Mazkur o'quv qo'llanma bakalavr ta'lim yo'nalishlari talabalari uchun mo'ljallangan bo'lib, unda oliy algebra elementlari, analitik geometriya, ketma-ketliklar nazariyasi, bir o'zgaruvchili funksiyalar differensial va integral hisobining asoslari hamda qatorlar nazariyasi bayon qilingan.

Taqrizchilar:

Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti Mexanika-matematika fakulteti Matematik analiz kafedrasi professori
X.T. Mansurov

Toshkent To'qimachilik va Yengil Sanoat instituti Oliy matematika kafedrasi mudiri, professor
A. Z. Mamatov

SO'Z BOSHI

Oliy o'quv yurtlarida oliy matematika, yo'nalishlarga qarab u yoki bu hajmda o'qitiladi. Oliy matematikani o'qitishdan ko'zlangan asosiy maqsad: bir tomondan shu fanning asosiy tushunchalari, tasdiqlari, turli usullari hamda, boshqa matematik ma'lumotlar bilan tanishtirish bo'lsa, ikkinchi tomondan amaliy masalalarni matematik usullar yordamida yechishga o'rgatishdan iborat. Ayni paytda talabalarni mantiqiy fikrlashga o'rgatish ham oliy matematikaning vazifalaridan biri hisoblanadi.

O'zbekistonda kadrlar tayyorlash tizimini tubdan isloh qilish jarayonida talabalarni o'quv materiallari bilan, ayniqsa darslik va o'quv qo'llanmalari bilan ta'minlash muhim ahamiyatga ega.

Oliy matematika kursi bo'yicha turli darajada yozilgan va maqsad hamda yo'nalishlari xilma-xil bo'lgan qator darslik va o'quv qo'llanmalari mavjud. Ammo davlat ta'lim standartlari o'quv dasturlarini zamon talablariga moslashtirishni va qayta ko'rib chiqishni taqozo etadi.

Mazkur qo'llanma davlat ta'lim standartlari asosida yozilgan bo'lib, u ma'lum tartibda ma'ruza va paragraflarga ajratilib bayon etilgan.

Oliy matematikada o'rganiladigan mavzularni hajmi katta bo'lmagan ma'ruza va paragraflar bo'yicha yozilishi talabalarga mavzu mazmuni va mohiyatini chuqurroq anglashga yordam beradi deb o'ylaymiz.

Ushbu qo'llanma 53 ta ma'ruzadan iborat bo'lib, ularda sonlar o'qi, Dekart va qutb koordinatalari sistemasi, determinantlar va matritsalar, ular yordamida tenglamalar sistemasini yechish, vektorlar va kompleks sonlar, tekislikda to'g'ri chiziq va uning turli ko'rinishdagi tenglamalari, ikkinchi tartibli egri chiziqlar, bir o'zgaruvchili funksiya, uning hosila va differensiallari, Teylor formulasi, differensial hisobning tatbiqlari, funksiyaning aniqmas va aniq integrallari, aniq integralning tatbiqlari, qatorlar, fazoda koordinatalar sistemasi, fazoda tekislik va to'g'ri chiziq, ikkinchi tartibli sirtlar, fazoda vektorlar va ularning ba'zi tatbiqlari, vektorlar analizining elementlari, ko'p o'zgaruvchili funksiya limiti, uzluksizligi, hosila va differensiallari, karrali integrallar, birinchi tartibli va ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar, egri chiziqli integrallar, sirt integrallari, maydonlar nazariyasining elementlari, matematik fizikaning ba'zi bir tenglamalari, ehtimollar nazariyasining asoslari mavzulari bayon etilgan.

Dastlabki ma'ruzalarda haqiqiy sonlar, tenglamalar va tengsizliklar haqida qisqacha ma'lumotlar keltirildi. Ular, fikrimizcha "elementar matematika"dan oliy matematikaga o'tishda "ko'prik" vazifasini bajaradi.

Qo'llanmani yozishda biz quyidagilarga:

1) har bir mavzuning ravon, ixcham, matematik qat'iylik bilan bayon etilishiga;
2) mavzularning bir-biriga uzviy bog'liklikda, ma'lum ketma-ketlikda, kerakli isbotlar bilan yoritilishiga;
3) turli amaliy masalalarni yechishda matematik usullarning tatbiqlariga e'tiborni qaratdik.

Ma'lumki, oliy matematikaning turli sohalarga tatbiq doirasi nihoyatda keng. Ayniqsa, fizika, mexanika masalalarini, shuningdek texnik hamda iqtisod masalalarini yechishda matematik usullardan har doim foydalaniladi.

Kitobda oliy matematikaning tatbiqlariga misol va masalalar qisman keltirilgan bo'lib, mualliflarning rejalariga ko'ra yoziladigan «Oliy matematikadan masalalar to'plami» da kengroq va batafsil to'xtab o'tilish ko'zda tutilgan. Shuni ham aytish kerakki, ko'p yillar davomida mualliflarning mazkur kurs bo'yicha o'qigan ma'ruzalari kitobni yozish jarayonida katta yordam berdi.

Kitob qo'lyozmasini sinchiklab o'qib, uni ilmiy va uslubiy jihatdan yaxshilanishiga o'z hissasini qo'shgan O'zbekiston Milliy universiteti Mexanika-matematika fakulteti "Matematik analiz" kafedrasi professori X.T.Mansurovga mualliflar tashakkur izhor etadilar.

Mualliflar

1-MA'RUZA

Haqiqiy sonlar

Haqiqiy sonlar to'plami.

Haqiqiy sonning absolyut qiymati

Son tushunchasi matematikaning muhim tushunchalaridan biri. Ular

1) natural sonlar (1,2,3,...),
2) butun sonlar (..., -2, -1, 0, 1, 2,...),
3) ratsional sonlar (oddiy va o'nli kasrlar),
4) irratsional sonlar

bo'lishi mumkin. Bunday sonlar, ular ustida bajariladigan amallar, amallarning bajarilish qoidalari o'quvchiga maktab, kollej va litseylarda o'qitiladigan matematika fanidan ma'lum.

Oliy matematika kursi davomida ko'p hollarda haqiqiy sonlarga duch kelamiz. Shuning uchun haqiqiy sonlar haqidagi asosiy ma'lumotlarni qisqacha bayon etamiz.

1.1. Ratsional va irratsional sonlar

Ma'lumki, $\frac{p}{q}$ ko'rinishida ifodalaniladigan son ratsional son deyiladi, bunda p - butun son, q-esa natural son bo'lib, ular o'zaro tub, ya'ni $(p,q)=1$. Ravshanki, oddiy kasrlar ratsional son bo'ladi.

Agar $\frac{p}{q}$ kasrning maxraji 10, 100, umuman 10 ning natural darajalari (10^n) bo'lsa, bunday oddiy kasr o'nli kasr deyiladi. Masalan,

$\frac{3}{2}, \frac{1}{17}, \frac{23}{11}, -\frac{8}{9}$ - oddiy kasrlar,

$\frac{7}{10}=0,7,\ \frac{112}{10}=11,2,\ \frac{23}{100}=0,23$ - o'nli kasrlar bo'ladi.

$\frac{p}{q}$ ratsional son – oddiy kasr berilgan bo'lsin. Bo'lish qoidasidan foydalanib p butun sonni q natural songa bo'lamiz. Agar bo'lish jarayonida biror qadamdan keyin qoldiq nolga teng bo'lsa, u holda bo'lish jarayoni to'xtab, $\frac{p}{q}$ kasr o'nli kasrga aylanadi. Odatda, bunday o'nli kasr chekli o'nli kasr deyiladi.

p ni q ga bo'lish jarayoni cheksiz davom etib, ma'lum qadamdan keyin yuqorida aytilgan qoldiqlardan biri yana bir marta uchrashi, so'ng undan oldingi raqamlar mos ravishda takrorlanishi mumkin. Odatda, bunday o'nli kasr cheksiz davriy o'nli kasr deyiladi. Takrorlanadigan raqamlar (raqamlar birlashmasi) o'nli kasrning davri deyiladi.

Masalan, $\frac{53}{36}$ ratsional son $1,4722...=1,47(2)$ o'nli kasrga keladi. Bu cheksiz davriy o'nli kasr bo'lib, uning davri 2 ga teng: $\frac{53}{36}=1,47(2)$.

Demak, har qanday $\frac{p}{q}$ ratsional son chekli o'nli kasr yoki cheksiz davriy o'nli kasr orqali ifodalanadi.

Aksincha, har qanday chekli o'nli kasrni yoki cheksiz davriy o'nli kasrni $\frac{p}{q}$ ko'rinishida ifodalash mumkin.

Masalan,

$$1,03=1\frac{3}{100}=\frac{103}{100},$$

$$0,(3)=0,3333...=0+\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+...=\frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{9}=\frac{1}{3}$$

(bunda cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning yig'indisini

topish formulasidan foydalanildi) bo'ladi.

Demak, har qanday chekli yoki cheksiz davriy o'nli kasr ratsional son orqali ifodalaniladi.

Shunday qilib, ixtiyoriy ratsional son chekli yoki cheksiz davriy o'nli kasr orqali va aksincha, ixtiyoriy chekli yoki cheksiz davriy o'nli kasr ratsional son orqali ifodalanadi.

Ammo cheksiz davriy bo'lmagan o'nli kasrlar ham mavjud. Masalan,

$$1,1010010001..., \quad 1,4142135..., \quad 2,7182818...$$

sonlar cheksiz davriy bo'lmagan o'nli kasrlar bo'ladi (bu sonlardan ikkinchisi $\sqrt{2}$ ni, uchinchisi esa e sonini ifodalaydi). Ravshanki, bu sonlar ratsional sonlar bo'lmaydi.

Ta'rif. *Cheksiz davriy bo'lmagan o'nli kasr irratsional son deyiladi*. Masalan,

$$1,4142135...=\sqrt{2}, \quad 3,141583...=\pi, \quad 2,718281...=e$$

sonlar irratsional sonlardir.

1.2. Haqiqiy son. Haqiqiy sonlar to'plami va uning xossalari

Ta'rif. *Ratsional va irratsional sonlar umumiy nom bilan haqiqiy sonlar deyiladi.*

Masalan,

$$2, \ 7\frac{1}{2}, \ -3, \ \sqrt{2}, \ \pi,$$

sonlar haqiqiy sonlardir.

Odatda, matematikada turli matematik obyektlarni, jumladan haqiqiy sonlarni, alohida-alohida o'rganilmasdan, ularning bir nechtasini birgalikda o'rganiladi. Bu to'plam tushunchasiga olib keladi.

To'plam matematikaning boshlang'ich tushunchalaridan bo'lib, uni narsalarning ma'lum belgilar bo'yicha birlashmasi (majmuasi) sifatida tushuniladi. Masalan, 2, 4, 6 sonlardan tashkil topgan to'plam, bir nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlardan tashkil topgan to'plam deyilishi mumkin. To'plamni tashkil etgan narsalarni uning elementlari deyiladi.

Biz haqiqiy sonlardan tashkil topgan to'plamlarni qaraymiz. Ular sonli to'plamlar deyiladi. Bundan keyin sonli to'plam deyish o'rniga qisqacha to'plam deb atayveramiz.

Matematikada to'plamlar bosh harflar bilan uning elementlari esa kichik harflar bilan belgilanadi. Masalan, $A, B, \dots$ to'plamlar, $a, b, \dots$ to'plam elementlari.

Agar a biror A to'plamning elementi bo'lsa, $a \in A$ kabi yoziladi va «a element A to'plamga tegishli» deb o'qiladi. Agar a shu A to'plamga tegishli bo'lmasa, uni $a \notin A$ kabi yoziladi va «a element A to'plamga tegishli emas» deb o'qiladi.

Odatda, barcha natural sonlardan iborat to'plamni N harfi:

$$N = \{1, 2, 3, \dots\},$$

barcha butun sonlardan iborat to'plamni Z harfi:

$$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\},$$

barcha ratsional sonlardan iborat to'plamni Q harfi:

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} : p \in Z,\ q \in N,\ (p, q) = 1 \right\},$$

barcha haqiqiy sonlardan iborat to'plamni R harfi bilan belgilanadi.

Agar A chekli sondagi elementlardan tashkil topgan bo'lsa, u chekli to'plam, aks holda cheksiz to'plam deyiladi.

Masalan,

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$$

chekli to'plam,

$$N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

cheksiz to'plam bo'ladi.

Shuni ta'kidlash kerakki, to'plamni tashkil etgan elementlar orasida aynan bir-biriga teng bo'lgan elementlar to'plamning elementi sifatida faqat bir martagina olinadi.

Aytaylik, ikki E va F to'plamlari berilgan bo'lsin. Agar E to'plamning barcha elementlari F to'plamga tegishli bo'lsa, E

to'plam F to'plamning qismi deyiladi va $E \subset F$ kabi yoziladi. Masalan,

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

bo'ladi.

Agar $E \subset F$ va $F \subset E$ bo'lsa, E va F bir-biriga teng to'plamlar deyiladi va $E = F$ kabi yoziladi.

E va F to'plamlarning barcha elementlaridan tashkil topgan to'plam, bu to'plamlar yig'indisi (birlashmasi) deyiladi va $E \cup F$ kabi belgilanadi. E va F to'plamlarning barcha umumiy elementlaridan tashkil topgan to'plam, bu to'plamlarning ko'paytmasi (kesishmasi) deyiladi va $E \cap F$ kabi yoziladi. E to'plamning F to'plamga tegishli bo'lmagan barcha elementlaridan tashkil topgan to'plam E to'plamdan F to'plamning ayirmasi deyiladi va $E \setminus F$ kabi yoziladi.

Masalan,

$$A = \{1, 2, 5, 8, 11, 13\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

to'plamlar uchun

$$A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13\},$$

$$A \cap B = \{2, 8\},$$

$$A \setminus B = \{1, 5, 11, 13\},$$

$$B \setminus A = \{4, 6, 10, 12\},$$

shuningdek,

$$N \cup Z = Z,\ N \cap Z = N,\ Z \setminus N = \{\dots -3, -2, -1, 0\}$$

bo'ladi.

Birorta ham elementga ega bo'lmagan to'plam bo'sh to'plam deyiladi va $\varnothing$ kabi belgilanadi.

Odatda, chekli A to'plam elementlari soni $m(A)$ orqali belgilanadi.

1-misol. *Dunyo okeanida 19 ta suvosti chuqurliklari ma'lum, ularning chuqurligi 7 km. dan oshadi. Ulardan 16 tasi*

Tinch va Hind okeanlarida, 4 tasi Hind va Atlantika okeanlarida. Har bir okeanda nechtadan suvosti chuqurliklari bor?

Yechilishi. A to'plam bilan Tinch va Hind okeanlaridagi suvosti chuqurliklarini, B to'plam bilan Hind va Atlantika okeanlaridagi suvosti chuqurliklarini belgilaymiz. Masala shartiga ko'ra $m(A)=16$, $m(B)=4$ bo'ladi. Ayni paytda $m(A\cup B)=19$ ekanligi ma'lum. Ravshanki Hind okeanidagi suvosti chuqurligi $A\cap B$ to'plamni tashkil etadi. Bu to'plamning elementlari quyidagicha topiladi:

$$m(A\cap B)=m(A)+m(B)-m(A\cup B)=16+4-19=1.$$

Shunday qilib, Hind okeanida 1 ta, Tinch okeanida 15 ta, Atlantika okeanida 3 ta suvosti chuqurliklari bor ekan.

Endi barcha haqiqiy sonlardan iborat bo'lgan R to'plamning xossalarini keltiramiz:

1) R *to'plamda (to'plam elementlari orasida) qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish, darajaga ko'tarish, ildiz chiqarish amallari kiritilgan bo'lib, bu amallarning bajarilish qoidalari ham o'rinli bo'ladi;*

2) R *to'plamda (to'plam elementlari orasida) teng, katta, kichik tushunchalari kiritilgan. Ixtiyoriy* $a\in R$, $b\in R$, $c\in R$ *haqiqiy sonlar uchun*

$$a=b,\ \text{yoki}\ a>b,\ \text{yoki}\ a<b$$

bo'lib, $a<b$, $b<c$ *bo'lishidan* $a<c$ *bo'lishi kelib chiqadi;*

3) R *zich to'plam bo'ladi, ya'ni ixtiyoriy* $a\in R$, $b\in R$ *haqiqiy sonlar uchun* $a\neq b$ *bo'lsa, u holda* a *va* b *sonlar orasida istalgancha haqiqiy son bo'ladi.*

2 – misol. *Agar* r *- ratsional,* α *- irratsional son bo'lsa,* $r+\alpha$ *sonning irratsional son bo'lishi isbotlansin.*

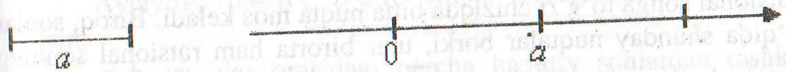
Yechilishi. Berilgan r va α sonlarning yig'indisini β deylik: $\beta=r+\alpha$. Ravshanki, bu tenglikdan $\alpha=\beta-r$ bo'lishi kelib chiqadi.

Faraz qilaylik, β ratsional son bo'lsin. Unda $\beta-r$ soni, ikki ratsional son ayirmasi yana ratsional son bo'lganligi uchun

ratsional son bo'ladi: $\beta-r=\alpha$ ratsional son. Bu esa berilishiga ko'ra α ning irratsional son bo'lishiga ziddir. Ziddiyatning kelib chiqishiga β ning ratsional son bo'lsin deyilishi sabab bo'ldi. Demak, β irratsional son.

1.3. Sonlar o'qi. Sonlarni geometrik tasvirlash

To'g'ri chiziq va bu to'g'ri chiziqda biror nuqta olib, uni O harfi bilan belgilaymiz (1-chizma).



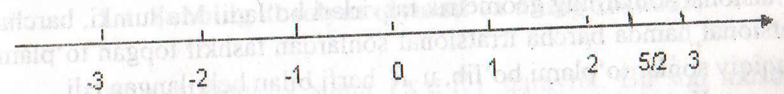
1-chizma

Bu O nuqta nol sonining geometrik tasviri deyiladi. O nuqta to'g'ri chiziqni ikki nurga ajratadi. O nuqtadan o'ng tomondagi nurning yo'nalishini musbat, chap tomondagi nurning yo'nalishini manfiy deb qaraymiz. So'ng o'lchov birligi (uzunligi 1 ga teng kesma) ni olamiz.

Natijada yo'nalishga ega bo'lgan to'g'ri chiziq, O nuqta va o'lchov birliklaridan iborat sistema hosil bo'ladi. Uni sonlar o'qi deyiladi.

O'lchov birligi deb qabul qilingan a kesmani O nuqtadan boshlab, sonlar o'qining o'ng tomoniga joylashtira boramiz. Uni bir marta joylashtirganda bir uchi O nuqtada bo'lib, ikkinchi uchi aniqlagan nuqta 1 sonining geometrik tasviri bo'ladi. Shu tarzda birlik kesmani ikki marta, uch marta va h.k. marta joylashtirib sonlar o'qida 2, 3 va h.k. sonlarning geometrik tasvirlari topiladi.

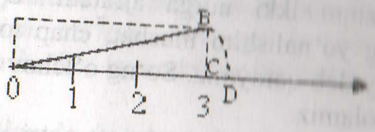
Xuddi shunday usul bilan birlik kesmani O nuqtadan chap tomondagi nurga joylashtira borib -1, -2, -3, va h.k. sonlarning geometrik tasvirlari aniqlanadi (2-chizma).



2-chizma

Aytaylik, qaralayotgan son ratsional son bo'lsin: masalan, $\frac{5}{2}$. Bu sonni tasvirlovchi nuqtani topish uchun avval o'lchov birligini O nuqtadan o'ng tomonga ikki marta joylashtirib, ikki sonni tasvirlovchi nuqta topiladi, so'ngra bu nuqtadan boshlab o'lchov birligining $\frac{1}{2}$ qismini qo'yib, $\frac{5}{2}$ sonni geometrik ifodalovchi nuqta topiladi (2-chizma).

Umuman ratsional sonlar to'plami Q dan olingan har bir ratsional songa to'g'ri chiziqda bitta nuqta mos keladi. Biroq, sonlar o'qida shunday nuqtalar borki, ular birorta ham ratsional sonning tasviri bo'lmaydi. Masalan, $\sqrt{10}$ sonini olaylik (bu son irratsional son bo'ladi). Tomonlari 3 va 1 ga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchakni qaraymiz (3-chizma).



3-chizma

Bu to'g'ri to'rtburchakning OB diagonali, Pifagor teoremasiga ko'ra $OB^2 = OC^2 + BC^2$ bo'lib, $OB = \sqrt{OC^2 + BC^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ bo'ladi. Sirkulning uchini O nuqtaga qo'yib, radiusi OB ga teng bo'lgan aylana chizilsa, bu aylana sonlar o'qini D nuqtada kesadi. Ravshanki, $OB = OD$.

Demak, $\sqrt{10}$ soni geometrik tasvirlovchi nuqta D nuqta bo'ladi.

Sonlar o'qida shu kabi nuqtalar cheksiz ko'p bo'lib, ular irratsional sonlarning geometrik tasvirlari bo'ladi. Ma'lumki, barcha ratsional hamda barcha irratsional sonlardan tashkil topgan to'plam haqiqiy sonlar to'plami bo'lib, u R harfi bilan belgilangan edi.

Ko'rsatish mumkinki, (u maxsus adabiyotlarda, masalan [2]

da isbotlangan) har bir haqiqiy songa sonlar o'qida bitta nuqta va aksincha, sonlar o'qidagi har bir nuqtaga bitta haqiqiy son mos keladi. Bu haqiqiy sonlar to'plami R bilan sonlar o'qining nuqtalari to'plami orasida o'zaro bir qiymatli moslikda ekanligini bildiradi.

Kelgusida to'g'ri chiziqning nuqtasi deganda haqiqiy sonni, haqiqiy son deganda to'g'ri chiziqning nuqtasini tushunamiz.

Endi ba'zi-bir sonlar to'plamlarini keltiramiz, ulardan, kelgusida ko'p foydalaniladi.

Aytaylik, $a \in R$, $b \in R$ sonlar berilgan bo'lib, $a < b$ bo'lsin.

a, b va ular orasidagi barcha haqiqiy sonlardan tashkil topgan to'plam segment deyiladi va $[a,b]$ kabi belgilanadi:

$$[a,b] = \{x \in R : a \le x \le b\}$$

Xuddi shunga o'xshash ushbu (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, to'plamlar quyidagicha ta'riflanadi:

$$(a,b) = \{x \in R : a < x < b\} \text{ - interval,}$$

$$[a,b) = \{x \in R : a \le x < b\} \text{ - yarim interval,}$$

$$(a,b] = \{x \in R : a < x \le b\} \text{ - yarim interval.}$$

Bunda a va b sonlar $[a,b]$, (a,b), $[a,b)$ va $(a,b]$ to'plamlarning chegaralari deyiladi. Shuningdek

$$[a,+\infty) = \{x \in R : x \ge a\},$$

$$(-\infty,a) = \{x \in R : x < a\},$$

$$(-\infty,+\infty) = R$$

deb qaraymiz.

1.4. Sonning absolyut qiymati va uning xossalari

Biror x haqiqiy sonni $(x \in R)$ qaraylik. Bu son musbat $(x > 0)$, manfiy $(x < 0)$ yoki $x = 0$ bo'lishi mumkin.

Agar $x > 0$ bo'lganda shu x ga teng, $x = 0$ bo'lganda shu songa qarama-qarshi $-x$ ga, $x = 0$ bo'lganda 0 ga teng bo'ladigan son x ning absolyut qiymati deyiladi va $|x|$ kabi belgilanadi. Demak,

$$|x| = \begin{cases} x, & agar \ x \geq 0, \\ -x, & agar \ x < 0. \end{cases}$$

Masalan, $|7| = 7$, $|-2| = -(-2) = 2$, $|1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$.

Sonning absolyut qiymati quyidagi xossalarga ega:

1) Ixtiyoriy x haqiqiy son uchun

$$|x| \geq 0,\ |x| = |-x|,\ x \leq |x|,\ -x \leq |x|$$

munosabatlar o'rinli,

2) Agar x haqiqiy son

$$|x| \leq a \quad (a > 0)$$

tengsizlikni qanoatlantirsa, u

$$-a \leq x \leq a$$

tengsizliklarni ham qanoatlantiradi va aksincha.

3) Agar x haqiqiy son

$$|x| > a$$

tengsizlik qanoatlantirsa, u

$$x > a,\ x < -a$$

tengsizliklarni ham qanoatlantiradi va aksincha.

4) Ikki x va y haqiqiy sonlar uchun

a) $|x+y| \leq |x| + |y|$,

b) $|x-y| \geq |x| - |y|$,

d) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$,

e) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$

bo'ladi.

5) Ushbu

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

munosabat o'rinli.

3-Misol *Agar* a,b,c *haqiqiy sonlar uchun* $a > b > c$ *bo'lsa,*

$$|a-b| + |c-a| - |b-c|$$

topilsin.

Yechilishi. Ravshanki, $a > b$ bo'lgani uchun $a-b > 0$ bo'lib,

$$|a-b| = a-b$$

bo'ladi, $a > c$ bo'lgani uchun $c-a < 0$ bo'lib,

$$|c-a| = -(c-a) = a-c$$

bo'ladi, $b > c$ bo'lgani uchun $b-c > 0$ bo'lib

$$|b-c| = b-c$$

bo'ladi. Demak,

$$|a-b| + |c-a| - |b-c| = a-b+a-c-(b-c) = 2(a-b).$$

1.5. Matematik belgilar

Matematikada tez-tez uchraydigan so'z va so'z birikmalari o'rnida maxsus belgilar ishlatiladi:

1) «agar ... bo'lsa, u holda ... bo'ladi iborasi «$\Rightarrow$» belgi orqali yoziladi;

2) ikki fikrning ekvivalentligi ushbu «$\Leftrightarrow$» belgi orqali yoziladi;

3) «har qanday», «ixtiyoriy», «barchasi uchun» so'zlari o'rniga «$\forall$» belgi ishlatiladi;

4) «mavjudki», «topiladiki» so'zlari o'rniga «$\exists$» belgi ishlatiladi.

Shuningdek, tasdiqlarning isboti boshlanganligi «◀» belgi, tugaganligi esa «▶» belgi orqali ifodalanadi.

Mashqlar

1. 80 ta matematika olimpiada qatnashchilardan 60 tasi shaxmat ishqibozi, 50 tasi shashka ishqibozi va 40 tasi shashka va shaxmat ishqibozlari. Olimpiada qatnashchilarning qanchasi bu o'yinlarga befarq emas.

2. Ma'lumki, ikki radiusdan tashkil topgan α markaziy burchak tortib turgan yoyning uzunligi $l = R\alpha$ (α radian o'lchovda) bo'ladi. Yer sharining ekvatorida 1^0 burchak tortib turgan yoy uzunligi topilsin (yer sharining ekvator radiusi $R = 6300$ km deb olinadi).

3. Biologiyada o'rganiladigan bir hujayrali hayvonlar har minutda har biri ikkiga bo'linib ko'payadi. Agar bitta olingan bunday hayvon 100 minutda ko'payib, ularning soni n taga yetsa, dastlab olingan ikkita hayvonning ko'payib, ularning soni ham n taga yetishi uchun qancha vaqt kerak bo'ladi?

4. A to'plam 3 ga bo'linuvchi barcha natural sonlar to'plami, B esa 5 ga bo'linuvchi barcha natural sonlar to'plami bo'lsa, $A \cap B$ to'plam qanday bo'ladi?

5. $A = \{x \in N | 2 < x \le 6\}$, $B = \{x \in N | 1 < x < 4\}$ va $C = \{x \in N | x^2 - 4 = 0\}$ bo'lsa,

1) $B \cup C$ 2) $A \cap B \cap C$ 3) $A \cup B \cup C$ 4) $(A \cap B) \cup (B \cup C)$ to'plamlar topilsin.

2-MA'RUZA

Tenglamalar va tengsizliklar

Oliy matematikaning turli sohalaridagi masalalari, ko'p hollarda tenglama va tengsizliklarni yechish bilan hal qilinadi.

Odatda, berilgan tenglama va tengsizliklar, ularga teng kuchli, ayni paytda soddaroq bo'lgan tenglama va tengsizliklar bilan almashtiriladi. Ularni yechib, berilgan tenglama va tengsizliklarning yechimlari topiladi.

2.1. Chiziqli va kvadrat tenglamalar

Ma'lumki, noma'lumga nisbatan birinchi darajada bo'lgan tenglama chiziqli tenglama deyiladi. Bu tenglama sodda holda ushbu

$$ax + b = 0 \qquad (1)$$

ko'rinishda bo'ladi, bunda a va b berilgan sonlar.

(1) tenglama:

1) $a \ne 0$ bo'lganda yagona $x = -\frac{b}{a}$ yechimga ega bo'ladi,

2) $a = 0, \quad b = 0$ bo'lganda yechimlari cheksiz ko'p (ixtiyoriy son tenglamaning yechimi) bo'ladi.

3) $a = 0, \quad b \ne 0$ bo'lganda yechimga ega bo'lmaydi.

1-misol. *Ushbu*

$$\frac{2x-5}{4} + \frac{2x+1}{3} + x = \frac{x}{4} + 2$$

tenglama yechilsin.

◀Bu tenglamaning har ikki tomonini 4 va 3 sonlarining eng kichik umumiy karralisi 12 ga ko'paytirib

$$12 \cdot \frac{2x-5}{4} + 12 \cdot \frac{2x+1}{3} + 12x = 12 \cdot \frac{x}{4} + 24,$$

ya'ni

$$3(2x-5) + 4(2x+1) + 12x = 3x + 24$$

bo'lishini topamiz.

Soddalashtirish natijasida keyingi tenglik quyidagi

$$6x-15+8x+4+12x=3x+34,$$

ya'ni

$$23x=35$$

ko'rinishga keladi. Ravshanki, bu tenglama berilgan tenglamaga teng kuchli bo'lib, uning yechimi $x=\frac{35}{23}$ bo'ladi. ▶

Ma'lumki, noma'lumga nisbatan ikkinchi darajada bo'lgan tenglama kvadrat tenglama deyiladi. Bu tenglama sodda holda ushbu

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a\neq 0) \qquad (2)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bunda a,b,c berilgan sonlar bo'lib, kvadrat tenglamaning koeffitsiyentlari deyiladi.(2) tenglamaning yechimi, uning diskriminanti

$$D=b^2-4ac$$

ga bog'liq:

1) agar $D>0$ bo'lsa, (2) tenglama ikkita haqiqiy yechimga ega bo'lib,

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

bo'ladi;

2) agar $D=0$ bo'lsa, (2) tenglama bitta haqiqiy yechimga ega bo'lib,

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$$

bo'ladi;

3) agar $D<0$ bo'lsa, (2) tenglama haqiqiy yechimga ega bo'lmaydi.

2-misol. *Ushbu*

$$1+\frac{2x}{x+4}+\frac{27}{2x^2+7x-4}=\frac{6}{2x-1}$$

tenglama yechilsin.

◀Ravshanki, $2x^2+7x-4=(x+4)(2x-1)$. Berilgan tenglamaning har ikki tomonini ($x\neq-4$, $x\neq\frac{1}{2}$) $(x+4)(2x-1)$ ga ko'paytirib topamiz:

$$2x^2+7x-4+\frac{2x}{x+4}\cdot(x+4)(2x-1)+$$

$$+\frac{27\left(2x^2+7x-4\right)}{2x^2+7x-4}=\frac{6}{2x-1}(x+4)(2x-1).$$

Natijada

$$2x^2+7x-4+4x^2-2x+27=6x+24$$

bo'lib,

$$6x^2-x-1=0$$

bo'ladi. Bu tenglamani yechib

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{12}=\frac{1\pm5}{12},$$

$x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{1}{3}$ bo'lishini topamiz. Biroq, $x=\frac{1}{2}$ da qaralayotgan tenglama ma'noga ega emas. Demak, berilgan tenglamaning yechimi $x=-\frac{1}{3}$ bo'ladi.▶

2.2. Determinantlar va ularning xossalari

Matematikaning qator masalalarini yechishda ma'lum xossalarga ega bo'lgan ifodalardan foydalaniladi. Bunday maxsus ifodalardan biri determinantlardir.

Aytaylik, 4 ta a,b,c,d haqiqiy sonlar berilgan bo'lsin. Ushbu $ad-bc$ ayirma (son)ni berilgan sonlarni yo'l va ustun ko'rinishida joylashtirib, quyidagicha

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

ifodalaymiz. Demak,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \qquad (3)$$

(3) ifoda 2-tartibli determinant deyiladi. Bunda a,b,c,d - determinantning elementlari, a,b va c,d sonlar mos ravishda determinantning birinchi va ikkinchi yo'llari, a,c va b,d sonlar determinantining mos ravishda birinchi va ikkinchi ustunlari, a,d sonlar determinantning bosh diagonali, b,c sonlar determinantning yordamchi diagonali deyiladi.

Odatda determinantning elementlarini ikkita indeks qo'yilgan harflar bilan belgilanadi. Bunda birinchi indeks yo'lni, ikkinchisi esa ustunni bildiradi. Masalan, a_{21} son determinantning ikkinchi yo'l birinchi ustunida turgan element bo'ladi.

Ikkinchi tartibli determinant ta'rifiga ko'ra

$$\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = -3\cdot 2 - 5\cdot 7 = -6 - 35 = -41,$$

$$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin x\cdot\sin x - \cos x\cdot(-\cos x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

bo'ladi.

Endi ikkinchi tartibli determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ning asosiy xossalarini keltiramiz:

1) Determinant yo'li ustuni bilan almashtirilsa, shuningdek ustunini yo'li bilan almashtirilsa, uning qiymati o'zgarmaydi.

Bu xossaning isboti determinant ta'rifidan kelib chiqadi.

2) Determinantning yo'lini o'zaro almashtirilsa, uning ishorasi o'zgaradi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

◄Ravshanki,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}. ►$$

3) Determinantning biror yo'lida turgan barcha elementlarni biror o'zgarmas k songa ko'paytirilsa, determinantning qiymati ham k ga ko'payadi:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

◄Haqiqatdan ham,

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{22} - ka_{12}a_{21} = k(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

bo'ladi. ►

4) Determinantning bir yo'lidagi elementlari ikkinchi yo'lidagi elementlariga proporsional bo'lsa, determinant 0 ga teng bo'ladi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{vmatrix} = 0$$

◄Bu tenglik determinant ta'rifidan kelib chiqadi. ►

5) Determinantning bir yo'lidagi elementlarni biror songa ko'paytirib, ikkinchi yo'lidagi mos elementlarga qo'shilsa, determinantning qiymati o'zgarmaydi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

◄Determinant ta'rifidan foydalanib topamiz:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}(a_{11} + ka_{21}) - a_{21}(a_{12} + ka_{22}) =$$

$$= a_{11}a_{22} + ka_{22}\cdot a_{21} - a_{21}a_{12} - ka_{21}a_{22} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. ►$$

Endi uchinchi tartibli determinant tushunchasini keltiramiz.

Aytaylik, 9 ta $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ sonlar berilgan bo'lsin. Bu sonlarni uchta yo'l, uchta ustun tarzida joylashtirib yozilishidan hosil bo'lgan ushbu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ifoda uchinchi tartibli determinant deyiladi. Uchinchi tartibli determinant son bo'lib, uning qiymati

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ga teng bo'ladi. Demak,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Masalan, ushbu

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

uchinchi tartibli determinant ta'rifiga binoan

$$d = 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1) - 2(-2) + 3\cdot(-1) = 0$$

ga teng bo'ladi.

Uchinchi tartibli determinantlarda ham determinant elementlari, yo'llari, ustunlari, bosh va yordamchi diagonallari tushunchalari xuddi ikkinchi tartibli determinantlardagi kabi kiritiladi. Shuningdek, uchinchi tartibli determinant ham, ikkinchi tartibli determinant singari xossalarga ega bo'ladi.

Faraz qilaylik, biror

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (4)$$

uchinchi tartibli determinant berilgan bo'lsin. Bu determinantning biror a_{ik} $(i = 1,2,3; \quad k = 1,2,3)$ elementini olib, shu element joylashgan yo'lni hamda ustunni o'chiramiz. Ravshanki, qolgan elementlari ikkinchi tartibli determinantni hosil qiladi. Bu determinantga a_{ik} elementning minori deyiladi va u M_{ik} kabi belgilanadi.

Masalan, (4) determinantning a_{31} element turgan yo'lni hamda ustunni o'chirish

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

natijasida ikkinchi tartibli ushbu

$$M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

determinant hosil bo'ladi. Bu (4) determinantning a_{31} elementi minori bo'ladi. Ravshanki, (4) determinant 9 ta minorga ega.

Ushbu

$$(-1)^{i+k}\cdot M_{ik}$$

miqdor (4) determinant a_{ik} elementining algebraik to'ldiruvchisi deyiladi. U A_{ik} orqali belgilanadi. Demak,

$$A_{ik} = (-1)^{i+k}\cdot M_{ik}.$$

Masalan,

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

determinantning $a_{13} = 3$ elementining algebraik to'ldiruvchisi

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=1\cdot(1\cdot 0-2\cdot 3)=-6$$

bo'ladi.

1-Teorema. *Determinantning biror yo'lida joylashgan barcha elementlarning ularga mos algebraik to'ldiruvchilari bilan ko'paytmasidan tashkil topgan yig'indi shu determinantning qiymatiga teng bo'ladi.*

◄Bu teoremani

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

determinantning birinchi yo'lida joylashgan a_{11}, a_{12}, a_{13} elementlaridan foydalanib isbotlaymiz.

Ravshanki, bu a_{11}, a_{12}, a_{13} elementlarning algebraik to'ldiruvchilari

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot M_{11}=1\cdot\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot M_{12}=-\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix},$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot M_{13}=1\cdot\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix},$$

bo'ladi. Unda

$$a_{11}\cdot A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

bo'lib, bu tenglikning o'ng tomonidagi ifoda (3) ga ko'ra uchinchi tartibli determinant teng ekanini topamiz. Demak,

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}.$$ ►

Eslatma. *Biz yuqorida ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar bilan tanishdik va ularning xossalarini bayon etdik.*

Xuddi shunga o'xshash $n-$ *tartibli* $(n>3)$

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

determinant tushunchasi kiritiladi va ularning xossalari o'rganiladi.

2.3. Determinantlarni hisoblash

Ma'lumki, ikkinchi tartibli determinant, ta'rifga ko'ra

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

bo'ladi.

Uchinchi tartibli determinant, ta'rifga ko'ra

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

bo'ladi. Bu tenglikda qatnashgan ikkinchi tartibli determinantlarni hisoblab topamiz:

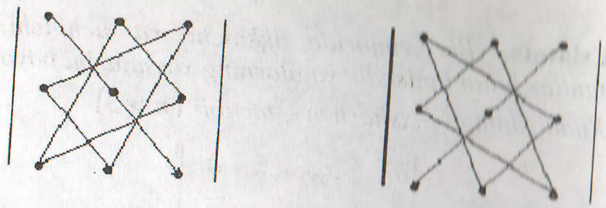
$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}(a_{22}\cdot a_{33}-a_{23}\cdot a_{32})-a_{12}(a_{21}\cdot a_{33}-a_{23}\cdot a_{31})+$$

$$+a_{13}(a_{21}\cdot a_{32}-a_{22}\cdot a_{31})=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}- \quad (5)$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

Demak, uchinchi tartibli determinant 6 ta had yig'indisidan iborat bo'lib, ularning uchtasi musbat ishorali, uchtasi manfiy ishorali bo'ladi.

Musbat va manfiy ishorali hadlarni yozishda quyidagi tasvirlangan sxemalardan foydalanish qulay bo'ladi:

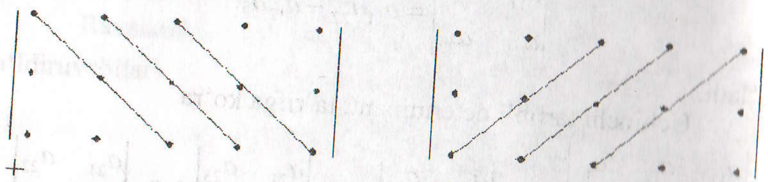


$+$ $-$

Agar uchinchi tartibli determinantni quyidagi ko'rinishda yozib olsak

$$a_{11}a_{12}a_{13}a_{11}a_{12}$$
$$a_{21}a_{22}a_{23}a_{21}a_{22}$$
$$a_{31}a_{32}a_{33}a_{31}a_{32}$$

determinantning qiymatini Sarryus usuli deb ataluvchi usul bilan ham hisoblash mumkin:



$+$ $-$

3-Misol. *Ushbu*

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

determinant hisoblansin.

◀Bu determinantni hisoblashda (5) formula va keltirilgan sxemadan foydalanamiz:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 2\cdot4\cdot9+3\cdot1\cdot6+7\cdot5\cdot8-7\cdot4\cdot6-3\cdot5\cdot9-2\cdot1\cdot8 =$$

$$= 72+18+280-168-135-16=51.$$ ▶

Determinantni (ayniqsa, yuqori tartibli determinantlarni) hisoblashda determinantning xossalari va yuqorida keltirilgan teoremadan foydalaniladi. Misol tariqasida bitta 4-tartibli determinantning hisoblanishini ko'rsatamiz. Aytaylik, ushbu

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 1 \end{vmatrix}$$

determinantni hisoblash lozim bo'lsin. Avvalo determinantning birinchi yo'lini 2 ga ko'paytirib 4-yo'liga qo'shamiz. Natijada 5-xossaga ko'ra

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

bo'ladi. Keyingi determinantning birinchi yo'lini birinchi ustun bilan almashtiramiz. Unda 1-xossaga ko'ra

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

bo'ladi.

Endi keltirilgan teoremadan foydalanib (determinantning birinchi yo'lda joylashgan elementlari bo'yicha) topamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{11}+0\cdot A_{12}+0\cdot A_{13}+0\cdot A_{14} =$$

$$= 1\cdot A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 54+0+0-0-0-0=54.$$

2.4. Chiziqli tenglamalar sistemasi. Kramer usuli

Ikkita chiziqli tenglamalardan iborat ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \qquad (6)$$

sistema ikki x va y noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi, bunda $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sonlar tenglamalar sistemasining koeffitsiyentlari, b_1 va b_2 sonlar ozod hadlar deyiladi.

(6) sistemaning koeffitsiyentlaridan ushbu

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

determinantni, so'ng bu determinantning birinchi ustunidagi elementlarni ozod hadlar bilan almashtirib

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

determinantni, ikkinchi ustundagi elementlarni ozod hadlar bilan almashtirib

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

determinantlar hosil qilamiz.

Demak, (6) sistema berilgan holda har doim Δ, Δ_x, Δ_y determinantlarga ega bo'lamiz.

2-Teorema. *Aytaylik, ushbu*

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \qquad (7)$$

tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin. Agar

1) $\Delta \neq 0$ *bo'lsa, u holda (7) sistema yagona* (x, y) *yechimga ega bo'lib,*

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

bo'ladi;

2) $\Delta = 0$ *bo'lib,* $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$ *bo'lsa, u holda (7) sistema yechimga ega bo'lmaydi;*

3) $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$ *bo'lsa, u holda (7) sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.*

◀ (7) sistemaning birinchi tenglamasini a_{22} ga, ikkinchi tenglamasini $-a_{12}$ ga ko'paytirib, so'ng ularni hadlab qo'shib topamiz:

$$a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y = a_{22}b_1,$$
$$-a_{21}a_{12}x - a_{12}a_{22}y = -a_{12}b_2$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$$

Keyingi tenglikdan

$$\Delta \cdot x = \Delta_x,$$

ya'ni

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Shuningdek, (7) sistemaning birinchi tenglamasini $-a_{21}$ ga, ikkinchi tenglamasini a_{11} ga ko'paytirib, so'ng ularni hadlab qo'shib topamiz:

$$-a_{11}a_{21}x - a_{12}a_{21}y = -b_1a_{21},$$
$$a_{11}a_{21}x + a_{11}a_{22}y = b_2a_{11}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

Bu tenglikdan

$$\Delta \cdot y = \Delta_y,$$

ya'ni

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Shunday qilib berilgan tenglamalar sistemasi quyidagi

$$\begin{cases}\Delta\cdot x=\Delta_x\\ \Delta\cdot y=\Delta_y\end{cases}$$

ko'rinishga kelib, sistema $\Delta\neq 0$ bo'lganda yagona yechimga ega bo'lib,

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}$$

bo'ladi.

Shunga o'xshash $\Delta=0$ bo'lganda sistema yechimga ega bo'lmasligi, $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$ bo'lganda sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'lishi ko'rsatiladi. ▶

4-misol. *Ushbu*

$$\begin{cases}2x+3y=1\\ 3x+5y=4\end{cases}$$

sistema yechilsin.

◀Bu sistema uchun Δ,Δ_x,Δ_y larni topamiz:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&3\\3&5\end{vmatrix}=10-9=1,\quad \Delta_x=\begin{vmatrix}1&3\\4&5\end{vmatrix}=5-12=-7,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}2&1\\3&4\end{vmatrix}=8-3=5.$$

Demak,

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-7}{1}=-7,\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{5}{1}=5$$

bo'ladi. ▶

5-misol. *Ushbu*

$$\begin{cases}5x-2y=4,\\ 0,35x-0,14y=2\end{cases}$$

sistema yechilsin.

◀Bu sistema uchun Δ,Δ_x,Δ_y larni topamiz:

$$\Delta=\begin{vmatrix}5&-2\\0,35&-0,14\end{vmatrix}=5\cdot(-0,14)-0,35\cdot(-2)=-0,7+0,7=0$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}4&-2\\2&-0,14\end{vmatrix}=4\cdot(-0,14)-2\cdot(-2)=-0,56+4=3,44\neq 0$$

Demak, berilgan sistema yechimga ega emas. ▶

Uchta chiziqli tenglamalardan iborat ushbu

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1,\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2,\\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3,\end{cases}\qquad (8)$$

sistema uchta x,y va z noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi, bunda $a_{11},a_{12},a_{13},a_{21},a_{22},a_{23},a_{31},a_{32},a_{33}$ sonlar tenglamalar sistemasining koeffitsiyentlari, b_1,b_2 va b_3 sonlar ozod hadlar deyiladi.

(8) sistemaning koeffitsiyentlaridan quyidagi

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

uchinchi tartibli determinantni hosil qilamiz. So'ng bu determinantning birinchi, ikkinchi va uchinchi ustunlarini mos ravishda ozod hadlar bilan almashtirib quyidagi determinantlarni tuzamiz:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\quad \Delta_y=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix},\quad \Delta_z=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix}.$$

Demak, (8) sistema berilgan holda har doim $\Delta,\Delta_x,\Delta_y,\Delta_z$

determinantlarga ega bo'lamiz.

3-Teorema. *Faraz qilaylik,*

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3, \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin. Agar

1) $\Delta \neq 0$ *bo'lsa, u holda (8) sistema yagona* (x, y, z) *yechimga ega bo'lib,*

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

bo'ladi;

2) $\Delta = 0$ *bo'lib,* $\Delta_x \neq 0, \Delta_y \neq 0, \Delta_z \neq 0$ *bo'lsa, u holda (8) sistema yechimga ega bo'lmaydi;*

3) $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ *bo'lsa, u holda (8) sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.*

◀Bu teoremaning isboti 2-teoremaning isboti kabidir.▶

6-misol. *Ushbu*

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5, \\ x + y + 2z = 7, \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi yechilsin.

◀Avvalo sistema koeffitsiyentlaridan tuzilgan Δ determinantni hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 12 + 1 - (-2) - (-4) - 3 = 18.$$

Demak, berilgan sistema yagona yechimga ega. Endi $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ determinantlarni hisoblaymiz:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 6 + 7 - (-1) - (-10) - 21 = 8,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 14 + 20 - 1 - (-14) - 4 - 5 = 38,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 42 - 5 - 10 - (-14) - 3 = 40.$$

Unda

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{38}{18} = \frac{19}{9}$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{40}{18} = \frac{20}{9}$$

bo'ladi.▶

Yuqorida keltirilgan tenglamalar sistemasining yechimini topish usuli Kramer usuli deyiladi.

Shu usul bilan n ta chiziqli tenglamalardan tuzilgan n ta $x_1, x_2, \ldots, x_n$ noma'lumli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{n}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

ni ham yechish mumkin.

2.5. Chiziqli va kvadrat tengsizliklar

Ma'lumki, ushbu $ax+b>0$, $ax+b\geq 0$, $ax+b<0$, $ax+b\leq 0$ ko'rinishdagi tengsizliklar sodda chiziqli tengsizliklar deyiladi, bunda a,b berilgan sonlar, x esa no'malum.

Chiziqli tengsizlik

$$ax+b\geq 0 \qquad (9)$$

ni yechish usuli:

$$ax+b\geq 0,$$

$$ax\geq -b.$$

Keyingi tengsizlikning yechimi a ning ishorasiga bog'liq bo'ladi:

a) Aytaylik, $a>0$ bo'lsin. Bu holda tengsizlikning ikki tomonini a ga bo'lsak, tengsizlik ishorasi o'zgarmaydi va

$$x\geq -\frac{b}{a}$$

bo'ladi. Demak, bu holda tengsizlik yechimlari cheksiz ko'p bo'lib, ular $\left[-\frac{b}{a},+\infty\right)$ to'plamni (yechimlar to'plamini) hosil qiladi.

b) Aytaylik, $a<0$ bo'lsin. Bu holda tengsizlikning har ikki tomonini a ga bo'lsak, tengsizlik ishorasi qarama-qarshisiga o'zgaradi va

$$x\leq -\frac{b}{a}$$

bo'ladi. Demak, bu holda ham tengsizlik yechimlari cheksiz ko'p bo'lib, ular $\left(-\infty,-\frac{b}{a}\right]$ to'plamni (yechimlar to'plamini) hosil qiladi.

d) Aytaylik, $a=0$ bo'lsin. U holda $b\geq 0$ tengsizlik hosil bo'ladi. Bu tengsizlik bajarilgan, yoki bajarilmagan bo'lishi mumkin. Birinchi holda ixtiyoriy son berilgan tengsizlikni yechimi bo'ladi. Ikkinchi holda esa hech qanday son yechim bo'la olmaydi.

1-misol. *Ushbu*

$$x-\frac{x-1}{2}>\frac{x-3}{4}-\frac{x-2}{3}$$

tengsizlik yechilsin.

◀Berilgan tengsizlikning ikki tomonini 12 ga ko'paytirib topamiz:

$$12x-6(x-1)>3(x-3)-4(x-2)$$

$$12x-6x+6>3x-9-4x+8.$$

Natijada $7x>-7$ bo'lib, undan $x>-1$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, berilgan tengsizlikning yechimlar to'plami $(-1;+\infty)$ bo'ladi. ▶

Ma'lumki, ushbu

$$ax^2+bx+c>0, \qquad ax^2+bx+c\geq 0,$$

$$ax^2+bx+c<0, \qquad ax^2+bx+c\leq 0.$$

tengsizliklar kvadrat tengsizliklar deyiladi, bunda a,b,c berilgan sonlar, x noma'lum.

Kvadrat tengsizliklarni yechishda

$$a \text{ hamda } D=b^2-4ac$$

miqdorlarning ishoralari muhim.

Masalan,

$$ax^2+bx+c>0$$

tengsizlikda $a>0, D>0$ bo'lsin. Ravshanki, bu holda $ax^2+bx+c=0$ kvadrat tenglama ikkita x_1 va x_2 ildizlarga ega bo'lib,

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

bo'ladi. Qaralayotgan tengsizlik ushbu

$$a(x-x_1)(x-x_2)>0$$

va uning ikki tomonini a ga bo'lish natijasida

$$(x-x_1)(x-x_2)>0$$

ko'rinishga keladi. Bu tengsizlik intervallar usuli yordamida yechiladi.

Aytaylik, $x_1 < x_2$ bo'lsin. Unda, berilgan tengsizlikning yechimi $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ bo'lib, yechimlar to'plami $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ bo'ladi.

Endi kvadrat tengsizliklar va ularning yechimini ko'rsatuvchi jadvalni keltiramiz:

	Tengsizliklar	a	D	Yechimlari
1	$ax^2+bx+c>0$	$a>0$	$D>0$	$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$
2	$ax^2+bx+c\geq 0$	$a>0$	$D>0$	$(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$
3	$ax^2+bx+c>0$	$a>0$	$D=0$	$\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right) \cup \left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$
4	$ax^2+bx+c\geq 0$	$a>0$	$D=0$	$(-\infty, +\infty)$
5	$ax^2+bx+c>0$ $ax^2+bx+c\geq 0$	$a>0$	$D<0$	$(-\infty, +\infty)$
6	$ax^2+bx+c>0$	$a<0$	$D>0$	(x_1, x_2)
7	$ax^2+bx+c\geq 0$	$a<0$	$D>0$	$[x_1, x_2]$
8	$ax^2+bx+c>0$	$a<0$	$D=0$	$\varnothing$
9	$ax^2+bx+c\geq 0$	$a<0$	$D=0$	$x=-\frac{b}{2a}$
10	$ax^2+bx+c<0$	$a<0$	$D>0$	$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$
11	$ax^2+bx+c\leq 0$	$a<0$	$D>0$	$(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$
12	$ax^2+bx+c<0$	$a<0$	$D=0$	$\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right) \cup \left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$
13	$ax^2+bx+c\leq 0$	$a>0$	$D=0$	$x=-\frac{b}{2a}$
14	$ax^2+bx+c<0$ $ax^2+bx+c\leq 0$	$a<0$	$D<0$	$(-\infty, +\infty)$
15	$ax^2+bx+c<0$ $ax^2+bx+c\leq 0$	$a>0$	$D<0$	$\varnothing$
16	$ax^2+bx+c<0$	$a>0$	$D=0$	$\varnothing$
17	$ax^2+bx+c\leq 0$	$a>0$	$D=0$	$x=-\frac{b}{2a}$
18	$ax^2+bx+c<0$	$a>0$	$D>0$	(x_1, x_2)
19	$ax^2+bx+c\leq 0$	$a>0$	$D>0$	$[x_1, x_2]$
20	$ax^2+bx+c\geq 0$	$a<0$	$D<0$	$\varnothing$

8-misol: *Ushbu*

$$2x(x+2) \geq x(7x+10)+1$$

tengsizlik yechilsin.

◀Soddalashtirish natijasida

$$2x^2+4x \geq 7x^2+10x+1,$$

$$5x^2+6x+1 \leq 0$$

bo'ladi. Keyingi kvadrat tengsizlik uchun

$$a=5>0, \quad D=36-4\cdot 5\cdot 1=16>0$$

$$x_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-6\pm 4}{10}; \quad x_1=-1, \quad x_2=-\frac{1}{5}$$

bo'ladi. Unda jadvalning 19 dagi formulasiga ko'ra berilgan tengsizlikning yechimi (yechimlar to'plami) $\left[-1, -\frac{1}{5}\right]$ bo'ladi. ▶

Mashqlar

Ushbu tenglamalar yechilsin:

1. $(p-1)x+2=p+1$ 2. $mx^2-(m+n)x+n=0$

Ushbu chiziqli tenglamalar sistemasi yechilsin:

3. $\begin{cases} 3x+y+z=5, \\ x-4y-2z=-3, \\ -3x+5y+6z=7. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 5x+8y-z=7, \\ 2x-3y+2z=9, \\ x+2y+3z=1. \end{cases}$

Ushbu tengsizliklar yechilsin:

5. $x(2x-1)>(x-2)^2$. 6. $(x^2-2x)<\dfrac{3}{4}$.

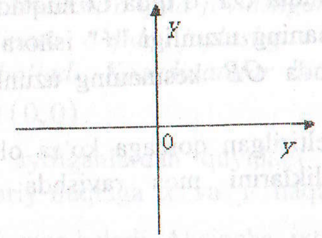
3-MA'RUZA

Tekislikda Dekart va qutb koordinatalari sistemasi

3.1. Dekart koordinatalari sistemasi

Tekislikda ikkita o'zaro perpendikulyar OX va OY to'g'ri chiziqlarni (o'qlarni, ularning musbat yo'nalishlari 1-chizmada ko'rsatilgan) olaylik.

Aytaylik, OX o'qi gorizontal, OY o'qi vertikal joylashsin (1-chizma).

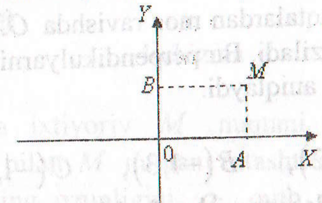


1-chizma

OX va OY to'g'ri chiziqlar koordinata o'qlari (OX - abssissalar o'qi, OY - ordinatalar o'qi), ular kesishgan O nuqta koordinata boshi deyiladi.

Bu ikkala o'q uchun bir xil bo'lgan o'lchov birligi-masshtab birligi (uzunligi 1 ga teng kesma) ni olamiz. Natijada, OX, OY koordinata o'qlari va ularda tayinlagan masshtab birligidan iborat sistema hosil bo'ladi. Bu sistema tekislikda Dekart koordinatalari sistemasi deyiladi.

Endi tekislikda ixtiyoriy M nuqtani olaylik (2-chizma).



2-chizma