H.T.TO‘RAYEV,
I.AZIZOV

MATEMATIK MANTIQ VA DISKRET MATEMATIKA
1-Jild

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA

O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

H. T. To'rayev, I. Azizov

MATEMATIK MANTIQ VA DISKRET MATEMATIKA

I jild

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi ta'lim muassalarining talabalari uchun darslik sifatida tavsiya etgan

"Tafakkur-Bo'stoni"
Toshkent – 2011

22.12
T97
512+51(075)
ББК 22.12z73+22.172z7

Professor ***H.T.TO'RAYEVning*** *umumiy tahriri ostida*

Taqrizchilar:

TATU kafedrasi mudiri, O'zR FA akademigi
M.M. Komilov

O'zMU professori, O'zR FA akademigi ***Sh.Farmonov***

O'zR FA ning matematika va informatsion texnologiyalar Institutining laboratoriya mudiri, professor ***R.Sadullayev***

SamDU kafedrasi mudiri professor ***A.S.Soleyev***

O'zMU professori, fizika-matematika fanlari doktori
R. Dadajonov

To'rayev H.T.

Matematik mantiq va diskret matematika.: Oliy ta'lim muassasalarining talabalari uchun darslik: II jildlik. H.T. To'rayev, I. Azizov; H.T. To'rayevning umumiy tahriri ostida; O'zR oily va o'rta-maxsus ta'lim vazirligi. – Toshkent: Tafakkur-Bo'stoni, 2011. – 288 bet

I. Azizov, I.

ББК 22.12z73+22.172z7

Darslikda to'plamlar haqida umumiy tushunchalar, kombinatorika elementlari, mulohazalar algebrasi va mulohazalar hisobi kabi masalalar bayon qilingan.

Darslikning II jildida predikatlar mantiqi, matematik nazariyalar, algoritmlar, matematik mantiqning texnikaga tatbiqi, matematik mantiq funksiyalarini minimallashtirish muammosi, graflar nazariyasining elementlari, tarmoqlar va tarmoqdagi oqimlar kabi masalalar yoritilgan.

Darslik bakalavriatning 5480100 – amaliy matematika va informatika, 5460100 – matematika, 5811200 – servis (axborot servisi), 5522200 – telekommunikasiya, 5521900 – informatika va axborot texnologiyalari, 5140900 – kasb ta'limi (informatika va axborot texnologiyalari), 5140100 – matematika va informatika yo'nalishlari bo'yicha ta'lim olayotgan talabalarga mo'ljallangan.

Darslikdan 5A460104, 5A480101, 5A480107, 5A5521901 va 5A480108 magistratura mutaxassisliklari bo'yicha ta'lim olayotgan talabalar hamda aspirantlar, radiotexnika, elektrotexnika va amaliy matematika sohalarida ishlayotgan muhandislar, matematiklar va mutaxassislar foydalanishlari mumkin.

ISBN 978-9943-362-37-6

SO‘Z BOSHI

Diskret matematika – matematikaning bir qismi bo‘lib, meloddan avval IV asrda yaratila boshlangan. Diskret matematika matematikaning takomillashgan sonlar nazariyasi, algebra, matematik mantiq qismlaridan tashqari XX asr o‘rtalaridagi fan-texnika taraqqiyoti tufayli jadal rivojlanayotgan funksional sistemalar nazariyasi, graf va to‘rlar nazariyasi, kodlashtirish nazariyasi, kombinator analiz kabi bo‘limlarni ham o‘z ichiga oladi.

Dastlab faqat matematik mantiq, algebra, matematik analiz, matematika asoslari, ehtimollar nazariyasi, geometriya, topologiya, sonlar nazariyasi, modellar nazariyasi kabi matematik fanlarda tatbiq etib kelingan diskret matematika XX asrning 40- yillaridan boshlab hisoblash matematikasi, kibernetika, axborot texnologiyalari, iqtisodiyot, psixologiya, matematik lingvistika, tibbiyot fanlari va diskret texnikada ham keng qo‘llanilmoqda. Diskret matematika elektr sxemalarni loyihalashda va tekshirishda, avtomatik hisoblash mashinalarini loyihalash va dasturlashtirishda, diskret avtomatlarni mantiqiy loyihalashda, EHM elementlari va qismlarini loyihalashda, har xil texnik sistemalar, qurilmalar va avtomatik mashinalarni tahlil va sintez qilishda keng miqyosda tatbiq etiladi. Matematik mantiq fani elektron hisoblash mashinalarining vujudga kelishiga va uni mukammalashtirishga katta hissa qo‘shdi. Diskret matematika informatikaning poydevori bo‘lishi bilan birga, hozirgi zamon matematik ta’limning muhim bo‘g‘ini ham hisoblanadi.

Kitobning asosi sifatida H.T. To‘rayev tomonidan 1973- yildan beri Samarqand davlat universiteti amaliy matematika va informatika fakulteti talabalariga uzluksiz o‘qilayotgan ma’ruzalar olingan. Uning strukturasi va mazmuniga fakultet bazasida “Diskret matematika va uning tatbiqlari” mavzusida o‘tkazilgan Xalqaro ilmiy anjumanlar, Moskva davlat universitetining «Diskret matematika» kafedrasi bilan o‘quv-uslubiy sohalardagi hamkorlik hamda fakultet talabalariga diskret matematika fanining yetuk olimlari A.Dorodnitsin, Yu.Juravlyov, M.Komilov, V.Kudryavsev, A.Zikov va V.Qobulov tomonidan o‘qilgan ma’ruzalarning ham ijobiy ta’siri bor.

2003- yilda H.T.To‘rayev muallifligida kirill grafikasida yozilgan va «O’qituvchi» nashriyotida nashr etilgan «Matematik mantiq va diskret matematika» o‘quv qo‘llanmasini, jamiyat va fan taraqqiyotini hisobga olib, lotin alifbosida qayta ishlab ushbu darslikni yozishga to‘g‘ri keldi.

Darslik kortej, fazzi to‘plamlar va munosabatlar, grafning metrik tavsiflari hamda kombinatorika elementlariga doir ma’lumotlar bilan to‘ldirildi. 2003- yilda nashr etilgan o‘quv qo‘llanmada keltirilgan I bobning 1–3-paragraflari, II bobning 1–9- paragraflari va IX bobning barcha paragraflari qayta ishlandi va “Kombinatorika elementlari” deb nomlangan yangi bob qo‘shildi. Uquv qullanmaning “Umumiy tushunchalar” deb nomlangan bobiga kortejlar, fazzi to‘plamlar[1], fazzi munosabatlarga bag‘ishlangan paragraflar qo‘shildi. Darslikning ushbu nashrida “Graflar nazariyasining elementlari” va “Mulohazalar algebrasi” deb ataluvchi boblari ham qayta ishlandi, to‘ldirildi va yangi ma’lumotlar bilan yanada boyitildi. Boshqa boblarda jiddiy o‘zgarishlar qilinmadi, faqat ayrim texnik noaniqliklar tuzatildi, xolos.

Darslikda matematik mantiq va diskret matematika fanining rivojlanishiga ulkan hissa qo‘shgan Platon, Evklid, N. At-Tusiy, J. Ali Qushchi, L. Fibonachchi, U. Xayyom, I. Nyuton, L. Eyler, G. Kantor, J. Bul, O. de Morgan, R. Dekart, B. Pascal, P. Ferma, G. Leybnis, N. Abel, O. Koshi, N. Ferrers, H. Sheffer, Ch. Pirs, I.I. Jegalkin, E. Post, A. Chyorch, N. Lobachevskiy, Yu. Dedekind, G. Peano, D. Gilbert, Yu.V. Matiyasevich, S. Klini, A. Tyuring, A.A. Markov, E. Mur, K. Shennon, U. Kvayn, Yu.I. Juravlyov, D. Kyonig, A. Keli, L.S. Pontryagin, U. Gamilton, L. Zoda, L.R. Ford, D.R. Falkerson va boshqa o‘nlab olimlar haqida qisqacha bibliografik ma’lumotlar keltirilgan.

“Matematik mantiq va diskret matematika” darsligi diskret matematikaning rivojlanish tarixi (kirish) va 10 bobdan iborat. Respublika oily uquv yurtlarida diskret matematika fani ikki semestrda o‘tilishini hisobga olib, darslik ikki jildga ajratilgan. Darslikning birinchi jildi to’rt bobdan iborat. **Birinchi bobda to‘plamlar nazariyasining** paydo bo‘lishi haqidagi ayrim tarixiy ma’lumotlar, to‘plamlarning aksiomatik nazariyasi haqida tushunchalar, to‘plamlarning birlashmasi, kesishmasi, ayirmasi, to‘ldiruvchi to‘plam, to‘plamlar algebrasining asosiy qonunlari, kortej haqida tushuncha, Dekart ko‘paytmasi va u bilan bog‘liq ba’zi tushunchalar bayon etiladi.

Ikkinchi bob kombinatorika predmetiga bag‘ishlangan bo‘lib, unda kombinatorika paydo bo‘lishining qisqacha tarixi, kombinatorikada ko‘p qo‘llaniladigan usul va qoidalar hamda betakror va takrorli o‘rin almashtirish, o‘rinlashtirish, gruppalashlar kabi kombinatsiyalarga oid ma’lumotlar keltiriladi. Paskal uchburchagi, Nyuton binomi, binomial koeffitsiyentlarning xossalari, ko‘phad formulasi, Fibonachchi sonlari va

---

[1] Bu ibora ingliz tilida “fuzzy sets”, ruscha “нечеткое множество” kabi yoziladi.

ularning sodda xossalari, bo'laklashlar va ularning ba'zi xususiyatlari, Ferrers diagrammasi, hosil qiluvchi funksiyalarning xossalari va ularning kombinatorikada qo'llanilishi ham shu bobda bayon qilinadi.

Uchinchi bob mulohazalar algebrasiga bag'ishlangan bo'lib, unda mulohazalar va ular ustida mantiqiy amallar, formulalar, teng kuchli, aynan chin, aynan yolg'on va bajariluvchi formulalar, teng kuchli formulalarga doir teoremalar, formulalarning normal shakllari, mukammal diz'yunktiv va kon'yunktiv normal shakllar, mulohazalar algebrasi funksiyalari, Bul algebrasi, mantiq algebrasidagi ikkitaraflama qonun va arifmetik amallar, Jegalkin ko'phadi, monoton funksiyalar, funksional yopiq sinflar va Post teoremasi kabi masalalar ko'rib chiqiladi.

Kitobning **to'rinchi bobi mulohazalar hisobiga** bag'ishlangan bo'lib, unda mulohazalar hisobi formulasi tushunchasi, isbotlanuvchi formula ta'rifi, mulohazalar hisobining aksiomalar sistemasi (tizimi), keltirib chiqarish qoidalari, keltirib chiqarish qoidasining hosilalari bo'lgan bir vaqtda o'rniga qo'yish, murakkab xulosa, sillogizm, kontrpozitsiya, ikki karra inkorni tushirish qoidalari, formulalar majmuasidan formulani keltirib chiqarish qoidasi, keltirib chiqarilgan formula (isbotlash) tushunchasi, deduksiya va umumlashgan deduksiya teoremalari, ayrim mantiq (asoslarni o'rin almashtirish, asoslarni qo'shish, asoslarni ajratish) qonunlarining isboti, mulohazalar algebrasi va mulohazalar hisobi o'rtasidagi munosabatlar, mulohazalar hisobida yechilish, zidsizlik, to'liqlilik va erkinlik muammolari kabi masalalar ko'rib chiqiladi.

Darslikni tayyorlashda amerikalik S.Klini va A.Chyorch, avstriyalik K.Gyodel, angliyalik A.Tyuring va E.Mendelson hamda rossiyalik A.A.Markov, A.I.Malsev, P.S.Novikov, S.V.Yablonskiy, O.B.Lupanov, V.B.Kudryavsev, V.A.Gorbatov, S.G.Gindikin, A.A.Zikov, L.Lixtarnikov va T.Sukachyova kabi matematiklar tomonidan yaratilgan monografiya, darslik, o'quv qo'llanma va ilmiy maqolalaridan foydalanildi.

Nazariy masalalarni bayon etishda misollardan keng foydalanilgan, deyarli har bir paragrafning oxirida mustaqil ishlash uchun mashqlar, savol va topshiriqlar berilgan. O'quvchilarga tavsiya etilayotgan ushbu darslik "Matematik mantiq va diskret matematika" hamda «Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi» fanlari bo'yicha Respublikamiz davlat ta'lim standartlarida ko'rsatilgan o'quv dasturlariga to'liq javob beradi.

Mualliflar

KIRISH

Mantiq – muhokama yuritishning qonun-qoidalari, usullari va formalari (shakllari) haqidagi fan bo'lib, uning asoschisi qadimgi yunon mutafakkiri **Aristotel** (miloddan avvalgi 384-322 y.) hisoblanadi. U birinchi bo'lib deduksiya nazariyasini, ya'ni mantiqiy xulosa chiqarish nazariyasini yaratib, mantiqiy xulosa chiqarishning formal xarakterga ega ekanligini ko'rsatdi. Aristotelning mantiqiy ta'limoti formal mantiqning (logikaning) asosini tashkil qiladi. Formal mantiq fikrlashning formalari va qonunlarini tekshiradi. Shunday qilib, Aristotel mantiqiy fikrlashning asosiy qonunlarini ochdi.

Aristotel asos solgan mantiq ko'p asrlar davomida turli mutafakkirlar, faylasuflar va butun falsafiy maktablar tomonidan to'ldirildi, o'zgartirildi va takomillashtirildi. Shu jumladan, **Abu Nasr Farobiy, Abu Ali Ibn Sino, Abu Rayxon Beruniy, Muhammad al-Xorazmiy, Umar Xayyom, Alisher Navoiy, Mirzo Bedil** kabi Sharqning buyuk mutafakkirlari ham o'zlarining katta hissalarini qo'shdilar.

Mantiqning yangilanishida fransuz olimi **R.Dekartning** (1596-1650) ishlari muhim rol o'ynadi. R.Dekart analitik usulda fikrlashning asosiy prinsiplarini yaratdi.

Olmon faylasufi va matematigi G.Leybnis (1646-1716) birinchi bo'lib mantiqiy fikrlashga hisob xarakterini berish zarur degan g'oya bilan chiqdi. Buning uchun, uning fikricha, hamma ilmiy tushunchalar va mulohazalarni asosiy mantiqiy elementlarga keltirib, ularni ma'lum simvollar bilan belgilash kerak.

G.Leybnis g'oyalari faqat XIX asrdagina o'z rivojini topdi. Ingliz olimlari J.Bul (1815-1864), Ch.Pirs (1839-1914), B.Rassel (1872-1970), A.Uaytxed (1861-1947), U.Jevons (1835-1882), olmon olimlari G.Fryoge (1848-1925), D.Gilbert (1862-1943), E.Shryoder (1841-1902), shotlandiyalik matematik O. de Morgan (1806-1871), rus olimlari P.S.Poreskiy (1846-1907), V.I.Glivenko (1897-1940), I.I.Jegalkin (1869-1947) va boshqalar mantiq sohasidagi ishlari bilan simvolik yoki matematik mantiqni (logikani) yaratdilar.

Matematik mantiq asoschilaridan biri bo'lgan J.Bul (J.Bul mashhur «So'na» romanining muallifi Lilian Voynichning otasidir) mustaqil ravishda grek, lotin, nemis, fransuz va italyan tillarini hamda matematikani o'rganadi. U 1847- yilda yozilgan «Mantiqning matematik tahlili», «Mantiqiy hisob» va 1854 yilda yozilgan «Fikrlash qonunlarini tadqiq etish» kitoblarida mantiqni algebraik shaklga keltirdi va matematik mantiqning aksiomalar sistemasini yaratdi. Bulning mantiqiy hisobi **bul algebrasi** deb yuritiladi.

J.Bul mantiq va matematika operatsiyalari o‘rtasidagi o‘xshashlikka asoslanib, mantiqiy xulosalarga algebraik simvolikani qo‘lladi. U mantiq operatsiyalarini formallashtirish (rasmiylashtirish) uchun quyidagi simvollarni (belgilarni) kiritdi:

– predmetlarni belgilash uchun (x, y, z, ...) lotin alifbosining (alfavitining) kichik harflarini;

– predmetlar sifatini belgilash uchun (X, Y, Z, ...) lotin alifbosining bosh harflarini;

– biror mulohazaga akslantirilgan hamma predmetlar sinfi 1 ni;

– ko‘rilishi lozim bo‘lgan predmetlar yo‘qligining belgisi 0 ni;

– mulohazalarni mantiqiy qo‘shishning “+” belgisini;

– mulohazalarni mantiqiy ayirishning “–” belgisini;

– mulohazalar tengligining “=” belgisini.

Simvolik bul algebrasida mantiqiy ko‘paytirish amali, xuddi algebraik qiymatlarni ko‘paytirishdagidek kommutativlik

$$xy = yx$$

va assotsiativlik

$$x(yz) = (xy)z$$

xossalariga ega. Mantiqiy qo‘shish amali ham kommutativlik va assotsiativlik xossalariga ega:

$$x + y = y + x,\ (x + y) + z = x + (y + z).$$

Bul algebrasida yig‘indi ko‘paytmaga nisbatan distributivlik qonuniga bo‘ysunadi:

$$x(y + z) = xy + xz.$$

J.Bul algebraik simvolikalar yordami bilan hamma mantiqiy operatsiyalarni ikki qiymatli (1 va 0) algebra qonunlariga bo‘ysunadigan formal (rasmiy) operatsiyalarga keltirishni o‘yladi. Bul funksiyalari va uning argumentlari faqat ikki qiymat – «chin» va «yolg‘on» qiymatlar qabul qiladi.

Mantiq algebrasi qoidalari orqali oddiy mulohazalardan murakkab mulohazalarni hosil qilish mumkin. Masalan:

xy – bir vaqtda x va y xossalarga ega bo‘lgan predmetlar sinfi;

$x(1–y)$– 1xossaga ega va y xossaga ega bo‘lmagan predmetlar sinfi;

$(1 - x)y$ – y xossaga ega va x xossaga ega bo‘lmagan predmetlar sinfi;

$(1-x)(1-y)$ – x va y xossalarga ega bo'lmagan predmetlar sinfi;

Hozirgi matematik mantiq fanini yaratishda fundamental rol o'ynagan Bul simvolik logikasi mukammallashtirishga muhtoj edi. Masalan, Jevons fikricha mantiqiy ayirish operatsiyasi ayrim noqulaylikka olib keladi.

O. de Morgan Bul g'oyalarini rivojlantirib, mantiq hisobini ehtimollar nazariyasi teoremalarini asoslashga tatbiq etdi va simvolik hisobni yaratish ustida ishladi.

Ch.Pirs matematikani tahlil qilishda mantiqiy munosabatlarni qurol sifatida ishlatishni asoslab berdi, u G.Fryoge ishlaridan xabarsiz holda, mantiqqa kvantor tushunchasini kiritdi.

G.Fryoge matematika prinsiplarini mantiq prinsiplaridan keltirib chiqarish ustida ishlab, mantiq hisobini yaratdi.

Bul va O. de Morgan asarlarida matematik mantiq o'ziga xos algebra – mantiq algebrasi ko'rinishida shakllandi.

Keyinchalik Bul usullari U.Jevons, E.Shryoder (1853-1901) va P.S.Poretskiy (1846-1907) asarlarida o'z rivojini topdi.

Bul algebrasini U.Jevons va E.Shryoder mukammallashtirishdi. U.Jevons «Sof mantiq» (1864), «O'xshashlarni almashtirish» (1869) va «Fan asosi» (1874) nomli kitoblarida mantiq sohasida almashtirish prinsipiga asoslangan o'zining nazariyasini tavsiya etdi. 1877- yili E.Shryoder «Der operationskreis des Logikkalkuls» kitobida algebraik mantiq asoslarini yoritdi.

Matematik mantiq fanining rivojlanishiga rus olimi P.S.Poretskiyning ham katta xizmati bor. Bul, Jevons va Shryoderlar yutuqlarini umumlashtirib, «Mantiqiy tenglamalarni yechish usullari va matematik mantiqning teskari usuli haqida» (1884) nomli kitobida mantiq algebrasi apparati rivojini ancha ilgari surdi. Amerikalik olim A.Bleyk P.S.Poreskiy metodini E.Shryoder metodidan ustun qo'ygan.

P.S.Poreskiy sistemasida quyidagi belgilar qabul qilingan:

1) bir-biriga bog'liq bo'lmagan va bir-biri bilan hech qanday munosabatda bo'lmagan predmetlar sinfini lotin alifbosining kichik harlflari *a, b, c*, ... bilan belgilash;

2) sinflarni inkor etish uchun lotin alifbosining kichik harlflaridan keyin «emas» so'zini qo'shish, ya'ni *a* emas, *b* emas va hokazo kabi belgilash;

3) a, b, c, ... predmetlar sinfi xususiyatiga ega bo'lmagan predmetlar sinfini a_1, b_1, c_1, ... bilan belgilash;

4) ikki yoki ko‘proq sinflar birgalikda bir nechta bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan xossalarga ega bo‘lishini ab, bc, ... ko‘paytmalar bilan belgilash; Bu operatsiya kommutativlik va assotsiativlik xossalariga ega:

$$ab = ba,\ (ab)c = a(bc);$$

5) mantiqiy qo‘shish amalini «+» belgi bilan belgilash, bu operatsiya ham kommutativlik va assotsiativlik xossalariga ega:

$$x + y = y + x,\ (x + y) + z = x + (y + z);$$

6) hech qanday mazmunga ega bo‘lmagan sifat shaklini 0 (mantiqiy 0) bilan belgilash;

7) mumkin bo‘lgan sinflarni o‘z ichiga olgan sifat shaklini 1 (mantiqiy 1) bilan belgilash; 0 va 1 ushbu xossalarga ega:

$$a + 0 = a,\ a \cdot 1 = a;$$

8) a sinfning inkorini a_1 sinf bilan belgilash;

9) qo‘shish, ko‘paytirish va inkor amallaridan tashqari ekvivalentlik amali kiritilgan va uni «=» simvol bilan belgilangan. Bu amal uchta qoidaga bo‘ysunadi: a) agar $a = b$ tenglikning chap va o‘ng tomonlariga bir xil sinflarni qo‘shsak, u holda tenglik o‘rinli, ya’ni $a + c = b + c$ bo‘ladi; b) agar, $a = b$ bo‘lsa, u holda $ad = bd$ bo‘ladi; d) agar, $a = b$ bo‘lsa, u holda $a_1 = b_1$ bo‘ladi, bu yerda $a_1 = a$ emas, $b_1 = b$ emas.

XIX asrning oxirida matematik nazariyalar shunday rivojlandiki, endi mantiq masalalari matematikaning o‘zida ham muhim ahamiyatga ega bo‘lib, mavjud mantiqiy qurollar matematika talablariga javob bera olmay qoldi. Ayrim matematik muammolarni yechishdagi qiyinchiliklar ularning mantiqiy tabiatiga bog‘liqligi aniqlandi. Shuning uchun ham matematik mantiq tor algebraik doiradan chiqib, jadal rivojlana boshladi. Bu yo‘nalishda birinchi bo‘lib G.Fryoge va italyan matematigi J.Peano (1858-1932) tadqiqotlar olib borishdi, ular matematik mantiqni arifmetika va to‘plamlar nazariyasini asoslash uchun qo‘lladilar.

Matematik mantiqning keyingi taraqqiyoti uchun B.Rassel va A.Uaytxedning uch tomlik «Matematika prinsiplari» (1910-1913- y.), D.Gilbertning ishlari, hamda K.Gyodelning tadqiqotlari juda muhim ahamiyatga ega bo‘ldi. Matematik mantiqning rivojlanishida Rossiya matematiklari I.I.Jegalkin, V.I.Glivenko, A.N.Kolmogorov, P.S.Novikov, A.A.Markov va boshqalar o‘zlarining ulkan hissalarini qo‘shdilar.

1903- yili B.Rasselning Londonda nashr etilgan «Matematika prinsiplari» kitobida mulohazalar va sinflar hisob nazariyasi ishlab chiqildi. B.Rasselning A.Uaytxed bilan hamkorlikda yozilgan 3 tomlik «Matematika prinsiplari» kitoblari matematik mantiq fanining rivojlanishida katta rol o‘ynadi. Bu kitoblarda mulohaza, sinf va predikatlar hisobi deyarli to‘liq aksiomalashtirilgandi va formallashtirildi. Ular hozirgi vaqtda o‘rganilayotgan matematik mantiq ko‘rinishini yaratdilar.

D.Gilbert va nemis olimi V.Akkerman 1928- yilda chop etilgan «Nazariy mantiqning asosiy xususiyatlari» kitoblari matematik mantiqning yanada rivojlanishida muhim ahamiyat kasb etdi. Bu kitobning mualliflari mantiqiy amallarda formallashtirish metodini tatbiq etib katta yutuqqa erishdilar.

Bul, Shryoder va Poreskiyning mantiq algebrasiga tayanib, I.I.Jegalkin logik qo‘shish va logik ko‘paytirish amallarini quyidagicha aniqladi:

1) $0+0=0$, $0+1=1$, $1+0=1$, $1+1=0$;

2) $0\cdot 0=0$, $0\cdot 1=0$, $1\cdot 0=0$, $1\cdot 1=1$.

Logik (mantiqiy) qo‘shish va ko‘paytirish amalidan $a+a=0$ va $a\cdot a=a$ kelib chiqadi.

Mantiqiy operatsiyalarning simvolik ko‘rinishlari Jegalkin sistemasida quyidagicha bo‘ladi:

$$\overline{p}=p+1;\ p=\overline{\overline{p}};\ p\vee q=p+q+pq;$$

$$p\to q=1+p+pq;\ p\equiv q=1+p+q.$$

Jegalkin simvolik mantiqqa umumiylik va mavjudlik kvantori degan tushunchalarni ham kiritdi va predikatlar algebrasini yaratdi.

XX asrning 50- yillarida ko‘p qiymatli mantiq sohasida ilmiy izlanishlar olib borildi. Ko‘p qiymatli mantiqda mulohazalar chekli (3 va undan ko‘p) va cheksiz chinlik qiymatlari oladi. Matematik mantiqning bu bo‘limining asoschilaridan biri polyak olimi Ya.Lukasevich (1878-1954) hisoblanadi. U dastlab (1920) uch qiymatli, 1954 yilda to‘rt qiymatli va nihoyat cheksiz qiymatli mantiqni yaratdi.

Ko‘p qiymatli mantiq muammolari bilan **E.Post, S.Yaskovskiy, D.Vebb, A.Geyting, A.N.Kolmogorov, D.A.Bochvar, V.I.Shestakov, G.Reyxenbax, S.K.Klini, P.Detush-Fevriye** va boshqa olimlar shug‘ullanganlar.

Konstruktiv matematikaning rivojlanishi konstruktiv mantiq masalalarini yechish usullarini ishlab chiqish vazifasini qo‘ydi. Bu sohada **A.A.Markov, N.A.Shanin** hamda shogirdlarining xizmatlari kattadir.

Diskret matematikaning katta bo'limlaridan biri algoritmlar nazariyasi hisoblanadi. Algoritm so'zi IX asrda yashagan o'z zamonasining buyuk matematigi vatandoshimiz **Muhammad al-Xorazmiy** ismining lotincha Algorithmi formasidan kelib chiqqan.

Algoritmlar nazariyasi algoritmlarning umumiy xususiyatlarini o'rgatuvchi diskret matematikaning bir bo'limidir.

XX asrning 20- yillarida birinchi bo'lib intuitsionistlar vakillari L.Brauer va olmon olimi G.Veyler (1934) algoritm tushunchasini o'rganishga kirishganlar. Algoritmlar nazariyasining asoschilaridan biri bo'lgan A.Chyorch 1936- yilda hisoblanuvchi funksiya tushunchasiga dastlabki aniqlikni kiritdi va quyidagi tezisni ilgari surdi: **natural argumentlarning barcha qiymatlarida hamma joyda aniqlangan hisoblanuvchi funksiyalar bilan umumiy rekursiv funksiyalar ekvivalentdir (bir xildir).** U hisoblanuvchi funksiya bo'lmagan funksiyani ko'rsatdi.

Algoritmlar nazariyasining keyingi rivojlanishiga amerikalik olimlar **K.Gyodel**, **S.K.Klini** (1957), **E.L.Post** (1943-1947), **X.Rodjers** (1972), ingliz olimi **A.Tyuring** (1936-1937), rus olimlari **A.A.Markov** (1947-1954, 1958, 1967), **A.N.Kolmogorov** (1953, 1958, 1965), **Yu.L.Yershov** (1969-1973), **A.I.Malsev** (1965), **D.A.Traxtenbrot** (1967, 1970-1974), **P.S.Novikov** (1952), **Yu.V.Matiyasevich** (1970-1972) kabi olimlarning xizmatlari benihoyat kattadir.

Masalan, S.Klini **algoritm yordamida hisoblanuvchi qismiy funksiyalar qismiy rekursiv funksiyalardir** degan g'oyani ilgari surdi.

A.Tyuring va E.Post (1936) ideallashtirilgan hisoblash mashinalari atamasida birinchi bo'lib, bir-biridan bexabar holda, algoritm tushunchasiga aniqlik kiritishdi. Post va Tyuring algoritmik jarayonlar ma'lum bir tuzilishga ega bo'lgan "mashina" bajaradigan jarayonlar ekanligini ko'rsatdilar. Ular o'sha paytdagi matematikada ma'lum bo'lgan barcha algoritmik jarayonlarni bajara oladigan "mashinalar" sinfini hosil qilib, ularga aniq matematik atamalar yordamida ta'rif berdilar. Post va Tyuring ushbu mashinalar yordamida hisoblanuvchi barcha funksiyalar sinfi barcha qismiy rekursiv funksiyalar sinfi bilan bir xil ekanligini ko'rsatdilar. Natijada, Chyorch tezisining yana bitta fundamental tasdig'i hosil bo'ldi.

S.Klini va E.Post birgalikda rekursivlik nazariyasini yaratdilar va rekursiv funksiyalar nazariyasini taraqqiy ettirdilar. Ular qisman rekursiv funksiyalar tushunchasini kiritishdi.

Dastlab faqat matematik mantiq, algebra, matematik analiz, matematika asoslari, ehtimollar nazariyasi, geometriya, topologiya, sonlar nazariyasi, modellar nazariyasi kabi matematika fanlarida tatbiq etib kelingan algoritmlar nazariyasi XX asrning 40-yillaridan boshlab hisoblash matematikasi, kibernetika, axborot nazariyasi, iqtisodiyot, psixologiya, matematik lingvistika, tibbiyot fanlari va diskret texnikada keng qo'llanilmoqda.

So'nggi davrlarda matematik mantiqni texnikaga juda samarali tatbiq etish imkoniyatlari borligi ma'lum bo'ldi.

Matematik mantiqning diskret texnikaga tatbiqi natijasida uning texnik mantiq bo'limi vujudga keldi. Bu sohada **E.Post, V.I.Shestakov, K.Shennon** (1916 y.t.), **A.Nakashima, M.Xanzava, S.Klini, O.B.Lupanov** (1932 y.t.), **S.V.Yablonskiy** (1924 y.t.), **V.B.Kudryavsev, Yu.I.Juravlyov, V.I.Levenshteyn, V.V.Glagolev, F.Ya.Vetuxnovskiy, Yu.L.Vasilyev** va boshqa olimlar o'z ilmiy izlanishlari bilan uning taraqqiy etishiga ulkan hissa qo'shganlar.

Matematik mantiqni texnikaga qo'llashni birinchi bo'lib rus fizigi **P.Erenfest** (1910) va gidrotexnika qurilishlari bo'yicha yetuk mutaxassis **N.M.Gersevanovlar** amalga oshirganlar.

K.Shennon hisoblash mashinalarini yaratishning asosiy metodi sifatida mantiq algebrasini bilgan, u axborot va uni uzatishning matematik nazariyalarni yaratdi, elektron tarmoqlardagi "1" va "0" binar munosabatlar bilan matematik mantiqdagi ikkilik (1 va 0) qiymatlarining mos kelishini va qanday qilib "mantiq mashinasini" yaratishni ko'rsatdi va hokazo.

Kontakli va rele-kontakli sxemalarga mantiq algebrasini tatbiq etishning isbotini birinchi bo'lib V.I.Shestakov va K.Shennon berdi. A.Nakashima va M.Xanzava matematik mantiqni diskret texnika masalalarini yechishda qo'llash metodlarini yaratdilar. S.Klini diskret qurilma modelini (chekli avtomat modeli) yaratgani tufayli, matematik mantiqni xotirali diskret qurilmalarni loyihalashda ishlatish imkoni yuzaga keldi.

Moskva davlat universiteti diskret matematika maktabining asoschilaridan biri O.B.Lupanovning asosiy ishlari matematik kibernetika va matematik mantiqqa bag'ishlangan. U murakkab boshqaruvchi sistemalarning asimptotik qonuniyatlarini, kontakt sxemalar va funksional elementlardan yasalgan sxemalarni (umuman asosiy boshqaruvchi sistemalarni), eng yaxshi asimptotik sintez metodlarini va lokal kodlash prinsipini ishlab chiqdi.

Kombinatorika muammolari bilan XI-XV asrlarda Sharq olimlari, jumladan, Bxaskara Acharya, Nosir ad-Din-Muhammad at-Tusiy, Ali Qushchi, Umar Hayyom shug'ullanib, olamshumul ahamiyatga ega bo'lgan ilmiy natijalar olishgan.

Ilmiy adabiyotda **Paskal uchburchagi** deb ataluvchi sonlar jadvali Paskal nomi bilan atalishiga qaramasdan, bunday sonlar jadvali juda qadimdan dunyoning turli mintaqalarida, jumladan, Sharq mamlakatlarida ham ma'lum bo'lgan: Erondagi Tus shahrida (hozirgi Mashhadda) yashab ijod qilgan Nosir at-Tusiy XIII asrda bu jadvaldan foydalanib, ikkita son yig'indisining natural darajasini hisoblash usulini o'zining ilmiy ishlarida keltirgan bo'lsa, g'arbda Al-Kashi nomi bilan mashhur Samarqandlik olim Ali Qushchi butun sonning istalgan natural ko'rsatkichli arifmetik ildizi qiymatini taqribiy hisoblashda bu jadvaldan foydalana bilgan. XVI asrga kelib G'arbiy Yevropada bu sonlar uchburchagi haqida M. Shtifel arifmetika bo'yicha qo'llanmalarida yozgan va u ham butun sondan istalgan natural ko'rsatkichli arifmetik ildizning taqribiy qiymatini hisoblashda bu uchburchakdan foydalana bilgan. 1556 yilda bu sonlar jadvali bilan N. Tartalya, 1631 yilda U. Otred ham shug'ullanishgan. Faqatgina 1654 yilga kelib B. Paskal bu sonlar jadvali haqidagi ma'lumotlarni o'zining "Arifmetik uchburchak haqidagi traktat" nomli asarida e'lon qildi.

Ixtiyoriy a va b haqiqiy sonlar hamda n natural son uchun $(a+b)^n$ ifodaning ko'phad shaklidagi yoyilmasi XVII-XVIII asrlarda yashagan Nyuton nomi bilan **Nyuton binomi** deb yuritiladi. Vaholanki, qadimgi greklar $(a+b)^n$ ifodaning qatorga yoyilmasini n ning faqat $n=2$ bo'lgan holida bilishgan bo'lsa, Umar Hayyom (1048-1122) va Ali Qushchi (1436- yilda vafot etgan) bu ifodani $n>2$ bo'lgan natural sonlar uchun ham qatorga yoya bilganlar. Nyuton esa 1767 yilda yoyilma formulasini isbotsiz manfiy va kasr n sonlar uchun ham qo'llagan.

Kombinatorik tahlil diskret matematikaning nazariy asoslaridan biridir. Bu tahlilni amalga oshirishda tanlashlar sonini bevosita aniqlash usuli, hosil qiluvchi funksiyalar usuli, mantiqiy, ekstremal, geometrik, jadval-sxema va boshqa usullardan foydalaniladi.

1736-yilda L. Eyler tomonidan o'sha davrda qiziqarli amaliy masalalardan biri hisoblangan Kyonigsberg[1] ko'priklari haqidagi masalaning

[1] Kyonigsberg (Königsberg) – bu shahar 1255-yilda asoslangan bo'lib, Sharqiy Prussiyadagi Pregel daryosi qirg'oqlarida joylashgan. 1946- yildan boshlab Kaliningrad, hozir Rossiya Federatsiyasi tarkibida.

qo'yilishi va yechilishi **graflar nazariyasining** paydo bo'lishiga asos bo'ldi.

XIX asrning o'rtalarida graflar nazariyasi bilan bog'liq tadqiqotlar G. Kirxgof[1] va A. Keli[2] ishlarida paydo bo'ldi.

"Graf" iborasi D. Kyonig[3] tomonidan 1936- yilda graflar nazariyasiga bag'ishlangan dastlabki darslikda[4] uchraydi.

XIX-XX asrlarda graflar nazariyasining rivojlanashiga daniya matematigi J. Petersen (1839-1910), polyak matematigi K. Kuratovskiy (1896-1980), rus matematigi L. Pontryagin (1908-1988), norvegiya matematigi O. Ore (1899-1968), irlandiya matematigi V.R. Gamilton (1805-1865), daniya matematigi G.A. Dirak (1925-1984), golland matematigi E.V. Deykstra (1930-2002), AQSH matematiklari L.R. Ford (1927) va D.R. Falkerson (1924-1976) kabi olimlarning benihoyat hizmatlari katta.

Graflar nazariyasi bo'yicha tadqiqotlar natijalari inson faoliyatining turli sohalarida qo'llaniladi. Ulardan ba'zilari quyidagilardir: boshqotirmalarni hal qilish; qiziqarli o'yinlar; yo'llar, elektr zanjirlari, integral sxemalari va boshqarish sistemalarini loyihalashtirish; avtomatlar, blok-sxemalar va komputer uchun dasturlarni tadqiq qilish va hokazo.

Demak, matematik mantiq, bir tomondan, formal mantiq muammolariga matematik metodlarni qo'llash natijasida rivojlangan bo'lsa, ikkinchi tomondan, matematikani asoslashga xizmat qiluvchi fan sifatida rivojlandi. Hozirgi zamon matematik mantiqi avtomatika, mashina matematikasi, bir tildan ikkinchi tilga avtomatik tarzda tarjima qilish, matematik lingvistika, axborot nazariyasi va umuman kibernetika bilan bog'liqdir.

Shunday qilib, matematik mantiq va diskret matematika fani matematika asoslari, algebra, geometriya, matematik analiz, funksional analiz, topologiya, ehtimollar nazariyasi kabi fanlarda tatbiq etilishidan tashqari kibernetika, iqtisodiyot, matematik lingvistika, psixologiya singari fanlarda ham keng qo'llaniladi.

---

[1] Kirxgof (Kirchhoff Gustav Robert, 1824-1887) – olmon faylasufi, fizigi.
[2] Keli yoki Keyli (Cayley Artur, 1821-1895) – ingliz matematigi.
[3] Kyonig (Dénes König, 1884-1944) – venger matematigi.
[4] Bu darslik olmon tilida yozilgan.

I BOB
UMUMIY TUSHUNCHALAR

Ushbu bobda to'plamlar nazariyasining paydo bo'lishi haqidagi ayrim tarixiy ma'lumotlar, to'plamlarning aksiomatik nazariyasi haqida tushunchalar, to'plamlar ustidagi amallar, to'plamlar algebrasining asosiy qonunlari, kortej va fazzy to'plam haqida tushunchalar, Dekart ko'paytmasi va u bilan bog'liq ba'zi amallar, munosabatlar va funksiyalar superpozitsiyasi haqida tushunchalar bayon etiladi.

1.1. To'plamlar nazariyasining asosiy tushunchalari

To'plam. Element. Qism to'plam. Xos qism to'plam. Chekli va cheksiz to'plamlar. To'plamlarning tengligi. Refleksivlik. Bo'sh to'plam. To'plamning quvvati. Paradoks. Aksioma. Aksiomatik nazariya. Tanlash, hajmiylik, bo'sh to'plam va juftlik aksiomalari. Sermelo-Frenkel aksiomalari tizimi. Tartiblanmagan juftlik. Tranzitivlik. O'zaro ekvivalent tasdiqlar.

Georg Kantor

1.1.1. To'plamlar nazariyasining paydo bo'lishi. Matematikada, shu jumladan, diskret matematika, kombinatorika va graflar nazariyasida ham, turli **to'plamlar** bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi. Masalan, kutubxonadagi barcha kitoblar to'plami, to'g'ri burchakli uchburchaklar to'plami, suvda hayot kechiruvchi tirik organizmlar to'plami, natural sonlar to'plami, koinotdagi yulduzlar to'plami, to'g'ri chiziqda yotuvchi nuqtalar to'plami va hokazo.

To'plamlar nazariyasiga fan sifatida XIX asrning oxirida matematikani standartlashtirish bo'yicha o'z dasturini taklif etgan Kantor[1] tomonidan asos solingan deb hisoblansada, to'plamlar bilan Kantordan oldinroq Bolsano[2] shug'ullangan.

Kantor fikricha, istalgan matematik obyekt (shu jumladan, to'plamning o'zi ham) qandaydir to'plamga tegishli bo'lishi shart. Berilgan xossaga ega bo'lgan barcha obyektlar majmuasi uchun umumiy nomni Kantor to'plam

[1] Kantor (Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, 1845 (Sankt Peterburg) - 1918) – olmon matematigi.

[2] Bolsano (Bernard Bolzano, 1781-1848) – chex matematigi va faylasufi.

deb tushungan edi. Umuman olganda, to'plam tushunchasiga qat'iy ta'rif berilmaydi, chunki uni boshqa soddaroq tushuncha orqali ifodalab bo'lmaydi. Masalan, to'plamni matematik ibora sifatida tushuntirishda Kantor ham to'plam so'ziga sinonim bo'lgan "majmua" so'zidan foydalangan. Umuman olganda, to'plam so'zining lug'aviy ma'nosiga ko'ra, uni tashkil etuvchilarni bir joyga to'plash (yig'ish, jamlash) tushunilsada, matematikada to'plam deganda bunday yig'ish talab etilmaydi, balki bu tashkil etuvchilarni birgalikda to'plam sifatida qarash uchun ularning barchasiga tegishli qandaydir umumiy xossaning (belgining) mavjudligi yetarlidir.

1- ta'rif. *To'plamni tashkil etuvchilar shu to'plamning* ***elementlari*** *deb ataladi.*

To'plamlar nazariyasida to'plamning elementlari bir-biridan farqli deb hisoblanadi, ya'ni muayyan bir **to'plamning elementlari takrorlanmaydi**.

To'plamni tashkil etuvchi elementlar soni chekli yoki cheksiz bo'lishi mumkin. Birinchi holda **chekli to'plamga**, ikkinchi holda esa, **cheksiz to'plamga** ega bo'lamiz.

To'plamlarni belgilashda, odatda, lotin yoki grek alifbosining bosh harflari, uning elementlari uchun esa alifboning kichik harflari qo'llaniladi. To'plamni tashkil etuvchi elementlar figurali qavslar orasiga olinib ifodalanishi mumkin. Masalan, A to'plamning $a,b,c,d,...,z$ elementlardan tuzilganligini $A=\{a,b,c,d,...,z\}$ ko'rinishda yozish mumkin. Ko'pincha (masalan, cheksiz to'plam yoki to'plamning elementlari juda ko'p bo'lgan holda) to'plamni belgilashda figurali qavslar orasida, avvalo, to'plamni tashkil etuvchi elementning umumiy belgisi yozilib, undan so'ng "|" yoki ":" (ba'zan "/") belgisi qo'yiladi, keyin esa, ifodalanayotgan to'plamning barcha elementlariga xos shartlar yoziladi. Bunda, yozuvni murakkablashtirmaslik maqsadida, ba'zi qisqartirishlarga yoki tushuntiruvchi so'zlarning qavslardan tashqarida yozilishiga yo'l qo'yiladi.

Masalan, toq natural sonlar to'plamini B deb belgilasak, uni $B=\{m\,|\,m=2n-1\}$, bunda n – natural son, yoki $B=\{m\,|\,m=2n-1,$ $n\in\mathbf{N}\}$ ko'rinishda[1] yozish mumkin.

1.1.2. To'plamlarning aksiomatik nazariyasi haqida tushunchalar. XX asrning boshiga kelib, Kantorning matematikani standartlashtirish bo'yicha dasturining asosi bo'lgan va "to'plamlarning sodda nazariyasi"

---

[1] N – natural sonlar to'plami (Kitobdagi asosiy belgilashlarga qarang).

deb ham ataluvchi to'plamlar nazariyasi mukammal emasligi ma'lum bo'ldi. To'plamlarning sodda nazariyasini o'rganish jarayonida Rassel[1] **paradoksga**[2] kelib qoldi. Kantorning to'plamlar nazariyasi ichki ziddiyatga ega ekanligi **Rassel paradoksi** sifatida ifodalangan.

Rassel paradoksi. Faraz qilaylik, K – o'zini element sifatida o'zida saqlamagan barcha to'plamlar to'plami bo'lsin. U holda, K – o'zini element sifatida saqlaydimi? Agar bu savolga "ha" deb javob berilsa, K to'plamning aniqlanishiga ko'ra, u Kning elementi bo'lmasligi kerak – ziddiyat. Agar "yo'q" deb javob berilsa, yana K to'plamning aniqlanishiga ko'ra, u to'plam sifatida Kning elementi bo'lishi kerak – yana ziddiyat.

Hozirgi zamon to'plamlar nazariyasi **aksiomalar**[3] tizimiga asoslangandir. Qandaydir aksiomalarga asoslangan nazariya **aksiomatik nazariya** deb yuritiladi[4]. To'plamlarning aksiomatik nazariyasida bunday aksiomalar tizimi sifatida standart tizim hisoblangan Sermelo[5]-Frenkel[6] aksiomalari tizimini keltirish mumkin. To'plamlar nazariyasida, ko'pincha, bu tizimga **tanlash aksiomasi** deb ataluvchi aksiomani ham qo'shib olib, **tanlash aksiomasi qatnashgan Sermelo-Frenkel aksiomalari tizimi** bilan ish ko'riladi. Bu aksiomalar tizimidan tashqari boshqa aksiomalar tizimlaridan ham foydalaniladi. Masalan, fon Neyman[7]-Berneys[8]-Gyodel[9] tizimi.

Quyida tanlash aksiomasi qatnashgan Sermelo-Frenkel aksiomalari tizimiga kiruvchi ba'zi aksiomalarni keltiramiz.

Hajmiylik aksiomasi. Ikkita A va B to'plamlar faqat va faqat aynan bir xil elementlardan iborat bo'lsagina **tengdir**.

---

[1] Rassel (Bertrand Arthur William Russell, 1872-1970) – mashhur ingliz faylasufu, 1950-yilda adabiyot sohasida Nobel mukofotiga sazovar bo'lgan.

[2] Paradoks (grekcha παράδοξος so'zi kutilmagan, tushunarsiz, g'ayrioddiy, taajjubli ma'nolarini beradi) – mantiqiy nuqtai nazardan formal ravishda to'g'ri fikrlab bir-biriga zid bo'lgan natijalarni hosil qilish.

[3] Aksioma – isbotsiz qabul qilinadigan tasdiq.

[4] IV bobga qarang.

[5] Sermelo (Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo, 1871-1953) – olmon matematigi.

[6] Frenkel (Adolf Abraham Halevi Fraenkel, אברהם הלוי (אדולף) פרנקל, 1891-1965) – olmon va isroil matematigi.

[7] Fon Neyman (John von Neymann, 1903 (Budapesht) – 1957) – AQSh matematigi, iqtisodchisi.

[8] Berneys (Paul Isaak Bernays, 1888 (London) – 1977) – Shveytsariya matematigi.

[9] Gyodel (Kurt Gödel, 1906 (Brno) – 1978) – AQSh matematigi.

Bo‘sh to‘plam aksiomasi. Birorta ham elementga ega bo‘lmagan to‘plam, ya’ni **bo‘sh to‘plam** mavjud. Bo‘sh to‘plam uchun $\varnothing$ belgisi qo‘llaniladi.

Juftlik aksiomasi. Ixtiyoriy A va B to‘plamlar uchun shunday C to‘plam mavjudki, bu to‘plam elementlari faqat A va B to‘plamlardan iboratdir (ya’ni, A va B to‘plamlar Cning yagona elementlaridir). C to‘plam $\{A,B\}$ ko‘rinishda belgilanadi. Ushbu $\{A,B\}$ ifoda A va Bning **tartiblanmagan juftligi** deb yuritiladi. Agar A va B to‘plamlar teng bo‘lsa, u holda C bitta elementdan iboratdir.

Tanlash aksiomasi. Bo‘sh bo‘lmagan va o‘zaro kesishmaydigan to‘plamlar majmuasidagi har bir to‘plamdan bittadan “vakil”-element tanlab, shu elementlar to‘plami Cni tuzish mumkin. X to‘plam shu majmuaning qanday elementi bo‘lishidan qat’i nazar X va C to‘plamlar faqatgina bitta umumiy elementga ega bo‘ladi.

Albatta, bu aksiomalar (shu jumladan, tanlash aksiomasi qatnashgan Sermelo-Frenkel aksiomalari tizimining boshqa aksiomalari ham) bizga o‘z-o‘zidan oydin bo‘lgan tasdiqlarga o‘xshab tuyuladi, chunki bizning tafakkurimiz to‘plamlar majmuasini chekli deb tassavvur qilishga o‘rgan-gan. To‘plamlar majmuasi chekli bo‘lgan holda, masalan, tanlash aksio-masini tushunish qiyin emas. Tanlash aksiomasi cheksiz to‘plamlar uchun qo‘llansa, ba’zan, tortishuvlarga sabab bo‘luvchi juda qiziq tasdiqlar vujudga keladi. Bu fikrni tasdiqlash maqsadida Banax[1]-Tarskiy[2] paradoksi (sharning ikkilanishi) va Xausdorf[3] paradoksi mavjudligini ta’kidlaymiz.

Yuqorida keltirilgan aksiomalardan, jumladan, hajmiylik aksioma-sidan, to‘plamlar bo‘yicha ko‘plab tasdiqlarni isbotlashda foydalanamiz. Hajmiylik aksiomasini boshqacha ifodalash ham mumkin. A to‘plamning har bir elementi B to‘plamda ham mavjud va, aksincha, B to‘plamning har bir elementi A to‘plamda ham mavjud bo‘lsa, u holda A va B to‘plamlar tengdir. A va B **to‘plamlarning tengligini** $A=B$ yoki $B=A$ ko‘rinishda ifodalaymiz. Aslida, $A=B$ bo‘lsa, u holda A va B to‘plamlar aynan bitta to‘plamning har xil belgilanishidir. Masalan, o‘nlik sanoq tizimidagi yozuvning oxirgi raqami 1, 3, 5, 7 yoki 9 raqamlaridan biri bo‘lgan natural sonlar to‘plamini A bilan, birni qo‘shganda ikkiga

---

[1] Banax (Banach Stefan, Банах Стефан, 1892-1945) – Polsha va Ukraina matematigi.
[2] Tarskiy (Tarski Alfred, 1902-1983) – Polsha va AQSh mantiqchisi va matematigi.
[3] Xausdorf (Felix Hausdorff, 1868-1942) –olmon matematigi.

qoldiqsiz bo‘linadigan natural sonlar to‘plamini esa B bilan belgilasak, u holda $A = B$ bo‘ladi. $A = B$ yozuv to‘plamlardagi elementlarning qaysi tartibda joylashishiga bog‘liq emas. Albatta, to‘plamdagi elementlarni qaysi tartibda qo‘yish masalasi ham dolzarbdir.

A va B to‘plamlar teng bo‘lmasa, u holda bu holat $A \neq B$ yoki $B \neq A$ ko‘rinishda ifodalanadi.

To‘plamlar nazariyasida quvvat eng muhim tushunchalardan biri bo‘lib, u to‘plamlarni taqqoslashda katta ahamiyatga egadir. To‘plamning quvvati tushunchasi, uning chekli yoki cheksiz bo‘lishiga qarab ta’riflanadi. Quvvat tushunchasi to‘g‘risida batafsil ma’lumotni to‘plamlar nazariyasiga bag‘ishlangan manbalardan topish mumkin. Diskret matematikada, asosan, chekli to‘plamlar bilan ish ko‘riladi. Shu sababli, to‘plamning quvvati tushunchasini faqat chekli to‘plamlar uchun keltirish bilan chegaralanamiz.

2- ta’rif. *Chekli to‘plamning elementlari soni shu to‘plamning **quvvati** deb ataladi.*

Berilgan A to‘plamning quvvati $|A|$ ko‘rinishda belgilanadi.

1-misol. Ushbu to‘plamlar berilgan bo‘lsin: $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{a, b, c, d, e\}$, $D = \{1, 2, 3, ..., n\}$, $E = \{m \mid m = 2z\}$, $F = \{2, 3, 5, 7, ..., p, ...\}$, bu yerda n – natural son, z – butun son, p – tub son. Berilgan oltita to‘plamdan to‘rttasi – A, B, C va D to‘plamlar chekli, E va F to‘plamlar esa cheksiz to‘plamlardir. Bundan tashqari, $|A| = 1$, $|B| = 2$, $|C| = 5$ va $|D| = n$. ■

Berilgan A to‘plamga a element tegishliligi $a \in A$ yoki $A \ni a$ ko‘rinishda belgilanadi va “a tegishli A” deb o‘qiladi. “Tegishli” iborasining o‘rniga, ba’zan, “qarashli” yoki “taalluqli” iborasi ham qo‘llaniladi. Qandaydir b ning A to‘plamga tegishli emasligi, ya’ni b ning A to‘plam elementi bo‘lmasligi $b \overline{\in} A$, $b \notin A$ yoki $A \overline{\ni} b$ ko‘rinishda yoziladi. Masalan, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ to‘plam uchun $4 \in A$, $6 \in A$, va $10 \in A$ (bularni umumlashtirib, $4, 6, 10 \in A$ ko‘rinishda yozish ham mumkin), lekin $12 \notin A$ va $14 \notin A$ (ya’ni, $12, 14 \notin A$).

Tabiiyki, turli to‘plamlar uchun umumiy elementlar mavjud bo‘lishi mumkin. Masalan, A $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ va $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ to‘plamlarda $2, 4, 6, 8$ elementlar ikkala to‘plamda ham mavjuddir.

3- ta'rif. *Agar B to'plamning har bir elementi A to'plamda ham mavjud bo'lsa, u holda B to'plam A to'plamning* ***qism to'plami*** *deb ataladi.*

B to'plam A to'plamning qism to'plami ekanligi $B \subseteq A$ yoki $A \supseteq B$ ko'rinishda belgilanadi. Tabiiyki, bu belgilashlar A va B to'plamlarning teng bo'lgan holini ham nazarda tutadi. $A \subseteq B$ va $B \subseteq A$ bo'lishidan $A = B$ kelib chiqadi. Bu tenglik to'plamning o'zi o'zining qism to'plami bo'la olishi mumkinligini ko'rsatadi, ya'ni $A \subseteq A$ (yoki $A \supseteq A$) ko'rinishdagi yozuv ham ma'noga egadir. Har qanday to'plamning o'zi o'zining qism to'plami bo'la olishi to'plamlarning **refleksivlik** xossasi deb yuritiladi.

4- ta'rif. *B to'plamning hamma elementlari A to'plamda bor bo'lib, shu bilan birga A to'plamda B ga kirmagan element(lar) ham topilsa, u holda B to'plam A to'plamning* ***xos qism to'plami*** *deb ataladi.*

B to'plam A to'plamning xos qism to'plami bo'lishi $B \subset A$ yoki $A \supset B$ ko'rinishda belgilanadi.

Ta'kidlash kerakki, A A yoki $A \supset A$ deb yozish mumkin emas[1]. Shuning uchun, bu holatni ifodalash maqsadida, har qanday to'plam "o'zi o'zining xosmas qismi" degan iboradan foydalaniladi.

To'plamlar nazariyasida bo'sh to'plam har qanday bo'sh bo'lmagan A to'plamning qism to'plami deb qaraladi, ya'ni $\varnothing \subset A$. Tabiiyki, bo'sh to'plamning quvvati nolga teng, ammo bo'sh to'plamni yagona element sifatida saqlovchi to'plamning quvvati birga tengdir, ya'ni $|\varnothing| = 0$, lekin $|\{\varnothing\}| = 1$.

Qandaydir a tasdiqning o'rinli bo'lishidan boshqa b tasdiqning o'rinli bo'lishi kelib chiqsa, bu holat $a \Rightarrow b$ deb belgilanadi. Masalan, $(A \subseteq B$ va $B \subseteq A) \Rightarrow A = B$.

5- ta'rif. *Agar a va b tasdiqlar uchun $a \Rightarrow b$ va $b \Rightarrow a$ bo'lsa, u holda bu tasdiqlar* ***o'zaro ekvivalent tasdiqlar*** *deb ataladi.*

a va b tasdiqlarning o'zaro ekvivalentligi $a \Leftrightarrow b$ deb belgilanadi (III bobga qarang).

2- misol. $\boldsymbol{N}$ natural sonlar to'plami $\boldsymbol{R}$ haqiqiy sonlar to'plamining qism to'plamini tashkil etadi: $\boldsymbol{N} \subseteq \boldsymbol{R}$. ■

---

[1] Qiyoslang: a haqiqiy son bo'lsa, u holda $a < a$ va $a > a$ yozuvlar noto'g'ri.

3- misol. Nukus shahridagi barcha talabalar to‘plami O‘zbekistondagi barcha talabalar to‘plamining qism to‘plamidir. ■

4- misol. O‘nli sanoq tizimidagi yozuvining oxirgi raqami 0, 2, 4, 6 yoki 8 raqamlaridan biri bo‘lgan natural sonlar to‘plami ikkiga qoldiqsiz bo‘linadigan natural sonlar to‘plamining qism to‘plamidir. ■

5- misol. $A=\{a,b,c,d,e,\}$ to‘plam uchun $B=\{a\}$, $C=\{a,b\}$ to‘plamlarning har biri xos qism to‘plamdir. ■

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Juft sonlar to‘plamini ifodalash usullarini keltiring.

2. $\{a,b\}\in\{\{a,b,c\},\{b,d\},a,b,\{b,c\}\}$ tasdiqning to‘g‘ri yoki noto‘g‘riligini tekshiring va javobingizni izohlang.

3. $\{\{a,b\},\{b,c\}\}\neq\{a,b,c\}$ munosabatni isbotlang.

4. $x^2-10x+21=0$ tenglamaning ildizlari to‘plamini A bilan va $B=\{3,\ 7\}$ deb belgilasak, $A=B$ bo‘lishini ko‘rsating.

5. $\varnothing=\{\varnothing\}$ va $\varnothing\neq\{\varnothing\}$ munosabatlardan to‘g‘risini ko‘rsating.

6. $A\subseteq\varnothing\Rightarrow A=\varnothing$ munosabatni isbotlang.

7. Birorta ham elementga ega bo‘lmagan to‘plam yagona ekanligini isbotlang.

8. Bir vaqtning o‘zida $A\in B$, $B\in C$ va $A\notin C$ xususiyatlarga ega bo‘lgan A, B va C to‘plamlarga misol keltiring.

9. Quyida keltirilgan to‘plamlarning har birini so‘zlar vositasida ifodalang:

a) $\{x\in\mathbf{N}\mid x$ 3ga va 5ga qoldiqsiz bo'linadi$\}$;

b) $\{x\in\mathbf{Z}\mid 0<x<9\}$;

d) $\{x: x=x_1$ yoki $x=x_2$, yoki $x=x_3$, yoki $x=x_4\}$;

e) $\{\sqrt{x}: x-\text{tub son}\}$;

f) $\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R},\ x^2+y^2\leq 1\}$;

g) $B=\{x\in A: x-$ yoshi yigirma birdan oshmagan talaba$\}$, bunda A – Toshkent shahridagi talabalar to‘plami.

10. Sonlarning kerakli xossalarini qo‘llab, quyida keltirilgan tasdiqlarni isbotlang:

a) $\{x\in\mathbf{N}\mid$ qandaydir y uchun $x=15y\}=$

$=\{x\in\mathbf{N}\mid$ qandaydir n va m uchun $x=3n$ va $x=5m\}$;

b) $\{x\in\mathbf{R}\mid$ qandaydir $y\in\mathbf{R}$ uchun $x=y^2\}=\{x\in\mathbf{R}\mid x\geq 0\}$.

11. Ixtiyoriy A, B va C to‘plamlar uchun quyidagi tasdiqlarni isbotlang:

a) agar $A \subseteq B$ va $B \subseteq C$ bo‘lsa, u holda $A \subseteq C$ o‘rinlidir;
b) agar $A \subseteq B$ va $B \subset C$ bo‘lsa, u holda $A \subset C$ o‘rinlidir;
d) agar $A \subset B$ va $B \subset C$ bo‘lsa, u holda $A \subset C$ o‘rinlidir;
e) agar $A \subset B$ va $B \subseteq C$ bo‘lsa, u holda $A \subset C$ o‘rinlidir.

12. Ixtiyoriy $A_1, A_2, ..., A_n$ to‘plamlar uchun quyidagini isbotlang: $A_1 = A_2 = ... = A_n \Leftrightarrow A_1 \subseteq A_2 \subseteq ... \subseteq A_n \subseteq A_1$.

13. “Paradoksiya” mamlakatida ushbu farmon e’lon qilindi: “Mamlakatdagi barcha shaharlar hokimlari o‘zlari hokimlik qilayotgan shaharlarda yashashlari taqiqlanadi, ular maxsus hokimlar shahrida yashashlari shart”. Shu farmonga ko‘ra hokimlar shahrining hokimi qayerda yashashi lozim? Bu savolga javob berishga urinib ko‘ring.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. To‘plamlar nazariyasining asoschilari kimlar hisoblanadi?
2. Nega to‘plam tushunchasiga ta’rif berilmaydi?
3. Chekli va cheksiz to‘plamlar bir-biridan qanday farqlanadi?
4. To‘plamlarni belgilashda qaysi usullardan foydalaniladi?
5. Rassel paradoksini bilasizmi?
6. To‘plamlar aksiomatik nazariyasining mohiyati nimadan iborat?
7. Hajmiylik aksiomasi nimadan iborat?
8. Bo‘sh to‘plam aksiomasi qanday ifodalanadi?
9. Juftlik aksiomasi nimani bildiradi?
10. Tanlash aksiomasi qanday ifodalanadi?
11. Hajmiylik aksiomasini qanday tatbiq qilish mumkin?
12. Qaysi holda ikkita to‘plam teng bo‘ladi?
13. Chekli to‘plamning quvvati deganda nima tushiniladi?
14. Xos va xosmas qism to‘plamlarning bir-biridan farqi nimada?
15. O‘zaro ekvivalent tasdiqlar deganda nimani tushunasiz?

1.2. To‘plamlar ustida amallar

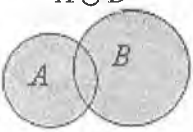
To‘plam. To‘plamlarning birlashmasi, kesishmasi va ayirmasi. To‘ldiruvchi va universal to‘plamlar. O‘zaro kesishadigan va kesishmaydigan to‘plamlar. Universal to‘plam. Bulean.

1.2.1. To‘plamlarning birlashmasi. To‘plamlar ustida turli amallar bajarish mumkin. Avvalo to‘plamlarning birlashmasi amalini qarab chiqamiz.

1- ta’rif. *Har qanday ikkita to‘plamning barcha elementlaridan, ularni takrorlamasdan, tuzilgan to‘plamga shu* ***to‘plamlarning birlashmasi*** *(yoki* ***yig‘indisi****) deb ataladi.*

Bu ta'rifdan ko'rinib turibdiki, to'plamlarning umumiy elementlari shu to'plamlarning birlashmasiga faqat bir martadan kiritiladi. Berilgan to'plamlarning birlashmasidagi har qanday element shu to'plamlarning hech bo'lmaganda bittasiga tegishlidir. A va B to'plamlarning birlashmasi $A \bigcup B$ kabi bel-gilanadi. Bu yerda "A va B to'plamlarga birlashma amalini qo'llab (yoki A va B to'plamlar ustida birlashma amalini bajarib), $A \bigcup B$ to'plam hosil qilindi" deyish mumkin.

$A \bigcup B$



1- shakl

1- shaklda A va B to'plamlar doiralar ko'rinishida, $A \bigcup B$ to'plam esa bo'yab tasvirlangan.

1- m i s o l . Agar $A = \{a,b\}$, $B = \{a,b,c\}$, $C = \{e,f,k\}$ bo'lsa, u holda $E = A \bigcup B = \{a,b,c\}$, $E \bigcup C = \{a,b,c,e,f,k\}$, $C \bigcup B = \{a,b,c,e,f,k\}$, $A \bigcup C = \{a,b,e,f,k\}$ bo'ladi. ■

2- m i s o l . O'zbekiston Respublikasining yoshi 16dan 25gacha bo'lgan fuqarolari to'plamini A bilan, yoshi 21dan 30gacha bo'lgan fuqarolari to'plamini esa B bilan belgilasak, A va B to'plamlarning $A \bigcup B$ birlashmasi O'zbekiston Respublikasining yoshi 16dan 30gacha bo'lgan fuqarolari to'plamini tashkil etadi. ■

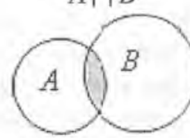
3- m i s o l . $\boldsymbol{N} \bigcup \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}$. ■

Shuni ta'kidlash kerakki, to'plamlar bilan bog'liq tushunchalar va ular ustidagi amallar, mos ravishda, sonlar bilan bog'liq tushunchalar va oddiy arifmetik amallar bilan qiyoslanadi. Jumladan, to'plamlar yig'indisini (birlashmasini) topish amali sonlarni qo'shish amali bilan qiyoslanadi. Bunday qiyoslashlar, ko'pincha, bir-biriga o'xshash natijalarning mavjudligini ko'rsatadi, ba'zan esa ular to'plamlarning farqli xususiyatlarga egaligini namoyon etadi. Masalan, ixtiyoriy A va B to'plamlar uchun $A \subseteq B$ bo'lsa, u holda $A \bigcup B = B$ va $B \bigcup A = B$ bo'ladi, lekin, ixtiyoriy a va b sonlar uchun $a \leq b$ bo'lgan holda $a + b = b$ va $b + a = b$ tengliklar bajarilmasligi mumkin, ular faqat $a = 0$ bo'lsagina o'rinlidir.

1.2.2. To'plamlarning kesishmasi. Endi to'plamlarning kesishmasi amalini o'rganamiz.

2- t a ' r i f . *Har qanday ikkita to'plamning barcha umumiy elementlaridan tuzilgan to'plamga* ***to'plamlarning kesishmasi*** *(yoki* ***ko'paytmasi****) deyiladi.*

$A \bigcap B$



2- shakl

Berilgan A va B to'plamlarning kesishmasi $A \bigcap B$ kabi belgilanadi. Bu yerda "A va B to'plamlarga kesishma amalini qo'llab, $A \bigcap B$ to'plam hosil qilindi" deyish mumkin. 2- shaklda A va B to'plamlar doiralar ko'rinishida, $A \bigcap B$ to'plam esa bo'yab tasvirlangan. To'plamlar ustidagi amallarning yuqorida ta'kidlangan o'ziga xos xususiyatlari to'plamlar ko'paytmasini (kesishmasini) topishda ham namoyon bo'ladi.

Masalan, A B bo'lsa, u holda $A \cap B = A$ va $B \cap A = A$ bo'ladi.

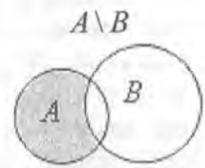
Bitta ham umumiy elementga ega bo'lmagan ikkita to'plamlarning kesishmasi bo'sh to'plam bo'lishi tabiiydir.

3- ta'rif. *Kesishmasi bo'sh bo'lgan to'plamlar* ***o'zaro kesishmaydigan****, kesishmasi bo'sh bo'lmagan to'plamlar esa* ***o'zaro kesishadigan to'plamlar*** *deb ataladi.*

4- misol. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{e, f, k\}$ bo'lsa, u holda $D = A \cap B = \{a, b, c\}$, $D \cap C = \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$, $B \cap C = \varnothing$, $D \cap B = \{a, b, c\}$ bo'ladi. ■

5- misol. 2- misolda aniqlangan A va B to'plamlarga kesishma amalini qo'llasak, O'zbekiston Respublikasining yoshi 21dan 25gacha bo'lgan fuqarolari to'plami ($A \cap B$ to'plam) hosil bo'ladi. Bu yerda A va B to'plamlar o'zaro kesishadigan to'plamlardir. ■

6- misol. $N \cap \boldsymbol{R} = N$. ■



3- shakl

7- misol. Butun dunyoda 2005- yilda tug'ilgan bolalar to'plamini T_5 bilan, 2006-yilda tug'ilgan bolalar to'plamini esa T_6 bilan belgilasak, u holda $T_5 \cap T_6 = \varnothing$ bo'ladi. Demak, T_5 va T_6 to'plamlar o'zaro kesishmaydigan to'plamlardir. ■

1.2.3. To'plamlarning ayirmasi. Ixtiyoriy A va B to'plamlar berilgan bo'lsin.

4- ta'rif. *A to'plamning B to'plamda bo'lmagan barcha elementlaridan tuziladigan to'plamni hosil qilish* ***A to'plamdan B to'plamni ayirish*** *deb, tuzilgan to'plam esa, shu A va B* ***to'plamlarning ayirmasi*** *deb ataladi.*

A to'plamdan B to'plamni ayirish natijasida hosil bo'lgan to'plam, ya'ni A va B to'plamlarning ayirmasi $A \setminus B$ yoki $A - B$ ko'rinishida belgilanadi. Bu yerda "A to'plamdan B to'plamni ayirish amalini qo'llab, $A \setminus B$ to'plam hosil qilindi" deyish mumkin. 3- shaklda A va B to'plamlar doiralar ko'rinishida, $A \setminus B$ to'plam esa bo'yab tasvirlangan.

Ixtiyoriy A va B to'plamlar uchun $A \cap B = \varnothing$ bo'lsa, u holda $A \setminus B = \varnothing$ va $B \setminus A = \varnothing$ bo'lishi ta'rifdan bevosita kelib chiqadi.

8- misol. 1- misoldagidek, $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{e, f, k\}$ bo'lsa, u holda $A \setminus B = \varnothing$, $B \setminus A = \{c\}$, $B \setminus C = \varnothing$ bo'ladi. ■

9- misol. A va B to'plamlar 2- misoldagidek aniqlangan bo'lsin. U holda, A to'plamdan B to'plamning ayirmasi $A\setminus B$ O'zbekiston Respublikasidagi yoshi 16 dan 21gacha bo'lgan fuqarolari to'plamini, B to'plamdan A to'plamning ayirmasi $B\setminus A$ esa O'zbekiston Respublikasining yoshi 25dan 30gacha bo'lgan fuqarolari to'plamini anglatadi. ■

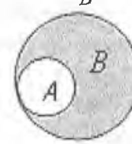
10- misol. $\boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{N}$ ayirma tarkibida natural sonlar qatnashmagan barcha haqiqiy sonlar to'plamidan iboratdir va $N\setminus\boldsymbol{R}=\varnothing$. ■

1.2.4. To'ldiruvchi to'plam. Faraz qilaylik, A va B to'plamlar berilgan va $A\subseteq B$ bo'lsin.

5- ta'rif. *B to'plamning A to'plamga kirmagan barcha elementlaridan tuzilgan $B\setminus A$ to'plam A* ***to'plamning B to'plamgacha to'ldiruvchi to'plami*** *deb ataladi.*

A to'plamning B to'plamgacha to'ldiruvchi to'plami, odatda, $\overline{A}_B$ ko'rinishda belgilanadi. Bu yerda "$\overline{A}_B$ to'plam A to'plamni B to'plamgacha to'ldiradi" yoki "A to'plamni B to'plamgacha to'ldirish amalini qo'llab, $\overline{A}_B$ to'plam hosil qilindi" deyish mumkin. 4-shaklda A to'plam kichik doira, B to'plam katta doira ko'rinishida, $\overline{A}_B$ to'plam esa bo'yab tasvirlangan.

$\overline{A}_B$



4- shakl

To'plamlar ustidagi yuqorida keltirilgan birlashma, kesishma va to'ldiruvchi to'plam tushunchalari ta'riflarini bevosita qo'llab, $A\bigcup\overline{A}_B=B$, $A\bigcap\overline{A}_B=\varnothing$, $A\setminus\overline{A}_B=A$ va $\overline{A}_B\setminus A=\overline{A}_B$ tengliklarni hosil qilish qiyin emas.

11- misol. Barcha juft sonlar to'plamini $A=\{2,4,...,2n,...\}$ $(n\in N)$ deb belgilasak, A to'plamni N to'plamgacha to'ldirish amalini qo'llab $\overline{A}_N=\{1,3,...,2n-1,...\}$ to'plamni, ya'ni barcha toq sonlar to'plamini hosil qilamiz. Demak, barcha toq sonlar to'plami barcha juft sonlar to'plamini natural sonlar to'plamigacha to'ldiradi. Xuddi shunga o'xshash, barcha toq sonlar to'plamini natural sonlar to'plamigacha to'l-dirish amalini qo'llab, barcha juft sonlar to'plamini hosil qilish mumkin. ■

1.2.5. Universal to'plam va bulean[1] tushunchalari. To'plamlar nazariyasida universal to'plam va bulean tushunchalari muhim tushunchalar hisoblanadi. Odatda, to'plamlar orasidagi turli munosabatlarni hisobga olishga to'g'ri keladi. Masalan, qaralayotgan to'plamlarning barchasi qandaydir boshqa bir to'plamning qism to'plami bo'lishi mumkin.

6- ta'rif. *Qaralayotgan barcha to'plamlarni o'zida qism to'plam sifatida saqlovchi to'plamga* ***universal to'plam*** *deb ataladi.*

---

[1] Bu ibora ingliz matematigi va mantiqchisi Jorj Bul (George Boole, 1815-1864) sharafiga shunday nomlangan.

Universal to'plam, odatda, U deb belgilanadi. Universal to'plamni **universum** deb ham atashadi.

Shuni ta'kidlash kerakki, universal to'plam tushunchasiga boshqacha ta'riflar ham berilishi mumkin, masalan, biror to'plamning xos qismi deb qaralmagan to'plam universal to'plam deb ataladi. Bundan tashqari, universal to'plam tushunchasi nisbiy tushunchadir. Masalan, O'zbekiston sharoitida aholi bilan bog'liq qandaydir masala qaralayotgan bo'lsa, O'zbekiston aholisi to'plamini universal to'plam deb qarash mumkin. O'z navbatida, O'zbekiston aholisi to'plami dunyo aholisi to'plamining qism to'plamidir.

Universal to'plamning ta'rifiga binoan, uning hamma qism to'plamlari orasida ikkita xosmas qismi bor: biri universal to'plamning o'zi, ikkinchisi esa bo'sh to'plam. Tabiiyki, universal to'plamning bu ikki xosmas qismlaridan boshqa barcha qism to'plamlari uning xos qism to'plamlaridir.

Ko'pincha, berilgan "A to'plamning universal to'plamgacha to'ldiruvchisi" deyish o'rniga, qisqa qilib, berilgan "A to'plamning to'ldiruvchisi" deb aytiladi va $\overline{A}$ ko'rinishda belgilanadi. Bu yerda "$\overline{A}$ to'plam A to'plamni to'ldiradi" yoki "$\overline{A}$ to'plam A to'plamdan to'ldirish amalini qo'llab hosil qilindi" deyish mumkin.

7- ta'rif. *Berilgan A to'plamning barcha qism to'plamlaridan tuzilgan to'plam A* ***to'plamning buleani*** *(****A to'plam uchun bulean****) deb ataladi.*

A to'plamning buleani 2^A ko'rinishda belgilanadi[1].

12- misol. To'rtta elementga ega $A=\{a,b,c,d\}$ to'plam uchun 2^A bulean o'n oltita element-to'plamlardan iborat bo'ladi:

$$2^A=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},$$
$$\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},\{a,b,c,d\}\}.$$

Ravshanki, $|A|=4$ va $|2^A|=16$. ■

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Berilgan $A=\{a,b,c\}$, $B=\{d,e,f,g\}$ va $C=\{a,f,g,k,c\}$ to'plamlardan har ikkitasining kesishmasi, birlashmasi va ayirmalarini toping.

2. Markazlari bitta nuqtada joylashgan hamda radiuslari 1 va 3ga teng doiralar nuqtalaridan iborat to'plamlarning kesishmasi, birlashmasi va ayirmalarini toping.

3. To'plamlarning ayirmasi amali bilan bog'liq masala o'ylab toping va uni hal qiling.

---

[1] Bunday belgilashni izohlovchi ma'lumotlar II bobning 1- paragrafida keltiriladi.

4. Ushbu amallar natijalarini aniqlang: $\varnothing\cap\{\varnothing\}$, $\{\varnothing\}\cap\{\varnothing\}$, $\{\varnothing\}\cup\{\varnothing\}$, $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}-\{\varnothing\}$, $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}-\varnothing$, $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}-\{\{\varnothing\}\}$.

5. Ixtiyoriy A to‘plam uchun $A\cup\varnothing$, $A\cap\varnothing$, $A-\varnothing$, $A-A$, $\varnothing-A$ to‘plamlarni aniqlang.

6. $A-B=B-A$ tenglik o‘rinli bo‘ladigan A va B to‘plamlarga misollar keltiring.

7. O‘zaro kesishmaydigan to‘plamlar bilan bog‘liq masala o‘ylab toping va uni hal qiling.

8. O‘zaro kesishadigan to‘plamlar bilan bog‘liq masala o‘ylab toping va uni hal qiling.

9. Ixtiyoriy A to‘plam uchun $A\cup\overline{A}=\overline{A}\cup A=U$ bo‘lishini ko‘rsating.

10. Ixtiyoriy A va B to‘plamlar uchun quyidagi tasdiqlarning o‘rinli bo‘lishini ko‘rsating:

a) $A\setminus B=\varnothing\Rightarrow A\subseteq B$;

b) $A\subseteq B\Rightarrow A\setminus B=\varnothing$ – a) tasdiqqa teskari tasdiq;

d) $A\setminus B=B\setminus A=\varnothing\Rightarrow A=B$;

e) $A=B\Rightarrow A\setminus B=B\setminus A=\varnothing$ – d) tasdiqqa teskari tasdiq;

f) $A\setminus B=A\cap\overline{B}$, ya’ni ayirish amali kesishma va to‘ldirish amallari yordamida ifodalanishi mumkin;

g) $\varnothing\subseteq A\cap B\subseteq A\cup B$; h) $\overline{A\setminus B}=\overline{A}\cup B$.

11. Chekli A va B to‘plamlar uchun $|A|$, $|B|$, $|A\cup B|$ va $|A\cap B|$ sonlar orasidagi bog‘lanishni toping.

12. Ixtiyoriy A, B va C to‘plamlar uchun quyidagi tasdiqlarni isbotlang:

a) $A\cup B\subseteq C\Rightarrow(A\subseteq C$ va $B\subseteq C)$;

b) $(A\subseteq C$ va $B\subseteq C)\Rightarrow A\cup B\subseteq C$ – a)ga teskari tasdiq;

d) $A\subseteq B\cap C\Rightarrow(A\subseteq B$ va $A\subseteq C)$;

e) $(A\subseteq B$ va $A\subseteq C)\Rightarrow A\subseteq B\cap C$ – d)ga teskari tasdiq;

f) $A\subseteq B\Rightarrow A\cup C\subseteq B\cup C$; g) $A\subseteq B\Rightarrow A\cap C\subseteq B\cap C$;

h) $A\subseteq B\Rightarrow A\setminus C\subseteq B\setminus C$; i) $A\subseteq B\Rightarrow C\setminus B\subseteq C\setminus A$.

13. 12- topshiriqning f), g), h) va i) bandlaridagi tasdiqlarga teskari tasdiqlarni tahlil qiling va ular bajarilmaydigan hollarda A, B va C to‘plamlarga misol keltiring.

14. Ixtiyoriy a, b va c sonlar uchun to‘g‘ri bo‘lgan $a\le b\Leftrightarrow a+c\le b+c$, $a\le b\Leftrightarrow a-c\le b-c$ va $a\le b\Leftrightarrow c-b\le c-a$ munosabatlardagi a, b va c sonlarni A, B va C to‘plamlar bilan, “$\le$”, “+” va “–“ belgilarni “$\subseteq$”, “$\cup$” va “$\setminus$” belgilar bilan mos ravishda almashtirib, hosil bo‘lgan munosabatlarning to‘g‘riligini tahlil qiling.

15. $B = \{x \in N \mid x\ 3\text{ga bo'linadi}\}$ bo‘lsin. N to‘plamni universal to‘plam deb hisoblab, $\overline{B}$ to‘plamni toping.

16. Natural, butun, haqiqiy va irratsional sonlar to‘plamlari bilan bog‘liq universal to‘plamlarga misollar keltiring.

17. $A = \{a, b, c, d, e\}$ to‘plam uchun 2^A buleanni aniqlang.

18. Bir uyda yashovchi oilada ota (t), ona (n) va to‘rt nafar farzand ($1,2,3,4$) bo‘lsa, oila a’zolarining uyda bo‘lishlari vaziyatlariga mos barcha imkoniyatlarni to‘plamlar ko‘rinishida yozing va bu imkoniyatlar to‘plamlari to‘plamining quvvatini aniqlang.

19. Universal to‘plam va bulean tushunchalari bilan bog‘liq masalalar o‘ylab toping va ularni hal qiling.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. To‘plamlarning birlashmasi qanday amalga oshiriladi?
2. Qanday to‘plamga to‘plamlarning kesishmasi deb aytiladi?
3. O‘zaro kesishmaydigan to‘plamlar deganda nimani tushunasiz?
4. Qanday to‘plamlarga o‘zaro kesishadigan to‘plamlar deb aytiladi?
5. To‘plamlarning ayirmasi nima?
6. A to‘plamni B to‘plamgacha to‘ldiruvchi to‘plam deganda nimani tushunasiz?
7. Qanday to‘plamga universal to‘plam deb aytiladi?
8. Bulean deganda nimani tushunasiz?

1.3. To‘plamlar algebrasi

To‘plam. Element. Algebra. Idempotentlik. Kommutativlik. Assotsiativlik. Distributivlik. De Morgan va yutilish qonunlari. Ikki taraflama tenglik. O‘zaro ikki taraflama tengliklar.

1.3.1. Asosiy qonunlar. To‘plamlar algebrasida, umuman olganda, sonlar algebrasidagi munosabatlarga o‘xshash munosabatlar qaraladi. To‘plamlar algebrasidagi munosabatlar universal to‘plamning va uning xos qism to‘plamlarining qanday bo‘lishidan qat’i nazar o‘z kuchini saqlaydilar. Bu yerda, asosan, birlashma, kesishma, ayirma va to‘ldirish amallari o‘rtasidagi o‘zaro munosabatlar muhim hisoblanadi.

To‘plamlar nazariyasidagi munosabatlar, ko‘pincha, tengliklar ko‘rinishida namoyon bo‘ladi. Bu yerda tengliklarni isbotlashda hajmiylik aksiomasidan foydalangan holda quyidagicha mulohaza yuritish usuli ko‘p qo‘llaniladi. Agar tenglikning chap tomonidagi to‘plamga tegishli ixtiyoriy element u’ning o‘ng tomonidagi to‘plamda ham topilib va, aksincha, tenglikning o‘ng tomonidagi to‘plamga tegishli ixtiyoriy element uning chap tomonidagi to‘plamda ham bor bo‘lsa, u holda bu tenglik to‘g‘ridir. Boshqacha aytganda, ixtiyoriy A va B to‘plamlar uchun $A=B$ tenglikni isbotlash $A\subseteq B$ va $B\subseteq A$ munosabatlarning to‘g‘riligini ko‘rsatishga tengkuchlidir.

Ko‘pincha, to‘plamlar algebrasidagi “$\bigcup$”, “$\bigcap$” va “$\setminus$” belgilar bilan ifodalanuvchi birlashma, kesishma va ayirma amallari, bo‘sh ($\varnothing$) va universal (U) top’lamlar hamda xos ($\subseteq$) va xosmas ($\subset$) qism to‘plamlar, mos ravishda, odatdagi algebraning “+”, “×” va “–” belgilar bilan ifodalanuvchi qo‘shish, ko‘paytirish va ayirish amallari, nol (0) va bir (1) sonlar hamda katta emas ($\leq$) va kichik ($<$) munosabatlari bilan qiyoslanadi.

To‘plamlar ustida munosabatlarni ifodalovchi asosiy tengliklarni qarab chiqamiz.

1- teorema. *Universal to‘plam U va uning ixtiyoriy qism to‘plami A uchun quyidagi tengliklar o‘rinlidir:*

1. (*Nolning xossalari*). $A\bigcup\varnothing=A$, $\varnothing\bigcup A=A$, $A\bigcap\varnothing=\varnothing$, $\varnothing\bigcap A=\varnothing$.
2. (*Birning xossalari*). $A\bigcap \boldsymbol{U}=A$, $\boldsymbol{U}\bigcap A=A$, $A\bigcup \boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{U}\bigcup A=\boldsymbol{U}$.
3. (***Idempotentlik***[1] ***qonuni***). $A\bigcup A=A$, $A\bigcap A=A$.
4. (*Nol va birning bog‘liqligi xossasi*). $\overline{\varnothing}=\boldsymbol{U}$, $\overline{\boldsymbol{U}}=\varnothing$.
5. (***Involyutivlik qonuni***[2]). $\overline{\overline{A}}=A$.

Isboti. Bu tengliklarni isbotlash uchun, yuqorida ta’kidlaganimizdek, hajmiylik aksiomasidan foydalanamiz. Shuni e’tiborga olsak, isbotlanishi kerak bo‘lgan barcha tengliklar to‘plamlarning birlashmasi, kesishmasi va to‘ldiruvchisi ta’riflaridan bevosita kelib chiqadi. Bu yerda faqat oxirgi tenglikning isbotini to‘liq keltirish bilan chegaralanamiz.

A to‘plam U universal to‘plamning ixtiyoriy qism to‘plami va $\overline{\overline{A}}$ to‘plam $\overline{A}$ to‘plamning to‘ldiruvchisi bo‘lgani uchun, $\overline{\overline{A}}$ to‘plamning hech qaysi elementi $\overline{A}$ to‘plamga tegishli emas. Demak, $\overline{\overline{A}}$ to‘plamning barcha elementlari A to‘plamga tegishlidir, ya’ni $\overline{\overline{A}}\subseteq A$. Aksincha, A to‘plamning hech qaysi elementi $\overline{A}$ to‘plamga tegishli emas, demak, A to‘plamning barcha elementlari $\overline{\overline{A}}$ to‘plamga tegishlidir, ya’ni $A\subseteq\overline{\overline{A}}$. Shuning uchun, $\overline{\overline{A}}=A$. ■

2- teorema (birlashmaga nisbatan kommutativlik qonuni). *Ixtiyoriy A va B to‘plamlar uchun $A\bigcup B=B\bigcup A$ tenglik o‘rinlidir.*

Isboti. To‘plamlarning birlashmasiga berilgan ta’rifga ko‘ra, $A\bigcup B$ to‘plamning har bir elementi yo A to‘plamda yoki B to‘plamda topiladi,

---

[1] “Idempotens” so‘zi lotinchadan olingan bo‘lib, “idem” – shunday, “potens” – kuchli, ya’ni “o‘sha kuchga ega” yoki “o‘sha darajani saqlovchi” ma’nosini beradi.

[2] Bu qonunni falsafadagi “inkorni inkor qilish qonuni” bilan qiyoslash mumkin.

chunki $A \bigcup B$ to'plam A va B to'plamlarning barcha elementlaridan takrorlanmasdan tuzilgan. Yana o'sha ta'rifga ko'ra, $B \bigcup A$ to'plam ham A va B to'plamlarning barcha elementlaridan takrorlanmasdan tuzilganligi uchun $A \bigcup B$ to'plamning har bir elementi $B \bigcup A$ to'plamga ham tegishli bo'ladi. Xuddi shunday mulohazalarni $B \bigcup A$ to'plam uchun yuritib, uning har bir elementi $A \bigcup B$ to'plamda ham bor bo'lishini aniqlaymiz. Demak, $A \bigcup B = B \bigcup A$. ■

3- teorema (birlashmaga nisbatan assotsiativlik qonuni). *Ixtiyoriy A, B va C to'plamlar uchun $(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C)$ tenglik o'rinlidir.*

Isboti. $(A \bigcup B) \bigcup C$ to'plamning ixtiyoriy elementi x bo'lsin. Birlashmaning ta'rifini qo'llasak, quyidagilarga ega bo'lamiz: $x \in (A \bigcup B)$ yoki $x \in C$. $x \in (A \bigcup B)$ munosabatdan $x \in A$ yoki $x \in B$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, $x \in A$ yoki $x \in (B \bigcup C)$. Shuning uchun $x \in A \bigcup (B \bigcup C)$. Xuddi shunday mulohaza yuritib, $A \bigcup (B \bigcup C)$ to'plamning ixtiyoriy elementi $(A \bigcup B) \bigcup C$ to'plamning ham elementi bo'lishini aniqlaymiz. Demak, $(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C)$. ■

Birlashmaga nisbatan assotsiativlik qonuniga ko'ra A, B va C to'plamlarga birlashma amalini qanday tartibda qo'llashning ahamiyati yo'q. Shuning uchun A, B va C to'plamlarga birlashma amalini qo'llash natijasida hosil bo'lgan to'plamni $A \bigcup B \bigcup C$ deb belgilash ham mumkin.

Ikkita to'plamning birlashmasi amaliga berilgan ta'rif ixtiyoriy chekli sondagi to'plamlarning birlashmasi uchun ham qo'llanilishi mumkin[1]: har qanday chekli sondagi to'plamlarning barcha elementlaridan takrorlanmasdan tuzilgan to'plamga shu to'plamlarning birlashmasi deb aytiladi. $A_1, A_2, \dots, A_n$ to'plamlarning birlashmasini $A_1 \bigcup A_2 \bigcup \dots \bigcup A_n$ yoki $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ ko'rinishda belgilash qabul qilingan.

Birlashmaga nisbatan kommutativlik qonuniga ko'ra, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ birlashma to'plamni quyidagi usul bilan ham tashkil etish mumkin. Oldin berilgan $A_1, A_2, \dots, A_n$ to'plamlardan ixtiyoriy ikkitasining, masalan A_{i_1} va A_{i_2} to'plamlarning birlashmasini tuzish, keyin $A_{i_1} \bigcup A_{i_2}$ to'plam bilan A_{i_1}, A_{i_2} to'plamlardan boshqa ixtiyoriy to'plamning birlashmasini tuzish, va hokazo, ketma-ket birlashma to'plamlarni tuzish natijasida $A_1, A_2, \dots, A_n$

[1] Umuman olganda, birlashma va kesishma amallari binar (ikki o'rinli) amallar hisoblanadi.

to'plamlarning $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ birlashmasini hosil qilish mumkin. Har biri chekli bo'lgan $A_1, A_2, ..., A_n$ to'plamlar uchun $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |A_i|$ munosabat o'rinlidir. Bu munosabat berilgan to'plamlarning hech bo'lmaganda ikkitasi umumiy elementga ega bo'lsagina qat'iy tengsizlik ko'rinishda va berilgan to'lamlarning barcha mumkin bo'lgan juftlari umumiy elementga ega bo'lmasagina tenglik ko'rinishda bajariladi. Bu tasdiqlar kombinatorikaga bag'ishlangan II bobning 1- paragrafidagi 5- teoremadan kelib chiqadi.

1- m i s o l. $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{e, f, k\}$ va $D = \{i, j\}$ bo'lsin. U holda $E = B \cup C \cup D = \{a, b, c, e, f, k, i, j\}$ va $F = A \cup B \cup C \cup D = \{a, b, c, e, f, k, i, j\}$ bo'ladi. Ko'rinib turibdiki, $E = F$. Bu yerdagi barcha to'plamlarning quvvatlarini aniqlaymiz: $|A| = 2$, $|B| = 3$, $|C| = 3$, $|D| = 2$, $|E| = 8$ va $|F| = 8$. Ular uchun $|E| = 8 < |A| + |B| + |C| + |D| = 10$ (A va B to'plamlarda ikkita umumiy a va b elementlar bor) va $|F| = 8 = |B| + |C| + |D|$ (B bilan C, C bilan D va B bilan D juftliklar umumiy elementga ega emas). ■

4- t e o r e m a (kesishmaga nisbatan kommutativlik qonuni). *Ixtiyoriy A va B to'plamlar uchun $A \cap B = B \cap A$ tenglik o'rinlidir.*

I s b o t i. To'plamlarning kesishmasi ta'rifiga ko'ra, $A \cap B$ to'plamning har bir elementi A va B to'plamlarning ikkalasiga ham tegishli. Xuddi suningdek, $B \cap A$ to'plam A va B to'plamlarning umumiy elemertlaridan tuzilganligi uchun $A \cap B$ to'plamning har bir elementi $B \cap A$ to'plamda ham topiladi. Shu kabi mulohazalar asosida $B \cap A$ to'plamning har bir elementi $A \cap B$ to'plamda ham bor bo'lishini ko'rish qiyin emas. Demak, $A \cap B = B \cap A$. ■

5- t e o r e m a (kesishmaga nisbatan assotsiativlik qonuni). *Ixtiyoriy A, B va C to'plamlar uchun $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ tenglik o'rinlidir.*

I s b o t i. $(A \cap B) \cap C$ to'plamning ixtiyoriy x elementini qaraymiz. To'plamlar kesishmasining ta'rifiga asosan, $x \in (A \cap B)$ va $x \in C$. Bu yerdan $x \in A$, $x \in B$ va $x \in C$ ekanligi kelib chiqadi. Shuning uchun $x \in A$ va $x \in (B \cap C)$ bo'ladi. Demak, $x \in A \cap (B \cap C)$. Xuddi shunga o'xshash mulohaza yuritib, $A \cap (B \cap C)$ to'plamning ixtiyoriy elementi $(A \cap B) \cap C$ to'plamning ham elementi bo'lishini ko'rsatish qiyin emas. Demak, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. ■

Kesishmaga nisbatan assotsiativlik qonuniga ko‘ra A, B va C to‘plamlarga kesishma amalini qanday tartibda qo‘llashning ahamiyati yo‘q. Shuning uchun A, B va C to‘plamlarning kesishmasini $A\bigcap B\bigcap C$ deb belgilash ham mumkin.

Ikkita to‘plamlarning kesishmasi tushunchasiga berilgan ta’rif ixtiyoriy chekli sondagi to‘plamlarning kesishmasi uchun ham qo‘llanilishi mumkin: har qanday chekli sondagi to‘plamlarning barcha umumiy elementlaridan tuzilgan to‘plamga shu to‘plamlarning kesishmasi deb aytiladi. $A_1, A_2,..., A_n$ to‘plamlarning kesishmasi uchun $A_1 \bigcap A_2 \bigcap ... \bigcap A_n$ yoki $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ ko‘rinishdagi belgilash qabul qilingan.

Kesishmaga nisbatan kommutativlik qonuniga ko‘ra, $A_1,A_2,...A_n$ to‘plamlarning $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ kesishmasini ikkita to‘plamlar kesishmasi amalini istalgan tartibda ketme-ket qo‘llab hosil qilish mumkin: dastlab berilgan $A_1,A_2,...,A_n$ to‘plamlardan ixtiyoriy ikkitasining, masalan A_{i_1} va A_{i_2} to‘plamlarning kesishmasini tuzish, keyin $A_{i_1} \bigcap A_{i_2}$ to‘plam bilan A_{i_1}, A_{i_2} to‘plamlardan boshqa ixtiyoriy to‘plamning kesishmasini tuzish, va hokazo, shunday davom etib, $A_1, A_2,..., A_n$ to‘plamlarning kesishmasini hosil qilish mumkin.

Chekli $A_1, A_2,..., A_n$ to‘plamlar uchun $\left|\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right| \le \min\limits_{1\le i\le n}|A_i|$ munosabat o‘rinlidir. Berilgan to‘plamlardan birortasi qolgan barcha to‘plamlarning qism to‘plami bo‘lsagina bu munosabatda tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bundan tashqari, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ to‘plam berilgan barcha $A_1, A_2,..., A_n$ to‘plamlarning xos qism to‘plami bo‘lsagina yuqoridagi munosabat qat’iy tengsizlik ko‘rinishida bajariladi. Kombinatorikaga oid tushunchalar yordamida $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ to‘plamning quvvatini hisoblash formulasi II bobning 1- paragrafidagi 7-teoremada keltiriladi.

2- misol. $A=\{a,b,c\}$, $B=\{a,b,c,d\}$, $C=\{e,f,k\}$ bo‘lsa, u holda $A\bigcap B=\{a,b,c\}$, $A\bigcap B\bigcap C=\varnothing$, $A\bigcap C=\varnothing$, $B\bigcap C=\varnothing$ bo‘ladi. Osonlik bilan ko‘rish mumkinki, $|A\bigcap B|=3=\min\{|A|,|B|\}$, chunki $|A|=3$, $|B|=4$ va $A\subset B$. Bundan tashqari, $|A\bigcap B\bigcap C|=|\varnothing|=$ $=0<\min\{|A|,|B|,|C|\}=3$. ■

3- misol. Eramizning i- yilida butun dunyoda tug‘ilgan bolalar to‘plamini T_i bilan va n bilan $n \geq 2$ shartni qanoatlantiruvchi natural sonni belgilasak, u holda $\bigcap_{i=2001}^{2000+n} T_i = \varnothing$ bo‘ladi. ■

6- teorema (birlashmaga nisbatan distributivlik qonuni). *Ixtiyoriy A, B va C to‘plamlar uchun $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$ tenglik o‘rinlidir.*

Isboti. $A \bigcup (B \bigcap C)$ to‘plamning ixtiyoriy x elementini qaraymiz. Birlashmaning ta’rifiga ko‘ra $x \in A$ yoki $x \in (B \bigcap C)$ bo‘ladi. Kesishmaning ta’rifiga ko‘ra $x \in (B \bigcap C)$ munosabatdan $x \in B$ va $x \in C$ ekanligi kelib chiqadi. Shuning uchun $x \in A$ yoki $x \in B$ va (shu bilan birga) $x \in A$ yoki $x \in C$. Birlashmaning ta’rifiga asosan $x \in (A \bigcup B)$ va $x \in (A \bigcup C)$. Demak, kesishmaning ta’rifiga ko‘ra, $x \in (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$ bo‘lishi kelib chiqadi.

Endi $(A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$ to‘plamning ixtiyoriy x elementini qaraymiz.

Kesishmaning ta’rifiga ko‘ra $x \in (A \bigcup B)$ va $x \in (A \bigcup C)$ bo‘ladi. U holda, birlashmaning ta’rifiga asosan, $x \in A$ yoki $x \in B$ va (shu bilan birga) $x \in A$ yoki $x \in C$ bo‘lishi kelib chiqadi. Demak, $x \in A$ yoki x element B va C to‘plamlarga tegishlidir. Shuning uchun, kesishmaning ta’rifiga ko‘ra, $x \in A$ yoki $x \in (B \bigcap C)$. Birlashmaning ta’rifiga asosan $x \in A \bigcup (B \bigcap C)$ bo‘ladi. ■

Zarur mulohazalar yuritib, birlashmaga nisbatan distributivlik qonunini quyidagicha umumlashtirish mumkin.

Ixtiyoriy $A, B_1, B_2, \dots, B_n$ to‘plamlar uchun $A \bigcup (B_1 \bigcap B_2 \bigcap \dots \bigcap B_n) = (A \bigcup B_1) \bigcap (A \bigcup B_2) \bigcap \dots \bigcap (A \bigcup B_n)$ tenglik o‘rinlidir.

7- teorema (kesishmaga nisbatan distributivlik qonuni). *Ixtiyoriy A, B va C to‘plamlar uchun $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$ tenglik[1] o‘rinlidir.*

Isboti. $A \bigcap (B \bigcup C)$ to‘plamning ixtiyoriy elementi x bo‘lsin. U holda, kesishmaning ta’rifiga asosan, $x \in A$ va $x \in B \bigcup C$ bo‘ladi. Birlashmaning ta’rifiga ko‘ra $x \in B \bigcup C$ munosabatdan $x \in B$ yoki $x \in C$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, $x \in A$ va $x \in B$ yoki $x \in A$ va $x \in C$. Bu yerdan esa $x \in (A \bigcap B)$ yoki $x \in (A \bigcap C)$ ekanligi kelib chiqadi. Birlashmaning ta’rifiga ko‘ra oxirgi mulohazadan $x \in (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$ bo‘lishini aniqlaymiz.

---

[1] Bu tenglik kesishmaga nisbatan taqsimot qonuni deb ham yuritiladi.

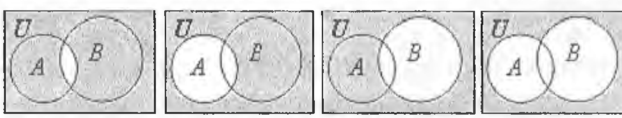
Endi $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ to‘plamning ixtiyoriy elementi x bo‘lsin. Birlashmaning ta’rifiga ko‘ra $x\in(A\cap B)$ yoki $x\in(A\cap C)$ bo‘ladi. Bu yerdan, kesishmaning ta’rifiga asosan, $x\in A$ va $x\in B$ yoki $x\in A$ va $x\in C$ bo‘lishi kelib chiqadi.

Demak, $x\in A$ va (shu bilan birga) $x\in B$ yoki $x\in C$. Shuning uchun, $x\in A$ va (birlashmaning ta’rifiga ko‘ra) $x\in(B\cup C)$. Bu yerdan, kesishmaning ta’rifiga asosan, $x\in A\cap(B\cup C)$.■

Zarur mulohazalar yuritib kesishmaga nisbatan distributivlik qonunini quyidagicha umumlashtirish mumkin:

Ixtiyoriy $A, B_1,B_2,...,B_n$ to‘plamlar uchun $A\cap(B_1\cup B_2\cup...\cup B_n)=$ $=(A\cap B_1)\cup(A\cup B_2)\cup...\cup(A\cap B_n)$ tenglik o‘rinlidir.

8- teorema. *U universal to‘plamning ixtiyoriy A va B qism to‘plamlari uchun $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ tenglik o‘rinlidir.*



a b d e

1- shakl

Isboti. A va B to‘plamlar U universal to‘plamning ixtiyoriy qism to‘plamlari bo‘lsin. Teoremani isbotlashda 1- shakldan foydalanamiz. Shaklda U universal to‘plam to‘g‘ri to‘rtburchak ko‘rinishda, A va B to‘plamlar esa doiralar sifatida tasvirlangan. 1-a shakldagi U to‘plamning bo‘yalmagan qismi $A\cap B$ to‘plamga, bo‘yalgan qismi esa $\overline{A\cap B}$ to‘plamga mos keladi.

$\overline{A\cap B}$ to‘plamning ixtiyoriy elementini x bilan belgilaymiz. To‘ldiruvchi to‘plamning ta’rifiga ko‘ra, $x\in U$ va $x\notin A\cap B$, ya’ni U to‘plamning x elementi, bir vaqtning o‘zida, ham A to‘plamning, ham B to‘plamning elementi bo‘la olmaydi. Bu yerda uchta hol bor:

1) $x\notin A$ (1-b shakl); 2) $x\notin B$ (1-d shakl);

3) $x\notin A$ va $x\notin B$ (1-e shakl).

1) holda $x\in\overline{A}$, 2) holda $x\in\overline{B}$, 3) holda esa $x\in\overline{A}$ va $x\in\overline{B}$ bo‘ladi. Birlashmaning ta’rifiga ko‘ra $x\in\overline{A}\cup\overline{B}$.

Endi $\overline{A}\cup\overline{B}$ to‘plamning ixtiyoriy elementi x bo‘lsin. Bu holda $x\in\overline{A}$ yoki $x\in\overline{B}$. Bu natijadan $x\notin A$ yoki $x\notin B$ bo‘lishi kelib chiqadi. Shuning uchun $x\in U$ va $x\notin A\cap B$. Demak, $x\in\overline{A\cap B}$. ■

9- teorema. *U universal to‘plamning ixtiyoriy A va B qism to‘plamlari uchun $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ tenglik o‘rinlidir.*

I s b o t i . A va B to‘plamlar U universal to‘plamning ixtiyoriy qism to‘plamlari bo‘lsin. $A\bigcup B$ to‘plamning ixtiyoriy elementini x bilan belgilaymiz. x element 1-e shaklda to‘g‘ri to‘rtburchakning bo‘yalgan qismida yotadi. x $A\bigcup B$ munosabatdan $x\in U$ va $x\notin A\bigcup B$ bo‘lishi kelib chiqadi. $x\notin A\bigcup B$ munosabat va birlashmaning ta’rifiga asosan, x element A to‘plamga ham (1-b shaklga qarang), B to‘plamga ham (1-d shaklga qarang) tegishli emas, ya’ni $x\in U$, x A va x B. Bu yerdan $x\in \overline{A}$ va $x\in \overline{B}$ munosabatlar o‘rinliligini topamiz. Shunday qilib, kesishmaning ta’rifiga asosan, x $A\bigcap B$.

Endi $A\bigcap B$ to‘plamning ixtiyoriy elementi x bo‘lsin. Bu holda, kesishmaning ta’rifiga binoan, $x\in \overline{A}$ va $x\in \overline{B}$ bo‘ladi. Bu yerdan, to‘ldiruvchi to‘plamning ta’rifiga ko‘ra, x A va x B bo‘lishini topamiz. Demak, qaralayotgan x element bir vaqtning o‘zida A to‘plamga ham, B to‘plamga ham tegishli emas. Shuning uchun, birlashmaning ta’rifiga ko‘ra, $x\notin A\bigcup B$ bo‘ladi. Shunday qilib, to‘ldiruvchi to‘plamning ta’rifiga asosan, x $A\bigcup B$. ■ Yuqorida isbotlangan 8- va 9- teoremalardagi $\overline{A\bigcap B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$ va $\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B}$ tengliklar **de Morgan qonunlari** deb yuritiladi.

Ogastes (Avgustus) de Morgan

10-t e o r e m a . *Ixtiyoriy A va B to‘plamlar uchun $A\bigcup (A\bigcap B) = A$ tenglik o‘rinlidir.*

I s b o t i . Ixtiyoriy A va B to‘plamlar U universal to‘plamning qism to‘plamlari bo‘lsin. $A\bigcap U = A$ bo‘lgani uchun 1- teoremaga (1-bandiga qarang) asosan $A\bigcup (A\bigcap B)=$ $=(A\bigcap \mathbf{U}) \bigcup (A\bigcap B)$ munosabat o‘rinlidir. Oxirgi tenglikning o‘ng tomonidagi ifoda uchun kesishmaga nisbatan distributivlik qonunini qo‘llab, uni $A\bigcup(A\bigcap B) =A\bigcap(U\bigcup B)$ ko‘rinishga keltiramiz. Endi $U\bigcup B=U$ va $A\bigcap U = A$ tengliklarni e’tiborga olsak, $A\bigcup(A\bigcap B) =A\bigcap U = A$ kelib chiqadi.■

11- t e o r e m a . *Ixtiyoriy A va B to‘plamlar uchun $A\bigcap(A\bigcup B) = A$ tenglik o‘rinlidir.*

I s b o t i . Avvalo kesishmaga nisbatan distributivlik qonunini, keyin esa idempotentlik qonunini qo‘llasak, isbotlanishi kerak bo‘lgan tenglikning chap tomoni uchun $A\bigcap (A\bigcup B) = (A\bigcap A)\bigcup(A\bigcap B)=$ $= A\bigcup(A\bigcap B)$ munosabatlar o‘rinli bo‘lishini aniqlaymiz. 10- teoremaga asosan $A\bigcap(A\bigcup B) = A\bigcup(A\bigcap B) = A$. ■

10- va 11- teoremalarda isbotlangan $A\bigcup(A\bigcap B)=A$ va $A\bigcap(A\bigcup B)=A$ tengliklar **yutilish qonunlari** deb yuritiladi.

Yuqorida isbotlangan teoremalarda keltirilgan tengliklar tahlil qilinganda ularning ba'zi xususiyatlarini payqash mumkin. Masalan, 6- va 7-, 8- va 9- hamda 10- va 11- teoremalardagi tengliklarning biri ikkinchisidan $\bigcup$ va $\bigcap$ belgilarni o'zaro almashtirish yordamida hosil qilinishi mumkin. Xuddi shunday, nolning xossalari bilan birning xossalari to'g'risida ham quyidagilarni aytish mumkin: bu xossalarni ifodalovchi tengliklarning biri ikkinchisidan $\bigcup$ va $\bigcap$ belgilarni hamda $\varnothing$ va $\boldsymbol{U}$ belgilarni o'zaro almashtirish natijasida kelib chiqadi.

To'plamlar algebrasida agar biror tenglikdan shu tenglikdagi (bor bo'lsa) $\bigcup$ belgisini $\bigcap$ belgisiga, $\bigcap$ni $\bigcup$ga, $\varnothing$ni $\boldsymbol{U}$ga, $\boldsymbol{U}$ni $\varnothing$ga birdaniga almashtirish natijasida boshqa tenglikni hosil qilish mumkin bo'lsa, u holda hosil qilingan tenglik dastlabki tenglikka **ikki taraflama (qo'shma) tenglik** deb yuritiladi.

Ravshanki, biror tenglikka ikki taraflama hisoblangan tenglik uchun ikki taraflama tenglik dastlabki tenglik bilan bir xil bo'ladi. Shuning uchun bu tengliklar **o'zaro ikki taraflama (qo'shma) tengliklar** deb nomlanadi. Masalan, nolning xossasini ifodalovchi $A\bigcup\varnothing=A$ va birning xossasini ifodalovchi $A\bigcap \boldsymbol{U}=A$ tengliklar o'zaro ikki taraflama (qo'shma) tengliklardir.

1.3.2. Ekvivalent tasdiqlar. To'plamlar algebrasining asosiy qonunlariga qo'shimcha quyidagi teoremani keltiramiz.

12- teorema. *Ixtiyoriy A va B to'plamlar uchun quyidagi tasdiqlar ekvivalentdir:*

1) $A\subseteq B$; *2)* $A\bigcap B=A$; *3)* $A\bigcup B=B$.

Isboti. 1. Teoremaning 1) tasdig'i o'rinli bo'lsin. U holda $A\bigcap B=A$ munosabat to'g'rligini isbotlaymiz. Avvalo, to'plamlarning kesishmasi ta'rifiga ko'ra, $A\bigcap B\subseteq A$ bo'ladi. Endi A to'plamning ixtiyoriy elementini x bilan belgilaymiz. U holda $A\subseteq B\Rightarrow x\in B$. Demak, to'plamlarning kesishmasi ta'rifiga ko'ra, $x\in A\bigcap B$, ya'ni $A\subseteq A\bigcap B$. Shunday qilib, $A\bigcap B\subseteq A$ va $A\subseteq A\bigcap B$ bo'lganidan $A\bigcap B=A$ o'rinlidir.

2. $A\bigcap B=A\Rightarrow A\bigcup B=B$ bo'lishini isbotlash uchun, avvalo, $A\bigcup B$ ifodadagi A to'plamning o'rniga unga teng bo'lgan $A\cap B$ to'plamni qo'yib, $(A\bigcap B)\bigcup B$ ifodani hosil qilamiz. So'ngra, bu ifodaga

birlashmaga nisbatan distributivlik qonunini qo‘llab, $(A\bigcup B)\bigcap(B\bigcup B)$ ifodani hosil qi’lamiz. Idempotentlik qonuniga asosan $B=B\bigcup B$ o‘rinlidir. Shuning uchun $(A\bigcup B)\bigcap(B\bigcup B)$ ifodani $(A\bigcup B)\bigcap B$ ko‘rinishda yozish mumkin. Oxirgi ifoda yutilish qonuniga asosan B ga teng. Demak, $A\bigcup B=B$.

3. $A\bigcup B=B\Rightarrow A\subseteq B$ munosabatni tekshiramiz. Teskarisini faraz qilamiz, ya’ni $A\bigcup B=B$ tenglik o‘rinli bo‘lsa-da, A to‘plam B to‘plamning qism to‘plami bo‘lmasin. U holda A to‘plam tarkibida B to‘plamga tegishli bo‘lmagan hech bo‘lmasa bitta x element topiladi, ya’ni $x\in A$ va $x\notin B$. To‘plamlarning birlashmasi ta’rifiga asosan $x\in A$ bo‘lganidan $x\in A\bigcup B$ munosabat o‘rinlidir. $A\bigcup B=B$ tenglikdan $x\in B$ kelib chiqadi. Hosil bo‘lgan ziddiyat, ya’ni, ham $x\notin B$, ham $x\in B$ bo‘lishi qilgan farazimizning noto‘g‘riligini isbotlaydi. Demak. $A\bigcup B=B$ tenglikdan $A\subseteq B$ munosabat kelib chiqadi. ■

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Yuqorida isbotlangan teoremalardan mumkin qadar kam foydalangan holda quyidagi tengliklarni isbot qiling:

a) $(A\bigcap B\bigcap C)\bigcup(\overline{A}\bigcap B\bigcap C)\bigcup\overline{B}\bigcup\overline{C}=\mathbf{U}$;

b) $(A\bigcap B\bigcap C\bigcap\overline{X})\bigcup(\overline{A}\bigcap C)\bigcup(\overline{B}\bigcap C)\bigcup(C\bigcap X)=C$.

2. $\boldsymbol{U}$ universal to‘plamning A va B qism to‘plamlari bo‘lsin. Quyidagi tasdiqlarni isbotlang:

a) ixtiyoriy A to‘plam uchun $A\bigcup B=A\Rightarrow B=\varnothing$;

b) ixtiyoriy A to‘plam uchun $A\bigcap B=A\Rightarrow B=\mathbf{U}$;

d) agar $A\bigcup B=\boldsymbol{U}$ va $A\bigcap B=\varnothing$ bo‘lsa, u holda $B=\overline{A}$ va $A=\overline{B}$ bo‘ladi.

3. Quyidagi tengliklarni isbot qiling:

a) $A\setminus(B\bigcup C)=(A\setminus B)\bigcap(A\setminus C)$; b) $A\setminus(B\bigcap C)=(A\setminus B)\bigcup(A\setminus C)$;

d) $A\setminus B=A\setminus(A\bigcap B)$; e) $A\setminus(A\setminus B)=A\bigcap B$;

f) $A\bigcup B=A\bigcup(B\setminus A)$; g) $(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)$;

h) $A\bigcap(B\setminus C)=(A\bigcap B)\setminus C$; i); $A\bigcap(B\setminus C)=(A\bigcap B)\setminus(A\bigcap C)$;

j) $A\bigcap(B\setminus A)=\varnothing$; k) $A\setminus(B\bigcup C)=(A\setminus B)\setminus C$;

l) $\overline{A\bigcap\overline{B}}\bigcup B=\overline{A}\bigcup B$ m) $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\bigcup(A\bigcap C)$;

n) $(A\bigcup B)\setminus C=(A\setminus C)\bigcup(B\bigcap C)$.

4. Ixtiyoriy A va B to'plamlar uchun quyidagi tasdiqlarning o'rinli bo'lishini ko'rsating:

a) $(A\setminus B)\bigcup B = A \Rightarrow B \subseteq A$; b) $B \subseteq A \Rightarrow (A\setminus B)\bigcup B = A$ (a) banddagi tasdiqqa teskari tasdiq); d) $(A\bigcap B)\bigcup C = A\bigcap(B\bigcup C) \Leftrightarrow C \subseteq A$.

5. Ushbu paragrafda isbotlangan teoremalardagi tengliklarni tahlil qiling va o'zaro ikki taraflama (qo'shma) bo'ladidan tengliklarlarni aniqlang.

6. $|A| = n$, $|B| = k$, $A \subset C \subset B$ va $A \subseteq D \subseteq B$ bo'lsa, n, k, $|C|$ va $|D|$ sonlarni solishtiring.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Idempotentlik qonuni qanday ifodalanadi?
2. Involyutivlik qonuni nimani anglatadi?
3. Birlashmaga nisbatan kommutativlik qonunini qanday tushunasiz?
4. Birlashmaga nisbatan assotsiativlik qonuni deganda nimani tushunasiz?
5. Kesishmaga nisbatan kommutativlik qonuni bilan assotsiativlik qonuni bir biridan nima bilan farq qiladi?
6. Birlashmaga nisbatan distributivlik qonuni bilan kesishmaga nisbatan distributivlik qonunining qanday o'xshashligi bor?
7. De Morgan qonunlarini bilasizmi?
8. Yutilish qonunlarida nima "yutiladi"?
9. Bir-biriga o'xshash tengliklar deganda nimani tushunasiz?
10. Ikki taraflama (qo'shma) tengliklar deb qanday tengliklarga aytiladi?
11. Qanday tengliklarga o'zaro qo'shma tengliklar deymiz?
12. Ekvivalent tasdiqlar deganda nimani tushunasiz?

1.4.Kortejlar

To'plam. Element. Kortej. Kortejning uzunligi. Vector. Juftlik. Uchlik. To'rtlik. n-lik. Komponenta. Koordinata. To'plamlarning Dekart (to'g'ri) ko'paytmasi. To'plamning darajasi. Dekart ko'paytmalarining kesishmasi va birlashmasi. Bo'sh Dekart ko'paytmasi. Morze alifbosi.

1.4.1. Kortej[1] tushunchasi. Matemetikada to'plam tushunchasi bilan bir qatorda kortej tushunchasi alohida o'rin tutadi. Turli xossalarga ega

[1] Kortej (cortège) – fransuzcha so'z bo'lib, tantanali yurish ma'nosini beradi.

bo‘lgan obyektlar bilan ish ko‘rganda kortej tushunchasidan foydalanish mumkin. Kortej tushunchasi yordamida kombinatorikaning ko‘plab tushunchalari tabiiy ravishda oson anglanadi. Kortej tushunchasini o‘rganishdan oldin to‘plamning elementlari takrorlanmasligini eslatib o‘tamiz.

Ixtiyoriy $A_1, A_2, ..., A_n$ to‘plamlar berilgan bo‘lsin. Bu to‘plamlarning ixtiyoriy biridan, masalan, A_{i_1} to‘plamdan qandaydir a_{i_1} elementni, A_{i_1} to‘plamdan boshqa istalgan A_{i_2} to‘plamning qandaydir a_{i_2} elementini va hokazo, oxirgi A_{i_n} to‘plamdan qandaydir a_{i_n} elementni olamiz. Bu elementlarni ularning berilgan to‘plamlardan olinishi tartibida joylashtirib $< a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_n} >$ tuzilmaga ega bo‘lamiz. Bu tuzilmada har bir element o‘zining qat’iy joylashish o‘rniga ega. Shunday usul bilan boshqa tuzilmalarni ham hosil qilish mumkin. Bu tuzilmalarning har biri **elementar kortej** (qisqacha, **kortej**) deb yuritiladi. Kortejni boshqa usullar yordamida ham tashkil qilish mumkin. Masalan, faqat bitta to‘plam elementlaridan (hattoki, bu to‘plam yagona elementli bo‘lsa ham) foydalanib, tarkibida elementlari ko‘p bo‘lgan kortej tuzish mumkin. Kortejlarni belgilashda, ko‘pincha, lotin yoki grek alifbosining bosh harflaridan foydalaniladi.

1- ta’rif. *Kortejni tashkil etuvchilar shu kortejning* ***elementlari*** *deb ataladi.*

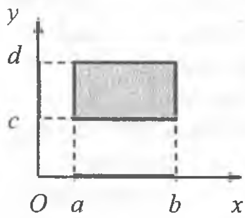
Kortejni tashkil qilishda ishtirok etayotgan $A_1, A_2, ..., A_n$ to‘plamlar ixtiyoriy bo‘lgani uchun bu to‘plamlar umumiy elementlarga ega bo‘lishi ehtimoldan xoli emas. Demak, umuman olganda, $K =< a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_n} >$ kortej tarkibidagi **elementlar takrorlanishi mumkin**. Berilgan K kortejga a element tegishliligi $a \in K$ yoki $K \ni a$ ko‘rinishda belgilanadi.

Ba’zi hollarda kortej iborasining o‘rniga **vektor** yoki, uning **uzunligini** e’tiborga olgan holda, **juftlik** (uzunligi ikkiga teng kortej), **uchlik**, **to‘rtlik** va hokazo n**-lik** (uzunligi n ga teng kortej) iboralari ham ishlatiladi. Uzunligi n bo‘lgan kortej n **o‘rinli kortej** deb ham yuritiladi.

2- ta’rif. *Kortejni tashkil etuvchi elementlar soni (kortejning uzunligi)* ***kortejning quvvati*** *deb ataladi.*

Berilgan K kortejning quvvati $|K|$ ko‘rinishda belgilanadi. Kortej tarkibidagi elementlar takrorlanishi mumkinligidan, ularning kortejda tutgan **o‘rinlari** muhim hisoblanadi. Shuning uchun kortejning muayyan elementi nazarda tutilganda, uning o‘rnini aniqlovchi raqam hisobga olinishi kerak.

Quvvatlari teng bo‘lgan ikkita kortejning mos o‘rinlaridagi elementlari aynan bir xil bo‘lsagina bu **kortejlar teng** deb hisoblanadi.



1- shakl

3- ta'rif. *Kortejni tashkil qiluvchi elementlar, uning* ***komponentlari*** *yoki* ***koordinatalari*** *deb ataladi.*

Tabiiyki, uzunliklari teng bo‘lmagan kortejlar teng emas. Kortejlar teng bo‘lishi uchun ularning mos komponentlari o‘zaro bir xil bo‘lishi shart. Masalan, to‘rt komponentli $<1,\{a,b\},c,\{2,5,4\}>$ va $<1,\{b,a\},c,\{5,2,4\}>$ kortejlar o‘zaro tengdir, chunki ularning toq o‘rinlaridagi komponentlari aynan bir xil va juft o‘rinlarida turgan komponentlari esa to‘plamlar sifatida bir-biriga teng bo‘lgani uchun aynan bir xildir.

1- misol. $X=\{a,b\}$, $Y=\{b,c,d\}$ va $Z=\{e\}$ to‘plamlar uchun ularning berilish tartibiga (X,Y,Z) mos keluvchi hamda har bir to‘plamdan faqat bittadan element olish sharti bilan tuzilgan barcha elementar kortejlar quyidagilardir: $<a,b,e>$, $<a,c,e>$, $<a,d,e>$, $<b,b,e>$, $<b,c,e>$, $<b,d,e>$. ■

2- misol. To‘g‘ri burchakli xOy Dekart koordinatalar sistemasining abssissalar va ordinatalar o‘qlariga ikkita $[a,b]$ va $[c,d]$ kesmalar 1-shakldagidek joylashtirilgan bo‘lsin. U holda shakldagi bo‘yalgan to‘g‘ri to‘rtburchak va uning chegaralaridagi barcha nuqtalarning koordinatalariga mos qilib tuzilgan (x,y) juftliklar kortejlardan iborat bo‘ladi. Ta’kidlaymizki, bu yerda kortejlar cheksiz ko‘pdir. ■

14C2993

2- shakl

3- misol. 1835- yilda S. Morze[1] tomonidan yaratilgan matnli ma’lumotni kodlash sistemasi (**Morze alifbosi**) bir asrdan ko‘p davr mobaynida ma’lumot uzatishda asosiy sistema bo‘lib keldi. Bu sistemada faqat ikkita bir-biridan farqli elementlar – nuqta “•” (qisqa signal) va tire “–“ (uzun signal) bo‘lib, ular yordamida matndagi belgilar (harflar, raqamlar va boshqalar) kodlanadi. Bunday usulda tuzilgan har bir kodni kortej deb hisoblash mumkin. Morze alifbosida uzunliklari birdan oltigacha bo‘lgan kortejlar bor. ■

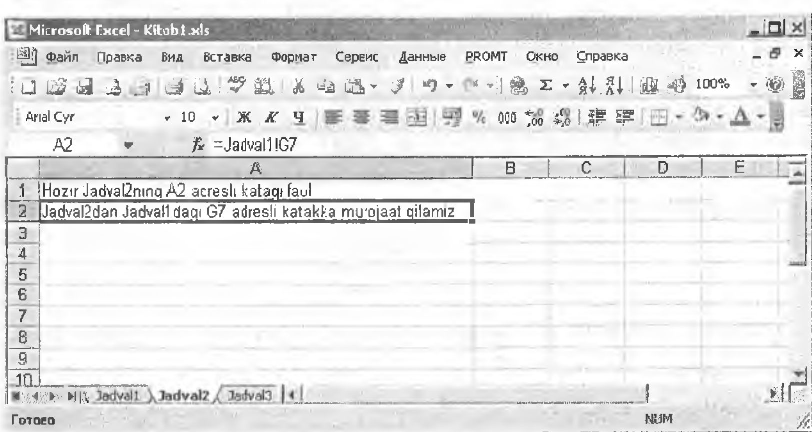
4- misol. O‘zbekiston Respublikasida shaxsiy avtomobillarni davlat ro‘yxatiga olishda yetti o‘rinli kortejlardan foydalaniladi. Har bir kortejdagi dastlabki ikki o‘ringa 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 raqamlar, uchinchi o‘ringa lotin alifbosining 26 harfidan bittasi va qolgan to‘rt o‘ringa raqamlar joylashtiriladi. Bunday usulda tuzilgan har bir ro‘yxatga olish belgisini kortej deb hisoblash mumkin. Tabiiyki, bu yerda raqamlar

[1] Semyuel Finli Briz Morze (Samuel Finley Breese Morse, 1791-1872) – AQSh kashfiyotchisi va rassomi.

takrorlanishlari mumkin. Masalan, 2- shaklda tasvirlangan ro‘yxatga olish belgisiga mos keluvchi $<1,4,C,2,9,9,3>$ kortejda 9 raqami ikki marta yozilgan. ■

5- m i s o l. Microsoft (MS) Office tarkibiga kiruvchi MS Excel sistemasida ma’lumotlar elektron jadvallardagi kataklarga joylashtiriladi. Foydalanuvchi bu jadvallarni turli nomlar bilan belgilab, ma’lumotlarni fayl shaklida kompyuter xotirasida saqlashi mumkin. Har bir elektron jadval ustunlar va satrlarga ega. MS Excel sistemasida ustunlar (jami 256ta) lotin alifbosi tartibida oldin “A”dan “Z”gacha bitta harf bilan, keyin “AA”dan “IV”gacha ikkita harf bilan, satrlar esa 1dan 65536gacha sonlar bilan belgilanadi. Bu yerda, jadvallar nomlari, jadvalning ustunlari va satrlari to‘plamlaridan bittadan elementni tartib bilan olib uch o‘rinli kortej tuzish mumkin. Bunday usul vositasida tuzilgan uch o‘rinli barcha kortejlar soni $k = \text{jadvallar\_soni} \times 65536 \times 256$ bo‘ladi. MS Excel sistemasida bu kortejlardan elektron jadvallardagi kataklarning adreslari sifatida foydalaniladi. Masalan, nomi Jadval1 bo‘lgan elektron jadvalning G harfi bilan belgilangan ustuni va 7 raqami bilan belgilangan satri kesishgan joyidagi katakka $<\text{jadval1},G,7>$ ko‘rinishdagi kortej mos keladi. Bu katakning MS Excel sistemasidagi adresi Jadval1!G7 ko‘rinishga ega bo‘lib, unga Kitob1.xls nomli faylning Jadval2 elektron jadvalidan murojaat qilish 3- shaklda tasvirlangan. ■

1.4.2. To‘plamlarning Dekart[1] ko‘paytmasi va u bilan bog‘liq ba’zi amallar. Yuqorida turli tabiatli to‘plamlar yordamida aniqlanuvchi kortej



3- shakl

[1] Rene Dekart (René Descartes, 1596-1650) – fransuz matematigi va faylasufi.

tushunchasi bilan tanishdik. O'z navbatida bu tushunchadan foydalanib to'plamlarning Dekart ko'paytmasi tushunchasini kiritish mumkin.

4- ta'rif. *Tartiblangan* $A_1, A_2, ..., A_n$ *to'plamlar elementlaridan tuzilgan* n *o'rinli barcha kortejlar to'plami shu to'plamlarning* ***Dekart ko'paytmasi*** *deb ataladi.* Ba'zan to'plamlarning Dekart ko'paytmasi iborasi o'rnida **to'plamlarning to'g'ri ko'paytmasi** iborasidan ham foydalaniladi. Tartiblangan $A_1, A_2, ..., A_n$ to'plamlarning Dekart ko'paytmasi $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ yoki $\prod_{i=1}^{n} A_i$ ko'rinishda belgilanadi, ya'ni

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i = \{< a_1, a_2, ..., a_n > | a_i \in A_i, i = \overline{1, n}\}.$$

To'plamlarning Dekart ko'paytmasi tushunchasining aniqlanishida bu ko'paytmada qatnashuvchi to'plamning soni ham muhim hisoblanadi. Zarur bo'lganda, n ta to'plamlarning Dekart ko'paytmasi iborasi o'rnida n **o'rinli Dekart ko'paytmasi** iborasi ham qo'llaniladi.

Tabiiyki, agar $A_1, A_2, ..., A_n$ to'plamlarning birortasi bo'sh to'plam bo'lsa, u holda ulardan foydalanib birorta ham kortej tuzish imkoniyati yo'q. Demak, tarkibida hech bo'lmasa bitta bo'sh to'plam qatnashgan $A_1, A_2, ..., A_n$ to'plamlarning Dekart ko'paytmasi ham **bo'sh** to'plamdir, ya'ni $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \varnothing$.

Dekart ko'paytmasidan to'plamlar bilan bog'liq murakkab tuzilmalarni hosil qilishda va ularda ko'paytma tushunchasini aniqlashda foydalaniladi. Ammo bunday hollarda aniqlangan ko'paytirish amali Dekart ko'paytmasining xossalaridan farqli xossalarga ham ega bo'lishi mumkin. Jumladan, tuzilmalardan birortasi bo'sh to'plam bo'lsa-da, ularning ko'paytmasi bo'sh bo'lmagan hollar bor. Masalan, X bobning 3- paragrafida keltirilgan graflarni ko'paytirish amali shunday xususiyatga ega.

To'plamlarning to'g'ri ko'paytmasi tushunchasidan foydalanib, **to'plamning darajasi** tushunchasi

$$A^n = \underbrace{A \times A \times ... \times A}_{n\ marta}$$

formula asosida kiritiladi. Masalan, $A^1 = A$, $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A$. Umuman olganda, $A^n = A \times A^{n-1}$.

n o'rinli $A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ va $B = B_1 \times B_2 \times ... \times B_n$ Dekart ko'paytmalari berilgan bo'lsin.

5- ta'rif. *Agar* $A_1 \subseteq B_1$, $A_2 \subseteq B_2, ..., A_n \subseteq B_n$ *munosabatlar o'rinli bo'lsa, u holda* A *Dekart ko'paytmasi* B ***Dekart ko'paytmasining qismi*** *deb ataladi.*

A Dekart ko'paytmasi B Dekart ko'paytmasining qismi bo'lishi $A \subseteq B$ kabi belgilanadi.

To'plamlarning n o'rinli Dekart ko'paytmasi ta'rifidan foydalanib va II bobning 1- paragrafida keltirilgan umumlashgan ko'paytirish qoidasi asosida $\left|\prod_{i=1}^{n} A_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$ tenglik o'rinli bo'lishini ko'rsatish qiyin emas. Bu munosabatdan, xususiy holda, ixtiyoriy n natural son va chekli A to'plam uchun $|A^n| = |A|^n$ tenglikning o'rinli ekanligi kelib chiqadi (II bobning 1- paragrafidagi 7- muammoli topshiriqqa qarang).

6- misol. Ma'lumotlar bazalarini boshqarish tizimlarida (MBBTda) n**-darajali munosabat** (n**-ar munosabat**) deganda $A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ Dekart ko'paytmasining biror qismi tushuniladi. Ma'lumotlar bazalarini boshqarishning relyatsion[1] nazariyasi negizida yotuvchi munosabat tushunchasidan foydalanish g'oyasini 1970- yilda E. Kodd[2] taklif qilgan edi. Umuman olganda, MBBTdagi munosabat tushunchasi biz odatda jadval deb yuritadigan ma'lumotlar to'plamiga mos keladi. Har bir jadval nomga, sarlavhaga va asosiy qismga (tanaga) ega deb hisoblanadi. Bu yerda jadvalning sarlavhasidagi va uning tanasidan o'rin olgan har bir satridagi ma'lumotlarni kortejlar deb qarash mumkin. Jadvaldagi har bir satrning biror ustun bilan kesishgan joyi (katagi) ma'lumot tashuvchi sifatida shu satrga mos kortejning komponentalaridan biridir. MBBTda kortejlar deganda jadvalning tanasidagi satrlar tushuniladi. Odatdagi jadvaldagidek, MBBTda ham munosabatning (jadvalning) har bir ustuniga nom beriladi va bu nomlar jadvalning sarlavhasini tashkil etadi. Masalan, 1- jadvaldagi "TALABA" nomli munosabat "Tartib raqami", "Familiyasi", "Ismi", "Jinsi", "Tug'ilgan yili" va "O'qishga kirgan yili" kabi komponentalari bo'lgan kortej bilan aniq-lanuvchi sarlavhaga ega. Bu munosabatda MBBT ma'nosida to'rtta kortej bor. Shu kortejlardan biri $<$ 1,Rahimova,Dilafruz,Ayol,1982,2005 $>$ ko'rinishga ega. ■

---

[1] Bu so'z ingliz tilidagi "relation" so'zidan olingan bo'lib, munosabat ma'nosini anglatadi.
[2] Kodd (Edgar Frank "Ted" Codd, 1923-2003) –ingliz informatika mutahassisi.

Dekart ko'paytmasi berilgan to'plamlardan foydalanib tuziluvchi qandaydir to'plamni aniqlagani sababli to'plamlar ustidagi amallar Dekart ko'paytmalari uchun ham qo'llanilishi mumkin. Bu yerda, odatda, Dekart ko'paytmasining tuzilishidagi o'ziga xoslikni hisobga olishga to'g'ri keladi. Birlashma amali o'rganilganda, "o'rinlari soni teng bo'lgan ikkita **Dekart ko'paytmalarning birlashmasini** qandaydir top'lamlarning Dekart ko'paytmasi deb qarash mumkinmi?" degan savol tug'iladi. Tushunarliki, agar bu Dekart ko'paytmasini tashkil qiluvchi top'lamlarni birlashtirilayotgan Dekart ko'paytmalar mos o'rinlaridagi to'plamlarning birlashmalari sifatida aniqlash mumkin bo'lsa, u holda yuqoridagi savolga ijobiy javob berilgan bo'ladi. Ammo, umumiy holda $A=\prod_{i=1}^{n} A_i$ va $B=\prod_{i=1}^{n} B_i$ Dekart ko'paytmalar tarkibidagi A_i va B_i to'plamlarni birlashtirib hosil qilingan Dekart ko'paytmasining tarkibiga birlashtirilayotgan A va B Dekart ko'paytmalarning ikkalasida ham mavjud bo'lmagan elementar kortejlar ham kirib qolishi mumkin. Shuning uchun qaralayotgan A va B Dekart ko'paytmalarining birlashmasi $A \cup B$ uchun $\prod_{i=1}^{n} A_i \cup \prod_{i=1}^{n} B_i \subseteq \prod_{i=1}^{n} (A_i \cup B_i)$ munosabat o'rinlidir. Albatta, bu munosabat tenglik sifatida namoyon bo'ladigan hollar ham bor. Masalan, ikkita A va B Dekart ko'paytmalari uchun $A \subseteq B$ bo'lsa, u holda $A \cup B = B$ bo'ladi.

1-jadval

TALABA

Tartib raqami	Familiyasi	Ismi	Jinsi	Tug'ilgan yili	O'qishga kirgan yili
1	Rahimova	Dilafruz	Ayol	1982	2005
2	Islomov	Rustam	Erkak	1985	2006
3	Isrofilova	Gulsara	Ayol	1985	2005
4	Oqilova	Robiya	Ayol	1987	2006

7- misol. Berilgan ikkita $A=\{a,c,1,\otimes\}\times\{1,\Delta\}\times\{\otimes,\Delta\}$ va $B=\{b,c,1\}\times\{2,a,\Delta\}\times\{\otimes\}$ Dekart ko'paytmalarini

$$A=\{<a,1,\otimes>,<a,1,\Delta>,<a,\Delta,\otimes>,<a,\Delta,\Delta>,<c,1,\otimes>,<c,1,\Delta>,$$
$$<c,\Delta,\otimes>,<c,\Delta,\Delta>,<1,1,\otimes>,<1,1,\Delta>,<1,\Delta,\otimes>,$$
$$<1,\Delta,\Delta>,<\otimes,1,\otimes>,<\otimes,1,\Delta>,<\otimes,\Delta,\otimes>,<\otimes,\Delta,\Delta>\},$$
$$B=\{<b,2,\otimes>,<b,a,\otimes>,<b,\Delta,\otimes>,<c,2,\otimes>,$$

$<c,a,\otimes>, <c,\Delta,\otimes>, <1,2,\otimes>, <1,a,\otimes>, <1,\Delta,\otimes>\}$

ko'rinishda yozamiz. Ravshanki, $A\bigcup B$ to'plamda 23ta kortej bo'lib, bu kortejlar $(\{a,c,1,\otimes\}\bigcup\{b,c,1\})\times(\{1,\Delta\}\bigcup\{2,a,\Delta\})\times(\{\otimes,\Delta\}\bigcup\{\otimes\})$ Dekart ko'paytmasi tarkibida qatnashadi. Lekin bu Dekart ko'paytmasini $\{a,b,c,1,\otimes\}\times\{a,1,2,\Delta\}\times\{\otimes,\Delta\}$ ko'rinishida yozsak, uning tarkibida 40ta kortej bo'lishini ko'rish qiyin emas. Demak, $A\bigcup B\subset\{a,b,c,1,\otimes\}\times$ $\times\{a,1,2,\Delta\}\times\{\otimes,\Delta\}$. ■

8- misol. Dekart ko'paytmalarining birlashmasi amaliga o'xshash amalga misol qilib MBBTda (6- misolga qarang) ma'lumotlarni qayta ishlashning standart tili sifatida qabul qilingan SQL (Structured Query Language) tilida sarlavhalari mos keluvchi ikkita A va B munosabatlarni (jadvallarni) birlashtirishda qo'llaniladigan "A UNION B" operatori bajaradigan amalni keltirish mumkin. SQL tilida sarlavhalari mos keluvchi A va B munosabatlarga A UNION B birlashtirish operatorini qo'llash natijasida sarlavhasi A va B munosabatlardagidek bo'lgan yangi munosabat hosil bo'ladi. Bu munosabatning asosiy qismi berilgan A va B munosabatlardagi kortejlar to'plamlarining birlashmasidan iborat. Masalan, 2- jadvaldagi Y nomli va 3- jadvaldagi Z nomli munosabatlarga birlastirish operatorini Y UNION Z ko'rinishda qo'llab, 4- jadvaldagi YUZ nomli munosabatga ega bo'lamiz. ■

2- jadval

Y munosabati

Bo'lim raqami	Familiyasi	Ismi	Ish haqi
1	Abdullayeva	Nazokat	100000
2	Hojiyev	Tolib	120000
3	O'rinboyev	Erkin	93000
4	Islomov	Davronqul	132000

n o'rinli ikkita $A=\prod_{i=1}^{n}A_i$ va $B=\prod_{i=1}^{n}B_i$ Dekart ko'paytmalar berilgan bo'lsin. Bu A va B **Dekart ko'paytmalarining** $A\bigcap B$ **kesishmasi** $A\bigcap B=\prod_{i=1}^{n}(A_i\bigcap B_i)$ formula yordamida aniqlanadi.

3- jadval

Z munosabati

Bo‘lim raqami	Familiyasi	Ismi	Ish haqi
1	Abdullayeva	Nazokat	100000
2	Shodiyev	Usmon	125000
4	O‘rinboyev	Erkin	93000
5	Mo‘minov	Muhiddin	127000

9- misol. Ikkita $\{1,3,4\}\times\{2,3\}\times\{2,3,5\}$ va $\{1,2,3,4\}\times\{1,3,4\}\times$ $\times\{2,3,4\}$ Dekart ko‘paytmalari berilgan bo‘lsin. U holda Dekart ko‘paytmalarning kesishmasini aniqlash formulasiga asosan

$$(\{1,3,4\}\times\{2,3\}\times\{2,3,5\})\cap(\{1,2,3,4\}\times\{1,3,4\}\times\{2,3,4\})=$$
$$=(\{1,3,4\}\cap\{1,2,3,4\})\times(\{2,3\}\cap\{1,3,4\})\times(\{2,3,5\}\times\{2,3,4\})=$$
$$=\{1,3,4\}\times\{3\}\times\{2,3\}.$$

4- jadval

***YUZ* munosabati**

Bo‘lim raqami	Familiyasi	Ismi	Ish haqi
1	Abdullayeva	Nazokat	100000
2	Hojiyev	Tolib	120000
3	O‘rinboyev	Erkin	93000
4	Islomov	Davronqul	132000
2	Shodiyev	Usmon	125000
4	O‘rinboyev	Erkin	93000
5	Mo‘minov	Muhiddin	127000

Hosil bo‘lgan Dekart ko‘paytmasi quyidagi oltita elementar kortejlardan tashkil topishi ravshandir: $<1,3,2>$, $<1,3,3>$, $<3,3,2>$, $<3,3,3>$, $<4,3,2>$, $<4,3,3>$. Albatta, topilgan bu natijani har bir Dekart ko‘paytmasidagi elementar kortejlarni yozib (birinchi Dekart ko‘paytmasida 18ta, ikkinchisida esa 36ta elementar kortej mavjud), keyin bu kortejlardan ikkala Dekart ko‘paytmasida ham bor bo‘lganlarini olish usuli bilan ham hosil qilish mumkin. Lekin bu usul ancha ko‘p ish bajarishni talab qiladi.■

10- misol. Dekart ko‘paytmalar kesishmasini aniqlash formulasidan foydalanish bu kesishmaning bo‘sh to‘plam bo‘lib qoladigan hollar uchun yanada ahamiyatlidir. Masalan,

$$(\{a,c,d\}\times\{b,c\}\times\{b,c,e\})\bigcap(\{a,b,d\}\times\{a,d\}\times\{b,c,d\})=$$
$$=\{a,d\}\times\varnothing\times\{b,c\}=\varnothing\,. \blacksquare$$

Muammoli masala va topshiriqlar

1. $<\{a,b\},c,d>=<\{b,a\},c,d>$ tenglik o'rinli bo'lishini izohlang.

2. $<a,<b,c>,d>$ va $<a,<c,b>,d>$ kortejlarni solishtiring.

3. Universitetning xazinasidan oylik maoshini olish uchun navbatda turgan olti kishidan uch nafari assistent (a), ikki nafari dotsent (d) va biri professor (p) bo'lsa, bu kishilar navbatda turishining mumkin bo'lgan barcha imkoniyatlarini aniqlang va bu imkoniyatlarga mos kortejlarni yozing.

4. Morze alifbosida qo'llaniladigan nuqta va tire belgilaridan foydalanib 1, 2, 3 va 4 o'rinli barcha kortejlarni tuzing.

5. Dekart ko'paytmalarining birlashmasi va kesishmasi amallarining qo'llaninlishiga doir amaliy misollar keltiring.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Kortej tushunchasining mohiyati nimadan iborat?
2. To'plam va kortej tushunchalari bir-biridan nima bilan farq qiladi?
3. Kortejning uzunligi deganda nimani tushunasiz?
4. Qanday kortejlar teng deb ataladi?
5. Kortejning koordinatalari nima?
6. Kortejning koordinatasi kortej bo'lishi mumkinmi?
7. Dekart ko'paytmasi deganda nimani tushunasiz?
8. Dekart ko'paytmasining qismi nima?
9. To'plamning darajasi tushunchasi qanday aniqlanadi?
10. Dekart ko'paytmalarining birlashmasi tushunchasi uchun qanday munosabatni yozish mumkin?
11. Dekart ko'paytmalarining kesishmasi qanday formula yordamida aniqlanadi?

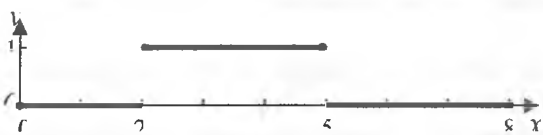
1.5.Fazzi to'plamlar

To'plam. Element. Universal to'plam. Fazzi to'plam. A'zolik funksiyasi. O'tish nuqtasi. Fazzi to'plamning balandligi. Bo'sh, qism, normal, subnormal, unimodal, bir-birini to'ldiruvchi fazzi to'plamlar. To'ldirish, birlashma, kesishma va ayirma amallari.

1.5.1. Asosiy tushuncha va ta'riflar. To'plamlar nazariyasini o'rganishda davom etib quyidagi misolni qarab chiqamiz.

1- misol. [0, 8] segmentda joylashgan haqiqiy sonlardan tashkil topgan to‘plam U universal to‘plam sifatida qabul qilinsa, $A=[2, 5]$ to‘plam uchun $A \subset U$ bo‘lishi ravshandir. 1- shaklda Oxy Dekart koordinatalari sistemasi tasvirlangan bo‘lib, Ox sonlar o‘qining [0, 8] segmentida joylashgan [0, 2) va (5, 8] to‘plamlarning har bir x nuqtasiga Oy sonlar o‘qining 0 hamda [2, 5] to‘plamning har bir x nuqtasiga 1 qiymati mos qo‘yilgan, ya’ni

$$y=\begin{cases}1, \ x \in \mathbf{U}, \ x \in A \text{ bo'lganda,} \\ 0, \ x \in \mathbf{U}, \ x \notin A \text{ bo'lganda.}\end{cases}$$



1- shakl

Agar y ni x ning U to‘plamda aniqlangan $y=y(x)$ funksiyasi deb hisoblasak, u holda $y(x)$ funksiya $x \in U$ elementning A to‘plamga tegishli bo‘lish-bo‘lmasligi xossasini (xususiyatini, xarakterini, xarakteristikasini) ifodalaydi.

Endi O‘zbekiston Respublikasining o‘rta yoshli fuqarolari to‘plamini qaraymiz. Agar, shartli ravishda, yoshi 25dan 45gacha bo‘lgan fuqarolarni o‘rta yoshli deb hisoblasak, bu yerda ham Dekart koordinatalari sistemasidan foydalanib, O‘zbekiston Respublikasi fuqarolarining tug‘ilgan kunlariga qarab, bugungi kun uchun ularning yoshlarini aniqlash va 1-shaklda tasvirlangan grafikka o‘xshash grafik hosil qilish mumkin. Lekin bu o‘rinda qiziq savol paydo bo‘ladi: “bugun 25 yoshga to‘lgan fuqaro kecha yosh edi, endi o‘rta yoshli, yoki bugun 45 yoshini nishonlagan o‘rta yoshli fuqaro ertaga qari bo‘lib qoladimi?” Bu savolga matematik nuqtai nazaridan qat’iy javob beriladigan bo‘lsa (masalan, statistik ma’lumotlar uchun), “albatta, ha”, ammo unga hayotiy nuqtai nazardan yondoshilsa, “albatta, yo‘q” javobi berilishi tabiiydir. ■

Bu misoldan ko‘rinib turibdiki, ba’zan, to‘plam elementlarining shu to‘plamga tegishliligini aniqlaganda vaziyatni qandaydir ma’noda “yumshatuvchi” usuldan foydalanish maqsadga muvofiqdir. Ya’ni to‘plam elementlarining shu to‘plamga tegishliligini emas, tegishlilik darajasini aniqlash ko‘p vaziyatlarda to‘g‘ri qarorlar qabul qilish uchun ma’qul hisoblanadi. Boshqacha aytganda, “Qandaydir narsa, predmet va shunga o‘xshashlar biror to‘plamga tegishlimi?” degan savolga ma’nosi nuqtai nazaridan bir-biriga zid bo‘lgan ikkita “tegishli” yoki “tegishli emas” javoblaridan biri o‘rniga bu narsaning o‘sha to‘plamga tegishliligi

Lutfi Zoda

darajasini ifodalovchi qiymat o‘zida ko‘proq ma’lumotni saqlashi ravshandir.

1965- yilda Lutfi Ali-Asqar Zoda[1] “Information and Control” jurnalida “Fuzzy sets” nomli maqolasini e’lon qilgandan so‘ng yuqoridagiga o‘xshash ko‘plab savollarga javob topildi. Bundan tashqari, bu ilmiy ish nafaqat to‘plamlar nazariyasida, shuningdek, matematikaning boshqa sohalarida ham, hozirgi davrda “Informatika” deb yuritiluvchi fan sohasida ham burilish yasalishiga sabab bo‘ldi. Lutfi Zodaning yuqorida zikr etilgan maqolasi va uning o‘sha mavzuga bag‘ishlangan keyingi ilmiy ishlari dunyoning turli mamlakatlari tillariga tarjima qilindi va o‘rganildi. Dastlabki yillarda bu ilmiy ishlar “haqiqatga zid”, “hech qanday ilmiy asosga ega emas” deganlar ham bo‘ldi. Hozirgi davrda asosida Lutfi Zoda g‘oyalari yotuvchi turli yo‘nalishlar bo‘yicha muvaffaqiyatli ilmiy va amaliy ishlar olib borilmoqda.

1- ta’rif. $(\mu_A(x), x)$ *ko‘rinishdagi juftliklar to‘plami berilgan* X *universal to‘plamda aniqlangan* A ***fazzi to‘plam*** *deb ataladi, bunda* $x \in X$ *va* $\mu_A(x)$ *– qiymatlari sohasi* $[0, 1]$ *bo‘lgan,* ***a’zolik funksiyasi*** *deb ataluvchi funksiya.*

Bu ta’rifda “fazzi to‘plam” iborasi ingliz tilidagi “fuzzy set” iborasi tarkibiga kiruvchi “fuzzy” so‘zini o‘zbek tiliga tarjima qilmasdan berildi. Buning sababi shuki, ingliz tilidagi “fuzzy” so‘zi juda ko‘p, jumladan, yumshoq, mayin, momiqday, tivitli, parli, ochiq-oydin emas, aniq emas, noaniq, sof emas, tiniq emas, yorqin emas, oydun emas, g‘ayri oddiy, xira, mujmal, oshkor emas, g‘ira-shira, cho‘ziluvchan, qarovsiz qoldirilgan, tashlab qo‘yilgan, xarob, tashlandiq, o‘tkazib yuborilgan kabi ma’nolarda ishlatiladi. Albatta, sanab o‘tilganlarning har birini ingliz tilidagi “fuzzy” so‘zining o‘rniga qo‘yib atama yasash mumkin. Lekin, bizning fikrimizcha, bunday atamalarning hech qaysisi “fuzzy set” atamasining asl ma’nosini bermaydi. Ozarbayjon tiliga ingliz tilidagi “fuzzy” so‘zi “qeyri-s□lis” shaklda tarjima qilingan. Fors tilida “fuzzy set” atamasi bilan bog‘liq ishlarda “مجموع فازی” (“majmuai fazzi”) shakli ko‘p qo‘llaniladi.

---

[1] Bu AQSh matematigi va informatigining ismi-sharifi inglizcha Lotfi Asker Zadeh (qisqacha Lotfi Zadeh), forscha لطفی علی‌عسکرزاده shaklda yoziladi. U 1921 yilda Bokuda tug‘ilgan. Otasi Eronlik ozarbayjon, onasi rus. Oilasi bilan 1932- yilda Eronga, 1944- yilda esa AQShga ko‘chib borgan.

Rus tilida yozilgan ishlarga murojaat qiladigan bo‘lsak, “fuzzy set” iborasi dastlab “расплывчатое множество” shaklida ishlatilgan bo‘lsa, keyinchalik “нечеткое множество” iborasidan foydalanish odat tusiga kirdi.

1- ta’rifga ko‘ra berilgan X universal to‘plamda aniqlangan fazzi to‘plam uchun “ X to‘plamning x elementi shu fazzi to‘plamga tegishlimi?” degan savolga bir qiymatli “ha” yoki “yo‘q” javobi berilmaydi. Fazzi to‘plam ta’rifida keltirilgan a’zolik funksiyasi x elementning shu fazzi to‘plamga a’zolik (tegishlilik, ta’alluqlilik) xususiyatini (xarakteristikasini) qandaydir ma’noda yumshatuvchi vosita hisoblanadi. Bu yerda a’zolik funksiyasi iborasi o‘rniga **xarakteristik funksiyasi, tegishlilik funksiyasi** yoki **taalluqlilik funksiyasi** iborasidan ham foydalanish mumkin. A’zolik $\mu_A(x)$ funksiyasining universal to‘plamdagi muayyan x element uchun aniqlangan qiymati x ning A fazzi to‘plamga **a’zolik (tegishlilik, taalluqlilik) darajasini** ifodalaydi.

Agar universal to‘plamning qandaydir x elementi uchun $\mu_A(x)$ funksiya 0 qiymat qabul qilsa, shu x berilgan A fazzi to‘plamga so‘zsiz (shubhasiz, mutlaqo) a’zo emas (tegishli emas, taalluqli emas), 0 qiymat qabul qilganda esa, u A to‘plamning so‘zsiz a’zosi deb hisoblanadi.

1- ta’rifdan ko‘rinib turibdiki, biz ilgari o‘rganib kelgan “oddiy” to‘plamlar sinfi fazzi to‘plamlar sinfining bir qismidir. Haqiqatdan ham, agar B qandaydir X universal to‘plamda berilgan oddiy to‘plam ($B \subseteq X$) bo‘lsa, u holda

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 1, \text{ agar } x \in X \text{ va } x \in B \text{ bo'lsa}, \\ 0, \text{ agar } x \in X \text{ va } x \notin B \text{ bo'lsa}, \end{cases}$$

funksiya B to‘plamning a’zolik funksiyasi bo‘ladi.

2- ta’rif. *Agar berilgan X universal to‘plamda $\mu_A(x)$ a’zolik funsiyasi bilan aniqlangan A fazzi to‘plam barcha $x \in X$ elementlar uchun $\mu_A(x) = 0$ shartni qanoatlantirsa, u holda A* ***bo‘sh*** *fazzi to‘plam deb ataladi.*

Bo‘sh fazzi to‘plamni belgilashda odatdagi $\varnothing$ belgi qo‘llaniladi.

Fazzi to‘plamning berilishi ko‘p jihatdan a’zolik funksiyasining aniqlanishiga bog‘liq bo‘lgani uchun bu o‘rinda subyektiv fikr o‘z ta’sirini o‘tkazishi tabiiydir. Odatda, fazzi to‘plamlarni aniqlashda soddaroq a’zolik funksiyalari bilan ish ko‘rishga harakat qilinadi.

Fazzi to‘plamlarni ifodalashda turli usullar uchraydi, jumladan, Lutfi Zodaning fazzi to‘plamlarga oid ilmiy ishlarida quyidagi atamalar va belgilashlar qo‘llanilgan.

Agar $\mu_A : X \to [0,1]$ a'zolik funksiyasi X universal to'plamning har bir x elementiga $[0,1]$ oraliqdan olingan qandaydir $\mu_A(x)$ qiymat mos qo'yilgan bo'lsa, u holda X to'plamda A **fazzi qism toplam** berilgan deb hisoblanadi. X to'plamning $\mu_A(x) > 0$ bo'lgan barcha x elementlari to'plami A fazzi qism toplamning **tashuvchisi** deb ataladi. Tashuvchisi faqat bitta nuqtadan iborat fazzi to'plam **bir nuqtali fazzi to'plam** deb ataladi. Agar A – tashuvchisi x nuqta bo'lgan bir nuqtali fazzi to'plam bo'lsa, u holda bu to'plam $A = \mu / x$ ko'rinishda belgilanadi, bu yerda μ – x ning A ga a'zolik darajasi. U holda bitta x elementdan tashkil topgan oddiy to'plamni $1/x$ deb yozish mumkin.

X to'plamning $\mu_A(x) = 0{,}5$ shartni qanoatlantiruvchi x elementi A ning **o'tish nuqtasi** deb ataladi.

Berilgan X universal to'plamda $\mu_A(x)$ a'zolik funsiyasi bilan aniqlangan A fazzi to'plamni uning bir nuqtali fazzi to'plamlari birlashmasi sifatida $A = \int\limits_U \mu_A(x)/x$ shaklda ifodalash mumkin, bu yerda integral belgisi $\mu_A(x)/x$ ko'rinishdagi bir nuqtali fazzi to'plamlari birlashmasi amalini (birgalikda deb hisoblashni) anglatadi. Agar A ning tashuvchisi chekli sondagi elementlardan iborat bo'lsa, u holda yuqoridagi integral belgisi o'rniga yiq'indi belgisini qo'yish mumkin:

$$A = \mu_1 / x_1 + \mu_2 / x_2 + \ldots + \mu_n / x_n \text{ yoki } A = \sum_{i=1}^{n} \mu_i / x_i ,$$

bu yerda ham yig'indi belgisi qo'shish amalini emas, bir nuqtali fazzi to'plamlar birlashmasi amalini anglatadi, μ_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ – x_i elementning A to'plamga a'zolik darajasi. Berilgan A fazzi to'plamni

$$A = \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \hline \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \end{array}$$

ko'rinishda ham belgilash mumkin. Oxirgi belgilash ehtimollar nazariyasidagi tasodifiy miqdorni belgilashni eslatsada, fazzi to'plam tushunchasini tasodifiy miqdor tushunchasi bilan tenglashtirib bo'lmaydi.

2- misol. Universal to'plam sifatida $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ to'plam berilgan va unda A fazzi to'plamning $\mu_A(x)$ a'zolik funksiyasi $\mu_A(x_1) = 0{,}4$, $\mu_A(x_2) = 1$, $\mu_A(x_3) = 0$, $\mu_A(x_4) = 0{,}9$, $\mu_A(x_5) = 0{,}5$ tengliklar vositasida aniqlangan bo'lsin. Berilgan A fazzi to'plamni quyidagi shakllarda ifodalash mumkin:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$A=$	0,4	1	0	0,9	0,5

$$A=\{0{,}4/x_1;\,1/x_2;\,0/x_3;\,0{,}9/x_4;\,0{,}5/x_5\},$$

$$A=\{0{,}4/x_1+1/x_2+0/x_3+0{,}9/x_4+0{,}5/x_5\}.\ \blacksquare$$

3- ta'rif. $\sup\limits_{x\in X}\mu_A(x)$ *kattalik berilgan* X *universal to'plamda* $\mu_A(x)$ *a'zolik funksiyasi bilan aniqlangan* A *fazzi to'plamning* ***balandligi*** *deb ataladi.*

4- ta'rif. *Balandligi 1ga teng fazzi to'plam* ***normal****, balandligi 1dan kichik fazzi to'plam esa* ***subnormal*** *fazzi to'plam deb ataladi.*

5- ta'rif. *Agar berilgan* X *universal to'plamda* $\mu_A(x)$ *a'zolik funksiyasi bilan aniqlangan* A *fazzi to'plam uchun faqat bitta* $x\in X$ *elementda* $\mu_A(x)=1$ *bo'lsa, u holda* A ***unimodal*** *fazzi to'plam deb ataladi.*

Berilgan X universal to'plamda $\mu_A(x)$ a'zolik funsiyasi bilan aniqlangan bo'sh bo'lmagan ixtiyoriy A subnormal fazzi to'plamni $\mu_A(x):=\dfrac{\mu_A(x)}{\sup\limits_{x\in U}\mu_A(x)}$ formuladan foydalanib normal fazzi to'plam qilib ifodalash imkoniyati bor.

X universal to'plamda mos ravishda $\mu_A(x)$ va $\mu_B(x)$ a'zolik funsiyalari bilan aniqlangan A va B fazzi to'plamlar berilgan bo'lsin.

6- ta'rif. *Agar barcha* $x\in X$ *elementlar uchun* $\mu_A(x)=\mu_B(x)$ *tenglik bajarilsa, u holda* A *va* B *fazzi to'plamlar o'zaro* ***teng*** *deb ataladi.*

Fazzi to'plamlarning o'zaro tengligi iborasi o'rniga, ba'zan, **ekvivalentligi** iborasi ham qo'llaniladi. A va B fazzi to'plamlarning o'zaro tengligi, odatdagidek, $A=B$, ekvivalentligi esa $A\sim B$ shaklda belgilanadi.

7- ta'rif. *Agar barcha* $x\in X$ *elementlar uchun* $\mu_A(x)\le\mu_B(x)$ *tengsizlik bajarilsa* A *fazzi to'plam* B *fazzi to'plamning* ***qism to'plami*** *deb ataladi.*

Agar A fazzi to'plam B fazzi to'plamning qism to'plami bo'lsa, u holda $A\subseteq B$ deb yoziladi va A (fazzi to'plam) B da (fazzi to'plamda) **yotadi** yoki B A ni **o'z ichiga oladi (qamraydi)** deb o'qiladi. Masalan, “juda katta sonlar” fazzi to‘plami “katta sonlar” fazzi to‘plamini o‘z ichiga oladi.

8- t a ’ r i f. *Agar barcha* $x \in X$ *elementlar uchun* $\mu_A(x) = 1 - \mu_B(x)$ *tenglik bajarilsa, u holda* A *va* B *fazzi to‘plamlar* ***bir-birini to‘ldiradi*** *deb ataladi.*

Bir-birini to‘ldiruvchi A va B fazzi to‘plamlar uchun $B = \overline{A}$ yoki $A = \overline{B}$ belgilashlardan foydalanish mumkin.

3- m i s o l. $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ universal to‘plam bo‘lsin. Bu to‘plamda $A =$ "Bir nechta" fazzi to‘plami quyidagicha aniqlanishi va ifodalanishi mumkin:

$$A = 0{,}5/3 + 0{,}8/4 + 1/5 + 1/6 + 0{,}8/7 + 0{,}5/8 . \blacksquare$$

4- m i s o l. $\{0,1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$ universal to‘plam berilgan bo‘lsin. Bu to‘plamda aniqlangan "Oz" fazzi to‘plami uchun a’zolik funksiyasini, masalan, $\mu_{\text{"Oz"}}(n) = \dfrac{1}{1+(0{,}1n)^2}$ ko‘rinishda ifodalash mumkin. ■

5- m i s o l. 1- misoldagi vaziyatga qaytib, universal to‘plam sifatida [0, 70] segmentni qaraymiz. O‘zbekiston Respublikasining o‘rta yoshli fuqarolari to‘plamini o‘rganish uchun ”O‘rta yosh” fazzi to‘plamini aniqlash mumkin. Bu yerda a’zolik funksiyasi sifatida, masalan, grafigi 2- shaklda tasvirlangan quyidagi funksiyani keltirsa bo‘ladi:

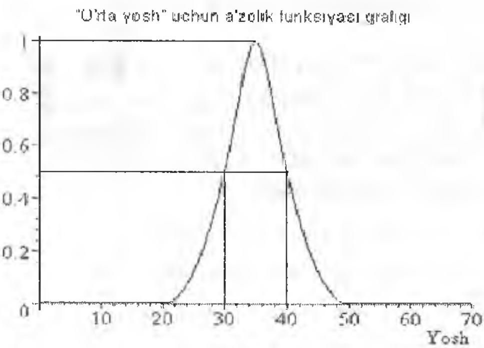
$$\mu_{\text{"O'rta yosh"}}(x) = \begin{cases} 0, \text{ agar } 0 \le x \le 20 \text{ yoki } 50 < x \le 70 \text{ bo'lsa}, \\ 0{,}005\cdot(x-20)^2, \text{ agar } 20 < x \le 30 \text{ bo'lsa}, \\ 1/(1+((x-35)/5)^2), \text{ agar } 30 < x \le 40 \text{ bo'lsa}, \\ 0{,}005\cdot(x-50)^2, \text{ agar } 40 < x \le 50 \text{ bo'lsa}. \end{cases}$$

”O‘rta yosh” fazzi to‘plamining tashuvchisi $(20, 50)$ to‘plamdir. Uning ikkita $x_1 = 30$ va $x_2 = 40$ o‘tish nuqtalari bor. $\sup\limits_{x\in[0,70]} \mu_{\text{"O'rta yosh"}}(x) = \mu_{\text{"O'rta yosh"}}(35) = 1$ bo‘lgani uchun ”O‘rta yosh” fazzi to‘plamining balandligi 1ga teng, ya’ni u normal fazzi to‘plamdir. Bu to‘plam unimodal fazzi to‘plamdir, chunki uning a’zolik funksiyasi faqat bitta $x = 35$ nuqtada 1 qiymat qabul qiladi. ■

Fazzi to‘plamning mohiyatini yaxshiroq anglash maqsadida, uni, odatda, shartli ravishda, 3- shakldagiga oxshash tasvirlashadi. Bu shaklda to‘g‘ri to‘rtburchak universal to‘plamga, egri chiziq A fazzi to‘plam uchun a’zolik funksiyasiga mos keladi, fazzi to‘plamning o‘zi esa bo‘yab tasvirlangan.

1.5.2. Fazzi to‘plamlar ustida amallar. Fazzi to‘plamlar ustida turli amallar bajarish mumkin. Bu amallar odatdagi so‘zlashuv tilida uchraydigan ayrim iboralar bilan bog‘liqdir. Bunday iboralar jumlasiga “emas”, “va”, “yoki”, “ancha”, “sal”, “sal-pal”, “o‘ta”, “juda”, “uncha-muncha”, “sezilarli (darajada)”, “ko‘plab”, “ko‘proq”, “ozgina”, “g‘ira-shira”, “yaxshi”, “yaxshiroq”, “yomon”, “yomonroq”, “o‘xshash”, “qariyb” va boshqalar kiradi. Bu iboralarning ba’zilari vaziyatni yetarli darajada aniq ifodalaydi, masalan, “emas” so‘zi o‘zidan oldin kelgan so‘zni inkor qiladi. Lekin, bu iboralarning ko‘pchlilgi u bilan bog‘liq so‘zni (sifatni, xossani) qay darajada kuchaytirishi yoki susaytirishini anglash uchun vaziyatni e’tiborga olish kerak bo‘ladi.

Quyida fazzi to‘plamlar ustida bajarish mumkin bo‘lgan ba’zi amallar keltiriladi. Albatta bu amallar ma’noga ega bo‘lishi uchun muayyan shartlar bajarilishi kerak, masalan, qaralayotgan fazzi to‘plamlar bitta universal to‘plamda aniqlangan bo‘lishi kerak. Bundan buyon fazzi to‘plamlar bilan ish ko‘rganda, zarur bo‘lmasa, universal to‘plamning berilishiga to‘xtalmaymiz.

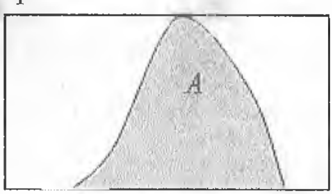


2- shakl

A va B fazzi to‘plamlar, mos ravishda, $\mu_A(x)$ va $\mu_B(x)$ a’zolik funksiyalari bilan berilgan bo‘lsin.

9- t a ’ r i f . *Agar* $B=\overline{A}$ *bo‘lsa, u holda* B *fazzi to‘plam* A *fazzi to‘plamdan* ***to‘ldirish*** *amalini qo‘llash natijasida hosil qilindi deb aytiladi.*

To‘ldirish amaliga “emas” bog‘lovchisini mos qo‘yish mumkin. 9- ta’rifga ko‘ra, agar berilgan A fazzi to‘plamdan to‘ldirish amalini qo‘llash natijasida $\overline{A}$ fazzi to‘plam hosil qilingan bo‘lsa, u holda $\mu_{\overline{A}}(x)=1-\mu_A(x)$ bo‘ladi. 3- shaklda keltirilgan A fazzi to‘plamdan to‘ldirish amalini qo‘llash natijasida hosil qilingan $\overline{A}$ fazzi to‘plam 4- shaklda tasvirlangan.

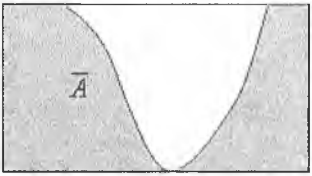


3- shakl

10- t a ’ r i f . *A’zolik funksiyasi bo‘lgan* $A\bigcup B$ *fazzi to‘plam berilgan* A *va* B *fazzi to‘plamlarning* ***birlashmasi*** *deb ataladi:* $\mu_{A\bigcup B}=\max(\mu_A(x),\mu_B(x))$.

Odatda "berilgan A va B fazzi to'plamlarga **birlashma** amalini qo'llab, $A \bigcup B$ fazzi to'plam hosil qilindi" deb yuritiladi. Birlashma amaliga "yoki" bog'lovchisini mos qo'yish mumkin. 3- va 4- shakllarda keltirilgan A va $\overline{A}$ fazzi to'plamlarning $A \bigcup \overline{A}$ birlashmasi 5- shaklda tasvirlangan.

11- ta'rif. *A'zolik funksiyasi* $\mu_{A \cap B} = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$ *bo'lgan* $A \bigcap B$ *fazzi to'plam berilgan* A *va* B *fazzi to'plamlarning* ***kesishmasi*** *deb ataladi.*



4- shakl

11- ta'rifdan ko'rinib turibdiki, berilgan A va B fazzi to'plamlarning kesishmasini belgilashda ham yangilik yo'q, bu yerda odatdagi $A \bigcap B$ ifoda qo'llaniladi. $A \bigcap B$ yozuv "A va B fazzi to'plamlarga **kesishma** amalini qo'llab $A \bigcap B$ fazzi to'plam hosil qilindi" deb o'qiladi. Kesishma amaliga "va" bog'lovchisini mos qo'yish mumkin. 6- shaklda tasvirlangan fazzi to'plam 3- va 4- shakllarda keltirilgan A va $\overline{A}$ fazzi to'plamlarning $A \bigcap \overline{A}$ kesishmasidir.

6- misol. 4- misolda keltirilangan "Oz" fazzi to'plamga to'ldirish amalini qo'llab $\{0,1,2,3,...,n,...\}$ universal to'plamda aniqlangan "Oz emas" fazzi to'plamni hosil qilish mumkin. U holda "Oz emas" fazzi to'plamining a'zolik funksiyasi quyidagicha bo'ladi:

$$\mu_{\text{"Oz emas"}}(n) = 1 - \mu_{\text{"Oz"}}(n) = 1 - \frac{1}{1+(0{,}1n)^2} = \frac{(0{,}1n)^2}{1+(0{,}1n)^2}. \ \blacksquare$$

12- ta'rif. *A'zolik funksiyasi*

$$\mu_{A \setminus B}(x) = \begin{cases} \mu_A(x) - \mu_B(x), \ agar \ \mu_A(x) \geq \mu_B(x) > 0 \ bo'lsa, \\ 0, \ aks \ holda, \end{cases}$$

bo'lgan $A \setminus B$ *fazzi to'plam berilgan* A *va* B *fazzi to'plamlarning* ***ayirmasi*** *deb ataladi.*

Fazzi to'plamlar ustida yuqorida bayon qilingan amallardan tashqari **kuchli birlashma, algebraik yig'indi, kuchli kesishma, algebraik ko'paytma, Dekart ko'-paytma, konsentrlash (jipslash), cho'zish, songa ko'paytirish** va boshqa turli amallar ham kiritilgan.

1.5.3. Fazzi to'plamlarning asosiy xossalari. Berilgan X universal to'plamda aniqlangan ixtiyoriy A, B va C fazzi to'plamlar uchun quyidagi xossalar o'rinlidir:

1. Kommutativlik: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.

2. Assotsiativlik:

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

3. Idempotentlik: $A \cup A = A$, $A \cap A = A$.

4. Distributivlik: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

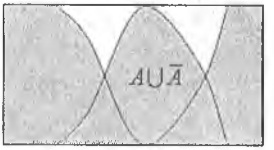
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

5. Nolning xossalari: $A \cup \varnothing = A$,

$\varnothing \cup A = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $\varnothing \cap A = \varnothing$.

6. Birning xossalari: $A \cap X = A$,

$X \cap A = A$, $A \cup X = X$, $X \cup A = X$.

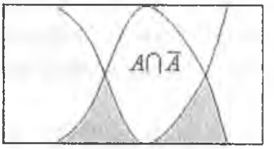


5- shakl

7. De Morgan qonunlari: $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

8. Involyutivlik qonuni: $\bar{\bar{A}} = A$.

Tabiiyki, bu xossalarning har birini qat'iy isbotlash mumkin. Distributivlik xossasini ifodalovchi tengliklardan faqat birinchisining, ya'ni $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ tenglikning **isbotini** keltiramiz. Qolgan barcha tengliklarning isbotini o'quvchiga topshiriq sifatida havola qilamiz.



6- shakl

Fazzi to'plamlarning tengligi, birlashmasi va kesishmasi ta'riflariga ko'ra ixtiyoriy $x \in X$ uchun

$$\min\{\mu_A(x), \max\{\mu_B(x), \mu_C(x)\}\} =$$

$$= \max\{\min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \min\{\mu_A(x), \mu_C(x)\}\}$$

tenglik o'rinli bo'lishini ko'rsatish zarur.

Faraz qilaylik, $a = \mu_A(x)$, $b = \mu_B(x)$, $c = \mu_C(x)$ bo'lsin. a, b va c sonlar uchun quyidagi 15 holdan biri ro'y berishi muqarrardir:

1) $a > b > c$;	2) $a > b = c$;	3) $a = b > c$;
4) $a = b = c$;	5) $a > c > b$;	6) $a > c = b$;
7) $a = c > b$;	8) $b > a > c$;	9) $b > a = c$;
10) $b > c > a$;	11) $b > c = a$;	12) $b = c > a$;
13) $c > a > b$;	14) $c > a = b$;	15) $c > b > a$.

Har bir hol uchun yuqoridagi tenglik o'rinlidir:

1) $\min\{a, \max\{b,c\}\} = \min\{a,b\} = b$,

$\max\{\min\{a,b\}, \min\{a,c\}\} = \max\{b,c\} = b$;

2) $\min\{a,\max\{b,c\}\}=\min\{a,b\}=b=c$,

$\max\{\min\{a,b\},\min\{a,c\}\}=\max\{b,c\}=b=c$;

3) $\min\{a,\max\{b,c\}\}=\min\{a,b\}=b=a$,

$\max\{\min\{a,b\},\min\{a,c\}\}=\max\{b,c\}=b=a$;

4) $\min\{a,\max\{b,c\}\}=\min\{a,b\}=a=b=c$,

$\max\{\min\{a,b\},\min\{a,c\}\}=\max\{a,a\}=a=b=c$;

5) $\min\{a,\max\{b,c\}\}=\min\{a,b\}=a$,

$\max\{\min\{a,b\},\min\{a,c\}\}=\max\{a,c\}=a$;

6) $\min\{a,\max\{b,c\}\}=\min\{a,b\}=a$,

$\max\{\min\{a,b\},\min\{a,c\}\}=\max\{a,a\}=a$;

7) $\min\{a,\max\{b,c\}\}=\min\{a,c\}=c$,

$\max\{\min\{a,b\},\min\{a,c\}\}=\max\{b,c\}=c$;

8) $\min\{a,\max\{b,c\}\}=\min\{a,b\}=b=c$,

$\max\{\min\{a,b\},\min\{a,c\}\}=\max\{b,c\}=b=c$;

9) $\min\{a,\max\{b,c\}\}=\min\{a,c\}=a=c$,

$\max\{\min\{a,b\},\min\{a,c\}\}=\max\{b,a\}=a=c$;

10) $\min\{a,\max\{b,c\}\}=\min\{a,b\}=a$,

$\max\{\min\{a,b\},\min\{a,c\}\}=\max\{a,a\}=a$;

11) $\min\{a,\max\{b,c\}\}=\min\{a,b\}=a=c$,

$\max\{\min\{a,b\},\min\{a,c\}\}=\max\{a,a\}=a=c$;

12) $\min\{a,\max\{b,c\}\}=\min\{a,b\}=a$,

$\max\{\min\{a,b\},\min\{a,c\}\}=\max\{a,a\}=a$;

13) $\min\{a,\max\{b,c\}\}=\min\{a,c\}=a$,

$\max\{\min\{a,b\},\min\{a,c\}\}=\max\{b,a\}=a$;

14) $\min\{a,\max\{b,c\}\}=\min\{a,c\}=a=b$,

$\max\{\min\{a,b\},\min\{a,c\}\}=\max\{a,a\}=a=b$;

15) $\min\{a,\max\{b,c\}\}=\min\{a,c\}=a$,

$\max\{\min\{a,b\},\min\{a,c\}\}=\max\{a,a\}=a$. ■

Ta'kidlaymizki, oddiy to'plamlardan farqli o'laroq fazzi to'plamlar uchun, umumiy holda, $A\bigcup\overline{A}\neq X$, $A\bigcap\overline{A}\neq\varnothing$ (5- va 6- shakllarga qarang).

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Universal to'plam $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ shaklda berilgan va unda A fazzi to'plamning $\mu_A(x)$ a'zolik funksiyasi $\mu_A(x_1)=0{,}3$, $\mu_A(x_2)=0$, $\mu_A(x_3)=0{,}5$, $\mu_A(x_4)=0{,}9$, $\mu_A(x_5)=1$, $\mu_A(x_6)=0{,}8$ tengliklar vositasida aniqlangan bo'lsin. Yuqorida bayon qilingan belgilashlardan foydalanib, berilgan A fazzi to'plamni ifodalang. A fazzi to'plam misolida fazzi to'plam tashuvchisi, o'tish nuqtasi, balandligi va unimodal fazzi to'plam kabi tushunchalarni o'rganing. A fazzi to'plamning normal yoki subnormal bo'lishini tekshiring. $\overline{A}$ to'ldiruvchi fazzi toplamni aniqlang.

2. Universal to'plam $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ shaklda berilgan va unda

$$A = 0{,}4/x_1 + 0{,}2/x_2 + 0/x_3 + 1/x_4,$$
$$B = 0{,}7/x_1 + 0{,}9/x_2 + 0{,}1/x_3 + 1/x_4,$$
$$C = 0{,}1/x_1 + 1/x_2 + 0{,}2/x_3 + 0{,}9/x_4$$

fazzi toplamlar aniqlangan bo'lsin.

a) Bu fazzi to'plamlarning barcha juftlari uchun orasiga "$\subseteq$" belgisini qo'yish mumkin bo'lganlarini aniqlang.

b) Bu fazzi to'plamlarning har biri uchun to'ldiruvchi fazzi toplamni aniqlang.

d) Bu fazzi to'plamlarning barcha juftlari uchun birlashma, kesishma va ayirma amallarini qo'llash natijasida hosil bo'lgan fazzi to'plamlarni toping.

3. $X = (50, 100]$ universal to'plamda aniqlangan $A =$ "Qari" fazzi to'plamning a'zolik funksiyasi $\mu_{\text{"Qarri"}}(x) = (1 + ((x-50)/5)^{-2})^{-1}$ ko'rinishga ega bo'lsin.

a) A fazzi to'plamning balandligini topib, uning normal fazzi to'plam emasligini ko'rsating.

b) A fazzi to'plam uchun o'tish nuqtasini toping.

d) A ning unimodal fazzi to'plam bo'lish-bo'lmasligini tekshiring.

4. "1ga yaqin miqdor" va "1ga juda yaqin miqdor" fazzi to'plamlarini aniqlang va ulardan foydalanib nazariy ma'lumotlarni talqin qiling.

5. Fazzi to'plamlarning asosiy xossalarini isbotlang.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Qaysi maqola fazzi to'plamlar bilan bog'liq ilmiy ishlarning paydo bo'lishiga asos bo'ldi?

2. Fazzi to'plam nima?

3. A'zolik funksiyasi deganda nimani tushunasiz?

4. Fazzi qism toplamning tashuvchisi nima?
5. Fazzi toplamning o'tish nuqtasi qanday aniqlanadi?
6. Fazzi toplamlarni ifodalashning qanday usullarini bilasiz?
7. Fazzi toplamning balandligi deganda nimani tushunasiz?
8. Bo'sh fazzi toplam qanday aniqlanadi?
9. Normal va subnormal fazzi toplamlar bir-biridan qanday farqlanadi?
10. Unimodal fazzi toplam bo'sh fazzi toplam bo'lishi mumkinmi?
11. Qanday shartlar bajarilsa, berilgan fazzi toplamlar o'zaro teng deb hisoblanadi?
12. Qism fazzi toplam tushunchasi qanday aniqlanadi?
13. Bir-birini to'ldiruvchi fazzi toplamlar uchun a'zolik funksiyalari o'zaro qanday munosabatda bo'ladi?
14. Berilgan fazzi to'plamlar birlashmasi bilan ularning kesishmasi bir-biridan qanday farqlanadi?
15. Fazzi toplamlarning qanday xossalarini bilasiz?
16. Oddiy to'plamlar uchun o'rinli, lekin fazzi to'plamlar uchun o'rinli bo'lmagan tenglik topa olasizmi?

1.6.Munosabatlar

Munosabat. Tartiblangan juftlik. Unar, binar va n-ar munosabatlar. Aniqlanish va qiymatlar sohalari. Refleksiv, simmetrik va tranzitiv munosabatlar. Ekvivalentlik sinfi. Funksiya. Funksiyalar tengligi. Bir qiymatli va teskari funksiyalar. Superpozitsiya. Funksiyalarning funksiyasi. Antisimmetrik va irrefleksiv munosabatlar. Tartiblash, qisman tartiblash va chiziqli tartiblash munosabatlari. Qisman tartiblangan to'plam.

1.6.1. Binar munosabat. Diskret matematikada fundamental tushunchalardan biri bo'lgan **munosabat** tushunchasi predmetlar (narsalar) va tushunchalar orasidagi aloqani ifodalaydi. Quyidagi to'liqsiz gaplar munosabatlarga misol bo'la oladi:

… kichik ... dan, … teng … ga, … bo'linadi … ga va hokazo.

Odatda, munosabat tushunchasi to'plamlar nazariyasi nuqtai nazaridan turib o'rganiladi. Munosabat tushunchasiga aniqlik kiritish uchun **tartiblangan juftlik** tushunchasini o'rganamiz.

1- ta'rif. *Ma'lum tartibda joylashgan ikki predmetdan tuzilgan kortej **tartiblangan juftlik** deb ataladi.*

Odatda tartiblangan juftlik quyidagi xususiyatlarga ega deb faraz qilinadi:

1) ixtiyoriy x va y predmetlar uchun $< x, y >$ kabi belgilanadigan muayyan obyekt mavjud bo'lib, har bir x va y predmetlarga yagona

tartiblangan $< x, y >$ juftlik mos keladi ($< x, y >$ yozuv "x va $y$ning tartiblangan juftligi" deb o'qiladi);

2) agar ikkita $< x, y >$ va $< u, v >$ tartiblangan juftlik uchun $x = u$ va $y = v$ bo'lsa, u holda $< x, y >=< u, v >$ bo'ladi.

$< x, y >$ tartiblangan juftlik $< x, y >= \{\{x\}, \{x, y\}\}$ ko'rinishdagi to'plamdir, ya'ni u shunday ikki elementli to'plamki, uning bir elementi $\{x, y\}$ tartibsiz juftlikdan iborat, boshqa $\{x\}$ elementi esa, shu tartibsiz juftlikning qaysi hadi birinchi hisoblanishi kerakligini ko'rsatadi.

Tartiblangan juftliklardan birgalikda **tartiblangan juftliklar to'plamini** tashkil etishadi.

2- t a ' r i f . *$< x, y >$ tartiblangan juftlikdagi x uning **birinchi koordinatasi**, y esa **ikkinchi koordinatasi** deb ataladi.*

Tartiblangan juftliklar atamasi asosida **tartiblangan n-liklarni** aniqlash mumkin. x, y va z predmetlarning tartiblangan uchligi $< x, y, z >$ quyidagi tartiblangan juftliklar shaklida aniqlanadi: $<< x, y >, z >$. Xuddi shu kabi $x_1, x_2, ..., x_n$ predmetlarning tartiblangan n-ligi $< x_1, x_2, ..., x_n >$, ta'rifga asosan, $<< x_1, x_2, ..., x_{n-1} >, x_n >$ tarzda aniqlanadi.

Matematik mantiqda **n-ar munosabat** tartiblangan n-liklar to'plami sifatida aniqlanadi. Ba'zan n-ar munosabat iborasi o'rniga **n o'rinli munosabat** iborasi qo'llaniladi. Agar munosabat bir o'rinli bo'lsa, u holda u **unar munosabat,** ikki o'rinli bo'lganda esa **binar munosabat** deb ataladi. Unar munosabat **xossa (xususiyat)** deb ham yuritiladi. Adabiyotda, ko'pincha, 3-ar munosabat **ternar munosabat** deb nomlanadi.

1- m i s o l . $\{< 2,4 >, < 5,6 >, < 7,6 >, < 8,8 >\}$ tartiblangan juftliklar to'plami binar munosabatdir. ■

2- m i s o l . Agar ρ ayniyat munosabatini bildirsa, u holda $< x, y >\in \rho$ yozuv $x \equiv y$ ayniyatni bildiradi. ■

3- m i s o l . Agar ρ onalik munosabatini bildirsa, u holda <Xurshida, Iroda>$\in \rho$ yozuv Xurshida Irodaning onasi ekanligini bildiradi. ■

4- m i s o l . Ternar munosabatga butun sonlar to'plamida aniqlangan qo'shish amalini misol qilib keltirsa bo'ladi. ■

Bundan keyin binar munosabat atamasi o'rnida, qisqalik uchun, munosabat atamasini ishlatamiz.

3- t a ' r i f . *Agar ρ biror munosabatni ifodalasa, u holda $< x, y >\in \rho$ va $x \rho y$ ifodalar **o'zaro almashuvchi ifodalar** deb ataladi.*

$x \rho y$ ifoda (yozuv) "infiks yozuvi" deb yuritiladi va "x (predmet) y (predmet)ga nisbatan ρ munosabatda" deb o'qiladi. Odatdagi $x = y$, $x < y$, $x \quad y$ belgilashlar (yozuvlar) $x \rho y$ ifodadan kelib chiqqan deb hisoblash mumkin.

$\{x / x \in A\}$ yozuvni, to'plamlar nazariyasidagi kabi, "shunday x lar to'plamiki, $x \in A$" deb tushunamiz.

4- ta'rif. $\{x\,/\,ayrim\ y\ uchun < x,y > \in \rho\}$ *to'plam* ρ ***munosabatning aniqlanish sohasi*** *deb ataladi va* D_ρ *kabi belgilanadi.*

5- ta'rif. $\{y\,/\,ayrim\ x\ uchun < x,y > \in \rho\}$ *to'plam* ρ ***munosabatning qiymatlar sohasi*** *deb ataladi va* R_ρ *kabi belgilanadi.*

Boshqacha qilib aytganda, ρ munosabatning aniqlanish sohasi shu ρ munosabatning birinchi koordinatalaridan tashkil topgan to'plamdir, ikkinchi koordinatalaridan tuzilgan to'plam esa, uning qiymatlar sohasidir.

5- misol. $\{< 2,4 >, < 3,3 >, < 6,7 >\}$ ko'rinishdagi ρ munosabat berilgan bo'lsin. U holda $D_\rho = \{2,3,6\}$, $R_\rho = \{4,3,7\}$. ■

Tartiblangan juftliklar to'plami tushunchasidan foydalanib, Dekart ko'paytmasini (ushbu bobning 4- paragrafiga qarang) boshqacha ham aniqlash mumkin. Agar x biror X to'plamning elementi, y esa Y to'plamning elementi bo'lsa, u holda tartiblangan $< x,y >$ juftliklar C to'plami X va Y to'plamlarning Dekart ko'paytmasi deyiladi:

$$C = X \times Y = \{< x,y > / x \in X, y \in Y\}.$$

Har bir ρ munosabat $X \times Y$ to'g'ri ko'paytmaning qism to'plami bo'ladi va $X \supseteq D_\rho$, $Y \supseteq R_\rho$.

6- ta'rif. *Agar* $\rho \subseteq X \times Y$ *bo'lsa, u holda* ρ *shu* X ***dan*** Y ***ga bo'lgan munosabat*** *deb ataladi.*

7- ta'rif. *Agar* $\rho \subseteq X \times Y$ *va* $Z \supseteq X \cup Y$ *bo'lsa, u holda* ρ ***dan*** Z ***ga bo'lgan munosabat*** *deb ataladi.*

8- ta'rif. Z *dan* Z *ga bo'lgan munosabat* Z ***ichidagi munosabat*** *deb ataladi.*

9- ta'rif. X *to'plam ichidagi* $X \times X$ *munosabat* X *ichidagi* ***universal munosabat*** *deb ataladi.*

10- ta'rif. $\{< x,x > / x \in X\}$ *munosabat* X ***ichidagi ayniyat munosabati*** *deb ataladi va* i_x *yoki* i *simvoli bilan belgilanadi.*

Ixtiyoriy X to'plamning x va y elementlari uchun xi_xy ifoda $x = y$ bilan teng kuchlidir.

A to'plam va ρ munosabat berilgan bo'lsin. U holda $\rho[A] = \{y\,/\,A$ning ayrim $x$lari uchun $x\rho y\}$ bo'ladi.

11- ta'rif. $\rho[A]$ *to'plam* A *to'plam elementlarining* ρ ***-obrazlari to'plami*** *deb ataladi.*

6- misol. $y = 2x + 1$ tenglama bilan aniqlangan to'g'ri chiziqni $\{< x,y > \in R \times R\,/\,y = 2x+1\}$, ushbu $y < x$ tengsizlikni esa $\{< x,y > \in R \times R\,/\,y < x\}$ shaklda ifodalash mumkin. ■

1.6.2. Ekvivalentlik munosabati. Munosabatlar turli xossalarga ega bo‘lishi mumkin. Matematikada quyidagi 12- ta’rifda ko‘rsatilgan uchta xossaga ega bo‘lgan munosabatlar ko‘p uchragani uchun ularga maxsus nom berilgan.

12- ta’rif. *X to‘plamning ixtiyoriy x elementi uchun:*

agar $x\rho x$ bo‘lsa, u holda ρ munosabat X to‘plamdagi ***refleksiv munosabat;***

agar $x\rho y$ dan $y\rho x$ kelib chiqsa, u holda ρ munosabat ***simmetrik munosabat;***

agar $x\rho y$ va $y\rho z$ dan $x\rho z$ kelib chiqsa, u holda ρ munosabat ***tranzitiv munosabat*** *deb ataladi.*

13- ta’rif. *Agar biror to‘plamdagi munosabat refleksiv, simmetrik va tranzitivlik xossalariga ega bo‘lsa, u holda bunday munosabat shu to‘plamdagi* ***ekvivalentlik munosabati*** *deb ataladi.*

Agar ρ munosabat X to‘plamdagi ekvivalentlik munosabati bo‘lsa, u holda $D_{\rho} = X$ bo‘lishi ravshandir.

7- misol. Quyidagi har bir munosabat muayyan to‘plamdagi ekvivaletlik munosabatiga misol bo‘la oladi.

1. Istalgan to‘plamdagi tenglik munosabati.

2. Tekislikda joylashgan barcha uchburchaklar to‘plamidagi o‘xshashlik munosabati.

3. Butun sonlar to‘plamidagi n modul bo‘yicha taqqoslash munosabati.

4. O‘zbekiston Respublikasida yashovchi odamlar to‘plamidagi “bir uyda yashovchilar” munosabati. ■

Ekvivalentlik munosabati ushbu asosiy xususiyatga ega: u to‘plamni kesishmaydigan qism to‘plamlarga bo‘ladi. Masalan, 7- misolning 4- bandidagi “bir uyda yashovchilar” munosabati O‘zbekiston Respublikasida yashovchi odamlar to‘plamini bir-biri bilan kesishmaydigan “bir uyda yashovchilar” va “qolganlar” qism to‘plamlariga bo‘ladi. Bu aytilganlarni quyidagicha umumlashtirish mumkin.

14- ta’rif. *ρ biror X to‘plamdagi ekvivalentlik munosabati bo‘lsin. Agar X to‘plamning A qism to‘plamida shunday x element topilib, $A = \{y / x\rho y\}$ bo‘lsa, u holda A qism to‘plam* ***ekvivalentlik sinfi*** *yoki* ***ekvivalentlik ρ-sinfi*** *deb ataladi.*

Keltirilgan ta’rifga asosan X to‘plamning A qism to‘plami ekvivalentlik sinfi bo‘lishi uchun X to‘plamning $A = \rho[\{x\}]$ tenglikni qanoatlantiruvchi x elementi mavjud bo‘lishi yetarli va zarurdir. Agar ρ munosabat to‘g‘risida hech qanday shubha tug‘ilmaydigan bo‘lsa, u holda X to‘plamdagi x elementlarning ρ-obrazlari to‘plami $[x]$ shaklida belgilanadi (ya’ni $\rho[\{x\}] = [x]$) va bu to‘plam x **yuzaga keltirgan**

ekvivalentlik sinfi deb ataladi. Ekvivalentlik sinfi quyidagi ikki xususiyatga ega:

1) $x \in [x]$ – bir sinfning hamma elementlari o‘zaro ekvivalentdir;

2) agar $x \rho y$ bo‘lsa, u holda $[x] = [y]$.

1) xossa ekvivalentlik munosabatining refleksivlik xususiyatidan kelib chiqadi.

2) xossani isbotlaymiz. $x \rho y$ bo‘lsin, ya’ni x element y elementga ekvivalent bo‘lsin, u holda $[y] \subseteq [x]$. Haqiqatan ham, $z \in [y]$ (ya’ni, $y \rho z$) munosabatdan va $x \rho z$ bo‘lganligi uchun, ρ munosabatning tranzitiv xususiyatiga asosan, $x \rho z$ kelib chiqadi, ya’ni $z \in [x]$. Ekvivalentlik munosabatining simmetriklik xossasidan foydalanib, $[x] \subseteq [y]$ bo‘lishini isbot qilish mumkin. Demak, $[x]$ $[y]$.

1.6.3. Funksiya tushunchasi. Funksiyalar superpozitsiyasi. Funksiya tushunchasini yuqorida o‘rganilgan atamalar orqali aniqlaymiz. **Funksiya** shunday munosabatki, uning turli elementlarining (juftliklarining) birinchi koordinatalari hech qachon o‘zaro teng bo‘lmaydi. **Funksiyaning grafigi** tartiblangan juftliklar to‘plamidan iborat. Funksiya bilan uning grafigi orasida hech qanday farq yo‘q.

Shunday qilib, f munosabat quyidagi talablarni qanoatlantirgandagina funksiya bo‘la oladi:

1) f ning elementlari faqat tartiblangan juftliklardan iborat;

2) agar $< x, y >$ va $< x, z >$ elementlar f ning elementlari bo‘lsa, u holda $y = z$ bo‘ladi.

8- m i s o l . $\{<1,2>,<2,2>,<3,4>\}$ shaklda berilgan s munosabat funksiyadir va $D_s = \{1,2,3\}$, $R_s = \{2,4\}$. ■

9- m i s o l . $\{<3,4>,<3,5>,<4,6>\}$ munosabat funksiya bo‘la olmaydi, chunki $<3,4>$ va $<3,5>$ elementlarining birinchi koordinatalari o‘zaro teng. ■

10- m i s o l . $\{< x, x^2 + x + 1 > / x \in R\}$ funksiyadir, chunki agar $x = u$ bo‘lsa, u holda $x^2 + x + 1 = u^2 + u + 1$. ■

11- m i s o l . $\{< x^2, x > / x \in R\}$ munosabat funksiya bo‘la olmaydi, chunki uning birinchi koordinatalari o‘zaro teng bo‘lgan elementlari (masalan, $<1,1>$ va $<1,-1>$) mavjud. ■

15- t a ’ r i f . *Agar f funksiya va $< x, y > \in f$ (ya’ni $x f y$) bo‘lsa, u holda x berilgan f* ***funksiyaning argumenti,*** *y esa shu* ***funksiyaning x argumentdagi qiymati*** *yoki x* ***elementining obrazi*** *deb ataladi.*

x argumentning f funksiyasini belgilash uchun $x f$, $f(x)$, $f x$ yoki x^f yozuvlardan foydalaniladi. $f(x)$ yozuvni $f(x) = f[\{x\}]$ deb, ya’ni x elementning f -obrazlari to‘plami deb qarash mumkin.

Berilgan f va g funksiyalar bir xil elementlardan tuzilgan bo'lsa, bunday funksiyalar teng bo'ladi ($f = g$), ya'ni boshqacha qilib aytganda, $D_f = D_g$ va barcha x argumentlar uchun $f(x) = g(x)$ bo'lsagina, $f = g$ bo'ladi.

Shunday qilib, funksiya berilgan bo'lishi uchun uning aniqlanish sohasi va shu sohaning har bir elementi uchun funksiyaning qiymati berilishi kerak.

12- misol. Berilgan f funksiya uchun $\{< x, x^2 + x + 1 > / x \in R\}$ dan $f(x) = x^2 + x + 1$ kelib chiqadi. ■

Agar f funksiyaning aniqlanish sohasi $R_f \subseteq Y$ bo'lsa, u holda funksiyaning o'zgarish sohasi Y to'plami ichida bo'ladi, deb yuritiladi va quyidagicha belgilanadi: $f: X \to Y$ yoki $X \to Y$.

Yuqorida ko'rsatilgan hamma f to'plam $X \times Y$ to'plamning qism to'plami bo'ladi, uni Y^x deb belgilaymiz.

Agar $X = \varnothing$ bo'lsa, u holda Y^x faqatgina bir elementdan iborat bo'ladi va u $X \times Y$ to'plamning bo'sh qism to'plamidir. Agar $Y = \varnothing$ va $X = \varnothing$ bo'lsa, u holda $Y^x = \varnothing$.

16- ta'rif. *Agar f funksiya uchun $x_1 \neq x_2$ bo'lishidan $f(x_1) \neq f(x_2)$ kelib chiqsa, u holda f **bir qiymatli funksiya** deb ataladi.*

17- ta'rif. *Berilgan f va g funksiyalarning **superpozitsiyasi** deb $g \circ f = \{< x, z > / \text{ shunday } y \text{ borki}, xfy \text{ va } ygz\}$ to'plamga aytiladi.*

Berilgan f va g funksiyalarning $g \circ f$ superpozitsiyasi ham funksiya bo'ladi. f va g funksiyalarning $z = g \circ f$ superpozitsiyasini $z = g(f(x))$ ko'rinishda yozish mumkin. Superpozitsiyaga berilgan funksiyalar ustida bajarilayotgan amal deb qarasa bo'ladi. Funksiyalarning superpozitsiyasi **funksiyalarning funksiyasi** deb ham ataladi.

13- misol. $y = \sin x$ va $z = \ln y$ bo'lsin, u holda $z = \ln \sin x$ funksiya $\sin x$ va $\ln y$ funksiyalarning superpozitsiyasidir. ■

Superpozitsiya amali assotsiativlik qonuniga bo'ysunadi, ya'ni ixtiyoriy g, f va h funksiyalar uchun quyidagi tenglik o'rinlidir: $g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h$.

Agar $f: X \to Y$ va $g: Y \to Z$ bo'lsa, u holda $g \circ f: X \to Z$ va $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ bo'ladi.

18- ta'rif. *Agar f bir qiymatli funksiya bo'lsa, u holda f funksiyadan koordinatalarining o'rinlarini almashtirish natijasida hosil bo'ladigan funksiya f **funksiyasiga teskari funksiya** deb ataladi va f^{-1} kabi belgilanadi.*

Faqatgina bir qiymatli funksiyalar uchun bajariladigan f^{-1} amaliga **qaytarish amali** deyiladi.

f^{-1} funksiyaning aniqlanish sohasi uchun $D_{f^{-1}} = R_f$, o'zgarish sohasi uchun esa $R_{f^{-1}} = D_f$ o'rinlidir.

1.6.4. Tartiblash munosabati. Endi tartiblash munosabatini o'rganamiz.

19- ta'rif. *Berilgan X to'plamdagi x va y elementlar uchun $y \rho x$ munosabat o'rniga $x \rho y$ munosabat o'rinli bo'lishini ko'rsatuvchi munosabat **tartiblash munosabati** deb ataladi.*

Tartiblash munosabati yordamida elementlarni qanday tartibda qo'yish masalasini hal etish mumkin. Haqiqiy sonlar to'plami uchun $<$, $\leq$, $>$, $\geq$ munosabatlar tartiblash munosabatlariga misol bo'la oladi. To'plamlar sistemasi uchun xuddi shunga o'xshash vazifani $\subset$, $\subseteq$ munosabatlar o'ynaydi (ushbu bobning 3- paragrafiga qarang).

20- ta'rif. *Agar X to'plamining ixtiyoriy x va y elementlari uchun bir vaqtda $x \rho y$ va $y \rho x$ bajarilishidan $x = y$ bo'lishi kelib chiqsa, u holda bunday ρ munosabat **antisimmetrik munosabat** deb ataladi.*

21- ta'rif. *X to'plam ichida refleksivlik, antisimmetrik va tranzitivlik xossalariga ega bo'lgan ρ munosabat X to'plamdagi **qisman tartiblash munosabati** deb ataladi. Har qanday refleksiv va tranzitiv munosabat **tartiblash munosabati** deb ataladi.*

Qisman tartiblash munosabati odatdagi "$\leq$" simvol bilan belgilanadi. Agar $\leq$ munosabati X to'plamni qisman tartiblasa, u holda X to'plamning istalgan x va y elementlari uchun $x \leq y$ munosabat bajarilishi ham, bajarilmasligi ham mumkin. Agar $x \leq y$ va $x \neq y$ bo'lsa, u holda $x < y$ deb yoziladi va "x (element) y (element)dan kichik" yoki "x (element) y (element)dan oldin kelladi" deb o'qiladi.

22- ta'rif. *X to'plamning har qanday x elementi uchun $x \rho x$ munosabat bajarilmasa, u holda ρ shu X to'plamdagi **irrefleksiv munosabat** deb ataladi.*

Agar $\leq$ munosabat X to'plamdagi qisman tartiblash munosabati bo'lsa, u holda $<$ munosabat X to'plamdagi irrefleksiv va tranzitiv munosabat bo'ladi.

23- ta'rif. *Qisman tartiblash ρ munosabatning (o'zgarish sohasi bilan ustma-ust tushuvchi) aniqlanish sohasiga qarashli ixtiyoriy turli x va y elementlari uchun yo $x \rho y$ yoki $y \rho x$ o'rinli bo'lsa, bunday munosabat **chiziqli (oddiy) tartiblash munosabati** deb ataladi.*

Haqiqiy sonlarni qiymatlariga qarab tartiblash chiziqli tartiblash munosabatiga misol bo'la oladi.

24- ta'rif. *Agar biror X to'plamda qisman tartiblash munosabati $\leq$ berilgan bo'lsa, u holda bu to'plam **qisman tartiblangan to'plam** deb ataladi va u $< X, \leq >$ tartiblangan juftlikdan iborat bo'ladi.*

25- ta'rif. *Agar biror X to'plamda chiziqli (oddiy) tartiblash munosabati $\leq$ berilgan bo'lsa, u holda bu to'plam **chiziqli (oddiy) tartiblangan to'plam** deb ataladi va u $< X, \leq >$ tartiblangan juftlikdan iborat bo'ladi.*

Masalan, agar f to'plamlar sistemasi bo'lsa, u holda $< f, \subseteq >$ qisman tartiblangan to'plam bo'ladi.

X to'plamning tartiblash munosabati va X' to'plamning $\leq'$ tartiblash munosabati berilgan bo'lsin. Agar $f : X \to X'$ funksiya uchun $x \leq y$ dan $f(x) \leq' f(y)$ kelib chiqsa, u holda bu funksiya X to'p-lamining $\leq$ tartiblash munosabatiga va X' to'plamining $\leq'$ tartiblash munosabatiga nisbatan **tartibini saqlaydi** deb hisoblanadi. Agar X va X' to'plamlar orasida shunday o'zaro bir qiymatli moslik topilsaki, uning o'zi ham teskarisi ham tartibni saqlasa, u holda bu o'zaro bir qiymatli moslik qisman tartiblangan $< X, \leq >$ va $< X', \leq' >$ to'plamlar orasidagi **izomorfizmdir**.

Endi qisman tartiblangan to'plamlar bilan bog'liq bir necha tushunchalarni o'rganamiz. Agar X to'plamning barcha x elementlari uchun $y \leq x$ bo'lsa, u holda uning y elementi X to'plamning $\leq$ qisman tartiblash munosabatiga nisbatan **eng kichik elementi** deb ataladi. Agar shunday element mavjud bo'lsa, u holda u yagonadir. Agar X to'plamning hech qaysi x elementi uchun $x < y$ munosabat bajarilmasa, u holda uning y elementi X to'plamning $\leq$ qisman tartiblash munosabatiga nisbatan **minimal elementi** deb ataladi. Ravshanki, berilgan to'plamda minimal element yagona bo'lmasligi ham mumkin.

Agar har qanday $x \in X$ uchun $x \leq y$ bo'lsa, u holda X to'plamning y elementi shu to'plamning $\leq$ munosabatiga nisbatan **eng katta elementi** deb aytiladi. Agar shunday element mavjud bo'lsa, u yagonadir. X to'plamning hech qaysi x elementi uchun $x > y$ munosabat bajarilmasa, u holda X to'plamning y elementi shu to'plamning $\leq$ munosabatiga nisbatan **maksimal elementi** deb ataladi.

Agar X to'plamning bo'sh bo'lmagan ixtiyoriy qism to'plami eng kichik elementga ega bo'lsa, u holda $< X, \leq >$ qisman tartiblangan to'plam **to'liq tartiblangan to'plam** deb ataladi. Odatdagi tartibga ega $\{0,1,2,...\}$ (manfiymas butun sonlar) to'plami to'liq tartiblangan to'plamga misol bo'la oladi.

$< X, \leq >$ qisman tartiblangan va $A \subseteq X$ bo'lsin. Agar istalgan $a \in A$ uchun $a \leq x$ bajarilsa, u holda X to'plamning x elementi A to'plamning **yuqori chegarasi** deb ataladi. Xuddi shu kabi, agar istalgan $a \in A$ uchun $x \leq a$ bajarilsa, u holda X to'plamning x elementi A to'plamning **quyi chegarasi** deb ataladi.

Agar M tartiblangan to'plam bo'lsa, u holda uning M^1 qism to'plami ham tartiblangan bo'ladi. Agar bu tartiblangan to'plam chiziqli bo'lsa, u holda M^1 qism to'plam M to'plamning **zanjiri** deyiladi. $l = |M^1| - 1$ ifoda **zanjirning uzunligi** deb ataladi, bu yerda $|M^1|$ – chiziqli tartiblangan M^1 qism to'plamning **quvvati**. l uzunlikdagi har bir zanjir $1, 2, ..., l+1$ butun sonli zanjirga izomorfdir.

M to'plamning eng katta elementini m_i bilan va eng kichik elementini m_0 bilan belgilaymiz.

M tartiblangan to'plam m_i elementining **balandligi** $d(m_i)$ deb $m_0 < m_1 < m_2 < ... < m_i$ (M to'plamning) zanjirlar uzunligining maksimumiga ($l_{\max}$) aytiladi. M tartiblangan to'plam **uzunligi** $d(M)$ deb M to'plamdagi zanjirlar uzunligining maksimumiga aytiladi, ya'ni tartiblangan M to'plamning uzunligi $d(M)$ uning elementlari balandligi $d(m_i)$ ning maksimumiga teng: $d(M) = \max d_i(m_i)$, $m_i \in M$.

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Tenglamasi $y = 2x + 1$ ko'rinishda bo'lgan to'g'ri chiziqni $\{< x, y > \in R \times R /\ y = 2x + 1\}$ va $y < x$ munosabatini $\{< x, y > \in R \times R /\ y < x\}$ shakllarda yozish mumkinligini tushuntiring.

2. $\{< 2,4 >, < 5,6 >, < 7,6 >, < 8,8 >\}\}$ tartiblangan juftliklar to'plami binar munosabati bo'lishi yoki bo'lmasligini tekshiring.

3. $\{< 1,2 >, < 2,2 >, < 3,4 >\}$ funsksiyaning aniqlanish va qiymatlar sohasini toping.

4. $\{< 3,4 >, < 3,5 >, < 4,6 >\}$ munosabat funksiya bo'lishi yoki bo'lmasligini tekshiring.

5. $\{< x, x^2 + x + 1 > / x \in R\}$ funksiya bo'lishini isbotlang.

6. $\{< x^2, x > / x \in R\}$ funksiya bo'la olmasligini isbotlang.

7. Bul algebrasining Kantor algebrasiga izomorf ekanligini isbotlang.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Munosabatlar tushunchasi nimani ifodalaydi?
2. Binar munosabat deb nimaga aytiladi?
3. Ekvivalentlik munosabati nima?
4. Qanday munosabatlar refleksiv, simmetrik va tranzitiv munosabatlar deb ataladi?
5. Funksiya tushunchasini bilasizmi?
6. Funksiyalar superpozitsiyasi deganda nimani tushunasiz?
7. Tartiblash munosabatini qanday tushunasiz?

1.7.Fazzi munosabatlar

To'plam. Element. Dekart ko'paytmasi. Munosabat. Fazzi to'plam. Fazzi munosabat. Fazzi munosabatning qismi, to'ldiruvchisi. Fazzi munosabatlarning birlashmasi, kesishmasi, algebraik ko'paytmasi, algebraik yig'indisi, kompozitsiyasi.

1.7.1. Fazzi munosabat tushunchasi. I bobning 5- paragrafida fazzi to'plam tushunchasi o'rganilgan edi. Endi fazzi munosabat tushunchasini kiritamiz. Berilgan $X_1, X_2, ..., X_n$ universal to'plamlarning Dekart ko'paytmasi $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ bo'lsin.

1- ta'rif. *X Dekart ko'paytmasining fazzi qism to'plami X_1, $X_2, ..., X_n$ to'plamlarda aniqlangan **n-ar fazzi munosabat** deb ataladi.*

Ko'pincha "n-ar fazzi munosabat" iborasidagi "n-ar" tushirib qoldiriladi. Fazzi munosabatlarni belgilashda turli usullardan foydalaniladi. Fazzi to'plam tushunchasi ta'rifiga ko'ra $R:(X_1, X_2, ..., X_n) \to [0,1]$ fazzi munosabatni aniqlovchi fazzi to'plamning $\mu_R(x_1, x_2, ..., x_n)$ a'zolik funksiyasi qiymati $x_1, x_2, ..., x_n$ ($x_i \in X_i, i = \overline{1,n}$) elementlar orasidagi n-ar R **fazzi munosabatning bajarilish darajasini** ifodalaydi.

$n = 2$ bo'lgan holda X va Y to'plamlarda aniqlangan $R: X \times Y \to$ $\to [0,1]$ fazzi munosabat $X \times Y$ Dekart ko'paytmasining har bir (x, y) elementiga $\mu_R(x, y) \in [0,1]$ kattalikni mos qo'yadi. $X = Y$ bo'lganda $R: X \times X \to [0,1]$ fazzi munosabat X to'plamda aniqlangan deb yuritiladi.

1- misol. 1. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ va $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ to'plamlarda aniqlangan XMY fazzi munosabat (aniqrog'i, uni aniqlovch fazzi to'plam a'zolik funksiyasi), masalan, 1- jadvaldagidek berilishi mumkin.

2. $X = \{0,1,2,3\}$ to'plamda aniqlangan "$x \approx y$" ("x taqriban y ga teng") fazzi munosabatni, masalan, qiymatlari quyidagi matritsada berilgan $\mu_{"x \approx y"}(x, y)$ a'zolik funksiyasi vositasida ifodalash mumkin.

1- jadval

XMY	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1	0,5	0,1	0,3
x_2	0	0,8	1	0,7
x_3	0	0	0,6	1

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \leftarrow y \end{array} & x\downarrow \\ \mu_{"x\approx y"}(x,y)=\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,2 & 0,1 \\ 0,5 & 1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,2 & 0,6 & 1 & 0,8 \\ 0,1 & 0,3 & 0,8 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

3. Agar universal to‘plam $X=[0,\ 3]$ ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, u holda "$x\ \ y$" fazzi munosabat uchun a’zolik funksiyasi sifatida, masalan, $\mu_{"x\approx y"}(x,y)=e^{-0,2(x-y)^2}$ funksiya olinishi mumkin. ■

A’zolik funksiyasi $\mu_R(x,y)$ bo‘lgan R fazzi munosabat berilgan bo‘lsa, a’zolik funksiyasi quyidagicha aniqlangan munosabat **fazzi munosabatga yaqin oddiy munosabat** (uni $\underline{R}$ deb belgilaymiz) sifatida qaralishi mumkin:

$$\mu_{\underline{R}}(x,y)=\begin{cases} 0, & \mu_R(x,y)<0,5 \text{ bo'lganda,} \\ 1, & \mu_R(x,y)>0,5 \text{ bo'lganda,} \\ 0 \text{ yoki } 1, & \mu_R(x,y)=0,5 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

Ko‘pchilik hollarda $\mu_R(x,y)=0,5$ bo‘lganda $\mu_{\underline{R}}(x,y)=0$ deb olinadi.

X va Y to‘plamlarda aniqlangan hamda $\mu_R(x,y)$ a’zolik funksiyasi bilan ifodalanuvchi XRY fazzi munosabat berilgan bo‘lsin.

2- ta’rif. *$X\times Y$ Dekart ko‘paytmasining $\mu_R(x,y)>0$ shartni qanoatlantiruvchi barcha (x,y) elementlaridan tashkil topgan $S(R)$ to‘plam XRY* ***fazzi munosabatning tashuvchisi*** *deb ataladi.*

3- ta’rif. *A’zolik funksiyasi $1-\mu_R(x,y)$ bo‘lgan $\overline{R}$ fazzi munosabat R fazzi munosabatning* ***to‘ldiruvchisi*** *deb ataladi.*

2- misol. $[0,\ 5]$ to‘plamda aniqlangan va

$$\mu_{"x\approx y"}(x,y)=\begin{cases} e^{-5(x-y)^2}, & |x-y|\le 2 \text{ bo'lganda,} \\ 0, & \text{aks holda,} \end{cases}$$

a’zolik funksiyasi bilan ifodalanuvchi "$x\approx y$" ("x taqriban y ga teng") fazzi munosabatni M bilan belgilaymiz. U holda M fazzi munosabatning tashuvchisi $S(M)=\{(x,y): 0\leq x\leq 5,\ 0\leq y\leq 5, |x-y|\leq 2\}$ to'plam bo'ladi. M fazzi munosabatning to'ldiruvchisi $\overline{M}$ fazzi munosabat "x taqriban y ga teng emas" deb ifodalanishi mumkin. 3- ta'rifga ko'ra $\overline{M}$ fazzi munosabatning a'zolik funksiyasi

$$\mu_{\overline{M}}(x,y)=\begin{cases}1-e^{-5(x-y)^2}, & |x-y|\leq 2 \text{ bo'lganda,}\\ 1, \text{ aks holda,}\end{cases}$$

va 2- ta'rifga ko'ra $S(\overline{M})=\{(x,y): 0\leq x\leq 5,\ 0\leq y\leq 5,\ x\neq y\}$ bo'ladi. ■

4- ta'rif. *Agar $X\times Y$ Dekart ko'paytmasining barcha (x,y) elementlari uchun $\mu_{R_1}(x,y)=\mu_{R_2}(x,y)$ tenglik bajarilsa, u holda XR_1Y va XR_2Y fazzi munosabatlar **o'zaro ekvivalent** deb ataladi.*

Berilgan R_1 va R_2 fazzi munosabatning o'zaro ekvivalentligi $R_1=R_2$ (ba'zan $R_1\sim R_2$) shaklda belgilanadi va "ekvivalent" iborasi o'rnida "teng" iborasi ham qo'llanilishi mumkin.

5- ta'rif. *Agar $X\times Y$ Dekart ko'paytmasining barcha (x,y) elementlari uchun $\mu_{R_1}(x,y)\leq\mu_{R_2}(x,y)$ tengsizlik bajarilsa, u holda XR_1Y fazzi munosabat XR_2Y fazzi munosabatning **qismi** deb ataladi.*

R_1 fazzi munosabat R_2 fazzi munosabatning qismi bo'lishi $R_1\subseteq R_2$ ko'rinishda yoziladi va "R_1 fazzi munosabat R_2 fazzi munosabatda **yotadi**" yoki "R_2 (fazzi munosabat) R_1 ni (fazzi munosabatni) **o'z ichiga oladi (qamraydi)**" deb o'qiladi.

3- misol. $[0,\ \infty)$ to'plamda aniqlangan hamda mos ravishda

$$\mu_{R_1}(x,y)=\begin{cases}0, & x>y \text{ bo'lganda,}\\ 1-e^{-k_1(x-y)^2}, & y\geq x \text{ bo'lganda,}\end{cases}$$

$$\mu_{R_2}(x,y)=\begin{cases}0, & x>y \text{ bo'lganda,}\\ 1-e^{-k_2(x-y)^2}, & y\geq x \text{ bo'lganda,}\end{cases}$$

a'zolik funksiyalari bilan ifodalanuvchi $y>>x$ ("y son x sondan juda katta") tipidagi ikkita R_1 va R_2 fazzi munosabatlar berilgan bo'lsin. Ravshanki, agar $k_2\geq k_1$ bo'lsa, u holda R_1 fazzi munosabat R_2 fazzi munosabatning qismi bo'ladi. ■

1.7.2. Fazzi munosabatlar ustida amallar. Fazzi munosabatlar ustida turli amallar bajarish mumkin. Bu yerda bunday amallardan ba'zilari bilan tanishamiz.

X va Y to'plamlarda aniqlangan, mos ravishda $\mu_{R_1}(x,y)$ va $\mu_{R_2}(x,y)$ a'zolik funksiyalari bilan ifodalanuvchi ikkita R_1 va R_2 fazzi munosabatlar berilgan bo'lsin.

6- ta'rif. *A'zolik funksiyasi* $\max\{\mu_{R_1}(x,y),\mu_{R_2}(x,y)\}$ *bo'lgan* $R_1 \bigcup R_2$ *fazzi munosabat* R_1 *va* R_2 *fazzi munosabatlarning* ***birlashmasi*** *deb ataladi.*

7- ta'rif. *A'zolik funksiyasi* $\min\{\mu_{R_1}(x,y),\mu_{R_2}(x,y)\}$ *bo'lgan* $R_1 \bigcap R_2$ *fazzi munosabat* R_1 *va* R_2 *fazzi munosabatlarning* ***kesishmasi*** *deb ataladi.*

4- misol. $X=\{x_1,x_2\}$ va $Y=\{y_1,y_2,y_3\}$ to'plamlarda aniqlangan XM_1Y va XM_2Y fazzi munosabatlar $\mu_{M_1}(x,y)$ va $\mu_{M_2}(x,y)$ a'zolik funksiyalari mos ravishda 1- va 2- jadvallarda berilgan.

1- jadval

$\mu_B(x,y)$	y_1	y_2	y_3
x_1	0,2	0,1	0,8
x_2	1	0,7	0,2

2- jadval

$\mu_K(x,y)$	y_1	y_2	y_3
x_1	0,7	0,9	0,8
x_2	0,3	0,6	0,5

Berilgan fazzi munosabatlar $B=M_1 \bigcup M_2$ birlashmasi va $K=M_1 \bigcap M_2$ kesishmasining $\mu_B(x,y)$ va $\mu_K(x,y)$ a'zolik funksiyalarini mos ravishda 3- va 4- jadvallardagidek ifodalash mumkin. ■

3- jadval

$\mu_B(x,y)$	y_1	y_2	y_3
x_1	0,7	0,9	0,8
x_2	1	0,7	0,5

4- jadval

$\mu_K(x,y)$	y_1	y_2	y_3
x_1	0,2	0,1	0,8
x_2	0,3	0,6	0,2

8- ta'rif. *A'zolik funksiyasi* $\mu_{R_1}(x,y)\mu_{R_2}(x,y)$ *bo'lgan* $R_1 \cdot R_2$ *fazzi munosabat* R_1 *va* R_2 *fazzi munosabatlarning* ***algebraik ko'paytmasi*** *deb ataladi.*

9- ta'rif. *A'zolik funksiyasi* $\mu_{R_1}(x,y)+\mu_{R_2}(x,y)-\mu_{R_1}(x,y)\mu_{R_2}(x,y)$ *bo'lgan* $R_1 \hat{+} R_2$ *fazzi munosabat* R_1 *va* R_2 *fazzi munosabatlarning* ***algebraik yig'indisi*** *deb ataladi.*

5- misol. 4- misolda berilgan M_1 va M_2 fazzi munosabatlarning algebraik ko'paytmasi $A=M_1 \cdot M_2$ va algebraik yig'indisi $C=M_1 \hat{+} M_2$ bo'lgan fazzi munosabatlar $\mu_A(x,y)$ va $\mu_C(x,y)$ a'zolik funksiyalari mos ravishda 5- va 6- jadvallarda berilgan. ■

5- jadval

$\mu_K(x,y)$	y_1	y_2	y_3
x_1	0,14	0,09	0,64
x_2	0,3	0,42	0,1

6- jadval

$\mu_C(x,y)$	y_1	y_2	y_3
x_1	0,76	0,91	0,96
x_2	1	0,88	0,6

Fazzi munosabatlar ustida yuqorida kiritilgan amallar distributivlik xossalariga ega, ya'ni X va Y to'plamlarda aniqlangan ixtiyoriy A, B va C fazzi munosabatlar uchun quyidagilar o'rinlidir.

1. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$. 2. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

3. $A\cdot(B\cup C)=(A\cdot B)\cup(A\cdot C)$. 4. $A\cdot(B\cap C)=(A\cdot B)\cap(A\cdot C)$.

5. $A\hat{+}(B\cup C)=(A\hat{+}B)\cup(A\hat{+}C)$. 6. $A\hat{+}(B\cap C)=(A\hat{+}B)\cap(A\hat{+}C)$.

Bu xossalardan faqat 1-sini isbotlash bilan kifoyalanamiz.

1- xossaning **isboti.** $X\times Y$ Dekart ko'paytmasining barcha elementlari uchun

$$\min\{\mu_A(x,y),\max\{\mu_B(x,y),\mu_C(x,y)\}\}=$$
$$=\max\{\min\{\mu_A(x,y),\mu_B(x,y)\},\min\{\mu_A(x,y),\mu_C(x,y)\}\}$$

tenglik bajarilishini ko'rsatish kerak. (x,y) – $X\times Y$ Dekart ko'paytmasining ixtiyoriy elementi hamda $a=\mu_A(x,y)$, $b=\mu_B(x,y)$ va $c=\mu_C(x,y)$ bo'lsin. Ushbu bobning 5- paragrafidagi fazzi to'plamlar uchun distributivlik xossasini ifodalovchi $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ tenglikni isbot qilishdagidek bu yerda ham mumkin bo'lgan 15 holdan biri ro'y berishi mumkin. Mumkin bo'lgan barcha 15 holda ham isbotlanishi kerak bo'lgan tenglik to'g'ri. ■

Qolgan xossalarining isboti o'quvchiga havola qilinadi.

10- ta'rif. *X va Z to'plamlarda aniqlangan, a'zolik funksiyasi $\max\limits_{y}\min\{\mu_{R_1}(x,y),\mu_{R_2}(y,z)\}$ bo'lgan $R_1\circ R_2$ fazzi munosabat X va Y to'plamlarda aniqlangan R_1 hamda X va Y to'plamlarda aniqlangan R_2 fazzi munosabatlarning* ***kompozitsiyasi*** *deb ataladi.*

5-misol. $X=\{x_1,x_2\}$, $Y=\{y_1,y_2,y_3\}$ va $Z=\{z_1,z_2,z_3,z_4\}$ to'plamlar berilgan bo'lsin. A'zolik funksiyalari mos ravishda 7-, 8-jadvallarda ifodalangan X va Y to'plamlarda aniqlangan XF_1Y hamda Y va Z to'plamlarda aniqlangan XF_2Y fazzi munosabatlarning $K=F_1\circ F_2$ kompozitsiyasini (X va Z to'plamlarda aniqlangan XKZ fazzi munosabatni) topamiz.

7-jadval

$\mu_{F_1}(x,y)$	y_1	y_2	y_3
x_1	0,1	0,7	0,8
x_2	0,5	0	0,2

8-jadval

$\mu_{F_2}(x,y)$	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0	0,5	0,1	0,8
y_2	0,3	0,2	0,6	0,5
y_3	1	0	0,5	0,1

1) $\mu_K(x_1,z_1)=\max\{\min\{\mu_{F_1}(x_1,y_1),\mu_{F_2}(y_1,z_1)\},\ \min\{\mu_{F_1}(x_1,y_2),$
$\mu_{F_2}(y_2,z_1)\},\min\{\mu_{F_1}(x_1,y_3),\mu_{F_2}(y_3,z_1)\}\}=\max\{\min\{0,1;0\},$
$\min\{0,7;0,3\},\min\{0,8;1\}\}=\max\{0;0,3;0,8\}=0,8$;

2) $\mu_K(x_1,z_2)=\max\{\min\{0,1;0,5\},\min\{0,7;0,2\},\min\{0,8;0\}\}=$
$=\max\{0,1;0,2;0\}=0,2$;

3) $\mu_K(x_1,z_3)=0,6$; 4) $\mu_K(x_1,z_4)=0,5$; 5) $\mu_K(x_2,z_1)=0,2$;

6) $\mu_K(x_2,z_2)=0,5$; 7) $\mu_K(x_2,z_3)=0,2$; 8) $\mu_K(x_2,z_4)=0,5$;

Bu qiymatlarni 9- jadvalga joylashtiramiz. ■

Kompozitsiya amalining xossalari sifatida quyidagilarni keltiramiz. Ixtiyoriy A, B va C fazzi munosabatlar uchun quyidagilar o‘rinlidir.

9- jadval

$\mu_K(x,y)$	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	0,8	0,2	0,6	0,5
x_2	0,2	0,5	0,2	0,5

1. Assotsiativlik: $(A\circ B)\circ C=A\circ(B\circ C)$.
2. Birlashmaga nisbatan distributivlik: $A\circ(B\bigcup C)=(A\circ B)\bigcup(A\circ C)$.
3. Agar $A\subseteq B$ bo‘lsa, u holda $R\circ A\subseteq R\circ B$ bo‘ladi.

Ta’kidlaymizki, kompozitsiya amali uchun kesishmaga nisbatan distributivlik xossasi o‘rinli emas, ya’ni, umuman olganda, $A\circ(B\bigcap C)$ va $(A\circ B)\bigcap(A\circ C)$ fazzi munosabatlar o‘zaro ekvivalent emas.

10- ta’rifdagi a’zolik funksiya ko‘rinishiga asoslanib, uni **(max,min)-kompozitsiya** deb ham atashadi. Agar 10- ta’rifdagi a’zolik funksiyasi boshqacha, masalan, $\max\{\mu_{R_1}(x,y)\mu_{R_2}(x,y)\}$ ko‘rinishda ifodalansa, u holda **(max,*)-kompozitsiya** tushunchasi hosil bo‘ladi.

Fazzi to‘plam va fazzi munosabat bilan bog‘liq matematik nazariya matematikaga bir qator tushunchalarning kirib kelishiga asos bo‘lib xizmat qildi. **Fazzi xulosalar**, **fazzi qiymatlar** va ular ustida amallar, **yumshoq hisoblashlar** (soft computing), **lingvistik o‘zgaruvchilar**, **fazzi mantiq** va hokasolar shunday tushunchalar jumlasidandir.

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Fazzi munosabatlar ustida amallarning distributivligini ifodalovchi 2–6- xossalarni isbotlang.

2. Fazzi munosabatlar uchun de Morgan qonunlarini tekshirib ko‘ring.

3. Ixtiyoriy A, B va C fazzi munosabatlar uchun $A \cdot (B \hat{+} C) = (A \cdot B) \hat{+} (A \cdot C)$ o‘rinli bo‘lish shartini toping.

4. Ixtiyoriy A, B va C fazzi munosabatlar uchun $(A \hat{+} B) \hat{+} C = A \hat{+} (B \hat{+} C)$ o‘rinli bo‘lishini isbotlang.

5. Kompozitsiya amalining xossalarini isbotlang.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. r-ar fazzi munosabat nima?

2. Fazzi munosabatning bajarilish darajasi deganda nimani tushunasiz?

3. Fazzi munosabatga yaqin oddiy munosabat qanday aniqlanadi?

4. Fazzi munosabatning tashuvchisi qanday to‘plam?

5. Fazzi munosabatning to‘ldiruvchisi nima?

6. Fazzi munosabatlarning birlashmasi va kesishmasi qanday aniqlanadi?

7. Fazzi munosabatlar algebraik ko‘paytmasi, yig‘indisi uchun a’zolik funksiyalari ko‘rinishini bilasizmi?

8. Fazzi munosabatlar ustida bajariladigan amallarning distributivlik bilan bog‘liq qanday xossalari bor?

9. Fazzi munosabatlar kompozitsiyasini topish uchun a’zolik funksiyalari qiymatlari ustida qanday amallar bajariladi?

10. Fazzi munosabatlar kompozitsiyasi uchun kesishmaga nisbatan distributivlik xossasi o‘rinli emasligining sababi nimada

II BOB
KOMBINATORIKA ELEMENTLARI

Ushbu bobda kombinatorikada ko‘p qo‘llaniladigan usul va qoidalar, kombinatsiyalar, Paskal uchburchagi, Nyuton binomi, binomial koeffitsiyentlarning xossalari, ko‘phad formulasi, Fibonachchi sonlari va ularning sodda xossalari, bo‘laklashlar va ularning ba’zi xususiyatlari, Ferrers diagrammasi, hosil qiluvchi funksiyalarning xossalari va ularning kombinatorikada qo‘llanilishi bayon qilinadi.

2.1. Kombinatorika haqida umumiy tushunchalar

Kombinatorika. To‘plam. Element. Tartiblash. Kombinatsiya[1]*. Kombinatorik tuzilma. Birlashma. Kesishma. Kortej. Figurali sonlar. Matematik induksiya usuli. Qo‘shish va ko‘paytirish qoidalari. Kiritish va chiqarish qoidasi. Umumlashgan qo‘shish, ko‘paytirish hamda kiritish va chiqarish qoidalari. Bulean.*

2.1.1. Kombinatorika predmeti va paydo bo‘lish tarixi. Matematikaning kombinatorik tahlil, kombinatorik matematika, birlashmalar nazariyasi, qisqacha, **kombinatorika** deb ataluvchi bo‘limida chekli yoki muayyan ma’noda cheklilik shartini qanoatlantiruvchi to‘plamni (bu to‘plamning elementlari qanday bo‘lishining ahamiyati yo‘q: harflar, sonlar, hodisalar, qandaydir predmetlar va boshqalar) qismlarga ajratish, ularni o‘rinlash va o‘zaro joylash ya’ni, **kombinatsiyalar, kombinatorik tuzilmalar** bilan bog‘liq masalalar o‘rganiladi. Hozirgi davrda kombinatorikaga oid ma’lumotlar inson faoliyatining turli sohalarida qo‘llanilmoqda. Jumladan, matematika, kimyo, fizika, biologiya, lingvistika, axborot texnologiyalari va boshqa sohalar bilan ish ko‘ruvchi mutaxassislar kombinatorikaning xilma-xil masalalariga duch keladilar.

To‘plamlar nazariyasi iboralari bilan aytganda, kombinatorikada kortejlar va to‘plamlar, ularning birlashmalari va kesishmalari hamda kortejlar va qism to‘plamlarni turli usullar bilan tartiblash masalalari qaraladi. To‘plam yoki kortej elementlarining berilgan xossaga ega konfiguratsiyasi bor yoki yo‘qligini tekshirish, bor bo‘lsa, ularni tuzish va sonini topish usullarini o‘rganish hamda bu usullarni biror parametr

---

[1] Bu so‘z lotincha “combinatio” so‘zidan yasalgan bo‘lib, birikma, birlashma, tuzilma, tutashma ma’nolarini anglatadi.

Blez Paskal

bo'yicha takomillashtirish kombinatorikaning asosiy masalalari hisoblanadi.

Kombinatorikaning ba'zi elementlari eramizdan oldingi II asrda hindistonliklarga ma'lum edi. Ular hozirgi vaqtda gruppalashlar deb ataluvchi kombinatorik tushunchadan foydalanishgan. Eramizning XII asrida Bxaskara Acharya[1] o'zining ilmiy tadqiqotlarida gruppalash va o'rin almashtirishlarni qo'llagan. Tarixiy ma'lumotlarga ko'ra, hindistonlik olimlar kombinatorika elementlaridan, jumladan, birlashmalardan foydalanib, she'riy asarlar tarkibiy tuzilishining mukammalligini tahlil qilishga uringanlar. O'rta Osiyo va G'arbiy Yevropada yashab ijod qilgan olimlarning kombinatorikaga oid ishlari haqida ushbu bobning 3- paragrafida ma'lumot keltirilgan.

Umuman olganda, kombinatorikaning dastlabki rivoji qimor o'yinlarini tahlil qilish bilan bog'liq. Ba'zi atoqli matematiklar, masalan, B.Paskal[2], Yakob Bernulli[3], L. Eyler[4], P. L. Chebishev[5] turli o'yinlarda (tanga tashlash, soqqa tashlash, qarta o'yinlari va shu kabilarda) ilmiy jihatdan asoslangan qaror qabul qilishda kombinatorikani qo'llashgan.

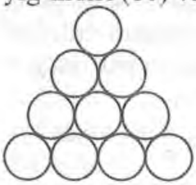
XVII asrda kombinatorika matematikaning alohida bir ilmiy yo'nalishi sifatida shakllana boshladi. B. Paskal o'zining "Arifmetik uchburchak haqida traktat" va "Sonli tartiblar haqida traktat" (1665- y.) nomli asarlarida hozirgi vaqtda binomial koeffitsiyentlar deb ataluvchi sonlar haqidagi ma'lumotlarni keltirgan. P.Ferma[6] esa figurali sonlar bilan birlashmalar nazariyasi orasida bog'lanish borligini bilgan.

Leonard Eyler

Figurali sonlar quyidagicha aniqlanadi. Birinchi tartibli figurali sonlar: 1, 2, 3, 4, 5, ... (ya'ni, natural sonlar); ikkinchi tartibli figurali sonlar: 1-si 1ga teng, 2-si dastlabki ikkita natural sonlar yig'indisi (3), 3-si dastlabki uchta natural

[1] Bxaskara Acharya (1114-1178- yildan keyin) – hindistonlik matematik va astronom.
[2] Paskal (Pascal Blez, 1623-1662) – fransuz faylasufi, yozuvchisi, matematigi va fizigi.
[3] Bernulli Yakob (1654-1705) – Shveysariya matematigi.
[4] Eyler (Euler Leonard, 1707-1783) – mashhur matematik, mexanik va fizik.
[5] Chebishev (Чебышев Пафнутий Львович, 1821-1894) – rus matematigi va mexanigi.
[6] Ferma (Fermat Pyer, 1601-1665) – fransuz matematigi va huquqshunosi.

sonlar yig'indisi (6) va hokazo (1, 3, 6, 10, 15, ...); uchinchi tartibli figurali sonlar: 1-si 1ga teng, 2-si birinchi ikkita ikkinchi tartibli figurali sonlarlar yig'indisi (4), 3-si birinchi uchta ikkinchi tartibli figurali sonlar yig'indisi (10) va hokazo (1, 4, 10, 20, 35, ...).



1- shakl

1- misol. Tekislikda radiuslari o'zaro teng bo'lgan aylanalar bir-biriga uringan holda yuqoridan 1- qatorda bitta, 2- qatorda ikkita, 3- qatorda uchta va hokazo, joylashtirilgan bo'lsin. Masalan, aylanalar bunday joylashuvining dastlabki to'rt qatori 1- shaklda tasvirlangan. Bu yerda qatorlardagi aylanalar sonlari ketma-ketligi birinchi tartibli figurali sonlarni tashkil qiladi. Bu tuzilmadan foydalanib ikkinchi tartibli figurali sonlarni quyidagicha hosil qilish mumkin. Dastlab 1- qatordagi aylanalar soni (1), keyin dastlabki ikkita qatordagi aylanalar soni (3), undan keyin dastlabki uchta qatordagi aylanalar soni (6), va hokazo. ■

"Kombinatorika" iborasi G. Leybnisning[1] "Kombinatorik san'at haqidagi mulohazalar" nomli asarida birinchi bor 1665- yilda keltirilgan. Bu asarda birlashmalar nazariyasi ilmiy jihatdan ilk bor asoslangan. O'rinlashtirishlarni o'rganish bilan birinchi bo'lib Yakob Bernulli shug'ullangan va bu haqdagi ma'lumotlarni 1713- yilda bosilib chiqqan "Ars conjectandi" (Bashorat qilish san'ati) nomli kitobining ikkinchi qismida bayon qilgan. Hozirgi vaqtda kombinatorikada qo'llanilayotgan belgilashlar XIX asrga kelib shakllandi.

Gotfrid Leybnis

Kombinatsiya – bu kombinatorikaning asosiy tushunchasidir. Bu tushuncha yordamida ixtiyoriy to'plamning qandaydir sondagi elementlaridan tashkil topgan tuzilmalar ifodalanadi. Kombinatorikada bunday tuzilmalarning **o'rin almashtirishlar**, **o'rinlashtirishlar** va **gruppalashlar** deb ataluvchi asosiy ko'rinishlari o'rganiladi.

2.1.2. Kombinatorikada ko'p qo'llaniladigan usul va qoidalar. Kombinatorika va graflar nazariyasida tasdiqlarni isbotlashning samarali

---

[1] Leybnis (Leibniz Gotfrid Vilgelm, 1646-1716) –olmon faylasufi, matematigi, fizigi, kashfiyotchisi, huquqshunosi, tarixchisi va tilchisi.

usullaridan biri bo‘lgan **matematik induksiya usuli**[1] ko‘p qo‘llaniladi. Bu usulning ketma-ket bajariladigan ikkita qismi bo‘lib, ular quyidagi umumiy g‘oyaga asoslanadi. Faraz qilaylik, isbotlanishi kerak bo‘lgan tasdiq birorta xususiy $n = n_0$ qiymat (masalan, $n_0 = 1$) uchun to‘g‘ri bo‘lsin (usulning bu qismi **baza** yoki **asos** deb ataladi). Agar bu tasdiqning istalgan $n = k > n_0$ uchun to‘g‘riligidan uning $n = k + 1$ uchun to‘g‘riligi kelib chiqsa, u holda tasdiq istalgan natural $n \geq n_0$ son uchun to‘g‘ri bo‘ladi (**induksion o‘tish** yoki **induktiv o‘tish**).

2-m i s o l. Ixtiyoriy n natural son uchun $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ tenglikning o‘rinli bo‘lishini matematik induksiya usuli yordamida isbotlaymiz.

Baza. $n = 1$ bo‘lsin, u holda yuqoridagi tenglik to‘g‘ri ekanligi ravshan: $1^2 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6}$.

Induksion o‘tish: isbotlanish kerak bo‘lgan tenglik $n = k > 1$ uchun to‘g‘ri, ya’ni $1^2 + 2^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ tenglik o‘rinli bo‘lsin. Bu tenglikning chap va o‘ng tomonlariga $(k+1)^2$ ifodani qo‘shib, uni

$$1^2 + 2^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

ko‘rinishda yozamiz. Oxirgi tenglikning o‘ng tomonida quyidagicha o‘zgartirishlarni bajaramiz:

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = (k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6} + (k+1)\right] =$$

$$= \frac{(k+1)\left[2k(k+2) + 3(k+2)\right]}{6} = \frac{(k+1)\left[(k+1)+1\right]\left[2(k+1)+1\right]}{6}.$$

Demak,

$$1^2 + 2^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)\left[(k+1)+1\right]\left[2(k+1)+1\right]}{6}.$$

Oxirgi munosabat isbotlanishi kerak bo‘lgan tenglikning $n = k + 1$ bo‘lgan holidir. ■

---

[1] VI bobga qarang.

Shuni ta'kidlash kerakki, biror tasdiqni isbotlash uchun matematik induksiya usuli qo'llanilganda, bu usulning ikkala qismini ham tekshirib ko'rish muhimdir, ya'ni baza va induksion o'tish albatta tekshirilishi shart. Ulardan biri tekshirilmasa noto'g'ri natijalar hosil bo'lishi ham mumkin. Bundan tashqari, baza birorta xususiy qiymatdan boshqa ko'p, hattoki, juda ko'p xususiy hollar uchun tekshirilib, ijobiy natija olinganda ham, bu hollarni umumlashtiruvchi natijaviy tasdiq noto'g'ri bo'lib chiqishi mumkin. Bu mulohazalarning o'rinli ekanligini quyida keltirilgan misollar ko'rsatadi.

3- misol. "Ixtiyoriy n natural son uchun $2n-1$ son 2ga qoldiqsiz bo'linadi" degan tasdiqni tekshirishda matematik induksiya usulining baza qismi talabini bajarmasdan faqat induksion o'tishni tekshiramiz.

Bu tasdiq $n=k>1$ uchun to'g'ri bo'lsin, ja'ni $2k$ 1 son 2ga qoldiqsiz bo'linsin deb faraz qilamiz. U holda $(2k-1)+2$ son ham, qo'shiluvchilarining har biri 2ga qoldiqsiz bo'linganligi sababli, 2ga qoldiqsiz bo'linadi. Shuning uchun $(2k-1)+2=2(k+1)-1$ tenglik asosida $2(k+1)-1$ son 2ga qoldiqsiz bo'linadi degan xulosa kelib chiqadi. Demak, yuqoridagi tasdiq $n=k$ 1 uchun to'g'ri, ya'ni induksion o'tish bajarildi, deb hisoblash mumkin.

Shunday qilib, matematik induksiya usulining baza qismini tekshirmasdan "ixtiyoriy natural n son uchun $2n$ 1 son 2ga qoldiqsiz bo'linadi" degan xulosa qilish noto'g'ridir, chunki ixtiyoriy n natural son uchun $2n-1$ sonni 2ga bo'lganda 1 qoldiq qoladi. ■

4- misol. "Ixtiyoriy n natural son uchun n^2+n+17 ifodaning qiymati tub sondir" degan tasdiqni tekshirish maqsadida matematik induksiya usulining faqat baza qismi talabini dastlabki 15ta natural sonlar uchun bajaramiz.

$n=1$ bo'lganda $n^2+n+17=1^2+1+17=19$ tub son hosil bo'ladi. $n=\overline{2,15}$ bo'lganda ham n^2+n+17 ifodaning qiymati sifatida 23, 29, 37, 47, 59, 73, 89, 107, 127, 149, 173, 199, 227 va 257 tub sonlarni hosil qilamiz.

Induksion o'tishni tekshirmasdan "ixtiyoriy natural n son uchun n^2+n+17 ifodaning qiymati tub sondir" degan xulosa qilish noto'g'ridir, chunki, masalan, agar $n=16$ bo'lsa, u holda bu ifodaning qiymati murakkab sondir: $n^2+n+17=16^2+16+17=289=17\cdot17$. ■

5- misol. Biror n natural son uchun $991n^2+1$ son butun sonning kvadrati bo‘ladimi? Bu savolga javob berish uchun, n ning dastlabki o‘n, yuz, ming, million, milliard, hattoki, trillionta qiymatlari uchun $991n^2+1$ ifoda tekshirilganda, uning qiymatlaridan birortasi ham butun son kvadrati bo‘lmasligi qayd etilgan. Shunday bo‘lishiga qaramasdan bu tasdiq asosida, induksion o‘tishni bajarmasdan, “ixtiyoriy natural n son uchun $991n^2+1$ ifodaning qiymati butun sonning kvadrati bo‘lmaydi” degan xulosa qilish mumkin emas. $991n^2+1$ ifodaning qiymati butun sonning kvadrati bo‘ladigan n natural sonning borligi va bunday sonning eng kichigini o‘nli sanoq sistemasida yozganda 29 ta (!) raqam bilan ifodalanishi komputer yordamida aniqlangan (qarang: Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х. Пособие по математики для поступающих в вузы. М.: Наука, 1976. – 640 с.). ■

Matematik induksiya usulining tatbiqiga yana bir misol sifatida quyidagi teoremani isbotlaymiz.

1- teorema. *Ixtiyoriy chekli A to‘plam uchun $\left|2^A\right| = 2^{|A|}$ tenglik o‘rinlidir.*

Isboti. Matematik induksiya usulini berilgan to‘plamning quvvati bo‘yicha qo‘llaymiz.

Baza. Dastlab A to‘plamning elementlari soni nolga teng, ya’ni $|A|=0$ bo‘lganda teoremaning tasdig‘i bajarilishini ko‘rsatamiz. $A_0=\varnothing$ bo‘lsin. U holda $A=A_0$ uchun $|A|=0$, $2^A=2^{\varnothing}=\{\varnothing\}$ va $\left|2^{\varnothing}\right|=\left|\{\varnothing\}\right|=1=2^0=2^{|\varnothing|}$ bo‘ladi. Demak, teoremaning tasdig‘i $|A|=0$ bo‘lgan hol uchun to‘g‘ridir.

Induksion o‘tish. Chekli k elementli ixtiyoriy A_k to‘plam uchun teoremaning tasdig‘i to‘g‘ri bo‘lsin, ya’ni $A=A_k$ bo‘lganda $\left|2^A\right|=2^{|A|}$ tenglik bajarilsin. $k+1$ elementli A_{k+1} to‘plamni qaraymiz. Ravshanki, $A=A_{k+1}$ uchun $|A|=k+1$ bo‘ladi. Qaralayotgan A to‘plamning ixtiyoriy a elementi uchun 2^A bulean to‘plamni o‘zaro kesishmaydigan ikkita $B_a^-=\{X \mid X\subset 2^A, a\notin X\}$ va $B_a^+=\{X \mid X\subset 2^A, a\in X\}$ to‘plamlar birlashmasi sifatida yozish mumkin. Demak, $\left|2^A\right|=\left|B_a^-\right|+\left|B_a^+\right|$.

Tuzilishiga ko‘ra, B_a^- to‘plam k elementli to‘plamning buleanidan iborat. Shuning uchun, induksion o‘tish faraziga ko‘ra $\left|B_a^-\right|=2^k$ bo‘ladi.

B_a^+ to'plam esa B_a^- to'plamning har bir element-to'plamiga a elementni kiritish yordamida hosil qilingan. Bundan $|B_a^+| = |B_a^-| = 2^k$ kelib chiqadi. Demak, $|A| = k+1$ bo'lgan hol uchun

$$|2^A| = |B_a^-| + |B_a^+| = 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1} = 2^{|A|}. \blacksquare$$

Ushbu bobning 3- paragrafida 1- teoremaning kombinatorik tushunchalarga asoslangan boshqa isboti keltiriladi.

Berilgan chekli A to'plamning buleani uning barcha qism to'plamlaridan tuzilgan to'plam bo'lgani sababli 1- teoremada isbotlangan $|2^A| = 2^{|A|}$ tenglik A to'plamning buleanini 2^A ko'rinishda belgilashga asos bo'la oladi.

Kombinatorikada sodda, o'z-o'zidan ravshan bo'lgan, ammo muhim qoidalar bor. Bunday qoidalar sifatida qo'shish, ko'paytirish hamda kiritish va chiqarish qoidalari deb ataluvchi qoidalarni ko'rsatish mumkin.

m ta elementli A to'plam va n ta elementli B to'plamlar berilgan bo'lib, ular kesishmasin. **Qo'shish qoidasiga** ko'ra, A yoki B to'plamga tegishli bo'ladigan birorta elementni tanlash imkoniyatlari soni ($m+n$)ga tengdir. **"Yoki" qoidasi** deb ham ataluvchi bu qoida mazmunini quyidagi teorema (isboti o'quvchiga havola qilinadi) ham ifodalaydi.

2- teorema. *Agar ixtiyoriy chekli A va B to'plamlar uchun $A \cap B = \varnothing$ bo'lsa, u holda $|A \cup B| = |A| + |B|$ bo'ladi.*

Demak, qo'shish qoidasiga ko'ra, kesishmaydigan ikkita to'plam birlashmasining quvvati shu to'plamlar quvvatlarining yig'indisiga tengdir.

Ko'paytirish qoidasiga asosan, m ta elementli A va n ta elementli B to'plamlarning elementlaridan tuzish mumkin bo'lgan barcha $<a,b>$ ($a \in A$, $b \in B$) kortejlar (juftliklar) soni mn ga teng. Bu qoida **"va" qoidasi** deb ham ataladi. Uni quyidagi teorema ko'rinishida ifodalash ham mumkin.

3- teorema. *Ixtiyoriy chekli A va B to'plamlar uchun $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ tenglik o'rinlidir.*

Isboti o'quvchiga havola qilinadi. $\blacksquare$

Demak, ko'paytirish qoidasiga ko'ra, ixtiyoriy ikkita chekli to'plam Dekart ko'paytmasining quvvati shu to'plamlar quvvatlarining ko'-paytmasiga tengdir.

Umumiy holda, agar chekli A va B to'plamlar hech bo'lmaganda bitta umumiy elementga ega bo'lsa, u holda $|A| + |B|$ yigindining qiymatini aniqlashda $A \bigcup B$ to'plamning ba'zi elementlarini, aniqrog'i, $A \bigcap B$ to'plamning elementlarini ikki marta hisobga olishga to'g'ri keladi. Bu mulohaza asosida quyidagi tasdiqqa kelamiz.

4- teorema. *Ixtiyoriy chekli A va B to'plamlar uchun $|A \bigcup B| = |A| + |B| - |A \bigcap B|$ tenglik o'rinlidir.*

Isboti. Osonlik bilan ko'rish mumkinki:

a) $A \bigcup B = A \bigcup (B \setminus A)$ va $A \bigcap (B \setminus A) = \varnothing$;

b) $B = (A \bigcap B) \bigcup (B \setminus A)$ va $(A \bigcap B) \bigcap (B \setminus A) = \varnothing$.

Bu munosabatlarga 2- teoremani qo'llasak, mos ravishda $|A \bigcup B| = |A| + |B \setminus A|$ va $|B| = |A \bigcap B| + |B \setminus A|$ tengliklarni hosil qilamiz. Bu tengliklardan isbotlanishi kerak bo'lgan tenglikni hosil qilish qiyin emas. ■

4- teoremaning tasdig'ini umumiy holda ikkita chekli to'plamlar birlashmasining quvvatini hisoblash qoidasi deyish mumkin. Bu qoidaning ma'nosidan kelib chiqqan holda, uni **kiritish va chiqarish qoidasi** deb atash qabul qilingan.

Ravshanki, 4- teoremada keltirilgan tenglikdan foydalanib $|A|$, $|B|$, $|A \bigcup B|$ va $|A \bigcap B|$ miqdorlarning ixtiyoriy uchtasi ma'lum bo'lganda to'rtinchisini hisoblash formulasini hosil qilish mumkin.

Yuqorida bayon qilingan ikkita to'plam uchun qo'shish, ko'paytirish hamda kiritish va chiqarish qoidalarini chekli sondagi istalgan chekli to'plamlar uchun umumlashtirish mumkin.

Avvalo, kiritish va chiqarish qoidasining umumlasmasi sifatida quyidagi teoremani keltiramiz.

5- teorema (umumlashgan kiritish va chiqarish qoidasi). *Ixtiyoriy chekli $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ to'plamlar uchun*

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + \ldots + |A_n| -$$
$$-|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \ldots - |A_{n-1} \cap A_n| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| +$$
$$+ \ldots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| - \ \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

munosabat o'rinlidir.

Isboti. Teoremani isbotlash uchun matematik induksiya usulini qo'llaymiz. $k = 1$ bo'lgan hol uchun teoremaning tasdig'i trivialdir.

Induksiya usulining bazasi sifatida $k = 2$ bo'lgan holni qaraymiz. Bu holda teoremaning tasdig'i 3- teoremaga asosan to'g'ri.

Induksion o'tish: teoremaning tasdig'i $n=k$ uchun to'g'ri, ya'ni

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + ... + |A_k| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| -$$
$$- ... - |A_{k-1} \cap A_k| + + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| +$$
$$+ ... + |A_{k-2} \cap A_{k-1} \cap A_k| - \; ... + (-1)^{k-1} |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k|$$

tenglik o'rinli bo'lsin. Tasdiqning $n=k+1$ bo'lgan holda to'g'ri ekanligini ko'rsatamiz. Avvalo, $A_1, A_2, A_3, ..., A_k, A_{k+1}$ to'plamlarning $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_k \cup A_{k+1}$ birlashmasini $(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_k) \cup A_{k+1}$ ko'rinishda ifodalaymiz. So'ngra 3- teoremani va kesishmaga nisbatan umumlashgan distributivlik qonunini qo'llab hamda teorema tasdig'ining $n=k$ uchun to'g'riligini hisobga olib, quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$|(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_k) \cup A_{k+1}| = |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_k| +$$
$$+ |A_{k+1}| - |(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_k) \cap A_{k+1}| =$$
$$= |A_1| + |A_2| + ... + |A_k| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - ... - |A_{k-1} \cap A_k| +$$
$$+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + ... + |A_{k-2} \cap A_{k-1} \cap A_k| -$$
$$- ... + (-1)^{k-1} |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k| + |A_{k+1}| -$$
$$- |(A_1 \cap A_{k+1}) \cup (A_2 \cap A_{k+1}) \cup (A_3 \cap A_{k+1}) \cup ... \cup (A_k \cap A_{k+1})|.$$

Bu ifodadagi oxirgi ayriluvchi $A_i \cap A_{k+1}$ ($i = 1,2,3,...,k$) ko'rinishdagi k ta to'plamlar birlashmasining quvvatini ifodalaydi. Shuning uchun, induksiya faraziga ko'ra, bu ayriluvchini quyidagicha yozish mumkin:

$$|(A_1 \cap A_{k+1}) \cup (A_2 \cap A_{k+1}) \cup (A_3 \cap A_{k+1}) \cup ... \cup (A_k \cap A_{k+1})| =$$
$$|A_1 \cap A_{k+1}| + |A_2 \cap A_{k+1}| + |A_3 \cap A_{k+1}| + ... + |A_k \cap A_{k+1}| -$$
$$- |(A_1 \cap A_{k+1}) \cap (A_2 \cap A_{k+1})| - |(A_1 \cap A_{k+1}) \cap (A_3 \cap A_{k+1})| -$$
$$- ... - |(A_{k-1} \cap A_{k+1}) \cap (A_k \cap A_{k+1})| + |(A_1 \cap A_{k+1}) \cap (A_2 \cap A_{k+1}) \cap (A_3 \cap A_{k+1})| +$$
$$+ |(A_1 \cap A_{k+1}) \cap (A_2 \cap A_{k+1}) \cap (A_4 \cap A_{k+1})| + ... +$$
$$+ |(A_{k-2} \cap A_{k+1}) \cap (A_{k-1} \cap A_{k+1}) \cap (A_k \cap A_{k+1})| -$$
$$- ... + (-1)^{k-1} |(A_1 \cap A_{k+1}) \cap (A_2 \cap A_{k+1}) \cap ... \cap (A_k \cap A_{k+1})| =$$
$$= |A_1 \cap A_{k+1}| + |A_2 \cap A_{k+1}| + |A_3 \cap A_{k+1}| + ... + |A_k \cap A_{k+1}| -$$

$$-|A_1 \cap A_2 \cap A_{k+1}| - |A_1 \cap A_3 \cap A_{k+1}| - \ldots - |A_1 \cap A_k \cap A_{k+1}| +$$
$$+|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_{k+1}| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_{k+1}| + \ldots +$$
$$+|A_1 \cap A_2 \cap A_k \cap A_{k+1}| + \ldots + (-1)^{k-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \cap A_{k+1}|.$$

Bu ifodani o‘z o‘rniga qo‘yib

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_k \cup A_{k+1}| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + \ldots + |A_k| + |A_{k+1}| -$$
$$-|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \ldots - |A_k \cap A_{k+1}| +$$
$$+|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \ldots + |A_{k-1} \cap A_k \cap A_{k+1}| -$$
$$- \ldots + (-1)^k |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \cap A_{k+1}|$$

tenglikni hosil qilamiz. ■

6- teorema (umumlashgan qo‘shish qoidasi). *Juft-jufti bilan kesishmaydigan ixtiyoriy chekli* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *to‘plamlar uchun*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$$

tenglik o‘rinlidir.

Isboti. Teorema shartiga ko‘ra barcha $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$, indekslar uchun $A_i \cap A_j = \varnothing$ bo‘lgani sababli 5- teorema asosida kerakli tenglikni hosil qilamiz. ■

7- teorema. *Ixtiyoriy chekli* $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ *to‘plamlar uchun*

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + \ldots + |A_n| -$$
$$-|A_1 \cup A_2| - |A_1 \cup A_3| - \ldots - |A_{n-1} \cup A_n| +$$
$$+|A_1 \cup A_2 \cup A_3| + |A_1 \cup A_2 \cup A_4| + \ldots + |A_{n-2} \cup A_{n-1} \cup A_n| -$$
$$- \ldots + (-1)^{n-1}|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$$

munosabat o‘rinlidir.

Isboti o‘quvchiga havola qilinadi. ■

8- teorema (umumlashgan ko‘paytirish qoidasi). *Elementlari soni mos ravishda* $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ *bo‘lgan* $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ *to‘plamlardan faqat bittadan element olib tuzilgan* k *uzunlikka ega kortejlar soni* $n_1 n_2 n_3 \ldots n_k$ *ga tengdir.*

Isboti. Teoremani isbotlash uchun matematik induksiya usulini qo‘llaymiz. $k = 1$ bo‘lgan hol uchun teoremaning tasdig‘i trivialdir.

Induksiya usulining bazasi sifatida $k=2$ bo'lgan holni qaraymiz. Bu holda teoremaning tasdig'i yuqorida keltirilgan ikkita to'plam uchun ko'paytirish qoidasidan kelib chiqadi.

Induksion o'tish: teoremaning tasdig'i $k=s$ ($s=\overline{1,k-1}$) uchun to'g'ri bo'lsin, ya'ni, $A_1, A_2, ..., A_s$ to'plamlardan faqat bittadan element olib tuzilgan s uzunlikdagi kortejlar soni $n_1 n_2 ... n_s$ bo'lsin deb faraz qilamiz. Teorema tasdig'ining $k=s+1$ uchun ham to'g'ri ekanligini ko'rsatamiz.

$A_1, A_2, A_3, ..., A_{s+1}$ to'plamlardan faqat bittadan element olib uzunligi ($s+1$)ga teng bo'lgan kortejlar sonini aniqlash uchun turlicha usullardan foydalanish mumkin. Bu yerda quyidagi usul bilan kerakli natijani olsa bo'ladi. Dastlab uzunligi birga teng bo'lgan kortejlarni tuzamiz. Uzunligi birga teng bo'lgan kortejlar berilgan to'plamlarning ixtiyoriy biridan faqat bitta elementni tanlash yordamida tuzilishi ravshan. Tabiiyki, agar uzunligi birga teng kortejlar $A_1 = \{a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n_1}\}$ to'plamning elementlaridan tuzilsa, bunday kortejlar soni n_1 ga tengdir.

Uzunligi birga teng kortejlardan ixtiyoriy birini, masalan, a_{11} ni olib, uning o'ng tomoniga A_1 to'plamdan boshqa biror to'plamning, masalan, $A_2 = \{a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n_2}\}$ to'plamning elementlaridan birini joylashtirib, birinchi koordinatasi a_{11} bo'lgan uzunligi ikkiga teng n_2 ta kortejlar hosil qilamiz. Uzunligi birga teng kortej sifatida n_1 ta kortejlardan ixtiyoriy birini olish mumkinligini hisobga olib, hammasi bo'lib uzunligi ikkiga teng $n_1 n_2$ ta kortejlarga ega bo'lamiz.

Uzunligi ikkiga teng kortejlarning har biriga o'ng tomondan A_1 va A_2 to'plamlardan boshqa biror to'plamning, masalan, $A_3 = \{a_{31}, a_{32}, ..., a_{3n_3}\}$ to'plamning n_3 ta elementlaridan birini joylashtirib, uzunligi uchga teng n_3 ta kortejlar hosil qilamiz. Bu yerda uzunligi ikkiga teng kortej sifatida $n_1 n_2$ ta kortejlardan ixtiyoriy birini olish mumkinligini e'tiborga olib, uzunligi uchga teng $n_1 n_2 n_3$ ta kortejlarni hosil qilamiz.

Kortejlar hosil qilish jarayonini yuqoridagiga o'xshash mulohazalar bilan davom ettirib, bu kortejlarning har biriga o'ng tomondan $A_1, A_2, ..., A_s$ to'plamlardan boshqa $A_{s+1} = \{a_{(s+1)1}, a_{(s+1)2}, ..., a_{(s+1)n_s}\}$ to'plamning n_{s+1} ta elementlaridan birini joylashtirib, uzunligi $(s+1)$ ga teng bo'lgan n_{s+1} ta kortejlar hosil qilamiz. Bu yerda ham uzunligi s ga teng kortej sifatida $n_1 n_2 ... n_s$ ta kortejlardan ixtiyoriy birini olish mumkinligini e'tiborga olamiz. Shunday qilib, $n_1 n_2 \dots n_s$ marta n_{s+1} ta kortej hosil bo'ldi. Demak, uzunligi $(s+1)$ ga teng bo'lgan kortejlar $n_1 n_2 \dots n_s n_{s+1}$ tadir. ■

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Uchnchi tartibli figurali sonlar qatnashgan amaliy misol keltiring.

2. 1, 3, 6 va 8 raqamlaridan foydalanib o'nli sanoq tizimida bir, ikki, uch, to'rt xonali barcha sonlarni yozing.

3. Matematik induksiya usuli yordamida arifmetik va geometrik progressiyalarning umumiy hadlari hamda dastlabki n ta hadlari yig'indisini topish formulalarini isbotlang.

4. Matematik induksiya usulini qo'llab quyidagi formulalarni isbotlang:

a) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$,

b) $\sin x + \sin(x+h) + \dots + \sin(x+nh) = \dfrac{\sin\left(x + \frac{nh}{2}\right)\sin\frac{(n+1)h}{2}}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}$, bu yerda $h \neq 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

5. Matematik induksiya usulidan foydalanib, quyidagi tasdiqlarni isbotlang:

a) ixtiyoriy $n \in N$ uchun $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ son 133ga qoldiqsiz bo'linadi;

b) $11a^2 - 14a + 3 \geq 0$ (a – butun son) tengsizlik o'rinlidir;

d) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right)$ tengsizlik o'rinlidir, bu yerda $n \in N$ va $n \geq 2$.

6. $2^n > n^2$ tengsizlik o'rinli bo'ladigan barcha natural n sonlarni toping.

7. Ixtiyoriy n natural son va chekli A to'plam uchun $|A^n| = |A|^n$ tenglikning o'rinli bo'lishini matematik induksiya usuli yordamida isbotlang.

8. Yetti so'mdan ortiq butun son bilan ifodalanuvchi pul to'lovini faqat 3 so'mlik va 5 so'mliklar bilan amalga oshirish mumkinligini isbotlang.

9. “Kombinatorika” so‘zidan bitta unli yoki undosh harf tanlash imkoniyatlari sonini aniqlang.

10. 13 nafar qiz va 12 nafar o‘g‘il boladan tashkil topgan talabalar guruhidan bir nafar talaba tanlash imkoniyatlari sonini aniqlang.

11. “Kombinatorika” so‘zidan bitta unli va bitta undosh harf tanlash imkoniyatlari sonini aniqlang.

12. Qiroatxonada har biri ikki o‘rinli stollar to‘rt qatorga sakkiztadan joylashtirilgan. Haftaning yakshanba kunidan tashqari har kuni qiroatxona o‘quvchilarga sakkiz soat xizmat ko‘rsatadi. Qiroatxonaning bir haftada o‘quvchilarga mumkin bo‘lgan eng ko‘p xizmat ko‘rsatish vaqtini (o‘rin× soat birligida) toping.

13. Agar A va B shaharlarni to‘rtta yo‘l, B va C shaharlarni esa uchta yo‘l bog‘lasa, u holda A shahardan B shahar orqali C shaharga borish imkoniyatlari sonini aniqlang.

14. Shaxmat taxtasiga oq va qora shohlarni bir-biriga hujum qilmaydigan holda joylashtirish imkoniyatlari sonini toping.

15. Shaxmat taxtasiga oq va qora ruxlarni bir-biriga hujum qilmaydigan holda joylashtirish imkoniyatlari sonini toping.

16. Yakkamualliflikda yozilgan Axmedovning n_A ta, Botirovning n_B ta va Davronovning n_D ta kitoblardan:

a) bitta kitobni, b) turli mualliflarning ikkita kitobini,

d) turli mualliflarning uchta kitobini

tanlash imkoniyatlari sonini aniqlang.

17. Agar tarkibida n ta savoli bo‘lgan so‘rovnomaning har bir savoliga a) “ha” yoki “yo‘q”, b) “ha”, “yo‘q”, “bilmayman”degan javobni yozish mumkin bo‘lsa, u holda so‘rovnomaning savollariga berish mumkin bo‘lgan barcha javoblar imkoniyatlari sonini aniqlang.

18. Universitetning “Matematik modellashtirish” kafedrasida 12 nafar professor-o‘qituvchilar bo‘lib, ularning har biri o‘zbek va rus tillaridan tashqari yana hech bo‘lmasa bitta chet tilini biladi. Professor-o‘qituvchilarning 10 nafari tojik, 7 nafari ingliz, 6 nafari esa olmon tilini biladi. Agar professor-o‘qituvchilarning 5 nafari tojik va ingliz, 4 nafari tojik va olmon hamda 3 nafari ingliz va olmon tillarini bilsa, u holda o‘zbek va rus tillaridan tashqari: a) uchala chet tilini, b) ikkita chet tilini, d) faqat ingliz tilini biladigan professor-o‘qituvchilar sonini aniqlang.

19. Quyidagi formulani isbotlang:

$$\max(a_1,...,a_n) = a_1 + ... + a_n - \min(a_1,a_2) - ... - \min(a_{n-1},a_n) +$$
$$+ \min(a_1,a_2,a_3) + ... + \min(a_{n-2},a_{n-1},a_n) - ... + (-1)^{n-1}\min(a_1,...,a_n).$$

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Kombinatorika predmeti nima?
2. Kombinatorika sohasida ilmiy tadqiqotlar olib borgan qaysi olimlarni bilasiz?
3. Kombinatorika matematikaning alohida ilmiy yo'nalishi sifatida qachon shakllandi?
4. Figurali sonlar deganda nimani tushunasiz?
5. "Kombinatorika" iborasi kim tomonidan, qachon kiritilgan?
6. Matematik induksiya usulidan foydalanib tasdiq qanday isbotlanadi?
7. Qo'shish va ko'paytirish qoidalari qanday ifodalanadi?
8. Umumlashgan qo'shish va ko'paytirish qoidalarini bilasizmi?

2.2. Asosiy kombinatsiyalar

To'plam. Element. Kombinatsiya. O'rin almashtirish. Betakror o'rin almashtirish. O'rin almashtirishlar soni. O'rinlashtirish. O'rinlashtirishlar soni. Gruppalash. Gruppalashlar soni. Ko'paytirish qoidasi. Matematik induksiya usuli. Faktorial.

2.2.1. O'rin almashtirishlar. Elementlari $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ bo'lgan to'plamni qaraymiz. Bu to'plam elementlarini har xil tartibda joylashtirib (yozib), tuzilmalar (kombinatsiyalar) hosil qilish mumkin, masalan,

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n;\ a_2, a_1, a_3, ..., a_n;\ a_2, a_3, a_1, ..., a_n.$$

Bu tuzilmalarning har birida berilgan to'plamning barcha elementlari ishtirok etgan holda ular bir-biridan faqat elementlarining joylashish o'rinlari bilan farq qiladilar.

1- **t a ' r i f.** *Shu usul yordamida hosil qilingan kombinatsiyalarning har biri berilgan $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ to'plam elementlarining* ***o'rin almashtirishi*** *deb ataladi.*

Aslida "o'rin almashtirish" iborasi to'plam elementlarining o'rinlarini o'zgartirish harakatini anglatsada, bu yerda uni shu harakat natijasida hosil bo'lgan tuzilma sifatida qo'llaymiz. Bu iboradan uning asl ma'nosida ham foydalanamiz.

O'rin almashtirishni ifodalashda uning elementlarini ajratuvchi belgi sifatida yuqorida "," (vergul) belgisidan foydalanildi. Ammo bu muhim emas, bu yerda boshqa belgidan ham foydalanish, hattoki, yozuvning ixchamligi maqsadida, elementlar orasidagi ajratuvchi belgilarni tushirib qoldirish ham mumkin. Bu eslatma bundan keyin bayon etiladigan boshqa kombinatorik tuzilmalar uchun ham o'rinlidir.

To‘plam tushunchasiga asoslanib, bu yerda qaralayotgan o‘rin almashtirishlar tarkibida elementlarning takrorlanmasligini eslatib o‘tamiz. Shu sababli bunday o‘rin almashtirishlarni **betakror (takrorli emas) o‘rin almashtirishlar** deb ham atash mumkin. Ushbu bobning 4- paragrafida takrorli o‘rin almashtirishlar ko‘riladi.

Berilgan n ta elementli to‘plam uchun barcha o‘rin almashtirishlar sonini P_n bilan belgilash qabul qilingan[1].

Bitta elementli $\{a\}$ to‘plam uchun faqat bitta a ko‘rinishdagi o‘rin almashtirish borligi ravshandir: $P_1 = 1$.

Ikkita elementli $\{a,b\}$ to‘plam elementlaridan o‘rin almashtirishlarni bitta elementli $\{a\}$ to‘plam uchun a o‘rin almashtirishidan foydalanib quyidagicha tashkil qilamiz: b element a elementdan keyin yozilsa, ab o‘rin almashtirishga, oldin yozilsa esa ba o‘rin almashtirishga ega bo‘lamiz. Demak, ko‘paytirish qoidasiga (ushbu bobning 1- paragrafiga qarang) binoan ikkita o‘rin almashtirish bor: $P_2 = 2 = 1 \cdot 2$.

Uchta elementli $\{a,b,c\}$ to‘plam uchun o‘rin almashtirishlar tashkil qilishda ikkita elementli $\{a,b\}$ to‘plam uchun tuzilgan ab va ba o‘rin almashtirishlardan foydalanish mumkin. Berilgan to‘plamning c elementini ab va ba o‘rin almashtirishning har biriga uch xil usul bilan joylashtirish mumkin: ularning elementlaridan keyin, elementlarining orasiga va elementlaridan oldin. Ko‘paytirish qoidasini qo‘llasak, uchta elementli $\{a,b,c\}$ to‘plam uchun oltita ($P_3 = 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$) har xil o‘rin almashtirishlar hosil bo‘lishini aniqlaymiz. Ular quyidagilardir:

$$abc, acb, cab, bac, bca, cba.$$

To‘rtta elementli $\{a,b,c,d\}$ to‘plamni qarab, uchta elementli $\{a,b,c\}$ to‘plam uchun tuzilgan oltita o‘rin almashtirishlarning har biriga d elementni to‘rt xil usul bilan joylashtirish imkoniyati borligini e’tiborga olsak, ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra, $P_4 = 24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ bo‘lishini topamiz. Bu yerda barcha o‘rin almashtirishlar quyidagilardir:

$$abcd,\ abdc,\ adbc,\ dabc,$$

$$acbd,\ acdb,\ adcb,\ dacb,$$

$$cabd,\ cadb,\ cdab,\ dcab,$$

$$bacd,\ badc,\ bdac,\ dbac,$$

$$bcad,\ bcda,\ bdca,\ dbca,$$

$$cbad,\ cbda,\ cdba,\ dcba.$$

---

[1] Fransuzcha “permutation” so‘zi o‘rin almashtirish ma’nosini anglatadi.

Shu tarzda davom etib "n ta elementli to'plam uchun barcha o'rin almashtirishlar soni birdan n gacha bo'lgan barcha natural sonlarning ko'paytmasiga teng" deb faraz qilish mumkin: $P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)n$. Bu farazning to'g'riligi quyidagi 1- teoremada isbot qilinadi.

Dastlabki n ta natural sonlar ko'paytmasini $n!$ ko'rinishida[1] belgilash qabul qilingan, ya'ni $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$. $n!$ belgisidan bunday ma'noda birinchi bo'lib K. Kramp[2] 1808- yilda nashr etilgan algebra bo'yicha qo'llanmada foydalangan.

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots n$ ifodada $n = 1$ bo'lganda faqat 1 soni ishtirok etadi, shuning uchun, ta'rif sifatida $1! = 1$ deb hisoblash qabul qilingan. Bundan tashqari, $n = 0$ bo'lganda esa $n!$ ifoda umuman ma'nosini yo'qotadi. Lekin, ta'rif sifatida $0! = 1$ deb qabul qilinadi.

1- teorema. *Elementlari soni n ta bo'lgan to'plam uchun o'rin almashtirishlar soni $n!$ ga teng, ya'ni $P_n = n!$.*

Isboti. Teoremani isbotlash uchun matematik induksiya usulidan foydalanamiz. Asos to'g'riligini, ya'ni teoremaning tasdig'i $n = 1$ uchun to'g'riligini yuqorida ko'rdik. Induksion o'tish uchun teoremaning tasdig'i biror natural $n = k$ uchun to'g'ri bo'lsin deb faraz qilamiz, ya'ni $P_k = k!$ bo'lsin. Ravshanki, $(k+1)$ ta elementli to'plamni k ta elementli to'plamga yangi $(k+1)$- elementni kiritish yordamida hosil qilish mumkin. Bu $(k+1)$- elementni k elementli to'plam uchun barcha $k!$ ta o'rin almashtirishlarning har biriga quyidagicha $(k+1)$ xil usul bilan kiritish mumkin:

1- elementdan oldin,

1- va 2- elementlar orasiga,

2- va 3- elementlar orasiga,

....

$(k-1)$- va k- elementlar orasiga,

k- elementdan keyin.

Shunday qilib, ko'paytirish qoidasiga binoan, $(k+1)$ ta elementli to'plam uchun jami $k!(k+1) = (k+1)!$ ta o'rin almashtirishlar hosil bo'ladi, ya'ni $P_{k+1} = (k+1)!$. ■

---

[1] Bu yozuv "en faktorial" deb o'qiladi; faktorial so'zi lotincha "factor" so'zidan olingan bo'lib, ko'paytuvchi ma'nosini anglatadi.

[2] Kristian Kramp (Christian, 1760-1826) – olmon matematigi. Asosiy ishlari kombinatorika, geometriya va algebraga bag'ishlangan.

1- misol. Besh nafar tomoshabinlarning beshta o'rinni egallash imkoniyatlari (variantlari) sonini toping.

Agar tomoshabinlarni a,b,c,d,e harflar bilan belgilasak, u holda $T = \{a,b,c,d,e\}$ tomoshabinlar to'plamiga ega bo'lamiz. Tomoshabinlarni o'rinlarga joylashtirish imkoniyatlarining (variantlarining) har biriga tomoshabinlar T to'plami elementlarining qandaydir o'rin almashtirishi mos keladi. T to'plam beshta elementli bo'lgani uchun, 1- teoremaga asosan, $P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ bo'ladi. Demak, besh nafar tomoshabinning beshta o'rinni egallash imkoniyatlari soni 120ga teng. ■

2- misol. Shaxmat bo'yicha musobaqada har birining tarkibida to'rt nafar o'yinchi bo'lgan ikkita jamoa ishtirok etmoqda. Har bir jamoa rahbariga to'rtta shaxmat taxtasida o'yinlar o'tkazish uchun o'yinchilarni ixtiyoriy ravishda tartiblash imkoniyati berilgan. Musobaqa qatnashchilarining shaxmat taxtalarini egallash imkoniyatlari (variantlari) sonini toping.

Har bir komanda a'zolari uchun shaxmat taxtalarini egallash imkoniyatlarini $P_n = n!$ formula yordamida hisoblash mumkin: $P_4 = 4! = 24$. Jamoalardagi o'yinchilarni ixtiyoriy ravishda tartiblash mumkin bo'lganligidan, ko'paytirish qoidasiga ko'ra, musobaqa qatnashchilarining shaxmat taxtalarini egallash imkoniyatlari (variantlari) soni $24 \cdot 24 = 576$ bo'ladi. ■

2.2.2. O'rinlashtirishlar. n ta elementli $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ to'plam berilgan bo'lsin.

2- ta'rif. *$\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ to'plamning ixtiyoriy m ta elementidan hosil qilingan tartiblangan $\{a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_m}\}$ tuzilmaga (kombinatsiyaga) **n ta elementdan m tadan o'rinlashtirish** deb ataladi.*

Bu ta'rifdan ko'rinib turibdiki, elementlari soni bir xil bo'lgan ikkita har xil o'rinlashtirishlar bir-biridan elementlari bilan yoki bu elementlarning joylashish tartibi bilan farq qiladi. Bundan tashqari, n ta elementdan m tadan o'rinlashtirishlar uchun $m \leq n$ bo'lishi ham ravshan. Bu yerda qaralayotgan o'rinlashtirishlar tarkibidagi elementlarning takrorlanmasligini eslatib o'tamiz. Shu sababli bunday o'rinlashtirishlarni **betakror (takrorli emas) o'rinlashtirishlar** deb ham atash mumkin. Ushbu bobning 4- paragrafida takrorli o'rinlashtirishlar ko'riladi.

Berilgan n ta elementdan m tadan o'rinlashtirishlar soni, odatda, A_n^m bilan belgilanadi[1].

---

[1] Fransuzcha "arrangement" so'zi o'rinlashtirish ma'nosini beradi.

Ravshanki, berilgan n ta $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ elementlardan bittadan o‘rinlashtirishlar n ta bo‘ladi (bular: a_1; a_2; va hokazo, a_n), ya’ni $A_n^1 = n$.

n ta elementdan bittadan o‘rinlashtirishlar yordamida n ta elementdan ikkitadan o‘rinlashtirishlarni quyidagicha tuzish mumkin. n ta elementdan bittadan o‘rinlashtirishlarning har biridagi elementdan keyin yoki oldin qolgan $(n-1)$ ta elementlardan ixtiyoriy bittasini joylashtirsa bo‘ladi. Natijada, ko‘paytirish qoidasiga binoan, jami soni $A_n^2 = n(n-1)$ ta bo‘lgan n ta elementdan ikkitadan o‘rinlashtirishlarni hosil qilamiz.

Shu kabi, n ta elementdan uchtadan o‘rinlashtirishlarni hosil qilish uchun n ta elementdan ikkitadan o‘rinlashtirishlarga murojaat qilish mumkin. Bu yerda n ta elementdan ikkitadan o‘rinlashtirishlarning har biri uchun uni tashkil etuvchi ikkita elementlardan oldin, elementlar orasiga yoki elementlardan keyin qolgan $(n-2)$ ta elementlardan ixtiyoriy bittasini joylashtirish imkoniyati bor. Ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra natijada jami soni $A_n^3 = n(n-1)(n-2)$ ta bo‘lgan n ta elementdan uchtadan o‘rinlashtirishlarni hosil qilamiz.

Shunga o‘xshash mulohaza yuritib, n ta elementdan to‘rttadan, beshtadan va hokazo o‘rinlashtirishlar soni uchun mos ifodalarni aniqlash qiyin emas.

2- teorema. *n ta elementdan m tadan o‘rinlashtirishlar soni eng kattasi n ga teng bo‘lgan m ta ketma-ket natural sonlarning ko‘paytmasiga tengdir, ya’ni* $A_n^m = n(n-1)...(n-m+1)$.

Isboti. n – ixtiyoriy natural son bo‘lsin. Teoremani isbotlash uchun matematik induksiya usulini qo‘llab, teorema tasdig‘ining n dan oshmaydigan ixtiyoriy m natural son uchun to‘g‘riligini ko‘rsatamiz (ya’ni induksiyani m bo‘yicha bajaramiz).

Baza: yuqorida $A_n^1 = n$ ekanligi aniqlangan edi, ya’ni teorema tasdig‘i $m = 1$ uchun to‘g‘ridir.

Induksion o‘tish: $A_n^m = n(n-1)...(n-m+1)$ formula $m = k < n$ uchun to‘g‘ri bo‘lsin deb faraz qilamiz va uning $m = k+1$ uchun ham to‘g‘ri ekanligini ko‘rsatamiz. n ta elementdan $(k+1)$ tadan o‘rinlashtirishlarning ixtiyoriy bittasini quyidagicha hosil qilish mumkin. Bunday o‘rinlashtirishning birinchi elementi sifatida berilgan $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ to‘plamning istalgan elementini, masalan, a_1 ni tuzilayotgan o‘rinlashtirishga joylashtiramiz. Undan keyin umumiy soni A_{n-1}^k ga teng bo‘lgan

$(n-1)$ ta elementdan k tadan o'rinlashtirishlarning ixtiyoriy biridagi barcha elementlarni joylashtiramiz. Birinchi elementi a_1 dan iborat bo'lgan barcha n ta elementdan $(k+1)$ tadan o'rinlashtirishlarning soni A_{n-1}^k ga tengdir. Bunday o'rinlashtirishlarning birinchi elementi sifatida $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ to'plamning ixtiyoriy elementini tanlash mumkinligini e'tiborga olsak, ko'paytirish qoidasiga binoan, berilgan n ta elementdan $(k \quad 1)$ tadan o'rinlashtirishlar soni quyidagicha aniqlanishi kelib chiqadi:

$$A_n^{k+1} = nA_{n-1}^k = n(n-1)(n-2)...((n-1)-k+1) =$$
$$= n(n-1)...(n-(k+1)+1).$$

Bu munosabat isbotlanayotgan formulaning $m = k+1$ uchun to'g'riligini ko'rsatadi. ■

3- misol. Guruh 25 nafar talabadan tashkil topgan bo'lsin. Bu guruhda guruh sardori, guruh sardorining yordamchisi va kasaba uyushmasining guruh bo'yicha vakilini saylash zarur. Har bir talaba bu vazifalardan faqat bittasini bajaradi deb hisoblansa, saylov natijalari uchun qancha imkoniyat mavjud?

Bu yerda 25ta elementli talabalar to'plamining tartiblangan uchta elementli (guruh sardori, guruh sardorining yordamchisi va kasaba uyushmasining guruh bo'yicha vakili) qism to'plamlari sonini aniqlash zarur. Bu esa 25ta elementdan uchtadan o'rinlashtirishlar sonini topish demakdir. Qo'yilgan savolga javob topish maqsadida 2- teoremadagi isbotlangan formulani $n = 25$ va $m = 3$ bo'lgan holda qo'llab, $A_{25}^3 = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13800$ ekanligini aniqlaymiz. Demak, guruhdagi saylov natijalari uchun 13800ta imkoniyat mavjud. ■

$A_n^m = n(n-1)...(n-m+1)$ formulani $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ ko'rinishda ham yozish mumkin. Haqiqatdan ham,

$$A_n^m = n(n-1)...(n-m+1) = \frac{n(n-1)...(n-m+1)(n-m)!}{(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Yuqorida ta'kidlaganganidek, n ta elementdan m tadan o'rinlashtirishlar n elementli to'plamning bir-biridan tarkibi bilan ham, elementlarining joylashishi bilan ham farqlanadigan qism to'plamlaridan iboratdir. Agar bu o'rinlashtirishlarda n ta elementli to'plamning barcha elementlari qatnashsa (ya'ni $m = n$ bo'lsa), n ta elementli to'plam uchun barcha o'rin almashtirishlar hosil bo'lishi tabiiydir. Shu tufayli, o'rin almashtirishlarning oldin keltirilgan ta'rifiga ekvivalent quyidagi ta'rifni ham berish mumkin.

n ta elementli to'plam uchun o'rin almashtirishlar deb n ta elementdan n tadan o'rinlashtirishlarga aytiladi. Bunda har bir element faqat bir marta qatnashadi va ular bir-biridan faqat o'zaro joylashishlari bilan farq qiladilar.

O'rin almashtirishlarning bu ta'rifiga asoslanib n ta elementli to'plam uchun o'rin almashtirishlar soni formulasini o'rinlashtirishlar soni formulasi yordamida hosil qilish mumkin. Haqiqatdan ham,

$$P_n = A_n^n = n(n-1)...(n-(n-1)) = n(n-1)...2\cdot 1 = n!$$

yoki

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!.$$

2.2.3. Gruppalashlar. $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ to'plam berilgan bo'lsin. Bu n elementli to'plamning elementlaridan m ta elemetga ega qism to'plamlarni shunday tashkil etamizki, ular bir-biridan elementlarining joylashish tartibi bilan emas, faqat tarkibi bilan farq qilsinlar.

3- ta'rif. *Bunday m ta elementli qism to'plamlarning har biriga n* ***ta elementdan** m **tadan gruppalash** deb ataladi.*

n ta elementdan m tadan gruppalashlar sonini C_n^m bilan belgilaymiz[1].

Gruppalashlar sonini $\binom{m}{n}$ yoki $\binom{n}{m}$ shaklda belgilashlar ham uchraydi. Gruppalash ta'rifidan $1 \le m \le n$ ekanligi va agar biror gruppalashda qandaydir usul bilan elementlar o'rinlari almashtirilsa, u (gruppalash sifatida) o'zgarmasligi kelib chiqadi. Bu yerda qaralayotgan gruppalash tarkibida elementlarning takrorlanmasligini eslatib o'tamiz. Shu sababli bunday gruppalashni **betakror (takrorli emas) gruppalash** deb ham atash mumkin. Ushbu bobning 4- paragrafida takrorli gruppalashlar o'rganiladi.

Bir $(n=1)$ elementli $\{a\}$ to'plam uchun faqat bitta gruppalash mavjud, u ham bo'lsa bir ($m=1$) elementlidir: a. Demak, $C_1^1 = 1$.

Ikki $(n=2)$ elementli $\{a, b\}$ to'plam uchun bittadan $(m=1)$ gruppalashlar ikkita (a va b), ikkitadan ($m=2$) gruppalashlar esa faqat bitta (ab). Demak, $C_2^1 = 2$, $C_2^2 = 1$.

---

[1] Fransuzcha "combinasion" so'zi gruppalash ma'nosini beradi.

Uch ($n=3$) elementli $\{a, b, c\}$ to'plam uchun gruppalashlar: bittadan ($m=1$) – a, b va c (uchta); ikkitadan ($m=2$) – ab, ac, bc (uchta); uchtadan ($m=3$) – abc (faqat bitta). Demak, $C_3^1=3$, $C_3^2=3$, $C_3^3=1$.

To'rtta ($n=4$) elementdan tashkil topgan $\{a, b, c, d\}$ to'plam elementlaridan tuzilgan gruppalashlar: bittadan – a, b, c va d (to'rtta); ikkitadan – ab, ac, ad, bc, bd, cd (oltita); uchtadan – abc, abd, acd, bcd (to'rtta); to'rttadan $abcd$ (faqat bitta). Demak, $C_4^1=4$, $C_4^2=6$, $C_4^3=4$, $C_4^4=1$.

Yuqoridagi mulohazalar gruppalashlar sonini hisoblash formulasi qanday bo'lishiga to'liq oydinlik kiritmasada, dastlabki tahlil uchun muhimdir. Masalan, n ta elementdan barcha elementlarni o'z ichiga oladigan faqat bitta gruppalash tashkil etish mumkin, degan yoki n ta elementdan bittadan n ta gruppalash bor degan xulosalar ustida o'ylab ko'rish mumkin.

C_n^m sonni hisoblash uchun formula topish maqsadida quyidagicha mulohaza yuritamiz. Ravshanki, agar n ta elementdan m tadan barcha gruppalashlarning har birida elementlarning o'rinlari imkoniyat boricha almashtirilsa, natijada n ta elementdan m tadan barcha o'rinlashtirishlar hosil bo'ladi. Bu yerda n ta elementdan m tadan tuzilgan C_n^m ta gruppalashning har biridagi m ta elementdan $P_m=m!$ ta o'rin almashtirishlar hosil qilish mumkin bo'lganligi tufayli, ko'paytirish qoidasiga asosan, $P_m C_n^m = A_n^m$ tenglik to'g'ridir. Demak,

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot m}$$

formula o'rinlidir. Shunday qilib, quyidagi teorema isbotlandi.

3- teorema. *n ta elementdan m tadan gruppalashlar soni eng kattasi n ga teng bo'lgan m ta ketma-ket natural sonlar ko'paytmasining dastlabki m ta natural sonlar ko'paytmasiga nisbati kabidir:*

$$C_n^m = \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot m}.$$

4- misol. Qurilish tashkilotining duradgorlar bo'limida 15 nafar ishchi bor. Ko'p qavatli uyning eshiklarini ta'mirlash uchun 3 nafar duradgorni tanlash zarur. Agar bo'limdagi har bir duradgor bu topshiriqni bajarishga layoqatli bo'lsa, bunday tanlash imkoniyatlari (variantlari) qancha?

Bo'limdagi har bir duradgor ta'mirlash ishini bajarishga layoqatli bo'lgani uchun, bu masalani hal qilishda gruppalashlar sonini toppish formulasidan foydalanish mumkin. Bu yerda $n=15$, $m=3$ va $C_{15}^3=\frac{15\cdot14\cdot13}{1\cdot2\cdot3}=455$. Demak, 15 nafar duradgorlar orasidan 3 nafarini tanlash imkoniyatlari soni 455 ekan. ■

Agar ta'rif sifatida $C_n^0=1$ qabul qilinsa, n ta elementdan m tadan gruppalashlar soni uchun yuqorida keltirilgan formula $m=0$ bo'lgan holda ham to'g'ri bo'ladi: $C_n^0=\frac{n!}{0!n!}=1$. Tabiiyki, n ta elementdan barcha elementlarni o'z ichiga oladigan faqat bitta gruppalash tashkil etish mumkin: $C_n^n=\frac{n!}{n!0!}=1$.

Gruppalashlar sonini hisoblash uchun

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!},\quad C_n^m=\frac{n(n-1)...(m+1)}{1\cdot2\cdot...(n-m)}$$

ko'rinishdagi formulalardan ham foydalanish mumkin. Bu formulalar quyidagi tengliklardan kelib chiqadi:

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{P_m}=\frac{\frac{n!}{(n-m)!}}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}=\frac{\frac{n!}{m!}}{(n-m)!}=$$

$$=\frac{\frac{n!}{(n-(n-m))!}}{(n-m)!}=\frac{A_n^{n-m}}{P_{n-m}}=\frac{n(n-1)...(m+1)}{1\cdot2\cdot...(n-m)}.$$

Ixtiyoriy natural n soni uchun gruppalashlar soni bir qator xossalarga ega, masalan, $C_n^m=C_n^{n-m}$ $(m=0,1,2,...,n)$,

$$C_n^m+C_n^{m+1}=C_{n+1}^{m+1}\qquad (m=0,1,2,...,n-1).$$

Haqiqatdan ham,

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}=\frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!}=C_n^{n-m},$$

$$C_n^m+C_n^{m+1}=\frac{n!}{m!(n-m)!}+\frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!}=$$

$$=\frac{n!}{m!(n-m-1)!}\left(\frac{1}{n-m}+\frac{1}{m+1}\right)=$$

$$=\frac{n!(n+1)}{m!(m+1)(n-m-1)!(n-m)}=\frac{(n+1)!}{(m+1)!((n+1)-(m+1))!}=C_{n+1}^{m+1}.$$

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Shaxmat taxtasiga 8 ta ruxni bir-biriga hujum qilmaydigan qilib necha xil usul bilan joylashtirish mumkin?

2. Ma'noga ega bo'lmaganlarini ham e'tiborga olgan holda a, i, t, r harflaridan 4 harfli nechta so'z tuzish mumkin?

3. 9 nafar kishining rais, rais o'rinbosari, kotib va ish yurituvchi vazifalariga tayinlanish imkoniyatlarini toping

4. Turli 5 rangdagi bo'yoqlardan 3 xil rangli bo'yoq tanlash imkoniyatlari sonini aniqlang.

5. Musobaqada 10 jamoa ishtirok etayotgan bo'lsa, ulardan uchtasining oltin, kumush va bronza medallarini olish imkoniyatlari sonini aniqlang.

6. Kutubxonada 6 tilning har biridan boshqalariga bevosita tarjima qilish uchun yetarli lug'atlar mavjud. Tillar soni 10 ta bo'lganda kutubxonaga yana qancha lug'at kerak?

7. Do'konda 10 xil qo'g'irchoq sotilayotgan bo'lsin. 8 dona turli qo'g'irchoqni sotib olish imkoniyatlari sonini aniqlang.

8. Barcha raqamlari turlicha bo'lgan 7 raqamli telefon nomerlari sonini toping.

9. Har bir yigit faqat bitta qizni o'yinga taklif qilish sharti bilan 4 nafar yigit 6 nafar qizlarni taklif etayotgan bo'lsa, bunday takliflar sonini toping.

10. Bir kishida 7ta, boshqa kishida esa 9ta kitob bor. Bu kishilar birbirlari bilan ikkitadan kitob almashishmoqchi. Kitob almashishlar sonini aniqlang.

11. 28 dona domino donalarini 4 o'yinchiga teng taqsimlash imkoniyatlari sonini toping.

12. Temir yo'l vagoni kupesida bir-biriga qarama-qarshi o'tirishga mo'ljallangan va har birida 5 tadan o'rinlari bo'lgan 2ta o'rindiq bor. 10 nafar yo'lovchidan 4 tasi poyezdning yurishi yo'nalishiga qarab, boshqa 3tasi teskari yo'nalishga qarab o'tirishni hohlaydi, qolgan 3tasi uchun esa qaysi yo'nalishga qarab o'tirishning farqi yo'q. Yo'lovchilarni o'rindiqlarga joylashtirishlar imkoniyatlari sonini aniqlang.

13. Beshta har xil bayroqchani istalgan son va tartibda ko'tarib hosil qilish mumkin bo'lgan turli signallar sonini aniqlang.

14. Qavariq o'nburchak diagonallari sonini aniqlang.

15. Tekislikda har uchtasi bir to'g'ri chiziqda yotmagan to'qqizta nuqta berilgan. Agar bu nuqtalarning har uchtasidan birgina aylana o'tkazish mumkin bo'lsa, berilgan nuqtalardan nechta aylana o'tkazish mumkinligini aniqlang.

16. Quyidagi ayniyatlarni isbot qiling:

a) $C_m^k + C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^{k-2} = C_{m+1}^k$; b) $C_n^i C_i^m = C_n^m C_{n-m}^{i-m}$; d) $A_{m+1}^{k+1} = (m+1)A_m^k$;

e) $\dfrac{P_n}{C_n^k P_k} = P_{n-k}$; f) $A_{n+2}^k = A_n^k + 2kA_n^{k-1} + k(k-1)A_n^{k-2}$;

17. Quyidagi tenglamalarni hal qiling:

a) $C_{25}^x = C_{25}^{x-3}$; b) $A_x^3 + A_{x+1}^2 = \dfrac{3}{7}A_{x+2}^3$; d) $20C_{2x}^{x-1} = 77C_{2x-22}^x$;

e) $\dfrac{A_x^4 \cdot P_{x-4}}{P_{x-2}} = 42$; f) $C_{x-1}^{x-4} - \dfrac{1}{8}P_5 = C_{x-2}^{x-5}$; g) $8C_{x+1}^5 = 3A_x^3$.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. O'rin almashtirishlar deganda nimani tushunasiz?
2. O'rin almashtirishlar sonini qanday hisoblash mumkin?
3. O'rinlashtirishlar nima?
4. O'rinlashtirishlar soni formulasini isbotlay olasizmi?
5. O'rin almashtirish va o'rinlashtirish orasida qanday farq bor?
6. Gruppalashlar tushunchasining mohiyatini bilasizmi?
7. Gruppalashlar soni formulasi qanday hosil qilinadi?
8. Gruppalashlar sonining qanday xossalarini bilasiz?
9. O'rin almashtirishlar, o'rinlashtirishlar va gruppalashlar sonlari orasida qanday munosabatlarni bilasiz?

2.3. Paskal uchburchagi. Nyuton binomi[1]

Gruppalash. Gruppalashlar soni. Paskal uchburchagi. Arifmetik uchburchak. Ikkita son yig'indisining natural darajasi. Butun sonning natural ko'rsatkichli ildizi. Qisqa ko'paytirish formulalari. Yig'indining bikvadrati. Matematik induksiya usuli. Nyuton binomi. Binomial koeffitsientlar. Koshi ayniyati.

2.3.1. Paskal uchburchagi haqida umumiy ma'lumotlar. Berilgan n ta elementdan m tadan gruppalashlar soni C_n^m uchun bir necha qatorlarni 1- jadvaldagidek yozamiz:

---
[1] "Binom" so'zi ikkihad ma'nosini anglatadi.

n	Gruppalashlar soni C_n^m ($m=\overline{0,n}$)
1	$C_1^0=1$, $C_1^1=1$
2	$C_2^0=1$, $C_2^1=2$, $C_2^2=1$
3	$C_3^0=1$, $C_3^1=3$, $C_3^2=3$, $C_3^3=1$
4	$C_4^0=1$, $C_4^1=4$, $C_4^2=6$, $C_4^3=4$, $C_4^4=1$
5	$C_5^0=1$, $C_5^1=5$, $C_5^2=10$, $C_5^3=10$, $C_5^4=5$, $C_4^4=1$
...	....

Bu jadvalda gruppalashlar sonining quyidagi xossalarini kuzatish mumkin:

– har bir qatorning chetlarida birlar joylashgan (bu tasdiq $C_n^0=C_n^n=1$ formula bilan ifodalanadi, ushbu bobning 2- paragrafiga qarang);

– har bir qatordagi C_n^m sonlar qatorning teng o‘rtasiga nisbatan simmetrik joylashgan, ya'ni qatorning boshidan va oxiridan baravar uzoqlikda turgan sonlar o‘zaro teng ($C_n^m=C_n^{n-m}$);

– ikkinchi qatordan boshlab har bir qatordagi birlardan tashqari ixtiyoriy son bu qatordan yuqorida joylashgan qatordagi biri shu son ustida, ikkinchisi esa undan chapda joylashgan ikkita gruppalashlar sonining yig‘indisiga teng ($C_{n+1}^{m+1}=C_n^m+C_n^{m+1}$);

– har bir qatordagi C_n^m sonlar shu qator teng o‘rtasigacha o‘sib, so‘ng kamayadi (3.3 band, 5- xossaga qarang).

Ta'rif sifatida $C_0^0=1$ deb qabul qilinsa va bu son yuqoridagi jadvalning $n=1$ raqamli qatoridan oldin $n=0$ raqamli qatori sifatida joylashtirilsa, uchburchak figurasiga o‘xshash 1- shakldagi sonlar jadvalini hosil qilish mumkin.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
....

1- shakl

1- t a ' r i f. *1- shakldagi sonlar jadvali **Paskal uchburchagi** deb ataladi.*

Bu jadval **arifmetik uchburchak** nomi bilan ham yuritiladi. Uning Paskal nomi bilan atalishiga qaramasdan, bunday sonlar jadvali juda qadimdan dunyoning turli mintaqalarida, jumladan, sharq mamlakatlarida ham ma'lum bo‘lgan. Masalan, Erondagi Tus shahrida (hozirgi Mashhadda) yashab ijod qilgan Nosir at-Tusiy[1] XIII asrda bu jadvaldan foydalanib, berilgan ikkita son yig'indisining natural darajasini hisoblash usulini o'zining ilmiy ishlarida keltirgan bo'lsa, g'arbda Al-Kashi nomi bilan mashhur Samarqandlik olim Ali Qushchi[2] butun sonning istalgan natural ko'rsatkichli arifmetik ildizi qiymatini taqribiy hisoblashda bu jadvaldan foydalana bilganligi haqida ma'lumotlar bor. Keyinchalik G'arbiy Yevropada bu sonlar uchburchagi haqida M. Shtifel[3] arifmetika bo'yicha qo'llanmalarida yozgan va u ham butun sondan istalgan natural ko'rsatkichli arifmetik ildizning taqribiy qiymatini hisoblashda bu uchburchakdan foydalana bilgan. 1556- yilda bu sonlar jadvali bilan N. Tartalya[4], keyinroq logarifmik lineyka ijodkori U. Otred[5] (1631- yil) ham shug'ullanganlar. 1654- yilga kelib B. Paskal o'zining "Arifmetik uchburchak haqidagi traktat" nomli asarida bu sonlar jadvali haqidagi ma'lumotlarni e'lon qildi.

Paskal uchburchagidagi qatorlar istalgancha davom ettirilishi mumkin. Shunisi qiziqki, Paskal uchburchagi yordamida istalgan n ta elementdan m tadan gruppalashlar sonini faqat qo'shish amali yordamida hosil qilish mumkin (ushbu bobning 2- paragrafidagi C_n^m sonni hisoblash

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad C_n^m = \frac{n(n-1)...(m+1)}{1\cdot 2\cdot ...(n-m)} \quad \text{va} \quad C_n^m = \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot m}$$

formulalariga qarang). Bu amal $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$ formulaga asoslanadi.

Paskal uchburchagi ko'plab ajoyib xossalarga ega. B. Paskal yuqorida zikr etilgan traktatda: "Bu xossalarning haqiqatdan ham bitmas-tuganmasligi naqadar ajoyibdir" deb yozgan edi. Ushbu paragrafning 3.3-bandida Paskal uchburchagining ba'zi xossalari keltirilgan.

2.3.2. Nyuton binomi haqida umumiy ma'lumotlar. O'rta maktab matematikasi kursidan quyidagi ikkita qisqa ko'paytirish formulalarini eslaylik:

---

[1] At-Tusiy (خواجه نصیر طوسی, Nosir ad-Din-Muhammad ibn Muhammad ibn-al-Hasan, 1201-1274) – Eron astronomi va matematigi.

[2] Ali Qushchi (Jamshid ibn Ma'sud, tug'ilgan yili noma'lum–taxminan 1436 yoki 1437- yilda vafot etgan) – o'zbek matematigi va astronomi, 1420-30- yillarda Samarqandda Mirzo Ulug'bek observatoriyasida ishlagan.

[3] Shtifel Mixel (Michel, 1487-1567) – olmon matematigi.

[4] Tartalya Nikkolo (Tartalia Nic-colo, 1499 yil atrofida tug'ilgan-1557) – italyan matematigi va mexanigi.

[5] Otred Uilyam (Outred William, 1574-1660) – ingliz matematigi.

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ – yig‘indining kvadrati;

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ – yig‘indining kubi.

Yig‘indining navbatdagi ikkita, ya’ni 4- va 5- darajalarini hisoblaymiz:

$$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)^3 = (a+b)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) =$$
$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$
$$(a+b)^5 = (a+b)(a+b)^4 =$$
$$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Shunday qilib, **yig‘indining bikvadrati** (ya’ni to‘rtinchi darajasi)

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

va yig‘indining beshinchi darajasi

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

formulalariga ega bo‘lamiz.

Yuqorida keltirilgan yig‘indining kvadrati, kubi, bikvadrati va beshinchi darajasi formulalari o‘ng tomonlaridagi ko‘phad koeffitsiyentlari Paskal uchburchagining mos qatorlaridagi C_n^m $(n = 2,3,4,5)$ sonlar ekanligini payqash qiyin emas.

1- teorema. *Barcha haqiqiy a va b hamda natural n sonlar uchun* $(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + b^n$ *formula o‘rinlidir.*

Isboti. Matematik induksiya usulini qo‘llaymiz.

Baza: $n = 1$ bo‘lganda formula to‘g‘ri: $(a+b)^1 = a + b$.

Induksion o‘tish: isbotlanishi kerak bo‘lgan formula $n = k$ uchun to‘g‘ri bo‘lsin, ya’ni

$$(a+b)^k = a^k + C_k^1 a^{k-1}b + C_k^2 a^{k-2}b^2 + \ldots + C_k^{k-1} ab^{k-1} + b^k.$$

Formula $n = k+1$ bo‘lganda ham to‘g‘ri ekanligini isbotlaymiz. Haqiqatdan ham, $C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$ formuladan foydalanib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k =$$
$$= (a+b)(a^k + C_k^1 a^{k-1}b + C_k^2 a^{k-2}b^2 + \ldots + C_k^{k-1} ab^{k-1} + b^k) =$$
$$= a^{k+1} + C_k^1 a^k b + C_k^2 a^{k-1}b^2 + \ldots + C_k^k ab^k +$$

$$+C_k^0 a^k b + C_k^1 a^{k-1} b^2 + \ldots + C_k^{k-1} ab^k + b^{k+1} =$$
$$= a^{k+1} + (C_k^0 + C_k^1) a^k b + (C_k^1 + C_k^2) a^{k-1} b^2 + \ldots$$
$$\ldots + (C_k^{k-1} + C_k^k) ab^k + b^{k+1} =$$
$$= a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + C_{k+1}^2 a^{k-1} b^2 + \ldots + C_{k+1}^k ab^k + b^{k+1}.$$

Ixtiyoriy a va b haqiqiy sonlar hamda n natural son uchun $(a+b)^n$ ifodaning ko'phad shaklidagi yoyilmasi (tasvirlanishi) **Nyuton[1] binomi** deb ataladi. Umuman olganda, "Nyuton binomi" iborasiga tanqidiy nuqtai nazardan yandoshilsa, undagi ikkala so'zga nisbatan ham shubha tug'iladi: birinchidan, $(a+b)^n$ ifoda birdan katta natural n sonlar uchun binom (ya'ni ikkihad) emas; ikkinchidan, natural sonlar uchun bu ifodaning yoyilmasi Nyutongacha ma'lum edi[2].

Greklar $(a+b)^n$ ifodaning qatorga yoyilmasini n ning faqat $n=2$ bo'lgan holida (ya'ni, yig'indi kvadratining formulasini) bilar edilar. Umar Xayyom[3] va Ali Qushchi $(a+b)^n$ ifodani $n>2$ bo'lgan natural sonlar uchun ham qatorga yoya bilganlar. Nyuton esa 1767- yilda yoyilma formulasini isbotsiz manfiy va kasr n sonlar uchun ham qo'llagan. L. Eyler 1774- yilda Nyuton binomi formulasini kasr n sonlar uchun isbotladi, K. Makloren[4] esa bu formulani darajaning ratsional ko'rsatkichlari uchun qo'lladi. Nihoyat, 1825- yilda N. Abel[5] daraja ko'rsatkichining istalgan kompleks qiymatlari uchun binom haqidagi teoremani isbotladi.

C_n^m sonlarni **binomial koeffitsiyentlar** deb ham atashadi. Bunday ta'rif bu koeffitsiyentlarning Nyuton binomi formulasida tutgan o'rniga qarab berilgan bo'lib, C_n^m son $(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m$ yoyilmadagi $a^{n-m} b^m$ ifodaning koeffitsiyentidir.

---

[1] Isaak Nyuton (Newton, 1643-1727) –ingliz fizigi, mexanigi va matematigi.

[2] Ushbu paragrafning 3.1 bandidagi xronologik ma'lumotlarga qarang.

[3] Umar Xayyom G'iyosiddin Abul-Fatx ibn Ibrohim (عمر خیام, 1048 yil atrofida tug'ilgan-1122 yildan so'ng vafot etgan) – fors va tojik shoiri, matematigi va faylasufi.

[4] Makloren Kolin (Maclaurin Colin, 1698-1746) – Shotlandiya matematigi.

[5] Abel Nils Xenrik (Niels Henric, 1802-1829) – Norvegiya matematigi.

2- teorema. *Barcha haqiqiy a va b hamda natural n sonlar uchun* $(a-b)^n = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_n^m a^{n-m} b^m$ *formula o'rinlidir.*

Isboti. Nyuton binomi formulasida b ni $(-b)$ga almashtirsak kerakli formulani hosil qilamiz. ■

1- misol. Oxirgi formuladan xususiy holda quyidagi qisqa ko'paytirish formulalari kelib chiqadi:

$n=2$ bo'lganda ayirmaning kvadrati formulasi

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$n=3$ bo'lganda ayirmaning kubi formulasi

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \ ■$$

Nyuton binomi formulasini kombinatorik amallar yordamida ham hosil qilish mumkin.

Haqiqatdan ham, ixtiyoriy $a, b_1, b_2, ..., b_n$ sonlar uchun $(a+b_1)(a+b_2)...(a+b_n)$ ifodani

$$(a+b_1)(a+b_2)...(a+b_n) = a^n + a^{n-1}(b_1 + b_2 + ... + b_n) +$$
$$+ a^{n-2}(b_1b_2 + b_1b_3 + ... + b_{n-1}b_n) +$$
$$+ a^{n-3}(b_1b_2b_3 + ... + b_{n-2}b_{n-1}b_n) + ... + b_1b_2...b_n$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu tenglikning o'ng tomonida joylashgan a^n oldidagi koeffitsiyent birga $(1 = C_n^0)$ teng. Birinchi qavslar ichidagi qo'shiluvchilar soni $n$ga $(n = C_n^1)$ tengligi yaqqol ko'rinib turibdi. Ikkinchi qavslar ichidagi qo'shiluvchilar $b_1, b_2, ..., b_n$ (n ta) elementlardan ikkitadan ko'paytmalar (soni C_n^2 ga teng gruppalashlar) ekanligini ham payqash qiyin emas. Uchinchi qavslar ichidagi qo'shiluvchilar esa o'sha n ta elementlardan uchtadan ko'paytmalar bo'lib, ularning soni C_n^3 ga teng va hokazo. Oxirgi qo'shiluvchi oldidagi koeffitsiyent birga $(1 = C_n^n)$ teng. Yuqoridagi tenglikda $b_1 = b_2 = ... = b_n = b$ deb olsak, Nyuton binomi formulasini hosil qilamiz.

2.3.3. Binomial koeffitsiyentlarning xossalari. Binomial koeffitsiyentlarning ba'zi xossalarini keltiramiz. Bu xossalar bevosita gruppalashlarga oid bo'lib, tabiiyki, ular Paskal uchburchagining xossalarini ham ifodalaydi.

1- xossa. $\dfrac{C_n^{m+1}}{C_n^m}=\dfrac{n-m}{m+1}$ *($m=0,1,2,...,n-1$) tenglik o'rinlidir.*

Haqiqatdan ham,

$$\frac{C_n^{m+1}}{C_n^m}=\frac{\dfrac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!}}{\dfrac{n!}{m!(n-m)!}}=\frac{m!(n-m)!}{(m+1)!(n-m-1)!}=$$

$$=\frac{m!(n-m-1)!(n-m)}{m!(m+1)(n-m-1)!}=\frac{n-m}{m+1}. \blacksquare$$

Bu xossa binomial koeffitsiyentlar qatoridagi istalgan ketma-ket ikki elementning biri ma'lum bo'lsa, boshqasini osonlik bilan hisoblash mumkinligini ko'rsatadi:

$$C_n^{m+1}=\frac{n-m}{m+1}C_n^m,\quad C_n^m=\frac{m+1}{n-m}C_n^{m+1},$$

bu yerda $m=0,1,2,...,n-1$.

2- xossa. *Ixtiyoriy natural n son uchun barcha C_n^m ($m=\overline{0,n}$) binomial koeffitsiyentlar yig'indisi 2^n ga teng, ya'ni*

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n.$$

Bu tenglik Nyuton binomi formulasida $a=b=1$ deb olganda hosil bo'ladi. ■

3- xossa. *Toq o'rinlarda turgan binomial koeffitsiyentlar yig'indisi juft o'rinlarda turgan binomial koeffitsiyentlar yig'indisiga teng.*

Haqiqatdan ham, Nyuton binomi formulasida $a=1$ va $b=-1$ deb olganda

$$0=C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+...+(-1)^nC_n^n$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikdan xossadagi tasdiqning to'g'riligi kelib chiqadi. ■

2- va 3- xossalar asosida quyidagi xossani hosil qilamiz.

4- xossa. *n natural sondan oshmaydigan eng katta toq m son uchun $C_n^1+C_n^3+...+C_n^m=2^{n-1}$ tenglik hamda n sondan oshmaydigan eng katta juft m son uchun $C_n^0+C_n^2+...+C_n^m=2^{n-1}$ tenglik o'rinlidir.*

5- xossa. *Toq* n *son uchun* $C_n^0 < C_n^1 < \ldots < C_n^{\frac{n-1}{2}} = C_n^{\frac{n-1}{2}+1}$, $C_n^{\frac{n-1}{2}+1} > C_n^{\frac{n-1}{2}+2} > \ldots > C_n^n$, *juft* n *son uchun esa* $C_n^0 < C_n^1 < \ldots < C_n^{\frac{n}{2}}$, $C_n^{\frac{n}{2}} > C_n^{\frac{n}{2}+1} > \ldots > C_n^n$, *munosabatlar o'rinlidir.*

Haqiqatdan ham, $m < \frac{n-1}{2}$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy natural n va m sonlar uchun $\frac{n-m}{m+1} > 1$ tengsizlik o'rinlidir, $m > \frac{n-1}{2}$ bo'lganda esa $\frac{n-m}{m+1} < 1$ tengsizlikka ega bo'lamiz. Bu yerda $C_n^{m+1} = \frac{n-m}{m+1} C_n^m$ formulani (1- xossaga qarang) qo'llab, xossadagi barcha tengsizliklarni hosil qilamiz.

Agar n toq son bo'lsa, $m = \frac{n-1}{2}$ butun son bo'lib, $\frac{n-m}{m+1} = \frac{n - \frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2}+1} = \frac{2n-n+1}{n-1+2} = \frac{n+1}{n+1} = 1$ munosabat o'rinlidir. Demak, $C_n^{m+1} = \frac{n-m}{m+1} C_n^m$ formuladan $m = \frac{n-1}{2}$ bo'lganda $C_n^{\frac{n-1}{2}+1} = C_n^{\frac{n-1}{2}}$ tenglik kelib chiqadi. ■

Binomial koeffitsiyentlarning 5- xossasi Paskal uchburchagining yuqorida keltirilgan xossalari tasdig'i bo'lib, unga ko'ra binomial koeffitsientlar oldin $C_n^0 = 1$ dan $C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ gacha[1] o'sadi, keyin esa $C_n^n = 1$ gacha kamayadi hamda n toq bo'lganda binomial koeffitsiyentlar qatorining o'rtasidagi ikkita hadi tengdir va n juft bo'lganda uning o'rtadasigi hadi eng katta va yagonadir.

Quyidagi 6–8- xossalar o'rinlidir.

6- xossa. $C_n^n + C_{n+1}^n + \ldots + C_{n+k}^n = C_{n+k+1}^{n+1}$.

7- xossa. $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

---

[1] $[a]$ yozuv a sonning butun qismini anglatadi.

8-xossa. $C_n^0C_m^k + C_n^1C_m^{k-1} + \ldots + C_n^kC_m^0 = C_{n+m}^k$.

Oxirgi tenglik **Koshi**[1] **ayniyati** deb aytiladi.

Endi bu uchta xossani isbotlaymiz. Dastlab 6- xossaning isbotini keltiramiz. Birinchidan, $s=(1+x)^n+(1+x)^{n+1}+\ldots+(1+x)^{n+k}$ ko'phad uchun Nyuton binomi formulasini qo'llab, quyidagi tenglikni hosil qilamiz: $s=\sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m + \sum_{m=0}^{n+1} C_{n+1}^m x^m + \ldots + \sum_{m=0}^{n+k} C_{n+k}^m x^m$. Bu yerdan, s ko'phaddagi x^n ifodaning koeffitsiyenti $C_n^n + C_{n+1}^n + \ldots + C_{n+k}^n$ yig'indiga tengligini aniqlash mumkin.

Ikkinchidan, $s=(1+x)^n(1+(1+x)+\ldots+(1+x)^k)$ ifodani geometrik progressiya hadlari yig'indisi formulasiga binoan quyidagicha ham yozish mumkin: $s=(1+x)^n\dfrac{(1+x)^{k+1}-1}{1+x-1}=\dfrac{1}{x}\left((1+x)^{n+k+1}-(1+x)^n\right)$. Bu yerda ham Nyuton binomi formulasini qo'llab, hosil bo'lgan ko'phadning x^n daraja qatnashgan hadi koeffitsiyenti C_{n+k+1}^{n+1} ekanligini ko'rish mumkin. Keltirilgan bu mulohazalar asosida 6- xossadagi tenglikka ega bo'lamiz. ∎

Ravshanki, $C_n^m = C_n^{n-m}$ formula e'tiborga olinsa, 7- xossa 8- xossadan $m=k=n$ bo'lganda xususiy hol sifatida kelib chiqadi. Shuning uchun faqat 8- xossaning isbotini keltirish bilan chegaralanamiz.

Birinchidan, Nyuton binomi formulasiga ko'ra

$$(1+x)^n=\sum_{s=0}^{n} C_n^s x^s,\ (1+x)^m=\sum_{t=0}^{m} C_m^t x^t,\ (1+x)^{n+m}=\sum_{p=0}^{n+m} C_{n+m}^p x^p$$

tengliklarga, bulardan esa $(1+x)^n(1+x)^m=(1+x)^{n+m}$ bo'lgani uchun $\sum_{s=0}^{n} C_n^s x^s \sum_{t=0}^{m} C_m^t x^t = \sum_{p=0}^{n+m} C_{n+m}^p x^p$ tenglikka ega bo'lamiz. Oxirgi tenglikning ikkala tomonidagi x^k ($k=0,1,\ldots,\min(m,n)$) daraja koeffitsiyentlarini bir-biriga tenglashtirsak, isbotlanishi kerak bo'lgan formulani hosil qilamiz. ∎

---

[1] Koshi (Cauchy Ogyusten Lui, 1789-1857) –fransuz matematigi.

Albatta, yuqoridagi uchta xossa boshqa usullar bilan ham isbotlanishi mumkin. Quyida 8- xossaning kombinatorik tahlilga asoslangan isboti keltirilgan.

2- misol. Koshi ayniyatini kombinatorik tahlilga asoslangan holda isbotlaymiz. n nafar o'g'il va m nafar qiz bolalardan tashkil topgan talabalar guruhidan k ($k = 0,1,...,\min(m,n)$) nafar talaba tanlash zarur bo'lsin. $n+m$ nafar talabalardan k nafar talabani C_{n+m}^{k} xil usul bilan tanlash mumkinligi ravshan.

Boshqa tomondan olib qaraganda, $n+m$ nafar talabalardan iborat to'plamdan tanlanadigan barcha k elementli qism to'plamlarni ularning tarkibidagi o'g'il bolalar soniga qarab sinflarga ajratishning quyidagicha imkoniyati bor. Tarkibida s ($0 \le s \le k$) nafar o'g'il bola bo'lgan k elementli qism to'plamni oldin C_n^s xil usul bilan tanlab, keyin $(k-s)$ nafar qiz bolalarni C_m^{k-s} xil usullardan birortasi yordamida tanlash mumkin. Demak, tarkibida s nafar o'g'il bola bo'lgan k nafar talabadan iborat qism to'plamlar soni, ko'paytirish qoidasiga asosan, $C_n^s C_m^{k-s}$ songa tengdir. Noldan k gacha bo'lgan barcha butun s sonlar uchun barcha kombinatsiyalarni hosil qilib va bu kombinatsiyalarga mos ko'paytmalarni yig'ib, Koshi ayniyatining chap tomonini hosil qilamiz. ■

Binomial koeffitsientlarning yuqorida keltirilgan xossalarini tahlil qilish natijasida ularning turli sohalardagi tadbiqlari doirasining kengligini payqash mumkin. Misol sifatida to'plamlar nazariyasiga tatbiqini qaraymiz.

3- misol. Chekli A to'plam 2^A buleanining elementlari va bu elementlar soni bilan binomial koeffitsientlarning uzviy bog'lanishi bor. Bu bog'lanish quyidagicha ifodalanishi mumkin. Chekli A to'plam 2^A buleani tarkibidagi elementlar A to'plamning qism to'plamlaridan iborat bo'lgani uchun, shu qism to'plamlarni quvvatlari bo'yicha ($|A|+1$)ta guruhlarga ajratish mumkin. Tushunarliki, bu yerda k raqamli guruhga ($k = \overline{0,|A|}$) quvvati k ga teng bo'lgan barcha qism to'plamlardan tashkil topadi va undagi qism to'plamlar soni C_n^k ga teng. Bu mulohazani hisobga olgan holda 2- xossa yordamida ushbu bobning 1- paragrafidagi 1-teoremaning boshqa bir isbotiga ega bo'lamiz. ■

Binomial koeffitsiyentlarning yana bir xossasi ushbu bobning 7-paragrafida isbotlanadi.

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Binomial koeffitsiyentlarning xossalaridan foydalanib quyidagi formulalarni isbotlang:

a) $1^2+2^2+...+m^2=\dfrac{m(m+1)(2m+1)}{6}$, b) $1^3+2^3+...+m^3=\dfrac{m^2(m+1)^2}{4}$.

2. n dona bir xil sharlar orasidan toq sondagi, $n\geq 2$ bo‘lganda esa juft sondagi sharlarni tanlash imkoniyatlari sonlarini aniqlang.

3. Binomial koeffitsiyentlarning quyidagi xossalarini isbotlang:

a) $\sum\limits_{r=k}^{n} C_r^k = C_{n+1}^{k+1}$, b) $\sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$, d) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(-1)^k C_n^k = 0$,

e) $n! = n^n - C_n^1(n-1)^n + C_n^2(n-2)^n - C_n^3(n-3)^n + ... +$
$+(-1)^{n-2}C_n^{n-2}2^n + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}$ ($n\in N$),

f) $n^m = C_n^1(n-1)^m - C_n^2(n-2)^m + ... +$
$+(-1)^{n-3}C_n^{n-2}2^m + (-1)^{n-2}C_n^{n-1}$, $m<n$, ($m,n\in N$).

4. Quyidagi yig‘indilarni hisoblang:

a) $C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+...+(n+1)C_n^n$,

b) $C_n^2+2C_n^3+3C_n^4+...+(n-1)C_n^n$,

d) $C_n^0+3C_n^1+5C_n^2+...+(2n+1)C_n^n$.

5. Binomial koeffitsiyentlarning yuqorida keltirilgan xossalaridan farqli birorta xossasini topishga harakat qiling.

6. Ixtiyoriy chekli A to‘plamning juft quvvatli qism to‘plamlari to‘plamining quvvati shu A to‘plamning toq quvvatli qism to‘plamlari to‘plamining quvvatiga tengligini isbotlang.

7. Quvvati 100ga teng bo‘lgan to‘plamning 40 elementli qism to‘plamlari soni bilan shu to‘plamning 60 elementli qism to‘plamlari sonini solishtiring.

8. Figurali sonlarning Paskal uchburchagidagi o‘rnini aniqlang.

9. Paskal uchburchagi yordamida ixtiyoriy k- tartibli figurali sonlarning dastlanki n tasi yig‘indisini hisoblash formulasini toping va bu formulani matematik induksiya usuli yordamida isbot qiling.

10. Paskal uchburchagidan foydalanib 11^n ($n\in N$) ifodaning qiymatini hisoblash formulasini keltirib chiqaring va bu formulani isbot qiling.

11. Paskal uchburchagining ixtiyoriy n - satridan yuqorida joylashgan elementlari yig'indisini hisoblash formulasini ifodalang va bu formulani isbot qiling.

12. Paskal uchburchagining bir necha o'n qatorini yozib, undagi ikkiga, uchga, beshga qoldiqsiz bo'linadiganlarini ajrating.

13. Paskal uchburchagining 256- qatorida qancha toq son borligini aniqlang.

14. Paskal uchburchagidan foydalanib $\sin nx$ va $\cos nx$ ifodalarni $\sin x$ va $\cos x$ orqali ifodalash formulalarini keltirib chiqaring.

15. Paskal uchburchagini sinchkovlik bilan tekshirib, undagi sonlarning dastlabki bir necha tub sonlarga (masalan, 2, 3, 5, 7, 11) bo'linadiganlarining o'rinlarini aniqlang.

16. Paskal uchburchagidagi juft va toq sonlarning joylashuvini tekshiring.

17. Paskal uchburchagining kitobda bayon qilinmagan xossalarini topishga urinib ko'ring.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Paskal uchburchagi deganda nimani tushunasiz?

2. Paskal uchburchagining qanday xossalarini bilasiz?

3. B. Paskalgacha Paskal uchburchagidan foydalangan sharq va g'arb olimlaridan kimlarni bilasiz?

4. Nyuton binomi formulasini qanday qo'llash mumkin?

5. Nyuton binomi formulasini Isaak Nyutondan oldin kimlar qo'llagan?

6. Nima uchun binomial koeffitsiyentlarlarning xossalari Paskal uchburchagining xossalari ham hisoblanadi?

7. Nyuton binomi formulasini kombinatorik tahlil yordamida isbot qilganda qanday tushunchalar qo'llaniladi?

8. Koshi ayniyatining kombinatorik tushunchalarga asoslangan isbotini bilasizmi?

9. Nima uchun gruppalashlar sonlarini binomial koeffitsiyentlar deb ham atashadi?

10. Nima uchun 7- xossa 8- xossaning xususiy holi bo'ladi?

11. Binomial koeffitsiyentlarlarning ushbu kitobda bayon etilmagan yana qanday xossalarini bilasiz?

2.4. Takrorli kombinatsiyalar

Kombinatsiya. Takrorlanish. Birlashmalar. Takrorli o'rin almashtirish, o'rinlashtirish va gruppalashlar. Ko'phad formulasi. Ko'phadiy koeffitsiyentlar. Umumlashgan Nyuton binomi.

2.4.1. Takrorli o'rin almashtirishlar. Kombinatorikada oldin qaralgan birlashmalardan tashqari tarkibidagi elementlari takrorlanishi mumkin bo'lgan boshqa birlashmalar ham o'rganiladi. Masalan, takrorlanuvchi elementlar qatnashgan o'rin almashtirishlar, o'rinlashtirishlar va gruppalashlar.

Avval o'rganilgan o'rin almashtirishlar shunday tuzilmalar ediki, ular tarkibidagi elementlar bir-biridan farq qilardi. Endi o'rin almashtirishlar tarkibidagi elementlar takrorlanishi mumkin bo'lgan holni qaraymiz. Tabiiyki, aynan bir xil elementlar o'rinlari almashtirilishi natijasida yangi o'rin almashtirish hosil bo'lmaydi. Shuning uchun tarkibidagi elementlari soni o'zgarmaganda elementlari takrorlanishi mumkin bo'lgan o'rin almashtirishlar soni turli elementlardan tashkil topgan o'rin almashtirishlar soniga qaraganda kichik bo'ladi.

Faraz qilaylik, qandaydir kortejning n ta elementlari orasida bir xil (aynan bir xil) n_1 ta birinchi tur, bir xil n_2 ta ikkinchi tur va hokazo, bir xil n_k ta k- tur elementlar bo'lsin, bu yerda n_1, $n_2,\dots n_k$ – hech bo'lmaganda bittasi 1dan farqli natural sonlar.

1- ta'rif. *Bu n ta elementlarning o'rinlarini imkoniyati boricha almashtirishlar natijasida hosil bo'lgan kortejlar (kombinatsiyalar)* ***takrorlanuvchi elementlar qatnashgan o'rin almashtirishlar*** *(qisqacha,* ***takrorli o'rin almashtirishlar****) deb ataladi.*

n ta elementlari orasida n_1 ta birinchi tur, n_2 ta ikkinchi tur va hokazo, n_k ta k - tur bir xil elementlar bo'lgan takrorli o'rin almashtirishlar sonini $C_n(n_1,n_2,\dots,n_k)$ bilan belgilaymiz.

1- teorema. *Takrorli o'rin almashtirishlar soni uchun*

$$C_n(n_1,n_2,\dots,n_k)=\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

formula o'rinlidir, bu yerda $n_1+n_2+\dots+n_k=n$ – elementlar soni, k – turlar soni.

Isboti. Har bir o'rin almashtirishdagi elementlar soni n_1+n_2+ $+\dots+n_k=n$ ga teng. Bu n ta elementlarni quyidagi tartibda joylashtirib, o‘rin almashtirishlardan birini qaraymiz: birinchi bo‘lib barcha n_1 ta birinchi tur, ulardan keyin barcha n_2 ta ikkinchi tur va hokazo, oxirda barcha n_k ta k - tur elementlar joylashgan bo‘lsin. Qaralayotgan takrorli o‘rin almashtirishda birinchi tur elementlar soni n_1 ga teng bo‘lgani uchun ularning mumkin bo‘lgan hamma o‘rin almashtirishlari soni $n_1!$ ga teng. Ammo bu elementlar bir-biridan farq qilmaganligi sababli ularning o‘rinlarini almashtirish natijasida yangi takrorli o‘rin almashtirish hosil bo‘lmaydi.

Qaralayotgan takrorli o‘rin almashtirishda ikkinchi tur elementlarning o‘rinlarini almashtirishlar soni $n_2!$ bo‘lib, bu yerda ham bir-biridan farq qilmagan elementlar o‘rinlarini almashtirishlar jarayonida yangi takrorli o‘rin almashtirish hosil qilinmaydi. Ikkinchi tur elementlarning o‘rinlarini almashtirishlar birinchi tur elementlarning o‘rin almashtirishlariga bog‘liqsiz ravishda amalga oshirilishi mumkinligini ta’kidlaymiz.

Uchinchi tur elementlarning o‘rinlarini almashtirishlar soni $n_3!$ bo‘lib, ularning ham hech qaysi biri yangi takrorli o‘rin almashtirish hosil qilmaydi. Bu o‘rin almashtirishlar $n_1!$ ta birinchi tur elementlarning o‘rinlarini almashtirishlarga va $n_2!$ ta ikkinchi tur elementlarning o‘rinlarini almashtirishlarga, jami, ko‘paytirish qoidasiga asosan, $n_1!n_2!$ ta o‘rin almashtirishlarga bog‘liqsiz ravishda amalga oshirilishi mumkin.

Shunday davom etib, qaralayotgan takrorli o‘rin almashtirishda oxirgi k - tur elementlar o‘rinlarini almashtiramiz. Bunday o‘rin almashtirishlar soni $n_k!$ ga teng bo‘lib, bu o‘rin almashtirishlar ham yangi takrorli o‘rin almashtirishni hosil qilmaydi. Bu o‘rin almashtirishlarni birinchi tur, ikkinchi tur va hokazo ($k-1$)- tur elementlarning jami soni, umumlashgan ko‘paytirish qoidasiga asosan, $n_1!n_2!...n_{k-1}!$ bo‘lgan o‘rin almashtirishlariga bog‘liqsiz ravishda bajarish mumkin.

Shunday qilib, $n!$ ta o‘rin almashtirishlarni har birida $n_1!n_2!...n_k!$ tadan bir xil o‘rin almashtirishlar bo‘lgan qismlarga ajratildi deb hisoblash mumkin. Demak, biz izlagan takrorli o‘rin almashtirishlar soni $C_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \dfrac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$ bo‘ladi, bu yerda $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$. ■

1- misol. Ikkita a, bitta b va ikkita c harflardan tashkil topgan kortej uchun barcha takrorli o‘rin almashtirishlarni tuzing.

Bu misolda uch turdagi ($k = 3$) harflar soni beshga teng (n=5) bo‘lib, $n_1 = 2$ (ikkita a), $n_2 = 1$ (bitta b) va $n_3 = 2$ (ikkita c). Dastlabki ikkita harfning (xuddi shuningdek, oxirgi ikkita harfning ham) o‘rinlarini o‘zaro almashtirsak yangi o‘rin almashtirishlar hosil bo‘lmaydi. Barcha takrorli o‘rin almashtirishlar soni $C_5(2,1,2) = \frac{5!}{2!\cdot 1!\cdot 2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 2} = 30$ bo‘ladi. Bu o‘ttizta o‘rin almashtirishlarning hammasi quyida keltirilgan:

$$aabcc, aacbc, aaccb, abacc, abcac, abcca,$$
$$acabc.acacb, acbac, acbca, accab, accba,$$
$$baacc, bacac, bacca, bcaac, bcaca, bccaa,$$
$$caabc, caacb, cabac, cabca, cacab, cacba,$$
$$cbaac, cbaca, cbcaa, ccaab, ccaba, ccbaa. \blacksquare$$

2.4.2. Takrorli o‘rinlashtirishlar. n ta elementdan tashkil topgan to‘plam berilgan bo‘lsin. Bu elementlardan foydalanib, m ta elementdan tashkil topgan kortejlarni shunday tuzamizki, bu kortejlarga har bir element hohlagancha marta (albatta m dan oshmagan miqdorda) kirishi mumkin bo‘lsin va bu kortejlar bir-biridan ularni tashkil etuvchi elementlar turlari bilan yoki bu elementlarning joylashishlari bilan farq qilsin.

2- ta’rif. *Shunday usul bilan tuzilgan kortejlarning har biri* ***n ta turli elementlardan takrorlanuvchi elementlar qatnashgan m tadan o‘rinlashtirish*** *(qisqacha,* ***takrorli o‘rinlashtirish****) deb ataladi.*

n ta turli elementlardan m tadan takrorli o‘rinlashtirishlar sonini $\overline{A}_n^m$ bilan belgilaymiz.

2- teorema. *n ta turli elementlardan m tadan takrorli o‘rinlashtirishlar soni n^m ga teng, ya’ni $\overline{A}_n^m = n^m$.*

Isboti. Berilgan n uchun takrorli o‘rinlashtirishdagi elementlar soni m bo‘yicha matematik induksiya usulini qo‘llaymiz. Baza: takrorli o‘rinlashtirishlar $m=1$ bo‘lganda bitta elementdan tuzilishi ravshan. Tabiiyki, bunda hech qanaqa takrorlanish haqida gap bo‘lishi mumkin emas. Bu holda elementlar soni n bo‘lgani uchun takrorli o‘rinlashtirishlar soni ham n ga teng: $\overline{A}_n^1 = n = n^1$.

Induksion o‘tish: teoremaning tasdig‘i $m=k$ bo‘lganda to‘g‘ri, ya’ni $\overline{A}_n^k = n^k$ bo‘lsin. Bu tasdiq $m=k+1$ bo‘lganda ham to‘g‘ri bo‘lishini isbotlaymiz. Buning uchun n ta turli elementlardan k tadan takrorli o‘rinlashtirishning istalgan birini olib, unga n elementli to‘plamning ixtiyoriy bitta elementini $(k+1)$- element sifatida kiritamiz. Natijada qandaydir ($k+1$) tadan takrorli o'rinlashtirishni hosil qilamiz. Tabiiyki, qaralayotgan k tadan o'rinlashtirishlarning har biridan yangi n ta ($k+1$)tadan takrorli o'rinlashtirishlar hosil qilish mumkin. Shunday usul bilan ishni davom ettirsak, barcha mumkin bo'lgan ($k+1$)tadan takrorli o'rinlashtirishlarni hosil qilamiz, bu yerda birorta ham ($k+1$)tadan takrorli o'rinlashtirishlar qolib ketmaydi va ilgari ko'rilgan hech qaysi ($k+1$)tadan takrorli o'rinlashtirish qaytadan paydo bo'lmaydi. Ko'paytirish qoidasiga asosan n ta turli elementlardan ($k+1$)tadan takrorli o'rinlashtirishlar soni k tadan takrorli o'rinlashtirishlar soniga nisbatan n marta ortiqdir, ya'ni $\overline{A}_n^{k+1} = n\overline{A}_n^k = nn^k = n^{k+1}$. ■

2- misol. Oila a'zolari besh kishidan iborat bo'lib, ular ikkita ishni bajarishlari zarur (masalan, non sotib olish va uni bo'laklash), bunda oilaning har bir a'zosi ikkala ishni ham bajarish imkoniyatiga ega. Oila a'zolariga bu ishlarni taqsimlashda mumkin bo'lgan imkoniyatlar soni aniqlansin.

Bu masalani hal qilish uchun oila a'zolarini a, b, c, d va e harflari bilan belgilab, ishlar ikkita bo'lgani uchun beshta turli elementlardan ikkitadan barcha takrorli o'rinlashtirishlarni tuzamiz:

$$aa, ab, ac, ad, ae, ba, bb, bc, bd, be, ca, cb, cc,$$
$$cd, ce, da, db, dc, dd, de, ea, eb, ec, ed, ee.$$

Hammasi bo'lib 25ta ($\overline{A}_5^2 = 5^2 = 25$) takrorli o'rinlashtirishlar tuzildi. Demak, besh kishidan iborat oila a'zolariga ikkita ishni taqsimlashda mumkin bo'lgan imkoniyatlar soni 25dir. ■

3- misol. O'zbekiston Respublikasi fuqarosi pasportining raqami ikki qismdan iborat: lotin alifbosining ikkita harfi va yetti xonali son. O'zbekiston Respublikasi fuqarosi pasportining barcha mumkin bo'lgan raqamlari sonini aniqlang.

Lotin alifbosidagi yigirma oltita turli harflar yordamida 676 ta ($\overline{A}_{26}^2 = 26^2 = 676$) ikkitadan takrorli o'rinlashtirishlar tashkil etish mumkin. O'nta 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 va 9 raqamlardan esa 10.000.000 ta ($\overline{A}_{10}^7 = 10^7 = 10000000$) turli yetti xonali raqamlarni (bu raqamlarda dastlabki nollar tashlab yuborilmaydi) hosil qilish mumkin. Shunday qilib, O'zbekiston Respublikasi fuqarosi pasportining raqamlari soni 6.760.000.000ga ($\overline{A}_{26}^2 \overline{A}_{10}^7 = 6760000000$) teng. ■

2.4.3. Takrorli gruppalashlar. Har bir elementi birlashmaga istalgancha marta kiritiladigan va turli n ta elementlardan m tadan olinadigan hamda elementlar tartibi e'tiborga olinmaydigan birlashmalarni (kortejlarni) qaraymiz.

3- ta'rif. *Bunaqa birlashmalar* ***n ta turli elementlardan m tadan takrorlanuvchi elementlar qatnashgan gruppalashlar*** *(qisqacha,* ***takrorli gruppalashlar****) deb ataladi.*

n ta elementdan m tadan takrorlanuvchi elementlar qatnashgan gruppalashlar ta'rifidan ko'rinib turibdiki, turli kombinatsiyalar bir-birlaridan hech bo'lmasa bitta elementi bilan farq qiladi. n ta elementdan m tadan takrorli gruppalashlar sonini $\overline{C}_n^m$ deb belgilaymiz.

3- teorema. *n ta elementdan m tadan takrorli gruppalashlar soni C_{n+m-1}^m ga teng, ya'ni $\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$.*

Isboti. $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ to'plam uchun n ta elementdan m tadan takrorli gruppalashlar sonini aniqlash zarur. Har bir takrorli gruppalashdagi elementlarni n ta qismga shunday bo'lish mumkinki, har bir i- bo'lakda a_i element qanchadir marta qatnashadi yoki biror marta ham qatnashmaydi. Har bir shunday gruppalashni nol va birlardan iborat kod yordamida quyidagicha shifrlaymiz: har bir a_i element o'rniga bu element i- bo'lakda necha marta qatnashsa, shuncha birlar yozamiz (tabiiyki, bu element biror marta ham qatnashmasligi mumkin, u holda hech narsa yozilmaydi); turli bo'lak elementlarini bir-biridan nollar bilan ajratamiz (bu yerda yonma-yon joylashgan nollar hosil bo'lishi mumkin – bu nollar mos elementlarning gruppalashda qatnashmaganligini anglatadi). Masalan, $\{a, b, c, d, e, f\}$ to'plam elementlaridan tuzilgan 6ta elementdan 9tadan takrorli *bbbcddddf* gruppalashga 01110101111001 shifr, 6ta elementdan 12tadan takrorli *aaaabeeeeeff* gruppalashga esa 1111010011111011 shifr, aksincha, 10100011110 shifrga 6ta elementdan 6tadan takrorli *abeeee* gruppalash mos keladi.

Shunday qilib, n ta elementdan m tadan har bir takrorli gruppalash uchun qandaydir m ta birlar va $(n-1)$ta nollardan iborat ketma-ketlikni va, aksincha, m ta birlar va $(n-1)$ta nollardan tashkil topgan har bir ketma-ketlik uchun n ta elementdan m tadan biror takrorli gruppalashni mos qo'ygan bo'lamiz (bir qiymatli moslik o'rnatildi). Binobarin, n ta elementdan m tadan takrorli gruppalashlar soni $(n-1)$ta nol va m ta birlardan tashkil topgan kortej elementlaridan tuzilgan takrorli o'rin almashtirishlar soniga, ya'ni $C_{n+m-1}(m,n-1)$ ga tengdir. Demak,

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}(m,n-1) = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} = C_{n+m-1}^m . \blacksquare$$

4- misol. Har birining yoqlariga 1, 2, 3, 4, 5 va 6 sonlari yozilgan kub shaklidagi ikkita soqqani tashlaganda jami nechta sonlar juftligini hosil qilish mumkin?

Soqqalarni tashlaganda jami quyidagi 21 imkoniyatdan biri ro'y beradi:

$$<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<1,5>,<1,6>,<2,2>,$$
$$<2,3>,<2,4>,<2,5>,<2,6>,<3,3>,<3,4>,<3,5>,$$
$$<3,6>,<4,4>,<4,5>,<4,6>,<5,5>,<5,6>,<6,6>.$$

Bu juftliklar oltita elementdan ikkitadan takrorli gruppalashlarni tashkil etadi.

Ularning soni 3- teoremaga asosan $\overline{C}_6^2 = C_{6+2-1}^2 = C_7^2 = 21$ bo'ladi. $\blacksquare$

2.4.4. Ko'phad formulasi. Takrorli kombinatsiyalar vositasida Nyuton binomi tushunchasini umumlashtiramiz, ya'ni $(a_1+a_2+...+a_m)^n$ ifodaning yoyilmasini topish muammosini qaraymiz. Buning uchun qaralayotgan ifodani n ta bir xil ifodalar ko'paytmasi, ya'ni

$$\underbrace{(a_1+a_2+...+a_m)(a_1+a_2+...+a_m)...(a_1+a_2+...+a_m)}_{n\text{ta ko'paytuvchi}}$$

shaklida yozib, qavslarni ochamiz va o'xshash hadlarni ixchamlaymiz. Natijada, $(a_1+a_2+...+a_m)^n$ ifodaning yoyilmasi hosil bo'ladi. Yoyilmaning tarkibidagi qo'shiluvchilarning har birida $a_1,a_2,...,a_m$ elementlardan tashkil topgan takrorli o'rin almashtirishlar bor, bu yerda har bir qo'shiluvchi qandaydir koeffitsiyent va n ta elementning $a_1^{n_1}a_2^{n_2}...a_m^{n_m}$ ko'rinishdagi ko'paytmasidan iboratdir. Yoyilmadagi $a_1^{n_1}a_2^{n_2}...a_m^{n_m}$ ko'paytmaning koeffitsiyentini aniqlash uchun n ta $(n=n_1+n_2+...+n_m)$ elementli takrorli o'rin almashtirishlar sonini topish kerak, ya'ni $C_n(n_1,n_2,...,n_m)$ sonni hisoblash kerak. Shunday qilib, quyidagi teorema isbotlandi.

4- teorema. *Ixtiyoriy haqiqiy* $a_1, a_2, ..., a_m$ *va natural* n *sonlar uchun*

$$(a_1 + a_2 + ... + a_m)^n = \sum_{n_1+n_2+...+n_m=n} C_n(n_1, n_2, ..., n_m)\, a_1^{n_1} a_2^{n_2} ... a_m^{n_m}$$

formula o'rinlidir, bu formulaning o'ng tomonidagi yig'indi $n_1 + n_2 + ... + n_m = n$ *shartni qanoatlantiruvchi barcha manfiymas butun* $n_1, n_2, ..., n_m$ *sonlar uchun amalga oshiriladi.*

Isbotlangan oxirgi tenglik **ko'phad formulasi** yoki **umumlashgan Nyuton binomi formulasi** deb yuritiladi. $C_n(n_1, n_2, ..., n_m)$ sonlarni **ko'phad koeffitsiyentlari** deb ataymiz.

C_n^k binomial koeffitsient $C_n(n_1, n_2, ..., n_m)$ ko'phad koeffitsiyentining $m = 2$ bo'lgandagi xususiy holidir. Haqiqatdan ham, $n_1 + n_2 = n$ tenglikda $n_1 = k$ deb olsak, u holda $n_2 = n - n_1 = n - k$ va $C_n(n_1, n_2) = \frac{n!}{n_1! n_2!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k$ bo'ladi.

5- misol. $(a+b+c)^3$ ifodaning yoyilmasini toping. Avvalo 3 sonini bo'laklaymiz, ya'ni 3ni mumkin bo'lgan barcha imkoniyatlar bilan manfiymas butun sonlar yig'indisi shaklida yozamiz:

3=3+0+0, 3=2+1+0, 3=2+0+1, 3=1+2+0, 3=1+1+1,
3=1+2+0, 3=0+3+0, 3=0+2+1, 3=0+1+2, 3=0+0+3.

Demak, ko'phad formulasiga ko'ra,

$$(a+b+c)^3 = C_3(3,0,0)a^3 + C_3(2,1,0)a^2b + C_3(2,0,1)a^2c +$$
$$+ C_3(1,2,0)ab^2 + C_3(1,1,1)abc + C_3(1,0,2)ac^2 + C_3(0,3,0)b^3 +$$
$$+ C_3(0,2,1)b^2c + C_3(0,1,2)bc^2 + C_3(0,0,3)c^3.$$

Takrorli o'rin almashtirishlar soni $C_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!}$ formulasini qo'llab quyidag tenglikni hosil qilamiz:

$$(a+b+c)^3 =$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3. \ ■$$

Ko'phad yoyilmasining hadlarini yozganda shunga e'tibor berish kerakki, agar $n_1, n_2, ..., n_m$ ($n_1 + n_2 + ... + n_m = n$) sonlar $k_1, k_2, ..., k_m$ ($k_1 + k_2 + ... + k_m = n$) sonlarning o'rin almashtirishlari yordamida hosil qilinishi mumkin bo'lsa, u holda $a_1^{n_1}a_2^{n_2}...a_m^{n_m}$ va $a_1^{k_1}a_2^{k_2}...a_m^{k_m}$ hadlarning koefitsiyentlari o'zaro teng bo'ladi. Shuning uchun n sonining $n = n_1 + n_2 + ... + n_m$ ko'rinishda ifodalanishlaridan qandaydir shartni bajaradigan birortasini, masalan, $n_1 \geq n_2 \geq ... \geq n_m$ (yoki $n_1 \leq n_2 \leq ... \leq n_m$) shartni qanoatlantiradiganini topib, unga mos $a_1^{n_1}a_2^{n_2}...a_m^{n_m}$ ifodada daraja ko'rsatkichlarini mumkin bo'lgan barcha usullar bilan almashtirish kerak bo'ladi.

Masalan, 5- misoldagi a^2b, a^2c, ab^2, ac^2, b^2c va bc^2 hadlarning ko'phad koeffitsientlari o'zaro tengdir. Yuqorida ko'rsatilgan shart asosida 3 sonini manfiymas butun sonlar yigindisi ko'rinisida bo'laklashning 3 imkoniyati bor: 3=3+0+0, 3=2+1+0, 3=1+1+1. Shuning uchun, $(a+b+c)^3$ ifodaning yoyilmasida 3 xil turli koeffitsiyentlarga egamiz: $C_3(3,0,0) = 1$, $C_3(2,1,0) = 3$ va $C_3(1,1,1) = 6$. Demak,

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 +$$
$$+ 3(a^2b + a^2c + ab^2 + ac^2 + b^2c + bc^2) + 6abc.$$

Ko'phad formulasi yordamida ko'phadiy koeffitsientlarining, ya'ni $C_n(n_1, n_2, ..., n_m)$ sonlarning ba'zi xossalarini osonlik bilan isbotlash mumkin. Masalan, $\sum_{n=n_1+n_2+...+n_m} C_n(n_1, n_2, ..., n_m) = m^n$, bu yerda yig'indi $n_1 + n_2 + ... + n_m = n$ shartni qanoatlantiruvchi barcha manfiymas butun $n_1, n_2, ..., n_m$ sonlar uchun amalga oshiriladi va qo'shiluvchilar tartibi e'tiborga olinadi.

Haqiqatdan ham, agar ko'phad formulasida $a_1 = a_2 = ... = a_m = 1$ deb olsak, kerakli tenglikni hosil qilamiz.

Muammoli masala va topshiriqlar

1. To'la o'yin qartalari (13x4=52ta) orasidan turli tus (mast)ga ega bo'lgan bir-biridan farq qiluvchi 4ta qartani tanlash imkoniyatlari sonini aniqlang.

2. Matematika so'zidagi harflar o'rinlarini almashtirib ma'noga ega bo'lmaganlarini ham e'tiborga olganda tuzish mumkin bo'lgan barcha so'zlar sonini toping.

3. Shaxmat taxtasining bir qatoriga shoh, farzin, 2 dona rux, 2 dona fil va 2 dona otni joylashtirishlar sonini aniqlang.

4. 0 raqami birinchi raqam sifatida kelganda, uni tashlab yuborilish qoidasiga amal qilib 0, 1, 2, 3, 4, 5 raqamlaridan tuzish mumkin bo'lgan barcha olti xonali sonlar qancha?

5. 1, 2, 3, 4, 5 sonlaridan tuzish mumkin bo'lgan barcha uch xonali sonlar qancha?

6. Shirinlik sotiladigan do'konda 4 xil shirinlik bo'lsa, 7 dona shirinlikni sotib olish imkoniyatlari sonini aniqlang.

7. Beshta turli o'rindiqlar va yettita turli rangdagi material bor. Har bir o'rindiqni faqat bir xil rangdagi material bilan qoplash sharti bilan o'rindiqlarga material qoplash imkoniyatlari sonini toping.

8. Homiylar teleshouda qatnashayotgan o'yinchilarga kofe qaynatgichlar, dazmollar, uyali telefon apparatlari va duxilar sovg'a qilishmoqchi. 9 nafar o'yinchiga bittadan sovg'a berish imkoniyatlari sonini toping.

9. Turli 5 dona qalam va 6 dona ruchkadan 2 ta qalam va 4 ta ruchkani tanlash imkoniyatlari sonini aniqlang.

10. 36 ta o'yin qartasini 4 o'yinchiga teng bo'lib berganda mumkin bo'lgan barcha imkoniyatlar sonini hisoblang.

11. Fermada 20 ta qo'y va 24 ta sigir bor. Bittadan qo'y va sigir tanlash imkoniyatlari soni bilan bittadan qo'y va sigir tanlangandan so'ng qolgan hayvonlar orasidan yana bittadan qo'y va sigir tanlash imkoniyatlari sonini solishtiring.

12. Toq raqamdan boshlanuvchi juft besh xonali sonlar nechta?

13. Qirralari uzunliklari 1dan 10gacha sonlar bilan ifodalanadigan turli to'g'ri burchakli parallelepipedlar sonini hisoblang.

14. Yetti nafar talabani yotoqxonadagi bir, ikki va to'rt o'rinli xonalarga joylashtirish imkoniyatlari sonini aniqlang.

15. Agar to'qqiz qavatli binoning birinchi qavatida turgan liftda uch nafar yo'lovchi yuqoriga ko'tarilayotgan va yo'lovchilardan istalgan binoning birinchidan yuqoridagi ixtiyoriy qavatida liftdan tushib qolishi mumkin bo'lsa, u holda liftning yo'lovchilardan bo'shab qolish imkoniyatlari sonini aniqlang.

16. $(a+b+c+d)^4$ ifodaning yoyilmasini toping.

17. $(1+x+y)^{20}$ ifoda yoyilmasidagi x^4y^8 qatnashgan had koeffitsiyentini aniqlang.

18. O'nli sanoq tizimida yozilgan olti xonali sonlar orasida:

a) bir xil raqamlari borlari,

b) raqamlari qat'iy o'sish tartibida joylashganlari,
d) rosa uchta juft raqamga egalari,
f) ikkitadan kam bo'lmagan juft raqamga egalari,
g) raqamlari yiq'indisi juft son bo'lganlari sonini aniqlang.

19. $x_1+x_2+...+x_m=n$ $(m,n\in N\ ,\ m\leq n)$ tenglamaning:

a) manfiymas butun, b) natural yechimlarini topish masalasini tahlil qiling.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Takrorlanuvchi elementlar qatnashgan o'rin almashtirishlar takrorlanishi bo'lmagan o'rin almashtirishlardan nimasi bilan farq qiladi?
2. Takrorli o'rin almashtirishlar soni formulasidan foydalanib takrorlanishi bo'lmagan o'rin almashtirishlar sonini hisoblash mumkinmi?
3. Takrorlanuvchi elementlar qatnashgan o'rinlashtirishlar takrorlanishi bo'lmagan o'rinlashtirishlardan nimasi bilan farq qiladi?
4. Takrorli o'rinlashtirishlar soni formulasidan foydalanib takrorlanishi bo'lmagan o'rinlashtirishlar sonini hisoblash mumkinmi?
5. Takrorlanuvchi elementlar qatnashgan gruppalashlar takrorlanishi bo'lmagan gruppalashlardan nimasi bilan farq qiladi?
6. Takrorli gruppalashlar soni formulasini isbotlashda qanday usuldan foydalanilgan?
7. Takrorli o'rin almashtirishlar soni formulasidan foydalanib takrorlanishi bo'lmagan gruppalashlar sonini hisoblash mumkinmi?
8. Ko'phad formulasining Nyuton binomi formulasidan qanday farqi bor?
9. Ko'phad koeffitsiyentlarining qanday xossalarini bilasiz?

2.5. Fibonachchi[1] sonlari

Sonli ketma-ketlik. Rekurrent tenglik. Fibonachchi qatori. Fibonachchi sonlari. Umumlashgan Fibonachchi qatori. Binomial koeffitsiyentlar. Paskal uchburchagi. Matematik induksiya usuli. Bine formulasi. Oltin kesim. Logarifmik spiral.

2.5.1. Fibonachchi sonlarining ta'rifi. Elementlari haqiqiy sonlardan iborat bo'lgan $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$ ketma-ketlikni qaraymiz. Bu ketma-

[1] Fibonachchi Pizanskiy (Fibonacci Leonardo Pisano, 1180-1240) – italyan matematigi.

ketlikdagi elementlarning uchinchisidan boshlab har biri o‘zidan oldingi ikkita elementning yig‘indisiga teng, ya’ni $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ $(n \geq 3)$ bo‘lsin. Ravshanki, bu ketma-ketlikni tashkil qilishda uning dastlabki ikkita hadi muhim bo‘lib, keyingi barcha hadlari rekurrent[1] tenglik vositasida aniqlanadi.

1- ta’rif. *$u_1 = u_2 = 1$ bo‘lgan holda $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ $(n \geq 3)$ rekurrent tenglik vositasida aniqlangan ketma-ketlik **Fibonachchi qatori**, uning hadlari esa **Fibonachchi sonlari** deb ataladi.*

Tabiiyki, Fibonachchi qatoridagi Fibonachchi sonlarini aniqlash jarayoni cheksizdir. Fibonachchi sonlarining dastlabki 24tasi quyida keltirilgan:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584,$$
$$4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368.$$

“Fibonachchi sonlari” iborasi birinchi bo‘lib XIX asrda Eduard Lyuka[2] tomonidan qiziqarli matematikaga bag‘ishlab yozilgan asarda qo‘llanilgan. Fibonachchi (bu so‘z italyancha “filius Bonacci” so‘zlaridan qisqartirilib tuzilgan bo‘lib, Bonachchining o‘g‘li ma’nosini anglatadi) Italiyadagi Piza shahrida XII-XIII asrlarda yashagan Leonardo Pizan-skiyning boshqacha ismidir (laqabidir). Bonachchi Italiya va Jazoirda savdo-sotiq bilan shug‘ullangan. Leonardo boshlang‘ich ma’lumotni Ja-zoirda olgan bo‘lib, u o‘zining arab o‘qituvchilaridan hind pozitsion o‘nlik sanoq tizimi[3] va nolni o‘rgangan edi. Fibonachchi “Liber abaci” (“Abak haqidagi kitob” – 1202- yilda yozilgan bo‘lib, 1228- yildagi qo‘lyozma nusxasi saqlangan) nomli kitobida arifmetika va algebra bo‘yicha o‘z davrining deyarli barcha ma’lumotlarini bayon qilgan. Xususan, o‘sha kitobda hozir butun dunyoda ommabob hisoblangan “arab” raqamlari bayon qilingan. Qo‘lyozmaning (1228- yil) 123–124- sahifalarida uy quyonlarining ko‘payishi haqidagi quyidagi masala bayon qilingan.

“Bir kishi bir juft quyonni ko‘paytirish maqsadida saqlagan bo‘lsin.

Quyonning tabiati shundayki, har bir juft quyon bir oyda boshqa bir juft quyonni dunyoga keltiradi va yangi paydo bo‘lgan juft quyonlar ikkinchi oydan boshlab nasl bera boshlaydilar. Bir yildan so‘ng dastlabki juft quyonlarning ko‘payishi natijasida necha juft quyon vujudga keladi?”

---

[1] “Recurrens” lotincha so‘z bo‘lib, o‘ziga qaytaruvchi ma’nosini beradi.

[2] Lyuka yoki Lukas (Lucas François Édouard Anatole, 1842-1891) – fransuz matematigi.

[3] Bu tizim haqidagi ma’lumot g‘arbga arablar orqali o‘tganligi sababli uni, ba’zan, yanglish ravishda, “arab pozitsion o‘nlik sanoq tizimi” deyishadi.

Bu masalani yechish jarayonida Fibonachchi dastlabki yilning har bir oyi uchun quyonlar juftlari sonini aniqlagan. Bu sonlar 1- jadvalda keltirilgan. “Liber abaci”dan bu masala yechimi bayonining so‘nggi satrlarini keltiramiz: “...Oxirgi oyda tug‘ilgan yangi 144 juft quyonlar qo‘shilsa, 377 juft quyon hosil bo‘ladi. Shuncha juft quyon bir yil davomida bir juft quyondan ko‘payar ekan”. Quyonlar haqidagi masalada uchragan sonlar Fibonachchi qatorining dastlabki sonlari ekanligi yaqqol ko‘rinib turibdi.

Fibonachchining o‘zi Fibonachchi qatorining xossalarini o‘rganish bilan shug‘ullanmagan deb hisoblashadi (har ehtimolga qarshi, bizgacha yetib kelgan bunday izlanishlar haqida ma’lumotlar yo‘qligini ta’kidlaymiz). XIX asr boshlarida Fibonachchi qatorining turli xossalariga bag‘ishlangan ilmiy ishlar soni “Fibonachchi quyonlari sonidek o‘sgan”.

1-jadval

O‘tgan oylar soni	Tug‘ilgan juft quyonlar	Jami juftlar
0	0	1
1	1	2
2	1	3
3	2	5
4	3	8
5	5	13
6	8	21
7	13	34
8	21	55
9	34	89
10	55	144
11	89	233
12	144	377

Eduard Lyuka ixtiyoriy u_1 va u_2 sonlardan boshlanuvchi hamda $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ $(n \geq 3)$ rekurrent tenglik bilan aniqlanuvchi sonlar qatorini **umumlashgan Fibonachchi qatori** deb nomlagan.

2.5.2. Fibonachchi sonlarining oddiy xossalari. Fibonachchi sonlari juda ko‘plab qiziqarli xossalarga ega. Quyida bu xossalardan ba’zilarini keltiramiz.

1- xossa. *Dastlabki* n *ta Fibonachchi sonlarining yig'indisi* ($u_{n+2}-1$)*ga teng, ya'ni* $u_1+u_2+...+u_n=u_{n+2}-1$.

Haqiqatdan ham, Fibonachchi sonlarining ta'rifiga ko'ra

$$u_1+u_2+...+u_n=(u_3-u_2)+(u_4-u_3)+...+(u_{n+1}-u_n)+(u_{n+2}-u_{n+1})=$$

$$=u_{n+2}-u_2=u_{n+2}-1. \blacksquare$$

2- xossa. *Toq raqamli dastlabki* n *ta Fibonachchi sonlarining yigindisi* u_{2n} *ga teng, ya'ni*

$$u_1+u_3+u_5+...+u_{2n-1}=u_{2n}.$$

Ravshanki,

$$u_1+u_3+u_5+...+u_{2n-1}=$$

$$=u_2+(u_4-u_2)+(u_6-u_4)+...+(u_{2n}-u_{2n-2})=u_{2n}. \blacksquare$$

3- xossa. *Juft raqamli dastlabki* n *ta Fibonachchi sonlarining yig'indisi* ($u_{2n+1}-1$)*ga teng, ya'ni* $u_2+u_4+u_6+...+u_{2n}=u_{2n+1}-1$.

Bu xossani isbotlash uchun, 1- xossaga ko'ra,

$$u_1+u_2+...+u_{2n}=u_{2n+2}-1$$

tenglik o'rinli ekanligini va 2-xossani hisobga olish kifoya:

$$u_2+u_4+u_6+...+u_{2n}=(u_1+u_2+u_3+...+u_{2n})-$$

$$-(u_1+u_3+u_5+...+u_{2n-1})=$$

$$=u_{2n+2}-1-u_{2n}=u_{2n+2}-u_{2n}-1=u_{2n+1}-1. \blacksquare$$

Yuqorida isbotlangan 1- va 2- xossalardan foydalanib, Fibonachchi sonlarining ishorasi almashuvchi qatori yig'indisi haqidagi quyidagi xossasini ham isbotlash mumkin.

4-xossa. *Dastlabki* n *ta Fibonachchi sonlari uchun* $u_1-u_2+u_3-u_4+$ $+...+(-1)^{n+1}u_n=(-1)^{n+1}u_{n-1}+1$ *tenglik o'rinlidir.*

5- xossa. *Dastlabki* n *ta Fibonachchi sonlari kvadratlarining yig'indisi* u_nu_{n+1}*ga teng, ya'ni* $u_1^2+u_2^2+...+u_n^2=u_nu_{n+1}$.

Haqiqatdan ham, Fibbonachi qatorining ta'rifiga ko'ra $u_1^2=u_1u_2$ bo'ladi va birdan katta ixtiyoriy natural n son uchun

$$u_n^2=u_nu_n=u_n(u_{n+1}-u_{n-1})=u_nu_{n+1}-u_{n-1}u_n$$

tenglik o'rinlidir. Shuning uchun

$$u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n^2=u_1u_2+u_2u_3-u_1u_2+$$
$$+\ldots+u_nu_{n+1}-u_{n-1}u_n=u_nu_{n+1}\,. \blacksquare$$

6- xossa. *Ixtiyoriy u_n Fibonachchi sonining kvadrati bilan $u_{n-1}u_{n+1}$ ko'paytma orasidagi farq birga teng, ya'ni $u_n^2-u_{n-1}u_{n+1}=(-1)^{n+1}$.*

Bu xossani matematik induksiya usuli yordamida isbotlaymiz. Baza: $n=2$ uchun $u_2^2-u_1u_3=1^2-1\cdot 2=-1=(-1)^{2+1}$ – tasdiq to'g'ri.

Induksion o'tish: bu xossa $n=k\geq 2$ uchun to'g'ri, ya'ni $u_k^2-u_{k-1}u_{k+1}=(-1)^{k+1}$ yoki $u_k^2=u_{k-1}u_{k+1}+(-1)^{k+1}$ bo'lsin. Oxirgi tenglikning ikkala tomoniga u_ku_{k+1} ifodani qo'shsak

$$u_k^2+u_ku_{k+1}=u_{k-1}u_{k+1}+u_ku_{k+1}+(-1)^{k+1}$$

tenglik va bu tenglikdan $u_k(u_k+u_{k+1})=u_{k+1}(u_{k-1}+u_k)+(-1)^{k+1}$ kelib chiqadi. Fibonachchi qatorining aniqlanishidan foydalanib, quyi–dagilarga ega bo'lamiz: $u_ku_{k+2}=u_{k+1}u_{k+1}+(-1)^{k+1}$, $-u_{k+1}^2+u_ku_{k+2}=(-1)^{k+1}$.

Oxirgi tenglikning ikkala tomonini (-1)ga ko'paytirsak, $u_{k+1}^2-u_{(k+1)-1}u_{(k+1)+1}=(-1)^{(k+1)+1}$ tenglik hosil bo'ladi. ■

Matematik induksiya usulini qo'llab $u_1,u_2,\ldots$ Fibonachchi sonlarining quyidagi 7–10- xossalarini ham isbotlash mumkin:

7- xossa. $u_1u_2+u_2u_3+u_3u_4+\ldots+u_{2n-1}u_{2n}=u_{2n}^2$.

8- xossa. $u_1u_2+u_2u_3+u_3u_4+\ldots+u_{2n}u_{2n+1}=u_{2n+1}^2-1$.

9-xossa. $nu_1+(n-1)u_2+(n-2)u_3+\ldots+2u_{n-1}+u_n=u_{n+4}-(n+3)$.

10- xossa. $u_1+2u_2+3u_3+\ldots+nu_n=nu_{n+2}-u_{n+3}+2$.

Endi Fibonachchi sonlarining binomial koeffitsiyentlar (Paskal uchburchagi) bilan bog'lanishini ifodalovchi xossani o'rganamiz.

11- xossa. *Fibonachchi soni u_n $(n\in N)$ uchun $u_n=\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}C_{n-k-1}^k$ tenglik o'rinlidir.*

Bu xossani isbotlash uchun u_n $(n=1,2,\ldots)$ sonlardan tuzilgan $u_1,u_2,\ldots,u_n,\ldots$ ketma-ketlikning Fibonachchi qatori bo'lishini ko'rsatish kifoya. Buning uchun esa

$$u_1=\sum_{k=0}^{\left[\frac{1-1}{2}\right]}C_{1-k-1}^{k}=\sum_{k=0}^{0}C_{-k}^{k}=C_0^0=1,$$

$$u_2=\sum_{k=0}^{\left[\frac{2-1}{2}\right]}C_{2-k-1}^{k}=\sum_{k=0}^{0}C_{1-k}^{k}=C_1^0=1$$

ekanligini ta'kidlab, $u_1,u_2,\ldots,u_n,\ldots$ ketma-ketlik uchun $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$ ($n\geq 2$) rekurrent tenglikning bajarilishini ko'rsatamiz.

Agar n juft son ($n=2s$, $s\in N$) bo'lsa, u holda

$$u_{n+1}=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_{n-k}^{k}=\sum_{k=0}^{s}C_{n-k}^{k},$$

$$u_n=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}C_{n-k-1}^{k}=\sum_{k=0}^{s-1}C_{n-k-1}^{k},$$

$$u_{n-1}=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]}C_{n-k-2}^{k}=\sum_{k=0}^{s-1}C_{n-k-2}^{k}$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Bu tengliklardan foydalanib,

$$u_n+u_{n-1}=\sum_{k=0}^{s-1}C_{n-k-1}^{k}+\sum_{k=0}^{s-1}C_{n-k-2}^{k}=1+\sum_{k=1}^{s-1}C_{n-k-1}^{k}+\sum_{p=1}^{s}C_{n-p-1}^{p-1}=$$

$$=1+\sum_{k=1}^{s-1}C_{n-k-1}^{k}+\sum_{p=1}^{s-1}C_{n-p-1}^{p-1}+C_{n-s-1}^{s-1}=1+\sum_{k=1}^{s-1}(C_{n-k-1}^{k}+C_{n-k-1}^{k-1})+C_{n-s-1}^{s-1}$$

munosobatlarni hosil qilamiz. Binomial koeffitsiyentlarning $C_{n-k-1}^{k}+C_{n-k-1}^{k-1}=C_{n-k}^{k}$ xossasiga binoan

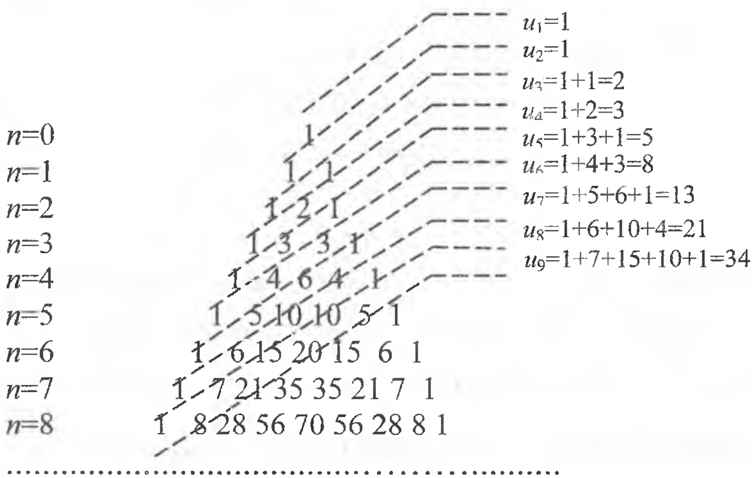
$$u_n+u_{n-1}=1+\sum_{k=1}^{s-1}C_{n-k}^{k}+C_{i-s-1}^{s-1}=1+\sum_{k=1}^{s-1}C_{n-k}^{k}+C_{2s-s-1}^{s-1}=1+\sum_{k=1}^{s-1}C_{n-k}^{k}+$$

$$+C_{s-1}^{s-1}=C_{n-k}^{0}+\sum_{k=1}^{s-1}C_{n-k}^{k}+C_{s}^{s}=\sum_{k=0}^{s-1}C_{n-k}^{k}+C_{n-s}^{s}=\sum_{k=0}^{s}C_{n-k}^{k}=u_{n+1}$$

tengliklarga ega bo'lamiz.

n toq son bo'lganda ham, yuqoridagidek mulohazalar yuritib, $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$ $(n\geq 2)$ tenglikning to'g'riligini ko'rsatish mumkin. Demak, Fibonachchi qatorining ta'rifiga asosan, $u_1,u_2,...,u_n,...$ ketma-ketligi Fibonachchi qatoridir. ■

Yuqorida ta'kidlanganidek, $u_n=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}C_{n-k-1}^{k}$ tenglik Fibonachchi sonlari bilan Paskal uchburchagi orasidagi bog'lanishni ifodalaydi. 1-shaklda tasvirlangan Paskal uchburchagidagi shtrixli chiziqlar bo'ylab joylashgan sonlar yig'indisi Fibonachchi sonlarini tashkil etadi.



1- shakl

12- xossa. *Fibonachchi soni u_n $(n\in N)$ uchun*

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

tenglik o'rinlidir.

Bu xossani isbotlash maqsadida, avvalo, α haqiqiy son uchun $\alpha^2 = 1+\alpha$ tenglik o‘rinli bo‘lsin deb faraz qilib, α^3, α^4, α^5, α^6 va hokazo darajalarni α orqali ifodalaymiz: $\alpha^3 = \alpha\alpha^2 = \alpha(1+\alpha) = 1+2\alpha$, $\alpha^4 = \alpha\alpha^3 = \alpha(1+2\alpha) = 2+3\alpha$, $\alpha^5 = \alpha\alpha^4 = \alpha(2+3\alpha) = 3+5\alpha$, $\alpha^6 = \alpha\alpha^5 = \alpha(3+5\alpha) = 5+8\alpha$ va hokazo. Bu ifodalardan ko‘rinib turibdiki, ulardagi ozod hadlar ham, α ning koeffitsiyentlari ham Fibonachchi sonlaridan iboratdir.

Matematik induksiya usulidan foydalanib, agar u_n Fibonachchi soni bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $n \geq 2$ natural sonlar uchun $\alpha^n = u_{n-1} + u_n\alpha$ formulaning to‘g‘riligini ko‘rsatamiz.

Haqiqatdan ham, $n=2$ bo‘lganda $\alpha^2 = u_1 + u_2\alpha = 1+\alpha$ tenglikka ega bo‘lamiz, ya’ni baza bajarildi.

Induksion o‘tish: $n=k$ bo‘lgan hol uchun $\alpha^k = u_{k-1} + u_k\alpha$ formula to‘g‘ri bo‘lsin. U holda $n=k+1$ bo‘lganda quyidagi tengliklarni hosil qilamiz:

$$\alpha^{k+1} = \alpha\alpha^k = \alpha(u_{k-1} + u_k\alpha) = u_{k-1}\alpha + u_k\alpha^2 =$$
$$= u_{k-1}\alpha + u_k(1+\alpha) = u_{k-1}\alpha + u_k + u_k\alpha =$$
$$= u_k + (u_{k-1} + u_k)\alpha = u_k + u_{k+1}\alpha .$$

Demak,

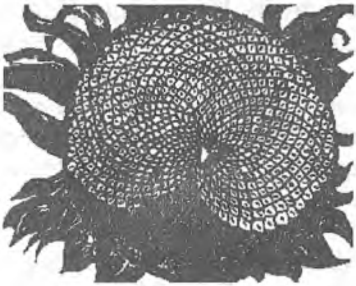
$$\alpha^{k+1} = u_k + u_{k+1}\alpha .$$

Shunday qilib, $\alpha^2 = 1+\alpha$ va ixtiyoriy $n \geq 2$ natural sonlar uchun u_n Fibonachchi soni bo‘lsa, u holda $\alpha^n = u_{n-1} + u_n\alpha$ formula to‘g‘ri ekanligi isbotlandi. Endi $\alpha^2 = 1+\alpha$ tenglikni kvadrat tenglama sifatida qarab, uning biri musbat, ikkinchisi manfiy ikkita $\alpha_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ va $\alpha_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ildizlarini topamiz. $\alpha^n = u_{n-1} \quad u_n\alpha$ formulaga ko‘ra, $\begin{cases} \alpha_1^n = u_{n-1} + u_n\alpha_1, \\ \alpha_2^n = u_{n-1} + u_n\alpha_2. \end{cases}$

Bu tengliklarni u_{n-1} va u_n noma’lumlarga nisbatan tenglamalar sistemasi deb qaraymiz va uni hal qilib, 12- xossaning isbotiga ega bo‘lamiz. ■

Shunisi ajoyibki, 12- xossaga binoan, butun qiymatli u_n son irratsional sonlardan iborat bo'lgan kvadrat ildizlar orqali ifodalanmoqda. 12- xossani ifodalovchi tenglik **Bine**[1] **formulasi** deb yuritiladi.

Kesmani bo'laklarga bo'lishda **oltin kesim** tushunchasini eslaylik. Berilgan kesmaning oltin kesimi deb uni shunday ikki qismga ajratish tushuniladiki, bu yerda butun kesma uzunligining katta qism uzunligiga nisbati va katta qism uzunligining kichik qism uzunligiga nisbati o'zaro tengdir. Bu nisbatning qiymati α_1 ga teng bo'lishini aniqlash qiyin emas. "Oltin kesim" iborasining mazmuni shu bilan ham tasdiqlanadiki,



2- shakl

masalan, tomonlari uzunliklarining nisbati $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$ songa yaqin bo'lgan to'g'ri to'rtburchak inson ko'ziga yoqimli bo'lib ko'rinishi qadim zamonlardayoq ma'lum bo'lgan. Yana shunisi ham qiziqarliki,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha_1, \ \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = -\alpha_2.$$

Hayratlanarlisi shuki, Fibonachchi sonlari tabiatning turli narsa va hodisalarida kutilmaganda namoyon bo'lishadi. Masalan, ular kungaboqarning urug'lari joylashgan "savat"ida osonlik bilan sanab aniqlash mumkin bo'lgan spirallar (aniqrog'i spirallar yoylari) sonlari sifatida paydo bo'ladi (2- shaklga qarang). Kungaboqarning urug'lari joylashgan savatida logarifmik spirallarning[2] ikki oilasini kuzatish mumkin. Bu oilalardan birining spirallari aylanishi soat millari yo'nalishida, ikkinchisiniki esa teskari yo'nalishda bo'ladi.

Botanikada spirallar oilalarining bunday joylashishini **fillotaksis**[3] deb atashadi. Oilalardagi spirallar sonlari Fibonachchi qatorida ketma-ket

---

[1] Bine (Binet Jak-Filipp, 1786-1857) – fransuz matematigi va astronomi.

[2] Logarifmik spiral, bu qutb koordinatalar tizimidagi tenglamasi $\rho = ae^{k\varphi}$ bo'lgan egri chiziqdir, bunda $a > 0$, $-\infty < \varphi < +\infty$. Bu egri chiziq koordinatalar boshidan chiquvchi barcha nurlarni o'zgarmas α burchak ostida kesib o'tadi va $k = ctg\alpha$ bo'ladi.

[3] Yunon tilida bu so'z bargning tuzilishi ma'nosini beradi.

joylashgan ikkita Fibonachchi sonlaridan iborat bo'ladi. Ular kungaboqar savatining kattaligiga qarab 34 va 55, yoki 55 va 89, yoki 89 va 144 bo'lgan Fibonachchi sonlari juftliklarini tashkil etishadi. Tabiatda, hattoki, spirallar sonlari 144 va 233 bo'lgan ulkan kungaboqar savati ham uchraydi! Kungaboqar fillotaksisi va Fibonachchi sonlari orasidagi bu aloqani birinchi bo'lib E. Lyuka e'lon qilgan edi.

1- misol. Elementlari 0 va 1 raqamlaridan iborat bo'lib, ikkita 1 raqami yonma-yon joylashmydigan kortejlarni qaraymiz. Shunday tartibda tuziladigan n uzunlikka ega barcha kortejlar soni c_n Fibonachchi qatorining $(n+2)$- hadiga tengligini, ya'ni $c_n = u_{n+2}$ tenglik o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz.

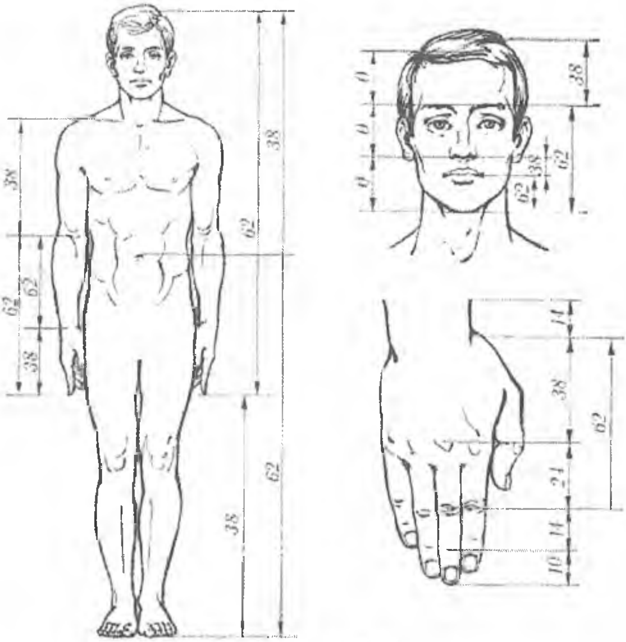
Buning uchun matematik induksiya usulidan foydalanaymiz. Matematik induksiya usulining bazasi sifatida $n=1$ bo'lgan holni qaraymiz. Bu holda misol shartlarini qanoatlantiruvchi ikkita ($<0>$ va $<1>$) kortejlar tuzish mumkin, ya'ni $c_1 = 2$. Fibonachchi qatorining tuzilishiga asosan $n=1$ bo'lgan hol uchun $u_{n+2} = u_{1+2} = u_3 = 2$. Demak, n 1 bo'lganda $c_n = u_{n+2}$ tasdiq to'g'ri.

Induksion o'tish: $n=k$ bo'lganda misol shartlarini qanoatlantiruvchi kortejlar soni uchun isbotlanayotgan tenglik o'rinli bo'lsin, ya'ni $c_k = u_{k+2}$. Bu tenglikning $n=k+1$ uchun ham to'g'riligini ko'rsatamiz. Ravshanki, uzunligi $n=k+1$ bo'lgan barcha kortejlarni, tuzilishiga ko'ra, ikki guruhga quyidagicha ajratish mumkin.

Birinchi guruhga talab qilingan shartlar asosida tuzilgan va uzunligi k ga teng kortejlarning har biriga o'ng tomondan 0 raqamini joylashtirish usuli bilan hosil qilingan kortejlarni kiritamiz. Shuning uchun, birinchi guruhdagi kortejlar soni uzunligi k ga teng kortej soniga teng. Bu yerda induksiya farazini hisobga olsak birinchi guruhda u_{k+2} ta kortejlar bor degan xulosaga kelamiz.

Ikkinchi guruhga oxirgi elementi 1 raqamidan iborat bo'lgan kortejlarni kiritamiz. Kortejlarni tuzishning misolda talab qilinayotgan shartiga ko'ra ikkinchi guruhdagi har bir kortejda oxirgi 1 raqamidan oldin faqat 0 raqami joylashishi mumkinligi kelib chiqadi. Shuning uchun, ikkinchi guruhdagi kortejlarning uzunligi $(k-1)$ga teng bo'lgan va talab qilingan shartlar asosida tuzilgan kortejlarning har biriga o'ng tomondan 0, 1 raqamlarini (aynan shu tartibda) joylashtirib hosil qilish mumkin. Demak, induksion farazni hisobga olsak, ikkinchi guruhdagi kortejlar soni u_{k+1} bo'ladi.

Shunday qilib, $K+1$ uzunlikka ega barcha kortejlar soni $c_{k+1} = u_{k+1} + u_{k+2}$. Fibonachchi qatorining aniqlanishiga ko‘ra, $u_{k+1} + u_{k+2} = u_{k+3}$. Bu yerdan $c_{k+1} = u_{k+3} = u_{(k+1)+2}$. ■



3- shakl

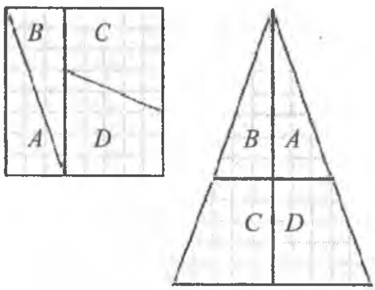
2- misol. Oltin kesim juda qadimdan ma’lum bo‘lgan. Bu tushunchadan qadimgi yunonlar haykaltaroshlikda, suv saqlashga mo‘ljallangan xum idishlarni yasashda foydalana bilishgan. 1854- yilda A. Seyzing[1] oltin kesim tushunchasini qayta “ochib”, bu tushunchani absolyutlashtirishga uringan. U o‘z asarlaridan birida “oltin kesim tabiatning barcha hodisalarida va san’atda universal kesimdir” deb e’lon qilgan. Bunday xulosaga A. Seyzing tabiatda uchraydigan turli hodisa va jarayonlarni tahlil qilish asosida, jumladan, qushlarning tuxumlari, o‘simliklar, hayvonlar, turli tovushlar, insonlar tomonidan yaratilgan binolar, idishlar, she‘riy va musiqiy asarlar va boshqalarni kuzatish va zarur hisoblashlarni bajarish asosida kelgan.

[1] Seyzing (Zeising) Adolf – olmon shoiri va faylasufi (1810-1876).

A. Seyzing ikki mingga yaqin kishilarning badan o‘lchovlarini olib, bu qiymatlar asosida o‘rtacha statistik qiymatlarni hisoblagan. Qilingan hisoblashlarga ko‘ra, erkak kishining badanidagi katta o‘lchovning kichik o‘lchovga nisbati

(3-shaklda o‘lchovlar butundan foiz miqdorda berilgan) $13:8=1,625$, ayollar uchun bu ko‘rsatkich $8:5=1,6$, chaqolaqlar uchun esa $1:1$ kabi bo‘lishi aniqlangan. Inson bolasi 13 yoshga kelganda bu nisbat 1,6 bo‘lishi, 21 yoshda esa proporsiya insonning jinsiga qarab yuqorida ta’kidlangan nisbatga yaqin bo‘lar ekan. Bu yerdagi nisbatlarda qatnashayotgan sonlar va insonning yoshlari (13 va 21) Fibonachchi qatori sonlaridir. ■

3- misol. Tomoni 8 birlik kvadratni (yuzasi 64 kv. birlik) 4-shaklda ko‘rsatilgandek 4 bo‘lakka (A, B, C va D) ajratib, bu 4 bo‘lakdan shaklning o‘ng tomonidagi figurani yasash mumkin. Yasalgan figurani uchburchak deb hisoblab, uning yuzasi hisoblansa 65 kv. birlik (dastlabki yuzaga qaraganda 1 kv. birlik ortiq!) javob hosil bo‘lishi tabiiydir. Tomoni 13 birlik kvadrat bilan ham xuddi shunga o‘xshash ishlarni bajarib, 169 kv. birlik yuzadan 168 kv. birlik (dastlabki yuzaga qaraganda 1 kv. birlik kam!) yuzani “hosil qilish” mumkin. Bu yerdagi xatoni aniqlash o‘quvchiga havola qilinadi[1]. Shunisi qiziqki, bo‘laklanayotgan kvadrat tomoni va bo‘laklashda qatnashayotgan sonlar uchta ketma-ket Fibonachchi sonlaridan iboratdir. Tabiiyki, yoqoridagi usul yordamida istalgan uchta ketma-ket Fibonachchi sonlaridan foydalanib yuqoridagiga o‘xshash istalgancha jumboqlar tuzish mumkin. ■



4- shakl

Muammoli masala va topshiriqlar

1. $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ Fibonachchi sonlarining quyidagi xossalarini isbot qiling:

a) $u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1}$; b) $u_{n+2}^2 - u_{n+1}^2 = u_n u_{n+3}$;

---

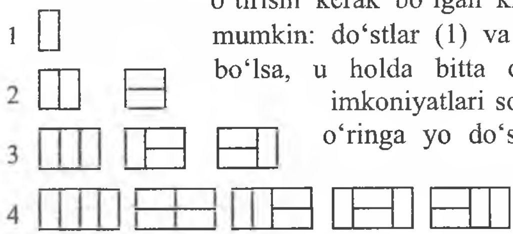
[1] Fibonachchi sonlarining 6- xossasiga e’tibor bering.

d) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}u_{n+1} & u_n\\ u_n & u_{n-1}\end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix}u_{n+2}\\ u_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{n+1}\\ u_n\end{pmatrix}$;

f) $u_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0\\ -1 & 1 & 1 & \ddots & \vdots\\ 0 & -1 & 1 & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$, g) $u_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & i & 0 & \dots & 0\\ i & 1 & i & \ddots & \vdots\\ 0 & i & 1 & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & i\\ 0 & \cdots & 0 & i & 1 \end{vmatrix}$, bu yerda determinantning o‘lchovi $n \times n$, i – kompleks sonni ifodalashda ishlatiladigan mavhum birlik ($i = \sqrt{-1}$).

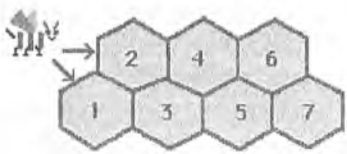
2. Qurilishda uzunligi enidan ikki baravar katta bo‘lgan g‘isht ko‘p qo‘llaniladi. Bunday g‘ishtlardan bir g‘isht kengligiga ega devor qurish imkoniyatlari g‘ishtlar soni 1, 2, 3 va 4 bo‘lgan hollar uchun 5- shaklda keltirilgan. n ta g‘ishtdan bir g‘isht kengligiga ega devor qurish imkoniyatlari sonini aniqlang.

3. Xonada o‘tirishga mo‘ljal-langan n ta o‘rin bor. Bu o‘rinlarda o‘tirishi kerak bo‘lgan kishilarni ikki guruhga ajratish mumkin: do‘stlar (1) va dushmanlar (0). Agar $n=1$ bo‘lsa, u holda bitta o‘ringa bir kishini o‘tqazish imkoniyatlari soni ikkiga tengligi ravshan (bu o‘ringa yo do‘stlar yo dushmanlar guruhiga tegishli bir kishi o‘tiradi). n nafar kishini hech qaysi ikki dushman yonma-yon o‘tirmaslik sharti bilan o‘rinlarga o‘tqazish imkoniyatlari sonini aniqlang.



5- shakl

4. Asalari 1 yoki 2 raqamli xonachadan harakatlanishni boshlagan bo‘lsin (6-shakl). Asalari faqat o‘ng tomondagi qo‘shni xonachaga o‘tishi mumkin bo‘lsa, uning n raqamli xonachaga kelishi imkoniyatlari sonini aniqlang[1].



6- shakl

[1] 1 raqamli xonachaga borishning faqat bir imkoniyati bor. 2 raqamli xonachaga borishda ikki imkoniyatdan foydalanish mumkin: bevosita o‘sha xonachaning o‘ziga yoki 1-2 yo‘l bilan. 3 xonachaga boorish yo‘llari esa uchta: 1-2-3, 1-3 va 2-3.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Fibonachchi sonlari haqidagi dastlabki ma'lumotni Leonardo Pizanskiy qaysi asarida keltirgan?

2. Tarkibida dastlabki n ta Fibonachchi sonlari ishtirok etgan qanday formulalarni bilasiz?

3. Juft raqamli dastlabki n ta Fibonachchi sonlarining yig'indisi formulasi qanday keltirib chiqariladi?

4. Toq raqamli dastlabki n ta Fibonachchi sonlarining yig'indisi formulasini isbotlay olasizmi?

5. Bir-biriga q'o'shni bo'lgan uchta Fibonachchi sonlarining qanday xossalarni bilasiz?

6. Fibonachchi sonlarining Paskal uchburchagi bilan bog'lanishini ifodalovchi formula qanday isbotlanadi?

7. Bine formulasining tarkibida qanday irratsional son bor?

8. Siz tabiatda Fibonachchi sonlarining uchrashiga kitobda bayon qilinmagan misol keltira olasizmi?

2.6. Bo'laklashlar kombinatorikasi

Bo'laklash. Ko'phad formulasi. Natural son. Yig'indi. Qo'shiluvchi. Qo'shiluvchilar tartibi. Diagrammali usul. Ferrers diagrammasi. Normal Ferrers diagrammasi. Diagrammaning transpozitsiyasi. Ikki yoqlama diagrammalar. Qo'shma diagrammalar. Qo'shma bo'laklashlar.

2.6.1. Bo'laklashlar ta'rifi. Kombinatorikada o'rin almashtirishlar, o'rinlashtirishlar va gruppalashlar tushunchalari yordamida yechiladigan masalalar bilan bir qatorda **bo'laklashlarga** doir masalalar ham qaraladi. Bunday masalalar turli vaziyatlarda paydo bo'lishi mumkin. Masalan, qutiga predmetlarni joylashda, axborotni uzatishda, pulni maydalashda, ko'phad formulasidan foydalanish uchun daraja ko'rsatkichini bo'laklashda va hokazo.

Bo'laklashlarga doir masalalar orasida natural sonlarni natural yoki manfiymas butun qo'shiluvchilar yig'indisi sifatida tasvirlash masalasi alohida o'rin tutadi. Bu masalaning mohiyati quyidagidan iborat.

Berilgan natural n sonni $a_1, a_2, ..., a_k$ natural sonlar yig'indisi ko'rinishda ifodalash imkoniyatlari qancha?

Bu masala turli shartlarda qaralishi mumkin. Masalan:

- qo'shiluvchilar tartibi e'tiborga olinishi yoki olinmasligi mumkin;

- bo‘laklashlarda faqat juft yoki toq sondagi qo‘shiluvchilar qatnashishi sharti qo‘yilishi mumkin;
- qo‘shiluvchilar bir-biridan farqli yoki ixtiyoriy deb hisoblanishi mumkin va hokazo.

Tabiiyki, bo‘laklashlarga doir kombinatorik masalalarni yechishda, bo‘laklanayotgan son o‘rniga undan kichikroq son(lar)ni bo‘laklash yoki qaralayotgan bo‘laklashni kamroq sondagi qo‘shiluvchilari bo‘lgan bo‘laklashga keltirish usuli qo‘llanilishi maqsadga muvofiqdir.

1- ta’rif. *Natural n sonni ixtiyoriy k ta (k – natural son, $k \leq n$) $a_1, a_2, \dots, a_k$ natural sonlar yig‘indisi, ya’ni $n = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ ko‘rinishda tasvirlashga n* ***sonni*** *k* ***ta qo‘shiluvchilarga bo‘laklash*** *(qisqacha,* ***bo‘laklash****) deb ataladi.*

Yuqorida ta’kidlaganimizdek, bo‘laklash masalasini ikki vaziyatda, ya’ni qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olingan yoki olinmagan hollarda qarash mumkin. Kombinatorik nuqtai nazardan olganda ikkala hol ham qiziqarlidir.

Bo‘laklash masalasini, avvalo, **qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olingan** holda qaraymiz.

Bu holda natural n sonning k ta qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlari sonini $B(n,k)$ bilan va shu sonning barcha bo‘laklanishlari sonini $B(n)$ bilan belgilasak, ravshanki, $B(n) = \sum_{k=1}^{n} B(n,k)$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

1- misol. Faqat bir yo‘nalishda harakatlanganda besh pog‘onali zinapoyani hatlab o‘tish imkoniyatlari sonini aniqlash talab etilgan bo‘lsin.

Tabiiyki, har bir qadamda faqat bittadan pog‘onani bosib o‘tib, zinapoyani 5 qadamda hatlab o‘tish mumkin. Bu harakatni 5 sonni $5 = 1+1+1+1+1$ ko‘rinishda bo‘laklanishi kabi ifodalab, $B(5,5) = 1$ ekanligini qayd etamiz. Zinapoyani 4 qadamda ham hatlab o‘tish mumkin, bu ishning $B(5,4) = 4$ imkoniyati bor: $5 = 2+1+1+1$, $5 = 1+2+1+1$, $5 = 1+1+2+1$ va $5 = 1+1+1+2$. Shu usulda davom etib, 3 qadam uchun $B(5,3) = 6$ ta – $5 = 3+1+1$, $5 = 1+3+1$, $5 = 1+1+3$, $5 = 2+2+1$, $5 = 2+1+2$, $5 = 1+2+2$ hamda 2 qadam uchun $B(5,2) = 4$ ta – $5 = 4+1$, $5 = 3+2$, $5 = 2+3$, $5 = 1+4$ tengliklarni yozamiz. Endi barcha pog‘onalarni bir qadamda hatlab o‘tishga $B(5,1) = 1$

imkoniyat va $5=5$ tenglik mos kelishini e'tiborga olsak, mumkin bo'lgan barcha imkoniyatlarni bayon qilgan bo'lamiz.

Shunday qilib, faqat bir yo'nalishda harakatlanganda besh pog'onali zinapoyani hatlab o'tish imkoniyatlari soni

$$B(5)=B(5,1)+B(5,2)+B(5,3)+B(5,4)+B(5,5)=16$$

bo'ladi. ■

Endi $B(n,k)$ va $B(n)$ miqdorlarni hisoblash formulalarini topish bilan shug'ullanamiz.

Dastlab $n=1$ bo'lgan holni qaraymiz. Tabiiyki, birni natural sonlar yig'indisi qilib bo'laklash haqida gap bo'lishi mumkin emas. Shunday bo'lishiga qaramasdan, birni faqat bitta qo'shiluvchidan iborat deb qarab, yuqorida berilgan ta'rifga mos keluvchi $B(1,1)=1=C_0^0=C_{1-1}^0=C_{n-1}^0$ ta bo'laklashga ega bo'lamiz. Jami bo'laklashlar soni $B(1)=B(1,1)=$ $=C_{n-1}^0=2^{n-1}$ bo'ladi[1].

$n=2$ bo'lgan holda $k=1$ qo'shiluvchili $B(2,1)=1=C_1^0=$ $=C_{2-1}^0=C_{n-1}^0$ ta $(2=2)$ va $k=2$ qo'shiluvchili $B(2,2)=1=C_1^1=$ $=C_{2-1}^1=C_{n-1}^1$ ta $(2=1+1)$ bo'laklashlarga ega bo'lamiz. Bu hol uchun jami bo'laklashlar soni $B(2)=B(2,1)+B(2,2)=C_{n-1}^0+C_{n-1}^1=2^{n-1}$.

Agar $n=3$ bo'lsa, u holda $k=1$ qo'shiluvchili $B(3,1)=1=C_2^0=$ $=C_{3-1}^0=C_{n-1}^0$ ta $(3=3)$, $k=2$ qo'shiluvchili $B(3,2)=2=C_2^1=C_{3-1}^1=C_{n-1}^1$ ta $(3=2+1=1+2)$ va $k=3$ qo'shiluvchili $B(3,3)=1=C_2^2=C_{3-1}^2=C_{n-1}^2$ ta $(3=1+1+1)$ bo'laklashlar bor. Bu holda jami bo'laklashlar soni uchun

$$B(3)=B(3,1)+B(3,2)+B(3,3)=C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2=2^{n-1}$$

tenglik o'rinlidir.

Shunday davom etib, "istalgan n natural sonning k ta qo'shiluvchilarga bo'laklanishlari soni $(n-1)$ta elementdan $(k-1)$ talab gruppalashlar soniga teng, ya'ni $B(n,k)=C_{n-1}^{k-1}$" degan farazga kelish mumkin. Agar bu faraz tasdiqlansa, binomial koeffitsiyentlarning yig'indisi haqidagi xossaga ko'ra, $B(n)=\sum_{i=0}^{n-1}C_{n-1}^i=2^{n-1}$ bo'ladi.

---

[1] Bu yerda va bundan keyin binomial koeffitsiyentlarning ixtiyoriy natural n uchun $\sum_{k=0}^{n}C_n^k=2^n$ bo'lishi haqidagi xossasidan foydalanamiz.

1- teorema. *Qo'shiluvchilar tartibini e'tiborga olgan holda istalgan n natural sonning k ta qo'shiluvchilarga bo'laklanishlari soni ($n-1$)ta elementdan ($k-1$)talab gruppalashlar soniga teng, ya'ni* $B(n,k)=C_{n-1}^{k-1}$.

Isboti o'quvchiga havola qilinadi. ■

Yuqorida bayon etilgan mulohazalar yordamida va 1- teoremaga tayangan holda isbotlash osonligini ta'kidlab, quyidagi teoremani boshqa usul bilan isbotlaymiz.

2- teorema. *Qo'shiluvchilar tartibini e'tiborga olgan holda ixtiyoriy n natural sonning barcha bo'laklanishlari soni 2^{n-1} ga teng, ya'ni* $B(n)=2^{n-1}$.

Isboti. Natural n sonning barcha bo'laklanishlari to'plamini $S(n)$ deb, shu n sonning birinchi qo'shiluvchisi i ga ($i=1,2,...,n$) teng bo'lgan bo'laklanishlari to'plamini esa $S_i(n)$ bilan belgilaymiz. Tushunarliki, $S(n)=\bigcup_{i=1}^{n}S_i(n)$ bo'ladi. Agar $S_i(n)$ to'plam elementlari sonini $Q_i(n)$ deb belgilasak, yuqoridagi tenglikka asosan $B(n)=\sum_{i=1}^{n}Q_i(n)$ bo'ladi. Endi $Q_i(n)=B(n-i)$ ($i=1,2,...,n-1$) va $Q_n(n)=1$ tengliklarni hisobga olib, $B(n)=\sum_{i=1}^{n-1}B(n-i)+1=1+\sum_{i=1}^{n-1}B(i)$ tenglikka ega bo'lamiz. Bu tenglik ixtiyoriy n natural son uchun to'g'ri. Shuning uchun, bu tenglikdagi n ni ($n+1$)ga almashtirib,

$$B(n+1)=1+\sum_{i=1}^{n-1}B(i)+B(n)=B(n)+B(n)=2B(n),$$

ya'ni $B(n+1)=2B(n)$ ($n=1,2,...$) ko'rinishdagi rekurrent munosabatni hosil qilamiz. Bu rekurrent munosabat ketma-ket qo'llanilsa, $B(n)=2^{n-1}$ kelib chiqadi. ■

2- misol. To'qqiz qavatli binoning birinchi qavatidan sakkiz kishi liftda yuqoriga ko'tarilayotgan bo'lsin. Agar to'qqizinchi qavatga liftdagi kishilarning faqat bittasi chiqishi shart bo'lsa, lift yo'lovchilarining bino qavatlariga chiqish imkoniyatlari sonini aniqlang.

Masalaning shartiga binoan, liftdagi sakkiz kishidan faqat bir kishi to‘qqizinchi qavatga chiqishi shart bo‘lgani uchun, qolgan yetti kishining ikkinchi qavatdan sakkizinchi qavatgacha chiqishining ko‘p imkoniyatlari bor. Bu imkoniyatlar soni liftning birinchi va to‘qqizinchi qavatlar orasidagi to‘xtashlar soniga bog‘liq bo‘lib, yettining barcha bo‘laklanishlari yordamida ifodalanishi mumkin. Masalan, lift binoning ikkinchi qavatidan sakkizinchi qavatigacha faqat bir marta to‘xtab, liftdagi yetti kishi tushib qolgan bo‘lsa, u holda bu hodisa $7=7$ ko‘rinishdagi bo‘laklash vositasida ifodalanadi; agar to‘qqizinchi qavatgacha lift ikki marta to‘xtab, oldin uch kishi, keyin to‘rt kishi tushib qolgan bo‘lsa, bu holatga $7=3+4$ ko‘rinishdagi bo‘laklash mos keladi va hokazo.

2- teoremadan foydalanib, yettining barcha bo‘laklanishlari soni $2^{7-1}=2^6=64$ ekanligini topamiz. Demak, agar to‘qqizinchi qavatga faqat bir kishi chiqishi shart bo‘lsa, u holda lift yo‘lovchilarining bino qavatlariga chiqish imkoniyatlari soni 64ga tengdir. Agar hal qilingan masalada to‘qqizinchi qavatga faqat bir kishining chiqishi sharti bo‘lmasa edi, u holda sakkizning barcha bo‘laklanishlari sonini topishga to‘g‘ri kelar edi. ■

Endi natural sonlarni **qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olinmagan** vaziyatda bo‘laklash masalasi bilan shug‘ullanamiz.

Odatda, natural n sonning ixtiyoriy k ta (k – natural son, $k \le n$) $a_1, a_2, ..., a_k$ qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishini qandaydir shartlarga, masalan, $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_k$ yoki $a_1 \le a_2 \le ... \le a_k$ tengsizliklarga bo‘ysunadigan qilib olish qulay bo‘ladi.

Qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olinmagan holda natural n sonning k ta qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlari sonini $R(n,k)$ bilan, uning barcha bo‘laklanishlari sonini esa $R(n)$ bilan belgilaymiz.

Bundan keyin, bo‘laklash deganda qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olinmagan holdagi bo‘laklashni nazarda tutamiz.

Tabiiyki, $R(n)=\sum_{k=1}^{n} R(n,k)$ tenglik o‘rinlidir. Osonlik bilan ko‘rish mumkinki, $R(1)=1$, $R(2)=2$, $R(3)=3$, $R(4)=5$, $R(5)=7$, $R(6)=11$, $R(7)=15$.

3- misol. 8 uchun barcha bo'laklashlar 1- jadvalda ifodalangan. Jadvaldan ko'rinib turibdiki, 8 uchun, hammasi bo'lib, 22 bo'laklash imkoniyati bor:

$$R(8)=\sum_{k=1}^{8} R(8,k)=1+4+5+5+3+2+1+1=22\,. \blacksquare$$

1-jadval

Qo'shi-luvchilar soni	Bo'laklanishlar	Bo'laklanishlar soni
1	8=8	R(8, 1)=1
2	8=7+1=6+2=5+3=4+4	$R(8,\ 2)=4$
3	8=6+1+1=5+2+1=4+3+1= =4+2+2=3+3+2	$R(8,\ 3)=5$
4	8=5+1+1+1=4+2+1+1=3+3+1+1= =3+2+2+1=2+2+2+2	$R(8,\ 4)=5$
5	8=4+1+1+1+1=3+2+1+1+1= =2+2+2+1+1	$R(8,\ 5)=3$
6	8=3+1+1+1+1+1=2+2+1+1+1+1	$R(8,\ 6)=2$
7	8=2+1+1+1+1+1+1	$R(8,\ 7)=1$
8	8=1+1+1+1+1+1+1+1	$R(8,\ 8)=1$

Albatta, yuqorida keltirilgan formula yordamida ixtiyory natural n uchun uning barcha bo'laklanishlari sonini aniqlash mumkin. Lekin n yetarlicha katta qiymatga ega bo'lganda bu formuladan foydalanish juda ko'p hisoblashlar bajarishni taqozo qiladi. Ushbu bobning navbatdagi 7-paragrafida $R(n)$ning qiymatini hisoblash uchun boshqacha yo'l borligi ko'rsatilgan.

2.6.2. Ferrers[1] diagrammasi. Natural n son k ta $a_1, a_2, ..., a_k$ natural qo'shiluvchilarnung yig'indisi qilib bo'laklangan bo'lsin.

2- ta'rif. *k ta qatordan tashkil topgan va (yuqoridan pastga qarab hisoblaganda) i - qatorida a_i ta nuqtaga ega bo'lgan diagramma n sonni k ta $a_1, a_2, ..., a_k$ natural qo'shiluvchilarnung yig'indisi qilib bo'laklashga mos* ***Ferrers diagrammasi*** *deb ataladi.*

Ferrers diagrammasi tushunchasiga asoslangan **diagrammali usul** deb yuritiluvchi usul sonlarni qo'shiluvchilar yig'indisi qilib bo'laklash masalalarini tahlil qilishda keng qo'llaniladi.

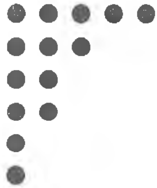
---

[1] Ferrers (Norman Makleod, 1829 – taxminan 1894 yildan so'ng vafot etgan) – ingliz matematigi.

Bo‘laklashda qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olinmaganligi sababli Ferrers diagrammasini tuzishda, odatda, uning qatorlaridagi nuqtalar soni yuqoridan pastga qarab o‘smaydigan, ya’ni $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_k$ shart bajariladigan (yoki, kamaymaydigan ya’ni $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k$ shart bajariladigan) tartibga rioya qilinadi. Bundan tashqari, qatorlardagi nuqtalar diagrammaning vertikal ustunlarini tashkil etadigan qilib tuziladi.

3- ta’rif. *Shunday tartibda tuzilgan diagramma* ***normal Ferrers diagrammasi*** *deb ataladi.*

4- misol. 14=5+3+2+2+1+1 bo‘laklashga 1- shaklda tasvirlangan Ferrers diagrammasi mos keladi. Bu diagramma normal Ferrers diagrammasidir. ■



1- shakl

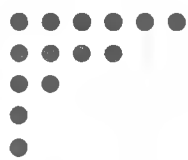
Ixtiyoriy bo‘laklashga mos keluvchi normal Ferrers diagrammasining qatorlarini ustun, ustunlarini esa qator qilib o‘zgartirilsa (ya’ni diagramma trasponirlansa), tabiiyki, yana normal Ferrers diagrammasi hosil bo‘ladi.

4- ta’rif. *Hosil bo‘lgan bu diagrammaga dastlabki* ***diagrammaning transpozitsiyasi*** *(yoki* ***ikkilanma diagrammasi)*** *deb ataladi.*

Normal Ferrers diagrammasining transpozitsiyasi natijasida hosil bo‘lgan ikkilanma diagramma transponirlansa dastlabki diagramma hosil bo‘lisi ravshandir. Demak, istalgan son uchun tuzilgan barcha diagrammalarni o‘zaro ikkilanma bo‘lgan diagrammalar juftlariga ajratish mumkin. Shuni e’tiborga olish kerakki, ba’zi diagrammalar o‘z-o‘ziga ikkilanma bo‘ladi, shuning uchun ular ikkita bir xil diagrammalar juftini tashkil etadi deb hisoblash mumkin.

Ikkilanma diagrammalarni **qo‘shma diagrammalar** deb, ularga mos keluvchi bo‘laklashlarni esa **qo‘shma bo‘laklashlar** deb ham ataydilar.

5-misol. 4- misolda qaralgan 14=5+3+2+2+1+1 bo‘laklashga mos Ferrers diagrammasiga qo‘shma diagrammani 2- shakldagidek tasvirlash mumkin. Mos qo‘shma bo‘-laklash esa: 14=6+4+2+1+1. ■



2- shakl

2.6.3. Bo‘laklashlarning xossalari. Quyidagi uchta 3–5- teoremalar bo‘laklashlarning ba’zi xossalarini ifodalaydi.

3- teorema. *Ixtiyoriy n natural sonning har xil natural qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlari soni shu sonning toq qo‘shiluvchlarga bo‘laklanishlari soniga teng.*

Isboti. n natural sonning $b_1, b_2, ..., b_p$ toq qo'shiluvchilarga bo'laklanishlaridan ixtiyoriy birini qaraymiz:

$$n = \underbrace{b_1 + b_1 + ... + b_1}_{r_1} + \underbrace{b_2 + b_2 + ... + b_2}_{r_2} + ... + \underbrace{b_p + b_p + ... + b_p}_{r_p},$$

bu yerda har bir b_i ($i = \overline{1, p}$) qo'shiluvchi bo'laklanishda r_i ($1 \le r_i \le n$) marta qatnashadi. r_i sonning ikkilik sanoq sistemasidagi $r_i = 2^{q_{i1}} + 2^{q_{i2}} + ... + 2^{q_{is}}$ tasvirlanishini yozamiz, bunda $q_{i1} > q_{i2} > ... > q_{is} \ge 0$ qandaydir (s ta) butun sonlar.

Qaralayotgan n sonning yuqoridagi bo'laklanishida r_i ta b_i qo'shiluvchilarni bir-biridan farqli $b_i 2^{q_{i1}}, b_i 2^{q_{i2}}, ..., b_i 2^{q_{is}}$ qo'shiluvchilarga almashtiramiz. Tabiiyki, bunday almashtirish r_i ta b_i qo'shiluvchilar yig'indisining qiymatini o'zgartirmaydi. Shu jarayonni barcha $i = 1, 2, ..., p$ qiymatlar uchun takrorlab va qo'shiluvchilarning mos qiymatlarini yozib, n sonning har xil qo'shiluvchilarga bo'laklanishlaridan birini hosil qilamiz, chunki b_i, b_j sonlarning toqligi tufayli $b_i 2^{q_i} \ne b_j 2^{q_j}$ bo'ladi.

Shunday qilib, n sonning toq qo'shiluvchilarga bo'laklanishlaridan har biriga shu sonning har xil qo'shiluvchilarga bo'laklanishlaridan biri mos kelishi isbotlandi. Bu tasdiqning teskarisini ham isbotlash mumkin. ■

6- misol. 3- misolda 8 ning barcha bo'laklashlari keltirilgan va bu bo'laklashlar soni 22ga tengligi ko'rsatilgan edi. 22ta bo'laklashlardan oltitasi har xil qo'shiluvchilardan tuzilgan. Xuddi shuncha toq qo'shiluvchili bo'laklashlar mavjud. 3- teoremaning isbotidagidek mulohaza yuritib 8ning har xil qo'shiluvchili va toq qo'shiluvchili barcha bo'laklanishlari orasidagi bir qiymatli moslikni ko'rsatish mumkin.

Haqiqatdan ham,

$$8 = 7 + 1 = 7 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 7 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^0 = 7 + 1,$$

$$8 = 5 + 3 = 5 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5 \cdot 2^0 + 3 \cdot 2^0 = 5 + 3,$$

$$8 = 5 + 1 + 1 + 1 = 5 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 5 \cdot 2^0 + 1 \cdot (2^1 + 2^0) =$$

$$= 5 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 5 + 2 + 1,$$

$$8 = 3 + 3 + 1 + 1 = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 3 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^1 = 6 + 2,$$

$$8=3+1+1+1+1+1=3\cdot 1+1\cdot 5=3\cdot 2^0+1\cdot(2^2+2^0)=$$
$$=3\cdot 2^0+1\cdot 2^2+1\cdot 2^0=3+4+1,$$
$$8=1+1+1+1+1+1+1+1=1\cdot 8=1\cdot 2^3=8\,.\ ■$$

Diagrammali usul yordamida bo‘laklashlarning turli xossalarini osonlik bilan isbotlash mumkin. Quyida shunday xossalardan ikkitasini ifodalovchi 4- va 5- teoremalarni keltiramiz.

4- teorema. *Ixtiyoriy n natural sonni k ta natural qo‘shiluvchilarga bo‘laklashlar soni shu n sonning eng katta qo‘shiluvchisi k ga teng bo‘lgan bo‘laklanishlari soniga teng.*

Isboti. Ferrers diagrammasining transpozitsiyasi tushunchasi yordamida natural n sonning k ta natural qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlari va shu sonning eng katta qo‘shiluvchisi k ga teng bo‘lgan bo‘laklanishlari orasida bir qiymatli moslik o‘rnatish mumkin. Bu bir qiymatli moslikka ko‘ra teoremaning tasdig‘i to‘g‘ridir. ■

2-jadval

8 sonining 3ta qo‘shiluvchili bo‘laklanishlari	8 sonining eng katta qo‘shiluvchisi 3ga teng bo‘laklanishlari
6+1+1	3+1+1+1+1+1
5+2+1	3+2+1+1+1
4+3+1	3+2+2+1
4+2+2	3+3+1+1
3+3+2	3+3+2

7- misol. 3- misoldan ma’lumki, 8 uchun uchta qo‘shiluvchili beshta bo‘laklash mavjud, bu son uchun qo‘shiluvchilarning eng kattasi uchga teng bo‘lgan bo‘laklashlar ham beshtadir. 2- jadvalda bu bo‘laklashlar bir-biriga mos ravishda ikki ustun qilib keltirilgan.

5- teorema. *Ixtiyoriy n natural sonning hech bir qo‘shiluvchisi k dan oshmaydigan bo‘laklanishlari soni $(n+k)$ sonining k ta qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlar soniga teng.*

Isboti. Birinchidan, shuni ta’kidlash lozimki, Ferrers diagrammasining transpozitsiyasi n sonning hech bir qo‘shiluvchisi k dan oshmaydigan bo‘laklanishlari bilan shu sonning k tadan oshmaydigan qo'shiluvchilarga bo'laklanishlari orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatadi. Bu bir qiymatli moslik asosida n sonning hech bir qo'shiluvchisi k dan oshmaydigan barcha bo'laklanishlari soni shu n sonning k tadan oshmaydigan qo'shiluvchilarga bo'laklanishlari soniga teng deb xulosa qilish mumkin.

Ikkinchi tomondan, n sonning k tadan oshmaydigan qo'shiluvchilarga bo'laklanishiga mos Ferrers diagrammasi n ta nuqtadan tashkil topgan bo'lib, ular k tadan oshmaydigan qatorlarda joylashgan bo'ladi. Bunday diagrammalarning har biriga k ta nuqtadan tuzilgan ustunni chap tomondan joylashtirsak, k ta qatorga va $(n+k)$ta nuqtali diagrammaga ega bo'lamiz. Aksincha, $(n+k)$ta nuqtali har bir Ferrers diagrammasidan k ta qatorga ega birinchi ustunni olib tashlasak, n ta nuqtadan tashkil topgan va qatorlari soni k tadan ko'p bo'lmagan diagrammani hosil qilamiz.

Ko'rsatilgan bu ikki turdagi diagrammalar orasidagi o'zaro bir qiymatli moslik n sonni qo'shiluvchilari k tadan oshmaydigan bo'laklashlar soni $R(n+k,k)$ ifodaga tengligini tasdiqlaydi. ∎

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Qo'shiluvchilar tartibi e'tiborga olingan holda 6, 7 va 8 ni natural sonlar yig'indisi ko'rinishida ifodalang hamda $B(6)$, $B(7)$ va $B(8)$ larning qiymatlarini aniqlang.

2. Qo'shiluvchilar tartibi e'tiborga olinmagan holda 9 ning barcha bo'laklanishlarini yozing va $R(9)$ ni hisoblang.

3. Bozorda dehqon 15 dona qovunni 7 nafar xaridorga donabay sotdi. Agar navbatdagi har bir savdoda dehqonning sotgan qovunlari soni oldingi savdodagiga qaraganda kamaymagan bo'lsa, u holda barcha savdolarda sotilishi mumkin bo'lgan qovunlar sonlarining barcha imkoniyatlarini toping.

4. Odatda biror qarorni ko'pchilik bo'lib qabul qilish maqsadida ovoz berganda "tarafdor" va "qarshi" ovozlar sonlari o'zaro teng bo'lmasligi uchun a'zolari 3 nafardan kam bo'lmagan toq sondagi ekspertlar komissiyasi tuziladi. Bu shartni qanoatlantiruvchi 17 nafar ekspertdan tashkil qilinishi mumkin bo'lgan komissiyalar sonini hisoblang.

5. Kichik bir qishloqda hammasi bo'lib 22 bosh qora mol bor va har bir oilada hech bo'lmasa bir bosh qora mol topiladi. Bu qishloqning hech qaysi oilasida uch boshdan ko'p qora mol bo'lmasa, qishloqdagi qora mollarning oilalar orasida taqsimlanishining barcha variantlarini aniqlang.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Natural sonlarni natural yoki manfiymas butun qo'shiluvchilar yig'indisi sifatida tasvirlash masalasining mohiyati nimadan iborat?

2. Natural sonlarni natural yoki manfiymas butun qo'shiluvchilar yig'indisi sifatida tasvirlash masalasi qanday shartlarda qaralishi mumkin?

3. Qo'shiluvchilar tartibi e'tiborga olingan holda natural n sonning k ta qo'shiluvchilarga bo'laklanishlari soni $B(n,k)$ bilan shu sonning barcha bo'laklanishlari soni $B(n)$ orasida qanday munosabat bor?

4. Qo'shiluvchilar tartibini e'tiborga olgan holda istalgan n natural sonning k ta qo'shiluvchilarga bo'laklanishlari sonini hisoblash formulasini bilasizmi?

5. Qo'shiluvchilar tartibini e'tiborga olgan holda istalgan n natural sonning barcha bo'laklanishlari sonini qanday hisoblash mumkin?

6. Qo'shiluvchilar tartibi e'tiborga olinmagan holda natural n sonning k ta qo'shiluvchilarga bo'laklanishlari soni $R(n,k)$ bilan, uning barcha bo'laklanishlari soni $R(n)$ orasida qanday munosabat bor?

7. Ferrers diagrammasi nima?

8. Diagrammali usul deganda nimani tushunasiz?

9. Normal Ferrers diagrammasi nima?

10. Ikkilanma Ferrers diagrammasi qanday tuziladi?

11. Qo'shma bo'laklash nima?

12. Ixtiyoriy n natural sonning har xil natural qo'shiluvchilarga bo'laklanishlari soni bilan shu sonning toq qo'shiluvchlarga bo'laklanishlari soni orasida qanday bog'lanish bor?

13. Ixtiyoriy n natural sonni k ta natural qo'shiluvchilarga bo'laklashlar soni bilan shu n sonning eng katta qo'shiluvchisi k ga teng bo'lgan bo'laklanishlari soni orasidagi bog'lanish qanday ifodalanadi?

14. Ixtiyoriy n natural sonning hech bir qo'shiluvchisi k dan oshmaydigan bo'laklanishlari soni bilan $(n+k)$ sonining k ta qo'shiluvchilarga bo'laklanishlar soni orasida qanday bog'lanish bor?

2.7. Hosil qiluvchi funksiyalar

Sonlar ketma-ketligi. Qator. Qatorning yaqinlashishi. Xususiy yig'indi. Yaqinlashuvchi qatorning yig'indisi. Funksional qator. Darajali qator. Kombinatorik obyekt. Funksiya. Funksiyaning darajali qatorga yoyilishi. Hosil qiluvchi funksiya. Binomial koeffitsiyent. Nyuton binomi. Fibonachchi sonlari. Bine formulasi. Eyler ayniyati.

2.7.1. Hosil qiluvchi funksiyalarning ta'rifi. Matematik analiz kursidan hosil qiluvchi funksiyalarning ta'rifi uchun zarur ayrim tushunchalarni keltiramiz. Chekli sonlardan tashkil topgan $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ cheksiz ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

1- ta'rif. *Chekli* $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ *sonlar ketma-ketligi yordamida tuzilgan* $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *ifoda* ***sonli cheksiz qator*** *yoki, qisqacha,* ***qator*** *deb,* $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ *sonlar esa qatorning* ***hadlari*** *deb ataladi.*

2- ta'rif. $s_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ *yig'indiga qatorning* ***xususiy yig'indisi*** *deb ataladi.*

3- ta'rif. *Agar qatorning xususiy yig'indilaridan tuzilgan* $s_1, s_2, ..., s_n, ...$ *ketma-ketlik chekli limitga ega bo'lsa, u holda* ***qator yaqinlashuvchi*** *va bu limitning qiymati yaqinlashuvchi* ***qator yig'indisi*** *deb ataladi.*

4- ta'rif. *Agar xususiy yig'indilar ketma-ketligi chekli limitga ega bo'lmasa, u holda* ***qator uzoqlashuvchi*** *deb ataladi.*

Yuqorida keltirilgan sonli cheksiz qator tushunchasida qatorning $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ hadlari sonlar emas, balki qandaydir x o'zgaruvchiga bog'liq chekli qiymatlar qabul qiluvchi $u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x), ...$ funksiyalardan iborat bo'lsa, u holda bu funksiyalarning cheksiz yig'indisini ifodalovchi

$$u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ... = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

funksional qator tushunchasiga ega bo'lamiz.

Amaliy masalalarni hal qilishda funksional qatorlar sinfiga tegishli bo'lgan darajali qatorlar muhim ahamiyatga ega. $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 +$

$+\ldots+a_nx^n+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}a_kx^k$ ko'rinishga ega bo'lgan funksional qator **darajali qator** deb yuritiladi, bu yerda $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ berilgan chekli o'zgarmas koeffitsiyentlarni, x esa qator o'zgaruvchisini ifodalaydi.

Tushunarliki, o'zgaruvchisi nolga teng bo'lgan har qanday darajali qator yaqinlashuvchidir. Odatda darajali qator o'zgaruvchining ba'zi qiymatlarida yaqinlashuvchi, boshqalarida esa uzoqlashuvchi bo'ladi. Ammo, shunday darajali qatorlar borki, ular o'zgaruvchi qanday qiymatga ega bo'lishidan qat'i nazar yaqinlashuvchi yoki o'zgaruvchining noldan boshqa barcha qiymatlarida uzoqlashuvchi bo'ladi.

Agar biror funksiyani darajali qator ko'rinishiga ifodalash mumkin bo'lsa, u holda bu qator **funksiyaning darajali qatorga yoyilishi** deb yuritiladi.

Kombinatorikada qator tushunchasi kombinatorik obyektlar tufayli vujudga kelgan ketma-ketliklar bilan ishlash uchun kerakli qurol sifatida qo'llaniladi. Masalan, agar bo'laklash masalasi qaralayotgan bo'lsa, bunday sonlar ketma-ketligining elementlari qilib n natural sonni qo'shiluvchilar yig'indisi sifatida bo'laklashlar soni $R(n)$ ni olish mumkin.

Agar darajali qator vositasida chekli sonlarning $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ cheksiz ketma-ketligiga haqiqiy yoki kompleks o'zgaruvchili qandaydir funksiya mos qo'yilishi mumkin bo'lsa, u holda ketma-ketliklar ustida bajariladigan ba'zi amallarni ularga mos funksiyalar ustida bajarish imkoniyati paydo bo'ladi.

5- t a ' r i f . *Darajali qator yig'indisini ifodalovchi* $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ *funksiya* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *ketma-ketlikning* ***hosil qiluvchi funksiyasi*** *deb ataladi.*

Bu yerda $f(x)$ funksiyani aniqlovchi qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun x o'zgaruvchining haqiqiy yoki kompleks qiymatli bo'lishi muhim ahamiyatga ega emas.

Matematik analiz kursidan ma'lumki, agar $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ darajali qator $x=0$ nuqtaning qandaydir atrofida yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $a_k=\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$ $(k=0,1,2,\ldots)$ formula o'rinli bo'ladi, bu yerda $f^{(k)}(0)$

ifoda $f(x)$ funksiyadan olingan k - tartibli hosilasining $x=0$ nuqtadagi qiymatidir.

1- **m i s o l .** Hadlari faqat birlardan iborat bo‘lgan $1,1,...,1,...$ sonlar ketma-ketligining hosil qiluvchi funksiyasi $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ ko‘rinishga ega bo‘ladi.

Haqiqatdan ham, $1,1,...,1,...$ sonlar ketma-ketligiga $1+x+x^2+$ $+...+x^n+...$darajali qator mos keladi va bu darajali qatorning hadlari maxraji $x$ga teng bo‘lgan $1,x,x^2,...,x^n,...$ ko‘rinishdagi geometrik progressiyadan iboratdir. Elementar matematika kursidan ma’lumki, bu progressiya $|x|<1$ bo‘lganda cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya bo‘ladi va uning barcha hadlari yig‘indisi

$$1+x+x^2+...+x^n+...=\frac{1}{1-x}$$

formula bilan ifodalanadi. ■

2- **m i s o l .** 1- misoldagidek mulohaza yuritib har qanday chekli a songa mos keluvchi $1,a,a^2,...,a^n,...$ sonlar ketma-ketligining hosil qiluvchi funksiyasi $f(x)=\dfrac{1}{1-ax}$ ko‘rinishda bo‘lishini aniqlash mumkin. ■

2.7.2. Hosil qiluvchi funksiyalarning oddiy xossalari. Hosil qiluvchi funksiyalar bir qator xossalarga ega. Biz quyida shunday xossalardan ba’zilarini oddiy xossalar sifatida keltiramiz. Ular hosil qiluvchi funksiyalarni tuzish hamda ulardan amaliy masalalarni hal etishda ko‘mak beradi.

1- **x o s s a .** *Agar* $a_0,a_1,a_2,...,a_n,...$ *ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi* $f_a(x)$ *va* $b_0,b_1,b_2,...,b_n,...$ *ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi* $f_b(x)$ *bo‘lsa, u holda* $a_0\pm b_0,a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,...,a_n\pm b_n,...$ *ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi* $f(x)=f_a(x)\pm f_b(x)$ *bo‘ladi.*

Haqiqatdan ham, $f_a(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ va $f_b(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kx^k$ bo‘lgani uchun, darajali qatorlarni hadlab qo‘shib (ayirib),

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k \pm b_k)x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \pm \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = f_a(x) \pm f_b(x)$$

munosabatni hosil qilamiz. ■

2- xossa. *Agar* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi* $f_a(x)$ *va* $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ *ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi* $f_b(x)$ *bo'lsa, u holda elementlari* $d_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ *sonlardan iborat bo'lgan* $d_0, d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots$ *ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi* $f(x) = f_a(x) f_b(x)$ *bo'ladi.*

Haqiqatdan ham, ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi ta'rifiga ko'ra, $f_a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $f_b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ bo'lgani uchun quyidagi tengliklar ketma-ketligi o'rinlidir:

$$f_a(x) f_b(x) = \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k x^k\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \cdot \sum_{k=0}^{n} b_k x^k\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right) x^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} d_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k = f(x). \ ■$$

Ayrim ketma-ketliklarning hosil qiluvchi funksiyalarini avvaldan ma'lum bo'lgan hosil qiluvchi funksiyalarga mos darajali qatorni hadlab differensiallash amali yordamida topish mumkin.

3- misol. Ushbu 0,1,2,3,... ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi $f(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$ bo'ladi.

Haqiqatdan ham, qaralayotgan ketma-ketlikka $\sum_{k=0}^{\infty} kx^k$ ko'rinishdagi darajali qator mos keladi. Darajali qatorni hadlab differensiallash amalini $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ qatorga qo'llab va $|x| < 1$ bo'lgan hol uchun o'rinli $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \dfrac{1}{1-x}$ tenglikni hisobga olib, quyidagi tengliklar ketma-ketligini yozamiz:

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = x\sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(x^k\right) = x\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} x^k = x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-x)^2} \ \blacksquare$$

Umuman olganda, hosil qiluvchi funksiyalarni tuzishda darajali qatorni hadlab differensiallash amalidan foydalanish quyidagi xossaga tayanadi.

3- xossa. *Agar* $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ *ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi* $f_a(x)$ *bo'lsa, u holda elementlari* $b_n = (n+1)a_{n+1}$ $(n = 0,1,2,\dots)$ *sonlardan iborat* $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ *ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi* $f_b(x) = \dfrac{df_a(x)}{dx}$ *bo'ladi.*

Haqiqatdan ham, hosil qiluvchi funksiyaning ta'rifidan va darajali qatorni hadlab differensiallash haqidagi xossaga ko'ra

$$f_b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1}x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(a_{k+1}x^{k+1}\right) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(a_s x^s\right)$$

tengliklar o'rinlidir. a_0 o'zgarmasning hosilasi nolga teng ekanligini e'tiborga olib

$$f_b(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(a_s x^s\right) = \frac{da_0}{dx} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(a_s x^s\right) = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \frac{df_a(x)}{dx}$$

munosabatni hosil qilamiz. ■

4- misol. 1,2,3,4,... ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasini topish talab etilsin.

Hosil qiluvchi funksiya ta'rifiga ko'ra izlanayotgan funksiya $\sum_{k=0}^{\infty} (1+k)x^k$ darajali qatorning yig'indisidan iborat. 1- xossaga ko'ra qaralayotgan ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi 1,1,...,1,... va 0,1,2,3,... ketma-ketliklarning hosil qiluvchi funksiyalari yig'indisidan iborat. 1- va 3- misollar natijalaridan foydalanib, quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1+k)x^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{1}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Demak, 1,2,3,4,... ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ bo'ladi.

2.7.3. Hosil qiluvchi funksiyalarning kombinatorikaga tatbiqi. Hosil qiluvchi funksiyaning ta'rifi va xossalaridan ko'rinadiki, ketma-ketliklar bilan bog'liq bo'lgan xilma-xil masalalarni o'rganish va ularni hal qilishda bu funksiyalardan foydalanish mumkin. Bu o'rinda, ayniqsa, kombinatorik amallar bilan bog'liq ketma-ketliklarning hosil qiluvchi funksiyalari alohida qiziqish o'yg'otishini ta'kidlaymiz. Hosil qiluvchi funksiyalarning kombinatorikaga tatbiqini ko'rsatish maqsadida, avvalo, quyidagi misolni qaraymiz.

5- misol. Berilgan chekli, butun va manfiymas s son uchun hadlari $a_n=\begin{cases} C_s^n, & 0\le n\le s,\\ 0, & s<n,\end{cases}$ formula asosida aniqlangan $a_0, a_1, a_2,..., a_n,...$ sonlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin, bu yerda $C_s^n=\dfrac{s!}{n!(s-n)!}$ – binomial koeffitsiyentlar. Bu sonlar ketma-ketligining hosil qiluvchi funksiyasini topish talab etilsin.

Nyuton binomi formulasiga ko'ra

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{s} C_s^n x^n=(1+x)^s$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Demak, berilgan butun $s\ge 0$ son uchun $C_s^0, C_s^1, C_s^2,..., C_s^s, 0,0,...,0,...$ ko'rinishdagi sonlar ketma-ketligining hosil qiluvchi funksiyasi $f(x)=(1+x)^s$ ko'rinishga egadir. ■

Yuqorida, aniqrog'i, ushbu bobning 3- paragrafida binomial koeffitsiyentlarning xossalari ko'rilgan edi. Quyidagi teorema ularning xossalaridan yana birini ifodalaydi.

1- teorema. *Ixtiyoriy natural m, n va $k\le m+n$ sonlar uchun quyidagi tenglik o'rinlidir:* $\sum\limits_{i=\max(0,k-m)}^{\min(k,n)} C_n^i C_m^{k-i}=C_{n+m}^k$.

Isboti. Elementlari mos ravishda quyidagi tengliklar bilan aniqlangan $a_0, a_1, a_2, \ldots$ va $b_0, b_1, b_2, \ldots$ ketma-ketliklarni qaraymiz:

$$a_i = \begin{cases} C_n^i, & 0 \le i \le n, \\ 0, & i > n, \end{cases} \quad b_i = \begin{cases} C_m^i, & 0 \le i \le m, \\ 0, & i > m. \end{cases}$$

5- misolni hisobga olsak, bu ketma-ketliklarni hosil qiluvchi funksiyalari mos ravishda $f_a(x) = (1+x)^n$ va $f_b(x) = (1+x)^m$ ko'rinishda bo'ladi. Hosil qiluvchi funksiyalarning 2- xossasiga ko'ra $f_a(x) f_b(x) = \sum_{s=0}^{\infty} d_s x^s$ bo'ladi, bunda $d_s = \sum_{i=0}^{s} a_i b_{s-i}$ $(s = 0,1,2,\ldots)$. Ushbu $k \le m+n$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy k natural sonni olamiz. Qaralayotgan $a_0, a_1, a_2, \ldots$ va $b_0, b_1, b_2, \ldots$ ketma-ketliklarning aniqlanishiga ko'ra $i > n$ shart bajarilganda $a_i = 0$ va $k - i > m$ shart bajarilganda esa $b_{k-i} = 0$ bo'lgani uchun

$$d_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{i=\max(0,k-m)}^{\min(k,n)} a_i b_{k-i} = \sum_{i=\max(0,k-m)}^{\min(k,n)} C_n^i C_m^{k-i}$$

munosabat o'rinlidir.

Boshqa tomondan olib qaraganda,

$$f_a(x) f_b(x) = (1+x)^n (1+x)^m = (1+x)^{n+m} = \sum_{i=0}^{n+m} C_{n+m}^i x^i .$$

Agar $\gamma_i = \begin{cases} C_{n+m}^i, & 0 \le i \le n+m, \\ 0, & i > n+m, \end{cases}$ deb olsak, u holda yuqorida hosil qilingan $f_a(x) f_b(x) = \sum_{i=0}^{n+m} C_{n+m}^i x^i$ tenglikni $f_a(x) f_b(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i x^i$ ko'rinishda yozish mumkin. Bu, o'z navbatida, $f_a(x) f_b(x)$ funksiya $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi ekanligini ko'rsatadi.

Hosil qiluvchi funksiyalarning 2- xossasiga ko'ra $f_a(x) f_b(x)$ funksiya hadlari $k \le n+m$ bo'lganda $d_k = \sum_{i=\max(0,k-m)}^{\min(k,n)} C_n^i C_m^{k-i}$ tenglik bilan,

$k > n+m$ bo'lganda esa nollardan iborat ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi ekanligi yuqorida ko'rsatilgan edi.

Shunday qilib, $\sum\limits_{k=0}^{n+m} C_{n+m}^{k} x^k = \sum\limits_{k=0}^{n+m} \sum\limits_{s=\max(0,k-m)}^{\min(k,n)} C_n^s C_m^{k-s} x^k$. Bu tenglik x o'zgaruvchining barcha qiymatlarida to'g'ri bo'l-ganligidan, isbotlanishi kerak bo'lgan tenglikni hosil qilamiz. ■

Fibonachchi qatoridagi birinchi haddan oldin $u_0 = 0$ sonni qo'yib[1], $u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_n = u_{n-2} + u_{n-1},\ n \geq 2$, ketma-ketlikning (umumlashgan Fibonachchi sonlari ketma-ketligining) $u(x)$ hosil qiluvchi funksiyani topamiz.

Buning uchun, dastlab, quyidagi tengliklar ketma-ketligini yozamiz:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k = x + \sum_{k=2}^{\infty} u_k x^k = x + \sum_{k=2}^{\infty} (u_{k-2} + u_{k-1}) x^k =$$

$$= x + \sum_{k=2}^{\infty} u_{k-2} x^k + \sum_{k=2}^{\infty} u_{k-1} x^k = x + x^2 \sum_{s=0}^{\infty} u_s x^s + x \sum_{p=0}^{\infty} u_p x^p =$$

$$= x + x^2 u(x) + x u(x).$$

Endi hosil bo'lgan $u(x) = x + x^2 u(x) + xu(x)$ tenglikni $u(x)$ funksiyaga nisbatan tenglama deb qarab, $u_0 = 0,\ u_1 = 1, u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$, $n \geq 2$, ketma-ketlikning $u(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$ hosil qiluvchi funksiyaga ega bo'lamiz.

II bobning 5- paragrafida isbotlangan (Fibonachchi sonlarini hisoblashga mo'ljallangan) Bine formulasini $n = 0,1,2,...$ hol uchun umumlashgan Fibonachchi sonlari ketma-ketligining hosil qiluvchi funksiyasidan foydalanib yana bir marta isbotlaymiz.

2- teorema. *Fibonachchi soni* u_n $(n = 0,1,2,...)$ *uchun*

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$ *tenglik o'rinlidir.*

[1] Fibonachchi qatorini chap tomonga ham istalgancha davom ettirish mumkin. Tabiiyki, bunday ish ko'rilganda, har qadamda hosil bo'lgan ketma-ketlik qandaydir bir umumlashgan Fibonachchi qatori bo'laveradi.

Isboti. Avvalo, noma'lum koeffitsiyentlar usulini qo'llab va $u(x)=\dfrac{x}{1-x-x^2}$ funksiyaning kasr ko'rinishda ekanligini e'tiborga olib, uni ikkita kasr yig'indisi qilib tasvirlaymiz. Bu ishni amalga oshirish uchun, oldin, $1-x-x^2=0$ kvadrat tenglamaning x_1 va x_2 ildizlarini topamiz: $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Agar $\alpha=-x_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ va $\beta=-x_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ deb belgilasak, u holda $\alpha+\beta=1$ va $\alpha\beta=-1$ bo'lishi ravshandir. Endi $1-x-x^2$ kvadrat uchhadni ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$$1-x-x^2=-(x+\alpha)(x+\beta)=\alpha\beta(x+\alpha)(x+\beta)=$$
$$=(\beta x+\alpha\beta)(\alpha x+\alpha\beta)=(\beta x-1)(\alpha x-1)=(1-\alpha x)(1-\beta x).$$

Shunday qilib, $u(x)=\dfrac{x}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}=\dfrac{A}{1-\alpha x}+\dfrac{B}{1-\beta x}$,

bu yerda A va B noma'lum koeffitsiyentlardir. Kasrlarni qo'shish amalini bajarib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{A+B-(A\beta+B\alpha)x}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}.$$

Bu yerdan $1-x-x^2$ kvadrat uchhadning noldan farqli barcha qiymatlarida $x=A+B-(A\beta+B\alpha)x$ bo'lishi kelib chiqadi. Oxirgi tenglikning chap va o'ng tomonlaridagi x o'zgaruvchining mos darajalari koeffitsiyentlarini tenglashtirsak, A va B noma'lumlarga nisbatan quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} A+B=0, \\ A\beta+B\alpha=-1. \end{cases}$$

Bu sistemani yechib, $A=\dfrac{1}{\alpha-\beta}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ va $B=\dfrac{1}{\beta-\alpha}=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ ekanligini topamiz.

Demak, $u(x)=\dfrac{x}{1-x-x^2}=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1-\alpha x}+\dfrac{-\frac{1}{\sqrt{5}}}{1-\beta x}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1}{1-\alpha x}-\dfrac{1}{1-\beta x}\right)$.

2- misol asosida

$$u(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha x}-\frac{1}{1-\beta x}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha x)^n-\sum_{n=0}^{\infty}(\beta x)^n\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha^n-\beta^n)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]x^n$$

munosabatga ega bo‘lamiz. Endi $u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_nx^n$ ekanligini eslasak, $u_0=0$ va $u_1=1$ shartlar bilan aniqlanuvchi u_n, $n=0,1,2,...$, umumlashgan Fibonachchi sonlari uchun Bine formulasi o‘rinli bo‘lishi tasdiqlanadi. ■

Endi qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olinmagan holda natural n sonning natural qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlari sonlaridan tashkil topgan[1] $R(0),R(1),R(2),R(3),...,R(n),...$ ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi hisoblangan

$$r(x)=\sum_{n=0}^{\infty}R(n)x^n=1+x+2x^2+3x^3+5x^4+7x^5+12x^6+...$$

darajali qatorni qaraymiz.

L. Eyler $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)...(1-x^n)$ ko‘rinishdagi ko‘paytmalarni natural n uchun tekshirib, 1748- yilda

$$\varphi(x)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)=1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(x^{\frac{3m^2-m}{2}}+x^{\frac{3m^2+m}{2}}\right)$$

formulani isbotlagan edi. Bu formula **Eyler ayniyati** deb yuritiladi.

3- teorema. $\varphi(x)r(x)=1$.

Isboti. $1+x+x^2+...+x^n+...=\frac{1}{1-x}$ tenglikdan foydalanib (1- misolga qarang)

$$\frac{1}{\varphi(x)}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot...\cdot\frac{1}{1-x^k}\cdot...==(1+x+x^2+x^3+...)$$

[1] Bu yerda yozuvning ixchamligi nuqtai nazaridan (0 natural sonlar to‘plamiga tegishli bo‘lmasada, ya’ni $R(0)$ yozuv ma’noga ega bo‘lmasada) $R(0)=1$ deb qabul qilindi.

$$(1+x^2+x^4+x^6+...)\times...\times(1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+...)...$$
munosobatga ega bo‘lamiz. Oxirgi ko‘paytmadagi qavslarni ochganda mumkin bo‘lgan barcha $x^{a_1}x^{2a_2}...x^{ka_k}=x^{a_1+2a_2+...+ka_k}$ ko‘rinishdagi ifodalar yig‘indisi hosil bo‘ladi, bu yerda $a_1,a_2,...,a_k$ – butun manfiymas sonlar. Shuning uchun, n sonni $a_1+2a_2+...+ka_k$ ko‘rinishda ifodalash imkoniyatlari soni qancha bo‘lsa o‘shancha marta bu yig‘indida x^n qatnashadi.

$$a_1+2a_2+...+ka_k=\underbrace{1+...+1}_{a_1\text{ marta}}+\underbrace{2+...+2}_{a_2\text{ marta}}+...+\underbrace{k+...+k}_{a_k\text{ marta}}$$

yozuvdan ko‘rinib turibdiki, n sonni $a_1+2a_2+...+ka_k$ ko‘rinishda ifodalash imkoniyatlari soni shu sonning qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olinmagan holda barcha bo‘laklanishlari soniga, ya’ni $R(n)$ ga tengdir. Bu tasdiq $\frac{1}{\varphi(x)}=r(x)$ tenglikning to‘g‘riligini isbotlaydi. ■

Eyler ayniyatini e’tiborga olgan holda $\varphi(x)r(x)=1$ tenglikni

$$(1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+...)\times$$
$$\times(R(0)+R(1)x+R(2)x^2+R(3)x^3+...+R(n)x^n+...)=1$$

ko‘rinishda yozamiz. Bu tenglikning chap tomonidagi qavslarni ochib va $x,x^2,x^3,...,x^n$ ifodalarning koeffitsiyentlarini nolga tenglashtirib quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$R(1)-R(0)=0,\ \ R(2)-R(1)-R(0)=0,\ \ R(3)-R(2)-R(1)=0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$R(n)-R(n-1)-R(n-2)+R(n-5)+R(n-7)+...$$
$$...+(-1)^m R\left(n-\frac{3m^2-m}{2}\right)+(-1)^m R\left(n-\frac{3m^2+m}{2}\right)+...=0,$$

bu yerda barcha $s<0$ uchun $R(s)=0$.

Demak, qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olinmagan holda natural n sonning natural qo‘shiluvchilarga barcha bo‘laklanishlari soni $R(n)$ uchun

$$R(n)=R(n-1)+R(n-2)-R(n-5)-R(n-7)+....$$
$$...+(-1)^{m+1}R\left(n-\frac{3m^2-m}{2}\right)+(-1)^{m+1}R\left(n-\frac{3m^2+m}{2}\right)+...$$

formulaga ega bo‘ldik. Topilgan formula yordamida $R(1)=1$, $R(2)=2$, $R(3)=3$, $R(4)=5$, $R(5)=7$, $R(6)=11$, $R(7)=15$, $R(8)=22$ bo‘lishini osongina hisoblab, bu formulani qo‘llash natural n sonning barcha bo‘laklanishlari soni uchun ushbu bobning 6- paragrafida keltirilgan $R(n)=\sum_{k=1}^{n} R(n,k)$ formulani qo‘llash bilan taqqoslanganda, hisoblash ishlarining keskin kamayganiga guvoh bo‘lamiz.

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Quyidagi ketma-ketliklarning hosil qiluvchi funksiyalarini toping:

a) $1\cdot 2,\ 2\cdot 3,\ 3\cdot 4, ...$; b) $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, ...$; d) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, ...$;

e) 1, 0, 1, 0, 1, 0, ... ; f) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...$; g) $1, 0, -\frac{1}{3!}, 0, \frac{1}{5!}, ...$.

2. Har qanday chekli a songa mos keluvchi $1, a, a^2, ..., a^n, ...$ va $1, 1, ..., 1, ...$ ketma-ketliklarni hosil qiluvchi funksiyalardan foydalanib $0, a-1, a^2-1, ..., a^n-1, ...$ ketma-ketlikni hosil qiluvchi funksiyasini toping.

3. $a_0, a_1, a_2, a_3, ...$ ketma-ketlikni hosil qiluvchi funksiyasi $f(x)$ bo‘lsin. Quyidagi ketma-ketliklarning hosil qiluvchi funksiyalarini aniqlang:

a) $a_0+a_1, a_1+a_2, a_2+a_3, ...$; b) $a_0, a_0+a_1, a_0+a_1+a_2, ...$;

d) $a_0, a_2, a_4, a_6, ...$; e) $a_0, a_1b, a_2b^2, a_3b^3, ...$, b – ixtiyoriy chekli son.

4. Hosil qiluvchi funksiyalarning oddiy xossalarini qo‘llab bir necha sonlar ketma-ketliklarining hosil qiluvchi funksiyalarini toping.

5. Quyidagi rekurrent formulalar bilan berilgan ketma-ketliklarning hosil qiluvchi funksiyalarini va ketma-ketliklar elementlarining aniq ifodalarini toping:

a) $a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$, $a_0=a_1=1$;

b) $a_{n+3}=-3a_{n+2}-3a_{n+1}-a_n$, $a_0=1$, $a_1=a_2=0$;

d) $a_{n+3}=-\frac{3}{2}a_{n+2}-\frac{1}{2}a_n$, $a_0=0$, $a_1=1$, $a_2=2$.

6. Bine formulasidan foydalanib Fibonachchi qatoridagi o‘n ikkinchi elementni aniqlang.

7. Fibonachchi sonlarining ushbu bobning 5- paragrafida keltirilgan 1-, 2-, 3- va 5- xossalarini $u_0=0, u_1=1, u_n=u_{n-2}+u_{n-1}$ ($n\geq 2$) ketma-ketlikining hosil qiluvchi funksiyasidan foydalangan holda isbotlang.

8. Isbotlang: a) $R(20)=627$; b) $R(21)=792$; d) $R(22)=1002$.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Sonli cheksiz qator deganda nimani tushunasiz?

2. Qatorning xususiy yig‘indisi qanday tuziladi?

3. Qanday qator yaqinlashuvchi deb ataladi?

4. Qator uzoqlashuvchi bo‘lishi uchun qanday shart bajarilishi kerak?

5. Funksional qator sonli qatordan nima bilan farq qiladi?

6. Darajali qator qanday ko‘rinishga ega?

7. Ketma-ketlikni hosil qiluvchi funksiyasi deganda nimani tushunasiz?

8. Hosil qiluvchi funksiyalarning xossalaridan qaysilarni bilasiz?

9. Berilgan chekli va butun $s\geq 0$ son uchun $C_s^0, C_s^1, C_s^2, \ldots, C_s^s, 0, 0, \ldots, 0, \ldots$ ko‘rinishdagi sonlar ketma-ketligining hosil qiluvchi funksiyasi qanday ko‘rinishga ega?

10. Hosil qiluvchi funksiyalarning xossalaridan foydalanib binomial koeffitsiyentlarning xossalarini o‘rganish mumkinmi?

11. Fibonachchi qatoriga mos ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasini topa olasizmi?

12. Fibonachchi sonlarini hisoblashga mo‘ljallangan Bine formulasini Fibonachchi sonlari ketma-ketligining hosil qiluvchi funksiyasidan foydalanib isbotlash mumkinmi?

13. Eyler ayniyati qaysi formula bilan ifodalanadi?

14. Qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olinmagan holda natural n sonning natural qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlari sonini hisoblashning qanday formulalarini bilasiz?

III BOB
MULOHAZALAR ALGEBRASI

Mulohazalar va ular ustida mantiqiy amallar, formulalar, teng kuchli formulalar, aynan chin, aynan yolg'on va bajariluvchi formulalar, teng kuchli formulalarga doir teoremalar, formulalarning normal shakllari, mulohazalar algebrasi funksiyalari, Bul algebrasi, mulohazalar algebrasidagi ikki taraflama qonun va arifmetik amallar, Jegalkin ko'phadi, monoton funksiyalar, funksional yopiq sinflar va Post teoremasi haqidagi ma'lumotlar ushbu bobdan joy olgan.

3.1. Mulohaza. Mulohazalar ustida amallar

Mulohaza. Absolyut chin, absolyut yolg'on mulohazalar. Qiymatlar satri. Inkor, kon'yunksiya, diz'yunksiya, ekvivalensiya va implikatsiya mantiqiy amallari. Chinlik jadvali. Sheffer shtrixi. Pirs strelkasi.

Matematik mantiqning **mulohazalar algebrasi** deb atalgan ushbu bo'limida asosiy tekshirish obyektlari bo'lib gaplar xizmat qiladi. Mulohazalar algebrasida ma'nosiga ko'ra chin (rost, haqqoniy, to'g'ri) yoki yolg'on (noto'g'ri) bo'lishi mumkin bo'lgan gaplar bilangina shug'ullaniladi. Mulohazalar algebrasi **mantiq algebrasi** deb ham yuritiladi.

1- misol. "Toshkent – O'zbekistonning poytaxti.", "Oy yer atrofida aylanadi." va "Agar fuqaro oliy ta'lim muassasalaridan birini muvaffaqiyatli tamomlasa, u holda unga oliy ma'lumotliligini tasdiqlovch diplom beriladi" degan gaplarning har biri chin, ammo "Yer oydan kichik.", "$3>5$." va "Ot, qo'y, echki, it va mushuk uy hayvonlari emas." degan gaplarning har biri esa yolg'ondir. ■

Shuni ham ta'kidlash kerakki, ko'pchilik gaplarning chin yoki yolg'onligini darhol aniqlash qiyin. Masalan, "Bugungi tun kechagidan qorong'iroq." degan gap qaysi holda, qachon va qaysi joyda aytilishiga (tasdiqlanishiga) qarab chin ham, yolg'on ham bo'lishi mumkin.

Albatta, chin yoki yolg'onligini aniqlash imkoniyati bo'lmagan gaplar ham bor. Masalan, "Oldimga kel!", "Uyda bo'ldingmi?", "Yangi yil bilan tabriklayman!", "Agar oldin bilganimda..." degan gaplar shunday gaplar jumlasira kiradi.

Bundan keyin, chin qiymatni, qisqacha, ch, yolg'on qiymatni esa, yo bilan belgilaymiz. Yozuvni ixchamlashtirish maqsadida chin qiymat 1, yolg'on qiymat esa, 0 bilan ham belgilanishi mumkin. Bunday belgilash mantiqiy qiymatni sonli qiymat bilan, aniqrog'i, sonning ikkilik sanoq sistemasidagi ifodalanishi bilan aloqasini o'rnatishda yordam beradi.

1- ta'rif. *Ma'nosiga ko'ra faqat chin yoki yolg'on qiymat qabul qila oladigan darak gap **mulohaza** deb ataladi.*

Bu ta'rifga ko'ra har bir mulohaza muayyan holatda chin yoki yolg'on bo'lishi mumkin. Mulohazalarni belgilash uchun, asosan, lotin alifbosining kichik harflari (ba'zan indekslari bilan) ishlatiladi:

$$a, b, c, ..., u, v, ..., x, y, z .$$

Shunday mulohazalar borki, ular mumkin bo'lgan barcha hollarda (vaziyatlarda) ch (yoki yo) qiymat qabul qiladi. Bunday mulohazalar **absolyut chin (yolg'on)** mulohazalar deb ataladi.

Mulohazalar algebrasida, odatda, muayyan o'zgarmas mulohazalar (ch, yo) bilangina emas, balki istalgan mulohazalar bilan ham shug'ullaniladi. Bu esa **o'zgaruvchi mulohaza** tushunchasiga olib keladi. Agar berilgan mulohazani x deb belgilasak, u holda x ch yoki yo qiymat qabul qiladigan o'zgaruvchi mulohazani ifodalaydi.

Faqat bitta tasdiqni ifodalovchi mulohazani **elementar (oddiy)** mulohaza deb hisoblaymiz. Elementar mulohazalar qatoriga ch, yo o'zgarmas mulohazalar ham kiradi. O'zbek tilidagi "emas", "yoki", "va", "agar ... bo'lsa, u holda ... bo'ladi", "shunda va faqat shundagina ...., qachonki ...." so'zlar (bog'lovchilar, so'zlar majmuasi) vositasida mulohazalar ustidagi (orasidagi) **mantiqiy amallar** deb yuritiluvchi amallar ifodalanishi mumkin. Bu amallar yordamida elementar mulohazalardan **murakkab** mulohaza tuziladi (quriladi, yasaladi). 1- misolda bayon etilgan 1-, 2-, 4- va 5- mulohazalar elementar mulohazalarga, 3- va 6- mulohazalar esa murakkab mulohazalarga misol bo'la oladi.

Mulohazalar ustidagi mantiqiy amallar matematik mantiqning elementar qismi hisoblangan **mulohazalar mantiqi**, ya'ni mulohazalar algebrasi qismida o'rganiladi. Har ikkala atama ("mulohazalar mantiqi" va "mulohazalar algebrasi") sinonim sifatida ishlatiladi, chunki ular mantiqning muayyan qismini ikki nuqtai nazardan ifodalaydi: u ham mantiqdir (o'z predmetiga ko'ra), ham algebradir (o'z usuliga ko'ra). Mulohazalar algebrasidagi mantiqiy amallar o'ziga xos xususiyatlarga ega, chunki ularning tarkibiga kiruvchi mulohaza(lar) faqat ikki (ch, yo) qiymatdan birini qabul qilishi mumkin.

Mantiqiy amallarni o'rganishdan oldin bu amallarda qatnashuvchi o'zgaruvchilar qiymatlari kombinatsiyalari bilan tanishamiz. Berilgan bitta o'zgaruvchi elementar mulohaza uchun ikkita ($C_1^0 + C_1^1 = 2^1 = 2$) mumkin bo'lgan bir-biridan farqli **qiymatlar satrlari** bor:

yo,
ch,

Berilgan ikkita o‘zgaruvchi elementar mulohazalar uchun barcha mumkin bo‘lgan bir-biridan farqli qiymatlar satrlari kombinatsiyalari to‘rtta ($C_2^0+C_2^1+C_2^2=2^2=4$):

yo,yo,
yo,ch,
ch,yo,
ch,ch

O‘zgaruvchi elementar mulohazalar soni 3, 4 va hokazo bo‘lgan hollarda ham yuqoridagidek mumkin bo‘lgan qiymatlar satrlari kombinatsiyalarini yozish mumkin. Umuman olganda, berilgan n ta o‘zgaruvchi elementar mulohazalar uchun barcha mumkin bo‘lgan bir-biridan farqli qiymatlar satrlari kombinatsiyalari soni $C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n=2^n$ bo‘lishini osonlik bilan isbotlash mumkin (II bobdagi 3- paragrafga qarang). Agar biror amal tarkibiga kiruvchi operandlar (parametrlar, o‘zgaruvchi va hokazo) soni birga teng bo‘lsa, u holda bunday amal **unar** amal deb, operandlar soni ikkiga teng bo‘lganda esa, **binar** amal deb yuritiladi[1].

yo,yo, yo, …,yo,yo,
yo,yo, yo, …,yo,ch,
yo,yo, yo, …,ch,yo,
yo,yo, yo, …,ch,ch,
……………………
ch,yo, yo, …,yo,yo,
……………………
ch,ch, ch, …,ch,ch,

Matematik mantiqning ko‘pchilik bo‘limlarida **chinlik jadvali** deb ataluvchi jadvallardan foydalanish qulay hisoblanadi. Quyida unar va binar mantiqiy amallarning chinlik jadvallari keltiriladi. Berilgan bitta x o‘zgaruvchi elementar mulohaza uchun bir-biridan farqli qiymatlar satrlari ikkita bo‘lgani sababli jami $2^{2^1}=2^2=4$ ta[2] turli unar mantiqiy amallar bor. Barcha unar mantiqiy amallar ($u_i=u_i(x),\ i=\overline{0,3}$) natijalari 1- jadvalda (chinlik jadvalida) keltirilgan.

---

[1] Amallarni tarkibiga kiruvchi operandlar soniga ko‘ra bunday nomlashni davom ettirish mumkin. Masalan, tarkibidagi operandlari soni 3ga teng amal **ternar** amal deb ataladi.

[2] Darajaga ko‘tarish amallari yuqoridan pastga qarab ketma-ket bajariladi.

1- jadval

Unar mantiqiy amallar

x	u_0	u_1	u_2	u_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Berilgan ikkita x va y o‘zgaruvchi elementar mulohazalar uchun jami to‘rtta bir-biridan farqli qiymatlar satrlari kombinatsiyalari tuzish mumkin bo‘lgani sababli barcha turli binar mantiqiy amallar soni $2^{2^2}=2^4=16$ ga teng. Mumkin bo‘lgan barcha turli binar mantiqiy amallar ($b_i=b_i(x,y)$, $i=\overline{0,15}$) natijalari 2- jadvalda (chinlik jadvalida) keltirilgan.

Mantiqiy amallarni yuqoridagi usul bilan o‘rganishni davom ettirib, berilgan uchta x, y, z o‘zgaruvchi elementar mulohazalar uchun hammasi bo‘lib sakkizta ($2^3=8$) bir-biridan farqli qiymatlar satrlari kombinatsiyalari tuzish mumkinligini va, shu sababli, turli $2^{2^3}=2^8=256$ ta ternar mantiqiy amallar borligini ta’kidlaymiz. Tarkibidagi o‘zgaruvchi elementar mulohazalari to‘rtta bo‘lgan turli mantiqiy amallar esa $2^{2^4}=2^{16}=65536$ ta.

Asosiy mantiqiy amallar beshta bo‘lib, ulardan biri unar, to‘rttasi esa binar amaldir. Ular quyida bayon etilgan.

2- jadval

Binar mantiqiy amallar

x	y	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

x	y	b_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}	b_{15}
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

3.1.1. Inkor amali. Inkor amali mulohazalar mantiqining eng sodda amallaridan biri bo‘lib, u unar amaldir, ya’ni inkor amali bitta elementar mulohazaga nisbatan qo‘llaniladi.

2- ta'rif. *Berilgan x elementar mulohaza chin bo'lganda yo qiymat qabul qiluvchi va, aksincha, x yolg'on bo'lganda ch qiymat qabul qiluvchi murakkab mulohaza $\overline{x}$ mulohazaning* ***inkori*** *deb ataladi.*

"Berilgan mulohazaning inkori unga **inkor amalini** qo'llab hosil qilindi" deb aytish mumkin. Inkor amali 1- jadvalda ifodalangan u_2 amalidan iborat bo'lub, unga o'zbek tilidagi "emas" sifatdoshi mos keladi. Berilgan x mulohazaning inkori $\overline{x}$ kabi belgilanadi. $\overline{x}$ mulohaza "x emas" deb o'qiladi. Inkor amalini belgilashda "$\neg$" belgi ham qo'llanilishi mumkin. Bu holda x mulohazaning inkori $\neg x$ shaklda yoziladi. x mulohazaning $\overline{x}$ inkori uchun chinlik jadvali 3- jadval bo'ladi (1- jadvalning x va u_2 ustunlariga qarang). 3- jadvalni inkor amalining ekvivalent ta'rifi sifatida ham qabul qilish mumkin.

3- jadval

x	$\overline{x}$
yo	ch
ch	yo

2- misol. "Bugun havo sovuq." degan elementar mulohaza x bilan belgilangan bo'lsa, uning inkori $\overline{x}$ "Bugun havo sovuq emas." ko'rinishdagi murakkab mulohazadan iboratdir. ■

3.1.2. Kon'yunksiya[1] (mantiqiy ko'paytma[2]) amali. Endi ikkita mulohazaga nisbatan qo'llanilishi mumkin bo'lgan binar amallardan biri hisoblangan kon'yunksiya (mantiqiy ko'paytma) amalini o'rganamiz.

3- ta'rif. *Berilgan x va y elementar mulohazalar chin bo'lgandagina ch qiymat qabul qilib, qolgan hollarda esa, yo qiymat qabul qiluvchi murakkab mulohaza x va y mulohazalarning* ***kon'yunksiyasi*** *deb ataladi.*

"Berilgan mulohazalarning kon'yunksiyasi bu mulohazalarga **kon'yunksiya amalini** qo'llab hosil qilindi" deb aytish mumkin. Kon'yunksiya amali 2- jadvalda ifodalangan b_1 amali bo'lub, unga o'zbek tilidagi "va" bog'lovchisi mos keladi. Berilgan x va y elementar mulohazalar ustida bajariladigan kon'yunksiya (mantiqiy ko'paytma) amalini belgilashda "$\wedge$" yoki "&" belgi qo'llaniladi, ya'ni bu amal natijasida hosil bo'lgan murakkab mulohaza $x \wedge y$ (yoki $x \& y$) ko'rinishda belgilanadi. Mantiqiy ko'paytma amalini ifodalovchi "$\wedge$" yoki "$\&$" belgi ba'zan yozilmasligi (masalan, x va y o'zgaruvchi mulohazalarning mantiqiy ko'paytmasi xy ko'rinishda ifodalanishi), ba'zan esa, nuqta ($\cdot$) belgisi bilan almashtirilishi ($x \cdot y$ ko'rinishda yozilishi) mumkin (ushbu bobning 4- paragrafiga qarang). $x \wedge y$ ($x \& y$,

---

[1] Lotincha "conjunctio" so'zi o'zbek tilida "bog'layman" ma'nosini beradi.
[2] Ushbu bobning 4- paragrafiga qarang.

$x \cdot y$, xy) mulohaza "x va y" deb o'qiladi. x va y elementar mulohazalarning $x \wedge y$ kon'yunksiyasi uchun chinlik jadvali 4- jadval bo'ladi (2- jadvalning x, y va b_1 ustunlariga qarang).

3- misol. "5 soni toq va tubdir." ko'rinishdagi murakkab mulohaza chindir, chunki berilgan mulohaza ikkita "5 soni toqdir." va "5 soni tubdir." elementar mulohazalar kon'yunksiyasi sifatida qara-lishi mumkin hamda bu ikkita elementar mulohazalarning har biri chindir. ■

4- misol. "10 soni 5ga qoldiqsiz bo'linadi va 7>9." murakkab mulohaza yolg'on, chunki bu mulohaza ikkita "10 soni 5ga qoldiqsiz bo'linadi." va "7>9." elementar mulohazalar kon'yunksiyasi sifatida qaralsa, bu ikkita elementar mulohazalardan biri, aniqrog'i, "7>9." mulohaza yolg'ondir. ■

4- jadval

x	y	$x \wedge y$
yo	yo	yo
yo	ch	yo
ch	yo	yo
ch	ch	ch

3.1.3. Diz'yunksiya[1] (mantiqiy yig'indi[2]) amali. Mulohaza mantiqida ishlatiladigan yana bir binar amal, diz'yunksiya (mantiqiy yig'indi) amali bo'lib, unga o'zbek tilidagi "yoki" bog'lovchisi mos keladi. Shuni ta'kidlash joizki, "yoki" bog'lovchisidan o'zbek tilida ikki xil ma'noda foydalaniladi. Bu so'z, birinchi holda, rad etuvchi "yoki", ikkinchi holda esa rad etmaydigan "yoki" ma'nosida ishlatiladi. "Yoki" bog'lovchisi rad etuvchi ma'noda ishlatilganda bog'lanayotganlardan faqat bittasi, rad etmaydigan ma'noda ishlatilganda esa bog'lanayotganlarning hech bo'lmaganda biri ro'yobga chiqishi nazarda tutiladi. Masalan, "Bugun yakshanba yoki men kinoga boraman." murakkab mulohazani olaylik. Agar haqiqatdan ham bugun yakshanba bo'lsa va men kinoga borsam, u holda bu mulohaza chinmi, yolg'onmi? Agar yuqoridagi mulohaza yolg'on deb hisoblansa, u holda "yoki" bog'lovchisi rad etuvchi ma'noda, chin deb hisoblaganda esa "yoki" rad etmaydigan ma'noda ishlatilgan bo'ladi.

Agar x va y mulohazalarning ikkalasi ham yolg'on bo'lsa, u holda "x yoki y" mulohazasi, shubhasiz, yolg'on bo'ladi. x chin va y yolg'on bo'lgan holda yoki x yolg'on va y chin bo'lganda, "x yoki y" mulohazani chin deb hisoblash kerak, bu esa o'zbek tilidagi "yoki" bog'lovchisining rad etmaydigan ma'nosiga to'g'ri keladi. Tabiiyki, har ikkala x va y mulohazalar chin bo'lganda "x yoki y" mulohaza chin bo'ladi.

[1] Lotincha "dizjunctio" so'zi o'zbek tilida "ajrataman" ma'nosini beradi.
[2] Ushbu bobning 4- paragrafiga qarang.

4- ta'rif. *Berilgan x va y elementar mulohazalar yolg'on bo'lgandagina yo qiymat qabul qilib, qolgan hollarda esa, ch qiymat qabul qiluvchi murakkab mulohaza x va y mulohazalarning **diz'yunksiyasi** deb ataladi.*

"Berilgan mulohazalarning diz'yunksiyasi bu mulohazalarga **diz'yunksiya amalini** qo'llab hosil qilindi" deb aytish mumkin. Diz'yunksiya amali 2- jadvalda ifodalangan b_7 amali bo'lub, unga o'zbek tilidagi rad etmaydigan ma'noda ishlatiladigan "yoki" bog'lovchisi mos keladi. Diz'yunksiya amalini belgilashda "$\vee$" belgidan foydalaniladi. Berilgan x va y elementar mulohazaning diz'yunksiyasi "$x \vee y$" kabi yoziladi va "x yoki y" deb o'qiladi.

Berilgan x va y elementar mulohazalarning $x \vee y$ diz'yunksiyasi uchun chinlik jadvali 5- jadval bo'ladi (2- jadvalning x, y va b_7 ustunlariga qarang).

5- jadval

x	y	$x \vee y$
yo	yo	yo
yo	ch	ch
ch	yo	ch
ch	ch	ch

5- misol. "10 soni 5ga qoldiqsiz bo'linadi yoki 7>9." murakkab mulohaza chin, chunki berilgan mulohaza ikkita "10 soni 5ga qoldiqsiz bo'linadi." va "7>9." elementar mulohazalar diz'yunksiyasi sifatida qaralishi mumkin hamda bu ikkita elementar mulohazalardan biri, aniqrog'i, "10 soni 5ga qoldiqsiz bo'linadi." mulohazasi chindir. ■

3.1.4. Implikatsiya[1] amali. Navbatdagi amalni o'rganish maqsadida quyidagi misolni qarab chiqamiz.

6- misol. Quyidagi mulohazalarni ko'raylik:

1) "Agar $2\times5=10$ bo'lsa, u holda $6\times7=42$ bo'ladi.";

2) "Agar 30 soni 5 ga qoldiqsiz bo'linsa, u holda 5 juft son bo'ladi.";

3) "Agar $3=5$ bo'lsa, u holda $15+2=17$ bo'ladi.";

4) "Agar $4\times3=13$ bo'lsa, u holda $9+3=13$ bo'ladi.".

Bular murakkab mulohazalar bo'lib, ularning har biri ikkita elementar mulohazadan "agar ... bo'lsa, u holda ... bo'ladi" ko'rinishdagi qolip (andoza, bog'lovchilar) asosida tuzilgan. ■

---

[1] Lotincha "implicatio" so'zi o'zbek tilida "o'raman (chirmashtiraman)" ma'nosini, "implico" so'zi esa "zich o'raman, bog'layman (birlashtiraman)" ma'nosini beradi.

5- ta'rif. *Berilgan x va y elementar mulohazalarning birinchisi chin va ikkinchisi yolg'on bo'lgandagina yo qiymat qabul qilib, qolgan hollarda esa, ch qiymat qabul qiluvchi murakkab mulohaza x va y mulohazalarning* ***implikatsiyasi*** *deb ataladi.*

"Berilgan mulohazalarning implikatsiyasi bu mulohazalarga **implikatsiya amalini** qo'llab hosil qilindi" deb aytish mumkin. Implikatsiya amali 2- jadvalda ifodalangan b_{13} binar amaldir.

Implikatsiya amalini belgilashda "$\rightarrow$" (yoki "$\Rightarrow$") belgidan foydalaniladi. Shuni ta'kidlash kerakki, implikatsiya amali bajarilganda berilgan elementar mulohazalarning o'rni, ya'ni ulardan qaysi birinchi va qaysi ikkinchi bo'lishi muhimdir. Berilgan x va y elementar mulohazaning implikatsiyasi "$x \rightarrow y$" kabi yoziladi va "agar x bo'lsa, u holda y (bo'ladi)" deb o'qiladi. $x \rightarrow y$ implikatsiyani "x dan y ga implikatsiya" deb ham yuritishadi. So'zlashuv tilida $x \rightarrow y$ implikatsiyani "x bo'lsa, y bo'ladi", "agar x bo'lsa, u vaqtda y bo'ladi", "x dan y hosil bo'ladi", "x dan y kelib chiqadi", "y, agar x bo'lsa", "x y uchun yetarli shart" va boshqacha o'qish holatlari ham uchraydi. x va y elementar mulohazaning $x \rightarrow y$ implikatsiyasi uchun x mulohaza **asos (shart, gipoteza, dalil)**, y mulohaza esa x asosning **oqibati (natijasi, xulosasi)** deb ataladi. x va y mulohazalarning $x \rightarrow y$ implikatsiyasi uchun chinlik jadvali 6- jadval bo'ladi (2- jadvalning x, y va b_{13} ustunlariga qarang).

Implikatsiya uchun chinlik jadvalining dastlabki ikkita satri yolg'on asosdan yolg'on xulosa ham, chin xulosa ham kelib chiqishi mumkinligini anglatadi. Boshqacha qilib aytganda, "yolg'ondan har bir narsani kutish mumkin".

Implikatsiya uchun chinlik jadvalidan ko'rinadiki, 2- misoldagi mulohazalarning ikkinchisi yolg'on bo'lib, qolganlari chindir.

3.1.5. Ekvivalensiya amali. Matematik mantiqda ko'pchilik murakkab mulohazalar berilgan elementar mulohazalardan "... zarur va yetarlidir", "... zarur va kifoyadir", "faqat va faqat ...", "shunda va faqat shundagina, qachonki ...", "... bajarilishi yetarli va zarurdir" kabi qolip (andoza, bog'lovchilar) vositasida tuziladi.

6- jadval

x	y	$x \rightarrow y$
yo	yo	ch
yo	ch	ch
ch	yo	yo
ch	ch	ch

6- ta'rif. *Berilgan x va y elementar mulohazalarning ikkalasi ham bir xil qiymat qabul* *qilgandagina ch qiymat qabul qilib, ular turli qiymat qabul qilganda esa yo qiymat qabul qiluvchi murakkab mulohaza x va y mulohazalarning* ***ekvivalensiyasi*** *deb ataladi.*

"Berilgan mulohazalarning ekvivalensiyasi bu mulohazalarga **ekvivalensiya amalini** qo'llab hosil qilindi" deb aytish mumkin. Ekvivalensiya amali 2- jadvalda ifodalangan b_9 binar amaldir. Ekvivalensiya amalini belgilashda "$\leftrightarrow$" (yoki "$\Leftrightarrow$") belgidan foydalaniladi. Berilgan x va y elementar mulohazaning ekvivalensiyasi $x \leftrightarrow y$ (yoki $x \Leftrightarrow y$) kabi yoziladi va "x ekvivalent y" deb o'qiladi. x va y mulohazaning $x \leftrightarrow y$ ekvivalensiyasiga "x bo'lsa (bajarilsa), y bo'ladi (bajariladi) va y bo'lsa, x bo'ladi" degan mulohaza mos keladi. Demak, x va y elementar mulohazaning $x \leftrightarrow y$ ekvivalensiyasi ikkita $x \rightarrow y$ va $y \rightarrow x$ implikatsiyalarning $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$ kon'yunksiyasi ko'rinishida ham ifodalanishi mumkin. Shuning uchun ekvivalensiya **ikki tomonli implikatsiyadir**. $x \leftrightarrow y$ ekvivalensiyaga "x dan y kelib chiqadi va y dan x kelib chiqadi" degan mulohazani ham mos qo'yish mumkin. Boshqacha so'zlar bilan aytganda, $x \leftrightarrow y$ ekvivalensiyaga matematikada zaruriy va yetarli shartni ifodalovchi tasdiq mos keladi.

7-jadval

x	y	$x \quad y$
yo	yo	ch
yo	ch	yo
ch	yo	yo
ch	ch	ch

Berilgan x va y mulohazalarning ekvivalensiyasi $x \leftrightarrow y$ uchun chinlik jadvali 7- jadval bo'ladi (2-jadvalning x, y va b_9 ustunlariga qarang).

6- m i s o l . Ushbu tasdiqlarni tekshi-ramiz: $x =$"Berilgan natural son 3ga qoldiqsiz bo'linadi.", $y =$"Berilgan natural sonning o'nli sanoq sistemasidagi yozuvini tashkil etuvchi raqamlar yig'indisi 3ga qoldiqsiz bo'-linadi.". Bu x va y mulohazalarning har biri elementar mulohaza bo'lib, ularning $x \leftrightarrow y$ ekvivalensiyasi murakkab mu-lohaza sifatida quyidagicha ifodalanishi mumkin: "Berilgan natural sonning 3ga qoldiqsiz bo'linishi uchun uning o'nli sanoq sistemasidagi yozuvini tashkil etuvchi raqamlar yig'indisi 3ga qoldiqsiz bo'linishi yetarli va zarurdir.". ■

Yuqorida keltirilgan inkor, kon'yunksiya, diz'yunksiya, implikatsiya va ekvivalensiya amallarining chinlik jadvallari **asosiy chinlik jadvallari** deb yuritiladi.

3.1.6. Boshqa mantiqiy amallar. Yuqorida bayon etilgan asosiy mantiqiy amallar 20 ta turli unar va binar amallarning 5 tasidir, xolos. Qolgan 15 ta mantiqiy amallarning ham matematik mantiqda o'z o'rinlari bo'lib, ularning ba'zilariga olimlarning nomlari qo'yilgan. Jumladan, b_{14} binar mantiqiy amal **Sheffer**[1] **amali** yoki **Sheffer shtrixi** degan nom olgan. Bu amalni, ba'zan, **antikon'yunksiya amali** deb ham atashadi. Sheffer amalini belgilashda "|" belgidan foydalaniladi. Berilgan x va y mulohazalarga Sheffer amalini qo'llab $x|y$ murakkab mulohaza hosil qilingan bo'lsa, $x|y$ yozuv "x Sheffer shtrixi y" deb o'qiladi. x va y elementar mulohazalarga Sheffer amalini qo'llash natijasi $x|y$ mulohaza uchun chinlik jadvali 8- jadval bo'ladi (2- jadvalning x, y va b_{14} ustunlariga qarang).

Olimning nomi bilan atalgan yana bir mantiqiy amal b_8 binar mantiqiy amal bo'lib, bu amal haqidagi dastlabki ma'lumotlarni Pirs[2] e'lon qilgan. Bu amal **Pirs strelkasi** yoki **Pirs amali** degan nom olgan bo'lib, uni, ba'zan, **antidiz'yunksiya amali**[3] deb ham atashadi.

Pirs amalini belgilashda "$\downarrow$" belgidan foydalaniladi. Berilgan x va y mulohazalarga Pirs amalini qo'llab $x \downarrow y$ murakkab mulohaza hosil qilingan bo'lsa, $x \downarrow y$ yozuv "x Pirs strelkasi y" deb o'qiladi. x va y elementar mulohazalarga Pirs amalini qo'llash natijasi $x \downarrow y$ mulohaza uchun chinlik jadvali 9- jadval bo'ladi (2- jadvalning x, y va b_8 ustunlariga qarang).

8- jadval

x	y	$x\|y$
yo	yo	ch
yo	ch	ch
ch	yo	ch
ch	ch	yo

Qolgan 3 ta unar va 10 ta binar mantiqiy amallarga qisqacha to'xtalib o'tamiz. 1. Unar amallar. u_0 va u_3 amallar vositasida, mos ravishda, absolyut yolg'on va absolyut chinni hosil qilish mumkin. u_1 amali esa x mulohazaning qiymatini o'zgartirmaydi (1- jadvalga qarang).

[1] Bu amal Ukrainada tug'ilgan AQShlik mantiqchi Henry Maurice Sheffer (1882-1964) nomi bilan bog'liq.

[2] Pirs Charlz Sanders (Charles Sanders Peirce, 1839-1914) – AQShlik faylasuf, mantiqchi va matematik.

[3] Bu amalni, ba'zan, **Dagger funksiyasi** yoki **Vebb funksiyasi** deb ham atashadi.

2. Binar amallar. b_0 va b_{15} amallar vositasida, mos ravishda, absolyut yolg'on va absolyut chinni hosil qilish mumkin. b_{11} amali y dan x ga implikatsiya amalini ifodalaydi. b_2 va b_4 amallari, mos ravishda, y dan x ga va x dan y ga implikatsiya **inversiyasi** amallaridir. b_3, b_5, b_{10} va b_{12} amallar faqat bitta operandga bog'liqdir. b_6 amaliga **ikki modulli qo'shish** amali degan nom berilgan bo'lib, bu amalni belgilashda $\oplus$ belgidan foydalaniladi. Berilgan x va y mulohazalarga ikki modulli qo'shish amalini qo'llab $x \oplus y$ murakkab mulohaza hosil qilinadi.

9- jadval

x	y	$x \downarrow y$
yo	yo	ch
yo	ch	yo
ch	yo	yo
ch	ch	yo

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Quyidagi gaplarning qaysilari mulohaza bo'lishini aniqlang:
a) "Qarshi shahri O'zbekiston Respublikasida joylashgan.";
b) "Bir piyola suv bering."; d) "$\sqrt{5}+4\sqrt{3-30}$";
e) "Oy Mars planetasining yo'ldoshidir."; f) "$a>0$";
g) "Yashasin ozodlik!"; h) "Soat necha bo'ldi?".

2. Quyidagi mulohazalarning chin yoki yolg'on ekanligini aniqlang:
a) $2 \in \{x \mid 2x^3-3x^2+1=0,\quad x \in \boldsymbol{R}\}$; b) $\{1\} \in N$;
d) "Yoshi o'z otasining yoshidan katta odam yo'q.".

3. Quyidagi implikatsiyalarning qaysi birlari chin?
a) agar $2\times2=4$ bo'lsa, u holda $2<3$ bo'ladi;
b) agar $2\times2=4$ bo'lsa, u holda $2>3$ bo'ladi;
d) agar $2\times2=5$ bo'lsa, u holda $2<3$ bo'ladi;
e) agar $2\times2=5$ bo'lsa, u holda $2>3$ bo'ladi.

4. "Qodirova talabadir." mulohazasi a bilan, "Qodirova ingliz tilini biladi." mulohazasi esa b deb belgilangan bo'lsin. U holda $\overline{a}$, $\overline{b}$, $a\wedge b$, $b\wedge a$, $a\vee b$, $b\vee a$, $a\rightarrow b$, $b\rightarrow a$, $a\leftrightarrow b$ va $b\leftrightarrow a$ ko'rinishdagi murakkab mulohazalarni so'zlar vositasida ifodalang hamda mumkin bo'lgan barcha vaziyatlarda bu mulohazalarning chin yoki yolg'on bo'lishini tekshirib ko'ring.

5. Mulohaza bo'lishi mumkin bo'lgan va mumkin bo'lmagan gaplarga 10tadan misol keltiring.

6. Quyidagi murakkab mulohazalarga mos elementar mulohazalarni qandaydir harflar bilan belgilab, ularni mantiqiy algebra amallari vositasida ifodalang:

a) "100 natural sondir va u 10ga qoldiqsiz bo'linadi.";

b) "Botirning yoshi o'z singlisining yoshidan katta emas.";

d) "Agar fuqaro o'rta ma'lumotga ega bo'lsa, u holda u oliy o'quv muassasalaridan birida o'qishi mumkin.".

7. Quyidagi mulohazalarni elementar va murakkab mulohazalarga ajrating va murakkab mulohazalardagi bog'lovchilarni toping:

a) "Natural son 10ga qoldiqsiz bo'linishi uchun uning o'nli sanoq sistemasidagi yozuvi 0 raqami bilan tugashi zarur va yetarlidir.";

b) "Sanamning yoshi o'z opasining yoshidan katta emas."

d) "O'zbek alifbosida 38 ta harf bor.";

e) "Agar fuqaro o'rta ma'lumotga ega bo'lsa, u holda u oliy o'quv muassasalaridan birida o'qishi mumkin.".

8. Sheffer shtrixi ishtirok etgan mulohazaga misol keltiring.

9. Pirs strelkasi ishtirok etgan mulohazaga misol keltiring.

10. Ikkilik sanoq sistemasida yozilgan natural sonlar ustida qo'shish va ko'paytirish amallarini mos ravishda mantiqiy yig'indi (diz'yunksiya) va mantiqiy ko'paytma (kon'yunksiya) amallari bilan solishtiring.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Mulohazalar algebrasi deganda nimani tushunasiz?

2. Mulohaza nima?

3. Qanday mulohaza absolyut chin mulohaza deb ataladi?

4. Qanday mulohaza absolyut yolg'on mulohaza deb ataladi?

5. O'zgarmas mulohazalar qanday qiymatlar qabul qilishlari mumkin?

6. O'zgaruvchi mulohazalar qanday qiymatlar qabul qilishlari mumkin?

7. Elementar va murakkab mulohaza tushunchalari bir-biridan nima bilan farq qiladi?

8. Mantiqiy amallar deganda nimani tushunasiz?

9. Nega mulohazalar algebrasi mulohazalar mantiqi deb ham yuritiladi?

10. Qiymatlar satri deganda nimani tushunasiz?

11. 1- va 2- jadvallarda keltirilgan amaldan boshqa unar va binar bormi?

12. Chinlik jadvali nima?
13. Qaysi amallar asosiy mantiqiy amallar deb yuritiladi?
14. Mulohazaning inkori deganda nimani tushunasiz?
15. Kon'yunksiya amali qanday bajariladi?
16. Diz'yunksiya amaliga o'zbek tilining qaysi bog'lovchisi mos keladi?
17. Nima uchun implikatsiya amalini bajarganda operandlar o'rinlari muhim hisoblanadi?
18. Implikatsiya amali uchun asos va oqibat tushunchalarini bilasizmi?
19. Mulohazalarning ekvivalensiyasi deganda nimani tushunasiz?
20. Sheffer amali qaysi amalga nisbatan teskari amal hisoblanadi?
21. Pirs amali qaysi amalga nisbatan teskari amal hisoblanadi?
22. Asosiy chinlik jadvallarini bilasizmi?

3.2. Formula va teng kuchlilik tushunchalari

Mulohaza. Mantiqiy amallar. Formula. Elementar formula. Chinlik jadvali. Mantiqiy amallarni bajarish imtiyozlari. Qavslar haqidagi kelishuv. Teng kuchli va teng kuchlimas formulalar. Teng kuchlilik. Teng kuchlimaslik. Ekvivalentlik. Ekvivalentmaslik. Tenglik. Tenglama. Ayniyat. Mantiqiy ifoda.

Oldingi paragrafda asosan mantiqiy amallar o'rganildi. Endi mantiqiy amallar orasidagi bog'lanishlar bilan shug'ullanamiz. Bunday bog'lanishlardan biri bilan tanishmiz: ekvivalensiya ikki tomonli implikatsiyadir, aniqrog'i, berilgan x va y mulohazalarning $x \leftrightarrow y$ ekvivalensiyasi ikkita $x \to y$ va $y \to x$ implikatsiyalarning $(x \to y) \wedge (y \to x)$ kon'yunksiyasi shaklida ifodalanadi.

Dastlab mulohazalar algebrasining **formula** tushunchasiga murojaat qilib, intuitiv ravishda, uni berilgan elementar mulohazalardan inkor, diz'yunksiya, kon'yunksiya, implikatsiya, ekvivalensiya mantiqiy amallarining chekli kombinatsiyasi va, zarur bo'lganda, mulohazalar ustida mantiqiy amallarning bajarilish tartibini ko'rsatuvchi qavslar vositasida hosil qilingan murakkab mulohaza deb tushunamiz. Bu yerda qavslarni ishlatish qoidalari sonlar bilan ish ko'ruvchi (oddiy) algebradagidek saqlanadi.

1-misol. Ushbu x, ch, yo$\leftrightarrow$(yo$\vee y$), $x \leftrightarrow \bar{y} \to x$, $[x_1 \vee (\overline{x_2} \wedge x_3) \wedge x_1] \to x_4$, $\bar{y} \to x$, $(x \to \bar{y}) \wedge (y \to z) \to (z \to x)$, $[x_1 \wedge (x_3 \to x_3)] \vee (x_4 \leftrightarrow x_2) \vee$yo va $(\bar{x} \vee y) \wedge (x \vee \bar{y})$ ko'rinishda yozilgan murakkab mulohazalarning har biri formuladir, lekin $[x_1 \vee (x_2 \to x_3) \wedge] \leftrightarrow x_1$ va $(x \to \bar{y}) \wedge (z \to (\bar{z} \to y)$

yozuvlarni formula sifatida qabul qilish mumkin emas, chunki ularning birinchisida kon'yunksiya belgisidan keyin yopuvchi "]" qavs yozilgan, ikkinchisida esa ikkinchi ochuvchi "(" qavsga mos yopuvchi ")" qavs yozilmagan. ■

Formula tushunchasiga matematik induksiya usuliga tayangan holda quyidagicha qat'iy ta'rif beriladi.

1- ta'rif. 1) *Agar* x *elementar mulohaza bo'lsa, u holda* x *formuladir;*

2) *agar* A *formula bo'lsa, u holda* $\overline{A}$ *formuladir;*

3) *agar* A *va* B *formulalar bo'lsa, u holda* $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ *va* $(A \leftrightarrow B)$ *formulalardir;*

4) *1-, 2- va 3- bandlardagidan tashqari boshqa formula yo'q.*

1- ta'rifga ko'ra ixtiyoriy formulaga, uning qiymati sifatida, vaziyatga qarab, {ch, yo} to'plamning biror elementi mos qo'yiladi. Formula tarkibidagi o'zgarmas va o'zgaruvchi (elementar) mulohazalarning har biri **elementar formulalar** deb hisoblanadi. Formula qiymatining $x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilarga (elementar mulohazalarga) bog'liqligini ta'kidlash kerak bo'lgan holda $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ko'rinishdagi yozuvdan foydalaniladi.

Tabiiyki, formula tushunchasiga berilgan 1- ta'rif asosida ish yuritilsa, tuzilgan formula tarkibida qavslar ko'p bo'ladi. Matematik mantiqda formula tarkibidagi qavslar sonini kamaytirish maqsadida, odatda, quyidagi kelishuvlardan foydalaniladi:

1) biror formula inkor ishorasi ostida bo'lsa, u qavssiz yoziladi (masalan, $\overline{(x \vee y)} \wedge z$ formulani $\overline{x \vee y} \wedge z$ ko'rinishda yozish mumkin).

2) kon'yunksiya amali diz'yunksiya, implikatsiya va ekvivalensiya amallariga nisbatan formulalarni mustahkamroq bog'laydi deb hisoblanadi (masalan, $x \vee (yz)$ formulani $x \vee yz$, $xy \rightarrow (yz)$ formulani $xy \rightarrow yz$, $(xy) \leftrightarrow (zu)$ formulani esa $xy \leftrightarrow zu$ ko'rinishda yozish mumkin).

3) diz'yunksiya amali implikatsiya va ekvivalensiya amallariga nisbatan formulalarni mustahkamroq bog'laydi deb hisoblanadi (masalan, $x \rightarrow (y \vee z)$ formulani $x \rightarrow y \vee z$, $x \vee y \leftrightarrow (z \vee y)$ formulani esa $x \vee y \leftrightarrow z \vee y$ ko'rinishda yozish mumkin).

4) implikatsiya amali ekvivalensiya amaliga nisbatan formulalarni mustahkamroq bog'laydi deb hisoblanadi (masalan, $x \leftrightarrow (y \rightarrow z)$ formulani $x \leftrightarrow y \rightarrow z$ ko'rinishda yozish mumkin).

Bu kelishuvlar, yuqorida ta'kidlanganidek, formulalar tarkibidagi qavslar sonini kamaytirish imkonini beradi. Masalan, $(((x \leftrightarrow y) \to (x \wedge z)) \leftrightarrow (((x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge y)) \vee (x \to z)))$ formulani $(x \leftrightarrow y) \to xz \leftrightarrow x\overline{y} \vee \overline{x}y \vee (x \to z)$ ko'rinishda yozish mumkin.

Umuman olganda, matematik mantiqda **mantiqiy amallarni bajarish imtiyozlari** va **qavslar haqidagi kelishuv** deb ataluvchi qoidalar qabul qilingan.

Qavslarsiz yozilgan mantiqiy amallarni bajarish imtiyozlari (ketma-ketligi) navbat bilan inkor ($\neg$), kon'yunksiya ($\wedge$), diz'yunksiya ($\vee$), implikatsiya ($\to$) amallariga berilgan, eng so'nggi imtiyozga esa ekvivalensiya ($\leftrightarrow$) amali egadir.

Qavslar haqidagi kelishuv deganda quyidagi qoidalarga amal qilish nazarda tutiladi:

1. Agar formulada tashqi qavslar yozilmagan bo'lsa, u holda ular o'z joylariga tiklanadi.
2. Agar formulada ikkita bir xil imtiyozga ega mantiqiy amallar qavslarsiz ketma-ket yozilgan bo'lsa, u holda yozilish tartibiga ko'ra chapda joylashgan amal uchun qavslar o'z joylariga tiklanadi.
3. Agar formulada turli xil imtiyozlarga ega mantiqiy amallar qavslarsiz ketma-ket yozilgan bo'lsa, u holda ularni bajarish ketma-ketligini anglatuvchi qavslar mantiqiy amallarni bajarish imtiyozlarini hisobga olgan holda navbat bilan o'z joylariga tiklanadi.

2- misol. $x \vee \overline{y} \wedge y \leftrightarrow z \to (z \to x)$ ko'rinishda yozilgan formulani tahlil qilaylik. Bu formuladagi amallarni bajarish tartibi faqat bir joyda qavslar bilan aniqlangan. Mantiqiy amallarni bajarish imtiyozlari va qavslar haqidagi kelishuvga ko'ra berilgan formulani $((x \vee (\overline{y} \wedge y)) \leftrightarrow (z \to (z \to x)))$ ko'rinishda ifodalash mumkin. ■

Tabiiyki, ixtiyoriy formula uchun **chinlik jadvali**[1] tuzish mumkin. Berilgan formulaga mos chinlik jadvalini tuzishda shu formula tarkibidagi amallarga e'tibor bergan holda asosiy chinlik jadvallaridan ketma-ket foydalanish mumkin.

3- misol. $(x \wedge y) \to \overline{\overline{x} \vee y}$ formulaning chinlik jadvali 1- jadval bo'ladi. ■

[1] Formulalar uchun "chinlik jadvali" iborasi o'rnida "qiymatlar jadvali" iborasi qo'llanilishi ham mumkin.

1- jadval

x	y	$\bar{x}$	$x \wedge y$	$\bar{x} \vee y$	$\overline{\bar{x} \vee y}$	$(x \wedge y) \to \overline{\bar{x} \vee y}$
yo	yo	ch	yo	ch	yo	ch
yo	ch	ch	yo	ch	yo	ch
ch	yo	yo	yo	yo	ch	ch
ch	ch	yo	ch	ch	yo	yo

2- t a ' r i f . *Agar berilgan ikkita formula tarkibida ishtirok etuvchi elementar mulohazalarning har bir qiymatlar satri uchun bu formulalarning qiymatlari bir xil bo'lsa, u holda ular **teng kuchli formulalar** deb ataladi.*

3- t a ' r i f . *Agar berilgan ikkita formula tarkibida ishtirok etuvchi elementar mulohazalarning qiymatlar satrlaridan hech bo'lmaganda bittasi uchun bu formulalarning qiymatlari har xil bo'lsa, u holda ular **teng kuchlimas formulalar** deb ataladi.*

Teng kuchli va **teng kuchlimas** iboralari na faqat formulalarga nisbatan, balki ixtiyoriy mantiqiy mulohazalarga nisbatan ham qo'llanilisi mumkin. Ba'zan, teng kuchli va teng kuchlimas iboralari o'rnida, mos ravishda, **ekvivalent** va **ekvivalentmas** iboralari ishlatiladi. Ekvivalentlik tushunchasi ekvivalensiya tushunchasiga ohangdosh bo'lgani uchun, ularni bir-biridan farq qilish maqsadida ko'proq teng kuchlilik iborasidan foydalanamiz.

2- jadval

x	$x \vee x$
yo	yo
ch	ch

Berilgan formulalarning teng kuchliligini ifodalashda "$\equiv$" belgidan, teng kuchlimasligini ifodalashda esa "$\not\equiv$" belgidan foydalaniladi. Masalan, agar berilgan A va B formulalar teng kuchli formulalar bo'lsa, u holda $A \equiv B$ deb, A va B formulalar teng kuchlimas formulalar bo'lganda esa, $A \not\equiv B$ deb yoziladi. Ba'zan, formulalarning teng kuchliligini ifodalashda "$=$" belgidan, teng kuchlimasligini ifodalashda esa "$\neq$"belgidan ham foydalaniladi.

Berilgan formulalarning teng kuchli yoki teng kuchlimas bo'lishini aniqlashda, odatda, ular uchun tuzilgan chinlik jadvallaridan foydalaniladi.

4- misol. x va $x \vee x$ formulalar teng kuchli formulalardir. Haqiqatdan ham, berilgan formulalarda faqat bitta x elementar mulohaza ishtirok etgani uchun ikkita qiymatlar satriga ega chinlik jadvalini tuzamiz (2- jadvalga qarang). 2- ta'rifga asosan $x \vee x \equiv x$. ■

3- jadval

x	y	$\bar{x}$	$A \equiv \bar{x} \vee y$	$B \equiv x \rightarrow y$
yo	yo	ch	ch	ch
yo	ch	ch	ch	ch
ch	yo	yo	yo	yo
ch	ch	yo	ch	ch

5- misol. Berilgan $\bar{x} \vee y$ va $x \rightarrow y$ formulalarni mos ravishda A va B bilan belgilaymiz: $A \equiv \bar{x} \vee y$, $B \equiv x \quad y$. 3- chinlik jadvalidan ko'rinib turibdiki, A va B formulalar tarkibidagi x va y elementar mulohazalarning to'rtala qiymatlar satrlari uchun bu formulalarning mos qiymatlari bir xil. Demak, 2–ta'rifga asosan $A \rightarrow B$, ya'ni $\bar{x} \vee y \equiv x \rightarrow y$. ■

6- misol. $A \equiv (x \vee \bar{x}) \wedge y$ va $B \equiv y$ formulalar berilgan bo'lsin. 4- chinlik jadvalini tuzamiz. A va B formulalar tarkibida ishtirok etuvchi x va y elementar mulohazalarning to'rtala qiymatlar satrlari uchun bu formulalarning mos qiymatlari bir xil.

Demak, berilgan A va B formulalar ekvivalent formulalardir, ya'ni $(x \vee \bar{x}) \wedge y \equiv y$. ■

4- jadval

x	$B = y$	$\bar{x}$	$x \vee \bar{x}$	$A = (x \vee \bar{x}) \wedge y$
yo	yo	ch	ch	yo
yo	ch	ch	ch	ch
ch	yo	yo	ch	yo
ch	ch	yo	ch	ch

7- misol. $A \quad (x \vee \bar{x}) \wedge y$ va $B \equiv x$ formulalar teng kuchlimas formulalardir. Haqiqatdan ham, 5- chinlik jadvalidan ko'rinib turibdiki, berilgan A va B formulalar tarkibida ishtirok etuvchi x va y elementar mulohazalarning to'rtta qiymatlar satrlaridan ikkitasi (2- va 3- satrlari) uchun bu formulalarning mos qiymatlari har xil. Demak, 3- ta'rifga asosan, berilgan $(x \vee \bar{x}) \wedge y$ va x formulalar ekvivalentmas formulalardir, ya'ni $A \not\equiv B$. ■

5-jadval

$B \equiv x$	y	$\overline{x}$	$x \vee \overline{x}$	$A \equiv (x \vee \overline{x}) \wedge y$
yo	yo	ch	ch	yo
yo	ch	ch	ch	ch
ch	yo	yo	ch	yo
ch	ch	yo	ch	ch

Odatda, mulohazalar algebrasida ekvivalensiya bilan teng kuchlilik orasidagi farqni anglash maqsadida, ular oddiy algebradagi, mos ravishda, tenglama va ayniyat bilan qiyoslanadi. Tenglamada (masalan, x va y o'zgaruvchilarga nisbatan $2x + y = 10$ tenglamada) o'zgaruvchilarning ayrim (masalan, $x = 4$, $y = 2$) qiymatlari uchun tenglik o'rinli bo'lib, boshqa (masalan, $x = 1$, $y = 2$) qiymatlari uchun bu tenglik o'rinli bo'lmasligi mumkin. Shunga o'xshash, ekvivalensiyada ishtirok etuvchi (masalan, $x_1 \leftrightarrow (x_2 \wedge x_3)$ ekvivalensiyadagi x_1, x_2 va x_3) o'zgaruvchilarning o'rinlariga qandaydir (masalan, $x_1 = \text{ch}$, $x_2 = \text{ch}$, $x_3 = \text{ch}$) qiymatlar qo'yganda ekvivalensiya ch qiymat qabul qilib, boshqa (masalan, $x_1 = \text{yo}$, $x_2 = \text{ch}$, $x_3 = \text{ch}$) qiymatlar uchun yo qiymatga erishishi mumkin.

Oddiy algebrada ayniyat deb shunday tenglik tushuniladiki (masalan, $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ tenglik), bu tenglik, unda qatnashgan barcha o'zgaruvchilarning mumkin bo'lgan barcha qiymatlari uchun o'rinlidir. Shunga o'xshash, matematik mantiqdagi teng kuchlilik shunday mulohazaki (masalan, $x \leftrightarrow y \equiv (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$ mulohaza), bu mulohaza, unda qatnashgan barcha o'zgaruvchilarning mumkin bo'lgan barcha qiymatlari uchun to'g'ridir.

Matematik mantiqda formula tushunchasi bilan bir qatorda **mantiqiy ifoda** tushunchasi ham qo'llaniladi. Mantiqiy ifoda shunday murakkab mulohazaki, uning tarkibida berilgan elementar mulohazalardan inkor, diz'yunksiya, kon'yunksiya, implikatsiya, ekvivalensiya mantiqiy amallari bilan bir qatorda mulohazalar algebrasidagi boshqa amallarning ham chekli kombinatsiyasi va, zarur bo'lganda, mulohazalar ustida mantiqiy amallarning bajarilish tartibini ko'rsatuvchi qavslar qatnashishi mumkin. Mantiqiy ifoda tushunchasiga ham formula tushunchasiga matematik induksiya usuliga tayangan holda berilgan ta'rifga o'xshash qat'iy ta'rif berilishi mumkin. Mantiqiy ifodalarning teng kuchliligi tushunchasini ham formulalar teng kuchliligi tushunchasiga o'xshash aniqlash mumkin.

Oddiy algebrada aynan teng qiymatga ega ifodalarni bir-biri bilan almashtirish mumkin bo'lganidek, mulohazalar algebrasida ham mantiqiy ifoda tarkibidagi qismiy mantiqiy ifodalarni (formulalarni, mulohazalarni) ularga teng kuchli bo'lgan ifodalar (formulalar, mulohazalar) bilan almashtirish, ya'ni **o'rniga qo'yish usulidan** foydalanish mumkin. Bu esa murakkab ifodalarni (formulalarni, mulohazalarni) soddalashtirish imkonini beradi.

Yuqorida tenglama bilan ekvivalensiya va ayniyat bilan teng kuchlilik orasida o'xshashlik borligini ko'rdik. Endi tenglik bilan ekvivalensiya orasida farq ham borligini ko'rsatamiz. Ma'lumki, oddiy algebrada hech qanday almashtirish yordamida tenglikni arifmetik amallar (qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish) vositasida ifodalab bo'lmaydi. Mulohazalar algebrasida esa ekvivalensiyani boshqa mantiqiy amallar vositasida ifodalash mumkin. Masalan, ekvivalensiyani implikatsiya va kon'yunksiya amallari vositasida ifodalash mumkin: berilgan x va y elementar mulohazalar uchun $x \leftrightarrow y \equiv (x \to y) \wedge (y \to x)$ teng kuchlilik o'rinliligi 6- chinlik jadvalidan ham ko'rinib turibdi.

6- jadval

x	y	$x \to y$	$y \to x$	$x \leftrightarrow y$	$(x \to y) \wedge (y \to x)$
yo	yo	ch	ch	ch	ch
yo	ch	ch	yo	yo	yo
ch	yo	yo	ch	yo	yo
ch	ch	ch	ch	ch	ch

Mulohazalar algebrasini oddiy algebra bilan qiyoslashda davom etib, oddiy algebrada tenglik uchun quyidagi xossalar (aksiomalar) o'rinliligini eslatamiz:

1) ixtiyoriy $a \in \boldsymbol{R}$ son uchun $a = a$ (refleksivlik);

2) ixtiyoriy ikkita $a \in \boldsymbol{R}$ va $b \in \boldsymbol{R}$ sonlar uchun agar $a = b$ bo'lsa, u holda $b = a$ bo'ladi (simmetriklik);

3) ixtiyoriy uchta $a \in \boldsymbol{R}$, $b \in \boldsymbol{R}$ va $c \in \boldsymbol{R}$ sonlar uchun agar $a = b$ va $b = c$ bo'lsa, u holda $a = c$ bo'ladi (tranzitivlik).

Shunga o'xshash, mulohazalar algebrasidagi teng kuchlilik (ekvivalentlik) ham refleksivlik, simmetriklik va tranzitivlik xossalariga ega:

1) ixtiyoriy x mulohaza uchun $x \equiv x$;

2) ixtiyoriy ikkita x va y mulohazalar uchun, agar $x \equiv y$ bo'lsa, u holda $y \equiv x$ bo'ladi;

3) ixtiyoriy uchta x, y va z mulohazalar uchun agar $x \equiv y$ va $y \equiv z$ bo'lsa, u holda $x \equiv z$ bo'ladi.

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Quyidagi formulalarning chinlik jadvallarini tuzing:

a) $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$; b); $x \wedge \bar{y} \to (y \vee \bar{x} \to \bar{z})$; d) $(x_1 \wedge x_2) \vee x_3$;

e) $(x \vee y) \to (x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \to \bar{y})$; f) $(x_1 \to \bar{x}_2) \to \left(\overline{x_1 \vee x_2} \wedge \bar{x}_3\right)$;

g) $(\bar{x} \vee z) \wedge (y \to (u \to x))$; h) $(x \to y) \wedge (y \to z) \to z$;

i) $x_1 \to (x_2 \to (\ldots \to x_n))$, $n = 3, 4, 5, 6$;

j) $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n \to \bar{y}_1 \wedge \bar{y}_2 \wedge \ldots \wedge \bar{y}_n$, $n = 1, 2, 3$.

2. Quyidagi teng kuchliliklarni isbotlang:

a) $x \leftrightarrow y \equiv \bar{x} \leftrightarrow \bar{y}$; b) $xy \vee \bar{x}y \vee \overline{xy} \equiv x \to y$;

d) $x \to \bar{y} \equiv y \to \bar{x}$; e) $x \to (y \to z) \equiv x \wedge y \to z$;

f) $x \vee \bar{x} \equiv y \vee \bar{y}$; g) $x \vee \bar{x} \equiv y \vee \bar{y}$;

h) $x \vee (x \wedge y) \equiv x$; i) $(x \vee \bar{x}) \to y \equiv (x \wedge \bar{x}) \vee y$;

j) $x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;

k) $x \equiv (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z})$.

3. Quyidagi formulalarni soddalashtiring:

a) $(x \to x) \to x$; b) $x \to (x \to y)$; d) $\overline{\bar{x} \cdot \bar{y}} \vee (x \to y) \cdot x$;

e) $(x \leftrightarrow y) \wedge (x \vee y)$; f) $x \wedge \bar{y} \to (y \vee \bar{x} \to z)$;

g) $(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{z})$.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Formula tushunchasiga intuitiv ravishda qanday ta'rif beriladi?

2. Formula tushunchasiga matematik induksiya usuliga tayangan holda qat'iy ta'rif qanday beriladi?

3. Elementar formula deganda nimani tushunasiz?

4. Qavslarsiz ketma-ket yozilgan mantiqiy amallarni bajarish imtiyozlarini bilasizmi?

5. Qavslar haqidagi kelishuvga ko'ra qanday qoidalarga amal qilinadi?

6. Teng kuchli formulalar deganda nimani tushunasiz?

7. Qanday holda formulalar teng kuchlimas bo'ladi?

8. Odatda berilgan formulalarning teng kuchli yoki teng kuchlimas bo'lishini aniqlashda qaysi usuldan foydalaniladi?

9. Mantiqiy ifoda nima?

10. Ekvivalensiya bilan teng kuchlilik orasida qanday o'xshashlik va farqlarni bilasiz?

3.3. Tavtologiya, aynan yolg'on va bajariluvchi formulalar

Elementar mulohaza. Formula. Aynan chin, aynan yolg'on formulalar. Tavtologiya. Bajariluvchi formula. Bajarilmaydigan formula. Mantiqiy ekvivalent formulalar. Mantiq qonunlari. Yechilish muammosi. Yechuvchi usul.

3.3.1. Tavtologiya[1]. Tabiiyki, berilgan formula uning tarkibida qatnashuvchi elementar mulohazalarning mumkin bo'lgan barcha qiymatlar satrlari ucnun turli qiymatlar, jumladan, faqat ch yoki faqat yo qiymat qabul qilishi mumkin.

1- ta'rif. *Tarkibidagi elementar mulohazalarning mumkin bo'lgan barcha qiymatlar satrlarida faqat ch qiymat qabul qiluvchi formula* ***tavtologiya*** *deb ataladi.*

1- jadval

x	y	$x \to y$	$x \wedge (x \to y)$	$x \wedge (x \to y) \to y$
yo	yo	ch	yo	ch
yo	ch	ch	yo	ch
ch	yo	yo	yo	ch
ch	ch	ch	ch	ch

Tavtologiya iborasi o'rnida **aynan chin** yoki **doimo chin formula** iborasi ham qo'llanilishi mumkin. Tavtologiya, ko'pincha, J yoki 1 bilan belgilanadi. Aynan chin formula, uning tarkibida ishtirok etuvchi o'zgaruvchilarning qiymatlariga bog'liq bo'lmay, faqat bitta (ch) qiymat qabul qiladi.

Berilgan formula tavtologiya bo'lishi yoki bo'lmasligi, odatda, uning qiymatlar jadvali vositasida aniqlanadi.

1- misol. $D \equiv x \wedge (x \to y) \to y$ formula tavtologiyadir. Bu tasdiqning to'griligini tekshirish uchun 1- jadvalni (D formulaning qiymatlar jadvalini) tuzamiz.

Berilgan D formula uning tarkibida qatnashuvchi x va y elementar mulohazalarning mumkin bo'lgan hamma qiymatlar satrlarida faqat ch qiymat qabul qilgani uchun, u tavtologiyadir, ya'ni

[1] Bu so'z yunoncha ταὐτό (shuning o'zi) va λέγειν (so'z) so'zlaridan tuzilgan bo'lib, "ταυτολογία" shuning o'zini so'zlayman ma'nosini beradi.

$$x \wedge (x \to y) \to y \equiv J\ . \blacksquare$$

2- misol. Berilgan $B \equiv (\bar{x} \vee y) \to (x \to y) \to z$ formulani tekshirish uchun uning chinlik jadvalini tuzamiz (2- jadvalga qarang).

2- jadval

x	y	z	$\bar{x}$	$\bar{x} \vee y$	$x \to y$	$(\bar{x} \vee y) \to (x \to y)$	B
yo	yo	yo	ch	ch	ch	ch	yo
yo	yo	ch	ch	ch	ch	ch	ch
yo	ch	yo	ch	ch	ch	ch	yo
yo	ch	ch	ch	ch	ch	ch	ch
ch	yo	yo	yo	yo	yo	ch	yo
ch	yo	ch	yo	yo	yo	ch	ch
ch	ch	yo	yo	ch	ch	ch	yo
ch	ch	ch	yo	ch	ch	ch	ch

2- jadvaldan ko'rinib turibdiki, $(\bar{x} \vee y) \to (x \to y) \equiv J$, lekin $B \not\equiv J$. ■

Aynan chin formulalar mantiqda katta ahamiyatga ega bo'lib, ular mantiq qonunlarini ifodalaydi. Shu sababli, mantiq algebrasida **yechilish muammosi** deb yuritiluvchi chekli miqdordagi amal yordamida berilgan ixtiyoriy mantiqiy formulaning aynan chin yoki aynan chin emasligini aniqlash masalasi dolzarb muammo hisoblanadi. Yechilish muammosi faqat mulohazalar algebrasi uchungina emas, balki boshqa mantiqiy sistemalar uchun ham qo'yilishi mumkin. Yechilish muammosi mulohazalar algebrasi uchun ijobiy hal etiladi (ushbu bobning 5-paragrafiga qarang). Tabiiyki, yechilish muammosini turli usullar yordamida hal qilish mumkin. Bunday usullarni **yechuvchi usullar** deb ataymiz. Yechuvchi usul iborasi o'rnida **yechish protsedurasi** yoki **yechish algoritmi** iboralari ham qo'llanilishi mumkin.

Yechish protsedurasi sifatida chinlik jadvalini qo'llashga asoslangan usulni olish mumkin, chunki chinlik jadvali har bir muayan formula uchun yechilish muammosini to'liq hal qilish imkonini beradi. Agar berilgan formulaga mos keladigan chinlik jadvalning oxirgi ustunida faqat ch bo'lsa, u holda bu formula aynan chin, agar oxirgi ustunda hech bo'lmaganda bitta yo bo'lgan holda esa formula aynan chin emas bo'ladi. Tabiiyki, amalda bu usulni har doim ham qo'llab bo'lavermaydi, chunki u quyidagi asosiy kamchilikka ega. Agar berilgan formulada n ta elementar o‘zgaruvchi mulohazalar qatnashsa, u holda bu formulaning chinlik jadvali 2^n ta satrga ega bo‘ladi va n ning yetarli katta qiymatlarida bu yechish protsedurasini, hattoki, komputer yordamida ham oxiriga yetkazib bo‘lmaydi. Lekin, prinsip jihatdan olganda, “chinlik jadvalini qo‘llashga asoslangan usul yordamida chekli miqdordagi amallar bajarib yechilish muammosini hal qilish mumkin” degan tasdiq to‘g‘ridir. Ushbu bobning keyingi paragraflarida boshqa bir yechuvchi protsedurani keltiramiz. Bu yechuvchi protsedura berilgan formulani normal shaklga keltirish usuliga asoslangan. Normal shakllar matematik mantiqning boshqa masalalarida ham ishlatiladi.

3.3.2. Aynan yolg‘on formulalar. Formula uning tarkibida ishtirok etuvchi elementar mulohazalarning mumkin bo‘lgan barcha qiymatlar satrlari ucnun faqat yo qiymat qabul qilishi ham mumkin.

2- ta’rif. *Tarkibidagi elementar mulohazalarning mumkin bo‘lgan barcha qiymatlar satrlarida faqat yo qiymat qabul qiluvchi formula* ***aynan yolg‘on (doimo yolg‘on) yoki bajarilmaydigan formula*** *deb ataladi.*

1- va 2- ta’riflardan yaqqol ko‘rinib turibdiki, aynan yolg‘on formula tavtologiyaning inkoridir, va, aksincha, tavtologiya aynan yolg‘on formulaning inkoridir. Shuning ucnun aynan yolg‘on formulani $\overline{J}$ yoki 0 bilan belgilash joizdir.

Aynan yolg‘on formula ham, aynan chin formula kabi, o‘z tarkibida ishtirok etuvchi o‘zgaruvchilarning qiymatlariga bog‘liq emas, u faqat bitta (yo) qiymat qabul qiladi. Berilgan formulaning bajarilmaydigan formula bo‘lishi yoki bo‘lmasligi ham, odatda, uning qiymatlar jadvali yordamida aniqlanadi.

3- misol. $A \equiv (\overline{x} \vee y) \wedge \overline{x \to y}$ formula aynan yolg‘on formuladir. Haqiqatdan ham, asosiy chinlik jadvallari yordamida A formulaning chinlik jadvalini tuzsak, natijada 3- jadvalga ega bo‘lamiz.

3- jadval

x	y	$\overline{x}$	$\overline{x} \vee y$	$x \to y$	$\overline{x \to y}$	$(\overline{x} \vee y) \wedge \overline{x \to y}$
yo	yo	ch	ch	ch	yo	yo
yo	ch	ch	ch	ch	yo	yo
ch	yo	yo	yo	yo	ch	yo
ch	ch	yo	ch	ch	yo	yo

3- jadvalning oxirgi ustuniga ko‘ra $(\bar{x} \vee y) \wedge \overline{x \to y} \equiv \bar{J}$. ■

3- ta’rif. *Agar A va B formulalar uchun $A \to B$ formula tavtologiya bo‘lsa, u holda B formula A formulaning **mantiqiy xulosasi** deb ataladi.*

4- ta’rif. *Agar A va B formulalar uchun $A \leftrightarrow B$ formula tavtologiya bo‘lsa, u holda berilgan formulalar **mantiqiy ekvivalent formulalar** deb ataladi.*

4- misol. 1- misolda $D \equiv x \wedge (x \to y) \to y$ formula tavtologiya bo‘lishini ko‘rgan edik (1- jadvalga qarang). Shu sababli, 3- ta’rifga ko‘ra, y formula $x \wedge (x \to y)$ formulaning mantiqiy xulosasidir.

2- jadvalga ko‘ra (2- misolga qarang) $\bar{x} \vee y$ va $x \to y$ formulalar mantiqiy ekvivalent formulalar bo‘ladi hamda, shu bilan birga, $x \to y$ formula $\bar{x} \vee y$ formulaning mantiqiy xulosasidir degan tasdiqlar to‘g‘ridir. Albatta, $\bar{x} \vee y$ formula $x \to y$ formulaning mantiqiy xulosasidir degan tasdiq ham to‘g‘ri. ■

1- teorema. *Agar A va $A \to B$ formulalarning har biri tavtologiya bo‘lsa, u holda B formula ham tavtologiya bo‘ladi.*

Isboti. A va $A \to B$ formulalarning har biri tavtalogiya bo‘lsin. Teorema tasdig‘ining teskarisini, ya’ni A va B formulalar tarkibiga kiruvchi o‘zgaruvchilarning hech bo‘lmaganda bitta qiymatlar satrida B formula yo qiymat qabul qilsin deb faraz qilamiz. U holda, A formula tavtologiya bo‘lganligi uchun, o‘zgaruvchilarning o‘sha qiymatlar satr(lar)ida A ch qiymat qabul qiladi. Shu sababli $A \to B$ formula yo qiymat qabul qiladi. Bu esa $A \to B$ formula tavtologiyadir degan tasdiqqa qarama-qarshidir. Demak, B tavtologiyadir. ■

2- teorema. *Agar A_1 formula tarkibiga bir yoki ko‘p marta kirgan A formula o‘rniga B formulani qo‘yish natijasida B_1 formula hosil qilinsa, u holda $(A \leftrightarrow B) \to (A_1 \leftrightarrow B_1)$ formula tavtologiya bo‘ladi.*

Isboti. Agar tarkibidagi o‘zgaruvchilarning biror qiymatlar satrida A va B formulalar turli qiymatlarga ega bo‘lsa, u holda o‘sha qiymatlar satrida $A \leftrightarrow B$ formulaning qiymati yo bo‘ladi va, natijada, $A_1 \leftrightarrow B_1$ formulaning qiymati qanday bo‘lishidan qat’i nazar, $(A \leftrightarrow B) \to (A_1 \leftrightarrow B_1)$ formula ch qiymat qabul qiladi.

Agar tarkibidagi o‘zgaruvchilarning qandaydir qiymatlar satrida A va B formulalar bir xil qiymat qabul qilsa, u holda o‘sha qiymatlar satrida

A_1 va B_1 formulalar ham bir xil qiymat qabul qiladi, chunki teoremaning shartiga asosan B_1 formula A_1 formuladan A formulaning o‘rniga B formulani qo‘yish natijasida hosil qilingan. Demak, bu holda $A \leftrightarrow B$ va $A_1 \leftrightarrow B_1$ formulalarning ikkalasi ham ch qiymat qabul qiladi. Shuning uchun $(A \leftrightarrow B) \to (A_1 \leftrightarrow B_1)$ formula ham ch qiymat qabul qiladi.

Shunday qilib, yuqorida qaralgan mumkin bo‘lgan ikkala holda ham $(A \leftrightarrow B) \to (A_1 \leftrightarrow B_1)$ formula ch qiymat qabul qiladi. Demak, $(A \leftrightarrow B) \to (A_1 \leftrightarrow B_1)$ formula tavtologiya bo‘ladi. ■

2- teoremaga ko’ra, agar A_1 formula tarkibiga bir yoki ko‘p marta kirgan A formula o‘rniga B formulani qo‘yish natijasida B_1 formula hosil qilinsa, u holda A va B formulalarning mantiqiy ekvivalentligidan A_1 va B_1 formulalarning ham mantiqiy ekvivalentligi chiqadi.

3.3.3. Bajariluvchi formulalar. Endi berilgan formula uning tarkibida qatnashuvchi elementar mulohazalarning ba’zi qiymatlar satrlari ucnun ch, ba’zilari ucnun esa yo qiymat qabul qilish holini qaraymiz.

5- ta’rif. *Tarkibidagi elementar mulohazalarning kamida bitta qiymatlar satrida ch qiymat qabul qiluvchi aynan chin bo‘lmagan formula **bajariluvchi formula** deb ataladi.*

5- misol. $x \to y$, $x \wedge (x \to y)$, $\bar{x}$, $\bar{x} \vee y$ va $x \to y$ formulalar bajariluvchi formulalardir, lekin $x \wedge (x \to y) \to y$, $(\bar{x} \vee y) \to (x \to y)$ va $(\bar{x} \vee y) \wedge \overline{x \to y}$ formulalar bajariluvchi formulalar emas (1-, 2- va 3- jadvallarga qarang). ■

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Quyidagilarning qaysilari aynan chin, qaysilari aynan yolg‘on formula bo‘lishini aniqlang:

a) $\overline{\overline{x \vee y} \to \overline{x \wedge y}}$; b) $\bar{p} \to (p_1 \to p_2)$;

d) $(x \to y) \to (\bar{y} \to \bar{x})$; e) $((p \wedge q) \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \to p)$;

f) $\overline{p_1 \to (p_2 \to p_1)}$; g) $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$;

h) $(x \to y) \wedge (x \to \bar{y}) \to \bar{x}$; i) $x \wedge (x \to y) \wedge (x \to \bar{y})$;

j) $x \vee \bar{x} \to y \wedge \bar{y}$; k) $(x \to (y \to z)) \to (x \wedge y \to z)$;

l) $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$.

2. Quyidagi formulalarning har biri bajariluvchi formula bo‘lishini ko‘rsating:

a) $(y \vee \overline{x}) \wedge (z \vee \overline{x})$; b) $a \wedge (b \wedge c \to a \wedge b)$;

c) $x \to y \wedge z$; d) $((a \vee b) \vee c \wedge \overline{c}) \wedge ((a \vee \overline{b}) \vee c \wedge \overline{c})$.

3. Quyidagi formulalarni tavtologiyalar, doimo yolg'on va bajariluvchi formulalar guruhlariga ajrating:

a) $(x \to y) \to \overline{x} \wedge y \vee \overline{y}$; b) $\overline{a\overline{b}} \leftrightarrow \overline{a} \vee a \wedge b$;

c) $(x \leftrightarrow y) \wedge (x\overline{y} \vee \overline{x}y)$; d) $a \wedge b \to (a \to \overline{b})$

e) $x \vee y \to (x \leftrightarrow y)$; f) $(a \to c) \wedge (b \to c) \to (a \to b)$

g) $x \vee y \to z$ h) $x \wedge y \wedge z \vee \overline{x} \wedge y \wedge z \vee x \wedge \overline{y} \wedge z$.

4. Quyidagilarni aynan chin va aynan yolg'on formulalar guruhlariga ajrating:

a) $\overline{(x \to z) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z))}$;

b) $(p_1 \to p_2) \to ((p_1 \vee p) \to (p_2 \vee p))$;

d) $(p_1 \to (p_2 \to p_3) \to ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_3))$;

f) $\overline{(p_1 \to p_2) \to ((p_1 \wedge p) \to (p_2 \wedge p))}$;

g) $x \wedge y \to x$; h) $x \to (x \vee y)$;

i) $(x \to y) \to (\overline{y} \to \overline{x})$; j) $(\overline{y} \to \overline{x}) \to (x \to y)$;

k) $(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) \wedge (x_1 \vee \ldots \vee x_n \to \overline{y}) \wedge y$;

l) $x_1 \to (x_2 \to \ldots \to (x_{n-1} \to (x_n \to y \vee \overline{y}))\ldots)$.

5. Agar x elementar mulohazaning qiymati ch bo'lsa, u holda $\overline{x} \wedge y \to z$ va $\overline{x} \to (y \vee z)$ implikatsiyalarning qiymatlarini aniqlang.

6. Agar $x \to y$ implikatsiyaning qiymati ch bo'lsa, u holda $x \to (x \to y)$, $\overline{x \to y} \to y$ va $(x \to y) \to z$ implikatsiyalarning qiymatlarini aniqlang.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Tavtologiya nima?
2. Berilgan formula tavtologiya bo'lishi yoki bo'lmasligi, odatda, qanday aniqlanadi?
3. Qanday muammo mantiq algebrasida yechilish muammosi deb yuritiladi?
4. Yechilish muammosini hal qilish usullari nima deb ataladi?

5. Yechish protsedurasi sifatida chinlik jadvalini qo'llashga asoslangan usulning asosiy kamchiligi nimada?

6. Aynan yolg'on formula deganda nimani tushunasiz?

7. Tavtologiya bilan aynan yolg'on formula orasida qanday bog'lanish bor?

8. Qanday holda biror formula boshqa formulaning mantiqiy xulosasi deb ataladi?

9. Qanday formulalar mantiqiy ekvivalent formulalar deb ataladi?

10. Agar A va $A \to B$ formulalarning har biri tavtologiya bo'lsa, u holda B formula haqida mima deyish mumkin?

11. Agar A_1 formula tarkibiga bir yoki ko'p marta kirgan A formula o'rniga unga teng kuchli B formulani qo'yish natijasida B_1 formula hosil qilinsa, u holda $(A \leftrightarrow B) \to (A_1 \leftrightarrow B_1)$ formula haqida mima deyish mumkin?

12. Bajariluvchi formula deganda nimani tushunasiz?

13. Agar $x \to y$ implikatsiya ch qiymat, $x \leftrightarrow y$ ekvivalensiya esa yo qiymat qabul qilishi ma'lum bo'lsa, u holda $y \to x$ implikatsiyaning qiymati haqida mima deyish mumkin?

14. Agar $x \leftrightarrow y$ ekvivalensiya ch qiymat qabul qilishi ma'lum bo'lsa, u holda $\overline{x} \leftrightarrow y$ va $x \leftrightarrow \overline{y}$ ekvivalensiyalarning qiymatlari haqida mima deyish mumkin?

3.4. Asosiy teng kuchliliklar. Teng kuchli formulalarga doir teoremalar

Asosiy teng kuchliliklar. Kon'yunksiya, diz'yunksiya, inkor amallari qatnashgan mulohazalar. Kommutativlik, assotsiativlik va distributivlik qonunlari. Qarama-qarshilik, uchinchisini istisno qilish, idempotentlik va yutilish qonunlari.

3.4.1. Asosiy teng kuchliliklar. Bu paragrafda oddiy algebrada ma'lum bo'lgan ayrim ayniyatlarga o'xshash mantiqiy teng kuchliliklarni va teng kuchli formulalarga doir ayrim teoremalarni keltiramiz.

Ma'lumki, haqiqiy sonlarni qo'shish va ko'paytirish amali uchun quyidagi tasdiqlar o'rinlidir:

1) ixtiyoriy ikkita $x \in \boldsymbol{R}$ va $y \in \boldsymbol{R}$ sonlar uchun $x + y = y + x$ bo'ladi (qo'shishning kommutativlik qonuni);

2) ixtiyoriy uchta $x \in \boldsymbol{R}$, $y \in \boldsymbol{R}$ va $z \in \boldsymbol{R}$ sonlar uchun $(x + y) + z = x + (y + z)$ bo'ladi (qo'shishning assotsiativlik qonuni);

3) ixtiyoriy ikkita $x \in \boldsymbol{R}$ va $y \in \boldsymbol{R}$ sonlar uchun $xy = yx$ bo‘ladi (ko‘paytirishning kommutativlik qonuni);

4) ixtiyoriy uchta $x \in \boldsymbol{R}$, $y \in \boldsymbol{R}$ va $z \in \boldsymbol{R}$ sonlar uchun $(xy)z = x(yz)$ bo‘ladi (ko‘paytirishning assotsiativlik qonuni);

5) ixtiyoriy uchta x $\boldsymbol{R}$, $y \in \boldsymbol{R}$ va $z \in \boldsymbol{R}$ sonlar uchun $x(y+z) = xy + xz$ bo‘ladi

(ko‘paytirishning yig‘indiga nisbatan distributivlik qonuni).

Mulohazalar algebrasida bu ayniyatlarga o‘xshash, ixtiyoriy mantiqiy x, y va z o‘zgaruvchilar uchun quyidagi teng kuchliliklar o‘rinlidir:

$$x \vee y \equiv y \vee x, \tag{1}$$

$$(x \vee y) \vee z \equiv x \vee (y \vee z), \tag{2}$$

$$x \wedge y \equiv y \wedge x, \tag{3}$$

$$(x \wedge y) \wedge z \equiv x \wedge (y \wedge z), \tag{4}$$

$$x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z). \tag{5}$$

Bu teng kuchliliklarning to‘g‘riligini tekshirish uchun chinlik jadvalidan foydalanish mumkin. Yuqoridagi (1) – (4) teng kuchliliklarning to‘g‘riligini tekshirishni o‘quvchiga havola qilib, faqat (5) teng kuchlilikning to‘g‘riligini tasdiqlaydigan chinlik jadvalini keltirish bilan kifoyalanamiz (1- jadvalga qarang). (1) – (4) teng kuchliliklardan ko‘rinib turibdiki, diz’yunksiya va kon’yunksiya mantiqiy amallari, oddiy algeb-

1- jadval

x	y	z	$y \vee z$	$x \wedge y$	$x \wedge z$	$x \wedge (y \vee z)$	$(x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
yo	yo	yo	yo	yo	yo	yo	yo
yo	yo	ch	ch	yo	yo	yo	yo
yo	ch	yo	ch	yo	yo	yo	yo
yo	ch	ch	ch	yo	yo	yo	yo
ch	yo	yo	yo	yo	yo	yo	yo
ch	yo	ch	ch	yo	ch	ch	ch
ch	ch	yo	ch	ch	yo	ch	ch
ch	ch	ch	ch	ch	ch	ch	ch

radagi qo‘shish va ko‘paytirish amallari kabi, kommutativlik va assotsiativlik xossalariga egadir.

Mulohazalar algebrasida, oddiy algebradan farqli o‘laroq, kon’yunksiyaning diz’yunksiyaga nisbatan distributivlik xossasi ((5) teng kuchlilik) bilan bir qatorda diz'yunksiyaning kon'yunksiyaga nisbatan distributivlik xossasi ham o'rinlidir. Diz'yunksiyaning kon'yunksiyaga nisbatan distributivlik xossasini ifodalovchi

$$x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z) \tag{6}$$

teng kuchlilikning to'g'riligini 2- chinlik jadvali tasdiqlaydi.

2-jadval

x	y	z	$y \wedge z$	$x \vee y$	$x \vee z$	$x \vee (y \wedge z)$	$(x \vee y) \wedge (x \vee z)$
yo	yo	yo	yo	yo	yo	yo	yo
yo	yo	ch	yo	yo	ch	yo	yo
yo	ch	yo	yo	ch	yo	yo	yo
yo	ch	ch	ch	ch	ch	ch	ch
ch	yo	yo	yo	ch	ch	ch	ch
ch	yo	ch	yo	ch	ch	ch	ch
ch	ch	yo	yo	ch	ch	ch	ch
ch	ch	ch	ch	ch	ch	ch	ch

Shuni ta'kidlash kerakki, oddiy algebrada (6) teng kuchlilikka o'xshash tenglik ayniyat bo'lmaydi, ya'ni $x + yz = (x + y)(x + z)$ tenglik ixtiyoriy $x \in \boldsymbol{R}$, $y \in \boldsymbol{R}$ va $z \in \boldsymbol{R}$ sonlar uchun bajarilmasligi mumkin.

Yuqorida ifodalangan o'xshashliklar asosida kon'yunksiya amali iborasi o'rnida mantiqiy ko'paytma amali iborasi, diz'yunksiya amali iborasi o'rnida esa mantiqiy yig'indi amali iborasi ham qo'llaniladi[1].

Mulohazalar algebrasini oddiy algebra bilan qiyoslashda davom etib $x \leftrightarrow y \equiv (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$ teng kuchlilik o'rinliligini eslatamiz[2]. Bu teng kuchlilik berilgan x va y mulohazalarning $x \leftrightarrow y$ ekvivalensiyasi ikkita $x \rightarrow y$ va $y \rightarrow x$ implikatsiyalarning $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$ kon'yunksiyasi shaklida ifodalanishi mumkinligini anglatadi. Boshqacha qilib aytganda, ekvivalensiya ($\leftrightarrow$) belgisini implikatsiya ($\rightarrow$) va kon'yunksiya ($\wedge$) belgilari vositasida ifodalash mumkin. Oddiy algebrada esa, hech qanday almashtirish yordamida tenglik ($=$) belgisini arifmetik amallar (qo'shish ($+$), ayirish ($-$), ko'paytirish ($\times$), bo'lish ($/$)) vositasida ifodalab bo'lmaydi.

---

[1] Ushbu bobning 1- paragrafiga qarang.
[2] Ushbu bobning 2- paragrafiga qarang.

Endi implikatsiyani boshqa mantiqiy amallar vositasida ifodalash masalasi bilan shug'ullanamiz. 3- chinlik jadvalidan ko'rinib turibdiki, $x \quad y$ va $\overline{x} \vee y$ formulalar teng kuchlidir.

3- jadval

x	y	$\overline{x}$	$x \rightarrow y$	$\overline{x} \vee y$
yo	yo	ch	ch	ch
yo	ch	ch	ch	ch
ch	yo	yo	yo	yo
ch	ch	yo	ch	ch

Demak, (1) – (6) teng kuchliliklar qatoriga yana bitta

$$x \rightarrow y \equiv \overline{x} \vee y \qquad (7)$$

teng kuchlilik qo'shiladi. (7) teng kuchlilik implikatsiya ($\rightarrow$) belgisini inkor ($\neg$) va diz'yunksiya ($\vee$) belgilari vositasida ifodalash mumkinligini anglatadi.

Yuqoridagi mulohazalar asosida , $\rightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $\neg$ belgilar ishtirok etgan ixtiyoriy mantiqiy ifodani (formulani) faqat $\vee$, $\wedge$, $\neg$ belgilar qatnashgan teng kuchli mantiqiy ifoda (formula) bilan almashtirish mumkin, degan xulosaga kelamiz. Ravshanki, bunga o'xshash xulosani oddiy algebrada tasdiqlash mumkin emas. Ixtiyoriy mantiqiy ifodani faqat $\vee$, $\wedge$, $\neg$ belgilar qatnashgan teng kuchli mantiqiy ifoda bilan almashtirish mumkinligi mulohazalar algebrasining ko'plab amaliy tatbiqlarga egaligidan darak beradi.

Mantiqiy ifodada ishtirok etuvchi $\vee$ belgini $\wedge$ va $\neg$ belgilari orqali hamda $\wedge$ belgini $\vee$ va $\neg$ belgilari orqali ifodalash mumkin. Bu tasdiq **ikki karra inkorni o'chirish qonuni** va **de Morgan qonunlari** deb ataluvchi teng kuchliliklarga asoslanadi. Ikki karra inkorni o'chirish qonuni

$$\overline{\overline{x}} \equiv x, \qquad (8)$$

de Morgan qonunlari esa

$$\overline{x \vee y} \equiv \overline{x} \wedge \overline{y}, \qquad (9)$$

$$\overline{x \wedge y} \equiv \overline{x} \vee \overline{y} \qquad (10)$$

teng kuchliliklar bilan ifodalanadi. Bu qonunlarning o'rinliligi esa chinlik jadvallari yordamida osongina tekshiriladi.

Mantiqiy ifodada ishtirok etuvchi $\vee$ belgini $\wedge$ va $\neg$ belgilari orqali ifodalash uchun

$$x \vee y \equiv \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}} \qquad (11)$$

va, shunga o'xshash, $\wedge$ belgini $\vee$ va $\neg$ belgilari orqali ifodalash uchun

$$x \wedge y \equiv \overline{\overline{x} \vee \overline{y}} \qquad (12)$$

teng kuchliliklardan foydalaniladi. (11) va (12) teng kuchliliklarni isbotlashni o'quvchiga havola qilamiz.

Shunday qilib, mulohazalar algebrasining ixtiyoriy mantiqiy ifodasini unga teng kuchli va tarkibida mantiqiy amal belgilari sifatida faqat $\wedge$ va $\neg$ yoki faqat $\vee$ va $\neg$ belgilar qatnashgan mantiqiy ifoda bilan almashtirish mumkin. Shunga o'xshash, mulohazalar algebrasining ixtiyoriy mantiqiy ifodasini unga teng kuchli va tarkibida mantiqiy amal belgilari sifatida faqat $\rightarrow$ va $\neg$ belgilar qatnashgan mantiqiy ifoda bilan almashtirish imkoniyati borligini ko'rsatish mumkin.

Shuni ta'kidlash kerakki, mulohazalar algebrasining ixtiyoriy mantiqiy ifodasini unga teng kuchli va tarkibida mantiqiy amal belgisi sifatida faqatgina Sheffer shtrixi bo'lgan mantiqiy ifoda bilan almashtirish imkoniyati ham bor. Bu tasdiq, mulohazalar algebrasining ixtiyoriy mantiqiy ifodasini unga teng kuchli va tarkibida mantiqiy amal belgilari sifatida faqat $\wedge$ va $\neg$ belgilar qatnashgan mantiqiy ifoda bilan almashtirish mumkinligi hamda

$$\overline{x} \equiv x|x\,,\; x \wedge y \equiv (x|y)\,|\,(x|y)$$

teng kuchliliklarga asoslanadi. Sheffer amali ta'rifidan foydalanib, chinlik jadvali yordamida, yuqoridagi ikkita va quyidagi uchta teng kuchliliklarning o'rinliligini osongina tekshirish mumkin:

$$x \vee y \equiv \overline{x}|\overline{y}\,,\; x \rightarrow y \equiv x|\overline{y}\,,\; x \leftrightarrow y \equiv (x\,|\,\overline{y}) \wedge (\overline{x}\,|\,y)\,.$$

Bu uchta teng kuchlilik oldingi ikkita teng kuchlilik bilan birgalikda yuqorida ifodalangan mulohazalar algebrasining ixtiyoriy mantiqiy ifodasini unga teng kuchli va tarkibida mantiqiy amal belgisi sifatida faqatgina Sheffer shtrixi bo'lgan mantiqiy ifoda bilan almashtirish mumkinligi haqidagi tasdiqning to'g'riligiga yana bir asosdir.

1- misol. $(x \rightarrow y)(y \rightarrow x) \rightarrow (\overline{x} \leftrightarrow \overline{y})$ mantiqiy ifodani tarkibida mantiqiy amal belgilari sifatida faqat $\wedge$, $\vee$ va $\neg$ belgilari qatnashadigan qilib almashtirish talab etilgan bo'lsin. Avvalo, $x \leftrightarrow y \equiv$ $\equiv (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$ teng kuchlilik yordamida $\leftrightarrow$ belgisini $\rightarrow$ va $\wedge$ belgilari orqali, (7) teng kuchlilik vositasida $\rightarrow$ belgisini $\vee$ va $\neg$ belgilari orqali ifodalaymiz hamda (8) teng kuchlilikdan foydalanamiz:

$$(x \rightarrow y)(y \rightarrow x) \rightarrow (\overline{x} \leftrightarrow \overline{y}) \equiv (x \rightarrow y)(y \rightarrow x) \rightarrow (\overline{x} \rightarrow \overline{y})(\overline{y} \rightarrow \overline{x}) \equiv$$

$$\equiv (\overline{x} \vee y)(\overline{y} \vee x) \rightarrow (\overline{\overline{x}} \vee \overline{y})(\overline{\overline{y}} \vee \overline{x}) \equiv \overline{(\overline{x} \vee y)(\overline{y} \vee x)} \vee (x \vee \overline{y})(y \vee \overline{x})\,.$$

Kommutativlik va distributivlik qonunlaridan foydalanib, berilgan ifoda uchun quyidagi teng kuchlilikni yozish mumkin:

$$(x \to y)(y \to x) \to (\bar{x} \leftrightarrow \bar{y}) \equiv xy \vee \bar{x}y \vee x\bar{x} \vee x\bar{y} \vee \bar{y}y \vee \bar{x}\,\bar{y}\,. \ \blacksquare$$

“Mulohazalar algebrasining ixtiyoriy mantiqiy ifodasini unga teng kuchli va tarkibida mantiqiy amal belgisi sifatida faqat uchta (masalan, $\neg$, $\wedge$ va $\vee$), yo faqat ikkita (masalan, $\neg$ va $\wedge$), yoki faqat bitta (masalan, Sheffer shtrixi) amal belgisi bo‘lgan mantiqiy ifoda bilan almashtirishning hojati bormi?” degan tabiiy savol tug‘iladi. Bu savolga, vaziyatga qarab, ham salbiy, ham ijobiy javob berish mumkin.

Birinchidan, ishlatilishi ko‘zda tutilgan formulalardan ko‘rinib turibdiki, berilgan mantiqiy ifoda zarur almashtirishlar bajarilib, faqat uchta, yo faqat ikkita yoki faqat bitta mantiqiy amal belgisi qatnashgan mantiqiy ifodaga keltirilganda, u, odatda, dastlabki ifodaga nisbatan ko‘p sondagi uch, yo ikki, yoki bir xil mantiqiy amallar qatnashgan ifodaga keladi. Shu sababli bunday mantiqiy ifodani ko‘zdan kechirish qiyinlashadi.

Ikkinchidan, bunday almashtirish imkoniyati borligi mulohazalar algebrasining turli amaliy masalalarini hal etishda katta ahamiyatga ega bo‘lishiga sabab bo‘ladi, jumladan, uning elektrotexnikadagi tatbiqida bu imkoniyat muhim rol o‘ynaydi, chunki u yerda ishlatiladigan mantiqiy ifodalarda faqat uchta $\vee$, $\wedge$, $\neg$ belgi qatnashadi. Bundan tashqari, mantiqiy xulosalarning qonuniyatlarini bayon etishda bu imkoniyatdan foydalanish mumkin.

To‘g‘riligini chinlik jadvalidan foydalanib osongina tekshirish mumkin bo‘lgan quyidagi teng kuchliliklardan (qonunlardan) ixtiyoriy mantiqiy ifodani kerakli ko‘rinishga keltirishda foydalanish mumkin.

$x \wedge \bar{x} \equiv$ yo – (**qarama-qarshilik qonuni**), (13)

$x \vee \bar{x} \equiv$ ch – (**uchinchisini istisno qilish qonuni**), (14)

$x \wedge x \equiv x$, $x \vee x \equiv x$ – (**idempotentlik qonunlari**), (15)

$x \wedge (x \vee y) \equiv x$, $x \vee x \wedge y \equiv x$ (**yutilish qonunlari**), (16)

$x \vee$ yo $\equiv x$, $x \vee$ ch $\equiv$ ch, $x \wedge$ ch $\equiv x$, $x \wedge$ yo $\equiv$ yo. (17)

(1)–(17) teng kuchliliklar **asosiy teng kuchliliklar** deb ataladi.

4.2. Teng kuchli formulalarga doir teoremalar. Endi teng kuchli formulalarga doir ayrim teoremalarni keltiramiz.

1-teorema. *A va B formulalar teng kuchli bo‘lishi uchun $\bar{A}$ va $\bar{B}$ formulalar teng kuchli bo‘lishi zarur va yetarli.*

Isboti. Berilgan A va B formulalar uchun $A \equiv B$ bo‘lsin. U holda A va B formulalar chinlik jadvalining ixtiyoriy satrida bu formulalarning qiymatlari bir xil bo'ladi. Shuning uchun $\overline{A}$ va $\overline{B}$ formulalar chinlik jadvalining ixtiyoriy satrida ularning qiymatlari ham bir xildir. Demak, $\overline{A} \equiv \overline{B}$. Xuddi shunga o'xshash, $\overline{A} \equiv \overline{B}$ teng kuchlilikdan $A \equiv B$ teng kuchlilik kelib chiqishini ko'rsatish mumkin. ■

2- teorema. *A va B formulalar teng kuchli bo'lishi uchun $A \leftrightarrow B$ formula tavtologiya bo'lishi zarur va yetarli.*

Isboti. 1. Berilgan A va B formulalar uchun $A \equiv B$ bo'lsin. U holda ekvivalensiya ta'rifiga asosan, $A \leftrightarrow B$ formula chinlik jadvalining barcha satrlaridagi qiymatlari ch bo'ladi. Demak, $A \leftrightarrow B$ formula tavtologiyani ifodalaydi.

2. $A \leftrightarrow B$ formula tavtologiya bo'lsin. U holda $A \leftrightarrow B$ formula chinlik jadvalining $A \leftrightarrow B$ ustunidagi barcha qiymatlar ch bo'ladi. Bundan, ekvivalensiya ta'rifiga ko'ra, chinlik jadvalining har bir satridagi A va B formulalarga mos qiymatlar bir xil, ya'ni $A \equiv B$ teng kuchlilik o'rinliligi kelib chiqadi. ■

2- misol. De Morgan qonunlari va 2- teoremaga ko'ra $\overline{x \vee y} \leftrightarrow \overline{x} \wedge \overline{y}$ va $\overline{x \wedge y} \leftrightarrow \overline{x} \vee \overline{y}$ formulalarning har biri tavtologiyadir. ■

3- teorema. *Berilgan A va B formulalar uchun $A \leftrightarrow B$ formula tavtologiya bo'lishi uchun $\overline{A} \leftrightarrow \overline{B}$ formula tavtologiya bo'lishi zarur va yetarli.*

Isboti. 1. Berilgan A va B formulalar uchun $A \leftrightarrow B$ formula tavtologiya bo'lsin. U holda, 2- teoremaga asosan, $A \equiv B$ bo'ladi. Bundan, 1- teoremaga asosan, $\overline{A} \equiv \overline{B}$ teng kuchlilik kelib chiqadi. Demak, ekvivalensiyaning ta'rifiga asosan, $\overline{A} \leftrightarrow \overline{B}$ aynan tavtologiyadir.

2. Berilgan A va B formulalar uchun $\overline{A} \leftrightarrow \overline{B}$ tavtologiya bo'lsin. Bundan $\overline{A} \equiv \overline{B}$ kelib chiqadi va, o'z navbatida, $A \equiv B$ bo'ladi. Demak, $A \leftrightarrow B$ formula tavtologiyadir. ■

4- teorema. *Ixtiyoriy formulaning istalgan qismi o'rniga shu qismi bilan teng kuchli boshqa formulani qo'yishdan hosil bo'lgan yangi formula dastlabki formula bilan teng kuchlidir.*

Isboti o'quvchiga havola qilinadi. ■

3- misol. $\overline{x \vee y} \rightarrow z$ formula berilgan bo'lsin. Bu formula tarkibidagi $\overline{x \vee y}$ qismi o'rniga unga teng kuchli bo'lgan $\overline{x} \wedge \overline{y}$ formulani qo'yish natijasida $\overline{x} \wedge \overline{y} \rightarrow z$ formula hosil bo'ladi. Bu formulaga (7), (8) va (10) teng kuchliliklarni qo'llab, berilgan formulaga teng kuchli $x \vee y \vee z$ formulani hosil qilish mumkin. Berilgan va oxirgi formulalarning teng kuchliligini chinlik jadvali vositasida ham ko‘rsatish mumkin. Bu ish o‘quvchiga havola qilinadi. ■

Muammoli masala va topshiriqlar

1. (1) – (4) teng kuchliliklarning to‘g‘riligini tekshiring.

2. Ikki karra inkorni o‘chirish va de Morgan qonunlarini isbotlang.

3. $\overline{x \to y} \equiv x \wedge \overline{y}$ teng kuchlilikni isbotlang.

4. $(\overline{x \vee y} \to \overline{x} \vee y) \wedge y$ formulani soddalashtiring.

5. $x \to (y \to x)$ formulaning aynan chinligini isbotlang.

6. Quyidagi teng kuchliliklarni isbotlang:

a) $x \vee \overline{x} \equiv y \vee \overline{y}$; b) $x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;

d) $x \vee (x \wedge y) \equiv x$; e) $(x \vee \overline{x}) \to y \equiv (x \wedge \overline{x}) \vee y$;

f) $(x \vee y) \wedge (x \vee \overline{y}) \equiv x$; g) $x \vee (\overline{x} \wedge y) \equiv x \vee y$;

h) $(x \vee y) \wedge (z \vee t) \equiv xz \vee yz \vee xt \vee yt$;

i) $xy \vee zt \equiv (x \vee z)(y \vee z)(x \vee t)(y \vee t)$;

j) $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \to y \equiv x_1 \to (x_2 \to (\ldots \to (x_n \to y)\ldots))$.

7. Quyidagi formulalarni soddalashtiring:

a) $(x \to y) \wedge (y \to z) \to (z \to x)$;

b) $(x \vee \overline{y} \to (z \to y \vee \overline{y} \vee x)) \wedge (x \vee \overline{x \to (x \to x)}) \to y$;

d) $(x \wedge \overline{x \wedge \overline{x} \to y \wedge \overline{y}} \to z) \vee x \vee (y \wedge z) \vee (y \wedge z)$;

e) $(x \wedge (y \vee z \to y \vee z)) \vee (y \wedge x \wedge \overline{y}) \vee x \vee (y \wedge \overline{x \wedge \overline{x}})$.

8. Agar F aynan yolg‘on formula bo‘lsa, u holda $x \wedge \overline{y} \to F \equiv x \to y$ bo‘lishini isbot qiling.

9. (11) va (12) teng kuchliliklarni isbotlang.

10. Barcha asosiy mantiqiy amallarni quyidagi amallar orqali ifodalang:

a) diz’yunksiya, kon’yunksiya va inkor;

b) kon’yunksiya va inkor;

d) diz’yunksiya va inkor;

e) implikatsiya va inkor.

11. 4- teoremani isbot qiling.

12. $\overline{x \vee y} \to z$ va $x \vee y \vee z$ formulalarning teng kuchliligini chinlik jadvali vositasida ko‘rsating.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Asosiy teng kuchliliklar deganda nimani tushunasiz?
2. Oddiy algebrada ma'lum bo'lgan ayniyatlarga o'xshash qanday mantiqiy teng kuchliliklarini bilasiz?
3. Mulohazalar algebrasidagi diz'yunksiyaning kon'yunksiyaga nisbatan distributivlik xossasiga o'xshash oddiy algebrada yig'indining ko'paytirishga nisbatan distributivlik qonuni bormi?
4. Nega $\leftrightarrow$, $\rightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $\neg$ belgilar ishtirok etgan ixtiyoriy mantiqiy ifodani (formulani) faqat $\vee$, $\wedge$, $\neg$ belgilar qatnashgan teng kuchli mantiqiy ifoda (formula) bilan almashtirish mumkin?
5. Ikki karra inkorni o'chirish qonunini qanday isbotlash mumkin?
6. De Morgan qonunlarini bilasizmi?
7. Nima uchun mulohazalar algebrasining ixtiyoriy mantiqiy ifodasini unga teng kuchli va tarkibida mantiqiy amal belgisi sifatida faqatgina Sheffer shtrixi bo'lgan mantiqiy ifoda bilan almashtirish mumkin?
8. Qarama-qarshilik, uchinchisini istisno qilish, va yutilish qonunlarini isbotlay olasizmi?
9. Teng kuchli formulalarga doir teoremalarning isbotlarini bilasizmi?

3.5. Formulalarning normal shakllari

Tavtologiya. Aynan yolg'on formula. Elementar kon'yunksiya va diz'yunksiyalar. KNSh. DNSh. Kon'yunktiv va diz'yunktiv hadlar.

3.5.1. Elementar kon'yunksiya va elementar diz'yunksiya tushunchalari. Turli amaliy masalalarni yechishda mantiq algebrasining ahamiyati kattadir. Jumladan, kontakt va rele-kontaktli sxemalar bilan bog'liq muammolarni hal qilishda, diskret ravishda ish ko'ruvchi texnikaga oid masalalarni hamda matematik dasturlashning turli masalalarini yechishda mantiq algebrasi ko'p qo'llaniladi. Mantiq algebrasidan foydalanib amaliy masalalarni hal qilishda esa mantiqiy **formulalarning normal shakllari** deb ataluvchi yozuvlar katta ahamiyatga egadir.

Oldingi paragraflarda o'rganilgan teng kuchliliklar yordamida zarur almashtirishlar bajarib mulohazalar algebrasining berilgan ixtiyoriy formulasini turli ko'rinishlarda yozish mumkin. Masalan, $\overline{a} \rightarrow bc$ formulani $a \vee bc$ yoki $(a \vee b)(a \vee c)$ ko'rinishlarda yoza olamiz. Ushbu paragrafda quyidagi teng kuchliliklardan foydalanib formulalarning normal shakllari o'rganiladi:

$$\left.\begin{array}{ll}
\overline{x \wedge y} \equiv \overline{x} \vee \overline{y}, & \overline{x \vee y} \equiv \overline{x} \wedge \overline{y}, \\
x \to y \equiv \overline{x} \vee y, & \overline{x \to y} \equiv x \wedge \overline{y}. \\
x \leftrightarrow y \equiv (\overline{x} \vee y) \wedge (x \vee \overline{y}), & \\
\overline{x \leftrightarrow y} \equiv (x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge y), & \\
x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z), & \\
x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z). &
\end{array}\right| \qquad (1)$$

Formulalarning normal shakllarini o‘rganish jarayonida (1) teng kuchliliklardan tashqari asosiy teng kuchliliklar qatoriga kiruvchi $x \vee y \equiv y \vee x$, $x \wedge y \equiv y \wedge x$, $(x \vee y) \vee z \equiv x \vee (y \vee z)$, $(x \wedge y) \wedge z \equiv x \wedge (y \wedge z)$ teng kuchliliklardan, ikki karra inkorni o‘chirish qonunidan, yutilish qonunlarini ifodalovchi $x \wedge (x \vee y) \equiv x$ va $x \vee x \wedge y \equiv x$ teng kuchliliklardan,

$$\left.\begin{array}{l}
A \wedge A \equiv A,\ A \vee A \equiv A,\ A \wedge J \equiv A,\ A \vee J \equiv J, \\
A \wedge \overline{J} \equiv \overline{J},\ A \vee \overline{J} \equiv A,\ A \vee \overline{A} \equiv J,\ A \wedge \overline{A} \equiv \overline{J}
\end{array}\right\} \qquad (2)$$

teng kuchliliklardan ham foydalanamiz.

Faraz qilaylik, σ – ch yoki yo qiymat qabul qiluvchi qandaydir parametr bo‘lsin. Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$x^{\sigma} = x\sigma \vee \overline{x}\overline{\sigma}.$$

Ravshanki,

$$x^{\sigma} = \begin{cases} x, \text{ agar } \sigma = \text{ch bo'lsa}, \\ \overline{x}, \text{ agar } \sigma = \text{yo bo'lsa}, \end{cases}$$

hamda faqat va faqat $x = \sigma$ bo‘lgandagina x^{σ} ch qiymat qabul qiladi.

1- ta’rif. *Berilgan elementar mulohazalar (o‘zgaruvchilar) yoki ularning inkorlari kon’yunksiyalaridan tashkil topgan formula shu o‘zgaruvchilar **elementar kon’yunksiyasi,** bu o‘zgaruvchilar yoki ularning inkorlari diz’yunksiyalaridan tashkil topgan formula esa shu o‘zgaruvchilar **elementar diz’yunksiyasi** deb ataladi.*

Tabiiyki, elementar kon’yunksiya (elementar diz’yunksiya) tarkibida faqat bitta o‘zgaruvchi ishtirok etishi ham mumkin. Shu sababli, bitta (masalan, x) o‘zgaruvchining o‘zi yoki uning inkoridan iborat x yoki $\overline{x}$ ko‘rinishdagi ifodalar elementar kon’yunksiya ham, elementar diz’yunksiya ham bo‘la oladi.

Umuman olganda, berilgan n ta $x_1, x_2, ..., x_n$ o‘zgaruvchilar elementar kon’yunksiyasi

$$x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge ... \wedge x_n^{\sigma_n} \qquad (3)$$

ko‘rinishdagi, bu o‘zgaruvchilar elementar diz’yunksiyasi esa

$$x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \cdots \vee x_n^{\sigma_n} \qquad (4)$$

ko‘rinishdagi formuladir. Bu yerda σ_i $(i = \overline{1,n})$ ch yoki yo qiymat qabul qiluvchi qandaydir parametrni ifodalaydi hamda $x_1, x_2, ..., x_n$ o‘zgaruvchilar orasida bir xillari bo‘lishi ham mumkin.

3.5.2. Formulaning normal shakllari. Formulaning normal shakllari quyidagi ta’rif asosida aniqlanadi.

2- ta’rif. *Berilgan formulaning* ***kon’yunktiv normal shakli*** *deb unga teng kuchli va elementar diz’yunksiyalarning kon’yunksiyalaridan tashkil topgan formulaga,* ***diz’yunktiv normal shakli*** *deb esa unga teng kuchli va elementar kon’yunksiyalarning diz’yunksiyalaridan tashkil topgan formulaga aytiladi.*

“Kon’yunktiv normal shakl” iborasini, qisqacha, KNSh, “diz’yunktiv normal shakl” iborasini esa, DNSh deb yozamiz.

(3) formula DNShning **kon’yunktiv hadi**, (4) formula esa KNShning **diz’yunktiv hadi** deb ham yuritiladi.

1- va 2- ta’riflarga ko‘ra, teng kuchli almashtirishlar bajarib, mantiq algebrasining ixtiyoriy formulasi uchun turli KNShlar va DNShlar topilishi mumkin.

1- misol. Distributivlik va idempotentlik qonunlariga asoslanib, $\overline{\overline{x} \wedge \overline{y}} \wedge (x \to z)$ formulaning kon’yunktiv normal shakllari, masalan, $(x \vee y) \wedge (\overline{x} \vee z)$, $(x \vee y \vee y) \wedge (\overline{x} \vee z)$ va $(x \vee y) \wedge (\overline{x} \vee z) \wedge (z \vee \overline{x})$ formulalar, $(x \vee y) \wedge (x \vee z)$ formula uchun esa diz’yunktiv normal shakllar, masalan, $x \vee yz$ va $x \vee xz \vee yz$ formulalar bo‘lishiga ishonch hosil qilish qiyin emas. ■

1- teorema. *Mantiq algebrasining ixtiyoriy formulasini KNShga keltirish mumkin.*

Isboti. Mantiq algebrasining ixtiyoriy formulasini tahlil qilib, agar berilgan formula KNShda bo‘lmasa, u vaqtda quyidagi ikkita hollardan biri ro‘y berishini ta’kidlaymiz:

a) berilgan formuladagi elementar mulohazalar faqat $\neg$, $\wedge$ va $\vee$ belgilar bilangina birlashtirilgan bo‘lsada, $\wedge$ belgilar eng so‘nggi amallarni ifodalamaydi;

b) berilgan formula tarkibidagi elementar mulohazalar $\neg$, $\wedge$ va $\vee$ belgilardan tashqari $\rightarrow$ va/yoki $\leftrightarrow$ belgilar bilan ham birlashtirilgan.

a) holda, diz'yunksiyaning kon'yunksiyaga nisbatan distributivlik xossasini ifodalovchi $a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ teng kuchlilikdan foydalanib, ((1)ga qarang) berilgan formulani unga teng kuchli formulaga keltiramiz.

b) holda, (1) teng kuchliliklardan foydalanib, berilgan formulaga teng kuchli va tarkibidagi elementar mulohazalari faqat $\neg$, $\wedge$ va $\vee$ belgilar bilangina birlashtirilgan formulani hosil qilamiz. Agar hosil qilingan formula KNShda bo'lmasa, u vaqtda u, albatta, a) holda ifodalangan shaklda bo'ladi. a) hol uchun ifodalangan jarayonni chekli marta qo'llagandan so'ng (zarur bo'lsa (2) teng kuchliliklardan ham foydalanib) berilgan formulaga teng kuchli KNShdagi formulani hosil qilamiz. ■

Teoremaning yuqorida keltirilgan isboti konstruktiv xususiyatga ega, ya'ni bu isbotdan mantiq algebrasining berilgan formulasi uchun KNShni hosil qilishda algoritm sifatida foydalanish mumkin.

2- misol. Ushbu $((x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})) \vee (x \wedge (\bar{x} \vee y))$ formulaning biror KNShini topish talab etilgan bo'lsin. Berilgan formulani P bilan belgilab (1) va (2) formulalardan foydalansak, quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$P \equiv (((x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})) \vee x) \wedge (((x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})) \vee (\bar{x} \vee y)) \equiv$$
$$\equiv ((x \vee y) \vee x) \wedge ((\bar{x} \vee \bar{y}) \vee x) \wedge$$
$$\wedge ((x \vee y) \vee (\bar{x} \vee y)) \wedge ((\bar{x} \vee \bar{y}) \vee (\bar{x} \vee y)) \equiv$$
$$\equiv (x \vee x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee x \vee \bar{y}) \wedge (x \vee \bar{x} \vee y \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee y) \equiv$$
$$\equiv (x \vee y) \wedge [J \vee \bar{y}] \wedge (J \vee y) \wedge (\bar{x} \vee J) \equiv$$
$$\equiv (x \vee y) \wedge J \wedge J \wedge J \equiv x \vee y.$$

Demak, $P \equiv x \vee y$. Berilgan formulaning topilgan KNShida x va y o'zgaruvchilarning bittagina elementar diz'yunksiyasi bor, ya'ni berilgan formula uchun KNSh bittagina $x \vee y$ diz'yunktiv haddan iboratdir. ■

3- misol. $Q \equiv \overline{x \vee y} \leftrightarrow x \wedge y$ formulani KNShga keltirish maqsadida 2- misoldagidek ish yuritib,

$$Q \equiv (\overline{\overline{x \vee y}} \vee (x \wedge y)) \wedge ((\overline{x \vee y}) \vee (\overline{x \wedge y})) \equiv$$
$$\equiv ((x \vee y) \vee (x \quad y)) \quad ((\bar{x} \quad \bar{y}) \vee (\bar{x} \vee \bar{y})) \equiv$$

$$\equiv ((x \vee y \vee x) \wedge (x \vee y \vee y)) \wedge ((\bar{x} \vee \bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (\bar{y} \vee \bar{x} \vee \bar{y})) \equiv$$
$$\equiv (x \vee y) \wedge (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) \equiv (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$$

teng kuchliliklarga ega bo'lamiz. Shunday qilib, $(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$ formula berilgan Q formula uchun KNSh bo'lib, u ikkita $x \vee y$ va $\bar{x} \vee \bar{y}$ diz'yunktiv hadlarning kon'yunksiyasidan iboratdir. ■

2- teorema. *Mantiq algebrasining formulasi tavtologiya bo'lishi uchun uning KNShidagi barcha elementar diz'yunktiv hadlarida kamida bittadan elementar mulohaza o'zining inkori bilan birga qatnashishi zarur va yetarli.*

Isboti. 1. Mantiq algebrasining P formulasi

$$P \equiv A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \qquad (5)$$

ko'rinishda berilgan bo'lib, uning KNShidagi barcha A_i $(i = \overline{1,n})$ elementar diz'yunktiv hadlarida kamida bittadan elementar mulohaza bilan birga bu mulohazaning inkori ham qatnashsin. Faraz qilaylik, P formulaning A_i $(i = \overline{1,n})$ hadida qandaydir x_i elementar mulohaza bilan birga uning $\bar{x}_i$ inkori ham qatnashgan bo'lsin. U holda $x \vee \bar{x} \equiv J$ va $J \vee A \equiv J$ teng kuchliliklarga asosan barcha $i = \overline{1,n}$ uchun $A_i \equiv J$ o'rinlidir. Demak, agar barcha $i = \overline{1,n}$ uchun A_i hadlar tarkibida kamida bitta elementar mulohaza bilan birga bu mulohazaning inkori ham qatnashgan bo'lsa, u holda $P \equiv J \wedge J \wedge \ldots \wedge J \equiv J$, ya'ni P tavtologiya bo'ladi.

2. Mantiq algebrasining (5) ko'rinishda ifodalangan P formulasi tavtologiya bo'lsin. Teorema tasdig'iga teskari tasdiq o'rinli deb faraz qilamiz. Ya'ni, P formula tarkibidagi A_i $(i = \overline{1,n})$ elementar diz'yunktiv hadlardan hech bo'lmaganda bittasida hech qaysi bir elementar mulohaza o'zining inkori bilan birga qatnashmagan bo'lsin. Berilgan P formulaning KNShidagi hech qaysi bir elementar mulohaza o'zining inkori bilan birga qatnashmagan biror $A_{i'}$ $(1 \le i' \le n)$ elementar diz'yunktiv hadini tahlil qilamiz. Bu formulada hech qaysi bir elementar mulohaza o'zining inkori bilan birga qatnashmaganligi sababli $A_{i'}$ formula uchun tuzilgan chinlik jadvalining shunday satri topiladiki, unda barcha elementar mulohazalar yo qiymatga ega bo'ladi va $A_{i'}$ formula tarkibidagi barcha diz'yunksiya amallarini bajarish natijasi ham shu satr uchun yo bo'ladi. Shuning uchun,

kon'yunksiya amalining ta'rifiga ko'ra, P formula uchun tuzilgan chinlik jadvalining o'sha satridagi qiymat yo bo'ladi. Bu esa teorema isbotining " P formula tavtologiya bo'lsin" degan shartiga ziddir. ■

2- teorema berilgan formula tavtologiya yoki tavtologiya emasligini, chinlik jadvaliga murojaat qilmasdan, aniqlash imkonini beradi. Shuning uchun 2- teorema **chinlik alomati** deb yuritiladi. Chinlik alomatiga ko'ra, berilgan formulaning tavtologiya bo'lishi yoki bo'lmasligini aniqlash uchun, uni KNShga keltirish kerak. Agar formulaning KNShdagi barcha elementar dizyunksiyalar ifodasida hech bo'lmaganda bitta elementar mulohaza o'zining inkori bilan birga qatnashgan bo'lsa, u holda bu formula tavtologiya, aks holda esa tavtologiya emasligi aniqlanadi.

4-misol. 2-teoremadan foydalanib $x \wedge \overline{x} \to \overline{y \wedge \overline{y}}$ va $\overline{x \wedge \overline{x}} \wedge (y \wedge \overline{y} \to z)$ formulalarning tavtologiya bo'lishi yoki bo'lmasligini tekshiramiz. Berilgan formulalarni, mos ravishda, P va Q bilan belgilab, (1) va (2) formulalardan foydalansak, quyidagi KNShlarga ega bo'lamiz:

$$P = \overline{x \wedge \overline{x}} \vee \overline{y \wedge \overline{y}} = \overline{x} \vee x \vee \overline{y} \vee y,$$

$$Q = (\overline{x} \vee x) \wedge (\overline{y \wedge \overline{y}} \vee z) = (\overline{x} \vee x) \wedge (\overline{y} \vee y \vee z).$$

Bu formulalarning KNShlarida kamida bittadan elementar mulohaza o'zining inkori bilan birga qatnashgani uchun berilgan formulalarning har biri tavtologiyadir. ■

3- teorema. *Mantiq algebrasining ixtiyoriy formulasini DNShga keltirish mumkin.*

Isboti. 1- teoremaga ko'ra mantiq algebrasining ixtiyoriy formulasini qandaydir $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_m$ KNShga keltirish mumkin, bu yerda A_i ($i = \overline{1, m}$) – elementar dizyunksiyalar. Ravshanki, elementar dizyunksiyning inkori elementar konyunksiya bo'ladi. Shuning uchun berilgan formulaning inkori

$$\overline{A_1 \wedge A_2 \wedge ...... \wedge A_m} = \overline{A_1} \vee \overline{A_2} \vee ...... \vee \overline{A_m}$$

DNShda bo'ladi, bunda $\overline{A_i}$ ($i = \overline{1, m}$) – elementar konyunksiyalar. ■

4- teorema. *Mantiq algebrasining formulasi aynan yolg'on bo'lishi uchun uning DNShdagi barcha elementar kon'yunktiv hadlarida kamida bittadan elementar mulohaza o'zining inkori bilan birga qatnashishi zarur va yetarli.*

I s b o t i . 1. Mantiq algebrasining P formulasi $P \equiv A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_n$ ko'rinishda berilgan bo'lib, uning DNShidagi barcha A_i $(i=\overline{1,n})$ elementar kon'yunktiv hadlarida kamida bittadan elementar mulohaza bilan birga bu mulohazaning inkori ham qatnashsin. Berilgan P formulaning A_i $(i=\overline{1,n})$ hadida qandaydir x_i elementar mulohaza bilan birga uning $\overline{x}_i$ inkori ham qatnashgan bo'lsin deb faraz qilaylik. U holda $x \wedge \overline{x} \equiv \overline{J}$ va $\overline{J} \wedge A \equiv \overline{J}$ teng kuchliliklarga asosan barcha $i=\overline{1,n}$ uchun $A_i \equiv \overline{J}$ o'rinlidir. Demak, agar barcha i $\overline{1,n}$ uchun A_i hadlar tarkibida kamida bitta elementar mulohaza bilan birga bu mulohazaning inkori ham qatnashgan bo'lsa, u holda $P \equiv \overline{J} \vee \overline{J} \vee ... \overline{J} \vee \equiv \overline{J}$, ya'ni P aynan yolg'on bo'ladi.

2. Mantiq algebrasining P formulasi aynan yolg'on bo'lsin. U holda P formulaning inkori doimo chin bo'ladi. Shuning uchun, 2- teoremaga asosan, $\overline{P}$ formulaning KNShdagi barcha elementar diz'yunksiyalarida kamida bittadan elementar mulohaza bilan birga uning inkori ham topiladi. Demak, $\overline{\overline{P}} = P$ fopmulaning DNShdagi barcha kon'yunktiv hadlarida kamida bittadan elementar mulohaza o'zining inkori bilan birga qatnashadi. ■

4- teorema berilgan formulaning doimo yolg'on bo'lishi yoki bo'lmasligini, chinlik jadvaliga murojaat qilmasdan, aniqlash imkonini bergani uchun, uni **yolg'onlik alomati** deb atash mumkin.

5- m i s o l . Berilgan

$$P \equiv (x \wedge \overline{x} \wedge y) \vee (y \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \overline{x} \wedge z \wedge \overline{z})$$

formulaning doimo yolg'on formula bo'lishini ko'rsatamiz.

Haqiqatdan ham, P formula DNShda yozilgan bo'lib, uning tarkibidagi 1- elementar kon'yunksiya ifodasida x, 2- ifodasida y, 3-sida esa x va z elementar mulohazalar o'zlarining inkorlari bilan birgalikda qatnashganlari uchun, yolg'onlik alomatiga asosan, $P \equiv \overline{J}$. ■

5- t e o r e m a . *Mulohazalar algebrasining ixtiyoriy formulasi uchun yechilish muammosi doimo ijobiy hal bo'ladi.*

I s b o t i . Agar mulohazalar algebrasining berilgan formulasi KNShda bo'lmasa, uni KNShga keltirgandan so'ng, 2- teoremaga asosan, bu formulaning tavtologiya bo'lishi yoki bo'lmasligi aniqlanadi. Agar berilgan formula tavtologiya bo'lmasa, uni DNShga keltirib, 4- teorema asosida, formulaning aynan yolg'on bo'lishi yoki bo'lmasligi aniqlanadi.

Agar tekshirilayotgan formula doimo chin va doimo yolg‘on bo‘lish shartlarini qanoatlantirmasa, u holda u bajariluvchi formula bo‘ladi. Demak, mulohazalar algebrasining berilgan formulasi tavtologiya, aynan yolg‘on yoki bajariluvchi formula bo‘lishini chekli sondagi qadamlar jarayonida aniqlash mumkin. Shuning uchun mulohazalar algebrasining ixtiyoriy formulasi uchun yechilish muammosi doimo ijobiy hal bo‘ladi. ■

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Quyidagi formulalarning har biri uchun kamida ikkitadan KNSh va DNSh toping:

a) $a\vee(b\vee c\to a\vee b)$; b) $\overline{x}\to y\vee z\overline{x}\to yz$;

d) $(x\leftrightarrow\overline{y})\to(\overline{x}\wedge y)\vee\overline{y}$; e) $x(x\leftrightarrow y)$;

f) $(x\leftrightarrow z)\to\overline{(y\to z)\to(x\vee y\wedge z)}$;

h) $(x\vee y)\wedge(y\vee z)\wedge(z\vee t)\wedge(t\vee x)$.

2. Chinlik alomatini qo‘llab ushbu bobning 3- paragrafidagi 1-topshiriqda ifodalangan formulalardan qaysilari tavtologiya bo‘lishini aniqlang.

3. Yolg‘onlik alomatini qo‘llab ushbu bobning 3- paragrafidagi 1-topshiriqda ifodalangan formulalardan qaysilari aynan yolg‘on bo‘lishini aniqlang.

4. Chinlik va yolg‘onlik alomatlaridan foydalanib ushbu bobning 3-paragrafidagi 3- topshiriqni bajaring.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Formulalarning normal shakllarini o‘rganish jarayonida qaysi teng kuchliliklardan foydalaniladi?

2. Elementar kon’yunksiya va elementar diz’yunksiya deganda nimani tushunasiz?

3. Formulaning kon’yunktiv normal shakli bilan uning diz’yunktiv normal shakli tushunchalari orasida qanday o‘xshashlik va farq bor?

4. DNShning kon’yunktiv hadi ifodasida bir xil o‘zgaruvchilar bo‘lishi mumkinmi?

5. KNShning diz’yunktiv hadi qanday aniqlanadi?

6. Mantiq algebrasining berilgan formulasi KNShga qanday keltiriladi?

7. Mantiq algebrasining formulasi tavtologiya bo‘lishi uchun qanday zarur va yetarli shartlar bor?

8. Mantiq algebrasining qanday formulasini DNShga keltirish mumkin?

9. Mantiq algebrasining formulasi doimo yolg'on bo'lishi uchun qanday zarur va yetarli shartlar bor?

10. Yechilish muammosi qanday shartlarda ijobiy hal bo'ladi?

3.6. Formulalarning mukammal normal shakllari

Tavtologiya. Aynan yolg'on formula. Elementar kon'yunksiya va diz'yunksiyalar. KNSh. DNSh. Kon'yunktiv va diz'yunktiv hadlar. To'g'ri va to'liq elementar kon'yunksiya va diz'yunksiyalar. MKNSh. MDNSh. Formulani MKNShga, MDNShga keltirish algoritmi, to'liq MKNSh va MDNSh.

3.6.1. To'g'ri va to'liq elementar kon'yunksiya va diz'yunksiyalar. Yuqorida teng kuchli almashtirishlar bajarib, mantiq algebrasining berilgan formulasi uchun turli KNShlar va DNShlar topish mumkinligi haqida ma'lumot berilgan edi. Formulalar uchun turli KNShlar va DNShlar orasida muayyan shartlarni qanoatlantiradiganlari muhim hisoblanadi. Quyida shunday shakllar o'rganiladi.

1- ta'rif. *Agar elementar kon'yunksiya (diz'yunksiya) ifodasida ishtirok etuvchi har bir elementar mulohaza shu ifodada faqat bir marta uchrasa, u holda bu ifoda* ***to'g'ri elementar kon'yunksiya (diz'yunksiya)*** *deb ataladi.*

1- misol. Berilgan $a \vee b \vee c$ va $\overline{a} \vee d \vee f$ elementar diz'yunksiyalar to'g'ri elementar diz'yunksiyalar, $\overline{a}bdc$ va $\overline{a}e\overline{c}b$ elementar kon'yunksiyalar esa to'g'ri elementar kon'yunksiyalardir. Lekin, $a \vee u \vee u \vee c$ va $u \vee \overline{u} \vee e \vee n$ elementar diz'yunksiyalar ifodasida u elementar mulohaza bir martadan ortiq qatnashganligi sababli, ularning hech biri to'g'ri elementar diz'yunksiya bo'la olmaydi. x_2 elementar mulohaza $x_1x_2x_3\overline{x}_2$ va $x_2x_2\overline{x}_2x_2x_6$ elementar kon'yunksiyalar tarkibida bir martadan ortiq qatnashganligi sababli, bu ifodalarning hech qaysisi to'g'ri elementar kon'yunksiya bo'la olmaydi. ■

2- ta'rif. *Agar berilgan elementar mulohazalarning har biri elementar kon'yunksiya (diz'yunksiya) ifodasida faqat bir matra qatnashsa, bu ifoda shu* ***elementar mulohazalarga nisbatan to'liq elementar kon'yunksiya (diz'yunksiya)*** *deb ataladi.*

2- misol. Ushbu $x_1x_2x_3$, $x_1x_2x_3\overline{x}_2x_3$ va $\overline{x}_1x_5\overline{x}_3x_2$ elementar kon'yunksiyalarning hech qaysi biri x_1, x_2, x_3, x_4 elementar mulohazalarga nisbatan to'liq elementar kon'yunksiya emas, lekin ularning birinchisi x_1, x_2, x_3 elementar mulohazalarga nisbatan, oxirgisi esa x_1, x_2, x_3, x_5 elementar mulohazalarga nisbatan to'liq elementar kon'yunksiyadir.

Berilgan $\overline{a} \vee b \vee d \vee c$ elementar diz'yunksiya a,b,c,d elementar mulohazalarga nisbatan to'liq elementar diz'yunksiyadir, $x_1 \vee x_4 \vee x_3$ elementar diz'yunksiya esa x_1,x_3,x_4 elementar mulohazalarga nisbatan to'liq elementar diz'yunksiya bo'lsa-da, u x_1,x_2,x_3,x_4 elementar mulohazalarga nisbatan to'liq elementar diz'yunksiya bo'la olmaydi. ■

3- ta'rif. *Agar formulaning KNShi (DNShi) ifodasida bir xil elementar diz'yunksiyalar (kon'yunksiyalar) bo'lmasa va barcha elementar diz'yunksiyalar (kon'yunksiyalar) to'g'ri hamda ifodada qatnashuvchi barcha elementar mulohazalarga nisbatan to'liq bo'lsa, u holda bu ifoda* ***mukammal kon'yunktiv normal shakl (mukammal diz'yunktiv normal shakl)*** *deb ataladi.*[1]

4- ta'rif. *Berilgan $x_1,x_2,...,x_n$ elementar mulohazalarga nisbatan formulaning MKNShidagi har bir $x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \cdots \vee x_n^{\sigma_n}$ had* ***diz'yunktiv konstituyent,*** *uning MDNShidagi har bir $x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge ... \wedge x_n^{\sigma_n}$ had esa* ***kon'yunktiv konstituyent*** *deb ataladi.*

4- ta'rifda yerda σ_i $(i=\overline{1,n})$ ch yoki yo qiymat qabul qiluvchi parametrni ifodalaydi va $x_1,x_2,...,x_n$ o'zgaruvchilar orasida bir xillari yo'q.

3- misol. Tarkibida faqat bitta asosiy mantiqiy amal qatnashgan formulalarning mukammal normal shakllari (MKNShlari va MDNShlari) 1- jadvalda keltirilgan.

Yuqoridagi tasdiqning to'g'riligini tekshirish o'quvchiga havola qilinadi.

1- jadvaldan ko'rinib turubdiki, $\overline{x}$ formulaning MKNShi ham, MDNShi ham uning o'zidan iborat; $x \wedge y$ formulaning MKNShida uchta ($x \vee y$, $\overline{x} \vee y$ va $x \vee \overline{y}$) diz'yunktiv konstituyentlar bor, uning MDNShi esa bitta kon'yunktiv konstituyentdan (shu formulaning o'zidan) iborat; va hokazo. ■

1- jadval

Amal	MKNSh	MDNSh
$\overline{x}$	$\overline{x}$	$\overline{x}$
$x \wedge y$	$(x \vee y) \wedge (\overline{x} \vee y) \wedge (x \vee \overline{y})$	$x \wedge y$
$x \vee y$	$x \vee y$	$(x \wedge y) \vee (\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y})$
$x \rightarrow y$	$\overline{x} \vee y$	$(x \wedge y) \vee (\overline{x} \wedge y) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y})$
$x \leftrightarrow y$	$(\overline{x} \vee y) \wedge (x \vee \overline{y})$	$(x \wedge y) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y})$

[1] "Mukammal kon'yunktiv normal shakl" iborasini, qisqacha, MKNSh, "mukammal diz'yunktiv normal shakl" iborasini esa, MDNSh deb yozamiz.

1- teorema. *Elementar mulohazalarning tavtologiyadan farqli ixtiyoriy formulasini MKNShga keltirish mumkin.*

Teoremaning quyidagi konstruktiv **isboti** tavtologiyadan farqli ixtiyoriy **mantiqiy formulani MKNShga keltirish algoritmi** sifatida ishlatilishi mumkin.

1. Berilgan formulani KNShga keltiramiz.

Buning uchun formulani faqat kon'yunksiya, diz'yunksiya va inkor mantiqiy amallari orqali ifodalaymiz (bunda inkor amali faqatgina o'zgaruvchilarga nisbatan qo'llanilgan bo'lishi kerak). Formulani KNShga keltirish jarayonida, vaziyatga qarab, zarur qoida va qonunlardan foydalangan holda mumkin bo'lgan soddalashtirishlarni bajaramiz.

2. Agar KNSh ifodasida bittadan ko'p bir xil elementar diz'yunksiyalar topilsa, u holda $A \wedge A \equiv A$ teng kuchlilikdan foydalanib, ulardan faqat bittasini berilgan formulaning ifodasida qoldiramiz.

3. Agar KNSh ifodasidagi barcha elementar diz'yunksiyalar to'g'ri elementar diz'yunksiyalar bo'lsa, u holda algoritmning 4- bandiga o'tamiz, aks holda barcha elementar diz'yunksiyalarni to'g'ri elementar diz'yunksiyalarga aylantiramiz.

Buning uchun, vaziyatga qarab, quyidagi ikki jarayon qo'llanilishi mumkin:

a) agar biror elementar diz'yunksiya ifodasida birorta o'zgaruvchi o'zining inkori bilan birgalikda qatnashgan bo'lsa, u holda $x \vee \bar{x} \equiv J$, $A \wedge J \equiv A$ va $J \wedge A \equiv A$ teng kuchliliklarga asosan bu elementar kon'yunksiyani KNSh ifodasidan olib tashlaymiz;

b) agar qandaydir elementar diz'yunksiya ifodasida biror o'zgaruvchi bir necha marta qatnashgan (barcha hollarda yo inkor ishorasi ostida yoki barcha hollarda inkor ishorasi ostida emas) bo'lsa, u holda $x \vee x \equiv x$ teng kuchlilikka asosan ulardan faqatgina bittasini elementar diz'yunksiya ifodasida qoldiramiz.

Natijada, barcha elementar diz'yunksiyalar to'g'ri elementar diz'yunksiyalarga aylanadi.

4. Agar KNSh ifodasidagi barcha elementar diz'yunksiyalar to'liq elementar diz'yunksiyalar bo'lsa, u holda algoritmning 6- bandiga o'tamiz, aks holda barcha elementar diz'yunksiyalarni to'liq elementar diz'yunksiyalarga aylantiramiz. Agar KNShdagi biror elementar diz'yunksiya to'liq elementar diz'yunksiya bo'lmasa, ya'ni biror diz'yunktiv had ifodasidagi elementar mulohazalardan ba'zilari (yoki ularning inkorlari) topilmasa, u holda bunday elementar diz'yunksiyani quyidagi usul yordamida to'liq elementar diz'yunksiya holiga keltiramiz.

Masalan, tarkibida $a,b,c,...,u,y,...,z$ elementar mulohazalar ishtirok etgan, tavtologiyadan farqli, $F\equiv a\vee b\vee\overline{c}\vee...\vee u\vee\overline{y}\vee...\vee z$ elementar diz'yunksiya ifodasida faqat x o'zgaruvchi yoki uning inkori $\overline{x}$ yo'q deb faraz qilaylik. U holda $x\wedge\overline{x}\equiv\overline{J}$ va $A\vee\overline{J}\equiv A$ teng kuchliliklardan foydalanib F elementar diz'yunksiyani ikkita to'liq elementar diz'yunksiyalar kon'yunksiyasiga keltiramiz:

$$F\equiv(a\vee b\vee\overline{c}\vee...\vee u\vee\overline{y}\vee...\vee z)\vee(x\wedge\overline{x})\equiv$$
$$\equiv(a\vee b\vee\overline{c}\vee...\vee u\vee x\vee\overline{y}\vee...\vee z)\wedge$$
$$\wedge(a\vee b\vee\overline{c}\vee...\vee u\vee\overline{x}\vee\overline{y}\vee...\vee z).$$

Agar biror elementar diz'yunksiya ifodasida m ta o'zgaruvchilar qatnashmayotgan bo'lsa, u holda bu jarayonni har bir o'zgaruvchi uchun (ya'ni, m marta) yoki m ta o'zgaruvchilar uchun birdaniga qo'llash natijasida bitta to'liq bo'lmagan elementar diz'yunksiya o'rnida unga teng kuchli 2^m ta to'liq elementar diz'yunksiyalar kon'yunksiyalariga ega bo'lamiz.

5. Agar 4- band bajarilishi natijasida KNSh ifodasida bir xil elementar diz'yunksiyalar paydo bo'lsa, u holda algoritmning 2- bandiga o'tamiz.

6. Algoritm tugadi.

Demak, formulani MKNShga keltirish algoritmini qo'llash natijasida berilgan KNSh ifodasida bir xil elementar diz'yunksiyalar qatnashmaydi va barcha elementar diz'yunksiyalar to'g'ri va to'liq bo'ladi. 1- ta'rifga asosan bunday KNSh MKNShdir. ■

4- misol. Formulani MKNShga keltirish algoritmidan foydalanib x, y, z va u elementar mulohazalarning $A\equiv(\overline{x}\to x)\wedge(y\to\overline{y})\wedge$ $\wedge(z\Leftrightarrow u)$ formulasini MKNShga keltiramiz. Dastlab, algoritmning 1- bandiga ko'ra, berilgan A formulani KNShga keltiramiz. Buning uchun, avvalo, $a\to b\equiv\overline{a}\vee b$ va $a\leftrightarrow b\equiv(\overline{a}\vee b)\wedge(a\vee\overline{b})$ teng kuchliliklardan foydalanib A formulani faqat kon'yunksiya, diz'yunksiya va inkor mantiqiy amallari orqali ifodalaymiz:

$$A\equiv(\overline{\overline{x}}\vee x)\wedge(\overline{y}\vee\overline{y})\wedge((\overline{z}\vee u)\wedge(z\vee\overline{u})).$$

Hosil bo'lgan formulaga $\overline{\overline{x}}\equiv x$ teng kuchlilikni qo'llasak, A formula $(x\vee x)\wedge(\overline{y}\vee\overline{y})\wedge(\overline{z}\vee u)\wedge(z\vee\overline{u})$ KNShga keladi.

KNSh ifodasida barcha elementar diz'yunksiyalar turlicha bo'lganligi sababli algoritmning 2- bandini bajarishga hojat yo'q.

KNSh ifodasidagi 1- va 2- elementar diz'yunksiyalar to'g'ri elementar diz'yunksiyalar bo'lmaganligi uchun algoritmning 3- bandida ifodalangan jarayonlarni bajarishga o'tamiz. KNSh ifodasidagi hech qaysi elementar diz'yunksiya ifodasida birorta ham o'zgaruvchi o'zining inkori bilan birgalikda qatnashmaganligi sababli 3- banddagi a) hol bu yerda ro'y bermaydi. KNSh ifodasidagi 1- elementar diz'yunksiyada x, 2- elementar diz'yunksiyada esa $\overline{y}$ ikki marta qatnashgani uchun b) holda bayon qilingandek ish yuritib, A formula uchun barcha elementar diz'yunksiyalari to'g'ri elementar diz'yunksiyalardan iborat $x \wedge \overline{y} \wedge (\overline{z} \vee u) \wedge (z \vee \overline{u})$ KNShni hosil qilamiz. Ushbu bobning 5- paragrafidagi 2- teoremaga asosan, A formula tavtologiya emas.

Algoritmning 4- bandini bajaramiz. Ko'rinib turibdiki, KNShdagi 1-elementar diz'yunksiyada y, z va u, 2- elementar diz'yunksiyada x, z va u, 3- va 4- elementar diz'yunksiyalarda esa x va y o'zgaruvchilar yoki ularning inkorlari yo'q. Shularni e'tiborga olib, KNSh ifodasidagi to'rtala elementar diz'yunksiyalarni to'liq elementar diz'yunksiyalar shakliga keltirish maqsadida 4- bandda ifodalangan jarayonni qo'llaymiz. Natijada 1- elementar diz'yunksiya (x) uchun

$$
\begin{gathered}
x \equiv x \vee (y \wedge \overline{y}) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee \overline{y}) \equiv \\
\equiv ((x \vee y) \vee (z \wedge \overline{z})) \wedge ((x \vee \overline{y}) \vee (z \wedge \overline{z})) \equiv \\
\equiv (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \overline{z}) \wedge (x \vee \overline{y} \vee z) \wedge (x \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \equiv \\
\equiv ((x \vee y \vee z) \vee (u \wedge \overline{u})) \wedge ((x \vee y \vee \overline{z}) \vee (u \wedge \overline{u})) \wedge \\
\wedge ((x \vee \overline{y} \vee z) \vee (u \wedge \overline{u})) \wedge ((x \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \vee (u \wedge \overline{u})) \equiv \\
\equiv (x \vee y \vee z \vee u) \wedge (x \vee y \vee z \vee \overline{u}) \wedge \\
\wedge (x \vee y \vee \overline{z} \vee u) \wedge (x \vee y \vee \overline{z} \vee \overline{u}) \wedge \\
\wedge (x \vee \overline{y} \vee z \vee u) \wedge (x \vee \overline{y} \vee z \vee \overline{u}) \wedge \\
\wedge (x \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee u) \wedge (x \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee \overline{u}),
\end{gathered}
$$

2- elementar diz'yunksiya ($\overline{y}$) uchun[1]

$$
\begin{gathered}
\overline{y} \equiv (x \vee \overline{y} \vee z \vee u) \wedge (x \vee \overline{y} \vee z \vee \overline{u}) \wedge \\
\wedge (x \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee u) \wedge (x \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee \overline{u}) \wedge \\
\wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z \vee u) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z \vee \overline{u}) \wedge
\end{gathered}
$$

[1] Bu yerda va keyingi elementar diz'yunksiyalar uchun oralik teng kuchliliklarni tushirib qoldirdik.

$$\wedge(\overline{x}\vee\overline{y}\vee\overline{z}\vee u)\wedge(\overline{x}\vee\overline{y}\vee\overline{z}\vee\overline{u}),$$

3- elementar diz'yunksiya ($\overline{z}\vee u$) uchun

$$\overline{z}\vee u\equiv(x\vee y\vee\overline{z}\vee u)\wedge(x\vee\overline{y}\vee\overline{z}\vee u)\wedge$$
$$\wedge(\overline{x}\vee y\vee\overline{z}\vee u)\wedge(\overline{x}\vee\overline{y}\vee\overline{z}\vee u)$$

va 4- elementar diz'yunksiya ($z\vee\overline{u}$) uchun

$$z\vee\overline{u}\equiv(x\vee y\vee z\vee\overline{u})\wedge(x\vee\overline{y}\vee z\vee\overline{u})\wedge$$
$$\wedge(\overline{x}\vee y\vee z\vee\overline{u})\wedge(\overline{x}\vee\overline{y}\vee z\vee\overline{u})$$

teng kuchliliklarga ega bo'lamiz.

Topilgan barcha KNShlar x, y, z va u elementar mulohazalarga nisbatan to'liq KNShlardir. Bu KNShlarni o'zaro solishtirib, ularning tarkibida bir xil elementar diz'yunksiyalar bor (masalan, 1- va 2- KNShlardagi $x\vee\overline{y}\vee z\vee u$ elementar diz'yunksiya) bo'lgan vaziyat ro'y berganligini aniqlaymiz. Shuning uchun, algoritmning 5- bandi boshqarishni uning 2- bandiga o'tkazadi.

Algoritmning 2- bandini bajarib, A formula uchun

$$(x\vee y\vee z\vee u)\wedge(x\vee y\vee z\vee\overline{u})\wedge(x\vee y\vee\overline{z}\vee u)\wedge$$
$$\wedge(x\vee y\vee\overline{z}\vee\overline{u})\wedge(x\vee\overline{y}\vee z\vee u)\wedge(x\vee\overline{y}\vee z\vee\overline{u})\wedge$$
$$\wedge(x\vee\overline{y}\vee\overline{z}\vee u)\wedge(x\vee\overline{y}\vee\overline{z}\vee\overline{u})\wedge(\overline{x}\vee y\vee z\vee\overline{u})\wedge$$
$$\wedge(\overline{x}\vee y\vee\overline{z}\vee u)\wedge(\overline{x}\vee\overline{y}\vee z\vee u)\wedge(\overline{x}\vee\overline{y}\vee z\vee\overline{u})\wedge$$
$$\wedge(\overline{x}\vee\overline{y}\vee\overline{z}\vee u)\wedge(\overline{x}\vee\overline{y}\vee\overline{z}\vee\overline{u})$$

KNSh ifodasiga ega bo'lamiz.

Algoritmning 3- bandi boshqarishni uning 4- bandiga, 4- bandi esa 6- bandiga o'tkazadi, chunki oxirgi KNSh ifodasidagi barcha elementar diz'yunksiyalar to'g'ri va to'liq elementar diz'yunksiyalardir. Sunday qilib, berilgan A formula uchun oxirgi formula MKNShdir. ■

Ravshanki, agar formulaning MKNShi tarkibida qatnashuvchi barcha ifodalardagi $\wedge$ belgi o'rniga $\vee$ belgi va, aksincha, $\vee$ o'rniga $\wedge$ qo'yilsa, u holda MDNSh hosil bo'ladi. Xuddi shuningdek, agar formulaning MDNShi tarkibida qatnashuvchi barcha ifodalarda shunday o'zgartirishlar bajarilsa, u holda MKNSh hosil bo'ladi.

2- teorema. *Elementar mulohazalarning aynan yolg'on bo'lmagan ixtiyoriy formulasini MDNShga keltirish mumkin.*

Isboti. Elementar mulohazalarning aynan yolg'on formulasidan farqli berilgan formulasini A bilan belgilab, avvalo, $\overline{A}$ formulani

MKNShga keltiramiz. $\overline{\overline{A}} \equiv A$ teng kuchlilikdan foydalanib, $\overline{A}$ formulaning MKNShi tarkibida qatnashuvchi barcha ifodalardagi $\wedge$ belgi o‘rniga $\vee$ belgi va, aksincha, $\vee$ o‘rniga $\wedge$ hamda elementar mulohazalar o‘rinlariga mos ravishda ularning inkorlari, va, aksincha, elementar mulohazalarning inkorlari o‘rinlariga mos ravishda ularning o‘zlari qo‘yilsa, u holda A formulaning MDNShi hosil bo‘ladi. ■

5- misol. 2- teoremadan foydalanib, 4- misolda MKNShi topilgan $A \equiv (\bar{x} \to x) \wedge (y \to \bar{y}) \wedge (z \leftrightarrow u)$ formulani MDNShga keltiramiz. Ushbu bobning 5- paragrafidagi 4- teoremaga asoslanib, berilgan A formulaning doimo yolg‘on emasligiga ishonch hosil qilish qiyin emas. Avvalo mantiqiy formulani MKNShga keltirish algoritmidan foydalanib $\overline{A} \equiv \overline{(\bar{x} \to x) \wedge (y \to \bar{y}) \wedge (z \leftrightarrow u)}$ formulani MKNShga keltiramiz:

$$\overline{A} \equiv \overline{\bar{x} \to x} \vee \overline{y \to \bar{y}} \vee \overline{z \leftrightarrow u} \equiv \bar{x}\bar{x} \vee y\bar{\bar{y}} \vee z\bar{u} \vee \bar{z}u \equiv$$
$$\equiv \bar{x} \vee y \vee z\bar{u} \vee \bar{z}u \equiv (\bar{x} \vee y \vee z \vee \bar{z}u)(\bar{x} \vee y \vee \bar{u} \vee \bar{z}u) \equiv$$
$$\equiv (\bar{x} \vee y \vee z \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z \vee u)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z} \vee \bar{u})(\bar{x} \vee y \vee \bar{u} \vee u) \equiv$$
$$\equiv (\bar{x} \vee y \vee J)(\bar{x} \vee y \vee z \vee u)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z} \vee \bar{u})(\bar{x} \vee y \vee J) \equiv$$
$$\equiv (\bar{x} \vee y \vee z \vee u)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z} \vee \bar{u}).$$

$\overline{A}$ formulaning topilgan MKNShi tarkibida qatnashgan barcha $\wedge$ belgilar o‘rniga $\vee$ belgi va, aksincha, $\vee$ o‘rniga $\wedge$ hamda y, z va u elementar mulohazalar o‘rinlariga mos ravishda $\bar{y}$, $\bar{z}$ va $\bar{u}$, shunga o‘xshash, $\bar{x}$, $\bar{z}$ va $\bar{u}$ inkorlar o‘rinlariga mos ravishda x, y, z va u qo‘yilsa, u holda A formulaning MDNShi $x\overline{yzu} \vee x\bar{y}zu$ hosil bo‘ladi. ■

5- ta’rif. *Agar formulaning MKNShi (MDNShi) ifodasida qatnashuvchi barcha elementar mulohazalardan tuzish mumkin bo‘lgan barcha elementar diz’yunksiyalar (kon’yunksiyalar) shu ifodada ishtirok etsa, u holda bunday MKNSh (MDNSh)* ***to‘liq MKNSh (MDNSh)*** *deb ataladi.*

6- misol. Ushbu $(x \vee y)(x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y)$ formula x va y elementar mulohazalarga nisbatan MKNShda bo‘lsada, u to‘liq MKNShda emas. x va y elementar mulohazalarga nisbatan to‘liq MKNShi ifodasi $(x \vee y)(x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y})$ ko‘rinishga ega.

MDNShdagi $xyz \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z$ formula x, y va z elementar mulohazalarga nisbatan to‘liq MDNShda emas, lekin $xyz \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee$ $\vee xy\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$ formula bu elementar mulohazalarga nisbatan to‘liq MDNShdagi formuladir. ■

Muammoli masala va topshiriqlar

1. 3- misoldagi teng kuchliliklarning to‘g‘riligini tekshiring.

2. Ushbu bobning 5- paragrafidagi 1- topshiriqda ifodalangan formulalarning har biri uchun MKNSh va MDNShini toping.

3. Quyidagi formulalarning har biri uchun MKNSh va MDNShini toping:

a) $a(bc \to ab)$; b) $x \to yz$; d) $(x \to y) \to \overline{x}y \vee \overline{y}$;

e) $x(x \leftrightarrow y)$; f) $(a \to b) \to (b \to a)$; g) $(x \vee \overline{z}) \leftrightarrow yz$;

h) $(ab \to bc) \to (abc \leftrightarrow a)$; i) $(a \to \overline{b}) \to (bc \to a\overline{c})$;

j) $((\overline{x} \wedge y) \to (z \vee x)) \leftrightarrow ((x \vee \overline{y}) \to (\overline{z} \wedge x))$.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. To‘g‘ri elementar kon’yunksiya va to‘g‘ri elementar diz’yunksiya deganda nimalarni tushunasiz?

2. Berilgan elementar kon’yunksiya (diz’yunksiya) to‘liq elementar kon’yunksiya (diz’yunksiya) bo‘lishi uchun qanday shartlar bajarilishi kerak?

3. Formulaning mukammal kon’yunktiv normal shakli deganda nimani tushunasiz?

4. Formulaning diz’yunktiv normal shakli bilan uning mukammal diz’yunktiv normal shakli orasida qanday farq bor?

5. Qanday vaziyatda mantiqiy formulani MKNShga keltirish algoritmini qo‘llash mumkin?

6. Formulani MKNShga keltirish jarayonida agar qandaydir elementar diz’yunksiya ifodasida biror o‘zgaruvchi bir necha marta qatnashgan (barcha hollarda yo inkor ishorasi ostida yoki barcha hollarda inkor ishorasi ostida emas) bo‘lsa, u holda nima qilinadi?

7. Formulani MKNShga keltirish jarayonida agar elementar diz’yunksiya ifodasida biror o‘zgaruvchi yoki uning inkori topilmasa, u holda bu o‘zgaruvchini formulaning tarkibiga qanday qilib kiritish mumkin?

8. Nima uchun formulani MKNShga keltirish algoritmining 3- bandida agar KNSh ifodasidagi barcha elementar diz’yunksiyalar to‘g‘ri elementar diz’yunksiyalar bo‘lsa, u holda algoritmning 6- bandiga o‘tilmasdan uning 4- bandiga o‘tiladi?

9. Qanday qilib berilgan formulaning inkori uchun aniqlangan MKNShdan uning MDNShi topiladi?

10. To‘liq MKNSh va to‘liq MDNSh deganda nimani tushunasiz?

3.7. Formulalarni tiklash

Formula. Funksiya. Chinlik jadvali. Formulani tiklash, qatorga yoyish. Chinlik jadvali vositasida formulaning MKNShini (MDNShini) topish. n ta o'zgaruvchili formulalar va elementar kon'yunksiyalar soni.

3.7.1. Chinlik jadvali asosida formulalarni tiklash. Ushbu bobning 1- paragrafida chinlik jadvali tushunchasi o'rganilgan edi. Mantiq algebrasining berilgan ixtiyoriy formulasi uchun chinlik jadvali tuzish mumkinligini ta'kidlab, ushbu paragrafda teskari masala bilan shug'ullanamiz, ya'ni berilgan chinlik jadvaliga asoslanib formulani topishni (tiklashni) o'rganamiz. Shuni ham ta'kidlash kerakki, bu masalaning yechimi, topilishi kerak bo'lgan formulaga qo'yilgan shartlarga bog'liq ravishda, turlicha bo'lishi mumkin. Aniqlik uchun, dastlab, MDNShdagi formula tiklanishi kerak deb shart qo'yamiz.

Ravshanki, agar berilgan chinlik jadvali tarkibida ishtirok etayotgan elementar mulohazalar n ta bo'lsa, u holda izlanayotgan formula tarkibida o'sha elementar mulohazalar qatnashishlari shart[1].

Bundan buyon, agar qandaydir F formula tarkibida $x_1, x_2, ..., x_n$ elementar mulohazalar qatnashsa, ya'ni F formula $x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lsa, u holda uni $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ ko'rinishda ham yozamiz. Bundan tashqari, $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ formulani $x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilar **funksiyasi**[2], o'zgaruvchilarni esa **argumentlar** deb ham yuritamiz.

$n = 1$ bo'lganda chinlik jadvaliga asoslanib formulani tiklash masalasi trivialdir. Shuning uchun, dastlab, $n = 2$ bo'lgan holda berilgan chinlik jadvaliga asoslanib formulani tiklashni o'rganamiz. Tiklanayotgan formula tarkibida x va y elementar mulohazalar qatnashayotgan bo'lsin.

1- jadval

x	y	$\overline{x}$	$\overline{y}$	F_1	F_2	F_3	F_4
0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0

[1] Agar topilgan formulani soddalashtirish imkoniyati bo'lsa, u holda bu elementar mulohazalardan ba'zilari (balki, ularning barchasi) formula soddalashgandan so'ng, uning tarkibida ishtirok etmasliklari ham mumkin.

[2] Ushbu bobning 9- paragrafida funksiya tushunchasi chuqurroq o'rganiladi.

O‘zgaruvchilar soni $n=2$ bo‘lganda berilgan chinlik jadvalidagi qiymatlar satrlari $2^n=2^2=4$ ta bo‘ladi. Shuning uchun bu jadvalning qiymatlari turlicha bo‘lgan barcha ustunlari $2^4=16$ tadir.

Agar chinlik jadvalidagi qandaydir ustunning barcha satrlarida yo qiymatlar joylashgan bo‘lsa (bunday ustun bitta: $C_4^0=1$), u holda bu ustunga mos formula aynan yolg‘on bo‘ladi. Qolgan 15ta ustunlarga mos formulalarni (ikki argumentli funksiyalarni) $F_i \equiv F_i(x,y)$, $i=\overline{1,15}$, deb belgilaymiz.

Dastlab, chinlik jadvalining uchta satrida 0 va bitta satrida 1 qiymatga ega ustunlarini (bunday ustunlar $C_4^1=4$ ta) qarab chiqamiz (1- jadvalga qarang). 1- jadvalga mos F_i, $i=\overline{1,4}$, formulalarni MDNShdagi formula sifatida tiklaymiz.

1- jadvaldagi F_1, F_2, F_3 va F_4 ustunlarning, mos ravishda, 4-, 3-, 2- va 1- satrlarida 1 qiymat va qolgan satrlarida 0 qiymat joylashgani sababli, ularni ifodalovchi formulalarda kon’yunksiya qatnashishi tabiiydir:

$$F_1 \equiv xy\,,\ F_2 \equiv x\overline{y}\,,\ F_3 \equiv \overline{x}y\,,\ F_4 \equiv \overline{x}\,\overline{y}\,.$$

Demak, F_i, $i=\overline{1,4}$, formulalarning har biri ikki o‘zgaruvchili kon’yunktiv konstituyentlardan iborat.

Endi x va y elementar mulohazalar qatnashgan chinlik jadvalining ikki satrida 0 qiymat va ikki satrida 1 qiymat joylashgan bo‘lsin. Chinlik jadvalining bunday shartni qanoatlantiruvchi ustunlari $C_4^2=6$ ta bo‘ladi (2- jadvalga qarang). 2- jadvalga mos F_i, $i=\overline{5,10}$, formulalarni MDNShdagi formulalar sifatida topamiz.

2- jadval

x	y	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}
0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0

2- jadvaldan ko‘rinib turibdiki, F_i, $i=\overline{5,10}$, formulalarning har birini, tarkibida x va y elementar mulohazalar qatnashgan F_i, $i=\overline{1,4}$, kon’yunktiv konstituyentlar juftlari diz’yunksiyasi sifatida ifodalash mumkin:

$$F_5 \equiv F_1 \vee F_2 \equiv xy \vee x\bar{y},\ F_6 \equiv F_1 \vee F_3 \equiv xy \vee \bar{x}y,$$

$$F_7 \equiv F_2 \vee F_3 \equiv x\bar{y} \vee \bar{x}y,\ F_8 \equiv F_1 \vee F_4 \equiv xy \vee \bar{x}\,\bar{y},$$

$$F_9 \equiv F_2 \vee F_4 \equiv x\bar{y} \vee \bar{x}\,\bar{y},\ F_{10} \equiv F_3 \vee F_4 \equiv \bar{x}y \vee \bar{x}\,\bar{y}.$$

Chinlik jadvalining bitta satrida 0 va uchta satrida 1 joylashgan ustunlari $C_4^1 = 4$ ta (3- jadvalga qarang) bo'lgani uchun, bu ustunlarga mos keluvchi MDNShga ega F_i, $i = \overline{11, 14}$, formulalarni tiklaymiz. Bu formulalarni, F_i, $i = \overline{1, 4}$, kon'yunktiv konstituyentlardan uchtadan olib, ularning diz'yunksiyalari sifatida ifodalash mumkin. Agar chinlik jadvalidagi qandaydir ustunning barcha satrlarida 1 qiymat joylashgan bo'lsa (bunday ustun bitta, chunki $C_4^4 = 1$), u holda bu ustunga mos

3- jadval

x	y	F_1	F_2	F_3	F_4	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}
0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1	1	1	0

$$F_{11} \equiv F_1 \vee F_2 \vee F_3 \equiv xy \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y,$$

$$F_{12} \equiv F_1 \vee F_2 \vee F_4 \equiv xy \vee x\bar{y} \vee \bar{x}\,\bar{y},$$

$$F_{13} \equiv F_1 \vee F_3 \vee F_4 \equiv xy \vee \bar{x}y \vee \bar{x}\,\bar{y},$$

$$F_{14} \equiv F_2 \vee F_3 \vee F_4 \equiv x\bar{y} \vee \bar{x}y \vee \bar{x}\,\bar{y}.$$

formula (F_{15}) tavtologiya bo'ladi. F_{15} formula F_1, F_2, F_3 va F_4 kon'yunktiv konstituyentlar diz'yunksiyalari sifatida ifodalanishi mumkin:

$$F_{15} \equiv F_1 \vee F_2 \vee F_3 \vee F_4 \equiv xy \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y \vee \bar{x}\,\bar{y}.$$

Bu formula ikki elementar mulohazali to'liq MDNShdan iborat.

Shunday qilib, ikkita elementar mulohaza uchun berilgan chinlik jadvallari asosida MDNShdagi mos formulalarni topish masalasi hal qilindi.

Ikkita elementar mulohaza uchun berilgan chinlik jadvallari asosida MKNShdagi mos formulalarni topish masalasini hal qilish o'quvchiga havola qilinadi[1].

---

[1] Bu ishni chinlik jadvalidagi barcha satrlarida 1 qiymatlar joylashgan ustunni tahlil qilishdan boshlash tavsiya qilinadi.

Endi tarkibida uchta ($n=3$), masalan, x, y va z elementar mulohazalar ishtirok etgan chinlik jadvali asosida mos formulalarini topish masalasini hal qilish bilan shug'ullanamiz. Bu yerda ham MDNShdagi formulalar tiklanishi kerak deb shart qo'yamiz.

$n=3$ bo'lganda berilgan chinlik jadvalidagi qiymatlar satrlari $2^n=2^3=8$ ta bo'lgani uchun, bu jadvalning qiymatlari turlicha bo'lgan barcha ustunlari $2^{2^n}=2^{2^3}=2^8=256$ tadir. $n=3$ bo'lganda ham, chinlik jadvalidagi qandaydir ustunning barcha satrlarida faqat 0 qiymat joylashsa (bunday ustun bitta: $C_8^0=1$), bu ustunga mos formula aynan yolg'on bo'ladi. Qolgan 255 ta ustunga mos formulalarni (uch argumentli funksiyalarni) $G_i \equiv G_i(x,y)$, $i=\overline{1,\ 255}$, deb belgilaymiz.

Dastlab, chinlik jadvalining yettita satrida 0 va bitta satrida 1 qiymatga ega ustunlarini (bunday ustunlar $C_8^1=8$ ta) qarab chiqamiz (4- jadvalga qarang). 4- jadvalga mos G_i, $i=\overline{1,\ 8}$, formulalarni MDNShdagi formula sifatida tiklaymiz.

4- jadvaldagi G_i ($i=\overline{1,\ 8}$) ustunning $(9-i)$- satrida 1 qiymat va qolgan satrlarida 0 qiymat joylashgani uchun, bu ustunni ifodalovchi formula uch o'zgaruvchili kon'yunktiv konstituyent sifatida ifodalanishi tabiiydir:

$$G_1 \equiv xyz\,,\ G_2 \equiv xy\bar{z}\,,\ G_3 \equiv x\bar{y}z\,,\ G_4 \equiv x\bar{y}\bar{z}\,,$$

$$G_5 \equiv \bar{x}yz\,,\ G_6 \equiv \bar{x}y\bar{z}\,,\ G_7 \equiv \bar{x}\bar{y}z\,,\ G_8 \equiv \bar{x}\bar{y}\bar{z}\,.$$

4- jadval

x	y	z	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0

Tarkibida x, y va z o'zgaruvchilar qatnashgan chinlik jadvalining oltita satrida 0 qiymat va ikkita satrida 1 qiymat joylashgan bo'lsin. Chinlik jadvalining bunday shartni qanoatlantiruvchi ustunlari

$C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$ ta bo‘lishi ravshan. Bu ustunlarga mos MDNShdagi G_i, $i = \overline{9, 36}$, formulalarni G_i, $i = \overline{1, 8}$, kon’yunktiv konstituyentlar juftlari diz’yunksiyasi sifatida ifodalash mumkin:

$$G_9 \equiv G_1 \vee G_2 \equiv xyz \vee xy\bar{z},\ G_{10} \equiv G_1 \vee G_3 \equiv xyz \vee x\bar{y}z, \ldots,$$

$$G_{36} \equiv G_7 \vee G_8 \equiv \bar{x}\,\bar{y}z \vee \bar{x}\,\bar{y}\bar{z}.$$

Chinlik jadvalining beshta satrida 0 va uchta satrida 1 joylashgan ustunlari

$C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$ ta. Bu ustunlarga mos MDNShdagi $G_i, i = \overline{37, 92}$, formulalar

$G_i, i = \overline{1, 8}$, kon’yunktiv konstituyentlardan uchtadan olib, ularning diz’yunksiyalari sifatida tiklanishi mumkin:

$$G_{37} \equiv G_1 \vee G_2 \vee G_3 \equiv xyz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z,$$

$$G_{38} \equiv G_1 \vee G_2 \vee G_4 \equiv xyz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z},$$

....

$$G_{92} \equiv G_6 \vee G_7 \vee G_8 \equiv \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}z \vee \bar{x}\,\bar{y}\bar{z}$$

Shunday usulda davom etib, qolgan G_i, $i = \overline{93, 255}$, formulalar G_i, $i = \overline{1, 8}$, kon’yunktiv konstituyentlardan 4 tadan, 5 tadan, 6 tadan, 7 tadan va 8 tadan olib, ularning diz’yunksiyalari kombinatsiyalari sifatida tiklanishi mumkin. Tabiiyki, chinlik jadvalidagi biror ustunning barcha satrlarida faqat 1 qiymat joylashgan bo‘lsa (bunday ustun bitta, chunki $C_8^8 = 1$), bu ustunga mos formula (uni G_{255} deb belgilagan bo‘lsak) tavtologiyadir. G_{255} formula 8ta G_i, $i = \overline{1, 8}$, kon’yunktiv konstituyentlar diz’yunksiyalari sifatida quyidagicha to‘liq MDNShda ifodalanishi mumkin.

Demak, uchta elementar mulohaza uchun ham berilgan chinlik jadvallari asosida MDNShdagi mos formulalarni topish masalasi hal qilindi. Shunga o‘xshah, uchta elementar mulohaza uchun, berilgan chinlik jadvali asosida MKNShga ega mos formulalarni tiklash masalasi ham hal qilinishi mumkin[1].

[1] Bu ishni ham chinlik jadvalidagi barcha satrlarida 1 qiymatlar joylashgan ustunni tahlil qilishdan boshlash ma’qul.

Yuqorida bayon qilingan usuldan foydalanib n ta $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elementar mulohazalar uchun 2^n ta satrga ega chinlik jadvallari asosida MDNSh va MDNShdagi mos formulalarni tiklash masalasi yechilishi mumkin:

$$G_{255} \equiv xyz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}.$$

5- jadval

x	y	z	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1	0
1	1	1	0	1	1	0	1

1- misol. Berilgan 5- chinlik jadvaliga asoslanib $A_i \equiv A_i(x, y, z)$, $i = \overline{1, 5}$, formulalarni MDNShda yozish talab etilgan bo'lsin.

Izlangan formulalarni yuqorida bayon etilgan usuldan foydalanib (4-jadvalga qarang) quyidagicha tiklaymiz:

$$A_1 \equiv G_2 \vee G_4 \vee G_6 \vee G_8 \equiv xy\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z},$$

$$A_2 \equiv G_1 \vee G_3 \vee G_4 \vee G_6 \vee G_8 \equiv xyz \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z},$$

$$A_3 \equiv G_1 \vee G_2 \vee G_5 \vee G_7 \equiv xyz \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z,$$

$$A_4 \equiv G_2 \vee G_3 \vee G_5 \vee G_7 \equiv xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z,$$

$$A_5 \equiv G_1 \vee G_3 \vee G_5 \vee G_6 \vee G_8 \equiv xyz \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}. \ \blacksquare$$

2- misol. 5- chinlik jadvaliga asoslanib A_i, $i = \overline{1, 5}$, formulalarni MKNShda tiklash talab etilgan bo'lsin. Dastlab, 6- chinlik jadvalini tuzamiz. 6- jadvaldagi yettita satrida 1 va bitta satrida 0 qiymatga ega ustunlarga mos B_i, $i = \overline{1, 8}$, formulalarni MKNShdagi formula sifatida tiklaymiz. Bu jadvaldagi B_i ($i = \overline{1, 8}$) ustunning i- satrida 0 qiymat va qolgan satrlarida 1 qiymat joylashgani uchun, bu ustunni ifodalovchi formula uch o'zgaruvchili diz'yunktiv konstituyent sifatida ifodalanishi mumkin:

$$B_1 \equiv x \vee y \vee z,\ B_2 \equiv x \vee y \vee \bar{z},\ B_3 \equiv x \vee \bar{y} \vee z,\ B_4 \equiv x \vee \bar{y} \vee \bar{z},$$

$$B_5 \equiv \bar{x} \vee y \vee z,\ B_6 \equiv \bar{x} \vee y \vee \bar{z},\ B_7 \equiv \bar{x} \vee \bar{y} \vee z,\ B_8 \equiv \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}.$$

6- jadval

x	y	z	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0

Endi A_i, $i=\overline{1,5}$, formulalarni 5- chinlik jadvaliga asoslanib MKNShdagi formula sifatida tiklash qulay:

$$A_1 \equiv B_2 \wedge B_4 \wedge B_6 \wedge B_8 \equiv$$

$$\equiv (x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}),$$

$$A_2 \equiv B_2 \wedge B_4 \wedge B_7 \equiv (x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z),$$

$$A_3 \equiv B_1 \wedge B_3 \wedge B_5 \wedge B_6 \equiv$$

$$\equiv (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}),$$

$$A_4 \equiv B_1 \wedge B_3 \wedge B_5 \wedge B_8 \equiv$$

$$\equiv (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}),$$

$$A_5 \equiv B_2 \wedge B_5 \wedge B_7 \equiv (x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z). \blacksquare$$

3.7.2. Teng kuchlimas formulalar soni. Endi n ta elementar mulohazalarning o‘zaro teng kuchlimas, ya’ni har xil formulalari sonini topish masalasini qaraymiz.

Agar berilgan formula tarkibida faqat bitta (masalan, x) elementar mulohaza ishtirok etsa, u holda bu formula uchun tuzilgan chinlik jadvalining bir-biridan farqli mumkin bo‘lgan qiymatlar satrlari ikkita bo‘ladi. Shuning uchun $n=1$ bo‘lsa jami 4 ta ($C_2^0 + C_2^1 + C_2^2 = 2^2 = 2^{2^1} = 2^{2^n}$) turli formulalar bor. Bitta elementar mulohaza uchun bu 4 ta turli formulalarning tavtologiya va aynan yolg‘ondan farqli bo‘lganlari (ya’ni, 2 tasi) bajariladigan formulalardir. Ularni MDNShda ham MKNShda ham, tavtologiyani MDNShda, aynan yolg‘on formulani esa MKNShda ifodalash mumkin.

O‘zgaruvchilar soni $n=2$ bo‘lganda chinlik jadvalidagi qiymatlar satrlari $2^n = 2^2 = 4$ ta bo‘ladi. Yuqorida qaralgan chinlik jadvali asosida formulani tiklash masalasini hal qilish jarayonida barcha mumkin bo'lgan imkoniyatlar uchun chinlik jadvalining ustunlari tekshirilgan edi. Bu 16 ta ustunning hech qaysi ikkitasi bir xil bo'lmaganligidan, ularga mos ikkita formula ham o'zaro teng kuchli emas. Shuning uchun, umimiy soni $C_4^0+C_4^1+C_4^2+C_4^3+C_4^4=2^4=2^{2^2}=2^{2^n}$ bo'lgan ikki o'zgaruvchili turli formulalar bor.

Ikkita elementar mulohazalar uchun bu 16 ta turli formulaning tavtologiya va aynan yolg'ondan farqli bo'lganlari (ya'ni, 14 ta bajariladigan formula) MDNShda ham MKNShda ham, tavtologiya MDNShda, aynan yolg'on formula esa MKNShda ifodalanishi mumkin.

O'zgaruvchilar soni $n=3$ bo'lganda ham chinlik jadvali asosida formulani tiklash masalasini hal qilish jarayoniga tayanib uchta elementar mulohazaning 256 ta teng kuchlimas formulasi borligi, 256 esa $\sum_{i=0}^{8} C_8^i = 2^8 = 2^{2^3} = 2^{2^n}$ ko'rinishda ifodalanishi mumkinligini ta'kidlaymiz.

Uchta elementar mulohaza uchun bu 256 ta turli formulaning 254 tasi (bajariladigan formulalar) MDNShda ham, MKNShda ham, tavtologiya MDNShda, aynan yolg'on formula esa MKNShda ifodalanishi mumkin.

Umuman olganda, matematik induksiya usulidan foydalanib (I bobga qarang) quyidagi tasdiqni isbotlash mumkin.

Teorema. n ta elementar mulohazalar uchun teng kuchlimas formulalar soni 2^{2^n} ga teng.

Isboti o'quvchiga havola qilinadi.

Tarkibida n ta elementar mulohaza ishtirok etgan 2^{2^n} ta turli formulalardan $(2^{2^n}-2)$ tasi bajariladigan formulalardir. Ular MDNShda ham MKNShda ham, tavtologiya MDNShda, aynan yolg'on formula esa MKNShda ifodalanishi mumkin.

3.7.3. Formulani qatorga yoyish. Yuqorida keltirilgan mulohazalardan n ta $x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilarga bog'liq, aynan yolg'on bo'lmagan ixtiyoriy $A \equiv A(x_1, x_2, ..., x_n)$ formulani (funksiyani) MDNShda

$$A(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv \bigvee_{A(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) \equiv 1} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} ... x_n^{\sigma_n} \qquad (1)$$

yozish mumkinligi kelib chiqadi. (1) teng kuchlilikning o'ng tomonidagi (tagida $A(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) \equiv 1$ yozilgan) $\vee$ belgi n o'zgaruvchili

$x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}...x_n^{\sigma_n}$ kon'yunktiv konstituyentlar diz'yunksiyalarini bildiradi. Bu yerda diz'yunksiya amallari $A(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)\equiv 1$ shartni qanoatlantiruvchi barcha kon'yunktiv konstituyentlarga nisbatan amalga oshiriladi.

(1) teng kuchlilikni quyidagicha ham yozish mumkin:

$$A(x_1,x_2,...,x_n)\equiv \bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)} A(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}...x_n^{\sigma_n}.$$

Bu teng kuchlilikning o'ng tomonidagi diz'yunksiya amallari mumkin bo'lgan barcha 2^n ta $x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}...x_n^{\sigma_n}$ kon'yunktiv konstituyentlar ustida bajarilishi ko'zda tutilsada, aslida, diz'yunksiyalar $A(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)\equiv 1$ shartni qanoatlantiruvchi kon'yunktiv konstituyentlarga nisbatan amalga oshiriladi.

(1) yozuvni matematik analizdagi funksiyaning darajali qatotga yoyilishi tushunchasiga qiyoslab, $A(x_1,x_2,...,x_n)$ **formulaning (funksiyaning) qatorga yoyilishi** deb atash mumkin[1].

Yuqorida keltirilgan mulohazalar asosida n ta $x_1,x_2,...,x_n$ o'zgaruvchilarga bog'liq, tavtologiyadan farqli ixtiyoriy $A\equiv A(x_1,x_2,...,x_n)$ formulani (funksiyani) quyidagi MKNShga keltirish mumkin:

$$A(x_1,x_2,...,x_n)\equiv \bigwedge_{A(\overline{\sigma}_1,\overline{\sigma}_2,...,\overline{\sigma}_n)=0} x_1^{\sigma_1}\vee x_2^{\sigma_2}\vee...\vee x_n^{\sigma_n}. \qquad (2)$$

(2) teng kuchlilikni

$$A(x_1,x_2,...,x_n)\equiv \bigwedge_{(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)} A(\overline{\sigma}_1,\overline{\sigma}_2,...,\overline{\sigma}_n)\vee x_1^{\sigma_1}\vee x_2^{\sigma_2}\vee...\vee x_n^{\sigma_n}$$

ko'rinishda ham yozish mumkin. Bu teng kuchlilikning o'ng tomonidagi kon'yunksiya amallari mumkin bo'lgan barcha (2^n ta) $x_1^{\sigma_1}\vee x_2^{\sigma_2}\vee...\vee x_n^{\sigma_n}$ diz'yunktiv konstituyentlar ustida bajarilishi ko'zda tutiladi, ammo, bu yerda kon'yunksiya amallari $A(\overline{\sigma}_1,\overline{\sigma}_2,...,\overline{\sigma}_n)\equiv 0$ shartni qanoatlantiruvchi diz'yunktiv konstituyentlarga nisbatan amalga oshiriladi.

Shunday qilib, chinlik jadvalidan foydalanib (1) va (2) formulalar vositasida aynan chindan farqli istalgan funksiyani MKNSh va aynan yolg'ondan farqli istalgan funksiyani esa MDNSh ko'rinishida yozish mumkin.

---

[1] II bobning 7- paragrafiga qarang.

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Ikkita elementar mulohaza uchun berilgan chinlik jadvallari asosida MKNShdagi mos formulalarni tiklang.

2. 5- chinlik jadvaliga asoslanib $\overline{A_i} \equiv \overline{A_i}(x,y,z)$, $i=\overline{1,5}$, formulalarni MDNShda va MKNShda yozing.

3. Tarkibidagi o'zgaruvchilarning faqat va faqat bittasi ch qiymatli bo'lgandagina ch qiymatga, qolgan hollarda esa yo qiymatga erishadigan $R \equiv R(x,y,z)$ funksiyaning chinlik jadvalini tuzing va bu jadval asosida R funksiyani MDNShdagi va MKNShdagi formula sifatida tiklang.

4. Berilgan 7- chinlik jadvaliga asoslanib $Q_i \equiv Q_i(x,y,z)$, $i=\overline{1,6}$, formulalarni MDNShda va MKNShda yozing.

5. n argumentli teng kuchlimas funksiyalardan $(2^{2^n}-1)$tasi MDNSh va bittasi MKNShda bo'lishini isbotlang.

7- jadval

x	y	z	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6
1	1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1	0
1	0	1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Berilgan chinlik jadvaliga asoslanib formulani tiklash masalasining mohiyati nimada?

2. Chinlik jadvaliga asoslanib formulani tiklash masalasini hal qilishda topilishi kerak bo'lgan formulaga qo'yilgan shartning qanday ahamiyati bor?

3. Berilgan $x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilar funksiyasi deganda nimani tushunasiz?

4. n ta elementar mulohazalar uchun teng kuchlimas formulalar soni qanday aniqlanadi?

5. Qanday tasdiqlarga asoslanib n o'zgaruvchili teng kuchlimas formulalardan $(2^{2^n}-1)$ tasi MKNShda va bittasi MDNShda bo'ladi deb aytish mumkin?

6. Funksiyaning qatorga yoyilishi deganda nimani tushunasiz?

3.8. Formulaning chinlik to‘plami

Elementar mulohaza. Formula. Mantiqiy amallar. Chinlik to‘plami. Mulohazalar algebrasi. To‘plamlar algebrasi.

3.8.1. Formulaning chinlik to‘plami tushunchasi. Ma’lumki, berilgan n ta o‘zgaruvchi elementar mulohazalar uchun barcha bir-biridan farqli mumkin bo‘lgan qiymatlar satrlari kombinatsiyalari 2^n ta (ushbu bobning 1- paragrafiga qarang). Tarkibida n ta o‘zgaruvchilar ishtirok etgan formula shu 2^n ta qiymatlar satrlarining bir qismida 1, qolgan qismida esa 0 qiymatni qabul qiladi.

1- ta’rif. *Berilgan formula tarkibidagi elementar mulohazalarning qiymatlaridan qandaydir tartibda tuzilgan va shu formulaning 1 qiymatiga mos keluvchi barcha kortejlar to‘plami **formulaning chinlik to‘plami** deb ataladi.*

Ravshanki, tarkibidagi o‘zgaruvchilarning soni qanday bo‘lishidan qat’i nazar, aynan yolg‘on formulaning chinlik to‘plami bo‘sh ($\varnothing$) to‘plamdan iboratdir.

n ta elementar mulohazalarning mumkin bo‘lgan barcha 2^{2^n} ta teng kuchlimas formulalaridan $C^1_{2^n} = 2^n$ tasi qiymatlar satridagi n ta qiymatlardan faqat bittasi 1, qolgan $(n-1)$tasi esa 0 bo‘lganda 1 qiymat qabul qiladi. Shuning uchun, bunday formulalarning har biri bir elementli chinlik to‘plamiga ega.

Xuddi shuningdek, n ta elementar mulohazalarning mumkin bo‘lgan barcha teng kuchlimas formulalaridan $C^2_{2^n}$ tasi qiymatlar satridagi n ta qiymatlardan faqat ikkitasi 1, qolgan $(n-2)$tasi esa 0 bo‘lganda 1 qiymat qabul qiladi. Shu sababli, bunday formulalarning har biri uchun chinlik to‘plami ikkita kortejdan tashkil topgan bo‘ladi.

Shu usulda davom etsak, 2^{2^n} ta teng kuchlimas formulalardan $C^3_{2^n}$ tasining har biri uch elementli chinlik to‘plamiga, $C^4_{2^n}$ tasining har biri to‘rt elementli chinlik to‘plamiga, va hokazo, $C^{2^n-1}_{2^n} = 2^n$ tasining har biri (2^n-1) elementli chinlik to‘plamiga, bitta ($C^{2^n}_{2^n} = 1$) formula esa 2^n ta elementli chinlik to‘plamiga egaligiga ishonch hosil qilamiz.

Tarkibida n ta elementar mulohazalar ishtirok etgan aynan chin formulaga mos chinlik to‘plamini universal to‘plam (U) deb olsak, tarkibida shu elementar mulohazalar qatnashgan mumkin bo‘lgan barcha formulalarning har biriga mos chinlik to‘plamlar U to‘plamning qism to‘plamlaridan iborat va bu U universal to‘plam qismlari soni $C_{2^n}^0 + C_{2^n}^1 + C_{2^n}^2 + ... + C_{2^n}^{2^n-1} + C_{2^n}^{2^n} = 2^{2^n}$ bo‘ladi.

Shunday qilib, tarkibida n ta elementar mulohazalar ishtirok etgan mumkin bo‘lgan barcha formulalar bilan ularning chinlik to‘plamlari orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatildi. Demak, barcha o‘zaro teng kuchli formulalarga faqat bitta chinlik to‘plami mos keladi.

1- misol. Ikkita ($n=2$) x va y elementar mulohazalarning $x \wedge (x \rightarrow y) \rightarrow y$ formulasi aynan chindir (ushbu bobning 3-paragrafidagi 1- misolga qarang). Shuning uchun berilgan formulaning chinlik to‘plami $2^n = 2^2 = 4$ elementli $\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ universal to‘plamdan iboratdir. ■

2- misol. Tarkibida uchta x, y va z elementar mulohazalar qatnashgan $x\bar{y}z$ formula qiymatlar satrlarining faqat bittasida (aniqrog‘i, 1,0,1 satrda) 1 qiymat, qolgan yettitasida esa 0 qiymat qabul qiladi. Shuning uchun, $x\bar{y}z$ formulaning chinlik to‘plami $\{(1,0,1)\}$, ya’ni bitta $(1,0,1)$ kortejdan tashkil topgan bo‘ladi. ■

3- misol. Ushbu $xyz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z$ formula tarkibida uchta kortej bo‘lgan $\{(1,1,1),(0,1,0),(1,0,1)\}$ chinlik to‘plamiga egadir. ■

Agar qandaydir A formula P chinlik to‘plamiga ega bo‘lsa, u holda “A formula P to‘plamda chin qiymat qabul qiladi” (yoki, qisqacha, “A formula P to‘plamda chin”) deb ham yuritiladi. Shunga o‘xshash, “A formula $\bar{P}$ to‘plamda yolg‘on” deyish mumkin, bu yerda $\bar{P} = \boldsymbol{U} \setminus P$, ya’ni P to‘plamning to‘ldiruvchisi. Agar A formula P to‘plamda chin bo‘lsa, u holda $\bar{A}$ formula $\bar{P}$ to‘plamda chin, P to‘plamda esa yolg‘on bo‘ladi. Xuddi shu kabi, aynan chin J formula $\boldsymbol{U}$ universal to‘plamda chin va $\bar{\boldsymbol{U}} = \varnothing$ to‘plamda yolg‘on qiymat qabul qiladi. Aynan yolg‘on $\bar{J}$ formula esa, aksincha, $\varnothing$ to‘plamda chin va $\bar{\varnothing} = \boldsymbol{U}$ to‘plamda yolg‘ondir.

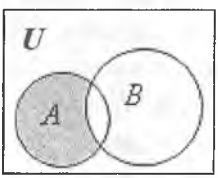
Formulalar bilan chinlik to‘plamlari orasidagi yuqorida ifodalangan bog‘lanish mulohazalar mantiqiga oid masalani to‘plamlar nazariyasi masalasiga va, aksincha, to‘plamlar nazariyasidagi masalani mulohazalar mantiqiga doir masalaga ko‘chirish imkoniyatini beradi.

3.8.2. Asosiy mantiqiy amallarning chinlik to‘plamlari. Chinlik to‘plamlari mos ravishda A va B bo‘lgan P va Q formulalar berilgan bo‘lsin.

Kon'yunksiyaning chinlik to'plami. P va Q formulalar $P \wedge Q$ kon'yunksiyasining chinlik to'plami $A \bigcap B$ bo'ladi. Haqiqatdan ham, kon'yunksiya ta'rifiga asosan, $P \wedge Q$ formula P va Q formulalarning ikkalasi ham chin bo'lgandagina chindir. Shuning uchun, $P \wedge Q$ formulaning chinlik to'plami A va B to'plamlarning umumiy elementlaridan tuzilgan $A \bigcap B$ kesishmasidan iborat bo'ladi. Demak, mulohazalar mantiqidagi kon'yunksiya amaliga ($\wedge$ belgiga) to'plamlar nazariyasidagi kesishma amali ($\bigcap$ belgi) mos keladi (I bobning 2- paragrafidagi 2- shaklga qarang).

4- m i s o l. $C \equiv x\bar{y}z$ va $D \equiv xyz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z$ formulalarning chinlik to'plamlari, mos ravishda, $R = \{(1,0,1)\}$ va $S = \{(1,1,1),(0,1,0),(1,0,1)\}$ bo'lgani uchun (2- va 3- misollarga qarang) $C \wedge D$ kon'yunksiyaning chinlik to'plami $R \bigcap S = \{(1,0,1)\}$ bo'ladi. ■

Diz'yunksiyaning chinlik to'plami. P va Q formulalar $P \vee Q$ diz'yunksiyasining chinlik to'plami $A \bigcup B$ bo'ladi. Haqiqatdan ham, diz'yunksiya ta'rifiga asosan, $P \vee Q$ formula P va Q formulalarning kamida bittasi chin bo'lgandagina chindir. Demak, $A \bigcup B$ to'plamda $P \vee Q$ formula chindir. Shunday qilib, $P \vee Q$ formulaning chinlik to'plami A va B to'plamlarning barcha elementlaridan, ularni takrorlamasdan, tuzilgan $A \bigcup B$ birlashmasidan iborat bo'ladi. Demak, mulohazalar mantiqidagi diz'yunksiya ($\vee$) amaliga to'plamlar nazariyasidagi birlashma ($\bigcup$) amali mos keladi (I bobning 2- paragrafidagi 1- shaklga qarang).



1- shakl

5- m i s o l. 4- misolda aniqlangan C va D formulalar diz'yunksiyasi $C \vee D$ uchun chinlik to'plami $R \bigcup S = \{(1,1,1),(0,1,0),(1,0,1)\}$ bo'ladi. ■

Implikatsiyaning chinlik to'plami. P va Q formulalar $P \rightarrow Q$ implikasiyaning chinlik to'plamini topamiz. $\bar{P}$ formulaning chinlik to'plami $\bar{A}$ va Q formulaning chinlik to'plami B bo'lgani uchun, $P \rightarrow Q \equiv \bar{P} \vee Q$ teng kuchlilikka ko'ra, $P \rightarrow Q$ formulaning chinlik to'plami $\bar{A} \bigcup B$ bo'ladi. 1- shaklda tasvirlangan U to'plamning bo'yalmagan qismi $P \rightarrow Q$ implikatsiyaning chinlik to'plamiga mos keladi.

6- misol. 4- misolda aniqlangan C va D formulalar tarkibida uchtadan x, y va z elementar mulohazalar qatnashgani uchun, $C \to D$ implikatsiyasining chinlik to‘plamini topish maqsadida, dastlab

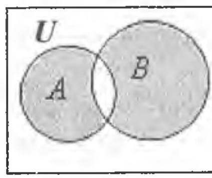
$$U = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,1),(1,0,0),(0,1,1),(0,1,0),(0,0,1),(0,0,0)\}$$

universal to‘plamni tuzamiz. C formulaning chinlik to‘plami $R = \{(1,0,1)\}$ bo‘lgani uchun $\overline{C}$ formulaning chinlik to‘plami

$$\overline{R} = U \setminus R = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0),(0,1,1),(0,1,0),(0,0,1),(0,0,0)\}$$

bo‘ladi. Endi $\overline{R}$ to‘plam bilan B formulaning $S = \{(1,1,1),(0,1,0),(1,0,1)\}$ chinlik to‘plami birlashmasini aniqlasak, $\overline{R} \bigcup S = U$, ya’ni $C \to D$ formulaning chinlik to‘plami universal to‘plamdan iborat bo‘ladi. Bu yerdan $C \to D \equiv x\bar{y}z \to (xyz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z) \equiv J$ xulosani hosil qilamiz. ■

Ekvivalensiyaning chinlik to‘plami. P va Q formulalar $P \leftrightarrow Q$ ekvivalensiyasining chinlik to‘plamini aniqlash uchun $P \leftrightarrow Q \equiv (\overline{P} \vee Q) \wedge (P \vee \overline{Q})$ teng kuchlilikdan foydalanamiz. Yuqorida qilingan xulosalarga ko‘ra $P \leftrightarrow Q$ formulaning chinlik to‘plami $(\overline{A} \bigcup B) \bigcap (A \bigcup \overline{B})$ bo‘ladi. 2- shaklda tasvirlangan U to‘plamning bo‘yalmagan qismi $P \leftrightarrow Q$ ekvivalensiyaning chinlik to‘plamiga mos keladi.



2- shakl

7- misol. 4- misolda aniqlangan C va D formulalar $C \leftrightarrow D$ ekvivalensiyasining chinlik to‘plamini topamiz. 6- misolda $\overline{R} \bigcup S = U$ bo‘lishi aniqlangan edi. $R = \{(1,0,1)\}$ va $\overline{S} = \{(1,1,0),(1,0,0),(0,1,1),(0,0,1),(0,0,0)\}$ to‘plamlar yordamida $R \bigcup \overline{S} = \{(1,1,0),(1,0,1),(1,0,0),(0,1,1),(0,0,1),(0,0,0)\}$ to‘plamni topamiz. Demak, $\{(1,1,0),(1,0,1),(1,0,0),(0,1,1),(0,0,1),(0,0,0)\}$ to‘plam $C \leftrightarrow D$ ekvivalensiyasining chinlik to‘plamidir. ■

3.8.3. Chinlik to‘plami tushunchasining qo‘llanilishi. Chinlik to‘plami tushunchasidan foydalanib mulohazalar algebrasi bilan matematikaning boshqa sohalari, jumladan, to‘plamlar algebrasi orasidagi bog‘lanishlarni ifodalash mumkin. Mulohazalar algebrasidagi $\wedge$ (kon’yunksiya), $\vee$ (diz’yunksiya) va $\neg$ (inkor) mantiqiy amallarga, mos ravishda, to‘plamlar algebrasidagi $\bigcap$ (kesishma), $\bigcup$ (birlashma) va $\overline{}$ (to‘ldirish) amallari to‘g‘ri keladi. Mulohazalar algebrasidagi 1 va 0 o‘zgarmaslarga (konstantalarga) to‘plamlar algebrasidagi U va $\varnothing$

(universal va bo‘sh) to‘plamlar mos keladi. Demak, mulohazalar algebrasidagi biror ifodada (tasdiqda) belgisini $\cap$ belgisiga, $\vee$ ni $\cup$ ga, inkor belgisini to‘ldiruvchi belgisiga, 1ni U ga, 0ni $\varnothing$ ga ($\equiv$ni $=$ga) almashtirsak, to‘plamlar algebrasidagi ifoda (tasdiq) hosil bo‘ladi va, aksincha almashtirishlar bajarsak, to‘plamlar algebrasidagi ifodadan (tasdiqdan) mulohazalar algebrasidagi ifoda (tasdiq) hosil bo‘ladi.

6- misolda chinlik to‘plami tushunchasidan foydalanib $x\bar{y}z \to (xyz \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z) \equiv J$ teng kuchlilik o‘rinli bo‘lishi ko‘rsatilgan edi. Yuqoridagi xulosalar asosida, mulohazalar algebrasining to‘plam algebrasidagiga o‘xshash tasdiqlarini keltirib chiqarish mumkin. Bunday o‘xshashliklarning ayrimlarini keltiramiz.

8- misol. A va B formulalar uchun $A \vee \bar{A} \vee B \equiv J$ teng kuchlilikning o‘rinli bo‘lishini ularga mos P va Q chinlik to‘plamlaridan foydalanib isbotlaymiz. $A \vee \bar{A} \vee B$ formulaning chinlik to‘plami $P \cup \bar{P} \cup Q = U \cup Q = U$. Shu sababli, $\bar{A} \vee A \vee B$ tavtologiyadir. ■

1- teorema. Agar chinlik to‘plamlari mos ravishda P va Q bo‘lgan A va B formulalar uchun $A \to B \equiv J$ teng kuchlilik o‘rinli bo‘lsa, u holda $P \subseteq Q$ bo‘ladi.

Isboti. Ma’lumki, $A \to B$ formulaning chinlik to‘plami U universal to‘plamning $\bar{P} \cup Q$ qism to‘plamidan iborat. $\bar{P} \cup Q = \overline{P \setminus Q}$ (I bobninig 2- paragrafidagi 10- topshiriqqa qarang) bo‘lgani uchun $A \to B$ J shartga ko‘ra $\overline{P \setminus Q} = U$ bo‘lishi kerak. Bundan $P \setminus Q = \bar{U}$ yoki $P \setminus Q = \varnothing$ kelib chiqadi. Bu esa $P \subseteq Q$ ekanligini bildiradi. Demak, $A \to B$ tavtologiya bo‘lishi uchun A formulaning chinlik to‘plami B formula chinlik to‘plamining qism to‘plami bo‘lishi shart. ■

2- teorema. *A va B formulalar teng kuchli bo‘lishi uchun $A \leftrightarrow B$ formula tavtologiya bo‘lishi zarur va yetarli.*

Isboti. A va B formulalarning chinlik to‘plamlari, mos ravishda, P va Q bo‘lsin.

a) A va B formulalar teng kuchli, ya’ni $A \equiv B$ bo‘lsin. U holda $P = Q$ va, shu sababli $A \leftrightarrow B$ ekvivalensiyaning chinlik to‘plami

$$(\bar{P} \cup Q) \cap (P \cup \bar{Q}) = (\bar{P} \cup P) \cap (P \cup \bar{P}) = U \cap U = U$$

bo‘ladi. Bundan $A \leftrightarrow B$ formulalarning tavtologiya ekanligi kelib chiqadi.

b) $A \leftrightarrow B$ formula tavtologiya bo'lsin. U holda $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \equiv J$ teng kuchlilik o'rinli bo'lgani uchun, kon'yunksiya ta'rifiga asosan, $A \rightarrow B \equiv J$ va $B \rightarrow A \equiv J$ teng kuchliliklar o'rinlidir. 1- teoremaga ko'ra, $P \subseteq Q$ va $Q \subseteq P$, ya'ni Q P bo'lishi kelib chiqadi. Bu, o'z navbatida, A va B formulalarning mantiqiy ekvivalentligini tasdiqlaydi. ■

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Ushbu bobning 2- paragrafidagi 1- topshiriqda ifodalangan formulalarning chinlik to'lamlarini tuzing.

2. Ushbu bobning 2- paragrafidagi 2- topshiriqda ifodalangan teng kuchliliklarni chinlik to'plami tushunchasidan foydalanib isbotlang.

3. Chinlik to'plami tushunchasidan foydalanib to'plam algebrasining sizga ma'lum bo'lgan tasdiqlaridan bir nechasini keltirib chiqaring (isbotlang).

4. Quyida berilgan formulalarning chinlik to'plamlarini toping:

a) $A \equiv xy \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y$; b) $B \equiv (x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y})$;

d) $C \equiv xyz \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z}$;

e) $D = (x \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})$;

f) $E \equiv \overline{x\bar{y}} \leftrightarrow \bar{x} \vee xy$; g) $F \equiv (x \leftrightarrow y) \wedge (x\bar{y} \vee \bar{x}y)$;

h) $G \equiv xy \rightarrow (x \rightarrow \bar{y})$; i) $J \equiv x \vee y \rightarrow (x \leftrightarrow y)$;

j) $L \equiv x \vee y \rightarrow z$; k) $M \equiv (x \rightarrow z)(y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow y)$.

5. 4- topshiriqda berilgan formulalardan foydalanib $A \vee B$, $A \vee C$, $A \vee D$, $A \vee F$, $A \wedge B$, $A \wedge C$, $A \wedge D$, $A \wedge F$, $A \rightarrow B$, $A \rightarrow C$, $A \leftrightarrow D$, $A \leftrightarrow F$, $C \rightarrow D$, $C \rightarrow F$, $C \rightarrow D$, $C \leftrightarrow B$, $C \leftrightarrow F$, $F \leftrightarrow E$, $A \rightarrow B \rightarrow C$, $A \rightarrow F \rightarrow C$, $E \rightarrow C$, $E \rightarrow B$, $E \rightarrow D$, $G \rightarrow B$, $E \leftrightarrow F$, $(A \leftrightarrow F) \rightarrow C$, $(A \leftrightarrow F) \rightarrow D$, $A \leftrightarrow F \leftrightarrow E$, $G \rightarrow C$, $G \leftrightarrow D$, $G \leftrightarrow F$, $J \rightarrow B$, $J \rightarrow C$, $J \leftrightarrow D$, $J \leftrightarrow F$, $L \rightarrow B$, $L \rightarrow C$, $L \leftrightarrow D$, $L \leftrightarrow F$, $M \rightarrow B$, $M \rightarrow C$, $M \leftrightarrow D$, $M \leftrightarrow F$, $E \rightarrow F \rightarrow L$, $M \rightarrow J \rightarrow G$, $(L \leftrightarrow E) \rightarrow M$, $(A \leftrightarrow G) \rightarrow F$, $A \leftrightarrow M \leftrightarrow J$ formulalarning chinlik to'plamlarini toping.

6. $f_1 \equiv \overline{xy \vee \bar{z}}$ va $f_2 \equiv x(xy \vee \bar{y}\bar{z} \vee \overline{y \vee \bar{t}z})$ funksiyalarga teng kuchli funksiyalarni toping.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Formulaning chinlik to'plami deganda nimani tushunasiz?

2. Tarkibida n ta elementar mulohazalar ishtirok etgan formulaga hammasi bo'lib nechta chinlik to'plami mos keladi?

3. Barcha o'zaro teng kuchli formulalarga nechta chinlik to'plami mos keladi?

4. Nima uchun mulohazalar mantiqiga oid masalani to'plamlar nazariyasi masalasiga va, aksincha, to'plamlar nazariyasidagi masalani mulohazalar mantiqi masalasiga ko'chirish mumkin?

5. Kon'yunksiya, diz'yunksiya, implikatsiya va ekvivalensiyaning chinlik to'plamlari qanday aniqlanadi?

6. Implikatsiya amalini bajarish natijasida tavtologiya hosil bo'lishi uchun mos chinlik to'plamlari qanday shartga bo'ysunishlari kerak?

7. Berilgan ikkita formula mantiqiy ekvivalent bo'lishi uchun ularning ekvivalensiyasi tavtologiya bo'lishi zarur va yetarliligi chinlik to'plamlaridan foydalanib qanday isbotlanadi?

3.9. Mulohazalar algebrasi funksiyalari. Bul algebrasi

Funksiya. Funksiyalar teng kuchliligi. 0 va 1 saqlovchi funksiyalar. n argumentli funksiyalar soni. Bir rangli superpozitsiya. Bul algebrasi.

3.9.1. Mulohazalar algebrasida funksiya tushunchasi. Oddiy algebradagi funksiya tushunchasiga o'xshash, mulohazalar algebrasida ham **funksiya** tushunchasi[1] kiritilishi mumkin. Ushbu paragrafda mulohazalar algebrasining funksiya tushunchasini chuqurroq o'rganamiz.

Ma'lumki, oddiy algebrada funksiyaning qiymatlari turli usullar vositasida, masalan, jadval yordamida berilishi mumkin. Mulohazalar algebrasida ko'pchilik tushunchalarni ifodalashda chinlik jadvallari qulay vosita hisoblanadi. Chinlik jadvallarida faqat ikkita o'zgarmas (0 va 1) ishtirok etadi. Shu tufayli $E_2 = \{0, 1\}$ deb belgilaymiz.

1- ta'rif. *Argumentlari va o'zi E_2 to'plamdan qiymatlar qabul qiluvchi funksiya mulohazalar algebrasining* ***funksiyasi*** *deb ataladi.*

Argumentlari $x_1, x_2, ..., x_n$ bo'lgan f funksiyani, odatdagidek, $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ shaklda belgilaymiz. $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiya 1- chinlik jadvali vositasida berilishi mumkin.

---

[1] Ushbu bobning 7- paragrafiga qarang.

Bu jadvalning har bir satrida f funksiyaning $x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilari $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ qiymatlari va funksiyaning bu qiymatlar kortejlariga mos keluvchi $f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ qiymatlari joylashgan bo'lib, bu yerda $\alpha_j \in E_2$ $(j = \overline{1,n})$. Ma'lumki, n ta o'zgaruvchili $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaning chinlik jadvalida 2^n ta qiymatlar satri bo'lib, barcha teng kuchlimas funksiyalar soni 2^{2^n} ga teng.

Mulohazalar algebrasida quyidagilar **asosiy elementar funksiyalar** deb yuritiladi:

1-jadval

x_1	x_2	...	x_n	$f(x_1, x_2, ..., x_n)$
0	0	...	0	$f(0,0,...,0)$
1	0	...	0	$f(1,0,...,0)$
...	...	...	...	...
1	1	...	0	$f(1,1,...,0)$
1	1	...	1	$f(1,1,...,1)$

$$f_1(x) \equiv x, \quad f_2(x) \equiv \overline{x},$$
$$f_3(x, y) \equiv x \wedge y, \quad f_4(x, y) \equiv x \vee y,$$
$$f_5(x, y) \equiv x \rightarrow y,$$
$$f_6(x, y) \equiv x \leftrightarrow y,$$
$$f_7(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv 1,$$
$$f_8(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv 0.$$

2- t a ' r i f. *Agar $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiya uchun $f(0,0,...,0) \equiv 0$ bo'lsa, u holda u **0 saqlovchi funksiya**, $f(1,1,...,1) \equiv 1$ bo'lganda esa **1 saqlovchi funksiya** deb ataladi.*

"0 saqlovchi funksiya" iborasi o'rnida "yolg'on qiymat saqlovchi funksiya", "1 saqlovchi funksiya" iborasi o'rnida esa "chin qiymat saqlovchi funksiya" iborasi qo'llanilishi ham mumkin. n ta argumentli 0 saqlovchi funksiyalar soni $2^{2^n - 1}$ ga, 1 saqlovchi funksiyalarning soni ham $2^{2^n - 1}$ ga teng bo'lishini isbotlash qiyin emas.

3.9.2. Funksiyalar teng kuchliligi. Mulohazalar algebrasida teng kuchli formulalar tushunchasi kiritilgan edi. Bu yerda ham n argumentli funksiyalar teng kuchliligi tushunchasini kiritish mumkin.

3- t a ' r i f. *f va g funksiyalar mulohazalar algebrasining funksiyalari, $x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilar esa ularning hech bo'lmaganda bittasining argumentlari bo'lsin. Agar $x_1, x_2, ..., x_n$ argumentlarning barcha qiymatlar satrlari uchun f va g funksiyalarning mos qiymatlari bir xil bo'lsa, u holda f va g funksiyalar **teng kuchli funksiyalar** deb ataladi.*

Agar berilgan funksiyalar teng kuchli bo'lmasa, u holda ular **teng kuchlimas funksiyalar** deb yuritiladi.

Berilgan f va g funksiyalarning teng kuchliligi $f \equiv g$ shaklda yoziladi. Agar f va g funksiyalar teng kuchlimas funksiyalar bo'lsa, u holda $f \not\equiv g$ yozuvdan foydalaniladi.

4-ta'rif. *Agar $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaning qandaydir x_i argumenti uchun $f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n) \equiv f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n)$ shart qolgan $x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$ argumentlarning mumkin bo'gan ixtiyoriy qiymatlarida bajarilsa, u holda x_i uning **soxta argumenti**, $x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$ argumentlarning mumkin bo'gan qiymatlaridan hech bo'lmasa bittasi uchun $f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n) \not\equiv f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n)$ shart bajarilganda esa x_i uning **muhim argumenti** deb ataladi.*

1- misol. Berilgan $f(x, y) \equiv x \vee (xy)$ funksiya uchun y soxta argumentdir, chunki $f(x, 0) \equiv f(x, 1)$ shart x argumentning ixtiyoriy (0 yoki 1) qiymatida bajariladi. Lekin, x o'zgaruvchi $f(x, y)$ funksiyaning muhim argumentidir, chunki $f(0, y) \equiv 0 \not\equiv f(1, y) \equiv 1$ shart y o'zgaruvchining barcha (0 va 1) qiymatlarida o'rinlidir. ■

Mulohazalar algebrasida o'rinli bo'lgan qonun va qoidalariga asoslanib, funksiyaning qiymatini o'zgartirmasdan, uning argumentlari safiga istalgancha soxta argumentlarni kiritish va bu safdan istalgancha soxta argumentlarni olib tashlash mumkin.

3.9.3. Funksiyalar superpozitsiyasi. Endi formula tushunchasini funksiyalar superpozitsiyasi tushunchasi bilan bog'liq holda o'rganamiz.

$$\Phi = \{\varphi_1(x_{11}, x_{12}, ..., x_{1k_1}), \varphi_2(x_{21}, x_{22}, ..., x_{2k_2}), ..., \varphi_m(x_{m1}, x_{m2}, ..., x_{mk_m})\}$$

mulohazalar algebrasi funksiyalarining chekli sistemasi bo'lsin.

5- ta'rif. *Quyidagi ikki usulning biri vositasida hosil qilinadigan ψ funksiyaga Φ sistemadagi $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m$ funksiyalarning **elementar superpozitsiyasi** yoki **bir rangli superpozitsiyasi** deb ataladi:*

a) biror $\varphi_j \in \Phi$ funksiyaning x_{ji} argumentini qayta nomlash usuli, ya'ni $\varphi_j(x_{j1}, x_{j2}, ..., x_{ji-1}, y, x_{ji+1}, ..., x_{jk_j})$, bu yerda y o'zgaruvchi, x_{jk_j} o'zgaruvchilarning birortasi bilan mos tushishi mumkin;

b) biror $\varphi_j \in \Phi$ funksiyaning biror x_{ji} argumenti o'rniga boshqa $\varphi_m(x_{m1}, x_{m2}, ..., x_{mk}) \in \Phi$ funksiyani qo'yish usuli, ya'ni

$$\varphi_j(x_{j1}, x_{j2}, ..., x_{ji-1}, \varphi_m(x_{m1}, x_{m2}, ..., x_{mk}), x_{ji+1}, ..., x_{jk_j}).$$

5- ta'rifda keltirilgan usullardan birortasini berilgan Φ sistema funksiyalariga qo'llash natijasida hosil qilingan yangi funksiyalar $\Phi^{(1)}$

sistemasini **bir rangli superpozitsiyalar sinfi** deb, $\Phi^{(1)}$ sinfi funksiyalariga qo'llash natijasida hosil qilingan funksiyalar $\Phi^{(2)}$ sistemasini **ikki rangli superpozitsiyalari sinfi** deb, va, hokazo, k **rangli superpozitsiyalar** $\Phi^{(k)}$ **sinfi** deb ataluvchi sinflarni hosil qilamiz.

Umuman olganda, $\Phi^{(k+1)} = (\Phi^{(k)})^{(1)}$.

1- izoh. 5- ta'rifning a) qismiga asosan bir xil chinlik jadvaliga ega bo'lib, lekin o'zgaruvchilarning belgilanishi bilan farq qiladigan funksiyalar bir-birining superpozitsiyasi bo'ladi.

2- izoh. 5- ta'rifning a) qismiga asosan biror x_{ji} o'zgaruvchini shu funksiyaning boshqa x_{jk} $(i \neq k)$ o'zgaruvchisi bilan qayta nomlasak, natijada o'zgaruvchilari soni kam funksiyaga ega bo'lamiz. Bu holda x_{ji} va x_{jk} o'zgaruvchilar **aynan tenglashtirildi** deb aytamiz. Masalan, $x \vee y$ va $x \wedge \overline{y}$ funksiyalardagi y ni x bilan qayta nomlasak, u vaqtda $x \vee x = x$ va $x \wedge \overline{x} = 0$ funksiyalarni hosil qilamiz.

3- izoh. 5- ta'rifning a) qismiga asosan agar $\Phi \subset \Phi^{(1)}$ bo'lsa, u holda $\Phi^{(r)} \subset \Phi^{(r+1)}$ va, umuman, $r \leq s$ bo'lganda $\Phi^{(r)} \subseteq \Phi^{(s)}$ bo'ladi.

6- ta'rif. *x, $\overline{x}$, xy, $x \vee y$, $x \rightarrow y$, $x \leftrightarrow y$ asosiy elementar funksiyalarning superpozitsiyasi vositasida hosil qilingan ifoda **formula** deb ataladi.*

3.9.4. Bul algebrasi. Ushbu bobning 4- paragrafida mulohazalar algebrasidagi asosiy teng kuchliliklarni ko'rib o'tgan edik. Endi bu teng kuchliliklardan foydalanib, mantiq fanini formallashtirgan va matematik mantiqning aksiomalar sistemasini yaratgan ingliz olimi Jorj Bul (kitobning kirish qismiga va I bobning 2- paragrafiga qarang) nomi bilan ataladigan algebrani o'rganamiz.

Mulohazalar algebrasida

$$\overline{\overline{x}} = x \tag{1}$$

teng kuchlilik o'rinli bo'lishi o'rganilgan edi. Mulohazalar algebrasining asosiy teng kuchliliklari tarkibiga kiruvchi

$$x \wedge y \equiv y \wedge x, \tag{2}$$

$$(x \wedge y) \wedge z \equiv x \wedge (y \wedge z), \tag{3}$$

$$x \vee y \equiv y \vee x, \tag{4}$$

$$(x \vee y) \vee z \equiv x \vee (y \vee z), \tag{5}$$

$$x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \tag{6}$$

$$x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z), \tag{7}$$

teng kuchliliklar esa mantiq algebrasida kon'yunksiya va diz'yunksiya amallariga nisbatan kommutativlik va assotsiativlik qonunlari hamda diz'yunksiyaga nisbatan kon'yunksiya va kon'yunksiyaga nisbatan diz'yunksiyaning distributivlik qonuni o'rinli bo'lishini bildiradi.

Jorj Bul

Ma'lumki, sonlar algebrasida kon'yunksiyaga nisbatan diz'yunksiyaning distributivlik qonuni o'rinli emas, yuqorida ifodalangan boshqa barcha qonunlar esa amal qiladi. Shuning uchun mantiq algebrasi formulalari ustida xuddi sonlar algebrasi formulalari ustidagi kabi (kon'yunksiyaga nisbatan diz'yunksiyaning distributivlik qonuni ham o'rinliligini e'tiborga olgan holda) qavslarni ochish, qavslarga olish, umumiy ko'paytuvchini yoki qo'shiluvchini qavslardan tashqariga chiqarish amallarini bajarish mumkin.

Bundan tashqari, mantiq algebrasida, sonlar algebrasidan farqli o'laroq,

$$\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}, \tag{8}$$

$$\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}, \tag{9}$$

$$x \wedge (x \vee y) = x$$

teng kuchliliklarga asoslangan almashtirishlarni ham bajarish mumkin. Bu holat turli yo'nalishlardagi umumlashtirishlarni bajarish imkonini beradi. Masalan, quyidagi umumlashtirishni keltirish mumkin.

Bo'sh bo'lmagan M to'plamda "=" (tenglik) tushunchasi hamda ikkita binar "+" (qo'shish), " · " (ko'paytirish) va bitta unar "¬" (inkor) amallari aniqlangan bo'lsin. Bundan tashqari, bu to'plamda 0 va 1 qiymatlar aniqlangan va ixtiyoriy tabiatli x, y va z elementlar uchun quyidagi aksiomalar bajarilsin:

– kommutativlik qonunlari: $x \cdot y = y \cdot x$, $x + y = y + x$;

– assotsiativlik qonunlari: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$,

$(x + y) + z = x + (y + z)$;

– distributivlik qonunlari: $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$,

$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$;

– idempotentlik qonunlari:

$$x + x = x, \tag{10}$$

$$x \cdot x = x, \tag{11}$$
$$1 \wedge x = x, \tag{12}$$
$$0 \vee x = x; \tag{13}$$

– inkorni inkor qilish qonuni: (1);

– de Morgan qonunlari: $\overline{x+y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$, $\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$;

– yutilish qonunlari: $x + (x \cdot y) = x$, $x \cdot (x + y) = x$.

7- ta'rif. *Kon'yunksiya, diz'yunksiya, inkor amallari hamda 0 va 1 elementlari aniqlangan M to'plamda shu mantiqiy amallar va 0, 1 elementlar uchun (1)–(13) aksiomalar bajarilsa, bunday M to'plam* ***Bul algebrasi*** *deb ataladi.*

M to'plamning x, y va z elementlarini mulohazalar deb, "+", " · " va "¬" amallarni, mos ravishda, diz'yunksiya, kon'yunksiya va inkor hamda tenglik belgisini teng kuchlilik belgisi deb hisoblasak, mantiq algebrasidagi

$$\overline{\overline{x}} \equiv x,\ x \wedge y \equiv y \wedge x,\ (x \wedge y)z \equiv x(y \wedge z),\ x \vee y \equiv y \vee x,$$
$$(x \vee y) \vee z \equiv x \vee (y \vee z),\ x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$
$$x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z),\ \overline{x \vee y} \equiv \overline{x} \wedge \overline{y},\ \overline{x \wedge y} \equiv \overline{x} \vee \overline{y},$$
$$x \vee x = x,\ x \wedge x = x,\ 1 \vee x = 1,\ 0 \wedge x = 0,\ (x \wedge y) \vee x = x,$$
$$(x \vee y) \wedge x = x,\ x \vee \overline{x} = 1,\ x \wedge \overline{x} = 0$$

teng kuchliliklardan ko'rinib turibdiki, M to'plam Bul algebrasining barcha aksiomalarini qanoatlantiradi. Shuning uchun mantiq algebrasi Bul algebrasidir.

2- misol. M – qandaydir to'plam (masalan, to'g'ri chiziqda yotgan nuqtalar to'plami yoki natural sonlar to'plami) va μ_M – M to'plamning barcha qism to'plamlaridan tashkil topgan to'plam, ya'ni M to'plamning buleani ($\mu_M = 2^M$) bo'lsin. μ_M buleandan olingan x va y to'plamlarning $x \cap y$ kesishmasini $x \wedge y$ orqali, $x \cup y$ birlashmasini $x \vee y$ orqali, $\overline{x}$ orqali x to'plamning M to'plamigacha $\overline{x}$ to'ldiruvchisini, 0 orqali $\varnothing$ bo'sh to'plamni va 1 orqali M to'plamni belgilab olamiz. U vaqtda μ_M to'plam Bul algebrasi bo'ladi, chunki Bul algebrasi ta'rifida ifodalangan barcha 13 aksioma bajariladi. ■

3- misol. Mulohazalar to'plami uchun $\wedge$, $\vee$ va $\neg$ amallari hamda 0 va 1 elementlari aniqlanganligi uchun bu to'plam Bul algebrasi bo'lishini taxmin qilish mumkin. Lekin bunday bo'lishi uchun quyidagi aniqlikni kiritish kerak. A va B mulohazalar aynan teng bo'lishi uchun $A \leftrightarrow B$ ekvivalentlik absolyut chin bo'lishi kerak. Ana shunday aniqlik kiritilgandan so'ng mulohazalar to'plami Bul algebrasiga misol bo'la oladi. ■

Muammoli masala va topshiriqlar

1. $A(x,y,z,t) \equiv (x \vee y)(z \vee t)$ va $B(x,y,z,t) \equiv xz \vee yz \vee xt \vee yt$ funksiyalarning teng kuchliligini isbotlang.

2. $C(x,y,z,t) = xy \vee zt$ funksiyaga teng kuchli birorta funksiya toping.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Funksiya deb nimaga aytiladi?
2. Funksiyalar superpozitsiyasi nimadan iborat?
3. Asosiy elementar funksiyalarni bilasizmi?
4. 0 saqlovchi funksiya deganda nimani tushunasiz?
5. n ta argumentli 1 saqlovchi funksiyalar qancha?
6. Berilgan funksiya bir vaqtning o'zida ham 0 saqlovchi, ham 1 saqlovchi funksiya bo'la oladimi?
7. Qanday shartlar bajarilsa, berilgan funksiyalar teng kuchli funksiyalar deb ataladi?
8. Funksiyaning soxta va muhim argumentlari orasida qanday farq bor?
9. Funksiyalarning elementar superpozitsiyasi deganda nimani tushunasiz?
10. Bul algebrasi deb nimaga aytiladi?

3.10. Mantiq algebrasidagi ikki taraflama qonun

Ikki taraflama funksiya. O'z-o'ziga ikki taraflama funksiya. Ikki taraflama qonun.

3.10.1. Ikki taraflama funksiya. Endi ikki taraflama (qo'shma) funksiya tushunchasini kiritamiz. $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaga ikki taraflama bo'lgan funksiyani topish uchun f funksiyaning chinlik jadvalida hamma o'zgaruvchilarni ularning inkoriga almashtirish kerak, ya'ni hamma joyda 1 ni 0 ga va 0 ni 1 ga almashtirish kerak.

1-ta'rif. *Quyidagicha aniqlangan*

$$f^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$$

funksiyaga $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *funksiyaning* ***ikki taraflama funksiyasi*** *deb aytiladi.*

2- ta'rif. *Agar* $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)$ *munosabat bajarilsa, u holda* $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ***o'z-o'ziga ikki taraflama funksiya*** *deb ataladi.*

Ta'rifga asosan, $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ ikki taraflama funksiya $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ va $(\overline{\alpha}_1, \dots, \overline{\alpha}_n)$ qiymatlar satrida qarama-qarshi qiymatlar qabul qiladi.

1- misol. Mulohazalar algebrasining asosiy elementar funksiyalariga ikki taraflama bo'lgan funksiyalarni topamiz (1-jadvalga qarang). Demak, ta'rifga asosan, $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalar o'z-o'ziga ikki taraflama funksiya bo'ladi. ■

1-jadval

Berilgan funksiya	Ikki taraflama funksiya
$f_1(x) = x$	$f_1^*(x) = x$
$f_2(x) = \overline{x}$	$f_2^*(x) = \overline{x}$
$f_3(x, y) = xy$	$f_3^* = x \vee y$
$f_4(x, y) = x \vee y$	$f_4^* = xy$
$f_5(x, y) = x \to y$	$f_5^* = \overline{y \to x}$
$f_6(x, y) = x \leftrightarrow y$	$f_6^* = \overline{x \leftrightarrow y}$
$f_7 = 1$	$f_7^* = 0$
$f_8 = 0$	$f_8^* = 1$

2- misol. $f(x, y, z) = xy \vee yz \vee xz$ funksiyaning o'z-o'ziga ikki taraflama funksiya ekanligini isbot qilamiz. Haqiqatdan ham

$$f^*(x,y,z) = \overline{\overline{x}\overline{y} \vee \overline{y}\overline{z} \vee \overline{x}\overline{z}} = \overline{\overline{x}\overline{y}} \wedge \overline{\overline{y}\overline{z}} \wedge \overline{\overline{x}\overline{z}} = (x \vee y)(y \vee z)(x \vee z) =$$
$$= [(x \vee y)y \vee (x \vee y)z](x \vee z) = [y \vee yz \vee xz](x \vee z) =$$
$$= (y \vee xz)(x \vee z) = xy \vee yz \vee x(x \vee z)z = xy \vee yz \vee xz$$

Demak, $f(x, y, z) = f^*(x, y, z)$ ekanligi uchun f o'z-o'ziga ikki taraflama funksiyadir. ■

Teorema. *Agar* $\Phi(x_1, \dots, x_n) = f(f_1(x_{11}, \dots, x_{1p_1}), \dots, f_m(x_{m1}, \dots, x_{mp_m}))$ *bo'lsa, u holda* $\Phi^*(x_1, \dots, x_n) = f^*(f_1^*(x_{11}, \dots, x_{1p_1}), \dots, f_m^*(x_{m1}, \dots, x_{mp_m}))$ *bo'ladi.*

Isboti. $\Phi^*(x_1, \dots, x_n) = \overline{\Phi}(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n) =$

$$= \overline{f}(f_1(\overline{x}_{11}, \dots, \overline{x}_{1p_1}), \dots, f_m(\overline{x}_{m1}, \dots, \overline{x}_{mp_m})) =$$

$$=\overline{f}(\overline{\overline{f}}_1(\overline{x}_{11},...,\overline{x}_{1p_1}),...,\overline{\overline{f}}_m(\overline{x}_{m1},...,\overline{x}_{mp_m}))=$$

$$=\overline{f}(\overline{f}_1^*(x_{11},...,x_{1p_1}),...,\overline{f}_m^*(x_{m1},...,x_{mp_m}))=$$

$$=f^*(f_1^*(x_{11},...,x_{1p_1}),...,f_m^*(x_{m1},...,x_{mp_m})).\ ■$$

3.10.2. Ikki taraflama qonun. 1- teoremaning isbotidan ikki taraflama qonun kelib chiqadi.

Ikki taraflama qonun. $\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_m$ *funksiyalarning superpozisiyasiga ikki taraflama bo'lgan funksiya mos ravishda* $\varphi_1^*,\varphi_2^*,...,\varphi_m^*$ *ikki taraflama funksiyalar superpozisiyasiga teng kuchlidir, ya'ni agar* $A=C[\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_m]$ *formula* $f(x_1,...,x_n)$ *funksiyani realizatsiya etsa, u holda* $C[\varphi_1^*,\varphi_2^*,...,\varphi_m^*]$ *formula* $f^*(x_1,...,x_n)$ *funksiyani realizatsiya etadi.*

Bu formula A formulaga **ikki taraflama bo'lgan formula** deb aytiladi va u A^* deb belgilanadi. Demak,

$$A^*=C[\varphi_1^*,\varphi_2^*,...,\varphi_m^*].$$

Ushbu qonundan o'z-o'ziga ikki taraflama bo'lgan funksiyalarning superpozitsiyasi yana o'z-o'ziga ikki taraflama funksiya bo'lishi kelib chiqadi, ya'ni agar $\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_m$ o'z-o'ziga ikki taraflama funksiya bo'lsa, u holda $\Phi^*=\varphi^*(\varphi_1^*,...\varphi_m^*)$ funksiya ham o'z-o'ziga ikki taraflama bo'ladi. Haqiqatan ham,

$$\Phi^*=\varphi^*(\varphi_1^*,...\varphi_m^*)=\varphi(\varphi_1,...\varphi_m)=\Phi .$$

Agar funksiya formula orqali ifodalangan va bu formula o'z navbatida $\wedge$, $\vee$, $\neg$ mantiq amallari orqali ifodalangan bo'lsa, u holda bu funksiyaga (formulaga) ikki taraflama bo'lgan funksiyani (formulani) topish uchun $\vee$ belgini $\wedge$ belgiga, $\wedge$ni ga, 1ni 0ga va 0ni 1ga almashtirish kifoya. Bu prinsipni teng kuchli formulalarga nisbatan ishlatganda, yana teng kuchli formulalar hosil qilamiz, ya'ni $A(x_1,...,x_n)=B(x_1,...,x_n)$ bo'lsa, u holda $A^*(x_1,...,x_n)=B^*(x_1,...,x_n)$.

Ushbu prinsipga tayanib mantiq algebrasining bir formulasidan boshqa formulasini, bir teoremasidan boshqa teoremasini, bir ta'rifidan esa boshqa ta'rifini hosil qilish mumkin.

3- misol. Ushbu bobning 9- paragrafida keltirilgan (2), (3), (6), (8), (10), (12) teng kuchli formulalarga ushbu prinsipni qo'llasak, (4), (5), (7), (9), (11), (13) teng kuchli formulalar kelib chiqadi. ■

Mantiq algebrasida elementlari n ta argumentli o'z-o'ziga ikki taraflama funksiyalardan iborat bo'lgan to'plamni S bilan belgilaymiz, uning elementlari soni 2^{2^n-1} ga tengdir.

Endi o'z-o'ziga ikki taraflama bo'lmagan funksiyalar haqidagi lemmani ko'rib chiqaylik.

Lemma. *Agar* $\varphi(x_1,...,x_n)\notin S$ *bo'lsa, u holda undan argumentlarining o'rniga* x *va* $\overline{x}$ *funksiyalarni qo'yish usuli bilan bir argumentli o'z-o'ziga ikki taraflama bo'lmagan funksiya, ya'ni konstantani hosil qilish mumkin.*

Isboti. $\varphi(x_1,...,x_n)\notin S$ bo'lgani uchun, shunday $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ qiymatlar satri topiladiki, $\varphi(\overline{\alpha}_1,...,\overline{\alpha}_n)=\varphi(\alpha_1,...,\alpha_n)$ bo'ladi.

$\varphi_i(x)=x^{\alpha_i}$ $(i=\overline{1,n})$ funksiyani kiritamiz va $\varphi_i(x)=\varphi(\varphi_1(x),...,\varphi_n(x))$ deb belgilab olamiz. U holda quyidagi natijaga ega bo'lamiz:

$$\varphi(0)=\varphi(\varphi_1(0),...,\varphi_n(0))=\varphi(0^{\alpha_1},...,0^{\alpha_n})=\varphi(\overline{\alpha}_1,...,\overline{\alpha}_n)=$$
$$\varphi(\alpha_1,...,\alpha_n)=\varphi(1^{\alpha_1},...,1^{\alpha_n})=\varphi(\varphi_1(1),...,\varphi_n(1))=\varphi(1)\,.\ ■$$

3.11. Mantiq algebrasidagi arifmetik amallar. Jegalkin ko'phadi

Arifmetik amallar. Jegalkin ko'phadi. Mantiqiy amallarni arifmetik amallar orqali ifodalash. Chiziqli funksiya.

3.11.1. Mantiq algebrasidagi arifmetik amallar. $\{0,1\}$ Bul algebrasidagi kon'yunksiya amali oddiy arifmetikadagi 0 va 1 sonlar ustidagi ko'paytma amaliga mos keladi. Ammo 0 va 1 sonlarini qo'shish natijasi $\{0,1\}$ to'plam doirasidan chetga chiqadi. Shuning uchun I.I.Jegalkin[1] 2 moduliga asosan qo'shish amalini kiritdi. x va y mulohazalarni 2 moduli bo'yicha qo'shishni $x+y$ deb belgilaymiz. 2 moduli bo'yicha qo'shish, odatda, chinlik jadvali bilan beriladi (1- jadvalga qarang).

Chinlik jadvalidan ko'rinib turibdiki, $x+y=\overline{x\leftrightarrow y}$ bo'ladi. Mantiq algebrasidagi ko'paytma va 2 moduli bo'yicha qo'shish mantiq amallari uchun kommu-tativlik, assotsiativlik va distributivlik qonunlari o'z kuchini saqlaydi.

1- jadval

x	y	$x+y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

[1] Jegalkin Ivan Ivanovich (Жегалкин Иван Иванович 1869-1947) – sovet matematigi. I. I. Jegalkin XX asrning 30- yillari boshida MDUda birinchi bo'lib matematik mantiq bo'yicha ilmiy seminar tashkil etgan.

Bul algebrasidagi asosiy mantiqiy amallarni kiritilgan arifmetik amallar orqali quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\bar{x} = x+1\,;\ x \wedge y = xy\,;\ x \vee y = xy + x + y\,;$$
$$x \to y = xy + x + 1\,;\ x \leftrightarrow y = x + y + 1\,.$$

2 moduli bo‘yicha qo‘shish amalining ta’rifiga asosan $x + x = 0$ va $xx = x$ ($x^n = x$).

3.11.2. Jegalkin ko‘phadi. Mantiq algebrasidagi istalgan funksiyani yagona arifmetik ko‘phad shakliga keltirish mumkin. Haqiqatan ham, biz oldingi paragraflarda istalgan funksiyani kon’yunksiya va inkor mantiqiy amallar orqali ifodalash mumkinligini ko‘rgan edik. Yuqorida kon’yunksiya, diz’yunksiya va inkor mantiqiy amallarni arifmetik amallar orqali ifodaladik. Demak, istalgan funksiyani arifmetik ko‘phad shakliga keltirish mumkin.

1- **ta’rif.** $\sum x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} + a$ *ko‘rinishdagi ko‘phad* ***Jegalkin ko‘phadi*** *deb ataladi, bu yerda hamma* x_{i_j} *o‘zgaruvchilar birinchi darajada qatnashadi,* $(i_1,\ldots,i_k)$ *qiymatlar satrida hamma* i_j *lar har xil bo‘ladi,* $a \in E_2 = \{0,\, 1\}$.

2- **ta’rif.** $x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_k} + a$ *ko‘rinishdagi funksiya* ***chiziqli funksiya*** *deb ataladi, bu yerda* $a \in E_2 = \{0,\, 1\}$. Chiziqli funksiyaning ifodasidan ko‘rinib turibdiki, n ta argumentli chiziqli funksiyalar soni 2^{n+1} ga teng va bir argumentli funksiyalar doimo chiziqli funksiya bo‘ladi.

Jegalkin ko‘phadi ko‘rinishidagi har bir funksiyaning argumentlari soxta emas argumentlar bo‘ladi. Haqiqatan ham, agar x_1 shunday argument bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $f(x_1,\ldots,x_n)$ funksiyani quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = x_1\varphi(x_2,\ldots,x_n) + \psi(x_2,\ldots,x_n)\,.$$

Bu yerda φ funksiya aynan 0ga teng emas, aks holda x_1 argument f funksiyaning (ko‘phadning) argumentlari safiga qo‘shilmasdi.

Endi $x_2,\ldots,x_n$ argumentlarning shunday qiymatlarini olamizki, $\varphi = 1$ bo‘lsin. U holda f funksiyaning qiymati x_1 argumentning qiymatiga bog‘liq bo‘ladi. Demak, x_1 soxta argument emas.

Mantiq algebrasidagi hamma n argumentli chiziqli funksiyalar to‘plamini L bilan belgilaymiz. Uning elementlari soni 2^{n-1} ga teng bo‘ladi.

Teorema. *Agar* $f(x_1,\ldots,x_n) \notin L$ *bo‘lsa, u holda undan argumentlari o‘rniga 0 va 1 konstantalarni hamda* x *va* $\bar{x}$ *funksiyalarni,* *ayrim holda f ustiga "–" inkor amalini qo'yish usuli bilan* x_1x_2 *funksiyani hosil qilish mumkin.*

3.12. Mantiq algebrasidagi monoton funksiyalar

Monoton funksiya. Qiymatlar satrining oldin kelishi. Monoton funksiyalar superpozitsiyasi. KNSh (DNSh) ko'rinishidagi funksiyaning monoton funksiya bo'lish sharti.

3.12.1. Tartiblash. 0<1 munosabati orqali {0,1} to'plamini tartiblashtiramiz. $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$ va $\beta = (\beta_1,...,\beta_n)$ qiymatlar satrlari bo'lsin.

1- ta'rif. *Agar* $\alpha_i \leq \beta_i$ *tengsizlik hech bo'lmaganda bitta i uchun bajarilsa yoki* α *va* β *qiymatlar satrlari ustma-ust tushsa, u holda* α ***qiymatlar satri*** β ***qiymatlar satridan oldin keladi*** *deb aytamiz va* $\alpha \prec \beta$ *shaklda yozamiz.*

2- ta'rif. *Agar* $\alpha \prec \beta$ *munosabatdan* $f(\alpha_1,...,\alpha_n) \leq f(\beta_1,...,\beta_n)$ *tengsizlikning bajarilishi kelib chiqsa, u holda* $f(x_1,...,x_n)$ *funksiya* ***monoton funksiya*** *deb ataladi.*

3- ta'rif *Agar* $\alpha \prec \beta$ *munosabatdan* $f(\alpha_1,...,\alpha_n) > f(\beta_1,...,\beta_n)$ *tengsizlikning bajarilishi kelib chiqsa, u holda* $f(x_1,...,x_n)$ ***nomonoton funksiya*** *deb ataladi.*

Asosiy elementar mantiqiy funksiyalardan 0, 1, x, xy, $x \vee y$ funksiyalar monoton, $\overline{x}$, $x \to y$, $x \leftrightarrow y$, $x + y$ funksiyalar esa nomonoton funksiyalardir.

1- teorema. *Monoton funksiyalarning superpozitsiyasidan hosil qilingan funksiya ham monoton funksiya bo'ladi.*

Isboti. Φ monoton funksiyalar sistemasi bo'lsin. Shu sistemadagi funksiyalar superpozitsiyasidan hosil qilingan funksiya monoton bo'lishini isbot qilish kerak. Matematik induksiya usulini qo'llaymiz. Baza: 0 rangli superpozitsiya uchun bu tasdiqning to'g'riligi ravshan, chunki Φ sistemadagi hamma funksiyalar monoton funksiyalardir.

Induksion o'tish. k rangli superpozitsiya uchun teoremadagi tasdiq to'g'ri bo'lsin. Bu tasdiqning $k+1$ rangli superpozitsiya uchun ham to'g'riligini isbotlaymiz.

$\varphi(y_1,...,y_l)$, $\psi(y_1,...,y_l) \in \Phi^{(k)}$ bo'lsin. U holda

$$\varphi(x_1,...,x_{i-1}, y, x_{i+1},..., x_k);$$

$$F(x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_k,y_1,...,y_l)=$$
$$\varphi(x_1,...,x_{i-1},\psi(y_1,...,y_l),x_{i+1},...,x_n)$$

funksiyalarning monoton ekanligini isbotlash kerak. Bu yerda y va y_i o'zgaruvchilar x_j o'zgaruvchilarning birortasi bilan mos kelishi mumkin. φ funksiyaning monotonligidan $\varphi(x_1,...,x_{i-1},y,x_{i+1},...,x_k)$ funksiyaning monoton funksiya ekanligi kelib chiqadi. F funksiyaning monotonligini isbotlaymiz. Buning uchun F funksiyaning ikkita γ' va γ'' taqqoslanadigan qiymatlar satrini ko'rib chiqamiz:

$$\gamma'=(\alpha_1',...,\alpha_{i-1}',...,\alpha_{i+1}',...,\alpha_n',\beta_1',...,\beta_l');$$
$$\gamma''=(\alpha_1'',...,\alpha_{i-1}'',...,\alpha_{i+1}'',...,\alpha_n'',\beta_1'',...,\beta_l'')$$

va $\gamma'\prec\gamma''$ bo'lsin. U holda $F(\gamma')\leq F(\gamma'')$ bo'lishini ko'rsatish kerak. Ma'lumki,

$F(\gamma')=\varphi(\delta')$, bu yerda $j=i$ bo'lganda $\delta_j'=\alpha_j'$, $\delta_i'=\psi(\beta')$;

$F(\gamma'')=\varphi(\delta'')$, bu yerda $j=i$ bo'lganda $\delta_j''=\alpha_j''$, $\delta_i''=\psi(\beta'')$.

ψ monoton funksiya va $\gamma'\prec\gamma''$ munosabatdan $\beta'\prec\beta''$ kelib chiqqani uchun $\delta'\prec\delta''$ bo'ladi, ya'ni $\varphi(\delta')=F(\gamma')\leq\varphi(\delta'')=F(\gamma'')$, chunki φ monoton funksiyadir.

$\varphi(x_1,...,x_{i-1},y,x_{i+1},...,x_k)F(x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n,y_1,...,y_l)\in\Phi^{(k)}$ ekanligidan $(k+1)$ rangli superpozitsiya uchun teoremadagi tasdiq isbotlandi. ■

Kon'yunksiya va diz'yunksiya monoton funksiya bo'lganligi uchun, 1-teoremaga asosan, ularning superpozitsiyasidan hosil qilingan funksiya ham monoton bo'ladi.

2- teorema. *Agar $f(x_1,...,x_n)\in M$ bo'lsa, u holda undan argumentlari o'rniga 0, 1 va x funksiyani qo'yish usuli bilan $\overline{x}$ funksiyani hosil qilish mumkin.*

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Mulohazalar algebrasining asosiy elementar funksiyalariga ikki taraflama bo'lgan funksiyalarni toping.

2. Hamma ikki argumentli o'z-o'ziga ikki taraflama bo'lgan funksiyalarni toping.

3. n ta argumentli o'z-o'ziga ikki taraflama bo'lgan funksiyalarning sonini aniqlang.

4. $f=(\bar{x}\vee y\bar{z})(xy\vee x\bar{z})$ va $\varphi=(x\vee\bar{y})z\bar{t}\vee\bar{x}t$ funksiyalarga ikki taraflama bo'lgan funksiyalarni toping.

5. Quyidagi formulalarni Jegalkin ko'phadi ko'rinishiga keltiring:

a) $x\rightarrow y\leftrightarrow z$, b) $x\vee y\vee z\vee t$, d) $x\leftrightarrow y\leftrightarrow z$,

e) $x\vee y\vee z$, f) $xy\vee yz\vee xz$, g) $xy\bar{z}\vee x\bar{y}z\vee\bar{x}yz\vee\bar{x}\bar{y}\bar{z}$.

6. Funksiyaning Jegalkin ko'phadi ko'rinishidagi ifodasi yagona ekanligini isbotlang.

7. Chiziqli funksiyalarning qaysilari o'z-o'ziga ikki taraflama funksiya bo'ladi?

8. $xy\vee xz\vee yz=xy+xz+yz$ ekanligini isbotlang.

9. Jegalkin ko'phadi ko'rinishidagi funksiyaning hamma argumentlari soxta argumentlar emasligini isbotlang.

10. Nol (bir) saqlovchi monoton funksiyalar aynan birga (nolga) teng ekanligini isbotlang.

11. Ikki argumentli hamma monoton funksiyalarni toping.

12. Quyida keltirilgan funksiyalarning qaysi birlari monoton funksiya ekanligini aniqlang:

a) $xy\vee xz\vee x\bar{z}$, b) $x\rightarrow(x\rightarrow y)$, d) $\overline{x\vee y}\leftrightarrow\bar{x}\vee\bar{y}$,

e) $\overline{x\vee y}\leftrightarrow\bar{x}\bar{y}$, f) $xy\vee x\vee\bar{x}z$, h) $xy\vee yz\vee xz$.

13. Aynan konstantadan (0 dan yoki 1 dan) farq qiluvchi funksiya monoton bo'lishi uchun uni kon'yunksiya va diz'yunksiya superpozitsiyasi orqali ifodalash yetarli va zarurligini isbotlang.

14. Monoton funksisyaga ikki taraflama bo'lgan funksiya monoton ekanligini isbot qiling.

15. Faqat va faqat yo konstantalar, yoki o'zgaruvchilar ustida inkor amali bo'lmagan KNSh va DNSh ko'rinishida ifodalangan funksiyalar monoton bo'lishini ko'rsating.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Ikki taraflama funksiya va o'z-o'ziga ikki taraflama funksiya deganda nimani tushunasiz?

2. Mantiq algebrasidagi ikki taraflama qonun qanday ifodalanadi?

3. Mantiq algebrasidagi arifmetik amallarni bilasizmi?

4. Jegalkin ko'phadi nima?

5. Mantiq algebrasidagi monoton funksiyalar deganda nimani tushunasiz?

6. Chiziqli funksiyalarning qaysilari monoton funksiyalar bo'ladi?

3.13. Funksional yopiq sinflar. Post teoremasi

To'liq funksiyalar sistemasi. Ikki taraflama funksiyalar sistemasining to'liq bo'lish sharti. Yopiq sinflar. Xususiy funksional, maksimal funksional yopiq sinf. Post teoremasi. To'plam yopig'i. Post jadvali.

3.13.1.Funksional yopiq sinflar. Mantiq algebrasining $\Phi = \{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ funksiyalar sistemasi berilgan bo'lsin.

1- ta'rif. *Agar mantiq algebrasining istalgan funksiyasini $\Phi = \{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ sistemadagi funksiyalar superpozitsiyasi orqali ifodalash mumkin bo'lsa, u holda Φ sistema* ***to'liq funksiyalar sistemasi*** *deb ataladi.*

Istalgan funksiyani MKNSh yoki MDNSh ko'rinishida ifodalash mumkinligidan $\{xy, x \vee y, \overline{x}\}$ funksiyalar sistemasining to'liqligi kelib chiqadi. $\{xy, x + y, 1\}$ funksiyalar sistemasi ham to'liq bo'ladi, chunki istalgan funksiyani Jegalkin ko'phadi ko'rinishiga keltirish mumkin.

1- misol. Quyidagilar to'liq funksiyalar sistemasi ekanligini isbotlaymiz:

a) $xy, \overline{x}$; b) $x \vee y, \overline{x}$; d) $xy, x + y, 1$;

e) $\overline{x \vee y}$; f) $\overline{xy}$; g) $x + y, x \vee y, 1$;

h) $x + y + z, xy, 0, 1$; i) $x \to y, \overline{x}$; j) $x \to y, 0$.

a) $x \vee y = \overline{\overline{x}\,\overline{y}}$, ya'ni diz'yunksiya amalini kon'yunksiya va inkor amallari orqali ifodalash mumkin. Demak, $\{xy, \overline{x}\}$ funksiyalar sistemasi to'liqdir;

b) $xy = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$ ekanligi ma'lum. Demak, istalgan mantiqiy funksiyani diz'yunksiya va inkor amallari orqali ifodalasa bo'ladi. Shuning uchun $\{x \vee y, \overline{x}\}$ funksiyalar sistemasi to'liqdir;

d) mantiq algebrasining ixtiyoriy funksiyasini yagona Jegalkin ko'phadi ko'rinishiga keltirish mumkin bo'lgani uchun $\{xy, x + y, 1\}$ funksiyalar sistemasi to'liqdir.

e) va f) mantiq algebrasidagi istalgan funksiyani $\psi(x, y) = \overline{xy}$ va $\varphi(x, y) = \overline{x \vee y}$ Sheffer funksiyalari orqali ifodalash mumkin. Haqiqatan ham, $\overline{x} = \varphi(x, x)$,

$$x \vee y = \overline{\overline{x \vee y}} = \overline{\varphi(x, y)} = \varphi(\varphi(x, y), \varphi(x, y))$$

va

$$xy = \varphi(\overline{x}, \overline{y}) = \varphi(\varphi(x, x), \varphi(y, y))$$

asosiy mantiqiy amallarni Sheffer funksiyasi orqali ifodalash mumkin. Demak, $\{\overline{x \vee y}\}$ va $\{\overline{xy}\}$ funksiyalar sistemalari to‘liqdir.

g) $x \vee y = xy + x + y$ bo‘lgani uchun $x \vee y + (x + y) = xy$ bo‘ladi. $\{xy, x + y, 1\}$ to‘liq sistema ekanligi d) bandda isbot qilingan edi, demak, $\{x + y, x \vee y, 1\}$ sistema to‘liqdir.

Xuddi shunday qolgan h), i) va j) funksiyalar sistemalarining to‘liqligini ham isbot qilish mumkin. Bu ish o‘quvchiga havola qilinadi. ■

1- teorema. *Agar* $\Phi = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ *funksiyalar sistemasi to‘liq bo‘lsa, u holda unga ikki taraflama bo‘lgan* $\Phi^* = \{\varphi_1^*, ..., \varphi_n^*\}$ *funksiyalar sistemasi ham to‘liq bo‘ladi.*

Isboti. Φ^* sistemaning to‘liqligini isbotlash uchun istalgan $f(x_1, ..., x_n)$ funksiyani Φ^* sistemasidagi funksiyalar superpozitsiyasi orqali ifodalash mumkinligini ko‘rsatish kerak. Buning uchun avval f^* funksiyani $\Phi = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ sistemadagi funksiyalar orqali ifodalaymiz (Φ sistema to‘liq bo‘lgani uchun bu protsedurani bajarish mumkin). Keyin ikki taraflama qonunga asosan ikki taraflama funksiyalar superpozitsiyasi orqali f funksiyani hosil qilamiz. ■

2- misol. Quyidagilar to‘liq funksiyalar sistemasi emasligini isbotlaymiz:

a) $\bar{x}, 1$; b) $xy, x \vee y$; d) $x + y, \bar{x}$;

e) $xy \vee yz \vee xz, \bar{x}$; f) $xy \vee yz \vee xz, 0, 1$.

a) $\bar{x} = x + 1$ bo‘lgani uchun $\{\bar{x}, 1\}$ sistemadagi funksiyalar bir argumentli funksiyalar bo‘ladi. Bizga ma’lumki, bir argumentli funksiyalarning superpozitsiyasi natijasida hosil qilingan funksiya ham bir argumentli funksiya bo‘ladi. Natijada, bu sistemadagi funksiyalar orqali ko‘p argumentli funksiyalarni ifodalab bo‘lmaydi. Shuning uchun $\{\bar{x}, 1\}$ – to‘liq funksiyalar sistemasi emas.

b) $\{xy, x \vee y\}$ sistemadagi funksiyalarning ikkalasi ham monotondir. Monoton funksiyalarning superpozitsiyasi orqali hosil qilingan funksiya ham monoton bo‘lishi isbotlangan edi. Demak, bu ikkala funksiyaning superpozitsiyasi orqali monoton bo‘lmagan funksiyalarni ifodalash mumkin emas va natijada, $\{xy, x \vee y\}$ – to‘liq funksiyalar sistemasi emas.

d) $\{x + y, \bar{x}\}$ sistemadagi funksiyalar chiziqli funksiyalardir. Shuning uchun bu funksiyalar orqali chiziqlimas funksiyalarni ifodalab bo‘lmaydi. Demak, $\{x + y, \bar{x}\}$ – to‘liq funksiyalar sistemasi emas.

e) $\{xy \vee yz \vee xz, \ \overline{x}\}$ sistemadagi funksiyalar o‘z-o‘ziga ikki taraflama funksiyalardir. Bu funksiyalarning superpozitsiyasidan hosil qilingan har qanday funksiya ham o‘z-o‘ziga ikki taraflama funksiya bo‘ladi. Demak, $\{xy \vee yz \vee xz, \ \overline{x}\}$ – to‘liq funksiyalar sistemasi emas.

f). $\{xy \vee yz \vee xz, \ 0, \ 1\}$ sistemadagi funksiyalarning hammasi monoton funksiyalardir. Monoton emas funksiyalar bu sistemadagi funksiyalar orqali ifodalanmaydi. Demak, $\{xy \vee yz \vee xz, \ 0, \ 1\}$ – to‘liq funksiyalar sistemasi emas. ■

2- misol tahlilidan quyidagi xulosa kelib chiqadi. Berilgan Φ funksiyalar sistemasining to‘liq emasligini isbotlash uchun sistemadagi funksiyalarning shunday umumiy xususiyatini topish kerakki, bu xususiyat funksiyalar superpozitsiyasi natijasida saqlansin. Haqiqatan ham, u holda bunday xususiyatga ega bo‘lmagan funksiyani Φ sistemadagi funksiyalar superpozitsiyasi orqali hosil qilib bo‘lmaydi.

Funksiyalarning bunday xususiyatlarini tekshirish uchun odatda **funksional yopiq sinf** tushunchasidan foydalaniladi.

2- ta’rif. *Agar A sistemadagi funksiyalar superpozitsiyasidan hosil bo‘lgan funksiya ham shu sistemaning elementi bo‘lsa, u holda bunday sistema* ***superpozitsiyaga nisbatan yopiq sistema*** *deb ataladi.*

3- ta’rif. *Mantiq algebrasining superpozitsiyaga nisbatan yopiq bo‘lgan har qanday funksiyalar sistemasi* ***funksional yopiq sinf*** *deb ataladi.*

Ravshanki, muayyan xususiyatga ega bo‘lgan funksiyalar sistemasi funksional yopiq sinfni tashkil etadi va, aksincha, ma’lum funksional yopiq sinfga kiruvchi funksiyalar bir xil xususiyatga ega bo‘lgan funksiyalardir. Quyidagi funksiyalar sistemasi funksional yopiq sinflarga misol bo‘la oladi:

a) bir argumentli funksiyalar sinfi;

b) mantiq algebrasining hamma funksiyalari sinfi;

d) L – chiziqli funksiyalar sinfi;

e) S – o‘z-o‘ziga ikki taraflama funksiyalar sinfi;

f) M – monoton funksiyalar sinfi;

g) P_0 – nol qiymatni saqlovchi funksiyalar sinfi;

h) P_1 – bir qiymatni saqlovchi funksiyalar sinfi.

4- ta’rif. *Bo‘sh sinfdan va mantiq algebrasining hamma funksiyalari to‘plamidan farq qiluvchi funksional yopiq sinf* ***xususiy funksional yopiq sinf*** *deb ataladi.*

Shunday qilib, funksiyalar sistemasining to‘liq bo‘lishi uchun bu sistemada har qanday xususiy funksional yopiq sinfga kirmaydigan funksiya topilishi yetarli va zarurdir.

5- ta’rif. *O‘z-o‘zidan va mantiq algebrasining hamma funksiyalari sinfidan (P_2dan) farq qiluvchi funksional yopiq sinflarga kirmaydigan xususiy funksional yopiq sinf* ***maksimal funksional yopiq sinf*** *deb ataladi.*

Mantiq algebrasida hammasi bo‘lib beshta maksimal funksional yopiq sinf mavjud. Bular quyidagilardir: P_0, P_1, M, S, L.

13.2. Post[1] teoremasi. E. L. Post tomonidan funksiyalar sistemasi to‘liqligining yetarli va zarur shartlari topilgan.

Post teoremasi. $\Phi = \{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ *funksiyalar sistemasi to‘liq bo‘lishi uchun bu sistemada* P_0, P_1, M, S, L *maksimal funksional yopiq sinflarning har biriga kirmaydigan kamida bitta funksiya mavjud bo‘lishi yetarli va zarur (ya’ni* $\Phi = \{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ *funksiyalar sistemasi faqat* P_0, P_1, M, S, L *maksimal funksional yopiq sinflardan birortasining ham qism to‘plami bo‘lmaganda va faqat shundagina to‘liq sistema bo‘ladi).*

Isboti. Zarurligi. $\Phi = \{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ to‘liq sistema (ya’ni $[\Phi] = P_2$) va F maksimal funksional yopiq sinflarning birortasi bo‘lsin deb faraz qilamiz. U vaqtda F sinfning yopiqligini hisobga olib, $P_2[\Phi] \subseteq [F] = F$ munosabatni yozish mumkin, ya’ni $F = P_2$. Ammo bunday bo‘lishi mumkin emas. Demak, $\Phi \subseteq F$ munosabat bajarilmaydi.

Yetarliligi isbotini o‘quvchiga havola etamiz. ■

Natija. *Mantiq algebrasidagi har qanday funksional yopiq sinf* P_0, P_1, M, S, L *maksimal funksional yopiq sinflardan birortasining qism to‘plami bo‘ladi.*

Amalda berilgan $\Phi = \{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ funksiyalar sistemasining to‘liq yoki to‘liq emasligini aniqlash uchun **Post jadvali** deb ataluvchi jadvaldan foydalaniladi. Post jadvali quyida keltirilgan.

---

[1] Post (Post Emil Leon, 1897 (Polsha) – 1954) – AQSh matematigi, mantiqchisi.

Jadvalning xonalariga o‘sha satrdagi funksiya funksional yopiq sinflarning elementi bo‘lsa “+” ishora, bo‘lmasa “–” ishorasi qo‘yiladi.

Post jadvali

	P_0	P_1	S	L	M
φ_1					
φ_2					
...	...	...	...	...	...
φ_n					

$\Phi = \{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ sistema to‘liq funksiyalar sistemasi bo‘lishi uchun, Post teoremasiga asosan, jadvalning har bir ustunida kamida bitta “–” ishorasi bo‘lishi yetarli va zarur.

$\Phi = \{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ funksiyalar sistemasi to‘liq bo‘lmasligi uchun P_0, P_1, M, S, L maksimal funksional yopiq sinflardan birortasining qism to‘plami bo‘lishi, ya’ni Post jadvalining biror ustunidagi barcha ishoralar “+” bo‘lishi kerak.

Funksiyalar sistemasining to‘liqligi tushunchasi bilan sinfning (to‘plamning) **yopig‘i** tushunchasi o‘zaro bog‘langan.

6-ta’rif. *A bilan P_2 (n ta argumentli mantiq algebrasining hamma funksiyalarini o‘z ichiga olgan) to‘plamning biror qism to‘plamini belgilaymiz. A to‘plam funksiyalarning superpozitsiyasidan hosil qilingan hamma Bul funksiyalari to‘plami (A to‘plam funksiyalari orqali ifodalangan hamma bul funksiyalari to‘plami) A to‘plamning* ***yopig‘i*** *deb aytiladi va $[A]$ kabi belgilanadi.*

1-jadval

		P_0	P_1	S	L	M
a)	0	+	–	–	+	+
	xy	+	+	–	–	+
	$x+y+z$	+	+	+	+	–
b)	1	–	+	–	+	+
	xy	+	+	–	–	+
	$x+y+z$	+	+	+	+	–
d)	$\{\bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z}\}$	–	–	+	–	–
e)	0	+	–	–	+	+
	1	–	+	–	+	+
	$x+y$	+	–	–	+	–
f)	0	+	–	–	+	+
	1	–	+	–	+	+
	xy	+	+	–	–	+

3- misol. 1. $A = P_2$ bo‘lsin, u holda $[A] = P_2$ bo‘ladi.

2. $A = \{1, x_1 + x_2\}$ bo‘lsin, u holda A to‘plamning yopig‘i barcha chiziqli funksiyalar to‘plamidan (ya’ni, L to‘plamdan) iborat bo‘ladi. ■

To‘plam yopig‘i quyidagi xossalarga ega:

1) $[A] \supseteq A$;

2) $[[A]] = [A]$;

3) agar $A_1 \subseteq A_2$ bo‘lsa, u holda $[A_1] \subseteq [A_2]$ bo‘ladi;

4) $[A_1 \cup A_2] \supseteq [A_1] \cup [A_2]$. ■

7- ta’rif. *Agar $[A] = A$ bo‘lsa, u holda A to‘plam (sinf) **funksional yopiq sinf** deb ataladi.*

4- misol. 1. $A = P_2$ funksional yopiq sinfdir.

2. $A = \{1, x_1 + x_2\}$ funksional yopiq sinf emas.

3. L funksional yopiq sinfdir. ■

Osongina ko‘rish mumkinki, har qanday $[A]$ funksional sinf yopiq sinf bo‘ladi. Bu hol ko‘pgina funksional yopiq sinflarni topishga yordam beradi.

To‘plam yopig‘i va yopiq sinf tilida funksiyalar sistemasining to‘liqligi ta’rifini (avvalgi ta’rifga ekvivalent bo‘lgan ta’rifni) berish mumkin.

8- ta’rif. *Agar $[A] = P_2$ bo‘lsa, u holda A funksiyalar sistemasi **to‘liq** deb ataladi.*

5- misol. Quyidagi funksiyalar sistemalarining to‘liq emasligini Post jadvali vositasida isbot qilamiz (1- jadvalga qarang).

a) $\Phi_1 = \{0, xy, x + y + z\}$;   b) $\Phi_2 = \{1, xy, x = y + z\}$;

d) $\Phi_3 = \{\overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{x}\,\overline{z} \vee \overline{y}\,\overline{z}\}$;   e) $\Phi_4 = \{0, 1, x + y\}$;

f) $\Phi_5 = \{0, 1, xy\}$.

Post jadvalidan ko‘rinib turibdiki, yuqorida keltirilgan barcha funksiyalar sistemalari to‘liq emas, chunki har bir sistema uchun jadvalda bitta ustun faqatgina “+” ishoralaridan iborat. Shuni ham ta’kidlash kerakki, har bir sistema uchun bu ustunlar har xil.

Demak, Post teoremasi shartidan P_0, P_1, M, S, L maksimal funksional yopiq sinflarning birortasini ham olib tashlash mumkin emas.

Bu xulosadan, o'z navbatida, P_0, P_1, M, S, L maksimal funksional yopiq sinflarning birortasi ham boshqasining qism to'plami bo'la olmasligi kelib chiqadi. ■

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Quyidagi funksiyalar sistemalarining har biri funksional yopiq sinf bo'lishini isbot qiling:

a) bir argumentli funksiyalar;

b) mantiq algebrasining hamma funksiyalari;

d) $x+y+z, xy, 0, 1$; e) $x \to y, \bar{x}$; f) $x \to y, 0$;

g) L; h) S; i) M; j) P_0; k) P_1.

2. Agar $\Phi = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ va $F = \{f_1, ..., f_n\}$ funksional yopiq sinflar bo'lsa, u holda $\Phi \bigcap F$ va $\Phi^* = \{\varphi_1^*, ..., \varphi_n^*\}$ ham funksional yopiq sinflar bo'lishini, $\Phi \bigcup F$ esa funksional yopiq sinf bo'lmasligini isbotlang.

3. Quyidagi maksimal funksional yopiq P_0, P_1, S, L, M sinflarning har biri boshqasining qism to'plami bo'lmasligini isbotlang.

4. Har qanday xususiy funksional yopiq sinf P_0, P_1, S, L, M maksimal funksional yopiq sinflardan birortasining qism to'plami bo'lishini isbotlang.

5. Nol saqlamaydigan funksiya yo nomonoton funksiya, yoki o'z-o'ziga ikki taraflama bo'lmagan funksiya ekanligini isbotlang.

6. Post teoremasining isbotini keltiring.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. To'liq funksiyalar sistemasi deb nimaga aytiladi?

2. Funksional yopiq sinflar va xususiy funksional yopiq sinflar bir-biridan nima bilan farq qilishadi?

3. Maksimal funksional yopiq sinf nima?

4. Post teoremasi qanday isbotlanadi?

5. Post teoremasining natijasini bilasizmi?

6. To'plam yopig'i deganda nimani tushunasiz?

7. Post jadvalidan qanday foydalanish mumkin?

IV BOB
MULOHAZALAR HISOBI

Ushbu bobda mulohazalar hisobining simvollari, formulasi, aksiomalar sistemasi, keltirib chiqarish qoidalari, formulalar majmuasidan formulani keltirib chiqarish qoidasi, deduksiya va umumlashgan deduksiya teoremalari, ayrim mantiq qonunlarining isboti, mulohazalar algebrasi va mulohazalar hisobi orasidagi munosabatlar, mulohazalar hisobida yechilish, zidsizlik, to'liqlilik va erkinlik muammolari kabi masalalar bayon etilgan.

Mulohazalar hisobi aksiomatik mantiqiy sistema bo'lib, mulohazalar algebrasi esa uning interpretatsiyasidir (talqinidir).

Berilgan aksiomalar sistemasi negizida qurilgan ***aksiomatik nazariya*** *deb, shu aksiomalar sistemasiga tayanib isbotlanuvchi hamma teoremalar majmuasiga aytiladi.*

Aksiomatik nazariya formal va formalmas nazariyalarga bo'linadi.

Formalmas aksiomatik nazariya nazariy-to'plamiy mazmun bilan to'ldirilgan bo'lib, keltirib chiqarish tushunchasi aniq berilmagan va bu nazariya asosan fikr mazmuniga suyanadi.

Qaralayotgan aksiomatik nazariya uchun quyidagi shartlar bajarilgan bo'lsa, ya'ni:

1) nazariyaning tili berilgan;

2) formula tushunchasi aniqlangan;

3) aksiomalar deb ataluvchi formulalar to'plami berilgan;

4) bu nazariyada keltirib chiqarish qoidasi aniqlangan bo'lsa, **formal aksiomatik nazariya** aniqlangan deb hisoblanadi.

4.1. Mulohazalar hisobi formulasi

Mulohazalar hisobi. Mantiqiy bog'lovchilar. Simvollar. Formula. Qismiy formula. Isbotlanuvchi formula. Aksioma.

4.1.1. Mulohazalar hisobining simvollari. Har qanday hisobning tafsifi bu hisobning simvollari tafsifidan, formulalar va keltirib chiqarish formulalari ta'rifidan iborat.

Mulohazalar hisobida uch kategoriyali simvollardan iborat alifbo qabul qilinadi.

Birinchi kategoriya simvollari: $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots$. Bu simvollarni **o'zgaruvchilar** deb ataymiz.

Ikkinchi kategoriya simvollari: $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\neg$. Bular **mantiqiy bog'lovchilardir**. Birinchisi – diz'yunksiya yoki mantiqiy qo'shish belgisi, ikkinchisi – kon'yunksiya yoki mantiqiy ko'paytma belgisi, uchinchisi – implikatsiya belgisi va to'rtinchisi – inkor belgisi deb ataladi.

Uchinchi kategoriyaga qavslar deb ataladigan (,) simvollar kiritiladi.

Mulohazalar hisobida boshqa simvollar yo'q.

4.1.2. Mulohazalar hisobi formulasi tushunchasi. Mulohazalar hisobining **formulasi** deb mulohazalar hisobi alifbosi simvollarining muayyan ketma-ketligiga aytiladi.

Formulalarni belgilash uchun lotin alifbosining bosh harflaridan foydalanamiz. Bu harflar mulohazalar hisobining simvollari qatoriga kirmaydi. Ular faqatgina formulalarning shartli belgilari bo'lib xizmat qiladi.

Endi mulohazalar hisobi formulasi tushunchasi ta'rifini keltiramiz.

1- t a ' r i f. ***Mulohazalar hisobi formulasi*** *tushunchasi quyidagicha aniqlanadi:*

1) har qanday $x, y, z, \ldots$ *o'zgaruvchilarning istalgan biri formuladir;*

2) agar A *va* B *ning har biri formula bo'lsa, u holda* $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ *va* $\overline{A}$ *ham formuladir.*

3) boshqa hech qanday simvollar satri formula bo'la olmaydi.

O'zgaruvchilarni **elementar formulalar** deb ataymiz.

1- m i s o l. Formula ta'rifining 1) bandiga ko'ra $x, y, z, \ldots$ o'zgaruvchilarning har biri formula bo'ladi. U vaqtda ta'rifning 2) bandiga muvofiq $(x \wedge y)$, $(x \vee y)$, $(x \rightarrow y)$, $\overline{x}$ ham formulalardir. Xuddi shu kabi $(x \vee y)$, $((x \wedge y) \rightarrow z))$, $((x \wedge y) \rightarrow (y \rightarrow z))$ ham formulalar bo'ladi.

Quyidagilar formula bo'la olmaydi:

$$x\overline{y}\,,\ \wedge z\,,\ (x \vee y\,,\ x \rightarrow y\,,\ (x \wedge y) \rightarrow \overline{x}\,.\ \blacksquare$$

2- t a ' r i f. ***Mulohazalar hisobi qismiy formulasi*** *tushunchasi quyidagicha aniqlanadi:*

1) elementar formula uchun faqat uning o'zi qismiy formuladir;

2) agar $\overline{A}$ *formula bo'lsa, u holda shu formulaning o'zi,* A *formula va* A *formulaning hamma qismiy formulalari uning qismiy formulalari bo'ladi;*

3) agar formula $A * B$ *ko'rinishda bo'lsa (bu yerda va bundan keyin* $*$ *o'rnida* $\vee$, $\wedge$ *yoki* $\rightarrow$ *simvollardan birortasi bor deb tushunamiz), u holda shu formulaning o'zi,* A *va* B *formulalar hamda* A *va* B

formulalarning barcha qismiy formulalari $A * B$ *formulaning qismiy formulalari bo'ladi.*

2- misol. $((x \vee \overline{y}) \to \overline{(\overline{z} \to y)})$ formula uchun:

$((x \vee \overline{y}) \to \overline{(\overline{z} \to y)})$ – nolinchi chuqurlikdagi qismiy formula,

$(x \vee \overline{y})$, $\overline{(\overline{z} \to y)}$ – birinchi chuqurlikdagi qismiy formulalar,

x, $\overline{y}$, $(\overline{z} \to y)$ – ikkinchi chuqurlikdagi qismiy formulalar,

y, $\overline{z}$ – uchinchi chuqurlikdagi qismiy formulalar,

z – to'rtinchi chuqurlikdagi qismiy formula bo'ladi. ■

Formulalarni yozishda ayrim soddalashtirishlarni qabul qilamiz. Xuddi mulohazalar algebrasidagi kabi qavslar haqidagi kelishuv va mantiqiy amallarni bajarish imtiyozlari (III bobdagi 2- paragrafga qarang) bu yerda ham o'rinli deb hisoblaymiz. Bu kelishuv va imtiyozlarga binoan, masalan, $((x \vee y) \wedge z)$, $\overline{(x \wedge y)}$ va $((x \wedge y) \to (z \wedge t))$ formulalarni mos ravishda $x \vee y \wedge z$, $\overline{x \wedge y}$ va $x \wedge y \to z \wedge t$ ko'rinishda yozish mumkin.

4.1.3. Isbotlanuvchi formula tushunchasi. Endi mulohazalar hisobida isbotlanuvchi formulalar sinfini o'rganamiz. Isbotlanuvchi formula tushunchasiga ham formula tushunchasi ta'rifiga o'xshash ta'rif beriladi.

Avval dastlabki isbotlanuvchi formulalar (aksiomalar), undan keyin esa keltirib chiqarish qoidasi aniqlanadi. Keltirib chiqarish qoidasi orqali mavjud isbotlanuvchi formulalardan yangi isbotlanuvchi formulalar hosil qilinadi.

Dastlabki isbotlanuvchi formulalardan keltirib chiqarish qoidasini qo'llash yo'li bilan yangi isbotlanuvchi formulalarni hosil qilish shu formulalarni **aksiomalardan keltirib chiqarish** deb ataladi.

4.1.4. Mulohazalar hisobining aksiomalar sistemasi. Mulohazalar hisobining aksiomalar sistemasi XI aksiomadan iborat bo'lib, ular to'rt guruhga bo'linadi.

Birinchi guruh aksiomalari:

I_1 $x \to (y \to x)$.

I_2 $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$.

Ikkinchi guruh aksiomalari:

II_1 $x \wedge y \to x$.

II_2 $x \wedge y \to y$.

II_3 $(z \to x) \to ((z \to y) \to (z \to x \wedge y))$.

Uchinchi guruh aksiomalari:

III_1 $x \to x \vee y$.

III$_2$ $y \to x \vee y$.
III$_3$ $(x \to z) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z))$.
To‘rtinchi guruh aksiomalari:
IV$_1$ $(x \to y) \to (\overline{y} \to \overline{x})$.
IV$_2$ $x \to \overline{\overline{x}}$.
IV$_3$ $\overline{\overline{x}} \to x$.

4.2. Keltirib chiqarish qoidalari

Keltirib chiqarish. O‘rniga qo‘yish, xulosa qoidalari. Aksiomalar sistemasi. Isbotlash.

Bu paragrafda mulohazalar hisobida **keltirib chiqarish qoidalari** deb ataluvchi o‘rniga qo‘yish va xulosa qoidalari bayon qilinadi.

4.2.1. O‘rniga qo‘yish qoidasi. Agar A mulohazalar hisobining isbotlanuvchi formulasi, x o‘zgaruvchi, B mulohazalar hisobining ixtiyoriy formulasi bo‘lsa, u holda A formula ifodasidagi hamma x lar o‘rniga B formulani qo‘yish natijasida hosil qilingan formula ham isbotlanuvchi formula bo‘ladi.

A formuladagi hamma x o‘zgaruvchilar o‘rniga B formulani qo‘yish operatsiyasini (jarayonini) **o‘rniga qo‘yish qoidasi** deb aytamiz va uni quyidagicha belgilaymiz[1]: $\int_x^B (A)$.

O‘rniga qo‘yish qoidasiga quyidagi aniqliklarni kiritamiz:

a) agar A faqat x o‘zgaruvchidan iborat bo‘lsa, u holda $\int_x^B (A)$ o‘rniga qo‘yish B formulani beradi;

b) agar A formula x dan farqli y o‘zgaruvchidan iborat bo‘lsa, u vaqtda $\int_x^B (A)$ o‘rniga qo‘yish A ni beradi;

d) agar A o‘rniga qo‘yish aniqlangan formula bo‘lsa, u holda $\overline{A}$ formuladagi x o‘rniga B formulani qo‘yish natijasida o‘rniga qo‘yishning inkori kelib chiqadi, ya’ni $\int_x^B (\overline{A})$ o‘rniga qo‘yish $\overline{\int_x^B (A)}$ ni beradi.

[1] Bu yerda matematik analizdagi integral belgisi ishlatilsada, uning ma’nosi o‘zgacha.

e) agar A_1 va A_2 formulalarda o‘rniga qo‘yish aniqlangan bo‘lsa, u holda $\int_x^B (A_1 * A_2)$ o‘rniga qo‘yish $\int_x^B (A_1) * \int_x^B (A_2)$ ni beradi.

Agar A isbotlanuvchi formula bo‘lsa, u holda uni $\vdash A$ shaklda yozishga kelishamiz. U holda o‘rniga qo‘yish qoidasini quyidagicha sxematik ravishda ifodalash mumkin: $\dfrac{\vdash A}{\vdash \int_x^B (A)}$ va uni “agar A isbotlanuvchi formula bo‘lsa, u holda $\int_x^B (A)$ ham isbotlanuvchi formula bo‘ladi” deb o‘qiladi.

4.2.2. Xulosa qoidasi. Agar A va $A \to B$ mulohazalar hisobining isbotlanuvchi formulalari bo‘lsa, u holda B ham isbotlanuvchi formula bo‘ladi. Bu qoida **xulosa qoidasi** deb yuritiladi va sxematik ravishda quyidagicha yoziladi:

$$\frac{\vdash A; \ \vdash A \to B}{\vdash B}.$$

1- t a ’ r i f (isbotlanuvchi formula ta’rifi).

a) har qanday aksioma isbotlanuvchi formuladir;

b) isbotlanuvchi formuladagi x o‘zgaruvchi o‘rniga ixtiyoriy B formulani qo‘yish natijasida hosil bo‘lgan formula isbotlanuvchi formula bo‘ladi;

d) A va $A \to B$ isbotlanuvchi formulalardan xulosa qoidasini qo‘llash natijasida olingan B formula isbotlanuvchi formuladir;

e) Mulohazalar hisobining boshqa hech qanday formulasi isbotlanuvchi formula emas.

2- t a ’ r i f. *Isbotlanuvchi formulalarni hosil qilish jarayoni **isbot qilish** (**isbotlash**) deb ataladi.*

1- m i s o l. $\vdash A \to A$ bo‘lishini (implikatsiyaning refleksivligini) isbotlaymiz. Buning uchun I_2 aksiomadan foydalanamiz. Bu yerda $\int_z^x (I_2)$ o‘rniga qo‘yishni bajarish natijasida

$$\vdash (x \to (y \to x)) \to ((x \to y) \to (x \to x)) \qquad (1)$$

kelib chiqadi. I_2 aksioma va (1) formulaga xulosa qoidasini qo'llab

$$\vdash (x \to y) \to (x \to x) \qquad (2)$$

formulani hosil qilamiz.

(2) formulaga nisbatan $\int_y^{\bar{x}}(2)$ o'rniga qo'yishni bajarish natijasida

$$\vdash (x \to \bar{\bar{x}}) \to (x \to x) \qquad (3)$$

isbotlanuvchi formulaga ega bo'lamiz.

IV_2 aksioma va (3) formulaga nisbatan xulosa qoidasini qo'llash natijasida

$$\vdash x \to x \qquad (4)$$

isbotlanuvchi formulaga kelamiz. Nihoyat, (4) formuladagi x o'zgaruvchi o'rniga A formulani qo'ysak $\vdash A \to A$ isbotlanishi kerak bo'lgan formula hosil bo'ladi. ■

2- misol. $\vdash \overline{x \vee y} \to \bar{x} \wedge \bar{y}$ ekanligini isbotlaymiz. Haqiqatdan ham, II_3 aksiomaga nisbatan ketma-ket ikki marta o'rniga qo'yish usulini qo'llaymiz: avval x ni $\bar{x}$ ga va keyin y ni $\bar{y}$ ga almashtiramiz. Natijada quyidagi isbotlanuvchi formulaga ega bo'lamiz

$$\vdash (z \to \bar{x}) \to ((z \to \bar{y}) \to (z \to \bar{x} \wedge \bar{y})). \qquad (5)$$

(5) formulaga nisbatan $\int_z^{\overline{x \vee y}}(5)$ o'rniga qo'yishni bajarib, quyidagini hosil qilamiz: $\vdash ((\overline{x \vee y}) \to \bar{x}) \to ((\overline{x \vee y} \to \bar{y}) \to (\overline{x \vee y} \to \bar{x} \wedge \bar{y}))$.

Endi

$$\overline{x \vee y} \to \bar{x}, \qquad (6)$$

$$\overline{x \vee y} \to \bar{y} \qquad (7)$$

formulalarning isbotlanuvchi ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun IV_1 aksiomaga nisbatan $\int_y^{x \vee y}(IV_1)$ o'rniga qo'yishni bajaramiz. Natijada

$$\vdash (x \to x \vee y) \to (\overline{x \vee y} \to \bar{x}) \qquad (8)$$

formulaga ega bo‘lamiz. (8) formula va III_1 aksiomaga nisbatan xulosa qoidasini ishlatib, (6) formulaning isbotlanuvchi formula ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Xuddi shu kabi (7) formulaning ham isbotlanuvchi formula ekanligini ko‘rsatish mumkin.

(6) va (5) formulalarga xulosa qoidasini qo‘llasak,

$$\vdash (\overline{x \vee y} \to \overline{y}) \to (\overline{x \vee y} \to \overline{x} \wedge \overline{y}) \tag{9}$$

isbotlanuvchi formula kelib chiqadi.

(7) va (9) formulalarga xulosa qoidasini qo‘llab, berilgan $\vdash \overline{x \vee y} \to \overline{x} \wedge \overline{y}$ formulaning isbotlanuvchi ekanligini hosil qilamiz. ■

4.3. Keltirib chiqarish qoidasining hosilalari

Formula. Hosilaviy qoidalar. Bir vaqtda o‘rniga qo‘yish, murakkab xulosa, sillogizm, kontrpozisiya, ikki karralik inkorni tushirish qoidalari.

O‘rniga qo‘yish va xulosa qoidalari singari keltirib chiqarish qoidasining hosilalari ham yangi isbotlanuvchi formulalar hosil qilishga imkon yaratadi.

4.3.1. Bir vaqtda o‘rniga qo‘yish qoidasi.

T a ’ r i f. *Agar $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ – isbotlanuvchi formula va $B_1, B_2, ..., B_n$ mulohazalar hisobining ixtiyoriy formulalari bo‘lsa, u holda A formulaning $x_1, x_2, ..., x_n$ o‘zgaruvchilari o‘rniga bir vaqtda mos ravishda $B_1, B_2, ..., B_n$ formulalarni qo‘yish natijasida C isbotlanuvchi formulani hosil qilish **bir vaqtda o‘rniga qo‘yish qoidasi** deb ataladi.*

$z_1, z_2, ..., z_n$ o‘zgaruvchilar $A, B_1, B_2, ..., B_n$ formulalardagi boshqa o‘zgaruvchilardan farq qiluvchi o‘zgaruvchilar va $z_i \neq z_j$ $(i, j = \overline{1, n})$ bo‘lsin. U holda A formulaga n ta o‘rniga qo‘yishni ketma-ket bajaramiz: avval x_1 o‘rniga z_1 ni, keyin x_2 o‘rniga z_2 ni va hokazo x_n o‘rniga z_n ni qo‘yamiz. Natijada quyidagi isbotlanuvchi formulalarga ega bo‘lamiz: $\vdash \int_{x_1}^{z_1}(A)$ o‘rniga qo‘yish $\vdash A_1$ ni, $\vdash \int_{x_2}^{z_2}(A_1)$ o‘rniga qo‘yish $\vdash A_2$ ni, va hokazo $\vdash \int_{x_n}^{z_n}(A_{n-1})$ o‘rniga qo‘yish $\vdash A_n$ ni beradi.

Bundan keyin A_n formulaga nisbatan yana n ta o‘rniga qo‘yishni ketma-ket bajaramiz: avval z_1 o‘rniga B_1 ni, keyin z_2 o‘rniga B_2 ni va hokazo z_n o‘rniga B_n ni qo‘yib chiqamiz. Buning natijasida $\vdash \int_{z_1}^{B_1}(A_n)$ o‘rniga qo‘yishdan $\vdash C_1$ ni, $\vdash \int_{z_2}^{B_2}(C_1)$ o‘rniga qo‘yishdan $\vdash C_2$ ni va hokazo $\vdash \int_{z_n}^{B_n}(C_{n-1})$ o‘rniga qo‘yishdan $\vdash C_n$ ni hosil qilamiz. Demak, C_n isbotlanuvchi formula A formuladagi $x_1, x_2, ..., x_n$ o‘zgaruvchilar o‘rniga bir vaqtda mos ravishda $B_1, B_2, ..., B_n$ formulalarni qo‘yish natijasida hosil bo‘ladi. Bir vaqtda o‘rniga qo‘yish operasiyasini (qoidasini) quyidagicha ifodalaymiz: $\dfrac{\vdash A}{\vdash \int_{x_1, x_2, ..., x_n}^{B_1, B_2, ..., B_n}(A)}$.

4.3.2. Murakkab xulosa qoidasi. Bu qoidada

$$\vdash A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (...(A_n \to L)...))) \tag{1}$$

ko‘rinishdagi formulalarga nisbatan ikkinchi hosilaviy qoida ishlatiladi va uni quyidagi tasdiq orqali izohlash mumkin.

1- teorema. *Agar* $A_1, A_2, ..., A_n$ *va*

$$A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (...(A_n \to L)...))) \tag{2}$$

isbotlanuvchi formulalar bo‘lsa, u holda L *ham isbotlanuvchi formula bo‘ladi.*

Isboti. Xulosa qoidasini ketma-ket qo‘llaymiz. Agar A_1 va (2) isbotlanuvchi formulalar bo‘lsa, u holda xulosa qoidasiga asosan

$$A_2 \to (A_3 \to (...(A_n \to L)...)) \tag{3}$$

ham isbotlanuvchi formula bo‘ladi. A_2 va (3) isbotlanuvchi formula bo‘lganligi uchun

$$A_3 \to (...(A_n \to L)...) \tag{4}$$

formula ham isbotlanuvchi bo‘ladi. Muhokamani xuddi shunday davom ettirib, natijada L isbotlanuvchi formula ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Murakkab xulosa qoidasini sxematik ravishda quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{\vdash A_1, \vdash A_2, ..., \vdash A_n, \vdash A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (...(A_n \to L)...)))}{\vdash L} \tag{5}$$

4.3.3. Sillogizm[1] qoidasi.

2- teorema. *Agar $A \to B$ va $B \to C$ isbotlanuvchi formulalar bo'lsa, u holda $A \to C$ ham isbotlanuvchi formula bo'ladi.*

Isboti. Teoremani sxematik ravishda quyidagicha yozamiz

$$\frac{\vdash A \to B, \ \vdash B \to C}{\vdash A \to C}. \tag{6}$$

I_1 va I_2 aksiomalarga nisbatan

$$\int_{x,y,z}^{A,B,C} (I_2) \text{ va } \int_{x,y}^{B\to C,A} (I_1)$$

bir vaqtda o'rniga qo'yish qoidalarini qo'llash natijasida quyidagi isbotlanuvchi formulalarni hosil qilamiz:

$$\vdash A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)), \tag{7}$$

$$\vdash (B \to C) \to (A \to (B \to C)). \tag{8}$$

Teoremaning shartiga asosan

$$\vdash A \to B, \tag{9}$$

$$\vdash B \to C \tag{10}$$

formulalar isbotlanuvchidir.

(10) va (8) formulalardan xulosa qoidasiga asosan

$$\vdash A \to (B \to C) \tag{11}$$

formulani hosil qilamiz. U vaqtda (11), (9) va (7) formulalardan murakkab xulosa qoidasiga asosan $\vdash A \to C$ ekanligi kelib chiqadi. ■

Agar $A \to B$ va $B \to C$ isbotlanuvchi formulalar bo'lsa, u holda $A \to C$ ham isbotlanuvchi formula bo'lishini **sillogizm qoidasi** deb ataymiz.

4.3.4. Kontrpozitsiya qoidasi.

---

[1] Bu so'z negizida yunoncha συλλογισμός (syllogismos) so'zi yotadi, u mantiqan kelib chiqish ma'nosini beradi.

3- teorema. *Agar* $A \to B$ *isbotlanuvchi formula bo'lsa, u holda* $\overline{B} \to \overline{A}$ *ham isbotlanuvchi formula, ya'ni*

$$\frac{\vdash A \to B}{\vdash \overline{B} \to \overline{A}} \qquad (12)$$

bo'ladi.

Isboti. IV_1 aksiomaga nisbatan $\int_{x,y}^{A,B}(\mathrm{IV}_1)$ bir vaqtda o'rniga qo'yish qoidasini qo'llab,

$$\vdash (A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A}) \qquad (13)$$

isbotlanuvchi formulani hosil qilamiz.

Teoremaning shartiga asosan

$$\vdash A \to B \qquad (14)$$

isbotlanuvchi formuladir. Shuning uchun (14) va (13) formulalardan xulosa qoidasiga asosan $\vdash (\overline{B} \to \overline{A})$ isbotlanuvchi formula ekanligi kelib chiqadi. ■

Agar $A \to B$ isbotlanuvchi formula bo'lsa, u holda $\overline{B} \to \overline{A}$ ham isbotlanuvchi formula bo'lishini **kontrpozitsiya qoidasi** deb ataymiz.

4.3.5. Ikki karrali inkorni tushirish qoidasi.

4- teorema. 1) *Agar* $A \to \overline{\overline{B}}$ *isbotlanuvchi formula bo'lsa, u holda* $A \to B$ *ham isbotlanuvchi formula bo'ladi;*

2) *Agar* $\overline{\overline{A}} \to B$ *isbotlanuvchi formula bo'lsa, u holda* $A \to B$ *formula ham isbotlanuvchi formula, ya'ni*

$$\frac{\vdash A \to \overline{\overline{B}}}{\vdash A \to B} \quad va \quad \frac{\vdash \overline{\overline{A}} \to B}{\vdash A \to B} \qquad (15)$$

bo'ladi.

Isboti. IV_2 va IV_3 aksiomalarga nisbatan $\int_{x}^{A}(\mathrm{IV}_2)$ va $\int_{x}^{B}(\mathrm{IV}_3)$ o'rniga qo'yish qoidalarini qo'llab,

$$\vdash A \to \overline{\overline{A}}, \qquad (16)$$

$$\vdash \overline{\overline{B}} \to B \qquad (17)$$

isbotlanuvchi formulalarni hosil qilamiz.

Teoremaning 1) va 2) shartlariga asosan

$$\vdash A \to \overline{\overline{B}}, \qquad (18)$$

$$\vdash \overline{\overline{A}} \to B \qquad (19)$$

formulalar isbotlanuvchidir. Agar teoremaning 1) sharti bajarilsa, u holda (17) va (18) formulalardan sillogizm qoidasiga asosan $\vdash A \to B$ kelib chiqadi. Agar 2) sharti bajarilsa, u holda (16) va (19) formulalardan $\vdash A \to B$ kelib chiqadi. ■

Agar $A \to \overline{\overline{B}}$ ($\overline{\overline{A}} \to B$) isbotlanuvchi formula bo'lsa, u holda $A \to B$ ham isbotlanuvchi formula bo'lishini **ikki karrali inkorni tushirish qoidasi** deb ataymiz.

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Quyidagi ifodalarning qaysilari mulohazalar hisobining formulalari bo'lishini aniqlang:

a) $(\bar{p}_1 \wedge \bar{p}_2) \to (p_1 \vee p_2)$; b) $((p_1 \vee p_2) \vee (p_1 p_2)) \to \bar{p}_3$;

d) $(p_1 \to (p_2 \vee p_3)) \to p_3$; e) $(p_1 \wedge (\to p_2) \to (p_2 \to \bar{p}_1)$;

f) $(p_1 \to p_2) \to ((p_1 \to \bar{p}_2) \to p_1)$;

g) $(p_1 \to p_3) \to ((p_2 \to p_3) \to ((p_1 \vee p_2) \to p_3))$;

h) $((p_1 \to p_2) \wedge (p_1 \to p_3)) \to (p_1 \to (p_2 \wedge p_3))$;

i) $((p_1 \wedge \bar{p}_2) \to (\bar{\bar{p}}_1 \vee \vee p_2)) \leftrightarrow (\vee p_1 \vee p_2)$.

2. Quyidagi formulalarning hamma qismiy formulalarini toping:

a) $\overline{x \to y} \wedge (\bar{x} \vee y)$; b) $(x \leftrightarrow y) \vee (\bar{x} y)$;

d) $x \to (y \to x)$; e) $\overline{a \vee b} \to c$;

f) $a \wedge \overline{c \vee b}$; g) $x \to y \wedge z$;

h) $x \vee yz \to x$; i) $\overline{x \to y} \vee x \wedge y$;

j) $((x \to x) \wedge (y \to z)) \to (\bar{x} \vee z)$; k) $(x \to y) \to ((x \to \bar{\bar{y}}) \to \bar{y})$.

3. $L_1 = (A \to B) \to (\bar{B} \to \bar{A})$, $L_2 = A \vee B$ va $L_3 = A \to B \vee C$ formulalar uchun quyidagi o'rniga qo'yishlarning natijalarini aniqlang:

a) $\int_{A,B}^{B,C}(L_1)$; b) $\int_{A}^{A \to B}(L_2)$; d) $\int_{A,C}^{B \to A \wedge B, B}(L_3)$;

e) $\int_{A,B}^{A \wedge B, A \vee B}(L_1)$; f) $\int_{A,B}^{B,A}(L_2)$; g) $\int_{A,B,C}^{A \wedge \bar{A}, C, \bar{A}}(L_3)$.

4. O‘rniga qo‘yish qoidasini qo‘llab, quyidagi formulalarning isbotlanuvchi ekanligini ko‘rsating:

a) $(A \to B) \wedge B \to B$; b) $A \wedge B \to A \wedge B \vee C$;

d) $(\overline{A} \to B) \to ((C \to B) \to (\overline{A} \vee C \to B))$; e) $\overline{\overline{C \vee D}} \to C \vee D$;

f) $(A \wedge B \to (C \to B \wedge C)) \to ((A \wedge B \to C) \to (A \wedge B \to B \wedge C))$.

5. O‘rniga qo‘yish va xulosa qodalarini qo‘llab, quyidagi formulalarning isbotlanuvchi ekanligini aniqlang:

a) $A \vee A \to A$; b) $A \to A \wedge A$; d) $A \wedge B \to B \wedge A$;

e) $A \vee B \to B \vee A$; f) $(A \to B) \to (A \to A)$; g) $\overline{\overline{\overline{A}}} \to \overline{A}$.

6. Keltirib chiqarishning hosilaviy qoidalaridan foydalanib, quyidagi formulalarning isbotlanuvchi ekanligini ko‘rsating:

a) $\overline{A} \vee \overline{B} \to \overline{A \wedge B}$; b) $A \to R$;

d) $(A \to B) \to (A \to A \vee B)$; e) $F \to A$;

f) $A \wedge \overline{A} \to F$; g) $(A \to B) \to (A \to A)$;

h) $(A \to B) \wedge \overline{B} \to \overline{A}$; i) $\overline{A} \wedge \overline{B} \to \overline{A \vee B}$.

7. Keltirib chiqarishning quyidagi hosilaviy qoidalarini isbotlang:

a) $\dfrac{\vdash \overline{A}}{\vdash A \wedge B}$; b) $\dfrac{\vdash A}{\vdash A \vee B}$; d) $\dfrac{\vdash \overline{A}}{\vdash A \to B}$; e) $\dfrac{\vdash B}{A \to B}$;

f) $\dfrac{\vdash A \wedge B}{\vdash A}$; g) $\dfrac{\vdash \overline{B}}{\vdash A \wedge B}$; h) $\dfrac{\vdash A \to B, \vdash \overline{B}}{\vdash \overline{A}}$; i) $\dfrac{\vdash A, \vdash B}{\vdash A \wedge B}$;

j) $\dfrac{\vdash \overline{A}, \vdash \overline{B}}{\vdash A \vee B}$; k) $\dfrac{\vdash A, \vdash \overline{B}}{\vdash A \to B}$; l) $\dfrac{\vdash A \to \overline{A}}{\vdash A}$; m) $\dfrac{\vdash \overline{A} \to A}{\vdash A}$;

n) $\dfrac{\vdash A \to B, \vdash \overline{A} \to B}{\vdash B}$; o) $\dfrac{\vdash A \to B, \vdash A \to \overline{B}}{\vdash A}$.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Mulohazalar hisobi formulasi tushunchasini bilasizmi?
2. Mantiqiy bog‘lovchilar deganda nimani tushunasiz?
3. Simvollar nima?

4. Qismiy formula bilan formula tushunchalari bir-biridan nimasi bilan farq qiladi?

5. Isbotlanuvchi formula ta'rifini bilasizmi?

6. Mulohazalar hisobining aksiomalar sistemasida (tizimida) qanday aksiomalar bor?

7. Keltirib chiqarish qoidalari deganda nimani tushunasiz?

8. Keltirib chiqarish qoidasining qanday hosilalari bor?

9. Bir vaqtda oʻrniga qoʻyish va murakkab xulosa qoidalarini qanday qoʻllash mumkin?

10. Sillogizm, kontrpozitsiya va ikki karrali inkorni tushirish qoidalarini bilasizmi?

4.4. Isbotlash tushunchasi

Keltirib chiqarish qoidasi. Keltirib chiqariladigan formulalar sinfi. Isbotlanuvchi formulalar sinfi. Isbotlash tushunchasi. Keltirib chiqarishning xossalari.

4.4.1. Formulani keltirib chiqarish qoidasi. $H=\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ chekli formulalar majmuasi (toʻplami) berilgan boʻlsin. Bu formulalar majmuasidan formulani keltirib chiqarish tushunchasini oʻrganamiz.

1- ta'rif. 1) *Har qanday* $A_i \notin H$ *formulalar majmuasi* H *dan keltirib chiqariladigan formuladir.*

2) *Har qanday isbotlanuvchi formula* H *dan keltirib chiqariladi.*

3) C *va* $C \to B$ *lar* H *formulalar majmuasidan keltirib chiqarilgan formulalar boʻlsa, u holda* B *formula ham* H *dan keltirib chiqariladi.*

Biror B formula H formulalar majmuasidan keltirib chiqariladigan boʻlsa, uni simvolik ravishda $H \vdash B$ shaklda yozamiz.

Agar H boʻsh toʻplam yoki elementlari faqat isbotlanuvchi formulalardan iborat boʻlsa, u holda H dan keltirib chiqariladigan formulalar sinfi isbotlanuvchi formulalar sinfi bilan mos keladi. Agar formulalar majmuasi H ning hech boʻlmaganda bitta elementi isbotlanmaydigan formuladan iborat boʻlsa, u holda H dan keltirib chiqariladigan formulalar sinfi isbotlanuvchi formulalar sinfiga nisbatan kengroq boʻladi.

Misol. $A \vee B$ formula $H=\{A, B\}$ formulalar majmuasidan keltirib chiqarilishini koʻrsatamiz. Haqiqatdan ham, $A \in H$ va $B \in H$ boʻlgani uchun formulani keltirib chiqarish qoidasiga asosan quyidagilar oʻrinli:

$$H \vdash A, \quad (1)$$

$$H \vdash B. \quad (2)$$

II_3 va I_1 aksiomalarga nisbatan $\int_{x,y,z}^{A,B,A}(II_3)$ va $\int_{x,y}^{B,A}(I_1)$ o‘rniga qo‘yishlarni bajaramiz. Natijada isbotlanuvchi formulalar hosil bo‘ladi. Ular formulani keltirib chiqarish qoidasiga asosan H dan keltirib chiqariladi, ya’ni

$$H \vdash (A \to A) \to ((A \to B) \to (A \to A \wedge B)), \quad (3)$$

$$H \vdash B \to (A \to B) \quad (4)$$

kabi bo‘ladi. $A \to A$ isbotlanuvchi formula bo‘lgani uchun

$$H \vdash A \to A. \quad (5)$$

(5) va (3) formulalardan xulosa qoidasiga asosan

$$H \vdash (A \to B) \to (A \to A \wedge B) \quad (6)$$

hosil bo‘ladi. Xuddi shu kabi (2) va (4) formulalardan

$$H \vdash (A \to B) \quad (7)$$

munosabatga kelamiz. (7) va (6) formulalardan xulosa qoidasiga asosan

$$H \vdash A \to A \wedge B \quad (8)$$

kelib chiqadi. U holda (1) va (8) formulalardan

$$H \vdash A \wedge B \quad (9)$$

hosil bo‘ladi, ya’ni $A \wedge B$ formula H formulalar majmuasidan kelib chiqishini ko‘rsatdik. ■

H formulalar majmuasidan birorta ixtiyoriy formulani keltirib chiqarishda murakkab xulosa qoidasidan ham foydalansa bo‘ladi.

Bu holda (9) munosabatga (5), (7), (1) va (3) mulohazalar yordamida kelish mumkin.

4.4.2. Keltirib chiqarish (isbotlash) tushunchasi.

2- ta’rif. *Agar $B_1, B_2, ..., B_n$ chekli formulalar ketma-ketligining har qanday hadi quyidagi uch shartning birortasini qanoatlantirsa, u holda bu ketma-ketlik H **chekli formulalar majmuasidan keltirib chiqarilgan** deyiladi:*

1) *H formulalar majmuasining birorta formulasi;*

2) *isbotlanuvchi formula;*

3) *$B_1, B_2, ..., B_n$ ketma-ketlikning istalgan ikkita oldinma-keyin keladigan elementlaridan xulosa qoidasiga asosan hosil qilinadi.*

Oldingi paragrafdagi misolda ko‘rsatildiki, $H = \{A, B\}$ formulalar majmuasidan quyidagi formulalar chekli ketma-ketligi keltirilib chiqariladi:

$$A,\ B,\ (A\to A)\to((A\to B)\to(A\to A\wedge B)),\ B\to(A\to B),$$
$$A\to A,\ (A\to B)\to(A\to A\wedge B)),\ A\to B,\ A\to A\wedge B,\ A\wedge B.$$

Agar murakkab xulosa qoidasidan foydalansak, u holda (isbotlash) keltirib chiqarish formulalari quyidagicha bo'ladi:

$$A,\ B,\ (A\to A)\to((A\to B)\to(A\to A\quad B)),$$
$$B\to(A\to B),\ A\to A,\ A\to B,\ A\wedge B.$$

Formulani keltirib chiqarish va formulalar majmuasidan keltirib chiqarish ta'riflariga asosan keltirib chiqarishning quyidagi xossalari hosil bo'ladi:

1) H formulalar majmuasidan keltirib chiqarilgan chekli ketma-ketlikning boshlang'ich qismi ham H dan keltirib chiqariladigan bo'ladi.

2) Agar H dan keltirib chiqarilgan ketma-ketlikning ikkita qo'shni hadlari (elementlari) orasiga H dan keltirib chiqarilgan biror boshqa ketma-ketlik qo'yilsa, u holda hosil etilgan yangi formulalar ketma-ketligi ham H dan keltirib chiqarilishi mumkin.

Haqiqatan ham, masalan, agar $B_1, B_2, ..., B_i, B_{i+1}, ..., B_k$ va $C_1, C_2, ..., C_m$ lar H dan keltirib chiqarilsa, u vaqtda, keltirib chiqarish ta'rifiga asosan, $B_1, B_2, ..., B_i, C_1,\ C_2, ..., C_m, B_{i+1}, ..., B_k$ ham H dan keltirib chiqariladigan bo'ladi.

3) H formulalar majmuasidan keltirib chiqarilgan formulalar ketma-ketligining har qanday hadi H dan keltirib chiqariladigan formuladir.

4) Agar $H\subset W$ bo'lsa, u holda H dan keltirib chiqarilgan har qanday formula W ning ham formulasi bo'ladi.

5) B formula H dan keltirib chiqariladigan formula bo'lishi uchun H dan keltirib chiqarilgan ixtiyoriy formulalar ketma-ketligida bu formulaning mavjud bo'lishi yetarli va zarurdir.

4.5. Keltirib chiqarishning asosiy qoidalari

Isbotlash tushunchasi. Keltirib chiqarishning xossalari. Keltirib chiqarishning asosiy qoidalari. Deduksiya teoremasi. Deduksiya umumlashgan teoremasi. Kon'yunksiyani, diz'yunksiyani kiritish qoidalari.

H va W mulohazalar hisobining ikkita formulalar majmuasi bo'lsin. Bu majmualarning yig'indisini (birlashmasini) H,W deb belgilaymiz, ya'ni $H,W=H\bigcup W$. W majmua bitta C formuladan iborat bo'lganda ham $H\bigcup\{C\}$ birlashmani H,C ko'rinishda yozamiz.

Endi keltirib chiqarishning asosiy qoidalarini o'rganamiz.

4.5.1. I qoida. $\dfrac{H\vdash A}{H,W\vdash A}$.

I s b o t i . Bu qoida bevosita formulalar majmuasidan keltirib chiqarish qoidasi asosida hosil bo‘ladi. ■

4.5.2. II qoida. $\dfrac{H,C\vdash A, \quad H\vdash C}{H\vdash A}$.

I s b o t i . Bu qoidaning shartiga asosan H,C formulalar majmuasidan A formula keltirib chiqariladi. Shuning uchun H,C dan oxirgi formulasi A bo‘lgan keltirib chiqarish mavjud:

$$B_1, B_2, ..., B_{k-1}, A. \tag{1}$$

Xuddi shu kabi H formulalar majmuasidan C formulani keltirib chiqarish mumkinligidan H dan keyingi formulasi C bo‘lgan keltirib chiqarish mavjud:

$$C_1, C_2, ..., C_m, C. \tag{2}$$

(1) keltirib chiqarishda C formula ishtirok etmagan holda, u faqat H formulalar majmuasidan keltirib chiqarilgan ketma-ketlikda bo‘ladi. Demak, H dan A formula keltirib chiqariladi.

Agar (1) keltirib chiqarishda birorta formula C bo‘lsa (masalan, formula B_i), u holda B_{i-1} va B_{i+1} formulalar orasiga (2)ni qo‘yamiz. Natijada quyidagi faqat H dan keltirib chiqarishni olamiz:

$$B_1, B_2, ..., B_{i-1}, C_1, C_2, ..., C_m, B_{i+1}, ..., B_{k-1}, A.$$

Shunday qilib, H dan A formula keltirib chiqariladi. ■

4.5.3. III qoida. $\dfrac{H,C\vdash A, W\vdash C}{H,W\vdash A}$.

I s b o t i . $H,C\vdash A$ bo‘lganligi uchun I qoidaga asosan $H,W,C\vdash A$. Qoidaning shartiga binoan $W\vdash C$, u holda I qoidaga ko‘ra $H,W\vdash C$. II qoidadan foydalanib $H,W\vdash A$ ni topamiz. ■

4.5.4. IV qoida. $\dfrac{H\vdash C\to A}{H,C\vdash A}$.

I s b o t i . $C\to A$ formula H formulalar majmuasidan keltirib chiqariladigan bo‘lgani sababli H ning shunday keltirib chiqarishi mavjudki, uning oxirida $C\to A$ formula turadi:

$$B_1, B_2, ..., B_{k-1}, C\to A. \tag{3}$$

Endi H formulalar majmuasiga C formulani qo‘shib, H,C formulalar majmuasini hosil qilamiz. (3) keltirib chiqarishga C formulani qo‘shib, ushbu keltirib chiqarishga ega bo‘lamiz:

$$B_1, B_2, \ldots, B_{k-1}, C \to A, C. \qquad (4)$$

O‘z navbatida bu H,C formulalar majmuasining keltirib chiqarishi bo‘ladi. (4)ning oxiriga A formulani yozish mumkin, chunki u xulosa qoidasiga asosan $C \to A$ va C formulalardan hosil qilinadi.

Demak, oxirgi formulasi A bo‘lgan H,C formulalar majmuasining $B_1, B_2, \ldots, B_{k-1}, C \to A, C, A$ keltirib chiqarishiga ega bo‘lamiz. Bu yerdan $H,C \vdash A$ ekanligi kelib chiqadi. ■

4.5.5. V qoida (deduksiya teoremasi). $\dfrac{H,C \vdash A}{H \vdash C \to A}$.

Isboti. Avval H,C formulalar majmuasining har qanday $B_1, B_2, \ldots, B_k$ keltirib chiqarishi uchun $H \vdash C \to B_k$ ning to‘g‘riligini matematik induksiya metodidan foydalanib isbot qilamiz.

Baza. $k=1$ hol uchun tasdiq to‘g‘ri. Haqiqatan ham, agar B_1 formula H,C ning keltirib chiqarishi bo‘lsa, u vaqtda quyidagi uch hol bo‘lishi mumkin:

a) $B_1 \in H$, b) B_1 isbotlanuvchi formuladir, d) B_1 formula C ning o‘zidir.

a) va b) hollar uchun H dan quyidagi keltirib chiqarishni yozish mumkin: B_1, $B_1 \to (C \to B_1)$, $C \to B_1$. Demak, $H \vdash C \to B_1$.

d) hol uchun $H \vdash C \to C$ bo‘lishini isbotlash kerak.

Ravshanki, $C \to C$ isbotlanuvchi formuladir. Shuning uchun uni har qanday majmuadan keltirib chiqarish mumkin.

Induksion o‘tish. Endi istalgan i ($i < k$) chuqurlikdagi har qanday keltirib chiqarish uchun tasdiq to‘g‘ri bo‘lsin deb hisoblab, uning k chuqurlikdagi keltirib chiqarish uchun to‘g‘riligini isbot qilamiz.

$B_1, B_2, \ldots, B_k$ lar H,C majmuaning keltirib chiqarishi bo‘lsin, bu yerda $k > 1$. U vaqtda B_k formulaga nisbatan quyidagi to‘rt hol yuz berishi mumkin:

a) $B_k \in H$,

b) B_k isbotlanuvchi formuladir,

d) B_k formula C ning o‘zidir,

e) B_k formula xulosa qoidasiga asosan keltirib chiqarishdagi ikkita undan oldin ketma-ket keladigan formulalardan hosil qilinadi.

a), b), d) hollar uchun isbot to'liq ravishda $k=1$ holdagi isbotga mos keladi.

Shuning uchun e) holni ko'ramiz. Bu holda B_k formula B_i va B_j formulalardan hosil qilinib $(i<k,\ j>k)$, B_j formula $B_i \to B_k$ ko'rinishni oladi va quyidagi tasdiqlar o'rinli bo'ladi:

$$H \vdash C \to B_i\,, \tag{5}$$

$$H \vdash C \to (B_i \to B_k)\,. \tag{6}$$

I_2 aksiomada $\int_{x,y,z}^{C,B_i,B_k} (I_2)$ o'rniga qo'yishni bajarib, quyidagi isbotlanuvchi formulaga ega bo'lamiz:

$$\vdash (C \to (B_i \to B_k)) \to ((C \to B_i) \to (C \to B_k)) \tag{7}$$

(6), (5) va (7) ifodalar H dan keltirib chiqariladigan formulalardir. Ularga murakkab xulosa qoidasini qo'llab, $H \vdash C \to B_k$ ni hosil qilamiz.

Endi umumiy, ya'ni $H, C \vdash A$ bo'lgan holni ko'raylik. U holda H, C ning $B_1, B_2, ..., B_{k-1}$, A keltirib chiqarishi mavjud bo'ladi. Demak, yuqoridagi mulohazalarga asosan $H \vdash C \to A$ tasdiq to'g'ridir. ■

Deduksiya teoremasidan quyidagi muhim ahamiyatga ega bo'lgan tasdiq kelib chiqadi.

T e o r e m a (umumlashgan deduksiya teoremasi).

$$\frac{\{C_1, C_2, ..., C_k\} \vdash A}{\vdash C_1 \to (C_2 \to (C_3 \to ...(C_k \to A)...))}.$$

I s b o t i. $H_k = \{C_1, C_2, ..., C_k\}$ bo'lsin. Teorema shartiga asosan $H_k \vdash A$ yoki $H_{k-1}, C_k \vdash A$ ning to'g'riligi, $H_{k-1} = H_{k-2}, C_{k-1}$ bo'lgani uchun esa $H_{k-2}, C_{k-1} \vdash C_k \to A$ tasdiqning to'g'riligi kelib chiqadi. Bu ifodaga nisbatan yana deduksiya teoremasini qo'llab, $H_{k-2} \vdash C_{k-1} \to$ $\to (C_k \to A)$ ni hosil qilamiz. Bu jarayonni k marta takrorlab, ushbu tasdiqqa kelamiz:

$$H_0 = \varnothing \vdash C_1 \to (C_2 \to (C_3 \to ...(C_k \to A)...))\,.$$

Tabiiyki, bo'sh to'plamdan faqatgina isbotlanuvchi formulalar keltirib chiqarish mumkin, ya'ni $\vdash C_1 \to (C_2 \to (C_3 \to ...(C_k \to A)...))$. ■

$k=1$ xususiy holda $\dfrac{C \vdash A}{\vdash C \to A}$ ga ega bo'lamiz.

4.5.6. VI qoida. (Kon'yunksiyani kiritish qoidasi). $\dfrac{H\vdash A,\ H\vdash B}{H\vdash A\wedge B}$.

I s b o t i . Berilganiga ko'ra

$$H\vdash A, \tag{8}$$

$$H\vdash B. \tag{9}$$

$\{A,B\}$ formulalar majmuasidan $A\wedge B$ formulani keltirib chiqarish mumkinligi, ya'ni

$$\{A,B\}\vdash A\wedge B \tag{10}$$

ekanligini ko'rsatgan edik.

Keltirib chiqarishning I qoidasiga asosan

$$H,A,B\vdash A\wedge B, \tag{11}$$

$$H,A\vdash B. \tag{12}$$

Keltirib chiqarishning II qoidasidan foydalanib, (11) va (12) munosabatlardan

$$H,A\vdash A\wedge B \tag{13}$$

hamda (8) va (13) dan $H\vdash A\wedge B$ larni hosil qilamiz. ■

4.5.7. VII qoida (Diz'yunksiyani kiritish qoidasi).

$$\frac{H,A\vdash C;\ H,B\vdash C}{H,A\vee B\vdash C}.$$

I s b o t i . $H,A\vdash C$; $H,B\vdash C$ shartlardan deduksiya teoremasiga asosan

$$H\vdash A\to C, \tag{14}$$

$$H\vdash B\to C \tag{15}$$

formulalar kelib chiqadi.

III aksioma H formulalar majmuasidan isbotlanuvchi formula sifatida keltirib chiqariladi, ya'ni

$$H\vdash(A\to C)\to((B\to C)\to(A\vee B\to C)). \tag{16}$$

(14), (15) va (16) formulalarga murakkab xulosa qoidasini qo'llab

$$H\vdash A\vee B\to C \tag{17}$$

formulani hosil qilamiz. Endi keltirib chiqarishning IV qoidasini qo'llab $H,A\vee B\vdash C$ formulaga ega bo'lamiz. ■

4.6. Ayrim mantiq qonunlarining isboti

Mantiq qonunlari. Shartlarni o'rin almashtirish qonuni. Shartlarni qo'shish qonuni. Shartlarni ajratish qonuni.

Deduksiya teoremasi bir qator mantiq qonunlarini isbotlashga yordam beradi.

4.6.1. Asoslarni (shartlarni) o'rin almashtirish qonuni.

$$\vdash (x \to (y \to z)) \to (y \to (x \to z)). \qquad (1)$$

Isboti. $H = \{x \to (y \to z), y, x\}$ formulalar majmuasidan $x \to (y \to z)$, $y, x, y \to z, z$ keltirib chiqarish hosil bo'ladi. Demak, H dan z formula kelib chiqadi. U holda umumlashgan deduksiya teoremasiga asosan (1) formula isbotlanuvchi ekanligini hosil qilamiz.

Asoslarni o'rin almashtirish qonunidan isbotlanuvchi formulalar uchun ushbu asoslarni o'rin almashtirish qoidasi $\dfrac{\vdash (x \to (y \to z))}{\vdash (y \to (x \to z))}$ kelib chiqadi.

Haqiqatan ham, agar
$$\vdash x \to (y \to z) \qquad (2)$$
bo'lsa, u holda (1) va (2) formulalardan xulosa qoidasiga asosan $\vdash y \to (x \to z)$ formula hosil qilinadi. ■

4.6.2. Asoslarni qo'shish qonuni.

$$\vdash (x \to (y \to z)) \to (x \wedge y \to z). \qquad (3)$$

Isboti. $H = \{x \to (y \to z), x \wedge y\}$ formulalar majmuasidan $x \to (y \to z)$, $x \wedge y$, $x \wedge y \to x$, $x \wedge y \to y$, x, y, $y \to z$, z keltirib chiqarish olinadi. Bu esa H dan z formula kelib chiqishini anglatadi. Bu o'z navbatida umumlashgan deduksiya teoremasiga asosan (3) formulaning isbotlanuvchi ekanligini ko'rsatadi.

Asoslarni qo'shish qonunidan isbotlanuvchi formulalar uchun ushbu asoslarni qo'shish qoidasi $\dfrac{\vdash (x \to (y \to z))}{\vdash x \wedge y \to z}$ kelib chiqadi. Haqiqatan ham, agar
$$\vdash x \to (y \to z) \qquad (4)$$
bo'lsa, u holda (3) va (4) formulalardan xulosa qoidalariga asosan $\vdash x \wedge y \to z$ ekanligini hosil qilamiz. ■

4.6.3. Asoslarni ajratish qonuni.

$$\vdash (x \wedge y \to z) \to (x \to (y \to z)). \qquad (5)$$

I s b o t i. $H = \{x, y, x \wedge y \to z\}$ formulalar majmuasidan kelib chiqadigan $x, y, x \wedge y \to z, x \wedge y, z$ keltirib chiqarishni qaraymiz. Bunda H formulalar majmuasidan z formulaning kelib chiqishi ko'rinib turibdi. U holda umumlashgan deduksiya teoremasiga asosan (5) formula isbotlanuvchi ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Asoslarni ajratish qonunidan isbotlanuvchi formulalar uchun ushbu asoslarni ajratish qoidasi $\dfrac{\vdash x \wedge y \to z}{\vdash x \to (y \to z)}$ hosil bo'ladi. Haqiqatan ham, agar

$$\vdash x \wedge y \to z \qquad (6)$$

bo'lsa, u holda (5) va (6) formulalardan xulosa qoidasiga asosan $\vdash x \to (y \to z)$ ekanligi kelib chiqadi. ■

4.6.4. $\vdash x \to (\bar{x} \to y)$.

I s b o t i. I_1 va IV_1 aksiomalarda quyidagi $\int_{y}^{\bar{y}}(I_1)$ va $\int_{x,y}^{\bar{y},x}(IV_1)$. o'rniga qo'yishlarni bajarish natijasida ushbu

$$\vdash x \to (\bar{y} \to x), \qquad (7)$$

$$\vdash (\bar{y} \to x) \to (\bar{x} \to \bar{\bar{y}}) \qquad (8)$$

isbotlanuvchi formulalarni hosil qilamiz.

(7) va (8) formulalardan sillogizm qoidasiga asosan $\vdash x \to (\bar{x} \to \bar{\bar{y}})$ formula kelib chiqadi. Asoslarni birlashtirish qonunidan foydalanib, $\vdash x \wedge \bar{x} \to \bar{\bar{y}}$ formulani hosil qilamiz. Ikki karralik inkorni tushirish qoidasidan foydalanib, $\vdash x \wedge \bar{x} \to y$ formulaga ega bo'lamiz. Bu yerdan asoslarni ajratish qonunini qo'llab, isbotlanishi kerak bo'lgan (5) formulani keltirib chiqaramiz. ■

4.6.5. $\vdash \bar{x} \wedge \bar{y} \to \overline{x \vee y}$.

I s b o t i. III_3 aksiomada z ning o'rniga $\overline{\bar{x} \wedge \bar{y}}$ ni qo'yamiz:

$$\vdash (x \to \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}}) \to ((y \to \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}}) \to (x \vee y \to \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}})). \qquad (9)$$

II_1 va II_2 aksiomalardan

$$\vdash \bar{x} \wedge \bar{y} \to \bar{x}, \qquad (10)$$

$$\vdash \bar{x}\wedge\bar{y}\to\bar{y} \qquad (11)$$

formulalar kelib chiqadi. (10) va (11) formulalarga kontrpozitsiya qoidasini qo'llab, ushbu formulalarni hosil qilamiz:

$$\vdash \bar{\bar{x}}\to\overline{\bar{x}\wedge\bar{y}}, \qquad (12)$$

$$\vdash \bar{\bar{y}}\to\overline{\bar{x}\wedge\bar{y}}. \qquad (13)$$

Bu formulalarga ikki karralik inkorni tushirish qoidasini qo'llab, quyidagi formulalarni keltirib chiqaramiz:

$$\vdash x\to\overline{\bar{x}\wedge\bar{y}}, \qquad (14)$$

$$\vdash y\to\overline{\bar{x}\wedge\bar{y}}. \qquad (15)$$

Endi (9), (14) va (15) formulalarga murakkab xulosa qoidasini qo'llab,

$$\vdash x\vee y\to\overline{\bar{x}\wedge\bar{y}} \qquad (16)$$

formulaga ega bo'lamiz.

Nihoyat, (16) formulaga avval kontrpozitsiya qoidasini va so'ngra ikki karralik inkorni tushirish qoidasini qo'llab, $\vdash \bar{x}\wedge\bar{y}\to\overline{x\vee y}$ isbotlanishi kerak bo'lgan formulani hosil qilamiz. ■

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Quyida berilgan H formulalar majmuasidan $\vdash$ belgidan so'ng ifodalangan formulalarni keltirib chiqarish mumkinligini ko'rsating:

a) $H=\{A\}\vdash B\to A$; b) $H=\{A\to B, B\to C\}\vdash A\to C$;
d) $H=\{A\to C\}\vdash C\to A$; e) $H=\{A\to B, B\}\vdash A$;
f) $H=\{A, A\to B\}\vdash B$; g) $H=\{A\to B\}\vdash A\wedge C\to B\wedge C$;
h) $H=\{A\to B\}\vdash (C\to A)\to(C\to B)$;
i) $H=\{A\to B\}\vdash (B\to C)\to(A\to C)$;
j) $H=\{A\to(B\to C)\}\vdash B\to(A\to C)$;
k) $H=\{A\to B\}\vdash A\vee C\to B\vee C$.

2. Umumlashgan deduksiya teoremasidan foydalanib, quyidagi formulalarning isbotlanuvchi ekanligini isbotlang:

a) $(x\to y)\to((y\to z)\to(x\to z))$;
b) $(A\to B)\to(A\vee C\to B\vee C)$;
d) $(A\to B)\to((C\to A)\to(C\to B))$.

3. Mantiq qonunlarining to'g'riligini ko'rsating:

a) $x \to (\overline{x} \to y)$; b) $x \vee \overline{x}$; d) $\overline{x} \wedge \overline{y} \to \overline{x \vee y}$.

4. Shartlarni o'rin almashtirish, shartlarni qo'shish va shartlarni ajratish qoidalaridan foydalanib, quyidagilarning to'g'riligini isbotlang:

a) $\vdash x \to (y \to x \wedge y)$; b) $\vdash (A \to B) \wedge \overline{B} \to \overline{A}$;

d) $\vdash \overline{A} \to (A \to B)$.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Keltirib chiqariladigan va isbotlanuvchi formulalar sinfi deganda nimani tushunasiz?

2. Formulalar majmuasidan formulani keltirib chiqarish qoidasini bilasizmi?

3. Keltirib chiqarish (isbotlash) tushunchasiga berilgan ta'rifda nechta shart ifodalangan?

4. Keltirib chiqarishning qanday xossalari va asosiy qoidalarini bilasiz?

5. Deduksiya teoremasi bilan umumlashgan deduksiya teoremasi orasida qanday farq bor?

6. Kon'yunksiyani kiritish va diz'yunksiyani kiritish qoidalarini ifodalay olasizmi?

7. Asoslarni (shartlarni) o'rin almashtirish qonunini qanday ifodalanadi?

8. Asoslarni qo'shish qonuni bilasizmi?

9. Asoslarni ajratish qonuni asoslarni qo'shish qonunidan nimasi bilan farq qiladi?

10. Yuqorida ifodalangan barcha mantiq qonunlarini ifodalay olasizmi?

4.7. Mulohazalar algebrasi va mulohazalar hisobi orasidagi munosabatlar

Mulohazalar hisobi formulasining qiymati. Mulohazalar hisobi formulalar bilan mulohazalar algebrasi formulalari orasidagi munosabatlar. Umumqiymatli formula. Aynan chin formula. Keltirib chiqarish haqidagi teorema.

4.7.1. Mulohazalar hisobi formulasining qiymati tushunchasi. Mulohazalar hisobi formulalarini xuddi mulohazalar algebrasi formulalari sifatida qarash mumkin. Buning uchun mulohazalar hisobi o'zgaruvchilariga mulohazalar algebrasi o‘zgaruvchilari singari qaraymiz, ya’ni o‘zgaruvchilar chin yoki yolg‘on (1 yoki 0) qiymat qabul qiladi deb hisoblaymiz.

$\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ va $\neg$ amallarini mulohazalar algebrasidagidek aniqlaymiz.

Mulohazalar hisobining har bir formulasi, o‘zgaruvchilar uning ifodasiga qanday kirishidan qat’i nazar, 1 yoki 0 qiymat qabul qiladi. Uning qiymati mulohazalar algebrasidagi qoidalar bo‘yicha hisoblanadi.

Mulohazalar hisobi formulasining qiymati tushunchasini aniqlaylik.

A – mulohazalar hisobi formulasi, $x_1, x_2, ..., x_n$ lar esa A formula ifodasiga kiruvchi o‘zgaruvchilar $(x_i \neq x_j)$ bo‘lsin. $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ lar orqali mos ravishda $x_1, x_2, ..., x_n$ o‘zgaruvchilarning qiymatlarini belgilaymiz, $\alpha_j \in E_2 = \{0, 1\}$. $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ vektor 2^n ta qiymatlar satriga ega.

O‘zgaruvchilarning bitta qiymatlar satri uchun A formulaning qiymati $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(A)$ ni quyidagicha aniqlaymiz:

1. A formulaning eng katta uzunlikdagi qismiy formulasi x_i bo‘lganda, $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(x_i) = \alpha_i$ bo‘ladi.

2. Agar $k+1$ uzunlikdagi hamma qismiy formulalar aniqlangan bo‘lsa, u holda $A_i \wedge A_j$, $A_i \vee A_j$, $A_i \rightarrow A_j$, $\overline{A_i}$ amallarning bajarilishi natijasida olingan k uzunlikdagi qismiy formulalar quyidagi qiymatlarga ega bo‘ladi:

$$R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(A_i \wedge A_j) = R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(A_i) \wedge R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(A_j),$$

$$R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(A_i \vee A_j) = R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(A_i) \vee R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(A_j),$$

$$R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(A_i \rightarrow A_j) = R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(A_i) \rightarrow R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(A_j),$$

$$R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(\overline{A_i}) = \overline{R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(A_i)}.$$

Masalan, $\overline{x_1 \vee \overline{x}_4 \rightarrow x_2 \wedge \overline{x}_3}$ formula x_1, x_2, x_3, x_4 o‘zgaruvchilarning $(0, 1, 1, 0)$ qiymatlar satrida $R_{0110}(x_1 \vee \overline{x}_4 \rightarrow \overline{x_2 \wedge \overline{x}_3}) = 1$ qiymatga ega. Haqiqatan ham, bu formula quyidagi qismiy formulalarga ega:

$\overline{x_1 \vee \overline{x}_4}$, $\overline{x_2 \wedge \overline{x}_3}$ – birinchi uzunlikdagi qismiy formulalar,

$x_1 \vee \overline{x}_4$, $x_2 \wedge \overline{x}_3$ – ikkinchi uzunlikdagi qismiy formulalar,

x_4, x_2, $\overline{x}_3$ – uchinchi uzunlikdagi qismiy formulalar,

x_3 – to‘rtinchi uzunlikdagi qismiy formula.

Bu yerdan $R_{0110}(x_3)=1$, $R_{0110}(\overline{x}_3)=\overline{R_{0110}(x_3)}=0$, $R_{0110}(x_2)=1$,

$R_{0110}(x_4)=0$, $R_{0110}(x_2 \wedge \overline{x}_3)=R_{0110}(x_2)\wedge R_{0110}(\overline{x}_3)=0$,

$R_{0110}(\overline{x}_4)=\overline{R_{0110}(x_4)}=1$, $R_{0110}(x_1)=0$,

$R_{0110}(x_1 \vee \overline{x}_4)=R_{0110}(x_1)\vee R_{0110}(\overline{x}_4)=1$,

$R_{0110}(\overline{x_2 \wedge \overline{x}_3})=\overline{R_{0110}(x_2 \wedge \overline{x}_3)}=1$,

$R_{0110}(x_1 \vee \overline{x}_4 \to \overline{x_2 \wedge \overline{x}_3})=R_{0110}(x_1 \vee \overline{x}_4)\to R_{0110}(\overline{x_2 \wedge \overline{x}_3})=1$

ekanligini topamiz.

4.7.2. Mulohazalar hisobi bilan mulohazalar algebrasi orasidagi munosabatlarni aniqlovchi tasdiqlar. Endi mulohazalar hisobi bilan mulohazalar algebrasi orasidagi munosabatlarni aniqlovchi teoremalarga va lemmalarga to‘xtalib o‘tamiz.

1- teorema. *Mulohazalar hisobidagi har bir isbotlanuvchi formula mulohazalar algebrasida aynan chin (tavtalogiya, umumqiymatli) formula bo‘ladi.*

Isboti. Teoremani isbot qilish uchun quyidagi uchta holni ko‘rib chiqishga to‘g‘ri keladi:

1) mulohazalar hisobidagi har bir aksioma mulohazalar algebrasidagi aynan chin formuladir;

2) aynan chin formulalarga o‘rniga qo‘yish qoidasini qo‘llash natijasida hosil qilingan formulalar ham aynan chin formulalar bo‘ladi;

3) aynan chin formulalarga xulosa qoidasini qo‘llash natijasida hosil qilingan formulalar ham aynan chin formulalar bo‘ladi.

1) holning isboti. Mulohazalar hisobi aksiomalarining aynan chinligini isbotlash uchun chinlik jadvalidan foydalanamiz:

a) ifodasida bitta o‘zgaruvchisi bor aksiomalar –

b) ifodasida ikkita o‘zgaruvchisi bor aksiomalar –

x	IV_2	IV_3
1	1	1
0	1	1

x	y	I_1	II_1	II_2	III_1	III_2	IV_1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1

d) ifodasida uchta o'zgaruvchisi bor aksiomalar –

x	y	z	I_2	II_3	III_3
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1

1) hol isbot bo'ldi.

2) holning isboti. Avval quyidagi lemmalarni isbot qilamiz.

1- lemma. *A va B formulalarning ifodasiga kiruvchi hamma o'zgaruvchilar $x_1, x_2, ..., x_n, x$ va bu o'zgaruvchilarning ixtiyoriy qiymatlar satri $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha$ bo'lsin. Agar $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n\alpha}(B) = \beta$ bo'lsa, u holda $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n\alpha}\left(\int_x^B (A)\right) = R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}\beta(A)$ bo'ladi.*

1- lemmaning **isbotini**, formula tuzilishini hisobga olgan holda, induksiya metodi bilan amalga oshiramiz.

a) A formula x dan farq qiluvchi x_i o'zgaruvchi bo'lsin. U holda

$R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n\alpha}(x_i)\alpha_i$, $\int_x^B (x_i) = x_i$, $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n\alpha}\left(\int_x^B (A)\right) = \alpha_i$, $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}\beta(A) = \alpha_i$, ya'ni lemmaning tasdig'i to'g'ridir.

b) A formula, x esa o'zgaruvchi bo'lsin. U holda $\int_x^B (A)$ o'rniga qo'yish B ni beradi va $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n\alpha}\left(\int_x^B (A)\right) = \alpha_i$, $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n\alpha}(B) = \beta$ munosabatlarni olamiz, ya'ni lemmaning tasdig'i bu holda ham to'g'ridir.

d) $A = A_1 * A_2$ hamda A_1 va A_2 formulalar uchun lemmaning shartlari bajarilsin. U holda A formula uchun lemma tasdig'ining to'g'riligi quyidagi tengliklardan kelib chiqadi:

$$R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n\alpha}\left(\int\limits_x^B(A)\right)=R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n\alpha}\left(\int\limits_x^B(A_1*A_2)\right)=$$

$$=R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n\alpha}\left(\int\limits_x^B(A_1)*\int\limits_x^B(A_2)\right)=R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n\alpha}\left(\int\limits_x^B(A_1)\right)*R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n\alpha}\left(\int\limits_x^B(A_2)\right)=$$

$$=R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}\beta(A_1)*R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}\beta(A_2)=R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}\beta(A_1*A_2)=R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}\beta(A).$$

$A=\overline{A_1}$ bo‘lgan hol uchun ham 1- lemmaning tasdig‘i yuqoridagidek isbotlanadi. 1- lemma isbotlandi.

1- teorema tasdig‘ining 2) hol uchun **isboti** quyidagi lemmaga tayanadi.

2- lemma. *A – berilgan formula, x – o‘zgaruvchi, B – mulohazalar hisobining istalgan formulasi bo‘lsin. Agar A aynan chin formula bo‘lsa, u holda $\int\limits_x^B(A)$ formula ham aynan chin formula bo‘ladi.*

2- lemmaning **isboti.** $x_1,x_2,...,x_n,x$ lar A va B formulalar ifodasida ishtirok etuvchi o‘zgaruvchilar bo‘lsin. O‘zgaruvchilarning hamma 2^{n+1} ta $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,\alpha)$ qiymatlar satrida $\int\limits_x^B(A)$ formula chin qiymat qabul qilishini ko‘rsatish lozim. $\int\limits_x^B(A)$ formula aynan chin formula emas deb faraz qilamiz. U holda shunday $(\alpha_1^0,\alpha_2^0,...,\alpha_n^0,\alpha^0)$ qiymatlar satri topilib, $R_{\alpha_1^0\alpha_2^0...\alpha_n^0\alpha^0}\left(\int\limits_x^B(A)\right)=0$ bo‘ladi. Bundan o‘z navbatida lemma shartiga asosan $R_{\alpha_1^0\alpha_2^0...\alpha_n^0\alpha^0}\beta(A)=0$ ekanligini topamiz. Ammo bu A ning aynan chin formula ekanligiga ziddir. Demak, hamma qiymatlar satrida $\int\limits_x^B(A)$ formula chin qiymat qabul qiladi va u aynan chindir. 2-lemma isbot bo‘ldi.

1- teoremaning tasdig‘i 2) hol uchun isbot bo‘ldi.

1- teorema tasdig'ining 3) **hol uchun isboti** quyidagi lemmaga tayanadi.

3- lemma. *Agar* C *va* $C \to A$ *formulalar aynan chin bo'lsa, u holda* A *ham aynan chin formula bo'ladi.*

3- lemmaning **isboti.** $x_1, x_2, ..., x_n$ lar C va A formulalar ifodasiga kiruvchi o'zgaruvchilar bo'lsin. A – aynan chin formula emas deb faraz qilamiz. U holda o'zgaruvchilarning shunday $(\alpha_1^0, \alpha_2^0, ..., \alpha_n^0)$ qiymatlar satri mavjud bo'ladiki, $R_{\alpha_1^0\alpha_2^0...\alpha_n^0}(A) = 0$ bo'ladi. Bu yerdan

$$R_{\alpha_1^0\alpha_2^0...\alpha_n^0}(C \to A) = R_{\alpha_1^0\alpha_2^0...\alpha_n^0}(C) \to R_{\alpha_1^0\alpha_2^0...\alpha_n^0}(A) = 1 \to 0 = 0$$

ekanligi kelib chiqadi. Bu natija $C \to A$ formulaning aynan chin ekanligiga ziddir. Bu qarama-qarshilik, A aynan chin formula ekanligini isbotlaydi. 3- lemma isbot bo'ldi. ■

2- teorema (*keltirib chiqarish haqida*). A*-mulohazalar hisobining biror formulasi;* $x_1, x_2, ..., x_n$ – A *formula ifodasiga kiruvchi o'zgaruvchilar va* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ *o'zgaruvchilarning ixtiyoriy qiymatlar satri bo'lsin.* H *orqali chekli formulalar majmuasini belgilaymiz. Agar*

$$x_i^{\alpha_i} = \begin{cases} x_i, & \alpha_i = 1 \text{ bo'lganda}; \\ \overline{x}_i, & \alpha_i = 0 \text{ bo'lganda}, \end{cases}$$

bo'lsa, u holda $H = \{x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, ..., x_n^{\alpha_n}\}$ *formulalar majmuasi uchun:*

1) $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(A) = 1$ *bo'lgan holda* $H \vdash A$;

2) $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(A) = 0$ *bo'lgan holda* $H \vdash \overline{A}$ *bo'ladi.*

2- teoremaning **isbotini** formula tuzilishiga qarab induksiya metodi bilan bajaramiz.

Baza. A formula faqat x_i o'zgaruvchidan tashkil topgan bo'lsin.

a) Agar $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(x_i) = \alpha_i = 1$ bo'lsa, u holda $x_i \vdash x_i$ yoki $x_i^{\alpha_i} \vdash x_i$, ya'ni $x_i^{\alpha_i} \vdash A$. Demak, $H \vdash A$.

b) Agar $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(x_i) = \alpha_i = 0$ bo'lsa, u holda $\overline{x}_i \vdash \overline{x}_i$ yoki $x_i^{\alpha_i} \vdash \overline{x}_i$, ya'ni $x_i^{\alpha_i} \vdash \overline{A}$. Demak, $H \vdash \overline{A}$.

Induksion o‘tish. Faraz qilaylik, B_1 va B_2 formulalar uchun teorema tasdig‘i to‘g‘ri deb qaralgan holda, A formula quyidagi to‘rt ko‘rinishning biri bo‘lsin: I. $B_1 \wedge B_2$, II. $B_1 \vee B_2$, III. $B_1 \to B_2$, IV. $\overline{B_1}$.

Har bir holni alohida ko‘rib o‘tamiz.

I. A formula B_1 B_2 ko‘rinishga ega bo‘lsin.

a) Agar $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(B_1 \wedge B_2)=1$ bo‘lsa, u holda $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(B_1)=1$ va $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(B_2)=1$ kelib chiqadi. Bundan, qilingan farazimizga ko‘ra, $H|\!-B_1$ va $H|\!-B_2$. Bu yerdan o‘z navbatida kon’yunksiyani kiritish qoidasiga asosan $H|\!-B_1 \wedge B_2$, ya’ni $H|\!-A$ hosil bo‘ladi.

b) Agar $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(B_1 \wedge B_2)=0$ bo‘lsa, u vaqtda $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(B_1)=0$ yoki $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(B_2)=0$ bo‘ladi. Masalan, $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(B_1)=0$ bo‘lsin deylik, u holda farazimizga ko‘ra

$$H|\!-\overline{B_1}\,. \tag{1}$$

II_1 aksiomaga ko‘ra $|\!-B_1 \wedge B_2 \to B_1$. Bu yerdan kontrpozitsiya qoidasiga asosan

$$|\!-\overline{B_1} \to \overline{B_1 \wedge B_2} \tag{2}$$

kelib chiqadi. (1) va (2) formulalardan xulosa qoidasiga asosan $H|\!-\overline{B_1 \wedge B_2}$ ni hosil qilamiz, ya’ni $H|\!-\overline{A}$.

II. A formula $B_1 \vee B_2$ ko‘rinishga ega bo‘lsin.

a) Agar $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(B_1 \vee B_2)=1$ bo‘lsa, u holda hech bo‘lmaganda $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(B_1)=1$ yoki $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(B_2)=1$ bo‘ladi. $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(B_1)=1$ bo‘lsin, u holda farazimizga ko‘ra

$$H|\!-B_1\,. \tag{3}$$

III_3 aksiomaga asosan esa

$$|\!-B_1 \to B_1 \vee B_2 \tag{4}$$

kelib chiqadi. (3) va (4) formulalardan xulosa qoidasiga asosan $H|\!-B_1 \vee B_2$ ni hosil qilamiz, ya’ni $H|\!-A$.

b) Agar $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(B_1 \vee B_2) = 0$ bo'lsa, u holda $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(B_1) = 0$ va $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(B_2) = 0$ bo'ladi. Bu yerdan $H|-\overline{B_1}$ va $H|-\overline{B_2}$ kelib chiqadi. O'z navbatida kon'yunksiyani kiritish qoidasiga asosan

$$H|-\overline{B_1} \wedge \overline{B_2} \tag{5}$$

ga kelinadi. Isbotlanuvchi formuladan foydalanib,

$$|-\overline{B_1} \wedge \overline{B_2} \to \overline{B_1 \vee B_2} \tag{6}$$

ni olamiz. (5) va (6) formulalardan xulosa qoidasiga asosan $H|-\overline{B_1 \vee B_2}$ ni hosil qilamiz, ya'ni $H|-\overline{A}$.

III. A formula $B_1 \to B_2$ ko'rinishda bo'lsin.

a) Agar $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(B_1 \to B_2) = 1$ bo'lsa, yo $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(B_1) = 0$, yoki $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(B_2) = 1$ bo'ladi. Masalan, $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(B_1) = 0$ bo'lsa, u holda

$$H|-\overline{B_1} \tag{7}$$

ni hosil qilamiz.

Isbotlanuvchi formuladan foydalanib $|-B_1 \to (\overline{B_1} \to B_2)$ formulani topamiz. Bu formuladan asoslarning o'rin almashtirish qoidasiga asosan

$$|-\overline{B_1} \to (B_1 \to B_2) \tag{8}$$

formulani hosil qilamiz. (7) va (8) formulalardan xulosa qoidasiga binoan $H|-B_1 \to B_2$ formulani yozamiz, ya'ni $H \to A$.

Agar $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(B_2) = 1$ bo'lsa, u holda

$$H|-B_2. \tag{9}$$

I_1 aksiomadan foydalanib,

$$|-B_2 \to (B_1 \to B_2) \tag{10}$$

formulani keltirib chiqaramiz. (9) va (10) formulalardan xulosa qoidasiga ko'ra $H|-B_1 \to B_2$ kelib chiqadi, ya'ni $H|-A$.

b) Agar $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(B_1 \to B_2) = 0$ bo'lsa, u holda $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(B_1) = 1$ va $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(B_2) = 0$ bo'ladi. Bu yerdan $H|-B_1$, (11)

$$H|-\overline{B_2} \tag{12}$$

ekanligi kelib chiqadi. Isbotlanuvchi formula ta'rifiga asosan

$$\vdash (B_1 \to B_2) \to (B_1 \to B_2).$$

Bu formuladan asoslarning o'rin almashtirish qoidasiga ko'ra

$$\vdash B_1 \to ((B_1 \to B_2) \to B_2) \qquad (13)$$

formulani keltirib chiqaramiz. (11) va (13) formulalardan xulosa qoidasiga binoan

$$H \vdash ((B_1 \to B_2) \to B_2) \qquad (14)$$

ni hosil qilamiz, o'z navbatida undan kontrpozitsiya qoidasini qo'llab

$$H \vdash \overline{B}_2 \to \overline{(B_1 \to B_2)} \qquad (15)$$

formulani keltirib chiqaramiz. (12) va (15) formulalardan xulosa qoidasiga asosan $H \vdash \overline{(B_1 \to B_2)}$ formulaga ega bo'lamiz, ya'ni $H \vdash \overline{A}$.

IV. A formula $\overline{B}_1$ ko'rinishga ega bo'lsin.

a) Agar $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(\overline{B}_1) = 1$ bo'lsa, u holda $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(B_1) = 0$ bo'ladi. Demak, $H \vdash \overline{B}_1$, ya'ni $H \vdash A$.

b) Agar $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(\overline{B}_1) = 0$ bo'lsa, u holda $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(B_1) = 1$ bo'ladi va bundan

$$H \vdash B_1 \qquad (16)$$

kelib chiqadi. IV_2 aksiomadan foydalanib

$$H \vdash B_1 \to \overline{\overline{B}}_1 \qquad (17)$$

formulani yozamiz. (16) va (17) formulalardan xulosa qoidasiga asosan $H \vdash \overline{\overline{B}}_1$ ni, ya'ni $H \vdash \overline{A}_1$ ni hosil qilamiz. ■

3- teorema. *Mulohazalar algebrasining har bir aynan chin formulasi mulohazalar hisobida isbotlanuvchi formula bo'ladi.*

Isboti. A formula teorema shartiga asosan aynan chin formula bo'lganligi uchun $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(A_1) = 1$. Bundan 2-teoremaga asosan

$$H_n \vdash A \qquad (18)$$

kelib chiqadi, bu yerda $H_n = \{x_1^{\alpha_1}, ..., x_n^{\alpha_n}\}$.

$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ qiymatlar satrlarining soni 2^n ga teng bo'lgani uchun (18) formula hamma 2^n ta qiymatlar satrida bajariladi.

Agar $H_{n-1}=\{x_1^{\alpha_1},x_2^{\alpha_2},...,x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\}$ bo'lsa, u holda, ravshanki, H_{n-1}, $x_n|-A$ va H_{n-1}, $\overline{x}_n|-A|$ bo'ladi. Diz'yunksiyani kiritish qoidasiga asosan bu holda H_{n-1}, $x_n\vee\overline{x}_n|-A$ bo'ladi. Ammo $x_n\vee\overline{x}_n$ isbotlanuvchi formula bo'lganligi uchun uni H_{n-1}, $x_n\vee\overline{x}_n$ formulalar majmuasidan olib tashlash mumkin. Demak, $H_{n-1}|-A$.

Xuddi shu kabi $H_{n-2}=\{x_1^{\alpha_1},x_2^{\alpha_2},...,x_{n-2}^{\alpha_{n-2}}\}$,...., $H_2=\{x_1^{\alpha_1},x_2^{\alpha_2}\}$, $H_1=\{x_1^{\alpha_1}\}$ formulalar majmualari uchun ketma-ket $H_{n-2}|-A$, $H_{n-3}|-A,...,H_2|-A$, $H_1|-A$ ekanligini isbotlash mumkin. Ma'lumki, $H_1=\{x_1^{\alpha_1}\}|-A$ munosabat $\alpha_1=1$ va $\alpha_1=0$ hollar uchun to'g'ridir, ya'ni $x_1|-A$ va $\overline{x}_1|-A$. Bu yerdan diz'yunksiyani kiritish qoidasiga asosan $x_1\vee\overline{x}_1|-A$ ga ega bo'lamiz. Ammo $x_1\vee\overline{x}_1$ isbotlanuvchi formula bo'lgani uchun uni tashlab yuborish mumkin. Shunday qilib, $\varnothing|-A$. Demak, A isbotlanuvchi formuladir. ■

Muammoli masala va topshiriqlar

1. $A=x_1\vee x_2\to x_3$ formula hamda o'zgaruvchilarning (0, 0, 1) va (1, 0, 0) qiymatlar satrlari berilgan. A va $\overline{A}$ formulalarni mos formulalar majmuasidan keltirib chiqaring.

2. $A=x_1\vee x_2\to x_3$ formula hamda o'zgaruvchilarning (1, 1, 1), (1, 0, 1) va (0, 1, 0) qiymatlar satrlari berilgan bo'lsa, A va $\overline{A}$ formulalarni mos formulalar majmuasidan keltirib chiqaring.

3. $A=(x\vee y)\to x\wedge z$ formula hamda o'zgaruvchilarning (1, 0, 0), (0, 1, 1) va (0, 1, 0) qiymatlar satrlari berilgan bo'lsa, A va $\overline{A}$ formulalarni mos formulalar majmuasidan keltirib chiqaring.

4. Umumlashgan deduksiya teoremasidan foydalanib, quyidagi formulalarning isbotlanuvchi va ular mulohazalar algebrasida aynan chin (tavtalogiya) formulalar ekanligini isbotlang:

a) $(x\to y)\to((y\to z)\to(x\to z))$;

b) $(x\to y)\to(x\vee z\to y\vee z)$;

d) $(x\to y)\to((z\to x)\to(z\to y))$.

5. $x_1 \vee \overline{x}_4 \to \overline{x_2 \wedge \overline{x}_3}$ formula x_1, x_2, x_3, x_4 o'zgaruvchilarning (0, 1, 1, 0) qiymatlar satrida $R_{0110}(x_1 \vee \overline{x}_4 \to \overline{x_2 \wedge \overline{x}_3}) = 1$ qiymatga ega ekanligini isbotlang.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Mulohazalar hisobi formulasining qiymati deganda nimani tushunasiz?
2. Mulohazalar algebrasi va mulohazalar hisobi orasidagi munosabatlarni bilasizmi?
3. Umumqiymatli va aynan chin formulalarga bog'liq qanday tasdiqlarni bilasiz?
4. Keltirib chiqarish haqidagi teorema qanday isbotlanadi?
5. Mulohazalar hisobidagi formulalar bilan mulohazalar algebrasidagi formulalar orasida qanday munosabatlar bor?

4.8. Mulohazalar hisobida yechilish, zidsizlik, to'liqlilik va erkinlik muammolari

Yechilish, zidsizlik, to'liqlilik va erkinlik muammolari. Aksiomatik nazariya. Tor ma'noda, keng ma'noda to'liq aksiomatik nazariya. Erkin aksioma. Erkin aksiomalar sistemasi. Teng kuchli formulalar.

Har qanday aksiomatik nazariyani asoslash uchun **yechilish, zidsizlik, to'liqlilik, erkinlik muammolari** deb ataluvchi to'rt muammoni hal qilishga to'g'ri keladi.

4.8.1. Mulohazalar hisobining yechilish muammosi. Mulohazalar hisobidagi berilgan ixtiyoriy formulaning isbotlanuvchi yoki isbotlanuvchi emasligini aniqlab beruvchi algoritmning mavjudligini isbotlash muammosi mulohazalar hisobining **yechilish muammosi** deb ataladi.

1- teorema. *Mulohazalar hisobi uchun yechilish muammosi hal qilinuvchidir (yechiluvchidir).*

Isboti. Oldingi paragrafda ta'kidlanganidek, mulohazalar hisobining istalgan formulasiga mulohazalar algebrasining formulasi sifatida qarash mumkin. Demak, bu formulaning mantiqiy qiymatini o'zgaruvchilarning istalgan qiymatlar satrida aniqlash mumkin.

A – mulohazalar hisobining ixtiyoriy formulasi, $x_1, x_2, ..., x_n$ esa A formulaning ifodasiga kiruvchi o'zgaruvchilar bo'lsin.

$R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(A)$ qiymatini hamma 2^n ta $(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n)$ qiymatlar satrida hisoblab chiqamiz. Agar hamma qiymatlar satrida $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(A) = 1$ bo'lsa, u holda A formula aynan chin bo‘ladi. Demak, ushbu bobning 8-paragrafidagi 3- teoremaga asosan A mulohazalar hisobining isbotlanuvchi formulasi bo‘ladi. ■

Agar shunday $(\alpha_1^0, \alpha_2^0, ..., \alpha_n^0)$ qiymatlar satri topilib, $R_{\alpha_1^0, \alpha_2^0, ..., \alpha_n^0}(A) = 0$ bo‘lsa, u holda A aynan chin formula bo‘lmaydi. Shuning uchun ushbu bobning 8-paragrafidagi 1- teoremaga asosan A isbotlanuvchi emas formuladir.

Shunday qilib, mulohazalar hisobining istalgan formulasini isbotlanuvchi yoki isbotlanuvchi emasligini ko‘rsatuvchi yuqorida bayon etilgan algoritm mavjud ekan. Demak, mulohazalar hisobi algoritmik yechiluvchi nazariyadir.

4.8.2. Mulohazalar hisobining zidsizlik muammosi.

1- ta’rif. *Agar mulohazalar hisobining ixtiyoriy A va $\overline{A}$ formulalari birgalikda isbotlanuvchi formulalar bo‘lmasa, u holda bunday mulohazalar hisobi **ziddiyatsiz aksiomatik nazariya**, aks holda esa **ziddiyatga ega bo‘lgan aksiomatik nazariya** deb ataladi.*

Demak, ziddiyatsiz mulohazalar hisobida A va $\overline{A}$ birgalikda isbotlanuvchi formulalar bo‘la olmaydi.

Mulohazalar hisobida zidsizlik muammosi quyidagicha qo‘yiladi: berilgan mulohazalar hisobi ziddiyatlimi yoki ziddiyatsizmi?

2- teorema. *Agar mulohazalar hisobida isbotlanuvchi A va $\overline{A}$ formulalar mavjudligi aniqlansa, u holda bu mulohazalar hisobida istalgan B formula ham isbotlanuvchi formula bo‘ladi.*

Isboti. Bundan keyin har qanday isbotlanuvchi formulani R va $\overline{R} = F$ bilan belgilaymiz.

1. Avval har qanday B formula uchun $\vdash B \to R$ (1) formulaning isbotlanuvchi ekanligini ko‘rsatamiz. Haqiqatan ham, I_1 aksiomadan o‘rniga qo‘yish natijasida

$$\vdash R \to (B \to R) \tag{2}$$

ni hosil qilamiz. Ammo shartga ko‘ra R isbotlanuvchi formula, ya’ni

$$\vdash R. \tag{3}$$

U holda (2) va (3) formulalardan xulosa qoidasiga asosan (1) formulaning to‘g‘riligi kelib chiqadi.

2. Endi har qanday B uchun

$$\vdash F \to B \tag{4}$$

formulaning isbotlanuvchi ekanligini ko‘rsatamiz. Haqiqatan ham, IV_1 aksiomadan o‘rniga qo‘yish natijasida

$$\vdash(\overline{B} \to R) \to (\overline{R} \to \overline{\overline{B}}) \tag{5}$$

formula kelib chiqadi. Ammo isbotlaganimizga asosan

$$\vdash(\overline{B} \to R). \tag{6}$$

O‘z navbatida (6) va (5) dan xulosa qoidasiga binoan

$$\vdash(\overline{R} \to \overline{\overline{B}}) \tag{7}$$

formulani hosil qilamiz. Ikki karralik inkor amalini tushirish qoidasidan foydalanib va $\overline{R}$ ni F bilan almashtirilsa, $\vdash F \to B$ formulaga ega bo‘lamiz, ya’ni (4) isbotlanuvchi formuladir.

3. Har qanday A uchun $$\vdash A \wedge \overline{A} \to F \tag{8}$$

formula isbotlanuvchi ekanligini ko‘rsatamiz. Haqiqatan ham, I_1 va IV_1 aksiomalarga asosan quyidagilar isbotlanuvchi formulalar bo‘ladi:

$$\vdash A \to (R \to A), \tag{9}$$

$$\vdash(R \to A) \to (\overline{A} \to F). \tag{10}$$

(9) va (10) lardan sillogizm qoidasiga binoan $\vdash A \to (\overline{A} \to F)$ formulani keltirib chiqaramiz. Bu formuladan asoslarni birlashtirish qoidasini qo‘llash natijasida $\vdash A \to \overline{A} \to F$ formulaga kelamiz, ya’ni (8) ga ega bo‘lamiz. (4) va (8) dan sillogizm qoidasiga asosan

$$\vdash A \wedge \overline{A} \to B \tag{11}$$

formulani hosil qilamiz. Ammo teoremaning shartiga ko‘ra $\vdash A$ va $\vdash \overline{A}$, u holda $\vdash A \wedge \overline{A}$. Demak, B isbotlanuvchi formula bo‘ladi. ■

3- teorema. *Mulohazalar hisobi ziddiyatsiz nazariyadir.*

Isboti. Mulohazalar hisobida A va $\overline{A}$ birgalikda o‘zida isbotlanuvchi bo‘ladigan hech qanday A formula mavjud emasligini ko‘rsatamiz.

A mulohazalar hisobining ixtiyoriy formulasi bo‘lsin. Agar A isbotlanuvchi formula bo‘lsa, u holda ushbu bobning 7- paragrafidagi 1-teoremaga asosan A aynan chin formuladir va, demak, $\overline{A}$ aynan yolg‘on formula bo‘ladi. Shuning uchun ham $\overline{A}$ isbotlanuvchi formula bo‘lmaydi.

Demak, A va $\overline{A}$ bir vaqtda isbotlanuvchi formulalar bo‘la olmaydi. Shuning uchun ham mulohazalar hisobi ziddiyatga ega emas. ■

4.8.3. Mulohazalar hisobining to'liqlilik muammosi.

2- ta'rif. *Mulohazalar hisobining aksiomalar sistemasiga shu hisobning biror ixtiyoriy isbotlanmaydigan formulasini yangi aksioma sifatida qo'shishdan hosil bo'ladigan aksiomalar sistemasi ziddiyatga ega bo'lgan mulohazalar hisobiga olib kelsa, bunday mulohazalar hisobiga* ***tor ma'noda to'liq aksiomatik nazariya*** *deb ataladi.*

3- ta'rif. *Har qanday aynan chin formulasi isbotlanuvchi formula bo'ladigan mulohazalar hisobiga* ***keng ma'noda to'liq aksiomatik nazariya*** *deb ataladi.*

Demak, mulohazalar hisobining to'liqlilik muammosi ikki savolga javob topishdan iborat:

1) yangi aksioma sifatida biror isbotlanmaydigan formulasini aksiomalar sistemasiga qo'shish natijasida mulohazalar hisobini kengaytirish mumkinmi yoki yo'qmi?

2) mulohazalar algebrasining har qanday aynan chin formulasi mulohazalar hisobida isbotlanuvchi bo'ladimi yoki yo'qmi?

Bu savollarga javobni quyidagi teoremalardan olish mumkin.

4- teorema. *Mulohazalar hisobi tor ma'noda to'liqdir.*

Isboti. A mulohazalar hisobidagi ixtiyoriy isbotlanmaydigan formula, $x_1, x_2, ..., x_n$ esa A formula tarkibiga kiruvchi o'zgaruvchilar bo'lsin.

A isbotlanmaydigan formula bo'lganligidan u aynan chin formula emas. Demak, $x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilarning shunday $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ qiymatlar satri mavjudki,

$$R_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n}(A(x_1, x_2, .., x_n)) = 0 \qquad (12)$$

bo'ladi.

$B_1, B_2, ..., B_n$ lar $x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilarga bog'liq ixtiyoriy aynan chin formulalar bo'lsin. $B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, ..., B_n^{\alpha_n}$ majmuani qaraymiz, bu yerda

$$B_i^{\alpha_i} = \begin{cases} B_i, \ \alpha_i = 1 \text{ bo'lganda}, \\ \overline{B}_i, \ \alpha_i = 0 \text{ bo'lganda}. \end{cases}$$

A formulada $\int_{x_1,x_2,...,x_n}^{B_1^{\alpha_1},B_2^{\alpha_2},...,B_n^{\alpha_n}}(A)$ o'rniga qo'yishni bajarib,

$$A(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, ..., B_n^{\alpha_n}) \qquad (13)$$

formulaga ega bo'lamiz.

(12) formulaning aynan yolg‘on formula ekanligini ko‘rsatamiz. $x_1, x_2, ..., x_n$ o‘zgaruvchilarning ixtiyoriy $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ qiymatlar satrini olamiz. $B_1, B_2, ..., B_n$ formulalar aynan chin formulalar ekanligidan $R_{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n}(B_i) = 1$ bo‘ladi. U holda $R_{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n}(B_i^{\alpha_i}) = \alpha_i$ o‘rinli. Demak,

$$R_{\sigma_1 \sigma_2 ... \sigma_n} A(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, ..., B_n^{\alpha_n}) = A(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = 0 .$$

Bu yerdan $\overline{A(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, ..., B_n^{\alpha_n})}$ ning aynan chin formula ekanligi kelib chiqadi va u ushbu bobning 7- paragrafidagi 3- teoremaga asosan isbotlanuvchi formula bo‘ladi.

Ikkinchi tomondan, agar mulohazalar hisobining aksiomalari qatoriga $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ formulani yangi aksioma sifatida qo‘shsak, u holda hosil bo‘lgan yangi mulohazalar hisobida bu formula aksioma bo‘lganligi uchun isbotlanuvchi formula bo‘ladi. Shu vaqtning o‘zida yangi mulohazalar hisobida $A(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, ..., B_n^{\alpha_n})$ formula ham isbotlanuvchi formula bo‘ladi, chunki u isbotlanuvchi formuladan o‘rniga qo‘yish qoidasi yordamida hosil qilingan.

Shunday qilib, yangi mulohazalar hisobida ikkita $\overline{A(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, ..., B_n^{\alpha_n})}$ va $A(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, ..., B_n^{\alpha_n})$ isbotlanuvchi formulalarga ega bo‘lamiz. Demak, yangi mulohazalar hisobi ziddiyatga ega bo‘lgan aksiomatik nazariyadir. Bu yerdan uning tor ma’noda to‘liqligi kelib chiqadi. ■

5- teorema. *Mulohazalar hisobi keng ma’noda to‘liqdir.*

Isboti. Ushbu bobning 7- paragrafida (3- teorema) mulohazalar algebrasining har bir aynan chin formulasi mulohazalar hisobida isbotlanuvchi formula ekanligi isbot qilingan edi. Demak, mulohazalar hisobi keng ma’noda to‘liqdir. ■

4.8.4. Mulohazalar hisobi aksiomalarining erkinlik muammosi. Har qanday aksiomatik hisobda aksiomalarning erkinlik masalasi, ya’ni birorta aksiomani sistemaning qolgan aksiomalaridan keltirib chiqarish qoidasi orqali hosil etish mumkinmi yoki yo‘qmi degan muammo mavjud bo‘ladi. Agar biror aksioma uchun bu masala ijobiy hal etilsa, u holda bu aksioma sistema aksiomalari ro‘yxatidan chiqarib tashlanadi va mantiqiy hisob bu bilan o‘zgarmaydi, ya’ni isbotlanuvchi formulalar sinfi o‘zgarmasdan qoladi.

4- ta'rif. *Agar biror aksiomani mulohazalar hisobining qolgan aksiomalaridan keltirib chiqarish mumkin bo'lmasa, u holda bu aksioma shu mulohazalar hisobining boshqa aksiomalaridan* ***erkin aksioma*** *deb ataladi.*

5- ta'rif. *Agar mulohazalar hisobi aksiomalar sistemasining har bir aksiomasi erkin bo'lsa, u holda mulohazalar hisobining* ***aksiomalar sistemasi erkin*** *deb ataladi.*

6-teorema. *Mulohazalar hisobining aksiomalar sistemasi erkindir.*

Isboti. A mulohazalar hisobining ixtiyoriy aksiomasi bo'lsin. Bu aksiomaning erkinligini isbotlash uchun mulohazalar hisobiga nisbatan quyidagi usulni qo'llaymiz: mulohazalar hisobi o'zgaruvchilarini α yoki β qiymat qabul qiluvchi o'zgaruvchilar sifatida qaraymiz. Bu yerda α chin, β esa yolg'on rolini o'ynaydi.

$\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ amallarni quyidagi uchta shart o'rinli bo'ladigan qilib aniqlaymiz:

1) A aksiomadan tashqari sistemaning hamma aksiomalari tarkibidagi o'zgaruvchilarning barcha qiymatlarida faqat α qiymatni qabul qilsin;

2) A aksiomadan boshqa, aksiomalar majmuasidan keltirib chiqarilgan har qanday formula ham tarkibidagi o'zgaruvchilarning barcha qiymatlarida faqat α qiymatni qabul qilsin;

3) A aksioma tarkibidagi o'zgaruvchilarning ayrim qiymatlarida β qiymatni qabul qilsin.

Agar A aksiomaga nisbatan yuqorida keltirilgan interpretatsiya (izohlash) o'rinli bo'lsa, u holda A aksioma boshqa aksiomalardan erkin ekanligi kelib chiqadi. Haqiqatdan ham, agar A aksiomani mulohazalar hisobining boshqa aksiomalaridan keltirib chiqarish mumkin bo'lganda edi, u shartlarning ikkinchisiga asosan tarkibidagi o'zgaruvchilarning barcha qiymatlarida faqat α qiymatni qabul qilib, bu esa 3-shartga zid bo'lardi. Demak, A aksiomani mulohazalar hisobining boshqa aksiomalaridan keltirib chiqarish mumkin emas va u sistemadagi erkin aksiomadir. ■

O'zgaruvchilarining o'rniga ularning ayrim qiymatlari qo'yilganda ham formulalar ma'noga ega deb kelishamiz. Masalan, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \rightarrow A$, $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ va boshqalar.

6- ta'rif. *Tarkibidagi o'zgaruvchilarni α va β bilan almashtirganda bir xil qiymat qabul qiluvchi A va B formulalar* ***teng kuchli formulalar*** *deb ataladi hamda bu $A = B$ ko'rinishda yoziladi.*

Tenglik belgisi $\wedge, \vee, \rightarrow$ mantiqiy bog'lovchilarga nisbatan sustroq bog'laydi deb hisoblaymiz.

Endi II_1 aksiomaning erkinligini isbotlaymiz. Buning uchun kon'yunksiyadan tashqari qolgan hamma mantiqiy amallarni xuddi mantiq algebrasidagidek va kon'yunksiya amalini $x \wedge y = y$ tenglik orqali aniqlaymiz:

x	$\overline{x}$
α	β
β	α

x	y	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \wedge y$
α	α	α	α	α
α	β	α	β	β
β	α	α	α	α
β	β	β	α	β

Ushbu interpretatsiya uchun yuqorida keltirilgan uchta shartning bajarilishini ko'rsatamiz.

II_1 aksiomadan tashqari mulohazalar hisobining qolgan hamma aksiomalari o'zgaruvchilarning barcha qiymatlarida α qiymat qabul qiladi (bu holni chinlik jadvali orqali ko'rsatish mumkin).

Haqiqatan ham I, III va IV guruh aksiomalarida kon'yunksiya amali qatnashmaydi. Qolgan mantiqiy amallar xuddi mulohazalar algebrasidagidek aniqlangan.

Mulohazalar algebrasida bu formulalar aynan chin formulalar bo'lganidan, ushbu interpretatsiyada o'zgaruvchilarning barcha qiymatlarida ular α qiymat qabul qiladi.

II_1, II_2 va II_3 aksiomalarni ko'raylik.

II_2 va II_3 aksiomalar qabul qilingan interpretatsiyada $y \rightarrow y$ formulaga teng bo'ladi va $x = \beta$, $y = \alpha$ qiymatlarda β qiymat qabul qiladi, ya'ni hech qachon α qiymat qabul qilmaydi.

Endi aynan α ga teng formulalardan keltirib chiqarish qoidasiga asosan hosil qilingan formulalar ham α ga tengligini ko'rsatish qoldi, ya'ni 2- shartning bajarilishini ko'rsatish kerak.

Oldingi paragraflarda aynan chin formulalarga o'rniga qo'yish va xulosa qoidalarini qo'llash natijasida chiqarilgan formulalar aynan chin formulalar bo'lishi ko'rsatilgan edi. Demak, 2- shart ham bajariladi. Shunday qilib, mulohazalar hisobining II_1 aksiomasi erkin aksiomadir.

Xuddi shu sxemadan foydalanib, mulohazalar hisobining I, II, III va IV guruhlaridagi har bir aksiomaning erkinligini ko'rsatish mumkin. Demak, mulohazalar hisobining aksiomalar sistemasi erkindir.

Muammoli masala va topshiriqlar

1. $A(x)$ va $B(x)$ ixtiyoriy formulalar bo'lsin. Quyidagi formulalarning qaysilari $A(x) \to \overline{B(x)}$ formulaga teng kuchli formula bo'lishini aniqlang:

a) $A(x) \vee B(x)$; b) $\overline{A(x)} \vee \overline{B(x)}$; d) $\overline{A(x)} \to B(x)$;

e) $\overline{B(x)} \to A(x)$; f) $\overline{\overline{A(x)} \wedge B(x)}$; g) $\overline{A(x) \wedge \overline{B(x)}}$;

h) $B(x) \to \overline{A(x)}$.

2. Mulohazalar hisobining I, II, III va IV guruhlaridagi har bir aksiomaning erkinligini ko'rsating.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Mulohazalar hisobining yechilish muammosi deganda nimani tushunasiz?

2. Nima uchun mulohazalar hisobi uchun yechilish muammosi hal qilinuvchidir?

3. Aksiomatik nazariya nima?

4. Ziddiyatsiz nazariyaga misol keltira olasizmi?

5. Mulohazalar hisobi ziddiyatsiz nazariya bo'la oladimi?

6. Mulohazalar hisobining to'liqlilik muammosini bilasizmi?

7. Nima uchun mulohazalar hisobi tor ma'noda ham, keng ma'noda ham to'liq?

8. Nima uchun mulohazalar hisobining aksiomalar sistemasi erkin?

9. Qanday formulalar teng kuchli formulalar deb ataladi?

ADABIYOTLAR

1. **Euler L.** (Leonb Eulero) Solvtio problematis ad geometriam sitvs pertinentis. Comment Academiae Sci I. Petropolitanue, 8, 1736, p. 128-140.

2. **Soleev A.** Ordering in Complicated Problems. In 14-th British Combinatorical Conference. Keele, GB, July, 1993. Abstracts. p. 96-98.

3. **To'rayev H.T., Azizov I., Otaqulov S.** Kombinatorika va graflar nazariyasi: Uslubiy qo'llanma. – Samarqand: SamDU nashri. 2006. – 263 bet.

4. **Алексеев В.Б., Кудрявцев В.Б., Сапоженко А.А., Яблонский С.В. и др.** Методическая разработка по курсу "Математическая логика и дискретная математика". 1980.

5. **Воробьев Н. Н.** Числа Фибоначчи. М., «Наука», 1969.

6. **Гаврилов М.А., Девятков В.В., Пупырев Е.И.** Логическое проектирование дискретных автоматов. М., «Наука», 1977.

7. **Гиндикин С.Г.** Алгебра логики в задачах. М., «Наука», 1972.

8. **Гильберт Д., Бернайс П.** Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. М., «Наука», 1979.

9. **Горбатов В.А.**

а) Семантическая теория проектирования автоматов. М., «Энергия», 1979.

б) Основы дискретной математики. М., «Высшая школа», 1986.

10. **Горбатов В.А., Павлов П.Г., Четвериков В.Н.** Логическое управление информационными процессами. М., «Энергоатомиздат», 1984.

11. **Евстигнеев В. А.** Применение теории графов в программировании. М., «Наука», 1985.

12. **Ерусалимский Я. М.** Дискретная математика: теория, задачи, приложения. М., «Вузовская книга», 2000.

13. **Захарова Л. Е.** Алгоритмы дискретной математики: Учебное пособие. М., Изд-во Московского государственного института электроники и математики, 2002.

14. **Зыков А.А.** Основы теории графов. М., «Наука», 1987.

15. **Игошин В.И.** Математическая логика и теория алгоритмов. Саратов, Изд-во Саратовского университета, 1991.

16. **Кофман А.** Введение в прикладную комбинаторику. М., «Наука», 1975.

17. **Колдуэлл С.** Логический синтез релейных устройств. М., 1961.

18. **Кудрявцев В.Б.**

а) Теорема полноты для одного класса автоматов без обратных связей. Проблемы кибернетики, Вып.8. М., «Физматгиз», 1962, стр. 91-116.

б) О мощностях множеств предполных множеств некоторых функциональных систем, связанных с автоматами. Проблемы кибернетики, Вып.13. М., «Наука», 1965, стр. 45-74.

19. **Лавров И.А., Максимова Л.Л.** Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М., «Наука», 1975.

20. **Ландо С. К.** Лекции о производящих функциях. 2-е изд. М., МЦНМО, 2004.

21. **Липский В.** Комбинаторика для программистов. М., «Мир», 1988.

22. **Лихтарников Л.М., Сукачева Т.Г.** Математическая логика. Курс лекций. Задачник-практикум и решения. Санкт-Петербург, «Лань», 1999.

23. **Лупанов О.Б.**

а) О синтезе некоторых классов управляющих систем. Сб. “Проблемы кибернетики”, Вып.10. М.. «Физматгиз», 1963, стр. 88-96.

б) Об одном подходе к синтезу управляющих систем-принципы локального кодирования. // Проблемы кибернетики, Вып.14. М., «Наука», 1965, стр. 31-110.

в) О возможностях синтеза схем из произвольных элементов. // Труды МИАН СССР, 51, 1958, стр. 158-183.

24. **Мальцев А.И.** Алгоритмы и рекурсивные функции. М., «Наука», 1965.

25. **Марков А.А.** Теория алгорифмов. // Труды математического института АН СССР им. В.А.Стеклова, XLII, АН РФ, 1954.

26. **Матиясевич Ю.В.** Диофантовость перечислимых множеств. // ДАН СССР, 191, 1970, стр. 279-282.

27. **Морочник С. Б., Розенфельд Б. А.** Омар Хайям – поэт, мыслитель, учёный. Сталинабад, «Таджикгосиздат», 1957.

28. **Новиков П.С.** Конструктивная математическая логика с точки зрения классической. М., «Наука», 1977.

29. **Новиков Ф. А.** Дискретная математика для программистов. СПб., «Питер», 2000.

30. **Омар Хаййам.** Трактаты. Перевод Б. А. Розенфельда. М.. «Издательство восточной литературы», 1961.

31. **Оре О.** Теория графов. М., «Наука», 1980.

32. **Поспелов Д.А.** Логико-лингвистические модели в системах управления. М., «Энергия», 1981.

33. **Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н.** Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. М., «Мир», 1980.

34. **Роджерс Х.** Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М., «Мир», 1972.

35. **Стенли Р.** Перечислительная комбинаторика. М., «Мир», 1990.

36. **Трахтенброт Б.А.** Алгоритмы и машинное решение задач. М., «Физматдиз», 1960.

37. **To‘rayev H.T.**

a) Matematik mantik va diskret matematika, Toshkent, «O‘qituvchi», 2003.

б) Matematik mantik va diskret matematika, I-qism. Samarkand, SamDU nashriyoti, 2000.

в) Matematik mantik va diskret matematika, II-qism. Samarkand, SamDU nashriyoti, 2001.

38. **Успенский В. А.** Треугольник Паскаля. М., «Наука», 1966.

39. **Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р.** Потоки в сетях. М., «Мир», 1966.

40. **Чёрч А.** Введение в математическую логику, том 1, М., «ИЛ», 1961.

41. **Чудновский Г.В.** Диофантовы предикаты, УМН, 25, № 4, 1970, стр. 185-186.

42. **Уилсон Р.** Введение в теорию графов. М. «Наука», 1980.

43. **Харари Ф.** Теория графов. М., «Мир», 1973.

44. **Яблонский С. В.**

а) Введение в дискретную математику. М., «Наука», 1979.

б) Введение в дискретную математику. 2-е изд., перераб. и доп. М., «Наука», 1986.

в) Методические разработки по курсу "Элементы дискретной математики". М., Изд-во МГУ, 1971.

г) Основы алгебры логики и теории контактных схем. М., Тр. института математики им. Стеклова, 1958, т. 51.

д) Функциональные построения в k-значной логике. М., Труды МИАН СССР, 51, 1958, стр. 5-142.

45. **Яблонский С. В., Лупанов О. Б. и др.** Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Том I. М., «Наука», 1974.

46. **Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б.** Функции алгебры логики и классы Поста. М., «Наука», 1966.

47. **Qobulov V.Q.** Raqamli avtomatlar. T., 1980.

48. **To'rayev H.T.** Matematik mantik va diskret matematika,. Ma'ruzalar matni. Samarkand, SamDU nashriyoti, 2001.

49. **To'rayev H.T.** Mulohazalar algebrasi. Muammoli lektsiyalar kursi. Samarkand, SamDU nashriyoti, 2003.

50. **To'rayev H.T.** Mulohazalar hisobi va predikatlar mantiqi. Muammoli lektsiyalar kursi. Samarkand, SamDU nashriyoti, 2003.

51. **To'rayev H.T.** Birinchi tartibli matematik nazariya va algoritmlar. Muammoli lektsiyalar kursi. Samarkand, SamDU nashriyoti, 2003.

52. **To'rayev H.T.** Diskret matematikaning ribernetikaga tatbiqi. Muammoli lektsiyalar kursi. Samarkand, SamDU nashriyoti, 2003.

53. **To'rayev H.T., Azizov I., Otaqulov S.** Kombinatorika va graflar nazariyasi. Toshkent, «Ilm Ziyo». 2009.

ASOSIY BELGILASHLAR

Kitobda quyidagi asosiy belgilashlar qabul qilingan.

$\boldsymbol{N}$ – natural sonlar to‘plami,

$\boldsymbol{Z}$ – butun sonlar to‘plami,

$\boldsymbol{R}$ – haqiqiy sonlar to‘plami,

$\varnothing$ – bo‘sh to‘plam,

$\boldsymbol{U}$ – universal to‘plam,

$|A|$ – A to‘plamning quvvati,

$\bigcup$ – birlashma belgisi,

$\bigcap$ – kesishma belgisi,

$A \setminus B$ – A to‘plamdan B to‘plamni ayirish natijasida hosil bo‘lgan to‘plam,

$\overline{A}_B$ – A to‘plamni B to‘plamgacha to‘ldiruvchi to‘plam,

$\overline{A}$ – A to‘plamni $\boldsymbol{U}$ universal to‘plamgacha to‘ldiruvchi to‘plam,

2^A – A to‘plam uchun bulean,

P_n – n ta elementli to‘plam uchun o‘rin almashtirishlar soni,

A_n^m – n ta elementdan m tadan o‘rinlashtirishlar soni,

C_n^m – n ta elementdan m tadan gruppalashlar soni,

$C_n(n_1, n_2, ..., n_k)$ – n ta komponentali kortej uchun takrorli o‘rin almashtirishlar soni ($n_1 + n_2 + ... + n_k = n$),

$\overline{A}_n^m$ – n ta turli elementlardan m tadan takrorli o‘rinlashtirishlar soni,

$\overline{C}_n^m$ – n ta elementdan m tadan takrorli gruppalashlar soni,

$B(n,k)$ – qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olingan holda natural n sonning k ta qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlari soni,

$B(n)$ – qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olingan holda natural n sonning k ta qo‘shiluvchilarga barcha bo‘laklanishlari soni,

$R(n,k)$ – qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olinmagan holda natural n sonning k ta qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlari soni,

$R(n)$ – qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olinmagan holda natural n sonning barcha bo‘laklanishlari soni,

■ – teorema, natija, lemma, xossaning isboti yoki misol, algoritm tugaganligi.

MUNDARIJA

H. T. To'rayev, I. Azizov

MATEMATIK MANTIQ VA DISKRET MATEMATIKA

I jild

Muharrir *M.Sa'dullayev*
Tehnik muharrir *H.Safaraliyev*

Litsenziya № AI 190. 10.05.2011 y.

Bosishga ruxsat etildi 14.07.2011. Bichimi 60x84/16. Ofset qo'ozi. TimesUz garniturasi. Shartli bosma t. 18,0. Nashr t. 18.0. Adadi 500 nusxa. Buyurtma 16/05

"Tafakkur –Bo'stoni" nashriyoti.
oshkent, Yunusobod, 9-mavze, 13-uy

«TAFAKKUR» nashriyoti bosmaxonasida chop etildi.

Toshkent, Chilonzor ko'chasi, 1-uy.

«TAFAKKUR-BO'STONI»
NASHRIYOTI

ISBN 978-9943-362-37-6
9 789943 362376