SH. SHARAXMETOV, O. KURBANOV

IQTISODCHILAR UCHUN MATEMATIKA

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

SH. SHARAXMETOV, O.T. KURBANOV

IQTISODCHILAR UCHUN MATEMATIKA

O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi tomonidan oliy o‘quv yurtlarining 55231400 – Statistika yo‘nalishi talabalari uchun darslik sifatida tavsiya etilgan

O‘zbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashriyoti
Toshkent – 2017

UO‘K: 51:33-057.875(075.8)
KBK: 22.1
Sh 26

Sharaxmetov Sh.

Iqtisodchilar uchun matematika: Darslik / Sh. Sharaxmetov, O.T. Kurbanov; Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi. – T.: O‘zbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashriyoti, 2017. – 384 b.

UO‘K: 51:33–057.875(075.8)
KBK: 22.1

Darslik iqtisodiyot yo‘nalishidagi talabalar uchun mo‘ljallangan. Unda matematikaning chiziqli algebra, analitik geometriya, differensial va integral hisob, differensial tenglamalar, qatorlar kabi bo‘limlari yoritilgan va tegishli masala, misollar (jumladan iqtisodiy mazmundagi masalalar) keltirilgan.

Darslik O‘zbekiston Respublikasi Davlat ta’lim standartlari asosida yozilgan bo‘lib, unda matematikaning analitik geometriya, chiziqli algebra, matematik tahlil va oddiy differensial tenglamalar bo‘limlari yoritilgan.

Matemetik tushunchalarning iqtisodiy talqini va tadbiqlari keltirilgan.

Ushbu darslik barcha iqtisodiy yo‘nalish talabalari uchun mo‘ljallangan.

Taqrizchilar:

To‘xtasinov M. – O‘zMU «Differensial tenglamalar va matematik fizika» kafedrasi professori, f-m.f.d.,

Asraqulova D.S. – TDIU «Oliy matematika» kafedrasi dotsenti, f-m.f.n.

ISBN 978-9943-07-554-2

SO'ZBOSHI

Jahon ta'lim tizimida matematika fanidan ma'lum bir soha (xususan ijtimoiy gumanitar, iqtisod sohalari) talabalari uchun maxsus darslik, o'quv qo'llanma yaratish yangilik emas. Bunday kitoblarning o'ziga xosligi quyidagilardan iborat:

– bir tomondan matematika – **MATEMATIKA**ligicha qolib, fundamental fan sifatida matematik tushunchalar, aksiomalar, teoremalarning uzviy bog'lanishda mantiqiy izchilligida qat'iy bayon qilinishi zarur. Talabalarda mantiqiy, algoritmik, abstrakt fikrlashlarning sintezi bo'lgan – matematik fikrlashni shakllantirishga xizmat qilishi kerak;

– ikkinchi tomondan muayyan sohaning talab va ehtiyojlaridan kelib chiqib, uning o'ziga xos jihatlarini aks ettirishi lozim. Talabalarning matematikani maqsadli o'rganishini ta'minlash bilan birga o'zlashtirishini osonlashtirishi kerak.

Masalaning bu ikki tomoni ma'lum mutanosiblikda shunday uyg'unlashuvi kerakki, natijada kurs ma'lum sohaning muayyan masalalarini yechishga retseptlar beruvchi darslik yoki talabalarda *«Matematika – faqat hisoblashlarni o'rganadigan fan»* degan tushunchani hosil qilmasligi kerak. Mana shu tamoyildan kelib chiqib, matematikaga *«tabiat haqidagi barcha bilimlarimizni sistemaga soluvchi, tabiat va jamiyatdagi jarayonlarning matematik modellarini o'rganuvchi fan»*, deya ta'rif berilgan.

Ushbu darslik maxsus iqtisodchilar uchun yozilgan bo'lib, ko'p hollarda matematik tushunchalarning iqtisodiy talqini berildi va iqtisodiy mazmundagi masala, misollar keltirildi.

Darslikda analitik geometriya va chiziqli algebra elementlari, chiziqli fazo elementlari, limitlar nazariyasi, bir va ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning differensial va integral hisobi, oddiy differensial tenglamalar va qatorlar nazariyasi bayon qilingan.

Darslikka mualliflarning Toshkent davlat iqtisodiyot universtetida «Iqtisodchilar uchun matematika» fanidan o‘qigan ma’ruzalari asos qilib olindi. Darslikning ma’lum bo‘limlarini yaratishda o‘z yordamlarini, maslahat va fikr-mulohazalarini bergan «Oliy matematika» kafedrasining professor-o‘qituvchilari S.S. Isamuhamedov, D.S. Asraqulova, A.R. G‘ulomovlarga o‘z minnat-dorchiligimizni bildiramiz.

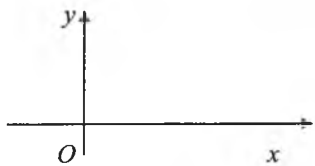
Mazkur kitob iqtisodchilar uchun maxsus yozilgan dastlabki o‘zbek tilidagi darslik bo‘lganligi uchun kamchiliklardan xoli bo‘lmasa kerak. Kamchiliklarni bartaraf etish va kitobning sifatini yaxshilash borasidagi fikr va mulohazalarini bildirgan kitobxonlarga mualliflar oldindan o‘z minnatdorchiligini bildiradilar.

1. Tekislikda analitik geometriya

Tekislikda dekart koordinatalar sistemasi

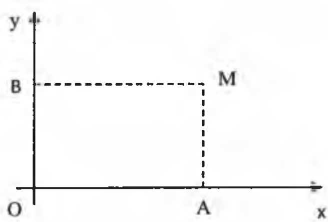
Agar tekislikda biror tartibda belgilangan o'zaro perpendikular o'qlar berilgan bo'lib, unda birlik masshtab aniqlangan bo'lsa, u holda tekislikda *dekart koordinatalar sistemasi* berilgan deyiladi.

O'qlarning kesishish nuqtasi koordinatalar boshi, o'qlarning o'zi esa *koordinatalar o'qi* deyiladi.



Bunda Ox – abssissalar o'qi, Oy – ordinatalar o'qi deyiladi.

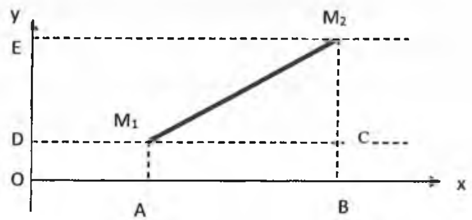
Tekislikda dekart koordinatalar sistemasi va ixtiyoriy nuqta M berilgan bo'lsin. M nuqtadan Ox va Oy o'qlariga perpendikular to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Bu perpendikular to'g'ri chiziqlarning koordinatalar o'qi bilan kesishish nuqtalarini mos ravishda A va B orqali belgilaymiz:



$OA=x$ va $OB=y$ sonlar M nuqtaning bu sistemadagi koordinatalari deyiladi va $M(x;y)$ kabi belgilanadi.

Tekislikda analitik geometriyaning sodda masalalari.
Ikki nuqta orasidagi nuqta

Tekislikda $M_1(x_1;y_1)$ *va* $M_2(x_2;y_2)$ nuqtalar berilgan bo'lsin. Bu nuqtalardan koordinatalar o'qiga perpendikularlar o'tkazamiz:



U holda $|OB|=x_2$, $|OA|=x_1$, $|M_1C|=|AB|=x_2-x_1$, $|M_2C|=|DE|=y_2-y_1$. Agar $M_1(x_1;y_1)$ *va* $M_2(x_2;y_2)$ nuqtalar orasidagi masofani d orqali belgilasak, u holda ΔM_1M_2C *dan* $|M_1M_2|=d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

$$|M_1M_2|=d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \quad (1)$$

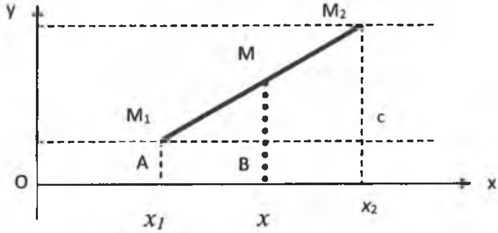
(1)-formuladagi $M_1(x_1;y_1)$ *va* $M_2(x_2;y_2)$ nuqtalar orasidagi masofa hisoblash formulasi deyiladi.

Masalan. Uchlari $A(-7;\ 2)$; $B(5;\ -3)$; $C(8;\ 1)$ nuqtalarda bo'lgan ABC uchburchakning AB tomoni uzunligini toping.

Yechish: $|AB|=\sqrt{(-7-5)^2+(2-(-3))^2}=\sqrt{144+25}=\sqrt{169}=13$.

Kesmani berilgan nisbatda bo'lish

$M_1(x_1;y_1)$ *va* $M_2(x_2;y_2)$ nuqtalar berilgan bo'lsin. M_1M_2 kesmani $\lambda=\dfrac{|M_1M|}{|MM_2|}$ nisbatda bo'luvchi $M(x;y)$ nuqtaning koordinatalarini aniqlaymiz:



Ma'lumki, $\frac{|M_1M|}{|MM_2|}=\frac{|AB|}{|BC|}$ yoki $\lambda=\frac{x-x_1}{x_2-x}$. Oxirgi munosabatni x ga nisbatan yechib, $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$. Xuddi shu kabi $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$ munosabat aniqlanadi.

Demak, $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$ (2)

(2)-formula M_1M_2 kesmani $\lambda=\frac{|M_1M|}{|MM_2|}$ nisbatda bo'luvchi $M(x;y)$ nuqtaning koordinatalarini aniqlash formulasidir.

$\lambda=1$ bo'lsa, M nuqta M_1M_2 kesmani teng ikkiga bo'ladi:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

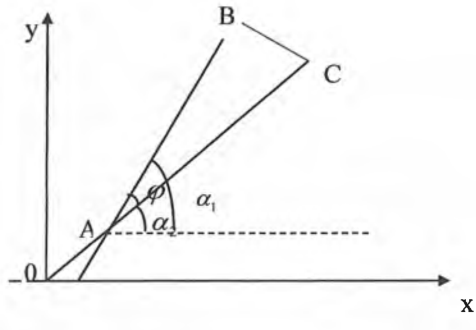
Masalan. Uchlari $A(-7;9)$ va $B(-4;-3)$ nuqtalarda bo'lgan kesmani AC:CB=2 nisbatda bo'luvchi C(x,y) nuqtaning koordinatalarini toping.

Yechish: $\lambda=2$, $x=\frac{-7+2\cdot(-4)}{1+2}=\frac{-15}{3.}=-5$, $y=\frac{9+2\cdot(-3)}{1+2}=1$.

Demak, C(–5;1).

Uchburchakning yuzini hisoblash

$A(x_1;y_1)$, $B(x_1;y_2)$ va $C(x_3;y_3)$ – nuqtalar ABC uchburchakning uchlari bo'lsin:



Ma'lumki, $S=\frac{1}{2}a\cdot b\sin\varphi=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin(\alpha_1-\alpha_2)=\frac{1}{2}AB\cdot AC(\sin\alpha_1\cos\alpha_2-\sin\alpha_2\cos\alpha_1)$.

Lekin $AB\ \sin\ \alpha_1=y_2-y_1$, $AC\ \cos\ \alpha_2=x_2-x_1$, $AC\ \sin\ \alpha_1=y_3-y_1$. U holda $\pm S_\Delta=\frac{1}{2}\cdot[(y_2-y_1)(x_3-x_1)-(y_3-y_1)(x_2-x_1)]$.

Agar $A(x_1;y_1)$ uchburchak uchi koordinatalar boshi bilan ustma-ust tushsa, u holda $\pm S_\Delta=\frac{1}{2}\cdot[y_2\cdot x_3-y_3\cdot x_2]$. Bir to'gri chiziqda yotuvchi uchta nuqta uchburchak tashkil etmaydi: $S_\Delta=0$.

Demak, $(y_2-y_1)(x_3-x_1)-(y_3-y_1)(x_2-x_{11})=0$ uchta $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$ va $C(x_3;\ y_3)$ nuqtaning bir to'gri chiziqda yotishi shartini ifodalar ekan.

Masalan. Uchlari $A(-7;\ 2)$; $B(5;\ -3)$; $C(8;\ 1)$ nuqtalarda bo'lgan ABC uchburchakning yuzini toping.

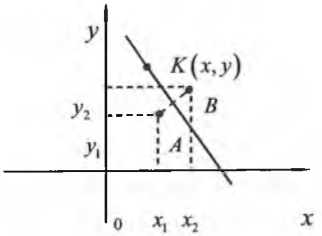
Yechish: $\pm S_\Delta=\frac{1}{2}\cdot[(-3-2)(8-(-7))-(1-2)(5-2)]$. $S_{\Delta ABC}=36$.

To'g'ri chiziqning turli xil tenglamalari

Ta'rif. *OXY* dekart koordinatalari kiritilgan tekislikda yotgan egri chiziq tenglamasi deb, bu egri chiziqda yotuvchi nuqtalar koordinatalari x va y ni bog'lovchi tenglamaga aytiladi.

Umumiy holda egri chiziq tenglamasi $F(x,y)=0$ ko'rinishda, mumkin bo'lgan hollarda $y=f(x)$ yoki $x=\varphi(y)$ oshkor ko'rinishdagi tengliklar orqali beriladi. Bu yerda $F(x,y)$, $f(x,y)$ va $\varphi(y)$ funksiyalar egri chiziqni aniqlovchi qonun-qoidalarni ifoda etadilar.

Endi berilgan $A(x_1,y_1)$ va $B(x_2,y_2)$ nuqtalardan bir xil masofada yotuvchi nuqtalarning geometrik o‘rnini ifoda etuvchi tenglamani topaylik.



$K(x,y)$ nuqta A va B nuqtalardan bir xil masofada yotsin, u holda

$$KA=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}=KB$$

$$x^2-2xx_1+x_1^2+y^2-2yy_1+y_1^2=x^2-2xx_2+x_2^2+y^2-2yy_2+y_2^2(2x_2-2x_1)x+$$
$$+(2y_2-2y_1)y+(x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2)=0.$$

Bu yerda, $2x_2-2x_1=a$, $2y_2-2y_1=b$, $x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2=c$ belgilashlarni kiritsak, quyidagi tenglama hosil bo‘ladi:

$$ax+by+c=0 \qquad (1)$$

bu tenglamada a,b,c lar o‘zgarmas sonlardir. (1)-tenglama to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi. Bu tenglamaning ayrim maxsus hollarini qaraymiz:

1) agar $c=0$ bo‘lsa, $ax+by=0$ yoki $y=-\frac{a}{b}x$, $b\neq0$, ya’ni to‘g‘ri chiziq koordinata boshidan o‘tadi;

2) agar $b=0$, $a\neq0$ bo‘lsa, $x=-\frac{c}{a}=const$, ya’ni to‘g‘ri chiziq OY o‘qqa parallel bo‘ladi;

3) agar $a=0$, $b\neq0$ bo‘lsa, $y=-\frac{c}{b}=const$, ya’ni to‘g‘ri chiziq OX o‘qqa parallel bo‘ladi;

4) agar $b=0$ va $c=0$ bo'lsa, $x=0$, ya'ni to'g'ri chiziq OY o'q bilan ustma-ust tushadi;

5) agar $b\neq 0$, $a=0$ va $c=0$ bo'lsa, $y=0$ to'g'ri chiziq OX o'qi bilan ustma-ust tushadi.

Agar (1)-tenglamada $a\neq 0$, $b\neq 0$ va $c\neq 0$ bo'lsa, quyidagini hosil qilamiz $ax+by=-c \Rightarrow \frac{x}{-\frac{c}{a}}+\frac{y}{-\frac{c}{b}}=1$, $-\frac{c}{a}=m$, $-\frac{c}{b}=n$ deb belgilasak $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$.

To'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasini hosil qilamiz, bu yerda $|m|$ va $|n|$ berilgan to'g'ri chiziqning koordinata o'qlarining kesishidan hosil bo'lgan kesmalar uzunliklariga teng bo'ladi.

Agar (1)-tenglamada $b\neq 0$ bo'lsa, uni quyidagi ko'rinishga olib kelish mumkin: $ax+by+c=0 \Rightarrow y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$, bu yerda $-\frac{a}{b}=k, -\frac{c}{b}=d$ deb belgilash kiritib, $y=kx+d$ ko'rinishdagi tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi deyiladi. Tenglamadagi k koeffitsient to'g'ri chiziqning OX o'qi bilan musbat yo'nalish bo'yicha hosil qilgan φ burchakning tangensiga teng, ya'ni $k=tg\varphi$.

Endi $A(x_1,y_1)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini topamiz, bunda burchak koeffitsienti k berilgan deb qaraladi. To'g'ri chiziq tenglamasini $y=kx+d$ ko'rinishda izlaymiz, u holda $y_1=k\cdot x_1+d$ tenglik o'rinli bo'ladi, ikkala tenglikni hadma-had ayirib quyidagini hosil qilamiz:

$$y-y_1=k\cdot(x-x_1) \tag{2}$$

$A(x_1,y_1)$ va $B(x_2,y_2)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini topaylik. (2)-tenglamaga ko'ra, quyidagini hosil qilamiz:

$$y_2-y_1=k\cdot(x_2-x_1) \quad \text{yoki} \quad k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

k ning qiymatini (2)-tenglamaga qo'ysak, quyidagini hosil qilamiz:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1) \text{ yoki } \frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

Masalan 1. $M_1(2,\ 0)$ va $M_2(3,\ 4)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ formulaga ko'ra $\frac{x-2}{3-2}=\frac{y-0}{4-0}$ $\Rightarrow$ $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{4}$

Masalan 2. $C(1;\ 1)$ nuqtadan o'tuvchi va koordinata burchagidan yuzasi 2 kv. birlik bo'lgan uchburchak ajratadigan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish: Izlanayotgan to'g'ri chiziq tenglamasini kesmalarga nisbatan yozib olamiz. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ a va b ni topish kerak. To'g'ri chiziq $C(1;\ 1)$ nuqtadan o'tgani uchun uning koordinatalari bu to'g'ri chiziq tenglamasini qanoatlantiradi:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1 \text{ yoki } a+b=ab.$$

Koordinata burchagidagi uchburchakning yuzi $\pm S=\frac{1}{2}ab$ yoki $ab=\pm 4$. Shunday qilib, ikkita tenglamar sistemasini yechish kerak:

1. $\begin{cases} a+b=4, \\ ab=4; \end{cases}$ 2. $\begin{cases} a+b=-4, \\ ab=-4; \end{cases}$

Bu sistemalarni yechib:

1) $b=4-a,\ a(4-a)=4,\ a^2-4a+4=0;\ a_1=2,\ b_1=2.$

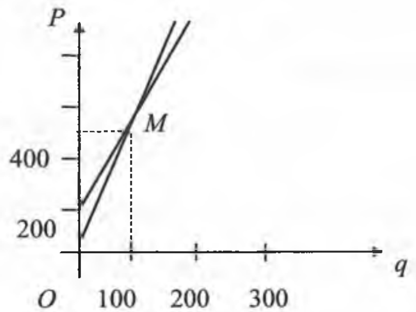
2) $b=-4-a,\ a(4+a)=4,\ a^2+4a-4=0;\ a_{2,3}=-2\pm 2\sqrt{2}.\ a_2=-2+2\sqrt{2},\ b_2=-2-2\sqrt{2},$ $a_3=-2-2\sqrt{2},\ b_3=-2+2\sqrt{2}.$

Demak, masala shartini qanoatlantiruvchi uchta to'g'ri chiziq mavjud:

1) $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1;$ 2) $\frac{x}{2\sqrt{2}-2}+\frac{y}{-2-2\sqrt{2}}=1;$ 3) $\frac{x}{-2-2\sqrt{2}}+\frac{y}{2\sqrt{2}-2}=1.$

Masalan 3. Ikki turdagi transport vositasi bilan yuk tashish xarajatlari $P=100+4Q$ va $P=200+3Q$ funksiyalar bilan ifodalangan. Bunda Q – yuz km lardagi masofa, P – pul birligidagi transport xarajatlari. Qaysi masofadan boshlab ikkinchi yuk tashish mashinasida birinchisiga qaraganada yuk tashish arzonga tushadi.

Yechish: $\begin{cases} P=4Q+100 \\ P=3Q+200 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yechib to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasini topamiz *M(100; 500).* Rasmdan ko‘rinib turibdiki *Op* o‘q bo‘yicha (xarajat narxi) qaralganda *M* nuqtadan yuqorida ikkinchi mashina uchun sarf-xarajat birinchi mashinanikiga qaraganada pastda joylashgan. Demak *M(100; 500)* dan boshlab uning yuqori qismida ikkinchi mashina xarajatlari kam bo‘ladi.

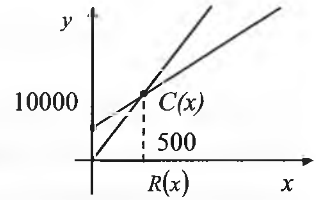


Masalan 4. Har oydagi o‘zgarmas xarajatlar 10000 pul birligi (p.b.)ni, o‘zgaruvchi xarajatlar 30 p.b.ni, bir yillik mahsulot uchun tushum 50 p.b.ni bilgan holda foyda funksiyasini tuzing va grafigini chizing.

Yechish: x birlik mahsulot ishlab chiqarish uchun jami xarajatlar *C(x)* o‘zgarmas *F* va o‘zgaruvchi *V* xarajatlardan iboratdir. *C(x)=F+V.* Umumiy daromad yoki tushum: *R(x)=p·x.* Bu yerda, *p* – bir yillik mahsulot narxi *x* –sotilgan mahsulot miqdori.

Sodda holda o‘zgaruvchan xarajatlar x ishlab chiqarish mahsulot miqdoriga to‘g‘ri proporsional.

$$C=b+ax.$$



Bu yerda, $b-$ o‘zgarmas xarajatlarni, $a-$ proporsionallik koeffitsienti bir birlik mahsulot ishlab chiqarish uchun sarflangan o‘zgaruvchan xarajatlarni ifodalaydi.

Masala shartiga ko‘ra $F=10000$, $V=30 \cdot x$, $C(x)=10000+30 \cdot x$, $R(x)=50 \cdot x$

Shunday qilib, foyda: $P(x)=R(x)-C(x)$ $P(x)=50x-30x-10000=20x-1000$

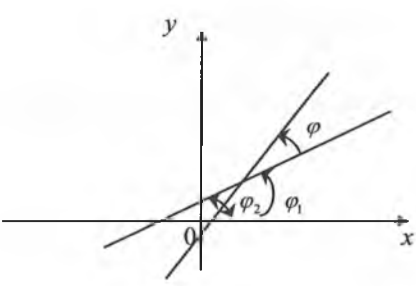
x ning 500 dan kichik qiymatlarida, ya’ni mahsulot hajmi 50 sh.b. (shartli birlik) dan kam ishlab chiqarilsa, ishlab chiqarish zararli.

$x=500$ sh.b. hajmda foyda ham, zarar ham yo‘q. x ning 500 dan katta qiymatlarida ishlab chiqarish foydali.

To‘g‘ri chiziqqa doir asosiy masalalar.

To‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak

$y=k_1x+d_1$ va $y=k_2x+d_2$ to‘g‘ri chiziqlar berilgan bo‘lsin. Bu to‘g‘ri chiziqlar kesishish nuqtasi atrofida, birinchi to‘g‘ri chiziqni soat strelkasiga teskari yo‘nalishda aylantirish natijasida to ikkinchi to‘g‘ri chiziq bilan ustma-ust tushguncha hosil bo‘lgan burchak φ, ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak deyiladi.



$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \Rightarrow tg\varphi = \frac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_2 \cdot tg\varphi_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1}.$$

Agar $k_1 = k_2$ bo‘lsa, $tg\varphi = 0$, ya’ni $\varphi = 0$ ekanligidan, to‘g‘ri chiziqlarning parallel ekanligi kelib chiqadi va, aksincha, agar to‘g‘ri chiziqlar parallel, ya’ni $\varphi_2 = \varphi_1$ bo‘lsa, $tg\varphi = 0$ va, demak, $k_2 = k_1$ ekanligi kelib chiqadi.

Demak, to‘g‘ri chiziqlarning parallellik sharti, $k_2 = k_1$ ekan.

Endi, agar to‘g‘ri chiziqlar uchun $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, ya’ni $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bo‘lsa, u holda $\varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \varphi_1$ va $tg\varphi_2 = tg\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1\right) = -ctg\varphi_1 = -\frac{1}{tg\varphi_1}$, $tg\varphi_2 \cdot tg\varphi_1 = -1$ ekan, demak, agar ikki to‘g‘ri chiziq o‘zaro perpendikular bo‘lsa $k_2 \cdot k_1 = -1$ tenglik o‘rinli bo‘lar ekan. Aksincha, agar $k_2 \cdot k_1 = -1$ bo‘lsa, u holda $k_2 = -\frac{1}{k_1}$, ya’ni $tg\varphi_2 = -\frac{1}{tg\varphi_1} = -ctg\varphi_1 = tg\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1\right)$, demak, $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ bo‘lar ekan, ya’ni to‘g‘ri chiziqlarning perpendikularlik sharti $k_2 \cdot k_1 = -1$ tenglik orqali berilar ekan.

To‘g‘ri chiziqlar umumiy ko‘rinishda berilgan bo‘lsin:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

U holda bu to‘g‘ri chiziqlarning parallellik sharti $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ tenglik orqali beriladi, ularning perpendikularlik sharti esa $a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 = 0$ tenglik bilan ifodalanadi.

Agar qaralayotgan to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘lmasa,

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi yechimi shu to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasidan iborat bo‘ladi.

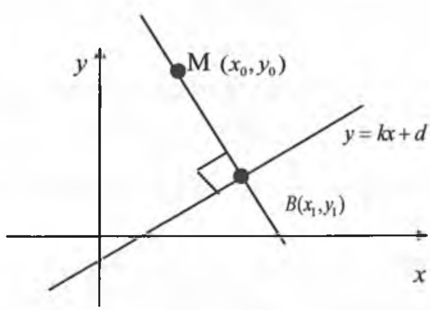
Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa

Endi berilgan $M(x_0,y_0)$ nuqtadan $ax+by+c=0$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani topaylik. To‘g‘ri chiziq tenglamasini $y=kx+d$ ko‘rinishga keltiramiz, $k=-\frac{a}{b}$, $d=-\frac{c}{b}$. Berilgan M nuqtadan o‘tib $y=kx+d$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikular bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi: $y-y_0=-\frac{1}{k}(x-x_0)$. Quyidagi sistemani yechamiz,

$$\begin{cases} y_1=kx_1+d \\ y_1-y_0=-\frac{1}{k}(x_1-x_0) \end{cases} \Rightarrow kx_1+d-y_0=-\frac{1}{k}(x_1-x_0) \Rightarrow k^2x_1-ky_0+kd=-x_1+x_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1=\frac{x_0+ky_0-kd}{k^2+1} \Rightarrow y_1=k\cdot\frac{x_0+ky_0-kd}{k^2+1}+d=\frac{kx_0+k^2y_0-k^2d+k^2d+d}{k^2+1}=$$

$$=\frac{kx_0+k^2y_0+d}{k^2+1}$$



Sistema yechimi (x_1,y_1) bilan aniqlanuvchi $B\ (x_1,y_1)$ nuqta va $M(x_0,y_0)$ nuqtalar orasidagi masofani topamiz:

$$MB=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}=\sqrt{\left(\frac{x_0+ky_0-kd}{k^2+1}-x_0\right)^2+\left(\frac{kx_0+k^2y_0+d}{k^2+1}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{(x_0+ky_0-kd-k^2x_0-x_0)^2+(kx_0+k^2y_0+d-k^2y_0-y_0)^2}}{k^2+1}=\frac{\sqrt{(kx_0+y_0+d)^2(k^2+1)}}{k^2+1}=$$

$$=\frac{|kx_0-y_0+d|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{\left|-\frac{a}{b}x_0-y_0-\frac{c}{b}\right|}{\sqrt{\left(-\frac{a}{b}\right)^2+1}}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Demak, $M(x_0,\ y_0)$ nuqtadan $ax+by+c=0$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani d deb belgilasak, ushbu

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

formulani hosil qilamiz.

Masalan. $3x+y-6=0$ to‘g‘ri chiziq va $A(-3;\ 1)$, $B(3;\ 3)$ nuqtalar orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni aniqlang.

Yechish: *A(–3; 1) va B(3; 3)* nuqtalar orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi

$y=kx+b$ bo‘lsin, u holda $\begin{cases}1=-3k+b\\3=3k+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2b=4\\b=2\end{cases}\Rightarrow k=\frac{1}{3}$

Demak, $y=-3x+6$ va $y=\frac{1}{3}x+2$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni

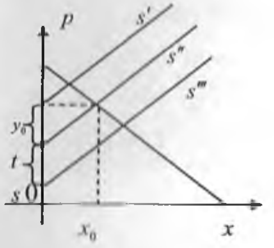
aniqlaymiz. $tg\varphi=\dfrac{-3-\frac{1}{3}}{1-1}\Rightarrow\ \varphi=\dfrac{\pi}{2}$ ekanligi kelib chiqadi.

Talab va taklif qonuni

Iste’molchining bozordan sotib olmoqchi bo‘lgan mahsulot miqdori shu mahsulotning narxiga bog‘liq. Sotilgan mahsulot narxi va miqdori orasidagi bog‘lanish talab funksiyasi yoki qonuni deyiladi.

Ishlab chiqaruvchi sotuvga chiqargan mahsulot miqdori ham shu mahsulotning narxiga bog‘liq. Sotuvchi chiqarilgan mahsulot narxi va miqdori orasidagi munosabat taklif funksiyasi yoki qonuni deyiladi.

Eng sodda holda bu funksiyalar chiziqlidir.



D – talab qonuni;

S – taklif qonuni;

x – mahsulot miqdori;

p – mahsulot 1 birligining narxi.

Agar ikki xil: p_1, p_2 narxlardagi ma’lum mahsulot uchun sotuv miqdori: x_1, x_2 ma’lum bo‘lsa, shu mahsulotga bo‘lgan talabning chiziqli funksiyasini tuzish mumkin:

$$p - p_1 = \frac{p_2 - p_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Talab va taklif funksiyalarining egri chiziqlari kesishgan $(x_0;\ y_0)$ nuqta bozorning shu mahsulotga nisbatan muvozanat nuqtasi deyiladi. P_0 – bozorning muvozanat narxi, x_0 – bozorning muvozanat miqdori deyiladi.

Agar talab funksiyasi p*(x)* ma’lum bo‘lsa, umumiy daromad $R=xp(x)$.

Ko‘p hollarda hukumat aholi ma’lum mahsulotni imkonli narxlarda olishi uchun shu mahsulotga t soliq belgilaydi yoki shu mahsulotga S subsidiya (subsidiya – ....) e’lon qiladi.

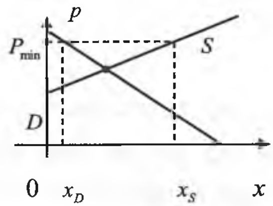
Chiziqli modellardan foydalanilganda, mahsulotning bozordagi P_l narxi shu mahsulotga bo‘lgan talabni aniqlasa, taklifni esa ishlab chiqaruvchi qabul qilgan. P_s narx aniqlaydi. Bu narxlar o‘zaro quyidagi munosabatda $P_T = P_S + t$, $p_T = p_S - S$.

Bu yerda, t va S – bir birlik mahsulotga belgilangan soliq va (subsidiya – ....).

Demak, soliq yoki (subsidiya – ....) kiritilishi D talabni o'zgartirmaydi, lekin taklif funksiyasi t birlik yuqoriga (S') yoki S birlik pastga (S'') parallel siljiydi.

Ba'zan subsidiya o'rniga eng quyi narx miqdori kiritiladi. Bu holda hukumat $x_S - x_D$ miqdordagi ortiqcha mahsulotni sotib oladi.

Ba'zi soliqlar, masalan QQS (qo'shimcha qiymat solig'i) narxga proporsional. Bu holda taklif funksiyasining Ox o'qi bilan kesishish nuqtasi o'zgarmasdan, uning Ox o'qqa og'ish burchagi o'zgaradi.



Masalan. Ma'lum mahsulotga bo'lgan talab va taklif qonunlari quyidagi munosabatlarda aniqlansa: $p = -2x + 12$, $p = x + 3$.

a) bozorning muvozanat nuqtasini aniqlang;

b) 3 sh.b. soliq kiritilgandagi muvozanat nuqtasini aniqlang;

d) mahsulot hajmi 2 marta oshishi uchun qanday subsidiya e'lon qilinishi kerak?

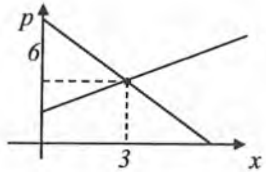
e) 20% li proporsional soliq kiritilgandagi muvozanat nuqtani va hukumat daromadini aniqlang;

f) hukumat mahsulot birligiga 7 sh.b.ga teng eng quyi narxni belgiladi. Ortiqcha mahsulotni sotib olish uchun qancha miqdordagi pul birligi kerak?

Yechish: *a*) bozorning M muvozanat nuqtasini aniqlaymiz:

$$\begin{cases} p = -2x + 12 \\ p = x + 3 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x + 3 = -2x + 12 \\ 3x = 9, \quad x = 3, \quad p = 6 \end{array}$$

Demak, bozorning muvozanat nuqtasi $M(3;\ 6)$



b) agar *t=3* miqdoridagi soliq kiritilgan bo'lsa, u holda bozorning muvozanat nuqtasini topish uchun tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$D:\ p_T = -2x+12.\ \ S:\ p_S = x+3.\ \ P_T = p_S + 3.$$

Bozordagi p_T narx va ishlab chiqarishlarning p_s narxlari orasidagi munosabatdan foydalanib bozorning yangi muvozanat nuqtasi uchun quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz: $\begin{cases} p_T = -2x+12 \\ p_S = x+6 \end{cases}$

Bu sistemani yechib, yangi muvozanat $M'(2;\ 8)$ nuqtani topamiz. Demak, mahsulot birligi uni *t=3* miqdordagi soliq belgilansa, bozorning muvozanat narxi 2 birlik ortib, muvozanat hajmi 1 birlik kamayar ekan.

d) agar subsidiya taqdim etilgan bo'lsa, u holda bozorning muvozanat nuqtasini aniqlash uchun tenglamalar sistemasi

$$D:\ p_T = -2x+12.\qquad S:\ p_S = x+3.\qquad P_T = p_S - S.$$

Masala shartiga ko'ra yangi sotuv hajmi 3+2=5 birlikka teng. Sistemada $x=5$ ni qo'yib: $p_T = 2,\ p_S = 5.\ S = p_S - p_t = 5-2 = 3.$

e) agar soliq 20% ni tashkil qilsa, u holda bozor narxi 120% ni tashkil etib, bundan 100% ni mahsulot yetkazuvchilar, 20% ni davlat oladi. Demak, mahsulot yetkazuvchilar quyidagicha miqdorda olishadi:

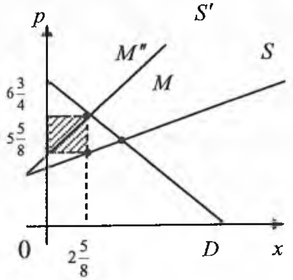
$$p_S = \frac{100}{120},\ p_T = \frac{5}{6}p_T.$$

Talab funksiyasi o'zgarmasdan qoladi, taklif funksiyasi o'rniga $p_S = \frac{5}{6}p_T$ munosabat olinadi:

$$\begin{cases} p_T = -2x+12 \\ \dfrac{5}{6}p_T = x+3 \end{cases}$$

Bu sistemani ochib, M'' yangi muvozanat nuqtani topamiz:

$$-2x+12=\frac{6}{5}x+\frac{18}{5},\ \ x=2\frac{5}{8},\ p_T=6\frac{3}{4},\ \ M''\left(2\frac{5}{8};\ 6\frac{3}{4}\right).$$



Ko‘rinib turibdiki, davlatning R daromadi shtrixlangan to‘rtburchakning yuziga teng miqdorga bo‘ladi.

f) agar mahsulot eng quyi narxda belgilangan bo‘lsa, talab va taklif tenglamalaridan talab va taklif hajmlarini aniqlash mumkin. Ularning orasidagi farq davlat tomonidan qoplanadi. Demak, masala shartiga ko‘ra $p=7$, u holda

$$x_S = p-3=7-3=4,\ \ x_P=\frac{12-p}{2}=\frac{12-7}{2}=2.5\,.$$

Hukumatning xarajatlari esa $(x_S - x_P)\cdot p=(4-2.5)\cdot 7=10.5$.

Koordinatalarni almashtirish. Qutb koordinatalari

Qutb koordinatalar sistemasi berilgan, agar tekislikda biror O nuqta – qutb boshi, shu nuqtadan o‘tuvchi OA to‘g‘ri chiziq – qutb o‘qi va masshtab birligi berilgan bo‘lsa. Qutb koordinatalar sistemasidagi M nuqtaning vaziyatini qutb boshidan shu nuqtagacha bo‘lgan masofa $r=|OM|$ qutb radiusi va qutb radiusi bilan qutb o‘qi tashkil etgan burchak φ qutb burchagi bir qiymatni aniqlaydi. Qutb o‘qiga nisbatan soat strelkasiga teskari yo‘nalishdagi burchak musbat, soat strelkasi bo‘yicha burchak – *manfiy burchak* deyiladi. Qutb burchagi bir-biridan $2\pi n$ ga farq qiluvchi cheksiz ko‘p burchaklar qabul qiladi. $0 \le \varphi \le 2\pi$ shartni qanoatlantiruvchi burchakka *bosh qutb burchagi* deyiladi.

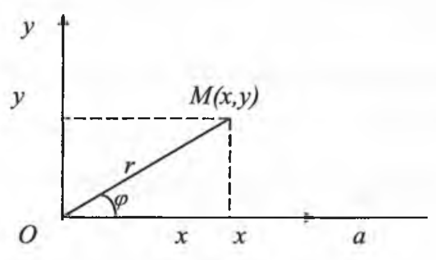
$M(r;\varphi)$ yozuvi r va φ qutb koordinatali M nuqtani anglatadi.

Oxy dekart sistemaning boshini O qutb sistemasining boshi bilan ustma-ust tushadigan va qutb o‘qini abssissalar o‘qining musbat yo‘nalishi bilan ustma-ust tushadigan qilib joylashtiramiz.

M nuqta dekat sistemada x va y koordinatalarga, qutb sistemasida esa r va φ koordinatalarga ega bo‘lsin. U holda M nuqtaning dekart va qutb sistemalaridagi koordinatalari quyidagicha munosabatda bo‘ladi.

$x = r\cos\varphi$, $y = \sin\varphi$ qutb sistemasidan dekart sistemaga o‘tish formulasi,

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\varphi = \frac{x}{r}$, $\sin\varphi = \frac{y}{r}$, $tg\varphi = \frac{x}{y}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le r \langle +\infty$ dekart Sistema-dan qutb sistemasiga o‘tish formulasi.

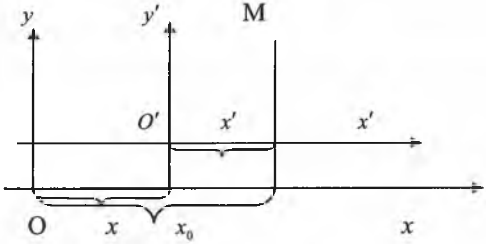


Masalan. $A(-1;\ \sqrt{3})$ nuqtaning qutb koordinatalarini aniqlang.

Yechish: $x=-1$, $y=\sqrt{3}$. $r = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = 2$. $A(-1;\ \sqrt{3})$ nuqta koordinatalar sistemasining ikkinchi choragida yotgani uchun $tg\varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\varphi = \frac{2\pi}{6} \cdot M\left(2;\ \frac{5\pi}{6}\right)$.

Koordinata o‘qlarini parallel ko‘chirish

Ikkita dekart koordinatalar sistemasida bir xil ismli o‘qlar parallel, bir xil yo‘nalgan va o‘qlarning har birida bir xil masshtab birligi aniqlangan bo‘lsin. «Yangi» koordinatalar sistemasi «eski»sini parallel ko‘chirishdan hosil qilingan bo‘lib, $(x_0;y_0)$ yangi koordinatalar sistemasining eski sistemaga nisbatan koordinatalari bo‘lsin. U holda, quyidagi chizmaga ko‘ra:

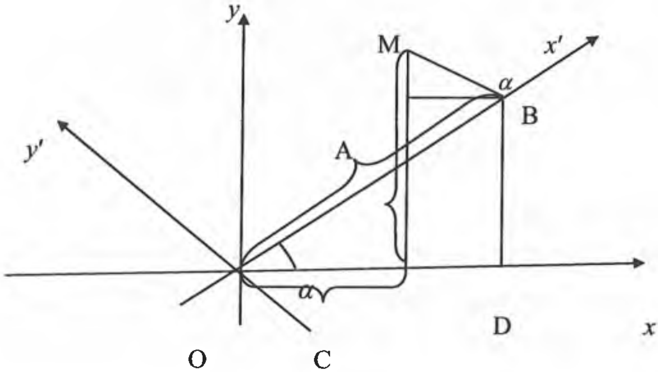


$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases} \qquad (1)$$

(1)-tenglikdan koordinatalarni almashtirishning o‘qlarni parallel ko‘chirish formulasi hosil bo‘ladi.

Koordinata o‘qlarini burish

Tekislikda umumiy koordinata boshi O nuqta bo‘lgan Oxy (eski) koordinatalar sistemasi va bu sistemani α burchakka burishdan hosil qilingan $Ox'y'$ (yangi) koordinatalar sistemasi berilgan bo‘lsin. Tekislikdagi ixtiyoriy M nuqtaning eski koordinatalarini yangi koordinatalari orqali ifodalovchi formulani keltirib chiqaramiz:



Bu holda, yuqoridagi chizmaga ko‘ra $OC=OD-AB$, $CM=BD+MA$ bo‘lganida o‘qlarni burish formulalarini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases} \qquad (2)$$

Ikkinchi tartibli egri chiziqlar: aylana, ellips, giperbola, parabola va ularning kanonik tenglamasini hosil qilish

Ta’rif. Tekislikda berilgan $M(x_0, y_0)$ nuqtadan bir xil R masofada yotuvchi barcha nuqtalarning geometrik o‘rni *aylana* deyiladi. Berilgan $M(x_0, y_0)$ nuqta aylana markazi, R masofa esa aylana radiusi deb ataladi.

Markazi $M(x_0, y_0)$ nuqtada va radiusi R ga teng bo‘lgan aylana tenglamasini keltirib chiqaraylik. $B(x, y)$ nuqta aylanada yotuvchi nuqta bo‘lsin. U holda, ta’rifga ko‘ra aylana tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$MB = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = R \quad \text{yoki} \quad (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2 \qquad (1)$$

(1)-tenglamada sodda almashtirishlarni bajarsak, aylana tenglamasini

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0 \qquad (2)$$

ko'rinishga olib kelish mumkin. (2)-ko'rinishdagi tenglamadan (1)-ko'rinishdagi tenglamaga o'tishi uchun (2) da to'liq kvadratlarni ajratish kerak bo'ladi, u holda $m^2+n^2-4p>0$ shart asosida

$$\left(x+\frac{m}{2}\right)^2+\left(y+\frac{n}{2}\right)^2-\frac{m^2+n^2-4p}{4}=R^2$$

tenglamani hosil qilamiz.

Masalan. Quyidagi tenglama bilan berilgan aylana markazining koordinatalari va radiusini toping: $x^2+y^2-8x+6y-11=0$.

Yechish: Hadlarni guruhlab, to'la kvadrat ajratamiz: $x^2-8x+16-16+y^2+6y+9-9-11=0$ yoki $(x-4)^2+(y+3)^2=36$. Bundan aylana markazi $C(4;\ -3)$ va radiusi $R=6$ ekanligi kelib chiqadi.

Masalan. $A(-4;\ 1)$, $B(2;\ 7)$, $C(8;\ 1)$ nuqtalardan o'tuvchi aylana tenglamasini tuzing.

Yechish: (1)-formulaga ko'ra va A, B, C nuqtalar aylanada yotganligi uchun ularning koordinatalari bu (1)-tenglikni qanoatlantiradi:

$$\begin{cases}(-4-x_0)^2+(1-y_0)^2=R^2\\(2-x_0)^2+(7-y_0)^2=R^2\\(8-x_0)^2+(1-y_0)^2=R^2\end{cases}$$

Birinchi tenglamadan ikkinchisini, keyin uchinchisini ayirib (mustaqil) $x_0=2$, $y_0=1$, keyin esa bu sonlarni bironta tenglamaga qo'yib $R=6$ ekanligini topamiz. Demak, aylananing umumiy tenglamasi $(x-2)^2+(y-1)^2=36$ bo'ladi.

Ta'rif. *Ellips* deb tekislikda berilgan ikki nuqtagacha bo'lgan masofalar yig'indisi deb avvaldan berilgan o'zgarmas songa teng bo'lgan barcha nuqtalarning geometrik o'rniga aytiladi.

Ta'rifdagi ikki nuqta ellipsining fokuslari deyilib, berilgan o'zgarmas son fokuslar orasidagi masofadan katta bo'lishi kerak. Endi ta'rifdan foydalanib ellips tenglamasini hosil qilaylik. Soddalik uchun ellips fokuslari OX o'qda, koordinata boshiga nisbatan simmetrik joylashgan deb olamiz. Ya'ni F_1 va F_2 lar ellipis fokuslari bo'lsa, ular $F_1(-c,0)$ va $F_2(c,0)$ $(c>0)$ ko'rinishda deb olamiz.

Agar ta'rifdagi o'zgarmas sonni $2a(a>0)$ deb olsak, $2a>F_1F_2$, ya'ni $2a>2c$ yoki $a>c$ shart o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. Agar $M(x,y)$ nuqta ellipsda yotsa, u holda, ta'rifga ko'ra $MF_1+MF_2=2a$ tenglik o'rinli bo'lishi kerak. Ya'ni

$$MF_1+MF_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a\Rightarrow\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\Rightarrow$$

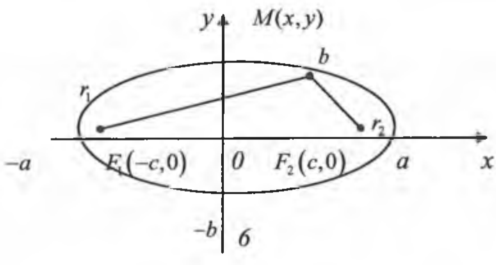
$$\Rightarrow(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2\Rightarrow 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4cx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2\left[(x-c)^2+y^2\right]=\left(a^2-cx\right)^2\Rightarrow a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right)\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

$a>c$ bo'lgani uchun $a^2-c^2=b^2$ deya olamiz, u holda ellipsning ushbu kanonik tenglamasini hosil qilamiz: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (3)

(3)-tenglama bilan berilgan ellips koordinata o'qlariga va koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi. *a* va *b* musbat sonlar deb qaralib, ular ellipsning yarim o'qlari deyiladi. (3)-tenglamani keltirib chiqarishda $a>b$ edi, shuning uchun uning fokuslari *OX* o'qida joylashgan bo'lib, fokuslar koordinata boshidan $c=\sqrt{a^2-b^2}$ masofada yotadi. $\dfrac{c}{a}=\varepsilon<1$ nisbat ellipsning ekssentritsiteti deyiladi. Ellipsda yotgan $M(x,y)$ nuqtadan fokuslargacha bo'lgan masofalar fokal radius-vektorlar deb nomlanib, ular quyidagi tenglik orqali topiladi: $r_1=a-\varepsilon x$, $r_2=a+\varepsilon x$.



6

Agar (3)-tenglamada $a<b$ bo‘lsa, ellips fokuslari OY o‘qda joylashib, $c=\sqrt{b^2-a^2}$, $\varepsilon=\frac{c}{b}$, $r_1=b-\varepsilon y$, $r_2=b+\varepsilon y$ tengliklar o‘rinli bo‘ladi.

Masalan 1. $9x^2+25y^2=225$ ellips berilgan. Uning yarim o‘qlari, fokuslari koordinatalarini, ekssentritsitetini, direktritsalari tenglamalarini toping.

Yechish: $9x^2+25y^2=225$ ellips tenglamasini kanonik ko‘rinishga keltiramiz: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Bundan a=5, b=3 va o‘qlari $a>b$ bo‘lganligidan $c^2=a^2-b^2=16$, $c=\pm4$. Fokuslari esa $F_1=(4;\ 0)$ va $F_2=(-4;\ 0)$, ekssentritsiteti $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{4}{5}$ va direktritsalari tenglamalari esa $y=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{5}{\frac{4}{5}}=\pm\frac{25}{4}$ ko‘rinishida bo‘ladi.

Masalan 2. O‘z harakati davomida $x=9$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan $A(1;\ 0)$ nuqtaga uch marta yaqinroq bo‘lgan nuqtalarning traektoriyasini ifodalovchi chiziq tenglamasini aniqlang.

Yechish: $|AM|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$, $|MM_1|=\sqrt{(9-x)^2}$ M_1 bilan M nuqtadan $x=9$ to‘g‘ri chiziqqa tushirilgan perpendikularning asosi belgilangan. U holda $3\cdot\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{(9-x)^2}$. Tenglikning ikkala tomonini kavadratga ko‘tarib,

$8x^2+9y^2=72$ yoki $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$ tenglamani hosil qilamiz, bu yerda $a=3$; $b=2\sqrt{2}$.

Ta’rif. *Giperbola* deb berilgan ikki nuqtagacha bo‘lgan masofalar ayirmasining moduli avvaldan berilgan o‘zgarmas songa teng bo‘lgan barcha nuqtalarning geometrik o‘rniga aytiladi.

Ta’rifdagi ikki nuqta giperbolaning fokuslari deyilib, berilgan o‘zgarmas son fokuslar orasidagi masofadan kichik bo‘lishi kerak. Giperbola tenglamasini uning fokuslari OX o‘qida yotib, koordinata boshiga nisbatan simmetrik joylashgan hol uchun hosil qilaylik. Giperbola fokuslari F_1, F_2 nuqtalarda bo'lsa, biror $c>o$ son uchun ular $F_1(-c,o)$ va $F_2(c,o)$ koordinatalarga ega bo'ladi. Agar giperbola ta'rifidagi o'zgarmas sonni $2a(a>o)$ deb olsak, u holda $2a<F_1F_2$, ya'ni $2a<2c$, $a<c$ bo'lishi kerak. Agar $M(x,y)$ nuqta giperbolada yotsa, ta'rifga ko'ra $|MF_1-MF_2|=2a$. Demak,

$$(MF_1-MF_2)^2=4a^2 \Rightarrow \left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2=4a^2 \Rightarrow (x+c)^2+y^2-$$
$$-2\sqrt{\left((x+c)^2+y^2\right)\left((x-c)^2+y^2\right)}+(x-c)^2+y^2=4a^2 \Rightarrow 2\sqrt{\left((x+c)^2+y^2\right)\left((x-c)^2+y^2\right)}=$$
$$=2(x^2+y^2)+2(c^2-2a^2) \Rightarrow \left((x+c)^2+y^2\right)\left((x-c)^2+y^2\right)=\left((x^2+y^2)+(c^2-2a^2)\right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x^2-c^2)^2+\left((x+c)^2+(x-c)^2\right)y^2+y^4=(x^2+y^2)^2+2(x^2+y^2)(c^2-2a^2)+(c^2-2a^2)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (-2c^2-2c^2+4a^2)x^2+(2x^2+2c^2-2x^2-2c^2+4a^2)y^2=(c^2-2a^2)^2-c^4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4(a^2-c^2)x^2+4a^2y^2=4a^4-4a^2c^2 \Rightarrow (a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=$$
$$=1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$$

$o<a<c$ bo'lgani uchun $c^2-a^2=b^2$ deya olamiz, natijada giperbolaning quyidagi kanonik ko'rinishdagi tenglamasi hosil bo'ladi:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (4)$$

(4)-tenglama ko'rinishida berilgan giperbola koordinata o'qlari va koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi. a va b parametrlar musbat son bo'lib, a haqiqiy yarim o'q, b mavhum yarim o'q deb nomlanadi. Giperbola OX o'qni giperbola uchlari deb ataluvchi $A_1(-a,o)$ va $A_2(a,o)$ nuqtalarda kesib o'tadi. $c=\sqrt{a^2+b^2}$ son fokuslardan koordinata boshigacha bo'lgan masofaga teng bo'ladi. $\frac{c}{a}=\varepsilon>1$ nisbat giperbola ekssentritsiteti deb nomlanadi. $y=\frac{b}{a}x$ va $y=-\frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqlar giperbola asimptotalari deyiladi. Giperbolada yotuvchi $M(x,y)$

nuqtadan fokuslargacha bo‘lgan masofalar fokal radius-vektorlar deb atalib, quyidagicha topiladi: $r_1 = |\varepsilon x - a|, \quad r_2 = |\varepsilon x + a|$.

Agar (4)-tenglamada $a=b$ bo‘lsa, bunday giperbola teng tomonli giperbola deyiladi, uning tenglamasi $x^2 - y^2 = a^2$, asimptotalari esa $y=\pm x$ ko‘rinishda bo‘ladi.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{va} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

o‘zaro qo‘shma giperbolalar deyiladi.

Masalan 3. $16x^2 - 9y^2 = 144$ giperbola berilgan. Uning yarim o‘qini, fokuslari koordinatalarini, ekssentritsitetini, direktritsasi va asimptotalari tenglamasini toping.

Yechish: Berilgan giperbolaning kanonik ko‘rinishdagi tenglamasini yozib olamiz: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow a^2 = 9,\ b^2 = 16 \Rightarrow$ o‘qlari $a = 3,\ b = 4$. $c^2 = a^2 + b^2 = 25$ $c=\pm 5$ va fokuslari $F_1(5;\ 0)$ va $F_2(-5;\ 0)$, ekssentritsitseti $e = \frac{c}{b} = \frac{5}{3}$ bo‘ladi.

Direktritsasi $y = \pm\frac{b^2}{c} = \pm\frac{9}{5}$, asimptotalari tenglamalari esa $y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{4}{3}x$ bo‘ladi.

Masalan 4. Tenglamasi $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$ bo‘lgan ellips berilgan. Uchlari ellipsning fokuslarida, fokuslari esa uning uchlarida bo‘lgan giperbola tenglamasini tuzing.

Yechish: Masala shartiga ko‘ra $a_g = c_e,\ c_g = a_e,\ a_e = \sqrt{8},\ b_e = \sqrt{5}$ shuning uchun $a_g = c_e = \sqrt{8-5} = \sqrt{3}$, $b_g = \sqrt{c_g^2 - a_g^2} = \sqrt{5}$.

Demak, izlanayotgan giperbola tenglamasi $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$ bo‘ladi.

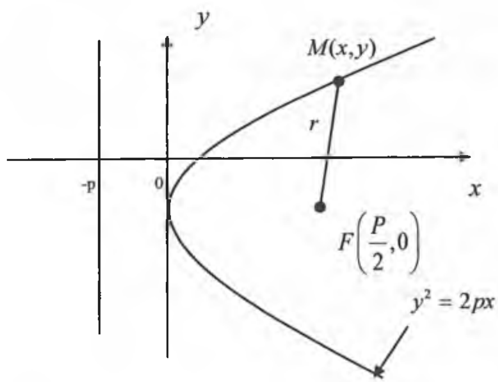
Ta’rif. Berilgan nuqta va berilgan to‘g‘ri chiziqdan teng masofada yotuvchi barcha nuqtalarning geometrik o‘rni *parabola* deb aytiladi.

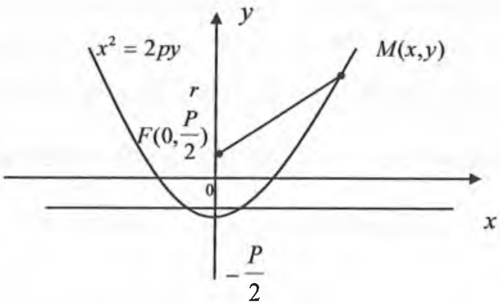
Ta'rifdagi nuqta parabola fokusi, to'g'ri chiziq uning direktritsasi deyiladi. Parabola tenglamasini uning fokusi OX o'qda, direktritsasi OY o'qqa parallel bo'lgan hol uchun hosil qilaylik. Parabola fokusi $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ nuqta, direktritsa tenglamasi esa $x=-\frac{p}{2}$ bo'lsin *(p>0)*. Agar *M(x,y)* nuqta parabolada yotsa, u holda ta'rifga ko'ra $MF=\left|x+\frac{p}{2}\right|$ tenglik o'rinli bo'lishi kerak, ya'ni

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right| \Rightarrow \left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2=2px$$

(5)-hosil bo'ladi. (5)-tenglama bilan ifodalanuvchi parabola OX o'qqa nisbatan simmetrik bo'lib, OX o'qni koordinata boshida kesib o'tadi, bu nuqta parabolaning uchi deb ataladi. Parabolaning *M(x,y)* nuqtasi uchun fokal radius-vektor $r=x+\frac{p}{2}$ ko'rinishda bo'ladi. Ushbu $x^2=2py$ (6) tenglama bilan berilgan parabola fokusi $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$ nuqtada, direktritsasi $y=-\frac{p}{2}$ to'g'ri chiziqdan iborat bo'lib, parabolaning *M(x,y)* nuqtasi uchun fokal radius-vektor $r=y+\frac{p}{2}$ ko'rinishda bo'ladi.





Masalan 5. Uchi koordinata boshida bo'lgan parabola $A(2;\ 4)$ nuqta orqali o'tadi va Ox o'qiga nisbatan simmetrik. Parabolaning tenglamasi, fokuslari va direktritsasini toping.

Yechish: Parabola $O(0;\ 0)$ nuqtadan o'tgani Ox o'qiga simmetrik bo'lgani uchun uning tenglamasi $y^2=2px$ ko'rinishda. A nuqtaning koordinatasini bu tenglamaga qo'yib $4^2=2p\cdot 2$, ya'ni $p=4$ ekanligini topamiz. Demak, parabola tenglamasi $y^2 = 8x$, uning direktritsasi esa $x= -2$, fokusi $F\ (2;\ 0)$.

Masalan 6. Berilgan $F(2;\ 0)$ nuqtadan va $y=2$ to'g'ri chiziqdan bir xil uzoqlikda joylashgan nuqtalar geometrik o'rnining tenglamasini tuzing.

Yechish: $M(x,\ y)$ izlanayotgan chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin, u holda $|MF| = MA$ yoki $\sqrt{(x-2)^2+y^2} = \sqrt{(y-2)^2}$. Bu yerda, $A(x,\ 2)$, M nuqtadan $y=2$ to'g'ri chiziqqa o'tkazilgan perpendikularning kesishish nuqtasi. Bu tenglikning ikkala tomonini kavadratga ko'tarib $x^2-4x+4+y^2=y^2-4y+4$ yoki $y=-\frac{1}{4}x^2+x$ parabola tenglamasini hosil qilamiz.

Agar x va y o'*zgaruvchilar* teskari proporsional, ya'ni $y=\frac{m}{x}$ tenglik orqali bog'langan bo'lsa, sistemasi OXY koordinatalar bissektrisalarini, yangi koordinatalar $OX'Y'$ sistemasi sifatida qarasak, bu tenglama $(x')^2-(y')^2=m$ ko'rinishga keladi, bundan esa asimptotalari

OX va OY o‘qlardan iborat bo‘lgan teng tomonli giperbola ekanligi kelib chiqadi. Agar $m > o$ bo‘lsa giperbola I va III choraklarda, agar $m < o$ bo‘lsa II va IV choraklarda joylashgan bo‘ladi.

Endi kasr-chiziqli funksiyani qaraylik:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

Bu yerda, $c \neq o$ va $ad - bc \neq o$ deb olinadi. Kasr-chiziqli funksiya grafigi asimptotalari $x = -\frac{d}{c}$ va $y = \frac{a}{b}$ bo‘lgan teng tomonli giperbola bo‘ladi.

Ikkinchi tartibli chiziqlar klassifikatsiyasi

Ta’rif. Berilgan dekart koordinatalariga nisbatan ikkinchi darajali tenglamalar bilan aniqlangan egri chiziq *ikkinchi tartibli egri chiziq* deyiladi.

Ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (1)$$

Aylana, ellips, giperbola va paraboladan boshqa ikkinchi tartibli

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

tenglama bilan aniqlanadigan egri chiziqlar mavjudmi? Koeffitsientlarning qiymatiga bog‘liq ikkinchi tartibli $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ tenglama umumiy holda aylanani, ellipsni, giperbolani, parabolani, kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar juftini, parallel to‘g‘ri chiziqlar juftini, ustma-ust tushuvchi to‘g‘ri chiziqlar juftini, nuqtani aniqlashi va hech qanday chiziqni aniqlamasligi ham mumkin.

Nuqtaning bir koordinatalar sistemasidagi koordinatalarini bilgan holda uning ikkinchi sistemadagi koordinatalarini aniqlash muhim hisoblanadi. Nuqtaning bir koordinatalar sistemasidagi koordinatalarini uning ikkinchi sistemadagi koordinatalari orqali ifodalovchi formulalar koordinatalarni almashtirish formulalari deyiladi.

Koeffitsientlarning berilgan qiymatilaridagi $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+$ $+2Ey+F=0$ tenglama qanday chiziqni aniqlashini bilish uchun koordinatalar sistemasini parallel ko'chirish va burish kabi almashtirishlardan foydalaniladi.

Tekislikda x va y «eski» koordinatalar sistemasiga nisbatan x' va y' «yangi» koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin. «Eski» va «yangi» koordinatalar sistemasi orasidagi bog'lanishni topish muhimdir.

Koordinatalarni almashtirish mavzusidan ma'lumki

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$$

bog'lanish koordinatalar o'qlarini parallel ko'chirishni ifodalaydi.

Tekislikda umumiy koordinata boshi O nuqta bo'lgan Oxy (eski) koordinatalar sistemasi va bu sistemani α burchakka burishdan hosil qilingan $Ox'y'$ (yangi) koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin. Tekislikdagi ixtiyoriy M nuqtaning eski koordinatalarini yangi koordinatalari orqali ifodalovchi

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

bog'lanish o'qlarni burish formulalarini anglatadi.

Ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasini kanonik ko'rinishga keltirish

Asosiy masala – koordinata o'qlarini almashtirish yordamida ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasi (1)ni sodda ko'rinishga keltirib, qanday chiziqni ifodalashini aniqlashdir.

1. Koordinata o'qlarini parallel ko'chirish yordamida ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasini soddalashtirishga harakat qilamiz. $O(0;0)$ koordinatalar boshini

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases} \qquad (2)$$

formulalar yordamida $O'(x';y')$ nuqtaga ko'chiramiz:

$$A(x'+x_0)^2 + 2B(x'+x_0)(y'+y_0) + C(y'+y_0)^2 + 2D(x'+x_0) + 2E(y'+y_0) + F = 0 .$$

Qavslarni ochib va o'xshash hadlarni birlashtirib:

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + 2x'(Ax_0 + By_0 + D) + 2y'(Bx_0 + Cy_0 + E) + F_1 = 0 \qquad (3)$$

bunda $F_1 = x_0(Ax_0 + By_0 + D) + y_0(Bx_0 + Cy_0 + E) + Dx_0 + Ey_0 + F.$

x_0 *va* y_0 koeffitsientlarni shunday tanlaymizki, quyidagi munosabat o'rinli bo'lsin:

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

U holda (3)-tenglama quyidagicha ko'rinishda bo'ladi:

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + F_1 = 0 , \quad F_1 = Dx_0 + Ey_0 + F. \qquad (5)$$

Demak, koordinata o'qlarini parallel ko'chirishda (1)-umumiy tenglama joriy koordinatalarning birinch darajalari qatnashgan hadlaridan ozod bo'ladi.

(4)-sistemani yechishda quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

1. $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 \neq 0$. Bu holda sistema yagona

$$x_0 = \frac{BE - CD}{AC - B^2}, \quad y_0 = \frac{BD - AE}{AC - B^2}$$

yechilmga ega bo'lib, $O'(x_0;y_0)$ egri chiziqning markazi, egri chiziq esa markazga ega egri chiziq deyiladi. Aylana, ellips va giperbola markazga ega ikkinchi tartibli egri chiziqlardir.

Agar $\Delta > 0$ bo'lsa, egri chiziq yoki aylanani, yoki ellipsni, yoki nuqtani (aynigan ellips), yoki mavhum ellipsni (bu holda tenglama hech qanday geometrik shaklni ifodalamaydi) ifodalaydi.

Agar $\Delta < 0$ bo'lsa, egri chiziq yoki giperbolani, yoki aynigan giperbolani (kesishuvchi egri chiziqlar juftini) aniqlaydi.

Kanonik tenglamada koordinatalar ko‘paytmasi qatnashmagani uchun, (5)-tenglamadagi bu hadni koordinata o‘qlarini burish yordamida bartaraf etamiz:

$$\begin{cases} x' = \bar{x}cos\alpha - \bar{y}sin\alpha \\ y' = \bar{x}sin\alpha + \bar{y}cos\alpha \end{cases}$$

α burchakka burish formulasini (5)-tenglamaga qo‘yib:

$$A_1\bar{x}^2 + 2B_1\overline{xy} + C_1\bar{y}^2 + F_1 = 0,$$

bunda
$$A_1 = A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha,$$
$$B_1 = (C - A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha),$$
$$C_1 = A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha.$$

α burchakni shunday tanlaymizki, bunda B_1 koeffitsient nolga aylansin, ya’ni $(C - A)sin\alpha)sin + B(cos^2\alpha - sin^2\alpha) = 0$ (6)

yoki $Btg^2\alpha - (C - A)tg\alpha - B = 0$ munosabat bajarilsin. Bu tenglamani yechib burish burchagi aniqlanadi.

Yangi koordinatalar sistemasida (1)-tenglama kanonik ko‘rinishni oladi:

$$A_1\bar{x}^2 + C_1\bar{y}^2 + F_1 = 0 \qquad (7)$$

O‘qlarni har qanday burishda ikkinchi darajali noma’lumlar oldidagi A, B, C koeffitsientlar umumiy holda o‘zgarsa ham, $AC–B^2$ ifoda invariantdir (o‘zgarmaydi). (7)-tenglamada $x'y'$ ifoda yo‘qligi uchun, ya’ni $B_1=0$ bo‘lgani uchun $A_1C_1 (= A_1C_1 - B_1^2) = AC - B^2$, $A_1+C_1=A+C$ bo‘lib, A_1 va C_1 koeffitsientlarni koordinatalarni almashtirmasdan topish imkonini beradi.

Masalan. $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$ tenglama bilan berilgan egri chiziq tenglamasini kanonik ko‘rinishga keltiring va chizing.

Yechish: Tenglama koeffitsientlarini yozing:

$A=5,\ B=4,\ C=5,\ D=-9,\ E=-9,\ F=9.$

$\Delta = AC - B^2 = 25 - 16 = 9 > 0$, u holda chiziq ellipsni ifodalaydi.

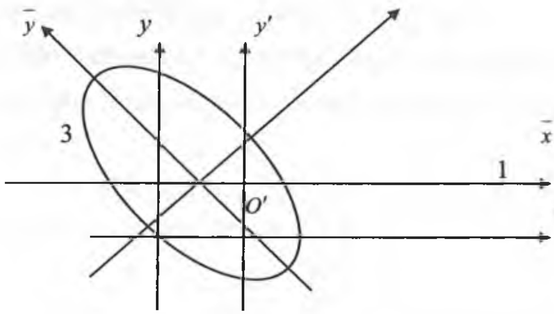
Chiziq markazini aniqlaymiz:

$$\begin{cases} 5x_0+4y_0-9=0 \\ 4x_0+5y_0-9=0, \end{cases} \quad \Delta=9>0,\ \Delta_x=9,\ \Delta_y=9.\ x_0=\frac{\Delta_x}{\Delta}=1,\ y_0=\frac{\Delta_y}{\Delta}=1.$$

Koordinatalar boshini $O'(1;1)$ nuqtaga ko'chirqamiz: $\begin{cases} x=x'+1 \\ y=y'+1 \end{cases}$.

Bu holda egri chiziq tenglamasi $5x'^2+8x'y'+5y'^2-9=0$ ko'rinishini oladi.

Koordinata o'qlarini α burchakka buramiz. Burish burchagi α ni (6)-formula bo'yicha $4tg^2\alpha-4=0$, $tg\alpha=\pm1$ tenglamadan aniqlaymiz. Yechim uchun $tg\alpha=1$, $\alpha=45^0$ bo'lgan holni qaraylik. Bu holda koordinatalar $\bar{x}=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}$, $\bar{y}=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$ munosabat bilan bog'lanib, tenglama $9\bar{x}^2+\bar{y}^2=9$ yoki $\frac{\bar{x}^2}{1}+\frac{\bar{y}^2}{9}=1$ ellipsning kanonik tenglamasini hosil qiladi.



2. $\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2=0$. Bunda quyidagi ikki hol bo'lishi mumkin:

a) (4)-sistema yechimga ega emas, egri chiziq markazga ega emas. Bu holda egri chiziq tenglamasini soddalashtirishni koordinata o'qlarini burishdan boshlash qulay bo'ladi va doim parabolaning kanonik tenglamasi hosil bo'ladi.

b) (4)-sistema cheksiz ko'p yechimga ega. Bu holda egri chiziq aynigan parabola (parallel to'g'ri chiziqlar jufti yoki mavhum nuqta)ni ifodalaydi.

Masalan. $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$ tenglama bilan berilgan egri chiziq tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiring va grafigini chizing.

Yechish: *A=9, B=–12, C=16, D=–10, E=55, F=–50.*

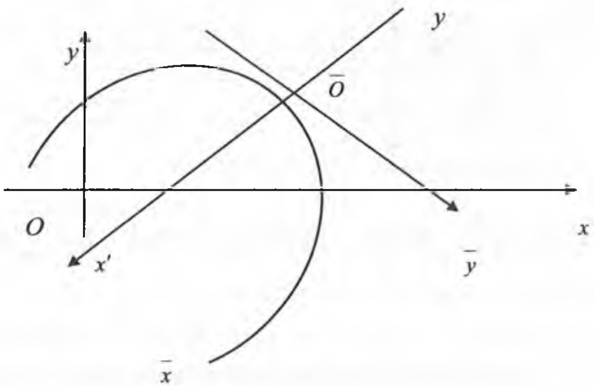
$\Delta = AC - B^2 = 144 - 144 = 0$ demak, bu chiziq parabolani ifodalaydi va shuning uchun soddalashtirishni koordinatalar o'qini burishdan boshlash qulay bo'ladi. (6)-formulani berilgan tenglamaga qo'llab va $x'y'$ had oldidagi koeffitsientni nolga tenglab quyidagiga ega bo'lamiz: $12tg^2\alpha + 7tg\alpha - 12 = 0$.

Bu tenglamani yechib: $tg\alpha_1 = 0,75\ (sin\alpha_1 = 0,6;\ cos\alpha_1 = 0,8)$;

$$tg\alpha_1 = -\frac{4}{3}\ (sin\alpha_2 = -0,8; cos\alpha_1 = 0,6).$$

x'^2, y'^2, x', y' noma'lumlar oldidagi koeffitsientlarni hisoblab, yangi sistemada berilgan tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$y'^2 - 4y' - 2x' - 2 = 0 \qquad (y' - 2)^2 - 2(x' + 3) = 0.$$



2. Oliy algebra elementlari
Matritsalar va ular ustida amallar

Ta'rif. O'lchamlari $m \times n$ bo'lgan matritsa deb, satrlar soni m ga, ustunlar soni n ga teng bo'lgan, $m \cdot n$ ta sondan tashkil topgan to'g'ri to'rtburchak shaklidagi sonli jadvalga aytiladi.

Matritsalar lotin alifbosining katta harflari *A,B,C* va h.k.lar bilan belgilanadi va matritsani tashkil etuvchi sonlar uning elementlari deb atalib, matritsaning *i* satri va *j* ustuni kesishmasida joylashgan elementi a_{ij} ko'rinishida yoziladi. Matritsalar

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ko'rinishda yoki qisqacha $A = (a_{ij}),\ i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}$ shaklda ham ifodalanishi mumkin. Matritsalarni ifodalashda $\|\cdot\|$ yoki $[\cdot]$ belgilardan ham foydalaniladi.

Birgina satrdan yoki birgina ustundan iborat matritsa vektor-satr yoki vektor-ustun deb nomlanadi, ya'ni

$$A = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}) \text{ vektor-satr, } B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \cdot \\ b_{m1} \end{pmatrix} \text{ vektor-ustun.}$$

Matritsa o'lchami $(n \times n)$ bo'lsa, ya'ni satrlar soni ustunlar soniga teng bo'lsa, bunday matritsa *n-tartibli kvadrat matritsa* deyiladi. Kvadrat matritsaning $a_{ii},\ i = \overline{1,n}$ ko'rinishdagi elementlari uning diagonal elementlari deb atalib, ular matritsaning diagonalini tashkil etadi deyiladi. Agar kvadrat matritsa uchun $i \neq j$ bo'lganda $a_{ij} = 0$

bo‘lsa, bunday matritsa *diagonal matritsa* deyiladi. Agar diagonal matritsada barcha $i=\overline{1,n}$ lar uchun $a_{ii}=1$ bo‘lsa, bunday matritsa *birlik matritsa* deb ataladi va *E* bilan belgilanadi, ya’ni

$$\mathrm{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0\cdots0\cdots0 \\ 0 & 1\cdots0\cdots0 \\ 0 & 0\cdots1\cdots0 \\ 0 & 0\cdots0\cdots1 \end{pmatrix}$$

Agar matritsaning barcha elementlari, ya’ni istalgan $i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}$ uchun $a_{ij}=0$ bo‘lsa, u holda bunday matritsa 0 ko‘rinishda ifodalanadi va *nol-matritsa* deyiladi.

Endi matritsalar ustida bajariladigan amallarni kiritamiz.

Ta’rif. $A=(a_{ij})$ matritsaning λ songa ko‘paytmasi deb shunday *C* matritsa tushuniladiki, bunda *C* matritsa elementlari c_{ij} ushbu $c_{ij}=\lambda a_{ij}$ tenglik orqali aniqlanadi.

Xususan istalgan A matritsa uchun $0\cdot A=0$ bo ‘ladi.

Ta’rif. Bir xil $m\times n$ o‘lchamli $A=(a_{ij})$ va $B=(b_{ij})$ matritsalar uchun ularning yig‘indisi deb shunday $m\times n$ o‘lchamli $C=(c_{ij})$ matritsaga aytiladiki, istalgan $i=\overline{1,n}$ va $j=\overline{1,m}$ lar uchun c_{ij} element, $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ tenglik orqali aniqlanadi va matritsalar yig‘indisi *A*+*B* shaklda belgilanadi, ya’ni *C*=*A*+*B*.

A matritsaning *B* matritsaga ko‘paytmasini aniqlashda, *A* matritsaning ustunlar soni *B* matritsaning satrlar soniga teng bo‘lishi talab etiladi. Ya’ni $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times k}$ bo‘lishi kerak.

Ta’rif. $A=(a_{ij})_{m\times n}$ va $B=(b_{ij})_{n\times k}$ matritsalar ko‘paytmasi deb, o‘lchami $m\times k$ bo‘lgan shunday $C=(c_{ij})_{m\times k}$ matritsaga aytiladiki, uning c_{ij} elementi

$$c_{ij}=\sum_{s=1}^{n} a_{is}\cdot b_{sj},\quad i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,k}$$

tenglik orqali aniqlanib, matritsalar koʻpaytmasi $A \cdot B$ koʻrinishda ifodalanadi, ya'ni $C = A \cdot B$.

Yuqorida kiritilgan matritsalar ustidagi amallar uchun quyidagi xossalar oʻrinli boʻlib, bu xossalarning isboti, ularga mos xossalarning sonlar ustida oʻrinli ekanligidan kelib chiqadi. Bu isbotlarni oʻquvchining oʻziga havola qilamiz.

1. Matritsalarni qoʻshish amali uchun kommutativlik – oʻrin almashtirish xossasi oʻrinli, ya'ni

$$A + B = B + A;$$

2. Matritsalarni qoʻshish amali uchun assotsiativlik – guruhlash xossasi oʻrinli, ya'ni

$$(A + B) + C = A + (B + C);$$

3. Matritsalarni songa koʻpaytirishda qoʻshishga nisbatan distributivlik xossasi oʻrinli, ya'ni

$$\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B;$$

4. Matritsalarni koʻpaytirish amalida qoʻshishga nisbatan distributivlik xossasi oʻrinli, ya'ni $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ yoki $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;

5. Matritsani songa koʻpaytirish va matritsalarni matritsaga koʻpaytirish orasida quyidagi xossa oʻrinli, ya'ni

$$\lambda \cdot (A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B);$$

6. Matritsalarni koʻpaytirish amali uchun guruhlash xossasi oʻrinlidir, ya'ni

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$$

Shuni ta'kidlab oʻtish lozimki, $A \cdot B$ koʻpaytma mavjud ekanligidan $B \cdot A$ ning mavjud ekanligi kelib chiqmaydi, sababi $A \cdot B$ koʻpaytmani aniqlashda A matritsaning ustunlar soni B matritsaning satrlar soniga teng boʻlishi kerak, bunda B matritsaning ustunlar soni A matritsaning satrlar soniga teng boʻlmasligi ham mumkin, shuning uchun $B \cdot A$ koʻpaytmani har doim aniqlab boʻlmas ekan.

Masalan: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$

matritsalar uchun $A\cdot B$ ni aniqlash mumkin, lekin $B\cdot A$ ni aniqlab bo‘lmaydi.

Yana shuni ta’kidlash kerakki, $A\cdot B$ va $B\cdot A$ ko‘paytmalar mavjud bo‘lgan taqdirda ham $A\cdot B = B\cdot A$ tenglik o‘rinli bo‘lmasligi mumkin.

Masalan: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$

matritsalar uchun $A\cdot B$ ko‘paytma matritsaning o‘lchami *3x3* bo‘lsa, $B\cdot A$ uchun esa *2x2*. Demak, tabiiy ravishda $A\cdot B \neq B\cdot A$.

Endi A n-tartibli kvadrat matritsa bo‘lsin. U holda $A\cdot E = E\cdot A = A$ *va* $O\cdot A = A\cdot O = O$ munosabatlar o‘rinli ekanligini ko‘rish qiyin emas.

Natural k son uchun quyidagi tenglik orqali

$$A^k = \underbrace{A\cdot A\cdot \ldots \cdot A}_{k-marta}$$

A matritsaning «k-darajasi»ni aniqlaymiz.

Shartli ravishda $A^0 = E$ va $A^1 = A$ deb qabul qilinadi.

Agar A matritsa elementlarining tartib raqamlarini o‘zgartirmagan holda satrlarini ustun yoki ustunlarini satr qilib almashtirsak, hosil bo‘lgan yangi matritsa A matritsaning transponirlangani deb nomlanib, A' (yoki A^T) shaklda belgilanadi. Masalan, $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 5\end{pmatrix}$ bo‘lsa,

$A'=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 5\end{pmatrix}$ bo‘ladi.

A matritsani A' ga almashtirish matritsani transponirlash deb nomlanadi. Transponirlash quyidagi xossalarga ega:

1. $(A')' = A$ 2. $(\lambda A)' = \lambda\cdot A'$

1. $(A+B)' = A'+B'$ 4. $(A\cdot B)' = B'\cdot A'$

Bu xossalarning isbotini o‘quvchiga havola qilamiz.

Ta'rifdan kelib chiqadiki, agar A matritsaning o'lchami $m\times n$ bo'lsa, u holda transponirlangan matritsaning o'lchami $n\times m$ bo'ladi.

Masalan 1. Matritsalarning ko'paytmasini aniqlang:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Yechish:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 2\cdot3+3\cdot4+4\cdot1-5\cdot2 & 2\cdot2+3\cdot1+4\cdot3-5\cdot0 & 2\cdot1-3\cdot1+4\cdot2-5\cdot1 \\ 1\cdot3+2\cdot4-3\cdot1+4\cdot2 & 1\cdot2+2\cdot1-3\cdot3+4\cdot0 & 1\cdot1-2\cdot1-3\cdot2+4\cdot1 \\ -1\cdot3-2\cdot4+3\cdot1+1\cdot2 & -1\cdot2-2\cdot1+3\cdot3+1\cdot0 & -1\cdot1+2\cdot1+3\cdot2+1\cdot1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 12 & 19 & 2 \\ 16 & -5 & -3 \\ -6 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Masalan 2. Telefon apparatlarini ta'mirlovchi usta 70% telefonlarni past darajada, 20% ni o'rta darajada va 10% ni to'liq ta'mirdan chiqardi. Statistik ma'lumotlarga ko'ra 70% past darajada ta'mirlangan telefonlarni bir yildan keyin qayta 10% ni past darajada, 60% ni o'rta darajada, 30% ni to'liq ta'mirlashadi. O'rta darajada ta'mirlangan telefonlarni bir yildan keyin qayta 20% ni past darajada, 50% ni o'rta, 30% ni to'liq ta'mirlashadi. To'liq ta'mirlangan telefonlarni bir yildan keyin qayta 60% ni past darajada, 40% ni o'rta darajada ta'mirlashadi. Agar masala sharti shu tarzda davom etsa 1, 2, 3 yillardan keyingi har bir darajada ta'mirlangan telefonlar ulushini aniqlang.

Yechish: $X_0=(0{,}7 \quad 0{,}2 \quad 0{,}1)$

$$A=\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} X_1=X_0\times A=(0{,}17 \quad 0{,}56 \quad 0{,}27) \\ X_2=X_1\times A=(0{,}291 \quad 0{,}490 \quad 0{,}219) \\ X_3=X_2\times A=(0{,}2585 \quad 0{,}5072 \quad 0{,}2343) \end{matrix}$$

Determinantlar

Matematika va uning tatbiqlarida, xususan iqtisoddagi tatbiqlarida chiziqli tenglamalar sistemasini yechishga to‘g‘ri keladi. Bunday sistemalarni yechishda, ular bilan bog‘liq bo‘lgan kvadrat matritsalarni xarakterlash uchun determinant deb nomlanuvchi son mos qo‘yiladi. Bu son $|A|$ yoki $\det(A)$ shaklida ifoda etiladi. Kvadrat matritsa determinantini, uning tartibi N bo‘yicha induksiya metodi orqali ta’riflaymiz.

Ta’rif. O‘lchamlari $m\times n$ bo‘lgan matritsa deb, satrlar soni m ga, ustunlar soni n ga teng bo‘lgan, $m\cdot n$ ta sondan tashkil topgan to‘g‘ri to‘rtburchak shaklidagi sonli jadvalga aytiladi.

Matritsalar lotin alifbosining katta harflari A,B,C va h.k.lar bilan belgilanadi va matritsani tashkil etuvchi sonlar uning elementlari deb atalib, matritsaning i-satri va j-ustuni kesishmasida joylashgan elementi a_{ij} ko‘rinishda yoziladi. Matritsalar

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ko‘rinishda yoki qisqacha $A=(a_{ij}),\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}$ shaklda ham ifodalanishi mumkin. Matritsalarni ifodalashda $\|\cdot\|$ yoki $[\cdot]$ belgilardan ham foydalaniladi.

$n=1$ bo‘lsin: $A=(a_{11})$. A matritsaning determinanti deb $|A|=a_{11}$ sonini olamiz. $n-1$ tartibli determinant aniqlangan bo‘lsin deb faraz qilamiz.

Ta'rif. n-tartibli $A=(a_{ij})$ matritsa a_{ij} elementining M_{ij} minori deb, A matritsaning i-satri va j-ustunini o'chirishdan keyin hosil bo'lgan $(n-1)$ tartibli matritsa determinantiga aytiladi.

Ta'rif. n-tartibli $A=(a_{ij})$ matritsa a_{ij} elementining algebraik to'ldiruvchisi A_{ij} deb quyidagi songa aytiladi: $A_{ij}=(-1)^{i+j}\ M_{ij}$.

Yig'indi $\sum_{s=1}^{n} a_{is}\ \ A_{is}$ – i-satr bo'yicha yoyilma, $\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\ A_{kj}$ yig'indi esa j-ustun bo'yicha yoyilma deb ataladi.

Ta'rif. $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\ A_{ij}$ yig'indi i-satr bo'yicha yoyilma, $\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\ A_{kj}$ yig'indi esa j-ustun bo'yicha yoyilma deb ataladi.

Ta'rif. n-tartibli kvadrat $A=(a_{ij})$ matritsaning determinanti deb, quyidagi tenglik bilan aniqlangan songa aytiladi:

$$|A|=\sum_{k=1}^{n} a_{1k}\ \ A_{1k} \tag{1}$$

Bu ta'rifdan foydalanib 2- va 3-tartibli determinantlarni hisoblash uchun quyidagi formulalarni hosil qilamiz: $n=2$ bo'lsin: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

A matritsaning determinanti deb

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{2} a_{1k}A_{1k}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ sonini olamiz.

O'ng tomondagi qo'shiluvchilarning ishorasini ushbu sxema asosida aniqlash qulay:

Masalan. Determinantni hisoblang: $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$

Yechish: $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=3\cdot 4-2\cdot 5=2$.

$n=3$ bo‘lsin: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. A matritsaning determinanti deb

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k}A_{1k} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$+ a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

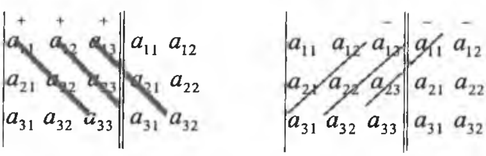
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

sonni olamiz.

O‘ng tomondagi qo‘shiluvchilarning ishorasini ushbu sxema asosida aniqlash qulay:

Uchinchi tartibli determinantni bu usulda hisoblash odatda *uchburchak usulida hisoblash* deyiladi.

Uchinchi tartibli determinantni Sarrius qoidasi (elementlarni parallel ko‘chirish usuli)da ham hisoblash mumkin:



– ustunlar bo‘yicha ko‘chirish.

$$\begin{array}{c}
+\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|- \\
\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
+\begin{matrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}- \\
+\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|-
\end{array}$$

– satrlar bo‘yicha ko‘chirish.

Masalan. Determinantni hisoblang: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

Yechish: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot5\cdot4+2\cdot3\cdot2+4\cdot1\cdot8-8\cdot5\cdot2-3\cdot3\cdot1-4\cdot2\cdot4=-17$.

Teorema (Laplas teoremasi). Istalgan i va j lar uchun

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is}\,A_{is} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\,A_{kj} = |A| \quad i=\overline{1,n}; \quad j=\overline{1,n} \tag{2}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Determinantning barcha yoyilmalari uning determinantiga teng bo‘lar ekan.

1-xossa. Agar A matritsaning biron-bir satrdagi (ustundagi) barcha elementlari nolga teng bo‘lsa, u holda uning determinanti nolga teng bo‘ladi.

Haqiqatan ham, agar matritsaning i-satri elementlari $a_{ik}=0,\ \ k=\overline{1,n}$ bo‘lsa, (1-tenglikdan $|A|=0$ ekanligi kelib chiqadi. Agar matritsaning j-ustun elementlari $a_{kj}=0,\ k=\overline{1,n}$ bo‘lsa, Laplas teoremasidan, ya’ni (2)-tenglikdan $|A|=0$ ekanligi kelib chiqadi.

2-xossa. Agar A matritsaning biron-bir satr (ustun) elementi λ soniga ko‘paytirilsa, determinant qiymati ham λ soniga ko‘payadi, ya’ni $\lambda\cdot|A|$ ga teng bo‘ladi. Bu xossaning isboti (1)-tenglikdan to‘g‘ridan to‘g‘ri kelib chiqadi, chunki

$$\sum_{k=1}^{n}(\lambda\cdot a_{ik})\cdot A_{ik}=\lambda\cdot\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=\lambda\cdot|A|.$$

Xossaning ustun holidagi isboti, Laplas teoremasidan, ya'ni (2)-tenglikdan kelib chiqadi.

3-xossa. A matritsa va uning transponirlangani A' matritsalarning determinantlari teng bo'ladi, ya'ni $|A|=|A'|$ tenglik o'rinlidir.

Bu xossaning isboti to'g'ridan to'g'ri Laplas teoremasidan, ya'ni (2)-tenglikdan kelib chiqadi. Chunki transponirlangan A' matritsa uchun (1)-tenglikni, ya'ni satr bo'yicha yoyilmasini qarasak, bu yoyilma A matritsa uchun ustun bo'yicha yoyilmadan iborat bo'ladi, u holda (2)-tenglikdan $|A|$ ga tengligi kelib chiqadi. Demak $|A'|=|A|$ ekan.

4-xossa. Agar A matritsaning ikkita qo'shni satrlari o'rnini almashtirsak, hosil bo'lgan yangi A_1 matritsaning determinanti A matritsa determinantining teskari ishora bilan olinganiga teng bo'ladi, ya'ni $|A_1|=-|A|$ tenglik o'rinli bo'ladi.

A_1 matritsa A matritsaning $i-$ va $i+1$ satrlari o'rnini almashtirishdan hosil bo'lgan bo'lsin, agar A_1 matritsaning $i+1$ satri bo'yicha yoyilmasini qarasak, ya'ni

$$|A_1|=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(-1)^{i+1+k}M_{ik}=-\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(-1)^{i+k}M_{ik}=-|A|$$

ekani kelib chiqadi. Demak, bu holda 4-xossa isbot bo'ldi.

Endi A_1 matritsa A matritsadan i va j-satrlarining $(i<j)$ o'rinlarini almashtirishdan hosil bo'lgan bo'lsin, u holda bu almashtirishni ketma-ket keluvchi satrlar o'rnini almashtirish orqali ifodalash mumkin bo'ladi. Aytaylik $j=i+m$ ko'rinishda bo'lsin. $i,\ i+1,\ i+2,\ldots,\ i+m-1,\ i+m$ satrlar joylashuvidan $i+m,\ i+1, i+2,\ldots,\ i+m-1,\ i-$ satrlar joylashuviga o'tish kerak, buni quyidagicha bajarish mumkin.

$i,\ i+1,\ i+2,\ldots,\ i+m-1,\ i+m\to i+1,\ i,\ i+2,\ldots,i+m-1,\ i+m\to\ldots\to i+1,\ i+2,$ $\ldots,\ i+m-1,\ i+m,\ i$

bu o‘tishlar soni m ga teng, so‘ngra

$i+1, i+2, \ldots, i+m, i+m-1, i \to \ldots, i+m, i+1, i+2, \ldots, i+m-2, i+m-1, i$ – bu o‘tishlar soni $m-1$ ga teng.

Demak, jami $m+m-1=2m-1$ qadamli o‘tishlar bor ekan va A matritsa determinanti o‘z ishorasini toq marta o‘zgartirar ekan, u holda $|A_1|=-|A|$ bo‘ladi.

5-xossa. Agar A matritsa bir xil ikki satr (ustun)ga ega bo‘lsa, u holda uning determinanti nolga teng $|A|=0$ bo‘ladi.

Chunki, agar A matritsaning i va j-satrlari bir xil bo‘lsa, u holda ularning o‘rinlarini almashtirishdan hosil bo‘lgan matritsa A_1 uchun $A_1=A$ va $|A_1|=-|A|$ bo‘lishi kerak, ya’ni $|A|=-|A|$, bundan esa $|A|=0$ ekanligi kelib chiqadi.

6-xossa. Agar A matritsada ikki satr (ustun)ning mos elementlari proporsional bo‘lsa, u holda uning determinanti nolga teng, ya’ni $|A|=0$ bo‘ladi.

Faraz qilaylik, A matritsaning i-satri mos elementlari j-satrning mos elementlariga proporsional bo‘lsin, ya’ni

$$a_{ik}=\lambda a_{jk}, \qquad k=\overline{1,n} \tag{3}$$

tengliklar o‘rinli bo‘lsin, (λ– proporsional koeffitsienti), u holda, agar A_1 matritsani A matritsaning j-satri elementlarini uning i-satri elementlari bilan almashtirishdan hosil bo‘lgan matritsa deb qarasak, u holda (3)-tenglik va 2-xossaga ko‘ra $|A|=\lambda\cdot|A_1|$ ekanligi kelib chiqadi. 5-xossaga ko‘ra $|A_1|=0$ bo‘ladi, demak $|A|=0$ ekan.

7-xossa. Agar A matritsaning biron satr (ustun) elementlarini boshqa satr (ustun) mos elementlarining algebraik to‘ldiruvchilariga ko‘paytirib yig‘indi hosil qilsak, bunday yig‘indi nolga teng bo‘ladi, ya’ni

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk}=0, \qquad i\neq j.$$

Agar A – matritsaning j-satr elementlarini uning i-satr elementlari bilan almashtirishdan hosil bo'lgan matritsani A_1 desak, 5-xossaga ko'ra $|A_1| = 0$ bo'ladi. Agar A_1 matritsaning j-satri bo'yicha yoyilmasini olsak, determinantning ta'rifiga ko'ra $|A_1| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \; A_{jk} = 0$ ekanligi kelib chiqadi.

Bu yerda, 7-xossa va Laplas teoremasiga ko'ra quyidagi natijani hosil qilamiz:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} |A|, \grave{a}gar \ i = j \ bo'lsa \\ 0, \ agar \ \ i \neq j \ bo'ls\grave{a} \end{cases} \tag{4}$$

8-xossa. A matritsaning biron-bir satri (ustuni) elementlarini bir xil songa ko'paytirib, boshqasiga qo'shishdan hosil bo'lgan A_1 matritsaning determinanti A matritsa determinantiga teng bo'ladi, ya'ni $|A_1| = |A|$.

Ushbu matritsalar berilgan bo'lsin,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{j1} & a & \cdots & a_{jn} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{i1} + \lambda a_{j1} & a_{i2} + \lambda a_{j2} & \cdots a_{in} + \lambda a_{jn} \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots \ a_{jn} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots \ a_{nn} \end{pmatrix}$$

U holda (4)-tenglikdan,

$$|A_1| = \sum_{k=1}^{n} \left(a_{ik} + \lambda \, a_{jk}\right) A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} + \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{jk} A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik} = |A|,$$

ya'ni 8-xossaning isboti kelib chiqadi.

9-xossa. $b_1, \ b_2, \ldots, b_n$ sonlarni n-tartibli A matritsaning berilgan satr (ustun) mos elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytmasining yig'indisi, A matritsaning berilgan satr (ustun) elementlarining $b_1, \ b_2, \ldots, b_n$ sonlari bilan almashtirilgan matritsa determinantiga teng bo'ladi.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \ \text{va} \ B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} & \\ b_1 & b_2 \ldots b_n & \\ a_{n1} & a_{n2} \ \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Bunda $|B| = \sum_{k=1}^{n} b_k \, A_{ik}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Quyidagi xossani isbotsiz keltiramiz.

10-xossa. n-tartibli kvadrat A va B matritsalar uchun $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$ tenglik o'rinli bo'ladi, ya'ni matritsalar ko'paytmasining determinanti, ularning determinantlari ko'paytmasiga teng bo'ladi.

Har qanday determinant ixtiyoriy satri (ustuni) elementlarining mos algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytmalarining yig'indisidan iborat, ya'ni:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\dots+a_{in}A_{in}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\dots+a_{nj}A_{nj}$$

Masalan. Berilgan determinantni to'rtinchi satr elementlari bo'yicha yoyib hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -5 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

Yechish: 1) To'rtinchi satr elementlari bo'yicha yoyib yechamiz:

$$|A| = a_{41}A_{41}+a_{42}A_{42}+a_{43}A_{43}+a_{44}A_{44} = -a_{41}M_{41}+a_{42}M_{42}-a_{43}M_{43}+a_{44}M_{44} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -5 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 546$$

2) Uchunchi ustun elementlarini nolga aylantirish usuli bilan hisoblaymiz:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -5 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17 & -10 & 0 & 6 \\ -5 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \\ -19 & 17 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 17 & -10 & 6 \\ -3 & -2 & 4 \\ -19 & 17 & -6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 17 & -10 & 6 \\ -3 & -2 & 4 \\ -2 & 7 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} -10 & 6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 17 & 6 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 2(-40+12)+7(68+18) = 546$$

Teskari matritsa

Ta'rif. A kvadrat matritsaga teskari matritsa deb, shunday A^{-1} matritsaga aytiladiki, uning uchun quyidagi $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$ tenglik o'rinli bo'lsin.

Ta'rif. Agar A matritsa uchun $|A|\neq 0$ bo'lsa, bunday matritsa xos bo'lmagan matritsa, aks holda, ya'ni $|A|=0$ bo'lsa, xos matritsa deyiladi.

Teorema. A kvadratik matritsaga teskari A^{-1} matritsa mavjud va yagona bo'lishi uchun, uning xos bo'lmagan matritsa bo'lishi zarur va yetarlidir.

Zarurligi. Agar A matritsa uchun unga teskari A^{-1} matritsa mavjud bo'lsa, u holda $A\cdot A^{-1}=E$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bu yerdan matrisalar ko'paytmasining determinanti har bir matrisa determinantlari ko'paytmasiga tengligi xossasiga ko'ra, quyidagini hosil qilamiz:

$$|A\cdot A^{-1}|=|A|\cdot|A^{-1}|=|E|=1, \qquad (1)$$

demak, $|A|\neq 0$ bo'lar ekan.

Yetarliligi. A matritsa xos bo'lmagan matritsa bo'lsin, ya'ni $|A|\neq 0$. U holda, matritsalarni o'zaro ko'paytirish va matritsani songa ko'paytirish qoidasiga ko'ra,

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21}\ldots A_{j1}\ldots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22}\ldots A_{j2}\ldots A_{n2} \\ A_{1k} & A_{2k}\ldots A_{jk}\ldots A_{nk} \\ A_{1n} & A_{2n}\quad A_{jn}\ldots A_{nn} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

ekanligi kelib chiqadi.

Endi teskari matritsaning yagona ekanligini ko'rsatamiz. Agar B matritsa A matritsa uchun teskari matritsa bo'lsa, $B=A^{-1}$ ekanligini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham

$$B=B\cdot E=B\cdot(A\cdot A^{-1})=(B\cdot A)\cdot A^{-1}=E\cdot A^{-1}=A^{-1}.$$

Demak, $B=A^{-1}$ ekan. (1)-tenglikdan $|A^{-1}|=|A|^{-1}$ ekanligi kelib chiqadi.

Masalan. Berilgan matritsaga teskari matritsani toping: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & 3\\ 2 & 7 & -1\end{pmatrix}$.

Yechish: $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & 3\\ 2 & 7 & -1\end{vmatrix}=5+12+21+10-21+6=33$ va

$$A_{11}=-16,\ A_{12}=9,\ A_{13}=31$$
$$A_{21}=9,\ A_{22}=-3,\ A_{23}=-3$$
$$A_{31}=11,\ A_{32}=0,\ A_{33}=-11$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}-16 & 9 & 11\\ 9 & -3 & 0\\ 31 & -3 & -11\end{pmatrix}=\frac{1}{33}\begin{pmatrix}-16 & 9 & 11\\ 9 & -3 & 0\\ 31 & -3 & -11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{16}{33} & \frac{3}{11} & \frac{1}{3}\\ \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} & 0\\ \frac{31}{33} & -\frac{1}{11} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

Tekshirib ko‘ramiz:

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{33}\begin{pmatrix}-16 & 9 & 11\\ 9 & -3 & 0\\ 31 & -3 & -11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & 3\\ 2 & 7 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{33}\begin{pmatrix}-16+27+22 & -32-45+77 & -16+27-11\\ 9-9+0 & 18+15+0 & 9-9+0\\ 31-9-22 & 62+15-77 & 31-9+11\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{33}\begin{pmatrix}33 & 0 & 0\\ 0 & 33 & 0\\ 0 & 0 & 33\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

Matritsa rangi

O‘lchami $m\times n$ bo‘lgan A matritsa berilgan bo‘lsin. $k=\min\{m,n\}$ deb olsak, A matritsada satr yoki ustunlarni o‘chirish natijasida tartibi k dan oshmaydigan bir nechta kvadrat matritsalarni hosil qilishimiz mumkin. Mana shu kvadrat matritsalarning determinantlari berilgan A matritsaning minorlari deb aytiladi.

Ta’rif. A matritsaning rangi deb uning noldan farqli minorlarining eng yuqori tartibiga aytilib, $r\,(A)$ orqali belgilanadi.

Bu ta’rifdan, agar $A\neq 0$ va A matritsa o‘lchami $m\times n$ bo‘lsa, u holda $r(A)\leq \min\{m,n\}$ bo‘lar ekan.

Ta'rif. Matritsa ustidagi elementar almashtirish deb quyidagi almashtirishlarga aytiladi:

1. Barcha elementlari noldan iborat satr (ustun)ni tashlab yuborish.
2. Satr (ustun)ning barcha elementlarini noldan farqli songa ko'paytirish.
3. Satr (ustun) o'rinlarini almashtirish.
4. Berilgan satr (ustun) elementlariga boshqa satr (ustun) elementlarini biron songa ko'paytirib qo'shish.
5. Matritsani transponirlash.

Teorema. Matritsa rangi uning ustida elementar almashtirishlarni bajarish natijasida o'zgarmaydi.

Bu teorema isboti yuqorida keltirilgan determinantlar xossalaridan kelib chiqadi. Xuddi shuningdek, matritsa rangi uchun quyidagi xossalar o'rinli ekanligini ko'rsatish mumkin:

1. $r(A+B)\le r(A)+r(B)$ 2. $r(A+B)\ge |r(A)-r(B)|$

3. $r(AB)\le \min\{r(A),r(B)\}$ 4. $r(A'A)=r(A)$

5. Agar A va B lar kvadrat matritsalar bo'lib, $|B|\neq 0$ bo'lsa, u holda $r(AB)=r(A)$ bo'ladi.

$A=(a_{ij})$ $i=\overline{1,m},$ $j=\overline{1,n}$ bo'lsin, uning satrlaridan quyidagi satr-vektorlarni hosil qilamiz.

$$I_1=(a_{11},a_{12},\ldots,a_{1n}),\ I_2=(a_{21},\ a_{22},\ \ldots,a_{2n}\ ),\cdots,I_m=(a_{m1},a_{m2},\cdots,a_{mn})$$

Berilgan $I_1, I_2,\ldots,I_m$ satrlar chiziqli bog'liq deyiladi, agarda shunday $\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_m$ sonlar mavjud bo'lsa, ulardan birontasi noldan farqli bo'lib, $\lambda_1 I_1+\lambda_2 I_2+\cdots+\lambda_m I_m=0$ tenglik o'rinli bo'lsa, bu yerda $0-(0,0,\ldots,0)$ xos vektor, aks holda ular *chiziqli-erkli satrlar* deyiladi. Demak, agar berilgan satrlar chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda biron-bir satr qolganlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'ladi. Aytaylik $\lambda_m\neq 0$ bo'lsa, u holda I_m-m satr qolganlarining chiziqli kombinatsiyasi, ya'ni $I_m=-\frac{\lambda_1}{\lambda_m}I_1-\frac{\lambda_2}{\lambda_m}I_2-\cdots-\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}I_{m-1}$ bo'lar ekan. Agarda

$I_1, I_2, \cdots, I_m$ satrlar chiziqli-erkli bo‘lsa, u holda $\lambda_1 I_1 + \lambda_2 I_2 + \cdots + \lambda_m I_m = 0$ tenglikdan $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Xuddi shuningdek, ustun-vektorlar uchun yuqoridagilarni aytish mumkin.

Matritsalar uchun quyidagi teoremalar o‘rinli bo‘ladi.

Teorema. Matritsa uchun uning chiziqli-erkli satrlarning maksimal soni chiziqli-erkli ustunlarning maksimal soniga teng bo‘ladi.

Teorema. Matritsa rangi undagi chiziqli-erkli satrlar (ustunlar)ning maksimal soniga teng bo‘ladi.

Matritsa rangini topish uchun matritsa ustida elementar almashtirishlar bajarish natijasida bu matritsani uchburchak yoki trapetsiya ko‘rinishiga olib kelish mumkin, ya’ni

$$\begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' & \ldots a_{1r}' \\ o & a_{22}' & \ldots a_{2r}' \\ - & - & - - - \\ 0 & 0 & \ldots a_{rr}' \end{pmatrix} - \text{uchburchak ko‘rinish, } r(A) = r.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' \cdots a_{1r}' & a_{1r+1}' \cdots a_{1k}' \\ 0 & a_{22}' \cdots a_{2r}' & a_{2r+1}' \cdots a_{2k}' \\ - & - \quad - \quad - & - \quad - - \\ 0 & 0 \cdots \ a_{rr}' & a_{rr+1}' \quad \cdots a_{rk}' \end{pmatrix} - \text{trapetsiya ko‘rinish, } r(A) = r.$$

Masalan 1. Berilgan matritsalarning rangini toping:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Yechish:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \boxed{-1} \ \boxed{-4} \ \boxed{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 0 & -1 \\ -19 & -6 & 0 & -4 \\ -2 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -6 & -19 & -4 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \boxed{-2} \ \boxed{-1}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 5 & 3\\ 0 & -3 & -2 & -1\\ 0 & 0 & -15 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$ Demak, rang (A) = 3.

Masalan 2. Berilgan matritsalarning rangini toping:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 23 & 43 & 63 & 83\\ 1 & 11 & 21 & 31 & 41\\ 4 & 24 & 44 & 64 & 84\\ 8 & 58 & 108 & 158 & 208\\ 6 & 46 & 86 & 126 & 166\end{pmatrix}.$$

Yechish:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 23 & 43 & 63 & 83\\ 1 & 11 & 21 & 31 & 41\\ 4 & 24 & 44 & 64 & 84\\ 8 & 58 & 108 & 158 & 208\\ 6 & 46 & 86 & 126 & 166\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 11 & 21 & 31 & 41\\ 0 & -10 & -20 & -30 & -40\\ 0 & -20 & -40 & -60 & -80\\ 0 & -30 & -60 & -90 & -120\\ 0 & -20 & -40 & -60 & -80\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 11 & 21 & 31 & 41\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Demak, $rang(A) = 2$.

Chiziqli tenglamar sistemasi.
Chiziqli tenglamalar sistemasining umumiy ko'rinishi va uning yechimi

n ta noma'lum va m ta tenglamadan iborat chiziqli tenglamalar sistemasi deb quyidagi sistemaga aytiladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x + \cdots + a_{2j}\ x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{m1}x_1 \quad a_{m2}\ x_2 + \cdots + a_{mj}x_i + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Bu yerda, $a_{ij}, b_i (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$ – berilgan sonlar bo'lib, a_{ij} – noma'lumlar oldidagi koeffitsientlar, b_i – ozod hadlar deyiladi.

Ta'rif. (1)-tenglamalar sistemasidagi noma'lum $x_1, x_2, ..., x_n$ larning o'rniga mos ravishda $c_1, c_2, ..., c_n$ sonlarni qo'yish natijasida ushbu

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + ... a_{1n}c_n \equiv b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + ... a_{2n}c_n \equiv b_2 \\ .... \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + ... a_{mn}c_n \equiv b_m \end{cases}$$

ayniyatlar sistemasi hosil bo'lsa, noma'lumlarning bunday $c_1, c_2, ..., c_n$ qiymatlari *(1)-tenglamalar sistemasining yechimi* deyiladi.

Ta'rif. Agarda (1)-tenglamalar sistemasi yechimga ega bo'lsa, u birgalikda deyiladi, aks holda birgalikda emas deyiladi.

Ta'rif. Birgalikda bo'lgan tenglamalar sistemasi yagona (cheksiz ko'p) yechimga ega bo'lsa, u aniq (noaniq) deyiladi.

Bizga (1)-tenglamalar sistemasidan tashqari, quyidagi

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + ... + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + ... + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ .... \\ a'_{m1}x_1 + a'_{m2}x_2 + ... + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases} \tag{2}$$

tenglamalar sistemasi ham berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar (1) va (2)-tenglamalar sistemalarining yechimlar to'plami ustma-ust tushsa, u holda ular teng kuchli (ekvivalent) deyiladi.

Endi (1) chiziqli tenglamalar sistemasining matritsa ko'rinishini yozamiz. Buning uchun a_{ij}, b_i, va x_i lar yordamida quyidagi matritsalarni hosil qilamiz.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2n} \\ - & - \; - \; - \\ a_{m1} & a_{m2}\dots a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Bu yerda, A koeffitsientlar (1) yoki sistema matritsasi, V ustun matritsa, ozod hadlar matritsasi deyiladi. U holda (1)-tenglamalar sistemasini quyidagi ko‘rinishda yoza olamiz: $AX = B$.

(1)-tenglamalar sistemasida tenglamalar soni noma'lumlar soniga teng, ya’ni $m=n$, bo‘lsin. Bu holda sistema matritsasi A kvadrat matritsa bo‘ladi. Uning determinanti $|A| = \Delta$ deb belgilanib, sistema determinanti deyiladi. Δ_j bilan A matritsaning j-ustunini ozod hadlar ustuni bilan almashtirishdan hosil bo‘lgan matritsa determinantini belgilaymiz.

Agar $\Delta \neq 0$ bo‘lsa, ya’ni A xos bo‘lmagan matritsa bo'lsa, u holda A^{-1} teskari matritsa mavjud bo‘ladi, u holda (2)-tenglikdan quyidagilarni hosil qilamiz:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B \qquad (3)$$

Bu yerda, matritsalarning ko‘paytirish qoidasi va teskari matritsa hisoblash formulasiga ko‘ra quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21}\cdots A_{nn} \\ A_{12} & A_{22}\cdots A_{n2} \\ - - - & - - - \\ A_{1j} & A_{2j}\cdots A_{n2} \\ A_{1n} & A_{2n}\cdots A_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Masalan. Tenglamalar sistemasini matritsa usulida yeching:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 1 \end{cases}$$

Yechish:

$$A=\begin{pmatrix}2&3&4\\1&2&3\\3&4&6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.\quad |A|=24+27+16-24-24-1=1\neq 0\ .$$

$$X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}0&-2&1\\3&0&-2\\-2&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Demak, $x_1=1,\ x_2=1,\ x_3=-1$.

(4)-tenglikdan $x_j=\frac{1}{\Delta}(b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj})=\frac{\Delta j}{\Delta},\ \Delta_j=\overline{1,n}$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, quyidagi teorema oʻrinli ekan. Bunda, A^{-1}– A matritsaning teskari matritsasi, B esa ozod hadlar matritsasi.

Teorema (Kramer teoremasi). Agar sistema determinanti $\Delta\neq 0$ boʻlsa, u holda (1)-sistema yagona yechimga ega boʻlib, bu yechim quyidagi formulalar orqali topiladi:

$$x_j=\frac{\Delta_j}{\Delta},\qquad j=\overline{1,n}\qquad (5)$$

Teoremadagi (4)-tenglama Kramer formulasi deb nomlanadi. (1)-tenglamalar sistemasini (5)-tenglamalar orqali yechilishi esa Kramer yoki determinantlar usuli deyiladi.

Masalan. Berilgan tenglamalar sistemasini Kramer usulida yeching:

$$\begin{cases}3x_1+x_2+3x_3=2\\5x_1-2x_2+2x_3=1\\2x_1+2x_2+3x_3=1\end{cases}.$$

Yechish:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3&1&3\\5&-2&2\\2&2&3\end{vmatrix}=-18+4+30+12-12-15=1\neq 0,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}2&1&3\\1&-2&2\\1&2&3\end{vmatrix}=-12+2+6+6-8-3=-9,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 9+8+15-6-6-30 = -10,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6+2+20+8-6-5 = 13.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-9}{1} = -9, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -10, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 13.$$

Masalan. Berilgan tenglamalar sistemasini Kramer usulida yeching:

$$\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 = -1 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ 5x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$$

Yechish:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & -3 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -10,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 & 7 \\ -1 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 & -6 & -8 \\ 0 & 9 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & -6 & -8 \\ 9 & 10 & 7 \\ -2 & -1 & -6 \end{vmatrix} = -10,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 3 & 7 \\ 3 & -1 & 7 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & 0 & -6 & -8 \\ 8 & 0 & 10 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 5 \\ -5 & 0 & -1 & -6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -8 & -6 & -8 \\ 8 & 10 & 7 \\ -5 & -1 & -6 \end{vmatrix} = -10,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 & 5 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & -6 & 0 & -8 \\ 8 & 9 & 0 & 7 \\ 5 & 4 & 1 & 5 \\ -5 & -2 & 0 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & -6 & -8 \\ 8 & 9 & 7 \\ -5 & -2 & -6 \end{vmatrix} = 10,$$

$$\Delta_4=\begin{vmatrix}7&6&3&3\\3&5&7&-1\\5&4&3&1\\5&6&5&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-8&-6&-6&0\\8&9&10&0\\5&4&3&1\\-5&-2&-1&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-8&-6&-6\\8&9&10\\-5&-2&-1\end{vmatrix}=10.$$

$$x_1=\frac{-10}{-10}=1;\qquad x_2=\frac{-10}{-10}=1;\qquad x_3=-1;\qquad x_4=-1.$$

Umumiy ko'rinishdagi tenglamalar sistemasini Gauss usulida yechish

Shuni ta'kidlash kerakki, bu usullarni tenglamalar soni noma'lumlar soniga teng bo'lgan holdagina qo'llash mumkin. Endi umumiy holda qo'llaniladigan usul – Gauss usulini bayon qilamiz. Gauss usuli noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish usuli deb ham nomlanadi.

Chiziqli tenglamalar sistemasi ustida bajariladigan elementar almashtirish deb quyidagilarga aytiladi: (1)-sistemadagi biron-bir tenglamani noldan farqli songa ko'paytirish, tenglamalar o'rnini almashtirish va biron-bir tenglamani songa ko'paytirib, boshqa bir tenglamaga qo'shish. Mana shu almashtirishlar natijasida hosil bo'lgan yangi tenglamalar sistemasi avvalgisiga ekvivalent, ya'ni yechimlar to'plami ikkala sistema uchun bir xil bo'ladi.

(1)-sistema matritsasi va ozod hadlar ustuni yordamida kengaytirilgan matritsa hosil qilamiz:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 \cdots x_n & \end{array} \\ \bar{A}= & \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13}\cdots a_{1n} & & b_1\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\cdots a_{2n} & & b_2\\ \multicolumn{4}{c|}{-----------} & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}\cdots a_{mn} & & b_m\end{array}\right)\end{array}$$

Yuqoridagi ta'kidlangan almashtirishlar natijasida, bu matritsa quyidagi ko'rinishlardan biriga kelishi mumkin:

$$\text{a)}\quad \begin{array}{cccc|c} x_{i1} & x_{i2} & x_{i3} & \cdots x_{in} & \\ \hline c_{11} & c_{12} & c_{11} & \cdots c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & \cdots c_{2n} & d_2 \\ - - - & - - - & - - - & - - - & - \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots c_{nn} & d_n \end{array} \qquad \begin{array}{l} c_{ii} \neq 0, \quad i = \overline{1,n} \\ m = n, \quad r(A) = r(\overline{A}) = n \ , \end{array}$$

bu holda yechim yagona;

$$\text{b)}\quad \begin{array}{cccc|c} x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{in} & \\ \hline c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ - - - & - - - & - - - & - - - & - \\ 0 & 0 & \cdots & c_{nn} & d_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} c_{ii} \neq 0, \quad i = \overline{1,n} \\ m > n, \quad r(A) = r(\overline{A}) = n \end{array}$$

bu holda yechim yagona;

$$\text{d)}\quad \begin{array}{ccccc|c} x_i & x_{i1} \cdots & x_1 \cdots & x_{in} & & \\ \hline c_{11} & c_{12} \cdots & c_{1r} \cdots & c_{in} & & d_1 \\ 0 & c_{22} \cdots & c_{2r} \cdots & c_{2n} & & d_2 \\ - - - & - - - & - - - & - - - & & - \\ 0 & 0 \cdots & c_{rr} \cdots & c_{rn} & & d_r \\ 0 & 0 \cdots & 0 \cdots & 0 & & 0 \\ 0 & 0 \cdots & 0 \cdots & 0 & & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} c_{ii} \neq 0, \quad i = \overline{1,n} \\ r(A) = r(\overline{A}) = r, \quad r < n \end{array}$$

bu holda sistema cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi.

$$\text{e)}\quad \begin{array}{ccccc|c} x_{i1} & x_{i2} & \cdots x_{ir} & \cdots x_{in} & & \\ \hline c_{11} & c_{12} & \cdots c_{1r} & \cdots c_{1n} & & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots c_{2r} & \cdots c_{2n} & & d_2 \\ 0 & 0 & \cdots c_{rr} & \cdots c_{rn} & & d_r \\ 0 & 0 & \cdots 0 & \cdots 0 & & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots 0 & \cdots 0 & & d_m \end{array}$$

$c_{ii} \neq 0, \ i = \overline{1,n}$

Bu yerda, $d_{r+1},\ldots,d_m$ sonlardan birontasi noldan farqli, bu holda $r(A)=r,\ r(\overline{A})=r+1$, ya’ni $r(A)\neq r(\overline{A})$ sistema yechimga ega emas.

Bu yerda, $i_1, i_2, \ldots, i_n$ lar $1, 2, \ldots, n$ ning qandaydir o‘rin almashtirishlaridan iborat bo‘ladi. Demak, quyidagi teorema o‘rinli.

Teorema (Kroneker-Kapelli teoremasi). Agar sistema matritsasi rangi kengaytirilgan matritsa rangiga teng bo‘lsa, ya’ni $r(A) = r(\bar{A})$ bo‘lsa, u holda sistema birgalikda bo‘ladi, ya’ni yechimga ega bo‘ladi.

Demak, biz quyidagi xulosalarni qilishimiz mumkin ekan:

1. Agar $r(A) = r(\bar{A})$ bo‘lsa, sistema birgalikda bo‘ladi.
2. Agar $r(A) \neq r(\bar{A})$ bo‘lsa, sistema birgalikda bo‘lmaydi.
3. Agar $r(A) = r(\bar{A}) = n$ bo‘lsa, sistema yagona yechimga ega bo‘ladi.
4. Agar $r(A) = r(\bar{A}) < n$ bo‘lsa, sistema cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi.

Masalan. Sistemani Gauss usulida yeching: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 20 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 17 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4 \end{cases}$

Yechish: Sistemaning kengaytirilgan matritsasini yozib olamiz: birinchi qadamda $a_{11} \neq 0$ bo‘lishi zarur, lekin $a_{11} = 1$ hisoblashlar uchun qulaydir. Shuning uchun birinchi va to‘rtinchi satrlarning o‘rnini almashtiramiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 20 \\ 5 & -1 & 2 & -1 & 17 \\ -3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 5 & -1 & 2 & -1 & 17 \\ -3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 20 \end{array}\right) \quad \boxed{-5}\ \boxed{-3}\ \boxed{-2}$$

+

1-qadam. Birinchi satr elementlarini –5, 3 va –2 ga ko‘paytirib, ularni mos ravishda ikkinchi, uchinchi va to‘rtinchi satrlarga qo‘shamiz, chunki maqsad a_{11} element ostida nollardan iborat «zina» hosil bo‘lsin.

2-qadam. $a_{11}=2\neq 0$, lekin $a_{22}=-1$ bo'lgani qulayroq. Shuning uchun ikkinchi va uchinchi satrlar o'rnini almashtiramiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & -18 & 9 & 37 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & 13 \\ 0 & 3 & -9 & 7 & 28 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & 13 \\ 0 & 4 & -18 & 9 & 37 \\ 0 & 3 & -9 & 7 & 28 \end{array}\right) \boxed{4} \quad \boxed{3}$$

3-qadam. Ikkinchi satr elementlarini 4 va 3 ga ko'paytirib mos ravishda uchinchi va to'rtinchi satr elementlariga qo'shamiz, natijada a_{22} element tagida ikkinchi ustunda «zina» hosil bo'ladi.

4-qadam. Hosil bo'lgan matritsada $a_{33}=26\neq 0$, uchinchi satr elementini $-\frac{24}{26}=-\frac{12}{13}$ ga ko'paytirib, to'rtinchi satrga qo'shamiz.

Natijada,
$$-\frac{13}{13}\times\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 26 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 24 & -5 & -5 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 26 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{19}{13} & \frac{19}{13} \end{array}\right).$$

Kengaytirilgan matritsa zinapoya ko'rinishiga keltirildi. Unga mos keluvchi sistemaning ko'rinishi quyidagicha:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4 \\ -x_2 - 11x_3 - 4x_4 = -11 \\ 26x_3 - 7x_4 = -7 \\ \frac{19}{13}x_4 = \frac{19}{13} \end{cases}$$

oxirgi tenglamadan $x_4=1$, uchinchidan $x_3=\frac{-7+7x_4}{26}=0$, ikkinchidan $x_2=11+11x_3-4x_4=7$ va birinchidan $x_1=-4+x_2-4x_3+2x_4=5$.

Masalan. Sistemani Gauss usuli bilan yeching:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_5 = -2 \\ 4x_1 - 7x_2 + 5x_3 - x_4 - 2x_5 = -1 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - 5_5 = -2 \end{cases}.$$

Yechish:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 3 & -3 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 4 & -7 & 5 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & 1 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_5 = -2 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 7 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_1 = 14 - 8x_4 - 3x_5 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = 7 - 4x_4 - 2x_5 \end{cases}.$$

Sistema cheksiz ko‘p yechimlarga ega.

Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi

Agar chiziqli tenglamalar sistemasi (1)da ozod hadlar nolga teng bo‘lsa, ya’ni $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ bo‘lsa, hosil bo‘lgan tenglamalar sistemasi bir jinsli tenglamalar sistemasi deyiladi, ya’ni

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots + a_{1n}\, x_n = 0 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = 0 \\ ----------------- \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn}\, x_n = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Bu sistema kengaytirilgan matritsaning oxirgi ustuni elementlari nolga teng bo‘lgani uchun sistema matritsasi va kengaytirilgan matritsalar rangi teng bo‘ladi, ya’ni $r(A) = r(\overline{A})$ bo‘ladi. Shuning uchun Kroneker-Kapelli teoremasiga ko‘ra bir jinsli tenglamalar sistemasi har doim birgalikda bo‘ladi. Masalan, *(0,0,..., 0)=0* sistemaning trivial yechimi (nol yechim) bo‘ladi.

(6)-tenglamalar sistemasining matritsa ko‘rinishi quyidagidan iborat:

$$AX = 0. \qquad (7)$$

Yuqorida keltirilgan 1–4 xulosalarga ko‘ra, agar $r(A) = n$ bo‘lsa (6)-sistema yagona, nol yechimga ega, agarda $r(A) < n$ bo‘lsa, cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi. Demak $m = n$ bo‘lgan holda (6)-sistema noldan farqli yechimga ega bo‘lishi uchun uning determinanti nolga teng bo‘lishi zarur va yetarli bo‘lar ekan.

Agar (6)-sistemada $m < n$ bo‘lsa, ya’ni tenglamalar soni noma’lumlar sonidan kichik bo‘lsa, (6)-sistema albatta noldan farqli yechimlarga ega bo‘ladi (cheksiz ko‘p), chunki bu holda $r(A) \le m$ va demak, $r(A) < n$ bo‘ladi.

Shuni ta’kidlash kerakki, agar $X_0 = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots x_n^{(0)}\right)$ va $X_1 = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots x_n^{(1)}\right)$ vektorlar (7)-sistema yechimi bo‘lsa, u holda istalgan λ_0 va λ_1 sonlar uchun, $\lambda_0 X_0 + \lambda_1 X_1$ vektor ham (7)-sistema yechimi bo‘ladi, haqiqatan ham,

$$A(\lambda_0 X_0 + \lambda_1 X_1) = \lambda_0 AX_0 + \lambda_1 AX_1 = \lambda_0 0 + \lambda_1 0 = 0. \qquad (8)$$

Bu tengliklar matritsalarni qo‘shish, songa ko‘paytirish va ko‘paytirish ta’riflaridan kelib chiqadi.

(8)-tenglikdan shuni xulosa qilish mumkinki, (7)-sistema yechimlarining chiziqli kombinatsiyasi ham (7)-sistemaning yechimi bo‘lar ekan.

Ta’rif. Agar (7)-sistemaning $X_1, X_2, \cdots, X_k$ chiziqli-erkli yechimlar sistemasi berilgan bo‘lib, bu sistemaning istalgan X yechimi ularning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘lsa, ya’ni shunday $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ sonlar mavjud bo‘lsaki,

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_k X_k$$

bo‘lsa, u holda bu sistema fundamental yechimlar sistemasi deyiladi.

Ta’rifda $X_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}),\ i = 1, 2, \cdots, k,$ ko‘rinishda bo‘lgani uchun, $k \le n$ bo‘ladi.

Teorema. Agar (7)-sistema uchun $r(A)<n$ bo'lsa, u holda istalgan fundamental yechimlar sistemasi $k=n-r(A)$ ta yechimdan iborat bo'ladi.

Isboti: $r(A)<n$ bo'lsin, u holda (7)-sistemaning kengaytirilgan matritsasi elementar almashtirishlar natijasida quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\begin{array}{c} x_{i1} \quad x_{ii} \cdots x_{ir} \cdots x_{in} \\ \left(\begin{array}{llll|l} c_{11} & c_{12} \cdots c_{1r} \cdots c_{1n} & & & 0 \\ 0 & c_{22} \cdots c_{2r} \cdots c_{2n} & & & 0 \\ - & - - - - - - - - & & & \\ 0 & 0 \quad c_{rr} \cdots c_{rn} & & & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Bu yerda, $r=r(A)$ bo'lib, $c_{ii}\neq 0, i=\overline{1,r}$. Agar buni tenglama ko'rinishida yozsak quyidagini hosil qilamiz.

$$c_{11}\ x_{i1}+c_{12}\ x_{i2}+\cdots+c_{1r}\ x_{ir}+c_{1r+1}\ x_{ir+1}+\cdots+c_{in}\ x_{in}=0$$

$$c_{22}\ x_{i2}+\cdots+c_{2r}\ x_{in}+c_{2r+1}\ x_{ir+1}+\cdots+c_{2n}\ x_{in}=0$$

$$-----------------$$

$$c_{rr}\ x_{ir}+c_{rr+1}\ x_{ir+1}+\cdots+c_{rn}\ x_{in}=0$$

Bu yerda, oxirgi tenglamadan x_{ir} ni $x_{ir+1},\cdots,x_{in}$ lar orqali ifodalab, undan oldingi tenglamadagi x_{ir} ning o'rniga qo'ysak, x_{ir-1} va $x_{ir+1},\cdots,x_{in}$ larning chiziqli kombinatsiya ekanligi kelib chiqadi. Shu tariqa yuqoriga ko'tarilib, natijada quyidagilarni hosil qilamiz:

$$x_{i1}=\lambda_{i1}\ x_{ir+1}+\lambda_{12}\ x_{ir+2}+\cdots+\lambda_{1n}\ x_{in}$$

$$x_{i2}=\lambda_{21}\ x_{ir+1}+\lambda_{22}\ x_{ir+2}+\cdots+\lambda_{2n}\ x_{in}$$

$$-----------------$$

$$x_{ir}=\lambda_{r1}\ x_{ir+1}+\lambda_{r2}\ x_{ir+2}+\cdots+\lambda_{rn}\ x_{in}$$

Bu yerda, x_{ir-1}, $x_{ir+2},\cdots,x_{in}$ lar erkli o'zgaruvchilar deb ataladi. Ularning soni $n-r=n-r(A)=k$ ga teng bo'ladi. Bu o'zgaruvchilardan birini 1 ga, qolganlarini 0 ga teng qilib olib, quyidagi k ta chiziqli-erkli bo'lgan yechimlar sistemasini hosil qilamiz.

$$X_1 = (\lambda_{11},\ \lambda_{21}, \cdots, \lambda_{r1}, 1, 0, \cdots, 0)$$
$$X_2 = (\lambda_{12}, \lambda_{22}, \cdots, \lambda_{r2}, 0, 1, \cdots, 0)$$
$$-----------------$$
$$X_k = (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \cdots, \lambda_{kn}, 0,\ 0, \cdots, 1)$$

Shuni ta'kidlash lozimki, bir jinsli bo'lmagan n noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi $AX = B$ ning umumiy yechimi, unga mos keluvchi $AX = 0$ bir jinsli tenglamalar sistemasining umumiy yechimi va $AX = B$ tenglamaning biron-bir xususiy yechimi yig'indisiga teng bo'ladi.

Masalan 1. Bir jinsli tenglamalar sistemasining fundamental yechimlar sistemasini toping:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Yechish: Sistemaning oxirgi tenglamasini birinchi o'ringa yozamiz, so'ngra uni zinapoya shakliga keltiramiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & 8 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matritsaning rangi r(A) = 2. x_1, x_2 o'zgaruvchilarning bazis minori $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} \neq 0$; x_1, x_2 ni asosiy o'zgaruvchilar sifatida tanlab olamiz va ularni asosiy bo'lmagan x_3, x_4, x_5 lar orqali ifodalaymiz:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \\ \qquad 8x_2 - 7x_3 + 25x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

Fundamental yechimlar sistemasi e_1, e_2, e_3 ni hosil qilish uchun asosiy bo'lmagan o'zgaruvchi x_3, x_4, x_5 larni birlik matritsa E_3 satr elementlari bilan almashtiramiz. $x_3 = 1,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0$ da sistemaning ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2 = 0 \\ \quad 8x_2 - 7 = 0 \end{cases}$$

bundan $x_1 = \frac{19}{8},\ x_2 = \frac{7}{8}$, ya’ni bazis yechimni hosil qilamiz: $e_1 = \left(\frac{19}{8}; \frac{7}{8}; 1, 0, 0\right)$

Shunga o‘xshash yana ikkita bazis yechimni topamiz:

$x_3 = 0;\ x_4 = 1;\ x_5 = 0$ da $e_2 = \left(\frac{3}{8}; -\frac{25}{8}; 0, 1, 0\right)$;

$x_3 = 0;\ x_4 = 0;\ x_5 = 1$ da $e_3 = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0, 0, 1\right)$.

Topilgan yechimlar (vektorlar) e_1, e_2, e_3 fundamental sistemani tashkil qiladi. e_1, e_2, e_3 yechimlarning komponentlarini mos ravishda *8, 8, 2* ga ko‘paytirib butun komponentli yechimlar sistemasini hosil qilamiz: *(19; 7; 8; 0; 0)*, *(3; –25; 0; 8; 0)*, *(–1; 1; 0; 0; 2)*.

Agar n ta noma’lumli chiziqli tenglamalar sistemasida sistema asosiy matritsasining rangi noma’lum sonidan bittaga kam bo‘lsa, ya’ni r(A)=n–1, u holda chiziqli tenglamalar sistemasining yechim sifatida n–1 ta tenglamalar sistemasi matritsasining birinchi, ikkinchi va h.k. ustunlarini o‘chirishdan hosil bo‘lgan ishoralari almashinuvchi *minorlari* sistemasini qabul qilish mumkin. Agar bu *minorlar* noldan farqli bo‘lsa, u holda bu chiziqli tenglamalar sistemasining barcha yechimlari shu sonlarga karrali bo‘ladi.

Masalan 2. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining barcha yechimlarini toping:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Yechish: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Tenglamalar sistemasi matritsaning rangi r(A) =2 ga teng va u noma'lumlar sonidan bittaga kam. Demak, tenglamalar sistemasining fundamental yechimlar sistemasi k=3–2=1 ta bo‘ladi. Sistemaning ixtiyoriy ikkita tenglamasini olamiz, masalan birinchi va ikkinchi tenglamalarini: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$.

$$x_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot k = 5k, \quad x_2 = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot k = -4k,$$

$x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot k = -3k$, bunda k ixtiyoriy son.

Demak, sistemaning umumiy yechimi $\{5k;-4k\,;3k\}$ ko‘rinishida bo‘ladi, bunda k ixtiyoriy son.

Ko‘p tarmoqli iqtisod modeli (Balans modeli)

Balans modelining asosiy masalasi, makroiqtisodiyotni tashkil etadigan ko‘p tarmoqli iqtisodiyot faoliyatini maqsadga muvofiq tarzda samarali olib borishdan iborat bo‘lib, bu masala quyidagicha qo‘yiladi: n ta tarmoqli xo‘jalikning har bir ishlab chiqargan mahsulot miqdori qanday bo‘lganda ehtiyoj to‘la qondiriladi? Bu yerda shuni e’tiborga olish kerakki, n ta tarmoqning har bir ishlab chiqargan mahsulotining bir qismi shu tarmoq ehtiyoji uchun, bir qismi boshqa tarmoqlar ehtiyoji uchun va yana bir qismi ishlab chiqarish bilan bog‘liq bo‘lmagan ehtiyojlar uchun sarf etiladi.

Tarmoqlar orasidagi turli mahsulotlarni ishlab chiqarish va iste’mol qilish orqali bog‘lanishni hisoblash masalasi ancha murakkab. Bu masalani birinchi bo‘lib mashhur Amerika iqtisodchisi V.V. Leontev 1936-yilda matematik model ko‘rinishida ifodalagan. U 1929–1932-

yillarda Amerika iqtisodiy inqirozini tahlil qilishga urungan bu model matritsalar algebrasiga asoslagan.

Ishlab chiqarishning ma'lum bir davridagi, aytaylik, bir yillik faoliyatini qaraylik. x_i deb i-tarmoqning shu davr davomida ishlab chiqargan yalpi mahsulot hajmining pul birligida ifodalangan qiymatini, bu yerda, $i=1,2,...,n$. x_{ij} deb i-tarmoq mahsulotining j-tarmoq ehtiyoji uchun sarf etilgan hajmining pul miqdorini belgilaymiz. y_i deb i-tarmoq mahsulotining noishlabchiqarish ehtiyoji hajmining pul miqdorini belgilaymiz. Tabiiyki, i tarmoq ishlab chiqargan yalpi mahsulot hajmi x_i, n ta tarmoq ehtiyojlari va noishlabchiqarish ehtiyojlari uchun sarf etilgan mahsulotlar hajmlarining pul miqdorlari yig'indisiga teng bo'lishi kerak, ya'ni

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{9}$$

(8)-tenglama balans munosabatlari deb nomlanadi.

Agar $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ belgilashni kiritsak, $a_{ij} - j$-tarmoqning mahsulot hajmi birligi uchun sarf etilgan i-tarmoq mahsulot hajmi qiymatini bildiradi. a_{ij} bevosita xarajatlar koeffitsienti deb nomlanadi. a_{ij} koeffitsientlarni qaralayotgan davrdagi ishlab chiqarish jarayonida qo'llanilayotgan texnologiya aniqlaydi. Qanchalik yangi, samarador texnologiya qo'llanilsa, a_{ij} koeffitsientlar shunchalik kichik, sarf-xarajatlar shunchalik kam bo'lib, samaradorlik yuqori bo'ladi. Qaralayotgan davr ichida a_{ij} koeffitsientlarni o'zgarmas deb olib, ya'ni sarf-xarajatlarni yalpi xarajatlarga chiziqli bog'liq deb qaraymiz.

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j, \quad (i, j = 1,2,\ldots,n)$$

Shu munosabat bilan ko'rilgan ko'p tarmoqli iqtisodiyot modelini chiziqli balans modeli deb ham nomlanadi. (1)-tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishga keladi:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i, \qquad i = 1,2,\cdots,n \tag{10}$$

Endi quyidagi belgilashlarni kiritaylik,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}\,a_{22}\cdots a_{2n} \\ ------ \\ a_{n1}\ a_{n2}\dots a_{nn} \end{pmatrix},\qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Bu yerda, A – texnologik matritsa, X – yalpi mahsulot vektori, Y – yakuniy mahsulot vektori deb nomlanadi. Bu belgilashlarga asosan (9)-tenglikning quyidagi matritsa ko‘rinishini hosil qilamiz:

$$X = AX + Y. \tag{11}$$

Ko‘p tarmoqli balansning asosiy masalasi berilgan yakuniy mahsulot vektori va bevosita xarajatlar matritsasi A ga ko‘ra X yalpi mahsulot vektorini topishdan iborat bo‘ladi, ya’ni (11)-tenglamani noma’lum vektor X ga nisbatan yechish kerak. Buning uchun uni quyidagi ko‘rinishga olib kelamiz $(E-A)X = Y$.

Agar det $(E-A)\neq 0$ bo‘lsa, u holda teskari $(E-A)^{-1}$ matritsa mavjud bo‘lib, yechim quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$X = (E-A)^{-1}Y \tag{12}$$

$S=(E-A)^{-1}$ matritsa bevosita xarajatlar matritsasi deb nomlanadi. Bu matritsaning iqtisodiy ma’nosini tushunish uchun $Y_i=(0,0,\cdots,1,\cdots 0)$, $(i=1,2,\cdots,n)$ i o‘rnida 1, qolgan joylarda 0 bo‘lgan yakuniy mahsulot birlik vektorlarini qaraymiz. Ularga mos keluvchi (12)-tenglama yechimlari quyidagiga teng bo‘ladi:

$$X_1=\begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ \vdots \\ s_{n1} \end{pmatrix},\qquad X_2=\begin{pmatrix} s_{12} \\ s_{22} \\ \vdots \\ s_{n2} \end{pmatrix},\ \cdots,\quad X_n=\begin{pmatrix} s_{1n} \\ s_{2n} \\ \vdots \\ s_{nn} \end{pmatrix}.$$

Demak, $S=(s_{ij})$ matritsaning s_{ij} elementi i-tarmoqning j-tarmoq birlik yakuniy mahsuloti Y_j' ni, ishlab chiqarish uchun sarf qilinishi zarur bo‘lgan mahsulot miqdori qiymatini bildiradi.

Qaralayotgan masalaning iqtisodiy ma’nosiga ko‘ra, (11)-tenglamada $y_i\geq 0,\ \left(i=\overline{1,n}\right)$, $a_{ij}\geq 0\ \left(i,j=\overline{1,n}\right)$ bo‘lib, tenglama yechimi uchun $x_i \geq 0$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ bo‘lishi kerak. Bu holatni biz $Y \geq 0$, $A \geq 0$ va $X \geq 0$ deb belgilaymiz.

Agar istalgan $Y \geq 0$ vektor uchun $X \geq 0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi (11)-tenglamaning yechimi mavjud bo‘lsa. $A \geq 0$ matritsa samarali matritsa deyiladi. Bu holda Leontev modeli ham samarali model deyiladi.

A matritsaning samarali bo‘lishi uchun, bir nechta kriteriylar mavjud. Ulardan biri shundan iboratki, agar A matritsaning har bir ustun elementlari yig‘indisi 1 dan katta bo‘lmay, hech bo‘lmaganda biron-bir ustun elementlari yig‘indisi 1 dan kichik bo‘lsa, u holda A samarali matritsa bo‘ladi, ya’ni: $\max\limits_{j} \sum\limits_{i-1}^{n} a_{ij} \leq 1$, bo‘lib, shunday j_0 mavjudki, uning uchun $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij_0} < 1$ o‘rinli bo‘lsa, A samarali matritsa bo‘ladi.

Masalan, quyidagi matritsada ifodalangan mahsulot samarador:

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Masalan 1. Quyidagi jadvalda tarmoqlarning reja davriga mo‘ljallangan xarajat koeffitsientlari va chekli mahsuloti shartli pul birligida berilgan.

Tarmoq		Iste’mol		Chekli mahsulot
		Sanoat	Qishloq xo‘jaligi	
Ishlab chiqarish	Sanoat	0,3	0,25	300
	Qishloq xo‘jaligi	0,15	0,12	100

Quyidagilarni:

a) tarmoqlarning rejalashtirilgan yalpi mahsulot miqdorini, tarmoqlararo mahsulot yetkazib berish, tarmoqlarning sof mahsulotini;

b) agar qishloq xo'jaligining chekli mahsuloti 20% ga, sanoatniki 10% ga oshirilsa, har bir tarmoqning zarur yalpi ishlab chiqarish miqdorini topish kerak.

Yechish: a) to'g'ridan to'g'ri xarajatlar koeffitsientini A matritsa va chekli mahsulot vektori Y ni yozib olamiz:

$$A=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}25\\ 0{,}15 & 0{,}12\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}300\\ 100\end{pmatrix}$$

bundan $E-A=\begin{pmatrix}1-0{,}3 & -0{,}25\\ -0{,}15 & 1-0{,}12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}7 & -0{,}25\\ -0{,}15 & 0{,}88\end{pmatrix}$ matritsani yozib olamiz.

U holda to'la xarajatlar matritsasi

$$S=(E-A)^{-1}=\frac{1}{0{,}5785}\begin{pmatrix}0{,}88 & 0{,}15\\ 0{,}25 & 0{,}7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}52 & 0{,}26\\ 0{,}43 & 1{,}21\end{pmatrix}$$

(3.8)-tenglama bo'yicha yalpi mahsulot vektori X ni aniqlaymiz:

$$X=\begin{pmatrix}1{,}52 & 0{,}26\\ 0{,}43 & 1{,}21\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}300\\ 100\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}482\\ 250\end{pmatrix}$$

Tarmoqlar mahsulot yetkazib berish miqdori x_{ij} ni $x_{ij}=a_{ij}\cdot x_j$ formuladan topamiz. Masalan $x_{11}=a_{11}\cdot x_1=0.3\cdot 482=144.6$.

Tarmoqlarning yalpi mahsuloti, tarmoqlararo mahsulot yetkazib berish, shuningdek tarmoqlarning sof mahsulotlarini hisoblab topib, quyidagi jadvalni tuzamiz:

Tarmoq		Iste'mol		Chekli mahsulot	Yalpi mahsulot
		Sanoat	Qishloq xo'jaligi		
Ichlab chiqarish	Sanoat	144,6	62,5	300	482
	Qishloq xo'jaligi	72,3	30	100	150
Sof mahsulot		265,1	157,5		
Yalpi mahsulot		482	250		

b) shartga ko‘ra chekli mahsulot vektori

$$Y=\begin{pmatrix}300\cdot 1{,}1\\100\cdot 1{,}2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}330\\120\end{pmatrix}.$$

U holda (3.8)-formulaga asosan mahsulot vektori quyidagicha bo‘ladi:

$$X=S\cdot Y=\begin{pmatrix}1{,}52 & 0{,}26\\0{,}43 & 1{,}21\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}330\\120\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}532{,}8\\287{,}1\end{pmatrix}.$$

Shunday qilib sanoatdagi ishlab chiqarishni 532,8 shartli pul birligigacha, qishloq xo‘jaligini 287,1 shartli pul birligigacha oshirish kerak.

Masalan 2. Quyidagi jadvalda ma'lum bir davr uchun uch sanoat tarmoqlari balans ko‘rsatkichlari berilgan.

Soha	Talab p.b.			Yakuniy talab p.b.	Jami p.b.
	Uglevodorod qazib olish va qayta ishlash	Energetika	Mashinasozlik		
Uglevodorod qazib olish va qayta ishlash	5	35	30	30	100
Energetika	10	20	40	40	100
Mashinasozlik	20	10	20	20	50

Berilgan yakuniy talabni qanoatlantiruvchi har bir mahsulotning yalpi ishlab chiqarish hajmini aniqlang. Agar yakuniy talabni har bir tarmoq uchun mos ravishda 40, 60 va 30 p.b. oshirish kerak bo‘lsa, har bir mahsulot hajmini mos ravishda necha foizga oshirish kerak.

***Yechish*:** $x_i - i$ mahsulot ishlab chiqarishning yalpi hajmi, $y_i - i$ mahsulotga bo‘lgan talab bo‘lsin, *i=1, 2, 3.* U holda yalpi ishlab chiqarish va yakuniy talab vektorlari mos ravishda

$$X=\begin{bmatrix}100\\100\\50\end{bmatrix}, \qquad Y=\begin{bmatrix}30\\40\\20\end{bmatrix}.$$

Tabiiyki, har bir tur bo'yicha yalpi mahsulot ishlab chiqarish hajmi ishlab chiqarishda foydalanilgan barcha mahsulotlar hajmi va shu mahsulotga bo'lgan yakuniy talab hajmlari yig'indisiga teng bo'lishi kerak, ya'ni,

$$x_i=\sum_{j-1}^{3}a_{ij}\,x_j+y_i\,, \qquad i=1,2,3.$$

Bu yerda, a_{ij} – bevosita xarajatlar koeffitsienti. Bu tenglik matritsaviy ko'rinishda

$$X=A\cdot X+Y$$

bunda, A – bevosita xarajatlar koeffitsienti matritsasi, $a_{ij}>0$; X,Y – ustun matritsalar Y holda $X-A\cdot X=Y$, $(E-A)X=Y$, $X=(E-A)^{-1}\cdot Y$ qo'yilgan masalaning matritsaviy yechimi.

x_{ij} – j – tarmoq uchun mo'ljallangan i – mahsulot hajmi.

A matritsa koeffitsientlari $a_{ij}>0$ larni aniqlaymiz. j – tarmoq uchun mo'ljallangan i – mahsulot hajmini j – sektor umumiy ishlab chiqarish hajmiga bo'lib, j – turdagi bir birlik mahsulot ishlab chiqarish uchun foydalanilgan i – mahsulot miqdorini hosil qilamiz, ya'ni $a_{ij}=\dfrac{x_{ij}}{x_j}$ $i=1,\ 2,\ 3$.

Masalan, $a_{11}=\dfrac{x_{11}}{x_1}=\dfrac{5}{100}=0.05$, $a_{21}=\dfrac{x_{21}}{x_2}=\dfrac{10}{100}=0.1$.

Demak, xarajatlar koeffitsienti matritsasi: $A=\begin{pmatrix}0.05 & 0.35 & 0.4\\ 0.1 & 0.1 & 0.4\\ 0.2 & 0.1 & 0.2\end{pmatrix}$

$E-A=B$ orqali ifodalab, B ni hisoblaymiz:

$$B=E-A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0.05&0.35&0.4\\0.1&0.1&0.4\\0.2&0.1&0.2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.95&-0.35&-0.4\\-0.1&0.9&-0.4\\0.2&0.1&0.8\end{bmatrix}$$

B^{-1} matritsani topamiz: $|B|=\begin{vmatrix} 0.95 & -0.35 & -0.4 \\ -0.1 & 0.9 & -0.4 \\ 0.2 & 0.1 & 0.8 \end{vmatrix}=0.514\neq 0$.

$$B^{-1}=\frac{1}{0.514}\begin{bmatrix} 0.68 & 0.32 & 0.5 \\ 0.16 & 0.68 & 0.42 \\ 0.19 & 0.165 & 0.82 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1.323 & 0.632 & 0.973 \\ 0.311 & 1.323 & 0.817 \\ 0.37 & 0.321 & 1.595 \end{bmatrix}$$ X ni

aniqlaymiz: $X=B^{-1}\cdot Y=(E-A)^{-1}\cdot Y=\begin{bmatrix} 1.323 & 0.632 & 0.973 \\ 0.311 & 1.323 & 0.817 \\ 0.37 & 0.321 & 1.595 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 30 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 84.047 \\ 78.599 \\ 55.837 \end{bmatrix}$

Demak, $x_1=84.047$, $x_2=78.599$, $x_3=55.837$, ya'ni uglevodoroddan 84.047 sh.b., energetikadan 78.599 sh.b., mashinasozlikdan 55.837 sh.b. yalpi ishlab chiqarish kerak.

Yakuniy talab berilgan miqdorda oshirilsa, yakuniy mahsulot yangi vektori quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi: $\overline{Y}=\begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 30 \end{bmatrix}$

U holda har bir mahsulot bo'yicha ishlab chiqarishning yangi hajmi

$\overline{X}=(E-A)^{-1}\cdot\overline{Y}$, ya'ni $\overline{X}=\begin{bmatrix} 1.323 & 0.632 & 0.473 \\ 0.311 & 1.323 & 0.817 \\ 0.37 & 0.321 & 1.595 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 30 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 119.455 \\ 116.342 \\ 81.907 \end{bmatrix}$ bo'ladi

yoki yangi ishlab chiqarish hajmi: $\overline{x}_1=119.455$, $\overline{x}_2=116.342$, $\overline{x}_3=81.907$.

Demak, yakuniy mahsulotni berilgan miqdorda oshirilishini ta'minlash uchun yalpi ishlab chiqarishni mos ravishda quyidagicha foizlarda oshirish kerak:

Uglevodorod qazib olish va qayta ishlash $\frac{\overline{x}_1}{x_1}\cdot 100\%-100\%=42.13\%$, energetik hajmini 48.02% ga, mashinasozlik ishlab chiqarish hajmini 46.69% ga dastlabkisiga nisbatan oshirish kerak.

Javob: Yalpi mahsulot ishlab chiqarish hajmi:

Uglevodorod qazib olish va qayta ishlash – 84.047 p.b.

Energetika – 78.599 p.b.

Mashinasozlik – 55.837 p.b.

Ishlab chiqarish hajmini mos ravishda 42.13, 48.02 va 46.69% ga oshirish kerak.

Kompleks sonlar

Ta'rif. Agar x va y haqiqiy sonlar hamda i belgi uchun:

1) $x+0\cdot i=x,\ 0+i\cdot y=iy,\ 1\cdot i=i,\ -1\cdot i=i,$

2) faqat $x=x_1,\ y=y_1$ bo'lgandagina $x+yi \backslash x_1+y_1i$ bo'ladi,

3) $(x+yi)\pm(x_1+y_1i)=(x\pm x_1)+(y\pm y_1)i,$

4) $(x+yi)\cdot(x_1+y_1i)=(x\cdot x_1-y\cdot y_1)+(x\cdot y_1+x_1\cdot y)i$

5) $\dfrac{x+yi}{a+bi}=\dfrac{ax+by}{a^2+b^2}+\dfrac{ay-bx}{a^2+b^2}i$

munosabatlar o'rinli bo'lsa, u holda $x+yi$ ifodaga *kompleks son* deyiladi.

1- va 4-shartlardan: $i^2=i\cdot i=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1,\ i^5=i$ va h.k.

$i=\sqrt{-1}$ belgini odatda mavhum birlik deyiladi.

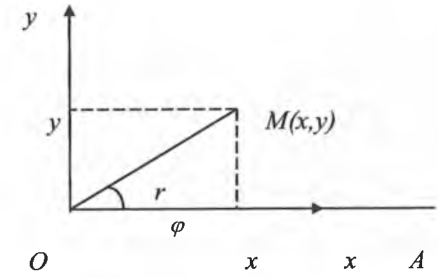
$x+yi$ kompleks sonda x kompleks sonning haqiqiy qismi, yi kompleks *sonning mavhum qismi* deyiladi.

$x+yi$ va $x-yi$ o'zaro qo'shma kompleks sonlar deyiladi.

Kompleks sonlarni qo'shish, ayirish, ko'paytirish va darajaga ko'tarish ko'phadlar ustidagi kabi bajariladi. Bo'lish va ildiz chiqarish amallari esa mos ravishda ko'paytirish va darajaga ko'tarish amallariga teskari amallar kabi aniqlanadi.

Kompleks sonning trigonometrik ko'rinishi

$x+yi$ kompleks son $(x;y)$ haqiqiy sonlar jufti bilan aniqlanadi. Shuning uchun $x+yi$ kompleks son tekislikdagi $M(x;y)$ nuqta yoki uning $r=\overline{OM}$ radius vektori bilan ifodalanadi:



Bu vektorning uzunligi $r=\sqrt{x^2+y^2}$ –kompleks sonning moduli, bu vektor bilan Ox o'q orasidagi φ burchak *kompleks sonning argumenti* deyiladi.

$x=r\cos\varphi$, $y=\sin\varphi$ bo'lgani uchun $x+y\cdot i=r\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$ boladi va bu ifodaga *kompleks sonning trigonometrik ko'rinishi* deyiladi.

Trigonometrik ko'rinishdagi kompleks sonlarni ko'paytirish va bo'lish $z_1=x_1+y_1\cdot i=r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\cdot\sin\varphi_1)$, $z_2=x_2+y_2\cdot i=r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\cdot\sin\varphi_2)$ berilgan bo'lsa, u holda

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2)),\ \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i(\sin(\varphi_1-\varphi_2))).$$

$$z_1=x_1+y_1\cdot i=r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\cdot\sin\varphi_1),\ z_2=x_2+y_2\cdot i=r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\cdot\sin\varphi_2),...,z_n=$$
$$=x_n+y_n\cdot i=r_n\cdot(\cos\varphi_n+i\sin\varphi_n)$$
$$z_1\cdot z_2\cdot...\cdot z_n=r_1\cdot r_2\cdot...\cdot r_n(\cos(\varphi_1+\varphi_2+...+\varphi_n)+i\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2+...+\varphi_n)).$$

Muavr formulalari

Agar $z_1=z_2=...=z_n=z=r(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$ bolsa, u holda $z^n=r^n(\cos n\varphi+i\cdot\sin n\varphi)$ munosabatni hosil qilamiz.

Bu formulaning r = 1 bo'lgandagi ko'rinishiga *Muavr formulasi* deyiladi: $(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\cdot\sin n\varphi.$

Xuddi shu kabi $\left(\dfrac{1}{r(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)}\right)^n=r^{-n}(\cos n\varphi-i\cdot\sin n\varphi)$.

Kompleks sondan ildiz chiqarish

$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$, bu yerda k=0,1,2,..., n-1. $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi$ *Eyler formulasi* deyiladi.

Masalan. z = –2+2i. a) $z^4=?$ *b)* $\sqrt[3]{z}$.

Yechish: a) $r=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$, $\varphi=\pi+arctg\dfrac{2}{-2}=\dfrac{3\pi}{4}$.

$$z^4=(2\sqrt{2})^4\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)^4=64\left(\cos 4\cdot\frac{3\pi}{4}+i\sin 4\cdot\frac{3\pi}{4}\right)=64(\cos 3\pi+i\sin 3\pi)=64(-1+0)=-64.$$

b) $$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{-2+2i}=\sqrt[3]{\sqrt{8}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}\right), k=0,1,2.$$

$$k=0\ da\ \sqrt[3]{z}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=1+i.$$

$$k=1\ da\ \sqrt[3]{z}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{3}+1}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$k=2\ da\ \sqrt[3]{z}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Algebraning asosiy teoremasi

$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ –kompleks sonlar maydonidagi n-darajali ko'phad bo'lsin.

Ta'rif. Agar x ning α son qiymatida $f(x)$ ko'phad nolga aylansa, u holda α soni $f(x)$ ko'phadning ildizi deyiladi.

Demak, $x=\alpha$ son $f(x)$ ko'phadning ildizi bo'lsa $f(\alpha)=0$ bo'ladi.

Teorema (*Bezu teoremasi*). $f(x)$ ko'phadni $x-\alpha$ ga bo'lgandagi qoldig'i $f(\alpha)$ ga teng.

Teorema. $x=\alpha$ son $f(x)$ ko'phadning ildizi bo'lishi uchun u $x-\alpha$ ga (–) qoldiqsiz bo'linishi zarur va yetarli.

Teorema (*Algebraning asosiy teoremasi*). Kompleks sonlar maydonida nolinchi darajadan yuqori darajali har bir $f(x)$ ko'phadning eng kamida bitta kompleks ildizi bor.

Teorema. Kompleks sonlar maydonida n-darajali $f(x)$ ko'phadning n ta ildizi bor.

Ta'rif. $f(x)=a_0\cdot(x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n)$ ifoda ko'phadning chiziqli ko'paytuvchilarga yoyilmasi deyiladi.

Haqiqiy sonlar maydonidagi $f(x)$ ko'phad uchun $x+yi$ kompleks son ildiz bo'lsa, u holda $x-yi$ qo'shma kompleks son ham ildiz bo'ladi *(y≠0)*.

Haqiqiy sonlar maydonidagi $f(x)$ ko'phadning kompleks ildizlari soni faqat juft bo'lishi mumkin.

Haqiqiy sonlar maydonidagi juft darajali $f(x)$ ko'phadning haqiqiy ildizlari soni faqat juft bo'la oladi.

Haqiqiy sonlar maydonida toq darajali $f(x)$ ko'phadning haqiqiy ildizlari soni faqat toq bo'la oladi.

Haqiqiy sonlar maydonidagi har bir $f(x)$ ko'phadni shu maydondagi birinchi va ikkinchi darajali ko'phadlar ko'paytmasi ko'rinishida ifodalash mumkin.

Masalan. Ko'paytuvchilarga ajrating: $f(x)=x^4+1$. z = –2+2i.

a) $z^4=?$ $b)$ $\sqrt[3]{z}$.

Yechish: $f(x)=x^4+1$ ko'phadning ildizlarini topamiz.

$$x^4+1=0,\ x^4=-1,\ x=\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{\cos\pi+i\sin\pi}=\cos\frac{2k+1}{4}+i\sin\frac{2k+1}{4},\ k=0,1,2,3.$$

$$k=0,\ \alpha_1=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},k=1,\ \alpha_2=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$k=3,\ \alpha_3=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2},k=4,\ \alpha_4=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$f(x)=x^4+1=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4).$$

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)=\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=x^2-\sqrt{2}x+1,$$

$$(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)=\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=x^2+\sqrt{2}x+1.$$

Demak, $f(x)=x^4+1=\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\cdot\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)$.

Ratsional kasrlarni sodda kasrlarga yoyish

Ratsional ifoda deb ko‘phadlar nisbati ko‘rinishida ifodalangan funksiyaga aytiladi, ya’ni $P_n(x)$ va $Q_m(x)$ ko‘phadlar bo‘lsa, ratsional ifoda ushbu $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ko‘rinishda bo‘ladi. Agar $P_n(x)$ ko‘phad darajasi $Q_m(x)$ ko‘phad darajasidan katta bo‘lsa, ya’ni $n>m$ bo‘lsa $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ni quyidagi ko‘rinishda ifoda etish mumkin:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=L_{n-m}(x)+\frac{R_k(x)}{Q_m(x)},$$

bu yerda, $L_{n-m}(x)$ va $R_k(x)$ mos ravishda $n-m$ va k darajali ko‘phad bo‘lib, $k\le m$, ya’ni $\frac{P_k(x)}{Q(x)}$ to‘g‘ri kasrdan iborat bo‘ladi.

Istalgan $Q_m(x)$ ko‘phadni quyidagi ko‘rinishda ifoda qilish mumkin:

$$Q_m(x)=a\cdot(x-a_1)^{k_1}\cdot(x-a_2)^{k_2}\cdots(x-a_n)^{k_n}\cdot$$
$$\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\cdot(x^2+p_2x+q_2)^{m_2}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{m_s} \quad (1)$$

Bu yerda, $a,\ a_1, \ldots, a_n,\ p_1,\ q_1, \ldots,\ p_s,\ q_s$ lar haqiqiy sonlar, *k1, k2, ..., m1, m2, ..., ms,* lar esa natural sonlardan iborat bo‘lib, $p_i^2 - 4q_i < 0$, $i = 1, 2, \ldots, s$ shart uchun o‘rinli bo‘ladi.

Agar $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ qisqarmaydigan to‘g‘ri kasr bo‘lib, $Q_m(x)$ uchun (1)-yoyilma o‘rinli bo‘lsa, bu kasrni quyidagicha ifoda etish mumkin:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{a}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{A_{i1}}{(x-a_i)} + \frac{A_{i2}}{(x-a_i)^2} + \cdots + \frac{A_{ik_i}}{(x-a_i)^{k_i}}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{B_{j1}x + C_{j1}}{x^2 + p_j x + q_j} + \frac{B_{j2}\tilde{o} + \tilde{N}_{j2}}{\left(x^2 + p_j x + q_j\right)^2} + \cdots + \frac{B_{jm_j}x + C_{jm_j}}{\left(x^2 + p_j \tilde{o} + q_j\right)^{m_j}}\right)\right]$$

yoki

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{1}{a}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{k}\frac{A_{it}}{(x-a_i)^t} + \sum_{j=1}^{s}\sum_{\ell=1}^{m_j}\frac{B_{j\ell}x + C_{j\ell}}{\left(x^2 + p_j x + q_j\right)^{\ell}}\right) \qquad (2)$$

Ta’rif.

$$\frac{A}{(x-a)^l} \quad \text{va} \quad \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^l}, \quad p^2 - 4q \langle 0$$

ko‘rinishdagi kasrlar *sodda kasrlar* deyiladi.

Demak, $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ qisqarmaydigan to‘g‘ri kasrning aniqmas integrali uchun ushbu tenglikni yoza olamiz:

$$\int\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx = \frac{1}{a}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{k_i}\int\frac{A_{it}}{(x-a_i)^t}dx + \sum_{j=1}^{s}\sum_{\ell=1}^{m_j}\int\frac{B_{j\ell}x + C_{j\ell}}{\left(x^2 + p_j x + q_j\right)^{\ell}}dx\right)$$

$\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ uchun (2)-tenglikdagi A_{it}, $B_{j\ell}$ va $C_{j\ell}$ larning qiymatlarini topish uchun noma’lum koeffitsientlar usulidan foydalanamiz. (2)-tenglikning o‘ng ta’rafidagi kasrlarni umumiy maxrajga keltirsak, bu maxraj $Q_m(x)$ ga teng bo‘lib, uning suratida A_{it}, $B_{j\ell}$ va $C_{j\ell}$ koeffitsientlar qatnashgan, darajasi $Q_m(x)$ ning darajasidan oshmaydigan $\tilde{P}_n(x)$ polinomni hosil qilamiz. Agar biz (2)-tenglikni ayniyat deb qarasak tenglikning ikki tarafidagi maxrajlar bir xil, ya’ni $Q_m(x)$

bo‘lgani sababli, $P_n \equiv \tilde{P}_n(x)$ ayniyatni hosil qilamiz. Bu ayniyatda x larning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirish natijasida A_{it}, $B_{j\ell}$ va $C_{j\ell}$ noma’lum koeffitsientlar uchun chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu sistemani yechib, (2)-tenglikdagi A_{it}, $B_{j\ell}$ va $C_{j\ell}$ larning qiymatlarini topamiz.

Masalan. $\dfrac{3x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)}$ kasrni sodda kasrlarga yoying.

Yechish: Noma’lum koeffitsientlar usuliga ko‘ra, quyidagi ayniyatni yoza olamiz:

$$\frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{(x-1)^3}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Bu tenglikning o‘ng tarafini umumiy maxrajga keltirib, so‘ngra maxrajini tashlab yuborish natijasida, quyidagi ayniyatni hosil qilamiz:

$$3x^2+x+3=A_1\cdot(x-1)^2(x^2+1)+A_2(x-1)(x^2+1)+A_3(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)^3.$$

Demak,

$$3x^2+x+3=(A_1+B)x^4+(-2A_1+A_2-3B+C)x^3+(2A_1-A_2+A_3+3B-3C)x^2+$$
$$+(-2A_1-B+3C)x+(A_1-A_2+A_3-C)$$

Bu ayniyatdagi x larning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirib, quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} A_1 + B = 0 \\ -2A_1 + A_2 - 3B + C = 0 \\ 2A_1 - A_2 + A_3 + 3B - 3C = 3 \\ -2A_1 + A_2 - B + 3C = 1 \\ A_1 - A_2 + A_3 - C = 3 \end{cases}$$

Bu sistemani Gauss usuli bilan yechamiz:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

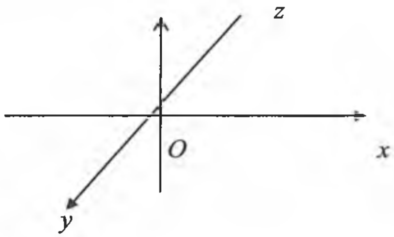
Natijada $A_1 = -\frac{1}{4}$, $A_2 = 0$, $A_3 = \frac{7}{2}$, $B = \frac{1}{4}$, $C = \frac{1}{4}$ ekanligini hosil qilamiz, ya'ni

$$\frac{3x^2 + x + 3}{(x-1)^3(x^2+1)} = -\frac{1}{4(x-1)} + \frac{7}{2(x-1)^3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{x+1}{x^2+1}$$

2. Fazoda analitik geometriya

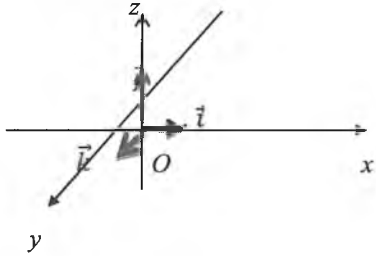
Fazoda dekart koordinatalar sistemasi

Fazoning O nuqtasida kesishuvchi uchta Ox, Oy, Oz to'g'ri chiziqlar olamiz va bu to'g'ri chiziqlarning har bir jufti orqali tekisliklar o'tkazamiz:

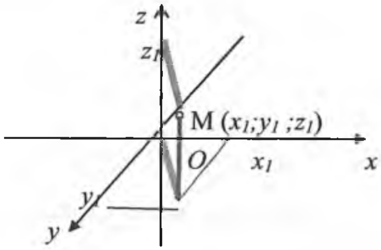


Ox va Oy to'g'ri chiziqlar orqali o'tuvchi tekislikni Oxy tekislik deb, qolgan ikki tekislikni mos ravishda Oxz va Oyz deb belgilaymiz. Ox, Oy, Oz to'g'ri *chiziqlar koordinata o'qlari* (mos ravishda abssissa, ordinata, applikata), ularning kesishish nuqtalari *koordinata boshi*, Oxy, Oxz va Oyz tekisliklar *koordinata tekisliklari* deyiladi.

Bu usul bilan hosil qilingan $Oxyz$ sistema fazoda *dekart koordinatalar sistemasi* deyiladi. Odatda Ox, Oy, Oz koordinata o'qlarining birlik vektorlarini mos ravishda $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lar orqali belgilanadi. $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ birlik (ort, bazis) *vektorlar* deyiladi.



Fazoda dekart koordinatalar sistemasi va ixtiyoriy nuqta $M(x_1; y_1; z_1)$ berilgan bo'lsin. M nuqtani yasash uchun Ox o'qdagi x_1 nuqtadan Oy o'qqa, Oy o'qdagi y_1 nuqtadan Oy o'qqa parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazib, ularning kesishish $M(x_1;y_1)$ nuqtasini aniqlaymiz. Bu nuqtani koordinatalar boshi bilan tutashtiramiz. Oz o'qdagi z_1 nuqtadan shu hosil qilingan chiziqqa parallel to'g'ri chiziq va tekislikdagi $M(x_1; y_1)$ nuqtadan Oz o'qqa parallel to'g'ri chiziq o'tkazib, ularning kesishish nuqtasini aniqlaymiz. Bu nuqta izlanayotgan $M(x_1; y_1 ;z_1)$ nuqtani aniqlaydi:



Vektorlar va vektorlar ustida amallar

Ta'rif. Yo'nalishga ega kesmaga *vektor* deb ataladi.

Agar vektorning boshi A nuqtada va oxiri B nuqtada bo'lsa, u $\overrightarrow{AB}$ yoki $\vec{a}$ kabi belgilanadi.

$\vec{a}$ vektorning uzunligi uning moduli deb ataladi va $|\vec{a}|$ kabi belgilanadi.

Oxiri boshi bilan ustma-ust tushadigan vektor *nol vektor* deb ataladi va 0 bilan belgilanadi.

Uzunligi birga teng vektorga *birlik vektor* deyiladi.

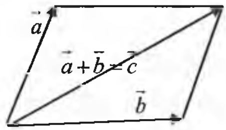
Bir to'g'ri chiziqda yoki paralell to'g'ri chiziqlarda yotuvchi vektorlar *kolleniar vektorlar* deyiladi.

Bir xil yo'nalgan va bir xil uzunlikdagi vektorlar *teng vektorlar* deyiladi.

Bir tekislikda yoki paralell tekisliklarda yotuvchi vektorlar *komplanar vektorlar* deyiladi.

$\vec{a}$ vektorning λ soniga ko'paytmasi deb, $\vec{a}$ ga kolleniar, (λ > 0 da u bilan yo'nalishdosh, λ < 0 da esa yo'nalishi qarama-qarshi) hamda moduli $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$ga teng bo'lgan $\lambda\vec{a}$ vektorga aytiladi.

Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig'indisi deb uchburchak yoki parallelogramm qoidasi bo'yicha aniqlanadigan $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ vektorga aytiladi.



$\vec{a}(x, y, z)$ vektor $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ ko'rinishida ifodalanishi mumkin, bu yerda $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ birlik vektorlar (ortlar): $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$.

$|\vec{a}|$ vektorning uzunligi $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ formula bilan aniqlanadi.

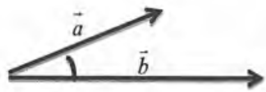
$\cos\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\cos\beta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\cos\gamma=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ vektorning *yo'naltiruvchi kosinuslari* deb ataladi. Bu yerda $\alpha, \beta, \gamma - \vec{a}$ vektorning *Ox*, *Oy*, *Oz* o'qlari bilan hosil qilgan burchaklari va $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

$\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ va $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ vektorlar berilgan bo'lsin. U holda

$$\vec{a}+\vec{b}(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2),\ \lambda\vec{a}(\lambda x_1,\ \lambda y_1,\ \lambda z_1).$$

Vektorlarning skalyar ko'paytmasi

Ta'rif. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ *vektorlarning skalyar ko'paytmasi* deb bu vektorlarning uzunliklarini ular hosil qilgan burchak kosinusiga ko'paytirishdan hosil bo'lgan songa aytiladi va $(\vec{a},\vec{b})$ yoki $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ko'rinishida belgilanadi.



Demak,

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cdot\cos\varphi$$

$\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ va $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi $(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ formula bilan aniqlanadi.

Vektorning skalyar, kvadrati $(\vec{a}, \vec{a}) = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$ yoki $|a| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

$\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ va $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ vektorlar orasidagi burchak

$$\cos\varphi = \frac{(a,\ b)}{|a||b|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

formula yordamida hisoblanadi.

Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lsa, u holda ular *ortogonal vektorlar* deyiladi.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ yoki $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$ vektorlarning ortogonallik sharti.

Birlik ortogonal vektorlar *ortonormal vektorlar* deyiladi.

$\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ va $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ vektorlar kolleniar bo'lsa, ya'ni $\vec{a} = k\vec{b}$, u holda $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} = k$ vektorlarning kolleniarlik sharti.

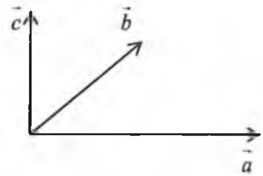
Ikki vektorning vektor ko'paytmasi

Ta'rif. $\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektorlar *vektor ko'paytmasi* deb, $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ ko'rinishda belgilanuvchi va quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $\vec{c}$ vektorga:

1. $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning har biriga perpendikular;

2. $\vec{c}$ vektor uchidan qaralganda $\vec{a}$ vektordan $\vec{b}$ vektorga eng qisqa burilishi soat mili yo'nalishiga teskari yo'nalishda kuzatiladi ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlarning bunday joylashuvini o'ng uchlik deyiladi);

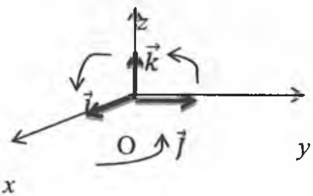
3. $\vec{c}$ vektorning moduli $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogrammning S yuzasini ifodalovchi songa teng, ya'ni $|\vec{c}| = S = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$ ($\varphi - \vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak).



Vektor ko'paytmasining asosiy xossalari:

1. $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$;
2. $(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\times\vec{b})$;
3. $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$;
4. Agar $\vec{a}=0$, yoki $\vec{b}=0$, yoki $\vec{a}\|\vec{b}$ bo'lsa, u holda $\vec{a}\times\vec{b}=0$. Xususan $\vec{a}\times\vec{b}=0$.

Koordinata o'qlari ortlarining vektor ko'paytmasi:



$$\vec{i}\times\vec{i}=0,\ \vec{j}\times\vec{j}=0, \vec{k}\times\vec{k}=0;$$
$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}.$$

Agar $\begin{matrix}\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}, \\ \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\end{matrix}$ bo'lsa, u holda $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$

Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kolleniar bo'lsa, u holda $\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$.

$\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektorlar *vektor ko'paytmasining* moduli bu vektorlarda qurilgan parallelogrammning yuzasini ifodalaydi: $S=|\vec{a}\times\vec{b}|$

$\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektorlarda qurilgan uchburchakning yuzasini esa $S=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$ formula yordamida hisoblanadi.

Uch vektorning aralash ko‘paytmasi

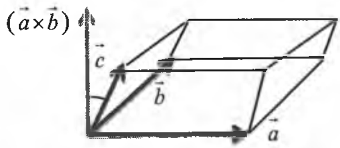
Ta’rif. $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$ *aralash ko‘paytmasi* deb, $(\vec{a}\times\vec{b})$ vektor ko‘paytmaning $\vec{c}$ vektorga skalyar ko‘paytmasiga aytiladi.

Aralash ko‘paytmaning xossalari:

1. $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$.
2. $\overline{abc}=\overline{bca}=\overline{cab}$.
3. $\overline{abc}=-\overline{bca}$, $\overline{abc}=-\overline{cba}$, $\overline{abc}=-\overline{acb}$.
4. Agar vektorlardan aqalli bittasi nol vektor yoki $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlar komplanar bo‘lsa, u holda $\overline{abc}=0$ bo‘ladi.

Agar
$$\begin{aligned}\bar{a}&=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}\\ \bar{b}&=b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+a_z\bar{k}\\ \bar{c}&=c_x\bar{i}+c_y\bar{j}+c_z\bar{k}\end{aligned}$$
bo‘lsa , u holda $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$.

Agar $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ vektorlar komplanar bo‘lsa, u holda $\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=0$.



Aralash ko‘paytma ko‘paytiriluvchi vektorlarda qurilgan parallelepiped hajmiga ishora aniqligida teng, ya’ni $V=\pm(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$. $\vec{a}$,$\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarda qurilgan tetraedr hajmi esa $V=\pm$ 1/6 $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$.

Masalan 1. a) $\bar{a}=\bar{i}+3\bar{j}$ va $\bar{b}=3\bar{j}-4\bar{k}$ vektorlarga qurilgan parallelogramm yuzasini hisoblang.

Yechish: $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogrammning S yuzasi shu vektorlarning vektor ko'paytmasi moduliga teng: $S=|\bar{a}\times\bar{b}|$. Vektor ko'paytmani topamiz: $\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 3 & 0\\ 3 & 0 & -4\end{vmatrix}=-12\bar{i}+4\bar{j}-9\bar{k}.$

Demak, $S=\sqrt{(-12)^2+4^2+(-9)^2}=\sqrt{144+16+81}=\sqrt{241}$ kv birlik.

Masalan 2. Uchlari $A(1, 2, 0)$; $B(-1, 2, 1)$; $C(0; -3; 2)$ va $D(1, 0, 1)$ nuqtalarda bo'lgan piramidaning hajmini hisoblang.

Yechish: Piramidaning A uchidan chiqqan qirralariga mos keluvchi vektorlarni topamiz: $\overline{AB}=\{-2; 0; 1\}, \overline{AC}=\{-1; -5; 2\}$, $\overline{AD}=\{0; -2; 1\}$.

Piramidaning hajmi shu vektorlarga qurilgan parallelepiped hajmining $\frac{1}{6}$ qismiga teng bo'lganligi sababli $V=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix}-2 & 0 & 1\\ -1 & -5 & 2\\ 0 & -2 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\cdot 4=\frac{2}{3}$ kub birlik.

Fazoda tekislik tenglamalari va ularga doir asosiy masalalar

Fazodagi $M(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan o'tuvchi, $\vec{n}(A, B, C)$ vektorga perpendikular bo'lgan tekislik tenglamasini tuzamiz. Odatda $\vec{n}(A, B, C)$ vektorga *tekislikning normal vektori* deyiladi. Buning uchun shu tekislikda yotuvchi ixtiyoriy $B(x, y, z)$ nuqtani olsak, $\overrightarrow{MB}$ ва $\vec{n}$ vektorlar perpendikular bo'ladi, ya'ni $\overrightarrow{MB}\cdot\vec{n}=0$ bo'ladi. Demak, quyidagilar o'rinli bo'lar ekan:

$$\overrightarrow{MB}\cdot\vec{n}=A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

Agar qavslarni ochib, ifodani ixchamlasak quyidagi tenglama hosil bo'ladi:

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (1)$$

Bu yerda, $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$. $\bar{n}(A,B,C)$ vektor *tekislikning normal vektori* deyiladi.

(1)-tenglama tekislikning *umumiy ko'rinishdagi tenglamasi* deyiladi. Endi (1)-tenglamaning ayrim maxsus ko'rinishlarini keltiramiz:

1. Agar $D=0$ bo'lsa, u holda $Ax+By+Cz=0$ tekislik koordinata boshidan o'tadi.
2. Agar $A=0$ bo'lsa, $By+Cz+D=0$ tekislik OX o'qqa parallel bo'ladi.
3. Agar $A=0, D=0$ bo'lsa, $By+Cz=0$ tekislik OX o'qdan o'tadi.
4. Agar $A=0$, $B=0$ bo'lsa, $Cx+D=0$ tekislik OXY tekislikka parallel bo'ladi.
5. Agar $A=0$, $B=0$, $D=0$ bo'lsa, $Cz=0$ (yoki $z=0$) tekislik OXY tekislik

5. bilan ustma-ust tushadi.

(1)-tenglamada $D\neq 0$ bo'lganda tekislikning kesmalardagi tenglamasini keltirib chiqarish mumkin:

$$Ax+By+Cz=-D \Rightarrow \frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1$$

yoki $-\frac{D}{A}=a,\ -\frac{D}{B}=b,\ -\frac{D}{C}=c$ deb belgilashni kiritsak $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ tekislikning kesmalardagi tenglamasi hosil bo'ladi.

Bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan uchta $M(x_1,y_1,z_1)$, $M(x_2,y_2,z_2)$, $M(x_3,y_3,z_3)$ nuqta orqali o'tuvchi tekislik tenglamasi:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

Ushbu

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

tekisliklar berilgan bo'lsin.

Ikki tekislik orasidagi burchak deb tekisliklar hosil qilgan ikki yoqli burchakka aytiladi.

$\vec{n}_1$ va $\vec{n}_2$ vektorlar orasidagi φ burchak bu tekisliklar hosil qilgan ikki yoqli burchaklardan biridir. Shuning uchun φ burchak quyidagi tenglikdan topiladi:

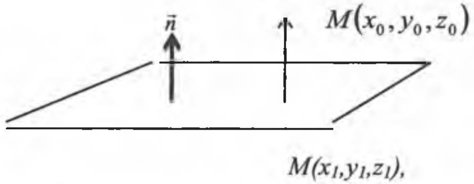
$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (2)$$

Tekisliklarning parallellik va perpendikularlik shartlari ularni aniqlaydigan $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ va $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ vektorlarning parallellik va perpendikularlik shartlari bilan bir xil bo'ladi, shuning uchun ular quyidagicha bo'ladi:

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ tekisliklarning parallellik sharti,

$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$ tekisliklarning perpendikularlik sharti.

$M(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislikkacha bo'lgan masofa hisoblash formulasini keltirib chiqaramiz. $M(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan tekislikka tushirilgan perpendikularning asosini $M(x_1, y_1, z_1)$ bilan belgilaymiz. Izlanayotgan masofani d bilan belgilaymiz.



$\vec{n}(A, B, C)$ tekislikning normal vektori va $\overline{M_1M}$ vektor o'zaro kolleniar vektorlardir.

Bu vektorlarning skalyar ko‘paytmasi

$\vec{n}\cdot\overline{M_1M}=|\vec{n}|\cdot\left|\overline{M_1M}\right|\cos\varphi=d\cdot|\vec{n}|$ bo‘lib, undan $d=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overline{M_1M}\right|}{|\vec{n}|}$ munosabatni hosil qilamiz.

$$\vec{n}\cdot\overline{M_1M}=A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)=Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1)$$

$M_1(x_1,y_1,z_1)$ nuqta berilgan tekislikda yotgani uchun $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$ bo‘ladi, bundan esa $Ax_1+By_1+Cz_1=-D$ kelib chiqadi. Demak,

$\vec{n}\cdot\overline{M_1M}=Ax_0+By_0+Cz_0+D$ va $\vec{n}=\sqrt{A^2+B^2+C}$ ekanligidan quyidagi formulani hosil qilamiz:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Bu formula $M(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan $Ax+By+Cz+D=0$ tekislikkacha bo‘lgan masofani hisoblash formulasidir.

Masalan. $M_0(2;\ -3;\ 1)$ nuqta orqali o‘tuvchi va $x-4y+5z+1=0$ tekislikka parallel tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish: Ma’lumki $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ nuqtadan o‘tib, $ax+by+cz+d=0$ tekislikka parallel tekislik tenglamasi $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ shaklda bo‘ladi. Bizning masala uchun bu tenglama quyidagi ko‘rinishni oladi: $(x-2)-4(y+3)+5(z-1)=0$ yoki $x-4y+5z-19=0$.

Fazoda to‘g‘ri chiziq tenglamalari va ularga doir asosiy masalalar

Umumiy holda ikki n-tekislikning kesishish nuqtalari to‘plamini fazodagi to‘g‘ri chiziq sifatida talqin qilish mumkin.

Agar $\begin{matrix} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{matrix}$ tengliklardagi tekisliklar parallel bo‘lmasa, ular to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesishadi, bu to‘g‘ri chiziq tenglamasi quyidagi tenglamalar sistemasi orqali topiladi:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Bu sistema to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi.

Agar tenglamadan x va y ni z orqali topsak, u holda to‘g‘ri chiziqning proeksiyalardagi tenglamasini hosil qilamiz: $\begin{cases} x = mz + a \\ y = nz + b \end{cases}$.

Endi $M(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan o‘tib, $\vec{p}(m, n, k)$ vektorga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini topaylik. Agar $B(x, y, z)$ nuqta qidirilayotgan to‘g‘ri chiziqda yotsa, u holda $\overrightarrow{MB}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ vektor $\vec{p}$ vektorga parallel bo‘lishi kerak, ya’ni quyidagi tenglama hosil bo‘ladi:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k}$$

Bu tenglama fazodagi to‘g‘ri chiziqning kanonik ko‘rinishdagi tenglamasi deb ataladi. Agar bu tenglamada $\frac{z - z_0}{k} = t$ deb olsak, to‘g‘ri chiziqning quyidagi parametrik tenglamasini hosil qilamiz:

$$x = mt + x_0,$$
$$y = nt + y_0,$$
$$z = kt + z_0.$$

Berilgan ikki $M(x_1, y_1, z_1)$ va $K(x_2, y_2, z_2)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini topaylik. Bu to‘g‘ri chiziq $M(x_1, y_1, z_1)$ nuqtadan o‘tganligi uchun

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{k}.$$

Endi bu to‘g‘ri chiziqning $K(x_2, y_2, z_2)$ nuqtadan ham o‘tishini e’tiborga olsak,

$$\frac{x_2 - x_1}{m} = \frac{y_2 - y_1}{n} = \frac{z_2 - z_1}{k}.$$

Natijada quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Bu tenglama berilgan ikki $M(x_1, y_1, z_1)$ va $K(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasidir. Ikkita to'g'ri chiziq orasidagi burchak deb bu to'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakka aytiladi.

Ikkita to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektorlari $S_1(m_1, n_1, p_1)$ va $S_2(m_2, n_2, p_2)$ berilgan bo'lsin. U holda ikkita to'g'ri chiziq orasidagi burchak quyidagi munosabatdan topiladi:

$$\cos\varphi = \pm\frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

Fazoda ikkita to'g'ri chiziqning parallellik sharti: $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$.

Fazoda ikkita to'g'ri chiziqning perpendikularlik sharti: $m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$.

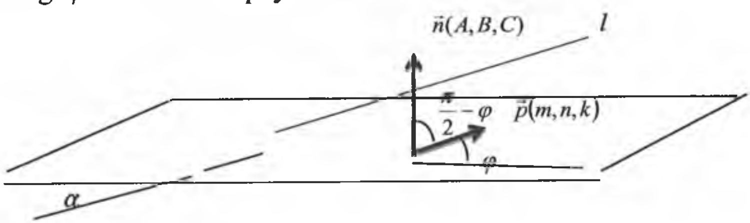
Masalan. $M_1(2;-1;\ -1)$ va $M_2(3;\ 3;\ -1)$ nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ yoki

$$\frac{x-2}{3-2} = \frac{y+1}{3+1} = \frac{z+1}{-1+1} \Rightarrow \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+1}{0}.$$

Fazoda tekislik va to'g'ri chiziqlarga doir asosiy masalalar

l: $\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{k}$ to'g'ri chiziq va α: $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislik orasidagi φ burchakni topaylik.



$\frac{\pi}{2}-\varphi$ burchak $\vec{p}(m,n,k)$ va $\vec{n}(A,B,C)$ vektorlar orasidagi burchakka teng bo'ladi, u holda $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi$ bo'lgani uchun, $\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Ck|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+k^2}}$.

Berilgan to'g'ri chiziq va tekislikning parallel bo'lishi uchun $\vec{p}$ va $\vec{n}$ vektorlar perpendikular bo'lishi kerak, ya'ni $Am+Bn+Ck=0$.

Berilgan to'g'ri chiziq va tekislikning perpendikular bo'lishi uchun $\vec{p}$ va $\vec{n}$ vektorlar parallel bo'lishi kerak, ya'ni $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{k}$.

To'g'ri chiziq bilan tekislikning kesishgan nuqtasini topish uchun, to'g'ri chiziqning parametrik tenglamasi va tekislikning umumiy tenglamasi orqali hosil bo'lgan sistemani yechish lozim, ya'ni

$$\begin{cases} x=mt+a \\ y=nt+b \\ z=kt+c \\ Ax+By+Cz+D=0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yechish kerak.

Masalan 1. $M_0(2;-2;1)$ nuqtadan va $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+3}{2}$ to'g'ri chiziqdan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish: M(x; y; z) izlanayotgan tekislikda yotuvchi nuqta bo'lsin. $M_1(1;\ 2;\ -3)$ to'g'ri chiziqdagi nuqta. U holda $\vec{p}\,(2;\ -3;\ 2)$ berilgan to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori, $\overline{M_1M}\,(x-1;y-2;z+3)$ va $\overline{M_1M_0}\,(1;\ -4;\ 4)$ vektorlar komplanar va $(\overline{M_1M_0}\ \vec{p}\ M_1M)=0$ bo'ladi. Demak $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \\ x-1 & y-2 & z+3 \end{vmatrix}=0$.

Bundan $4x+6y+5z-1=0$ izlanayotgan tekislik tenglamasi hosil bo'ladi.

Masalan 2. $\begin{cases} 3x-y-1=0 \\ 3x+2z-2=0 \end{cases}$ to‘g‘ri chiziq bilan *2x+y+z-4=0* tekislik orasidagi burchak topilsin.

Yechish: To‘g‘ri chiziq tenglamasini kanonik ko‘rinishga keltiramiz: $\frac{x-0}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-\frac{3}{2}}$. Bu to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori $\vec{p}(1;3;-\frac{3}{2})$.

2x+y+z–4=0 tekislikning normal vektori esa $\vec{n}(2;1;1)$. Demak, to‘g‘ri chiziqning berilgan tekislik bilan hosil qilgan burchagi

$$\mathrm{Sin}\varphi=\frac{\left|1\cdot 2+3\cdot 1+\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot 1\right|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}\sqrt{1^2+3^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}}=\frac{\frac{7}{2}}{\sqrt{6}\cdot\frac{7}{2}}=\frac{1}{\sqrt{6}},\ \varphi=arcsin\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

3. Chiziqli fazo

Chiziqli fazo tushunchasi

Chiziqli fazo tushunchasi matematikadagi asosiy tushunchalardan biri bo'lib, iqtisodda ham muhim ahamiyatga ega.

Ta'rif. Agar bo'sh bo'lmagan L to'plamning istalgan x,y,z elementlari va λ son uchun qo'shish $x+y\in L$, songa ko'paytirish $\lambda x\in L$ aniqlangan bo'lib, bu amallar uchun quyidagi xossalar o'rinli bo'lsa:

1. $x+y=y+x$ (qo'shish amalining kommutativligi);
2. $x+(y+z)=(x+y)+z$ (qo'shishning assostiativligi);
3. L da shunday 0 (nol) element mavjudki, istalgan $x\in L$ uchun $x+0=x$;
4. Har bir $x\in L$ uchun, L da shunday x elementi mavjudki, uning uchun $x+(-x)=0$;
5. α va β sonlar va $x\in L$ uchun $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$;
6. $1\cdot x=x$;
7. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$;
8. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$

u holda u chiziqli yoki vektor fazo deyiladi.

Yuqoridagi ta'rifda songa ko'paytirish amali deganda ikki holatni farqlash kerak. Agar ta'rifdagi sonlar haqiqiy sonlar to'plami $R=(-\infty,+\infty)$ dan olingan deb qaralsa, bunday chiziqli fazo *haqiqiy chiziqli fazo* deyiladi, agarda bu sonlar kompleks sonlar to'plami C dan olingan deb qaralsa, bunday chiziqli fazo *kompleks chiziqli fazo* deyiladi.

Ta'rif. Agar shunday $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ sonlar topilib, ular uchun $x=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_n a_n$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda chiziqli fazo elementi x vektor $a_1,a_2,\ldots,a_n$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat deyiladi.

Ta'rif. Agar hammasi ham nolga teng bo'lmagan shunday $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ sonlar topilib, ular uchun

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = 0 \qquad (1)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq vektorlar sistemasi deyiladi, aks holda, ya'ni (1)-tenglik o'rinli ekanligidan $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ bo'lsa, ular *chiziqli-erkli vektorlar sistemasi* deyiladi.

Agar $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektorlar orasida nol vektor bo'lsa, u holda ular chiziqli bog'liq bo'ladi. Agar $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektorlardan bir nechtasi chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda ularning o'zi ham chiziqli bog'liq bo'ladi.

Ta'rif. Agar *L* chiziqli fazoda *n* tasi chiziqli-erkli va istalgan *n+1* tasi bog'liq bo'lgan vektorlar mavjud bo'lsa, ya'ni chiziqli-erkli vektorlarning maksimal soni *n* ga teng bo'lsa, u holda *L* fazo *n o'lchovli chiziqli fazo* deyiladi.

Ta'rif. *n* o'lchovli chiziqli fazodagi istalgan *n* ta chiziqli-erkli vektorlar sistemasi *chiziqli fazoning bazisi* deyiladi.

Teorema. Chiziqli fazoning har bir elementini yagona usul bilan bazisning chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida ifoda qilish mumkin.

Isbot. $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ vektorlar L dagi bazis bo'lsin, agar $x \in L$ $(x \neq 0)$ bo'lsa, u holda $x, \ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n$ vektorlar chiziqli bog'liq bo'ladi, ya'ni hammasi ham nol bo'lmagan shunday $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sonlar mavjudki, bunda $\lambda_0 x + \lambda_1 \ell_1 + \cdots + \lambda_n \ell_n = 0$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bu yerda, $\lambda_0 \neq 0$ bo'lishi kerak, aks holda $\lambda_1 \ell_1 + \lambda_2 \ell_2 + \ldots \lambda_n \ell_n = 0$ bo'lib, $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, $\lambda_0 \neq 0$ bo'lishi kerak, u holda

$$x = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\ell_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_0}\ell_2 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_0}\ell_n \qquad (2)$$

tenglik hosil qilamiz, ya'ni x vektor $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ larning chiziqli kombinatsiyasidan iborat ekan. Endi x ni (2)-tenglik orqali yagona usulda ifodalash mumkinligini ko‘rsatamiz. Faraz qilaylik, $x \in L, x \neq 0$ uchun ushbu

$$x = \alpha_1 \ell_1 + \alpha_2 \ell_2 + \cdots + \alpha_n \ell_n$$
$$x = \beta_1 \ell_1 + \beta_2 \ell_2 + \cdots + \beta_n \ell_n$$

tengliklar o‘rinli bo‘lsin, bu tengliklar ayirmasini olsak, u holda $(\alpha_1 - \beta_1)\ell_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\ell_2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)\ell_n = 0$ tenglikni hosil qilamiz. $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ lar chiziqli-erkli bo‘lgani uchun

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0,\ \alpha_2 - \beta_2 = 0, \cdots, \alpha_n - \beta_n = 0,$$

ya’ni $\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2, \cdots, \alpha_n = \beta_n$ kelib chiqadi. Demak, x vektor (2)-tenglik orqali yagona ko‘rinishda ifodalanar ekan. Teorema isbot bo‘ldi.

Teorema. Agar L dagi $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ vektorlar chiziqli-erkli bo‘lib, istalgan x vektor ularning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘lsa, u holda bu vektorlar L da bazisni tashkil etadi.

Isbot. $x \in L$ bo‘lsin, u holda teorema shartiga ko‘ra $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ sonlar mavjudki, ular uchun $x = \lambda_1 \ell_1 + \lambda_2 \ell_2 + \cdots + \lambda_n \ell_n$ bo‘ladi. Bundan esa $1 \cdot x - \lambda_1 \ell_1 - \lambda_2 \ell_2 - \cdots - \lambda_n \ell_n = 0$ tenglik kelib chiqadi, ya’ni $x, \ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n$ vektorlar chiziqli bog‘liq ekan, u holda ta’rifga ko‘ra $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n$ vektorlar bazisni tashkil etadi. Teorema isbot bo‘ldi.

$\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n$ vektorlar bazis bo‘lib, x vektor ularning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘lsin, ya’ni $x = x_1 \ell_1 + x_2 \ell_2 + \cdots + x_n \ell_n$, u holda $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sonlar x vektorning $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n$ bazis bo‘yicha koordinatalari deb yuritiladi. n o‘lchovli L chiziqli fazoda ikkita $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n$ va $\ell_1^*, \ell_2^*, \cdots, \ell_n^*$ bazislar berilgan bo‘lsin, u holda $\ell_1^*, \ell_2^*, \cdots, \ell_n^*$ lar uchun

$$\ell_1^* = a_{11} \ell_1 + a_{12} \ell_2 + \cdots + a_{1n} \ell_n$$
$$\ell_2^* = a_{21} \ell_1 + a_{22} \ell_2 + \cdots + a_{2n} \ell_n$$
$$-----------------$$
$$\ell_n^* = a_{n1} \ell_1 + a_{n2} \ell_2 + \cdots + a_{nn} \ell_n$$

tengliklarni hosil qilamiz, bu yerda

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ ------ \\ a_{n} & a_{n2}\ \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsa $\ell_1,\ell_2,\cdots,\ell_n$ bazisdan $\ell_1^*,\ell_2^*,\cdots,\ell_n^*$ bazisga o'tish matritsasi deyiladi. Shuni ta'kidlaymizki, A matritsa xos bo'lmagan matritsa bo'ladi, shuning uchun unga teskari A^{-1} matritsa mavjud bo'lib, bu matritsa $\ell_1^*,\ell_2^*,\cdots,\ell_n^*$ bazisdan $\ell_1,\ell_2,\cdots,\ell_n$ bazisga o'tish matritsasi bo'ladi.

Endi berilgan vektorning turli bazislardagi koordinatalari orasidagi bog'lanishni qaraymiz, $x\in L$ vektor uchun

$$X=x_1\,\ell_1+x_2\,\ell_2+\ldots+x_n\,\ell_n=x_1^*\,\ell_1^*+x_2^*\,\ell_2^*+\ldots+x_n^*\,\ell_n^*$$

bo'lsin, u holda

$$\mathrm{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad X^*=\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix}$$

deb belgilasak, quyidagi tengliklarni hosil qilamiz: $\mathrm{X}=\mathrm{A}'\mathrm{X}^*$ *ёки* $\mathrm{X}^*=\left(A^{-1}\right)'\mathrm{X}$.

Bu yerda, $\mathrm{A}'-\mathrm{A}$ matritsaning transponirlangan matritsasidir.

n o'lchovli-chiziqli fazoga misol keltiramiz. Elementlari tartiblangan n ta haqiqiy sonlar majmuasidan iborat bo'lgan

$$R^n=\{x:x=(x_1,\,x_2,\,\cdots,x_n),\quad x_i\in(-\infty,+\infty),\ \ i=\overline{1,n}\ \}$$

to'plamda $x=(x_1,\,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$ va $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in R^n$ lar uchun qo'shish:

$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)$ va λ songa ko'paytirish amalini: $\lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots,\lambda x_n)$ kiritsak, bu amallar chiziqli fazo ta'rifidagi 1–8-

xossalarni qanoatlantiradi. Demak, R^n kiritilgan amallarga nisbatan chiziqli fazoni tashkil etar ekan. Bundan tashqari

$$\begin{array}{l} \ell_1 = (1, \quad 0, \cdots, 0) \\ \ell_2 = (0, \quad 1, \cdots, 0) \\ -\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,- \\ \ell_n = (0, \quad 0, \cdots, 1) \end{array}$$

birlik vektorlar sistemasi R^n da bazisni tashkil etadi, chunki $\forall x = (x_1,\ x_2, \cdots,\ x_n) \in R^n$ vektorni $x = x_1\ell_1 + x_2\ell_2 + \cdots + x_n\ell_n$ ko‘rinishda ifodalash mumkin.

Masalan 1. Quyida berilgan uchta vektorlar bazis hosil qilishini tekshiring:

$$\bar{a} = \{0,3,1\},\ \bar{b} = \{1,-2,0\},\ \bar{c} = \{1,0,1\}.$$

Yechish: $\bar{a} - \lambda_1\bar{b} - \lambda_2\bar{c} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 3 + 2\lambda_1 - 0\cdot\lambda_2 = 0 \\ 1 - 0\cdot\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$

Bundan ko‘rinadiki sistemaning yechimi yo‘q. Demak $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ vektorlar chiziqli-erkli.

Masalan 2. Agar $A_2 - A_1$ va $A_3 - A_1$ vektorlar proporsional bo‘lmasa, u holda A_1, A_2, A_3 vektorlar chiziqli bog‘liq emasligini ko‘rsating.

Yechish: $A_1(a_1, b_1, c_1)$ $A_2(a_2, b_2, c_2)$ $A_3(a_3, b_3, c_3)$ bo‘lsin.

$A_2 - A_1 = (a_2 - a_1;\ b_2 - b_1;\ c_2 - c_1)$, $A_3 - A_1 = (a_3 - a_1;\ b_3 - b_1;\ c_3 - c_1)$.

$A_2 - A_1$ va $A_3 - A_1$ vektorlar proporsional emasligidan

$$\begin{cases} a_3 - a_1 \neq \lambda(a_2 - a_1) \\ b_3 - b_1 \neq \lambda(b_2 - b_1) \\ c_3 - c_1 \neq \lambda(c_2 - c_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\lambda - 1)a_1 - \lambda a_2 + a_3 \neq 0 \\ (\lambda - 1)b_1 - \lambda b_2 + b_3 \neq 0 \\ (\lambda - 1)c_1 - \lambda c_2 + c_3 \neq 0 \end{cases}.$$

Demak $\begin{cases} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \neq \lambda_3 a_3 \\ \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \neq \lambda_3 b_3 \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \neq \lambda_3 c_3 \end{cases}$

bo‘lib, A_1, A_2, A_3 vektorlarning chiziqli bog‘liq emasligi kelib chiqadi.

Evklid fazolari

Ta'rif. Agar L chiziqli fazo berilgan bo'lib, $\forall x, y \in L$ elementlar uchun shunday $(x;y)$ son mos qo'yilgan bolsa va u quyidagi xossalarni qanoatlantirsa:

1. $(x,y)=(y,x),(x,y \in L)$.
2. $(x,y+z)=(x,y)+(x,z),(x,y,z \in L)$.
3. $(\alpha x,y)=\alpha(x,y),(\alpha \in R,\ x,y \in L)$.
4. $(x,x)\geq 0$ va faqat $x=0(x \in L)$ bo'lganda $(x;x)=0$.

U holda bu chiziqli fazoda skalyar ko'paytma aniqlangan deyiladi.

Skalyar ko'paytma kiritilgan chiziqli fazo *Evklid fazosi* deyiladi.

Skalyar ko'paytma yordamida vektorning normasi (uzunligi) tushunchasini kiritish mumkin. x vektorning uzunligi (normasi) $|x|$ deb, quyidagicha aniqlangan songa aytiladi:

$$|x|=\sqrt{(x,x)}$$

Norma quyidagi xossalarga ega bo'ladi.

1. $|x|=0$ faqat va faqat shu holdaki, agar $x=0$, bo'lsa.
2. Istalgan λ son uchun $|\lambda x|=|\lambda|\cdot|x|$.
3. $|(x,y)|\leq|x|\cdot|y|$ Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi.
4. $|x+y|\leq|x|+|y|$ uchburchak tengsizligi.

Ikkita x va y vektorlar orasidagi burchak θ quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$\cos\vartheta=\frac{(x,y)}{|x|\cdot|y|},\ \text{bu yerda } 0\leq\vartheta\leq\pi \text{ deb qaraladi.}$$

Normaning 1- va 2-xossalari to'g'ridan to'g'ri skalyar ko'paytma ta'rifidan kelib chiqadi. 3- va 4-xossalarini isbot qilaylik. Skalyar ko'paytmaning ta'rifiga va 1-, 2-xossalariga ko'ra quyidagilarni hosil qilamiz:

$$0\leq(x+\alpha y,\ x+\alpha y)=(x,x)+2\alpha(x,y)+\alpha^2(y,y)$$

Bu yerda, $\alpha = -\dfrac{(x,y)}{(y,y)}$ deb olsak, quyidagi hosil bo'ladi.

$$0 \le (x,x) - 2\cdot\frac{(x,y)^2}{(y,y)} + \frac{(x,y)^2\cdot(y,y)}{(y,y)^2} = |x|^2 - \frac{(x,y)^2}{|y|^2} \Rightarrow (x,y)^2 \le |x|^2\cdot|y|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |(x,y)| \le |x|\cdot|y|$$

Demak, Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi isbot bo'ladi. Endi 4-xossa Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidan kelib chiqadi:

$$|x+y|^2 = (x+y,x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \le |x|^2 + 2\cdot|x|\cdot|y| + |y|^2 = (|x|+|y|)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x+y| \le |x| + |y|$$

Agar x va y vektorlar ortogonal vektorlar orasidagi burchak $\frac{\pi}{2}$ ga teng bo'lsa, ya'ni $(x,y)=0$ bo'lsa, u holda ular *ortogonal vektorlar* deyiladi.

Agarda n o'lchovli evklid fazosidagi $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n$ vektorlar uchun $(\ell_i, \ell_j)=0$, $i \neq j$ bo'lib, $|\ell_i| = 1$, $i = 1,2,\ldots,n$, bo'lsa, u holda ular bu fazoning *ortonormal bazisi* deyiladi.

Teorema. Har qanday n o'lchovli L Evklid fazosida ortonormal bazis mavjuddir.

Isbot. $f_1, f_2, \cdots, f_n$ vektorlar L Evklid fazosidagi bazis bo'lsin, shu bazis asosida biz ortonormal bazisni hosil qilamiz. 1-qadamda $\ell_1 = \dfrac{f_1}{|f_1|}$ deb olamiz, tabiiy $|\ell_1| = 1$ bo'ladi.

2-qadamda $f_2^* = \lambda_1 \ell_1 + f_2$ vektor uchun λ_1 ni shunday tanlaymizki, $(f_2^*, \ell_1) = 0$ bo'lsin, ya'ni $o = (f_2^*, \ell_1) = \lambda_1(f_1, \ell_1) + (f_2, \ell_1) = \lambda_1 + (f_2, \ell_1)$ demak, $\lambda_1 = -(f_2, \ell_1)$ deb olsak $(f_2^*, \ell_1) = 0$ bo'lar ekan, endi $\ell_2 = \dfrac{f_2^*}{|f_2^*|}$ deb olsak, $|\ell_2| = 1$ va $(\ell_1, \ell_2) = 0$ bo'ladi.

$k < n$ uchun $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_k$ ortonormal vektorlar hosil qilingan bo'lsin, $k+1$ qadamda $f_{k+1}^* = \lambda_1 \ell_1 + \lambda_2 \ell_2 + \cdots + \lambda_k \ell_k + f_{k+1}$ vektor uchun

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ sonlarni shunday tanlaymizki $\left(\ell_i, f_{k+1}^*\right)=0,\ i=\overline{1,k}$ tengliklar o'rinli bo'lsin, buning uchun $\lambda_i=-(f_{k+1}, \ell_i),\ \ i=1,2,\ldots,k$ deb olish yetarlidir. Agar biz $\ell_{k+1}=\dfrac{f_{k+1}^*}{\left|f_{k+1}\right|}$ deb olsak, $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_k, \ell_{k+1}$ ortonormal sistemani tashkil qiladi. Natijada n ta qadamdan so'ng $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n$ ortonormal sistema hosil bo'ladi. Istalgan ortonormal sistema chiziqli-erkli bo'ladi, chunki agar $\lambda_1\ell_1+\lambda_2\ell_2+\cdots+\lambda_i\ell_i+\cdots+\lambda_n\ell_n=0$ bo'lsa, u holda istalgan $i=1,2,\ldots,n$ uchun

$$(\lambda_1\ell_1+\lambda_2\ell_2+\cdots+\lambda_i\ell_i+\cdots+\lambda_n\ell_n, \ell_i)=\lambda_i(\ell_i, \ell_i)=\lambda_i=0$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak, $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n$ chiziqli-erkli ekan, L fazo n o'lchovli bo'lgani uchun $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n$ ortonormal bazis ekanligi kelib chiqadi.

Evklid fazosiga misol tariqasida chiziqli n o'lchovli fazo R^n ni keltirish mumkin. R^n da $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ va $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb quydagini olamiz:

$$(x, y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Kiritilgan skalyar ko'paytma ta'rifdagi barcha xossalarni qanoatlantiradi. R^n da kiritilgan skalyar ko'paytmaga mos ravishda $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in R^n$ vektorning normasi quyidagicha aniqlanadi: $|x|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

Evklid fazoda $\ell_1=(1,0,\ldots,0),\ \ell_2=(0,1,\ldots,0),\cdots,\ell_n=(0,0,\ldots,1)$ vektorlar ortonormal bazisni tashkil etadi.

Chiziqli operatorlar

Ta'rif. Agar L_1 chiziqli fazoning har bir elementi $x\in L_1$ uchun biron qoida, qonunga asosan L_2 chiziqli fazoning aniq elementi mos qo'yilgan bo'lsa, L_1 ni L_2 ga akslantiruvchi operator berilgan deyiladi. Bu operatorni A deb belgilab, akslantirishni $A: L_1 \to L_2$ shaklda ifoda etiladi, bu akslantirishda x ning y ga mos kelishi $Ax = y$ kabi yoziladi.

Ta'rif. Agar istalgan $x \in L_1, y \in L_2$ va λ son uchun

$$A(x+y) = Ax + Ay$$

$$A(\lambda x) = \lambda A x$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $A: L_1 \to L_2$ operator *chiziqli operator* deyiladi.

$A: L_1 \to L_2$ va $B: L_2 \to L_3$ chiziqli operatorlar bo'lsa, A va B operatorlarning ko'paytmasi (yoki kompozitsiyasi) deb ushbu $(AB)(x) = A(Bx)$ ko'rinishda aniqlangan operatorga aytiladi. Bu yerda, $AB: L_1 \to L_3$ va $C = AB$ chiziqli operatordir.

Agar $A: L \to L$ va $B: L \to L$ chiziqli operatorlar bo'lsa, bunday operatorlar uchun $A+B$, $\lambda \cdot A$ va $A \cdot B$ chiziqli operatorlarni aniqlashimiz mumkin bo'ladi. L chiziqli fazoning o'zini-o'ziga akslantiruvchi barcha chiziqli operatorlar to'plamini $\Im(L)$ deb belgilaymiz, operatorlarni qo'shish va songa ko'paytirishga nisbatan $\Im(L)$ to'plam chiziqli fazoni tashkil etadi.

Ta'rif. Agar $A \in \Im(L)$ operator uchun shunday λ son mavjud bo'lib,

$$Ax = \lambda x, \quad x \neq 0$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda x vektor A operatorning xos vektori deyiladi.

$A: R^n \to R^m$ chiziqli operator bo'lsin. Biz A operatorning matritsa ko'rinishini hosil qilamiz. Buning uchun R^n da $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ va R^m da esa $\ell_1^*, \ell_2^*, \dots, \ell_m^*$ bazislarni olaylik. $x \in R^n, Ax = y \in R^m, A\ell_i \in R^m$ uchun ushbu tengliklarni yoza olamiz:

$$x = x_1\ell_1 + x_2\ell_2 + \dots + x_n\ell_n$$

$$Ax = y = y_1\ell_1^* + y_2\ell_2^* + \dots + y_m\ell_m^*$$

$$A\ell_i = a_{1j}\ell_1^* + a_{2j}\ell_2^* + \dots + a_{mj}\ell_m^*, \; j = 1,2,\dots,n$$

Bu yerdan quyidagilarni hosil qilamiz:

$$Ax=\sum_{j=1}^{n}x_jA\ell_j=\sum_{j=1}^{n}x_j\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\ell_i^*=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)\ell_i^*$$

$$Ax=y=\sum_{i=1}^{m}y_i\ell_i^*$$

Demak, $y_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$, $i=1,2,\ldots,m$ tengliklar hosil bo'ladi. Agar biz ushbu matritsalarni kiritsak,

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n}\\ ------- \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn}\end{pmatrix}$$

u holda yuqoridagi tengliklarni quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$AX=Y$$

Bu yerda, A matritsa qaralayotgan A operatorning berilgan bazislardagi matritsasi deyiladi. $A\in\Im(R^n)$ bo'lsin, u holda bunday operatorga mos keladigan matritsa kvadratik matritsa bo'ladi.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n}\\ ------- \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn}\end{pmatrix}$$

$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in R^n$ vektor A chiziqli operatorning λ xos soniga mos keluvchi xos vektor, ya'ni $Ax=\lambda x$ bo'lsin.

Agar $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ vektor matritsa bo'lsa, u holda ushbu tenglik hosil bo'ladi $AX=\lambda X$.

Bu yerdan E birlik matritsa uchun, quyidagi $(A-\lambda E)X=0$ tenglikni yoza olamiz. Bu bir jinsli tenglamalar sistemasi har doim $x=0$ yechimga ega. U noldan farqli yechimga ega bo'lishi uchun, ya'ni xos vektorning mavjud bo'lishi uchun $|A-\lambda E|=0$ bo'lishi, ya'ni

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda\cdots a_{2n} \\ \hline \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

ekanligi zarur va yetarlidir. Bu determinant λ ga nisbatan n-tartibli ko'phaddan iborat bo'ladi, uni A operatorning yoki A *matritsaning xarakteristik ko'phadi*, (1)-tenglama A operatorning (matritsaning) *xarakteristik tenglamasi* deyiladi. Shuni ta'kidlash lozimki, xarakteristik ko'phad qaralayotgan bazisga bog'liq bo'lmaydi.

A operator n ta chiziqli-erkli $\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_n$ xos vektorlarga ega bo'lib, $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ xos sonlari bo'lsin, u holda A operatorning $\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_n$ bazisga mos keluvchi A matritsasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$, ya'ni A matritsa diagonal matritsa bo'lar ekan.

Aksincha, biron-bir bazisda A operator matritsasi diagonal ko'rinishga ega bo'lsa, u holda bu bazis vektorlari A operatorning xos vektorlari bo'lib, matritsa diagonallaridaga sonlar uning xos sonlaridan iborat bo'ladi.

Agar A operator n ta turli xos sonlarga ega bo'lsa, u holda ularga mos keluvchi xos vektorlar chiziqli-erkli bo'lib, shu vektorlar hosil qilgan bazisda A operator matritsasi diagonal ko'rinishga ega bo'ladi.

Masalan 3. Matritsaning xos sonlari va xos vektorini toping: $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Yechish: Matritsaning xarakteristik tenglamasi $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix}=0,$

bundan $\lambda^2-7\lambda+10=0$, $\lambda_1=2$, $\lambda_2=5$. Xos vektorni topish uchun:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2=0 \\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2=0 \end{cases}$$

$\lambda_1=2$ ga mos keluvchi xos vektor $\begin{cases} x_1+2x_2=0 \\ x_1+2x_2=0 \end{cases}$ sistemaning yechimi bo‘ladi, bu bitta tenglama, $x_2 = b$ deb olsak, $x_1 = (-2b,\ b) = b(-2,\ 1)$ bo‘ladi.

$\lambda_2 = 5$ xos songa mos keluvchi xos vektor $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$ erkli o‘zgaruvchini $x_2 = c$ deb olsak. $x_2 = (c,\ c) = c(1,\ 1)$. b va c ixtiyoriy sonlar bo‘lgani uchun bitta xos songa bir nechta har xil uzunlikdagi xos vektorlar mos kelishi mumkin. Masalan bir jinsli sistemaning fundamental yechimlariga mos keluvchi xos vektorlar

$x_1=(-2,\ 1)$, $x_2=(1,\ 1)$.

Masalan 4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ matritsaning xos sonlari va xos vektorlarini toping.

Yechish: A matritsaga mos xarakteristik tenglamani yozamiz:

$|A - \lambda E| = 0$, $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$ yoki $(3-\lambda)^3 = 0$. Demak, $\lambda = 3 - A$ matritsaning uch karrali xarakteristik soni.

Xarakteristik vektorni topish uchun $(A - \lambda E)X = 0$ matritsaviy tenglamaning noldan farqli yechimlarini topamiz.

$\lambda = 3$ deb yagona $x + y = 0$ tenglamani hosil qilamiz. Uni yechib, $x = -y$, $y = a$, $z = b$ deb $x = -a$, $y = a$, $z = b$, ya’ni $\bar{X} = (-a,\ a,\ b)$ ko‘rinishdagi xos bo‘lmagan vektorni hosil qilamiz. Uni ikkita chiziqli-erkli $\vec{a}_1 = (-1;\ 1;\ 0)$ va $\vec{a}_2 = (0;\ 0;\ 1)$ vektorlar orqali ifodalash mumkin.

Kvadratik formalar

Turli amaliy masalalarni yechishda kvadratik formalar hosil bo‘lib, ularni o‘rganishga to‘g‘ri keladi.

Ta’rif. n ta o‘zgaruvchining kvadratik formasi deb

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,x_ix_j$$

tenglik orqali aniqlangan f funksiyaga aytiladi.

Bu yerda, a_{ij} lar kvadratik formaning koeffitsientlari deyiladi. Ular haqiqiy sonlar bo‘lib, $a_{ij}=a_{ji}$ shartlarni qanoatlantiradi. Shu koeffitsientlar yordamida tuzilgan $A=(a_{ij})$ $(i,j=1,2,\dots,n)$ matritsa kvadratik formaning matritsasi deyiladi, $a_{ij}=a_{ji}$ shart bajarilgani uchun bunday matritsalarni simmetrik matritsalar ko‘rinishida ifoda qilish mumkin:

$$f(X)=X'AX. \qquad (3)$$

Bu yerda, $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)'$ matritsa ustundan iboratdir.

$C=(c_{ij})(i,j=1,2,\dots,n)$ n-tartibli xos bo‘lmagan matritsa bo‘lib, $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)'$ va $Y=(y_1,y_2,\dots,y_n)'$ lar $X=CY$ tenglik orqali bog‘langan bo‘lsin. U holda (3)-tenglikdan quyidagilarni hosil qilamiz:

$$f=X'AX=(CY)'A(CY)=(Y'C')A(CY)=Y'(C'AC)Y=Y'A^*Y$$

Demak, $X=CY$ xos bo‘lmagan chiziqli almashtirishda f kvadratik formaga mos keluvchi matritsa quyidagicha bo‘lar ekan

$$A^*=C'AC$$

Agar barcha $i\neq j$ lar uchun $a_{ij}=0$ bo‘lsa, ya’ni $f=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\dots+a_{nn}x_n^2=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2$ ko‘rinishda bo‘lsa, demak kvadratik formaning matritsasi diagonal ko‘rinishda bo‘lsa u holda $f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ forma kanonik kvadratik forma deyiladi.

Quyidagi teoremalar o‘rinlidir:

Teorema. Istalgan kvadratik formani xos bo‘lmagan chiziqli almashtirish yordamida kanonik ko‘rinishga olib kelish mumkin.

Kvadratik formaning kanonik ko‘rinishi koeffitsientlari ma’nosida yagona bo‘lmaydi. Lekin quyidagi teorema o‘rinlidir:

Teorema (Kvadratik forma uchun inersiya qonuni). Kvadratik formaning barcha kanonik ko'rinishlaridagi musbat va manfiy hadlari soni bir xil bo'ladi.

Kvadratik formaga mos keluvchi matritsaning rangi shu kvadratik formaning rangi deb atalib, kvadratik formaning kanonik ko'rinishdagi noldan farqli koeffitsientlar soniga teng bo'lib, yuqoridagi teoremaga ko'ra kvadratik formaning barcha xos bo'lmagan chiziqli almashtirishlari uchun uning rangi o'zgarmas bo'ladi.

Agar barcha $(x_1,x_2,\dots,x_n)\neq(0,0,\dots,0)$ uchun $f(x_1,x_2,\dots,x_n)>0$ $(f(x_1,x_2,\dots,x_n)<0)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ kvadratik forma musbat (manfiy) aniqlangan deyiladi.

Teorema. $F=X'AX$ kvadratik forma musbat aniqlangan bo'lishi uchun A matritsaning barcha bosh minorlari musbat bo'lishi zarur va yetarlidir, ya'ni

$$\Delta_i=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1i} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2i} \\ \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2}\cdots a_{ii} \end{vmatrix}>0,\ i=1,2,\cdots,n$$

bo'lishi zarur va yetarlidir.

Kvadratik forma manfiy aniqlangan bo'lishi uchun esa $(-1)^i\Delta_i>0,\ i=1,2,\dots,n$ shartning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Masalan 1. Berilgan kvadratik formani kanonik ko'rinishga keltiruvchi ortogonal almashtirishni aniqlang: $F(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2-6x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

Yechish: Kvadratik formaga mos matritsa $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ ko'rinishda bo'ladi.

Shu matritsaning xos son va vektorlarini topamiz: $|A-\lambda E|=0$,

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 1 \\ -3 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix}=0. \quad -\lambda^3+7\lambda^2-36=0. \quad \lambda_1=-2,\quad \lambda_2=3,\quad \lambda_3=6.$$

Xos vektorlarni topamiz:

a) $\lambda_1=-2$ uchun $(A+2E)X_1=0$, $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ yoki $\begin{cases} 3x_1-3x_2+x_3=0 \\ -3x_1+3x_2-x_3=0 \\ x_1-x_2+7x_3=0 \end{cases}$

Bundan esa $\begin{cases} 3x_1-3x_2+x_3=0 \\ x_1-x_2+7x_3=0 \end{cases}$ sistemani hosil qilamiz.

Bu sistemani yechib $x_1=k$, $x_2=k$, $x_3=0$ ni hosil qilamiz.

b) $\lambda_2=3$ uchun xuddi *a* punktdagi kabi mulohazalarda $x_1=-k$, $x_2=k$, $x_3=k$ yechimlarni hosil qilamiz.

d) $\lambda_3=6$ uchun ham xuddi *a* punktdagi kabi mulohazalarda $x_1=k$, $x_2=-k$, $x_3=2k$ yechimlarni hosil qilamiz.

Agar *A* matritsali $F(x_1,x_2,\dots,x_n)$ kvadratik forma biror $X=B\overline{X}$ ortogonal almashtirish yordamida kanonik ko'rinishga keltirilgan bo'lsa, u holda $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ koeffitsientlar *B* matritsa xarakteristik tenglamasining ildizlari bo'ladi. B ortogonal matritsaning ustunlarini tashkil etuvchi $\overline{X_1},\overline{X_2},\dots,\overline{X_n}$ ustun- vektorlar $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ xos sonlarga mos shu matritsaning xos vektorlarini tashkil etadi.

Bizning misolda $X_1=\begin{pmatrix} k \\ k \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix} -k \\ k \\ k \end{pmatrix}$, $X_3=\begin{pmatrix} k \\ -k \\ 2k \end{pmatrix}$ *A* matritsaning $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=6$ xos sonlariga mos X_1, X_2, X_3 xos vektorlari ortogonal bo'lishi kerak. $t=1$ qiymatda bu vektorlarni normallab, ortogonalligini tekshiramiz. Normal vektorlar uchun $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ shart o'rinli ekanligini inobatga olib $X_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vektorni $\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ga ko'paytirib $X_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ normal vektorni hosil qilamiz.

Xuddi shu kabi $X_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $X_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$.

X_1, X_2, X_3 xos vektorlar o'zaro juft-juft ortogonal, ya'ni $X_1^T*X_2=X_1^T*X_3=X_2^T*X_3=0$ bo'lgani uchun B quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$B=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0\end{pmatrix}$$

O'zgaruvchilarning $X=B\bar{X}$ ortogonal almashtirilishida berilgan kvadratik forma quyidagi $F=3\bar{x}_1^2+6\bar{x}_2^2-2\bar{x}_3^2$ kanonik ko'rinishga keladi, bunda

$$\bar{x}_1=-\frac{x_1}{\sqrt{3}}+\frac{x_2}{\sqrt{3}}+\frac{x_3}{\sqrt{3}},\ \bar{x}_2=\frac{x_1}{\sqrt{6}}-\frac{x_2}{\sqrt{6}}+\frac{2x_3}{\sqrt{6}},\bar{x}_3=\frac{x_1}{\sqrt{2}}+\frac{x_2}{\sqrt{2}}.$$

$$x_1=-\frac{\bar{x}_1}{\sqrt{3}}+\frac{\bar{x}_2}{\sqrt{6}}+\frac{\bar{x}_3}{\sqrt{2}},\ x_2=\frac{\bar{x}_1}{\sqrt{3}}-\frac{\bar{x}_2}{\sqrt{6}}+\frac{\bar{x}_3}{\sqrt{2}},\ x_3=\frac{\bar{x}_1}{\sqrt{3}}+\frac{2\bar{x}_2}{\sqrt{6}}.$$

Iqtisodda chiziqli modellar

Matritsaning xos vektori va xos sonini topishga olib keladigan iqtisodiy jarayonning matematik modeli sifatida xalqaro savdo modelini keltirish mumkin.

$S_1,S_2,\cdots,S_n$ n ta mamlakat bo'lib, ularning milliy daromadlari mos ravishda $x_1,x_2,\ldots,x_n$ larga teng bo'lsin. $a_{ij}-S_j$ mamlakatning S_i mamlakatdan sotib olgan tovarlarga sarf qilgan milliy daromadning ulushi bo'lsin. Milliy daromad to'laligicha mamlakat ichida va boshqa mamlakatlardan tovar xaridi uchun sarf bo'ladi deb hisoblaymiz, ya'ni

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}=1,\quad j=1,2,\ldots,n$$

tenglik o'rinli bo'lishi kerak. Quyidagi matritsani qaraylik

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \multicolumn{2}{c}{--------} \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{pmatrix},$$

bu matritsa savdo-sotiqning strukturaviy matritsasi deb nomlanadi. Istalgan $S_i\,(i=\overline{1,n})$ mamlakat uchun ichki va tashqi savdodan hosil boʻlgan tushumi $P_i=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n$ tenglik orqali aniqlanadi. Mamlakat olib borayotgan savdo-sotiqning muvozanatda boʻlishi uchun har bir mamlakat savdosi kamomadsiz boʻlishi kerak, ya'ni har bir mamlakat savdosidan hosil boʻlgan tushum uning milliy daromadidan kam boʻlmasligi kerak. Ya'ni $P_i\ge x_i$, $i=\overline{1,n}$.

Agar $P_i>x_i$ deb faraz qilsak, u holda quyidagilarni hosil qilamiz:

$$Pi=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k>x_i,\quad i=\overline{1,n}.$$

Bu yerdan $\sum_{i=1}^{n}P_i>\sum_{i=1}^{n}x_i$, ya'ni $\sum_{i=1}^{n}P_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ik}\right)x_k=\sum_{k=1}^{n}x_k>\sum_{k=1}^{n}x_i$

ekanligi kelib chiqadi, bu esa qarama-qarshilikdir. Demak, $P_i\ge x_i$ tengsizlik oʻrniga $P_i=x_i$ tenglik oʻrinli boʻlishi kelib chiqadi. Iqtisodiy nuqtayi nazardan bu tushunarli holatdir, chunki mamlakatlarning barchasi bir paytda foyda koʻrolmaydi. Mamlakatlar milliy daromadi uchun $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ vektorni kiritsak u holda $P_i=x_i$, ya'ni $\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k=x_i$, $i=\overline{1,n}$ tengliklardan quyidagi tenglamani hosil qilamiz: $AX=X$, ya'ni qaralayotgan masala A matritsaning $\lambda=1$ xos soniga mos keladigan xos vektorini topish masalasiga kelar ekan.

Masalan 1. Toʻrtta mamlakat savdosining strukturaviy matritsasi

$$A=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$$

budjetlar yig'indisi $x_1+x_2+x_3+x_4=6270$ sh.p.b. (shartli pul birligi) bo'lsa, bu mamlakatlarning budjetini toping.

Yechish: Berilgan strukturaviy matritsa A ning xos soni $\lambda=1$ ga mos keluvchi xos vektor $\bar{x}$ ni topish kerak $(A-E)\bar{x}=0$, ya'ni tenglamani yechish kerak.

$$\begin{pmatrix} -0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & -0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & -0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & -0{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bu sistemaning rangi uchga teng bo'lgani uchun, noma'lumlardan bittasi erkli o'zgaruvchi va u orqali qolganlari ifodalanadi. Sistemani Gauss usuli bilan yechib xos vektor x ning komponentlarini topamiz:

$$x_1=\frac{140}{121}c,\quad x_2=\frac{146}{121}c,\quad x_3=\frac{20}{11}c,\quad x_4=c.$$

Topilgan qiymatni berilgan budjetlar yig'indisiga qo'yib c kattalikni topamiz: $c=1210$, bundan defitsitsiz savdoda mamlakatlar budjetining izlanayotgan kattaligini topamiz: $x_1=1400$, $x_2=1460$, $x_3=2200$, $x_4=1210$.

Masalan 2. X_1, X_2, X_3 davlat budjetiga ega uchta mamlakat savdosini qaraylik. Butun davlat budjeti har bir mamlakat uchun yoki mamlakat ichida tovar olish uchun yoki boshqa mamlakatdan import olish uchun sarflanadi deb hisoblaymiz. Aytaylik, birinchi mamlakat o'z budjetining yarimini mamlakat ichidagi tovarni ayirboshlashga, budjetning $\frac{1}{4}$ qismini ikkinchi mamlakatdan va qolgan $\frac{1}{4}$ qismini uchinchi mamlakatdan mahsulot olishga sarflasin. Ikkinchi mamlakat ichki tovar uchun ham, birinchi va uchinchi mamlakatdan mahsulot olish uchun ham budjetni teng miqdorda taqsimlasin. Uchinch mamlakat budjetning $\frac{1}{2}$ qismiga birinchi mamlakatdan, qolgan $\frac{1}{2}$ qismiga ikkinchi mamlakatdan tovar sotib olib, mamlakat ichida hech qanday mahsulot ayirboshlamasin. Shu xalqaro savdo modelining xos vektori X topilsin.

Yechish: Bu xalqaro savdoning strukturaviy matritsasini kiritamiz:

$$A=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} I & \quad II & \quad III \end{array}\\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}\end{array}$$

Bunda, a_{ij}–j mamlakatning i mamlakatdan sotib olgan mahsulotining davlat budjetidagi qismi. Bu matritsa har bir ustuni elementlarining yig‘indisi birga teng.

i mamlakat bir yillik savdodan so‘ng quyidagi tushumga ega bo‘ladi:

$$P_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3$$

Masalan, birinchi mamlakat uchun tushum quyidagicha bo‘ladi:

$$P_1 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{2}X_3$$

Savdoning muvozanatli (сбалансированный) bo‘lishi uchun har bir mamlakat uchun savdoning tanqissizligini talab qilish zarur: barcha i lar uchun $P_i \geq X_i$

Savdoning tanqissizligi sharti $P_i = X_i$, $i=1,\ 2,\ 3$ kabi ifodalanadi. Matritsaviy ko‘rinishda bu tenglik $AX = X$ kabi ifodalanadi.

Bu yerda, $X\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ yoki $(A-E)\cdot X = 0$.

Demak, qaralayotgan hol uchun X ni aniqlovchi tenglamalar sistemasi

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$ ko‘rinishiga ega.

Bu sistemaning umumiy yechimi: $\begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = \frac{3}{2}x_3 \end{cases}$

Shuning uchun xos vektor deb $\bar{x} = x^T = (4;\ 3;\ 2)$ vektorni olish mumkin. Xususan, bu savdoda ishtirok etayotgan mamlakat savdosini muvozanatlash uchun faqat ularning davlat budjetlari $x_1 : x_2 : x_3 = 4 : 3 : 2$ nisbatda bo'lgandagina erishish mumkinligini anglatadi.

Masalan 3. Quyidagi jadvalda shartli mahsulot uchun ikki oy davomida bo'lgan talabalar xarakteristikasi keltirilgan. Shu jadval asosida ma'lum oy uchun oldingi oyga nisbatan narx indeksi va inflyatsiya miqdorini aniqlang.

Mahsulot turi	Soni	Shu oy uchun bir birlik mahsulot narxi	Shu oy uchun xarajatlar miqdori	Oldingi oy uchun bir birlik mahsulot narxi	Oldingi oy uchun xarajatlar miqdori
Tuxum	3	4000	12000	3500	10500
Non	10	2000	20000	1800	18000
Kassetalar	2	4000	8000	4500	9000
Umumiy xarajatlar	–	–	40000	–	37500

Yechish: $\bar{q}(3;\ 10;\ 2)$ orqali iste'mol tovarlari soni vektorini, *c(4000; 2000; 4000)* shu oydagi narxlar vektorini, $\bar{c}_{ol}(3500;\ 1800;\ 4500)$–oldingi oy narxlar vektorini aniqlaymiz.

U holda narxlar indeksi quyidagi formula asosida hisoblanadi:

$$P = \frac{(\bar{c}, \bar{q})}{(\bar{c}_{ol},\ q)} \cdot 100\% = \frac{40000}{37500} \cdot 100 = 106{,}7\%$$

Inflyatsiya indeksi esa $i = P - 100\% = \frac{(\bar{c},\ \bar{q})}{(\bar{c}_{ol},\ \bar{q})} \cdot 100 - 100 = \frac{(\bar{c} - \bar{c}_{ol},\ \bar{q})}{(\bar{c}_{ol},\ \bar{q})} \cdot 100\%$

formula yordamida hisoblanadi. $i = 106{,}7\% - 100\% = 6{,}7\%$

Javob: Narxlar indeksi hisobi 106,7%, inflyatsiya indeksi ko'rsatkichi 6,7%.

5. To'plamlar. Ketma-ketliklar va funksiyalar limiti.

To'plamlar va ular ustida amallar

To'plam ta'riflanmaydigan matematik tushuncha bo'lib, buyumlar va obyektlarni birgalikda qarash natijasida vujudga keladi.

To'plamni tashkil etuvchi obyektlar shu to'plamning elementlari deyiladi.

To'plamlar odatda lotin yoki grek alifbosining bosh harflari, ularning elementlari esa shu alifboning kichik harflari bilan belgilanadi.

Agar A to'plam $a,b,c,...$ elementlardan tuzilgan bo'lsa, u $A=\{a,b,c,...\}$ ko'rinishida belgilanadi. $a\in A-$ a elementning A to'plamga tegishli ekanligini, $f\notin A-f$ elementning A to'plamga tegishli emasligini anglatadi.

Ta'rif. A to'plamning har bir elementi B to'plamda mavjud bo'lsa va, aksincha, B to'plamning har bir elementi A to'plamda mavjud bo'lsa, u holda A va B to'plamlar *o'zaro teng (bir xil) to'plamlar* deyiladi va $A=B$ kabi belgilanadi.

Ta'rif. B to'plamning har bir elementi A to'plamda mavjud bo'lsa, B to'plam A to'plamning *xos bo'lmagan qism to'plami* deyiladi va $B\subseteq A$ kabi belgilanadi.

Ta'rif. B to'plamning barcha elementlari A to'plamda mavjud bo'lib, A to'plamda B to'plamga tegishli bo'lmagan elementlar ham mavjud bo'lsa, B to'plam A to'plamning *qism toplami* deyiladi va $B\subset A$ kabi belgilanadi.

Ta'rif. Birorta ham elementga ega bo'lmagan to'plam *bo'sh to'plam* deyiladi va $\varnothing$ orqali belgilanadi.

Ta'rif. A va B to'plamlarning kamida bittasiga tegishli barcha elementlardan tuzilgan to'plam A va B *to'plamlarning birlashmasi* deyiladi va $A\cup B$ kabi belgilanadi.

Ta'rif. A va B to'plamlarning umumiy elementlardan tuzilgan to'plam A va B *to'plamlarning kesishmasi* deyiladi va $A\cap B$ kabi belgilanadi.

Ta'rif. A to'plamdan B *to'plamlarning ayirmasi* deb, A to'plamga tegishli, lekin B to'plamga tegishli bo'lmagan elementlardan tuzilgan to'plamga aytiladi va $A\backslash B$ kabi belgilanadi.

Ta'rif. A to'plamning B to'plamda hamda B to'plamning A to'plamda mavjud bo'lmagan elementlardan tuzilgan to'plamga A va B *to'plamlarning simmetrik ayirmasi* deyiladi va $A\Delta B$ kabi belgilanadi.

Ta'rif. B to'plam A to'plamlarning *qism to'plami* bo'lganda $A\backslash B$ to'plam B to'plamni A to'plamgacha *to'ldiruvchi to'plam* deyiladi va $\overline{B}$ kabi belgilanadi.

Ta'rif. Har qanday to'plamning *xos qism to'plami* deb qaralgan to'plam *universal to'plam* deyiladi va U orqali belgilanadi.

To'plam ustida amallarning xossalari

1. $A\cap B=B\cap A$,
2. $A\cup B=B\cup A$,
3. $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,
4. $A\cap A=A$, $A\cup A=A$,
5. $A\cup(A\cap B)=A$, $A\cap(A\cup B)=A$,
6. $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$,
7. $A\cup U=U$,
8. $A\cap U=A$,
9. $\overline{\overline{A}}=A$,
10. $\overline{\varnothing}=U$, $\overline{U}=\varnothing$.

Ta'rif. Elementlari n sonlardan iborat to'plam *sonli to'plam* deyiladi. Maktab matematika kursidan ma'lumki , N – natural sonlar to'plami, Z – butun sonlar to'plami, Q – ratsional sonlar to'plami , I – irratsional sonlar to'plami, R – haqiqiy sonlar to'plami, C – kompleks sonlar to'plami. Bu sonli to'plamlar uchun $R=Q\cup I$ va $N\subset Z\subset Q\subset R\subset C$.

To'g'ri chiziqda biror O nuqtani aniqlaymiz va uni sanoq boshi deb o'ng va chap tomonlariga biror birlik masshtabdagi kesmalarni qo‘yamiz. Bunday hosil qilingan sistemaga *son o‘qi* deyiladi.

O 1 x

Haqiqiy sonlar va sonlar o‘qidagi nuqtalar orasida bir qiymatli akslanish mavjud, ya’ni har bir haqiqiy songa son o‘qida ma’lum bir nuqta va har bir son o‘qidagi nuqtaga aniq bir haqiqiy son mos keladi.

X to‘plamning $a \le x \le b$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plami $[a;b]$ kesma yoki segment; $a<x<b$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plami $(a;b)$ interval; $a \le x \le b$ yoki $a<x \le b$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plami esa mos ravishda $[a;b)$ va $(a;b]$ yarim interval deb ataladi.

Elementar funksiyalar, ularning aniqlanish va o‘zgarish sohalari

X va Y haqiqay sonlar to‘plamlari bo‘lsin.

Ta’rif. Agar X to‘plamdagi har bir x songa biror f qoida yoki qonunga ko‘ra Y to‘plamdagi bitta y son mos qo‘yilgan bo‘lsa, X to‘plamda funksiya berilgan deb ataladi va $y=f(x)$ kabi belgilanadi. X to‘plam funksiyaning *aniqlanish sohasi*, Y esa *o‘zgarish sohasi* deyiladi.

Demak funksiya ikki to‘plam orasidagi moslikni ifodalaydi.

Funksiyaning berilish usullari turlicha bo‘lib, ular quyidagilardan iborat:

1. Agar y bog‘liqli o‘zgaruvchi bilan x erkli o‘zgaruvchi orasidagi bog‘lanish formula orqali ifodalansa, u holda funksiya analitik usulda, ya’ni $y=f(x)$ tenglik ko‘rinishida berilgan deyiladi.

Masalan, $f=\{(x,x^2):x\in R\}$ funksiyani $y=x^2$, ya’ni $f(x)=x^2$ formula orqali berish mumkin.

Ta'rif. Analitik usulda berilgan $y=f(x)$ funksiyaning aniqlash sohasi deb, x argumentning shunday qiymatlar to'plami $D(f)$ ga aytiladiki, bunda har bir $x\in D(f)$ uchun y ning qiymati chekli va haqiqiy son bo'lishi lozim.

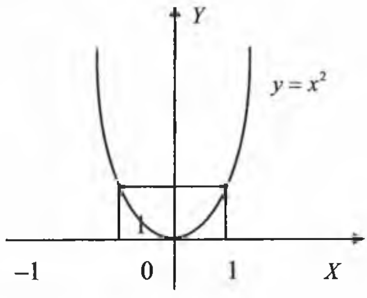
2. Funksiyaning jadval ko'rinishida berilishi.

Masalan, $f=\{(0,1);(1,3);(2;-5)\}$ funksiya berilgan bo'lsa, uni quyidagi jadval shaklida berish mumkin.

x	0	1	2
$f(x)$	1	3	–5

3. Funksiyaning grafik usulda berilishi. Bu holda $f=\{(x,f(x)):x\in D(f)\}$ to'plam tekislikdagi, dekart koordinatalar sistemasida $(x,f(x))$ nuqtalarni belgilash natijasida hosil bo'lgan to'plam shaklida beriladi. Bu to'plam *funksiya grafigi* deyiladi.

Masalan, $f(x)=x^2$ funksiyani grafik usulda bersak, u quyidagicha bo'ladi:



4. Funksiyani biror qonun yoki qoida yordamida bayon qilish bilan ifodalash. Masalan, *Dirixle funksiyasi* deb nomlanuvchi funksiya quyidagicha beriladi:

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{ agar } x \text{ ratsional son bo'lsa}\\ 0, \text{ agar } x \text{ irratsional son bo'lsa}\end{cases}$$

Ta'rif. Agar barcha $x \in D(f)$ uchun $f(-x)=f(x)$ $(f(-x)=-f(x))$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda f funksiya juft (toq) funksiya deyiladi. Masalan, $f(x)=x^2$ *juft funksiya*, $f(x)=x^3$ *toq funksiya* bo'ladi.

Funksiya toq ham, juft ham bo'lmasligi mumkin:

Masalan: $f(x)=|x|+\sin x$, $y=1+x$.

Ta'rif. Agar $\exists M>0$ bo'lsada $\forall x \in X$ uchun $|f(x)| \le M$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda f funksiya $D(f) \supset X$ to'plamda *chegaralangan funksiya* deyiladi.

Ta'rif. Agar shunday musbat T son mavjud bo'lsada, $\forall x \in D(f)$ uchun $x \pm T \in D(f)$ bo'lib, $f(x \pm T)=f(x)$ tenglik o'rinli bo'lsa, bunday funksiyaga *davriy funksiya* deyiladi. Bunday $T>0$ sonlarning eng kichigi $f(x)$ *funksiyaning davri* deyiladi.

Masalan, $f(x)=\sin x$ funksiyasi chegaralangan, davri $T=2\pi$ bo'lgan davriy funksiyadir, chunki istalgan x uchun $|\sin x| \le 1$ $(M=1)$ bo'lib, $\sin(x \pm 2\pi)=\sin x$ tenglik o'rinlidir.

Ta'rif. Agar $\forall x_1 \in X$, va $\forall x_2 \in X$ uchun, $x_1 < x_2$ tengsizlikdan $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$ tengsizlik o'rinli ekanligi kelib chiqsa, f funksiya $D(f) \supset X$ to'plamda o'suvchi (kamayuvchi) funksiya deyiladi. Agar ta'rifda $X=D(f)$ bo'lsa, funksiya o'suvchi (kamayuvchi) funksiya deyiladi. Bunday funksiyalar *monoton o'suvchi (kamayuvchi) funksiyalar* ham deyiladi.

Ta'rif. $y=f(x)$ va $y=g(x)$ funksiyalar *o'zaro teskari funksiyalar* deyiladi, agarda $D(f)=E(g)$, $E(f)=D(g)$ bo'lib, istalgan $x \in D(f)$ uchun $g(f(x))=x$ va istalgan $x \in D(g)$ uchun $f(g(x))=x$ tengliklar o'rinli bo'lsa. Masalan, $y=a^x$ va $y=\log_a x$ funksiyalar o'zaro teskari bo'ladi, chunki $a^{\log_a x}=x$ va $\log_a a^x=x$ tengliklar o'rinlidir.

O'zaro teskari funksiyalar grafiklari *OXY* tekisligida *y=x* to'g'ri chizig'iga nisbatan simmetirik joylashgan bo'ladi.

Ta'rif. Agar $y=f(x)$ va $u=g(x)$ funksiyalar uchun $E(g)\cap D(f)\neq\varnothing$ bo'lsa, u holda $y=f(g(x))$ funksiya *murakkab funksiya* deyiladi.

Elementar funksiyalarning turlari

Asosiy elementar funksiyalar deb quyidagi funksiyalar guruhiga tegishli funksiyalarga aytiladi.

1. Darajali funksiya: $f(x)=x^{\alpha},\alpha\in R\setminus\{0\}$, $D(f)=(0,+\infty)$. Agar $|\alpha|$ toq bo'lsa funksiya *toq funksiya* bo'ladi, agar $|\alpha|$ juft bo'lsa funksiya *juft funksiya* bo'ladi.

2. Butun va kasr ratsional funksiyalar:

$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ funksiyaga $\left(n\in N \ va \ a_i=const, \ i=\overline{1,n}\right)$ *butun ratsional funksiya* (polinom; ko'phad) deyiladi.

Ikkita butun ratsional funksiyaning nisbatidan tuzilgan

$$f(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m},$$

funksiyaga *kasr ratsional funksiya* deyiladi.

Masalan. $f(x)=ax^2+bx+c$ butun ratsional funksiyada, $f(x)=\frac{k}{x}$ kasr ratsional funksiyaga misol, $D(f)=(-\infty;+\infty)\cup(0,+\infty)$, $E(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

3. Ko'rsatkichli funksiya: $f(x)=a^x,\ a>0,\ a\neq 1$

$$D(f)=(-\infty,+\infty), E(f)=(0,+\infty)$$

4. Logarifmik funksiya: $f(x)=\log_a x,\ \ a>0, a\neq 1$

$$D(f)=(0,+\infty), E(f)=(-\infty,+\infty)$$

5. Trigonometrik funksiyalar: a) $f(x)=\sin x$, davriy, davri 2π ga teng $D(f)=(-\infty,+\infty)$, $E(f)=[-1;\ 1]$ toq funksiya. b) $f(x)=\cos x$, davriy, davri 2π ga teng $D(f)=(-\infty,+\infty)$, $E(f)=[-1;\ 1]$ juft funksiya. c) $f(x)=tgx$, davriy, davri π ga teng, $D(f)=\left\{x:x\in R, x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z\right\}$, $E(f)=(-\infty,+\infty)$ toq funksiya. d) $f(x)=ctgx$ davriy, davri π ga teng $D(f)=\{x: x\in R, x\neq k\pi, k\in Z\}$, $E(f)=(-\infty,+\infty)$ toq funksiya.

6. Teskari trigonometrik funksiyalar:

a) $f(x)=arcsin\,x$, $D(f)=[-1,\ 1]$, $E(f)=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ toq funksiya.

b) $f(x)=arccos\,x$, $D(f)=[-1;\ 1]$, $E(f)=[0,\pi]$

d) $f(x)=arctgx, D(x)=(-\infty,+\infty)$, $E(f)=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ toq funksiya

e) $f(x)=arcctgx, D(f)=(-\infty,+\infty)$, $E(f)=(0,\pi)$.

Ta'rif. Elementar funksiyalardan chekli sondagi algebraik amallar va chekli sondagi murakkab funksiya hosil qilish yo'li bilan qurilgan funksiyalar *elementar funksiyalar* deyiladi.

Sonli ketma-ketliklar va ularning limiti

Ta'rif. Natural sonlar to'plamida aniqlangan funksiyaga *sonlar ketma-ketligi* deyiladi, ya'ni $f: N \to R$.

Agar $x_n=f(n)$, $n\in N$ deb belgilashni kiritsak, sonlar ketma-ketligini $\{x_n\}_1^\infty$ yoki $x_1,x_2...,x_n...$ ko'rinishda ifoda etish ham qabul qilingan. Bu yerda x_n ketma-ketlikning n hadi deyiladi.

Masalan, $f(n)=\frac{1}{n}$ ketma-ketlikni $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^\infty$ yoki $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{n},....$ ko'rinishlarda ifoda etish mumkin. Bu ketma-ketlik monoton kamayuvchi *chegaralangan ketma-ketlik*dir. Chunki $n\in N, m\in N$ uchun $n<m$ bo'lsa $\frac{1}{n}>\frac{1}{m}$ bo'lib, istalgan $n\in N$ uchun $\frac{1}{n}\leq 1$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Ta'rif. Agar istalgan $\varepsilon>0$ son uchun, ε atrofdan tashqarida $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ ketma-ketlikning chekli sondagi hadi bo'lsa, u holda $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ ketma-ketlik *cheksiz kichik ketma-ketlik* deyiladi. Bu hol $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ shaklda ifodalanib,

n cheksizlikka intilganda x_n ketma-ketlikning limiti *0* ga teng yoki $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik 0 ga yaqinlashadi deb aytiladi.

Ta'rif. Agar istalgan $\varepsilon > 0$ cheksiz kichik son uchun shunday $n_0(\varepsilon)$ natural son mavjud bo'lsa, istalgan $n \geq n_0(\varepsilon)$ bo'lgan natural n son uchun $|x_n| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ deyiladi.

Masalan. 1. $x_n = \frac{1}{n}, n = 1,2,...$ ketma-ketlikni qaraylik, agar $\varepsilon > 0$ bo'lsa, $n < \frac{1}{\varepsilon}$, ya'ni $\frac{1}{n} > \varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi natural sonlar chekli bo'ladi, ya'ni $(-\varepsilon, \varepsilon)$ ε atrofdan tashqarida $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning chekli hadi yotadi.

Demak, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

2. $|q| < 1$ bo'lsin, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ ekanligini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham, agar $q = 0$ bo'lsa $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$ bo'lishi o'z-o'zidan ravshan. Agar $0 < |q| < 1$ bo'lsa, u holda $\varepsilon > 0$ son uchun quyidagini hosil qilamiz. $|q^n| = |q|^n > \varepsilon \Leftrightarrow n\, \ell n|q| > \ell n\varepsilon \Leftrightarrow n < \frac{\ell n\varepsilon}{\ell n|q|}$ (chunki, $\ell n|q| < 0$). Oxirgi tengsizlikni qanoatlantiruvchi natural son chekli bo'ladi, ya'ni $(-\varepsilon, \varepsilon)$ ε atrofdan tashqarida $\{q^n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning chekli hadi yotadi.

Demak $q(|q| < 1)$ son uchun $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ bo'lar ekan.

3. $x_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$ ketma-ketlikni qaraylik. $\alpha > 0$ ekanligidan $\varepsilon > 0$ son uchun $n^\alpha < \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n < \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ va bu tengsizlikni qanoatlantiruvchi natural sonlar chekli, ya'ni $\frac{1}{n^\alpha} > \varepsilon$ tengsizlik chekli natural son uchun o'rinli bo'lishida istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun ε atrofdan tashqarida $\left\{\frac{1}{n^\alpha}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning chekli hadi yotar ekan.

Demak, $\alpha>0$ son uchun $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=0$.

Cheksiz kichik ketma-ketliklar xossalari

1) agar $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ va $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=0$; biror $\varepsilon>0$ son berilganda, shunday $n_1(\varepsilon)$ va $n_2(\varepsilon)$ natural sonlar mavjudki, $n\geq n_1$ bo'lganda $-\frac{\varepsilon}{2}<x_n<\frac{\varepsilon}{2}$, $n\geq n_2(\varepsilon)$ bo'lganda $-\frac{\varepsilon}{2}<y_n<\frac{\varepsilon}{2}$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi, agar $n\geq n_0(\varepsilon)=\max\{n_1(\varepsilon),n_2(\varepsilon)\}$ deb olsak, u holda $-\frac{\varepsilon}{2}<x_n<\frac{\varepsilon}{2}$ va $-\frac{\varepsilon}{2}<y_n<\frac{\varepsilon}{2}$ tengsizliklar bir paytda o'rinli bo'ladi, ya'ni $n\geq n_0(\varepsilon)$ bo'lganda $-\varepsilon<x_n+y_n<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Demak, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=0$ bo'ladi.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ bo'lganda, istalgan α son uchun $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha x_n=0$; haqiqatan ham, agar $\alpha=0$ bo'lsa, $\lim\limits_{n\to\infty}0\cdot x_n=0$ ekanligi ravshan. Agar $\alpha\neq 0$ bo'lsa, u holda $\varepsilon>0$ son uchun shunday $n_0(\varepsilon)$ natural son mavjudki, $n\geq n_0(\varepsilon)$ bo'lganda $-\frac{\varepsilon}{|\alpha|}<x_n<\frac{\varepsilon}{|\alpha|}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. U holda $n\geq n_0(\varepsilon)$ bo'lganda $-\varepsilon<\alpha x_n<\varepsilon$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha x_n=0$.

3) agar $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ va $\lim y_n=0$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$; chunki $\varepsilon>0$ son uchun shunday n_1 *ва* n_2 natural sonlar mavjudki, barcha $n\geq n_1$ uchun $|x_n|<\sqrt{\varepsilon}$ va barcha $n\geq n_2$ uchun $|y_n|<\sqrt{\varepsilon}$ bo'ladi, u holda barcha $n\geq n_0=\max\{n_1,n_2\}\,lar\ uchun\,|x_ny_n|=|x_n|\cdot|y_n|<\sqrt{\varepsilon}\cdot\sqrt{\varepsilon}$, ya'ni $|x_ny_n|<\varepsilon$.
Demak, $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

4) agar $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ bo'lsa, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'ladi. Chunki $\varepsilon=1$ son uchun shunday n_0 natural son mavjudki, istalgan $n\geq n_0$ uchun $|x_n|<1$ o'rinli bo'ladi. Agar biz $K=\max\limits_{1\leq n<n_0}|x_n|$ deb olsak, istalgan

natural n son uchun $|x_n| < K+1$ tengsizlik o'rinli bo'ladi, ya'ni $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning chegaralangan ketma-ketlik ekanligi kelib chiqadi.

5) agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ chegaralangan ketma-ketlik bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$, ya'ni $\{x_n y_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik ham cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi.

Haqiqatan ham $K > 0$ son uchun, barcha natural n larda $|y_n| < K$ bo'lsin. $\varepsilon > 0$ son uchun shunday n_0 mavjudki, barcha $n \geq n_0$ lar uchun $|x_n| < \frac{\varepsilon}{K}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. U holda barcha $n \geq n_0$ uchun $|x_n y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon$.

Demak, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

6) agar barcha n larda $0 \leq x_n \leq y_n$ tengsizlik o'rinli bo'lib $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. $\lim y_n = 0$ bo'lganligi uchun, $\forall \varepsilon > 0$ son uchun $(-\varepsilon, \varepsilon)$ atrofdan tashqarida $\{x_n\}$ ketma-ketlikning ham chekli elementi yotadi, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

7) agar barcha n larda $x_n \leq z_n \leq y_n$ tengsizlik o'rinli bo'lib, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ va $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ bo'ladi. Ma'lumki, $x_n \leq z_n \leq y_n$ tengsizlikdan $0 \leq z_n - x_n \leq y_n - x_n$ tengsizlik kelib chiqadi. 1-xossaga ko'ra $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$, bundan 6-xossaga ko'ra $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n - x_n) = 0$. U holda yana 1-xossaga ko'ra $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty}[(z_n - x_n) + x_n] = \lim\limits_{n\to\infty}(z_n - x_n) + \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Ta'rif. $A \subset R$ to'plam berilgan bo'lsin. Agar shunday K son mavjud bo'lsada, istalgan $x \in A$ uchun $x \leq K (K \leq x)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda A to'plam yuqoridan (quyidan) chegaralangan to'plam deyiladi. Bunda K son A to'plamning yuqori (quyi) chegarasi deyiladi. Agar A yuqoridan ham quyidan ham chegaralangan bo'lsa, bunday to'plam chegaralangan deyladi.

Ta'rif. Agar $x<K$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $\forall x\in A$ son uchun $x<a\le K$ $(x>a\ge K)$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $a\in A$ element mavjud bo'lsa, K son A to'plamning aniq yuqori (aniq quyi) chegarasi deyiladi va $\sup A=k(\inf A=K)$ ko'rinishida yoziladi.

Teorema. Agar A to'plam yuqoridan va quyidan chegaralangan bo'lsa $\sup A\ (\inf A)$ chekli son bo'ladi.

Teorema. Agar $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik o'suvchi (kamayuvchi) bo'lib $\sup\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=0$ $\left(\inf\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=0\right)$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ bo'ladi.

Isbot. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ o'suvchi bo'lsin, ya'ni $x_1\le x_2\le x_3\le\cdots\le x_n\le x_{n+1}\le\ldots$ o'rinli bo'lib $\sup\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=0$ bo'lsin, u holda $\forall\varepsilon>0$ uchun shunday n_0 nomer mavjudki, $x_n\in(-\varepsilon,0]$ bo'ladi, u holda istalgan $n\ge n_0$ uchun $\varepsilon<x_{n_0}\le x_n\le 0$, ya'ni $n\ge n_0$ lar uchun $x_n\in(-\varepsilon,0]$ bo'lar ekan. Demak, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

Ketma-ketlik kamayuvchi bo'lgan holda ham isbot shu tarzda bajariladi.

Ta'rif. Agar istalgan $M>0$ son uchun $(-M;M)$ atrof ichida $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning chekli sondagi hadi bo'lsa, u holda bu ketma-ketlik cheksiz katta ketma-ketlik deyiladi. Bu hol $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$ shaklda ifodalanib, n cheksizlikka intilganda x_n ketma-ketlik limiti cheksizlikka teng yoki cheksizlikka intiladi deb aytiladi. Bu ta'rifda $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning biror hadidan keyingi barcha hadlari musbat bo'lsa, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$manfiy bo'lsa, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$ deb ta'riflanadi.

Masalan, $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n n=\infty,\ \lim\limits_{n\to\infty}n=+\infty$ va $\lim\limits_{n\to\infty}(-n)=-\infty$.

5-ta'rifni unga teng kuchli bo'lgan, o'zgacha ko'rinishdagi ta'rifga almashtirish ham mumkin.

Agarda istalgan $\varepsilon>0$ son uchun shunday n_0 nomer mavjud bo'lsada barcha $n\ge n_0$lar uchun $|x_n|>\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$, $\left(\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty\right)$ deyiladi. Agar istalgan $\varepsilon>0$ uchun shunday n_0 nomer mavjud bo‘lsada, barcha $n \geq n_0$ lar uchun $x_n > \varepsilon$ $(x_n < -\varepsilon)$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ deyiladi.

Teorema. Agar $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘lsa, $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik cheksiz katta ketma-ketlik bo‘ladi. Aksincha $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ cheksiz katta ketma-ketlik bo‘lsa, $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘ladi. Teoremada barcha n larda $x_n \neq 0$ deb qaraladi.

Isbot: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ bo‘lsin, u holda istalgan katta $E > 0$ son uchun shunday n_0 mavjudki, har qanday $n \geq n_0$ uchun $|x_n| < \frac{1}{E}$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi, u holda $n \geq n_0$lar uchun $\left|\frac{1}{x_n}\right| > E$ bo‘ladi, ya’ni $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \infty$.

Aksincha, agar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \infty$ bo‘lsa, u holda istalgan cheksiz kichik $\varepsilon > 0$ son uchun shunday n_0 mavjudki, har qanday $n \geq n_0$ uchun $|x_n| > \frac{1}{\varepsilon}$ bo‘ladi, u holda $n \geq n_0$lar uchun $\left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi, ya’ni $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Ta’rif. Agar $\{x_n - a\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘lsa, u holda $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik limiti a songa teng (yoki a songa yaqinlashadi) deyiladi. Bu hol $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ shaklda ifoda etiladi.

Demak, agar $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - a) = 0$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ deyiladi. Bunday ketma-ketlik *yaqinlashuvchi ketma-ketlik* deyiladi.

Masalan. $x_n = \frac{1}{2^n}$ ketma-ketlikning nechanchi hadidan boshlab qiymatlari:
a) 0.001 dan; b) avvaldan berilgan $\varepsilon > 0$ sondan kichik bo‘ladi.

Yechish: a) ketma-ketlikning *n* hadi *0.001* dan kichik bo‘lsin: $x_n < 0.001$ yoki $\frac{1}{2^n} < 0.001$. Bu tengsizlikni noma’lum *n* natural songa nisbatan yechib $2^n>1000$ yoki $n\geq 10$ ni hosil qilamiz. Demak, ketma-ketlikning 10-hadidan boshlab qiymatlari 0.001 dan kichik bo‘ladi.

b) xuddi a punktdagi mulohazalardan $x_n < \varepsilon$ yoki $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ munosabatni, bundan esa $2^n > \frac{1}{\varepsilon}$ yoki $n > \frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}$ ni va, demak, $n > \left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right]$ nomerni hosil qilamiz.

Ta'rif. Agar istalgan $M>0$ son uchun $(-M;M)$ atrof ichida $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning chekli sondagi hadi bo‘lsa, u holda bu ketma-ketlik *cheksiz katta ketma-ketlik* deyiladi.

Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar va ularning asosiy xossalari

Ta'rif. Agar $\{x_n - a\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘lsa, u holda $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik limiti a songa teng (yoki a songa yaqinlashadi) deyiladi. Bu hol $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ shaklda ifoda etiladi.

Demak, agar $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - a) = 0$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ deyiladi. Bunday ketma-ketlik *yaqinlashuvchi ketma-ketlik* deyiladi.

Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning limiti quyidagi xossalarga ega. Faraz qilaylik $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ va $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ bo‘lsin, u holda:

1. Istalgan α va β sonlar uchun $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha a + \beta b$,

chunki cheksiz kichik ketma-ketlik xossalariga ko‘ra,

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha x_n + \beta y_n - \alpha a - \beta b) = \lim_{n\to\infty}[\alpha(x_n - a) + \beta(y_n - b)] = 0.$$

2. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik chegaralangandir. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ bo‘lsin, u holda $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - a) = 0$ bo‘lgani uchun $\{x_n - a\}_{n=1}^{\infty}$ chegaralangan ketma-ketlik bo‘ladi, ya'ni shunday $K>0$ son mavjudki, barcha n lar uchun $|x_n - a| < K$, u holda

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \leq |x_n - a| + |a| < K + |a|, \quad n \in N.$$

Demak, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ chegaralangan ketma-ketlik ekan.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n x_n = a\cdot b$.

Cheksiz kichik ketma-ketlik xossalariga ko'ra

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n - ab) = \lim_{n\to\infty}[(x_n - a)y_n + a(y_n - b)] = \lim_{n\to\infty}(x_n - a)y_n + \lim_{n\to\infty} a\cdot(y_n - b) = 0\cdot b + a\cdot 0 = 0.$$

4. $y_n \neq 0, n\in N$ va $b\neq 0$ bo'lsa, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Aniqlik uchun $b > o$ bo'lsin, u holda $\varepsilon = \frac{b}{2}$ uchun shunday n_0 mavjudki barcha $n\geq n_0$ lar uchun $|y_n - b| < \frac{b}{2}$. U holda $-\frac{b}{2} < y_n - b < \frac{b}{2} \Rightarrow y_n > \frac{b}{2} > 0$ va $0 < \frac{1}{y_n} < \frac{2}{b}$, ya'ni $\frac{1}{y_n}$ ketma-ketlik chegaralangan ekan. U holda ($n\geq n_0$ deb qarash mumkin)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n\cdot b - y_n a}{y_n\cdot b} = \lim_{n\to\infty}\frac{(x_n - a)b - a(y_n - b)}{y_n\cdot b} = \lim_{n\to\infty}\left[b\cdot(x_n - a)\cdot\frac{1}{y_n\cdot b} - a(y_n - b)\cdot\frac{1}{y_n\cdot b}\right] = 0.$$

5. Biror nomerdan boshlab $x_n \leq y_n$ bo'lsa, u holda $a\leq b$. Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni $a > b$ bo'lsin, u holda $\varepsilon > 0$ sonni shunday tanlab olish mumkinki, $a - \varepsilon > b + \varepsilon$ (masalan, $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$) tengsizlik o'rinli bo'ladi, u holda shunday n_0 natural son mavjudki, barcha $n\geq n_0$ lar uchun $a - \varepsilon < x_n$ va $y_n < b + \varepsilon$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi, u holda biror $n\geq n_0$ uchun $x_n > y_n$ bo'ladi. Bu esa ziddiyatdir.

Teorema. Agar $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ o'suvchi (kamayuvchi) ketma-ketlik bo'lib, yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ yaqinlashuvchi va $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_n\{x_n\}$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\limits_n\{x_n\}\right)$ bo'ladi.

Isbot: Teorema shartiga ko'ra $\sup\{x_n\} = a$ chekli son bo'ladi, u holda $\{x_n - a\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik o'suvchi bo'lib, $\sup\{x_n - a\} = 0$ bo'ladi va 2-teoremaga ko'ra $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - a) = 0$. Demak, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ bo'ladi.

Teorema. Agar barcha natural n lar uchun $x_n \leq z_n \leq y_n$ bo'lib, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Isbot: $x_n - a \le z_n - a \le y_n - a$ tengsizlik barcha natural n lar uchun o'rinli bo'ladi, u holda 7-xossaga ko'ra $\lim_{n\to\infty}(z_n - a) = a$. Demak, $\lim_{n\to\infty} z_n = a$.

Teorema (Ichma-ich joylashgan segmentlar ketma-ketligi haqidagi teorema).

Agar har bir natural n uchun $[a_n, b_n]$ $(a_n < b_n)$ segment berilganda barcha n larda

$$[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$$

munosabat o'rinli va $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ bo'lsa, u holda $\lim_{n\to\infty} a_n$ va $\lim_{n\to\infty} b_n$ limitlar mavjud bo'lib $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$ va istalgan natural n uchun $a_n \le c \le b_n$ tengsizlik o'rinlidir.

Isbot: Teorema shartiga ko'ra $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik o'suvchi bo'lib, yuqoridan (masalan, b_1 bilan) chegaralangan, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik esa kamayuvchi bo'lib, quyidan (masalan, a_1 bilan) chegaralangan bo'ladi, u holda $\sup_n\{a_n\} = a$ *ва* $\inf_n\{b_n\} = b$ desak, 4-teoremaga asosan $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ bo'ladi. Barcha n larda $a_n \le a \le b \le b_n$ bo'lgani uchun

$o \le b - a \le b_n - a_n$, $n \in N.$

va $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. 5-teoremaga ko'ra $b - a = 0,$ ya'ni

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c,\ a_n \le c \le b_n,\ \forall n \in N.$$

Teorema isbot bo'ldi.

4-teoremaning tatbig'i sifatida quyidagi limitni ko'rsatamiz:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathring{a}.$$

Dastlab $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ketma-ketlikning o'suvchi va yuqoridan chegaralangan ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun biz quyidagi tengsizlikdan va Nyuton binoidan foydalanamiz: agar $x \ge -1$ bo'lsa, $(1+x)^n \ge 1 + nx$, $n \in N$.

Istalgan *a,b* va natural *n* uchun

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}\cdot b^k$$

tenglik o'rinlidir, bu yerda $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$, $n!=1\cdot 2\cdots n$.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left[\frac{(n+2)\cdot n}{(n+1)^2}\right]^n=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^3}\right)^n\geq\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right)=\frac{(n+2)}{n+1}\cdot\frac{(n+1)^2-n}{(n+1)^2}=$$

$$=\frac{(n+2)(n^2+2+1)}{(n+1)^3}=\frac{n^3+3n^2+3n+2}{(n+1)^3}\rangle\frac{n^3+3n^2+3n+1}{(n+1)^3}=1$$

Demak, $1<\frac{x_{n+1}}{x_n}$, ya'ni $x_n<x_{n+1}$ $n\in N:\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ o'suvchi ketma-ketlik ekan. Endi uning yuqoridan chegaralanganligini ko'rsatamiz.

Ushbu
$$C_n^k\cdot\frac{1}{n^k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k}=\frac{1}{k!}\cdot\frac{[n-(k-1)][n-(k-2)]\cdots(n-1)\cdot n}{n^k}=$$
$$=\frac{1}{k!}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{k-2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{k!}$$

tengsizlikka ko'ra

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot\frac{1}{n^k}<\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}=2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}$$

$k\geq 2$ bo'lganda, $\frac{1}{k!}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}<\frac{1}{2^{k-1}}$ va bundan quyidagini hosil qilamiz:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=2+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}=2+\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)<3$$

Demak, $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$, $n\in N$.

U holda 4-teoremaga ko'ra $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik limiti mavjud va chekli bo'ladi, uning qiymatini e orqali belgilaymiz:

$$\ell im_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

e soni irratsional son bo‘lib, u matematika va uning tatbiqlarida katta ahamiyat kasb etadi. e sonining o‘nli kasrga yoyilmasidagi dastlabki 10 ta raqam quyidagicha bo‘ladi $e = 2{,}7182818284\ldots$

Quyidagi limitni istalgan $a > o$ uchun ko‘rsataylik: $\ell im_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = \ell im_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

Dastavval, $a > 1$ deb qaraylik, u holda $a^{\frac{1}{n}} > 1$ bo‘lib, $(1+x)^n \ge 1+nx$.

Tengsizlikda $(x \ge -1)$ $1 + x = a^{\frac{1}{n}}$ deb olsak,

$$1 + n\cdot\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) \le a \Rightarrow o < a^{\frac{1}{n}} - 1 \le \frac{a-1}{n},\quad n\in N.$$

Bu yerda, $n\to\infty$ da limitga o‘tsak $\ell im_{n\to\infty}\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) = 0$

ekanligi kelib chiqadi, ya’ni $\ell im_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

Agar $o < a < 1$ bo‘lsa, u holda $\frac{1}{a} > 1$ bo‘lgani uchun $\ell im_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = \ell im_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}} = 1$.

Demak, istalgan $a > 0$ uchun $\ell im_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

Keyingi misol sifatida istalgan $a > 0$ $(a \ne 0)$ son uchun $\ell im_{n\to\infty} \ell og_a\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$ ekanligini ko‘rsatamiz. Dastavval, $a > 1$ deb qaraylik, u holda $\ell og_a x$ funksiya o‘suvchi bo‘lgani uchun, biz $t_n = \ell og_a\left(1+\frac{1}{n}\right)$ ketma-ketlikni hosil qilsak, bu ketma-ketlik kamayuvchi bo‘lib, ya’ni $t_1 > t_2 > \cdots > t_n > t_{n+1} > \cdots$, istalgan n uchun $t_n > 0$, uning chekli limiti α mavjud bo‘lib, 4-teoremaga ko‘ra

$$\ell im_{n\to\infty} t_n = \inf_n \{t_n\} = \alpha .$$

$\alpha = 0$ ekanligini ko'rsatamiz. Agar $\alpha > 0$ deb faraz qilsak, $a^{\alpha} - 1 > 0$ bo'lgani uchun, $\frac{1}{n} < a^{\alpha} - 1$ deb olsak, u holda bunday n larda

$$t_n = \ell og_a\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \ell og_a a^{\alpha} = \alpha .$$

Bu esa $\alpha = \inf_n \{t_n\}$ ekanligiga ziddir. Demak, $\alpha = 0$ ekan, ya'ni

$$\ell im_{n\to\infty} \ell og_a\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0 .$$

Agar $o < a < 1$ bo'lsa, $\frac{1}{a} > 1$ bo'lgani uchun

$$\ell im_{n\to\infty} \ell og_a\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ell im_{n\to\infty} -\left(\ell og_{\frac{1}{a}}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = 0 .$$

Xuddi shuningdek,

$$\ell im_{n\to\infty} \ell og_a\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 0$$

ekanligi ko'rsatiladi.

Masalan. Ketma-ketlikning limitini hisoblang: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 2n + 4}{4n^2 + n - 3}$

Yechish: Kasrning surat va maxrajidan n^2 ni qavsdan chiqarib, bo'linma va yig'indining limitlari qoidalaridan foydalanamiz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 2n + 4}{4n^2 + n - 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(3 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2})}{n^2(4 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2})} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(3 + 2/n + 4/n^2)}{\lim\limits_{n\to\infty}(4 + 1/n - 3/n^2)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty}(2/n) + \lim\limits_{n\to\infty}(4/n^2)}{\lim\limits_{n\to\infty} 4 + \lim\limits_{n\to\infty}(1/n) - \lim\limits_{n\to\infty}(3/n^2)} = \frac{3 + 0 + 0}{4 + 0 - 0} = \frac{3}{4}.$$

Bir o'zgaruvchili funksiya limiti

Ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biron-bir atrofida aniqlangan bo'lib (x_0 nuqtada aniqlangan bo'lishi shart emas) istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son mavjud bo'lsada, $o < |x - x_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x lar (ya'ni istalgan

$x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta))$ uchun $|f(x)-a|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda x argument x_0 ga intilganda $f(x)$ funksiyaning limiti a ga teng deyiladi, (bu hol $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ shaklda ifoda etiladi).

Ta'rif. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ bo'lgan istalgan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik uchun $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=a$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda x argument x_0 ga intilganda $f(x)$ funksiyaning limiti a ga teng deyiladi.

Yuqoridagi ta'riflar teng kuchlidir. Agar 1-ta'rifda barcha $x\in(x_0-\varepsilon,x_0)$ yoki $(x\epsilon(x_0-\varepsilon,x_0)(x\epsilon(x_0,x_0+\varepsilon))$ lar uchun $|f(x)-a|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lishi talab qilinsa, u holda a son $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi chap (o'ng) limiti deyiladi va $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=a$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=a\right)$ ko'rinishda ifoda etiladi. Chap va o'ng limitlar uchun quyidagi belgilashlar qo'llaniladi:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0), \qquad \lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)$$

Yuqoridagi ta'rifda x_0 nuqta va a sifatida $+\infty$ yoki $-\infty$ (cheksizliklarni olishimiz mumkin. Ta'riflarda mos o'zgartirishlar kiritib, quyidagi

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0\pm 0} f(x)=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0\pm 0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$ kabi limitlarni ta'riflashimiz mumkin.

Ta'rif. Agar $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ $\left(\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0\right)$ bo'lsa, u holda $x\to x_0$ $(x\to\infty)$ da $f(x)$ funksiya *cheksiz kichik miqdor* deyiladi.

Ta'rif. Agar $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty\right)$ bo'lsa, u holda $x\to x_0$ $(x\to\infty)$ da $f(x)$ funksiya *cheksiz katta miqdor* deyiladi.

Funksiya limiti, cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar quyidagi xossalarga ega:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ va $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ bo'lsa, u holda istalgan α va β sonlar uchun

$$\ell im_{x\to x_0}(\alpha f(x)+\beta g(x))=0.$$

2. Agar $\ell im_{x\to x_0} f(x)=0$ bo‘lsa, *f(x)* funksiya *x₀* nuqtaning biron $(x_0-\varepsilon,x_0)\cup(x_0,x_0+\varepsilon)$ ε atrofida chegaralangan bo‘ladi.

3. Agar *f(x)* funksiya x_0 nuqtaning biron ε atrofida chegaralangan bo‘lib, $\ell im_{x\to x_0} g(x)=0$ bo‘lsa, u holda $\ell im_{x\to x_0} f(x)\, g(x)=0$ bo‘ladi.

4. Agar $\ell im_{x\to x_0} f(x)=a$ bo‘lib, $c<a<b$ bo‘lsa, u holda x_0 nuqtaning (biron $\varepsilon>0$ son uchun) $(x_0-\varepsilon,x_0)\cup(x_0,x_0+\varepsilon)$ atrofida $c<f(x)<b$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

5. Agar $\ell im_{x\to x_0} f(x)=a\neq 0,$ $\ell im_{x\to x_0} g(x)=\infty$ bo‘lsa, u holda $\ell im_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=\infty.$

6. Agar *f(x)* funksiya x_0 nuqtaning biron atrofida chegaralanganda $\ell im_{x\to x_0} g(x)=\infty$ bo‘lsa, u holda $\ell im_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\infty$ bo‘ladi.

7. Agar $\ell im_{x\to x_0} f(x)=0$ bo‘lsa, u holda $\ell im_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=\infty$ va, aksincha, agar $\ell im_{x\to x_0} g(x)=\infty$ bo‘lsa, $\ell im_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)}=0$ bo‘ladi.

8. Agar $\ell im_{x\to x_0} f(x)=a$, $\ell im_{x\to x_0} g(x)=b$ bo‘lsa, istalgan α *va* β sonlar uchun $\ell im_{x\to x_0}(\alpha f(x)\pm\beta g(x))=\alpha\cdot a+\beta\cdot b$, $\ell im_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=a\cdot b$ bo‘ladi.

9. Agar $\ell im_{x\to x_0} f(x)=a$ va $\ell im_{x\to x_0} g(x)=b\neq 0$ bo‘lsa, $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{b}$ bo‘ladi.

10. Agar $\ell im_{x\to b} f(x)=a$ va $\ell im_{x\to x_0} g(x)=b$ bo‘lsa, u holda $f(g(x))$ murakkab funksiya uchun $\ell im_{x\to x_0} f(g(x))=a$.

11. Agar $\ell im_{x\to x_0} f(x)=a$, $\ell im_{x\to x_0} g(x)=b$ bo‘lib, x_0 nuqtaning biron atrofida (yoki $x_0=\infty$ bo‘lgan holda, $|x|$ yetarlicha katta bo‘lgan barcha x larda) $f(x)\le g(x)$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda $a\le b$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

12. Agar x_0 nuqtaning biron atrofida (yoki $x_0=\infty$ bo‘lganda, $|x|$ yetarlicha katta bo‘lgan barcha x larda) $f(x)\le\varphi(x)\le g(x)$ tengsizlik o‘rinli bo‘lib, $\ell im_{x\to x_0} f(x)=\ell im_{x\to x_0} g(x)=a$ bo‘lsa, u holda $\ell im_{x\to x_0}\varphi(x)=a$.

13. Agar x_0 nuqtaning biron atrofida (yoki $x_0 = \infty$ bo'lganda, $|x|$ yetralicha katta bo'lgan barcha x larda) $f(x) = const = a$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$.

14. Agar $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x\to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0 + 0} f(x) = a$. Aksincha, agar $\lim\limits_{x\to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0 + 0} f(x) = a$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ bo'ladi.

Aniqmaslikning turlari

Ketma-ketlik va funksiyalar limitlarini hisoblayotganda quyidagi ko'rinishdagi noaniqliklar yuzaga kelishi mumkin: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty,\ \infty-\infty, 1^{\infty},\ 0^0,\ \infty^0$.

Bu yerdagi noaniqliklarning ayrimlarini boshqasi orqali ifodalash mumkin. Limitning xossasiga ko'ra $\frac{1}{\infty} = 0,\quad \frac{1}{0} = \infty$ simvollarni kiritishimiz mumkin. Shunga ko'ra,

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0},\ 0\cdot\infty = 0\cdot\frac{1}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0},\qquad 1^{\infty} = e^{\infty\ell n1} = e^{\infty\cdot 0},$$

$$0^0 = e^{0\ell n0} = e^{\infty\cdot 0},\qquad \infty^0 = e^{0\ell n\infty} = e^{0\cdot\infty}$$

noaniqliklar tengligini yoza olamiz, shuni ta'kidlash kerakki, bu tengliklar sonlar tengligi ma'nosiga ega bo'lmay, balki bir ko'rinishdagi noaniqlikni ikkinchi xil ko'rinishdagi noaniqlikka olib kelish mumkinligini anglatadi. Shu holatni e'tiborga olib $\frac{0}{0}$ va $\infty-\infty$ ko'rinishidagi noaniqliklarga misollar keltiramiz:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x = 0.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\cdot x}{x} = a\lim\limits_{x\to 0} 1 = a.$

4. $\chi(x) = \begin{cases} 1, & agar\ x - ratsional\ son\ bo'lsa \\ 0, & agar\ x - irratsional\ son\ bo'lsa \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\chi(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\chi(x)$ – limit mavjud emas.

Bu misollar $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi noaniqliklardan iboratdir. Endi $\infty-\infty$ ko'rinishdagi noaniqliklarga misollar keltiramiz:

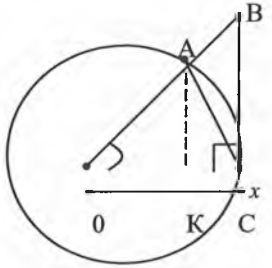
1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+a-x)=a$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\chi(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\chi(x)$ limit mavjud emas.

Endi $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$ limitni hisoblaylik. Avval $\lim\limits_{x\to0}\sin x=0$ ekanligini ko'rsatamiz. $0<x<\frac{\pi}{2}$ deb olaylik. Radiusi 1 ga teng quyidagi aylanani qaraylik, $x-<AOC$ burchakning radian o'lchovi bo'lsin,



u holda $A\breve{C}$ uzunligi x ga teng va $\sin x=\frac{AK}{OA}=AK,\ tgx=\frac{BC}{OC}=BC$.

Agar $S_{OAC}-OAC$ sektor yuzasi bo'lsa, u holda

$$S_{\Delta OAC}<S_{OAC}<S_{\Delta OBC}\Rightarrow\frac{1}{2}OC\cdot AK<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}OC\cdot BC\Rightarrow\sin x<x<tgx$$

tengsizlik kelib chiqadi.

$0<x<\frac{\pi}{2}$ bo'lganda, $o<\sin x<x$ ekanligidan $\lim\limits_{x\to+0}\sin x=0$ tenglik kelib chiqadi. $\sin(-x)=-\sin x$ bo'lgani uchun $\lim\limits_{x\to-0}\sin x=0$ bo'lar ekan.

Demak $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$, ya'ni $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sin x}{x}$ limit $\dfrac{0}{0}$ ko'rinishdagi noaniqlik ekan.

Endi $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ uchun quyidagilarni hosil qilamiz.

$$\sin x<x<tgx \Rightarrow 1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\Rightarrow 1>\frac{\sin x}{x}>\cos x \Rightarrow 0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0<1-\frac{\sin x}{x}<2\sin\frac{2x}{2}<2\sin\frac{x}{2}<2\cdot\frac{x}{2}<x$$

ya'ni $0<1-\dfrac{\sin x}{x}<x$ tengsizlik kelib chiqar ekan.

Demak, $\lim\limits_{x\to+0}\left(1-\dfrac{\sin x}{x}\right)=0$, ya'ni $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Endi $\dfrac{\sin(-x)}{-x}=\dfrac{\sin x}{x}$ bo'lgani uchun $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{\sin(-t)}{-t}=\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{\sin t}{t}=1$.

Shunday qilib, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Endi 1^{∞} ko'rinishdagi noaniqlikka doir $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ limitni hisoblaylik. Dastavval $\lim\limits_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ limitni qaraymiz. Agar x ushbu $\dfrac{1}{n+1}\le x\le\dfrac{1}{n}$ tengsizliklarni qanoatlantirsa, u holda $n\le\dfrac{1}{x}\le n+1$ va

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\le(1+x)^{\frac{1}{x}}\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\Rightarrow\frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)}\le(1+x)^{\frac{1}{x}}\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Bu tengsizlikda $x\to+0$, ya'ni $n\to+\infty$ bo'lsa, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}=e$ va $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1$ bo'lgani uchun, limitlar xossasiga asosan

$$\lim_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Endi $\lim\limits_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ limitni qaraymiz. $-x=\dfrac{t}{1+t}$ almashtirishni bajarsak, $x\to-0$ bo'lganda $t\to+0$ bo'ladi, chunki $t=-\dfrac{x}{1+x}$, u holda

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=\left(1-\frac{t}{1+t}\right)^{-\frac{1+t}{t}}=\left(\frac{1}{1+t}\right)^{-\frac{1+t}{t}}=(1+t)^{\frac{1+t}{t}}=(1+t)^{\frac{1}{t}}\cdot(1+t)$$

tenglik kelib chiqadi. Agar biz $x\to-0$ da, ya'ni $t\to+0$ da limitga o'tsak

$$\lim_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to+0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\cdot(1+t)=e$$

hosil bo'ladi. Demak, $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

Shuni ta'kidlaymizki, ushbu $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ limit birinchi ajoyib limit,

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\qquad \lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}=e$$

esa ikkinchi ajoyib limit deb nomlanadi.

Bundan tashqari quyidagi umumiy holdagi formulalarni keltirib o'tamiz:

1. $\lim\limits_{x\to a}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$, bunda $x\to a$ bo'lganda $f(x)\to\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to a}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e$, bunda $x\to a$ bo'lganda $\varphi(x)\to 0$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{mx}=e^{km}$; $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x/m]{1+kx}=\lim\limits_{x\to0}(1+kx)^{\frac{m}{x}}=e^{km}$

Masalan 1. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{x\to0}\frac{5x}{\sin x+\sin 7x}$

Yechish: $\lim\limits_{x\to0}\frac{5x}{\sin x+\sin 7x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{5x}{2\sin\frac{11x}{2}\cdot\cos\frac{3x}{2}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{5\cdot\frac{11x}{2}\cdot\frac{2}{11}}{2\sin\frac{11x}{2}\cdot\cos\frac{3x}{2}}=\frac{5}{11}$.

Masalan 2. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{mx+l}$.

Yechish: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{mx+l}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^{\frac{k}{x}(mx+l)}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^{\frac{k}{x}mx}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{l}=e^{km}\cdot1=e^{km}$.

Masalan 3. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[ax]{1+bx}$.

Yechish: $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[ax]{1+bx}=\lim\limits_{x\to0}(1+bx)^{\frac{1}{ax}}=\lim\limits_{x\to0}=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+bx)^{\frac{1}{bx}}\right]^{\frac{bx}{ax}}=e^{\frac{b}{a}}$.

Masalan 4. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{x\to0}(1-\sin^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

Yechish: $\lim\limits_{x\to0}(1-\sin^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[(1-\sin^2 x)^{-\frac{1}{\sin^2 x}}\right]^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}$.

Masalan 5. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{x\to0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$.

Yechish: $\lim\limits_{x\to0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=e\cdot\left[\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{x}{e^x}\right)^{\frac{e^x}{x}}\right]^{\frac{1}{e^x}}=e\cdot e^1=e^2$.

Masalan 6. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{4x-1}$.

Yechish: Kasrning suratini maxrajiga bo‘lib, butun qismini ajratib olamiz:

$$\frac{2x+1}{2x-3}=\frac{(2x-3)+4}{2x-3}=1+\frac{4}{2x-3}.$$

$x\to\infty$ da berilgan funksiya asosi birga intiluvchi, ko‘rsatgichi esa cheksizlikka intiluvchi darajani ifodalaydi, ya’ni 1^{∞} ko‘rinishdagi. U holda

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{4x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-3}\right)^{4x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{4}{2x-3}\right)^{\frac{2x-3}{4}}\right)^{\frac{4(4x-1)}{2x-3}}=\left(\left(1+\frac{4}{2x-3}\right)^{\frac{2x-3}{4}}\right)^{\frac{4\left(4-\frac{1}{x}\right)}{2-\frac{3}{x}}}$$

$x\to\infty$ da $\frac{4}{2x-3}\to0$ bo‘lgani sababli va $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-3}\right)^{\frac{2x-3}{4}}=e$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4\left(4-\frac{1}{x}\right)}{2-\frac{3}{x}}=8$

ekanini hisobga olib, ikkinchi ajoyib limitga ko‘ra: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{4x-1}=e^8$.

Masalan 7. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$.

Yechish: Quyidagicha almashtirish bajaramiz: *x–e=t,* bundan *x=t+e* va $x\to e$ *da* $t\to0$ ekanligini e’tiborga olib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+e)-1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\ln\frac{e+t}{e}=\lim_{t\to 0}\ln(1+\frac{t}{e})^{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to 0}\left[\ln\left(1+\frac{t}{e}\right)^{\frac{e}{t}}\right]^{\frac{1}{e}}=\ln e^{\frac{1}{e}}=\frac{1}{e}.$$

Ekvivalent cheksiz kichik funksiyalar

Agar $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ $x\to x_0$ holda cheksiz kichik funksiyalar bo'lib, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$ bo'lsa, u holda ular ekvivalent deyiladi va $x\to x_0$ da $\alpha(x)\sim\beta(x)$ kabi belgilanadi. Masalan, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, shu sababli $x\to 0$ da $\sin x\sim x$. Shunga o'xshash $x\to 0$ da quyidagi cheksiz kichik funksiyalar ekvivalentdir: $\sin x\sim \mathrm{tg}x\sim\arcsin x\sim \mathrm{arctg}x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1\sim x$, $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$, $e^x\sim 1+x$, $a^x\sim 1+x\ln a$, $(1+x)^m\sim 1+mx$, $\sqrt[m]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{m}}\sim 1+\frac{x}{m}$, $\log_a^{(1+x)}=\frac{\ln(1+x)}{\ln a}\sim\frac{x}{\ln a}$.

Masalan 1. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{x}{x-2}}$.

Yechish: $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{x}{x-2}}=\lim\limits_{x\to 2}[\ e^{\ln(3x-5)}\ ]^{\frac{x}{x-2}}$. $x\to 0$ da $\ln(1+x)\approx x$ munosabatdan foydalanamiz. U holda $\lim\limits_{x\to 2}[\ e^{\ln(3x-5)}\ ]^{\frac{x}{x-2}}=$ $\lim\limits_{x\to 2}e^{(3x-5-1)\cdot\frac{x}{x-2}}=\lim\limits_{x\to 2}e^{\frac{3x-6}{x-2}x}=\lim\limits_{x\to 2}e^{3x}=e^6$.

2. Limitni hisoblang: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\ln^2(1+2x)}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^{\mu}x}{x^2}$.

Yechish: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\ln^2(1+2x)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{\ln(1+2x)}\right)^2=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3x}{2x}\right)^2=\frac{9}{4}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^{\mu}x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-(1-0{,}5x^2)^{\mu}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-1+0{,}5\mu x^2}{x^2}=0{,}5\mu.$

Limitlar nazariyasining iqtisodiyotdagi ba'zi tatbiqlari

Ajoyib limitlardan iqtisodiyotning statistika, bank-kredit, korxona va tashkilotlarning hisoblash jarayonlarida samarali foydalaniladi. Ayniqsa bank va kredit sohalarida murakkab foizlarni hisoblashda ikkinchi ajoyib limitdan, *e* soniga keltirish orqali hisoblash keng ko'lamda amalga oshiriladi. Bunga misol qilib quyidagilarni keltiramiz.

Uzluksiz foizni hisoblash masalasini ko'rib chiqamiz.

Bankka qo'yilgan boshlang'ich summa Q_0 bo'lsin. Bank yiliga jamg'armaning $p\%$ ni to'laydi. t yildan so'ng to'lanadigan Q_t jamg'armaning qiymati topilsin. Oddiy foizlardan foydalanilganda yillik jamg'armaning miqdori $\frac{P}{100}Q_0$ qiymatga o'sadi:

$Q_1 = Q_0\left(1+\frac{P}{100}\right), Q_2 = Q_0\left(1+\frac{P}{100}\right)^2, \dots, Q_t = Q_0\left(1+\frac{P}{100}\right)^t$. Amaliyotda ko'pincha murakkab foizlardan foydalaniladi. Bunday holatda jamg'armaning yillik miqdori quyidagicha qiymatga o'sadi:

$$Q_1 = Q_0\left(1+\frac{P}{100}\right), Q_2 = Q_0\left(1+\frac{P}{100}\right)^2, \dots, Q_t = Q_0\left(1+\frac{P}{100}\right)^t.$$

Agar jamg'armaning foiz miqdorini yilda faqat bir marta emas, n marta hisoblansa, yillik $p\%$ o'sishda miqdorning $\frac{1}{n}$ qismi yilning $\frac{p}{n}\%$ ni, jamg'armaning t yildagi miqdori esa nt ni tashkil qiladi: $Q_t = Q_0\left(1+\frac{P}{100k}\right)^{nt}$.

Faraz qilamiz, foizlar har yarim yilda qo'shib hisoblansa $k=2$, har kvartalda $k=4$, har oyga $k=12$, har kuniga $k=365$, har soatiga $k=8760$ va hokazo. U holda jamg'arma miqdori t yilda

$$Q_t = \lim_{k\to\infty}\left(Q_0\left(1+\frac{P}{100k}\right)^{nt}\right) = \lim_{k\to\infty} Q_0\left(\left(1+\frac{P}{100k}\right)^{\frac{100k}{p}}\right)^{\frac{pt}{100}} = Q_0 \cdot e^{\frac{pt}{100}},$$

bu tenglik ko'rsatkichli (ekspotensial) o'sish ($p>0$ da) yoki kamayish ($p<0$ da) qonunini ifodalaydi.

Izoh: Moliya-kredit amaliyotida foizni uzluksiz hisoblashdan kamdan-kam foydalanilsa ham, u murakkab moliyaviy vazifalarning tahlilida, xususan investitsion masalalarni tanlash va asoslashda foydali hisoblanadi.

Masalan 1. Agar yiliga qo'shib hisoblashlar soni cheksiz o'zgarsa, u holda real stavka qanday o'zgaradi? (Boshqacha aytganda $k\to\infty$ da A_n nimaga intiladi?)

Yechish: Ajoyib limit formulasidan foydalanib,

$$\lim A_n = \lim A_0\left(1+\frac{R}{k}\right)^n = = \lim A_0\left[\left\{1+\frac{R}{k}\right\}^{\frac{k}{R}}\right]^{\frac{Rn}{k}} = A_0 e^{(Rn/k)} = A_0 e^{Rt}.$$

Bu yerda, t bank foizlari qo'shib hisoblangan yil miqdori. Shunday qilib, agar bank foizlari uzluksiz ravishda qo'shib hisoblansa, u holda hisobdagi summa $A = A_0 \cdot e^{Rt}$, bu yerda A_0 bohslang'ich omonat miqdori, $e = 2,718...$, R – yillik foiz stavkasi.

Masalan 2. Inflyatsiya darajasi kuniga 1% ni tashkil qilsa, yarim yildan keyin boshlang'ich summa qanchaga kamayadi.

Yechish: Murakkab protsentlar formulasidan $Q = Q_0\left(1-\frac{1}{100}\right)^{182}$, bunda Q_0 dastlabki summa miqdori, 182 yarim yildagi kunlar soni. Bu formula shaklini o'zgartirib, limitga o'tadi $Q = Q_0\left[\left(1-\frac{1}{100}\right)^{-100}\right]^{\frac{182}{100}} \approx \frac{Q_0}{e^{1,82}}$.

Demak, yarim yildan keyin dastlabki summa 6 marta kamayadi ($e^{1,82} \approx 6$).

Masalan 3. 5000 sh.p.b. yillik 4% foiz stavkasida 3 yildan so'ng qancha bo'ladi?

Yechish: $k_n = K(1+n\,i)$, bu yerda K qo'yilgan pul miqdori, n oddiy foizlardagi yil, i foiz stavkasi.

Shartga ko'ra $K = 5000, \quad n = 3, \quad i = 0,04$.

$$K_3 = 5000(1+3\cdot 0,04) = 5000\cdot 1,12 = 5600 \text{ p.b.}$$

Masalan 4. Agar ikki yil davomida yillik 6% oddiy foiz stavkasida 784000 sh.p.b miqdori jamg‘arilgani ma’lum bo‘lsa, dastlab qancha pul qo‘yilgan?

Yechish: $K_2 = 784000, \quad n = 2, \quad i = 0{,}06, \quad k = ? \quad K = \frac{784000}{1{,}12} = 700000$ p.b.

Masalan 5. $K = 2000$ sh.p.b oddiy yillik 5% dan stavkasi bilan necha yildan so‘ng 5000 sh.p.b. bo‘ladi?

Yechish: $K_n = 5000, \quad k = 2000, \quad i = 0{,}05. \quad 5000 = 2000(1 + n \cdot 0{,}05).$

$$2{,}5 = 1 + n \cdot 0{,}05, \qquad n \cdot 0{,}05 = 1{,}5, \qquad n = 30.$$

Funksiya uzluksizligi

Ta’rif. x_0 nuqtaning biron-bir atrofida aniqlangan *f(x)* funksiya uchun $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, *f(x)* unksiya x_0 nuqtada uzluksiz deb ataladi.

Agar $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$, $\left(\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)\right)$ bo‘lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada o‘ngdan (chapdan) uzluksiz deyiladi.

Funksiya limiti xossalaridan quyidagi teorema o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

Teorema. Agar $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$ bo‘lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

1-ta’rifni orttirmalar tilida ham aytish mumkin. Agar argumentning ikki x_0 va $x_0 + \Delta x$ qiymatlari qaralsa, Δx argument orttirmasi deyiladi. Bu orttirmaga mos keluvchi $y = f(x)$ funksiya orttirmasi Δy quyidagicha aniqlanadi:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Agar $\lim\limits_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Funksiya limiti xossalaridan foydalanib, uzluksiz funksiyalar uchun quyidagi teoremalarning o‘rinli ekanligini ko‘rsatish mumkin.

Teorema. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lsa, quyidagi funksiyalar ham uzluksiz bo‘ladi:

$$\alpha f(x)\pm\beta g(x),\ f(x)\cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Bu yerda, α va β istalgan sonlar bo‘lib, funksiyalar nisbati qaralayotganda $g(x_0)\neq 0$ deb faraz qilinadi.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $x=b$ nuqtada uzluksiz, $g(x)$ funksiya esa $x=x_0$ nuqtada uzluksiz bo‘lib, $g(x_0)=b$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda murakkab $f(g(x))$ funksiya $x=x_0$ nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

Ta’rif. Agar $f(x)$ funksiya biron A to‘plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo‘lsa, bu funksiya A to‘plamda uzluksiz deyiladi.

Endi uzluksiz funksiyalarga misollar keltiramiz:

1. Butun va ratsional kasr funksiyalar, o‘zlarining aniqlanish sohasida uzluksiz bo‘ladi. Haqiqatan ham, $f(x)=x$ funksiya $(-\infty,+\infty)$ oraliqda, ya’ni barcha x larda uzluksiz, u holda 1-teoremadan istalgan natural n va a sonlar uchun $f(x)=a\cdot x^n$ funksiyaning $(-\infty,+\infty)$ oraliqda uzluksizligi kelib chiqadi. Bundan x ga nisbatan ko‘phad bo‘lgan $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$

funksiya ham $(-\infty,+\infty)$ da uzluksiz bo‘lishi kelib chiqadi.

Demak, yana 2-teoremani e’tiborga olib, n va m natural sonlar uchun quyidagi

$$\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\dots+b_{m-1}x+b_m}$$

kasr-ratsional funksiya maxrajining ildizi bo‘lmagan x larda uzluksiz ekanligi kelib chiqadi.

2. Ko‘rsatkichli funksiya, ya’ni $f(x)=a^x$ funksiya $(-\infty,+\infty)$ oraliqda uzluksiz.

Dastavval $\lim\limits_{x\to 0} a^x=1$ ekanligini ko‘rsatamiz. $a>1$ bo‘lsin, agar $|x|<\frac{1}{n}$, ya’ni $-\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n}$ bo‘lsa, u holda $a^{-\frac{1}{n}}<a^x<a^{\frac{1}{n}}$ tengsizlik o‘rinli bo‘lib, $x\neq 0$

uchun $n=\left[\frac{1}{|x|}\right]$ deb olsak, ($[b]-b$ sonning butun qismi, ya'ni b sondan oshmaydigan butun sonlarning eng kattasi), $x\to 0$ da $n\to\infty$ bo'lgani uchun, funksiya limitining 12-xossasiga ko'ra $\lim\limits_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1$. Bundan $\lim\limits_{x\to 0} a^x=1$ ni hosil qilamiz. Agar $0<a<1$ bo'lsa $\frac{1}{a}>1$ va

$$\lim_{x\to 0} a^x=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}=\frac{1}{1}=1$$

ekanligi kelib chiqadi. $f(x)=a^x$ funksiyaning istalgan $x=x_0$ nuqtada uzluksizligini ko'rsatamiz: $\lim\limits_{x\to x_0} a^x=\lim\limits_{x\to x_0} a^{x_0}\cdot a^{x-x_0}=a^{x_0}\lim\limits_{x\to x_0} a^{x-x_0}=a^{x_0}$.

3. Trigonometrik funksiyalar o'z aniqlanish sohalarida uzluksiz. Avval $y=\sin x$ funksiyani qaraylik:

$$\lim_{x\to x_0}\sin x=\lim_{x\to x_0}\left[(\sin x-\sin x_0)+\sin x_0\right]=\lim_{x\to x_0}(\sin x-\sin x_0)+\sin x_0=$$

$$=\lim_{x\to x_0} 2\sin\frac{x-x_0}{2}\cdot\cos\frac{x+x_0}{2}+\sin x_0$$

$\cos x$ funksiya chegaralangan bo'lganligi uchun, funksiya limitining 3-xossasiga va $\lim\limits_{t\to 0}\sin t=0$ ekanligidan

$$\lim_{x\to x_0} 2\sin\frac{x-x_0}{2}\cdot\cos\frac{x-x_0}{2}+\sin x_0=\sin x_0.$$

Demak, $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$.

Xuddi shuningdek istalgan $x=x_0$ nuqtada $y=\cos x$ funksiyasi ham uzluksiz ekanligi isbot qilinadi. U holda 1-teoremaga ko'ra $y=\frac{\sin x}{\cos x}=tgx,\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\pi)$ va $y=\frac{\cos x}{\sin x}=ctgx,\ \ x\neq k\pi,(k\in Z)$ funksiyalar aniqlanish sohasida uzluksiz ekanligi kelib chiqadi.

4. $y=\log_a x\quad a>0,\quad a\neq 1$ logarafmik funksiyaning $(0,+\infty)$ oraliqda uzluksizligi. Avvalo $a>1$ deb, funksiya $x=1$ nuqtada uzluksiz ekanligini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham, $x=1+t$ deb olsak, quyidagi $\lim\limits_{x\to 1}\log_a x=\lim\limits_{t\to 0}\log_a(1+t)$ tenglikda $t\neq 0$, $n=\left[\frac{1}{|t|}\right]$ bo'lsa, $t\to 0$ da $n\to\infty$

bo'lgani uchun va $-\frac{1}{n} \le t \le \frac{1}{n}$ tengsizlikdan $\ell og_a\left(1-\frac{1}{n}\right) \le \ell og_a(1+t) \le \ell og_a\left(1+\frac{1}{n}\right)$ tengsizlik kelib chiqadi. Ushbu $\lim\limits_{t\to\infty} \ell og_a\left(1-\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \ell og_a\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$ tenglikdan $\lim\limits_{t\to 0} \ell og_a(1+t) = 0$, ya'ni $\lim\limits_{x\to 1} \ell og_a x = \ell og_a 1 = 0$.

Agar $0<a<1$ bo'lsa, $\frac{1}{a}>1$ va $\lim\limits_{x\to 1} \ell og_a x = \lim\limits_{x\to 1}\left(-\ell og_{\frac{1}{a}} x\right) = 0 = \ell og_{\frac{1}{a}} 1$ ekanligi kelib chiqadi.

Endi istalgan $x = x_0$ $(x_0 > 0)$ nuqtada $y = \ell og_a x$ funksiyaning uzluksizligini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham, agar $\frac{x}{x_0} = 1+t$ deb olsak, $x \to x_0$da $t \to 0$ bo'ladi. Demak,

$$\lim_{x\to x_0} \ell og_a x = \lim_{x\to x_0}\left(\ell og_a \frac{x}{x_0} + \ell og_a x_0\right) = \lim_{x\to x_0} \ell og_a \frac{x}{x_0} + \ell og_a x_0 = \lim_{t\to 0} \ell og_a(1+t) + \ell og_a x_0 = \ell og_a x_0 .$$

5. Darajali $y = x^{\alpha}$, $\alpha \ne 0$ funksiyaning uzluksizligi.

$y=^{x\alpha}$ funksiyaning $(0,+\infty)$ oraliqda uzluksiz ekanligini ko'rsatamiz.
Murakkab funksiya uzluksizligiga doir 3-teoremaga ko'ra

$$\lim_{x\to x_0} x^a = \lim_{x\to x_0} e^{a\cdot \ell n x} = e^{a\cdot \ell n x_0} = x_0^a$$

6. Teskari trigonometrik funksiyalar o'z aniqlanish sohalarida uzluksiz.

$y = \arcsin x$ funksiyani uzluksizlikka tekshiramiz, qolgan funksiyalarni tekshirish shunga o'xshash bajariladi. $y = \arcsin x$ funksiyaning aniqlanish sohasi $[-1, 1]$ oraliq bo'lib, o'zgarish sohasi $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dan iborat, $x_0 \in [-1, 1]$ bo'lsin. Biz funksiyaning x_0 da o'ngdan uzluksizligini ko'rsatamiz, chapdan uzluksizligi shunga o'xshash tarzda aniqlanadi. Demak, $x_0 < x$ bo'lib, $x \to x_0 + 0$ bo'lsin, u holda $0 < t < \frac{\pi}{2}$ uchun $\sin t < t < tgt$ tengsizlik o'rinli. Bundan va $y = \arcsin x$ funksiya $[-1, 1]$ da o'suvchi bo'lgani uchun $x_0 < x$ da quyidagini hosil qilamiz:

$$\sin(arc\sin x - arc\sin x_0) < arc\sin x - arc\sin x_0 < tg(arc\sin x - \arcsin x_0)\ .$$

Bu yerda, $\sin(arc\sin x) = x, \cos(arc\sin x) = \sqrt{1-x^2}$ ekanligidan

$x\cdot\sqrt{1-x_0^2} - \sqrt{1-x^2}\cdot x_0 < arc\sin x - arc\sin x_0 < \dfrac{x\sqrt{1-x_0^2} - \sqrt{1-x^2}\cdot x_0}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-x_0^2} + x\cdot x_0}$ tengsizlik kelib chiqadi. Bu tengsizlikda $x \to x_0 + 0$ bo'lsa,

$$\lim_{x\to x_0+0}\left(x\sqrt{1-x_0^2} - \sqrt{1-x^2}\cdot x_0\right) = 0 \quad \text{va} \quad \lim_{x\to x_0+0}\left(\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-x_0^2} + x\cdot x_0\right) = 1.$$

Limitning 12-xossasiga asosan $\lim\limits_{x\to x_0+0}(arc\sin x - arc\sin x_0) = 0$,

bu esa $y = arc\sin x$ funksiyaning x_0 nuqtada o'ngdan uzluksiz ekanligini ko'rsatadi.

Yuqoridagi 1–6-misollardan foydalanib, elementar funksiyalar o'z aniqlanish sohalarida uzluksiz degan xulosani ayta olamiz.

Funksiya uzluksizligidan foydalanib, quyidagi limitlarni hisoblashimiz mumkin:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - 1}{x}$ limitni hisoblaylik.

Bu limit $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi noaniqlikdir, agar $a^x - 1 = t$ deb olsak, $x \to 0$ da $t \to 0$ bo'ladi va $a^x = 1 + t,\ x = \log_a(1+t)$.

Demak, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\log_a(1+t)} = \dfrac{1}{\log_a e} = \dfrac{\log_a a}{\log_a e} = \ln a$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$, bu limit ham $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi noaniqlik bo'lib, agar $(1+x)^\alpha - 1 = t$ deb olsak, $x \to 0$ da $t \to 0$ bo'ladi va $(1+x)^\alpha = 1+t,\ \alpha\cdot\ln(1+x) = \ln(1+t)$.

Demak,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{t\cdot\alpha\ln(1+x)}{x\ln(1+t)} = \lim_{x\to 0}\alpha\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{t}{\ln(1+t)} =$$

$$\alpha\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)} = \alpha\cdot\ln e\cdot\frac{1}{\ln e} = \alpha$$

Natijada, $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi noaniqliklarga tegishli bo'lgan quyidagi muhim limitlarni hosil qildik:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$, xususan $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$

Uzluksiz funksiyalarning asosiy xossalari

Quyida keltiriladigan uzluksiz funksiyalarning xossalarini teorema shaklida bayon qilamiz.

Teorema (Boltsano-Koshining birinchi teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda aniqlangan va uzluksiz bo'lib, oraliq chegaralarida turli ishorali qiymatlarni qabul qilsa, ya'ni $f(a)\cdot f(b)<0$ bo'lsa, u holda (a,b) oraliqda shunday c nuqta mavjudki, bu nuqtada funksiya nolga teng, ya'ni $f(c)=0$.

Isbot: $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ funksiya qiymatini ko'raylik, agar $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$ bo'lsa, $c=\frac{a+b}{2}$ deb olish mumkin, bu holda teorema isbot qilingan bo'ladi. Aks holda $f(a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$ bo'lsa, $a_1=a,\ b_1=\frac{a+b}{2}$ deb olamiz, $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot f(b)<0$ bo'lsa, $a_1=\frac{a+b}{2},\ b_1=b$ deb olamiz. Keyingi qadamda, yuqoridagi mulohazani $[a_1,b_1]$ oraliq uchun bajaramiz. Bu jarayon biron chekli qadamdan keyin, masalan n qadamdan keyin to'xtasa, u holda $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)=0$ bo'lib, $c=\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)$ bo'ladi va bu holda teorema isbot qilingan deyish mumkin, aks holda, ya'ni bu jarayon cheksiz davom etsa, u holda ichma-ich joylashgan $[a_n,b_n]$ ketma-ketliklar hosil bo'lib, keyingi qadamda hosil bo'ladigan har bir oraliq uzunligi avvalgisining yarmisiga teng bo‘lgani uchun $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, ya’ni $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ ekan. U holda 6-teoremaga ko‘ra $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$ bo‘lib, barcha n larda $a_n < c < b_n$, ya’ni $a < c < b$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Endi $f(c) = 0$ ekanligini ko‘rsatamiz. Funksiya uzluksiz bo‘lganligi uchun

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \Rightarrow f^2(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)\cdot f(b_n).$$

Endi $[a_n, b_n]$ oraliqlarning qurilishiga ko‘ra $f(a_n)\cdot f(b_n) < 0$ edi, u holda

$$f^2(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)\, f(b_n) \le 0.$$

Demak, $f(c) = 0$.

Teorema (Boltsano-Koshining ikkinchi teoremasi). *f(x)* funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo‘lib, oraliq chegarasida turli qiymatlarni qabul qilsa, ya’ni $f(a) = A$, $f(b) = B$ bo‘lib, $A \ne B$ bo‘lsa, u holda A va B sonlari orasida yotuvchi istalgan C son uchun (a,b) intervalda shunday c nuqta mavjudki, bu nuqta uchun $f(c) = C$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot: Demak, $C \ne A$, $C \ne B$ bo‘lib, C son A va B sonlar orasida yotgani uchun $(A-C)\cdot(B-C) < 0$ bo‘ladi. Agar $g(x) = f(x) - C$ yangi funksiya kiritsak, bu funksiya $[a,b]$ da uzluksiz bo‘lib, $g(a)\cdot g(b) = (f(a)-C)\cdot(f(b)-C) = (A-C)(B-C) < 0$
bo‘lganidan *g(x)* funksiya uchun Boltsano-Koshining birinchi teorema shartlari bajariladi. Demak, *(a,b)* intervalda shunday *c* nuqta mavjudki, uning uchun *g(c)=0*, ya’ni *g(c)=f(c)–C=0*.

Demak, $f(c) = C$. Teorema isbot bo‘ldi.

Bu teoremadan quyidagi xulosani olamiz. Agar *f(x)* funksiya uchun $[a,b] \subset D(f)$ bo‘lib, funksiya $[a,b]$ da uzluksiz bo‘lsa, u holda

$$A = \min\{f(a), f(b)\} \quad va \quad B = \max\{f(a), f(b)\}$$

uchun $[A,B] \subset E(f)$ bo‘lar ekan.

Yuqorida keltirilgan teoremalarga taalluqli misollarni keltiramiz:

1. $f(x)=x^2$ funksiya uchun [1, 2] oraliqda 4-teorema o‘rinli emas, chunki $f(1)\cdot f(2)=4>0$.

2. $f(x)=\frac{1}{x}$ funksiya uchun $[-1,1]$orliqda 4-teorema o‘rinli emas, sababi, $f(x)$ funksiya $x=0$ nuqtada aniqlanmagan.

3. $f(x)=\begin{cases}-1, & agar\ \ x\langle 0\ bo‘lsa\\ 0, & agar\ \ x\geq 0\ bo‘lsa\end{cases}$

funksiya uchun $[-2,2]$ oraliqda 4 va 5-teoremalar o‘rinli emas, chunki $f(x)$ funksiya bu oraliqda uzluksiz emas, $x=0$ nuqta uzilish nuqta: $f(-0)=-1,\quad f(+0)=1$, ya’ni $f(-0)\neq f(+0)$.

Teorema (Veyershtrassning birinchi teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo‘lsa, $f(x)$ funksiya bu oraliqda chegaralangan bo‘ladi, ya’ni shunday m va M sonlari mavjud bo‘ladiki, istalgan $x\in[a,b]$ uchun $m\leq f(x)\leq M$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. Teoremani isbot qilish uchun, teskarisini faraz qilish usulini qo‘llaymiz. Ya’ni $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda chegaralangan bo‘lmasin. $\frac{a+b}{2}$ nuqta bilan $[a,b]$ oraliqni teng ikkiga bo‘lamiz, hosil bo‘lgan ikki oraliqdan birida $f(x)$ funksiya chegaralangan bo‘lmaydi, chunki aks holda, ya’ni ikkala oraliqda ham funksiya chegaralangan bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda ham chegaralangan bo‘lar edi. Demak, $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ yoki $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ oraliqda $f(x)$ funksiya chegaralangan bo‘lmaydi, agar ikkalasida ham chegaralangan bo‘lmasa, ulardan chapdagisini olamiz. Hosil bo‘lgan kichik oraliqni qaytadan $[a_1,b_1]$ deb belgilaymiz. Keyingi qadamda, yuqoridagi mulohazani $[a_1,b_1]$ oraliq uchun bajarib, $[a_2,b_2]$ oraliqni hosil qilamiz. Bu jarayon cheksiz marta davom etadi, chunki aks holda funksiya $[a_n,b_n]$ ko‘rinishdagi oraliqda bir paytda ham chegaralangan, ham chegaralanmagan bo‘lib qoladi. Demak, har bir natural n uchun $[a_n,b_n]$ oraliq hosil bo‘lib, bu oraliqda $f(x)$ funksiya chegaralangan bo‘lmadi. Bu oraliqlar ichma-ich joylashgan bo‘lib,

$b_n - a_n = \frac{a-b}{2^n}$ u holda 6-teoremaga ko‘ra $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$ va $c \in (a,b)$. *f(x)* funksiya uzluksizligidan $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c)$ tenglikni hosil qilamiz. Agar *A* va *B* sonlar $A < f(c) < B$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qilib olingan bo‘lsa, funksiya limitining 4-xossasiga ko‘ra shunday $\varepsilon > 0$ son mavjud bo‘ladiki, istalgan $x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ uchun $A < f(x) < B$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. U holda shunday natural *n* mavjudki, uning uchun $c - \varepsilon < a_n < c < b_n < c + \varepsilon$ tengsizlik bajariladi.

Demak, istalgan $x \in [a_n, b_n]$ uchun $A < f(x) < B$ tengsizlik o‘rinli bo‘lar ekan. Ammo farazga ko‘ra *f(x)* funksiya $[a_n, b_n]$ oraliqda chegaralangan emas edi. Bu qarama-qarshilik teoremani isbot qiladi.

Teorema (Veyershtarssning ikkinchi teoremasi). Agar *f(x)* funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo‘lsa, bu oraliqda *f(x)* funksiya o‘zining yuqori aniq $\sup\{f(x): x \in [a,b]\}$ va quyi aniq $\inf\{f(x): x \in [a,b]\}$ chegaralariga erishadi, ya’ni $[a,b]$ oraliqda shunday x_0 va x_1 nuqtalar mavjudki, $f(x_0) = \sup\{f(x)\}$ va $f(x_1) = \inf\{f(x)\}$.

Isbot: Teoremani yuqori aniq chegara uchun isbotlaymiz. Teskarisini faraz qilaylik. Agar $\sup\{f(x)\} = M$ desak, 6-teoremaga ko‘ra M chekli son bo‘ladi. Farazga ko‘ra istalgan $x \in [a,b]$ uchun $f(x) < M$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsin, u holda $\forall x \in [a,в]$ uchun $M - f(x) > 0$.

Bundan esa $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ funksiyaning $[a,b]$ oraliqda uzluksiz ekanligi kelib chiqadi. Veyershtrassning birinchi teoremasiga ko‘ra $g(x)$ funksiya chegaralangan bo‘ladi, ya’ni shunday $\delta > 0$ son mavjudki, istalgan $x \in [a,b]$ uchun $g(x) < \delta$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Demak, istalgan $x \in [a,b]$ uchun $\frac{1}{M - f(x)} < \delta$, ya’ni $\frac{1}{\delta} < M - f(x)$ yoki $f(x) < M - \frac{1}{\delta}$.

Bu holda $\sup\{f(x)\} \le M - \frac{1}{\delta}$ tengsizlik o‘rinli bo‘lib, bu esa $\sup\{f(x)\} = M$ ekanligiga ziddir. Bu ziddiyat qilingan farazning noto‘g‘ri ekanligini ko‘rsatadi. Teorema isbot bo‘ldi.

Izoh: x_0 va x_1 nuqtalarda $f(x_0)=\sup\{f(x)\}$ va $f(x_1)=\inf\{f(x)\}$ tengliklarning o'rinli ekanligi *f(x)* uzluksiz funksiya uchun $[a,b]$ oraliqda uning eng katta va eng kichik qiymatlari mavjud ekanligi va quyidagi tengliklar o'rinli ekanligini bildiradi: $f(x_0)=\max\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$ va $f(x_1)=\min\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$.

Funksiyaning uzilishi va uning turlari

f(x) funksiya uchun uzluksizlik shartlaridan aqalli bittasi bajarilmasa, bu funksiya x nuqtada uzilishga ega deyiladi.

Agar $f(x)$ funksiya berilgan x_0 nuqtada uzluksiz bo'lmasa, u holda $f(x)$ funksiya berilgan x_0 nuqtada uzilishga ega deyiladi.

Uzilishning quyidagi turlari mavjud:

I tur uzilish – funksiyaning chap va o'ng chekli limitlari mavjud, lekin ular teng emas.

II tur uzilish – bir tomonlama chap va o'ng limitlardan biri cheksiz yoki mavjud emas.

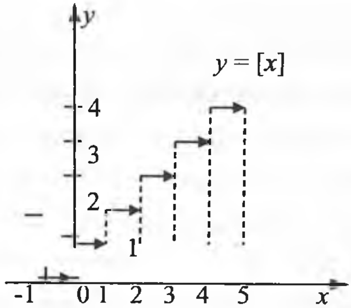
I tur uzilishga bartaraf qilinadigan uzilish deyiladi, bunda $x\to x_0$ da funksiyaning limiti mavjud, lekin funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatiga teng emas.

$f(x)=[x]$ (o'qilishi *«ant'e iks»*), bu yerda $[x]$ – x sonining butun qismi, ya'ni x dan katta bo'lmagan eng katta butun son. Masalan, *[2.6] = 2, [–2.6] = –3.*

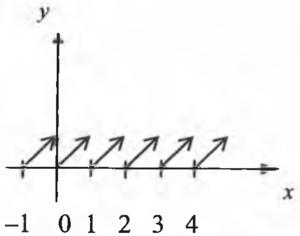
$x=\frac{3}{2}$ nuqtada $f(x)=[x]$ funksiya uzluksiz, ya'ni $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} f(x)=f\left(\frac{3}{2}\right)=1$,

$x=1$ nuqtada esa funksiya aniqlangan $f(1)=1$, lekin I tur uzilishga ega, chunki chap va o'ng chekli limitlar mavjud, lekin ular teng emas: $\lim\limits_{x\to1-0} f(x)=0$ va $\lim\limits_{x\to1+0} f(x)=1$).

1. $f(x)=[x]$ barcha haqiqiy sonlar to'plamida aniqlangani bilan, elementar funksiya emas, chunki barcha butun sonlarda uzulishga ega:

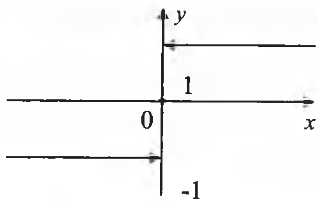


2. $y=\{x\}=x-[x], -x$ sonining butun qismi.

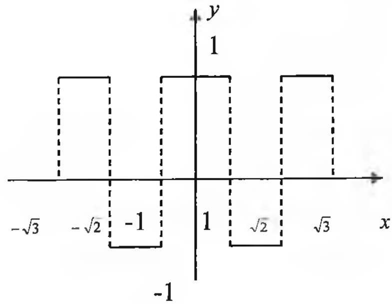


3. $y = signx = \begin{cases} 1, & agar \ \ x>0 \ \ bo'lsa \\ 0, & agar \ \ x=0 \ \ bo'lsa \\ -1, & agar \ \ x<0 \ \ bo'lsa \end{cases}$

(«*Signum*» lotincha so‘z bo‘lib, ishora degan ma’noni anglatadi.)



4. $y=(-1)^{[x^2]}$



5. Dirixle funksiyasi

$$y=\begin{cases}0, & agar \quad x-irratsional \quad bo'lsa\\ 1, & agar \quad x-ratsional \quad bo'lsa\end{cases}$$

Dirixle funksiyasini chizma shaklda tasvirlab bo'lmaydi.

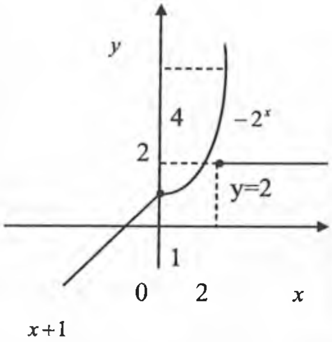
Masalan 1. Berilgan funksiyani uzilish nuqtalarini toping va grafigini chizing:

$$f(x)=\begin{cases}2 & agar \ x\geq 2\\ 2^x & agar \ 0\leq x<2\\ x+1 & agar \ x<0\end{cases}$$

Yechish: Bu funksiya *x=0* va *x=2* nuqtalarda uzilishga ega bo'lishi mumkin. Shuning uchun shu nuqtalardagi bir tomonli limitlarni hisoblaymiz.

$f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0-0}(x+1)=1$, $f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0+0}2^x=1$. Demak, *x=0* nuqtada funksiya uzluksiz.

$f(2-0)=\lim\limits_{x\to 2-0}2^x=4$, $f(2+0)=\lim\limits_{x\to 2+0}2=2$. Demak, *x=2* nuqtada funksiyai II tur uzlilishga ega.



2. Uzluksiz foizlar formulasi. Yilning boshida ixtiyorimizda muddatida A_0 sh.p.b. miqdorda summa mavjud bo'lsin. Qanday qilib yilning oxirigacha shu miqdordagi puldan maksimal foyda olish masalasi qiziqarlidir. Mavjud bo'lgan usullardan biri – bank xizmatidan foydalanishdir. Faraz qilaylik bank 100% yillik ustama bersin: bu bir yillik saqlashda jamg'arma 100% ga ortishini, boshqa qisqa muddatlarda esa jamg'arma shu muddatga mos proporsional (masalan, bir oyda jamg'arma $\frac{100}{12}$% ga) o'sishini anglatadi.

Demak, bir yildan so'ng jamg'arma $A_0+A_0=2A_0$ miqdorga, ya'ni ikki marta ko'payadi. Bundan ham yuqoriroq samaraga erishish uchun 0.5 yildan so'ng jamg'arma hisobini yopib va shu ondayoq qolgan yarim yil uchun uni yana qayta ochirilsa, bu holda yilning birinchi yarimi oxirida jamg'arma miqdori $A_0+\frac{1}{2}A_0=A_0\left(1+\frac{1}{2}\right)$, yilning oxirida esa $A_0\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=2.25\,A_0$ miqdorda bo'ladi. Agar hisob raqami yopish va ochish amalini yil davomida qancha marotaba ko'p bajarilsa, u holda shuncha marta ko'p samara olish mumkin: masalan, bu amalni har oyning oxirida bajarilsa, yilning oxirida jamg'arma $A_0\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}\approx 2.613\,A_0$, agar hisob har kuni yopib-ochilsa, yilning oxirida jamg'arma $A_0\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365}\approx 2.715\,A_0$ bo'ladi.

Agar ochish-yopish amali uzluksiz bajarilsa (albatta natija nazariy hisoblanadi) u holda yilning oxirida jamg'arma $A_0\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = A_0\cdot e \approx 2.718...A_0$ miqdorda bo'ladi. Shunday qilib, 100% nominal miqdorda samarali miqdor 171...% ni tashkil etishi mumkin.

Xuddi shu mulohazalarni bankning nominal foiz miqdori *p%* bo'lganda ham aynan takrorlash mumkin. Bunda (nazariy) jamg'armaning mumkin bo'lgan miqdori:

$$A_0\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{100n}\right)^n = A_0\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{\frac{100n}{p}}\right]^{\frac{p}{100}} = A_0\, e^{\frac{p}{100}}$$

Umumiyroq holda A_0 summa bankka *p%* yillik stavkada bir yil emas, biror *t* yil uchun saqlansin. Vaqt [0,t] oralig'ini *n* ta bo'laklarga bo'lib, va *n* ni cheksizlikka intiltirib, mumkin bo'lgan nazariy summani olamiz:

$$A_0\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{100n}t\right)^n = A_0\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{\frac{100n}{pt}}\right]^{\frac{pt}{100}} = A_0\, e^{\frac{pt}{100}}$$

$A = A_0 e^{\frac{p}{100}t}$ *uzluksiz foizlar formulasi* deyiladi.

Masalan, $p = 100\%$ yillik stavkada ikkinchi yilning *(t=2)* oxirida $A_0e^2 \approx 7.414...A_0$, ya'ni boshlang'ich jamg'arma etti martadan ko'proq ortadi.

Uzluksizlikning iqtisodiyotda qo'llanilishi.

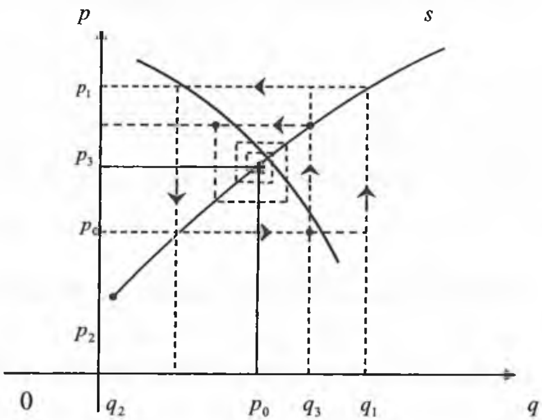
Bozorning to'r (o'rgimchak ini) modeli

Funksiyaning uzluksiz xossalaridan biri (ildiz haqidagi teorema) bozorning matematik modelida o'zining ajoyib tatbig'iga egadir. Ma'lumki, talab va taklif – bu bozorning asosiy munosabatlar kategoriyasidir. Ular juda ko'p faktorlarga bog'liq bo'lib, mahsulot narxi

– bu faktorlarning asosiysidir. p orqali mahsulot narxini, d orqali talab hajmini, s orqali taklif miqdorini belgilaymiz (ular ingliz so'zlarining birinchi harflari: *price* – narx, *demond* – talab, *supply* – taklif). Yetarli kichik p larda $d(p)-s(p)>0$ (talab taklifdan ustun), katta p larda teskarisi $d(p)-s(p)<0$. $d(p)$ va $s(p)$ funksiyalar deb hisoblab, ular uchun shunday p_0 narx mavjudki, bunda $d(p_0)=s(p_0)$ bo'ladi, ya'ni talab taklifga teng degan xulosaga kelamiz. p_0 narx muvozanat narx, shu narxdagi talab va taklif muvozanatli deyiladi. Bozorning asosiy masalalaridan biri – bu muvozanat narxni o'rnatishdir. Muvozanat narxni topish uchun o'rgimchak ini modeli deb ataluvchi sodda modelni ko'rib chiqamiz. U ma'lum mahsulot uchun sotuv hajmi va narxining regulyar takrorlashuvchi siklik o'zgarishi fenomenini tushuntirib beradi.

Faraz qilaylik, mahsulot ishlab chiqarish hajmi haqidagi qaror oldingi davrdagi mahsulot narxiga bog'liq holda qabul qilinsin.

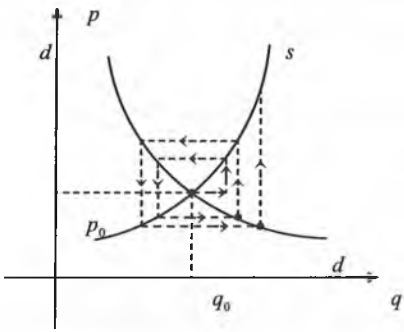
Quyidagi funksiyadagi holatni tahlil qilamiz:



Dastlabki nuqtada mahsulotning taklif hajmi q_1 bo'lib, u mahsulotning oldingi davrdagi p_1 narxiga bog'liq holda tanlangan. Bu narx muvozanat narxidan yuqoriligi sababli *dd* talab chizig'i bo'yicha unga bo'lgan xarid hajmi q_2.

Bozor holati haqidagi ma'lumotdan foydalanib ishlab chiqaruvchi mahsulot narxini p_2 miqdorgacha tushurishga majbur bo'ladi. p_2 muvozanat narxdan past bo'lgani uchun mahsulotga bo'lgan talab q_3 miqdorgacha ortadi. *ss* taklif chizig'i bo'yicha bu miqdorga p_3 taklif narxi mos keladi va h.k. Bu holda spiral (q_0, p_0) bozorning muvozanat nuqtasiga yaqinlashadi.

Ba'zi hollarda bu spiral «yig'ilmasdan» «ochilishi» ham mumkin.



Tahlil etilgan «spiral»ning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchanligi *d(p)* va *s(p)* funksiyalarning qanday xossalariga bog'liqligini oldindan aytish, umuman qiyin masala hisoblanadi. Yaqinlashishga ta'sir etuvchi faqat bir omilni ko'rsatish bilan chegaralanamiz.

6. Funksiya hosilasi va differensiali.

Hosila tushunchasi

Biz $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligini

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \qquad (1)$$

tenglik bajarilishi orqali ta'riflagan edik. Agar $x-x_0=\Delta x$ argument orttirmasi deb nomlanuvchi kattalikni kiritsak, $x\to x_0$ da tabiiy $\Delta x\to 0$. (1)-limitda yangi o'zgaruvchiga $x=x_0+\Delta x$ o'tsak, uni quydagicha yozish mumkin:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)=f(x_0) \qquad (2)$$

Agar funksiya orttirmasi deb nomlanuvchi $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta y$ miqdorni kiritsak, (2)-tenglamadan

$$\lim_{x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$$

tenglikni hosil qilamiz. Demak, $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, argument orttirmasi Δx nolga intilganda, ya'ni Δx cheksiz kichik miqdor bo'lganda, unga mos keluvchi funksiya orttirmasi $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ ham nolga intilishi, ya'ni cheksiz kichik miqdor bo'lishi kelib chiqadi. Shuni e'tiborga olsak, x_0 nuqtada uzluksiz bo'lgan $y=f(x)$ funksiya uchun, ushbu

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (3)$$

limit $\frac{0}{0}$ ko'rinishidagi noaniqlik bo'lishligi kelib chiqar ekan. Avval ko'rganimizdek bunday noaniqliklar qaralayotgan funksiyaga bog'liq bo'lib, (3)-limit qiymati chekli, cheksiz yoki mavjud bo'lmasligi mumkin. Umuman aytganda (3)-ko'rinishdagi limitni x_0 nuqta atrofida berilgan istalgan funksiya uchun qarashimiz mumkin. Shuni ta'kidlash lozimki, agar (3)-limit qaralayotgan $y=f(x)$ funksiya uchun chekli bo'lsa, u holda bu funksiya $x=x_0$ nuqtada uzluksiz bo'lishligi kelib chiqadi. Haqiqatan ham, agar

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=a$$

bo'lib, a chekli son bo'lsa, funksiya limiti ta'rifiga ko'ra $\varepsilon>0$ son uchun, shunday $\delta>0$ son mavjud bo'ladiki $0<|\Delta x|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha Δx lar uchun $a-\varepsilon<\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}<a+\varepsilon$,

ya'ni qaralayotgan Δx lar uchun, $\Delta x>0$ bo'lganda

$$(a-\varepsilon)\cdot\Delta x<f(x_0+\Delta x)-f(x_0)<(a+\varepsilon)\cdot\Delta x \qquad (4)$$

yoki $\Delta x<0$ bo'lganda

$$(a+\varepsilon)\cdot\Delta x<f(x_0+\Delta x)-f(x_0)<(a-\varepsilon)\cdot\Delta x \qquad (5)$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi. U holda (4)-tengsizlikdan $f(x_0+0)=f(x_0)$ va (5)-tengsizlikdan $f(x_0-0)=f(x_0)$ ekanligini hosil qilamiz. Bundan,

$$\lim_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=f(x_0),$$

ya'ni $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada uzluksiz ekanligi kelib chiqadi.

Ta'rif. Agar ushbu limit qiymati $\lim\limits_{\Delta x\to}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ chekli bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada hosilaga ega deyiladi.

Limit qiymati $y=f(x)$ funksiyaning $x=x_0$ nuqtadagi hosilasi deyiladi va quyidagicha belgilanishi mumkin:

$$y'(x_0),\ f'(x_0),\ \frac{dy(x_0)}{dx},\ \frac{df(x_0)}{dx},\ y'_x(x_0).$$

Demak, $f'(x_0)$ deb quyidagini

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

tushunar ekanmiz. Hosila ta'rifidan, agar $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, bu funksiya $x=x_0$ nuqtada uzluksiz ekanligi kelib chiqar ekan. Teskari tasdiq noto'g'ri ekanligini, ushbu uzluksiz $f(x)=|x|$ funksiyaning $x=0$ nuqtada hosilasi mavjud emasligi isbot qiladi. Haqiqatan ham, quyidagi tengliklar

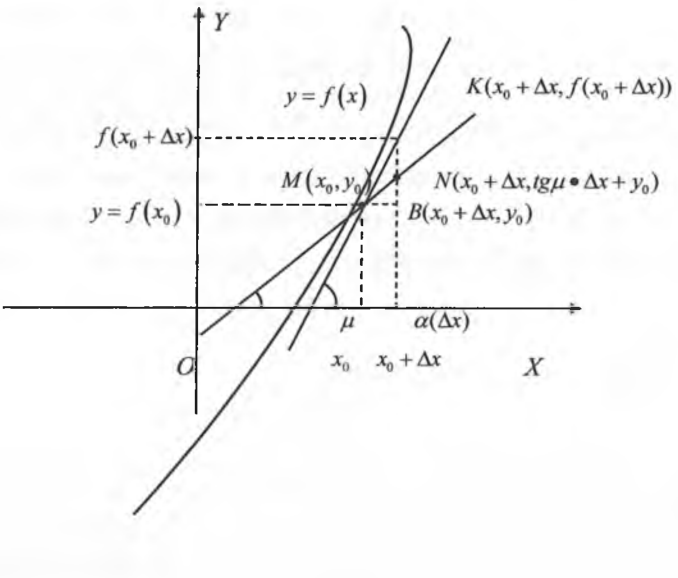
$$\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$ limitning mavjud emasligini ko‘rsatadi, ya’ni $f(x)=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada hosilaga ega emas, ammo $f(x)=|x|$ uzluksiz funksiya.

Endi, funksiya hosilasi qanday ma’no kasb etishini ko‘rib chiqaylik.

Hosilaning geometrik ma’nosi. Tekislikda berilgan $y=f(x)$ funksiya grafigining $M(x_0,y_0)$, (bu yerda $y_0=f(x_0)$) nuqtasiga o‘tkazilgan urinmani qaraymiz. Bu urinmani hosil qilish uchun quyidagi chizmada, avval *MK* kesuvchi to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz. So‘ngra Δx orttirmani nolga intiltirsak, grafikdagi K nuqta, M nuqtaga yaqinlasha borib,



MK to‘g‘ri chiziq *MN* urinma holatini egallaydi. U $\Delta x\to 0$ da *MK* to‘g‘ri chiziq *OX* o‘qining musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan $\alpha(\Delta x)$ burchagi, *MN* urinma hosil qilgan φ burchakka intiladi. Bu yerda, *MN* to‘g‘ri chiziq tenglamasi $y-y_0=tg\varphi\cdot(x-x_0)$ ko‘rinishda bo‘lib, $x-x_0=\Delta x$

va $tg\varphi = k - MN$ to‘g‘ri chiziq *OX* o‘qining musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchak koeffitsienti ekanligini e’tiborga olsak, *MN* to‘g‘ri chiziq tenglamasi $y = k \cdot \Delta x + y_0$ ko‘rinishda bo‘ladi. 1- chizmada *MKB* uchburchak uchun $MB = \Delta x,\ KB = \Delta y$ va $tg\alpha(\Delta x) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Demak, $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\alpha(\Delta x) = tg\varphi = k$,

ya’ni $f'(x_0) = k$ tenglikni hosil qilamiz. Shunday qilib, $y = f(x)$ funksiyaning $x = x_0$ nuqtadagi $f'(x_0)$ hosilasi shu funksiya grafigining $M(x_0, y_0)$ nuqtasiga o‘tkazilgan MN urinmaning burchak koeffitsientiga teng bo‘lar ekan. MN urinmaning $y = k \cdot \Delta x + y_0$ tenglamasida $\Delta x = x - x_0,\ y_0 = f(x_0)\ va\ k = f'(x_0)$. U holda $y = f(x)$ funksiya grafigining $M(x_0, y_0)$ nuqtasida o‘tkazilgan urinma tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘lar ekan: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

2. *Hosilaning mexanik ma’nosi.* $S = s(t)$ funksiya harakat qilayotgan jismning *t* vaqt davomida bosib o‘tgan yo‘lini bildirsa, shu jismning $t = t_0$ vaqtdagi oniy tezligi $\vartheta(t_0)$ ni topish masalasini qaraymiz. Buning uchun *t* vaqtga Δt orttirma beraylik, u holda mana shu vaqt davomida jism ma’lum bir masofa $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$ni bosib o‘tadi, u holda jismning Δt vaqt davomidagi o‘rtacha tezligini $\vartheta_{o'r} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ tenglik orqali topish mumkin. Tabiiyki o‘rtacha tezlik, $t = t_0$ vaqtdagi oniy tezlik $\vartheta(t_0)$ga qandaydir xatolik bilan teng bo‘ladi. Biz $|\Delta t|$ vaqt kattalikni qanchalik kichik qilib olsak, $\vartheta_{o'rta}$ o‘rtacha tezlik $\vartheta(t_0)$ oniy tezlikka shunchalik yaqin bo‘lib, xatolik kam bo‘ladi. Shuning uchun,

$$\vartheta(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \vartheta_{o'rta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = S'(t_0)$$

tenglik o‘rinli deya olamiz. Natijada jismning $S = s(t)$ harakat tenglamasida, yo‘ldan *t* vaqt bo‘yicha olingan hosila, shu jismning ayni *t* vaqtdagi tezligiga teng bo‘lar ekan, ya’ni $S'(t) = \vartheta(t)$.

3. *Hosilaning iqtisodiy ma'nosi.* Shuni ta'kidlash lozimki, hosilaning iqtisodiy ma'nosi ko'p qirrali bo'lib, muayyan obyektga yo'naltirilgan maqsaddan kelib chiqadi. Biz shu masalalardan birini keltiramiz. $U = U(t)$ funksiya t vaqt davomida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi o'zgarishini bildirsin. Ishlab chiqarishning $t=t_0$ vaqtdagi mehnat unumdorligini topish masalasini ko'raylik. Buning uchun t vaqtga Δt orttirma beramiz, u holda mana shu vaqt davomida ma'lum miqdordagi $\Delta U = U(t_0 + \Delta t) - U(t_0)$ mahsulot ishlab chiqariladi, o'rtacha mehnat unumdorligi $Z_{o'rta} = \frac{\Delta U}{\Delta t}$ tenglik orqali topiladi. Yuqoridagi mulohazalarga o'xshash $t=t_0$ vaqtdagi mehnat unumdorligi uchun quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$Z(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} Z_{o'rta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta t} = U'(t_0).$$

Demak, mahsulot hajmini vaqt bilan bog'lovchi $U(t)$ funksiyaning vaqt bo'yicha $U'(t)$ hosilasi, ishlab chiqarishning $Z(t)$ unumdorligini berar ekan, ya'ni

$$U'(t) = Z(t).$$

Masalan 1. Funksiya hosilasini hosilaning ta'rifi yordamida hisoblang: $y=x^2$.

Yechish: Funksiya orttirmasini hisoblayamiz:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2 = \Delta x(2x + \Delta x).$$

Hosilaning ta'rifiga ko'ra: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$

Masalan 2. Funksiya hosilasini hosilaning ta'rifi yordamida hisoblang: $y=sinx$.

Yechish: Avval funksiya orttirmasini hisoblayamiz:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

Hosilaning ta'rifiga ko'ra:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot cosx = \cos x$$

Demak, ta'rifga ko'ra $(sinx)' = cosx$.

Masalan 3. $y = |x-1|$ funksiya hosilasini hisoblang.

Yechish: $x = 1$ nuqtada argumentga Δx orttirma beramiz, u holda funksiya Δy orttirma oladi:

$$\Delta y = |\Delta x| = \begin{cases} -\Delta x, & agar\ \Delta x < 0\ \ bo'lsa, \\ \Delta x, & agar\ \Delta x > 0\ \ bo'lsa. \end{cases}$$

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1, \ \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

$\ell im_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$ limitning mavjud emasligini ko'rsatadi, $y = |x-1|$ funksiya
$x = 1$ nuqtada hosilaga ega emas, ammo $y = |x-1|$ uzluksiz funksiya.

Hosila hisoblashning asosiy qoidalari

1. Agar $f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda istalgan o'zgarmas a son uchun $\varphi(x) = a \cdot f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lib, bu hosila quyidagi tenglik orqali topiladi $\varphi'(x_0) = a \cdot f'(x_0)$, chunki funksiya limiti xossasiga ko'ra:

$$\varphi'(x_0) = \ell im_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x} = \ell im_{\Delta - x \to 0} \frac{a\, f(x_0 + \Delta x) a\, f(x_0)}{\Delta x} = a \cdot \ell im_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = a \cdot f'(x_0)$$

2. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda $\varphi(x) = f(x) \pm g(x)$ funksiya ham $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lib, bu hosila quyidagi tenglik orqali topiladi:

$$\varphi'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0).$$

Haqiqatan ham, limit xossalari va hosila ta'rifiga ko'ra:

$$\varphi'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)\pm g(x_0+\Delta x)-(f(x_0)\pm g(x_0))}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\pm\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\pm$$

$$\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)\pm g'(x_0)$$

3. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x=x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda $\varphi(x)=f(x)\cdot g(x)$ funksiya ham $x=x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lib, bu hosila quyidagi tenglik orqali topiladi: $\varphi'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$;

Funksiya limiti xossasiga va $x=x_0$ nuqtada hosilaga ega funksiya shu nuqtada uzluksiz ekanligidan, quyidagini hosil qilamiz:

$$\varphi'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0+\Delta x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]\cdot g(x_0+\Delta x)+f(x_0)[g(x_0+\Delta x)-g(x_0)]}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\cdot g(x_0+\Delta x)+$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0}f(x_0)\cdot\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$$

4. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x=x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lib, $g(x_0)\neq 0$ bo'lsa, u holda $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ funksiya ham $x=x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'ladi va bu hosila quyidagi formula orqali topiladi:

$$\varphi'(x_0)=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Funksiya limiti xossalari, $g(x)$ funksiyaning $x=x_0$ dagi uzluksizligi va $g(x_0)\neq 0$ ekanligidan hamda $g(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biron-bir atrofida noldan farqli ekanligini e'tiborga olib quyidagini hosil qilamiz:

$$\phi'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\phi(x_0+\Delta x)-\phi(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{f(x_0+\Delta x)}{g(x_0+\Delta x)}-\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0+\Delta x)}{g(x_0+\Delta x)g(x_0)\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0)}\left[\frac{(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))\cdot g(x_0)-f(x_0)(g(x_0+\Delta x)-g(x_0))}{\Delta x}\right]=$$

$$\frac{1}{g^2(x_0)}\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}(x_0)-\lim_{\Delta x\to 0}f(x_0)\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}\right]=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

5. Agar $u=g(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada hosilaga ega bo‘lib, $y=f(u)$ funksiya esa $u=u_0=g(x_0)$ nuqtada hosilaga ega bo‘lsa, u holda $y=f(g(x))$ murakkab funksiya $x=x_0$ nuqtada hosilaga ega bo‘ladi va bu hosila quyidagi
formula orqali topiladi: $y_0'(x_0)=f_u'(u_0)\cdot u_x'(x_0)$.

Haqiqatan ham, murakkab funksiya limiti va hosilaga ega bo‘lgan funksiya uzluksizligiga ko‘ra

$$y_x'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(g(x_0+\Delta x))-f(g(x_0))}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(g(x_0+\Delta x))-f(g(x_0))}{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}\cdot\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{f(u_0+\Delta u)-f(u_0)}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=f_u'(u_0)\cdot u_x'(x_0)$$

Bu yerda, $\Delta u=g(x_0+\Delta x)-g(x_0)$ bo‘lib, $\Delta x\to 0$ da $g(x)$ funksiya $x=x_0$ da uzluksiz bo‘lganligidan $\Delta u\to 0$ kelib chiqishi e’tiborga olingan.

6. Agar $y=f(x)$ va $x=g(y)$ funksiyalar o‘zaro teskari funksiyalar bo‘lib, $x=x_0$ nuqtada $f'(x_0)\neq 0$ va $y_0=f(x_0)$ nuqtada $g'(y_0)$ hosilalar mavjud bo‘lsa, u holda $g_y'(y_0)=\frac{1}{f_x'(x_0)}$, ya’ni $x_y'(y_0)=\frac{1}{y_x'(x_0)}$ tenglik o‘rinli.

Murakkab funksiya hosilasiga va $x'=1$ ekanligini e’tiborga olib, $x=g(f(x))$ tenglikdan quyidagi kelib chiqadi:

$$1=(x)'=(g(f(x_0)))'_x=g_y'(y_0)\cdot f_x'(x_0).$$

7. Agar funksiya $f(kx+b)$ ko‘rinishda bo‘lsa $(f(kx+b))'=kf'(kx+b)$ bo‘ladi. Bu tenglik murakkab funksiya hosilasidan kelib chiqadi.

Yuqoridagi qoidalar umumiy holda quyidagicha yozilishi mumkin:

1. $(a\cdot f(x))'=a\cdot f'(x),\ a=const$.
2. $(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$.
3. $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$.
4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$.
5. $y=f(u),\ u=g(x)$ funksiyalar uchun $(f(u))_x'=f_x'(u)\cdot u_x'$.

6. $y=f(x)$ va $x=g(y)$ o'zaro teskari funksiyalar uchun, $x_y' = \frac{1}{y_x'}$.

7. $y=f(kx+b)$ funksiya uchun $y'=kf'(kx+b)$.

Endi asosiy elementar funksiyalarning hosilalarini hisoblaylik.

Masalan 1. $y=x^\alpha$ darajali funksiya uchun $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ o'rinli bo'ladi. Limitning xossalariga ko'ra

$$(x^\alpha)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^\alpha\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1\right]}{x\cdot\frac{\Delta x}{x}} = \alpha\cdot\frac{x^\alpha}{x} = \alpha\cdot x^{\alpha-1}.$$

Xususan, $(x)'=1$.

2. $y=a^x$ $(a>0)$ ko'rsatkichli funksiya uchun $(a^x)' = a^x \ell n a$.

Ajoyib limit xossalariga ko'ra

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x\cdot(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = a^x\cdot\ell n a.$$

Xususan, $(e^x)'=e^x$. 1- va 2-amalning isbotida mos ravishda $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^a}{x}=a$ va $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ell n a$ ekanligidan foydalanildi.

3. $y=\ell og_a x$ logarifmik funksiya $(a>0, a\neq 1)$ uchun $(\ell og_a x)' = \frac{\ell og_a e}{x}$.

Haqiqatdan ham,

$$(\ell og_a x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ell og_a(x+\Delta x)-\ell og_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\ell og_a\frac{x+\Delta x}{x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\ell og_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x}\cdot\ell og_a e.$$

Xususan, $(\ell n x)' = \frac{1}{x}$.

4. $y=\sin x$ uchun $(\sin x)'=\cos x$. 1-ajoyib limit va $\cos x$ funksiya uzluksizligiga ko'ra

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{2\cdot\frac{\Delta x}{2}} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Bu yerdan funksiya hosilasi xossalaridan foydalanib quyidagilarni hosil qilamiz:

$$(\cos x)' = \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

$$(tg\,x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(ctg\,x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

5. Teskari trigonometrik funksiyalar. *y=arcsin x* uchun $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

x=sin y funksiya *y=arcsin x* funksiyaga teskari bo‘lgani uchun, teskari funksiya hosilasi formulasiga ko‘ra

$$(arc\sin x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Xuddi shunga o‘xshash, $y = arctgx$, $y = \arccos x$ va $y = arcctg$ funksiyalar uchun $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ va $(arcctg\,x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ tengliklarni hosil qilish mumkin.

Yuqorida hosil bo‘lgan formulalarni quyidagi jadval ko‘rinishida ifoda qilamiz:

1. $c'=0$
2. $x'=0$
3. $(x^{\alpha})'=\alpha \cdot x^{\alpha-1}$
4. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
5. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
6. $(a^x)'=a^x \cdot l\,na$
7. $(e^x)'=e^x$

10. $(\sin x)'=\cos x$
11. $(\cos x)'= -\sin x$
12. $(tgx)'= \frac{1}{\cos^2 x}$
13. $(ctgx)'= \frac{-1}{\sin^2 x}$
14. $(arc\sin x)'= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $(arc\cos x)'= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16. $(arctgx)'= \frac{-1}{1+x^2}$

8. $(\log_a^x)' = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \cdot lna}$

17. $(arcctgx)' = \frac{-1}{1+x^2}$

9. $(lnx)' = \frac{1}{x}$

Parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyaning hosilasi

Faraz qilaylik, y funksiyaning x argumentga bo‘g‘liqligi $\begin{cases} x = x(t) \\ y = (t) \end{cases}$ tenglamalar bilan parametrik shaklda berilgan bo‘lsin.

Masalan. 1) $\begin{cases} x = x_0 + l \cdot t \\ y = y_0 + m \cdot t \end{cases}$ – tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasi.

2) $\begin{cases} x = x_0 + R \cdot \cos t \\ y = y_0 + r \cdot \sin t \end{cases}$ – aylananing parametrik tenglamasi.

3) $x = a \cdot cost, y = b \cdot sint$ – ellipsning parametrik tenglamasi.

Parametr t ga Δt orttirma beramiz, mos ravishda Δx va Δy orttirmalar hosil bo‘ladi. U holda y funksiyadan x bo‘yicha hosila:

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{y'_t}{x'_t} \text{ yoki } \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}.$$

Masalan. $x = e^{2t}\cos^2 t,\ y = e^{2t}\sin^2 t$; y'_x hosilani hisoblang.

Yechish: $x'_t = 2e^{2t}\cos^2 t + e^{2t}(-2\cos t \cdot \sin t) = 2e^{2t}(\cos t - \sin t)\cos t,$

$y'_t = 2e^{2t}\sin^2 t + e^{2t} \cdot 2\cos t \cdot \sin t = 2e^{2t}(\cos t + \sin t)\sin t,$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = tgt \cdot \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t} = tgt \cdot \frac{1 + tgt}{1 - tgt} = tgt \cdot tg\left(t + \frac{\pi}{4}\right), \quad \left(t \neq \frac{\pi}{4} + \pi k,\ t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\right).$$

Yuqori tartibli hosilalar

Agar $y = f(x)$ funksiya uchun (a,b) oraliqning har bir nuqtasida hosila mavjud bo‘lsa, u holda (a,b) oraliqda yangi $f'(x)$ funksiyani hosil qilamiz. Bu $f'(x)$ funksiya $x = x_0 \in (a,b)$ nuqtada hosilaga ega bo‘lsa, u holda $x=x_0$ nuqtada $y=f(x)$ funksiya ikkinchi tartibli hosilaga ega deyilib, bu hosila $y''(x_0)$, $f''(x_0)$, $\frac{d^2y(x_0)}{dx^2}$, $\frac{d^2f(x_0)}{dx^2}$, $y''_{x^2}(x_0)$. shaklda belgilanadi.

Demak, ikkinchi tartibli hosila quyidagi tenglik orqali topilar ekan:

$$f''(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}.$$

Xuddi shuningdek, $y=f(x)$ funksiya uchun uchinchi, to'rtinchi va n-tartibli hosilani aniqlash mumkin. Umumiy holda, agar $y=f(x)$ funksiya uchun (a,b) oraliqning har bir nuqtasida $(n-1)$ tartibli hosilaga ega bo'lib, mana shu hosil bo'lgan funksiyani $f^{(n-1)}(x)$ deb belgilasak, o'z navbatida $f^{(n-1)}(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, bu hosila $y=f(x)$ funksiyaning $x=x_0$ nuqtadagi n tartibli hosilasi deyiladi. n tartibli hosilani quyidagi ko'rinishlarda ifoda etish mumkin:

$$y^{(n)}(x_0),\ f^{(n)}(x_0),\ \frac{d^ny(x_0)}{dx^n},\ \frac{d^nf(x_0)}{dx^n},\ y^{(n)}_{x^n}(x_0).$$

Demak, ta'rifga ko'ra n tartibli hosila

$$f^{(n)}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+\Delta x)-f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}$$

tenglik orqali aniqlanar ekan. Bu tenglikni umumiy holda quyidagicha yozishimiz mumkin: $f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'$, $n=1,2,3...$

Bu yerda, $f^{(0)}(x)=f(x)$.

Yuqori tartibli hosila uchun quyidagi tengliklar o'rinli bo'ladi:

1. $(cf(x))^{(n)}=c\cdot f^{(n)}(x)$ $\qquad c=const$
2. $(f(x)+g(x))^{(n)}=f^{(n)}(x)+g^{(n)}(x)$
3. $(f(ax+b))^{(n)}=a^nf^{(n)}(ax+b)$
4. $(f(x)\cdot g(x))^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^kf^{(n-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x)$

Bu tengliklarning barchasini matematik induksiya usuli bilan isbot qilish mumkin. (4)-tenglik *Leybnis formulasi* deb nomlanadi.

Endi ayrim elementar funksiyalarning yuqori tartibli hosilalarini keltiramiz. Bu formulalar ham matematik induksiya usuli bilan isbot qilinadi.

1. $(x^m)^{(n)} = m\cdot(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$, m istalgan haqiqiy son. Agar m natural son bo‘lsa, $n > m$ uchun $(x^m)^{(n)} = 0$ *ва* $n = m$ uchun $(x^m)^{(m)} = m!$.

2. $(a^x)^{(n)} = a^x\cdot(\ell na)^n$, xususan $(e^x)^{(n)} = e^x$

3. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

4. $(\cos)^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

Masalan 1. Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini hisoblang: $y = \sin^2 x$.

Yechish: $y' = 2\sin x\cos x = \sin 2x$, $y'' = 2\cos 2x$.

Masalan 2. Funksiyaning uchinchi tartibli hosilasini hisoblang: $y = (2x^3 + 1)\cdot\cos x$.

Yechish: Leybnis formulasidan foydalanamiz: *f(x)=2x³+1,g(x)=cosx.* $f' = 6x^2, f'' = 12x, f''' = 12. g' = -\sin x, g'' = -\cos x, g''' = \sin x$. U holda $y''' = [f(x)\cdot g(x)]''' = f'''\cdot g + 3f''\cdot g' + 3f'\cdot g'' + f\cdot g''' = (2x^3 - 36x + 1)\sin x - 6(3x^2 - 2)\cos x$.

Masalan 3. Funksiyaning n-tartibli hosilasini hisoblang: $y = \sin x$.

Yechish: $y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, $y'' = -\sin x = \sin(x + \frac{2\pi}{2})$,

$y''' = -\cos x = \sin(x + \frac{3\pi}{2}), \ldots, y^{(n)} = \sin(x + n\cdot\frac{\pi}{2})$.

Funksiya differensiali

Matematika tatbiqida asosan taqribiy hisoblashlar qo‘llaniladi. Taqribiy hisoblashlarning muhim manbayi funksiya differensiali hisoblanadi. Biz mana shu tushuncha bilan tanishamiz.

$f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biron-bir atrofida berilgan bo‘lib, x_0 nuqtada uzluksiz, ya’ni $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ bo‘lsin. Agar $x - x_0 = \Delta x$ va $f(x) - f(x_0) = \Delta y$ deb belgilashlar kiritsak, Δx argument orttirmasi, Δy esa shu orttirmaga mos keluvchi funksiya orttirmasi bo‘lib, yuqoridagi limit munosabatini quyidagicha yozish mumkin: $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$.

Ta’rif. Agar $\Delta x\to 0$ da, funksiya orttirmasi Δyni quyidagi ko‘rinishda ifodalash mumkin bo‘lsa,

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x). \qquad (1)$$

Bu yerda, A o‘zgarmas son, $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x}=0$, u holda $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differentsiallanuvchi deyiladi va funksiyaning x_0 nuqtadagi differensiali $A\cdot\Delta x$ ga teng deb ataladi. Bu differensial $A\cdot\Delta x=df(x_0)$ shaklda belgilanadi.

Izoh: $\alpha(\Delta x)$ funksiya uchun $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x}=0$ tenglik $\alpha(\Delta x)=0(\Delta x)$ kabi ifoda etiladi va $\alpha(\Delta x)$ funksiya $\Delta x\to 0$ da Δx ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya deyiladi. Masalan, $x\to 0$ da $1-\cos x=0(x)$ $x^2=\theta(x)$ bo‘ladi, chunki $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0$ yoki $x\to 0$ da $1-\cos x=0(x)$ bo‘ladi, sababi

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{x}{2}=0$$

tenglik o‘rinlidir. Xuddi shunga o‘xshash $x\to 1$ da $tg^2(x-1)=0(x-1)$, $1-\cos(x-1)=0(x-1)$ va h.k.

Agar (1)-tenglikni Δx ga bo‘lib $\Delta x\to 0$ da limitga o‘tsak quyidagini hosil qilamiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(A+\frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x}\right)=A$$

Bu tenglikdan, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada hosilasi mavjud bo‘lib, $f'(x_0)=A$ ekanligi kelib chiqar ekan. Demak, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, bu nuqtada funksiya hosilasi ham mavjud bo‘lar ekan. Bu tasdiqning teskarisi ham o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatamiz.

Teorema. x_0 nuqtaning biron-bir atrofida berilgan $f(x)$ funksiya shu nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda x_0 nuqtada $f(x)$ funksiyaning $df(x_0)$ differensiali mavjud bo'lib, bu differensial uchun

$df(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x$ tenglik o'rinli.

Isbot:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

tenglikda $\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}-f'(x_0)=\alpha(\Delta x)$ belgilashni kiritsak, $\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$.

U holda $\alpha(\Delta x)\cdot\theta(\Delta x)$ bo'lgani uchun $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$.

Demak, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi va

$$df(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x \qquad (2)$$

tenglik o'rinli.

Xulosa qilib shuni aytish mumkin ekanki, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi uchun, funksiyaning x_0 nuqtada hosilaga ega bo'lishi zarur va yetarli, bu nuqtadagi differensial uchun (2)-tenglik o'rinlidir.

Shunday qilib, x_0 nuqtada differensiallanuvchi funksiya orttirmasi

$$\Delta y=f'(x_0)\cdot\Delta x+0(\Delta x)=df(x_0)+0(\Delta x) \qquad (3)$$

Taqribiy hisoblashlarni funksiya orttirmasini uning differensiali bilan almashtirish orqali bajarish mumkin, ya'ni (3)-tenglikda $\theta(\Delta x)$ ni tashlab yuborsak quyidagi taqribiy $\Delta y\approx df(x_0)$ tenglikni hosil qilamiz.

Bu yerda, yo'l qo'yilgan xatolik $\theta(\Delta x)$ ko'rinishda bo'lib, $|\Delta x|$ kichik bo'lgani sari bu xatolik $|\Delta x|$ ga nisbatan tezroq kichiklashib boradi.

Agar $f(x)$ funksiya (a,b) intervalning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsa, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda differensiallanuvchi deyiladi.

Endi misollar qaraymiz. $f(x)=x$ funksiya $(-\infty,+\infty)$ da differensiallanuvchi bo'lib, (2)-tenglikga ko'ra $dx=(x)'\cdot\Delta x=\Delta x$ o'rinli bo'ladi, ya'ni erkli o'zgaruvchi uchun uning differensiali va orttirmasi teng bo'lar ekan.

Bu tenglikdan funksiya differensiali uchun

$$df(x) = f'(x)\cdot dx \quad \text{yoki} \quad dy = y'dx \qquad (4)$$

tenglik yoza olamiz.

Demak, $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$, $y' = \frac{dy}{dx}$.

(4)-tenglikka tayanib asosiy elementar funksiyalarning differensiali va differensiallash qoidalarini kelitiramiz:

1. $d(c) = 0 \quad c = const$
2. $d(x^{\alpha}) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}dx$
3. $d(a^x) = a^x \ell na\, dx,\ d(e^x) = e^x\, dx$
4. $d(\ell og_a x) = \frac{1}{x \ell na}dx,\ d(\ell nx) = \frac{1}{x}dx$
5. $d(\sin x) = \cos x\, dx$
6. $d(\cos x) = -\sin x\, dx$
7. $d(tg\, x) = \frac{1}{\cos^2 x}dx$
8. $d(ctg\, x) = -\frac{1}{\sin^2 x}dx$
9. $d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
10. $d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
11. $d(arctg\, x) = \frac{1}{1+x^2}dx$
12. $d(arcctg\, x) = -\frac{1}{1+x^2}dx$

Differensiallash qoidalari

1. $d(cf(x)) = c\cdot df(x), \quad c = const$
2. $d[f(x) \pm g(x)] = df(x) \pm dg(x)$
3. $d[f(x)\cdot g(x)] = g(x)df(x) + f(x)dg(x)$
4. $d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)}$

Yuqori tartibli differensiallar

$df(x) = f'(x)dx$ tenglikda dx erkli o'zgaruvchining orttirmasini o'zgarmas deb qarasak, $df(x)$ funksiya differensiali x ning funksiyasi ekanligi kelib chiqadi, shuning uchun *df(x)* funksiya differensialini topish masalasini ko‘rishimiz mumkin. Bu differensial *f(x)* funksiyaning ikkinchi tartibli differensiali deb atalib, $d^2 f(x)$ shaklda belgilanadi, ya’ni

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx = f''(x)dx \cdot dx = f''(x)dx^2 .$$

Xuddi shunga o‘xshash

$$d^3 f(x) = f'''(x)dx^3$$

$$d^4 f(x) = f^{IV}(x)dx^4$$

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n \quad \text{yoki} \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

tengliklarni hosil qilamiz.

Ko‘paytmaning yuqori tartibli differensiali uchun Leybnis formulasini e’tiborga olib, quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$d^n(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d^{n-k} f(x) \cdot d^k g(x).$$

Bu yerda, $d^0 f(x) = f(x), d^0 g(x) = g(x)$ deb olingan.

Masalan 1. Funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli differensialini hisoblang:

$$y = arctg$$

Yechish: $dy = \dfrac{1}{1+x^2}dx, \; d^2 y = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}dx^2.$

Masalan 2. Agar *y=arctgx bo‘lsa,* d^3y ni hisoblang.

Yechish: $dy = \dfrac{dx}{1+x^2}, \; d^2 y = -\dfrac{2xdx^2}{(1+x^2)^2},$

$$d^3 y = -\frac{2}{(1+x^2)^4}\left[(1+x^2)^2 - 2x(1+x^2)2x\right]dx^3 = 2\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}dx^3.$$

7. Funksiyani to'liq tekshirish

Differensial hisobning asosiy teoremalari

Yuqorida kiritilgan funksiya hosilasi va differensialining tatbiqlari quyidagi teoremalarga asoslangandir.

Ferma teoremasi. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biron-bir $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)(\delta>0)$ atrofida berilgan bo'lib, x_0 nuqtada eng katta (eng kichik) qiymatga erishib, $f'(x_0)$ hosilasi mavjud bo'lsa, u holda bu hosila nolga teng, ya'ni $f'(x_0)=0$.

Isbot: Istalgan $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ uchun $f(x)\leq f(x_0)$, ya'ni $f(x_0)=\max\limits_{x\in(x_0-\delta,\,x_0+\delta)}\{f(x)\}$ bo'lsin, u holda $f'(x_0)$ mavjudligidan

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\geq 0$$

bo'ladi, chunki $f(x_0-\Delta x)-f(x_0)\leq 0$ va $\Delta x>0$. Xuddi shunga o'xshash

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\leq 0$$

bo'ladi, chunki $f(x_0-\Delta x)-f(x_0)\leq 0$ va $\Delta x>0$. U holda, bu tengsizliklardan $f'(x_0)=0$ ekanligi kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

Roll teoremasi. $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz va (a,b) intervalda hosilaga ega bo'lib, oraliq chegaralarida bir xil qiymatlarni qabul qilsa, ya'ni $f(a)=f(b)$ bo'lsa, u holda $(a.b)$ intervalda shunday c nuqta topiladiki, uning uchun $f'(c)=0$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. Veyershtrasning (2)-teoremasiga ko'ra $[a,b]$ oraliqda shunday x_1 va x_2 nuqtalar mavjud bo'ladiki, ular uchun $f(x_1)=\inf\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$ va $f(x_2)=\sup\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$ tengliklar o'rinli bo'ladi.

Agar $\{x_1;x_2\}=\{a,b\}$ bo'lsa, u holda $f(x_1)=f(x_2)$ va istalgan $x\in[a,b]$ uchun $f(x)=f(x_1)=f(x_2)=const$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, $f'(x)\equiv 0$ ekan, bu esa teoremaning $\{x_1;x_2\}=\{a,b\}$ hol uchun isbot bo'lganini bildiradi.

Agar $\{x_1;x_2\}\neq\{a,b\}$ bo'lsa, u holda $x_1\in(a,b)$ yoki $x_2\in(a,b)$. Bundan Ferma teoremasiga ko'ra $f'(x_1)=0$ yoki $f'(x_2)=0$ ekanligi kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

Taqribiy hisoblash uchun qo'llaniladigan ko'pgina formulalarni hosil qilishda quyidagi Lagranj teoremasidan foydalaniladi.

Lagranj teoremasi. $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz va (a,b) intervalda hosilaga ega bo'lsin, u holda (a,b) intervalda shunday c nuqta mavjudki, uning uchun quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Isbot: $\varphi(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$

funksiyani kiritamiz. $\varphi(x)$ funksiya uchun Roll teoremasining barcha shartlari o'rinli va

$$\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

U holda shunday $c\in(a,b)$ nuqta mavjudki $\varphi'(c)=0$, ya'ni

$$\varphi'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0.$$

Bu tenglikdan esa $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

tenglik kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

Koshi teoremasi. $f(x)$ va *g(x)* funksiyalar $[a,b]$ oraliqda uzluksiz va (a,b) intervalda hosilaga ega bo'lib, *g(x)* $\neq 0$ bo'lsin, u holda $(a.b)$ intervalda shunday c nuqta mavjudki, uning uchun quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Isbot: $\varphi(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)]$ funksiyani kiritamiz.

$\varphi(x)$ funksiya uchun Roll teoremasining barcha shartlari o'rinli va

$$\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x).$$

U holda shunday $c \in (a,b)$ nuqta mavjudki $\varphi'(c)=0$, ya'ni

$$\varphi'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)=0.$$

Bu tenglikdan esa

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

tenglik kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

$g(x)=x$ bo'lsa, Lagranj teoremesi hosil bo'ladi.

Masalan 1. $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$ funksiya uchun Roll teoremasi shartlarini tekshiring.

Yechish: Funksiya $[1;3]$ oraliqda differensiallanuvchi va $x=1$, $x=2$, $x=3$ nuqtalarda nolga aylanadi. Demak, $[1;2]$ va $[2;3]$ oraliqlarning har birida berilgan funksiya uchun Roll teoremasining barcha shartlari bajariladi. $(1;3)$ ittervalda kamida bitta shunday c nuqta topiladiki, bu nuqtada $f'(c)=0$ bo'ladi. Berilgan funksiya hosilasini nolga tenglab $3x^2-12x+11=0$ tenglamani hosil qilamiz. Uni yechib: $c_1=2-\frac{1}{\sqrt{3}}$ va $c_2=2+\frac{1}{\sqrt{3}}$ ildizlarni hosil qilamiz.

Bunda $1< c_1<2$ va $2<c_2<3$.

Masalan 2. $y=x^2-4x+3$ funksiya ildizlari orasida uning hosilasining ham illdizi bor ekanligi tekshirilsin.

Yechish: Funksiya $[1;3]$ oraliqda differensiallanuvchi bo'lib $x=1$ va $x=3$ nuqtalarda nolga aylanadi: $x^2-4x+3=0$, $x_1=1$, $x_2=3$. Demak, $[1;3]$ oraliqda berilgan funksiya uchun Roll teoremasining barcha shartlari bajariladi. $(1;3)$ ittervalda kamida bitta shunday c nuqta topiladiki, bu nuqtada $f'(c)=0$ bo'ladi. Berilgan funksiya hosilasini nolga tenglab: $y'=2x-4, 2x-4=0$, $c=2$ va $2 \in [1; 3]$.

Teylor va Makloren formulalari

Endi biz taqribiy hisoblashlarda ko'p qo'llaniladigan formulani keltiramiz.

5-teorema. Agar $\tau(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biron-bir atrofida berilganda x_0 nuqtada n tartibgacha $\tau^{(k)}(x)$, $k=1,2,\ldots,n$ hosilalari mavjud bo'lib,

$$\tau(x_0)=\tau'(x_0)=\tau''(x_0)=\cdots=\tau^{(n-1)}(x_0)=\tau^{(n)}(x_0)=0$$

tengliklar o'rinli bo'lsa, u holda $\tau(x)$ funksiya uchun $\tau(x)=0\left((x-x_0)^n\right)$ munosabat o'rinli bo'ladi.

Isbot: Matematik induksiya usuli yordamida isbot qilamiz: $n=1$ bo'lsin, u holda $\tau(x_0)=\tau'(x_0)=0$. Bundan $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\tau(x)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\tau(x)-\tau(x_0)}{x-x_0}=\tau'(x_0)=0$ tenglik kelib chiqadi, ya'ni $\tau(x)=0((x-x_0))$ ekan.

Endi $n-1$ da $\tau(x_0)=\tau'(x_0)=\cdots=\tau^{(n-1)}(x_0)=0$ tengliklardan $\tau(x)=0\left((x-x_0)^{n-1}\right)$ munosabat o'rinli ekanligi kelib chiqsin deb faraz qilaylik va $n$da $\tau(x_0)=\tau'(x_0)=\cdots=\tau^{(n-1)}(x_0)=\tau^{(n)}(x_0)=0$ tengliklar o'rinli bo'lsin. Agar $\tau_1(x)=\tau'(x)$ belgilashni kiritsak, $\tau_1(x_0)=\tau_1'(x_0)=\tau_1^{(n-1)}(x_0)=0$ ekanligi kelib chiqadi.

Demak, $\tau(x)=0\left((x-x_0)^{(n)}\right)$. Teorema isbot bo'ldi.

$f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biron-bir atrofida berilgan va bu atrofda uning *(n–1)* tartibli hosilasi mavjud va x_0 nuqtada $f(x)$ funksiyaning n tartibli hosilasi mavjud bo'lsin. Bu shartlarda x_0 ning qaralayotgan atrofida quyidagi $p(x)$ ko'phadni aniqlay olamiz:

$$p(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Agar $\tau_n(x)=f(x)-p(x)$ funksiyani tekshirsak, $\tau_n(x_0)=\tau_n'(x_0)=\cdots=\tau_n^{(n)}(x_0)=0$ tengliklar kelib chiqadi. Yuqoridagi teoremaga ko'ra $\tau(x)=0\left((x-x_0)^{(n)}\right)$ munosabat o'rinlidir. Bundan Teylor formulasi deb nomlanuvchi formulani hosil qilamiz:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\tau_n(x). \quad (1)$$

Bu yerda, $\tau_n(x)$ formulaning qoldiq hadi deyiladi.

Isbot qilinganiga ko'ra $r_n(x)=0\left((x-x_0)^{(n)}\right)$, ya'ni x o'zgaruvchi x_0 dan yetarlicha kam farq qilsa, $r_n(x)$ ham 0 dan $(x-x_0)^n$ tartibda farqlanadi, ya'ni n qanchalik katta bo'lsa ($|x-x_0|<1$ deb olish mumkin), $r_n(x)$ ifoda 0 dan shunchalik kam farq qiladi. Demak, hisoblashlarda ushbu

$$f(x)\approx f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

taqribiy formuladan foydalanishimiz mumkin ekan.

(1)-formulada $x-x_0=\Delta x$ deb belgilasak, Teylor formulasining quyidagi ko'rinishlarini hosil qilamiz:

$$f(x)-f(x_0)=\Delta f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\frac{1}{2!}f''(x_0)\Delta x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\Delta x^n+\theta(\Delta x^n)$$

$$\Delta f(x_0)=df(x_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}d^nf(x_0)+\theta(\Delta x^n).$$

Agar (1)-formulada $x=0$ deb olinsa, Makloren formulasi deb nomlanuvchi ushbu formulani hosil qilamiz:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\theta(x^n).$$

Endi ayrim elementar funksiyalarning yuqoridagi formulalarga yoyilmasini topaylik:

1) $f(x)=e^x$ bo'lsa, $f^{(n)}(x)=e^x$ va $f^{(0)}(0)=1$ bo'lgani uchun

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+0(x^n).$$

2) $f(x)=\sin x$ bo'lsa, $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ va $f^{(n)}(0)=\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ ekanligidan, $n=2k$ bo'lsa, $f^{(2k)}(0)=0$ va $n=2k-1$ bo'lsa, $f^{(2k-1)}(0)=\sin\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^{k-1}$ shuning uchun

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)}+\theta(x^{2k}).$$

3) $f(x)=\cos x$ bo'lsa, $f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ va $f^{(n)}(0)=\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ $n=2k$ bo'lganda, $f_{(0)}^{(2k)}=\cos(k\pi)=(-1)^k$ va $n=2k-1$ bo'lganda, $f^{(2k-1)}(0)=0$ shuning uchun

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2:}+\frac{x^4}{4:}-+\cdots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o\left(x^{2k+1}\right).$$

Hosil qilingan yoyilmalar $e^x, \sin x$ va $\cos x$ funksiyalar qiymatini topish x ga nisbatan ko'phad bo'lgan qiymatini topishga olib kelishini ko'rsatadi.

Lopital qoidasi

Limitlarni hisoblashda uchraydigan $\frac{0}{0}$ va $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi noaniqliklarni ochishda, quyidagi Lopital qoidasi deb nomlanadigan qoidani asoslab beruvchi teoremani keltiramiz.

Teorema. Agar $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ limit $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi noaniqlik bo'lib, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ limit mavjud bo'lsa, (cheksiz bo'lishi ham mumkin), u holda

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot: Isbotni $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi noaniqlik uchun keltiramiz. Demak,

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$$

bo'lsin, u holda $f(a)=g(a)=0$ deb olib, Lagranj teoremasiga ko'ra

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi_1)(x-a)}{g'(\xi_2)(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Bu yerdagi oxirgi tenglik $|\xi_1-a|<|x-a|$ va $|\xi_2-a|<|x-a|$ tengsizlikdan kelib chiqadi.

Misollar: 1. $\lim\limits_{x\to+0} x\cdot \ln x=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+0}(-x)=0$.

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

Funksiya grafigining asimptotasi

Funksiya grafigini chizishda grafik asimptotasi deb nomlanuvchi to‘g‘ri chiziqlarning yordami kattadir.

Ta’rif. Agar funksiya grafigining $M=(x,f(x))$ nuqtasidan berilgan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan $d(M)$ masofa uchun $\lim\limits_{|M|\to+\infty} d(M)=0$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, shu to‘g‘ri chiziq $y=f(x)$ funksiya grafigining asimptotasi deyiladi. Bu yerda, $|M|=\sqrt{x^2+f^2(x)}$ M nuqtadan koordinata boshigacha bo‘lgan masofa.

Agar $\lim\limits_{x\to x_0}|M|=+\infty$ bo‘lsa u holda asimptota vertikal asimptota deyiladi. Vertikal asimptota $x=x_0$ to‘g‘ri chiziq bilan ifodalanadi.

Agar $\lim\limits_{x\to+\infty}|M|=+\infty$ yoki $\lim\limits_{x\to-\infty}|M|=+\infty$ bo‘lsa, asimptota og‘ma asimptota deyiladi. Og‘ma asimptota $y=kx+b$ ko‘rinishda bo‘ladi.

Agar og‘ma asimptota uchun $x=0$ bo‘lsa, ya’ni asimptota $y=b$ ko‘rinishda bo‘lsa, bunday asimptota gorizontal asimptota deyiladi.

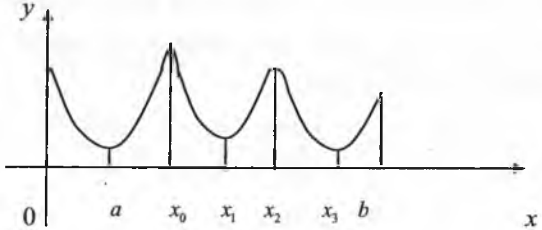
$x=x_0$ vertikal asimptota, $y=f(x)$ funksiyani cheksizlikka aylantiruvchi x_0 nuqta bilan ifodalangani uchun, x_0 ni $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\infty$ yoki $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\infty$ tengliklarni qanoatlantiruvchi nuqta deb qarash kerak.

$y=kx+b$ og‘ma asimptotani topish uchun ushbu tenglikdan

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=0$$

foydalanish mumkin. Bu yerdan $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{f(x)}{x}-k-\dfrac{b}{x}\right]=0$, ya’ni $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ ekanligi kelib chiqadi. U holda $b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]$.

3-ta'rif. Agar x_0 nuqtaning shunday atrofi $(x_0-\delta, x_0+\delta)\,(\delta>0)$ mavjud bo'lsaki, shu oraliqdan olingan istalgan $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ uchun $f(x)\leq f(x_0)$ $(f(x)\geq f(x_0))$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada lokal maksimumga (lokal minimumga) erishadi deyiladi. Funksiyaning lokal maksimum va lokal minimum nuqtalari, funksiyaning lokal ekstremumlari yoki shunchaki funksiya ekstemumlari deb yuritiladi.



Funksiya berilgan $[a,b]$ oraliqda bir necha lokal ekstremumlarga ega bo'lishi mumkin. Masalan, rasmda x_0, x_1, x_2, x_3 nuqtalarda funksiya lokal ekstremumlarga erishadi. $[a,b]$ oraliqdagi funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari funksiyaning global ekstremumlari deyiladi. Funksiya global ekstremumga oraliq chegaralarida erishishi mumkin. Masalan, rasmdagi funksiya uchun $f(b)=\max\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$ ekanligini ko'rish mumkin.

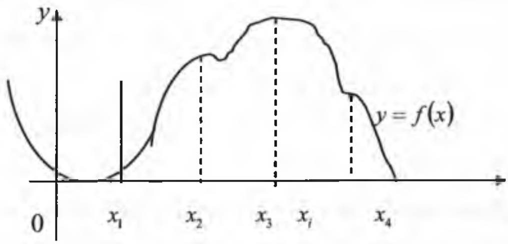
Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada lokal ekstremumga erishib, bu nuqtada $f'(x_0)$ hosila mavjud bo'lsa, Ferma teoremasiga ko'ra $f'(x_0)=0$. Lekin, $f'(x_0)=0$ ekanligidan, x_0 nuqtada funksiya ekstremumga erishadi deya olmaymiz. Masalan $y=x^3$ funksiya $(-\infty,+\infty)$ da o'suvchi bo'lgani uchun uning ekstremum nuqtalari mavjud emas, lekin $y'=3x^2$ hosila $x=0$ da nolga teng bo'ladi. Shu bilan birga $y=\sqrt[3]{x^2}$ funksiya $x=0$ nuqtada lokal ekstremumga ega bo'lib, bu nuqtada funksiya lokal minimumga erishgani bilan, $x=0$ nuqtada funksiya hosilasi mavjud emasligini avval ko'rgan edik.

Yuqorida aytilganlarga asoslanib, lokal ekstremumning quyidagi zaruriy shartini keltirishimiz mumkin.

$f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishishi uchun, shu nuqtada funksiya hosilasi nolga teng bo'lishi yoki funksiya hosilasi mavjud bo'lmasligi zarur.

Funksiya hosilasi nolga teng bo'lgan nuqtalar, ya'ni $f'(x)=0$ tenglama yechimlari va hosila mavjud bo'lmagan nuqtalar, funksiyaning kritik (yoki statsionar) nuqtalari deyiladi.

Demak, funksiyaning ekstremum nuqtalarini uning kritik nuqtalari orasidan izlashimiz kerak.



Chizmadagi $y=f(x)$ funksiya uchun x_1, x_2, x_3, x_4 nuqtalar kritik nuqtalar bo'lib, ($f'(x_1)$ mavjud emas, $f'(x_2)=\infty$, $f'(x_3)=0$, $f'(x_4)=0$) faqat, x_1 va x_3 nuqtalari ekstremum nuqtalari bo'ladi.

Funksiya ekstremumining birinchi yetarli sharti

8-teorema. Agar *x₀* kritik nuqta atrofida *x* nuqta chapdan o'ngga qarab o'zgarganda, *f(x)* funksiya hosilasi o'z ishorasini musbatdan manfiyga o'zgartirsa, bu *x₀* nuqta lokal maksimum nuqta (lokal minimum) bo'ladi.

Isbot: Agar $(x_0-\delta, x_0)(\delta>0)$ intervalda $f'(x)>0$ bo'lsa, funksiya bu oraliqda o'suvchi bo'lganligidan istalgan $x\in(x_0-\delta, x_0)$ uchun $f(x)\le f(x_0)$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Agar $(x_0, x_0+\delta)$ intervalda $f'(x)<0$ bo'lsa, bu oraliqda $f(x)$ funksiya kamayuvchi bo‘lib, barcha $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ lar uchun $f(x) \le f(x_0)$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Demak, istalgan $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ uchun $f(x) \le f(x_0)$, ya’ni x_0 nuqtada $f(x)$ funksiya lokal maksimumga erishar ekan. Demak, hosila x_0 kritik nuqta atrofida ishorasini musbatdan manfiyga o‘zgartirsa x_0 nuqta, uning maksimum nuqtasi bo‘lar ekan.

Shunga o‘xshash, x_0 atrofida hosila ishorasi manfiydan musbatga o‘zgargan holda x_0 nuqta lokal minimum ekanligini isbotlash mumkin.

$y = f(x)$ funksiyani ekstremumga tekshirishni quyidagi algoritm bo‘yicha bajarish mumkin:

1. $y' = f'(x)$ hosilani topish.

2. $f'(x) = 0$ tenglama yechimlarini topish va $f'(x)$ mavjud bo‘lmagan nuqtalarni aniqlash, ya’ni barcha kritik nuqtalarni topish.

3. $f'(x) > 0$ va $f'(x) < 0$ tengsizliklarni yechib, $f'(x)$ hosilaning kritik nuqta atrofidagi ishoralarini aniqlash lozim.

Agar kritik nuqtadan chapda va o‘ngda hosila turli ishoralarga ega bo‘lsa, funksiya shu nuqtada ekstremumga erishadi, aks holda bu kritik nuqta ekstremum nuqta bo‘lmaydi. Kritik nuqta atrofida funksiya hosilasi ishorasi chapda «+» va o‘ngda «–» bo‘lsa bu nuqta lokal maksimum, chapda «–» va o‘ngda «+» bo‘lsa, bu nuqta lokal minimum nuqta bo‘ladi.

5. Funksiyaning ekstremum qiymatlarini topish.

Funksiya ekstremumining ikkinchi yetarli sharti

9-teorema. Agar x_0 nuqta atrofida $f(x)$ funksiya hosilaga ega $f'(x_0) = 0$ hamda x_0 nuqtada funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi mavjud bo‘lib, $f''(x_0) > 0$ $(f''(x_0) < 0)$ bo‘lsa, u holda x_0 nuqtada $f(x)$ funksiya lokal minimumga (lokal maksimumga) erishadi.

Isbot: $f'(x_0) = 0$ va $f''(x_0) > 0$ bo‘lsin, u holda

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}=f''(x_0)>0.$$

Bundan $f'(x_0)=0$ va $\Delta x<0$ ekanligidan, $f'(x_0+\Delta x)<0$ kelib chiqadi, ya'ni x_0 nuqtadan chapda hosila manfiy ekan. Shunga o'xshash

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}=f''(x_0)>0$$

va $\Delta x>0$ bo'lgani uchun $f'(x_0+\Delta x)>0$ kelib chiqadi, ya'ni x_0 nuqtadan o'ngda hosila musbat ekan. Demak, hosila x_0 nuqta atrofida chapdan o'ngga o'z ishorasini manfiydan musbatga o'zgartirar ekan, u holda x_0 nuqta funksiyaning lokal minimum nuqtasi bo'ladi.

$f''(x_0)<0$ bo'lgan hol shunga o'xshash isbot qilinadi. Teorema isbot bo'ldi.

Bu teoremaga ko'ra, x_0 kritik nuqta uchun $f''(x_0)\neq 0$ bo'lsada ekstremum mavjudligi ta'minlanadi. Lekin $f''(x_0)=0$ ekanligidan ekstremum mavjud emas deya olmaymiz. Masalan, $y=x^4$ funksiya uchun, $x=0$ nuqta ekstremum nuqta bo'lib, $y''=12x^2$ ikkinchi tartibli hosila esa nolga teng.

Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lsa, bu oraliqda $f(x)$ funksiya o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga, ya'ni global ekstremumiga erishadi. Global ekstremumga $f(x)$ funksiya oraliqning chegaraviy nuqtalarida erishishi mumkinligini e'tiborga olib, ularni topish uchun quyidagi algoritmni keltiramiz:

1. $f'(x)$ hosilani topish.
2. $f(x)$ funksiyaning kritik nuqtalarini topish.
3. $f(a)$, $f(b)$ qiymatlarni aniqlash va barcha kritik nuqtalarda $f(x)$ funksiya qiymatlarini topib, bu qiymatlar orasidan eng kattasi va eng kichigini topish.

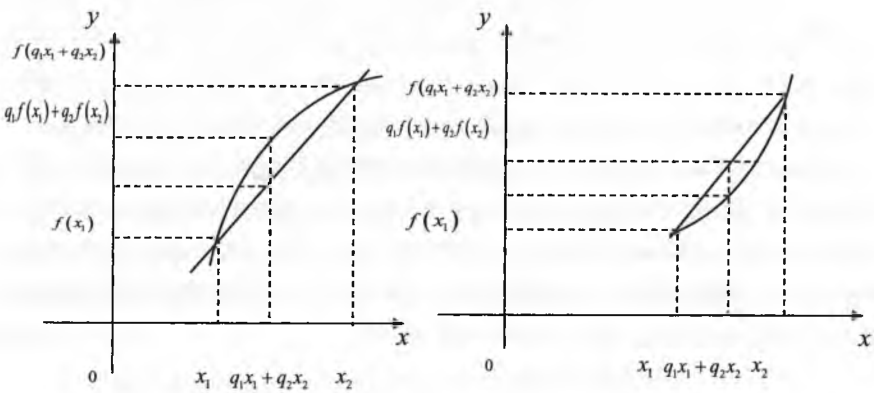
Funksiya qavariqligi va botiqligi. Egilish nuqtalari

Funksiya grafigini chizishda, grafikning qaysi oraliqlarda qavariqligi va botiqligini bilish muhimdir.

Ta'rif. Agar (a,b) intervaldan olingan istalgan x_1 va x_2 lar va $q_1+q_2=1$ munosabatni qanoatlantiruvchi istalgan $q_1\geq 0$ va $q_2\geq 0$ sonlar uchun

$$f(q_1x_1+q_2x_2)\geq q_1f(x_1)+q_2f(x_2)$$
$$\left(f(q_1x_1+q_2x_2)\leq q_1f(x_1)+q_2(x_2)\right)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda qavariq (botiq) deyiladi. Bu ta'rifning geometrik ma'nosi shundan iboratki, agar funksiya (a,b) oraliqda qavariq (botiq) bo'lsa, (a,b) oraliqdan olingan istalgan x_1 va x_2 lar uchun grafikning $(x_1;f(x_1))$ va $(x_2;f(x_2))$ nuqtalarini tutashtiruvchi kesma funksiya grafigidan ordinatalar o'qining yo'nalishiga nisbatan quyida (yuqorida) yotadi.



10-teorema. (a,b) intervalda hosilaga ega bo'lgan $f(x)$ funksiya, bu oraliqda qavariq (botiq) bo'lishi uchun, uning $f'(x)$ hosilasi (a,b) intervalda kamayuvchi (o'suvchi) bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isbot: Zarurligi. $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda qavariq bo'lsin, ya'ni istalgan $x_1,x_2\in(a,b)$ va $q_1+q_2=1$ tenglikni qanoatlantiruvchi musbat q_1 va q_2 sonlar uchun

$$f(q_1x_1+q_2x_2)\geq q_1f(x_1)+q_2f(x_2)$$

tenglik o'rinli bo'lsin. U holda $x_1 < x < x_2$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x lar uchun

$$q_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad q_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

deb olsak, $q_1x_1 + q_2x_2 = x$ bo'lgani uchun quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz:

$$f(x) \geq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Bundan,

$(x_2 - x_1)f(x) \geq (x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2)$ yoki $(x_2 - x)[f(x) - f(x_1)] \geq (x - x_1)[f(x_2) - f(x)]$

va nihoyat $\dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq \dfrac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$ tengsizlikni hosil qilamiz. Bu tengsizlikda avval $x \to x_1$ da, so'ngra $x \to x_2$ da limitlarni topsak, ushbu tengsizliklar kelib chiqadi:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1), \quad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2).$$

Bu yerda, $x_1 < \xi_1 < x$ va $x < \xi_2 < x_2$ bo'lgani uchun $\xi_1 < \xi_2$ va $f'(\xi_1) \geq f'(\xi_2)$.

Yetarliligi. $\xi_1 < \xi_1$ uchun $f'(\xi_1) \geq f'(\xi_2)$ bo'lsa $(x_1 < \xi_1 < x, x < \xi_2 < x_2)$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu tengsizlikdan

$$(x_2 - x)[f(x) - f(x_1)] \geq (x - x_1)[f(x_2) - f(x)]$$

$$\text{yoki } (x_2 - x_1)f(x) \geq (x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1) \cdot f(x_2)$$

va nihoyat $f(x) \geq \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$

tengsizlik kelib chiqadi. Bunda $\dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = q_1$ va $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = q_2$ belgilashlarga asosan, $q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, q_1 + q_2 = 1$ va $x = q_1x_1 + q_2x_2$ munosabatlar o'rinli ekanligidan

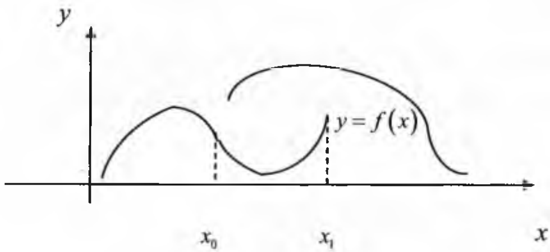
$$f(q_1x_1 + q_2x_2) \geq q_1f(x_1) + q_2f(x_2)$$

tengsizlik kelib chiqadi. Demak, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda qavariq ekan. Botiq funksiya xossasi ham shu tarzda isbotlanadi. Teorema isbot bo'ldi.

11-teorema. Agar $f(x)$ funksiyaning (a,b) intervalda ikkinchi tartibli hosilasi mavjud bo'lib, bu intervalda $f''(x)<0(f''(x)>0)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda qavariq (botiq) bo'ladi.

Isbot: $f''(x)<0$ $(f''(x)>0)$ bo'lsa, u holda $f'(x)$ hosila (a,b) intervalda kamayuvchi ekanligi kelib chiqadi. Bundan esa 1-teoremaga asosan, $f(x)$ funksiyaning (a,b) da qavariq (botiq) bo'lishi kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

Ta'rif. Agar x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning botiqlik va qavariqlik intervallarini ajratib turuvchi chegaraviy nuqta bo'lsa, u holda x_0 nuqta atrofida berilgan $f(x)$ funksiya uchun bu nuqta egilish nuqtasi deyiladi.



Chizmada x_0 va x_1 nuqtalar egilish nuqtalari bo'ladi.

Egilish nuqtasi ta'rifidan ular $f'(x)$ funksiya hosilasining ekstremum nuqtalari bo'lishi kelib chiqadi. Bularni e'tiborga olsak, quyidagi teoremalar o'rinli ekanligi ravshan bo'ladi.

12-teorema (Egilish nuqtasining zaruriy sharti). Ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lgan $f(x)$ funksiya uchun x_0 nuqta egilish nuqtasi bo'lsa, u holda $f''(x_0)=0$.

13-teorema (Egilish nuqtasining yetarli sharti). Agar ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lgan $f(x)$ funksiya uchun $f''(x)$ hosila x_0 nuqta atrofida o'z ishorasini o'zgartirsa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning egilish nuqtasi bo'ladi.

Berilgan $f(x)$ funksiyaning qavariqligi, botiqlik oraliqlarini va egilish nuqtalarini topishni quyidagi algoritm bo'yicha bajarish mumkin:

1. $f''(x)$ hosilani topish.
2. $f''(x)=0$ tenglamani yechish va $f''(x)$ hosila mavjud bo'lmagan nuqtalarni topish, ya'ni $f'(x)$ hosilaning kritik nuqtalarini topish.
3. $f'(x)$ ning kritik nuqtalari atrofida $f''(x)$ hosilaning ishoralarini aniqlash.

Buning uchun $f''(x)>0$ va $f''(x)<0$ tengsizliklarni yechish lozim.

4. Egilish nuqtalarida funksiya qiymatini hisoblash.

Funksiyani tekshirish va uning grafigini chizishni quyidagi algoritm bo'yicha amalga oshirsa bo'ladi.

1. $y=f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasini, imkon bo'lsa o'zgarish sohasini ham topish.

2. Funksiyani juftlik, toqlik va davriylikka tekshirish.

3. $f(x)=0$ tenglama, $f(x)>0$ va $f(x)<0$ tengsizliklarni yechish, ya'ni funksiya nollarini, musbatlik va manfiylik intervallarini topish.

4. Funksiyani uzluksizlikka tekshirish.

5. Funksiyaning vertikal va og'ma asimptotalarini topish.

6. $f'(x)$ hosilani topish, hosila mavjud bo'lmagan nuqtalarni aniqlash, $f'(x)=0$ tenglama va $f'(x)>0, f'(x)<0$ tengsizliklarni yechish, ya'ni funksiyaning kritik nuqtalarini, o'sish va kamayish oraliqlarini topish. Funksiya ekstremumlarini topish.

7. $f''(x)$ hosilani topib, $f''(x)$ mavjud bo'lmagan nuqtalarni aniqlash, $f''(x)=0$ tenglama va $f''(x)>0$, $f''(x)<0$ tengsizliklarni yechish, ya'ni funksiyaning qavariqlik, botiqlik oraliqlari va egilish nuqtalarini topish.

8. Funksiya grafigiga aniqliklar kirituvchi ayrim nuqtalarni topish.

Olingan natijalar jadval ko‘rinishida ifodalanib, shu jadval asosida funksiya grafigining sxematik grafigi chiziladi.

Masalan 1. Funksiyalarni o‘sish va kamayish oraliqlarini toping:

$$y=\frac{x^3}{3}-x^2+\frac{1}{3}.$$

Yechish: Funksiya birinchi tartibli hosilasining nollarini aniqlaymiz.

$y'=x^2-2x=x(x-2)x_1=0$ va $x_2=2$ nuqtalarda hosila nolga aylanadi. Butun sonlar o‘qi bu nuqtalar bilan uch bo‘lakka ajraladi: $(-\infty;\ 0)$,$(0;\ 2)$ va $(2;\ +\infty)$. $(-\infty;\ 0)$ va $(2;\ +\infty)$ oraliqlarda hosila doimiy musbat, demak funksiya o‘suvchi, $(0;\ 2)$ oraliqlarda esa hosila doimiy manfiy. Demak, funksiya kamayuvchidir:

Masalan 2. Funksiyalarni ekstremumga tekshiring: $y = 2x^3-9x^2 + 12x - 2$.

Yechish: Funksiya birinchi tartibli hosilasini hisoblaymiz: $y`=6x^2-18x+12$

Birinchi tartibli hosilani nolga tenglab statsionar nuqtalarni topamiz:

$y'=6x^2-18x+12=0,\qquad 6(x^2-3x+2)=0\Rightarrow 6(x-1)(x-2) = 0,\qquad x_1=1,$ $x_2=2.$

Har bir statsionar nuqtada birinchi tartibli hosila ishorasi o‘zgarishini tekshiramiz: a) $x_1 = 1$ nuqtaning atrofida

$$y' = f'(0,8) = 6(0,8-1)(0,8-2) > 0.$$

$$y' = f'(1,2) = 6(1,2-1)(1,2-2) < 0.$$

Hosilaning ishorasi (+) dan (–) ga o‘zgarayapti. Demak, $x=1$ nuqta maksimumdir.

b) $x_2=2$ nuqtaning atrofida esa $f'(1,8) < 0$ va $f'(2,2) > 0$. Demak $x=2$ min nuqta.

Masalan 3. Funksiyaning qavariq va botiqlik oraliqlarini toping: $y = x\ln x$.

Yechish: Birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarni hisob-laymiz: $y' = \ln x + 1,\ y'' = \frac{1}{x}$. Ikkinch tartibli hosila ishorasi o‘zgarmas oraliqlarni aniqlaymiz. $x>0$ funksiya aniqlanish sohasida $y''>0$ va funksiya o‘zining aniqlanish sohasida doim botiq.

Masalan 4. Funksiyani to‘la tekshiring va grafigini chizing: $y=\frac{x^3+4}{x^2}$.

Yechish: a) funksiyaning aniqlanish sohasi: $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

b) funksiyaning uzilish nuqtasi $x=0$, bunda $\lim\limits_{x\to 0} y=\infty$. $x=0$ vertikal asimptota;

d) og‘ma asimptotani aniqlaymiz: $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^3}=1$;

$b=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x^3+4}{x^2}-x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}=0$. Demak, $y=x$ og‘ma asimptota;

e) funksiyaning Ox o‘qi bilan kesishish nuqtalari: $\frac{x^3+4}{x^2}=0$, $x=-\sqrt[3]{4}$;

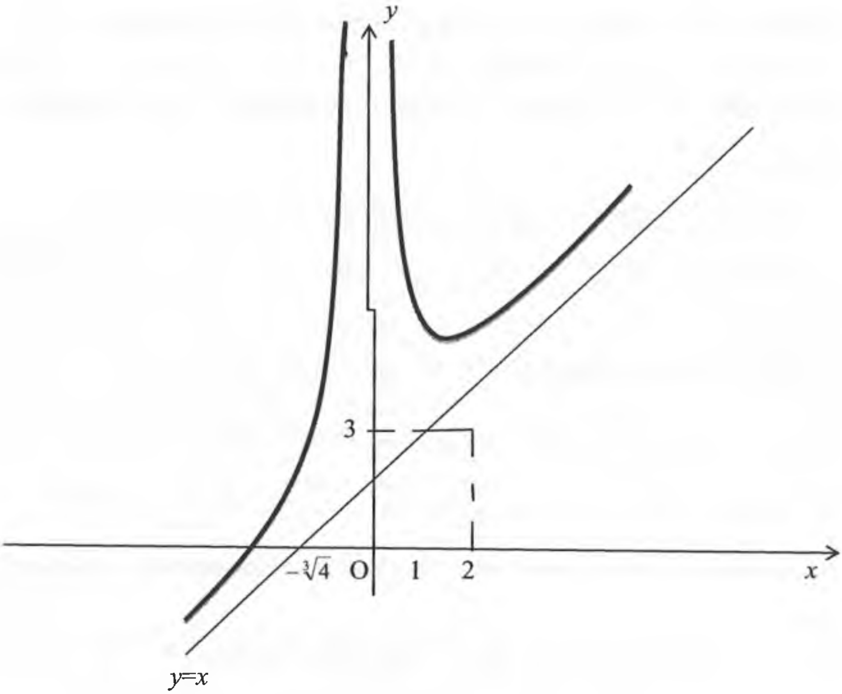
f) funksiyaning ekstremumlari o‘sish va kamayish oraliqlarini topamiz:

$y'=1-\frac{8}{x^3}$, $x=2$ da $y'=0$, x=0 da $y'=-\infty$, $y''=\frac{24}{x^4}$, $y''(2)>0$.

Demak, $y_{min}=y(2)=3$. $x<0$ da $y'>0$ va funksiya bu oraliqda o‘sadi;

g) funksiyaning qavariq va botiqlik oraliqlarini, egilish nuqtasini aniqlaymiz: $y''\neq 0; y''(0)=\infty$. $y''>0$ bo‘lgani uchun bu funksiya doim botiq.

x	$(-\infty;\ 0)$	0	$(0;\ 2)$	2	$(2;\ \infty)$
y'	+		–		–
y''	+		+		+
y	↗	vertikal asimptota	↘	3	↘



Hosilaning iqtisodiyotga tatbiqlari.

Mikroiqtisodiyotda chegaraviy (marjinal) xarajatlar

Mikroiqtisodiyotdagi ikkita oxirgi ko‘rsatkichga doir misollar keltiramiz.

Ulardan birinchisi ishlab chiqarilgan mahsulotning tannarxi C bilan uning hajmi Q orasidagi bog‘lanish $A(Q)=Q:C$ aloqadorlik. Shunday qilib, MC chegaraviy xarajat ΔC tannarxning mahsulot miqdorining o‘sishi ΔQ ga nisbati bilan xarakterlanadi:

$$MC=\frac{\Delta C}{\Delta Q}. \qquad (1)$$

ΔC ning ΔQ bilan uzluksiz bog'liqligini faraz qilib, tabiiy ravishda (1)-tenglikdagi munosabatni uning limiti bilan almashtirish mumkin:

$$MC = \lim_{\Delta Q \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta Q} = C'(Q). \qquad (2)$$

Odatda ilovalarda matematik apparatdan foydalanib chegaraviy xarajat deb (2)-tenglik bilan aniqlanuvchi qiymat tushuniladi.

Masalan 1. Ishlab chiqarish xarajatining ishlab chiqarilayotgan mahsulot hajmi bilan bog'liqligi quyidagi formula bilan ifodalangan bo'lsin:

$C = 40Q - 0.03Q^3$ p.b. (Q – mahsulot hajmi, C – pul birligi)

$Q=15$ hajm birligida o'rtacha va chegaraviy xarajatni aniqlaymiz.

Yechish: a) Mahsulot birligida sarflanadigan o'rtacha xarajat funksiyasi quyidagi formula bilan aniqlanadi: $\tilde{C} = C/Q$ yoki bizning misolda $\tilde{C} = 40 - 0.03Q^2$,

bundan $\tilde{C}(15) = 40 - 0.03 \cdot 225 = 33.25$ pul birligi.

b) Chegaraviy xarajat uchun (1a) ga ko'ra $Q = 15$ da $C'(15) = 19.75$ p.b. ni olamiz.

Boshqacha aytganda, birlik mahsulot ishlab chiqarishga o'rtacha sarf 33.25 pul birligini tashkil qilsa, qo'shimcha mahsulot birligini ishlab chiqarishga sarflanadigan qo'shimcha xarajat 19.75 pul birligini tashkil qiladi va o'rtacha xarajatdan oshmaydi.

Ishlab chiqarish xarajatlari. Agar ishlab chiqarishning xarajat funksiyasi y ni ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori x ning funksiyasi sifatida qaralsa, ya'ni $y = C(x)$ u holda, $y' = C'(x)$ ishlab chiqarishning chegaraviy xarajatini ifodalaydi va taxminan bir birlik qo'shimcha mahsulot ishlab chiqarish uchun sarflanadigan o'zgaruvchan xarajatning o'sishini xarakterlaydi. O'rtacha xarajat bir birlik mahsulot ishlab chiqarishga sarflanadigan xarajatdir. Ya'ni: $y = \frac{C(x)}{x}$.

Chegaraviy daromadlar

$R=R(q)-q$ mahsulot hajmiga bog'liq daromad funksiyasi bo'lsin. U holda

$$\lim_{\Delta q\to 0}\frac{\Delta R}{\Delta q}=R'(q)$$

$R'(q)$ limit chegaraviy daromad deyiladi. Iqtisodda u marjinal daromadlar deyiladi va MR kabi belgilanadi. Demak,

$$MR=R'(q).$$

Masalan 2. Mahsulotni ishlab chiqarish hajmi funksiyasi t vaqtga bog'liq holda

$$u(t)=-\frac{5}{6}t^3+\frac{15}{2}t^2+100t+50$$

ma'lum bo'lsin, bunda t vaqt soatlarda $1\le t\le 8$. Ish kuni boshlangandan 1 soat o'tgandagi va ish kuni tugashiga 1 soat qolgandagi mehnat unumdorligi va uning o'zgarish tezligini aniqlang.

Yechish: Ma'lumki, mehnat unumdorligi $z(t)=u'(t)$. U holda

$$z(t)=-2.5t^2+15t+100.$$

Ish kuni boshlangandan 1 soat o'tgandagi unumdorlik

$$z(1)=-2.5\cdot 1^2+15\cdot 1+100=112.5$$

ya'ni, ish boshlangandan 1 soatdan keyingi mehnat unumdorligi har soatiga
112.5 sh.b. mahsulot.
Ish kuni tugashiga 1 soat qolgandagi mehnat unumdorligi

$$z(7)=-2.5\cdot 7^2+15\cdot 7+100=82.5$$

Mehnat unumdorligining o'zgarish tezligi $z'(t)$, $z'(t)=-5\cdot t+15$

Demak, $z'(1)=-5\cdot 1+15=10$, $z'(7)=-5\cdot 7+15=-20$. Bu ish kuni boshlangandan keyin 1 soat o'tganda mehnat unumdorligining tezligi soatiga 10 sh.b.ga ortishini, ish kuni tugashiga 1 soat qolganda unumdorlik har soatiga 20 sh.b.ga kamayishini anglatadi.

Masalan 3. x ishchi kuchi xarajatlariga bog'liq bir kunlik mahsulot ishlab chiqarish funksiyasi $Q(x)=100x+3x^2$ berilgan bo'lsin. Rejadagi ishni tashkillashtirish uchun 70 ishchi soat zarur.

1) mehnat xarajatlarini bir birlikka orttirganda mahsulot ishlab chiqarish birligini o‘zgarishini;

2) mehnat xarajatlarini bir kunda bir birlikka orttirgandagi ishlab chiqarish funksiyasining aniq qiymatini aniqlang.

Yechish: Chegaraviy chiqimlarni aniqlaymiz: $\Delta Q = Q'(x) = 100 + 6x$, $Q'(70) = 100 + 6x \cdot 70 = 520$, ya’ni bir kunda ishlab chiqarish mahsulot soni taxminan 520 kun birlikka ortadi.

2) Mahsulot ishlab chiqarish hajmi o‘sishining aniq qiymatini topamiz: $\Delta Q = Q(71) - Q(70) = 100 \cdot 71 + 3 \cdot 71^2 - \left(100 \cdot 70 + 3 \cdot 70^2\right) = 100 + 3\left(71^2 - 70^2 = 523\right)$ kun.

Iste’mol va jamg‘arma funksiyasi

Agar x milliy daromad, *C(x)* iste’mol funksiyasi (daromadning sarflanadigan qismi), *S(x)* jamg‘arma funksiyasi bo‘lsa, u holda

$$x = C(x) + S(x)$$

bo‘ladi. Uni x bo‘yicha differensiallab: $\frac{dC}{dx} + \frac{dS}{dx} = 1$ tenglamani hosil qilamiz. Bu yerda, $\frac{dC}{dx}$ – iste’molga bo‘lgan chegaraviy moyillik; $\frac{dS}{dx}$ – jamg‘armaga bo‘lgan chegaraviy moyillik.

Masalan 4. Firmaning mahsulot ishlab chiqarishga sarflanadigan xarajat funksiyasi quyidagicha: $y(x)=0,1x^3-1,2x^2+5x+250$ p.b. (pul birligi)

Ishlab chiqarishning o‘rta va chegaraviy xarajatini va uning $x=10$ dagi qiymatini toping.

Yechish: Funksiyaning $y'(x)$ hosilasini va uning $x=10$ da $y'(10)$ qiymatini topamiz. Ishlab chiqarishning chegaraviy xarajatlari:

$$y'(x) = 0,3x^2 - 2,4x + 5, \quad y'(10) = 30 - 24 + 5 = 11$$

O‘rtacha xarajatlar: $y = \frac{y(x)}{x} = \frac{0,1x^3 - 1,2x^2 + 5x + 250}{x} = 0,1x^2 - 1,2x + 5 + \frac{250}{x}$.

$y = \frac{y(10)}{10} = 10 - 12 + 5 + 25 = 28$ bu berilgan ishlab chiqarish darajasida bir birlik mahsulot ishlab chiqarishga sarflanadigan o‘rtacha xarajatdir. Funksiya orttirmasini taqribiy hisoblash formulasiga ko‘ra $\Delta C \approx dC = C'(x)\Delta x$, $C'(10)$ kattalikni shunday ifodalash mumkin: agar 10 ta mahsulot ishlab chiqarilgan bo‘lsa, u holda o‘n birinchi mahsulot ishlab chiqarish bo‘yicha qo‘shimcha xarajatlar taxminan $C'(10)=9$ ga teng.

Masalan 5. Mamlakatning iste’mol funksiyasi $C(x)=10+0{,}47x+$ $+0{,}36x^{3/4}$.

Bu yerda, a) x jami milliy daromadning (pul birligida) iste’molga bo‘lgan chegaraviy moyilligini;

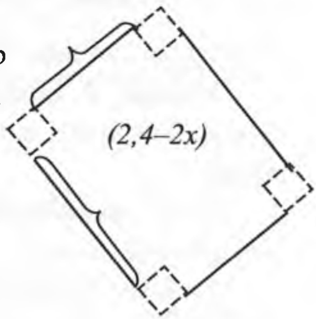
b) agar milliy daromad 15 milliard p.b. bo‘lsa, jamg‘armaga bo‘lgan chegaraviy moyillikni toping.

Yechish: a) iste’molga bo‘lgan chegaraviy moyillik: $C'(x)=0{,}47+0{,}27x^{-\frac{1}{3}}$; uning qiymati esa $C'(15)=0{,}47+0{,}27\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{15}}\approx 0{,}57$;

b) jamg‘armaga bo‘lgan chegaraviy moyillik: $S'(x)=1-C'(x)=0{,}43$.

Masalan 6. To‘g‘ri to‘rtburchak shaklidagi $2{,}4\times 1{,}5m^2$ kartondan qopqoqsiz quti yasash talab qilinadi. Kartonning to‘rttala burchagidan tomoni qanday bo‘lgan kvadrat kesib olinganda, yasalgan qutining hajmi maksimal bo‘ladi.

Yechish: tomoni x m bo‘lgan kvadrat qirqib olinsin. U holda kvadratning tomonlari uzunliklari $2{,}4–2x$ va $1{,}5–2x$ m dan bo‘lib qoladi. Hosil qilingan to‘g‘ri burchakli paralelopiped $(1{,}5–2x)$ uchun $h=x$, asosining tomonlari $2{,}4–2x$ va $1{,}5–2x$ m bo‘ladi. Demak, hosil qilingan qutining hajmi $V(x)= x(2{,}4–2x)(1{,}5–2x)$ bo‘lib bu funksiyaning maksimum qiymatini topamiz.



$(2{,}4–2x)$ $V(x)=x(2{,}4–2x)(1{,}5–2x) = 4x^3-7{,}8x^2+3{,}6x$

$V'(x)=12x^2-15{,}6x+3{,}6$ $V(x)$ maksimumini $V'(x)=0$ tenglamani yechib, $V(x_0)$ qiymatlarning eng kattasi olinadi.

$12x^2-15{,}6x+3{,}6=0 \Rightarrow x_1=1,\ x_2=0{,}3.$ $x_1=1$ bo‘lganda $V(x)$ funksiyaning qiymati manfiy bo‘ladi (hajm manfiy son bo‘lmaydi).

Demak, qirqib olingan kvadrat tomoni $x=0,3$ *m*.

Masalan 7. Agar ertapishar kartoshka terimi avgustning boshida boshlansa, u holda har bir sotixdan *200 kg* dan hosil olish mumkin va har bir kg i *12 p.b.* da sotiladi. Terimni bir haftaga kechiktirish har sotixdan *50 kg* dan hosildorlikni oshiradi, lekin narx har hafta *2 p.b.* ga arzonlashadi. Agar terim muddati 5 hafta bo‘lsa, kartoshkani sotishdan olinadigan foyda eng ko‘p bo‘lishi uchun hosilni qaysi haftada yig‘ib olish kerak.

Yechish: Hosilni t haftada yig‘ib olganda foyda eng ko‘p bo‘lsin ($1 \le t \le 5$). U holda shu haftada kartoshkani bir kg ning narxi $12-2(t-1)=14-2t$ *p.b.* bo‘ladi. Hosildorlik esa har gektaridan $200+50(t-1) = 150+50t$ kg dan bo‘ladi. Bir gektar hosilning umumiy foyda tenglamasini tuzib olamiz:

$$\pi(t)=(200+50(t-1))(12-2(t-1))=100(3+t)(7-t)=100(21+4t-t^2).$$

Demak, umumiy foyda eng ko‘p bo‘lishi uchun $\pi(t)=100(21+4t-t^2)$ funksiya maksimum qiymatini topish kerak. Buning uchun esa $\pi'(t)=0$ tenglamani yechib, aniqlangan t sonini umumiy foyda tenglamasiga qo‘ysak har bir gektar yerdan olinadigan *max* daromad kelib chiqadi. $\pi'(t)=0 \to 4-2t=0,\ t_0=2$. Demak, $\pi(2)=100(21+8-4)=2500$ mavsum davomida bir gektar yerdan olinishi mumkin bo‘lgan eng ko‘p daromad. Shunday qilib hosilni ikkinchi haftada yig‘ib olish kerak ekan.

Elastiklik tushunchasi

Narx-navo siyosatining analizida talabning elastiklik tushunchasi qo‘llaniladi.

Faraz qilaylik, $D=f(P)$ talab, talab funksiyasi, P tovarning narxi bo‘lsin. U holda ehtiyoj (talab)ning elastikligi deganda tovarning narxi bir foizga o‘zgarayotganda ehtiyojning o‘zgarish foizi

$$E=\frac{\Delta D/D\cdot 100\%}{\Delta P/P\cdot 100\%}$$ tushuniladi: (3)

Oldingi holdagiday, ΔD ΔP bilan uzluksiz bog'liq deb, $\Delta P \to 0$ da limitga o'tish qulay:

$$E(D) = P\frac{D'(P)}{D(P)} \qquad (4)$$

Shunga o'xshash tushunchani taklif $S(P)$ funksiyasi uchun ham kiritish mumkin. Eslatib o'tamiz, $D(P)$ funksiya kamayadi, $S(P)$ funksiya esa P narx o'sishi bilan o'sadi.

Elastiklikning ba'zi xossalarini ko'rsatamiz. (4)-formuladan elastiklik formulasini quyidagicha ifodalash mumkinligi ko'rinib turibdi:

$$E(D) = P(\ell n D(P))'. \qquad (5)$$

(10)-tenglikdan $E(D)$ ning logarifmik funksiya xossalariga ega ekanligi kelib chiqadi, ya'ni

$$E(D_1 D_2) = E(D_1) + E(D_2),$$

$$E\left(\frac{D_1}{D_2}\right) = E(D_1) - E(D_2).$$

$D(P)$ kamayuvchi funksiya bo'lgani uchun $D'(P)<0$, u holda (4)-formulaga asosan $E(D)<0$. Aksincha, talab funksiyasi o'suvchi ekanligidan, unga mos keluvchi $E(S)$ elastiklik funksiyasi uchun $E'(S)>0$.

$|E(D)|$ ning kattaligiga qarab ehtiyojning uch turi farqlanadi:

a) agar $|E(D)|>1$, $(E(D)<-1)$ bo'lsa, u holda talab elastik deb hisoblanadi;

b) agar $|E(D)|=1$, $(E(D)=-1)$ bo'lsa, u holda talab birlik elastik deb hisoblanadi;

d) agar $|E(D)|<1$, $(E(D)>-1)$ bo'lsa, u holda noelastik bo'lmagan deb hisoblanadi.

Masalan 8. Talab funksiyasi quyidagicha bo'lsin $D(P)=D_0 exp(-kP^2)$, D_0 va k – ma'lum parametrlar. P narxning qanday qiymatlarida talab elastik bo'lishini toping.

Yechish: (4)-formulaga asosan $E(D)$ ifodani tuzamiz:

$$E(D) = \frac{-2kP^2 D_0 \exp(-kP^2)}{D_0 \exp(-kP^2)}; \qquad E(D) = -2kp^2 \qquad (6)$$

Talab elastik bo'lishi uchun $2kP^2 > 1$ tengsizlik bajarilishi zarur, bundan $P > 1/\sqrt{2k}$ ni hosil qilamiz.

Masalan 9. Talab elastikligi har xil bo'lgan variantlarda tovarning narxi o'sishi bilan daromad o'zgarishini toping.

Yechish: I daromad tovarning narxi *P* bilan *D* talab miqdorining ko'paytmasiga teng: $I(P) = D(P)P$. Bu funksiyaning hosilasini topamiz:

$$I'(P) = D(P) + D'(P)P.$$

Endi (9)-formulani hisobga olib, talab elastiklikning barcha variantlarini tahlil qilamiz.

1) $E(D) < -1$ bo'lsa, u holda bu tengsizlikni (4) ga qo'yib, (5) ning o'ng tomoni manfiyligini olamiz, shunday qilib, elastik talabda *P* narxning o'sishi daromadning kamayishiga olib keladi. Aksincha, tovar narxining kamayishi daromadning oshishiga olib keladi.

2) $E(D) = -1$ bo'lsa (4) dan (6) ning o'ng tomoni nolga tengligi kelib chiqadi. Neytral talabda tovar narxining o'zgarishi daromadga ta'sir qilmaydi.

3) $E(D) > -1$ bo'lsa, $I'(P) > 0$ elastik bo'lmagan talabda *P* tovar narxining oshishi daromadning o'sishiga olib keladi.

Masalan 10. Faraz qilaylik, mahsulot tannarxi *C* va uni ishlab chiqarish hajmi *Q* orasidagi bog'lanish quyidagi formula bilan ifodalansin: $C = 50 - 0{,}4\ Q,\ Q = 30$ p.b.

Mahsulot ishlab chiqarishdagi tannarx elastikligini aniqlang.

Yechish: (9)-formulaga asosan $E(Q) = -\dfrac{0.4Q}{50 - 0.4Q}$.

Bundan *Q=30* da izlanayotgan elastiklik taxminan *0,32* ni tashkil qiladi, ya'ni berilgan hajmda mahsulot ishlab chiqarishni *1%* ga oshirish tannarxning taxminan *0,32%* ga kamayishiga olib keladi.

Qo'shimcha qiymatni maksimallashtirish (iloji boricha orttirish).

Faraz qilaylik, *Q* sotilgan tovar miqdori, *R(Q)* kirim, daromad funksiyasi, *C(Q)* tovar ishlab chiqarishdagi chiqim funksiyasi. Haqiqatan bu funksiyalarning ko'rinishi birinchi navbatda ishlab chiqarish usuli, infrastrukturasi va h.k.larni tashkil qilishga bog'liq. Ishlab chiqarilgan tovarni sotishdan olingan qo'shimcha qiymat quyidagi formula bilan beriladi:

$$\Pi(Q) = R(Q) - C(Q) \qquad (7)$$

Mikroiqtisodiyotda quyidagi tasdiq ma'lum: qo'shimcha qiymat maksimal bo'lishi uchun oxirgi (предельный) kirim va oxirgi chiqim teng bo'lishi kerak. Oxirgi kirim va chiqim ko'rsatkichlari (9) ga o'xshash tarzda ifodalanadi. Shunday qilib, bu prinsipni quyidagicha yozish mumkin: $R'(Q) = C'(Q)$.

Haqiqatan ekstremumning zaruriy shartidan (7)-funksiya uchun $\Pi'(Q) = 0$ asosiy prinsip kelib chiqadi.

Masalan 11. Daromad va xarajat quyidagi formulalar bilan aniqlanganda:

$$R(Q) = 100Q - Q^2, \quad C(Q) = Q^3 - 37Q^2 + 169Q + 4000,$$

qo'shimcha qiymatning maksimumini toping.

Yechish: (7) ga asosan, qo'shimcha qiymat $\Pi(Q) = -Q^3 + 36Q^2 - 69Q - 4000$. Qo'shimcha qiymat funksiyasining hosilasini nolga tenglab, quyidagi tenglamani olamiz $Q^2 - 24Q + 23 = 0$. Bu tenglamaning ildizlari $Q_1 = 1$, $Q_2 = 23$. Tekshirish shuni ko'rsatadiki, qo'shimcha qiymat o'z maksimumiga $Q = 23$ da erishadi va $\Pi_{max} = 1290$.

Masalan 12. Korxona ishlab chiqarayotgan mahsulot narxi p va unga bo'lgan talab q orasidagi bog'lanish $q = 18 - \sqrt{p}$ tenglik bilan ifodalangan. Talabning elastikligini toping. Narxning qanday qiymatlarida talab elastik, neytral va noelastik bo'ladi. Narx p=100; p=150 pul birligi bo'lganda korxona rahbarlariga bir birlik tovar narxi haqida qanday maslahatlar berish mumkin?

Yechish: Talabning elastikligi formulasiga ko'ra:

$$E_p(q) = \frac{p}{18 - \sqrt{p}}\left(18 - \sqrt{p}\right)' = -\frac{\sqrt{p}}{2\left(18 - \sqrt{p}\right)}.$$

Talabning neytral holati qachon bo'lishini $|E_p(q)|=1$ tenglamani yechib narxning qiymati aniqlanadi. $|E_p(q)|=1 \Rightarrow \frac{\sqrt{p}}{2(18-\sqrt{p})}=1, \quad p=144.$ Keyin $p>0$ va $q>0$ $(p<324)$ ekanligini hisobga olib, agar $0<p<144$ bo'lsa talab noelastik; $144<p<324$ da esa talab elastik.

Mahsulot ishlab chiqarishning chegirmalari x mahsulot miqdorining funksiyasidir: $k=(x)$ ishlab chiqarish chegirmalari funksiyasi bo'lsin.

Mahsulot ishlab chiqarish miqdori Δx ga o'zgarganda ishlab chiqarish chegirmalari $k(x+\Delta x)$ga ortadi, ya'ni chegirmalar $\Delta k = k(x+\Delta x)-k(x)$ga o'zgaradi.

Chegirmalarning o'rta qiymati $\frac{\Delta k}{\Delta x}$ nisbatga teng bo'lib, u mahsulot miqdorining bir birlik ortgandagi chegirmalari orttirmasidir.

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta k}{\Delta x}=k'(x)$ limit ishlab chiqarishning chegaraviy chegirmalaridir.

Shuningdek, $U(x)$ orqali x dona mahsulot sotgandagi tushum funksiyasi aniqlansa, u holda $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}=u'(x)$ limitni *chegaraviy tushum* deyiladi.

Masalan 13. x hajmdagi mahsulot ishlab chiqarishdagi k chiqim funksiyasi $k=100x-\frac{x^3}{3}$ bo'lsa, a) 5 birlik b) 10 birlik mahsulot ishlab chiqarishdagi chegaraviy chiqimlarni aniqlang.

Yechish: $k'=100-\frac{x^2}{10}$.

Bundan $k'(5)=100-\frac{5^2}{10}=97.5, \quad k'(10)=100-\frac{10^2}{10}=90$.

Bu 5 birlik mahsulot ishlab chiqarish hajmida keyingi (oltinchi) birlik mahsulot ishlab chiqarish uchun chegaraviy chiqim *97.5*; 10 hajm birligidagi ishlab chiqarishda esa u 90 ekaniligini anglatadi.

Masalan. 14. Narxning talabga bog'liqligi $p=10-2\cdot x$, bunda x talab, p narx. $x=2$ bo'lgandagi tushumning o'zgarishini aniqlang.

Yechish: Mahsulot sotuvidan keladigan tushum $u = x \cdot p = x(10-2x) = 10x - 2x^2$. Bundan $u' = 10-4x$, $u'(2) = 10 - 4 \cdot 2 = 2$. Bu, agar talab 2 miqdordan 3 taga ortsa, tushum taxminan 2 birlikka ortishini anglatadi.

Funksiya elastlikligi

Funksiya hosilasi yordamida funksiya argumenti orttirmasiga mos funksiya orttirmasini hisoblash mumkin. Ko'pgina masalalarda erkli o'zgaruvchining foizlaridan o'zgarishiga mos funksiyaning foizlardagi o'zgarishini (nisbiy orttirmasini) hisoblash qulaylik tug'diradi. Bular funksiya elastikligi (ba'zan nisbiy hosila) tushunchasini kiritilishiga sabab bo'ladi.

$y = f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. Δx argument orttirmasi, erkli o'zgaruvchining nisbiy orttirmasi esa $\frac{\Delta x}{x}$.

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ funksiya orttirmasi, $\frac{\Delta y}{y}$ funksiyaning nisbiy orttirmasidir.

Funksiya nisbiy orttirmasining argument nisbiy orttirmasiga nisbiylikni qaraymiz. Bu munosabat funksiya nisbiy orttirmasi argument nisbiy orttirmasidan kattaligini bildiradi.

$$\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y}$$

Agar $y = f(x)$ funksiya differensiallashuvi bo'lsa, u holda

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} : \frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} f'(x) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Bu limit funksiya nisbiy orttirmasi erkli o'zgaruvchi nisbiy orttirmasining $\Delta x \to 0$dagi munosabati bo'lib, x erkli o'zgaruvchiga nisbatan $y = f(x)$ funksiyaning elastikligi deyiladi. Odatda *f(x)* funksiya elastikligi $E_x(y)$ kabi belgilanadi, ya'ni

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

X o‘zgaruvchiga nisbatan elastiklik bu erkli o‘zgaruvchining *1%* ga o‘zgargandagi funksiyaning taqribiy foizlardagi o‘zgarishidir (o‘sishi va kamayishi).

Masalan 15. $y=3x-6$ funksiya elastikligini $x=10$ dagi qiymatini aniqlang.

Yechish: $E_x(y)=\frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{x}{3x-6}\cdot 3=\frac{3x}{3(x-2)}=\frac{x}{x-2}$,

$$E_{x=10}=\frac{10}{10-2}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}=1.25.$$

Bu, agar x 1% ga o‘ssa, u holda y 1,25% ga o‘sishini bildiradi.

Masalan 16. $y=1+2x-x^2$ funksiya elastikligini $x=1$ dagi qiymatni toping.

Yechish: $E_x(y)=\frac{x}{1+2x-x^2}\cdot(2-2x)=\frac{2x-2x^2}{1+2x-x^2}$.

$x=1$ da $\frac{2-2}{1+2-1}=0$

Bu, erkli o‘zgaruvchi x *1%* ga ortsa, u holda funksiya qiymati o‘zgarmasligini bildiradi.

Talabning narxga nisbatan elastikligi

Ma’lum mahsulotga bo‘lgan talab va uning narxi orasidagi funksional bog‘lanishi (boshqa mahsulotlar narxi, iste’molchilar daromadi va iste’mol strukturasi o‘zgarmas bo‘lgan shartda) talabga mos narx o‘rnatilishi imkonini beradi. Lekin ko‘p iqtisodiy masalalarda talabning qiymatini aniqlash emas, balki narxning o‘zgarishiga bog‘liq talabning o‘zgarishini, boshqacha aytganda, narxga nisbatan talabning elastikligini aniqlash muhimroqdir.

Faraz qilaylik, q talab p narxga bog‘liq bo‘lsin:

$$q=f(p)$$

Bu yerda, Δp – narxning orttirmasi; Δq – talablarning orttirmasi.

Narxning nisbiy o‘zgarishi $\frac{\Delta p}{p}$, talabning nisbiy orttirmasi $\frac{\Delta q}{q}$.

$\frac{\Delta q}{q}:\frac{\Delta p}{p}$ nisbat mahsulot narxi 1% ga orttirilgandagi talabning nisbiy o'zgarishini ifodalaydi.

Ta'rif. Narxga nisbatan talab elastikligi deb,

$$\mathrm{E}p(q)=\mathrm{E}_T=\lim_{\Delta p\to 0}\left(\frac{\Delta q}{q}:\frac{\Delta p}{p}\right)=\frac{p}{q}\lim\frac{\Delta q}{\Delta p}$$

limitga (agar u mavjud va chekli bo'lsa) aytiladi.

Demak, $\mathrm{E}_T=\frac{p}{q}\cdot\frac{dq}{dp}$ talabning narxga nisbatan elastikligi, mahsulot narxi 1% ga ortgandagi shu mahsulotga bo'lgan talabning o'zgarishini aniqlaydi.

Ko'pincha, talab funksiyasi kamayuvchi bo'lib, mahsulotning narxi o'sishi bilan unga bo'lgan talab kamayadi. Demak, bu holda

$$\frac{dq}{dp}<0.$$

Manfiylikdan qutilish uchun talab elastikligini o'rganishda

$$\mathrm{E}_T=-\frac{p}{q}\cdot\frac{dq}{dp}$$

Agar $\mathrm{E}_T>1$ bo'lsa, ya'ni agar narxning *1%* ga ortishi talabning *1%* dan ortiq kamayishiga mos kelsa, bu holda talab elastik deyiladi. Agar $\mathrm{E}_T=1$ bo'lsa, ya'ni agar mahsulot narxining *1%* ga ortishi talabning *1%* ga kamayishini keltirib chiqarsa, *talab neytral* deyiladi.

Agar $0<\mathrm{E}_T<1$ bo'lsa, ya'ni narxning 1% ga ortishi taklifning 1% dan kam o'zgarishini keltirib chiqarsa, unda *talab elastik* deyiladi.

Masalan 17. Talabning p narxga bog'liqligi $q=10-p$ bo'lsa, $p=2$ dagi elastiklikni aniqlang.

Yechish: $\mathrm{E}=\frac{p}{q}\cdot\frac{dq}{dp}=\frac{p}{10-p}(-1)=-\frac{p}{10-p}$. $p=2$ da $\mathrm{E}=-\frac{2}{8}=-\frac{1}{4}$, $|\mathrm{E}|=\frac{1}{4}$.

Bu narx 2 bo'lganda uni 1% ga ortishi talabning $\frac{1}{4}$% ga kamayishini anglatadi.

Masalan 18. Agar talab funksiyasi $q=\frac{c}{p}$ ($c-const$) bo'lsa, talabning elastikligini aniqlang.

Yechish: Talabning elastikligini hisoblaymiz:

$$E_T = -\frac{p}{q}\cdot\frac{dq}{dp} = -\frac{p}{c/p}\left(\frac{c}{p}\right)' = -\frac{p^2}{c}\left(-\frac{c}{p^2}\right) = 1$$

Demak, talab mahsulot narxiga teskari proporsional bo'lsa, u holda har qanday narxda talabning elastikligi 1 ga teng neytraldir.

Talabning daromadga nisbatan elastikligi

Ma'lum mahsulot talabiga bog'liq barcha faktorlar o'zgarmasdan iste'molchilarning daromadlari o'zgaruvchan bo'lsa, u holda mahsulotga bo'lgan q talab r daromad funksiyasidir: $q = f(r)$

Bu yerda, Δr – daromad o'zgarishi; Δq – mos talab o'zgarishi bo'lsin.

$$\frac{\Delta q}{q} : \frac{\Delta r}{r}$$

nisbat daromadlar 1% ga ortganda mahsulotga bo'lgan talabning o'zgarishini ifodalaydi.

$$E_r(q) = E_d = \lim_{\Delta r \to 0}\left(\frac{\Delta q}{q} : \frac{\Delta r}{r}\right) = \frac{r}{q}\cdot\frac{dq}{dr}$$

ifoda daromadga nisbatan talabning elastikligi deyiladi.

Daromadga nisbatan talabning elastikligi bu iste'molchilar daromadlar ishlab chiqarishning o'zgarishiga bog'liq talabning reaksiyasi o'lchovidir.

Masalan 19. Shved iqtisodchisi German Vold Shvetsiyada Birinchi Jahon urushidan keyingi davrda ba'zi iste'mol mahsulotlarini ishlashga bo'lgan talabning elastikligini o'rgangan. Uning natijalari quyidagi jadvalda keltirilgan.

Iste'mol mollari	Daromadga nisbatan talab elastikligi		Butun Shvetsiya aholisi bo'lgan talab elastikligi	
	Ishchi va xizmatchilar gruppasi	Butun Shvetsiya aholisi	Mahsulot narxiga nisbatan	Mahsulot narxiga nisbatan

		bo‘yicha		
Sut va qatiq	0.25	0.00	–0.30	–
Sut	0.20	0.00	–0.20	–
Yog‘ va margarin	0.25	0.60	–0.70	–
Yog‘	0.40	0.55	–0.90	+0.35
Sir	0.35	0.50	–0.20	–
Tuxum	0.50	0.70	–	–
Go‘sht	0.25	0.30	–0.30	–
Cho‘chqasiz go‘sht	0.30	0.30	–0.50	+0.30
Cho‘chqa	0.10	0.30	–0.45	+0.15
Un	–0.50	–0.55	–0.15	+0.15
Qand	0.25	0.30	–0.35	+0.55

Masalan, un uchun ishchi va xizmatchilarning daromadiga nisbatan talab elastikligi –0.50 bo‘lsa, butun aholi daromadi bo‘yicha esa –0.55. Bu daromadlarning o‘sishi bilan unga bo‘lgan talab kamayganini, bunda ishsizlar orasida bu ko‘rsatkich yuqori sur’atlarda ekanligini anglatadi. Agar daromad oshsa, u holda uning iste’moli boshqa oziq-ovqat mahsulotlari bilan almashtirishdan kamayishini anglatadi.

Muhim muammolardan biri, masalan, maoshlarning ortishi bilan talabning o‘zgarishidir. Bu holda daromadga nisbatan talab elastikligi haqidagi bilimlar muhim hisoblanadi.

Talab va taklifning elastikligi

Ta’rif. Vaqt birligida sotuvga taklif etilgan mahsulot miqdori taklif deyiladi. Ma’lum davr uchun mahsulot taklifi o‘suvchi funksiyadir. Tashqi teng shartlarda ma’lum narxdagi taklif bu narxdan past narxdagi taklifdan doim katta bo‘ladi. Lekin narxning kamayishidan ham taklifning o'sishi holatlari ham kuzatiladi. Masalan, bug'doy doniga bo'lgan narxning pasayishi dehqondan ma'lum daromadni olishi uchun taklifni orttirishini undaydi.

S=S(p) narxga bog'liq taklif funksiyasi bo'lsin. Δp narx orttirmasi Δs mos taklif orttirmasi bo'lsin. $\frac{\Delta p}{p}$ – narxning nisbiy orttirmasi, $\frac{\Delta S}{S}$ – taklifning nisbiy orttirmasi.

Ta'rif. $\mathrm{E}(S)=\mathrm{E}_p=\lim\limits_{\Delta p\to 0}\left(\frac{\Delta S}{S}:\frac{\Delta p}{p}\right)=\frac{p}{S}\lim\limits_{\Delta p\to 0}\frac{\Delta S}{p}=\frac{p}{S}\cdot S'$ limit narxga nisbatan taklif elastikligi deyiladi. Demak, narxga nisbatan taklif elastikligi narx 1% ga o'zgargandagi taklif o'zgarishi foizini bildiradi.

To'la va o'rtacha xarajatlar elastikligi

Tashkilotda *x* birlik mahsulot ishlab chiqarilsin. *k(x)* shu miqdordagi ishlab chiqarish uchun to'liq xarajatlar funksiyasi bo'lsin. U holda to'la xarajatlar elastikligi

$$\mathrm{E}_x(k)=\mathrm{E}_k=\frac{x}{k}\cdot\frac{dk}{dx}=\frac{x}{k}\cdot k'=k':\frac{k}{c}.$$

$MC=k'$ – ishlab chiqarishning chegaraviy xarajatlari. Demak, to'la xarajatlar elastikligi bu chegaraviy xarajatlarning o'rtacha xarajatlarga nisbatidir. $\pi=\frac{k}{x}$ o'rtacha xarajatlar elastikligi.

$$\mathrm{E}_x(\pi)=\mathrm{E}_\pi=\frac{x}{\pi}\cdot\frac{d\pi}{dx}=\frac{x}{k}\cdot\frac{x\cdot\frac{dk}{dx}-k}{x^2}=\frac{x^2}{k}\cdot\frac{x\cdot\frac{dk}{dx}-k}{x^2}=\frac{x}{k}\cdot\frac{dk}{dx}-1=\mathrm{E}_k-1$$

Demak, o'rtacha xarajatlarning elastikligi to'la xarajatlar elastikligida bir $\mathrm{E}_k=1$ bo'lsa, o'rtacha xarajatlar elastikligi nol. Agar $\mathrm{E}_\pi=0$ bo'lsa, u holda o'rtacha xarajatlar doimiy.

Bundan $x\cdot\frac{dk}{dx}-k=0\Rightarrow\frac{dk}{dx}=\frac{k}{x}$.

Demak, agar to'la xarajatlar elastikligi birga teng bo'lsa, u holda to'la chegaraviy xarajatlar o'rta to'la xarajatlarga teng bo'ladi.

Masalan 20. Taklif elastikligining mavjud variantlarida narxning o'sishidan sotuvchi daromadi o'zgarishini aniqlang.

Yechish: $q=q(p)-$narxga bog'liq taklif funksiyasi bo'lsin. U holda V daromad funksiyasi $V=q\cdot p=q(p)\cdot p$.

Narxga nisbatan daromad elastikligi

$$\mathrm{E}_p(V)=\mathrm{E}_p(qp)=\mathrm{E}_p(q)+\mathrm{E}_p(p)=\mathrm{E}_p(q)+1$$

bunda $\mathrm{E}_p(q)-$narxga nisbatan taklif elastikligi manfiydir. U holda $\mathrm{E}_p(V)=1-|\mathrm{E}_p(q)|$. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin.

1. $|\mathrm{E}_p(q)|>1$ bo'lsa (taklif elastik), u holda $\mathrm{E}_p(V)<0$. Bu daromadning o'zgarishi narxning o'zgarishi yo'nalishiga qarama-qarshi, ya'ni elastik taklifda narxning oshishi daromadning kamayishini, narxlarning pasayishi daromadning o'sishini anglatadi.

2. $|\mathrm{E}_p(q)|=1$ bo'lsa, (taklif neytral), u holda $\mathrm{E}_p(V)=0$. Bu narx o'zgarishining daromadga ta'siri yo'qligini bildiradi.

3. $|\mathrm{E}_p(q)|<1$ bo'lsa, (taklif noelastik), u holda $\mathrm{E}_p(V)>0$. Bu narxning o'zgarishi daromadning ham narx yo'nalishida o'zgarishini anglatadi, ya'ni narxlarning oshirilishi daromadning ham oshishini bildiradi. Bu hol sotuvchilar uchun qulay holdir.

Masalan 21. Agar daromad 1000 sh.b.dan 1037 sh.b.gacha kun birlikda oshib, daromadga nisbatan taklif elastikligi $\mathrm{E}_r(q)=4.08$ bo'lsa, mahsulotga bo'lgan talab qanday o'zgaradi?

Yechish: $\mathrm{E}_r(q)=4.08$ miqdor r daromad *1%* ortganda taklif *4.08%* ga ortishini anglatadi.

Masala shartiga ko'ra esa daromad $\frac{1037-1000}{1000}\cdot 100\%=3.7\%$ da ortadi.

Demak, bu holda taklif $3.7\cdot 4.08=15.08\%$ ga ortadi.

Mehnat unumdorligi

$u=u(t)$ orqali t vaqt davomida ishlab chiqarish funksiyasini belgilaymiz. U holda $\Delta t=t_1-t_0$ vaqt davomidagi mahsulot ishlab chiqarish hajmi

$$\Delta u=u(t_1)-u(t_0)=u(t_0+\Delta t)-u(t_0)$$

O'rtacha mehnat unumdorligi – bu ishlab chiqarilgan mahsulot hajmining unga sarflangan vaqtga nisbatidir, ya'ni $z_{o'r}=\frac{\Delta u}{\Delta t}$

t_0 vaqtdagi mehnat unumdorligi deb $\Delta t\to 0$dagi $z_{o'r}$ intiladigan qiymat tushuniladi, ya'ni $t(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta t}$

Demak, $z(t)=u'(t)$.

Ishlab chiqarish samaradorligining kamayish qonuni

Bu qonun shuni tasdiqlaydiki, ishlab chiqarishning asosiy faktorlaridan birini, masalan asosiy xarajatlar *K* ni oshirish bilan *K* ning qaysidir qiymatidan boshlab ishlab chiqarish funksiyasi qiymati kamayib boradi. Boshqacha qilib aytganda, ishlab chiqarilgan mahsulotning *V* hajmi *K* ning funksiyasi sifatida pastga qavariqlik yuqoriga qavariqlik bilan almashadigan grafik bilan ifodalanadi.

Masalan 22. Faraz qilaylik, V ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi funksiyasi quyidagi formula bilan berilgan bo'lsin:

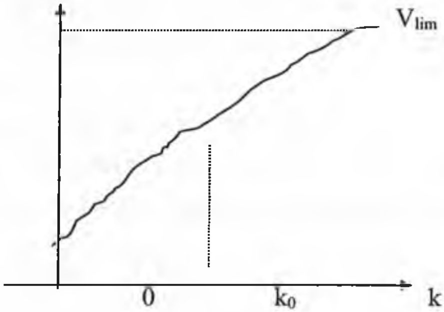
$$V(k)=V_{\ell im}\left(1+e^{-bk+c}\right). \qquad (8)$$

Bu yerda, b va c ma'lum musbat sonlar (ular avvalambor ishlab chiqarishni tashkil qilish strukturasi bilan aniqlanadi), $V_{\ell im}$ ishlab chiqarilayotgan mahsulotning imkoni boricha maksimal hajmi. (8)-funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini hisoblash qiyin emas.

$$V''(K)=V_{\ell im}b^2e^{-bk+c}\frac{e^{-bk+c}-1}{\left(1+e^{-bk+c}\right)}.$$

$V''(K)=0$ shartdan kritik (shubhali) nuqta topiladi: $K_{cr}={}^{c}/_{b}$ (9)

va bu funksiyaning grafigi chizmada tasvirlangan.



K_{cr} egilish nuqtasida (9)-funksiya grafigining pastga qavariqligi yuqoriga qavariqlik bilan o'zgaradi. Bu nuqtagacha asosiy xarajatlarning o'sishi mahsulot hajmining jadal o'sishiga olib keladi: mahsulot hajmining o'sish sur'ati (birinchi hosilaga o'xshash) o'sadi, ya'ni $V''(K)>0$. Agar $K>K_{cr}$ bo'lsa, ishlab chiqarilayotgan mahsulot hajmining o'sish sur'ati kamayadi, ya'ni $V''(K)<0$ va asosiy xarajatlarning samaradorligi kamayadi.

Shunday qilib, kapital qurilishiga sarflangan mablag' strategiyasida juda muhim omil xarajatning kritik hajmini topishdir. Kapital qurilishiga sarflangan mablag' foydaliligini oshirish uchun $b, c, V_{\ell im}$ ko'rsatkichlar miqdorini «yaxshilash» kerak bo'ladi.

8. Aniqmas integral

Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral

Ta'rif. Agar barcha $x \in (a,b)$ lar uchun *F'(x)=f(x)* tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $F(x)$ funksiya (a,b) intervalda $f(x)$ funksiyaga boshlang'ich funksiya deyiladi.

Masalan 1. $F_1(x)=\frac{x^2}{2}+1$ funksiya $(-\infty,+\infty)$ oraliqda *f(x)=x* funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi, chunki $\left(\frac{x^2}{2}\right)'=\frac{1}{2}\cdot 2x=x$ tenglik barcha $x \in (-\infty,+\infty)$ lar uchun o'rinlidir.

Berilgan *f(x)* funksiya bir nechta boshlang'ich funksiyaga ega bo'lishi mumkin. Masalan, $F_1(x)=\frac{x^2}{2}+1$ funksiya *f(x)=x* funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi.

Umumiy holda, agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ uchun boshlang'ich funksiya bo'lsa, istalgan o'zgarmas $c=const$ uchun $F(x)+c$ funksiya ham $f(x)$ ga boshlang'ich funksiya bo'ladi, chunki *(F'(x)+c)= F'f(x)=f(x)*. Aksincha, berilgan $f(x)$ funksiyaning istalgan ikkita boshlang'ich funksiyasi o'zgarmas songa farq qilishini ko'rsatish mumkin. Haqiqatan ham $F_1(x)$ va $F_2(x)$ funksiyalar (a,b) da $f(x)$ ga boshlang'ich funksiyasi bo'lsin, u holda

$$[F_1(x)-F_2(x)]' = F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0 \qquad x\in(a,в)$$

U holda Lagranj teoremasi natijasiga ko'ra $F_1(x)-F_2(x)=C=const$. Xulosa qilib shuni aytish mumkinki, agar *F(x)* funksiya *(a, b)* intervalda *f(x)* funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda *f(x)* funksiyaning *(a, b)* intervaldagi istalgan boshlang'ich funksiyasi $F(x)+C,\ (C=\text{const})$ ko'rinishida bo'lar ekan.

Ta'rif. *f(x)* funksiyaning *(a,b)* intervaldagi barcha boshlang'ich funksiyalari $\int f(x)dx$ ko'rinishda belgilanib, bu ifoda *f(x)* funksiyaning aniqmas integrali deb ataladi. Bu yerda *f(x)* integral osti funksiyasi, *f(x)dx* integral ostidagi ifoda deb ataladi.

Demak, agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa,

$$\int f(x)dx = \{F(x)+C: \ C \in R\}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglik qisqacha

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

kabi ifoda etiladi. Masalan,

$$\int xdx = \frac{x^2}{2}+C$$

Berilgan funksiya uchun uning boshlang'ich funksiyasini, ya'ni uning aniqmas integralini topish, funksiyani integrallash deb ataladi.

Aniqmas integral xossalari va uni hisoblash usullari

1. Aniqmas integral hosilasi integral ostidagi funksiyaga teng bo'ladi, ya'ni

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

Chunki, agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa,

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+c)' = F'(x) = f(x)$$

2. Aniqmas integralning differensiali integral ostidagi ifodaga teng bo'ladi, ya'ni $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$.

Haqiqatan ham, $d(\int f(x)dx) = d(F(x)+c) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$

3. Biron-bir funksiya differensialining aniqmas integrali shu funksiyadan o'zgarmas songa farq qiladi, ya'ni $\int dF(x) = F(x)+C$.

Agar biz $F(x)$ni biron-bir $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi deb qarasak, ya'ni $F'(x) = f(x)$ bo'lsa, u holda $dF(x) = f(x)dx$ va $\int dF(x) = \int f(x)dx = F(x)+C$.

4. Agar a o'zgarmas son bo'lsa, u holda $\int af(x)dx) = a\int f(x)dx$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Hosila xossasiga ko'ra $(a\int f(x)dx)' = a(\int f(x)dx)' = a \cdot f(x)$.

Demak, $a\int f(x)dx$ funksiya $a\cdot f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi, ya'ni

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

5. Funksiyalar yig'indisining integrali, qo'shiluvchilar integrallarining yig'indisiga teng, ya'ni $\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$. Hosila xossasiga ko'ra, $(\int f(x)dx\pm\int g(x)dx)'=(\int f(x)dx)'\pm(\int g(x)dx)'=f(x)\pm g(x)$.
tenglik o'rinli bo'lar ekan.

6. Agar $\int g(t)dt = G(t)+C$ o'rinli bo'lsa, u holda $t=\varphi(x)$ uchun

$$\int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = G(\varphi(x))+C$$

Haqiqatan ham, $G'(t)=g(t)$ bo'lgani uchun va $G(x)=G(\varphi(x))$ murakkab funksiya hosilasiga asosan $(G(\varphi(x)))'_x=G'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)=g(\varphi(x))\varphi'(x)$, demak, $G(\varphi(x))$ funksiya $g(\varphi(x))\varphi'(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi ekan.

Bu xossadan foydalanib, aniqmas integralni yangi o'zgaruvchi kiritib yoki o'rniga qo'yish usuli bilan hisoblash mumkin. Agar $\int f(x)dx$ integralda, integral ostidagi ifodani quyidagicha ifodalash mumkin bo'lib,

$$f(x)dx=g(\varphi(x))\varphi'(x)dx=g(\varphi(x))d\varphi(x) \text{ va } \int g(t)dt = G(t)+C$$

bo'lsa, u holda

$$\int f(x)dx = \int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = G(\varphi(x))+C$$

Masalan 2. Aniqmas integralni hisoblang: $\int \sin^4 x\cos x dx$.

Yechish: Bu yerda, $t=\sin x$ deb olsak, $\int\sin^4 x\cdot\cos xdx=\sin^4 xd(\sin x)=t^4dt$

tenglikni hosil qilamiz va $\int t^4dt=\frac{t^5}{5}+C$ tenglikka ko'ra,

$$\int\sin^4 x\cos xdx=\frac{\sin^2 x}{5}+C.$$

7. Agar $\int f(t)dt=F(t)+c$ bo'lsa, u holda $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+c.$

Agar $t=ax+b$ deb olsak

$$f(ax+b)dx=\frac{1}{a}f(ax+b)d(ax+b)=\frac{1}{a}f(t)dt$$

tenglik o'rinli bo'ladi, u holda

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int f(t)dt=\frac{1}{a}F(t)+c=\frac{1}{a}F(ax+b)+c.$$

Elementar funksiyalar aniqmas integrallari jadvali

Aniqmas integral ta'rifiga ko'ra, elementar funksiyalar hosilasi jadvaliga asoslanib va tenglikning o'ng tarafidan hosila olish orqali quyidagi elementar funksiyalarning aniqmas integrallar jadvalini tuza olamiz.

1. $\int odx = C$

2. $\int 1\cdot dx = \int dx = x+c$

3. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha}}{\alpha+1}+c, \quad \alpha \neq -1$

4. $\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{dx}{x} = \ell n|x|+c$

5. $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = arc\,tgx+c$

6. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\ \sin x+c$

7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ell na}+c, \qquad \int e^x dx = e^x+c$

8. $\int \sin x dx = -\cos x+c$

9. $\int \cos x dx = \sin x+c$

10. $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx+c$

11. $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx+c$

Integralashning asosiy usullari

Bevosita integrallash

Bunda integral ostidagi ifoda elimentar almashtirishlar bilan jadvalga keltiriladi. So'ngra integral xossalaridan foydalanib, boshlang'ich funksiya topiladi.

Masalan 3. Integralni hisoblang: $I_1 = \int \frac{42ax\sqrt{x}-5bx^2+14x+20}{x^2}dx$.

Yechish: Darajaning va aniqmas integralning xossalaridan foydalanib:

$$I_1 = 42a\int x^{-\frac{1}{2}}dx - 5b\int dx + 14\int x^{-1}dx + 20\int x^{-2}dx = 84a\sqrt{x} - 5bx + 14\ln|x| - \frac{20}{x} + C.$$

Masalan 4. Integralni hisoblang: $I_3 = \int (a^m b^n)^x dx = \frac{(a^m b^n)^x}{\ln(a^m b^n)} + C$

Yechish: $\int (a^m b^n)^x dx = \frac{(a^m b^n)^x}{\ln(a^m b^n)} + C = \frac{a^{mx} b^{nx}}{\ln(a^m b^n)} + C.$

Masalan 5. Integralni hisoblang: $I = \int \frac{x^4}{x^2+1}dx.$

Yechish:

$$I = \int \frac{x^4+1-1}{x^2+1}dx = \int \frac{(x^2-1)(x^2+1)+1}{x^2+1}dx = \int (x^2-1)dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{x^3}{3} - x + arctgx + C.$$

Masalan 6. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}dx$.

Yechish: $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}dx = \int\left(x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{3}{2}}\right)dx = 2x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C.$

O‘rniga qo‘yish usuli

Erkli o‘zgaruvchi x ni boshqa ixtiyoriy x ga bog‘liq differensiallanuvchi funksiya bilan almashtirish mumkin. Integrallarni hisoblashda quyidagi qoidalarni hisobga olish foydalidir:

1. Agar $\int f(x)dx = F(x) + C,$ u holda $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$ Masalan:

   a) $\int \sin x dx = -\cos x + C,$ bo‘lgani uchun $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C;$

   b) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$ bo‘lgani uchun $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$

2. Agar integral ostidagi ifodani $f(x)\cdot f'(x)$ yoki $\frac{f'(x)}{f(x)}$ ko‘rinishida ifodalash mumkin bo‘lsa, u holda $f'(x)dx = df(x)$ ekanligidan quyidagilar kelib chiqadi:

$$\int f(x)f'(x)dx = \int f(x)df(x) = \frac{1}{2}f^2(x) + C; \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$$

3. $\int [f'(x)\varphi(x) + f(x)\varphi'(x)]dx = \int (f\cdot\varphi)'dx = \int d(f\cdot\varphi) = f(x)\cdot\varphi(x) + C.$

4. $\int x^3 f(x^2)dx = \frac{1}{2}\int x^2 f(x^2)dx^2 = \frac{1}{2}\int t\cdot f(t)dt,$ *bunda* $t = x^2$.

5. $\int \frac{f'(x)dx}{a^2+f^2(x)} = \int \frac{df(x)}{a^2+f^2(x)} = \frac{1}{a}arctg\frac{f(x)}{a} + C.$

6. $\int \frac{f'(x)dx}{a^2-f^2(x)} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+f(x)}{a-f(x)}\right| + C.$

7. $\int \frac{f'(x)dx}{\sqrt{a^2-f^2(x)}} = \int \frac{df(x)}{\sqrt{a^2-f^2(x)}} = \arcsin\frac{f(x)}{a} + C.$

8. $\int \frac{f'(x)dx}{\sqrt{f^2(x)\pm a^2}} = \int \frac{df(x)}{\sqrt{f^2(x)\pm a^2}} = \ln\left|f(x)-\sqrt{f^2(x)\pm a^2}\right| + C.$

Masalan 7. Integralni hisoblang: $a)\int \frac{arctgx}{1+x^2}dx$; $b)\int \frac{a\sin x - b\sin x}{a\sin x + b\sin x}dx$;

$c)\int \frac{\sin x}{\cos^7 x}dx$.

Yechish:

$a)\int \frac{arctgx}{1+x^2}dx = \int (arctgx)' arctgx\, dx = \int arctgx\, d(arctgx) = \frac{1}{2}arctg^2 x + C$;

$b)\int \frac{a\cos x - b\sin x}{a\sin x + b\cos x}dx = \int \frac{(a\cos x + b\sin x)'}{a\sin x + b\cos x}dx = \int \frac{d(a\cos x + b\sin x)}{a\sin x + b\cos x} = \ln|a\sin x + b\cos x| + C$;

$c)\int \frac{\sin x}{\cos^7 x}dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos^7 x}dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos^7 x} = \frac{1}{6\cos^6 x} + C.$

Masalan 8. Integralni hisoblang: $\int\left(\frac{\ln(1+x)}{1+x^2} + \frac{arctgx}{1+x}\right)dx$.

Yechish:

$\int\left(\frac{\ln(1+x)}{1+x^2} + \frac{arctgx}{1+x}\right)dx = \int\left[\ln(1+x)(arctgx)' + arctgx(\ln(1+x))'\right]dx = \int [\ln(1+x)(arctgx)]' dx =$
$= \ln(1+x)\cdot arctgx + C.$

Masalan 9. Integralni hisoblang: $a)\, I = \int \frac{dx}{ax+b}$;

$b)\ I = \int \frac{dx}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}$.

Yechish: $a)$ $I = \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{a\cdot dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$

$b)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2\cdot\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^2 = \left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\right]^2 = \left(x^2-\left(x^2-1\right)\right)^2 = 1$

ekanligidan

$$I=\int\frac{dx}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}=\int\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^2dx=2\int x^2dx-2\int x\sqrt{x^2-1}\cdot dx-\int dx=\frac{2}{3}x^3-x-$$

$$-\int\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}d\left(x^2-1\right)=\frac{2}{3}x^3-x-\frac{2}{3}\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}+C.$$

O‘zgaruvchilarni almashtirish usuli

Agar aniqmas integral jadval ko‘rinishida bo‘lmasa u holda ba’zan o‘rniga qo‘yish usuliga murojaat qilinadi. $\int f(x)dx$ ni topish kerak bo‘lsa $x=\varphi(t)$ almashtirish bajariladi.

$\varphi(t)$ funksiya uzluksiz, uzluksiz hosilaga ega va teskari funksiyasi mavjud. $dx=\varphi'(t)dt$ bo‘lgani uchun $\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt.$ Qanday qilib muvaffaqiyatli almashtirishni olish mumkin degan savolga umumiy javob berish mumkin emas. Foydali almashtirishni topish mashqlar bilan o‘zlashtiriladi. Aniqmas integralda o‘zgaruvchilarni almashtirish usuliga qator misollar keltiramiz.

Masalan 10. Integralni hisoblang: $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}.$

Yechish: Ildiz ostidagi ifodalardan ozod bo‘lish uchun $x=t^6$ belgilashni kiritamiz. $dx=d\left(t^6\right)=\left(t^6\right)'dt=6t^5\cdot dt$ ekanligidan

$$I=\int\frac{6t^5dt}{t^3-t^2}=6\int\frac{t^3dt}{t-1}=6\int\frac{t^3-1+1}{t-1}dt=6\int\frac{t^3-1}{t-1}+$$

$$+\int\frac{dt}{t-1}=6\int\left(t^2+t+1\right)dt+6\ln|t-1|=2t^3+3t^2+6t+6\ln|t-1|=2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C.$$

Masalan 11. Integralni hisoblang: $I=\int\frac{\sqrt{10+x^2}}{x}dx.$

Yechish: Quyidagicha belgilamiz: $\sqrt{10+x^2}=t,$ bundan $x^2=t^2-10$. Bu tenglikni ikkala tomonini integrallab $2xdx=2tdt$ yoki $xdx=tdt$ ga ega bo‘lamiz.

$$\frac{dx}{x}=\frac{xdx}{x^2}=\frac{tdt}{t^2-10}\text{ va}$$

$$I=\int t\frac{tdt}{t^2-10}=\int\frac{t^2-10+10}{t^2-10}dt=\int dt+10\int\frac{dt}{t^2-10}=t+\frac{10}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{10}}{t+\sqrt{10}}\right|$$

$$=\sqrt{10+x^2}+\frac{\sqrt{10}}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{10+x^2}+\sqrt{10}}{\sqrt{10+x^2}+\sqrt{10}}\right|+C.$$

Ko'rsatma: $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$ ko'rinishdagi funksiyalarni integrallashda quyidagi belgilashlar kiritiladi:

1. $\sqrt{a^2-x^2}$ funksiya uchraganda $x=a\cdot\sin t$, belgilanib $\sqrt{a^2-x^2}=a\cdot\cos t$ topiladi. $dx=a\cdot\cos t\cdot dt,\ t=\arcsin(x/a)$. Bunda $-a<x<a,\ -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$.

2. $\sqrt{a^2+x^2}$ ko'rinishdagi funksiyalar uchraganda x = atgt belgilanadi. Bundan $\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2(1+tg^2t)}=\frac{a}{\cos t},\ dx=\frac{a}{\cos^2 t}dt,\ t=arctg\frac{x}{a},\ -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$.

3. $\sqrt{x^2-a^2}$ ko'rinishdagi funksiyalar uchraganda $x=\frac{a}{\cos t}$ kabi belgilanadi. Bundan $\sqrt{x^2-a^2}=atgt,\ dx=\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt,\ t=\arccos\frac{a}{x},\ -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$.

Masalan 12. Integralni hisoblang: $I=\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$.

Yechish: $x=a\sin t$ belgilashni kiritamiz. Bundan esa $dx=a\cos t\cdot dt\ (0<t<\pi/2)$ va

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}=\int\frac{a\cos t\cdot dt}{\left(\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\right)^3}=\int\frac{a\cos t\cdot dt}{\sqrt{a^6\cos^6 t}}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{\cos^2 t}=\frac{tgt}{a^2}+C.$$

Yuqoridagi belgilashga ko'ra $\sin t=\frac{x}{a},\ \cos t=\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a},\ tgt=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$, bo'lib, integralning oxirgi ko'rinishi $I=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+C$.

Masalan 13. Integralni hisoblang: $I=\int\frac{\sqrt{4+x^2}}{x^4}dx$.

Yechish: $x=2tgt$, bundan $dx=\frac{2dt}{\cos^2 t}\ (0<t<\pi/2)$ va

$$I=\int\frac{\sqrt{4+4tg^2t}}{16tg^4t}\cdot\frac{2dt}{\cos^2 t}=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{tg^4t\cdot\cos^3 x}=\frac{1}{4}\int\frac{\cos tdt}{\sin^4 t}=\frac{1}{4}\int\frac{d(\sin t)}{\sin^4 t}=-\frac{1}{12}(\sin t)^{-3}=-\frac{1}{12\sin^3 t}+C,\ \ tgt=\frac{x}{2}$$

ekanligidan $\sin t = \frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2 t}} = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$ va $I = -\frac{1}{12x^3}\sqrt{(4+x^2)^3} + C.$

Masalan 14. Integralni hisoblang: $I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$ $(x>3)$.

Yechish: $x = \frac{3}{\cos t}$ belgilashni kiritamiz. Bundan $dx = \frac{3\sin t}{\cos^2 t}dt$, $(0<t<\pi/2)$ va

$$I = \int \frac{3\sin t}{\frac{9}{\cos^2 t}\cdot\sqrt{\frac{9}{\cos^2 t}-9}}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{9}\int \cos t dt = \frac{1}{9}\sin t + C. \quad \cos t = \frac{3}{x}, \Rightarrow \sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} =$$

$= \sqrt{1-\frac{9}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}$, demak $I = \frac{\sqrt{x^2-9}}{9x} + C.$

Bo'laklab integrallash

Agar $u(x)$ va $v(x)$ – differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsa, u holda ular ko'paytmasining differensiali $d(uv) = udv + vdu.$ Bu ifodaning ikkala tomonini ibtegrallab $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$ *yoki* $\int udv = uv - \int vdu$ formulani olamiz.

Bo'laklab integrallash usuli har xil sinfdagi funksiyalar ko'paytmalarini integrallashda foydalaniladi:

$\int P_n(x)e^{\alpha x}dx,\quad \int P_n(x)\cos ax\,dx,\quad \int P_n(x)\sin ax\,dx,\quad \int P_n(x)arctgx\,dx,\quad \int P_n(x)\arcsin x\,dx,$

$\int P_n(x)\arccos x\,dx,\quad \int P_n(x)\ln x\,dx.$

Dastlabki uchta integral u uchun $P_n(x)$ ko'phad qabul qilinadi, oxirgi to'rtta integral uchun esa mos ravishda arctg$x$, *arcsinx, arccosx, lnx* lar qabul qilinadi. Ba'zi hollarda bo'laklab integrallash formulasini bir necha marta qo'llash zarur bo'ladi.

Masalan 15. Integralni hisoblang: $\int x\cdot e^{-5x}dx.$

Yechish. $u = x$ va $dv = e^{-5x}dx$ deb olamiz, u holda

$$\int xe^{-5x}dx = \left| \begin{array}{l} u = x,\ du = dx \\ dv = e^{-5x}dx, v = \int e^{-5x}dx = -\frac{1}{5}e^{-5x} \end{array} \right| = -\frac{x}{5}e^{-5x}dx - \frac{1}{25}e^{-5x} + C.$$

v ni topishda integrallash doimiysini har doim nolga teng deb hisoblash mumkin.

Masalan 16. $\int arctgx\,dx$ integralni hisoblang.

Yechish: $u = arctgx$ deb olamiz, u holda

$$\int arctgx\,dx = \begin{Bmatrix} u = arctgx, du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx, v = \int dx = x \end{Bmatrix} = x \cdot arctgx - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x \cdot arctgx - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + C$$

Masalan 17. $\int (x^2+1)\cos x \cdot dx$ integralni hisoblang.

Yechish: Bu misolda bo'laklab integrallash formulasini ikki marta qo'llashga to'g'ri keladi.

$$\int(x^2+1)\cos xdx = \begin{vmatrix} u = x^2+1, & du = 2xdx; \\ dv = \cos xdx, & v = \sin x \end{vmatrix} = (x^2+1)\sin x - 2\int x\sin xdx = (x^2+1)\sin x -$$

$$-\begin{vmatrix} a = x, \ da = dx; \\ \sin xdx = db, \ b = -\cos x \end{vmatrix} = -2\left(-x\cos x + \int\cos xdx\right) = (x^2+1)\sin x + 2x\cos x -$$

$$-2\int\cos xdx = (x^2+1)\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C = 2x\cos x + (x^2-1)\sin x + C.$$

Masalan 18. Aniqmas integralni hisoblang: $\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$.

Yechish: Bu integralni ikki marta bo'laklab integrallaymiz:

$$\int e^{ax}\cos\beta xdx = \begin{vmatrix} u = e^{ax} \ \ du = \alpha \cdot e^{ax}dx;; \\ dv = \cos\beta x \cdot dx, \ v = \dfrac{1}{\beta}\sin\beta x \end{vmatrix} = \frac{1}{\beta}e^{ax} \cdot \sin\beta x - \frac{\alpha}{\beta}\int e^{ax}\sin\beta xdx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = e^{ax}, du = \alpha \cdot e^{ax}dx \\ dv = \sin\beta xdx, \ v = -\dfrac{1}{\beta}\cos\beta x \end{vmatrix} = \frac{1}{\beta}e^{ax} \cdot \sin\beta x - \frac{\alpha}{\beta}\left(-\frac{1}{\beta}\cos\beta x + \frac{\alpha}{\beta} + \int e^{ax} \cdot \cos\beta xdx\right) =$$

$$= \frac{e^{ax}}{\beta^2}(\beta\sin\beta x + \alpha\cos\beta x) - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\int e^{ax} \cdot \cos\beta xdx.$$

Bundan $I = \int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$ deb ushbu tenglikka ega bo'lamiz: $I = \frac{e^{\alpha x}}{\beta^2}(\beta\sin\beta x + \alpha\cos\beta x) - \frac{\alpha^2}{\beta^2}I$ bu tenglamani I ga nisbatan yechib,

$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\beta\sin\beta x + \alpha\cos\beta x) + C$ yechimni olamiz.

Masalan 19. Integralni hisoblang: $I=\int x^n \ln x dx,\ n\neq -1.$

Yechish: $u=\ln x$, $dv=x^n dx$, bundan $du=\frac{dx}{x},\ v=\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1};$

$$I=\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\ln x-\frac{1}{n+1}\int x^n dx=\frac{x^{n+1}\ln x}{n+1}-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}+C.$$

Ko'p uchraydigan integrallar

Aniqmas integrallarni hisoblash qoidalari va usullarini qo'llab, ayrim aniqmas integrallarni topaylik.

1. $\int\frac{dx}{x-a}=\int\frac{d(x-a)}{x-a}=\ln|x-a|+\tilde{n},\qquad (x-a=t).$

2. $\int\frac{dx}{(x-a)^m}=\int\frac{d(x-a)}{(x-a)^m}=\int(x-a)^{-m}d(x-a)=\frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1}+c=-\frac{1}{(m-1)(x-a)}+c,$ $m\neq 1.$

3. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{d(\frac{x}{a})}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=arcsin\frac{x}{a}+C,\quad a>0\qquad (\frac{x}{a}=t).$

4. $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\left(\frac{x}{a}=t\right)=\frac{1}{a}arc\,tg\frac{x}{a}+c.$

5. $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx=\frac{1}{2a}\left(\int\frac{dx}{x-a}-\int\frac{dx}{x+a}\right)=$

$$=\frac{1}{2a}(\ln|x-a|-\ln|x+a|)+C=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C,\qquad a\neq 0.$$

6. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a}}=\left(\begin{array}{l}\sqrt{x^2+a}=t-x\Rightarrow x^2+a=t-2tx+x^2\Rightarrow x=\frac{t^2 a}{2t}\Rightarrow\\ \Rightarrow\sqrt{x^2+a}=t-\frac{t^2-a}{2t}=\frac{t^2+a}{2t},\ dx=\frac{t^2+a}{2t^2}dt\end{array}\right)=$

$$=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C.$$

7. $\int \frac{dx}{(x+a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}\int\left[\frac{1}{x+b}-\frac{1}{x+a}\right]dx = \frac{1}{a-b}\left[\ln|x+b|-\ln|x+b|\right]+$

$+C = \frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right|+C.$

8. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^m}$, m natural son. Agar m=1 bolsa, u holda $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$ tenglik avval isbot qilingan edi.

Quyidagi belgilashni kiritamiz $\Im_m = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^m}$

Bu integralda bo‘laklab integrallashni qo‘llaymiz:

$$u = \frac{1}{(x^2+a^2)^m},\quad du = -\frac{2mx\,dx}{(x^2+a^2)^{m+1}},\quad dv = dx,\quad v = x$$

u holda

$$\Im_m = \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^m} + \int \frac{2m\,x^2}{\left(x^2+a^2\right)^{m+1}}dx = \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^m} + 2m\int \frac{x^2+a^2-a^2}{\left(x^2+a^2\right)^{m+1}}dx =$$

$$\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^m} + 2m\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^m} - 2a^2m\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{m+1}}$$

Bu yerdan

$$\Im_m = \frac{x}{\left(a^2+a^2\right)^m} + 2m\Im_m - 2a^2m\Im_{m+1} \text{ va } \Im_{m+1} = \frac{x}{2a^2m\left(x^2-a^2\right)^m} + \frac{2m-1}{2a^2m}\Im_m. \quad (1)$$

Bu formula $(m+1)$ integralni m integral orqali ifoda etayapti. Bunday formulalar matematikada *rekkurent formulalar* deb ataladi. Rekkurent formulani ketma-ket qo‘llash natijasida $\Im_{m+1}$ integralni hisoblash $\Im_1$ integralni hisoblashga olib kelinadi. $\Im_1$ integral esa avval hisoblangan

$$\Im_1 = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C.$$

Masalan, (1) formulada $m=1$ desak,

$$\Im_2 = \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)} + \frac{2-1}{2a^2}\cdot\Im_1 = \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)} + \frac{1}{2a^3}arctg\frac{x}{a}+C$$

Agar (1) da $m=2$ deb $\Im_2$ yordamida $\Im_3$ ni topa olamiz:

$$\Im_3 = \frac{1}{a^2\cdot 2}\cdot\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^2}+\frac{2\cdot 2-1}{2a^2\cdot 2}\cdot\Im_2 = \frac{x}{4a^2\left(x^2+a^2\right)^2}+\frac{3}{8a^4}\cdot\frac{x}{x^2+a^2}+$$

$$+\frac{3}{8a^5}arctg\frac{x}{a}+C$$

9) $\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^m}$ ko'rinishdagi integralni $p^2-4q<0$ uchun hisoblaylik. Ushbu tenglikda $x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}$.

$4q-p^2>0$ bo'lgani uchun, $\frac{4q-p^2}{4}=a^2$ deb belgilash mumkin. Yuqoridagi integralda $x+\frac{p}{2}=t$ desak $\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^m}=\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2\right]^m}=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m}$.

Demak, qaralayotgan integral (9)-ko'rinishga ega.

10) $\int\frac{xdx}{\left(x^2+px+q\right)^m}$ ko'rinishdagi integralni $p^2-4q<0$ bo'lgan hol uchun hisoblaylik. $x+\frac{p}{2}=t$ va $\frac{4q-p^2}{4}=a^2$ belgilashlarni kiritib quyidagini hosil qilamiz.

$$\int\frac{xdx}{(x^2+px+g)^m}=\int\frac{\left(x+\frac{p}{2}-\frac{p}{2}\right)d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4g-p^2}{4}\right]^m}=\int\frac{tdt}{(t^2+a)^m}-\frac{p}{2}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^m}+\frac{p}{2}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}=-\frac{1}{2(m-1)}\cdot\frac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}}-\frac{p}{2}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}$$

Qaralayotgan integral yana (10)-ko'rinishga kelar ekan.

Kvadrat uchhadni o'z ichiga olgan ba'zi funksiyalarni integrallash

Quyidagi integrallarni qaraymiz:

$$I_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c},\quad I_2=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx,\quad I_3=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\quad I_4=\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$$

Bu integrallarni hisoblash uchun maxrajdagi uchhaddan to'la kvadrat ajratamiz.

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)=a\left(t^2\pm m^2\right).$$

Bu yerda, $t=x+\frac{b}{2a}$, $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=\pm m^2$.

Masalan 1. Integralni hisoblang: $I_1=\int\frac{dx}{4x^2+4x+5}$.

Yechish: To'la kvadrat ko'rinishga keltirib olamiz:

$$4x^2+4x+5=4\left(x^2+\frac{1}{2}\cdot2\cdot x+\frac{5}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)=4\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right]=4\left(t^2+1\right)$$ bunda

$$t=x+\frac{1}{2},\ dx=dt.$$

Demak, $I_1=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{4}arctgt+C=\frac{1}{4}arctg\frac{2x+1}{2}+C.$

Masalan 2. Integralni toping: $I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$.

Yechish:

$$-2x^2+3x+2=-2\left(x^2-2\cdot\frac{3}{4}x+\frac{9}{10}-\frac{9}{16}-1\right)=-2\left(t^2-\frac{25}{16}\right)=2\left(m^2-t^2\right),\quad t=x-\frac{3}{4},\ m=\frac{5}{4},\ dt=dx.$$

Bundan $I_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dt}{\sqrt{m^2-t^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{t}{m}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5}+C.$

Masalan 3. Integralni hisoblang: $\int\frac{3x-1}{4x^2-4x+17}dx.$

Yechish: $\left(4x^2-4x+17\right)'=8x-4$, bundan $3x-1=3\cdot\frac{8x-4+4}{8}-1=\frac{3}{8}(8x-4)+\frac{1}{2}$

va

$$4x^2-4x+17=4\left(x^2-2\cdot\frac{x}{2}+\frac{17}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)=4\left(t^2+4\right),\ t=x-\frac{1}{2};\ I=\frac{3}{8}\int\frac{(8x-4)dx}{4x^2-4x+17}+$$

$$+\frac{1}{8}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{3}{8}\int\frac{d\left(4x^2-4x+17\right)}{4x^2-4x+17}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2}=\frac{3}{8}\ln\left|4x^2-4x+17\right|+\frac{1}{16}arctg\frac{2x-1}{4}+C.$$

Masalan 4. Integralni hisoblang: $\int\frac{2x^3+3x}{x^4+x^2+1}dx.$

Yechish: Integralni hisoblash uchun quyidagicha almashtirish bajaramiz: $x^2=t$, u holda $2xdx=dt$ yoki $xdx=\frac{1}{2}dt$. Demak,

$$\int\frac{2(x^2+3)x}{x^4+x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(2t+3)dt}{t^2+t+1}=\frac{1}{2}\int\frac{(2t+1)+2}{t^2+t+1}dt=\frac{1}{2}\int\frac{2t+1}{t^2+t+1}dt+\int\frac{dt}{t^2+t+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(t^2+t+1)+\int\frac{d(t+\frac{1}{2})}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\ln(t^2+t+1)+\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^4+x^2+1)+\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Masalan 5. Integralni hisoblang: $I_3=\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

Yechish: Bu misolda n=3. Rekurent formulani bir marta qo‘llagandan so‘ng $I_3=\frac{1}{2(3-1)}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^{3-1}}+\frac{2\cdot3-3}{2\cdot3-2}\cdot I_{3-1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2}+\frac{3}{4}\cdot I_2.$

$I_2=\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$ integralga yana bir marta rekurent formulani qo‘llaymiz:

$$I_2=\frac{1}{2(2-1)}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^{2-1}}+\frac{2\cdot2-3}{2\cdot2-2}I_{2-1}=\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}I_1=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}arctgx+C.$$

Demak, $I_3=\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}=\frac{x}{4(x^2+1)^2}+\frac{3x}{8(x^2+1)}+\frac{3}{8}arctgx+C.$

Masalan 6. Integralni hisoblang: $\int\frac{3x+2}{(x^2+2x+1)^2}dx.$

Yechish:

$$\int\frac{3x+2}{(x^2+2x+1)^2}dx=\int\frac{\frac{3}{2}(2x+2)+(2-3)}{(x^2+2x+10)^2}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x+2}{(x^2+2x+10)^2}dx-\int\frac{dx}{\left[(x+1)^2+9\right]^2}.$$

Birinchi integralda $x^2+2x+10=z$, bunda $(2x+2)dx=dz$, ikkinchi integralda esa $x+1=t$ almashtirish bajaramiz, bunda $dx=dt$. U holda

$$\int\frac{3x+2}{(x^2+2x+1)^2}dx=\frac{3}{2}\int\frac{dz}{z^2}-\int\frac{dt}{(t^2+9)^2}=\frac{3}{2}\int z^{-2}dz-\int\frac{dt}{(t^2+9)^2}=-\frac{3}{2}z^{-1}-$$

$$-\left[\frac{1}{2(2-1)\cdot9}\cdot\frac{t}{(t^2+9)^{2-1}}+\frac{1}{9}\frac{2\cdot2-3}{2\cdot2-2}\int\frac{dt}{t^2+9}\right]=-\frac{3}{2z}-\frac{1}{18}\cdot\frac{t}{t^2+9}-\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{3}arctg\frac{t}{3}+C=$$

$$=-\frac{3}{2(x^2+2x+10)}-\frac{1}{18}\cdot\frac{x+1}{x^2+2x+10}-\frac{1}{54}arctg\frac{x+1}{3}+C.$$

Ratsional ifodalarni integrallash

Ratsional ifoda deb ko‘phadlar nisbati ko‘rinishida ifodalangan funksiyaga aytiladi, ya’ni $P_n(x)$ va $Q_m(x)$ ko‘phadlar bo‘lsa, ratsional ifoda ushbu $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ko‘rinishda bo‘ladi. Agar $P_n(x)$ ko‘phad darajasi $Q_m(x)$ ko‘phad darajasidan katta bo‘lsa, ya’ni $n>m$ bo‘lsa $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ni quyidagi ko‘rinishda ifoda etish mumkin:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=L_{n-m}(x)+\frac{R_k(x)}{Q_m(x)}$$

Bu yerda, $L_{n-m}(x)$ va $R_k(x)$ mos ravishda $n-m$ va k darajali ko‘phad bo‘lib, $k\le m$, ya’ni $\frac{P_k(x)}{Q(x)}$ to‘g‘ri kasrdan iborat bo‘ladi.

Ushbu

$$P_n(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n$$

ko‘phad ko‘rinishdagi funksiyaning aniqmas integrali quyidagicha hisoblanadi:

$$\int P_n(x)dx=\int(b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n)dx=$$

$$=\frac{b_0}{n+1}x^{n+1}+\frac{b_1}{n}x^n+\ldots+\frac{b_{n-1}}{2}\cdot x^2+b_nx+C.$$

Demak, $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ning aniqmas integralini hisoblash uchun, bu ratsional ifodani ko‘phad va to‘g‘ri kasrning yig‘indisi deb qarashimiz mumkin. Bundan tashqari, to‘g‘ri kasrni qisqarmaydigan kasr deb hisoblaymiz.

Istalgan $Q_m(x)$ ko‘phadni quyidagi ko‘rinishda ifoda qilish mumkin:

$$Q_m(x)=a\cdot(x-a_1)^{k_1}\cdot(x-a_2)^{k_2}\cdots(x-a_n)^{k_n}\cdot$$
$$\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\cdot(x^2+p_2x+q_2)^{m_2}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{m_s} \qquad (1)$$

Bu yerda, a, $a_1,\ldots,a_n$, p_1, $q_1,\ldots$, p_s, q_s lar haqiqiy sonlar, $k_1, k_2,\ldots k_n$, $m_1, m_2,\ldots m_s$ lar esa natural sonlardan iborat bo‘lib, $p_i^2-4q_i<0$, $i=1,2,\ldots,s$ shart uchun o‘rinli bo‘ladi.

Agar $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ qisqarmaydigan to‘g‘ri kasr bo‘lib, $Q_m(x)$ uchun (1)-yoyilma o‘rinli bo‘lsa, bu kasrni quyidagicha ifoda etish mumkin:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{1}{a}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{A_{i1}}{(x-a_i)}+\frac{A_{i2}}{(x-a_i)^2}+\dots+\frac{A_{ik_i}}{(x-a_i)^{k_i}}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{B_{j1}x+C_{j1}}{x^2+p_jx+q_j}+\frac{B_{j2}\tilde{o}+\tilde{N}_{j2}}{(x^2+p_jx+q_j)^2}+\dots+\frac{B_{jm_j}x+C_{jm_j}}{(x^2+p_j\tilde{o}+q_j)^{m_j}}\right)\right]$$

yoki
$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{1}{a}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{k}\frac{A_{it}}{(x-a_i)^t}+\sum_{j=1}^{s}\sum_{\ell=1}^{m_j}\frac{B_{j\ell}x+C_{j\ell}}{(x^2+p_jx+q_j)^\ell}\right) \tag{2}$$

Bu tenglikda qatnashayotgan

$$\frac{A}{(x-a)^t} \text{ ва } \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^\ell},\quad p^2-4q<0$$

ko‘rinishdagi kasrlar sodda kasrlar deb nomlanadi. Biz bunday kasrlarning aniqmas integralini hisoblashni o‘rgangan edik.

Demak, $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ qisqarmaydigan to‘g‘ri kasrning aniqmas integrali uchun ushbu tenglikni yoza olamiz:

$$\int\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx=\frac{1}{a}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{k_i}\int\frac{A_{it}}{(x-a_i)^t}dx+\sum_{j=1}^{s}\sum_{\ell=1}^{m_j}\int\frac{B_{j\ell}x+C_{j\ell}}{(x^2+p_jx+q_j)^\ell}dx\right)$$

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ uchun (2)-tenglikdagi A_{it}, $B_{j\ell}$ va $C_{j\ell}$ larning qiymatlarini topish uchun noma’lum koeffitsientlar usulidan foydalanamiz. (2)-tenglikning o‘ng ta’rafidagi kasrlarni umumiy maxrajga keltirsak, bu maxraj $Q_m(x)$ ga teng bo‘lib, uning suratida A_{it}, $B_{j\ell}$ va $C_{j\ell}$ koeffitsientlar qatnashgan, darajasi $Q_m(x)$ ning darajasidan oshmaydigan $\tilde{P}_n(x)$ polinomni hosil qilamiz. Agar biz (2)-tenglikni ayniyat deb qarasak tenglikning ikki tarafidagi maxrajlar bir xil, ya’ni $Q_m(x)$ bo‘lgani sababli, $P_n\equiv\tilde{P}_n(x)$ ayniyatni hosil qilamiz. Bu ayniyatda x larning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirish natijasida A_{it}, $B_{j\ell}$ va $C_{j\ell}$ noma’lum koeffitsientlar uchun chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu sistemani yechib, (3)-ayniyatdagi A_{it}, $B_{j\ell}$ va $C_{j\ell}$ larning qiymatlarini topamiz.

Masalan 1. Misol tariqasida ushbu aniqmas integralni hisoblaylik:

$$\int \frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)}dx$$

Noma'lum koeffitsientlar usuliga ko'ra, quyidagi ayniyatni yoza olamiz:

$$\frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Bu tenglikning o'ng tarafini umumiy maxrajga keltirib, so'ngra maxrajini tashlab yuborish natijasida, quyidagi ayniyatni hosil qilamiz:

$$3x^2+x+3 = A_1\cdot(x-1)^2(x^2+1) + A_2(x-1)(x^2+1) + A_3(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)^3.$$

Demak,

$$3x^2+x+3 = (A_1+B)x^4 + (-2A_1+A_2-3B+C)x^3 + (2A_1-A_2+A_3+3B-3C)x^2 +$$
$$+(-2A_1-B+3C)x + (A_1-A_2+A_3-C)$$

Bu ayniyatdagi x larning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirib, quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} A_1 + B = 0 \\ -2A_1 + A_2 - 3B + C = 0 \\ 2A_1 - A_2 + A_3 + 3B - 3C = 3 \\ -2A_1 + A_2 - B + 3C = 1 \\ A_1 - A_2 + A_3 - C = 3 \end{cases}$$

Bu sistemani Gauss usuli bilan yechamiz:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) -$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

Natijada, $A_1=-\frac{1}{4},\ A_2=0,\ A_3=\frac{7}{2},\ B=\frac{1}{4},\ C=\frac{1}{4}$ ekanligini hosil qilamiz,

ya'ni $\frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)}=-\frac{1}{4(x-1)}+\frac{7}{2(x-1)^3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{x+1}{x^2+1}$

Nihoyat, quyidagi tengliklarga ega bo'lamiz:.

$$\int\frac{2x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)}dx=-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{7}{2}\int\frac{dx}{(x-3)^3}+\frac{1}{4}\int\frac{x+1}{x^2+1}dx=$$

$$=-\frac{1}{4}\ell n|x-1|+\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{(-2)(x-1)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{x\,dx}{x^2+1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=-\frac{1}{4}\ell n|x-1|-\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{8}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}+\frac{1}{4}\,arc\,tgx+C=$$

$$=-\frac{1}{4}\ell n|x-1|-\frac{7}{4(x-1)^2}+\frac{1}{8}\ell n(x^2+1)+\frac{1}{4}\,arc\,tgx+C=$$

$$=\frac{1}{8}\ell n\frac{x^2+1}{(x-1)^2}-\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{4}arc\,tgx+C$$

Masalan 2. Integrallarni hisoblang: $\int\frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}dx$.

Yechish: x^2+1 ifoda kasr ostidagi funksiya maxrajining ikki karrali ildizi bo'lgani uchun, bu funksiyani quyidagi sodda kasrlar yig'indisi ko'rinishida ifodalash munkin: $\frac{x^3+2x}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{(x^2+1)^2}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)}$.

Bundan $x^3+2x=Ax+B+(Cx+D)(x^2+1)$. Noma'lum A, B, C va D koeffitsientlarni topish uchun x noma'lumning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarini tenglab,

$$\begin{array}{l|l} x^3 & C=1 \\ x^2 & D=0 \\ x & A+C=-2, A=-3 \\ x^0 & B+D=0,\ B=0 \end{array}$$

ekanligini hosil qilamiz. Demak,

$$\int\frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}dx=-3\int\frac{xdx}{(x^2+1)^2}+\int\frac{xdx}{x^2+1}=-\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{3}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$$

Ayrim irratsional ifodalarni integrallash

Irratsional ifodalarda o'zgaruvchi qandaydir darajadagi ildiz ostida qatnashishini eslatib o'tamiz.

Agar $R(u,v)$ ifoda u va v lardan to'rt arifmetik amallar va songa ko'paytirishdan hosil bo'lgan funksiya bo'lsa, u holda bu ifoda u va v o'zgaruvchilarning ratsional funksiyasi deyiladi. Masalan, quyidagi ifoda

$$R(u,v)=u^2+3v^2-\frac{2u-5v+u\cdot v}{4-u^3+v^5}$$

u va v o'zgaruvchilarning ratsional funksiyasi bo'ladi. Ikki o'zgaruvchili $R(u,\ v)$ ratsional funksiya uchun ushbu $\int R\left(x,\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ aniqmas integralni, a,b,c va d lar haqiqiy sonlar bo'lib, $ad\text{–}c\neq 0$ va m natural son bo'lgan holda qanday hisoblash mumkinligini ko'rsatamiz. Buning uchun

$$t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \quad t^m = \frac{ax+b}{cx+d},$$

yangi o'zgaruvchi kiritsak,

$$x = \varphi(t) = \frac{dt^m - b}{a - ct^m} \text{ va } dx = \varphi'(t)dt = \frac{(ad-bc)\cdot m\cdot t^{m-1}}{(a-ct^m)^2}dt$$

Bundan $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \int R(\varphi(t), t)\varphi'(t)dt$

tenglikni hosil qilamiz. $\varphi(t)$ va $\varphi'(t)$ funksiyalar t ning ratsional funksiyalari bo'lgani uchun $R(\varphi(t), t)\cdot\varphi'(t)$
funksiya ham t ning ratsional funksiyasi bo'ladi. U holda $\int R(\varphi(t), t)\varphi'(t)dt$ integralni hisoblab, so'ngra t o'zgaruvchi o'rniga $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ ni qo'yib dastlabki integralni topamiz.

Masalan 3. Quyidagi integralni hisoblaylik:

$$\int \frac{dx}{x\left(\sqrt{x} + \sqrt[5]{x^2}\right)} = \int \frac{dx}{x\left[\left(\sqrt[10]{x}\right)^5 + \left(\sqrt[10]{x}\right)^4\right]}$$

Bu yerda, $\sqrt[10]{x} = t$ deb, yangi o'zgaruvchi kiritamiz.

Demak, $x=t^{10}$ va $dx=10t^9dt$ bo'lgani uchun,

$$\int \frac{dx}{x\left[\left(\sqrt[10]{x}\right)^5 + \left(\sqrt[10]{x}\right)^4\right]} = \int \frac{10\cdot t^9 dt}{t^{10}\left(t^5 + t^4\right)} = 10\int \frac{dt}{t^5(t=1)}$$

Noma'lum koeffitsientlar usuliga ko'ra

$$\frac{1}{t^5(t+1)} = \frac{A_1}{t} + \frac{A_2}{t^2} + \frac{A_3}{t^3} + \frac{A_4}{t^4} + \frac{A_5}{t^5} + \frac{A_6}{t+1}$$

$$1 = A_1t^4(t+1) + A_2t^3(t+1) + A_3t^2(t+1) + A_4t\cdot(t+1) + A_5(t+1) + A_6\cdot t^5 =$$
$$= (A_1 + A_6)t^5 + (A_1 + A_2)t^4 + (A_2 + A_3)t^3 + (A_3 + A_4)t^2 + (A_4 + A_5)t + A_5$$

Bu yerda, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 va A_6 koeffitsientlar uchun quyidagi tenglamalar sistemasi kelib chiqadi:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 + A_6 = 0 \\ A_1 + A_2 = 0 \\ A_2 + A_3 = 0 \\ A_3 + A_4 = 0 \\ A_4 + A_5 = 0 \\ A_5 = 1 \end{array}\right\}, \text{ yani } A_5 = 1,\ A_4 = -1,\ A_3 = 1,\ A_2 = -1,\ A_1 = 1,\ A_6 = -1$$

Demak,

$$10\int\frac{dt}{t^5(t+1)} = 10\left(\int\frac{dt}{t} - \int\frac{dt}{t^2} + \int\frac{dt}{t^3} - \int\frac{dt}{t^4} + \int\frac{dt}{t^5} - \int\frac{dt}{t+1}\right) =$$

$$= 10\left[\ln\left|\frac{t}{t+1}\right| + \frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{4t^4}\right] + C$$

u holda, $t = \sqrt[10]{x}$ ekanligini e'tiborga olsak

$$\int\frac{dx}{x\left(\sqrt{x} + \sqrt[5]{x^2}\right)} = \ln\frac{x^{10}}{\left(1 + \sqrt[10]{x^2}\right)^{10}} + \frac{10}{\sqrt[10]{x}} - \frac{5}{\sqrt[5]{x}} + \frac{10}{3\sqrt[10]{x^3}} - \frac{5}{2\sqrt[5]{x^2}} + C.$$

$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblashda *Eyler almashtirishlari* deb nomlanuvchi almashtirishlar qo'llaniladi.

Bular quyidagilardan iborat:

1-hol. Agar $a > 0$ bo'lsa, $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a}\cdot x$.

2-hol. Agar $c > 0$ bo'lsa, $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$.

3-hol. Agar $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}$ bo'lsa, $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t\cdot(x-x_1)$.

Masalan 4. Integralni hisoblang: $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$

Yechish: 1-holga ko'ra quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\sqrt{x^2+x+1} = t - x \Rightarrow x^2 + x + 1 = t^2 - 2tx + x^2 \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{2t+1},$$

$$dx = \frac{2t(2t+1) - 2\cdot(t^2-1)}{(2t+1)^2}dt = \frac{2t^2+2t+2}{(2t+1)^2}dt$$

Bunda, $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\int\frac{2(t^2+t+1)}{t\cdot(2t+t)^2}dt=\frac{3}{2(2t+1)}+\frac{1}{2}\ln\frac{t^4}{|2t+1|}+C=$

$$=\frac{3}{2\left(2x+2\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}+\frac{1}{2}\ln\frac{\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)^4}{\left|2x+2\sqrt{x^2x+1}+1\right|^3}+C$$

Masalan 5. Integrallarni hisoblang: $\int\frac{3x+2}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}dx$.

Yechish:

$$\int\frac{3x+2}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}dx=\int\frac{3(x+1)-1}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}dx=3\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+3}}-\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}$$

Birinchi integralda to‘la kvadrat ajratamiz, ikkinchi integralda esa $x+1=\frac{1}{t}$ almashtirishni bajaramiz, bunda $dx=-\frac{dt}{t^2}$. U holda

$$\int\frac{3x+2}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}dx=3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right|+\int\frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+3\left(\frac{1}{t}-1\right)+3}}=$$

$$=3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right|+\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}=3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right|+\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}\right|+$$

$$+C=3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right|+\ln\left|\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^2+3x+3}}{x+1}\right|+C.$$

Binomial integral deb nomlanuvchi integralni, ya’ni ushbu $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ integralni hisoblaylik. Bu yerda m,n va p ratsional sonlar bo‘lib, quyidagi hollarda bu integralni hisoblash ratsional ifodani integrallashga olib keladi.

1-hol. Agar p butun bo‘lib, N son m va n larning umumiy maxraji bo‘lsa $t=\sqrt[N]{x}$ almashtirish qo‘llaniladi.

2-hol. Agar m butun son bo‘lib, N son p ning maxraji bo‘lsa, $t=\sqrt[N]{a+bx^n}$ almashtirish qo‘llaniladi.

3-hol. Agar $m+p$ butun son bo‘lib, N–p ning maxraji bo‘lsa, $t=\sqrt[N]{\frac{a+bx^n}{x^n}}$ almashtirish qo‘llaniladi.

Masalan 6. Ushbu $\int \frac{\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}dx = \int x^{\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}dx$ integral uchun $m=\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{3}$, $p=-2$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, bu integralni hisoblash 1-holga tushar ekan. $\frac{1}{2}$ va $\frac{1}{3}$ larning umumiy maxraji *N=6* shuning uchun $t=\sqrt[6]{x}$ almashtirishni bajaramiz, ya'ni $x=t^6$, $dx=6t^5dt$ tengliklarga ko'ra

$$\int x^{\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}dx = \int t^3\left(1+t^2\right)^{-2}6\cdot t^5dt = 6\int \frac{t^8}{\left(1+t^2\right)^2}dt$$

Ammo, $\left(t^2+1\right)^2 = t^4+2t^2+1$ bo'lgani uchun, t^8 ko'phadni t^4+2t^2+1 ko'phadga bo'lib, $\frac{t^8}{\left(1+t^2\right)^2}$ ratsional kasrning, to'g'ri kasr qismini ajratib olamiz:

$$\frac{t^8}{\left(t^2+1\right)^2} = t^4-2t^2+3-\frac{4t^2+3}{\left(t^2+1\right)^2}.$$

Lekin $\frac{4t^2+3}{\left(t^2+1\right)^2} = \frac{4\left(t^2+1\right)-1}{\left(t^2+1\right)^2} = \frac{4}{t^2+1}-\frac{1}{\left(t^2+1\right)^2}$ bo'gani uchun, (10)-integralga asosan, quyidagini hosil qilamiz:

$$6\int \frac{t^8}{\left(1+t^2\right)^2}dt = 6\left[\int\left(t^4-2t^2+3\right)dt - 4\int\frac{dt}{t^2+1}+\int\frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2}\right]=$$

$$=6\left[\frac{t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}+3t-4arctg\ t+\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t^2+1}+\frac{1}{2}arctg\ t\right]+C=$$

$$=\frac{6}{5}t^5-4t^3+18t-21\,arctg\,t+\frac{3t}{t^2+1}+C$$

Dastlabki integral uchun quyidagi hosil bo'ladi:

$$\int\frac{\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}dx = \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-4\sqrt{x}+18\sqrt[6]{x}-21arctg\sqrt[6]{x}+\frac{3\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}+1}+C.$$

Trigonometrik funksiyalarni integrallash

R(u,v) ifoda *u* va *v* o'zgaruvchilarning ratsional funksiyasi bo'lsin.

$\int R(\sin x, \cos x)dx$ integralni hisoblaylik. Bunday integralda $t = tg\frac{x}{2}$ universal almashtirishni bajarib $R(\sin x, \cos x)dx$ ifodani t o'zgaruvchining ratsional ifodasiga olib kelish mumkin. Haqiqatan ham

$$\sin x = \frac{2t\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \ \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x = 2arctg\ t, \quad dx = 2\frac{1}{1+t^2}dt$$

bo'lgani uchun

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = 2\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}dt$$

Bu yerda, $R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{1}{1+t^2}$ ifoda t ning ratsional funksiyasi bo'lgani uchun, ushbu integralni hisoblab, t ning o'rniga $tg\frac{x}{2}$ ni qo'yib, dastlabki integralni topamiz.

Agar $R(-\sin x, \cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$ bo'lsa, integralda *cosx=t*, agar $R(\sin x - \cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$ bo'lsa, $t = \sin x$ almashtirishni bajarish mumkin.

Agar $R(-\sin x - \cos x) \equiv R(\sin x, \cos x)$ bo'lsa, *tgx=t* almashtirishni bajarish orqali integralni ratsional funksiyani integrallashga olib kelsa bo'ladi.

Masalan 7. $\int\frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$ integralni hisoblang.

Yechish: Buning uchun $t = tg\frac{x}{2}$ almashtirishdan foydalanamiz.

$$\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}=\int\frac{2}{\frac{4t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{2dt}{4t-1+t^2+5+5t^2}=$$

$$=\int\frac{2dt}{6t^2+4t+4}=\int\frac{dt}{3t^2 2t+2}=\int\frac{dt}{3\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{3}}=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{d\left(t+\frac{1}{3}\right)}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{3}}arctg\frac{t+\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}+C=\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{3tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C$$

Endi $\int\frac{\sin x\,dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}$ integralni hisoblaylik. Bu yerda, *R(–sin x, –cos x)=R(sin x, cosx)* bo‘lgani uchun *t=tgx* almashtirishni bajaramiz. Natijada,

$$\int\frac{\sin x\;dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}=\int\frac{\sin x\,dx}{\cos^3 x\cdot\left(tg^3x+1\right)}=\int\frac{tgx\cdot d(tgx)}{tg^3x+1}=$$

$$\int\frac{tdt}{t^3+1}=-\frac{1}{6}\ell n\frac{(\sin+\cos x)^2}{1-\sin x\cdot\cos x}-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2\cos x-\sin x}{\sqrt{3}\cdot\sin x}+C$$

Masalan 8. $\int\frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$ integralda $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\ \cos x)$ tenglik o‘rinli bo‘lgani uchun *t=cos x* almashtirishni bajaramiz. Natijada,

$$\int\frac{dt}{(2+\cos x)\cdot\sin x}=\int\frac{\sin x\,dx}{(2+\cos x)\cdot\sin^2 x}=-\int\frac{d(\cos x)}{(2+\cos x)(1-\cos^2 x)}=\int\frac{dt}{(2+t)(1+t^2)}$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}+C$$

Shuni ta’kidlash lozimki, har doim ham berilgan integralni analitik usulda hisoblab bo‘lmaydi.

Masalan, $\int\ell^{-x^2}dx,\quad \int\sin x^2\,dx,\quad \int\frac{\sin x}{x}dx,\quad \int\frac{dx}{\ell nx}$ integrallar mavjud bo‘lishligiga qaramasdan, ularni analitik usulda integrallab bo‘lmaydi. Buning sababi hosilasi berilgan integral ostidagi funksiyaga teng bo‘lgan elementar funksiya mavjud emasligidir.

Masalan 9. Integralni hisoblang: $\int\frac{dx}{\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x}$.

Yechish: $t=tgx$ almashtirish bajaramiz, bunda $x=arctgt$, $dx=\frac{dt}{1+t^2}$.

Bu holda

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x}=\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}-\frac{1}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t^2+2t-1}=$$

$$=\int\frac{d(t+1)}{(t+1)^2+(\sqrt{2})^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{tgx+1-\sqrt{2}}{tgx+1+\sqrt{2}}\right|+C.$$

Masalan. 10 Integralni hisoblang: $\int\cos x\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}dx$.

Yechish:

$$\int\cos x\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}dx=\frac{1}{2}\int(\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{x}{2})\cdot\cos\frac{x}{4}dx=\frac{1}{2}\int\cos\frac{3x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}dx+$$

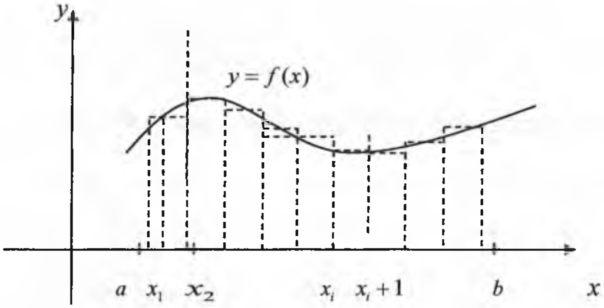
$$+\frac{1}{2}\int\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}dx=\frac{1}{4}\int(\cos\frac{7x}{4}+\cos\frac{5x}{4})dx+\frac{1}{4}\int(\cos\frac{3x}{4}+\cos\frac{x}{4})dx=$$

$$\frac{1}{7}\sin\frac{7x}{4}+\frac{1}{5}\sin\frac{5x}{4}+\frac{1}{3}\sin\frac{3x}{4}+\sin\frac{x}{4}+C.$$

9. Aniq integral tushunchasi

Egri chiziqli trapetsiya yuzi

Quyidagi egri chiziqli trapetsiya deb nomlanuvchi figuraning yuzasini topish masalasini ko‘raylik.



Bu figura yuqoridan manfiy bo‘lmagan *y=f(x)* funksiya grafigi bilan, quyidan *OX* o‘q, yon tomonlardan *x=a* va *x=b* to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan. Buning uchun [*a,b*] oraliqni $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ nuqtalar bilan, $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,1,\ldots n-1$, kichik oraliqlarga bo‘lamiz. Har bir oraliqdan biron-bir $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ nuqta olib, $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$, $i = 0,1,\ldots,n-1$, belgilash kiritib, quyidagi yig‘indini tuzib olamiz:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\cdot \Delta x_i \qquad (3)$$

Bu yig‘ndida $f(\xi_i)\cdot \Delta x_i$ qo‘shiluvchini biz qaralayotgan figuraning $[x_i, x_{i+1}]$ oraliqqa mos keluvchi bo‘lagining yuzasini, balandligi $f(\xi_i)$ va asosi Δx_i ga teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak yuzasiga taqriban teng deb qarasak, u holda yuqoridagi yig‘indini biz egri chiziqli trapetsiya yuzasining taqribiy qiymati deb qarashimiz mumkin. S ni egri chiziqli trapetsiya yuzasi deb olsak,

$$S \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Agar biz bu taqribiy tenglikdagi xatolikni kamaytirmoqchi bo‘lsak, $[x_i, x_{i+1}]$ kesmalar uzunliklarini, ya’ni Δx_i larni yetarlicha kichik qilib olishimiz kerak. Buning uchun oraliqni bo‘luvchi nuqtalar soni n ni shunday oshira borishimiz kerakki, $n \to \infty$ da $\max\limits_{0 \le i \le n-1}\{\Delta x_i\} \to 0$ bo‘lsin.

Demak, agar biz (3) yig‘indida $\max\{\Delta x_i\} \to 0$ deb qarasak, limitda qidirilayotgan egri chiziqli trapetsiya yuzini hosil qilar ekanmiz, ya’ni

$$S = \lim_{\max\{\Delta x_i\} \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Aniq integral

Ta’rif. $[a,b]$ oraliqda berilgan $y = f(x)$ uchun, shu oraliqni kichik bo‘lakchalarga bo‘luvchi $a = x_0 < x_1, \dots, < x_n = b$ va $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ nuqtalar uchun (3)-yig‘indi *integral yig‘indi* deb ataladi.

Ta’rif. $[a,b]$ oraliqda berilgan $y = f(x)$ funksiya uchun $\max\{\Delta x_i\} \to 0$ da (3)-integral yig‘indining chekli limiti mavjud bo‘lib, bu limit bo‘linish nuqtalari $x_0, x_1, \dots, x_n$ va oraliqlardan olinayotgan $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ nuqtalarga bog‘liq bo‘lmasa, $y = f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi va limitning qiymati uning aniq integrali deb ataladi.

Demak, ta’rifga ko‘ra $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\max\{\Delta x_i\} \to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$

Bu yerda, *f(t)* integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ integral ostidagi ifoda, *a* integralning quyi chegarasi, b integralning yuqori chegarasi deyiladi.

$\int\limits_a^b f(x)dx$ integral qiymatini topish *f(t)* funksiyani [*a,b*] oraliqda integrallash deb ataladi. Shuni ta’kidlash kerakki, *f(t)* funksiyaning [*a,b*] oraliqdagi aniq integrali son bo‘lsa, shu funksiyaning aniqmas integrali funksiyalar to‘plamidan iborat bo‘ladi. Demak, aniq va aniqmas integrallar turli tushunchalar ekan.

Agar biz aniq integralda uning chegaralarining tartibini o‘zgartirsak, u holda $[a,b]$ va $[b,a]$ uchun tuzilgan integral yig‘indilar ishorasi bilan farq qiladi, chunki $[a,b]$ uchun $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ bo‘lsa, $[b,a]$ uchun – $\Delta x_i = x_i - x_{i+1}$ ayirma hosil bo‘ladi. Shuning uchun, $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Yuqorida aytilganidek, aniq integralning geometrik ma’nosini manfiy bo‘lmagan $y = f(x)$ funksiya hosil qilgan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi deb tushunish mumkin ekan.

Aniq integralning iqtisodiy ma’nosini anglash uchun, $y = f(t)$ funksiya biron-bir ishlab chiqarishda mehnat unumdorligining vaqt davomida o‘zgarishini aniqlasin deb qaraymiz. U holda $[0,T]$ vaqt oralig‘ida mahsulot miqdori hajmi u ni hisoblash uchun $[0,T]$ oraliqni $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} <= T$ nuqtalar bilan kichik bo‘lakchalarga bo‘lib, $[t_i, t_{i+1}]$ kichik oraliqda mehnat unumdorligini taqriban o‘zgarmas $f(\xi_i)$ ga $(\xi_i \in [t_i, t_{i+1}])$ teng deb $[t_i, t_{i+1}]$ oraliqda ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi $\Delta u_i \approx f(\xi_i)\cdot \Delta t_i$ $(\Delta t_i = t_{i+1} - t_i)$ ekanligini hisobga olib, butun $[0,T]$ oraliqda ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori u uchun quyidagi taqribiy tenglikni hosil qilamiz: $u = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta u_i \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta t_i$

Bu tenglikda aniqlikni oshirish uchun $\max \Delta t_i \to 0$ da limitga o‘tishimiz lozim. U holda, $u = \int_0^T f(t)dt$.

Bu tenglik $[0,T]$ vaqt davomida ishlab chiqarilgan mahsulot miqdorining hajmi u, $f(t)$ mehnat unumdorligi funksiyasi $f(t)$ ning aniq integrali orqali ifoda etilar ekan. Bu integral son jihatidan $f(t)$ funksiya va $[0,T]$ oraliqlar hosil qilgan egri chiziqli trapetsiya yuziga teng bo‘ladi.

$y = f(x)$ funksiya uchun $\int_a^b f(x)dx$ integral qaysi shartlarda mavjud bo‘lishligini qaraymiz.

1-teorema (Aniq integral mavjudligining yetarli sharti). Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lsa, bu funksiya shu oraliqda integrallanuvchi bo'ladi.

Isbot: $\overline{S_i}-\max\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]}\{f(x)\}$ *ва* $\underline{S_i}=\min\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]}\{f(x)\}$ belgilashlarni kiritaylik. U holda

$$\overline{S}'=\max_{x\in[x',x'']}\{f(x)\}\le\overline{S}_i,\qquad \underline{S}'=\min_{x\in[x',x'']}\{f(x)\}\ge\underline{S}_i. \tag{4}$$

Bu yerda, $\xi_i\in[x_i,x_{i+1}]$ oraliqdan olingan istalgan nuqtadir. Agar $[x',x'']\subset[x_i,x_{i+1}]$ bo'lganda $\overline{S}'=\max\limits_{x\in[x',x'']}\{f(x)\}\le\overline{S_i}$, $\underline{S}'=\min\limits_{x\in[x',x'']}x\{f(x)\}\ge\underline{S}_i$ ekanligini e'tiborga olsak, $\max\Delta x_i\to0$ da $[a,b]$ oraliqni bo'lakchalarga bo'lishda, keyingi qadamdagi kichik bo'lakchalar avvalgi qadamdagi bo'lakchalarning ichida yotadi deb hisoblashimiz mumkin. U holda (5)-tengsizlikda $\sum\limits_{i=0}^{n-1}\underline{S}_i\Delta x_i$ o'suvchi ketma-ketlik $\sum\limits_{i=0}^{n-1}\overline{S}_i\Delta x_i$ kamayuvchi ketma-ketlik ekanligi kelib chiqadi. Agar $\lim\limits_{\max\Delta x_i\to0}\max(\overline{S}_i-\underline{S}_i)=0$ ekanligini e'tiborga olsak

$$\lim_{\max\Delta x_i\to0}\sum_{i=0}^{n-1}\underline{S}_i\Delta x_i=\lim_{\max\Delta x_i\to0}\sum_{i=0}^{n-1}\overline{S}_i\Delta x_i=I.$$

U holda (5)-tengsizlikka ko'ra $\lim\limits_{\max\Delta x_i\to0}\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i=I.$

Demak, $\int\limits_a^b f(x)dx$ mavjud va $\int\limits_a^b f(x)dx=I.$

Quyidagi teorema aniq integral mavjudligining zaruriy shartini ifoda etadi.

2-teorema. Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiya shu oraliqda chegaralangan bo'ladi.

Isbot: *f(x)* funksiya $[a,b]$ da chegaralangan bo'lmasin, masalan, yuqoridan chegaralanmagan deb faraz qilsak, $[a,b]$ ni bo'laklarga ajratishda $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ uchun $\xi_i\in[x_i,x_{i+1}]$ larni shunday tanlab olish mumkin bo'ladiki, oldindan berilgan har qanday $K>0$ son uchun

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i > K$$

tengsizlikni o‘rinli qilib olish mumkin, ya’ni, $\sup\limits_{\substack{\xi_i\in[x_i,x_{i+1}]\\ i=0,1,\dots,n-1}}\left(\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i\right)=+\infty$.

Demak, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi emas. Bu esa bizning farazimiz noto‘g‘ri ekanligini ko‘rsatadi, ya’ni $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda chegaralangan bo‘lar ekan.

Aniq integral xossalari

1. Istalgan o‘zgarmas k son uchun $\int\limits_a^b k\cdot f(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$.

2. Funksiyalar yig‘indisining integrali qo‘shiluvchilar integrallarining yig‘indisiga teng, ya’ni $\int\limits_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$.

3. Istalgan a,b va c $(a<c<в)$ sonlar uchun $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b g(x)dx$.

4. Agar $a<b$ bo‘lib, $[a,b]$ oraliqda $f(x)\le g(x)$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx$.

Xususan, $[a,b]$ oraliqda $m\le f(x)\le M$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda $m(b-a)\le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$ tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi.

Bu xossalar isboti to‘g‘ridan to‘g‘ri aniq integral ta’rifdan kelib chiqadi.

3-teorema (O‘rta qiymat haqidagi teorema). Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]\,(a<b)$ oraliqda integrallanuvchi bo‘lib, bu oraliqda $m\le f(x)\le M$ tengsizliklar o‘rinli bo‘lsa, u holda shunday μ son mavjudki, uning uchun $m\le\mu\le M$ tengsizlik o‘rinli bo‘lib, $\int\limits_a^b f(x)dx = \mu\cdot(b-a)$

Isbot: 4-xossaga ko‘ra $m(b-a)\le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

Agar $\mu = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

belgilashni kiritsak, $m \le \mu \le M$ o‘rinli bo‘lib, $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$ tenglik kelib chiqadi.

f(x) funksiya [*a,b*] oraliqda integrallanuvchi bo‘lsin, u holda istalgan $x \in [a,b]$ uchun, *f(x)* funksiya [*a,x*] oraliqda ham integrallanuvchi bo‘ladi. Shuning uchun [*a,b*] oraliqda berilgan quyidagi funksiyani aniqlay olamiz:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Bu *Φ(x)* funksiya yuqori chegarasi o‘zgaruvchi integral deyiladi. Ushbu *Φ(x)* funksiya xossalari bilan tanishib chiqamiz.

4-teorema. [*a,b*] oraliqda integrallanuvchi *f(x)* funksiya uchun *Φ(x)* funksiya [*a,b*] oraliqda uzluksiz bo‘ladi.

Isbot: f(x) chegaralangan funksiya bo‘lgani uchun, [*a,b*] oraliqda $m \le f(x) \le M$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsin deb olishimiz mumkin, u holda $\Delta x > 0$ uchun

$$\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx = \int_a^x f(x)dx + \int_x^{x+\Delta x} f(x)dx -$$

$$-\int_a^x f(x)dx = \int_x^{x+\Delta x} f(x)dx$$

Tenglikdan va quyidagi $m \cdot \Delta x \le \int_x^{x+\Delta x} f(x)dx \le M \cdot \Delta x$ tengsizlikdan, $m \cdot \Delta x \le \Phi(x+\Delta x) -$ $-\Phi(x) \le M \cdot \Delta x$ tengsizliklarni hosil qilamiz.

Demak, $\lim_{\Delta x \to 0}(\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)) = 0$ ya’ni *f(x)* funksiya *x* nuqtada uzluksiz ekanligi kelib chiqadi.

5-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo‘lsa, u holda $\Phi(x)$ funksiya (a,b) intervalda $f(x)$ funksiya uchun boshlang‘ich funksiya bo‘ladi, ya’ni (a,b) intervalda $\Phi'(x) = f(x)$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot: $f(x)$ funksiya uzluksiz bo'lgani uchun $\min\limits_{t\in[x,x+\Delta x]}\{f(t)\}=m(x)$ va $\max\limits_{t\in[x,x+\Delta x]}\{f(t)\}=M(x)$ desak, $\lim\limits_{\Delta x\to 0} m(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0} M(x)=f(x)$

Bundan $m(x)\Delta x\leq\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)\leq M(x)\cdot\Delta x$, ya'ni $m(x)\leq\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}$ tengsizlikdan ushbu $\Phi'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=f(x)$ tenglik kelib chiqadi.

Bu teoremadan $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lgan har qanday funksiyaning boshlang'ich funksiyasi mavjud bo'lishligi kelib chiqar ekan.

Nyuton-Leybnis formulasi

6-teorema (Nyuton-Leybnis formulasi). $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lib, $F(x)$ uning istalgan boshlang'ich funksiyasi bo'lsin, u holda

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

bu tenglik Nyuton-Lebnis formulasi deyilib, ko'pincha $F(b)-F(a)=F(x)\big|_a^b$ kabi belgilash qo'llaniladi.

Isbot: $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsin. U holda $\Phi(x)=\int_a^x f(x)dx$ funksiya, ham $f(x)$ uchun (a,b) oraliqda boshlang'ich funksiya bo'lgani uchun shunday C o'zgarmas son mavjud bo'ladiki, bunda $F(x)=\Phi(x)+C$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Demak,

$$F(b)-F(a)=\Phi(b)+C-\Phi(a)-C=\Phi(b)-\Phi(a)=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b f(x)dx=\int_a^b d(x)dx$$

Endi aniq integralni hisoblash usullari bilan tanishamiz.

7-teorema (Yangi o'zgaruvchi kiritib integrallash). Agar $\varphi(t)$ funksiya $[\alpha,\beta]$ oraliqda uzluksiz hosilaga ega bo'lib, $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$

bo‘lsa, $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo‘lgan *f(x)* funksiya uchun $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ tenglik o‘rinlidir.

Isbot: F(x) funksiya $[a,b]$ oraliqda *f(x)* funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa, ya’ni $\int f(x)dx = F(x)+C$ bo‘lsa, u holda aniqmas integral xossalariga ko‘ra $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))+C.$

Bundan esa $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$ va $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha)) = F(b)-F(\alpha)$ tenglikdan teorema isboti kelib chiqadi.

8-teorema (Bo‘laklab integrallash usuli). $u=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiyalar $[a,b]$ oraliqda uzluksiz hosilalarga ega bo‘lsa, quyidagi tenglik o‘rinli bo‘ladi:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Isbot: Ushbu $\int_a^b (uv)' dx = uv\Big|_a^b$

tenglikka ko‘ra aniq integral xossalariga asoslanib,

$$\int_a^b (uv)' dx = \int_a^b uv'dx + \int_a^b vu'dx = \int_a^b udv + \int_a^b vdu$$

tenglikni hosil qilamiz. Demak, bu yerdan $\int_a^b uvd + \int_a^b vdu = uv\Big|_a^b$

ya’ni $\int_a^b uvd = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$ tenglik kelib chiqadi.

Masalan 1. Integralni integral ta’rifi yordamida hisoblang: $\int_0^1 x^2 dx.$

Yechish: Bu integralda a=0, b=1, $f(x)=x^2$. [0;1] kesmani n ta teng qismlarga bo'lamiz, u holda har bir oraliq uzunligi $\Delta x_k = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$ va har bir oraliqdan $\xi_k = x_k$ nuqtalarni tanlaymiz. Bu holda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, x_3 = \frac{3}{n}, \ldots, x_{n-1} = \frac{n-1}{n}, x_n = \frac{n}{n} = 1,$$

$$f(\xi_1) = \left(\frac{1}{n}\right)^2, f(\xi_2) = \left(\frac{2}{n}\right)^2, \ldots, f(\xi_n) = \left(\frac{n}{n}\right)^2; f(\xi_k)\cdot\Delta x_k = \left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}.$$

Demak,

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6} = \frac{1}{3}.$$

Masalan 2. Integralni integral ta'rifi yordamida hisoblang: $\int_0^a e^x dx$.

Yechish: Bu integralda $f(x)=e^x$. [0;a] kesmani n ta teng qismlarga bo'lamiz, u holda har bir oraliq uzunligi $\Delta x_k = \frac{a-0}{n} = \frac{a}{n}$ va har bir oraliqdan $\xi_k = x_k$ nuqtalarni tanlaymiz. Bu holda integral yig'indi

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(k\frac{a}{n})\cdot\frac{a}{n} = \sum_{k=1}^{n} e^{k\frac{a}{n}}\cdot\frac{a}{n} = \frac{a}{n}(e^{\frac{a}{n}} + e^{2\frac{a}{n}} + \ldots + e^{n\frac{a}{n}}) = \frac{a}{n}e^{\frac{a}{n}}\left(1 + e^{\frac{a}{n}} + e^{2\frac{a}{n}} + \ldots + e^{\frac{n-1}{n}a}\right).$$

Qavsdagi ifoda maxraji $q = e^{\frac{a}{n}}$ va birinchi hadi 1 bo'lgan geometrik progressiyadir. Geometrik progressiya hadlari yig'indisi formulasidan foydalanib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$S_n=\frac{a}{n}e^{\frac{a}{n}}\left(1+e^{\frac{a}{n}}+e^{2\frac{a}{n}}+\ldots+e^{\frac{n-1}{n}a}\right)=\frac{a}{n}e^{\frac{a}{n}}\frac{e^a-1}{e^{\frac{a}{n}}-1}\quad va\quad \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n}e^{\frac{a}{n}}\frac{e^a-1}{e^{\frac{a}{n}}-1}=\left|\begin{array}{l}\frac{a}{n}=t\ deb\\ bunda\\ n\to\infty\ da\\ t\to 0\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{t\to 0}(e^a-1)\frac{te^t}{e^t-1}=(e^a-1)\lim_{t\to 0}\frac{te^t}{e^t-1}=(e^a-1)\lim_{t\to 0}\frac{(te^t)'}{(e^t-1)'}=(e^a-1)\lim_{t\to 0}\frac{(t+1)e^t}{e^t}=$$

$$(e^a-1)\lim_{t\to 0}(t+1)==e^a-1.$$

Demak, $\int\limits_0^a e^x dx=e^a-1$.

Masalan 3. Integralni hisoblang: $\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^2}$.

Yechish: $\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^2}=arctgx\Big|_1^0=arctg1-arctg0=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$.

Masalan 4. Integralni hisoblang: $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx$.

***Yechish*:** Integralni hisoblash uchun bo‘laklab integrallash usulidan foydalanamiz, bunda $\left|\begin{array}{l}u=x\\ dv=e^{-x}dx\\ du=dx\\ v=-e^{-x}\end{array}\right|$. U holda

$$\int\limits_0^1 xe^{-x}dx=-xe^{-x}\Big|_0^1+\int\limits_0^1 e^{-x}dx=-e^{-1}-e^{-x}\Big|_0^1=-2e^{-1}+1=\frac{e-2}{e}.$$

Masalan 5. Integralni hisoblang: $\int\limits_1^e\frac{\ln^2 x}{x}dx$.

Yechish: Integralni hisoblash uchun o‘zgaruvchini almashtiramiz: *lnx=t*, $\frac{dx}{x}=dt$, bunda *x=1* bo‘lsa, *t=0*; agar *x=e* bo‘lsa, *t=1* bo‘ladi. U holda

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}t^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1^3 - 0^3) = \frac{1}{3}.$$

Masalan 6. Integralni hisoblang: $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

***Yechish*:** Integral ostidagi funksiya toq: $f(x) = \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}}$, $f(-x) = \frac{(-x)^2 \arcsin(-x)}{\sqrt{1+(-x)^2}} = \frac{x^2(-\arcsin x)}{\sqrt{1+x^2}} = -\frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}} = -f(x)$ va soha simmetrik bo'lgani uchun bu integralning qiymati nolga teng, ya'ni

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}}dx = 0.$$

Xos bo'lmagan integrallar

$[a,b]$ oraliqda $y = f(x)$ funksiya uchun kiritilgan aniq integral tushunchasida $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda chegaralangan bo'lishi zarur edi.

Cheksiz oraliq uchun aniq integral tushunchasi. $f(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ cheksiz oraliqda berilgan bo'lib, istalgan $a \le t$ uchun $f(x)$ funksiya $[a,t]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsin. U holda istalgan $a \le t$ uchun $\Phi(t) = \int_a^t f(x)dx$ funksiya aniqlangan bo'ladi.

Ta'rif. $f(x)$ funksiyaning $[a,+\infty)$ oraliqdagi xos bo'lmagan integrali $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ deb ushbu $\lim_{t\to+\infty} \Phi(t)$ limitga aytiladi, ya'ni

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx.$$

Agar bu limit mavjud va chekli bo'lsa, xos bo'lmagan integral yaqinlashuvchi, aks holda uzoqlashuvchi deyiladi.

Xuddi shuningdek, $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ ko'rinishdagi xos bo'lmagan integralni ta'riflash mumkin. $(-\infty,+\infty)$ cheksiz oraliqdagi xos bo'lmagan integral esa quyidagicha aniqlanadi: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$.

Agar bu integrallardan birontasi uzoqlashuvchi bo'lsa $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ xos bo'lmagan integral uzoqlashuvchi deyiladi.

Masalan, $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim\limits_{t\to+\infty} \int\limits_{1}^{t} \frac{1}{x^2} dx = \lim\limits_{t\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1$

Endi $[a,b]$ oraliqda chegaralanmagan funksiya uchun xos bo'lmagan integral tushunchasini kiritamiz. $y = f(x)$ funksiya $[a,b)$ yarim ochiq oraliqda uzluksiz bo'lib, $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \infty$ bo'lsin.

Ta'rif. $\lim\limits_{\delta\to+0} \int\limits_{a}^{b-\delta} f(x)dx$ limit qiymati $y = f(x)$ funksiyaning $[a,b)$ yarim ochiq oraliqdagi xos bo'lmagan integrali deyiladi. Agar bu limit mavjud va chekli bo'lsa, xos bo'lmagan integral yaqinlashuvchi, aks holda uzoqlashuvchi deyiladi.

Limit qiymati $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ shaklda belgilanadi, ya'ni

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\delta\to+0} \int\limits_{a}^{b-\delta} f(x)dx$$

Xuddi shunga o'xshash ushbu $(a,b]$ yarim ochiq oraliqda uzluksiz va $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$ bo'lgan $y = f(x)$ funksiya uchun ham xos bo'lmagan integral ta'riflanadi. (a,b) intervalda uzluksiz, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$ va $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \infty$

bo‘lgan funksiya uchun $\int\limits_a^b f(x)dx$ xos bo‘lmagan integral quyidagi tenglik orqali ifodalanadi: $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$

Bu yerda, c son $a < c < b$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi bironta son.

Masalan 7. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim\limits_{t\to+\infty} \int\limits_1^t \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{t^{\alpha-1}} - 1\right) = \begin{cases} +\infty, & agar\ \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha-1}, & agar\ \alpha > 1 \end{cases}$

Demak, $\alpha < 1$ da integral uzoqlashuvchi, $\alpha > 1$ bo‘lsa yaqinlashuvchidir. $\alpha = 1$ da $1\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim\limits_{t\to+\infty} \int\limits_1^t \frac{1}{x} dx = \lim\limits_{t\to+\infty} \ln x = +\infty$ bo‘lgani uchun, yuqoridagi integral $\alpha \le 1$ da uzoqlashuvchi.

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{(1-x)^\alpha} dx = \lim\limits_{\delta\to+0} \int\limits_0^{1-\delta} \frac{1}{(1-x)^\alpha} dx = \lim\limits_{\delta\to+0} \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{\delta^{\alpha-1}} - 1\right) = \begin{cases} +\infty, & agar\ \alpha > 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}, & agar\alpha < 1 \end{cases}$$

Demak, $\alpha > 1$ bo‘lganda xos bo‘lmagan integral uzoqlashuvchi va $\alpha < 1$ da yaqinlashuvchi. $\alpha = 1$ da $\int\limits_0^1 \frac{1}{1-x} dx = \lim\limits_{\delta\to+0} \int\limits_0^{1-\delta} \frac{1}{1-x} dx = \lim\limits_{\delta\to+0}(-\ln\delta) = +\infty$ bo‘lgani uchun, yuqoridagi integral $\alpha \ge 1$ da uzoqlashuvchidir.

Masalan 8. Integralni hisoblang: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Yechish:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int\limits_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} arctgx\Big|_a^b = \lim\limits_{b\to+\infty} arctgb - \lim\limits_{a\to-\infty} arctga = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Demak, xos bo‘lmagan integral yaqinlashuvchi.

Masalan 9. Integralni hisoblang: $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$.

Yechish: Integral ostidagi $f(x) = \frac{1}{x}$ funksiya $x=0$ nuqtada aniqlanmagan, shuning uchun

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a\to 0}\ln|x|\,\Big|_a^1 = \lim_{a\to 0}(\ln 1 - \ln a) = +\infty .$$

Demak, xos bo'lmagan integral uzoqlashuvchi.

Masalan 10. Integralni hisoblang: $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$.

Yechish: $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b xe^{-x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}(-\frac{1}{2}e^{-x^2})\,\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-b^2}) = \frac{1}{2}$.

Demak, xos bo'lmagan integral yaqinlashuvchi.

Masalan 11. Integralni hisoblang: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Yechish: Integral ostidagi $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ funksiya $x=0$ nuqtada aniqlanmagan, shuning uchun $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0+0}\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0+0} 2\sqrt{x}\Big|_a^1 = \lim_{a\to 0+0}(2\sqrt{1}-2\sqrt{a}) = 2$.

Demak, xos bo'lmagan integral yaqinlashuvchi.

Masalan 12. Integralni hisoblang: $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Yechish: Integral ostidagi $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ funksiya $x=\pm 1$ nuqtalarda uzilishga ega. Shuning uchun,

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{a\to 0}\int_{-1+a}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{a\to 0}\int_0^{1-a} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{a\to 0}\arcsin x\Big|_{-1+a}^0 + \lim_{a\to 0}\arcsin x\Big|_0^{1-a} =$$

$$= -\lim_{a\to 0}\arcsin(-1+a) + \lim_{a\to 0}\arcsin(1-a) = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Demak, xos bo'lmagan integral yaqinlashuvchi.

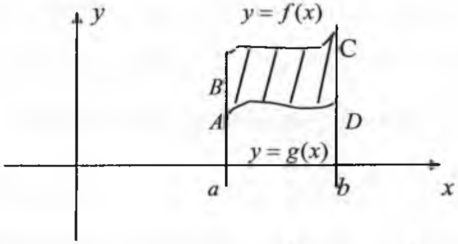
Aniq integralning tatbiqlari

1. Yassi shakl yuzini hisoblash

$[a,b]$ oraliqda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uzluksiz bo'lib, $g(x)\le f(x)$ tengsizlik o'rinli bo'lsin. $X=a$ va $x=b$ to'g'ri chiziqlar hamda $f(x)$ va $g(x)$ funksiya grafiklari bilan chegaralangan S yuzani hisoblash uchun, quyidagi formula o'rinlidir:

$$S=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$$

Ushbu formulani isbot qilaylik. Umumiylikka zarar keltirmasdan $0\le g(x)\le f(x)$ deb olishimiz mumkin. U holda quyidagi chizmadan

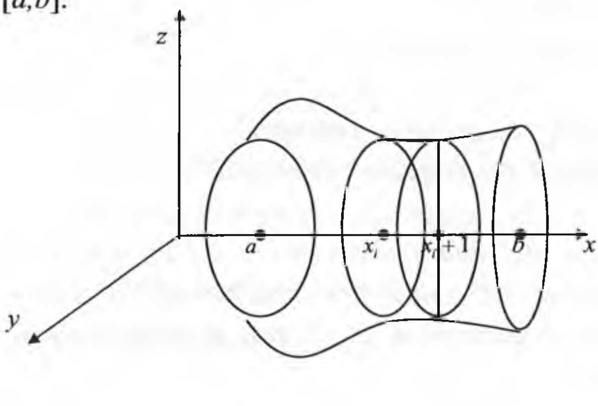


$$S=\int_{ABCD}=\int_{aBCb}-\int_{aADb}=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$$

tenglikni hosil qilamiz.

2. Aylanish jismining hajmini hisoblash

$[a,b]$ oraliqda $f(x)$ funksiya uzluksiz bo‘lib, $f(x)\ge 0$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsin. Biz $y=f(x)$ funksiya grafigini OX o‘q atrofida aylanitirishdan hamda $OXYZ$ fazodagi $x=a$ va $x=b$ tekisliklar bilan chegaralangan aylanma jismning V hajmini topish masalasini qaraymiz $[a,b]$.



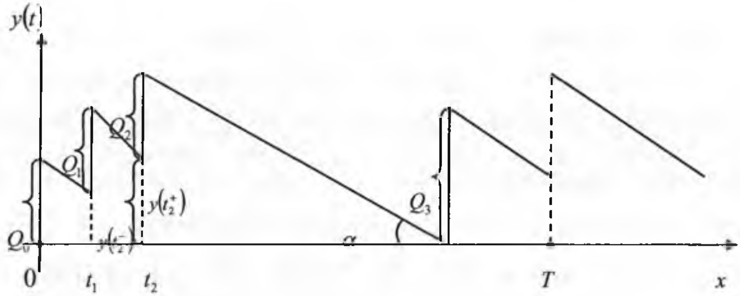
Bu masalani hal qilish uchun $[a,b]$ oraliqni $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ nuqtalar bilan bo'laklarga ajratamiz. So'ngra $[x_i, x_{i+1}]$ oraliqdan biron-bir ξ_i nuqtani olib, $[x_i, x_{i+1}]$ oraliqqa mos keluvchi aylanma jism hajmining radiusi $f(\xi_i)$ ga va balandligi Δx_i ga teng bo'lgan silindr hajmi bilan almashtiramiz. Ma'lumki, $\Delta x_i \to 0$ da bu almashtirishdagi xatolik kamayib boradi. $[x_i, x_{i+1}]$ ga mos keluvchi silindr hajmi $\pi f^2(\xi_i)\Delta x_i$ ekanligini e'tiborga olsak, quyidagi taqribiy tenglikni hosil qilamiz: $V \approx \sum_{i=0}^{n-1} \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i$

Natijada ushbu $V = \lim\limits_{\max \Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b \pi f^2(x)dx$

tenglikni hosil qilamiz. Demak, aylanma jism hajmi uchun quyidagi formula o'rinlidir: $V = \int_a^b \pi f^2(x)dx$

Aniq integralni iqtisodiyotda qo'llanilishi. Zaxiralarni boshqarishda Vilson modeli

$y(t)$ – t $(t \geq 0)$ vaqtdagi ma'lum mahsulotning ombordagi zaxirasi bo'lsin. $t \geq 0$ vaqtda $y(t) \geq 0$ bo'lsin, ya'ni omborda mahsulot tanqisligiga yo'l qo'yilmasin. Mahsulotdan μ intensivlik bilan teng taqsimotda foydalanilsin, ya'ni Δt vaqtda ombordan zaxiraning $\mu\Delta t$ qismi olinsin. Boshqa tomondan, vaqtning $t_0 = 0, t_1, t_2, t_3, \ldots$ holatlarida omborga $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ miqdorda mahsulot keltirilsin. Ombordagi $y(t)$ mahsulot zaxirasining o'zgarishini quyidagi bo'lakli-silliq chiziqlar bilan tasvirlash mumkin, bunda og'ma kesmalar parallel va $\mu = tg\alpha$.



$y(t_2^-)$ – orqali t_2 navbatdagi vaqt uchun ombordagi shu vaqtgacha bo'lgan mahsulot zaxirasini, $y(t_2^+)$ – orqali t_2 vaqtda omborga Q_2 miqdordagi mahsulot keltirilgandan so'nggi mahsulot zaxirasini belgilaylik. Demak, $y(t_2^+) = y(t_2^-) + Q_2$.

s birlik vaqt davomida bir birlik mahsulotni saqlash uchun xarajatlar, g bir partiya mahsulot hajmini yetkazish uchun xarajatlar bo'lsin.

U holda T vaqtdagi o'rtacha xarajatlar $f_T(y(t), 0 \le t \le T) = \frac{1}{T}(s\int\limits_0^T y(t)dt + gn(T))$ munosabat bilan aniqlanadi, bunda $n(T)$ – $[0;T]$ vaqt oralig'idagi mahsulot yetkazishlar soni.

Zaxirani boshqarish tizimini optimallashtirish uchun $t_0 = 0, t_1, t_2, t_3, \ldots$ mahsulot yetkazish vaqtlarini va $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ mahsulot miqdorlarini shunday tanlash zarurki, bunda $f_T(y)$ funksiya fiksirlangan T qiymatda minimumga erishsin. Bunda T davrni *rejalashtirish gorizonti* deyiladi.

Ta'rif. Agar barcha yetkazilayotgan mahsulot miqdorlari teng, ya'ni $Q_0 = Q_1 = Q_2 = Q_3 = \ldots = Q$ va barcha vaqt oraliqlari teng, ya'ni $\Delta t_i = \frac{Q}{\mu}, i \in N$ bo'lsa, u holda Q mahsulot miqdorini yetkazishga mos rejaga *Vilson rejasi* deyiladi.

Teorema. Har qanday T vaqt uchun $f_T(y)$ funksiya minimumga erishadigan optimal reja mavjud va u Vilson rejasidir.

Q – [*0; T*] vaqt oralig‘ida *n(T)* mahsulot yetkazishlar soniga mos mahsulot yetkazish hajmi bo‘lsin, ya’ni $\mu T = Qn(T)$. U holda

$$f_T(y(t), 0 \le t \le T) = \frac{1}{T}\left(\frac{s\mu}{2} \cdot \frac{T^2}{n(T)} + gn(T)\right) = \frac{sQ}{2} + \frac{g\mu}{Q}.$$

Bu funksiya $Q_0 = \sqrt{\frac{2\mu g}{s}}$ qiymatda o‘zining minimumga erishadi. Bunda, agar $\frac{\mu T}{Q}$ butun son bo‘lsa, Q_0 mahsulot yetkazishning optimal o'lchovini ifodalaydi va demak unga mos reja Vilson rejasidir.

Mahsulot hajmi

a dan *b* vaqtgacha *f(t)* mahsulot unumdorligida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi $q = \int_a^b f(t)dt$ formula yordamida hisoblanadi.

Agar mehnat xarajatlari vaqtga chiziqli bog‘liq, kapital xarajatlari o‘zgarmas bo‘lsa, u holda Kobbi-Duglas funksiyasi $f(t) = (\alpha t + \beta)e^{\gamma t}$ ko‘rinishda bo‘ladi. Bu holda *T* vaqtdagi ishlab chiqarilgan *q* mahsulot hajmi $q = \int_0^T (\alpha t + \beta)e^{\gamma t}dt$ formula bo‘yicha hisoblanadi.

Agar *f(t)* vaqt birligidagi elektr energiya xarajatlari funksiyasi ma’lum bo‘lsa, u holda (*a,b*) vaqtdagi elektr energiya xarajatlarini dastlabki formula bo‘yicha hisoblash mumkin.

Masalan 1. Ishchining mehnat unumdorlik funksiyasi $f(t) = -0.3125t^2 + 2.5t$, bunda *t* vaqt, soatlarda, $0 \le t \le 7$. 15 kishidan iborat guruh bir oyda (21 kun) ishlab chiqarilgan mahsulot hajmini toping.

Yechish: Bir ishchining 1 ish kunida ishlab chiqarish mahsulot miqdorini hisoblaymiz:

$$q_1 = \int_0^7 f(t)dt = \int_0^7 (-0.3125t^2 + 2.5t)dt = \left(-\frac{5}{48}t^3 + \frac{5}{4}t^2\right)\Bigg|_0^7 = 25.52 \ \ (sh.b.)$$

15 kishilik guruhning bir oy (21 kun)da ishlab chiqarish mahsulot miqdori $q = q_1 \cdot 21 \cdot 15 = 25.52 \cdot 21 \cdot 15 = 8038.8$ *(shartli birlik)*

Diskontlash

p foizli stavka bilan ma'lum *t* vaqtdan so'ng olingan summa oxirgi qiymati bo'yicha dastlabki qo'yilgan jamg'armani aniqlash diskontlash deyiladi.

Diskontlash masalasi kapital kiritishdagi iqtisodiy effektivlikni aniqlashda keng qo'llaniladi.

f(t) *t* vaqt bo'yicha o'zgaruvchi foydani aniqlovchi funksiya bo'lib, nisbiy foiz normasi $i = \frac{p}{100}$ va foizlar uzluksiz qo'shib hisoblansin. Bu holda *T* vaqt davomidagi diskontlash *K* foyda $K = \int_a^T f(t) e^{-11} dt$ formula bo'yicha hisoblanadi.

O'rta qiymat

Funksiya o'rta qiymatidan korxona mulkining soliqlarini hisoblash uchun foydalaniladi. Bu soliq qiymati quyidagi tenglik yordamida hisoblanadi:

$$N = k \cdot f(c) = \frac{k}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

bunda *k* – korxona turiga bog'liq koeffitsient, *f(c)* bir yillik mulkning o'rta qiymati, [*a,b*] yilga teng vaqt oralig'i. Aniq integralni bir yilni 12 oyga bo'lib trapetsiya formulasi bilan tarqibiy hisoblash mumkin:

$$N = \frac{k}{12}\left(\frac{f(0) + f(12)}{2} + f(1) + f(2) + \ldots + f(11) \right).$$

Bunda,

f(0) – 1 yanvardagi mulk qiymati,

f(1) –1 fevraldagi mulk qiymati,

. . .

f(11) – 1 dekabrdagi mulk qiymati,

f(12) – keyingi yilning 1 yanvaridagi mulk qiymati.

Iqtisodda ko'pincha o'rta qiymatlarni bilish muhim ahamiyatga ega. Bu kabi masalalar o'rta qiymat haqidagi teorema yordamida hal etiladi, ya'ni

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a), \text{ bunda } c \in [a;\ b].$$

Bundan *f(x)* funksiyaning [*a; b*] oraliqdagi *f(c)* o‘rta qiymati $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ formula yordamida hisoblanishi kelib chiqadi.

Masalan 2. Agar mahsulot hajmi *2* dan *4* shartli birlikkacha o‘zgarganda xarajatlar funksiyasi $C(x)=3x^2+4x+2$ bo‘yicha mahsulot ishlab chiqarish va xarajat uchun o‘rta qiymatni toping, bunda x – mahsulot hajmi, shartli birlikda.

Xarajatlar o‘rta qiymatni qabul qilgandagi mahsulot ishlab chiqarish hajmini ko‘rsating.

***Yechish*:** O‘rta qiymat formulasidan foydalanamiz: *a=2, b=4, f(x)=C(x).*

$$C_{o'r}=\frac{1}{4-2}\int_2^4 (3x^2+4x+2)dx = \frac{1}{2}\left(x^3+2x^2+2x\right)\Big|_2^4 = 42$$

Demak, o‘rtacha xarajatlar *42* kun birlik.

O‘rtacha xarajatlarga mos ishlab chiqarish hajmini topish uchun *C(x)=42* tenglamani yechib $x \geq 0$ yechimini olamiz: $3x^2+4x+2=42$, $3x^2+4x-40=0$, $x_1=3$, $x_2=-\frac{13}{3}$.

Demak, *x=3* shartli birlik mahsulot ishlab chiqarishga o‘rtacha xarajatlar mos keladi.

Masalan 3. Chegaraviy daromad funksiyasi $R'(x)=20-0.04x$ ga ko‘ra daromad va talab funksiyalarini toping.

Yechish: Daromad funksiyasi: $R(x)=\int(20-0.04x)dx = 20x-0.02x^2+C$.

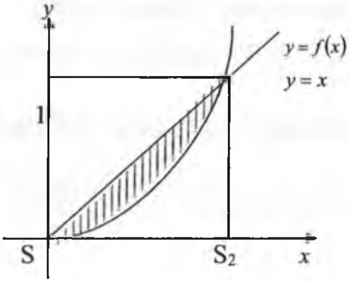
R(0)=0 shartidan *C=0* kelib chiqadi.

Demak, $R(x)=20x-0{,}02x^2$. Agar har bir ishlab chiqarilgan mahsulot p pul birligida sotilsa, daromad $R=x \cdot p$ formula bo‘yicha hisoblanadi. Demak, *p(x)* talab funksiyasini topish uchun daromadni *x* mahsulot miqdoriga nisbatini olamiz:

$$p(x)=\frac{R}{x},\ p=20-0.02x.$$

Daromadning notekis taqsimoti koeffitsienti

y=f(x) funksiyasini qaraymiz, bunda *y* bu umumiy daromadning *x* kam ta'minlangan aholi oladigan ulushi. Masalan, *y(0,8)=0,6* tenglik umumiy daromadning 60% ni 80% kam ta'minlangan aholi oladi. Tabiiyki, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $y \le x$. *y(0)=0*, ya'ni nol daromadli aholi yo'q va *y(1)=1*, ya'ni butun daromad butun aholidan undiriladi.



Rasmda *y=f(x)* funksiya grafigi keltirilgan. U Lorens egri chizig'i deyiladi. Agar daromad taqsimoti mukammal bo'lsa, u holda umumiy daromadning 10% ni 10% aholi olgan 20% ni 20% aholi olgan va h.k. bo'lardi. Bu holda daromad taqsimoti *y=x* egri chiziq bo'lardi.

Haqiqiy daromad taqsimotining ideal taqsimotdan og'ishi *y=x* va *y=f(x)* Lorens chizig'i bilan chegaralangan soha yuzi *L* ning *y=x, x=0* va *x=1* chiziqlar bilan chegaralangan soha yuziga nisbati bilan o'lchanadi va u odatda daromadning notekis taqsimoti (Jini) koeffitsienti deyiladi. $0 \le L \le 1$ ekanligi ravshan. *L=0* qiymat daromad taqsimoti mukamalligini bildiradi.

Masalan 4. Lorens chizig'i $y = 1 - \sqrt{1-x^2}$ *(0≤x≤1, 0≤y≤1)* ekanligini bilgan holda *Jini koeffitsientini* hisoblang. (Bu yerda, *x* – aholi ulushi, *y* – shu aholining daromadi ulushi.)

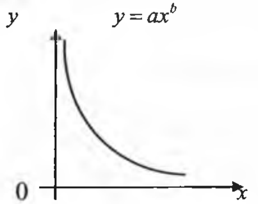
Yechish: $k = \frac{S_1}{S_\Delta} = 1 - \frac{S_2}{S_\Delta}$, $S_\Delta = \frac{1}{2}$ ekanligidan $k = 1 - 2S_2$. Demak,

$$k == 1 - 2\int_0^1 (1 - \sqrt{1-x^2})dx = 1 - 2\cdot(x|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx)| = 2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx - 1.\ \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4},$$

Hisob chizig'i

Ko'pincha qo'shimcha miqdorda mahsulot ishlab chiqarish uchun qancha vaqt kerakligini bilish muhim hisoblanadi. Shu kabi hisoblarda hisob chizig'i deb ataluvchi chiziqdan foydalaniladi.

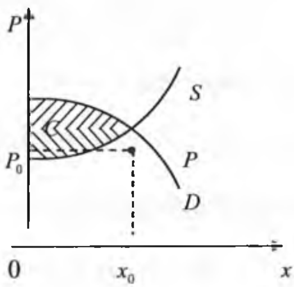
$T=F(x)$ birinchi x birlik mahsulotni ishlab chiqarish uchun zarur bo'lgan vaqt, odatda, soat o'lchovida bo'lsin. U holda $f(x)=F'(x)$, $(x+1)$ dagi mahsulot birligini ishlab chiqarish uchun zarur vaqtni anglatadi. Odatda $f(x)=ax^b$ ko'rinishidagi funksiya qo'llaniladi, bunda $a>0$, $-1\le b<0$.



$y=ax^b$ hisob chizig'i. $y=f(x)$ kamayuvchi funksiyadir, chunki biror amalni bajarish uchun zarur vaqt takrorlashlar soni ortishi bilan kamayadi. (n_1+1) dan n_2 ta birlik mahsulot ishlab chiqish uchun zarur ΔT vaqt $\Delta T=\int_{n_1}^{n_2} f(x)dx$ formula yordamida hisoblanadi.

Iste'molchi va yetishtiruvchining yutug'i

$P=f(x)$ ma'lum mahsulotga bo'lgan talab D egri chizig'i va $p=g(x)$ taklif S egri chizig'i bo'lsin; $(x_0;\ p_0)$ bozorning muvozanat nuqtasi bo'lsin.



Ba'zi iste'molchilar bu mahsulotni $P>P_0$ narxda xarid qilishlari mumkin. P_0 muvozanat narxga nisbatan iste'molchining yutug'ini topamiz. Buning uchun $[0;\ x_0]$ oraliqni n ta qismlarga bo'lamiz: $0=\bar{x}_0<\bar{x}_1<\bar{x}_2<\ldots<\bar{x}_n=x_0$. Har bir oraliqdan $x_i^* \leftarrow [\bar{x}_{i-1};\ \bar{x}_i]$ nuqta olamiz. $i=\overline{1,n}$. $i-$oraliqdagi iste'molchi yutug'i.

$(P(x_i^*)-P_0)\cdot\Delta x_i$, bunda $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ bo'ladi. Barcha yutuqlarni yig'ib $\sum_{i=1}^{n}(P(x_i^*)-P_0)\Delta x_i$ iste'molchining yutug'ini aniqlaymiz.

Agar talab funksiyasi uzluksiz bo‘lsa, va $n \to \infty$, shu bilan birga $max(\Delta x_i) \to 0$, u holda bu interval yig‘indi limit qiymatga ega bo‘lib, u $\int_0^{x_0}(f(x)-P_0)dx$ ga teng.

Demak, iste’molchining yutug‘i $C=\int_0^{x_0} f(x)dx - P_0 \cdot x_0$. Xuddi shu kabi yetkazuvchining yutug‘i $P=P_0 \cdot x_0 - \int_0^{x_0} g(x)dx$ keltirib chiqariladi.

Iste’molchining yutug‘i D taklif funksiyasi va $P=P_0$ t/ch bilan chegaralangan soha yuziga, yetkazuvchi yutug‘i $P=P_0$ t/ch va S taklif egri chizig‘i orasidagi yuzaga teng.

Masalan 5. $P=116-x^2$ talab va $p=\frac{5}{3}x+20$ taklif funksiyasiga ko‘ra iste’-molchi va yetkazuvchi yutug‘ini bozor muvozanat nuqtasiga nisbatan aniqlang.

Yechish: Bozorning muvozanat nuqtasini aniqlaymiz:

$$116-x^2=\frac{5}{3}x+20, \qquad 3x^2+5x-2=8, \qquad x_1=9,\ x_2=-\frac{32}{3}.$$

$$x_0=9, \qquad P_0=35, \qquad P_0 \cdot x_0=35 \cdot 9=315$$

Iste’molchi yutug‘i: $C=\int_0^9(116-x^2)dx-315=\left(116x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^9-315=486$

Yetkazuvchi yutug‘i esa:

$$P=315-\int_0^9\left(\frac{3}{5}x+20\right)dx=315-\left(\frac{5}{6}x^2+20x\right)\Big|_0^9=315-\frac{5}{6}\cdot 81+180=67,5$$

Kapital o‘zgarishi

Agar $I(t)$ investitsiya o‘zgarishi funksiyasi, $A(t)$ korxona kapitali bo‘lsa, u holda $I(t)=\frac{dA}{dt}$.

Investitsiya o‘zgarishini bilgan holda korxona kapitali o‘zgarishini aniqlash mumkin: $\Delta A=\int_{t_0}^{t_1} I(t)dt$.

10. Qatorlar

Musbat hadli sonli qatorlar

Ta'rif. Sonli $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, ketma-ketlik hadlaridan tuzilgan

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots \qquad (1)$$

ifodaga *sonli qator* deyiladi.

Bu yerda, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ qator hadlari, a_n esa qatorning umumiy hadi deyiladi. Yuqoridagi ta'rifdan ko'rinadiki qator ma'lum qonuniyat bilan tuzilgan sanoqli sondagi qo'shiluvchilar yig'indisi bilan aniqlanar ekan.

(1)-ifoda qatorning dastlabki chekli sondagi hadlaridan tuzilgan

Ushbu $S_1=a_1,\ S_2=a_1+a_2, \ldots S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$

yig'indilarga, shu qatorning *xususiy yig'indilari* deyiladi.

Agar qator hadlari sanoqli ekanligini e'tiborga olsak $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ xususiy yig'indilar ham o'z navbatida sonli ketma-ketlikni tashkil etishini ko'ramiz.

Ta'rif. Agar xususiy yig'indilarning $\{S_n\}$ ketma-ketligi $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ chekli limitga ega bo'lsa, u holda ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi qator, limit S esa qator yig'indisi deyiladi va $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ (2)

ko'rinishda yoziladi.

Ta'rif. Agar $\{S_n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega bo'lmasa (limiti cheksiz yoki mavjud emas), u holda (1) *uzoqlashuvchi qator* deyiladi.

Masalan 1. Quyidagi qator tekshirilsin:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Avval xususiy yig'indilarni ko'raylik:

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}, \quad S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3}$$

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

Bundan $S_n=\lim_{n\to\infty}\leftrightarrow S_n=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n-1})=1<\infty$ hosil qilamiz.

Demak $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ yaqinlashuvchi qator bo‘lib, yig‘indisi $S=1$ ekan.

Masalan 2. Bizga avvaldan tanish bo‘lgan, cheksiz geometrik progressiya hadlaridan tuzilgan qatorni ko‘raylik:

$$b+bq+bq^2+\dots+bq^{n-1}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}bq^{n-1},(b\neq 0) \qquad (3)$$

Uning dastlabki n ta hadlari yig‘indisi $S_n=\frac{b+bq^n}{1-q}=\frac{b}{1-q}+\frac{b}{1-q}q^n$ formula bilan aniqlanadi.

(3)-qator yig‘indisi uchun oldingi tasdiqlar bevosita q ga bog‘liqdir.

1) agar $|q|<1$ bo‘lsa, $\lim_{n\to\infty}q^n=0$ bo‘lgani sababli $S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{b}{1-q}$ chekli limitga ega bo‘lamiz. Ya’ni $|q|<1$ bo‘lganda (3)-ifoda yaqinlashuvchi qator bo‘lib, uning yig‘indisi $S=\frac{b}{1-q}$ formula bilan hisoblanadi.

2) agar $|q|>1$ bo‘lsa, $\lim_{n\to\infty}|q|n=\infty$ ekanligi ravshan. Shu sababli, $q<-1$ da $\lim_{n\to\infty}S_n$ mavjud bo‘lmaydi, $q>1$ da $\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$ bo‘lib, (3)-ifoda uzoqlashuvchi qator bo‘ladi.

3) agar $q=1$ desak, $S_n=b+b+\dots+b=b\cdot n$ ko‘rinishni oladi. Bu holda ham $\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$ bo‘lgani sababli (3)-ifoda uzoqlashuvchi qator bo‘ladi.

4) agar $q=-1$ deb olinsa (3)-ifoda qator

$$b-b+b-b+\dots+(-1)^{n-1}b+\dots$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bunday qator uchun $S_n=S_{2m}=0,\ S_n=S_{2m+1}=b,\ (m=1,2,3\dots)$. Bu esa $\lim_{n\to\infty}S_n$ mavjud emasligini bildiradi. Shuning uchun $q=-1$ bo‘lgan holda ham (3)-ifoda uzoqlashuvchi qator bo‘ladi.

Qatorlar nazariyasini bayon qilishni yaqinlashuvchi qatorlarning ba'zi sodda xossalarini keltirishdan boshlaymiz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \quad (1)$$

qator berilgan bo'lsin. Uning hadlaridan tuzilgan $a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots = \sum_{n=m}^{\infty} a_n$ ko'rinishdagi qatorga (1)-qatorning m qoldig'i deyiladi. U ham o'z navbatida qatordir.

1-teorema. Agar (1)-qator yaqinlashuvchi bo'lsa, uning har qanday qoldig'i ham yaqinlashuvchi bo'ladi va, aksincha, qator qoldig'i yaqinlashuvchi bo'lsa, uning o'zi ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Isbot: Agar (1)-qator uchun S_{m+k} xususiy yig'indi olsak

$$S_{m+k} = \sum_{n=1}^{m+k} a_n = \sum_{n=1}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{m+k} a_n = S_n + S_k^*, S_k^* = \sum_{n=m+1}^{m+k} a_n$$

munosabat hosil bo'ladi va S_k^* ni m qoldiq qatorning k xususiy yig'indisi deb qaraymiz.

Teorema shartiga ko'ra (1)-qator yaqinlashuvchiligidan

$$\lim_{k\to\infty} S_k^* = \lim_{k\to\infty}[S_{m+k} - S_m] = \lim_{k\to\infty} S_{m+k} - S_m = S - S_m .$$

Bundan $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_k$ qoldiq qatorning yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi.

Qoldiq qator yaqinlashuvchi bo'lsin (bu yig'indi R_m bo'lsin).

Bu holda $\lim_{k\to\infty} S_n = \lim_{k\to\infty} S_{m+k} = \lim_{k\to\infty}\left[S_m + S_k^*\right] = S_m + \lim_{k\to\infty} S_k^* = S_m + R_m < \infty$.

Demak, (1)-qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Quyidagi teoremalarni isbotsiz keltirishni lozim topdik.

2-teorema. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi qator bo'lib, yig'indisi S bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ qator ham yaqinlashuvchi qator bo'lib, yig'indisi, $k \cdot S$ ga teng bo'ladi.

Bu teoremani quyidagicha talqin etish mumkin.

Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi qator bo‘lsa $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = k\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bo‘ladi, ya’ni o‘zgarmas ko‘paytuvchini cheksiz yig‘indi belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

3-teorema. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ va $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ yaqinlashuvchi qatorlar bo‘lsa, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ qatorlar ham yaqinlashuvchi qatorlar bo‘lib, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Qatorlar soni chekli bo‘lganda ham teoremaning o‘rinli ekanligini ko‘rsatish mumkin.

4-teorema. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi qator bo‘lsa, had tartib raqami cheksiz o‘sib borganda qator umumiy hadi a_n nolga intiladi, ya’ni $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Isbot: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi bo‘lgani uchun, $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.

Demak, $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$.

Agar $S_n - S_{n-1} = a_n$ tenglikni e’tiborga olsak,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}[S_n - S_{n-1}] = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Natija: Agar (1)-qator uchun $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ shart bajarilmasa, u holda (1)-qator uzoqlashuvchidir.

Masalan 3. $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n^2})$ uzoqlashuvchi qatordir, chunki

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = 1 \neq 0$$

Ta’kidlab o‘tamizki $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ bo‘lishi qator yaqinlashishining faqat zaruriy sharti bo‘la oladi. Ya’ni $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi bo‘lsa, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Lekin $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ bo‘lganda, har doim ham $\sum\limits_{n=\infty}^{n} a_n$ yaqinlashuvchi qator bo‘lavermaydi.

Masalan, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{4} + \cdots$ gormonik qator uchun $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{n} = 0$ shart bajarilsada, bu gormonik qator uzoqlashuvchi qatordir. (Biz bu tasdiqning isbotini keyinroq keltiramiz).

Agar asosiy maqsadimiz yaqinlashuvchi qatorlarni va ularning yig‘indisini aniqlash deb hisoblasak, bundan buyon $n \to \infty$ da umumiy hadi nolga intiladigan $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ qatorlar bilan ish ko‘rishligimiz ayon bo‘lib chiqadi.

Agar qator yaqinlashishi va uzoqlashishi haqidagi ta’riflarga e’tibor bersak, bunday masalaga $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ni tekshirish orqali javob olishimiz mumkin. Biroq har qanday qator uchun ham S_n xususiy yig‘indini tekshirish oson bajarilmaydi. Hatto, S_n ning ifodasini soddalashtirib olganda ham ushbu $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ limitni hisoblash ma’lum qiyinchiliklarga olib keladi.

Bunday qiyinchiliklardan qutilish maqsadida, qatorlar nazariyasi ishlab chiqilgan.

Musbat hadli qatorlar

Ta’rif. Agar barcha $n = 1,2,3,\dots$ lar uchun $a_n > 0$ bo‘lsa, $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum\limits_{n-1}^{\infty} a_n$ *musbat hadli qator* deyiladi.

Bizga ikkita $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ musbat hadli qatorlar berilgan bo‘lsin.

5-teorema. Agar barcha $n = 1,2,3,\cdots$ lar uchun $a_n \le b_n$, bo‘lib $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ yaqinlashsa, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *yaqinlashuvchi qator* bo‘ladi.

Isbot: Qatorlarning xususiy yig‘indilarini mos ravishda

$$S_{a_n} = a_1 + a_2 + ... + a_n$$
$$S_{b_n} = b_1 + b_2 + ... + b_n$$

deb belgilaylik. Teorema shartiga ko‘ra $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ yaqinlashuvchi, ya’ni $\lim_{n\to\infty} S_{b_n} = S_b < \infty$. Lekin, $S_{a_n} \le S_{b_n} \le S_b$ tengsizlik o‘rinlidir. Bundan $\{S_{a_n}\}$ monoton o‘suvchi ketma-ketlikning yuqoridan chegaralangan ekanligi kelib chiqadi. Ma’lumki, har qanday chegaralangan monoton o‘suvchi ketma-ketlik chekli limitga ega. Shu sababli, $\lim_{n\to\infty} S_{a_n} = S_a < \infty$.

Demak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi qator ekan. Teorema isbot qilindi.

Masalan 4. Quyidagi: $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots + \frac{1}{n^n} + \cdots$ qator yaqinlashuvchi qatordir. Haqiqatan agar:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

qatorni olsak, bu qatorlar uchun $\frac{1}{n^n} \le \frac{1}{2^n}$; $(n = 1,2,3...)$

Ya’ni ikkinchi qator ikkinchi hadidan boshlab, birinchi hadi $\frac{1}{2^2}$ va maxraji $q = \frac{1}{2}$ bo‘lgan, cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning barcha hadlari yig‘indisidan iborat. Shu sababli, bu qator yaqinlashuvchi qator bo‘lib, yig‘indisi $1 + \frac{\frac{1}{2^2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1\frac{1}{2}$ ga tengdir.

6-teorema. Agar barcha $n = 1,2,3,...$ lar uchun $a_n \le b_n$ bo‘lib, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uzoqlashuvchi bo‘lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ham *uzoqlashuvchi qatordir.*

Masalan 5. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$ qator tekshirilsin.

Yechish: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ gormonik qatorni olaylik. Barcha $n = 1,2,3,...$lar uchun $\frac{1}{n} \le \frac{1}{\sqrt{n}}$ hamda gormonik qator uzoqlashuvchi qatordir. Shuning uchun 6-teoremaga asosan, berilgan qator uzoqlashuvchidir.

Qator yaqinlashishi yoki uzoqlashishini boshqa qatorlarga taqqoslamasdan, balki uning hadlaridan tuzilgan ba'zi ko'rinishdagi ifodalarning $n \to \infty$ dagi limiti qiymatiga qarab, aniqlovchi alomatlar ishlab chiqilgan. Shulardan ba'zilarini keltirib o'tamiz.

Dalamber alomati. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ musbat hadli qator bo'lib $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = b$ limit mavjud bo'lsin.

1) agar $b<1$ bo'lsa, qator yaqinlashuvchi;

2) agar $b>1$ bo'lsa, qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Isbot: Teorema shartiga ko'ra $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = b$.

Ya'ni, har qanday yetarlicha kichik musbat ε son olinmasin, shunday n_0 topiladiki, undan kichik bo'lmagan n lar uchun

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - b \right| < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi, ya'ni $b - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < b + \varepsilon$, $n \in N, n \geq n_0$

1) $b<1$ bo'lsin. Biz ε sonni shunday tanlab olamizki, bunda $b+\varepsilon<1$ shart bajariladi. Agar $b+\varepsilon=q$ desak, $0<q<1$ bo'ladi. O'z navbatida $n \geq n_0$ lar uchun $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$, ya'ni $a_{n+1} < a_n q$ tengsizlikka ega bo'lamiz.

Oxirgi tengsizlikni $n = n_0,\ n_0+1,\ n_0+2, \ldots$ lar uchun yozsak, quyidagi tengsizliklar hosil bo'ladi:

$$a_{n_0+1} < a_{n_0} q$$
$$a_{n_0+2} < a_{n_0+1} q < a_{n_0} q^2$$
$$a_{n_0+3} < a_{n_0+2} q < a_{n_0} q^3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Qaralayotgan qatorning, ushbu $a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + a_{n_0+3} + \cdots$

n – qoldig'ini qarasak, uning hadlari $C_n = a_{n0} q^n$ – geometrik progressiya hadlaridan tuzilgan ushbu $a_{n_0} q + a_{n_0} q^2 + a_{n_0} q^3 + \cdots$

qatorning mos hadlaridan kichikdir. $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ qator, $0<q<1$ bo'lgani sababli yaqinlashuvchi qatordir. U holda solishtirish teoremasiga ko'ra n_0 qoldiq qator va undan esa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

1) Endi $b>1$ bo'lsin. Biz $\varepsilon>0$ shunday tanlab olamizki $b-\varepsilon>1$ bo'ladi. U holda $n \geq n_0$ lar uchun $a_{n_0} < a_{n_0+1} < a_{n_0+2} < \cdots$.

Bu munosabatlar qaralayotgan musbat qator hadlari o'sib borishligini hamda $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ekanligini ko'rsatadi. Bu esa qator yaqinlashining zaruriy sharti bajarilmayotganligini bildiradi. Demak, $b>1$ bo'lganda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uzoqlashuvchi qator ekan.

Eslatma. Agar $b=1$ bo'lib qolsa, qatorlarning ba'zilari yaqinlashuvchi bo'lsa, ba'zilari uzoqlashuvchi bo'ladi.

Demak, Dalamber alomatini $b=1$ da qo'llab bo'lmaydi.
Bunday hollarda qatorni boshqa alomatlar yordamida tekshirish zarur.

Masalan 6. Ushbu $1+\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5}+\cdots$ qatorni yaqinlashuvchi qator sifatida tekshiring.

Yechish: Qatorning umumiy hadi $a_n = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)} = \frac{n!}{(2n-1)!!}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(2n+1)!!}\cdot\frac{(2n-1)!!}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)}{(2n-1)!!(2n+1)}\cdot\frac{(2n-1)!!}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

Demak, berilgan qator yaqinlashuvchi ekan.

Koshi alomati. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \geq 0)$ qator uchun $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = q$ bo'lsin.

U holda: $q<1$ bo'lganda qator yaqinlashuvchi, $q>1$ bo'lganda qator uzoqlashuvchi bo'ladi. Bu yerda ham *q=1* bo'lib qolsa, qator yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligi ochiq qoladi.

Masalan 7. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln^2 3}+\frac{1}{\ln^3 4}+\cdots$ qator tekshirilsin.

Yechish: Qatorning umumiy hadi $a_n = \frac{1}{\ln^n (n+1)}$ ko'rinishga ega.

Bundan, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\ell n^n(n+1)}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ell n(n+1)}=0<1$.

Demak, berilgan qator yaqinlashuvchi ekan.

Masalan 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(4n-1)}{(n+2)}\right)^n$ qator tekshirilsin.

Yechish. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n-1}{n+2}=4>1$, ya'ni berilgan qator uzoqlashuvchi.

Koshining integral alomati. Agar $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ sonli qator berilgan bo'lsa, uning umumiy hadini natural sonlar to'plamida aniqlangan $a_n=f(n)$ funksiya deb qarash mumkin, ya'ni $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$.

Keyinchalik *f(x)* funksiyani *[1;∞]* oraliqda qaraymiz.

7-teorema. Agar *f(x)* funksiya *x≥1* bo'lganda musbat uzluksiz funksiya bo'lib, $\int\limits_1^{\infty}f(x)dx$ xos bo'lmagan integral yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ yaqinlashuvchi qator bo'ladi va ushbu xos bo'lmagan integral uzoqlashsa, qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

Masalan 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ qatorning yaqinlashuvchi ekanligi ko'rsatilsin.

Yechish: Qator umumiy hadi $a_n=f(n)=\frac{1}{n^2}$ ko'rinishda.

Qatorga mos keluvchi xos bo'lmagan integralni hisoblaymiz:

$$\int\limits_1^{\infty}f(x)dx=\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{N\to\infty}\int\limits_1^{N}\frac{dx}{x^2}=\lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\Big|_1^N\right]=\lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{N}+1\right]=1<+\infty.$$

Demak, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ yaqinlashuvchi qatordir.

Masalan 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ gormonik qator uzoqlashuvchi qatordir.

Isbot: Qator umumiy hadi $a_n=f(n)=\frac{1}{n}$

Bunga ko‘ra: $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx = \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \ell im_{N \to \infty} \int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \ell im_{n \to \infty} \left[\ell nx \int\limits_1^{N} \right] = \ell im_{N \to \infty} [\ell nN + 0] = \infty$.

Shunday qilib, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ gormonik qator uzoqlashuvchi qator ekan.

Masalan 11. Qator yig‘indisini toping: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$

.

Yechish: Qatorning n xususiy yig‘indisi

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)},$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \ldots \quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

$$S_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \ldots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Bundan $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$, ya’ni berilgan qatorning yig‘indisi $S=1$.

Masalan 12. Qatorning yaqinlashishini tekshiring: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$.

Yechish: $a_n = \frac{2^n + 3^n}{6^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n = b_n + c_n$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ va $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ qatorlar maxraji $q < 1$ bo‘lgan geometrik progressiya tashkil qilgani uchun yaqinlashadi. Ularning yig‘indisi mos ravishda $S_b = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{2}$, $S_c = 1$. Shuning uchun qator yaqinlashadi va yig‘indisi 1,5 ga teng.

Masalan 13. Qatornining yaqinlashishini tekshiring: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3}$.

Yechish: Qator umumiy hadini sodda kasrga yoyamiz:

$$a_n = \frac{2}{4n^2 + 8n + 3} = \frac{2}{4\left(n + \frac{3}{2}\right)\left(n + \frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{(2n+3)(2n+1)} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}$$

U holda $S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3}$

Qator yig‘indisi esa $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n = \lim\limits_{n \to \infty} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3}\right] = \frac{1}{3}$.

Masalan 14. Qatorning yaqinlashishini tekshiring: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\ln n}$

Yechish: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\ln n}$, $\ln n < n$, $-\ln n > -n$. $n^2-\ln n > n^2-n$.

$$a_n = \frac{1}{n^2-\ln n} < \frac{1}{n^2-n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = b_n . \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = 1 .$$

Demak, berilgan qator ham yaqinlashuvchi.

Masalan 15. Qatorning yaqinlashishini tekshiring:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2+4n+5}{6n^2-3n-1}\right)^{n^2}.$$

Yechish: $a_n = \left(\frac{3n^2+4n+5}{6n^2-3n-1}\right)^{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+4n+5}{6n^2-3n-1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} e^{n\cdot\ln\frac{3n^2+4n+5}{6n^2-3n-1}} = \lim_{n\to\infty} e^{n\cdot\ln\frac{6}{12}} = \lim_{n\to\infty} e^{-n\ln 2} = 0 < 1 .$$

Qator yaqinlashuvchi.

Ishorasi almashuvchi qatorlar

Agar $\{a_n\}$ ketma-ketlik elementlari musbat bo‘lsa

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots\ldots \qquad (4)$$

ko‘rinishidagi qator ishorasi *almashuvchan qator* deyiladi.

8-teorema (Leybnis teoremasi). Agar (4)-qator ishorasi almashuvchan qatorda $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots\ldots > a_n > \ldots\ldots$ bo‘lib, uning umumiy hadi nolga intilsa $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0)$, u holda (4)-qator yaqinlashuvchi qator bo‘ladi.

Isbot: S_n bilan (4)-qator xususiy yig‘indisini belgilaymiz. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ chekli ekanligini ko‘rsata olsak teorema isboti kelib chiqadi.

Avval: S_{2m} xususiy yig‘indini olib, uni

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2m-1} - a_{2m})$$

ko‘rinishda yozib olamiz. Teorema shartidan $a_{k-1}-a_k>0$ va $S_{2m}>0$ hamda S_{2m} ketma-ketlik o‘suvchiligini aniqlaymiz.

Shu bilan birga S_{2m} yig‘indi uchun

$S_{2m}=a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-\cdots-(a_{2m-2}-a_{2m-1})-a_{2m}$. Demak, $S_{2m}<a_1$.

Shunday qilib, $\{S_{2m}\}$ yuqoridan chegaralangan monoton o‘suvchi ketma-ketlik ekan. Bunday S_{2m} ketma-ketlik $m\to\infty$ da chekli S limit ega bo‘ladi, ya’ni $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m}=S$.

Ushbu $S_{2m+1}=S_{2m}+a_{2m+1}$ tenglikdan va teoremaning $\lim\limits_{m\to\infty} a_{2m+1}=0$ shartidan $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m+1}=\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m}+\lim\limits_{m\to\infty} a_{2m+1}=S+0=S$ tenglik kelib chiqadi.

Shunday qilib, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S<\infty$. Demak, (4) yaqinlashuvchi qatordir.

Masalan 1. $\frac{1}{3}-\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}-\frac{4}{3^4}+\cdots$ qator yaqinlashuvchi qatordir.

Chunki, 1) $\frac{1}{3}>\frac{2}{9}>\frac{1}{9}>\frac{4}{81}>\cdots$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}=0$.

Demak, Leybnis teoremasi shartlari bajariladi.

Absolyut va shartli yaqinlashuvchi qatorlar

Bizga hadlari ixtiyoriy sonlardan tashkil topgan, ushbu

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots\equiv\sum_{n=1}^{\infty}a_n \tag{5}$$

qator berilgan bo‘lsin. Bu qator hadlari modullaridan iborat bo‘lgan, ushbu

$$|a_1|+|a_3|+|a_3|+\cdots+|a_n|+\cdots\equiv\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \tag{6}$$

qatorni qaraymiz.

9-teorema. Agar $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ qator ham yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Isboti: Yordamchi qatorni qaraymiz:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+|a_n|)=(a_1+|a_1|)+(a_2+|a_2|)+\cdots \tag{7}$$

Modul xossasiga ko‘ra $0 < a_n + |a_n| \le 2|a_n|, n = 1,2,3,\cdots$ bo‘lib, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ qator yaqinlashuvchiligiga asosan, $\sum_{n=1}^{\infty} (2|a_n|)$ qator ham yaqinlashuvchi qator bo‘ladi. O‘z navbatida taqqoslash teoremasiga ko‘ra (7)-qator yaqinlashuvchi bo‘ladi. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

tenglikdan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning yaqinlashishi kelib chiqadi.

Teskari tasdiq o‘rinli emas, ya’ni $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi bo‘lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ yaqinlashuvchi bo‘lishi shart emas.

Shunday holatlar bo‘ladiki $\sum a_n$ yaqinlashuvchi, ammo $\sum |a_n|$ uzoqlashuvchidir. Bunday hollarni tartibga keltiruvchi ayrim tushunchalarni kiritamiz.

Ta’rif. Agar berilgan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator hamda uning hadlari modullaridan tuzilgan $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ qator ham yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $\sum a_n$ *absolyut yaqinlashuvchi qator* deyiladi.

Ta’rif. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi qator bo‘lib, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ uzoqlashuvchi bo‘lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator *shartli yaqinlashuvchi qator* deyiladi.

Masalan 2. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \equiv \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ qator tekshirilsin.

Yechish: Bu qator ishorasi almashuvchan qator bo‘lib, Leybnis teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi, ya’ni yaqinlashuvchi qator.

Lekin uning hadlari modullardan tuzilgan: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ qator gormonik qator bo‘lib, uning uzoqlashuvchi qator ekanligi bizga ma’lum. Shu sababli, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ shartli yaqinlashuvchi qator ekan.

Masalan 3. Qatorning yaqinlashishini tekshiring:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\ldots$$

Yechish: Ma'lumki, bu qator Leybnis alomatiga ko'ra yaqinlashadi.

Qator hadlarining o'rnini almashtirib, quyidagicha guruhlaymiz:

$$(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12})+\ldots$$

yoki $(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{6}-\frac{1}{8})+(\frac{1}{10}-\frac{1}{12})+\ldots=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots)$,

ya'ni qator hadlari o'rnini almashtirishdan uning yig'indisi 2 marta kamaydi. Ko'rsatish mumkinki (Riman teoremasi) shartli yaqinlashuvchi qator hadlari o'rnini almashtirish bilan oldindan berilgan ixtiyoriy yig'indini, hatto uzoqlashuvchi qatorni hosil qilish mumkin.

Darajali qatorlar

Ta'rif. Hadlari funksiyalardan iborat bo'lgan $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ko'rinishdagi qatorlarga *funksional qator* deyiladi.

Misollar: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \ell n^n x=\ell n x+\ell n^2 x+\ell n^3 x+\cdots$,

2) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}=\sin x+\frac{\sin 2x}{2^2}+\frac{\sin 3x}{3^2}+\cdots$$

Ta'rif. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n=a_0+a_1x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$ (8)

ko'rinishdagi funksional qatorga *darajali qator* deyiladi.

Bu yerda, a_n darajali *qator koeffitsientlari* deyiladi.

Misollar: 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}x^{2(n-1)}=1+2x^2+4x^4+8x^6+\cdots$

Funksional qator uchun asosiy masala uning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini aniqlash, bu holat sonli qatornikidan farqlidir. Darajali qatorning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo'lishi asosan x o'zgaruvchining qanday qiymat qabul qilishiga bevosita bog'liq bo'ladi.

Ta'rif. Agar (8) qator $x=x_1$ bo'lganda yaqinlashsa, u holda (8)-darajali qator $x=x_1$ nuqtada yaqinlashuvchi deyiladi.

Ta'rif. x o'zgaruvchining $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ darajali qator yaqinlashadigan barcha qiymatlari to'plamiga, ushbu *darajali qatorning yaqinlashish sohasi* deyiladi va $D(\Sigma)$ bilan belgilanadi.

Masalan 1. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$

darajali qator x o'zgaruvchining (–1, 1) oraliqdan olingan har bir qiymatida cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya yig'indisi sifatida yaqinlashuvchi bo'ladi. Demak, bu qator uchun $D(\Sigma)=(-1,1)$. Ta'kidlash lozimki, ixtiyoriy darajali qatorning yaqinlashish sohasi bo'sh emas, chunki har qanday darajali qator hech bo'lmaganda $x=0$ da chekli yig'indiga ega.

10-teorema (Abel teoremasi). Agar (1)-darajali qator biror $x=x_0$ da yaqinlashsa, u holda bu qator $|x|<|x_0|$ shartni qanoatlantiruvchi barcha x larda ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Isboti: Bu yerda, $x_0 \neq 0$ deb qarash kerak, chunki $x_0 = 0$ bo'lsa, $|x| < 0$ shartni qanoatlantiruvchi to'plam bo'sh to'plamdir.

Teorema shartiga ko'ra, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n$ sonli qator yaqinlashuvchi. Sonli qator yaqinlashishining zaruriy shartiga asosan, $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$. U holda shunday $c>0$ sonni topa olamizki, barcha $n=1,2,3,\ldots$ uchun $|a_n x_0^n| < c$ bo'ladi.

Endi $|x|<|x_0|$ shartli qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x ni olib,

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < c\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

tengsizlikni e'tiborga olsak, cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya hadlari yig'indisi bo'lgan $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ qator yaqinlashuvchiligidan, solishtirish teoremasiga asosan (8)-qatorning yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi. Demak, (8)-darajali qator $|x|<|x_0|$ shartni bajaruvchi barcha x larda absolyut yaqinlashuvchi qator ekan. Teorema isbot bo'ldi.

Quyidagi natija ham o'rinlidir. Agar biror $x=x_0$ qiymatda (8)-darajali qator uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda $|x|>|x_0|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda (8)-qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Bu tasdiqlar darajali qatorning yaqinlashish va uzoqlashish nuqtalari to'plamlarini aniqlashga yordam beradi.

Xususan: (8)-qator $x=x_0$ da yaqinlashuvchi bo'lsa, $y(-|x_0|;|x_0|)$ intervalda yaqinlashuvchi, shuningdek $x=x_0$ da uzoqlashuvchi bo'lsa, (8)-qator $(-\infty;-|x_0|)$ va $(|x_0|;\infty)$ intervallarda uzoqlashuvchi bo'ladi.

Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

11-teorema. Agar (8)-darajali qator x ning ba'zi qiymatlarida yaqinlashuvchi, ba'zi qiymatlarida esa uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda yagona shunday $M>0$ son topiladiki, (8)-darajali qator x ning $|x|<M$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida absolyut yaqinlashuvchi, x ning $|x|>M$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida esa uzoqlashuvchi bo'ladi.

Bu teorema yordamida topilgan M soniga (8)-darajali qatorning *yaqinlashish radiusi*, *(–M, M)* interval esa uning *yaqinlashish intervali* deyiladi.

Quyidagilarni eslatib o'tamiz.

Qatorning berilishiga qarab M chekli son yoki $R=\infty$ bo'lishi mumkin. Ya'ni shunday darajali qatorlar borki, ular $(-\infty,\infty)$ da yaqinlashuvchi qator bo'ladi.

Agar M chekli son bo'lsa, u holda darajali qatorning yaqinlashish radiusi

$M=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ yoki $M=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ formula bilan aniqlanadi. Umuman darajali qatorning yaqinlashish radiusi R bilan belgilanadi $(\mu=R)$.

Agar R chekli son bo'lsa, Abel teoremasidan (8)-darajali qatorning $D(\Sigma)=(-R;R)$ sohada yaqinlashishi kelib chiqsada, $x=-R$ va $x=R$ da qatorning yaqinlashishi yoki uzoqlashishi ochiq qoladi. Bu masala har bir darajali qator uchun alohida-alohida ko'rib chiqiladi.

Masalan 2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$ qatorning yaqinlashish radiusi aniqlansin.

Yechish: Berilgan qatorda $a_n=1,\ n=1,2,3,\ldots\ R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$.

Masalan 3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$ qatorning yaqinlashish radiusi topilsin.

Yechish: Bu yerda, $a_n=\frac{1}{n!};\ a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$ ekanligidan

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

Masalan 4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+2}$ qatorning yaqinlashish sohasi aniqlansin.

Yechish: Berilganiga ko'ra $a_n=\frac{1}{n+2}$ u holda $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+3}{n+2}=1$.

Agar $x=1$ desak qator $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$

ko'rinishni oladi. Bu qator uzoqlashuvchi qatordir.

Endi $x=-1$ deb olsak, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots$

ko'rinishdagi ishorasi almashuvchan qatorga ega bo'lamiz. Leybnis teoremasi shartlari bajarilganligi uchun bu qator yaqinlashuvchidir.

Shunday qilib qaralayotgan darajali qator $(-1,1)$ da absolyut yaqinlashuvchi, $[-1;1)$ da yaqinlashuvchi, $|x|>1\ x\in(-\infty;-1)\bigcup[1;\infty)$ da uzoqlashuvchidir.

Darajali qatorlarni differensiallash va integrallash

Darajali qatorlar muhim amaliy xususiyatlarga ega. Shu sababli, ularning ba'zi xossalarini o'rganamiz. Ushbuni anglash qiyin emas, chunki darajali qator o'zining $(-R;R)$ yaqinlashish sohasida x o'zgaruvining $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ funksiyasini aniqlaydi.

Bu *f(x)* funksiya $(-R;R)$ yaqinlashish sohasida uzluksiz bo'lib, istalgan tartibli uzluksiz hosilalarga egadir. Shu bilan birga *f'(x)* hosila yuqoridagi qator hadlarining hosilalari yig'indisiga tengdir, ya'ni

$$f'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}.$$

Xuddi shuningdek, $f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$, $f'''(x)=\sum_{n=3}^{\infty}n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}$

va hokazo. Bu xossa, odatda «darajali qatorni hadma-had differensiallash» xossasi deb yuritiladi.

Shu kabi «Darajali qator yig'indisining integrali, qator hadlari integrallarining yig'indisiga tengdir» mazmundagi xossa ham o'rinlidir.

Ya'ni $(-R;R)$ oraliqdan olingan har qanday x uchun

$$\int f(x)dx=C+a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2x^3}{3}+\cdots+\frac{a_nx^{n+1}}{n+1}+\cdots$$

Teylor va Makloren qatorlari

Yuqorida $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ darajali qator, o'zining yaqinlashish sohasi $(-R,R)$ da uzluksiz *f(x)* funksiyani ifodalab, shu oraliqda *f(x)* funksiya istalgan tartibli hosilaga ega bo'lishi keltirilgan edi.

Endi biror oraliqda istalgan tartibli hosilaga ega bo'lgan *y=f(x)* funksiyani darajali qatorga yoyish masalasini o'rganaylik.

«Teylor formulasi» deb ataluvchi, ushbu formula

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x) \qquad (9)$$

o'rinlidir. Bu yerda, $R_n(x)$ qoldiq had.

Ta'rif. Agar $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtaning biror atrofida istalgan tartibli hosilaga ega bo'lsa:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\dots \qquad (10)$$

ko'rinishdagi qator $f(x)$ funksiyaning *Teylor qatori* deyiladi.

Agar e'tibor bersak, bu qator ma'lum qonuniyat bilan tuzilgan darajali qator ekanligini ko'ramiz. Uning koeffitsentlari $f(x)$ funksiya va uning hosilalarining $x=x_0$ nuqtadagi qiymatlar orqali ifodalangan.

O'rni kelganda (10) ga $y=f(x)$ funksiyaning $x=x_0$ nuqta atrofidagi *Teylor qatoriga yoyilmasi* deb ham ataladi.

Agar (10) da $x_0=0$ deb olinsa, ushbu qator

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^n(0)}{n!}x^n+\dots$$

Makloren qatori deb ataladi. Bu kabi qatorlardan funksiyalarning qiymatlarini hisoblashda keng foydalaniladi.

Agar funksiya uchun formal holda Teylor yoki Makloren qatori yozilgan bo'lsa, bu qator berilgan funksiyani ifodalashini isbot qilish uchun qoldiq hadining nolga intilishini isbotlash yoki bu qatorning qaralayotgan funksiyaga yaqinlashishini boshqa biror usul bilan ko'rsatish kerak bo'ladi.

Ba'zi elementar funksiyalarning Makloren qatoriga yoyilmalarini keltiramiz:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)}+\dots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\dots$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots$$

Bu qatorlarning har biri uchun $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$ bo'lgani sababli, x ning har qanday qiymatida, ya'ni $x\in(-\infty;\infty)$ da yaqinlashuvchi bo'lib, mos ravishda $\sin x$, $\cos x$, e^x funksiyalarni ifodalaydi.

Funksiya yoyilmasini ifodalovchi Teylor yoki Makloren qatorining yaqinlashish sohasi funksiyaning aniqlashish sohasidan farqli (uning ma'lum qismi) bo'lishi mumkin.

Masalan 5. $f(x)=\ell n(1+x)$ funksiya uchun $D(f)=(-1;+\infty)$ bo'lsa, $\ell n(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)\frac{x^n}{n}+\cdots$ qator faqat $(-1;1)$ oraliqda o'rinlidir.

Masalan 6. Qatorning yaqinlashish sohasini toping: $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{x}{2^n}$.

Yechish: $u_n(x)=\sin\frac{x}{2^n}$; $u_{n+1}(x)=\sin\frac{x}{2^{n+1}}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\sin\frac{x}{2^{n+1}}}{\sin\frac{x}{2^n}}\right|<1$, chunki

$n\to\infty\Rightarrow\frac{x}{2^n}\to 0$ cheksiz kichik miqdor, u holda $\sin\frac{x}{2^{n+1}}\sim\frac{x}{2^{n+1}}$, $\sin\frac{x}{2^n}\sim\frac{x}{2^n}$.

U holda $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x}{2^{n+1}}:\frac{x}{2^n}\right|=\frac{1}{2}<1$. Demak, qator butun sonlar o'qida, ya'ni $-\infty<x<\infty$ oraliqda yaqinlashadi.

Masalan 7. $-2x+4x^3-6x^5+8x^7-...+(-1)^n\cdot 2n\cdot x^{2n-1}+...$ qatorning $x\in(-1;1)$ oraliqda yig'indisini toping.

Yechish: Qatorni ([0, x] bu yerda $x\in(-1;1)$) oraliqda integrallash geometrik qatorga olib keladi: $-x^2+x^4-x^6+x^8-...+(-1)^n x^{2n}+...$. Bu esa geometrik progressiyaning yig'indisini beradi: $b_1=-x^2$, $q=-x^2\Rightarrow S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{-x^2}{1+x^2}$.

Berilgan qatorga qaytamiz, uning yig'indisini esa $S(x)$ ni differensiallab

topamiz: $S'(x)=\left(-\frac{x^2}{1+x^2}\right)'=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$.

Masalan 8. Qatorning $x\in(-1;1)$ oraliqda yig'indisini toping: $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...$

Yechish: Qator yaqinlashish oralig'ida hadma-had differensiallanib geometrik qator ko'rinishiga keltiriladi. $S'(x)=1+x+x^2+x^3+...$, uning yig'indisi $S=\frac{1}{1-x}$ $(b_1=1,\ q=x)$. Qatorning yig'indisini [0; x] oraliqda (bunda $x \in (-1;1)$) integrallab topamiz: $S(x) = \int_0^x S'(x)dx = \int_0^x \frac{dx}{1-x} = -\ln|1-x|$

Masalan 9. Qatorni hadma-had differensiallab, yig'indisini toping:

$$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Yechish: $S(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots, S' = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots,$

$S'' = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = S$. Demak, $S''(x) - S(x) = 0$. $k^2 - 1 = 0$, $k_{12} = \pm 1$

$S(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x$. $S(0) = 1$, $S'(0) = 0$

Shartlardan $\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$ $c_2 = \frac{1}{2}$, $c_1 = -\frac{1}{2}$. Demak, $S(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Masalan 10. Elementar funksiyalarni qatorga yoyilmasidan foydalanib, quyidagi funksiyalarni darajali qatorga yoying: $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$.

Yechish: $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots) -$

$$-(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \dots) = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \dots$$

Masalan 11. Funksiyani darajali qatorga yoying: $y = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$.

Yechish: $y = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$. $\int y(x)dx \int \frac{\ln(1+x)}{1+x} dx = \frac{\ln^2(1+x)}{2} + C$.

$$\int y(x)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \dots\right) \cdot \left(1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^{n-1} + n\right)$$

$$y(x) = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{6}x^3 + \dots$$

Masalan 12. Funksiyani darajali qatorga yoying: $y = e^{-x}\sin x$.

Yechish: $y(0) = 0$ $\qquad$ $y(0) = 0$

$y' = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x = e^{-x}(\cos x - \sin x)$ $\qquad$ $y'(0) = 1$

$y'' = e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x - e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x$

$$y'' = -2e^{-x}\cos x \qquad y''(0) = -2$$

$$y''' = 2e^{-x}\cos x + 2e^{-x}\sin x \qquad y'''(0) = 2$$

$$y'''' = -2e^{-x}(\cos x + \sin x) + 2e^{-x}(\cos x - \sin x) \qquad y''''(0) = 0$$

$$y''''' = -4e^{-x}\sin x$$

$$y'''''' = 4e^{-x}\sin x - 4e^{-x}\cos x = 4e^{-x}(\sin x - \cos x) \qquad y''''''(0) = -4$$

$$y''''''' = -4e^{-x}(\sin x - \cos x) + 4e^{-x}(\cos x + \sin x) \qquad y'''''''(0) = 8$$

$$e^{-x}\sin x = x - \frac{x}{1!} + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{4}{5!}x^5 + \frac{8}{6!}x^6 + \ldots$$

Masalan 13. Funksiyani darajali qatorga yoying: $y = \ln(6 + x - x^2)$.

Yechish:

$$y = \ln(6 + x - x^2) = \ln(3 - x)(2 + x) = \ln(3 - x) + \ln(2 + x) = \ln 3 + \ln\left(1 - \frac{x}{3}\right) + \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) =$$

$$= \ln 6 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{3^n \cdot n} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{2^n \cdot n} = \ln 6 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^n}\right)\cdot x^n$$

Ba'zi funksiyalarning darajali qatorga yoyilmasi quyidagicha:

1. $tgx = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{7}{315}x^7 + \ldots$

2. $\sin(x + a) = \sin a + x\cos a - \frac{x^2}{2!}\sin a - \frac{x^3}{3!}\cos a + \ldots$

3. $\cos(x + a) = \cos a - x\sin a - \frac{x^2}{2!}\cos a + \frac{x^3}{3!}\sin a + \ldots$

4. $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{2}{45}x^6 + \ldots$

5. $(1 \pm x)^{\frac{1}{2}} = 1 \pm \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 \pm \frac{5}{16}x^3 - \ldots$

6. $(1 \pm x)^{-\frac{1}{2}} = 1 \mp \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 \mp \frac{5}{16}x^3 - \ldots$

7. $e^{\cos x} = e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{31}{720}x^6 + \ldots\right)$

8. $e^{\sin x}=1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\dots$

9. $e^{tgx}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{8}$

10. $\ln\frac{1+x}{1-x}=2x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5+\frac{2}{7}x^7+\dots$

11. $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=-\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{3}{40}x^5-\frac{5}{112}x^7+\dots$

12. $\ln|\sin x|=\ln|x|-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\frac{x^6}{2835}-\dots, \qquad 0<|x|<\pi.$

13. $\ln\cos x=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}-\frac{17x^8}{2520}-\dots, \qquad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}.$

14. $\ln|tgx|=\ln|x|+\frac{1}{3}x^2+\frac{7}{90}x^4+\frac{62}{2835}x^6+\dots, \quad 0<|x|<\frac{\pi}{2}$

Qatorlar nazariyasining iqtisodiyotdagi ba'zi tatbiqlari

$M(k,l)-k\times l$ o'lchamli haqiqiy elementli matritsa to'plami bo'lsin. $\{A_n\}\in M(k,l)$ matritsalar ketma-ketligi berilgan bo'lsin, $n\in N$.

Masalan 1. 2×2 o'lchovli matritsalar ketma-ketligi. $A_n=\{a_{ij}^{(n)}\}$, $\{a_{ij}^{(n)}\}=\frac{1}{(i\,j)^n}$, $i=1,2,\ j=1,2$ bo'lsa, uni quyidagicha tushunamiz:

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1/4\end{pmatrix},\ A_2=\begin{Bmatrix}1 & 1/4\\ 1/4 & 1/16\end{Bmatrix},\ \dots,\ A_n=\begin{Bmatrix}1 & (1/2)^n\\ (1/2)^n & (1/4)^n\end{Bmatrix},\ \dots.$$

Ta'rif. $A=\{a_{ij}\}$ matritsa $\{A_n\}$ matritsalar ketma-ketligining limiti deyiladi, agar har qanday i va j juftlar uchun $\lim_{n\to\infty}a_{ij}^{(n)}=A, \quad i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}$ tenglik o'rinli bo'lsa.

Masalan 2. 2×2 o'lchovli $A_n=\left\{\frac{1}{(i\,j)^n}\right\}$, $n\in N$ ketma-ketlik limiti topilsin.

Yechish: Ma'lumki, $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & (1/2)^n \\ (1/2)^n & (1/4)^n \end{pmatrix}$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix} 1 & (1/2)^n \\ (1/2)^n & (1/4)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Ta'rif. $\{A_n \in M(k,l)\}$, $n \in N$ matrisalar ketma-ketligi uchun

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots \qquad (1)$$

yig'indi matritsalar qatori deyiladi.

$$S_1 = A_1,\quad S_2 = A_1 + A_2, \ldots,\quad S_n = A_1 + A_2 + \ldots + A_n, \ldots \qquad (2)$$

xususiy yig'indisi ketma-ketligi.

Ta'rif. Agar $\{S_n\}$ xususiy yig'indilar ketma-ketligi yaqinlashsa, (1)-qator ham yaqinlashadi.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \qquad (3)$$

limit (1)-qatorning yig'indisi deyiladi.

Masalan 3. 2×2 o'lchovli $A_n = \begin{pmatrix} (1/2)^n & (1/3)^n \\ (1/4)^n & (1/5)^n \end{pmatrix}$ uchun $A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$ qatorning yig'indisini hisoblang.

Yechish: $S_n = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$, S_n matritsa elementlari maxraji birdan kichik geometrik progressiyalardir. Shuning uchun bu qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 \end{pmatrix}$

A k o'lchovli kvadrat matritsa bo'lsin.

$E + A + A^2 + \ldots + A^n + \ldots$ (4)-qator ham muhim hisoblanadi. (4)-qatorning yaqinlashishi *A* Leontev matritsasining (produktivligi) mahsuldorligiga ekvivalentdir.

Ta'rif. ***k*** o'lchovli *A* kvadrat matritsa va $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$ darajali qator berilgan bo'lsin.

$$a_0 + a_1A + a_2A^2 + \ldots + a_nA^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_nA^n \qquad (5)$$

qatorga *darajali matritsaviy qator* deyiladi.

(5)-qatorning yaqinlashishi oddiy darajali qatorning yaqinlashishiga keltiriladi. λ son *A* matritsaning xos qiymati deyiladi, agar shunday $x \neq 0$ vektor topilsada ular uchun $Ax = \lambda x$ munosabat o'rinli bo'lsa.

(5)-qator bilan birga

$$a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + ... + a_n\lambda^n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\lambda^n \qquad (6)$$

qatorni ko'rib chiqamiz.

Ta'rif. Agar A matritsaning har qanday λ xos qiymati uchun (6)-qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda (5)-matritsaviy darajali qator ham yaqinlashuvchi deyiladi.

Agarda A matritsaning Frobenius soni birdan kichik bo'lsa, u holda A.Leontev matritsasi mahsuldor bo'ladi. Haqiqatan ham, A nomanfiy matritsa unumdor deyiladi, agarda $E + A + A^2 + A^3 + ... + A^n + ...$ darajali matritsaviy qator yaqinlashuvchi bo'lsa. Yuqoridagi mulohazalardan ma'lumki, bu matritsaviy qator yaqinlashishi uchun A matritsaning har qanday λ xos soni uchun $1 + \lambda + \lambda^2 + ... + \lambda^n + ...$ sonli qator yaqinlashsa. Bu qator $|\lambda| < 1$ shartda yaqinlashadi. A nomanfiy matritsa bo'lgani uchun uning modul bo'yicha maksimal qiymati λ_A haqiqiy va nomanfiydir. Shuning uchun matritsaviy qatorning yaqinlashishi $\lambda_A < 1$ shartga ekvivalentdir.

11. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar

Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya limiti va uzluksizligi

Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya ta’rifi, uning aniqlanish va o‘zgarish sohasi tushunchalarini kiritgan edik.

Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalarga doir misollar keltiramiz.

Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalarni $Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ko‘rinishda ifoda etamiz.

1. $Z = \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}$

Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $D(z) = \{(x_1; x_2) : x_1^2 + x_2^2 \le R^2\}$ to‘plamdan iborat. Bu to‘plam markazi 0 $(0, 0)$ (koordinata boshi) nuqtada, radiusi *R (R>0)* bo‘lgan doiradir.

2. $Z = \dfrac{1}{x_1 \cdot x_2}$.

Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $D(z) = \{(x_1; x_2) : x_1 \ne 0,\ x_2 \ne 0\}$ to‘plamdan iborat. Bu to‘plam X_1OX_2 tekislikdan OX_1 va OX_2 koordinata o‘qlarini chiqarib tashlashdan hosil bo‘ladi.

3. $Z = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b$ funksiya chiziqli funksiya deyiladi, bu yerda $a_1, a_2, \cdots, a_n$ o‘zgarmas sonlar.

4. $Z = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$, a_{ij} o‘zgarmas son va $a_{ij} = a_{ij}$. Bu funksiya kvadratik funksiya deyiladi.

5. Iqtisodda uchraydigan asosiy tushunchalardan biri, bu foydalilik funksiyasidir. Ko‘p o‘zgaruvchili foydalilik funksiyasiga misol tariqasida quyidagi funksiyani keltirish mumkin: $Z = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \ell n(x_i - c_i)$, bu yerda $a_i > 0\ va\ x_i > c_i \ge 0$. Funksiyaning aniqlanish sohasi $D(\mathrm{Z}) = \{x:\ x_i > c_i,\ i = \overline{1,n}\}$ to‘plamdan iborat. Bu funksiya o‘zgarmas egiluvchanlik funksiyasi deyiladi.

6. Ko'p o'zgaruvchili ishlab chiqarish funksiyasiga misol tariqasida quyidagi funksiyalarni keltirish mumkin:

a) $Z = b_0 x_1^{b_1} x_2^{b_2}$. Bu funksiya *Kobba-Duglas funksiyasi* deyiladi. Bu yerda, x_1 mehnat xarajatlari, x_2 ishlab chiqarish fondlari hajmini bildiruvchi o'zgaruvchilardir.

b_0, b_1 *ва* b_2 ishlab chiqarish texnologiyasi orqali aniqlanadigan parametrlardir.

b) $Z = a_0\left(a_1 x_1^{-\beta} + a_2 x_2^{-\beta}\right)^{-\frac{h}{\beta}}$. Bu funksiya almashtirishning o'zgarmas egiluvchanlik funksiyasi deyiladi.

Ta'rif. $Z=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ko'p o'zgaruvchili funksiya grafigi deb quyidagi

$$\Gamma(f) = \{(Z, x_1, x_2, \ldots, x_n) : Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D(f)\}$$

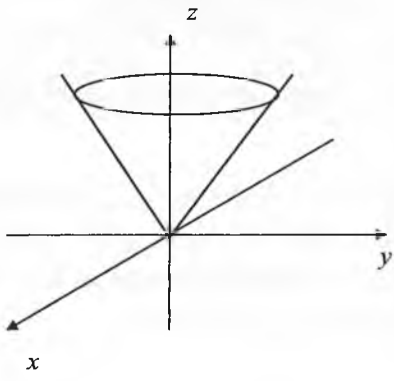
to'plamga aytiladi. Bu yerda, *D(f)* funksiyaning aniqlanish sohasi bo'lib, $\Gamma(f) \subset R^{n+1}$ munosabat o'rinlidir.

Ta'rif. $Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ko'p o'zgaruvchili funksiyaning o'zgarmaslik chizig'i yoki o'zgarmaslik sirti deb ushbu

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D(f) : f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c\}$$

to'plamga aytiladi. Bu yerda, $c = const$.

Masalan, $Z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ikki o'zgaruvchili funksiya grafigi, R^3uch o'lchovli fazoda uchi koordinata boshida bo'lgan cheksiz konusdan iborat bo'ladi.



$z=\sqrt{x^2+y^2}$ funksiyaning o'zgarmaslik chiziqlari, markazi koordinata boshida bo'lgan, XOY tekislikda joylashgan aylanalardan iborat bo'ladi. Chunki $c>0, x^2+y^2=c^2$ tenglik aylana tenglamasini aniqlaydi.

$x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in R^n$ va $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)\in R^n$ bo'lsin. Bu nuqtalar orasidagi masofa $d(x,y)$ deb quyidagi tenglik orqali aniqlangan songa aytilishini eslatib o'tamiz:

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\dots+(x_n-y_n)^2}$$

Ta'rif. Markazi $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ nuqtada, radiusi $R>0$ ga teng ochiq shar $-S(x,R)$ deb, quyidagi to'plamga aytiladi:

$$S(x,R)=\{y:d(x,y)<R\}$$

Izoh: $\varepsilon>0$ son uchun $S(x,\varepsilon)-x$ nuqtaning, «ε–atrofi» ham deyiladi. $\bar{S}(x,R)=\{y:d(x,y)\le R\}$ to'plam esa yopiq shar deyiladi.

Ta'rif. Agar $\lim\limits_{d(x,x_0)\to 0} f(x_1,x_2,\dots,x_n)=a$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda a son $z=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ funksiyaning, $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ nuqta $x_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\dots,x_n^{(0)})$ ga intilgandagi limiti deyiladi. Agar tenglik o'rinli bo'lsa. Bu hol quyidagicha yoziladi: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$

Misollar:

1. $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ funksiyaning aniqlanish sohasi $D(z)=\{(x;y):x^2+y^2\le 1\}$, ya'ni XOY tekislikda markazi koordinata boshi $(0,0)$ nuqtada, radiusi 1 ga teng bo'lgan doiradan iboratdir.

2. $z=x\cdot y$ funksiyaning o'zgarmaslik chiziqlari XOY tekisligida $xy=c$, ya'ni $y=\frac{c}{x}$ tenglama orqali aniqlangan giperboladan iborat bo'ladi.

3. $$\lim_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0}}\frac{x_1^2+x_2^2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+1}-1}=\lim_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0}}\frac{(x_1^2+x_2^2)\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+1}+1\right)}{x_1^2+x_2^2+1-1}=\lim_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0}}\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+1}+1\right)=2.$$

Ta'rif. Agar $z=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ funksiya $x_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\dots,x_n^{(0)})$ nuqtaning biron-bir atrofida aniqlangan bo'lib, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda bu funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Masalan 4. $Z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ funksiya $x^2+y^2\neq 0$ munosabatni qanoatlantiruvchi nuqtalarda, ya’ni koordinata boshidan farqli barcha nuqtalarda uzluksiz bo‘ladi. Bu funksiya $(0,0)$ nuqtada uzluksiz bo‘lmaydi. Ammo

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & agar \quad x^2+y^2\neq 0\\ 0 & agar \quad x=0,\ \ y=0\end{cases}$$

funksiya XOY tekislikning barcha nuqtlarida uzluksiz bo‘ladi. Uzluksizlikni $(0,0)$ nuqtada tekshirish yetarlidir.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{x^2}}=0=f(0,0)$$

Xususiy hosilalar

$Z=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning barcha x_i argumentlariga Δx_i orttirma beramiz, u holda funksiya quyidagi Δz orttirmani

$$\Delta z=f(x_1+\Delta x_1,\ x_2+\Delta x_2,\cdots,x_n+\Delta x_n)-f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

hosil qiladi. Bu orttirma funksiyaning to‘liq orttirmasi deyiladi. Agar $Z=f(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$ funksiyaning faqat i argumenti bo‘lgan x_i o‘zgaruvchiga Δx_i orttirma berib, qolgan o‘zgaruvchilarni o‘zgarmas deb qarasak, u holda funksiya hosil qilgan orttirma $\Delta_{x_i}z$ quyidagicha aniqlanib,

$$\Delta_{x_i}z=f(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},x_i+\Delta x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)-f(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$$

bu orttirma funksiyaning *xususiy orttirmasi* deyiladi.

Masalan 5. $z=xy$ funksiyaning to‘liq va xususiy orttirmalarini topaylik:

$$\Delta z=(x+\Delta x)(y+\Delta y)-xy=x\cdot\Delta y+y\cdot\Delta x+\Delta x\cdot\Delta y$$
$$\Delta_x z=(x+\Delta x)\cdot y-xy=y\cdot\Delta x,$$
$$\Delta_y z=x\cdot(y+\Delta y)-xy=x\cdot\Delta y$$

Ta'rif. $z=f(x_1,x_2,...,x_n)$ ko'p o'zgaruvchili funksiyaning x_i o'zgaruvchisi bo'yicha xususiy hosilasi deb, x_i o'zgaruvchidan boshqa o'zgaruvchilarni o'zgarmas deb qaraganda hosil bo'lgan bir o'zgaruvchili, ya'ni x_i o'zgaruvchili funksiyaning, x_i o'zgaruvchi bo'yicha olingan hosilaga aytilib, $\frac{\partial z}{\partial x_i},\frac{\partial f}{\partial x_i}$ *yoki* f'_{x_i} shaklda belgilanadi, ya'ni xususiy hosila quyidagi limit orqali topiladi:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{\Delta_{x_i}z}{\Delta x_i}$$

Masalan 6. $z=x\cdot y$ funksiya uchun uning xususiy hosilalari xossalari quyidagicha bo'ladi $\frac{\partial z}{\partial x}=y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x$.

$z=arctg\frac{x}{y}$ funksiya uchun esa

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{y}{y^2+x^2},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\left(\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{y}{y^2+x^2}.$$

$\frac{\partial z}{\partial x_i}$ xususiy hosila, o'z navbatida, yana ko'p o'zgaruvchili funksiya bo'lgani uchun, uning yana xususiy hosilalarini topish mumkin. Bu xususiy hosilalar *ikkinchi tartibli xususiy hosilalar* deyiladi. Xuddi shunga o'xshash uchinchi va h.k. tartibli xususiy hosilalarni kiritish mumkin.

Bu hosilalar quyidagicha belgilanadi:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i\,\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)-\textit{ikkinchi tartibli xususiy hosila};$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x_i^2\,\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2}\right)-\textit{uchinchi tartibli xususiy hosila};$$

$$\frac{\partial^n z}{\partial x_{i_1}^{k_1}\partial x_{i_2}^{k_2}\ldots\partial x_{i_m}^{k_m}}, \qquad n-\textit{ tartibli xususiy hosila}.$$

$$k_1+k_2+\ldots+k_m=n$$

Umuman, aralash hosilalarda tartibning ahamiyati yo'q, ya'ni masalan, quyidagi tenglik o'rinlidir $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}=\frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_i}$,

bu aralash hosilalarni uzluksiz deb qarash kerak.

Ko'p o'zgaruvchili funksiya differensiali

Avval aytganimizdek, matematik uslublarning tatbiqlari taqribiy hisoblashlar bilan uzviy bog'langan bo'lib, bir o'zgaruvchili funksiya uchun taqribiy hisoblashlar funksiya differensiali asosida olib borilishini aytib o'tgan edik. Ko'p o'zgaruvchili funksiya uchun differensial tushunchasini kiritish mumkin.

Ta'rif. $Z=f(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ ko'p o'zgaruvchili funksiyaning differensiali deb, dZ shaklda belgilanib quyidagicha aniqlangan ifodaga aytiladi:

$$dZ=\frac{\partial Z}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial Z}{\partial x_2}\Delta x_2+\cdots+\frac{\partial Z}{\partial x_n}\Delta x_n$$

Bu yerda, $dx_i=\Delta x_i$ tenglikni e'tiborga olsak, dZ differensial uchun quyidagi tenglikni yoza olamiz: $dZ=\frac{\partial Z}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial Z}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial Z}{\partial x_n}dx_n$

Ta'rif. Agarda x nuqtaning yetarli kichik atrofida, uning to'liq orttirmasi ΔZ ni quyidagicha ifodalash mumkin bo'lsa,

$$\Delta Z=dZ+0\left(\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\cdots+\Delta x_n^2}\right),$$

u holda $Z=f(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ ko'p o'zgaruvchili funksiya $x=(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ nuqtada differensiallanuvchi deyiladi.

Shuni ta'kidlash lozimki, ko'p o'zgaruvchili funksiya uchun uning berilgan nuqtada barcha birinchi tartibli xususiy hosilalarining mavjudligidan, shu nuqtada funksiyaning differensiallanuvchi ekanligi kelib chiqmaydi. Quyidagi teorema ko‘p o‘zgaruvchili funksiyani differensiallanuvchi bo‘lishligining yetarli shartini ifoda etadi.

1-teorema. Agar $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ko‘p o‘zgaruvchili funksiya $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nuqtaning biron-bir atrofida barcha birinchi tartibli $\frac{\partial z}{\partial x_i}, i = 1,2,\ldots,n$, xususiy hosilalari mavjud bo‘lib, bu xususiy hosilalar x nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiya shu nuqtada differensiallanuvchi bo‘ladi.

Biz bu teoremani isbotsiz qabul qilamiz. Shuni ta’kidlash lozimki, xuddi bir o‘zgaruvchili funksiyalardagi kabi, ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar uchun ham yuqori tartibli differensial tushunchasini kiritish mumkin.

Yo‘nalish bo‘yicha hosila va gradient.

$A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ va $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ nuqtalar uchun boshi A nuqtada, oxiri B nuqtada bo‘lgan $\overrightarrow{AB}$ vektor quyidagicha aniqlanadi:

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \cdots, b_n - a_n)$$

Vektor, odatda bitta kichik lotin harfi bilan belgilanadi, masalan, $\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$

Bizga ma’lumki $\vec{a}$ vektorning uzunligi uchun $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi esa $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 \cdot b_2 + \cdots + a_n \cdot b_n$ tenglik orqali aniqlanadi. Bundan tashqari, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi $\varphi (0 \le \varphi < \pi)$ burchak ushbu $\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ tenglik orqali topiladi. $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vektorga parallel va $x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi quyidagi tenglik orqali beriladi:

$$x = t \cdot \vec{a} + x_0$$

Bu yerda, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, t haqiqiy son. Ya’ni bu to‘g‘ri chiziqda yotuvchi x nuqtaning koordinatalari $x_i = t \cdot a_i + x_i^{(0)}, \quad i = 1,2,\ldots,n$ ko‘rinishida bo‘ladi.

Agar $\vec{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ birlik vektor, ya'ni $|\vec{a}|=1$ bo'lsa, u holda i koordinatasi 1 ga teng bo'lib, qolgan koordinatalari nolga teng bo'lgan $\vec{e_i}$ birlik vektor uchun quyidagilarni hosil qilamiz $\vec{a}\cdot\vec{e_i}=a_i=|\vec{a}|\cdot|\vec{e_i}|\cdot\cos\alpha_i=\cos\alpha_i$

Bu yerda, α_i burchak $\vec{a}$ va $\vec{e_i}$ vektorlar orasidagi burchakni bildiradi.

Demak, $|\vec{a}|=1$ bo'lgani uchun $\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cdots+\cos^2\alpha_n=1$.

Ushbu $\cos\alpha_i$, $i=1,2,...,n$, qiymatlar $\vec{a}$ vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari deyiladi. Demak, birlik $\vec{a}$ vektorni $\vec{a}=(\cos\alpha_1,\ \cos\alpha_2,\cdots,\cos\alpha_n)$ ko'rinishda ifoda etish mumkin.

$\vec{a}$ birlik vektor bo'lsin, u holda Δt son uchun quyidagi orttirma $\Delta_{\vec{a}}z=f(x+\Delta t\cdot\vec{a})-f(x)=f(x_1+\Delta t\cos\alpha_1,x_2+\Delta t\cos\alpha_2,...,x_n+\Delta t\cos\alpha_n)-f(x_1,x_2,...,x_n)$ $z=f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyaning $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ nuqtadagi $\vec{a}$ vektor yo'nalishi bo'yicha orttirmasi deyiladi.

Ta'rif. $z=f(x_1,x_2,...,x_n)$ ko'p o'zgaruvchili funksiyaning $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ nuqtadagi $\vec{a}$ vektor yo'nalishi bo'yicha hosilasi $\frac{\partial z}{\partial\vec{a}}$ deb, quyidagicha aniqlangan miqdorga aytiladi: $\frac{\partial z}{\partial\vec{a}}=\lim\limits_{\Delta t\to0}\frac{f(x+\Delta t\cdot\vec{a})-f(x)}{\Delta t}$.

$\frac{\partial z}{\partial\vec{a}}$ hosila $z=f(x_1,x_2,...,x_n)$ ko'p o'zgaruvchili funksiyaning $\vec{a}$ vektor yo'nalishi bo'yicha o'zgarish (o'sish yoki kamayish) tezligini bildiradi.

Xususan, agar $\vec{e_i}=(0,0,...,0,1,0,...,0)$ i koordinatasi 1 ga, boshqa koordinatalari nolga teng bo'lgan birlik vektor bo'lsa, u holda $\frac{\partial z}{\partial\vec{e_i}}=\frac{\partial z}{\partial x_i}$ tenglik o'rinli bo'ladi. Murakkab funksiya hosilasi formulasiga asosan, quyidagi tenglikni ko'rsatish mumkin $\frac{\partial z}{\partial\vec{a}}=\frac{\partial z}{\partial x_1}\cdot\cos\alpha_1+\frac{\partial z}{\partial x_2}\cos\alpha_2+\cdots+\frac{\partial z}{\partial x_n}\cos\alpha_n$

Ta'rif. $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiyaning gradienti deb ushbu

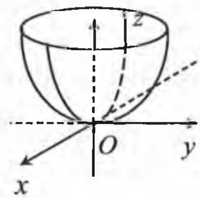
$$\nabla z = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n} \right)$$ vektorga aytiladi.

Ta'rifga ko'ra, funksiyaning yo'nalish bo'yicha hosilasini quyidagi skalyar ko'paytma ko'rinishida ifoda eta olamiz: $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \nabla z \cdot \vec{a}$

Bu skalyar ko'paytmada $\vec{a}$ vektor ∇z gradient yo'nalishi bilan ustma-ust tushsa, yo'nalish bo'yicha hosila o'zining eng katta qiymatiga erishadi. Demak, funksiya gradienti ∇z vektor, funksiya o'sishining eng katta bo'lgan yo'nalishini aniqlar ekan.

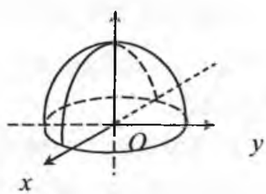
Masalan 7. Funksiyalarning aniqlanish sohasini toping va grafigini chizing:

$$a)\ z = x^2 + y^2;\quad b)\ z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\ .$$



Yechish: *a*) bu funksiya *x* va *y* ning barcha qiymatlarida aniqlangan $-\infty < x < +\infty;\ -\infty < y < +\infty.$ Uning grafigi aylanma paraboloid deb ataladigan ikkinchi tartibli sirtdan iborat. Aylanma paraboloid $y^2 = 2pz$ parabolani Oz o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'ladi. Bu esa $x^2 + y^2 = 2pz$ funksiyaning grafigidan iborat bo'ladi.

b) $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ funksiyaning aniqlanish sohasi ildiz ostidagi ifodaning nomanfiy bo'ladigan barcha qiymatlari, ya'ni $x^2 + y^2 \le R^2$ dan iborat. Bu funksiyaning grafigi radiusi *R* bo'lgan sferaning yuqori yarmi bo'lgan ikkinchi tartibli sirtdir. Chunki funksiya o'zining aniqlanish sohasida faqat nomanfiy qiymatlar qabul qiladi.



Masalan 8. Limitlarni hisoblang: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Yechish: x va y nuqtalar orasidagi masofa $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ deb belgilash kiritamiz. $x\to 0$, $y\to 0$ dan $\rho\to 0$ ekanligi kelib chiqadi.

Demak, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\ln(1-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\ln(1-\rho^2)}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{(\ln(1-\rho^2))'}{\rho'}=\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\frac{1}{1-\rho^2}\cdot(-2\rho)}{1}=0$

Masalan 9. Limitlarni hisoblang: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2xy}{x^2+y^2}$.

Yechish: (0, 0) nuqtaga $y = kx$ to‘g‘ri chiziq bo‘yicha yaqinlashamiz. Agar $y=kx$ bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2x\cdot kx}{x^2+(kx)^2}=\frac{2k}{1+k^2}$,

ya’ni limit to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsientiga bog‘liq chiqdi. Lekin funksiyaning limiti (x, y) nuqtaning
(0, 0) ga qaysi yo‘nalishda yaqinlashishiga bog‘liq bo‘lmasligi kerak. Demak, qaralayotgan limit mavjud emas.

Masalan 10. $f(x, y) = x^2 + y^2$ funksiyaning uzluksizligini tekshiring.

Yechish: $(x_0;\ y_0)$ nuqtada funksiyaning to‘liq orttirmasini hisoblaymiz:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x_0; y_0 + \Delta y_0) - f(x_0, y_0) = (x_0 + \Delta x_0)^2 + (y_0 + \Delta y_0)^2$$
$$- x_0^2 - y_0^2 = 2\Delta x\cdot x + \Delta x^2 + 2\Delta y\cdot y + \Delta y^2 = \Delta x(2x + \Delta x) + \Delta y(2y + \Delta y).$$

bundan esa $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}(\Delta f(x_0, y_0) = \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}(\Delta x(2x+\Delta x)+\Delta y(2y+\Delta y)=0$ ekanligini topamiz.

Demak, yuqoridagi ta’riflarga ko‘ra $f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada uzluksiz.

Masalan 11. Funksiyani *(0;0)* nuqtada uzlusizlikka tekshiring: $z=\frac{x+y}{x-y}$.

Yechish: *(0;0)* nuqtaga $y=kx$ to‘g‘ri chiziqlar bo‘yicha yaqinlashamiz.

U holda $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x+y}{x-y}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+kx}{x-kx}=\frac{1+k}{1-k}$. Limitlarning qiymati turli k larda turlicha bo‘ladi. Demak, ikki o‘zgaruvchili funksiyaning limiti mavjud emas va (0; 0) nuqta funksiyaning uzulish nuqtasi.

Masalan 12. Funksiyaning xususiy hosilalarini hisoblang: $f(x, y)=x^y$.

Yechish: $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ xususiy hosila hisoblanayotganda y ni o‘zgarmas deb qaraladi: $\frac{\partial f}{\partial x}=\left(x^y\right)_x'=y\cdot x^{y-1}$. Endi x o‘zgaruvchini o‘zgarmas kattalik deb qarab, $\frac{\partial f(x)}{\partial y}$ xususiy hosilani hisoblaymiz: $\frac{\partial f}{\partial y}=\left(x^y\right)_y'=x^y\cdot\ln x$.

Masalan 13. Funksiyaning differensialini hisoblang: $z = x^2y - xy^2$.

Yechish: $\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x^2y-xy^2\right)_x'=2xy-y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^2y-xy^2\right)_y'=x^2-2xy$.

$$dz = (2xy-y^2)dx + (x^2-2xy)dy$$

Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalarning lokal ekstremumlari

Ta’rif. Agar $z=f(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ funksiya $x_0=\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}\right)$ nuqtaning biron-bir atrofida aniqlangan bo‘lib, shu atrofdan olingan istalgan x uchun $f(x)\le f(x_0)$, $(f(x)\ge f(x_0))$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda x_0 nuqta Z funksiya uchun lokal maksimum (lokal minimum) nuqta deyiladi.

Xuddi bir o‘zgaruvchili funksiyadagi kabi ko‘p o‘zgaruvchili funksiya uchun ham ekstremumning zaruriy va yetarli shartlari haqidagi teoremalarni isbot qilish mumkin.

2-teorema (Ekstremumning zaruriy sharti). Agar x_0 nuqta $f(x)$ funksiya uchun ekstremum nuqta bo‘lib, shu nuqtada funksiya differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda $\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}=0,\quad i=1,2,\ldots,n$

ya’ni x_0 nuqtada funksiya gradienti nol vektorga teng bo‘ladi: $\nabla f(x_0)=(0, 0, \ldots,0)$

Bu teoremadan, agar x_0 nuqta differensiallanuvchi funksiyaning ekstremum nuqtasi bo‘lsa, x_0 nuqtadagi istalgan yo‘nalish bo‘yicha funksiyaning hosilasi nolga tengligi kelib chiqadi, chunki

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \nabla f \cdot \vec{a} = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \cos\alpha_i = 0 .$$

Endi ko'p o'zgaruvchili funksiya ekstremumning yetarli shartini keltiramiz.

$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ko'p o'zgaruvchili funksiyaning $x_0 = \left(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right)$ nuqtaning biron-bir atrofida barcha ikkinchi tartibli xususiy hosilalari mavjud va uzluksiz funksiya bo'lsin. U holda istalgan $1 \le i, j \le n$ uchun

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} .$$

Agar $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = a_{ij}(x)$ belgilashni kiritsak, ushbu kvadratik matritsa

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \dots & a_{2n}(x) \\ \hline a_{n1}(x) & a_{n2}(x) \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

$a_{ij} = a_{ji}$ bo'lgani uchun simmetrik matritsa bo'ladi. Avval ko'rganimizdek har bir simmetrik kvadratik matritsa kvadratik forma hosil qiladi. *A(x)* matritsaga mos keluvchi kvadratik formani *L(x)* bilan belgilaymiz.

Ta'rif. Agar *z=f(x)* funksiya uchun $\nabla f(x_0) = 0$ bo'lsa, x_0 nuqta *f(x)* funksiyaning *statsionar yoki kritik nuqtasi* deyiladi.

3-teorema. Agar *f(x)* funksiya uchun $x_0 = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right)$ statsionar nuqtaning biron-bir atrofida ikkinchi tartibli hosilalari mavjud va uzluksiz bo'lib, shu x_0 nuqtada $L(x_0)$ kvadratik forma musbat (manfiy) aniqlangan bo'lsa, u holda x_0 nuqta *f(x)* funksiyaning lokal minimum (lokal maksimum) nuqtasi bo'ladi.

Xususan, agar biz *z=f(x,y)* ikki o'zgaruvchili funksiya uchun shu teoremani qo'llasak quyidagini hosil qilamiz.

(x_0, y_0) nuqta $z = f(x, y)$ funksiyaning statsionar nuqtasi, ya'ni

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

bo'lib, nuqtaning biron-bir atrofida $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = a_{11}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = a_{12}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = a_{22}$

ikkinchi tartibli hosilalar mavjud bo‘lsin. U holda,

$$A(x,y)=\begin{pmatrix} a_{11}(x,y) & a_{12}(x,y) \\ a_{21}(x,y) & a_{22}(x,y) \end{pmatrix}$$

simmetrik kvadratik matritsaga mos keluvchi $L(x, y)$ kvadratik formaning (x_0, y_0) nuqtada musbat aniqlangan bo‘lishi uchun

$$a_{11}(x_0,y_0)>0, \quad \begin{vmatrix} a_{11}(x_0,y_0) & a_{12}(x_0,y_0) \\ a_{21}(x_0,y_0) & a_{22}(x_0,y_0) \end{vmatrix}>0$$

bo‘lishi lozim. Demak, statsionar (x_0, y_0) nuqta $z=f(x,y)$ funksiya uchun lokal minimum nuqta bo‘lishi uchun

$$a_{11}(x_0,y_0)>0,\ a_{11}(x_0,y_0)\cdot a_{22}(x_0,y_0)-a_{12}^2(x_0,y_0)>0$$

shartlarning bajarilishi yetarli bo‘lar ekan. (x_0, y_0) nuqta lokal minimum nuqta bo‘lishligi uchun esa

$$a_{11}(x_0,y_0)<0, \quad \begin{vmatrix} a_{11}(x_0,y_0) & a_{12}(x_0,y_0) \\ & \\ a_{21}(x_0,y_0) & a_{22}(x_0,y_0) \end{vmatrix}>0,$$

ya’ni $a_{11}(x_0,y_0)<0,\ a_{11}(x_0,y_0)\,a_{22}(x_0,y_0)-a_{12}^2(x_0,y_0)>0$
shartlarning bajarilishi yetarli.

$z=f(x,y)$ funksiyaning (x_0, y_0) statsionar nuqtasi uchun

$$a_{11}(x_0,y_0)\,a_{22}(x_0,y_0)-a_{12}^2(x_0,y_0)<0$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, (x_0, y_0) nuqta ekstremum nuqta emasligi kelib chiqadi.

Masalan 1. $z=x^3+y^3-3xy$ funksiyani ekstremumga tekshiraylik. Buning uchun dastavval uning xususiy hosilalarini, keyin statsionar nuqtalarini, so‘ngra ikkinchi tartibli hosilalar yordamida ekstremum nuqtalarni aniqlaymiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=3y^2-3x$$

$$\begin{cases} 3x^2-3y=0 \\ 3y^2-3x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-y=0 \\ y^2-x=0 \end{cases} \Rightarrow x^4-x=0 \Rightarrow x(x^3-1)=0$$

$$x_1=0, \quad x_2=1 \Rightarrow (0,\,0) \text{ va } (1,1)$$

nuqtalar statsionar nuqtalar ekan.

$$a_{11} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad a_{12} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \; a_{22} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}(x,y) & a_{12}(x,y) \\ a_{21}(x,y) & a_{22}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 9$$

bo‘lgani uchun $(0, 0)$ ekstremum nuqta bo‘lmaydi, chunki

$$\begin{vmatrix} a_{11}(0,0) & a_{12}(0,0) \\ a_{21}(0,0) & a_{22}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0.$$

Lekin $(1, 1)$ nuqta funksiyaning lokal minimum nuqtasi bo‘ladi, chunki

$$a_{11}(1, 1) = 6 > 0 \text{ va } \begin{vmatrix} a_{11}(1,1) & a_{12}(1, 1) \\ a_{21}(1,1) & a_{22}(1, 1) \end{vmatrix} = 36 - 9 = 27 > 0.$$

$$min\ z(x;y) = z(1;1) = -1.$$

Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari

Dastavval R^n fazodagi ayrim tushunchalar bilan tanishib chiqaylik.

Ta’rif. Agar $B \subset R^n$ to‘plam berilgan bo‘lsa, shunday $R > 0$ son mavjud bo‘lsada, bu son uchun $B \subset S(0, R)$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, ya’ni markazi koordinata boshida va radiusi R ga teng bo‘lgan shar B to‘plamni o‘z ichiga olsa, u holda $B \subset R^n$ to‘plam *chegaralangan to‘plam* deyiladi.

Ta’rif. Agar shunday $\varepsilon > 0$ son berilgan bo‘lsa, bunda $S(x, \varepsilon) \subset B$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda $B \subset R^n$ to‘plam uchun x nuqta *ichki nuqta* deyiladi.

Ta’rif. Agar istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun $S(x, \varepsilon)$ sharda B to‘plamga tegishli va B ga tegishli bo‘lmagan nuqtalar mavjud bo‘lsa, ya’ni $S(x,\varepsilon) \cap B \neq \varnothing$ va $S(x,\varepsilon) \cap (R^n \setminus B) \neq \varnothing$ bo‘lsa, u holda $B \subset R^n$ to‘plam uchun x nuqta *chegaraviy nuqta* deyiladi.

Ta’rif. Agar $B \subset R^n$ to‘plamning barcha chegaraviy nuqtalari ham shu to‘plamga tegishli bo‘lsa, u holda bu to‘plam *yopiq to‘plam* deyiladi.

Bir o'zgaruvchili funksiya uchun isbot qilingan Veyershtrass teoremasini ko'p o'zgaruvchili funksiya uchun ham isbot qilish mumkin.

4-teorema (Veyershtrass teoremasi). Agar $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ko'p o'zgaruvchili funksiya chegaralangan yopiq B to'plamda uzluksiz bo'lsa, u holda bu funksiya B to'plamda chegaralangan bo'lib, shu to'plamda o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga (global ekstremumlarga) erishadi, ya'ni shunday $K > 0$ musbat son, $x_0 = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right) \in B$ va $y_0 = \left(y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}\right) \in B$ nuqtalar mavjudki, ular uchun quyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi: $|f(x)| \le K \quad \forall x \in B$ va

$$f(x_0) = \sup_{x \in B}\{f(x)\}, \quad f(y_0) = \inf_{x \in B}\{f(x)\}$$

Shuni ta'kidlash lozimki, funksiya global ekstremum qiymatlarga B to'plamning chegaraviy nuqtalarida erishishi mumkin.

Masalan 2. $z = e^{-x^2-y^2} \cdot \left(2x^2 + 3y^2\right)$ funksiyaning $x^2 + y^2 \le 4$ tengsizlik bilan berilgan $\bar{S}(0,2)$ yopiq shardagi eng katta va eng kichik qiymatlarini topaylik.

Dastavval $S(0,2)$ ochiq shardagi statsionar nuqtalarni topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{-x^2-y^2}\left[-2x\left(2x^2+3y^2\right)+4x\right] = 2x \cdot e^{-x^2-y^2}\left[2-\left(2x^2+3y^2\right)\right]$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{-x^2-y^2}\left[-2y\left(2x^2+3y^2\right)+6y\right] = 2y \cdot e^{-x^2-y^2}\left[3-\left(2x^2+3y^2\right)\right]$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y \cdot \left(1-y^2\right) = 0 \\ y = 0 \Rightarrow x \cdot \left(1-x^2\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Demak, $(0,0), (0,\pm 1)$ va $(\pm 1, 0)$ nuqtalar qaralayotgan funksiyaning statsionar nuqtalari bo'ladi. Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni keltiramiz:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{-\left(x^2+y^2\right)}\left(8x^4 + 12x^2y^2 - 20x^2 - 6y^2 + 4\right) = a_{11}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{-\left(x^2+y^2\right)}\left(8x^3y + 12xy^3 - 20xy\right) = a_{12}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{-\left(x^2+y^2\right)}\left(12y^4 + 8x^2y^2 - 30y^2 - 4x^2 + 6\right) = a_{22}(x,y)$$

Bundan (0,0) nuqtada $a_{11}(0,0)=4$, $a_{12}(0,0)=0$, $a_{22}(0,0)=6$ bo‘lib $a_{11}>0$ va $a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}^2=24>0$ bo‘lgani uchun (0,0) nuqta lokal minimum nuqtasi bo‘ladi va $z(0,0)=0$.

$(0,\pm1)$ nuqtada $a_{11}(0,\pm1)=-2e^{-1}$, $a_{12}(0,\pm1)=0$, $a_{22}(0,\pm1)=-10\cdot e^{-1}$ bo‘lib, $a_{11}<0$ va $a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}^2=20\cdot e^{-2}>0$ bo‘lgani uchun, $(0,\pm1)$ nuqta lokal maksimum nuqtasi bo‘ladi va $z(0,\pm1)=3\cdot e^{-1}$.

$(\pm1,0)$ nuqtada $a_{11}(\pm1,0)=-8e^{-1}$, $a_{12}(\pm1,0)=0$, $a_{22}(\pm1,0)=2e^{-1}$ bo‘lib, $a_{11}<0$ va $a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}^2=-16e^{-2}<0$ bo‘lgani uchun, $(\pm1,0)$ nuqta ekstremum nuqta emas.

Endi berilgan funksiyani $\overline{S}(0,2)$ sharning chegaraviy nuqtalarida, ya’ni $x^2+y^2=4$ tenglikni qanoatlantiruvchi nuqtalarda tekshiramiz. $x^2+y^2=4$ bo‘lsin, u holda $Z=e^{-(x^2+y^2)}(2x^2+3y^2)=e^{-4}[2(x^2+y^2)+y^2]=e^{-4}(8+y^2)$. Bundan $x^2+y^2=4$ bo‘lganda quyidagi tengsizlik kelib chiqadi:

$$8\cdot e^{-4}\le z=e^{-4}(8+y^2)\le e^{-4}\cdot 12,$$

ya’ni $z(\pm2,0)=\frac{8}{e^4}$ va $z(0,\pm2)=\frac{12}{e^4}$ sonlar funksiyaning $\overline{S}(0,2)$ shar chegarasidagi eng kichik va eng katta qiymatlarini beradi.

Berilgan funksiyaning $\overline{S}(0,2)$ yopiq shardagi global ekstremumlari, ya’ni uning eng katta va eng kichik qiymatlarini topish uchun funksiyaning $S(0,2)$ ochiq shardagi va chegaradagi maksimumlari ichidan eng kattasini olsak va, shuningdek $S(0,2)$ ochiq shardagi va chegaradagi minimumlar ichidan eng kichigini olsak, mos ravishda global maksimum va global minimumlarni hosil qilamiz. Qaralayotgan holda funksiya $(0,\pm1)$ nuqtada $z(0,\pm1)=\frac{3}{e}$ lokal maksimumga erishadi. Chegaradagi maksimum qiymat esa $z(0,\pm2)=\frac{12}{e^4}$ ga teng. $\frac{12}{e^4}<\frac{3}{e}$ bo‘lgani uchun, funksiya $\overline{S}(0,2)$ shardagi eng katta qiymatga $(0,\pm1)$ nuqtada erishdi va $Z_{max}=\frac{3}{e}$.

$S(0,2)$ ochiq sharda funksiya $(0,0)$ nuqtada minimumga erishadi va $z(0,0)=0$. Chegaraviy nuqtalardagi minimum $z(\pm 2,0)=\frac{8}{e^4}>0$ bo'lgani uchun funksiya $\bar{S}(0,2)$ sharda eng kichik qiymatga $(0,0)$ nuqtada erishadi va $Z_{min}=0$.

Masalan 3. $z=2x^2+y^2+4x-2$ funksiyaning $x^2+y^2\leq 9$ doiradagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

Yechish: Avval funksiyaning kritik nuqtalarini topamiz. Buning uchun birinchi tartibli xususiy hosilalarini nolga tenglashtiramiz: $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=4x+4=0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}=2y=0. \end{cases}$

Bu sistemani yechib: $M_1(-1;0)$ yagona kritik nuqtaga ega bo'lamiz. Bu nuqta qaralayotgan sohaga tegishli. Funksiyaning kritik nuqtadagi qiymatini hisoblaymiz: $z(-1;0)=-4$.

Endi funksiyaning $x^2+y^2=9$ shardagi qiymatlarini o'rganamiz. $y^2=9-x^2$ ifodani berilgan funksiyaga qo'yib $z=x^2+4x+7$ ni hosil qilamiz. Shu bir o'zgaruvchili funksiyani ekstremumga tekshiramiz. Kritik nuqtalarini topamiz: $z'=2x+4=0, x=-2$. Funksiyani kritik nuqtadagi va sohaning chetlaridagi $(-3\leq x\leq 3)$ qiymatlarini hisoblaymiz: $z(-3)=4$, $z(-2)=3$, $z(3)=28$.

Demak, $z=2x^2+y^2+4x-2$ funksiyaning $x^2+y^2\leq 9$ doiradagi eng kichik qiymati –4 va eng katta qiymati 28 ga teng ekan.

Shartli ekstremumlar

Ko'p hollarda berilgan ko'p o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumlarini, uning argumentlari ma'lum shartlarni qanoatlantirishi asosida topish masalasi qo'yiladi. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun shartli ekstremumlar deb nomlanuvchi tushuncha umumiy holda quyidagicha bayon etiladi.

$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$ $n+m$ o'zgaruvchili funksiyaning ushbu, bog'lovchi tenglamalar deb nomlanuvchi,

$$\phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \; x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+m})$$

tenglamalarni qanoatlantiruvchi nuqtalar ichidan topilgan ekstremumlari uning *shartli ekstremumlari* deyiladi.

Ta'rif. Agar $z = f(x_1, x_2, \dots, x_{n+m})$ ko'p o'zgaruvchili funksiya $x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots x_{n+m}^{(0)})$ nuqtaning biron-bir atrofida aniqlangan bo'lib, bog'lovchi tenglamalarni qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalar uchun $f(x) \le f(x_0)$ $(f(x) \ge f(x_0))$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda x_0 nuqtada shartli maksimumga (minimumga) erishadi deyiladi.

Berilgan $z = f(x_1, x_2, \dots, x_{n+m})$ funksiyaning bog'lovchi tenglamalarni qanoatlantiruvchi shartli ekstremumini topish uchun Lagranjning noma'lum koeffitsientlar usulini keltiramiz. Buning uchun quyidagi yordamchi funksiyani kiritamiz: $F(x) = f(x) + \lambda_1 \phi_1(x) + \dots + \lambda_m \phi_m(x)$.

Bu yerda $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ noma'lum ko'paytuvchilar deb nomlanuvchi sonlardan iborat. Kiritilgan $F(x)$ funksiyaning shartsiz ekstremumi (ya'ni avval kiritilgan ko'p o'zgaruvchili funksiya ekstremumi ma'nosida), biz qarayotgan $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyaning shartli ekstremumi bo'ladi. Biz qidirayotgan $x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots x_{n+m}^{(0)})$ nuqtani va $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ sonlarni topish uchun

$$\begin{cases} \phi_1(x) = 0, & i = 1, 2, \dots, m \\ \dfrac{\partial F(x)}{\partial x_j} = 0, & j = 1, 2, \dots n+m \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yechish yetarli bo'ladi, chunki noma'lumlarning umumiy soni va sistemadagi tenglamalar soni $n + 2m$ ga teng.

Masalan 3. $z = xy$ funksiyaning $x^2 + y^2 = 2$ tenglikni qanoatlantiruvchi shartli ekstremumini toping.

Yechish: Buning uchun yordamchi: $F(x, y) = xy + \lambda \cdot (x^2 + y^2)$

funksiyani kiritib, bu funksiyaning shartsiz ekstremumini topamiz. λ noma'lum ko'paytuvchi va ekstremum nuqtasi uchun quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}=y+2\lambda x=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=x+2\lambda y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ (x-y)(1-2\lambda)=0 \\ (x+y)(1+2\lambda)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ \lambda=\dfrac{1}{2},\ x=-y \\ x=y,\ \lambda=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda=\dfrac{1}{2},(1,-1),(-1,1) \\ (1,1),(-1,-1),\lambda=-\dfrac{1}{2} \end{array} \right.$$

Demak, $\lambda=\frac{1}{2}$ bo'lganda $F(x,y)=xy+\frac{1}{2}(x^2+y^2)$.

$(1,-1)$ va $(-1,1)$ statsionar nuqtalarda funksiyani tekshiramiz.

$(1,-1)$ $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}=1$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=1$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}=1$ va $d^2F=(dx+dy)^2\geq 0$ bo'lgani uchun, $F(x,y)$ funksiya $(1,-1)$ va $(-1,1)$ nuqtalarda minimumga erishadi. U holda $z=xy$ funksiya esa shu nuqtalarda shartli minimumga erishadi va $z_{min}=-1$.

Agar $\lambda=-\frac{1}{2}$ bo'lsa, $F(x,y)=xy-\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ va F(x,y) funksiya $(1,1)$ va $(-1,-1)$ statsionar nuqtalarda maksimumga erishadi, u holda $z=xy$ funksiya esa bu nuqtalarda shartli maksimumga erishadi va $z_{max}=1$.

Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning iqtisodiyotga tatbiqlari

Iqtisodiyotda kelib chiqadigan ko'p o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumini topish masalasini qaraymiz.

Tovarning har xil turlarini ishlab chiqarishdan daromad olish.

Faraz qilaylik $x_1,x_2,...,x_m$ ishlab chiqarilayotgan m turdagi turli xil tovarning miqdori, ularning birlik miqdordagi narxi mos ravishda $P_1,P_2,...P_m$ bo'lsin. Bu tovarlarni ishlab chiqarishga ketadigan xarajat funksiyasi berilgan bo'lsin:

$$C=C(x_1,x_2,...x_m).$$

U holda qo'shimcha qiymat funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$\Pi = P_1x_1 + P_2x_2 + ... + P_mx_m - C(x_1, x_2, ..., x_m) \qquad (1)$$

Tabiiyki, qo'shimcha qiymat maksimumini izlash, (1)-ko'p o'zgaruvchili funksiyaning $x_i \geq 0$ da (boshqa cheklanishlar qo'yilmaganda) lokal ekstremumini izlash kabidir: $\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = 0$, $i = 1,2,...,m$.

Bu shart x_i o'zgaruvchilarga nisbatan algebraik tenglamalar sistemasiga olib keladi:

$$P_i - \frac{\partial C}{\partial x_i} = 0, \ i = 1,2,...,m. \qquad (2)$$

(3.12)-tenglamalar sistemasi iqtisodiyotning ma'lum qoidasini amalga oshiradi: tovarning oxirgi qiymati (narxi) bu tovarni ishlab chiqarishga sarflangan xarajatlarga teng.

Shuni ta'kidlash kerakki, (2)-tenglamalar sistemasini yechish jarayoni xarajat funksiyasining ko'rinishiga bog'liq va ancha murakkab bo'lishi mumkin.

Masalan 4. Faraz qilaylik korxonada ikki xil tovar ishlab chiqariladi, ularning hajmi x va y bo'lsin $p_1 = 8$ va $p_2 = 10$ mos ravishda bu tovarlarning birlik miqdordagi narxi, C xarajat funksiyasi, $C = x^2 + xy + y^2$ ko'rinishda bo'lsin.

U holda (1) ga asosan $x_1 = x, x_2 = y$ da foyda ikki o'zgaruvchining funksiyasi bo'ladi: $\Pi(x,y) = 8x + 10y - x^2 - xy - y^2$.

Lokal ekstremum sharti chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga olib keladi:

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + 2y = 10. \end{cases}$$

Buning yechimi (2,4) nuqtadan iborat. Modomiki $a_{11} = -2 < 0$, $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 3 > 0$, u holda topilgan nuqta qo'shimcha qiymat funksiyasining lokal maksimumini aniqlaydi va $\prod_{\max} = 28$.

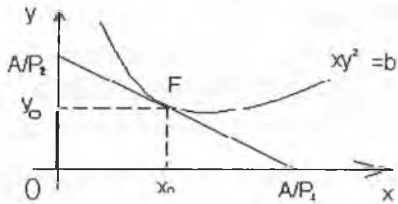
Resurslarni eng yaxshi natija beradigan qilib taqsimlash.

Faraz qilaylik X va Y resurslarning xarajat funksiyasi $u = p_1x + p_2y$ ko'rinishga ega bo'lsin, bu yerda p_1 va p_2 mos ravishda bu faktorlarning bahosi. Ishlab chiqarish funksiyasi $u = a_0 xy^2$ bo'lganda resurslarni optimal taqsimlash masalasini qaraylik, a_0–?

Resurslarni optimal taqsimlashni aniqlaydigan $F(x_0, y_0)$ nuqtada xarajat va chiqarish funksiyalari urinadi.

Bu chiziqlar mos ravishda $a_0 xy^2 = c$, $p_1 x + p_2 y = A$ yoki $y = (b/x)^{1/2}$, $y = -(p_1/p_2)x + A/p_2$ tenglamalar bilan aniqlanadi, bu yerda $C>0$ va $A>0$ o'zgarmas sonlar, $b = c/a_0$. Bu chiziqlarning urinish sharti quyidagi tenglama bilan beriladi:

$$\left[\left(b/x\right)^{1/2}\right]'\Big|_{x_0} = -p_1/p_2$$



Bu tenglamadan $x_0 = b^{1/3}(p_2/2\,p_1)^{1/3}$ qiymat topiladi. U holda chiqarish funksiyasidagi $y_0 = \left(b/x_0\right)^{1/2} = b^{1/3}\left(2\,p_1/p_2\right)^{1/6}$ qiymat topiladi. Demak, resurslarning optimal taqsimlanishi $x_0/y_0, p_1 : 2p_2$ munosabat orqali aniqlanar ekan.

Mahsulot ishlab chiqarishning qo'shimcha qiymatini maksimallashtirish

Qo'shimcha qiymat funksiyasi odatda quyidagi formula bilan ifodalanadi:

$$\Pi(K,L) = pF(K,L) - WL - kK. \qquad (3)$$

Bu yerda, $F(K,L)$ ishlab chiqarish funksiyasi, p mahsulot bahosi. W va k mos ravishda mehnatga va kapital xarajatlarga faktor narxlar, L va K mos ravishda mehnat resurslari va kapitalning xarajatlari.

Qo‘shimcha qiymat maksimumini aniqlashga doir ikkita misol qaraymiz.

1. Agar (K_0, L_0) nuqtada qo‘shimcha qiymat funksiyasi (3)-maksimal qiymatni qabul qilsa (K_0, L_0) nuqta optimal reja deyiladi. Optimal reja F da ishlab chiqarish funksiyasi F ni o‘rniga qo‘yib oxirgi normasini toping.

Lokal ekstremum nuqtasida qo‘shimcha qiymat funksiyasi $\Pi(K, L)$ ning birinchi hosilalari nolga teng, ya’ni

$$pF'_K(K_{0,}L_0) - k = 0,$$
$$pF_L(K_{0,}L_0) - W = 0.$$

Ma’lumki, almashtirishning oxirgi normasi $\mu = -F'_l / F'_k$ formula bo‘yicha hisoblanadi, bundan optimal reja uchun $\mu = -W/k$ kelib chiqadi.

2. Agar $F(K, L) = 2(KL)^{1/3}$ bo‘lsa, qo‘shimcha qiymat funksiyasi (3)ning maksimumi va optimal rejani toping.

Qo‘shimcha qiymat funksiyasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\Pi(K, L) = 2p(KL)^{1/3} - WL - RK.$$

Lokal ekstremum shartlari optimal rejaning K_0 va L_0 koordinatalariga nisbatan, ikkita chiziqli tenglamalar sistemasiga olib keladi:

$$\begin{cases} \frac{2}{3} hL_0^{\frac{1}{3}} K_0^{\frac{2}{3}} = k \\ \frac{2}{3} PK_0^{\frac{1}{3}} L_0^{-\frac{2}{3}} = W \end{cases}$$

Bundan optimal rejaning koordinatalarini topamiz:

$$K_0 = \left(\frac{2p}{3}\right)^3 \Big/ \left(\frac{R^2}{W}\right), \quad L_0 = \left(\frac{2P}{3}\right)^3 \Big/ \left(RW^2\right)$$

Bu qiymatlarni qo‘shimcha qiymat funksiyasiga qo‘ysak П funksiya maksimumini hosil qilamiz:

$$\Pi_{max} = \left(\frac{2p}{3}\right)^3 \Big/ (RW)$$

Eng kichik kvadratlar usuli

Eng kichik kvadratlar usuli approksimatsiya yoki funksiyani ayrim nuqtalarda ma'lum qiymatlari bo'yicha taxminan tiklash masalasiga tegishlidir. Tajribada ko'pincha formulalarni eng yaxshi yo'l bilan empirik tanlash masalasi kelib chiqadi. Masala quyidagicha ifodalanadi: y noma'lum kattalikning n ta nuqtalarda kuzatishlari berilgan:

$$M_1, M_2, \dots, M_n \tag{4}$$

va mos qiymatlar olingan

$$U_1, U_2, \dots, U_n. \tag{5}$$

Shunday $U=f(M)$ funksiyani tanlab olish kerakki, u o'lchanadigan kattalik Y ning o'lchash nuqtalari $\{M_i\}$ va natijalari $\{U_i\}$ orasidagi bog'liqlikni imkoni boricha aniq ifoda etsin.

Shunday qilib, empirik formulalarni topish masalasi ikki bosqichdan iborat:

1) $f(M)$ bog'lanishning umumiy ko'rinishini topish yoki f funksiyaning o'zgarmas parametrlari (koeffitsientlari) aniqlik darajasini ko'rsatish;

2) noma'lum koeffitsientlar (4) kuzatish nuqtalarida shunday tanlab olinadiki, $f(M)$ funksiya berilgan (5) qiymatlarga iloji boricha aniq javob bersin.

Faraz qilaylik 1-bosqichda empirik formula o'z ichiga ma'lum baza funksiyalar majmuyini hosil qilsin.

$$y_1(M),\ y_2(M), \dots, y_m(M), \tag{6}$$

ya'ni empirik formula quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$f(M) = a_1 y_1(M) + a_2 y_2(M) + \dots + a_m y_m(M) \tag{7}$$

Bu yerda, $$a_1, a_2, \dots, a_m \tag{8}$$

empirik funksiyaning noma'lum parametrlari.

2-bosqich noma'lum parametrlar (8)ni aniqlashdan iborat. Ularni shunday tanlab olish kerakki, (7) funksiyaning qiymatlari (4) nuqtalarda (5) o'lchangan qiymatlardan iloji boricha kam farq qilsin.

Eng kichik kvadratlar usuli $\delta_i = U_i - f(M)$ xatoliklarning kvadratlari yig'indisini minimallashtirishdan iborat. Demak, (7) funksiya uchun, ushbu

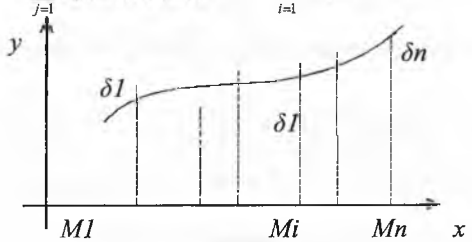
$$S(a_1, a_2, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (U_i - f(M_i))^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(U_i - \sum_{k=1}^{m} a_k y_k(M_i) \right) \quad (9)$$

funksiya barcha m argumenti bo'yicha xususiy hosilalarni topish kerak va ularni 0 ga tenglash lozim. Bundan m ta noma'lum $a_1, a_2 \dots, a_m$ parametrlarga nisbatan m ta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$A_{j1}a_1 + A_{j2}a_2 + \dots + A_{jm}a_m = B_j,\ j = 1,2,\dots,m. \quad (10)$$

Bu tenglamaning koeffitsientlari va ozod hadlari quyidagi formulalar bo'yicha aniqlanadi:

$$A_{jk} = A_{kj} = \sum_{j=1}^{n} y_j(M_i) y_k(M_i),\ B_j = \sum_{i=1}^{n} U_i v_i(M_i),\ j,k = 1,2,\dots m$$



$S(a_1, \dots, a_n)$ (9)-funksiya musbat, pastga qavariq va chegaralangan bo'lgani uchun (10)-tenglamalar sistemasining yechimi, S funksiyaning lokal maksimumi nuqtasining koordinatalaridan iborat bo'ladi.

Iqtisodiy statistikada ma'lumotlarini qayta tekshirishda empirik formulaga yaqinlashish masalasini hal etishda $U = f(M)$ funksiyani bir o'zgaruvchining chiziqli funksiyasi ko'rinishida izlash keng tarqalgan. Bu holda (4) o'lchash nuqtalarining majmuyi $x_1 \dots x_n$ qiymatlaridan iborat bo'lib, (6)-funksiyalar majmuyi esa ikkita funksiya $y_1(x) = x$ va $y_2(x) = x$ dan iborat.

Empirik formula (7) ning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi: $y=ax+b$.

No‘malum parametrlar a va b uchun ushbu chiziqli tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi:

$$\begin{cases} A_{11}\ a + A_{12}\ b = B_1 \\ A_{21}\ a + A_{22}\ b = B_2 \end{cases}.$$

Bu yerda, koeffitsient va ozod hadlar quyidagi tengliklar bilan topiladi:

$$A_{11} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\ ,\ A_{12} = A_{21} = \sum_{i=1}^{n} x_i\ ,\ A_{22} = n$$

$$B_1 = \sum_{i=1}^{n} U_i x_i\ ,\ B_2 = \sum_{i=1}^{n} U_i\ .$$

Masalan 4. Avtomobil poygasi haqida quyidagi ma’lumotlar bor.

x masofa (ming km) va y yonilg‘i sarfi (l /ming km).

x_i	*50*	*70*	*90*	*110*	*130*
y_i	*0,2*	*0,5*	*0,8*	*1,1*	*1,3*

x va y o‘zgaruvchilar orasidagi bog‘lanishni chiziqli ekanligini bilgan holda

$y = ax + b$ empirik formulani eng kichik kvadratlar usuli bilan toping.

Yechish: Zarur yigindilarni hisoblaymiz: $\sum_{i=1}^{n} x_i,\ \sum_{i=1}^{n} y_i,\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2,\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$

Oradagi hisoblashlar quyidagi jadvalda ko‘rsatilgan:

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	50	0,2	10	2500
2	70	0,5	35	4900
3	90	0,8	72	8100
4	110	1,1	121	12100
5	130	1,3	169	16900
Σ	**450**	**3,9**	**407**	**44500**

Normal tenglamalar sistemasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\begin{cases} 44500a + 450b = 407 \\ 450a + 5b = 3{,}9 \end{cases}$$

Uning yechimi $a=0{,}014,\ \ b=-0{,}48$. Shunday qilib, chiziqli bog'lanishning tuzilishi

$y = 0{,}014x - 0{,}48$ ko'rinishda bo'ladi.

Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning iqtisodiyotda qo'llanishi

Umumiy holda X tovarga bo'lgan talab ko'p o'zgaruvchi funksiya bo'ladi, ya'ni sotib olinayotgan tovarning miqdori Q_x uning narxi P_x, ikkilamchi xom-ashyo narxi P_y, iste'molchining o'rtacha daromad darajasi Y, yil fasllari t va hokazolarga bog'liq.

$\frac{\partial Q_x}{\partial P_x}$ xususiy hosila Q_x talabning faqat P_x tovar narxi o'zgarganda o'zgarish tezligining o'lchov birligi bo'lib xizmat qiladi, bu holda qolgan barcha o'zgaruvchilar o'zgarmas deb faraz qilinadi. Xuddi shunga o'xshash xususiy hosila $\frac{\partial Q_y}{\partial Q_y}$ xomashyoning narxi P_y o'zgarganda X tovarga bo'lgan talab qanday tezlikda o'zgarishini ko'rsatadi.

Xususiy hosilalarning ishorasidan foydalanib X va Y tovarlarning xarakterini topish mumkin, aynan:

agar $\frac{\partial Q_x}{\partial P_y} > 0$ va $\frac{\partial Q_y}{\partial P_x} > 0$ bo'lsa, X va Y tovarlar *o'rin bosuvchi,*

agar $\frac{\partial Q_x}{\partial P_y} < 0$ va $\frac{\partial Q_y}{\partial P_x} < 0$ bo'lsa, X va Y tovarlar *o'rin to'ldiruvchi tovarlar* hisoblanadi.

Masalan 5. Avtomobillarga ehtiyot qismlari ishlab chiqaradigan firma o'z mahsulotlarini ichki va tashqi bozorga chiqarish imkoniyatiga ega.

Tashqi bozorda talab quyidagi ifoda bilan berilgan: $P_1 + 8Q_1 = 421$

Ichki bozorda esa: $P_2 + 2{,}5Q_2 = 80$

Bu yerda, Q_1 va Q_2 mos ravishda bir hafta davomida tashqi va ichki bozorda sotib olinadigan miqdor; P_1 va P_2 tashqi va ichki bozordagi narxlar. Firmaning umumiy harajatlari $TC = 250 + 5Q$. Bu yerda $Q = Q_1 + Q_2$.

Agar:1) firma narxlarni o'zgartirish siyosatini o'tkazish imkoniyatiga ega bo'lsa:

2) ikkita bozordagi narxlar bir xil bo'lsa.

Maksimal foydaga ega bo'lish uchun har qaysi bozorda firmaning mahsulotiga qanday narx o'rnatilishi kerak. Har bir holda firmaning foydasini aniqlang.

Yechish: Masalaning birinchi qismi firma o'zining iste'molchilarini ajratishi mumkin va har bir bozorda o'ziga eng ma'qul narxni qo'yishi mumkin deb faraz qilinadi. Tashqi bozordagi talab funksiyasi $P_1+8Q_1=421$ ichki bozorda esa $P_2+2{,}5Q_2=80$ firmaning umumiy daromadi tashqi va ichki bozordagi daromadlar yig'indisiga teng:

$$R = R_1 + R_2 = P_1Q_1 + P_2Q_2 = (421 - 8Q_1)Q_1 + (80 - 2{,}5Q_2)Q_2 =$$
$$= 421Q_1 - 8Q_1^2 + 80Q_2 - 2{,}5Q_2^2$$

Firmaning umumiy xarajati: $TC = 250 + 5(Q_1 + Q_2)$

demak, foyda funksiyasi

$$\pi = R - TC = 421Q_1 - 8Q_1^2 + 80Q_2 - 2{,}5Q_2^2 - 250 - 5Q_1 - 5Q_2.$$

Biz Q ga bog'liq bo'lgan foyda funksiyasini hosil qildik. Endi firmaning foydasi maksimum bo'lganda Q_1 va Q_2 larning qiymatini aniqlash masalasini qaraymiz. Buning uchun Q_1 va Q_2 bo'yicha xususiy hosilalarni topib nolga tenglaymiz: $\begin{cases} \partial\pi/\partial Q_1 = 421 - 16Q_1 - 5, \\ \partial\pi/\partial Q_2 = 80 - 5Q_2 - 5; \end{cases}$ $\begin{cases} 416 - 16Q_1 = 0 \\ 75 - 5Q_2 = 0 \end{cases}$

Bu tenglamalar sistemasini yechib $Q_1=26$, $Q_2=15$ ni topamiz.

Ikkinchi shartni tekshiramiz:

$\partial^2\pi/\partial Q_1^2 = -16$, $\partial^2\pi/\partial Q_2^2 = -5$, $\partial^2\pi/\partial Q_1Q_2 = 0$.

$$\frac{\partial^2\pi}{\partial Q_1^2}\frac{\partial^2\pi}{\partial Q_2^2} - \left(\frac{\partial^2\pi}{\partial Q_1\partial Q_2}\right)^2 = (-16)\cdot(-5) - 0 = 80 \rangle 0 \text{ va } \partial^2\pi/\partial Q_1^2 = -16 < 0$$

Demak, foyda funksiyaning maksimumga erishish sharti bajariladi. Shunday qilib firma maksimum foydaga ega bo'lishi uchun tashqi bozorga 26 ta ichki bozorga 15 ta mahsulot chiqarishi kerak. Q_1 va Q_2 ning bu qiymatilarini talab funksiyaga qo'yib P_1 va P_2 narxlarni topamiz:

$$P_1 = 421 - 8Q_1 = 421 - 8\times 26 = 213,$$

$$P_2 = 80 - 2{,}5Q_2 = 80 - 2{,}5\times 15 = 42{,}5$$

Demak, tovarning tashqi bozordagi narxi *213* pul birligi, ichki bozordagi narxi esa *42,5* pul birligi bo'lib, firmaning foydasi:

$$\pi = 421Q_1 - 8Q_1^2 + 80Q_2 - 2{,}5Q_2^2 - 5Q - 5Q_2 = 421\times 26 - 8\times 26^2 +$$
$$+80\times 15 - 2{,}5\times 15^2 - 250 - 5\times 26 - 5\times 15 = 5720{,}5 \text{ p.b.}$$

Firmaning haftalik foydasi – narx o'zgarish siyosatini o'tkazish shartlarida π=5720,5 pul birligini tashkil qiladi.

Iste'molchilar bozorini ajratish imkoniyati bo'lmagan holda ichki va tashqi narx bir xil bo'ladi: $P_1=P_2=P$. U holda tashqi va ichki bozorga chiqariladigan tovar miqdori teng bo'ladi:

$$Q_1 = \frac{421 - P_1}{8} = 52{,}625 - 0{,}125P; \qquad Q_2 = \frac{80 - P_2}{2{,}5} = 32 - 0{,}4P$$

Umumiy miqdori $Q=Q_1+Q_2=84{,}625–0{,}525P$, bunda $P = \frac{84{,}625 - Q}{0{,}525}$ yagona bozor uchun yangi talab funksiyasi.

Yagona bozordagi daromad: $TR = PQ = \frac{84{,}625 - Q}{0{,}525}Q = \frac{84{,}625}{0{,}525} - \frac{Q^2}{0{,}525}$,

Umumiy harajatlar $TC = 250 + 5Q$;

Firmaning foyda funksiyasi: $\pi = \frac{84{,}625}{0525}Q - \frac{Q^2}{0{,}525} - 250 - 5Q,$

Foyda maksimum bo'ladigan birinchi tartibli shartga asosan Q ning qiymatini topish zarur: $\frac{\partial^2\pi}{\partial Q} = \frac{84{,}625}{0{,}525} - \frac{2Q}{0{,}525} - 5 = 0.$ $Q = 41.$

$\partial^2\pi/\partial Q^2 < 0$ funksiya maksimumining sharti.

Demak, *Q=41* nuqtada foyda funksiyasi maksimumga erishadi.

$$\pi(41) = \frac{84{,}625}{0525}\times 41 - \frac{412}{0{,}525} - 250 - 5\times 41 \approx 2951{,}9.$$

Endi birlashgan bozorda tovarning narxini aniqlash kerak. Buning uchun birlashgan talab funksiyasidan foydalanamiz:

$$P(41) = \frac{84{,}625 - 41}{0{,}525} \approx 83{,}10.$$

E'tibor qiling, birinchi va ikkinchi hollarga bozorga chiqarilayotgan tovarning miqdori bir xil. Lekin birinchi holda firmaning tovarlariga bo'lgan narx har xil, natijada foyda olish imkoniyati bo'ladi.

$$\pi_1 = 5720{,}5, \quad \pi_2 = 2951{,}9.$$

Ishlab chiqarishning x va y faktoriga bog'liq $z=f(x, y)$ ishlab chiqarish funksiyasi berilgan bo'lsin.

Ishlab chiqishning chegaraviy unumdorlik faktorlari:

$$\omega_x = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \omega_y = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Bunda $\omega_x - x$ faktorning chegaraviy unumdorligi,

$\omega_y - y$ faktorning chegaraviy unumdorligi.

Ishlab chiqarish ikki faktorining chegaraviy aralashish me'yori:

$$\eta_{xy} = -\frac{\omega_y}{\omega_x} = -\frac{\partial z}{\partial y} : \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\eta_{yx} = -\frac{\omega_x}{\omega_y} = -\frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y}$$

Bunda η_{xy} – ishlab chiqarish x faktorining ishlab chiqarish y faktoriga chegaraviy aralashish me'yori.

η_{yx} – ishlab chiqarish y faktorining x faktoriga chegaraviy aralashish me'yori.

Mahsulot ishlab chiqarishning ma'lum faktori bo'yicha elastiklikning xususiy qiymatlari:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial z}{\partial x} : \frac{z}{x} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{x}{z} \quad \text{va} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial z}{\partial y} : \frac{z}{y} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{y}{z}$$

Bunda ε_x – ishlab chiqarish hajmining x faktor bo'yicha elastikligi,

ε_y – ishlab chiqarish hajmining y faktor bo'yicha elastikligi.

Elastiklik koeffitsienti ishlab chiqarishning bir faktori *1%* ga o'zgarganda va ikkinchi faktor o'zgarmas bo'lganda ishlab chiqarish hajmi qancha foizga o'zgarishini anglatadi.

Masalan 6. $z = 4x^3 - xy^2 - 5y$ ishlab chiqarish funksiyasi bo'lib, bunda x mehnat kuchiga xarajatlar, y mehnatiga (investitsiya) xarajatlar. $x = 1$ va $y = 2$da funksiya xususiy elastikligini hisoblang.

Yechish: $\frac{\partial z}{\partial x} = (4x^3 - xy^2 + 5y)'_x = 12x^2 - y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = (4x^3 - xy^2 + 5y)'_y = -2xy + 5$.

$$\mathrm{E}_x = \frac{x}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{4x^3 - xy^2 + 5y} \cdot (12x^2 - y^2),\ \mathrm{E}_y = \frac{y}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{4x^3 - xy^2 + 5y} \cdot (5 - 2xy).$$

$$\mathrm{E}_x(1;2) = \frac{1}{4 - 4 + 10}(12 - 4) = \frac{8}{10} = 0.8,\ \mathrm{E}_y(1;2) = \frac{2}{4 - 4 + 10}(5 - 4) = \frac{2}{10} = 0.2.$$

Demak, mehnat kuchiga xarajatlar 1% ga ortsa, ishlab chiqarish hajmi 0.8% ga, mehnatga (investisiya) xarajatlar 1% ga ortsa, ishlab chiqarish hajmi 0.2% ga ortadi.

Masalan 7. $\mathrm{Y} = F(K;\ L) = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}$ Kobba-Duglas ishlab chiqarish funksiyasining asosiy parametr va xarakteristikalarini aniqlang, bunda Y – ishlab chiqarilayotgan mahsulot hajmi; L – mehnat xarajatlari; K – ishlab chiqarish fondlari hajmi; A, α, β – ishlab chiqarish funksiyasi ko'rsatkichlarini ifodalovchi o'zgarmas sonlar, bunda $A > 0$, $0 \leq \alpha + \beta \leq 1$.

Yechish: Birinchi tartibli xususiy hosilalarni hisoblaymiz:

$\omega_L = \mathrm{Y}'_L = A \cdot \beta \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta - 1}$ – chegaraviy mehnat unumdorligi;

$\omega_K = \mathrm{Y}'_K = A \cdot \alpha \cdot K^{\alpha - 1} \cdot L^{\beta}$ – chegaraviy mehnat invesititsiya unumdorligi iqtisodda ω_K chegaraviy jamg'arma unumdorligi deyiladi.

Kobba-Duglas funksiyasining elastikligini hisoblaymiz:

$$\mathrm{E}_K(F) = \frac{K}{F} \cdot \frac{\partial F}{\partial K} = \frac{K}{A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}} \cdot A \cdot \alpha \cdot K^{\alpha - 1} \cdot L^{\beta} = \alpha,$$

$$\mathrm{E}_L(F) = \frac{L}{F} \cdot \frac{\partial F}{\partial K} = \frac{K}{A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}} \cdot A \cdot \beta \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta - 1} = \beta.$$

Demak, α – jamg'armalar (fondlar) bo'yicha mahsulot ishlab chiqarish elastikligi, β – mahsulot ishlab chiqarishning mehnat bo'yicha elastikligi K – ishlab chiqarish fondlarining nisbiy *1%* ga o'zgarishi mahsulot ishlab chiqarishning nisbiy miqdorini taxminan α% ga o‘zgarishini kamaytirib chiqaradi, agarda K ning 1% ga o‘zgarishi yetarlicha kichik bo‘lsa.

Agar L mehnat xarajatlarini 1% ga orttirilsa, u holda mahsulot ishlab chiqarish miqdori taxminan β% ga o‘zgaradi.

Ikki faktorning aralash me’yorini aniqlaymiz:

$$\eta_{KL} = -\frac{\omega_L}{\omega_K} = -\frac{A\beta K^{\alpha} L^{\beta-1}}{A\alpha K^{\alpha-1} L^{\beta}} = -\frac{\beta K}{\alpha L}$$

asosiy kapitalning mehnat bilan chegaraviy aralashish normasi.

$$\eta_{LK} = -\frac{\omega_K}{\omega_L} = -\frac{\alpha L}{\beta K}$$

mehnatning asosiy kapital bilan aralashish chegaraviy me’yori.

To‘la differensial

$Y = Y(K;L)$ – Kobbi-Duglas ishlab chiqarish funksiyasini qaraymiz.

Bunda, Y – ishlab chiqarish mahsulotlari narxi; L – mehnat xarajatlari; K – ishlab chiqarish fondlari hajmi.

K ishlab chiqarish fondlari hajmi va L mehnat resurslari xarajatlarini fiksirlaymiz. U holda mahsulot ishlab chiqarish narxi $Y = Y(K;L)$ ishlab chiqarish funksiyasining to‘la differensiali:

$$dY = Y'_K dK + Y'_K dL.$$

Ammo, Y'_K – chegaraviy mehnat unumdorligi; Y'_L – chegaraviy fond unumdorligi. U holda, $Y'\Delta K - \Delta K$ qo‘shimcha fondlar yordamida ishlab chiqarilgan mahsulot narxi; $Y'_L \cdot \Delta L - \Delta L$ mehnat xarajatlari orqali ishlab chiqarilgan qo‘shimcha mahsulot narxi. Kichik ΔL mehnat xarajatlari va ΔK fondlar hajmi o‘zgarishida mahsulot ishlab chiqarish o‘zgarishi $\Delta Y \approx dY$, $\Delta Y = Y'_K \cdot \Delta K + Y'_L \cdot \Delta L$.

Demak, mehnat resurslariga xarajatning oz miqdorda o‘zgarishi va ishlab chiqarish fondlarining ham oz miqdorda o‘zgarishdan ishlab chiqarish mahsulot narxining o‘zgarishi taxminan avvalgi fondlar hajmida qo‘shimcha mehnat xarajatlari yordamida ishlab chiqarish mahsulot va oldingi mehnat resurslari miqdorida qo‘shimcha fondlar yordamida ishlab chiqarish qo'shimcha mahsulot narxlari yig'indisiga teng.

Y ishlab chiqarish doimiy (o'zgarmas) bo'lsin. U holda $dY=0$ yoki $Y'_K dK + Y'_L dL = 0$.

Demak, $-\frac{dL}{dK}=\frac{Y'_K}{Y'_L}=\frac{\omega_K}{\omega_L}=\eta_{LK}$ munosabat asosiy kapitalning mehnat bilan chegaraviy almashtirish me'yoridir (normasidir). Doimiy ishlab chiqarishda va yetarli kichik ΔK va ΔL da $\eta_{LK}=\frac{dL}{dK}=-\frac{\Delta L}{\Delta K}$.

Demak, chegaraviy almashtirish normasi asosiy kapital xarajatlari bir birlikka kamaysa (doimiy ishlab chiqarishda) mehnat xarajatlari necha birlikka ortishini anglatadi.

Masalan 7. Tashkilot har oyda 30 mln p.b. mahsulot ishlab chiqardi. Uning asosiy fondlari 100 mln p.b., mehnat resurslari esa 1500 b. Tashkilot iqtisodchilari mahsulot hajmini 1 mln kun.birlikka ortishi uchun 4 mln p.b. miqdorida uskuna sotib olish kerakligini hisoblashdi. Ishlab chiqarish funksiyasini $\alpha+\beta=1$ shartda Kobba-Duglas ko'rinishida tuzing.

Yechish: Ishlab chiqarish funksiyasini $Y=A\cdot K^{\alpha}L^{\beta}$ ko'rinishida qo'llaymiz, bunda Y – ishlab chiqarish mahsulot hajmi, L – mehnat sarflari, K – asosiy fondlar hajmi; A,α,β – ishlab chiqarish funksiyasi ko'rsatkichlari. $\alpha+\beta=1$ bo'lganligidan $Y=A\cdot K^{\alpha}L^{1-\alpha}$. A va α parametrlarni aniqlaymiz. Masala shartiga ko'ra $Y_0=30$, $K_0=100$, $L_0=1500$, $\Delta Y=1$, $\Delta K=4$.

$\Delta Y \approx dY = Y'_K\cdot\Delta K + Y'_L\cdot\Delta L$ munosabatdan foydalanamiz.

Mehnat xarajatlari o'zgarmaganligi uchun $\Delta L=0$ bo'ldi. U holda $\Delta Y = Y'_K\cdot\Delta K = A\cdot\alpha\cdot K^{\alpha-1}\cdot L^{1-\alpha}\cdot\Delta K$ va $Y_0=A\cdot K_0^{\alpha}\cdot L_0^{1-\alpha}$ munosabatlarga masala shartidagi berilganlarni qo'yib:

$$\begin{cases} A\cdot\alpha\cdot 100^{\alpha-1}\cdot 1500^{1-\alpha}\cdot 4 = 1 \\ A\cdot\alpha\cdot 100^{\alpha}\cdot 1500^{1-\alpha} = 30 \end{cases}$$

Bu sistemani yechib: $\alpha=\frac{5}{6}$, $A=\frac{30}{100^{5/6}1500^{1/6}}=15.7$.

Demak, ishlab chiqarish funksiya: $Y = 15.7 \cdot K^{5/6} L^{1/6}$.

Ikki tur mahsulotlar ishlab chiqish hajmi x va y bo'lib, olinadigan foyda miqdori mos ravishda p_1 va p_2 bo'lsin. Bu mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun xarajatlar $C=c(x,y)$ differensillanuvchi funksiya yordamida berilgan bo'lsin. U holda ishlab chiqarishdan olinadigan foyda $\Pi = \Pi(x,y) = p_1 \cdot x + p_2 \cdot y - C(x,y)$

Foydani maksimallashtirish tabiiyki $\Pi = \Pi(x,y)$ ikki o'zgaruvchili funksiyaning $x \geq 0$, $y \geq 0$ shartdagi lokal ekstremumini topishga keltiriladi.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

sistemani yechib statsionar nuqtani topamiz.

Demak, $p_1 = \dfrac{\partial c}{\partial x}$, $p_2 = \dfrac{\partial c}{\partial y}$, bunda $\dfrac{\partial c}{\partial x}$ – 1 tur x birlik mahsulot ishlab chiqarish uchun chegaraviy xarajatlar, $\dfrac{\partial c}{\partial y}$ – 2 tur y birlik mahsulot ishlab chiqarish uchun chegaraviy xarajatlar.

$p_1 = \dfrac{\partial c}{\partial x}$, $p_2 = \dfrac{\partial c}{\partial y}$ munosabatning iqtisodiy ma'nosi: mahsulotning chegaraviy qiymati (narxi) shu mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarflangan xarajatlarning chegaraviy qiymatiga teng.

Ishlab chiqarish funksiyasi $X = A \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2}$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ funksiyasi bo'lsin, bunda A – neytral (texnologik koeffitsient) texnik rivojlanish koeffitsienti, α_1 – mehnat bo'yicha elastiklik, α_2 – jamg'armalar elastikligi.

Agar $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 1 - \alpha$ bo'lsa

$$X = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}$$

Kobbi-Duglas funksiyasi hosil bo'ladi.

Masalan 8. Yalpi ishlab chiqarish funksiyasi (mlrd p.b.) asosiy ishlab chiqarish jamg'armalari (mlrd p.b.) va mehnatga ishtirok etayotgan aholi (mln kishi) soniga bog‘liq holda $X = 0.931 \cdot K^{0.539} \cdot L^{0.594}$ funksiyasini ifodalasin.

Resurslar sarfining o‘sishi bilan ishlab chiqarish ham o‘sadi, ya’ni

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \alpha_1 A \cdot K^{\alpha_1 - 1} \cdot L^{\alpha_2} = \frac{\alpha_1 X}{K} > 0, \text{ chunki } \alpha_1 > 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \alpha_2 A \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2 - 1} = \frac{\alpha_2 X}{L} > 0, \text{ chunki } \alpha_2 > 0.$$

Resurslar sarfining ortishi bilan uning chegaraviy tushumi kamayadi, ya’ni

$$\frac{\partial^2 X}{\partial^2 K} = \alpha_1(\alpha_1 - 1) \cdot K^{\alpha_1 - 2} \cdot L^{\alpha_2} = \alpha_1(\alpha_1 - 1)\frac{X}{K^2} < 0, \text{ chunki } \alpha_1 < 1$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial^2 L} = \alpha_2(\alpha_2 - 1) \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2 - 2} = (\alpha_2 - 1)\frac{X}{L^2} < 0, \text{ chunki } \alpha_2 < 1.$$

Resurslarning birining ortishi bilan ishlab chiqarish ham ortadi. Demak, $0 < \alpha_1 < 1$, $0 < \alpha_2 < 1$ da berilgan funksiya neoklassik.

$\alpha_1 = \dfrac{\partial \ln X}{\partial \ln K}$ – asosiy jamg‘armalar bo‘yicha ishlab chiqarish elastikligi,

$\alpha_2 = \dfrac{\partial \ln X}{\partial \ln K}$ – mehnat resurslari bo‘yicha ishlab chiqarish elastikligi.

Bu munosabatlar har bir faktor 1% ga ortsa ishlab chiqarish necha foizga o‘sishini anglatadi.

Xususan, $X = 0.931 \cdot K^{0.539} \cdot L^{0.594}$ ishlab chiqarish funksiyasida asosiy fondlarning 1% ga ko‘payishi yalpi mahsulot ishlab chiqarishni 0.539% ga ortishini, mehnatga band ishchilarning hajmi 1% ga ko‘payishi esa yalpi ishlab chiqarishni 0.594% ga ortishini bildiradi.

Agar $\alpha_1 < \alpha_2$ da jamg‘arma himoyalovchi (ekstensiv) o‘sish o‘rinlidir.

Ishlab chiqarish o‘sish sur’atini aniqlaylik:

$$\frac{X_{t+1}}{X_t} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{\alpha_2}$$

Har ikki qismni $\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}$ darajaga oshirib

$$\left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}}=\left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\alpha}\cdot\left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{1-\alpha}$$

$\alpha=\alpha_1+\alpha_2>1$da ishlab chiqarish faktorning o'rtacha o'sishidan yuqori, $\alpha_1+\alpha_2<1$da pastroq bo'ladi. Demak, $\alpha_1+\alpha_2>1$da ishlab chiqarish funksiyasi o'suvchi iqtisodni ifodalaydi.

KOL tekisligida satr chiziqlari yoki izokvantalar deb $F(K,L)=X_0$, $X_0=const$ tenglikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamiga aytiladi.

Ishlab chiqarish funksiyasi uchun

$$A\cdot K^{\alpha_1}\cdot L^{\alpha_2}=X_0 \quad \text{yoki} \quad K^{\alpha_1}=\frac{X_0}{A}\cdot L^{-\alpha_2},$$

ya'ni sath chiziqlar asimptotalari koordinata o'qlari bo'lgan giperboladir.

Aniq bir izokvantdagi turli *K* va *L* uchun ishlab chiqarish hajmi doimiy va aniq X_0dir, bu ega resurslarning o'zaro almashinuvchanligini anglatadi.

$F(K,L)=X_0$ izokvanta uchun $dF=0$, ya'ni $\frac{\partial F}{\partial K}dK+\frac{\partial F}{\partial L}dL=0$.

Bunda $\frac{\partial F}{\partial K}>0$, $\frac{\partial F}{\partial L}>0$, shuning uchun $dK\cdot dL<0$, ya'ni dK va dL turli ishorali: agar $dL<0$ bo'lsa, ya'ni ishlab chiqarish hajmi kamaysa, u holda $dK>0$, ya'ni $|dL|$ kam ishlab chiqarish hajmi dK jamg'arma fondi bilan qoplanadi.

Ta'rif. S_K mehnatni jamg'armalar bilan chegaraviy almashinish me'yori deb

$$S_K=\frac{dK}{|dL|}=-\frac{\partial K}{\partial L}=\frac{\frac{\partial F}{\partial L}}{\frac{\partial F}{\partial K}}$$

munosabatga, S_L fondlarning mehnat bilan chegaraviy almashinish me'yori deb

$$S_L = -\frac{\partial L}{\partial K} = \frac{\frac{\partial F}{\partial K}}{\frac{\partial F}{\partial L}}$$

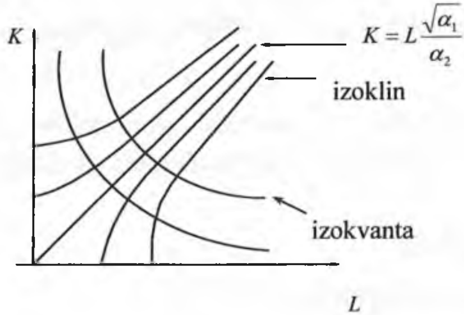
munosabatga aytiladi, bunda $S_K \cdot S_L = 1$, $S_K = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{K}{L} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} k$, $k = \frac{K}{L}$

ya'ni, mehnatni fondlar bilan almashinishi jamg'arma ta'minotiga proporsional.

Ishlab chiqarish funksiyasining eng yuqori o'sish chizig'iga izoklinlar deyiladi. Izoklinlar izokvantalarga perpendikular $\frac{dK}{(dF/\partial K)} = \frac{\partial K}{(\partial F/\partial L)}$ – izoklinlar tenglamasi.

Ishlab chiqarish funksiyasi uchun $\frac{\partial F}{\partial K} = \alpha_1 \frac{X}{K}$, $\frac{\partial F}{\partial L} = \alpha_2 \frac{X}{L}$, shuning uchun izoklinlar $\frac{1}{\alpha_1} KdK = \frac{1}{\alpha_2} LdL$ differensial tenglama bilan beriladi. Uni yechib, $K = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2} L^2 + a}$, bunda $a = K_0^2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} L_0^2$. Bunda, (L_0, K_0) izoklin o'tuvchi nuqta.

$a = 0$ da $K = L\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}$.



O'sishning ekstensiv (resurslar sarfining o'sishi, ya'ni ishlab chiqarish masshtablarining o'sishidan) va intensiv (resurslardan foydalanib effektivligini orttirishdan) faktorlari muhimdir.

Ishlab chiqarish funksiyasidan foydalanib, ishlab chiqarishning masshtabi va effektivligini aniqlaymiz.

Ishlab chiqarish funksiyasini nisbiy ko'rsatkichlarda

$$\frac{X}{X_0}=\left(\frac{K}{K_0}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{L}{L_0}\right)^{\alpha_2},$$

X_0 – mahsulot hajmi, K_0 – fondlar sarfi, L_0 – mehnat sarfi.

$$X=\frac{X_0}{K_0^{\alpha_1}L_0^{\alpha_2}}K^{\alpha_1}\cdot L^{\alpha}=A\cdot K^{\alpha_1}L^{\alpha_2},\quad A=\frac{X_0}{K_0^{\alpha_1}\cdot L_0^{\alpha_2}}$$

A koeffitsient resurslarni ishlab chiqarish hajmi bilan o'lchaydi.

Agar ishlab chiqarish va resurslarni nisbiy birlikdagi o'lchamlarini $\overline{X}$, $\overline{K}$, $\overline{L}$ orqali belgilasak, u holda ishlab chiqarish funksiyasi

$$\overline{X}=\overline{K}^{\alpha_1}\overline{L}^{\alpha_2}$$

ko'rinishda bo'ladi. Shu ko'rinishdagi ishlab chiqarish funksiyasi uchun effektivlikni aniqlaymiz. Effektivlik bu natijaning xarajatlarga nisbatidir. Bizning holda 2 xil xarajatlar: o'tgan mehnatlar uchun $\overline{K}$ fond ko'rinishidagi va $\overline{L}$ hozirgi mehnat xarajatlari. Shuning uchun effektivlikning 2 xil ko'rsatkichi mavjud:

$\frac{\overline{X}}{\overline{K}}$ – fond unumdorligi, $\frac{\overline{X}}{\overline{L}}$ – mehnat unumdorligi.

$E=\left(\frac{\overline{X}}{\overline{K}}\right)^{\alpha}\left(\frac{\overline{X}}{\overline{L}}\right)^{1-\alpha}$ – iqtisodiy effektivlikning umumlashgan koeffitsientidir.

Iqtisodiy effektivlik ko'rsatkichi yordamida ishlab chiqarish funksiyasi tashqi ko'rinishdan Kobbi-Duglas funksiyasi ko'rinishini oladi: $\overline{X}=E\cdot\overline{K}^{\alpha}\cdot\overline{L}^{1-\alpha}$.

Bunda $E=E(K,L)$

Ishlab chiqarish masshtabi $M=\overline{K}^{\alpha}\cdot\overline{L}^{1-\alpha}$.

Demak, ishlab chiqarish $\overline{X}=E\cdot M$ – iqtisodiy effektivlik va ishlab chiqarish hajmlari ko'paytmasidir.

Masalan 9. 1960–1995-yil ko'rsatkichlari bo'yicha AQSH ichki yalpi ishlab chiqarish funksiyasi $X=2.248K^{0.404}\cdot L^{0.803}$ ning ishlab chiqarish masshtabi va effektivligini aniqlang.

Yechish: 1987-yilgi narxlar bo'yicha mlrd dollarda AQSHning yalpi ichiki ishlab chiqarish hajmi 1960-yildan 1995-yilgacha 2.82 marta ortgan, ya'ni $\overline{X} = 2.82$, asosiy ishlab chiqarish fondlari shu davrda 2.88 marta, ya'ni $\overline{K} = 2.88$, mehnatga bandlik 1.93 marta, ya'ni $\overline{L} = 1.93$ ortgan.

Fondlar va mehnat bo'yicha nisbiy elastiklikni topamiz:

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{0.404}{0.404 + 0.803} = 0.3347, \qquad 1 - \alpha = 0.6653$$

Endi resurslarning xususiy effektivligini aniqlaymiz:

$$\mathrm{E}_K = \frac{\overline{X}}{\overline{K}} = \frac{2.82}{2.88} = 0.98,$$

$$\mathrm{E}_L = \frac{\overline{X}}{\overline{L}} = \frac{2.82}{1.93} = 1.46.$$

So'ngra effektivlikning umumlashgan koeffitsientini aniqlaymiz:

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_K^{\alpha} \cdot \mathrm{E}_L^{1-\alpha} = 0.98^{0.3347} \cdot 1.46^{0.6653} = 1.278$$

Ishlab chiqarish masshtabini resurslar o'sish sur'atining o'rta geometrigi kabi aniqlaymiz:

$$M = \overline{K}^{\alpha} \cdot \overline{L}^{\,1-\alpha} = 2.88^{0.3347} \cdot 1.93^{0.6653} = 2.207$$

Demak, 1960-yildan 1995-yilgacha YAIM o'sishining 2.82 martagacha ortishi ishlab chiqarish masshtabining 2.207 marta ortishi va ishlab chiqarish effektivligining 1.278 marta ortishi hisobidan amalga oshirilgan $(1.273 \cdot 2.207 = 2.82)$.

12. Birinchi tartibli differensial tenglamalar.

Differensial tenglamalar haqida umumiy ma'lumotlar

Differensial tenglamalar matematikada alohida o'rin egallab, tabiiy jarayonlarni tekshirish, jamiyatdagi ayrim qonuniyatlarni o'rganish differensial tenglamalarni o'z ichiga olgan matematik modellarga keladi.

Ta'rif. Differensial tenglama deb erkli o'zgaruvchilar, noma'lum funksiya va bu funksiya hosilalari yoki differensiallarini bog'lovchi tenglamaga aytiladi.

Agar izlanayotgan funksiya bir o'zgaruvchili bo'lsa, tenglama *oddiy differensial tenglama*, ko'p o'zgaruvchili bo'lsa *xususiy hosilali differensial tenglama* deyiladi.

Differensial tenglamaning tartibi deb unda qatnashayotgan hosilalarning eng yuqori tartibiga aytiladi.

Umumiy holda n-tartibli oddiy differensial tenglama quyidagicha ifodalanadi:

$$F\left(x, y, y', \cdots y^{(n)}\right) = 0$$

Jumladan, 1-tartibli oddiy differensial tenglamalarning umumiy ko'rinishi

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1^*)$$

kabidir.

Agar (1*) tenglamani hosilaga nisbatan yechish mumkin bo'lsa, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$y' = f(x, y) \qquad (1)$$

Bu holda tenglama hosilaga nisbatan yechilgan, deyiladi.

Misollar: $y' = 7x^3$, $\quad (y')^3 y^2 + 5x = 0$, $\quad y' = x^4 \cos y$.

Ta'rif. Birinchi tartibli oddiy differensial tenglamaning yechimi deb (a,b) oraliqda (1*) (xususan (1))-tenglamani ayniyatga aylantiruvchi $y=\varphi(x)$ funksiyaga aytiladi.

Yechimning grafigi integral egri chiziq deyiladi. Differensial tenglamalar nazariyasida asosiy masala yechimning mavjudligi va yagonaligidir.

Bu masala (1)-tenglama uchun Koshi teoremasi orqali ifodalanadi.

Teorema (Koshi teoremasi). Agar $f(x,y)$ funksiya va uning xususiy hosilasi $f'_y(x,y)$ *OXY* tekislikning biror *D* sohasida uzluksiz bo'lsa, u holda ixtiyoriy $(x_0,y)\in D$ nuqtaning biror atofida (1)-tenglamaning $x=x_0$ da $y=y_0$ shartni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud va yagonadir.

(1)-tenglamaning $y_{|x=x_0}=y_0$ boshlang'ich shartini (Koshi shartini) qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi *Koshi masalasi* deb ataladi. Buning geometrik ma'nosi integral egri chiziqlar oilasidan *D* sohaning berilgan (x_0,y_0) nuqtasidan o'tuvchi bittasini tanlab olinadi.

Ta'rif. (1)-tenglamaning umumiy yechimi deb, c o'zgarmasning ixtiyoriy qiymatida bu tenglamani qanoatlantiruvchi $y=\varphi(x,c)$ funksiyalar majmuyiga aytiladi.

Ta'rif. $\{\varphi(x,c)\}$ (1)-tenglamaning umumiy yechimi bo'lsin. (1)-tenglamaning *D* sohasidagi xususiy yechimi deb, $c=c_0$ o'zgarmas qiymatda olingan $y=\varphi(x,c_0)$ funksiyaga aytiladi.

Keyingi o'rinlarda «*differensial tenglama*» iborasini «*tenglama*» deb bayon qilamiz.

O‘zgaruvchisi ajraladigan va unga keltiriladigan tenglamalar

Ta’rif. $f_2(y)dy=f_1(x)dx$ ko‘rinishdagi tenglamalar o‘zgaruvchisi ajralgan differensial tenglamalar deyiladi, bu yerda $f_1(x)$, $f_2(y)$ uzluksiz funksiyalar.

Bu ko‘rinishdagi tenglamalarni bevosita integrallash yordamida unumiy yechimlari hosil qilinadi: $\int f_2(y)dy=\int f_1(x)dx+C$.

Masalan. Tenglamani yeching: $xdx+ydy=0$.

Yechish: Bu o‘zgaruvchilari ajralgan differensial tenglamadir, chunki dx oldidagi funksiya faqat x ga, dy koeffitsienti esa faqat y ning funksiyasidir. Bevosita integrallab umumiy yechimni hosil qilamiz:

$$\int xdx+\int ydy=C_1 \quad \text{yoki} \quad x^2+y^2=C^2$$

Demak , makazi koordinatalar boshida bo‘lgan aylanalar oilasi berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimini hosil qilar ekan.

Ta’rif. Ushbu

$$y'=f_1(x)f_2(y) \qquad (2)$$

ko‘rinishdagi tenglamalar o‘zgaruvchisi ajraladigan differensial tenglamalar deyiladi.

Bu tenglamani yechish uchun «o‘zgaruvchini ajratish usuli»ni qo‘llaymiz: y' hosilani uning ekvivalient formasi dy/dx ga almashtirib, tenglikning ikkala tomonini $\dfrac{dx}{f_2(y)}$ ga ko‘paytiriladi $(f_2(y)\neq 0)$:

$$\frac{dy}{f_2(y)}=f_1(x)dx$$

Tenglikning ikkala tomonini integrallasak,

$$\int\frac{dy}{f_2(y)}=\int f_1(x)dx+C$$

Bu yerda, C – o‘zgarmas kattalik.

Masalan: $y'=\frac{x\left(\sqrt{y^2+1}\right)}{y}$ tenglamaning $(0,1)$ nuqtadan o‘tuvchi xususiy yechimini toping.

Yechish: O‘zgaruvchilarni ajratamiz: $ydy/\sqrt{y^2+1}=xdx.$

Bundan, $\int ydy/\sqrt{y^2+1}=\int xdx+C,$

Demak, $\sqrt{y^2+1}=\frac{x^2}{2}+c$, $y^2+1=(\frac{x^2}{2}+c)^2$, $y=\sqrt{(\frac{x^2}{2}+c)^2-1}$.

$(0,1)$ nuqtadan o‘tuvchi yechim izlanayotgani uchun $C=\pm\sqrt{2}$ topiladi.

Demak, $y=\sqrt{\left(x^2/2+\sqrt{2}\right)^2-1}$

Ba’zi differensial tenglamalarni o‘zgaruvchilarini almashtirish yordamida o‘zgaruvchilarni ajraladigan differensial tenglamaga keltirish mumkin.

$$\frac{dy}{dx}=f\ (ax+by)$$

ko‘rinishdagi tenglamalar $z=ax+by$ almashtirish yordamida o‘zgaruvchilarni ajraladigan differensial tenglamaga keltiriladi. Yangi x va z o‘zgaruvchilarda

$\frac{dz}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}=a+bf(z)$ yoki $\frac{dz}{a+bf(z)}=dx$

o‘zgaruvchilari ajralgan tenglamadir. Integrallab umumiy yechimni hosil qilamiz:

$$\int\frac{dz}{a+bf(z)}=x+C.$$

Masalan: Tenglamani yeching: $\frac{dy}{dx}=2x+y$

Yechish: $z=2x+y$ almashtirish yordamida

$\frac{dz}{dx}-2=z$ o‘zgaruvchilari ajralgan tenglamani hosil qilamiz. O‘zgaruvchilarni ajratib va integrallab umumiy yechimni hosil qilamiz: $\frac{dz}{z+2}=dx$, $\ln|z+2|=x+\ln C, C>0.$ $z=Ce^x-2$,

$2x+y=Ce^x-2$, $y=Ce^x-2x-2$.

Bir jinsli va unga keltiriladigan differensial tenglamalar

Ta'rif. Agar $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^m f(x, y)$ ayniyat o'rinli bo'lsa, u holda $f(x, y)$ m darajali *bir jinsli funksiya* deyiladi.

Masalan: $x\cos\frac{y}{x}$; $x-y\cos\frac{y}{x}$; $\sqrt[3]{x^3+y^3}$; $\frac{x^2-y^2}{xy}$ funksiyalar bir jinsli funksiyalardir.

I. Agar $P(x,y)$ *va* $Q(x,y)$ bir xil o'lchovli bir jinsli funksiyalar bo'lsa, u holda $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ birinchi tartibli *bir jinsli differensial tenglama* deyiladi.

Bir jinsli differensial tenglamalar $y=ux$ alamshtirish yordamida, bu yerda u yangi noma'lumli funksiya, o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltiriladi.

Masalan: Differensial tenglamani yeching: $y'=\frac{x+y}{x-y}$.

Yechish: Tenglama bir jinsli bo'lgani uchun $y=ux$ almashtirishni bajaramiz, natijada $y'=u+u'x$ ni hosil qilamiz. Tenglama $u+u'x=\frac{1+u}{1-u}$ yoki $u'x=\frac{1+u^2}{1-u}$ ko'rinishini oladi. O'zgaruvchilarni ajratib $\frac{1-u}{1+u^2}du=\frac{dx}{x}$ ni hosil qilamiz. Uni integrallab $arctg\,u-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln|x|+C$ ni topamiz.

Oldingi o'zgaruvchilarga qaytib $arctg\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\ln(1+u^2)+\ln|x|+C$ yoki

$arctg\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}+C$ $arctg\frac{y}{x}=ln\sqrt{x^2+y^2}+C$ ni hosil qilamiz.

II. Ushbu $\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$ ko'rinishdagi tenglamalar bir jinsli tenglamaga keltiriladi. Agar $c_1=c=0$ bo'lsa, u holda $\frac{dy}{dx}=\frac{a+b\frac{y}{x}}{a_1+b_1\frac{y}{x}}$ bir jinsli tenglama hosil bo'ladi.

Agar $c\neq 0$, $c_1\neq 0$ bo'lsa, u holda koordinatalar boshini $ax+by+c=0$ va $a_1x+b_1y+c_1=0$ to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi $(x_0;y_0)$ ga ko'chirish bilan bir jinsli tenglamaga keltiriladi. $x=X+x_0$, $y=Y+y_0$. U holda $\frac{dy}{dx}=\frac{aX+bY}{a_1X+b_1Y}$ – bir jinsli tenglamani hosil qilamiz.

Agar to'g'ri chiziqlar parallel, ya'ni $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\lambda$ bo'lsa, tenglama $\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1}$ ko'rinishga keladi. Bu holda $z=ax+by$ deb $\frac{dz}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}$ va o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama hosil bo'ladi.

Masalan: Differensli tenglamani yeching: $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+1}{x+y-3}$.

Yechish: $x_0=1$, $y_0=2$ $\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y-3=0 \end{cases}$

sistemaning yechimi bo'lgani uchun $x=X+1$, $y=Y+2$.

U holda $\frac{dX}{dX}=\frac{X-Y}{X+Y}$.

$z=\frac{Y}{X}$ almashtirish o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltiradi.

$$z+X\frac{dz}{dX}=\frac{1-z}{1+z},\quad \frac{(1+x)dz}{1-2z-z^2}=\frac{dX}{X},\quad -\frac{1}{2}\ln|1-2z-z^2|=\ln|X|-\frac{1}{2}\text{in}\,C$$

$$(1-2z-z^2)X^2=C,\ X^2-2XY-Y^2=C, x^2-2xy-y^2+2x+6y=C.$$

$y' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right)$ ko‘rinishdagi tenglamalar ham koordinatalar boshini $ax + by + c = 0$ va $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasiga ko‘chirish bilan bir jinsli tenglamaga keltiriladi. Agar bu to‘g‘ri chiziqlar kesishmasa, u holda $a_1x + b_1y = k(ax + by)$ deb tenglama $y' = F(ax + by)$ ko‘rinishga keltiriladi va $z = ax + by$ almashtirish bilan o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltiriladi.

III. Ba’zan tenglamalar $y = z^m$ almashtirish bilan bir jinsli tenglamaga keltiriladi. Bu yerda m oldindan ma’lum bo‘lmagan son.

Masalan: Differensial tenglamani yeching: $y' = \dfrac{x + y}{x + 1} + \left(\dfrac{y - 1}{x - 1}\right)^2$

Yechish: $\dfrac{y - 1}{x + 1} = \dfrac{x + y - (x + 1)}{x + 1} = \dfrac{x + y}{x + 1} - 1$ bo‘lgani uchun berilgan tenglamaning o‘ng tomoni $\dfrac{x + y}{x + 1}$ ifodaning funksiyasi bo‘ladi. $x + y = 0$ va $x + 1 = 0$ chiziqlar $(-1;\ 1)$ nuqtada kesishgani uchun koordinata o‘qlarini bu nuqtaga parallel ko‘chirib, yangi o‘zgaruvchilarga o‘tamiz: $t = x + 1$, $z = y - 1$. Izlanayotgan funksiya $z = z(t)$. $z' = \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{dz}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dy}{dx} = y'$ bo‘lgani uchun berilgan tenglama $z' = 1 + \dfrac{z}{t} + \left(\dfrac{z}{t}\right)^2$ ko‘rinishga keladi. Hosil bo‘lgan bir jinsli tenglamani yechish uchun $u = z/t$ almashtirishni bajaramiz, bu yerda $u = u(t)$. U holda $z = ut,\ z' = u't + u$ va tenglama $u't = 1 + u^2$ yoki $\dfrac{du}{1 + u^2} = \dfrac{dt}{t}$ ko‘rinishga keladi, ya’ni o‘zgaruvchisi ajraladigan tenglama bo‘ladi. Tenglikni hadma-had integrallab $arctg\, u = lu|u| + c$ yoki $u = tg(\ln|t| + c)$ $u = \dfrac{z}{t} = \dfrac{y - 1}{x + 1}$ bo‘lgani uchun $y = 1 + (x + 1)tg(\ln|x + 1| + c)$ hosil bo‘ladi.

Birinchi tartibli chiziqli va unga keltiriladigan differensial tenglamalar

Ta'rif. Birinchi tartibli chiziqli tenglama deb $y' + p(x)y = q(x)$ (3) ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi, bu yerda $p(x), q(x)$ uzluksiz funksiyalar. Bu tenglamani «o'zgarmasni variatsiyalash usuli» bilan yechamiz.

Dastlab, (3)ga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi topiladi:

$$y' + p(x)y = 0$$

Bu o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir. Shuning uchun $y \neq 0$ deb faraz qilib, ushbuga ega bo'lamiz:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

$$y = c\,e^{-\int p(x)dx} \qquad (4)$$

c ixtiyoriy o'zgarmas son.

Endi (4) da c ni x ning funksiyasi, deb qaraymiz, ya'ni

$$y = c(x)e^{-\int p(x)dx} \qquad (5)$$

(«o'zgarmasni variatsiyalash» deb shu jarayon ko'zda tutiladi).

(5)-tenglamani (3)ga qo'yib soddalashtirsak,

$$c'(x) = q(x)\,e^{\int p(x)dx}.$$

Ushbu tenglikning ikkala tomonini integrallasak,

$$c(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c_1, \qquad (6)$$

hosil bo'ladi, bu yerda c_1 ixtiyoriy o'zgarmas son.

(6) ni (5)ga qo'ysak, (3)-tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$y(x) = c_1 e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx. \qquad (7)$$

Masalan: Differensial tenglamani yeching: $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$.

Yechish: Avval $y' - \frac{2}{x}y = 0$ bir jinsli tenglamani yechamiz.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}=>\frac{dy}{y}=\frac{2dx}{x}=>\ln|y|=2\ln|x|=>y=Cx^2.$$

Faraz qilaylik $C=C(x)$ u holda $y=C(x)x^2$ berilgan tenglamaning yechimi bo'ladi. Uni berilgan tenglamaga qo'yib, $C(x)$ ni topamiz: $C'(x)x^2-2xC(x)-\frac{2}{x}x^2C(x)=2x^3=>C'(x)=2x=>C(x)=x^2+C_1$. Bundan berilgan tenglamaning umumiy yechimini topamiz: $y=(x^2+C_1)x^2$.

Bernulli tenglamasi

Ba'zi bir chiziqli bo'lmagan tenglamalar ayrim almashtirishlar yo'li bilan chiziqli tenglamaga keltiriladi. Bunday tenglamalar qatoriga Bernulli tenglamasini kiritish mumkin:

$$y'+p(x)y=q(x)y^n,\quad n=const. \tag{8}$$

Agar $n=0$ bo'lsa, chiziqli, bir jinsli bo'lmagan, $n=1$ da chiziqli, bir jinsli tenglama hosil bo'ladi. Shuning uchun (8) da $n\neq 0$, $n\neq 1$ deb faraz qilinadi.

Yangi $z(x)=z(y(x))$ funksiya kiritamiz $z=y^{1-n}$ u holda $z'=(1-n)y^{-n}y'$

(8)-tenglamaning ikkala tomonini y^n ga bo'lamiz:

$$y^{-n}y'+py^{1-n}=q. \tag{11}$$

Bu tenglamaning ikkala tomonini $(1-n)$ ga ko'paytirib, (9), (10)-tengliklarni hisobga olgan holda $z(x)$ ga nisbatan chiziqli, bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamani olamiz:

$$z'+(1-n)pz=(1-n)q. \tag{12}$$

Masalan: Differensial tenglamani yeching: $y'+xy=xy^3$

Yechish: Bu tenglama Bernulli tenglamasidir $n=3$. $z=y^{-2}$ almashtirishni bajaramiz. U holda $z'=-2y^{-3}y'$.

(12) da asosan $z'+(-2)xz=-2x$

(7) ga ko'ra tenglamaning umumiy yechimini topamiz: $z(x)=Cx^2+1$

Natijada ushbu $y=\pm(Cx^2+1)^{-\frac{1}{2}}$ yechimni olamiz.

Rikatti tenglamasi

Ta'rif. $\frac{dy}{dx}+a(x)y+b(x)y^2=C(x)$ ko'rinishdagi tenglamaga *Rikatti tenglamasi* deyiladi.

Bu tenglama umumiy holda kvadraturada integrallanmaydi. Lekin, agar bu tenglamaning biror $y=y_1(x)$ xususiy yechimi ma'lum bo'lsa, $y=y_1+z$ almashtirish Rikatti tenglamasini z o'zgaruvchiga nisbatan Bernulli tenglamasiga keltiradi.

Masalan: Differensial tenglamani yeching: $\frac{dy}{dx}-axy+ay^2=1.$

Yechish: Bu Rikatti tenglamasidir. $y=x$ bu tenglamaning xususiy yechimidir. Suning uchun $y=x+z$ almashtirish bu Rikatti tenglamasini z o'zgaruvchiga nisbatan Bernulli tenglamasiga keltiradi: $\frac{dz}{dx}+axz+az^2=0.$

To'la differensial tenglamalar

Ta'rif. Agar $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ (1)

tenglamada *M(x,y)* va *N(x,y)* uzluksiz differensiallanuvchi

funksiyalar uchun $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ (2)

munosabat o'rinli bo'lsa, u holda (1)-tenglamaga *to'la differensialli differensial tenglama* deyiladi, bu yerda $\frac{\partial M}{\partial y}$ *va* $\frac{\partial N}{\partial x}$ uzluksiz funksiyalar.

(2)-shartning bajarilishi (1)-tenglamaning o'ng tomoni biror u (x,y) funksiyaning to'la differensiali ekanligini anglatadi. U holda (1)-tenglama *du(x,y)=0* yoki *u(x,y)=C* umumiy integralga ega bo'ladi.

$du=\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy$ ekanligidan $M=\frac{\partial u}{\partial x}, N=\frac{\partial u}{\partial y}.$

$M(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial x}$ munosabatni x boyicha integrallab $u(x,y)=\int M(x,y)dx+\varphi(y)$ munosabatni hosil qilamiz. $\int M(x,y)dx$ integralni hisoblashda y ni o'zgarmas deb qaraladi. $\varphi(y)$ funksiyani aniqlash uchun topilgan $u(x,y)$ funksiyani y bo'yicha differensiallab va $\dfrac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$ ekanligidan $\dfrac{\partial}{\partial y}(\int M(x,y)dx)+\varphi'(y)=N(x,y)$ tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamani yechib, noma'lum $\varphi(y)$ funksiyani aniqlaymiz.

Masalan: Differensial tenglamani yeching: $\dfrac{2x}{y^3}dx+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0.$

Yechish: $M=\dfrac{2x}{y^3}$, $N=\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}$. $\dfrac{\partial M}{\partial y}=-\dfrac{6x}{y^4}$, $\dfrac{\partial N}{\partial x}=-\dfrac{6x}{y^4}.\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$.

$$u(x,y)=\int\frac{2x}{y^3}dx+\varphi(y)\ ,\ u(x,y)=\frac{x^2}{y^3}+\varphi(x)\ .\ \frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)=\frac{y^2-3x^2}{y^4}\ .$$

Demak, $-\dfrac{3x^2}{y^4}+\varphi'(x)=\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}$ yoki $\varphi'(x)=\dfrac{1}{y^2}$.

Bundan $\varphi(x)=-\dfrac{1}{y}+C$ va $u(x,y)=\dfrac{x^2}{y^3}-\dfrac{1}{y}+C.$

Integrallovchi ko'paytuvchi

$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ (1)-tenglamadagi M(x,y) va N(x,y) uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar uchun $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ (2)-munosabat o'rinli bo'lmasligi mumkin. U holda (1)-tenglamaning chap qismi biror funksiyaning to'la differensiali bo'lmaydi. Bunday hollarda shunday $\mu=\mu(x,y)$ funksiya topish mumkinki, tenglamaning barcha hadlarini shu funksiyaga ko'paytirilganda tenglamaning chap qismi biror funksiyaning to'la differensiali bo‘ladi. Bu usul bilan topilgan tenglamaning umumiy yechimi berilgan tenglamaning umumiy yechimi bilan bir xil bo‘ladi. Odatda, $\mu=\mu(x,y)$ funksiyaga (1)-tenglamaning *integrallovchi ko‘paytuvchisi* deyiladi.

$\mu=\mu(x,y)$ funksiya (1)-tenglamaning integrallovchi ko‘paytuvchisi bo‘lsin. Unda $\mu M(x,y)dx+\mu N(x,y)dy=0$ tenglamada $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$ shart o‘rinli bo‘ladi.

Ya’ni $\mu\frac{\partial M}{\partial y}+M\frac{\partial \mu}{\partial y}=\mu\frac{\partial N}{\partial x}+N\frac{\partial \mu}{\partial x}$ yoki $M\frac{\partial \mu}{\partial y}-N\frac{\partial \mu}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)$ yoki $M\frac{\partial \ln\mu}{\partial y}-N\frac{\partial \ln\mu}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}$. Oxirgi tenglamani umumiy holda yechish qiyin masala. Ba’zan, xususiy hollarda bu masalani sodda yechish mumkin.

Agar $\mu=\mu(y)$ bo‘lsa $\frac{\partial \ln\mu}{\partial y}=\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ yoki $\mu(y)=\exp\left(\int\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}dy\right)$.

Bu yerda, $\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ ifoda faqat y ning funksiyasidan iborat bo‘lishi kerak.

Agar $\mu=\mu(x)$ bo‘lsa $\frac{\partial \ln\mu}{\partial x}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ yoki $\mu(x)=\exp\left(\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx\right)$.

Bu yerda, $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ ifoda faqat x ning funksiyasidan iborat bo‘lishi kerak.

Masalan: Differensial tenglamani yeching: $(xy^2+y)dx-xdy=0$.

Yechish: Bu yerda, $M = xy^2 + y$, $N = -x$. $\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy + 1$, $\frac{\partial N}{\partial x} = -1$. $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$.

$\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \dfrac{-1-1-2xy}{xy^2+y} = -\dfrac{2}{y} = \mu(y)$. $\mu(y) = \exp\left(-\int \frac{2}{y} dy\right) = \frac{1}{y^2}$. Berilgan tenglamaning har ikki qismini $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$ ga ko‘paytirib: $\left(x + \frac{1}{y}\right)dx - \frac{x}{y^2}dy = 0$. Bu to‘la differensialli differensial tenglamadir $\left(\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}\right)$. Bu tenglamani yechib $\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + C = 0$ umumiy yechimni hosil qilamiz.

Hosilaga nisbatan yechilmagan differensial tenglamalar. Klero tenglamasi

Ta’rif.
$$y = x\frac{dy}{dx} + \psi\left(\frac{dy}{dx}\right) \qquad (1)$$

ko‘rinishdagi tenglamaga *Klero tenglamasi* deyiladi.

Bu tenglama yordamchi parametr kiritish bilan sodda integrallanadi:

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad y = xp + \psi(p) \qquad (1')$$

Oxirgi tenglamani x bo‘yicha differensiallab:

$$p = x\frac{dp}{dx} + p + \psi'(p)\frac{dp}{dx} \text{ yoki } \left[x + \psi'(p)\right]\frac{dp}{dx} = 0.$$

Har bir ko‘paytuvchini nolga tenglab: $\begin{cases} \frac{dp}{dx} = 0 \\ x + \psi'(p) = 0 \end{cases}$

Bu sistemaning birinchi tenglamasidan:

$$p = C \quad \text{va} \quad y = Cx + \psi(C) \qquad (2)$$

Sistemaning ikkinchi tenglamasidan p ni x ning funksiyasi sifatida topib, uni $(1')$-tenglamaga qo‘yib:

$$y = xp(x) + \psi(p(x)) \qquad (1'')$$

Klero tenglamasining yechimini hosil qilamiz. (1″) maxsus yechimdir.

Masalan: Differensial tenglamani yeching. $xy'-y+\sqrt{1+(y')^2}=0.$

Yechish: $y'=p$ *deb* $y=xp+\sqrt{1+p^2}$. Bu tenglamani differensiallab

$$y'=p+xp'+\frac{pp'}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Bundan $\left(x+\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)p'=0,\ x=-\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$ *yoki* $p=C.$

Demak, $y=xC+\sqrt{1+C^2}$ *va* $\begin{cases} x=-\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}} \\ y=px+\sqrt{1+p^2} \end{cases}.$

Lagranj tenglamasi

Ta'rif. $$y=x\varphi(y')+\psi(y') \quad (1)$$

ko'rinishdagi tenglamaga *Lagranj tenglamasi* deyiladi.
Bu tenglama ham yordamchi parametr kiritish bilan sodda integrallanadi:

$$\frac{dy}{dx}=p.$$

Bunda

$$y=x\varphi(p)+\psi(p) \quad (2)$$

(2)-tenglamani x bo'yicha differensiallab:

$$p=\varphi(p)+[x\varphi'(p)+\psi'(p)]\frac{dp}{dx} \quad \text{yoki} \quad p-\varphi(p)=[x\varphi'(p)+\psi'(p)]\frac{dp}{dx} \quad (3)$$

(3)-tenglama p ning $p-\varphi(p)=0$ shartni qanoatlantiruvchi har bir $p=p_0$=const qiymatlarida ayniyatga aylanadi. Bunda $y=x\varphi(p_0)+\psi(p_0)$

(3)-tenglamadan $\frac{dx}{dp}-x\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}=\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}$. Bu $x=x(p)$ ga nisbatan chiziqli differensial tenglamadir.

Masalan: Differensial tenglamani yeching: $y=x(y')^2+(y')^2$.

Yechish: $y'=p$ *deb* $y=xp^2+p^2$. Bu tenglamani differensiallab

$$p=p^2+[2xp+2p]\frac{dp}{dx}.$$

Bundan, $\frac{dx}{dp}-\frac{2}{1-p}x=\frac{2}{1-p}$. Demak, differensial tenglamani hosil qilamiz. Uni integrallab, $x=-1+\frac{C^2}{(p-1)^2}$. $\begin{cases} y=xp^2+p^2 \\ x=-1+\frac{c^2}{(p-1)^2} \end{cases}$ sistemadan p ni yo'qotib, $y=\left(C+\sqrt{x+1}\right)^2$ – tenglamaning umumiy yechimini hosil qilamiz. $y=0$ tenglamaning maxsus yechimidir.

13. Yuqori tartibli differensial tenglamalar.

Yuqori tartibli chiziqli differensial tenglamalar

Ta'rif. n-tartibli oddiy differensial tenglama deb $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0$ ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi, bu yerda x erkli o'zgaruvchi, y izlanayotgan funksiya, $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ birinchi, ikkinchi va h.k. n-tartibli hosilalar.

n-tartibli hosilaga nisbatan yechilgan tenglamani quyidagicha yozish mumkin: $y^{(n)}=f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ n-tartibli tenglama uchun ham mavjudlik va yagonalik teoremasi o'rinli.

Teorema. Agar $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ tenglamada $f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ funksiya va uning $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ argumentlari bo'yicha xususiy hosilalari $x = x_0, y = y_0, y' = y_0', \ldots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ qiymatlarni o'z ichiga oluvchi biror sohada uzluksiz funksiyalar bo'lsa, tenglamaning $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud va yagonadir.

$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ boshlang'ich shartlar deyiladi.

Tenglamaning berilgan boshlang'ich shartlar bilan yechimini qidirish masalasi *Koshi masalasi* deyiladi.

Ta'rif. Tenglamaning umumiy yechimi deb shunday $y = \phi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ funksiyalar to'plamiga aytiladiki, ular $c_1, c_2, \ldots, c_n$ o'zgarmaslarning ixtiyoriy qiymatida tenglamani qanoatlantirib, boshlang'ich shartlarga bo'ysunsa.

Ta'rif. Tenglamaning xususiy yechimi deb $c_1, c_2, \ldots, c_n$ o'zgarmaslarning tayin $c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0$ qiymatlaridagi $y = \varphi(x, c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0)$ funksiyasiga aytiladi.

Tartibi pasayadigan yuqori tartibli differensial tenglamalar. Bevosita integrallash

I. $y^{(n)}=f(x)$ ko'rinishidagi tenglamalarni bevosita n marta x bo'yicha integrallash yordamida umumiy integrali topiladi.

$$y^{(n-1)}=\int_{x_0}^{x}f(x)dx+c_1,\; y^{(n-2)}=\int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{x}f(x)dx\right)dx+c_1(x-x_0)+c_2,...,$$

$$y=\int_{x_0}^{x}...\int_{x_0}^{x}f(x)dx..dx+\frac{c_1(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{c_2(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}+...+c_n.$$

Masalan: Diferensial tenglamani yeching: $y^{(4)}=\sin x$.

Yechish: Berilgan tenglamani bevosita to'rt marta ketma-ket integrallab umumiy yechimni hosil qilamiz:

$$\int y^4(x)\,dx=\int\sin x dx+C_1,$$

$$y'''(x)=-\cos x+C_1,\quad \int(y'''(x))\,dx=\int(-\cos x+C_1)+C_2,$$

$$y''(x)=-\sin x+C_1x+C_2,\; y'(x)=\cos x+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3,$$

$$y(x)=\sin x+C_1\frac{x^3}{6}+C_2\frac{x^2}{2}+C_3x+C_4.$$

II. $y''=f(x,y')$ ko'rinishidagi tenglamalarni $y'=p(x)$ deb, tartibini bittaga pasaytirish mumkin: $p'=f(x,p)$. Bu tenglamani integrallab $p=p(x,c_1)$ umumiy yechimni topamiz. $y'=p(x)$ munosabatdan esa $y=\int p(x,c_1)dx+c_2$ umumiy integralni hosil qilamiz.

Masalan: Diferensial tenglamani yeching: $y''=y'ctgx$.

Yechish: Faraz qilaylik, $p=y'$. U holda $y''=(y')'=p'$, berilgan tenglamani ko'rinishi $p'=pctgx,\ p\neq 0$ bo'lsin. $\frac{dz}{z}=ctgx\cdot dx$ yoki $\frac{dp}{p}=\frac{d\sin x}{\sin x}$ hadma-had integrallab, $\ln|p|=\ln|\sin x|+\ln c_1$, bu yerda $c_1>0$ yoki $p=c_1$ $\sin x$.

$p=0$ tenglamaning yechimi bo'lgani uchun, uning ixtiyoriy yechimi $p=c_1\sin x$, c_1 ixtiyoriy son.

$p=\frac{dy}{dx}$ bo'lgani uchun $dy = c_1 \sin x\, dx$.

Oxirgi tenglikni integrallab $y = -c_1 \cos x + c_2$ umumiy yechimni hosil qilamiz.

III. $y''=f(y,y')$ ko'rinishidagi tenglamalarni $y'=p(y)$ deb, tartibini bittaga pasaytirish mumkin. Lekin, bunda $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dx}p$. U holda $p\frac{dp}{dy}=f(x,p)$ tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamani integrallab, $p=p(y,c_1)$ umumiy yechimni topamiz. $y'=p(y)$ munosabatdan esa umumiy integralni hosil qilamiz.

Masalan: Ko'shi masalasini yeching: $y''+2yy'=0, y(0)=2, y'(0)=-4$.

Yechish: $y'=p$ almashtirishdan keyin, bunda $p'=\frac{dp}{dx}$ va $y''=p\frac{dp}{dy}$, $p(y)$ ga nisbatan birinchi tartibli tenglamani olamiz: $\frac{dp}{dy}+2yp=0$ yoki $\frac{dp}{dy}=-2y$. Bundan p ni topamiz: $\frac{dp}{dy}=-2y, \int dp=-\int 2ydy+C_1, \quad p=-y^2+C_1$. Demak, $y'=-y^2+C_1$. Bunga boshlang'ich qiymatlarni qo'yib $-4=-4+C_1 \Rightarrow C_1=0$. Demak, $y'=-y^2$, $\frac{dy}{-y^2}=dx$, $\frac{1}{y}=x$ $y=\frac{1}{x+C_2}$. Boshlang'ich shartni qo'yib $2=\frac{1}{0+C_2} \Rightarrow C_2=\frac{1}{2}$.

Shunday qilib xususiy yechim $y=\frac{2}{2x+1}$.

Chiziqli, bir jinsli differensial tenglamalar yechimining xossalari

Ta'rif. Ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglama deb,

$$F(x,y,y',y'')=0 \tag{1}$$

ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi. Bu yerda, x – erkli o'zgaruvchi, y – izlanayotgan funksiya, y', y'' – birinchi va ikkinchi tartibli hosilalar.

Masalan, $y''+yy'-xy^2-cox\,x=0$

$$y^2y''+xy'+x^2\cos y=0$$

kabi tenglamalarni keltirish mumkin.

Ikkinchi tartiblihosilaga nisbatan yechilgan tenglamani quyidagicha yozish mumkin: $y''=f(x,y,y')$ (2)

Ikkinchi tartibli tenglama uchun ham mavjudlik va yagonalik teoremasi o'rinli.

2-teorema (Koshi teoremasi). Faraz qilaylik, $f(x,y,y')$ va uning xususiy hosilalari f'_y va f''_y (x,y,y') o'zgaruvchilar fazosining D sohasida uzluksiz bo'lsin. U holda ixtiyoriy ichki $M_0(x_0,y_0,y_0^1)\in D$ nuqta uchun (2)-tenglamaning quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud va yagona:

$$x=x_0,\ y_{(x_0)}=y_0,\ y'_{(x_0)}=y'_0 \qquad (3)$$

Geometrik nuqtayi nazardan bu teorema OXY koordinata tekisligining (x_0,y_0) nuqtasi orqali o'tuvchi va burchak koeffitsientda y'_0 bo'lgan yagona integral chiziq mavjudligini anglatadi.

(3)-shart boshlang'ich shart deyiladi, (2)-tenglamaning berilgan boshlang'ich shartlar bilan yechimini qidirish masalasi *Koshi masalasi* deyiladi.

D sohada (2)-tenglamaning umumiy yechimi deb shunday $y=\varphi(x,c_1,c_2)$ funksiyalar to'plamiga aytiladiki, ular c_1,c_2 o'zgarmaslarning ixtiyoriy qiymatida (2)-tenglamani qanoatlantirib (3)-boshlang'ich shartlarga bo'ysunsa.

(2)-tenglamaning xususiy yechimi deb c_1,c_2 o'zgarmaslarning tayin c_1^0,c_2^0 qiymatlaridagi $y=\varphi(x,c_1^0,c_2^0)$ funksiyasiga aytiladi.

Ta'rif. Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama deb

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$$

ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi. Bu yerda, y – izlanayotgan funksiya, $p(x), q(x), f(x)$ – biror (a,b) intervalda aniqlangan, uzluksiz funksiyalar.

Agar $f(x)\neq 0$ bo'lsa, u holda ikkinchi taribli, *chiziqli, bir jinsli tenglama* deyiladi. Agar $f(x)\neq 0$ bo'lsa, u *bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglama* deyiladi.

Berilgan tenglamada $p(x)$ va $q(x)$ funksiyalar o'zgarmas bo'lgan holini qaraymiz. Bunday tenglamalar o'zgarmas koeffitsientli chiziqli tenglamalar deyiladi.

Demak, $y''+py'+qy=f(x)$

ko'rinishdagi tenglamalarni qaraymiz, bu yerda p va q ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

Ushbu chiziqli, bir jinsli $y''+py'+qy=0$

tenglamani qaraymiz, p va q haqiqiy sonlar.

Ta'rif. Agar $y''+py'+qy=0$ tenglama $y_1(x), y_2(x)$ yechimlarning chiziqli kombinatsiyasi: $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ faqat $c_1=c_2=0$ bo'lgan holdagina o'rinli bo'lsa, u holda ular *chiziqli-erkli*, aks holda *chiziqli bog'liq* deyiladi.

Teorema. Agar $y_1(x)$ va $y_2(x)$ $y''+py'+qy=0$ tenglamaning chiziqli-erkli yechimlari bo'lsa, u holda $y(x)=y_1(x)\pm y_2(x)$ ham bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

Teorema. Agar $y_1(x)$ va $y_2(x)$ $y''+py'+qy=0$ tenglamaning chiziqli-erkli yechimlari bo'lsa, u holda $y(x)=\tilde{n}_1y_1(x)$ *va* $y(x)=c_2y_2(x)$ lar ham bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

Teorema. Agar $y''+py'+qy=0$

$y_1(x)$ va $y_2(x)$ tenglamaning chiziqli-erkli yechimlari bo'lsa, u holda $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

n-tartibli chiziqli differensial tenglama deb quyidagi ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi: $y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+p_1(x)y'+p_0(x)y=f(x)$.

Bu yerda, $f(x), p_0(x), \dots, p_{n-1}(x)-(a,b)$ da berilgan uzluksiz funksiyalar.

$$L[x]=y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+p_1(x)y'+p_0(x)y$$

deb belgilasak, qisqacha ushbu tenglamani hosil qilamiz: $L[y]=f(x)$.

Unga mos bir jinsli tenglama esa $L[y]=0$ ko'rinishda bo'ladi.

Teorema. $y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+p_1(x)y'+p_0(x)y=f(x)$ tenglama (a,b) kesmada $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$, ..., $y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yagona yechimga ega.

Teorema. Agar $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funksiyalar $L[y]=0$ tenglamaning yechimlari bo'lsa, ularning chiziqli kombinatsiyasi $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\dots+c_my_m(x)$ ham shu tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

Vronskiy determinant

Ta'rif. $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar uchun $W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=y_1y_2'-y_2y_1'$ Vronskiy determinanti yoki berilgan funksiyalarning Vronskiyani deyiladi.

Teorema. Agar $y_1(x)$ va $y_2(x)$ [a;b] kesmada chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda bu funksiyalarning Vronskiy determinanti nolga teng.

Teorema. Agar $y''+py'+qy=0$ tenglamaning $y_1(x)$ va $y_2(x)$ yechimlaridan tuzilgan $W(y_1,y_2)$ Vronskiy determinanti tenglamaning koeffitsientlari uzluksiz bo'lgan [a;b] kesmadagi biror $x=x_0$ qiymatida nolga teng bo'lmasa, u holda u bu kesmagi x ning hech bir qiymatida nolga aylanmaydi.

Teorema. Agar $y''+py'+qy=0$ tenglamaning $y_1(x)$ va $y_2(x)$ yechimlari [a;b] kesmada chiziqli-erkli bo'lsa, u holda bu yechimlardan tuzilgan $W(y_1,y_2)$ Vronskiy determinanti berilgan kesmaning hech bir nuqtasida nolga aylanmaydi.

Ta'rif. $y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+p_1(x)y'+p_0(x)y=0$ tenglamaning fundamental yechimlar sistemasi deb, uning n ta $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ chiziqli-erkli yechimlar sistemasiga aytiladi.

Ta'rif. Agar $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$ funksiyalar $(m-1)$ tartibgacha hosilalarga ega bo'lsa, u holda ushbu m-tartibli determinant

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_m(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_m'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(m-1)} & y_2^{(m-1)}(x) & \cdots & y_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Vronskiy determinanti (Vronskian) deyiladi va $W(x)$ yoki $W[y_1,\cdots,y_m]$ kabi belgilanadi.

Teorema. $y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_1(x)y'+p_0(x)y=0$ tenglamaning $y_1(x), y_2(x),\dots,y_n(x)$ yechimlari chiziqli-erkli bo‘lishi uchun ulardan tuzilgan Vronskiy determinanti noldan farqli bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Natija: Agar (a,b) ning bitta x_0 nuqtasida $W(x_0)\neq 0$ bo‘lsa, ular (a,b) da chiziqli-erkli sistemani tashkil etadi.

O‘zgarmas koeffitsientli, chiziqli, bir jinsli differensial tenglamalar

Ta’rif. $L_n[y]=y^{(n)}+p_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+p_1y'+p_0y=0$

ko‘rinishdagi tenglamalarga o‘zgarmas koeffitsientli, chiziqli, bir jinsli differensial tenglamalar deyiladi, bu yerda $p_i = i=0,1,\dots,n-1$ o‘zgarmas sonlar.

Bu tenglamani yechish uchun uning fundamental yechimlari sistemasi, ya’ni n ta chiziqli-erkli $y_1(x), y_2(x),\dots,y_n(x)$ yechimlarni topish kerak. U holda uning umumiy yechimi $y=c_1y_1(x)+\dots+c_ny_n(x)$ ko‘rinishda bo‘ladi. Bu yerda, $c_i(i=1,2,\dots,n)$ ixtiyoriy o‘zgarmas sonlar.

Xarakteristik tenglama. Fundamental yechimlar sistemasi

$$y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_1(x)y'+p_0(x)y=0$$

tenglamaning xususiy yechimlarini $y=e^{kx}$, $k=const$ ko‘rinishda izlaymiz. U holda $y'=ke^{kx}$, $y''=k^2e^{kx},\cdots,y^{(n)}=k^ne^{kx}$

Bularni tenglamaga qo‘yib $L_n[e^{kx}]=e^{kx}[k^n+p_{n-1}k^{n-1}+\dots+p_1k+p_0]=0$

Bu yerdan $e^{kx}\neq 0$ bo‘lgani uchun $k^n+p_{n-1}k^{n-1}+\cdots+p_1k+p_0=0$.

Demak, agar k $k^n + p_{n-1}k^{n-1} + \cdots + p_1 k + p_0 = 0$ algebraik tenglamaning yechimi bo'lsa, $y = e^{kx}$ funksiya $y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$ tenglamaning xususiy yechimi bo'ladi.

Ta'rif. $k^n + p_{n-1}k^{n-1} + \cdots + p_1 k + p_0 = 0$ algebraik tenglama $y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$

tenglamaning *xarakteristik tenglamasi* deyiladi.

Xarakteristik tenglamaning ildizlari uchun quyidagi hollar bo'lishi mumkin.

1-hol. $k_1, k_2, \ldots, k_n$ turli haqiqiy ildizlar bo'lsin. U holda n ta $e^{k_1 x}, e^{k_n x}, \ldots, e^{k_n x}$

funksiyalar bir jinsli tenglamaning yechimlari bo'lib, $(-\infty, +\infty)$ da chiziqli-erkli sistemani tashkil etadi. Shuning uchun, bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $y = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{k_i x}$ funksiyadir.

Agar birorta k_j kompleks son $(k_j = \alpha + i\beta, \beta \neq 0)$ bo'lsa, qolgan sonlar orasida unga qo'shma bo'lgan $k_s = \alpha - i\beta, s \neq j$ son mavjuddir. Kompleks $e^{(\alpha+i\beta)x}, e^{(\alpha-i\beta)}$ funksiyalar bir jinsli tenglamaning yechimi bo'lgani uchun $\frac{1}{2}\left[e^{(\alpha-i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x}\right] = e^{\alpha x}\cos\beta x$ va $\frac{1}{2}\left[e^{(\alpha-i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}\right] = e^{\alpha x}\sin\beta x$ funksiyalar ham bir jinsli tenglamaning yechimi bo'ladi (bu yerda, Eyler formulasi $e^{\pm ix} = \cos x \pm i\sin x$ dan foydalaniladi).

Bu holda $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots, e^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, e^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, e^{k_n x}$ yechimlar sistemasi ham chiziqli-erkli ekanligini ko'rsatish mumkin.

Masalan 1. Tenglamani yeching: $y'' - 5y' + 4y = 0$.

Yechish: Bu differensial tenglamaning xarakteristik tenglamasi ushbu ko'rinishda bo'ladi: $k^2 - 5k + 4 = 0$.

Ildizlari haqiqiy va turlicha $k_1 = 1,\ k_2 = 4$. Demak, bu tenglamaning umumiy yechimi $y = c_1 e^x + c_2 e^{4x}$.

Masalan 2. Differensial tenglamani yeching: $y''' - 2y'' -$ $- y' + 2y = 0$.

Yechish: Bu differensial tenglamaning xarakteristik tenglamasi:

$$k^3-2k^2-k+2=0 \ ya'ni, \ (k-2)(k^2-1)=0$$ bo‘ladi.

Bu algebraik tenglamaning ildizlari $k_1=2, k_1=1, k_3=-1$. Bu ildizlarga mos keluvchi yechimlar: c_1e^{2x}, c_2e^x, c_3e^{-1}

Berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi $y(x)= c_1e^{2x}+c_2e^x+c_3e^{-x}$ ko‘rinishida bo‘ladi.

2-hol. k_1 xarakteristik tenglamaning m karrali ildizi bo‘lsin.

Bu holda $e^{k_1x}, xe^{k_1x}, \dots, e^{m-1}e^{k_1x}$ funksiyalar bir jinsli tenglamaning ixtiyoriy (a,b) da chiziqli-erkli yechimlari bo‘ladi.

U holda bir jinsli tenglamaning fundamental yechimlari sistemasi quyidagicha bo‘ladi: $e^{k_1x}, xe^{k_1x}, \dots, \tilde{o}^{m-1}e^{k_1x}, e^{k_{m+1}x}, e^{k_{m+2}x}, \dots, e^{k_nx}$

Masalan 1. Diferensial tenglamani yeching: $y''-6y'+9y=0$.

Yechish: Xarakteristik tenglama $k^2 6k+9=0$ yoki $(k-3)^2=0$, ya’ni karrali yechimga ega: $k_1=k_2=k=3$. Bu bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$y=e^{3x}(c_1+c_2x)$$

Masalan 2. Diferensial tenglamani yeching. $y'''' +4y'''+8y''+8y'+4y=0$.

Yechish: Xarakteristik tenglamani ko‘paytuvchilarga ajratib

$$\lambda^4+4\lambda^3+8\lambda^2+8\lambda+4=0, \quad (\lambda^2+2\lambda+2)^2=0$$

xarakteristik tenglamaning yechimlari $\lambda_1=\lambda_2=-1+i, \lambda_3=\lambda_4=-1-i$.

Demak, umumiy yechim $y_{um}=e^{-x}(C_1\cos x+C_2x\cos x+C_3\sin x+C_4x\sin x)$.

3-hol. Agar k_1-m karrali kopmleks ildiz bo‘lsa $(k_1=\alpha+i\beta, \beta\neq 0)$, u holda unga qo‘shma bo‘lgan m karrali $\overline{k_1}=\alpha-i\beta$ ildiz mavjuddir. Qo‘shma $\overline{k_1}$ ildizga quyidagi yechimlar mos keladi: $e^{\overline{k_1}x}, xe^{\overline{k_1}x}, \dots, x^{m-1}e^{\overline{k_1}x}$.

Bularni mos ravishda qo‘shib, ayirib, 2 ga bo‘lib, quyidagi 2 ta haqiqiy funksiyalar sistemalarini olamiz:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ldots,x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ldots,x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Sistemadagi kompleks funksiyalarni bu funksiyalar bilan almashtirilsa, yana chiziqli-erkli sistema hosil bo'ladi.

Masalan 1. $y''-2y'+2y=0$.

Yechish: Ushbu tenglamani xarakteristik tenglamasi $k^2-2k+2=0$ bo'lib, yechimlari: $k_1=1+i, k_2=1-i$, bu yerda $i=\sqrt{-1}$ mavhum birlik. Umumiy yechimning ko'rinishi esa $y=e^x(c_1\sin x+c_2\cos x)$.

Masalan 2. Diferensial tenglamani yeching: $y'''-8y=0$.

***Yechish*:** Ushbu tenglama: $k^3-8=0$ ildizlarini topamiz:

$$(k-2)(k^2-2x+4)=0 \; k_1=2, \; k_{2,3}=1\pm i\sqrt{3}$$

Demak, umumiy yechim $y=C_1e^{2x}+(C_2\cos\sqrt{3}x+C_3\sin\sqrt{3}x)e^x$.

O'zgarmas koeffitsientli, chiziqli, bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalar. Tanlash usuli

O'zgarmas koeffitsientli, bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalarning yechimini topish quyidagi fundamental teoremaga asoslanadi.

Teorema. Bir jinsli bo'lmagan $y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_1(x)y'+$ $+p_0(x)y=f(x)$

n-tartibli, chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimi, uning xususiy yechimi va unga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi yig'indisidan iborat. Tenglamaning xususiy yechimini tanlash usulida topishda quyidagi hollar bo'lishi mumkin.

1-hol. Umumiy holda, xarakteristik tenglama S karrali nol ildizni o'z ichiga olsa va bir jinsli bo'lmagan tenglamaning o'ng tomoni n-darajali $P_n(x)$ ko'phad bo'lsa, tenglamaning xususiy yechimi $Q_n(x)x^s$

ko'rinishda qidiriladi. Bu yerda, $Q_n(x)$ n-darajali o'zgarmas koeffitsientli ko'phad.

Masalan. Differensial tenglamani yeching: $y''-5y'+4y=8$.

Yechish: Unga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$y=c_1e^x+e_2c^{4x}.$$

O'ng tomonning ko'rinishidan kelib chiqib, ushbu bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamaning xususiy yechimini $\tilde{y}=c$ ko'rinishda qidiramiz. Bu ifodani tenglamaga qo'ysak, $c=2$ bo'ladi.

Demak, tenglamaning umumiy yechimi: $y(x)=c_1e^x+c_2e^{4x}+2$.

2-hol. Umumiy holda, bir jinsli bo'lmagan tenglamaning o'ng tomoni $P_n(x)e^{\alpha x}$ ko'rinishda bo'lsa, uning xususiy yechimi $\tilde{y}(x)=x^sQ_n(x)e^{\alpha x}$ ko'rinishida qidiriladi, α xarakteristik tenglamaning ildizi, s uning karraligi.

Masalan. Diferensial tenglamani yeching: $y''+y'-6y=xe^{2x}$.

Yechish: $y''+y'-6y=0$ tenglamaning umumiy yechimini topamiz.

$$k^2+k-6=0,\ k_1=-3,\ k_2=2.\ y_0=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}$$

$k_2=2$ xarakteristik tenglama ildizi bo'lgani uchun xususiy yechimni

$$y_*=(Ax+B)\cdot xe^{2x}$$

ko'rinishida izlaymiz. Hosilalarni hisoblab tenglamaga qo'yamiz:

$$y_*'=\left(2Ax+B+2Ax^2+2Bx\right)e^{2x},$$

$$y_*''=\left(2A+2B+4Ax+4Ax+2Ax+4Ax^2+4Bx\right)e^{2x}.$$

$$2A+4B+8Ax+4Bx+4Ax^2+2Ax+B+2Bx+2Ax^2-6Ax^2-6Bx=x$$

$$2A+5B+8Ax=x.$$

$$\begin{cases}8A=1\\2A+5B=0\end{cases}\qquad A=\frac{1}{8}\qquad B=-\frac{1}{20}$$

Demak, xususiy yechim $y_*=\left(\frac{x^2}{8}-\frac{x}{20}\right)\cdot e^{2x}=\frac{5x^2-2x}{40}e^{2x}$.

U holda umumiy yechim $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x} + \frac{5x^2 - 2x}{40}e^{2x}$ ko‘rinishida bo‘ladi.

3-hol. Tenglamaning o‘ng tomoni $P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ bo‘lib, $\alpha + i\beta$ xarakteristik tenglamaning s karrali ildizi bo‘lsa, uning xususiy yechimi $\tilde{y} = x^s\left[U_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + V_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x\right]$ ko‘rinishida qidiriladi. Bu yerda, $U_n(x)$ va $V_n(x) - P_n(x)$ va $Q_n(x)$ ko‘phadlarning umumiy ko‘rinishi.

Masalan. Diferensial tenglamani yeching: $y'' + y = \sin x$.

Yechish: $y'' + y = 0$ tenglama umumiy yechimini topamiz:

$$k^2 + 1 = 0,\ k_1 = i,\ k_2 = -i\ .$$

$\pm i$ xarakteristik tenglamaning ildizi bo‘lgani uchun xususiy yechimni

$$y_* = x(A\cos x + B\sin x)$$

ko‘rinishida izlaymiz. Xususiy yechim hosilalarini hisoblab, tenglamaga qo‘yib va mos hadlarni tenglashtirib, noma’lum koeffitsientlarni topamiz.

$$y_*' = (A + Bx)\cos x + (B + Ax)\sin x,\quad y_*'' = (2B - Ax)\cos x - (2A + Bx)\sin x\,.$$

$$(2B - Ax)\cos x - (2A + Bx)\sin x + Ax\cos x + Bx\sin x = \sin x\,,$$

$$2B\cos x - 2A\sin x = \sin x\,.$$

$$\begin{cases} 2B = 0 \\ -2A = 1\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = 0 \end{cases}$$

Demak, xususiy yechim $y_* = -\frac{x}{2}\cos x$

U holda umumiy yechim $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{x}{2}\cos x$ ko‘rinishida bo‘ladi.

O‘zgarmas koeffitsientli, chiziqli-differensial tenglama sistemalari

Odatda, differensial tenglamalar sistemalari qaralayotganda, funksiya argumentlari t orqali, noma'lum funksiyalar esa $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ orqali belgilanadi.

Ta'rif. Ushbu

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)) \end{cases} \qquad (1)$$

ko‘rinishdagi tenglamalar sistemasiga *differensial tenglamalar sistemasi* deyiladi. (1)-tenglamaning

$$x_{10} = x_1(t_0), x_{20} = x_2(t_0), \cdots, x_{n0} = x_n(t_0) \qquad (2)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi *boshlang‘ich shartli masala* yoki *Koshi masalasi* deyiladi. (2)-shartlar *boshlang‘ich shartlar* yoki *Koshi shartlari* deyiladi.

Teorema. (yechimning mavjudligi va yagonaligi). Agar $f_i(t, x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$ $(i = 1, 2, ..., n)$ funksiyalar va barcha $\frac{\partial f_i(t, x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))}{\partial x_j}$ $(i = 1, 2, ..., n, j = 1, 2, ..., n)$ xususiy hosilalar boshlang‘ich qiymatlarning atrofida uzluksiz bo‘lsa, u holda (1)-tenglamaning (2) shartni qanoatlantiruvchi yechimi shu atrofda mavjud va yagonadir.

Ta'rif. Agar differensial tenglamalar sistemasi barcha noma'lum funksiyalar va ularning hosilalariga nisbatan chiziqli bo‘lsa, u holda bunday differensial tenglamalar sistemasi *chiziqli-differensial tenglamalar sistemasi* deyiladi.

Ta'rif. Ushbu

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}\,x_n(t) + f_1(t) \\
\dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}\,x_n(t) + f_2(t) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}\,x_n(t) + f_n(t)
\end{cases} \qquad (3)
$$

ko'rinishdagi differensial tenglamalar sistemasiga o'zgarmas *koeffitsientli, chiziqli*differensial tenglamalar sistemasi* deyiladi. Bu yerda, $a_{ij}-const\ (i=1,2,\ldots,n,\ j=1,2,\ldots,n)$ sistemaning koeffitsientlari deyiladi.

Quyidagi belgilashlarni qabul qilsak,

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix},\quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \ldots \\ f_n \end{pmatrix},\quad \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \ldots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}
$$

u holada (3)-sistemani

$$
\frac{dX}{dt} = AX + F \qquad (4)
$$

matritsaviy ko'rinishda yozish mumkin.

Ta'rif. Agar (4)-sistemada *F=0* hosil bo'lgan

$$
\frac{dX}{dt} = AX \qquad (5)
$$

sistema (4)-sistemaga mos *bir jinsli sistema* deyiladi.

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}\,x_n(t) \\
\dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}\,x_n(t) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}\,x_n(t)
\end{cases} \qquad (6)
$$

Kursimizda chiziqli-differensial, bir jinsli, o'zgarmas koeffitsientli differensial tenglamalar sistemalarini o'rganamiz.

Bir jinsli yoki bir jinsli bo'lmagan o'zgarmas koeffitsientli, chiziqli-differensial tenglamalar sistemasini bitta yuqori tartibli o'zgarmas koeffitsientli, chiziqli-differensial tenglamaga keltirib integrallash usuli qulay hisoblanadi.

Soddaligi uchun bu usulni ikki noma'lum funksiyali, bir jinsli, o'zgarmas koeffitsientli, chiziqli-differensial tenglama uchun o'rganamiz.

Bu sistemaning ko'rinishi quyidagicha:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) \end{cases} \qquad (7)$$

Sistemaning birinchi tenglamasini t bo'yicha differensiallab, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = a_{11}\frac{dx_1(t)}{dt^2} = a_{11}\frac{dx_1(t)}{dt} + \frac{x_1(t)}{dt}. \qquad (8)$$

(8)-sistemada $\frac{dx_1(t)}{dt}$ *va* $\frac{x_2(t)}{dt}$ hosilalarni (7)-sistemadagi ifodalarni qo'yib:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = (a_{11}^2 + a_{12}a_{21})x_1(t) + (a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22})x_2(t)$$

yoki
$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = b_{11}x_1(t) + b_{12}x_2(t)$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) \\ \frac{d^2x_1}{dt^2} = b_{11}x_1(t) + b_{12}x_2(t) \end{cases}$$

sistemada $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{11} & b_{12} \end{vmatrix} \neq 0$ bo'lsa, u holda bu sistemani $x_1(t)$ *va* $x_2(t)$ noma'lumlarga nisbatan yechish mumkin. Bunda $x_1(t)$ *va* $x_2(t)$ noma'lum funksiyalarga $\frac{dx_1}{dt}$ *va* $\frac{d^2x_1}{dt^2}$ hosilalar orqali chiziqli ifodalanadi.

$$x_1(t)=a\frac{dx_1}{dt}+b\frac{d^2x_1}{dt^2} \qquad (9)$$

$$x_2(t)=c\frac{dx_1}{dt}+d\frac{d^2x_1}{dt^2} \qquad (10)$$

(9) $x_1(t)$ funksiyaga nisbatan ikkinchi tartibli, bir jinsli, o'zgarmas koeffitsientli, chiziqli-differensial tenglamadir. Uni yechib $x_1(t)$ funksiyani hosil qilamiz. Topilgan $x_1(t)$ funksiyani ikkinchi tenglamaga qo'yib $x_2(t)$ funksiyani hosil qilamiz.

Masalan. Tenglamalar sistemasini yeching: $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}=3x_1+2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt}=4x_1+5x_2 \end{cases}$.

Yechish: Sistemaning birinchi tenglamasini t bo'yicha differensiallab, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=3\frac{dx_1}{dt}+2\frac{dx_2}{dt}=3(3x_1+2x_2)+2(4x_1+5x_2)=17x_1+16x_2 .$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}=3x_1+2x_2 \\ \frac{d^2x_1}{dt^2}=17x_1+16x_2 \end{cases}$$

sistemani $x_1(t)$ *va* $x_2(t)$ noma'lumlarga nisbatan yechib:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}-8\frac{dx_1}{dt}=-7x_1$$

$$3\frac{d^2x_1}{dt^2}-17\frac{dx_1}{dt}=14x_2 .$$

Birinchi tenglamani yechib

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}-8\frac{dx_1}{dt}+7x_1=0.$$

$$k^2-8k+7=0,\ k_1=1, k_2=7.$$

$$x_1(t)=C_1e^t+C_2e^{7t}.$$

Topilgan $x_1(t)$ yechimni ikkinchi munosabatga qo'yib $x_2(t)$ noma'lum funksiyani hosil qilamiz:

$$x_2(t)=-C_1e^t+2C_2e^{7t}.$$

Bir jinsli, o'zgarmas koeffitsientli, chiziqli-differensial tenglamalar sistemasining fundamental yechimlar sistemasini bevosita ham topish mumkin.

Buning uchun

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{cases} \qquad (6)$$

tenglamalar sistemesi yechimlarini $x_1 = \alpha_1 e^{kt}, x_2 = \alpha_2 e^{kt}, \dots, x_n = \alpha_n e^{kt}$ ko'rinishida izlaymiz. (Bu yerda, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ o'zgarmas sonlar). Ularni (3)-sistemaga qo'yib , e^{kt} ga bo'lib va barcha hadlarni tenglikning bir tomoniga yig'ib, quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - k)\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \cdots + (a_{nn} - k)\alpha_n = 0 \end{cases} \qquad (11)$$

Bu bir jinsli tenglamalar sistemasi noldan farqli yechimlarga ega bo'lishi uchun uning determinanti noldan farqli bo'lishi kerak:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k_1 & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0 \qquad (12)$$

(12)-tenglama (6)-sistemaning *xarakteristik tenglamasi* deyiladi.

Quyidagi hollar bo'lishi mumkin.

1-hol. Agar (12)-xarakteristik tenglamaning $k_i \, (i = 1, 2, \dots, n)$ ildizlari haqiqiy va turli bo'lsa, ularni ketma-ket (11)-sistemaga qo'yib, ularga mos $\alpha_i^j \, (i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n)$ qiymatlar topiladi va ularni izlanayotgan yechim ko'rinishiga qo'yib, sistemaning n ta xususiy yechimlari hosil qilinadi.

$$x_1^{(j)} = \alpha_1^{(j)} e^{k_j t}, x_2^{(j)} = \alpha_2^{(j)} e^{k_j t}, \ldots, x_n^{(j)} = \alpha_n^{(j)} e^{k_j t} \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \quad (13)$$

Bu yerda, quyi indeks noma'lum funksiya nomeri, yuqori indeks yechim nomerini anglatadi. Odatda bu yechimlarga sistemaning *fundamental yechimlar sistemasi* deyiladi.

Bu yechimlarni matritsaviy ko'rinishda

$$X_1 = A^{(1)} e^{k_1 t}, X_2 = A^{(2)} e^{k_2 t}, \ldots, X^{(N)} = A^{(N)} e^{k_n t}.$$

Bu yerda,

$$A^{(i)} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(i)} \\ \alpha_2^{(i)} \\ \ldots \\ \alpha_i^{(n)} \end{pmatrix}, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Masalan. Sistemani yeching: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y \end{cases}.$

Yechish: Berilgan sistemaga mos xarakteristik tenglama quyidagicha bo'ladi $\begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 4 & 3-k \end{vmatrix} = 0$ yoki $k^2 - 4k - 5 = 0$.

Bu tenglama ildizlari $k_1 = -1$, $k_2 = 5$. Ularga mos yechimlar esa

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1^{(1)} e^{-t}, \ y_1 = \alpha_2^{(1)} e^{-t} \\ x_2 = \alpha_2^{(2)} e^{5t}, \ y_2 = \alpha_2^{(2)} e^{5t} \end{cases}$$

$x_1 = \alpha_1^{(1)} e^{-t}$, $y_1 = \alpha_2^{(1)} e^{-t}$ yechimlarni berilgan sistemaga qo'yib

$$\begin{cases} -\alpha_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} \\ -\alpha_2^{(1)} = 4\alpha_1^{(2)} + 3\alpha_2^{(1)} \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \alpha_2^{(1)} = -\alpha_1^{(1)}.$$

Demak, $x_1 = C_1 e^{-t}$, $y_1 = -C_1 e^{-t}$, $C_1 = \alpha_1^{(1)}$.

$x_2 = \alpha_2^{(2)} e^{5t}$, $y_2 = \alpha_2^{(2)} e^{5t}$ yechimlarni berilgan sistemaga qo'yib $\alpha_2^{(2)} = 2\alpha_1^{(2)}$ ekanligini hosil qilamiz.

Demak, $x_1 = C_2 e^{5t}$, $y_1 = 2C_2 e^{5t}$, $C_1 = \alpha_1^{(2)}$.

Sistema chiziqli bo'lgani uchun sistemaning umumiy yechimi

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t} ,$$
$$y = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{5t}$$

ko'rinishida bo'ladi.

2-hol. Agar xarakteristik tenglama γ karrali k ildizga ega bolsa, u holda sistema yechimlari quyidagi ko'rinishda izlanadi:

$$X(t) = \left(A_0^{(s)} + A_1^{(s)} t + \ldots + A_{\gamma-1}^{(s)} t^{\gamma-1}\right) e^{k_s t}, \tag{14}$$

Bu yerda,

$$A_i^{(s)} = \begin{pmatrix} \alpha_{1i}^{(s)} \\ \alpha_{2i}^{(s)} \\ \ldots \\ \alpha_{ni}^{(s)} \end{pmatrix}, \ \alpha_{ij}^{(s)} - const.$$

Masalan. Sistemani yeching: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$.

Yechish: Sistemaning xarakteristik tenglamasi

$$\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0$$

yoki

$$k^2 - 4k + 4 = 0.$$

Bu tenglama ildizlari $k_1 = k_2 = 2$.

Demak, yechimni

$$\begin{cases} x = (\alpha_1 + \beta_1 t)\, e^{2t} \\ y = (\alpha_2 + \beta_2 t)\, e^{2t} \end{cases}$$

ko'rinishida izlaymiz.

Yechimlarni berilgan sistemaga qo'yib

$$2\alpha_1 + \beta_1 + 2\beta_1 t = \alpha_1 + \beta_1 t - \alpha_2 - \beta_2 t,$$

bundan esa $\beta_2 = -\beta_1$, $\alpha_2 = -\alpha_1 - \beta_1$.

Bu yerda, α_1 va β_1 ixtiyoriy o'zgarmas sonlar bo'lgani uchun ularni mos ravishda C_1 va C_2 orqali belgilab, quyidagi umumiy yechimga ega bo'lamiz

$$\begin{cases} x=(C_1+C_1t)e^{2t} \\ y=-(C_2+C_2+C_2t)e^{2t}. \end{cases}$$

3-hol. Agar xarakteristik tenglama $k_j=p+iq$ ildizga ega bo'lsa, u holda unga mos

$$X_j=A^{(j)}e^{k_jt}$$

yechimni ikkita haqiqiy yechimga: shu ildizga mos kompleks funksiyaning haqiqiy va mavhum qismidagi funksiyalariga almashtirish mumkin.

Masalan. Sistemani yeching: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x-5y \\ \dfrac{dy}{dt}=2x-y. \end{cases}$

Yechish: Sistemaga mos xarakteristik tenglama

$\begin{vmatrix} 1-k & -5 \\ 2 & -1-k \end{vmatrix}=0$ yoki $k^2+9=0$.

Bu tenglama ildizlari $k_{1,2}=\pm3i$.

Demak, yechimni $\begin{cases} x=\alpha_1 e^{3it} \\ y=\alpha_2 e^{3it} \end{cases}$

ko'rinishidan izlaymiz. Bularni sistemaga qo'yib $(1-3i)\alpha_1-5\alpha_2=0$.

Bu tenglamani, masalan, $\alpha_1=5$, $\alpha_2=1-3i$ yechimlar qanoatlantiradi.

Demak, $\begin{cases} x=5e^{3it}=5(\cos3t+i\sin3t) \\ y=(1-3i)e^{3it}=(1-3i)(\cos3t+i\sin3t). \end{cases}$

Bu yechimlarning haqiqiy va mavhum qismlari berilgan sistemaning yechimlari bo'ladi, ularning chiziqli kombinatsiyalari esa umumiy yechim bo'ladi:

$$\begin{cases} x=5C_1\cos3t+5C_2\sin3t \\ y=C_1(\cos3t+3\sin3t)+C_2(\cos3t-3\sin3t). \end{cases}$$

Iqtisodiyotda differensial tenglamalar apparati

Differensial tenglamalar nazariyasini iqtisodiy jarayonlarning modellarida qo'llanishiga doir misollarni qaraymiz, bu yerda erkli o'zgaruvchi bo'lib t vaqt ishtirok etadi. Bunday modellar uzoq vaqt mobaynida iqtisodiy sistemalar evolyutsiyasini tekshirishda foydalidir, ular iqtisodiy dinamikani tahlil etishning asosini tashkil etadi.

Ishlab chiqarishning tabiiy o'sish modeli

Birinchi tartibli differensial tenglamalar.

Faraz qilaylik, qandaydir mahsulot p narx bilan sotiladi, $Q(t)$ funksiya t vaqt mobaynida ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori o'zgarishini bildiradi desak, u holda vaqt davomida $pQ(t)$ ga teng daromad olinadi. Aytaylik olingan daromadning bir qismi mahsulot ishlab chiqarish investitsiyasiga sarf bo'lsin, ya'ni

$$I(t) = mpQ(t). \qquad (1)$$

Bu yerda, m investitsiya normasi, o'zgarmas son va $0 < m < 1$.

Agar bozor yetarlicha ta'minlangan va ishlab chiqarilgan mahsulot to'la sotilgan degan tasavvurdan kelib chiqilsa, ishlab chiqarish tezligining yana oshishiga (akselatorga) olib keladi. Ishlab chiqarish tezligi esa investitsiyaning o'sishiga proporsional, ya'ni

$$Q' = lI(t). \qquad (2)$$

Bu yerda, $1/l$ akselator(o'sish) normasi. (1)-formulani (2) ga qo'yib

$$Q' = kQ,\ k = lmp \qquad (3)$$

differensial tenglamani olamiz. (3)-tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamadir. Bu tenglama umumiy yechimining ko'rinishi $Q = Ce^{kt}$, bunda C ixtiyoriy o'zgarmas son.

Faraz qilaylik, boshlang'ich $t=t_0$ momentda mahsulot ishlab chiqarish hajmi Q_0 ma'lum bo'lsin. U holda bu shartdan C o'zgarmasni aniqlash mumkin:

$Q_0 = Ce^{kt_0}$, bundan $C = Q_0 e^{-kt_0}$. Natijada (3)-tenglama uchun Koshi masalasining yechimini topamiz:

$$Q = Q_0 e^{k(t-t_0)} . \qquad (4)$$

Shunga e'tibor berish kerakki, matematik modellar umumiylik xossasiga ega. Aholining o'sishi dinamikasi, bakteriyalarning ko'payish jarayoni, radioaktiv parchalanish jarayonlari ham (4)-formula bilan ifodalanadigan qonuniyatga bo'ysunadi.

Masalan 1. Agar $Q' = kQ$ tenglamadagi proporsionallik koeffitsienti 0,1 ga teng bo'lsa, realizatsiya qilingan mahsulot miqdori boshlang'ich vaqtdagi bilan solishtirilganda, qancha vaqt o'tgandan keyin ikki marta ko'payadi?

Realizatsiya qilingan mahsulot miqdorini ikkilanishiga ketadigan vaqtni 20% ga qisqartirish uchun investitsiya normasini qancha foizga oshirish kerak?

Yechish: (4) da $t_0=0$, $k=0,1$, $Q=2Q_0$ deb faraz qilsak $2Q_0 = Q_0 e^{0,1t}$ tenglikka kelamiz, bundan $t = 10\ln 2 \approx 6,93$ (vaqt birligi).

Endi realizatsiya qilingan mahsulot miqdorini ikkilanishiga ketadigan vaqtni 20% ga qisqartirish uchun investitsiya normasini hisoblaymiz. $t_1 = 0,8t,\ k_1 = \dfrac{k}{0,8} = 1,25k$, ya'ni investitsiya normasini 25% ga oshirish kerak.

Masalan 2. Talab va taklif funksiyalari mos ravishda

$$y = 25 - 2p + 3\frac{dp}{dt},\quad x = 15 - p + 4\frac{dp}{dt}.$$

Agar boshlang'ich momentida $p=9$ bo'lsa, muvozanat narxinig vaqtga bog'liqligini toping.

Yechish: Talab va taklifning tengligidan $25 - 2p + 3\dfrac{dp}{dt} = 15 - p + 4\dfrac{dp}{dt}$, bundan $\dfrac{dp}{dt} = 10 - p$, ya'ni o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamani yechib, $p=10-Ce^{-t}$ tenglamani hosil qilamiz. $p(0)=9$ shartdan,

$c=1$ kelib chiqadi, nihoyat $p=10-Ce^{-t}$ va $\lim\limits_{t\to\infty} p = \lim\limits_{t\to\infty}(10-e^{-t}) = 10 = const$ bo‘lib, narx turg‘unlikka ega.

Masalan 3. k – doimiy elastiklikka ega funksiya topilsin.

Yechish: Elastik ta’rif va masala shartidan quyidagiga egamiz:

$\frac{p}{Q}Q' = k$, ya’ni $\frac{p}{Q}\cdot\frac{dQ}{dp} = k$. $p \neq 0$ shartda $\frac{dp}{p} = k\cdot\frac{dQ}{Q}$

munosabatni hosil qilamiz. Bu tenglikni integrallab, $\ln|Q| = k\ln|p| + \ln c$, bundan esa $Q = C\cdot p^k$ yechimni hosil qilamiz.

Raqobat sharoitida ishlab chiqarishning o‘sishi (Logistik o‘sish)

Faraz qilaylik, $p = p(Q)$ kamayuvchi funksiya bo‘lsin, ya’ni ishlab chiqarish o‘sishi bilan bozor to‘yinadi va narx pasaya boradi: $dp/dQ < 0$. U holda tabiiy o‘sish modeli

$$Q' = \alpha p(Q)Q, \alpha = lm \tag{5}$$

ko‘rinishida bo‘ladi. Bu yerda $\alpha = \ell m$, (5) avtonom differensial tenglamadir.

Tenglamaning o‘ng tomonidagi barcha ko‘paytuvchilar musbatligidan $Q' > 0$, ya’ni $Q(t)$ funksiya o‘suvchi.

Funksiyaning o‘sish xarakteri (qavariq yoki botiqligi) uning ikkinchi tartibli hosilasi bilan aniqlanadi. (5)-tenglamadan ushbu $Q'' = \alpha\left[Q'p(Q) + Q\frac{dp}{dQ}Q'\right] = \alpha Q'\left(p + \frac{dp}{dQ}Q\right)$ tenglik kelib chiqadi.

Talab elastikligini kiritib, bu tenglikning ko‘rinishini o‘zgartirish mumkin:

$E(p) = \frac{Qdp}{pdQ}$, tenglikka ko‘ra $Q'' = \alpha Q'p\left(1 + \frac{Qdp}{pdQ}\right)$ yoki $\frac{dQ}{dp} < 0$ bo‘lgani uchun $E < 0$, nihoyat

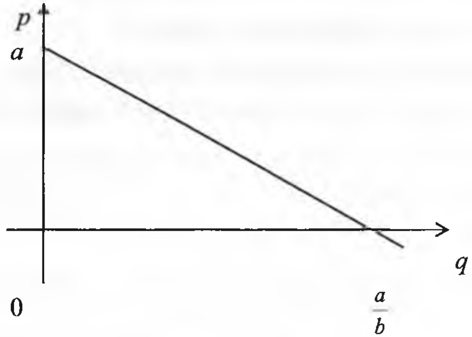
$$Q'' = \alpha Q'p(1 - 1/|E|) \tag{6}$$

tenglik hosil bo‘ladi.

(6)-tenglamadan elastik talabda, ya’ni $|E| > 1$, $Q'' > 0$ ekanligi kelib chiqadi va $Q(t)$ funksiyaning grafigi pastga qavariq ekanligi ma'lum bo'ladi. Bu esa mahsulot hajmining progressiv o'sishini bildiradi.

Noelastik talabda $|E|<1$ va bu holda $Q''<0$ bo'lgani uchun $Q(t)$ funksiya yuqoriga qavariq, bu esa mahsulot hajmining sekin o'sishini (ya'ni yetarlicha ta'minlanganlikni) bildiradi.

Soddalik uchun, $P(Q)=a-bQ,\ a>0, b>0$ talab funksiyasi ishlab chiqarish funksiyasining chiziqli funksiyasi bo'lgan holni qaraylik.



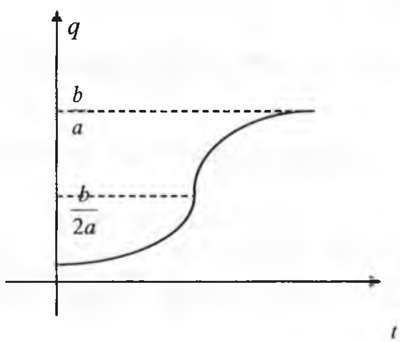
U holda (5)-tenglama ushbu

$$Q' = \alpha(a-bQ)Q \tag{7}$$

ko'rinishda bo'ladi. Agar $Q=0$ yoki $Q=\frac{b}{a}$ bo'lsa, u holda $Q'=0$ bo'ladi.

Demak,
$$Q'' = \alpha Q'(a-2bQ). \tag{8}$$

Shuningdek, $Q<\frac{b}{2a}$ bo'lganda $Q''>0$ va $Q>\frac{b}{2a}$ bo'lganda esa $Q''>0$ bo'ladi.



$Q = Q(t)$ funksiya grafigining egilish nuqtasi $t = Q = a/2b$.

Bu holda $Q(t)$ yechimni aniq topish mumkin. (7)-tenglamada o'zgaruvchilarni ajratib $\frac{dQ}{Q(a-bQ)} = \alpha dt$ yoki $\frac{1}{a}\left(\frac{1}{Q} + \frac{b}{a-bQ}\right)dQ = \alpha dt$.

Bu munosabatni integrallab $\ln|Q| - \ln|a - bQ| = \alpha at + \ln C$

yoki $\frac{Q}{a-by} = Ce^{\alpha at}$.

Bundan $$Q(t) = \frac{aCe^{\alpha at}}{1 + bCe^{\alpha at}}.$$

Chizmada kelitirilgan bu funksiyaning grafigi ((7)-differensial tenglamaning integral egri chiziqlaridan biri) *logistik egri chiziq* deyiladi.

Bunday egri chiziqlar boshqa dinamik jarayonlarni ham xarakterlaydi. Masalan, ma'lumot (reklama) tarqalishi, organik muhitda bakteriyalarning ko'payishi, biologik organizmlarning chegaralangan muhitida epidemiyalar tarqalish dinamikasi jarayoni modellarini ifodalaydi.

Keynsning dinamik modeli

Dinamikaning asosiy komponentlari bo'lgan iqtisodiyotning daromad va harakatlarni bog'lovchi sodda balans modelini qaraymiz. Faraz qilaylik, $Y(t), E(t), S(t), I(t)$ mos ravishda milliy daromad, davlat xarajatlari, iste'mol va investitsiya funksiyasi bo'lsin. U holda quyidagi munosabatlar o'rinlidir:

$$\begin{aligned} Y(t) &= S(t) + I(t) + E(t), \\ S(t) &= a(t)Y(t) + b(t), \\ I(t) &= k(t)Y'(t) \end{aligned} \tag{9}$$

Bu yerda, $a(t)$ – iste'molga moyillik koeffitsienti $(0 < a(t) < 1), b(t)$ – chekli iste'mol, $k(t)$ – akseleratsiya normasi. (9)*tenglamalarda ishtirok etuvchi barcha funksiyalar musbat.

(9)-tenglamalarning ma'nosini oydinlashtiramiz. Barcha xarajatlarning yig'indisi milliy daromadga teng bo'lishi zarur. Bu tenglik birinchi tenglamada ifodalangan. Xalq xo'jaligidagi umumiy iste'moli, milliy daromadning bir qismi bo'lgan *ichki iste'mol va chegaraviy iste'moldan* iborat bo'ladi. Mana shu jarayon ikkinchi tenglamada aks ettirilgan. Nihoyat investitsiya hajmi ixtiyoriy bo'lishi mumkin emas: u davlat texnologiyasi va infratuzilmasi xarakterlaydigan iqtisodiy ko'rsatkich bo'lib, akselator normasining oxirgi milliy daromadga ko'paytmasi bilan aniqlanadi, bu jarayon uchinchi tenglik bilan ifodalangan.

Faraz qilaylik, $a(t), b(t), k(t)$ va $E(t)$ funksiyalar berilgan. Bu funksiyalar davlat evolyutsiyasi va faoliyatini xarakterlaydi. Milliy daromad dinamikasini aniqlash, ya'ni t vaqtning funksiyasi bo'lgan Y ni topish masalasi asosiy iqtisodiy masalalardan biridir.

Ikkinchi tenglamadan $S(t)$ ni va uchinchi tenglamadan $I(t)$ ni birinchi tenglamaga qo'yamiz. $Y(t)$ funksiyaga nisbatan chiziqli, bir jinsli bo'lmagan, birinchi tartibli differensial tenglama hosil bo'ladi:

$$Y' = \frac{1-a(t)}{k(t)}Y - \frac{b(t)+E(t)}{k(t)}. \qquad (10)$$

Biz asosiy a, b, k parametrlarni o'zgarmas sonlar deb faraz qilib, ancha sodda holni tekshiramiz. U holda (10)-tenglama o'zgarmas koeffitsientli, birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamaga aylanadi:

$$Y_t' = \frac{1-a}{k}Y - \frac{b+E}{k}. \qquad (11)$$

Ma'lumki, bir jinsli bo'lmagan tenglamaning umumiy yechimi uning qandaydir xususiy yechimi va unga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi yig'indisidan iborat. (11)-tenglamaning xususiy yechimi $\tilde{Y}$ sifatida $Y' = 0$ dagi, ya'ni muvozanat yechimini olamiz, ya'ni

$$\tilde{y} = \frac{b+E}{1-a}. \qquad (12)$$

Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $Y_0^{(t)} C \exp\left(\frac{1-a}{k}t\right)$ formula bilan beriladi.

Demak, (11)-tenglamaning umumiy yechimi

$$Y(t) = \frac{b+E}{1-a} + Ce^{\frac{1-a}{k}t} \tag{13}$$

(11)-tenglamaning integral egri chiziqlari chizmada ko'rsatilgan.

Agar vaqtning boshlang'ich momentida $Y_0 < Y_p$ bo'lsa, u holda $C = Y_0 - Y_p < 0$ va egri chiziqlar (12) muvozanat yechimidan pastga ketadi, ya'ni milliy daromad vaqt o'tishi bilan masalaning berilgan parametrlari a, b, k va E da kamayadi, chunki (13) da eksponenta darajasi musbat. Agar $Y_0 > Y_p$ bo'lsa, u holda $C > 0$ va vaqt o'tishi bilan milliy daromad o'sadi, integral egri chiziqlar $Y = Y_0$ muvozanat to'g'ri chizig'idan yuqoriga ketadi.

O'sishning noklassik modeli

Faraz qilaylik, $Y = F(K, L)$ milliy daromad, bu yerda F bir jinsli birinchi tartibli ishlab chiqarish funksiyasi: $(F(tK, tL) = tF(K, L))$ K – sarflangan kapital hajmi, L – mehnat sarfi hajmi. Fond qurollanish kattaligi $k = K/L$ bo'lsin. U holda ishlab chiqarish unumdorligi quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$f(k) = \frac{F(K,L)}{L} = \frac{1}{L} \cdot F(K,L) = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = F(k,1) \tag{14}$$

bunda $k = \frac{K}{L}$ – fond ta'minlanganlik koeffitsienti. Ma'lumki, $f'(k) > 0$, $f''(k) < 0$.

Bu bo'limda qaralayotgan masalaning maqsadi fond ta'minlanganlik dinamikasini yoki uni vaqtning funksiyasi sifatida ifodalashdir.

Har qanday model ma'lum farazlarga asoslanganligi uchun biz ham ba'zi bir parametrlarni kiritishimiz zarur.

Quyidagilar bajariladi, deb faraz qilamiz:

1. Mehnat resurslari vaqtida tabiiy o‘sish o‘rinli, ya’ni

$$L' = \alpha L. \tag{15}$$

2. Mablag‘ ishlab chiqarish fondiga va amortizatsiyaga sarflanadi, ya’ni

$$I = K' + \beta K$$

Bu yerda, β – amortizatsiya me’yori.

Agar l investitsiya (sarflangan mablag‘) me’yori bo‘lsa, u holda

$$I = lY = K' + \beta K \text{ yoki } K' = lF(K,L) - \beta K \tag{16}$$

k – ta’minlanganlik fond ta’rifidan kelib chiqadi, $\ell nk = \ell nK - \ell nL$.

Bu tenglikni t bo‘yicha differensiallab,

$$\frac{k'}{k} = \frac{K'}{K} - \frac{L'}{L}.$$

L' va K'ning qiymatlarini qo‘yib,

$$\frac{k'}{k} = \frac{\ell Y - \beta K}{K} - \alpha \text{ ya'ni } k' = \frac{\ell Y}{K}k - (\beta + \alpha)k \quad k' = \frac{\ell YK}{KL} - (\beta + \alpha)k$$

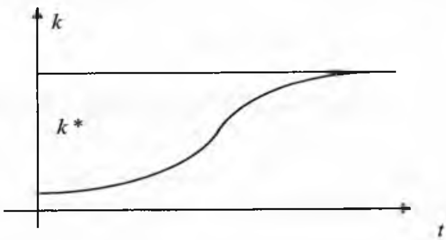
$f = \frac{Y}{L}$ munosabatni hisobga olgan holda,

$$k' = lf(x) - (\alpha + \beta)k \tag{17}$$

tenglamani olamiz. Bu yerda, $f(x)$ funksiya (14)-formula bo‘yicha aniqlangan.

Bu tenglama *o‘sishning neklassik tenglamasi* deyiladi.

Bu tenglamaning integral chizig‘i logistik chiziqqa o‘xshash



Bunda $k = k^*$ (*) tenglamaning statsionar yechimi.

O‘zgaruvchan narx p va qanoatlantirilmagan talab $d(p)-S(p)$ orasidagi bog‘lanishning modelini ifodalovchi $p' = k(d(p)-S(p))$ Samuelson tenglamasini yechamiz. Bu yerda $d(p)$ va $S(p)$ mos ravishda p narxdagi mahsulotga bo‘lgan talab va taklif, $k > 0$.

Talab va taklif chiziqli bo‘lgan holni qaraylik: $d(p) = a - bp$,

$$s(p) = m + np.$$

$$a > 0,\ b > 0,\ m > 0,\ n > 0.$$

U holda Samuelson tenglamasi $p' = k(n-b)p + k(a+m)$ chiziqli differensial tenglamani yechamiz. Oldin bir jinsli tenglamani yechamiz:

$$\frac{dp}{dt} = k(n-b)y, \quad \frac{dp}{p} = k(n-b)dt,$$

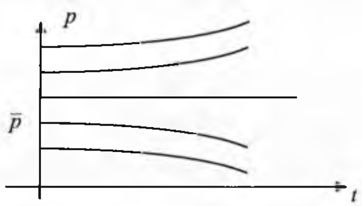
$$\ln|p| = k(n-b)t + \ln C, \quad p(t) = Ce^{k(n-b)t}.$$

Xususiy yechim sifatida $p(t) = \bar{p}$, $\bar{p} - const$ yechimni olamiz. Bu yerda, $\bar{p}$ $d(p) = S(p)$ tenglamaning yechimi: $\bar{p} = \frac{a-m}{b+n}$ - muvozanat narx.

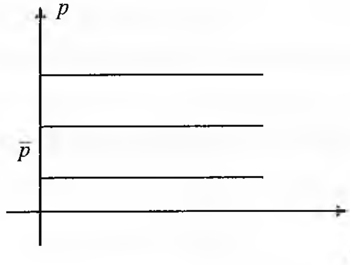
Demak, umumiy yechim $p(t) = \frac{a-m}{b+n} + Ce^{k(n-b)t}$.

Bu yechimda quyidagi hollar bo‘lishi mumkin.

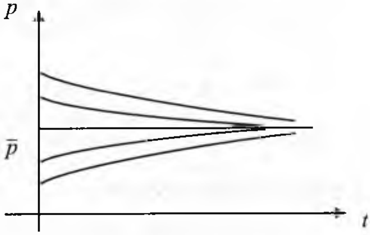
a) $n > b$ bo‘lganda vaqt o‘tishi bilan integral egri chiziqlari $\bar{p}$ muvozanat holatidan uzoqlashib boradi.



c) *n=b* munosabatda *p(t)=const*



d) $n<b$ bo‘lsa, vaqt o‘tishi bilan integral chiziqlar muvozanat $\bar{p}$ holatiga asimptotik yaqinlashadi.



Olingan (17)-munosabat o‘zgaruvchilari ajraladigan birinchi tartibli, chiziqli bo‘lmagan differensial tenglamani ifodalaydi. Bu tenglamaning statsionar yechimini aniqlaymiz: $k'=0$ shartdan,

$$lf(k)-(\alpha+\beta)k=0, \tag{18}$$

ya’ni $k=const$ – o‘zgarmas kattalik, chiziqli bo‘lmagan (18)-algebraik tenglamaning yechimidir.

Masalan. Ishlab chiqarish funksiyasi $F(K,L)=\sqrt{KL}$ uchun (17)-tenglamaning integral egri chiziqlari va statsionar yechimini toping.

Yechish: (14)-munosabatdan $f(k)=\sqrt{k}$, u holda (17)-tenglama ushbu ko‘rinishda bo‘ladi: $\frac{dk}{dt}=l\sqrt{k}-(\alpha+\beta)k.$

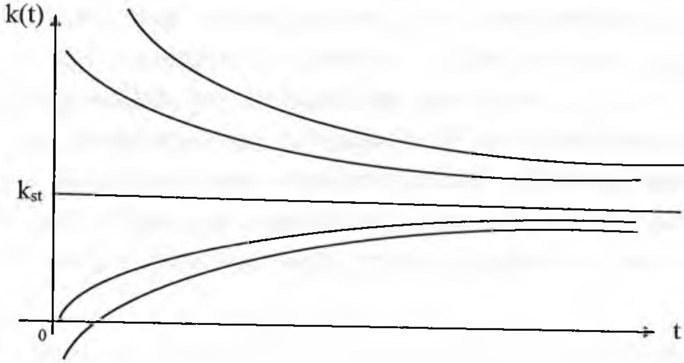
Bu tenglamaning statsionar yechimi quyidagi tenglikdan kelib chiqadi: $l\sqrt{k}-(\alpha+\beta)k=0,$ bundan (17)-tenglamaning nol bo'lmagan xususiy yechimi $k_{st}=\frac{l^2}{(a+b)^2}$ – dan iborat bo'ladi.

(17)-differensial tenglamaga mos tenglamani «o'zgaruvchilarni ajratish» usuli bilan yechamiz: $\frac{dk}{\sqrt{k}\left[l-(\alpha+\beta)\sqrt{k}\right]}=dt$

Bu tenglamada $\sqrt{k}=z$ almashtirishdan so'ng integrallab, umumiy yechimning ko'rinishini hosil qilamiz.

$$k(t)=\left[\frac{1}{\alpha+\beta}+C\exp\left(-\frac{\alpha+\beta}{2}t\right)\right]^2 \qquad (19)$$

Integral egri chiziqlar oilasi yuqoridan va pastdan statsionar yechimga yaqinlashadi, ya'ni $t\to\infty$ va $k\to k_{st}$.



Demak, o'zgarmaydigan parametrlar l, α va β da qurollanish fondi funksiyasi o'z statsionar qiymatiga boshlang'ich shartlarga bog'liqsiz ravishda turg'un barqaror intiladi. Bu statsionar nuqta $k=k_{st}$, barqaror muvozanat nuqtasi deb yuritiladi.

Masalan. p narxning har qanday qiymatida doimiy $-\frac{1}{3}$ bo'lgan talab funksiyasini toping.

Yechish: Elastiklik ta'rifiga ko'ra, $E = \frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp}$

$E = -\frac{1}{3}$, u holda $\frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp} = -\frac{1}{3}$ o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamani yechamiz.

$3\frac{dQ}{Q} = -\frac{dp}{p}$ integrallab $3\ln|Q| = -\ln|p| + \ln C$ yoki $Q^3 p = C$.

Oldindan bashorat qilinadigan narxlar asosida bozor modelini tuzish

Oldindan bashorat qilinadigan narxlar asosida bozor modelini tuzishni qaraylik. Oddiy bozor modellarida talab va taklif, odatda tovarning shu kundagi narxi bilan bog'liq bo'ladi. Lekin talab va taklif real hollarda, narxning tashkil qilinishi va narxning o'zgarishi bilan bog'liq bo'ladi. t vaqt bo'yicha uzluksiz va differensiallanuvchi funksiyalar modelida bu ko'rsatkichlar mos ravishda $p(t)$ narx funksiyasining birinchi va ikkinchi hosilalari bilan ifodalanadi.

Faraz qilaylik, D – talab funksiyasi va S – taklif funksiyasi P – narx funksiyasi va uning hosilalari bilan quyidagi bog'lanishga ega bo'lsin:

$$\begin{aligned} D(t) &= 3p'' - p' - 2p + 18, \\ S(t) &= 4p'' + p' + 3p + 3. \end{aligned} \tag{20}$$

(20) da qabul qilingan bog'lanishlar to'la realistik (amaliy): buni narx funksiyasining hosilalari qo'shiluvchilarida oydinlashtiramiz.

1. Talab narxning o'zgarishi bilan «qizdiriladi». Agar temp (narx o'sishi) davom etsa, o'ssa *($p''>0$)*, u holda bozorning talabga qiziqishi ortadi va, aksincha. Narxning tez o'sishi xaridorni qo'rqitadi,

shuning uchun narx funksiyasining birinchi hosilasi minus ishora bilan kiradi.

2. Taklif yana ko'proq doirada narxning o'zgarishi bilan kuchaytiriladi, shuning uchun *S(t)* funksiyadagi p'' ning koeffitsienti *D(t)* dagiga nisbatan katta. Shuningdek, narxning o'sishi taklifni oshiradi, shuning uchun p' ni o'z ichiga oluvchi qo'shiluvchi *S(t)* ning ifodasiga musbat ishora bilan kiradi.

Narxning vaqt bilan bog'lanishini aniqlash talab etiladi. Bozorning muvozanat holati $D=S$ tenglik bilan xarakterlanganligi uchun (20)-tenglamalarning o'ng tomonlarini tenglashtiramiz va soddalashtirib, quyidagini olamiz:

$$p''+2p'+5p=15 \tag{21}$$

(21)-munosabat *p(t)* funksiyaga nisbatan chiziqli, bir jinsli bo'lmagan ikkinchi tartibli differensial tenglama. Bunday tenglamaning umumiy yechimi biror xususiy yechimi va unga mos bir jinsli

$$p''+2p'+5p=0 \tag{22}$$

tenglamaning umumiy yechimi yig'indisidan iborat.

(22) uchun xarakteristik tenglama: $k^2+2k+5=0$. Uning ildizlari qo'shma kompleks sonlar: $k_{1,2}=-1\pm 2i$ va natijada (22)-tenglamaning $\tilde{p}(t)$ umumiy yechimi quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$\tilde{p}(t)=e^{-t}(c_1\cos 2t+c_2\sin 2t).$$

Bu yerda, C_1 va C_2 – ixtiyoriy o'zgarmaslar.

Bir jinsli bo'lmagan (21)-tenglamaning xususiy yechimi sifatida $p=p_{st}$ narxni belgilaydigan o'zgarmas kattalikni olamiz. Buni (21) ga qo'ysak, p_{st} ning qiymatini topamiz: $p_{st}=3$.

Shunday qilib, (21)-tenglamaning umumiy yechimi

$$P(t)=3+e^{-t}(C_1\cos 2t+C_2\sin 2t) \tag{23}$$

tenglik bilan ifodalanadi. Demak, $t\to\infty$ da $p(t)\to p_{st}=3$, ya'ni barcha integral egri chiziqlar $p=3$ gorizontal asimptotaga ega va uning atrofida tebranadi. Bu barcha belgilangan narxlar p_{st} narxga intilishini va uning atrofida tebranishini bildiradi, bu tebranishlarning amplitudasi vaqt o'tishi bilan o'sa boshlaydi.

Bu masalaning xususiy yechimlarini ikki xil misolda keltiramiz.

1. Koshi masalasi. Faraz qilaylik, boshlang'ich holatdagi narx va uning o'zgarish jarayoni ma'lum: $t=0;\ p=4,\ p'=1$. Bu berilganlarni (23)-formulaga qo'ysak $p(0)=C_1+3=4$, bundan $C_1=1$, ya'ni

$$p(t)=3+e^{-t}(\cos 2t+C_2\sin 2t) \tag{24}$$

Buni differensiallaymiz: $p'(t)=e^{-t}[(2C_2-1)\cos 2t-(c_2+2)\sin 2t]$.

Endi Koshi masalasining ikkinchi shartini qo'llaymiz:

$p'(0)=2C_2-1=1$, bundan $C_2=1$.

Nihoyat Koshi masalasi yechimining ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$p(t)=3+e^{-t}(\cos 2t+\sin 2t)$$

yoki

$$p(t)=3+\sqrt{2}e^{-t}\cos(2t-\pi/4).$$

2. Aralash masala. Faraz qilaylik, vaqtning boshlang'ich momentida talab va taklif ma'lum: $t=0,\ p=4, D=16$.

Birinchi boshlang'ich shart oldingidek bo'lgani uchun bu yerda ham yechim (24)-tenglik bilan ifodalanadi. U holda,

$$p'(t)=e^{-t}[(2C_2-1)\cos 2t-(C_2+2)\sin 2t],$$
$$p''(t)=-e^{-t}[(4C_2+3)\cos 2t-(3C_2-5)\sin 2t].$$

Bu yerdan $p'(0)=2c_2-1$ va $p''(0)=-4c_2-3$.

Bu tengliklarni *D(t)* ning (20)-tenglamaning ko'rinishini hisobga olgan holda, masalaning ikkinchi *D(0)=16* shartidan foydalanib, $C_2=-1$ ni topamiz. Shunday qilib, berilgan masala yechimining ko'rinishi $p(t)=3+e^{-t}(\cos 2t-\sin 2t)$ yoki

$$p(t)=3-\sqrt{2}e^{-t}\sin(2t-\pi/4) \tag{25}$$

1 va 2-masalalarga mos keluvchi integral egri chiziqlar chizmada tasvirlangan.

Ta'minot tenglamasi

$$\frac{dQ}{dt} = pQ(m - Q)$$

Ushbu tenglamaga ta'minot yoki logistik tenglama deyiladi, bunda p va m o'zgarmaslar.

Bu o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamani yechamiz:

$$\frac{dQ}{Q(m-Q)} = pdt$$

$$\frac{dQ}{Q^2 - mQ} = -pdt$$

$$\int \frac{dQ}{\left(Q - \frac{m}{2}\right)^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2} = -pdt.$$

Tenglikning har ikki qismini integrallab

$$\frac{1}{m}\ln\left|\frac{Q-m}{Q}\right| = -pt + \ln C_1$$

$$\frac{Q-m}{Q} = C_2 e^{-mpt}, \text{ bunda } C_2 = C_1^m.$$

Bundan $Q = \frac{m}{1 - C_2 e^{-mpt}}$, $mp = k$, $-C_2 = C$ deb ta'minot (logistik) funksiyasini hosil qilamiz: $Q = \frac{m}{1 + Ce^{-kt}}$.

Ta'minot tenglamasi aholining chegaraviy o'sishini modellashtirishda qo'llaniladi.

$Q=m$ qiymatda, bevosita tenglamadan, $\frac{dQ}{dt}=0$ va $Q<m$ qiymatlarda $\frac{dQ}{dt}>0$, $Q>m$ qiymatlarda $\frac{dQ}{dt}<0$. Demak, $Q=m$ maksimal qiymat.

Masalan. Idishdagi bakteriyalarning o'sishi $k=mp=0.2$ koeffitsientli logistik tenglamani qanoatlantirishi ma'lum. Vaqtning boshlang'ich holatida bakteriyalar mumkin bo'lgan maksimal m miqdorning 1% ni tashkil etsin. Qancha vaqtdan so'ng bakteriyalar 80% ni tashkil etadi?

Yechish: $\frac{dQ}{dt}=pQ(m-Q)$, $p=\frac{0.2}{m}$, $\frac{dQ}{dt}=\frac{0.2Q}{m}(m-Q)$.

$$\frac{mdQ}{Q(m-Q)}=0.2dt.$$

$Q<m$ shartni hisobga olgan holda oxirgi munosabatni integrallaymiz:

$$\ln\frac{m-Q}{Q}=-0.2t-C.$$

$Q(0)=0.01m$ boshlang'ich shartdan foydalanib C o'zgarmasni aniqlaymiz:

$$\ln\frac{0.99}{0.01}=-C,\ C=-\ln 99.$$

U holda yechim $\ln\frac{m-Q}{99Q}=-0.2t$, $\frac{m-Q}{99Q}=e^{-0.2t}$, $Q=\frac{m}{1+99e^{-0.2t}}$.

$Q(t)=0.8m$ shartni qanoatlantiruvchi t_0 qiymatni topamiz:

$$0.8=\frac{1}{1+99e^{-0.2t_0}},\qquad e^{-0.2t_0}=\frac{1}{396},$$

$$-0.2t_0=-\ln 396,\qquad t_0=5\cdot\ln 396,\qquad t_0\approx 29.91.$$

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. – London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y. – 535 p.
2. Knut Sydsæter and Peter Hammond, Essential Mathematics for Economic Analysis. – London EC1N 8TS. Pearson Education Limited. 2012. – 745 p.
3. Sh.O. Alimov, R.R. Ashurov. Matematik tahlil. – T.: Kamalak, 2012.
4. T.A. Azlarov, H. Mansurov. Matematik analiz. – T.: 2006.
5. J. Xojiyev. Algyebra va sonlar nazariyasi. – T.: O‘zbekiston, 2001.
6. Р.Н. Назаров, Б.Т. Тошпулатов, А.Д. Дусумбетов. Алгебра ва сонлар назарияси, 1-қисм. – Т.: Ўқитувчи, 1993.
7. T.J. Jo‘rayev, A.S. Sagdullayev, R.X. Xudoyberganov, A.K. Vorisov,
X. Mansurov. Oliy matematika asoslari. – T.: O‘zbekiston, 1999.
8. Y.U. Soatov. Oliy matematika. – T.: O‘qituvchi, 1–2-jild, 1994.; 3-jild, 1996.
9. D. Raximov. Oliy matematika. Darslik. – T.: «Fan va texnologiya», 2007.
10. Sh. Shoraxmetov, D. Asraqulova, J. Qurbonov. Iqtisodchilar uchun oliy matematikadan masalalar to‘plami. – T.: «Iqtisodiyot», 2011.
11. Н.Д. Дадажанов, М.Ш. Жўраева. Геометрия, 1-қисм. – Т.: Ўқитувчи, 1996.
12. Н.С. Пискунов. Дифференциал ва интеграл ҳисоб. – Т.: Ўқитувчи, 1974.
13. В.Е. Шнейдер, А.И. Слуцкий, А.С. Шумов. Олий математика қисқа курси. – Т.: Ўқитувчи, 1985.
14. А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А.В. Браилов, И.Г. Шандра. Математика в экономике. – М.: Финансы и статистика, 1,2 часть. 2001.

15. Х.Э. Крынский. Математика для экономистов. – М.: Статистика, 2000.
16. Общий курс высшей математики для экономистов. Под. ред. В.И. Ермакова. – М.: INFRA, 2006.
17. Высшая математика для экономистов. Под. ред. Н.Ш. Крамера. – М.: ЮНИТИ, 2008.
18. М.С. Красс, Б.П. Чупринов. Математике для экономического бакалавриата. – М.: Дело, 2006.
19. Ю.И. Клименко. Высшая математика для экономистов: теория, примеры, задачи. – М.: Экзамен, 2005.
20. А.Д. Мышкис. Лекции по высшей математике. – М.: Наука, 1969.
21. П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 1-часть, 1974; 2-часть, 1986.
22. В.А. Колемаев. Математическая экономия. – М.: ЮНИТИ, 1998.
23. Р. Аллен, Математическая экономия. – М.: Иностранная литература, 1963.
24. Л.Э. Эльсгольц. Дифференциальные уравнения и вариационное исчислению. – М.: НАУКА, 1969.

MUNDARIJA

ISBN 978-9943-07-554-2

O'ZBEKISTON FAYLASUFLARI
MILLIY JAMIYATI NASHRIYOTI