



Х.Э. ЭШМАТОВ, З.С. АБДУЛЛАЕВ, УЙ. АКБАРОВ

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ
НЕСВЯЗАННЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ
ТЕРМОВЯЗКОУПРУГИХ СИСТЕМ**



22-13

М-31

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РУз

Х.Э. ЭШМАТОВ, З.С. АБДУЛЛАЕВ, У.Й. АКБАРОВ

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ
НЕСВЯЗАННЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ
ТЕРМОВЯЗКОУПРУГИХ СИСТЕМ**

ТАШКЕНТ - 2004



Эшматов Х.Э., Акбаров У.Й., Абдуллаев З.С. Математическое моделирование нелинейных несвязанных задач динамики термовязкоупругих систем. – Ташкент, 2004. – 96 с.

В данном учебном пособии построены математические модели задач о нелинейных колебаниях и динамической устойчивости вязкоупругих пластин, находящихся в нестационарном температурном поле. На основе метода Бубнова – Галеркина в сочетании с численным методом, основанным на рациональных преобразованиях, устраняющих слабосингулярные особенности интегральных и интегродифференциальных уравнений (ИДУ), разработан вычислительный алгоритм, позволяющий исследовать несвязанные динамические задачи термовязкоупругости пластин.

В геометрически нелинейной постановке изучены свободные, вынужденные и параметрические колебания вязкоупругих изотропных и ортотропных пластин, находящихся под воздействием температуры, а также исследованы задачи о динамической устойчивости вязкоупругой пластины при действии осевых динамических нагрузок и воздействии температуры.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальностям:

5540700 «Агроинженерия»,

5140900 «Профессиональное образование: агрономия, агроинженерия»,

5541000 «Управления фермерских хозяйств»,

5540900 «Механизация водного хозяйства и мелиоративных работ»,

5541400 «Использование техники в водном хозяйстве».

Рецензенты:

академик АН РУз В.К. Кабулов,

докт. техн. наук, проф. М. Мирсаидов

Введение

В последнее время в современной технике широко применяются полимеры и композиты на их основе, обладающие ярко выраженными вязкоупругими свойствами. Кроме того, при достижении определенного уровня температуры или в зависимости от других факторов вязкоупругими свойствами обладают и традиционные упругие материалы. В машиностроении к конструкционным относятся материалы, из которых изготавливаются конструкции и детали машин, воспринимающие механические нагрузки. Помимо объемных и поверхностных нагрузок, на конструкции из композитных материалов могут воздействовать температурные поля, вызывающие изменение свойств материала, появление температурных деформаций и напряжений. Отметим, что полимерные композиты обладают, как правило, низкой теплопроводностью и могут быть использованы в конструкциях, подвергающихся кратковременному поверхностному нагреву, без дополнительной теплозащиты. Некоторые материалы, например композиты на основе углеродной и керамической матриц, специально предназначены для работы в условиях интенсивного нагрева, другие на основе минеральных волокон служат в качестве теплозащитных покрытий. Таким образом, температурное воздействие является одним из расчетных условий работы конструкций из композиционных материалов с вязкоупругими свойствами и следовательно, должно отражаться в математических моделях (уравнениях), описывающих их напряженно-деформированное состояние.

Учет воздействия температуры представляет принципиальный теоретический интерес, позволяя глубже, полнее и количественно более точно описать движение вязкоупругих сред, выявить при этом ряд качественно новых эффектов. Поэтому разработка эффективных методов решения нелинейных задач о колебаниях и устойчивости вязкоупругих элементов тонкостенных конструкций с учетом температурных воздействий является актуальной в наследственной механике деформируемого твердого тела.

С появлением современных ЭВМ появилась возможность усовершенствовать вычислительные методы и создать общие численные приемы, пригодные для решения достаточно широкого класса задач теории упругости и вязкоупругости. Численные решения, полученные на ЭВМ, становятся не только способом получения количественных характеристик, но и методом установления закономерностей изучаемого процесса. Вычислительные методы при этом должны быть экономными, т.е. затрачивать минимальные числа арифметических операций, и универсальными, т.е. пригодными для широкого класса прикладных задач и просто реализуемые на ЭВМ. Поэтому разработка адекватных моделей, описывающих все реальные механические свойства материала и эффективных вычислительных алгоритмов для решения соответствующих дифференциальных, интегродифференциальных уравнений динамических задач теории упругости и наследственной теории вязкоупругости, не имеющих указанных недостатков, является одной из актуальных проблем механики деформируемого твердого тела [12].

В первой главе даны постановка задачи и алгоритм численного решения нелинейных задач о колебаниях и динамической устойчивости элементов тонкостенных конструкций из вязкоупругого материала под воздействием температуры. В геометрически нелинейной постановке строятся математические модели задачи о динамической устойчивости вязкоупругих изотропных пластин под действием нагрузки, изменяющейся во времени и под воздействием температуры. Математическая модель задачи описывается системами ИДУ и дифференциальными уравнениями теплопроводности в частных производных с соответствующими граничными и начальными условиями. С помощью метода Бубнова – Галеркина, основанного на многочленной аппроксимации прогиба, эта задача сводится к решению задачи Коши для систем ИДУ в обычных производных. Для решения этой системы применен численный метод, основанный на рациональных преобразованиях, устраняющих слабосингулярные особенности интегральных и интегродифференциальных уравнений, предложенный в [12, 17]. На основе этого метода описан алгоритм численного решения.

Вторая глава посвящена изучению задачи о собственных, вынужденных и параметрических колебаниях вязкоупругих

прямоугольных пластин под воздействием температуры. С помощью метода Бубнова — Галеркина, основанного на многочленной аппроксимации прогиба, задача сводится к исследованию систем нелинейных обыкновенных ИДУ, решение которых находится численным методом, предложенным в [17]. Вычисление числовых значений приближенного решения выполнялось с помощью ПЭВМ, а полученные результаты отражаются в виде графиков и таблиц.

В линейной постановке строятся области динамической неустойчивости (ОДН) вязкоупругой пластины и изучается влияние различных факторов на ОДН.

В нелинейной постановке изучается изменение амплитуды нелинейных колебаний термовязкоупругой пластины.

Третья глава посвящена исследованию динамической устойчивости вязкоупругих систем при быстро возрастающей нагрузке с учетом воздействия температур. В геометрически нелинейной постановке рассматривается задача об устойчивости прямоугольных вязкоупругих пластин с учетом воздействия температуры при действии осевых динамических нагрузок и поперечных внешних давлений. Эта задача после применения метода Бубнова — Галеркина по пространственным координатам сводится к решению системы нелинейных ИДУ с переменными коэффициентами относительно функции времени. Интегрирование системы уравнений, полученных на основе многочленной аппроксимации прогибов, выполнялось с помощью численного метода, приведенного в первой главе данной работы. Во всех рассмотренных задачах численно исследована сходимость метода Бубнова — Галеркина. В широких пределах изменения физико-механических и геометрических параметров деформируемых систем при быстро возрастающих нагрузках находятся критические нагрузки и времена.

ГЛАВА 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕСВЯЗАННЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ

В настоящей главе рассматриваются в геометрически нелинейной постановке динамические задачи вязкоупругих пластин, обусловленные пространственным температурным полем $T(x, y, z, t)$, где x, y — координаты в срединной плоскости пластины, z — координата вдоль нормали к срединной плоскости пластины, t — время. При выводе уравнения движения элемента вязкоупругих пластин, имеющих начальные несовершенства, используются геометрически нелинейные теории, основанные на модели Кирхгофа — Лява. Эти уравнения являются интегродифференциальными уравнениями в частных производных, содержащими интегралы типа Вольтерра. Исследование таких уравнений с помощью метода Бубнова — Галеркина сводится к решению систем нелинейных интегродифференциальных уравнений в обычных производных. Для решения полученных обыкновенных интегродифференциальных уравнений приводится общий численный алгоритм по методу, основанному на рациональных преобразованиях, устраняющих слабосингулярные особенности интегральных и интегродифференциальных уравнений [12,17].

1.1. Основные уравнения и постановка несвязанных задач термовязкоупругости пластин

Выведем уравнение движения вязкоупругой однородной изотропной пластинки в геометрически нелинейной постановке. Пусть пластина произвольной формы с заданным закреплением контура подвергнута действию температур $T = T(x, y, z, t)$, неравномерно распределенных по толщине и в срединной плоскости. И пусть, кроме того, на нее действуют в срединной плоскости внешние усилия. Срединную плоскость пластины до изгиба со-

вместим с плоскостью x, y прямоугольной системы координат x, y, z , ось z направим вниз (рис. 1.1.), толщину h пластины считаем малой по сравнению с другими ее размерами. Считаем, что пластина имеет начальные неправильности.

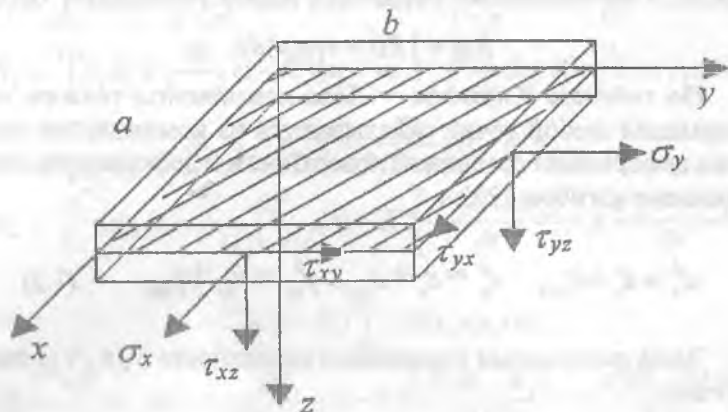


Рис. 1.1

В тонких пластинах напряжения $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ пренебрежимо малы по сравнению с компонентами $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$.

Модуль упругости E , коэффициент линейного расширения α_T и коэффициент Пуассона μ считаем не зависящими от температуры. Будем считать их постоянными. При малом термическом возмущении упругие коэффициенты (коэффициенты Ляме), термические коэффициенты $\alpha_T, \lambda_q, (\lambda_q -$ коэффициент теплопроводности) и удельные теплоемкости можно считать не зависящими от температуры [28].

Физические соотношения между напряжениями $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ и деформациями $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$, а также с температурой $T(x, y, z, t)$ выражаются уравнениями

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu^2} (1 - R') [\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y - \alpha_T (1 + \mu) T],$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \mu^2} (1 - R') [\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x - \alpha_T (1 + \mu) T], \quad (1.1)$$

$$\tau_{\nu} = \frac{E}{2(1+\mu)} (1 - R^*) \gamma_{\nu}$$

где R^* — интегральный оператор с ядром релаксации $R(t)$:

$$R^* \varphi = \int R(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau.$$

По гипотезе Кирхгофа — Лява компоненты тензора деформаций любой точки складываются из компонентов тензора деформаций срединной поверхности и деформаций, связанных с изгибом [23]:

$$\varepsilon_x^z = \varepsilon_x + \varepsilon_{x\mu}, \quad \varepsilon_y^z = \varepsilon_y + \varepsilon_{y\mu}, \quad \gamma_{xy}^z = \gamma_{xy} + \gamma_{xy\mu}. \quad (1.2)$$

Здесь деформации в срединной поверхности $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial W_0}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial W_0}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial W_0}{\partial x} \frac{\partial W_0}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $W_0 = W_0(x, y)$ — начальный прогиб; $U = U(x, y, t)$, $V = V(x, y, t)$ и $W = W(x, y, t)$ — перемещение точек срединной поверхности по направлениям x, y, z соответственно.

Деформации изгиба равны

$$\varepsilon_{x,\mu} = -z \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{y,\mu} = -z \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy,\mu} = -2z \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \quad (1.4)$$

В теории тонких пластин вместо самих напряжений удобно рассматривать статически эквивалентные силы и моменты. Выделим плоскостями, параллельными координатным, эле-

мент пластины. Усилия, действующие на единицу ширины сечения элемента, будут (рис. 1.2):

$$\begin{aligned}
 N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = \frac{Eh}{1-\mu^2} (1-R^*) [\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y] - \frac{E\alpha_T}{1-\mu} (1-R^*) \int_{h/2}^{h/2} T(x, y, z, t) dz \\
 N_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz = \frac{Eh}{1-\mu^2} (1-R^*) [\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x] - \frac{E\alpha_T}{1-\mu} (1-R^*) \int_{h/2}^{h/2} T(x, y, z, t) dz \\
 N_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz = \frac{Eh}{2(1+\mu)} (1-R^*) \gamma_{xy} \\
 M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{x,z} dz = -\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} (1-R^*) \left[\frac{\partial^2 (W - W_0)}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 (W - W_0)}{\partial y^2} \right] \\
 &\quad - \frac{E\alpha_T}{1-\mu} (1-R^*) \int_{h/2}^{h/2} z T(x, y, z, t) dz, \\
 M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{y,z} dz = -\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} (1-R^*) \left[\frac{\partial^2 (W - W_0)}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 (W - W_0)}{\partial x^2} \right] - \\
 &\quad - \frac{E\alpha_T}{1-\mu} (1-R^*) \int_{h/2}^{h/2} z T(x, y, z, t) dz, \\
 H &= \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{xy,z} dz = -\frac{Eh^3}{12(1+\mu)} (1-R^*) \frac{\partial^2 (W - W_0)}{\partial x \partial y} \quad (1.5)
 \end{aligned}$$

где N_x, N_y — нормальные; N_{xy} — касательные усилия; M_x, M_y — изгибающие моменты и H — крутящий момент.

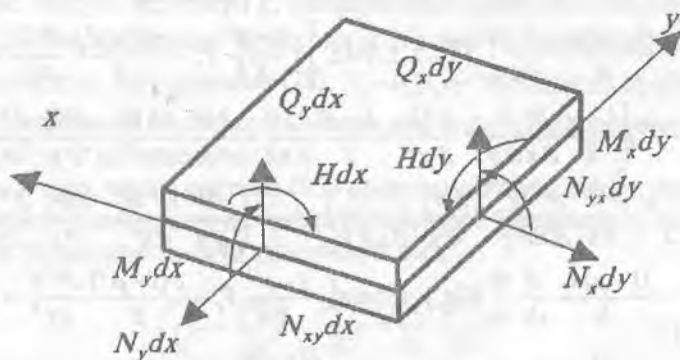


Рис. 1.2

Динамический процесс уравнения движения элемента пластины описывается уравнениями [23]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + P_x - \rho h \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + P_y - \rho h \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial W}{\partial x} + N_y \frac{\partial W}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_x \frac{\partial W}{\partial x} + N_y \frac{\partial W}{\partial y} \right) + q - \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где ρ — плотность материала пластины; q — интенсивность заданных внешних нагрузок, приложенных к элементу по направлению z .

Если подставить (1.5) в (1.6), уравнения движения пластины, изготовленной из линейного вязкоупругого материала, в геометрически нелинейной постановке, основанной на гипотезе Кирхгофа — Лява в смешанной форме при учете взаимосвязанности деформации и температуры, примут вид:

$$\begin{aligned} (1-R') \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial x^2} - \frac{\partial W_0}{\partial x} \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + \frac{1+\mu}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} - \frac{\partial W_0}{\partial y} \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \right) + \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial W_0}{\partial x} \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{(1+\mu)\alpha_T}{h} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h/2}^{h/2} T(x,y,z,t) dz \right] + \frac{1-\mu^2}{Eh} P_x - \frac{\rho(1-\mu^2)}{E} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \\ (1-R') \left[\frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial W_0}{\partial y} \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + \frac{1+\mu}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} - \frac{\partial W_0}{\partial x} \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \right) + \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial W_0}{\partial y} \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{(1+\mu)\alpha_T}{h} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h/2}^{h/2} T(x,y,z,t) dz \right] + \frac{1-\mu^2}{Eh} P_y - \frac{\rho(1-\mu^2)}{E} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{h}{12} \nabla^2 (1-R') \nabla^4 (W - W_0) + \frac{(1+\mu)\alpha_T}{2} \int_{-h/2}^{h/2} z T(x,y,z,t) dz - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial W}{\partial x} (1-R^*) \left[\frac{\partial U}{\partial x} + \mu \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial W_0}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} + \right. \\
& + \frac{\mu}{2} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial W_0}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{(1+\mu)\alpha_T}{h} \int_{t/2}^{h/2} T(x, y, z, t) dz \Bigg\} + \\
& + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial W}{\partial y} (1-R^*) \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial W_0}{\partial x} \frac{\partial W_0}{\partial y} \Bigg\} - \\
& - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial W}{\partial y} (1-R^*) \left[\mu \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\mu}{2} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial W_0}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} + \right. \\
& + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial W_0}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{(1+\mu)\alpha_T}{h} \int_{t/2}^{h/2} T(x, y, z, t) dz \Bigg\} + \\
& + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial W}{\partial x} (1-R^*) \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial W_0}{\partial x} \frac{\partial W_0}{\partial y} \right) \Bigg\} - \\
& - \frac{1-\mu^2}{Eh} q + \frac{\rho(1-\mu^2)}{E} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \quad (1.7)
\end{aligned}$$

где U, V, W — перемещение точек срединной поверхности пластины по направлениям x, y, z соответственно; P_x, P_y и q — интенсивность заданных внешних нагрузок, приложенных к элементу по направлениям x, y, z соответственно; ρ — плотность материала пластины. Модуль упругости E , коэффициент линейного расширения α_T и коэффициент Пуассона μ считаем не зависящими от температуры, постоянными [28]; $W_0 = W_0(x, y)$ — начальный прогиб, T — приращение температуры. Виды дифференциальных операторов ∇^2 и ∇^4 приведены ниже.

Для того, чтобы система (1.7) была замкнутой, следует присоединить к ней уравнение теплопроводности. Несвязанное уравнение теплопроводности принимает вид:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1.8)$$

где $\alpha = \lambda/c$ — коэффициент температуропроводности, C_T — удельная теплоемкость при отсутствии деформации.

Задача термовязкоупругости, описываемая уравнениями (1.7) – (1.8), называется несвязанной динамической задачей термовязкоупругости пластин.

Система (1.7) – (1.8) записана в достаточно общем виде. Эту систему уравнений можно упростить, сделав некоторые допущения. Например, если пренебречь инерционными силами по продольным направлениям и ввести функции напряжения Φ в виде

$$N_x = h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad N_y = h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad N_{xy} = h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y},$$

можно получить следующую систему относительно Φ и W

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = -(1 - R') \left\{ \frac{1}{2} [L(W, W) - L(W_0, W_0)] + \frac{\alpha_r}{h} \nabla^2 N \right\} \quad (1.9)$$

$$\frac{D}{h} (1 - R') \nabla^4 (W - W_0) = -\frac{E \alpha_r}{(1 - \mu) h} (1 - R') \nabla^2 M_x + L(W, \Phi) + \frac{q}{h} - \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2},$$

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} T(x, y, z, t) dz, \quad M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z T(x, y, z, t) dz, \quad (1.9a)$$

$$\text{где } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4},$$

$$D = \frac{EK}{12(1 - \mu^2)} - \text{цилиндрическая жесткость пластины.}$$

Рассматривая в строгой постановке математические зависимости, которыми описывается поведение твердого тела при совместном воздействии нагрева и внешних нагрузок, нетрудно показать [20, 24 – 26], что эти уравнения взаимосвязаны и должны решаться совместно. Однако доказано, что для большинства практических задач влияние напряжений и деформаций на распределение температуры достаточно мало и ими можно пренебречь [18]. Это обстоятельство позволяет при исследовании температурных напряжений в качестве первого и независимого шага найти распределение температуры в твердом теле, определяемое заданными тепловыми условиями; вторым шагом исследования будет определение перемещений и деформаций в теле, вызванных данным распределением температуры.

Для однозначного решения несвязанной динамической задачи термовязкоупругости пластин необходимо к соответствующей системе разрешающих интегродифференциальных уравнений присоединить начальные и граничные условия.

Начальные условия задаются в виде

$$\begin{aligned} W(x, y, 0) &= W_0(x, y), & \dot{W}(x, y, 0) &= \dot{W}_0(x, y), \\ U(x, y, 0) &= U_0(x, y), & \dot{U}(x, y, 0) &= \dot{U}_0(x, y), \\ V(x, y, 0) &= V_0(x, y), & \dot{V}(x, y, 0) &= \dot{V}_0(x, y), \\ T(x, y, z, 0) &= T_0(x, y, z). \end{aligned}$$

В теории теплопроводности применяются следующие основные идеализированные граничные условия:

1) Задано распределение температуры на поверхности тела $T(M, t) = f(M, t)$, где M — точка поверхности тела, f — заданная функция.

2) Задана плотность теплового потока через поверхность тела $\lambda_r \frac{\partial T}{\partial n}(M, t) = q_r(M, t)$ где n — внешняя нормаль к поверхности тела в точке M . В частном случае отсутствует тепловой поток через поверхность $\frac{\partial T}{\partial n}(M, t) = 0$ (для тела с идеально изолированной поверхностью).

3) Заданы температура окружающей среды T_{oc} и закон конвективного теплообмена между поверхностью и средой $\lambda_r \frac{\partial T}{\partial n} = \lambda_{oc} [T_{oc} - T(p, t)]$, где λ_{oc} — коэффициент теплообмена.

Можно показать [20], что задание на разных частях поверхности тела, перечисленных выше, граничных условий в любой комбинации и задание начального распределения температуры единственным образом определяют решение задачи теплопроводности при неустановившемся режиме.

Для решения уравнений теплопроводности применяют методы разделения переменных, интегральные преобразования, численные методы и др., которые изложены в монографиях, посвященных теории теплопроводности [27, 29].

Для определения решения (1.7) также необходимо к соответствующей системе разрешающих дифференциальных уравнений присоединить начальные и граничные условия.

Остановимся на формулировании некоторых граничных условий, характерных для практических задач (рис. 1.3).

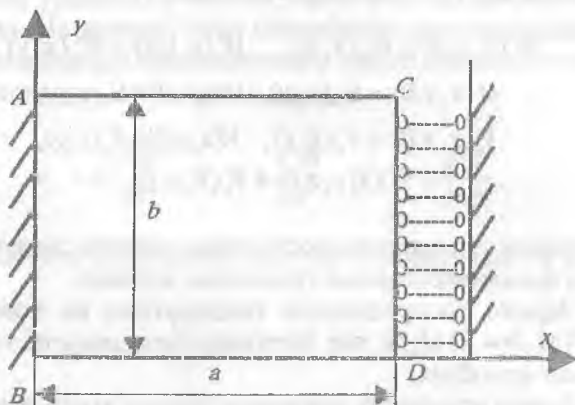


Рис. 1.3.

1) Свободно опертый край (шарнирное опирание). Если край прямоугольной пластинки CD вдоль оси y при $x=a$ свободно оперт, то прогиб и изгибающий момент равны нулю:

$$W = 0, \quad -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) - M_x = 0, \quad \text{где } M_x = \frac{E \alpha_1}{1 - \mu} \int_0^b z T(x, y, z, t) dz$$

В этом случае может быть два варианта:

а) неподвижное шарнирное опирание. В этом случае $U=0$, $V=0$ при $x=0$, $x=a$.

В данной работе мы остановимся на одном подходе к аналитическому определению функции напряжения при решении системы (1.9). Поэтому покажем, какой вид принимают вышеприведенные граничные условия относительно функции напряжения. Как нам известно,

$$\varepsilon_x = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{Eh} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right),$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2(1 + \mu)}{Eh} N_{xy} = -\frac{2(1 + \mu)}{Eh} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad \text{и отсюда}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2(1+\mu)}{Eh} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} = -\frac{1}{Eh} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + (2+\mu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y^2} \right).$$

Из условия $V=0, U=0$ при $x=0$ следует, что

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ или } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + (2+\mu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y^2} = 0 \text{ при } x=0$$

б) Подвижное шарнирное опирание. В этом случае

$$U \neq 0, V = 0, N_x = 0.$$

Аналогичным образом, как в случае а), можно найти следующие эквивалентные граничные условия относительно функции напряжения:

$$\Phi = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x=a$$

2) Защемленный край. Допустим, что прямоугольная пластина имеет защемленный край AB по оси y . Тогда

$$W = 0, \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} + (2+\mu) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2} = 0 \text{ при } x=0, x=a.$$

$$U=0, V=0 \text{ при } x=a.$$

3) Свободный край. На свободном крае (AB, BD) пластины изгибающий момент, перерезывающая сила и крутящий момент равны нулю. Для прямоугольного контура условия будут следующими:

$$\begin{cases} -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) - M_x = 0 \\ -D \left(\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 W + (1-\mu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{\partial M_x}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$\text{при } y=0, y=b, N_y = 0.$$

Если на контуре не приложено никаких внешних усилий, то нормальные и касательные усилия на краях равны нулю:

$$N_x = h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad N_y = h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0.$$

1.2. Численный алгоритм решения несвязанных динамических задач термовязкоупругости пластин

Решение несвязанных динамических задач термовязкоупругости состоит из двух этапов. Первый этап решения этой задачи заключается в нахождении температурного поля $T(x, y, z, t)$. Как отмечено в §1.1 он сводится к решению уравнения (1.8) при определенных тепловых начальных и граничных условиях. На втором этапе по известному температурному полю определяется термовязкоупругое напряженное и деформированное состояние пластины.

Для решения уравнений теплопроводности применяют методы разделения переменных, интегральные преобразования, численные методы и др., которые изложены в монографиях, посвященных теории теплопроводности [27, 29].

Одна из основных целей настоящей работы — изучение поведения вязкоупругой пластины, находящейся в температурном поле. Поэтому мы будем рассматривать второй этап задачи, предполагая в температурное поле известным.

Как отмечается в работе [20], общего метода решения задач термоупругости нет. Выбор метода решения существенно зависит от граничных условий. Эта проблема сохраняется также при решении задач термовязкоупругости. Однако можно указать несколько способов, полезных для решения большого числа практически важных задач.

Основные разрешающие ИДУ несвязанных динамических задач термовязкоупругости. Рассмотрим системы уравнений (1.7), (1.8) решение которых, удовлетворяющее граничным условиям задачи, будем искать в виде:

$$\begin{aligned} U &= \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{\infty} U_{\alpha\beta}(t) \varphi_{\alpha\beta}(x, y), & V &= \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{\infty} V_{\alpha\beta}(t) \psi_{\alpha\beta}(x, y), \\ W &= \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{\infty} W_{\alpha\beta}(t) f_{\alpha\beta}(x, y), & W_1 &= \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{\infty} W_{1\alpha\beta} f_{\alpha\beta}(x, y), \\ T &= \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{\infty} \sum_{\gamma=1}^{\infty} T_{\alpha\beta\gamma}(t) F_{\alpha\beta\gamma}(x, y, z) \end{aligned} \quad (1.10)$$

где $\varphi_{..}(x, y), \phi_{..}(x, y), f_{..}(x, y), F_{..}(x, y, z)$ – координатные функции, удовлетворяющие соответствующим граничным условиям задачи.

Подставляя (1.10) в системы (1.7), (1.8) и выполняя процедуру Бубнова – Галеркина для определения $U_{nm}(t), V_{nm}(t), W_{nm}(t), T_{nm\xi}(t)$, далее введя следующие безразмерные величины и обозначения

$$\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{h}, \omega t, \frac{U}{a}, \frac{V}{b}, \frac{W}{h}, a_T T, \frac{P_x}{E}, \frac{P_y}{E}, \frac{q}{E}, \frac{P(t)}{Eh}, \lambda = \frac{a}{b}, \lambda_1 = \frac{h}{a},$$

$$\lambda_2 = \frac{h}{b}, \Omega_1^4 = \frac{E}{\rho a^2 \omega^2}, \Omega_2^4 = \frac{E}{\rho b^2 \omega^2}, \Omega_3^4 = \frac{E}{\rho h^2 \omega^2},$$

получим систему нелинейных ИДУ в виде:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M a_{klmn} \ddot{U}_{nm} - \frac{\Omega_1^4}{1-\nu'} (1-R) \left[\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \left(b_{klmn} U_{nm} + \frac{1+\mu}{2} C_{klmn} V_{nm} \right) + \right. \\ & + \sum_{n_0=0}^N \sum_{m_0=0}^M d_{klmn_0} (W_{nm} W_{n_0} - W_{0nm} W_{0n_0}) - (1+\mu) \sum_{n_0=0}^N \sum_{m_0=0}^M \sum_{\xi=0}^L \theta_{klmn_0\xi} T_{nm\xi} \left. \right] - \frac{\Omega_1^4}{\lambda_1} P_{kl} = 0, \\ & \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M a_{3klmn} \ddot{W}_{nm} - \frac{\Omega_2^4}{1-\mu^2} \left\{ (1-R) \left[\frac{\lambda_1^2 \lambda_2^2}{12} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M b_{3klmn} (W_{nm} - W_{0nm}) + \right. \right. \\ & + (1+\mu) \lambda_1^2 \sum_{n_0=0}^N \sum_{m_0=0}^M \sum_{\xi=0}^L \theta_{3klmn_0\xi} T_{nm\xi} \left. \right] - \sum_{n_0=0}^N \sum_{m_0=0}^M W_{nm} (1-R) (C_{nmn_0} U_{n_0} + C_{nmn_0} V_{n_0}) - \\ & - \sum_{n_0=0}^N \sum_{m_0=0}^M d_{3klmn_0} W_{nm} (1-R) (W_{n_0} W_{m_0} - W_{0n_0} W_{0m_0}) + \quad (1.11) \\ & \left. + (1+\mu) \sum_{n_0=0}^N \sum_{m_0=0}^M \sum_{\xi=0}^L \theta_{4klmn_0\xi} W_{nm} (1-R) T_{n_0\xi} - (1-\mu^2) q_{kl} \right\} = 0, \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \sum_{\xi=0}^L a_{4kl\xi mn\xi} T_{nm\xi} - \frac{h^2 \omega}{C_T} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \sum_{\xi=0}^L b_{4kl\xi mn\xi} \frac{dT_{nm\xi}}{dt} = 0$$

$$U_{kl}(0) = U_{0kl}, \dot{U}_{kl}(0) = \dot{U}_{0kl}, V_{kl}(0) = V_{0kl}, \dot{V}_{kl}(0) = \dot{V}_{0kl}, W_{kl}(0) = W_{0kl},$$

$$\dot{W}_{kl}(0) = \dot{W}_{0kl}, T_{k\xi}(0) = T_{0k\xi}, k = \overline{n_0, M}; l = \overline{m_0, M}; \xi = \overline{\xi_0, L},$$

где

$$\alpha_{1klmn} = \iint_0^1 \varphi_{nm} \varphi_{kl} dx dy, b_{1klmn} = \iint_0^1 \left(\varphi''_{nm\xi} + \frac{1-\mu}{2} \lambda^2 \varphi''_{nm\xi} \right) \varphi_{kl} dx dy,$$

$$c_{1klmn} = \iint_0^1 \varphi''_{nm\xi} \varphi_{kl} dx dy,$$



$$\begin{aligned}
d_{1k \ln m j} &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\lambda_1^2 f'_{nmx} f''_{my} + \frac{1+\mu}{2} \lambda_2^2 f'_{my} f''_{my} + \frac{1-\mu}{2} \lambda_2^2 f'_{mzx} f''_{y^2} \right) \varphi_{kl} dx dy, \\
\theta_{1k \ln m \xi} &= \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} F''_{nm\xi} \varphi_{kl} dz dx dy, \quad P_{xk} = \int_0^1 \int_0^1 P_x \varphi_{kl} dx dy, \\
a_{3k \ln m} &= \int_0^1 \int_0^1 f_{nm} f_{kl} dx dy, \\
b_{3k \ln m} &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\lambda^{-1} f''_{nmxxx} + 2 f''_{nmxy} + \lambda^2 f''_{nmxyy} \right) f_{kl} dx dy, \\
\theta_{3k \ln m j} &= \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} \left(F''_{nm\xi} + \lambda^2 F''_{nm\xi} \right) z f_{kl} dz dx dy, \\
c_{4k \ln m j} &= \int_0^1 \int_0^1 \left[\lambda_1 \left(\lambda_1 f''_{nmz} \varphi'_{jk} + \frac{1-\mu}{2} \lambda_2 \lambda_1 f''_{my} \varphi'_{jk} \right)_x + \lambda_2 \left(\lambda_2 f''_{my} \varphi'_{jk} + \frac{1-\mu}{2} \lambda_1 \lambda_2 f''_{mzx} \varphi'_{jk} \right)_y \right] f_{kl} dx dy \\
c_{4k \ln m j} &= \int_0^1 \int_0^1 \left[\lambda_1 \left(\lambda_1 f''_{my} \varphi'_{jk} + \frac{1-\mu}{2} \lambda_2 \lambda_1 f''_{my} \varphi'_{jk} \right)_x + \lambda_2 \left(\lambda_2 f''_{my} \varphi'_{jk} + \frac{1-\mu}{2} \lambda_1 \lambda_2 f''_{mzx} \varphi'_{jk} \right)_y \right] f_{kl} dx dy \\
d_{3k \ln m j r} &= \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \frac{\lambda_1}{2} \left[\lambda_1 f''_{nmz} (\lambda_1^2 f''_{jk} f''_{rx} + \mu \lambda_2^2 f''_{y^2} f''_{ry}) + (1-\mu) \lambda_1 \lambda_2 f''_{my} f''_{zx} f''_{ry} \right]_x + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\lambda_2}{2} \left[\lambda_2 f''_{my} (\mu \lambda_1^2 f''_{jk} f''_{rx} + \lambda_2^2 f''_{y^2} f''_{ry}) + (1-\mu) \lambda_1 \lambda_2 f''_{mzx} f''_{jk} f''_{ry} \right]_y \right\} f_{kl} dx dy, \\
O_{4k \ln m \xi} &= \int_0^1 \int_0^1 \left[\lambda_1^2 \left(f''_{nmz} \int_{-1/2}^{1/2} F_{jk} dz \right)_x + \lambda_2^2 \left(f''_{my} \int_{-1/2}^{1/2} F_{jk} dz \right)_y \right] f_{kl} dx dy \quad (1.12) \\
a_{4k \ln m \xi} &= \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} \left(\lambda_1^2 F''_{nm\xi} + \lambda_2^2 F''_{nm\xi} + F''_{nm\xi} \right) F_{jk} dz dx dy \\
b_{4k \ln m \xi} &= \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} F''_{m\xi} F_{jk} dz dx dy
\end{aligned}$$

Уравнение относительно V_{kl} и его коэффициенты получаются из первого уравнения при помощи следующих перестановок ($U_{kl} \leftrightarrow V_{kl}$), ($\varphi_{kl} \leftrightarrow \phi_{kl}$), ($\lambda \leftrightarrow \lambda^{-1}$), ($x \leftrightarrow y$), ($a \leftrightarrow b$), ($\lambda_1 \leftrightarrow \lambda_2$) и число 1 в индексах коэффициентов с заменой 2.

Отметим, что уравнения (1.11) записаны в достаточно общем виде; будем называть их основными разрешающими ИДУ двумерных задач динамики термовязкоупругих систем.

К уравнениям вида (1.11) сводятся многие задачи о колебаниях и устойчивости вязкоупругих пластин и оболочек.

Перейдем к конкретным задачам.

1. Рассмотрим нелинейные колебания вязкоупругой пластины в нестационарном температурном поле. По краям пластины шарнирно оперта.

При решении по методу Бубнова – Галеркина необходимо задать координатные функции, удовлетворяющие граничным условиям, которые в случае шарнирного опирания имеют вид:

$$\begin{aligned}
 W &= 0 \text{ при } x=0, x=a, y=0, y=b, \\
 U &= 0, V = 0, M_x = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) - M_T = 0 \text{ при } x = 0, x = a, \\
 U &= 0, V = 0, M_y = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) - M_T = 0 \text{ при } y = 0, y = b. \quad (1.13)
 \end{aligned}$$

Примем для упрощения расчета такое распределение температуры по поверхности пластины, при котором $M_T = 0$ при $x=0, x=a, y=0, y=b$. Тогда в качестве координатных функций возьмем:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{nm}(x, y) &= \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \\
 \phi_{nm}(x, y) &= \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \\
 f_{nm}(x, y) &= \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \\
 F_{nm}(x, y, z) &= \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} F_\zeta(z). \quad (1.14)
 \end{aligned}$$

где функция $F_\zeta(z)$ зависит от характера распределения температуры по толщине пластины.

Подставляя (1.14) в уравнение (1.12), получим следующую систему нелинейных ИДУ для определения U_{kl}, V_{kl}, W_{kl} :

$$\begin{aligned}
 \ddot{U}_{kl} + \frac{\Omega_1^4}{1 - \mu^2} (1 - R^*) \left[\left(k^2 + \frac{1 - \mu}{2} l^2 \lambda^2 \right) U_{kl} - 2(1 + \mu) \sum_{n=0, n \neq k}^N \sum_{m=0, m \neq l}^M c_{1klm} V_{nm} \right] + \\
 + 4 \sum_{n, l \neq k}^N \sum_{m, l \neq n}^M d_{1klm} (W_{nm} W_{ly} - W_{0nm} W_{0ly}) + 2(1 + \mu) \sum_{n=0, n \neq k}^N \sum_{\zeta=0, \zeta \neq l}^L \theta_{1knl\zeta} T_{nl\zeta} = 0
 \end{aligned}$$

$$\ddot{V}_{kl} + \frac{\Omega_2^4}{1-\mu^2} (1-R^*) \left[\left(\frac{1-\mu}{2} k^2 \lambda^2 + l^2 \right) V_{kl} - 2(1+\mu) \sum_{n=n_0}^N \sum_{m=n_0}^M c_{2klnm} U_{nm} \right] +$$

$$+ 4 \sum_{n=n_0}^N \sum_{m=n_0}^M d_{2klnmj} (W_{nm} W_{ij} - W_{0nm} W_{0ij}) + 2(1+\mu) \sum_{n=n_0}^N \sum_{l=l_0}^L \theta_{2klnc} T_{lnz} = 0 \quad (1.15)$$

$$\ddot{W}_{kl} + \frac{\Omega_2^4 \lambda_1^2 \lambda_2^2}{12(1-\mu^2)} (\lambda^{-1} k^2 + \lambda l^2) \rho (1-R^*) (W_{kl} - W_{0kl}) - (1+\mu) \lambda_1^2 (\kappa^2 +$$

$$+ \lambda^2 l^2) \sum_{\xi=l_0}^L \theta_{\lambda \xi} (1-R^*) \Gamma_{kl\xi} - 4 \sum_{n,l=n_0}^N \sum_{m,j=n_0}^M W_{nm} (1-R^*) (c_{anmy} U_{ij} - c_{ymnj} V_{ij}) -$$

$$- 4 \sum_{n,l,j=n_0}^N \sum_{m,j=n_0}^M d_{\lambda klnmjrs} W_{nm} (1-R^*) (W_{ij} W_{rs} - W_{0ij} W_{0rs}) +$$

$$+ 4(1+\mu) \sum_{n,l=n_0}^N \sum_{m,j=n_0}^M \sum_{\xi=l_0}^L \theta_{\lambda klnmj\xi} W_{nm} (1-R^*) \Gamma_{k\xi} - 4(1-\mu^2) q_{kl} = 0,$$

где $-C_{klnm} = nm(\gamma_{k-n} + \gamma_{k+n})(\gamma_{l-m} + \gamma_{l+m})$

здесь $\gamma_0 = 0, \gamma_i = \frac{a_i}{i}, a_i = \begin{cases} 1 & \text{если } i - \text{нечетный} \\ 0 & \text{если } i - \text{четный} \end{cases}$

$$d_{iklnmj} = \frac{1}{8} n \pi^2 \left(\lambda_1^2 i^2 + \frac{1-\mu}{2} \lambda_2^2 j^2 \right) (\delta_{k-n-i} - \delta_{k-n+i} + \delta_{k+n-i}) \times$$

$$\times (\gamma_{l-m+j} - \gamma_{l-m-j} - \gamma_{l+m+j} + \gamma_{l+m-j}) - \frac{1-\mu}{16} \lambda_2^2 m j \pi^2 (\delta_{k-n-i} + \delta_{k-n+i} - \delta_{k+n-i}) \times$$

$$\times (\gamma_{l-m+j} - \gamma_{l-m-j} - \gamma_{l+m+j} + \gamma_{l+m-j})$$

$$\theta_{iknc} = -\frac{n}{2} (\gamma_{k-n} + \gamma_{k+n}) \int_{l/2}^{l/2} F_k(z) dz, \quad c_{iklnm} = c_{iklnm}$$

$$d_{2klnmj} = \frac{1}{8} m \pi^2 \left(\lambda_2^2 j^2 + \frac{1-\mu}{2} \lambda_1^2 i^2 \right) (\gamma_{l-m+j} - \gamma_{l-m-j} - \gamma_{l+m+j} + \gamma_{l+m-j}) \times$$

$$\times (\delta_{k-n-i} - \delta_{k-n+i} + \delta_{k+n-i}) - \frac{1-\mu}{16} \lambda_1^2 n j \pi^2 (\gamma_{l-m+j} - \gamma_{l-m-j} - \gamma_{l+m+j} + \gamma_{l+m-j}) \times$$

$$\times (\delta_{k-n-i} - \delta_{k-n+i} + \delta_{k+n-i})$$

Остальные коэффициенты вычисляются по формулам (1.12). Видно, что система (1.15) является частным случаем системы (1.11).

2. Рассмотрим задачу об устойчивости вязкоупругой прямоугольной пластины с постоянной толщиной, изготовленной из

однородного изотопного материала при совместном воздействии температуры и внешних нагрузок. Допустим, что пластина со сторонами a и b подвергается динамическому сжатию вдоль стороны a силой $P(t)$ (рис.1.4.). Математическая модель этой задачи отличается от предыдущей с добавлением в третье уравнение (1.7) нагрузки $\frac{1-\mu^2}{Eh} P(t) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$. Согласно этому в третьем уравнении (1.11) появляется член вида

$$(1-\mu^2) \lambda_1^2 P(t) \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M b_{klnm} W_{nm}, \text{ где } b_{klnm} = \int_0^1 \int_0^1 f_{nm} f_n dx dy$$

В случае шарнирного закрепления края пластины:

$$b_{klnm} = \begin{cases} k^2 / 4 \text{ при } n = k, m = l \\ 0 \text{ при } n \neq k, \text{ или } m \neq l \end{cases}$$

3. Теперь выведем основные разрешающие уравнения несвязанной задачи термовязкоупругости, пренебрегая инерционными силами по продольным направлениям. Для этого рассмотрим систему (1.9). В этом пункте выведем основное разрешающее уравнение нелинейных колебаний шарнирно опертой вязкоупругой пластины, находящейся в нестационарном температурном поле. Для получения основных разрешающих ИДУ воспользуемся методом Бубнова — Галеркина. Здесь возможны два способа сведения ИДУ с частными производными (1.9) к обыкновенным при помощи метода Бубнова — Галеркина:

1. Аппроксимация функции прогиба $W(x,y,t)$ в виде суммы произведения неизвестных функций времени и координатных функций, удовлетворяющих граничным условиям. Подставляя выражение $W(x,y,t)$ в первое уравнение системы (1.9), и получив решения этого уравнения, зависящие от неопределенных функций, находим затем из второго уравнения системы (1.9) системы обыкновенных ИДУ относительно этих функций при помощи метода Бубнова — Галеркина.

2. Одновременная аппроксимация функций напряжений и прогиба, удовлетворяющих граничным условиям, с последующим интегрированием обоих уравнений системы (1.9) методом Бубнова — Галеркина. Тогда первое уравнение дает соотношение между неопределенными коэффициентами, а второе — системы обыкновенных ИДУ для приближенного решения рассматриваемой задачи.

В обоих случаях получаем систему нелинейных ИДУ одного типа. Сведем систему (1.9) к системе обыкновенных ИДУ по первому способу. Сначала рассмотрим такое распределение температуры по поверхности пластины, при котором $M_T=0$ при $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$. Тогда решение задачи будем искать в виде:

$$W(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M W_{nm}(t) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}$$

$$W_0(x, y) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M W_{0nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (1.16)$$

Подставляя (1.16) в первое уравнение (1.9), получим нелинейное дифференциальное уравнение для определения функции напряжения. Решение этого уравнения складывается из общего решения Φ_1 , однородного уравнения

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0,$$

частного решения Φ_2 , соответствующего правой части уравнения

$$-\frac{1}{2} E(1 - R^*) [L(W, W) - L(W_0, W_0)]$$

и частного решения Φ_3 , соответствующего правой части

$$-\frac{1}{2} E\alpha_T (1 - R^*) \nabla^2 \int_{-h/2}^{h/2} T(x, y, z, t) dz.$$

Решение Φ_1 имеет вид: $\Phi_1 = \sigma_1 \frac{y^2}{2} + \sigma_2 \frac{x^2}{2}$ (1.17a)

где σ_1, σ_2 — постоянные, которые определяются из условий для результирующих усилий на кромках; σ_1 и σ_2 считаются положительными при растяжении. Для пластинки со свободно смещающимися краями должны быть $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$.

Решение Φ_2 для шарнирно опертой пластинки имеет вид:

$$\Phi_2 = E \sum_{i,j=1}^N \sum_{r,s=1}^M (1 - R^*) (W_{ir} W_{js} - W_{0ir} W_{0js}) \times$$

$$\times \left[C_{irjs} \cos \frac{(i+j)\pi x}{a} \cos \frac{(r+s)\pi y}{b} + A_{irjs} \cos \frac{(i+j)\pi x}{a} \cos \frac{(r-s)\pi y}{b} + \right.$$

$$\left. + D_{irjs} \cos \frac{(i-j)\pi x}{a} \cos \frac{(r+s)\pi y}{b} + B_{irjs} \cos \frac{(i-j)\pi x}{a} \cos \frac{(r-s)\pi y}{b} \right]$$

где $C_{irjs} = -\frac{\lambda^2 ir(ir - js)}{4[(i+j)^2 + \lambda^2(r+s)^2]^2}$, $A_{irjs} = \frac{\lambda^2 ir(ir + js)}{4[(i+j)^2 + \lambda^2(r-s)^2]^2}$,

$$D_{irjs} = \frac{\lambda^2 ir(ir + js)}{4[(i-j)^2 + \lambda^2(r+s)^2]^2}, \quad B_{irjs} = -\frac{\lambda^2 ir(ir - js)}{4[(i-j)^2 + \lambda^2(r-s)^2]^2}.$$

Предложенное выше выражение функции напряжения точно не удовлетворяет граничным условиям для подвижного шарнирного опирания. Поэтому использование этого вида функции напряжения при решении конкретных задач требует объяснения или отказа от этого выражения.

Примем, что частное решение Φ_3 имеет вид:

$$\Phi_3 = -Ea_T \Psi(x, y, t) \quad (1.176)$$

где функция $\Psi(x, y, t)$ зависит от характера распределения температуры в срединной поверхности пластинки и граничных условий. Для удобства дальнейших выкладок представим $\Psi(x, y, t)$ следующим образом: $\Psi(x, y, t) = T_{00} \varepsilon^2 \varphi(x/a, y/b, t)$, где T_{00} — температура срединной поверхности, φ — некоторые безразмерные функции.

Таким образом,

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 \quad (1.18)$$

После выполнения преобразований, связанных с составлением уравнения Бубнова — Галеркина, для второго уравнения (1.9) получим следующую систему нелинейных ИДУ для определения W_{kl} :

$$\begin{aligned} & \frac{\rho b^4}{Eh^2 \pi^2} \ddot{W}_{kl} + \frac{\pi^2}{12(1-\mu^2)} \left[\left(\frac{k}{\lambda} \right)^2 + l^2 \right] (1-R^*) (W_{kl} - W_{0kl}) = \\ & = \frac{4b^3}{E\pi^2 ah^3} \int_0^a \int_0^b q \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} dx dy + \frac{4a_T T_{00} b^2}{\lambda^2 h^2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M W_{nm} (1-R^*) \times \\ & \times \int_0^a \int_0^b \left[-\frac{n^2}{\lambda^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} - \lambda m^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} - \right. \\ & \left. - 2nm \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \cos \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} \right] \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} dx dy - \\ & - \frac{1}{h^2} \sum_{n,i,j=1}^N \sum_{m,r,s=1}^M a_{k \ln m \phi} W_{nm} (1-R^*) (W_{in} W_{jr} - W_{0in} W_{0jr}) \quad (1.19) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a_{k \ln m \phi} = & - \left(\frac{\pi}{2\lambda} \right)^2 \left\{ n^2 [(r+s)^2 C_{\phi} (\delta_{n+k-i-j} - \delta_{n-k-i+j} - \delta_{r-t-s}) \times \right. \\ & \left. \times (\delta_{m+l-r-s} - \delta_{m-l+r+s} - \delta_{m-t-r-s}) + (r-s)^2 A_{\phi} (\delta_{n+k-i-j} - \delta_{n-k-i+j} - \delta_{n-k-i-j}) \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (\delta_{m+l-r+s} + \delta_{m+l-r+s} - \delta_{m-l-r+s} - \delta_{m-l-r+s}) + (r+s)^2 D_{ijk} (\delta_{n+k+i-j} + \delta_{n+k+i-j} - \delta_{n-k-i+j} - \\
& - \delta_{n-k-i+j}) (\delta_{m+l-r+s} - \delta_{m-l-r+s} - \delta_{m-l-r+s}) + (r-s)^2 B_{ijk} (\delta_{n+k+i-j} + \delta_{n+k+i-j} - \\
& - \delta_{n-k-i+j} - \delta_{n-k-i+j}) (\delta_{m+l-r+s} + \delta_{m+l-r+s} - \delta_{m-l-r+s} - \delta_{m-l-r+s}) + \\
& + m^2 [(i+j)^2 C_{ijk} (\delta_{n+k+i-j} - \delta_{n-k-i+j} - \delta_{n-k-i+j}) (\delta_{m+l-r+s} - \delta_{m-l-r+s} - \delta_{m-l-r+s}) + \\
& + (i+j)^2 A_{ijk} (\delta_{n+k+i-j} - \delta_{n-k-i+j} - \delta_{n-k-i+j}) (\delta_{m+l-r+s} + \delta_{m+l-r+s} - \delta_{m-l-r+s} - \\
& - \delta_{m-l-r+s}) + (i-j)^2 D_{ijk} (\delta_{n+k+i-j} + \delta_{n+k+i-j} - \delta_{n-k-i+j} - \delta_{n-k-i+j}) (\delta_{m+l-r+s} + \delta_{m+l-r+s} - \\
& - \delta_{m-l-r+s} - \delta_{m-l-r+s}) + (i+j)^2 B_{ijk} (\delta_{n+k+i-j} - \delta_{n+k+i+j} - \\
& - \delta_{n-k-i+j} - \delta_{n-k-i+j}) (\delta_{m+l-r+s} - \delta_{m+l-r+s} - \delta_{m-l-r+s} - \delta_{m-l-r+s})] - \\
& - 2nm [(i+j)(r+s) C_{ijk} (-\delta_{n+k+i+j} - \delta_{n-k-i+j} + \delta_{n-k-i+j}) (\delta_{m+l-r+s} - \delta_{m-l-r+s} + \delta_{m-l-r+s}) + \\
& + (i+j)(r-s) A_{ijk} (-\delta_{n+k-i-j} - \delta_{n-k-i+j} + \delta_{n-k-i+j}) (\delta_{m+l-r+s} - \delta_{m+l-r+s} - \\
& - \delta_{m-l-r+s} + \delta_{m-l-r+s}) + (i-j)(r+s) D_{ijk} (\delta_{n+k+i-j} - \delta_{n+k-i+j} - \\
& - \delta_{n-k-i+j} + \delta_{n-k-i+j}) (\delta_{m+l-r+s} - \delta_{m-l-r+s} + \delta_{m-l-r+s}) + \\
& + (i-j)(r-s) B_{ijk} (\delta_{n+k+i-j} - \delta_{n+k+i+j} - \delta_{n-k-i+j} + \delta_{n-k-i+j}) \times \\
& \times (\delta_{m+l-r+s} - \delta_{m+l-r+s} - \delta_{m-l-r+s} + \delta_{m-l-r+s})] \}
\end{aligned}$$

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & \text{при } i = 0 \\ 0, & \text{при } i \neq 0 \end{cases}, \quad \lambda = \frac{a}{b}.$$

Теперь рассмотрим сведение уравнения (1.9) к системе обыкновенных ИДУ по второму способу. Считая, что закрепленная пластина по краям шарнирно оперта и подвижна, решение уравнения будем искать в следующем виде:

$$W(x, y, t) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M W_{nm}(t) \varphi_{nm}(x, y), \quad W_0(x, y) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M W_{0nm} \varphi_{nm}(x, y), \quad (1.16')$$

$$\Phi(x, y, t) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \Phi_{nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \quad (1.16'')$$

где
$$\Phi_{nm}(x, y) = \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}$$

Из выражения координатных функций видно, что $W(x, y, t)$ и $\Phi(x, y, t)$ удовлетворяют все условия подвижного шарнирного опирания.

Подставляя выражения (1.16') и (1.16'') в (1.9) и выполняя процедуру Бубнова – Галеркина, получим следующую систему нелинейных обыкновенных ИДУ в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \alpha_{k \ln m} W_{nm} + \frac{\Omega^2}{4\pi^4 \lambda^2} (1 - R^*) \sum_{R=0}^N \sum_{M=0}^M b_{k \ln m} (W_{nm} - W_{0nm}) = \\ & = \frac{\Omega^2}{P_{kp} 4\pi^4 \lambda^2} \sum_{n, j, l, s=0}^N \sum_{m, j, r, t=0}^M \frac{4C_{k \ln mjl}}{\pi^4 (\lambda^{-1} i^2 + \lambda j^2)^2} W_{nm} (1 - R^*) \times \\ & \times \left[a_{\theta n_1 n_2 n_1}^F (W_{n_1} W_{n_2} - W_{0n_1} W_{0n_2}) + \frac{1}{\lambda^2} T_{ij}^F \right] + \\ & + \frac{\Omega^2}{P_{kp} \pi^2} q_{kl} - \frac{3(1 + \mu)\Omega^2}{4\pi^4 \lambda^2 \lambda_2^2} \lambda_2^2 T_{kl}^W, \end{aligned} \quad (1.19')$$

$$k = \overline{n_0, N}, \quad k = \overline{m_0, M}, \quad W_{nm}(0) = W_{0nm}, \quad \dot{W}_{nm}(0) = \dot{W}_{0nm},$$

$$\alpha_{k \ln m} = \int_0^1 \int_0^1 \varphi_{nm} \varphi_{kl} dx dy,$$

$$\text{где} \quad b_{k \ln m} = \int_0^1 \int_0^1 (\lambda^2 \varphi_{nm}^{IV} + 2\varphi_{nm}^{IV} + \lambda^2 \varphi_{nm}^{IV}) \varphi_{kl} dx dy,$$

$$\alpha_{ijr^F}^F = \int_0^1 \int_0^1 (\dot{\varphi}_{i_1, x_1} \dot{\varphi}_{j_1, y_1} - \dot{\varphi}_{i_1, y_1} \dot{\varphi}_{j_1, x_1}) \sin i\pi x \sin j\pi y dx dy,$$

$$T_{ij}^F = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \lambda^2 \frac{\partial}{\partial y^2} \right)^{1/2} T dz \sin i\pi x \sin j\pi y dx dy,$$

$$T_{ij}^W = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \lambda^2 \frac{\partial}{\partial y^2} \right)^{1/2} T dz \varphi_{kl} dx dy,$$

$$\begin{aligned} C_{k \ln mjl} & = \pi^2 \int_0^1 \int_0^1 (j^2 \dot{\varphi}_{mxy} \sin i\pi x \sin j\pi y - i^2 \dot{\varphi}_{mxy} \sin i\pi x \sin j\pi y + \\ & + 2ji \dot{\varphi}_{mxy} \cos i\pi x \cos j\pi y) \varphi_{kl} dx dy, \end{aligned}$$

$$q_{kl} = \int_0^1 \int_0^1 q \varphi_{kl} dx dy$$

4. Рассмотрим задачу об устойчивости вязкоупругой прямоугольной пластины с постоянной толщиной, изготовленной из однородного изотропного материала, при совместном воздействии температуры и внешних нагрузок. Допустим, что пластина со сторонами a и b подвергается динамическому сжатию вдоль стороны a силой $P(t)$.

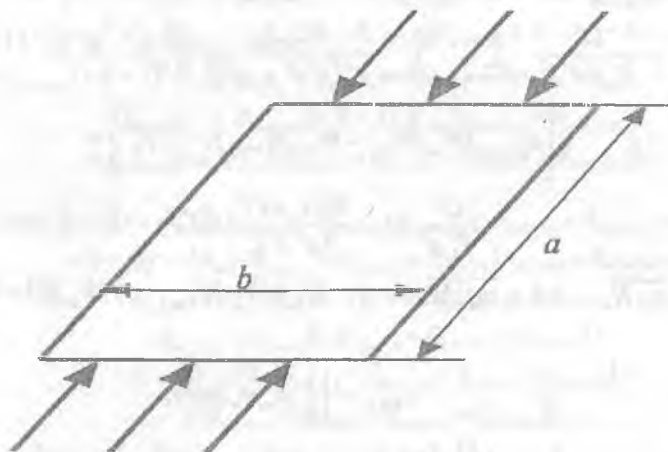


Рис. 1.4.

Считая, что пластина (рис. 1.4) шарнирно закреплена и подвижна по краям, решение системы (1.9) будем искать в виде (1.16').

Подставляя (1.16') в уравнение (1.9) и выполняя процедуру Бубнова – Галеркина по второму способу для определения W_{kr} получим следующую систему нелинейных ИДУ:

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_0}^N \sum_{m=m_0}^M a_{klnm} \ddot{W}_{nm} + \frac{\Omega^2}{4\pi^4 \lambda^2} (1 - R^*) \sum_{n=n_0}^N \sum_{m=m_0}^M b_{klnm} (W_{nm} - W_{0nm}) + \\ + (1 - \mu) \lambda_2^2 P(t) \sum_{n=n_0}^N \sum_{m=m_0}^M b_{pklnm} W_{nm} = \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$= \frac{\Omega^2}{P_{kr}^* 4\pi^4 \lambda^2} \sum_{n,j,j_1,j_2=n_0}^N \sum_{m,j,j_1,j_2=m_0}^M \frac{4C_{klnmij}}{\pi^4 (\lambda^{-1} i^2 + \lambda j^2)^2} W_{nm} (1 - R^*) \times$$

$$\times \left[a_{m_1 m_2}^r (W_{m_1} W_{m_2} - W_{m_1 m_2}) + \frac{1}{\lambda_2^2} T_{\theta}^r \right] + \frac{\Omega^2}{P_{\theta}^r \pi^2} q_{\theta} - \frac{3(1+\mu)\Omega^2 \lambda_2^2}{\pi^2 \lambda^2} T_{\theta}^r,$$

$$k = \overline{n_0, N}, \quad k = \overline{m_0, M}.$$

5. Теперь рассмотрим задачу, приведенную в п.3 при неоднородных граничных условиях (1.13) ($M_r \neq 0$). Кроме того, предположим, что температурное поле пластины зависит только от координаты z и времени t . Тогда температурные слагаемые не будут в уравнении (1.9), они входят в граничные условия. Решение уравнения (1.9) ищем в виде

$$W = W_s + W_g \quad (1.21)$$

Прогиб W_s должен удовлетворять уравнению $\nabla^4 W_s = 0$ (1.22) при граничных условиях (1.13), в которых следует заменить W на W_s .

Подставляя решение (1.21) в уравнение (1.9) и учитывая уравнение (1.22), получаем

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = -(1 - R^*) \frac{1}{2} [L(W_s + W_g, W_s + W_g) - L(W_0, W_0)] \quad (1.23)$$

$$\frac{D}{h} (1 - R^*) \nabla^4 (W_g - W_0) = L(W_s + W_g, \Phi) + \frac{q}{h} - \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}. \quad (1.24)$$

Так как прогиб W_s удовлетворяет граничным условиям (1.13), то W_g должен удовлетворять начальным условиям

$$W_g = W_0(x, y) \quad \left. \frac{\partial W_g}{\partial t} = \frac{\partial W_s}{\partial t} \right|_{t=0} \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (1.25)$$

и однородным граничным условиям

$$W_g = 0, \quad \nabla^2 W_g = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, a; \quad y = 0, b \quad (1.26)$$

Решение уравнения (1.22) выбираем в виде

$$W_s = -\frac{3a_T}{h^3}(1+\mu)T_M \left[(2x-a)^2 + (2y-b)^2 \right] + W'_s + W''_s \quad (1.27)$$

где $T_M = \int_{-h/2}^{h/2} zT dz$.

Функции W'_s и W''_s бигармонические и подчиняются следующим граничным условиям:

$$W'_s = 0, \quad \frac{\partial^2 W'_s}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0, a; \quad (1.28)$$

$$W'_s = \frac{3a_T}{h^3}(1+\mu)T_M (b^2 + (2x-a)^2), \quad \frac{\partial^2 W'_s}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0, b; \quad (1.29)$$

$$W''_s = \frac{3a_T}{h^3}(1+\mu)T_M (a^2 + (2y-b)^2), \quad \frac{\partial^2 W''_s}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0, a; \quad (1.30)$$

$$W''_s = 0, \quad \frac{\partial^2 W''_s}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } y = 0, b; \quad (1.31)$$

При этих граничных условиях для функций W'_s и W''_s полностью выполняются граничные условия для функции W_s .

Выражения для бигармонических функций выбираем в виде

$$W'_s = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n(t) \operatorname{ch} \alpha_n (2y-b) + \alpha_n (2y-b) B_n(t) \operatorname{sh} \alpha_n (2y-b)] \times \quad (1.32) \\ \times \cos \alpha_n (2x-a),$$

$$W''_s = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n(t) \operatorname{ch} \beta_n (2x-a) + \beta_n (2x-a) D_n(t) \operatorname{sh} \beta_n (2x-a)] \cos \beta_n (2y-b),$$

где $\alpha_n = \pi n / 2a$, $\beta_n = \pi n / 2b$.

Выражение для W'_s автоматически удовлетворяет условиям (1.28), а выражение для W''_s — условиям (1.31). Для удовлетворения остальных граничных условий разлагаем в

рядах Фурье следующие величины, входящие в граничные условия (1.29) и (1.30):

$$\begin{aligned} -\frac{3\alpha_T}{h^3}(1+\mu)T_M(b^2+(2x-a)^2) &= \sum_{n=1,3,\dots} a_n(t) \cos \alpha_n(2x-a), \\ -\frac{3\alpha_T}{h^3}(1+\mu)T_M(a^2+(2y-b)^2) &= \sum_{n=1,3,\dots} b_n(t) \cos \beta_n(2y-b), \end{aligned} \quad (1.33)$$

где

$$\begin{aligned} a_n(t) &= -\frac{6(1+\mu)\alpha_T T_M}{\alpha_n a h^3} \left(a^2 + b^2 - \frac{2}{\alpha_n^2} \right) \sin \frac{n\pi}{2}, \\ b_n(t) &= -\frac{6(1+\mu)T_M}{\beta_n b h^3} \left(a^2 + b^2 - \frac{2}{\beta_n^2} \right) \sin \frac{n\pi}{2}, \end{aligned} \quad (1.34)$$

Внося выражения (1.32) и (1.33) в граничные условия (1.29) и (1.30), находим

$$\begin{aligned} A_n(t) &= -\frac{a_n}{ch^2 \alpha_n b} \left(chd_n b + \frac{d_n b}{2} shd_n b \right), & B_n(t) &= \frac{a_n}{2chd_n b}, \\ C_n(t) &= -\frac{a_n}{ch^2 \beta_n a} \left(ch\beta_n a + \frac{\beta_n a}{2} sh\beta_n a \right), & D_n(t) &= \frac{b_n}{2ch\beta_n a}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Теперь определим W_x . Условия (1.26) удовлетворяются, если W_x выбрать в виде выражения

$$\begin{aligned} W_x &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M W_{xnm}(t) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \\ W_0 &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M W_{0nm}(t) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Представим функцию W_x в виде двойного тригонометрического ряда

$$W_x = \frac{12\alpha_T}{h^3} T_M \sum_{n=1,3,\dots} \sum_{m=1,3,\dots} K'_{nm} \cos \alpha_n(2x-a) \cos \beta_m(2y-b),$$

где $K'_{nm} = -\frac{8(1+\mu)(-1)^{\frac{n+m}{2}}}{\pi^2 nm(\alpha_n^2 + \beta_m^2)},$

$$\text{или } W_s = \frac{12a_T b^2}{h^3} T_M \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} K_{nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \quad (1.37)$$

$$\text{где } K_{nm} = \frac{2(1+\mu)x_{nm}}{\pi^2 n m \left[(\pi x / \lambda)^2 + (m\pi)^2 \right]}, \quad \alpha_{nm} = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ и } m - \text{нечетный} \\ 0, & \text{если } n \text{ и } m - \text{четный.} \end{cases} \quad (1.38)$$

Подставляя (1.36), (1.37) и (1.16'') в (1.24) и выполняя процедуру Бубнова – Галеркина, для определения $W_{kl}(t)$ получим следующую систему ИДУ:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=\bar{n}_0, \bar{n}_0+2}^N \sum_{m=\bar{m}_0}^M a_{k \ln m} \ddot{W}_{nm} + \frac{\Omega^2}{4\pi^4 \lambda^2} (1-R^*) \sum_{n=\bar{n}_0, \bar{n}_0+2}^N \sum_{m=\bar{m}_0}^M b_{k \ln m} (W_{nm} - W_{0nm}) = \\ & = \frac{\Omega^2}{P_{kp}^* 4\pi^4 \lambda^2} \sum_{n, l, i, j=\bar{n}_0}^N \sum_{m, j, i, i=\bar{m}_0}^M \frac{4C_{k \ln m j}}{\pi^4 (\lambda^{-2} i^2 + \lambda j^2)^2} \left(\frac{12a_T b^2 T_M}{h^3} K_{nm} + W_{gnm} \right) \times \\ & \quad \times (1-R^*) \left[a_{0n1 02}^l (W_{n1} W_{02} - W_{0n1} W_{02}) - \frac{12a_T b^2 T_M}{h^3} \times \right. \\ & \quad \left. \times \left(\frac{12a_T b^2 T_M}{h^3} a_{1k \ln m j} + W_{gl} a_{2k \ln m j} \right) \right] + \frac{\Omega^2}{P_{kp}^* \pi^2} q_{kl} + \frac{\rho b^4}{E h^2 \pi^2} \frac{12a_T b^2}{h^3} \ddot{T}_M K_{kl}, \\ & k = \bar{n}_0, \bar{N}, \quad l = \bar{m}_0, \bar{M}, \quad W_{nm}(0) = W_{nm}, \quad \dot{W}_{nm}(0) = \dot{M}_T(0) K_{nm}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

6. Если рассмотрим задачу, приведенную в п.4, при неоднородных граничных условиях (1.13) и предположим, что $T=T(z, t)$, то придем к исследованию следующей системы ИДУ:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=\bar{n}_0, \bar{n}_0+2}^N \sum_{m=\bar{m}_0}^M a_{k \ln m} \ddot{W}_{nm} + \frac{\Omega^2}{4\pi^4 \lambda^2} (1-R^*) \sum_{n=\bar{n}_0, \bar{n}_0+2}^N \sum_{m=\bar{m}_0}^M b_{k \ln m} (W_{nm} - W_{0nm}) + \\ & \quad + (1-\mu) \lambda_2^2 P(t) \sum_{n=\bar{n}_0, \bar{n}_0+2}^N \sum_{m=\bar{m}_0}^M b_{\rho k \ln m} W_{nm} = \\ & = \frac{\Omega^2}{P_{kp}^* 4\pi^4 \lambda^2} \sum_{n, l, i, j=\bar{n}_0}^N \sum_{m, j, i, i=\bar{m}_0}^M \frac{4C_{k \ln m j}}{\pi^4 (\lambda^{-2} i^2 + \lambda j^2)^2} \left(\frac{12a_T b^2 T_M}{h} K_{nm} + W_{gnm} \right) \times \\ & \quad \times (1-R^*) \left[a_{0n1 02}^l (W_{n1} W_{02} - W_{0n1} W_{02}) - \frac{12a_T b^2 T_M}{h^3} \times \right. \\ & \quad \left. \times \left(\frac{12a_T b^2 T_M}{h^3} a_{1k \ln m j} + W_{gl} a_{2k \ln m j} \right) \right] + \frac{\Omega^2}{P_{kp}^* \pi^2} q_{kl} + \frac{\rho b^4}{E h^2 \pi^2} \frac{12a_T b^2}{h^3} \ddot{T}_M K_{kl}, \\ & k = \bar{n}_0, \bar{N}, \quad l = \bar{m}_0, \bar{M}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Заметим, что полученные основные разрешающие уравнения являются частными случаями (1.11). В следующем параграфе приводится алгоритм численного решения системы (1.11) с помощью численного метода, основанный на рациональных преобразованиях, устраняющих слабосингулярные особенности интегральных и ИДУ.

1.3. Алгоритм численного решения ИДУ несвязанных динамических задач термовязкоупругости

Из предыдущего параграфа видно, что все полученные основные разрешающие уравнения в общем случае можно написать в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M (a_{klnm} \dot{W}_{nm} + \omega_{klnm}^2 W_{nm}) = \\ & = X_{kr} \left(t, W_{11}, \dots, W_{NM}, T, \int_0^t \varphi_{kl}(t, \tau, W_{11}(\tau), \dots, W_{NM}(\tau), T(\tau)) d\tau \right), \\ & W_{nm}(0) = W_{0nm}, \quad \dot{W}_{nm}(0) = \dot{W}_{0nm}, \quad k = \overline{1, N}; \quad l = \overline{1, M} \end{aligned} \quad (1.41)$$

В работах [12,17] для системы ИДУ предложен численный метод, основанный на рациональных преобразованиях, устраняющих слабосингулярные особенности интегральных и ИДУ. Этот метод применим и для системы (1.41) непосредственно путем двукратного интегрирования системы (1.41) по t с учетом начальных условий. Запишем ее в интегральной форме. Полагая затем $t = t_i$, $t_i = ih$, $i = 1, 2, \dots$ ($h = \text{const}$) и заменяя интегралы некоторыми квадратурными формулами для определения $W_{lm} = W_{lm}(t_i)$, получим следующую систему алгебраических уравнений, которые решаются методом Гаусса:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M a_{klnm} W_{nm} = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M a_{klnm} (\dot{W}_{0nm} t_i + W_{0nm}) + \\ & + \sum_{j=0}^{i-1} A_j^{(n,m)}(t_i - t_j) \left[- \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \omega_{klnm}^2 W_{nm} + \right. \\ & \left. + X_{kr} \left[t_i, W_{11}, \dots, W_{NM}, T, \sum_{r=0}^i B_r^{(n,m)} \varphi_{kl}(t_i, t_r, W_{11}, \dots, W_{NM}, T_r) \right] \right], \end{aligned}$$

где $A_j^{(n,m)}$, $B_j^{(n,m)}$ — числовые коэффициенты, не зависящие от выбора подынтегральных функций и принимающие раз-

личные значения в зависимости от использованных квадратурных формул.

Погрешность использованного метода совпадает с погрешностью использованных квадратурных формул и имеет тот же порядок малости относительно шага интерполяции.

Предложенный выше алгоритм описан применительно к системе (1.11) при ядре Колтунова — Ржаницына. По полученному алгоритму составлен комплекс программ на языке Турбо Паскаль, который реализован на персональном компьютере типа PENTIUM-4. Результаты вычисления даются на экране дисплея в виде графиков и таблиц.

ГЛАВА 2. ЗАДАЧИ О СВОБОДНЫХ, ВЫНУЖДЕННЫХ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ ВЯЗКОУПРУГИХ ПЛАСТИН ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ТЕМПЕРАТУРЫ

Рассматриваются задачи о нелинейных собственных, вынужденных и параметрических колебаниях вязкоупругих прямоугольных пластин в геометрически нелинейной постановке под воздействием температуры.

Уравнение колебаний прогибов описывается нелинейными ИДУ в частных производных. С помощью метода Бубнова — Галеркина, основанного на многочленной аппроксимации прогибов, задача сводится к исследованию систем нелинейных ИДУ, решение которых находится численным методом, предложенным в работах [12, 17]. Вычисление числовых значений приближенного решения выполнялось с помощью PENTIUM-4. Численно исследована сходимость метода Бубнова — Галеркина. Изучены амплитудно-временные характеристики колебаний вязкоупругих систем при широких диапазонах изменения параметров.

2.1. Колебания термовязкоупругих пластин при однородных граничных условиях

Рассмотрим в геометрически нелинейной постановке задачу о колебаниях прямоугольной вязкоупругой пластины постоянной толщины, изготовленной из однородного материала.

По толщине пластина нагрета равномерно, механические параметры материала постоянны, на поверхности имеет место теплообмен.

При принятых предположениях уравнение теплопроводности пластины имеет следующий вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_T \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - \frac{2\lambda_{me}}{C_T \rho h} (T - T_\infty), \quad (2.1)$$

$$\text{при начальном условии } T(x, y, 0) = T_0(x, y), \quad (2.2)$$

$$\text{и граничных условиях } x = 0, a; \quad y = 0, b; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad (2.3)$$

где T — приращение температуры, λ_T — коэффициент температуропроводности, T_{oc} — температура окружающей среды, λ_{oc} — коэффициент теплообмена пластины, c_T — удельная теплоемкость.

Решение уравнения (2.1), удовлетворяющее начальному (2.2) и граничному (2.3) условиям, имеет вид [22]:

$$T(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{8\lambda_{oc}\alpha_k}{c_T\rho h k\pi\lambda_k} T_{oc}(1 - \exp(-\lambda_k t)) + \exp(-\lambda_k t) [b_{ak} + \sum_{n=1}^{\infty} b_{nk} \cos \frac{n\pi y}{b} \exp\left(-\frac{n^2\lambda\pi^2\lambda_T}{a^2} t\right)] \sin \frac{k\pi x}{a} \right\}, \quad (2.4)$$

$$\text{где } \lambda_k = \lambda_T \left(\frac{k\pi}{a} \right)^2 + \frac{2\lambda_{oc}}{c_T\rho h}, \quad b_{nk} = \frac{2}{ab} \int_0^a \int_0^b T_0(\xi, \eta) \sin \frac{k\pi\xi}{a} \cos \frac{n\pi\eta}{b} d\xi d\eta,$$

$$n=0, 1, 2, \dots; \quad k=1, 2, \dots$$

Математическая модель этой задачи относительно функций напряжений $\Phi = \Phi(x, y, t)$, прогиба $W = W(x, y, t)$ и температуры $T = T(x, y, t)$ соответственно описывается уравнениями (1.9) и (2.1). В случае шарнирного закрепления края пластины относительно неизвестных $W_k = W_k(t)$ имеем систему уравнений (1.19'). Решение (2.4), подставляя в (1.19') и вычисляя $\alpha_{k \ln m}$ b_{klm} , получим:

$$\begin{aligned} & \ddot{W}_k + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{k}{\lambda} \right)^2 + l^2 \right] (1 - R^*) (W_k - W_{ok}) + \\ & + \frac{1}{P^*_{kp}} \sum_{n,j \in N_0} \sum_{m,r \in M_0} \alpha_{k \ln mjr} W_{nm} (1 - R^*) (W_k W_{jr} - W_{jr} W_{ok}) = \quad (2.5) \\ & = \frac{4\alpha_T}{P^*_{kp}} \sum_{n \in N_0} \sum_{m \in M_0} W_{nm} (1 - R^*) \varphi_{k \ln m} + \frac{48\alpha_k (1 - \mu^2)}{kl} \bar{q}, \end{aligned}$$

$$k = \overline{n_0, N}; \quad \ell = \overline{m_0, M},$$

где ω — частота основного тона колебаний:
 $\omega = \sqrt{Eh^2\pi^4/3(1-\mu^2)\rho b^4}$ $P_{kp}^* = \pi^2/3(1-\mu^2)$ — безразмерное критическое напряжение.

$$\varphi_{klmn} = \frac{\pi}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ T_{in} \frac{\lambda}{\pi^3} m^2 \gamma_{lnk} \frac{8\lambda_{oc}\alpha_i}{i\lambda_i} (1 - \exp(-\lambda_i t)) \delta_{m-1} + \right. \\
\left. + \exp(-\lambda_i t) \left[m^2 i^2 \gamma_{lnk} c_{oi} \delta_{m-1} + \sum_{r=1}^i \left[\gamma_{lnk} \delta_{1mr} \left(\frac{n^2 r^2}{\lambda} + i^2 m^2 \right) + \right. \right. \right. \right. \\
\left. \left. \left. + 2nmir \gamma_{2mk} \delta_{2nk} \right] C_{ri} \exp(-r^2 \lambda^2 \lambda_r \pi^2 t) \right] \right\},$$

$$C_{oi} = \left(\frac{\lambda}{n\pi} \right)^2, \quad C_{ki} = \frac{(k/\pi\lambda)^2 (1+n^2)}{[(k/\lambda)^2 + n^2]^2}, \quad \lambda_i = \lambda_r (i\pi)^2 + 2\lambda_{oc},$$

$$\gamma_{lnk} = \frac{\alpha_{n-i+k}}{n-i+k} - \frac{\alpha_{n-i-k}}{n-i-k} - \frac{\alpha_{n+i+k}}{n+i+k} + \frac{\alpha_{n+i-k}}{n+i-k},$$

$$\gamma_{2mk} = \frac{\alpha_{n+i+k}}{n+i+k} - \frac{\alpha_{n+i-k}}{n+i-k} + \frac{\alpha_{n-i+k}}{n-i+k} - \frac{\alpha_{n-i-k}}{n-i-k},$$

$$\delta_{1mr} = \delta_{m-r-1} - \delta_{m-r+1} + \delta_{m+r-1}, \quad \delta_{2mr} = \delta_{m+r-1} - \delta_{m-r-1} + \delta_{m-r+1},$$

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i - \text{нечетно} \\ 0, & \text{если } i - \text{четно} \end{cases} \quad \delta_i = \begin{cases} 1 & \text{при } i = 0 \\ 0 & \text{при } i \neq 0 \end{cases}$$

Систему (2.5) решаем численным методом, предложенным в [12,17]. Для этого запишем ее в интегральной форме, тогда формула численного интегрирования при ядре Колтунова — Ржаницына $R(t) = At^{\alpha-1} \exp(-\beta t)$, ($0 < \alpha < 1$) примет вид:

$$W_{pkl} = W_{okl} + \dot{W}_{okl} t_{p-1} + \sum_{q=1}^p A_q (t_p - t_q) \left\{ \frac{16\alpha_{kl}}{kl\pi^4} \frac{\bar{q}_a}{P_{kr}^*} - \right. \\
\left. - \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\kappa}{\lambda} \right)^2 + l^2 \right]^2 \left[W_{qkl} - W_{okl} - \frac{A}{\alpha} \sum_{z=1}^q B_z \exp(-\beta t_z) (W_{q-zkl} - W_{okl}) \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{P^*_{kp}} \sum_{n=1,3,5,7}^N \sum_{m=0}^M \alpha_{z, \ln m q z} W_{q m n} [W_{q n} W_{q z} - W_{q n} W_{q z} + \\
& + \frac{A}{\alpha} \sum_{z=1}^q B_z \exp(-\beta t_z) (W_{q-n, z} W_{q-z, z} - W_{q n} W_{q z})] + \\
& + \frac{4\alpha_T}{P^*_{kp} \lambda^2} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M W_{q m n} \left[\varphi_{q, \ln m} - \frac{A}{\alpha} \sum_{z=1}^q B_z \exp(-\beta t_z) \varphi_{q, z \ln m} \right], \quad (2.6)
\end{aligned}$$

где A_q, B_z ($q = \overline{1, p}; z = \overline{1, q}$) – числовые коэффициенты, не зависящие от выбора подынтегральных функций и принимающие различные значения в зависимости от использованных квадратурных формул.

Вычисление значений $W_{q, n}$ по формуле (2.6) проводилось на ПЭВМ типа PENTIUM-4. Результаты вычислений для ядер Колтунова – Ржаницына представлены на рисунках 2.1 – 2.6.

На рисунке 2.1 показано изменение прогиба пластины с учетом (кривая 2) и без учета температуры (кривая 1). Видно, что учет влияния температуры приводит к увеличению периода колебаний и увеличению амплитуды.

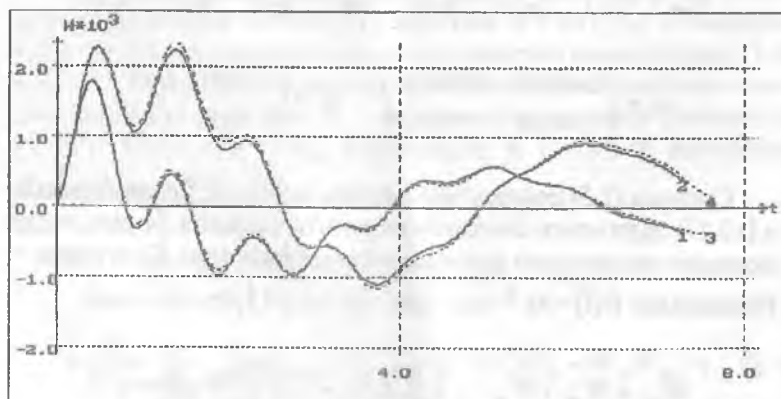


Рис 2.1. $A=0,1; \alpha=0,25; \beta=0,05; q=0; W_0=0,001; \lambda=1; T_{oc}=100;$
 $\lambda_T=0,12; \lambda_{oc}=0,07; \alpha_T=0(1,3); 2(2,4);$

На рисунке пунктирными линиями (кривые 3 и 4) изображены результаты прогиба, полученные по уравнениям (1.15) соответствующей задачи. Из графиков видно, что результаты мало отличаются друг от друга. Поэтому в дальнейших вычислениях приводим результаты, полученные по формулам (2.6).

На рис.2.2 показано влияние на прогиб пластины температуры окружающей среды (T_{oc}). Цифры у кривых соответствуют случаям: 1 — без учета температуры окружающей среды ($T_{oc} = 0$) 2 — с учетом температуры окружающей среды ($T_{oc} = 400$). Видно, что в начальный момент времени разница амплитуды этих кривых значительна, но с течением времени эта разница уменьшается.

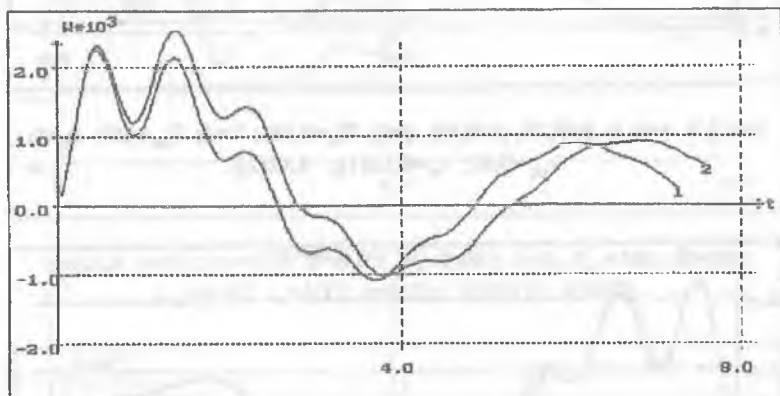


Рис. 2.2. $A=0,1$; $\alpha=0,25$; $\beta=0,05$; $q=0$; $W_0=0,001$; $\lambda=1$; $d_T=2$; $\lambda_T=0,12$; $\lambda_{oc}=0,07$; $T_{oc}=0(1)$; $400(2)$

Изучено влияние коэффициента температуропроводности (λ_T) прогиба пластины (рис.2.3). С увеличением λ_T наблюдается сдвиг фазы к стороне начала координат, что приводит к быстрому затуханию колебаний.

По влиянию коэффициента λ_{oc} можно сделать вывод, что с увеличением данного параметра наблюдается сдвиг фазы в правую сторону и уменьшение амплитуды. График приведен на рис.2.4.

На рис.2.5 показано влияние поперечной статической нагрузки. Видно, что увеличение поперечной стационарной нагрузки приводит к увеличению амплитуды колебаний.

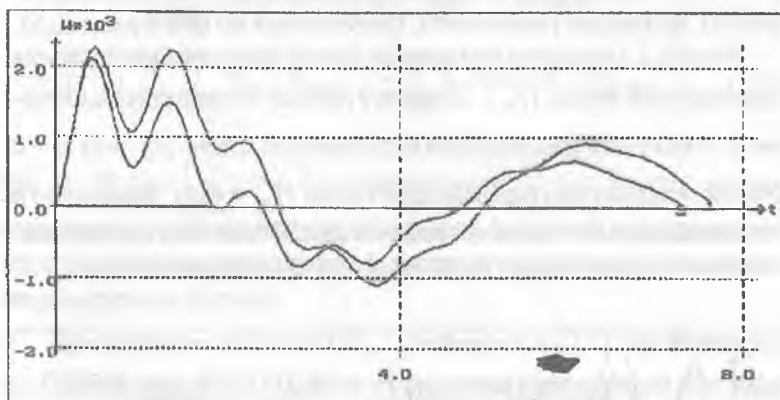


Рис.2.3. $A=0,1$; $d=0,25$; $\beta=0,05$; $q=0$; $W_0=0,001$; $\lambda=1$; $T_{oc}=100$; $d_T=2$; $\lambda_{oc}=0,07$; $\lambda_T=0,12(1); 0,02(2)$;

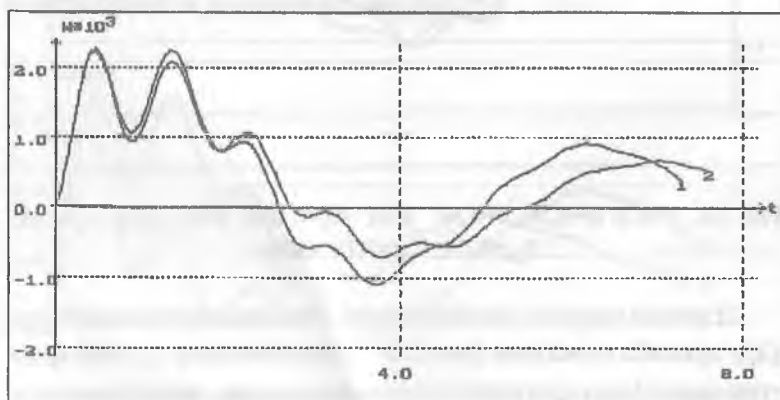


Рис.2.4. $A=0,1$; $\alpha=0,25$; $\beta=0,05$; $q=0$; $W_0=0,001$; $\lambda=1$; $T_{oc}=100$; $d_T=2$; $\lambda_T=0,12$; $\lambda_{oc}=0,07(1); 0,5(2)$;

На примере (рис.2.6) показана сходимость метода. Числа у кривых соответствуют значениям n_0 и N : 1 и 1(1), 1 и 3(2), 1 и 5(3)

при $m_0=1$, $M=1$. Из графиков видно, что если ограничимся первым членом ряда (1.11), при решении получаем график, обозначенный номером 1, где колебания с течением времени затухают. С увеличением числа членов ряда (1.11) график решения в начальный момент времени сильно отличается от первоначального, но эти кривые с течением времени ($t > 6$) мало отличаются друг от друга. Сопоставляя кривые 2 и 3, можно сделать вывод, что в дальнейших расчетах достаточно удерживать первые пять членов ряда (1.11).

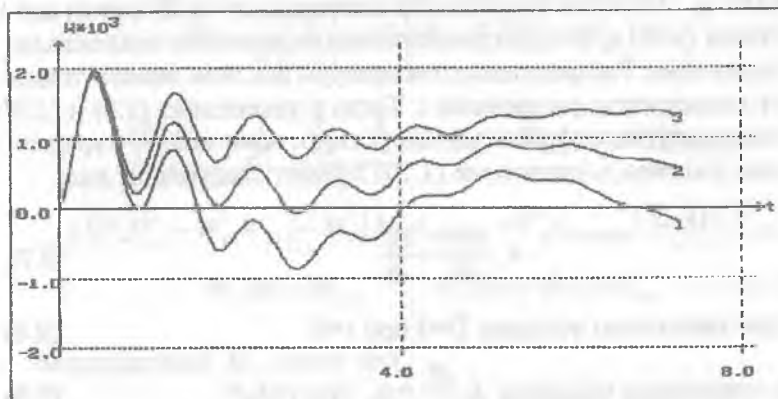


Рис.2.5. $A=0,1$; $\alpha=0,25$; $\beta=0,05$; $W_0=0,001$; $\lambda=1$; $T_{oc}=100$; $\alpha_T=0,5$;
 $\lambda_{oc}=0,07$; $\lambda_T=0,12$; $q=0(1)$; $0,005(2)$; $0,01(3)$;

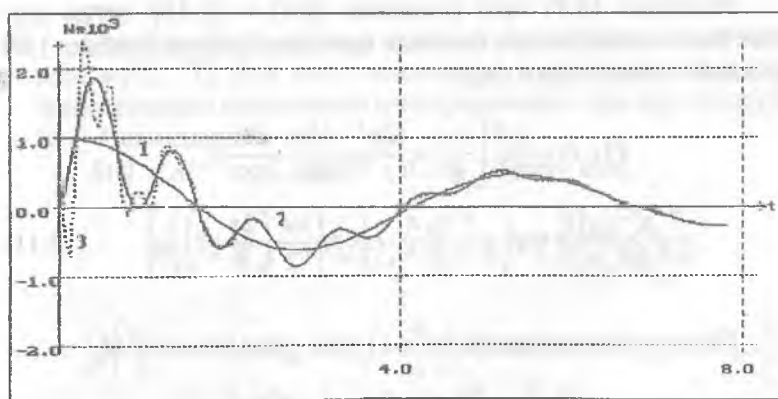


Рис.2.6. $A=0,1$; $\alpha=0,25$; $\beta=0,05$; $W_0=0,001$; $\lambda=1$; $T_{oc}=100$; $d_T=0,5$;
 $\lambda_{oc}=0,07$; $\lambda_T=0,12$; $k=1, N$; $N=1(1)$; $3(2)$; $5(3)$;

2.2. Колебания термовязкоупругих пластин при неоднородных граничных условиях

Теперь рассмотрим задачу, приведенную в п.2.1. при неоднородных граничных условиях (1.13) ($M_T \neq 0$). Пластина шарнирно оперта по всем сторонам, к поверхности $z=h/2$ подводится тепло, причем количество тепла, подводимое за единицу времени к единице поверхности, равно постоянной величине q_T . Нижняя поверхность пластины ($z=-h/2$) и края пластины ($x=0, a; y=0, b$) предполагаются идеально теплоизолированными. Распределение температуры при этом зависит только от координаты z и времени t . Тогда в уравнениях (1.8) и (1.9) температурные слагаемые отсутствуют, они входят в граничные условия, а уравнение (1.10) примет следующий вид:

$$\alpha_T \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.7)$$

$$\text{при начальном условии } T=0 \text{ при } t=0 \quad (2.8)$$

$$\text{и граничных условиях } \lambda_T \frac{\partial T}{\partial z} = q_T \text{ при } z=h/2, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \text{ при } z=-h/2 \quad (2.10)$$

Решение (2.7) при условиях (2.8) – (2.10) легко может быть найдено при помощи преобразования Лапласа [29] и имеет следующий вид:

$$T(z, t) = \frac{q_T h}{\lambda_T} \left[\frac{\alpha_T t}{h^2} + \frac{12z^2 + 12hz - h^2}{24h^2} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \exp\left(-\frac{n^2 \alpha_T \pi^2}{h^2} t\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2} \left(\frac{2z}{h} + 1\right)\right) \right] \quad (2.11)$$

Подставляя это решение в (1.9 а), находим вид M_T :

$$M_T = \frac{q_T h^3}{24\lambda_T} \left(1 - \frac{96}{\pi^4} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{n^4} \exp\left(-\frac{n^2 \alpha_T \pi^2}{h^2} t\right) \right) \quad (2.12)$$

При принятых предположениях математическая модель этой задачи относительно функций напряжения $\Phi = \Phi(x, y, t)$, прогиба $W = W(x, y, t)$, и температуры $T = T(z, t)$ описывается уравнениями (1.23), (1.24) и (2.7).

В случае шарнирного закрепления края пластины относительно неизвестных $W = W(t)$ имеем систему уравнений (1.39) (Для удобства W_{y0l} напишем в виде W_{y0l}). Вычисляя α_{k1mn} , β_{k1mn} , получим:

$$\begin{aligned} \dot{W}_{kl} + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{k}{\lambda} \right)^2 + l^2 \right] (1 - R^*) (W_{kl} - W_{y0l}) = \\ = \frac{16a_{kl}g}{kl\pi^4 P_{kp}} - \frac{1}{P_{kp}} \sum_{n,j,l=1,3,\dots}^N \sum_{m,r,s=1,3,\dots}^M (M_T K_{nm} + W_{nm}) (1 - R^*) [a_{klnmjl} \times \\ \times (W_{lr} W_{\mu} - W_{or} W_{os}) - M_T (M_T a_{klnmjl} + W_{\mu} a_{2klnmjl})] + \dot{M}_T K_{kl}, \\ W_{kl}(0) = W_{y0l}, \quad W_{kl}(0) = M_T(0) K_{kl}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

безразмерный M_T имеет вид

$$M_T = q_T \left[1 - \frac{96}{\pi^4} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} \exp[-n^2 a_T \pi^2 t] \right]. \quad (2.14)$$

Систему (2.13) решаем численным методом, предложенным в [12, 17]. Для этого запишем ее в интегральной форме, тогда формула численного интегрирования при ядре Колтунова — Ржаницына

$R(t) = At^{a-1} \exp(-\beta t)$, ($0 < d < 1$) примет вид:

$$\begin{aligned} W_{y0l} = W_{y0l} + \dot{W}_{y0l} t_{p-1} + \sum_{q=1}^p A_q (t_p - t_q) \left\{ \frac{16a_{kl} q_q}{kl\pi^4 P_{kp}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \left[\left(\frac{k}{\lambda} \right)^2 + l^2 \right] \left[W_{y0l} - W_{y0l} - \frac{A}{\alpha} \sum_{z=1}^q B_z \exp(-\beta t_z) (W_{y0l} - W_{y0l}) \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{P_{kp}} \sum_{n,j,l=1,3,\dots}^N \sum_{m,r,s=1,3,\dots}^M (M_{Tq} K_{kl} + W_{qnm}) [a_{klnmjl} (W_{qr} W_{ql} - W_{or} W_{os}) + \right. \end{aligned}$$

$$+ M_{Tq} (M_{Tq} a_{1k} \ln m_{ij} + W_{qk} a_{2k} \ln m_{ij})] + \quad (2.15)$$

$$+ \frac{A}{\alpha} \frac{1}{P_{kp}} \sum_{n,j}^N \sum_{m,r,s}^M (M_{jq} K_{kl} + W_{qnm}) [a_k \ln m_{ij} \sum_{z=1}^z B_z \exp(-\beta t_z) \times$$

$$\times (W_{q-zr} W_{q-zs} - W_{oir} W_{ojk}) - M_{Tq} (M_{Tq} a_{1k} \ln m_{ij} + W_{qk} a_{2k} \ln m_{ij})] + \bar{M}_{Tq} K_{kl} \},$$

где A_q, B_z ($q = \overline{1, p}; z = \overline{1, q}$) – числовые коэффициенты, не зависящие от выбора подынтегральных функций, принимающие различные значения в зависимости от использованных квадратурных формул.

Вычисление значений W_{kl} по формуле (2.15) проводилось на ПЭВМ типа PENTIUM-4. Результаты вычислений для ядер Колтунова – Ржаницына представлены на рисунках 2.7 – 2.10.

На рис 2.7 показано изменение безразмерных прогибов W_x (кривая 1), W_y (кривая 2), W (кривая 3) во времени для срединной

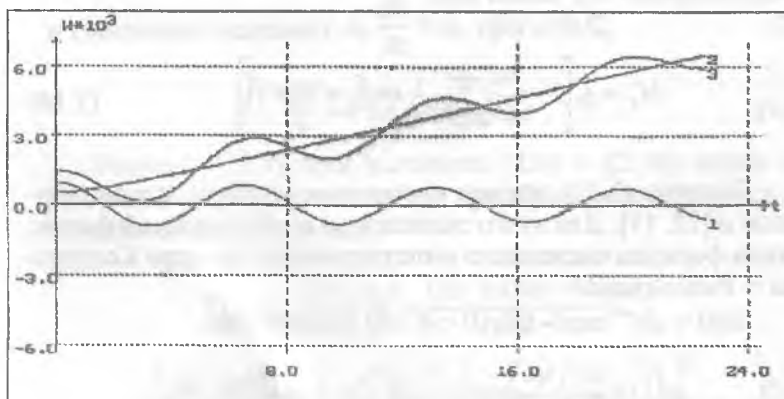


Рис 2.7. $A=0,1; \alpha=0,25; \beta=0,05; q=0; W_0=0,0001; q_T=10; \alpha_T=10^{-4}; W_x(1); W_y(2); W(3);$

точки пластины при $q_T=10, \alpha_T=10^{-4}$. Как видно, «динамический» прогиб W_x совершает колебания около начального прогиба и затухает с течением времени. Общий прогиб

W совершает затухающие колебания около «квазистатического» прогиба W_{st} , не испытывающего колебания.

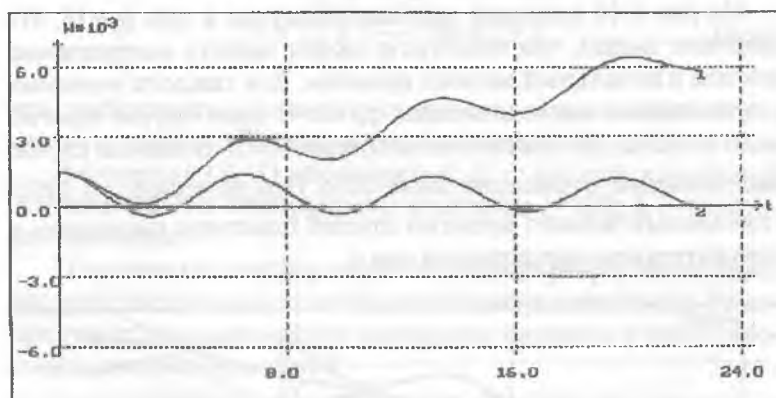


Рис 2.8. $A=0,1$; $\alpha=0,25$; $\beta=0,05$; $q=0$; $W_0=0,0001$;
 $q_T=10$; $\alpha_T=10^{-4}(1)$; $10^{-6}(2)$;

На рис. 2.8 представлены аналогичные графики при $q_T=10$, $\alpha_T = 10^{-4}(1)$; $10^{-6}(2)$. Видно, что уменьшение параметра α_T приводит к уменьшению амплитуды колебаний.

На рис.2.9 показано изменение прогиба W во времени при различных значениях q_T . Видно, что с увеличением q_T ампли-

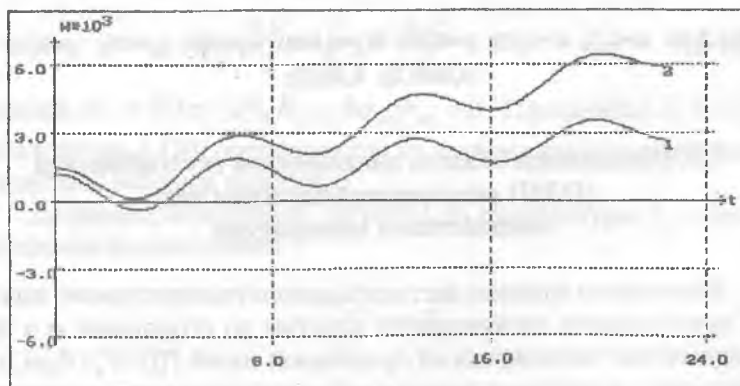


Рис.2.9. $A=0,1$; $\alpha=0,25$; $\beta=0,05$; $q=0$; $W_0=0,0001$; $\alpha_T=10^{-4}$; $q_T=5(1)$; $10(2)$;

туда колебаний увеличивается. В начальный момент времени прогиб пластинки направлен в противоположную сторону от положительного направления оси z .

На рис 2.10 показано влияние нагрузки q при $q_T=10$. Из графиков видно, что наличие q может менять направление прогиба в начальный момент времени. Для каждого значения q , существуют такие значения q , что в этом случае прогиб увеличивается, но колебания не совершаются. В данном случае такое значение q примерно равно 0.005. При значениях $q \geq 0.005$ в начальный момент времени прогиб пластины направлен в положительном направлении оси z .

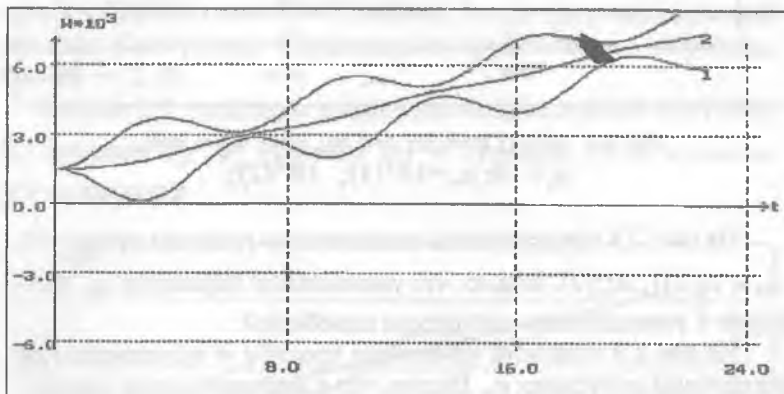


Рис.2.10. $A=0,1$; $\alpha=0,25$; $\beta=0,05$; $W_0=0,0001$; $a_T=10^{-4}$; $q_T=10$; $q=0(1)$; $0,005(2)$; $0,01(3)$;

2.3. Определение области динамической неустойчивости (ОДН) вязкоупругой пластины под воздействием температуры

Рассмотрим влияние нестационарного температурного поля на устойчивость вязкоупругих пластин со сторонами a и b , нагруженных периодической продольной силой $P(t)=P_0+P_0 \cos \theta t$ вдоль оси x и выясним условия возникновения термопараметрического резонанса.

Закон изменения температуры применяется квадратичным по толщине и периодическим во времени

$$T = T_1 \left[\frac{1}{2} + \frac{z^2}{h^2} \right] \cos \theta_r t + T_2, \quad (2.16)$$

что приближенно соответствует периодичности во времени изменения температуры на поверхности пластины.

В формуле (2.16) обозначены: θ_r — частота колебаний температуры на поверхности пластины $z=h/2$; h — толщина пластины.

Пластина по контуру оперта на упругие ребра, температура которых постоянна и отлична от температуры пластины. Решение таких задач в линейной постановке сводится к интегрированию системы уравнений

$$\nabla^4 \Phi = 0 \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + D(1 - R^*) \nabla^4 (W - W_0) = N_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \\ + N_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Соотношения для сил и моментов определяются формулами (1.5).

Решение уравнения (2.17) можно записать в виде

$$\Phi = \frac{\sigma_1 y^2}{2} - \frac{P}{2} y^2 + \frac{\sigma_2 x^2}{2} \quad (2.19)$$

отсюда $N_x = W(\sigma - P)$, $N_y = h\sigma_1$, $N_{xy} = 0$. Постоянные σ_1 и σ_2 аналогично в [30] определяются из условия взаимодействия с упругими ребрами пластины.

Деформации в ребрах, нагретых до температуры T_p , определяются выражениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_p} + \alpha_p T_p, \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E_p} + \alpha_p T_p. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Для результирующих усилий на ребрах должны выполняться условия

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma_1 b h + \sigma_{xp} F_x &= 0, \\ \frac{1}{2} \sigma_2 b h + \sigma_{yp} F_y &= 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

где F_x и F_y — площадь сечения ребер.

Деформация пластины в соответствующем направлении должна быть равна деформации ребра

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{xp}, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_{yp}. \quad (2.22)$$

Используя соотношение (2.20), (2.22) и принимая, что $E_p = E$, определим

$$\sigma_1 = -\frac{E[\alpha_T T_N - \alpha_p T_p]}{(K_x K_y - \nu^2)} (k_x + \nu) \quad \sigma_2 = -\frac{E[\alpha_T T_N - \alpha_p T_p]}{(K_x K_y - \nu^2)} (k_y + \nu)$$

где $k_x = 1 + h/F_x$; $k_y = 1 + h/F_y$; $T_N = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} T dz = \frac{3}{4} T_1 \cos \theta_T t + T_2$;

ν — коэффициент Пуассона.

Уравнение для нахождения прогиба (2.18) приобретает вид

$$D(1 - \nu^2) \nabla^4 (W - W_0) + \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = (\sigma_1 - P) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \sigma_2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \quad (2.23)$$

Так как $T_M = \frac{1}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} T z dz = 0$, то на краях должны выполняться условия:

$$W=0 \text{ при } x=0, \quad a; y=0, \quad b$$

$$\frac{d^2 W}{dx^2} = 0 \text{ при } x=0, \quad a$$

$$\frac{d^2 W}{dy^2} = 0 \text{ при } y=0, \quad b$$

Решение уравнения (2.23) будем искать в виде

$$W(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M W_{nm}(t) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \quad (2.24)$$

$$W_0(x, y) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M W_{nm}(t) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Подставляя (2.24) в (2.23) и выполняя процедуру Бубнова – Галеркина, получим

$$\begin{aligned} & \frac{\rho b^4}{Eh^2 \pi^2} \ddot{W}_{nm} + \left(\frac{b}{h}\right)^2 \frac{1}{E} \left[\left(\frac{n}{\lambda}\right)^2 (\sigma_1 - p) + \sigma_2 m^2 \right] W_{nm} + \\ & + \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{n}{\lambda}\right)^2 + m^2 \right] (1 - R^*)(W_{nm} - W_{onm}) = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{\rho b^4}{Eh^2 \pi^2} \ddot{W}_{nm} + \left(\frac{b}{h}\right)^2 \left\{ \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2 \left[\frac{\alpha_r \left(T_2 + \frac{3}{4} T_1 \cos \theta_r t \right) - \alpha_r T_p}{(k_x k_y - \nu^2)} (k_x + \nu) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{P}{E} \right] + \frac{m^2 \alpha_r \left(T_2 + \frac{3}{4} T_1 \cos \theta_r t \right) - \alpha_r T_p}{(k_x k_y - \nu^2)} (k_x + \nu) \right\} + \\ & + \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{n}{\lambda}\right)^2 + m^2 \right] (1 - R^*)(W_{nm} - W_{onm}) = 0 \end{aligned}$$

Введя безразмерные величины

$$\begin{aligned} & \frac{W_{nm}}{h}, \omega t, \frac{1}{\omega} R(t), \alpha_r T_2 = \bar{T}_2 = \frac{T_1}{T_2} = \bar{T}_1, \alpha_r T_p = \bar{T}_p, \gamma = \frac{P_1}{P_{kp}}, \\ & \delta = \frac{P_0}{P_{kp}}, \text{ где } P_{kp} = \frac{\pi^2}{3(1-\mu^2)} E \left(\frac{b}{h}\right)^2, \\ & \omega^2 = \frac{\rho b^4}{Eh^2 \pi^2 P_{kp}^*}, P_{kp}^* = \frac{\pi^2}{3(1-\mu^2)}, \beta_1 = \left(\frac{b}{h}\right)^2, \frac{\theta_r}{\omega}, \frac{\theta}{\omega} \end{aligned}$$

и сохраняя прежние обозначения, получим

$$W_{nm} + \Omega_{1nm}^2 (1 - 2\mu_{1nm} \cos \theta) W_{nm} + \Omega_{2nm}^2 (1 - 2\mu_{2nm} \cos \theta_r t) W_{nm} - \\ - \frac{1}{4} \left[\left(\frac{n}{\lambda} \right)^2 + m^2 \right]^2 [W_{nm} + R^*(W_{nm} - W_{nm})] = 0, \quad (2.25)$$

$$\text{где } \Omega_{1nm}^2 = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{n}{\lambda} \right)^2 + m^2 \right]^2 - \left(\frac{n}{\lambda} \right)^2 \delta, \quad \mu_{1nm} = \frac{\left(\frac{n}{\lambda} \right)^2 \gamma}{2 \left\{ \left[\left(\frac{n}{\lambda} \right)^2 + m^2 \right]^2 - \left(\frac{n}{\lambda} \right)^2 \delta \right\}},$$

$$\Omega_{2nm}^2 = \beta_1 \left[\left(\frac{n}{\lambda} \right)^2 \frac{k_y + \nu}{k_x k_y - \nu^2} + m^2 \frac{k_x + \nu}{k_x k_y - \nu^2} \right] (T_p - T_2),$$

$$\mu_{2nm} = \frac{T_1}{4(T_p - T_2)} = \frac{3T_1 T_2}{4(T_p - T_2)^2}.$$

Если $R^* \varphi = \int_{-\infty}^t R(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau$ и $\theta = \theta_r$, то уравнение (1.25) для

гладкой пластины ($W_{nm} = 0$) принимает вид:

$$\ddot{W}_{nm} + \Omega_{nm}^2 (1 - 2\mu_{nm} \cos \theta) W_{nm} = \\ = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{n}{\lambda} \right)^2 + m^2 \right]^2 \int_{-\infty}^t R(t-\tau) W_{nm}(\tau) d\tau, \quad (2.26)$$

$$\text{где } \Omega_{nm}^2 = \Omega_{1nm}^2 + \Omega_{2nm}^2, \quad \mu_{nm} = \frac{\mu_{1nm} + \mu_{2nm}}{\Omega_{nm}^2}$$

Для вывода уравнения критических частот, соответствующих термопараметрическому резонансу, воспользуемся методом, предложенным М.Д. Стреттом и развитым В.В. Болотиным [21], согласно которому границами, определяющими область неустойчивых и устойчивых решений, являются периодические решения с периодами T_θ и $2T_\theta$. Два решения с одинаковым периодом ограничивают область неустойчивости, а два решения разных периодов — область устойчивости. Область неустойчивости соответствующими $n=1, m=1$ называется главной ОДН.

Периодическое решение уравнения (2.26) будем искать в виде

$$W_{nm}(t) = A_{nm} \sin \frac{\theta t}{2} + B_{nm} \cos \frac{\theta t}{2}. \quad (2.27)$$

Подставив (2.27) в (2.26) и отбросив члены с утроенной частотой при $n=1, m=1$, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_{11} и B_{11} . Приравняв к нулю определитель полученной системы, получим уравнение критических частот, позволяющее рассчитать границы главной области неустойчивости:

$$\begin{vmatrix} 1 + \mu_{11} - \left(\frac{\theta}{2\Omega_{11}}\right)^2 - \frac{1}{4}\Omega_{11}^{-2}\left(\frac{1}{\lambda^2} + 1\right)^2 R_c & -\frac{1}{4}\Omega_{11}^{-2}\left(\frac{1}{\lambda^2} + 1\right)^2 R_s \\ \frac{1}{4}\Omega_{11}^{-2}\left(\frac{1}{\lambda^2} + 1\right)^2 R_s A_{11} & 1 - \mu_{11} - \left(\frac{\theta}{2\Omega_{11}}\right)^2 - \frac{1}{4}\Omega_{11}^{-2}\left(\frac{1}{\lambda^2} + 1\right)^2 R_c \end{vmatrix} = 0$$

отсюда

$$\left[1 - \left(\frac{\theta}{2\Omega_{11}}\right)^2 - \frac{1}{4}\Omega_{11}^{-2}\left(\frac{1}{\lambda^2} + 1\right)^2 R_c \right]^2 + \frac{1}{16}\Omega_{11}^{-4}\left(\frac{1}{\lambda^2} + 1\right)^4 R_s^2 - \mu_{11}^2 = 0,$$

где $R_c = \int_0^{2\pi} R(\tau) \cos \frac{\theta \tau}{2} d\tau$; $R_s = \int_0^{2\pi} R(\tau) \sin \frac{\theta \tau}{2} d\tau$.

Решая это уравнение относительно $\frac{\theta}{2\Omega_{11}}$ получим

$$\frac{\theta}{2\Omega_{11}} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}\Omega_{11}^{-2}\left(\frac{1}{\lambda^2} + 1\right)^2 R_c \pm \mu_{11} \sqrt{1 - \frac{1}{16}\Omega_{11}^{-4}\left(\frac{1}{\lambda^2} + 1\right)^4 R_s^2 \mu_{11}^{-2}}}.$$

Для ядра вида $R(t) = A \exp(-\beta t)$, получим

$$R_c = \frac{4A\beta}{\theta + 4\beta^2}; R_s = \frac{2A\theta}{\theta^2 + 4\beta^2}.$$

На рисунке изображена главная ОДН на плоскости $(\mu_{11}, \theta/2\Omega_{11})$ при различных значениях.

По полученным соотношениям были произведены расчеты. Программа была составлена на языке Турбо-Паскаль и реализована на PENTIUM-4. Результаты вычислений приведены на рис.2.11. – 2.13.

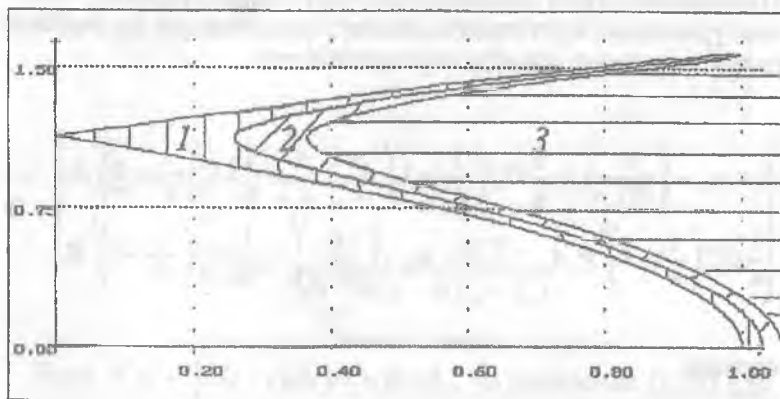


Рис.2.11. $\beta=0,05$; $\lambda=1$; $\theta=1,5$; $T_p=50$; $T_2=50$ $A=0(1)$; $0,05(2)$; $0,75(3)$

На рис.2.11. приведены зависимости $\theta/2\Omega_{11}$ от коэффициента возбуждения при изменении реологического параметра A . Первая область соответствует значению $A=0$, т.е. термоупругому случаю. В этом случае вершина области лежит в точке $\theta/2\Omega_{11} = \sqrt{1 - \mu_{11}}$, а с появлением вязкоупругого члена вершина области начинает втягиваться вовнутрь. Областям динамической неустойчивости 2 и 3 соответственно отвечают параметры $A=0,05$ и $A=0,075$. Здесь температура на поверхности пластинки T_2 и на ребрах пластинки T_p постоянна.

Таким образом, увеличение параметра вязкости A приводит к сужению ОДН.

Результаты исследования влияния параметра β на ОДН вязкоупругой пластины под воздействием температуры приведены на рис.2.12. Здесь параметр вязкости $A=0,01$, а постоян-

ные $T_p=60$, $T_2=50$. Из рисунка видно, что влияние реологического параметра β на ОДН незначительно.

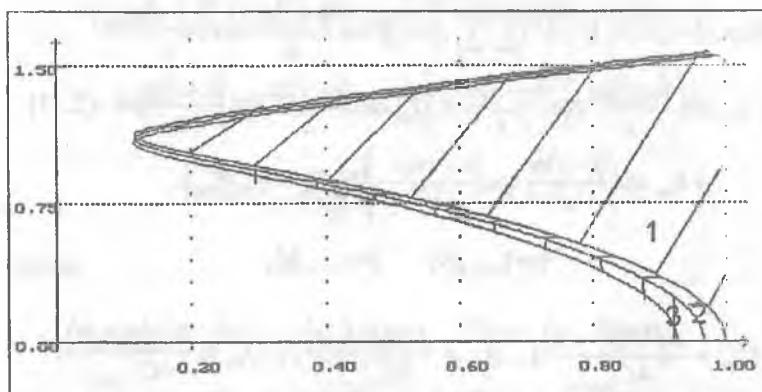


Рис. 2.12. $A=0,01$; $\lambda=1$; $\theta=1$; $T_p=60$; $T_2=50$; $\beta=0,01(1)$; $0,05(2)$; $0,1(3)$

Было исследовано влияние постоянной части периодически изменяющейся температуры, действующей на поверхности пластины T_p , на область динамической неустойчивости. Результаты расчета приведены на рис.2.13. Здесь был принят: $A=0,05$, $\beta=0,05$, $\theta=1,5$, $T_p=0$, $\lambda=1$. В этом случае построена

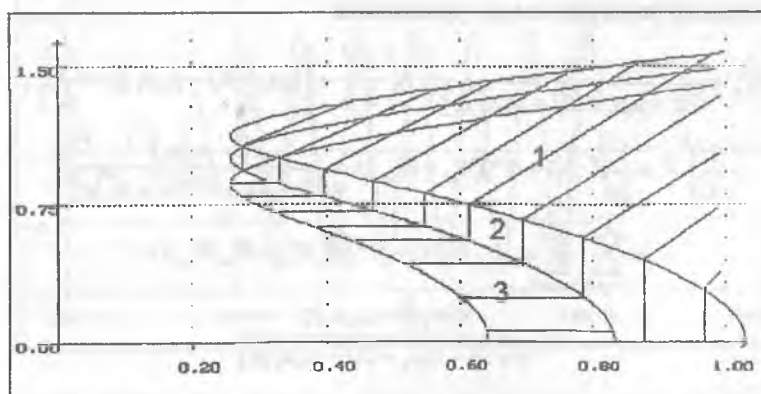


Рис. 2.13. $A=0,05$; $\beta=0,05$; $\lambda=1$; $\theta=1,5$; $T_p=60$; $T_2=50(1)$; $60(2)$; $70(3)$

Считая, что пластина шарнирно закреплена по краям, находим функцию напряжения в виде:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, t) = & \sqrt{E_1 E_2} (1 - R^*) \sum_{i,j=1}^N \sum_{r,s=1}^M \left[C_{ijr} \cos \frac{(i+j)\pi x}{a} \cos \frac{(r+s)\pi y}{b} + \right. \\ & + A_{ijr} \cos \frac{(i+j)\pi x}{a} \cos \frac{(r-s)\pi y}{b} + D_{ijr} \cos \frac{(i-j)\pi x}{a} \cos \frac{(r+s)\pi y}{b} + \\ & \left. + B_{ijr} \cos \frac{(i-j)\pi x}{a} \cos \frac{(r-s)\pi y}{b} \right] (W_r W_s - W_{or} W_{os}) \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$k=1, \dots, N; \quad l=1, \dots, M,$$

$$C_{ijr} = -\frac{\lambda^2 i r (i r - j s)}{4 C_{i+j, r+s}}; \quad A_{ijr} = \frac{\lambda^2 i r (i r + j s)}{4 C_{i+j, r-s}}; \quad D_{ijr} = \frac{\lambda^2 i r (i r + j s)}{4 C_{i-j, r+s}};$$

$$B_{ijr} = -\frac{\lambda^2 i r (i r - j s)}{4 C_{i-j, r-s}}; \quad C_{i,r} = \Delta i^4 + \left(\frac{1}{g} + \frac{2\mu_1}{\Delta} \right) \lambda^2 i^2 r^2 + \frac{1}{\Delta} \lambda^4 r^4;$$

$$\lambda = \frac{a}{b}; \quad \Delta = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}; \quad g = \frac{G}{\sqrt{E_1 E_2}}.$$

Подставляя (2.24) и (2.31) в первое уравнение (2.30) и выполняя процедуру Бубнова — Галеркина для определения безразмерных $W_{nm} = W_{nm}(t)$ получим систему нелинейных интегродифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{W}_{kl} + \frac{1}{2[1 + \Delta\mu_2 + 2(1 - \mu_1\mu_2)g]} \left\{ \Delta \left(\frac{k}{\lambda} \right)^4 + \left[\Delta\mu_2 + 4(1 - \mu_1\mu_2)g + \frac{\mu_1}{\Delta} \right] \cdot \right. \\ \left. \left(\frac{k}{\lambda} \right)^2 l^2 + \frac{1}{\Delta} l^4 \right\} (1 - R^*) (W_{kl} - W_{okl}) + \frac{3(1 - \mu_1\mu_2)}{\pi^2 [1 + \Delta\mu_2 + 2(1 - \mu_1\mu_2)g]} \times \\ \times \sum_{n,l,j=1}^N \sum_{m,r,s=1}^M \alpha_{klnmrjs} W_{nm} (1 - R^*) (W_r W_s - W_{or} W_{os}) = \\ = \frac{96\alpha_{kl} (1 - \mu_1\mu_2)g}{kl\pi^4 [1 + \Delta\mu_2 + 2(1 - \mu_1\mu_2)g]}, \end{aligned}$$

$$W_{kl}(0) = W_{okl}, \quad \dot{W}_{kl}(0) = \dot{W}_{okl}, \quad k = \overline{1, N}; \quad l = \overline{1, M}, \quad (2.32)$$

$$\delta = \frac{P_0}{EP_{kp}}, \mu_0 = \frac{P_1}{EP_{kp}}, P_{kp} = \frac{\pi^2}{3(1-\mu^2)},$$

$$\varphi_{k \text{ in } m} = \frac{\pi}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ T_{oc} \frac{\lambda}{\pi^3} m^2 \gamma_{1mk} \frac{8\lambda_{oc}\alpha_i}{i\lambda_i} (1 - \exp(-\lambda_i t)) \delta_{m-i} + \right.$$

$$+ \exp(-\lambda_i t) \left[m^2 t^2 \gamma_{1mk} C_{oi} \sigma_{m-i} \sum_{r=1}^{\infty} \left[\gamma_{1mk} \delta_{1mr} \left(\frac{n^2 r^2}{\lambda} + t^2 m^2 \right) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + 2nmir \gamma_{2mk} \delta_{2mr} \right] C_{ri} \exp(-r^2 \lambda^2 \lambda_T \pi^2 t) \right\},$$

ЗДЕСЬ

$$\gamma_{1mk} = \frac{\alpha_{n-i+k}}{n-i+k} - \frac{\alpha_{n-i-k}}{n-i-k} - \frac{\alpha_{n+i+k}}{n+i+k} + \frac{\alpha_{n+i-k}}{n+i-k},$$

$$\gamma_{2mk} = \frac{\alpha_{n+i+k}}{n+i+k} - \frac{\alpha_{n+i-k}}{n+i-k} + \frac{\alpha_{n-i+k}}{n-i+k} - \frac{\alpha_{n-i-k}}{n-i-k},$$

$$\delta_{1mr} = \delta_{m-r-1} - \delta_{m-r+1} + \delta_{m+r-1}, \quad \delta_{2mr} = \delta_{m+r-1} - \delta_{m-r-1} + \delta_{m-r+1},$$

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i - \text{нечетно} \\ 0, & \text{если } i - \text{четно} \end{cases} \quad \delta_i = \begin{cases} 1 & \text{при } i = 0 \\ 0 & \text{при } i \neq 0 \end{cases}$$

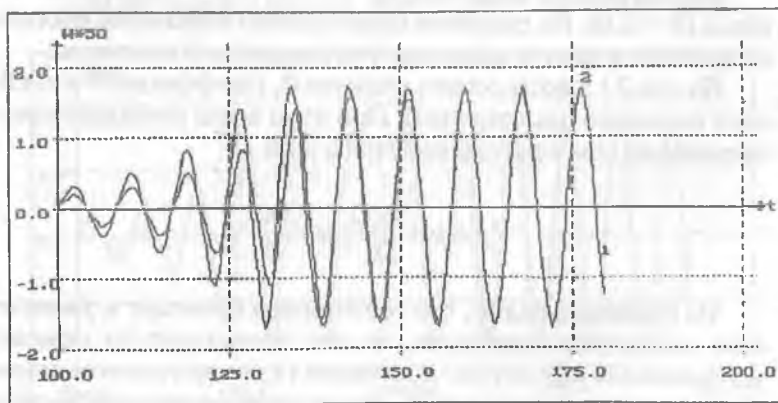


Рис. 2.15. $A=0,1$; $d=0,25$; $\beta=0,05$; $q=0$; $W_0=0,001$; $\lambda=1$; $\theta=1,5$;
 $\mu_0=0,35$; $\delta=0,5$; $T_{oc}=10$; $\lambda_T=0,12$; $\lambda_{oc}=0,07$; $\alpha_T=0(1); 2(2)$

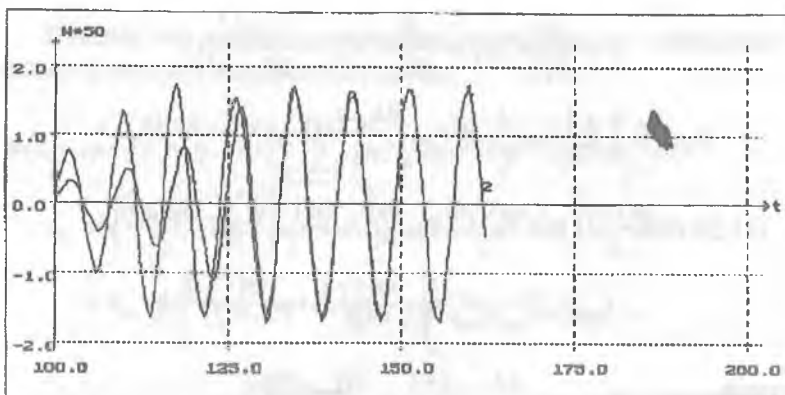


Рис. 2.16. $A=0,1$; $\alpha=0,25$; $\beta=0,05$; $q=0$; $W_0=0,001$; $\lambda=1$; $\theta=1,5$; $\mu_0=0,35$; $\delta=0,5$; $\alpha_T=2,8$; $\lambda_T=0,12$; $\lambda_{oc}=0,07$; $T_{oc}=0(1)$; $10(2)$

Интегрирование системы (2.28) выполнялось с помощью численного метода, основанного на рациональных преобразованиях, устраняющих слабосингулярные особенности интегральных и ИДУ [12,17]. При расчетах использовано ядро Колтунова – Ржаницына $R(t)=At^{d-1}exp(-\beta t)$, $A=0,1$, $\alpha=0,25$, $\beta=0,05$, $\theta=1,5$, $\mu_0=0,35$, $\delta=0,5$.

Результаты вычислений на PENTIUM-4 приведены на рис.2.15 – 2.18. На рисунках представлено изменение прогиба во времени в центре вязкоупругой квадратной пластины.

На рис.2.15 исследовано влияние d_T (коэффициент линейного теплового расширения). При этом закон начального распределения температуры получен в виде

$$T_0(x, y) = \sum_{i=1}^j T_{oi} \sin \frac{i\pi x}{a}.$$

Из графиков видно, что температура приводит к увеличению амплитуды колебания, но это происходит до момента установления амплитуды колебания (в рассмотренном случае момент установления $t=150$). После этого происходят колебания с постоянной амплитудой.

На рис.2.16 изучено влияние температуры окружающей среды. Учет температуры окружающей среды приводит к уменьшению

амплитуды колебания до определенного времени (примерно $t=140$), потом колебания происходят с постоянной амплитудой.

На рис. 2.17 показано влияние параметра λ_T . Увеличение λ_T приводит к уменьшению амплитуды колебания, кроме того, установившиеся колебания начинаются с опозданием (при $\lambda_T=0,12$ $t=150$, а при $\lambda_T=0,2$ $t=160$).

Увеличение параметра λ_{OC} также приводит к значительному уменьшению амплитуды колебаний (рис. 2.18). Здесь тоже устойчивый колебательный процесс начинается с опозданием.

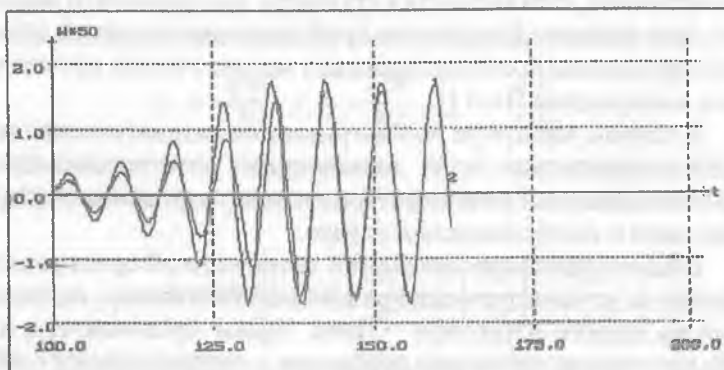


Рис. 2.17. $A=0,1$; $\alpha=0,25$; $\beta=0,05$; $\theta=0$; $W_0=0,001$; $\lambda=1$; $\theta=1,5$; $\mu_0=0,35$; $\delta=0,5$; $\alpha_T=2,8$; $T_{OC}=10$; $\lambda_{OC}=0,07$; $\lambda_T=0,12(1)$; $0,2(2)$

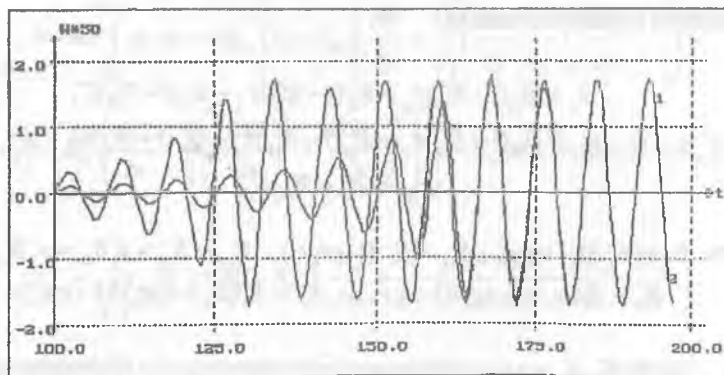


Рис. 2.18. $A=0,1$; $\alpha=0,25$; $\beta=0,05$; $\theta=0$; $W_0=0,001$; $\lambda=1$; $\theta=1,5$; $\mu_0=0,35$; $\delta=0,5$; $\alpha_T=2,8$; $T_{OC}=10$; $\lambda_T=0,12$; $\lambda_{OC}=0,07(1)$; $0,15(2)$

2.5. Математическое моделирование нелинейных задач колебаний вязкоупругих ортотропных пластин, находящихся под воздействием температуры

В различных областях машиностроения находят широкое применение армированные термостойкие стеклопластики. Стеклопластик, имея малый коэффициент теплопроводности, может выполнять в конструкции роль теплозащиты, в то же время, обладая значительными прочностными характеристиками, стеклопластик способен воспринимать значительные усилия. В хорошем приближении широкий класс конструкционных стеклопластиков можно считать ортотропным материалом [10-11].

В данном параграфе рассматриваются математические модели динамических задач вязкоупругих ортотропных пластин, находящихся в температурном поле, и решение некоторых задач в изотермическом случае.

Введем уравнение колебаний вязкоупругой ортотропной пластины в геометрически нелинейной постановке, основанной на модели Кирхгофа — Лява. Будем предполагать, что оси ортотропии материала совпадают с направлениями осей x и y . Физические соотношения между напряжениями $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, деформациями $\ell_x, \ell_y, \ell_{xy}$ и температурой T выражаются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= B_{11}(1-R_{11}^*)\ell_x + B_{12}(1-R_{12}^*)\ell_y - B_{13}(1-R_{13}^*)T, \\ \sigma_y &= B_{22}(1-R_{22}^*)\ell_y + B_{21}(1-R_{21}^*)\ell_x - B_{23}(1-R_{23}^*)T, \\ \tau_{xy} &= G(1-R_{33}^*)\ell_{xy},\end{aligned}$$

где $B_{11} = E_1/(1-\nu_1\nu_2)$, $B_{11} = E_1/(1-\nu_1\nu_2)$, $B_{12} = B_{21} = \nu_1 B_{22} = \nu_2 B_{11}$,
 $B_{13} = E_1(\alpha_1 + \nu_2\alpha_2)/(1-\nu_1\nu_2)$, $B_{23} = E_2(\alpha_2 + \nu_1\alpha_1)/(1-\nu_1\nu_2)$.

Здесь E_1, E_2 — модули упругости материала в направлении осей x и y ; G — модуль сдвига; ν_1, ν_2 — коэффициенты Пуассона, причем между ними имеется зависимость $\nu_2 E_1 = \nu_1 E_2$; α_1, α_2 — коэффициенты линейного расширения в направлении осей

Ox и Oy соответственно; R_{ij}^* — интегральные операторы с ядрами релаксации $R_{ij}(t)$:

$$R_{ij}^* \varphi = \int_0^t R_{ij}(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

$$\ell_x = \varepsilon_x + z\chi_x, \quad \ell_y = \varepsilon_y + z\chi_y, \quad \ell_z = \gamma_z + 2z\chi_z$$

Связь между деформациями в срединной поверхности $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ и перемещениями U, V, W по направлениям x, y, z примем в виде (1.3).

Для изменения кривизны имеем обычные выражения

$$\chi_x = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad \chi_y = -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \quad \chi_{xy} = -\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}.$$

Вычисляя N_x, N_y — нормальные, N_{xy} — касательные усилия, M_x, M_y — изгибающие моменты, H — крутящий момент, получим

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = hB_{11} \left\{ (1-R_{11}^*) \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial W_0}{\partial x} \right)^2 \right] \right) + \right. \\ \left. + \nu_2 (1-R_{22}^*) \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial W_0}{\partial y} \right)^2 \right] \right) \right\} - B_{11} h (\alpha_1 + \nu_2 \alpha_2) (1-R_{11}^*) T_x,$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz = hB_{22} \left\{ (1-R_{22}^*) \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial W_0}{\partial y} \right)^2 \right] \right) + \right. \\ \left. + \nu_1 (1-R_{11}^*) \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial W_0}{\partial x} \right)^2 \right] \right) \right\} - B_{22} h (\alpha_2 + \nu_1 \alpha_1) (1-R_{22}^*) T_y,$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz = Gh (1-R_{33}^*) \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial W_0}{\partial x} \frac{\partial W_0}{\partial y} \right),$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = -\frac{B_{11} h^3}{12} \left[(1-R_{11}^*) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu_2 (1-R_{22}^*) \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] - \\ - B_{11} h^2 (\alpha_1 + \nu_2 \alpha_2) (1-R_{11}^*) T_x,$$

$$M_v = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_v z dz = -\frac{B_{22} h^3}{12} \left[(1 - R_{22}^*) \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu_1 (1 - R_{11}^*) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] -$$

$$- B_{22} h^2 (\alpha_2 + \nu_1 \alpha_1) (1 - R_{22}^*) T_v,$$

$$H = -\frac{G h^3}{6} (1 - R_{33}^*) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$$

и, подставляя их в уравнения движения [10,11,15,23,30]

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + p_x - \rho h \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial N_y}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + p_y - \rho h \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial W}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial W}{\partial y} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial W}{\partial x} + N_y \frac{\partial W}{\partial y} \right) + q - \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0$$

получим следующую систему нелинейных интегродифференциальных уравнений:

$$B_{11} \left\{ (1 - R_{11}^*) \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial W_0}{\partial x} \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \right) \right] + \right.$$

$$\left. + \nu_2 (1 - R_{22}^*) \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} - \frac{\partial W_0}{\partial y} \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \right) \right] \right\} +$$

$$+ G (1 - R_{33}^*) \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial W_0}{\partial y} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial W_0}{\partial x} \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} \right\} - B_{11} (\alpha_1 + \alpha_2 \nu_2) (1 - R_{11}^*) \frac{\partial T_N}{\partial x} + \frac{p_x}{h} - \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0,$$

$$B_{22} \left\{ (1 - R_{22}^*) \left[\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial W_0}{\partial y} \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} \right) \right] + \right.$$

$$\left. + \nu_1 (1 - R_{11}^*) \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} - \frac{\partial W_0}{\partial x} \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \right) \right] \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& + G(1 - R_{33}^*) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \frac{\partial W_0}{\partial y} - \right. \\
& \left. - \frac{\partial W_0}{\partial x} \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \right) - B_{22}(\alpha_2 + \alpha_1 \nu_1)(1 - R_{11}^*) \frac{\partial T_v}{\partial y} + \frac{p_1}{h} - \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0, \\
& \frac{1}{h} \left\{ D_1(1 - R_{11}^*) \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + [D_1 \nu_2(1 - R_{11}^*) + D_2 \nu_1(1 - R_{11}^*) + 2D_0(1 - R_{11}^*)] \frac{\partial^2 W}{\partial x^2 \partial y^2} \right. \\
& \left. + D_2(1 - R_{11}^*) \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right\} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ B_{11} \left[(1 - R_{11}^*) \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial W_0}{\partial x} \right)^2 \right] \right) \right] + \right. \\
& \left. + \nu_2(1 - R_{11}^*) \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial W_0}{\partial y} \right)^2 \right] \right) \right] \frac{\partial W}{\partial x} + \right. \\
& + G(1 - R_{11}^*) \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial W_0}{\partial x} \frac{\partial W_0}{\partial y} \right) \frac{\partial W}{\partial y} \left. \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ B_{22} \left[(1 - R_{11}^*) \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial W_0}{\partial y} \right)^2 \right] \right) \right] + \nu_1(1 - R_{11}^*) \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial W_0}{\partial x} \right)^2 \right] \right) \right] \frac{\partial W}{\partial y} + \right. \\
& \left. + G(1 - R_{11}^*) \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial W_0}{\partial x} \frac{\partial W_0}{\partial y} \right) \frac{\partial W}{\partial x} \right\} - B_{11}(\alpha_1 + \nu_1 \alpha_2) \frac{\partial}{\partial x} \cdot \\
& \left[\frac{\partial W}{\partial x} (1 - R_{11}^*) T_v \right] - B_{22}(\alpha_2 + \nu_1 \alpha_1) \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial W}{\partial y} (1 - R_{11}^*) T_v \right] - B_{11} h(\alpha_1 + \nu_1 \alpha_2)(1 - R_{11}^*) \cdot \\
& \cdot \frac{\partial^2 T_M}{\partial x^2} - B_{22} h(\alpha_2 + \nu_1 \alpha_1)(1 - R_{11}^*) \frac{\partial^2 T_M}{\partial y^2} + \frac{q}{h} - \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \quad (2.29)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
T_v &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} T(x, y, z, t) dz, \quad T_M = \frac{1}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} T(x, y, z, t) z dz, \quad D_1 = \frac{B_{11} h^3}{12}, \\
D_2 &= \frac{B_{22} h^3}{12}, \quad D_0 = \frac{G h^3}{6}
\end{aligned}$$

Для определения распределения температуры возьмем уравнение теплопроводности для ортотропных твердых тел [27]:

$$k_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_3 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \rho c_T \frac{\partial T}{\partial t} = 0,$$

где $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z$ — коэффициенты теплопроводности в трех взаимно перпендикулярных направлениях, c_T — удельная теплоемкость.

Для однозначного решения поставленной несвязанной динамической задачи термовязкоупругости пластин необходимо к полученной системе разрешающих интегродифференциальных уравнений присоединить начальные и граничные условия.

Начальные и граничные условия для ортотропных пластин формулируются так же, как в работах [23, 28, 30].

На основании полученных уравнений можно решить ряд динамических задач вязкоупругих пластин, находящихся в температурном поле.

Рассмотрим некоторые задачи в частном случае.

Рассмотрим задачу о нелинейных собственных колебаниях вязкоупругой ортотропной пластины без учета температуры. Уравнение колебаний вязкоупругой ортотропной пластины (2.17) является достаточно общим. Из него можно получить уравнения движения вязкоупругих ортотропных пластин относительно поперечного прогиба W и функции напряжений Φ . При этом предположим, что

$$R_{11}(t) = R_{22}(t) = R_{33}(t) = R_{23}(t) = R(t)$$

$$\frac{1}{h}(1-R^*)\nabla_b^4(W-W_0) = L(W, \Phi) + \frac{q}{h} - \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2},$$

$$\nabla_s^4 \Phi = -\frac{1}{2}(1-R^*)[L(W, W) - L(W_0, W_0)], \quad (2.30)$$

где $\nabla_s^4 = \delta_2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\delta_3 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \delta_1 \frac{\partial^4}{\partial y^4}$,

$$\delta_1 = \frac{1}{E_1}, \delta_2 = \frac{1}{E_2}, 2\delta_3 = \frac{1}{G} - \frac{\mu_1}{E_1} - \frac{\mu_2}{E_2} = \frac{1}{G} - \frac{2\mu_1}{E_1}$$

$$\nabla_b^4 = D_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2D_2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + D_3 \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

Здесь D_3 — приведенная жесткость: $D_3 = D_1\mu_2 + 2D_2$; μ_1, μ_2 — коэффициенты Пуассона.

ОДН для $\theta/2\Omega$ в зависимости от коэффициента возбуждения при изменении T_2 от 50 до 70 с шагом 10. Оказалось, что с увеличением значений постоянной составляющей T_2 ОДН смещается вниз по ординате. Это означает, что с увеличением постоянной части температуры материал пластины проявляет вязкоупругое свойство быстрее, чем при постоянной температуре на поверхности пластины, и отсюда следует, что параметрический резонанс наступит раньше, чем упругая пластина при меньших значениях, чем $\theta = 2\Omega$.

2.4. Расчет параметрических колебаний вязкоупругих пластин под воздействием температуры

Рассмотрим в геометрически нелинейной постановке задачу о поперечных колебаниях вязкоупругой однородной изотропной пластины, нагруженной периодической продольной силой $P(t) = P_0 + P_1 \cos \theta t$. По толщине пластина нагрета равномерно, механические параметры материала постоянны, на поверхностях имеет место теплообмен. Эта задача, аналогично задаче из 1.2, после применения метода Бубнова – Галеркина сводится к решению системы нелинейных ИДУ (1.20). Вычисляя a_{klnm} , b_{klnm} , получим:

$$\begin{aligned} & \dot{W}_{kl} + P_{kl}^2 (1 - 2\mu_{kl} \cos \theta t) W_{kl} = \\ & = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{k}{\lambda} \right)^2 + I^2 \right] \left[\dot{W}_{cbl} + R^* (W_{cl} - W_{cbl}) \right] + \frac{16\alpha_{kl} q}{kl\pi^3 P_{kl}^*} - \\ & - \frac{1}{P_{kl}^*} \sum_{n=1, j=n_0}^N \sum_{m=1, r=n_0}^M a_{klnmjr} \times W_{nm} (1 - R^*) (W_{kl} W_{jr} - W_{cl} W_{nr}) - \\ & - \frac{4\alpha_{kl}}{P_{kl}^*} \sum_{n=n_0}^N \sum_{m=n_0}^M W_{nm} (1 - R^*) \varphi_{klnm}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

где

$$P_{kl}^2 = \left(\frac{k}{\lambda} \right)^2 \left\{ \frac{\left[\left(\frac{k}{\lambda} \right)^2 + I^2 \right]^2}{4 \left(\frac{k}{\lambda} \right)^2} - \delta \right\}, \quad \mu_{kl} = \frac{\mu_0}{2} \left\{ \frac{\left[\left(\frac{k}{\lambda} \right)^2 + I^2 \right]^2}{4 \left(\frac{k}{\lambda} \right)^2} - \delta \right\}^{-1},$$

$$\text{где } \omega = \sqrt{\frac{\sqrt{E_1 E_2} h^2}{6\rho(1-\mu_1\mu_2)}} \left[1 + \Delta\mu_1 + 2(1-\mu_1\mu_2)g \left(\frac{\pi}{b} \right)^4 \right]$$

Система (2.32) проинтегрирована численным методом, предложенным в главе 1. Результаты вычислений с помощью ЭВМ отражаются графиками, приведенными на рис. 2.19.

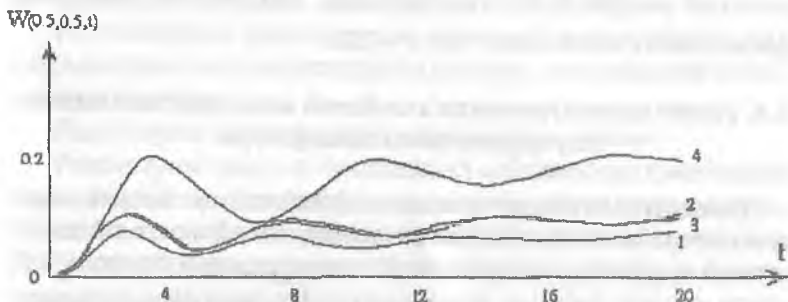


Рис. 2.19. Изменение прогиба по времени в центре вязкоупругой квадратной ортотропной пластины: 1 — из стеклопластика марки 1; 2 — из стеклопластика марки 2; 3 — из стеклопластика марки 3; 4 — из стеклопластика марки 4; $\lambda=1$, $A=0,1$, $W_{000}=10^{-4}$, $q=1$

Параметры пластины примем следующими [19] (марка 1): $E_1=2,72 \cdot 10^{10}$ Н/м²; $E_2=1,772 \cdot 10^{10}$ Н/м²; $G=0,2792 \cdot 10^{10}$ Н/м²; $\mu_1=0,142$, $\rho=1,5 \cdot 10^3$ кг/м³; $b=2 \cdot 10^{-1}$ м, $h=10^{-3}$ м, $\lambda=1$, $d=0,25$,

$W_{000}=10^{-4}$, $\dot{W}_{000}=0$; (марка 2): $E_1=11,95 \cdot 10^{10}$ Н/м², $E_2=0,95 \cdot 10^{10}$ Н/м², $G=0,457 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\mu_1=0,3$, $A=0,1$; (марка 3): $E_1=15,4 \cdot 10^{10}$ Н/м², $E_2=1,08 \cdot 10^{10}$ Н/м², $G=0,57 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\mu_1=0,28$, $\rho=1,6 \cdot 10^3$ кг/м³; (марка 4): $E_1=19,4 \cdot 10^{10}$ Н/м², $E_2=0,772 \cdot 10^{10}$ Н/м², $G=0,421 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\mu_1=0,3$, $\rho=1,63 \cdot 10^3$ кг/м³.

ГЛАВА 3. ЗАДАЧИ О ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ТЕМПЕРАТУРЫ

Рассматриваются задачи об устойчивости вязкоупругих прямоугольных пластин в геометрически нелинейной постановке под воздействием температуры. Уравнение устойчивости описывается нелинейными ИДУ в частных производных. С помощью метода Бубнова — Галеркина, основанного на многочленной аппроксимации прогибов, задача сводится к исследованию систем нелинейных ИДУ, решение которых находится численным методом, предложенным [12,17]. Вычисление числовых значений приближенного решения выполнялось с помощью PENTIUM-4. Численно исследована сходимость метода Бубнова — Галеркина. Изучены вопросы устойчивости вязкоупругих систем при широких диапазонах изменения параметров.

3.1. Расчет деформирования термовязкоупругих пластин с начальными неправильностями при однородных граничных условиях

Задачи, связанные с изучением устойчивости тонкостенных прямоугольных пластин, изготовленных из различных материалов, в упругой и вязкоупругой постановке рассматривались ранее многими авторами. Основные полученные в данной области научные результаты отражены в монографиях [11, 18, 19, 21, 23, 25, 26, 28, 30].

1. Рассмотрим задачу об устойчивости прямоугольной вязкоупругой пластины с постоянной толщиной, изготовленной из однородного изотропного материала. Допустим, что пластины со сторонами a и b подвергаются динамическому сжатию вдоль стороны a силой $P(t) = vt$ (v — скорость нагружения). Пластина шарнирно оперта по всем сторонам;

рассматривается случай изменения температуры только в срединном слое: по толщине пластинка нагрета равномерно, механические параметры материала постоянны, на поверхностях имеет место теплообмен. При этих предположениях уравнение теплопроводности имеет следующий вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_T \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - \frac{2\lambda_{oc}}{c_T \rho h} (T - T_{oc}), \quad (3.1)$$

$$\text{при начальном условии } T(x, y, 0) = T_0(x, y) \quad (3.2)$$

$$\text{и граничных условиях } x = 0, a; \quad y = 0, b; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad (3.3)$$

где T — приращение температуры, λ_T — коэффициент теплопроводности, T_{oc} — температура окружающей среды, λ_{oc} — коэффициент теплообмена пластины, c_T — удельная теплоемкость.

Решение уравнения (3.1), удовлетворяющее начальному (3.2) и граничному (3.3) условиям, имеет вид [29]:

$$T(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{8\lambda_{oc}\alpha_k}{c_T \rho h k \pi \lambda_k} T_{oc} (1 - \exp(-\lambda_k t)) + \exp(-\lambda_k t) \left[b_{0k} + \sum_{n=1}^{\infty} b_{nk} \cos \frac{n\pi y}{b} \exp\left(-\frac{n^2 \lambda \pi^2 \lambda_T}{a^2} t\right) \right] \right\} \sin \frac{k\pi x}{a},$$

$$\text{где } \lambda_k = \lambda_T \left(\frac{k\pi}{a} \right)^2 + \frac{2\lambda_{oc}}{c_T \rho h}, \quad b_{nk} = \frac{2}{ab} \int_0^b \int_0^a T_0(\xi, \eta) \sin \frac{k\pi \xi}{a} \cos \frac{n\pi \eta}{b} d\xi d\eta, \\ n=0, 1, 2, \dots; \quad k=1, 2, \dots.$$

Математическая модель этой задачи относительно функций напряжений $\Phi = \Phi(x, y, t)$, прогиба $W = W(x, y, t)$ и температуры $T = T(x, y, t)$ соответственно описывается уравнениями (1.8), (1.9) и (3.1). В случае шарнирного закрепления края пластины относительно неизвестных $W_u = W_u(t)$ имеем систему уравнений (1.20). Вычисляя a_{knm} и b_{knm} , получим:

$$\frac{1}{S} \dot{W}_u - \left(\frac{k}{\lambda} \right)^2 t W_u + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{k}{\lambda} \right)^2 + l^2 \right] (1 - R^*) (W_u - W_{0u}) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{P_{kp}^*} \sum_{n,i,j=0}^N \sum_{m,r=0}^M a_{klnmijr} W_{nm} (1-R') (W_{ir} W_{js} - W_{or} W_{os}) - \\
& - \frac{\pi \alpha_1}{\lambda^2 P_{kp}^*} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M W_{nm} (1-R') \varphi_{klnm} = \frac{16 \alpha_M q}{k l \pi^2 P_{kp}^*}, \quad (3.5)
\end{aligned}$$

где c — скорость звука в материале пластины, определяемая по формуле $c = \sqrt{E/\rho}$; P_{kp} — статическая критическая нагрузка, равная $P_{kp} = \pi^2 E (h/b)^2 / 12 (1-\mu^2)$; ω — частота основного тона колебаний, равная $\omega = \sqrt{\pi^2 E h^2 P_{kp}^* / \rho b^4}$.

$$\begin{aligned}
\varphi_{klnm} = & \frac{\pi}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ T_{\infty} \frac{\lambda}{\pi^3} m^2 \gamma_{1nik} \frac{8 \lambda_{\infty} \alpha_i}{i \lambda_i} (1 - \exp(-\lambda_i \sqrt{st})) \delta_{m-i} + \right. \\
& + \exp(-\lambda_i \sqrt{st}) \left[m^2 i^2 \gamma_{1nik} c_{\alpha} \delta_{m-i} + \sum_{r=1}^{\infty} \left[\gamma_{1nik} \delta_{lnri} \left(\frac{n^2 r^2}{\lambda} + i^2 m^2 \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2nmir \gamma_{2nik} \delta_{2nri} \right] C_n \exp(-r^2 \lambda^2 \lambda_r \pi^2 \sqrt{st}) \right] \Big\},
\end{aligned}$$

$$C_{on} = \left(\frac{\lambda}{n\pi} \right)^2, \quad C_{kn} = \frac{(k/\pi\lambda)^2 (1+n^2)}{[(k/\lambda)^2 + n^2]^2}, \quad \lambda_i = \lambda_r (i\pi)^2 + 2\lambda_{oc},$$

$$\gamma_{1nik} = \frac{\alpha_{n-i+k}}{n-i+k} - \frac{\alpha_{n-i-k}}{n-i-k} - \frac{\alpha_{n+i+k}}{n+i+k} + \frac{\alpha_{n+i-k}}{n+i-k},$$

$$\gamma_{2nik} = \frac{\alpha_{n+i+k}}{n+i+k} - \frac{\alpha_{n+i-k}}{n+i-k} + \frac{\alpha_{n-i+k}}{n-i+k} - \frac{\alpha_{n-i-k}}{n-i-k},$$

$$\delta_{lnri} = \delta_{m-r-i} - \delta_{m-r+i} + \delta_{\alpha+r-i}, \quad \delta_{2nri} = \delta_{m+r-i} - \delta_{m-r-i} + \delta_{\alpha-r-i},$$

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i - \text{нечетно} \\ 0, & \text{если } i - \text{четно} \end{cases} \quad \delta_i = \begin{cases} 1 & \text{при } i = 0 \\ 0 & \text{при } i \neq 0 \end{cases}$$

Интегрирование уравнения (3.5), полученного на основе многочисленной аппроксимации прогиба с учетом различных факторов, выполнялось с помощью численного метода, предложенного в [12,17]. Для этого запишем его

в интегральной форме. Тогда формула численного интегрирования при ядре Колтунова — Ржаницына $R(t) = At^{\alpha-1} \exp(-\beta t)$, ($0 < \alpha < 1$) примет вид:

$$\begin{aligned}
 W_{pkl} = & W_{okl} + \dot{W}_{okl} t_{p-1} + S \sum_{q=1}^p A_q (t_p - t_q) \left\{ \frac{16\alpha_{kl}}{kl\pi^4} \frac{\bar{q}_q}{P^*_{kp}} - \right. \\
 & - \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\kappa}{\lambda} \right)^2 + t^2 \right] \left[W_{okl} - W_{okl} - \frac{A}{\alpha} \sum_{z=1}^q B_z \exp(-\beta t_z) (W_{q-zkl} - W_{okl}) \right] - \\
 & - \frac{1}{P^*_{kp}} \sum_{n,j,l=1}^N \sum_{m,r,z=1}^M \alpha_{klmnrs} W_{qnm} [W_{qr} W_{qs} - W_{or} W_{os} + \\
 & + \frac{A}{\alpha} \sum_{z=1}^q B_z \exp(-\beta t_z) (W_{q-zr} W_{q-zs} - W_{or} W_{os})] + \\
 & + \left. \frac{4\alpha_T}{P^*_{kp} \lambda^2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M W_{qnm} \left[\varphi_{qklmn} - \frac{A}{\alpha} \sum_{z=1}^q B_z \exp(-\beta t_z) \varphi_{q-zklmn} \right] \right\}, \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

где A_q, B_z ($q = \overline{1, p}; z = \overline{1, q}$) — числовые коэффициенты, не зависящие от выбора подынтегральных функций и принимающие различные значения в зависимости от использованных квадратурных формул.

Результаты вычислений, выполненных с помощью ПЭВМ типа PENTIUM-4, приведены в таблице 3.1 и отражаются графиками, приведенными в рис. 3.1 — 3.12. Здесь в качестве критерия, определяющего критическое время и критическую нагрузку, принимаем условие, что стрела прогиба не должна превышать величину, равную толщине пластины.

На рис.3.1 сплошными линиями изображены кривые W_{kl} , начальная температура распределена по закону

$$T_0(x, y) = \sum_{i=0}^I T_{0i} \sin \frac{i\pi x}{a}, \quad i_0 = 1, \quad I = 3.$$

Пунктирные линии относятся к изотермическому случаю. Цифры у кривых соответствуют значениям k . Как видим, развитие бурных прогибов начинается раньше всего, при $k=2, l=1$. Таким образом, здесь следует ожидать развития динамических прогибов при двух полу волнах по длине. Ко-

эффицент динамичности, равный отношению динамической «критической» нагрузки к статической, оказывается с учетом температуры $\alpha_T=2,8$ равным $K_d=3,4$. В изотермическом случае «критической» оказывается форма выпучивания по тем же двум полуволнам ($k=2$), но коэффициент K_d здесь будет равным 4,95. Разница составляет около 26%. С увеличением безразмерного α_T эта разность также увеличивается.

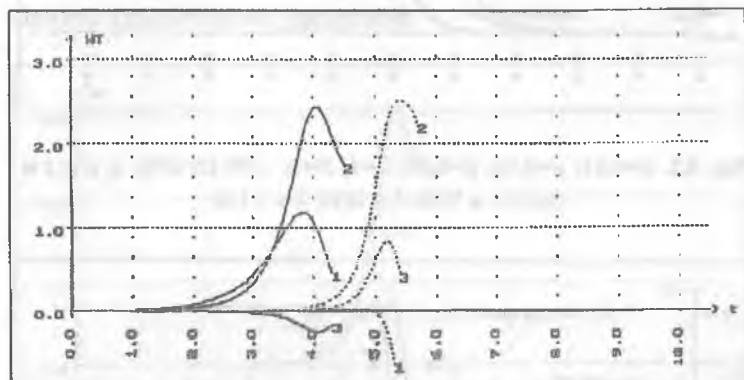


Рис 3.1. $A=0,01$; $\alpha=0,25$; $q=0$; $\lambda=1$; $W_{оис}=10^{-4}$; $S=1$; (---)-изотер. при $\alpha_T=0$; (—) — с уч. темпер. при $\alpha_T=2,8$; $e=1$ $k=1(1), 2(2), 3(3)$;

На рис.3.2 изучено влияние $T_0(x,y)$ на поведение пластины. Цифры у кривых соответствуют значениям i_0 и I : 1 и 3(1); 1 и 1(2); 2 и 2(3); 3 и 3 (4).

На рисунке приведены кривые для чисел волн k ($k=2$), при которых бурное возрастание прогибов соответствует наименьшему параметру t .

Из графиков видно, что если примем начальную температуру в виде сумм трех гармоник, то коэффициент динамичности будет наименьшим. Если примем начальное распределение температуры в виде одной фиксированной гармоники, то с увеличением числа фиксированной гармоники коэффициент динамичности увеличивается. Поэтому в дальнейших расчетах начальную температуру будем брать в виде сумм гармоник.

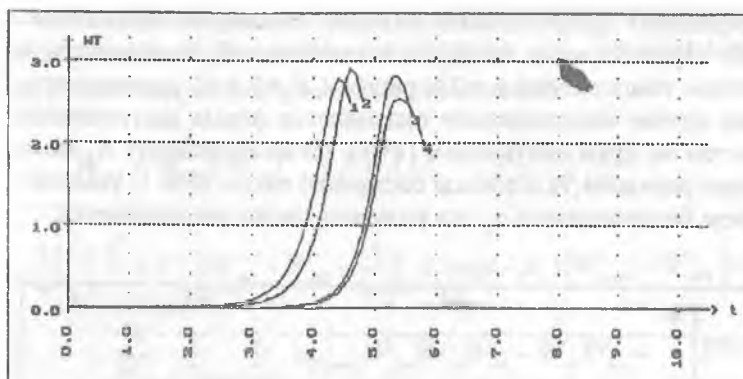


Рис. 3.2. $A=0,01$; $\alpha=0,25$; $\beta=0,05$; $\lambda=1$; $S=1$; $\lambda_T=0,12$; $\kappa=2$; t_0 и F : 1 и 3(1); 1 и 1(2); 2 и 2(3); 3 и 3 (4);

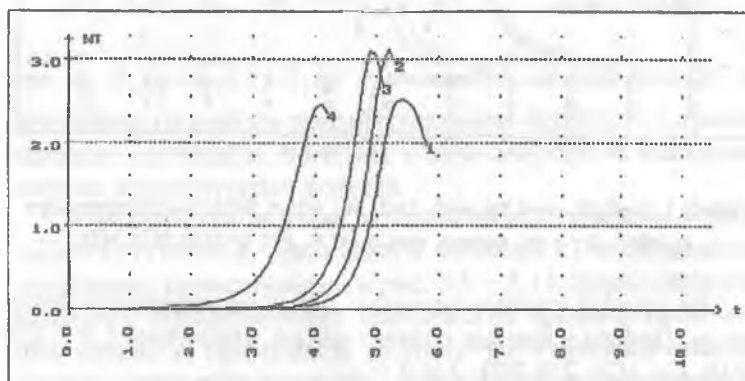


Рис 3.3. $T_{oc}=0$; $\lambda_T=0$; $\lambda_{oc}=0,07$; $A=0,01$; $\alpha=0,25$; $q=0$; $\lambda=1$; $W_{oc}=10^{-4}$; $S=1$; $\alpha_T=0(1)$; $0,5(2)$; $1(3)$; $2,8(4)$

Рис 3.3 относится к случаю квадратной пластины ($\lambda=1$) с начальной стрелой $W_{oc}=10^{-4}$ ($\dot{W}_{oc}=0$). Считаем, что поперечная нагрузка отсутствует, т.е. $q=0$. Здесь и далее ядро релаксации примем в виде $R(t) = At^{\alpha-1} \exp(-\beta t)$ с параметрами $\beta=0,05$; $\alpha=0,25$; $A=0,01$. По оси абсцисс отложен безразмерный параметр t , равный отношению перемен-

ной величины сжимающей силы к статической нагрузке, а по оси ординат – безразмерная стрела прогиба W_{kr} . Различные кривые отвечают значениям $k=1,2$. Коэффициенты динамичности K_d без учета коэффициента теплового расширения ($\alpha_T=0$) и с учетом температуры ($\alpha_T=0,5; 1; 2,8$) соответственно равны 4,65; 4,34; 3,4. Полученные результаты показывают, что учет коэффициента теплового линейного расширения α_T на пластину приводит к уменьшению критической нагрузки.

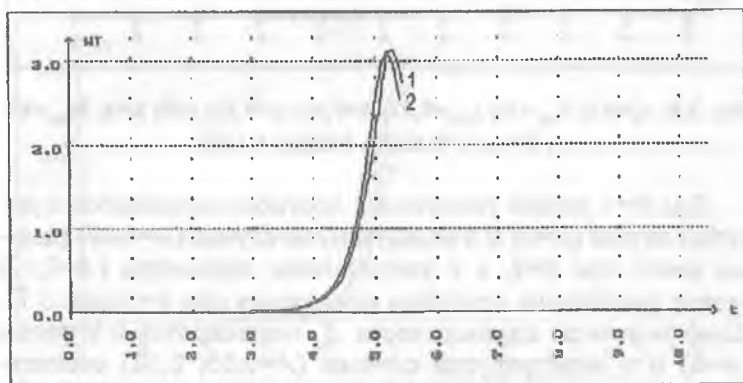


Рис. 3.4. $\alpha_T=0,5; \lambda_T=0,12; \lambda_{oc}=0,07; A=0,01; \alpha=0,25; q=0; \lambda=1;$
 $W_{oc}=10^{-4}; S=1; T_{oc}=100(1); 10(2)$

На рис.3.4 приведен аналогичный график для различных значений температуры окружающей среды $T_{oc}=100; 10; 0$. В этих случаях «критическое» значение K_d составляет соответственно 4,55; 4,6; 3,35. Видно, что по мере уменьшения значения T_{oc} кривая перемещается направо в сторону больших значений t .

Изучено также влияние параметра λ_T (коэффициент теплопроводности) (рис.3.5) на поведение пластины. При $\lambda_T=0,02; 0,05; 0,12$ «критическое» значение K_d в вязкоупругом случае составляет соответственно 3,6; 4,16; 4,6. Видно, что увеличение λ_T приводит к увеличению значения K_d .

Исследовалось влияние коэффициента теплообмена пластины λ_{oc} . Влияние этого параметра качественно похоже на влияние параметра λ_T (рис.3.6).

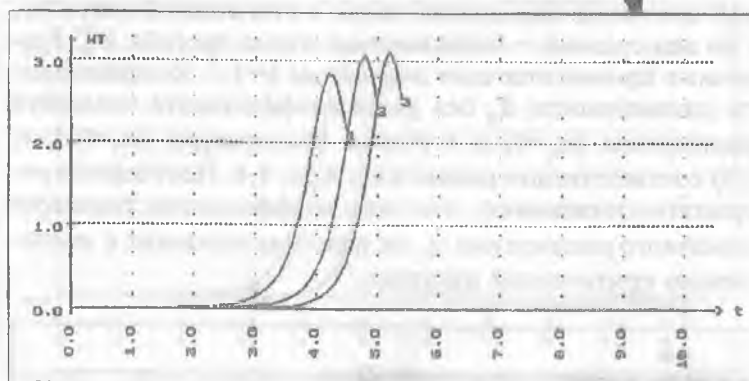


Рис. 3.5. $\alpha_T=0,5$; $T_{oc}=10$; $\lambda_{oc}=0,07$; $A=0,01$; $\alpha=0,25$; $q=0$; $\lambda=1$; $W_{обн}=10^{-4}$; $S=1$; $\lambda_1=0,02(1)$; $0,05(2)$; $0,12(3)$

Для $S=1$ резкое увеличение прогибов начинается в упругом случае ($A=0$) и в вязкоупругом случае ($A=0,05$) раньше всего при $k=2$, а с увеличением параметра ($A=0,12$) резкое увеличение прогибов начинается при $k=3$ (рис.3.7). Коэффициенты динамичности K_d оказываются в упругом ($A=0$) и в вязкоупругих случаях ($A=0,05$; $0,12$) соответственно равными 4,65; 4,5 и 4,3. Полученные результаты показывают, что учет вязкоупругих свойств материала пластин приводит к уменьшению критической нагрузки.

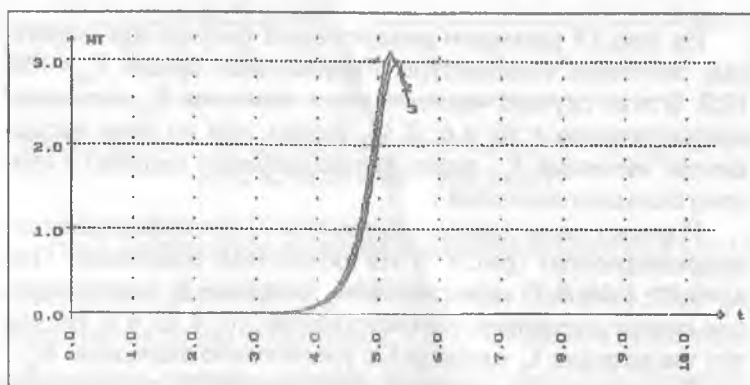


Рис. 3.6. $\alpha_T=0,5$; $T_{oc}=10$; $\lambda_1=0,12$; $A=0,01$; $\alpha=0,25$; $q=0$; $\lambda=1$; $W_{обн}=10^{-4}$; $S=1$; $\lambda_{oc}=0,07(1)$; $0,2(2)$; $0,4(3)$

На рис. 3.8 приведен аналогичный график при $A=0,1$ для различных значений параметра вязкости $d=0,1; 0,25; 0,5$. В этих случаях «критическое» значение K_d составляет 3,30; 4,42; 4,6. Видно, что по мере увеличения параметра d вся кривая перемещается вправо в сторону больших значений t .

Изучено также влияние параметра β на поведение пластины. Из полученных результатов видно, что при таком интервале изменение параметра β не оказывает существенного влияния на изменение критического времени и критическую нагрузку.

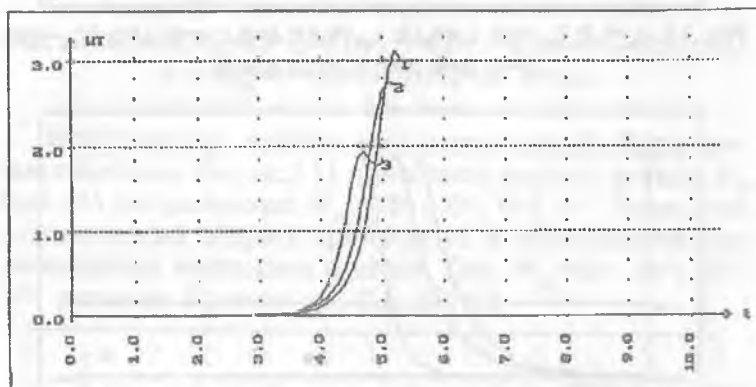


Рис. 3.7. $\alpha_T=0,5; T_{oc}=10; \lambda_T=0,12; \lambda_{oc}=0,07; \alpha=0,25; q=0; \lambda=1; W_{oc}=10^4; S=1; A=0(1); 0,05(2); 0,12(3)$

Исследовалось влияние дополнительной статической поперечной нагрузки на поведение пластины (рис. 3.9). При $S=1, q=1$ «критическое» число полуволн k оказалось равным 1, в то время как при $q=0$ было $k=2$. Соответствующее значение K_d при $q=1$ составляет 3,25, между тем как при $q=0$ оно равно 4,6.

На рис. 3.10 приведены графики кривых W_M для случая удлиненной пластины при $\lambda=0,5; 1; 2$. Результаты вычисления показывают, что при $\lambda=0,5$ и при $S=1$ значение K_d равно 4,6. Напомним, что эта величина при $\lambda=1$ равна 4,6. Сравнивая эти числа при $\lambda=1$ и $\lambda=0,5$, приходим к выводу, что найденные для квадратной пластины значения K_d в вязкоупругом случае можно с небольшой погрешностью распространить на прямоугольные пластины иной конфигурации.

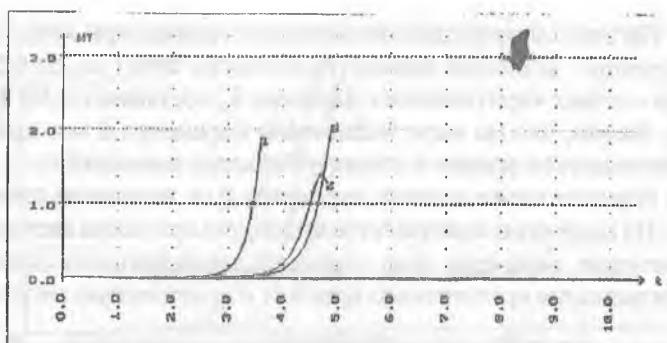


Рис. 3.8. $\alpha_T=0,5$; $T_{OC}=10$; $\lambda_T=0,12$; $\lambda_{OC}=0,07$; $A=0,1$; $q=0$; $\lambda=1$; $W_{OC}=10^{-4}$; $S=1$; $\alpha=0,1(1)$; $0,25(2)$; $0,5(3)$;

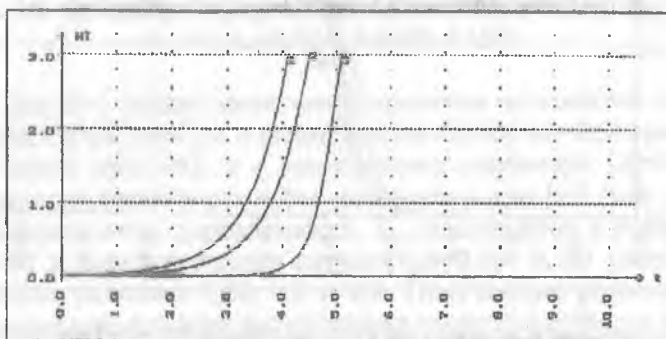


Рис. 3.9. $\alpha_T=0,5$; $T_{OC}=10$; $\lambda_T=0,12$; $\lambda_{OC}=0,07$; $A=0,01$; $\alpha=0,25$; $\lambda=1$; $W_{OC}=10^{-4}$; $S=1$; $q=1(1)$; $0,5(2)$; $0(3)$

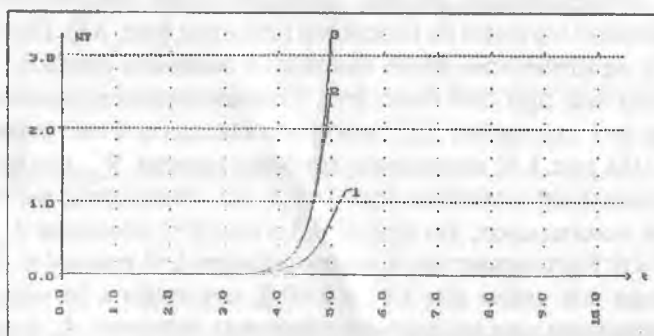


Рис. 3.10. $\alpha_T=0,5$; $T_{OC}=10$; $\lambda_T=0,12$; $\lambda_{OC}=0,07$; $A=0,1$; $q=0$; $\alpha=0,25$; $W_{OC}=10^{-4}$; $S=1$; $\lambda=2(1)$; $1(2)$; $0,5(3)$

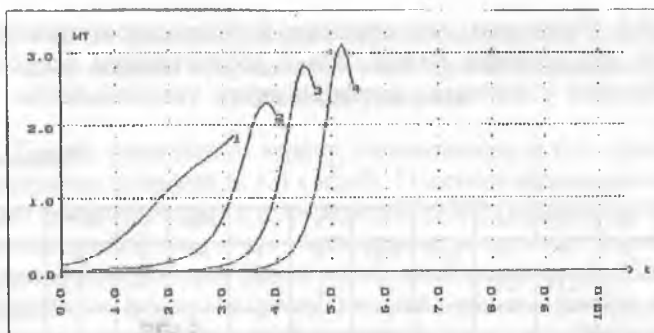


Рис. 3.11. $\alpha_T=0,5$; $T_{OC}=10$; $\lambda_T=0,12$; $\lambda_{OC}=0,07$; $A=0,1$; $q=0$; $\alpha=0,25$; $\lambda=1$; $S=1$; $W_{0kl}=10^{-1}(1)$; $10^{-2}(2)$; $10^{-3}(3)$; $10^{-4}(4)$;

Исследовалось влияние начального прогиба на поведение пластины. На рис.3.11 приведены графики кривых W_{kl} при $S=1$ для различных $W_{0kl}=10^{-1}$; 10^{-2} ; 10^{-3} ; 10^{-4} . Видно, что динамический эффект проявляется в последовательном уменьшении начального прогиба. При $W_{0kl}=10^{-1}$; 10^{-2} ; 10^{-3} ; 10^{-4} значение K_D равно 1,7; 3,1; 3,9; 4,6.

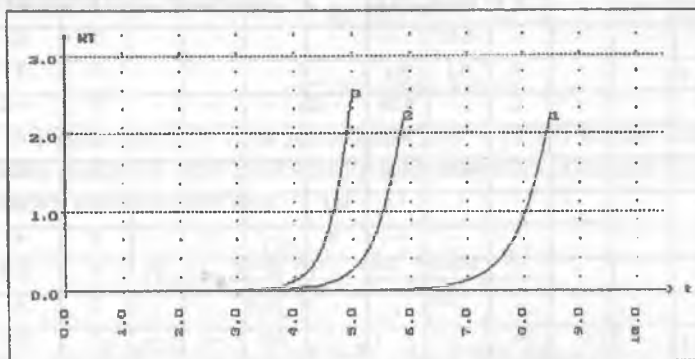


Рис.3.12. $\alpha_T=0,5$; $T_{OC}=10$; $\lambda_T=0,12$; $\lambda_{OC}=0,07$; $A=0,01$; $q=0$; $\alpha=0,25$; $\lambda=1$; $W_0=10^{-1}$; $S=0,1(1)$; $0,5(2)$; $1(3)$;

На рис.3.12 приведен график функции W_{kl} для различных значений S . Найдены кривые, отвечающие таким значениям k и l , при которых возрастание прогиба является интенсивным. При $S=0,1$; $0,5$; 1 «критические» значения K_D в вязкоупругом случае составляют соответственно 8,0;

5,45; 4,6. Напомним, что параметр S обратнопропорционален v^2 . Из графика видно, что с возрастанием скорости нагружения v значение коэффициента увеличивается.

Таблица 3.1

$\alpha\tau$	$T_{\alpha\tau}$	λ_T	$\lambda_{\alpha\tau}$	A	α	q	λ	$W_{н\kappa}$	S	$k, l=1$	K_{λ}
0	0	0	0	0,01	0,25	0	1	10^{-1}	1	2	4,9
0,5	-	0,12	0,07	-	-	-	-	-	-	2	4,65
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	4,34
2,8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	3,4
0,5	100	-	-	-	-	-	-	-	-	2	4,55
-	10	-	-	-	-	-	-	-	-	2	4,6
-	-	0,02	-	-	-	-	-	-	-	2	3,6
-	-	0,05	-	-	-	-	-	-	-	2	4,16
-	-	0,12	0,07	-	-	-	-	-	-	2	4,6
-	-	-	0,2	-	-	-	-	-	-	2	4,65
-	-	-	0,4	-	-	-	-	-	-	2	4,70
-	-	-	0,07	0	-	-	-	-	-	2	4,65
-	-	-	-	0,05	-	-	-	-	-	2	4,5
-	-	-	-	0,12	-	-	-	-	-	3	4,3
-	-	-	-	0,1	0,1	-	-	-	-	3	3,3
-	-	-	-	-	0,25	-	-	-	-	2	4,42
-	-	-	-	-	0,2	-	-	-	-	2	4,6
-	-	-	-	0,01	0,1	1	-	-	-	1	3,25
-	-	-	-	-	-	0,5	-	-	-	1	3,75
-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	2	4,6
-	-	-	-	-	-	-	2	-	-	3	5,10
-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	2	4,6
-	-	-	-	-	-	-	0,5	-	-	1	4,6
-	-	-	-	-	-	-	1	10^{-1}	-	1	1,7
-	-	-	-	-	-	-	-	10^{-2}	-	2	3,1
-	-	-	-	-	-	-	-	10^{-3}	-	2	3,9
-	-	-	-	-	-	-	-	10^{-4}	-	2	4,6
-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,1	3	8,0
-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,5	2	5,45
-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	2	4,6

3.2. Расчет деформирования термовязкоупругих пластин с начальными неправильностями при неоднородных граничных условиях

Теперь рассмотрим задачу, приведенную в п.1. при неоднородных условиях (1.13) ($M_r \neq 0$). Пластина шарнирно оперта по всем сторонам, к поверхности $z=h/2$ подводится тепло, причем количество тепла, подводимое за единицу времени к единице поверхности, равно постоянной величине q_T . Нижняя поверхность пластины ($z=-h/2$) и края пластины ($x=0, a; y=0, b$) предполагаются идеально теплоизолированными. Распределение температуры при этом зависит только от координаты z и времени t . Тогда в уравнениях (1.8) и (1.9) температурные слагаемые будут отсутствовать, они входят в граничные условия, а уравнение (1.10) примет следующий вид:

$$a_T \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.7)$$

при начальном условии $T=0$ при $t=0$, (3.8)

и граничных условиях $\lambda_T \frac{\partial T}{\partial z} = q_T$ при $z = \frac{h}{2}$ (3.9)

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \text{ при } z = -\frac{h}{2} \quad (3.10)$$

Решение (3.7) при условиях (3.8) – (3.10) легко может быть найдено при помощи преобразования Лапласа [22] и имеет следующий вид:

$$T(z, t) = \frac{q_T h}{\lambda_T} \left[\frac{\alpha_T t}{h^2} + \frac{12z^2 + 12hz - h^2}{24h^2} - \frac{2}{h^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \exp\left(-\frac{n^2 a_T \pi^2}{h^2} t\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2} \left(\frac{2z}{h} + 1\right)\right) \right] \quad (3.11)$$

Это решение, подставляемое в (1.9а), примет вид M_r :

$$M_r = \frac{q_T h^3}{24\lambda_T} \left(1 - \frac{96}{\pi^4} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{n^2} \exp\left(-\frac{n^2 a_T \pi^2}{h^2} t\right) \right) \quad (3.12)$$

При принятых предположениях математическая модель этой задачи относительно функций напряжения $\Phi = \Phi(x, y, t)$,

прогиба $W=W(x, y, t)$ и температуры $T=T(z, t)$ описывается уравнениями (1.23), (1.24) и (3.7).

В случае шарнирного закрепления края пластины относительно неизвестных $W_{kl}=W_{kl}(t)$ имеем систему уравнений (1.40). Для удобства \dot{W}_{kl} напомним в виде W_{kl} .

Вычисляя в (1.40) α_{klmn} и b_{klmn} и введя для (3.12) следующие безразмерные величины:

$$\frac{W_{kl}}{h}, \frac{W_{0kl}}{h}, \frac{\omega t}{\sqrt{S}}, \frac{\sqrt{S}}{\omega} R(t), \bar{q} = \frac{q}{E} \left(\frac{b}{h}\right)^4, \frac{P}{E} \left(\frac{b}{h}\right)^4, M_T \frac{12a_T b^3}{h^4},$$

$$\frac{a_T q_T b^2}{2h\lambda_T}, \frac{a_T}{\omega h^2}$$

и сохраняя при этом прежние обозначения, получим:

$$\frac{1}{S} \ddot{W}_{kl} - \left(\frac{k}{\lambda}\right)^2 t (M_T K_{kl} + W_{kl}) + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{k}{\lambda}\right)^2 + I^2 \right] (1 - R^*) (W_{kl} - W_{0kl}) =$$

$$= \frac{16a_M \bar{q}}{kl\pi^4 P_{kp}} - \frac{1}{P_{kp}} \sum_{n,j=0,2,4,\dots} \sum_{m,r=0,2,4,\dots} (M_T K_{nm} + W_{nm}) (1 - R^*) [a_{klmnpr} \times$$

$$\times (W_{pr} W_{jn} - W_{0pr} W_{0jn}) - M_T (M_T a_{klmnpr} + W_{kl} a_{kljnmpr})] + \ddot{W}_T K_{kl},$$

$$W_{kl}(0) = W_{0kl}, \quad \dot{W}_{kl}(0) = \dot{M}_T(0) K_{kl},$$

безразмерный M_T имеет вид

$$M_T = q_1 \left[1 - \frac{96}{\pi^4} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{n^4} \exp[-n^2 a_T \pi^2 t] \right] \quad (3.14)$$

Систему (3.13) решаем численным методом, предложенным в [12,17]. Для этого запишем ее в интегральной форме, тогда формула численного интегрирования при ядре Колтунова - Ржаницына $R(t) = At^{a-1} \exp(-\beta t)$, ($0 < a < 1$) примет вид:

$$W_{kl} = W_{0kl} + W_{0kl} t_{p-1} + S \sum_{q=1}^p A_q (t_p - t_q) \left[\frac{16a_M \bar{q}_1}{kl\pi^4 P_{kp}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4} \left[\left(\frac{k}{\lambda}\right)^2 + I^2 \right] \left[W_{qkl} - W_{0kl} - \frac{A}{\alpha} \sum_{z=1}^q B_z \exp(-\beta t_z) (W_{q-z;kl} - W_{0kl}) \right] \right]$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{P_{kp}^*} \sum_{n,l,j=0}^N \sum_{m,r,s=0}^M (M_{Tq} K_{kl} + W_{qnm}) \left[\alpha_{k \ln m r s} (W_{qnr} W_{qrs} - W_{qnr} W_{qrs}) + \right. \\
& \quad \left. + M_{Tq} (M_{Tq} \alpha_{1k \ln m r s} + W_{qns} \alpha_{2k \ln m r s}) \right] + \\
& + \frac{A}{\alpha} \frac{1}{P_{kp}^*} \sum_{n,l,j=0}^N \sum_{m,r,s=0}^M (M_{Tq} K_{kl} + W_{qnm}) \left[\alpha_{k \ln m r s} \times \right. \\
& \quad \times \sum_{z=1}^q B_z \exp(-\beta t_z) (W_{q-zr} W_{q-zs} - W_{qnr} W_{qrs}) - \\
& \quad \left. - M_{Tq} (M_{Tq} \alpha_{1k \ln m r s} + W_{qns} \alpha_{2k \ln m r s}) \right] + \ddot{M}_{Tq} K_{kl} \Big\}, \tag{3.15}
\end{aligned}$$

где A_q, B_z ($q = \overline{1, p}; z = \overline{1, q}$) — числовые коэффициенты, не зависящие от выбора подынтегральных функций, принимающих различные значения в зависимости от использованных квадратурных формул.

Результаты вычислений, выполненных с помощью ПЭВМ типа PENTIUM-4, приведены в таблице 3.2 и отражаются графиками, приведенными в 3.13 — 3.20. Здесь в качестве критерия, определяющего критическое время и критическую нагрузку, принимаем условия, что стрела прогиба не должна превышать величину, равную толщине пластины.

На рис. 3.13 приведен прогиб в центре пластины, в зависимости от времени отвечающий таким значениям k и l , при которых возрастание прогиба является интенсивным. Цифры у кривых соответствуют значениям q_T : 0(1), 80(2), 125(3). Видно, что с возрастанием q_T критическое время уменьшается. В этих случаях «критическое» значение коэффициента динамичности K_d составляет соответственно 4,85, 4,58, 4,45. «Критические» числа полуволн k и l соответственно равны: 2 и 1(1), 3 и 1(2), 1и 1(3). Из этого видно, что увеличение q_T до некоторого значения приводит к появлению высших форм выпучивания. С дальнейшим увеличением значения q_T эффект появления высших форм выпучивания ослабевает.

На рис. 3.14 приведен аналогичный график для различных значений параметра α_T . Цифры у кривых соответствуют значениям α_T . При увеличении α_T коэффициент динамичности уменьшается. Значения K_d в этих случаях составили 4,70, 4,58, 3,50.

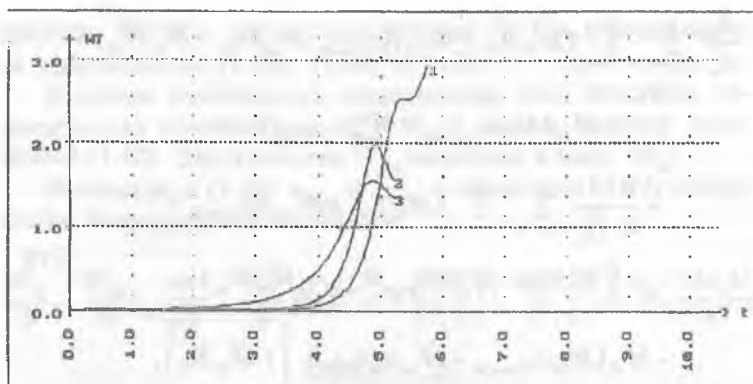


Рис. 3.13. $\alpha_T=10^{-4}$; $A=0,01$; $\alpha=0,25$; $\beta=0,05$; $q=0$; $\lambda=1$; $W_{обс}=10^{-4}$; $S=1$;
 $d_T=0(1)$; $80(2)$; $125(3)$

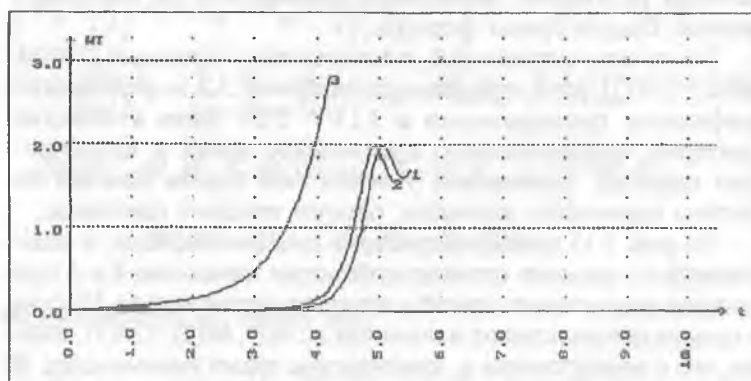


Рис. 3.14. $d_T=80$; $A=0,01$; $\alpha=0,25$; $\beta=0,05$; $q=0$; $\lambda=1$; $W_{обс}=10^{-4}$; $S=1$;
 $d_T=10^{-6}(1)$; $10^{-2}(2)$; $10^{-3}(3)$

Коэффициенты динамичности K_d оказываются в вязкоупругих случаях ($A=0,01$; $0,05$; $0,1$) соответственно равными $4,57$; $4,70$ и $4,58$. Полученные результаты показывают, что учет вязкоупругих свойств материала пластины приводит к уменьшению критической нагрузки (рис.3.15).

На рис. 3.16 приведен аналогичный график при $A=0,1$ для различных значений параметра вязкости $d=0,1$; $0,25$; $0,5$; $0,75$. В этих случаях «критическое» значение K_d состав-

ляет 4,23; 4,58; 4,7; 4,75. Видно, что по мере увеличения параметра α вся кривая перемещается вправо в сторону больших значений t .

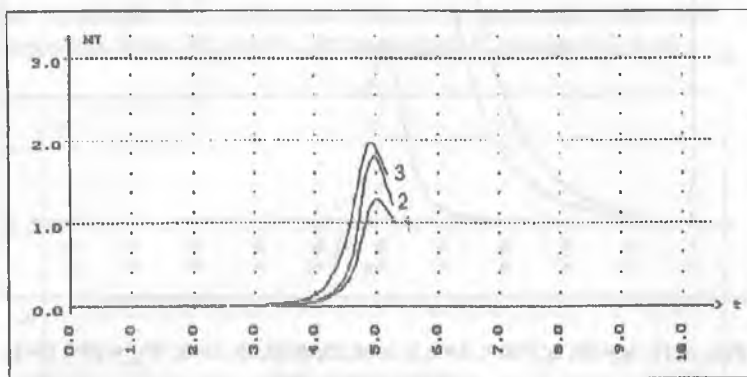


Рис. 3.15. $q_T=80$; $\alpha_T=10^{-4}$; $\alpha=0,25$; $\beta=0,05$; $q=0$; $\lambda=1$; $W_{\text{кв}}=10^{-4}$; $S=1$;
 $A=0,01(1)$; $0,05(2)$; $0,1(3)$

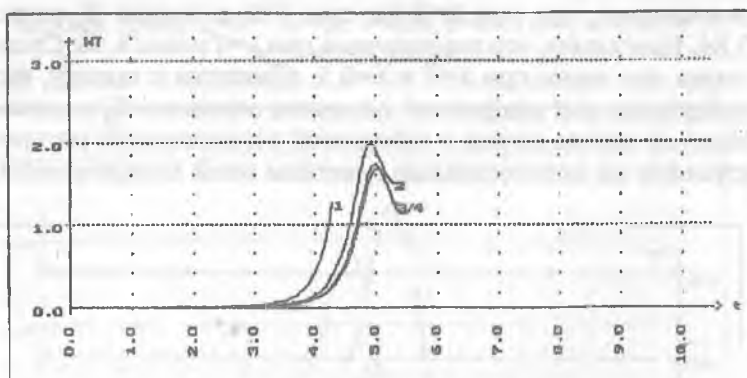


Рис. 3.16. $q_T=80$; $\alpha_T=10^{-4}$; $A=0,1$; $\beta=0,05$; $q=0$; $\lambda=1$; $W_{\text{кв}}=10^{-4}$; $S=1$;
 $\alpha=0,1(1)$; $0,25(2)$; $0,5(3)$; $0,75(4)$

Исследовалось влияние дополнительной статической поперечной нагрузки на поведение пластины (рис. 3.17). При $S=1$ и $q=1$ «критическое» число полуволн k оказалось равным 1, в то время как при $q=0$ было $k=2$. Соответствующее значение $K_{\text{л}}$ при $q=1$ составляет 2,75, между тем как при $q=0$ оно равно 4,58.

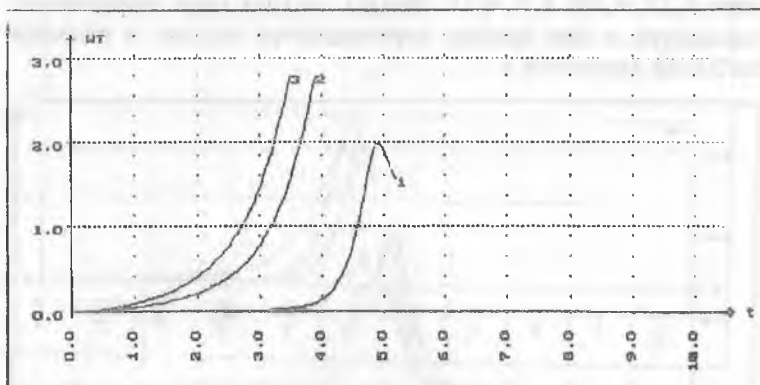


Рис. 3.17. $q_T=80$; $\alpha_T=10^{-4}$; $A=0,1$; $\alpha=0,25$; $\beta=0,05$; $\lambda=1$; $W_{\text{ок}}=10^{-4}$; $S=1$;
 $q=0(1)$; $0,5(2)$; $1(3)$

На рис. 3.18 приведены графики кривых W_M для случая удлиненной пластины при $\lambda=0,5$; 2. Результаты вычислений показывают, что при $\lambda=0,5$ и при $S=1$ значение K_T равно 3,84. Напомним, что эта величина при $\lambda=1$ равна 4,58. Сравнивая эти числа при $\lambda=1$ и $\lambda=0,5$, приходим к выводу, что найденные для квадратной пластины значения K_M в вязкоупругом случае можно с небольшой погрешностью распространить на прямоугольные пластины иной конфигурации.

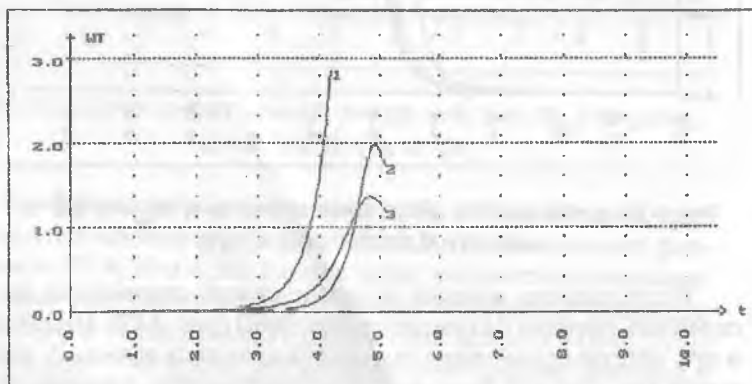


Рис. 3.18. $q_T=80$; $\alpha_T=10^{-4}$; $A=0,1$; $\alpha=0,25$; $\beta=0,05$; $q=0$; $W_{\text{ок}}=10^{-4}$; $S=1$;
 $\lambda=0,5(1)$; $1(2)$; $2(3)$

Исследовалось влияние начального прогиба на поведение пластины. На рис. 3.19 приведены графики кривых W_{kl} при $S=1$ для различных $W_{0kl}=10^{-3}; 10^{-4}$. Видно, что динамический эффект проявляется в последовательном уменьшении начального прогиба. При $W_{0kl}=10^{-3}; 10^{-4}$ значения K_{λ} равны 4,2; 4,58.

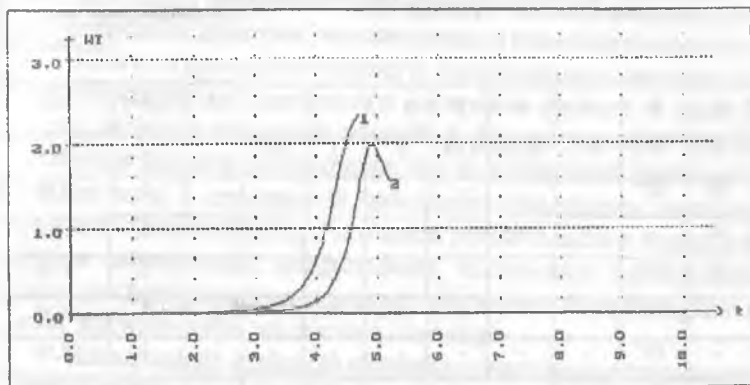


Рис. 3.19. $q_T=80$; $\alpha_T=10^{-4}$; $A=0,1$; $\alpha=0,25$; $\beta=0,05$; $q=0$; $\lambda=1$; $S=1$;
 $W_{0kl}=10^{-3}(1); 10^{-4}(2)$

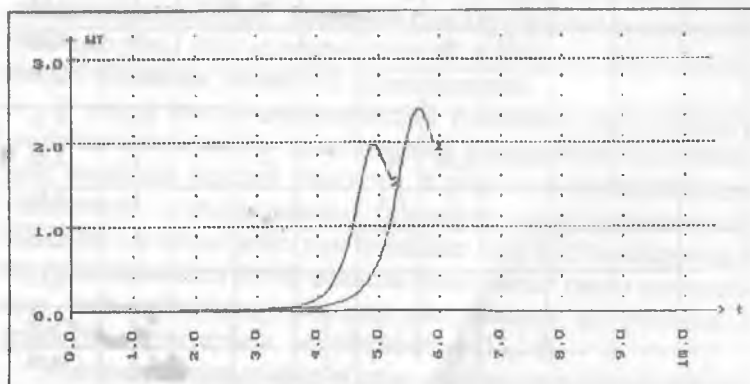


Рис. 3.20. $q_T=80$; $\alpha_T=10^{-4}$; $A=0,1$; $\alpha=0,25$; $\beta=0,05$; $q=0$; $W_{0kl}=10^{-4}$; $\lambda=1$;
 $S=0,5(1); 1(2)$

На рис.3.20 приведен график кривых W_{kl} для различных значений S . Найдены кривые, отвечающие таким зна-

чениям k и λ , при которых возрастание прогиба является интенсивным. При $S=0,5; 1$ «критические» значения K_d в вязкоупругом случае составляют соответственно 5,10; 4,87. Напомним, что параметр S обратнопропорционален ν^2 . Из графика видно, что с возрастанием скорости нагружения ν значение коэффициента увеличивается.

Таблица 3.2

q_T	a_T	A	α	β	\bar{q}	λ	W_{kz}	S	$K_{l=1}$	K_d
0	0	0,1	0,25	0,05	0	1	10^{-4}	1	2	4,85
80	10^{-4}	-	-	-	-	-	-	-	3	4,58
125	-	-	-	-	-	-	-	-	1	4,45
80	10^{-6}	-	-	-	-	-	-	-	3	4,70
-	10^{-4}	-	-	-	-	-	-	-	3	4,58
-	10^{-3}	-	-	-	-	-	-	-	3	4,50
-	10^{-4}	0,01	-	-	-	-	-	-	3/1	4,75
-	-	0,05	-	-	-	-	-	-	3	4,70
-	-	0,1	-	-	-	-	-	-	3	4,58
-	-	-	0,1	-	-	-	-	-	3	4,23
-	-	-	0,25	-	-	-	-	-	3	4,58
-	-	-	0,5	-	-	-	-	-	3	4,7
-	-	-	0,75	-	-	-	-	-	3/1	4,75
-	-	-	0,25	0,05	0	-	-	-	3	4,48
-	-	-	-	-	0,5	-	-	-	1	3,21
-	-	-	-	-	1	-	-	-	1	2,75
-	-	-	-	-	0	0,5	-	-	1	3,84
-	-	-	-	-	-	1	-	-	3	4,58
-	-	-	-	-	-	2	-	-	3	4,58
-	-	-	-	-	-	1	10^{-3}	-	2	4,2
-	-	-	-	-	-	-	10^{-4}	-	3	4,58
-	-	-	-	-	-	-	-	0,5	3	4,58
-	-	-	-	-	-	-	-	1	3	5,10

3.3. Математическое моделирование динамической устойчивости вязкоупругих ортотропных пластин, находящихся под воздействием температуры

В данном параграфе рассматривается математическая модель задач динамической неустойчивости вязкоупругих ортотропных пластин, находящихся в температурном поле.

Задача термоустойчивости однородной пластины из ортотропного вязкоупругого материала состоит в следующем: имеется пластина заданной формы, которая неравномерно нагрета по толщине и в ее срединной плоскости, кроме того, в срединной плоскости приложены внешние усилия; пластина может потерять устойчивость в зонах действия сжимающих напряжений, вызванных неравномерным распределением температуры и внешними усилиями или какими-либо жесткими связями.

Наименьшее значение силовые и тепловые нагрузки, при которых основная плоская форма равновесия перестает быть единственной и устойчивой, называют критическим. Критические значения сил и температуры можно получить, допустив, что пластина имеет некоторую начальную кривизну или поперечную нагрузку. Значения сил в срединной плоскости и температуры, при которых прогиб стремится стать бесконечно большим, являются критическими.

В такой чисто механической трактовке термического выпучивания расчет критических температур, критических внешних усилий сводится к решению динамических уравнений и вычислению температурных напряжений, прогиба с учетом действия внешних сил и к последующему исследованию устойчивости возможных форм равновесия под действием заданных напряжений на основании известных критериев устойчивости [15,23].

Математическая модель описывается уравнением (2.28). Это система нелинейных интегродифференциальных уравнений движений вязкоупругой ортотропной оболочки относительно перемещений U, V и W . Уравнение (2.28) является достаточно общим. Из него можно получить математические модели различных динамических задач вязкоупругих ортотропных пластин.

Рассмотрим задачу об устойчивости прямоугольной вязкоупругой ортотропной пластины. Допустим, что вязкоупругая ортотропная пластина со сторонами a и b подвергается динамическому сжатию вдоль стороны a силой $P(t) = vt$. Считаем, что пластина шарнирно закреплена по краям. В качестве математической модели вышеуказанной задачи примем уравнение (2.30). Тогда функцию напряжений данной задачи находим в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, t) = & \sqrt{E_1 E_2} (1 - R^*) \sum_{i, j=0, 1, 2, \dots}^K \sum_{r, s=0, 1, 2, \dots}^M \left[C_{ijs} \cos \frac{(i+j)\pi x}{a} \cos \frac{(r+s)\pi y}{b} + \right. \\ & + A_{ijs} \cos \frac{(i+j)\pi x}{a} \cos \frac{(r-s)\pi y}{b} + D_{ijs} \cos \frac{(i-j)\pi x}{a} \cos \frac{(r+s)\pi y}{b} + \\ & \left. + B_{ijs} \cos \frac{(i-j)\pi x}{a} \cos \frac{(r-s)\pi y}{b} \right] (W_{ir} W_{js} - W_{or} W_{os}) - \frac{P(t) y^2}{2} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Введем следующие безразмерные величины

$$\begin{aligned} \frac{W_{ir}}{h}, \frac{W_{or}}{h}, p^* &= \frac{p}{\sqrt{E_1 E_2}} \left(\frac{b}{h} \right)^2, q^* = \frac{q}{\sqrt{E_1 E_2}} \left(\frac{b}{h} \right)^4, \\ t^* &= \frac{p}{p_{kp}} = \frac{vt}{p_{kp}} = \frac{\omega t}{\sqrt{S}} = \frac{p^*}{p_{kp}^*}, \\ S &= p_{kp}^2 \left(\frac{\pi C \sqrt{E_1 E_2} h^3}{\nu b^4} \right)^2, p_{kp}^* = \frac{p_{kp}}{\sqrt{E_1 E_2}} \left(\frac{b}{h} \right)^2 = \\ &= \frac{\pi^2}{6(1 - \mu_1 \mu_2)} |1 + \Delta \mu_2 + 2(1 - \mu_1 \mu_2)g| \frac{\sqrt{S}}{\omega} R(t), \end{aligned}$$

где C — скорость звука в материале пластины, определяемая по формуле $C = \sqrt{E_1 E_2 / \rho}$; p_{kp} — статическая критическая нагрузка, ω — основная частота для квадратной пластинки:

$$p_{kp} = \frac{2\pi^2 \sqrt{D_1 D_2}}{b^2 h} \left(1 + \frac{D_3}{\sqrt{D_1 D_2}} \right), \quad \omega = \sqrt{\frac{\pi^2 \sqrt{E_1 E_2} h^2}{\rho b^4}} p_{kp}^*.$$

Подставляя выражения для W , W_0 и (3.16) в первое уравнение (2.30) для определения безразмерных $W_{nm} = W_{nm}(t)$, получим следующую систему нелинейных интегродифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{S} \ddot{W}_n + \omega_n^2 (1 - R^*) (W_n - W_{0n}) - \left(\frac{k}{\lambda}\right)^2 r^* W_n - \frac{16\alpha_n q^*}{P_{kr}^* k \pi^4 l} + \\ & + \frac{1}{P_{kr}^*} \sum_{n,j,l=0}^N \sum_{m,r,s=0}^M a_{klmrs} W_{nm} (1 - R^*) (W_n W_r - W_{0n} W_{0r}) = 0, \quad (3.17) \\ & W_n(0) = W_{0n}, \dot{W}_n(0) = \dot{W}_{0n}, k = \overline{n_0, N}, l = \overline{m_0, M}, \end{aligned}$$

где обозначено

$$\omega_n^2 = \frac{\Delta \left(\frac{k}{\lambda}\right)^4 + 2[\Delta \mu_2 + 2(1 - \mu_1 \mu_2)g] \left(\frac{k}{\lambda}\right)^2 \ell^2 + \frac{1}{\Delta} \ell^4}{2[1 + \Delta \mu_2 + 2(1 - \mu_1 \mu_2)g]}.$$

В дальнейшем будет производиться сравнение численных результатов, полученных из решения с многочленной аппроксимацией прогиба и решения, основанного на одночленной аппроксимации. В случае одночленной аппроксимации прогиба система (3.17) относительно неизвестного примет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{S} \ddot{W}_{nm} + \omega_{nm}^2 (1 - R^*) (W_{nm} - W_{0nm}) - \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2 r^* W_{nm} - \\ & - \frac{16\alpha_{nm} q^*}{P_{kr}^* n \pi^4} + \frac{\pi^2}{16P_{kr}^*} \left[\Delta \left(\frac{n}{\lambda}\right)^4 + \frac{1}{\Delta} m^4 \right] W_{nm} (1 - R^*) (W_{nm}^2 - W_{0nm}^2) = 0, \quad (3.18) \\ & W_{nm}(0) = W_{0nm}, \dot{W}_{nm}(0) = \dot{W}_{0nm}. \end{aligned}$$

Интегрирование (3.17) и (3.18) на основе одночленной и многочленной аппроксимаций прогибов для различных скоростей нагружения и параметров пластин выполнялось с помощью численного метода, предложенного в работах [12,17]. При этом в качестве ядра релаксации использовано ядро Колтунова – Ржаницына. Результаты вычислений, выполненных на PENTIUM-4, отражаются в гра-

фиках, приведенных на рис.3.21 – 3.24. Здесь так же, как и в [23], в качестве критерия, определяющего критическое время, а вместе с тем критическую нагрузку, принимаем условие, что стрела прогиба не должна превышать величину, равную толщине пластины.

На рис.3.21 приведены зависимости безразмерной стрелы прогиба W_{nm} от безразмерного параметра t^* , равного отношению средней величины сжимающей силы к статической нагрузке для различных значений коэффициента вязкости A . Для параметра пластины примем данные стеклопластика (марка 1) (см. 2.5). $E=2,72 \cdot 10^{10}$ Н/м²; $E_2=1,772 \cdot 10^{10}$ Н/м²; $G=0,2792 \cdot 10^{10}$ Н/м²; $\mu_1=0,142$, $\rho=1,5 \cdot 10^3$ кг/м³; $\nu=0,575 \cdot 10^4$ ат/с, $b=2 \cdot 10^{-1}$ м, $h=10^{-3}$ м, $\lambda=1$, $d=0,25$, $W_{0nm}=10^{-4}$, $\dot{W}_{0nm}=0$. На этом рисунке представлены кривые для такого числа волн n , при котором бурное возрастание прогибов соответствует наименьшему параметру t^* . Как видим, коэффициент динамичности K_D равный отношению динамической критической нагрузки к статической, при $A=0; 0,05; 0,1; 0,3$ соответственно равен 5,41; 5,15; 4,90; 3,56. Эти результаты показывают, что с увеличением значения коэффициента вязкости величина критической нагрузки уменьшается, а число волн увеличивается.

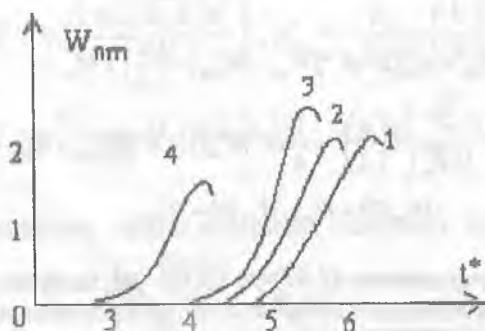


Рис. 3.21. Влияние коэффициента вязкости на поведение сжатой ортогональной пластинки при $q=0$. Цифры у кривых соответствуют значениям: 1 $m=1$, A и n : 0 и 2 (1), 0.05 и 2 (2) 0.1 и 2 (3), 0.3 и 3 (4)

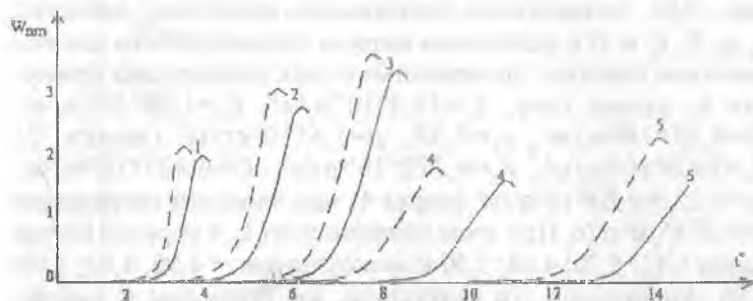


Рис. 3.22. Влияние скорости нагружения на поведение сжатой ортотропной пластинки при динамическом нагружении ($A=0$ (—) и $A=0,1$ (---)) для $\lambda=1$, $W_{\text{ост}}=10^{-4}$. Цифры у кривых соответствуют значениям $m=1$, n и v : 1 и $0,2 \cdot 10^4$ ат/с (1), 1 и $0,575 \cdot 10^4$ ат/с (2), 1 и $1 \cdot 10^4$ ат/с (3), 2 и $2 \cdot 10^4$ ат/с (4), 2 и $5 \cdot 10^4$ ат/с (5)

На рис.3.22 приведены кривые $W_{nm}=W_{nm}(t^*)$, отражающие зависимость между стрелой прогиба и временем нагружения при различных скоростях: $v=0,2 \cdot 10^4$ ат/с; $0,575 \cdot 10^4$ ат/с; $1 \cdot 10^4$ ат/с; $2 \cdot 10^4$ ат/с; $5 \cdot 10^4$ ат/с для материалов пластины с характеристиками [19] (марка 2): $E_1=11,95 \cdot 10^{10}$ н/м², $E_2=0,95 \cdot 10^{10}$ н/м², $G=0,457 \cdot 10^{10}$ н/м², $\mu_1=0,3$, $A=0,1$. Остальные данные взяты из предыдущего примера, при этих же значениях скоростей нагружения коэффициент динамичности K_d в упругом случае равен 3,32; 5,20; 6,96; 10,31; 14,71 и в вязкоупругом — 2,93; 4,84; 6,63; 8,60; 13,11. Как видим, аналогично упругому случаю, и в вязкоупругом случае с возрастанием скорости нагружения число волн увеличивается, что свидетельствует о переходе к более высоким формам потери устойчивости. С увеличением скорости нагружения возрастает и величина критической нагрузки. Заметим также, что коэффициенты динамичности, найденные в упругом и вязкоупругом случаях при малых значениях скоростей нагружения, отличаются друг от друга примерно на 3 — 4%. Эта разность с возрастанием значения v пропорционально увеличивается и при последних двух значениях скоростей нагружения составляет примерно 17%.

На рис.3.23 проиллюстрированы графики кривых W_{nm} для ортотропных пластин с различной степенью анизотро-

пии. При вычислениях принимались различные значения μ_1, μ_2, E_1, E_2 и G к различным маркам стеклопластика для параметров пластин, приведенных в двух предыдущих примерах и, кроме того, $E_1=15,4 \cdot 10^{10} \text{н/м}^2$, $E_2=1,08 \cdot 10^{10} \text{н/м}^2$, $G=0,57 \cdot 10^{10} \text{н/м}^2$, $\mu_1=0,28$, $\rho=1,6 \cdot 10^3 \text{кг/м}^3$ (марка 3); $E_1=19,4 \cdot 10^{10} \text{н/м}^2$, $E_2=0,772 \cdot 10^{10} \text{н/м}^2$, $G=0,421 \cdot 10^{10} \text{н/м}^2$, $\mu_1=0,3$, $\rho=1,63 \cdot 10^3 \text{кг/м}^3$ (марка 4) при скорости нагружения $\nu=0,575 \cdot 10^4 \text{ат/с}$. При этом коэффициент K_d в упругом случае равен 5,41; 5,20; 4,68; 5,50 и вязкоупругом — 4,90; 4,84; 4,29; 4,95. Анализируя эти результаты, мы приходим к выводу, что по изменениям параметра Δ невозможно судить об изменениях критической нагрузки. В то же время заметим, что с возрастанием значения g величина критической нагрузки уменьшается. Отметим также, что при малых изменениях параметра g коэффициенты K_{cr} соответствующие этим значениям параметра, мало отличаются друг от друга.

Исследовалось влияние начального прогиба на поведение ортотропной пластины. При $W_{0nm} = 10^{-1}; 10^{-2}; 10^{-3}; 10^{-4}$ и при принятых данных в первом примере найдены K_{cr} . Эти значения в упругом случае равны 3,10; 3,95; 4,73; 5,41 и в вязкоупругом — 2,50; 3,44; 4,22; 4,90. Как видим, с увеличением значения начального прогиба, как в упругом, так и в вязкоупругом случаях, критические нагрузки уменьшаются.

Изучено поведение ортотропной удлиненной ($\lambda=2$) пластины при скоростях нагружения $\nu=0,575 \cdot 10^4 \text{ат/с}; 2 \cdot 10^4 \text{ат/с}$. Значения коэффициента K_{cr} в упругом и вязкоупругом случаях равны 5,41; 9,80 и 7,90; 8,80. Напомним, что эти числа при $\lambda=1$ составили: 5,20; 10,31 и 4,84; 8,60. Сравнивая эти числа при $\lambda=1$ и $\lambda=2$, приходим к выводу, что найденные для квадратной пластины значения K_{cr} и в вязкоупругом случае можно с небольшой погрешностью распространить и на прямоугольные пластины иной конфигурации.

Исследовалось влияние на поведение квадратной пластины дополнительной статической поперечной нагрузки. При $q^*=0,1; 0,5; 1$ значения коэффициента K_{cr} в упругом случае равны 4,80; 3,90; 3,45 и в вязкоупругом — 4,60; 3,70; 3,61. Заметим, что с увеличением значения поперечной стационарной нагрузки q^* величина критической нагрузки уменьшается.

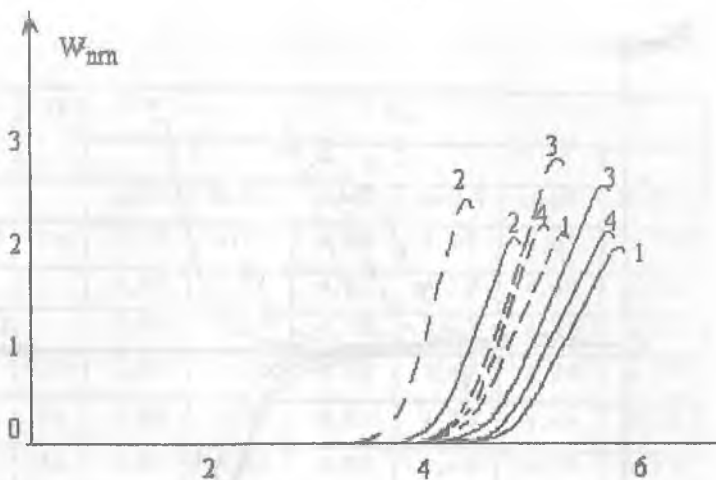


Рис.3.23. Зависимость $W_{nm}(t^*)$ для ортотропной пластинки при $\lambda=1$, $W_{nm}=10^{-4}$ ($A=0$ (—) и $A=0,1$ (---)). Цифры у кривых соответствуют значениям $m=1$, n и различным маркам стеклопластика: 1 и 1-марка (1), 1 и 3-марка (2), 1 и 2-марка (3), 2 и 4-марка (4).

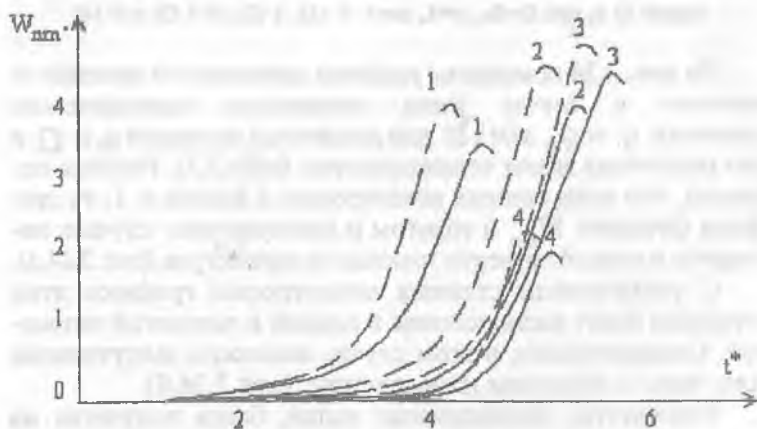


Рис.3.24. а) Зависимость $W_{nm}(t^*)$ для ортотропной пластинки при действии дополнительной поперечной нестационарной нагрузки ($A=0$ (—) и $A=0,1$ (---)) для $\lambda=1$, $W_{nm}=10^{-4}$, $\nu=0.575 \cdot 10^4$ ат/с. Цифры у кривых соответствуют: значениям (из стеклопластика марки 1) $m=1$, n и q_0 при $\Omega=2\pi$: 1 и 5 (1), 1 и 1 (2), 1 и 0,5 (3), 2 и 0 (4)

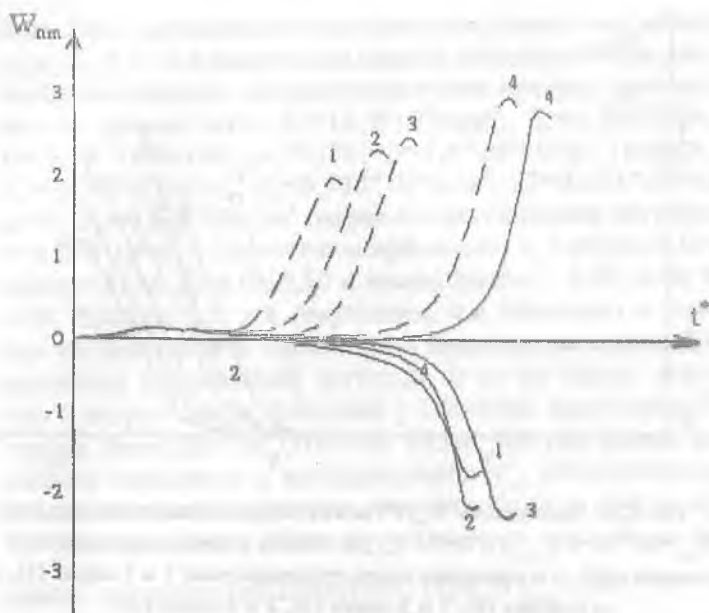


Рис.3.24. Цифры у кривых соответствуют значениям (из стеклопластика марки 2) q_0 при $\Omega=2\pi$, $n=1$, $m=1$: 5 (1), 1 (2), 0.5 (3) и 0 (4)

На рис. 3.24 приведены графики зависимости прогиба от времени в случае учета поперечных периодических давлений $q = q_0 \sin \Omega t$ для различных значений q_0 и Ω и для различных марок стеклопластика (табл.3.3). Расчеты показали, что если степень анизотропии Δ близка к 1, то графики функции W_{nm} в упругом и вязкоупругом случаях находятся в первой четверти плоскости параметров (рис.3.24,а).

С увеличением степени анизотропии графики этой функции будут расположены в первой и четвертой четвертях. Следовательно, в этом случае возможно выпучивание пластины в обратном направлении (рис.3.24,б).

Результаты, приведенные выше, были получены на основе одночленной и многочленной аппроксимации прогиба. Из анализа результатов видно, что во всех рассмотренных случаях решения на основе этих аппроксимаций отличаются друг от друга не более чем на 7%. Таким образом, для определения K_d достаточно ограничиться одночленной аппроксимацией прогиба.

Таблица 3.3

q_0	Ω	K_D					
		1		2		3	
		A=0	A=0,1	A=0	A=0,1	A=0	A=0,1
0,5	2π	5,13	4,81	4,86	4,37	4,63	3,75
1	-	4,80	3,50	4,63	4,20	4,44	3,50
5	-	3,90	3,55	4,10	3,70	4,35	2,92
1	$0,1\pi$	2,35	2,00	3,35	2,69	2,28	2,77
-	2π	4,80	4,50	4,63	4,20	4,44	3,50
-	5π	5,23	4,92	4,92	4,43	4,75	3,75

Литература

1. *Абдуллаев З.С.* Модель несвязанной задачи о нелинейных колебаниях и динамической устойчивости тонкостенных оболочек с учетом температуры //Тезисы докладов научно-практической конференции «ТИИМСХ в решении научно-технических, социально-экономических проблем Республики Узбекистан». — Ташкент, апрель 1994. — С.3.

2. *Абдуллаев З.С.* Параметрические колебания прямоугольной вязкоупругой пластины в температурном поле //Тезисы докладов II Республиканской научной конференции молодых ученых и студентов «Шу азиз ватан барчамизники». — Ташкент, 25 — 27 апреля 1996, с.90.

3. *Абдуллаев З.С., Акбаров У.Й., Эшматов Х.* Устойчивость вязкоупругой пластины при тепловом ударе //Актуальные проблемы прикладной механики/ Меж. сб. науч. трудов инст. механики и сейсмостойкости сооружений. —Ташкент, 1995. — С.90 — 93.

4. *Абдуллаев З.С., Акбаров У.Й.* Моделирование задачи об устойчивости вязкоупругой пластины с учетом температуры //Тезисы докладов международной конференции «Математическое моделирование и вычислительный эксперимент». —Ташкент. —28-30 ноября 1994. — С.17.

5. *Абдуллаев З.С., Эшматов Х.* Модель несвязанной задачи термовязкоупругости о параметрических колебаниях и динамической устойчивости пластины //Тезисы докладов международной конференции «Механика и ее применение». —Ташкент. — 9 — 11 ноября 1993. — С.97.

6. *Абдуллаев З.С., Эшматов Х.* Колебания прямоугольной вязкоупругой пластины в температурном поле //Узбекский журнал проблемы механики. — №5 — 6. —1995. — С.3 — 7.

7. *Акарбов У.Й., Абдуллаев З.С.* Динамическая устойчивость вязкоупругой пластины, находящейся в температурном поле //Математическое моделирование и вычислительный эксперимент в динамике и устойчивости деформиру-

емых систем: Сб. науч. трудов ТГАИ. — Ташкент: изд-во ТашГУ. — 1995. — С.65 — 72.

8. Акбаров У.Й., Абдуллаев З.С. Устойчивость вязкоупругой пластины, нагреваемой потоком тепла //Журнал «Доклады АН РУ». №11. 1996

9. Акбаров У.Й., Абдуллаев З.С. Исследование устойчивости вязкоупругой пластины при температурных воздействиях //Вопросы математического моделирования в агроинженерии: Сб. науч. трудов ТИИИМСХ. —1997. — С.101 — 106.

10. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. — М.: Наука, 1974. — 448 с.

11. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. — М.: Наука, 1987. — 357 с.

12. Бадалов Ф.Б. Методы решения интегральных и интегродифференциальных уравнений нелинейной наследственной теории вязкоупругости. — Ташкент, 1987. — 269 с.

13. Бадалов Ф.Б., Эшматов Х. К исследованию нелинейных колебаний вязкоупругих пластин с начальными неправильностями //Прикладная механика. Т.28. —1990. — №8. — С.99 — 105.

14. Бадалов Ф.Б., Эшматов Х., Акбаров У.Й. Нелинейные колебания вязкоупругой изотропной пластинки при динамическом нагружении //Тезисы докладов XV конференции по вопросам рассеяния энергии при колебаниях механических систем. — Киев, 1989. — С.7 — 9.

15. Бадалов Ф.Б., Эшматов Х., Акбаров У.Й. Устойчивость вязкоупругой пластины при динамическом нагружении //Труды 15-й всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек. —Казань, 1990

16. Бадалов Ф.Б., Эшматов Х., Акбаров У.Й. Устойчивость вязкоупругой пластины при динамическом нагружении. //Прикладная механика. 1991. Т.27. №9. С.78 — 87.

17. Бадалов Ф.Б., Эшматов Х., Юсупов М. О некоторых методах решения систем интегродифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости //Прикладная математика и механика. — Т.51. — 1987. №5. — С.867 — 871.

18. Бажанов В.Л., Гольденблат М.И., Николаенко Н.А., Синюков А.М. Расчет конструкций на тепловые воздействия. — М.: «Машиностроение», 1969, стр.600.

19. Богданович А.Е. Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. — Рига: Зинатне, 1987. — 296 с.

20. *Боли Б., Уэйнер Д.Ж.* Теория температурных напряжений. — М.: Мир, 1964. — 520 с.
21. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. — М.: Гостехиздат, 1956. — 600 с.
22. *Бутковский А.Г.* Характеристика систем с распределенными параметрами. М., 1979.
23. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М., 1972.
24. *Ильюшин А.А., Поберя Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. — М.: Наука, 1970. — 280 с.
25. *Карнаухов В.Г.* Связанные задачи термовязкоупругости. — Киев: Наукова думка, 1982. — 260 с.
26. *Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф.* Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. — Киев: Наукова думка, 1986. — 224 с.
27. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. — М.: Наука, 1964. — 488 с.
28. *Коваленко А.Д.* Термоупругость. — Киев: Вища школа, 1975.
29. *Льков А.В.* Теория теплопроводности. М.: «Высшая школа», 1967.
30. *Огибалов П.М., Грибанов В.Ф.* Термоустойчивость пластин и оболочек. МГУ, 1968.
31. *Эшматов Х., Абдуллаев З.С.* О методе решения интегродифференциальных уравнений задач динамики вязкоупругих систем с учетом температуры //VI школа-семинар «Дифференциальные преобразования и численно-аналитические методы решения уравнений». Киев, 1993, июнь.
32. *Эшматов Х., Абдуллаев З.С.* Колебания вязкоупругой пластины с учетом температуры //Тезисы докладов VIII Международной конференции «Динамика оснований, фундаментов и подземных сооружений». — Ташкент. — 25 — 27 мая 1994. — С. 16.
33. *Эшматов Х., Абдуллаев З.С.* Колебания прямоугольной вязкоупругой пластины в температурном поле //Тезисы докладов научно-технической конференции профессор-педагогов ТИИИМСХ. Ташкент, 1995. — С. 5.
34. *Шмидт Г.* Параметрические колебания. — М.: Мир, 1978. — 336 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Глава 1. Постановка задачи и алгоритм численного решения несвязанных задач термовязкоупругости	
1.1. Основные уравнения и постановка несвязанных задач термовязкоупругости пластин	6
1.2. Численный алгоритм решения несвязанных динамических задач термовязкоупругости пластин	16
1.3. Алгоритм численного решения ИДУ несвязанных динамических задач термовязкоупругости	31
Глава 2. Задачи о свободных, вынужденных и параметрических колебаниях вязкоупругих пластин под воздействием температуры	
2.1. Колебания термовязкоупругих пластин при однородных граничных условиях	33
2.2. Колебания термовязкоупругих пластин при неоднородных граничных условиях	40
2.3. Определение области динамической неустойчивости (ОДН) вязкоупругой пластины под воздействием температуры	44
2.4. Расчет параметрических колебаний вязкоупругих пластин под воздействием температуры	52
2.5. Математическое моделирование нелинейных задач колебаний вязкоупругих ортотропных пластин, находящихся под воздействием температуры	56
Глава 3. Задачи о динамической устойчивости вязкоупругой пластины под воздействием температуры	
3.1. Расчет деформирования термовязкоупругих пластин с начальными неправильностями при однородных граничных условиях	63
3.2. Расчет деформирования термовязкоупругих пластин с начальными неправильностями при неоднородных граничных условиях	75
3.3. Математическое моделирование динамической устойчивости вязкоупругих ортотропных пластин, находящихся под воздействием температуры	83
Литература	92



ЭШМАТОВ ХАСАН -доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой Ташкентского института ирригации и мелиорации. Докторскую диссертацию по специальности «Математическое моделирование» защитил в 1991 году в городе Киеве. Он является автором 1 учебника, 2 монографий и более 200 научных и методических работ. Из них более 70 работ были опубликованы за рубежом. Под его руководством защищены более 15 кандидатов наук.

АБДУЛЛАЕВ ЗАФАР САЙФУТДИНОВИЧ - кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Информатики и информационных технологий» Ташкентского института ирригации и мелиорации.

Он автор 36 научно- практических и 7 учебно- методических статей, а также 5 текстов лекций.



АКБАРОВ УММАТАЛИ ЙИГИТАЛИЕВИЧ кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Информатика и вычислительная математика» Кокандского Государственного педагогического института. Прошёл повышение квалификации по новым информационным технологиям и алгоритмическим языкам в Московском высшем техническом университете имени Баумана, а также в Чехии. Он автор 50 научно-практических статей и 8 учебно-методических работ, а также 6 текстов лекций.





ЭШМАТОВ ХАСАН -доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой Ташкентского института ирригации и мелиорации. Докторскую диссертацию по специальности «Математическое моделирование» защитил в 1991 году в городе Киеве. Он является автором 1 учебника, 2 монографий и более 200 научных и методических работ. Из них более 70 работ были опубликованы за рубежом. Под его руководством защищены более 15 кандидатов наук.

АБДУЛЛАЕВ ЗАФАР САЙФУТДИНОВИЧ - кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Информатики и информационных технологий» Ташкентского института ирригации и мелиорации.

Он автор 36 научно- практических и 7 учебно- методических статей, а также 5 текстов лекций.



АКБАРОВ УММАТАЛИ ЙИГИТАЛИЕВИЧ кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Информатика и вычислительная математика» Кокандского Государственного педагогического института. Прошёл повышение квалификации по новым информационным технологиям и алгоритмическим языкам в Московском высшем техническом университете имени Баумана, а также в Индии. Он автор 50 научно-практических статей и 8 учебно-методических работ, а также 6 текстов лекций.