3) формулага кўра

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

бўлади.

Мисол. $A(-2; 2)$ ва $B(6; 4)$ нуқталарни туташтирувчи AB кесмани $\lambda = 0{,}2$ нисбатда бўладиган C $(x; y)$ нуқта топилсин.

Ечиш. $C(x; y)$ нуқтанинг координаталарини (1.3) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{-2 + 0{,}2 \cdot 6}{1 + 0{,}2} = \frac{-2 + 1{,}2}{1{,}2} = \frac{-0{,}8}{1{,}2} = -\frac{2}{3},$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = \frac{2 + 0{,}2 \cdot 4}{1 + 0{,}2} = \frac{2 + 0{,}8}{1{,}2} = \frac{2{,}8}{1{,}2} = \frac{7}{3}.$$

Шундай қилиб, AB кесмани $\lambda = 0{,}2$ нисбатда бўлувчи нуқта $C\left(-\frac{2}{3}; \ \frac{7}{3}\right)$ бўлади.

4- §. Учбурчак юзи

Маълумки, ўрта мактаб математика курсида баъзи бир текис (ясси) шакллар — учбурчак, трапеция, доира ва ҳ. к. нинг юзга эга бўлиши ва уларнинг юзларини топиш билан шуғулланилган эди.

Энди учбурчакларнинг юзини координаталар усули билан топамиз.

Фараз қилайлик, текисликда $\triangle ABC$ берилган бўлсин. Бу учбурчак учлари — A, B, C нуқталарнинг координаталари мос равишда $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$ бўлсин: $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$.

Масала учбурчак юзи $S_{\Delta ABC}$ ни топишдан иборат (7- чизма).

A, B, C нуқталардан Ox ўқига перпендикуляр тўғри чизиқлар туширамиз. Бу перпендикулярнинг Ox ўқи билан кесишган нуқталарини A_1, B_1, C_1 лар орқали белгилаймиз.

Изланаётган ΔABC нинг юзи $S_{\Delta ABC}$ иккита ΔABD ҳамда ΔDBC ларнинг юзлари йиғиндисига тенг бўлади:

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta DBC}. \qquad (1.4)$$

Равшанки, A_1ABB_1, B_1BCC_1 ва A_1ACC_1 шакллар трапециялардир.

A_1ABB_1 трапецияда: AA_1 ва BB_1 — асослар, A_1B_1 эса баландлик. Шунинг учун бу трапециянинг юзи

$$S_{A_1ABB_1} = \frac{AA_1 + BB_1}{2} A_1B_1$$

бўлади.

Агар $AA_1 = y_1$, $BB_1 = y_2$, $A_1B_1 = x_2 - x_1$ эканини эътиборга олсак, унда

$$S_{A_1ABB_1} = \frac{y_1 + y_2}{2}(x_2 - x_1) \tag{1.5}$$

бўлишини топамиз.

B_1BCC_1 трапецияда: B_1B ва C_1C —асослар, B_1C_1 эса баландлик. Шунинг учун бу трапециянинг юзи

$$S_{B_1BCC_1} = \frac{B_1B + C_1C}{2} B_1C_1$$

бўлади.

Агар $B_1B = y_2$, $C_1C = y_3$, $B_1C_1 = x_3 - x_2$ эканлигини эътиборга олсак, унда

$$S_{B_1BCC_1} = \frac{y_2 + y_3}{2}(x_3 - x_2) \tag{1.6}$$

бўлишини топамиз.

Юқоридагига ўхшаш, A_1ACC_1 трапециянинг юзи

$$S_{A_1ACC_1} = \frac{y_1 + y_3}{2}(x_3 - x_1) \tag{1.7}$$

бўлишини топиш қийин эмас. Равшанки,

$$S_{\Delta ABD} + S_{\Delta DBC} = S_{A_1ABB_1} + S_{B_1BCC_1} - S_{A_1ACC_1}$$

бўлади. (1.5), (1.6), (1.7) муносабатлардан фойдаланиб топамиз:

$$S_{\Delta ABD} + S_{\Delta DBC} = \frac{y_1 + y_2}{2}(x_2 - x_1) + \frac{y_2 + y_3}{2}(x_3 - x_2) -$$

$$- \frac{y_1 + y_3}{2}(x_3 - x_1) = \frac{1}{2}[(y_1 + y_2)(x_2 - x_1) + (y_2 + y_3)(x_3 - x_2) +$$

$$+ (y_1 + y_3)(x_3 - x_1)].$$

Юқоридаги (1.4) муносабатни эътиборга олсак, унда берилган ΔABC нинг юзи учун

$$\boxed{S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}[(y_1 + y_2)(x_2 - x_1) + (y_2 + y_3)(x_3 - x_2) + (y_1 + y_3)(x_3 - x_1)]} \tag{1.8}$$

бўлиши келиб чиқади.

Мисол. Учлари $A(1;\ 1)$, $B(2;\ 4)$, $C(3;\ 3)$ нуқталарда бўлган учбурчак юзи топилсин.

Ечиш. Равшанки, бу ҳолда

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 2, \qquad x_3 = 3,$$
$$y_1 = 1, \qquad y_2 = 4, \qquad y_3 = 3$$

бўлади. (1.8) формуладан фойдаланиб, учбурчакнинг юзини топамиз:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}[(1+4)(2-1)+(4+3)(3-2)+(3+1)(1-3)]=$$

$$=\frac{1}{2}(5+7-8)=\frac{1}{2}\cdot 4=2 \text{ кв. бирлик.}$$

5-§. Аналитик геометриянинг асосий масалалари

Фараз қилайлик, текисликда қаралаётган нуқта ўзгарувчан нуқта бўлсин. Яъни, нуқтанинг координаталари x ва y лар ўзгарувчи бўлиб, уларнинг ҳар бири турли қийматларни қабул қилсин.

Кўп ҳолларда ўзгарувчи нуқтанинг координаталари бирор

$$F(x,\ y)=0$$

тенгламани қаноатлантирадиган бўлади. Бундай тенгламалар эса текисликда умуман *чизиқни* ифодалайди. Масалан, текисликда берилган $B(x_0,\ y_0)$ нуқтадан бир хил масофада турадиган нуқталар тўпламини қарайлик. Ўзгарувчи нуқтани $M(x;\ y)$ билан белгилайлик.

(1.1) формулага мувофиқ $B(x_0;\ y_0)$ ҳамда $M(x;\ y)$ нуқталар орасидаги масофа

$$d=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

бўлади. Кейинги тенгликдан эса

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=d^2 \tag{1.9}$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $B(x_0;\ y_0)$ нуқтадан баравар узоқликда турадиган нуқталар тўпламининг ҳар бир нуқтасининг координаталари x ва y лар (1.9) тенгламани қаноатлантиради. Бу (1.9) тенглама маркази $B(x_0;\ y_0)$ нуқтада, радиуси d га тенг бўлган айланани (8-чизма) ифодалайди (қаралсин, IV боб, 1-§).

Аналитик геометриянинг асосий масаласи геометрик объектлар, хусусан чизиқларни, юқорида айтилганидек, тенгламалар билан ифодалаб, сўнг бу тенгламаларни текшириш билан унга мос чизиқларнинг хусусиятини ўрганишдан иборат.

II БОБ. ТЎҒРИ ЧИЗИҚ ВА УНИНГ ТЕНГЛАМАЛАРИ

Тўғри чизиқ тушунчаси аналитик геометриянинг содда, айни пайтда муҳим тушунчаларидан бири.

Текисликда икки нуқта берилган бўлсин. Бу нуқталардан бир хил масофада турган нуқталар тўплами (нуқталарнинг геометрик ўрни) тўғри чизиқ деб қаралади.

Қуйида тўғри чизиқнинг аналитик ифодаларини (тенгламаларини) топамиз ва улар ёрдамида тўғри чизиқнинг текисликдаги вазиятларини ўрганамиз.

1-§. Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси

Биз юқорида текисликдаги тўғри чизиқ берилган икки $B_1(x_1; y_1)$ ҳамда $B_2(x_2; y_2)$ нуқталардан баравар узоқликда турувчи нуқталар тўпламидан иборат деб қарадик. Тўғри чизиқда ихтиёрий $M(x; y)$ нуқтани (ўзгарувчи нуқтани) оламиз. Равшанки, $M(x; y)$ нуқтанинг координаталари x ва y лар турли қийматларни қабул қилганда, тўғри чизиқнинг нуқталари ҳосил бўлади. Бу $M(x; y)$ нуқта билан берилган $B_1(x_1; y_1)$ ҳамда $B_2(x_2; y_2)$ нуқталар орасидаги масофани (1.1) формуладан фойдаланиб топамиз (9-чизма).

$$B_1M = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}, \quad B_2M = \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2}.$$

Юқорида айтилган шартга кўра

$$B_1M = B_2M$$

бўлади. Бундан эса

$$\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} = \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2}$$

тенглик келиб чиқади. Кейинги тенгликдан

$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2$$

бўлишини топамиз. Бу тенгликда ҳамма ҳадларини чап томонга ўтказиб, сўнг қисқа кўпайтириш формуласидан фойдалансак, қуйидаги

$$x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 - (x^2 - 2xx_2 + x_2^2 + y^2 - 2yy_2 + y_2^2) = 0$$

тенглама ҳосил бўлади. Ундан

$$-2xx_1 + x_1^2 - 2yy_1 + y_1^2 + 2xx_2 - x_2^2 + 2yy_2 - y_2^2 = 0,$$

яъни

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + (x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2) = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Агар

$$A = 2(x_2 - x_1), \quad B = 2(y_2 - y_1), \quad C = x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2$$

деб белгиласак, қуйидаги

$$\boxed{Ax + By + C = 0} \tag{2.1}$$

тенгламага келамиз. Бу x ва y га нисбатан биринчи даражали тенгламадир.

Демак, тўғри чизиқдаги ихтиёрий $M(x; y)$ нуқтанинг x ва y координаталари (2.1) тенглама билан боғланган бўлар экан. Ушбу $Ax + By + C = 0$ тенглама *тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси* деб аталади.

Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси A, B, C сонларга (коэффициентларга) боғлиқ. Бу сонлар турли қийматларга эга бўлганда турли тўғри чизиқлар ҳосил бўлади. Бинобарин, тўғри чизиқнинг текисликдаги вазияти ҳам шу коэффициентларга боғлиқдир.

2.1-эслатма. Координаталари (2.1) тенгламани қаноатлантирувчи нуқталар тўплами тўғри чизиқ бўлади.

Мисол. $2x+3y+1=0$ тенглама тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси бўлиб, унинг текисликдаги вазияти 10-чизмада тасвирланган.

Энди

$$Ax+By+C=0 \tag{2.1}$$

тўғри чизиқнинг текисликда тутган вазиятини ўрганамиз.

1°. (2.1) тўғри чизиқ тенгламасида $C=0$ бўлсин. Бу ҳолда (2.1) тенглама ушбу

$$Ax+By=0 \tag{2.2}$$

кўринишга келади. Бу тўғри чизиқ координата бошидан (яъни, $O(0;0)$ нуқтадан) ўтади. Чунки $O(0,0)$ нуқтанинг координаталари (2.2) тенгламани қаноатлантиради: $A\cdot 0+B\cdot 0=0$ (11-чизма).

2°. (2.1) тўғри чизиқ тенгламасида $A=0$ бўлсин. Бу ҳолда (2.1) тенглама ушбу

$$By+C=0 \tag{2.3}$$

кўринишга келади. (2.3) тенгламадан топамиз:

$$y=-\frac{C}{B}, \quad (B\neq 0).$$

Демак, тўғри чизиқдаги ўзгарувчи нуқтанинг ординатаси ҳар доим $y=-\frac{C}{B}$ га тенг. Бу ҳолда (2.3) тўғри чизиқ Ox ўқига (абсцисса ўқига) параллел бўлади (12-чизма).

3°. (2.1) тўғри чизиқ тенгламасида $B=0$ бўлсин. Бу (2.1) тенглама ушбу

$$Ax+C=0 \tag{2.4}$$

кўринишга келади. (2.4) тенгламадан топамиз:

$$x=-\frac{C}{A}. \qquad (A\neq 0)$$

Демак, тўғри чизиқдаги ўзгарувчи нуқтанинг абсциссаси ҳар доим $x=-\frac{C}{A}$ га тенг. Бу ҳолда (2.4) тўғри чизиқ Oy ўқига (ордината ўқига) параллел бўлади (13-чизма).

4°. (2.1) тўғри чизиқ тенгламасида $A=0$, $C=0$, $B\neq 0$ бўлсин. Бу ҳолда (2.1) тенглама

$$By=0$$

кўринишга келади. Ундан эса $y=0$ бўлиши келиб чиқади. Бу Ox ўқининг тенгламасидир.

5°. (2.1) тўғри чизиқ тенгламасида $B=0$, $C=0$, $A\neq 0$ бўлсин. Бу ҳолда (2.1) тенглама

$$Ax=0$$

кўринишга келади. Унда эса

$$x=0$$

бўлиши келиб чиқади. Бу Oy ўқининг тенгламасидир.

2.2-эслатма. Агар тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси

$$Ax+By+C=0$$

да барча коэффициентлар нолдан фарқли бўлса ($A\neq 0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$), у ҳолда бу тўғри чизиқ координата бошидан ҳам ўтмайди, координата ўқларига параллел ҳам бўлмайди.

Тўғри чизиқнинг текисликдаги вазиятини ўрганишда унинг бошқа кўринишдаги тенгламаларидан фойдаланиш қулай бўлади. Шуни эътиборга олиб, қуйида тўғри чизиқнинг турли кўринишдаги тенгламаларини келтирамиз.

2-§. Тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси

Текисликда Декарт координаталар системасига нисбатан бирор тўғри чизиқ берилган бўлсин. Бу тўғри чизиқ Oy ўқининг $B(0;\ b)$ нуқтаси орқали ўтиб, Ox ўқининг мусбат йўналиши билан α бурчак ташкил этсин (14-чизма).

Бу тўғри чизиқда ихтиёрий $M(x;\ y)$ нуқтани оламиз. $M(x;\ y)$ нуқтадан Ox ўққа перпендикуляр туширамиз. Перпендикулярнинг асосини M_1 билан белгилаймиз. У ҳолда

$$OM_1=x, \qquad MM_1=y$$

бўлади.

B нуқтадан Ox ўқига параллел бўлган тўғри чизиқ ўтказамиз. Унинг MM_1 перпендикуляр билан кесишган нуқтасини P дейлик. Натижада BMP учбурчак ҳосил бўлади. $\triangle BMP$ — тўғри бурчакли учбурчакдир. Бу учбурчакда

$$\angle MBP=\alpha, \quad BP=OM_1=x, \quad MP=MM_1-PM_1=y-b$$

бўлиб,

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{MP}{BP}=\frac{y-b}{x}$$

бўлади. Кейинги тенгликдан эса

$$y-b=\operatorname{tg}\alpha\cdot x, \text{ яъни } y=\operatorname{tg}\alpha\cdot x+b$$

бўлиши келиб чиқади. Одатда, тўғри чизиқнинг Ox ўқи билан ташкил этган бурчагининг тангенси тўғри чизиқнинг *бурчак коэффициенти* деб аталади, уни k билан белгиланади:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha=k.}$$

Шуни эътиборга олиб, кейинги тенгликни ушбу

$$\boxed{y=k\cdot x+b} \tag{2.5}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Тўғри чизиқнинг (2.5) кўринишдаги тенгламаси *тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси* деб аталади.

Бу ҳолда тўғри чизиқнинг текисликдаги вазияти k ҳамда b ларнинг қийматлари билан тўлиқ аниқланади.

Мисол. Ушбу $y = 2x + 1$ тенглама тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси.

Бунда $k = 2$, $b = 1$ бўлиб, у 15-чизмада тасвирланган.

2.3-эслатма. Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси $Ax + By + C = 0$ $(B \neq 0)$ ни ҳар доим унинг бурчак коэффициентли тенгламасига келтириш мумкин ва аксинча.

Дарҳақиқат, тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси

$$Ax + By + C = 0 \ (B \neq 0) \tag{2.1}$$

га эга бўлайлик. Бу тенгламани y га нисбатан ечамиз:

$$Ax + By + C = 0 \Rightarrow By = -Ax - C \Rightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Демак, (2.1) тенглама ушбу

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} = kx + b\left(k = -\frac{A}{B},\ b = -\frac{C}{B},\ B \neq 0\right)$$

кўринишга келади.

Тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси

$$y = kx + b$$

га эга бўлайлик. Бу тенгламани ушбу

$$kx - y + b = 0$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу эса тўғри чизиқнинг умумий тенгламасидир ($A = k$, $B = -1$, $C = b$).

3-§. Тўғри чизиқнинг кесмалар бўйича тенгламаси

Текисликда бирор тўғри чизиқ Ox ва Oy ўқлари билан мос равишда A ва B нуқталарда кесишсин. Тўғри чизиқнинг координата ўқларидан ажратган кесмалари

$$OA = a, \quad OB = b$$

га тенг бўлсин (16-чизма).

Бу a ва b кесмалар ёрдамида тўғри чизиқнинг текисликдаги вазиятини тўлиқ аниқлаш мумкин. Шуни кўрсатамиз.

Тўғри чизиқда ихтиёрий $M(x;\ y)$ нуқтани олайлик. $M(x;\ y)$ нуқтадан Ox ўқига туширилган перпендикулярнинг асосини M_1 дейлик. Унда

$$OM_1 = x, \qquad MM_1 = y \tag{2.6}$$

бўлади. ΔOAB ва ΔM_1AM лар ўхшаш учбурчаклар. Шу сабабли

$$\frac{MM_1}{OB} = \frac{M_1A}{OA} \tag{2.7}$$

бўлади. Агар

$$M_1A = OA - OM_1 = a - x \tag{2.8}$$

ни ва юқоридаги (2.6), (2.8) муносабатларни эътиборга олсак, (2.7) тенгликдан

$$\frac{y}{b}=\frac{a-x}{a}$$

бўлиши келиб чиқади. Бу тенгликни

$$\frac{y}{b}=1-\frac{x}{a},$$

яъни

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1} \tag{2.9}$$

кўринишда ёзамиз. Бу тўғри чизиқ тенгламасидир. Одатда, тўғри чизиқнинг (2.9) кўринишдаги тенгламасини *унинг кесмалар бўйича тенгламаси* деб аталади.

Мисол. $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ тенглама тўғри чизиқнинг кесмалар бўйича тенгламаси. Бунда $a=3$, $b=4$ бўлиб, унинг текисликдаги вазияти 17-чизмада тасвирланган.

2.4-эслатма. Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси $Ax+By+C=0$ $(A\neq 0,\ B\neq 0,\ C\neq 0)$ ни ҳар доим унинг кесмалар бўйича тенгламасига келтириш мумкин ва аксинча. Ҳақиқатан ҳам,

$$Ax+By+C=0\Rightarrow\frac{A}{-C}x+\frac{B}{-C}y-1=0\Rightarrow\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\quad\left(a=-\frac{C}{A},\ b=-\frac{C}{B}\right),$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\Rightarrow bx+ay=ab\Rightarrow bx+ay-ab=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ax+By+C=0\quad(A=b,\ B=a,\ C=-ab).$$

4-§. Тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси

Текисликда бирор тўғри чизиқ берилган бўлсин. Координата бошидан тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг узунлиги p ҳамда шу перпендикулярнинг Ox ўқининг мусбат йўналиши билан ташкил этган α бурчак маълум бўлсин (18-чизма).

Берилган бу p ва α лар ёрдамида тўғри чизиқнинг текисликдаги вазияти тўлиқ аниқланиши мумкин. Тўғри чизиқда ихтиёрий $M(x;\ y)$ нуқтани оламиз. Бу нуқтадан Ox ўқига перпендикуляр туширамиз. Перпендикулярнинг асосини M_1 билан белгилаймиз. Равшанки,

$$OM_1=x,\quad MM_1=y.$$

Координата боши билан M нуқтани туташтирамиз. Натижада OMM_1 тўғри бурчакли учбурчак ҳосил бўлади. Агар $\angle MOM_1=\varphi$ десак, унда

$$x = OM_1 = OM \cos\varphi, \; y = MM_1 = OM \sin\varphi \tag{2.10}$$

бўлади.

Энди тўғри бурчакли учбурчак OCM ни қарайлик. Бу учбурчакда $\angle COM = \alpha - \varphi$ бўлади.

Равшанки, $\frac{p}{OM} = \frac{CO}{OM} = \cos(\alpha - \varphi)$.

Демак,

$$p = OM \cdot \cos(\alpha - \varphi). \tag{2.11}$$

Маълумки,

$$\cos(\alpha - \varphi) = \cos\alpha \cos\varphi + \sin\alpha \sin\varphi. \tag{2.12}$$

(2.10), (2.11) ва (2.12) муносабатлардан топамиз:

$$\begin{aligned} p &= OM(\cos\alpha \cos\varphi + \sin\alpha \sin\varphi) = \\ &= OM \cos\varphi \cos\alpha + OM \sin\varphi \sin\alpha = \\ &= x \cos\alpha + y \sin\alpha. \end{aligned}$$

Бу тенгликдан

$$\boxed{x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0} \tag{2.13}$$

га эга бўламиз. (2.13) *тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси* дейилади.

Энди тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси нормал кўринишдаги тенгламага келтирилишини кўрсатамиз.

Бирор тўғри чизиқ берилган бўлиб,

$$Ax + By + C = 0 \tag{2.1}$$

унинг умумий тенгламаси,

$$x \cdot \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0 \tag{2.13}$$

эса шу тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси бўлсин. Бу (2.1) ва (2.13) тенгламалар битта тўғри чизиқни аниқлаганлиги сабабли, уларнинг коэффициентлари пропорционал бўлади. Демак, (2.1) тенгламани бирор μ сонга кўпайтиришдан ҳосил бўлган

$$\boxed{\mu Ax + \mu Bx + \mu C = 0}$$

α

тенглама (2.13) тенглама билан бир хил бўлади:

$$\mu Ax + \mu By + \mu C = x \cos\alpha + y \sin\alpha - p.$$

α

Бундан эса қуйидаги

$$\mu A = \cos\alpha, \; \mu B = \sin\alpha, \; \mu C = -p$$

тенгликларга эга бўламиз. Бу тенгликлардан μ ни топамиз. Бунинг учун $\mu A = \cos\alpha$, $\mu B = \sin\alpha$ тенгликларнинг ҳар икки томонини квадратга кўтариб, сўнг уларни ҳадлаб қўшамиз:

$$\mu^2 A^2 = \cos^2\alpha, \quad \mu^2 B^2 = \sin^2\alpha,$$

$$\mu^2 A^2 + \mu^2 B^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Демак,

$$\mu^2 (A^2 + B^2) = 1.$$

920561

Кейинги тенгликдан

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

бўлиши келиб чиқади.

Шундай қилиб, тўғри чизиқнинг умумий тенгламасини

$$\boxed{\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}} \qquad (2.14)$$

га кўпайтириш натижасида тенглама нормал кўринишдаги тенгламага келар экан. Одатда μ *нормалловчи кўпайтувчи* деб аталади. Нормалловчи кўпайтувчининг ишораси тенгламадаги C озод ҳаднинг ишорасига тескари қилиб олинади.

Мисол. $5x + 12y - 26 = 0$ тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси нормал тенгламага келтирилсин.

Ечиш. Юқоридаги (2.14) муносабатдан фойдаланиб, нормалловчи кўпайтувчини топамиз:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{1}{\sqrt{5^2+12^2}} = \frac{1}{\sqrt{25+144}} = \frac{1}{\sqrt{169}} = \frac{1}{13}.$$

Берилган тенгламани $\mu = \frac{1}{13}$ га кўпайтирамиз:

$$\frac{1}{13}(5x + 12y - 26) = 0.$$

Натижада берилган тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси $5x + 12y - 26 = 0$ ушбу

$$\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 2 = 0$$

нормал кўринишга келади.

III БОБ. ТЎҒРИ ЧИЗИҚҚА ОИД АСОСИЙ МАСАЛАЛАР

Мазкур бобда тўғри чизиққа оид асосий масалаларни келтириб, уларга доир мисоллар ечамиз.

1-§. Берилган нуқтадан (берилган йўналиш бўйича) ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси

Текисликда $M(x_1;\ y_1)$ нуқтадан ўтадиган ҳамда Ox ўқининг мусбат йўналиши билан α бурчак ташкил этадиган тўғри чизиқнинг тенгламасини топиш талаб этилсин.

Топилиши лозим бўлган тўғри чизиқ тенгламасини $y = kx + b$ (2.5) (2-боб, 2-§, (2.5)) кўринишда излаймиз. Модомики, тўғри чизиқ $M(x_1;\ y_1)$ нуқтадан ўтар экан, унда бу нуқтанинг x_1 ва y_1 координаталари $y = kx + b$ тенгламани қаноатлантиради:

$$y_1 = kx_1 + b. \qquad (3.1)$$

Юқоридаги (2.5) тенгламадан (3.1) тенгламани ҳадлаб айириб

$$y - y_1 = kx + b - (kx_1 + b)$$

қуйидаги

$$\boxed{y - y_1 = k(x - x_1)} \tag{3.2}$$

тенгламага келамиз. Бу берилган $M(x_1;\ y_1)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасидир.

Мисол. $M(3;\ 2)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси топилсин.

Ечиш. Юқоридаги (3.2) формулага кўра $M(3;\ 2)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси ушбу

$$y - 2 = k(x - 3)$$

кўринишида бўлади. Уни қуйидагича

$$y = k(x - 3) + 2$$

ҳам ёзиш мумкин. Бу тўғри чизиқ k нинг қийматларига боғлиқ. k нинг турли қийматларида $M(3;\ 2)$ нуқтадан ўтувчи турли тўғри чизиқлар ҳосил бўлади (19-чизма).

2-§. Икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси

Текисликда иккита $M(x_1;\ y_1)$ ҳамда $N(x_2;\ y_2)$ нуқталар берилган. Бу нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини топиш талаб этилсин.

Биз юқорида берилган битта $M(x_1;\ y_1)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламаси

$$y - y_1 = k(x - x_1) \tag{3.2}$$

бўлишини кўрдик. Бу тўғри чизиқ $N(x_2;\ y_2)$ нуқтадан ҳам ўтсин. Унда $N(x_2;\ y_2)$ нуқтанинг координаталари x_2 ва y_2 лар (3.2) тенгламани қаноатлантиради:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Бу муносабатдан

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

бўлиши келиб чиқади. k нинг топилган қийматини (3.2) тенгламадаги k нинг ўрнига қўйсак, унда

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

бўлади. Бундан эса

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}} \tag{3.3}$$

бўлиши келиб чиқади. Бу тенглама берилган икки $M(x_1;\ y_1)$ ҳамда $N(x_2;\ y_2)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси бўлади.

Мисол. Қуйидаги $M(2; 1)$ ҳамда $N(1; 2)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси топилсин.

Ечиш. Икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси (3.3) даги x_1, y_1 ҳамда x_2, y_2 лар ўрнига $M(2; 1)$ ва $N(1; 2)$ нуқталарнинг координаталарини қўйиб топамиз:

$$\frac{x-2}{1-2}=\frac{y-1}{2-1}.$$

Уни

$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{1} \text{ ёки } x+y-3=0$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу изланаётган тўғри чизиқ тенгламасидир (20-чизма).

3-§. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак

Текисликда иккита тўғри чизиқ берилган бўлсин. Бу тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топиш талаб этилсин.

Фараз қилайлик, тўғри чизиқлардан бирининг тенгламаси

$$y=k_1x+b_1,$$

иккинчисининг тенгламаси эса

$$y=k_2x+b_2$$

бўлсин (21-чизма).

Маълумки, $k_1=\operatorname{tg}\alpha_1$ — биринчи тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти, $k_2=\operatorname{tg}\alpha_2$ — иккинчи тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчакни φ билан белгилайлик.

21-чизмадан кўринадики, $\alpha_1=\alpha_2+\varphi$ бўлади. Бундан эса $\varphi=\alpha_1-\alpha_2$ эканлиги келиб чиқади. Равшанки,

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\alpha_1-\alpha_2). \tag{3.4}$$

Энди

$$\operatorname{tg}(\alpha_1-\alpha_2)=\frac{\operatorname{tg}\alpha_1-\operatorname{tg}\alpha_2}{1-\operatorname{tg}\alpha_1\cdot\operatorname{tg}\alpha_2}$$

ва $\operatorname{tg}\alpha_1=k_1$. $\operatorname{tg}\alpha_2=k_2$ бўлишини эътиборга олиб, (3.4) тенгликдан

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}} \tag{3.5}$$

бўлишини топамиз. Бу икки тўғри чизиқ орасидаги бурчакнинг тангенсини ифодаловчи формуладир. (3.5) формула ёрдамида икки тўғри чизиқ орасидаги φ бурчак топилади.

Мисол. $2x-y-5=0$, $x-3y+12=0$ тўғри чизиқлар орасидаги бурчак топилсин.

Ечиш. Аввало берилган тўғри чизиқларнинг бурчак коэффициентларини топамиз. Бунинг учун тенгламаларни y га нисбатан ечамиз:

$$2x-y-5=0 \Rightarrow y=2x-5,$$

$$x-3y+12=0 \Rightarrow 3y=x+12 \Rightarrow y=\frac{1}{3}x+4.$$

Демак,

$$k_1 = 2, \qquad k_2 = \frac{1}{3}.$$

(3.5) формулага кўра

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2\frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}} = 1$$

бўлади, Демак,

$$\varphi = 45^\circ$$

(22- чизма.)

4- §. Икки тўғри чизиқнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари

Текисликда иккита тўғри чизиқ берилган бўлиб, бирининг тенгламаси $y = k_1 x + b_1$, иккинчисининг тенгламаси эса $y = k_2 x + b_2$ бўлсин.

Биз юқорида бу тўғри чизиқлар орасидаги бурчак (бурчакнинг₂ тангенси)

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}$$

формула билан аниқланишини кўрдик.

1°. Айтайлик, икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак нолга тенг бўлсин: $\varphi = 0^\circ$. Равшанки, бу ҳолда берилган тўғри чизиқлар ўзаро параллел бўлади:

$$\varphi = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}0^\circ = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1 - k_2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2.$$

Демак,

$$k_1 = k_2$$

тенглик **икки тўғри чизиқнинг параллеллик шартидир.**

2°. Айтайлик, икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак 90° га тенг бўлсин: $\varphi = 90^\circ$. Равшанки, бу ҳолда берилган тўғри чизиқлар ўзаро перпендикуляр бўлади.

$$\varphi = 90^\circ \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}90^\circ = \infty \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = \infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + k_1 \cdot k_2 = 0 \Rightarrow k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{k_2} \quad \left(k_2 = -\frac{1}{k_1}\right).$$

Демак,

$$\boxed{k_1 = -\frac{1}{k_2} \qquad \left(k_2 = -\frac{1}{k_1}\right)}$$

тенглик икки тўғри чизиқнинг перпендикулярлик шартидир.

Мисоллар. 1. $y = 5x + 7$ ва $y = 5x - 11$ тўғри чизиқлар параллелдир, чунки $k_1 = 5$, $k_2 = 5$ ва, демак, $k_1 = k_2$.

2. $y = 3x + 7$ ва $y = -\frac{1}{3}x + 1$ тўғри чизиқлар ўзаро перпендикулярдир, чунки $k_1 = 3$, $k_2 = -\frac{1}{3}$ бўлиб, $k_1 \cdot k_2 = -1$.

3. 1-эслатма. Тўғри чизиқларнинг тенгламалари умумий кўринишда, яъни қуйидагича

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

бўлсин. Бу тўғри чизиқларнинг параллел ва перпендикуляр бўлиши шартларини топиш учун уларни y га нисбатан ечамиз:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \Rightarrow B_1y = -A_1x - C_1 \Rightarrow y = -\frac{A_1}{B_1}x - \\ -\frac{C_1}{B_1}, \ (B_1 \neq 0).$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \Rightarrow B_2y = -A_2x - C_2 \Rightarrow y = -\frac{A_2}{B_2}x - \frac{C_2}{B_2}(B_2 \neq 0).$$

Демак,

$$k_1 = -\frac{A_1}{B_1}, \quad k_2 = -\frac{A_2}{B_2}.$$

Унда $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ва $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ тўғри чизиқларнинг параллеллик шарти

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2},$$

перпендикулярлик шарти

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

бўлади.

5-§. Берилган нуқтадан берилган тўғри чизиққача бўлган масофа

Текисликда $M(x_1;\ y_1)$ нуқта ва бирор тўғри чизиқ берилган бўлсин. Тўғри чизиқнинг тенгламаси

$$Ax + By + C = 0$$

кўринишда бўлсин. Берилган $M(x_1;\ y_1)$ нуқтадан шу тўғри чизиққача бўлган масофани топиш талаб этилсин. Одатда M нуқтадан тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг узунлиги *нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа* деб аталади (23-чизма).

Бу MM_1 перпендикулярнинг узунлигини d билан белгилайлик. $M(x_1;\ y_1)$ нуқтадан берилган $Ax + By + C = 0$ тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқ ўтказамиз. Сўнг кейинги тўғри чизиққа перпендикуляр туширамиз. Бу перпендикулярнинг тўғри чизиқлар билан кесишган нуқталарини B ва B_1 билан белгилаймиз.

Равшанки, изланаётган масофа

$$d = MM_1 = OB - OB_1 \tag{3.6}$$

бўлади.

Берилган тўғри чизиқ тенгламаси $Ax + By + C = 0$ ни нормал кўринишга келтирамиз. Бунинг учун уни нормалловчи кўпайтувчи

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

га кўпайтирамиз:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0.$$

Бу тенгламани

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - OB_1 = 0$$

билан солиштириб,

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = \cos\alpha, \quad \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = \sin\alpha, \quad \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = -OB_1$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$OB_1 = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{3.7}$$

Берилган тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси қуйидагича

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - OB = 0$$

бўлади. Бу тўғри чизиқ берилган $M(x_1;\ y_1)$ нуқтадан ўтгани учун $M(x_1;\ y_1)$ нуқтанинг координаталари шу тўғри чизиқ тенгламасини қаноатлантиради:

$$x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - OB = 0.$$

Бундан

$$OB = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha \tag{3.8}$$

бўлиши келиб чиқади.

Юқоридаги (3.6), (3.7) ва (3.8) муносабатлардан

$$d = OB - OB_1 = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - OB_1 =$$

$$= x_1\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} + y_1\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2\pm B^2}} =$$

$$= \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$\boxed{d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.} \tag{3.9}$$

Мисол. Берилган $M(3;\ -4)$ нуқтадан $6x - 8y + 31 = 0$ тўғри чизиққача бўлган масофа топилсин.

Ечиш. Юқоридаги (3.9) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$d=\frac{6\cdot 3-8\cdot(-4)+31}{\pm\sqrt{6^2+(-8)^2}}=\frac{18+32+31}{10}=8,1.$$

6-§. Икки тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтаси

Текисликда иккита тўғри чизиқ берилган бўлиб, уларнинг тенгламалари мос равишда

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \tag{3.10}$$

$$A_2x+B_2y+C_2=0 \tag{3.11}$$

бўлсин. Бу тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасини топиш талаб этилсин.

Қаралаётган тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасини $M(x;\ y)$ билан белгилайлик (24-чизма).

Модомики, изланаётган нуқта бир вақтда ҳам (3.10) тўғри чизиқда, ҳам (3.11) тўғри чизиқда ётар экан, унинг координаталари x ва y лар (3.10) ва (3.11) тенгламаларни қаноатлантиради. Бинобарин, бу x ва y лар ушбу

$$\boxed{\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}}$$

тенгламалар системасининг ечими бўлади.

Демак, икки тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтасини топиш учун уларнинг тенгламаларини система қилиб ечиш керак. Система ечимидаги x нинг қиймати кесишиш нуқтасининг абсциссаси, y нинг қиймати ординатаси бўлади.

Мисол. $3x-2y-4=0$, $x+3y-5=0$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси топилсин.

Ечиш. Бу тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасининг координаталарини топиш учун уларнинг тенгламаларини система қилиб ечамиз:

$$\begin{cases}3x-2y-4=0,\\ x+3y-5=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x-2y-4=0,\\ -3x-9y+15=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3x=2y+4,\\ -11y+11=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x=2y+4,\\ y=1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3x=2+4,\\ y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2,\\ y=1.\end{cases}$$

Демак, тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси $M(2;\ 1)$ бўлади.

Ушбу бобнинг охирида тўғри чизиқларга оид бир нечта мисолларни келтириб, уларнинг ечилишларини кўрсатамиз.

Мисоллар. 1. Берилган $M(0;\ 5)$ нуқтадан ўтувчи ҳамда $3x-2y-6=0$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ тенгламаси топилсин.

Ечиш. Берилган $M(0;\ 5)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси (3.2) формулага кўра

$$y-5=k(x-0),$$

яъни

$$y = kx + 5 \tag{3.12}$$

бўлади. Энди берилган тўғри чизиқ тенгламаси $3x - 2y - 6 = 0$ ни y га нисбатан ечиб топамиз:

$$3x - 2y - 6 = 0 \Rightarrow 2y = 3x - 6 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - 3. \tag{3.13}$$

Сўнг (3.12) ва (3.13) тўғри чизиқлар ўзаро перпендикуляр бўлиши шартидан

$$k \cdot \frac{3}{2} = -1$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $k = -\frac{2}{3}$. Топилган k нинг бу қийматини (3.12) тенгламадаги k нинг ўрнига қўйсак, унда

$$y = -\frac{2}{3}x + 5$$

га эга бўламиз. Бу берилган нуқтадан ўтувчи ҳамда берилган тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқнинг тенгламасидир.

2. Берилган $M(-1;\ 3)$ нуқтадан ўтувчи ва $4y - 3x + 8 = 0$ тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқнинг тенгламаси топилсин.

Ечиш. Берилган $M(-1;\ 3)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламаси (3.2) формулага кўра

$$y - 3 = k(x - (-1)),$$

яъни

$$y = k(x + 1) + 3 \tag{3.14}$$

бўлади.

Берилган тўгри чизиқ тенгламаси $4y - 3x + 8 = 0$ ни y га нисбатан ечамиз:

$$4y - 3x + 8 = 0 \Rightarrow 4y = 3x - 8 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x - 2. \tag{3.15}$$

(3.14) ва (3.15) тўғри чизиқларнинг ўзаро параллел бўлиши шартидан

$$k = \frac{3}{4}$$

бўлиши келиб чиқади. Топилган k нинг бу қийматини (3.14) тенгламздаги k нинг ўрнига қўйсак, унда

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{15}{4}$$

га эга бўламиз. Бу берилган нуқтадан ўтувчи ҳамда берилган тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқнинг тенгламасидир.

Маълумки, текисликда тўғри чизиқ x ва y ўзгарувчиларга нисбатан биринчи даражали

$$Ax + By + C = 0 \qquad (2.1)$$

тенглама билан аналитик ифодаланади. Улар 2 ва 3-бобларда батафсил ўрганилди.

Энди текисликда иккинчи тартибли эгри чизиқларни (маълум кўринишдаги эгри чизиқларни) аналитик ифодаларини топиб, уларни ўрганамиз.

Иккинчи тартибли эгри чизиқлар x ва y ўзгарувчиларга нисбатан иккинчи даражали тенгламалар билан ифодаланади. Иккинчи даражали тенгламанинг умумий кўриниши қуйидагича бўлади:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \qquad (4.1)$$

Одатда (4.1) тенгламани *иккинчи тартибли эгри чизиқнинг умумий тенгламаси* деб аталади.

Ушбу бобда содда кўринишдаги иккинчи тартибли эгри чизиқлардан айлана, эллипс, гипербола ҳамда параболаларни қараймиз. Бу эгри чизиқларнинг тенгламаларини топиб, улар ёрдамида геометрик хоссаларини ўрганамиз.

1-§. Айлана ва унинг тенгламаси

Текисликда бирор $A(a; b)$ нуқта берилган бўлсин. $A(a; b)$ нуқтадан баравар узоқликда турган нуқталар тўплами (нуқталарнинг геометрик ўрни) *айлана* деб аталади (25-чизма).

Айланада ихтиёрий нуқта олиб, уни $B(x; y)$ билан белгилайлик. Энди айлана тенгламасини топамиз. Айлана таърифига кўра AB масофа ўзгармас. Уни R билан белгилайлик:

$$AB = R.$$

Икки нуқта орасидаги масофани аниқловчи (1.1) формулага кўра

$$AB = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

бўлади. Демак,

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R.$$

Бу тенгликнинг ҳар икки томонини квадратга кўтариб, қуйидаги

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \qquad (4.2)$$

тенгламага келамиз. Демак, айланадаги ўзгарувчи $B(x; y)$ нуқтанинг координаталари (4.2) тенгламани қаноатлантиради. Юқоридаги (4.2) тенглама айлана тенгламасини ифодалайди. $A(a; b)$ нуқта айлана *маркази*, R эса айлана *радиуси* дейилади.

Масалан, маркази $A(1; 2)$ нуқтада, радиуси $R = 3$ га тенг бўлган айлананинг тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3^2, \text{ яъни } (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9.$$

Агар (4.2) айлана марказининг координаталаридан бири ёки иккаласи нолга тенг бўлса, айлана маркази координата ўқларида ёки координата бошида жойлашган бўлади:

1°. Айлананинг маркази $A(a;\ 0)$ нуқтада бўлсин. Бу ҳолда айлана тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади (26-чизма):

$$(x-a)^2+y^2=R^2. \tag{4.3}$$

2°. Айлана маркази $A(0;\ b)$ нуқтада бўлсин. Бу ҳолда айлананинг тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади (27-чизма):

$$x^2+(y-b)^2=R^2. \tag{4.4}$$

3°. Айлана маркази $O(0;\ 0)$ нуқтада бўлсин. Бу ҳолда айлана тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади (28-чизма):

$$x^2+y^2=R^2. \tag{4.5}$$

Айтайлик, маркази $A(a;\ b)$ нуқтада, радиуси R га тенг бўлган

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \tag{4.2}$$

айлана тенгламасига эга бўлайлик. Бу тенгламанинг чап томонига қисқа кўпайтириш формуласини қўллаб топамиз:

$$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=R^2.$$

Уни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$x^2-2ax+y^2-2by+a^2+b^2-R^2=0.$$

Агар

$$-2a=D,\quad -2b=E,\quad a^2+b^2-R^2=F$$

деб олинса, унда юқоридаги тенглама ушбу

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

тенгламага келади. Бу эса $A=1$, $B=0$, $C=1$ бўлган ҳолдаги иккинчи тартибли эгри чизиқ тенгламаси эканини билдиради. Демак, айлана иккинчи тартибли эгри чизиқдан иборат.

Аксинча, иккинчи тартибли эгри чизиқ тенгламаси (4.1) да x^2 ва y^2 лар олдидаги коэффициентлар бир-бирига тенг бўлиб, $x\cdot y$ нинг олдидаги коэффициент эса нолга тенг бўлса, у ҳолда бундай иккинчи тартибли эгри чизиқ айлана бўлади. *Шуни кўрсатамиз.*

Иккинчи тартибли эгри чизиқ тенгламаси

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

да $A=C$, $B=0$ бўлсин. Бу ҳолда тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$Ax^2+Dx+Ay^2+Ey+F=0. \tag{4.6}$$

Агар

$$Ax^2+Dx=A\left(x^2+\frac{D}{A}x\right)=A\left(x^2+2\cdot\frac{D}{2A}x+\frac{D^2}{4A^2}-\frac{D^2}{4A^2}\right)=$$
$$=A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2-A\frac{D^2}{4A^2}=A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2-\frac{D^2}{4A}$$

ва худди шунга ўхшаш

$$Ay^2 + Ey = A\left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 - \frac{E^2}{4A}$$

бўлишини эътиборга олсак, унда (4.6) тенглама ушбу кўринишни олади:

$$A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 - \frac{D^2}{4A} + A\left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 - \frac{E^2}{4A} + F = 0.$$

Энди кейинги тенгликнинг ҳар икки томонини A га бўлиб топамиз:

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 - \frac{D^2}{4A^2} + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 - \frac{E^2}{4A^2} + \frac{F}{A} = 0.$$

Бу тенгликдан эса

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2} - \frac{F}{A} \tag{4.7}$$

бўлиши келиб чиқади.

Қуйидаги

$$\frac{D}{2A} = -a, \quad \frac{E}{2A} = -b,$$

$$\frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2} - \frac{F}{A} = R^2$$

белгилашларни қилайлик. Унда (4.7) тенгламанинг кўриниши

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

бўлади. Бу эса айлана тенгламасидир.

Мисол. Иккинчи тартибли эгри чизиқ ушбу

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0 \tag{4.8}$$

тенглама билан берилган. Унинг айлана тенгламаси эканини кўрсатиб, айлананинг маркази ва радиуси топилсин.

Ечиш. Берилган тенгламада x^2 ва y^2 ларнинг олдидаги коэффициентлар бир-бирига тенг ҳамда xy нинг олдидаги коэффициент нолга тенг бўлганлиги сабабли юқорида айтилганига кўра у айлананинг тенгламаси бўлади.

(4.8) тенгламани қуйидагича ёзиб оламиз:

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y - 20 = 0.$$

Равшанки,

$$x^2 + 2x = x^2 + 2x + 1 - 1 = (x+1)^2 - 1,$$

$$y^2 - 4y = y^2 - 2\cdot 2y + 4 - 4 = (y-2)^2 - 4.$$

Унда

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y - 20 = (x+1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 -$$
$$- 20 = (x+1)^2 + (y-2)^2 - 25 = 0$$

бўлиб, берилган тенглама ушбу

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$$

кўринишни олади. Демак, айлананинг маркази A (—1; 2) нуқтада бўлиб, радиуси $R = 5$ га тенг бўлади.

Айлана билан умумий битта M $(x_0; y_0)$ нуқтага эга бўлган тўғри чизиқ айланага ўтказилган *уринма* деб аталади. $x^2 + y^2 = R^2$ айлананинг M $(x_0; y_0)$ нуқтасидан ўтувчи уринма тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$x_0x + y_0y - R^2 = 0. \qquad (4.9)$$

Мисол. $x^2 + y^2 = 8$ айлананинг M (2; —2) нуқтасидан ўтувчи уринмаси топилсин.

Ечиш. Бу уринманинг тенгламаси юқоридаги (4.9) формулага кўра $2x + (-2)\,y - 8 = 0$, яъни $x - y - 4 = 0$ бўлади.

2-§. *Эллипс ва унинг тенгламаси*

Текисликда иккита нуқта берилган бўлсин. Текисликда шундай нуқталар тўпламини қарайликки, бу тўпламнинг ҳар бир нуқтасидан берилган икки нуқтагача бўлган масофалар йиғиндиси ҳар доим бир хил ўзгармас сонга тенг бўлсин. Одатда бундай нуқталар тўплами (нуқталарнинг геометрик ўрни) *эллипс* деб аталади.

Берилган икки нуқтани мос равишда F_1 ва F_2 орқали белгилаймиз. Эллипснинг тенгламасини тузиш учун текисликда координаталар системасини қуйидагича оламиз: берилган F_1 ва F_2 нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқни абсцисса ўқи, F_1F_2 кесманинг ўртасидан ўтувчи ҳамда абсцисса ўқига перпендикуляр бўлган тўғри чизиқни ордината ўқи деб оламиз (29-чизма). Агар $OF_2 = c$ $(c > 0)$ дейилса, унда юқорида айтилганига кўра $F_1 = F_1$ $(-c;\ 0)$, $F_2 = F_2$ $(c;\ 0)$ бўлади.

Эллипсда ихтиёрий нуқта олиб, уни M $(x; y)$ билан белгилаймиз.

Энди эллипс тенгламасини топамиз. Эллипс таърифига кўра F_1M ва F_2M масофалар йиғиндиси ўзгармас бўлади. Уни $2a$ $(a > 0)$ билан белгилайлик:

$$F_1M + F_2M = 2a. \qquad (4.10)$$

Берилган икки нуқта орасидаги масофани ифодаловчи формуладан фойдаланиб топамиз:

$$F_1M = \sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

$$F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Унда (4.10) тенглик ушбу

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

кўринишга келади. Кейинги тенгликни қуйидагича

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

ёзиб, сўнг унинг ҳар икки томонини квадратга кўтарамиз:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2.$$

Бундан эса

$$x^2+2cx+c^2+y^2-4a^2-x^2+2cx-c^2-y^2=$$
$$=-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

яъни

$$4cx-4a^2=-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

эканлиги келиб чиқади. Кейинги тенгликдан

$$a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \qquad (4.11)$$

га эга бўламиз. (4.11) тенгликнинг ҳар икки томонини квадратга кўтариб топамиз:

$$(a^2-cx)^2=(a\sqrt{(x-c)^2+y^2})^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^4-2a^2cx+c^2x^2=a^2\ [(x-c)^2+y^2]\Rightarrow a^4-2a^2\,cx+$$
$$+c^2x^2=a^2\ (x^2-2cx+c^2+y^2)\Rightarrow a^4-2a^2cx+c^2x^2=a^2x^2-$$
$$-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2\Rightarrow a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2\ (a^2-c^2)+a^2y^2=a^2\ (a^2-c^2).$$

Равшанки, $F_1M+F_2M>F_1F_2$. Демак, $2a>2c$, яъни $a>c$. Бундан эса $a^2-c^2>0$ бўлиши келиб чиқади. Шуни эътиборга олиб, кейинги тенгликнинг ҳар икки томонини $a^2\ (a^2-c^2)$ га бўламиз:

$$\frac{x^2\ (a^2-c^2)}{a^2\ (a^2-c^2)}+\frac{a^2y^2}{a^2\ (a^2-c^2)}=\frac{a^2\ (a^2-c^2)}{a^2\ (a^2-c^2)}.$$

Натижада ушбу тенгликка келамиз:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

Агар

$$a^2-c^2=b^2 \qquad (4.12)$$

деб белгиласак, унда

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (4.13)$$

бўлади.

Шундай қилиб, эллипсдаги ўзгарувчи M $(x;\ y)$ нуқтанинг координаталари (4.13) тенглама билан боғланган экан. Бу (4.13) тенглама эллипснинг тенгламасини ифодалайди. F_1 ва F_2 нуқталар эллипснинг *фокуслари* дейилади. Равшанки, фокуслар орасидаги масофа $2\,c$ га тенг.

Энди ушбу

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ x=0\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ y=0\end{cases}$$

тенгламалар системасини ечиб, эллипснинг Oy ҳамда Ox координата ўқлари билан кесишиш нуқталарини топамиз:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{0}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y^2=b^2 \Rightarrow y=\pm b.$$

Демак, эллипс Oy ўқи билан A_1 $(0;\ b)$ ва A_2 $(0;\ -b)$ нуқталарда кесишади (29- чизма).

Шунингдек,

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{0}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=1 \Rightarrow x^2=a^2 \Rightarrow x=\pm a$$

бўлади.

Демак, эллипс Ox ўқи билан B_1 $(-a;\ 0)$ ва B_2 $(a;\ 0)$ нуқталарда кесишади (29- чизма). Одатда a эллипснинг *катта ярим ўқи*, b эса *кичик ярим ўқи* деб аталади.

Эллипс фокуслари орасидаги масофа $2c$ нинг унинг катта ўқи узунлиги $2a$ га нисбати эллипснинг *эксцентриситети* дейилади ва e ҳарфи билан белгиланади:

$$e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}. \qquad (4.14)$$

(4.12) тенгликдан

$$c^2=a^2-b^2$$

бўлишини эътиборга олиб, эллипснинг эксцентриситети

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

га тенг бўлишини топамиз.

Эллипснинг эксцентриситети унинг шаклини характерлайдиган миқдордир.

Равшанки, $c<a$ бўлганлиги сабабли e ҳар доим 1 дан кичик бўлади: $e\leqslant 1$.

Агар b орта борса, унда e кичиклашиб боради ва эллипс шакли айлана шаклига ўхшай боради. Агар $a=b$ бўлса, унда $e=0$ бўлиб, эллипс айланадан иборат бўлиб қолади.

Мисоллар. 1. Катта ўқи 10 га, эксцентриситети $e=0{,}8$ га тенг бўлган эллипснинг тенгламаси топилсин.

Ечиш. Масаланинг шартига кўра $2a=10$. Демак, $a=5$. (4.14) формуладан фойдаланиб,

$$0{,}8=\frac{c}{5}\Rightarrow c=5\cdot 0{,}8=4$$

бўлишини топамиз. (4.12) формуладан эса

$$b^2=a^2-c^2=5^2-4^2=25-16=9,\ b=3$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, (4.13) формулага асосан эллипснинг тенгламаси

$$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^3}{3^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

кўринишда бўлади.

2. Берилган $4x^2+9y^2=16$ эллипснинг катта ва кичик ярим ўқлари, фокуслари ҳамда эксцентриситети топилсин.

Ечиш. Берилган $4x^2+9y^2=16$ тенгламанинг ҳар икки томонини 16 га бўламиз. Натижада

$$\frac{x^2}{4}+\frac{9y^2}{16}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{\frac{16}{4}}=1$$

тенгламага келамиз. Бу эллипс тенгламасини (4.13) билан солиштириб,

$$a^2=4 \Rightarrow a=2,$$

$$b^2=\frac{16}{9} \Rightarrow b=\frac{4}{3}$$

бўлишини топамз. (4.12) формулага асосан

$$b^2=a^2-c^2 \Rightarrow \quad c^2=a^2-b^2 \Rightarrow \quad c^2=4-\frac{16}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2=\frac{20}{9} \Rightarrow c=\frac{\sqrt{20}}{3}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$$

бўлади.

(4.14) формуладан фойдаланиб, эллипснинг эксцентриситети e ни топамиз:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{3}:2=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Шундай қилиб:

$$a=2,\ b=\frac{4}{3},\ F_1\left(-\frac{2\sqrt{5}}{3};\ 0\right),\ F_2\left(\frac{2\sqrt{5}}{3};\ 0\right),$$

$$e=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

бўлади.

3-§. Гипербола ва унинг тенгламаси

Текисликда иккита нуқта берилган бўлсин. Текисликда шундай нуқталар тўпламини қарайликки, бу тўпламнинг ҳар бир нуқтасидан берилган икки нуқтагача бўлган масофалар айирмаси ҳар доим бир хил ўзгармас сонга тенг бўлсин. Одатда бундай нуқталар тўплами (нуқталарнинг геометрик ўрни) *гипербола* деб аталади.

Берилган икки нуқтани мос равишда F_1 ва F_2 орқали белгилайлик. Гиперболанинг тенгламасини тузиш учун текисликда координаталар системасини қуйидагича оламиз. Берилган F_1 ва F_2 нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқни абсцисса ўқи, F_1F_2 кесманинг ўртасидан ўтувчи ҳамда абсцисса ўқига перпендикуляр бўлган тўғри чизиқни ордината ўқи деб оламиз (30-чизма). Агар $OF_2 = c$ $(c > 0)$ дейилса, унда юқорида айтилганига кўра $F_1 = F_1\,(-c;\ 0)$, $F_2 = F_2\,(c;\ 0)$ бўлади.

Гиперболада ихтиёрий нуқта олиб, уни $M\,(x;\ y)$ билан белгилаймиз.

Энди гиперболанинг тенгламасини топамиз. Гипербола таърифига кўра F_1M ва F_2M масофалар айирмаси ўзгармас бўлади. Уни $2a$ билан белгилайлик:

$$F_1M - F_2M = \pm 2a \qquad (a > 0). \tag{4.15}$$

Икки нуқта орасидаги масофани ифодаловчи (1.1) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$F_1M = \sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

$$F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

да (4.15) тенглик ушбу

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

ўринишга келади. Кейинги тенгликни ($F_1M > F_2M$ деб) қуйидагича

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - 2a$$

зиб, сўнг унинг ҳар икки томонини квадратга кўтарамиз:

$$(x-c)^2 + y^2 = (x+c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 4a^2.$$

Бундан эса

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2 + 4a^2 -$$

$$- 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

ъни

$$-4a^2 - 4cx = -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

нлиги келиб чиқади. Кейинги тенгликдан

$$a^2 + cx = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \tag{4.16}$$

і бўламиз.

.16) тенгликнинг ҳар икки томонини квадратга кўтарамиз:

$$+ cx)^2 = (a\sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2 \Rightarrow a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 = a^2\,(x^2 +$$

$$2cx + c^2 + y^2) \Rightarrow a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 = a^2y^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^4 + c^2x^2 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 \Rightarrow (a^2 - c^2)\,x^2 +$$

$$+ a^2y^2 = a^2\,(a^2 - c^2).$$

вшанки, $F_2M - F_1M < F_1F_2$. Демак, $2a < 2c$, яъни $a^2 < c^2$. Бундан эса $a^2 - c^2 < 0$ бўлиши келиб чиқади. Шуни эътиборга олиб, юқоридаги тенгликнинг ҳар икки томонини $a^2\,(a^2 - c^2)$ га бўламиз:

$$\frac{(a^2-c^2)\,x^2}{(a^2-c^2)\,a^2}+\frac{a^2y^2}{a^2\,(a^2-c^2)}=1.$$

Натижада ушбу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

тенгликка келамиз.

Агар

$$a^2-c^2=-b^2 \tag{4.17}$$

деб белгиласак, унда

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{4.18}$$

бўлади.

Шундай қилиб, гиперболадаги ўзгарувчи $M\,(x;\ y)$ нуқтанинг координаталари (4.18) тенглама билан боғланган экан. Бу (4.18) тенглама гиперболанинг тенгламасини ифодалайди.

F_1 ва F_2 нуқталар гиперболанинг *фокуслари* дейилади. Равшанки, фокуслар орасидаги масофа $2c$ га тенг.

Энди ушбу

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ x=0;\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ y=0\end{cases}$$

тенгламалар системасини ечиб, гиперболанинг Oy ва Ox координата ўқлари билан кесишиш нуқталарини топамиз. Ушбу

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ x=0\end{cases}$$

система ечимга эга эмас (чунки $x=0$ да $-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ бўлиб, манфий сон 1 га тенг бўладиган маъносиз муносабат ҳосил бўлади).

Демак, гипербола Oy ўқи билан кесишмайди. Энди

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ y=0\end{cases}$$

системани ечамиз:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ y=0\end{cases}\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{0}{b^2}=1\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}=1\Rightarrow x^2=a^2\Rightarrow x=\pm a.$$

Демак, гипербола Ox ўқи билан $B_1\,(-a;\ 0)$ ва $B_2\,(a;\ 0)$ нуқталарда кесишади (30- чизма).

Ox ўқи гиперболанинг *ҳақиқий ўқи*, Oy эса *мавҳум ўқи* деб аталади.

Юқорида келтирилган гиперболанинг тенгламасини y га нисбатан ечиб топамиз:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow -\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 = b^2 \frac{x^2 - a^2}{a^2} \Rightarrow y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}. \tag{4.19}$$

Кейинги тенгликдан кўринадики, гипербола абсцисса ўқига нисбатан симметрик жойлашган бўлар экан.

Юқоридаги (4.19) тенгликни қуйидагича ёзамиз:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \Rightarrow y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)} \Rightarrow y =$$

$$= \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

Бу тенгликдан кўринадики, x етарли даражада катта бўлганда $\frac{a^2}{x^2}$ нисбат 0 га яқин бўлиб, $\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$ эса 1 га яқин бўлади:

$$\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \approx 1.$$

Унда

$$y = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \approx \pm \frac{b}{a} x$$

бўлади.

Демак, x етарли даражада катта бўлганда гипербола нуқталарининг ординаталари

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

тўғри чизиқлар нуқталарининг ординаталарига етарлича яқин бўларди. Бу

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

тўғри чизиқлар гиперболанинг *асимптоталари* деб аталади (30- чизмага қаранг.)

Гипербола фокуслари орасидаги масофа $2c$ нинг $2a$ га нисбати гиперболанинг *эксцентриситети* деб аталади ва e ҳарфи билан белгиланади:

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}. \tag{4.20}$$

(4.17) тенгликдан

$$c^2 = a^2 + b^2$$

бўлишини эътиборга олиб, гиперболанинг эксцентриситети

$$e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

га тенг бўлишини топамиз.

Равшанки, $c > a$ бўлганлиги сабабли e ҳар доим 1 дан катта бўлади: $e > 1$.

Мисоллар: 1. Фокуслари орасидаги масофа $2\sqrt{11}$ бўлиб, ўзи M (9; —4) нуқтадан ўтадиган гиперболанинг тенгламаси топилсин.

Ечиш. Масаланинг шартига биноан $2c = 2\sqrt{11}$ бўлади. Демак, $c = \sqrt{11}$. (4.17) формулага кўра

$$a^2 + b^2 = 11$$

бўлади.

Гипербола M (9; —4) нуқтадан ўтади. Бинобарин, бу нуқтанинг координаталари гипербола тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ни қаноатлантиради:

$$\frac{9^2}{a^2} - \frac{(-4)^2}{b^2} = 1.$$

Кейинги тенгликдан топамиз:

$$\frac{9^2}{a^2} - \frac{(-4)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow = \frac{81}{a^2} - \frac{16}{b^2} = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 81\, b^2 - 16\, a^2 = a^2b^2.$$

Натижада a ва b ларни топиш учун ушбу

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 11, \\ 81b^2 - 16a^2 = a^2b^2 \end{cases}$$

системага эга бўламиз. Энди бу системани ечамиз:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 11, \\ 81b^2 - 16a^2 = a^2b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 11 - b^2, \\ 81b^2 - 16\,(11 - b^2) = (11 - b^2)\; b^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 11 - b^2, \\ 81b^2 - 176 + 16b^2 - 11b^2 + b^4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 11 - b^2, \\ b^4 - 86b^2 - 176 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 11 - b^2, \\ b^2_{1,2} = -43 \pm \sqrt{1849 + 176} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 11 - b^2, \\ b_1^2 = 2,\ b_2^2 = -83 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2 = 11 - 2 = 9, \\ b_1^2 = 2. \end{cases}$$

Демак, $a^2=9$, $b^2=2$. Изланаётган гиперболанинг тенгламаси

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{2}=1$$

бўлади.

2. $16x^2-25y^2=400$ гиперболанинг фокуслари, эксцентриситети топилиб, асимптотасининг тенгламаси тузилсин.

Ечиш. Берилган гипербола тенгламасининг ҳар икки томонини 400 га бўламиз:

$$\frac{16x^2}{400}-\frac{25y^2}{400}=1.$$

Натижада гипербола тенгламаси $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ кўринишга келади.

Демак,

$$a^2=25,\ b^2=16,$$

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41},$$

$$F_1(-\sqrt{41};\ 0),\ F_2(\sqrt{41};\ 0),\ e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{41}}{5};$$

гипербола асимптотасининг тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{4}{5}x.$$

4-§. Парабола ва унинг тенгламаси

Текисликда тўғри чизиқ ва бу тўғри чизиқда ётмаган бирор нуқта берилган бўлсин. Тўғри чизиқдан ва берилган нуқтадан баравар узоқликда турган нуқталар тўплами (нуқталарнинг геометрик ўрни) *парабола* деб аталади.

Берилган тўғри чизиқни AB, берилган нуқтани эса F билан белгилаймиз.

Параболанинг тенгламасини тузиш учун текисликда координаталар системасини қуйидагича оламиз. Берилган нуқтадан ўтувчи ҳамда берилган AB тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқни абсцисса ўқи деб оламиз. AB тўғри чизиқ ва берилган F нуқта орасидаги масофани ифодаловчи кесма ўртасидан ўтувчи ҳамда Ox ўқига перпендикуляр бўлган тўғри чизиқни Oy ўқи деб оламиз (31- чизма).

Параболада ихтиёрий нуқта олиб, уни $M(x;\ y)$ билан белгилаймиз.

Берилган AB тўғри чизиқдан берилган F нуқтагача бўлган масофани p билан ($p>0$) белгилайлик. Унда F нуқтанинг координаталари $\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$ бўлади: $F\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$. 31- чизмадан:

$$OM_1=x,\ OM_2=MM_1=y,\ C\left(-\frac{p}{2};\ 0\right),\ N\left(\frac{p}{2};\ y\right)$$

бўлишини топамиз. Равшанки,

$$MN=x+\frac{p}{2}. \qquad (4.21)$$

Энди параболанинг тенгламасини топамиз. Парабола таърифига кўра MN ва MF масофалар бир-бирига тенг бўлади:

$$MN = MF \tag{4.22}$$

Икки нуқта орасидаги масофани ифодаловчи (1.1) формуладан фойдаланиб,

$$MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} \tag{4.23}$$

ни ҳосил қиламиз.

(4.21), (4.22) ва (4.23) муносабатлардан ушбу

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

тенгликка келамиз. Бу тенгликнинг ҳар икки томонини квадратга кўтариб топамиз:

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} \Rightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 2\cdot\frac{p}{2}\,x + \frac{p^2}{4} = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + px + \frac{p^2}{4} =$$

$$= x^2 - 2\,\frac{p}{2}\,x + \frac{p^2}{4} + y^2 \Rightarrow x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 = 2px.$$

Натижада қуйидаги тенглама ҳосил бўлади:

$$y^2 = 2px. \tag{4.24}$$

Шундай қилиб, параболадаги ўзгарувчи M (x; y) нуқтанинг координаталари (4.24) тенглама билан боғланган экан. Бу (4.24) тенглама параболанинг тенгламасини ифодалайди.

F нуқта параболанинг *фокуси*, AB тўғри чизиқ параболанинг *директрисаси* дейилади.

Демак, парабола директрисасининг тенгламаси $x = -\frac{p}{2}$, парабола фокуси F нинг координаталари $F\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$ бўлади.

Парабола тенгламаси (4.24) да y ўзгарувчи жуфт даражада қатнашади. Демак, парабола Ox ўқига нисбатан симметрик жойлашган бўлади. (4.24) тенгламадан топамиз:

$$y^2 = 2px \Rightarrow y = +\sqrt{2px},\ y = -\sqrt{2px}.$$

Демак, параболанинг юқори ярим текисликдаги тенгламаси

$$y = +\sqrt{2px}, \tag{4.25}$$

қуйи ярим текисликдаги тенгламаси эса $y = -\sqrt{2px}$ бўлади.

Параболанинг юқори ярим текисликдаги қисмини қарайлик. (Қуйи ярим текисликдаги қисми худди шунга ўхшаш бўлади.)

(4.25) x нинг манфий қийматларда y нинг қийматлари ҳақиқий бўлмайди. Бундан Oy ўқининг чап томонида параболанинг битта ҳам нуқтаси бўлмаслиги келиб чиқади.

$x = 0$ бўлганда $y = 0$ бўлади. Демак, парабола координата бошидан ўтади.

x ($x > 0$) нинг қийматлари орта борса, (4.25) тенгламадан кўриниадики, мос y нинг қийматлари ҳам орта боради. Демак, параболадаги ўзгарувчи M (x; y) нуқта парабола бўйлаб ҳам ўнгга, ҳам юқорига қараб Ox ўқидан ҳам, Oy ўқидан ҳам узоқлаша борар экан. Бу ҳолни 31-чизмадаги парабола тасвирида ҳам кўриш мумкин.

Ушбу $y^2 = -2px$ кўринишдаги тенглама ҳам параболани ифодалайди. Унинг тасвири 32-чизмада кўрсатилган.

Ушбу

$$x^2 = 2py, \tag{4.26}$$

$$x^2 = -2py \tag{4.27}$$

тенгламалар ҳам параболаларни ифодалайди. Бу параболалар Oy ўқига нисбатан симметрик бўлади. (4.26) параболанинг тасвири 33-чизмада, (4.27) параболанинг тасвири эса 34-чизмада кўрсатилган.

Мисоллар. 1. Параболанинг фокуси (5; 0) нуқта бўлса, шу параболанинг тенгламаси топилсин.

Ечиш. Масаланинг шартига кўра F (5; 0). Демак, $\frac{p}{2} = 5$. Бундан эса $p = 10$ бўлиши келиб чиқади. Юқоридаги (4.24) дан фойдаланиб, изланаётган параболанинг тенгламаси

$$y^2 = 2 \cdot 10x = 20x$$

бўлишини топамиз.

2. Агар параболанинг (3; 5) нуқтадан ўтиши маълум бўлса, унинг тенгламаси топилсин.

Ечиш. Шартга кўра изланаётган парабола (3; 5) нуқтадан ўтади. Бинобарин, бу нуқтанинг координаталари парабола тенгламасини қаноатлантиради: $5^2 = 2p \cdot 3$. Бу тенгликдан $p = \frac{25}{6}$ бўлишини топамиз.

Демак, параболанинг тенгламаси

$$y^2 = 2 \cdot \frac{25}{6} x = \frac{25}{3} x$$

бўлади.

V БОБ. ФАЗОДАГИ АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ

Фазодаги аналитик геометрияда текисликдаги аналитик геометриядаги сингари фазовий шаклларнинг (геометрик объектларнинг) хоссалари алгебра усули ёрдамида (яъни тенгламалар ёрдамида) ўрганилади.

1-§. Фазода тўғри бурчакли Декарт координаталар системаси

Фазода ўзаро бир-бири билан перпендикуляр бўлган учта тўғри чизиқни олайлик. Бу тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтасини O ҳарфи билан белгилаб, уни *координата боши* деб атаймиз. 35-чизмада кўрсатилганидек, тўғри чизиқларнинг бирини Ox ўқи ёки *абсцисса ўқи*, иккинчисини Oy ўқи ёки *ордината ўқи*, учинчисини эса Oz ўқи ёки *аппликата ўқи* деб аталади.

Координата боши Ox, Oy ва Oz ўқларининг ҳар бирини икки қисмга — икки ярим ўққа ажратади. Ярим ўқлардан бирини мусбат, иккинчисини манфий деб қараймиз. Мусбат ярим ўқлар 35-чизмада стрелкалар билан кўрсатилган.

Ox, Oy ва Oz ўқлар орқали ўтган текисликлар (улар координата текисликлари деб аталади) фазони 8 қисмга ажратади. Одатда бу қисмлар *октантлар* деб аталади. Улар 36-чизмада кўрсатилганидек номерланади.

Айтайлик, M — фазодаги бирор нуқта бўлсин. M нуқтадан yOz, xOz, xOy координат текисликларига параллел текисликлар ўтказиб, уларнинг мос ўқлар билан кесишган нуқталарини M_x, M_y ва M_z лар билан белгилаймиз. Бу M_x, M_y ва M_z нуқталарни аниқлашнинг йўл-йўриқлари 37-расмда кўрсатилган.

Ушбу

$$OM_x = x, \qquad OM_y = y, \qquad OM_z = z$$

кесмаларнинг узунлиги M нуқтанинг *координаталари* деб аталади. x сон M нуқтанинг биринчи координатаси ёки *абсциссаси*, y сон M нуқтанинг иккинчи координатаси ёки *ординатаси*, z сон эса M нуқтанинг учинчи координатаси ёки *аппликатаси* деб аталади. M нуқта координаталари ёрдамида қуйидагича ёзилади: M $(x; y; z)$.

Октантлар	(x; y; z) нуқта координаталари ишораси		
	x (абсцисса)	y (ордината)	z (аппликата)
I	$x>0$	$y>0$	$z>0$
II	$x<0$	$y>0$	$z>0$
III	$x<0$	$y<0$	$z>0$
IV	$x>0$	$y<0$	$z>0$
V	$x>0$	$y>0$	$z<0$
VI	$x<0$	$y>0$	$z<0$
VII	$x<0$	$y<0$	$z<0$
VIII	$x>0$	$y<0$	$z<0$

Юқорида айтилганлардан кўринадики, фазодаги ҳар бир нуқта $(x;\ y;\ z)$ учликни аниқлайди.

Аксинча, учта x; y ва z сонлардан иборат $(x;\ y;\ z)$ учлик берилган бўлса, фазода унга мос битта нуқта топилади.

Координата текисликлари бутун фазони 8 та октантга бўлишини айтиб ўтган эдик. Бу октантлардаги нуқталар координаталарининг ишоралари 40-бетдаги жадвалда кўрсатилган.

Масалан, $M\ (-3;\ 5;\ 1)$ нуқтанинг фазодаги геометрик тасвири 38-чизмада ифодаланган.

2-§. Фазодаги икки нуқта орасидаги масофа

Фазода икки A ва B нуқта берилган бўлиб, уларнинг координаталари мос равишда $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ва $(x_2;\ y_2;\ z_2)$ бўлсин: $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$.

Бу нуқталар орасидаги масофани топиш талаб этилсин. 39-чизмада берилган $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ва $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ нуқталарнинг координаталарини эътиборга олиб қуйидагиларни аниқлаймиз:

$$OC_1 = x_1, \qquad OD_1 = y_1, \qquad AA_1 = z_1,$$
$$OC_2 = x_2, \qquad OD_2 = y_2, \qquad BB_1 = z_2.$$

AA_1 ва BB_1 ўзаро параллел. Улар бир текисликда ётади. A_1 ва B_1 нуқталарни туташтирамиз. A нуқтада A_1B_1 га параллел AE кесмани ўтказамиз. Натижада ABE тўғри бурчакли учбурчак ҳосил бўлади. Пифагор теоремасидан фойдаланиб топамиз:

$$AB^2 = AE^2 + BE^2. \qquad (5.1)$$

A_1 нуқтадан Oy ўққа параллел A_1E_1 тўғри чизиқни ўтказиб, $A_1B_1E_1$ учбурчакни ҳосил қиламиз. Бу учбурчак ҳам тўғри бурчакли учбурчак бўлади. Яна Пифагор теоремасига асосан

$$A_1B_1^2 = A_1E_1^2 + B_1E_1^2$$

га эга бўламиз.

Энди $AE = A_1B_1$ эканини эътиборга олиб, кейинги тенгликни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$AE^2 = A_1E_1^2 + B_1E_1^2. \qquad (5.2)$$

(5.1) ва (5.2) тенгликлардан

$$AB^2 = A_1E_1^2 + B_1E_1^2 + BE^2 \qquad (5.3)$$

бўлиши келиб чиқади. Равшанки,

$$A_1E_1 = D_1D_2 = OD_2 - OD_1 = y_2 - y_1,$$
$$B_1E_1 = C_1C_2 = OC_2 - OC_1 = x_2 - x_1,$$
$$BE = BB_1 - EB_1 = BB_1 - AA_1 = z_2 - z_1.$$

Демак,

$$A_1E_1 = y_2 - y_1, \quad B_1E_1 = x_2 - x_1, \quad BE = z_2 - z_1.$$

Буларни (5.3) тенгликка қўйиб топамиз:

$$AB^2 = (y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Демак,

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (5.4)$$

Бу $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ва $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ нуқталар орасидаги масофани ифодаловчи формуладир.

Мисол. $A(2;\ 5;\ 0)$, $B(5;\ 1;\ 12)$ нуқталар орасидаги масофа топилсин.

Ечиш. Бу нуқталар орасидаги масофани (5.4) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$AB = \sqrt{(5-2)^2 + (1-5)^2 + (12-0)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 12^2} =$$
$$= \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13.$$

3-§. Кесмани берилган нисбатда бўлиш

Фазода $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ва $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ нуқталар берилган бўлиб, уларни туташтириш натижасида AB кесма ҳосил қилинган. AB кесмада шундай C нуқтани топиш керакки, AC кесманинг CB кесмага нисбати берилган λ сонга тенг бўлсин:

$$\frac{AC}{CB} = \lambda.$$

Изланаётган C нуқтанинг координаталарини x, y ва z дейлик: $C(x;\ y;\ z)$.

Бу масаланинг ечилиши мазкур курснинг 1-боб, 3-§ ида келтирилган (текисликдаги кесмани берилган нисбатда бўлиш) масаланинг ечилиши кабидир. Шуни эътиборга олиб, биз қуйида масаланинг ечимини келтириш билан кифояланамиз.

AB кесмани берилган $\lambda = \frac{AC}{CB}$ нисбатда бўлувчи нуқтанинг координаталари қуйидаги

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \qquad (5.5)$$

формулалар билан топилади.

Хусусан, $C(x;\ y;\ z)$ нуқта AB кесмани тенг иккига бўлса ($AC = CB$), у ҳолда

$$\frac{AC}{CB} = \lambda = 1$$

бўлиб, изланаётган C нуқтанинг x, y, z координаталари

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

бўлади.

Мисол. $A(3;\ 7;\ 4)$ ва $B(8;\ 2;\ 3)$ нуқталарни туташтиришдан ҳосил бўлган AB кесмани $\lambda = \frac{2}{3}$ нисбатда бўлувчи C нуқта топилсин.

Ечиш. Изланаётган C нуқтанинг координаталарини юқорида келтирилган (5.5) формулалардан фойдаланиб топамиз:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{3 + \frac{2}{3}\cdot 8}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{9+16}{3+2} = 5,$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{7+2\cdot\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{21+4}{5} = 5,$$

$$z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} = \frac{4+3\cdot\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{6}{\frac{5}{3}} = \frac{18}{5}.$$

Демак, $C\left(5;\ 5;\ \frac{18}{5}\right)$.

IV БОБ. ТЕКИСЛИК ВА УНИНГ ТЕНГЛАМАЛАРИ

Фазода икки нуқта берилган бўлсин. Бу нуқталардан бир хил масофада турган нуқталар тўплами (нуқталарнинг геометрик ўрни) *текислик* деб қаралади.

Қуйида текисликнинг аналитик ифодаларини (тенгламаларини) топамиз ва улар ёрдамида текисликнинг хусусиятларини ўрганамиз.

1-§. Текисликнинг умумий тенгламаси

Биз юқорида, текисликни берилган икки $B_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ҳамда $B_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ нуқталардан баравар узоқликда турувчи нуқталар тўпламидан иборат деб қарадик. Энди текисликда ихтиёрий $M(x;\ y;\ z)$ нуқтани (ўзгарувчи нуқтани) олайлик. Равшанки, $M(x;\ y;\ z)$ нуқтанинг координаталари x, y ва z лар турли қийматларни қабул қилганда, текисликнинг нуқталари ҳосил бўлади. Бу $M(x;\ y;\ z)$ нуқта билан берилган $B_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ва $B_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ нуқталар орасидаги масофани (5.1) формуладан фойдаланиб топамиз (40-чизма):

$$B_1M = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2},$$
$$B_2M = \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2}.$$

Шартга кўра

$$B_1M = B_2M$$

бўлишидан

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}=$$
$$=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}$$

тенглик келиб чиқади. Кейинги тенгликдан эса

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2$$

бўлишини топамиз. Бу тенгликда ҳамма ҳадларини чап томонга ўтказиб, сўнг қисқа кўпайтириш формуласидан фойдалансак қуйидаги тенглама ҳосил бўлади:

$$x^2-2x_1x+x_1^2+y^2-2y_1y+y_1^2+z^2-2z_1z+z_1^2-(x^2-2x_2x+$$
$$+x_2^2+y^2-2y_2y+y_2^2+z^2-2z_2z+z_2^2)=0.$$

Ундан

$$-2x_1x+x_1^2-2y_1y+y_1^2-2z_1z+z_1^2+2x_2x-x_2^2-2y_2y-$$
$$-y_2^2+2z_2z-z_2^2=0,$$

яъни

$$2(x_2-x_1)x+2(y_2-y_1)y+2(z_2-z_1)z+(x_1^2+y_1^2+$$
$$+z_1^2-x_2^2-y_2^2-z_2^2)=0$$

бўлиши келиб чиқади. Агар

$$A=2(x_2-x_1),\ B=2(y_2-y_1),\ C=2(z_2-z_1),$$
$$D=x_1^2+y_1^2+z_1^2-x_2^2-y_2^2-z_2^2$$

деб белгиласак, унда

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (6.1)$$

тенгламага келамиз. Бу x, y ва z га нисбатан биринчи даражали тенгламадир.

Демак, текисликдаги ихтиёрий $M(x;\ y;\ z)$ нуқтанинг x, y ва z координаталари (6.1) тенглама билан боғланган бўлар экан. (6.1) тенглама *текисликнинг умумий тенгламаси* деб аталади.

Текисликнинг умумий тенгламаси A, B, C, D сонларга (коэффициентларга) боғлиқ. Бу сонлар турли қийматларга тенг бўлганда турли текисликлар ҳосил бўлади. Бинобарин, текисликнинг фазодаги вазияти ҳам шу коэффициентларга боғлиқдир.

Мисол. $x+y+z-1=0$ тенглама текисликнинг умумий тенгламаси бўлиб, унинг фазодаги вазияти 41-чизмада тасвирланган.

Текисликнинг умумий тенгламаси

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (6.2)$$

берилган бўлсин. Бу текисликнинг фазодаги вазиятини ўрганамиз. Юқорида айтиб ўтганимиздек, текисликнинг вазияти A, B, C, D коэффициентларга боғлиқ бўлади.

1°. (6.1) текислик тенгламасида $D=0$ бўлсин. Бу ҳолда (6.1) тенглама ушбу

$$Ax+By+Cz=0 \qquad (6.2)$$

кўринишга келади. Бу текислик координата бошидан (яъни $O(0;\ 0;\ 0)$ нуқтадан) ўтади. Чунки $O(0;\ 0;\ 0)$ нуқтанинг координаталари (6.2) тенгламани қаноатлантиради:

$$A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot 0 = 0.$$

2°. (6.1) текислик тенгламасида $C = 0$ бўлсин. Бу ҳолда (6.1) тенглама ушбу

$$Ax + By + D = 0 \tag{6.3}$$

кўринишга келади. (6.3) тенглама Oz ўқига параллел текисликни ифодалайди (42- чизма).

3°. (6.1) текислик тенгламасида $B = 0$ бўлсин. Бу ҳолда (6.1) тенглама ушбу

$$Ax + Cz + D = 0 \tag{6.4}$$

кўринишга келади. (6.4) тенглама Oy ўқига параллел текисликни ифодалайди (43- чизма).

4°. (6.1) текислик тенгламасида $A = 0$ бўлсин. Бу ҳолда (6.1) тенглама ушбу

$$By + Cz + D = 0 \tag{6.5}$$

кўринишга келади. (6.5) тенглама Ox ўқига параллел бўлган текисликни ифодалайди (44- чизма).

5°. (6.1) текислик тенгламасида $C = D = 0$ бўлсин. Бу ҳолда (6.1) тенглама ушбу

$$Ax + By = 0 \tag{6.6}$$

кўринишга келади. (6.6) тенглама Oz ўқидан ўтувчи текисликни ифодалайди.

6°. (6.1) текислик тенгламасида $B = D = 0$ бўлсин. Бу ҳолда (6.1) тенглама ушбу

$$Ax + Cz = 0 \tag{6.7}$$

кўринишга келади. (6.7) тенглама Oy ўқидан ўтувчи текисликни ифодалайди.

7°. (6.1) текислик тенгламасида $A = D = 0$ бўлсин. Бу ҳолда (6.1) тенглама ушбу

$$By + Cz = 0 \tag{6.8}$$

кўринишга келади. (6.8) тенглама Ox ўқидан ўтувчи текисликни ифодалайди.

8°. (6.1) текислик тенгламасида $A = B = 0$ бўлсин. Бу ҳолда (6.1) тенглама ушбу

$$Cz + D = 0 \tag{6.9}$$

кўринишга келади. (6.9) тенгламадан топамиз:

$$z = -\frac{D}{C} \quad (C \neq 0).$$

Демак, (6.9) текисликнинг барча нуқталари xOy координата текислигидан баравар узоқликда бўлади. (6.9) тенглама xOz текисликка параллел бўлган текисликни ифодалайди (45- чизма).

9°. (6.1) текислик тенгламасида $B = C = 0$ бўлсин. Бу ҳолда (6.1) тенглам ушбу

$$Ax + D = 0 \tag{6.10}$$

кўринишга келади. (6.10) тенгламадан топамиз:

$$x = -\frac{D}{A} \quad (A \neq 0).$$

Демак, (6.10) текисликнинг барча нуқталари yOz координата текислигидан баравар узоқликда бўлади. (6.10) тенглама yOz текисликка параллел бўлган текисликни ифодалайди (46- чизма).

10°. (6.1) текислик тенгламасида $A = C = 0$ бўлсин. Бу ҳолда (6.1) тенглама ушбу

$$By + D = 0 \tag{6.11}$$

кўринишга келади. (6.11) тенгламадан топамиз:

$$y = -\frac{D}{B} \quad (B \neq 0)$$

Демак, (6.11) текисликнинг барча нуқталари xOz координата текислигидан баравар узоқликда бўлади.

(6.11) тенглама xOz текисликка параллел бўлган текисликни ифодалайди (47- чизма).

11°. (6.1) текислик тенгламаси:

а) $B = C = D = 0$ бўлганда $Ax = 0$, яъни $x = 0$,

б) $C = D = A = 0$ бўлганда $By = 0$, яъни $y = 0$,

в) $D = A = B = 0$ бўлганда $Cz = 0$, яъни $z = 0$ бўлиб, (6.1) тенглама мос равишда yOz, xOz ва xOy координата текисликларини ифодалайди.

2-§. Текисликнинг кесмалар бўйича тенгламаси

Фазода бирор текислик берилган бўлиб, у координата ўқлари Ox, Oy ва Oz лар билан мос равишда M_1, M_2, M_3 нуқталарда кесишиб, улардан ажратган кесмалари

$$OM_1 = a, \quad OM_2 = b, \quad OM_3 = c$$

га тенг бўлсин (48- чизма).

Бу берилган a, b ва c сонлар (кесмалар узунликлари) ёрдамида текисликнинг фазодаги вазиятини тўлиқ аниқлаш мумкин.

Айтайлик, қаралаётган текисликнинг тенгламаси

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{6.1}$$

бўлсин. Модомики, бу текислик $M_1(a;\ 0;\ 0)$, $M_2(0;\ b;\ 0)$ ва $M_3(0;\ 0;\ c)$ нуқталардан ўтар экан, демак, бу нуқталарнинг координаталари (6.1) тенгламани қаноатлантиради:

$$A\cdot a+B\cdot 0+C\cdot 0+D=0,$$
$$A\cdot 0+B\cdot b+C\cdot 0+D=0,$$
$$A\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot c+D=0.$$

Демак,

$$Aa+D=0,\ Bb+D=0,\ Cc+D=0.$$

Бу тенгликлардан

$$A=-\frac{D}{a},\quad B=-\frac{D}{b},\quad C=-\frac{D}{c}$$

бўлиши келиб чиқади. Бу топилган A, B, C ларнинг қийматларини (6.1) тенгламадаги A, B, C ларнинг ўрнига қўямиз:

$$Ax+By+Cz+D=0\Rightarrow -\frac{D}{a}x-\frac{D}{b}y-\frac{D}{c}z+D=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -D\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1\right)=0\Rightarrow\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Натижада

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (6.12)$$

тенгламага келамиз. Бу текисликнинг кесмалар бўйича тенгламасидир.

3-§. Текисликнинг нормал тенгламаси

Фазода текисликнинг вазиятини бошқача ҳам аниқлаш мумкин. Фазода Декарт координаталар системасига нисбатан бирор текисликни қарайлик. Бу текислик 49-чизмада тасвирлангандек бўлсин. Координата бошидан текисликка туширилган перпендикулярнинг узунлиги p ва шу перпендикулярнинг Ox, Oy ва Oz ўқларнинг мусбат йўналишлари билан ташкил этган бурчаклари мос равишда α, β ва γ бўлсин.

Берилган p ва α, β, γ лар ёрдамида текисликнинг фазодаги вазияти тўлиқ аниқланади. Текисликнинг тенгламаси эса

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=1 \qquad (6.13)$$

бўлиб, бунда

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=0$$

бўлади (текисликнинг бу тенгламасини келтириб чиқариш тўғри чизиқнинг нормал тенгламасини келтириб чиқариш кабидир). Одатда, (6.13) тенглама *текисликнинг нормал тенгламаси* деб аталади.

Энди текисликнинг умумий тенгламасини нормал кўринишдаги тенгламага келтирилишини кўрсатамиз.

Фазода бирор текислик берилган бўлиб,

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (6.1)$$

унинг умумий тенгламаси,

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \tag{6.13}$$

эса шу текисликнинг нормал тенгламаси бўлсин. Бу тенгламалар битта текисликни аниқлаганлиги сабабли, уларнинг коэффициентлари пропорционал бўлади. Демак,

$$\mu Ax + \mu By + \mu Cz + \mu D = 0$$

тенглама (6.13) тенглама билан бир хил бўлади:

$$\mu Ax + \mu By + \mu Cz + \mu D = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p.$$

Бундан эса

$$\mu Ax = \cos\alpha, \quad \mu B = \cos\beta, \quad \mu C = \cos\gamma, \quad \mu D = -p$$

тенгликларга эга бўламиз. Натижада

$$\mu^2 A^2 + \mu^2 B^2 + \mu^2 C^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

бўлади. Демак,

$$\mu^2 A^2 + \mu^2 B^2 + \mu^2 C^2 = 1.$$

Бу тенгликдан эса

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

бўлиши келиб чиқади.

Шундай қилиб, текисликнинг умумий тенгламаси

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{6.1}$$

ни

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

га кўпайтириш натижасида бу тенглама нормал кўринишдаги тенгламага келар экан.

μ *нормалловчи кўпайтувчи* дейилиб, унинг ишораси (6.1) тенгламадаги D нинг ишорасига тескари қилиб олинади.

Мисол. Текисликнинг умумий тенгламаси $4x + 3y - 7z + 15 = 0$ ни нормал кўринишдаги тенгламага келтирилсин.

Ечиш. Аввало нормалловчи кўпайтувчини топамиз:

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{1}{-\sqrt{4^2 + 3^2 + (-7^2)}} =$$

$$= \frac{1}{-\sqrt{16 + 9 + 49}} = -\frac{1}{\sqrt{74}}.$$

Берилган тенгламанинг ҳар икки томонини $\mu = -\frac{1}{74}$ га кўпайтириб, ушбу

$$-\frac{4}{\sqrt{74}}x - \frac{3}{\sqrt{74}}y + \frac{7}{\sqrt{74}}z - \frac{15}{\sqrt{74}} = 0$$

тенгламага келамиз. Бу текисликнинг нормал тенгламасидир. Бу ерда

$$\cos\alpha = -\frac{4}{\sqrt{74}}, \quad \cos\beta = -\frac{3}{\sqrt{74}}, \quad \cos\gamma = \frac{7}{\sqrt{74}}, \quad p = \frac{15}{\sqrt{74}}$$

бўлади.

4-§. Берилган нуқтадан ўтувчи текислик тенгламаси

Фазода бирор $M(x_1;\ y_1;\ z_1)$ нуқта берилган бўлсин. Шу нуқтадан ўтувчи текислик тенгламасини топиш талаб этилсин.

Текислик тенгламасини ушбу

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (6.1)$$

кўринишда излаймиз. Модомики, бу текислик берилган $M(x_1;\ y_1;\ z_1)$ нуқтадан ўтар экан, унда шу нуқтанинг x_1, y_1 ва z_1 координаталари (6.1) тенгламани қаноатлантиради:

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0. \qquad (6.14)$$

Юқоридаги (6.1) тенгламадан (6.14) тенгламани ҳадлаб айириб

$$Ax + By + Cz + D - (Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D) = 0$$

қуйидаги

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \qquad (6.15)$$

тенгламага келамиз. Бу берилган $M(x_1;\ y_1;\ z_1)$ нуқтадан ўтувчи текислик тенгламасидир.

Мисол. $M(2;\ 4;\ 6)$ нуқтадан ўтувчи текислик тенгламаси топилсин.

Ечиш. Юқоридаги (6.15) формулага кўра $M(2;\ 4;\ 6)$ нуқтадан ўтувчи текислик тенгламаси ушбу

$$A(x - 2) + B(y - 4) + C(z - 6) = 0$$

кўринишда бўлади. Бу тенглама A, B ва C ларнинг қийматларига боғлиқ. Уларнинг турли қийматларида $M(2;\ 4;\ 6)$ нуқтадан ўтувчи турли текисликлар ҳосил бўлади.

5-§. Икки текислик орасидаги бурчак

Фазода икки текислик берилган бўлсин. Бу текисликлардан ҳосил бўлган ихтиёрий икки қўшни икки ёқли бурчак берилган *текисликлар орасидаги бурчак* деб аталади (50-чизма).

Фараз қилайлик, айтилган текисликлардан бирининг тенгламаси

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

иккинчисининг тенгламаси эса

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

бўлсин. Бу текисликлар орасидаги бурчак φ ушбу

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (6.16)$$

формула билан топилади.

(6.16) формуладан фойдаланиб икки текисликнинг параллел ҳамда перпендикуляр бўлиши шартларини топиш мумкин. Масалан, икки текислик орасидаги бурчак $\varphi = 90^\circ$ бўлсин. Бу ҳолда текисликлар ўзаро перпендикуляр бўлади.

Равшанки, $\varphi = 90^\circ$да

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 90^\circ = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Демак,

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \qquad (6.17)$$

тенглик икки текисликнинг перпендикулярлик шартидир.

Шунингдек, кўрсатиш мумкинки,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad (6.18)$$

тенгликлар икки текисликнинг параллеллик шартини ифодалайди.

Мисоллар. 1. $2x - 3y + 5z + 7 = 0$, $6x - 9y + 15z + 21 = 0$ текисликлар ўзаро параллелдир, чунки улар учун (6.18) шарт бажарилади:

$$\frac{2}{6} = \frac{-3}{-9} = \frac{5}{15}.$$

2. $2x + y - 5z + 4 = 0$, $3x + 4y + 2z - 1 = 0$ текисликлар ўзаро перпендикуляр бўлади, чунки улар учун (6.17) шарт бажарилади:

$$2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + (-5) \cdot 2 = 0.$$

3. $2x + y + 4z + 2 = 0$, $x + 2y - z + 1 = 0$ икки текислик орасидаги бурчак топилсин.

Юқорида келтирилган формулага кўра изланаётган φ бурчакнинг косинуси

$$\cos\varphi = \frac{2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-1)}{\sqrt{4 + 1 + 16} \cdot \sqrt{1 + 4 + 1}} = -\frac{0}{\sqrt{126}} = 0$$

бўлади. Демак, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

6- §. Берилган нуқтадан берилган текисликкача бўлган масофа

Фазода $M(x_1;\ y_1;\ z_1)$ нуқта ва бирор текислик берилган бўлсин. Қаралаётган текисликнинг нормал кўринишидаги тенгламаси

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \tag{6.13}$$

га эга бўлайлик.

Агар берилган нуқтадан шу текисликкача бўлган масофани d десак, у қуйидаги

$$d = x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p \tag{6.19}$$

тенгликдан топилади.

Агар текислик умумий тенглама

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{6.1}$$

билан берилган бўлса, аввало бу тенгламани нормал кўринишдаги тенгламага келтирилади. Бунинг учун нормалловчи кўпайтувчи

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

ни топиб олиниб, берилган тенгламани нормал кўринишга келтирилади:

$$\mu\ (Ax + By + Cz + D) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0.$$

Сўнг x, y ва z лар ўрнига $M(x_1;\ y_1;\ z_1)$ нуқтанинг координаталарини қўямиз. Натижада

$$d = \pm\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{6.20}$$

бўлади.

Мисол. Берилган $M(3;\ 0;\ 1)$ нуқтадан ушбу $x - 2y + z - 1 = 0$ текисликкача бўлган масофа топилсин.

Ечиш. Равшанки, бу ҳолда $A = 1$, $B = -2$, $C = 1$, $D = -1$, $x_1 = 3$, $y_1 = 0$, $z_1 = 1$ бўлади. Юқоридаги (6.20) формулага кўра

$$d = \frac{1\cdot 3 + (-2)\cdot 0 + 1\cdot 1 - 1}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

бўлади.

VII БОБ. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ СИРТЛАР

Маълумки, фазода текислик x, y ва z ўзгарувчиларга нисбатан биринчи даражали

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

тенглама билан аналитик ифодаланади.

Энди фазода иккинчи тартибли сиртларнинг (маълум кўринишдаги сиртларнинг) аналитик ифодаларини келтирамиз.

Иккинчи тартибли сиртлар x, y ва z ўзгарувчиларга нисбатан иккинчи даражали тенгламалар билан ифодаланади. Иккинчи даражали тенгламанинг умумий кўриниши қуйидагича бўлади:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz +$$
$$+ Gx + Hy + Kz + T = 0. \qquad (7.1)$$

Одатда (7.1) тенглама *иккинчи тартибли сиртнинг умумий тенгламаси* деб аталади.

Ушбу бобда содда кўринишдаги иккинчи тартибли сиртлардан сфера, эллипсоид, гиперболоид ҳамда параболоидлар ҳақида қисқача маълумотларни келтирамиз.

1-§. Сфера ва унинг тенгламаси

Фазода бирор A (a; b; c) нуқта берилган бўлсин. A (a; b; c) нуқтадан баравар узоқликда турган нуқталар тўплами (нуқталарнинг геометрик ўрни) *сфера* деб аталади (51-чизма). Сферада иктиёрий нуқта олайлик. Уни B (x; y; z) билан белгилайлик.

Энди сферанинг тенгламасини топамиз. Сфера таърифига кўра AB масофа ўзгармас. Уни R билан белгилайлик: $AB = R$. Икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласи (5.1) га кўра

$$AB = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

бўлади. Демак,

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R.$$

Бу тенгликнинг ҳар икки томонини квадратга кўтариб, қуйидаги

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \qquad (7.2)$$

тенгламага келамиз. Бу сферанинг тенгламаси бўлади.

A (a; b; c) нуқта сфера *маркази*, R эса сфера *радиуси* дейилади.

Хусусан, сфера маркази координата боши O (0; 0; 0) нуқтада бўлса, унинг тенгламаси ушбу

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \qquad (7.3)$$

кўринишда бўлади.

Сфера билан текислик (агар улар кесишса) айлана бўйича кесишади. Бу айлана тенгламаси сфера билан текислик тенгламаларини биргаликда ечишда ҳосил бўлади.

Мисол. Маркази A (1; 2; 3) нуқтада, радиуси $R = 2$ бўлган сфера тенгламаси топилсин.

Ечиш. Юқорида келтирилган (7.2) формуладан фойдаланиб изланаётган сферанинг тенгламасини топамиз:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2^2.$$

2-§. Эллипсоид

Эллипсоиднинг тенгламаси ушбу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{7.4}$$

кўринишда бўлиб, унинг геометрик тасвири 52-чизмада келтирилган. a, b, c лар *эллипсоиднинг ярим ўқлари* дейилади.

(7.4) эллипсоид билан xOy текисликнинг кесишишидан ҳосил бўлган чизиқни топиш учун эллипсоид тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

билан xOy текислик тенгламаси

$$z=0$$

ларни биргаликда қараймиз:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1. \\ z=0. \end{cases}$$

Натижада

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{7.5}$$

тенгламага келамиз. Бу эса ярим ўқлари a ва b бўлган эллипсни ифодалайди.

Шундай қилиб, xOy текислик эллипсоидни (7.5) эллипс бўйича кесар экан.

Худди шунга ўхшаш кўрсатиш мумкинки, xOz текислик эллипсоидни ушбу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

эллипс бўйича, yOz текислик эса эллипсоидни қуйидаги

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

эллипс бўйича кесади.

3-§. Гиперболоидлар

Гиперболоидлар икки хил бўлади. Ушбу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{7.6}$$

кўринишдаги тенглама *бир паллали гиперболоиднинг тенгламаси* бўлади. Бу гиперболоид 53-чизмада тасвирланган.

Қуйидаги

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0 \tag{7.7}$$

кўринишдаги тенглама *икки паллали гиперболоиднинг тенгламаси* бўлади. Бу гиперболоид 54-чизмада тасвирланган.

Бир паллали гиперболоид координата текисликларига ҳамда координата бошига нисбатан симметрик жойлашган бўлади (53-чизма).

Икки паллали гиперболоид ҳам координата текисликларига ҳамда координата бошига нисбатан симметрик жойлашган бўлади (54-чизма).

4-§. Параболоидлар

Ушбу

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \tag{7.8}$$

кўринишдаги тенглама *эллиптик параболоиднинг тенгламаси* бўлади. Бу эллиптик параболоид 55-чизмада тасвирланган.

Қуйидаги

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

кўринишдаги тенглама *гиперболик параболоиднинг тенгламаси* бўлади. Бу гиперболик параболоид 56-чизмада тасвирланган.

Юқорида келтирилган параболоидлар xOz ҳамда yOz текисликларига нисбатан симметрик жойлашган бўлади.

VIII БОБ. ЧИЗИҚЛИ ВА ВЕКТОРЛАР АЛГЕБРАСИНИНГ БОШЛАНҒИЧ ТУШУНЧАЛАРИ

1-§. Чизиқли алгебранинг асосий тушунчалари

Олий математиканинг кўпгина масалалари чизиқли тенгламалар системаси ва уларни ечиш билан боғланган:ир. Икки тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтасини топиш чизиқли тенгламалар системасини ечишга келганлиги бунга далилдир.

Биз қуйида содда чизиқли тенгламалар системаси ва уларни ечиш билан шуғулланамиз. Бундай системани ечишда детерминантлар тушунчаси муҳим роль ўйнайди. Шу сабабли аввало детерминант тушунчаси билан танишамиз.

1. Иккинчи ва учинчи тартибли детерминантлар ва уларнинг хоссалари. Фараз қилайлик, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} ҳақиқий сонлар берилган бўлсин. Бу сонлар ёрдамида ушбу $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ миқдорни тузамиз. Бу сон *иккинчи тартибли детерминант* деб аталади ва қуйидагича белгиланади:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Демак,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{8.1}$$

a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} сонлар *детерминантнинг элементлари* дейилади. a_{11}, a_{12}—детерминантнинг *биринчи сатри*. a_{21}, a_{22}—*иккинчи сатри*, a_{11}, a_{21}—детерминантнинг *биринчи устуни*, a_{12}, a_{22}—*иккинчи устуни* дейилади.

a_{11}, a_{22} (8.1) детерминантнинг *бош диагонали* дейилади, a_{12}, a_{21} эса *иккинчи диагонали* дейилади.

Мисоллар

1. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 2\cdot 8 - 6\cdot 3 = 16 - 18 = 2.$

2. $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-8) - 2\cdot 4 = 8 - 8 = 0.$

3. $\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 - (-7)\cdot 1 = 6 + 7 = 13.$

4. $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 4 - 2\cdot 3 = 8 - 6 = 2.$

Энди қуйидаги сонлар берилган бўлсин: a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}. Ушбу

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ифода *учинчи тартибли детерминант* деб аталади ва қуйидагича ёзилади:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Бу детерминантнинг сатрлари, устунлари ва диагоналлари юқоридагидек аниқланади. Иккинчи тартибли детерминантнинг қийматларидан фойдаланиб, учинчи тартибли детерминант учун ушбу формулани ҳосил қиламиз:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\,(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}\,(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}\,(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} -$$

$$- a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Демак, учинчи тартибли детерминант 6 та ҳаддан иборат бўлиб, уларнинг 3 таси «+» *ишора билан*; учтаси эса «—» ишора билан олинади. Ҳадларнинг қандай ишора билан олиниш схемаси 56 а, б-чизмада кўрсатилган.

Демак, мусбат ишора билан бош диагонал ва уни кесиб ўтувчи учбурчакларнинг учларидаги элементлар кўпайтмасининг йиғиндиси олинади:

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{11}.$$

Манфий ишора билан иккинчи диагонал ва уни кесиб ўтувчи учбурчакларнинг учларидаги элементлари кўпайтмаси олинади:

$$a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Мисол. Ушбу учинчи тартибли детерминант ҳисоблансин:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix}.$$

Юқорида келтирилган қоидага кўра детерминантнинг қийматини топамиз:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 4\cdot2\cdot7+3\cdot(-5)\cdot1+(-3)\cdot(-1)\cdot6-$$

$$-6\cdot2\cdot1-4\cdot(-5)\cdot(-1)-(-3)\cdot3\cdot7=56-15+18-12-$$

$$-20+63=90.$$

Эслатма. Биз юқорида иккинчи ва учинчи тартибли детерминантлар тушунчаси билан танишдик. Худди шунга ўхшаш, n-тартибли ($n>2$) детерминантлар тушунчасини киритиш мумкин.

2. Детерминантнинг хоссалари

Детерминант қатор хоссаларга эга. Қуйида уларни санаб ўтамиз.

1°. *Детерминантнинг сатрларини мос устунлари билан алмаштириш натижасида детерминантнинг қиймати ўзгармайди.*

2°. *Детерминантнинг бирор сатри (ёки устуни) даги барча элементлар нолга тенг бўлса, детерминант нолга тенг бўлади.*

3°. *Детерминантнинг икки сатрини (ёки икки устунини) ўзаро алмаштириш натижасида унинг абсолют қиймати ўзгармайди, ишораси эса тескарисига ўзгаради.*

4°. *Детерминантнинг икки сатри ёки икки устуни бир хил бўлса ёки пропорционал бўлса, детерминантнинг қиймати нолга тенг бўлади.*

5°. *Детерминантнинг бирор сатридаги (ёки бирор устунидаги) барча элементлари бирор ўзгармас сонга кўпайтирилса, детерминантнинг қиймати шу сонга кўпаяди.*

Бу хоссалардан детерминантларни ҳисоблашда фойдаланилади.

Мисоллар. Қуйидаги детерминантлар ҳисоблансин:

1) $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 9 & 12 & 18 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3\cdot3 & 4\cdot3 & 6\cdot3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\,[1\cdot4\cdot1+3\cdot6\cdot2+$$

$$+3\cdot0\cdot5-5\cdot4\cdot2-6\cdot0\cdot1-3\cdot3\cdot1]=3\,(4+36+0-40-0-9)=$$

$$=3\,(-9)=-27.$$

2) $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cdot 1 & 3\cdot 2 & 2\cdot 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 0 = 0.$

3. Чизиқли тенгламалар системаси. Ушбу

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \tag{8.2}$$

система *икки номаълум иккита чизиқли тенглама системаси* деб аталади, бунда a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} сонлар тенгламалар системасининг *коэффициентлари* b_1, b_2 сонлар эса *озод ҳадлар* дейилади.

(8.2) тенгламалар системасининг коэффициентларидан ушбу

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{8.3}$$

детерминантни тузамиз. Сўнг (8.3) детерминантнинг биринчи устунидаги элементларни (8.2) системанинг озод ҳадлари билан алмаштириб, қуйидаги

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \tag{8.4}$$

детерминантни, иккинчи устунидаги элементларни озод ҳадлар билан алмаштириб қуйидаги

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \tag{8.5}$$

детерминантни ҳосил қиламиз.

8.1-теорема. 1) *Агар $\Delta \neq 0$ бўлса, у ҳолда* (8.2) *тенгламалар системаси ягона ечимга эга бўлиб, бу ечимлар*

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

бўлади;

2) *Агар $\Delta = 0$ бўлиб, $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$ бўлса,* (8.2) *системанинг ечими мавжуд бўлмайди;*

3) *Агар $\Delta = 0$ бўлиб, $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$ бўлса, у ҳолда* (8.2) *система чексиз кўп ечимга эга бўлади.*

Мисол. Ушбу система ечилсин:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 1, \\ 4x + 3y = 11. \end{cases}$$

Бу система учун юқоридаги (8.3), (8.4) ва (8.5) детерминантларни тузамиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 3 - (-5)\cdot 4 = 9 + 20 = 29;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3 - 11\cdot(-5) = 3 + 55 = 58;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 11 \end{vmatrix} = 3\cdot 11 - 1\cdot 4 = 33 - 4 = 29.$$

8.1-теоремадан фойдаланиб, берилган системанинг ечимини топамиз:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{58}{29} = 2,$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{29}{29} = 1.$$

Ушбу

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{aligned}\right\} \quad (8.6)$$

система *уч номаълумли учта чизиқли тенглама системаси* деб аталади, бунда a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33} сонлар тенгламалар системасининг *коэффициентлари* a_1, b_2, b_3 сонлар эса *озод ҳадлари* деб аталади.

Бу тенгламалар системаси ҳам юқоридагидек ечилади. Аввало қуйидаги учинчи тартибли детерминантлар тузилади:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (8.7)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (8.8)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (8.9)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}. \quad (8.10)$$

1) *Агар* $\Delta \neq 0$ *бўлса*, (8.6) *тенгламалар системаси ягона ечимга эга ва бу ечим*

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

бўлади. 2) Агар $\Delta = 0$ *бўлиб*, $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$, $\Delta_z \neq 0$ *бўлса*, (8.6) *системанинг ечими мавжуд бўлмайди. Агар* $\Delta = 0$ *бўлиб*, $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$, $\Delta_z = 0$ *бўлса, у ҳолда* (8.6) *система чексиз кўп ечимга эга бўлади.*

Мисол. Ушбу система ечилсин:

$$\begin{cases} 2x-3y+z=-5, \\ x+2y-4z=-9, \\ 5x-4y+6z=5. \end{cases}$$

Бу система учун юқоридаги (8.7) — (8.10) детерминантларни тузамиз:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & 6 \end{vmatrix}=24-4+60-10-32+18=56;$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} -5 & -3 & 1 \\ -9 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & 6 \end{vmatrix}=-60+36+60-10-162+80=116-172=-56;$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & -9 & -4 \\ 5 & 5 & 6 \end{vmatrix}=-108+100+5+45+30+40=220-108=112;$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & -9 \\ 5 & -4 & 5 \end{vmatrix}=20+20+135+50+15-72=240-72=168.$$

Берилган тенгламалар системасининг ечими қуйидагича бўлади:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-56}{56}=-1,$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{112}{56}=2,$$

$$z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{168}{56}=3.$$

2-§. Векторлар алгебрасининг асосий тушунчалари

Олий математикада, умуман, фан ва техниканинг ҳар хил соҳаларида турли катталиклар учрайди. Уларнинг баъзилари фақатгина сон қийматлари билан характерланади (масалан, узунлик, юза, ҳажм, масса ва ҳ.к.), баъзилари эса сон қийматлари билан бирга йўналиши билингандагина тўла маълум ҳисобланади (масалан, тезлик, тезланиш, куч ва ҳ.к.).

Айтайлик, жисмнинг бирор нуқтасига таъсир қилаётган куч миқдори 10 кг бўлсин. Бу кучнинг йўналиши турлича бўлиши мумкин. Бинобарин, унинг таъсирида жисмнинг вазияти турлича бўлади. Демак, кучнинг тўла аниқланиши учун унинг сон қийматини билишдан ташқари, таъсир этиш йўналишини ҳам билиш керак бўлади. Сон қиймати ва йўналиши билан аниқланувчи катталик вектор катталик ёки *вектор* деб аталади.

Вектор катталик кичик ҳарф устига стрелка қўйиш билан ёки қуюқ ҳарф билан белгиланади: $\vec{a}$ ёки **a**.

Фараз қилайлик, $\vec{a}$ вектор берилган бўлсин. Бу вектор катталикка маълум масштабда олинган кесмани қарайлик. Сўнг бу кесмага вектор йўналишини берайлик. Натижада йўналган кесма ҳосил бўлади. У векторнинг геометрик тасвири бўлади. Масалан, жисмга таъсир этувчи $\vec{F}$ кучни 57-чизмада тасвирлангандек, A нуқта билан B нуқтасини туташтирувчи ва A нуқтадан B нуқтага қараб йўналган кесма деб қараш мумкин: $\vec{F}=\overrightarrow{AB}$.

A нуқта векторнинг *боши*, B нуқта эса векторнинг *охири* дейилади. Векторнинг сон қиймати унинг *узунлиги* ёки *модули* деб аталади ва $|\overrightarrow{AB}|$ каби белгиланади.

Агар векторнинг узунлиги ноль бўлса, уни *ноль вектор* дейилади. Икки $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ вектор берилган бўлсин. Агар бу векторларнинг узунликлари бир хил бўлиб, улар ўзаро параллел ва бир томонга йўналган бўлса, у ҳолда $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ ўзаро *тенг векторлар* дейилади ва $\vec{a}=\vec{b}$ каби ёзилади.

58-чизмада ўзаро тенг икки $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ вектор тасвирланган.

Бундан векторни бир нуқтадан иккинчи нуқтага ўз-ўзига параллел равишда кўчириш мумкинлиги келиб чиқади.

Икки $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторнинг йўналишлари бир хил, узунликлари эса ҳар хил бўлсин. Масалан, $\vec{a}$ векторнинг узунлиги $\vec{b}$ векторнинг узунлигидан k марта кўп бўлсин. Демак,

$$|\vec{a}|=k|\vec{b}|.$$

Шундай қилиб, берилган векторни k скаляр сонга кўпайтиришдан янги векторга келамиз. Бу векторнинг узунлиги берилган векторнинг узунлигини k сонга кўпайтиришдан ҳосил бўлади. $k>0$ бўлганда $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар йўналиши бир хил, $k<0$ бўлганда эса йўналиши қарама-қарши бўлади. Узунлиги бирга тенг, йўналиши эса берилган $\vec{a}$ векторнинг йўналиши каби бўлган $\vec{a}_0$ вектор *бирлик вектор* деб аталади.

Равшанки $\vec{a}$ векторни бирлик вектор орқали қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\vec{a}_0.$$

1. Векторларни қўшиш. Икки $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ вектор берилган бўлсин (59-чизма).

Бу векторларнинг бошлари A ва B ни бир нуқтага келтириб, томонлари $|\vec{a}|=|\overrightarrow{AB}|$ ва $|\vec{b}|=|\overrightarrow{CD}|$ бўлган параллелограмм ясаймиз (60-чизма).

A нуқтадан E нуқтага йўналган, узунлиги эса AE диагоналнинг узунлигига тенг бўлган $\overrightarrow{AE} = \vec{c}$ вектор берилган $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар йиғиндиси деб аталади ва

$$\vec{a} + \vec{b}$$

каби ёзилади. Демак,

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}.$$

Равшанки, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Ушбу

$$\vec{a} + (-\vec{b})$$

вектор $\vec{a}$ вектордан $\vec{b}$ *векторнинг айирмаси* деб аталади ва $\vec{a} - \vec{b}$ каби белгиланади:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар 61-чизмада тасвирланган векторлар бўлсин.

Бу векторларнинг учларини бир нуқтага келтирамиз (62-чизма). Сўнг $\vec{b}$ векторга кўра $-\vec{b}$ векторни ясаймиз.

Юқорида айтилганлардан фойдаланиб $\vec{a} + (-\vec{b})$ векторни топамиз. Бу $\overrightarrow{OA_1}$ вектордан иборат бўлади (63-чизма).

Агар $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{BA}$ эканини эътиборга олсак, икки $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторга қурилган параллелограмм диагоналларидан бири $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар йиғиндисини, иккинчиси эса шу векторлар айирмаси $\vec{a} - \vec{b}$ ни ифодалашини топамиз:

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC},$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}.$$

Икки $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ вектор ўзаро параллел бўлса ёки параллел тўғри чизиқларда ётса, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ *коллинеар векторлар* деб аталади.

Учта $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ вектор битта текисликда ётса ёки бир текисликка параллел бўлса, $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ *компланар* векторлар деб аталади.

Равшанки, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар йиғиндиси $\vec{c}$ $(\vec{c} = \vec{a} + \vec{b})$ ҳамда айирмаси $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ битта текисликда ётади, яъни $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ва $\vec{d}$ лар компланар векторлар бўлади.

Одатда, маълум йўналишга эга бўлган тўғри чизиқ *ўқ* деб аталади. Бирор l ўқ берилган бўлсин. Бу ўқнинг йўналишини аниқловчи бирлик векторни l_0 дейлик. $\vec{a}$ векторни қарайлик. Бу векторнинг боши A нуқтадан ва охири B нуқтадан l ўққа перпендикуляр туширайлик. Перпендикулярнинг ўқ билан кесишган нуқталарини мос равишда A_1, B_1 билан белгилайлик (64-чизма). A нуқтадан l ўққа параллел тўғри чизиқ ўтказамиз. Унинг BB_1 билан кесишган нуқтаси C бўлсин. Маълумки, $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$ векторнинг йўналиши қуйидагича аниқланади. A дан B га қаратилган йўналиш ўқ йўналиши билан бир хил бўлса, $\overrightarrow{A_1B_1}$ векторнинг йўналиши плюс ишора билан, тескари бўлса минус ишора билан олинади. $\overrightarrow{A_1B_1}$ векторнинг узунлиги $|\overrightarrow{A_1B_1}|$ берилган $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ векторнинг l ўқ йўналишига *проекцияси* дейилади ва

$$\text{пр}_l\, \vec{a}$$

каби белгиланади. Демак,

$$|\overrightarrow{A_1B_1}| = \text{пр}_l\, \vec{a}.$$

Векторнинг координаталари. Фазода $Oxyz$ Декарт координаталар системасини оламиз. Координата ўқларининг ҳар бири учун бирлик вектор (орт.) лар киритамиз. Ox, Oy ва Oz ўқларидаги бирлик векторларни мос равишда $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ лар билан белгилаймиз. $\vec{a}$ векторнинг Ox, Oy, Oz координата ўқларидаги проекциялари a_x, a_y, a_z шу векторнинг *координаталари* дейилади ва $\vec{a}\{a_x;\ a_y;\ a_z\}$ кўринишда ёзилади. $\vec{a}$ вектор ўз координаталари ва асосий ортлар ёрдамида қуйидагича ёзилади:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}. \qquad (8.11)$$

Бундаги $a_x\vec{i}$, $a_y\vec{j}$ ва $a_z\vec{k}$ векторлар $\vec{a}$ векторнинг координата ўқларидаги *компонентлари* дейилади, улар тегишли координата ўқларига коллинеар векторлардир — диагонали вектордан иборат бўлган параллелепипеднинг қирралари бўлиб хизмат қилади (65-чизма). (Чизмада $\overrightarrow{M_1A} = a_x\vec{i}$, $\overrightarrow{M_1B} = a_y\vec{j}$ ва $M_1C = a_z\vec{k}$ дир). Вектор ўз координаталари билан тўла аниқланади.

Бошланғич нуқтаси координаталар бошида ва охирги нуқтаси $M(x,\ y,\ z)$ да бўлган $\vec{r} = OM$ вектор M нуқтанинг *радиус-вектори* дейилади (66-чизма). Бу ҳолда (8.11) формула

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

кўринишга келади. Радиус-векторнинг узунлиги

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (8.12)$$

бўлади.

Бошланғич нуқтаси $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ва охирги нуқтаси $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ бўлган $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ векторнинг (65-чизма) координаталари қуйидагича аниқланади:

$$\vec{a}\{x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\}. \qquad (8.13).$$

Бундан равшанки,

$$\vec{a}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k} \qquad (8.14)$$

бўлади.

Икки вектор йиғиндиси, айирмаси ва векторнинг сонга кўпайтмаси учун қуйидагилар ўринлидир:

$$(\vec{a}\pm\vec{b})\ \{a_x\pm b_x,\ \ a_y\pm b_y,\ \ a_z\pm b_z\}.$$

$\lambda\vec{a}\{\lambda a_x,\ \lambda a_y,\ \lambda a_z\}$ (бу ерда λ — скаляр миқдор) $\vec{a}\{a_x,\ a_y,\ a_z\}$ векторнинг узунлиги

$$a=|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} \qquad (8.15)$$

формула билан аниқланади.

M_1M_2 векторнинг узунлиги ёки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ва $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ нуқталар орасидаги масофа

$$M_1M_2=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \qquad (8.16)$$

формула бўйича ҳисобланади.

Мисол. Бошланғич нуқтаси $M_1(1;\ 2;\ 3)$ ва охирги нуқтаси $M_2(4;\ 2;\ -1)$ бўлган $\overrightarrow{M_1M_2}$ векторнинг ортлари бўйича ёйилмасини ёзинг ва узунлигини ҳисобланг.

(8.13) формулага кўра $\overrightarrow{M_1M_2}$ векторнинг координаталарини топамиз:

$$\overrightarrow{M_1M_2}\ \{x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\}=\overrightarrow{M_1M_2}\ \{3;\ 0;\ -4\}.$$

(8.14) формулага кўра $\overrightarrow{M_1M_2}$ векторнинг ортлари бўйича ёйилмаси $\overrightarrow{M_1M_2}=3\vec{i}-4\vec{k}$ бўлади.

Энди (8.16) ёки (8.17) формулага кўра $\overrightarrow{M_1M_2}$ векторнинг узунлигини ҳисоблаймиз:

$$\overrightarrow{M_1M_2}=|\overrightarrow{M_1M}|_2=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5.$$

Векторнинг йўналтирувчи косинуслари. Бирор $\vec{a}\{a_x;\ a_y;\ a_z\}$ вектор берилган бўлсин. Бу вектор билан $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ ортлар орасидаги бурчакларни мос равишда α, β ва γ билан белгилайлик (67-чизма). $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ лар $\vec{a}$ векторнинг *йўналтирувчи косинуслари* дейилади.

Векторнинг йўналтирувчи косинуслари орасида

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \qquad (8.17)$$

боғланиш мавжуд.

Бошланғич нуқтаси $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ва охирги нуқтаси $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ бўлган $\overrightarrow{AB}$ векторнинг координата ўқларидаги проекциялари

$$\text{пр}_{Ox}\overrightarrow{AB} = x_2 - x_1, \quad \text{пр}_{Oy}\overrightarrow{AB} = y_2 - y_1, \quad \text{пр}_{Oz}\overrightarrow{AB} = z_2 - z_1$$

бўлиб, унинг йўналтирувчи косинуслари эса

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}}, \\ \cos\beta &= \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}}, \\ \cos\gamma &= \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}} \end{aligned} \tag{8.18}$$

бўлади.

$\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ радиус-векторнинг йўналтирувчи косинуслари эса қуйидагича ҳисобланади:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{x}{|\vec{r}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \\ \cos\beta &= \frac{y}{|\vec{r}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \\ \cos\gamma &= \frac{z}{|\vec{r}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \end{aligned} \tag{8.19}$$

Мисол. $\vec{a}$ вектор Ox ўқ билан $\alpha = 60°$, Oy ўқ билан $\beta = 45°$ бурчак ҳосил қилади. Агар $|\vec{a}| = 3$ бўлса, унинг координаталарини аниқланг.

$\vec{a}$ векторнинг Oz ўқ билан ҳосил қилган бурчагини топиш учун (8.17) формуладан фойдаланамиз:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \cos^2\gamma = 1.$$

Демак,

$$\cos\gamma = \frac{1}{2}; \quad \gamma = 60°$$

$\vec{a}$ векторнинг координаталарини аниқлаш учун

$$a_x = |\vec{a}|\cos\alpha, \quad a_y = |\vec{a}|\cos\beta, \quad a_z = |\vec{a}|\cos\gamma$$

формуладан фойдаланамиз:

$$a_x = \frac{3}{2}; \quad a_y = \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad a_z = \frac{3}{2}.$$

Демак,

$$\vec{a} = \frac{3}{2}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{3}{2}\vec{k} \quad \text{ёки} \quad \vec{a}\left\{\frac{3}{2};\ \frac{3}{\sqrt{2}};\ \frac{3}{2}\right\}.$$

Икки векторнинг скаляр кўпайтмаси. Икки $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлар берилган бўлсин. Бу векторлар узунликлари билан улар орасидаги бурчак косинусининг кўпайтмаси $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси дейилади ва $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ёки $(\vec{a}\cdot\vec{b})$ каби ёзилади.

Демак,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{a}\cdot\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a},\ \vec{b}). \qquad (8.20)$$

Векторларнинг скаляр кўпайтмасини қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{a}\cdot\vec{b})=|\vec{a}|\ \text{пр}_a\ \vec{b}=|\vec{b}|\ \text{пр}_b\ \vec{a}. \qquad (8.21)$$

Икки векторнинг скаляр кўпайтмаси қуйидаги хоссаларга эга:

1°. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

2°. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

3°. $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

4°. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар ўзаро перпендикуляр бўлганда уларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг, яъни $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\cdot\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ортларнинг скаляр кўпайтмалари:

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}=0 \qquad \vec{i}\cdot\vec{i}=1$$
$$\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0 \qquad \vec{j}\cdot\vec{j}=1$$
$$\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{j}=0 \qquad \vec{k}\cdot\vec{k}=1$$

бўлади.

Агар $\vec{a}\ \{a_x;\ a_y;\ a_z\}$. $\vec{b}\ \{b_x;\ b_y;\ b_z\}$ бўлса,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z, \qquad (8.22)$$

$$\cos\varphi=\cos(\widehat{\vec{a};\ \vec{b}})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a||b|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

бўлади.

Икки векторнинг вектор кўпайтмаси. $\vec{a}$ векторнинг $\vec{b}$ вектор билан вектор кўпайтмаси деб $\vec{a}\times\vec{b}$ ёки $[\vec{a},\ \vec{b}]$ шаклда белгиланадиган шундай $\vec{c}$ векторга айтиладики, бу векторнинг узунлиги ва йўналиши қуйидаги шартларни қаноатлантиради:

1) $\vec{c}$ векторнинг узунлиги $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга ясалган параллелограммнинг юзига тенг, яъни

$$|\vec{c}|=a\cdot b\sin(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}}).$$

2) $\vec{c}$ вектор шу параллелограмм текислигига перпендикулярдир, яъни у ҳам $\vec{a}$ векторга, ҳам $\vec{b}$ векторга перпендикулярдир:

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=0 \text{ ва } \vec{b}\cdot\vec{c}=0.$$

3) $\vec{c}$ вектор шундай томонга йўналганки, унинг учидан қараганда $\vec{c}$ вектор атрофида $\vec{a}$ вектордан $\vec{b}$ векторга эга кичик бурчак билан айланиш соат стрелкаси айланишига қарама-қаршидир (68-чизма).

Вектор кўпайтманинг асосий хоссалари:

1°. $[\vec{a}\cdot\vec{b}]=-[\vec{b}\cdot\vec{a}]$.

2°. $[(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}]=[\vec{a}\cdot\vec{c}]+[\vec{b}\cdot\vec{c}]$.

3°. $[(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}]=\lambda[\vec{a}\cdot\vec{b}]$.

4°. Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар бўлса, $[\vec{a}\cdot\vec{b}]=0$, хусусий ҳолда $[\vec{a}\cdot\vec{a}]=0$ бўлади. Ортларнинг вектор кўпайтмалари қуйидагича бўлади:

$$[\vec{i}\cdot\vec{j}]=-[\vec{j}\cdot\vec{i}]\cdot\vec{k}; \qquad [\vec{i}\cdot\vec{i}]=0;$$
$$[\vec{j}\cdot\vec{k}]=-[\vec{k}\cdot\vec{j}]=\vec{i}; \qquad [\vec{j}\cdot\vec{j}]=0;$$
$$[\vec{k}\cdot\vec{i}]=-[\vec{i}\cdot\vec{k}]=\vec{j}; \qquad [\vec{k}\cdot\vec{k}]=0.$$

Агар $\vec{a}\{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b}\{b_x, b_y, b_z\}$ бўлса, уларнинг вектор кўпайтмаси:

$$[\vec{a}\ \vec{b}]=[a_y b_z-a_z b_y]\vec{i}-(a_x b_z-a_z b_x)\vec{j}+(a_x b_y-$$
$$-a_y b_x)\vec{k}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

бўлиб, унинг модули

$$|[\vec{a}\cdot\vec{b}]|=\sqrt{(a_y b_z-a_z b_y)^2+(a_x b_z-a_z b_x)^2+(a_x b_y-a_y b_x)^2}$$

формула билан ҳисобланади.

Учлари $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг юзи

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|[\vec{AB}\cdot\vec{AC}]|$$

формула билан ҳисобланади.

Мисол. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орасидаги бурчак $\varphi=\frac{\pi}{4}$ га тенг ва $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=3$ эканлиги маълум. $\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}$ векторнинг узунлигини топинг.

$\vec{c}$ векторнинг узунлигини топиш учун векторларнинг скаляр кўпайтмаларидан фойдаланамиз. $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2$ деб белгилаб ва $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$ ни эътиборга олиб, берилган векторнинг ҳар икки томонини квадратга кўтарамиз:

$$\vec{c}^2=(2\vec{a}+3\vec{b})^2=4\vec{a}^2+12\vec{a}\ \ \vec{b}+9\vec{b}^2.$$

Берилганларга асосан:

$$\vec{a}^2=|\vec{a}|^2=2;\quad \vec{b}^2=|\vec{b}|^2=9.$$

Демак,

$$\vec{c}^2=4\cdot 2+12\cdot 3+9\cdot 9=125,\ \text{бундан}$$

$$|\vec{c}|=\sqrt{125}=5\sqrt{5}.$$

IX БОБ. ФУНКЦИЯ ТУШУНЧАСИ

1-§. Дастлабки тушунчалар

Тўплам тушунчаси математиканинг бошланғич ва айни пайтда муҳим тушунчаларидан бири. Тўпламни мисоллар ёрдамида тушунтирамиз. Масалан, шкафдаги китоблар тўплами, натурал сонлар тўплами, бирор хўжаликдаги қишлоқ хўжалик машиналари тўплами, бир нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқлар тўплами.

Тўпламни ташкил этган нарсалар унинг *элементлари* дейилади. Математикада тўпламларни бош ҳарфлар билан (масалан, A, B, ...), унинг элементларини эса кичик ҳарфлар билан (масалан, a, b, ...) белгиланади.

Агар A тўпламнинг элементи a бўлса, уни $a \in A$ каби ёзилади ва *a элемент A тўпламга тегишли* деб ўқилади. Агар a элемент A тўпламнинг элементи бўлмаса, $a \bar{\in} A$ каби ёзилади.

Чекли сондаги элементлардан ташкил топган тўплам *чекли тўплам* деб аталади. Масалан, бирор хўжаликдаги қишлоқ хўжалик машиналаридан ташкил топган тўплам чекли тўплам бўлади. Чекли бўлмаган тўплам *чексиз тўплам* дейилади. Масалан, натурал сонлар тўплами чексиз тўплам бўлади. Одатда бу тўпламни N ҳарфи билан белгиланади: $N = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$.

Элементлари ҳақиқий сонлардан* иборат бўлган тўплам *сонли тўплам* дейилади.

Барча ҳақиқий сонлар тўплами R ҳарфи билан белгиланади ($R = (-\infty; +\infty)$).

Иккита a ва b ($a < b$) ҳақиқий сонлар берилган бўлсин. Ушбу

$$a \leqslant x \leqslant b$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи ҳақиқий сонлардан иборат тўплам *сегмент* (*ёпиқ оралиқ*) деб аталади ва $[a; b]$ каби белгиланади.

Демак, $[a; b] = \{x \in R : a \leqslant x \leqslant b\}$.

Ушбу

$$a < x < b$$

---

* Ўрта мактаб математика курсида натурал сонлар, бутун сонлар, рационал сонлар ва ҳақиқий сонлар ўрганилган. Маълумки, рационал ва иррационал сонлар ҳақиқий сонлар дейилади. Ҳар бир ҳақиқий сонга тўғри чизиқда (сонлар ўқида) битта нуқта мос келади ва аксинча. Шу сабабли ҳақиқий сонни нуқта деб ҳам қаралади (69-чизма).

тенгсизликларни қаноатлантирувчи ҳақиқий сонлардан иборат тўплам *интервал* (*очиқ оралиқ*) деб аталади ва $(a; b)$ каби белгиланади. Демак,

$$(a;\ b)=\{x\in R: a<x<b\}.$$

Ушбу

$$a\leqslant x<b, \qquad a<x\leqslant b$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи ҳақиқий сонлардан иборат тўпламлар *ярим интервал* деб аталади ва улар мос равишда $[a,\ b)$ ва $(a;\ b]$ каби белгиланади. Демак,

$$[a;\ b)=\{x\in R: a\leqslant x<b\},\ (a;\ b]=\{x\in R: a<x\leqslant b\}.$$

Бу тўпламлар тўғри чизиқда кесмаларни ифодалайди (70-чизма). ($[a;\ b]$ сегмент бўлган ҳолда кесманинг четки нуқталари a ва b лар шу кесмага тегишли бўлади, $(a;\ b)$ интервал бўлган ҳолда кесманинг четки нуқталари a ва b лар кесмага тегишли бўлмайди, $[a;\ b)$ ва $(a;\ b]$ ярим интерваллар бўлган ҳолда эса кесманинг четки нуқталаридан бири шу кесмага тегишли бўлиб, иккинчиси эса тегишли бўлмайди).

2-§. Сонниг абсолют қиймати

9.1-таъриф. Мусбат сонниг *абсолют қиймати* деб ўша сонниг ўзига айтилади. Манфий сонниг *абсолют қиймати* деб шу сонга қарама-қарши сонга айтилади. Ноль сонининг *абсолют қиймати* деб ноль сонининг ўзи олинади.

Одатда x сонниг абсолют қиймати $|x|$ каби белгиланади. Демак,

$$|x|=\begin{cases} x; & \text{агар } x>0 \text{ бўлса,}\\ -x, & \text{агар } x<0 \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

Мисол. $|17|=17,\ |(-17)|=-(-17)=17.$

Сонниг абсолют қиймати таърифидан бевосита ушбу

$$|x|\geqslant 0,\quad |x|=|-x|,\quad x\leqslant|x|,\quad -x\leqslant|x| \qquad (*)$$

муносабатлар келиб чиқади.

Абсолют қиймат қуйидаги хоссаларга эга:

1°. Ушбу $|x|<a$ ва $-a<x<a\ (a>0)$ *тенгсизликлар ўзаро эквивалентдир.*

2°. *Икки x ва y сонлар йиғиндисининг абсолют қиймати бу сонлар абсолют қийматлари йиғиндисидан катта эмас:*

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|.$$

3°. *Икки x ва y сонлар айирмаси учун*

$$|x-y|\geqslant|x|-|y|$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

4°. *Икки x ва y сонлар кўпайтмаси ва бўлинмаси учун*

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|; \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$$

тенгликлар ўринли бўлади.

Бу хоссаларнинг исботи қийин эмас. Уларнинг бирини, масалан, 2°-ҳоссанинг исботини келтирамиз.

2°-хоссанинг исботи. Икки ҳолни қарайлик:

а) $x + y > 0$ бўлсин. У ҳолда таърифга кўра

$$|x + y| = x + y$$

бўлади. Агар (*) муносабатга кўра $x \leqslant |x|$, $y \leqslant |y|$ эканини эътиборга олсак, унда

$$|x + y| = x + y \leqslant |x| + |y|$$

бўлишини топамиз.

б) $x + y < 0$ бўлсин. У ҳолда

$$|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y).$$

Яна (*) муносабатдан фойдаланиб, $(-x) + (-y) \leqslant |x| + |y|$ ва демак, $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ бўлишини топамиз. Демак, ҳар доим

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|$$

бўлар экан.

Мисол. $|2x - 3| < 1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи x нинг қийматлари тўплами топилсин.

Ечиш. Юқорида келтирилган 1°-хоссага кўра берилган тенгсизлик $-1 < 2x - 3 < 1$ тенгсизликларга тенг кучли. Бу тенгсизликлардан эса

$$2 < 2x < 4, \text{ яъни } 1 < x < 2$$

бўлиши келиб чиқади.

3-§. Ўзгарувчи ва ўзгармас миқдорлар

Табиатда турли қийматларни қабул қиладиган миқдорларга дуч келамиз. Масалан, ўқувчиларга тўртбурчак чизишни айтилса, уларнинг турли хил тўртбурчакларни (квадрат, ромб, параллелограмм, тўғри тўртбурчак ва ҳ. к.) чизишини кўрамиз. Равшанки, бу тўртбурчакларнинг периметрлари (томонлар узунликларининг йиғиндиси) ҳар хил бўлади. Демак, тўртбурчак периметри турли қийматларни қабул қила оладиган миқдор экан. Одатда бундай миқдорни *ўзгарувчи миқдор* деб аталади.

Энди ҳар хил радиусли айланаларни қарайлик. Бу айланалар узунликларини мос диаметрларига нисбатини ҳар доим битта сонга — π сонига тенг бўлишини аниқлаймиз. Демак, ҳар қандай айлана узунлигини унинг диаметрига нисбатини ифодаловчи миқдор битта қийматга — π сонига тенг бўлади. Бундай миқдор *ўзгармас миқдор* деб аталади.

Кўпинча ўзгарувчи миқдорлар x, y, z, . . . ҳарфлари билан белгиланади. Агар ўзгарувчи миқдорнинг қабул қила оладиган қийматларидан ташкил топган тўплам маълум бўлса, у ҳолда ўзгарувчи миқдор берилган дейилади.

Математик анализда элементлари ҳақиқий сонлардан иборат бўлган тўпламлар қаралади. Биз бундан кейин X тўплам деганда ё сегмент, ёки интервални, ёки ярим интервални — оралиқни тушунамиз.

Математикада айрим сўз ёки иборалар тез-тез такрорланиб туради. Одатда, ёзувни қисқартириш мақсадида бу сўз ёки иборалар ўрнига математик белгилар (мантиқий символлар) ишлатилади. Масалан, «ихтиёрий, барчаси учун сўзлари ўрнига «$\forall$» белги, . . . бўлса, . . . бўлади» ёки «келиб чиқади» ибораси ўрнига ушбу $\Rightarrow$ белги ишлатилади. Иккита факт эквивалент бўлса, улар $\Leftrightarrow$ белгиси орқали ёзилади.

4-§. Функция тушунчаси

Иккита X ва Y ҳақиқий сонлар тўплами берилган бўлсин. x ўзгарувчи X тўпламда, y ўзгарувчи Y тўпламда ўзгарсин.

9. 2-таъриф. Агар X тўпламдаги ҳар бир x сонга бирор қоида ёки қонунга кўра Y тўпламдан битта y сон мос қўйилган бўлса, X тўпламда функция берилган (аниқланган) деб аталади ва у

$$y = f(x)$$

каби белгиланади.

Бу ерда X тўплам функциянинг *аниқланиш соҳаси*, Y эса функциянинг *ўзгариш соҳаси* дейилади.

x эркли ўзгарувчи ёки *функция аргументи*, y эса *эрксиз ўзгарувчи* ёки *x ўзгарувчининг функцияси* деб аталади.

Демак, функция берилган бўлиши учун:

1) X тўплам берилиши керак (кўп ҳолларда уни x билан y ўзгарувчиларнинг боғланишига кўра топилади).

2) x ўзгарувчининг X тўпламдан олинган ҳар бир қийматига унга мос қўйиладиган y уни аниқлаб берадиган қоида ёки қонун берилиши керак (таърифда уни f ҳарфи билан белгиланган).

Мисоллар. 1. f $X = (-\infty; +\infty)$ тўпламга тегишли бўлган ҳар бир x сонга унинг квадратини мос қўювчи қоида бўлсин. Бу ҳолда $y = f(x) = x^2$ функция ҳосил бўлади. Бу функция $(-\infty; +\infty)$ да аниқланган.

2. f ҳар бир $x \in [0; +\infty)$ сонга шу сондан олинган квадрат илдиз $\sqrt{x}$ ни мос қўйсин. Бу ҳолда ҳам функцияга эга бўламиз: $y = \sqrt{x}$. Унинг аниқланиш соҳаси $X = [0; +\infty)$ бўлади.

$y = f(x)$ функция X тўпламда аниқланган бўлсин. X тўпламдан бирор x_0 нуқтани олиб, шу нуқтага мос келувчи y ўзгарувчининг қийматини топамиз. Уни y_0 билан белгилаймиз. Бу y_0 сон $y = f(x)$ функциянинг $x = x_0$ нуқтадаги *хусусий қиймати* деб аталади ва уни $f(x_0) = y_0$ каби ёзилади. Масалан, $y = f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ функциянинг $x = 1$ нуқтадаги хусусий қиймати $f(1) = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 1 = 4$ бўлади. Демак, $f(1) = 4$.

Мисол. Қуйидаги функциянинг аниқланиш соҳаси топилсин:

$$y = \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{2-x}}.$$

Ечиш. Бу мисолда x аргументнинг ҳар бир қийматига мос келадиган y нинг қиймати ҳақиқий бўлиши учун

$$\begin{cases} x-1 \geqslant 0, \\ 2-x > 0 \end{cases}$$

бўлиши керак. Бу тенгсизликлар системасини ечиб,

$$1 \leqslant x < 2$$

бўлишини топамиз. Демак, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси $x = [1;\ 2)$ ярим интервалдан иборат бўлади.

5-§. Функциянинг берилиш усуллари

Функция таърифида келтирилган x ўзгарувчининг ҳар бир қийматига мос қўйиладиган y ни аниқлаб берувчи қоида ёки қонун турлича бўлади. Бинобарин, функциянинг берилиши ҳам турличадир. Қуйида функциянинг аналитик, жадвал ва график усулларда берилишини қисқача баён этамиз.

1. Функциянинг аналитик усулда берилиши. x ўзгарувчининг ҳар бир қийматига кўра унга мос келадиган y нинг қиймати x устида аналитик амалларнинг бажарилиши натижасида, яъни формулалар ёрдамида берилиши мумкин. Масалан,

$$y = x^2 + 1, \quad y = \frac{x+1}{x^2+1}, \quad y = \log_2(x+1).$$

Функциянинг бундай берилиши *функциянинг аналитик усулда берилиши* дейилади.

2. Функциянинг жадвал усулида берилиши. Баъзан x ва y ўзгарувчилар орасидаги боғланиш, яъни x ўзгарувчининг қийматига мос келадиган y ўзгарувчининг қийматини кўрсатиш (топиш) жадвал шаклида берилиши мумкин. Масалан, кузатиш натижасида, сувни (ёпиқ идишда) қиздирилганда P_1 босим остида унинг қайнаш харорати t_1, p_2 босим остида унинг қайнаш ҳарорати t_2 ва ҳ.к. бўлишини топайлик. Натижада қуйидаги жадвалга келамиз:

Босим, p	p_1	p_2	...	p_n
Ҳарорат, t	t_1	t_2	...	t_n

Равшанки, бу ҳолда p босим билан t ҳарорат орасида боғланиш бўлиб, p аргумент, t функция бўлади. Одатда функциянинг бундай берилиши функцияни жадвал усулида берилиши дейилади.

3. Функциянинг график усулида берилиши. Баъзан x ва y ўзгарувчилар орасидаги боғланиш текисликдаги чизиқ (эгри чизиқ) ёрдамида амалга ошиши мумкин. Айтайлик, xOy текисликда

бирор l чизиқ берилган бўлсин (71-чизма). Ox ўқида шундай x нуқталарни қарайликки, бу нуқталардан Oy ўқига параллел тўғри чизиқлар ўтказилганда улар l чизиқни битта нуқтада кессин. Ox ўқидаги бундай нуқталар тўпламини X орқали белгилаймиз. Энди бу X тўпламдан бирор x нуқтани олиб, бу нуқтадан Ox ўқига перпендикуляр чиқарамиз. Перпендикулярни l чизиқ билан кесишган A нуқтанинг ординатасини y билан белгилаб, олинган x га шу y ни мос қўямиз. Равшанки, бундай мослик l чизиқ орқали бажарилади. Натижада X тўпламдан олинган ҳар бир x га кўрсатилган қоидага кўра y мос қўйилиб, функция ҳосил бўлади. Функциянинг бундай берилиши *функциянинг график усулида берилиши* дейилади.

6-§. Функциянинг графиги

Функциянинг хусусиятларини тўлиқроқ тасаввур этишда унинг графигини билиш аҳамиятлидир. Айтайлик, $y = f(x)$ функция бирор X оралиқда берилган бўлиб $x_0 \in X$ бўлсин. Бу функциянинг x_0 нуқтадаги қийматини топамиз: $f(x_0) = y_0$. Натижада $(x_0;\ y_0)$ жуфтлик ҳосил бўлади. Текисликда Декарт координата системасини олайлик. Юқоридаги $(x_0;\ y_0)$ жуфтлик текисликда бирор A нуқтани тасвирлайди (72-чизма).

Функция аргументи x нинг X оралиқдан олинган ҳар бир қийматига функциянинг мос қиймати $f(x) = y$ бўлсин. Улар ёрдамида $(x;\ y)$ $(y = f(x))$ жуфтликлар ҳосил бўлади. Бу жуфтликларни текисликда нуқталар сифатида тасвирлаймиз. Ушбу

$$\{(x;\ y):\ x \in X,\ y = f(x)\}$$

нуқталар тўплами берилган $y = f(x)$ функциянинг *графиги* деб аталади.

$y = f(x)$ функция X оралиқда берилган бўлсин. Бу функциянинг графиги қуйидагича ясалади:

1) функциянинг аниқланиш соҳасидан бир нечта $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$ қийматлар олинади;

2) аргументнинг шу қийматларига мос функциянинг қийматлари топилади:

$$f(x_1) = y_1,\ f(x_2) = y_2,\ \dots,\ f(x_n) = y_n;$$

3) ушбу жадвални тузиб олинади:

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$y = f(x)$	y_1	y_2	x_3	...	y_n

4) текисликда $A_1 = A_1(x_1;\ y_1),\ A_2 = A_2(x_2;\ y_2),\ \dots,\ A_n = A_n(x_n;\ y_n)$ нуқталар ясалади.

Бу $A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_n$ нуқталарни ўзаро туташтирсак, ҳосил бўлган чизиқ $y = f(x)$ функциянинг графигини (тақрибан) тасвирлайди.

Мисоллар. 1. $y=f(x)=2x+1$ функциянинг графиги чизилсин.

Ечиш. Равшанки, бу функция $(-\infty; +\infty)$ да аниқланган, x ўзгарувчининг $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ қийматларини олиб, функциянинг уларга мос қийматларини топамиз: $f(-3)=-5$, $f(-2)=-3$, $f(-1)=-1$, $f(0)=1$, $f(1)=3$, $f(2)=5$, $f(3)=7$.

Натижада қуйидаги жадвални ҳосил қиламиз:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=f(x)$	-5	-3	-1	1	3	5	7

Сўнг $(-3; -5)$, $(-2; -3)$, $(-1; -1)$, $(0; 1)$, $(1; 3)$, $(2; 5)$, $(3; 7)$ нуқталарни текисликда белгилаб ва уларни ўзаро туташтириб, берилган функциянинг графигини ясаймиз (73- чизма).

2. $y=f(x)=x^2$ функциянинг графиги чизилсин.

Бу функция $(-\infty; +\infty)$ оралиқда берилган. Функция аргументи x нинг бир нечта қийматларини олиб, уларга мос функция қийматларини топамиз ва жадвал тузамиз. Сўнг функция графигини чизамиз (74- чизма).

3. $y=|x|$ функциянинг графиги чизилсин.

Абсолют қиймат таърифига кўра

$$y=|x|=\begin{cases} x, & \text{агар} \quad x\geqslant 0 \text{ бўлса,} \\ -x, & \text{агар} \quad x<0 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

Бу функциянинг графиги 75-чизмада кўрсатилган.

4. $$y=\begin{cases} 1, & \text{агар } x>0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса,} \\ -1, & \text{агар } x<0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг графиги 76- чизмада тасвирланган.

7- §. Функциянинг чегараланганлиги

$y=f(x)$ функция X оралиқда берилган бўлсин.

Агар шундай ўзгармас $M\ (M>0)$ сони топилсаки, $\forall x\in X$ учун

$$|f(x|\leqslant M$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $y=f(x)$ функция X оралиқда *чегараланган* деб аталади.

Масалан, $y=f(x)=x^2$ функция $X=(0,\ 1)$ оралиқда чегараланган бўлади, чунки $\forall x\in(0,1)$ учун

$$|f(x)|\leqslant 1\quad (M=1)$$

бўлади.

Ушбу $y=\frac{1}{x}$ функция $(0,1)$ оралиқда берилган, аммо бу функция шу оралиқда чегараланган эмас.

8-§. Жуфт ва тоқ функциялар

$y=f(x)$ функция X оралиқда аниқланган бўлиб, $\forall x\in X$ учун $-x\in X$ бўлсин. (Масалан, $(-1;\ 1)$, $[-3;\ 3]$ оралиқлар айтилган хусусиятга эга бўлади.)

9.3-таъриф. Агар $\forall x\in X$ учун

$$f(-x)=f(x)$$

тенглик бажарилса, у ҳолда $f(x)$ *жуфт функция* деб аталади.

Масалан, $y=x^2$, $y=|x|$, $y=\cos x$ функциялар жуфт функциялар бўлади, чунки $(-x)^2=x^2$, $|-x|=|x|$, $\cos(-x)=\cos x$.

Жуфт функциянинг графиги ордината ўқига нисбатан симметрик жойлашган бўлади (77-чизма).

9.4-таъриф. Агар $\forall x\in X$ учун

$$f(-x)=-f(x)$$

тенглик бажарилса, у ҳолда $f(x)$ *тоқ функция* деб аталади.

Масалан, $y=x^3$, $y=\sin x$ функциялар тоқ функциялар бўлади, чунки $(-x)^3=-x^3$, $\sin(-x)=-\sin x$.

Тоқ функциянинг графиги коодината бошига нисбатан симметрик жойлашган бўлади (78-чизма).

9.2-эслатма. Функция ҳар доим жуфт ёки тоқ бўлавермайди. Масалан, ушбу $y=x^2-x$, $y=\sin x-\cos x$ функциялар жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас.

9-§. Монотон функциялар

$y=f(x)$ функция X оралиқда берилган бўлсин.

9.5-таъриф. Агар аргумент x нинг X оралиқдан олинган ихтиёрий x_1 ва x_2 қийматлари учун $x_1<x_2$ бўлишидан $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ тенгсизлик келиб чиқса, $f(x)$ функция X оралиқда *ўсувчи* деб аталади.

Масалан, $f(x)=2x+1$ функция $X=(-\infty;\ +\infty)$ оралиқда ўсувчи бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $\forall x_1,\ x_2\in X$ олинганда ҳам, $x_1<x_2$ бўлганда,

$$f(x_1)=2x_1+1,\ f(x_2)=2x_2+1$$

бўлиб,

$$f(x_2)-f(x_1)=(2x_2+1)-(2x_1+1)=2(x_2-x_1)>0$$

бўлади. Демак, $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

9.6-таъриф. Агар аргумент x нинг X оралиқдан олинган ихтиёрий x_1 ва x_2 қийматлари учун $x_1<x_2$ бўлишидан $f(x_1)\geqslant f(x_2)$ тенгсизлик келиб чиқса, $f(x)$ функция X оралиқда *камаювчи* деб аталади.

Масалан, $f(x)=-3x+1$ функция $X=(-\infty;\ +\infty)$ да камаювчи бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $\forall x_1,\ x_2\in X$ олинганда ҳам, $x_1<x_2$ бўлганда

бўлиб $\qquad f(x_1) = -3x_1 + 1,\ f(x_2) = -3x_2 + 1$

$$f(x_2) - f(x_1) = -3x_2 + 1 - (-3x_1 + 1) = -3(x_2 - x_1) < 0$$

бўлади. Демак, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

9.7-таъриф. Ўсувчи ва камаювчи функциялар *монотон функциялар* деб аталади.

Мисол. $f(x) = x^3$ функция монотонликка текширилсин.

Ечиш. Бу функция $X = (-\infty; +\infty)$ оралиқда аниқланган. Бу оралиқдан ихтиёрий x_1, x_2 нуқталарни оламиз. Улар учун $x_1 < x_2$ бўлсин. Сўнг $f(x_2) - f(x_1)$ айирмани қараймиз:

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2) =$$

$$= (x_2 - x_1)\left(x_2^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} x_2 x_1 + x_1^2 + \frac{1}{4}x_1^2 - \frac{1}{4}x_1^2\right) =$$

$$= (x_2 - x_1)\left(x_2^2 + 2 \cdot x_2 \cdot \frac{x_1}{2} + \left(\frac{x_1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_1^2\right) =$$

$$= (x_2 - x_1)\left[\left(x_2 + \frac{x_1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_1^2\right] > 0.$$

Демак, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, яъни $f(x_1) < f(x_2)$. Шундай қилиб $x_1 < x_2$ бўлганда $f(x_1) < f(x_2)$ бўлар экан. Бу эса берилган функциянинг $(-\infty; +\infty)$ да ўсувчи эканини билдиради.

10-§. Даврий функция

$f(x)$ функция X да аниқланган бўлсин.

9.8-таъриф. Агар шундай ўзгармас $T\ (T \neq 0)$ сон топилсаки, ихтиёрий $x \in X$ да $x - T \in X$, $x + T \in X$ бўлиб,

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T)$$

бўлса, у ҳолда $f(x)$ *даврий функция*, T сони функциянинг *даври* дейилади.

Масалан, $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$ даврий функциялар бўлиб, $y = \sin x$ функциянинг даври 2π га, $y = \operatorname{tg} x$ функциянинг даври эса π га тенг. Агар $f(x)$ даврий функция бўлиб, $T\ (T \neq 0)$ сони унинг даври бўлса, у ҳолда nT $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ лар ҳам шу функциянинг даври бўлади.

11-§. Мураккаб функция

$y = f(x)$ функция X оралиқда аниқланган бўлсин. Аргумент x нинг X оралиқдан олинган ҳар бир қийматида функциянинг мос қийматини топиб, бу функциянинг қийматларидан Y тўпламни тузамиз.

Энди шу Y тўпламда ўз навбатида $u = F(y)$ функция аниқланган бўлсин. Натижада X тўпламдан олинган ҳар бир x сонга Y тўпламда битта y сони $(y = f(x))$ ва Y тўпламдан олинган бундай y сонга битта u сони $(u = F(y))$ мос қўйилади.

Демак, X тўпламдан олинган ҳар бир x сонга битта u сони мос қўйилади. Бу эса u ни x ўзгарувчининг функцияси бўлишини билдиради ва бундай белгиланади:

$$u = F(y) = F(f(x)).$$

Одатда бундай функция *мураккаб функция* деб аталади.

Масалан, ушбу 1) $u=\sqrt{x^2-1}$; 2) $u=\sin 2x$; 3) $u=\cos^2 x$ функциялар мураккаб функциялар бўлади.

1) $u=\sqrt{x^2-1}$ функция $u=\sqrt{y}$, $y=x^2-1$ функциялар ёрдамида ҳосил бўлган. $y=x^2-1$ функция $(-\infty;\ +\infty)$ оралиқда аниқланган; $u=\sqrt{y}$ эса $[0;\ +\infty)$ оралиқда аниқланган. Демак, $u=\sqrt{x^2-1}$ функция $x^2-1\geqslant 0$ да, яъни $x^2\geqslant 1$ бўлган қийматларда аниқланган бўлади.

2) $u=\sin 2x$ функция $u=\sin y$, $y=2x$ функциялар ёрдамида ҳосил бўлган. Бу функция $(-\infty;\ +\infty)$ да аниқланган.

3) $u=\cos^2 x$ функция $u=y^2$, $y=\cos x$ функциялар ёрдамида ҳосил бўлган. Бу функция $(-\infty;\ +\infty)$ да аниқланган.

12-§. Тескари функция

$y=f(x)$ функция X оралиқда аниқланган бўлиб, Y эса шу функция қийматларидан иборат тўплам бўлсин: $Y=\{f(x): x\in X\}$. Y тўпламдан бирор y_0 сонни олайлик. Унда X тўпламда шундай $x_0(x_0\in X)$ сони топиладики, $f(x_0)=y_0$ бўлади. y_0 сонга x_0 сонни мос қўямиз. Натижада Y тўпламдан олинган ҳар бир y га юқорида кўрсатилгандек битта x сон $(x\in X)$ мос қўйилиб, функция ҳосил бўлади. Одатда бундай функция, берилган $y=f(x)$ функцияга нисбатан *тескари функция* деб аталади ва $x=f^{-1}(y)$ каби белгиланади.

Мисол. $y=f(x)=2x+1$ функцияни $X=[0;1]$ оралиқда қарайлик. Равшанки, бу функция қийматларидан иборат тўплам $Y=[1;3]$ бўлади. $Y=[1;3]$ оралиқда берилган $x=\frac{1}{2}(y-1)$ функция қаралаётган функцияга нисбатан тескари функция бўлади: $x=f^{-1}(y)=\frac{1}{2}(y-1)$.

9.3-эслатма. Биз юқорида $y=f(x)$ функцияга нисбатан тескари бўлган $x=f^{-1}(y)$ функция тушунчаси билан танишдик. Бу тескари функциянинг аргументи y бўлиб, x эса унинг функциясидир. Демак, тескари функциянинг графигини ясашда абсцисса ўқи сифатида Oy ўқни, ордината ўқи сифатида Ox ўқни олиш керак бўлади. Бу ҳол маълум ноқулайликлар туғдиради. Шунинг учун тескари функцияни, масалан

$$y=\varphi(x)$$

каби белгилаш мақсадга мувофиқдир.

Юқоридаги мисолда $y=f(x)=2x+1$ функцияга тескари функция $y=\varphi(x)=\frac{1}{2}(x-1)$ бўлади. Бу функцияларнинг графиклари 79-чизмада тасвирланган.

Берилган $y=f(x)$ функциянинг графигига кўра бу функцияга нисбатан тескари $y=\varphi(x)$ функциянинг графигини аниқлаш қийин эмас. $y=f(x)$ функция графигини биринчи ва учинчи координата бурчаклари биссектрисасига нисбатан симметрик кўчириш натижасида ҳосил бўлган чизиқ тескари функциянинг графиги бўлади (80-чизма).

13-§. Содда (элементар) функциялар

Математик анализда асосан аналитик усулда берилган функциялар билан шуғулланилади. Қуйида *содда функциялар* деб аталувчи функцияларни келтирамиз. Бундай функциялар ўқувчига ўрта мактаб математика курсидан маълумдир.

1. Чизиқли ва квадратик функциялар. Ушбу

$$y=ax+b, \qquad y=ax^2+bx+c$$

кўринишдаги функциялар мос равишда *чизиқли* ва *квадратик функциялар* деб аталади, бунда a, b c — ўзгармас ҳақиқий сонлар.

$y=ax+b$ чизиқли функция $(-\infty;+\infty)$ да аниқланган. Бу функция $a>0$ да ўсувчи, $a<0$ бўлганда камаювчи функция бўлади. Унинг графиги текисликда тўғри чизиқни тасвирлайди. Шунинг учун ҳам $y=ax+b$ функцияни *чизиқли функция* деб аталади.

Масалан, $y=3x+1$, $y=2-3x$ функциялар чизиқли функциялардир. Уларнинг графиклари 81-*а* чизмада тасвирланган.

$y=ax^2+bx+c$ *квадратик функция* $(-\infty;+\infty)$ *да аниқланган*. Бу функция $x>-\frac{b}{2a}$ $(a\neq 0)$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар тўпламида ўсувчи, $x<-\frac{b}{2a}$ $(a\neq 0)$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар тўпламида камаювчи бўлади. Квадратик функциянинг (квадратик учҳаднинг) графиги текисликда параболани ифодалайди. Параболанинг ҳолати a коэффициентнинг ҳамда дискриминант $d=b^2-4ac$ нинг ишораларига боғлиқ бўлади (81-*б* чизма).

2. Даражали функция. Ушбу

$$y=x^{\alpha} \quad (x>0)$$

кўринишдаги функция *даражали функция* деб аталади.

Даражали функциянинг аниқланиш соҳаси α сонга боғлиқ бўлади. Даражали функциянинг графиги $\alpha>0$ бўлганда текисликнинг (0; 0) ва (1; 1) нуқталаридан ўтади. 82-чизмада $y=x^3$ функциянинг графиги тасвирланган.

3. Кўрсаткичли функция. Ушбу

$$y=a^x \quad (a>0,\ a\neq 1)$$

кўринишдаги функция *кўрсаткичли функция* деб аталади.

Кўрсаткичли функция $(-\infty;+\infty)$ оралиқда аниқланган. Бу функция $0<a<1$ бўлганда камаювчи, $a>1$ бўлганда эса ўсувчи функция бўлади. Кўрсаткичли функциянинг графиги текисликнинг Ox ўқидан юқори томонида жойлашган.

$y = 2^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ функцияларнинг графиклари 83-чизмада тасвирланган.

4. Логарифмик функция. Ушбу

$$y = \log_a x \qquad (a>0,\ a\neq 1)$$

кўринишдаги функция *логарифмик функция* деб аталади. Логарифмик функция $(0;\ +\infty)$ оралиқда аниқланган. Бу функция $0<a<1$ бўлганда камаювчи, $a>1$ бўлганда эса ўсувчи бўлади. Логарифмик функциянинг графиги текисликда Oy ўқининг ўнг томонида жойлашган. $y = \log_2 x$ ва $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ функцияларнинг графиклари 84-чизмада тасвирланган.

5. Тригонометрик функциялар. Ушбу

$$y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \operatorname{tg} x,\ y = \operatorname{ctg} x$$

функциялар *тригонометрик функциялар* деб аталади.

$y = \sin x$, $y = \cos x$ функциялар $(-\infty;\ +\infty)$ оралиқда аниқланган. $y = \sin x$ тоқ функция. Демак, унинг графиги координата бошига нисбатан симметрик бўлади (85-чизма). $y = \cos x$ жуфт функция. Унинг графиги Oy ўқига нисбатан симметрик бўлади (86-чизма). $y = \operatorname{tg} x$ функция $(-\infty,\ +\infty)$ нинг $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$ $(k = 0,\ \pm 1,\ \mp 2,\ \ldots)$ бўлган нуқталар тўпламида аниқланган. Бу функция учун $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ бўлади. Демак, $y = \operatorname{tg} x$ тоқ функция. Унинг графиги 87-чизмада тасвирланган.

$y = \operatorname{ctg} x$ функция $(-\infty;\ +\infty)$ нинг $x \neq k\pi$ $(k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$ бўлган нуқталар тўпламида аниқланган. Равшанки, бу функция учун $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$ бўлади. Демак, $y = \operatorname{ctg} x$ функция тоқ функция. Унинг графиги 88-чизмада тасвирланган.

6. Тескари тригонометрик функциялар. Ушбу

$$y = \arcsin x,\ y = \arccos x,\ y = \operatorname{arc\,tg} x,\ y = \operatorname{arc\,ctg} x$$

функциялар *тескари тригонометрик функциялар* деб аталади.

$y = \arcsin x$ функция $y = \sin x$ функцияга нисбатан тескари функция бўлиб, $X = [-1;\ 1]$ сегментда аниқланган. $y = \arcsin x$ функциянинг қийматларидан иборат тўплам $Y = \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ бўлади. Бу функциянинг графиги 89-чизмада тасвирланган.

$y = \arccos x$ функция $y = \cos x$ функцияга нисбатан тескари функция бўлиб, $X = [-1;\ 1]$ сегментда аниқланган. $y = \arccos x$ функциянинг қийматларидан иборат тўплам $Y = [0;\ \pi]$ бўлади. Бу функциянинг графиги 90-чизмада келтирилган.

$y = \operatorname{arc\,tg} x$ функция $y = \operatorname{tg} x$ функцияга нисбатан тескари функция бўлиб, $X = (-\infty;\ +\infty)$ оралиқда аниқланган. $y = \operatorname{arc\,tg} x$

функциянинг қийматларидан иборат тўплам $Y=\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ бўлади. Бу функциянинг графиги 91-чизмада берилган.

$y=\operatorname{arc\,ctg} x$ функция $y=\operatorname{ctg} x$ функцияга нисбатан тескари функция бўлиб, $X=(-\infty;\ +\infty)$ оралиқда аниқланган. $y=\operatorname{arc\,ctg} x$ функциянинг қийматларидан иборат тўплам $Y=(0;\ \pi)$ бўлади. Бу функциянинг графиги 92-чизмада тасвирланган.

X БОБ. НАТУРАЛ АРГУМЕНТЛИ ФУНКЦИЯ

1-§. Сонлар кетма-кетлиги тушунчаси

Биз юқорида функция тушунчаси билан танишдик. Энди, хусусий ҳолни, яъни аниқланиш соҳаси натурал сонлар тўплами N бўлгин функцияларни қараймиз.

Айтайлик, $f(x)$ функция $X=N$ тўпламда берилган бўлсин. Модомики, бу функциянинг аргументи натурал сон экан, унда $f(x)$ дейиш ўрнига $f(n)$ деб оламиз.

Бу функциянинг $n=1, 2, 3, \ldots$ даги қийматларини

$$f(1)=x_1,\ f(2)=x_2,\ f(3)=x_3,\ \ldots,\ f(n)=x_n,\ \ldots$$

деб белгилайлик. Натижада $f(n)$ функция қийматларидан ташкил топган ушбу

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots \qquad (*)$$

тўплам ҳосил бўлади. Бу тўплам *сонлар кетма-кетлиги* деб аталади. (*) сонлар кетма-кетлигини ташкил этган $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$ сонлар (*) кетма-кетликнинг *ҳадлари* дейилади x_n эса (*) кетма-кетликнинг *n-ҳади* ёки *умумий ҳади* дейилади. (*) сонлар кетма-кетлигини $\{x_n\}$ каби белгиланади.

Сонлар кетма-кетликларига мисоллар келтирамиз.

1) $x_n=\frac{1}{n}$ бўлсин. Бу сонлар кетма-кетлиги

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots$$

бўлади.

2) $x_n=n^2$ бўлсин. Бу сонлар кетма-кетлигининг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots,\ n^2,\ \ldots$$

3) $x_n=(-1)^n$ бўлсин. Бу сонлар кетма-кетлиги ҳадлари орқали ушбу кўринишда ёзилади:

$$-1,\ 1,\ -1,\ \ldots,\ (-1)^n,\ \ldots$$

Бирор $\{x_n\}$: $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$ кетма-кетлик берилган бўлсин.

10.1-таъриф. *Агар шундай ўзгармас M сон мавжуд бўлсаки, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади шу сондан катта бўлмаса,* *яъни $x_n \leqslant M$ бўлса, бу кетма-кетлик юқоридан чегараланган деб аталади.*

Масалан, ушбу

$$0, -1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$$

кетма-кетлик юқоридан чегараланган, чунки кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади 0 дан катта эмас.

10.2-таъриф. *Агар шундай ўзгармас m сон мавжуд бўлсаки, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади шу сондан кичик бўлмаса, яъни $x_n \geqslant m$ бўлса, бу кетма-кетлик қуйидан чегараланган деб аталади.*

Масалан, ушбу

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots$$

кетма-кетлик қуйидан чегараланган, чунки кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади 0 дан кичик эмас.

10.3-таъриф. *Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик ҳам қуйидан, ҳам юқоридан чегараланган бўлса, у чегараланган деб аталади.*

Масалан,

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

кетма-кетлик чегараланган кетма-кетликдир.

2-§. Сонлар кетма-кетликлари устида амаллар

Иккита кетма-кетлик берилган бўлсин:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots; \; y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$$

Ушбу

$$x_1 + y_1, \; x_2 + y_2, \; x_3 + y_3, \ldots, x_n + y_n, \ldots$$

кетма-кетлик $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар *йиғиндиси* деб аталади ва $\{x_n + y_n\}$ каби белгиланади.

Ушбу

$$x_1 - y_1, \; x_2 - y_2, \; x_3 - y_3, \ldots, x_n - y_n, \ldots$$

кетма-кетлик $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар *айирмаси* деб аталади ва $\{x_n - y_n\}$ каби белгиланади.

Ушбу

$$x_1 \cdot y_1, \; x_2 \cdot y_2, \; x_3 \cdot y_3, \ldots, x_n \cdot y_n, \ldots$$

кетма-кетлик $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар *кўпайтмаси* деб аталади ва $\{x_n \cdot y_n\}$ каби белгиланади.

Ушбу

$$\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}, \ldots, \frac{x_n}{y_n}, \ldots \quad (y_k \neq 0, \ k = 1, 2, \ldots)$$

кетма-кетлик $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар *бўлинмаси* деб аталади ва $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ каби белгиланади.

3-§. Сонлар кетма-кетлигининг лимити

Аввало нуқтанинг атрофи тушунчаси билан танишамиз. Бирор a нуқта (a — ҳақиқий сон) ҳамда мусбат ε сони берилган бўлсин.

10.4-таъриф. *Берилган a нуқтани ўз ичига олган*

$$(a-\varepsilon, \ a+\varepsilon) = \{x : a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\}$$

интервал a нуқтанинг атрофи (a нуқтаниннг ε атрофи) деб аталади.

Нуқтанинг атрофи сонлар ўқида кесмани ифодалайди, кесманинг четки нуқталари эса шу кесмага тегишли бўлмайди. Бу ҳолни 93-чизмада четки нуқталарига стрелкалар қўйиш билан изоҳланган.

Мисоллар. 1. $a = 0$ нуқтанинг $\varepsilon = \frac{1}{2}$ атрофи қуйидаги интервал бўлади (94-чизма):

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left\{x : -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right\}.$$

2. $a = 1$ нуқтанинг $\varepsilon = 0{,}1$ атрофи ушбу интервалдан иборатдир (95-чизма):

$$(0, 9, \ 1, \ 1) = \{x : 0{,}9 < x < 1{,}1\}.$$

Шуни алоҳида таъкидлаймизки, битта a нуқтанинг жуда кўп атрофлари бўлади. Масалан, ушбу

$$(a-1, \ a+1), \left(a-\frac{1}{2}, \ a+\frac{1}{2}\right), \left(a-\frac{1}{3}, \ a+\frac{1}{3}\right), \ \ldots$$
$$\left(a-\frac{1}{n}, \ a+\frac{1}{n}\right)$$

интервалларнинг ҳар бири a нуқтанинг атрофи бўлади (96-чизма).

3. Ушбу $\{x_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ \ldots, \ \frac{n}{n+1}, \ \ldots$$

кетма-кетликни қарайлик. $a = 1$ нуқтанинг $\left(1-\frac{4}{5}, \ 1+\frac{4}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}, \frac{9}{5}\right)$ $\left(\varepsilon = \frac{4}{5}\right)$ атрофи олинса, унда берилган кетма-кетликнинг 4-ҳадидан бошлаб кейинги барча ҳадлари шу атрофга тегишли бўлади (97-чизма).

4. Қуйидаги

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots$$

кетма-кетликни қарайлик. $a=5$ нуқтанинг $(5-2,\ 5+2)=(3,\ 7)$ атрофи ($\varepsilon=2$) олинса, унда кетма-кетликнинг 3 та ҳади (4, 5, 6-ҳадлари) шу атрофга тегишли бўлади (98-чизма).

5. Ушбу

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots$$

кетма-кетликни қарайлик. $a=1$ нуқтанинг $\left(a-\frac{1}{2},\ a+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$ атрофига берилган кетма-кетликнинг баъзи ҳадлари (жуфт номерли ўринда турган ҳадлари) тегишли, баъзи ҳадлари (тоқ номерли ўринда турган ҳадлари) тегишли бўлмайди (99-чизма).

Бирор $\{x_n\}$:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

сонлар кетма-кетлиги ҳамда a нуқта (a — ҳақиқий сон) берилган бўлсин. Бу a нуқтанинг $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ атрофини $(\varepsilon>0)$ олайлик.

1°. $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг бирор ҳадидан бошлаб кейинги барча ҳадлари (хусусан, кетма-кетликнинг барча ҳадлари) $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ атрофга тегишли бўлиши мумкин. Бундай ҳол қуйидагича ҳам айтилади: шундай N натурал сон топиладики, $n>N$ бўлган барча натурал n сонлар учун $x_n\in(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ бўлади.

2°. $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг бирор ҳадидан бошлаб кейинги ҳадларининг баъзилари $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ атрофга тегишли, баъзилари эса тегишли бўлмаслиги мумкин.

3°. $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг чекли сондаги ҳадларигина $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ атрофга тегишли бўлиши ёки кетма-кетликнинг бирорта ҳади шу атрофга тегишли бўлмаслиги мумкин.

10.5-таъриф. *Агар* $\{x_n\}$:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

кетма-кетликнинг бирор ҳадидан бошлаб кейинги барча ҳадлари a нуқтанинг ихтиёрий $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ атрофига тегишли бўлса, унда a сон $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити деб аталади ва $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, *ёки* $\lim x_n=a$, *ёки* $x_n\to a$ *каби белгиланади.*

Бу ҳолда $\{x_n\}$ *кетма-кетлик a га интилади* деб ҳам юритилади.

Айтайлик, бирор $\{x_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлиб, унинг лимити a бўлсин: $\lim x_n=a$. Юқоридаги таърифга кўра, берилган кетма-кетликнинг бирор ҳадидан бошлаб кейинги барча ҳадлари a нуқтанинг ихтиёрий $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$ атрофига тегишли бўлади. Бошқача айтганда, шундай натурал n_0 сон топиладики, $n>n_0$ бўлган барча n натурал сонлар учун

$$x_n \in (a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$$

бўлади. Демак,

$$a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon \qquad (n > n_0).$$

Кейинги тенгсизликдан эса

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \tag{10.1}$$

бўлиши келиб чиқади. Бу (10.1) тенгсизлик эса ушбу

$$|x_n - a| < \varepsilon \tag{10.2}$$

тенгсизликка эквивалент бўлади (қаралсин: IX боб, 2-§.).

Бу ҳол кетма-кетлик лимитини қуйидагича таърифлаш имконини беради.

10.6-таъриф. *Агар ихтиёрий мусбат $\varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай n_0 натурал сон топилсаки, $n > n_0$ бўлган барча n натурал сонлар учун*

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, a сон $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити деб аталади ва юқоридагидек

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

каби белгиланади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots$$

кетма-кетликнинг лимити 0 га тенг бўлади. Шуни исботлаймиз. Ихтиёрий мусбат ε сонни олиб, унга кўра $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$* ни топамиз ва бундай белгилаймиз: $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, у ҳолда $n > n_0$ бўлган барча натурал n сонлар учун

$$|x_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} \leqslant \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

бўлади. Лимит таърифига кўра

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

бўлади.

---

* $[d]$ белгилаш d сонининг ундан катта бўлмаган бутун қисмини ифодалайди. Масалан, $[3, 5] = 3$. Равшанки, $[d] \leqslant d$.

2. Ушбу

$$1, -1, 1, -1, \ldots$$

кетма-кетлик лимитга эга эмас.

Бирор $\{\alpha_n\}: \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$ сонлар кетма-кетлиги берилган бўлсин.

10.7-таъриф. *Агар $\{\alpha_n\}$ кетма-кетликнинг лимити нолга тенг, яъни*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$

бўлса, у ҳолда $\{\alpha_n\}$ чексиз кичик миқдор деб аталади. Масалан, $x_n = \frac{1}{n}$ чексиз кичик миқдор бўлади.

Бирор $\{x_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин.

10.1-теорема. *$\{x_n\}$ кетма-кетликнинг a лимитга эга бўлиши учун $\alpha_n = x_n - a$ чексиз кичик миқдор бўлиши зарур ва етарли.*

Бу теореманинг исботи юқорида келтирилган кетма-кетлик лимити ҳамда чексиз кичик миқдор таърифларидан келиб чиқади.

Демак, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити a бўлса, унинг умумий ҳади x_n ни $x_n = a + \alpha_n$ кўринишда ёзиш мумкин, бунда α_n чексиз кичик миқдор. Аксинча, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг умумий ҳади x_n ўзгармас a сони билан чексиз кичик миқдорнинг йиғиндисидан иборат, яъни

$$x_n = a + \alpha_n$$

бўлса, у ҳолда a сон $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити бўлади.

Мисол. Ушбу $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$ кетма-кетликни қарайлик. Унинг умумий ҳади $x_n = \frac{n}{n+1}$ ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$x_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Равшанки, $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$ чексиз кичик миқдор. Демак, берилган кетма-кетликнинг лимити 1 га тенг:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

4-§. Чексиз кичик ҳамда чексиз катта миқдорлар орасидаги боғланиш

Аввало чексиз кичик миқдорлар ҳақида иккита лемма келтирамиз.

10.1-лемма. *Икки чексиз кичик миқдор йиғиндиси яна чексиз кичик миқдор бўлади.*

Исбот. $\{\alpha_n\}$ ва $\{\beta_n\}$ чексиз кичик миқдорлар бўлсин: $\lim \alpha_n=0$, $\lim \beta_n=0$. Таърифига кўра, $\forall \varepsilon>0$ олинганда ҳам $\varepsilon/2$ га кўра шундай n_0 натурал сон топиладики, $n>n_0$ бўлган барча натурал n лар учун

$$|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{2}$$

бўлади. Шунингдек,

$$|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}$$

бўлади. Натижада ушбу тенгсизликка эга бўламиз:

$$|\alpha_n+\beta_n|\leqslant|\alpha_n|+|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Бу эса

$$\lim(\alpha_n+\beta_n)=0$$

бўлишини билдиради. Демак. $\{\alpha_n+\beta_n\}$ — чексиз кичик миқдор. Лемма исбот бўлди.

Ушбу лемма ҳам худди шунга ўхшаш исботланади.

10.2-лемма. *Чегараланган кетма-кетлик билан чексиз кичик миқдор кўпайтмаси чексиз кичик миқдор бўлади.*

Бирор $\{x_n\}$:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

кетма-кетлик берилган бўлсин.

10.8-таъриф. *Агар ҳар қандай мусбат M сон олинганда ҳам шундай натурал n_0 сони топилсаки, $n>n_0$ бўлган барча натурал n лар учун*

$$|x_n|>M$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $\{x_n\}$ чексиз катта миқдор деб аталади.

Масалан, $\{x_n\}=\{n\}$:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots$$

кетма-кетлик чексиз катта миқдор бўлади.

Чексиз катта миқдорнинг лимити чексиз деб олинади ва қуйидагича белгиланади: $\lim x_n=\infty$.

Энди чексиз кичик ҳамда чексиз катта миқдорлар орасидаги боғланишни келтирамиз.

Агар $\{x_n\}$ ($x_n\neq 0$, $n=1, 2, \ldots$) чексиз кичик миқдор бўлса, $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ чексиз катта миқдор бўлади.

Агар $\{x_n\}$ чексиз катта миқдор бўлса, $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ чексиз кичик миқдор бўлади.

5- §. Яқинлашувчи кетма-кетликларнинг хоссалари

Бирор $\{x_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин.

10.9-таъриф. *Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда $\{x_n\}$ яқинлашувчи кетма-кетлик деб аталади. Агар кетма-кетликнинг лимити чекли бўлмаса ёки кетма-кетлик лимитга эга бўлмаса, уни узоқлашувчи кетма-кетлик деб аталади.*

Масалан,

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

кетма-кетлик яқинлашувчи кетма-кетлик бўлади,

$$1, -1, 1, -1, \ldots,$$

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

кетма-кетликлар эса узоқлашувчи кетма-кетликлар бўлади.

Энди яқинлашувчи кетма-кетликларнинг қатор хоссаларини келтирамиз. Бундай хоссаларнинг исботи кетма-кетликнинг лимити таърифига ҳамда юқорида келтирилган леммалар ва теоремага (қаралсин: 4, 5-§ лар) асосланади. Шуни эътиборга олиб, бу хоссаларнинг баъзиларини исботлаймиз.

1°. *Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, у чегараланган бўлади.*

2°. *Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, унинг лимити ягона бўлади.*

Айтайлик, иккита $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар берилган бўлсин.

3°. *Агар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бири яқинлашувчи бўлиб,*

$$x_n = y_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

бўлса, у ҳолда

$$\lim x_n = \lim y_n$$

бўлади.

4°. *Агар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлиб,*

$$x_n \leqslant y_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

бўлса, у ҳолда

$$\lim x_n \leqslant \lim y_n$$

бўлади.

5°. *Агар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\{x_n + y_n\}$ кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи бўлиб,*

$$\lim (x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n$$

бўлади.

5°-хоссанинг исботи. $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлиб,

$$\lim x_n = a, \qquad \lim y_n = b$$

бўлсин. У ҳолда 10.1-теоремага кўра

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n$$

бўлиб, α_n ва β_n чексиз кичик миқдорлар бўлади. Бу тенгликлардан топамиз:

$$x_n + y_n = a + \alpha_n + b + \beta_n = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n).$$

Чексиз кичик миқдорлар ҳақидаги 10.1-леммага асосан $\alpha_n + \beta_n$ ҳам чексиз кичик миқдор бўлади. Уни γ_n орқали белгилайлик:

$$\gamma_n = \alpha_n + \beta_n.$$

Натижада

$$x_n + y_n = (a + b) + \gamma_n$$

бўлади. Яна 10.1-теоремадан фойдаланиб, $\{x_n + y_n\}$ кетма-кетлик лимитга эга бўлиши ва у $a + b$ га тенг бўлишини топамиз:

$$\lim (x_n + y_n) = a + b = \lim x_n + \lim y_n.$$

5°-хосса исбот бўлди.

6°. *Агар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\{x_n - y_n\}$ кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи бўлиб,*

$$\lim (x_n - y_n) = \lim x_n - \lim y_n$$

бўлади.

7°. *Агар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\{x_n \cdot y_n\}$ кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи бўлиб,*

$$\lim (x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n$$

бўлади.

8°. *Агар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи ва $\lim y_n \neq 0$ бўлса, у ҳолда $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ $(y_n \neq 0,\ n = 1, 2, \ldots)$ кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи бўлиб,*

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n} \quad (\lim y_n \neq 0)$$

бўлади.

Мисоллар.

1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + n}{3n^2 + n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} =$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{2}{3};$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n}+1)}{(\sqrt{n}-1)(\sqrt{n}+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}-1}=0;$$

$$3)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}{1+\sqrt{n}+\sqrt{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3}}+\frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt{n^3}}}{\frac{1}{\sqrt{n^3}}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}}+1}=\infty.$$

6-§. Монотон кетма-кетлик лимитининг мавжудлиги ҳақида теоремалар

Кетма-кетлик лимитининг мавжудлиги ҳақидаги масала муҳим масалалардан бири. Бу масалани ҳал қилиб берувчи теоремалар мавжуд. Бироқ улар математик анализнинг нозик фактларига асосланиб исботланади.

Биз қуйида лимитнинг мавжудлиги ҳақидаги теоремаларни исботсиз келтириш билан кифояланамиз.

10.2-теорема. *Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик ўсувчи бўлиб, юқоридан чегараланган бўлса, кетма-кетлик чекли лимитга эга (яъни яқинлашувчи) бўлади.*

10.3-теорема. *Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик камаювчи бўлиб, қуйидан чегараланган бўлса, кетма-кетлик чекли лимитга эга (яъни яқинлашувчи) бўлади.*

Одатда юқорида келтирилган теоремаларни *монотон кетма-кетликнинг лимити ҳақидаги теоремалар* деб юритилади. Бу теоремалардан фойдаланиб, баъзи бир кетма-кетликларнинг лимитга эга бўлишини кўрсатамиз.

7-§. *e* сони

Ушбу кетма-кетликни қарайлик:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1,\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(1+\frac{1}{3}\right)^3,\ \ldots,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ \ldots$$

Унинг умумий ҳади

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

бўлади. Мақсад шу $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг чекли лимитга эга бўлишини кўрсатишдан иборат. Бу кетма-кетлик билан бирга қуйидаги кетма-кетликни ҳам қараймиз:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^2,\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^3,\ \left(1+\frac{1}{3}\right)^4,\ \ldots,\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},\ \ldots$$

Унинг умумий ҳади

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

бўлади. Бу кетма-кетликнинг y_n, y_{n+1} ҳадларини қуйидагича ёзиб оламиз:

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{n}{n+1}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2}\cdot\frac{n}{n+1}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2}\cdot\frac{n}{n+1};$$

$$y_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}=\left(\frac{n+1+1}{n+1}\right)^{n+2}=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}.$$

У ҳолда $\frac{y_n}{y_{n+1}}=\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2}\cdot\frac{n}{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}}=\left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+2}{n+1}}\right)^{n+2}\cdot\frac{n}{n+1}=$

$$=\left(\frac{(n+1)\,(n+1)}{n\,(n+2)}\right)^{n+2}\cdot\frac{n}{n+1}=\left(\frac{(n+1)^2}{n\,(n+2)}\right)^{n+2}\cdot\frac{n}{n+1}=$$

$$=\left(\frac{n\,(n+2)+(n+1)^2-n\,(n+2)}{n\,(n+2)}\right)^{n+2}\cdot\frac{n}{n+1}=$$

$$=\left(1+\frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{n\,(n+2)}\right)^{n+2}\cdot\frac{n}{n+1}=\left(1+\frac{1}{n\,(n+2)}\right)^{n+2}\cdot\frac{n}{n+1}$$

бўлади. Демак,

$$\frac{y_n}{y_{n+1}}=\left(1+\frac{1}{n\,(n+2)}\right)^{n+2}\cdot\frac{n}{n+1}.$$

Бернулли тенгсизлигидан* фойдаланиб топамиз:

$$\left(1+\frac{1}{n\,(n+2)}\right)^{n+2}\geqslant 1+(n+2)\cdot\frac{1}{n\,(n+2)}=1+\frac{1}{n}.$$

Натижада

$$\frac{y_n}{y_{n+1}}=\left(1+\frac{1}{n\,(n+2)}\right)^{n+2}\cdot\frac{n}{n+1}\geqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}=1$$

бўлади. Бу тенгсизликдан эса

$$y_n\geqslant y_{n+1}\qquad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ кетма-кетлик камаювчи кетма-кетлик экан.

---

* $(1+\alpha)^n\geqslant 1+n\cdot\alpha$ тенгсизлик *Бернулли тенгсизлиги* деб аталади.

Равшанки, барча n лар ($n = 1, 2, \ldots$) учун

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > 0.$$

Бу эса $\{y_n\}$ кетма-кетликнинг қуйидан чегараланганлигини билдиради.

Шундай қилиб, $\{y_n\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ кетма-кетлик камаювчи ва қуйидан чегараланган. Юқоридаги 10.3-теоремага кўра бу кетма-кетлик чекли лимитга эга. У ҳолда $\{x_n\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$ кетма-кетлик ҳам чекли лимитга эга бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = x_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

бўлиб, ундан эса

$$x_n = y_n \cdot \frac{n}{n+1}$$

бўлиши келиб чиқади. Кейинги тенгликдан топамиз:

$$\lim x_n = \lim \left(y_n \cdot \frac{n}{1+n}\right) = \lim y_n \cdot \lim \frac{n}{1+n} =$$
$$= \lim y_n \cdot 1 = \lim y_n.$$

Модомики, $\{y_n\}$ кетма-кетлик чекли лимитга эга экан, унда $\{x_n\}$ кетма-кетлик ҳам чекли лимитга эга бўлади.

10.10-таъриф. *Ушбу*

$$\{x_n\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$$

кетма-кетликнинг лимити е сони деб аталади.

Демак,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e.$$

e сони иррационал сон. Унинг қиймати тақрибан 2,71 га тенг ($e \approx 2{,}718281 \ldots$) Асоси e бўлган логарифм *натурал логарифм* деб аталади.

XI БОБ. ФУНКЦИЯ ЛИМИТИ

1-§. Функция лимити тушунчаси

Аввало ҳақиқий сонлар тўплами X нинг (оралиқнинг) лимит нуқтаси тушунчаси билан танишамиз.

Бирор X ҳақиқий сонлар тўплами (оралиқ) ҳамда a нуқта (a — ҳақиқий сон) берилган бўлсин.

11. 1-таъриф. *Агар a нуқтанинг ихтиёрий* $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ *атрофида X тўпламнинг чексиз кўп нуқталари бўлса, a*

нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси (қуюқланиш нуқтаси) деб аталади.

Мисоллар. 1. $X=[0;\ 1]$ тўпламнинг ҳар бир нуқтаси шу тўпламнинг лимит нуқтаси бўлади.

2. $X=(0;\ 1)$ тўпламнинг ҳар бир нуқтаси шу тўпламнинг лимит нуқтаси бўлади ва яна $x=0$, $x=1$ нуқталар ҳам $X=(0;\ 1)$ тўпламнинг лимит нуқталари бўлади.

3. $X=\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$ тўплам лимит нуқтага эга эмас.

X бирор сонлар тўплами бўлиб, a эса шу тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин. У ҳолда X тўплам нуқталаридан a га интилувчи $\{x_n\}$ кетма-кетлик ҳосил қилиш мумкин. Бундай кетма-кетликлар жуда кўп бўлади.

Масалан, $X=[0;\ 1]$ бўлсин, Равшанки, $a=0$ нуқта шу тўпламнинг лимит нуқтасидир. $X=[0;\ 1]$ тўплам нуқталаридан ташкил топган қуйидаги кетма-кетликларнинг ҳар бирининг лимити $a=0$ бўлади:

$$x_n=\frac{1}{n}:\quad 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots;\qquad \lim\frac{1}{n}=0,$$

$$y_n=\frac{1}{n^2}:\quad 1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \ldots,\ \frac{1}{n^2},\ \ldots;\qquad \lim\frac{1}{n^2}=0,$$

$$z_n=\frac{1}{\sqrt{n}}:\quad 1,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \ldots,\ \frac{1}{\sqrt{n}},\ \ldots;\qquad \lim\frac{1}{\sqrt{n}}=0,$$

$$u_n=\frac{1}{n+2}:\quad \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \ldots,\ \frac{1}{n+2},\ \ldots;\qquad \lim\frac{1}{n+2}=0.$$

Айтайлик шу X тўпламда $f(x)$ функция аниқланган бўлсин. a нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлганлиги учун X тўплам нуқталарида ташкил топган шундай

$$\{x_n\}:\quad x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots\qquad (x_n\in X,\ n=1,\ 2,\ \ldots)$$

$$\{y_n\}:\quad y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n\ \ldots\qquad (y_n\in X,\ n=1,\ 2,\ \ldots)$$

$$\{z_n\}:\quad z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n,\ \ldots\qquad (z_n\in X,\ n=1,\ 2,\ \ldots)$$

. . . .

кетма-кетликлар борки, уларнинг ҳар бирининг лимити худди шу a га тенг бўлади:

$$\lim x_n=a,\quad \lim y_n=a,\quad \lim z_n=a,\ \ldots$$

$f(x)$ функциянинг $x=x_n$, $x=y_n$, $x=z_n$, ...

($n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$) нуқталардаги қийматлари ушбу кетма-кетликларни ҳосил қилади:

$$\{f(x_n)\}:\quad f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_n),\ \ldots$$

$$\{f(y_n)\}:\quad f(y_1),\ f(y_2),\ \ldots,\ f(y_n),\ \ldots$$

$$\{f(z_n)\}:\quad f(z_1),\ f(z_2),\ \ldots,\ f(z_n),\ \ldots$$

. . . .

Одатда $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик $\{x_n\}$ кетма-кетликка мос функция қийматларидан иборат кетма-кетлик деб аталади.

Масалан, $X=[0;1]$ тўпламда $y=f(x)=x^2+1$ функцияни қарайлик. $a=0$ нуқта шу X тўпламнинг лимит нуқтаси. Юқоридаги $a=0$ га интилувчи

$$\{x_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\},\ \{y_n\}=\left\{\frac{1}{n^2}\right\},\ \{z_n\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\},\ \{u_n\}=\left\{\frac{1}{n+2}\right\}$$

кетма-кетликларга мос $f(x)=x^2+1$ функция қийматларидан ташкил топган кетма-кетликлар қуйидагича бўлади:

$$\{f(x_n)\}=\left\{\frac{1}{n^2}+1\right\}:\ 1+1,\ \frac{1}{2^2}+1,\ \frac{1}{3^2}+1,\ \ldots,\ \frac{1}{n^2}+1,\ \ldots$$

$$\{f(y_n)\}=\left\{\frac{1}{n^4}+1\right\}:\ 1+1,\ \frac{1}{2^4}+1,\ \frac{1}{3^4}+1,\ \ldots,\ \frac{1}{n^4}+1,\ \ldots$$

$$\{f(z_n)\}=\left\{\frac{1}{n}+1\right\}:\ 1+1,\ \frac{1}{2}+1,\ \frac{1}{3}+1,\ \ldots,\ \frac{1}{n}+1,\ \ldots$$

$$\{f(u_n)\}=\left\{\frac{1}{(n+2)^2}+1\right\}:\ \frac{1}{(1+2)^2}+1,\ \frac{1}{(2+2)^2}+1,\ \ldots,\ \frac{1}{(n+2)^2}+1,\ \ldots$$

11.2-таъриф. *Агар X тўпламнинг нуқталаридан тузилган, a га интилувчи ҳар қандай $\{x_n\}$ кетма-кетлик олинганда ҳам мос $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик ҳар доим ягона b га интилса, шу b сон $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги (ёки $x\to a$ даги) лимити деб аталади ва уни*

$$\lim_{x\to a} f(x)=b$$

каби белгиланади.

Мисоллар. 1. $f(x)=C$ — const функция ҳар доим лимитга эга бўлиб,

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} C=C$$

бўлади. Бу функция лимити таърифидан бевосита келиб чиқади.

2. $f(x)=x^2+x+1$ функцияни $X=[-1;\ 1]$ оралиқда қарайлик. Бу функциянинг $x\to 0$ даги лимитини топамиз.

$X=[-1;\ 1]$ тўплам нуқталаридан 0 га интилувчи ихтиёрий $\{x_n\}$ кетма-кетлик олайлик: $x_n\to 0$. Берилган функциянинг $x=x_n$ даги қийматларидан иборат кетма-кетлик

$$\{f(x_n)\}=\{x_n^2+x_n+1\}.$$

бўлади. $x_n\to 0$ да $f(x_n)$ нинг лимитини топамиз:

$$\lim_{x_n\to 0} f(x_n)=\lim_{x_n\to 0}(x_n^2+x_n+1)=\lim_{x_n\to 0} x_n^2+\lim_{x_n\to 0} x_n+\lim_{x_n\to 0} 1=1.$$

Демак,

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(x^2+x+1)=1.$$

3. $f(x)=\frac{x-1}{|x-1|}$ $(x\neq 1)$ функция $x\to 1$ да лимитга эгами?

Бу функцияни $x\to 1$ да лимитга эгами ёки йўқлигини аниқлаш учун 1 га интиладиган ушбу иккита кетма-кетликни оламиз:

$$\{x_n\}=\left\{1+\frac{1}{n}\right\},\qquad \{y_n\}=\left\{1-\frac{1}{n}\right\}.$$

Бунда

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)=1,$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n=\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)=1.$$

Берилган функциянинг қийматларидан иборат кетма-кетликлар қуйидагича

$$\{f(x_n)\}=\left\{\frac{1+\frac{1}{n}-1}{\left|1+\frac{1}{n}-1\right|}\right\}=\left\{\frac{\frac{1}{n}}{\left|\frac{1}{n}\right|}\right\}=\left\{\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right\}=\{1\},$$

$$\{f(y_n)\}=\left\{\frac{1-\frac{1}{n}-1}{\left|1-\frac{1}{n}-1\right|}\right\}=\left\{\frac{-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right\}=\{-1\}$$

бўлиб, бунда

$$\lim f(x_n)=\lim 1=1,$$

$$\lim f(y_n)=\lim(-1)=-1.$$

Шундай қилиб, 1 га интиладиган иккита $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетлик олинганда берилган функциянинг қийматларидан иборат кетма-кетликлар битта сонга интилмайди (уларнинг лимитлари мос равишда 1 ва -1 га тенг). Демак $f(x)=\frac{x-1}{|x-1|}$ функция $x\to 1$ да лимитга эга эмас.

Функция лимитини қуйидагича ҳам таърифлаш мумкин.

11.3-таъриф. *Агар ҳар қандай мусбат* ε *сон олинганда ҳам шундай* $\delta>0$ *сон топилсаки,* x *ўзгарувчининг* $|x-a|<\delta$ *тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида*

$$|f(x)-b|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, b *сон* $f(x)$ *функциянинг* a *нуқтадаги* ($x\to a$ *даги*) *лимити деб аталади ва юқоридагидек,*

$$\lim_{x\to a} f(x)=b$$

каби белгиланади.

$x\to\infty$ да функция лимити. $f(x)$ функция $(-\infty;+\infty)$ да аниқланган бўлсин.

11.4-таъриф. *Агар* $\forall \varepsilon > 0$ *сон олинганда ҳам шундай* $\delta > 0$ *сон топилсаки,* $|x| > \delta$ *тенгсизликни қаноатлантирувчи барча* x *ларда*

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда b *сон* $f(x)$ *функциянинг* $x \to \infty$ *даги лимити дейилади ва*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b$$

каби ёзилади.

Бир томонли лимитлар. $f(x)$ функция $(a; c)$ да аниқланган бўлсин.

11.5-таъриф. *Агар* $\forall \varepsilon > 0$ *олинганда ҳам шундай* $\delta > 0$ *сон топилсаки,* x *нинг* $a < x < a + \delta$ *тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида*

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

бўлса, у ҳолда b *сон* $f(x)$ *функциянинг* $x = a$ *даги ўнг лимити дейилади ва*

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = b \text{ ёки } \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = b$$

каби белгиланади.

11.6-таъриф. *Агар* $\forall \varepsilon > 0$ *сон олинганда ҳам шундай* $\delta > 0$ *сон топилсаки,* x *нинг* $c - \delta < x < c$ *тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида*

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

бўлса, у ҳолда b *сон* $f(x)$ *функциянинг* $x = c$ *даги чап лимити дейилади ва*

$$\lim_{x\to c-0} f(x) = b \quad \text{ёки} \quad \lim_{\substack{x\to c\\ x<c}} f(x) = b$$

каби белгиланади.

Функциянинг ўнг ва чап лимитларига унинг *бир томонли лимитлари* дейилади.

2-§. Лимитга эга бўлган функцияларнинг хоссалари

Биз юқорида функция лимитини сонлар кетма-кетлигининг лимити орқали таърифладик. Лимитга эга бўлган кетма-кетликлар (яқинлашувчи кетма-кетликлар) маълум хоссаларга эга эди (қаралсин, X боб, 6-§). Шунга ўхшаш хоссалар лимитга эга бўлган функциялар учун ҳам ўринли бўлади. Уларни келтириш билан кифояланамиз.

Бирор X тўплам берилган бўлиб, a нуқта шу тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин. Бу тўпламда $f(x)$ функция аниқланган бўлсин.

1°. Агар $x \to a$ да $f(x)$ функция чекли лимитга эга бўлса:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b,$$

у ҳолда x ўзгарувчининг a нуқтанинг етарли кичик атрофида $f(x)$ функция чегараланган бўлади.

2°. Агар $x \to a$ да $f(x)$ функция чекли лимитга эга бўлса, у ягона бўлади.

X тўпламда $f(x)$ функция билан бирга $g(x)$ функция ҳам аниқланган бўлсин.

3°. Агар $x \to a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда $f(x) \pm g(x)$ функция ҳам чекли лимитга эга ва

$$\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

бўлади.

4°. Агар $x \to a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда $f(x) \cdot g(x)$ функция ҳам чекли лимитга эга бўлиб,

$$\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

бўлади.

5°. Агар $x \to a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$ функция ҳам чекли лимитга эга бўлиб,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \quad (\lim_{x\to a} g(x) \neq 0)$$

бўлади.

Юқоридаги 4°-хоссадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

11.1-натижа. *Агар $x \to a$ да $f(x)$ функция чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда $k \cdot f(x)$ функция (k — const) ҳам лимитга эга бўлиб,*

$$\lim_{x\to a} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x\to a} f(x)$$

бўлади.

Мисоллар. 1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x^3 - 3x^2 + x}{7x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x(2x^2 - 3x + 1)}{7x} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{7}(2x^2 - 3x + 1) = \frac{1}{7}(\lim_{x\to 0} 2x^2 - \lim_{x\to 0} 3x + \lim_{x\to 0} 1) =$$

$$= \frac{1}{7}(2 \lim_{x\to 0} x^2 - 3 \lim_{x\to 0} x + 1) = \frac{1}{7}(2\cdot 0 - 3\cdot 0 + 1) = \frac{1}{7}.$$

$$2. \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x})^2 - 1^2}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0} 1}{\lim\limits_{x\to 0} (\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

3-§. Ажойиб лимитлар

1. Ушбу

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

муносабат ўринлидир. Шуни исботлаймиз.

Аввало x ўзгарувчининг $0 < x < \frac{\pi}{2}$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи қийматларида

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \tag{11.1}$$

тенгсизликларнинг бажарилишини кўрсатамиз.

Бунинг учун текисликда маркази (0; 0) нуқтада, радиуси R га тенг бўлган доирани оламиз (қаралсин: 100- чизма). Бу чизмадан кўринадики, ΔAOB нинг юзи $S_1 = \frac{1}{2} R^2 \sin x$, AOB секторнинг юзи $S_2 = \frac{1}{2} R^2 x$, ΔAOC нинг юзи $S_3 = \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} x$ бўлади. Равшанки,

$$S_1 < S_2 < S_3.$$

Демак,

$$\frac{1}{2} R^2 \sin x < \frac{1}{2} R^2 x < \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} x.$$

Бу тенгсизликларнинг ҳамма томонларини $\frac{1}{2} R^2$ га бўлиб топамиз:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

x ўзгарувчининг $0 < x < \frac{\pi}{2}$ бўлишини эътиборга олиб, (11.1) тенгсизликларнинг ҳамма томонини $\sin x$ га бўламиз. Натижада

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

бўлади. Уни, аввало

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

кўринишда, сўнг

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x$$

кўринишда ёзиб оламиз. Агар

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \sin \frac{x}{2} < 2 \cdot \frac{x}{2} = x$$

муносабатни эътиборга олсак, унда

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x$$

тенгсизликларга келамиз. Равшанки, бу тенгсизликдан

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < |x|$$

бўлиши келиб чиқади.

$\forall\, \varepsilon > 0$ сонни олиб, унга кўра $\delta > 0$ сонни (уни олинган ε ва $\frac{\pi}{2}$ сонлардан кичик қилиб) олинса, у ҳолда $|x - 0| = |x| < \delta$ бўлганда

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < |x| < \varepsilon$$

бўлади. Бу эса

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

бўлишини билдиради.

2. Биз 10-боб, 7-§ да натурал аргументли ушбу $f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ функция $n \to \infty$ да лимитга эга эканини кўрсатдик ва бу лимитни e деб атадик:

$$\lim_{n \to \infty} f(n) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Кўрсатиш мумкинки, ихтиёрий аргументли ушбу $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ функция ҳам $x \to \infty$ да ($x \to 0$ да) лимитга эга бўлади ва бу лимит ҳам худди e га тенг бўлади:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \ \left(\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e\right).$$

Мисоллар. 1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{\sin ax}{ax} \cdot ax}{\frac{\sin bx}{bx} \cdot bx} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{a}{b} \cdot \frac{\frac{\sin ax}{ax}}{\frac{\sin bx}{bx}} =$

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin ax}{ax}}{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin bx}{bx}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a}{b}.$$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{x+1}{x-1} - 1\right)^x = \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{x+1-x+1}{x-1}\right)^x =$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^x = \lim_{x \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2} \cdot 2} \cdot \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{2}{x-1}\right) \right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}} \cdot \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}} \cdot \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n-1}\right) = e \cdot e = e^2.$$

4-§. Чексиз кичик ва чексиз катта функциялар. Функцияларни солиштириш

Бирор ҳақиқий сонлар тўплами X берилган бўлиб, a нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин. Бу тўпламда $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ функциялар аниқланган бўлсин.

11.7-таъриф. *Агар $x \to a$ да $\alpha(x)$ функциянинг лимити нолга тенг бўлса:*

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0,$$

у ҳолда $\alpha(x)$ функция $x \to a$ да чексиз кичик функция деб аталади.

Масалан, $\alpha(x) = \sin x$, $\alpha(x) = x^2$ функцияларнинг ҳар бири $x \to 0$ да чексиз кичик функциялар бўлади.

11.8-таъриф. *Агар $x \to a$ да $\beta(x)$ функциянинг лимити чексиз бўлса:*

$$\lim_{x\to a} \beta(x) = \infty$$

у ҳолда $\beta(x)$ функция $x \to a$ да чексиз катта функция деб аталади.

Масалан, $\beta(x) = \frac{1}{x}$ функция $x \to 0$ да чексиз катта функция бўлади.

Чексиз кичик ва чексиз катта функциялар орасида боғланиш бор.

1°. Агар $\alpha(x)$ $(\alpha(x) \neq 0)$ функция чексиз кичик бўлса, $\frac{1}{\alpha(x)}$ чексиз катта функция бўлади.

2°. Агар $\beta(x)$ функция чексиз катта бўлса, $\frac{1}{\beta(x)}$ чексиз кичик функция бўлади.

$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар X тўпламда берилган бўлиб, a нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

11.9-таъриф. *Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар учун шундай ўзгармас C $(C > 0)$ сон топилсаки, a нуқтанинг атрофидаги барча x лар учун*

$$|f(x)| \leqslant C \cdot |g(x)|$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $x \to a$ да $f(x)$ функция $g(x)$ функцияга нисбатан чегараланган деб аталади ва

$$f(x) = O(g(x))$$

каби белгиланади.

Масалан, $x \to 0$ да $x^2 = O(x)$ бўлади.

11.10-таъриф. *Агар $f(x)$ ва $g(x)$ чексиз кичик функциялар учун*

$$f(x) = \alpha(x) \cdot g(x)$$

бўлиб, бунда $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$ бўлса, у ҳолда $x \to a$ да $f(x)$ функция $g(x)$ функцияга нисбатан юқори тартибли чексиз кичик функция деб аталади ва

$$f(x) = o(g(x))$$

каби белгиланади.

Масалан, $x \to 0$ да $1 - \cos x = o(x)$ бўлади.

XII БОБ. ФУНКЦИЯНИНГ УЗЛУКСИЗЛИГИ

1-§. Функция узлуксизлиги таърифлари

Функциянинг узлуксизлиги тушунчаси функция лимити тушунчаси орқали киритилади.

$f(x)$ функция бирор X тўпламда берилган бўлиб, $x_0 (x_0 \in X)$ нуқта шу тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

12. 1-таъриф. *Агар $x \to x_0$ да $f(x)$ функция чекли лимитга эга бўлиб,*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (12.1)$$

бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз дейилади.

Мисоллар. 1. $f(x) = x^2 + 5x + 6$ функцияни қарайлик. Равшанки, бу функция $(-\infty, +\infty)$ да аниқланган. Бу функция ихтиёрий $x_0 (x_0 \in (-\infty, +\infty))$ нуқтада узлуксиз бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (x^2 + 5x + 6) = x_0^2 + 5x_0 + 6$$

бўлади ва агар $x_0^2 + 5x_0 + 6 = f(x_0)$ бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда берилган функция учун

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

эканлигини топамиз. Демак, $f(x) = x^2 + 5x + 6$ функция x_0 нуқтада $(x_0 \in (-\infty, +\infty))$ узлуксиз.

Юқоридаги (12.1) лимит муносабатни қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$\lim_{x - x_0 \to 0} [f(x) - f(x_0)] = 0. \qquad (12.2)$$

Айтайлик, қаралаётган $y = f(x)$ функциянинг графиги 101-чизмада тасвирланган эгри чизиқ бўлсин.

$x-x_0$ ни Δx билан белгилайлик: $x-x_0=\Delta x$. У ҳолда $x=x_0+\Delta x$ бўлади. Одатда Δx *аргумент x нинг x_0 нуқтадаги орттирмаси* деб аталади. $x\to x_0$ да Δx нолга интилади: $\Delta x\to 0$. Равшанки

$$f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0) \tag{12.3}$$

бўлади. Ушбу

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

айирма $y=f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмаси деб аталади ва Δy ёки $\Delta f(x_0)$ каби белгиланади:

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0). \tag{12.4}$$

Натижада (12.2), (12.3) ва (12.4) муносабатлардан фойдаланиб,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

тенгликни қуйидагича ҳам ёзиш мумкинлигини аниқлаймиз:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x)=0.$$

Бу эса $y=f(x)$ функциянинг узлуксизлигига қуйидагича ҳам таъриф бериш мумкинлигини кўрсатади.

12.2-таъриф. *Агар аргумент орттирмаси Δx нолга интилганда функция орттирмаси Δy ҳам нолга интилса, яъни*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$$

бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз дейилади.

Мисоллар

1. $f(x)=C$ (C — ўзгармас сон) функцияни қарайлик. Бу функция $(-\infty;+\infty)$ да аниқланган. Аргумент x га Δx орттирма бериб, функциянинг мос орттирмасини топамиз:

$$\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=c-c=0.$$

Унда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f=0$$

бўлади. Демак, $f(x)=C$ функция $x\in(-\infty;+\infty)$ нуқтада узлуксиз бўлади.

2. $f(x)=\sin x$ функцияни қарайлик. Бу функция $(-\infty;+\infty)$ да аниқланган. Аргумент x га Δx орттирма бериб, функциянинг орттирмасини топамиз:

$$\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=\sin(x+\Delta x)-\sin x.$$

Маълумки,

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Унда

$$\Delta f = 2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}\cos\frac{x+\Delta x+x}{2} = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

бўлади. Бу тенгликда $\Delta x \to 0$ да лимитга ўтамиз:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f = \lim_{\Delta x\to 0} 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) =$$

$$= 2\left[\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right] =$$

$$= 2\cdot\sin\frac{0}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{0}{2}\right) = 2\cdot 0\cdot\cos x = 0.$$

Демак,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f = 0$$

бўлади. Бу эса $f(x)=\sin x$ функциянинг $x\in(-\infty, +\infty)$ нуқтада узлуксиз эканини билдиради.

12.3-таъриф. *Агар $f(x)$ функция X тўпламнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция X тўпламда узлуксиз деб аталади.*

Биз юқорида $f(x)=x^2+5x+6$, $f(x)=C$, $f(x)=\sin x$ функцияларнинг ихтиёрий $x\,(x\in(-\infty, +\infty))$ нуқтада узлуксиз бўлишини кўрсатган эдик.

Бу функциялар $(-\infty, +\infty)$ да узлуксиз бўлади.

Пировардида функция узлуксизлигининг яна битта таърифини келтирамиз.

12. 4-таъриф. *Агар $\forall\,\varepsilon>0$ сон учун шундай $\delta>0$ сон топилсаки, функция аргументи x нинг $|x-x_0|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида*

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз деб аталади.

2-§. Функциянинг узилиши

12.5-таъриф. *Агар*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{12.5}$$

муносабат бажарилмаса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада узилишга эга (узилади) деб аталади.

Энди (12.5) муносабатнинг бажарилмайдиган ҳолларини аниқлаштирамиз.

1) $x\to x_0$ да $f(x)$ функция чекли лимитга (уни b дейлик) эга бўлиб, бу лимит $f(x_0)$ га тенг эмас:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = b \neq f(x_0).$$

Равшанки, бу ҳолда (12.5) муносабат бажарилмайди. Демак, $f(x)$ функция x_0 нуқтада узилади.

Мисол. Ушбу

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{агар } x\neq 0 \text{ бўлса,}\\ 1, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса}\end{cases}$$

функцияни қарайлик. $x\to 0$ да функциянинг лимити 0 бўлади: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$. Бироқ, $f(x)$ функциянинг $x=0$ нуқтадаги қиймати $f(0)=1$ бўлганлигидан

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0\neq f(0)$$

бўлади. Қаралаётган $f(x)$ функция $x=0$ нуқтада узилади (102-чизма).

2) $x\to x_0$ да $f(x)$ функция лимити мавжуд эмас ёки у чексиз. Бу ҳолда ҳам (12.5) муносабат бажарилмайди. Демак, $f(x)$ функция x_0 нуқтада узилади.

Мисол. Ушбу

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-1|}{x-1}, & \text{агар } x\neq 1 \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } x=1 \text{ бўлса}\end{cases}$$

функцияни қарайлик. Бу функция $x\to 1$ да лимитга эга эмас. Бу ҳолда ҳам (12.5) муносабат бажарилмайди. Демак, $f(x)$ функция $x_0=1$ нуқтада узилади (103-чизма).

3-§. Узлуксиз функциялар устида арифметик амаллар

$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар X тўпламда берилган бўлсин.

1°. *Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар x_0 ($x_0\in X$) нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда $f(x)\pm g(x)$ функция ҳам шу x_0 нуқтада узлуксиз бўлади.*

2°. *Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар x_0 ($x_0\in X$) нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда $f(x)\cdot g(x)$ функция ҳам шу x_0 нуқтада узлуксиз бўлади.*

3°. *Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар x_0 ($x_0\in X$) нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда $\dfrac{f(x)}{g(x)}\left(g(x)\neq 0\right)$ функция ҳам шу x_0 нуқтада узлуксиз бўлади.*

Бу хоссалар содда исботланади. Биз улардан бирини, масалан, 2°-хоссанинг исботини келтирамиз.

2°-хоссанинг исботи. Шартга кўра $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар нуқтада узлуксиз. Унда узлуксизлик таърифига асосан

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta g(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}[g(x_0+\Delta x)-g(x_0)]=0 \qquad (12.6)$$

бўлади. Энди $f(x)\cdot g(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмаси

$$\Delta [f(x_0)\cdot g(x_0)] = [f(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0+\Delta x)] - [f(x_0)\cdot g(x)]$$

ни олиб, уни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\Delta [f(x_0)\cdot g(x_0)] = [f(x_0+\Delta x) - f(x_0)]\, g(x_0+\Delta x) + [g(x_0+\Delta x) - g(x_0)]\, f(x_0) = \Delta f(x_0)\cdot g(x_0+\Delta x) + \Delta g(x_0)\cdot f(x_0). \qquad (*)$$

Натижада

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta [f(x_0)\cdot g(x_0)] = \lim_{\Delta x\to 0} [g(x_0+\Delta x)\cdot \Delta f(x_0) + f(x_0)\cdot \Delta g(x_0)] = \lim_{\Delta x\to 0} [g(x_0+\Delta x)\cdot \Delta f(x_0)] + \lim_{\Delta x\to 0} [f(x_0)\cdot \Delta g(x_0)]$$

бўлади. Юқоридаги (12.6) муносабатларни эътиборга олиб,

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta [f(x_0)\cdot g(x_0)] = 0$$

бўлишини топамиз. Бу эса $f(x)\cdot g(x)$ функциянинг x_0 нуқтада узлуксиз бўлишини билдиради.

Мураккаб функциянинг узлуксизлиги. $y=\varphi(x)$ функция X тўпламда берилган бўлиб, $u=f(y)$ функция эса Y тўпламда ($Y=\{\varphi(x): x\in X\}$) берилган бўлсин. Улар ёрдамида

$$u = f(\varphi(x))$$

мураккаб функция ҳосил қилинган бўлсин.

Агар $y=\varphi(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз, $u=f(y)$ функция эса мос y_0 ($y_0=\varphi(x_0)$) нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда $u=f(\varphi(x))$ мураккаб функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлади.

Келтирилган хоссалар ёрдамида кўпгина функцияларнинг узлуксизлиги топилади. Масалан, $f(x)=x$, $g(x)=\sin x$ функцияларнинг $(-\infty, +\infty)$ оралиқда узлуксиз бўлиши кўрсатилган эди. Юқоридаги 1°—3°- хоссаларга асосан $y=x+\sin x$, $y=x-\sin x$, $y=x\sin x$ функциялар ҳам $(-\infty, +\infty)$ оралиқда узлуксиз.

4-§. Элементар функцияларнинг узлуксизлиги

Мазкур курснинг 9-боб, 13-§ ида элементар функцияларни қараб ўтган эдик. Барча элементар функциялар ўз аниқланиш соҳасида узлуксиз бўлади.

Ушбу бобнинг 1-§ ида $y=\sin x$ функциянинг узлуксизлиги кўрсатилди. Энди $y=a^x$ ($a\neq 1$; $a>0$) функциянинг $(-\infty, +\infty)$ оралиқда узлуксиз бўлишини кўрсатамиз.

Маълумки, $y=f(x)=a^x$ ($a\neq 1$, $a>0$) функция $(-\infty, +\infty)$ оралиқда аниқланган. Шу оралиқдан ихтиёрий x_0 ($x_0\in(-\infty, +\infty)$) нуқтани олиб, унга Δx орттирма берамиз. Натижада берилган функция ҳам орттирма олади:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = a^{x_0+\Delta x} - a^{x_0}.$$

Уни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\Delta f(x_0) = a^{x_0+\Delta x} - a^{x_0} = a^{x_0} a^{\Delta x} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{\Delta x} - 1).$$

Энди $\Delta x \to 0$ да бу орттирманинг лимитини ҳисоблаймиз:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} a^{x_0}(a^{\Delta x} - 1) = a^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \to 0}(a^{\Delta x} - 1) = a^{x_0} \cdot 0 = 0.$$

Демак,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0.$$

Функция узлуксизлиги таърифига биноан, берилган $y = a^x$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлади. Қаралаётган x_0 нуқта $(-\infty, +\infty)$ оралиқнинг ихтиёрий нуқтаси бўлганлигидан $y = a^x$ функциянинг $(-\infty, +\infty)$ да узлуксиз бўлиши келиб чиқади.

Бошқа элементар функцияларнинг ўз аниқланиш соҳасида узлуксиз бўлиши худди шу каби кўрсатилади.

5-§. Функция узлуксизлигидан фойдаланиб муҳим лимитларни ҳисоблаш

Айтайлик, $y = f(x)$ функция X оралиқда аниқланган ва шу оралиқда узлуксиз бўлсин. Ихтиёрий $x_0 \in X$ нуқтани олайлик. Узлуксизлик таърифига асосан

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

бўлади. Равшанки, $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$. Демак,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x). \tag{12.7}$$

Бу муносабатдан функция лимитларини топишда фойдаланилади.

Мисоллар. 1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}$ $(a \neq 1,\ a > 0)$ лимит ҳисоблансин.

Логарифмик функциянинг аниқлаш соҳасида узлуксизлигидан ва (12.7) муносабатни эътиборга олиб топамиз:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \log_a(1+x) = \lim_{x \to 0} \left[\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] =$$

$$= \log_a\left[\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \log_a e \ (\text{Чунки } \lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e).$$

Демак,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e.$$

Хусусан,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \ln e = 1.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$ $(a\neq 1,\ a>0)$ лимит ҳисоблансин.

Бу лимитни ҳисоблаш учун $a^x-1=t$ деб белгилаймиз. Равшанки, $x\to 0$ да $t\to 0$ ва

$$a^x-1=t\Rightarrow a^x=1+t\Rightarrow \log_a a^x=\log_a(1+t)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x\log_a a=\log_a(1+t)\Rightarrow x=\log_a(1+t).$$

Натижада ушбу тенгликка эга бўламиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\log_a(1+t)}{t}}.$$

Агар

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\log_a(1+t)}{t}}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\log_a(1+t)}{t}}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a$$

бўлишини ҳисобга олсак, у ҳолда

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \qquad (a\neq 1,\ a>0)$$

эканлигини топамиз.

3. Ушбу $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$ лимит топилсин.

Юқоридагига ўхшаш мулоҳаза билан бу лимитни α га тенг бўлишини кўрсатиш мумкин:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha.$$

Одатда бу

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e \qquad \left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1\right),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \quad (a\neq 1,\ a>0),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$$

лимитлар *ажойиб лимитлар* дейилади.

6-§. Узлуксиз функцияларнинг хоссалари

Узлуксиз функциялар қатор хоссаларга эга. Қуйида узлуксиз функцияларнинг хоссасини ифодаловчи иккита теоремани исботсиз келтирамиз.

12. 1-теорема (Больцано-Коши теоремаси). *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ ёпиқ оралиқда (сегментда) аниқланган ва узлуксиз*

бўлиб, сегментнинг четки нуқталарида турли ишорали қийматларга эга бўлса, у ҳолда шундай c $(a < c < b)$ нуқта топиладики, у нуқтада функция нолга айланади: $f(c) = 0$.

Бу теорема содда геометрик маънога эга бўлиб, у узлуксиз функция (узлуксиз эгри чизиқ) Ox ўқининг бир томонидан иккинчи томонига ўтишда, уни албатта кесиб ўтишини ифодалайди (104-чизма).

12. 2-теорема (Вейерштрасс теоремаси). *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлса, у шу сегментда чегараланган бўлади.*

7-§. Функциянинг текис узлуксизлиги

$f(x)$ функция X тўпламда аниқланган ва узлуксиз бўлсин.

12. 6-таъриф. *Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, X тўпламнинг $|x_1 - x_2| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий x_1 ва x_2 нуқталарида*

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция X тўпламда текис узлуксиз дейилади.

Бу таърифдан кўринадики, агар $f(x)$ функция X да текис узлуксиз бўлса, у шу X да узлуксиз ҳам бўлади.

Мисоллар. 1. $f(x) = \sqrt{x}$ функцияни $x = [1, 2]$ сегментда қарайлик. Равшанки, бу функция $x \in [1, 2]$ да узлуксиз, $\forall \varepsilon > 0$ сон учун $\delta = \varepsilon$ деб олинса, $|x_1 - x_2| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий $x_1, x_2 \in [1, 2]$ учун

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right| = \left|\frac{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}\right| =$$

$$= \left|\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}\right| \leqslant \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} < |x_1 - x_2| < \delta = \varepsilon$$

бўлади. Демак, $\forall x_1, x_2 \in [1, 2]$ учун

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Бу эса $f(x) = \sqrt{x}$ функциянинг $[1, 2]$ да текис узлуксиз эканини билдиради.

2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ функция $X = (0, 1)$ интервалда узлуксиз, бироқ бу функция шу $(0,1)$ да текис узлуксиз эмас.

Қуйида функциянинг текис узлуксизлигини таъминлайдиган теоремани исботсиз келтирамиз.

12. 3-теорема (Кантор теоремаси). *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлса, у шу сегментда текис узлуксиз бўлади.*

Функциянинг ҳосиласи тушунчаси математик анализнинг асосий тушунчаларидан бири. Бу тушунча билан батафсил танишишдан аввал унга олиб келадиган битта масалани қараймиз.

1-§. Тезлик ҳақидаги масала

Моддий нуқта тўғри чизиқ бўйлаб $S=f(t)$ қонун бўйича ҳаракат қилсин.

Масала моддий нуқтанинг t_0 пайтдаги тезлигини (оний тезлигини) топишдан иборат.

Моддий нуқтанинг t_0 вақт давомида босиб ўтган йўли $f(t_0)$, $t_0+\Delta t$ $(\Delta t>0)$ вақт давомида босиб ўтган йўли эса $f(t_0+\Delta t)$ га тенг бўлади. Натижада вақтнинг t_0 пайтдан $t_0+\Delta t$ пайтга ўтишида моддий нуқта ΔS йўлни босиб ўтади (105-чизма). Бу масофа

$$\Delta S=f(t_0+\Delta t)-f(t_0)$$

га тенг. Демак, *моддий нуқта Δt вақт ичида ΔS йўлни босиб ўтади.* Унда

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

нисбат *ўртача тезликни* ифодалайди. Ўртача тезлик Δt га боғлиқ бўлиб, у қанчалик кичик бўлса,

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

ўртача тезлик моддий нуқтанинг t_0 пайтдаги тезлигига шунчалик яқин келади. Бошқача айтганда, Δt нолга интила борган сари

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

миқдор биз излаётган моддий нуқтанинг t_0 пайтдаги тезлигини тобора аниқроқ ифодалай боради.

Табиийки, ушбу

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

лимит моддий нуқтанинг t_0 пайтдаги *тезлиги* бўлади.

Шундай қилиб, *изланаётган оний тезликни топиш $S=f(t)$ функция орттирмаси ΔS ни аргумент орттирмаси Δt га бўлган нисбатининг аргумент орттирмаси нолга интилгандаги лимитини ҳисоблашга келар экан.* Умуман, жуда кўп масалаларнинг ечими юқоридагига ўхшаш нисбатнинг лимитини топиш билан ҳал қилинади. Бундай нисбатнинг лимити ҳосила тушунчасига олиб келади.

2-§. Функция ҳосиласининг таърифи

$y=f(x)$ функция (a, b) интервалда берилган бўлиб, $x_0\in(a, b)$ бўлсин. Бу x_0 нуқтага шундай Δx орттирма берайликки, $x_0+\Delta x\in(a, b)$ бўлсин $(\Delta x\gtrless 0)$. У ҳолда ушбу

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

орттирмага эга бўламиз.

13. 1-таъриф. *Агар* $\Delta x\to 0$ *да*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

нисбатнинг лимити мавжуд ва чекли бўлса, бу лимит $f(x)$ *функциянинг* x_0 *нуқтадаги ҳосиласи деб аталади ва* $f'(x_0)$, *ёки* $y'_{x=x_0}$, *ёки* $\frac{dy}{dx}$ *каби белгиланади:*

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

1-§ да келтирилган масалада S $f(t)$ қонун бўйича ҳаракатланаётган моддий нуқтанинг t_0 пайтдаги оний тезлиги $f(t)$ функциянинг t_0 нуқтадаги ҳосиласидан иборат бўлар экан.

13. 1-эслатма. Агар $\Delta x\to 0$ да

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

нинг лимити мавжуд бўлиб, $y+\infty$ (ёки $-\infty$) бўлса, уни ҳам $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи деб аталади. Бундай ҳосила чексиз ҳосила дейилади.

Мисоллар. 1. $y=f(x)=C$ ($C=\text{const}$) функциянинг ҳосиласи топилсин.

Аргумент x га Δx орттирма бериб, функциянинг орттирмасини топамиз:

$$\Delta y=\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)=C-C=0.$$

Сўнг бу орттирмани аргумент орттирмаси Δx га бўламиз. Натижада

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{0}{\Delta x}=0$$

бўлиб, ундан

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=0$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $y'=0$

Шундай қилиб,

$$y=C \text{ бўлса, } y'=0 \text{ бўлади.}$$

2. $y=f(x)=x$ функциянинг ҳосиласи топилсин.

Аргумент x га Δx орттирма бериб, функция орттирмасини топамиз:

$$\Delta y=\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)-x=\Delta x.$$

Сўнг бу орттирмани аргумент орттирмаси Δx га бўламиз. Натижада

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

бўлиб, ундан

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $y'=1$. Шундай қилиб,

$$y=x \text{ бўлса, } y'=1 \text{ бўлади.}$$

3. $y=\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ функциянинг ҳосиласи топилсин.

Аргумент x га Δx орттирма бериб, функция орттирмасини топамиз:

$$\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=\frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}=\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}.$$

Бу Δy ни Δx га бўламиз. Натижада

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x}=-\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}\cdot\frac{1}{\Delta x}=-\frac{1}{x(x+\Delta x)}.$$

Энди $\Delta x\to 0$ да $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбатнинг лимитини топамиз:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{1}{x(x+\Delta x)}\right)=-\frac{1}{x^2}\qquad (x\neq 0).$$

Демак,

$$y'=-\frac{1}{x^2}.$$

Шундай қилиб, $y=\frac{1}{x}$ бўлса, $y'=-\frac{1}{x^2}$ бўлади.

4. $y=\sin x$ функциянинг ҳосиласи топилсин.

Бу функция учун

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x$$

бўлади. Маълумки,

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Бу формуладан фойдалансак, унда Δy учун

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}=$$

$$=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

бўлишини топамиз. У ҳолда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Бундан

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

бўлиши келиб чиқади. Агар

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=1\quad\left(\text{чунки}\ \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1\right),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos\left[\lim_{\Delta x\to 0}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right]=\cos x$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1\cdot\cos x$$

тенгликка эга бўламиз. Демак, $y'=\cos x$. Шундай қилиб, $y=\sin x$ бўлса, $y'=\cos x$ бўлади.

13.3-эслатма. Ҳар қандай узлуксиз функция ҳам ҳосилага эга бўлавермайди. Масалан, ушбу $y=f(x)=|x|$ функция $x=0$ нуқтада ҳосилага эга бўлмайди.

Ҳақиқатан ҳам, $x=0$ нуқтага Δx орттирма бериб, функциянинг орттирмасини топамиз:

$$\Delta y=\Delta f(0)=f(0+\Delta x)-f(0)=|0+\Delta x|-|0|=|\Delta x|.$$

Унда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

бўлади. Бироқ $\Delta x\to 0$ да бу нисбатнинг лимити мавжуд эмас. Демак, $y=f(x)=|x|$ функция $x=0$ нуқтада ҳосилага эга эмас.

3-§. Ҳосиланинг геометрик маъноси

Айтайлик, $f(x)$ функция (a, b) интервалда берилган ва узлуксиз бўлсин. Бу функциянинг графиги 106-чизмада кўрсатилган AB эгри чизиқни тасвирласин.

AB чизиқда $M_0(x_0, f(x_0))$ нуқта билан бирга ушбу

$$M(x_0+\Delta x,\ f(x_0+\Delta x))$$

нуқтани олиб, улар орқали M_0M кесувчини ўтказамиз. Бу кесувчининг Ox ўқининг мусбат йўналиши билан ташкил этган бурчакни φ билан белгилаймиз.

13. 2-таъриф. *M_0M кесувчининг M нуқта $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ бўйлаб M_0 га интилгандаги лимит ҳолати $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиққа M_0 нуқтада ўтказилган уринма деб аталади.*

Уринманинг Ox ўқининг мусбат йўналиши билан ташкил этган бурчакни α дейлик.

106-чизма ва таърифдан $\Delta x \to 0$ да M нуқта M_0 га интилишини кўрамиз. Демак, $\Delta x \to 0$ да $\varphi \to \alpha$ бўлади.

Қаралаётган $f(x)$ функция x_0 нуқтада $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлсин. Таърифга кўра

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

$\triangle MM_0P$ дан:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi (\Delta x) = \frac{MP}{M_0P} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

бўлади. Бу тенгликдан эса

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

бўлиши келиб чиқади. Энди $\Delta x \to 0$ да лимитга ўтиб топамиз:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{arctg} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \operatorname{arctg} \left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right] = \operatorname{arctg} f'(x_0).$$

Демак, $\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi = \operatorname{arc\,tg} f'(x_0)$. Бундан эса

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги $f'(x_0)$ ҳосиласи шу функция графигига M_0 нуқтада ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентидан иборат экан.

Уринма ва нормалнинг тенгламаси. $y = f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи $f'(x_0)$ уринманинг бурчак коэффициенти бўлади. Унда $f(x)$ функция графигига $M_0(x_0, f(x_0))$ нуқтадан ўтказилган уринманинг тенгламаси

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

бўлади.

Кўп ҳолларда эгри чизиққа $M_0(x_0, f(x_0))$ нуқтасида ўтказилган нормалнинг тенгламасини ҳам билиш керак бўлади. Маълумки, эгри чизиққа $M_0(x_0, f(x_0))$ нуқтада ўтказилган нормал шу нуқтадаги уринмага перпендикуляр бўлар эди. Демак, нормалнинг тенгламаси ушбу кўринишда бўлади:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (f'(x_0) \neq 0).$$

4-§. Функциянинг узлуксиз бўлиши билан унинг ҳосилага эга бўлиши орасидаги боғланиш

Айтайлик, $y=f(x)$ функция (a, b) да берилган бўлиб, $x_0(x_0\in(a, b))$ нуқтада $f'(x_0)$ чекли ҳосилага эга бўлсин. Унда ҳосила таърифига биноан

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{бўлиб,} \quad \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x_0)\right]=0$$

бўлади. Ушбу $\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x_0)=\alpha(\Delta x)$ белгилаш қиламиз. Бунда, равшанки, $\Delta x\to 0$ да $\alpha(\Delta x)\to 0$ бўлиб,

$$\Delta y=f'\cdot(x_0)\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x \tag{13.1}$$

бўлади.

Одатда, (13.1) формула *функция орттирмасининг формуласи* дейилади. Бу формуладан $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ бўлиши келиб чиқади. Бу эса $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтада узлуксиз бўлишини билдиради.

Шундай қилиб, $f(x)$ функция x_0 нуқтада чекли $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлса, функция шу нуқтада узлуксиз бўлади.

13. 4-эслатма. Узлуксиз функциялар ҳам доим ҳосилага эга бўлавермайди. Масалан, $f(x)=|x|$ функция $x=0$ нуқтада узлуксиз, бироқ бу функция шу нуқтада ҳосилага эга эмас.

5-§. Тескари функциянинг ҳосиласи

$y=f(x)$ функция (a, b) да берилган бўлиб, унга тескари $x=\varphi(y)$ функция мавжуд бўлсин.

Агар $y=f(x)$ функция $x_0(x_0\in(a, b))$ нуқтада $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлиб $f'(x_0)\neq 0$ бўлса, у ҳолда бу функцияга тескари бўлган $x=\varphi(y)$ функция $y_0=f(x_0)$ нуқтада ҳосилага эга бўлади ва

$$\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)} \tag{13.2}$$

тенглик ўринли бўлади.

y_0 нуқтага Δy орттирма берайлик. Унда $x=\varphi(y)$ функция ҳам Δx орттирмага эга бўлади. Энди

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} \quad (\Delta y\neq 0\Rightarrow\Delta x\neq 0)$$

тенгликда $\Delta y\to 0$ да лимитга ўтиб ($\Delta y\to 0$ да Δx ҳам нолга интилади) топамиз:

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Агар

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\varphi'(y_0),\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$$

эканини эътиборга олсак, у ҳолда юқоридаги тенгликдан

$$\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$$

бўлиши келиб чиқади. Шуни исботлаш керак эди.

Мисол. $y=\arcsin x$ $(-1<x<1)$ функциянинг ҳосиласи топилсин.

Равшанки, $y=\arcsin x$ функция $x=\sin y$ функцияга нисбатан тескари функциядир. (13.2) формулага кўра $y'_x=\frac{1}{x'_y}$ бўлади:

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}\Rightarrow y'=\frac{1}{(\sin y)'}\Rightarrow y'=\frac{1}{\cos y}\Rightarrow y'=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}\Rightarrow y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Демак, $y=\arcsin x$ бўлса, $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ бўлади.

6-§. Мураккаб функциянинг ҳосиласи

$y=\varphi(x)$ функция X тўпламда, $u=f(y)$ функция эса Y $(Y=\{\varphi(x):x\in X\})$ тўпламда берилган бўлиб,

$$u=f(\varphi(x))$$

мураккаб функцияга эга бўлайлик.

Агар $y=\varphi(x)$ функция x_0 нуқтада $\varphi'(x_0)$ ҳосилага эга бўлса, $u=f(y)$ функция y_0 $(y_0=\varphi(x_0))$ нуқтада $f'(y_0)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда $u=f(\varphi(x))$ мураккаб функция ҳам x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлади ва ушбу

$$[f(\varphi(x))]'_{x=x_0}=f'(y_0)\cdot\varphi'(x_0)=f'(\varphi(x_0))\cdot\varphi'(x_0)$$

формула ўринли бўлади.

x га Δx орттирма берамиз. Унда $y=\varphi(x)$ функция $\Delta\varphi$ орттирмага, $u=f(y)$ функция эса ўз навбатида Δu орттирмага эга бўлади. Функция орттирмаси формуласи (13.1) га кўра

$$\Delta u=f'(y_0)\cdot\Delta\varphi+\alpha\cdot\Delta\varphi$$

бўлади. Бу тенгликнинг ҳар икки томонини Δx га бўламиз:

$$\frac{\Delta u}{\Delta x}=f'(y_0)\cdot\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}+\alpha\cdot\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}.$$

Бу тенгликда $\Delta x\to 0$ да лимитга ўтиб топамиз:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=f'(y)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha\cdot\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}=f'(y_0)\cdot\varphi'(x_0).$$

Шундай қилиб,

$$[f(\varphi(x))]'_{x=x_0} = f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0).$$

Мисол. $u = \sin^3 x$ функциянинг ҳосиласи топилсин.

Агар $u = y^3$, $y = \sin x$ дейилса, унда (13.2) формулага кўра

$$u' = (y^3)' \cdot (\sin x)' = 3y^2 \cdot \cos x = 3 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x.$$

7-§. Ҳосила ҳисоблашдаги содда қоидалар

$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар (a, b) оралиқда берилган бўлсин.

1°. *Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда $f(x) \pm g(x)$ функция ҳам ҳосилага эга бўлиб,*

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

бўлади.

2°. *Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда $f(x) \cdot g(x)$ функция ҳам ҳосилага эга бўлиб,*

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

бўлади.

3°. *Агар $f(x)$ ва $g(x)$* $(g(x) \neq 0)$ функциялар *$f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда $\frac{f(x)}{g(x)}$ функция ҳам ҳосилага эга бўлиб,*

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

бўлади.

Бу тасдиқларни исботлаш қийин эмас. Улардан бирини, масалан, 2°-тасдиқнинг исботини келтирамиз.

2°-тасдиқнинг исботи. x аргументга Δx орттирма берамиз. Унда $f(x)$, $g(x)$ ва $f(x) \cdot g(x)$ функциялар ҳам ушбу

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x), \qquad \Delta g(x) = g(x + \Delta x) - g(x),$$

$$\Delta [f(x) \cdot g(x)] = f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) g(x)$$

орттирмаларга эга бўлади. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $f'(x)$, $g'(x)$ ҳосилаларга эга. Демак,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}, \quad g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x}.$$

12-бобнинг 3-§ ида келтирилган (*) муносабат каби

$$\Delta [f(x) g(x)] = \Delta f(x) \cdot g(x + \Delta x) + \Delta g(x) \cdot f(x)$$

бўлади. Бу тенгликнинг ҳар иккала томонини Δx га бўлиб, сўнгра $\Delta x \to 0$ да лимитга ўтамиз:

$$\frac{\Delta [f(x) g(x)]}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x) \cdot g(x + \Delta x) + \Delta g(x) \cdot f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \frac{\Delta g(x)}{\Delta x},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta[f(x)g(x)]}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\cdot g(x+\Delta x)+f(x)\cdot\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}\right]=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x)+\lim_{\Delta x\to 0} f(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}=$$
$$=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x).$$

Агар

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta[(fx)g(x)]}{\Delta x}=[f(x)\cdot g(x)]'$$

эканини эътиборга олсак, унда юқоридаги тенгликдан

$$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

бўлиши келиб чиқади.

Хусусан, $g(x)=C$ — const бўлса, у ҳолда

$$[C\cdot f(x)]'=f'(x)\cdot C+f(x)\cdot(C)'=f'(x)\cdot C+f(x)\cdot 0=C\cdot f'(x)$$

бўлади. Демак,

$$[C\cdot f(x)]'=C\cdot f'(x).$$

8-§. Элементар функцияларнинг ҳосилалари

Қуйида элементар функцияларнинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз.

1. Даражали функциянинг ҳосиласи. $y=x^{\mu}$ $(x>0)$ функциянинг ҳосиласини топиш учун x аргументга Δx орттирма бериб, функция орттирмасини ҳисоблаймиз:

$$\Delta y=(x+\Delta x)^{\mu}-x^{\mu}\Rightarrow\Delta y=x^{\mu}\cdot\frac{(x+\Delta x)^{\mu}}{x^{\mu}}-x^{\mu}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\Delta y=x^{\mu}\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)^{\mu}-x^{\mu}=x^{\mu}\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu}-1\right].$$

Энди бу Δy ни Δx га бўлиб, $\Delta x\to 0$ да лимитга ўтамиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x^{\mu}\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu}-1\right]}{\Delta x}=x^{\mu-1}\cdot x\cdot\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu}-1}{\Delta x}=$$
$$=x^{\mu-1}\cdot\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu}-1}{\frac{\Delta x}{x}},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[x^{\mu-1}\cdot\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu}-1}{\frac{\Delta x}{x}}\right]=$$
$$=x^{\mu-1}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu}-1}{\frac{\Delta x}{x}}=x^{\mu-1}\cdot\mu.$$

$\left(\text{чунки, } \lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{(1+\alpha)^{\mu}-1}{\alpha}=\mu\right)$. Демак, $y'=\mu\cdot x^{\mu-1}$. Шундай қилиб, *$y=x^{\mu}$ бўлса, у ҳолда $y'=\mu\cdot x^{\mu-1}$ бўлади.*

2. Кўрсаткичли функциянинг ҳосиласи. $y=a^{x}$ $(a>0,\ a\neq 1)$ кўрсаткичли функциянинг ҳосиласини топиш учун x аргументга Δx орттирма бериб, функция орттирмасини ҳисоблаймиз:

$$\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^{x}=a^{x}\cdot a^{\Delta x}-a^{x}=a^{x}(a^{\Delta x}-1).$$

Энди уни Δx га бўлиб, $\Delta x\to 0$ да лимитга ўтамиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{a^{x}(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x}(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=a^{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^{x}\cdot\ln a$$

$\left(\text{чунки } \lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{a^{\alpha}-1}{\alpha}=\ln a\right)$.

Демак, $y'=a^{x}\cdot\ln a$. Шундай қилиб, $y=a^{x}$ бўлса, $y'=a^{x}\cdot\ln a$ бўлади.

3. Логарифмик функциянинг ҳосиласи. $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1,\ x>0)$ логарифмик функция аргументи x га Δx орттирма бериб, функция орттирмасини топамиз:

$$\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x.$$

Бу орттирмани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\Delta y=\log_a\frac{x+\Delta x}{x}=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

Функция орттирмаси Δy ни аргумент орттирмаси Δx га бўлиб, сўнгра $\Delta x\to 0$ да лимитга ўтиб топамиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\cdot\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\frac{\Delta x}{x}}\cdot\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=$$

$$=\frac{1}{x}\left[\frac{1}{\frac{\Delta x}{x}}\cdot\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right]=\frac{1}{x}\cdot\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{1/\Delta x/x},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\frac{\Delta x}{x}}}\right]=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\Bigg(1+$$

$$+\frac{\Delta x}{x}\Bigg)^{\frac{1}{\frac{\Delta x}{x}}}=\frac{1}{x}\log_a\left[\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\frac{\Delta x}{x}}}\right]=\frac{1}{x}\log_a e$$

(чунки $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$, қаралсин, X боб, 8- §).

Демак, $y' = \frac{1}{x}\log_a e$. Шундай қилиб,

$$y = \log_a x \text{ бўлса, } y' = \frac{1}{x}\log_a e \text{ бўлади.}$$

Хусусан,

$$y = \ln x \textit{ бўлса, } y' = \frac{1}{x}\log_e e = \frac{1}{x} \textit{ бўлади.}$$

4. Тригонометрик функцияларнинг ҳосилалари. Биз 2-§ да $y = \sin x$ функциянинг ҳосиласини топган эдик: $y = \sin x$ *бўлса*, $y' = \cos x$ *бўлади*. Худди ўша йўл билан $y = \cos x$ функциянинг ҳосиласи топилади: бу ҳосила $y' = (\cos x)' = -\sin x$ га тенг бўлади. Демак,

$$y = \cos x \textit{ бўлса, } y' = -\sin x \textit{ бўлади.}$$

Энди $y = \operatorname{tg} x$ функциянинг ҳосиласини ҳисоблаймиз. Маълумки,

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Демак,

$$y' = (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'.$$

Икки функция бўлинмасининг ҳосиласи ҳақидаги қоидадан фойдаланамиз:

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$\frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Демак,

$$y = \operatorname{tg} x \textit{ бўлса, } y' = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \textit{ бўлади.}$$

Худди шунга ўхшаш,

$$y = \operatorname{ctg} x \textit{ бўлса, } y' = (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \textit{ бўлиши кўрсатилади.}$$

9-§. Тескари тригонометрик функцияларнинг ҳосилалари

Биз 5-§ да $y = \arcsin x$ функциянинг ҳосиласини топган эдик. Унда кўрдикки,

$$y = \arcsin x \textit{ бўлса, } y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

бўлади.

Энди $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ функцияларнинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз.

Равшанки, $y = \arccos x$ функция $x = \cos y$ функцияга нисбатан тескари функциядир. (13.2) формулага кўра $y'_x = \frac{1}{x'_y}$.

У ҳолда

$$y' = (\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Демак,

$$y = \arccos x \text{ бўлса, } y' = (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ бўлади.}$$

Энди $y = \operatorname{arctg} x$ функцияни қарайлик. Бу $y = \operatorname{arctg} x$ функция $x = \operatorname{tg} y$ функцияга нисбатан тескари функция бўлади. (13.2) формулага кўра

$$y' = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} =$$

$$= \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Демак,

$$y = \operatorname{arctg} x \text{ бўлса, } y' = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \text{ бўлади.}$$

Худди шунга ўхшаш,

$$y = \operatorname{arcctg} x \text{ бўлса, } y' = (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

бўлиши кўрсатилади.

10-§. Ҳосилалар жадвали

Юқорида келтирилган элементар функцияларнинг ҳосилаларини жамлаб, қуйидаги ҳосилалар жадвалини тузамиз:

1° $y = C = \text{const}$ бўлса, $y' = (C)' = 0$ бўлади.

2°. $y = x^{\mu} (x > 0)$, $y' = (x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$.

3°. $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, $y' = (a^x)' = a^x \ln a$

4°. $y = \log_a x (a > 0,\ a \neq 1)$, $y' = (\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$.

5°. $y = \ln x (x > 0)$, $y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$.

6°. $y = \sin x$, $y' = (\sin x)' = \cos x$.

7°. $y = \cos x$, $y' = (\cos x)' = -\sin x$.

8°. $y = \operatorname{tg} x$, $y' = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$.

9°. $y = \operatorname{ctg} x$, $y' = (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ $(x \neq k\pi)$.

10°. $y = \arcsin x$, $y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 < x < 1)$.

11°. $y = \arccos x$, $y' = (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 < x < 1)$.

12°. $y = \operatorname{arc tg} x$, $y' = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

13°. $y = \operatorname{arc ctg} x$, $y' = (\operatorname{arc ctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

11-§. Функциянинг дифференциалланувчилиги тушунчаси

$y = f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлиб, $x_0 \in (a, b)$ бўлсин.

Бу функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмаси

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Δx га боғлиқ бўлади. Масалан, $y = f(x) = x^3 + x + 1$ функциянинг $x_0 = 1$ нуқтадаги орттирмаси:

$$\Delta y = \Delta f(1) = f(1 + \Delta x) - f(1) = [(1 + \Delta x)^3 + (1 + \Delta x) + 1] -$$
$$-(1^3 + 1 + 1) = 1 + 3\Delta x + 3\Delta x^2 + \Delta x^3 + \Delta x + 2 - 3 =$$
$$= \Delta x^3 + 3\Delta x^2 + 4\Delta x.$$

Умуман, функция орттирмаси Δy билан аргумент орттирмаси Δx орасидаги боғланиш етарли даражада мураккаб бўлиши мумкин.

13.3- таъриф. *Агар $y = f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмаси Δy ни ушбу*

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha \Delta x \tag{13.3}$$

кўринишда ифодалаш мумкин бўлса, у ҳолда $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада дифференциалланувчи деб аталади. Бунда A Δx га боғлиқ бўлмаган ўзгармас, α эса Δx га боғлиқ ва у нолга интилади.

13.1-теорема. *Агар $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада чекли $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда бу функция x_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлади.*

Исбот. $f(x)$ функция x_0 нуқтада чекли $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлсин. Ҳосила таърифига биноан

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

бўлади. Бундан

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$$

тенглик келиб чиқади.

$y = f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмаси (13.3) кўринишда ифодаланди. Демак, $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада дифференциалланувчи.

13. 2-теорема. *Агар $y=f(x)$ функция x_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда бу функция x_0 нуқтада чекли $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлади.*

Исбот. $f(x)$ функция x_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда таърифга кўра $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги $\Delta y=\Delta f(x_0)$ орттирмаси учун

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=A\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$$

бўлади. Бу тенгликдан эса

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{A\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x}{\Delta x}=A+\alpha$$

бўлиши келиб чиқади. Кейинги тенгликда $\Delta x\to 0$ да лимитга ўтсак, унда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(A+\alpha)=\lim_{\Delta x\to 0}A+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha=A+0=0$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$y'=f'(x_0)=A.$$

Бу эса $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтада чекли $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлишини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Шундай қилиб, $y=f(x)$ *функциянинг x_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлиши учун унинг шу нуқтада чекли $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлиши зарур ва етарли* экан.

Шунинг учун ҳам функциянинг ҳосиласини топишни уни *дифференциаллаш* деб юритилади.

Юқоридаги теоремадан кўринадики, *агар $y=f(x)$ функция x_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлса, унинг таърифидаги A ўзгармас $f'(x_0)$ га тенг бўлади:*

$$A=f'(x_0).$$

12-§. Функциянинг дифференциали таърифи

$y=f(x)$ функция (a, b) интервалда берилган бўлиб, x_0 нуқтада ($x_0\in(a, b)$) дифференциалланувчи бўлсин. Унда функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмаси

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x \tag{13.4}$$

бўлади. Бунда $\Delta x\to 0$ да $f'(x_0)\cdot\Delta x$ ва $\alpha\cdot\Delta x$ ларнинг ҳар бири нолга интилса-да, $\alpha\cdot\Delta x$ ҳад $f'(x_0)\cdot\Delta x$ га қараганда тезроқ нолга интилади.

13. 4-таъриф. *Юқоридаги* (13.4) *тенгликдаги $f'(x_0)\cdot\Delta x$ ҳад $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги дифференциали дейилади ва dy ёки $df(x_0)$ каби белгиланади:*

$$dy=df(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x=y'\cdot\Delta x. \tag{13.5}$$

Агар $y=x$ бўлганда $dy=x'\cdot\Delta x=\Delta x$, яъни $dx=\Delta x$ бўлишини эътиборга олсак, унда функциянинг дифференциалини

$$dy = y'dx \text{ ёки } df(x_0) = f'(x_0)\cdot dx \qquad (13.6)$$

деб ола оламиз.

$y = f(x)$ функциянинг графиги 107-чизмада тасвирланган эгри чизиқни ифодаласин.

3-§ да функция ҳосиласининг геометрик маъноси AB эгри чизиққа M_0 нуқтада ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентидан иборат эканини кўрган эдик. Демак, $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$. $\triangle M_0CD$ дан топамиз:

$$\frac{CD}{M_0D} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Агар $M_0D = \Delta x$ эканини эътиборга олсак, унда юқоридаги тенгликдан

$$CD = M_0D\cdot\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha\cdot\Delta x$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$CD = \operatorname{tg}\alpha\cdot\Delta x = f'(x)\cdot\Delta x = dy.$$

Бундан функция дифференциалининг ушбу геометрик маъноси келиб чиқади: $y = f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги бу дифференциали функция графигига M_0 нуқтада ўтказилган уринма орттирмасидан иборат бўлади.

Мисоллар. Ушбу функцияларнинг дифференциаллари топилсин:

1) $y = x^2 + 2x + 1$; 2) $y = e^x + \sin 2x$.

Функциянинг дифференциали функция ҳосиласининг аргумент дифференциалига кўпайтмасидан иборат эканидан фойдаланиб, берилган функцияларнинг дифференциалларини топамиз.

1) $dy = y'dx = (x^2 + 2x + 1)'\,dx = 2\,(x + 1)\,dx$.

2) $dy = y'dx = (e^x + \sin 2x)' = (e^x + 2\cos 2x)\,dx$.

13-§. Дифференциаллар жадвали

Энди 10-§ да келтирилган ҳосилалар жадвалидан фойдаланиб, элементар функцияларнинг дифференциаллари жадвалини келтирамиз:

1°. $y = C = \text{const}$, $dy = 0$.

2°. $y = x^\mu$, $dy = \mu x^{\mu-1}\,dx$ $(x > 0)$.

3°. $y = a^x$, $dy = a^x \ln a\,dx$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

4°. $y = \log_a x$, $dy = \frac{1}{x}\log_a e\,dx$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0)$.

5°. $y = \ln x$, $dy = \frac{1}{x}\,dx$ $(x > 0)$.

6°. $y = \sin x$, $dy = \cos x\,dx$.

7°. $y = \cos x$, $dy = -\sin x\,dx$.

8°. $y = \operatorname{tg} x$, $dy = \frac{1}{\cos^2 x}\,dx\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$.

9°. $y = \mathrm{ctg}x$, $dy = -\frac{1}{\sin^2 x}\,dx \quad (x \neq k\pi)$.

10°. $y = \arcsin x$, $dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad (-1 < x < 1)$.

11°. $y = \arccos x$, $dy = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad (-1 < x < 1)$.

12°. $y = \mathrm{arctg}x$, $dy = \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

13°. $y = \mathrm{arcctg}x$, $dy = -\frac{1}{1+x^2}\,dx$.

14-§. Функция дифференциалининг содда қоидалари

Энди дифференциаллашнинг содда қоидаларини келтирамиз.

Айтайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар (a, b) да берилган бўлиб, x $(x \in (a,b))$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ ҳамда $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$ функциялар ҳам дифференциалланувчи бўлиб,

а) $d\,[f(x) \pm g(x)] = df(x) \pm dg(x)$;

б) $d\,[f(x) \cdot g(x)] = df(x)\,g(x) + f(x)\,dg(x)$;

в) $d\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{df(x)\,g(x) - f(x)\,dg(x)}{g^2(x)} \quad (g(x) \neq 0)$

бўлади. Буларнинг бирортасини, масалан, а) ҳолни исботлаймиз.

а) ҳолнинг исботи. Юқоридаги (13.6) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$d\,[f(x) \pm g(x)] = (f(x) \pm g(x))'\,dx = [f'(x) \pm g'(x)]\,dx =$$
$$= f'(x)\,dx \pm g'(x)\,dx = df(x) \pm dg(x).$$

Демак,

$$d\,[f(x) \pm g(x)] = df(x) \pm dg(x).$$

$y = \varphi(x)$, $u = f(y)$ бўлиб, улар ёрдамида $u = f(\varphi(x))$ мураккаб функция тузилган бўлсин. Мураккаб функциянинг ҳосиласини ҳисоблаш қоидасидан фойдаланиб топамиз:

$$du = d\,[f(\varphi(x))] = [f(\varphi(x))]'\,dx =$$
$$= f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx = f'(y) \cdot y'dx = f'(y)\,dy.$$

Демак,

$$d\,[f(\varphi(x))] = f'(\varphi(x))\,d\varphi = f'(y)\,dy. \tag{13.7}$$

(13.6), (13.7) формулаларни солиштириб, қуйидаги хулосага келамиз:

Функция мураккаб бўлган ҳолда ҳам *функция дифференциали функция ҳосиласи* $f'(y)$ *билан аргумент* $y = \varphi(x)$ *нинг дифференциали* dy *кўпайтмасига тенг* бўлар экан (бу ҳолда dy эркли орттирма бўлмасдан, балки y x ўзгарувчининг функцияси бўлади). (13.6), (13.7) формулаларнинг кўриниши бир хил. Одатда буни *дифференциал кўринишининг инвариантлиги* дейилади.

15-§. Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар

Биз ҳосила тушунчаси билан танишганда ва элементар функцияларнинг ҳосилаларини ҳисоблаганда кўрдикки, функция ҳосиласининг ўзи яна x ўзгарувчининг функцияси бўлиши мумкин экан. Демак, функция ҳосиласининг ҳосиласи тушунчасини қараш мумкин. $y = f(x)$ функция (a, b) да берилган бўлсин.

13.5-таъриф. *Функция ҳосиласининг ҳосиласи шу функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи деб аталади ва y'' ёки $f''(x)$ каби белгиланади:*

$$y'' = (y')', \quad f''(x) = (f'(x))'.$$

Масалан, $y = \sin x$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи

$$y' = (\sin x)' = \cos x, \quad y'' = (y')' = (\cos x)' = -\sin x.$$

$$(\sin x)'' = -\sin x$$

бўлади.

Функциянинг учинчи, тўртинчи ва ҳ. к. тартибдаги ҳосилалари юқоридагидек таърифланади:

$$y''' = (y'')', \quad y^{IV} = (y''')', \ \ldots$$

Умуман, функциянинг n-тартибли ҳосиласи $(n-1)$-тартибли ҳосиласининг ҳосиласидир:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'.$$

Мисоллар. Ушбу функцияларнинг иккинчи тартибли ҳосилалари топилсин: а) $y = ax^2 + bx + c$; б) $y = 2^{\sin x}$; в) $y = \operatorname{arctg} x$.

а) $y' = (ax^2 + bx + c)' = 2ax + b,$

$$y'' = (y')' = (2ax + b)' = 2a.$$

б) $y' = (2^{\sin x})' = 2^{\sin x} \cdot \ln 2 \cdot \cos x,$

$$y'' = (y')' = (\ln 2 \cdot 2^{\sin x} \cdot \cos x)' = \ln 2 \cdot (2^{\sin x} \cdot \cos x)' =$$

$$= \ln 2\ [(2^{\sin x})' \cdot \cos x + 2^{\sin x} \cdot (\cos x)'] = \ln 2\ [2^{\sin x} \cdot \ln 2 \cdot \cos x \cdot \cos x +$$

$$+ 2^{\sin x}(-\sin x)] = \ln 2 \cdot 2^{\sin x}(\cos^2 x \cdot \ln 2 - \sin x).$$

в) $y' = (\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2},$

$$y'' = (y')' = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{(1)' \cdot (1 + x^2) - 1 \cdot (1 + x^2)'}{(1 + x^2)^2} =$$

$$= \frac{0 \cdot (1 + x^2) - 2x}{(1 + x^2)^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

13.6-таъриф. $y=f(x)$ *функция дифференциали* dy *нинг дифференциали берилган функциянинг иккинчи тартибли дифференциали деб аталади ва* d^2y *ёки* $d^2f(x)$ *каби белгиланади:*

$$d^2y=d\,(dy)\ \text{ёки}\ d^2f(x)=d\,(df\,(x)).$$

Худди шунга ўхшаш, функциянинг учинчи, тўртинчи ва ҳ. к. тартибли дифференциаллари таърифланади.

Умуман, функциянинг n-тартибли дифференциали унинг $(n-1)$-тартибли дифференциалининг дифференциалидан иборатдир:

$$d^ny=d\,(d^{n-1}y),\quad d^n\,f\,(x)=d\ (d^{n-1}\,f\,(x)).$$

Маълумки, функциянинг дифференциали унинг ҳосиласи орқали ушбу $dy=y'\cdot dx$ формула билан ифодаланар эди. Бунда dx аргумент x нинг дифференциали бўлиб, у Δx га тенг. Шу тенгликдан фойдаланиб топамиз:

$$d^2y=d\,(dy)=d\,(y'dx)=dx\cdot d\,(y')=dx\cdot(y')'\cdot dx=y''dx^2.$$

Демак, *функциянинг иккинчи тартибли дифференциали функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласининг аргумент дифференциали квадратига кўпайтмасига тенг.*

Мисол. $y=\sin 2x$ функциянинг иккинчи тартибли дифференциали қуйидагича бўлади:

$$dy=y'dx=2\cos 2x\,dx;\qquad d^2y=d\,(dy)=-4\sin 2x\,dx^2.$$

16-§. Дифференциал ҳисобнинг асосий теоремалари

Дифференциал ҳисобнинг асосий теоремаларини келтиришдан аввал баъзи бир тушунча ва тасдиқни эслатиб ўтамиз.

$y=f\,(x)$ функция X оралиқда берилган бўлсин. Агар X оралиқда шундай x_0 нуқта (ички нуқта) топилсаки,

$$\forall\ x\in X\ (x\neq x_0)\ \text{учун}\ f\,(x)<f\,(x_0)\ \ (f\,(x)>f\,(x_0))$$

бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция X оралиқнинг ички нуқтаси x_0 да ўзининг *энг катта (энг кичик) қийматига эришади* деб аталади.

Агар $f\,(x)$ *функция* $[a,b]$ *сегментда узлуксиз бўлса, у ҳолда функция шу сегментда ўзининг энг катта (энг кичик) қийматига эришади, яъни шундай* c_0 *нуқта* (c_1 *нуқта*) $(a<c_0<b,\ a<c_1<b)$ *топиладики,*

$$\forall\ x\in X\ \text{учун}\ f\,(x)<f\,(c_0)\quad (f\,(x)>f\,(c_1))$$

бўлади (бу узлуксиз функциянинг хоссасини ифодаловчи Вейерштрасс теоремасидир).

13.3-теорема (Ферма теоремаси). *Агар* $f\,(x)$ *функция* X *оралиқнинг ички нуқтаси* x_0 *да ўзининг энг катта (энг кичик) қийматига эришса ҳамда шу* x_0 *нуқтада чекли ҳосилага эга бўлса, у ҳолда функция ҳосиласининг* x_0 *нуқтадаги қиймати нолга тенг бўлади:*

$$f'\,(x_0)=0.$$

Исбот. $f(x)$ функция x_0 нуқтада ўзининг энг катта қийматига эришсин ва шу нуқтада чекли $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлсин. Демак,

$$\forall x \in X \ (x \neq x_0) \text{ учун } f(x) < f(x_0).$$

x_0 нуқтага шундай Δx орттирма берамизки, $x_0 + \Delta x \in X$ бўлсин. Юқоридаги айтилганга кўра, ҳар доим

$$f(x_0 + \Delta x) < f(x_0),$$

бинобарин,

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$$

бўлади. У ҳолда:

а) $\Delta x > 0$ бўлганда
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0 \text{ ва } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leqslant 0,$$

б) $\Delta x < 0$ бўлганда
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0 \text{ ва } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geqslant 0$$

бўлишини аниқлаш қийин эмас. Агар

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

эканлигини эътиборга олсак, $f'(x_0) \leqslant 0$, $f'(x_0) \geqslant 0$ бўлиб, ундан

$$f'(x_0) = 0$$

бўлиши келиб чиқади.

Худди шунга ўхшаш, x_0 нуқтада функция энг кичик қийматга эга бўлганда ҳам $f'(x_0) = 0$ бўлиши исботланади. Бу эса теоремани исботлайди.

Теорема содда геометрик маънога эга: $y = f(x)$ функция графигига $M_0(x_0; f(x_0))$ нуқтада ўтказилган уринма Ox ўқига параллел бўлади (108-чизма).

13.4-теорема (Ролль теоремаси). *$y = f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда берилган бўлсин. Агар*

1) *$f(x)$ функция $[a, b]$ да узлуксиз;*

2) *$f(x)$ функция ҳеч бўлмаганда (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ҳосилага эга;*

3) *$[a, b]$ сегментнинг четки a ва b нуқталарида $f(a) = f(b)$ бўлса, у ҳолда a ва b нуқталар орасида шундай c $(a < c < b)$ нуқта топиладики,*

$$f'(c) = 0$$

бўлади.

Исбот. Шартга кўра $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз. Унда, юқорида айтилганига асосан функция $[a, b]$ сегментда ўзининг энг катта ва энг кичик қийматига эришади. Айтайлик, функциянинг энг катта қиймати M, энг кичик қиймати эса m бўлсин.

Агар $m = M$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда ўзгармас бўлади: $f(x)=\text{const}$. Шунинг учун ихтиёрий x нуқтада $f'(x)=0$ бўлади.

Энди $m \neq M$, яъни $m < M$ бўлган ҳолни қарайлик.

Бу ҳолда $f(a)=f(b)$ бўлганлиги сабабли функция ўзининг энг катта ва энг кичик қийматларининг ҳеч бўлмаганда бирини a ва b нуқталар орасидаги бирор c $(a<c<b)$ нуқтада қабул қилади. Шу нуқтада Ферма теоремасига кўра

$$f'(c)=0$$

бўлади. Теорема исбот бўлди.

13.5-теорема (Лагранж теоремаси). *$y=f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда берилган бўлсин. Агар*

1) *$f(x)$ функция $[a, b]$ да узлуксиз,*

2) *$f(x)$ функция ҳеч бўлмаганда (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда a ва b нуқталар орасида шундай c $(a<c<b)$ нуқта топиладики,*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

бўлади.

Исбот. Теоремани исботлаш мақсадида ушбу

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \tag{13.8}$$

ёрдамчи функцияни киритамиз. Бу ёрдамчи функция:

1) $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз. Чунки (13.8) тенгликнинг ўнг томонидаги ҳар бир ҳад $[a, b]$ сегментда узлуксиз, $F(x)$ эса бундай узлуксиз функциялар йиғиндисидан (айирмасидан) иборатдир;

2) $F'(x)$ ҳосилага эга ва у

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{13.9}$$

га тенг;

3) $F(a)=f(a)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)=0,$

$$F(b)=f(b)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=f(b)-f(a)-$$
$$-[f(b)-f(a)]=0$$

ва, демак,

$$F(a)=F(b).$$

Демак, $F(x)$ функция $[a, b]$ да Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантирар экан. Унда Ролль теоремасига кўра a ва b орасида шундай c $(a<c<b)$ нуқта топиладики,

$$F'(c)=0$$

бўлади. Юқоридаги (13.9) тенгликни эътиборга олиб,

$$F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

бўлишини топамиз. Кейинги тенгликдан эса

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

бўлиши келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Бу теорема содда геометрик маънога эга. $y=f(x)$ функциянинг графиги 109-чизмада тасвирланган эгри чизиқни ифодаласин. AB эгри чизиқда шундай M нуқта (унинг координаталари $(c, f(c))$ бўлади) мавжудки, бу нуқтадаги уринманинг бурчак коэффициенти $f'(c)$ га, AB кесувчининг бурчак коэффициенти $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ га тенг, яъни уринма билан кесувчи параллел бўлади.

XIV БОБ. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ҲИСОБНИНГ ТАТБИҚЛАРИ

Ушбу бобда функциянинг ҳосилаларидан фойдаланиб унинг ўзгариш характерини баён этамиз.

1-§. Функциянинг ўсувчи ва камаювчи бўлиши

14.1-теорема. *Агар $f(x)$ функция (a, b) да аниқланган ва чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, $\forall x\in(a, b)$ учун*

$$f'(x)\geqslant 0$$

бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $(a; b)$ да ўсувчи бўлади.

14.2-теорема. *Агар $f(x)$ функция (a, b) да аниқланган ва чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, $\forall x\in(a, b)$ учун*

$$f'(x)\leqslant 0$$

бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $(a; b)$ да камаювчи бўлади.

Бу келтирилган теоремалар бир хил мулоҳаза юритилиши билан исботланади. Шунинг учун уларнинг бирини исботлаш билан чегараланамиз.

14.1-теореманинг исботи. Шартга кўра $f(x)$ функция (a, b) да чекли $f'(x)$ ҳосилага эга ва $f'(x)\geqslant 0$. (a, b) оралиқда ихтиёрий x_1 ва x_2 $(x_1<x_2)$ нуқталарни олайлик. Унда $[x_1, x_2]\subset(a, b)$ бўлиб, $[x_1, x_2]$ да $f(x)$ функция Лагранж теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. Лагранж теоремасига мувофиқ, x_1 ва x_2 нуқталар орасида шундай c $(x_1<c<x_2)$ нуқта топиладики,

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c),$$

яъни

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)\cdot(x_2-x_1)$$

бўлади. Агар $x_1 < x_2$ ва $f'(c) \geqslant 0$ бўлишини эътиборга олсак, унда кейинги тенгликдан

$$f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0$$

бўлишини топамиз. Демак, $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Шундай қилиб

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$$

бўлади. Бу эса $f(x)$ функциянинг (a, b) да ўсувчи эканини билдиради. Теорема исбот бўлди.

14.1-натижа. *$f(x)$ функция (a, b) да чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. У ҳолда*

$$f'(x) \geqslant 0 \ \text{ва} \ f'(x) \leqslant 0$$

тенгсизликларни ечиб, берилган функциянинг ўсувчи ҳамда камаювчи бўладиган оралиқлари топилади.

Масалан, ушбу $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ функцияни қарайлик. Бу функциянинг ҳосиласи

$$f'(x) = \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{2(1+x^2) - 2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

бўлади. Энди $\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \geqslant 0$ тенгсизликни ечамиз:

$$\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \geqslant 0 \Rightarrow 1 - x^2 \geqslant 0 \Rightarrow (1-x)(1+x) \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - x \geqslant 0, \\ 1 + x \geqslant 0 \end{cases} \text{ва} \ \begin{cases} 1 - x \leqslant 0, \\ 1 + x \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant 1, \\ x \geqslant -1 \end{cases} \text{ва} \ \begin{cases} x \geqslant 1, \\ x \leqslant -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x \leqslant 1, \\ x \geqslant -1 \end{matrix} \Rightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Демак, берилган $f(x)$ функция $[-1, +1]$ оралиқда ўсувчи бўлади. Равшанки,

$$\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \leqslant 0 \Rightarrow 1 - x^2 \leqslant 0 \Rightarrow \begin{matrix} -\infty < x \leqslant -1, \\ 1 \leqslant x < +\infty. \end{matrix}$$

Демак, берилган $f(x)$ функция $(-\infty; -1]$ ва $[1; +\infty)$ оралиқларда камаювчи бўлади.

2-§. Функциянинг экстремумлари

Айтайлик, $f(x)$ функция (a, b) да берилган бўлиб, $x_0 \in (a, b)$ бўлсин.

14.1-таъриф. *Агар x_0 нуқтанинг шундай $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ $(\delta > 0)$ атрофи топилсаки, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ учун*

$$f(x) \leqslant f(x_0)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимумга эришади дейилади. Бунда x_0 нуқта функцияга максимум *қиймат берадиган нуқта, $f(x_0)$ эса функциянинг максимум қиймати дейилади.*

Функциянинг максимум қиймати қуйидагича белгиланади:

$$f(x_0) = \max_x \{f(x)\}.$$

14.2-таъриф. *Агар x_0 нуқтанинг шундай $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \subset \subset (a,\ b)\ (\delta > 0)$ атрофи топилсаки, $\forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ учун*

$$f(x) \geqslant f(x_0)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада минимумга эришади дейилади. Бунда x_0 функцияга минимум қиймат берадиган нуқта, $f(x_0)$ эса функциянинг минимум қиймати дейилади.

Функциянинг минимум қиймати қуйидагича белгиланади:

$$f(x_0) = \min_x \{f(x)\}.$$

Функциянинг максимум ва минимум қийматлари умумий ном билан унинг *экстремум қийматлари* деб аталади.

Юқорида келтирилган таърифлардан кўринадики, функциянинг максимум ва минимум қийматлари, унинг $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ даги энг катта ва энг кичик қийматлари бўлади.

Мисол. $f(x) = x^2$ функцияни қарайлик. Бу функция $x = 0$ нуқтада минимумга эришади. Ҳақиқатан ҳам, $x = 0$ нуқтанинг $(0 - \delta,\ 0 + \delta) = (-\delta,\ \delta)\ (\delta > 0)$ атрофидаги барча x нуқталар учун

$$f(x) \geqslant f(0), \text{ яъни } x^2 \geqslant 0$$

бўлади: $\forall x \in (-\delta,\ \delta) \Rightarrow f(x) \geqslant f(0)$

3-§. Функция экстремумининг зарурий шарти

$f(x)$ функция $(a;\ b)$ да берилган бўлсин. *Бу функция:* 1) x_0 $(x_0 \in \in (a;\ b))$ *нуқтада максимумга (минимумга) эришсин;* 2) x_0 *нуқтада чекли $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлсин. У ҳолда*

$$f'(x_0) = 0$$

бўлади.

Шуни исботлаймиз. Биринчидан, $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимумга (минимумга) эришганлиги сабабли шу x_0 нуқтанинг $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ атрофидаги барча x нуқталар учун

$$f(x) \leqslant f(x_0) \qquad (f(x) \geqslant f(x_0))$$

бўлади. Демак, $f(x)$ функция $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ да ўзининг энг катта (энг кичик) қиймати $f(x_0)$ га эришади.

Иккинчи томондан, $f(x)$ функция x_0 нуқтада чекли $f'(x_0)$ ҳосилага эга. Унда Ферма теоремасига кўра $f'(x_0) = 0$ *бўлади*.

Бироқ функциянинг ҳосиласи нолга тенг бўлган нуқтада берилган функция ҳар доим ҳам экстремумга эришавермайди. Масалан, $f(x) = x^3$ функциянинг ҳосиласи $f'(x) = 3x^2$ бўлиб, у $x = 0$ нуқтада нолга тенг: $f'(0) = 3 \cdot 0 = 0$. Лекин бу функция $x = 0$ нуқтада экстремумга эришмайди (чунки $f'(x) = 3x^2 \geqslant 0$ бўлиб, у ўсувчидир).

Шундай қилиб, функция ҳосиласининг нолга айланиши функция экстремумга эришишининг зарурий шарти экан.

Одатда функция ҳосиласини нолга айлантирадиган нуқта функциянинг *стационар нуқтаси* дейилади.

14.2-эслатма. Функция ҳосилага эга бўлмаган нуқтада ҳам экстремумга эга бўлиши мумкин. Масалан, $f(x)=|x|$ функция $x=0$ нуқтада ҳосилага эга эмас. Бироқ, бу функция $x=0$ нуқтада минимумга эришади.

$f(x)$ функция (a, b) да берилган бўлиб, у шу оралиқда $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин ва $x_0 \in (a, b)$ нуқтада экстремумга эришсин. Функциянинг графигига $(x_0, f(x_0))$ да ўтказилган уринма Ox ўқига параллел бўлади (110-чизма).

4-§. Функция экстремумининг етарли шартлари

$f(x)$ функция $(a; b)$ да берилган ва узлуксиз бўлсин. Бу функция шу оралиқда $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, x_0 $(x_0 \in (a, b))$ нуқтада нолга айлансин: $f'(x_0)=0$.

Масала $f(x)$ функция x_0 нуқтада экстремумга эришадими ёки йўқми, агар экстремумга эришса, у x_0 нуқтада максимумга эришадими ёки минимумга эришадими, шуни аниқлашдан иборат. Бу масалани ҳал қилиш учун аввало x_0 нуқтанинг $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ атрофини олайлик, $((x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (a, b))$.

1) $\forall x \in (x_0-\delta, x_0)$ *учун* $f'(x)>0$ *бўлсин. Бу ҳолда* 14.2-*теоремага кўра берилган функция* $(x_0-\delta, x_0)$ *да ўсувчи бўлади:*

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad (\forall x \in (x_0-\delta, x_0)). \tag{14.1}$$

2) $\forall x \in (x_0, x_0+\delta)$ *учун* $f'(x)<0$ *бўлсин. Бу ҳолда* 14.3-*теоремага кўра берилган функция* $(x_0, x_0+\delta)$ *да камаювчи бўлади:*

$$f(x_0) \geqslant f(x) \quad (\forall x \in (x_0, x_0+\delta)). \tag{14.2}$$

(14.1) ва (14.2) муносабатлардан $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ учун

$$f(x) \leqslant f(x_0)$$

бўлишини топамиз. Демак, $f(x)$ функция $x=x_0$ нуқтада максимумга эришади (111-чизма).

Энди 1) $\forall x \in (x_0-\delta, x_0)$ *учун* $f'(x)<0$ *бўлсин. Бу ҳолда* 14.3-*теоремага кўра берилган функция* $(x_0-\delta, x_0)$ *да камаювчи бўлади:*

$$f(x) \geqslant f(x_0) \quad (\forall x \in (x_0-\delta, x_0)). \tag{14.3}$$

2) $\forall x \in (x_0, x_0+\delta)$ *учун* $f'(x)>0$ *бўлсин. Бу ҳолда* 14.2-*теоремага кўра берилган функция* $(x_0, x_0+\delta)$ *да ўсувчи бўлади:*

$$f(x_0) \leqslant f(x) \quad (\forall x \in (x_0, x_0+\delta)). \tag{14.4}$$

(14.3) ва (14.4) муносабатлардан $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ учун

$$f(x) \geqslant f(x_0)$$

бўлишини топамиз. Демак, $f(x)$ функция $x=x_0$ нуқтада минимумга эришади (112-чизма).

Шундай қилиб, функция экстремумини аниқлаш учун қуйидаги қоидага (биринчи қоидага) келамиз:

1) берилган $f(x)$ функциянинг ҳосиласи $f'(x)$ ни топиб,

$$f'(x)=0$$

тенгламани ечамиз. Айтайлик, бу тенгламанинг ечимларидан бири x_0 бўлсин;

2) бу x_0 нуқтанинг $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ $(\delta>0)$ атрофини оламиз;

3) агар

$$\forall\, x\in(x_0-\delta,\ x_0) \text{ учун } f'(x)>0;$$
$$\forall\, x\in(x_0,\ x_0+\delta) \text{ учун } f'(x)<0$$

бўлса, яъни $f'(x)$ ҳосила x_0 нуқтани ўтишда ўз ишорасини «+» дан «—» га ўзгартирса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимумга эришади. Функциянинг максимум қиймати $f(x_0)$ бўлади;

4) агар

$$\forall\, x\in(x_0-\delta,\ x_0) \text{ учун } f'(x)<0,$$
$$\forall\, x\in(x_0,\ x_0+\delta) \text{ учун } f'(x)>0$$

бўлса, яъни $f'(x)$ ҳосила x_0 нуқтани ўтишда ўз ишорасини «—» дан «+» га ўзгартирса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада минимумга эришади. Функциянинг минимум қиймати $f(x_0)$ бўлади;

5) агар

$$\forall\, x\in(x_0-\delta,\ x_0) \text{ учун } f'(x)>0,$$
$$\forall\, x\in(x_0,\ x_0+\delta) \text{ учун } f'(x)>0 \qquad (14.5)$$

ёки

$$\forall\, x\in(x_0-\delta,\ x_0) \text{ учун } f'(x)<0,$$
$$\forall\, x\in(x_0,\ x_0+\delta) \text{ учун } f'(x)<0 \qquad (14.6)$$

бўлса, яъни $f'(x)$ ҳосила x_0 нуқтани ўтишда ўз ишорасини ўзгартирмаса, унда $f(x)$ функция x_0 нуқтада экстремумга эришмайди.

Мисол. $f(x)=2x^3-9x^2+12x-2$ функциянинг экстремумлари топилсин.

Аввало берилган функциянинг ҳосиласини ҳисоблаймиз:

$$f'(x)=(2x^3-9x^2+12x-2)'=6x^2-18x+12=6(x^2-3x+2).$$

Сўнгра

$$f'(x)=0, \text{ яъни } 6(x^2-3x+2)=0$$

тенгламани ечамиз:

$$6(x^2-3x+2)=0\Rightarrow x^2-3x+2=0\Rightarrow x_1=1,\ x_2=2.$$

Демак, $x_1=1$, $x=2$ нуқталар берилган функциянинг стационар нуқталари бўлади.

Энди функция ҳосиласини қуйидагича ёзиб оламиз:

$$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2).$$

$x=1$, $x=2$ стационар нуқталарнинг атрофларини олиб, унда функция ҳосиласи $f'(x)$ нинг ишорасини текширамиз.

$x=1$ нуқтанинг $(1-\delta,\ 1+\delta)$ $\left(0<\delta<\frac{1}{2}\right)$ атрофини олайлик.

Унда $\forall x(1-\delta, 1)$ учун $f'(x)=6(x-1)(x-2)>0$ бўлади, чунки бундай x нуқталар учун $x-1<0$, $x-2<0$ бўлади.

$\forall x\in(1,1+\delta)$ учун $f'(x)=6(x-1)(x-2)<0$ бўлади, чунки бундай x нуқталар учун $x-1>0$, $x-2<0$ бўлади.

Шундай қилиб, $f'(x)$ ҳосила $x_1=1$ нуқтани ўтишда ўз ишорасини «+» дан «—» га ўзгартиради. Демак, берилган функция $x=1$ нуқтада максимумга эришади ва функциянинг максимум қиймати

$$\max\{f(x)\}=f(1)=2\cdot1^3-9\cdot1^2+12\cdot1-2=3.$$

$x=2$ нуқтанинг $(2-\delta, 2+\delta)$ $\left(0<\delta<\frac{1}{2}\right)$ атрофини олайлик. Унда

$$\forall x\in(2-\delta, 2) \text{ учун } f'(x)=6(x-1)(x-2)<0$$

бўлади, чунки бундай x нуқталар учун $x-1>0$, $x-2<0$ бўлади.

$$\forall x\in(2, 2+\delta) \text{ учун } f'(x)=6(x-1)(x-2)>0$$

бўлади, чунки бундай x нуқталар учун $x-1>0$, $x-2>0$ бўлади.

Шундай қилиб, $f'(x)$ ҳосила $x_2=2$ нуқтани ўтишда ўз ишорасини «—» дан «+» га ўзгартиради. Демак, берилган функция $x_2=2$ нуқтада минимумга эришади ва функциянинг минимум қиймати:

$$\min\{f(x)\}=f(2)=2\cdot2^3-9\cdot2^2+12\cdot2-2=2.$$

Функция иккинчи тартибли ҳосилага эга бўлса, унда берилган функциянинг экстремумини топиш бирмунча осон бўлади.

$f(x)$ функция (a, b) да $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, x_0 $(x_0\in(a, b))$ нуқтада нолга айлансин:

$$f'(x_0)=0.$$

Агар $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтада иккинчи тартибли ҳосиласи мавжуд бўлиб,

$$f''(x_0)<0$$

бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимумга эришади.

Агар $f(x)$ функция учун

$$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)>0$$

бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $x=x_0$ нуқтада минимумга эришади.

Шундай қилиб, функция экстремумини аниқлаш учун қуйидаги қоидага (иккинчи қоидага) келамиз:

1) Берилган $f(x)$ функциянинг ҳосиласи $f'(x)$ ни топиб,

$$f'(x)=0$$

тенгламани ечамиз. Айтайлик, бу тенгламанинг ечимларидан бири x_0 бўлсин.

2) $f(x)$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи $f''(x)$ ни топиб, унинг x_0 нуқтадаги қийматини ҳисоблаймиз. Агар:

а) $f''(x_0) < 0$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $x = x_0$ нуқтада максимумга;

б) $f''(x_0) > 0$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $x = x_0$ нуқтада минимумга эришади.

Мисол. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ функциянинг экстремумлари топилсин.

Аввало берилган функциянинг ҳосиласини ҳисоблаймиз:

$$f'(x) = (x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1)' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = \\ = 5x^2(x^2 - 4x + 3).$$

Сўнгра

$$f'(x) = 0, \text{ яъни } 5x^2(x^2 - 4x + 3) = 0$$

тенгламани ечамиз. Бу тенгламанинг ечимлари $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$ бўлади. Демак, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, x_3 3 нуқталар берилган функциянинг стационар нуқталаридир.

Энди функциянинг иккинчи тартибли ҳосилаларини топамиз:

$$f''(x) = (f'(x))' = (5x^4 - 20x^3 + 15x^2)' = 20x^3 - 60x^2 + 30x = \\ = 10x(2x^2 - 6x + 3).$$

$$x_1 = 0 \text{ нуқтада } f''(0) = 10 \cdot 0(2 \cdot 0 - 6 \cdot 0 + 3) = 0,$$

$$x_2 = 1 \text{ нуқтада } f''(1) = 10 \cdot 1(2 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 3) = -10 < 0,$$

$$x_3 = 3 \text{ нуқтада } f''(3) = 10 \cdot 3(2 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 3) = 90 > 0$$

бўлади. Демак, берилган функция $x_2 = 1$ нуқтада максимумга, $x_3 = 3$ нуқтада минимумга эришади ва $\max\{f(x)\} = f(1) = 2$, $\min\{f(x)\} = = f(2) = -26$ *бўлади*.

5-§. Функциянинг энг катта ва энг кичик қийматлари

$f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. У ҳолда 12.2-теоремага кўра функция шу сегментда ўзининг энг катта ва энг кичик қийматларига ҳам эришади. Уни қуйидагича топилади:

1) функциянинг (a, b) даги барча максимум ва минимум қийматлари топилади;

2) функциянинг $[a, b]$ сегментнинг четки a ва b нуқталаридаги қийматлари $f(a)$ ва $f(b)$ топилади.

Сўнгра функциянинг барча максимум ва минимум қийматлари билан $f(a)$ ва $f(b)$ қийматлар биргаликда қаралади ва таққосланади. Бу қийматлар орасида энг каттаси $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментдаги энг катта қиймати, энг кичиги эса $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментдаги энг кичик қиймати бўлади.

Мисол. Периметри $2p$ $(p > 0)$ бўлган тўғри тўртбурчаклар орасида энг катта юзга эга бўлган тўғри тўртбурчак топилсин.

Айтайлик, бундай тўғри тўртбурчакнинг асоси x бўлсин. Унда тўғри тўртбурчакнинг баландлиги $p - x$ га, юзи эса

$$S = S(x) = x\cdot(p-x) \quad (0 < x < p)$$

га тенг бўлади. Бу функциянинг ҳосиласини топамиз:

$$S'(x) = (x\cdot(p-x))' = (xp-x^2)' = p-2x,$$

$$S'(x) = p-2x = 0 \Rightarrow x = \frac{p}{2}.$$

Демак, $x = \frac{p}{2}$ берилган $S(x)$ функциянинг стационар нуқтаси.

$$S''(x) = (p-2x)' = -2, \quad S''\left(\frac{p}{2}\right) = -2 < 0.$$

Демак, $S(x)$ функция $x = \frac{p}{2}$ нуқтада максимумга эришади ва функциянинг максимум қиймати

$$\max\{S(x)\} = S\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{p}{2}\left(p-\frac{p}{2}\right) = \frac{p^2}{4}$$

бўлади.

Демак, энг катта юзга эга бўлган тўғри тўртбурчак томони $\frac{p}{2}$ га тенг бўлган квадратдан иборат экан.

6-§. Эгри чизиқнинг қавариқлиги ва ботиқлиги

Букилиш (эгилиш) нуқтаси

$f(x)$ функция (a, b) интервалда берилган бўлиб, у шу интервалда $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Унда бу функция графигини ифодаловчи эгри чизиқнинг ҳар бир нуқтасида уринма мавжуд бўлади.

$f(x)$ функция графиги бўлган эгри чизиқни (функция графигини) $\overset{\frown}{AB}$ билан белгилайлик.

14.3-таъриф. *Агар (a, b) интервалнинг барча нуқталарида $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқ ҳар доим уринмадан пастда бўлса, у ҳолда $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқ (a, b) да қавариқ деб аталади* (113-чизма).

14.4-таъриф. *Агар (a, b) интервалнинг барча нуқталарида $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқ ҳар доим уринмадан юқорида бўлса, у ҳолда $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқ (a, b) да ботиқ деб аталади* (114-чизма).

14.5-таъриф. *Агар x_0 нуқтанинг $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ $((x_0-\delta,\ x_0+\delta)\subset(a, b),\ \delta>0)$ атрофи олинганда $(x_0-\delta,\ x_0)$ да эгри чизиқ қавариқ, $(x_0,\ x_0+\delta)$ да эгри чизиқ ботиқ ёки $(x_0-\delta,\ x_0)$ да эгри чизиқ* ботиқ, $(x_0,\ x_0+\delta)$ да эгри чизиқ қавариқ бўлса, у ҳолда эгри чизиқ x_0 нуқтада букилади (эгилади) деб аталади. Эгри чизиқнинг $(x_0,\ f(x_0))$ нуқтаси эса унинг букилиш (эгилиш) нуқтаси дейилади (115-чизма).

Функция ҳосилалари ёрдамида унинг графигининг қавариқлигини, ботиқлигини ҳамда эгилиш нуқталарини аниқлаш мумкин.

14.4-теорема. *$y = f(x)$ функция $(a;\ b)$ да аниқланган бўл-*

син. Агар функция $(a;\ b)$ да иккинчи тартибли $f''(x)$ ҳосилага эга бўлиб, $\forall x \in (a;\ b)$ учун

$$f''(x) < 0$$

бўлса, у ҳолда эгри чизиқ (функция графиги) $(a;\ b)$ да қавариқ бўлади.

Исбот. $y = f(x)$ функция $(a;\ b)$ да иккинчи тартибли $f''(x)$ ҳосилага эга бўлиб, $f''(x) < 0$ бўлсин. $(a;\ b)$ дан x_0 нуқта олиб, $f(x)$ функция графигига $(x_0;\ f(x_0))$ нуқтада уринма ўтказамиз (116-чизма). Бу уринманинг тенгламаси

$$Y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0),$$

яъни

$$Y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

бўлади.

Эгри чизиқ нуқталарининг ординаталари $y\ (y = f(x))$ билан уринма нуқталарининг ординаталари $Y\ (Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$ орасидаги айирма $y - Y$ ни қараймиз.

$$y - Y = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] =$$
$$= f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0). \qquad (14.8)$$

Энди $[x,\ x_0]$ сегментни олайлик. Равшанки, $[x;\ x_0] \subset (a,\ b)$. Бу $[x,\ x_0]$ сегментда $f(x)$ функция учун Лагранж теоремасининг барча шартлари бажарилади. Унда Лагранж теоремасига кўра

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c),$$

яъни

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) \quad (c \in (x;\ x_0)).$$

Юқоридаги (14.8) айирма қуйидаги кўринишга келади:

$$y - Y = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = [f'(c) - f'(x_0)](x - x_0).$$

Яна Лагранж теоремасидан фойдаланиб топамиз:

$$f'(c) - f'(x_0) = f''(c_1)(c - x_0).$$

Натижада

$$y - Y = f''(c_1)\cdot(x - x_0)(c - x_0). \qquad (14.9)$$

$(a;\ b)$ интервалнинг x_0 ва x нуқталарига нисбатан икки ҳол бўлиши мумкин:

а) $x < x_0$ бўлсин. Бунда $x < c < c_1 < x_0$ бўлиб,

$$x - x_0 < 0, \quad c - x_0 < 0$$

бўлади.

Агар $(a,\ b)$ да $f''(x) < 0$ бўлишини эътиборга олсак, унда (14.9) муносабатдан

$$y - Y < 0 \qquad (14.10)$$

бўлишини топамиз.

б) $x_0 < x$ бўлсин. Бунда $x_0 < c_1 < c < x$ бўлиб,

$$x - x_0 > 0, \quad c - x_0 > 0$$

бўлади. Унда (14.9) дан

$$y - Y < 0 \qquad (14.11)$$

бўлиши келиб чиқади.

(14.10) ва (14.11) муносабатлардан барча x лар ($x \in (a;\ b)$) учун

$$y - Y < 0, \text{ яъни } Y > y$$

бўлишини топамиз. Бу эса эгри чизиқ уринмадан ҳар доим пастда бўлишини билдиради. Демак, эгри чизиқ қавариқ бўлади.

Теорема исбот бўлди.

14.5-теорема. $f(x)$ *функция* $(a;\ b)$ *да аниқланган бўлсин.*

Агар функция $(a;\ b)$ *да иккинчи тартибли* $f''(x)$ *ҳосилага эга бўлиб,* $\forall x \in (a;\ b)$ *учун*

$$f''(x) > 0$$

бўлса, у ҳолда эгри чизиқ (функция графиги) $(a;\ b)$ *да ботиқ бўлади.*

Бу теорема юқорида келтирилган теорема каби исботланади.

Фараз қилайлик, $y = f(x)$ функция $(a;\ b)$ оралиқда берилган бўлиб, у шу оралиқда иккинчи тартибли $f''(x)$ ҳосилага эга бўлсин. x_0 нуқтанинг ($x_0 \in (a;\ b)$) атрофи $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ ($(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \subset$ $\subset (a,\ b)$) ни қараймиз.

Айтайлик,

$$\forall\ x \in (x_0 - \delta,\ x_0) \text{ учун } f''(x) < 0,$$
$$\forall\ x \in (x_0,\ x_0 + \delta) \text{ учун } f''(x) > 0$$

ёки

$$\forall\ x \in (x_0 - \delta,\ x_0) \text{ учун } f''(x) > 0,$$
$$\forall\ x \in (x_0,\ x_0 + \delta) \text{ учун } f''(x) < 0$$

бўлсин, яъни $f''(x)$ иккинчи тартибли ҳосила x_0 нуқтани ўтишда ўз ишорасини ўзгартирсин. Унда, юқоридаги теоремаларга кўра $f(x)$ функция графиги $(x_0 - \delta,\ x_0)$ да қавариқ (ботиқ), $(x_0,\ x_0 + \delta)$ да ботиқ (қавариқ) бўлади.

Демак, x_0 нуқтада функция графиги эгилади.

14.3-натижа. *Эгри чизиқнинг эгилиш нуқтасини функция иккинчи тартибли* $f''(x)$ *ҳосилани нолга айлантирадиган нуқталар орасида топилади.*

Мисол. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$ функцияни қавариқликка ва ботиқликка текширилиб, эгилиш нуқтаси топилсин.

Аввало берилган функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$f'(x) = (x^4 - 6x^2 + 5)' = 4x^3 - 12x,$$
$$f''(x) = (4x^3 - 12x)' = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1).$$

Модомики, берилган функция барча нуқталарда биринчи тартибли ҳосилага эга экан, унда функция графигининг ҳар бир нуқтасида уринма мавжуд.

Энди функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини нолга тенглаб, топамиз:

$$f''(x) = 12(x^2 - 1) = 12(x-1)(x+1) = 0,$$

$$x_1 = -1,\ x_2 = 1.$$

$x_1 = -1$ ва $x_2 = 1$ нуқталарнинг атрофларини олиб, унда функция иккинчи тартибли ҳосиласи $f''(x)$ нинг ишорасини текширамиз.

$x_1 = -1$ нуқтанинг $(-1-\delta,\ -1+\delta)$ атрофини $\left(0 < \delta < \frac{1}{2}\right)$ олайлик. Унда

$\forall x \in (-1-\delta,\ -1)$ учун $f''(x) = 12(x-1)(x+1) > 0$ бўлади, чунки бундай x лар учун $x - 1 < 0$, $x + 1 < 0$ бўлади.

$\forall x \in (-1,\ -1+\delta)$ учун $f''(x) = 12(x-1)(x+1) < 0$ бўлади, чунки бундай x лар учун $x - 1 < 0$, $x + 1 > 0$ бўлади.

$x_2 = 1$ нуқтанинг $(1-\delta,\ 1+\delta)$ $\left(0 < \delta < \frac{1}{2}\right)$ атрофини олайлик. Унда

$\forall x \in (1-\delta,\ 1)$ учун $f''(x) = 12(x-1)(x+1) < 0$ бўлади, чунки бундай x лар учун $x - 1 < 0$, $x + 1 > 0$ бўлади.

$\forall x \in (1, 1+\delta)$ учун $f''(x) = 12(x-1)(x+1) > 0$ бўлади, чунки бундай x лар учун $x - 1 > 0$, $x + 1 > 0$ бўлади.

Шундай қилиб, берилган функциянинг графиги $(-\infty,\ -1)$ оралиқда ботиқ, $(-1,\ 1)$ оралиқда қавариқ, $(1,\ +\infty)$ оралиқда ботиқ бўлади. $x = -1$ ва $x = 1$ нуқталар эгилиш нуқталари бўлади.

7-§. Эгри чизиқнинг асимптоталари

$y = f(x)$ функцияни қарайлик. Унинг графиги бирор эгри чизиқни тасвирласин. Баъзи ҳолларда функция графиги — эгри чизиқ шундай бўладики, x ўзгарувчи $+\infty$ (ёки $-\infty$) га интила борганда, у бирор тўғри чизиққа тобора яқинлаша боради. Одатда бундай тўғри чизиқ қаралаётган эгри чизиқнинг *асимптотаси* дейилади.

14.5-таъриф. *Агар*

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$$

бўлса, у ҳолда $y = kx + b$ тўғри чизиқ $f(x)$ функция графигининг асимптотаси (оғма асимптотаси) дейилади (117-чизма).

14.6-таъриф. *Агар*

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - b] = 0,$$

бўлса, у ҳолда $y = b$ тўғри чизиқ $f(x)$ функция графигининг горизонтал асимптотаси деб аталади (118-чизма).

14.7-таъриф. *Агар*

$$\lim_{x \to a \pm 0} f(x) = \infty$$

бўлса, у ҳолда $x = a$ *тўғри чизиқ* $f(x)$ *функция графигининг вертикал асимптотаси деб аталади* (119-чизма)

Қуйидаги теоремани исботсиз келтирамиз.

14.6-теорема. $f(x)$ *функция графиги* $y = kx + b$ *оғма асимптотага эга бўлиши учун*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = b$$

лимитларнинг ўринли бўлиши зарур ва етарли.

Мисоллар. 1. $f(x) = \frac{1}{x}$ функция графиги вертикал асимптотага эга бўлади. Бу асимптота $x = 0$ тўғри чизиқдан *(Oy* ўқидан) иборатдир, чунки (120-чизма)

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

2. $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$ функциянинг графиги горизонтал асимптоталарга эга бўлади. Бу асимптоталар $y = \frac{\pi}{2}$, $y = -\frac{\pi}{2}$ тўғри чизиқлардан иборатдир, чунки

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \operatorname{arc\,tg} x = -\frac{\pi}{2}$$

(121-чизма).

3. $f(x) = 2\sqrt{x^2 + 4}$ функция графигининг асимптотаси топилсин.

Маълумки, функция графигининг асимптотаси $y = kx + b$ тўғри чизиқдан иборат бўлиб,

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx]$$

бўлар эди. Шу формулалардан фойдаланиб, топамиз:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2\sqrt{x^2 + 4}}{x} = 2 \lim_{x \to \infty} \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} = 2,$$

$$b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to \infty} [2\sqrt{x^2 + 4} - 2x] =$$

$$= 2 \lim_{x \to \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4} - x)(\sqrt{x^2 + 4} + x)}{\sqrt{x^2 + 4} + x} = 2 \lim_{x \to \infty} \frac{(x^2 + 4) - x^2}{\sqrt{x^2 + 4} + x} =$$

$$= 2 \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4} + x} = 0.$$

Шундай қилиб, берилган функция графиги асимптотага (оғма асимптотага) эга ва бу асимптота $y = 2x$ тўғри чизиқдан иборат.

8-§. Функцияни текширишнинг умумий схемаси

Функция ҳақида ўрганилган маълумотлар берилган у ёки бу функцияни тўлиқроқ тасаввур этишга имкон беради. Уни қуйида келтириладиган схема бўйича текширишни тавсия этамиз:

1) Функциянинг аниқланиш соҳасини топиш;

2) Функцияни узлуксизликка текшириш ва узилиш нуқталарини топиш;

3) Функциянинг жуфт, тоқ ва даврийлигини аниқлаш;

4) Функцияни монотонликка текшириш;

5) Функцияни экстремумга текшириш;

6) Функция графигининг қавариқ ҳамда ботиқлигини аниқлаш, эгилиш нуқталарини топиш;

7) Функция графигининг асимптоталарини топиш;

8) Функциянинг ҳақиқий илдизларини — координата ўқларини кесиб ўтиш нуқтасини топиш (агар улар мавжуд бўлса).

Мисол, $f(x)=e^{-x^2}$ функция тўлиқ текширилсин.

Берилган функция $(-\infty;\ \infty)$ интервалда аниқланган ва узлуксиз. Бу $f(x)=e^{-x^2}$ функция учун

$$f(-x)=e^{-(-x)^2}=e^{-x^2}=f(x)$$

бўлади. Демак, $f(x)$ жуфт функция. Унинг графиги Oy ўқига нисбатан симметрик бўлади.

Функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини топамиз:

$$f'(x)=(e^{-x^2})'=e^{-x^2}\cdot(-2x)=-2xe^{-x^2},$$
$$f''(x)=(-2xe^{-x^2})'=-2\,[e^{-x^2}+xe^{-x^2}(-2x)]=$$
$$=-2e^{-x^2}(1-2x^2)=2(2x^2-1)e^{-x^2}.$$

Биринчи тартибли ҳосилани нолга тенглаб функциянинг стационар нуқтасини топамиз:

$$f'(x)=-2xe^{-x^2}=0\Rightarrow x=0.$$

Демак, $x=0$ функциянинг стационар нуқтаси.

Агар

$$f''(0)=2(2\cdot 0-1)e^{-0}=-2<0$$

бўлишини эътиборга олсак, унда берилган функцияни $x=0$ нуқтада максимумга эга бўлишини аниқлаймиз. Демак,

$$\max\{f(x)\}=\max\{e^{-x^2}\}=e^{-0}=1.$$

Равшанки,

$$\forall x<0 \text{ учун } f'(x)=-2xe^{-x^2}>0,$$
$$\forall x>0 \text{ учун } f'(x)=-2xe^{-x^2}<0$$

бўлади. Демак, $(-\infty;\ 0)$ да функция ўсувчи, $(0;\ +\infty)$ да камаювчи.

Функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини нолга тенглаб топамиз:

$$f''(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\forall x \in \left(-\infty,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ учун } f''(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2} > 0,$$

$$\forall x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ учун } f''(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2} < 0,$$

$$\forall x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ +\infty\right) \text{ учун } f''(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2} > 0.$$

Демак, берилган функциянинг графиги $\left(-\infty,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ва $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ +\infty\right)$ оралиқларда ботиқ, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ оралиқда қавариқ бўлади. $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ва $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ нуқталар функция графигининг эгилиш нуқталари. Сўнгра

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2} = 0.$$

Демак, $y = 0$ тўғри чизиқ (Ox ўқи) берилган функция графигининг горизонтал асимптотаси бўлади. $f(x) = e^{-x^2}$ функция графиги 122-чизмада тасвирланган.

9-§. Аниқмасликларни очиш. Лопиталь қоидалари

$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $(a,\ b)$ да берилган бўлсин.

Агар

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to a} g(x) = 0$$

бўлса, у ҳолда $x \to a$ да $\frac{f(x)}{g(x)}$ нисбат $\left(\frac{0}{0}\right)$ *кўринишдаги аниқмаслик* деб аталади.

Агар

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

бўлса, у ҳолда $x \to a$ да $\frac{f(x)}{g(x)}$ нисбат $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ *кўринишдаги аниқмаслик* деб аталади.

Агар

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

бўлса, у ҳолда $x\to a$ *да* $f(x)\ g(x)$ кўпайтма $(0\cdot\infty)$ *кўринишдаги аниқмаслик* деб аталади.

Агар

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to a} g(x) = \mp\infty$$

бўлса, у ҳолда $x\to a$ да $f(x)+g(x)$ йиғинди $(\infty-\infty)$ *кўринишдаги аниқмаслик* деб аталади.

14.3-эслатма. $(0\cdot\infty)$ ва $(\infty-\infty)$ кўринишдаги аниқмасликлар $\left(\frac{0}{0}\right)$ ёки $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ кўринишдаги аниқмасликларга келади. Масалан,

$$f(x)\cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ ёки } f(x)\,g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

деб олиниши билан $(0.\ \infty)$ кўринишдаги аниқмаслик $\left(\frac{0}{0}\right)$ ёки $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ кўринишдаги аниқмасликка келади.

Берилган функциялар ҳосилаларга эга бўлса, улардан фойдаланиб, аниқмасликларни очиш мумкин. Бу йўл билан аниқмасликларни очиш *Лопиталь қоидалари* дейилади.

14.7-теорема. $f(x)$ ва $g(x)$ *функциялар* $(a,\ b)$ *да аниқланган ва узлуксиз бўлиб, улар қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:*

1) $\lim_{x\to a} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0;$

2) $(a,\ b)$ *да чекли* $f'(x)$ *ва* $g'(x)$ *ҳосилаларга эга ва* $g'(x)\neq 0;$

3) $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = k$ *(k чекли ёки чексиз).*

У ҳолда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = k$$

бўлади.

Мисол. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$ лимит ҳисоблансин.

Юқоридаги теоремадан фойдаланиб топамиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - x}{x-\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{tg} x - x)'}{(x-\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x\,(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\cos^2 x\,(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x} = 2.$$

Баъзи ҳолларда Лопиталь қоидасини қўллаш натижасида $x\to a$ да

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

нисбатининг ўзи ҳам $\left(\frac{0}{0}\right)$ кўринишдаги аниқмаслик бўлиб қолади. Агар $f'(x)$ ва $g'(x)$ юқоридаги теореманинг шартларини қаноатлантирса, унда

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

бўлади.

Мисол. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}$ лимит ҳисоблансин. Лопиталь қоидасини икки марта кетма-кет қўллаб топамиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2}=0.$$

XV БОБ. АНИҚМАС ИНТЕГРАЛ

Маълумки, ҳаракат қонунига кўра ҳаракатдаги жисмнинг тезлигини топиш масаласи ҳосила тушунчасига олиб келди.

Ҳаракатдаги жисмнинг тезлигига кўра ҳаракат қонунининг ўзини топиш масаласи эса юқорида айтилган масалага нисбатан тескари масала бўлиб, у аниқмас интеграл тушунчасига олиб келади.

1- §. Бошланғич функция ва аниқмас интеграл

$f(x)$ функция $(a;\ b)$ да берилган бўлиб, $F(x)$ эса шу оралиқда дифференциалланувчи функция бўлсин.

15. 1-таъриф. *Агар $F(x)$ функциянинг ҳосиласи $F'(x)$ берилган $f(x)$ функцияга тенг бўлса,*

$$F'(x)=f(x)$$

ёки

$$dF(x)=f(x)\,dx$$

бўлса, у ҳолда $F(x)$ функция $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси деб аталади.

Мисоллар. 1. $f(x)=x^2$ бўлсин. Бу функциянинг бошланғич функцияси $F(x)=\frac{1}{3}x^3$ бўлади, чунки

$$F'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3\right)'=\frac{1}{3}\cdot 3x^2=x^2=f(x)$$

2. $f(x)=\cos x$ бўлсин. Бу функциянинг бошланғич функцияси $F(x)=\sin x$ бўлади, чунки

$$F'(x)=(\sin x)'=\cos x=f(x).$$

Агар $f(x)$ функция $(a;\ b)$ да узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функция шу оралиқда бошланғич функцияга эга бўлади.

$f(x)$ функция $(a; b)$ да берилган бўлиб, у шу оралиқда иккита $F(x)$ ва $\Phi(x)$ бошланғич функцияларга эга бўлсин. Таърифга биноан,

$$F'(x) = f(x), \qquad \Phi'(x) = f(x)$$

бўлади. Демак,

$$F'(x) = \Phi'(x).$$

У ҳолда юқорида келтирилган натижага кўра $F(x)$ ва $\Phi(x)$ функциялар бир-биридан ўзгармас сонга фарқ қилади:

$$\Phi(x) = F(x) + C \qquad (C - \text{const}).$$

Демак, берилган $f(x)$ функциянинг бошланғич функциялари чексиз кўп бўлиб, улар бир-биридан ўзгармас сонга фарқ қилади. Агар $F(x)$ функция $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлса, унда $f(x)$ нинг исталган бошланғич функцияси

$$F(x) + C \qquad (C - \text{const})$$

кўринишда бўлади.

15.2-таъриф. *Ушбу ифода*

$$F(x) + C \qquad (C - \text{const})$$

шу $f(x)$ функциянинг аниқмас интеграли деб аталади ва $\int f(x)\,dx$ каби белгиланади:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

бунда $\int$ *интеграл белгиси*, $f(x)$ *интеграл остидаги функция*, $f(x)\,dx$ *интеграл остидаги ифода* дейилади. Демак, берилган $f(x)$ функциянинг аниқмас интегралини топиш учун унинг бошланғич функцияларидан бири $F(x)$ ни топиб, $F(x) + C$ ни аниқлаш етарли экан.

Мисоллар. 1. $\int x^2 dx$ аниқмас интеграл топилсин. Равшанки, $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ функция учун

$$F'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2.$$

Демак,

$$\int x^2 dx = F(x) + C = \frac{1}{3}x^3 + C.$$

2. $\int \cos x\,dx$ интеграл топилсин.

Ҳосиласи $\cos x$ га тенг бўлган функция $\sin x$ эканини эътиборга олиб, $F(x) = \sin x$ бўлишини аниқлаймиз. Демак,

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C.$$

2-§. Аниқмас интегралнинг хоссалари

Қуйида аниқмас интегралнинг хоссаларини келтирамиз.

1°. $f(x)$ функция аниқмас интеграли $\int f(x)\,dx$ нинг дифференциали $f(x)\,dx$ га тенг бўлади:

$$d\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)\,dx.$$

2°. Функция дифференциалининг аниқмас интеграли шу функция билан ўзгармас сон йиғиндисига тенг:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

3°. Ушбу формула ўринли:

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \qquad (k - \text{const},\ k \neq 0).$$

4°. Ушбу формула ўринли:

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

Бу хоссаларнинг исботи бевосита аниқмас интеграл таърифидан келиб чиқади. Биз улардан бирини, масалан, 2°-хоссанинг исботини келтирамиз.

2°-хоссанинг исботи. $F(x)$ функция $f(x)$ функциянинг бирор бошланғич функцияси бўлсин. Таърифга кўра

$$F'(x) = f(x) \tag{*}$$

бўлиб,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \tag{**}$$

бўлади. Юқоридаги (*) тенгликдан фойдаланиб топамиз:

$$\int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx = \int d\,F(x). \tag{***}$$

Натижада (**) ва (***) муносабатлардан

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса 2°-хоссани исботлайди.

3-§. Асосий интеграллар жадвали

1. Содда функцияларнинг аниқмас интеграллари. Аввало содда функцияларнинг аниқмас интегралларини топамиз. Бунда бошланғич функция таърифидан ҳамда ҳосилалар жадвалидан фойдаланамиз.

1) $f(x) = x^\alpha$ бўлсин ($x > 0$, α — ҳақиқий сон, $\alpha \neq -1$).
Унда

$$\int f(x)\,dx = \int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

бўлади, чунки

$$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\right)' = (\alpha+1)\cdot\frac{x^\alpha}{\alpha+1} = x^\alpha.$$

1′) $f(x) = \frac{1}{x}$ бўлсин ($x \neq 0$), унда

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

бўлади.

2) $f(x) = a^x$ бўлсин ($a \neq 1$, $a > 0$). У ҳолда

$$\int f(x)\,dx = \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

бўлади, чунки

$$\left(\frac{a^x}{\ln a} + C\right)' = \frac{1}{\ln a}\,a^x \ln a = a^x .$$

Хусусан, $f(x) = e^x$ бўлса,

$$\int f(x)\,dx = \int e^x\,dx = e^x + C.$$

3) $f(x) = \sin x$ бўлсин. Унда

$$\int f(x)\,dx = \int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

бўлади, чунки

$$(-\cos x + C)' = -(-\sin x) = \sin x.$$

4) $f(x) = \cos x$ бўлсин. У ҳолда

$$\int f(x)\,dx = \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

бўлади, чунки

$$(\sin x + C)' = \cos x.$$

5) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ бўлсин. Унда

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$$

бўлади, чунки

$$(\operatorname{tg} x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

6) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ бўлсин. У ҳолда

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

бўлади, чунки

$$(-\operatorname{ctg} x + C)' = -\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

7) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ бўлсин. У ҳолда

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$$

бўлади, чунки

$$(\operatorname{arctg} x + C)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

8) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ бўлсин. Унда

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$$

бўлади, чунки

$$(\arcsin x + C)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. Интеграллар жадвали. Юқорида келтирилган формулаларни жамлаб ушбу интеграллар жадвалини ҳосил қиламиз:

1°. $\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$

2°. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \quad (x \neq 0).$

3°. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1),$

$\int e^x\,dx = e^x + C.$

4°. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

5°. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

6°. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C.$

7°. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C.$

8°. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C.$

9°. $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C.$

Мисоллар. 1. $\int x\sqrt{x}\,dx$ интеграл ҳисоблансин.

Аввало интеграл остидаги функцияни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$x\sqrt{x} = x \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}.$$

Жадвалдаги 1°-формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\int x\sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C.$$

Демак, $\int x\sqrt{x}\,dx = \frac{2}{5}\,x^{\frac{5}{2}} + C.$

2°. $\int (x^2+1)^2\,dx$ интеграл ҳисоблансин.

Равшанки,

$$(x^2+1)^2 = x^4+2x^2+1.$$

Унда

$$\int (x^2+1)^2\,dx = \int (x^4+2x^2+1)\,dx = \int x^4\,dx + 2\int x^2dx +$$
$$+\int 1\,dx = \frac{x^5}{5}+\frac{2}{3}x^3+x+C$$

бўлади. Демак,

$$\int (x^2+1)^2\,dx = \frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3+x+C.$$

3. $\int \operatorname{tg}^2 x dx$ интеграл ҳисоблансин.

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int\left[\frac{1}{\cos^2 x}-1\right]dx =$$
$$= \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

Демак,

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

4. $\int\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^5}\right)dx$ интеграл ҳисоблансин.

$$\int\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^5}\right)dx = \int (x^{-4}-x^{-5})\,dx = \int x^{-4}\,dx - \int x^{-5}\,dx =$$
$$=\frac{x^{-4+1}}{-4+1}-\frac{x^{-5+1}}{-5+1}+C = -\frac{1}{3}x^{-3}+\frac{1}{4}x^{-4}+C = \frac{1}{4x^4}-\frac{1}{3x^3}+C.$$

5. $\int\left(\cos x - 2e^x + \frac{3}{\sin^2 x}\right)dx$ интеграл ҳисоблансин.

$$\int\left(\cos x - 2e^x + \frac{3}{\sin^2 x}\right)dx = \int \cos x dx - 2\int e^x\,dx + 3\int \frac{dx}{\sin^2 x} =$$
$$= \sin x - 2e^x - 3\operatorname{ctg} x + C.$$

4- §. Интеграллаш усуллари

1°. Ўзгарувчиларни алмаштириб интеграллаш усули

Ушбу $\int f(x)\,dx$ интегрални ҳисоблаш талаб этилсин. Баъзан x ўзгарувчини бошқа ўзгарувчига алмаштириш натижасида берилган интеграл соддароқ, ҳисоблаш учун қулайроқ интегралга келади.

Айтайлик,

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C \tag{15.1}$$

бўлсин. Бу интегралда $x=\varphi(t)$ алмаштириш бажарайлик. ($f(x)$, $\varphi(t)$ ва $\varphi'(t)$ лар узлуксиз функциялар).

Унда

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))+C \tag{15.2}$$

бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $F'(x)=f(x)$ бўлишини эътиборга олган ҳолда

$$[F(\varphi(t))+C]'=(F(\varphi(t)))'=F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$$

бўлишини топамиз. Бу эса (15.2) муносабатнинг тўғрилигини билдиради.

(15.1), (15.2) тенгликлардан топамиз:

$$\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \qquad (x=\varphi(t)).$$

Мисоллар. 1. $\int(2+3x)^5\,dx$ интеграл ҳисоблансин.

Бу интегралда $2+3x=t$ алмаштиришни бажарамиз. Унда

$$2+3x=t \Rightarrow x=\frac{t-2}{3}, \quad dx=\frac{1}{3}\,dt.$$

Натижада берилган интеграл ушбу интегралга келади:

$$\int(2+3x)^5\,dx=\int t^5\,\frac{1}{3}\,dt=\frac{1}{3}\int t^5\,dt.$$

Бу интеграл эса тез ҳисобланади:

$$\int(2+3x)^5\,dx=\frac{1}{3}\int t^5dt=\frac{1}{18}t^6+C=\frac{1}{18}(2+3x)^6+C.$$

2. $\int\cos^2 x\sin x\,dx$ интеграл ҳисоблансин.

Бу интегралда $\cos x=t$ деб алмаштиришни бажарамиз. Унда

$$\cos^2 x\sin x\,dx \Rightarrow \cos^2 x(-d(\cos x)) \Rightarrow -t^2\,dt$$

бўлиб,

$$\int\cos^2 x\sin x\,dx=-\int t^2\,dt=-\frac{t^3}{3}+C==\frac{\cos^3 x}{3}+C$$

бўлади.

3. $\int e^{ax}\,dx$ интеграл ҳисоблансин.

Бу интегралда $ax=t$ деб оламиз. Унда

$$e^{ax}\,dx \Rightarrow e^t\,d\left(\frac{t}{a}\right) \Rightarrow \frac{1}{a}\,e^t\,dt$$

бўлиб,

$$\int e^{ax}\,dx=\frac{1}{a}\int e^t\,dt=\frac{1}{a}e^t+C=\frac{1}{a}\,e^{ax}+C$$

бўлади.

4. $\int\frac{x^3dx}{\sin^2 x^4}$ интеграл ҳисоблансин.

Бу интегралда $x^4=t$ деймиз. Унда

$$\frac{x^3dx}{\sin^2 x^4} \Rightarrow \frac{dx^4}{4\sin^2 x^4} \Rightarrow \frac{dt}{4\sin^2 t}$$

бўлиб,

$$\int \frac{x^3dx}{\sin^2 x^4} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sin^2 t} = \frac{1}{4}(-\operatorname{ctg} t) + C = -\frac{1}{4}\operatorname{ctg} x^4 + C$$

бўлади.

5. $\int x\sqrt{x-5}\,dx$ интеграл ҳисоблансин.

Бу интегралда $\sqrt{x-5}=t$ деймиз. Унда

$$x\sqrt{x-5}\,dx \Rightarrow (t^2+5)\,td\,(t^2+5) \Rightarrow (t^2+5)\,t\cdot 2tdt \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (2t^4+10t^2)\,dt$$

бўлиб,

$$\int x\sqrt{x-5}dx = \int (2t^4+10t^2)\,dt = 2\frac{t^5}{5}+10\frac{t^3}{3}+C =$$
$$= \frac{2}{5}(\sqrt{x-5})^5 + \frac{10}{3}(\sqrt{x-5})^3 + C.$$

2°. Бўлаклаб интеграллаш усули. $u=u(x)$, $v=v(x)$ функциялар узлуксиз $u'(x)$ ва $v'(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. Маълумки,

$$d(u\cdot v) = udv + vdu.$$

Бу тенгликни интеграллаб топамиз:

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu.$$

Равшанки, $\int d(uv) = u\cdot v$. Унда

$$u\cdot v = \int udv + \int vdu$$

бўлади. Натижада ушбу формулага келамиз:

$$\int udv = u\cdot v - \int vdu. \qquad (15.3)$$

Одатда бу формула *бўлаклаб интеграллаш формуласи* дейилади.

(15.3) формула $\int udv$ ни ҳисоблашни $\int vdu$ ни ҳисоблашга келтиради.

Мисоллар. 1. $\int xe^x\,dx$ ҳисоблансин. Интеграл остидаги $xe^x\,dx$ ифодани udv кўринишида ёзиб олишимиз керак. Агар $u=x$, $dv=e^x\,dx$ дейилса, унда $xe^x\,dx=udv$ бўлади. (15.3) формуладан фойдаланиш учун du ва v ларни топишимиз керак бўлади:

$$u = x \Rightarrow du = dx,$$

$$dv = e^x\,dx \Rightarrow \int dv = \int e^x\,dx \Rightarrow v = e^x$$

бўлади. (15.3) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1)+C.$$

15.1-эслатма. Агар $\int xe^x\,dx$ интегрални (15.3) формуладан фойдаланиб ҳисоблашда, $u=e^x$, $xdx=dv$ дейилганда, унда $du=e^x\,dx$, $v=\frac{x^2}{2}$ бўлиб,

$$\int xe^x\,dx = \frac{x^2}{2}e^x - \int \frac{x^2}{2}e^x\,dx$$

бўлар эди. Натижада берилган интегрални ҳисоблаш ундан мураккаброқ интегрални ҳисоблашга олиб келади. Шунинг учун интеграл остидаги ифодани u ва dv ларнинг кўпайтмаси сифатида ёзиб олинишига алоҳида аҳамият бериш керак.

2. $\int \ln x dx$, $x>0$ интеграл ҳисоблансин.

Бу интегралда $u=\ln x$, $dv=dx$ деб оламиз. Унда $du=\frac{1}{x}dx$, $v=x$ бўлади. Демак, (15.3) формулага кўра

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx=$$
$$= x\ln x - x + C = x(\ln x - 1)+C.$$

3. $\int e^x \sin x dx$ интеграл ҳисоблансин. Бу интегралда $u=e^x$, $dv=\sin x dx$ деб оламиз. Унда $du=e^x dx$, $v=-\cos x$ бўлиб, (15.3) формулага кўра берилган интеграл қуйидагича бўлади:

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интеграл $\int e^x \cos x dx$ га яна бўлаклаб интеграллаш формуласини қўллаймиз: $u=e^x$, $dv=\cos x dx$ деб оламиз. Унда $du=e^x dx$, $v=\sin x$ бўлиб,

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

бўлади. Натижада, ушбу тенгликка келамиз:

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx.$$

Бу тенгликдан эса

$$2\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x,$$

яъни

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x) + C =$$
$$= \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$$

бўлиши келиб чиқади.

15.3-эслатма. Ушбу кўринишдаги интеграллар бўлаклаб интеграллаш усули ёрдамида ҳисобланади:

1°. $\int x^m \sin x dx$, $\int x^m \cos x dx$, $\int x^m e^x dx$.
Бу интегралларда

$$u=x^m,\qquad \begin{aligned} dv &= \sin x dx,\\ dv &= \cos x dx,\\ dv &= e^x dx \end{aligned}$$

деб олиш қулайдир.

2°. $\int x^m \ln x dx$, $\int x^m \arcsin x dx$, $\int x^m \arccos x dx$, бу интегралларда

$$u = \ln x, \qquad dv = x^m\,dx,$$
$$u = \arcsin x, \qquad dv = x^m\,dx,$$
$$u = \arccos x, \qquad dv = x^m\,dx$$

деб олиш қулайдир.

3°. $\int e^{ax} \sin bx\,dx, \quad \int e^{ax} \cos bx\,dx.$

Бу интегралларда

$$u = e^{ax}, \qquad dv = \sin bx\,dx,$$
$$dv = \cos bx\,dx$$

деб олиш қулайдир.

Мисол: $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ $(n = 1, 2, 3, \dots; \; a - \text{const})$ интеграл ҳисоблансин. Бу интегралда

$$u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}, \quad dv = dx$$

деб оламиз. Унда

$$du = \left(\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\right)' dx = ((x^2+a^2)^{-n})'\,dx = -n\,(x^2+a^2)^{-n-1}\cdot 2x dx =$$
$$= -\frac{2nx}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx,$$
$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

бўлади. Бўлаклаб интеграллаш формуласи (15.3) га кўра топамиз:

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = x\cdot\frac{1}{(x^2+a^2)^n} - \int x\cdot\left(-\frac{2nx}{(x^2+a^2)^{n+1}}\right)dx =$$
$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx. \tag{15.4}$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги

$$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx$$

интегрални қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx = \int\frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx = \int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n} -$$
$$-a^2\int\frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx = I_n - a^2 I_{n+1}.$$

Унда берилган (15.4) интеграл ушбу

$$I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\cdot I_n - 2na^2 I_{n+1}$$

кўринишга келади. Кейинги тенгликдан эса I_{n+1} ни топамиз:

$$2na^2 I_{n+1} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\,I_n - I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)\,I_n,$$

$$I_{n+1} = \frac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n. \qquad (15.5)$$

Бу рекуррент формуладан фойдаланиб, I_1 ни билган ҳолда биринкетин I_2, I_3, ... ларни топиш мумкин. Равшанки, $n=1$ бўлганда

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C$$

бўлади. Масалан, (15.5) формуладан фойдаланиб,

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$$

интеграл қуйидагича ҳисобланади:

$$I_2 = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^2} I_1 = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C.$$

5-§. Содда каср ва уларни ҳисоблаш

Ушбу

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{A}{(x-a)^m}, \quad \frac{Bx+C}{x^2+px+q}, \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m} \quad (m>1)$$

кўринишдаги касрлар *содда касрлар* деб аталади. Бунда A, B, C a, p, q — ўзгармас ҳақиқий сонлар, m — натурал сон, x^2+px+ $+q$ — квадрат учҳад (ҳақиқий илдизларга эга эмас).

1°. $\frac{A}{x-a}$ содда касрнинг аниқмас интегралини ҳисоблаймиз:

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{dx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln|x-a| + C.$$

2°. $\frac{A}{(x-a)^m}$ $(m>1)$ содда касрнинг аниқмас интегралини ҳисоблаймиз:

$$\int \frac{A}{(x-a)^m}dx = A\int \frac{A}{(x-a)^m} = A\int (x-a)^{-m}\, d(x-a) =$$

$$= A\frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1} + C = \frac{A}{(1-m)(x-a)^{m-1}} + C.$$

3°. $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$ содда касрнинг аниқмас интегралини ҳисоблаш учун аввало бу касрнинг махражида турган x^2+px+q квадрат учҳадни ўзгартириб ёзиб оламиз:

$$x^2+px+q = x^2+2\cdot\frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q -$$

$$-\frac{p^2}{4} = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2, \quad \left(a^2 = q - \frac{p^2}{4}\right),$$

у ҳолда

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{Bx+C}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}\,dx$$

бўлади. Кейинги интегралда ўзгарувчини қуйидагича алмаштирамиз:

$$x+\frac{p}{2}=t.$$

Равшанки,

$$dx=dt, \quad x=t-\frac{p}{2}.$$

Натижада $\displaystyle\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{Bx+C}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}\,dx = \int \frac{B\left(t-\frac{p}{2}\right)+C}{t^2+a^2}\,dt =$

$$= \int \frac{Bt+C-\frac{p}{2}B}{t^2+a^2}\,dt = B\int \frac{tdt}{t^2+a^2}+\left(C-\frac{p}{2}B\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2}=$$

$$=\frac{B}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}=\frac{B}{2}\ln|t^2+a^2|+$$

$$+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{a}+C=\frac{B}{2}\ln(x^2+px+q)+$$

$$+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{q^2}{4}}}+C.$$

4°. $\dfrac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}$ $(m>1)$ содда касрнинг интегралини ҳисоблашда x^2+px+q квадрат учҳадни 3°- ҳолдагидек ёзиб, сўнг $x+\frac{p}{2}=t$ алмаштиришни бажарамиз.

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}\,dx=\int \frac{Bx+C}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right]^m}\,dx=\int \frac{B\left(t-\frac{p}{2}\right)+C}{(t^2+a^2)^m}\,dt=$$

$$=B\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^m}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}=\frac{B}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^m}+\left(C-\right.$$

$$\left.-\frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}=\frac{B}{2}\cdot\frac{1}{(1-m)(t^2+a^2)^{m-1}}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}.$$

Бу тенгликдаги $\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}$ интеграл 4-§ да келтирилган рекуррент формула ёрдамида ҳисобланади.

6-§. Рационал функцияларни интеграллаш

Ушбу

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

бутун рационал функциянинг интеграли осон ҳисобланади:

$$\int P_n(x)\,dx = \int [a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n]\,dx =$$

$$= a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + a_2\frac{x^3}{3} + \ldots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Каср рационал функция

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m}$$

ни интеграллаш бирмунча мураккаб бўлади.

Агар $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ нотўғри каср ($n > m$) бўлса, унинг бутун қисми ажратилиб бутун рационал функция ва тўғри каср йиғиндиси кўринишида ёзилади:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = P_n'(x) + \frac{P_n''(x)}{Q_m(x)}.$$

У ҳолда

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx = \int P_n'(x)dx + \int \frac{P_n''(x)}{Q_m(x)}dx$$

бўлади. Демак, юқоридаги $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ни интеграллаш тўғри каср $\frac{P_n''(x)}{Q_m(x)}$ ни интеграллашга келади. Тўғри касрни интеграллаш учун, аввало бу касрларни содда касрлар йиғиндиси сифатида ёзиб олинади, сўнг уларнинг интеграллари топилади.

1-мисол. Қуйидаги интеграл ҳисоблансин:

$$\int \frac{xdx}{(x-1)(x-2)^3}.$$

Бу интегрални топиш учун интеграл остидаги тўғри касрни содда касрларнинг йиғиндиси шаклида ёзиб оламиз:

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{(x-2)^3}.$$

Бу тенгликни қаноатлантирувчи коэффициентларни топиш учун тенгликнинг икки томонини $(x-1)\cdot(x-2)^3$ га кўпайтирамиз:

$$A(x-2)^3 + B(x-1)(x-2)^2 + C(x-1)(x-2) + D(x-1) = x.$$

Ундан

$$A(x^3-6x^2-12x-8)+B(x^3-5x^2+8x-4)+C(x^2-3x+2)+$$
$$+D(x-1)=x$$

тенгламага эга бўламиз. Энди x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларини тенглаштириб, қуйидаги тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\begin{cases} A+B=0, \\ C-6A-5B=0, \\ 12A+8Б-3C+D=1, \\ 2C-D-8A-4B=0. \end{cases}$$

Бу системани ечиб, $A=-1$, $B=1$, $C=-1$ ва $D=2$ ларни топамиз. Демак,

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)^3}=\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{2}{(x-2)^3}.$$

Натижа $\int \frac{xdx}{(x-1)(x-2)^3}=-\int \frac{dx}{x-1}+\int \frac{dx}{x-2}-\int \frac{dx}{(x-2)^2}+$

$$+2\int \frac{dx}{(x-2)^3}=-\ln|x-1|+\ln|x-2|+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}+C=$$
$$=\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}+C$$

бўлади.

2-мисол. Қуйидаги интеграл топилсин:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}.$$

Интеграл остидаги рационал каср содда касрга қуйидагича ёйилади:

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{x^2+4}.$$

Бундан

$$(Ax+B)(x^2+4)+(Dx+E)(x^2+1)=1.$$

Демак,

$$(A+D)x^3+(B+E)x^2+(4A+D)x+(4B+E)=1.$$

Бу тенгликдаги x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларини тенглаштириб

$$\begin{cases} A+D=0, \\ 4A+D=0, \\ B+E=0, \\ 4B+E=1 \end{cases}$$

системага эга бўламиз. Бу системадан эса $A=0$, $D=0$, $B=\frac{1}{3}$, $E=-\frac{1}{3}$ келиб чиқади. Шундай қилиб,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+4} =$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2} + C.$$

7-§. Баъзи иррационал функцияларни интеграллаш

Ушбу

$$\int R(x,\ x^{\alpha},\ x^{\beta},\ \ldots)\,dx$$

кўринишдаги интегралларни қараймиз. Бунда $R(x,\ x^{\alpha},\ x^{\beta},\ \ldots)$ функция $x,\ x^{\alpha},\ x^{\beta},\ \ldots$ ларнинг рационал функцияси. Бу ерда $\alpha = \frac{m_1}{n_1}$, $\beta = \frac{m_2}{n_2}$, ... рационал сонлар бўлиб, k уларнинг умумий махражи бўлса, у ҳолда $x = t^k$ алмаштириш ёрдамида юқоридаги интеграл рационал функцияни интеграллашга келади.

Ушбу $\int R(x, (ax+b)^{\alpha},\ (ax+b)^{\beta},\ \ldots)\,dx$,

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha},\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\beta},\ \ldots\right)dx$$

интеграллар эса

$$ax+b=t^k,\quad \frac{ax+b}{cx+d}=t^k$$

алмаштиришлар ёрдамида рационал функцияни интеграллашга келади.

1-мисол. *Қуйидаги интеграллар топилсин:*

1) $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$; 2) $\int \frac{1}{x}\cdot\sqrt{\frac{x-2}{x}}\,dx$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x-3}+1}$; 4) $\int \frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\,dx$;

5) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+2}}$.

1) $x=t^6$ алмаштириш бажарамиз. Бу ҳолда $dx=6t^5dt$ бўлади. Демак,

$$\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\cdot\sqrt{x}} = \int \frac{6t^5dt}{(1+t^2)t^3} = 6\int \frac{t^2}{1+t^2}dt = 6\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt =$$
$$= 6\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt = 6\int dt - 6\int\frac{dt}{1+t^2} = 6\,(t-\operatorname{arc\,tg} t)+C =$$
$$= 6\left(\sqrt[6]{x} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt[6]{x}\right)+C.$$

2) $t^2=\frac{x-2}{x}$ алмаштиришни бажарамиз. Бу ҳолда $x=\frac{2}{1-t^2}$ ва $dx=\frac{4t\,dt}{(1-t^2)^2}$ бўлади. Демак,

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}}\,dx = \int \frac{1}{2}(1-t^2)t\,\frac{4t}{(1-t^2)^2}dt = 2\int \frac{t^2dt}{1-t^2} =$$
$$= 2\int \frac{1-(1-t^2)}{1-t^2}\,dt = 2\int \frac{dt}{1-t^2} - 2\int dt = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| - 2t + C =$$
$$= \ln\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}} - 2\sqrt{\frac{x-2}{x}} + C.$$

3) $t^3 = 2x - 3$ алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда $x = \frac{1}{2}(t^3+3)$ ва $dx = \frac{3}{2}t^2dt$ бўлади. Демак,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x-3}+1} = \int \frac{\frac{3}{2}t^2\,dt}{t+1} = \frac{3}{2}\int \frac{t^2dt}{t+1} = \frac{3}{2}\int\left(t - 1 + \frac{1}{t+1}\right)dt =$$
$$= \frac{3}{2}\int t\,dt - \frac{3}{2}\int dt + \int \frac{dt}{t+1} = \frac{3}{4}t^2 - \frac{3}{2}t + \ln|t+1| + C =$$
$$= \frac{3}{4}(2x-3)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}(2x-3)^{\frac{1}{3}} + \ln|\sqrt[3]{2x-3}+1| + C.$$

4) Интеграл остидаги ифода x ва $\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$ га нисбатан рационал функциядир. Шунинг учун $t^3 = \frac{2-x}{2+x}$ алмаштиришни бажарамиз. Бундан

$$x = \frac{2-2t^3}{1+t^3};\quad 2 - x = \frac{4t^3}{1+t^3}\quad dx = \frac{-12t^2}{(1+t^3)^2}dt$$

бўлади. Демак,

$$\int \frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\,dx = -\int \frac{2(1+t^3)\,t\cdot 12\,t^2}{16\cdot t^6(1+t^3)^2}\,dt =$$
$$= -\frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^3} = \frac{3}{4t^2} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2} + C.$$

5) $t^2 = x^2 + 2$ алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда $x^2 = t^2 - 2$ ва $xdx = t\,dt$ бўлади. Демак,

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+2}} = \int \frac{(t^2-2)t\,dt}{t} = \int (t^2-2)\,dt = \int t^2\,dt - 2\int dt =$$
$$= \frac{1}{3}t^3 - 2t + C = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+2)^3} - 2\sqrt{x^2+2} + C.$$

8-§. Тригонометрик функцияларни интеграллаш

1. $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ кўринишдаги интегрални қарайлик, бу ерда $R(\sin x, \cos x)$ ифода $\sin x$ ва $\cos x$ ларнинг рационал функцияси

1) агар $\cos x$ нинг ишораси ўзгариши билан $R(\sin x, \cos x)$ нинг ишораси ўзгарса, унда $t = \sin x$ алмаштириш ёрдамида $R(\sin x, \cos x)$ функция t нинг рационал функциясига келади.

2) агар $\sin x$ нинг ишораси ўзгариши билан $R(\sin x, \cos x)$ функциянинг ишораси ўзгарса, унда $t = \cos x$ алмаштириш орқали $R(\sin x, \cos x)$ функция t нинг рационал функциясига келади.

3) агар $\sin x$, $\cos x$ ларнинг ишоралари бир вақтда ўзгарганда $R(\sin x, \cos x)$ функциянинг ишораси ўзгармаса, $t = \operatorname{tg} x$ алмаштириш ёрдамида $R(\sin x, \cos x)$ функция t нинг рационал функциясига келади.

4) $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ алмаштириш ёрдамида $R(\sin x, \cos x)$ функция t нинг рационал функциясига келади.

II. $\int \sin^{2n} xdx$, $\int \cos^{2n} xdx$, $\int \sin^{2n} x \cdot \cos^{2n} xdx$

кўринишдаги интегралларни топишда

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x),$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

формулалар ёрдамида интеграл остидаги функциянинг даражаси пасайтириб борилади ва охири $\sin kx$ ва $\cos kx$ функцияларнинг тоқ даражасига келтирилади.

III. $\int \operatorname{tg}^n xdx$, $\int \operatorname{ctg}^n xdx$ кўринишдаги интеграллар $t = \operatorname{tg} x$ ва $t = \operatorname{ctg} x$ алмаштиришлар ёрдамида топилади.

IV. $\int \sin ax \cos bx\, dx$, $\int \sin ax \sin bx\, dx$, $\int \cos ax \cos bx\, dx$ кўринишдаги интеграллар

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x],$$

$$\sin ax \cdot \sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x],$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a+b)x + \cos(a-b)x]$$

формулалар ёрдамида топилади.

V. $\sqrt{a^2 + x^2}$ ифодалар қатнашган интегрални топишда мос равишда $x = a \operatorname{tg} t$, $x = a \sin t$ каби белгилашдан фойдаланиш қулайдир.

1-мисол. Қуйидаги интегралларни топинг.

1) $\int \sin^5 xdx$;
2) $\int \sin^4 x \cos xdx$;
3) $\int \cos^4 xdx$;
4) $\int \operatorname{tg}^2 xdx$;
5) $\int \sin^3 x \cos^3 xdx$;
6) $\int \sin 3x \sin 4xdx$;
7) $\int \cos\frac{4}{3}x \cdot \cos 3xdx$;
8) $\int \sqrt{4 - x^2}\,dx$.

1) $\int \sin^5 xdx$ интеграл I турдаги интегралнинг иккинчи хили бўлгани учун аввал берилган интегрални

$$\int \sin^5 xdx = \int \sin^4 x \sin x\, dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin xdx$$

кўринишда ёзиб олиб, кейин $t=\cos x$ деб белгиласак, берилган интеграл

$$\int \sin^5 xdx = -\int (1-t^2)^2 dt = -\int (1-2t^2+t^4)\,dt$$

кўринишга келади. Демак,

$$\int \sin^5 xdx = -\int dt + 2\int t^2dt - \int t^4dt = -t + \frac{2}{3}t^3 -$$

$$-\frac{1}{5}t^5 + C = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

бўлар экан.

2) $\int \sin^4 x \cos xdx$ интегрални топиш учун $t=\sin x$ алмаштиришни бажарамиз. Бу ҳолда $dt=\cos xdx$ бўлгани учун

$$\int \sin^4 x \cos x\, dx = \int t^4\, dt = \frac{1}{5}t^5 + C = \frac{1}{5}\sin^5 x + C$$

бўлади.

3) $\int \cos^4 xdx$ интегрални топиш учун II қоидани қўлланиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int \cos^4 xdx = \int (\cos^2 x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1+\cos 2x)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int dx + \int \cos 2xd(2x) + \int \cos^2 2xdx\right].$$

Бу интеграллардан биринчи иккитаси жадвалдаги интеграллардир, учинчиси эса яна II қоидадан фойдаланиб топилади:

$$\int \cos^2 2xdx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)\,dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x\, d(4x) =$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\sin 4x + C.$$

Бу ифодани юқоридаги тенгликка қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int \cos^4 xdx = \frac{1}{4}\left((x + \sin 2x + \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\sin 4x\right) + C =$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

4) $\int \mathrm{tg}^2 xdx$ интегрални топиш учун III қоидани қўлланамиз. У ҳолда $t=\mathrm{tg}x$, $x=\mathrm{arc\,ctg}\, t$ ва $dx=\frac{dt}{1+t^2}$ бўлади. Демак,

$$\int \mathrm{tg}^2 xdx = \int t^2 \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{(1+t^2)-1}{1+t^2}dt = \int dt - \int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= t - \mathrm{arctg}\, t + C = \mathrm{tg}x - x + C$$

бўлар экан.

5) $\int \sin^3 x \cos^3 dx = \int \sin^3 x \cos^2 x \cos x\, dx = \int \sin^3 x(1-\sin^2 x)\cos xdx$

Энди $t=\sin x$ алмаштиришни бажариб топамиз:

$$\int \sin^3 x\cos^3 x dx = \int t^3(1-t^2)\,dt = \int t^3 dt - \int t^5\,dt =$$
$$= \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{6}t^6 + C = \frac{1}{4}\sin^4 x - \frac{1}{6}\sin^6 x + C.$$

6) $\int \sin 3x \sin 4x dx$ интегрални IV қоида ёрдамида топилади:

$$\int \sin 3x \sin 4x\,dx = \frac{1}{2}\int [\cos(3-4)x - \cos(3+4)x]\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \cos x dx - \frac{1}{2}\int \cos 7x\,dx = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{14}\sin 7x + C.$$

7) $\int \cos\frac{4}{3}x\cos 3x\,dx$ интеграл ҳам IV қоида ёрдамида топилади:

$$\int \cos\frac{4}{3}x\cos 3x dx = \frac{1}{2}\int\left[\cos\left(\frac{4}{3}+3\right)x + \cos\left(\frac{4}{3}-3\right)x\right]dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int\left[\cos\frac{13}{3}x + \cos\frac{5}{3}x\right]dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{13}\sin\frac{13}{3}x +$$
$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\sin\frac{5}{3}x + C = \frac{3}{26}\sin\frac{13}{3}x + \frac{3}{10}\sin\frac{5}{3}x + C.$$

8) $\int\sqrt{4-x^2}dx$ интегрални топиш учун $x = 2\sin^2 t$ алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда $dx = 4\sin t\cos t\,dt$ ва $t = \arcsin\sqrt{\frac{x}{2}}$ бўлади. Демак,

$$\int\sqrt{4-x^2}dx = \int\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 4\sin t\cos t\,dt =$$
$$= 8\int\sqrt{1-\sin^2 x}\cdot\sin t\cos t\,dt = 8\int\cos^2 t\sin t\,dt =$$
$$= -8\int z^2 dz = -\frac{8}{3}z^3 + C = -\frac{8}{3}\cos^3 x + C =$$
$$= -\frac{8}{3}\cos^2\left(\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}}\right) + C = -\frac{8}{3}\left(\sqrt{1-\frac{x}{2}}\right)^3 + C.$$

XVI БОБ. АНИҚ ИНТЕГРАЛ

Аниқ интеграл математиканинг муҳим тушунчаларидан бири. Бу тушунчани баён этишдан аввал, унга олиб келадиган масалалардан бирини келтирамиз.

1-§. Ўтилган йўл ҳақидаги масала

Моддий нуқта тўғри чизиқ бўйлаб $v = v(t)$ тезлик билан ҳаракат қилсин. Унинг t_0 моментдан T моментгача кетган вақтда босиб ўтган йўлини топиш талаб этилсин.

Маълумки, тезлик v ўзгармас бўлганда, ўтилган йўл

$$s = v(T - t_0)$$

бўлади. Тезлик ўзгарувчи бўлганда, яъни у вақтнинг функцияси бўлганда ($v = v(t)$) бу формула билан моддий нуқтанинг $[t_0;\ T]$ вақт оралиғида босиб ўтган йўлини аниқ ҳисоблаб бўлмайди. Ўтилган йўлни аниқроқ ҳисоблаш мақсадида $[t_0;\ T]$ вақт оралиғини

$$t_0,\ t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n\ (t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T)$$

нуқталар ёрдамида n та бўлакка бўламиз. Натижада $[t_0;\ T]$ сегмент ушбу

$$[t_0;\ t_1],\ [t_1;\ t_2],\ \ldots,\ [t_{n-1};\ t_n] = [t_{n-1};\ T]$$

бўлакларга ажратилади. Ҳар бир $[t_k;\ t_{k+1}]$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ бўлакда ξ_k нуқта олиб, сўнг шу $[t_k;\ t_{k+1}]$ да нуқтанинг тезлиги ўзгармас $v(\xi_k)$ бўлсин деб ўтилган йўлни $v(\xi_k)(t_{k+1} - t_k) = v(\xi_k)\cdot\Delta t_k$ бўлишини топамиз. Бу албатта, $[t_k;\ t_{k+1}]$ вақт оралиғида ўтилган йўлни тақрибан ифодалайди. Унда $[t_0,\ T]$ вақт оралиғида ўтилган йўл $s \approx v(\xi_0)\Delta t_0 + v(\xi_1)\Delta t_1 + \ldots + v(\xi_k)\Delta t_k + \ldots + v(\xi_{n-1})\ \Delta t_{n-1} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} v(\xi_k)\Delta t_k$ бўлади. Бунда $\sum$ йиғинди (сумма) белгиси. Энди $[t_k;\ t_{k+1}]$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ сегментлар узунликлари $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ нинг энг каттасини $\lambda\ (\lambda = \max\{\Delta t_0,\ \Delta t_1,\ \ldots,\ \Delta t_{n-1}\})$ дейлик. Унда λ нолга интилганда (яъни $[t_0;\ T]$ сегментнинг бўлакларга бўлиниши сони n чексизга интилганда) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} v(\xi_k)\,\Delta t_k$ йиғинди моддий нуқтанинг $[t_0;\ T]$ вақт оралиғида босиб ўтган йўлини ифодалайди. Демак, ўтилган s йўл $\lambda \to 0$ да $\sum\limits_{k=0}^{n-1} v(\xi_k)\Delta t_k$ йиғиндининг лимитидан иборат бўлар экан. Умуман, кўп масалаларнинг ечими юқоридаги йиғиндиларнинг лимитини топиш билан ҳал қилинади. Бу аниқ интеграл тушунчасига олиб келади.

2-§. Интеграл йиғинди

$f(x)$ функция $[a;\ b]$ сегментда берилган бўлсин. Бу $[a;\ b]$ сегментни

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\ (a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b)$$

нуқталар ёрдамида n та бўлакка бўламиз:

$$[x_0;\ x_1],\ [x_1;\ x_2],\ \ldots,\ [x_{n-1};\ x_n].$$

Ҳар бир $[x_k;\ x_{k+1}]$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ бўлакчада ихтиёрий $\xi_k\ (\xi_k \in [x_k;\ x_{k+1}])$ нуқтани оламиз. Сўнг функциянинг шу нуқтадаги қиймати $f(\xi_k)$ ни $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ га кўпайтириб, қуйидаги йиғиндини тузамиз:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_k)\Delta x_k + \\ + \ldots + f(\xi_{n-1})\,\Delta x_{n-1}.$$

Бу йиғинди $f(x)$ *нинг* $[a; b]$ *сегмент бўйича интеграл йиғиндиси* дейилади ва σ орқали белгиланади:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Масалан, $f(x) = x^2$ функциянинг $[a; b]$ сегментдаги интеграл йиғиндиси (юқоридаги бўлинишга нисбатан)

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k^2\Delta x_k$$

бўлади.

3-§. Аниқ интеграл таърифи

$f(x)$ функция $[a; b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Бу функциянинг интеграл йиғиндиси

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$$

ни тузамиз. Масала $\lambda \to 0$ да шу йиғиндининг лимитини топишдан иборат.

$f(x)$ функция $[a; b]$ сегментда Вейерштрасс теоремасига асосан чегараланган бўлади, яъни

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \quad (\forall x \in [a, b]).$$

$[a; b]$ сегментни $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$ нуқталар ёрдамида n та бўлакка бўламиз. Унда $f(x)$ функция ҳар бир $[x_k; x_{k+1}]$ сегментда $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ ҳам чегараланган бўлади. Демак,

$$m_k = \inf\{f(x)\} \qquad x \in [x_k; x_{k+1}],$$
$$M_k = \sup\{f(x)\}^* \qquad x \in [x_k; x_{k+1}]$$

мавжуд бўлади. Равшанки,

$$m_k \leqslant M_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Бу m_k ва M_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ ёрдамида қуйидаги йиғиндиларни тузамиз:

$$\underline{s}_n = m_0\Delta x_0 + m_1\Delta x_1 + \ldots + m_k\Delta x_k + \ldots + m_{n-1}\Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k\Delta x_k,$$

---

* $\sup\{f(x)\}$ — $\{f(x)\}$ тўплам юқори чегараларининг энг кичиги.
$\inf\{f(x)\}$ — $\{f(x)\}$ тўплам қуйи чегарасининг энг каттаси.

$$\underline{S}_n = M_0\Delta x_0 + M_1\Delta x_1 + \ldots + M_k\Delta x_k + \ldots + M_{n-1}\Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} M_k\Delta x_k.$$

Равшанки,

$$\underline{s}_n \leqslant \overline{S}_n.$$

$\xi_k \in [x_k\, x_{k+1}]$ учун $m_k \leqslant f(\xi_k) \leqslant M_k$ бўлади. Бу тенгсизликларни Δx_k га кўпайтириб, ҳосил бўлган тенгсизликларни k нинг барча қийматлари ($k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$) бўйича ёзиб, сўнг уларни ҳадлаб қўшиб топамиз:

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k\Delta x_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} M_k\Delta x_k.$$

Демак,

$$\underline{s}_n \leqslant \sigma \leqslant \overline{S}_n.$$

Кўрсатиш мумкинки,

$$m\cdot(b-a) \leqslant \underline{s}_n \leqslant \overline{S}_n \leqslant M\cdot(b-a)$$

ва

$$\overline{S}_n \geqslant \overline{S}_{n+1} \geqslant \overline{S}_{n+2} \geqslant \ldots \qquad \underline{s}_n \leqslant \underline{s}_{n+1} \leqslant \underline{s}_{n+2} \leqslant \ldots$$

бўлади. Демак, $\overline{S}_n$ кетма-кетлик чегараланган ва камаювчи, $\underline{s}_n$ кетма-кетлик эса чегараланган ва ўсувчи бўлади. Монотон кетма-кетликнинг лимити мавжудлиги ҳақидаги теоремага мувофиқ $\overline{S}_n$ ва $\underline{s}_n$ кетма-кетликлар чекли лимитга эга бўлади. Биз уларни мос равишда $\overline{I}$ ва $\underline{I}$ орқали белгилайлик:

$$\lim_{\lambda\to 0} \overline{S}_n = \overline{I}, \qquad \lim \underline{s}_n = \underline{I}.$$

Энди бу $\overline{I}$ ва $\underline{I}$ сонларнинг тенглигини кўрсатамиз. Шу мақсадда $\overline{I} - \underline{I}$ айирмани қараймиз. Уни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\overline{I} - \underline{I} = \lim_{\lambda\to 0} \overline{S}_n - \lim_{\lambda\to 0} \underline{s}_n = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} M_k\Delta x_k -$$

$$- \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} m_k\Delta x_k = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)\,\Delta x_k.$$

Демак,

$$\overline{I} - \underline{I} = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)\Delta x_k. \tag{16.1}$$

$f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз. Кантор теоремасига кўра, у шу сегментда текис узлуксиз бўлади. Унда $\forall\varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ топиладики, $\lambda < \delta$ бўлган $[a; b]$ оралиқнинг ҳар бир $[x_k; x_{k+1}]$ бўлагида $M_k - m_k < \varepsilon$ бўлишини топамиз. Унда

$$\sum_{k=0}^{n-1}(M_k - m_k)\Delta x_k < \sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon\Delta x_k = \varepsilon\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k = \varepsilon(b-a)$$

бўлиб,

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}(M_k - m_k)\Delta x_k = 0 \tag{16.2}$$

бўлади. (16.1) ва 16.2) муносабатлардан

$$\bar{I} = \underline{I}$$

бўлиши келиб чиқади. Уларни I билан белгилайлик: $I = \bar{I} = \underline{I}$.

Шундай қилиб,

$$\lim_{\lambda\to 0}\bar{S}_n = \lim_{\lambda\to 0}\underline{s}_n = I.$$

Ҳар доим

$$\underline{s}_n \leqslant \sigma \leqslant \bar{S}_n$$

бўлгани учун интеграл йиғинди σ ҳам $\lambda\to 0$ да шу I сонга интилади:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma = I.$$

Демак, $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг интеграл йиғиндиси

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\Delta x_k$$

$\lambda\to 0$ да чекли I сонга интилар экан:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma = I.$$

16.1-таъриф. $\lambda\to 0$ *да $f(x)$ функция интеграл йиғиндиси σ нинг чекли лимити шу $f(x)$ функциянинг аниқ интеграли дейилади ва*

$$\int_a^b f(x)dx \tag{16.3}$$

каби белгиланади. Демак,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Бу ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ да интегралланувчи дейилади. a—интегралнинг қуйи чегараси, b—интегралнинг юқори чегараси, $f(x)$ интеграл остидаги функция, $f(x)\,dx$ интеграл остидаги ифода дейилади.

Мисол. $I=\int_0^1 xdx$ интеграл топилсин.

Бу интеграл остидаги $f(x)=x$ функция [0; 1] сегментда узлуксиз. Демак, функциянинг интеграли $\int_0^1 xdx$ мавжуд. Таърифга кўра

$$\int_0^1 xdx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k \quad (f(x)=x)$$

бўлади. Юқоридаги интеграл йиғиндини қуйидагича тузамиз:

1) [0; 1] сегментни

$$0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \frac{3}{n},\ \ldots,\ \frac{n}{n}$$

нуқталар ёрдамида n та тенг бўлакка бўламиз;

$$\left[0;\ \frac{1}{n}\right],\ \left[\frac{1}{n};\ \frac{2}{n}\right],\ \ldots,\ \left[\frac{k}{n};\ \frac{k+1}{n}\right],\ \ldots,\ \left[\frac{n-1}{n};\ \frac{n}{n}\right].$$

Бу ҳолда $\Delta x_k = \frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}=\frac{1}{n}$ бўлади.

2) Ҳар бир $\left[\frac{k}{n};\ \frac{k+1}{n}\right]$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n-1)$ бўлакда ξ_k нуқта сифатида $\frac{k+1}{n}$ ни оламиз. $\left(\xi_k=\frac{k+1}{n}\right)$. Берилган $f(x)=x$ функциянинг бу нуқтадаги қиймати

$$f(\xi_k)=\frac{k+1}{n} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$$

бўлади.

$f(x)=x$ функциянинг [0; 1] даги интеграл йиғиндиси қуйидагича бўлишини топамиз:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)=$$

$$=\frac{1}{n^2}(1+2+3+\ \ldots\ +n)=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Демак,

$$\int_0^1 xdx = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ (n\to\infty)}}\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{1}{2}.$$

Шундай қилиб,

$$\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}.$$

16.1-эслатма. $f(x)$ функция $[a; b]$ сегментда аниқланган бўлиб, у шу сегментда интегралланувчи бўлсин. Унда

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx, \quad \int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad (16.4)$$

деб қараймиз.

16.2-эслатма. Агар $f(x)$ функция $[a; b]$ сегментнинг чекли сондаги нуқталарида узилишга (сакрашга) эга бўлиб, қолган барча нуқталарида узлуксиз бўлса, функция $[a; b]$ сегментда интегралланувчи бўлади.

4-§. Аниқ интегралнинг хоссалари

$f(x)$ функция $[a; b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Унинг аниқ интеграли $\int_a^b f(x)\,dx$ ҳар доим мавжуд. Ушбу

1°. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$ $(c = \text{const})$ формула ўринли.

Исбот. Таърифга кўра

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

$c\cdot f(x)$ функциянинг интеграл йиғиндиси

$$\sum_{k=0}^{n-1} cf(\xi_k)\,\Delta x_k$$

бўлади. Равшанки,

$$\sum_{k=0}^{n-1} cf(\xi_k)\,\Delta x_k = c\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

Бу тенгликда $\lambda\to 0$ да лимитга ўтиб,

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

бўлишини топамиз.

2°. Агар $f(x)$ билан бирга $g(x)$ функция ҳам $[a; b]$ сегментда узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

бўлади.

Исбот. Таърифга кўра

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k,$$

$$\int_a^b g(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} g(\xi_k)\,\Delta x_k$$

бўлади. $f(x) \pm g(x)$ функциянинг $[a; b]$ сегментдаги интеграл йиғиндиси

$$\sum_{k=0}^{n-1} [f(\xi_k) \pm g(\xi_k)]\,\Delta x_k$$

бўлади. Равшанки,

$$\sum_{k=0}^{n-1} [f(\xi_k) \pm g(\xi_k)]\,\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k \pm \sum_{k=0}^{n-1} g(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

Бу тенгликда $\lambda \to 0$ да лимитга ўтиб топамиз:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

Аниқ интегралнинг кейинги бир нечта хоссасини исботсиз келтирамиз.

3°. Агар $[a; b]$ сегмент иккита $[a; c]$ ва $[c; b]$ $(a < c < b)$ сегментлардан иборат бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

бўлади.

4°. Агар $f(x)$ функция учун $\forall x \in [a; b]$ да $f(x) \geqslant 0$ бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$$

бўлади.

5°. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар учун $\forall x \in [a; b]$ да $f(x) \leqslant g(x)$ бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx \qquad (16.5)$$

бўлади.

6°. Ўрта қиймат ҳақидаги теорема. *Агар $f(x)$ функция $[a; b]$ сегментда берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда a ва b орасида шундай ξ $(a < \xi < b)$ нуқта топиладики,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a) \qquad (16.6)$$

бўлади.

Исбот. Теореманинг шартидан $f(x)$ функциянинг $[a;\ b]$ сегментда чегараланганлиги келиб чиқади:

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \quad (\forall\ x \in [a;\ b]).$$

Аниқ интегралнинг юқорида келтирилган хоссаларидан фойдаланиб топамиз:

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \Rightarrow \int_a^b m dx \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant \int_a^b M dx \Rightarrow m \int_a^b dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant M \int_a^b dx \Rightarrow m\,(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant M\,(b-a)$$

$$\left(\text{чунки,} \quad \int_a^b dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} 1 \cdot \Delta x_k = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \lim_{\lambda \to 0} (b-a) = (b-a)\right).$$

Демак,

$$m\,(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant M\,(b-a).$$

Бу тенгсизликларни $b-a$ га бўлсак, унда ушбу

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\, dx}{b-a} \leqslant M$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. Яна $f(x)$ функциянинг $[a;\ b]$ сегментда узлуксиз бўлганлигидан, a ва b орасида шундай ξ $(a < \xi < b)$ топиладики,

$$\frac{\int_a^b f(x)\, dx}{b-a} = f(\xi)$$

бўлади. Бу тенгликдан эса

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(\xi)\,(b-a)$$

бўлиши келиб чиқади.

7°. $f(x)$ функция $[a;\ b]$ сегментда берилган ва узлуксиз бўлсин. Равшанки, бу функция $[a,\ x]$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ да ҳам узлуксиз бўлади. Демак,

$$\int_a^x f(t)\, dt$$

мавжуд. Агар $[a;\ b]$ сегментдан олинган ҳар бир x га $\int_a^x f(t)\, dt$ ни мос қўйсак:

$$F : x \to \int_a^x f(t)\, dt$$

унда функция ҳосил бўлади. Уни $F(x)$ орқали белгилайлик:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt. \tag{16.7}$$

Бу $F(x)$ функциянинг ҳосиласи берилган $f(x)$ га тенг бўлади: $F'(x) = f(x)$. Шуни кўрсатамиз. Аргумент x га Δx орттирма бериб, $F(x)$ функциянинг мос орттирмасини топамиз:

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt.$$

Аниқ интегралнинг 3°- хоссасига кўра

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t)\, dt = \int_a^x f(t)\, dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt$$

бўлади. Унда

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^x f(t)\, dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt$$

бўлади. Демак,

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги $\int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt$ интегралга ўрта қиймат ҳақидаги теоремани қўлласак,

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt = f(\xi)(x + \Delta x - x) = f(\xi)\, \Delta x$$

($\xi \in (x,\ x + \Delta x)$) бўлади ва натижада $F(x)$ функция орттирмаси учун ушбу

$$F(x + \Delta x) - F(x) = f(\xi)\, \Delta x \quad (\xi \in (x,\ x + \Delta x))$$

тенгликка келамиз. Бу тенгликдан эса

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(\xi) \tag{16.8}$$

бўлиши келиб чиқади. Маълумки, $\Delta x \to 0$ да

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

нисбатнинг лимити $F'(x)$ бўлади (ҳосила таърифини эсланг):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$$

$\Delta x \to 0$ да $\xi \in (x, x+\Delta x)$ бўлганлиги сабабли $\xi \to x$. Берилишига кўра $f(x)$ функция узлуксиз. Демак, $\xi \to x$ да

$$f(\xi) \to f(x).$$

Юқоридаги (16.8) тенгликда $\Delta x \to 0$ да лимитга ўтиб,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi)$$

ушбу

$$F'(x) = f(x)$$

тенгликка келамиз. Демак,

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

функциянинг ҳосиласи интеграл остидаги функциянинг x нуқтадаги қиймати $f(x)$ га тенг бўлар экан:

$$F'(x) = \left(\int_a^x f(t)\, dt\right)' = f(x).$$

Бу узлуксиз функциялар учун ҳар доим бошланғич функция мавжуд бўлишини билдиради.

5-§. Аниқ интегралларни ҳисоблаш

1°. Аниқ интегрални таърифга кўра ҳисоблаш. Маълумки,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\, \Delta x_k.$$

Демак, $\lambda \to 0$ $(\lambda = \max\limits_k \{\Delta x_k\})$ да

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\, \Delta x_k$$

йиғиндининг лимитини топиш билан берилган $f(x)$ функциянинг аниқ интеграли $\int_a^b f(x)\, dx$ ни ҳисоблаш мумкин.

Мисол. $\int_a^b \sin x dx$ интеграл ҳисоблансин. Бу интеграл учун интеграл йиғинди σ ни тузамиз. $[a;\ b]$ сегментни ушбу

$$a,\ a+\frac{b-a}{n},\ a+2\frac{b-a}{n},\ \ldots,\ a+k\frac{b-a}{n},\ \ldots,$$
$$a+n\frac{b-a}{n}=b$$
нуқталар ёрдамида n та тенг бўлакка бўлиб, ҳар бир
$$\left[a+k\frac{b-a}{n};\ a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right]\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$$
бўлакда ξ_k нуқтани
$$\xi_k=a+(k+1)\frac{b-a}{n}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$$
деб оламиз. Берилган функциянинг интеграл йиғиндисини тузамиз:
$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\,\Delta x_k=$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left[a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right]\frac{b-a}{n}=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left[a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right].$$
Маълумки,
$$2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta).$$
Бу формуладан фойдаланиб топамиз: $\sin\left[a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right]=$
$$=\frac{1}{2\sin\frac{b-a}{2n}}\,2\sin\frac{b-a}{2n}\cdot\sin\left[a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right]=$$
$$=\frac{1}{2\sin\frac{b-a}{2n}}\left\{\cos\left[a+\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right]-\cos\left[a+\left(k+\frac{3}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right]\right\}.$$
У ҳолда
$$\sigma=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left[a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right]=$$
$$=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\sin\frac{b-a}{n}}\left\{\cos\left[a+\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right]-\right.$$
$$\left.-\cos\left[a+\left(k+\frac{3}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right]\right\}=\frac{b-a}{n}\cdot\frac{1}{2\sin\frac{b-a}{2n}}\left[\cos\left(a+\frac{1}{2}\,\frac{b-a}{n}\right)-\right.$$
$$-\cos\left(a+\frac{3}{2}\cdot\frac{b-a}{n}\right)+\cos\left(a+\frac{3}{2}\,\frac{b-a}{n}\right)-\cos\left(a+\frac{5}{2}\,\frac{b-a}{n}\right)+$$
$$\left.+\ldots+\cos\left(a+\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right)-\cos\left(a+\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right)\right]=$$

$$=\frac{\frac{b-a}{2n}}{\sin\frac{b-a}{2n}}\left[\cos\left(a+\frac{1}{2}\,\frac{b-a}{n}\right)-\cos\left(b+\frac{1}{2}\,\frac{b-a}{n}\right)\right]$$

бўлади. Бу тенгликда $\lambda=\frac{b-a}{n}\to 0$ да лимитга ўтиб топамиз:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\frac{b-a}{2n}}{\sin\frac{b-a}{2n}}\left[\cos\left(a+\frac{1}{2}\,\frac{b-a}{n}\right)-\cos\left(b+\frac{1}{2}\,\frac{b-a}{n}\right)\right]=$$

$$=\cos a-\cos b$$

$\left(\text{бунда } \lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1\right.$ ва $y=\cos x$ функциянинг узлуксизлигидан фойдаландик$\left.\right)$. Демак,

$$\int_a^b \sin x\,dx=\cos a-\cos b.$$

2°. Ньютон—Лейбниц формуласи. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда берилган ва узлуксиз бўлсин. Бундай $f(x)$ функция ушбу бошланғич

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

функцияга эга. Маълумки, $f(x)$ функциянинг ихтиёрий бошланғич $\Phi(x)$ функцияси берилган бошланғич $F(x)$ функциядан ўзгармас қўшилувчига фарқ қилар эди (қаралсин, 15-боб, 1-§)

$$\Phi(x)=F(x)+C\quad (C\text{ — ўзгармас сон}).$$

Демак,

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt+C.$$

Бу тенгликда, $x=a$ да

$$\Phi(a)=\int_a^a f(t)\,dt+C=C, \tag{16.9}$$

$x=b$ да

$$\Phi(b)=\int_a^b f(t)\,dt+C \tag{16.10}$$

бўлишини топамиз. Натижада (16.9) ва (16.10) тенгликлардан

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Phi(b)-\Phi(a) \tag{16.11}$$

бўлиши келиб чиқади. Бу *Ньютон—Лейбниц формуласи* дейилади.

(16.11) тенгликнинг ўнг томонидан $\Phi(b)-\Phi(a)$ айирмани $\Phi(x)\Big|_a^b$ каби ёзилади. Демак,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Phi(b)-\Phi(a)=\Phi(x)\Big|_a^b.$$

Ньютон — *Лейбниц* формуласи ёрдамида $\int_a^b f(x)\,dx$ аниқ интеграллар қуйидагича ҳисобланади:

Аввало $f(x)$ функциянинг аниқмас интеграли

$$\int f(x)\,dx$$

топилади. Айтайлик, бу интеграл топилиб, $\Phi(x)$ га тенг бўлсин:

$$\int f(x)\,dx=\Phi(x).$$

Сўнг бу функциянинг a ва b нуқталардаги қийматлари ҳисобланиб, $\Phi(b)-\Phi(a)$ айирма топилади. Бу қиймат Ньютон — Лейбниц формуласига кўра $\int_a^b f(x)\,dx$ интегралнинг қиймати бўлади.

Мисоллар. 1. $\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx$ интеграл ҳисоблансин.

Аввало бу $f(x)=\cos x$ функциянинг аниқмас интегралини ҳисоблаймиз:

$$\int\cos x\,dx=\sin x+C.$$

Демак,

$$\Phi(x)=\sin x.$$

Ньютон — Лейбниц формуласига кўра

$$\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx=\sin x\Big|_0^{\pi/2}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1.$$

2. $\int_1^6\frac{dx}{\sqrt{3+x}}$ интеграл ҳисоблансин.

Бу $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3+x}}$ функциянинг аниқмас интеграли

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3+x}}=\int(3+x)^{-\frac{1}{2}}d(3+x)=\frac{(3+x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=$$

$$= \frac{(3+x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{3+x} + C$$

бўлади. Ньютон — Лейбниц формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$\int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{3+x}} = 2\cdot\sqrt{3+x}\,\Big|_1^6 = 2\,(\sqrt{3+6} - \sqrt{3+1}) =$$

$$= 2\,(3-2) = 2.$$

3. $\int\limits_a^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2+x^2}$ интеграл ҳисоблансин.

Равшанки,

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{dx}{a^2\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\ \mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

Унда

$$\int\limits_a^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\ \mathrm{arctg}\ \frac{x}{a}\,\Big|_a^{a\sqrt{3}} = \frac{1}{a}\left(\mathrm{arctg}\ \frac{a\sqrt{3}}{a} - \mathrm{arctg}\ \frac{a}{a}\right) =$$

$$= \frac{1}{a}\left(\mathrm{arctg}\ \sqrt{3} - \mathrm{arctg}\ 1\right) = \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{12a}$$

бўлади.

4. $\int\limits_0^1 xe^{-x^2}dx$ интеграл ҳисоблансин.

Бу интеграл қуйидагича ҳисобланади:

$$\int\limits_0^1 xe^{-x^2}\ dx = \int\limits_0^1 e^{-x^2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\ d\,(-x^2) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{-x^2}\ d\,(-x^2) =$$

$$= -\frac{1}{2}\ e^{-x^2}\ \Big|_0^1 = -\frac{1}{2}\ (e^{-1} - e^0) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

6-§. Аниқ интегрални ҳисоблаш усуллари

1°. Бўлаклаб интеграллаш усули. Айтайлик, $u = u\,(x)$ ва $v = v\,(x)$ функциялар $[a;\ b]$ сегментда аниқланган, узлуксиз $u'\,(x)$ ва $v'\,(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. Равшанки,

$$[u\,(x)\ v\,(x)]' = u'\,(x)\ v\,(x) + u\,(x)\ v'\,(x).$$

Демак, $u\,(x)\ v\,(x)$ функция $u'\,(x)\ v\,(x) + u\,(x)\ v'\,(x)$ функциянинг бошланғич функцияси. Ньютон — Лейбниц формуласига биноан

$$\int_a^b [(u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x)]\, dx = (u(x)\, v(x))_a^b$$

бўлади. Агар

$$\int_a^b [u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x)]\, dx = \int_a^b v(x)\, u'(x)\, dx + \int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx =$$

$$= \int_a^b v(x)\, du(x) + \int_a^b u(x)\, dv(x)$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\int_a^b v(x)\, du(x) + \int_a^b u(x)\, dv(x) = [u(x)\, v(x)]_a^b$$

бўлиб, бундан эса

$$\int_a^b u(x)\, dv(x) = [u(x)\, v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)\, du(x) \qquad (16.12)$$

бўлиши келиб чиқади. Бу тенглик *аниқ интегрални бўлаклаб интеграллаш формуласи* дейилади.

Мисол. Ушбу $\int_e^{e^2} x \ln x dx$ интеграл ҳисоблансин.

Бу интегрални ҳисоблашда (16.12) формуладан фойдаланамиз. $u = \ln x$, $dv = xdx$ деб топамиз: $du = \frac{1}{x}\, dx$, $v = \frac{x^2}{2}$. Унда (16.12) формулага кўра

$$\int_e^{e^2} x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\, dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_e^{e^2} - \frac{1}{2} \int_e^{e^2} x dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[e^4 \ln e^2 - e^2 \ln e - \frac{x^2}{2} \Big|_e^{e^2} \right] = \frac{1}{2} \left[2e^4 - e^2 - \frac{e^4}{2} + \frac{e^2}{2} \right] =$$

$$= \frac{1}{4}\, (3e^2 - 1)\, e^2$$

бўлади. Демак,

$$\int_e^{e^2} x \ln x dx = \frac{1}{4}\, (3e^2 - 1)\, e^2.$$

2°. Ўзгарувчиларни алмаштириш усули. $f(x)$ функция $[a;\ b]$ сегментда берилган ва узлуксиз бўлсин. Ушбу

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

интегрални ҳисоблаш талаб этилсин. Бу интегралда $x=\varphi(t)$ деймиз. $\varphi(t)$ функция қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1) $\varphi(t)$ функция $[\alpha;\ \beta]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз;

2) $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$;

3) $\varphi(t)$ функция $[\alpha;\ \beta]$ сегментда узлуксиз $\varphi'(t)$ ҳосилага эга бўлсин. У ҳолда

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

бўлади.

Мисол. Ушбу интеграл ҳисоблансин:

$$\int_{\pi/2}^{\pi/3}\frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx.$$

Бу интегралда $\sin x=t$ деб оламиз. Натижада $\cos x\,dx=dt$ ни ва t ўзгарувчи $\left[\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ да ўзгаришини топамиз. Демак, $\int\limits_{\pi/2}^{\pi/3}\frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx=$

$$=\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2}\frac{dt}{t^3}=\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2}t^{-3}\,dt=\frac{t^{-3+1}}{-3+1}\Bigg|_{1/2}^{\sqrt{3}/2}=-\frac{1}{2t^2}\Bigg|_{1/2}^{\sqrt{3}/2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}-4\right)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{-8}{3}=\frac{4}{3}.$$

7-§. Аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблаш

$f(x)$ функция мураккаб бўлса (табиийки, унинг бошланғич функциясини топиш қийин бўлади), унда берилган функциянинг интегралини тақрибий ҳисоблашга тўғри келади.

1°. Тўғри тўртбурчаклар формуласи. $f(x)$ функция $[a;\ b]$ сегментда берилган ва узлуксиз бўлсин. Бу функциянинг аниқ интеграли

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ни тақрибий ифодаловчи формулани келтирамиз.

$[a;\ b]$ сегментни

$$x_0=a<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$$

нуқталар ёрдамида n та тенг бўлакка бўламиз. Равшанки, бу ҳолда

$$\Delta x_k=x_{k+1}-x_k=\frac{b-a}{n},\quad x_k=a+k\,\frac{b-a}{n}\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

бўлади. Берилган $f(x)$ функциянинг x_k нуқтадаги қиймати $f(x_k)$ ни ҳисоблаб, $f(x)$ нинг $[x_k;\ x_{k+1}]$ сегмент бўйича аниқ интегралини қуйидагича

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx \approx f(x_k)\,\Delta x_k = f(x_k)\,\frac{b-a}{n}$$

тақрибий ифодалаймиз. Бундай тақрибий формулани ҳар бир $[x_x; x_{k+1}]$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ сегментга нисбатан ёзиб, сўнг уларни ҳадлаб қўшиб топамиз:

$$\int_a^{x_1} f(x)\,dx \approx f(x_0)\,\frac{b-a}{n},$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \approx f(x_1)\,\frac{b-a}{n},$$

$$\int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx \approx f(x_2)\,\frac{b-a}{n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_{x_{n-1}}^{b} f(x)\,dx \approx f(x_{n-1})\,\frac{b-a}{n},$$

$$\int_a^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{b} f(x)\,dx \approx$$

$$\approx \frac{b-a}{n}\,[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})].$$

Демак,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\,[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n - 1)] =$$

$$= \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k). \qquad (16.13)$$

Бу (16.13) формула *тўғри тўртбурчаклар формуласи* дейилади.

2°. Трапециялар формуласи. $[a;\ b]$ сегментни юқоридагидек n та тенг бўлакка бўлиб, $f(x)$ функциянинг $[x_k;\ x_{k+1}]$ сегмент бўйича олинган аниқ интегралини қуйидагича

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx \approx \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}\,\Delta x_k = \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}\,\frac{b-a}{n}$$

тақрибий ифодалаймиз. Бундай тақрибий формулани ҳар бир $[x_k; x_{k+1}]$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n-1)$ сегментга нисбатан ёзиб, сўнг уларни ҳадлаб қўшиб топамиз:

$$\int_a^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) + \int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{b} f(x)\,dx \approx$$

$$\approx \frac{b-a}{n}\,[(f(x_0)+f(x_1)) + (f(x_1)+f(x_2)) + (f(x_2)+f(x_3)) +$$

$$+ \ldots + (f(x_{n-1})+f(x_n))] = \frac{b-a}{n}\,[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+$$

$$+ \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

Демак,

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\,[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+$$

$$+ \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]. \qquad (16.14)$$

Бу (16.14) формула *трапециялар формуласи* деб аталади.

3°. Параболалар (Симпсон) формуласи. $f(x)$ функция $[a; b]$ сегментда берилган ва узлуксиз бўлсин. $[a; b]$ сегментни

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n-2} < x_{2n-1} < x_{2n} = b$$

нуқталар ёрдамида $2n$ та тенг бўлакка бўламиз. $f(x)$ функциянинг $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ сегмент бўйича аниқ интегралини қуйидагича

$$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\,[f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})]$$

тақрибий ифодалаймиз. Бундай тақрибий формулаларни ҳар бир $[x_{2k}; x_{2k+1}]$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n-1)$ сегментга нисбатан ёзиб, сўнг уларни ҳадлаб қўшиб топамиз:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \int_{x_4}^{x_6} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)\,dx \approx$$

$$\approx \frac{b-a}{6n}\,[(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)) + (f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)) +$$

$$+ (f(x_4)+4f(x_5)+f(x_6)) + \ldots + (f(x_{2n-2})+4f(x_{2n-1}) +$$

$$+ f(x_{2n}))] = \frac{b-a}{6n}\,[(f(x_0)+f(x_{2n})) + 4\,(f(x_1)+f(x_3)+f(x_5)+$$

$$+ \ldots + f(x_{2n-1})) + 2\,(f(x_2)+f(x_4)+f(x_6)+$$

$$+ \ldots + f(x_{2n-2}))].$$

Демак,

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\,[(f(x_0)+f(x_{2n}))+4\,(f(x_1)+f(x_3)+\ldots+$$

$$+f(x_{2n-1}))+2\,(f(x_2)+f(x_4)+\ldots+f(x_{2n-2}))]. \quad (16.16)$$

Бу (16.15) формула *параболалар (Симпсон) формуласи* дейилади.

Мисол. $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ аниқ интеграл тақрибий ҳисоблансин.

[0; 1] сегментни ушбу $x_0=0$, $x_1=0,2$, $x_2=0,4$, $x_3=0,6$, $x_4=0,8$, $x_5=1,0$ нуқталар ёрдамида 5 та тенг бўлакка бўламиз. Сўнг $f(x)=e^{-x^2}$ функциянинг шу нуқталардаги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$f(x_0)=f(0)=e^0=1,00000,$$
$$f(x_1)=f(0,2)\approx 0,96079,$$
$$f(x_2)=f(0,4)\approx 0,85214,$$
$$f(x_3)=f(0,6)\approx 0,69768,$$
$$f(x_4)=f(0,8)\approx 0,52729,$$
$$f(x_5)=f(1)\approx 0,36788.$$

Берилган $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ интегрални тўғри тўртбурчаклар, трапеция ҳамда Симпсон формулалари бўйича тақрибий ҳисоблаймиз.

а) тўғри тўртбурчаклар формуласи бўйича

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx \frac{1-0}{5}\,[f(0)+f(0,2)+f(0,4)+f(0,6)+f(0,8)]=$$

$$=\frac{1}{5}\,(1,00000+0,96079+0,85214+0,69768+0,52729)=$$

$$=\frac{1}{5}\,(4,03790)=0,80758$$

бўлади. Демак,

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx 0,80758;$$

б) трапециялар формуласи бўйича

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=\frac{1-0}{2\cdot 5}\,[f(0)+2f(0,2)+2f(0,4)+2f(0,6)+$$

$$+2f(0,8)+f(1)]=\frac{1}{10}\,[1,00000+2\cdot 0,96079+2\cdot 0,85214+$$

$$+2\cdot 0,69768+0,52729]=0,74805$$

бўлади. Демак, $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx=0,74805;$

в) Симпсон формуласи бўйича

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx \approx 0{,}74682$$

бўлади.

XVII БОБ. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ БАЪЗИ ТАТБИҚЛАРИ

1-§. Текис шаклнинг юзи ва унинг аниқ интеграл орқали ифодаланиши

Текисликда бирор ёпиқ чизиқ билан чегараланган (D) шакл берилган бўлсин (123-чизма). Бундай шаклнинг юзи тушунчаси билан танишамиз. Бу тушунча ўрта мактаб математика курсидан маълум бўлган фактлар — кўпбурчакларнинг юзга эга бўлиши ва уларнинг юзининг ҳисобланишига асосланган. Берилган (D) шаклнинг ичига (A) кўпбурчак чизамиз. Бу кўпбурчакнинг юзи A бўлсин. Бундай кўпбурчаклар юзларидан иборат тўплам $\{A\}$ бўлсин.

Худди шунга ўхшаш, (D) шаклни ўз ичига олган (B) кўпбурчакни (ташқи чизилган кўпбурчакни) чизамиз. Унинг юзи B бўлсин. Бундай кўпбурчак юзларидан иборат тўплам $\{B\}$ бўлсин.

Натижада $\{A\}$ ва $\{B\}$ — мусбат сонлар тўпламлари ҳосил бўлади. $\{A\}$ тўплам юқоридан, $\{B\}$ тўплам эса қуйидан чегараланган бўлади. Унда $\{A\}$ тўпламнинг аниқ юқори чегараси $\sup\{A\}$, $\{B\}$ тўпламнинг аниқ қуйи чегараси $\inf\{B\}$ мавжуд.

17.1-таъриф. *Агар*

$$\sup\{A\} = \inf\{B\}$$

бўлса, у ҳолда (D) шакл юзга эга деб аталади ва

$$D = \sup\{A\} = \inf\{B\}$$

миқдор (D) шаклнинг юзи дейилади.

$y = f(x)$ функция $[a;\ b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, $\forall x \in [a,\ b]$ да $f(x) \geqslant 0$ бўлсин.

(D) шакл юқоридан $f(x)$ функция графиги, ён томонлардан $x=a$, $x=b$ тўғри чизиқлар, пастдан Ox ўқи билан чегараланган шакл — $ABCE$ эгри чизиқли трапециядан иборат бўлсин (124-чизма).

Шу $ABCE$ эгри чизиқли трапеция юзга эга. $[a;\ b]$ сегментни x_0, $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n : (a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_n = b)$ нуқталар билан n та бўлакка бўламиз. Берилган $f(x)$ функциянинг $[x_k;\ x_{k+1}]$ даги энг катта қиймати M_k, энг кичик қиймати эса m_k бўлсин. Равшанки. $\xi_k \in [x_k;\ x_{k+1}]$ учун

$$m_k \leqslant f(\xi_k) \leqslant M_k \qquad (17.1)$$

бўлади.

$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$ нуқталардан Oy ўқига параллел чизиқлар ўтказиб, уларни $f(x)$ функция графиги билан кесишгунча давом эттирамиз. Натижада $ABCD$ эгри чизиқли трапеция эгри чизиқли трапецияларга ажралади (124-чизмага қаранг).

Ҳар бир бўлакчада асоси $[x_k;\ x_{k+1}]$, баландликлари эса m_k ва M_k бўлган тўғри тўртбурчаклар ясаймиз.

Баландликлари m_k бўлган тўғри тўртбурчаклар (D) шакл—$ABCE$ эгри чизиқли трапеция ичига чизилган кўпбурчак бўлиб, унинг юзи

$$s=\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \quad (\Delta x_k = x_{k+1}-x_k) \tag{17.2}$$

бўлади. Баландликлари M_k бўлган барча тўғри тўртбурчаклар $ABCE$ эгри чизиқли трапецияни ўз ичига олган кўпбурчак бўлади. Унинг юзи эса

$$S=\sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k \tag{17.3}$$

га тенг. Юқоридаги (17.1), (17.2) ва (17.3) муносабатлардан

$$s \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k \leqslant S$$

бўлиши келиб чиқади.

Агар $[a;\ b]$ сегментнинг турли усуллар билан n та бўлакка бўлинишлари олинса, унда юқоридагидек мос s ва S йиғиндиларни тузиш мумкин ва улардан $\{s\}$ ва $\{S\}$ тўпламларни ҳосил қилиш мумкин. Бу тўпламлар учун

$$\sup\{s\},\ \inf\{S\}$$

мавжуд бўлади.

Кўрсатиш мумкинки,

$$\inf\{S\}=\sup\{s\}$$

бўлиб,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \inf\{S\} = \sup\{s\}$$

бўлади.

Демак, (D) шакл — $ABCE$ эгри чизиқли трапециянинг юзи

$$D=\int_a^b f(x)\,dx \tag{17.4}$$

бўлади.

Мисол. Юқоридан $y=x^2$ парабола, ён томонлардан $x=1$, $x=3$ вертикал тўғри чизиқлар ва пастдан Ox ўқи билан чегараланган шаклнинг юзи топилсин (125-чизма).

Юқорида келтирилган (17.4) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$D=\int_1^3 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_1^3=\frac{3^3}{3}-\frac{1}{3}=9-\frac{1}{3}=8\frac{2}{3}\ \text{кв. бирлик.}$$

Текисликдаги (D) шакл — юқоридан $f_2(x)$ функция графиги, ён томонлардан $x=a$, $x=b$ тўғри чизиқлар билан, пастдан $f_1(x)$ функция графиги билан чегараланган шакл бўлсин. Бунда $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар $[a; b]$ сегментда узлуксиз ва $\forall x \in [a; b]$ учун $f_1(x) \geqslant 0$, $f_2(x) \geqslant 0$, $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ (126-чизма). Бундай шаклнинг юзи ушбу формула билан топилади:

$$D = \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_1(x)\,dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx. \qquad (17.5)$$

Мисол. Пастдан $f_1(x)=x^3$ функция графиги, ён томонлардан $x=-1$, $x=1$ вертикал тўғри чизиқлар, юқоридан $f_2(x)=x^2$ функция графиги билан чегараланган шаклнинг юзи топилсин (127-чизма).

Бу шаклнинг юзи (17.5) формулага кўра

$$D = \int_{-1}^{1} (x^2 - x^3)\,dx$$

бўлади. Интегрални ҳисоблаймиз:

$$D = \int_{-1}^{1} (x^2 - x^3)\,dx = \int_{-1}^{1} x^2dx - \int_{-1}^{1} x^3dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} - \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3} \text{ кв. бирлик.}$$

2-§. Ёй узунлиги ва унинг аниқ интеграл орқали ифодаланиши

Бирор $y=f(x)$ функция $[a; b]$ сегментда берилган ва узлуксиз бўлсин. Бу функция графиги 128-чизмада тасвирланган $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқ — ёйни ифодаласин. Эгри чизиқ узунлиги тушунчаси бизга маълум бўлган фактлар — синиқ чизиқнинг узунликка (периметрга) эга бўлиши ҳамда уни ҳисоблай олинишига асосланади.

$[a; b]$ сегментни $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b)$ нуқталар билан n та бўлакка бўламиз. Бу нуқталардан Oy ўқига параллел чизиқлар ўтказиб, уларни $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиғи билан кесишгунча давом эттирамиз. Кесишиш нуқталари A_k $(k=0, 1, 2, \ldots, n-1, n$; $A_0=A$, $A_n=B)$ бўлсин. Равшанки, бу нуқталарнинг координаталари $(x_k, f(x_k))$ бўлади: $A_k(x_k, f(x_k))$. $\overset{\frown}{AB}$ ёйидаги бу нуқталарни бир-бири билан тўғри чизиқ кесмалари ёрдамида бирлаштирамиз. Натижада $\overset{\frown}{AB}$ ёйига чизилган синиқ чизиқ ҳосил бўлади. Мазкур курснинг 1-боб, 2-§ ида келтирилган икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласидан фойдаланиб синиқ чизиқ периметрини ҳисоблаймиз:

$$L = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (f(x_1) - f(x_0))^2} + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (f(x_2) - f(x_1))^2} +$$
$$+ \ldots + \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2} + \ldots +$$
$$+ \sqrt{(x_n - x_{n-1})^2 + (f(x_n) - (x_{n-1}))^2} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_x))^2}.$$

Демак, $\smile{AB}$ ёйига чизилган синиқ чизиқ периметри

$$L = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2} \quad (x_0 = a, \quad x_n = b)$$

бўлади. Аввалдагидек $\lambda = \max\limits_k \{\Delta x_k\}$ деймиз.

17.2-таъриф. *$\smile{AB}$ ёйга чизилган синиқ чизиқ периметри*

$$L = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2}$$

$\lambda \to 0$ *да чекли лимитга эга бўлса, $\smile{AB}$ ёй узунликка эга дейилади ва бу лимит*

$$\lim_{\lambda \to 0} L = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2} = l \qquad (17.7)$$

$\smile{AB}$ ёйнинг узунлиги дейилади.

Юқорида айтилган $f(x)$ функция $[a; b]$ сегментда узлуксиз $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Унда ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ сегментда $f(x)$ функция Лагранж теоремасининг шартларини қаноатлантиради.

Лагранж теоремасига кўра

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) = f'(\eta_k)(x_{k+1} - x_k) \; (x_k < \eta < x_{k+1})$$

бўлади.

Натижада $\smile{AB}$ ёйга чизилган синиқ чизиқ периметри қуйидаги кўринишга келади:

$$L = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + f'^2(\eta_k)(x_{k+1} - x_k)^2} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 [1 + f'^2(\eta_k)]} = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(\eta_k)} \, (x_{k+1} - x_k) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(\eta_k)} \, \Delta x_k. \qquad (17.8)$$

Қаралаётган $f(x)$ функция $[a; b]$ сегментда узлуксиз $f'(x)$ ҳосилага эга бўлганлиги сабабли ушбу

$$\sqrt{1+f'^2(x)}$$

функция ҳам узлуксиз бўлади. Шунинг учун $\sqrt{1+f'^2(x)}$ функциянинг интеграл йиғиндиси

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1+f'^2(\eta_k)}\, \Delta x_k$$

$\lambda \to 0$ да

$$\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\, dx$$

га интилади:

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{1+f'^2(\eta_k)}\, \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\, dx. \tag{17.9}$$

Натижада (17.7), (17.8) ва (17.9) муносабатлардан

$$l = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\, dx$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $\smile{AB}$ ёйнинг узунлиги аниқ интеграл ёрдамида қуйидаги формула билан топилади:

$$l = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\, dx. \tag{17.10}$$

Мисол. $f(x) = e^x$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ функция графиги тасвирланган ёй узунлиги топилсин.

Юқоридаги (17.10) формулага кўра изланаётган ёй узунлиги

$$l = \int_0^1 e^x\, dx$$

бўлади. Бу интегрални ҳисоблаб топамиз:

$$l = \int_0^1 e^x\, dx = e^x \Big|_0^1 = e - 1.$$

XVIII БОБ. ХОСМАС ИНТЕГРАЛЛАР

1-§. Чегаралари чексиз хосмас интеграллар

$f(x)$ функция $[a; +\infty)$ оралиқда берилган ва узлуксиз бўлсин. Бу функциянинг $[a; +\infty)$ оралиқнинг исталган чекли $[a; y]$ $(a < y < +\infty)$ қисмидаги

$$\int_a^y f(x)\,dx$$

интеграл y га боғлиқ бўлади:

$$F(y) = \int_a^y f(x)\,dx.$$

Шундай қилиб, берилган $f(x)$ функция ёрдамида $F(y)$ функция ҳосил бўлади.

18.1-таъриф. *Агар $y \to +\infty$ да $F(y)$ функциянинг лимити мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)$ функциянинг $[a; +\infty)$ оралиқдаги хосмас интеграли деб аталади ва*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

каби белгиланади:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{y\to+\infty} F(y) = \lim_{y\to+\infty} \int_a^y f(x)\,dx.$$

Бундай $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ интеграл *чегараси чексиз хосмас интеграл* деб ҳам айтилади.

Агар $y \to +\infty$ да $F(y) = \int_a^y f(x)\,dx$ функциянинг лимити мавжуд ва чекли бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи дейилади.

Агар $y \to +\infty$ да $F(x)$ функциянинг лимити чексиз бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ хосмас интеграл узоқлашувчи деб аталади.

Айтайлик, $f(x)$ функция $(-\infty; a]$ ёки $(-\infty; +\infty)$ оралиқда берилган ва узлуксиз бўлсин. Бу функциянинг $(-\infty; a]$ ва $(-\infty; +\infty)$ оралиқлар бўйича хосмас интеграллари ҳам юқоридаги каби таърифланади:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{y\to-\infty} \int_y^a f(x)\,dx \quad (-\infty < y < a);$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{y\to-\infty \\ t\to+\infty}} \int_y^t f(x)\,dx \quad (-\infty < y < t < +\infty).$$

Мисоллар. 1. $\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx$ хосмас интеграл ҳисоблансин.

Чегараси чексиз хосмас интеграл таърифидан фойдаланиб топамиз:

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx = \lim_{y\to+\infty}\int_0^y e^{-2x}\,dx = \lim_{y\to+\infty}\frac{-1}{2}\int_0^y e^{-2x}\,d(-2x) =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{y\to+\infty} e^{-2x}\Big|_0^y = -\frac{1}{2}\lim_{y\to+\infty}(e^{-2y}-e^0) = -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}.$$

Демак, берилган хосмас интеграл яқинлашувчи ва

$$\int_0^{+\infty} e^{-x2}\,dx = \frac{1}{2}.$$

2. $I = \int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ $(\alpha>0,\ a>0)$ интеграл ҳисоблансин.

Агар $\alpha>1$ бўлса, у ҳолда $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{y\to+\infty}\int_a^y x^{-\alpha}\,dx =$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right)_a^y = \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}(y^{1-\alpha}-a^{1-\alpha}) = \frac{-1}{1-\alpha}a^{1-\alpha}$$

бўлади. Бу эса $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ хосмас интегралнинг яқинлашувчилигини билдиради.

Агар $\alpha<1$ бўлса, у ҳолда

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{y\to+\infty}\int_a^y x^{-\alpha}\,dx = \lim_{y\to+\infty}(y^{1-\alpha}-a^{1-\alpha})\frac{1}{1-\alpha} = +\infty$$

бўлади. Хосмас интеграл узоқлашувчи. Агар $\alpha=1$ бўлса, у ҳолда

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{y\to+\infty}\int_a^y\frac{dx}{x} = \lim_{y\to+\infty}(\ln y-\ln a) = +\infty$$

бўлади. Бу интеграл узоқлашувчи.

Шундай қилиб, берилган $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ $(\alpha>0,\ a>0)$ хосмас интеграл $\alpha>1$ бўлганда яқинлашувчи, $\alpha\leqslant1$ бўлганда узоқлашувчи бўлади.

2-§. Яқинлашувчи хосмас интегралнинг хоссалари

Хосмас интеграллар ҳам аниқ интегралларга ўхшаш хоссаларга эга. Биз уларни исботсиз келтирамиз.

1°. *Агар* $f(x)$ *функциянинг* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *хосмас интеграли яқинлашувчи бўлса, бу функциянинг* $\int_b^{+\infty} f(x)\,dx$ $(a < b < +\infty)$ *хосмас интеграли ҳам яқинлашувчи бўлади ва аксинча. Бунда*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{+\infty} f(x)\,dx$$

бўлади.

2°. *Агар* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *яқинлашувчи ва* k *ўзгармас сон бўлса, унда* $\int_a^{+\infty} kf(x)\,dx$ *ҳам яқинлашувчи бўлади ва*

$$\int_a^{+\infty} kf(x)\,dx = k\int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

3°. *Агар* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *ва* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *интеграллар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда* $\int_a^{+\infty} [f(x) \pm g(x)]\,dx$ *интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади ва*

$$\int_a^{+\infty} [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \pm \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

4°. *Агар* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *яқинлашувчи бўлиб,* $\forall\, x \in [a, +\infty)$ *учун* $f(x) \geqslant 0$ *бўлса, у ҳолда*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \geqslant 0$$

бўлади.

5°. *Агар* $\forall\, x \in [a; +\infty)$ *учун* $f(x) \leqslant g(x)$ *бўлиб,* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *ва* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *интеграллар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

бўлади.

$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a; +\infty)$ оралиқда берилган ва узлуксиз бўлиб, $\forall\ x \in [a; +\infty)$ учун $f(x) \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$ ва $f(x) \leqslant g(x)$ бўлсин. У ҳолда $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ интегралнинг яқинлашувчи бўлишидан $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ интегралнинг яқинлашувчи бўлиши келиб чиқади.

Мисол. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ хосмас интеграл яқинлашувчиликка текширилсин.

Ихтиёрий $x \geqslant 1$ бўлганда

$$e^{-x^2} \leqslant \frac{1}{x^2}$$

бўлади. Равшанки,

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

интеграл яқинлашувчи. Унда юқорида айтилганига кўра

$$\int\limits_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

хосмас интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади.

Маълумки,

$$\int\limits_0^{1} e^{-x^2}\,dx$$

интеграл мавжуд. Унда интегралнинг 1°-хоссасидан фойдаланиб,

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int\limits_0^{1} e^{-x^2}\,dx + \int\limits_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

қуйидаги

$$I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

хосмас интегралнинг яқинлашувчи бўлишини топамиз.

3-§. Чегараланмаган функциянинг хосмас интеграллари

$f(x)$ функция $[a; b)$ ярим интервалда берилган ва узлуксиз бўлиб, $(t; b)$ да $(a<t<b)$ чегараланмаган бўлсин. Бу функциянинг $[a; b)$ нинг исталган $[a; t]$ қисмидаги $(a < t < b)$ $\int\limits_a^{t} f(x)\,dx$ интеграли t га боғлиқ бўлади:

$$\Phi(t)=\int_a^t f(x)\,dx.$$

18.2-таъриф. *Агар $t\to b-0$ да $\Phi(t)$* функциянинг *лимити мавжуд бўлса, бу лимит чегараланмаган $f(x)$ функциянинг $[a;\ b)$ оралиқдаги хосмас интеграли деб аталади ва*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

каби белгиланади:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{t\to b-0}\Phi(t)=\lim_{t\to b-0}\int_a^t f(x)\,dx.$$

Агар $t\to b-0$ да $\Phi(t)=\int_a^t f(x)\,dx$ нинг лимити мавжуд ва чекли бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x)\,dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи дейилади.

Агар $t\to b-0$ да $\Phi(t)$ функциянинг лимити чексиз бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x)\,dx$ хосмас интеграл узоқлашувчи дейилади.

Чегараланмаган $f(x)$ функциянинг $(a;\ b]$ (ёки $(a;\ b)$) оралиқ бўйича хосмас интеграли ҳам юқоридагидек таърифланади:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{t\to a+0}\int_t^b f(x)\,dx \qquad (a<t<b);$$

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\substack{y\to b-0\\ t\to a+0}}\int_t^y f(x)\,dx\right) \qquad (a<t<y<b).$$

Мисоллар. 1. Ушбу $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ интеграл яқинлашувчиликка текширилсин.

$x=1$ нуқта атрофида $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ функция чегараланмаган. Демак, берилган интеграл чегараланмаган функциянинг хосмас интеграли. Таърифга кўра

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=\lim_{t\to 1-0}\int_0^t\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

бўлади. Агар

$$\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\int_0^t (1-x)^{-\frac{1}{2}}\, d(1-x) = -\left[\frac{(1-x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_0^t =$$

$$= -2\left[(1-t)^{\frac{1}{2}} - (1-0)^{\frac{1}{2}}\right] = 2 - 2\sqrt{1-t}$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\lim_{t\to 1-0} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{t\to 1-0} (2 - 2\sqrt{1-t}) = 2$$

бўлиб,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2$$

эканлигини топамиз. Демак, берилган хосмас интеграл яқинлашувчи ва у 2 га тенг.

2. $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ интегрални қарайлик.

$x = 0$ нуқта $f(x) = \frac{1}{x}$ функциянинг махсус нуқтаси. Хосмас интеграл таърифига кўра

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t\to +0} \int_t^1 \frac{1}{x}\, dx = \lim_{t\to +0} [\ln 1 - \ln t] = +\infty$$

бўлади. Демак, берилган хосмас интеграл узоқлашувчи.

3. Ушбу

$$A = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}, \quad B = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

интеграллар яқинлашувчиликка текширилсин.

Бу чегараланмаган функцияларнинг хосмас интегралларидир.

а) $\alpha \neq 1$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \lim_{t\to a-0} \int_t^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \lim_{t\to a+0} \int_t^b (x-a)^{-\alpha}\, d(x-a) =$$

$$= \lim_{t\to a+0} \left[\frac{(x-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_t^b = \lim_{t\to a+0} \frac{1}{1-\alpha} \left[(b-a)^{1-\alpha} - (t-a)^{1-\alpha}\right]$$

бўлиб, бу лимит $\alpha < 1$ бўлганда чекли, $\alpha > 1$ бўлганда эса чексиз бўлади.

б) $\alpha = 1$ бўлсин. Бу ҳолда $\int\limits_a^b \frac{dx}{x-a} = \lim\limits_{t\to a+0} \int\limits_t^b \frac{dx}{x-a} =$

$$= \lim_{t\to a+0} \int\limits_t^b \frac{d(x-a)}{x-a} = \lim_{t\to a+0} \Big[\ln(t-a)\Big]_t^b = \infty$$

бўлади. Демак,

$$A = \int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

интеграл $\alpha < 1$ бўлганда яқинлашувчи, $\alpha \geqslant 1$ бўлганда эса узоқлашувчи бўлади.

Худди шунга ўхшаш,

$$B = \int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

хосмас интеграл $\alpha < 1$ бўлганда яқинлашувчи, $\alpha \geqslant 1$ бўлганда эса узоқлашувчи бўлиши кўрсатилади.

Чегараланмаган функция хосмас интеграллари ҳам ушбу бобнинг 1, 2-§ да баён этилган чегаралари чексиз хосмас интегралларнинг хоссалари каби хоссаларга эга бўлади.

XIX БОБ. ИККИ АРГУМЕНТЛИ ФУНКЦИЯЛАР

1-§. Икки аргументли функция тушунчаси

Мазкур курснинг 9—19-бобларида $y = f(x)$ функция, унинг дифференциал ва интеграл ҳисоби ўрганилди. Бу функция битта x аргументгагина боғлиқ эди. Одатда бундай функциялар бир аргументли функциялар дейилади.

Табиатда, фан тармоқларида учрайдиган кўпчилик функциялар битта аргументга боғлиқ бўлмай, балки кўп аргументларга боғлиқ бўлади. Мисол қарайлик.

Мисол. Томонлари x ва y ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$) га тенг бўлган тўғри тўртбурчакнинг юзи

$$S = x \cdot y \tag{19.1}$$

бўлади. Равшанки, S юз x ва y ўзгарувчиларга боғлиқ. Бу x ва y нинг турли қийматларига кўра (19.1) формула ёрдамида уларга мос S нинг қийматлари топилади.

Шунга ўхшаш мисолларни кўплаб келтириш мумкин. Икки аргументли функцияларни ўрганишни R^2 тўплам ва унинг баъзи бир қисм тўпламлари тушунчаларини келтиришдан бошлаймиз.

Барча ҳақиқий сонлар тўплами R ни олайлик. Бу тўпламдан ихтиёрий икки x ва y сонларни олиб, улар ёрдамида (x, y) жуфтликни тузамиз. Барча шундай жуфтликлар тўпламини, яъни

$$\{(x,\ y):\ x \in R,\ y \in R\}$$

тўпламни R^2 орқали белгилаймиз: $R^2 = \{(x;\ y): x \in R,\ y \in R\}$.

R^2 тўпламнинг элементи (жуфтликни) шу тўпламнинг *нуқтаси* деб аталади.

Айтайлик, $(x_1;\ y_1) \in R^2$, $(x_2;\ y_2) \in R^2$ бўлсин. Агар $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ бўлса, у ҳолда R^2 тўпламнинг $(x_1;\ y_1)$ ва $(x_2;\ y_2)$ нуқталари бир-бирига тенг деб аталади: $(x_1;\ y_1) = (x_2;\ y_2)$.

Текисликда тўғри бурчакли Oxy Декарт координаталар системасини олиб, Ox ўқи бўйича x ўзгарувчининг қийматларини ($x \in R$), Oy ўқи бўйича y ўзгарувчининг қийматларини ($y \in R$) жойлаштирамиз. Унда $(x;\ y)$ ($(x;\ y) \in R^2$) жуфтлик текисликда битта $M = M(x;\ y)$ нуқтани аниқлайди (129-чизма). Бунда x — M нуқтанинг *биринчи координатаси* (*абсциссаси*), y — M нуқтанинг *иккинчи координатаси* (*ординатаси*) бўлади.

Юқорида айтилганларни ҳамда ушбу курснинг «Аналитик геометрия» деб номланган бўлимидаги маълумотларни эътиборга олиб, R^2 тўплам геометрик нуқтаи назардан текисликни ифодалашини пайқаймиз.

R^2 тўпламнинг ихтиёрий икки $(x_1;\ y_1)$ ва $(x_2;\ y_2)$ нуқталарини олайлик. Маълумки, ушбу

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

миқдор $(x_1;\ y_1)$ ва $(x_2;\ y_2)$ нуқталар орасидаги *масофа* дейилар эди. Уни $d((x_1;\ y_1),\ (x_2;\ y_2))$ каби белгилаймиз.

$$d((x_1;\ y_1),\ (x_2;\ y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(қаранг, 1-боб, 2-§). Масофа учун қуйидаги хоссалар ўринлидир.

1°. $d((x_1;\ y_1),\ x_2;\ y_2)) \geqslant 0$ ва

$d((x_1;\ y_1),\ (x_2;\ y_2)) = 0 \Leftrightarrow (x_1;\ y_1) = (x_2;\ y_2)$,

2°. $d((x_1;\ y_1),\ (x_2;\ y_2)) = d((x_2;\ y_2),\ (x_1;\ y_1))$,

3°. $d((x_1;\ y_1),\ (x_3;\ y_3)) \leqslant d((x_1;\ y_1),\ (x_2;\ y_2)) + d((x_2;\ y_2),\ (x_3;\ y_3))$ $((x_3;\ y_3) \in R^2)$.

Энди R^2 тўпламнинг баъзи бир қисм тўпламларига мисоллар келтирамиз.

Текисликнинг, яъни R^2 тўпламнинг $(a;\ b)$ нуқтасини ҳамда $r > 0$ сонни олайлик.

1. Текисликнинг шундай $(x;\ y)$ нуқталари тўпламини қараймизки, уларнинг x ва y координаталари

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leqslant r^2$$

тенгсизликни қаноатлантирсин. Бундай нуқталар тўплами *ёпиқ доира* деб аталади ва

$$\{(x,\ y) \in R^2:\ (x - a)^2 + (y - b)^2 \leqslant r^2\} \qquad (19.2)$$

каби белгиланади (130-чизма). Бунда $(a;\ b)$ нуқта *доира маркази*, r эса *радиус* деб аталади.

2. Текисликнинг шундай $(x;\ y)$ нуқталари тўпламини қарайликки, уларнинг x ва y координаталари

$$(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$$

тенгсизликни қаноатлантирсин. Бундай нуқталар тўплами *очиқ доира* деб аталади ва

$$\{(x,\ y)\in R^2:(x-a)^2+(y-b)^2<r^2\} \qquad (19.3)$$

каби белгиланади.

3. Ушбу

$$\{(x;\ y)\in R^2:(x-a)^2+(y-b)^2=r\}$$

тўплам маркази $(a;\ b)$ нуқтада, радиуси r га тенг бўлган *айлана* деб аталади (қаранг, 4-боб, 1-§). Бу айлана (19.2) ва (19.3) доираларнинг чегараси бўлади.

4. Текисликнинг шундай $(x;\ y)$ нуқталари тўпламини қарайликки, уларнинг x ва y координаталари

$a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d$, $(a,\ b,\ c,\ d$ — ҳақиқий сонлар), тенгсизликларни қаноатлантирсин. Бундай нуқталар тўплами *ёпиқ тўғри тўртбурчак* деб аталади ва

$$\{(x;\ y)\in R^2:a\leqslant x\leqslant b,\quad c\leqslant y\leqslant d\}$$

каби белгиланади (131-чизма).

5. Текисликнинг шундай $(x;\ y)$ нуқталари тўпламини қарайликки, уларнинг x ва y координаталари

$$a<x<b,\quad c<y<d$$

тенгсизликларни қаноатлантирсин. Бундай нуқталар тўплами *очиқ тўғри тўртбурчак* деб аталади ва

$$\{(x;\ y)\in R^2:a<x<b,\ c<y<d\}$$

каби белгиланади.

2-§. Текислик нуқталаридан иборат кетма-кетлик ва унинг лимити

Ҳар бир натурал n сонга текисликда битта $(x_n;\ y_n)$ нуқтани мос қўювчи қоидага эга бўлайлик. Шу қоидага биноан:

$$(x_1;\ y_1),\ (x_2;\ y_2),\ (x_3;\ y_3),\ \ldots,\ (x_n;\ y_n),\ \ldots$$

тўпламга келамиз. Бу тўплам *текислик нуқталаридан иборат кетма-кетлик* деб аталади ва $\{(x_n;\ y_n)\}$ *каби белгиланади.* Ҳар бир $(x_n;\ y_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ нуқта кетма-кетликнинг ҳади деб аталади.

Мисоллар. 1. $(1;\ 1),\ \left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right),\ \ldots,\ \left(\frac{1}{n};\ \frac{1}{n}\right),\ \ldots$

2. $(1;\ 1),\ (1;\ 2),\ (1;\ 3),\ \ldots,\ (1,\ n),\ \ldots$

3. $(1;\ 1),\ (-1;\ -1),\ ,\ (1;\ 1),\ \ldots$

Текислик нуқталаридан иборат бирор $\{(x_n;\ y_n)\}$: $(x_1;\ y_1)$, $(x_2;\ y_2)$, $(x_3;\ y_3)$, ..., $(x_n;\ y_n)$, ... кетма-кетлик ҳамда бирор $(a;\ b)$ нуқта берилган бўлсин.

19.1-таъриф. Агар $\forall\ \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай натурал n_0 сони топилсаки, барча $n > n_0$ учун

$$d((x_n;\ y_n),\ (a;\ b)) < \varepsilon \tag{19.4}$$

тенгсизлик бажарилса, $(a;\ b)$ нуқта $\{(x_n;\ y_n)\}$ кетма-кетликнинг *лимити* деб аталади ва

$$\lim_{n\to\infty}(x_n;\ y_n) = (a;\ b)$$

каби ёзилади.

Бу таърифдаги (19.4) тенгсизликни қуйидагича

$$\sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < \varepsilon$$

ҳам ёзиш мумкин.

Мисол. Ушбу $\left\{\left(\frac{1}{n};\ \frac{1}{n}\right)\right\}$: $(1;\ 1)$, $\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$, ..., $\left(\frac{1}{n};\ \frac{1}{n}\right)$, ... кетма-кетликнинг лимити $(0;\ 0)$ бўлади. Ҳақиқатан ҳам $\forall\ \varepsilon > 0$ сонга кўра $n_0 = \left[\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\right] + 1$ дейилса, унда $\forall\ n > n_0$ учун

$$d((x_n;\ y_n),\ (a;\ b)) = d\left(\left(\frac{1}{n};\ \frac{1}{n}\right),\ (0;\ 0)\right) =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{n} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{n} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\sqrt{2}}{n} < \frac{\sqrt{2}}{n_0} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\left[\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\right] + 1} < \varepsilon$$

бўлади. Бу эса берилган кетма-кетликнинг лимити $(0,\ 0)$ эканини билдиради: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n};\ \frac{1}{n}\right) = (0,\ 0)$.

Айтайлик, $\{(x_n;\ y_n)\}$: $(x_1;\ y_1)$, $(x_2;\ y_2)$, $(x_3;\ y_3)$, ..., $(x_n;\ y_n)$, ... кетма-кетликнинг лимити $(a;\ b)$ бўлсин:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n;\ y_n) = (a;\ b).$$

Кетма-кетлик лимити таърифига кўра $\forall\ \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай натурал n_0 сони топиладики, барча $n > n_0$ учун

$$d((x_n;\ y_n),\ (a,\ b)) < \varepsilon, \quad \text{яъни} \quad \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < \varepsilon$$

бўлади. Равшанки, бу тенгсизликдан қуйидаги

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad |y_n - b| < \varepsilon$$

тенгсизликлар келиб чиқади. Бу эса 10-боб, 3-§ да келтирилган сонлар кетма-кетлигининг лимити таърифига биноан

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

бўлишини билдиради.

Шундай қилиб, текислик нуқталаридан иборат $\{(x_n; y_n)\}$ кетма-кетликнинг лимити (a, b) бўлса, у ҳолда бу кетма-кетликнинг координаталаридан иборат $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ сонлар кетма-кетлиги ҳам лимитга эга бўлади. Уларнинг лимити $(a; b)$ нуқтанинг мос координаталарига тенг бўлади:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n; y_n) = (a; b) \Rightarrow \begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b. \end{array} \tag{19.5}$$

Энди текислик нуқталаридан иборат $\{(x_n; y_n)\}$ кетма-кетлик берилган бўлиб, унинг координаталаридан тузилган $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ сонлар кетма-кетликлари мос равишда a ва b лимитларга эга бўлсин:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

Сонлар кетма-кетлиги лимити таърифига кўра $\forall\ \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай натурал n_0 сон топиладики, $n > n_0$ учун $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ бўлади.

Шунингдек, $\forall\ \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай натурал n_0' сон топиладики, $n > n_0'$ учун $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ бўлади. Агар n_0 ва n_0' натурал сонларнинг каттасини n_0^* дейилса, унда барча $n > n_0^*$ учун бир йўла

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \quad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

тенгсизликлар бажарилади. Бу тенгсизликлардан фойдаланиб топамиз:

$$\sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2 \cdot \frac{\varepsilon}{2}} = \varepsilon.$$

Демак,

$$d((x_n, y_n), (a, b)) = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < \varepsilon.$$

Бундан, лимит таърифига биноан $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n; y_n) = (a, b)$ бўлиши келиб чиқади.

Шундай қилиб, текислик нуқталаридан иборат $\{(x_n; y_n)\}$ кетма-кетликнинг координаталаридан тузилган $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ сонлар кетма-кетликларининг лимити $(a; b)$ нуқтанинг мос координаталарига тенг бўлса, у ҳолда $\{(x_n; y_n)\}$ кетма-кетликнинг лимити (a, b) бўлади:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n;\ y_n) = (a;\ b). \qquad (19.6)$$

19.1-натижа. Юқоридаги (19.5) ва (19.6) муносабатлардан

$$\lim_{n\to\infty} (x_n;\ y_n) = (a;\ b) \Leftrightarrow \begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b\end{array}$$

бўлиши келиб чиқади.

Бу ҳолат текислик нуқталаридан тузилган $\{(x_n;\ y_n)\}$ кетма-кетлик лимитини ўрганишни унинг координаталаридан иборат $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ сонлар кетма-кетликларининг лимитини ўрганишга келишини кўрсатади. Биз сонлар кетма-кетликларининг лимитини 10-боб, 3-§ да батафсил ўрганган эдик.

3-§. Икки аргументли функция ва унинг лимити

Текисликда бирор M тўплам берилган бўлсин (132-чизма).

19.2-таъриф. Агар M тўпламдан олинган ҳар бир $(x;\ y)$ нуқтага бирор қоида ёки қонунга кўра битта ҳақиқий z сони мос қўйилган бўлса, у ҳолда M тўпламда *икки аргументли функция* берилган деб аталади. Уни

$$z = f(x;\ y)$$

каби ёзилади. Одатда M тўплам функциянинг *аниқланиш соҳаси* деб аталади. x ва y (эркли ўзгарувчилар) *функция аргументлари*, z эса x ва y нинг *функцияси* дейилади.

Мисоллар. 1. Текисликдаги ҳар бир $(x;\ y)$ нуқтага шу нуқта координаталари x ва y нинг кўпайтмасини мос қўядиган қоида берилган бўлсин.

Натижада

$$z = f(x,\ y) = x \cdot y$$

функцияга эга бўламиз.

2. Қуйидаги функциялар икки аргументли функцияларга мисолдир:

$$z = x^2 + y^2,\quad z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},\quad z = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Текисликдаги M тўпламда бирор $z = f(x,\ y)$ функция берилган бўлсин. M тўпламдан $(x_0;\ y_0)$ нуқтани оламиз. Функция шу $(x_0;\ y_0)$ нуқтага битта z_0 сонни мос қўяди. Бу z_0 сон $z = f(x,\ y)$ функциянинг $(x_0;\ y_0)$ нуқтадаги *қиймати* деб аталади ва $z_0 = f(x_0,\ y_0)$ каби ёзилади.

Координаталари x_0, y_0, z_0 бўлган $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқта фазодаги нуқтани ифодалайди (қаранг 5-боб, 1-§).

Барча $(x,\ y,\ z)$ нуқталардан (бунда $(x;\ y) \in M$, $z = f(x,\ y)$) иборат тўплам $z = f(x,\ y)$ функциянинг *графиги* деб аталади.

Мисоллар. 1. $z=x^2+y^2$ функция R^2 тўпламда аниқланган бўлиб, унинг графиги 133-чизмада тасвирланган.

2. $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ функцияни қарайлик. Бу функциянинг аниқланиш соҳасини топамиз:

$$1-x^2-y^2 \geqslant 0 \Rightarrow x^2+y^2 \leqslant 1 \Rightarrow x^2+y^2 \leqslant 1^2.$$

Демак, берилган функция маркази (0, 0) нуқтада, радиуси 1 га тенг ёпиқ доирада аниқланган. Унинг графиги 134-чизмада тасвирланган.

$z=f(x, y)$ функция M тўпламда берилган бўлиб, x ва y ўзгарувчиларнинг ҳар бири (α, β) интервалда берилган функциялар бўлсин:

$$x=\varphi(t),$$
$$y=\psi(t) \quad (t \in (\alpha, \beta)).$$

Бунда t ўзгарувчи (α, β) оралиқда ўзгарганда мос x ва y лардан тузилган $(x; y)$ жуфтликлар M тўпламга тегишли бўлсин. Натижада ушбу

$$z=f(x, y)=f(\varphi(t), \psi(t))$$

функцияга эга бўламиз. Бу ҳолда z ўзгарувчи t ўзгарувчининг *мураккаб функцияси* деб аталади.

19.3-таъриф. Маркази $(x_0; y_0)$ нуқтада, радиуси $\varepsilon(\forall \varepsilon>0)$ га тенг бўлган очиқ доира $(x_0; y_0)$ нуқтанинг *атрофи (доиравий атрофи)* деб аталади ва $U_\varepsilon((x_0; y_0))$ каби белгиланади:

$$U_\varepsilon((x_0; y_0))=\{(x, y) \in R^2 : (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\varepsilon^2\}.$$

Агар $(x_0; y_0)$ нуқтанинг ҳар бир атрофида M тўпламнинг $(x_0; y_0)$ нуқтадан фарқли камида битта нуқтаси бўлса, у ҳолда $(x_0; y_0)$ нуқта M тўпламнинг *лимит нуқтаси* деб аталади.

Мисоллар. 1. $M=\{(x, y) \in R^2 : x^2+y^2 \leqslant 1\}$ тўпламнинг ҳар бир нуқтаси шу тўпламнинг лимит нуқтаси бўлади.

2. $P=\{(x; y) \in R^2 : x^2+y^2<1\}$ тўпламни қарайлик. Бу тўпламнинг барча нуқталари ҳамда $\{(x; y) \in R^2 : x^2+y^2=1\}$ тўпламнинг ҳам барча нуқталари берилган P тўпламнинг лимит нуқталари бўлади.

Агар $(x_0; y_0)$ нуқта M тўпламнинг лимит нуқтаси бўлса, у ҳолда

1) $(x_0; y_0)$ нуқтанинг ҳар бир атрофида M тўпламнинг чексиз кўп нуқталари бўлади,

2) M тўпламнинг нуқталаридан (x_0, y_0) нуқтага интилувчи $\{(x_n; y_n)\}$ $((x_n; y_n) \in M$ кетма-кетликлар $n=1, 2, 3, \ldots)$ ажратиш мумкин:

$$\lim_{x \to \infty} (x_n; y_n)=(x_0; y_0).$$

Текисликда бирор M тўплам берилган бўлиб, $(x_0; y_0)$ нуқта M тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин. Шу тўпламда $z=f(x, y)$ функция аниқланган.

19.4-таъриф. Агар M тўпламнинг нуқталаридэн тузилган $(x_0; y_0)$ га интилувчи ҳар қандай $\{(x_n; y_n)\}$ кетма-кетлик олинганда ҳам мос $\{f(x_n; y_n)\}$ кетма-кетлик ҳар доим битта A сонга интилса, бу A сон $f(x, y)$ функциянинг $(x_0; y_0)$ нуқтадаги *лимити* деб аталади ва

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A \tag{19.7}$$

каби ёзилади.

Функция лимитини қуйидагича таърифласа ҳам бўлади.

19.5-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, $d((x; y), (x_0; y_0)) < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $(x, y) \in M$ нуқталар учун

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

бўлса, у ҳолда A сон $f(x, y)$ функциянинг $(x_0; y_0)$ нуқтадаги *лимити* деб аталади ва юқоридаги (19.7) каби белгиланади.

Мисол. $f(x, y) = x^2 + y^2$ функциянинг (0; 0) нуқтадаги лимити топилсин.

(0; 0) нуқтага интилувчи $\{(x_n; y_n)\}$ кетма-кетликни оламиз: $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n; y_n) = (0; 0)$. Юқорида айтилганига кўра, бу ҳолда

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0, \qquad \lim_{n \to \infty} y_n = 0$$

бўлади.

Берилган функциянинг $(x_n; y_n)$ даги қийматларидан тузилган кетма-кетлик

$$\{f(x_n, y_n)\} = \{x_n^2 + y_n^2\}$$

бўлиб, $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ да $f(x_n, y_n) = x_n^2 + y_n^2 \to 0$ бўлади. Демак,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (x^2 + y^2) = 0.$$

Лимитга эга бўлган функциялар қатор хоссаларга эга.

1°. *Агар* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$ *лимит мавжуд ва чекли бўлса, у ҳолда* $f(x, y)$ *функция* $(x_0; y_0)$ *нуқтанинг етарлича кичик атрофида чегараланган бўлади.*

2°. *Агар* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} g(x, y) = B$ *лимитлар мавжуд бўлса, у ҳолда* $f(x, y) \pm g(x, y)$ *функциянинг ҳам лимити мавжуд ва*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} [f(x, y) \pm g(x, y)] = A \pm B$$

бўлади.

3°. *Агар* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = A$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x, y) = B$ *лимитлар мавжуд бўлса, у ҳолда* $f(x, y)\cdot g(x, y)$ *функциянинг ҳам лимити мавжуд ва*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} [f(x, y)\cdot g(x, y)] = A\cdot B$$

бўлади.

4°. *Агар* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = A$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x, y) = B$ *лимитлар мавжуд бўлиб,* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x, y) \neq 0$ *бўлса, у ҳолда* $\frac{f(x, y)}{g(x, y)}$ *функция ҳам лимитга эга ва* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{A}{B}$ *бўлади.*

4-§. Икки аргументли функциянинг узлуксизлиги

$z = f(x, y)$ функция M тўпламда берилган бўлиб, (x_0, y_0) ($(x_0, y_0)\in M$) нуқта шу M тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

19.6-таъриф. *Агар*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0) \tag{19.8}$$

бўлса, у ҳолда $f(x, y)$ *функция* $(x_0; y_0)$ *нуқтада узлуксиз* деб аталади.

Функция лимити таърифини эътиборга олиб, функциянинг $(x_0; y_0)$ нуқтадаги узлуксизлигини қуйидагича таърифлаш мумкин.

19.7-таъриф. Агар $\forall\, \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, $d((x; y), (x_0; y_0)) < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $(x, y)\in M$ нуқталар учун

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

бўлса, у ҳолда $f(x, y)$ функция $(x_0; y_0)$ нуқтада *узлуксиз* деб аталади.

Функция узлуксизлиги унинг орттирмаси ёрдамида ҳам таърифланиши мумкин.

M тўпламда $(x_0; y_0)$ нуқта билан бирга $(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ нуқтани ($(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)\in M$) олиб, бу нуқталардаги функциянинг қийматлари $f(x_0, y_0)$, $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ ни топамиз. Ушбу

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

айирма $f(x, y)$ функциянинг $(x_0; y_0)$ нуқтадаги *тўлиқ орттирмаси* деб аталади.

19.8-таъриф. Агар аргумент орттирмалари Δx ва Δy нолга интилганда функциянинг тўлиқ орттирмаси $\Delta f(x_0, y_0)$ ҳам нолга интилса, яъни $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} (\Delta f(x_0, y_0)) = 0$

бўлса, у ҳолда $f(x, y)$ функция $(x_0; y_0)$ нуқтада *узлуксиз* деб аталади.

Агар $f(x, y)$ функция M тўпламнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлса, у ҳолда функция шу M тўпламда *узлуксиз* деб аталади.

Мисол. $f(x, y) = x^2 + y^2$ функцияни қарайлик.

Ихтиёрий $(x_0, y_0) \in R^2$ нуқтани ҳамда $(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ ни олиб, функциянинг тўлиқ орттирмасини ҳисоблаймиз:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = (x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2 - (x_0^2 + y_0^2) = x_0^2 + 2x_0 \Delta x + \Delta x^2 + y_0^2 + 2y_0 \Delta y + \Delta y^2 - x_0^2 - y_0^2 = (2x_0 + \Delta x)\Delta x + (2y_0 + \Delta y)\Delta y.$$

Бундан эса

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta f x(x_0, y_0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} [(2x_0 + \Delta x)\Delta x + (2y_0 + \Delta y)\Delta y] = 0$$

бўлишини топамиз. Демак, $f(x, y) = x^2 + y^2$ функция R^2 тўпламда узлуксиз.

19.1-эслатма. Агар юқоридаги (19.8) муносабат бажарилмаса, у ҳолда $f(x, y)$ функция $(x_0; y_0)$ нуқтада узилишга эга деб аталади. M тўпламда берилган $f(x, y)$ функция тўпламнинг бирор нуқтасида ёки тўпламдаги бирор чизиқда узилишга эга бўлиши мумкин.

Мисол.

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{агар } (x, y) \neq (0, 0) \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } (x, y) = (0, 0) \text{ бўлса} \end{cases}$$

функция (0, 0) нуқтада узилишга эга бўлади. Ҳақиқатан ҳам

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (x^2 + y^2) = 0$$

бўлиб, бу лимит берилган функциянинг (0; 0) нуқтадаги қиймати $f(0, 0) = 1$ га тенг эмас:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) \neq f(0, 0).$$

Энди икки аргументли узлуксиз функцияларнинг баъзи бир хоссаларини келтирамиз.

$f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функциялар M тўпламда берилган бўлиб, $(x_0; y_0) \in M$ бўлсин.

1°. *Агар $f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функцияларнинг ҳар бири $(x_0; y_0)$ нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда $f(x, y) \pm g(x, y)$ функция ҳам шу $(x_0; y_0)$ нуқтада узлуксиз бўлади.*

2°. *Агар $f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функцияларнинг ҳар бири $(x_0; y_0)$ нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда $f(x, y) \cdot g(x, y)$ функция ҳам шу (x_0, y_0) нуқтада узлуксиз бўлади.*

3°. *Агар $f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функцияларнинг ҳар бири (x_0, y_0) нуқтада узлуксиз бўлиб, $g(x_0, y_0) \neq 0$ бўлса, у ҳолда $\frac{f(x, y)}{g(x, y)}$ функция $(g(x), y \neq 0)$ ҳам шу $(x_0; y_0)$ нуқтада узлуксиз бўлади.*

4°. *Агар $f(x, y)$ функция чегараланган ёпиқ M тўпламда узлуксиз бўлса, у ҳолда функция шу тўпламда чегараланган бўлади.*

$z = f(x, y)$ функция M тўпламда берилган бўлсин.

19.9-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, M тўпламнинг

$$d((x'; y'), (x''; y'')) < \delta$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий (x', y') ва (x'', y'') нуқталари учун

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon$$

бўлса, $f(x, y)$ функция M тўпламда *текис узлуксиз функция* деб аталади.

Равшанки, $f(x, y)$ функция M тўпламда текис узлуксиз бўлса, у шу тўпламда узлуксиз бўлади.

19.1-теорема (Кантор теоремаси). *Агар $f(x, y)$ функция чегараланган ёпиқ M тўпламда берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда функция шу тўпламда текис узлуксиз бўлади.*

5-§. Икки аргументли функциянинг ҳосиласи ва дифференциаллари

1. Функциянинг хусусий ҳосилалари

$z = f(x, y)$ функция M $(M \subset R^2)$ тўпламда берилган бўлсин. Бу M тўпламда $(x_0; y_0)$ нуқта билан бирга $(x_0 + \Delta x; y_0)$ нуқтани олиб бу нуқталарда функциянинг қийматларини ҳисоблаймиз. Сўнг ушбу

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

айирмани қараймиз. Одатда бу айирма $f(x, y)$ функциянинг $(x_0; y_0)$ *нуқтадаги x ўзгарувчи* (аргумент) *бўйича хусусий орттирмаси* дейилади ва $\Delta_x f(x_0, y_0)$ каби белгиланади:

$$\Delta_x f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

Худди шунга ўхшаш,

$$\Delta_y f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

айирма $f(x, y)$ функциянинг $(x_0; y_0)$ *нуқтадаги y аргумент бўйича хусусий орттирмаси* дейилади.

Мисоллар. 1. $f(x, y) = xy$ функциянинг x ва y аргументлари бўйича хусусий орттирмалари $\Delta_x f(x, y)$, $\Delta_y f(x, y)$ ни топилсин.

Таърифга кўра

$$\Delta_x f(x, y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y),$$

$$\Delta_y f(x, y) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

бўлади. Бу муносабатлардан фойдаланиб топамиз:

$$\Delta_x f(x, y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = (x + \Delta x) y -$$

$$-xy = xy + y\Delta x - xy = y\Delta x,$$

$$\Delta_y f(x, y) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = x(y + \Delta y) - xy =$$

$$= xy + x\Delta y - xy = x\Delta y.$$

Демак,

$$\Delta_x f(x, y) = y\Delta x,$$

$$\Delta_y f(x, y) = x\Delta y.$$

2. $f(x, y) = x^2 + y^2$ функциянинг $\Delta_x f$, $\Delta_y f$ хусусий орттирмалари

$$\Delta_x f = (x + \Delta x)^2 + y^2 - (x^2 + y^2) = 2x\Delta x + \Delta x^2,$$

$$\Delta_y f = x^2 + (y + \Delta y)^2 - (x^2 + y^2) = 2y\Delta y + \Delta y^2$$

бўлади

$z = f(x, y)$ функция M тўпламда берилган бўлсин. M тўпламда $(x_0; y_0)$ нуқта билан бирга $(x_0 + \Delta x; y_0)$ ва $(x_0; y_0 + \Delta y)$ нуқталарни ҳам қарайлик. Сўнг берилган функциянинг $(x_0; y_0)$ нуқтадаги хусусий орттирмаларини топамиз:

$$\Delta_x f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

$$\Delta_y f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

19.10-таъриф. Агар $\Delta x \to 0$ да

$$\frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

нисбатнинг лимити мавжуд бўлса, бу лимит $f(x, y)$ функциянинг (x_0, y_0) *нуқтадаги x аргументи бўйича хусусий ҳосиласи* деб аталади ва $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ ёки $f'_x(x_0, y_0)$ (қисқача $\frac{\partial f}{\partial x}$ ёки f'_x) каби белгиланади:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Худди шунга ўхшаш агар $\Delta y \to 0$ да

$$\frac{\Delta_y f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

нисбатнинг лимити мавжуд бўлса, бу лимит $f(x, y)$ *функциянинг $(x_0; y_0)$ нуқтадаги y аргументи бўйича хусусий ҳосиласи* деб аталади ва $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ ёки $f'_y(x_0, y_0)$ (қисқача $\frac{\partial f}{\partial y}$ ёки f'_y) каби белгиланади:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f(x_0, y_0)}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Келтирилган таърифдан кўринадики, $z=f(x, y)$ функциянинг x аргументи бўйича хусусий ҳосиласини ҳисоблашда бу функциянинг y аргументини ўзгармас, y аргументи бўйича хусусий ҳосиласини ҳисоблашда эса x аргументни ўзгармас деб қараш керак экан. Демак, $z=f(x, y)$ функциянинг хусусий ҳосилаларини ҳисоблашда мазкур курснинг 13-боб, 7—10-§ даги функция ҳосиласи жадвали ҳамда ҳосила ҳисоблашдаги мазкур қоидалардан фойдаланиш мумкин.

Мисоллар. 1. $f(x, y)=x^2+y^2$ функциянинг хусусий ҳосилалари қуйидагича бўлади:

$$f'_x(x, y)=(x^2+y^2)'_x=2x,$$

$$f'_y(x, y)=(x^2+y^2)'_y=2y.$$

2. $f(x, y)=x^y$ $(x>0)$ функциянинг хусусий ҳосилалари

$$\frac{\partial f}{\partial x}=yx^{y-1}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=x^y\ln x$$

бўлади.

3. $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ функциянинг хусусий ҳосилалари

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\frac{1}{y}=\frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{y}=\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{x}{\frac{x^2+y^2}{y^2}y^2}=-\frac{x}{x^2+y^2}$$

бўлади.

6-§. Функциянинг тўлиқ орттирмаси формуласи

$z=f(x, y)$ функция M тўпламда берилган бўлсин. M тўпламдаги $(x_0;\ y_0)$ нуқтанинг бирор атрофида $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ хусусий ҳосилалар мавжуд бўлиб, улар $(x_0;\ y_0)$ нуқтада узлуксиз бўлсин. Берилган $z=f(x, y)$ функциянинг $(x_0;\ y_0)$ нуқтадаги орттирмаси $\Delta f(x_0, y_0)$ ни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\Delta f(x_0, y_0)=[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0+\Delta y)]+$$
$$+[f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)]. \tag{19.9}$$

Лагранж теоремасидан фойдаланиб топамиз:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0+\Delta y)=f'_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x,$$

$$f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)=f'_y(x_0, y_0+\theta_1\Delta y)\Delta y$$

$(0<\theta,\ \theta_1<1)$. Натижада (19.9) тенглик ушбу кўринишга келади:

$$\Delta f(x_0, y_0)=f'_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x+$$
$$+f'_y(x_0, y_0+\theta_1\Delta y)\Delta y. \tag{19.10}$$

Шартга кўра функциянинг f'_x ва f'_y хусусий ҳосилалари $(x_0;\ y_0)$ нуқтада узлуксиз. Демак,

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f'_x(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\Delta y)=f'_x(x_0,\ y_0),$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f'_y(x_0,\ y_0+\theta_1\Delta y)=f'_y(x_0,\ y_0).$$

Шундай қилиб,

$$f'_x(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\Delta y)=f'_x(x_0,\ y_0)+\alpha,$$

$$f'_y(x_0,\ y_0+\theta_1\Delta y)=f'_y(x_0,\ y_0)+\beta \tag{19.11}$$

деб ёзиш мумкин. Бунда α ва β лар Δx ва Δy га боғлиқ ҳамда $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ да $\alpha\to 0$, $\beta\to 0$. (19.10) ва (19.11) муносабатлардан

$$\Delta f(x_0,\ y_0)=[f'_x(x_0,\ y_0)+\alpha]\Delta x+[f'_y(x_0,\ y_0)+\beta]\Delta y=$$

$$=f'_x(x_0,\ y_0)\Delta x+f'_y(x_0,\ y_0)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$\Delta f(x_0,\ y_0)=f'_x(x_0,\ y_0)\Delta x+f'_y(x_0,\ y_0)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y. \tag{19.12}$$

Бу *функция орттирмасининг формуласи* деб аталади.

19.2-натижа. Агар $f(x,\ y)$ функция $(x_0;\ y_0)$ нуқтада узлуксиз f'_x, f'_y хусусий ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда функция шу $(x_0,\ y_0)$ нуқтада узлуксиз бўлади. Ҳақиқатан ҳам (19.12) формуладан фойдаланиб,

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta f(x_0,\ y_0)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} [f'_x(x_0,\ y_0)\Delta x+f'_y(x_0,\ y_0)\Delta y+$$

$$+\alpha\Delta x+\beta\Delta y]=0$$

бўлишини топамиз. Бу эса $f(x,\ y)$ функциянинг $(x_0;\ y_0)$ нуқтада узлуксиз эканини билдиради.

7-§. Икки аргументли функциянинг дифференциали

$z=f(x,\ y)$ функция M тўпламда берилган бўлсин. Бу M тўпламда $(x_0;\ y_0)$ ва $(x_0+\Delta x;\ y_0+\Delta y)$ нуқталарни олиб, функция орттирмасини топамиз:

$$\Delta f(x_0,\ y_0)=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0).$$

19.11-таъриф. Агар $f(x,\ y)$ функциянинг $(x_0;\ y_0)$ нуқтадаги орттирмаси ушбу

$$\Delta f(x_0,\ y_0)=A\Delta x+B\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y$$

кўринишда ифодаланса, у ҳолда функция $(x_0;\ y_0)$ нуқтада *дифференциалланувчи* деб аталади, бунда A, B — ўзгармас, α ва β эса Δx ва Δy га боғлиқ ҳамда $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ да α ва β лар ҳам нолга интилади.

Мисол. $f(x, y) = xy$ функцияни қарайлик. Бу функциянинг $(x_0; y_0)$ нуқтадаги орттирмаси

$$\Delta f(x_0, y_0) = (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta x) - x_0 y_0$$

бўлади. Уни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\Delta f(x_0, y_0) = (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y) - x_0 y_0 = x_0 y_0 +$$
$$+ y_0 \Delta x + x_0 \Delta y + \Delta x \Delta y - x_0 y_0 = y_0 \Delta x + x_0 \Delta y +$$
$$+ \Delta x \Delta y = A \Delta x + B \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y,$$

бу ерда

$$A = y_0, \ B = x_0, \ \alpha = \Delta y, \ \beta = 0.$$

Демак, берилган функция (x_0, y_0) нуқтада дифференциалланувчи $f(x, y)$ функция $(x_0; y_0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. — Таърифга кўра

$$\Delta f(x_0, y_0) = A \Delta x + B \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y \qquad (19.13)$$

бўлади. Бу тенгликда $\Delta x \neq 0$, $\Delta y = 0$ деб топамиз:

$$\Delta_x f(x_0, y_0) = A \Delta x + \alpha \cdot \Delta x.$$

Кейинги тенгликнинг ҳар икки томонини Δx га бўлиб,

$$\frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x} = A + \alpha$$

тенгликка келамиз. Бундан эса

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \alpha) = A$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$f'_x(x_0, y_0) = A.$$

Худди шунга ўхшаш, (19.13) тенгликда $\Delta x = 0$, $\Delta y \neq 0$ деб

$$\Delta'_y f(x_0, y_0) = B \Delta y + \beta \Delta y,$$

$$\frac{\Delta_y f(x_0, y_0)}{\Delta y} = B + \beta$$

тенгликларни, сўнгра

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} (B + \beta) = B,$$

$$f'_y(x_0, y_0) = B$$

бўлишини топамиз.

Шундай қилиб, қуйидаги хулосага келамиз. Агар $f(x, y)$ функция $(x_0; y_0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда функция шу нуқтада f'_x ва f'_y хусусий ҳосилаларга эга бўлади. Функция орттирмаси эса ушбу кўринишга эга бўлади:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y.$$

Агар $f(x, y)$ функция $(x_0; y_0)$ нуқтанинг атрофида $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ хусусий ҳосилаларга эга бўлиб, бу хусусий ҳосилалар (x_0, y_0) нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада дифференциалланувчи бўлади. Ҳақиқатан ҳам юқоридаги шартларда $f(x, y)$ функциянинг тўлиқ орттирмаси учун (19.13) формула ўринли бўлади. Ундан эса функциянинг дифференциалланувчи бўлиши келиб чиқади.

Фараз қилайлик, $z = f(x, y)$ функция $(x_0; y_0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

бўлади. Бу ифодадаги

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

йиғинди $f(x, y)$ функциянинг $(x_0; y_0)$ нуқтадаги *дифференциали* деб аталади ва у $df(x_0, y_0)$ ёки dz каби белгиланади:

$$df(x_0, y_0) = dz = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y.$$

Демак, функция дифференциали функция орттирмасининг Δx ва Δy га нисбатан чизиқли бош қисми. Агар $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$ бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда функция дифференциали ушбу кўринишни олади: $dz = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$.

Мисол: $z = xy$ функциянинг дифференциали

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = y\,dx + x\,dy$$

бўлади.

$f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функциялар M тўпламда берилган бўлиб, $(x_0; y_0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда

$$f(x, y) \pm g(x, y),$$

$$f(x, y)\cdot g(x, y),$$

$$\frac{f(x, y)}{g(x, y)} \quad (g(x, y) \neq 0)$$

функциялар ҳам шу $(x_0; y_0)$ нуқтада дифференциалланувчи ва ушбу формулалар ўринли бўлади:

$$d[f(x, y) \pm g(x, y)] = df(x, y) \pm dg(x, y),$$

$$d[f(x, y)\cdot g(x, y)] = f(x, y)\cdot dg(x, y) + g(x, y)\,df(x, y),$$

$$d\left[\frac{f(x, y)}{g(x, y)}\right] = \frac{g(x, y)\,df(x, y) - f(x, y)\,dg(x, y)}{g^2(x, y)}.$$

Шунингдек:

$$d[cf(x, y)] = c\,df(x, y) \quad (c - \text{const})$$

бўлади.

8-§. Икки аргументли функциянинг юқори тартибли хусусий ҳосилалари ва дифференциаллари

$z = f(x, y)$ функция M тўпламда берилган ва у $(x; y) \in M$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. Равшанки, берилган функция $(x; y)$ нуқтада $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ хусусий ҳосилаларга эга бўлади. Бу хусусий ҳосилалар ўз навбатида x ва y ўзгарувчиларнинг функцияси бўлиши мумкин. Масалан, $f(x, y) = x^2y^2$ функциянинг хусусий ҳосилалари

$$f'_x(x, y) = 2xy^2, \quad f'_y(x, y) = 2x^2y$$

бўлиб, улар x ва y ўзгарувчиларнинг функциясидир.

19.12-таъриф. $z = f(x, y)$ функция хусусий ҳосилалари $f'_x(x, y)$ ва $f'_y(x, y)$ нинг хусусий ҳосилалари берилган функциянинг *иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари* дейилади ва

$$f''_{x^2}, \ f''_{xy}, \ f''_{y^2} \ \text{ёки} \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

каби белгиланади. Демак,

$$f''_{x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (f'_x(x, y))'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (f'_x(x, y))'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = (f'_y(x, y))'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

$$f''_{y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (f'_y(x, y))'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

19.2-эслатма. Одатда $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ва $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ хусусий ҳосилалар *аралаш ҳосилалар* деб аталади. Бу аралаш ҳосилалар $(x; y)$ нуқтада узлуксиз бўлса, бир-бирига тенг бўлади.

Худди юқоридагидек, $z = f(x, y)$ функциянинг учинчи, тўртинчи ва ҳоказо тартибли хусусий ҳосилалари таърифланади.

Мисол. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y^2$ функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари топилсин.

Аввало берилган функциянинг хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + x^2y^2) + 2x + 2xy^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + x^2y^2) = 2y + 2x^2y.$$

Функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари қуйидагича бўлади:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2x + 2xy^2) = 2 + 2y^2 = 2(1 + y^2),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2y + 2x^2y) = 2 + 2x^2 = 2(1 + x^2),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2x + 2xy^2) = 4xy.$$

Фараз қилайлик, $z=f(x, y)$ функция M тўпламда берилган бўлиб, $(x; y)\in M$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. Маълумки, функциянинг дифференциали

$$df(x, y)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy \qquad (19.14)$$

бўлади.

19.13-таъриф. $z=f(x, y)$ функциянинг $(x; y)$ нуқтадаги дифференциали $df(x, y)$ нинг дифференциали берилган функциянинг *иккинчи тартибли дифференциали* деб аталади ва $d^2f(x, y)$ каби белгиланади.

Демак,

$$d^2f(x, y)=d(df(x, y)).$$

Энди $f(x, y)$ функция дифференциалининг (19.14) ифодасидан фойдаланиб, $f(x, y)$ функциянинг иккинчи тартибли дифференциали ифодасини топамиз:

$$d^2f(x, y)=d(df(x, y))=d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{df}{\partial y}dy\right)=$$

$$=d\left(\frac{df}{\partial x}\right)dx+d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy.$$

Агар

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dy=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dy,$$

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy$$

ва

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$d^2f(x, y)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dy\right)dx+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\right)dy=$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2=$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

бўлади. Демак,

$$d^2f(x, y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2.$$

Худди юқоридагидек, $z=f(x, y)$ функциянинг учинчи, тўртинчи ва ҳоказо тартибли дифференциаллари таърифланади ва уларнинг ифодалари топилади.

Икки аргументли функция учун ҳам Тейлор формуласини ёзиш мумкин. Қуйида бундай формулани келтириш билангина кифояланамиз.

$z=f(x, y)$ функция $(x_0; y_0)$ нуқтанинг

$$U_\delta((x_0, y_0))=\{(x, y)\in R^2: d((x, y), (x_0, y_0))<\delta\}$$

атрофида берилган бўлиб, унда функция биринчи, иккинчи ва ҳоказо $(n+1)$-тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда $f(x, y)=f(x_0, y_0)+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y-y_0)+$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x\partial y}(x-x_0)(y-y_0)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}(y-y_0)^2\right]+\ldots+\frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n f(x_0, y_0)}{\partial x^n}(x-x_0)^n+\right.$$

$$\left.+C_n^1\frac{\partial^n f(x_0, y_0)}{\partial x^{n-1}\partial y}(x-x_0)^{n-1}(y-y_0)+\ldots+\frac{\partial^n f(x_0, y_0)}{\partial y^n}(y-y_0)^n\right]+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{\partial^{n+1} f(x_0+\theta_1(x-x_0), y_0+\theta_2(y-y_0))}{\partial x^{n+1}}(x-x_0)^{n+1}+\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{\partial^{n+1} f(x_0+\theta_1(x-x_0), y_0+\theta_2(y-y_0))}{\partial y^{n+1}}(y-y_0)^{n+1}\right]$$

$$(0<\theta_1, \theta_2<1)$$

бўлади. Бу формула *икки аргументли функциянинг Тейлор формуласи* деб аталади.

9-§. Икки аргументли функциянинг экстремум қийматлари

$z=f(x, y)$ функция M тўпламда берилган бўлиб, $(x_0; y_0)\in M$ бўлсин.

19.14-таъриф. Агар $(x_0; y_0)$ нуқтанинг M тўпламга тегишли шундай

$$U_\delta((x_0, y_0))=\{x, y)\in R^2: d((x, y), (x_0, y_0))<\delta\}$$

атрофи топилсаки, $\forall (x, y)\in U_\delta((x_0, y_0))$ учун

$$f(x, y)\leqslant f(x_0, y_0)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $f(x, y)$ функция $(x_0; y_0)$ нуқтада *максимум қийматга эришади* дейилади. $(x_0; y_0)$ нуқта функцияга *максимум қиймат берадиган нуқта*, $f(x_0, y_0)$ эса *функциянинг максимум қиймати* дейилади. Уни

$$\max\{f(x, y)\}\ ((x, y)\in U_\delta((x_0, y_0)))$$

каби белгиланади.

Демак,

$$f(x_0, y_0)=\max\{f(x, y)\}.$$

19.15-таъриф. Агар $(x_0; y_0)$ нуқтанинг M тўпламга тегишли бўлган шундай

$$U_\delta((x_0, y_0)) = \{(x, y) \in R^2 : d((x, y), (x_0, y_0)) < \delta\}$$

атрофи топилсаки, $\forall (x, y) \in U_\delta((x_0, y_0))$ учун

$$f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $f(x, y)$ *функция* (x_0, y_0) *нуқтада минимум қийматга эришади* деб аталади. $(x_0; y_0)$ *нуқта функцияга минимум қиймат берадиган нуқта*, $f(x_0, y_0)$ эса *функциянинг минимум қиймати* дейилади. Уни

$$\min\{f(x, y)\} \quad ((x, y) \in U_\delta((x_0, y_0)))$$

каби белгиланади. Демак,

$$f(x_0, y_0) = \min\{f(x, y)\}.$$

Функциянинг максимум ва минимуми умумий ном билан унинг *экстремуми* дейилади.

10-§. Функция экстремумининг зарурий шарти

$z = f(x, y)$ функция M тўпламда берилган бўлиб, $(x_0; y_0)$ нуқтада экстремумга, айтайлик максимумга эришсин. Унда $(x_0; y_0)$ нуқтанинг $U_\delta((x_0, y_0))$ атрофидаги ихтиёрий $(x; y)$ нуқталар учун $f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$ бўлади. Жумладан, $(x; y_0) \in U_\delta((x_0, y_0))$ учун ҳам $f(x, y_0) \leqslant f(x_0, y_0)$ бўлади. Бу ҳол бир аргументли $f(x, y_0)$ функциянинг (бунда x аргумент) x_0 нуқтада ўзининг энг катта қийматига эришишини билдиради. Агар $f(x, y)$ функция $(x_0; y_0)$ нуқтада x аргументи бўйича f'_x хусусий ҳосилага эга бўлса, у ҳолда Ферма теоремасига кўра $f'_x(x_0, y_0) = 0$ бўлади.

Юқоридагидек, $(x_0; y_0)$ нуқтанинг $U_\delta((x_0, y_0))$ атрофидаги ихтиёрий нуқтада, жумладан, $(x_0, y) \in U_\delta((x_0, y_0))$ учун

$$f(x_0, y) \leqslant f(x_0, y_0)$$

бўлади. Бу эса бир аргументли $f(x_0, y)$ функцияни (бунда y аргумент) y_0 нуқтада ўзининг энг катта қийматига эришишини билдиради. Агар $f(x, y)$ функция $(x_0; y_0)$ нуқтада y аргумент бўйича f'_y хусусий ҳосилага эга бўлса, у ҳолда яна Ферма теоремасига кўра $f'_y(x_0, y_0) = 0$ бўлади.

$z = f(x, y)$ функция $(x_0; y_0)$ нуқтада минимумга эришганда ҳам худди шу ҳол юз беради.

19.3-эслатма. $f(x, y) = xy$ функцияни қарайлик. Бу функция $f'_x(x, y) = y$, $f'_y(x, y) = x$ хусусий ҳосилаларга эга ва бу хусусий ҳосилалар (0; 0) нуқтада нолга тенг:

$$f'_x(0, 0) = 0, \quad f'_y(0, 0) = 0.$$

Бироқ, бу $f(x, y) = xy$ функция $(0; 0)$ нуқтада экстремумга эришмайди.

Шундай қилиб, $z = f(x, y)$ функция $(x_0; y_0) \in M$ нуқтада экстремумга эришса ва шу нуқтада функция f'_x, f'_y хусусий ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда

$$f'_x(x, y) = 0, \; f'_y(x, y) = 0$$

бўлади. Бу *функциянинг экстремумга эришишининг зарурий шартини* ифодалайди.

Функция хусусий ҳосилаларининг нолга айлантирадиган нуқталар унинг *стационар (турғун) нуқталари* дейилади.

11-§. Функция экстремумининг етарлилик шарти

Энди $z = f(x, y)$ функциянинг стационар нуқтада экстремумга эришишини таъминлайдиган шартларни топиш билан шуғулланамиз.

$z = f(x, y)$ функция M тўпламда берилган бўлсин. $(x_0; y_0) \in M$ нуқтанинг $U_\delta((x_0, y_0))$ атрофи шу M тўпламга тегишли бўлсин.

Агар $(x; y) \in U_\delta((x_0; y_0))$ нуқтада ҳар доим

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) > 0$$

бўлса, унда $f(x, y)$ функция $(x_0; y_0)$ нуқтада минимумга эришади.

Агар $(x; y) \in U_\delta((x_0; y_0))$ нуқтада ҳар доим

$$f(x, y) - f(f(x_0, y_0) < 0$$

бўлса, унда $f(x, y)$ функция $(x_0; y_0)$ нуқтада максимумга эришади. Демак, биз $(x_0; y_0)$ нуқтанинг $U_\delta((x_0, y_0))$ атрофидаги $(x; y)$ нуқталарда

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \tag{19.15}$$

айирманинг ҳар доим мусбат ёки манфий бўлишини аниқлашимиз керак экан. Бу масалани ҳал қилишда $f(x, y)$ функцияга маълум шартлар қўйилади. $z = f(x, y)$ функция:

1) $(x_0; y_0)$ нуқтанинг $U_\delta((x_0; y_0))$ атрофида x ва y аргументлари бўйича биринчи f'_x ва f'_y ҳамда иккинчи тартибли f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{y^2} хусусий ҳосилаларга эга бўлиб, улар узлуксиз бўлсин;

2) $(x_0; y_0)$ нуқта $f(x, y)$ функциянинг стационар нуқтаси бўлсин: $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Тейлор формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y - y_0)^2\right],$$

бунда иккинчи тартибли хусусий ҳосилалар $(x_0 + \theta_1(x - x_0),\; y_0 + \theta_2(y - y_0))$ нуқтада ҳисобланган $(0 < \theta_1, \; \theta_2 < 1)$.

Агар $(x_0; y_0)$ нинг стационар нуқта эканини эътиборга олсак, унда

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x - x_0)^2 + \right.$$
$$\left. + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y - y_0)^2\right]$$

бўлиши келиб чиқади.

Энди $f(x, y)$ функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларининг $(x_0; y_0)$ нуқтадаги қийматларини қуйидагича белгилайлик:

$$f''_{x^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} = a_{11}, \quad f''_{xy}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0))}{\partial x \partial y} =$$
$$= \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x} = a_{12},$$
$$f''_{y^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} = a_{22}.$$

Шартга кўра берилган иккинчи тартибли хусусий ҳосилалар $(x_0; y_0)$ нуқтада узлуксиз. Шуни эътиборга олиб топамиз:

$$f''_{x^2}(x_0 + \theta_1(x - x_0), y_0 + \theta_2(y - y_0)) = f''_{x^2}(x_0, y_0) + \alpha_{11} = a_{11} + \alpha_{11},$$
$$f''_{xy}(x_0 + \theta_1(x - x_0), y_0 + \theta_2(y - y_0)) = f''_{xy}(x_0, y_0) + \alpha_{12} = a_{12} + \alpha_{12},$$
$$f''_{y^2}(x_0 + \theta_1(x - x_0), y_0 + \theta_2(y - y_0)) = f''_{y^2}(x_0, y_0) + \alpha_{22} = a_{22} + \alpha_{22}.$$

Бунда $x - x_0 \to 0$, $y - y_0 \to 0$ да α_{11}, α_{12}, α_{22} нинг ҳар бири нолга интилади.

Натижада (19.15) айирма ушбу

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}[a_{11}(x - x_0)^2 + 2a_{12}(x - x_0)(y - y_0) +$$
$$+ a_{22}(y - y_0)^2] + \frac{1}{2}[\alpha_{11}(x - x_0)^2 + 2\alpha_{12}(x - x_0)(y - y_0) +$$
$$+ \alpha_{22}(y - y_0)^2]$$

кўринишга келади. Демак,

$$f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

айирманинг ишораси қуйидаги

$$a_{11}(x - x_0)^2 + 2a_{12}(x - x_0)(y - y_0) + a_{22}(y - y_0)^2$$

квадратик форманинг ишорасига боғлиқ бўлади.

1°. Агар $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 > 0$ ва $a_{11} > 0$ бўлса, у ҳолда

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) > 0$$

бўлиб, $f(x, y)$ функция $(x_0; y_0)$ нуқтада минимумга эришади.

2°. Агар $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 > 0$ ва $a_{11} < 0$ бўлса, у ҳолда $f(x, y) - f(x_0, y_0) < 0$ бўлиб, $f(x, y)$ функция $(x_0; y_0)$ нуқтада максимумга эришади.

3°. Агар $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ бўлса, у ҳолда

$$f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

айирма ишора сақламайди. Бу ҳолда $f(x, y)$ функция $(x_0; y_0)$ нуқтада экстремумга эришмайди.

4°. Агар $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ бўлса, у ҳолда

$$f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

айирма мусбат ҳам, манфий ҳам бўлиши мумкин, яъни бу ҳолда $f(x, y)$ функция $(x_0; y_0)$ нуқтада минимумга ёки максимумга эришиши мумкин. Уни қўшимча текшириш ёрдамида аниқланади.

Шундай қилиб, икки аргументли $f(x, y)$ функциянинг экстремуми қуйидаги қоидага кўра топилади:

1) $f(x, y)$ функциянинг хусусий ҳосилалари $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ топилади;

2) Бу хусусий ҳосилаларни нолга тенглаб, ушбу система ҳосил қилинади:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) = 0; \end{cases} \qquad (19.16)$$

3) (19.16) системани ечиб, берилган функциянинг стационар нуқталари топилади. Айтайлик, $f(x, y)$ функциянинг стационар нуқталаридан бири $(x_0; y_0)$ бўлсин $(f'_x(x_0, y_0) = 0,\ f'_y(x_0, y_0) = 0)$;

4) $f(x, y)$ функциянинг иккинчи тартибли $f''_{x^2}(x, y)$, $f''_{xy}(x, y)$, $f''_{y^2}(x, y)$ хусусий ҳосилалари топилади;

5) $f''_{x^2}(x, y)$, $f''_{xy}(x, y)$, $f''_{y^2}(x, y)$ нинг стационар нуқтадаги қийматлари $a_{11} = f''_{x^2}(x_0, y_0)$, $a_{12} = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $a_{22} = f''_{y^2}(x_0, y_0)$ ҳисобланади;

6) $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = f''_{x^2}(x_0, y_0) \cdot f''_{y^2}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2$ ифоданинг қиймати топилади;

7) Натижада:

а) $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ ва $a_{11} > 0$ бўлганда $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада минимумга эришишини;

б) $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ ва $a_{11} < 0$ бўлганда, $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада максимумга эришишини;

в) $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ бўлса, $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада экстремумга эришмаслигини топилади.

Мисол. $z = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x + 6y + 10$ функциянинг экстремуми топилсин.

Берилган функциянинг хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 4, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 4y + 6.$$

Бу хусусий ҳосилаларни нолга тенглаб, ушбу

$$\begin{cases} 2x - 2y - 4 = 0, \\ -2x + 4y + 6 = 0 \end{cases}$$

системани ечамиз.

$$\begin{cases} 2x-2y-4=0, \\ -2x+4y+6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y-2=0, \\ -x+2y+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+1=0 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y=-1, \\ x=1. \end{matrix}$$

Демак, $(1, -1)$ нуқта берилган функциянинг стационар нуқтаси.

Функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини топиб, уларнинг стационар $(1, -1)$ нуқтадаги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(2x-2y-4) = 2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(-2x+4y+6) = 4,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x-2y-4) = -2.$$

Демак, $a_{11} = 2$, $a_{12} = -2$, $a_{22} = 4$.

Энди $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ ни ҳисоблаймиз:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 2 \cdot 4 - (-2)^2 = 8 - 4 = 4.$$

Демак, $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 4 > 0$ ва $a_{11} = 2 > 0$. Юқорида айтилганига кўра берилган функция $(1, -1)$ нуқтада минимумга эришади. Функциянинг минимум қиймати эса

$$\min z = \min (x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x + 6y + 10) = 5$$

га тенг.

XX БОБ. ИККИ АРГУМЕНТЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ИНТЕГРАЛИ

Ушбу бобда икки аргументли функция интеграли тушунчасини ўрганамиз.

Икки аргументли функциянинг интеграли аниқ интегралга ўхшаш бўлади. Шуни эътиборга олиб, қуйида икки аргументли функция интеграллари тушунчасини киритиб, улар ҳақидаги асосий фактларни исботсиз келтириш билан кифояланамиз.

1-§. Икки каррали интеграл

1. Икки каррали интеграл таърифи ва унинг мавжудлиги. Текисликда бирор чегараланган ёпиқ (S) соҳа берилган бўлиб, унинг юзи S га тенг бўлсин (135-чизма).

Бу (S) соҳада $z = f(x, y)$ функция аниқланган бўлсин. (S) соҳани чизиқлар ёрдамида n та (S_1), (S_2), . . ., (S_n) соҳаларга ажратамиз. Уларнинг юзлари мос равишда S_1, S_2, . . ., S_n бўлсин. (S_k) $(k = 1, 2, \ldots, n)$ соҳада ихтиёрий M_k (x_k, y_k) нуқта олиб, бу нуқтада берилган функциянинг қийматини ҳисоблаймиз: $f(x_k, y_k)$. Сўнг уни (S_k) соҳанинг юзи S_k га кўпайтириб, қуйидаги

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n} f(x_k, y_k) \cdot S_k \qquad (20.1)$$

йиғиндини тузамиз. Бу (20.1) йиғинди $f(x, y)$ функциянинг (S) бўйича *интеграл йиғиндиси* деб аталади.

Одатдагидек, (S_k) $(k=\overline{1, n})$ соҳалар диаметрларининг энг каттасини λ деб оламиз.

20.1-таъриф. Агар $\lambda \to 0$ да (20.1) интеграл йиғинди чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда *$f(x, y)$ функция (S) соҳа бўйича интегралланувчи* дейилиб, бу лимит эса *$f(x, y)$ функциянинг (S) соҳа бўйича икки каррали интеграли* деб аталади. Уни

$$\iint_{(S)} f(x, y)\, dS \tag{20.2}$$

каби белгиланади.

Демак,

$$\iint_{(S)} f(x, y)\, dS = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\, S_k.$$

Агар $z=f(x, y)$ функция чегараланган ёпиқ (S) соҳада берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда $\iint_{(S)} f(x, y)\, dS$ интеграл мавжуд бўлади.

2. Икки каррали интегралнинг хоссалари. $z=f(x, y)$ функция (S) соҳада берилган ва узлуксиз бўлсин.

1°. Агар $(S)=(S_1) \cup (S_2)$ бўлса, у ҳолда

$$\iint_{(S)} f(x, y)\, dS = \iint_{(S_1)} f(x, y)\, dS + \iint_{(S_2)} f(x, y)\, dS$$

бўлади.

2°. Қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$\iint_{(S)} kf(x, y)\, dS = k \iint_{(S)} f(x, y)\, dS \quad (k = \text{const}).$$

3°. $f(x, y)$ функция билан бирга $g(x, y)$ функция ҳам (S) да узлуксиз бўлсин. У ҳолда

$$\iint_{(S)} [f(x, y) \pm g(x, y)]\, dS = \iint_{(S)} f(x, y)\, dS \pm \iint_{(S)} g(x, y)\, dS.$$

4°. Агар (S) да $f(x, y) \geqslant 0$ бўлса, у ҳолда

$$\iint_{(S)} f(x, y)\, dS \geqslant 0$$

бўлади.

5°. Агар $f(x, y) \leqslant g(x, y)$ бўлса, у ҳолда

$$\iint_{(S)} f(x, y)\, dS \leqslant \iint_{(S)} g(x, y)\, dS$$

бўлади.

6°. $|f(x, y)|$ функция ҳам (S) да интегралланувчи бўлиб,

$$\left|\iint_{(S)} f(x, y)\, dS\right| \leqslant \iint_{(S)} |f(x, y)|\, dS$$

бўлади.

7°. (S) соҳада шундай (ξ, η) нуқта топиладики,

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\, dS = f(\xi, \eta)\, S.$$

(S — (S) нинг юзи) бўлади.

3. Икки каррали интегралларни ҳисоблаш. Текисликдаги (S) соҳа ушбу

$$(S) = \{(x, y) = R^2 \colon a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$$

тўғри тўртбурчак соҳадан иборат бўлсин (136-чизма). $z = f(x, y)$ функция шу (S) соҳада берилган ва узлуксиз бўлсин. У ҳолда функциянинг (S) соҳа бўйича икки каррали интеграли

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\, dS = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x, y)\, dx\right] dy,$$

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\, dS = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x, y)\, dy\right] dx \tag{20.3}$$

бўлади.

Демак, икки аргументли $f(x, y)$ функциянинг кўрсатилган (S) соҳа бўйича икки каррали интеграли, аввал бир аргументи бўйича, сўнг иккинчи аргументи бўйича олинган интегралларни ҳисоблаш билан ҳисобланар экан.

Мисол. $\iint\limits_{(S)} \frac{x}{y}\, dS$ интеграл ҳисоблансин, бунда

$$(S) = \{(x, y) \in R^2 : 3 \leqslant x \leqslant 5,\ 1 \leqslant y \leqslant 2\}$$

тўғри тўртбурчак.

(20.3) формуладан фойдаланамиз:

$$\iint\limits_{(S)} \frac{x}{y}\, dS = \int\limits_1^2 \left[\int\limits_3^5 \frac{x}{y}\, dx\right] dy.$$

Аввал $\int\limits_3^5 \frac{x}{y}\, dx$ интегрални ҳисоблаймиз. Унда y уни ўзгармас деб қараймиз:

$$\int\limits_3^5 \frac{x}{y}\, dS = \frac{1}{y}\int\limits_3^5 x dx = \frac{1}{y}\, \frac{x^2}{2}\Big|_3^5 = \frac{1}{2y}\,(5^2 - 3^2) = \frac{8}{y}.$$

Натижада

$$\iint\limits_{(S)} \frac{x}{y}\, dS = \int\limits_1^2 \left[\int\limits_3^5 \frac{x}{y}\, dx\right] dy = \int\limits_1^2 \frac{8}{y}\, dy = 8\int\limits_1^2 \frac{dy}{y} = 8\, \ln y\,\Big|_1^2 =$$

$$= 8\,(\ln 2 - \ln 1) = 8\ln 2$$

бўлади. Демак,

$$\iint\limits_{(S)} \frac{x}{y}\, dS = 8\ln 2.$$

Энди (S) соҳа юқоридан $y=\varphi_2(x)$ функция графиги, пастдан $y = \varphi_1(x)$ функция графиги, ён томонларидан $x=a$, $x=b$ вертикал чизиқлар билан чегараланган соҳа бўлсин (137-чизма).

$z=f(x, y)$ функция шу (S) соҳада берилган ва узлуксиз бўлиб, $\varphi_1(x)$ ва $\varphi_2(x)$ функциялар $[a; b]$ да узлуксиз бўлсин. У ҳолда $z=f(x, y)$ функциянинг (S) соҳа бўйича икки каррали интеграли мавжуд бўлиб,

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\, dS = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy\right] dx \tag{20.4}$$

бўлади.

Мисол. $\iint\limits_{(S)} (x+y)\, dS$ интеграл ҳисоблансин, бунда

$$(S)=\{(x, y)\in R^2 : 0\leqslant x\leqslant 1,\ x\leqslant y\leqslant 2-x^2\}.$$

Берилган интегрални ҳисоблаш учун аввало (S) соҳани аниқлаб оламиз. Бу (S) соҳа юқоридан $y=2-x^2$ парабола, пастдан $y=x$ тўғри чизиқ, ён томонларидан эса $x=0$, $x=1$ вертикал чизиқлар билан чегараланган соҳани ифодалайди (138-чизма).

Юқоридаги (20.4) формулага кўра

$$\iint\limits_{(S)} (x+y)\, dS = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_x^{2-x^2} (x+y)\, dy\right] dx$$

бўлади. Равшанки,

$$\int\limits_x^{2-x^2} (x+y)\, dy = \int\limits_x^{2-x^2} x dy + \int\limits_x^{2-x^2} y dy = x\cdot \int\limits_x^{2-x^2} dy + \int\limits_x^{2-x^2} y dy =$$

$$= xy\Big|_x^{2-x^2} + \frac{y^2}{2}\Big|_x^{2-x^2} = x(2-x^2-x) + \frac{1}{2}\left[(2-x^2)^2 - x^2\right] =$$

$$= 2x - x^3 - x^2 + 2 - 2x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 =$$

$$= \frac{1}{2}x^4 - x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x + 2.$$

У ҳолда

$$\iint\limits_{(S)} (x+y)\, dS = \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{2}x^4 - x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x + 2\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 - \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 - \frac{7}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + 2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + 2x\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{10} - \frac{1}{4} - \frac{7}{6} + 1 + 2 = \frac{101}{60}$$ бўлади. Демак,

$$\iint\limits_{(S)} (x+y)\, dS = \frac{101}{60}.$$

Икки каррали интегралнинг татбиқ доираси кенгдир. Улар ёрдамида текис шаклнинг юзини, массани, статистик моментини топиш мумкин.

2-§. Эгри чизиқли интеграллар

1. Биринчи тур эгри чизиқли интеграл. Текисликда бирор эгри чизиқ (ёй) берилган бўлсин. Уни $\breve{AB}$ ёки (l) билан белгилаймиз (139-чизма).

Бу эгри чизиқ узунликка эга ва унинг узунлиги l бўлсин. Шу $\breve{AB}$ эгри чизиқда $z = f(x, y)$ функция берилган (бунда $(x, y) \in (l)$). $\breve{AB}$ эгри чизиқни $A_0 = A$, A_1, A_2, $\ldots$, A_{n-1}, $A_n = B$ нуқталар ёрдамида n та бўлакка бўлиб, ҳар бир $\breve{A_kA_{k+1}}$ бўлакчада ихтиёрий (ξ_k, η_k) $((\xi_k, \eta_k) \in \in \breve{A_kA_{k+1}})$ нуқта оламиз. Бу нуқтада $f(x, y)$ функциянинг қиймати $f(\xi_k, \eta_k)$ ни ҳисоблаб, уни мос $\breve{A_kA_{k+1}}$ бўлакчанинг узунлиги ΔS_k га кўпайтирамиз ва ниҳоят

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\, \Delta S_k$$

йиғиндини тузамиз. Бу ҳам *интеграл йиғинди* дейилади. Унинг лимити худди 16-боб, 2-§ да келтирилган йиғиндиларнинг лимити каби таърифланади.

20.2-таъриф. Агар $\lambda = \max\limits_k \{\Delta S_k\} \to 0$ да σ йиғинди чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда *$f(x, y)$ функция $\breve{AB}$ эгри чизиқ бўйича интегралланувчи* дейилиб, бу лимит эса $f(x, y)$ функциянинг $\breve{AB}$ эгри чизиқ бўйича *биринчи тур эгри чизиқли интеграли* дейилади.

Уни

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(x, y)\, dS$$

каби белгиланади. Демак,

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(x, y)\, dS = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\, \Delta S_k.$$

1°. (AB) эгри чизиқ ушбу

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{array}\right\} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

система билан берилган бўлиб, бунда $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ функциялар $[\alpha, \beta]$ да ўзлуксиз ҳамда узлуксиз $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ ($\varphi(\alpha)=A$, $\varphi(\beta)=B$) ҳосилаларга эга бўлсин. $f(x, y)$ функция эса шу эгри чизиқда берилган ва узлуксиз бўлсин. У ҳолда

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(x, y)\, dS$$

эгри чйзиқли интеграл мавжуд бўлиб,

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(x, y)\, dS = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \ \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\, dt \qquad (20.5)$$

бўлади.

2°. $\breve{AB}$ эгри чизиқ ушбу

$$y = y(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

тенглама билан берилган бўлиб, $y(a) = A$, $y(b) = B$ бўлсин. $y=y(x)$ функция эса $[a, b]$ сегментда узлуксиз ҳамда узлуксиз $y'(x)$ ҳосилага эга.

Агар $f(x, y)$ функция $\breve{AB}$ эгри чизиқда берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг $\breve{AB}$ эгри чизиқ бўйича эгри чизиқли интеграли мавжуд бўлиб,

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(x, y)\, dS = \int\limits_{a}^{b} f(x, y(x)) \sqrt{1+y'^2(x)}\, dx \qquad (20.6)$$

бўлади.

Юқорида келтирилган фактлар $f(x, y)$ функция эгри чизиқли интегралининг мавжудлигини ифодалабгина қолмай, балки уни ҳисоблаш имконини ҳам беради.

(20.5) ва (20.6) формулалар кўрсатадики, эгри чизиқли интеграллар аниқ интегралга келтирилади. Аниқ интегрални ҳисоблашни эса XVI боб, 6-§ да батафсил ўрганган эдик.

Мисол. Қуйидаги

$$\int\limits_{\breve{AB}} \sqrt{x^2+y^2}\, dS$$

биринчи тур эгри чизиқли интеграл ҳисоблансин, бунда $\breve{AB}$ — маркази (0, 0) нуқтада, радиуси $r = 2$ бўлган айлананинг биринчи квадрантдаги қисмидан иборат.

Аналитик геометриядан маълумки, маркази (0, 0) нуқтада, радиуси $r = 2$ бўлган айлананинг тенгламаси

$$x^2 + y^2 = 2^2 = 4$$

бўлади. Бу айлананинг биринчи квадрантдаги қисми

$$y = \sqrt{4-x^2} \quad (0 \leqslant x \leqslant 2)$$

бўлади. (20.6) формуладан фойдаланиб топамиз.

$$\int\limits_{\breve{AB}} \sqrt{x^2+y^2}\, dS = \int\limits_0^2 \sqrt{x^2+4-x^2} \cdot \sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}\right)^2}\, dx =$$

$$= \int\limits_0^2 2\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}\, dx = 2\int\limits_0^2 \sqrt{\frac{4-x^2+x^2}{4-x^2}}\, dx = 2\int\limits_0^2 \frac{2dx}{\sqrt{4-x^2}} =$$

$$= 2\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = 4\int\limits_0^2 \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} =$$

$$= 4\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^2 = 4\cdot\frac{\pi}{2} = 2\pi.$$

Эгри чизиқли интеграллар ҳам аниқ интеграл хоссалари каби хоссаларга эга. Уларнинг баъзи бирларини келтириш билан кифояланамиз.

AB эгри чизиқда $z = f(x, y)$ функция берилган ва узлуксиз бўлсин.

1°. Агар $\breve{AB} = \breve{AC} + \breve{CB}$ бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(x, y)dS = \int\limits_{\breve{AC}} f(x, y)dS + \int\limits_{\breve{CB}} f(x, y)\, dS$$

бўлади.

2°. $\int\limits_{\breve{AB}} kf(x, y)\, dS = k\int\limits_{\breve{AB}} f(x, y)dS \quad (k - \text{const}).$

3°. $\breve{AB}$ эгри чизиқда $g(x, y)$ функция ҳам берилган ва узлуксиз бўлсин. У ҳолда

$$\int\limits_{\breve{AB}} [f(x, y) \pm g(x, y)]dS = \int\limits_{\breve{AB}} f(x, y)\, dS \pm \int\limits_{\breve{AB}} g(x, y)\, dS$$

бўлади.

2. Иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар. Текисликда $\breve{AB}$ эгри чизиқ берилган бўлиб, бу эгри чизиқда $z = f(x, y)$ функция аниқланган бўлсин (140-чизма).

$\breve{AB}$ эгри чизиқни $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($A_0 = A$, $B_n = B$) нуқталар ёрдамида n та бўлакка бўлиб, ҳар бир $\breve{A_kA_{k+1}}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$) бўлакчада ихтиёрий (ξ_k, η_k) нуқта оламиз. Бу нуқтадаги функциянинг қиймати $f(\xi_k, \eta_k)$ ни $\breve{A_kA_{k+1}}$ ёйининг Ox ўқидаги проекцияси Δx_k га, сўнг Oy ўқидаги проекцияси Δy_k га кўпайтириб, ушбу йиғиндиларни тузамиз:

$$\sigma_1 = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k, \quad \sigma_2 = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k. \tag{20.7}$$

(20.7) ҳам *интеграл йиғиндилар* деб аталади.

20. 3- таъриф. Агар $\lambda_1 = \max\{\Delta x_k\} \to 0$ да σ_1 йиғинди, $\lambda_2 = \max\{\Delta y_k\} \to 0$ да σ_2 йиғинди чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда *$f(x, y)$ узлуксиз $\breve{AB}$ эгри чизиқ бўйича интегралланувчи* дейилади, бу лимитлар эса *$f(x, y)$ функциянинг иккинчи тур эгри чизиқли интеграллари* дейилади.

Улар мос равишда қуйидагича

$$\int_{\breve{AB}} f(x, y)\,dx, \quad \int_{\breve{AB}} f(x, y)\,dy$$

каби белгиланади.

Демак, $$\int_{\breve{AB}} f(x, y)dx = \lim_{\lambda_1\to 0}\sigma_1 = \lim_{\lambda_1\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k,$$

$$\int_{\breve{AB}} f(x, y)dy = \lim_{\lambda_2\to 0}\sigma_2 = \lim_{\lambda_2\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k.$$

Ушбу

$$\int_{\breve{AB}} f(x, y)dx + \int_{\breve{AB}} g(x, y)\,dy$$

йиғинди *иккинчи тур эгри чизиқли интегралнинг умумий кўриниши* дейилади ва

$$\int_{\breve{AB}} f(x, y)\,dx + g(x, y)dy$$

каби белгиланади:

$$\int_{\breve{AB}} f(x, y)dx + g(x, y)dy = \int_{\breve{AB}} f(x, y)dx + \int_{\breve{AB}} g(x, y)\,dy.$$

Иккинчи тур эгри чизиқли интегралларнинг мавжудлиги, уларни ҳисоблаш, бундай эгри чизиқли интегралларнинг хоссалари юқорида келтирилган биринчи тур эгри чизиқли интеграллар каби бўлади.

3-§. Параметрларга боғлиқ интеграллар

1. Параметрга боғлиқ функция тушунчаси ва унинг хоссалари. $z = f(x, y)$ функция текисликдаги тўғри тўртбурчак соҳа $(D) = \{(x, y) \in R^2 : a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$ да аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Берилган $f(x, y)$ функциянинг y аргументи $[c; d]$ оралиқда ўзгаради.

Энди шу оралиқдаги бирор тайин y_0 қийматни олиб, $f(x, y_0)$ ни қараймиз. Равшанки, $f(x, y_0)$ фақат x гагина боғлиқ. Демак, $f(x, y_0)$

функция $[a; b]$ да узлуксиз функция бўлади. У $[a; b]$ да интегралланувчи, яъни

$$I_0 = \int_a^b f(x, y_0)dx \tag{20.8}$$

мавжуд.

Энди $f(x, y)$ функция y аргументининг $[c; d]$ оралиқдаги бошқа бир тайин y_1 қийматини олиб, $f(x, y_1)$ ни қараймиз. Бу ҳам x гагина боғлиқ бўлиб, x унинг $[a; b]$ даги узлуксиз функцияси бўлади. Демак, $f(x, y_1)$ ҳам $[a; b]$ оралиқда интегралланувчи, яъни

$$I_1 = \int_a^b f(x, y_1)dx \tag{20.9}$$

мавжуд. (20.8) ва (20.9) интегралларнинг қийматлари умуман айтганда турлича бўлади.

Мисол. Ушбу $f(x, y) = xy$ функцияни $(D) = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ да қарайлик. Бу функция (D) да узлуксиз. Берилган функция $y_0 = \frac{1}{2}$ да $f(x, y_0) = x \cdot \frac{1}{2}$ бўлиб, унинг интеграли

$$I_0 = \int_0^1 x \cdot \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

бўлади. Қаралаётган функция $y_1 = \frac{1}{4} \in [0; 1]$ да $f(x, y_1) = x \cdot \frac{1}{4}$ бўлиб, унинг интеграли

$$I_1 = \int_0^1 x \cdot \frac{1}{4}dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{8}$$

бўлади.

Юқорида айтилганлардан ҳамда келтирилган мисолдан кўринадики, $z = f(x, y)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқ бўйича интеграли

$$\int_a^b f(x, y)\, dx$$

y ўзгарувчининг $[c; d]$ оралиқдан олинган қийматига боғлиқ бўлади:

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx. \tag{20.10}$$

(20.10) интеграл икки аргументли $f(x, y)$ функцияни x аргументи бўйича $[a; b]$ оралиқдаги аниқ интегралидир. Демак, $f(x, y)$ функциянинг (20.10) *кўринишдаги интегралини қарашда y ни ўзгармас* деб ҳисобланади. Шунинг учун ҳам уни *параметр* дейилиб, (20.10) интегрални эса *параметрга боғлиқ интеграл* дейилади. Берилган $z = f(x, y)$ функцияга кўра (20.10) муносабат ёрдамида янги $I(y)$ функция ҳосил бўлади.

Параметрга боғлиқ интегралларда ўрганиладиган асосий масала $f(x, y)$ функциянинг хоссаларига биноан $I(y)$ функциянинг хоссарини топишдан иборатдир. Қуйида шу хоссаларнинг баъзиларини келтирамиз.

1°. $f(x, y)$ функция $(D) = \{(x, y) \in R^2 : a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d\}$ соҳада берилган ва узлуксиз бўлсин. У ҳолда

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx$$

функция ҳам $[c; d]$ оралиқда узлуксиз бўлади.

2°. $f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган ва узлуксиз бўлиб, у шу соҳада узлуксиз $f'_y(x, y)$ хусусий ҳосилага эга бўлсин. У ҳолда $I(y)$ функция ҳам $[c; d)$ да ҳосилага эга бўлиб,

$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y)dx$$

бўлади.

3°. $f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган ва узлуксиз бўлсин. У ҳолда $I(y)$ функция $[c; d]$ оралиқда интегралланувчи бўлиб,

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d \Big[\int_a^b f(x, y)dx\Big]\,dy = \int_a^b \Big[\int_c^d f(x, y)\,dy\Big]\,dx$$

бўлади.

2. Параметрларга боғлиқ хосмас интеграллар. Эйлер интеграллари. Биз мазкур курснинг XVIII бобида чегаралари чексиз ҳамда чегараланмаган функциянинг хосмас интеграллари билан танишган эдик. Параметрга боғлиқ хосмас интегралларни ҳам қараш мумкин. Масалан, $f(x, y)$ функция ушбу

$$\{(x, y) \in R^2 : a \leqslant x < +\infty, \ c \leqslant y \leqslant d\}$$

соҳада берилган бўлиб, у ўзгарувчининг $[c; d]$ оралиқдан олинган ҳар бир тайин қийматида x аргументи бўйича $[a; +\infty)$ оралиқда интегралланувчи бўлсин. Унда

$$\int_a^{+\infty} f(x, y)dx$$

интеграл параметрга боғлиқ бўлган хосмас (чегараси чексиз) интеграл бўлади.

Худди шунга ўхшаш параметрга боғлиқ чегараланмаган функция хосмас интеграли тушунчаси киритилади.

Параметрга боғлиқ хосмас интегралларда ҳам юқоридагидек, берилган $f(x, y)$ функциянинг хоссаларига кўра параметрга боғлиқ хосмас интегралларнинг мос хоссалари ўрганилади.

Улар математик анализнинг нозик тушунчаларига асосланади.

Биз қуйида параметрга боғлиқ хосмас интегралларнинг махсус турини — Эйлер интегралларини қараймиз ва уларнинг хоссаларини келтирамиз. Ушбу

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt. \qquad (20.11)$$

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt \qquad (20.12)$$

интеграллар *Эйлер интеграллари* дейилади. (20.11) интеграл *Бета-функция*, (20.12) интеграл *Гамма-функция* деб аталади.

Демак, Бета- ва Гамма-функциялар параметрга боғлиқ хосмас интеграллардир.

Бета-функция

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

x ва y ўзгарувчиларнинг $x>0$, $y>0$ бўлган қийматларида аниқланган (мавжуд бўлади).

Гамма-функция

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$$

эса x ўзгарувчининг $x>0$ бўлган қийматларида аниқланган (мавжуд бўлади).

$B(x, y)$ ва $\Gamma(x)$ функциялар бир қатор муҳим хоссаларга эга.

1°. Барча (x, y) $(x>0,\ y>0)$ учун

$$B(x, y) = B(y, x)$$

бўлади.

2°. $B(x, y)$ функцияни қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$B(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\,dt.$$

3°. Барча (x, y) учун $(x>0,\ y>1)$

$$B(x, y) = \frac{y-1}{x+y-1} B(x, y-1)$$

бўлади

4°. Агар $y = 1-x$ $(0<x<1)$ бўлса, у ҳолда

$$B(x, y) = B(x, 1-x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

бўлади.

Хусусан, $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ бўлганда

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{1}{2}\pi} = \pi \tag{20.13}$$

бўлади.

5°. Барча $x > 0$ учун

$$\Gamma(x+1) = \Gamma(x)$$

бўлади.

6°. Барча $x > 0$, $y >$ учун

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{20.14}$$

бўлади.

20.1-натижа. (20.13) ва (20.14) муносабатлардан $0 < x < 1$ учун

$$\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}$$

бўлиши келиб чиқади.

Хусусан, $x = \frac{1}{2}$ бўлганда

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{1}{2}\pi}$$

ёки

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \pi,$$

бўлиб

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

бўлади.

XXI БОБ. ҚАТОРЛАР

1-§. Сонли қаторлар

Бирор

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

сонлар кетма-кетлиги берилган бўлиб, унинг ёрдамида ушбу

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \tag{21.1}$$

ифодани ҳосил қилинган. Одатда бу (21.1) ифода чексиз қатор (қисқача қатор) деб аталади. a_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ сонлар қаторнинг ҳадлари (a_1 — биринчи ҳади, a_2 — иккинчи ҳади, ... a_n — n-ҳади, ёки умумий ҳади, ...) дейилади. (21.1) қаторни қисқача йиғинди белгиси орқали $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ каби ёзилади:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

Берилган қатор ҳадлари ёрдамида қуйидаги

$$\begin{aligned}
&S_1 = a_1,\\
&S_2 = a_1 + a_2,\\
&S_3 = a_1 + a_2 + a_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{21.2}$$

йиғиндиларни тузамиз. Бу йиғиндилар (21.1) қаторнинг қисмий йиғиндилари деб аталади. Бу йиғиндилар

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots,\ S_n,\ \ldots$$

кетма-кетликни ҳосил қилади. Уни $\{S_n\}$ каби белгилаймиз.

Шундай қилиб, (21.1) қатор берилган бўлса, ҳар доим бу қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{S_n\}$ кетма-кетликни ҳосил қилиш мумкин.

21.1-таъриф. Агар $n \to \infty$ да (21.1) қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат (S_n) сонлар кетма-кетлиги чекли лимитга эга

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

бўлса, у ҳолда (21.1) қатор яқинлашувчи, S эса қаторнинг йиғиндиси дейилади:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

21.2-таъриф. Агар $n \to \infty$ да (21.1) қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{S_n\}$ сонлар кетма-кетлигининг лимити чексиз бўлса ёки бу лимит мавжуд бўлмаса, у ҳолда (21.1) қатор узоқлашувчи дейилади.

Мисоллар. 1. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$ қаторни қараймиз. Бу қаторнинг биринчи ҳади $a_1=\frac{1}{1\cdot 2}$, иккинчи ҳади $a_2=\frac{1}{2\cdot 3}$, учинчи ҳади $a_3=\frac{1}{3\cdot 4}$ ва ҳ.к., n-ҳади $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$ ва ҳ.к. Қаралаётган қаторнинг қисмий йиғиндиларини топамиз:

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2},$$

$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3},$$

$$S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=$$
$$+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Шундай қилиб, берилган қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{S_n\}$ кетма-кетлик қуйидагича бўлади:

$$1-\frac{1}{2},\ 1-\frac{1}{3},\ 1-\frac{1}{4},\ \ldots,\ 1-\frac{1}{n+1},\ \ldots$$

Бу кетма-кетликнинг лимити

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

га тенг. Демак, берилган қатор яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси 1 га тенг:

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots=1.$$

2. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$ қаторни қараймиз. Унинг қисмий йиғиндилари

$$S_1=1,$$
$$S_2=1+\frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$S_3=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$S_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

бўлиб, бу қисмий йиғиндилардан иборат $\{S_n\}$ кетма-кетлик $1,\ 1+\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}},\ \ldots,\ 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ \ldots\ +\frac{1}{\sqrt{n}}-$ $-,\ \ldots$ бўлади. Агар $n>1$ бўлганда

$$S_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}=$$

$=n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$ бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$ эканлигини топамиз. Демак, берилган қатор узоқлашувчи.

3. $1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n+1}+\ldots$ қаторни қараймиз. Бу қаторнинг қисмий йиғиндилари

$S_1=1,$

$S_2=1-1=0,$

$S_3=1-1+1=1,$

$S_4=1-1+1-1=0,$

$\cdots\cdots\cdots$

$$S_n = 1-1+1-1+\ \dots\ +(-1)^{n+1} = \begin{cases} 1, & \text{агар } n \text{ — тоқ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } n \text{ — жуфт бўлса} \end{cases}$$

бўлиб, бу қисмий йиғиндилардан иборат $\{S_n\}$ кетма-кетлик 1, 0, 1, 0, 1, 0, ... бўлади.

Равшанки, бу кетма-кетлик лимитга эга эмас. Демак, берилган қатор узоқлашувчи.

4. $a + aq + aq^2 + \ \dots\ + aq^{n-1} + \dots$ қаторни қараймиз. Бу қаторнинг ҳадлари геометрик прогрессия ташкил қилади. Шунинг учун уни геометрик қатор дейилади. Унинг қисмий йиғиндилари $(q \neq 1)$

$$S_1 = a = \frac{aq-a}{q-1},$$

$$S_2 = a + aq = \frac{aq^2-a}{q-1},$$

$$S_3 = a + aq + aq^2 = \frac{aq^3-a}{q-1},$$

. . . .

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ \dots\ + aq^{n-1} = \frac{aq^n - a}{q-1}$$

. . . .

бўлиб, улардан тузилган кетма-кетлик

$$\{S_n\} = \left\{\frac{aq^n - a}{q-1}\right\}$$

бўлади. Бу кетма-кетликнинг лимити q га боғлиқ бўлади.

а) $|q| < 1$ бўлсин. Равшанки, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Унда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{aq^n - a}{q-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}q^n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{1-q} -$

$$- \frac{a}{1-q}\lim_{n\to\infty} q^n = \frac{a}{1-q}$$

бўлади. Демак, бу ҳолда геометрик қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси $S = \frac{a}{1-q}$ бўлади.

б) $q > 1$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}q^n\right) = \infty$$

бўлади. Демак, $q > 1$ бўлганда геометрик қатор узоқлашувчи.

в) $q = 1$ бўлсин. Бу ҳолда $S_n = a + a + a + \ \dots\ + a = n \cdot a$ бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} +\infty, & \text{агар } a > 0 \text{ бўлса,} \\ -\infty, & \text{агар } a < 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

бўлади. Демак, $q = 1$ бўлганда қатор узоқлашувчи.

г) $q < -1$ бўлсин. Бу ҳолда $\{S_n\}$ кетма-кетликнинг лимити мавжуд бўлмайди.

Шунингдек, $q = -1$ бўлганда ҳам $\{S_n\}$ кетма-кетликнинг лимити мавжуд эмас. Чунки бу ҳолда $\{S_n\}$ кетма-кетлик ушбу a, 0, a, 0, ... кўринишга эга бўлиб, у лимитга эга эмас ($a \neq 0$). Демак, $q \leqslant -1$ бўлганда қатор узоқлашувчи бўлади.

Шундай қилиб,

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$$

геометрик қатор $|q| < 1$ бўлганда яқинлашувчи $\left(\text{йиғиндиси } S = \frac{a}{1-q} \text{ га тенг}\right)$, $|q| \geqslant 1$ бўлганда узоқлашувчи бўлади.

2-§. Яқинлашувчи қаторларнинг хоссалари

Биз қуйида яқинлашувчи қаторларнинг баъзи хоссаларини келтирамиз.

1°. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (21.1)$$

қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси S га тенг бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = ca_1 + ca_2 + ca_3 + \ldots ca_n + \ldots \qquad (21.3)$$

қатор ҳам яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси $c \cdot S$ га тенг бўлади, бунда c — ўзгармас сон.

Исбот. Шартга кўра (21.1) қатор яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси S га тенг. Демак,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = S.$$

(21.3) қаторнинг қисмий йиғиндисини S'_n билан белгилаймиз:

$$S'_n = ca_1 + ca_2 + ca_3 + \ldots + ca_n.$$

Равшанки,

$$S'_n = ca_1 + ca_2 + ca_3 + \ldots + ca_n =$$
$$= c(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) = cS_n.$$

Натижада

$$\lim_{n\to\infty} S'_n = \lim_{n\to\infty} cS_n = c \lim_{n\to\infty} S_n = c \cdot S$$

бўлишини топамиз. Демак, (21.3) қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{S'_n\}$ кетма-кетлик cS лимитга эга экан. Бу эса (21.3) қаторнинг яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси cS га тенг эканлигини билдиради.

2°. *Иккита қатор берилган бўлсин:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots, \qquad (21.1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots \qquad (21.4)$$

Ушбу

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \ldots + (a_n + b_n) + \ldots$$

қатор берилган қаторлар йиғиндиси дейилади ва $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ каби белгиланади:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \\ + \ldots + (a_n + b_n) + \ldots$$

Ушбу

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \ldots + (a_n - b_n) + \ldots$$

қатор берилган қаторлар айирмаси дейилади ва

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$$

каби белгиланади, яъни

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \\ + \ldots + (a_n - b_n) + \ldots$$

Агар (21.1) ва (21.4) қаторлар яқинлашувчи бўлиб, уларнинг йиғиндиси мос равишда S' ва S'' бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) + \ldots \qquad (21.5)$$

қатор ҳам яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $S' + S''$ га тенг бўлади.

Исбот. (21.1) ва (21.4) қаторларнинг қисмий йиғиндиларини мос равишда S'_n ва S''_n билан белгилайлик:

$$S'_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n,$$

$$S''_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n.$$

У ҳолда

$$\lim_{n\to\infty} S_n' = S', \quad \lim_{n\to\infty} S_n'' = S''$$

бўлади.

(21.5) қаторнинг қисмий йиғиндиси $\overline{S}_n$ бўлсин:

$$\overline{S}_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n).$$

Равшанки,

$$\overline{S}_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) =$$
$$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = S_n' + S_n''.$$

Натижада

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = \lim_{n\to\infty} (S_n' + S_n'') = \lim_{n\to\infty} S_n' + \lim_{n\to\infty} S_n'' = S' + S''$$

бўлади. Демак, (21.5) қатор яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $S' + S''$ га тенг.

3°. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $n \to \infty$ да бу қаторнинг умумий ҳади a_n нолга интилади: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Исбот. Берилган қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси S га тенг бўлсин. Таърифга биноан $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, бунда

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

Равшанки, $S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}$ бўлиб, $a_n = S_n - S_{n-1}$ бўлади. Кейинги тенгликда $n \to \infty$ да лимитга ўтиб топамиз:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Бу эса 3°-хоссани исботлайди.

21.1-эслатма. Бирор қаторнинг умумий ҳади $n \to \infty$ да нолга интилишидан қаторнинг яқинлашувчи бўлиши ҳар доим ҳам келиб чиқавермайди.

Масалан, ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

қаторнинг умумий ҳади $a_n = 1/\sqrt{n}$ бўлиб, $n \to \infty$ да нолга интилади: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Аммо бу қаторнинг узоқлашувчи бўлишини кўрган эдик.

Демак, юқорида келтирилган 3°-хосса қатор яқинлашишининг зарурий шартини ифодалайди.

3-§. Қаторларнинг яқинлашувчилиги

Бирор

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \qquad (21.1)$$

қатор берилган бўлиб, унинг ҳар бир ҳади манфий бўлмасин, яъни

$$a_n \geqslant 0 \quad (\forall n \in N) \qquad (21.6)$$

бўлсин (одатда бундай қаторларни мусбат ҳадли қаторлар дейилади).

21.1-теорема. Агар (21.1) қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{S_n\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланган бўлса, у ҳолда (21.1) қатор яқинлашувчи бўлади.

Исбот. Берилган (21.1) қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{S_n\}$ кетма-кетликни оламиз. Бу кетма-кетлик юқоридан чегараланган бўлсин, яъни

$$S_n \leqslant M \quad (\forall n \in N).$$

Иккинчи томондан, берилган қаторнинг ҳадлари (21.6) шартни қаноатлантиришини эътиборга олиб топамиз:

$$S_{n+1} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geqslant S_n.$$

Демак, $\forall n \in N$ учун $S_n \leqslant S_{n+1}$ бўлади. Бу $\{S_n\}$ кетма-кетликнинг ўсувчи эканини билдиради. Шундай қилиб, $\{S_n\}$ кетма-кетлик ўсувчи ва у юқоридан чегараланган. У ҳолда бу $\{S_n\}$ кетма-кетлик чекли лимитга эга бўлади: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Демак, берилган қатор яқинлашувчи. Теорема исбот бўлди.

21.2-эслатма. Агар (21.1) қатор яқинлашувчи бўлса, унинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{S_n\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланган бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, (21.1) қатор яқинлашувчи бўлса, унинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{S_n\}$ кетма-кетлик чекли лимитга эга бўлади. Маълумки, чекли лимитга эга бўлган кетма-кетлик чегараланган, жумладан юқоридан чегараланган бўлади.

21.1-натижа. Агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \geqslant 0,\ n = 1, 2, 3, \dots)$ қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{S_n\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланмаган бўлса, у ҳолда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор узоқлашувчи бўлади.

Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots$$

қаторлар берилган бўлиб, $a_n \geqslant 0$, $b_n \geqslant 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ бўлсин.

21.2-теорема. Агар

$$a_n \leqslant b_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{21.7}$$

бўлиб, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор ҳам яқинлашувчи бўлади.

Агар $a_n \leqslant b_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ бўлиб, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор узоқлашувчи бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатор ҳам узоқлашувчи бўлади.

Исбот. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ва $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторлар ҳадлари орасида (21.7) муносабат ўринли бўлсин. У ҳолда бу қаторларнинг қисмий йиғиндилари

$$S'_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n, \quad S''_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n$$

учун

$$S'_n \leqslant S''_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{21.8}$$

бўлади. Шартга кўра $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатор яқинлашувчи. У ҳолда бу қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{S''_n\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланган бўлади $S''_n \leqslant M$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ Унда (21.8) муносабатдан фойдаланиб топамиз: $S'_n \leqslant M$. Демак, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{S'_n\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланган. 21.1-теоремага кўра қатор яқинлашувчи бўлади.

Худди шунга ўхшаш, (21.7) муносабат ўринли бўлганда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг узоқлашувчи бўлишидан $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторнинг ҳам узоқлашувчи бўлиши келиб чиқиши исботланади. Теорема исбот бўлди.

21. 3-теорема (Коши аломати). Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

$$(a_n \geqslant 0,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

қатор берилган бўлсин.

Агар

$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$$

бўлиб, $q < 1$ бўлса, у ҳолда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлади.

Агар

$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$$

бўлса, у ҳолда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор узоқлашувчи бўлади.

Исбот. Берилган $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор учун $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$ бўлсин. Кейинги тенгсизликнинг ҳар икки томонини n-даражага кўтариб топамиз:

$$a_n \leqslant q^n \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \tag{21.9}$$

Берилган $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор билан бирга яқинлашувчи бўлган геометрик қатор $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ ни қарайдиган бўлсак, унда (21.9) муносабатни эътиборга олган ҳолда 21.2-теоремадан фойдаланиб, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг яқинлашувчи бўлишини топамиз.

Энди

$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$$

бўлсин. Бу тенгсизликнинг ҳар икки томонини n-даражага кўтарсак, унда

$$a_n \geqslant 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \tag{21.10}$$

бўлади. Берилган $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор билан бирга узоқлашувчи

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \ldots$$

қаторни қарайдиган бўлсак, унда (21.10) муносабатни эътиборга олган ҳолда, 12.2-теоремадан фойдаланиб, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг узоқлашувчи бўлишини топамиз. Теорема исбот бўлди.

Юқорида келтирилган теоремани (Коши аломатини) лимит кўринишида ҳам ифодалаш мумкин.

Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \quad (a_n \geqslant 0, \ n = 1, 2, \ldots)$$

қаторда

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$$

бўлиб, $k < 1$ бўлса, у ҳолда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлади, $k > 1$ бўлса, қатор узоқлашувчи бўлади. Бундан мисолларни ечишда кенг фойдаланилади.

Мисол. Ушбу

$$\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln^2 3} + \frac{1}{\ln^3 4} + \ldots + \frac{1}{\ln^n (n+1)} + \ldots$$

қаторни қараймиз. Бу қаторнинг n-ҳади $a_n = \dfrac{1}{\ln^n (n+1)}$ бўлиб,

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n (n+1)}} = \frac{1}{\ln (n+1)}$$

бўлади. Бундан

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln (n+1)} = 0$$

бўлишини топамиз. Демак, берилган қатор яқинлашувчи.

21.4-теорема (Даламбер аломати). Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

$$(a_n \geqslant 0, \quad n = 1, 2, \ldots) \tag{21.1}$$

қатор берилган бўлсин.

Агар

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

бўлиб, $q < 1$ бўлса, у ҳолда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлади.

Агар

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

бўлса, у ҳолда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор узоқлашувчи бўлади.

Бу теореманинг исботи юқорида келтирилган теореманинг исботи кабидир. Теореманинг исботини ўқувчига ҳавола этамиз.

21.4-теореманинг (Даламбер аломатининг) қуйида ифодаланадиган лимит кўринишидан кўпгина мисолларни ечишда фойдаланилади.

Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \ (a_n \geqslant 0,\ n = 1, 2, 3, \ldots)$$

қаторда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$$

бўлиб, $d < 1$ бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлади, $d > 1$ бўлса, қатор узоқлашувчи бўлади.

Мисол. Ушбу қаторни қараймиз.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} = 1 + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \ldots + \frac{n!}{n^n} + \ldots$$

Бу қаторда

$$a_n = \frac{n!}{n^n}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$$

бўлиб,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} =$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n\cdot(n+1)\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n} = (n+1)\cdot\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} =$$

$$= \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

бўлади. Лимитга ўтиб топамиз:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}.$$

Равшанки, $\frac{1}{e} < 1$. Демак, берилган қатор яқинлашувчи.

4-§. Ҳадларининг ишоралари алмашиниб келадиган қаторлар. Лейбниц теоремаси

Ушбу

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^n\cdot a_n+\ldots \qquad (21.11)$$

қатор бунда $a_n>0$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ ҳадларининг ишоралари алмашиниб келадиган қаторлар дейилади.

Масалан, ушбу

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}+\ldots$$

$$1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n!}+\ldots$$

қаторлар ҳадларининг ишоралари алмашиниб келадиган қаторлардир.

21.5-теорема. (Лейбниц теоремаси). Ушбу

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot a_n+\ldots\ (a_n>0)$$

қатор ҳадларининг ишоралари алмашиниб келадиган қатор бўлсин. Агар бу қаторнинг ҳадлари учун

1) $a_1>a_2>a_3>\ldots>a_n>\ldots$

ва

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$

бўлса, у ҳолда (21.11) қатор яқинлашувчи бўлади.

Исбот. Берилган (21.11) қаторнинг қуйидаги қисмий йиғиндиларини ёзамиз:

$$S_2=a_1-a_2,$$

$$S_4=a_1-a_2+a_3-a_4=(a_1-a_2)+(a_3-a_4),$$

$$S_6=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+(a_5-a_6),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_{2k}=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+a_{2k-1}-a_{2k}=$$

$$=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\ldots+(a_{2k-1}-a_{2k}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Шартга кўра,

$$a_1>a_2>a_3>\ldots>a_n>\ldots$$

Демак,

$$a_1-a_2>0,\ a_3-a_4>0,\ \ldots,\ a_{2k-1}-a_{2k}>0,\ \ldots$$

Унда, равшанки, қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат S_2, S_4 $S_6, \ldots, S_{2k}, \ldots$ кетма-кетлик ўсувчи бўлади:

$$S_{2k+2}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\ldots+(a_{2k-1}-a_{2k})+$$
$$+(a_{2k+1}-a_{2k+2})=S_{2k}+(a_{2k+1}-a_{2k+2})>S_{2k}.$$

Иккинчи томондан,

$$S_{2k}=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+a_{2k-1}-a_{2k}=a_1-(a_2-a_3)-$$
$$-(a_4-a_5)-\ldots-(a_{2k-2}-a_{2k-1})-a_{2k}$$

бўлиб,

$$a_2-a_3>0,\ a_4-a_5>0,\ \ldots,\ a_{2k-2}-a_{2k-1}>0$$

бўлганлиги сабабли $S_{2k}<a_1$ бўлади. Демак, $\{S_{2k}\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланган.

Шундай қилиб, $\{S_{2k}\}$ кетма-кетлик ўсувчи ва юқоридан чегараланган. Демак, бу $\{S_{2k}\}$ кетма-кетлик чекли лимитга эга бўлади:

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k}=S.$$

Энди берилган (21.11) қаторнинг ушбу

$$S_1=a_1,$$
$$S_3=a_1-a_2+a_3=(a_1-a_2)+a_3,$$
$$S_5=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+a_5,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_{2k+1}=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+a_{2k-1}-a_{2k}+a_{2k+1}=$$
$$=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\ldots+(a_{2k-1}-a_{2k})+a_{2k+1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

қисмий йиғиндиларидан $S_1, S_3, S_5, \ldots, S_{2k+1}, \ldots$ кетма-кетликни ҳосил қиламиз. Равшанки,

$$S_{2k+1}=S_{2k}+a_{2k+1}. \qquad (21.12)$$

Агар теореманинг иккинчи шарти $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1}=0$ бўлишини эътиборга олиб, (21.12) тенгликда лимитга ўтсак,

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k+1}=\lim_{k\to\infty}(S_{2k}+a_{2k+1})=\lim_{k\to\infty} S_{2k}+\lim_{k\to\infty} a_{2k+1}=S$$

бўлиши келиб чиқади.

Шундай қилиб, берилган қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{S_n\}$ кетма-кетлик чекли лимитга эга бўлиши кўрсатилди. Бу эса (21.11) қаторнинг яқинлашувчи эканлигини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Мисол. Юқорида келтирилган

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}+\ldots$$

қатор учун

1) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots > \frac{1}{n} > \ldots$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Демак, Лейбниц теоремасига кўра, бу қатор яқинлашувчи бўлади.

5- §. Ихтиёрий ҳадли қатор. Қаторнинг абсолют яқинлашувчилиги

Бирор

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

қатор берилган бўлсин. Қисмий йиғиндилардан $\{S_n\}$:

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$$

кетма-кетлик тузамиз. Маълумки, агар $n \to \infty$ да $\{S_n\}$ кетма-кетлик чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи дейилар эди. Демак, берилган қаторнинг яқинлашувчи бўлишини кўрсатиш унинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{S_n\}$ кетма-кетликнинг чекли лимитга эга бўлишини кўрсатишдан иборат. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг яқинлашувчилиги ҳақида ушбу теоремага келамиз:

21.6-теорема. Агар $\forall\ \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай натурал n_0 сон топилсаки, барча $n > n_0$ ва $m = 1, 2, 3, \ldots$ лар учун

$$|S_{n+m} - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m}| < \varepsilon \qquad (21.13)$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлади.

21.3-эслатма. Агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\forall\ \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай натурал n_0 сон топиладики, $n > n_0$, $m = 1, 2, 3, \ldots$ учун

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m}| < \varepsilon$$

бўлади.

Бирор

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (21.1)$$

қатор берилган бўлсин. Бу қаторнинг абсолют қийматларидан ушбу қаторни тузамиз:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots \qquad (21.14)$$

Юқоридаги мулоҳазалардан фойдаланиб қуйидаги теоремани исботлаш қийин эмас.

21.7-теорема. Агар (21.14) қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда (21.1) қатор ҳам яқинлашувчи бўлади.

21.4-эслатма. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

қаторнинг яқинлашувчи бўлишидан

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$$

қаторнинг яқинлашувчи бўлиши ҳар доим ҳам келиб чиқавермайди.

21.3-таъриф. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$$

қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

қатор абсолют яқинлашувчи қатор деб аталади.

Агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлиб, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қатор узоқлашувчи бўлса, у ҳолда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор шартли яқинлашувчи қатор дейилади.

6-§. Функционал қаторлар

Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots \qquad (21.15)$$

қатор функционал қатор деб аталади.

Масалан,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots \qquad (21.16)$$

функционал қатор бўлади.

(21.15) қаторнинг ҳар бир ҳади X да аниқланган бўлсин.

X тўпламда x_0 нуқтани олиб, (21.15) функционал қатор ҳадларининг шу нуқтадаги қийматларини ҳисоблаймиз. Натижада (21.15) функционал қатор ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) + \ldots + f_n(x_0) + \ldots$$

сонли қаторга айланади.

Масалан, юқорида келтирилган (21.16) функционал қатор $x_0 = \frac{1}{2}$ да қуйидаги сонли қаторга айланади:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots$$

Агар $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ сонли қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ функционал қатор x_0 нуқтада яқинлашувчи дейилади.

Агар $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ сонли қатор узоқлашувчи бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ функционал қатор x_0 нуқтада узоқлашувчи дейилади.

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ функционал қатор X тўпламнинг ҳар бир нуқтасида яқинлашувчи бўлса, у ҳолда берилган функционал қатор X тўпламда (соҳада) яқинлашувчи дейилади.

Бирор

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x_1) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

функционал қатор берилган бўлиб, у X тўпламда (соҳада) яқинлашувчи бўлсин.

Унда

$$\lim_{n \to \infty} [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)]$$

лимит олинган x га боғлиқ. Уни $S(x)$ билан белгилайлик:

$$\lim_{n \to \infty} [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)] = S(x).$$

Бу $S(x)$ берилган функционал қаторнинг йиғиндиси дейилади.

Сонли қаторлардагига ўхшаш, ушбу

$$S_1(x) = f_1(x),$$
$$S_2(x) = f_1(x) + f_2(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

йиғиндилар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ функционал қаторнинг қисмий йиғиндилари дейилади. Юқорида келтирилганлардан кўринадики, қатор йиғиндиси

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$$

бўлар экан.

Мисоллар. 1. Ушбу функционал қаторни қараймиз:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots$$

Бу қаторнинг қисмий йиғиндилари ($x \neq 1$)

$$S_1(x) = 1,$$
$$S_2(x) = 1 + x = \frac{(1+x)(1-x)}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x},$$
$$S_3(x) = 1 + x + x^2 = \frac{(1+x+x^2)(1-x)}{1-x} = \frac{1-x^3}{1-x},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

бўлади.

Равшанки, $x = 1$ да $S_n(x) = 1 + 1 + \ldots + 1 = n$. Демак,

$$S_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^n}{1-x}, & \text{агар } x \neq 1 \text{ бўлса,} \\ n, & \text{агар } x = 1 \text{ бўлса} \end{cases}$$

бўлади.

Айтайлик, $x \in (-1;\ 1)$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}\right) =$$
$$= \frac{1}{1-x} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-x} \cdot x^n = \frac{1}{1-x}$$

бўлади.

Шундай қилиб, берилган функционал қатор $X=(-1, 1)$ да яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси

$$S(x)=\frac{1}{1-x}$$

га тенг.

2. Ушбу функционал қаторни қараймиз.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+x)(n+x+1)}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+$$

$$\ldots+\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}+\ldots(x\neq-n,\ n=1, 2, \ldots)$$

Бу функционал қаторнинг қисмий йиғиндисини топамиз:

$$S_n(x)=\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}=\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)+$$

$$\ldots+\left(\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x+n+1}\right)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+n+1}.$$

Унда

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+n+1}\right)=\frac{1}{x+1}$$

бўлади.

Демак, берилган функционал қатор $X=R\setminus\{1, 2, 3, \ldots\ldots\}$ тўпламда яқинлашувчи, унинг йиғиндиси эса $S(x)=\dfrac{1}{x+1}$ га тенг.

Бирор

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots \qquad (21.15)$$

функционал қатор берилган бўлсин. Бу қатор X тўпламда яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси $S(x)$ бўлсин. Унда

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$$

бўлади. Лимит таърифига кўра, $\forall\,\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам шундай натурал n_0 сон топиладики, барча $n>n_0$ учун

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади.

Равшанки, X тўпламдан олинган x нинг қийматига қараб $\{S_n(x)\}$ кетма-кетлик турлича бўлади. Бинобарин, юқорида эслатиб ўтилган лимит таърифидаги n_0 натурал сон олинган x га ҳам боғлиқ бўлади. Агар борди-ю таърифдаги n_0 натурал сон фақат ε га боғлиқ бўлиб, қаралаётган x нуқтага боғлиқ бўлмаса, у ҳолда $\{S_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик X тўпламда $S(x)$ га текис яқинлашувчи дейилади.

21.4-таъриф. Агар $\forall\, \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай натурал n_0 сон топилсаки, барча $n > n_0$ ва ихтиёрий x нуқталар учун бир вақтда

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ функционал қатор X тўпламда $S(x)$ га текис яқинлашади дейилади.

Текис яқинлашиш тушунчаси функционал қаторлар назариясида муҳим роль ўйнайди. Қуйида функционал қаторларнинг текис яқинлашишини аниқлашда ишлатиладиган Вейерштрасс аломатини исботсиз келтирамиз.

Вейерштрасс аломати. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) \ldots$$

функционал қаторнинг ҳар бир $f_n(x)$ ҳади X тўпламда ушбу

$$|f_n(x)| \leqslant C_n \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

тенгсизликни қаноатлантирса ва

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n = C_1 + C_2 + \ldots + C_n + \ldots$$

сонли қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ функционал қатор X тўпламда текис яқинлашувчи бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos nx}{n^2} + \ldots$$

функционал қатор $X = (-\infty, +\infty)$ да текис яқинлашувчи бўлади, чунки

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

бўлиб,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

сонли қатор яқинлашувчи.

7-§. Текис яқинлашувчи функционал қаторнинг хоссалари

Текис яқинлашувчи функционал қаторларнинг хоссаларини исботсиз келтирамиз. Бирор

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

функционал қатор берилган бўлсин. Бу қатор X тўпламда яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси $S(x)$ бўлсин.

1°. Агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ функционал қаторнинг ҳар бир $f_n(x)$ ҳади ($n = 1, 2, 3, \ldots$) X тўпламда узлуксиз бўлиб, бу функционал қатор X тўпламда текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда қаторнинг йиғиндиси $S(x)$ ҳам X тўпламда узлуксиз бўлади.

2°. Агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ функционал қаторнинг ҳар бир $f_n(x)$ ҳади ($n = 1, 2, 3, \ldots$) $[a; b]$ сегментда узлуксиз бўлиб, бу функционал қатор шу сегментда текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда қатор ҳадларининг интегралларидан тузилган

$$\int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx + \ldots + \int_a^b f_n(x)\,dx + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

қатор яқинлашувчи бўлади, унинг йиғиндиси эса

$$\int_a^b S(x)\,dx$$

га тенг бўлади:

3°. Агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ функционал қаторнинг ҳар бир $f_n(x)$ ($n=1, 2, 3, \ldots$) ҳади $[a, b]$ сегментда узлуксиз $f'_n(x)$ ҳосилага эга бўлиб, бу ҳосилалардан тузилган

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = f'_1(x) + f'_2(x) + \ldots + f'_n(x) + \ldots$$

функционал қатор $[a, b]$ да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда функционал қатор йиғиндиси $S(x)$ шу $[a, b]$ сегментда $S'(x)$ ҳосилага эга ва

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$$

бўлади.

8-§. Даражали қаторлар

Ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (21.16)$$

кўринишдаги қатор даражали қатор деб аталади, бунда a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_n, $\ldots$ лар ўзгармас сонлар бўлиб, улар даражали қаторнинг коэффициентлари дейилади.

Демак, даражали қаторлар функционал қаторларнинг хусусий ҳолидан иборат.

Мисоллар. Ушбу

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (0! = 1)$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n \ln(n+1)}$

қаторлар даражали қаторлардир.

Ҳар қандай даражали қатор $x = 0$ нуқтада яқинлашувчи бўлади, чунки бу ҳолда (21.17) қатор ушбу

$$a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \ldots + a_n \cdot 0 + \ldots,$$

яъни

$$a_0 + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots$$

кўринишдаги сонли қаторга айланади ва

$$\lim_{n\to\infty} S_n(0) = \lim_{n\to\infty} (a_0 + 0 + 0 + \ldots + 0) = \lim_{n\to\infty} a_0 = a_0$$

бўлади.

21.8-теорема (Абель теоремаси). Агар

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (21.17)$$

даражали қатор x нинг $x = x_0$ $(x_0 \neq 0)$ қийматида яқинлашувчи бўлса, x нинг

$$|x| < |x_0| \qquad (21.18)$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида (21.17) даражали қатор абсолют яқинлашувчи бўлади.

Исбот. Берилган (21.17) даражали қатор $x = x_0$ да яқинлашувчи бўлсин. Бу эса ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n + \ldots$$

сонли қаторнинг яқинлашувчи бўлишини билдиради. Маълумки, сонли қатор яқинлашувчи бўлса, унинг умумий ҳади $n \to \infty$ да нолга интилар эди:

$$\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0 .$$

Демак, $\{a_n x_0^n\}$ сонлар кетма-кетлиги яқинлашувчи. Унда бу кетма-кетлик чегараланган, яъни

$$|a_n x_0^n| \leqslant M \ (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \qquad (21.19)$$

(M — ўзгармас сон) бўлади.

Энди берилган қаторни қуйидагича

$$a_0 + a_1 x_0 \cdot \frac{x}{x_0} + a_2 x_0^2 \cdot \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \ldots + a_n x_0^n \cdot \left(\frac{x}{x_0}\right)^n + \ldots$$

ёзиб, унинг ҳадларининг абсолют қийматларидан ушбу

$$|a_0| + |a_1 x_0| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right| + |a_2 x_0^2| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots$$

қаторни тузамиз. Ушбу қатор

$$M + M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right| + M \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots \qquad (21.20)$$

геометрик қатор бўлиб, $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ бўлганлиги сабабли, у яқинлашувчидир.

$|a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leqslant M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ бўлганлигидан солиштириш теоремасига кўра $|a_0| + |a_1 x_0| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right| + \ldots + |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots$ қатор яқинлашувчи бўлади. Демак, берилган қатор x нинг $|x| < |x_0|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида абсолют яқинлашувчи бўлади. Теорема исбот бўлди.

21.1-натижа. Ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + x_n x^n + \ldots$$

даражали қатор $x = x_1$ нуқтада узоқлашувчи бўлсин. У ҳолда қатор x нинг $|x| > |x_1|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида узоқлашувчи бўлади.

Айтайлик,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

даражали қатор $x = x_0$ $(x_0 \neq 0)$ да яқинлашувчи, $x = x_1$ да эса узоқлашувчи бўлсин. Равшанки, $|x_0| < |x_1|$ бўлади. Унда юқорида айтилганларга кўра x нинг $|x| < |x_0|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида яқинлашувчи, $|x|>|x_1|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида узоқлашувчи бўлади (129-чизма).

(21.17) даражали қаторнинг яқинлашадиган нуқталардан иборат тўплам $\{x\}$ бўлсин (яъни шу $\{x\}$ тўпламнинг ҳар бир нуқтасида (21.17) қатор яқинлашувчи). Бу $\{x\}$ тўплам юқоридан чегараланган бўлади. У ҳолда $\{x\}$ тўпламнинг аниқ юқори чегараси мавжуд. Уни R билан белгилайлик:

$$R = \sup \{x\}.$$

Кўрсатиш мумкинки, x нинг ушбу $|x|<R$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида (21.17) қатор яқинлашувчи, x нинг $|x|>R$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида (21.17) қатор узоқлашувчи бўлади.

Ушбу $(-R, R)$ интервал (21.17) даражали қаторнинг яқинлашиш интервали, R эса яқинлашиш радиуси деб аталади.

Агар даражали қатор $x=0$ нуқтада яқинлашувчи бўлиб, бошқа барча нуқталарда узоқлашувчи бўлса, у ҳолда яқинлашиш радиуси $R=0$ деб олинади. Агар даражали қатор барча нуқталарда яқинлашувчи бўлса, $R=+\infty$ деб олинади.

21.5-эслатма. Даражали қатор $x=-R$, $x=R$ нуқталарда яқинлашувчи бўлиши ҳам мумкин, узоқлашувчи бўлиши ҳам мумкин.

Ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (21.17)$$

даражали қатор берилган бўлсин. Бу даражали қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган ушбу қаторни қарайлик:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots$$

Даламбер аломатини қўллаб топамиз:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}\, x^{n+1}|}{|a_n\, x^n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}\, x^{n+1}}{a_n\, x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x| =$$

$$= |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad (a_n \neq 0).$$

Айтайлик, ушбу

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l \ (a_n \neq 0)$$

лимит мавжуд бўлсин. Унда (21.17) қатор $|x| \cdot l < 1$, яъни $|x| < \frac{1}{l}$ бўлганда яқинлашувчи, $|x| \cdot l > 1$, яъни $|x| > \frac{1}{l}$ бўлганда узоқлашувчи бўлади.

Демак, берилган даражали қаторнинг яқинлашиш интервали $\left(-\frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right)$, радиуси эса $R = \frac{1}{l}$ бўлади.

Шундай қилиб, (21.17) даражали қаторнинг яқинлашиш радиусини топиш учун қуйидаги формулага эга бўламиз:

$$R = \frac{1}{l} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{21.21}$$

Мисоллар. 1. Ушбу $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$ даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси ва яқинлашиш интервали топилсин.

Юқоридаги формулага кўра

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{1}\right| = 1.$$

Демак, берилган даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $R = 1$, яқинлашиш интервали $(-1, 1)$ бўлади.

Бу даражали қатор $R = -1$, $R = 1$ нуқталарда узоқлашувчидир (чунки $1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$ ва $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n-1} + \ldots$ сонли қаторлар узоқлашувчи).

2. $1 + \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \ldots + \frac{x^n}{n^2} + \ldots$ даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси ва яқинлашиш интервали топилсин.

(21.21) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n+1)^2}{1}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 1.$$

Демак, даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $R = 1$, яқинлашиш интервали эса $(-1, 1)$ бўлади. Берилган даражали қатор $R = -1$, $R = 1$ нуқталарда яқинлашувчи бўлади (чунки $1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$ ва $1 - \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n^2} + \ldots$ сонли қаторлар яқинлашувчидир).

Демак, берилган даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси $[-1; 1]$ сегментдан иборат экан.

9-§. Даражали қаторнинг хоссалари

1°. Агар $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси R $(R > 0)$ бўлса, даражали қатор $[-\alpha, \alpha]$ сегментда $(0 < \alpha < R)$ текис яқинлашувчи бўлади.

2°. Агар $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $R\,(R>0)$ бўлса, даражали қаторнинг йиғиндиси $S(x)$:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$(-R, R)$ интервалда узлуксиз бўлади.

3°. Агар $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $R\,(R>0)$ бўлиб, йиғиндиси

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

бўлса, у ҳолда бу қаторни $[a, b] \subset (-R, R)$ да ҳадлаб, интеграллаш мумкин, яъни

$$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_a^b a_n x^n dx\right]$$

бўлади.

4°. Агар $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $R\,(R>0)$ бўлиб, йиғиндиси

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

бўлса, у ҳолда бу қаторни $(-R, R)$ да ҳадлаб дифференциаллаш мумкин, яъни

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + na_n x^{n-1} + \ldots$$

бўлади.

10-§. Функцияларни даражали қаторларга ёйиш

1. Маклорен қатори

$y = f(x)$ функция $(-\delta, \delta)$ $(\delta > 0)$ оралиқда берилган бўлиб, у шу оралиқда исталган тартибдаги ҳосилага эга бўлсин. Ушбу

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \qquad (21.22)$$

даражали қаторни қарайлик. Бу даражали қаторнинг коэффициентлари $f(x)$ функция ва унинг ҳосилаларининг $x = 0$ нуқтадаги қийматлари орқали ифодаланган.

Энди $f(x)$ функциянинг Маклорен формуласини ёзамиз:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+r_n(x), \qquad (21.23)$$

бунда $r_n(x)$ қолдиқ ҳад. Шуни эътиборга олиш керакки, (21.22) қаторнинг коэффициентлари билан (21.23) формуладаги коэффициентлар бир хил бўлади.

(21.22) даражали қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$S_n(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

бўлса, унда (21.23) формула ушбу

$$f(x)=S_n(x)+r_n(x) \qquad (21.24)$$

кўринишга келади.

(21.22) даражали қатор $(-R,\ R)$ яқинлашувчи бўлсин. Унда

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=f(x) \quad (\forall\ x\in(-R,\ R))$$

бўлиб, (21.24) муносабатдан

$$\lim_{n\to\infty}[f(x)-S_n(x)]=\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$$

бўлиши келиб чиқади.

Аксинча, $\forall\ x\in(-R,\ R)$ да $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$ бўлса, яъни (21.24) муносабатдан

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=f(x)$$

бўлиши, демак, $(-R,\ R)$ да (21.22) даражали қатор яқинлашувчи, унинг йиғиндиси $f(x)$ га тенг бўлиши келиб чиқади:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \qquad (21.25)$$

Шундай қилиб, (21.25) муносабатнинг ўринли бўлиши учун $\forall\ x\in(-R,\ R)$ да

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$$

бўлиши зарур ва етарли экан.

Агар $f(x)$ функция учун (21.25) муносабат ўринли бўлса, $f(x)$ функция Маклорен қаторига ёйилган деб аталади.

Агар $r_n(x)$ етарли даражада кичик бўлса, у ҳолда юқоридаги (21.25) муносабатдан ушбу

$$f(x)\approx f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad (21.26)$$

тақрибий формулага эга бўламиз.

Энди

$$f(x)=e^x$$

функцияни Маклорен қаторига ёямиз. Маълумки, $f(x)=e^x$ функция ихтиёрий $[-r, r]$ $(r>0)$ сегментда исталган тартибдаги ҳосилага эга бўлиб,

$$f^{(n)}(x)=e^x \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

бўлади. Равшанки,

$$f^{(n)}(0)=1 \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

Бу функциянинг Маклорен формуласи

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+r_n(x)$$

бўлади. Қолдиқ ҳад $r_n(x)$ эса Лагранж кўринишида қуйидагича бўлади:

$$r_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}\ (0<\theta<1)$$

Агар $\forall\ x\in[-r, r]$ учун

$$|r_n(x)|=\left|\frac{e^{\theta x}x^{n+1}}{(n+1)!}\right|\leqslant\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}e^r$$

ва $n\to\infty$ да

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}=0$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

бўлишини топамиз. Бу $f(x)=e^x$ функциянинг Маклорен қаторидир. Худди шу йўл билан $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$, $f(x)=\ln(1+x)$, $f(x)=(1+x)^\alpha$ функцияларнинг Маклорен қаторлари топилади. Қуйида уларни келтириш билан кифояланамиз.

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots$$

Бу келтирилган функциялар учун (21.26) тақрибий формула қуйидагича бўлади:

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!},$$

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\ln (1 + x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n},$$

$$(1 + x)^\alpha \approx 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

XXII БОБ. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

1-§. Дифференциал тенглама тушунчаси

Эркли ўзгарувчи x, номаълум функция $y = y(x)$ ва бу функциянинг ҳосилаларини боғловчи тенглама *дифференциал тенглама* дейилади.

Бундай тенглама умумий ҳолда қуйидаги кўринишда бўлади:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{22.1}$$

(22.1) тенгламада қатнашган номаълум функция ҳосилаларининг энг юқори тартиби дифференциал тенгламанинг *тартиби* дейилади. Демак, (22.1) тенглама n-тартибли дифференциал тенгламадир.

Агар $y = \varphi(x)$ функция ва унинг ҳосилаларини (22.1) тенгламага қўйилганда уни айниятга айлантирса, яъни

$$F[x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots \varphi^{(n)}(x)] \equiv 0$$

бўлса, унда $y = \varphi(x)$ функция (22.1) тенгламанинг *ечими* дейилади.

Дифференциал тенгламанинг ечими чексиз кўп бўлади. Барча ечимларни ўз ичига олган ечим дифференциал тенгламанинг умумий ечими дейилади.

Мисол. Ушбу

$$y'' - x = 0 \tag{22.2}$$

тенгламани қарайлик. Бу 2-тартибли дифференциал тенгламадир. $\varphi(x) = \frac{1}{6} x^3 + x$ функция унинг ечими бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

$$\varphi'(x) = \left(\frac{1}{6} x^3 + x\right)' = \frac{1}{2} x^2 + 1, \quad \varphi''(x) = \left(\frac{1}{2} x^2 + 1\right)' = x$$

бўлиб, $\varphi''(x)$ ни (22.2) тенгламага қўйсак, бу тенглама айниятга айланади:

$$\varphi''(x) - x = x - x = 0.$$

(22.2) тенгламанинг умумий ечими

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 + C_1 x + C_2$$

бўлади, бунда C_1, C_2 — ихтиёрий ўзгармас сонлар. (Хусусан, $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ бўлганда, умумий ечимдан юқоридаги ечим келиб чиқади).

2-§. Биринчи тартибли дифференциал тенгламалар

Биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг умумий кўриниши қуйидагича бўлади:

$$F(x, y, y') = 0.$$

Агар бу тенглама y' га нисбатан ечиладиган бўлса, унда

$$y' = f(x, y) \qquad (22.3)$$

тенгламага келамиз. Одатда, (22.3) тенглама *ҳосилага нисбатан ечилган дифференциал тенглама* дейилади.

Энди (22.3) тенгламанинг хусусий ҳолларини қараймиз.

1°. (22.3) тенгламанинг ўнг томони фақат x ўзгарувчига боғлиқ бўлсин:

$$y' = f(x). \qquad (22.4)$$

Бу тенгликни интеграллаб топамиз:

$$y = \int f(x)\,dx + C \qquad (C \text{ — ўзгармас сон}).$$

Демак, (22.4) тенгламанинг умумий ечими

$$y = \int f(x)\,dx + C \qquad (22.5)$$

бўлади.

Мисол. $y' = 2x^2$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Тенгламанинг ечимини (22.5) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$y = \int 2x^2\,dx + C = \frac{2}{3}x^3 + C.$$

2°. (22.3) тенгламанинг ўнг томони фақат y ўзгарувчига боғлиқ бўлсин:

$$y' = f(y)$$

Аввало, $y' = \frac{dy}{dx}$ эканини эътиборга оламиз. Сўнгра бу тенгламада y ни эркли ўзгарувчи, x ни эса y нинг функцияси бўлсин деймиз. Унда

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x)}$$

бўлиб, юқоридаги 1°- ҳолга келамиз. Кейинги тенгламанинг ечими

$$x = \int \frac{1}{f(y)}\, dy + C$$

бўлади.

Мисол. $y' = 7y^2$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Бу тенгламани ушбу кўринишда ёзиб оламиз:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{7y^2}.$$

Бу тенгликдан эса

$$dx = \frac{1}{7} \cdot \frac{dy}{y^2}$$

бўлиши келиб чиқади. Уни интеграллаб топамиз:

$$x = \int \frac{1}{7} \frac{dy}{y^2} + C = \frac{1}{7} \int y^{-2}\, dy + C = \frac{1}{7} \cdot \frac{-1}{y} + C =$$

$$= -\frac{1}{7y} + C.$$

Демак,

$$y = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{C - x}.$$

3°. (22.3) тенгламанинг ўнг томони фақат x ўзгарувчининг ҳамда фақат y ўзгарувчининг функциялари кўпайтмасидан иборат бўлсин:

$$y' = f(x) \cdot g(y).$$

Бу тенгламани *ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенглама* дейилади. Яна $y' = \frac{dy}{dx}$ эканлигини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

бўлади. Бу тенгликнинг иккала томонини dx га кўпайтириб ва $g(y)$ га бўлиб, ушбу тенгликка келамиз:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\, dx.$$

Уни интеграллаб топамиз:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx + C.$$

Бу интеграллар ҳисобланиб, сўнг y ни x орқали ифодалаб берилган тенгламанинг ечимига келамиз.

Мисол. $y' = xy + x + y + 1$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Бу тенгламанинг ўнг томони учун

$$xy + x + y + 1 = x(y + 1) + (y + 1) = (x + 1)(y + 1)$$

бўлади. Демак,

$$\frac{dy}{dx} = (x + 1)(y + 1).$$

Бу тенгликнинг иккала томонини dx га кўпайтирсак ва $y+1$ га бўлсак, унда

$$\frac{dy}{y+1}=(x+1)\,dx$$

тенгликка келамиз. Интеграллаб топамиз:

$$\int\frac{dy}{y+1}=\int(x+1)\,dx+\ln C,$$

$$\ln(y+1)=\frac{(x+1)^2}{2}+\ln C,\quad \frac{y+1}{C}=e^{\frac{(x+1)^2}{2}},$$

$$y=C\cdot e^{\frac{(x+1)^2}{2}}-1.$$

3-§. Бир жинсли тенгламалар

Икки ўзгарувчили $f(x,\ y)$ функция учун ихтиёрий t да

$$f(tx,\ ty)=tf(x,\ y)$$

тенглик бажарилса, унда $f(x,\ y)$ *бир жинсли* (аниқроғи, нолинчи тартибли бир жинсли) *функция* дейилади.

Агар

$$y'=f(x,\ y)\tag{22.6}$$

дифференциал тенгламанинг ўнг томонидаги $f(x,\ y)$ ифода бир жинсли функция бўлса, у ҳолда (22.6) тенглама *бир жинсли дифференциал тенглама* дейилади.

$f(x,\ y)$ бир жинсли функция бўлса, у ҳолда ихтиёрий t учун

$$f(tx,\ ty)=f(x,\ y)$$

бўлади. Хусусан, $t=\frac{1}{x}$ бўлганда

$$f\left(1,\ \frac{y}{x}\right)=f(x,\ y)$$

бўлади ва бу ҳолда (22.6) тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$y'=f\left(1,\ \frac{y}{x}\right)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).\tag{22.7}$$

Бу тенгламани ечиш учун $\frac{y}{x}=u$ деб оламиз. Унда

$$y=ux,\ y'=(ux)'=u'x+ux'=u'x+u$$

бўлади. Буларни (22.7) тенгликка қўйиб топамиз:

$$u'x+u=\varphi(u).$$

$$u'x=\varphi(u)-u,\quad x\cdot\frac{du}{dx}=\varphi(u)-u.$$

Натижада ўзгарувчилари ажраладиган ушбу тенгламага келамиз:

$$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}$$

Уни интеграллаймиз:

$$\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}+\ln C,\quad \int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\ln x+\ln C.$$

$$\ln Cx=\int\frac{du}{\varphi(u)-u}.$$

Мисол. Ушбу $y'=\frac{y}{x+y}$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Бу тенгламанинг ўнг томонидаги $f(x, y)=\frac{y}{x+y}$ функция бир жинсли функция. Ҳақиқатан ҳам,

$$f(tx, ty)=\frac{ty}{tx+ty}=\frac{ty}{t(x+y)}=\frac{y}{x+y}.$$

Демак, берилган тенглама бир жинсли дифференциал тенглама. Бу тенгламани қуйидагича

$$y'=\frac{y}{x+y}=\frac{\frac{y}{x}}{\frac{x+y}{x}}=\frac{\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}\tag{22.8}$$

ёзиб, сўнг

$$\frac{y}{x}=u$$

деб оламиз. У ҳолда

$$y=u\cdot x,\ y'=u'x+u$$

бўлиб, буларни (22.8) га қўямиз.

$$u'x+u=\frac{u}{1+u},\quad u'x=\frac{u}{1+u}-u=-\frac{u^2}{1+u}.$$

Натижада

$$x\frac{du}{dx}=-\frac{u^2}{1+u},\quad \text{яъни}\quad -\frac{1+u}{u^2}du=\frac{dx}{x}$$

тенгламага келамиз. Бундан

$$\int\left(-\frac{1+u}{u^2}\right)du=\int\frac{dx}{x}+\ln C$$

$$\frac{1}{u}-\ln u=\ln x+\ln C,\quad x=y\ln Cy$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса берилган тенгламанинг умумий ечимидир.

4-§. Биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар

Номаълум функция ва унинг ҳосилаларига нисбатан чизиқли бўлган ушбу

$$\boxed{y' + p(x)\cdot y + q(x) = 0} \qquad (22.9)$$

кўринишдаги тенглама биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенглама дейилади, бунда $p(x)$ ва $q(x)$ узлуксиз функциялар.

(22.9) тенгламанинг ечимини

$$y = u(x)\cdot v(x) = u\cdot v$$

кўринишда излаймиз: $y = uv$ ва $y' = (u\cdot v)' = u'v + uv'$ ларни тенгламага қўйиб топамиз:

$$u'v + uv' + p(x)\cdot uv + q(x) = 0$$

$$u'v + u(v' + p\cdot v) + q = 0. \qquad (22.10)$$

Энди v ни шундай танлаймизки, $v' + p\cdot v = 0$ бўлсин, яъни

$$\frac{dv}{dx} + p\cdot v = 0. \quad \frac{dv}{v} = -p(x)\,dx,$$

$$\ln v = -\int p(x)\,dx.$$

$$v = e^{-\int p(x)\,dx}$$

бўлсин. Бу топилган v ни (22.10) тенгламага қўямиз ва ҳосил бўлган тенгламани ечамиз:

$$u'\cdot e^{-\int p(x)\,dx} + q = 0, \quad \frac{du}{dx} = -qe^{\int p\,dx},$$

$$u = -\int q(x)\,e^{\int p\,dx}\,dx + C.$$

Натижада

$$y = u\cdot v = e^{-\int p\,dx}\left(C - \int qe^{\int p\,dx}\,dx\right).$$

Демак, берилган (22.9) тенгламанинг умумий ечими бундай бўлади:

$$\boxed{y = e^{-\int p\,dx}\left(C - \int qe^{\int p\,dx}\,dx\right).} \qquad (22.11)$$

Мисол. Ушбу $y' + xy - x^3 = 0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Бу биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламадир. Унинг ечимини (22.11) формуладан фойдаланиб топамиз (бунда $p(x) = x$, $q(x) = -x^3$):

$$y = e^{-\int x\,dx}\left(C - \int(-x^3)\,e^{\int x\,dx}\,dx\right) = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(C + \int x^3e^{\frac{x^2}{2}}\,dx\right) =$$

$$= e^{-\frac{x^2}{2}}\left(C + x^2e^{\frac{x^2}{2}} - 2e^{\frac{x^2}{2}}\right) = Ce^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 - 2.$$

5-§. Иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар

Ушбу

$$\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)} \tag{22.12}$$

кўринишдаги тенглама *иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенглама* дейилади, бунда $p(x)$, $q(x)$ ва $f(x)$ — узлуксиз функциялар.

Агар (22.12) да $f(x) = 0$ бўлса, унда (22.12) тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.} \tag{22.13}$$

Бу тенглама *иккинчи тартибли бир жинсли чизиқли тенглама* дейилади.

(22.12) ва (22.13) дифференциал тенгламаларни ечишни ўрганишдан аввал чизиқли боғлиқ ҳамда чизиқли эркли функциялар тушунчасини келтирамиз.

$y_1(x)$ ва $y_2(x)$ функциялар $[a; b]$ сегментда берилган бўлсин. Агар шундай ўзгармас α_1 ва α_2 сонлар топилсаки, улардан ҳеч бўлмаганда биттаси нолдан фарқли бўлганда

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \equiv 0 \tag{22.14}$$

айният ўринли бўлса, у ҳолда $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ функциялар *чизиқли боғлиқ функциялар* дейилади. Агар (22.14) айният фақат $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ бўлгандагина ўринли бўлса, у ҳолда $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ функциялар *чизиқли эркли функциялар* дейилади.

Мисол. Ушбу $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = x$ функциялар чизиқли эркли функциялар бўлади, чунки

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot x \equiv 0$$

айният фақат $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ бўлгандагина ўринли бўлади.

Агар $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ функциялар чизиқли эркли функциялар бўлса, улардан ҳеч бири айнан нолга тенг бўлмайди.

Энди (22.12) ва (22.13) дифференциал тенгламаларни ечиш билан шуғулланамиз. Аввало,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{22.13}$$

иккинчи тартибли бир жинсли чизиқли дифференциал тенгламани қараймиз.

22.1-теорема. Агар $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ функциялар (22.13) тенгламанинг чизиқли эркли хусусий ечимлари бўлса, у ҳолда (22.13) тенгламанинг умумий ечими

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{22.14}$$

бўлади, бунда C_1, C_2 — ихтиёрий ўзгармас сонлар.

Исбот. Модомики, $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ (22.13) тенгламанинг хусусий ечимлари экан, унда бу функциялар (22.13) тенгламани қаноатлантиради:

$$y_1''(x)+p(x)\cdot y_1'(x)+q(x)\cdot y_1(x)\equiv 0. \qquad (22.15)$$
$$y_2''(x)+p(x)\cdot y_2'(x)+q(x)\,y_2(x)\equiv 0.$$

Қуйидаги

$$C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

функция ҳам (22.13) тенгламанинг ечими бўлади. Ҳақиқатан ҳам, бу функция ҳамда унинг ҳосилалари

$$[C_1y_1(x)+C_2y_2(x)]'=C_1y_1'(x)+C_2'y_2'(x),$$
$$[C_1y_1(x)+C_2y_2(x)]''=C_1y_1''(x)+C_2y_2''(x)$$

учун

$$C_1y_1''(x)+C_2y_2''(x)+p(x)[C_1y_1'(x)+C_2y_2'(x)]+q(x)[C_1y_1(x)+$$
$$+C_2y_2(x)]=C_1y_1''(x)+p(x)C_1y_1'(x)+q(x)C_1y_1(x)+C_2y_2''(x)+$$
$$+p(x)C_2y_2'(x)+q(x)C_2y_2(x)=C_1[y_1''(x)+p(x)y_1'(x)+q(x)y_1(x)]+$$
$$+C_2[y_2''(x)+p(x)y_2'(x)+q(x)y_2(x)]$$

бўлиб, (22.15) муносабатга кўра

$$[C_1y_1(x)+C_2y_2(x)]''+p(x)[C_1y_1(x)+C_2y_2(x)]'+q(x)[C_1y_1(x)+$$
$$+C_2y_2(x)]=0$$

бўлади. Бу эса

$$C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

нинг (22.13) тенгламанинг ечими эканини билдиради.

Кўрсатиш мумкинки, $y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ ечим берилган

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

тенгламанинг умумий ечими бўлади.

Иккинчи тартибли

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \qquad (22.12)$$

тенгламанинг умумий ечими ҳақида ушбу теорема ўринли.

22. 2-теорема. *(22.12) тенгламанинг умумий ечими шу тенглама хусусий ечими билан (22.13) тенгламанинг умумий ечими йиғиндисига тенг бўлади.*

6-§. Ўзгармас коэффициентли иккинчи тартибли бир жинсли чизиқли тенгламалар

22.1-таъриф. *Ўзгармас коэффициентли бир жинсли дифференциал тенглама* деб

$$\boxed{y''+py'+qy=0} \qquad (22.16)$$

кўринишдаги тенгламага айтилади, бунда p ва q — ўзгармас ҳақиқий сонлар.

Юқоридаги теоремаларга асосан бу тенгламанинг умумий ечимини топиш учун унинг иккита чизиқли эркли хусусий ечимини топиш етарлидир.

Тенгламани ечиш учун $y=e^{kx}$ деб фараз қиламиз, бу ерда k — нолга тенг бўлмаган ўзгармас сон.

Ҳосилаларни топамиз:

$$y' = ke^{kx}, \quad y'' = k^2 e^{kx}.$$

Буларни (22.16) тенгламага келтириб қўямиз:

$$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0. \tag{22.17}$$

$e^{kx} \neq 0$ бўлгани учун (22.17) тенгламадан

$$k^2 + pk + q = 0 \tag{22.18}$$

ҳосил бўлади. Демак, k (22.18) тенгламани қаноатлантирса, e^{kx} тенгламанинг ечими бўлади. (22.18) тенглама (22.16) тенгламанинг *характеристик тенгламаси* дейилади. (22.18) тенглама иккита илдизга эга бўлади, уларни k_1 ва k_2 билан белгилаймиз:

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Бу ерда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

1) k_1 ва k_2 ҳақиқий ва бир-бирига тенг эмас ($k_1 \neq k_2$);

2) k_1 ва k_2 ҳақиқий ва бир-бирига тенг ($k_1 = k_2$);

3) k_1 ва k_2 комплекс сонлар.

Ҳар бир ҳолни алоҳида-алоҳида кўриб чиқамиз.

а) Характеристик тенгламанинг илдизлари ҳақиқий ва ҳар хил ($k_1 \neq k_2$).

Бу ҳолда

$$y_1 = e^{k_1x}, \quad y_2 = e^{k_2x}$$

функциялар хусусий ечимлар бўлиб, тенгламанинг умумий ечими

$$\boxed{y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}} \tag{22.19}$$

кўринишда бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, y' ва y'' ни топамиз:

$$y' = C_1k_1e^{k_1x} + C_2k_2e^{k_2x}, \quad y'' = C_1k_1^2e^{k_1x} + C_2k_2^2e^{k_2x};$$

буларни (22.16) тенгламага қўямиз:

$$C_1k_1^2e^{k_1x} + C_2k_2^2e^{k_2x} + p(C_1k_1e^{k_1x} + C_2k_2e^{k_2x}) +$$
$$+ q(C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}) = 0.$$

Чап томондаги қавсларни очиб, гуруҳлаймиз:

$$(C_1k_1^2e^{k_1x} + pC_1k_1e^{k_1x} + qC_1e^{k_1x}) + C_2k_2^2e^{k_2x} + pC_2k_2e^{k_2} + qC_2e^{k_2x}) = 0$$

ёки

$$C_1 e^{k_1x}\left(k_1^2+pk_1+q\right)+C_2 e^{k_2x}\left(k_2^2+pk_2+q\right)=0 \qquad (22.20)$$

k_1 ва k_2 лар (22.18) тенгламанинг илдизлари бўлганлиги учун, (22.20) нинг чап томонидаги қавс ичидаги ифодалар нолга тенг ва умуман чап томони ҳам нолга тенг бўлади. Демак, $y=C_1e^{k_1x}+$ $+C_2e^{k_2x}$ функция берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими бўлади.

Мисол. $y''-8y'+15y=0$ тенгламанинг характеристик тенгламаси $k^2-8k+15=0$ бўлиб, у $k_1=5$, $k_2=3$ илдизларга эга. Демак, тенгламанинг умумий ечими қуйидагича бўлади:

$$y=C_1e^{5x}+C_2e^{3x}.$$

б) Характеристик тенгламанинг илдизлари ҳақиқий ва тенг ($k_1=k_2$).

Бу ҳолда $k_1=k_2=-\frac{p}{2}$ бўлиб, $2k_1=-p$ ёки $2k_1+p=0$ бўлади.

Битта хусусий ечим $y=e^{k_1x}$ маълумдир. Иккинчи хусусий ечимни $y_2=u(x)e^{k_1x}$ кўринишда излаймиз. Бу ерда $u(x)=u$ аниқланиши керак бўлган номаълум функция. $u(x)$ ни аниқлаш учун y_2' ва y_2'' ни топамиз:

$$y_2'=u'e^{k_1x}+uk_1e^{k_1x}=e^{k_1x}\left(u'+uk_1\right),$$
$$y_2''=u''e^{k_1x}+u'k_1e^{k_1x}+u'k_1e^{k_1x}+uk_1^2e^{k_1x}=$$
$$=e^{k_1x}\left(u''+2k_1u'+uk_1^2\right).$$

Буларни (22.16) тенгламага қўямиз:

$$e^{k_1x}\left[\left(u''+2k_1u'+k_1^2u\right)+pe^{k_1x}\left(u'+k_1u\right)+q\cdot ue^{k_1x}\right]=0$$

ёки

$$e^{k_1x}\left[u''+\left(2k_1+p\right)u'+\left(k_1^2+k_1p+q\right)u\right]=0.$$

k характеристик тенгламанинг каррали илдизи ва $2k_1+p=0$ бўлгани учун $e^{kx}u''=0$ ёки $u''=0$ бўлиши керак.

Уни интеграллаб,

$$u(x)=Ax+B$$

ни топамиз. Хусусий ҳолда $B=0$, $A=1$ деб олсак, $u(x)=x$ бўлади.

Шундай қилиб, иккинчи хусусий ечим каби

$$y_2=xe^{k_1x}$$

бўлади. Буларни назарда тутсак, умумий ечимни

$$\boxed{y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Мисол. $4y'' - 12y' + 9y = 0$ тенгламанинг характеристик тенгламаси

$$4k^2 - 12k + 9 = 0$$

бўлиб, унинг илдизлари $k_1 = k_2 = \frac{3}{2}$ дир. Демак, тенгламанинг умумий ечими:

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{\frac{3}{2}x}.$$

в) характеристик тенгламанинг илдизлари комплекс сонлар бўлган ҳол.

Илдизлар $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$ кўринишда бўлсин.

У ҳолда дифференциал тенгламанинг хусусий ечимлари

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}, \quad y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}$$

кўринишда бўлади. y_1 ва y_2 лар (22.16) тенгламани қаноатлантиради.

Биз қуйидаги натижадан фойдаланамиз: агар ҳақиқий коэффициентли бир жинсли чизиқли тенгламанинг хусусий ечими комплекс сонлардан иборат бўлса, у ҳолда унинг ҳақиқий ва мавҳум қисмлари ҳам шу тенгламанинг ечими бўлади.

Бинобарин, хусусий ечим

$$e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}\cos\beta x + i e^{\alpha x}\sin\beta x$$

бўлгани учун $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$ лар ҳам (22.16) тенгламанинг ечими бўлади. Шундай қилиб, (22.16) дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$\boxed{y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)}$$

кўринишда бўлади.

Мисол. $y'' - 4y' + 7y = 0$ тенгламанинг характеристик тенгламаси $k^2 - 4k + 7 = 0$ бўлиб, унинг илдизлари $k_1 = 2 + i\sqrt{3}$, $k_2 = 2 - i\sqrt{3}$ дан иборат. Тенгламанинг умумий ечими қуйидагича бўлади:

$$y = e^{2x}\left(C_1 \cos\sqrt{3}\,x + C_2 \sin\sqrt{3}\,x\right).$$

4. Ўзгармас коэффициентли бир жинслимас чизиқли тенгламалар

Энди

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{22.21}$$

кўринишдаги дифференциал тенгламанинг ечимини топиш билан шуғулланамиз, бу ерда p, q ҳақиқий сонлар. $f(x)$ функциянинг берилишига қараб қуйидаги ҳолларни кўриб чиқамиз:

1) (22.21) тенгламанинг ўнг томони кўрсаткичли функция билан кўпҳад кўпайтмасидан иборат:

$$f(x) = P_m(x)e^{\alpha x},$$

бу ерда $P_m(x)$ — m-даражали кўпҳад, яъни

$$P_m(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m.$$

(22.21) тенгламанинг умумий ечимини топишда қуйидаги фактдан фойдаланамиз:

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

тенглама берилган бўлсин. Агар

$$y'' + py' + qy = 0$$

бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечими $\bar{y}$ бўлиб, u (22.21) тенгламанинг ихтиёрий хусусий ечими бўлса, у ҳолда (22.21) нинг умумий ечими

$$y = \bar{y} + u$$

кўринишда бўлади.

Биз бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечими $k^2 + kp + q = 0$ характеристик тенгламанинг илдизлари билан боғлаб топишни биламиз. Хусусий ечимини эса қуйидаги ҳолларга мувофиқ топамиз:

а) α сони $k^2 + pk + q = 0$ характеристик тенгламанинг илдизи бўлмаган ҳол. Бу ҳолда биз хусусий ечимни

$$u = (A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m)e^{\alpha x} = Q_m(x)e^{\alpha x} \qquad (22.22)$$

кўринишда излаймиз. Бу ерда $Q_m(x)$ — m-даражали кўпҳад.

(22.22) дан u', u'' ни топамиз:

$$u' = (A_0mx^{m-1} + A_1(m-1)x^{m-2} + \ldots + A_{m-1})\cdot e^{\alpha x} +$$
$$+ (A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m)\alpha e^{\alpha x}.$$
$$u'' = [A_0m(m-1)x^{m-2} + A_1(m-1)(m-2)x^{m-3} + \ldots +$$
$$+ A_{m-2}]e^{\alpha x} + [A_0mx^{m-1} + A_1(m-1)x^{m-2} + \ldots +$$
$$+ A_{m-1}]\alpha e^{\alpha x} + [A_0mx^{m-1} + A_1(m-1)x^{m-2} + \ldots +$$
$$+ A_{m-1}]e^{\alpha x} + (A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m)\alpha^2e^{\alpha x}.$$

Буларни (22.21) тенгламага қўямиз ва тенгламани соддалаштириб, натижада қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$Q''_m(x) + (2\alpha + p)Q'_m(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q)Q_m(x) = P_m(x), \qquad (22.23)$$

бу ерда $Q''_m(x)$ — $(m-2)$-даражали кўпҳад, $Q'_m(x)$ — $(m-1)$-даражали кўпҳад.

(22.23) тенгламанинг чап ва ўнг томонлари m-даражали кўпҳадлардан иборат. Бир хил даражали x лар олдидаги коэффициентларни бир-бирига тенглаб, номаълум A_0, A_1, ..., A_m коэффициентларни топамиз;

б) α сони $k^2+pk+q=0$ характеристик тенгламанинг илдизи бўлган ҳол. Бу ҳолда хусусий ечимни (22.22) тенглама кўринишида олиб бўлмайди, чунки (22.23) тенгламанинг чап томонида $(m-1)$-даражали кўпҳад ҳосил қилинган бўлиб, ўнг томони m-даражали кўпҳаддир; A_0, A_1, ... A_m ни топишда m номаълумли $(m-1)$ та тенглама системаси ҳосил қилинган бўлиб, уларни топиш қийиндир. Шунинг учун бу ҳолда хусусий ечим $u = x Q_m(x) e^{\alpha x}$ кўринишда изланади;

в) α сони характеристик тенгламанинг икки каррали илдизи бўлган ҳол. Бу ҳолда хусусий ечимни юқорида баён қилинганидек мулоҳаза юритиб, қуйидагича излаймиз: $u=x^2Q_m(x)e^{\alpha x}$.

1-мисол. $y''-7y'+12y=x$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Аввал бир жинсли $y''-7y'+12y=0$ тенгламани ечамиз. Характеристик тенглама $k^2-7k+12=0$ бўлиб, унинг илдизлари: $k_1=3$, $k_2=4$. *Берилган тенгламанинг ўнг томонидаги функцияни* $P_n(x)e^{\alpha x}=xe^{\alpha x}$ деб қарасак, $\alpha=0$ бўлиб, $k_1 \neq k_2$. Шунинг учун унинг хусусий ечимини

$$u=(A_0x+A_1)e^{0x}=A_0x+A_1$$

кўринишда излаймиз. u' ва u'' ни топиб, ўрнига қўямиз:

$$-7A_1+12A_0x+12A_1=x$$

Бу ердан A_0, A_1 ни топамиз:

$$12A_0=1;\quad A_0=\frac{1}{12},\quad -7A_1+12A_1=0;\quad A_1=\frac{7}{144}.$$

Демак, хусусий ечим

$$u=\frac{1}{12}x+\frac{7}{144}$$

кўринишда, умумий ечими эса

$$y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}+\frac{1}{12}x+\frac{7}{144}$$

кўринишда бўлади.

2-мисол. $y''-5y'+6y=3e^{2x}$.

Ечиш. Бир жинсли тенгламанинг характеристик тенгламаси илдизлари $k_1=3$, $k_2=2$. Бу ерда α характеристик тенглама илдизларидан бирига тенг: $\alpha = 2$. Шунинг учун, берилган тенгламанинг хусусий ечимини

$$u = x \cdot A_0 e^{2x}$$

кўринишда излаймиз. u' ва u'' ни топиб, тенгламага қўямиз:

$$2A_0e^{2x} + 2A_0e^{2x} + 4A_0xe^{2x} - 5A_0e^{2x} - 10A_0xe^{2x} + \\ + 6A_0xe^{2x} = 3e^{2x}.$$

Соддалаштирамиз:

$$-A_0e^{2x} = 3e^{2x}.$$

Бу ердан: $A_0 = -3$. Демак, умумий ечим

$$y = (C_2e^{2x} + C_1e^{3x}) - 3xe^{2x}$$

ёки

$$y = C_1e^{3x} + (C_2 - 3x)e^{2x}$$

бўлади.

3-мисол. $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$.

Ечиш. Бир жинсли тенгламанинг характеристик тенгламаси $k_1 = k_2 = 2$ илдизларга эга бўлиб, α нинг қийматига тенгдир ($\alpha = 2$); в) ҳолига кўра хусусий ечимни $u = x^2A_0e^{2x}$ кўринишда излаймиз. Сўнгра:

$$u' = 2xA_0e^{2x} + A_0 2x^2e^{2x},$$

$$u'' = 2A_0e^{2x} + 4A_0xe^{2x} + 4A_0x^2e^{2x}.$$

Буларни тенгламага қўямиз:

$$2A_0e^{2x} + 4A_0xe^{2x} + 4A_0xe^{2x} + 4A_0x^2e^{2x} - 8A_0xe^{2x} - \\ - 8A_0x^2e^{2x} + 4A_0x^2e^{2x} = 3e^{2x}.$$

$2A_0e^{2x} = 3e^{2x}$ бўлиб, $A_0 = \frac{3}{2}$ га тенгдир. Бу ердан хусусий ечим:

$$u = \frac{3}{2}x^2e^{2x}.$$

Умумий ечим: $y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + \frac{3}{2}x^2e^{2x}$ ёки

$$y = \left(C_1 + C_2x + \frac{3}{2}x^2\right)e^{2x}.$$

2) Ўнг томон $f(x) = P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ кўринишда берилган бўлсин, бу ерда $P(x)$ ва $Q(x)$ кўпҳадлар.

Қуйидаги икки ҳол бўлиши мумкин:

агар $\alpha + i\beta$ сон характеристик тенгламанинг илдизи бўлмаса, у ҳолда (22.18) тенгламанинг хусусий ечимини

$$u = M(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + N(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$$

кўринишда излаймиз, бу ерда $M(x)$ ва $N(x)$ даражаси $P(x)$ ва $Q(x)$ кўпҳадларнинг энг юқори даражасига тенг бўлган кўпҳадлардир;

б) агар $\alpha + i\beta$ сон характеристик тенгламанинг илдизи бўлса, у ҳолда хусусий ечимни

$$u = x\,[M(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + N(x)\,e^{\alpha x}\sin\beta x]$$

кўринишда излаймиз.

Юқорида айтилган мулоҳазалар $P(x) = 0$ ёки $Q(x) = 0$ бўлган ҳоллар учун ҳам тўғридир, яъни ўнг томон $P(x)\,e^{\alpha x}\cos\beta x$ ёки $Q(x)\,e^{\alpha x}\sin\beta x$ лардан биронтаси бўлганда ҳам ўринлидир.

3) Ўнг томон $f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$ кўринишда берилган бўлсин, бу ерда a, b — ўзгармас сонлар. Юқоридагидек, бу ерда ҳам икки ҳол бўлиши мумкин:

а) $i\beta$ сон характеристик тенгламанинг илдизи бўлмаган ҳол. Бу ҳолда хусусий ечимни $u = A\cos x + B\sin x$ кўринишда излаш керак. A ва B сонларини юқорида кўрсатилган аниқмас коэффициентлар усули билан топилади;

б) $i\beta$ сон характеристик тенгламанинг илдизи бўлган ҳол, бу ҳолда хусусий ечимни $u = x\,(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$ кўринишда излаш керак.

XXIII БОБ. ЭҲТИМОЛЛАР НАЗАРИЯСИ

1-§. Эҳтимоллар назариясининг асосий тушунчалари

Кундалик ҳаётда турли ҳодисаларга дуч келамиз. Уларга масалан, қуёшнинг чиқиш ва ботиш ҳодисаси, ҳаво ўзгариб, ёмғир ёки қор ёғиш ҳодисаси мисол бўлади.

Албатта, ҳодисалар маълум шарт-шароитлар (шартлар мажмуи), бажарилиш ёки бирор тажриба (синаш) ўтказиш натижасида рўй беради. Масалан, бир дона тўлиқ мағизли чигитни етарли ҳароратга, намликка эга бўлган тупроққа етарли чуқурликка (шартлар мажмуаси) экканда униб чиқиш ёки чиқмаслик ҳодисаларидан бири рўй бериши мумкин.

Тажриба натижасида бирор шартлар мажмуи бажарилганда албатта рўй берадиган ҳодиса *муқаррар ҳодиса* дейилади.

Тажриба натижасида шартлар мажмуи бажарилганда мутлақо рўй бермайдиган ҳодиса *мумкин бўлмаган* (муқаррар бўлмаган) ҳодиса дейилади. Аммо амалиётда натижасини тўла ишонч билан башорат қилиш мумкин бўлмаган тажрибалар (синовлар) билан иш кўришга тўғри келади. Масалан, тангани ташлашдан иборат тажрибада у ёки бу томонини тушишини тўла ишонч билан олдиндан айтиш мумкин эмас ёки экилган чигит уруғини униб чиқиш ёки чиқмаслигини айтиш қийиндир. Бунга ўхшаш барча ҳолларда тажрибанинг натижасини тасодифга боғлиқ деб ҳисоблаймиз ва уни тасодифий ҳодиса сифатида қараймиз.

Шундай қилиб тасодифий ҳодисага, қуйидагича таъриф бериш мумкин.

Тажриба натижасида (бирор шартлар мажмуи бажарилганда) рўй бериши ҳам, рўй бермаслиги ҳам мумкин бўлган ҳодиса *тасодифий ҳодиса* даб аталади. Масалан, танга ташлаш тажрибасида ё гербли томон тушиши, ёки рақамли томон тушиши ҳодисаси тасодифий ҳодиса бўлади. Тасодифий ҳодисалар латин алфавитининг бош ҳарфлари A, B, C, D ... билан белгиланади.

Муқаррар ҳодисани U ҳарфи билан, мумкин бўлмаган ҳодисани эса V ҳарфи билан белгилаймиз. Бирор тажриба ўтказилаётган бўлсин. Бу тажрибанинг ҳар бир натижасини ифодаловчи ҳодиса *элементар ҳодиса* деб аталади ва ω (омега) билан белгиланади. Элементар ҳодисалар тўплами Ω билан белгиланади, яъни $\Omega = \{\omega\}$. Элементар ҳодисаларга ажратиш мумкин бўлган ҳодиса *мураккаб ҳодиса* деб аталади.

Кўпинча амалиётда бир хил шартлар мажмуи бажарилганда кўп марта кузатилиши мумкин бўлган ҳодисалар, яъни оммавий бир жинсли ҳодисалар билан иш кўришга тўғри келади. Эҳтимоллар назарияси етарлича, кўп сондаги бир жинсли тасодифий ҳодисалар бўйсунадиган қонуниятларни аниқлаш билан шуғулланади.

Демак, эҳтимоллар назарияси предмети оммавий бир жинсли тасодифий ҳодисаларнинг эҳтимолий қонуниятларини ўрганувчи фандир.

Мисоллар. 1. Тангани бир марта ташлашдан иборат тажрибани қарайлик. Бу тажриба натижаси иккита элементар ҳодисадан: ω_1 — танганинг гербли томони тушиши ҳодисаси ($Г$) ва ω_2 — танганинг рақамли томони тушиши ҳодисасидан ($Р$) иборат бўлади. Демак, бу ҳолда элементар ҳодисалар тўплами $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\} = \{Г, Р\}$ бўлади.

2. Тангани икки марта ташлашдан иборат тажрибани қарайлик. Бу тажриба натижалари қуйидагича бўлади:

$ГГ$ — икки марта ҳам танганинг гербли томони тушиши ҳодисаси;

$ГР$ — биринчи марта гербли, иккинчи марта рақамли томони тушиш ҳодисаси;

$РГ$ — биринчи марта рақамли, иккинчи марта эса гербли томони тушиши ҳодисаси;

$РР$ — икки марта ҳам танганинг рақамли томони тушиши ҳодисаси.

Бу ҳолда элементар ҳодисалар $ГГ$, $ГР$, $РГ$, $РР$ бўлиб, уларнинг тўплами $\Omega = \{ГГ, ГР, РГ, РР\}$ бўлади.

2-§. Тасодифий ҳодисалар устида амаллар

Бирор тажриба ўтказилган бўлиб, унинг натижасида A ва B ҳодисалар рўй берган бўлсин. Кўпгина ҳолларда эҳтимолни ҳисоблаш жараёнида ўрганилаётган ҳодисалар орасидаги боғланишни аниқлаш лозим бўлади. Шу мақсадда қуйида ҳодисалар тенглиги, йиғиндиси ва кўпайтмаси тушунчалари билан танишамиз.

23.1-таъриф. Агар тажриба натижасида A ҳодиса рўй берганда ҳамма вақт B ҳодиса ҳам рўй берса, *A ҳодиса B ни эргаштиради* деб аталади ва $A \subset B$ каби ёзилади.

Масалан, тажриба 3 дона янги нав уруғни экишдан иборат бўлсин. Бу тажриба натижасидан қуйидаги ҳодисаларни тузамиз:

A_0 — бирорта ҳам уруғ униб чиқмаганлиги ҳодисаси,

A_1 — 1 дона уруғнинг униб чиқиш ҳодисаси,

A_2 — икки дона уруғнинг униб чиқиш ҳодисаси,

A — униб чиққан уруғлар сони иккитадан ортиқ бўлмаганлик ҳодисаси. Равшанки, бу ҳолда $A_0 \subset A_1$, $A_1 \subset A$, $A_2 \subset A$ бўлади.

23.2-таъриф. Агар A ҳодиса B ҳодисани эргаштирса ва ўз навбатида B ҳодиса A ҳодисани эргаштирса, у ҳолда A ва B *тенг кучли ҳодисалар* дейилади ва $A = B$ каби ёзилади.

23.3-таъриф. Тажриба натижасида ё A ҳодиса, ёки B ҳодиса, ёки ҳам A, ҳам B ҳодисалар рўй беришидан иборат ҳодиса A ва B ҳодисаларнинг *йиғиндиси* деб аталади ва $A + B$ каби белгиланади.

23.4-таъриф. Тажриба натижасида ҳам A ҳодиса, ҳам B ҳодисанинг (бир вақтда) биргаликда рўй беришидан иборат ҳодиса A ва B ҳодисалар *кўпайтмаси* деб аталади ва AB каби белгиланади.

23.5-таъриф. Агар A ва B ҳодисалар бир пайтда рўй бериши мумкин бўлмаган ҳодисалар, яъни $A \cdot B = V$ бўлса, у ҳолда A ва B *биргаликда бўлмаган ҳодисалар* дейилади. Акс ҳолда *биргаликда ҳодисалар* дейилади.

Масалан, тангани ташлаш натижасида бир вақтда гербли ва рақамли томонлар тушиш ҳодисалари биргаликда бўлмаган ҳодисалар бўлади.

23.6-таъриф. Агар A ва B ҳодисалар йиғиндиси муқаррар ҳодиса, кўпайтмаси эса мумкин бўлмаган ҳодиса, яъни

$$A + B = U, \quad A \cdot B = V$$

бўлса, у ҳолда A ва B ҳодисалар ўзаро *қарама-қарши ҳодисалар* дейилади.

Одатда A ҳодисага қарама-қарши ҳодисага $\overline{A}$ каби белгиланади. Демак,

$$A + \overline{A}, = U, \quad A \cdot \overline{A} = V.$$

23.7-таъриф. Тажриба натижасида A ҳодисанинг рўй бериш дан, B ҳодисанинг эса рўй бермаслигидан иборат ҳодиса A ва B ҳодисалар *айирмаси* деб аталади ва $A - B$ каби белгиланади.

23.1-эслатма. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисаларнинг йиғиндиси ва кўпайтмаси юқоридагидек таърифланади.

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисаларни қарайлик. Агар бу ҳодисалар йиғиндиси муқаррар ҳодиса бўлса, яъни

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = U$$

бўлса, у ҳолда $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисалар *ҳодисаларнинг тўла группасини ташкил этади* дейилади. Агар $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисалар учун

1°. $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = U$;

2°. $A_i A_j = V, \ i \neq j \ (i, j = 1, 2, \ldots, n)$

бўлса, яъни исталган иккита A_i ва $A_j (i \neq j) (i, j = \overline{1, n})$ ҳодисалар бир вақтда рўй бериши мумкин бўлмаса, у ҳолда $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисалар *жуфт-жуфти билан биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг тўла группасини* ташкил этади дейилади.

Агарда бир неча $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисалардан исталган бирини синаш натижасида рўй бериши бошқаларига қараганда каттароқ имкониятга (қулайликка) эга дейишга асос бўлмаса, бундай ҳодисалар *тенг имкониятли ҳодисалар* дейилади.

3-§. Ҳодиса эҳтимолининг таърифлари

Эҳтимоллар назариясининг асосий тушунчаси бўлган тасодифий ҳодисанинг эҳтимоли тушунчасини келтирамиз.

Ҳодисанинг эҳтимоли маъносини англаш учун битта содда мисол келтирамиз.

Битта яшикда 10 дона бир хил шар бўлиб, уларнинг иккитаси қизил рангли, 8 таси эса кўк рангли бўлсин. Яшикдаги бу шарларни яхшилаб аралаштириб, сўнг бу яшикдан қарамасдан таваккалига шар олиш тажрибасини ўтказайлик. Равшанки, яшикдан олинган шарнинг кўк рангли бўлиш имконияти қизил рангли бўлиши имкониятига қараганда кўпроқ бўлади.

Одатда имкониятларни сонлар билан характерлаб, улар солиштирилади. Натижада кўп имкониятли, кам имкониятли умуман, маълум миқдордаги имкониятли каби ҳодисаларнинг сонли ўлчовлари тўғрисида гапириш мумкин бўлади.

Бу ҳодисанинг эҳтимоли тушунчасига олиб келади.

1. Ҳодиса эҳтимолининг классик таърифи. Бирор тажриба натижасида чекли сондаги $e_1, e_2, \ldots, e_n$ элементар ҳодисалардан бирортаси рўй бериши мумкин бўлсин.

Бу $e_1, e_2, \ldots, e_n$ элементар ҳодисалар қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1) ҳодисалар жуфт-жуфти билан биргаликда эмас, яъни исталган иккита e_i ва $e_j (i \neq j)$ ҳодиса биргаликда рўй бермайди;

2) $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ҳодисалардан бирортаси албатта рўй беради;

3) $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ҳодисалар тенг имкониятли.

Бирор A ҳодиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ элементар ҳодисалар ичидан e_{k_1}, $e_{k_2}, \ldots, e_{k_m}$ лар рўй берганда рўй берсин. Бу ҳолда $e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_m}$ элементар ҳодисалар (яъни A ҳодисасининг рўй беришига олиб келадиган ҳодисалар) A ҳодисага *қулайлик туғдирадиган ҳодисалар* дейилади.

Масалан, тангани икки марта ташлаш тажрибасини қарайлик. Бу тажриба натижасида ГГ, ГР, РГ, РР элементар ҳодисалар рўй беради.

A ҳодиса тангани икки марта ташлаганда иккала ҳолда ҳам гербли томони тушиши ҳодисаси (ГГ ҳодисаси) бўлсин. Бу ҳолда A ҳодисага қулайлик туғдирадиган элементар ҳодиса фақат битта бўлади (ГГ ҳодиса).

Фараз қилайлик, n та $e_1, e_2, \ldots, e_n$ элементар ҳодисалардан m таси A ҳодисанинг рўй беришига қулайлик туғдирсин.

23.8-таъриф. Ушбу $\frac{m}{n}$ сон *A ҳодисанинг эҳтимоли* деб аталади ва уни $P(A)$ каби ёзилади:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Демак, A ҳодисанинг эҳтимоли A ҳодисанинг рўй беришига қулайлик туғдирувчи ҳодисалар сонининг тенг имкониятли барча элементар ҳодисалар сонига нисбатига тенг.

Мисоллар. 1. Яшикда яхшилаб аралаштирилган 25 та бир хил шар бўлиб, улардан 5 таси кўк, 11 таси қизил ва 9 таси оқ шар бўлсин. Яшикдан таваккалига битта шар олинганда унинг кўк шар бўлиши, қизил шар бўлиши ва оқ шар бўлиши эҳтимоллари топилсин.

Равшанки, жами элементар ҳодисалар сони $n = 25$ $(5+11+9=25)$ бўлади. Айтайлик, A, B ва C мос равишда кўк, қизил ва оқ шар чиқишидан иборат ҳодисаларни ифодаласин. m_1, m_2 ва m_3 эса мос равишда бу ҳодисаларга қулайлик туғдирувчи элементар ҳодисалар сони бўлсин. У ҳолда масала шартига кўра $m_1 = 5$, $m_2 = 11$, $m_3 = 9$ бўлади.

Эҳтимолнинг классик таърифига кўра

$$P(A) = \frac{5}{25} = 0{,}2, \quad P(B) = \frac{11}{25} = 0{,}44,$$

$$P(C) = \frac{9}{25} = 0{,}36$$

бўлади. Демак, таваккалига олинган шарнинг кўк шар бўлиш эҳтимоли 0,2 га, қизил шар бўлиш эҳтимоли эса 0,44 га ва оқ шар бўлиш эҳтимоли 0,36 га тенг.

2. Ўтказилаётган тажриба, *симметрик*, *бир жинсли* тангани уч марта ташлашдан иборат бўлсин. Тажриба натижасида 2 марта гербли томони тушиш ҳодисасининг эҳтимоли топилсин.

Тангани уч марта ташлашда рўй бериши мумкин бўлган барча элементар ҳодисалар тўпламини тузамиз:

$$\Omega = \{e_1 = (\text{ГГГ}),\ e_2 = (\text{ГГР}),\ e_3 = (\text{ГРР}),\ e_4 = (\text{РРР}),$$
$$e_5 = (\text{РГР}),\ e_6 = (\text{РРГ}),\ e_7 = (\text{ГРГ}),\ e_8 = (\text{РГГ})\}$$

бўлиб, бу тўплам элементларининг сони $n = 8$.

Айтайлик, A ҳодиса тангани уч марта ташлаганда 2 марта гербли томони тушиши ҳодисаси бўлсин.

Элементар ҳодисалар тўплами Ω дан кўрамизки, барча элементар имкониятлар сони $n = 2^3 = 8$, улардан A ҳодисага қулайлик туғдирувчи элементар ҳодисалар сони $m = 3$ бўлади.

Ҳодиса эҳтимолининг таърифига кўра қаралаётган A ҳодисанинг эҳтимоли

$$P(A) = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

бўлади.

Ҳодиса эҳтимолининг таърифидан бевосита қуйидаги хоссалар келиб чиқади.

1°. *Ҳар қандай A ҳодисанинг эҳтимоли*

$$P(A) \geqslant 0 \text{ ва } P(A) \leqslant 1,$$

яъни $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ *бўлади.*

2°. *Муқаррар ҳодисанинг эҳтимоли* 1 *га тенг бўлади, яъни* $P(\Omega) = 1$.

3°. *Мумкин бўлмаган ҳодисанинг эҳтимоли нолга тенг бўлади:* $P(V) = 0$.

2. Ҳодиса эҳтимолининг геометрик ва статистик таърифлари. Биз юқорида ўрганган эҳтимолнинг классик таъри-

фидан унда баён этилган барча элементар имкониятлар сони чекли бўлган ҳолдагина фойдаланиш мумкин, акс ҳолда бу таърифдан фойдаланиб бўлмайди.

Бундай ҳолда ҳодиса эҳтимолига бошқача таъриф беришга тўғри келади. Қуйида ҳодиса эҳтимолининг геометрик ва статистик таърифларини келтирамиз.

Ҳодиса эҳтимолининг геометрик таърифи. Фараз қилайлик, текисликда бирор Q соҳа берилган бўлиб, бу Q соҳа бошқа бир G соҳани ўз ичига олсин: $G \subset Q$. Q соҳага таваккал қилиб нуқта ташланади. Бу нуқтанинг G соҳага тушиши эҳтимолини таърифлаймиз. Бу ерда барча элементар ҳодисалар тўплами Q соҳадан иборат бўлади. Равшанки, Q — чексиз тўплам. Бинобарин, бу ҳолда эҳтимолнинг классик таърифидан фойдаланиб бўлмайди. Q соҳага ташланган нуқта шу соҳанинг исталган қисмига тушиши мумкин ва нуқтанинг Q соҳанинг бирор G қисмига тушиш эҳтимоли G нинг ўлчовига *пропорционал* бўлиб, у G нинг шаклига ҳам, G нинг Q соҳанинг қаерига жойлашишига ҳам боғлиқ бўлмасин. Шу шартларда ушбу

$$P = \frac{\operatorname{mes} G}{\operatorname{mes} Q}$$

миқдор қаралаётган *ҳодисанинг геометрик эҳтимоли* деб аталади. Бунда mes — Q ва G соҳаларнинг ўлчовини билдиради.

Мисол. L узунликка эга бўлган кесмага таваккал қилиб нуқта ташланган бўлсин. Ташланган нуқтанинг кесма ўртасидан узоғи билан l масофада $(2l < L)$ ётиши ҳодисасининг эҳтимоли топилсин.

Ечиш. Умумийликка зиён келтирмасдан кесманинг ўртасини саноқ боши деб қарайлик (141-чизма).

Масаланинг шартини қаноатлантирадиган нуқталар тўплами $[-l; l]$ сегментдан иборат бўлади. Бу сегментнинг узунлиги $2l$ га тенг. Юқоридаги таърифга кўра қаралаётган ҳодисанинг эҳтимоли

$$P = \frac{2l}{L}$$

га тенг бўлади.

Ҳодиса эҳтимолининг статистик таърифи. Юқорида айтиб ўтганимиздек, ҳодиса эҳтимолининг классик таърифи тажриба натижасида рўй берадиган элементар ҳодисаларнинг тенг имкониятли бўлишига асосланган дир.

Кўп ҳолларда элементар ҳодисаларнинг тенг имкониятли бўлишини кўрсата олмаймиз. Шу сабабли ҳам ҳодиса эҳтимолининг амалда қулай бўлган таърифини келтириш зарурияти туғилади. Бундай таърифлардан бири ҳодиса эҳтимолининг статистик таърифидир. Бу таърифни келтиришдан аввал нисбий частота тушунчаси билан танишамиз.

Табиатда, техникада кўп марта такрорланадиган воқеаларга дуч келамиз. Бу тажриба натижасида бирор A ҳодиса рўй бериши ҳам мумкин, рўй бермаслиги ҳам мумкин. Айтайлик, N марта тажриба ўтказилган бўлиб, унда A ҳодиса μ марта рўй берган бўлсин.

Ушбу

$$W(A) = \frac{\mu(A)}{N}$$

нисбат *ҳодисанинг нисбий частотаси* деб аталади.

Демак, A ҳодисанинг нисбий частотаси шу ҳодиса рўй берган тажрибалар сонини ўтказилган жами тажрибалар сонига бўлган нисбатига тенг.

Кўп кузатишлар шуни кўрсатадики, бир хил шарт-шароитда кўп марта такрорланадиган тажриба ўтказилганда нисбий частота бирор ўзгармас сон атрофида тебраниб туради (одатда буни *нисбий частотанинг турғунлиги* дейилади). Масалан, танга ташлаш тажрибасини кўп марта такрорлаганда, танганинг гербли томонининг тушиш частотаси қуйидагича бўлган:

Тажрибалар сони (W)	Гербли томони билан тушиш сони (μ_r)	Нисбий частота W_r
4040	2048	0,5080
12000	6019	0,5016
24000	12012	0,5005

Бундан нисбий частотанинг 0,5 сони атрофида тебраниб туришини кўрамиз. Тажрибалар сонини янада орттира борганда нисбий частота 0,5 сонига борган сари яқин келаверади.

Шундай қилиб, ҳодисанинг нисбий частотаси тажрибалар сони орта борган сари битта ўзгармас сон атрофида бўлар экан. Одатда шу сон ҳодисанинг эҳтимоли дейилади. Ҳодиса эҳтимолига берилган бу таъриф *эҳтимолнинг статистик таърифи* дейилади.

Мисол. Экилган 30 туп олма кўчатидан келгуси йили 25 тупи кўкарган бўлса, экилган олма кўчатининг кўкариш (N) ҳодисасининг нисбий частотаси топилсин.

Ечиш. Эҳтимолнинг статистик таърифига асосан $N = 30$, $\mu_A = 25$.

Бундан $W(A) = \frac{\mu_A}{N} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6} \approx 0{,}83$.

4-§. Эҳтимолларни қўшиш теоремалари

Биз XXIII боб, 1-§ да биргаликда бўлган ва биргаликда бўлмаган ҳодисалар ҳамда икки ҳодиса йиғиндиси тушунчалари билан танишдик. Қуйида бундай ҳодисалар йиғиндисига доир теоремаларни келтирамиз.

Фараз қилайлик, A ва B ҳодисалар биргаликда бўлмаган ҳодисалар бўлиб, $P(A)$ ва $P(B)$ мос равишда уларнинг эҳтимоллари бўлсин.

23.1-теорема. *Иккита биргаликда бўлмаган A ва B ҳодисалар йиғиндисининг эҳтимоли шу ҳодисалар эҳтимолларининг йиғиндисига тенг:*

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Исбот. Бу теоремани ҳодиса эҳтимолининг классик таърифидан фойдаланиб исботлаймиз.

Айтайлик, тажриба натижаси n та элементар ҳодисалар бўлиб, булардан m_1 таси A ҳодисага, m_2 таси эса B ҳодисага қулайлик туғдирсин.

У ҳолда

$$P(A) = \frac{m_1}{n}, \quad P(B) = \frac{m_2}{n} \tag{23.1}$$

бўлади.

Шартга кўра A ва B биргаликда бўлмаган ҳодисалар. Шунинг учун ё A ҳодиса, ёки B ҳодиса рўй беришига қулайлик туғдирувчи ҳодисалар сони $m_1 + m_2$ га тенг бўлади. Демак, $A+B$ ҳодисанинг эҳтимоли

$$P(A+B) = \frac{m_1 + m_2}{n}$$

бўлади.

Агар

$$P(A+B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n}$$

бўлишини эътиборга олсак, унда (23.1) муносабатдан фойдаланиб,

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

га эга бўламиз. Теорема исботланди.

23.1-натижа. *A ҳодисага қарама-қарши $\overline{A}$ ҳодисанинг эҳтимоли*

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

га тенг бўлади.

Исбот. Ҳақиқатан ҳам, A ва $\overline{A}$ қарама-қарши бўлганлигидан (2-§ га қаранг)

$$P(A+\overline{A}) = P(U) = 1. \tag{23.2}$$

Юқорида келтирилган биргаликда бўлмаган ҳодисалар учун эҳтимолларни қўшиш теоремасига асосан

$$P(A+\overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}). \tag{23.3}$$

(23.2), (23.3) муносабатларда эса

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

бўлиши келиб чиқади.

Мисол. Яшикда 30 та шар бор, улардан 10 таси қизил, 5 таси кўк ва 15 таси оқ. Таваккалига олинган шарнинг рангли бўлиш эҳтимоли топилсин.

Ечиш. Рангли шар чиқиши деганда ё қизил шар, ёки кўк шар чиқишини тушунамиз. Олинган шарнинг қизил шар чиқиши ҳодисасини A, кўк шар чиқиши ҳодисасини B дейлик. Унда эҳтимолнинг классик таърифига кўра

$$P(A)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3},\quad P(B)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$$

бўлади. Равшанки, $A+B$ олинган шарнинг рангли шар чиқишидан иборат бўлган ҳодиса. A ва B ҳодисалари биргаликда эмас. Шунинг учун юқоридаги теоремага кўра $P(A+B)=P(A)+P(B)$ *бўлади.* Демак, изланаётган эҳтимол:

$$P(A+B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$$

Фараз қилайлик, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисалар жуфт-жуфти билан *биргаликда бўлмаган ҳодисалар бўлсин. Юқоридаги каби кўрсатиш* мумкинки, бу ҳолда ҳам $P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+$ $+\ldots+P(A_n)$ бўлади.

Хусусан, бу $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисалар ҳодисаларнинг тўла группасини ташкил этса $(A_1+A_2+\ldots+A_n=U)$, у ҳолда

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1$$

бўлади.

Энди биргаликда бўлган ҳодисалар учун қўшиш теоремасини келтирамиз.

Маълумки, тажриба натижасида рўй берадиган иккита ҳодисадан бирининг рўй бериши иккинчисининг рўй беришини инкор этмаса, бу ҳодисалар *биргаликда бўлган ҳодисалар* дейилади.

23.2-теорема. *Иккита биргаликда бўлган A ва B ҳодисадан ҳеч бўлмаганда бирининг рўй бериш эҳтимоли бу ҳодисалар эҳтимоллари йиғиндисидан уларнинг биргаликда рўй бериш ҳодисаси эҳтимолининг айирмасига тенг бўлади:*

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Исбот. Шартга кўра A ва B биргаликда бўлган ҳодисалар. Равшанки, $A\bar{B}$, $\bar{A}B$ ва AB ҳодисалар ўзаро биргаликда эмас ва

$$A+B=A\bar{B}+\bar{A}B+AB$$

бўлади. Унда 23.1-*теоремага кўра*

$$P(A+B)=P(A\bar{B})+P(\bar{A}B)+P(AB) \tag{23.4}$$

ўлади.

A ҳодиса ҳамда B ҳодисанинг рўй бериши учун $A\bar{B}$ ҳамда AB ҳодисалардан биттаси рўй бериши керак. Яна 23.1-теоремага кўра, шунингдек

$$P(A)=P(A\bar{B})+P(AB), \tag{23.5}$$

$$P(B)=P(\bar{A}B)+P(AB) \tag{23.6}$$

бўлади. (23.5), (23.6) муносабатлардан

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB),$$

$$P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB)$$

бўлиши келиб чиқади. Натижада (22.4) тенгликдаги $P(A\overline{B})$ ва $P(\overline{A}B)$ нинг ўрнига уларнинг топилган қийматларини қўйсак,

$$P(A+B) = P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) + P(AB) =$$
$$= P(A) + P(B) - P(AB)$$

ҳосил бўлади.

Демак, $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. Теорема исботланди.

Мисол. Икки мерган биттадан ўқ узди. Биринчи мерганнинг нишонга теккизиш (A ҳодиса) эҳтимоли 0,8 га, иккинчисиники (B ҳодиса) 0,9 га тенг бўлса, мерганлардан ақалли биттасининг (C ҳодиса) нишонга теккизганлиги эҳтимоли топилсин.

Ечиш. Масала шартига асосан $P(A)=0{,}8$, $P(B)=0{,}9$, $C=A+B$ бўлганлиги учун биргаликда бўлган ҳодисалар учун эҳтимолларни қўшиш теоремасига асосан

$$P(C) = P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)\cdot P(B) =$$
$$= 0{,}8 + 0{,}9 - 0{,}8\cdot 0{,}9 = 1{,}7 - 0{,}72 = 0{,}98.$$

5-§. Эҳтимолларни кўпайтириш теоремалари

Агар иккита A ва B ҳодисалардан бирининг рўй бериши иккинчисининг рўй бериш ёки рўй бермаслигига боғлиқ бўлмаса, у ҳолда бу ҳодисалар *эркли ҳодисалар* дейилади. Юқоридаги мулоҳазаларимиздан равшанки, бу мавзуда фақатгина биргаликда бўлган ҳодисалар ҳақида фикр юритилади, чунки биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг биргаликда рўй бериш (кўпайтмасини) эҳтимоли нолга тенг.

A ва B ҳодисалар эркли ҳодисалар бўлиб, $P(A)$ ва $P(B)$ уларнинг мос эҳтимоллари бўлсин.

23.3-теорема. *Иккита эркли A ва B ҳодисанинг биргаликда рўй бериш эҳтимоли шу ҳодисаларнинг эҳтимоллари кўпайтмасига тенг:*

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B).$$

Исбот. Шартга кўра A ва B эркли ҳодисалар. Тажриба натижасида n та элементар ҳодисага эга бўлайлик. Булардан n_1 таси A ҳодисага қулайлик туғдирсин.

Тажриба натижасида m та элементар ҳодисага эга бўлайлик. Булардан m_1 таси B ҳодисага қулайлик туғдирсин.

Равшанки,

$$P(A) = \frac{n_1}{n}, \quad P(B) = \frac{m_1}{m}. \tag{23.7}$$

Тажрибалар натижасида рўй берадиган барча элементар ҳодисалар сони nm та бўлади. Булардан n_1m_1 таси A ва B ҳодисаларнинг биргаликда рўй беришига қулайлик туғдиради.

Демак,

$$P(AB)=\frac{n_1m_1}{nm}$$

бўлади. Бундан эса, юқоридаги (23.7) муносабатни эътиборга олиб,

$$P(A\cdot B)=\frac{n_1}{n}\cdot\frac{m_1}{m}=P(A)\cdot P(B)$$

бўлишини топамиз.

22.2-натижа. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *биргаликда боғлиқ бўлмаган ҳодисалар бўлсин. У ҳолда*

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$$

бўлади.

Мисол. Икки яшикнинг ҳар бирида 10 тадан деталь бор. Биринчи яшикда 8 та, иккинчи яшикда 7 та стандарт деталь бор. Ҳар бир яшикдан таваккалига биттадан деталь олинади. Олинган иккала деталнинг стандарт бўлиш эҳтимоли топилсин.

Ечиш. Биринчи яшикдан олинган деталь стандарт деталь бўлиши ҳодисасини A, иккинчи яшикдан олингани стандарт деталь бўлиши ҳодисасини B дейлик. Унда $P(A)=\frac{8}{10}=0{,}8$, $P(B)=\frac{7}{10}=$ $=0{,}7$ бўлади. Равшанки, олинган иккала деталнинг стандарт деталь бўлиши ҳодисаси эса AB ҳодиса бўлади.

A, B биргаликда бўлмаган ҳодисалардир. Шунинг учун 22.3-теоремага кўра $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$ бўлади. Демак,

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)=0{,}8\cdot 0{,}7=0{,}56$$

бўлади.

Боғлиқ ҳодисалар эҳтимолларини кўпайтириш теоремасини келтиришдан аввал ҳодисанинг шартли эҳтимоли тушунчаси билан танишамиз.

Бирор A ҳодиса берилган бўлсин. Одатда бу ҳодиса маълум шартлар мажмуи S бажарилганда рўй беради. Агар A ҳодисанинг эҳтимоли $P(A)$ ни ҳисоблаганда S шартлар мажмуидан бошқа ҳеч *қандай шарт талаб қилинмаса, бундай* эҳтимол *шартсиз* эҳтимол дейилади. Кўп ҳолларда A ҳодисанинг эҳтимолини бирор B ҳодиса ($P(B)>0$) рўй берган деган шартда *ҳисоблашга тўғри келади.*

A ҳодисанинг бундай эҳтимоли *шартли эҳтимол* дейилади ва $P(A/B)$ каби белгиланади.

Мисол. Тангани 3 марта ташлаш тажрибасини қарайлик. Тажриба натижасида рўй берадиган элементар ҳодисалар тўплами қуйидагича бўлади:

$$\Omega=\{ГГГ, ГГР, ГРГ, РГГ, РРР, РРГ, РГР, ГРР\}.$$

Бу тўплам 8 та элементдан иборатдир.

Танганинг гербли томони фақат бир марта тушиш ҳодисаси A ва камида бир марта гербли томони тушиш ҳодисаси B бўлса, у ҳолда *эҳтимолнинг классик таърифига асосан:*

$$P(A) = \frac{3}{8}, \quad P(B) = \frac{7}{8}$$

бўлади. $P(A/B)$ шартли эҳтимол эса

$$P(A/B) = \frac{3}{7}$$

га тенг бўлади.

Энди боғлиқ ҳодисалар эҳтимолларини кўпайтириш теоремасини келтирамиз.

23.4-теорема. *Иккита боғлиқ ҳодисанинг биргаликда рўй бериш эҳтимоли улардан бирининг эҳтимолини шу ҳодиса рўй берди деган фаразда ҳисобланган иккинчи ҳодисанинг шартли эҳтимолига кўпайтмасига тенг:*

$$P(AB) = P(A)\,P(B/A).$$

Исбот. A ва B боғлиқ ҳодисалар бўлсин. Айтайлик, тажриба натижасида n та элементар ҳодисага эга бўлайлик. Булардан n_1 таси A ҳодисанинг рўй беришига қулайлик туғдирсин. Равшанки, бу ҳолда

$$P(A) = \frac{n_1}{n} \tag{23.8}$$

бўлади.

A ҳодиса рўй берди деган шартда B ҳодиса рўй беришига қулайлик туғдирган элементар ҳодисалар сони m та бўлсин. Бу m та ҳол тажриба натижасида AB ҳодиса рўй беришига қулайлик туғдирди. Демак,

$$P(AB) = \frac{m}{n}. \tag{23.9}$$

A ҳодиса рўй берди деган шартда B ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли (шартли эҳтимоли)

$$P(B/A) = \frac{m}{n_1}$$

га тенг. Энди

$$P(AB) = \frac{m}{n} = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{m}{n_1}$$

бўлишини эътиборга олиб, юқоридаги (23.8) ва (23.9) муносабатлардан фойдаланиб топамиз:

$$P(AB) = P(A)\,P(B/A)$$

Теорема исботланди.

Мисол. Яшикда 5 та оқ, 4 та қора шар бор. Яшикдан қайтариб жойига қўймасдан, битталаб шар олиш тажрибаси ўтказилаётган бўлсин. Биринчи галда оқ шар, иккинчи галда қора шар чиқиши эҳтимоли топилсин.

Ечиш. Биринчи галда оқ шар чиқиш ҳодисасини A, иккинчи галда қора шар чиқиш ҳодисасини B деб олайлик. Бу ҳодисалар боғлиқ ҳодисалар бўлади. Ҳодиса эҳтимоли таърифига кўра $P(A) = 5/9$.

Биринчи галда оқ шар чиққан ҳолда, иккинчи галда қора шар чиқиши эҳтимоли (шартли эҳтимоли) $P(B/A) = 4/9$ бўлади.

Равшанки, биринчи галда оқ шар, иккинчи галда қора шар чиқиши ҳодисаси $A — B$ бўлади. Бу ҳодисанинг эҳтимолини юқорида келтирилган теоремадан фойдаланиб топамиз:

$$P(AB) = P(A)\,P(B/A) = \frac{5}{9}\cdot\frac{4}{9} = \frac{20}{81}.$$

23.2-эслатма. Агар A, B, C боғлиқ ҳодисалар бўлса, у ҳолда

$$P(ABC) = P(A)\,P(B/A)\,P(C/AB)$$

муносабатнинг ўринли бўлишини кўрсатиш мумкин.

Умуман, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ боғлиқ ҳодисалар учун қуйидаги формула ўринли бўлади:

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)\,P(A_2/A_1)\times$$
$$\times P(A_3/A_1A_2)\ldots P(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1}).$$

6-§. Тўла эҳтимол формуласи. Байес формуласи

Бирор A ҳодиса n та жуфт-жуфти билан биргаликда бўлмаган $H_1, H_2, \ldots, H_n$ ҳодисаларнинг (гипотезаларнинг) биттаси ва фақат биттаси билангина рўй бериши мумкин бўлсин. Демак, биринчидан

$$A = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n,$$

иккинчидан эса

$$AH_i \cap AH_j = V \quad (i \neq j)$$

бўлади.

Эҳтимолларни қўшиш теоремасидан фойдаланиб топамиз:

$$P(A) = P(AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n) =$$
$$= P(AH_1) + P(AH_2) + \ldots + P(AH_n).$$

Агар

$$P(AH_1) = P(H_1)\,P(A/H_1),$$
$$P(AH_2) = P(H_2)\,P(A/H_2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P(AH_n) = P(H_n)\,P(A/H_n)$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда ушбу тенгликка келамиз:

$$P(A) = P(H_1)\,P(A/H_1) + P(H_2)\,P(A/H_2) + \ldots +$$
$$+ P(H_n)\,P(A/H_n) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k)\,P(A/H_k).$$

Демак,

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n} P(H_n)\, P(A/H_n). \qquad (23.10)$$

Одатда (23.10) формула *тўла эҳтимол формуласи* деб аталади. Тўла эҳтимол формуласидан мураккаб ҳодисаларнинг эҳтимолларини ҳисоблашда фойдаланилади.

Мисол. Омборга 360 та маҳсулот келтирилди. Булардан:

300 таси бир корхонада тайёрланган бўлиб, 250 таси яроқли маҳсулот,

40 таси 2-корхонада тайёрланган бўлиб, 30 таси яроқли маҳсулот,

20 таси 3-корхонада тайёрланган бўлиб, 10 таси яроқли маҳсулот.

Омбордан таваккалига олинган маҳсулотнинг яроқли бўлиш эҳтимоли топилсин.

Ечиш. Таваккалига олинган маҳсулот учун қуйидаги гипотезалар ўринли бўлади:

H_1 — маҳсулотнинг 1-корхонада тайёрланган бўлиши,

H_2 — маҳсулотнинг 2-корхонада тайёрланган бўлиши,

H_3 — маҳсулотнинг 3-корхонада тайёрланган бўлиши.

Уларнинг эҳтимоллари мос равишда қуйидагича бўлади:

$$P(H_1)=\frac{300}{360}=\frac{5}{6};\ P(H_2)=\frac{40}{360}=\frac{1}{9};$$

$$P(H_3)=\frac{20}{360}=\frac{1}{18}.$$

Агар олинган маҳсулотнинг яроқли бўлишини A ҳодиса деб белгиласак, у ҳолда бу ҳодисанинг турли гипотезалар шартлари остидаги эҳтимоллари қуйидагича бўлади:

$$P(A/H_1)=\frac{5}{6};\ P(A/H_2)=\frac{3}{4};\ P(A/H)=\frac{1}{2}.$$

Юқорида топилганларни тўла эҳтимол формуласи (23.10) га қўямиз:

$$P(A)=P(H_1)\,P(A/H_1)+P(H_2)\,P(A/H_2)+P(H_3)\,P(A/H_3)=$$

$$=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{2}=\frac{29}{36}.$$

Айтайлик, биргаликда бўлмаган $H_1, H_2, \ldots, H_n$ ҳодисаларнинг тўла группаси берилган бўлиб, тажрибани ўтказишга қадар уларнинг ҳар бирининг $P(H_i)$, $i=\overline{1,n}$ эҳтимоллари тайин қийматга эга бўлсин. Тажриба натижасида A ҳодиса рўй берди деган шарт остида H_i $(i=\overline{1,n})$ ҳодисаларнинг эҳтимоллари тажрибадан сўнг қандай бўлишлиги қуйидагича топилади: H_i ва A ҳодисаларнинг кўпайтмаси учун ушбу

$$P(AH_i)=P(A)\,P(H_i/A)=P(H_i)\,P(A/H_i)$$

формуладан

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)\ P(A/H_i)}{P(A)}$$

муносабатга эга бўламиз. Бу муносабатга тўла эҳтимол формуласини қўлланиб, қуйидагини топамиз:

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)\ P(A/H_i)}{P(H_1)P(A/H_1)+\ldots+P(H_n)P(A/H_n)}=$$

$$=\frac{P(H_i)\ P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\ P(A/H_i)}.$$

Бу формула *Байес формуласи* дейилади.

Мисол. Юқоридаги мисолда таваккалига олинган маҳсулотнинг яроқли эканлиги маълум бўлса, унинг биринчи корхонада тайёрланган бўлиш эҳтимолини топинг.

Ечиш. Масалада $P(H/A)$ шартли эҳтимолни топиш талаб қилинмоқда. Бу эҳтимолни Байес формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\ P(A/H_1)}{P(A)}.$$

Энди $P(A)=\frac{29}{36}$, $P(H_1)=\frac{5}{6}$ ва $P(A/H_1)=\frac{5}{6}$ бўлганлигидан талаб қилинаётган эҳтимоллик қуйидагига тенг:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\ P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}}{\frac{29}{36}}=\frac{25}{29}.$$

7-§. Ўзаро боғлиқ бўлмаган тажрибалар кетма-кетлиги. Бернулли формуласи

Амалий масалаларни ҳал этишда тажрибалар одатда бир неча бор такрорланади. Бунинг натижасида тажрибалар кетма-кетлиги ҳосил бўлади. Масалан, янги пахта нави яратилганлигини маълум кафолат билан тасдиқлаш учун шу нав билан бир неча йил тажрибалар ўтказилиб, улар асосида янги навнинг ўртача ҳосилдорлиги, тола чиқишлиги, тез пишарлиги, сифатлилиги каби муҳим белгилари аввалги навларга қараганда юқори эканлиги кўрсатилади.

Маълумки, тажрибалар ўтказилиши натижасида тасодифий ҳодисалар рўй берди. Агар тажриба натижасида бирор тасодифий ҳодиса рўй бериш эҳтимоли бошқа тажриба натижасида қандай тасодифий ҳодиса рўй берганига боғлиқ бўлмаса, бундай тажрибалар кетма-кетлиги *ўзаро боғлиқ бўлмаган тажрибалар* дейилади.

Айтайлик, n та тажриба ўтказилган бўлиб, улар қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1) тажрибалар ўзаро боғлиқ бўлмасин;

2) ҳар бир тажриба натижасида ё A ҳодиса, ёки унга қарама-қарши $\overline{A}$ ҳодисалардан бири рўй берсин;

3) ҳар бир тажрибада A ҳодисанинг рўй бериши эҳтимоли ўзгармас бўлиб, у $P(A) = p$ га тенг бўлсин. У ҳолда A ҳодисанинг рўй бермаслик эҳтимоли, яъни қарама-қарши ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли $P(\overline{A}) = q = 1 - p$ бўлади.

Бундай, яъни ҳар бир боғлиқмас тажриба натижасида тўла группа ташкил қиладиган иккита A ва $\overline{A}$ ҳодисалардан фақат биттаси албатта рўй беради деб қараладиган тажрибалар кетма-кетлиги Бернулли схемаси дейилади.

Равшанки,

$$P(\overline{A}) = q = 1 - p.$$

Демак, ҳар бир тажриба натижасида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли $P(A) = p$, унга қарама-қарши $\overline{A}$ ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли $P(\overline{A}) = q$ бўлсин. Асосий масала n та эркли тажрибада A ҳодисасининг роса k марта рўй бериши эҳтимолини топишдан иборат. Бу эҳтимолни $P_n(k)$ билан белгилайлик.

23.5-теорема. n та эркли тажрибада A ҳодисанинг роса k марта рўй бериш эҳтимоли қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{23.11}$$

бунда

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \quad n! = 1\cdot 2\cdot 3 \ldots n.$$

Бу теорема қуйидагича мулоҳаза билан исботланади:

Боғлиқ бўлмаган n та тажрибанинг ҳар бирида кузатилаётган A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p, рўй бермаслик ($\overline{A}$—ҳодисанинг рўй бериши) эҳтимоли q ($q = 1 - p$) бўлсин.

Айтайлик, n та тажрибада A ҳодиса бирор марта ҳам рўй бермасин. Демак, биринчи тажрибада $\overline{A}$ ҳодиса, иккинчи тажрибада ҳам $\overline{A}$ ҳодиса, ва ҳоказо, n-тажрибада ҳам $\overline{A}$ ҳодиса рўй берган. Натижада ушбу

$$\underbrace{\overline{A}\,\overline{A} \ldots \overline{A}}_{n \text{ та}}$$

мураккаб ҳодисага эга бўламиз. Унинг эҳтимоли эркли ҳодисалар учун эҳтимолларни кўпайтириш теоремасига асосан:

$$P(\underbrace{\overline{A}\,\overline{A} \ldots \overline{A}}_{n \text{ та}}) = \underbrace{P(\overline{A})\,P(\overline{A}) \ldots P(\overline{A})}_{n \text{ та}} = \underbrace{q\,q \ldots q}_{n \text{ та}} = q^n.$$

Бу ҳолда, яъни n та тажрибада A ҳодисанинг бирор марта ҳам рўй бермаслик эҳтимоли

$$P_n(0) = q^n$$

бўлади.

Айтайлик, *n та тажрибада A ҳодиса фақат бир марта рўй берган* бўлсин. Бунда қуйидаги n та мураккаб ҳодисага эга бўламиз:

$$\underbrace{A \cdot \bar{A} \cdot \bar{A} \ldots \bar{A}}_{n \text{ та}} \text{ (биринчи тажрибада } A \text{ рўй берди),}$$

$$\underbrace{\bar{A} A \bar{A} \ldots \bar{A}}_{n} \text{ (иккинчи тажрибада } A \text{ рўй берди)}$$

$$\underbrace{\bar{A} \bar{A} A \bar{A} \ldots \bar{A}}_{n \text{ та}} \text{ (учинчи тажрибада } A \text{ рўй берди),}$$

$$\bar{A} \bar{A} \ldots \bar{A} A \text{ (}n\text{-тажрибада } A \text{ рўй берди).}$$

Бу мураккаб эркли ҳодисаларнинг эҳтимолларни кўпайтириш теоремасига асосан

$$P(A\bar{A}\bar{A} \ldots \bar{A}) = P(A)\, P(\bar{A}) \ldots P(\bar{A}) = pq \cdot q \ldots q = pq^{n-1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$P(\bar{A}\bar{A} \ldots \bar{A} A) = P(\bar{A},)\, P(\bar{A}) \ldots P(\bar{A})\; P(A) = pq^{n-1}.$$

n та тажрибада A ҳодисанинг бир марта рўй бериш эҳтимоли биргаликда бўлмаган ҳодисалар учун эҳтимолларни қўшиш теоремасига асосан

$$P_n(1) = P(A\,\bar{A}\bar{A} \ldots \bar{A} + \bar{A} A \bar{A} \ldots \bar{A} + \bar{A}\bar{A}A\bar{A} \ldots \bar{A} +$$

$$+ \ldots + \bar{A}\bar{A} \ldots \bar{A}A) = P(A\bar{A} \ldots \bar{A}) + P(\bar{A}A\bar{A} \ldots \bar{A}) +$$

$$+ \ldots + P(\bar{A}\bar{A} \ldots \bar{A}A) = pq^{n-1} + pq^{n-1} + \ldots + pq^{n-1} =$$

$$= npq^{n-1} = C_n^1 pq^{n-1}$$

бўлади. Демак,

$$P_n(1) = C_n^1\, pq^{n-1}.$$

Айтайлик, n та тажрибада A ҳодисаси икки марта рўй берсин. Бу ҳолда қуйидаги

$$AA\bar{A} \ldots \bar{A},\ A\bar{A}A\bar{A} \ldots \bar{A},\ \ldots,\ \bar{A}\bar{A} \ldots \bar{A}AA$$

мураккаб ҳодисалардан бири рўй берди. Уларнинг сони

$$\frac{n(n-1)}{2} = C_n^2$$

бўлиб, ҳар бирининг эҳтимоли $p^2 q^{n-2}$ га тенг бўлади. Юқоридагидек, *n та тажрибада A ҳодисанинг k марта рўй бериш эҳтимоли*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (23.11)$$

га тенг бўлиши кўрсатилади.

(23.11) формула Бернулли формуласи деб аталади.

n та тажрибада A ҳодиса рўй бермаслиги мумкин, бир марта, икки марта ва ҳ.к., n марта рўй бериши мумкин. Бундай ҳодисалар йиғиндиси албатта муқаррар ҳодиса бўлади. Шунинг учун уларнинг эҳтимоллари йиғиндиси 1 га тенг бўлади. Демак,

$$P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) + \ldots + P_n(n) = 1, \text{ яъни } \sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1.$$

Мисол. Ҳар бир деталнинг яроқли бўлиш (A ҳодиса) эҳтимоли 0,8 га тенг. Тайёрланган 5 деталдан 3 тасининг яроқли бўлиш эҳтимоли топилсин.

Ечиш. Масала шартига биноан

$$n = 5, \; k = 3, \; P(A) = p = 0{,}8, \; P(\overline{A}) = q = 1 - p = 0{,}2$$

бўлишини аниқлаймиз. Унда (23.11) Бернулли формуласига кўра

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot 0{,}8^3 \cdot (1 - 0{,}8)^2 = \frac{5!}{3!\,(5-3)} \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}2048.$$

23.3-эслатма. Энди эркин тажрибалар кетма-кетлигида ҳодисанинг рўй бериш сонини μ билан белгилаб, қуйидаги ҳодисаларни киритамиз ва уларнинг эҳтимолларини ёзамиз:

1) ҳодисанинг k дан кам марта рўй бериш ҳодисасини $\{0 \leqslant \mu \leqslant k - 1\}$ десак, унинг эҳтимоли

$$P_n\{0 \leqslant \mu \leqslant k - 1\} = \sum_{m=0}^{k-1} P_n(m)$$

бўлади;

2) ҳодисанинг k дан кўп марта рўй бериш ҳодисасини $\{k + 1 \leqslant \mu \leqslant n\}$ десак, унинг эҳтимоли

$$P_n\{k + 1 \leqslant \mu \leqslant n\} = \sum_{m=k+1}^{n} P_n(m)$$

бўлади.

3) ҳодисанинг камида k марта рўй бериш ҳодисаси $\{k \leqslant \mu \leqslant n\}$ нинг эҳтимоли

$$P_n\{k \leqslant \mu \leqslant n\} = \sum_{m=k}^{n} P_n(m)$$

бўлади.

4) ҳодисанинг кўпи билан k марта рўй бериш эҳтимоли

$$P_n\{0 \leqslant \mu \leqslant k\} = \sum_{m=0}^{k} P_n(m)$$

бўлади;

5) ҳодисанинг ками билан k_1 марта, кўпи билан k_2 марта рўй бериш ҳодисасини $\{k_1 \leqslant \mu \leqslant k_2\}$ десак, унинг эҳтимоли

$$P_n\{k_1 \leqslant \mu \leqslant k_2\} = \sum_{m=k_1}^{k_2} P_n(m)$$

бўлади.

Мисоллар. 1) чигитнинг унувчанлиги 10% бўлса, экилган 4 та чигитдан: а) учтасининг униб чиқиши; б) ҳеч бўлмаганда иккитасининг униб чиқиш эҳтимолини топинг.

Ечиш. а) шартга кўра $n = 4$, $k = 3$, $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$. Бернулли формуласига кўра

$$P_4(3) = C_4^3 (0{,}8)^3 \cdot 0{,}2 = 0{,}4096;$$

б) A ҳодиса экилган 4 та чигитдан ҳеч бўлмаганда иккитасининг униб чиқишини, яъни 2 таси, ёки 3 таси; ёки 4 таси униб чиқишини билдирсин. Эҳтимолларни қўшиш теоремасига кўра:

$$P(A) = P_4\{\text{ёки } 2, \text{ ёки } 3, \text{ ёки } 4\} = P_4(2) + P_4(3) + P_4(4).$$

$P_4(3)$ эҳтимол а) бандда ҳисобланган;

$$P_4(2) = C_4^2 (0{,}8)^2 \cdot (0{,}2)^2 = 0{,}1536;$$

$$P_4(4) = C_4^4 (0{,}8)^4 \cdot (0{,}2)^0 = 0{,}4096.$$

Демак, $P(A) = 0{,}9728$.

Энди (23.11) Бернулли формуласининг таҳлили билан шуғулланамиз.

Равшанки, берилган тайин n ва p да

$$P_n(k) = C_n^k\, p^k q^{n-k} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

нинг қиймати k га боғлиқ, яъни k нинг функцияси бўлади. Бунда k ўзгарувчининг $k = 0$, $k = 1$, $k = 2, \ldots, k = n$ қийматларида $P_n(k)$ функциянинг қийматлари ушбу

$$P_n(0),\ P_n(1),\ P_n(2),\ \ldots,\ P_n(n) \tag{23.12}$$

сонлар кетма-кетлигидан иборат бўлади. Бу (23.12) даги сонлардан тайинланган n учун қайси бири энг катта бўлади, яъни A ҳодиса n та эркли синашда рўй беришлар сонининг қандай қийматларида $P_n(k)$ энг катта эҳтимолга эга бўлади, деган саволга жавоб бериш масаласини ўрганамиз.

Шу мақсадда ушбу $\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)}$ нисбатни қараймиз. Равшанки,

$$P_n(k) = C_n^k\, p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k},$$

$$P_n(k+1) = C_n^{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1} = \frac{n!}{(k+1)\,(n-k-1)!} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1}.$$

У ҳолда

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} = \frac{n!\,p^{k+1}(1-p)^{n-k-1} \cdot k!(n-k)!}{(k+1)!(n-k-1)!\,n!\,p^k\,(1-p)^{n-k}} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p}$$

бўлади.

Агар

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} > 1,$$

яъни

$$\frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p} > 1 \qquad (23.13)$$

бўлса, у ҳолда $P_n(k+1) > P_n(k)$ бўлади.

k нинг қандай қийматларида $P_n(k+1) > P_n(k)$ бўлишини билиш учун (23.13) тенгсизликни k га нисбатан ечамиз:

$$\frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p} > 1 \Rightarrow (n-k)p > (k+1)(1-p) \Rightarrow np - kp > k(1-p) +$$
$$+(1-p) \Rightarrow -kp - k(1-p) > (1-p) - np \Rightarrow -k > (1-p) - np \Rightarrow$$
$$\Rightarrow k < np - (1-p).$$

Демак, $k < np - (1-p)$ бўлганда $P_n(k+1) > P_n(k)$ бўлади.

Шундай қилиб, k ўзгарувчининг қийматлари $np - (1-p)$ сондан кичик бўлганда $P_n(k)$ эҳтимол ўсиб борди (яъни $P_n(k)$ функция ўсувчи бўлади).

Худди шунга ўхшаш, $k > np - (1-p)$ бўлганда $P_n(k+1) < < P_n(k)$ бўлишини кўрсатиш мумкин.

Шундай қилиб, k ўзгарувчининг қийматлари $np - (1-p)$ сондан катта бўлиб борганда $P_n(k)$ эҳтимол кичиклашиб боради (яъни $P_n(k)$ функция камаювчи бўлади). k ўзгарувчининг қиймати $k = np - (1-p)$ бўлганда эса $P_n(k+1) = P_n(k)$ бўлади.

Шундай қилиб, k ўзгарувчи $0, 1, 2, \ldots, n$ қийматларни қабул қила бориб, унинг қиймати $np - (1-p)$ сонга етгунча $P_n(k)$ нинг қиймати ўса боради, k нинг қиймати $np - (1-p)$ сондан ошганда эса $P_n(k)$ эҳтимол камая боради. Бу ҳолни чизма билан тасвирлаш мумкин (142-*а*, чизма).

Энди n та тажрибада A ҳодиса рўй беришининг энг катта эҳтимолли сонини топамиз. Айтайлик, бу энг катта эҳтимол k ўзгарувчининг k_0 қийматида бўлсин. Унда юқорида айтилганларга кўра, бир томондан,

$$P_n(k_0+1) \leqslant P_n(k_0), \qquad (23.13)$$

иккинчи томондан эса

$$P_n(k_0-1) \leqslant P_n(k_0) \qquad (23.14)$$

бўлади.

(23.13) муносабат $k_0 \geqslant np - (1-p)$, (23.14) муносабат эса $k_0 - 1 \leqslant np - (1-p)$ бўлганда бажарилишини юқоридагидек кўрсатиш мумкин.

Демак, энг катта эҳтимолли k_0 сон ушбу

$$np-(1-p)\leqslant k_0\leqslant np+p \qquad (23.15)$$

тенгсизликларни қаноатлантирар экан. Бу тенгсизликни қаноатлантирадиган бутун сонлар $np-(1-p)$ сонга боғлиқ бўлади:

1) Агар $np-(1-p)$ каср сон бўлса, у ҳолда (23.15) тенгсизликни қаноатлантирадиган k_0 сон битта бўлади (142-б, чизма).

2) агар $np-(1-p)$ бутун сон бўлса, у ҳолда (23.15) тенгсизликларни қаноатлантирадиган сонлар иккита бўлади. Демак, бу ҳолда энг катта эҳтимолли сон иккита бўлади.

1-мисол. Техник назорат бўлими 24 та деталдан иборат гуруҳни текширмоқда. Деталнинг яроқли стандартга мувофиқ бўлиш эҳтимоли 0,6 га тенг. Яроқли деб тан олинадиган деталнинг энг катта эҳтимолли сони топилсин.

Ечиш. Шартга кўра $n=24$, $p=0{,}6$ бўлади. Унда

$$np-(1-p)=24\cdot 0{,}6-(1-0{,}6)=14{,}4-0{,}4=14,$$
$$np+p=24\cdot 0{,}6+0{,}6=14{,}4+0{,}6=15$$

бўлиб, энг катта эҳтимолли k_0 сон (23.15) муносабатга кўра $14\leqslant$ $\leqslant k_0\leqslant 15$ тенгсизликларни қаноатлантириши керак. Демак, бу муносабатдан кўринадики, энг катта эҳтимолли сон иккита бўлади: $k_0=14$, $k_0+1=15$.

8-§. Пуассон теоремаси

Биз юқорида ўрганган Бернулли схемасида n та эркли тажрибада A ҳодисанинг k марта рўй бериши эҳтимоли Бернулли формуласи билан ҳисоблашнини кўрдик. Бернулли формуласини келтириб чиқаришда A ҳодисанинг ҳар бир тажрибада рўй бериш эҳтимоли ўзгармас ва у p га тенг бўлсин деб олинди $(0<p<1]$.

Кўпгина масалаларда ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p тажрибалар сони n га боғлиқ бўлиб, n нинг ортиб бориши билан p нинг камайиб боришига боғланган бўлади. Бундай ҳолда Бернулли схемаси учун қуйидаги теорема ўринли бўлади.

23.6-теорема. (Пуассон теоремаси). *Агар Бернулли схемасида $n\to\infty$ да $p\to 0$ ва $np\to\lambda\,(\lambda>0)$ бўлса, у ҳолда $n\to\infty$ да ушбу муносабат ўринли бўлади:*

$$P_n(k)\to\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad \text{ёки} \quad P_n(k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}. \qquad (23.16)$$

Бу тақрибий формулани Пуассон формуласи дейилади.

Исбот. Маълумки, n та ўзаро эркли тажрибада A ҳодисанинг k марта рўй бериш эҳтимоли $P_n(k)=C_n^k\,p^k(1-p)^{n-k}$ бўлади, бунда $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Кейинги тенгликни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ (n-k)(n-k+1)\ \ldots\ n}{k!\ 1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ (n-k)}=$$
$$=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}=\frac{n\cdot n\left(1-\frac{1}{n}\right)n\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots n\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!}=$$
$$=\frac{n^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

Бу тенгликдан эса

$$\frac{k!}{n^k} C_n^k = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \qquad (23.17)$$

бўлиши келиб чиқади.

Энди $0 \leqslant a_k \leqslant 1$ $(1 \leqslant k \leqslant n,\ n \geqslant 1)$ сонлар учун ўринли бўлган ушбу

$$(1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n) \geqslant 1 - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

содда тенгсизликдан фойдаланиб топамиз.

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \geqslant 1 - \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{k-1}{n}\right).$$

Равшанки,

$$\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{k-1}{n} = \frac{1}{n}(1 + 2 + \dots + (k-1)) =$$

$$= \frac{1}{n}\frac{(k-1)k}{2} = \frac{k(k-1)}{2n}.$$

Демак,

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \geqslant 1 - \frac{k(k-1)}{2n}. \qquad (23.18)$$

Натижада (23.17), (23.18) муносабатлардан

$$\frac{k!}{n^k} C_n^k \geqslant 1 - \frac{k(k-1)}{2n}$$

бўлиши келиб чиқади. Агар $\frac{k!}{n^k} C_n^k \leqslant 1$ эканлигини эътиборга олсак, у ҳолда

$$1 - \frac{k(k-1)}{2n} \leqslant \frac{k!}{n^k} C_n^k \leqslant 1$$

бўлишини, яъни

$$\frac{n^k}{k!}\left(1 - \frac{k(k-1)}{2n}\right) \leqslant C_n^k \leqslant \frac{n^k}{k!}$$

бўлишини топамиз. Бу тенгсизликни $p^k(1-p)^{n-k}$ га кўпайтирсак, унда қуйидаги тенгсизликлар ҳосил бўлади:

$$\left(1 - \frac{k(k-1)}{2n}\right)\frac{n^k}{k!} p^k (1-p)^{n-k} \leqslant C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n^k}{k!} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Демак,

$$\left(1 - \frac{k(k-1)}{2n}\right)\frac{n^k}{k!} p^k (1-p)^{n-k} \leqslant P_n(k) \leqslant \frac{n^k}{k!} p^k (1-p)^{n-k}. \qquad (23.19)$$

Энди шу тенгсизликда қатнашувчи $\frac{n^k}{k!} p^k (1-p)^{n-k}$ ифодани қуйидагича ёзамиз:

$$\frac{n^k}{k!} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{(np)^k}{k!} (1-p)^{-k} \cdot (1-p)^n =$$

$$= \frac{(np)^k}{k!} (1-p)^{-k} \left(1 - \frac{np}{n}\right)^n = \frac{(np)^k}{k!} (1-p)^{-k} \left[\left(1 - \frac{np}{n}\right)^{-\frac{n}{np}}\right]^{-np}.$$

Агар $n \to \infty$ да $np \to \lambda$, $1 - \frac{k(k-1)}{2n} \to 1$, $(1-p)^{-k} \to 1$ $(p \to 0)$ ва

$$\frac{(np)^k}{k!} (1-p)^{-k} \left[\left(1 - \frac{np}{n}\right)^{-\frac{n}{np}}\right]^{-np} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

бўлишини эътиборга олсак, унда (23.19) муносабатдан

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

бўлишини топамиз. Теорема исботланди.

Пуассон формуласи тажрибалар сони етарлича катта бўлиб, ҳар бир тажрибада ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p етарлича кичик бўлганда $P_n(k)$ эҳтимолни тақрибий ҳисоблашга имкон беради.

Мисол. Дарслик 200 000 нусхада босиб чиқарилган. Дарсликнинг яроқсиз (брак) бўлиш эҳтимоли 0,00005 га тенг. Бу тиражда роса бешта яроқсиз китоб бўлиш эҳтимоли топилсин.

Ечиш. Шартга кўра $n = 200\,000$, $p = 0{,}00005$, $k = 5$. У ҳолда $np = 200\,000 \cdot 0{,}00005 = 10$ бўлиб, (23.16) формулага асосан

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{10^5}{5!} e^{-10} \approx 0{,}0375$$

бўлади. Демак, изланаётган эҳтимол $P_{200000}(5) \approx 0{,}0375$ бўлади.

9-§. Муавр — Лапласнинг локал ва интеграл теоремалари

Бернулли схемасида $P_n(k)$ эҳтимолни топиш учун ушбу $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ формулага эга бўлган эдик. Бу формула содда бўлса ҳам ундан, айниқса, тажрибалар сони катта бўлганда фойдаланиш анча қийин бўлади. Натижада бу ифодани ўзига қараганда соддароқ ва айни пайтда ҳисоблаш учун осон бўлган ифода билан тақрибий ифодалаш масаласи туғилади. Бу масала баъзи ҳоллар учун Муавр — Лапласнинг локал ва интеграл теоремаси ёрдамида ҳал этилади. Қуйида уларни исботсиз келтирамиз.

23.7-теорема. (Муавр — Лапласнинг локал теоремаси). Агар Бернулли схемасида n етарлича катта бўлиб, ҳар бир синашда A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли $p (0 < p < 1)$ ўзгармас бўлса, у ҳолда $P_n(k)$ эҳтимол учун ушбу

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}} \tag{23.20}$$

тақрибий формула ўринли бўлади.

Агар

$$x = \frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

дейилса, у ҳолда

$$\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)} = \frac{x^2}{2}$$

бўлиб, юқоридаги (23.20) формула қуйидаги кўринишга келади.

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{x^2}{x}} = \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Ушбу $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ белгилаш киритсак, у ҳолда

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} \varphi(x). \tag{23.21}$$

Бу ерда $\varphi(x)$ жуфт функция бўлиб, унинг қийматлари учун жадваллар тузилган (Иловадаги 1-жадвал).

Мисол. Ҳар бир экилган чигитни униб чиқиш (A ҳодиса) эҳтимоли ўзгармас бўлиб, $P(A) = p = 0{,}8$ га тенг бўлса, экилган 100 та чигитдан униб чиққанлар сони 85 та бўлиш эҳтимолини топинг.

Ечиш. Масала шартига кўра $n = 100$, $p = P(A) = 0{,}8$, $q = 1 - p = 0{,}2$, $k = 85$.

Равшанки, талаб қилинган $P_{100}(85)$ эҳтимолни Бернулли формуласи билан $P_{100}(85) = \frac{100!}{85!85!}(0{,}8)^{85} \cdot (0{,}2)^{15}$ аниқ ҳисоблаш (n — катта бўлган ҳолда) жуда қийин, бундай ҳолда p — ўзгармас $(0 < p < 1)$ бўлганда Муавр — Лапласнинг локал теоремасидан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. Бизни мисолда бу тақрибий формуладан фойдаланиш учун аввало қуйидаги миқдорни ҳисоблаймиз:

$$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{85 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{85-80}{\sqrt{16}} = \frac{5}{4} = 1{,}25.$$

Муавр — Лапласнинг локал теоремасига асосан

$$P_{100}(85) \approx \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} \cdot \varphi(1{,}25) = \frac{1}{4} \varphi(1{,}25).$$

Иловадаги жадвалдан $\varphi(1{,}25) \approx 0{,}1826$ эканлигидан, талаб қилинган эҳтимоллик $P_{100}(85) \approx \frac{1}{4} \cdot 0{,}1826 = 0{,}0456$ бўлади.

Мазкур бобнинг 7-§ да n та эркли тажрибада A ҳодисанинг ками билан k_1 марта ва кўпи билан k_2 марта рўй бериш ҳодисаси $\{k_1 \leqslant \mu \leqslant k_2\}$ нинг эҳтимоли бўлишини кўрган эдик.

$$P_n\{k_1 \leqslant \mu \leqslant k_2\} = \sum_{m=k_1}^{k_2} P_n(m)$$

Муавр — Лапласнинг интеграл теоремаси n етарлича катта бўлганда $P_n\{k_1 \leqslant \mu \leqslant k_2\}$ эҳтимолни тақрибий ифодаловчи формулани беради.

23.8-теорема. Бернулли схемасида локал теорема шартлари $P_n\{k_1 \leqslant \mu \leqslant k_2\}$ эҳтимол учун ушбу

$$P_n\{k_1 \leqslant \mu \leqslant k_2\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{k_1-np}{\sqrt{np(1-p)}}}^{\frac{k_2-np}{\sqrt{np(1-p)}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \tag{23.22}$$

тақрибий формула ўринли бўлади, бу ерда $0 < p < 1$.

Ушбу

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \tag{23.23}$$

Лаплас функцияси тоқ функция бўлиб, x нинг турли қийматларига интегралнинг мос қийматлари жадвали тузилган (Илова, 2-жадвал).

Исбот. Ҳақиқатан ҳам, аниқ интегралнинг хоссасига кўра

$$P_n\{k_1 \leqslant \mu \leqslant k_2\} \approx \int\limits_{x'}^{x''} e^{-t^2/2} dt + \int\limits_{x'}^{0} e^{-t^2/2} dt + \int\limits_0^{x''} e^{-t^2/2} dt =$$

$$= \int\limits_0^{x''} e^{-t^2/2} dt - \int\limits_0^{x'} e^{-t^2/2} dt$$

бўлади. Бу ерда

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}}, \qquad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

(23.23) ни ҳисобга олсак,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x'}^{x''} e^{-t^2/2} dt = \Phi(x'') - \Phi(x') \tag{23.24}$$

эканлиги келиб чиқади.

Иловадаги 2-жадвалда $\Phi(x)$ Лаплас функциясининг қийматлари $0 \leqslant x < 5$ учун берилган бўлса, $\Phi(x)$ нинг қийматини тақрибан 0,5 деб олиш мумкин.

Мисол. Таваккалига олинган пилланинг яроқсиз чиқиш эҳтимоли 0,2 га тенг. Тасодифан олинган 400 та пилладан 70 тадан 130 тагача яроқсиз бўлиш эҳтимоли топилсин.

Ечиш. Шартга кўра $n = 400$, $k_1 = 70$, $k_2 = 130$, $p = 0{,}2$, $q = 1 - p = 0{,}8$ бўлади. Равшанки,

$$x'_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{70 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2(1-0,2)(1-0,2)}} = -\frac{10}{8} =$$
$$= -1,25; \; x'' = 6,25.$$

Юқорида келтирилган (23.24) формулага мувофиқ изланаётган эҳтимол тахминан

$$P_n\{k_1 \leqslant \mu \leqslant k_2\} = P_{400}\{70 \leqslant \mu \leqslant 130\} \approx \Phi(6,25) - \Phi(-1,25)$$

бўлади. Жадвалдан ҳамда $\Phi(x)$ нинг тоқ функциялигини эътиборга олиб қуйидагиларни топамиз:

$$\Phi(-1,25) = -0,39435, \quad \Phi(6,25) = 0,5$$

(2-иловага қаралсин), у ҳолда

$$P_{400}\{70 \leqslant \mu \leqslant 130\} \approx 0,5 - (-0,39435) = 0,89435$$

бўлади. Демак, изланаётган эҳтимоллик

$$P_{400}\{70 \leqslant \mu \leqslant 130\} \approx 0,89435.$$

Фараз қилайлик, n та эркли тажрибада A ҳодиса μ марта рўй берсин. Ҳар бир тажрибада A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли $p(0<p<1)$ бўлсин. Маълумки, $\frac{\mu}{n}$ миқдор A ҳодисанинг нисбий частотаси бўлади.

Юқорида келтирилган Муавр—Лапласнинг интеграл теоремасидан фойдаланиб, нисбий частота $\frac{\mu}{n}$ нинг ўзгармас эҳтимол p дан четланиш эҳтимолини топиш мумкин:

$\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам ушбу $\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon$ тенгсизлик орқали ифодаланадиган ҳодисанинг эҳтимоли учун

$$P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \approx 2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right)$$

тақрибий формула ўринли бўлишини кўрсатамиз.

Равшанки,

$$\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \frac{\mu}{n} - p < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}} <$$
$$< \frac{\mu - np}{n} \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}} < \varepsilon \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}} \Leftrightarrow -\varepsilon \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}} <$$
$$< \frac{\mu - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \varepsilon \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}.$$

Демак,

$$P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = P\left\{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}} < \frac{\mu - np}{\sqrt{np(1-p)}} <\right.$$
$$\left. < \varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right\}. \qquad (23.25)$$

Муавр—Лапласнинг интеграл теоремасидан фойдаланиб топамиз:

$$P\left\{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}<\frac{\mu-np}{\sqrt{np(1-p)}}<\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right\}\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}}e^{-x^2/2}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times$$

$$\times 2\int\limits_{0}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}}e^{-x^2/2}\,dx=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right).$$

Бу ҳолда (23.25) муносабатдан

$$P\left\{\left|\frac{\mu}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}\approx 2\Phi\left(\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right) \tag{23.26}$$

бўлиши келиб чиқади. Бу формуладан ε, n ва эҳтимол қийматларини топиш мумкин.

Мисол. A—тангани ташлаш тажрибасида танганинг гербли томони билан тушиш ҳодисаси бўлсин. Тангани 400 марта ташланганда A ҳодиса нисбий частотаси $\frac{\mu}{400}$ нинг 0,5 эҳтимолдан абсолют қиймат бўйича четланиши 0,08 дан кичик бўлиш эҳтимолини топинг.

Ечиш. Шартга кўра $n=400$, $p=0,5$, $\varepsilon=0,08$. У ҳолда (23.26) формулага асосан:

$$P\left\{\left|\frac{\mu}{400}-0,5\right|<0,8\right\}\approx 2\Phi\left(0,08\cdot\sqrt{\frac{400}{0,5\cdot 0,5}}\right)=2\Phi(3,2).$$

Жадвалдан $\Phi(3,2)=0,49931$ ни олсак,

$$P\left\{\left|\frac{\mu}{400}-0,5\right|<0,08\right\}\approx 0,99862$$

бўлади.

XXIV БОБ. ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАР

1-§. Тасодифий миқдорлар турлари

Табиатдаги ҳодисаларни кузатиш жараёнида (ёки тажриба натижаларини кузатишда) турли характердаги миқдорларга дуч келамиз. Масалан, битта ғўза тупидаги кўсаклар сони, мўлжалга қараб отилган ўқнинг мўлжалланган нуқтадан узоқлашиш миқдори ва ҳ.к. Шунга ўхшаш миқдорларни жуда кўплаб келтириш мумкин.

Масалан, Самарқанд шаҳрида 1995 йилнинг май ойида туғиладиган ўғил болалар сонини аввалдан айтиб бўлмайди, бу сон турли тасодифий ҳолатларга боғлиқ бўлиб, у аввалдан аниқ айтиб бўлмайдиган маълум бир қийматлардан бирини қабул қилади.

Демак, шундай миқдорлар бўлар эканки, уларнинг қийматлари турли тасодифий ҳолатлар таъсирида бўлиб, уларни аввалдан қандай қийматга тенг бўлишини аниқ айтиб бўлмас экан.

Берилган шарт-шароитларда тасодифий ҳолатга боғлиқ равишда у ёки бу сон қийматлардан бирини қабул қиладиган ўзгарувчи миқдор *тасодифий миқдор* дейилади.

Одатда тасодифий миқдорлар ξ (ёки η) (ёки X, Y, Z, ...) ҳарфи билан белгиланади.

Мисоллар. 1. Ўйин соққасини ташлаш тажрибасини қарайлик. Бу тажриба натижасида соққанинг 1, 2, 3, 4, 5, 6 рақамли (очколи) томонлари тушиши мумкин. Бунда чиқадиган ёқлар (очколар) сонини аввалдан айтиб бўлмайди. Демак, очколар сони тасодифий миқдорлар бўлади. Уни ξ билан белгилайлик. Бу ξ тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари 1, 2, 3, 4, 5 ва 6 сонлари бўлади.

2. Тўпдан отилган снаряднинг учиб ўтган масофасини қарайлик. Бу масофа бир қанча ҳолатларга: нишонга олувчи асбобнинг ўрнатилишига, шунингдек, аввалдан тўла-тўкис ҳисобга олиб бўлмайдиган бир қанча бошқа сабабларга (шамолнинг кучи ва йўналиши, ҳарорат ва бошқаларга) боғлиқ бўлади. Шу сабабли ҳам бу масофани аввалдан айтиб бўлмайди, у тасодифий миқдор бўлади.

Бу ξ тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари чексиз бўлиб, улар бирор $(a;\ b)$ оралиқда жойлашган бўлади (143-чизма).

Чекли ёки саноқли сондаги қийматларни қабул қиладиган тасодифий миқдор *дискрет тасодифий миқдор* дейилади.

Масалан, юқорида келтирилган мисолларнинг биринчисидаги тасодифий миқдор дискрет тасодифий миқдор бўлади.

Демак, дискрет тасодифий миқдорнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар сони чекли ёки саноқли бўлади. Одатда тасодифий миқдорнинг қабул қиладиган қийматлари бундай белгиланади:

$$\xi: x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \quad (\text{ёки } X: x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n).$$

Бирор оралиқдаги барча қийматларни қабул қилиши мумкин бўлган миқдор узлуксиз тасодифий миқдор дейилади. Масалан юқорида келтирилган мисоллардан иккинчисидаги тасодифий миқдор узлуксиз тасодифий миқдор бўлади. (Узлуксиз тасодифий миқдорларнинг аниқ таърифини кейинроқ келтирамиз.)

2-§. Тасодифий миқдор эҳтимолларининг тақсимот қонуни

Юқорида кўрдикки, тасодифий миқдорни ўрганиш учун аввало бу миқдорнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматларини билиш лозим. Бироқ бу қийматларнигина билиш тасодифий миқдорни тўла тавсифлаб бермайди. Қуйида тасодифий миқдорни тўла тавсифлайдиган тушунча билан танишамиз.

1. Дискрет тасодифий миқдор эҳтимолларининг тақсимот қонуни. ξ дискрет тасодифий миқдор бўлиб, унинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ бўлсин.

Агар ξ тасодифий миқдорнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматларининг эҳтимоллари маълум бўлса, ξ *дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимоти берилган* дейилади.

Айтайлик, ξ дискрет тасодифий миқдор $x_1, x_2, \ldots, x_n$ қийматларни мос равишда $p_1, p_2, \ldots, p_n$ эҳтимоллар билан қабул қилсин:

$$P(\xi = x_1) = p_1,\ P(\xi = x_2) = p_2,\ \ldots,\ P(\xi = x_n) = p_n.$$

Бу маълумотлардан фойдаланиб қуйидаги жадвални тузамиз:

ξ	x_1	x_2	...	x_n
$P(\xi = x_k)$	p_1	p_2	...	p_n

(24.1)

Бу жадвалнинг биринчи сатрида ξ тасодифий миқдорнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари, иккинчи сатрида эса уларга мос эҳтимоллари ёзилган.

Равшанки:

$$\{\xi = x_1\},\ \{\xi = x_2\},\ \ldots,\ \{\xi = x_n\}$$

ҳодисалар бир-бирига боғлиқ бўлмаган ҳодисалар бўлиб, тасодифий миқдор, албатта битта қийматни қабул қилиши керак бўлгани учун

$$\{\xi = x_1\} \cup \{\xi = x_2\} \cup \ldots \cup \{\xi = x_n\} = U$$

бўлади (U — муқаррар ҳодиса).

Қўшиш теоремасидан фойдаланиб топамиз:

$$P\{\xi = x_1\} + P\{\xi = x_2\} + \ldots + P\{\xi = x_n\} = P\{U\}.$$

Натижада $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$, яъни $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$ тенгликка келамиз. Бу эса ξ тасодифий миқдорнинг қабул қилиши мумкин бўлган барча қийматлари эҳтимолларининг йиғиндиси 1 га тенг бўлишини билдиради.

Дискрет тасодифий миқдор учун киритилган юқоридаги (24.1) жадвал тасодифий миқдорни тўла тавсифлаб беради. Шунинг учун ҳам (24.1) жадвал ξ дискрет *тасодифий миқдор эҳтимолларининг тақсимот қонуни* деб аталади.

Дискрет тасодифий миқдорнинг баъзи муҳим тақсимот қонунларини келтирамиз.

n та ўзаро эркин тажриба ўтказилган бўлиб, ҳар бир тажрибада A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли ўзгармас p га тенг бўлсин. Бундай тажрибада A ҳодисанинг k марта рўй бериш эҳтимоли $P_n(k) = C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ га тенг эди: Бу ҳолда дискрет тасодифий миқдор ξ нинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари ξ: 0, 1, 2, ..., n бўлади: Равшанки, тасодифий миқдор бу қийматларни мос равишда ушбу

$$P_n(k)=P_n(\xi=k)=C_n^k\ p^k(1-p)^{n-k},\ k=\overline{0,n}$$

эҳтимоллар билан қабул қилади ҳамда $\sum_{k=0}^{n}P_n(k)=(p+q)^n=1.$

Натижада ушбу

$(\xi)=k$	0	1	2		k		n
$P_k(k)=$ $=P_n(\xi=k)$	$(1-p)^n$	$C_n^1p(1-p)^{n-1}$	$C_n^2p^2(1-p)^{n-2}$	...	$C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$	...	p^n

жадвалга эга бўламиз. Одатда бу жадвал *биномиал тақсимот* деб аталади.

Мисол. Экилган ҳар бир чигитнинг униб чиқиш эҳтимоли 0,8 га тенг бўлса, экилган 3 та чигитдан униб чиққан чигитлар сонининг қонуни тузилсин.

Ечиш. Экилган ҳар бир чигит униб чиқиши ҳам, униб чиқмаслиги ҳам мумкин. Экилган 3 та чигитдан униб чиқишлар сони тасодифий миқдор бўлиб, у 0, 1, 2, 3 қийматларни қабул қилиши мумкин. Бу қийматларни қабул қилиш эҳтимоли Бернулли формуласи ёрдамида топилади:

$$P_3\ (\xi=0)=C_3^0p^0\ (1-p)^3=(0{,}8)^0\cdot(0{,}2)^3=0{,}008,$$

$$P_3\ (\xi=1)=C_3^1\ p\ (1-p)^2=3\cdot(0{,}8)\cdot(0{,}2)^2=0{,}096,$$

$$P_3\ (\xi=2)=C_3^2\ p^2\ (1-p)=3\cdot(0{,}8)^2\cdot(0{,}2)=0{,}384,$$

$$P_3\ (\xi=3)=C_3^3\ p^3\ (1-p)^0=(0{,}8)^3\cdot(0{,}2)^0=0{,}512.$$

Демак, экилган 3 та чигитдан униб чиқишлар сони ξ тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни қуйидагича бўлади:

ξ	0	1	2	3
p	0,008	0,096	0,384	0,512

Равшанки, бу эҳтимоллар йиғиндиси:

$$0{,}008+0{,}096+0{,}384+0{,}512=1.$$

24.1-эслатма. ξ тасодифий миқдор 0, 1, 2, 3, ... қийматларни ушбу

$$P\ (\xi=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

эҳтимоллар билан қабул қилсин.

Натижада қуйидаги тақсимот жадвали ҳосил бўлади.

ξ	0	1	2	...
$P(\xi = k)$	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$	...

Бу жадвал *Пуассон тақсимоти* деб аталади. Бу ерда

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_n(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = e^0 = 1;$$

чунки қаторлар назариясидан:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e$$

эканлиги маълум.

3-§. Узлуксиз тасодифий миқдорлар. Тақсимот функцияси.

Биз юқорида дискрет тасодифий миқдор ва унинг тақсимот қонунини ўргандик. Агар тасодифий миқдор узлуксиз бўлса, бу тасодифий миқдорнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари бирор (a, b) оралиқни ташкил этади. Бинобарин бу ҳолда тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини юқоридаги ўхшаш жадвал шаклида ёзиб бўлмайди.

Фараз қилайлик, ξ ихтиёрий тасодифий миқдор, x эса бирор ҳақиқий сон бўлсин. Қаралаётган тасодифий миқдор учун ушбу $\{\xi < x\}$ ҳодисани қарайлик. Бу тажриба натижасида рўй берган миқдорнинг x сондан кичик бўлиш ҳодисасини билдиради. Энди шу ҳодисанинг эҳтимоли

$$P\{\xi < x\}$$

ни қарайлик. Равшанки, бу эҳтимол олинган x ҳақиқий сонга боғлиқ, яъни x нинг функцияси бўлади. Одатда $P\{\xi < x\}$ эҳтимол билан аниқланган функция ξ тасодифий миқдорнинг *тақсимот функцияси* деб аталади ва $F(x)$ каби белгиланади:

$$F(x) = P\{\xi < x\}. \tag{24.2}$$

Мисол. Ушбу жадвал билан берилган ξ дискрет тасодифий миқдор тақсимот қонунининг тақсимот функцияси топилсин:

ξ	-1	0	2	2,5
$P\{\xi < x\}$	0,2	0,3	0,4	0,1

Жадвалдан кўринадики, ξ тасодифий миқдорнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари -1, 0, 2, 2,5 бўлади. Бу сонларни сон ўқида ясаймиз.

$$-1,\ 0\ 1\ 2;\ 2{,}5$$

Айтайлик, $x \leqslant -1$ бўлсин. Унда $\{\xi < x\}$ ҳодисаси мумкин бўлмаган ҳодиса бўлади. $\{\xi < x\} = V$. Чунки бу ҳолда тасодифий миқдорнинг $\xi < x$ тенгсизликни қаноатлантирувчи битта ҳам қиймати йўқ. Демак,

$$F(x) = P\{\xi < x\} = P(V) = 0$$

бўлади. Энди $-1 < x \leqslant 0$ бўлсин. Бу ҳолда $\{\xi < x\}$ ҳодисаси $\{\xi < x\} = \{\xi = -1\}$ бўлади. Бундан эса

$$F(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi = -1\} = 0{,}2$$

келиб чиқади.

Энди $0 < x \leqslant 2$ бўлсин.

Бу ҳолда $\{\xi < x\}$ ҳодисаси

$$\{\xi < x\} = \{\xi = -1\} \cup \{\xi = 0\}$$

бўлиб,

$$F(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi = -1\} + P\{\xi = 0\} =$$
$$= 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$$

бўлади.

Фараз қилайлик, $2 < x \leqslant 2{,}5$ бўлсин. Бу ҳолда ҳодиса

$$\{\xi < x\} = \{\xi = 1\} \cup \{\xi = 0\} \cup \{\xi = 2\}$$

бўлиб,

$$F(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi = -1\} + P\{\xi = 0\} +$$
$$+ P\{\xi = 2\} = 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}9$$

бўлади.

Ва, ниҳоят, $x > 2{,}5$ бўлганда $\{\xi < x\}$ ҳодисаси муқаррар ҳодиса бўлиб,

$$F(x) = P\{\xi < x\} = P\{U\} = 1$$

бўлади.

Шундай қилиб, қаралаётган тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар} \quad x \leqslant -1 \quad \text{бўлса}, \\ 0{,}2 & \text{агар} \quad -1 < x \leqslant 0 \quad \text{бўлса}, \\ 0{,}5, & \text{агар} \quad 0 < x \leqslant 2 \quad \text{бўлса}, \\ 0{,}9, & \text{агар} \quad 2 < x \leqslant 2{,}5 \quad \text{бўлса}, \\ 1, & \text{агар} \quad x > 2{,}5 \quad \text{бўлса} \end{cases}$$

бўлади. Унинг графиги 144-чизмада тасвирланган.

4-§. Тақсимот функциясининг хоссалари

Ушбу параграфда тасодифий миқдор тақсимот функциясининг хоссаларини келтирамиз.

Фараз қилайлик, ξ — тасодифий миқдор берилган бўлиб, $F(x)$ эса унинг тақсимот функцияси бўлсин.

1°. *Тақсимот функцияси $F(x)$ учун ушбу муносабат ўринли бўлади:*

$$0 \leqslant F(x) \leqslant 1. \tag{24.3}$$

Бу хосса тақсимот функцияси таърифидан ҳамда ҳодиса эҳтимолининг 0 билан 1 орасида бўлишидан бевосита келиб чиқади:

$$\begin{matrix} F(x) = P\{\xi < x\} \\ 0 \leqslant P\{\xi < x\} \leqslant 1 \end{matrix} \Rightarrow 0 \leqslant F(x) \leqslant 1.$$

2°. *Тақсимот функцияси $F(x)$ ўсувчи функция бўлади.*

Исбот. Ихтиёрий иккита x_1 ва x_2 сонни олайлик. Бу сонлар учун $x_1 < x_2$ бўлсин:

Равшанки, $\{\xi < x_2\}$ ҳодисаси $\{\xi < x_1\}$ ва $\{x_1 \leqslant \xi < x_2\}$ ҳодисалар йиғиндисига тенг:

$$\{\xi < x_2\} = \{\xi < x_1\} \cup \{x_1 \leqslant \xi < x_2\}.$$

Қўшиш теоремасига асосан

$$P\{\xi < x_2\} = P\{\xi < x_1\} + P\{x_1 \leqslant \xi < x_2\}. \tag{24.4}$$

Маълумки, $P\{\xi < x_2\} = F(x_2)$, $P\{\xi < x_1\} = F(x_1)$. Унда (24.4) муносабатдан

$$F(x_2) = F(x_1) + P\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} \tag{24.5}$$

бўлиши келиб чиқади.

Агар $P\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} \geqslant 0$ эканлигини эътиборга олсак, унда сўнгги тенгликдан $F(x_2) \geqslant F(x_1)$ бўлишини топамиз. Демак,

$$\forall\, x_1,\ x_2,\ x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leqslant F(x_2).$$

Бу эса тақсимот функция $F(x)$ нинг ўсувчи эканини билдиради.

24.1-натижа. *Тасодифий миқдорнинг $[x_1; x_2)$ оралиққа тушиш эҳтимоли*

$$P\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$$

бўлади.

Бу тенглик юқоридаги (24.5) муносабатдан келиб чиқади. Тақсимот функциясининг навбатдаги хоссаларини исботсиз келтирамиз.

3°. *Агар $F(x)$ тақсимот функцияси бўлса, у ҳолда*

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1, \quad \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

бўлади.

4°. *Агар x_1 нуқта ξ тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси $F(x)$ нинг узлуксизлик нуқтаси бўлса, у ҳолда*

$$P\{\xi = x_1\} = 0$$

бўлиб,

$$P\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} = P\{x_1 < \xi < x_2\},$$
$$P\{x_1 < \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1) \tag{24.6}$$

бўлади.

Энди узлуксиз тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси билан боғлиқ бўлган эҳтимол зичлиги тушунчасини келтирамиз.

Агар ξ тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси $F(x)$ дифференциалланувчи функция бўлса, унинг ҳосиласи тасодифий миқдорнинг эҳтимол зичлиги (дифференциал функцияси) деб аталади ва $p(x)$ каби белгиланади:

$$p(x) = F'(x). \tag{24.7}$$

Энди $p(x)$ нинг хоссаларини келтирамиз:

1°. *$\forall x$ учун $p(x) > 0$ бўлиб,*

$$P\{x_1 < \xi < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\, dx$$

бўлади.

Исбот. Таърифга кўра

$$p(x) = F'(x)$$

бўлади. $F(x)$ тақсимот функцияси ўсувчи функция бўлганлиги сабабли

$$F'(x) \geqslant 0$$

бўлади. Демак, $p(x) \geqslant 0$.

Юқоридаги (24.6) ҳамда Ньютон—Лейбниц формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$P\{x_1 < \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1); \quad F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} F'(x)\, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\{x_1 < \xi < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} F'(x)\, dx \Rightarrow P\{x_1 < \xi < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\, dx.$$

2°. *Агар $p(x)$ тасодифий миқдорнинг эҳтимол зичлиги бўлса, у ҳолда*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$$

бўлади.

Исбот. Хосмас интеграл таърифига кўра

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, dx = \lim_{\substack{u \to +\infty \\ v \to -\infty}} \int_{v}^{u} p(x)\, dx \tag{24.8}$$

бўлади.

Агар

$$\int_{v}^{u} p(x)\,dx = F(u) - F(v)$$

ҳамда $\lim\limits_{u\to+\infty} F(u) = 1$, $\lim\limits_{u\to-\infty} F(v) = 0$ бўлишини эътиборга олсак, унда (24.8) муносабатдан

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = \lim_{\substack{u\to+\infty\\ v\to-\infty}} \int_{v}^{u} p(x)\,dx = \lim_{\substack{u\to+\infty\\ v\to-\infty}} [F(u) - F(v)] =$$

$$= \lim_{u\to+\infty} F(u) - \lim_{v\to-\infty} F(v) = 1 - 0 = 1$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1.$$

3°. *Агар тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси* $F(x)$, *эҳтимол зичлиги эса* $p(x)$ *бўлса, у ҳолда*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt$$

бўлади.

Исбот. Хосмас интеграл таърифига кўра

$$\int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt = \lim_{v\to-\infty} \int_{v}^{x} p(t)\,dt$$

бўлади. Юқорида исбот этилган 1°- хоссадан фойдаланиб,

$$\int_{v}^{x} p(t)\,dt = F(x) - F(v)$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$\int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt = \lim_{v\to-\infty} \int_{v}^{x} p(t)\,dt = \lim_{v\to-\infty} [F(x) - F(v)] =$$

$$= F(x) - \lim_{v\to-\infty} F(v).$$

Агар $\lim\limits_{v\to-\infty} F(v) = 0$ бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt = F(x) \tag{24.9}$$

га эга бўламиз. Бу эса 3° хоссани исботлайди. Бу хосса тасодифий миқдор тақсимот функцияси билан унинг эҳтимол зичлиги орасидаги боғланишни ифодалайди.

Мисол. Тасодифий миқдорнинг эҳтимол зичлиги

$$p(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

бўлса, шу тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси топилсин.

Ечиш. Юқорида келтирилган (24.9) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\pi(1+t^2)}\,dt=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}t\Big|_{-\infty}^{x}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}.$$

Демак, $F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x.$

5-§. Текис тақсимот

Бирор ξ тасодифий миқдор берилган бўлсин. Агар бу тасодифий миқдорнинг $p(x)$ эҳтимол зичлиги бирор оралиқда ўзгармас функция бўлиб, оралиқдан ташқарида эса нолга тенг бўлса, у ҳолда тасодифий миқдор шу оралиқда *текис тақсимланган* деб аталади.

Демак, ξ тасодифий миқдор текис тақсимланган бўлса, унинг эҳтимол зичлиги

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & \text{агар } a\leqslant x<b \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } x<a \text{ ва } x>b \text{ бўлса,}\end{cases}$$

бўлади (145-чизма).

Ҳақиқатан ҳам,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\,dx=\int_{-\infty}^{a}p(x)\,dx+\int_{a}^{b}p(x)\,dx+\int_{b}^{+\infty}p(x)\,dx=\int_{-\infty}^{a}0\cdot dx+$$

$$+\int_{a}^{b}\frac{1}{b-a}\,dx+\int_{b}^{+\infty}0\cdot dx=\frac{1}{b-a}\cdot x\Big|_{a}^{b}=\frac{1}{b-a}(b-a)=1$$

бўлиб, ундан юқоридаги 2°-хоссанинг ўринли бўлиши келиб чиқади. Агар $a<x<b$ бўлса, у ҳолда

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(x)\,dx=\int_{-\infty}^{a}p(x)\,dx+\int_{a}^{x}p(x)\,dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{a}0\cdot dx+\int_{a}^{x}\frac{1}{b-a}\,dx=\frac{1}{b-a}(x-a)$$

бўлади.

Агар $x \geqslant b$ бўлса, у ҳолда $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} p(x)\,dx +$

$$+\int_{a}^{b} p(x)\,dx + \int_{b}^{x} p(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} 0\cdot dx + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}\,dx + \int_{b}^{x} 0\cdot dx =$$

$$= \frac{1}{b-a}\cdot(b-a) = 1$$

бўлади.

Шундай қилиб, юқоридаги текис тақсимланган тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ агар } x \leqslant a & \text{бўлса,} \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \text{ агар } a < x < b & \text{бўлса,} \\ 1, \quad \text{агар } x \geqslant b & \text{бўлса} \end{cases}$$

бўлади. Унинг графиги 146-чизмада тасвирланган.

6-§. Нормал тақсимот

Агар ξ узлуксиз тасодифий миқдорнинг эҳтимол зичлиги $p(x)$ ушбу

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad (24.10)$$

кўринишда бўлса (бунда a ва σ ўзгармас сонлар, $\sigma > 0$), у ҳолда тасодифий миқдор *нормал тақсимланган* деб аталади.

Одатда қуйидаги

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (24.11)$$

белгилаш киритилади. Бу белгилаш ёрдамида тасодифий миқдорнинг эҳтимол зичлиги ушбу

$$p(x) = \frac{1}{\sigma}\,\varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

кўринишда ёзилади.

(24.11) формулада келтирилган $\varphi(x)$ функциянинг қийматлари жадваллари тузилган (китоб охиридаги иловага қаралсин). Бу функциянинг графиги 147-чизмада тасвирланган.

Энди юқоридаги нормал қонун билан тақсимланган тасодифий миқдорнинг тақсимот функциясини топамиз. Бунинг учун қуйидаги белгилашни қиламиз:

$$\Phi(x) = \int_{0}^{x} \varphi(t)\,dt\,. \qquad (24.12)$$

Равшанки, $\Phi(x)$ функция $\varphi(x)$ га боғлиқ бўлади. (24.12) муносабат билан аниқланган $\Phi(x)$ функция қуйидаги хоссаларга эга бўлади.

1) $\Phi(x)$ функция тоқ функция бўлади: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Ҳақиқатан ҳам, таърифга кўра $\Phi(-x) = \int\limits_0^{-x} \varphi(t)\, dt$ бўлади. Бу интегралда $t = -y$ алмаштириш киритамиз. Унда

$$\int\limits_0^{-x} \varphi(t)\, dt = \int\limits_0^{x} \varphi(-y)\, d(-y) = -\int\limits_0^{x} \varphi(-y)\, dy = -\Phi(x)$$

бўлади. Агар $\varphi(-y) = \varphi(y)$ бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\int\limits_0^{-x} \varphi(t)\, dt = -\int\limits_0^{x} \varphi(y)\, dy$$

бўлишини топамиз. Натижада

$$\Phi(-x) = -\int\limits_0^{x} \varphi(y)\, dy = -\Phi(x).$$

2. Ушбу лимит муносабат ўринли бўлади:

$$\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = \frac{1}{2}.$$

Ҳақиқатан ҳам,

$$\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = \lim_{x\to+\infty} \int\limits_0^{x} \varphi(t)\, dt = \int\limits_0^{+\infty} \varphi(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dt = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Юқорида айтилганлардан фойдаланиб, нормал тақсимланган тасодифий миқдорнинг тақсимот функциясини топамиз:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma}\, \varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} \varphi(t)\, dt = \int\limits_{-\infty}^{0} \varphi(t)\, dt + \int\limits_{0}^{\frac{x-a}{\sigma}} \varphi(t)\, dt = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dt +$$

$$+ \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Шундай қилиб, нормал қонун бўйича тақсимланган тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

бўлади.

Тасодифий миқдор тақсимот қонунининг берилиши шу тасодифий миқдор ҳақида тўлиқ маълумот беради. Аммо баъзи ҳолларда тасодифий миқдор тўғрисида айрим, йиғма маълумотларни билиш лозим бўлади. Бунда тасодифий миқдорнинг сонли характеристикалари — тасодифий миқдорнинг математик кутилиши ва дисперсияси тушунчалари муҳим рол ўйнайди. Биз қуйида шу тушунчалар билан танишамиз.

1-§. Тасодифий миқдорнинг математик кутилиши

Бирор ξ дискрет тасодифий миқдор берилган бўлиб, у $x_1, x_2, \ldots, x_n$ қийматларни мос равишда $p_1, p_2, \ldots, p_n$ эҳтимоллар билан қабул қилсин:

24.1-таъриф. Ушбу

$$x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k$$

йиғинди ξ дискрет *тасодифий миқдорнинг математик кутилиши* деб аталади ва $M\xi$ каби белгиланади:

$$M\xi = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k. \qquad (25.1)$$

Демак, дискрет тасодифий миқдорнинг математик кутилиши бу тасодифий миқдорнинг қабул қилиши мумкин бўлган барча қийматларини уларнинг мос эҳтимолларига кўпайтмалари йиғиндисидан иборат.

Тасодифий миқдор математик кутилишининг маъносини англаш учун битта масалани қараймиз.

Фараз қилайлик, n та тажриба ўтказилган бўлиб, бунда ξ тасодифий миқдор $x_1, x_2, \ldots, x_k$ қийматларни мос равишда $m_1, m_2, \ldots, m_k$ мартадан қабул қилган бўлсин. Равшанки, $m_1+m_2+\ldots+m_k=n$.

Қаралаётган ξ тасодифий миқдор қабул қилган қийматларининг ўрта арифметик қиймати (уни $\overline{x}$ билан белгилайлик)

$$\frac{x_1m_1 + x_2m_2 + \ldots + x_km_k}{n}$$

га тенг бўлади. Бу миқдорни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\overline{x} = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + \ldots + x_km_k}{n} = x_1 \cdot \frac{m_1}{n} + x_2 \frac{m_2}{n} + \ldots + x_k \frac{m_k}{n}.$$

Агар $\frac{m_i}{n}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ ни $\{\xi = x_i\}$ ҳодисанинг нисбий частотаси W_i эканини ҳамда бу нисбий частота $\{\xi = x_i\}$ ҳодисасининг эҳтимоли p_i $\{P\ \{\xi = x_i\} = p_i)$ дан кам фарқ қилишини ($W_i \simeq p_i$) эътиборга олсак, унда

$$\bar{x} = x_1 \cdot \frac{m_1}{n} + x_2 \frac{m_2}{n} + \ldots + x_k \frac{m_k}{n} \approx x_1 W_1 + x_2 W_2 + \ldots + x_k W_k =$$
$$= x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_k p_k = M\xi$$

эканини топамиз. Демак, $\bar{x} = M\xi$.

Бу муносабат ξ тасодифий миқдорнинг математик кутилиши шу тасодифий миқдор кузатилаётган қийматларининг ўрта арифметик қийматига тақрибан тенг эканини кўрсатади (шунинг учун ҳам $M\xi$ ни кўпинча ξ тасодифий миқдорнинг *ўртача қиймати* деб юритилади).

Мисоллар. 1. Биномиал қонун билан тақсимланган тасодифий миқдорнинг математик кутилиши топилсин.

Ечиш. Бу ҳолда, маълумки, ξ дискрет тасодифий миқдор 0, 1, 2, ..., k, ..., n қийматларни мос равишда

$$C_n^0 p^0 (1-p)^{n-0},\ C_n' p (1-p)^{n-1}, \ldots, C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \ldots,$$
$$C_n^{n-1} p^{n-1} (1-p),\ C_n^n p^n (1-p)^0$$

эҳтимоллар билан қабул қилади.

ξ дискрет тасодифий миқдорнинг математик кутилиши таърифга биноан

$$M\xi = 0 \cdot C_n^0 p_0 (1-p)^{n-0} + 1 \cdot C_n' p (1-p)^{n-1} + \ldots +$$
$$+ kC_n^k p^k (1-p)^{n-k} + \ldots + nC_n^n p^n (1-p)^{n-n} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

бўлади.

Энди бу тенгликнинг ўнг томонидаги йиғиндини ҳисоблаймиз.

$$\sum_{k=1}^{n} kC_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{np\,(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} =$$
$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k}. \qquad (25.2)$$

(25.2) тенгликда $k-1$ ни m билан алмаштирамиз. Унда

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k}$$

йиғинди қуйидаги кўринишга келади:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}\ p^{k-1}\,(1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{m!\ (n-m+1)!}\ p^{m}\,(1-p)^{n-1-m} =$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^{m}\ p^{m}\ (1-p)^{n-1-m} = [p+(1-p)]^{n-1} = 1^{n-1} = 1 \quad (25.3)$$

(25.2) ва (25.3) муносабатлардан $\sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k\, p^k\,(1-p)^{n-k} = n\cdot p$ бўлишини топамиз. Натижада

$$M\,\xi = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k\, p^k\,(1-p)^{n-k} = np$$

келиб чиқади.

Демак, биномиал қонун билан тақсимланган ξ дискрет тасодифий миқдорнинг математик кутилиши

$$M\,\xi = np$$

га тенг бўлади.

2. Пуассон қонуни бўйича тақсимланган тасодифий миқдорнинг математик кутилиши топилсин.

Ечиш. Бу ҳолда, маълумки, ξ тасодифий миқдор 0, 1, 2, . . ., n, . . . қийматларни мос равишда $\frac{\lambda^0}{0!}\,e^{-\lambda}$, $\frac{\lambda}{1!}\,e^{-\lambda}$, . . ., $\frac{\lambda^n}{n!}\,e^{-\lambda}$, . . . эҳтимоллар билан қабул қилади. Математик кутилиш таърифига кўра

$$M\,\xi = 0\cdot\frac{\lambda^0}{0!}\,e^{-\lambda} + 1\cdot\frac{\lambda}{1!}\,e^{-\lambda} + 2\cdot\frac{\lambda^2}{2!}\,e^{-\lambda} + \ldots + n\cdot\frac{\lambda^n}{n!}\,e^{-\lambda} + \ldots$$

бўлади. Уни қуйидагича

$$M\,\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\,e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

ёзиб оламиз. Қаторлар назариясидан, маълумки,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{\lambda}.$$

Натижада

$$M\,\xi = \lambda\,e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda\,e^{-\lambda}\,e^{\lambda} = \lambda \qquad (25.4)$$

бўлади.

Энди узлуксиз тасодифий миқдорнинг математик кутилиши тушунчаси билан танишамиз.

Фараз қилайлик, ξ узлуксиз тасодифий миқдорнинг эҳтимол зичлиги $p(x)$ бўлсин.

25.1-таъриф. Ушбу

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx \tag{25.5}$$

миқдор ξ узлуксиз тасодифий миқдорнинг математик кутилиши $M\xi$ деб аталади

Демак, узлуксиз тасодифий миқдорнинг математик кутилиши мавжуд бўлиши учун (25.5) хосмас интеграл абсолют яқинлашувчи бўлиши керак.

Мисоллар. 1. Текис тақсимланган тасодифий миқдорнинг математик кутилиши топилсин.

Ечиш. Текис тақсимланган ξ тасодифий миқдорнинг эҳтимол зичлиги ифодасини (5-§ га қаранг) математик кутилиш ифодаси $M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx$ га қўйиб, ҳисоблаймиз:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} xp(x)\,dx + \int_{a}^{b} xp(x)\,dx + \int_{b}^{+\infty} xp(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{a} x\cdot 0\cdot dx + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}\,x dx + \int_{b}^{+\infty} x\cdot 0\cdot dx = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} x dx =$$

$$= \frac{1}{b-a}\,\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{1}{2(b-a)}\,(b^2-a^2) = \frac{b+a}{2}.$$

Демак, текис тақсимланган ξ тасодифий миқдорнинг математик кутилиши: $M\xi = \frac{a+b}{2}$.

2. Нормал қонун бўйича тақсимланган тасодифий миқдорнинг математик кутилиши топилсин.

Ечиш. Нормал қонун бўйича тақсимланган ξ тасодифий миқдорнинг эҳтимол зичлиги ифодасини (6-§ га қаранг) математик кутилиш ифодасига қўйсак,

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\sigma}\,\varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)dx$$

бўлади. Энди бу интегрални ҳисоблаймиз. $t = \frac{x-a}{\sigma}$ алмаштириш бажарамиз.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma t+a)\varphi(t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma t\varphi(t)\,dt+$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}a\varphi(t)\,dt=\sigma\int_{-\infty}^{+\infty}t\varphi(t)\,dt+a\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,dt.$$

Демак,

$$M\xi=\sigma\int_{-\infty}^{+\infty}t\varphi(t)\,dt+a\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,dt.$$

Агар

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=1,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}t\varphi(t)\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdot te^{-\frac{t^2}{2}}dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0}te^{-\frac{t^2}{2}}dt+\int_{0}^{+\infty}te^{-t^2/2}dt\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\int_{0}^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt+\int_{0}^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt\right]=0$$

бўлишини эътиборга олсак, унда $M\xi=\sigma\cdot 0+a\cdot 1=a$ бўлишини топамиз.

Шундай қилиб, нормал қонун бўйича тақсимланган ξ тасодифий миқдорнинг математик кутилиши $M\xi=a$ бўлади.

Хулоса қилиб бундай айтиш мумкин: тасодифий миқдорнинг математик кутилиши шундай сонни ифодалайдики, бу сон тасодифий миқдор қийматларининг ўрта арифметиги бўлиб, унинг атрофида тасодифий миқдорнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари жойлашган бўлади.

Энди тасодифий миқдор математик кутилишининг хоссаларини келтирамиз:

1°. *Агар C ўзгармас сон бўлса, $MC=C$ бўлади.*

2°. ξ *тасодифий миқдор, C — ўзгармас сон бўлса, у ҳолда $M(C\xi)=CM\xi$ бўлади.*

3°. ξ ва η *тасодифий миқдорлар берилган бўлсин. Унда*

$$M(\xi\pm\eta)=M\xi\pm M\eta$$

бўлади.

4°. *Агар a ва b ўзгармас сонлар бўлса, у ҳолда*

$$M(a\xi+b)=aM\xi+b$$

бўлади.

5°. *Агар ξ ва η ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар бўлса, у ҳолда*

$$M(\xi\cdot\eta)=M\xi\cdot M\eta$$

бўлади.

Энди келтирилган хоссалардан айримларининг исботини келтирамиз:

2°- хоссанинг исботи. ξ тасодифий миқдорнинг қабул қиладиган қийматлари $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ва уларнинг эҳтимоллари мос равишда $p_1, p_2, \ldots, p_n$ бўлсин. У ҳолда $C\xi$ тасодифий миқдорнинг қабул қиладиган қийматлари $Cx_1, Cx_2, \ldots, Cx_n$ ва $C\xi$ нинг мумкин бўлган қийматларининг эҳтимоллари ξ нинг мумкин бўлган тегишли қийматларининг эҳтимолларига тенглигини ҳисобга олсак, $C\xi$ нинг тақсимот қонуни қуйидагича бўлади:

$C\xi$	Cx_1	Cx_2	...	Cx_n
p	p_1	p_2		p_n

Математик кутилишнинг таърифига кўра

$$M(C\xi)=Cx_1\cdot P_1+Cx_2\cdot P_2+\ldots+Cx_nP_n=$$
$$=C(x_1P_1+x_2P_2+\ldots+x_nP_n)=CM\xi$$

бўлади. Демак, $M(C\xi)=CM\xi$ бўлиб, 2°- хосса исбот бўлади.

3°-хоссанинг исботи. ξ ва η тасодифий миқдорларнинг тақсимот қонунлари берилган бўлсин (соддалик учун улар иккитадан қийматлар қабул қилсин):

ξ	x_1	x_2
p	p_1	p_2

η	y_1	y_2
q	q_1	q_2

$\xi+\eta$ тасодифий миқдорнинг қабул қиладиган қийматларини тузамиз. ξ нинг қабул қиладиган қийматларини η нинг қабул қиладиган қийматларига қўшиб, $\xi+\eta$ тасодифий миқдорнинг қабул қиладиган қийматлари

$$x_1+y_1,\quad x_1+y_2,\quad x_2+y_1,\quad x_2+y_2$$

ни ҳосил қиламиз. Уларнинг эҳтимолларини мос равишда $p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}$ каби белгиласак, математик кутилишнинг таърифига асосан

$$M(\xi+\eta)=(x_1+y_1)p_{11}+(x_1+y_2)p_{12}+(x_2+y_1)p_{21}+(x_2+y_2)p_{22}$$

бўлади. Агар $p_{11}+p_{12}=p_1$, $p_{21}+p_{22}=p_2$, $p_{11}+p_{21}=q_1$, $p_{12}+p_{22}=q_2$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$M(\xi+\eta)=x_1(p_{11}+p_{12})+x_2(p_{21}+p_{22})+y_1(p_{11}+p_{21})+$$
$$+y_2(p_{12}+p_{22})=(x_1p_1+x_2p_2)+(y_1q_1+y_2q_2).$$

Бундан эса

$$M(\xi+\eta)=M\xi+M\eta$$

эканлиги ҳосил бўлади.

$M(\xi - \eta) = M\xi - M\eta$ ни ҳам худди шу йўл билан исботлаш мумкин.

4°-хоссанинг исботи 1° — 3°-хоссалардан келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам,

$$M(a\xi + b) = M(a\xi) + M(b) = aM\xi + b.$$

5°-хоссанинг исботини келтиришда биз қуйидаги мулоҳазадан фойдаланамиз: ξ ва η ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорларнинг кўпайтмаси деб, шундай $\xi \cdot \eta$ тасодифий миқдорга айтамизки, унинг мумкин бўлган қийматлари ξ нинг мумкин бўлган ҳар бир қийматини η нинг мумкин бўлган ҳар бир қийматига кўпайтирилганига тенг, $\xi \cdot \eta$ кўпайтманинг мумкин бўлган қийматларининг эҳтимоллари кўпайтувчиларнинг мумкин бўлган қийматларининг эҳтимоллари кўпайтмасига тенг. У ҳолда $\xi \cdot \eta$ кўпайтманинг тақсимот қонуни қуйидагича бўлади:

$\xi \cdot \eta$	x_1y_1	x_2y_1	x_1y_2	x_2y_2
P	p_1q_1	p_2q_1	p_1q_2	p_2q_2

Математик кутилишнинг таърифига кўра

$$M(\xi \cdot \eta) = x_1y_1 \cdot p_1q_1 + x_2y_1 \cdot p_2q_1 + x_1y_2 \cdot p_1q_2 + x_2y_2 \cdot p_2q_2 =$$
$$= y_1q_1(x_1p_1 + x_2p_2) + y_2q_2(x_1p_1 + x_2p_2) =$$
$$= (x_1p_1 + x_2p_2)(y_1q_1 + y_2q_2) = M\xi \cdot M\eta.$$

Демак, $M(\xi \cdot \eta) = M\xi \cdot M\eta$.

2-§. Тасодифий миқдорнинг дисперсияси

Тасодифий миқдорнинг дисперсияси унинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматларининг ўртача қиймат атрофида тарқоқланиш (ечилиш) даражасини характерловчи сон бўлади.

ξ тасодифий миқдор берилган бўлсин.

25.3-таъриф. $M(\xi - M\xi)^2$ миқдор ξ тасодифий миқдорнинг *дисперсияси* деб аталади ва $D\xi$ каби белгиланади:

$$D\xi = M[\xi - M(\xi)]^2.$$

Юқорида келтирилган тасодифий миқдорнинг математик кутилишининг хоссаларидан фойдаланиб, $D\xi$ учун бошқа ифода топамиз:

$$D\xi = M[\xi - M(\xi)]^2 = M[\xi^2 - 2\xi M(\xi) + (M(\xi))^2] = M(\xi^2) -$$
$$- 2M(\xi)M(\xi) + (M\xi)^2 = M(\xi^2) - 2(M(\xi))^2 + (M(\xi))^2 =$$
$$= M(\xi^2) - (M(\xi))^2.$$

Демак,

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2. \qquad (25.6)$$

Мисоллар. 1. Биномиал қонун бўйича тақсимланган тасодифий миқдорнинг дисперсияси топилсин.

Ечиш. Маълумки, бу тасодифий миқдор 0, 1, 2, ..., n қийматларни мос равишда $C_n^0 p^0 (1-p)^{n-0}$, $C_n^1 p (1-p)^{n-1}$, ..., $C_n^n p^n (1-p)^{n-n}$ эҳтимоллар билан қабул қилади, унинг математик кутилиши $M\xi = np$.

Юқоридаги (25.6) формуладан фойдаланиш мақсадида $M\xi^2$ ни топамиз. Таърифга кўра

$$M\xi^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

бўлади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги йиғиндини ҳисоблаймиз:

$$M\xi^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{kn(n-1)!}{(k-1)![n-1-(k-1)]!} p \cdot p^{k-1} \cdot q^{n-1-(k-1)} =$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{[(k-1)+1](n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} \cdot p^{k-1} \cdot q^{n-1-(k-1)} =$$

$$= np \sum_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(n-1)(n-2)!}{(k-1)! \cdot [(n-2)-(k-2)]!} p \cdot p^{k-2} \cdot q^{n-2-(k-2)} +$$

$$+ np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} \cdot p^{k-1} \cdot q^{n-1-(k-1)} =$$

$$= n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} + np(p+q)^{n-1} =$$

$$= n^2p^2 - np^2 + np = np(1-p) + n^2p^2,$$

(чунки $(p+q)^{n-2} = 1$, $(p+q)^{n-1} = 1$).

Демак,

$$M\xi^2 = np(1-p) + n^2p^2.$$

(25.6) муносабатдан фойдаланиб топамиз:

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = np(1-p) + n^2p^2 - (np)^2 = np(1-p).$$

Демак, биномиал қонун билан тақсимланган ξ тасодифий миқдорнинг дисперсияси

$$D\xi = np(1-p)$$

бўлади.

2. Пуассон қонуни бўйича тақсимланган ξ тасодифий миқдорнинг дисперсияси топилсин.

Ечиш. Маълумки, бундай тасодифий миқдорнинг математик кутилиши

$$M\xi = \lambda$$

га тенг. ξ^2 тасодифий миқдорнинг математик кутилишини топамиз:

$$M\xi^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \cdot (k-$$

$$-1+1) = \lambda e^{-\lambda} \left[\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right] = \lambda e^{-\lambda} (\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}) =$$

$$= \lambda(\lambda+1) = \lambda^2 + \lambda.$$

(25.6) формулага биноан

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

бўлади.

Демак, Пуассон қонуни бўйича тақсимланган ξ тасодифий миқдорнинг дисперсияси $D\xi = \lambda$ га тенг.

Айтайлик, ξ узлуксиз тасодифий миқдор, $p(x)$ эса унинг эҳтимол зичлиги бўлсин.

25.4-таъриф. Ушбу

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 p(x)\, dx \tag{25.7}$$

миқдор ξ тасодифий миқдорнинг дисперсияси деб аталади.

Бу ифодани бошқача ҳам ёзиш мумкин:

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 p(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 - 2xM\xi + (M\xi)^2) p(x)\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\, dx - 2M\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \cdot x p(x)\, dx + (M\xi)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\, dx - 2(M\xi)^2 + (M\xi)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\, dx - (M\xi)^2.$$

Демак,

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\, dx - (M\xi)^2. \tag{25.8}$$

Кўп ҳолларда ξ тасодифий миқдорнинг дисперсиясини (25.8) формула ёрдамида топилади.

Мисол. Нормал қонун бўйича тақсимланган ξ тасодифий миқдорнинг дисперсияси топилсин.

Ечиш. Бу тасодифий миқдорнинг дисперсиясини (25.8) формула ёрдамида топамиз. Равшанки, бу ҳолда

$$p(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

бўлиб, $M\xi = a$ га тенг бўлади.

(25.8) формулага кўра

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\,dx - (M\xi)^2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx - a^2.$$

Бу тенгликдаги интегрални ҳисоблаш учун аввало ўзгарувчини қуйидагича алмаштирамиз: $t = \frac{x-a}{\sigma}$. Унда $x = \sigma t + a$, $dx = \sigma dt$ бўлиб,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t + a)^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma\,dt = \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t + a)^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt =$$

$$= \sigma^3 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + 2\sigma^2 a \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + \sigma a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt =$$

$$= \sigma^3 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + 2a\sigma^2 \cdot 0 + a^2\sigma\sqrt{2\pi} = \sigma^3 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + a^2\sigma\sqrt{2\pi} \tag{25.9}$$

бўлади. Кейинги интегрални бўлаклаб интеграллаймиз:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = -te^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{2\pi}. \tag{25.10}$$

Шундай қилиб, (25.9) ва (25.10) муносабатларга кўра

$$D\xi = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx - a^2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(\sigma^3 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + a^2\sigma\sqrt{2\pi}\right) -$$

$$- a^2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} (\sigma^3\sqrt{2\pi} + \sqrt{2\pi}\,a^2\sigma) - a^2 = \sigma^2 + a^2 - a^2 = \sigma^2$$

бўлади.

Демак, нормал қонун бўйича тақсимланган ξ тасодифий миқдорнинг дисперсияси $D\xi = \sigma^2$ га тенг бўлади.

Энди тасодифий миқдор дисперсиясининг хоссаларини келтирамиз.

1°. *Агар C ўзгармас сон бўлса, $D(C) = 0$ бўлади.*

2°. *ξ тасодифий миқдор, C ўзгармас сон бўлса, у ҳолда $D(C\xi) = C^2 D(\xi)$ бўлади.*

3°. *Агар ξ ва η ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар бўлса, у ҳолда*

$$D(\xi \pm \eta) = D\xi + D\eta$$

бўлади.

4°. *Агар a ва b ўзгармас сонлар бўлса, у ҳолда*

$$D(a\xi + b) = a^2 D\xi$$

бўлади.

3-§. Эҳтимоллар назариясининг лимит теоремалари

Биз эҳтимоллар назариясининг асосий тушунчаси — тасодифий миқдор билан танишдик. Маълумки, тасодифий миқдорнинг қабул қиладиган қийматини аввалдан айтиб бўлмайди. Чунки бу қийматни қабул қилиш олдиндан айтиб бўлмайдиган турли тасодифий ҳолатларга боғлиқ. Айни пайтда етарлича кўп тасодифий миқдорлар йиғиндиси тасодифийлик хусусиятини йўқотиб, у маълум даражада ўзгармас бўлиш ҳолатига ўта боради. Қуйида шу ҳолатни ўрганамиз. Бунда тасодифий миқдорнинг математик кутилиши ва дисперсияси муҳим роль ўйнайди.

Чебишев тенгсизлиги. Маълумки, тасодифий миқдорнинг математик кутилиши ўзгармас сон бўлади. Тасодифий миқдорнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматларини унинг математик кутилиши атрофида бўлиши даражасини қуйидаги теорема кўрсатади.

Теорема. *Чекли дисперсияга эга бўлган ихтиёрий тасодифий миқдор ва ихтиёрий мусбат ε сон учун ушбу тенгсизлик ўринли бўлади:*

$$P\{|\xi - M\xi| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Исбот. Бу теоремани ξ — узлуксиз тасодифий миқдор бўлган ҳол учун исботлаймиз. Айтайлик, ξ узлуксиз тасодифий миқдор, $p(x)$ эса унинг эҳтимол зичлиги бўлсин.

Равшанки, $\{|\xi - M\xi| \geqslant \varepsilon\} \cup \{|\xi - M\xi| < \varepsilon\}$ муқаррар ҳодиса бўлади. Демак,

$$P\{|\xi - M\xi| \geqslant \varepsilon\} + P\{|\xi - M\xi| < \varepsilon\} = 1$$

бўлади. Бундан

$$P\{|\xi - M\xi| \geqslant \varepsilon\} = 1 - P\{|\xi - M\xi| < \varepsilon\} \qquad (25.11)$$

бўлиши келиб чиқади. Агар

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx$$

ва

$$P\{|\xi - M\xi| < \varepsilon\} = P\{-\varepsilon < \xi - M\xi < \varepsilon\} =$$
$$= P\{M\xi - \varepsilon < \xi < M\xi + \varepsilon\} = \int_{M\xi-\varepsilon}^{M\xi+\varepsilon} p(x)\,dx$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда (25.11) тенглик ушбу кўринишга келади:

$$P\{|\xi - M\xi| \geqslant \varepsilon\} = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx - \int_{M\xi-\varepsilon}^{M\xi+\varepsilon} p(x)\,dx.$$

Равшанки;

$$P\{|\xi-M\xi|\geqslant\varepsilon\}=\int_{-\infty}^{M\xi-\varepsilon}p(x)\,dx+\int_{M\xi-\varepsilon}^{M\xi+\varepsilon}p(x)\,dx+\int_{M\xi+\xi}^{\infty}p(x)\,dx-$$

$$-\int_{M\xi-\varepsilon}^{M\xi+\varepsilon}p(x)\,dx=\int_{-\infty}^{M\xi-\varepsilon}p(x)\,dx+\int_{M\xi+\varepsilon}^{+\infty}p(x)\,dx. \qquad (25.12)$$

Энди $\int_{-\infty}^{M\xi-\varepsilon}p(x)\,dx$ интегрални қарайлик. Бунда $-\infty<x<M\xi-$ $-\varepsilon$ бўлганлиги сабабли $x-M\xi<-\varepsilon$ бўлиб,

$$\left(\frac{x-M\xi}{\varepsilon}\right)^2>1$$

бўлади. Натижада қуйидаги тенгсизликка келамиз:

$$\int_{-\infty}^{M\xi-\varepsilon}p(x)\,dx<\int_{-\infty}^{M\xi-\varepsilon}\left(\frac{x-M\xi}{\varepsilon}\right)^2p(x)\,dx. \qquad (25.13)$$

Худди шунга ўхшаш,

$$\int_{M\xi+\varepsilon}^{+\infty}p(x)\,dx<\int_{M\xi+\varepsilon}^{+\infty}\left(\frac{x-M\xi}{\varepsilon}\right)^2p(x)\,dx \qquad (25.14)$$

бўлади.

(25.12), (25.13) ва (25.14) муносабатлардан ҳамда

$$\int_{M\xi-\varepsilon}^{M\xi+\varepsilon}\left(\frac{x-M\xi}{\varepsilon}\right)^2p(x)\,dx>0$$

бўлишидан фойдаланиб топамиз:

$$P\{|\xi-M\xi|\geqslant\varepsilon\}<\int_{-\infty}^{M\xi-\varepsilon}\left(\frac{x-M\xi}{\varepsilon}\right)^2p(x)\,dx+$$

$$+\int_{M\xi+\varepsilon}^{+\infty}\left(\frac{x-M\xi}{\varepsilon}\right)^2p(x)\,dx\leqslant\int_{-\infty}^{M\xi-\varepsilon}\left(\frac{x-M\xi}{\varepsilon}\right)^2p(x)\,dx+$$

$$+\int_{M\xi-\varepsilon}^{M\xi+\varepsilon}\left(\frac{x-M\xi}{\varepsilon}\right)^2p(x)\,dx+\int_{M\xi+\varepsilon}^{+\infty}\left(\frac{x-M\xi}{\varepsilon}\right)^2p(x)\,dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{x-M\xi}{\varepsilon}\right)^2p(x)\,dx=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M\xi)^2p(x)\,dx.$$

Натижада

$$P\{|\xi - M\xi| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(x - M\xi)^2 p(x)\,dx$$

бўлади. Агар

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(x - M\xi)^2 p(x)\,dx = D\xi$$

эканлигини ҳисобга олсак, кейинги тенгсизликдан

$$P\{|\xi - M\xi| \geqslant \xi\} \leqslant \frac{D\xi}{\varepsilon^2} \qquad (25.15)$$

бўлиши келиб чиқади. Теорема исбот қилинди.

Тасодифий миқдор дискрет бўлган ҳолда ҳам (25.15) муносабатнинг тўғрилиги юқоридагидек исботланади.

Одатда (25.15) *Чебишев тенгсизлиги* деб аталади.

Чебишев теоремаси. Энди Чебишев тенгсизлигидан фойдаланиб, қуйидаги теоремани исботлаймиз.

Теорема (Чебишев теоремаси). *Агар*

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n,\ \ldots \qquad (25.16)$$

ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги чекли дисперсияга эга бўлиб, улар битта ўзгармас сон билан чегараланган, яъни

$$D\xi_1 \leqslant C,\quad D\xi_2 \leqslant C,\ \ldots,\ D\xi_n \leqslant C,\ \ldots$$

бўлса, у ҳолда

$\forall\, \varepsilon > 0$ *учун*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

бўлади.

Исбот. Модомики, (25.16) ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар экан, унда дисперсиянинг хоссаларидан фойдаланиб

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D\xi_k$$

бўлишини топамиз. Теореманинг шартига кўра $D\xi_k \leqslant C$, $(k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$.

Демак,

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right) \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{1}^{n}C = \frac{C}{n^2}\cdot n = \frac{C}{n} \qquad (25.17)$$

бўлади. Равшанки,

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi\right|<\varepsilon\right\}=1-$$

$$-P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k\right|\geqslant\varepsilon\right\}. \tag{25.18}$$

Чебишев тенгсизлигига мувофиқ,

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k\right|\geqslant\varepsilon\right\}\leqslant\frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)}{\varepsilon^2}$$

бўлади. Юқоридаги (25.17) тенгсизликни эътиборга олсак, унда

$$\frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)}{\varepsilon^2}\leqslant\frac{C}{n\varepsilon^2}$$

бўлиб,

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k\right|\geqslant\varepsilon\right\}\leqslant\frac{C}{n\varepsilon^2} \tag{25.19}$$

бўлади.

Натижада (25.18), (25.19) муносабатлардан

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k\right|<\varepsilon\right\}\geqslant 1-\frac{C}{n\varepsilon^2}$$

бўлиши келиб чиқади. Бу муносабатдан эса $n\to\infty$ да

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k\right|<\varepsilon\right\}\geqslant 1$$

бўлишини топамиз. Бироқ ҳодисанинг эҳтимоли ҳар доим бирдан катта бўла олмаслиги сабабли

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k\right|<\varepsilon\right\}=1$$

бўлади. Бу эса теоремани исботлайди.

Одатда эҳтимоли бирга яқин бўлган ҳодисани деярли муқаррар ҳодиса деб қаралади. Юқорида исбот этилган теорема n нинг етарлича катта қийматларида ушбу

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k\right|<\varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши деярли муқаррар ҳодисалигини кўрсатади. Бу ҳол қуйидаги тақрибий формулага олиб келади:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \approx \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k. \qquad (25.20)$$

Демак, Чебишев теоремаси n нинг етарлича катта қийматларида (25.20) тақрибий формула етарли аниқликда тенг бўлишини тасдиқлайди, яъни ўрганилган тасодифий миқдорларнинг ўрта арифметиги деярли ўзгармас миқдорга тенг бўлар экан.

Марказий лимит теорема. Фараз қилайлик,

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots \qquad (24.21)$$

ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги бўлиб, ҳар бир $\xi_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ тасодифий миқдор чекли математик кутилиш $M\xi_k$ га ва чекли дисперсия $D\xi_k$ га эга бўлсин.

Қаралаётган тасодифий миқдорлар ёрдамида ушбу тасодифий миқдорларни ҳосил қиламиз:

$$\eta_k = \frac{1}{\sqrt{D\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k\right)}}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{\sqrt{D\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k\right)}}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{D\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k\right)}}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - M\xi_k).$$

Айтайлик, η_k тасодифий миқдорларнинг тақсимот функцияси

$$F_\eta(x) = P\left\{\frac{1}{\sqrt{D\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k\right)}}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - M\xi_k) < x\right\}$$

бўлсин. Қуйида келтириладиган теорема ξ_k тасодифий миқдорлар маълум шартни қаноатлантирганда юқоридаги тақсимот функцияси нормал қонун бўйича тақсимланган тасодифий миқдорнинг тақсимот функциясига интилишини кўрсатади. Биз бу теоремани исботсиз келтирамиз.

Теорема. *Агар ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *учун*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}D\xi_k\right)^{3/2}}\sum_{k=1}^{n}M|\xi_k - M\xi_k|^3 = 0$$

бўлса, у ҳолда

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{1}{\sqrt{D\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k\right)}}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - M\xi_k) < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

бўлади.

Бу теорема Чебишев теоремасини кенгроқ талқин этадиган теоремадир. Одатда уни эҳтимоллар назариясининг *марказий лимит теоремаси* деб юритилади.

XXVI боб. МАТЕМАТИК СТАТИСТИКА ЭЛЕМЕНТЛАРИ

Биз мазкур китобнинг XXIII — XXV бобларида тасодифий ҳодиса, тасодифий ҳодисанинг эҳтимоли, тасодифий миқдорлар ва уларнинг сонли характеристикалари, тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни, тақсимот функцияси ҳамда эҳтимол зичлиги (дифференциал функцияси) каби тушунчалар билан танишдик. Бу тушунчалар асосида амалиётда учрайдиган ҳаётий масалаларни ечишни ўргандик. Эҳтимоллар назариясининг муҳим тушунчаларидан бири тасодифий миқдор ва унинг тақсимот функцияси тушунчаларидир. Бизга маълумки, тасодифий миқдорлар ўзларининг тақсимот функцияси билан тўла аниқланади. Тасодифий миқдорнинг тақсимот функциясини билган ҳолда биз у миқдор билан боғланган жараённи тўла ўрганиш имкониятига эга бўламиз. Аммо амалиётда бизни қизиқтираётган тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси номаълум ёки тақсимот функциянинг кўриниши маълум, унинг параметрлари номаълум бўлади. Бундай ҳолларда тасодифий миқдорнинг тақсимот функциясини ёки унинг айрим сонли характеристикаларини (тақрибан) баҳолаш зарурияти туғилади. Бу каби масалаларни олий математиканинг бўлимларидан бири—математик статистика фани тажриба (кузатиш) ёрдамида таҳлил қилиш йўли билан ўрганади.

Умумий қилиб айтганда, математик статистикада статистик маълумотлар ва бу маълумотларни таҳлил қилиш билан илмий ва амалий хулосалар чиқаришнинг математик усуллари ўрганилади. Шундай қилиб, математик статистика қуйидаги икки асосий вазифани ҳал қилади:

1. Барча статистик маълумотларни тўплаш, лозим бўлса, гуруҳлаш.

2. Тўпланган маълумотларни мақсадга мувофиқ қилиб таҳлил қилиш.

1-§. Танланма усул

Айтайлик, бирор корхона катта сонда маҳсулот ишлаб чиқарган бўлиб, бу маҳсулотни сифат ёки сон белгилари бўйича текширилиши талаб этилсин. Ишлаб чиқарилган маҳсулотнинг сони жуда кўп, бинобарин, уларнинг ҳар бирини айтилган белги бўйича текшириш қийин бўлади. Бундай ҳолда қуйидагича иш тутилади: барча маҳсулотлардан таваккал қилиб маълум сондагиси олинади, уларни текшириб, корхонанинг барча маҳсулотлари тўғрисида хулоса чиқарилади. Текширишнинг бундай усули *танланма усул* дейилади. Қуйида бу усулни батафсилроқ ўрганамиз.

Ўрганилиши лозим бўлган барча объектлар тўплами *бош тўплам* деб аталади.

Бош тўпламдан тасодифий равишда танлаб олинган объектлар тўплами *танланма тўплам* ёки, қисқача, *танланма* деб аталади. Бундай тўпламдаги объектлар сони шу тўпламнинг *ҳажми* деб аталади. Бош тўпламнинг ҳажми N, танланма тўпламнинг ҳажми n билан белгиланади.

Масалан, корхонада ишлаб чиқарилган 10000 маҳсулотдан 100 таси текшириш учун олинган бўлса, у ҳолда бош тўпламнинг ҳажми $N = 10000$, танланма тўпламнинг ҳажми эса $n = 100$ бўлади.

Бош тўпламдан текшириш учун таваккалига битта элемент, кейин иккинчи элемент ажратиб олинади ва шу жараённи давом эттириб, сўнг ажратиб олинган элементлардан танланма тузилади.

Агар танланма элементларини бош тўпламга қайтармасдан, унинг элементлари бош тўпламдан ажратилса, бундай танланма *такрормас танланма* деб аталади.

Агар танланманинг элементлари (бош тўпламдан танланган элементни яна) бош тўпламга қайтариш йўли билан ажратилса, бундай танланма *такрор танланма* деб аталади.

Модомики, масала бош тўплам элементларининг сон ёки сифат белгиси тўғрисида керакли маълумотларни билишдан иборат экан, ундан ўрганиш учун ажратилган танланма (унинг элементлари) ваколатли бўлиши лозим. Яъни танланма тўплам бош тўпламдан шундай ажратилиши лозимки, натижада ажратилган танланма тўплам бош тўпламни тўла характерлайдиган, бошқача айтганда бош тўпламнинг муҳим хусусиятларини ўзида сақлаган бўлиши керак. Буни одатда танланманинг *репрезентативлиги* дейилади.

2-§. Танланманинг статистик тақсимоти

Айтайлик, бош тўплам сифатида корхонада тайёрланган бир хил цилиндрик деталлар олинган бўлсин. Бу деталлар диаметрларининг узунлигини ҳисоблаш талаб этилсин. Равшанки, турли иновбатга олиб бўлмайдиган ҳолатлар таъсирида деталлар диаметрларининг узунликларини ўлчаш натижалари турлича бўлади. Бу деталлар диаметрининг узунлигини ξ тасодифий миқдор деб қараш мумкин. Бунда ҳар бир деталнинг диаметри аниқ сон бўлиб, у ξ тасодифий миқдорнинг аниқ қиймати бўлади.

Корхонада тайёрланган барча деталлар тўпламини бош тўплам дейлик. Унинг ҳажми N бўлсин. Бош тўпламдан ҳажми n бўлган танланма тўпламни ажратамиз. Натижада танланма тўплам элементлари цилиндрик деталларнинг диаметрларини ифодаловчи $x_1, x_2, \ldots, x_n$ сонлар ҳосил бўлади. Масала, шу сонлар ёрдамида юқорида айтилган ξ тасодифий миқдорни (тахминан бўлса ҳам) тавсифлашдан, яъни тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни, тақсимот функциясини бошқа сонли характеристикаларини баҳолаш ва улар ёрдамида муҳим амалий хулосалар чиқаришдан иборат бўлади.

Умумий ҳолда ҳам иш шунга ўхшаш бўлади.

Фараз қилайлик, бош тўпламни ўрганиш учун ҳажми n га тенг танланма тўплам олинган бўлсин. Бунда x_1 қиймат n_1 марта, x_2 қиймат n_2 марта ва ҳоказо, x_k қиймат n_k марта кузатилган бўлсин. Равшанки, $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$.

Одатда кузатилган x_i қийматлар *вариантлар*, кузатишлар сони n_i лар эса *частоталар* дейилади. Варианталарнинг ўсиб бориш тартибида ёзилган кетма-кетлик *вариацион қатор* дейилади. Вариацион қатор ва уларнинг мос частоталарини ушбу жадвал орқали ёзиш қулай бўлади:

ξ	x_1	x_2	...	x_k
n	n_1	n_2	...	n_k

Масалан, маълум бир пахта майдонидан тасодифий равишда 100 туп ғўза олиниб, шу олинган ғўзаларнинг ҳар бир тупида очилган чаноқлар сонини ҳисоблайлик. Бунда барча ғўза туплари сони $n=100$ танланма ҳажми бўлиб, варианта қиймати $x_1=0$ эса очилган чаноқлар сони 0 та бўлган ғўзани ва шундай ғўзалардан 100 туп ичида нечта бўлса, уларнинг сони частота бўлади, худди шундай, варианта қиймати $x_1=1$ очилган чаноғи 1 та бўлган ғўзани ва уларнинг сони n_2 частота бўлади ва ҳоказо.

Ушбу $\frac{n_i}{n}$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ миқдор *нисбий частоталар* деб аталади ва W_i каби белгиланади:

$$W_i=\frac{n_i}{n} \quad (i=1, 2, \ldots, k).$$

Натижада $x_1, x_2, \ldots, x_k$ варианталарга мос $W_1, W_2, \ldots, W_k$ нисбий частоталарга эга бўламиз.

Варианталар ва уларга мос нисбий частоталардан тузилган

x_i	x_1	x_2	...	x_k
W_i	W_1	W_2	...	W_k

жадвал *статистик* ёки *эмпирик тақсимот* (жадвал) дейилади.

Бунда нисбий частоталар йиғиндиси бирга тенг бўлади:

$$W_1+W_2+\ldots+W_k=1.$$

Ҳақиқатан ҳам, нисбий частотанинг таърифидан фойдаланиб топамиз:

$$W_1+W_2+\ldots+W_k=\frac{n_1}{n}+\frac{n_2}{n}+\ldots+\frac{n_k}{n}=$$

$$=\frac{n_1+n_2+\ldots+n_k}{n}=\frac{n}{n}=1.$$

Мисол. Танланма частоталар тақсимоти кўринишида берилган:

x_i	5	7	12
n_i	2	5	3

Нисбий частоталар тақсимоти (статистик тақсимот) топилсин.

Ечиш. Танланманинг ҳажми $n = 2 + 5 + 3 = 10$. Ҳар бир частотани танланманинг ҳажмига бўлиб, нисбий частоталарни топамиз:

$$W_1 = \frac{2}{10} = 0,2; \; W_2 = \frac{5}{10} = 0,5; \; W_n = \frac{3}{10} = 0,3.$$

Демак, нисбий частоталар статистик тақсимоти қуйидагича бўлади:

x_i	5	7	12
W_i	0,2	0,5	0,3

Биз юқоридаги мисолда танланма ҳажми кичик бўлганда унинг статистик тақсимотини тузишни кўриб чиқдик. Агар ўрганилаётган белги узлуксиз ўзгарувчи вариантадан иборат бўлса ёки дискрет бўлиб қабул қиладиган қийматлари сони кўп бўлса, бундай ҳолда статистик тақсимотнинг интервалли (гуруҳларга ажратилган) вариацион қаторини тузиш мақсадга мувофиқ бўлади. Бош тўпламнинг объектив статистик қонуниятини очишда танланма тўпламни k та интервалга (гуруҳга) бўлишни Стерж таклиф қилган ушбу формула бўйича таҳлил қилиш мумкин:

$$k = 1 + 3,322 \ln n, \; n \text{ — танланма ҳажми.}$$

Агар бу ерда k нинг қиймати каср сон бўлса, у яхлитлаб олинади. Фойдаланишга қулай бўлиши учун Стерж формуласидан танланма ҳажмига боғлиқ равишда аниқланувчи интерваллар сонининг жадвалини келтирамиз:

Танланма ҳажми (n)	Олинадиган интерваллар сони (k)
25—40	5—6
40—60	6—8
60—100	7—10
100—200	8—12
200—	10—15

Интерваллар узунлиги (гуруҳлар кенглиги) h ни топишда

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}$$

формуладан фойдаланиш мумкин, бу ерда $x_{\max}$, $x_{\min}$ вариацион қаторнинг мос равишда энг катта ва энг кичик қийматларидир. У ҳолда узунликлари h бўлган интерваллар (гуруҳлар). кетма-кетлигини қуйидаги тартибда олиш мумкин:

$$\left[x_{\min} - \frac{h}{2};\ x_{\min} + \frac{h}{2}\right] \text{— биринчи интервал,}$$

$$\left]x_{\min} + \frac{h}{2};\ x_{\min} + \frac{3h}{2}\right] \text{— иккинчи интервал,}$$

$$\left]x_{\min} + \frac{3h}{2};\ x_{\min} + \frac{5h}{2}\right] \text{— учинчи интервал ва ҳоказо.}$$

Албатта, интервалларни ҳар бир варианта фақат битта интервалга тегишли бўладиган қилиб олиш лозим.

Мисол. Пахта майдонидан тасодифий равишда олинган $n = 50$ туп ғўзанинг ҳар биридан териб олинган пахта ҳосилининг оғирлиги (грамм ҳисобида) қуйидагича бўлади:

38,0	51,5	48,3	33,2	40,2	49,2	34,6	32,0	27,5	30,0
41,3	43,2	42,0	30,3	48,0	43,0	36,6	39,6	28,2	56,0
47,4	53,8	45,6	33,2	38,2	39,0	35,0	40,5	45,0	44,4
30,0	35,7	43,5	42,1	42,0	37,7	42,8	50,3	44,6	46,3
59,0	46,0	37,8	45,0	36,1	44,3	51,7	44,5	48,5	36,4

Шу танланма тўпламнинг статистик тақсимоти тузилсин.

Ечиш. Танланма ҳажми $n = 50$. Стерж формуласига асосан интерваллар (гуруҳлар) сонини топамиз:

$$k = 1 + 3{,}322\lg 50 = 1 + 3{,}322\lg 10 + 3{,}322\lg 5 = 1 + 3{,}322 +$$
$$+ 3{,}322\cdot 0{,}699 = 6{,}64 \text{ (чунки } \lg 10 = 1,\ \lg 5 = 0{,}699).$$

Демак, интерваллар (гуруҳлар) сонини ортиғи билан яхлитлаб $k=7$ деб оламиз. Танланма тўплам қийматлари жадвалидан $x_{\min} = 27{,}5$ ва $x_{\max} = 59$ бўлганлигидан интерваллар (гуруҳлар) узунлиги қуйидагича бўлади:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} = \frac{59 - 27{,}5}{6{,}64} = \frac{31{,}5}{6{,}64} = 4{,}74.$$

Бу мисолда узунлиги $h = 4{,}47$ бўлган интерваллар қуйидагича бўлади:

[26,50 — 31,24],]31,24 — 35,98], [35,98—40,72], [40,72—45,46], [45,46—50,20], [50,20 — 54,94], [54,94 — 59,68].

Энди ҳар бир интервалга тушувчи варианталар (сонини) частоталарини топамиз. Масалан, [26,50 — 31,24] биринчи интервалга 3 та варианта тегишли, улар 27,5; 30,0; 30,3 бўлиб, интервалнинг ўртача қиймати 28,27 га тенг, нисбий частотаси $W_1 = \frac{3}{50} = 0{,}06$. Худди шундай, иккинчи интервал [31,24 — 35,98] га тегишли варианталар сони (частотаси) 6 та, яъни улар 34,6; 33,2; 32,0; 33,2; 35,0; 35,7. Интервалнинг ўртача қиймати 33,6 бўлиб, интервалга тушувчи варианталар нисбий частотаси $W_2 = \frac{6}{50} = 0{,}12$ ва ҳоказо.

Юқоридаги ҳисоблашларга асосан танланма тўпламнинг тузилган *вариацион қатори қуйидагича бўлади:*

Варианта интерваллари (г)	Интервалга тегишли вариантлар сони (частотаси), n_i	Интервал ўртаси	Нисбий частота (W)
26,50—31,24	3	28,87	0,06
31,24—35,98	6	33,61	0,12
35,98—40,72	12	38,35	0,24
40,72—45,46	15	43,09	0,30
45,46—50,20	8	47,83	0,16
50,20—54,94	4	52,57	0,08
54,94—59,68	2	57,31	0,04

Шундай қилиб, бу жадвал берилган 50 та маълумотнинг статистик тақсимоти бўлади.

3-§. Эмпирик тақсимот функцияси

Бош тўпламни ўрганиш мақсадида ундан ҳажми n га тенг танланма ажратилган бўлиб, унинг частоталар тақсимоти қуйидагича бўлсин:

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

(26.1)

Ихтиёрий x ҳақиқий сонни олайлик. Равшанки, (26.1) даги ҳар бир x_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) варианта ё x дан катта бўлади, ё x дан кичик бўлади, ёки шу x га тенг бўлади. Олинган x дан кичик бўлган, яъни $x_i < x$ тенгсизликни қаноатлантирадиган варианталар сонини $n(x)$ билан белгилайлик. Масалан, танланма натижаси қуйидагича бўлсин: $-2, 1, +3, 5, 7, 7$. Агар $x = 3{,}5$ олинган бўлса, унда шу x дан кичик бўлган варианталар 3 та ($-2, 1, +3$) бўлади. Демак, бу ҳолда $n(3{,}5) = 3$.

Агар $x = 0$ олинган бўлса, унда $n(0) = 1$,

агар $x = 10$ олинган бўлса, унда $n(10) = 6$,

агар $x = -3$ олинган бўлса, унда $n(-3) = 0$ бўлади.

Шундай қилиб, юқорида айтилган йўл билан $n(x)$ функцияни ҳосил қилинади.

Ушбу $\frac{n(x)}{n}$ функция *танланманинг тақсимот функцияси* ёки *эмпирик тақсимот функцияси* деб аталади ва $F_n(x)$ каби белгиланади:

$$F_n(x) = \frac{n(x)}{n}.$$

Демак, танланманинг эмпирик тақсимот функцияси $\{\xi < x\}$ ҳодисасининг частотасидан иборат.

Мисол. Танланманинг ушбу тақсимоти бўйича, унинг эмпирик тақсимот функцияси топилсин:

x_i	2	5	7	8
n_i	1	3	2	4

Ечиш. Танланманинг ҳажми $n = 1+3+2+4 = 10$ бўлади. Энг кичик варианта 2 га тенг. Шунинг учун $x \leqslant 2$ бўлганда $F_n(x) = 0$ бўлади. $x < 5$ қиймат, яъни $x_1 = 2$ қиймат $n(5) = 1$ марта кузатилган, демак, $2 < x \leqslant 5$ бўлганда $F_n(x) = \frac{1}{10} = 0{,}1$.

$x < 7$ қийматлар, чунончи $x_1 = 2$, $x_2 = 5$ қийматлар $n(7) = 1 + 3 = 4$ марта кузатилган, демак, $5 < x < 7$ бўлганда $F_n(x) = \frac{4}{10} = 0{,}4$ бўлади. $x < 8$ қийматлар, чунончи $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 7$ қийматлар $n(8) = 1+3+2 = 6$ марта кузатилган, демак, $7 < x < 8$ бўлганда

$$F_n(x) = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

бўлади.

$x_4 = 8$ энг катта варианта бўлганлиги сабабли $x > 8$ бўлганда $F_n(x) = 1$ бўлади.

Демак, изланаётган эмпирик тақсимот функцияси қуйидагича бўлади:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, \text{ агар } x \leqslant 2 & \text{бўлса,} \\ 0{,}1, \text{ агар } 2 < x \leqslant 5 & \text{бўлса,} \\ 0{,}4, \text{ агар } 5 < x \leqslant 7 & \text{бўлса,} \\ 0{,}6, \text{ агар } 7 < x \leqslant 8 & \text{бўлса,} \\ 1 \text{ агар } x > 8 & \text{бўлса.} \end{cases}$$

Унинг графиги 148-чизмада тасвирланган.

ξ тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси $F(x)$ ушбу $\{\xi < x\}$ ҳодисанинг эҳтимоли $P\{\xi < x\}$ билан таърифланар эди. Эмпирик тақсимот функция $F_n(x)$ эса n та боғлиқ бўлмаган тажрибада шу ҳодисанинг нисбий частотасини ифодалайди.

Ҳодисанинг нисбий частотаси шу ҳодисанинг эҳтимолига тақрибан тенглигини эътиборга олсак, унда эмпирик тақсимот функция $F(x)$ ни тақрибан ифодалашини кўрамиз.

4-§. Полигон ва гистограмма

Статистик тақсимотнинг графигини билиш унинг характерини яққолроқ тасаввур этишда қўл келади. Биз қуйида тақсимот графигини ясаш усулларидан полигон ва гистограммани ясашни келтирамиз.

Ҳажми n бўлган танланма статистик тақсимот билан берилган бўлсин:

x	x_1	x_2	...	x_k
n	n_1	n_2	...	n_k
W	W_1	W_2	...	W_k

бу ерда x_i — вариантлар, n_i — мос частоталар; W_i — мос нисбий частоталар, $i=\overline{1, k}$.

(x_1, n_1), (x_2, n_2), ..., (x_k, n_k) нуқталарни туташтирувчи синиқ чизиқ текисликда *частоталар полигони* деб аталади.

(x_1, W_1), (x_2, W_2), ..., (x_k, W_k) нуқталарни туташтирувчи синиқ чизиқ *нисбий частоталар полигони* деб аталади.

Бу чизиқларнинг графикларини ясаш учун варианталар қийматлари абсциссалар ўқига, частоталар қийматлари ординаталар ўқига қўйилади.

Статистик тақсимотнинг гистограммасини ясаш учун аввал барча кузатилган қийматларни узунлиги h бўлган кетма-кет қисмий интервалларга (гуруҳларга) бўлинади ва ҳар бир интервалга тушган варианталарнинг частоталари топилади.

Асослари h узунликдаги интерваллар, баландликлари $\frac{n_i}{h}$ нисбатга тенг бўлган тўғри тўртбурчаклардан иборат поғонавий фигура *частоталар гистограммаси* деб аталади. Бу ерда $\frac{n_i}{h}$ нисбат *частота зичлиги* дейилади.

Асослари h узунликдаги интерваллар, баландликлари $\frac{W_i}{h}$ нисбатга тенг бўлган тўғри тўртбурчаклардан иборат поғонавий фигура *нисбий частоталар гистограммаси* деб айтилади.

Частоталар гистограммасининг юзи танланма ҳажми n га, нисбий частоталар гистограммасининг юзи эса бирга тенг бўлади.

1-мисол. Танланманинг қуйида берилган тақсимоти бўйича частоталар полигонини ясанг:

1)

x_i	2	3	5	6
n_i	10	15	5	20

2)

x_i	12	17	22	16	30	34	38
n_i	2	5	9	12	8	8	4

Ечиш. 1) абсциссалар ўқида 2, 3, 5, 6 сонларини, ординаталар ўқида эса уларга мос 10, 15, 5, 20 сонларини белгилаймиз, яъни координаталари (2; 10), (3; 15), (5; 5), (6; 20) бўлган нуқталарни ясаб, уларни синиқ чизиқлар билан туташтирамиз (149-чизмага қаранг).

2) Юқоридаги мисол каби ечилади.

2-мисол. Жўхори донидан 100 дона олинди ва уларнинг ҳар бирини тортиб кўриб, қуйидаги статистик тақсимот олинди:

Жўхори оғирликлари	0,1—0,3	0,3—0,5	0,5—0,7	0,7—0,9
Жўхорилар сони	18	52	18	12

Шу тақсимотнинг гистограммасини тузинг.

Ечиш. Интерваллар узунлиги $h = 0,2$ га тенг бўлгани учун тўғри тўртбурчак баландликларининг нисбати мос равишда қуйидагича бўлади:

$$\frac{n_1}{n} = \frac{18}{0,2} = 90; \quad \frac{n_2}{h} = 260; \quad \frac{n_3}{h} = 60.$$

Интервалларни абсциссалар ўқида, баландликларини ординаталар ўқида қўйиб поғонавий тўғри тўртбурчаклар ҳосил қиламиз (150-чизмага қаранг).

3-мисол. *Танланманинг қуйида берилган тақсимоти бўйича* нисбий частоталар гистограммасини ясанг. Бу ерда $n = 20$.

Интерваллар	Частоталар йиғиндиси
10—15	2
15—20	4
20—25	8
25—30	4
30—35	2

Ечиш. Нисбий частоталарни топамиз:

$$W_1 = \frac{2}{20} = 0,1; \; W_2 = \frac{4}{20} = 0,2; \; W_3 = 0,4; \; W_4 = 0,2; \; W_5 = 0,1.$$

Нисбий частоталар зичлигини топамиз:

$$\frac{W_1}{h} = \frac{0,1}{5} = 0,02; \quad \frac{W_2}{h} = 0,04; \quad \frac{W_3}{h} = 0,08;$$

$$\frac{W_4}{h} = 0,04; \quad \frac{W_5}{h} = 0,02.$$

Абсциссалар ўқида берилган қисмий интервалларни белгилаймиз. Нисбий *частоталар зичликларини ординаталар ўқида белгилаймиз* ва ҳар бир интервал устида кесмалар ўтказамиз, масалан, (10, 15) интервал устида абсциссалар ўқига параллел ва ундан 0,02 масофада ётадиган кесма ўтказамиз ва ҳоказо (151-чизмага қаранг).

5-§. Тақсимот параметрларининг статистик баҳолари

Юқорида айтиб ўтганимиздек, математик статистиканинг асосий масаласи бош тўпламни ўрганиш, яъни унинг белгиси тақсимот қонунини топишдир.

Айтайлик, бирор йўл билан бундай тақсимот қонуни топилган бўлсин (масалан, у биномиал қонуни ёки Пуассон қонуни ёки нормал қонун бўлсин). У ҳолда унинг номаълум параметрларининг статистик баҳоларини кўриш масаласи юзага келади. (Масалан, нормал қонун бўлганда a ва σ ни, Пуассон қонуни бўлганда λ ни аниқлаш). Ва аксинча, параметрлар маълум бўлса унинг тақсимот қонунини аниқлаш лозим. Умумий ҳолда бу иккала вазифа ҳам номаълум бўлиши мумкин.

Умуман тақсимот қонунининг номаълум параметрларини ёки эмпирик тақсимот қонунини кузатишлар натижасидан, яъни бош тўпламдан ажратилган танланмадан фойдаланиб топиш лозим бўлади. Номаълум параметрларни аниқлашда турли хатоликларга (статистик хатоларга) дуч келамиз. Аввало шуни айтиш керакки, бош тўпламдан олинган турли танланмалар бўйича топилган параметрларнинг қийматлари умуман айтганда, турлича бўлади.

Одатда бош тўпламдан танланма тўплам элементларини тасодифий танлаш усули билан ажратма ҳосил бўлган танланма тўпламда репрезентативлик яхши сақланади.

Маълумки, танланма тўплам бош тўпламнинг бирор қисми. Бинобарин, танланма тўплам тўғрисидаги фикрлар бош тўпламни тўлиқ характерламаса, бу ҳол статистик хатога олиб келади.

Равшанки, танланма тўпламдаги кузатишлар сони ҳам бош тўпламни характерлашга боғлиқ. Танланма тўпламнинг ташкил этган элементлар сони қанча кўп бўлса, статистик хато шунча кам бўлади.

Демак, танланмадан фойдаланиб тақсимот қонунининг параметрларини шундай аниқлаш лозимки, бунда статистик хатолар имкон борича кам бўлсин.

Бирор тақсимот қонунининг параметри θ ни тажриба асосида топилган $x_1, x_2, \ldots, x_n$ сонлар, яъни танланма маълумотлар ёрдамида ҳосил қилинган $\overline{\theta}$ билан баҳолансин. Одатда $\overline{\theta}$ ни θ учун *баҳо* дейилади.

Равшанки, бунда $\overline{\theta}$ баҳо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ларга боғлиқ бўлади: $\overline{\theta}=\overline{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Модомики, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ лар тасодифий миқдор экан, унда $\overline{\theta}$ ҳам тасодифий миқдор бўлади.

Агар $\overline{\theta}$ баҳонинг математик кутилиши θ га тенг, яъни $M\overline{\theta}=\theta$ бўлса, $\overline{\theta}$ ни *силжимайдиган баҳо* дейилади.

Агар $\forall\, a>0$ учун

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\overline{\theta}-\theta|>a\}=0$$

бўлса, у ҳолда $\overline{\theta}$ баҳо θ нинг *асосли баҳоси* дейилади.

Фараз қилайлик, θ параметр учун $\overline{\theta}_1$ ва $\overline{\theta}_2$ баҳолар бўлсин. Агар

$$M(\overline{\theta}_1-\theta)^2<M(\overline{\theta}_2-\theta)^2$$

бўлса, $\overline{\theta}_1$ баҳо $\overline{\theta}_2$ баҳога қараганда *эффективроқ баҳо* дейилади.

Статистик тақсимот қонунларининг параметрларини баҳолашда уларнинг силжимайдиган, асосли ҳамда эффектив баҳо бўлиши каби хусусиятларга эгалиги талаб қилинади.

6-§. Танланма ўртача қиймат ва танланма дисперсия

Фараз қилайлик, ξ текис тақсимланган тасодифий миқдор бўлсин. Унинг номаълум параметрлари — математик кутилиши $M\xi$, дисперсияси эса $D\xi$ бўлсин.

Берилган ξ тасодифий миқдорни кузатиш натижасида

$$x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n \tag{26.2}$$

қийматларга эга бўлайлик. Равшанки, бу кузатилган қийматларнинг ўзлари ҳам тасодифий миқдор бўлиб, у ξ тасодифий миқдор қандай қийматларни қабул қилса, шу қийматлардан бирини қабул қилади. Демак,

$$Mx_k = M\xi, \ Dx_k = D\xi \ (k = 1, 2, \ldots, n)$$

бўлади. Энди (26.2) кузатишлар натижасидан фойдаланиб, ушбу

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

қийматларни ҳосил қиламиз. Уни ξ тасодифий миқдорнинг математик кутилиши (ўрта қиймати)$M\xi$ нинг тақрибий ифодаси сифатида қабул қиламиз:

$$M\xi \approx \overline{x}. \tag{26.3}$$

$\overline{x}$ ни (26.3) танланма бўйича *ўртача қиймати* ёки *эмпирик ўртача қиймати* дейилади.

Қуйидаги

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2$$

миқдорни ξ тасодифий миқдорнинг дисперсияси $D\xi$ нинг статистик силжимаган статистик баҳоси сифатида қабул қиламиз:

$$D\xi = s^2. \tag{26.4}$$

Одатда s^2 ни (26.4) танланма бўйича *дисперсия* ёки *эмпирик дисперсия* дейилади.

Бу $M\xi \approx \overline{x}$, $D\xi \approx s^2$ муносабатлардаги $\overline{x}$ ва s^2 лар ξ тасодифий миқдорнинг параметрлари $M\xi$ ва $D\xi$ лар учун *нуқтавий баҳолар* дейилади.

Тасодифий миқдорнинг математик кутилиши ва дисперсияси учун келтирилган баҳолар силжимайдиган, асосли ҳамда эффектив баҳолар бўлади. Шуларни кўрсатамиз.

1. (26.3), (26.4) баҳоларнинг силжимайдиган баҳолар эканлигини исботлаш учун

$$M\overline{x} = M\xi, \tag{26.5}$$

$$M s^2 = D\xi \tag{26.6}$$

бўлишини кўрсатиш керак бўлади.

Ҳақиқатан ҳам,

$$M\overline{x} = M\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} =$$

$$= \frac{1}{n}(Mx_1 + Mx_2 + \ldots + Mx_n) = \frac{1}{n}M\xi\cdot n = M\xi$$

бўлиб, бу (26.5) муносабатнинг тўғрилигини исботлайди.

Энди (26.6) тенгликни исботлаймиз:

$$Ms^2 = M\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}M(x_k - \overline{x})^2.$$

Дисперсияни ҳисоблаш формуласи $D\eta = M\eta^2 - (M\eta)^2$ дан топамиз:

$$M\eta^2 = D\eta + (M\eta)^2.$$

Шунга кўра

$$M(x_k - \overline{x})^2 = D(x_k - \overline{x}) + [M(x_k - \overline{x})]^2$$

бўлади. Натижада ушбу

$$Ms^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\{D(x_k - \overline{x}) + [M(x_k - \overline{x})]^2\} =$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}D(x_k - \overline{x}) + \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}[M(x_k - x]^2$$

тенгликка келамиз.

Энди

$$D(x_k - \overline{x}) = D\left[x_k - \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\right] =$$

$$= D\left[x_k - \frac{1}{n}x_k - \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} + x_{k+1} + \ldots + x_n)\right] =$$

$$= D\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)x_k - \frac{1}{n}\sum_{i=1,\, i\neq k}^{n}x_i\right] = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 Dx_k + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1,\, i\neq k}^{n}Dx_i$$

бўлишини эътиборга олиб, топамиз

$$Ms^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)Dx_k + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1,\, i\neq k}^{n} Dx_i\right] =$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 D\xi + \frac{n-1}{n^2} D\xi\right] =$$

$$= D\xi\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \frac{n-1}{n^2}\right] = D\xi\cdot n\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n^2}(n-1+1) = D\xi.$$

Демак, $Ms^2 = D\xi$. Бу эса (26.6) тенгликнинг тўғрилигини исботлайди. Шундай қилиб, s^2 нинг $D\xi$ учун силжимайдиган баҳо экани кўрсатилди.

2. Юқорида келтирилган

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k,$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_k - \overline{x})^2$$

баҳолар мос равишда $M\xi$ ва $D\xi$ учун асосли баҳолар бўлади.

Бунинг учун $\forall\, a > 0$ да ушбу лимит муносабатларнинг ўринли бўлишини кўрсатиш керак.

$$\lim_{n\to\infty} P\{|M\xi - \overline{x}| > a\} = 0,\ \lim_{n\to\infty} P\{|D\xi - s^2\} > a\} = 0$$

Улардан бирининг исботини келтирамиз.

Агар $M\overline{x} = M\xi$ бўлишини эътиборга олсак, унда

$$P\{|M\xi - \overline{x}| > a\} = P\{|\overline{x} - M\overline{x}| > a\}$$

эканини топамиз. Мазкур курснинг 24-бобида келтирилган Чебишев тенгсизлигидан фойдаланиб, қуйидаги $P\{|\overline{x} - M\overline{x}| > a\} < \frac{D\overline{x}}{a^2}$ тенгсизликка эга бўламиз. Демак,

$$P\{|M\xi - \overline{x}| > a] < \frac{D\overline{x}}{a^2}.$$

Равшанки,

$$D\overline{x} = D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} Dx_k = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D\xi =$$

$$= \frac{1}{n^2} D\xi\cdot n = \frac{D\xi}{n}.$$

Натижада

$$P\{|M\xi - \overline{x}| < a\} < \frac{D\xi}{a^2 n}$$

тенгсизликка келамиз. Бунда эса $n \to \infty$ да $\frac{D\xi}{a^2 n} \to 0$ бўлганлиги сабабли $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|M\xi - \overline{x}| > a\} = 0$ бўлиши келиб чиқади. Бу эса $\overline{x}$ баҳо $M\xi$ учун асосли баҳо эканини билдиради.

Тасодифий миқдор маълум шартларни қаноатлантирганда s^2 баҳо $D\xi$ учун асосли баҳо, яъни

$$\lim_{n\to\infty} P\ \{|D\xi - s^2| > a\} = 0$$

бўлиши кўрсатилади.

7-§. Баҳонинг аниқлиги, ишончлилик эҳтимоли, ишончлилик интервали

Айтайлик, бош тўпламнинг x сон белгиси маълум тақсимотга эга бўлсин. Бу тақсимотнинг номаълум параметрларини танланма ҳажми кичик бўлганда нуқтавий баҳолар ёрдамида баҳолаш қўпол хатоликларга олиб келиши мумкин.

Бундай ҳолда интервалли баҳодан фойдаланиш мақсадга мувофиқ бўлади. Иккита сон — интервалнинг охирлари билан аниқланган баҳо *интервалли баҳо* деб аталади.

θ — номаълум параметр, $\overline{\theta}$ эса танланма маълумотлари бўйича топилган статистик характеристика, яъни θ нинг баҳоси бўлсин.

Равшанки, $|\theta - \overline{\theta}|$ қанча кичик бўлса, яъни $|\theta - \overline{\theta}| < \delta$ шартда δ қанча кичик бўлса, $\overline{\theta}$ баҳо шунча аниқ бўлади. Бунда δ сон θ баҳонинг *аниқлиги* дейилади.

$|\theta - \overline{\theta}| < \delta$ тенгсизликнинг амалга ошиш γ эҳтимоли θ баҳонинг $\overline{\theta}$ бўйича *ишончлилиги (ишончлилик эҳтимоли)* деб айтилади, яъни

$$P\{|\theta - \overline{\theta}| < \delta\} = \gamma.$$

Номаълум параметрни берилган γ ишончлилик билан қоплайдиган $(\overline{\theta} - \delta,\ \overline{\theta} + \delta)$ интервал *ишончлилик интервали* деб айтилади.

Мисол тариқасида нормал тақсимотнинг параметрларидан бири — тақсимотнинг дисперсияси σ маълум бўлган ҳолда номаълум математик кутилиши учун ишончли интервални топамиз.

Фараз қилайлик, ξ тасодифий миқдор нормал тақсимланган, унинг дисперсияси $D\xi = \sigma^2$ маълум бўлсин, $M\xi = a$ номаълум математик кутилиши бўлсин. Қаралаётган тасодифий миқдорни кузатиш натижасида

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \qquad (26.7)$$

га эга бўлайлик. Бу $x_1, x_2, \ldots, x_n$ лар ҳам тасодифий миқдор бўлиб, улар учун ҳам

$$Mx_i = a,\ Dx_i = \sigma^2,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

бўлади.

Биз юқорида (26.7) танланма бўйича олинган $\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ нинг математик кутилиши $M\overline{x} = a$, дисперсияси эса $D\overline{x} = \frac{\sigma^2}{n}$ бўлишини кўрган эдик.

Равшанки, бу $\overline{x}$ ҳам нормал қонун бўйича тақсимланган тасодифий миқдор бўлиб, унинг параметрлари

$$M\overline{x} = a, \quad D\overline{x} = \frac{\sigma^2}{n}$$

га тенг. Бу тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\sqrt{n}\right) \tag{26.8}$$

бўлади.

Энди γ га кўра δ $(\delta > 0)$ ни аниқлашда ушбу

$$P\{|\overline{x} - a| < \delta\} = \gamma \tag{26.9}$$

тенгликдан фойдаланамиз.

Агар

$$P\{|\overline{x} - a| < \delta\} = P\{-\delta < \overline{x} - a < \delta\} =$$
$$= P\{a - \delta < \overline{x} < a + \delta\} = F(a+\delta) - F(a-\delta) \tag{26.10}$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$P\{|\overline{x} - a| < \delta\} = \gamma \Rightarrow F(a+\delta) - F(a-\delta) = \gamma$$

га эга бўламиз.

(26.10) муносабатдан фойдаланиб топамиз:

$$F(a+\delta) - F(a-\delta) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{-\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) =$$
$$= 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right).$$

Демак, $2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \gamma$, яъни $\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \frac{1}{2}\gamma$.

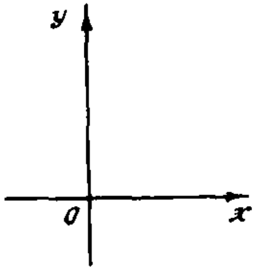
$\Phi(x)$ функциянинг хусусияти ҳамда γ учун $0 < \gamma < 1$ бўлишини эътиборга олиб, шундай α мавжудлигини кўрсатиш мумкинки, унда

$$\Phi(\alpha) = \frac{1}{2}\gamma$$

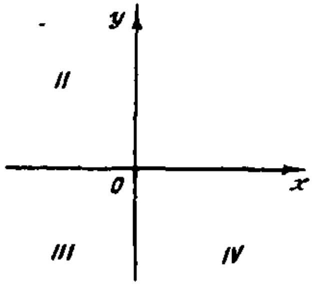
бўлади. Одатда α квантил деб аталади. (α ни $\Phi(x)$ функция учун тузилган жадвалдан топилади.)

Шундай қилиб, $\alpha = \frac{\delta\sqrt{n}}{\tau}$ бўлиб, ундан

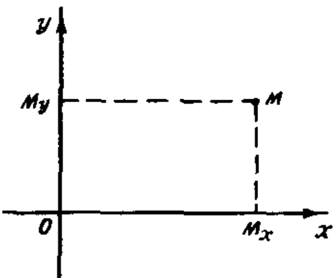
$$\delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\alpha$$



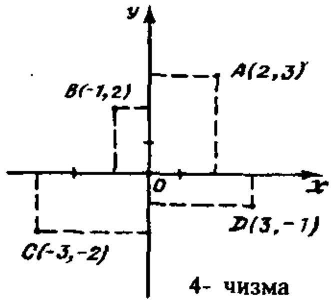
1- чизма



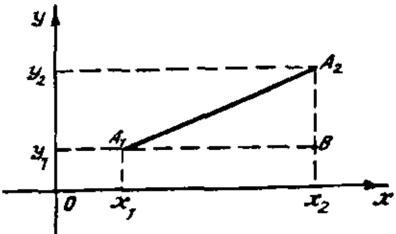
2- чизма



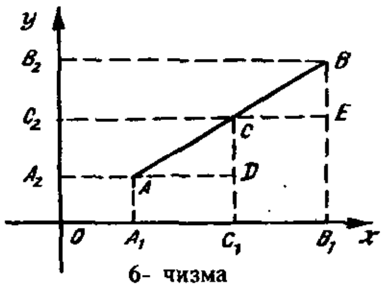
3- чизма



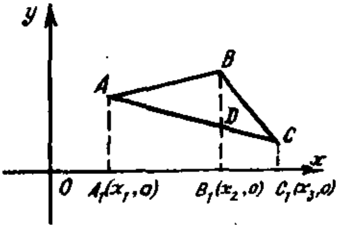
4- чизма



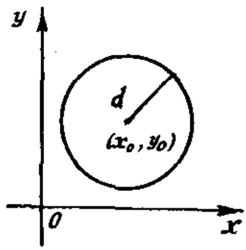
5- чизма



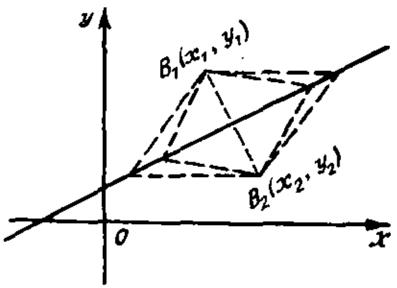
6- чизма



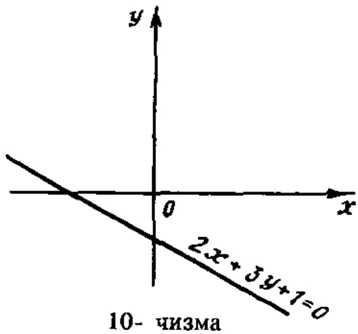
7- чизма



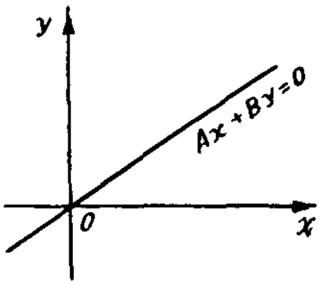
8- чизма



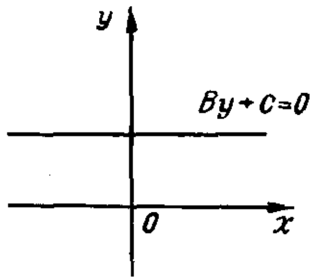
9- чизма



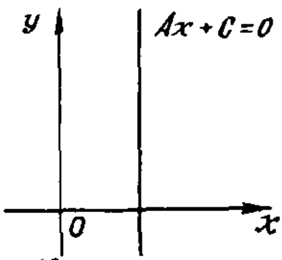
10- чизма



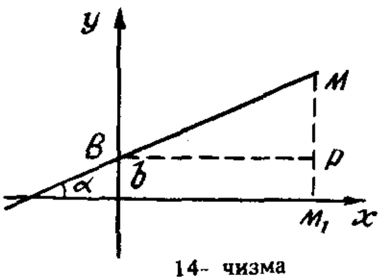
11- чизма



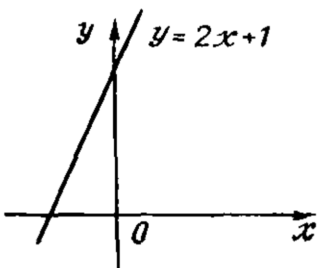
12- чизма



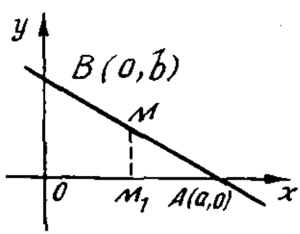
13- чизма



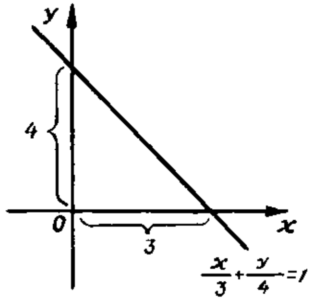
14- чизма



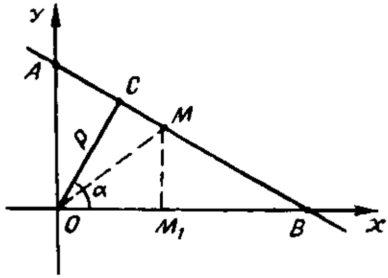
15- чизма



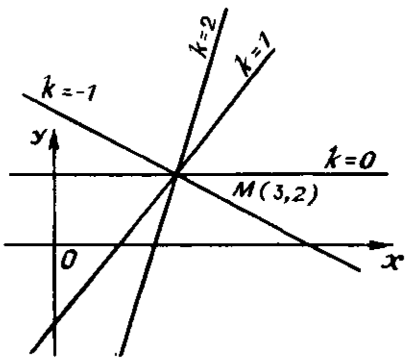
16- чизма



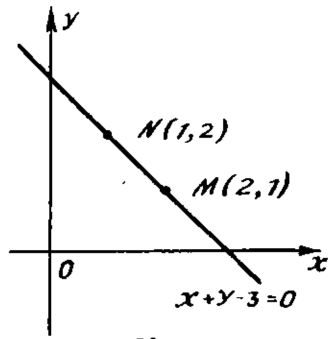
17- чизма



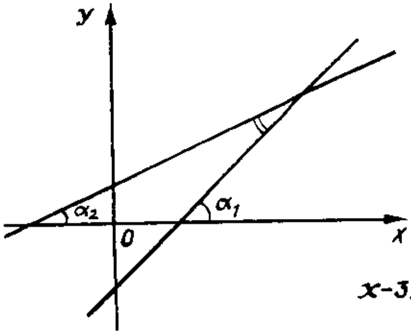
18- чизма



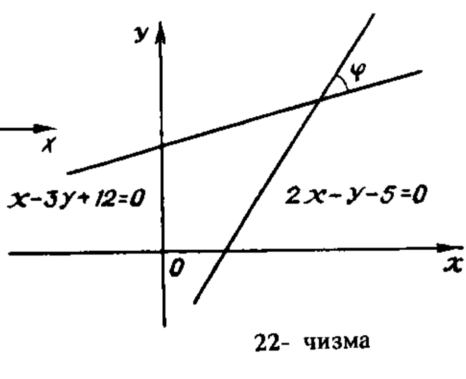
19- чизма



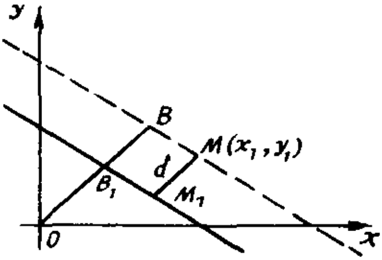
20- чизма



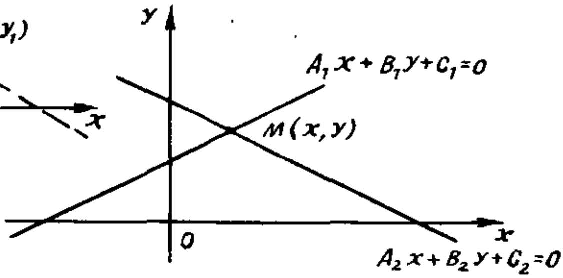
21- чизма



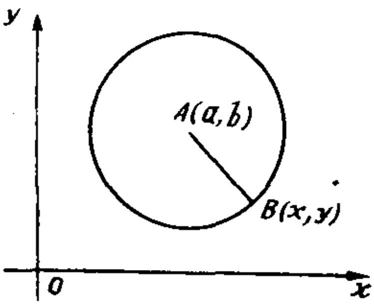
22- чизма



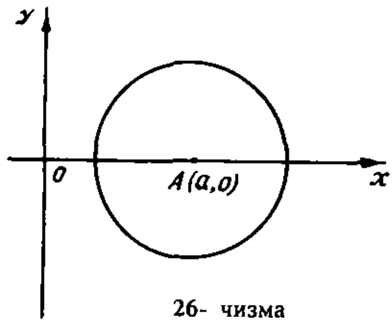
23- чизма



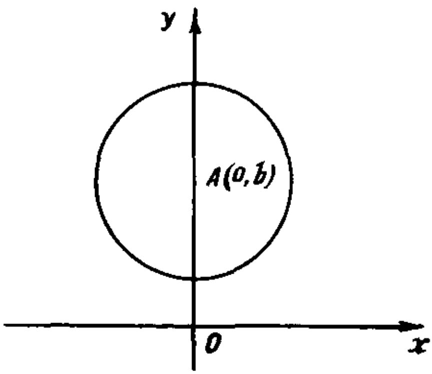
24- чизма



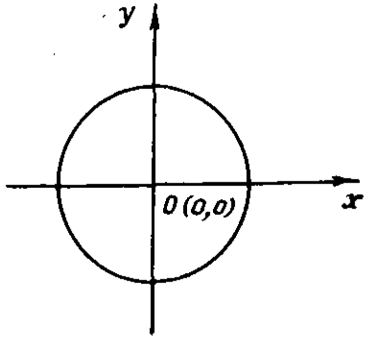
25- чизма



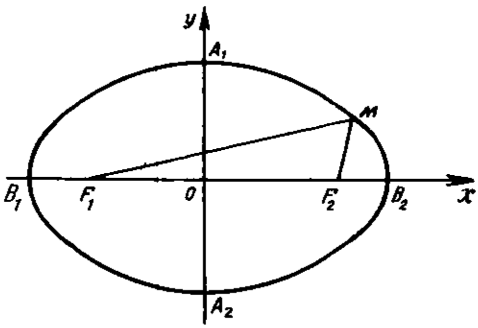
26- чизма



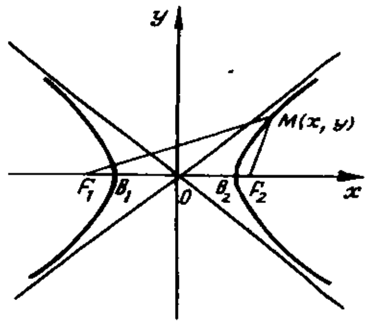
27- чизма



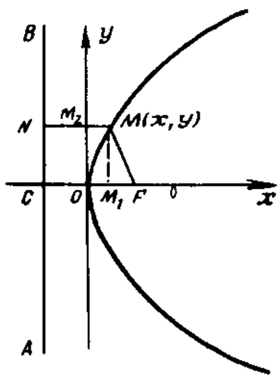
28- чизма



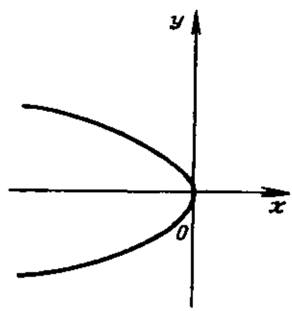
29- чизма



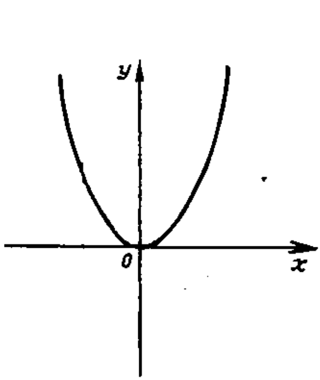
30- чизма



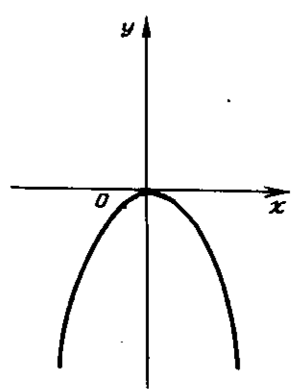
31- чизма



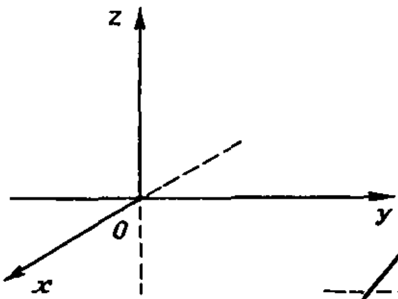
32- чизма



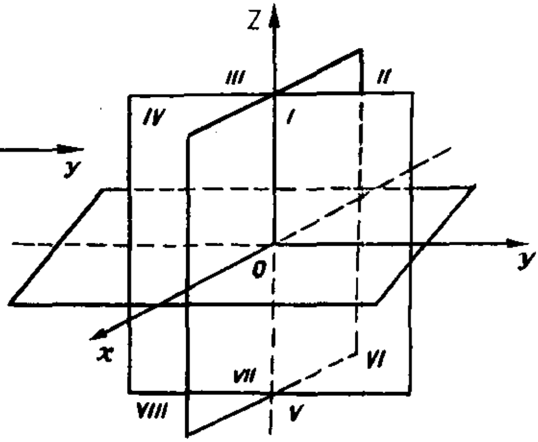
33- чизма



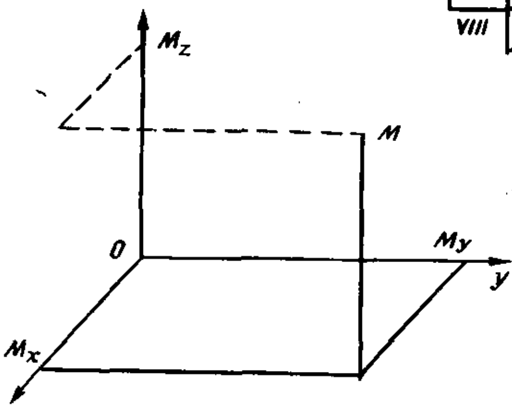
34- чизма



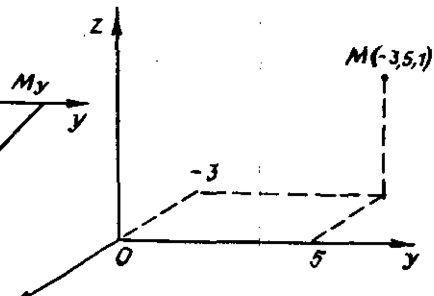
35- чизма



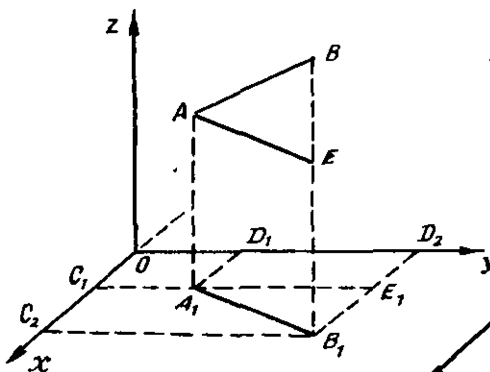
36- чизма



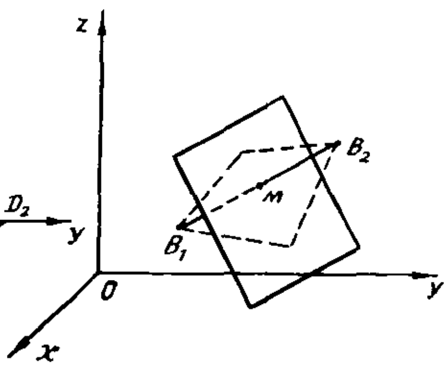
37- чизма



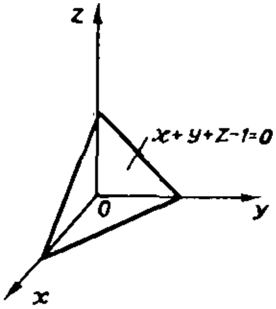
38- чизма



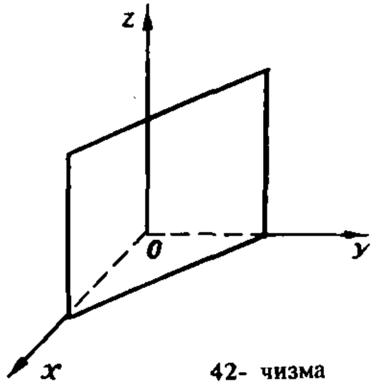
39- чизма



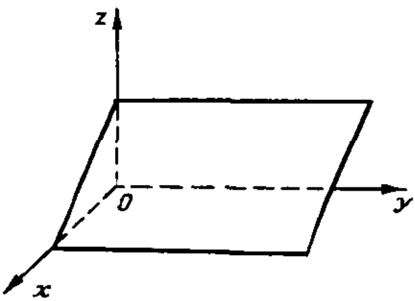
40- чизма



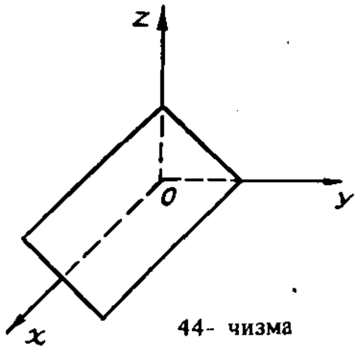
41- чизма



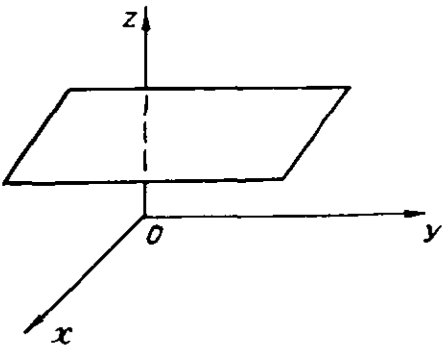
42- чизма



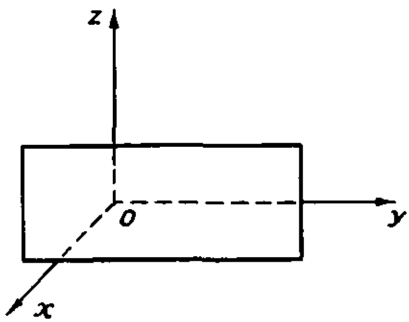
43- чизма



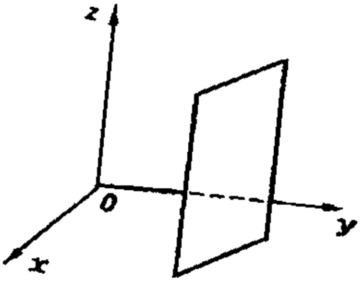
44- чизма



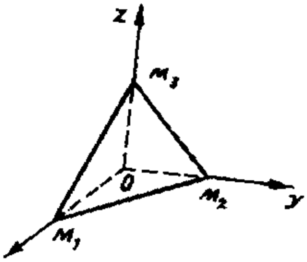
45- чизма



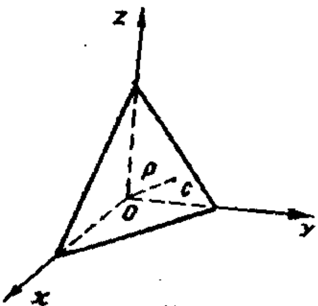
46- чизма



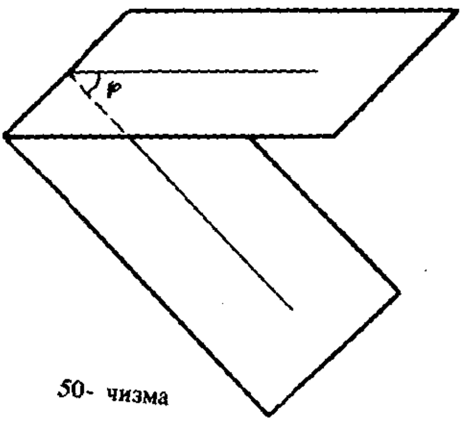
47- чизма



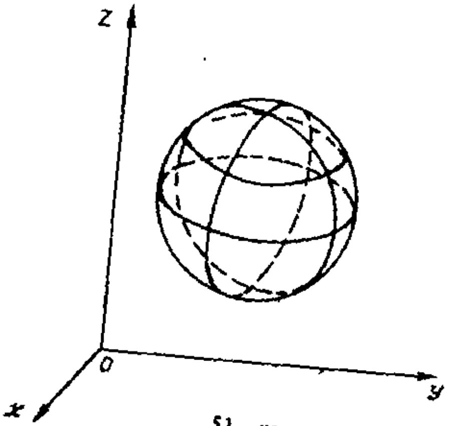
48- чизма



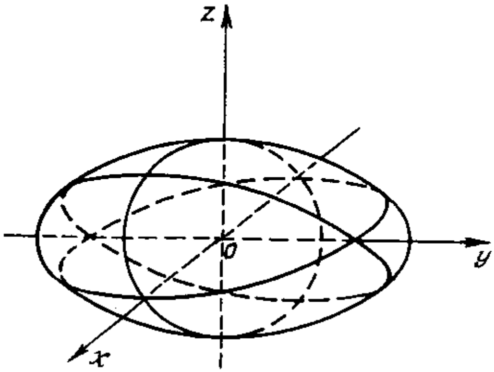
49- чизма



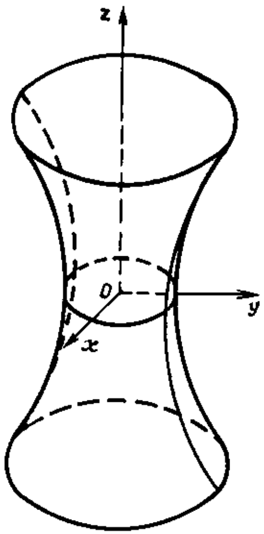
50- чизма



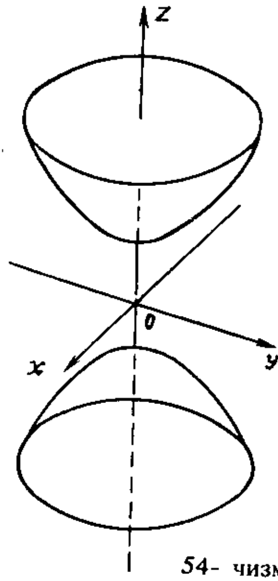
51- чизма



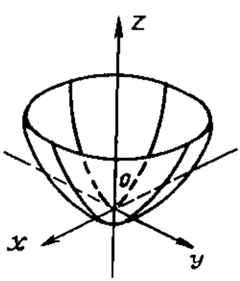
52- чизма



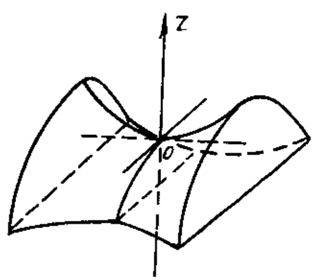
53- чизма



54- чизма

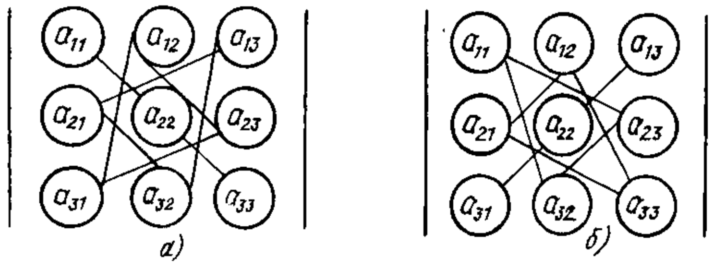


55- чизма

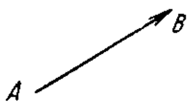


56- чизма

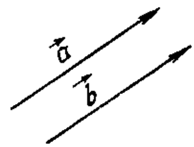
"+" ишора билан "—" ишора билан



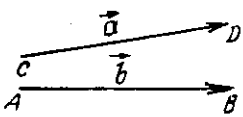
56 а,б-чизма



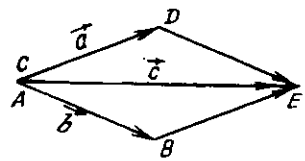
57- чизма



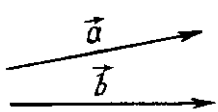
58- чизма



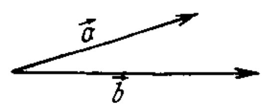
59- чизма



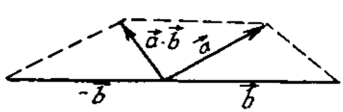
60- чизма



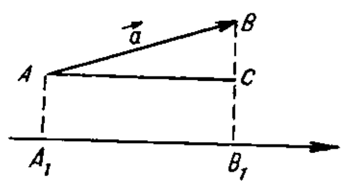
61- чизма



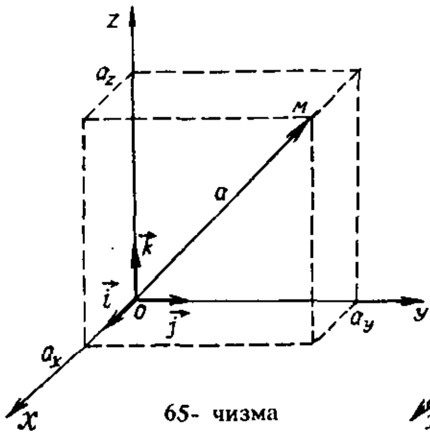
62- чизма



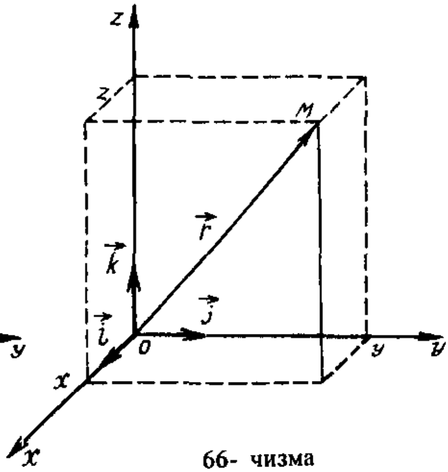
63- чизма



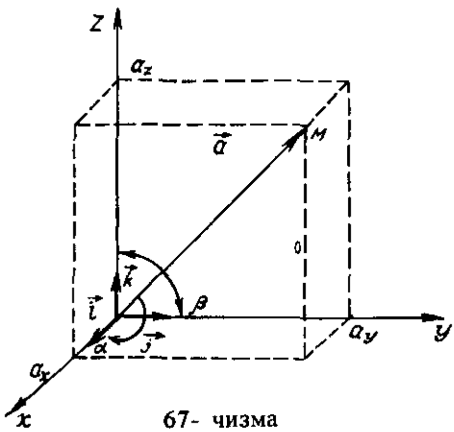
64- чизма



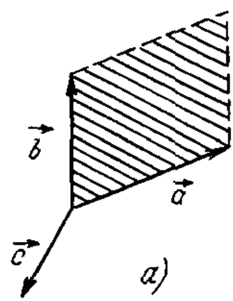
65- чизма



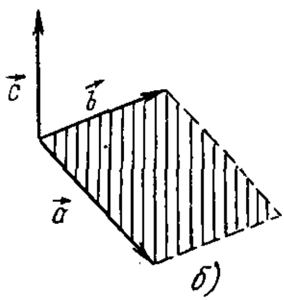
66- чизма



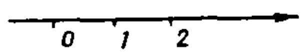
67- чизма



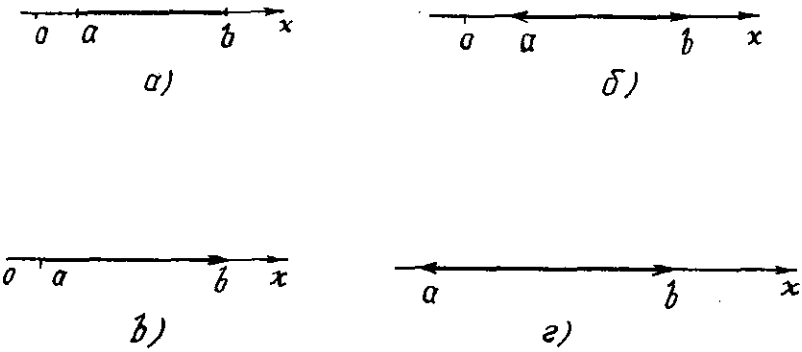
68- чизма



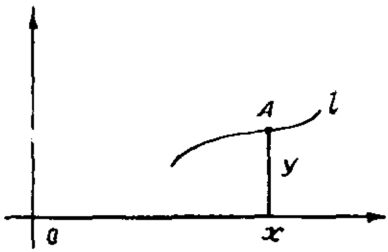
68 - чизма



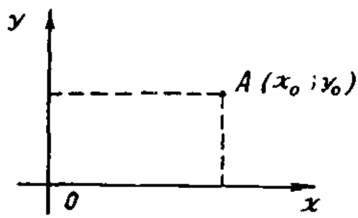
69- чизма



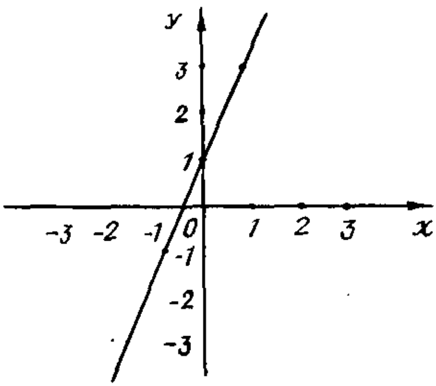
70- чизма



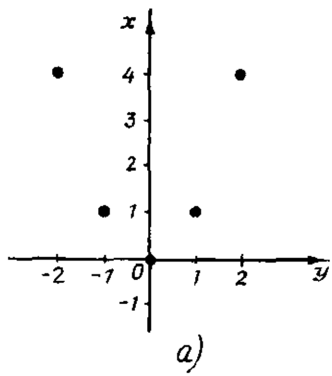
71- чизма



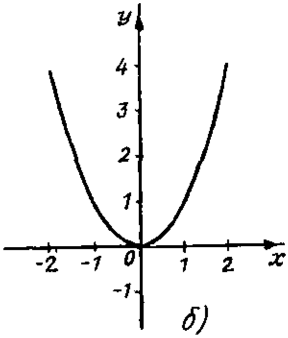
72- чизма



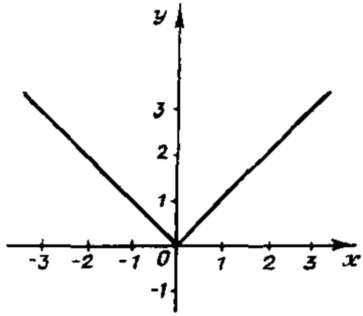
73- чизма



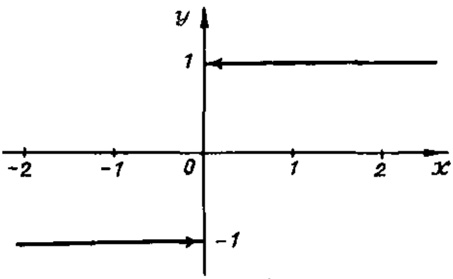
74- чизма



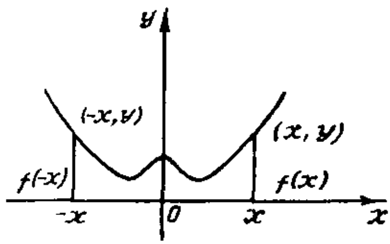
74- чизма



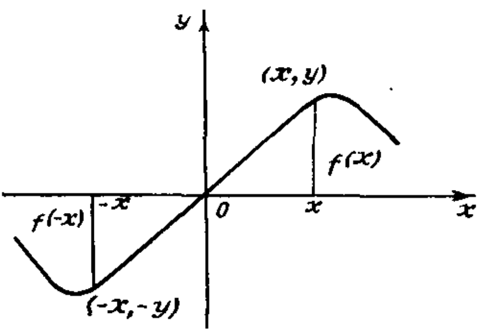
75- чизма



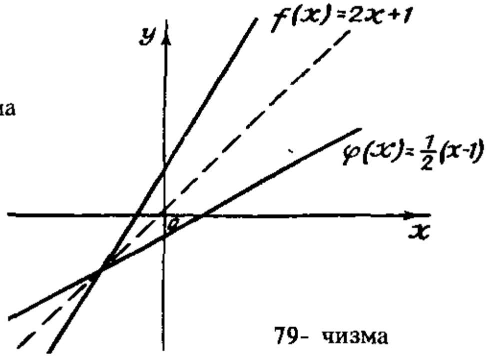
76- чизма



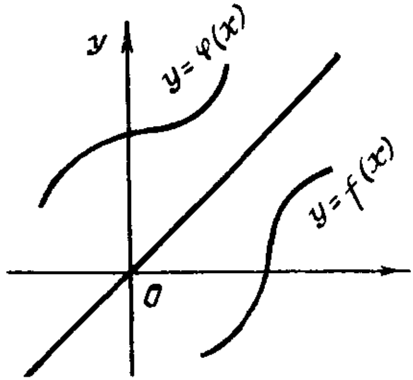
77- чизма



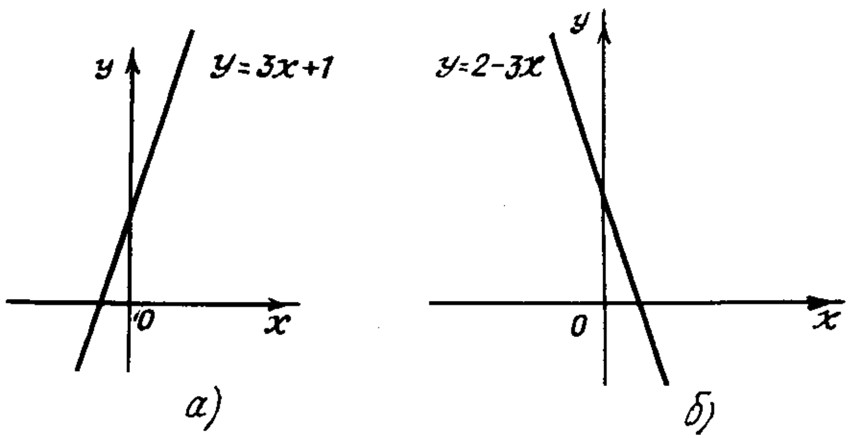
78- чизма

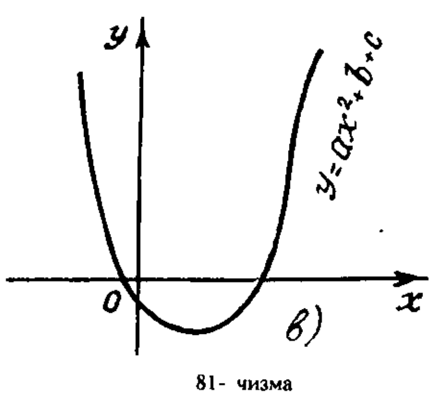


79- чизма

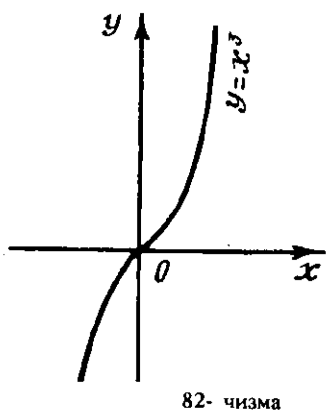


80- чизма

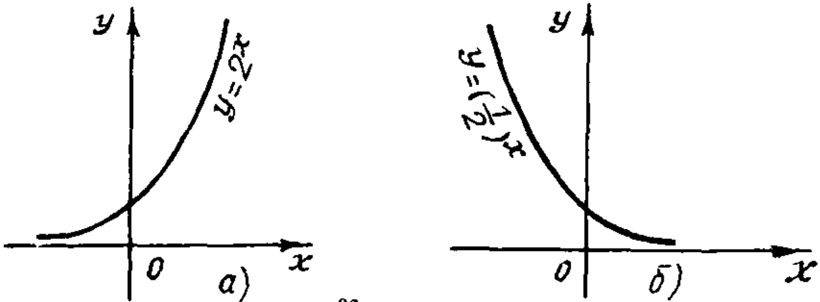




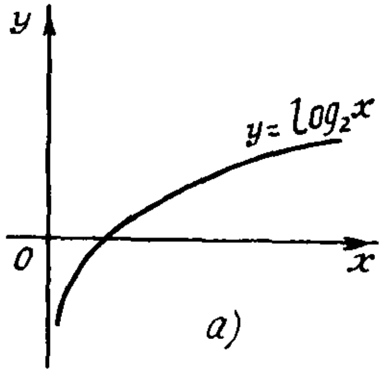
81- чизма

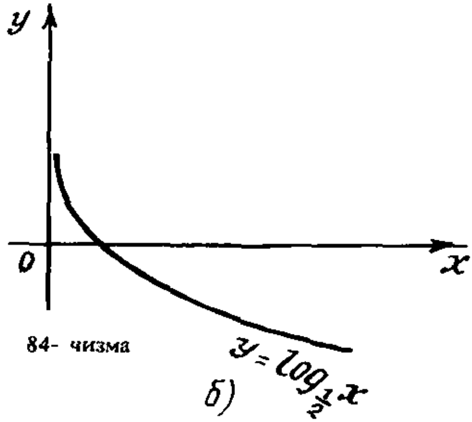


82- чизма

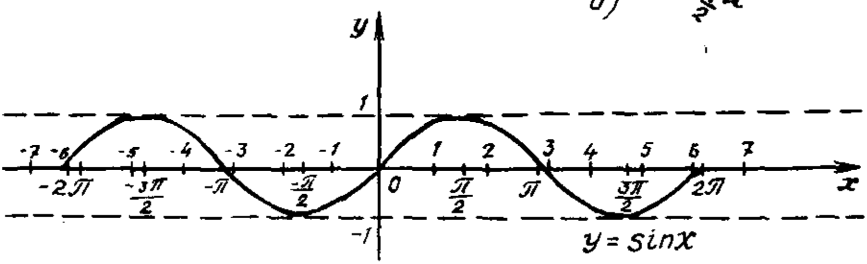


83- чизма

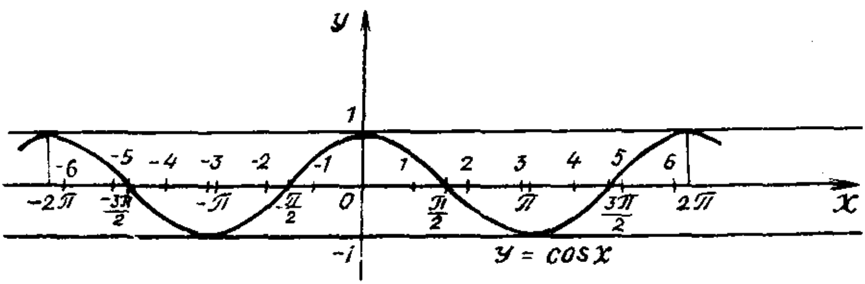




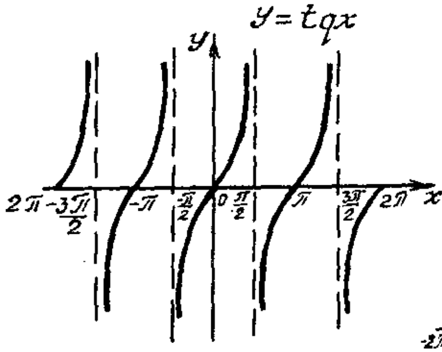
84- чизма



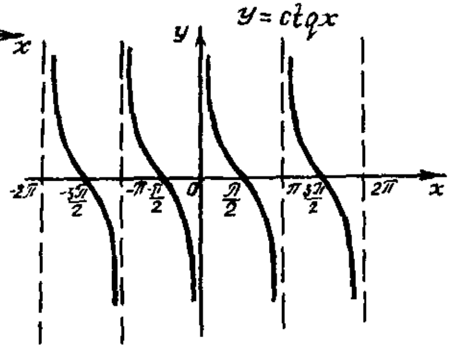
85- чизма



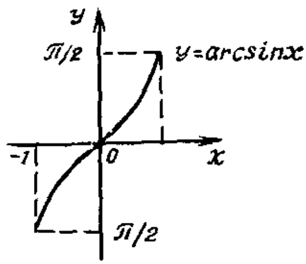
86- чизма



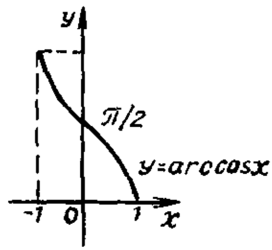
87- чизма



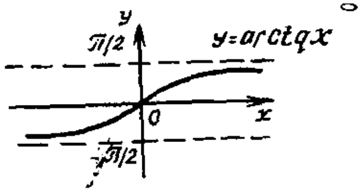
88- чизма



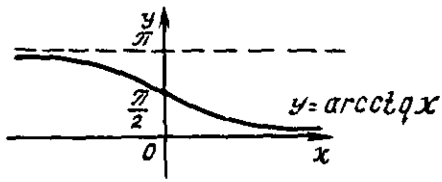
89- чизма



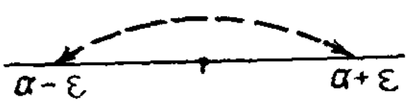
90- чизма



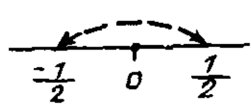
91- чизма



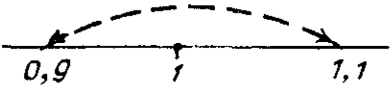
92- чизма



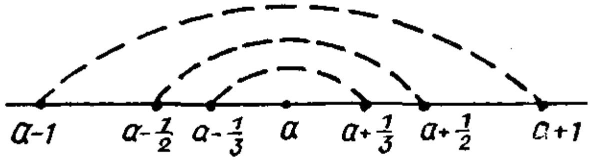
93- чизма



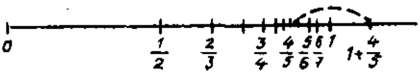
94- чизма



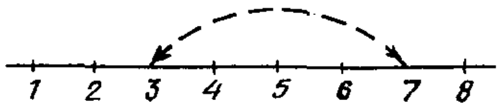
95- чизма



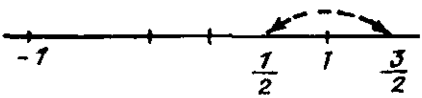
96- чизма



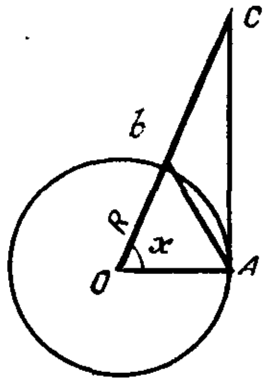
97- чизма



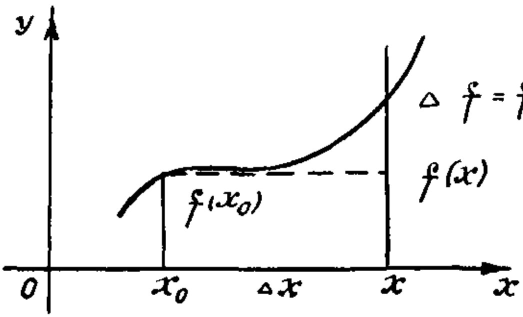
98- чизма



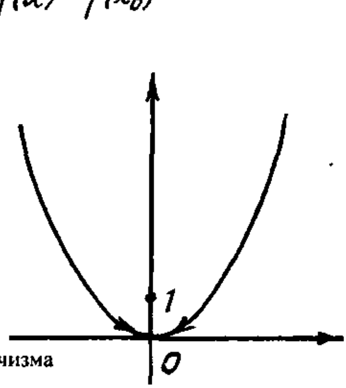
99- чизма



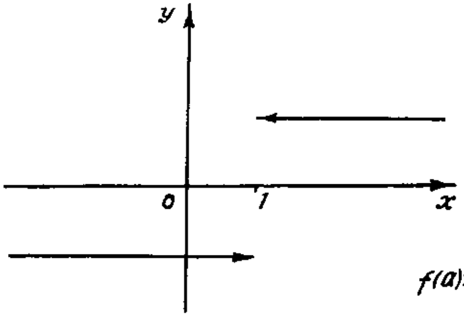
100- чизма



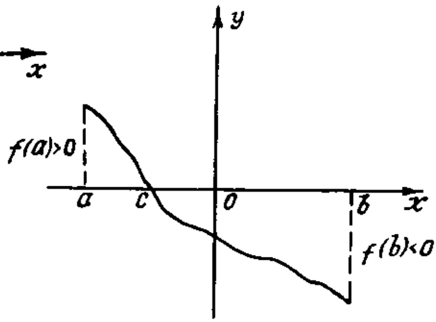
101- чизма



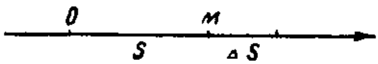
102- чизма



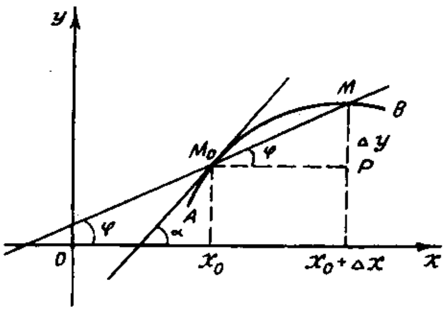
103- чизма



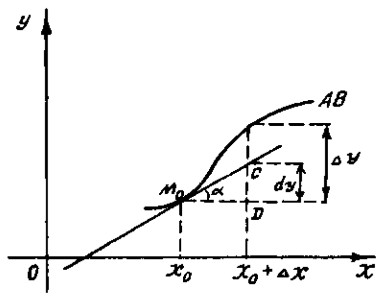
104- чизма



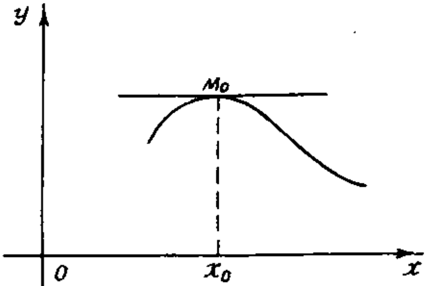
105- чизма



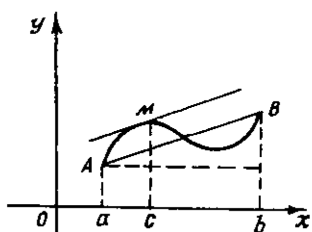
106- чизма



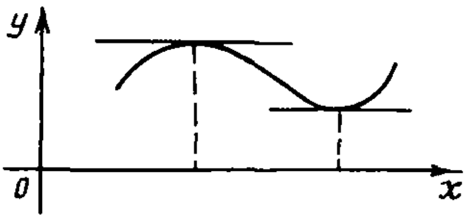
107- чизма



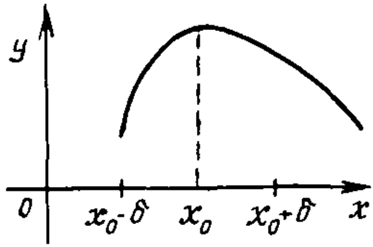
108- чизма



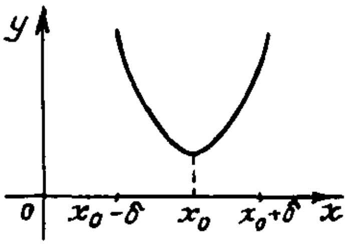
109- чизма



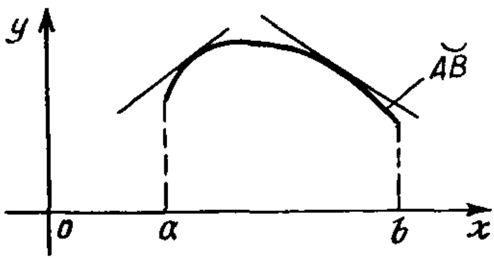
110- чизма



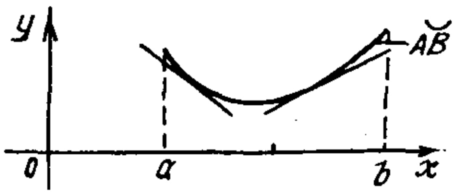
111- чизма



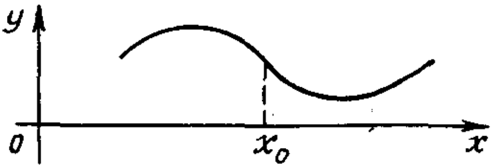
112- чизма



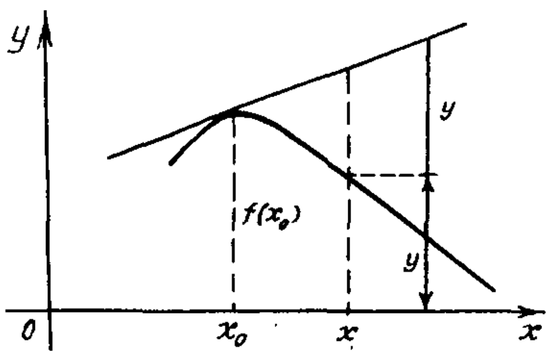
113- чизма



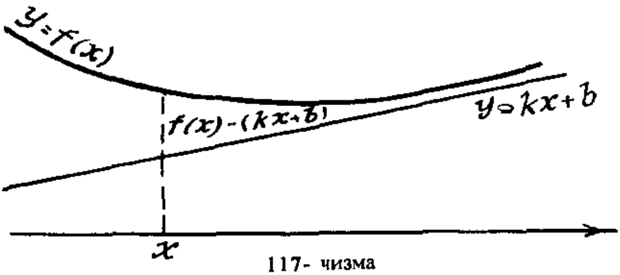
114- чизма



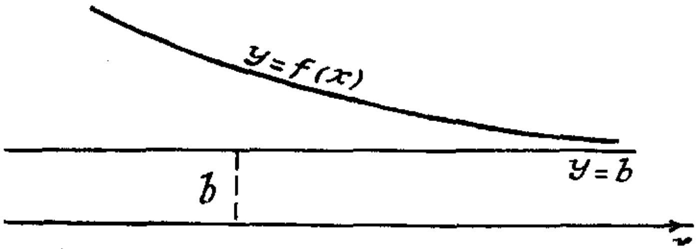
115- чизма



116- чизма

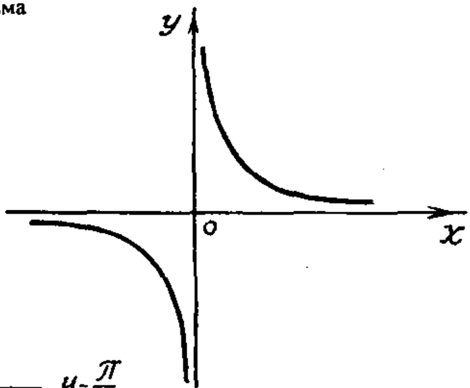


117- чизма

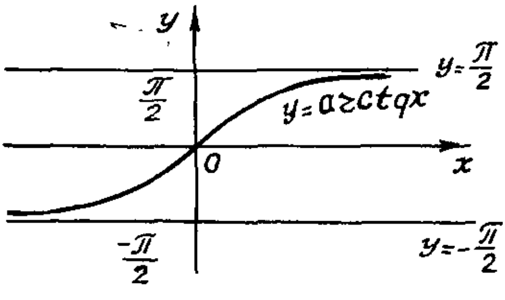


118- чизма

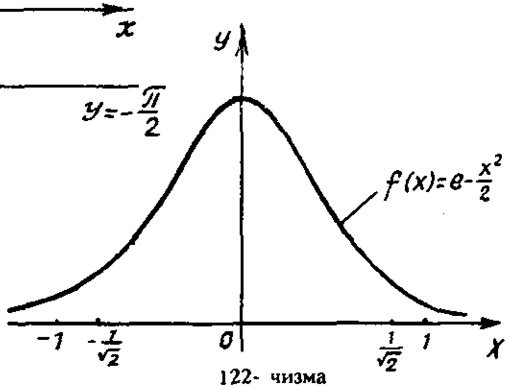
119- чизма



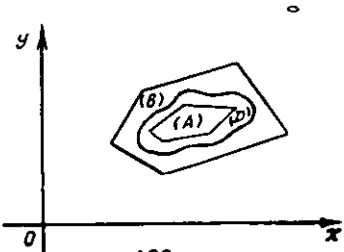
120- чизма



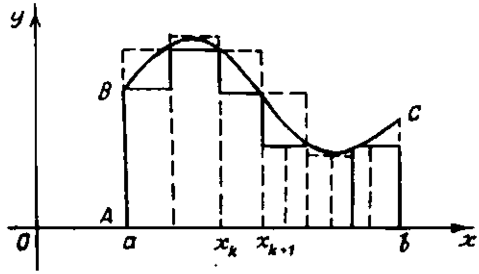
121- чизма



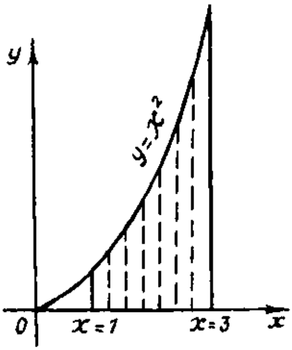
122- чизма



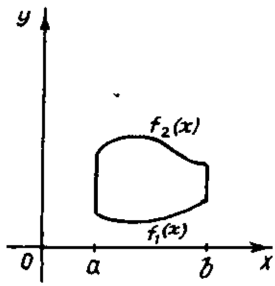
123- чизма



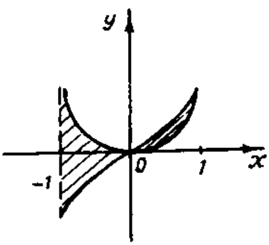
124- чизма



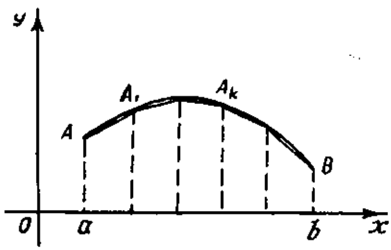
125- чизма



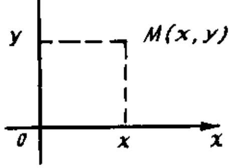
126- чизма



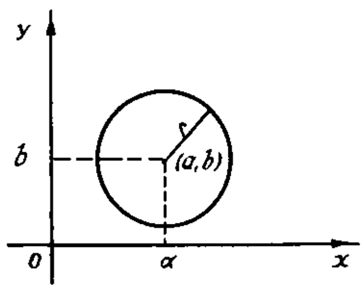
127- чизма



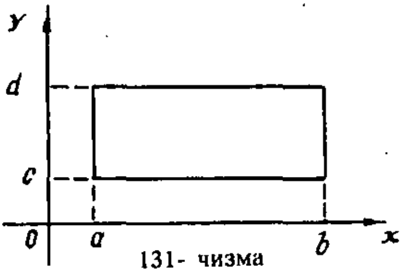
128- чизма



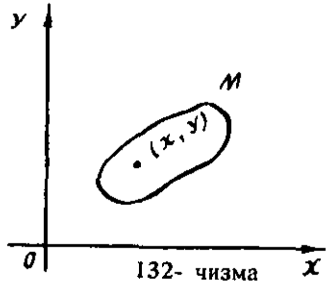
129- чизма



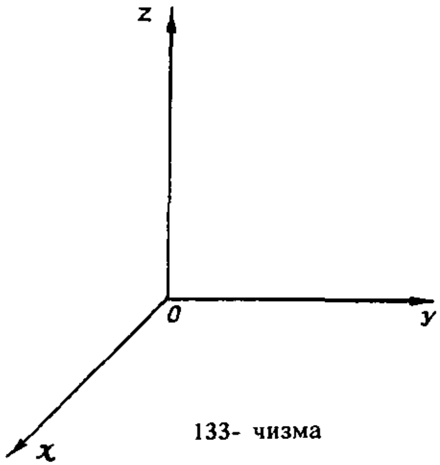
130- чизма



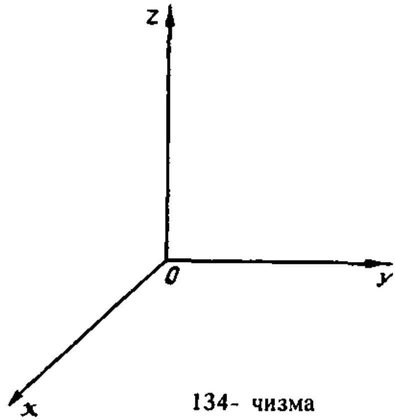
131- чизма



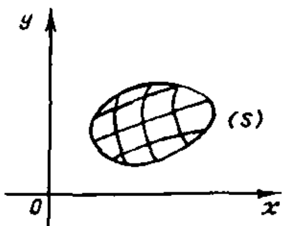
132- чизма



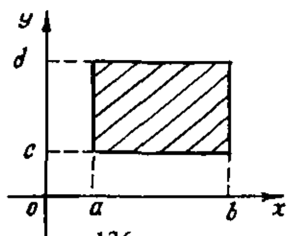
133- чизма



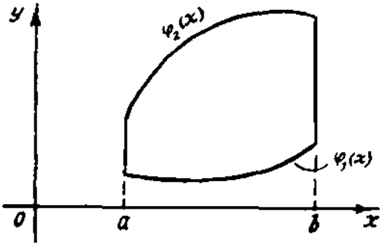
134- чизма



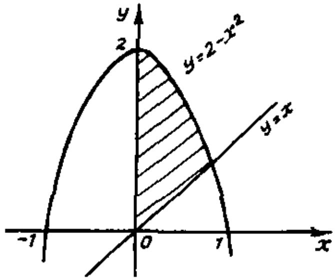
135- чизма



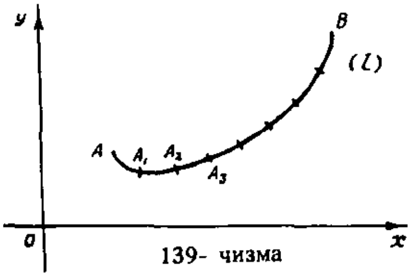
136- чизма



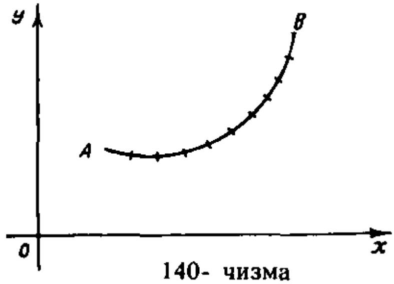
137- чизма



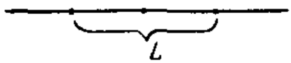
138- чизма



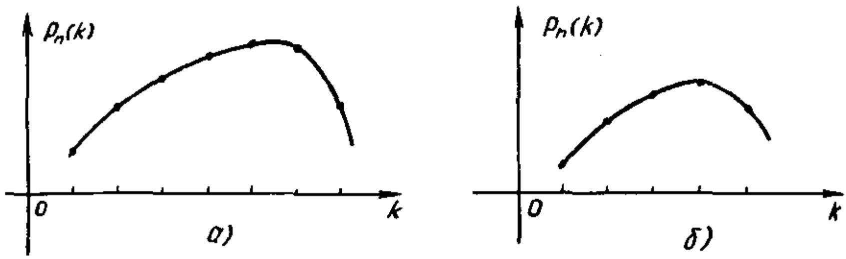
139- чизма



140- чизма

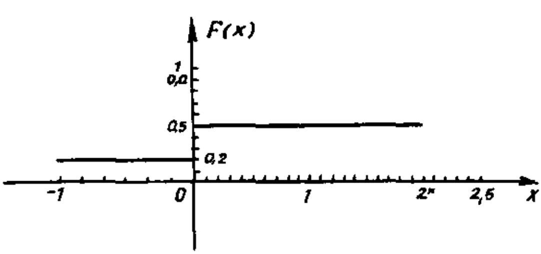


141- чизма

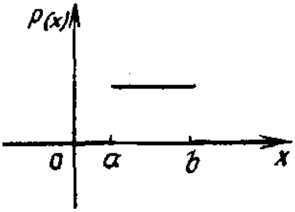


142- чизма

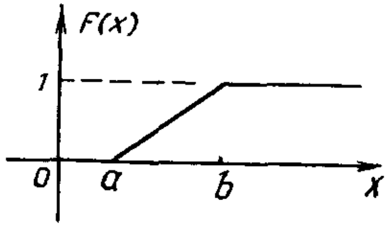
143- чизма



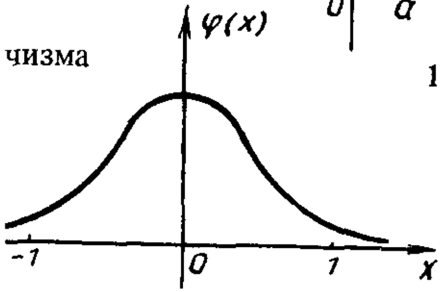
144- чизма



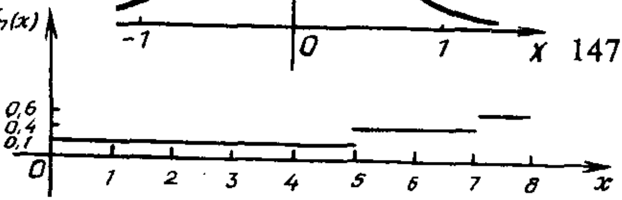
145- чизма



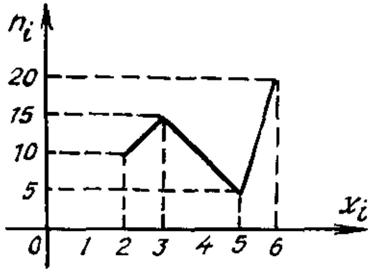
146- чизма



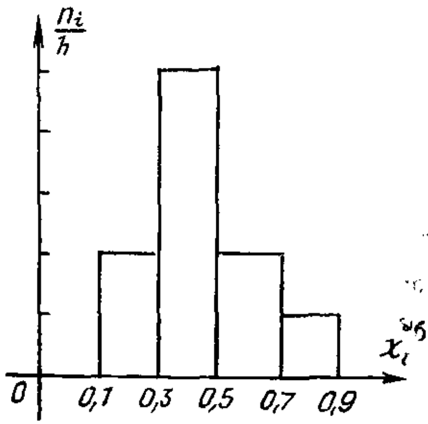
147- чизма



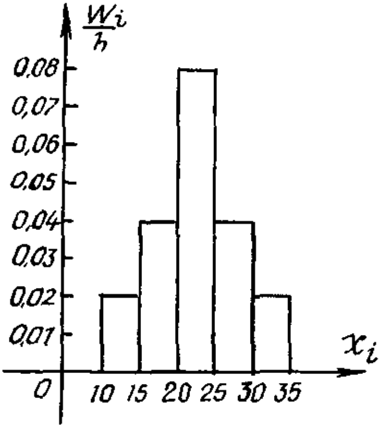
148- чизма



149- чизма



150- чизма



151- чизма

эканлиги келиб чиқади. Натижада $P\{a-\delta<\overline{x}<a+\delta\}=\gamma$ муносабат ушбу кўринишни олади:

$$P\left\{a-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\alpha<\overline{x}<a+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\alpha\right\}=\gamma.$$

Шундай қилиб, нормал тақсимотнинг номаълум a параметри (математик кутилиши) қуйидаги ишончлилик интервали билан қопланади:

$$\left(\overline{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\alpha,\ \overline{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\alpha\right).$$

Бунда баҳонинг аниқлиги $\delta=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\alpha$ га тенг бўлади.

Танланма аниқлигини баҳолашда қуйидаги уч ҳол бўлиши мумкин:

1) баҳонинг аниқлиги δ берилади, $P\{|\overline{x}-a|\leqslant\delta\}$ эҳтимолни топиш керак бўлади;

2) $P\{|\overline{x}-a|\leqslant\delta\}$ эҳтимол берилади, δ ни топиш керак бўлади;

3) баҳонинг аниқлиги δ ва $P\{|\overline{x}-a|\leqslant\delta\}$ эҳтимоли берилган бўлиб, танланма ҳажми n ни топиш керак бўлади.

Нормал тақсимланган ξ миқдорий белгининг σ ўртача квадратик четланишини, s *тузатилган танланма ўртача квадратик четланиши** бўйича γ ишончлилик билан баҳолаш учун қуйидаги ишончлик интервалларидан фойдаланилади:

$$s(1-q)<\sigma<s(1+q)\quad(q<1),$$
$$0<\sigma<s(1+q)\quad(q>1),$$

бу ерда q ни иловадаги 4-жадвалда берилган n ва γ бўйича топилади.

1-мисол. Нормал тақсимланган ξ белгининг ўртача квадратик четланиши $\sigma=2$, танланма ўртача қиймати $\overline{x}=5{,}4$ ва танланма ҳажми $n=10$. Унинг номаълум a математик кутилиши учун $\gamma=0{,}95$ ишончлилик билан ишончли интервалини тузамиз.

Ечиш. Аввал $2\Phi(t)=0{,}95$ тенгликдан $\Phi(t)=0{,}475$ ни ҳосил қиламиз. Китоб охиридаги 2-жадвалдан $t_{0,95}=1{,}96$ ни топамиз. Энди баҳонинг аниқлиги δ ни $\delta=\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$ формуладан топамиз:

$$\delta=\frac{1{,}96\cdot 2}{\sqrt{10}}\approx 1{,}24,$$

Ишончлилик интервали $\overline{x}-1{,}24<a<\overline{x}+1{,}24$ ёки $5{,}4-1{,}24<$ $<a<5{,}4+1{,}24$, яъни $4{,}16<a<6{,}64$ бўлади.

Демак, 95 % ишонч билан (4,16; 6,64) ишончлилик интервали

* Ўртача квадратик четланиш деб, дисперсиядан олинган квадрат илдизга айтилади: $\sigma=\sqrt{D\xi}$.

номаълум a параметрни тўла қоплайди деб айтиш мумкин. Баҳонинг аниқлиги $\delta = 1{,}24$.

2-мисол. Экилган канопдан 100 туп танлаб олиниб, пояларининг узунликларини ҳисоблаб чиқилганда қуйидаги маълумотлар олинди (см):

Вариантлар, x_i	45	55	65	75	85	95	105	115
Частоталар, n_i	1	5	11	26	33	16	7	1

Бош тўплам ўртача қиймати учун ишончлилик интервалини топинг ($\gamma = 0{,}95$).

Ечиш. Аввал статистик характеристикани ҳисоблаймиз. Бунинг учун ҳисоблаш жадвалини қуйидагича тузамиз:

1) биринчи устунда вариантларни;
2) иккинчи устунда частоталарни;
3) учинчи устунда частоталар билан вариантлар кўпайтмасини;
4) тўртинчи устунда вариантлар квадратларини;
5) бешинчи устунда вариантлар квадратларининг мос частоталарга кўпайтмасини жойлаштирамиз;
6) жадвал остига мос устунлардаги рақамлар йиғиндисини ёзамиз.

x_i	n_i	$x_i n_i$	x_i^2	$x_i^2 n_i$
45	1	45	2025	2025
55	5	275	3025	15125
65	11	315	4225	46475
75	26	1950	5625	146250
85	33	2805	7225	238425
95	16	1520	9025	144400
105	7	735	11025	77125
115	1	115	13225	13225
Σ	100	8160	—	683100

7) танланма ўртача қийматини

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum x_i n_i$$

формула орқали ҳисоблаймиз. Жадвалдаги қийматларни ўрнига қўйиб ҳисоблаймиз:

$$\overline{x} = \frac{8160}{100} = 81{,}6 \qquad \overline{x} = 81{,}6.$$

8) дисперсияни

$$D = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i n_i\right)^2$$

формуладан фойдаланиб ҳисоблаймиз. Жадвалдаги қийматларни қўямиз:

$$D = 6831 - (81{,}60)^2 = 180{,}44;$$

9) ўрта квадратик четланишни топамиз:

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{180{,}44} \approx 13{,}4;$$

10) вариация коэффициентини топамиз:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{X}} \cdot 100\% = \frac{13{,}4}{81{,}6} \cdot 100\% = 16{,}3\%;$$

11) танланма ўртача қийматининг абсолют хатоси қуйидагича:

$$\theta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{13{,}4}{10} = 1{,}34;$$

12) бош тўплам ўртача қийматининг ишончлилик интервалини топамиз. Бунда

$$\bar{x} = 81{,}6; \quad \gamma = 0{,}95; \quad n = 100; \quad \sigma = 13{,}4.$$

Ишончлилик интервалини

$$\bar{x} - t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (26.11)$$

тенгсизликдан топамиз.

t_γ ни 3-жадвалда берилган n ва γ бўйича топамиз: ($n = 100$, $\gamma = 0{,}95$) $t_\gamma = 1{,}984$. Бу қийматларни (26.11) тенгсизликка қўямиз:

$$81{,}6 - 1{,}984 \cdot \frac{13{,}4}{\sqrt{100}} < a < 81{,}6 + 1{,}984 \cdot \frac{13{,}4}{\sqrt{100}}; \quad 78{,}9 < a < 84{,}3.$$

3-мисол. Танланманинг шундай минимал ҳажмини топингки, нормал тақсимланган бош тўплам математик кутилишининг танланма ўртача қиймати бўйича баҳосининг аниқлиги 0,925 ишончлилик билан 0,2 га тенг бўлсин. Бош тўпламнинг ўрта квадратик четланиши маълум: $\sigma = 1{,}5$.

Ечиш. Мисол шартида қуйидагилар берилган:

$$\gamma = 0{,}925; \quad \sigma = 1{,}5; \quad \delta = 0{,}2; \quad 2\Phi(x) = 0{,}925.$$

Булардан фойдаланиб $\Phi(x)$ ни топимиз

$$\Phi(x) = \frac{0{,}925}{2} = 0{,}4625.$$

Иловадаги 2-жадвалда $\Phi(x) = 0{,}4625$ га x нинг $x = 1{,}78$ қиймати мос келади.

Бош тўплам математик кутилишининг танланма ўртача қиймат бўйича баҳосининг аниқлигини ифодалайдиган $\delta = x \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ формуладан фойдаланамиз:

$$\sqrt{n} = \frac{x\sigma}{\delta} \quad \text{ёки} \quad n = \frac{x^2\sigma^2}{\delta^2}.$$

Бу ерда x, σ, δ нинг қийматларини қўямиз:

$$n = \frac{(1,78)^2 \cdot (1,5)^2}{(0,2)^2} = 177, \ n = 177.$$

4-мисол. Бош тўпламнинг ξ сон белгиси нормал тақсимланган n ҳажмли танланма бўйича тузатилган ўртача квадратик четланиш σ топилган. Агар а) $n = 10$, $s = 5,1$; б) $n = 50$, $s = 14$ бўлса, σ ўртача квадратик четланишни 0,999 ишончлилик билан қоплайдиган ишончлилик интервалини топинг.

Ечиш. а) $\gamma = 0,999$ ва $n = 10$ бўйича иловадаги 4-жадвалдан $q = 1,80$ ни топамиз.

Маълумки, ишончлилик интервалини топиш учун қуйидаги формуладан фойдаланилади:

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q) \quad (\text{агар } q < 1 \text{ бўлса})$$

ёки

$$0 < \sigma < s(1+q) \ (\text{агар } q > 1 \text{ бўлса}).$$

$q = 1,80 > 1$ бўлгани учун иккинчи формуладан фойдаланамиз:

$$0 < \sigma < 5,1\ (1 + 1,8) \text{ ёки } 0 < \sigma < 14,28.$$

б) Иловадаги 4-жадвалдан $q = 0,43$ ни топамиз. $q < 1$ бўлгани учун

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q)$$

формуладан фойдаланамиз:

$$14 \cdot (1 - 0,43) < \sigma < 14(1 + 0,43) \text{ ёки } 7,98 < \sigma < 20,02.$$

5-мисол. 10 000 гектар майдонда танлаб олиш йўли билан 500 гектар олинган ва ундаги экиннинг ҳосилдорлиги ўлчанганда қуйидаги маълумот олинган (такрорланмаган тасодифий танланма):

1 га даги ҳосилдорлиги, ц	8—10	10—12	12—14	14—16	16—18	18—20	Жами
Гектар сони	8	37	79	165	126	35	n=500

Тақсимотни нормал деб фараз қилиб:

1) бутун майдондаги ҳосилдорликнинг танлаб олинган участкасидаги ўртача ҳосилдорликдан 0,2 ц га ортмаслик эҳтимолини топинг;

2) ўртача ҳосилдорлик чегараси (интервали)ни 0,95 эҳтимол билан топинг.

Ечиш. а) Аввал танланма ўртача қийматини $\bar{x} = a + \frac{c}{\sqrt{n}} \sum \left(\frac{x_i - a}{c} \right) \cdot n_i$ формула орқали топамиз. Бунинг учун ҳисоблаш жадвалини тузамиз (танланма ўрта қийматини юқорида ҳам ҳисоблаган эдик). Формулада $0 = 15$; $c = 2$ деб оламиз.

x_i	9	11	13	15	17	19	Жами
n_i	8	37	79	165	126	85	500
$\frac{x_i - a}{c}$	−3	−2	−1	0	1	2	—
$\left(\frac{x_i - a}{c}\right)^2$	9	4	1	0	1	4	—
$\left(\frac{x_i - b}{c}\right) n_i$	−27	−74	−79	0	126	170	119
$\left(\frac{x_i - a}{c}\right)^2 \cdot n_i$	72	148	79	0	126	340	765

$\bar{x} = 15 + \frac{2}{500} \cdot 119 = 15{,}676$. Танланма дисперсиясини топишда ушбу формуладан фойдаланамиз:

$$\sigma^2 = \frac{c^2}{n} \sum \left(\frac{x_i - a}{c}\right)^2 n_i - (\bar{x} - a)^2 = \frac{4}{500} \cdot 765 - (15{,}676 - 15)^2 \approx 5{,}66.$$

Энди $P\{|\bar{x} - a| \leqslant \delta\}$ эҳтимолни топишимиз керак, бу ерда $\delta = 0{,}2$ танланма такрорланмайдиган бўлгани учун эҳтимолни топишда

$$P\{|\bar{x} - a| \leqslant \delta\} = \Phi\left(\delta \sqrt{\frac{n}{\delta_0^2\left(1 - \frac{n}{N}\right)}}\right)$$

формуладан фойдаланамиз, бунда a — бош тўпламнинг ўртача қиймати.

$n = 500$, $N = 10\,000$ ва σ_0^2 номаълум бўлгани учун унинг ўрнига σ^2 ни оламиз:

$$P\{|\bar{x} - a| < 0{,}2\} = \Phi\left(0{,}2 \sqrt{\frac{500}{5{,}66\left(1 - \frac{50_0}{10000}\right)}}\right) = \Phi(0{,}2 \cdot \sqrt{92{,}3}) = \Phi(1{,}92).$$

Иловадаги 2-жадвалдан $\Phi(1{,}92) = 0{,}4726$ ни топамиз. Демак, $P\{|\bar{x} - a| < 0{,}2\} = 0{,}4726$ бўлади;

б) аввал δ ни топиш учун

$$\delta = t \sqrt{\frac{\sigma_0^2\left(1 - \frac{n}{N}\right)}{n}}$$

формуладан фойдаланамиз. Бунинг учун t ни $2\Phi(t) = 0{,}95$ тенгликдан топамиз. 2-жадвалдан $t = 1{,}96$ ни аниқлаймиз:

$$\sigma = 1{,}96 \sqrt{\frac{5{,}66\left(1 - \frac{500}{10000}\right)}{500}} \approx 0{,}2.$$

Демак, ишончлилик интервали $\bar{x}-\delta \leqslant a \leqslant \bar{x}+\delta$ формулага кўра

$$15{,}676-0{,}2 \leqslant a \leqslant 15{,}676+0{,}2 \text{ ёки}$$

$$15{,}476 \leqslant a \leqslant 15{,}876 \text{ бўлади.}$$

8- §. Танланма ўртача қиймат ва танланма дисперсияни ҳисоблашнинг кўпайтмалар усули

1. Тенг узоқлашган варианталар. Варианталарнинг қабул қиладиган қийматлари катта сонлар бўлганда, танламанинг йиғма характеристикаларини қуйидаги кўпайтмалар усули билан ҳисоблаш қулайдир.

h айирмали арифметик прогрессия ташкил этадиган варианталар *тенг узоқликдаги варианталар* деб аталади.

Ушбу

$$u_i=\frac{x_i-c}{h}\ (i=1,\overline{k})$$

тенглик билан аниқланадиган варианталар шартли варианталар деб аталади, бу ерда c — сохта ноль (энг катта частотага эга бўлган варианта), h — икки варианта орасидаги масофа (бирлик).

Танламанинг йиғма характеристикаларини ҳисоблашда эмпирик моментлардан фойдаланиш қулайдир. Эмпирик моментлар кузатиш маълумотлари бўйича ҳисобланади:

$M'_k=\frac{1}{n}\sum\limits_i n_i(x_i-c)^k$ ифода *k-тартибли оддий эмпирик момент* дейилади, бу ерда c — сохта ноль, $n=\sum n_i$ — танланма ҳажми, n_i — частота.

$M_k=\frac{1}{n}\sum\limits_k n_i x_i^k$ ифода *k-тартибли бошланғич эмпирик момент* дейилади. $k=1$ бўлса, $M_1=\frac{1}{n}\sum\limits_i n_i x_i=\bar{x}$ бўлади.

$m_k=\frac{1}{n}\sum\limits_i n_i\left(x_i-\bar{x}\right)^k$ ифода *k- тартибли марказий эмпирик момент дейилади.*

Хусусий ҳолда $k=2$ бўлганда

$$m_2=\frac{1}{n}\sum_i n_i(x_i-\bar{x})^2=D.$$

Эмпирик қийматларни ҳисоблашда осонлик учун шартли эмпирик моментлардан фойдаланиш мумкин:

$$M_k^*=\frac{1}{n}\sum_i n_i u_i^k=\frac{1}{n}\sum n_i\left(\frac{x_i-c}{h}\right)^k$$

ифода *k-тартибли шартли эмпирик момент* дейилади. Хусусан, $k=1$ да

$$M_1^* = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\sum_i n_i x_i - c\frac{1}{n}\sum n_i\right] = \frac{1}{h}(\bar{x}-c).$$

Бу ердан $\bar{x}$ ни топамиз: $\bar{x}=M_1^*\cdot h+c$ формула танланма ўртача қийматни топиш формуласидир, $D=\left[M_2^*-(M_2^*)^2\right]\cdot h^2$ танланма дисперсиясини ҳисоблаш формуласи.

$\bar{x}$ ва D ни ҳисоблашда кўпайтмалар усулидан фойдаланиш учун ҳисоблаш жадвалини тузиш қулай бўлади.

1) жадвалнинг биринчи устунига варианталарни ортиб бориш тартибида ёзилади;

2) иккинчи устунга варианталарнинг мос частоталари ёзилади. Устун тагига частоталар йиғиндиси ёзилади;

3) учинчи устунга шартли варианталар $u_i=\frac{x_i-c}{h}$ ёзилади;

4) тўртинчи устунга частоталарни шартли варианталарга кўпайтмалари ёзилади. Устун тагига уларнинг йиғиндиси ёзилади;

5) бешинчи устунга частоталарни шартли варианталар квадратларига кўпайтмалари ёзилади, устун тагига уларнинг йиғиндиси ёзилади;

6) олтинчи устунга частоталарнинг ҳар қайсисини битта орттирилган шартли варианталарнинг квадратларига кўпайтмалари ёзилади ва устун тагига $\sum_i n_i(u_i+1)^2$ йиғиндиси ёзилади.

Бу устун контрол устун дейилади. Агар $\sum_i n_i(u_i+1)^2$ йиғинди $\sum_i n_i u_i^2+2\sum_i n_i u_i+n$ йиғиндига тенг бўлса, у ҳолда ҳисоблашлар тўғри бажарилган ҳисобланади. Жадвал тўлдирилгандан кейин

$$M_1^*=\frac{1}{n}\sum_i n_i u_i,\quad M_2^*=\frac{1}{n}\sum_i n_i u_i^2$$

шартли моментлар топилади, сўнгра $\bar{x}$ ва D ҳисобланади.

1-мисол. Танланманинг берилган тақсимоти бўйича танланма қийматини ва танланма дисперсиясини кўпайтмалар усули билан топинг.

x_i	18,6	19	19,4	19,8	20,2	20,6
n_i	4	6	30	40	18	2

x_i	65	70	75	80	85	
n_i	2	5	25	15	3	

Ечиш. а) Ҳисоблаш жадвалини тузамиз.

1	2	3	4	5	6
x_i	n_i	u_i	$n_i\ u_i$	$n_i\ u_i^2$	$n_i\ (u_i+1)^2$
18,6	4	—3	—12	36	16
19	6	—2	—12	24	6
19,4	30	—1	—30	30	0
19,8	40	0	0	0	40
20,2	18	1	18	18	72
20,6	2	2	4	8	18
$\sum$	$n=100$		$\sum n_i u_i = -32$	$\sum n_i\ u_i^2 = 116$	$\sum n_i (u_i+1)^2 = 152$

Ҳисоблашларни текшириш учун

$$\sum n_i (u_i + 1)^2 = \sum n_i u_i^2 + 2\sum n_i u_i + n$$

айниятдан фойдаланамиз:

$$\sum n_i (u_i + 1)^2 = 116 - 64 + 100 = 152.$$

Контрол йиғиндиларнинг бир хил эканлиги ҳисоблашлар тўғри бажарилгандан далолат беради. Энди, биринчи ва иккинчи тартибли шартли моментларни ҳисоблаймиз:

$$M_1^* = \frac{1}{n}\sum n_i u_i = -\frac{32}{100} = -0{,}32,$$

$$M_2^* = \frac{1}{n}\sum n_i u_i^2 = \frac{116}{100} = 1{,}16.$$

Берилган мисолда $h = 19 - 18{,}6 = 0{,}4$; $c = 19{,}8$ эканини ҳисобга олсак:

$$\bar{x} = M_1^* \cdot h + c = -0{,}32 \cdot 0{,}4 + 19{,}8 = 19{,}672,$$

$$D = [M_2^* - (M_1^*)^2]h^2 = [1{,}16 - (0{,}32)^2] \cdot 0{,}4^2 = 0{,}1692.$$

б) Бу мисолда ҳам, осонлик учун, ҳисоблаш жадвалини тузамиз.

1	2	3	4	5	6
x_i	n_i	u_i	$n_i\ u_i$	$n_i\ u_i^2$	$n_i\ (u_i+1)^2$
65	2	—2	—4	8	2
70	5	—1	—5	5	0

1	2	3	4	5	6
75	25	0	$\boxed{-9}$	0	25
80	15	1	15	15	60
85	3	2	6	12	27
			$\boxed{21}$		
$\sum$	50		12	40	114

Контрол: $\sum n_i\,(u_i+1)^2 = 114,$

$$\sum n_i u_i^2 + 2\sum n_i u_i + n = 40 + 24 + 50 = 114.$$

Демак, ҳисоблаш тўғри. Энди M_1^* ва M_2^* ни ҳисоблаймиз:

$$M_1^* = \frac{1}{n}\sum n_i u_i = \frac{12}{50} = 0{,}24,$$

$$M_2^* = \frac{1}{n}\sum n_i u_i^2 = \frac{40}{50} = 0{,}8.$$

Берилган мисолда $h=70-65=5$; $C=70$ эканлигини ҳисобга олсак:

$$\bar{x} = M_1^*\cdot h + C = 0{,}24 - 5 + 75 = 76{,}2$$

$$D = [M_2^* - (M_1^*)^2]\,h^2 = [0{,}8 + (0{,}24)^2]\cdot 25 = 18{,}56.$$

2. Тенг узоқликда бўлмаган варианталар. Кузатиш натижаларида варианталар ҳамма вақт ҳам тенг узоқликда жойлашган бўлавермайди. Уларни тенг узоқликдаги варианталарга келтириш учун белгининг кузатилаётган ҳамма қийматлари кирган интервални бир неча тенг қисмий интервалларга бўлинади, сўнгра қисмий интервалларнинг ўрталари топилади. Ҳар бир янги интервал частотаси учун шу интервалдаги частоталар йиғиндиси олинади.

2-мисол. $n=50$ ҳажмли танланманинг тенг узоқликда бўлмаган варианталари тақсимоти бўйича танланма ўртача қиймат ва танланма дисперсияни кўпайтмалар усули билан топинг:

x_i	6	8	11	13	15,5	17,5	20	23,5	24,5	26
n_i	1	9	6	6	4	6	8	5	4	1

Ечиш. 6 — 26 интервални узунлиги $h=4$ бўлган 5 та қисмий интервалга бўламиз:

$$6-10, \quad 10-14, \quad 14-18, \quad 18-22, \quad 22-26.$$

Қисмий интервалларнинг ўрталарини янги y_i варианталар сифатида олиб, тенг узоқликдаги варианталарни ҳосил қиламиз:

$$y_1 = 8, \quad y_2 = 12, \quad y_3 = 16, \quad y_4 = 20, \quad y_5 = 24.$$

Ҳар бир интервалнинг частоталари қуйидагича бўлади:

$$n_1 = 1 + 9 = 10, \quad n_2 = 6 + 6 = 12, \quad n_3 = 4 + 6 = 10,$$
$$n_4 = 8, \quad n_5 = 5 + 4 + 1 = 10.$$

Демак, тенг узоқликдаги варианталар тақсимоти:

y_i	8	12	16	20	24
n_i	10	12	10	8	10

Кўпайтмалар усулидан фойдаланамиз, бунинг учун ҳисоблаш жадвалини тузамиз:

y_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$	$n_i (u_i + 1)^2$
8	10	−1	−10	10	0
12	12	0	$\boxed{-10}$	0	12
16	10	1	10	10	40
20	8	2	16	32	72
24	10	3	30	90	160
			$\boxed{56}$		
$\sum$	50		46	142	284

Контрол: $\sum\limits_i n_i (u_i + 1)^2 = 284,$

$$\sum_i n_i u_i^2 + 2\sum_i n_i u_i + n = 142 + 92 + 50 = 284.$$

Демак, ҳисоблашлар тўғри бажарилган. Энди M_1^* ва M_2^* ни ҳисоблаймиз:

$$M_1^* = \frac{1}{n}\sum_i n_i u_i = \frac{46}{50} = 0{,}92;$$

$$M_2^* = \frac{1}{n}\sum_i n_i u_i^2 = \frac{142}{50} = 2{,}84.$$

Берилган мисолда $h = 4$, $c = 12$ бўлгани учун:

$$\bar{y} = M_1^* \cdot h + c = 0{,}92 \cdot 4 + 12 = 15{,}68,$$
$$D = \left[M_2^* - \left(M_1^*\right)^2\right]h^2 = \left[2{,}84 - (0{,}92)^2\right] \cdot 16 = 32.$$

Танланма дисперсияни ҳисоблашда группалаш натижасида вужудга келган хатони камайтириш мақсадида Шеффард тузатмаси киритилади, у қуйидагига тенг:

$$D' = D - \frac{1}{12}h^2.$$

D ва h нинг қийматларини ўрнига қўямиз:

$$D' = 32 - \frac{1}{12} \cdot 4^2 = 32 - 1{,}3 = 30{,}7.$$

XXVII БОБ. КОРРЕЛЯЦИЯ НАЗАРИЯСИ.

1-§. Чизиқли корреляция

Математикада ва техникада функционал боғланиш тушунчасини кўп учратиш мумкин. Масалан, доира юзи радиусига боғлиқ ($S = \pi R^2$), газ босими ҳажм ва температурасига боғлиқ $\left(p = R \cdot \frac{t}{v}\right.$, p — газ босими, t — температура, V — ҳажм, R — ўзгармас коэффициент) ва ҳоказо. Функционал боғланиш тасодифий миқдорлар орасида ҳам бўлиши мумкин.

Статистик боғланиш деб шундай боғланишга айтиладики, унда миқдорлардан бирининг ўзгариши иккинчиси тақсимотининг ўзгаришига олиб келади. Хусусан, статистик боғлиқлик миқдорлардан бирининг ўзгариши иккинчисининг ўртача қийматини ўзгаришида кўринади; бу ҳолда статистик боғланиш корреляцион боғланиш деб аталади.

Масалан, майдони бир хил бўлган ер участкаларига бир хил миқдорда ўғит солинса ҳам ҳар хил ҳосил олинади. Лекин ўртача ҳосилдорлик солинган ўғит миқдорига боғлиқ бўлади. Бу ерда ҳосилдорликнинг ўртача қиймати билан ўғит миқдори орасида корреляцион боғланиш мавжуд деб қараш мумкин.

X ва Y белгилар берилган бўлсин.

Шартли ўртача қиймат $\bar{y}_x$ деб Y нинг $X = x$ қийматга мос қийматларининг ўртача арифметик қийматига айтилади.

Y нинг X га корреляцион боғлиқлиги деб, $\bar{y}_x$ шартли ўртача қийматнинг x га функционал боғлиқлигига айтилади:

$$\bar{y}_x = f(x). \tag{27.1}$$

(27.1) тенглама Y нинг X га регрессия тенгламаси дейилади; $f(x)$ функция Y нинг X га регрессияси, унинг графиги эса Y нинг X га регрессия чизиғи дейилади.

Ушбу

$$\bar{x}_y = \varphi(y) \tag{27.2}$$

тенглама X нинг Y га регрессия тенгламаси дейилади.

Корреляцион боғлиқлик икки хил бўлади: чизиқли ва эгри чизиқли.

Корреляцион боғлиқлик чизиқли бўлганда регрессия тенгламаси

$$\bar{y}_x = ax + b \tag{27.3}$$

кўринишда бўлади.

Бу тенгламадаги a танланманинг регрессия коэффициенти дейилади. (26.3) даги a ва b ни энг кичик квадратлар усули ёрдамида қуйидаги нормал тенгламалар системасидан топамиз:

$$\left.\begin{aligned} b\sum_{i=1}^{n} x_i + a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ bn + a\sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} y_i \end{aligned}\right| \tag{27.4}$$

Y нинг X га регрессия тўғри чизиғининг танланма тенгламаси

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_т \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x}) \tag{27.5}$$

кўринишда бўлади, бу ерда $\bar{y}_x$ — шартли ўртача қиймат, $\bar{x}$ ва $\bar{y}$ текширилаётган X ва Y белгиларнинг танланма ўртача қийматлари; σ_x, σ_y — танланма ўртача квадратик четланишлари, $r_т$ — танланма корреляция коэффициенти қуйидаги формула орқали топилади:

$$r_т = \frac{\sum n_{xy}XY - nXY}{n\sigma_x \sigma_y}. \tag{27.6}$$

Чизиқли корреляцион боғланиш зичлигини баҳолаш учун ана шу танланма корреляция коэффициенти $r_т$ хизмат қилади; $|r_т|$ бирга қанча яқин бўлса, боғланиш шунча кучли бўлади.

Ҳисоблашларни соддалаштириш учун ҳисоблаш жадвалини тузиш қулай. Агар X ва Y белгилар устида кузатиш маълумотлари тенг узоқликдаги вариантали корреляцион жадвали кўринишида берилган бўлса, у ҳолда қуйидаги шартли вариантaларни киритамиз:

$$u_i = \frac{x_i - c_1}{h_1}, \quad v_i = \frac{y_j - c_2}{h_2},$$

бу ерда c_1, c_2 — мос равишда «сохта» ноллар, h_1, h_2 — мос равишда қадамлар.

Шартли варианталар орқали танланма корреляция коэффициенти қуйидагича топилади:

$$r_т = \frac{\sum n_{uv}uv - n\bar{u}\bar{v}}{n\sigma_u\sigma_v}, \tag{27.7}$$

бу ердаги $\sum n_{uv}u \cdot v$ ни ҳисоблашни келгусида мисол орқали тушунтирамиз.

$$\bar{u} = \frac{\sum n_u u}{n}, \quad \bar{v} = \frac{\sum n_v v}{n}, \quad \sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\bar{u})^2},$$

$$\sigma_v=\sqrt{\overline{v^2}-(\bar{v})^2}$$

ифодалар кўпайтмалар усули орқали топилади. Уларни топгандан сўнг регрессия тенгламасидаги ифодаларни қуйидагича топамиз:

$$\bar{x}=\bar{u}h_1+c_1,\quad \bar{y}=\bar{v}h_2+c_2,\quad \sigma_x=\sigma_u\cdot h,$$
$$\sigma_y=h_v\cdot h_2.$$

1-мисол. Берилган майдонда ўғитнинг ҳосилдорликка таъсирини ўрганиш мақсадида ўтказилган 10 та тажриба натижаси қуйидагича бўлди:

x_i	6	11	11	7	8	10	12	6	10	9
y_i	27	32	33	30	30	33	34	29	31	32

бу ерда x ҳар бир гектар ерга солинган ўғит миқдори (тонна), y ҳар бир гектар ердан олинган ҳосилдорлик. Y нинг X га тўғри чизиқли регрессия танланма тенгламасини топинг ва уни кузатиш натижалари билан таққосланг.

Ечиш. Ўғит миқдорининг оширилиши билан ҳосилдорлик ортишини кўрамиз. Бу икки миқдор ўзаро тўғри чизиқли боғланишга эга деб қараймиз:

$$\bar{y}_x=ax+b.$$

Бу ердаги a ва b параметрларни топиш учун ҳисоблаш жадвалини тузамиз (1-жадвал).

a ва b параметрларни топиш учун (27.4) формуладан фойдаланамиз:

$$\left.\begin{aligned}90b+852a&=2831,\\10b+90a&=310\end{aligned}\right\}$$

1-жадвал

Тажриба номери	y_i	x_i	x_i^2	$x_i\cdot y_y$
1	27	6	36	162
2	32	11	121	352
3	33	11	121	363
4	30	7	49	210
5	30	8	64	240
6	33	10	100	330
7	34	12	144	408
8	28	6	36	168
9	31	10	100	310
10	32	9	81	288
$n=10$	310	90	852	2831

Иккинчи тенгламани 9 га кўпайтириб, биринчи тенгламадан айирамиз:

$$42a = 41, \quad a = \frac{41}{42}.$$

$$b = \frac{310 - 90a}{10} = 22\frac{5}{14}.$$

У ҳолда талаб қилинган регрессия тенгламаси

$$\bar{y}_x = \frac{41}{42}x + 22\frac{5}{14} \qquad (25.8)$$

кўринишда бўлади.

Энди бир хил миқдордаги ўғит солинганда (25.8) тенглик бўйича $\bar{y}_x$ кутиладиган ҳосилдорлик қийматларининг y_i танланма қиймати миқдорларидан оғишини 0,01 аниқликда топамиз:

2-жадвал

x_i	y_i	$\bar{y}_x$	$\bar{y}_x - y_i$
6	37	28,06	1,06
11	32	32,96	0,96
11	33	32,96	—0,04
7	30	29,04	—0,96
8	30	30,02	0,02
10	33	31,98	—1,02
12	34	33,94	—0,06
6	28	28,05	0,06
10	31	31,98	0,98
9	32	31	—1,00

$\bar{y}_x - y_i$ қийматларидан кўринадики кутиладиган ҳосилдорлик ўғит миқдорига жуда боғлиқ экан.

Кузатишлар сони катта бўлганда x қийматнинг ўзи n_x марта, y қийматнинг ўзи n_y марта, сон жуфти (x, y) нинг ўзи n_{xy} марта учраши мумкин. Шу сабабли кузатиш маълумотлари группаланади, яъни n_x, n_y, n_{xy} частоталар ҳисобланади ва жадвал кўринишида ёзилади. Бундай ҳолатда қуйидаги мисолни ечиш схемасидан фойдаланган маъқул.

2-мисол. Бирор ўсимлик оғирлигининг (бутун ўсимлик оғирлиги x грамм ҳисобида) экилган уруғ оғирлиги (y грамм ҳисобида) бўйича тақсимоти жадвал усулида берилган.

$x \backslash y$	13	18	23	28	33	38	43	48	53	58	63	68	n_x
25	3	2											5
35		6	4										11
45		1	13	5									19
55		1	2	4	8	1							16
65			1		4	4	2						11
75					2	6	6	1					15
85							1	5					6
95								1	4	1			6
105									2	4	1	1	8
115										1		1	2
125												1	1
n_y	3	10	20	9	14	11	9	7	6	6	1	3	100

Ечиш. Бу ерда ўсимлик оғирлиги ва уруғ оғирликлари синфларга ажратилган бўлиб, бу синфларнинг ўрталари x — 25, 35 ... y — 13, 18 ... деб олинган. 3 сони — умумий оғирлиги 25 г ҳамда уруғ оғирлиги 13 г дан бўлган уч ўсимлик борлигини кўрсатади ва ҳоказо. Сўнгги устунда умумий оғирликка мос ўсимликлар частотаси жойлашган. 100 ўсимликдан 5 тасининг умумий оғирлиги 25 грамм, 11 тасининг оғирлиги 35 г ва ҳоказо. Сўнгги сатрда уруғ оғирлигига мос ўсимлик частоталари n_y жойлашган. Энди корреляция коэффициенти Y нинг X га регрессия тўғри чизиғининг танланма тенгламасини тузамиз.

x қийматлари ўзгармас айирмаси 10 га, y қийматлари эса ўзгармас айирмаси 5 га тенг эканига диққатни жалб этиб, шартли варианталарни киритамиз. x ўрнига $u = \frac{x-15}{10}$ миқдорни ва y ўрнига $v = \frac{y-8}{5}$ миқдорни киритамиз.

Бу ҳолда x нинг 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95, 105, 115, 125 қийматлари мос равишда

$u = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; 8, 9, 10, 11$ қийматлар билан, y нинг

y: 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48, 53, 58, 63, 68 қийматлари эса v нинг

$v = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ қийматлари билан алмашади.

Натижада янги шартли варианталар бўйича қуйидаги корреляцион жадвални ҳосил қиламиз (4- жадвал).

4-жадвал

v / u	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	n_u
1	3	2											5
2		6	4					1					11
3		1	13	5									19
4		2	2	4	8	1							16
5			1		4	4	2						11
6					2	6	6	1					14
7							1	5					6
8								1	4	1			6
9									2	4	1	1	8
10										1		1	2
11												1	1
n_v	3	11	20	9	14	11	9	8	6	6	1	3	100

$\overline{u}$, $\overline{v}$ ларни ҳисоблаш учун тўрт майдон усулидан фойдаланиб 5- жадвални тузамиз.

Ҳар бир катак ўнгдаги юқори ва пастки чап бурчакдаги рақамларни мос равишда v ва u шартли варианталар қийматларининг частотасига кўпайтириш билан ҳосил қилинади. Бу юқори ўнг (пастки чап) бурчакдаги рақамларни сатр (устун) бўйича йиғиб охирги аввалги устунга (сатрга) ёзамиз.

Масалан, тўртинчи сатр ва бешинчи устундаги бу рақамлар йиғиндиси қуйидагича топилади:

$$70 = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 4\cdot 4 + 8\cdot 5 + 1\cdot 6 = 2 + 6 + 16 + 40 + 6$$

$$64 = 4\cdot 8 + 4\cdot 5 + 6\cdot 2 = 32 + 20 + 12.$$

Пастки чап бурчакдаги сонлар частотани u га кўпайтиришдан ҳосил қилинади.

Охирги устун (сатр) катакларига $u\cdot v$ ($v\cdot u$) қийматлари жойлаштирилиб, охирида улар йиғиндиси ёзилади.

Бу жадвалдан фойдаланиб қуйидаги ҳисоблашларни бажарамиз:

5-жадвал

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$Y=\sum nuV$	$u-V$
1	3 / 3, 3	4 / 2, 2											7	7
2		12 / 12, 6	12 / 8, 4										32	64
3		2 / 3, 1	39 / 39, 13	20 / 15, 5									61	183
4		2 / 4, 1	6 / 8, 2	16 / 16, 4	40 / 32, 8	6 / 4, 1							70	280
5			3 / 5, 1		20 / 20, 4	24 / 20, 4	14 / 10, 2						61	305
6					10 / 12, 2	36 / 36, 6	42 / 36, 6	8 / 6, 1					96	576
7							7 / 7, 1	40 / 5, 5					47	326
8								8 / 8, 1	36 / 32, 4	10 / 8, 1			54	432
9									18 / 18, 2	40 / 36, 4	11 / 9, 1	12 / 9, 1	81	729
10										10 / 10, 1		12 / 10, 1	22	220
11												12 / 11, 1	12	132
$u=\Sigma_{uv}\ u$	3	21	60	31	64	60	53	51	50	54	9	30	486 543	3257
$v=u$	3	42	180	124	320	360	371	408	450	540	99	360	3257	

$$\bar{u} = \frac{\sum n_{u\tau} u}{n} = \frac{u}{n} = \frac{486}{100} = 4{,}86,$$

$$\bar{v} = \frac{\sum n_{u\tau} v}{n} = \frac{v}{n} = \frac{543}{100} = 5{,}43.$$

Энди қуйидаги ёрдамчи жадвалларни тузамиз (5, 6, 7, 8, 9-жадваллар).

6-жадвал

u	n_u	$n_u u$	$n_u u^2$
1	5	5	5
2	11	22	44
3	19	57	171
4	16	64	256
5	11	55	275
6	15	90	540
7	6	42	294
8	6	48	384
9	8	72	648
10	2	20	200
11	1	11	121
Σ	100	486	2938

7-жадвал

v	n_u	$n_v v$	$n_v v^2$
1	3	3	3
2	10	20	40
3	20	60	180
4	9	36	144
5	14	70	350
6	11	66	396
7	9	63	441
8	8	64	512
9	6	54	486
10	6	60	500
11	1	11	121
12	3	36	432
Σ	100	543	3705

$$\sigma_u^2 = \frac{\sum n_u u^2}{n} - (\bar{u})^2 = \frac{2938}{100} - (4{,}86)^2 = 5{,}7604.$$

$$\sigma_u = \sqrt{5{,}7604} = 2{,}400.$$

$$\sigma_u^2 = \frac{\sum n_v v^2}{n} - (\bar{v})^2 = \frac{3705}{100} - 29{,}4849 = 7{,}5651;$$

$$\sigma_v = \sqrt{7{,}5651} = 2{,}750.$$

Энди r_τ ни ҳисоблаймиз:

$$r_\tau = \frac{\sum n_{u\tau} u\cdot v - n\bar{u}\,\bar{v}}{n\,\sigma_u\,\sigma_v} = \frac{1}{\sigma_u\,\sigma_v}\left(\frac{\sum n_{u\tau} u\cdot v}{n} - \bar{u}\cdot\bar{v}\right) =$$

$$= \frac{1}{2{,}4\cdot 2{,}75}\left(\frac{3{,}257}{100} - 4{,}86\cdot 5{,}43\right) = \frac{6{,}1802}{6{,}600} = 0{,}936.$$

Маълумки, r_τ нинг қиймати (± 1) га яқин чиқса, биз x ва y миқдорлар орасидаги боғланишни чизиқли боғланиш деб қарашимиз мумкин.

x ва y учун қуйидагиларни ёзишимиз мумкин:

$$\bar{x} = \bar{u}\cdot h_1 + c_1;\quad \bar{y} = \bar{v}h_2 + c_2;\quad \sigma_x = \sigma_u\cdot h_1;\quad \sigma_y = \sigma_v\cdot h_2.$$

Бундан:

$$\overline{x} = 10\overline{u} + 5 = 63{,}50; \qquad \sigma_x = 10\cdot\sigma_u = 24{,}00;$$

$$\overline{y} = 5\overline{v} + 8 = 35{,}15; \qquad \sigma_y = 5\cdot\sigma_v = 13{,}75;$$

$$C_{xy} = 50\cdot C_{uv} = 50\left(\frac{\Sigma n_{uv}\cdot u\cdot v}{n} - \overline{u}\cdot\overline{v}\right) = 50\cdot 6{,}1802 = 309{,}01$$

келиб чиқади.

Регрессия тенгламасини келтириб чиқариш учун регрессия коэффициентини ҳисоблаймиз:

$$\rho_{yx} = r_т\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 0{,}936\cdot\frac{13{,}75}{24} = 0{,}536.$$

y нинг x га регрессия тенгламаси $\overline{y}_x - \overline{y} = \rho_{yx}\ (x - \overline{x})$ га асосан $\overline{y} = 35{,}15 + 0{,}536\ (x - 63{,}50)$ ёки $\overline{y}_x = 0{,}536x + 1{,}11$ бўлади.

Энди x ўрнига унинг турли қийматларини қўйиб, $\overline{y}_x$ қийматларини топамиз:

$$\overline{y}_1 = 0{,}536\cdot 25 + 1{,}11 = 14{,}51 = 14{,}5$$

$$\overline{y}_2 = 0{,}536\cdot 35 + 1{,}11 = 19{,}9 \text{ ва ҳоказо.}$$

Қуйидаги жадвални тузамиз (8-жадвал).

8-жадвал

x	$\overline{y}_x$	y_x'	$\overline{y}_x - y_x'$	x	$\overline{y}_x$	y_x'	$\overline{y}_x - y_x'$
25	14,5	15,0	—0,5	75	41,3	40,0	1,3
35	19,9	22,6	—2,7	85	46,7	47,2	—0,5
45	25,2	24,1	1,1	95	52,0	53,0	—1,0
55	30,6	29,9	0,7	105	57,4	54,6	—1,2
65	33,0	35,3	0,7	115	62,8	63,0	—0,2
				125	68,1	68,0	0,1

Жадвалдан кўринадики, хусусий ўртача ҳақиқий ўртача қийматга етарлича яқин экан.

25.1-эслатма. Учинчи устундаги y_x нинг хусусий ўртача қийматлари қуйидагича топилади:

$$y_1' = \frac{13\cdot3 + 18\cdot2}{3+2} = 15;$$

$$y_2' = \frac{18\cdot6 + 23\cdot4 + 48\cdot1}{6+4+1} = 22{,}6$$

ва ҳоказо.

3-мисол. Тупроқнинг нисбатан намлиги (x) ва ёпишқоқлиги (y) тўғрисида аниқланган маълумотлар қуйидагича:

x (%): 19,9 20,9 26,1 29,4 30,5 40,3 44,8
47,6 56,6 58,3 64,5 75,6

y (г/см^2) 0,0 0,6 0,1 1,1 1,7 1,7 2,6 3,4
4,2 5,8 6,3 7,3
$n = 12$.

Маълумотларнинг корреляция коэффициентини ва регрессия чизиғининг танланма тенгламасини тузинг.

Ечиш. Ҳисоблаш жадвалини тўғридан-тўғри тузамиз:

9-жадвал

	X (x)	Y (y)	x^2	y^2	$x \cdot y$
1	19,9	0,0	396,01	0,00	0,00
2	20,9	0,6	436,81	0,36	12,54
3	26,1	1,1	681,21	1,21	28,71
4	29,4	1,2	864,36	1,44	35,28
5	30,5	1,7	930,25	2,89	51,85
6	40,3	1,7	1624,09	2,89	68,51
7	44,8	2,6	2007,64	6,76	116,48
8	47,8	3,4	2284,84	11,56	162,52
9	55,6	4,2	3091,36	17,64	233,52
10	58,3	5,8	3398,89	33,64	338,14
11	64,5	6,3	4160,25	39,69	406,35
12	76,6	7,3	5867,56	53,29	559,18
Σ	$\Sigma_x = 514,7$	35,9	25742,67	171,37	2013,08

x ва y қийматлари бир мартадан такрорлангани учун тўғридан-тўғри формулалардан фойдаланамиз:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{514,7}{12} = 42,89; \quad \bar{x} = 42,89\ \%.$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{35,9}{12} = 2,99; \quad \bar{y} = 2,99 \text{ г/см}^2.$$

$$\frac{1}{n}\sum (x - \bar{x})^2 = \left[\sum x^2 - (\sum x^2\right]: 12 =$$

$$= \left[25742,67 - (514,7)^2\right]: 12 = 3666,33;$$

$$\frac{1}{n}\sum (y - \bar{y})^2 = \left[\sum y^2 - (\sum y)^2\right]: 12 = \left[171,37 - (35,9)^2\right]: 12 = 63,97$$

$$\frac{1}{n}\sum (x - \bar{x})\ (y - \bar{y}) = [2013,08 - 514,7 \cdot 35,9]: 12 = 473,27.$$

Энди танланма корреляция коэффициентини ҳисоблаймиз:

$$r_т = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x - \bar{x})^2 \sum (y - \bar{y})^2}} = \frac{473,27}{\sqrt{3666,33 \cdot 63,97}} = 0,977.$$

Регрессия коэффициенти:

$$\rho_{yx} = r_т \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 0{,}977 \frac{\sqrt{63{,}97}}{\sqrt{3666{,}33}} = 0{,}13 \text{ г/см}^2.$$

Демак, регрессия тенгламаси:

$$Y_x - \bar{y} = \rho_{yx}(X - \bar{x})$$

ёки

$$Y_x = 2{,}99 + 0{,}13(x - 42{,}89) = 0{,}13x - 2{,}58,$$

$$Y_x = 0{,}13x - 2{,}38.$$

2-§. Эгри чизиқли корреляция

Агар регрессия графиги эгри чизиқли бўлса, корреляцион боғланиш *эгри чизиқли корреляция* дейилади. Иккинчи тартибли параболик корреляция бўлган ҳолда Y нинг X га регрессиясининг танланма тенгламаси

$$\bar{y}_x = ax^2 + bx + c \tag{27.9}$$

кўринишда бўлади (иккинчи тартибли параболик корреляция), a, b ва c параметрларни энг кичик квадратлар усулидан фойдаланиб қуйидаги нормал тенгламалар системасидан топилади:

$$\begin{cases} a\sum x^4 + b\sum x^3 + c\sum x^2 = \sum x^2\bar{y}_x, \\ a\sum x^3 + b\sum x^2 + c\sum x = \sum x\bar{y}_x, \\ a\sum x^2 + b\sum x + cn = \sum \bar{y}_x. \end{cases} \tag{27.9'}$$

Бу X ва Y миқдорлар такрорланмай келган ҳолдир.

Агар X ва Y миқдорлар такрорланиб келса, яъни n_x ва n_y частоталарга эга бўлса, маълумотлар корреляцион жадвал орқали берилган бўлиб, нормал тенглама кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} (\sum n_x x^4)a + (\sum n_x x^3)b + (\sum n_x x^2)c = \sum n_x \bar{y}_x x^2, \\ (\sum n_x x^3)a + (\sum n_x x^2)b + (\sum n_x x)c = \sum n_x \bar{y} x, \\ (\sum n_x x^2)a + (\sum n_x x)b + nc = \sum n_x \bar{y}_x. \end{cases}$$

Бунда a, b ва c параметрлар топилиб, (27. 9) тенгламага қўйилади.

Худди шу йўл билан Y нинг X га регрессиясининг танланма тенгламаси

$$\bar{x}_y = a_1y^2 + b_1y + c \tag{27.10}$$

формула ёрдамида топилади.

Y нинг X га корреляциясининг зичлигини баҳолаш учун ушбу

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{\bar{y}x}}{\sigma_y} \tag{27.11}$$

танланма корреляцион нисбат топилади, Бу ерда

$$\sigma_{\bar{y}_x} = \sqrt{\frac{\sum n_x(\bar{y}_x - \bar{y})^2}{n}}, \quad (27.12)$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum n_y(y_x - \bar{y})^2}{n}}. \quad (27.13)$$

X нинг Y га корреляцион зичлигини топиш учун эса

$$\eta_{xy} = \frac{\sigma_{\bar{x}y}}{\sigma_x} \quad (27.14)$$

топилади.

1-мисол. Тажриба натижасида қуйидаги маълумотлар олинган:

x	2	4	6	8	10
y	9	6	5,5	6,5	11

x ва y лар $y = ax^2 + bx + c$ кўринишдаги тенглама билан боғланган деб, a, b ва c ни энг кичик квадратлар усули билан топинг.

Ечиш. Ҳисоблашларни соддалаштириш учун қуйидаги жадвални тузамиз:

x	2	4	6	8	10	$\sum x = 30$
y	9	6	5,5	6,5	11	$\sum y = 38$
xy	18	24	33	52	110	$\sum xy = 237$
x^2	4	16	36	64	210	$\sum x^2 = 220$
x^2y	36	96	198	416	1100	$\sum x^2y = 1846$
x^3	8	64	216	512	1000	$\sum x^3 = 1800$
x^4	16	256	1296	4096	10000	$\sum x^4 = 15664$

Топилган қийматларни нормал тенгламага қўямиз:

$$\begin{cases} 15664a + 1800b + 220c = 1846, \\ 1800a + 220b + 30c = 237, \\ 220a + 30b + 5c = 38. \end{cases}$$

Энди бу системани a, b, c га нисбатан ечамиз. Учинчи тенгламани 44 га кўпайтириб, биринчи тенгламадан айирамиз:

$$\begin{array}{r} -\,15664a + 1800b + 220c = 1846 \\ 9680a + 1320b + 220c = 1672 \\ \hline 5984a + 480b = 174 \end{array}$$

Учинчи тенгламани 6 га кўпайтириб, иккинчи тенгламадан айирамиз:

$$-\begin{array}{r} 1800a+220b+30c=237 \\ 1320a+180b+30c=228 \\ \hline 480a+40b=9 \end{array}$$

Шундай қилиб, қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 5984a+480b=174, \\ 480a+40b=9. \end{cases}$$

Бу системани a ва b га нисбатан ечсак:

$$a=\frac{33}{112}\approx 0{,}3; \qquad b=-\frac{927}{290}\approx -3{,}3$$

келиб чиқади. Булардан фойдаланиб c ни топамиз: $c\approx 14{,}5$. x ва y орасидаги боғланишни кўрсатувчи (27.9) функция

$$\bar{y}_x=0{,}3x^2-3{,}3x+14{,}5$$

кўринишда бўлади.

2-мисол. Қуйидаги корреляцион жадвалда берилган маълумотлар орқали $\bar{y}_x=ay^2+bx+c$ танланма регрессия тенгламасини ва корреляцион нисбатни топинг:

y \ x	2	3	5	n_y
25	20	—	—	20
45	—	30	1	31
110	—	1	48	49
n_x	20	31	49	$n=100$

Ечиш. Параметрларни топиш учун қуйидаги ҳисоблаш жадвалини тузамиз (жадвалдаги каср сонлар яхлитланган):

x	n_x	$\bar{y}_x$	$n_x \cdot x$	$n_x \cdot x^2$	$n_x \cdot x^3$	$n_x \cdot x^4$	$n_x\bar{y}_x$	$n_x\bar{y}_x \cdot x$	$n_x\bar{y}_x \cdot x^2$
2	20	25	40	80	160	320	500	1000	2000
3	31	47,1	93	279	837	2511	1460	4380	13141
5	49	108,7	245	1225	6125	30625	5325	26624	133121
$\sum$	100		378	1584	7122	33456	7285	32004	148262

$\bar{y}_x$ ни топиш усулини тушунтирамиз:

$$\bar{y}_2=\frac{20\cdot 25}{20}=25,$$

$$\bar{y}_3=\frac{30\cdot 45+110}{31}=47{,}1,$$

$$\bar{y}_Б = \frac{1 \cdot 45 + 48 \cdot 110}{49} = 108,7.$$

Жадвалдаги топилган қийматларни (27.9′) формулага қўямиз:

$$\begin{cases} 33456\,a + 7122\,b + 1584\,c = 148262, \\ 7122\,a + 1584\,b + 878\,c = 32004, \\ 1584\,a + 378\,b + 100\,c = 7285. \end{cases}$$

Бу системани ечиб қуйидагиларни топамиз:

$$a = 2,94;\ b = 7,27;\ c = -1,25.$$

Шундай қилиб, изланаётган регрессия тенгламаси ушбу

$$\bar{y}_x = 2,94\,x^2 + 7,27x - 1,25$$

кўринишга эга экан.

Бу тенглама бўйича ҳисобланган шартли ўртача қийматлар ҳисоблаш жадвалидаги шартли ўртача қийматлардан сал фарқ қилиши мумкин, масалан $x = 2$ да жадвал бўйича $\bar{y}_1 = 25$, тенглама бўйича эса

$$\bar{y}_2 = 2,94 \cdot 4 + 7,27 \cdot 2 - 1,25 = 25,05.$$

Демак, топилган тенглама кузатиш маълумотлари билан жуда мос келади.

Энди корреляцион нисбатни топамиз. Бунинг учун аввал умумий ўртача қийматни топамиз:

$$\bar{y} = \frac{\sum n_y \cdot y}{n} = \frac{20 \cdot 25 + 31 \cdot 45 + 49 \cdot 100}{100} = 72,35.$$

Сўнгра умумий квадратик четланишни топамиз:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum n_y (y - \bar{y})^2}{n}} =$$

$$= \sqrt{\frac{20(25-72,35)^2 + 31(45-72,35)^2 + 49(110-72,35)^2}{100}} \approx 37,3.$$

Группалараро ўртача квадратик четланишни топамиз:

$$\sigma_{\bar{y}_x} = \sqrt{\frac{\sum n_x (\bar{y} - \bar{y})^2}{n}} =$$

$$= \sqrt{[25(25-72,35)^2 + 45 \cdot (47,9 - 72,35)^2 + 110(107-72,35)^2] : 100} =$$
$$= 35,9.$$

Демак, корреляцион нисбат тақрибан қуйидагига тенг:

$$\mu_{\bar{y}_x} = \frac{\sigma_{\bar{y}_x}}{\sigma_y} = \frac{35,9}{37,3} = 0,96.$$

ИЛОВА

1-жадвал

$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ функция қийматларининг жадвали

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2343	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0131	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

2-жадвал

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$$ функция қийматларининг жадвали

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,2389		

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,3761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4754	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	7,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

$t_\gamma = (\gamma,\ n)$ қийматлар жадвали

3-жадвал

n \ γ	0,95	0,99	0,999	n \ γ	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	2,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97		1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92		1,960		

$g = g(\gamma,\ n)$ қийматлар жадвали

4-жадвал

n \ γ	0,95	0,99	0,999	n \ γ	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТ

1. Т. Азларов, Ҳ. Мансуров. Математик анализ, I, II қисм, Т., «Ўқитувчи», 1986, 1989 й.
2. Кудрявцев В. А., Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики, М., «Наука», 1975.
3. Карасев А. И., Аксютина З. М., Савельева Т. И. Курс высшей математики для экономических вузов. ч. I, II. М., «Высшая школа», 1982.
4. Шнейдер В. А., Слуцкий А. И., Шумов А. С. Олий математика қисқа курси. I, II қ. Т., «Ўқитувчи», 1983, 1985 й.
5. Минорский В. П. Олий математикадан масалалар тўплами, Т., «Ўрта ва олий мактаб», 1970 й.
6. Коваленко И. Н. А. А. Филиппова. Теория вероятностей и математическая статистика. М., «Высшая школа», 1982.
7. Гмурман В. Е. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика. Т., «Ўқитувчи», 1976 й.
8. Б. Абдалимов, Ш. Салихов. Олий математика қисқа курси. Т., «Ўқитувчи», 1981 й.
9. Б. Абдалимов, А. Абдуғаппоров, М. Мусамуҳамедов, С. Тошпўлатов. Олий математикадан масалалар ечиш бўйича қўлланма. Т. «Ўқитувчи», 1985 й.

МУНДАРИЖА

БАЛТАШ АБДАЛИМОВ

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА

Аграр университет ва қишлоқ хўжалик олий ўқув юртлари талабалари учун ўқув қўлланма

Тошкент «Ўқитувчи» 1994

Бадиий муҳаррир *Т. Қаноатов*
Мусаввир *Т. Қаноатов*
Техн. муҳаррирлар: *Н. Сорокина, Э. Вильданова*
Мусаҳҳиҳа *Д. Умарова*

ИБ № 6676

Теришга берилди 29.03.94. Босишга рухсат этилди 15.07.94. Ўлчами $60\times90^1/_{16}$. Тип қоғози. Кегли 10 шпонсиз. Литературная гарнитураси. Юқори босма усулида босилди. Шартли б. 23,0+ +1,5 вкл. Шартли бўёқ ўлчами 24,69. Нашр т. 17,99+1,58 вкл. Нусхаси 5000. Буюртма № 2678.

«Ўқитувчи» нашриёти. 700129. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Шартнома 09—250—93.

Ўзбекистон Республикаси Давлат Матбуот қўмитаси Тошполиграфкомбинати. Тошкент, 700129, Навоий, 30. 1994.