ТЕХНИКУМЛАР
УЧУН
МАТЕМАТИКА

ГЕОМЕТРИЯ

I қисм

Г. Н. ЯКОВЛЕВ таҳрири остида

СССР олий ва махсус ўрта таълим министрлиги махсус ўрта ўқув юртлари учун дарслик сифатида рухсат этган

ТОШКЕНТ—„ЎҚИТУВЧИ“—1981

Авторлар коллективи:
М. И. КАЧЕНОВСКИЙ, Ю. М. КОЛЯГИН,
Г. Л. ЛУКАНКИН, Г. Н. ЯКОВЛЕВ

На узбекском языке

КАЧЕНОВСКИЙ МЕЧИСЛАВ ИГНАТЬЕВИЧ
КОЛЯГИН ЮРИЙ МИХАЙЛОВИЧ
ЛУКАНКИН ГЕННАДИЙ ЛАВРОВИЧ
ЯКОВЛЕВ ГЕННАДИЙ НИКОЛАЕВИЧ
Математика для техникумов
ГЕОМЕТРИЯ
Часть I

Учебник для средних специальных
учебных заведений

Перевод с русского издания изд-ва „Наука“, М., 1976 г.

Ташкент „Ўқитувчи“ 1981

Таржимон *Р. Каримов*
Редактор *Ў. Ҳусанов*
Бадиий редактор *З. Мартинова*
Техредактор *Т. Грешникова*
Корректор *Д. Абдуллаева*

ИБ № 1531

Теришга берилди 8.XII-1980 й. Босишга рухсат этилди 16.IX-1981 й. Формати $84\times108^1/_{32}$. Тип. қоғози № 3 „Литературная“ гарн. Кегли 10,8 шпонсиз. Юқори босма усулида босилди. Шартли б.л. 9,24. Нашр л. 7,29. Тиражи 8000. Зак. № 411. Баҳоси 25 т.

„Ўқитувчи“ нашриёти. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Шартнома 253—80.

Ўзбекистон ССР нашриётлар, полиграфия ва китоб савдоси ишлари Давлат комитети Тошкент „Матбуот“ полиграфия ишлаб чиқариш бирлашмасига қарашли 1-босмахона. Ҳамза кўчаси, 21. 1981 й.

Типография № 1 Ташкентского полиграфического производственного объединения „Матбуот“ Государственного комитета УзССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Ташкент, ул. Хамзы, 21.

$Г\ \frac{20203-310}{353(04)-81}$ 174— 81 1702040000

МУНДАРИЖА

СЎЗ БОШИ

Бу китоб ўрта махсус ўқув юртлари учун математикадан янги программага мослаб ёзилган „Геометрия“ курси бўйича дарсликнинг биринчи қисмидир. Авторлар катта татбиқий аҳамиятга эга бўлган энг муҳим математик тушунчалар ва методлар билан ўқувчиларни таништиришга ҳамда китобнинг мазмуни, терминологияси ва символикаси саккиз йиллик мактаб математика курси билан изчил бўлишига ҳаракат қилдилар. Назарий материални баён этиш масалалар ва машқларни таҳлил қилиш билан қўшиб олиб борилди. Ҳар бир бобнинг охирида ўқувчиларнинг мустақил бажаришлари учун машқлар келтирилди.

Авторлар СССР ПФА мухбир аъзоси проф. И. С. Боровиковга ва СССР олий ва махсус ўрта таълим министрлигининг методисти П. И. Самойленкога қўлёзмани диққат билан ўқиб чиққанликлари ва қатор қимматли маслаҳат берганликлари учун миннатдорчилик билдирадилар.

Авторлар

I-боб

ТЕКИСЛИКДА ВА ФАЗОДА ВЕКТОРЛАР

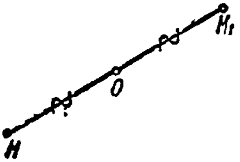
1-§. Асосий тушунчалар ва таърифлар

VI—VIII синфлар геометрия курсида сиз текисликни ўзига акслантиришлари билан танишган эдингиз. Турли акслантиришлар орасида текисликни ўзига масофани сақловчи акслантиришлари ажратиб олинган эди. Бурилиш, ўққа нисбатан симметрия, марказий симметрия ва параллел кўчириш ана шундай акслантиришлар бўлиб, улар *силжишлар* деб аталади. Бу силжишларнинг таърифларини эслатиб ўтамиз.

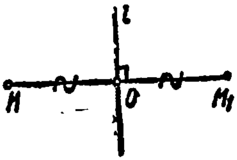
О марказ атрофида бурилиш деб текисликни шундай силжишига айтиладики, бунда: 1) O нуқта ўзига аксланади ва 2) ихтиёрий $[Ox)$ нур билан унга мос $[Ox_1)$ нур орасидаги бурчак бир хил (ўзгармас) x катталикка эга. 0° га бурилишда текисликнинг барча нуқталари ўз ўрнида қолади (ҳар бир нуқта ўзига аксланади); бундай алмаштириш *айний алмаштириш* дейилади.

Агар O нуқта MM_1 кесманинг ўртаси бўлса, M ва M_1 нуқталар *О марказга нисбатан симметрик* дейилади (1-чизма). O марказ ўз-ўзига симметрик деб ҳисобланади.

Текисликни ўзига акслантиришда ҳар бир нуқта O марказга нисбатан ўзига симметрик нуқтага аксланса,



1-чизма



2-чизма

бундай аксланиш *маркази О нуқтада бўлган симметрия* дейилади.

Агар MM_1 кесма l тўғри чизиққа перпендикуляр ва бу тўғри чизиқ билан тенг иккига бўлинса, M ва M_1 нуқталар *l тўғри чизиққа нисбатан симметрик* деб аталади. l тўғри чизиқнинг исталган нуқтаси ўз-ўзига симметрик деб ҳисобланади (2-чизма). Берилган l тўғри чизиққа нисбатан ҳар бир нуқта ўзига симметрик нуқтага аксланса, текисликнинг бундай силжиши *l ўқли ўққа нисбатан симметрия* деб аталади. l тўғри чизиқ *симметрия ўқи* деб аталади.

Параллел кўчириш деб текисликнинг ўзига шундай аксланишига айтиладики, бунда текисликнинг барча нуқталари бир йўналишда бир хил масофага кўчади.

VI—VIII синфлар геометрия курсида параллел кўчириш силжиш бўлиши исботланган эди.

Ноль масофага параллел кўчиришни текисликни ўзига айний алмаштириш деб қараш мумкинлигини қайд этиб ўтамиз. Текисликни ўзига айний аксланиши бир вақтнинг ўзида ҳам бурилиш, ҳам параллел кўчириш бўладиган ягона силжишдир.

Геометрия курсида параллел кўчиришга янги ном: *вектор* номи берилганлигини эслайлик. Вектор тушунчаси математика, физика ва техниканинг турли соҳаларида кенг татбиқ қилинадиган энг муҳим математик тушунчалардан бири бўлганлиги сабабли бу тушунчани ўрганишга батафсил тўхталиб ўтамиз. Дастлаб *фазони алмаштириш* тушунчасига таъриф берамиз.

Таъриф. *Фазони алмаштириш* деб, фазонинг ўзига шундай аксланишига айтиладики, бунда исталган турли икки нуқта турли образларга эга бўлади.

Фазони алмаштириш тушунчасининг маъноси текисликни ўзига аксланиши тушунчасининг маъносига ўхшаш. Фазода ҳам марказий симметрия, ўққа нисбатан симметрия ва параллел кўчириш (вектор) худди текисликдаги каби аниқланади.

Фазони ихтиёрий алмаштиришни f орқали белгиланади. $f(A) = B$ ёзув f алмаштириш A нуқтани B нуқтага акслантиришини билдиради.

Икки Φ_1 ва Φ_2 фигура берилган бўлсин. $f(\Phi_1) = \Phi_2$ ёзув f алмаштириш Φ_1 фигурани Φ_2 фигурага акслантиришини билдиради.

Фазонинг ҳар бир нуқтасини ўша нуқтанинг ўзига акслантирадиган алмаштириш фазони *айний алмаштириш* дейилади ва E билан белгиланади.

Шундай қилиб, фазонинг ихтиёрий A нуқтаси учун $E(A) = A$.

f_1 ва f_2 алмаштиришларни кетма-кет бажариб, натижада f_1 ва f_2 *алмаштиришларнинг композицияси* деб аталувчи янги f алмаштиришни ҳосил қиламиз. Алмаштиришлар композицияси $f_2 \circ f_1$ билан белгиланади.

Ёзувнинг тартибига эътибор беринг. $f_2 \circ f_1$ белгилашда биринчи бажариладиган алмаштириш ўнг томонда ёзилган.

f_1 ва f_2 алмаштиришлар композициясини бошқача белгилаш ҳам мумкин.

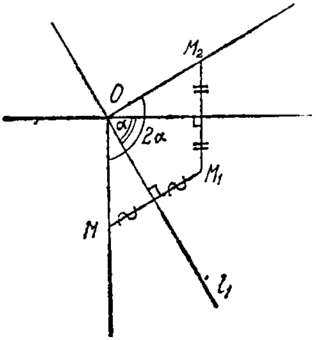
$f_1(A) = B$ ва $f_2(B) = C$ бўлсин, бунда A — фазонинг ихтиёрий нуқтаси. У ҳолда f_1 ва f_2 алмаштиришлар композицияси $f_2(f_1(A)) = C$ каби ёзилади.

Алмаштиришлар композициясига иккита мисол келтирамиз:

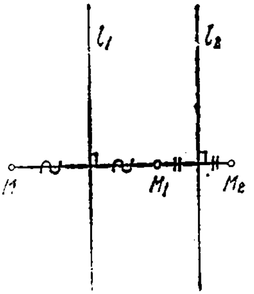
а) ўқлари α катталикдаги бурчак остида кесишувчи икки ўққа нисбатан симметриянинг композицияси (3-чизма) маркази O нуқтада ва бурилиш бурчаги 2α бўлган бурилишдир;

б) ўқлари параллел бўлган икки ўққа нисбатан симметриянинг композицияси (4-чизма) параллел кўчиришдир (вектордир).

Фазода бирор f алмаштириш берилган бўлсин. f алмаштиришга *тескари алмаштириш* деб шундай f^{-1} алмаштиришга айтиладики, бунда $f^{-1} \circ f = E$ бўлади.



3-чизма



4-чизма

Шундай қилиб, агар f фазони бирор алмаштириш, f^{-1} эса унга тескари алмаштириш бўлса, у ҳолда фазонинг ҳар бир A нуқтаси учун $f^{-1}(f(A))=A$ бўлади.

Масалан, агар f алмаштириш маркази O нуқтада ва коэффициенти k бўлган текислик гомотетияси бўлса, ўша марказли ва $1/k$ коэффициентли гомотетия берилган алмаштиришга тескари алмаштириш бўлади: ихтиёрий A нуқта учун $H_O^{\frac{1}{k}}\left(H_O^k(A)\right)=A$.

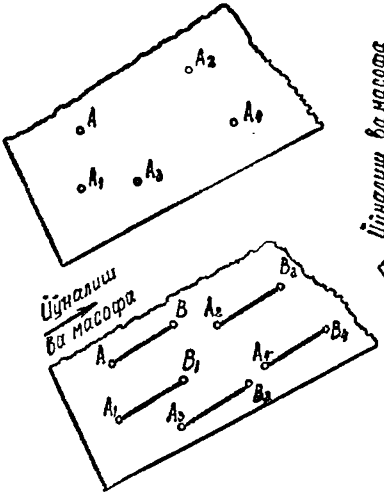
2- §. Текисликда ва фазода параллел кўчириш (вектор)

Параллел кўчириш моделини қуйидагича ясаймиз. Бизга икки пластинка берилган бўлсин, улардан бири албатта шаффоф (масалан, плексиглас) бўлиши керак; бу пластинкаларнинг ҳар бири текислик модели бўлиб хизмат қилиши мумкин, улар бир-бирининг устига қўйилганда ҳам текислик моделини беради. Энди пластинкаларни шундай жойлаштирамизки, шаффоф пластинка устида бўлсин. Устки пластинкада ихтиёрий бир нечта нуқтани белгилаймиз ва иккала пластинкани шу нуқталарда тешамиз. Ҳар бир тешикдан ип тушириб, ипнинг юқори учини тугун қилиб боғлаймиз, ипнинг пастки учига эса кичикроқ юк боғлаб қўямиз. Модель тайёр бўлди (5-чизма).

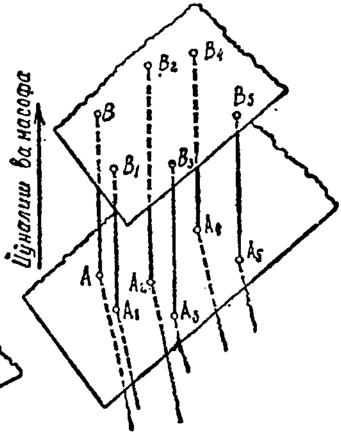
Энди устки пластинкани пастдаги пластинка устида ихтиёрий йўналиш бўйича сурсак, тугунлар ипни тортади, бу иплар нуқталар ўтган йўлни кўрсатади; нуқталар конгруэнт ва бир хил йўналган кесмаларга кўчгани моделдан кўриниб турибди.

Бу моделдан фазода параллел кўчиришни кузатишда ҳам фойдаланиш мумкин. Бунинг учун пастки пластинкани маҳкамлаш (ушлаб туриш) керак, устки пластинкани эса у пастки пластинкага ҳамма вақт параллел бўлиб қоладиган қилиб кўтариш ва ихтиёрий томонга суриш мумкин (6-чизма).

Таъриф. Устма-уст тушмайдиган A ва B нуқталар жуфти $(A; B)$ билан аниқланадиган *вектор* (*параллел кўчириш*) деб, фазони мана бундай алмаштиришга айтилади: бунда ҳар бир A_1 нуқта B_1 нуқтага шундай акслантирилади, $[A_1B_1)$ нур $[AB)$ нур билан бир хил йўналган ва $|A_1B_1|$ масофа $|AB|$ масофага тенг бўлади. Бу



5-чизма



6-чизма

вектор $\overrightarrow{AB}$ символ ёки a, b, c ва ҳ. к. символлар билан белгиланади.

$a = \overrightarrow{AB}$ вектор A нуқтани B нуқтага акслантирувчи фазони алмаштиришдир, шунинг учун $a(A) = B$ деб ёзилади.

$[AB)$ нур билан аниқланадиган йўналиш $\overrightarrow{AB}$ *векторнинг йўналиши*, $|AB|$ масофа эса $\overrightarrow{AB}$ *векторнинг узунлиги* деб аталади. $\overrightarrow{AB}$ векторнинг узунлиги $|a| = |\overrightarrow{AB}|$ билан белгиланади.

Айний алмаштиришни берадиган вектор *ноль вектор* дейилади ва $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$ ёки 0 билан белгиланади. Ноль векторнинг узунлиги нолга тенг. Ноль вектор учун йўналиш тушунчаси киритилмайди.

Ҳар бир $a \neq 0$ вектор ўзининг йўналиши ва узунлиги билан тўлиқ аниқланади.

Чизмада $\overrightarrow{AB}$ векторни одатда боши A нуқтада ва охири B нуқтада бўлган $[AB]$ кесма (тўғри чизиқ кес-

маси) билан тасвирланади. Бундай кесма *йўналган кесма* дейилади. Битта векторнинг ўзини тасвирлаши мумкин бўлган чексиз кўп йўналган кесмалар мавжудлиги равшан. Масалан, 6-чизмада $[AB]$, $[A_1B_1]$, $[A_2B_2]$ ва ҳ. к. йўналган кесмалар битта векторни тасвирлайди: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{A_2B_2}=\ \ldots$

$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$ бўладиган $[AB]$ йўналган кесмани ясаш *$\boldsymbol{a}$ векторни A нуқтадан қўйиш* дейилади.

Фазо векторининг қуйидаги хоссаларини исботсиз келтирамиз:

1) вектор бу силжишдир;

2) вектор нурни-у билан бир хил йўналган нурга (ва, демак, тўғри чизиқни унга параллел тўғри чизиққа) акслантиради;

3) вектор текисликни унга параллел текисликка акслантиради.

Физикада турли *йўналган катталиклар:* куч, тезлик, тезланиш ва ҳ. к. вектор (одатда йўналган кесма билан берилади) ёрдамида яққол тасвирланади. Шу билан бирга бундай йўналган катталик кўп ҳолларда фазонинг маълум нуқтаси билан узвий боғлиқ бўлади. Масалан, куч ўзининг қўйилиш нуқтаси билан узвий боғлиқ. Кучни характерлаш учун унинг қийматини, йўналишини ва қўйилиш нуқтасини билиш керак. Шу сабабли бундай катталикларни тасвирлаш учун *боғланган векторлар* (боши тайин нуқтада фиксирланган векторлар) деб аталувчи векторлар қўлланилади.

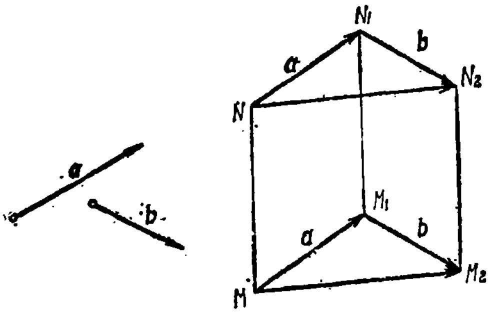
3- §. Векторлар йиғиндиси

Дастлаб, қуйидаги теорема билан танишамиз ва бу теорема асосида икки вектор йиғиндиси тушунчасини таърифлаймиз.

Теорема. *Икки векторнинг композицияси вектордир.*

☐ Икки $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ вектор берилган бўлсин. Ихтиёрий икки M ва N нуқтани оламиз.

$\boldsymbol{a}$ вектор M нуқтани $\boldsymbol{a}(M)=M_1$ нуқтага, N нуқтани эса $\boldsymbol{a}(N)=N_1$ нуқтага акслантиради. $\boldsymbol{b}$ вектор M_1 нуқтани $\boldsymbol{b}(M_1)=M_2$ нуқтага, N_1 нуқтани эса $\boldsymbol{b}(N_1)=$ $=N_2$ нуқтага акслантиради (7- чизма). Унда $\boldsymbol{b}\circ\boldsymbol{a}$



7-чизма

композиция M ва N нуқталарни мос равишда M_2 ва N_2 нуқталарга акслантиради.

Вектор бу силжишдир, шунинг учун

$$|MN| = |M_1 N_1| = |M_2 N_2|. \qquad (1)$$

Бундан ташқари, вектор нурни у билан бир хил йўналган нурга акслантиради, шунинг учун $[MN) \uparrow\uparrow [M_1 N_1)$ ва $[M_1 N_1) \uparrow\uparrow [M_2 N_2)$.

Транзитивлик хоссасига кўра

$$[MN) \uparrow\uparrow [M_2N_2). \qquad (2)$$

(1) ва (2) дан $[NN_2]$ кесма $[MM_2]$ кесмадан параллел кўчириш билан ҳосил бўлиши келиб чиқади ва шунинг учун

$$|NN_2| = |MM_2|, \ [NN_2) \uparrow\uparrow [MM_2). \qquad (3)$$

M ва N фазонинг ихтиёрий нуқталари бўлгани учун қилинган исбот $\boldsymbol{b} \circ \boldsymbol{a}$ композиция вектор эканлигини билдиради. ■

Таъриф. Икки $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторнинг композицияси $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ *векторларнинг йиғиндиси* дейилади ва $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ билан белгиланади.

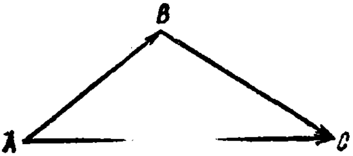
Шундай қилиб, таърифга кўра

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \circ \boldsymbol{a}.$$

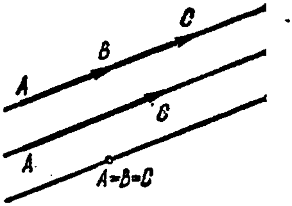
Ихтиёрий учта A, B ва C нуқта берилган бўлсин (8- чизма). Икки вектор композицияси ҳақидаги теоремага кўра

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \qquad (4)$$

тенгликни ёзиш мумкин.



8-чизма



9-чизма

☐ Ҳақиқатан ҳам, $\overrightarrow{AB}$ вектор A нуқтани B нуқтага акслантиради. $\overrightarrow{BC}$ вектор B нуқтани C нуқтага акслантиради, бу векторларнинг $\overrightarrow{BC}\circ\overrightarrow{AB}$ композицияси эса A нуқтани C нуқтага акслантиради. ■

(4) тенгликни *уч нуқта қоидаси* ёки *учбурчак қоидаси* дейилади. Учбурчак қоидаси учала нуқта бир тўғри чизиқда ётганда ҳам ёки бу нуқталар ҳатто устма-уст тушганда ҳам ўринли бўлади (9- чизма).

Равшанки, $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$.

Икки $\mathbf{a}$ ва $\mathbf{b}$ векторнинг йиғиндисини тасвирлаш учун ихтиёрий A нуқтани танлаш ва ундан $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$ векторни қўйиш керак, сўнгра B нуқтадан $\overrightarrow{BC}=\mathbf{b}$ векторни қўйиш керак. У ҳолда $[AC]$ йўналган кесма $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{BC}$ векторлар йиғиндисини тасвирлайди:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=c.$$

Таъриф. Уч $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ва c *векторнинг йиғиндиси* деб, икки $\mathbf{a}$ ва $\mathbf{b}$ вектор йиғиндисига c векторни қўшишдан ҳосил бўлган векторга айтилади.

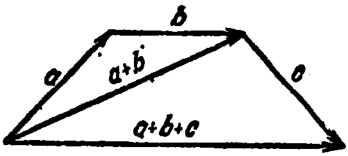
Шундай қилиб,

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+c=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+c.$$

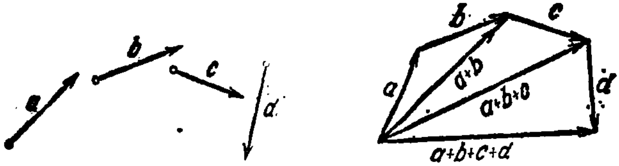
Тўртта вектор йиғиндиси шунга ўхшаш аниқланади:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+c+\mathbf{d}=(\mathbf{a}+\mathbf{b}+c)+\mathbf{d} \text{ ва ҳ. к.}$$

10 ва 11- чизмаларда мос равишда учта ва тўртта векторларнинг йиғиндисини тасвирлайдиган йўналган кесмаларни қандай ясаш кўрсатилган.



10-чизма



11-чизма

Умуман, уч ва ундан ортиқ векторларнинг йиғиндисини тасвирловчи йўналган кесмани ясаш талаб қилинганда „кўпбурчак қоидаси“ деб аталувчи қоида қўлланилади.

Бу қоида қуйидагича. a, b, c, d, e, f векторлар берилган бўлиб, уларнинг йиғиндисини тасвирлаш талаб қилинсин.

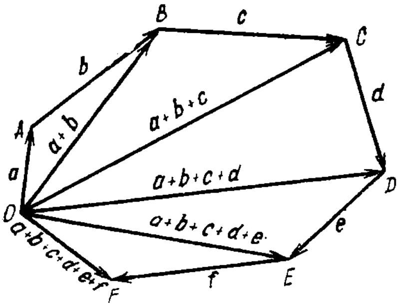
Фазонинг ихтиёрий O нуқтаси танланади ва бу нуқтадан a векторни тасвирлайдиган $[OA]$ йўналган кесма қўйилади; A нуқтадан b векторни тасвирловчи $[AB]$ кесма қўйилади.

Ясашни барча вектор-қўшилувчилар тугагунга қадар давом эттирилади. Ҳосил бўлган синиқ чизиқни ёпиб турган $[OF]$ йўналган кесма вектор-йиғиндини тасвирлайди (12- чизма).

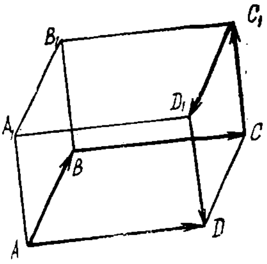
Масала. $ABCDA_1 B_1C_1D_1$ параллелепипед берилган, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{B_1A_1}$, $\overrightarrow{B_1B}$ векторлар йиғиндисини топинг.

$\triangle$ Кўпбурчак қоидасини қўллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз (13- чизма):

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1B} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{AD}. \blacktriangle$$



12-чизма



13-чизма

4- §. Векторларни қўшишнинг ўрин алмаштириш (коммутативлик) хоссаси

Теорема. *Векторларни қўшиш коммутативдир, яъни ихтиёрий $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторлар учун қуйидаги тенглик бажарилади:*

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}. \qquad (1)$$

□ Бизга икки $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ вектор берилган бўлсин. Ихтиёрий A нуқтадан $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$ векторни қўямиз; сўнгра $\boldsymbol{b}$ нуқтадан $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$ векторни қўямиз. A, B ва C нуқталар бир тўғри чизиққа тегишли бўлмасин, у ҳолда икки вектор йиғиндисининг таърифига кўра

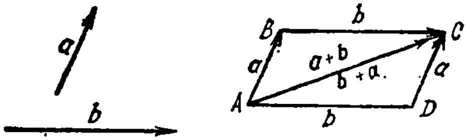
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}. \qquad (2)$$

ABC учбурчакни $ABCD$ параллелограммга шундай тўлдирамизки, бунда учбурчакнинг $[AC]$ томони бу параллелограммнинг диагонали бўлсин (14- чизма). У ҳолда параллелограммнинг қарама-қарши томонлари бўлгани учун $|AB|=|DC|$ ва $(AB)\parallel(DC)$, шунингдек, $|AD|=|BC|$ ва $(AB)\parallel(BC)$, демак,

$$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}.$$

Энди $\overrightarrow{AC}$ векторни $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$ ва $\overrightarrow{LC}=\boldsymbol{a}$ векторларнинг йиғиндиси кўринишида ифодалаш мумкин, яъни

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}; \qquad (3)$$

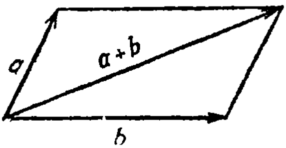


14-чизма

(2) ва (3) тengликлардан (1) тенглик келиб чиқади. ■ Теоремани учта A, B ва C нуқта бир тўғри чизиқда ётган ҳол учун ўзингиз исботланг.

Векторларнинг қўшишнинг коммутативлиги учта ва ундан ортиқ векторларни қўшишда ҳам ўринли.

Векторларни қўшишнинг коммутативлиги икки вектор йиғиндисини берилган векторларни тасвирловчи ва умумий бошга эга бўлган йўналган кесмаларда ясалган параллелограммнинг диагонали сифатида тасвирлаш имконини беради (15- чизма).



15-чизма

Масала. $\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{CK}$ йиғиндини топинг.

△ Векторларни қўшишнинг коммутативлик хоссасини қўлланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз: $\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CK}$.

Кўпбурчак қоидасини қўлланиб, қуйидагини топамиз:

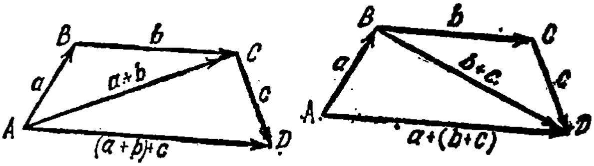
$$\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{KK}=\mathbf{0}. \ ▲$$

5- §. Векторларни қўшишнинг группалаш (ассоциативлик) хоссаси

Теорема. *Векторларни қўшиш ассоциативдир, яъни ихтиёрий учта* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *ва* $\boldsymbol{c}$ *вектор учун қуйидаги тенглик бажарилади:*

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}). \qquad (1)$$

☐ Ихтиёрий A нуқтадан $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$ векторни қўямиз; B нуқтадан $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$ векторни қўямиз; C нуқтадан $\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{c}$



16-чизма

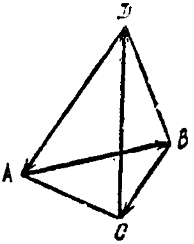
векторни қўямиз (16- расм). A, B, C ва D нуқталардан ҳеч бир учтаси бир тўғри чизиқда ётмасин. A ва D нуқталарни $[AD]$ кесма орқали туташтирамиз.

Векторларни қўшиш таърифини ва учбурчак қоидасини қўлланиб, (1) тенгликнинг чап томонини қуйидагича ифодалаймиз:

$$(a+b)+c=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}, \quad (2)$$

(1) тенгликнинг ўнг томонини эса қуйидагича ифодалаймиз:

$$a+(b+c)=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}. \quad (3)$$



17-чизма

(2) ва (3) дан исботланаётган (1) тенглик келиб чиқади. □

A, B, C ва D нуқталарнинг бошқача жойлашиш ҳоллари учун теоремани мустақил исботланг.

Теорема ихтиёрий сондаги қўшилувчи векторлар учун ўринли.

Масала. $ABCD$ учбурчакли пирамида берилган. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$ йиғиндини топинг.

△ Векторларни қўшишнинг коммутативлик ва ассоциативлик хоссаларини қўлланиб қуйидагиларни ҳосил қиламиз (17- чизма).

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=$$
$$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\mathbf{0}. \ ▲$$

6- §. Қарама-қарши векторлар. Векторларни айириш

Равшанки, $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{BA}$ векторларнинг йиғиндиси ноль векторга тенг.

Таъриф. Йиғиндиси ноль векторга тенг ихтиёрий икки вектор *қарама-қарши векторлар* дейилади.

a векторга қарама-қарши вектор $-a$ билан белгиланади. Демак, таърифга кўра

$$a+(-a)=0.$$

Таърифдан қарама-қарши векторлар бир хил узунликка ва қарама-қарши йўналишга эгалиги келиб чиқади.

Таъриф. Икки a ва b векторнинг *айирмаси* деб шундай c векторга айтиладики, бунда $c=a+(-b)$ бўлади.

a ва b векторлар айирмаси $a-b$ билан белгиланади. Шундай қилиб, таърифга кўра $a-b=a+(-b)$.

Равшанки, агар $c=a-b$ бўлса, у ҳолда $c+b=a$.

□ Ҳақиқатан ҳам (18- чизма), векторлар айирмаси таърифидан ва векторлар йиғиндиси хоссаларидан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

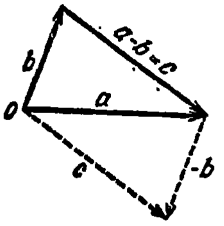
$$c+b=(a+(-b))+b=a+((-b)+b)=a+0=a. ■$$

Тескари даъво ҳам ўринли: агар

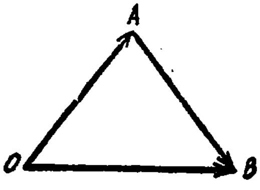
$c+b=a$ бўлса, у ҳолда $c=a-b$.

Ихтиёрий учта A, B ва O нуқтани қарайлик. Векторлар айирмасининг таърифига асосан $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ айирма $\overrightarrow{AB}$ га тенг (19- чизма):

$$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}.$$



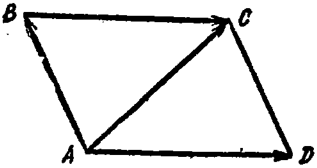
18-чизма



19-чизма

Бу формулани кўпинча **векторлар айирмаси формуласи** дейилади. Бу формулани чизмага мурожаат қилмасдан қўлланиш мумкинлигини пайқаш қийин эмас; бунинг учун берилган ва изланаётган векторларнинг ёзилишида ҳарфларнинг келиш тартибини диққат билан кузатиш етарли. Масалан,

$$\overrightarrow{P\underset{\uparrow}{Q}}-\overrightarrow{P\underset{\uparrow}{N}}=\overrightarrow{\underset{\uparrow}{N}\underset{\uparrow}{Q}}.$$



20-чизма

Масала. $ABCD$ тўртбурчак берилган. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$. $ABCD$ параллелограмм эканлигини исбот қилинг.

$\triangle$ 20-чизмани қарайлик. Векторлар айирмаси формуласига кўра $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$ га эгамиз. Шартга кўра $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$. Демак, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$. У ҳолда $|BC|=|AD|$ ва $(BC)\parallel(AD)$; $ABCD$ — параллелограмм аломатига кўра параллелограммдир. ▲

7- §. Векторни сонга кўпайтириш

Энди векторлар устида яна бир амал — векторни сонга кўпайтириш амалини кўриб чиқамиз.

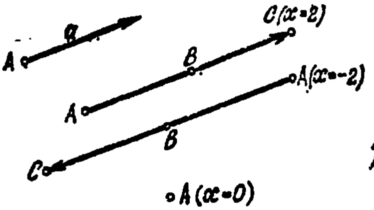
Таъриф. Ноль бўлмаган a векторнинг $x\neq 0$ сонга *кўпайтмаси* деб, узунлиги $|x|\cdot|a|$ га тенг, йўналиши эса $x>0$ бўлса, a нинг йўналиши билан бир хил, $x<0$ бўлса, унга қарама-қарши бўлган векторга айтилади.

Ноль векторнинг ихтиёрий x сонга кўпайтмаси ва ихтиёрий векторнинг ноль сонига кўпайтмаси деб ноль векторга айтилади.

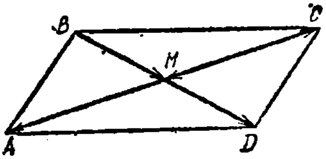
a векторнинг x сонга кўпайтмаси $x\cdot a$ билан белгиланади (сонли кўпайтувчи чап томонга ёзилади). Таърифга кўра исталган a вектор ва исталган x сон учун $|x\cdot a|=|x|\cdot|a|$.

21- чизмада a векторнинг 2; -2; 0 сонларига кўпайтмаси кўрсатилган.

Векторни сонга кўпайтириш амали қуйидаги хоссаларга эга:



21-чизма



22-чизма

1. Ассоциативлик (группалаш) хоссаси:

$$x(y\cdot\boldsymbol{a}) = (x\cdot y)\cdot\boldsymbol{a}.$$

2. Вектор кўпайтувчига нисбатан дистрибутивлик (тақсимот) хоссаси:

$$x\cdot\boldsymbol{a} + y\cdot\boldsymbol{a} = (x+y)\,\boldsymbol{a}.$$

3. Сонли кўпайтувчига нисбатан дистрибутивлик (тақсимот) хоссаси:

$$x\cdot\boldsymbol{a} + x\cdot\boldsymbol{b} = x\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

Векторни сонга кўпайтириш хоссаларини исботсиз қабул қиламиз (исбот планиметрия курсидаги тегишли хоссаларнинг исботларига ўхшаш).

Масала. $ABCD$ параллелограммда M нуқта диагоналларнинг кесишиш нуқтаси. Қуйидаги ҳолларнинг ҳар бирида k кўпайтувчини топинг:

1 $\overrightarrow{MC} = k\cdot\overrightarrow{CA}$; 2) $\overrightarrow{BD} = k\cdot\overrightarrow{BM}$; 3) $\overrightarrow{AC} = k\cdot\overrightarrow{CM}$; 4) $\overrightarrow{BB} = k\cdot\overrightarrow{BD}$; 5) $\overrightarrow{AA} = k\cdot\overrightarrow{CC}$.

△ Векторни сонга кўпайтириш таърифларига асосан қуйидагиларга эгамиз (22- чизма).

1) $\overrightarrow{CA} \neq 0$, $\overrightarrow{MC} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CA}$, $|CA| = 2\cdot|MC|$, бундан $k = -\frac{1}{2}$;

2) $\overrightarrow{BM} \neq 0$, $\overrightarrow{BM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BD}$, $|BD| = 2\cdot|BM|$, бундан $k=2$;

3) $CM \neq 0$, $\overrightarrow{CM} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AC}$, $|CM| = \frac{1}{2}\,|AC|$, бундан $k = -2$;

4) $\overrightarrow{BB} = \mathbf{0}$, $\overrightarrow{BD} = \mathbf{0}$, бундан $k = 0$;

5) $\overrightarrow{AA} = \mathbf{0}$, $\overrightarrow{CC} = \mathbf{0}$. бундан k — ихтиёрий сон. ▲

8- §. Коллинеар векторлар

Таъриф. Йўналиши бир хил ёки қарама-қарши бўлган иккита нолмас вектор *коллинеар* дейилади.

Масалан, 16-чизмада $\overrightarrow{BC}$ ва $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ ва $\overrightarrow{DA}$ векторлар коллинеар, $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{AC}$ векторлар ноколлинеардир.

Агар $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторлар коллинеар бўлса, $\boldsymbol{a}$ вектор $\boldsymbol{b}$ векторга, $\boldsymbol{b}$ вектор эса $\boldsymbol{a}$ векторга коллинеар дейилади.

Ноль вектор таърифга кўра ихтиёрий векторга коллинеар бўлади.

Теорема. *a вектор ноль бўлмаган b векторга коллинеар бўлиши учун*

$$\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{b} \qquad (1)$$

шартни қаноатлантирадиган k сон мавжуд бўлиши зарур ва етарлидир.

□ Теореманинг етарлилик шарти равшан. Ҳақиқатан ҳам, агар бирор k да (1) тенглик бажарилса, у ҳолда векторни сонга кўпайтириш таърифи ҳамда коллинеар векторларнинг таърифига кўра $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторлар коллинеардир.

Зарурлиги. $\boldsymbol{a}$ вектор ноль бўлмаган $\boldsymbol{b}$ векторга коллинеар бўлсин. Қуйидаги уч ҳол бўлиши мумкин:

$$\boldsymbol{a} \uparrow\uparrow \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a} \downarrow\uparrow \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a} = 0.$$

Агар $\boldsymbol{a} \uparrow\uparrow \boldsymbol{b}$ бўлса, у ҳолда $\boldsymbol{a} = \frac{|a|}{|b|} \cdot \boldsymbol{b}$, яъни $k = \frac{|a|}{|b|}$.

Агар $\boldsymbol{a} \uparrow\downarrow \boldsymbol{b}$ бўлса, у ҳолда $\boldsymbol{a} = -\frac{|a|}{|b|} \cdot \boldsymbol{b}$, яъни $k = -\frac{|a|}{|b|}$.

Агар $\boldsymbol{a} = 0$ бўлса, у ҳолда $\boldsymbol{a} = 0 \cdot \boldsymbol{b}$, яъни $k = 0$. Зарурлиги исботланди.■

(1) формуладаги k сон ягоналигини кўрсатамиз.

□ Шундай k ва k_1 мавжудки, $\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{b}$ ва $\boldsymbol{a} = k_1 \boldsymbol{b}$ бўлсин дейлик. Унда $k\boldsymbol{b} - k_1\boldsymbol{b} = 0$ ва, демак, $(k - k_1)\boldsymbol{b} = 0$. $\boldsymbol{b} \neq 0$ бўлгани учун $k = k_1$.■

Масала. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{BA}$ ва $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ векторлар коллинеар эканлигини исботланг.

△ Векторлар устида амалларнинг хоссаларидан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+2\overrightarrow{BA}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})=0+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}$. Шундай қилиб, $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=k\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+2\overrightarrow{BA})$ бўладиган $k=\frac{1}{3}$ сони топилди. Демак, векторларнинг коллинеарлиги аломатига кўра масала шартида берилган векторлар коллинеардир.▲

9- §. Векторнинг ўққа проекцияси

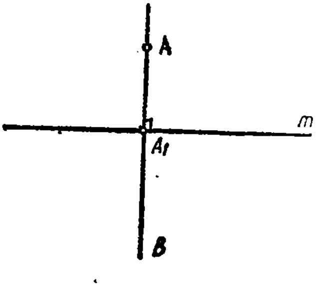
Узунлик ўлчов бирлиги танланган бирор l тўғри чизиқни қарайлик. A ва B нуқталар l тўғри чизиқнинг $|AB|=1$ бўлган нуқталари бўлсин. У ҳолда $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{BA}$ векторлар l тўғри чизиқнинг бирлик векторлари дейилади.

Тўғри чизиқнинг бирлик векторлари унда йўналишларни аниқлайди. Бу йўналишлардан бири мусбат йўналиш, иккинчиси эса манфий йўналиш дейилади.

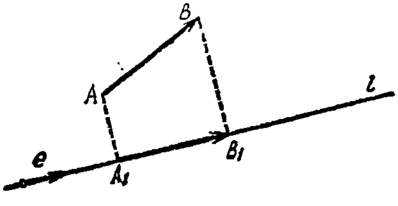
Таъриф. Мусбат йўналиш ва узунлик ўлчов бирлиги берилган тўғри чизиқ *ўқ* дейилади. Йўналишни аниқлайдиган e ($|e|=1$) вектор ўқнинг *бирлик вектори* дейилади.

m бирор тўғри чизиқ бўлсин. $A \notin m$ нуқтани оламиз ва $(AB)\perp m$ тўғри чизиқ ўтказамиз. $(AB)\cap m=A_1$ бўлсин. A_1 нуқта A нуқтанинг m тўғри чизиқдаги *проекцияси* дейилади (23- чизма).

Агар $A \in m$ бўлса, у ҳолда $A=A_1$.



23-чизма



24-чизма

Бундай тўғри чизиқ сифатида йўналишни берувчи $\boldsymbol{e}$ бирлик векторли бирор l ўқни қарайлик. $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$ ихтиёрий вектор бўлсин (24- чизма).

A_1 ва B_1 орқали A ва B нуқталарнинг l ўқдаги проекциясини белгилаймиз.

Йўналган $[A_1B_1]$ кесма билан тасвирланадиган векторни $\overrightarrow{AB}$ векторнинг l ўқдаги *вектор проекцияси* деймиз ва $\overrightarrow{\text{пр}}_l\,\overrightarrow{AB}$ символ билан белгилаймиз.

Агар $(AB)\parallel l$ бўлса, у ҳолда $\overrightarrow{\text{пр}}_l\,\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$; агар $(AB)\perp l$ бўлса, у ҳолда $\overrightarrow{\text{пр}}_l\,\overrightarrow{AB}=\mathbf{0}$. Агар $\overrightarrow{AB}=\mathbf{0}$ бўлса, $\overrightarrow{\text{пр}}_l\,\overrightarrow{AB}=\mathbf{0}$.

l ўқ, $\boldsymbol{e}$ унинг бирлик вектори бўлсин. $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{\text{пр}}_l\,\overrightarrow{AB}$ бўлсин. Равшанки, $\boldsymbol{e}$ ва $\overrightarrow{A_1B_1}$ векторлар коллинеар. У ҳолда шундай x сон мавжудки, $\overrightarrow{A_1B_1}=x\boldsymbol{e}$ бўлади. x сонни $\overrightarrow{AB}$ векторнинг l ўқдаги *скаляр проекцияси* (ёки оддийгина *проекцияси*) деймиз ва $\text{пр}_l\,\overrightarrow{AB}$ символи билан белгилаймиз.

Шундай қилиб, $\overrightarrow{\text{пр}}_l\,\overrightarrow{AB}=(\text{пр}_l\,\overrightarrow{AB})\cdot\boldsymbol{e}$.

Векторнинг l ўқдаги проекциясининг баъзи хоссаларини кўриб чиқамиз.

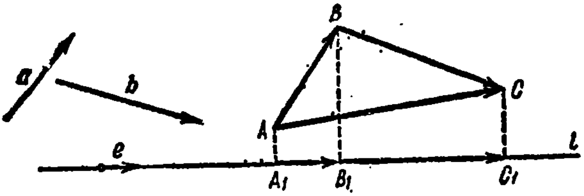
1- теорема. *Икки вектор йиғиндисининг (айирмасининг) ихтиёрий ўқдаги проекцияси бу векторлар проекцияларининг йиғиндисига (айирмасига) тенг.*

☐ $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ бўлгани учун бу теоремани икки вектор йиғиндиси учун исбот қилсак етарли.

$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}$ бўлсин, у ҳолда $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (25- чизма). A_1 B_1 ва C_1 орқали A, B ва C нуқталарнинг l ўқдаги проекцияларини белгилаймиз. У ҳолда бундай ёзиш мумкин:

$$\overrightarrow{A_1B_1}=x_1\,\boldsymbol{e},\quad \overrightarrow{B_1C_1}=x_2\,\boldsymbol{e},\quad \overrightarrow{A_1C_1}=x\,\boldsymbol{e},$$

бунда $x_1=\text{пр}_l\,\boldsymbol{a}$, $x_2=\text{пр}_l\,\boldsymbol{b}$, $x=\text{пр}_l\,(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$. Лекин биз $x\boldsymbol{e}=\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=x_1\boldsymbol{e}+x_2\boldsymbol{e}=(x_1+x_2)\,\boldsymbol{e}$ га



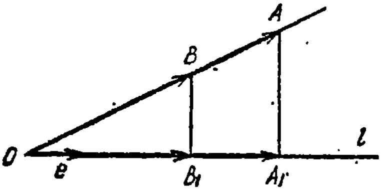
25-чизма

эгамиз. Бу ердан $x = x_1 + x_2$ келиб чиқади, яъни пр$_l(a + b)$ = пр$_l$ a + пр$_l$ b.■

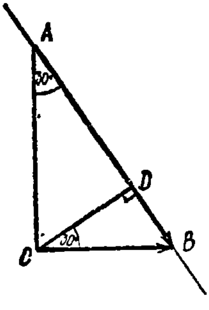
2- теорема. *ka векторнинг ихтиёрий l ўқдаги проекцияси ўша a векторнинг проекциясини k сонга кўпайтирилганига тенг:*

$$\text{пр}_l(ka) = k\,\text{пр}_l\, a.$$

☐ a векторни l ўқда ётувчи O нуқтадан қўйиб, $\overrightarrow{OA} = a$ векторни ҳосил қиламиз (26- чизма). A_1 орқали A нуқтанинг l тўғри чизиқдаги проекциясини белгилаймиз. У ҳолда $(AA_1) \perp l$. O марказли ва k коэффициентли гомотетия A нуқтани B нуқтага, A_1 нуқтани эса B_1 нуқтага акслантирсин. У ҳолда гомотетиянинг хоссасига кўра $(BB_1) \parallel (AA_1)$ ва $(BB_1) \perp l$, Демак, B_1 нуқта B нуқтанинг l тўғри чизиқдаги проекцияси экан. Гомотетия таърифига кўра қуйидагига эгамиз: $\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{OA} = ka$, $\overrightarrow{OB_1} = k\,\overrightarrow{OA_1}$. Лекин $\overrightarrow{OA_1} = xe$, $\overrightarrow{OB_1} = x_1 e$, бунда x = пр$_l$ a, x_1 = пр$_l$ (ka). Шундай қилиб, $x_1 e = \overrightarrow{OB_1} = k\overrightarrow{OA_1} = k(xe) = (kx)\ e$, бундан $x_1 = kx$, яъни пр$_l$ $(ka) = k$пр$_l$ a. ■



26-чизма



27-чизма

Масала. ABC тўғри бурчакли учбурчак берилган ($\hat{C} = 90°$, $\hat{A} = 30°$). Йўналган $[AB]$ кесма бирлик векторни аниқлайди. $\vec{CB}$ векторнинг $\vec{AB}$ вектор билан аниқланадиган ўқдаги вектор ва скаляр проекцияларини топинг.

△ C ва B нуқталарнинг (AB) ўқдаги проекциясини топамиз. Улар мос равишда D ва B нуқталардир (27- чизма). У ҳолда $\vec{DB} = \text{пр}_{(AB)}\vec{CB}$.

30°ли бурчакка эга тўғри бурчакли учбурчак хоссасига кўра: $|CB| = \frac{1}{2}|AB|$, $DB = \frac{1}{2}(CB)$ ни ҳосил қиламиз, бундан $|DB| = \frac{1}{4}|AB|$.

Шундай қилиб, $\vec{DB} = \frac{1}{4}\vec{AB}$ ва, демак, $\text{пр}_{(AB)}\vec{CB} = \frac{1}{4}$.▲

Векторнинг ўқдаги проекцияси таърифи ва проекцияларнинг хоссалари текисликдаги векторлар учун ҳам, фазодаги векторлар учун ҳам ўринлигини қайд этиб ўтамиз.

10- §. Икки вектор орасидаги бурчак

Фазода икки йўналиш орасидаги бурчак тушунчасини қараймиз. VI — VIII синфлар геометрия курсида текисликда йўналиш тушунчаси қаралган эди.

Худди текисликдагидек, фазода ҳам йўналиш деб ҳар бири берилган нур билан бир хил йўналган барча нурлар тўпламига айтилади. Шундай қилиб, йўналган нурлар тўпламидан олинган исталган нур (йўналган кесма ўзи тасвирлайдиган векторни тўлиқ аниқлаганидек) шу йўналишни тўлиқ аниқлайди. Шунинг учун фазода йўналишни одатда фақат битта нур ёрдамида берилади.

Томонлари мос равишда бир хил йўналган икки қавариқ бурчак бир хил катталикка эгалигини исботлаш мумкин.

Шу сабабли қуйидаги таърифни қабул қилишимиз табиий.

Таъриф. *Икки йўналиш орасидаги бурчак* деб бу йўналишларнинг умумий учга эга бўлган ихтиёрий икки нури орасидаги бурчакнинг катталигига айтилади.

Агар икки l_1 ва l_2 нур берилган бўлса, у ҳолда улар йўналишлари орасидаги бурчак

$$\varphi = (\widehat{l_1; l_2})$$

билан белгиланади, бу ерда

$$\varphi \in [0°; 180°].$$

Шундай қилиб, йўналишлар орасидаги бурчак бу катталикдир (геометрик фигура эмас).

Таъриф. *Ноль бўлмаган икки вектор орасидаги бурчак* деб, бу векторлар йўналишлари орасидаги бурчакка айтилади.

$\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторлар орасидаги бурчак

$$(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = \varphi$$

билан белгиланади (28- чизма).

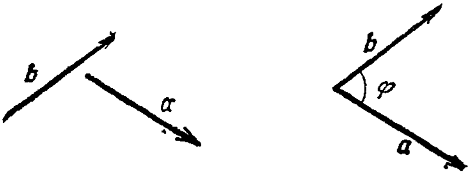
Агар $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторлар орасидаги бурчак 90° га тенг бўлса, у ҳолда бу векторлар перпендикуляр дейилади ва қисқача $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ деб ёзилади.

Агар $\boldsymbol{a} \uparrow\uparrow \boldsymbol{b}$ бўлса, у ҳолда $(\widehat{\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}}) = 0°$, агар $\boldsymbol{a} \uparrow\downarrow \boldsymbol{b})$ бўлса, у ҳолда $(\widehat{\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}}) = 180°$ бўлишини қайд этиб ўтамиз.

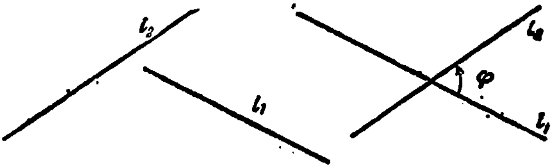
Агар тўғри чизиқлар кесишса, у ҳолда улар орасидаги бурчак деб, бу тўғри чизиқлар ҳосил қиладиган бурчаклардан кичигининг катталигига айтилади.

Агар тўғри чизиқлар айқаш бўлса, у ҳолда улар орасидаги бурчак деб айқаш чизиқларга параллел бўлган кесишувчи тўғри чизиқлар орасидаги бурчакка айтилади (29- чизма).

Таъриф. *Вектор билан ўқ орасидаги бурчак* деб ўқ йўналиши билан вектор йўналиши орасидаги бурчакка айтилади.



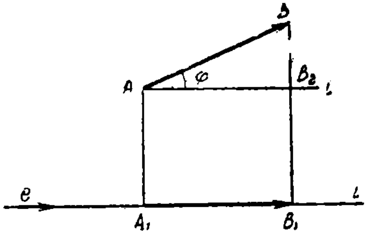
28-чизма



29-чизма

Энди проекцияларнинг яна бир хоссасини кўриб чиқамиз.

Теорема. *Векторнинг ўқдаги проекцияси проекцияланаётган вектор узунлиги билан вектор ва ўқ орасидаги бурчак косинуси кўпайтмасига тенг.*



30-чизма

□ $\overrightarrow{AB}$ векторни тасвирлайдиган $[AB)$ кесманинг боши орқали l ўққа параллел $[AB_2]$ нур ўтказамиз (30- чизма). У ҳолда $\widehat{BAB_2}=\varphi$ – вектор билан l ўқ орасидаги бурчак (таърифга асосан) $0\leqslant\varphi\leqslant 90°$ бўлсин. $\triangle BAB_2$ ни қараймиз: $|AB_2| = |\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\varphi$.

Лекин $|AB_2| = |A_1B_1|$ ва, шундай қилиб, $|A_1B_1| = |\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\varphi$.

$|A_1B_1| = \text{пр}_l|\overrightarrow{AB}|$ бўлгани учун

$$\text{пр}_l\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\varphi. \qquad (1)$$

Агар $90° < \varphi \leqslant 180°$ бўлса, (1) тенглик $\cos(180°-\varphi) = -\cos\varphi$ га кўра ўз кучида қолади. ■

11- §. Текисликда векторни икки ноколлинеар вектор бўйича ёйиш

$\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторлар ноколлинеар бўлсин. У ҳолда, агар x ва y сонлар

$$x\cdot\boldsymbol{a}+y\cdot\boldsymbol{b}=0 \qquad (1)$$

шартни қаноатлантирса, $x=0$ ва $y=0$ бўлади.

☐ Ҳақиқатан ҳам, масалан, $x \neq 0$ бўлса, у ҳолда (1) дан

$$\boldsymbol{a} = -\frac{y}{x}\cdot \boldsymbol{b}$$

экани келиб чиқади. Бу эса $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторларнинг ноколлинеарлигига зид. Шундай қилиб, $x = 0$.

$y = 0$ экани ҳам худди шунга ўхшаш кўрсатилади. ■

Таъриф. $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_n$ векторларнинг *чизиқли комбинацияси* деб, бу векторларнинг бирор x_1, x_2, ..., x_n сонларга кўпайтмаларининг йиғиндисига айтилади.

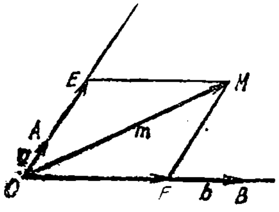
Масалан, $3\boldsymbol{a} - 5\boldsymbol{b} - \frac{1}{2}\boldsymbol{c}$ ифода $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ва $\boldsymbol{c}$ векторларнинг чизиқли комбинациясидир.

Теорема. *Текисликдаги ихтиёрий $\boldsymbol{m}$ вектор икки $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ ноколлинеар векторнинг чизиқли комбинацияси кўринишида тасвирланиши мумкин, шу билан бирга бундай тасвир ягонадир:*

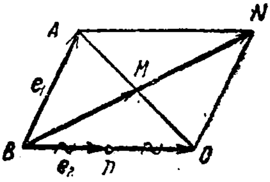
$$\boldsymbol{m} = x\cdot \boldsymbol{a} - y\cdot \boldsymbol{b}. \tag{2}$$

☐ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ва $\boldsymbol{m}$ векторлар битта O нуқтада қўйилган бўлсин (31- чизма). Агар бунда $\boldsymbol{m}$ вектор $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторлардан бирига коллинеар бўлиб қолса (масалан, $\boldsymbol{a}$ векторга), у ҳолда бирор x сон учун $\boldsymbol{m} = x\cdot \boldsymbol{a} = x\cdot \boldsymbol{a} - 0\cdot \boldsymbol{b}$ га эгамиз. Шу билан $\boldsymbol{m}$ вектор (2) кўринишда тасвирланди.

Агар $\boldsymbol{m}$ вектор $\boldsymbol{a}$ векторга ҳам, $\boldsymbol{b}$ векторга ҳам коллинеар бўлмаса, у ҳолда M нуқтадан $[OB)$ ва $[OA)$ га параллел тўғри чизиқлар ўтказиб (31-чизма), $\boldsymbol{m} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$ га эга бўламиз. Аммо бу ҳолда векторларнинг коллинеарлик аломатига кўра шундай x ва y



81-чизма



32-чизма

сонлар мавжудки, $\overrightarrow{OE} = x\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OF} = y\,\mathbf{b}$ бўлади, бундан эса (2) тенглик келиб чиқади.

Бундай тасвирланишнинг ягоналигини кўрсатамиз. $\mathbf{m} = x_1\mathbf{a} + y_1\mathbf{b} = x_2\mathbf{a} + y_2\mathbf{b}$ бўлсин. У ҳолда $(x_1 - x_2)$ $\mathbf{a} + (y_1 - y_2)\,\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Лекин $\mathbf{a}$ ва $\mathbf{b}$ векторлар ноколлинеар бўлгани учун бу тенглик фақат $x_1 = x_2$ ва $y_1 = y_2$ бўлганда ўринли бўлиши мумкин. Ягоналиги исботланди. ▲

Агар вектор бирор векторларнинг чизиқли комбинацияси сифатида берилган бўлса, у ҳолда бу вектор шу векторлар бўйича *ёйилган* дейилади.

Таъриф. *Текисликдаги базис* деб маълум тартибда олинган икки ноколлинеар векторга айтилади.

$\mathbf{e}_1$ ва $\mathbf{e}_2$ бирор базис бўлсин. У ҳолда агар $\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ бўлса, x ва y сонлар $\mathbf{a}$ векторнинг шу базисдаги координаталари дейилади.

Шундай қилиб, текисликдаги базис ҳар бир $\mathbf{a}$ векторга тартибланган сонлар жуфти x ва y ни бир қийматли мос қўяди ва, аксинча, сонларнинг ҳар бир тартибланган жуфтига текисликда ягона вектор мос келади.

Текисликда ўзининг координаталари билан берилган вектор $\mathbf{a}(x; y)$ орқали белгиланади.

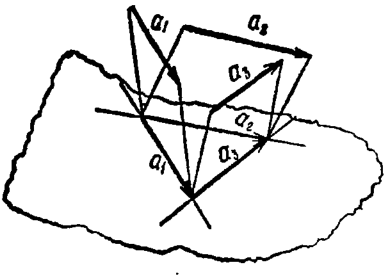
Масала. Берилган: $\triangle ABC$, $D \in [BC)$. $|BD| = |DC|$, $[BM]$ — учбурчак ABC нинг медианаси. Агар $[BA]$ ва $[BD]$ йўналган кесмалар базис векторларни аниқласа, $\overrightarrow{BM}$ векторнинг координаталарини топинг.

△ ABC учбурчакни $ABCN$ параллелограммгача тўлдирамиз (32- чизма). У ҳолда $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BA} = \mathbf{e}_1$, $\overrightarrow{BD} = \mathbf{e}_2$ деб белгилаб, $2\overrightarrow{BM} = 1 \cdot \mathbf{e}_1 + 2 \cdot \mathbf{e}_2$ ни ҳосил қиламиз, бундан $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{e}_1 + 1 \cdot \mathbf{e}_2$.

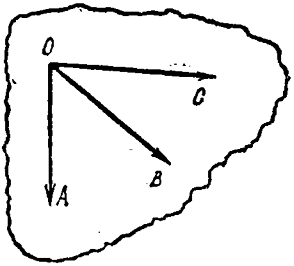
Шундай қилиб, берилган базисда $\overrightarrow{BM} = \left(\frac{1}{2}; 1\right)$. ▲

12- §. Компланар векторлар

Саккиз йиллик мактаб геометрия курсидан маълумки, агар тўғри чизиқ текислик билан умумий нуқталарга эга бўлмаса ёки шу текисликда ётса, бу тўғри чизиқ текисликка параллел бўлади.



33-чизма



34-чизма

Агар (AB) тўғри чизиқ текисликка параллел бўлса, $\overrightarrow{AB}$ векторни *текисликка параллел* деймиз. Ноль вектор исталган текисликка параллел ҳисобланади.

Фазонинг ихтиёрий векторлар тўпламини векторлар системаси деймиз ва $a_1, a_2, \ldots, a_n$ билан белгилаймиз.

Таъриф. Агар векторлар системасининг барча векторлари бир текисликка параллел бўлса, бу векторлар системаси *компланар* дейилади (33- чизма).

Шундай қилиб, исталган икки вектор ҳар доим компланардир.

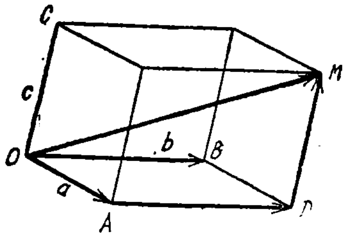
Равшанки, агар $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ва $\overrightarrow{OC}$ векторлар компланар бўлса, у ҳолда A, B ва C нуқталар битта текисликка тегишли бўлади. Шунинг учун баъзан компланар векторларни битта текисликка ўтказиш мумкин дейилади (34- чизма).

Учта нокомпланар векторни „параллелепипед қоидаси“ деб аталувчи қоида бўйича қўшиш билан танишамиз.

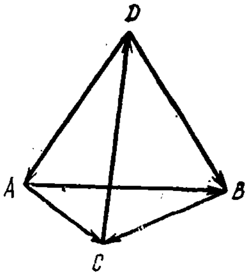
$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ва $\boldsymbol{c}$ векторлар нокомпланар бўлсин (35- чизма). Ихтиёрий O нуқтадан $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$ ва $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$ векторларни қўямиз ва $[OA]$, $[OB]$ ва $[OC]$ қирралари бўлган параллелепипед ясаймиз. $[OM]$ — бу параллелепипеднинг диагонали бўлсин. $\overrightarrow{OB}, = \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DM}$ бўлгани учун

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{OM}$$

бўлади, яъни $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \overrightarrow{OM}$.



35-чизма



36-чизма

Шундай қилиб, учта нокомпланар векторнинг йиғиндиси ўша векторларда ясалган параллелепипеднинг диагонали билан тасвирланадиган векторга тенг.

Масала. Учбурчакли $ABCD$ пирамиданинг қирраларидан қайсилари: а) икки коллинеар векторни: б) уч компланар векторни; в) уч нокомпланар векторни тасвирлашини кўрсатинг.

△ Пирамида тасвирини қараймиз. (36- чизма). Коллинеар ва компланар векторларнинг таърифларидан фойдаланиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

а) пирамиданинг ҳеч қайси иккита турли қирраси коллинеар векторларни тасвирламайди, чунки улар орасида ўзаро параллел бўлганлари йўқ;

б) $[AC]$, $[CB]$, $[BA]$ қирралар (ёки $[AD]$, $[DC]$ ва $[AC]$) уч компланар векторни тасвирлайди (масалан, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{BC}$ векторлар);

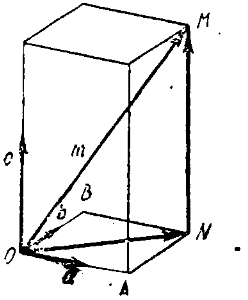
в) $[DA]$, $[DC]$ ва $[DB]$ қирралар уч нокомпланар векторни тасвирлайди (масалан, $[\overrightarrow{AD}]$; $[\overrightarrow{CD}]$; $[\overrightarrow{DB}]$ векторлар).▲

13- §. Векторни учта нокомпланар вектор бўйича ёйиш

Теорема. *Исталган m вектор ягона равишда учта a, b ва c нокомпланар векторларнинг чизиқли комбинацияси кўринишида тасвирланиши мумкин, шу билан бирга бундай тасвирланиш ягонадир:*

$$m = xa + yb + zc. \qquad (1)$$

☐ Аввало a, b ва c векторлар системасининг ҳар қайси икки вектори ноколлинеар эканлигини таъкидлаб ўтамиз, акс ҳолда a, b, c векторлар системаси компланар бўлар эди. Шунинг учун, агар m вектор берилган системанинг қандайдир икки вектори билан компланар бўлса, у ҳолда m вектор чизиқли комбинация кўринишида тасвирланиши мумкин [векторни икки ноколлинеар векторнинг чизиқли комбинацияси кўринишида тасвирланиши ҳақидаги теоремага кўра (11- §)].



37-чизма

m вектор берилган системанинг ҳеч қандай икки вектори билан компланар бўлмасин (37- чизма). Барча векторларни умумий O учга келтирамиз ва M нуқта ($\overrightarrow{OM} = m$ векторни тасвирловчи $[OM]$ йўналган кесманинг охири) орқали c векторга параллел тўғри чизиқ ўтказамиз. Бу тўғри чизиқ OAB текисликни N нуқтада кесиб ўтади. Равшанки, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM}$.

Коллинеар векторларнинг хоссасига ва векторни икки ноколлинеар вектор бўйича ёйиш теоремасига кўра шундай x, y ва z сонлар мавжудки, $\overrightarrow{ON} = xa + yb$ ва $\overrightarrow{NM} = zc$ бўлади.

Шундай қилиб,

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} = xa + yb + zc.$$

m векторни a, b ва c векторлар бўйича ёйилмасининг ягоналиги векторни иккита коллинеар вектор бўйича ёйиш теоремасида қилинган исботга ўхшаш исботланади (11- §.) ■

Таъриф. *Фазонинг базиси* деб, маълум тартибда олинган уч нокомпланар векторга айтилади.

e_1, e_2 ва e_3 бирор базис бўлсин. Агар

$$a = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

бўлса, x, y ва z сонлар a векторнинг мазкур базисдаги координаталари дейилади.

Шундай қилиб, фазонинг ҳар бир вектори тартибланган сонлар учлиги x, y ва z билан бир қийматли аниқланади. Ўзининг координаталари билан берилган фазо вектори

$$a = (x; y; z)$$

каби белгиланади.

Масала. Мос йўналган кесмалари учбурчакли $ABCD$ пирамида қирралари билан тасвирланадиган $\vec{DB}$, $\vec{BC}$ ва $\vec{DA}$ векторлар базис ташкил қилсин. Бу базисда $\vec{AB}$ векторнинг координаталарини топинг.

△ 36- чизмадан фойдаланамиз. Айирма формуласига кўра $\vec{AB} = \vec{DB} - \vec{DA}$ га эгамиз. $\vec{DA} = e_1$, $\vec{DB} = e_2$, $\vec{DC} = e_3$ деб белгилаб, қуйидагини ҳосил қиламиз: $\vec{AB} = - e_1 + e_2$ ёки $\vec{AB} = -1\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + 0\cdot e_3$, бундан $\vec{AB} = (-1, 1, 0)$.▲

14- §. Ўзларининг координаталари билан берилган векторлар устида амаллар

Агар векторлар e_1, e_2, e_3 базисда ўзларининг координаталари билан берилган бўлса, у ҳолда улар устида амаллар қуйидаги қоидалар бўйича бажарилади:

1. Икки (ёки ундан ортиқ) векторларни қўшишда уларнинг мос координаталари қўшилади:

$$(x_1\ y_1;\ z_1) + (x_2;\ y_2;\ z_2) = (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2).$$

□ Ҳақиқатан ҳам, икки $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ва $(x_2;\ y_2;\ z_2)$ вектор учун қуйидагига эгамиз:

$$(x_1\ y_1;\ z_1) + (x_2;\ y_2;\ z_2) = (x_1 e_1 + y_1 e_2 + z_1 e_2) + (x_2 e_1 + y_2 e_2 + z_2 e_3) = (x_1 + x_2) e_1 + (y_1 + y_2) e_2 + (z_1 + z_2) e_8 = (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2).$$

Учта ва ундан ортиқ векторлар бўлган ҳол ҳам шунга ўхшаш исботланади. ■

2. Векторларни айиришда уларнинг мос координаталари айирилади:

$$(x_1;\ y_1;\ z_1) - (x_2;\ y_2;\ z_2) = (x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2).$$

Бу қоидани мустақил асосланг.

3. Векторни сонга кўпайтиришда унинг барча координаталари шу сонга кўпайтирилади.

□ Ҳақиқатан ҳам, $(x_1; y_1; z_1)$ вектор ва λ сон учун қуйидагига эгамиз:

$$\lambda (x_1; y_1; z_1) = \lambda (x_1\boldsymbol{e}_1 + y_1\boldsymbol{e}_2 + z_1\boldsymbol{e}_3) =$$
$$= (\lambda x_1)\boldsymbol{e}_1 + (\lambda y_1)\boldsymbol{e}_2 + (\lambda z_1)\boldsymbol{e}_3 = (\lambda x_1;\ \lambda y_1;\ \lambda z_1). \blacksquare$$

Масала, $\boldsymbol{a} = (-4;\ 6;\ 0)$, $\boldsymbol{b} = (1; -1;\ 7)$ векторларнинг координаталари бўйича қуйидаги векторларнинг координаталарини топинг:

$$1)\ \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b};\quad 2)\ \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b};\quad 3)\ 5\boldsymbol{a}.$$

△ 1 — 3- қоидалардан фойдаланиб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (-3;\ 5;\ 7);\quad \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (-5;\ 7;\ -7);$$
$$5\boldsymbol{a} = (-20;\ 30;\ 0). \blacktriangle$$

15- §. Декарт координаталар системаси

Фазода ихтиёрий икки O ва M нуқта берилган бўлсин ва улардан бири, масалан, O нуқта бошланғич нуқта (уч) сифатида фиксирланган бўлсин. У ҳолда $\overrightarrow{OM}$ вектор M нуқтанинг O нуқтага нисбатан *радиус-вектори* дейилади (38- чизма).

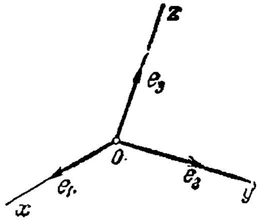
Фазода O нуқта ва бирор $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ базис берилган бўлсин. У ҳолда O нуқтадан ва бу базисдан иборат тўплам *Декарт координаталар системаси* дейилади. Бу ҳолда O нуқта *координаталар боши* дейилади.

Агар O нуқта орқали $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ ва $\boldsymbol{e}_3$ базис векторлар йўналишлари бўйича тўғри чизиқлар ўтказилса, у ҳолда бундай йўл билан ҳосил қилинган тўғри чизиқлар *координата ўқлари* (39- чизма), (Ox) тўғри чизиқ *абсциссалар ўқи*, (Oy) тўғри чизиқ *ординаталар ўқи*, (Oz) тўғри чизиқ эса *аппликаталар ўқи* дейилади.

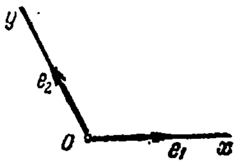
M нуқтанинг радиус-вектори координаталари мазкур координаталар системасида бу нуқтанинг *координаталари* дейилади (x — абсцисса, y — ордината. z — аппликата).

Текисликда Декарт координаталар системаси (ихтиёрий O нуқта ва текисликдаги бирор $\boldsymbol{e}_1$ ва $\boldsymbol{e}_2$ базисдан иборат тўплам) ҳам шунга ўхшаш аниқланади (40- чизма).

38-чизма



39·чизма.



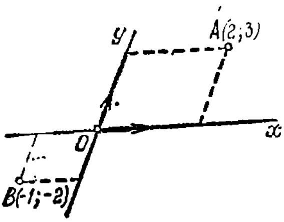
40-чизма

M нуқтанинг координаталарини одатда уни белгилайдиган ҳарф ёнига ёзилади: текисликда $M\ (x;\ y)$ ва фазода $M\ (x;\ y;\ z)$.

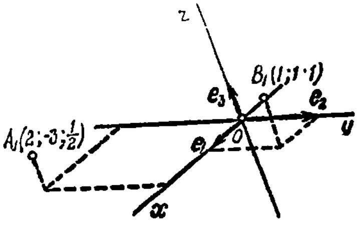
Равшанки, фазода Декарт координаталар системаси фазонинг нуқталари билан тартибланган сонлар учликлари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатади, текисликда эса нуқталар билан тартибланган сонлар жуфтлари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатади.

Масалан, A нуқтага (41- чизма) тартибланган сонлар жуфти (2; 3) мос келади; A нуқтага (42- чизма) эса тартибланган сонлар учлиги $\left(2;\ -3;\ \frac{1}{3}\right)$ мос келади. Тартибланган сонлар жуфти $(-1;\ -2)$ га текисликнинг ягона B нуқтаси (41- чизма), тартибланган сонлар учлиги (1; 1, 1) га эса фазонинг ягона B_1 нуқтаси мос келади (42- чизма).

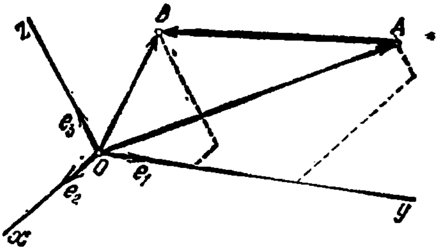
O, e_1, e_2, e_3 координаталар системасида бирор $\overrightarrow{AB}$ вектор берилган бўлсин. (43- чизма). У ҳолда вектор-



41-чизма.



42-чизма



43-чизма

лар айирмасининг таърифига кўра $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. A ва B нуқталарнинг координаталари мос равишда (x_1; y_1; z_2) ва (x_2; y_2; z_2) га тенг бўлсин. Унда 14- § даги 2- хоссага кўра

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$$

ни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, бирор векторнинг координаталарини топиш учун унинг охири координаталаридан бошининг бир исмли координаталарини айириш етарли.

1- масала. Агар $A(5;\ -7;\ 0{,}5)$ ва $B(2;\ -1;\ 2{,}5)$ бўлса $\overrightarrow{AB}$ векторнинг координаталарини топинг.

△ $\overrightarrow{AB} = (x;\ y;\ z)$ бўлсин. У ҳолда $x = 2 - 5 = -3$; $y = -1 - (-7) = 6$; $z = 2{,}5 - 0{,}5 = 2$.

Шундай қилиб, $\overrightarrow{AB} = (-3;\ 6;\ 2)$. ▲

Агар базис ташкил қиладиган e_1, e_2, e_3 векторлар жуфт-жуфти билан перпендикуляр бирлик векторлар бўлса, O, e_1, e_2, e_3 координаталар системаси *фазода тўғри бурчакли Декарт координаталар системаси* дейилади.

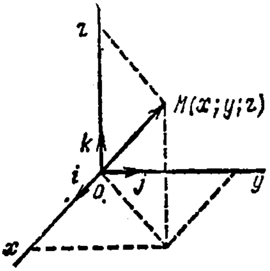
Шунга ўхшаш, агар e_1 ва e_2 бирлик базис векторлар ўзаро перпендикуляр бўлса, O, e_1, e_2 координаталар системаси *текисликда тўғри бурчакли Декарт координаталар системаси* дейилади.

Тўғри бурчакли Декарт координаталар системасининг бирлик базис векторларини одатда $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ ва $\boldsymbol{k}$ символлари билан белгиланади.

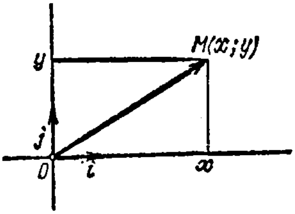
Фазо $a = \overrightarrow{OM}$ векторининг i, j ва k векторлар бўйича ёйилмаси

$$a = xi + yj + zk \text{ (44-чизма)}$$

кўринишда ёзилади.



44-чизма



45-чизма

Бу ҳолда a вектор фазонинг тўғри бурчакли Декарт базисида бирлик векторлар (ортлар) бўйича ёйилган дейилади.

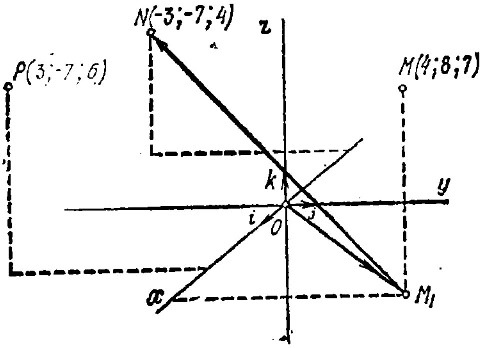
a векторни текисликнинг тўғри бурчакли Декарт базисида j ва i векторлар бўйича ёйилмасини

$$a = xi + yj \text{ (45- чизма)}$$

кўринишда ёзилади.

11- § ва 13-§ да векторнинг бундай ёйилиши ҳамма вақт мумкинлиги ва ягоналиги исботланган эди.

2- масала. 46- чизмада тасвирланган тўғри бурчакли Декарт базисида $\overrightarrow{OM_1}$ ва $\overrightarrow{M_1N}$ векторларнинг ёйилмасини топинг.



46-чизма

△ Дастлаб, M_1 нуқтанинг координаталарини топамиз. M_1 нуқта M нуқтанинг xOy текисликдаги проекцияси бўлгани учун M_1 (4; 8; 0). У ҳолда

$$\overrightarrow{OM_1} = 4\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j} + 0\cdot\boldsymbol{k}.$$

Энди берилган базисда $\overrightarrow{M_1N}$ векторнинг координаталарини топамиз. $\overrightarrow{M_1N} = (-3-4;\ -7-8;\ 4-0)$ ва $\overrightarrow{M_1N} = (-7;\ -15;\ 4)$. У ҳолда $\overrightarrow{M_1N} = 7\boldsymbol{i} - 15\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$.▲

16- §. Қутб координаталар системаси

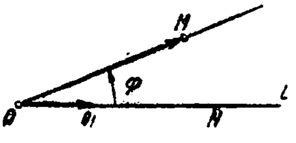
Текисликда нуқтанинг вазиятини сонлар ёрдамида аниқлашнинг яна бир усули — қутб координаталар системаси билан танишамиз.

Текисликда бирор O нуқта, $[ON)$ нур (47-чизма) ва $[ON)$ нур билан бир хил йўналган e_1 бирлик вектор берилган бўлсин.

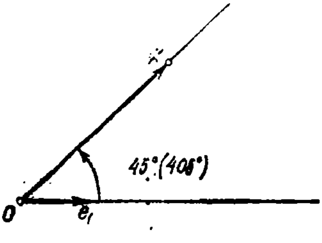
$M \neq O$ нуқта, $\overrightarrow{OM}$ вектор ва l ўқнинг $[ON)$ нури орасидаги $\widehat{MON}$ бурчак катталиги $[ON)$ нурдан мусбат йўналиш бўйича (соат стрелкаси ҳаракатига қарама-қарши йўналишда) қараладиган ва градусларда ўлчанадиган катталик бўлсин.

У ҳолда $\varphi = \widehat{MON}$ ва $r = |\overrightarrow{OM}|$ лар M нуқтанинг *қутб координаталари* дейилади: r — *қутбий радиус*, φ — *қутбий бурчак*.

M нуқтанинг қутб координаталари қуйидагича ёзи-



47-чизма

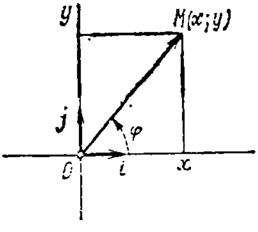


48-чизма

лади: $M\ (r;\ \varphi)$. O нуқта ***қутб***, l ***ўқ*** эса ***қутбий ўқ*** деб аталади.

Агар $M=O$ бўлса, $r=0$, φ нинг қиймати эса аниқланмаган. Текисликнинг ихтиёрий нуқтаси $r>0$ га эга ва φ нинг қиймати 360° га каррали қўшилувчи аниқлигида аниқланади. Бошқача айтганда, масалан, (3; 45°) ва (3; 405°) жуфтлар биргина K нуқтанинг қутб координаталари бўлади (48- чизма).

Шундай қилиб, агар $r=0$ бўлса, $(r;\ \varphi)$ сонлар жуфтига O нуқта—қутб тўғри келади; агар $r>0$ бўлса, $(r_1;\ \varphi_1)$ ва $(r_2;\ \varphi_2)$ сонлар жуфтига $r_1=r_2$ ва $\varphi_1-\varphi_2=360°k$ бўлганда (бунда $k\in Z$) биргина нуқта мос келади.



49-чизма

Текисликнинг битта M нуқтасининг қутб ва Декарт координаталари орасидаги боғланишни аниқлаймиз.

Текисликда $(O;\ i;\ j)$ Декарт координаталар системаси берилган бўлсин. Координаталар боши—O нуқтани қутб деб, абсциссалар ўқининг $[Ox)$ нурини—қутб ўқи l деб қабул қиламиз (49- чизма). У ҳолда ординаталар ўқининг $[Oy)$ нури l га 90° бурчак остида йўналган (агар бу бурчакни соат стрелкасига ҳаракатига қарама-қарши ҳисобласак).

Равшанки, M нуқтанинг Декарт координаталари унинг қутб координаталари орқали қуйидагича ифодаланади:

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi. \tag{1}$$

(1) формулалар M нуқтанинг тўғри бурчакли Декарт координаталаридан қутб координаталарига ўтишга (ва аксинча ўтишга) имкон беради.

□ x ва y лар M нуқтанинг тўғри бурчакли Декарт координаталари бўлсин. У ҳолда $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$,

$$x^2+y^2=r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=r^2\cdot 1=r^2.$$

Шундай қилиб, $x^2+y^2=r^2$, бундан

$$r=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{2}$$

$r\geqslant 0$ бўлгани учун (2) формулада илдиз „+“ ишора билан олинади.

Агар $r \neq 0$ ($M \neq O$) бўлса, у ҳолда (1) ва (2) дан қуйидаги келиб чиқади.

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \qquad (3)$$

1-масала. $M\ (-1;\ \sqrt{3})$ нуқтанинг қутб координаталарини топинг.

$\triangle$(2) формуладан $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ ни топамиз.

$2 \neq 0$ бўлгани учун (3) формулаларга кўра

$$\cos\varphi = \frac{-1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

га эгамиз, бундан $\varphi = 120°$. Шундай қилиб, $M\ (2;\ 120°)$.▲

2-масала. $M(4;\ 135°)$ нуқтанинг тўғри бурчакли Декарт координаталарини топинг.

$\triangle$(1) формулага кўра қуйидагига эгамиз;

$$x = 4\cdot\cos 135° = 4\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2},$$

$$y = 4\cdot\sin 135° = 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

Шундай қилиб, $M(-2\sqrt{2};\ 2\sqrt{2})$.▲

17-§. Кесманинг тўғри бурчакли координаталардаги узунлиги

Саккиз йиллик мактаб геометрия курсидан маълумки, координата тўғри чизиғида (ўқида) жойлашган A ва B нуқталар орасидаги d масофа

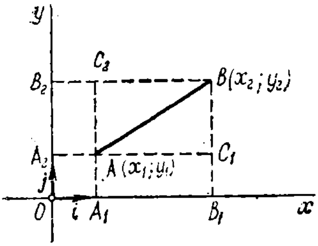
$$d = |AB| = |x_B - x_A| \qquad (1)$$

формула бўйича ҳисобланади, бу ерда x_A ва x_B — бу тўғри чизиқдаги A ва B нуқталарнинг координаталари.

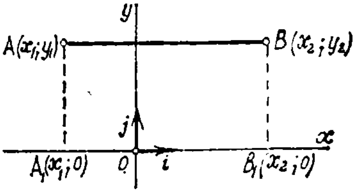
Энди текисликда ва фазода жойлашган $[AB]$ кесманинг узунлиги координаталар орқали қандай ифодаланиши масаласини кўриб чиқамиз.

Тўғри бурчакли O, $\vec{i}$, $\vec{j}$ координаталар системасида текисликнинг $A(x_1;\ y_1)$ ва $B\ (x_2;\ y_2)$ нуқталари берилган бўлсин. $[AB]$ кесманинг узунлиги d ни топиш талаб қилинади.

AB кесма координата ўқларига параллел бўлмаган ҳолни қараймиз (50-чизма). A ва B нуқталар орқали



50-чизма



51-чизма

координаталар ўқларига параллел тўғри чизиқлар ўтказамиз: бу тўғри чизиқларнинг ўқлар билан кесишиш нуқталари A_1, B_1, A_2, B_2 бўлсин.

Пифагор теоремасига кўра ABC_1 учбурчакдан $|AB|^2 = |AC|^2 + |C_1B|^2$ ни топамиз, лекин $|AC_1| = |A_1B_1| = |x_2 - x_1|$ ва $|C_1B| = |A_2B_2| = |y_2 - y_1|$ бўлгани учун

$$|AB|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

ва, демак,

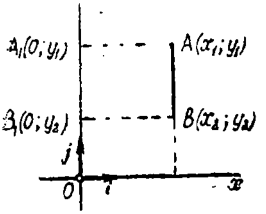
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (2)$$

Агарда $[AB]$ кесма (Ox) абциссалар ўқига параллел бўлса, унда $y_1 = y_2$ (51-чизма); $[AB]$ кесманинг узунлиги $[A_1B_1]$ кесманинг узунлигига тенг, демак,

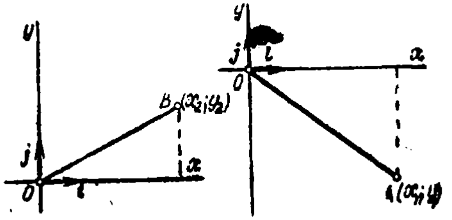
$$|A\text{Б}| = |A_1B_1| = |x_2 - x_1|.$$

Агар $[AB] \in (Ox)$ бўлса ҳам шунинг ўзи ҳосил бўлади, бу ҳолда $y_1 = y_2 = 0$.

Агар $[AB]$ кесма (Oy) ординаталар ўқига параллел бўлса (52-чизма), у ҳолда $|AB| = |y_2 - y_1|$ бўлиши шунга ўхшаш кўрсатилади.



52-чизма

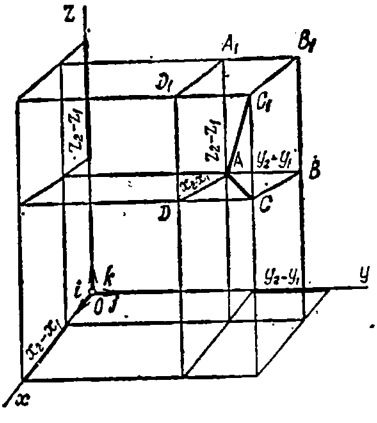


53-чизма

Шундай қилиб, текисликдаги кесманинг узунлиги унинг учларининг бир исмли координаталари айирмаларининг квадратлари йиғиндисидан олинган квадрат илдизга тенг.

Агар *А* ёки *В* нуқталардан бири координаталар боши билан устма-уст тушса, у ҳолда (2) формула соддалашади ва қуйидаги кўринишни олади (53- чизма):

$$d = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \text{ ёки } d = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$



54-чизма

А ва C_1 нуқталар фазода жойлашган бўлсин; $A(x_1, y_1; z_1)$ ва C_1 $(x_2; y_2. z_2)$.

Тўғри бурчакли $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедни ясаймиз; бунда *А* ва C_1 нуқталар унинг диагоналининг учлари бўлсин (54- чизма). У ҳолда $\triangle ADC$ ва $\triangle ACC_1$ дан Пифагор теоремасига кўра $|AC_1| = \sqrt{|AD|^2 + |DC|^2 + |CC_1|^2}$ келиб чиқади. $|AD|$, $|DC|$ ва $|CC_1|$ ларни координаталар орқали ифодалаб,

$$d^2 = |AC_1|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2$$

ни ёки

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (3)$$

ни ҳосил қиламиз. Равшанки, $z_1 = z_2 = 0$ да (3) формула (2) формулага айланади; бу ҳолда $]AC_1]$ кесма xOy текисликка тегишли бўлади.

18-§. Векторнинг тўғри бурчакли координаталардаги узунлиги

$\overrightarrow{AB}$ векторнинг узунлиги $|AB|$ масофа сифатида, яъни $[AB]$ кесманинг узунлиги сифатида аниқланишини эслатиб ўтамиз.

Шунинг учун олдинги параграфнинг (2) ва (4) формулаларидан фойдаланиб, текисликдаги вектор ва фазодаги вектор узунлигини мос равишда қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$|\overrightarrow{AB}| = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (1)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (2)$$

15- § да Декарт координаталар системасида берилган $\overrightarrow{AB}$ векторнинг бу векторни тасвирловчи йўналган $[AB]$ кесма боши ва охирининг координаталари орқали ифодаси ҳосил қилинган эди:

$$[\overrightarrow{AB}] = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$$

$x_2 - x_1 = x$, $y_2 - y_1 = y$, $z_2 - z_1 = z$ деб белгилаб, векторнинг координаталар орқали ифодасини ҳосил қиламиз: $\overrightarrow{AB} = (x;\ y;\ z)$.

У ҳолда текислик вектори ва фазо векторининг узунлиги қуйидагича ифодаланади:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ (текислик учун)}, \qquad (3)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ (фазо учун)}. \qquad (4)$$

1-масала. Агар $A(4;\ 1)$, $B(7;\ 5)$ бўлса, $\overrightarrow{AB}$ векторнинг узунлигини топинг.

$$\triangle\ |\overrightarrow{AB}| = |AB| = \sqrt{(7-4)^2 + (5-1)^2} = 5. \ \blacktriangle$$

2-масала. Агар $A(3;\ 5;\ 1)$, $B(5;\ 6;\ 3)$ бўлса, $\overrightarrow{AB}$ векторнинг узунлигини топинг.

$$\triangle\ |\overrightarrow{AB}| = |AB| = \sqrt{(5-3)^2 + (6-5)^2 + (3-1)^2} = 3. \ \blacktriangle$$

3-масала. $\overrightarrow{AB} = (2;\ 3; -6)$ векторнинг узунлигини топинг.

$$\triangle\ |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2} = 7. \ \blacktriangle$$

19-§. Икки векторнинг скаляр кўпайтмаси

Икки вектор устида янги амал—векторларни скаляр кўпайтириш амалини кўриб чиқамиз.

Бу амалнинг хусусияти шундаки, векторлар устида бу амални бажариш натижасида вектор эмас, балки сон (скаляр) ҳосил қилинади.

Таъриф. Икки ноль бўлмаган векторнинг *скаляр кўпайтмаси* деб, бу векторлар узунликлари билан улар орасидаги бурчак косинусининг кўпайтмасига тенг сонга айтилади. Агар бу векторлардан камида бири ноль вектор бўлса, у ҳолда уларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг деб қабул қилинади. $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ билан белгиланади.

Шундай қилиб, таърифга

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi, \qquad (1)$$

бу ерда $\varphi=(\widehat{\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b}})$, $0\leqslant\varphi\leqslant 180°$.

Агар $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ бўлса, скаляр кўпайтма $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ кўринишни олади ва $\boldsymbol{a}$ векторнинг скаляр квадрати дейилади ҳамда $\boldsymbol{a}^2$ символ билан белгиланади.

$\cos(\widehat{\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{a}})=\cos 0°=1$ бўлгани учун (1) формуладан

$$\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$$

келиб чиқади, яъни $\boldsymbol{a}$ векторнинг скаляр квадрати унинг узунлиги квадратига тенг.

Баъзан векторларнинг скаляр кўпайтмасини проекция терминларида ифодалаш кулай бўлади.

Икки $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$ ва $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$ вектор берилган бўлсин. Улар орасидаги бурчакни φ орқали белгилаймиз. $\boldsymbol{b}$ векторнинг йўналиши $\boldsymbol{a}$ векторнинг йўналиши билан бир хил бўлган ўқдаги проекцияси

$$\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cos\varphi \qquad (2)$$

формула билан ифодаланади (9 ва 10-§ ларга қаранг). Шунга ўхшаш,

$$\text{пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi. \qquad (3)$$

(1) ва (2), (1) ва (3) формулалардан фойдаланиб, қуйидагиларни ёзиш мумкин:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} \qquad (4)$$

ёки

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cdot\text{пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}. \qquad (5)$$

Шундай қилиб, икки векторнинг скаляр кўпайтмаси улардан бирининг узунлиги билан иккинчи векторнинг биринчи вектор йўналиши бўйича проекциясининг кўпайтмасига тенг экан.

1-масала. Агар a ва b векторлар орасидаги φ бурчак $90°<\varphi\leqslant180°$ оралиқда бўлса, уларнинг скаляр кўпайтмаси қандай ишорага эга бўлади?

$$\triangle\, a\cdot b=|a|\cdot|b|\cos\varphi$$

формулада $|a|$ ва $|b|$ сонлар манфий бўлмагани учун $a\cdot b$ нинг ишораси $\cos\varphi$ га боғлиқ бўлади. $]\,90°;\ 180°]$ оралиқда $\cos\varphi<0$, шунинг учун $a\cdot b<0$.▲

2-масала. Агар $a\cdot b>0$ бўлса, a ва b векторлар орасидаги φ бурчакнинг катталиги қайси оралиқда бўлади?

$\triangle\, a\cdot b>0$ бўлгани учун $|a|\neq0$, $|b|\neq0$ ва $\cos\varphi>0$. Бундан $\varphi\in[0°;\ 90°[$. ▲

20-§. Векторлар скаляр кўпайтмасининг хоссалари

1. Икки векторнинг ўзаро перпендикулярлиги.

Теорема. *Икки ноль бўлмаган вектор перпендикуляр бўлиши учун уларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлиши зарур ва етарли:*

$$(a\neq 0,\ b\neq 0,\ a\cdot b=0)\Leftrightarrow a\perp b, \qquad (1)$$

☐ Зарурлиги. $a\perp b$ бўлсин. У ҳолда

$$\varphi=(\widehat{a;\ b})=90° \text{ ва } a\cdot b=|a|\cdot|b|\cdot\cos90°=0.$$

Етарлилиги. $a\cdot b=0$, $a\neq0$, $b\neq0$ бўлсин. $a\neq0$, $b\neq0$ бўлгани учун $|a|\neq0$, $|b|\neq0$ ва $|a|\,|b|\cos\varphi\neq0$ бўлгани сабабли $\cos\varphi=0$, бундан $\varphi=90°$, яъни $a\perp b$. Шундай қилиб, $(a\neq0,\ b\neq0,\ a\cdot b=0)\Rightarrow a\perp b$. ☐

2. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси коммутативлик хоссасига эга:

$$a\cdot b=b\cdot a \qquad (2)$$

☐$(\widehat{a\cdot b})=(\widehat{b\cdot a})$ ва $|a|\cdot|b|=|b|\cdot|a|$ бўлгани учун

$$a\cdot b=|a|\cdot|b|\cos(\widehat{a;\ b})=|b|\cdot|a|\cos(\widehat{b;\ a})=b\cdot a.$$

Агар $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ ёки $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ бўлса, у ҳолда скаляр кўпайтма таърифига кўра $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ ва $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=0$, яъни $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$. ■

3. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси векторни сонга кўпайтиришга нисбатан ассоциативлик хоссасига эга:

$$(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=k(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) \qquad (3)$$

□ $\widehat{(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b})}=\varphi$ ва $\widehat{(k\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b})}=\varphi_1$ деб белгилаймиз.

а) $k>0$ бўлсин; у ҳолда $\widehat{(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b})}=\widehat{(k\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b})}$, яъни $\varphi=\varphi_1$. Шунинг учун $(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=|k\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi_1=k|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\varphi=k(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

б) $k>0$ бўлсин; у ҳолда $k\boldsymbol{a}\uparrow\downarrow\boldsymbol{a}$ ва $\varphi_1=180^\circ-\varphi$. Шунинг учун $(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=|k\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\varphi_1=|k|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\times\cos(180^\circ-\varphi)=-k\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot(-\cos\varphi)=k\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi=k(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

в) Агар $k=0$, ёки $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, ёки $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ бўлса, $(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=0$ ва $k(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=0$, яъни $(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=k(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$. ■

4. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси векторларни қўшиш операциясига нисбатан дистрибутивлик хоссасига эга:

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}. \qquad (4)$$

□ Бу хоссанинг исботини соддалаштириш учун скаляр кўпайтманинг проекциялардаги ифодасини қўллаймиз (19- §).

Агар $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ бўлса, (4) хосса ўринлиги равшан.

$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ бўлсин. У ҳолда $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|\cdot\text{пр}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|\cdot(\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}+\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|\ \text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{a}|\cdot\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

Исбот қилишда векторнинг ўққа проекциясининг маълум хоссаларидан (9- §) фойдаланилди. ■

(2) ва (4) дан

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \qquad (5)$$

формула келиб чиқишини эслатиб ўтамиз.

Векторларнинг скаляр кўпайтмаси хоссалари билан ҳақиқий сонлар кўпайтмаси хоссалари орасидаги ўхшашлик скаляр кўпайтмалар билан алмаштиришлар ва ҳисоблашлар олиб боришни енгиллаштиради.

Масала. Қуйидаги айниятларни исботланг.

а) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$; (6)

в) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$. (7)

△ Скаляр кўпайтманинг (2)—(5) хоссаларидан фойдаланиб, қуйидагиларга эга бўламиз: а) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2=(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}+(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{aa}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}^2=\mathbf{a}^2+2\mathbf{ab}=\mathbf{b}^2$.

б) $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$ бўлгани учун (7) айният юқоридагига ўхшаш исботланади.▲

21-§. Ўз координаталари билан берилган векторларнинг скаляр кўпайтмаси

Текисликда бирор Декарт координаталар системаси бор ҳамда $\mathbf{a}=(x_1;\ y_1)$ ва $\mathbf{b}=(x_2;\ y_2)$ векторлар берилган бўлсин.

$$\mathbf{a}=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j},\quad \mathbf{b}=x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j} \tag{1}$$

бўлгани учун скаляр кўпайтманинг тегишли хоссаларини қўлланиб,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=(x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j})\cdot(x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j})=$$
$$=(x_1x_2)\mathbf{i}^2+(x_1y_2)\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}+(y_1x_2)\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}+(y_1y_2)\mathbf{j}^2 \tag{2}$$

ни ҳосил қиламиз.

Равшанки, $\mathbf{i}^2=\mathbf{j}^2=1$ ва $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}=0$ $(\mathbf{i}\perp\mathbf{j})$ шунинг учун (2) тенглик қуйидаги кўринишни олади:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=x_1x_2+y_1y_2. \tag{3}$$

Фазонинг $\mathbf{a}$ ва $\mathbf{b}$ векторлари тўғри бурчакли Декарт координаталар системасида берилган бўлсин:

$$\mathbf{a}=(x_1;y_1;z_1),\quad \mathbf{b}=(x_2;y_2;z_2).$$

Юқоридагига ўхшаш

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

ни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, икки векторнинг скаляр кўпайтмаси бу векторларнинг бир исмли координаталари кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг.

1-масала. Агар $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$, $\mathbf{b}=-5\mathbf{i}+\mathbf{j}$ бўлса, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ ни ҳисобланг.

△ $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=(2\mathbf{i}+3\mathbf{j})(-5\mathbf{i}+\mathbf{j})=2\cdot(-5)+3\cdot1=-7$.▲

2-масала. Агар $a=(2;-3;4)$, $b=(5;7;-1)$ бўлса, $a\cdot b$ ни ҳисобланг.

$$\triangle\; a\cdot b=2\cdot5+(-3)\cdot7+4\cdot(-1)=-15. \blacktriangle$$

3-масала. $a=(x;y;z)$ векторнинг узунлигини топинг.

△ (4) формулани қўлланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз: $a\cdot a=xx+yy+zz$ ёки $a^2=x^2+y^2+z^2$, бундан

$$|a|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \blacktriangle$$

22-§. Икки вектор орасидаги бурчакни ҳисоблаш.

Скаляр кўпайтманинг таърифига кўра $a\cdot b=|a|\cdot|b|\times\cos\varphi$ га эгамиз, бу ерда $\varphi=(\widehat{a;\,b})$, бундан агар $a\neq0$, $b\neq0$ бўлса,

$$\cos(\widehat{a;\,b})=\frac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|}. \qquad (1)$$

Ноль бўлмаган a ва b векторлар орасидаги бурчак косинуси бу векторларнинг скаляр кўпайтмасини уларнинг узунликлари кўпайтмасига бўлинганига тенг.

Фазода тўғри бурчакли Декарт координаталар системаси бор бўлиб, $a=(x_1;y_1;z_1)$ ва $b=(x_2;y_2;z_2)$ векторлар берилган бўлсин.

21-§даги (4) формулага кўра $a\cdot b=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$ га эгамиз:

$$|a|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}, \qquad |b|=\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}$$

(21-§, 3-масаланинг ечилишига қаранг).

Энди (1) тенгликдан фойдаланиб,

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} \qquad (2)$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу формула a ва b векторлар орасидаги бурчакни бу векторларнинг координаталари орқали ҳисоблаш имконини беради.

Агар a ва b векторлар текисликнинг тўғри бурчакли Декарт координаталар системасида қаралаётган бўлса, (2) қуйидаги кўринишни олади:

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}. \qquad (8)$$

1-масала. Икки $\boldsymbol{a}=(3;4)$ ва $\boldsymbol{b}=(4;3)$ вектор берилган. Улар орасидаги бурчакни топинг.

△ Векторларнинг координаталарини (3) формулага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}})=\frac{3\cdot4+4\cdot3}{\sqrt{3^2+4^2}\cdot\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{24}{25},$$

бундан (жадвал бўйича) $(\widehat{\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}})\approx16°50'$.▲

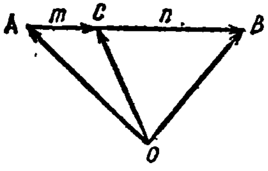
2-масала. Қуйидаги векторлар орасидаги бурчак косинусини топинг: $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$.

△ (2) формуладан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}})=\frac{2\cdot1+2\cdot(-2)+(-1)\cdot2}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=-\frac{4}{9}.$$▲

23-§. Кесмани берилган нисбатда бўлиш

Векторларнинг геометрик масалаларни ечишда кўп фойдаланиладиган баъзи хоссаларини кўриб чиқамиз.



55-чизма

Равшанки,

$$\overrightarrow{AC}=\frac{m}{n}\overrightarrow{CB}\qquad(1)$$

бўлганда ва фақат шундагина $C\in[AB]$ нуқта $[AB]$ кесмани берилган $\frac{m}{n}$ нисбатда бўлади, яъни

$$\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CB}|}=\frac{m}{n}$$

бўлади.

Агар A, B ва C нуқталар бирор O нуқтага нисбатан $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ва $\overrightarrow{OC}$ радиус-векторлари билан берилган бўлса, у ҳолда (1) тенгликдан

$$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\frac{m}{n}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})$$

тенглик келиб чиқади, бундан

$$\overrightarrow{OC}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}\qquad(2)$$

ни топамиз.

(2) формула $[AB]$ кесмани $\frac{m}{n}$ нисбатда бўлувчи изланаётган C нуқтанинг радиус-векторини берилган A ва B нуқталарнинг радиус-векторлари орқали ифодалайди.

Хусусан, агар C нуқта $[AB]$ кесманинг ўртаси бўлса, у ҳолда

$$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}). \tag{3}$$

Фазода O, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ координаталар системаси ва шу координаталар системасида $[AB]$ кесма A ва B нуқталарнинг координаталари билан берилган бўлсин: $A(x_1;$ $y_1;$ $z_1)$ ва B $(x_2,$ $y_2,$ $z_2)$.

У ҳолда $[AB]$ кесмани $\frac{m}{n}$ нисбатда бўлувчи $C(x;$ $y;$ $z)$ нуқтанинг координаталари (2) га асосан қуйидагича ифодаланади:

$$\begin{aligned} x&=\frac{n}{m+n}x_1+\frac{m}{m+n}x_2,\\ y&=\frac{n}{m+n}y_1+\frac{m}{m+n}y_2,\\ z&=\frac{n}{m+n}z_1+\frac{m}{m+n}z_2. \end{aligned} \tag{4}$$

Агар $[AB]$ кесма O, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ координаталар системаси киритилган текисликка тегишли бўлса, (4) формулалар қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\begin{aligned} x&=\frac{n}{m+n}x_1+\frac{m}{m+n}x_2,\\ y&=\frac{n}{m+n}y_1+\frac{m}{m+n}y_2, \end{aligned} \tag{5}$$

бу ерда $(x_1;$ $y_1)$ ва $(x_2;$ $y_2)$ лар A ва B нуқталарнинг координаталари.

Масала. Ихтиёрий ABC учбурчакнинг медианалари битта M нуқтада шундай кесишадики, бунда:

1) M нуқтадан учбурчакнинг ҳар бир учигача бўлган масофа мос медиана узунлигининг $\frac{2}{3}$ қисмига тенг.

2) ихтиёрий O нуқта учун

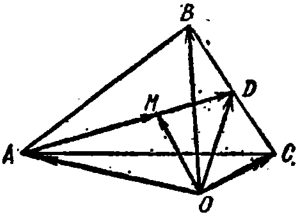
$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

муносабат ўринли.

△ M нуқта $[AD]$ кесманинг ўзунлигини **A нуқтадан** кессин дейлик (56-чизма). У ҳолда.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) =$$

$$= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) - \overrightarrow{OA}\right) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$



56-чизма

ABC учбурчакнинг бошқа ихтиёрий медианаси учун худди шундай натижа ҳосил қилинади. Бу M нуқта учала медиана учун умумий нуқта эканлигини билдиради. Бу билан масаланинг иккала тасдиғи ҳам исбот бўлди.▲

Масала ечимидан келиб чиқадики, агар M нуқта ABC учбурчак медианаларининг кесишиш нуқтаси ва O фазонинг ихтиёрий нуқтаси бўлса, қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}). \qquad (6)$$

24-§. Учта нуқтанинг бир тўғри чизиққа тегишлилиги

Масалаларни ечишда ва теоремаларни исботлашда кўпинча берилган учта нуқта бир тўғри чизиққа тегишли бўладими деган савол туғилади.

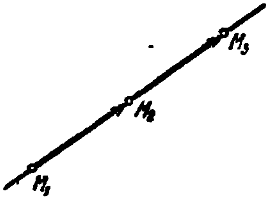
Равшанки, $\overrightarrow{M_1M_2}$ ва $\overrightarrow{M_1M_3}$ вектор коллинеар бўлганда, яъни

$$\overrightarrow{M_1M_8} = k\overrightarrow{M_1M_2} \qquad (1)$$

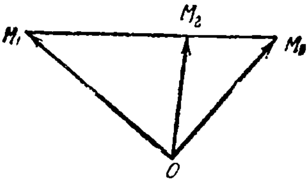
ўринли бўладиган k сон мавжуд бўлганда ва фақат шундагина M_1, M_2 ва M_3 нуқталар бир тўғри чизиқда ётади (57-чизма).

Агар M_1, M_2 ва M_3 нуқталар бирор O нуқтага нисбатан ўз радиус-векторлари билан берилган бўлса, у ҳолда (1) дан

$$\overrightarrow{OM_8} - \overrightarrow{OM_1} = k(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}) \qquad (2)$$



57-чизма



58-чизма

ёки

$$\overrightarrow{OM_3} = k\overrightarrow{OM_2} + (1-k)\overrightarrow{OM_1} \qquad (2')$$

тенгликлар келиб чиқади. (52- чизма).

Агар фазода O, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ координаталар системаси ва бу системада $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ ва $M_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$ нуқталар берилган бўлса, (1) дан (ёки (2) дан)

$$\begin{aligned} x_3 - x_1 &= k(x_2 - x_1), \\ y_3 - y_1 &= k(y_2 - y_1) \\ z_3 - z_1 &= k(z_2 - z_1) \end{aligned} \qquad (3)$$

бўладиган шундай k сон мавжуд бўлганда ва фақат шунда M_1, M_2 ва M_3 нуқталар бир нуқтада ётиши келиб чиқади.

Хусусан, агар O, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ координаталар системаси киритилган текисликда ётадиган учта нуқтанинг бир тўғри чизиққа тегишлилиги қаралаётган бўлса, у ҳолда

$$\begin{aligned} x_3 - x_1 &= k(x_2 - x_1), \\ y_3 - y_1 &= k(y_2 - y_1), \end{aligned} \qquad (4)$$

бўладиган k сон мавжуд бўлганда ва фақат шундагина $M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$ ва $M_3(x_3;\ y_3)$ нуқталар бир тўғри чизиқда ётади.

$M_1 \neq M_2$ бўлгани учун ё $x_1 \neq x_2$, ёки $y_1 \neq y_2$. Масалан, $x_1 \neq x_2$ бўлсин. У ҳолда (4) дан

$$k = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}$$

ва

$$y_3 - y_1 = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}(y_2 - y_1)$$

ни топамиз.

Демак,

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) = (x_3 - x_1)(y_2 - y_1). \qquad (5)$$

$y_1 \neq y_2$ бўлганда ҳам худди шу натижани ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, (5) тенглик бажарилганда ва фақат шундагина учта $M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$, $M_3(x_3;\ y_3)$ нуқта бир тўғри чизиқда ётади.

Равшанки, агар $x_1 \neq x_2$ ва $y_1 \neq y_2$ бўлса, (5) шарт

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} \qquad (6)$$

шартга эквивалент бўлади.

Масала. (M_1M_2) тўгри чизиқ M_1 (5; 0; 1) ва M_2 (4; 1; −2) нуқталар билан берилган. x ва y нинг қандай қийматларида M_3 (x, y, 4) нуқта $(M_1 M_2)$ тўғри чизиққа тегишли бўлади?

△ (3) формуладан фойдаланиб,

$$x - 5 - k(4 - 5),$$
$$y - 0 = k(1 - 0),$$
$$4 - 1 = k(-2 - 1)$$

га эга бўламиз, бундан кетма-кет

$$k = -1,$$
$$y = -1,$$
$$x = 6$$

ни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, агар $x = 6$, $y = -1$ бўлса, $M_3 \in (M_1\ M_2)$.▲

25-§. Геометрик масалаларни вектор методи билан ечишга доир мисоллар

Геометрик масалаларни вектор методи билан (яъни векторлардан фойдаланиб) ечишда масаланинг геометрик тавсифидан бу масаланинг вектор билан баён қилишга ўтиш керак. Сўнгра векторларнинг тегишли хоссаларидан фойдаланиб, масала хулосаси келиб чиқадиган баъзи вектор муносабатларни топиш лозим. Амалда бу қандай бажарилишини мисолларда кўрсатамиз.

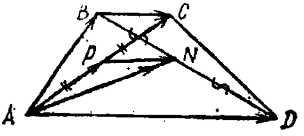
1-масала. Трапеция диагоналларининг ўрталарини туташтирувчи кесма унинг асосларига параллеллигини исбот қилинг.

△ 59- чизмани қараймиз. $(PN)\|(AD)$ ва $(PN)\|(BC)$ эканлигини исбот қилиш учун $\overrightarrow{PN}$ векторнинг $\overrightarrow{AD}$ ва $\overrightarrow{BC}$ векторларга коллинеарлигига ишонч ҳосил қилиш кифоя.

P ва N лар $[AC]$ ва $[BD]$ кесмаларнинг ўрталари бўлгани учун

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}),$$

$$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}).$$



59-чизма

Шунинг учун

$$\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=$$
$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}).$$

$\overrightarrow{BC}$ вектор $\overrightarrow{AD}$ векторга коллинеар, яъни $\overrightarrow{BC}=$ $=k_1\overrightarrow{AD}$. У ҳолда

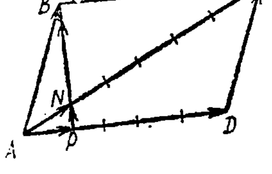
$$\overrightarrow{PN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-k_1\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}(1-k_1)\overrightarrow{AD}=k_2\overrightarrow{AD}.$$

Бу ердан $\overrightarrow{PN}$ вектор $\overrightarrow{AD}$ векторга коллинеар ва демак, (PN) тўғри чизиқ (AD) тўғри чизиққа параллель.

Худди шунга ўхшаш, $\overrightarrow{PN}$ ва $\overrightarrow{BC}$ векторлар коллинеарлигига ва шунинг учун $(PN)\parallel(BC)$ эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.▲

Шундай қилиб, бирор a ва b тўғри чизиқларнинг параллеллигига ишонч ҳосил қилиш учун $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$ эканини кўрсатиш етарли, бунда $[AB]\in a$, $[CD]\in b$, k — сон.

2-масала. $ABCD$ параллелограммнинг AD томони ва AC диагоналида P ва N нуқталар $|AP|=\frac{1}{5}|AD|$ ва $|AN|=$ $=\frac{1}{6}|AC|$ бўладиган қилиб олинган (60- чизма). P, N ва B нуқталар бир тўғри чизиқда



60-чизма

ётишини исбот қилинг. N нуқта $[PB]$ кесмани қандай нисбатда бўлади?

△ P, N ва B нуқталар бир тўғри чизиқда ётишига ишонч қилиш учун $\overrightarrow{PN}$ ва $\overrightarrow{PB}$ векторларнинг коллинеарлигини исботлаш етарли (24-§, (1) формулага қаранг).

Шартга кўра қуйидагига эгамиз:

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AD},\quad \overrightarrow{AN}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$$

У ҳолда

$$\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AP}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{6}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})-$$
$$-\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{30}(5\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AD}).$$

Иккинчи томондан,

$$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{5}(5\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}).$$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ бўлгани учун ҳосил қилинган тенгликлардан $\overrightarrow{PB}=6\overrightarrow{PN}$ эканлиги келиб чиқади.

Бу эса P, N ва B нуқталар бир тўғри чизиқда ётишини билдиради.

$\overrightarrow{PB}=6\overrightarrow{PN}$ тенгликдан

$$\frac{|NB|}{|PN|}=5$$

келиб чиқади, яъни N нуқта $[PB]$ кесмани 5:1 нисбатда бўлади.▲

Бу масалани бошқача йўл билан, чунончи 24-§, (2′) формуладан ва 23-§, (2) формуладан фойдаланиб ечиш ҳам мумкин эди.

△ O нуқта сифатида параллелограммнинг A учини олиш қулай. $\overrightarrow{AN}=k\overrightarrow{AP}+(1-k)\overrightarrow{AB}$ эканини кўрсатамиз. Шартга кўра

$$\overrightarrow{AD}=5\overrightarrow{AP},\quad \overrightarrow{AC}=6\overrightarrow{AN}$$

га эгамиз. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ бўлгани учун $\overrightarrow{BC}=5\overrightarrow{AP}$.

Сўнгра $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, бундан

$$6\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AP}$$

ёки

$$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AP}.$$

Бу ерда $k=\frac{1}{6}$, $1-k=\frac{5}{6}$. Шу билан биз P, N ва B нуқталарнинг бир тўғри чизиқда ётишини кўрсатдик.

Изланаётган $\frac{|NB|}{|PN|}=\frac{m}{n}$ нисбатни 23- §, (2) формуладан фойдаланиб топиш мумкин.

Бу ҳолда у

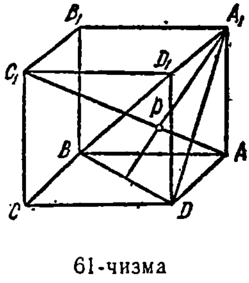
$$\overrightarrow{AN}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AP}$$

кўринишга эга.

Бу формулани аввал ҳосил қилинган $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+$ $+\frac{5}{6}\overrightarrow{AP}$ тенглик билан солиштириб кўрамизки, $m+n=6$, $n=1$, $m=5$.

Бундан $\frac{|NB|}{|PN|}=\frac{5}{1}$. ▲

3-масала. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб берилган. $\triangle A_1BD$ учбурчак медианаларининг кесишиш нуқтаси кубнинг AC_1 диагоналига тегишли ва уни $1:2$ нисбатда бўлишини исбот қилинг.



61-чизма

△ Масалани ечиш учун (61- чизма) $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AC_1}$ эканини кўрсатиш етарли (У ҳолда C_1, P, A нуқталар бир тўғри чизиқда ётади). Учбурчак медианаларининг кесишиш формуласидан $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})$ га эгамиз. Лекин $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AC_1}$) параллелепипед қоидаси). Шундай қилиб, $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$, яъни $C_1\in(AC_1)$, $P\in(AC_1)$ ва $A\in(AC_1)$. $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ тенглик бир вақтда $|AP|:|PC_1|=1:2$ эканини кўрсатади. ▲

Шундай қилиб, учта P_1, P_2 ва P_3 нуқтанинг бир тўғри чизиқда ётишига ишонч ҳосил қилиш учун

$$\overrightarrow{P_1P_3} = k\overrightarrow{P_1P_2}$$

эканини кўрсатиш ёки

$$\overrightarrow{OP_3} = k\overrightarrow{OP_2} + (1-k)\overrightarrow{OP_1}$$

эканини кўрсатиш етарли, бу ерда O—ихтиёрий нуқта.

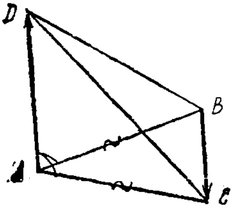
C нуқта бирор $[AB]$ кесмани бўладиган $\frac{m}{n}$ нисбатни аниқлаш учун

$$\overrightarrow{AC} = \frac{m}{u}\overrightarrow{CB}$$

ёки

$$\overrightarrow{OC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$$

тенгликни аниқлаш ва шу билан m ва n сонларнинг қийматларини аниқлаш етарли, бу ерда O — ихтиёрий нуқта.



62-чизма

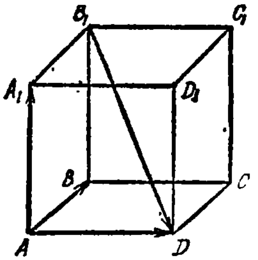
4-масала. $ABCD$ уч бурчакли пирамида берилган (62- чизма); $AB| = |AC| = a$; $\widehat{DAB} = \widehat{DAC} = \varphi$. $(AD)\perp(BC)$ ни исбот қилинг.

$\triangle$ Агар $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$ бўлса $(AD)\perp(BC)\cdot\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} - = |AD|\cdot a\cos\varphi - |AD|\cdot a\cos\varphi = o$, яъни $(AD)\perp(BC)$. ▲

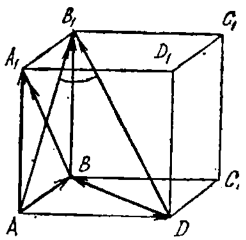
Шундай қилиб, бирор a ва b тўғри чизиқларнинг перпендикулярлигига ишонч ҳосил қилиш учун $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$ эканини кўрсатиш етарли, бу ерда A ва B нуқталар a тўғри чизиққа, C ва D нуқталар эса b тўғри чизиққа тегишли.

5-масала. Тўғри бурчакли параллелепипед берилган (63- чизма). Унда $|B_1D| = d$, $|AB| = a$, $|AD| = b$, $|AA_1| = c$. $d = a^2 + b^2 + c^2$ ни исбот қилинг.

$\triangle$ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ ва $\overrightarrow{AA_1}$ нокомпланар векторларни базис



63-чизма



64-чизма

векторлар сифатида танлаймиз ва улар бўйича $\overrightarrow{B_1D}$ векторни ёямиз. Параллелепипед қоидасига кўра

$$\overrightarrow{B_1D} = \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{B_1B} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA_1}$$

га эгамиз.

$\overrightarrow{B_1D}$ векторнинг скаляр квадратнни топамиз:

$$\overrightarrow{B_1D}^2 = (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA_1})^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AA_1}^2 -$$
$$-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1} - 2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}.$$

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ ва $\overrightarrow{AA_1}$ векторлар ўзаро перпендикуляр бўлгани учун

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0,\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1} = 0,\ \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1} = 0.$$

Шунинг учун

$$\overrightarrow{B_1D}^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 0 + 0 + 0.$$

Бундан $|B_1D|^2 = d^2 = a^2 + b^2 + c^2$. ▲

Шундай қилиб, кесманинг (векторнинг) узунлигини ҳисоблаш учун узунликлари ва улар орасидаги бурчакнинг катталиги маълум иккита ноколлинеар (учта нокомпланар) базис векторни танлаш, сўнгра узунлиги ҳисобланадиган векторни уларда ёйиш ва бу векторнинг скаляр квадратини $\mathbf{a}^2 = a^2$ формуладан фойдаланиб топиш етарли.

6- масала. Кубнинг диагонали **билан** унинг ён ёғининг диагоналлари орасидаги бурчакларнинг катталигини **топинг.**

△ $[DB_1]$ куб диагонали, $[AB_1]$ ва $[BA_1]$ унинг ён ёқлари диаогоналлари бўлсин (64- чизма). A, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ координаталар системасини киритамизки, $\overrightarrow{AD} = a\boldsymbol{i}$, $AB = a\boldsymbol{j}$ ва $AA_1 = a\boldsymbol{k}$ бўлсин, бунда a — куб қиррасининг узунлиги.

$\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{BA_1}$ ва $\overrightarrow{DB_1}$ векторларни $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ ва $\boldsymbol{k}$ векторлар орқали ифодалаймиз:

$$\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} = a\boldsymbol{j} + a\boldsymbol{k} = 0\boldsymbol{i} + a\boldsymbol{j} + a\boldsymbol{k},$$

$$\overrightarrow{BA_1} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} = -a\boldsymbol{j} + a\boldsymbol{k} = 0\boldsymbol{i} - a\boldsymbol{j} + a\boldsymbol{k},$$

$$\overrightarrow{DB_1} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} = a\boldsymbol{j} - a\boldsymbol{i} + a\boldsymbol{k}.$$

Шундай қилиб, танланган координаталар системасида:

$$\overrightarrow{AB_1} = (0;\ a;\ a),\ \overrightarrow{BA_1} = (0; -a;\ a),\ \overrightarrow{DB_1} = (-a;\ a;\ a)$$

Энди 22- §, (2) формуладан фойдаланамиз:

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AB_1};\ \overrightarrow{DB_1}}) = \frac{0\cdot(-a) + a\cdot a + a\cdot a}{\sqrt{0^2 + a^2 + a^2}\cdot\sqrt{(-a)^2 + a^2 + a^2}},$$

бундан

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AB_1};\ \overrightarrow{DB_1}}) = \frac{2a^2}{a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

$(\widehat{\overline{AB_1};\ \overrightarrow{DB_1}})$ нинг қийматини жадвалдан топиш қийин эмас.

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{BA_1};\ \overrightarrow{DB_1}}) = \frac{0\cdot(-a) + (-a)\cdot a + a\cdot a}{\sqrt{0^2 + (-a)^2 + a^2}\cdot\sqrt{(-a)^2 + a^2 + a^2}},$$

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{BA_1};\ \overrightarrow{DB_1}}) = \frac{-a^2 + a^2}{\sqrt{2a^2}\cdot\sqrt{3a^2}},$$

бундан

$\cos(\widehat{\overrightarrow{BA_1};\ \overrightarrow{DB_1}}) = 0$ ва шунинг учун $(\widehat{\overrightarrow{BA_1};\ \overrightarrow{DB_1}}) = 90°$. ▲

Бу масалани бир оз бошқачароқ ечиш мумкин эди.

Δ Базис векторлар сифатида $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{AA_1}$ векторларни танлаб, $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{BA_1}$ ва $\overrightarrow{DB_1}$ векторларни улар бўйича ёйинг:

$$\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1},$$
$$\overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB},$$
$$\overrightarrow{DB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AD}.$$

$|DB_1| = a\sqrt{3}$, $|AB_1| = |BA_1| = a\sqrt{2}$ эканлигини аниқлаб ва 23-§, (1) формуладан фойдаланиб, изланаётган бурчаклар косинусларини ҳисоблашга ўтинг.▲

Шундай қилиб, бурчак катталигини ҳисоблаш учун узунликлари ва ораларидаги бурчак катталиги маълум учта нокомпланар (иккита ноколлинеар) базис векторни танлаш етарли. Сўнгра изланаётган бурчакни берадиган векторларни топиш ва уларни базис векторлар бўйича ёйиш ҳамда агар $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторлар ўз координаталари орқали ифодаланган бўлса,

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{b}}) = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}$$

ёки

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a};\, \boldsymbol{b}}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

формулалар бўйича изланаётган бурчак косинусини топиш керак.

7-масала. M_1 ва M_2 лар $\triangle A_1B_1C_1$ ва $\triangle A_2B_2C_2$ лар медианаларининг кесишиш нуқталари.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2})$$

ни исбот қилинг.

Δ Медианаларнинг кесишиш формуласидан фойдаланамиз (23-§, (6) формулага қаранг). O—фазонинг бирор нуқтаси бўлсин. У ҳолда

$$\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}),$$

$$\overrightarrow{OM_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OC_2}),$$

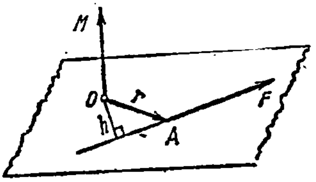
$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} =$$

$$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB_2} - \overrightarrow{OB_1}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OC_2} - \overrightarrow{OC_1}) =$$

$$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2}). \blacktriangle$$

Эслатиб ўтамизки, кўпгина масалаларни вектор методи билан ечишда кўпинча чизмадан фойдаланиш аслида ортиқча бўлади (бу 7- масаланинг ечилишидан кўриниб турибди). Бироқ кўпчилик ҳолларда масала шартига мос келувчи чизмани чизиб олиш фойдалидир.

26- §. Икки векторнинг вектор кўпайтмаси ва унинг хоссалари



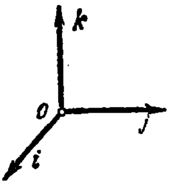
65-чизма

Физикада F кучнинг O нуқтага нисбатан моментини кўпинча боши O нуқтада бўлган ва O нуқта билан F куч ётадиган текисликка перпендикуляр $\overrightarrow{OM}$ вектор билан тасвирланади. Бу $\overrightarrow{OM}$ векторнинг узунлигини F вектор узунлигининг h елкага кўпайтмаси каби аниқланади (h - шу O нуқтадан F куч тасвирланган тўғри чизиққача бўлган масофа, 65- чизма) ёки

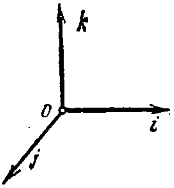
$$|\overrightarrow{OM}| = |F| \cdot |r| \cdot \sin(\widehat{F; r}),$$

бунда $r = \overrightarrow{OA}$ ўша F куч қўйиладиган нуқтанинг радиус-вектори. Агар F векторни O нуқтага кўчирсак, у ҳолда учта r, F ва $\overrightarrow{OM}$ вектор шу кўрсатилган тартибда i, j, k бирлик базис векторлар учлигига ўхшаш учлик (чап ёки ўнг) ташкил қилади.

Бирлик базис векторлар учлиги i, j, k берилган бўлсин. Агар k векторнинг охиридан қаралганда i вектордан j векторгача бўлган энг яқин бурилиш соат стрелкасига қарши бўлса (66- чизма) бу учлик *ўнг учлик*, агар



66-чизма



67-чизма

бу энг яқин бурилиш соат стрелкаси бўйича бўлса (67-чизма), бу учлик *чап учлик* деб аталади.

Таъриф. a векторнинг b векторга *вектор кўпайтмаси* деб қуйидаги учта шартни қаноатлантирадиган c векторга айтилади:

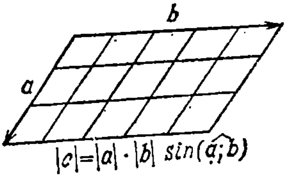
1) c векторнинг узунлиги $|c| = a \cdot b \cdot \sin(\widehat{a;b})$:

2) c вектор a ва b вектор кўпайтувчиларга перпендикуляр: $c \perp a$ ва $c \perp b$;

3) учта a, b, c вектор шу кўрсатилган тартибда бирлик базис векторлар учлигидек учлик ташкил қилади (ўнг ёки чап).

Икки векторнинг вектор кўпайтмаси $[a;b]$ символ билан белгиланади.

Биринчи шартни соф геометрик нуқтаи назардан таърифлаш мумкин: c векторнинг узунлиги вектор кўпайтувчиларда ясалган параллелограмм юзи нечта квадрат бирликдан иборат бўлса, шунча (шундай исмли) узунлик бирлигига эга (68- чизма).



68-чизма

Вектор кўпайтманинг баъзи хоссаларини кўриб чиқамиз:

1. Агар ё вектор $a=0$ ёки $b=0$, ёки a ва b векторлар коллинеар бўлса, вектор кўпайтма ноль вектор бўлади.

☐ Ҳақиқатан ҳам,
агар $a=0$, ёки $b=0$ ёки $(\widehat{a;b})=0$, яъни $\sin(\widehat{a;b})=0$ бўлса, биринчи шартга кўра қуйидагига эгамиз:

$$|c|=|a|\cdot|b| \sin(\widehat{a;b})=0.$$

Бундан икки векторнинг коллинеарлик шарти қуйидаги шартдир:

$$[a;b]=0.$$

2. Кўпайтувчиларнинг тартибини ўзгартирилганда вектор кўпайтма узунлигини сақлайди, лекин ўз йўналишини қарама-қарши йўналишга ўзгартиради:

$$[a;b]=-[b;a].$$

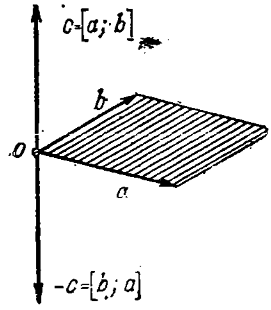
☐ Ҳақиқатан ҳам, вектор кўпайтма таърифининг 1) шартига кўра

$$[a;b]=|a|\cdot|b|\cdot\sin(\widehat{a;b}),$$

$$[b;a]=|b|\cdot|a|\sin(\widehat{b;a}).$$

$(\widehat{a;b})=(\widehat{b;a})$ бўлгани учун

$$|[a;b]|=|[b;a]|.$$



69-чизма

$[a;b]$ ва $[b;a]$ векторлар a ва b вектор кўпайтувчилар билан аниқланадиган текисликка перпендикуляр бўлиши керак. a, b ва $[a;b]$ векторлар (шунингдек b, a ва $[b;a]$ векторлар ҳам) ўнг (чап) учликлар ташкил қилиши керак, лекин бунда $[a;b]$ ва $[b;a]$ векторлар қарама-қарши йўналган бўлиши керак (69-чизма). ■

3. Вектор кўпайтма учун скаляр кўпайтувчига нисбатан группалаш хоссаси ўринли:

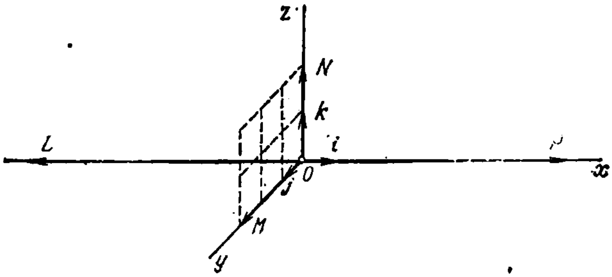
$$[ma;b]=[a;mb]=m[a;b].$$

4. Вектор кўпайтманинг тақсимот хоссаси қуйидаги тенглик билан ифодаланади:

$$[a+b;c]=[a;c]+[b;c].$$

Вектор кўпайтманинг 3 ва 4-хоссаларини исботсиз қабул қиламиз.

Масала $a=3j$ ва $b=2k$ векторларни тасвирланг.



70-чизма

$[\mathbf{a};\mathbf{b}]$ ва $[\mathbf{b};\mathbf{a}]$ вектор кўпайтмаларни топинг ва тасвирланг.

△ $O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ тўғри бурчакли координаталар системасини қарайлик (70- чизма). $\mathbf{a}=3\mathbf{j}$ вектор Oy ўқнинг $[OM]$ йўналган кесмаси билан тасвирланади; $\mathbf{b}=2\mathbf{k}$ вектор Oz ўқнинг $[ON]$ йўналган кесмаси билан тасвирланади. Вектор кўпайтма таърифининг 3) хоссаси бўйича $c=[\mathbf{a};\mathbf{b}]$ вектор $\mathbf{a}$ ва $\mathbf{b}$ векторлар билан биргаликда ўша $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ вектор базис каби (чап ёки ўнг) базис ташкил қилиши керак. 70- чизмадан кўриниб турибдики, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ векторлар чап вектор базис ташкил қилади. $\mathbf{c}$ вектор $\mathbf{i}$ векторга ноколлинеар бўлиши кераклиги учун, равшанки, унинг йўналиши $\mathbf{i}$ векторнинг йўналиши билан устма-уст тушади. Энди $\mathbf{c}$ векторнинг узунлигини ҳисоблаймиз:

$$|\mathbf{c}|=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\sin(\widehat{\mathbf{a};\mathbf{b}}),$$
$$|\mathbf{c}|=|3\mathbf{j}|\cdot|2\mathbf{k}|\sin 90^0=3\cdot 2\cdot 1=6.$$

Шундай қилиб c вектор $c=\overrightarrow{OP}=6\mathbf{i}$,
Равшанки, $[\mathbf{b};\mathbf{a}]=-[\mathbf{a};\mathbf{b}]=-\mathbf{c}=-6\mathbf{i}$,

$$[\mathbf{b};\mathbf{a}]=\overrightarrow{OL}.$$▲

27-§. Ўз координаталари билан берилган икки векторнинг вектор кўпайтмаси

Ортлар бўйича ёйилган икки вектор берилган бўлсин:

$$\mathbf{a}=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k},$$
$$\mathbf{b}=x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}.$$

Вектор кўпайтмани координаталарда ёзамиз ва уни вектор кўпайтманинг 3 ва 4-хоссаларидан фойдаланиб, алмаштирамиз:

$$\begin{aligned}[\mathbf{a};\ \mathbf{b}] &= [x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k};\ x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}] = \\ &= x_1x_2[\mathbf{i};\ \mathbf{i}]+x_1y_2[\mathbf{i};\ \mathbf{j}]+x_1z_2[\mathbf{i};\ \mathbf{k}]+ \\ &+ y_1x_2[\mathbf{j};\ \mathbf{i}]+y_1y_2[\mathbf{j};\ \mathbf{j}]+y_1z_2[\mathbf{j};\ \mathbf{k}]+z_1x_2[\mathbf{k};\ \mathbf{i}]+ \\ &+ z_1y_2[\mathbf{k};\ \mathbf{j}]+z_1z_2[\mathbf{k};\ \mathbf{k}]. \qquad (1)\end{aligned}$$

Вектор кўпайтманинг биринчи хоссасига кўра

$$[\mathbf{i};\ \mathbf{i}] = [\mathbf{j};\ \mathbf{j}] = [\mathbf{k};\ \mathbf{k}] = 0. \qquad (2)$$

Вектор кўпайтма таърифига кўра

$$[\mathbf{i};\ \mathbf{j}] = \mathbf{k},\ [\mathbf{j};\ \mathbf{k}] = \mathbf{i},\ [\mathbf{k};\ \mathbf{i}] = \mathbf{j}. \qquad (3)$$

Вектор кўпайтувчиларнинг ўрнини алмаштириш натижасида вектор кўпайтма ишораси қарама-қаршисига ўзгаради. Шунинг учун

$$[\mathbf{j};\ \mathbf{i}] = -\mathbf{k},\ [\mathbf{k};\ \mathbf{j}] = -\mathbf{i}\ [\mathbf{i};\ \mathbf{k}] = -\mathbf{j}. \qquad (4)$$

Юқорида кўрилган (2) — (4) тенгликларни ҳисобга олиб, (1) вектор кўпайтмани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$[\mathbf{a};\ \mathbf{b}] = x_1y_2\mathbf{k} - x_1z_2\mathbf{j} - y_1x_2\mathbf{k} + y_1z_2\mathbf{i} + z_1x_2\mathbf{j} - z_1y_2\mathbf{i}$$

ёки

$$[\mathbf{a};\ \mathbf{b}] = (y_1z_2 - z_1y_2)\,\mathbf{i} + (z_1x_2 - z_2x_1)\mathbf{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\mathbf{k}. \qquad (5)$$

(5) формула координаталари билан берилган икки вектор кўпайтмасининг ифодасидир.

Масала. Агар $a = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ва $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ бўлса, $[\mathbf{a};\ \mathbf{b}]$ вектор кўпайтмани топинг.

$\triangle\ [\mathbf{a};\ \mathbf{b}] = (3\cdot 1 - (-1)\cdot 2)\mathbf{i} + (-1\cdot 1 - 1\cdot 2)\mathbf{j} + (2\cdot 2 + 3\cdot 1)\mathbf{k}$

$[\mathbf{a};\ \mathbf{b}] = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}.$▲

I БОБГА ДОИР МАСАЛАЛАР

1. Айлана уч, тўрт ёки олти тенг бўлакка бўлинган (71-чизма). Ҳар бир ҳолда берилган векторларни топинг.

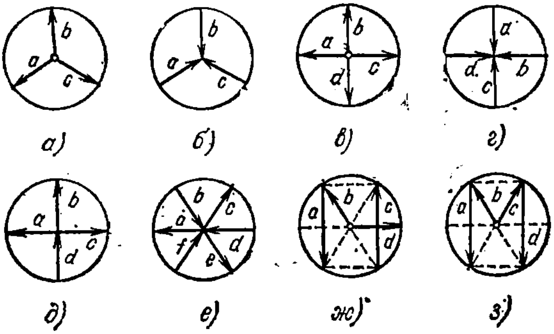
2. Жисмга икки F_1 ва F_2 куч таъсир қилади, $F_1=8$Н. $F_2=6$Н. Агар бу кучлар орасидаги бурчакнинг катталиги 90° га тенг бўлса, уларнинг тенг таъсир этувчисини топинг.

3. Сузувчининг тинч сувда сузиш тезлиги 4 км/соат, дарёнинг оқим тезлиги 3 км/соат. Дарёнинг қарама-қарши қирғоғидаги энг яқин нуқтага сузиб бориш учун қайси йўналишда сузиш кераклигини аниқланг. (Масалани график ёрдамида ечинг;)

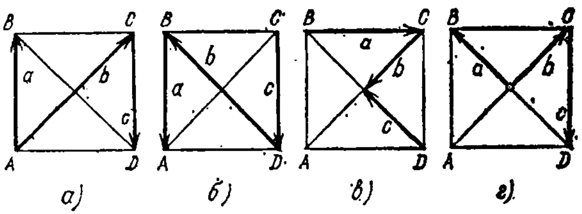
4. Мунтазам олтибурчак марказига учта кетма-кет учларга томон йўналган учта куч қўйилган. Агар берилган кучларнинг ҳар бирининг катталиги 1 Н га тенг бўлса, тенг таъсир этувчининг катталигини ва йўналишини топинг.

5. Тўртта a, b, c, d векторни шундай ясангки, уларнинг йиғиндилари бу векторлардан бирига тенг бўлсин: а) a; б) b; в) c; г) d.

6. Ихтиёрий $ABCDE$ бешбурчак ясанг ва $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$,



71-чизма



а) б) в) г)

72-чизма

$\overrightarrow{EA}$ векторларнинг йиғиндисини топинг. **Қандай топганингизни тушунтириб беринг.**

7. $ABCS$ тетраэдр берилган. **Векторларнинг қуйидаги йиғиндиларини топинг:** 1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CS}$; 2) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CS}+\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AB}$.

8. Тўрт бурчакли мунтазам $ABCDS$ (S — учи, O — **баландлик** асоси) пирамида берилган. $\overrightarrow{OS}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{DS}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{SC}$ векторлар йиғиндиси $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DA}$ векторлар йиғиндисига тенглигини исбот қилинг.

9. Текисликда тўртта ноколлинеар a, b, c ва d вектор берилган $a+b=c+d$ эканлигини маълум. Бу векторлардан тўртбурчак тузиш мумкин-мумкинмаслигини аниқланг.

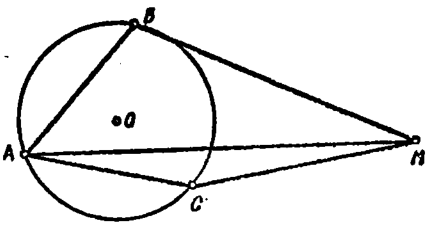
10. Квадратда диагоналлар ўтказилган (72-чизма). Ҳар бир квадрат учун уч векторнинг йиғиндиси $a+b+c$ ни топинг.

11. Исталган учбурчак медианаларидан учбурчак ясаш мумкинлигини исбот қилинг.

12. $ABCD$ — параллелограмм $\overrightarrow{AB}=a$, $\overrightarrow{AD}=b$, O—диагоналларнинг кесишиш нуқтаси. $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{CO}$ векторларни a ва b векторлар орқали ифодаланг.

13. $ABCD$ тўғри тўртбурчакда $\overrightarrow{AB}=a$, $\overrightarrow{AC}=b$ диагоналлар ўтказилган. $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}$ векторларни a ва b векторлар орқали ифодаланг.

14. ABC учбурчакда PN ўрта чизиқ ўтказилган ($P\in AB$). $\overrightarrow{PB}=a$, $\overrightarrow{NC}=b$ ва $\overrightarrow{CA}=c$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NC}$; $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{BN}$ векторларни a, b ва c **векторлар орқали ифодаланг.**



73-чизма

15. $ABCS$ тетраэдр берилган. Қуйидаги векторларни топинг: 1) $\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}$; 2) $\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SC}$; 3) $\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SC}$.

16. $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторлар берилган. Қуйидаги векторларни ясаш талаб қилинади: 1) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$; 2) $-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$; 3) $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

17. Учта $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ва $\boldsymbol{c}$ вектор берилган. Қуйидаги векторларни ясаш талаб қилинади: 1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$; 2) $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$; 3) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$; 4) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$; 5) $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$; 6) $-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$; 7) $-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

18. A, B, C нуқталар маркази O нуқтада бўлган айланага ички чизилган тенг томонли учбурчакнинг учлари. M нуқтага қўйилган ва $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ векторлар орқали тасвирланадиган учта кучнинг тенг таъсир этувчисини топинг (73- чизма).

19. $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторлар орасидаги бурчакнинг катталиги 120° га тенг. $|\boldsymbol{a}|=5$, $|\boldsymbol{b}|=3$. $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ ни топинг,

20. $\boldsymbol{a}$ вектор $k\boldsymbol{b}$ га тенг ($\boldsymbol{a}\neq 0$). k нинг қандай қийматларида: 1) $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$, 2) $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$; 3) $|\boldsymbol{a}|<|\boldsymbol{b}|$ бўлади?

21. ABC учбурчакда AD медиана ўтказилган. $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$ эканини исбот қилинг.

22. k нинг шундай қийматини топингки, $k\boldsymbol{a}$ (бунда $\boldsymbol{a}\neq 0$) векторнинг узунлиги: 1) $\boldsymbol{a}$ векторнинг узунлигига тенг; 2) $|3\boldsymbol{a}|$ дан катта; 3) $|5\boldsymbol{a}|$ дан кичик бўлсин.

23. 1) $|\boldsymbol{b}|=5$ ва $\boldsymbol{a}\uparrow\uparrow\boldsymbol{b}$; $|\boldsymbol{b}|=1$ ва $\boldsymbol{a}\uparrow\downarrow\boldsymbol{b}$ бўладиган $\boldsymbol{b}$ векторни ҳосил қилиш учун ноль бўлмаган $\boldsymbol{a}$ векторни кўпайтириш лозим бўлган сонни аниқланг.

24. Тўғри чизиқда кетма-кет учта M, N ва P нуқта олинган; A нуқта $[MN]$ кесманинг ўртаси, B нуқта $[NP]$ кесманинг ўртаси $\overrightarrow{AB}$ векторни $\overrightarrow{PM}$ вектор орқали ифодаланг.

25. $\boldsymbol{a}$ векторни кўпайтириш лозим бўлган шундай сонни аниқлангки, бунда $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$ вектор:

1) узунлиги бўйича 1 га тенг; 2) узунлиги бўйича 5 га тенг ва $\boldsymbol{a}\uparrow\uparrow\boldsymbol{b}$ бўлсин.

26. Тўғри чизиқда учта A, B, C нуқта шундай олинганки, бунда $\overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{CB}$. $\overrightarrow{AB}$ векторни $\overrightarrow{CB}$ вектор орқали ифодаланг.

27. ABC учбурчак берилган. Бу учбурчак медианаларининг кесишиш нуқтасини M орқали белгилайлик. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$ ни исботланг.

28. $ABCD$ тўғри тўртбурчакда диагоналлар ўтказилган. $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$ $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$ маълум.

$\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ ва $\overrightarrow{BD}$ векторларни $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторлар орқали ифодалаш талаб қилинади.

29. $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ вектор берилган. Агар $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$ ва $\boldsymbol{b}$ векторнинг абсциссаси $\boldsymbol{a}$ векторнинг ординатасига тенг, $\boldsymbol{b}$ векторнинг ординатаси эса нолга тенг бўлса, $\boldsymbol{b}$ векторни топинг.

30. $ABCS$ учбурчакли пирамида берилган. Қуйидаги векторни ясанг (қўйинг):

1) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SC}$; 2) $-\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$; 3) $\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}$.

31. Учларининг координаталари $A(-3;\ 1)$; $B(3;\ 6)$; $C(2;\ 2)$ ва $D(-4;\ -3)$ бўлган тўртбурчак параллелограммлигини кўрсатинг.

32. $\overrightarrow{AB}$ вектор $\boldsymbol{a} = (3;\ -4)$ векторга коллинеар. Агар $A(8;\ 5)$ бўлса, B нуқтанинг координаталарини аниқланг.

33. $\boldsymbol{a}$ вектор $\boldsymbol{b} = (-2;\ 5)$ векторга коллинеар. Агар $\boldsymbol{a}$ векторнинг ординатаси 15 га тенг бўлса, унинг абсциссасини топинг.

34. $\boldsymbol{a} = (-3;\ 7)$ вектор $\boldsymbol{b}$ векторга коллинеар. Агар $\boldsymbol{b}$ векторнинг абсциссаси 6 га тенг бўлса, унинг ординатасини топинг.

35. Кубнинг бир учидан чиқувчи диагоналлари билан ёғи орасидаги бурчак катталигини топинг.

36. $M(6;\ -3;\ 6)$ нуқтани ясанг ва бу нуқтанинг радиус-вектори узунлигини топинг.

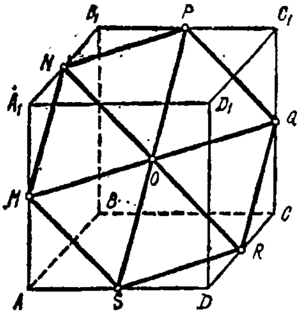
37. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ ва $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{k} - 2\boldsymbol{j}$ векторларда ясалган параллелограммнинг диагоналларини аниқланг.

38. $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ ва $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ векторларда ясалган параллелограммнинг диагоналлари орасидаги бурчакни топинг.

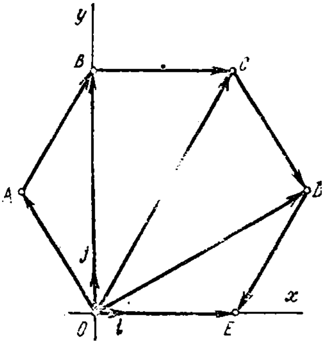
39. Агар $A(2;\ -1;\ 2)$; $B = (3;\ 0;\ 1)$ бўлса $\overrightarrow{AB}$ векторнинг $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ векторга скаляр кўпайтмасини ҳисобланг.

40. $\boldsymbol{a} = (4;\ 5)$ вектор берилган. $\boldsymbol{a}$ векторга коллинеар бўлган бирор $\boldsymbol{b}$ векторнинг координаталарини топинг. Масала нечта ечимга эга?

41. Кубнинг кесими берилган (74- чизма). Чизманинг исталган



74-чизма



75-чизма

кесмасини вектор деб олиш мумкин. Бир нечта компланар векторлар учлиги ва бир нечта нокомпланар векторлар учлигини ёзинг (масалан, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ ва $\overrightarrow{NP}$ векторлар компланар).

42. $a=(-1;2;2)$ вектор берилган. Шу йўналишли бирлик векторнинг координаталарини топинг.

43. $A(2;1)$ ва $B(10;7)$ нуқталар берилган. $\overrightarrow{AB}$ векторни i ва j ортлар орқали ифодаланг.

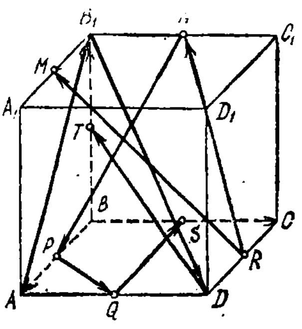
44. Текисликда мунтазам олтибурчак берилган, агар $|\overrightarrow{OE}|=4$ бўлса, 75 - чизмада тасвирланган барча векторларни i ва j ортлар бўйича ёйинг.

45. Текисликда учта A (0;8), B (6;8) ва C (6;0) нуқта берилган. Қуйидаги векторларни i ва j векторлар орқали ифодаланг:

1) $\overrightarrow{OA}$; 2) $\overrightarrow{OB}$; 3) $\overrightarrow{OC}$; 4) $\overrightarrow{AB}$; 5) $\overrightarrow{BA}$; 6) $\overrightarrow{CA}$.

46. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда M, N, P, Q, R, S, T нуқталар — қирраларнинг ўрталари. Базис учун $\overrightarrow{BA}=a$, $\overrightarrow{BC}=b$; $\overrightarrow{BB_1}=C$ векторлар қабул қилинган. Қуйидаги векторларни a, b, c базис бўйича ёйинг:

1) $\overrightarrow{DT}$; 2) $\overrightarrow{AB_1}$; 3) $\overrightarrow{NP}$; 4) $\overrightarrow{PQ}$; 5) $\overrightarrow{QS}$; 6) $\overrightarrow{B_1D}$; 7) $\overrightarrow{RM}$; 8) $\overrightarrow{RN}$ (76-чизма).



76-чизма

47. *ABCDEF* мунтазам олтибурчак берилган. Базис учун $\overrightarrow{AF} = a$ ва $\overrightarrow{AC} = b$ векторлар қабул қилинган. Қуйидаги векторларни a, b базис бўйича ёйиш талаб қилинади: 1) $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{BC}$; 3) $\overrightarrow{CD}$; 4) $\overrightarrow{DE}$; 5) $\overrightarrow{EF}$; 6) $\overrightarrow{AD}$; 7) $\overrightarrow{AE}$; 8) $\overrightarrow{FC}$; 9) $\overrightarrow{DB}$; 10) $\overrightarrow{BE}$.

48. Агар M (6; — 4; 3) ва $N = (3;\ 2;\ 1)$ бўлса, $\overrightarrow{MN}$ векторни ясанг, унинг узунлигини ва координата ўқларидаги проекцияларини аниқланг.

49. Агар $|a| = 2$, $|b| = 1$, бу векторлар орасидаги бурчак эса 120^0 га тенг бўлса, a векторнинг b вектор йўналиши бўйича ва b векторнинг a вектор йўналиши бўйича проекциясини топинг.

50. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб берилган. Қуйидаги векторлар орасидаги бурчакни топинг. 1) $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{D_1C_1}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{DD_1}$; 3) $\overrightarrow{AB_1}$ ва $\overrightarrow{D_1C}$; 4) $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{A_1D_1}$; 5) $\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{B_1D}$; 6) $\overrightarrow{BC}$ ва $\overrightarrow{B_1D}$.

51. Агар a ва b векторнинг скаляр кўпайтмаси: 1) $a \cdot b = 0$; 2) $a \cdot b > 0$; 3) $a \cdot b < 0$ бўлса, бу икки вектор орасидаги бурчакнинг катталиги тўғрисида нима дейиш мумкин?

Қуйидагиларнинг скаляр кўпайтмаларини топинг: 4) a ва $-a$; 5) a ва $k\ a$.

52. Агар $A(-2;\ 3)$, B(0; 8) C(5; 3) ва $D(10;\ 5)$ бўлса, $a = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ вектор билан абсциссалар ўқи орасидаги бурчакни аниқланг.

53. Агар $|a| = 2$, $|b| = 1$, улар орасидаги бурчакнинг катталиги эса 60° га тенглиги маълум бўлса, $c = 4b - a$ векторнинг узунлигини топинг.

54. $a = (2\sqrt{3};\ 2)$ вектор берилган. Агар a ва b векторларнинг абсциссалар ўқидаги проекциялари тенг, b векторнинг абсциссалари ўқи билан ташкил қилган бурчагининг катталиги a векторнинг абсциссалар ўқи билан ташкил қилган бурчагининг катталигидан икки баравар ортиқ бўлса, b векторнинг ординатасини топинг.

55. Қуйидаги векторлар орасидаги бурчакни аниқланг: 1) i ва $(j + k)$; 2) j ва $(i - k)$; 3) k ва $(2j - 3k)$.

56. Учлари A (5; 0; 0), B (1; 1; 1) ва C (3; — 1; 2) бўлган учбурчакда бурчаклар катталигини топинг.

57. $a = (3;\ -5)$ вектор берилган. a векторга перпендикуляр бўлган бирор икки векторнинг координаталарини топинг.

58. $c = (4;\ -7)$ вектор берилган. c векторга перпендикуляр бўлган бирор b векторнинг координаталарини топинг. Масала нечта ечимга эга?

59. $a = (1;\ 2;\ -3)$ вектор берилган. Унга перпендикуляр бўлган b векторнинг абсциссаси 3 га, ординатаси 6 га тенглиги маълум; b векторнинг аппликатасини топиш талаб қилинади.

60. $a = (3;\ -1;\ 2)$ вектор берилган. $b \perp a$. Агар b векторнинг аппликатаси 5 га тенг бўлса, b векторнинг абсцисса ва ординатасини топиш мумкинми? Масала нечта ечимга эга?

61. $a = (3;\ -4)$ вектор берилган. Унга перпендикуляр бўлган b векторнинг абсциссаси 8 га тенглиги маълум. b векторнинг ординатасини топинг.

62. $a = (5;\ 3)$ вектор берилган. Унга перпендикуляр бўлган b векторнинг ординатаси 10 га тенглиги маълум; b векторнинг абсциссасини топинг.

63. $a = (3;\ 4)$ векторнинг абсциссалар ўқи билан ташкил қиладиган бурчаги катталигини топинг.

64. $b = (-8;\ 6)$ векторнинг ординаталар ўқи билан ташкил қиладиган бурчаги катталигини топинг.

65. Қавсларни очинг ва ифодаларни соддалаштиринг:

1) $(b-c)\cdot a+c\cdot(a+b+c)+b\cdot(a+b+c)$; 2) $i\cdot(j+k)+j(i-k)+2i$.

66. $a=(1;\ -2;\ 3)$; $b=(2;\ 2;\ -1)$; $c=(0;\ 1;\ -2)$, $d=(2;\ -1;\ 0)$ векторлар берилган. Қуйидагиларни ҳисобланг:

1) $[a;\ b]$; 2) $[a;\ c]$; 3) $[b;\ c]$; 4) $[a;\ d]$; 5) $[(a+b);\ c]$;
6) $[(a-b);\ c]$; 7) $[(a+b);\ (d-c)]$; 8) $[(a+2d);\ c]$;
9) $[(2a-3b);\ (c+d)]$; 10) $[(a-b);\ [3c+2d)]$.

67. Иккита $a=2i$ ва $b=3k$ вектор берилган. $c=[a;\ b]$ векторни топинг ва ясанг.

68. Иккита $a=3i-2k$ ва $b=4k$ вектор берилган. $c=[a;\ b]$ векторни топинг ва ясанг.

69. Агар $F=3i+k$ куч $N(2;\ 1;\ 4)$ нуқтага қўйилган бўлса, унинг $M(2;\ -1;\ 3)$ нуқтага нисбатан моменти катталигини топинг.

70. $F=2i-3j+4k$ куч $M(1;\ 5;\ -2)$ нуқтага қўйилган. F кучнинг координаталар бошига нисбатан моменти катталигини топинг.

71. $a=(3;\ 4)$ ва $b=(4;\ -3)$ векторларда ясалган параллелограммнинг юзини топинг.

72. Учларининг координаталари $A\ (0;\ 2;\ 6)$, $B\ (4;\ 0;\ 0)$ ва $C\ (8;\ -2;\ 1)$ бўлган учбурчакнинг юзини топинг.

73. $A\ (1;\ -2)$, $B\ (-2;\ 2)$, $C\ (4;\ 10)$ ва $D\ (7;\ 5)$ параллелограмм берилган. Унинг юзини ва баландлигини ҳисобланг.

II боб

ТЎҒРИ ЧИЗИҚ

28- §. Икки ўзгарувчили тенглама ва унинг графиги

Биз биламизки, икки ўзгарувчили тенгламанинг ечими деб, ўзгарувчилар қийматларининг бу тенгламани тўғри тенгликка айлантирадиган исталган тартибланган жуфтига айтилади.

Масалан, бизга $3x + 2y - 2 = 0$ тенглама берилган бўлсин. Тартибланган сонлар жуфти $(4; -5)$ (бунда биринчи ўринда x ўзгарувчининг қиймати, иккинчи ўринда эса y ўзгарувчининг қиймати ёзилган) тенгламанинг ечими бўлади, чунки $3 \cdot 4 + 2 \cdot (-5) - 2 = 0$, $(5; 7)$ сонлар жуфти эса берилган тенгламанинг ечими эмас, чунки $3 \cdot 5 + 2 \cdot 7 - 2 \neq 0$.

Агар x нинг қийматларини ихтиёрий танласак ва y нинг уларга мос қийматларини топсак, у ҳолда бу тенгламанинг ечими бўладиган чексиз кўп сонлар жуфтини ҳосил қилиш мумкин:

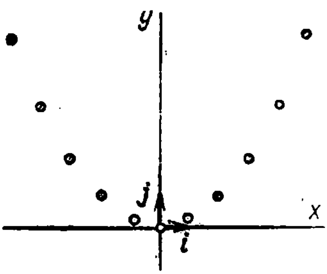
x ва y ўзгарувчиларнинг мос қийматлари жуфтларини текисликдаги нуқталарнинг координаталари деб қараш мумкин. Ясалган нуқталар (ечимлар) тўплами тенгламанинг *графиги* дейилади.

Масалан, $x^2 - 4y = 0$ тенглама берилган. Унинг графигини ясаш талаб қилинади.

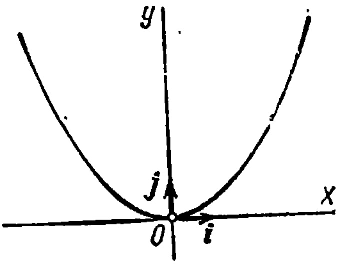
Бунинг учун қуйидаги жадвални тузамиз:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	2	3	4	5
y	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	0,25	1	2,25	4	6,25

Энди координаталари жадвалимизда ёзилган нуқталарни ясаймиз (77- чизма).



77-чизма



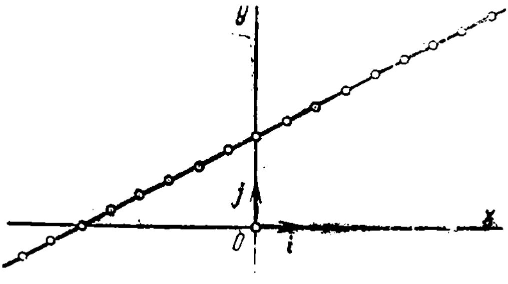
78-чизма

Ясалган нуқталарни силлиқ чизиқ билан туташтирамиз. $x^2 - 4y = 0$ тенгламанинг графигини ҳосил қилдик. Агар нуқталар (ечимлар) кўпроқ бўлса, график аниқроқ бўлишини қайд этиб ўтамиз (78- чизма).

Бошқа мисол кўрамиз. $y = \frac{x}{2} + 3$ тенгламанинг графигини ясанг. x ва y ўзгарувчиларнинг мос қийматлари жадвалини тузамиз;

x	0	0	2	3	4	5	6	7	8	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8
y	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	2,5	2	1,5	1	0,5	0	0,5	−1

Координаталари жадвалда ёзилган нуқталарни ясаймиз. Графикдан (79- чизма) кўриниб турибдики, ясалган нуқталар тўғри чизиқда ётади. Бу фактнинг исботи кейинроқ берилади.



79-чизма

Таъриф. Икки ўзгарувчили тенгламанинг графиги координаталари бу тенгламани қаноатлантирадиган барча нуқталар тўпламидир. Масалан, $y=\frac{x}{2}+3$ тенглама берилган бўлсин; x ва y ўзгарувчиларнинг мос қийматлари жадвалини тузамиз (юқорига қаранг), биринчи ўринда x нинг қиймати, иккинчи ўринда эса y нинг қиймати турган (0;3), (1; 3,5), (2; 4), . . . , (—8; —1) сонлар жуфтларининг ҳар бири $y=\frac{x}{2}+3$ тенгламанинг ечимидир.

Шундай қилиб, $f(x;y)=0$ тенгламанинг графиги текисликда бирор чизиқдир.

29- §. Тўғри чизиқ ва унинг тенгламаси

Тўғри чизиқлар тўғрисидаги турли масалаларни ечишда кўпинча бу тўғри чизиқларнинг тенгламаларини тузишга тўғри келади, агар векторлардан фойдаланилса, бу иш анча осонлашади. Бундан буён текисликдаги тўғри чизиқнинг вазиятини векторлар ва нуқталар ёрдамида характерлаймиз. Масалан: l_1 тўғри чизиқ M_1 ва M_2 нуқталар орқали ўтади, 2) l_2 тўғри чизиқ a векторга параллел бўлиб, M_1 нуқта орқали ўтади, 3) l_3 тўғри чизиқ n векторга перпендикуляр бўлиб, M нуқта орқали ўтади, 4) l_4 тўғри чизиқ M нуқта орқали ўтади ва l вектор билан φ бурчак ташкил қилади. Равшанки, тўғри чизиқнинг бундай берилиши текисликда унинг вазиятини тўла аниқлайди.

l тўғри чизиққа коллинеар бўлган исталган a вектор бу тўғри чизиқнинг *йўналтирувчи вектори* дейилади.

Бу таърифдан ҳар бир тўгри чизиқ исталганча йўналтирувчи векторларга эгалиги ва уларнинг ҳаммаси ўзаро коллинеар бўлиши келиб чиқади.

l тўғри чизиққа перпендикуляр ихтиёрий n вектор тўғри чизиқнинг *нормал вектори* дейилади.

Бу таърифдан, ҳар бир тўғри чизиқ хоҳлаганча нормал векторларга эгалиги, тўғри чизиқнинг барча нормал векторлари ўзаро коллинеар эканлиги келиб чиқади.

Агар l тўғри чизиқда қандайдир иккита фиксирланган M_1 ва M_2 нуқталар олинган бўлса, $\overrightarrow{M_1M_2}$ вектор (M_1M_2) тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори бўлади. Таъкидлаймизки, йўналтирувчи вектор сифатида $\overrightarrow{M_2M_1}$ векторни ҳам олиш мумкин, чунки $\overrightarrow{M_1M_2} = -\overrightarrow{M_2M_1}$.

Чизиқ тенгламасини тузиш деганда, бу тўплам нуқталарининг координаталари орасидаги, уларни аниқловчи шартларни қаноатлантирадиган боғланишни ёзиш демакдир.

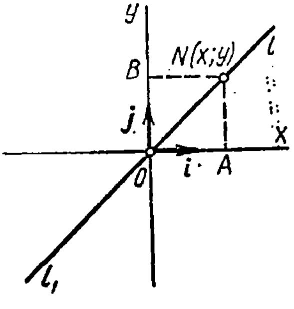
Буни мисолларда тушунтирамиз.

1- масала. Биринчи ва учинчи координат бурчакларнинг биссектрисаси тенгламасини тузинг.

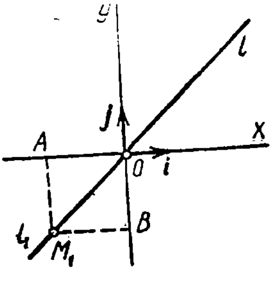
Δ l тўғри чизиқ — биринчи ва учинчи координат бурчакларнинг биссектрисаси бўлсин (80- чизма). l биссектрисанинг ихтиёрий $N(x; y)$ нуқтасини қараймиз ва унинг x ва y координаталари орасидаги муносабатни аниқлаймиз. Бунинг учун x ва y координаталар орасида биссектрисанинг (ва фақат биссектрисанинг) ихтиёрий нуқтаси учун ўринли бўладиган муносабатни топишимиз керак.

xOy бурчак биссектрисаси l шу бурчак томонларидан тенг узоқликда ётган нуқталар тўплами: $|AN| = |BN|$. Бу тўғри чизиқнинг барча нуқталари (ва фақат шу нуқталар) учун умумий хоссадир. Бундан $[ON)$ нурнинг исталган $N(x; y)$ нуқтасининг координаталари $y=x$ тенгламани қаноатлантириши келиб чиқади (80- чизма).

$[OM_1)$ нурнинг исталган нуқтасининг x ва y координаталари ҳам $y=x$ тенгламани қаноатлантиради, чунки улар абсолют қийматлари бўйича тенг ва иккаласи ҳам манфий (81- чизма). l тўғри чизиқда ётмайди-



80-чизма



81-чизма

ган нуқталарнинг координаталари $y=x$ тенгламани қаноатлантирмайди.▲

Таъриф. Чизиқнинг тенгламаси деб, шундай

$$F(x, y)=0$$

тенгламага айтиладики, бу чизиқнинг барча нуқталарининг (ва фақат шу нуқталарининг) координаталари шу тенгламани қаноатлантиради.

Чизиқнинг тенгламаси таърифидан келиб чиқадики, текисликнинг координаталари чизиқ тенгламасини қаноатлантирадиган ихтиёрий нуқтаси шу чизиққа тегишли ва аксинча, чизиқнинг исталган нуқтасининг координаталари унинг тенгламасини қаноатлантиради.

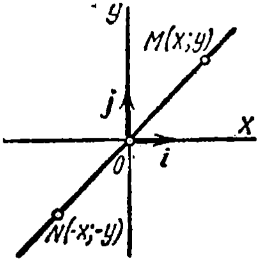
2- масала. Иккинчи ва тўртинчи координат бурчакларнинг биссектрисаси тенгламасини тузинг.

△ Иккинчи ва тўртинчи координат бурчаклар биссектрисасининг барча нуқталари ва фақат шулар координаталар ўқидан бир хил узоқликда жойлашган, лекин унинг ҳар бир нуқтасининг ординатаси ва абсциссаси биринчи ва учинчи координат бурчаклар биссектрисасидан фарқли ўларок ишора билан фарқ қилади. Бу хоссани алгебраик кўринишда қуйидагича тенглама қилиб ёзиш мумкин:

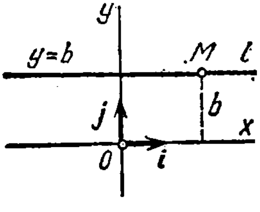
$$y=-x.$$

Бу тенглама иккинчи ва тўртинчи координат бурчакларнинг биссектрисаси тенгламаси бўлади. ▲

Эслатиб ўтамизки, тўғри чизиқ ўзи ўтадиган икки нуқта билан тўла аниқлангани учун бундан буён тўғри чизиқни ясаш учун иккитадан ортиқ нуқтасини топмаймиз (82- чизма).



82-чизма



83-чизма

3- масала. Ox ўққа параллел ва Oy ўқни ординатаси b га тенг бўлган нуқтада кесиб ўтадиган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

△ l тўғри чизиқ Ox ўққа параллел бўлиб, ундан b масофада ётсин (83- чизма). M бу тўғри чизиқнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. Изланаётган тўғри чизиқ координат текисликнинг ҳар бири b га тенг ўзгармас ординатага ва ихтиёрий абсциссага эга бўлган нуқталари тўплами.

Бу хоссага фақат l тўғри чизиқнинг нуқталари эга, чунки бу тўғри чизиқда ётмайдиган ҳар қандай нуқта учун ё $y > b$ га, ёки $y < b$ га эгамиз. Алгебраик кўринишда бу хоссани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$y = b.$$

Бу Ox ўққа параллел тўғри чизиқ тенгламаси бўлади. Равшанки, $b > 0$ да l тўғри чизиқ Ox ўқдан юқорида, $b < 0$ да эса пастда жойлашади. ▲

Мисолдан кўриниб турибдики, чизиқ тенгламаси фақат битта координатани ўз ичига олиши ҳам мумкин экан, буни таъкидлаш муҳим.

4- масала. Ox ўқнинг тенгламасини тузинг.

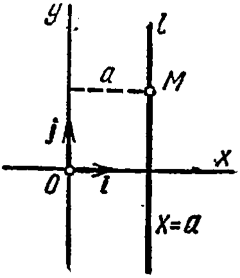
△ Ox ўқ Oij текисликнинг исталган абсциссада ординатаси нолга тенг бўлган нуқталари тўплами. Алгебраик кўринишда бу хоссани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$y = 0.$$

Бу эса Ox ўқ тенгламасидир. Ox ўқнинг тенгламаси Ox ўққа параллел $y = b$ тўғри чизиқ тенгламасининг хусусий ҳоли эканлигини кўриш осон. Ҳақиқатан ҳам, $b = 0$ бўлганда Ox ўқ тенгламасини ҳосил қиламиз. ▲

5- масала. Oy ўққа параллел ва Ox ўқни a га тенг абсциссали нуқтада кесиб ўтадиган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

△ l тўғри чизиқ ординаталар ўқига параллел бўлиб, ундан a масофада жойлашган бўлсин (84- чизма). M бу тўғри чизиқнинг исталган нуқтаси бўлсин. Изланаётган тўғри чизиқ текисликнинг исталган ординатада a га тенг абсциссага эга бўлган нуқталари тўпламидир.



84-чизма

Бундай хоссага фақат l тўғри чизиқнинг нуқталари эга, чунки бу тўғри чизиқда ётмайдиган ҳар қандай нуқта учун ё $x > a$, ёки $x < a$ га эгамиз. Алгебраик кўринишда бу хоссани қуйидаги тенглама орқали ёзиш мумкин:

$$x = a.$$

Бу эса тўғри чизиқнинг изланаётган тенгламасидир. Равшанки, $a > 0$ бўлганда l тўғри чизиқ Oy ўқдан ўнгда, $a < 0$ бўлганда эса чапда ётади. ▲

6- масала. Oy ўқнинг тенгламасини тузинг.

△ Oy ўқ — текисликнинг абсциссаси нолга тенг бўлган барча нуқталари тўплами. Алгебраик кўринишда бу хоссани қуйидаги тенглама орқали ёзиш мумкин:

$$x = 0. ▲$$

30- §. Тўғри чизиқнинг параметрик тенгламалари

Тўғри бурчакли Декарт координаталар системасида l тўғри чизиқ, M_0 бошланғич нуқта ва $\boldsymbol{a}$ йўналтирувчи вектор билан берилган бўлсин (85- чизма). M бу тўғри чизиқнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин, унинг радиус-векторини $\boldsymbol{r}$ орқали белгилаймиз. $\overrightarrow{M_0M} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ векторнинг (унинг боши бўлган M_0 нуқта тўғри чизиқда ётади) охири бўлган M нуқта ҳам шу тўғри чизиқда ётганда ва фақат шунда бу вектор тўғри чизиққа параллел бўлади. Бу ҳолда $\overrightarrow{M_0M}$ вектор $\boldsymbol{a}$ векторга коллинеар. Қуйидагига эгамиз:

$$\overrightarrow{M_0M} = t\boldsymbol{a} \text{ ёки } \boxed{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = t\,\boldsymbol{a}.} \qquad (1)$$

Аксинча, (1) формуладаги t нинг ихтиёрий қийматида бу формуладаги $\boldsymbol{r}$ вектор l тўғри чизиқнинг бирор нуқтасининг радиус-вектори бўлади.

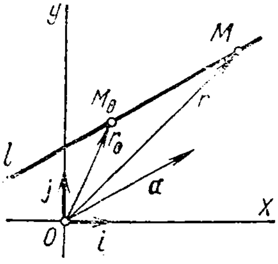
(1) формуладаги турли сон қийматларни қабул қилувчи t ўзгарувчи *параметр,* (1) тенглама эса l тўғри чизиқнинг ***вектор-параметрик тенгламаси*** дейилади.

Агар M ва M_0 нуқталарнинг координаталарини $(x; y)$ ва $(x_0\ y_0)$ орқали, $\boldsymbol{a}$ векторнинг координаталарини $(a_1; a_2)$

орқали белгиласак, (1) тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + a_1 t, \\ y &= y_0 + a_2 t. \end{aligned}} \qquad (2)$$

Бу тенгламалар тўғри чизиқнинг параметрик тенгламалари дейилади.



85-чизма

1- масала. $M_0(3; -5)$ нуқта орқали $\boldsymbol{a} = (4; 1)$ векторга параллел бўлиб ўтувчи тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаларини тузинг.

△ M_0 нуқтанинг ва $\boldsymbol{a}$ векторнинг координаталарини бевосита (2) тенгламага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x = 3 + 4t, \\ y = -5 + t. \end{cases} \blacktriangle$$

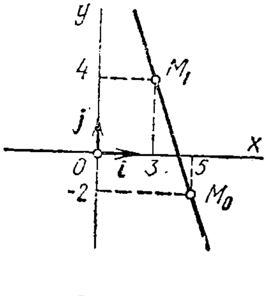
2- масала. l тўғри чизиқ

$$x = 5 - 2t \text{ ва } y = -2 + 6t$$

тенгламалар билан берилган.

Бу тўғри чизиқни ясаш талаб қилинади.

△ Тўғри чизиқни ясаш учун иккита нуқта керак. Бу тўғри чизиқнинг M_0 бошланғич нуқтасининг координаталари унинг тенгламаларида берилган: $M_0(5; -2)$. Тўғри чизиқнинг бошқа бирор нуқтасининг координаталарини топиш учун t параметрга қандайдир қиймат бериш ва бу қийматни тўғри чизиқ тенгламасига қўйиш керак. $t=1$ бўлсин, у ҳолда $M_1(3; 4)$. Сўнгра M_0 ва M_1 нуқталарни ясаймиз ва чизғич ёрдамида изланаётган тўғри чизиқни ўтказамиз (86- чизма). ▲

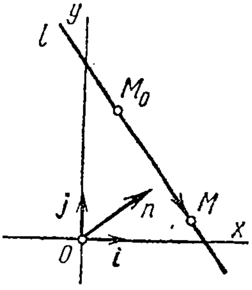


86-чизма

31- §. Берилган нуқтадан ўтувчи ва берилган векторга перпендикуляр тўғри чизиқ тенгламаси

Бирор M_0 нуқта ва n вектор берилган бўлсин. M_0 нуқта орқали n векторга перпендикуляр қилиб тўғри чизиқ ўтказамиз (87- чизма).

M нуқта l тўғри чизиқнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. $\overrightarrow{M_0M}$ вектор n векторга перпендикуляр бўлганда ва фақат шундагина M нуқта l тўғри чизиқда ётади, бунинг учун эса n векторнинг $\overrightarrow{M_0M}$ векторга скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлиши зарур ва етарли:



87-чизма

$$n\cdot\overrightarrow{M_0M}=0. \qquad (1)$$

Бу тенгликни координаталарда ифодалаш учун тўғри бурчакли Декарт координаталар системасини киритамиз. M_0 ва M нуқталар (x_0; y_0) ва (x; y) координаталарга эга бўлсин. У ҳолда $\overrightarrow{M_0M}$ векторнинг координаталари ($x-x_0$; $y-y_0$) бўлади. n нормал векторнинг координаталарини (A; B) орқали белгилаймиз. Энди (1) тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.} \qquad (2)$$

(2) тенглама берилган M_0 нуқтадан ўтувчи ва берилган n векторга перпендикуляр l тўғри чизиқ тенгламаси бўлади.

1- масала. $A(2;\ -3)$ нуқтадан ўтувчи ва $n=(-1;\ 5)$ векторга перпендикуляр тўғри чизиқ тенгламасини тузинг (88- чизма).

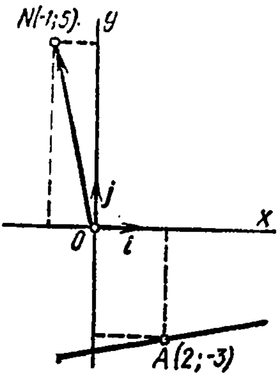
△ (2) формуладан фойдаланиб, бу тўғри чизиқ тенгламасини

$$-1\cdot(x-2)+5\,(y+3)=0$$

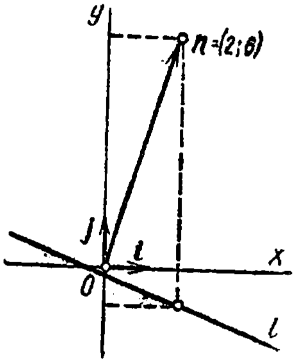
кўринишда ёзиш мумкин ёки узил-кесил

$$x-5y-17=0$$

ни ҳосил қиламиз. ▲



88-чизма



89-чизма

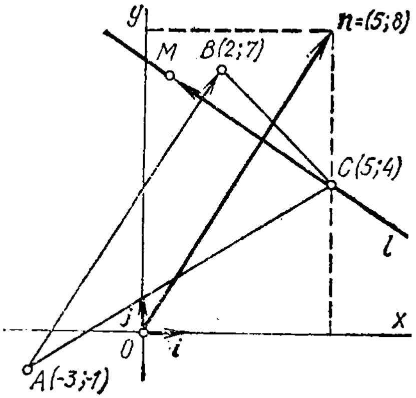
2- масала. M_1 (2; -1) ва M_2 (4; 5) нуқталар берилган. M_1 нуқтадан ўтувчи ва $\overrightarrow{M_1M_2}$ векторга перпендикуляр тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

△ Тўғри чизиқнинг изланаётган $n = \overrightarrow{M_1M_2}$ нормал вектори (2; 6) координаталарга эга (89- чизма). Нормал вектор координаталарини (2) тенгламага қўйиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$2(x-2)+6(y+1)=0 \text{ ёки } x+3y+1=0. \blacktriangle$$

3- масала. Учлари M_1 (-5; 2), M_2 (5; 6), M_3 (1; -2) нуқталарда бўлган учбурчакда M_1A_1 медиана ўтказилган. A_1 нуқтадан ўтувчи ва M_1A_1 медианага перпендикуляр тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

△ $n = \overrightarrow{M_1A_1}$ векторни изланаётган тўғри чизиқнинг нормал вектори деб қабул қилиш мумкин. Унинг координаталарини аниқлаймиз. A_1 нуқта $[M_2M_3]$ кесманинг ўртаси, шунинг учун $(x_1; y_1)$ унинг координаталари бўлса, у ҳолда $x_1 = \frac{5+1}{2} = 3$, $y = \frac{6-2}{2} = 2$. У ҳолда $n = \overrightarrow{M_1A_1}$ нормал векторнинг кординаталари (8; 0) бўлади, яъни $A = 8$, $B = 0$. Изланаётган тўғри чизиқнинг $\overrightarrow{A_1M}$ векторининг координаталари $(x-3;\ y-2)$ бўла-



90-чизма

ди, изланаётган тўғри чизиқнинг тенгламасини эса (2) га асосан

$$8(x-3)+0(y-2)=0 \text{ ёки } x=3$$

кўринишда ёзиш мумкин. ▲

4- масала. Учларининг координаталари $A(-3;-1)$; $B(2;7)$ ва $C(5;4)$ бўлган учбурчак берилган. C учдан ўтувчи ва AB томонга перпендикуляр тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

△ Изланаётган тўғри чизиқнинг нормал вектори учун $n=\overrightarrow{AB}$ векторни олиш мумкин, унинг координаталари $n=\{2-(-3);\ 7-(-1)\}$, $n=(5;8)$. M изланаётган тўғри чизиқнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин, у ҳолда $\overrightarrow{CM}=(x-5;\ y-4)$; шартга кўра $\overrightarrow{CM}\perp\overrightarrow{AB}$, демак, $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ ёки координаталарда ёзсак: $5(x-5)+8(y-4)=0$ ёки, узил-кесил, $5x+8y-57=0$ 90- чизма). ▲

32- §. Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси

Олдинги параграфларда ихтиёрий тўғри чизиқ тўғри бурчакли Декарт координаталар системасида биринчи даражали алгебраик тенглама билан аниқланишини кўрсатдик. Энди, бунга тескари даъвони, чунончи ихтиёрий биринчи даражали

$$Ax+By+C=0$$

тенглама тўғри бурчакли Декарт координаталар системасида тўғри чизиқни аниқлашини, шу билан бирга ягона равишда аниқланишини исботлаймиз.

□ Ҳақиқатан ҳам, (1) тенгликда A ва B коэффициентларнинг камида бири нолдан фарқли, бўлмаса (1) тенглик тенглама бўла олмайди. $B \neq 0$ бўлсин. У ҳолда (1) тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$A(x-0)+B\left[y-\left(-\frac{C}{B}\right)\right]=0. \qquad (2)$$

Олдинги параграфга кўра (2) тенглама, ва демак, (1) тенглама ҳам $\left(0; -\frac{C}{B}\right)$ нуқтадан ўтувчи ва $\boldsymbol{n}=(A; B)$ векторга перпендикуляр тўғри чизиқни аниқлайди ҳамда бу тўғри чизиқ ягонадир. ■

$Ax+By+C=0$, тенглама тўғри чизиқнинг *умумий тенгламаси* дейилади.

$Ax+By+C=0$ тенгламада x ўзгарувчи олдидаги A коэффициент тўғри чизиқ нормал векторининг биринчи координатаси бўлишини, y ўзгарувчи олдидаги B коэффициент эса тўғри чизиқ нормал векторининг иккинчи координатаси бўлишини айтиб ўтамиз. Масалан, $3x-4y+5=0$ тенгламада нормал вектор $(3; -4)$ координаталарга эга, $y=\frac{2}{5}x+17$ тенгламада нормал вектор $\boldsymbol{n}=\left(\frac{2}{5}; -1\right)$, $x=5$ тенгламада эса нормал вектор $\boldsymbol{n}=(1; 0)$.

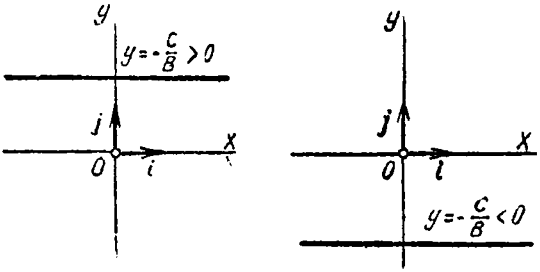
33- §. Тўғри чизиқнинг умумий тенгламасини текшириш

Олдинги параграфларда биз ихтиёрий тўғри чизиқ тўғри бурчакли Декарт координаталар системасида биринчи даражали алгебраик тенглама билан аниқланишини, ва аксинча, ихтиёрий биринчи даражали

$$Ax+By+C=0$$

тенглама (A ва B коэффициентлар бир вақтда нолга тенг эмас) тўғри бурчакли Декарт координаталар системасида тўғри чизиқни аниқлашини исбот қилган эдик.

Тўғри чизиқнинг умумий тенгламасидаги A, B ва C нинг қийматларига боғлиқ равишда тўғри чизиқ коор-



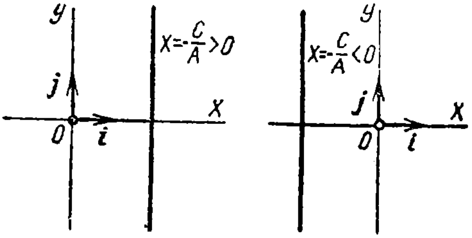
91-чизма

динаталар системасига нисбатан қандай жойлашишини кўриб чиқамиз.

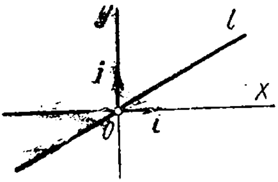
1. Агар тўғри чизиқнинг умумий тенгламасида $A=0$ бўлса, унинг тенгламасини бундай кўринишда ёзиш мумкин: $By+C=0$ ёки $y=-\frac{C}{B}$. Бу эса тўғри чизиқнинг барча нуқталари бир хил $\left(-\frac{C}{B}\right)$ ординатага эга эканлигини билдиради. Демак, тўғри чизиқ Ox ўққа параллел (91- чизма).

2. Агар тўғри чизиқнинг тенгламаси (1) да $B=0$ бўлса, унинг тенгламасини бундай кўринишда ёзиш мумкин: $Ax+C=0$ ёки $x=-\frac{C}{A}$. Бу эса тўғри чизиқнинг барча нуқталари бир хил $\left(-\frac{C}{A}\right)$ абсциссага эга эканлигини билдиради. Демак, тўғри чизиқ Oy ўққа параллел (92- чизма).

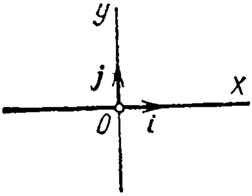
3. Агар $C=0$ бўлса, (1) тўғри чизиқ тенгламаси $Ax+By=0$ бўлади. Бу тенгламани O (0; 0) нуқтанинг координаталари қаноатлантиради, ва демак, бу тенгла-



92-чизма



93-чизма



94-чизма

ма билан аниқланадиган тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтади (93- чизма).

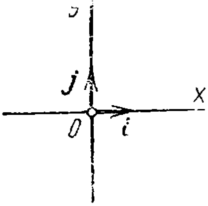
4. Агар $A=0$ ва $C=0$ бўлса, (1) тенгламани $By=0$ ёки $y=0$ кўринишда ёзиш мумкин. $A=0$ бўлгани учун тўғри чизиқ Ox ўққа параллел, $C=0$ бўлгани учун тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтиши керак. Демак, у Ox ўқ билан устма-уст тушади (94- чизма).

5. Агар $B=0$ ва $C=0$ бўлса, тўғри чизиқ тенгламаси $Ax=0$ ёки $x=0$ бўлади. Тенгламада $B=0$ бўлгани учун тўғри чизиқ Oy ўққа параллел, $C=0$ бўлгани сабабли эса тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтиши керак. Демак, у Oy ўқ билан устма-уст тушади (95- чизма).

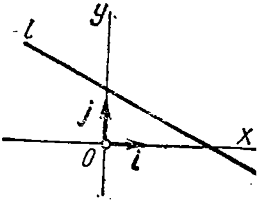
6. Агар $A\neq 0$, $B\neq 0$ ва $C\neq 0$ бўлса, тўғри чизиқ Ox ўққа ҳам параллел эмас, Oy ўққа ҳам параллел эмас ва координата бошидан ўтмайди (96- чизма).

Масала. Қуйидаги тўғри чизиқлар қандай жойлашган: 1) $x-y=0$; 2) $x+y=0$; 3) $3x-12=0$; 4) $5y+$ $+20=0$; 5) $3x+4y=0$? Бу тўғри чизиқларни ясанг.

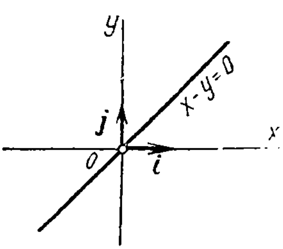
△ 1) бу тўғри чизиқ тенгламасида озод ҳад бўлмагани учун тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтади. Тўғри чизиқнинг ихтиёрий нуқтаси учун абсцисса ор-



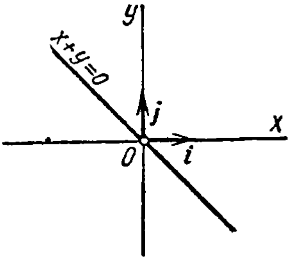
95-чизма



96-чизма



97-чизма



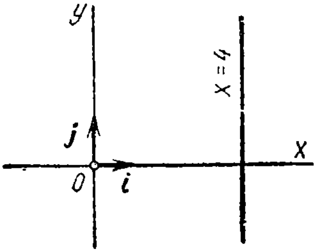
98-чизма

динатага тенг бўлгани учун тўғри чизиқ биринчи ва учинчи координат бурчакларнинг биссектрисаси бўлади (97- чизма).

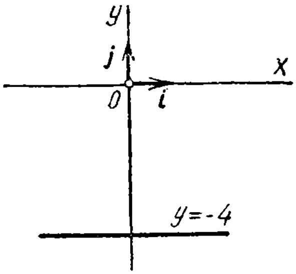
2) бу тўғри чизиқ тенгламаси озод ҳадни ўз ичига олмайди, демак, тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтади. Ҳар бир нуқта учун абсцисса ва ордината абсолют қийматлари бўйича тенг, лекин қарама-қарши ишорали, шунинг учун бу тўғри чизиқ иккинчи ва учинчи координат бурчакларнинг биссектрисаси бўлади (98- чизма).

3) Бу тўғри чизиқнинг тенгламаси соддалаштирилганда сўнг $x=4$ бўлади. Бу бир хил абсциссали ва турли ординатали нуқталар тўплами бўлиб, ординаталар ўқига параллел ва ундан тўрт масштаб бирлиги ўнгда турадиган тўғри чизиқни ташкил қилади (99- чизма).

4) бу тўғри чизиқ тенгламасини $y=-4$ кўринишда ёзиш мумкин. Бир хил ординатали ва турли абсциссали нуқталар тўплами абсциссалар ўқига параллел ва ундан



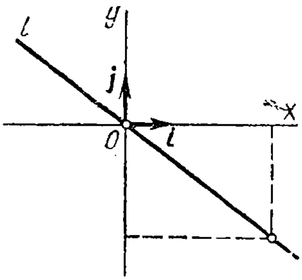
99-чизма



100-чизма

тўрт масштаб бирлиги пастда жойлашган тўғри чизиқда жойлашган (100- чизма).

5) тенгламада озод ҳад йўқлиги сабабли тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтади. Тўғри чизиқни ясаш учун биз яна бирор нуқтанинг координаталарини топишимиз керак. Масалан, $x = 4$ бўлсин, унда (5) тенгламадан бу нуқта учун $y = -3$ бўлиши келиб чиқади. Тўғри чизиқни O (0; 0) координаталар бошидан ва 4; —3, нуқтадан ўтказамиз (101- чизма). ▲



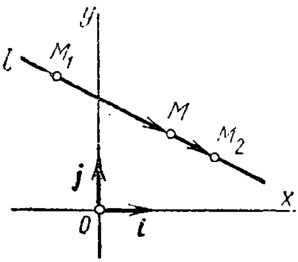
101-чизма

34- §. Икки нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси

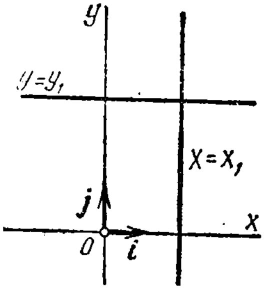
Бизга икки M_1 ва M_2 нуқта берилган бўлсин, бу нуқталар орқали l тўғри чизиқ ўтказамиз. ($M_1 M_2$) тўғри чизиқ ягонадир (аксиомага кўра). Бу тўғри чизиқнинг исталган M нуқтасини қараймиз. M, M_1 ва M_2 нуқталар l тўғри чизиқда ётади, шу сабабли, $\overrightarrow{M_1M_2}$ ва $\overrightarrow{M_1M}$ векторлар коллинеар (102- чизма). Демак,

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda \overrightarrow{M_1M_2}. \qquad (1)$$

(1) тенгликни координаталарда ёзиш учун тўғри бурчакли Декарт координаталар системасини кирита-



102-чизма



103-чизма

миз. M, M_1 ва M_2 нуқталарнинг координаталари $(x; y)$, $(x_1; y_1)$ ва $(x_2; y_2)$ бўлсин, у ҳолда $\overrightarrow{MM_1}$ ва $\overrightarrow{M_1M_2}$ векторларнинг координаталари $(x - x_1;\ y - y_1)$ ва $(x_2 - x_1;$ $y_2 - y_1)$ бўлади. Энди (1) тенгликни

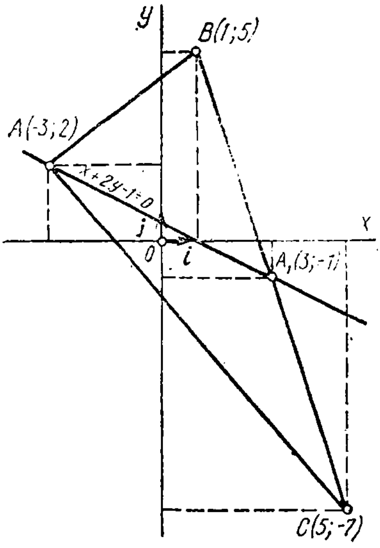
$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}} \qquad (2)$$

кўринишда ёзиш мумкин. (Векторлар коллинеар бўлгани учун уларнинг координаталари пропорционал бўлади.)

Бу икки нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасидир.

Агар махражларидан бири нолга тенг бўлса, (2) тенглама маъносини йўқотади. Агар $x_2 - x_1 = 0$ бўлса, бу $l \parallel (Oy)$ эканлигини билдиради, бунда унинг тенгламаси $x = x_1$ бўлади. Агар $y_2 - y_1 = 0$ бўлса, у ҳолда $l \parallel (Ox)$, унинг тенгламаси $y = y_1$ бўлади (103- чизма).

1- масала. Икки M_1 $(3; -2)$ ва M_2 $(5; 1)$ нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.



104-чизма

△ M_1 ва M_2 нуқталарнинг координаталарини (2) тенгламага қўйгандан сўнг қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{x - 3}{5 - 3} = \frac{y + 2}{1 + 2} \text{ ёки}$$

$$3x - 2y - 13 = 0. \blacktriangle$$

2- масала. Учларининг координаталари $A(-3; 2)$, $B(1; 5)$ ва C $(5; 7)$ бўлган ABC учбурчак берилган. A учдан чиқадиган медиана тенгламасини тузинг.

△ Агар A_1 нуқта BC томоннинг ўртаси бўлса, у ҳолда $A_1(3; -1)$. A ва A_1 нуқталарнинг координаталарини (2) тенгламага қўйгандан кейин қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{x+3}{8+3}=\frac{y-2}{-1-2} \text{ ёки } x+2y-1=0 \text{ (104- чизма).} \ \blacktriangle$$

35- §. Тўғри чизиқнинг кесмалардаги тенгламаси

Координата ўқларида икки A (a; 0) ва B (0; b) нуқта берилган бўлсин.

Бу нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузамиз (105- чизма). 34- § даги (2) формулага кўра

$$\frac{x-a}{-a}=\frac{y}{b}.$$

Бу тенгликни алмаштиришдан сўнг $A(a; 0)$ ва $B(0; b)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламаси

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1}$$

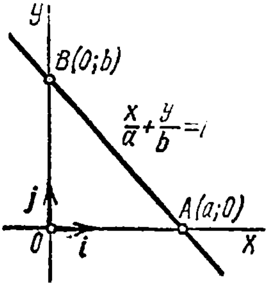
кўринишда бўлади.

Бу тенглама тўғри *чизиқнинг кесмалардаги тенгламаси* дейилади, чунки a ва b сонлар тўғри чизиқ координата ўқларидан қандай кесмаларни ажратишини кўрсатади.

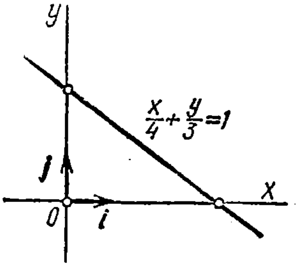
Бундай форма тўғри чизиқни ясашни осонлаштириш имконини беради.

Масалан, $3x+4y-12=0$ тўғри чизиқни ясайлик. Бунинг учун озод ҳадни ўнгга ўтказамиз ва тенгламанинг иккала томонини унга бўламиз. У ҳолда бу тўғри чизиқ учун кесмалардаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1.$$



105-чизма



106-чизма

Энди координата ўқларида $A(4; 0)$ ва $B(0; 3)$ нуқталарни ясаймиз ва улар орқали изланаётган тўғри чизиқни ўтказамиз (106- чизма).

Агар тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтса, у ҳолда тўғри чизиқнинг кесмалардаги тенгламаси маънога эга эмаслигини айтиб ўтамиз.

1- масала. $A(4; -3)$ нуқтадан ўтувчи ва координата ўқларидан юзи уч квадрат бирликка тенг учбурчак ажратадиган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

△ Масалани ечиш учун тўғри чизиқнинг кесмалардаги тенгламаси

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

ни қўллаганамиз. Масала шартига кўра $S_\Delta=3$ бирл^2. Тўғри бурчакли учбурчакнинг шу юзини тўғри чизиқнинг координата ўқларида ажратадиган кесмалари узунлиги орқали ифодалаш мумкин: $S_\Delta=\frac{ab}{2}$. Демак, $ab=\pm 6$ (иккита ишора олинади, чунки a ва b кесмалар турли ишорага эга бўлиши ҳам мумкин).

Изланаётган тўғри чизиқ берилган $A(4; -3)$ нуқта орқали ўтади, демак, унинг координаталари тўғри чизиқ тенгламасини қаноатлантиради ва биз $\frac{4}{a}-\frac{3}{b}=1$ деб ёзишимиз мумкин, бу эса a ва b орасидаги яна бир боғланишдир.

a ва b ни аниқлаш учун биз иккита системага эгамиз:

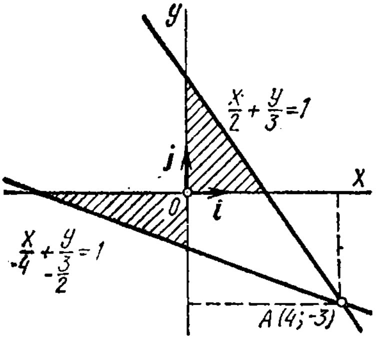
$$\begin{cases} ab=6, \\ \frac{4}{a}-\frac{3}{b}=1; \end{cases} \qquad \begin{cases} ab=-6, \\ \frac{4}{a}-\frac{3}{b}=1. \end{cases}$$

Биринчи системадан $a_1=2$, $b_1=3$ ва $a_2=-4$, $b_2=-\frac{3}{2}$ ни топамиз; иккинчи система ечимга эга эмас.

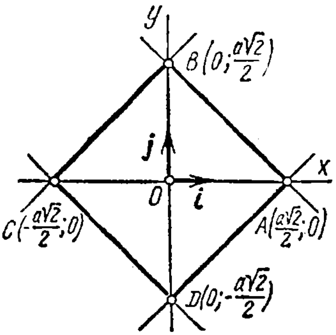
Демак, изланаётган тўғри чизиқлар қуйидаги тенгламаларга эга:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1 \text{ ёки } \frac{x}{-4}+\frac{y}{-\frac{3}{2}}=1 \text{ (107- чизма).} \blacktriangle$$

2- масала. Агар квадратнинг томони a га тенг, тўғри бурчакли Декарт координаталар системасининг



107-чизма



108-чизма

ўқлари сифатида эса унинг диагоналлари қабул қилинган бўлса, бу квадрат томонларининг тенгламаларини ёзинг.

△ $ABCD$ — берилган квадрат, O эса диагоналларнинг кесишиш нуқтаси бўлсин (бу нуқта координаталар боши билан устма-уст тушади) (108- чизма).

$$|OA|=|OB|=|OC|=|OD|=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

ни кўриш осон. Энди квадрат томонининг кесмалардаги тенгламасини ёзамиз:

$$(AB)\ \frac{x}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}+\frac{y}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}=1 \text{ ёки } x+y-\frac{a\sqrt{2}}{2}=0;$$

$$(BC)\ \frac{x}{-\frac{a\sqrt{2}}{2}}+\frac{y}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}=1 \text{ ёки } x-y+\frac{a\sqrt{2}}{2}=0;$$

$$(CD)\ \frac{x}{-\frac{a\sqrt{2}}{2}}+\frac{y}{-\frac{a\sqrt{2}}{2}}=1 \text{ ёки } x+y+\frac{a\sqrt{2}}{2}=0;$$

$$(AD)\ \frac{x}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}+\frac{y}{-\frac{a\sqrt{2}}{2}} \text{ ёки } x-y-\frac{a\sqrt{2}}{2}=0. \blacktriangle.$$

36- §. Тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти. Берилган нуқта орқали ўтувчи ва берилган бурчак коэффициентли тўғри чизиқ тенгламаси

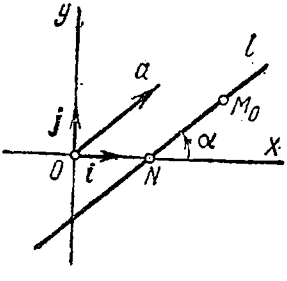
Тўғри бурчакли Декарт координаталар системаси киритилган текисликда l тўғри чизиқ йўналтирувчи a векторга параллел ҳолда M_0 нуқта орқали ўтсин (109- чизма). Агар l тўғри чизиқ Ox ўқни (N нуқтада) кесиб ўтса, у ҳолда l тўғри чизиқнинг Ox ўқ билан ҳосил қиладиган бурчаги деб Ox ўқ N нуқта атрофида l тўғри чизиқ билан устма-уст тушиши учун бу ўқни соат стрелкаси айланишига қарама-қарши йўналишда буриш керак бўлган α бурчакни тушунамиз (180° дан кичик бурчак кўзда тутилади). Агар l тўғри чизиқ Ox ўққа параллел бўлса, l тўғри чизиқнинг Ox ўқ билан ташкил қиладиган бурчаги нолга тенг деб қабул қилинади (110- чизма).

Тўғри чизиқнинг Ox ўққа оғиш бурчагининг тангенси *тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти* дейилади ва k ҳарфи билан белгиланади:

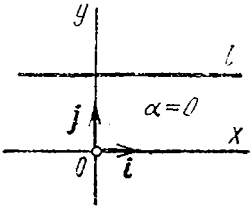
$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = k.} \qquad (1)$$

Агар $\alpha = 0$ бўлса, k ҳам 0 га тенг бўлади, бу эса l тўғри чизиқ Ox ўққа параллеллигини, унинг бурчак коэффициенти нолга тенглигини билдиради.

Агар $\alpha = 90°$ бўлса, $k = \operatorname{tg} \alpha$ маънога эга эмас (яъни ҳеч қандай сон орқали ифодаланмайди); бу эса Ox ўққа перпендикуляр тўғри чизиқ бурчак коэффициентга эга



109-чизма

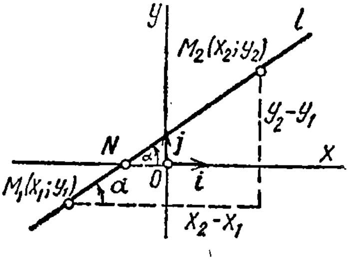


110-чизма

эмаслигини кўрсатади. Бошқача айтганда, Oy ўққа параллел тўғри чизиқ бурчак коэффициентга эга эмас.

Агар тўғри чизиқнинг бирор икки нуқтасининг координаталари маълум бўлса, бу тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини ҳисоблаш мумкин (111- чизма). Тўғри чизиқнинг иккита $M_1(x_1; y_1)$ ва $M_2(x_2; y_2)$ нуқталари берилган бўлсин, у ҳолда

$$\boxed{k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}. \qquad (2)$$



111-чизма

Агар $x_2 - x_1 = 0$ бўлса, (2) формула маъносини йўқотади, бу эса l тўғри чизиқ Ox ўққа перпендикуляр деган сўз (ёки ўшанинг ўзи, Oy га параллел).

1-масала. Агар M_1 $(3; -5)$ ва M_2 $(5; -7)$ бўлса, $(M_1 M_2)$ тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини аниқланг.

$\triangle$ M_1 ва M_2 нуқталарнинг координаталарини (2) формулага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$k = \frac{-7 - (-5)}{5 - 3} \text{ ёки } k = -1. \blacktriangle$$

2-масала. Агар $M_1(3; 5)$ ва $M_2(3; -2)$ бўлса, $(M_1 M_2)$ тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини аниқланг.

$\triangle$ $x_2 - x_1 = 0$ $(3 - 3 = 0)$ бўлгани учун (2) тенглик маъносини йўқотади. Бу тўғри чизиқда бурчак коэффициент йўқ. $(M_1 M_2)$ тўғри чизиқ Ox ўққа перпендикуляр ёки ўша (M_1M_2) тўғри чизиқ Oy ўққа параллел. $\blacktriangle$

3-масала. Координаталар бошидан ва $M_1(3; -5)$ нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини аниқланг.

$\triangle$ Бу ҳолда M_2 нуқта ролини координаталар боши бажаради. (2) формулани қўлланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - (-5)}{0 - 3} = -\frac{5}{3}; \; k = -\frac{5}{3}. \blacktriangle$$

M_1 $(x_1; y_1)$ нуқтадан ўтувчи ва берилган k бурчак коэффициентли тўғри чизиқ тенгламасини тузамиз.

(2) тенглама тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини унинг берилган икки нуқтаси бўйича ифодалайди. Бизнинг ҳолда M_1 нуқта берилган, иккинчи нуқта сифатида эса изланаётган тўғри чизиқнинг ихтиёрий $M(x, y)$ нуқтасини олиш мумкин.

Агар M нуқта M_1 нуқтадан ўтувчи ва k бурчак коэффициентга эга бўлган тўгри чизиқда ётса, унда (2) формулага кўра қуйидагига эгамиз:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=k. \tag{3}$$

Агар M нуқта тўгри чизиқда ётмаса, (3) тенглик бажарилмайди. Демак, (3) тенглик $M_1(x_1; y_1)$ нуқтадан ўтувчи ва берилган k бурчак коэффициентли тўғри чизиқ тенгламасидир; бу тенглама одатда қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\boxed{y-y_1=k(x-x_1).} \tag{4}$$

Бу тенгламага бошқача кўриниш бериш мумкин. (4) тенглама Oy ўққа параллел эмас, демак, у Oy ўқни бирор B нуқтада кесиб ўтади; бу нуқтанинг координаталарини $(0; b)$ билан белгилаймиз. B нуқта (4) тўғри чизиққа тегишли, шунинг учун унинг координаталари M_1 нуқтанинг координаталарини алмаштириши мумкин, у ҳолда (4) тенглама

$$\boxed{y=kx+b} \tag{5}$$

кўринишни олади.

Энди биз бундай айтишимиз мумкин: Oy ўққа параллел бўлмаган ҳар бир тўғри чизиқ (5) кўринишдаги тенглама билан аниқланиши мумкин.

Аксинча, (5) кўринишдаги ҳар бир тенглама k бурчак коэффициентга эга бўлган ва Oy ўқда $|b|$ узунликдаги кесма ажратадиган тўғри чизиқни аниқлайди. Ҳақиқатан ҳам, агар $y=kx+b$ тенглама берилган бўлса, у ҳолда k ва b нинг исталган қийматларида Oy ўқда берилган $|b|$ узунликдаги $[OB]$ кесма ажратадиган ва берилган k бурчак коэффициентга эга бўладиган тўғри чизиқни ҳар доим ясаш мумкин.

$y=kx+b$ кўринишдаги тенглама *тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси* дейилади.

1- масала. $P(3;\ -4)$ нуқтадан ўтувчи ва $k=\frac{2}{3}$ бурчак коэффициентли тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

△ Масалада берилган маълумотларни (4) тенгламага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y-(-4)=\frac{2}{5}(x-3)$$

ёки

$$2x-5y-26=0. \blacktriangle$$

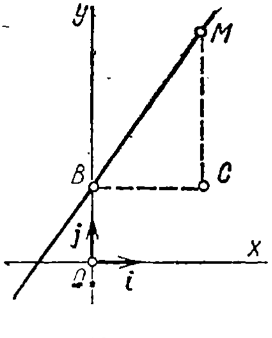
2- масала. $Q\ (-3;\ 4)$ нуқтадан ўтадиган ва Ox ўқнинг мусбат йўналиши билан 30° бурчак ҳосил қиладиган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

△ Агар $\alpha=30°$ бўлса, у ҳолда $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$. (4) тенгламага x_1, y_1 ва k нинг қийматларини қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y-4=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+3) \text{ ёки } \sqrt{3}\cdot x-3y+12+3\sqrt{3}=0. \blacktriangle$$

3- масала. Тўғри чизиқнинг $y=\frac{4}{3}x+3$ тенгламаси бўйича бу тўғри чизиқни ясанг.

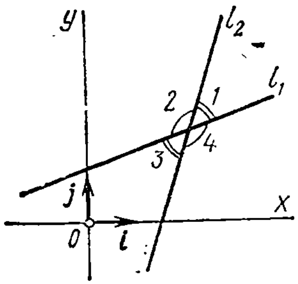
△ Oy ўқда $[OB]$; $|OB|=2$ кесмани қўямиз (112- чизма); B нуқта орқали Ox ўққа параллел қилиб „ўнг“ томонда $[BC]$, $|BC|=3$ кесма ўтказамиз ва C нуқта орқали Oy ўқ йўналишида („юқорига“) $[CM]$, $|CM|=4$ кесма ўтказамиз. Сўнгра B ва M нуқталар орқали изланаётган тўғри чизиқни ўтказамиз. (Бу тўғри чизиқ Oy ўқда 2 га тенг кесма ажратади ва Ox ўқ билан тангенси $\frac{4}{3}$ га тенг бурчак ташкил қилади.) $\blacktriangle$



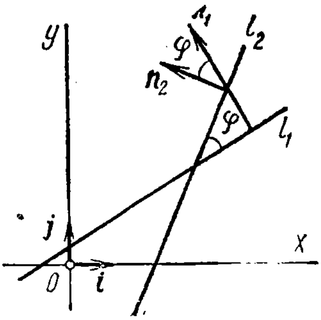
112-чизма

37- §. Тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни ҳисоблаш

Аналитик геометриянинг муҳим масалаларидан бири тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни ҳисоблаш масаласидир.



113-чизма



114-чизма

Икки кесишувчи l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар берилган бўлсин. Бу тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси S дан чиқувчи нурлар ушбу икки жуфт вертикал бурчакларнинг томонлари бўлади (113- чизма):

$$\angle 1, \angle 3 \text{ ва } \angle 2, \angle 4.$$

Улардан биттасини ҳисоблаш етарли, у ҳолда қолганлари маълум бўлади. Равшанки, шу бурчаклардан бирини тўғри чизиқларнинг йўналтирувчи ва нормал векторлари орасидаги бурчак деб олиш мумкин (114- чизма).

Агар l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар ўзларининг умумий тенгламалари билан берилган бўлса, у ҳолда улар орасидаги бурчакни бу тўғри чизиқларнинг нормал векторлари орасидаги бурчак сифатида ҳисоблаш осонроқ бўлади.

Агар l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар бурчак коэффициентли тенгламалар билан берилган бўлса, у ҳолда улар орасидаги бурчакни бу тўғри чизиқларнинг оғиш бурчаклар тангенслари орқали ҳисоблаш қулай.

Иккала ҳолни ҳам кўриб чиқамиз:

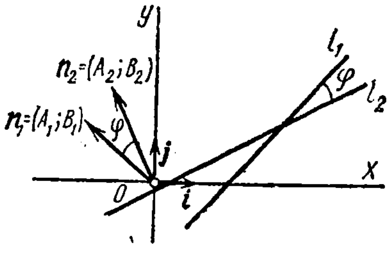
1) текисликда тўғри бурчакли Декарт координаталар системаси танланган ва икки турли l_1 ва l_2 тўғри чизиқнинг умумий тенгламалари берилган бўлсин:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad (1)$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0. \qquad (2)$$

(1) тенгламадан кўриш осонки, l_1 тўғри чизиқ n_1 нормал векторининг координаталари $(A_1; B_1)$ бўлади,

(2) тенгламадан l_2 тўғри чизиқ n_2 нормал векторининг координаталари $(A_2; B_2)$ ни топамиз. l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар орасидаги бурчаклардан бири бу тўғри чизиқларнинг бирор нормал векторлар орасидаги бурчакка тенг (115- чизма):



115-чизма

$$(\widehat{l_1; l_2}) = (\widehat{n_1; n_2}).$$

19- § га кўра икки вектор орасидаги бурчак косинуси бу векторлар скаляр кўпайтмасининг уларнинг узунликлари кўпайтмаси нисбатига тенг, яъни

$$\cos(\widehat{a; b}) = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}.$$

Демак,

$$\boxed{\cos(\widehat{l_1; l_2}) = \cos(\widehat{n_1; n_2}) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}} \cdot \quad (3)$$

Масалан, $3x + 4y - 25 = 0$ ва $4x + 3y - 25 = 0$ тўғри чизиқлар берилган. Улар орасидаги бурчакни ҳисоблаймиз. (3) формулага кўра қуйидагига эгамиз:

$$\cos(\widehat{l_1; l_2}) = \cos(\widehat{n_1; n_2}) = \frac{3 \cdot 4 + 4 \cdot 3}{\sqrt{3^2 + 4^2}\,\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{24}{25}.$$

2) текисликда тўғри бурчакли Декарт координаталар системаси танланган бўлиб, l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар

$$y = k_1x + b_1, \qquad (4)$$

$$y = k_2x + b_2 \qquad (5)$$

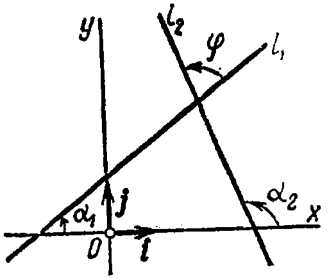
тенгламалар билан берилган бўлсин. Бу тўғри чизиқлардан ҳеч бири Oy ўққа параллел эмас, чунки Oy ўққа параллел тўғри чизиқларда бурчак коэффициент бўлмайди (36- §).

(4) ва (5) тўғри чизиқлар орасидаги бурчак деб, уларнинг шу қаралаётган тартибида l_1 (4) тўғри чизиқни l_2 (5) тўғри чизиқ билан биринчи марта устма-уст

тушгунига қадар соат стрелкаси айланишига тескари йўналишда буриш лозим бўлган φ бурчакни айтамиз.

Агар l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар параллел бўлса, улар орасидаги бурчак нолга тенг деб ҳисобланади. Демак,

$$0 \leqslant \varphi < 180^\circ.$$



116-чизма

Айтайлик, α_1 бурчак l_1 (4) тўғри чизиқнинг Ox ўққа оғиш бурчаги, α_2 эса l_2 (5) тўғри чизиқнинг Ox ўққа оғиш бурчаги ва φ иккинчи тўғри чизиқнинг биринчи тўғри чизиққа оғиш бурчаги бўлсин (116- чизма).

У ҳолда $\alpha_1 + \varphi = \alpha_2$ ёки $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$.

Демак,

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}. \qquad (6)$$

$\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = k_2$ бўлгани учун (6) тенгликни

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \qquad (7)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Бу икки тўғри чизиқ орасидаги бурчакни ҳисоблаш формуласидир.

Махраж нолга тенг бўлганда, яъни (4) ва (5) тўғри чизиқлар перпендикуляр бўлганда (7) формула маъносини йўқотади.

Масала. $x + 7y - 5 = 0$ ва $3x - 4y + 20 = 0$ тўғри чизиқлар берилган. Улар орасидаги бурчакни топинг.

△ Биринчи тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти $k_1 = -\frac{1}{7}$, иккинчи тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти $k_2 = \frac{3}{4}$. Сўнгра (7) формулага кўра қуйидагини ёзамиз:

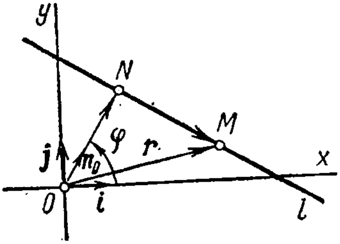
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{7}\right)}{1 + \frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)} = \frac{25\cdot 28}{28\cdot 25} = 1.$$

Демак, тўғри чизиқлар орасидаги бурчак 45° га тенг. ▲

38- §. Тўғри чизиқнинг нормал кўринишдаги тенгламаси

Декарт координаталар системасида бирлик нормал вектори $\boldsymbol{n}_0=(\cos\varphi;\ \sin\varphi)$ ва координаталар бошидан масофаси p билан берилган l тўғри чизиқ тенгламасини тузамиз (117- чизма).

☐ O нуқтадан l тўғри чизиққа перпендикуляр туширамиз ва унинг асосини N билан белгилаймиз. Равшанки, $\overrightarrow{ON}$ — бу нуқтанинг радиус-вектори. Шартга кўра $\overrightarrow{ON}=p\boldsymbol{n}_0$. $\boldsymbol{r}$ берилган l тўғри чизиқнинг ихтиёрий (ўзгарувчи) M нуқтасининг радиус-вектори бўлсин. M нуқта l тўғри чизиқда ётиши учун $\overrightarrow{NM}$ вектор ва $\boldsymbol{n}_0$ вектор перпендикуляр, яъни $\overrightarrow{NM}\cdot\boldsymbol{n}_0=0$ бўлиши зарур ва етарли. Лекин $\overrightarrow{NM}=\boldsymbol{r}-\overrightarrow{ON}=\boldsymbol{r}-p\boldsymbol{n}_0$, шунинг учун



117-чизма

$$(\boldsymbol{r}-p\boldsymbol{n}_0)\cdot\boldsymbol{n}_0=0$$

ёки

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}_0-p=0.$$

Агар M нуқтанинг координаталари $(x;\ y)$ бўлса, $\boldsymbol{r}=(x;\ y)$, у ҳолда аввалги муносабатни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\boxed{x\cos\varphi+y\sin\varphi-p=0.}$$

Бундай тенглама *l тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси* дейилади. ■

Тўғри чизиқ тенгламаси бу формасининг тўғри чизиқ тенгламаларининг бошқа формаларидан қулайлик томони шундаки, бунда барча коэффициентлар геометрик маънога эга. x ва y ўзгарувчилар олдидаги коэффициентларда ($\cos\varphi$ ва $\sin\varphi$ да) φ бурчак бирлик нормал векторнинг Ox ўқ билан ташкил қилган бурчаги, p озод ҳад координаталар бошидан тўғри чизиққача бўлган масофа бўлиб, „манфий“ ишора билан олинади.

Тўғри чизиқнинг нормал тенгламасидан кўриш осонки, тенглама нормал кўринишда бўлиши учун x ва y ўзгарувчилар олдидаги коэффициентларнинг квадратлари йиғиндиси бирга тенг бўлиши зарур (чунки $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$). Масалан, $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 6 = 0$ тўғри чизиқ тенгламасидан бу тўғри чизиқ координаталар бошидан 6 масштаб бирликка тенг масофада ётиши, унинг n_0 нормал вектори эса Ox ўқнинг мусбат йўналиши билан косинуси $\frac{3}{5}$ га, синуси эса $\frac{4}{5}$га тенг бурчак ҳосил қилиши келиб чиқади.

Тўғри чизиқнинг $Ax + Bx + C = 0$ умумий тенгламасини нормал кўринишга келтириш мумкин, бунинг учун унинг чап томонини

$$\frac{\pm 1}{|n|} = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

га кўпайтириш лозим.

$\lambda = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ сон *нормалловчи кўпайтувчи* дейилади; λ нинг ишораси C нинг ишорасига қарама-қаршидир. Энди тўғри чизиқ тенгламаси қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{\pm A}{\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{\pm B}{\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{\pm C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0.$$

Бу нормал тенглама бўлади, чунки

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 - \left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 = \frac{A^2}{A^2+B^2} + \frac{B}{A^2+B^2} = 1.$$

Масалан, тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси $3x + 4y - 15 = 0$ берилган бўлсин. Унинг чап томонини $\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{1}{5}$ сонига кўпайтирамиз ва $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 3 = 0$ ни ҳосил қиламиз. Энди қуйидагига эгамиз: $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$. Демак, $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 3 = 0$ тўғри чизиқнинг нормал вектори бирлик вектор экан.

39- §. Нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа

Бизга ўзининг нормал кўринишдаги тенгламаси билан l тўғри чизиқ ва $M_1(x_1;\ y_1)$ нуқта берилган бўлсин, бу нуқтадан шу тўғри чизиққача бўлган масофани аниқлаш талаб қилинади.

M_1 нуқтадан l тўғри чизиққача бўлган d *масофа* деб $[M_0\ M]$ кесма узунлигини тушунамиз, бунда $M_0(x_0;\ y_0)$ нуқта M_1 нуқтадан l тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг асоси.

$$n_0 = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}};\ \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right) \text{ ва } \overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0;\ y_1 - y_0)$$

векторлар коллинеар, чунки $n_0 \perp l$ нормал вектор сифатида, $\overrightarrow{M_0M_1} \perp l$ ясалишига кўра, шунинг учун $|\overrightarrow{M_0M_1}| = |d\,n_0|$.

Равшанки,

$$|n_0 \cdot \overrightarrow{M_0M_1}| = |n_0|\,|\overrightarrow{M_0M_1}| = |\overrightarrow{M_0M_1}|.$$

Охирги тенгликни координаталарда ёзамиз:

$$|n_0 \cdot \overrightarrow{M_0M_1}| = \left|\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}(x_1 - x_0) + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}(y_1 - y_0)\right| =$$
$$= \frac{|Ax_1 + By_1 - (Ax_0 + By_0)|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

$M_0 \in l$ бўлгани учун $Ax_0 + By_0 + C = 0$ ёки $C = -(Ax_0 + By_0)$. Демак,

$$d = |\overrightarrow{M_0M_1}| = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

1- масала. $M\ (3;\ 2)$ нуқтадан $4x - 3y + 14 = 0$ тўғри чизиққача бўлган масофани аниқланг.

$$\triangle\ d = \frac{4\cdot 3 - 3\cdot 2 + 14}{5} = 4. \blacktriangle$$

2- масала. $N\ (5;\ 4)$ нуқтадан $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ тўғри чизиққача бўлган масофани аниқланг.

$\triangle$ Тўғри чизиқ тенгламасини нормал кўринишга келтирамиз:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2}} = \frac{12}{5},$$

$$\frac{x}{3}\cdot\frac{12}{5}+\frac{y}{4}\cdot\frac{12}{5}-\frac{12}{5}=0,\quad \frac{4x+3y-12}{5}=0,$$

$$d=\frac{4\cdot5+3\cdot4-12}{5}=4. \blacktriangle$$

40- §. Икки тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтаси

Ушбу икки тўғри чизиқ берилган бўлсин:

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \qquad (1)$$

$$A_2x+B_2y+C_2=0. \qquad (2)$$

Агар тўғри чизиқлар кесишса, у ҳолда бу тўғри чизиқларнинг координаталари (1), (2) тенгламаларнинг ҳар бирини қаноатлантирувчи умумий нуқтаси мавжуд бўлади.

Демак, икки тўғри чизиқнинг умумий нуқтаси координаталарини топиш учун (1), (2) тенгламалар системасини ечиш керак.

(1) ва (2) системани ечишда уч ҳол бўлиши мумкин. 1) система битта (x_0; y_0) ечимга эга. Бу ҳолда тўғри чизиқлар битта $M_0(x_0; y)$ кесишиш нуқтасига эга. 2) система биргаликда эмас (яъни ечимга эга эмас). Бу ҳолда (1) ва (2) тўғри чизиқларнинг умумий нуқтаси йўқ. (1) ва (2) тўғри чизиқлар параллел. 3) (1), (2) тенгламалар системаси аниқмас (бу эса система чексиз кўп ечимга эга эканлигини билдиради); демак, (1) ва (2) тўғри чизиқлар чексиз кўп умумий нуқталарга эга, яъни улар устма-уст тушади.

1- масала. $3x-2y-13=0$; $4x+y-14=0$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқталарини топинг.

△ Бу тенгламаларни биргаликда ечиб, $x=3$, $y=2$ ни топамиз. Тўғри чизиқлар координаталари (3; 2) бўлган нуқтада кесишади. ▲

2- масала. $3x+5y-12=0$ ва $6x+10y+25=0$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқталарини топинг.

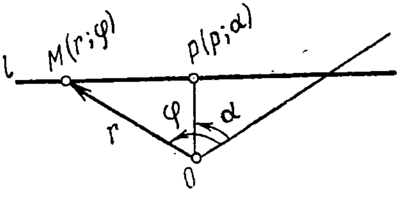
△ Система биргаликда эмас. Ечимлар йўқ. Тўғри чизиқлар кесишмайди. ▲

3- масала. $3x-7y+11=0$ ва $6x-14y+22=0$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқталарини топинг.

△ Система аниқмас (чексиз кўп ечимга эга). Демак, тўғри чизиқлар чексиз кўп умумий нуқталарга эга; бу эса тўғри чизиқлар устма-уст тушишини билдиради. ▲

41- §. Тўғри чизиқнинг қутб координаталардаги тенгламаси

Текисликда қутби O нуқтада бўлган қутб координаталар системасини киритамиз. Бирор l тўғри чизиқ берилган бўлсин (118- чизма). O қутбдан берилган тўғри чизиққа перпендикуляр туширамиз ва унинг асосини P ҳарфи билан белгилаймиз. P нуқтанинг координаталарини p ва α билан, берилган тўғри чизиқнинг ўзгарувчи M нуқтаси координаталарини r ва φ билан белгилаймиз.



118-чизма

OPM учбурчакдан

$$|OP| = |OM|\cos(\varphi-\alpha)$$

ёки координаталарда ёзилса,

$$\boxed{r = \frac{p}{\cos(\varphi-\alpha)}} \qquad (1)$$

келиб чиқади.

Тескари даъво ҳам ўринли: координаталари (1) тенгламани қаноатлантирадиган ихтиёрий нуқта берилган тўғри чизиққа тегишлидир.

(1) тенглама *тўғри чизиқнинг қутб координаталардаги тенгламаси* дейилади.

Тўғри чизиқнинг қутб координаталардаги тенгламасини тўғри чизиқнниг нормал тенгламаси

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

дан $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ алмаштириш ёрдамида осон ҳосил қилиш мумкин. Бунга мустақил ишонч ҳосил қилишни китобхоннинг ўзига тавсия қиламиз.

II БОБГА ДОИР МАСАЛАЛАР

1. A (0; 3) нуқтадан ўтувчи ва $a = (2; 1)$ векторга параллел тўғри чизиқни ясанг.

2. (3; -2) нуқтадан ўтувчи ва $a = (1; 3)$ векторга параллел тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаларини тузинг.

3. $C\ (3; -2)$ нуқтадан ўтувчи ва $\mathbf{n} = (1;\ 4)$ векторга перпендикуляр тўғри чизиқни ясанг.

4. $D\ (2; -3)$ нуқтадан ўтувчи ва $\mathbf{n} = (4; -1)$ векторга перпендикуляр тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

5. $E\ (4; -3)$ нуқтадан ўтувчи ва $\mathbf{i}$ векторга параллел тўғри чизиқни ясанг.

6. Агар F нуқта Ox ўққа нисбатан $K\ (3; -4)$ нуқтага симметрик бўлса, F нуқтадан ўтувчи ва $\mathbf{n} = (2;\ 5)$ векторга перпендикуляр тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

7. AB кесма берилган. Агар $A\ (3;\ 2)$, $B\ (5; -4)$ бўлса, AB кесманинг ўртасидан унга перпендикуляр бўлиб ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

8. Координаталар бошидан ўтувчи ва $\mathbf{n} = (3;\ 4)$ векторга перпендикуляр тўғри чизиқни ясанг.

9. $A\ (3; -2)$ нуқтадан ўтувчи ва $\mathbf{n} = (3; -2)$ векторга перпендикуляр тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

10. $A(x-2) + B(y+3) = 0$ тўғри чизиқлар дастасидан $n = (4;\ 1)$ векторга перпендикуляр тўғри чизиқни ажратинг.

11. $C\ (0;\ 3)$ нуқтадан ўтувчи ва $\mathbf{j}$ векторга перпендикуляр тўғри чизиқни ясанг.

12. $N\ (3;4)$ нуқта орқали ўтувчи ва $\mathbf{i}$ векторга перпендикуляр тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

13. Икки $A\ (-3;2)$ ва $B\ (4;3)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқни ясанг.

14. Координаталар бошидан ва $C\ (3; -2)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқни ясанг. Унинг тенгламасини тузинг.

15. $A\ (-5; -5)$, $B\ (1;7)$ ва $C\ (5; -1)$ учбурчак берилган. Бу учбурчак томонларининг ва медианаларининг тенгламаларини тузинг.

16. $N\ (4; -3)$ нуктадан ўтувчи ва координата ўқларига параллел тўғри чизиқларнинг тенгламаларини тузинг.

17. $P\ (5; -2)$ нуқтадан ўтувчи ва координата ўқларига перпендикуляр тўғри чизиқларнинг тенгламаларини тузинг.

18. $3x - 2y - 12 = 0$ тўғри чизиқнинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталарини аниқланг ва бу тўғри чизиқни ясанг.

19. Тўғри чизиқларнинг тенгламалари умумий кўринишда берилган. Уларнинг кесмалардаги тенгламасини ёзинг:

1) $2x + 3y - 6 = 0$; 2) $2x - 3y + 6 = 0$;
3) $3y - 2x + 6 = 0$ 4) $2x + 3y + 6 = 0$.

20. Квадратнинг симметрия маркази координаталар бошида жойлашган. Унинг томонларидан бирининг тенгламаси $x + 3y - 5 = 0$. Унинг қолган учта томони тенгламасини тузинг.

21. $3x - 4y - 12 = 0$ тўғри чизиқнинг координат бурчакдан ажратадиган учбурчак юзини ҳисобланг.

22. Тўғри чизиқни шундай ўтказингки, M (2; 1) нуқта бу тўғри чизиқнинг координата ўқлари орасида жойлашган кесмасининг ўртаси бўлсин.

23. Тўғри чизиқ биринчи чоракда координата ўқларида конгруэнт кесмалар ажратади. Агар тўғри чизиқ билан координата ўқлари ҳосил қилган учбурчакнинг юзи 18 га тенг бўлса, тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

24. Агар B (0; 8) нуқтадан ўтувчи тўгри чизиқ билан координата ўқлари ташкил қилган учбурчакнинг юзи 16 га тенг бўлса, тўгри чизиқ тенгламасини тузинг.

25. $5x + 8y - 40 = 0$ тўғри чизиқ билан координаталар ўқлари ҳосил қилган учбурчакнинг юзини аниқланг.

26. $2x - 3y + 5 = 0$ тенглама берилган. M (4; —5) нуқтадан ўтувчи шундай тўгри чизиқ тенгламасини тузингки, у

1) берилган тўғри чизиққа параллел бўлсин;

2) берилган тўгри чизиққа перпендикуляр бўлсин.

27. N (—3; 4) нуқтадан ўтувчи ва Oy ўқнинг мусбат йўналиши билан 60° бурчак ташкил қилувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

28. M (3; 5) нуқтадан ўтувчи ва Ox ўқнинг мусбат йўналиши билан 45° бурчак ташкил қилувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

29. $3x - 7y + 2 = 0$ тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини топинг ва уни ясанг.

30. P (3; — 5) нуқтадан ўтувчи ва абсциссалар ўқининг мусбат йўналиши билан ушбу $4x - 3y + 9 = 0$ тўғри чизиқ бу йўналиш қандай бурчак ҳосил қилса, шундай бурчак ташкил қилувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

31. $2x - 3y + 4 = 0$ ва $x - y = 0$ тўғри чизиқлардан қайси бири ординаталар ўқида каттароқ кесма ажратади?

32. Координаталар бошидан чиққан нуқта абсциссалар ўқининг мусбат йўналиши бўйича $v_1 = 3$ м/с ўзгармас тезлик билан, ординаталар ўқининг мусбат йўналиши бўйича $v_2 = 2$ м/с ўзгармас тезлик билан силжийди. Нуқтанинг ҳаракат траекториясини топинг.

33. M (4; — 3) нуқтадан ўтувчи ва абсциссалар ўқининг мусбат йўналиши билан ушбу $y = \frac{3}{5}x - 2$ тўгри чизиқ шу йўналиш билан қандай бурчак ташкил қилса, шундай бурчак ташкил қиладиган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

34. $2x - 3y + 4 = 0$ ва $x - y = 0$ тўгри чизиқлардан қайси бири ординаталар ўқининг мусбат йўналиши билан каттароқ бурчак ҳосил қилишини аниқланг.

35. $3x - 4y + 13 = 0$ тўғри чизиқнинг абсциссалар ўқининг мусбат йўналишига оғиш бурчаги тангенсини топинг ва y ординаталар ўқидан қандай кесма ажратишини аниқланг.

36. Шундай икки тўғри чизиқ тенгламаларини тузингки, улардан бири абсциссалар ўқининг мусбат йўналиши билан иккинчи тўғри чизиққа қараганда икки марта катта бурчак ташкил қилсин.

37. $3x - 4y + 5 = 0$ тўғри чизиқ берилган. Шундай тўғри чизиқнинг k бурчак коэффициентини топингки: 1) бу тўғри чизиқ берилган тўғри чизиққа параллел бўлсин; 2) перпендикуляр бўлсин

38. $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$ тўғри чизиқ берилган. Бу тўғри чизиқнинг абсциссалар ўқининг мусбат йўналиши билан ташкил қилган бурчаги катталигини топинг.

39. $A\ (2;\ 0)$ ва $B\ (4;\ -2)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ абсциссалар ўқининг мусбат йўналиши билан қандай бурчак ташкил қилади?

40. Қуйидаги тенглама билан берилган тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини ва ординаталар ўқида ажратадиган кесмасини аниқланг:

1) $3x - 2y + 8 = 0$; 2) $3x - y + 3 = 0$; 3) $x + y + 3 = 0$.

41. Тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти k ни ва Oy ўқда ажратадиган кесмаси b ни билган ҳолда бу тўғри чизиқ тенгламасини тузинг:

1) $k = \frac{3}{4}$, $b = 2$; 2) $k = 2$, $b = -3$;

3) $k = -5$, $b = -3$; 4) $k = -\frac{3}{2}$, $b = 5$.

42. Икки $A\,(3;\ 5)$ ва $B\,(-2;\ 4)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини ҳисобланг.

43. Тўғри чизиқ $P(-1;\ 4)$ нуқтадан ўтади ва абсциссалар ўқининг мусбат йўналиши билан M_1 $(1;\ 3)$ ва M_2 $(2;\ 8)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ шу йўналиш билан ташкил қиладиган бурчакка тенг бурчак ташкил қилади. Тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

44. Тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни аниқланг.

1) $x + 5y + 9 = 0$ ва $2x - 3y + 1 = 0$;
2) $2x + y - 5 = 0$ ва $3x - y + 4 = 0$;
3) $y = -\frac{3}{2}x + 6$ ва $2y + 3x - 7 = 0$;
4) $2x - 3y + 12 = 0$ ва $3x - y + 5 = 0$;
5) $3x + 2y - 7 = 0$ ва $2x - 3y + 9 = 0$.

6) $y = \frac{2}{3}x + 4$ ва $4x - 6y + 15 = 0$;

7) $3x - 5y + 15 = 0$ ва $5x + 3y - 15 = 0$;

8) $y = \frac{2}{8}x - 7$ ва $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$;

9) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ва $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$.

45. Қуйидаги тўғри чизиқлар жуфтларининг параллеллигини исботланг:

1) $5x + 3y - 7 = 0$, $10x + 6y + 15 = 0$;
2) $2x - 4y + 9 = 0$, $x - 2y + 9 = 0$;
3) $2x + 7 = 0$ $4x - 9 = 0$;
4) $y = 3$, $3y - 25 = 0$.

46. 1) $3x + 2y - 5 = 0$. 2) $y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$, 3) $4x + 6y - 5 = 0$; 4) $4x - 6y + 9 = 0$ тўғри чизиқлар орасидан параллелларини ва перпендикулярини кўрсатинг.

47. Қуйидаги ҳолларнинг ҳар бирида тўғри чизиқнинг умумий тенгламасини нормал кўринишга келтиринг:

1) $3x - 4y - 25 = 0$. 2) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 20 = 0$; 3) $x + 5 = 0$;

4) $5x - 12y + 26 = 0$; 5) $\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y + 13 = 0$,

48. Тўғри чизиқларнинг қуйидаги тенгламаларидан қайси бири нормал тенглама бўлади:

1) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 5 = 0$; 2) $\frac{4}{5}x - \frac{3}{4}y - 7 = 0$.

3) $y - 3 = 0$; 4) $-y - 15 = 0$.

49. Параллел тўғри чизиқлар орасидаги d масофани аниқланг:

1) $4x - 3y + 25 = 0$. $8x - 6y + 25 = 0$;
2) $5x - 12y + 26 = 0$, $5x - 12y - 13 = 0$;
3) $3x - 4y - 20 = 0$, $6x - 8y + 25 = 0$.

50. $4x - 3y - 15 = 0$ тўғри чизиққа параллел ва ундан $d = 3$ масофада ётадиган тўғри чизиқлар тенгламаларини тузинг.

51. Қавариқ тўртбурчакнинг кетма-кет $A\ (-6;\ -2)$, $B\ (6;\ 7)$, $C\ (9;\ 3)$ ва $D\ (1;\ -3)$ учлари берилган. Унинг диагоналларининг кесишиш нуқтасини аниқланг.

52. $5x - 2y - 10 = 0$ тўғри чизиқнинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталарида бу тўғри чизиққа перпендикулярлар ўтказилган. Уларнинг тенгламаларини ёзинг.

53. $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1$ тўғри чизиқ берилган. Бу тўғри чизиқнинг координаталар бошидан масофасини аниқланг.

54. $3x+2y-13=0$ ва $5x-3y-9=0$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасини топинг.

55. $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ тўғри чизиқ берилган. Бу тўғри чизиқнинг абсциссалар ўқи билан кесишиш нуқтасидан ўтувчи ва биринчи чорак координат бурчаги биссектрисасига перпендикуляр тўғри чизиқ тенгламасини тузиш талаб қилинади.

56. Қуйидаги тўғри чизиқлар жуфтларининг ўзаро жойлашишини текширинг. Агар улар кесишса, кесишиш нуқталарини аниқланг.

а) $x+y-3=0$ ва $3x+3y-9=0$;
б) $x=4$ ва $x+y=0$;
в) $y=0$ ва $y-7=0$;
г) $2x+y+1=0$ ва $2x+y+5=0$

57. Параллелограмм икки томонининг тенгламалари $x-4y+11=0$ ва $2x+y-5=0$ ҳамда унинг диагоналларидан бирининг тенгламаси $x-y-1=0$ берилган. Бу параллелограмм учларининг координаталарини аниқланг.

58. $3x+2y-13=0$, $x+3y-9=0$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасидан $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$ тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқ ўтказилган. Унинг тенгламасини тузинг.

59. Учбурчакнинг A (2; 1), B (—2; 3) ва C (—10; —13) учлари берилган. C нуқтадан ўтказилган медианага B учдан туширилган перпендикулярнинг узунлигини ҳисобланг.

60. $2x+y=0$ тўғри чизиққа перпендикуляр ва координаталар бошидан 3 га тенг масофада ётадиган тўғри чизиқлар тенгламаларини тузинг.

61. $x-y+4=0$ ва $4x+2y-19=0$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасидан $2x-3y+6=0$ тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқ ўтказинг.

62. $2x+3y-13=0$ ва $x+y=5$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқталарини топинг.

63. Учбурчак томонларининг

$$x-y+4=0,\quad 4x+2y-19=0,\quad 5x+6y+9=0$$

тенгламалари берилган. Унинг учларининг координаталарини топиш талаб қилинади.

64. Параллелограмм икки томонининг тенгламалари

$$8x+3y+1=0,\ 2x+y-1=0$$

ва унинг диагоналларидан бирининг тенгламаси $3x+2y+3=0$ берилган. Бу параллелограмм учларининг координаталарини топиш талаб қилинади.

65. Қуйидаги тўғри чизиқлар жуфтларининг кесишиш нуқтасини топинг.

1) $3x-2y-5=0$, $5x+y-17=0$;
2) $4x-3y-7=0$, $2x+3y-17=0$;
3) $2x+5y-29=0$, $5x+2y-20=0$.

66. Учлари M $(0;-2)$, N $(6;2)$ ва P $(2;4)$ бўлган учбурчак берилган. MP томон, NE медиана ва ND баландликнинг тенгламасини тузинг.

67. MNP учбурчак томонларининг тенгламалари берилган:

$$3x+4y-5=0\ (MN),\ 3x-y-10=0\ (NP)$$
$$\text{ва}\ -y-2=0\ (MP).$$

68. $4x+2y-19=0$ ва $5x+6y+6=0$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасидан $x+y+1=0$ тўғри чизиққа перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказинг.

III боб

ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЭГРИ ЧИЗИҚЛАР

II бобда биз x ва y ўзгарувчиларга нисбатан биринчи даражали тенгламанинг геометрик маъносини текширдик ва қуйидагиларни исбот қилдик:

1) тўғри чизиқнинг барча нуқталари тўпламига ўзгарувчи координаталарга нисбатан биринчи даражали тенглама мос келади;

2) текисликнинг координаталари x ва y ўзгарувчиларга нисбатан биринчи даражали тенгламани қаноатлантирувчи барча нуқталари тўплами тўғри чизиқ ҳосил қилади.

Бу бобда биз

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

кўринишдаги умумий тенгламани ўрганишни бошлаймиз.

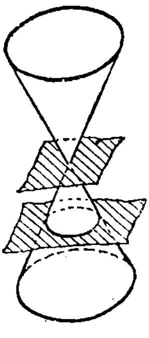
x ва y ўзгарувчиларга нисбатан иккинчи даражали тенгламалар билан аниқланадиган чизиқлар *иккинчи тартибли чизиқлар* дейилади.

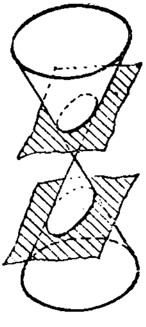
Иккинчи тартибли чизиқлар архитектура, астрономия, механикада ҳамда фан ва техниканинг бошқа бўлимларида катта роль ўйнайди. Бундай чизиқларни қадимги Грецияда билар эдилар, бироқ грек математиклари координаталар методини ҳам, тенгламаларни ҳам ҳали билмас эдилар. Бунинг ўрнига улар коник сиртнинг текислик ёрдамидаги турли кесимларини текширган эдилар.

Доиравий коник сиртни текислик билан кесиш натижасида ҳосил бўладиган эгри чизиқлар *коник кесимлар* ёки *кониклар* дейилади. Бундай чизиқлар жумласига эллипс, гипербола ва парабола киради.

Доиравий коник сирт ёки ***доиравий конус*** деб, тўғри чизиқни уни кесувчи бошқа бир тўғри чизиқ атрофида айлантириш натижасида ҳосил қилинадиган сиртга айтилишини эслатиб ўтамиз. Шундай қилиб, коник сирт икки палладан иборат ва тўғри чизиқлар (тўғри чизиқли ясовчилар) билан ҳосил қилинган.

Доиравий коник сиртни текислик билан кесилганда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

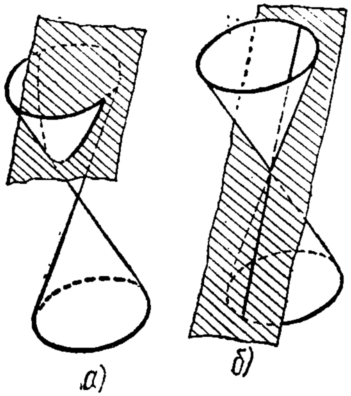

119-чизма


120-чизма

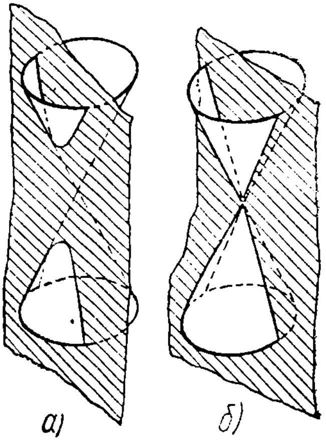
1) Агар текислик коник сиртни айланиш ўқига перпендикуляр ҳолда кесиб ўтса, у ҳолда кесимда айлана ҳосил бўлади. Агар текислик конуснинг учи орқали ўтса, у ҳолда кесимда нуқта ҳосил бўлади, яъни айниган айлана ҳосил бўлади (119- чизма).

2) Агар текислик коник сиртнинг фақат битта палласини кесса ва унинг тўғри чизиқли ясовчиларидан биттасига ҳам параллел бўлмаса, у ҳолда кесимда эллипс ҳосил бўлади (120- чизма).

3) Агар текислик коник сиртнинг бир палласини


а) б)

121-чизма


а) б)

122-чизма

кесса ва ясовчилардан бирига параллел бўлса, кесимда парабола ҳосил бўлади. Агар текислик коник сиртнинг учидан ва ясовчиларининг биридан ўтса, у ҳолда кесимда тўғри чизиқ, яъни айниган парабола бўлади (121- чизма).

4) Агар текислик коник сиртнинг иккала палласини кесса ва коник сирт ўқига параллел бўлса, у ҳолда кесимда гипербола бўлади. Агар кесувчи текислик конус учидан ўтса ва унинг иккала палласини ҳам кесса, кесимда иккита кесишувчи тўғри чизиқ, яъни айниган гипербола бўлади (122- чизма).

Кейинги параграфларда биз бу ажойиб чизиқлар билан батафсил танишамиз.

42- §. Айлана

Бу параграфда айлана тенгламаси аввал махсус танланган координаталар системаси бўлган ҳолда, кейин эса умумий ҳолда келтириб чиқарилади. Параграф сўнгида маркази координаталар бошида бўлган айлананинг параметрик тенгламаси келтириб чиқарилади.

Текисликнинг *марказ* деб аталувчи берилган нуқтадан бир хил узоқликда ётган барча нуқталари тўплами *айлана* дейилади.

Текисликда O нуқта айлана маркази сифатида олинган бўлсин, у ҳолда айлананинг таърифига кўра бу тўпламнинг исталган M нуқтасининг умумий хоссасини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$|OM| = R. \qquad (1')$$

(1′) тенглик маркази O нуқтада ва радиуси R бўлган айлана тенгламасидир.

Агар текисликда координаталар системаси танланган бўлса, унда икки ҳол бўлиши мумкин:

1) айлана маркази координаталар боши билан устма-уст тушган энг содда ҳол;

2) айлана маркази текисликнинг исталган нуқтасида жойлашган ҳол.

Айлананинг энг содда тенгламасини келтириб чиқариш учун унинг марказини координаталар боши $O(0; 0)$ нуқтага жойлаштирамиз ва айлананинг ихтиёрий $M(x; y)$ нуқтасидан O марказгача бўлган масофа, яъни $|OM|$ масофа ўзгармас ва айлана радиуси R га тенглигини ёзамиз.

Икки нуқта орасидаги масофа формуласи бўйича $|OM|$ масофани $O(0;0)$ ва $M(x;y)$ нуқталарнинг координаталари орқали ифодалаймиз. Қуйидагига эгамиз:

$$|OM| = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$$

ва шунинг учун

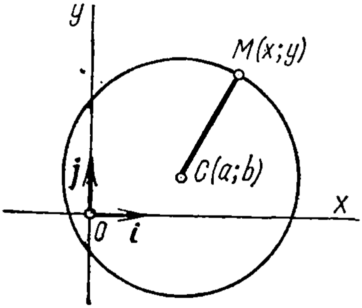
$$\sqrt{x^2+y^2} = R.$$

Бу тенгликнинг икки томонини квадратга кўтариб

$$\boxed{x^2+y^2=R^2} \qquad (1)$$

ни ҳосил қиламиз.

(1) тенглама маркази координаталар бошида ва радиуси R бўлган айлананинг энг содда тенгламасини тасвирлайди. Масалан $x^2+y^2=16$ тенглама маркази координаталар бошида ва радиуси $R=4$ бўлган айлана тенгламаси, $x^2+y^2=1$ тенглама эса маркази координаталар бошида ва радиуси $R=1$ бўлган айлана тенгламасидир.



123-чизма

Айлана тенгламасини тўғри чизиқ тенгламасидан фарқ қиладиган муҳум хусусиятини қайд этиб ўтамиз: айлананинг тенгламаси x ва y ўзгарувчиларга нисбатан иккинчи даражали тенгламадир, шунинг учун айлана иккинчи тартибли чизиқлар жумласига киради.

Маркази исталган нуқтада бўлган айлана тенгламасини келтириб чиқарамиз. $C(a;b)$ нуқта айлананинг маркази, R айлананинг радиуси, $M(x;y)$ эса унинг x ва y координатали ихтиёрий нуқтаси бўлсин (123- чизма). Айлананинг исталган нуқтасидан C марказгача бўлган масофани бундай ифодалаш мумкин:

$$R = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}.$$

Бу тенгликнинг иккала томонини квадратга кўтаргандан сўнг қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.} \qquad (2)$$

(2) тенглама маркази C нуқтада ва радиуси R бўлган айлана тенгламасидир. Бу тенгламани айлананинг ихтиёрий нуқтасининг координаталари қаноатлантиради, бу айланада ётмайдиган нуқталарнинг координаталари эса қаноатлантирмайди.

Аксинча, координаталари (2) тенгламани қаноатлантирадиган исталган $M(x; y)$ нуқта айланага тегишли, чунки унинг C нуқтадан бўлган масофаси R га тенг. Масалан,

$$(x-5)^2+(y+3)^2=16 \qquad (3)$$

тенглама маркази $C(5; -3)$ нуқтада ва радиуси $R=4$ бўлган айлана тенгламасидир,

$$(x+6)^2+y^2=25$$

тенглама эса маркази $C(-6; 0)$ нуқтада ва радиуси $R=5$ бўлган айлана тенгламасидир.

Агар айлананинг умумий тенгламасида қавсларни очиб, ҳамма ҳадларини чап томонга ўтказсак ва уларни x ва y ўзгарувчиларнинг даражаларини пасайиб бориши бўйича жойлаштирсак, у ҳолда айлана тенгламасини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0 \qquad (4)$$

ёки қисқароқ ёзадиган бўлсак:

$$x^2+y^2-2ax-2by+p=0, \qquad (5)$$

бу ерда

$$p=a^2+b^2-R^2.$$

Биз исталган айлананинг тенгламасини (5) кўринишда ёзиш мумкинлигини исботладик, бу ерда $p<a^2+b^2$. Энди тескарисини, яъни (5) тенглама айланани ифодалашини исботлаймиз.

Ҳақиқатан ҳам,

$$(x-a)^2+(y-b)^2-(a^2+b^2-p)=0 \qquad (6)$$

ёки

$$(x-a)^2+(y-b)^2=(\sqrt{a^2+b^2-p})^2. \qquad (6)$$

Охирги тенглама чизиқнинг ҳар бир $M(x; y)$ нуқтаси $C(a; b)$ нуқтадан $\sqrt{a^2+b^2-p}$ га тенг бўлган бир хил масофада ётишини билдиради ва, демак, (5) чизиқ маркази $C(a; b)$ нуқтада ва радиуси $R=\sqrt{a^2+b^2-p}$ бўлган айланани тасвирлайди.

Кўриш осонки, (5) тенглама икки ўзгарувчили иккинчи даражали

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (7)$$

умумий тенгламанинг хусусий ҳолидир.

Айлананинг тенгламаси (5) ни икки ўзгарувчили иккинчи даражали (7) умумий тенглама билан таққослаб, бундай даъво айтиш мумкин: агар $A=C$, $B=0$ ва $\frac{D^2}{A^2}+\frac{E^2}{A^2}>F$ бўлса, (7) тенглама айланани аниқлайди.

Масалан,

$$x^2+y^2-10x+6y+30=0$$

тенглама айлана тенгламасидир, чунки $A=C=1$, $B=0$, ва $5^2+3^2>30$.

$$x^2-y^2+20x-12y-15=0$$

тенглама айлана тенгламаси бўла олмайди, чунки $A=1$, $C=-1$. Қуйидаги

$$x^2+y^2+6xy-4x+8y+50=0$$

тенглама айлана тенгламаси эмас, чунки $B=3\neq0$.

1-масала. Маркази координаталар бошида ва радиуси $R=7$ бўлган айлана тенгламасини тузинг.

$\triangle$ Радиуснинг қийматини бевосита (1) тенгламага қўйиш натижасида $x^2+y^2=49$ тенгламани ҳосил қиламиз. ▲

2-масала. Маркази $C(3; -6)$ нуқтада ва радиуси 9 га тенг бўлган айлана тенгламасини тузинг.

$\triangle$ C нуқтанинг координаталари қийматини ва радиуснинг қийматини (2) формулага қўйиб қуйидагини ҳосил қиламиз: $(x-3)^2+(y-(-6))^2=81$ ёки $(x-3)^2+$ $+(y+6)^2=81$. ▲

3-масала. $(x+3)^2+(y-5)^2=100$ айлананинг марказини ва радиусини топинг.

△ Бу тенгламани айлананинг умумий тенгламаси (2) билан таққослаб, кўрамизки, $a=-3$, $b=5$, $R=10$. Демак, $C(-3;5)$, $R=10$. ▲

4- масала. Чизиқнинг берилган $x^2+y^2+4x-2y-4=0$ тенгламаси бўйича унинг геометрик хоссаларини аниқланг.

△ Бу тенгламанинг чап томонини x ва y ўзгарувчиларнинг квадратларини ажратиб алмаштирамиз. Бунинг учун тенгламани бошқачароқ ёзамиз:

$$x^2+4x+y^2-2y-4=0$$

ёки

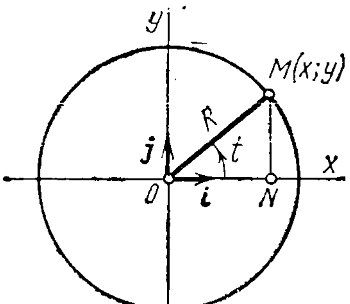
$$x^2+4x+4-4+y^2-2y+1-1-4=0$$

ёки

$$(x+2)^2+(y-1)^2=9.$$

Бу тенглама маркази $C(=2;1)$ ва радиуси $R=3$ бўлган айлана тенгламасидир. ▲

Айлананинг параметрик тенгламалари



124-чизма

Тўғри бурчакли координаталар системасида маркази координаталар бошида бўлган $x^2+y^2=R^2$ айлана берилган бўлсин. Ўзгарувчи координатали ихтиёрий $M(x;y)$ нуқтани қараймиз (124- чизма). M нуқтанинг $\overrightarrow{OM}$ радиус-вектори Ox ўқнинг мусбат йўналиши билан t катталикдаги бурчак ташкил қилсин, у ҳолда M нуқтанинг абсциссаси ва ординатаси t катталикдаги бурчакка боглиқ равишда ўзгаради. x ва y ни t орқали ифодалаб,

$$\boxed{x=R\cos t;\ y=R\sin t} \qquad (8)$$

ни ҳосил қиламиз. t катталик *параметр* (0 дан 2π гача ўзгаради) дейилади. (8) тенглама *маркази координаталар бошида бўлган айлананинг параметрик тенгламалари* дейилади. Агар (8) тенгламанинг ҳар бирини квадратга кўтарсак ва ҳадма-ҳад қўшсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x^2 + y^2 = R^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)$$

ёки узил-кесил

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Бу бизга маълум айлана тенгламасидир.

43- §. Тўғри бурчакли Декарт координаталар системасини алмаштириш

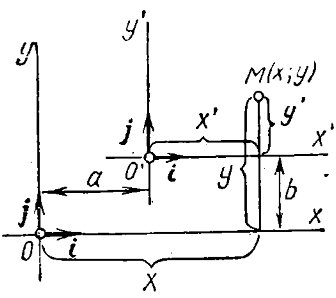
Тўғри бурчакли Декарт координаталар системасини танланиши билан текисликнинг нуқталари ва ҳақиқий сонларнинг тартибланган жуфтлари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилади. Бу қуйидагини англатади: текисликнинг ҳар бир нуқтасига ягона сонлар жуфти мос келади ва ҳар бир тартибланган ҳақиқий сонлар жуфтига ягона нуқта мос келади.

Координаталар системасини текисликда танланиши асосан ихтиёрийлигини қайд этиб ўтамиз. Агар бошқа координаталар системасини танланадиган бўлса, у ҳолда текисликнинг битта нуқтаси турли координаталар системаларида турли координаталарга эга бўлади.

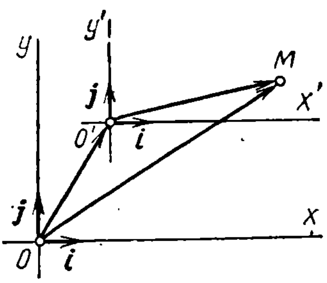
Нуқталар тўплами (чизиқ) турли координаталар системасида турли хил тенгламалар билан ифодаланади.

Чизиқ тенгламаси чизиқни фақат геометрик объект сифатида аниқлабгина қолмасдан, балки унинг текисликда танланган координаталар системасига нисбатан жойлашишини ҳам аниқлайди.

Бирор тўғри бурчакли Декарт координаталар системаси xOy, берилган бўлсин. буни „эски“ система деб атаймиз. Сўнгра бошқа „янги“ $x'O'y'$ система танлаймиз, у бошқа координаталар бошига эга, лекин унинг ўқлари эски ўқларга параллел ҳамда ўша йўналишларга эга бўлсин. Энди янги координаталар системаси эски системадан параллел кўчириш натижасида ҳосил қилинди десак бўлади (125- чизма).



125-чизма



126-чизма

xOy координаталар системасини параллел кўчириш мазкур xOy координаталар системасидан янги $x'O'y'$ координаталар системасига ўтиш демакдир. Янги координаталар системасининг эски системага нисбатан жойлашиши янги координаталар боши O' нинг эски координаталар системасидаги (xOy даги) a ва b координаталари билан аниқланади.

Бирор M нуқта эски системада x ва y координаталарга эга бўлсин, шу нуқта янги системада x' ва y' координаталарга эга бўлсин. M нуқтанинг яски координаталари, яъни x ва y билан унинг янги x' ва y' координаталари орасида боғланишни аниқлаш керак

O ва O', O' ва M, O ва M нуқталарни жуфт-жуфт қилиб туташтирамиз. 126- чизмадан

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \qquad (1)$$

ни кўриш осон, Бу векторларнинг ҳар бирини координата ўқлари бўйича ёйилма кўринишида ифодалаш мумкин:

$$\overrightarrow{OM} = xi + yj,$$

$$\overrightarrow{OO'} = ai + bj,,$$

$$\overrightarrow{O'M} = x'i + y'j.$$

Энди (1) тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$xi + yj = (ai + bj) + (x'i + y'j)$$

ёки

$$xi+yj=(a+x')\,i+(b+y')\,j,$$

бундан

$$\boxed{\begin{aligned} x&=a+x'\\ y&=b+y'.\end{aligned}} \tag{2}$$

Янги координаталар боши O' ва M нуқта текисликнинг исталган нуқталари бўлгани учун (2) формула улар ихтиёрий жойлашганда ҳам ўринли.

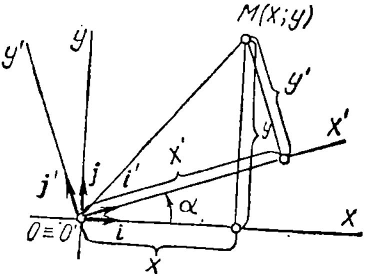
Параллел кўчиришда координаталарни алмаштиришни сўзлар билан қуйидагича ифодалаш мумкин.

Эски координата y билан бир номли янги координатага янги координаталар бошининг эски системадаги координатасининг қўшилганига тенг.

(2) формулани бошқача ёзиш мумкин:

$$\boxed{\begin{aligned} x'&=x-a,\\ y'&=y-b.\end{aligned}} \tag{3}$$

(2) формулалар эски координаталарни янги координаталар бўйича аниқлаш учун хизмат қилади, (3) формулалар эса янги координаталарни эски координаталар бўйича аниқлаш учун хизмат қилади.



127-чизма

Ўқларни буриш. Янги Ox_1 ва Oy_1 координата ўқлари эски Ox ва Oy координата ўқларини α бурчакка буриш билан ҳосил қилинган бўлсин. M нуқтанинг эски системадаги координаталарини $(x;\ y)$ билан, ўша M нуқтанинг янги системадаги координаталарини $(x';y')$ билан белгилаб, эски x ва y координаталарни янги координаталар орқали ифодалайдиган буриш формулаларини ҳосил қилиш мумкин (127- чизма):

$$\boxed{\begin{aligned} x&=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\\ y&=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha.\end{aligned}} \tag{4}$$

Агар (4) тенгликни янги x' ва y' координаталарга нисбатан ечсак,

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y' &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{aligned}} \qquad (5)$$

ни ҳосил қиламиз.

1- масала. Янги координаталар бошининг эски системадаги координаталари (2, 3), A нуқтанинг эски системадаги координаталари эса (4; — 1) бўлсин. A нуқтанинг янги системадаги координаталарини топинг.

△ (3) формулаларга кўра $x' = 4 - 2 = 2$, $y' = -1 - 3 = -4$. A нуқта янги системада (2; — 4) координаталарга эга. ▲

2- масала. Янги координаталар бошининг эски системадаги координаталари (5; — 2) га, N нуқтанинг эски системадаги координаталари (6; 0) га тенг. N нуқтанинг янги системадаги координаталарини топинг.

△ (3) формулаларга бевосита қўйиш натижасида қуйидагини ҳосил қиламиз: $x' = x - a = 6 - 5 = 1$, $y' = y - b = 0 - (-2) = 2$. N нуқта янги системада (1; 2) координаталарга эга экан. ▲

3- масала. P нуқтанинг координаталари янги системада (5; 3), эски системада эса (— 2; 1) бўлсин. Янги координаталар бошининг эски системадаги координаталарини топинг.

△ (2) формулаларни бошқача ёзамиз: $a = x - x'$, $b = y - y'$. Бевосита ўрнига қўйиш $a = -2 - 5 = -7$, $b = 1 - 3 = -2$ ни беради. Демак, $O'(-7; -2)$. △

4- масала. Янги координаталар бошининг эски системадаги координаталари (— 3; 4), Q нуқтанинг янги системадаги координаталари эса (2; — 5) бўлсин. Q нуқтанинг эски системадаги координаталарини топинг.

△ (2) формулаларга кўра $x = a + x' = -3 + 2 = -1$. $y = b + y' = 4 - 5 = -1$ га эгамиз. Q нуқта эски системада (— 1; — 1) координаталарга эга. ▲

5- масала. Гипербола тенгламаси $xy = 2$ берилган. Шу гиперболанинг эски координаталар системасини соат стрелкасига қарама-қарши йўналишда 45° бурчакка буриш натижасида ҳосил қилинган янги координаталар системасидаги тенгламасини топиш талаб қилинади.

△ Агар $\alpha = 45°$ маълум бўлса, у ҳолда

$$\sin\alpha = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos\alpha = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

демак, (4) формулалар бу ҳолда қуйидаги кўринишга эга:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha = x'\frac{\sqrt{2}}{2} y'\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'),$$

$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha - x'\frac{\sqrt{2}}{2} + y'\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y').$$

Энди x ва y ўзгарувчиларнинг қийматларини гиперболанинг $xy = 2$ тенгламасига қўйиб, қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} x' + y') = 2$$

ёки

$$x'^2 - y'^2 = 4. \blacktriangle$$

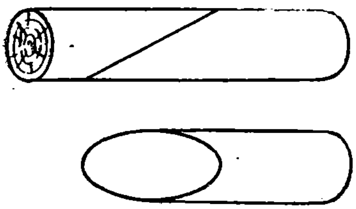
44- §. Эллипс

Ҳар бир одам бу чиройли ва симметрик чизиқ билан мактабгача таниш бўлади. Биз бу чизиқни текисликда кўриш ўқига перпендикуляр бўлмаган ҳолда ётган айлананинг тасвири (цилиндрик ва коник жисмлар: дарахт, колбаса, сабзи ва ҳоказоларнинг огма кесими) сифатида тез-тез кўриб турамиз. Биз эллипсни ҳамма ерда учратамиз, лекин бу чизиқни чизишни ҳамма ҳам билавермайди. Тегишли диаметрдаги думалоқ ғўлачани маълум бурчак остида арралаб, эллипсни чизиш учун унча катта бўлмаган нусха тайёрлаш мумкин (128- чизма).

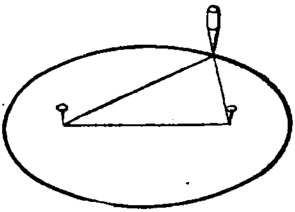
Боғбон гулхона (клумба) эллиптик контурини қандай чизишини, бўёқчи шипни безатиш учун эллиптик контурни қандай чизишини ёки дурадгор ром ва столни тайёрлашда эллипсни қандай чизишини кўриб чиқайлик.

Соддалик учун ўлчамлари ва шаклига қизиқмасдан эллиптик гулхонани чизамиз.

Ерга исталган масофада (масалан, 1 м) иккита қозиқ қоқамиз; сўнгра узунлиги қозиқлар орасидаги масофадан тахминан уч марта катта бўлган ингичка арқонни



128-чизма



129-чизма

ҳалқа қилиб боғлаймиз ва бу арқон ҳалқани иккала қозиққа кийгизамиз. Учинчи қозиқ билан арқонни тортиб, эллипс чизамиз (129- чизма).

Агар арқоннинг ўша узунлигини сақлаб ва қозиқлар орасидаги масофани ўзгартириб яна эллипс чизилса, у ҳолда унинг ўлчамлари ва шакли ўзгаради (эллипс чўзилади ёки думалоқланади). Эллипснинг бундай ясаш усулидан кўпчилик фойдаланади, лекин эллипснинг ўлчамлари ва шакли қозиқлар орасидаги масофага ва арқоннинг узунлигига боғлиқ бўлишини ҳамма ҳам билавермайди; улар бу ўлчамларни ҳар гал тақрибий йўл билан танлашларига тўғри келади. Биз эллипснинг таърифини бериб, унинг тенгламасини келтириб чиқарганимиздан сўнг бу боғланиш равшан бўлади.

Эллипс деб текисликнинг барча шундай нуқталари тўпламига айтиладики, бу нуқталарнинг ҳар биридан шу текисликнинг берилган икки нуқтасигача бўлган масофалар йиғиндиси тенг (бир хил, ўзгармас) бўлади.

Берилган нуқталар эллипс *фокуслари*, улар орасидаги масофа эса *фокал масофа* дейилади. Фокусларни F_1 ва F_2 ҳарфлари билан, улар орасидаги масофани эса $|F_1 F_2| = 2c$ билан белгилаймиз.

Текисликда ушбу уч нуқта берилган бўлсин: F_1 ва F_2 — фокуслар, M — эллипсга тегишли ихтиёрий (исталган) нуқта (130- чизма). M нуқтадан F_1 ва F_2 фокусларгача бўлган масофалар *фокал радиуслар* дейилади ва мос равишда r_1 ва r_2 билан белгиланади:

130-чизма

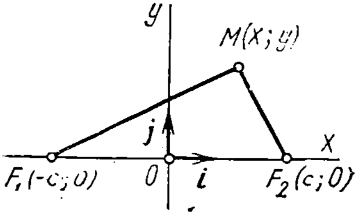
$$r_1 = |F_1 M| \text{ ва } r_2 = |F_2 M|.$$

Эллипс таърифига кўра буларнинг йиғиндиси $|F_1M| + |F_2M|$ ўзгармас, уни $2a$ билан ифодалаймиз. демак,

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a. \qquad (1')$$

(1') тенглик эллипс тенгламасидир.

Энди бу тенгликни координаталарда ифодалаймиз. Координаталар системасини абсциссалар ўқи фокуслар орқали ўтадиган қилиб танлаймиз. ординаталар ўқини $[F_1F_2]$ кесманинг ўртасидан унга перпендикуляр қилиб ўтказамиз. У ҳолда фокусларнинг координаталари $F_1(-c; 0)$ ва $F_2(c; 0)$ бўлади (131-чизма).



131-чизма

$M(x; y)$ эллипснинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. Икки нуқта орасидаги масофа формуласига асосан $r_1 = |F_1M|$ ва $r_2 = |F_2M|$ фокал радиуслар қуйидагича бўлади:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \text{ ва } r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \qquad (1)$$

Эллипснинг таърифига кўра унинг ҳар бир нуқтаси учун қуйидагига эгамиз:

$$r_1 + r_2 = 2a. \qquad (2)$$

(2) тенглама $M(x; y)$ нуқта эллипсга тегишли бўлишининг зарурий ва етарли шартидир.

□ (2) тенгликни (1) га асосан қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \qquad (3)$$

Ҳосил қилинган (3) тенглама эллипснинг танланган координаталар системадаги тенгламасидир.

Бу тенгламани анча содда кўринишга келтириш мумкин. Бунинг учун (3) тенгламанинг иккала томонини унинг чап томонида турган илдизлар айирмасига кўпайтирамиз:

$$4cx = 2a\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)$$

ёки

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2\frac{c}{a}x. \qquad (4)$$

(3) ва (4) тенгликларни қўшамиз:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a+\frac{c}{a}x. \tag{5}$$

(5) тенгликнинг иккала томонини квадратга кўтарамиз:

$$(x+c)^2+y^2=\left(a+\frac{c}{a}x\right)^2.$$

Қавсларни очгандан сўнг ва соддалаштиришдан сўнг

$$\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2+y^2=a^2-c^2$$

ни ҳосил қиламиз. $2a>2c$ бўлгани учун $a^2-c^2>0$; a^2-c^2 ни b^2 орқали ифодалаймиз, у ҳолда

$$\frac{b^2x^2}{a^2}+y^3=b^2.$$

Охирги тенгликнинг иккала томонини $b^2\neq 0$ га бўлиб,

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} \tag{6}$$

ни ҳосил қиламиз.

Эллипснинг бундай тенгламаси унинг *каноник* (энг содда) тенгламаси дейилади. Эллипснинг каноник тенгламасини кўпинча

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

кўринишда ҳам ёзилади.

Биз ҳосил қилган (6) тенглама (3) эллипс тенгламасининг натижасидир. Шунинг учун (3) тенглама билан берилган эллипснинг исталган M нуқтасининг x ва y координаталари (6) тенгламани қаноатлантиради.

Энди тескарисини исбот қиламиз. Агар $N(x, y)$ нуқтанинг координаталари (6) тенгламани қаноатлантирса, у ҳолда N нуқта эллипсга тегишли бўлади. N нуқтанинг координаталари (6) тенгламани қаноатлантирсин.

(6) тенгликдан y^2 нинг қийматини топиб, (1) тенгликнинг ўнг томонига қўямиз (r_1 ни аниқлаш учун):

$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=$$

$$=\sqrt{x^2+2cx+c^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}=$$

$$=\sqrt{c^2+b^2+2cx+\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2}.$$

$a^2 - c^2 = b^2$ бўлгани учун

$$r_1 = \sqrt{a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2} = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2} = \left|a + \frac{c}{a}x\right|.$$

Худди шунга ўхшаш

$$r_2 = \sqrt{\left(a - \frac{c}{a}x\right)^2} = \left|a - \frac{c}{a}x\right|$$

ни топиш мумкин.

$a > c > 0$ ва $|x| \leqslant a$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$a + \frac{c}{a}x > 0 \quad \text{ва} \quad a - \frac{c}{a}x > 0$$

бўлишини кўрамиз.

Демак, қаралаётган исталган N нуқта учун

$$r_1 = a + \frac{c}{a}x, \quad r_2 = a - \frac{c}{a}x,$$

шунинг учун $r_1 + r_2 = 2a$; демак, N нуқта эллипсга тегишли. ■

45- §. Эллипснинг шаклини унинг тенгламаси бўйича текшириш

Ўзининг каноник

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

тенгламаси билан аниқланган эллипс берилган бўлсин, бунда $b^2 = a^2 - c^2$.

1) Эллипс координаталар системасининг бошидан ўтмайди, чунки $O(0; 0)$ нуқтанинг координаталари (1) тенгламани қаноатлантирмайди.

2) Эллипснинг Ox ўқ билан кесишиш нуқталарини аниқлаш учун уларнинг

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \ y = 0$$

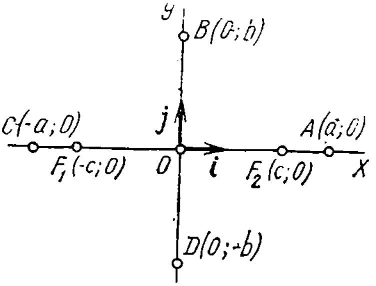
тенгламаларини биргаликда ечиш керак.

Эллипснинг Ox ўқ билан кесишиш нуқтаси $y = 0$ ординатага эга бўлиши ва шу билан бир вақтда эллипсга тегишли бўлиши керак. $y = 0$ ни эллипс тенгламасига қўйиб, $x = \pm a$ ни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, (1) эллипснинг Ox ўқ билан кесишиш нуқталари $A(a; 0)$ ва $C(-a; 0)$ бўлади. Худди шунга ўхшаш, эллипснинг Oy ўқ билан кесишиш нуқталари $B(0; b)$ ва $D(0; -b)$ ни топамиз (132- чизма).

A, B, C ва D нуқталар эллипснинг *учлари* дейилади.

Эллипснинг учлари орасидаги $[AC]$, $|AC| = 2a$ кесма (унда F_1 ва F_2 фокуслар ётади) эллипснинг *катта ўқи* дейилади. $[BD]$, $|BD| = 2b$ кесма эллипснинг *кичик ўқи* дейилади. a ва b сонлар эллипснинг *ярим ўқлари* дейилади.



132-чизма

3) (1) тенгламага x ва y ўзгарувчилар фақат иккинчи даражада киради. Демак, агар $N(x; y)$ нуқтанинг координаталари (1) тенгламани қаноатлантирса, у ҳолда бу тенгламани $N_1(-x; y)$, $N_2(x; -y)$ ва $N_3(-x; -y)$ нуқталарнинг координаталари ҳам қаноатлантиради. Кўриш осонки, N_1 нуқта N нуқтага ординаталар ўқига нисбатан, N_2 нуқта N нуқтага абсциссалар ўқига нисбатан, N_3 нуқта эса N нуқтага координаталар бошига нисбатан симметрик.

Шундай қилиб, эллипс иккита симметрия ўқига эга бўлиб, бу ўқлар ўзаро перпендикуляр. Эллипс симметрия ўқларининг кесишиш нуқтаси унинг *маркази* дейилади.

4) y ўзгарувчининг ўзгариш соҳасини аниқлаш учун (1) эллипс тенгламасини x^2 га нисбатан ечамиз:

$$x^2 = a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right). \qquad (2)$$

x^2 ҳар доим нолдан катта ёки тенг, яъни $x^2 \geqslant 0$, у ҳолда $1 - \frac{y^2}{b^2} \geqslant 0$ ёки $y^2 \leqslant b^2$, $-b \leqslant y \leqslant b$.

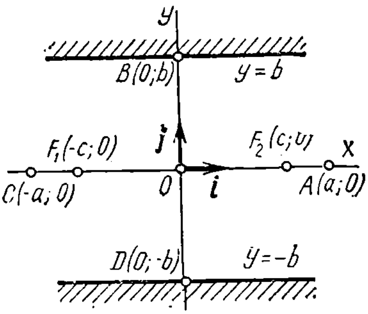
Охирги тенгсизликдан келиб чиқадики, эллипснинг учларидан ташқари, унинг нуқталари текисликда $y = b$ ва $y = -b$ тўғри чизиқлар орасидаги полосада жойлашади (133- чизма).

x ўзгарувчининг ўзгариш соҳасини аниқлаш учун (1) эллипс тенгламасини y^2 га нисбатан ечамиз:

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right). \qquad (3)$$

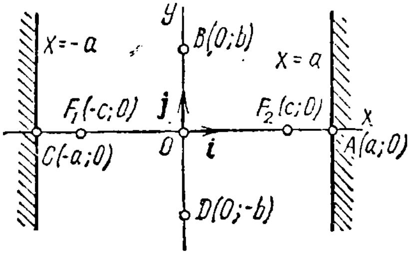
y^2 ҳар доим нолдан катта ёки нолга тенг, яъни $y^2 \geqslant 0$, у ҳолда $1 - \frac{x^2}{a^2} \geqslant 0$ ёки $x^2 \leqslant a^2$; $-a \leqslant x \leqslant a$.

Охирги тенгсизликдан келиб чиқадики, эллипснинг учларидан ташқари унинг нуқталари текисликда $x = a$ ва $x = -a$ тўғри чизиқлар орасидаги полосада жойлашади (134- чизма).

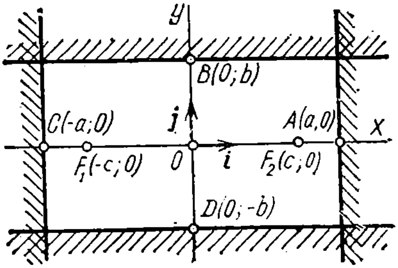


133-чизма

Шундай қилиб, бундай айтиш мумкин: эллипснинг барча нуқталари $x = a, x = -a, y = b, y = -b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган тўғри тўртбурчак ичида жойлашади, эллипснинг учлари эса бу тўғри чизиқларда ётади (135- чизма). Энди эгри чизиқ тўғри тўртбурчакда қандай жойлашишини аниқлаймиз.



134-чизма



135-чизма

(2) ва (3) тенгликларни бошқача ёзамиз:

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2},$$

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \qquad (4)$$

Бу тенгликлардан келиб чиқадики, y нинг $y = 0$ дан $y = b$ гача ўсиши билан x ўзгарувчи $x = a$ дан $x = 0$ гача камаяди (ва аксинча).

Эллипснинг текисликда қандай жойлашишини яна ҳам яққол тасаввур этиш учун унинг бир нечта нуқтасини ясаш керак. Эллипсни ясаш учун нуқталарни фақат биринчи чоракда (136- чизма) танлаш мумкин, чунки бу эгри чизиқ координаталар ўқига нисбатан симметрик. Эллипс 137- чизмада тасвирланган.

1- масала. Ярим ўқлари $a = 5$, $b = 3$ бўлган эллипснинг тенгламасини тузинг.

△ Ярим ўқларнинг қийматларини эллипснинг тенгламасига қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

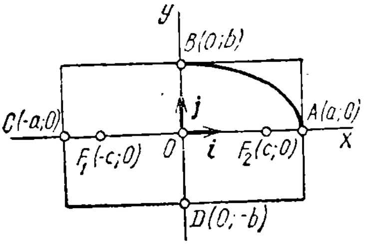
$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \text{ ёки } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1. \ ▲$$

2- масала. Эллипснинг бир ўқи ординаталар ўқи билан устма-уст тушади ва 12 га тенг, иккинчи ўқи эса абсциссалар ўқига тегишли бўлиб, 8 га тенг. Эллипснинг тенгламасини тузинг.

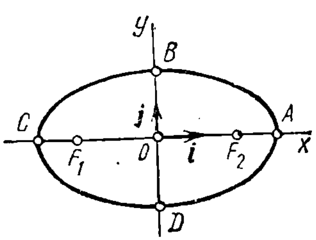
△ Масала шартига кўра $b = 6$, $a = 4$, демак,

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1 \text{ ёки } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1. \ ▲$$

3- масала. Эллипснинг катта ўқи ординаталар ўқи билан устма-уст тушади ва 20 га тенг, фокуслари орасидаги масофа эса 16 га тенг. Эллипснинг тенгламасини тузинг.



136-чизма



137-чизма

△ Эллипснинг изланаётган тенгламасини $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ кўринишда ёзиш мумкин. Масала шартига кўра $2c=16$, $2b=20$, у ҳолда $c=8$, $b=10$, фокуслар Oy ўқда жойлашганлиги учун $b^2-a^2=c^2$, яъни $a^2=b^2-c^2$ ёки, ўрнига қўйишдан сўнг, $a^2=100-64=36$, бундан

$$a=6.$$

Узил-кесил эллипснинг изланган тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{100}=1. \blacktriangle$$

4- масала. $25x^2+16y^2=400$ эллипс ўқларининг узунлигини топинг ва унинг фокуслари координаталарини ҳисобланг.

△ Эллипснинг берилган тенгламасини бошқача ёзамиз:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1,$$

бундан

$$a=\sqrt{16}=4,\ b=\sqrt{25}=5,\ 2a=8,\quad 2b=10,$$
$$c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{25-16}=3.$$

Натижада

$$F_1(0;3),\ F_2(0;-3). \blacktriangle$$

46- §. Эллипснинг эксцентриситети

Ҳар бири ўзининг каноник тенгламалари билан берилган ушбу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1 \tag{1}$$

ва

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b_2^2}=1 \tag{2}$$

иккита эллипсни қараймиз.

(1) ва (2) эллипсларнинг катта ўқлари тенг ва $b_1>b_2$ (138- чизма).

Кўриш осонки, эллипснинг шакли $\frac{b}{a}$ нисбатнинг қийматига боғлиқ, бу нисбат қанча кичик бўлса, эллипс шунча қисилган бўлади, ва аксинча, $\frac{b}{a}$ нисбат қанча катта бўлса, эллипс шунча думалоқ бўлади.

Амалда эллипс шаклининг характеристикаси сифатида $\frac{b}{a}$ нисбатдан эмас, балки ярим фокус масофа c нинг катта ўқ a га нисбатидан фойдаланиш қулайроқ бўлади. Бу нисбат эллипснинг *эксцентриситети* дейилади ва $\varepsilon=\frac{c}{a}$ билан белгиланади.

$c < a$ бўлгани учун $0 \leqslant \varepsilon < 1$. Эксцентриситет (фиксирланган a да) қанча катта бўлса, ярим фокус масофа шунча катта бўлади, яъни эллипс сиқилганроқ бўлади. Эксцентриситет қанча кичик бўлса, эллипс шунча „думалоқроқ" бўлади. Агар $\varepsilon=0$ бўлса, эллипс айланага айланади.

Масала.

1) $16x^2+25y^2-400=0$;

2) $9x^2+25y^2-225=0$

эллипслар берилган. Уларнинг шаклини таққосланг.

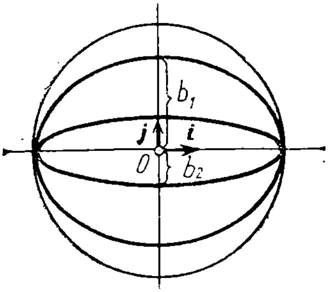
△ Эллипслар тенгламаларини бошқача ёзамиз:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \qquad (3)$$

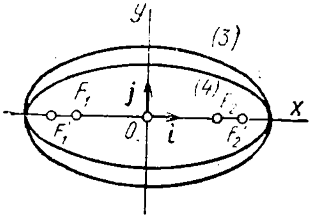
ва

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1. \qquad (4)$$

(3) тенгликдан $a_1=5$, $b_1=4$, демак, $c_1=\sqrt{25-16}=3$,



138-чизма



139-чизма

$\varepsilon_1 = \frac{3}{5}$. (4) тенгликдан $a_2 = 5$, $b_2 = 3$, демак, $c_2 = \sqrt{25 - 9} = 4$, $\varepsilon_2 = \frac{4}{5}$. $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, демак, (4) эллипс ўзининг катта ўқига (3) эллипсга нисбатан кўпроқ сиқилган (139- чизма). ▲

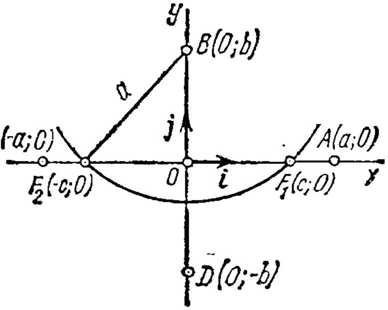
47- §. Эллипсни ясаш

Эллипс ўзининг

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

тенгламаси билан берилган бўлсин.

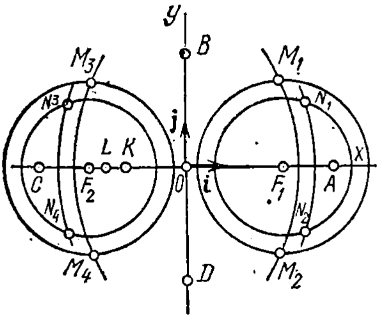
Координаталар ўқида эллипснинг $A(a; 0)$, $B(0; b)$, $C(-a; 0)$ ва $D(0; -b)$ учларини ясаймиз (140- чизма), сўнгра кичик ярим ўқнинг B охиридан a га тенг радиус билан катта ўқда нуқталар ясаймиз, кўриш осонки, бу эллипснинг фокуслари бўлади, чунки $a^2 - c^2 = b^2$.



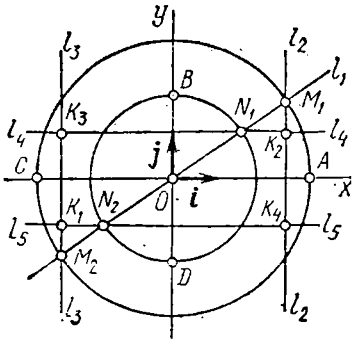
140-чизма

Сўнгра, катта ўқда фокуслар орасида ихтиёрий K нуқтани белгилаймиз; бу нуқта катта ўқни иккита r_1 ва r_2 фокал радиусга ажратади: $r_1 + r_2 = 2a$. F_1 нуқтани марказ қилиб, r_1 радиусли айлана чизамиз; F_2 нуқта орқали r_2 радиусли иккинчи айланани ўтказамиз; кўриш осонки, бу айланалар M_1 ва M_2 нуқталарда кесишади. Сўнгра марказларни алмаштириб, M_3 ва M_4 симметрик нуқталарни ҳосил қиламиз.

Агар катта ўқда бошқа L нуқтани олсак, эллипснинг яна тўртта N_1, N_2, N_3 ва N_4 нуқтасини ясаш мумкин ва ҳоказо, эллипснинг қанчалик кўп нуқталарини ясасак, эгри чизиқни шунчалик аниқ чизиш мумкин (141- чизма).



141-чизма



142-чизма

Эллипснинг нуқталарини бошқача ясаш усулини келтирамиз.

Тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

бўлган эллипсни ясаш талаб қилинсин. Координаталар бошини марказ қилиб, радиуслари $r_1 = a$ ва $r_2 = b$ бўлган иккита концентрик айлана ўтказамиз, булардан катта айлана абсциссалар ўқини $A(a; 0)$ ва $C(-a; 0)$ нуқталарда (учларда), кичик айлана эса ординаталар ўқини $B(0; b)$ ва $D(0; -b)$ нуқталарда (учларда) кесиб ўтади.

Координаталар бошидан исталган l_1 тўғри чизиқни ўтказамиз, у айланаларни M_1, M_2 ва N_1, N_2 нуқталарда кесади. M_1 ва M_2 нуқталардан Ox (l_2 ва l_3) ўққа перпендикулярлар, N_1 ва N_2 нуқталардан эса бу ўққа параллел l_4 ва l_5 тўғри чизиқларни ўтказамиз.

Бу l_2, l_3, l_4 ва l_5 тўғри чизиқлар ўзаро кесишишиб, K_1, K_2, K_3 ва K_4 нуқталарни беради (142- чизма).

Координаталар бошидан исталганча тўғри чизиқлар ўтказиш мумкин бўлгани учун шу йўл билан эллипснинг исталганча нуқталарини ясаш мумкин.

Бу нуқталар эллипсга тегишли бўлишини мустақил исботланг.

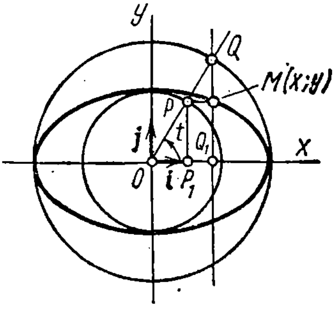
48- §. Эллипснинг параметрик тенгламалари

Тўғри бурчакли Декарт координаталар системасида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

эллипс берилган бўлсин (соддалик учун $a > b$ деб келишамиз).

Эллипс марказидан бирининг радиуси $R = a$, иккинчисининг радиуси $r = b$ бўлган иккита айлана ўтказамиз. Эллипснинг O марказидан ихтиёрий нур ўтказамиз ва унинг қутб бурчагини t билан белгилаймиз (143- чизма). Нурнинг кичик айлана билан кесишиш нуқтасини P билан, катта айлана билан кесишиш нуқтасини Q билан белгилаймиз. P нуқта орқали Ox ўққа параллел тўғри чизиқ, Q нуқта орқали эса Oy ўққа параллел тўғри чизиқ ўтказамиз; M — бу тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси бўлсин, P ва Q нуқталарнинг абсциссалар ўқидаги проекцияларини эса P_1 ва Q_1 орқали белгилаймиз.



143-чизма

143- чизмадан кўриш осонки, M нуқтанинг координаталари t параметр орқали бундай ифодаланади:

$$x = |OQ_1| = |OQ| \cdot \cos t = a \cos t,$$
$$y = |Q_1M| = |P_1P| = |OP| \cdot \sin t = b \sin t$$

ёки

$$\boxed{\begin{aligned} x &= a\cos t,\\ y &= b\sin t. \end{aligned}} \tag{2}$$

Энди (2) формулалар (1) эллипснинг тенгламалари бўлишини исбот қиламиз.

□ (2) формулалардаги x ва y координаталарни эллипснинг (1) тенгламасига қўйиб, $\frac{(a\cos t)^2}{a^2} + \frac{(b\sin t)^2}{b^2} = 1$ ни ҳосил қиламиз. Соддалаштиришдан сўнг $\cos^2 t + \sin^2 t \equiv 1$ ни ҳосил қиламиз. Демак, (2) тенгламалар эллипс тенгламалари бўлади. Бундай тенгламалар *параметрик тенгламалар* дейилади. ■

Параметрик тенгламалардан эллипсни ясашда фойдаланилади. Биз эллипснинг битта нуқтасини қандай ясашни кўрсатдик. Эллипсни бундай усул билан ясаш учун айланани n та бўлакка бўлинади, мос равишда n та нур ўтказилади ва эллипснинг n та нуқтаси ҳосил қилинади. n сон тегишли лекалонинг борлигига ва эгри чизиқ қандай аниқликда ясалишига боғлиқ равишда танланади.

1- масала. $9x^2 + 16y^2 = 144$ эллипс берилган. Унинг параметрик тенгламаларини ёзинг.

△ Эллипс тенгламасини бошқача ёзамиз:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1;$$

$a^2 = 16$, демак, $a = 4$; $b^2 = 9$, демак, $b = 3$. (2) тенгламалардан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x = 4\cos t,$$
$$y = 3\sin t. \blacktriangle$$

2- масала. Эллипснинг

$$x = 5\cos t,$$
$$y = 3\sin t$$

параметрик тенгламалари берилган. Унинг каноник тенгламасини топиш талаб қилинади.

△ (2) формулаларга кўра $a = 5$, $b = 3$ ни ҳосил қиламиз, у ҳолда эллипснинг каноник тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1. \blacktriangle$$

49- §. Эллипс айлананинг текисликка проекцияси сифатида

Иккита кесишувчи α — оғма, β — горизонтал текислик берилган бўлсин. Горизонтал текисликда тўғри бурчакли Декарт координаталар системасини киритамиз. α ва β текисликларнинг кесишиш чизиғини Ox ўқ сифатида қабул қиламиз ва Oy ординаталар ўқини ўтказамиз. α текисликда радиуси R, маркази β текисликнинг координаталар боши билан устма-уст тушадиган O нуқтада бўлган k айланани ўтказамиз. k айлананинг нуқталари тўпламининг β текисликка ортогонал проекциясини қараймиз ва бу тўпламни (проекцияларни) k' орқали белгилаймиз. Энди k' тўплам эллипслигини исбот қилиш керак. Энди a орқали k айлананинг радиусини, φ орқали эса α ва β текисликлар орасидаги ўткир бурчакни ифодалаймиз

P нуқта k айлананинг ихтиёрий нуқтаси, M унинг β текисликка проекцияси, Q — унинг Ox ўққа проекцияси, t эса OP кесма ва Ox ўқ орасидаги бурчак катталиги бўлсин. Энди M нуқтанинг координаталарини t орқали ифодалаш мумкин. OPQ ва PQM тўғри бурчакли учбурчаклардан қуйидаги келиб чиқади:

$$x = |OQ| = |OP| \cdot \cos t = a \cos t;$$

$$y = |QM| = |QP| \cdot \cos\varphi = |OP| \cdot \sin t \cdot \cos\varphi = a\cos\varphi \cdot \sin t.$$

$a \cdot \cos\varphi$ ўзгармасни b ҳарфи билан белгилаймиз, у ҳолда

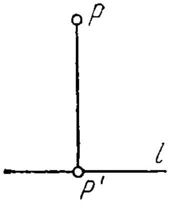
$$\boxed{\begin{aligned} x &= a\cos t, \\ y &= b\sin t \end{aligned}}$$

ни ҳосил қиламиз.

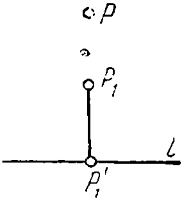
k' тўплам учун биз эллипснинг параметрик тенгламаларини ҳосил қилдик; демак, k' чизиқ катта ўқи a га, кичик ўқи эса $b = a\cos\varphi$ га тенг бўлган эллипс экан.

50- §. Эллипс айлананинг ўз диаметрига қисилиши сифатида

Текисликни қисиш натижасида гўғри чизиққа алмаштиришни кўз олдимизда тасаввур қилиш учун қуйидаги тажрибани (хаёлан бўлса ҳам) бажарамиз. Текислик модели сифатида чўзиқ резина лентани оламиз. Лентада тортиш йўналишига перпендикуляр ҳолда l тўғри чизиқ ўтказамиз ва бирор P нуқтани ясаймиз (144- чизма), сўнгра лентани бўшаштириб, P нуқтанинг l тўғри чи-



144-чизма



145-чизма

зиққа нисбатан ҳолати қандай ўзгаришини кузатамиз. Равшанки, P нуқта l тўғри чизиққа яқинроқ бўлиб қолади (145- чизма). l тўғри чизиқни Ox ўқ сифатида қабул қилиб, бундай лентада тўғри бурчакли Декарт координаталар системасини тасвирласак, у ҳолда қисиш алмаштириши текислик нуқталарининг фақат ординаталарини ўзгартиради, бу нуқталарнинг абсциссалари эса ўз ҳолича қолади.

Текисликнинг исталган $M(X; Y)$ нуқтасига $M(x; y)$ нуқтани

$$\left.\begin{array}{l} X = x, \\ Y = ky, \; k > 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

қилиб мос қўядиган текисликни алмаштириш *текисликни Ox ўққа қисиш* дейилади.

Ушбу

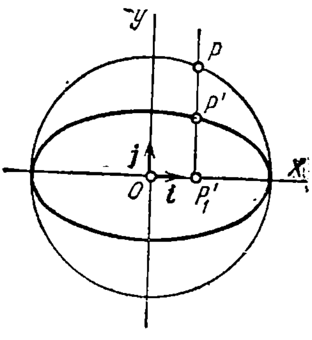
$$X^2 + Y^2 = a^2 \qquad (2)$$

айлана берилган бўлсин, унинг барча нуқталарини (1) формулалар бўйича $k = \frac{a}{b}$да қисиш алмаштиришига бўйсундирамиз. Бизнинг ҳол учун алмаштириш формулалари қуйидагича ёзилади:

$$\left.\begin{array}{l} X = x, \\ Y = \frac{a}{b} y. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

X ва Yнинг (3) формулалардаги қийматларини айлананинг (2) тенгламасига қўйиб (146-чизма) қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2 = a^2 \text{ ёки } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



146-чизма

Бундан, айланани унинг диаметрига қисиш алмаштириши натижасида айлана ярим ўқлари a ва b бўлган эллипсга алмашиши келиб чиқади.

Масала. Агар $X^2 + Y^2 = 25$ айланани Ox ўққа қисиш алмаштириши натижасида

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

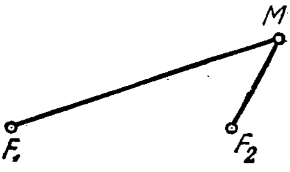
эллипс ҳосил қилинган бўлса, бу айланани қисиш коэффициентини аниқланг.

△ Эллипс тенгламасидан $a=5$, $b=4$ ни ҳосил қиламиз, сўнгра $k=\frac{a}{b}$, у ҳолда $k=\frac{5}{4}$. ▲

51- §. Гипербола

Гиперболани китобхон тескари пропорционаллик графиги сифатида бир оз билади, шунингдек, у гиперболани иккинчи даражали тенгсизликларни ечишда ҳам учратган. Шундай қилиб, китобхон гиперболанинг энг содда тенгламаси $y=\frac{k}{x}$ билан таниш экан. Мураккаброқ техник масалаларни ечиш учун бу тенглама етарли эмас; гиперболанинг таърифини берамиз ва унинг энг содда тенгламасини келтириб чиқарамиз.

Гипербола деб, текисликнинг барча шундай нуқталари тўпламига айтиладики, бу нуқталарнинг ҳар биридан шу текисликнинг берилган икки нуқтасигача бўлган масофалар айирмаларининг абсолют қийматлари тенг.



147-чизма

Берилган нуқталар гиперболанинг *фокуслари*, улар орасидаги масофа эса *фокал масофа* дейилади. Фокусларни F_1 ва F_2 ҳарфлари билан белгилаймиз.

Текисликда F_1 ва F_2 фокуслар ҳамда гиперболага тегишли ихтиёрий (исталган) M нуқта берилган бўлсин (147- чизма). M нуқтадан F_1 ва F_2 фокусларгача бўлган масофалар *фокал радиуслар* дейилади ва мос равишда r_1 ва r_2 билан белгиланади:

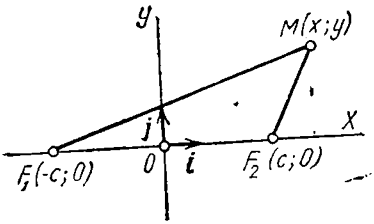
$$r_1=|F_1M| \text{ ва } r_2=|F_2M|.$$

Гиперболанинг таърифига кўра булар айирмасининг абсолют қиймати ўзгармас, уни $2a$ орқали белгилаймиз, демак,

$$||F_1M|-|F_2M||=2a. \qquad (1')$$

(1′) тенглик гиперболанинг тенгламасидир.

Бу тенгликни координаталарда ёзамиз.



148-чизма

Координаталар системасини абсциссалар ўқи фокуслар орқали ўтадиган қилиб танлаймиз, ординаталар ўқини эса $|F_1 F_2|$ кесманинг ўртасидан унга перпендикуляр қилиб ўтказамиз. F_1 ва F_2 фокуслар орасидаги масофани $2c$ орқали белгилаймиз. У ҳолда фокусларнинг координаталари $F_1(-c; 0)$ ва $F_2(c; 0)$ бўлади (148- чизма).

$M(x; y)$ — гиперболанинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. $r_1 = |F_1M|$ ва $r_2 = |F_2M|$ фокал радиуслар икки нуқта орасидаги масофа формуласига кўра қуйидагича бўлади:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2} \text{ ва } r_2 = \sqrt{(x-c)^2+y^2}. \qquad (1)$$

Гиперболанинг таърифига кўра булар айирмасининг абсолют катталиги ўзгармас, уни $2a$ билан белгилаймиз, демак,

$$|r_1 - r_2| = 2a. \qquad (2)$$

Бу тенглик $M(x, y)$ нуқта гиперболага тегишли бўлишининг зарурий ва етарли шартидир.

(2) тенгликни (1) га асосан қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a. \qquad (3)$$

Ҳосил қилинган бу тенглама гиперболанинг танланган координаталар системасидаги тенгламасини ифодалайди.

Бу тенгламани анча содда кўринишга келтириш мумкин, бунинг учун уни қуйидагича қайтадан ёзамиз:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a. \qquad (4)$$

Агар (4) тенгликнинг иккала томонини унинг чап томонида турган илдизлар йиғиндисига кўпайтирсак ва соддалаштирсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$4cx = \pm 2a\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)$$

ёки

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2\frac{c}{a}x. \qquad (5)$$

(4) ва (5) тенгликни қўшсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm\left(a+\frac{c}{a}x\right). \qquad (6)$$

(6) тенгликнинг иккала томонини ҳам квадратга кўтарамиз:

$$(x+c)^2+y^2=\left(a+\frac{c}{a}x\right)^2,$$

қавсларни очиб ва соддалаштириб,

$$\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2+y^2=a^2-c^2 \qquad (7)$$

ни ҳосил қиламиз.

Гипербола учун $a < c$ бўлгани сабабли $a^2-c^2 < 0$. Агар a^2-c^2 ни $-b^2$ орқали ифодаласак, у ҳолда $c^2-a^2=b^2$ ва шунинг учун (7) тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.} \qquad (8)$$

Гиперболанинг бундай тенгламаси унинг *каноник тенгламаси* дейилади. Уни кўпинча

$$b^2x^2-a^2y^2-a^2b^2$$

кўринишда ёзилади.

Биз ҳосил қилган (8) тенглама гиперболанинг тенгламаси (3) нинг натижасидир. Шунинг учун (3) тенглама билан берилган гиперболанинг ихтиёрий M нуқтасининг x ва y координаталари (8) тенгламани ҳам қаноатлантиради.

Энди тескарисини, яъни координаталари (8) тенгламани қаноатлантирадиган ихтиёрий $N(x; y)$ нуқта берилган гиперболага тегишли бўлишини исботлаймиз.

(8) тенгликдан y^2 нинг қийматини (1) тенгликни ўнг томонига қўямиз (r_1 ни аниқлаш учун):

$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)}=\sqrt{c^2-b^2+2cx+\frac{a^2+b^2}{a^2}x^2}.$$

Сўнгра $c^2 - a^2 = b^2$ бўлгани учун

$$r_1 = \sqrt{a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2} = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2} = \left|a + \frac{c}{a}x\right|.$$

Худди шунга ўхшаш $r_2 = \left|a - \frac{c}{a}x\right|$ ни топиш мумкин. Агар $c > a > 0$ ва $|x| \geqslant a$ эканлигини ҳисобга олсак, у ҳолда $x > 0$ да

$$a + \frac{c}{a}x > 0 \quad \text{ва } a - \frac{c}{a}x < 0$$

$x < 0$ да

$$a + \frac{c}{a}x < 0 \quad \text{ва } a - \frac{c}{a}x > 0.$$

Демак, N нуқта учун қуйидагига эгамиз:

$x > 0$ бўлганда

$$r_1 = a + \frac{c}{a}x,$$

$$r_2 = -a + \frac{c}{a}x,$$

$x < 0$ бўлганда

$$r_1 = -a - \frac{c}{a}x,$$

$$r_2 = a - \frac{c}{a}x,$$

демак, барча ҳолларда $|r_1 - r_2| = 2a$ ва шу сабабли N нуқта гиперболага тегишли бўлади.

1- масала. Фокуслари орасидаги масофа 10 га тенг ва $\frac{c}{a} = \frac{5}{4}$ бўлган ҳамда координата ўқларига нисбатан симметрик жойлашган гипербола тенгламасини тузинг.

△ Изланаётган гиперболанинг тенгламасини $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ кўринишда ёзиш мумкин. Шартга кўра $2c = 10$, шунинг учун $c = 5$, шартга кўра $\frac{c}{a} = \frac{5}{4}$ ёки $\frac{5}{a} = \frac{5}{4}$, бундан $a = 4$; гиперболада $c^2 - a^2 = b^2$, демак, $5^2 - 4^2 = b^2$ ёки $b^2 = 9$, у ҳолда изланган тенглама $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ бўлади. ▲

52- §. Гиперболанинг шаклини унинг тенгламаси бўйича текшириш

Ўзининг

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

каноник тенгламаси билан аниқланадиган гипербола берилган бўлсин, бунда $b^2 = c^2 - a^2$.

1) гипербола координаталар бошидан ўтмайди, чунки $O(0; 0)$ нуқтанинг координаталари (1) тенгламани қаноатлантирмайди.

2) (1) гиперболанинг Ox ўқ билан кесишиш нуқталарининг координаталарини топиш учун уларнинг $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ва $y = 0$ тенгламаларини биргаликда ечиш керак.

Гиперболанинг Ox ўқ билан кесишиш нуқтаси $y = 0$ ординатага эга бўлиши ва шу билан бир вақтда гиперболага тегишли бўлиши керак. $y = 0$ ни гипербола тенгламасига қўйиб, $x = \pm a$ ни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, (1) гиперболанинг Ox ўқ билан кесишиш нуқталари $A(a; 0)$ ва $B(-a; 0)$ бўлади; улар гиперболанинг *учлари* дейилади.

(1) гиперболанинг Oy ўқ билан кесишиш нуқталарининг координаталарини топиш учун уларнинг $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ва $x = 0$ тенгламаларини биргаликда ечиш керак.

$x = 0$ ни гипербола тенгламасига қўйиб, $y^2 = -b^2$ ни ҳосил қиламиз, бу эса система ҳақиқий ечимга эга эмаслигини англатади — гипербола Oy ординаталар ўқини кесмайди.

3) (1) тенгламага x ва y ўзгарувчилар фақат иккинчи даражада киради. Демак, агар $N(x; y)$ нуқтанинг координаталари (1) тенгламани қаноатлантирса, у ҳолда шу тенгламани $N_1(-x; y)$, $N_2(x; -y)$ ва $N_3(-x; -y)$ нуқталарнинг координаталари ҳам қаноатлантиради.

Кўриш осонки, N_1 нуқта N нуқтага ординаталар ўқига нисбатан симметрик, N_2 нуқта N нуқтага абсциссалар ўқига нисбатан симметрик. N_3 нуқта эса N нуқтага координаталар бошига нисбатан симметрик.

Шундай қилиб, гипербола иккита симметрия ўқига эга.

Гиперболани кесадиган симметрия ўқи *ҳақиқий симметрия ўқи* дейилади; гиперболани кесиб ўтмайдиган симмметрия ўқи *мавҳум симметрия ўқи* дейилади.

Гиперболанинг F_1 ва F_2 фокуслари унинг ҳақиқий симметрия ўқида жойлашган. Симметрия ўқларининг кесишиш нуқтаси гиперболанинг *маркази* дейилади

Агар гипербола каноник тенгламаси билан берилган бўлса, унинг симметрия ўқлари координата ўқлари билан устма-уст тушади.

Гиперболанинг учларини туташтирувчи $[AB]$, $|AB|=2a$ кесма гиперболанинг *ҳақиқий ўқи* дейилади. a сон гиперболанинг *ҳақиқий ярим ўқи*, b сон эса унинг *мавҳум ярим ўқи* дейилади.

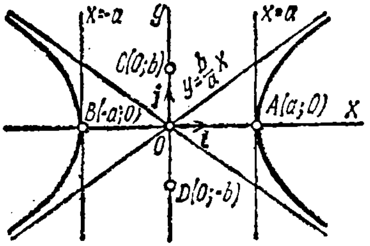
4) гипербола нуқталарининг жойлашиш соҳасини аниқлаймиз. Гиперболанинг (1) тенгламасидан бевосита $|x|\geqslant a$ эканлиги келиб чиқади. Бу $-a\geqslant x$, $x\geqslant a$ эканлигини англатади. Шунинг учун гиперболанинг учларидан ташқари барча нуқталари $x=a$ тўғри чизиқдан ўнгда ва $x=-a$ тўғри чизиқдан чапда, учларининг ўзи эса шу тўғри чизиқларда жойлашган бўлади. Демак, гипербола икки тармоққа эга: $x\geqslant a$ бўлган нуқталар учун битта бўлакка эгамиз, уни *ўнг тармоқ* дейилади, $x\leqslant -a$ бўлган нуқталар учун иккинчи бўлакка эгамиз, уни *чап тармоқ* дейилади.

Гипербола нуқталарининг жойлашишини аниқлаштириш мақсадида қуйидаги икки тўғри чизиқни ўтказамиз (149- чизма):

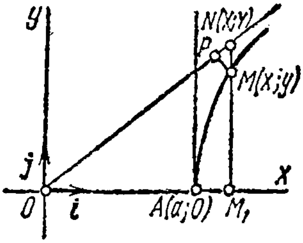
$$\boxed{y=\frac{b}{a}x \text{ ва } y=-\frac{b}{a}x} \qquad (2)$$

бу тўғри чизиқларни гиперболанинг *асимптоталари* деб атаймиз. Бу тўғри чизиқлар ва гиперболанинг ўзи ҳам координата ўқларига нисбатан симметрик бўлгани учун гипербола нуқталарининг асимптотага нисбатан жойлашишини фақат биринчи чоракда кўриш мумкин (150- чизма).

Асимптота билан гиперболанинг ординаталарини таққослаш қулай бўлиши учун асимптотанинг ординаталарини Y бош ҳарф билан белгилаймиз.



149-чизма



150-чизма

Энди асимптотанинг ва гипербола тенгламаларини ёзамиз:

$$Y=\frac{b}{a}x,$$

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}. \qquad (3)$$

Гиперболанинг ихтиёрий $M(x, y)$ нуқтасидан Ox ўққа ва асимптотага перпендикуляр ўтказамиз.

Чизмадан кўриниб турибдики, $[MN]$ кесма MPN учбурчакнинг гипотенузаси, $[MP]$ катетнинг узунлиги эса $M(x, y)$ нуқтадан асимптотагача бўлган масофадир, демак, $|MN|$ масофа $|MP|$ дан кичик эмас. Равшанки, $|MN|=Y-y$,

у ҳолда

$$Y-y=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b(x-\sqrt{x^2-a^2})}{a}.$$

Охирги тенгликнинг сурат ва махражини $(x+\sqrt{x^2-a^2})$ га кўпайтириб, суратдаги иррационалликдан қутуламиз:

$$Y-y=\frac{b(x-\sqrt{x^2-a^2})(x+\sqrt{x^2-a^2})}{a(x+\sqrt{x^2-a^2})}=\frac{b(x^2-x^2+a^2)}{a(x+\sqrt{x^2-a^2})}$$

ёки

$$Y-y=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

$x\to\infty$ да ўнг томондаги касрнинг махражи чексиз ўсади, сурати эса ўзгармасдан қолади. Демак,

$$\lim_{x\to\infty}(Y-y)=\lim_{x\to\infty}\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=0.$$

Энди бундай хулоса чиқариш мумкин: гиперболада x ўзгарувчи ортган сари y ўзгарувчи чексиз ўсади. бироқ бунда гиперболанинг ихтиёрий нуқтаси асимптотадан пастда қолади.

$|MN|$ масофа ва ўз-ўзидан $|MP|$ масофа ҳам x ортгани сари чексиз камаяди.

Бошқача қилиб айтганда, (1) гипербола x ўзгарувчи орттани сари асимптотага чексиз яқинлашади.

Бу хулосалар симметрияга асосан барча чораклар учун ҳам ўринли бўлади.

1- масала. $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{25}=1$ гипербола асимптоталарининг тенгламаларини тузинг.

Биз биламизки, исталган гипербола учун асимптоталар тенгламалари $y=\pm\frac{b}{a}x$ кўринишда ифодаланади; масала шартига кўра $a^3=36$, $b^3=25$, демак, $a=6$, $b=5$, у ҳолда асимптоталар тенгламалари $y=\pm\frac{6}{5}x$ бўлади.

2- масала. Гипербола асимптоталарининг тенгламалари $3x+2y=0$ ва $3x-2y=0$, унинг учлари орасидаги масофа эса $2a=4$ бўлса, гипербола тенгламасини тузинг.

△ Биз биламизки, гипербола асимптоталарининг тенгламалари қуйидаги кўринишга эга: $y=\pm\frac{b}{a}x$ ёки $bx-$ $-ay=0$ ва $bx+ay=0$. Масала шартига кўра $a=2$, $b=3$ га эгамиз, демак, гипербола тенгламаси $\frac{x^2}{4}-$ $-\frac{y^2}{9}=1$. ▲

3- масала. Учлари $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ эллипснинг фокусларида, фокуслари эса шу эллипснинг учларида жойлашган гиперболанинг тенгламасини тузинг. Чизма ясанг.

△ Гипербола тенгламасини тузиш учун дастлаб $a_г$ ва $b_г$ ни топиш керак.

Эллипс тенгламасидан:

$$a_э^2=25,\ a_э=5,$$
$$b_э^2=16,\ b_э=4.$$

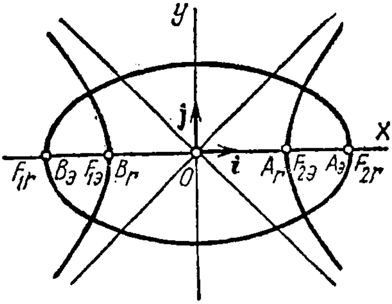
Исталган эллипс учун $a_э^2 - c_э^2 = b_э^2$ муносабат мавжуд, бизнинг ҳолда $25 - c_э^2 = 16$, ёки $c_э^2 = 9$, ёки $c_э = 3$.

$a_э > b_э$ бўлгани учун эллипснинг фокал ўқи абсциссалар ўқи (Ox ўқ) билан устма-уст тушади ва, демак, гиперболанинг ҳақиқий ўқи ҳам абсциссалар ўқи (Ox ўқ) билан устма-уст тушади. У ҳолда изланаётган гиперболанинг тенгламасини $\frac{x^2}{a_г^2} - \frac{y^2}{b_г^2} = 1$ кўринишда ёзиш мумкин. Масала шартига кўра

$$a_г = c_э = 3$$
$$c_г = a_э = 5.$$

Ихтиёрий гипербола учун $c_г^2 - a_г^2 = b_г^2$ муносабатга эгамиз, бизнинг ҳол учун $25 - 9 = b_г^2$ ёки $b_г^2 = 16$.

Демак, изланаётган гипербола тенгламаси: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. (151- чизма) ▲



151-чизма

53- §. Гипербола эксцентриситети

Бизга ҳақиқий ўқлари тенг бўлган ушбу гиперболалар берилган бўлсин:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 1 \qquad (1)$$

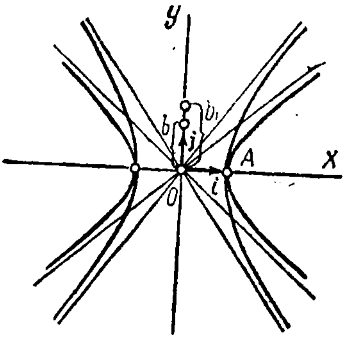
ва

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b_2^2} = 1, \qquad (2)$$

бу ерда $b_1 > b_2$ (152- чизма).

Кўриш осонки, гипербола формаси $\frac{b}{a}$ нисбатга боғлиқ; бу нисбат қанчалик кичик бўлса, гипербола Ox ўққа шунча кўпроқ сиқилган бўлади ва аксинча.

Бу нисбатнинг сурати b ўз навбатида a ва c га боғлиқ бўлгани учун эллипсдагига ўхшаш, гипербола



152-чизма

шаклини ҳам ярим фокус масофасининг унинг ҳақиқий ўқи a га нисбати билан характерлаш амалда қулайроқ. Бу нисбат *гиперболанинг эксцентриситети* дейилади ва $\varepsilon = \frac{c}{a}$ орқали белгиланади.

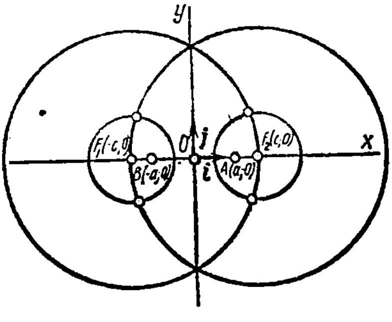
Гиперболада $c > a$ бўлгани учун $\varepsilon > 1$. Масалан, $\frac{x^2}{16} - \frac{y^3}{9} = 1$ гипербола берилган, унинг эксцентриситетини аниқланг. Тенгламадан $a = 4$, $b = 3$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ ни ҳосил қиламиз, шунинг учун $\varepsilon = \frac{5}{4}$.

54- §. Гиперболани ясаш

Биринчи усул. Гиперболани нуқталар бўйича ясаш мумкин. Координаталар системаси танланади. Тенглама бўйича жадвал тузилади. Нуқталар ясалади ва улар силлиқ чизиқ билан туташтирилади. Китобхон буни VI—VIII синф алгебра курсидан билади.

Иккинчи усул. Гиперболанинг айрим нуқталарини ясаш. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гиперболани ясаш талаб қилинсин.

Тенгламадан гиперболанинг $A(a;\ 0)$, $B(-a;\ 0)$ учларини топамиз ва ясаймиз. $c^2 - a^2 = b^2$ муносабатдан фойдаланиб, $F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$ фокусларнинг координаталарини топамиз ва уларни ясаймиз (153- чизма).



153-чизма

F_2 фокусдан ихтиёрий r_2 радиусли айлана ўтказамиз, F_1 фокусдан ихтиёрий $r_1 = r_2 + 2a$ радиусли иккинчи айланани ўтказамиз. Кўриш осонки, айланаларнинг кесишиш нуқтаси гиперболага тегишли бўлади, чунки $|r_1 - r_2| = 2a$.

Агар айланалар марказларининг ўрнини алмаштирсак, у ҳолда биз гиперболанинг яна иккита нуқтасини ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, r_2 нинг ҳар бир янги қиймати бўйича гиперболанинг тўртта нуқтасини ясаш мумкин. Етарли сондаги нуқталарни ясаб, уларни силлиқ чизиқ билан туташтирилади.

Намуна сифатида

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

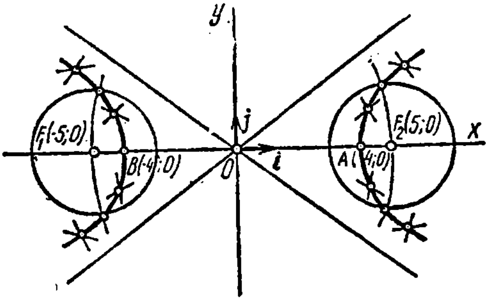
гиперболани ясаймиз.

Тенгламадан $a = 4$, $b = 3$ эканлиги келиб чиқади; $c^2 - a^2 = b^2$ боғланишга асосан $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{16+9}=5$ келиб чиқади. Сўнгра координаталар системасини ясаймиз. $A(4; 0)$, $B(-4; 0)$ учларни ва $F_1(-5; 0)$, $F_2(5; 0)$ фокусларни белгилаймиз.

Сўнгра r_2 фокал радиуснинг ихтиёрий қийматини танлаймиз (масалан, $r_2 = 2$) ва $r_1 = r_2 + 2a$ фокал радиуснинг мос қийматини ҳисоблаймиз (бизнинг ҳол учун $r_1 = 2 + 2 \cdot 4 = 10$).

Ҳар бир фокус орқали радиуслари r_1 ва r_2 бўлган айланалар ўтказамиз. Айланаларнинг тўртта кесишиш нуқтаси ясалишига кўра изланаётган гиперболага тегишли.

Агар бу ишни бир неча марта бажарсак, у ҳолда гиперболанинг бир нечта тўртлик нуқталарини ҳосил қиламиз ва булар бўйича уни чизамиз.



154-чизма

Эслатма. Чизмага этибор беринг. Гипербола нуқталари асимптоталарга яқин жойлашган, гипербола нуқталарини аниқлашда кесишувчи айланалар ёйларининг асимптоталарга яқин жойлашган бўлаклари иштирок этади.

Демак, кўп айланалар чизиб, чизмани мураккаблаштирмаслик мақсадида гипербола асимптоталари жойлашган жойда унча катта бўлмаган ёйлар ўтказиш етарли (154- чизмада кўрсатилгани каби).

55- §. Тенг томонли гипербола ва унинг тенгламаси. Тенг томонли гиперболанинг ўз асимптоталарига келтирилган тенгламаси

Агар гипербола ўқларининг узунликлари ўзаро тенг бўлса ($a = b$), гипербола *тенг ёнли* ёки *тенг томонли гипербола* дейилади. Бундай гиперболанинг тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

ёки

$$\boxed{x^2 - y^2 = a^2.} \qquad (1)$$

(1) тенгламадан тенг томонли гипербола битта a параметр билан аниқланиши келиб чиқади.

Тенг томонли гипербола асимптоталарининг тенгламалари қуйидагича бўлади:

$$\boxed{y = \pm x.} \qquad (2)$$

(2) тенгламадан, тенг томонли гиперболанинг асимптоталари координаталар бошидан ўтиши, ўзаро перпендикуляр бўлиши ва координата бурчакларининг биссектрисалари билан устма-уст тушиши келиб чиқади.

$c^2 = a^2 + b^2$ боғланиш тенг томонли гипербола учун $c^2 = 2a^2$ ёки $c = a\sqrt{2}$ бўлади. Фокал масофа $2c = 2a\sqrt{2}$ бўлади.

Тенг томонли гиперболанинг эксцентриситети

$$\boxed{\varepsilon = \sqrt{2}} \qquad (3)$$

бўлади.

Олтинчи синфда сиз гипербола билан $y=\frac{k}{x}$ $(xy=k)$ функция сифатида (бу ерда $k \neq 0$) танишган эдингиз. У ерда бу эгри чизиқ икки тармоқдан иборатлиги ва $k>0$ бўлганда биринчи ва учинчи чоракларда, $k<0$ бўлганда эса иккинчи ва тўртинчи чоракларда жойлашганлиги ҳамда координата бурчакларининг биссектрисаларига нисбатан симметриклиги кўрсатилган эди.

Эслатамизки, текисликдаги исталган нуқтанинг вазияти фақат танланган координаталар системасига нисбатан аниқланади. Бошқа исталган координаталар системасида худди шу нуқтанинг координаталари бошқача бўлади.

Энди, агар янги координаталар системасининг ўқлари сифатида тенг ёнли гиперболанинг асимптоталари олинса, унинг тенгламаси қандай ўзгаришини (алмашишини) кўрамиз.

Бизга тенг томонли гипербола тенгламаси берилган бўлсин:

$$x^2-y^2=a^2. \tag{4}$$

Равшанки, янги Ox' ва Oy' ўқлар сифатида гиперболанинг асимптоталари $y=\pm x$ ни қабул қилиш учун эски Ox ва Oy ўқларни умумий координата боши атрофида $(\pm 45^\circ)$ бурчаклардан бирига буриш керак. (-45°) бурчакка буришни бажарамиз.

Буришда ушбу

$$\left.\begin{aligned} x&=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\\ y&=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

алмаштириш формулалари (43- §) бизнинг ҳол учун қуйидагича бўлади:

$$\begin{aligned} x&=x'\cos(-45^\circ)-y'\sin(-45^\circ),\\ y&=x'\sin(-45^\circ)+y'\cos(-45^\circ) \end{aligned}$$

ёки $\sin(-45^\circ)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(-45^\circ)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ни ҳисобга олсак,

$$\left.\begin{aligned} x&=x'\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-y'\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y'),\\ x&=x'\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+y'\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y'). \end{aligned}\right\} \tag{5'}$$

x ва y нинг қийматларини тенг ёнли гиперболанинг берилган формуласига қўйиб қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{1}{2}(x'+y')^2-\frac{1}{2}(x'-y')^2=a^2$$

ёки соддалаштиришдан сўнг

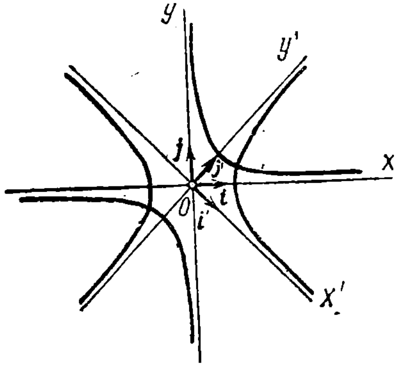
$$\boxed{x'y'=\frac{a^2}{2}.} \qquad (6)$$

(5) тенглама *тенг ёнли гиперболанинг ўз асимптоталарига келтирилган тенгламаси* дейилади. ■

Агар 45° га буришни бажарсак, $x'y'=-\frac{a^2}{2}$ тенгламани ҳосил қиламиз. Бу ишни мустақил бажаринг.

Энди биз 1) $xy=k$ ва 2) $x^2-y^2=a^2$ гиперболалар орасида қандай фарқ бор деган саволга жавоб бера оламиз.

Агар координаталар системаси битта (умумий) бўлса, у ҳолда булар ҳар хил гиперболалардир. Булардан биринчиси биринчи ва учинчи чоракларда жойлашган, координата бурчакларининг биссектрисаларига нисбатан симметрик бўлиб, асимптоталари координата ўқлари билан устма-уст тушади. Иккинчи гипербола координата ўқларига нисбатан симметрик жойлашган бўлиб, асимптоталари координата бурчакларининг биссектрисалари билан устма-уст тушади (155- чизма).



155-чизма

Агар координата системалари турли бўлса (1) ва (2) тенгламалар битта гиперболани ифодалаши мумкин, бунинг учун: а) турли системаларнинг боши умумий бўлиши ($O'\equiv O$); б) Ox ва $O'x'$ ўқлар орасидаги бурчак 45° га тенг бўлиши керак.

1- масала. $xy=2$ гипербола берилган. Унинг тенгламасини каноник кўринишга келтириш талаб қилинади.

△ Координаталар бошини сақлаган ҳолда

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y'),$$

$$y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')$$

формулалар бўйича 45° га буришни бажарамиз:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y') = 2$$

ёки соддалаштиришдан сўнг

$$x'^2-y'^2=4 \blacktriangle$$

2- масала. Тенг томонли гиперболанинг $x^2-y^2=$ $=18$ каноник тенгламаси берилган. Унинг ўз асимптоталарига келтирилган тенгламасини тузинг.

$\triangle$ Координаталар бошини сақлаган ҳолда (5′) формулалар бўйича (— 45°) га буришни бажарамиз:

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y'),$$

$$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y').$$

Берилган тенгламага x ва y нинг қийматларини қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{1}{2}(x'+y')^2-\frac{1}{2}(x'-y')^2=18$$

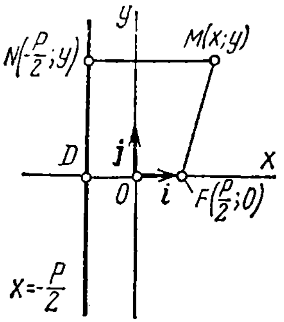
ёки соддалаштиришдан сўнг $x'y'=9$. $\blacktriangle$.

56- §. Парабола

Парабола деб, текисликнинг шундай барча нуқталари тўпламига айтиладики, бу нуқталарнинг ҳар биридан берилган нуқтагача бўлган масофа шу берилган нуқтадан ўтмайдиган берилган тўғри чизиққача бўлган масофага тенг.

Берилган нуқта параболанинг *фокуси* дейилади ва F билан белгиланади, берилган тўғри чизиқ эса *директриса* дейилади ва d билан белгиланади. Фокусдан директрисагача бўлган масофа параболанинг *фокал параметри* дейилади ва p билан белгиланади.

Парабола тенгламасининг соддароқ шаклини ҳосил қилиш учун координаталар системасини қуйидагича танлаймиз: абсциссалар ўқини (Ox ни) F фокус орқали d директрисага перпендикуляр қилиб ўтказамиз ва абсциссалар ўқининг директриса билан кесишиш нуқтасини D орқали белгилаймиз.



156-чизма

Координаталар боши O сифатида DF кесманинг ўртасини қабул қиламиз. Ўнг координаталар системасини қабул қиламиз, Ox ўқнинг мусбат йўналиши сифатида $[OF)$ нур йўналишини қабул қиламиз (156-чизма). У ҳолда танланган координаталар системасида F фокус $\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$ координаталарга эга бўлади, d директрисанинг тенгламаси эса $x+$ $+\frac{p}{2}=0$ бўлади.

$M(x;\ y)$ — изланаётган тўпламнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. M нуқтадан d директрисага перпендикуляр туширамиз. N шу перпендикулярнинг асоси бўлсин, у ҳолда $|MN|$ қаралаётган M нуқтадан директрисагача бўлган масофадир; демак,

$$|MN|=\left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

M ва F нуқталарни туташтирамиз ва M нуқтадан F нуқтагача бўлган масофани аниқлаймиз:

$$|MF|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}. \qquad (1)$$

M нуқта

$$|MF|=|MN|$$

ёки

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right| \qquad (2)$$

бўлганда ва фақат шундагина изланаётган тўпламга тегишли бўлади.

Ҳосил қилинган (2) тенглама танланган координаталар системасида параболанинг тенгламаси **бўлади.** (2) тенгламани соддалаштириш учун унинг иккала томонини квадратга кўтарамиз:

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2,$$

ёки

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4},$$

ёки узил-кесил

$$\boxed{y^2 = 2px.} \qquad (3)$$

Параболанинг бундай тенгламаси унинг *каноник тенгламаси* дейилади.

Биз параболанинг исталган нуқтаси (3) тенгламани қаноатлантиришини кўрсатдик, лекин бундан ҳали тескари даъво, яъни (3) тенглама параболанинг тенгламаси бўлиши келиб чиқмайди.

Биз $M(x; y)$ нуқтанинг координаталари (3) тенгламани қаноатлантирса, у ҳолда бу нуқта параболага тегишли бўлишини, яъни бу нуқта F нуқтадан ва d тўғри чизиқдан (директрисадан) бир хил масофада ётишини кўрсатишимиз керак.

$$\square \quad y^2 = 2px \qquad (4)$$

бўлсин. M нуқтадан F фокусгача бўлган масофани ҳисоблаймиз.

(4) дан y^2 нинг қийматини (1) тенгламанинг ўнг томонига қўйиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+2px}=\sqrt{x^2-px+\frac{p^2}{4}+2px}=$$

$$=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2},$$

бундан

$$|MF|=\left|x+\frac{p}{2}\right|$$

келиб чиқади, яъни MF қаралаётган M нуқтадан директрисагача бўлган масофага тенг, бу эса M нуқта параболага тегишли эканини кўрсатади. ■

57- §. Парабола тенгламасини текшириш

Параболанинг энг содда (каноник) тенгламасидан фойдаланиб, унинг шаклини, жойлашишини аниқлаймиз.

1) парабола тенгламаси $y^2=2px$ озод ҳадга эга эмас, демак, парабола координаталар бошидан ўтади (координаталар боши $O(0; 0)$ нинг координаталари унинг тенгламасини қаноатлантиради).

2) y ўзгарувчи тенгламага фақат иккинчи даражада киради, демак, агар $M(x; y)$ нуқтанинг координаталари парабола тенгламасини қаноатлантирса, $M(x; -y)$ нуқтанинг координаталари ҳам уни қаноатлантиради. Шу

сабабли парабола абсциссалар ўқига (Ox ўқ) нисбатан симметрик жойлашади.

3) Парабола тенгламасини x га нисбатан ечамиз:

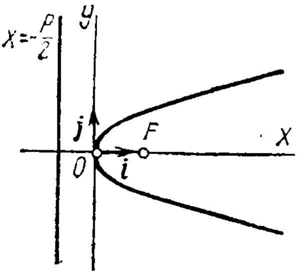
$$x = \frac{y^2}{2p}. \qquad (1)$$

Демак, параболанинг барча нуқталарининг абсциссалари манфий эмас. Параболада параметр $p > 0$, фокус эса $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ координаталарга эга, шунинг учун параболанинг учидан ташқари барча нуқталари Oy ўқнинг фокус ётадиган томонида (Oy ўқдан ўнгда) ётади.

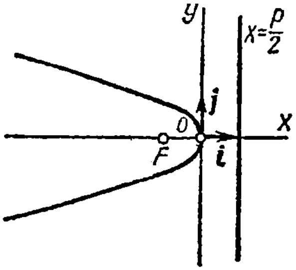
4) парабола тенгламасидан, x абсцисса нолдан чексизгача ўсганда y ордината ҳам нолдан чексизгача ўсиши келиб чиқади (157-чизма).

5) агар паробола фокуси Oy ўқдан чапроқда жойлашган бўлса, яъни $F\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$ координаталарга эга бўлса, парабола тенгламаси

$$y^2 = -2\,px \qquad (2)$$



157-чизма



158-чизма

бўлади. Агар (2) тенгламани x ўзгарувчига нисбатан ечилса,

$$x = -\frac{y^2}{2p} \qquad (3)$$

ни ҳосил қиламиз. (3) тенгламадан параболанинг барча нуқталарининг абсциссалари мусбат эмаслиги келиб чиқади. Параболада параметр $p > 0$, фокус эса $F\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$ координаталарга эга бўлгани учун параболанинг учидан ташқари барча нуқталари Oy ўқнинг фокус жойлашган томонида (Oy ўқдан чапда) жойлашган бўлади (158-чизма).

6) Агар парабола фокуси Oy ўқда $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$ нуқтада ётса, у ҳолда парабола тенгламаси

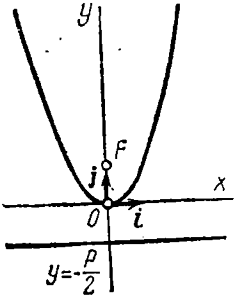
$$x^2 = 2py \qquad (4)$$

кўринишда бўлади. Худди шунга ўхшаш мулоҳазалар ёрдамида (4) параболанинг учидан ташқари барча нуқталари Ox ўқдан юқорида ётиши исботланади (159-чизма).

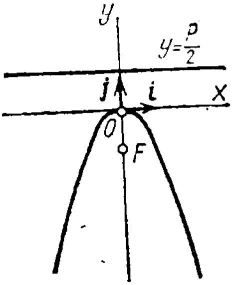
7) агар параболанинг фокуси ординаталар ўқида $F\left(0; -\frac{p}{2}\right)$нуқтада ётса, парабола тенгламаси

$$x^2 = -2py \qquad (5)$$

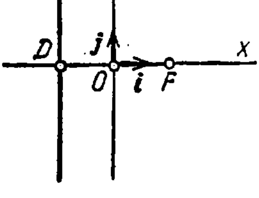
кўринишда бўлади. Бу ҳолда параболанинг учидан ташқари барча нуқталари Ox ўқдан пастда ётади (160-чизма).



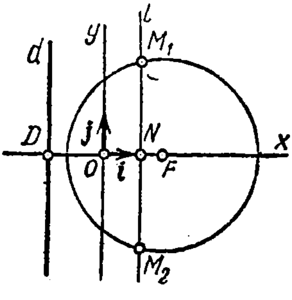
159-чизма



160-чизма



161-чизма

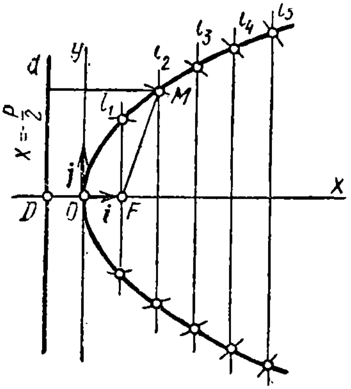


162-чизма

58- §. Параболани ясаш

Агар параболанинг *d* директрисаси ва *F* фокуси берилган бўлса, унинг вазияти ва шакли тўла аниқланган бўлади.

F фокус ва *d* директриса берилган бўлсин. Фокус орқали директрисага перпендикуляр қилиб парабола ўқини ўтказамиз (161- чизма). Парабола ўқининг директриса билан кесишиш нуқтасини *D* ҳарфи билан белгилаймиз. Равшанки, $[DF]$ кесманинг ўртаси бўлган *O* нуқта параболага тегишли ва унинг учидир. $[OF)$ нурнинг исталган *N* нуқтасидан парабола ўқига перпендикуляр қилиб *l* тўғри чизиқ ўтказамиз. Бу тўғри чизиқнинг маркази парабола фокуси билан устма-уст тушадиган, радиуси эса *d* директрисадан *l* тўғри чизиққача бўлган масофага тенг бўлган айлана билан кесишадиган иккита нуқтани топамиз. Ҳосил қилинган M_1 ва M_2 нуқталар, равшанки, параболага тегишли (162-чизма).



163-чизма

Агар биз парабола ўқига перпендикуляр *n* та тўғри чизиқ ўтказсак ва уларнинг марказлари парабола фокусида ётувчи, радиуслари эса директрисадан фокусгача бўлган масофага тенг бўлган айланалар билан кесишиш нуқталарини ясасак (163- чизма), у ҳолда яна параболанинг *n* жуфт нуқтасини ҳосил қиламиз. Ҳосил бўлган нуқталарни лекало ёрдамида силлиқ чизиқ билан туташтирамиз.

59- §. Параболани параллел кўчириш

Параболанинг каноник тенгламаси берилган бўлсин:

$$x^2 = 2py. \qquad (1)$$

Маълумки, бу ҳолда парабола ўқи *Oy* ўқ билан устма-уст тушади, параболанинг учи координаталар боши билан устма-уст тушади, фокуси эса $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$ нуқтада жойлашади. Агар координаталар боши O' эски системада (a; b) координаталарга эга, координата ўқлари эса эски система ўқларига параллел бўлган янги системага ўтсак, (1) парабола тенгламаси қандай ўзгаришини қараймиз. Бунинг учун параллел кўчириш формулаларидан фойдаланамиз:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + a, \\ y &= y' + b. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

(2) формуладан x ва y ўзгарувчиларнинг қийматларини (1) формулага қўйиб қуйидагига эга бўламиз:

$(x' + a)^2 = 2p(y' + b)$ ёки $x'^2 + 2ax' + a^2 = 2py' + 2pb$.

Бу тенгламани y' га нисбатан ечиб,

$$y' = \frac{1}{2p}x'^2 + \frac{a}{p}x' + \frac{a^2}{2p} - b \qquad (3)$$

ни ҳосил қиламиз. Қуйидагича белгилаймиз:

$$\boxed{\frac{1}{2p} = m, \ \frac{a}{p} = n, \ \frac{a^2}{2p} - b = l;} \qquad (4)$$

у ҳолда (3) тенгламани

$$\boxed{y' = mx'^2 + nx' + l} \qquad (5)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Параболанинг бу тенгламаси китобхонга квадрат учҳад тенгламаси сифатида маълум.

Масала. Параболанинг

$$x^2 = 3y \qquad (6)$$

тенгламаси берилган. Агар янги координаталар системасининг янги координаталар боши $O'(2; 5)$, $O'x'$ ва $O'y'$ ўқлари эса эски системанинг Ox ва Oy ўқларига параллел бўлса, бу парабола тенгламасини янги системада ёзинг.

△ (2) формулалардан x ва y ўзгарувчиларнинг қийматларини $a = 2$, $b = 5$ шартда (6) тенгламага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$(x' + 2)^2 = 3(y' + 5)$, ёки $x'^2 + 4x' + 4 = 3y' + 15$,

ёки узил-кесил

$$y' = \frac{1}{3}x'^2 + \frac{4}{3}x' - \frac{11}{3}.$$

Бу масалани бошқача ечиш мумкин. (4) формулалар бўйича m, n, l ни ҳисоблаймиз. $m=\frac{1}{2p}=\frac{1}{3}$ (чунки $2p=3$)

$$n=\frac{a}{p}=2:\frac{3}{2}=\frac{4}{3} \text{ ва } l=\frac{a^2}{2p}-b=\frac{2^2}{3}-5=-\frac{11}{3}.$$

m, n ва l нинг қийматларини бевосита (5) тенгламага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y'=\frac{1}{3}x'^2+\frac{4}{3}x'-\frac{11}{3}. \ \blacktriangle$$

Тескари масалани қўямиз. Икки ўзгарувчили иккинчи даражали

$$y'=mx'^2+nx'+l \tag{7}$$

тенглама берилган. Бу параболанинг энг содда тенгламасини топиш талаб қилинади. Бу уни

$$x^2=2py \tag{8}$$

кўринишга келтириш деган сўздир.

Бунинг учун p параметрни ва янги координата боши O' нинг $(a;\ b)$ координаталарини аниқлаш керак. (4) тенгликларнинг формулаларини a, b ва p га нисбатан ечамиз:

$$\boxed{p=\frac{1}{2m},\ a=\frac{n}{2m} \text{ ва } b=\frac{n^2}{4m}-l.} \tag{9}$$

Масала. Параболанинг тенгламаси берилган:

$$y'=2x'^2+6x+7.$$

Уни каноник кўринишга келтириш ва янги координаталар бошини аниқлаш талаб қилинади.

$\triangle$ Берилган парабола тенгламасидан $m=2$, $n=6$ ва $l=7$. Бу қийматларни (9) формулага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$p=\frac{1}{2m}=\frac{1}{4},\ a=\frac{n}{2m}=\frac{6}{2\cdot 2}=\frac{3}{2},$$

$$b=\frac{n^2}{4m}=\frac{6^2}{4\cdot 2}-7=-\frac{5}{2}.$$

Шундай қилиб, параболанинг каноник тенгламаси

$$x^2=\frac{1}{2}y,$$

янги координаталар бошининг координаталари $O(1,5;\ -2,5)$ бўлади. $\blacktriangle$

60- §. Иккинчи тартибли эгри чизиқлар тенгламаси икки ўзгарувчили иккинчи даражали тенгламанинг хусусий ҳоли сифатида

Икки ўзгарувчили иккинчи даражали умумий тенглама берилган бўлсин:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \qquad (1)$$

бунда A ва C бир вақтда нолга тенг эмас.

Кўриш осонки, аввал кўрилган иккинчи тартибли эгри чизиқларнинг каноник тенгламалари (1) тенгламанинг хусусий ҳоли бўлади.

1) $A=1, B=0, C=1, D=0, E=0, F=-R^2$ да (1) тенглама $x^2+y^2=p^2$ кўринишга эга бўлади ва демак, айлананинг тенгламаси бўлади.

2) $A=\frac{1}{a^2}$; $B=0$, $C=\frac{1}{b^2}$, $D=0$, $E=0$ ва $F=-1$ да (1) тенглама

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

кўринишга эга бўлади, демак, эллипс тенгламаси бўлади.

3) $A=\frac{1}{a^2}$, $B=0$, $C=-\frac{1}{b^2}$, $D=0$, $E=0$ ва $F=-1$ да (1) тенглама

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

кўринишга эга бўлади, ва демак, гипербола тенгламаси бўлади.

4) $A=0$, $B=0$, $C=1$, $D=-p$, $E=0$ ва $F=0$ да (1) тенглама $y^2=2px$

кўринишга эга бўлади, ва демак, парабола тенгламаси бўлади.

III БОБГА ДОИР МАСАЛАЛАР

1. Маркази координаталар боши билан устма-уст тушадиган, радиуси эса $R=4$ бўлган айлана тенгламасини тузинг.

2. Маркази координаталар боши билан устма-уст тушадиган ва $x=3$ тўғри чизиққа уринадиган айлана тенгламасини тузинг.

3. Маркази абсциссалар ўқида ётадиган ва $x=8$, $y=3$ тўғри чизиқларга уринадиган айлана тенгламасини тузинг.

4. Агар айлананинг абсциссалар ўқи ва $x=-1$ ҳамда $x=5$ тўғри чизиқларга уриниши маълум бўлса, айлана тенгламасини тузинг.

5. $M(2; 1)$ нуқта орқали ўтувчи ва координата ўқларнга уринувчи айлана тенгламасини тузинг.

6. Маркази $C(2; -1)$ нуқтада бўлган ва $N(6; 2)$ нуқта орқали ўтувчи айлана тенгламасини тузинг.

7. Учта $M_1(0; 0)$, $M_2(3; 0)$ ва $M_3(0; 4)$ нуқтадан ўтувчи айлана тенгламасини тузинг.

8. $y-7x-12=0$ тўғри чизиқ ва $(x-1)^2+(y-2)^2=25$ айлананинг кесишиш нуқталарининг координаталарини аниқланг.

9. Маркази $C(3; 7)$ нуқтада бўлган айлананинг Ox ўққа уриниши маълум бўлса, унинг тенгламасини тузинг.

10. Маркази
$$\begin{gathered} 2x+3y-13=0, \\ x+y-5=0 \end{gathered}$$
тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасида бўлган айлананинг ординаталар ўқига уриниши маълум бўлса, унинг тенгламасини тузинг.

11. Агар $A(2;-1)$, $B(-1; 3)$ бўлса, маркази $C(-1; -1)$ нуқтада ва (AB) тўғри чизиққа уринувчи айлана тенгламасини тузинг.

12. Қуйидаги тенгламаларнинг ҳар бири қандай фигурани ифодалайди:

1) $(x-3)^2+(y+5)^2=25$;
2) $(x+5)^2+(y-4)^2=0$;
3) $x^2-2x+4y+y^2-20=0$;
4) $(x-3)^2+y^2=3$;
5) $x^2+(y-2)^2=7$;
6) $x^2+y^2+y=0$?

13. $M(-2; 1)$ нуқта қуйидаги айланаларнинг ҳар бирига нисбатан қандай жойлашган (айлананинг ичидами, ташқарисидами ёки унинг ўзидами)?

1) $x^2+y^2=2$;
2) $x^2+y^2-5=0$;
3) $x^2+y^2=25$;
4) $x^2+y^2-8x-4y=5$;
5) $x^2+y^2+6x-8y=0$;
6) $x^2+y^2=0{,}01$.

14. $A(8; -6)$ нуқтадан $x^2+y^2-4=0$ айланагача бўлган энг яқин масофани ҳисобланг.

15. $x^2+y^2=25$ айлананинг $4x+3y-25=0$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган диаметрининг тенгламасини тузинг.

16. $(x-2)^2+y^2=16$ ва $x^2+(y-3)^2=9$ айланаларнинг марказлари чизиғи тенгламасини топинг.

17. $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ айланага $y=x-3$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик айлананинг тенгламасини топинг.

18. $M_1(2; 3)$ ва $M_2(10; 9)$ нуқталар берилган. $[M_1M_2]$ кесма диаметри бўладиган айлананинг тенгламасини ёзинг.

19. Айлана ординаталар ўқига координаталар бошида уринади ва $M_1(-4; 0)$ нуқта орқали ўтади. Айлана тенгламасини ёзинг ва унинг координата бурчаклари биссектрисалари билан кесишиш нуқталарини топинг.

20. Томонларининг тенгламалари $x-3y+1=0$, $9x-2y-41=0$. $7x+4y+7=0$ бўлган учбурчакка ташқи чизилган айлана тенгламасини тузинг.

21. $M(4;1)$ ва $N(0;5)$ нуқталардан ўтувчи айлана тенгламасини тузинг. Айлананинг маркази $x+y+3=0$ тўғри чизиқда ётиши маълум.

22. Агар тўғри чизиқ ва айлана қуйидаги тенгламалар билан берилган бўлса, тўғри чизиқ айланага нисбатан қандай жойлашганлигини аниқланг (кесадими, уринадими ёки ундан ташқаридан ўтадими):

1) $2x-y-3=0$ ва $x^2+y^2-3x+2y-3=0$;
2) $x-2y-1=0$ ва $(x-4)^2+(y+1)^2=5$;
3) $x+3y+10=0$ ва $x^2+y^2=1$.

23. Координата ўқларига нисбатан симметрик жойлашган ва фокуслари Ox ўқда бўлган эллипс тенгламасини тузинг:

1) эллипснинг ярим ўқлари $a=7$, $b=3$;
2) эллипснинг катта ярим ўқи $a=4$, кичик ярим ўқи эса $b=3$;
3) эллипснинг катта ярим ўқи $a=5$, фокус масофаси эса $2c=6$;
4) эллипснинг кичик ярим ўқи $b=4$, фокус масофаси эса $2c=6$;
5) эллипснинг катта ярим ўқи $a=5$, эксцентриситети эса $\varepsilon=\frac{3}{5}$.

24. Координата ўқларига симметрик жойлашган ва фокуслари Oy ўқда бўлган эллипс тенгламасини тузинг.

1) эллипснинг ярим ўқлари $a=3$, $b=4$;
2) эллипснинг катта ярим ўқи $b=6$, кичик ярим ўқи эса $a=3$;
3) эллипснинг катта ярим ўқи $b=8$, фокус масофаси эса $2c=12$;
4) эллипснинг кичик ярим ўқи $a=4$, эксцентриситети эса $\varepsilon=\frac{3}{5}$;
5) эллипснинг кичик ярим ўқи $a=6$, фокус масофаси эса $2c=16$.

25. Қуйидаги эллипсларнинг ҳар бирининг ярим ўқларини, учларининг координаталарини ва фокусларининг координаталарини аниқланг:

1) $9x^2+16y^2=144$;
2) $16x^2+9y^2-144=0$;
3) $4x^2+y^2=9$;
4) $x^2+9y^2=4$;
5) $4x^2+9y^2=1$;
6) $0{,}25x^2+y^2=1$.

26. Агар айлананинг тенгламаси $x^2+y^2=100$ ва $a=2b$ бўлса, айланага ички чизилган, айланага катта ўқларининг учи билан уринадиган эллипс тенгламасини топинг.

27. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ эллипс берилган. Унинг катта ярим ўқини, кичик ярим ўқини, фокал масофасини, фокусларининг ва учларининг координаталарини, эксцентриситетини топинг.

28. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипснинг ичида ётадиган ҳар қандай $P(x_1;y_1)$ нуқта учун

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}<1$$

тенгсизлик, ҳар қандай ташқи $Q(x_2;\,y_2)$ нуқта учун

$$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}>1$$

тенгсизлик ўринли эканини исботланг.

29. Ромбнинг томони 10 га тенг. Унинг қарама-қарши учлари орқали эллипс ўтади ва бу эллипснинг фокуслари ромбнинг қолган икки учи билан устма-уст тушади. Агар диагоналларини координата ўқлари учун қабул қилинганда, фокуснинг координаталари $F(8;\,0)$ бўлса, ромб эллипс тенгламасини тузинг

30. $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$ эллипснинг ўқлари орасидаги бурчакни тенг-иккига бўлувчи ватарининг узунлигини аниқланг.

31. $x^2+y^2=36$ айлана берилган бўлиб, унинг ординаталари 3 баравар қисқартирилган. Ҳосил бўлган янги эгри чизиқнинг тенгламасини ёзиш талаб қилинади.

32. Фокусидан катта ярим ўқининг учларигача бўлган масофалар 1 ва 9 га тенг бўлган эллипс тенгламасини тузинг.

33. $25x^2+49y^2=1225$ эллипс берилган. Ўқларнинг узунлигини, фокусларнинг координаталарини ва эксцентриситетни топинг.

34. Ярим ўқларининг йиғиндиси 8 га, фокуслари орасидаги масофа эса 8 га тенг эллипс тенгламасини тузинг. Фокуслар ординаталар ўқида ётади.

35. $4x^2+25y^2-100=0$ эллипс берилган. Бу эллипснинг абсциссалари -3 га тенг нуқталарининг ординаталарини топинг.

36. Икки учи $9x^2+25y^2-225=0$ эллипснинг фокусларида жойлашган, бошқа икки учи эса унинг кичик ярим ўқининг учлари билан устма-уст тушадиган тўртбурчакнинг юзини ҳисобланг.

37. Фокуслари абсциссалар ўқида, координаталар бошига нисбатан симметрик жойлашган эллипс тенгламасини тузинг. Бу эллипс $M_1(2;\,-2)$ нуқта орқали ўтади, унинг катта ярим ўқи эса $a=4$

38. $15x^2+25y^2-375=0$ эллипс берилган. Унинг фокуси орқали катта ўққа перпендикуляр ўтказилган. Бу перпендикулярнинг эллипс билан кесишиш нуқталаридан фокусларгача бўлган масофани аниқланг.

39. $16x^2+7y^2-112=0$ эллипс берилган. Бу эллипснинг фокусгача бўлган масофаси 2,5 га тенг бўлган нуқталарининг координаталарини аниқланг.

40. Ярим ўқлари a, b ва маркази $C(x_0; y_0)$ нуқтада бўлган эллипснинг тенгламасини тузинг. Эллипснинг симметрия ўқлари координата ўқларига параллел.

41. Абсциссалар ўқига координаталар бошида уринадиган, маркази (0; 5) нуқтада ва эксцентриситети 0,6 га тенг бўлган эллипснинг тенгламасини тузинг.

42. Эллипс (5; 0) нуқтада абсциссалар ўқига уринади ва ординаталар ўқини (0; 5) ва (0; 11) нуқталарда кесиб ўтади. Бу эллипснинг ўқлари координата ўқларига параллел бўлса, унинг тенгламасини тузинг.

43. Агар эллипснинг тенгламаси тўғри бурчакли Декарт координаталар системасида $4x^2+9y^2-36=0$ бўлса, унинг тенгламасини параметрик кўринишда ёзинг.

44. Агар эллипснинг тенгламаси $36x^2+12y^2-432=0$ бўлса, унга (3;—3) нуқтада уринувчи уринманинг тенгламасини ёзинг.

45. $5x-2y-30=0$ тўғри чизиқнинг $75x^2+24y^2-1800=0$ эллипс билан уриниш нуқтасини топинг.

46. $25x^2+36y^2-900=0$ эллипс ва $x^2+y^2=R^2$ айлана берилган. Уларнинг кесишиш нуқталарини аниқланг ва радиуснинг қийматига қараб бундай нуқталар нечта бўлишини ҳамда улар қандай жойлашишини текширинг.

47. $(x-5)^2+(y-3)^2=4$ айлана эллипсга уринади ва унинг фокуслари орқали ўтади. Агар эллипснинг катта ўқи абсциссалар ўқига параллел бўлса, унинг тенгламасини тузинг.

48. Координата ўқлари симметрик жойлашган, фокуслари Ox да бўлган гипербола тенгламасини қуйидаги ҳолларда тузинг:

1) $a=4,\ b=3$;

2) $2c=16,\ 2b=12$;

3) $\varepsilon=1{,}5,\ 2c=6$;

4) $2a=16,\ \varepsilon=\frac{5}{4}$;

5) асимптоталар тенгламалари: $y=\pm\frac{3}{2}x$, $2a=4$;

6) $2b=6,\ \varepsilon=\frac{5}{4}$.

49. Координата ўқларига нисбатан симметрик жойлашган, фокуслари ордината ўқларида бўлган гипербола тенгламасини қуйидаги ҳолларда тузинг:

1) $a=3,\ b=6$;

2) $2c=10,\ \varepsilon=\frac{5}{3}$;

3) асимптоталар тенгламалари:

$$y=\pm\frac{12}{5}x,\quad 2a=48.$$

4) $2b=8,\ \varepsilon=\frac{5}{3}$.

50. Қуйидаги гиперболаларнинг ҳар бирининг ярим ўқини аниқланг:

1) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1;$ 3) $x^2 - 9y^2 = 9;$ 5) $x^2 - y^2 = 4;$

2) $16x^2 - y^2 = 1;$ 4) $16x^2 - 9y^2 = 1;$ 6) $9x^2 - 16y^2 = 144$

51. $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$ гиперболанинг: 1) a ва b ярим ўқларини, 2) фокусларининг координаталарини, 3) учларининг координаталарини, 4) асимптоталари тенгламаларини топинг.

52. $9x^2 - 16y^2 = -144$ гиперболанинг: 1) a ва b ярим ўқларини, 2) учларининг координаталарини, 3) фокусларининг координаталарини, 4) асимптоталари тенгламаларини топинг.

53. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ гипербола берилган. Циркуль ёрдамида бу гиперболанинг фокусларини ясанг.

54. Фокуслари $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$ эллипснинг учларида, учлари эса бу эллипснинг фокусларида жойлашган гиперболанинг тенгламасини тузинг.

55. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{36} = 1$ гипербола берилган; текисликнинг бу гипербола учларидан ташқари ҳеч қандай нуқтасини ўз ичига олмаган бўлагини чегараловчи параллел тўғри чизиқлар тенгламаларини тузинг.

56. $9x^2 - 16y^2 = 144$ гипербола берилган. Унинг фокуслари ва учларининг координаталарини, эксцентриситетини ва асимптоталари тенгламаларини топинг. Масалага доир чизма чизинг.

57. Ҳақиқий ярим ўқи 5 га тенг, эксцентриситети эса $\varepsilon = 1{,}4$ га тенг бўлган гипербола тенгламасини тузинг.

58. Гиперболанинг чап учи $A(-3; 0)$ нуқтада, чап фокуси эса $B(-5; 0)$ нуқтада жойлашган. Гипербола тенгламасини тузинг.

59. Гиперболанинг асимптоталари $y = \pm 2x$ тенгламалар билан ифодаланишини ва фокус масофаси $2c = 10$ ни билган ҳолда унинг тенгламасини тузинг.

60. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гиперболанинг асимптоталари қандай шартда ўзаро перпендикуляр бўлишини аниқланг.

61. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ гипербола берилган. Гиперболанинг қуйидаги тўғри чизиқлар билан кесишиш нуқталарини топиш талаб қилинади:

а) $x - y + 1 = 0;$
б) $x - 4y - 8 = 0;$
в) $5x - 4y - 16 = 0.$

Масалага доир чизма чизинг.

62. $(x-a)^2+y^2=1$ айлана ва $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{1}=1$ гипербола берилган. Уларнинг кесишиш нуқталарини топинг ва a параметрнинг қийматларига қараб, бундай нуқталар сони нечта бўлишини ва улар қандай жойлашишини текширинг.

63. Агар гиперболанинг учларидан бирининг фокусларгача бўлган масофаси 9 ва 1 га тенг бўлса, унинг каноник тенгламасини тузинг.

64. Асимптоталарининг тенгламаси $y=\pm\frac{1}{2}x$, фокуслари орасидаги масофа $2c=10$ бўлса, гипербола тенгламасини тузинг.

65. $16x^2-9y^2-144=0$ гипербола берилган. Бу гиперболанинг чап фокусгача бўлган масофаси 7 га тенг бўлган нуқталарининг координаталарини аниқланг.

66. Гиперболанинг тенгламаси $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{16}=1$ берилган. Циркулдан фойдаланиб (ҳисобламасдан), бу гиперболанинг бир нечта нуқтасини ясанг.

67. Тенгёнли гиперболанинг эксцентриситетини аниқланг.

68. Гиперболанинг фокуслари $9x^2+25y^2-225=0$ эллипснинг фокуслари билан устма-уст тушади. Агар гиперболанинг эксцентриситети $\varepsilon=2$ бўлса, унинг тенгламасини тузиш талаб қилинади.

69. Агар гиперболанинг ярим ўқлари $a=5$, $b=4$, марказининг координаталари (3; 2), ўқи эса абсциссалар ўқига параллел бўлса, унинг тенгламасини тузиш талаб қилинади.

70. Учлари орасидаги масофа 24 га тенг, фокусларининг координаталари эса (—10 ; 2), (16 ; 2) бўлган гиперболанинг тенгламасини ёзинг.

71. Учи координаталар бошида бўлган параболанинг тенгламасини қуйидаги ҳолларда тузинг:

1) парабола юқори ярим текисликда ординаталар ўқига нисбатан симметрик жойлашган ва $p=4$;

2) парабола пастки ярим текисликда ординаталар ўқига нисбатан симметрик жойлашган ва $p=6$;

3) парабола ўнг ярим текисликда абсциссалар ўқига нисбатан симметрик жойлашган ва $p=3$;

4) парабола чап ярим текисликда абсциссалар ўқига нисбатан симметрик жойлашган ва $p=5$.

72. Фокуси $F(0;-3)$, нуқтада координаталар бошидан ўтувчи ва ординаталар ўқига нисбатан симметрик бўлган парабола тенгламасини тузинг.

73. Параболанинг фокуси $F(-6;0)$ кооринаталарга эга, дирек-

трисасининг тенгламаси эса $x-6=0$. Парабола тенгламасини тузинг.

74. Фокусининг координаталари $(0; 4)$, директрисасининг тенгламаси $y+4=0$ бўлган парабола тенгламасини тузинг.

75. Агар парабола координаталар бошидан ва $M(3; 6)$ нуқтадан ўтса, фокуси эса ординаталар ўқида жойлашган бўлса, унинг тенгламасини тузинг.

76. Қуйидаги параболаларнинг учлари ва фокусларининг координаталарини аниқланг:

1) $y^2=20x$;
2) $x^2=12y$;
3) $y^2=-10x$,
4) $y^2=x$;
5) $x^2=-4y$;
6) $x^2=y$.

77. Қуйидаги параболаларни битта чизмада чизинг: $x^2=\frac{1}{2}y$, $x^2=y$, $x^2=2y$.

78. Парабола фокуси $F\left(0; \frac{1}{4}\right)$ нуқтада ётади, директриса абсциссалар ўқига параллел ва ординаталар ўқида $\frac{1}{4}$ га тенг кесма ажратади. Парабола тенгламасини тузинг.

79. Парабола $A(0; 6)$ ва $B(0; -6)$ нуқталар орқали ўтади. Абсциссалар ўқига симметрик ва шу ўқда 4 га тенг (координаталар бошидан бошлаб ўнг томонда) кесма ажратади. Парабола тенгламасини тузинг ва параболани ясанг.

80. Фокуси $2x-5y-8=0$ тўғри чизиқ билан абсциссалар ўқининг кесишиш нуқтасида жойлашган параболанинг энг содда тенгламасини тузинг. Бу параболани ясанг.

81. $(0; 0)$ ва $(5; 3)$ нуқталар орқали ўтувчи ва абсциссалар ўқига нисбатан симметрик парабола тенгламасини тузинг.

82. Текисликнинг $(2; 0)$ нуқтадан ва $x+2=0$ тўгри чизиқдан бир хил узоқликда жойлашган барча нуқталари тўплами тенгламасини тузинг. Ҳосил қилинган чизиқнинг абсциссалар ўқи билан кесишиш нуқтасини топинг ва чизиқни ясанг.

83. Текисликнинг координаталар бошидан ва $x=6$ тўғри чизиқдан бир хил узоқликда жойлашган барча нуқталари тўпламини топинг. Ҳосил қилинган чизиқнинг ординаталар ўқи билан кесишиш нуқтасини топинг ва уни ясанг.

84. Учи координаталар бошида, абсциссалар ўқига нисбатан симметрик ва $N(9; 6)$ нуқта орқали ўтувчи парабола тенгламасини тузинг. N нуқтанинг фокал радиус-вектори билан абсциссалар ўқи орасидаги α бурчакни аниқланг.

85. Параболанинг учи $A(-4; 5)$ нуқтада, фокуси эса $B(-2; 5)$ нуқтада жойлашганини билган ҳолда унинг тенгламасини топинг. Унинг ўқи ва директрисасининг тенгламасини ёзинг.

86. Параболанинг фокуси (—3; —4) ва унинг директрисаси тенгламаси $x + 1 = 0$ берилган. Парабола тенгламасини ёзинг ва параболанинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталарини топинг

87. $y = \frac{1}{4}x^2$ парабола билан қуйидаги тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқталарини топинг:

1) $x = y$; 3) $x - 2y + 4 = 0$;

2) $x = -y$; 4) $5x - 2y - 8 = 0$.

Чизма чизинг.

88. Агар $x^2 = 8y$ параболада ётадиган нуқтадан директрисагача бўлган масофа 4 га тенг бўлса, бу нуқтанинг координаталарини аниқланг.

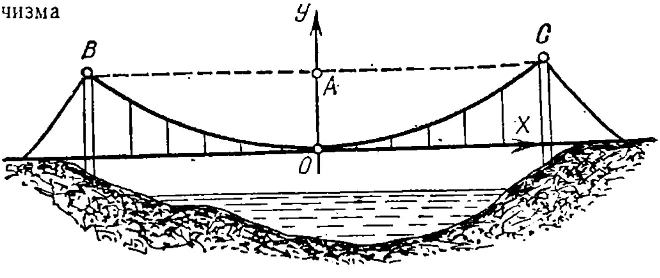
89. $y^2 = 5x$ парабола берилган. Параболада фокал радиуси 4 га тенг бўлган нуқтани топиш талаб қилинади.

90. Агар парабола $y = x$ тўғри чизиқ билан $x^2 + y^2 - 10y = 0$ айлананинг кесишиш нуқтаси орқали ўтса ва ординаталар ўқига симметрик бўлса, парабола тенгламасини тузинг ва унинг директрисаси тенгламасини ёзинг. Айланани, тўғри чизиқни ва параболани ясанг.

91. Параболанинг директрисаси $y = 1$ тўғри чизиқ, фокуси эса (2; 9) нуқта. Параболанинг фокал ватари охирларининг координаталарини топиш талаб қилинади. Параболани ва унинг фокал ватарини чизинг.

92. $y^2 = 6x$ параболага $N(6; 6)$ нуқтада ўтказилган уринма тенгламасини ёзинг.

93. Осма кўприк арқони парабола формасига эга (164- чизма). Агар арқоннинг эгилиши $|OA| = 10$, кўприк узунлиги $BC = 60$ бўлса, чизмада кўрсатилган координаталар системасига нисбатан парабола тенгламасини тузиш талаб қилинади.



164-чизма

94. Агар айлананинг $y^2 = 8x$ парабола директрисасига уриниши маълум бўлса, маркази шу парабола фокуси билан устма-уст тушадиган айлана тенгламасини тузинг. Парабола билан айлананинг кесишиш нуқталари координаталарини аниқланг ва чизма чизинг.

ЖАВОБЛАР

I БОБ

1. а) 0; б) 0; в) 0; д) $2b$ ёки $2d$; е) 0; ж) $b+d$ ёки $-a-b$; з) d ёки a.

2. 10 Н. 4. 2Н.

5. Масалан, 71- расм, з) га қаранг.

6. 0. 7. 1) $\overrightarrow{AS}$; 2) $\overrightarrow{AB}$.

8. Кўпбурчак қоидасидан фойдаланиб, ҳар бир йиғиндини $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$ кўринишга алмаштиринг.

9. Ҳа. 10. а) $\overrightarrow{AC}=b$, б) $\overrightarrow{CA}$; в) 0; г) 0.

12. $b-a$; $\frac{1}{2}(a-b)$; $a+b$; $-\frac{1}{2}(a+b)$.

13. $b-a$; $a-b$; $b-2a$; $a-\frac{1}{2}b$; $b-2a$.

14. $2a+2b-\frac{1}{2}c$; $a+b-\frac{1}{2}c$; $-(a+b+c)$.

15. $\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{CB}$. 19. 7.

20. 1) $k=\pm 1$; 2) $|k|>1$; 3) $|k|<1$.

22. 1) $k=\pm 1$; 2) $|k|>3$; 3) $|k|<5$.

23. 1) $\frac{5}{|a|}$; 2) $-\frac{1}{|a|}$. 24. $-\frac{1}{2}\overrightarrow{PM}$.

25. 1) $\pm\frac{1}{|a|}$; 2) $\frac{5}{|a|}$. 26. $-2\overrightarrow{CB}$.

27. 23- § даги $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ формуладан $O=M$ бўлган ҳол учун фойдаланиш мумкин.

28. $b-a$; $-a$; $a-b$; $b-2a$.

29. $b=(-3;\ \pm 2\sqrt{5})$.

30. 1) $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{BA}$.

32. $B(11;\ 1)$. **33.** -6. **34.** -14.

35. $\cos\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}$. **36.** 9.

37. $i - j + k;\ -i - 3j + k$.

38. 90°. **39.** 2.

40. Чексиз тўплам.

42. $\left(-\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{2}{3}\right)$. 43. $8i + 6j$.

44. $\overrightarrow{OE} = 4i$; $\overrightarrow{OA} = -2i + 2\sqrt{3}j$; $\overrightarrow{AB} = 2i + 2\sqrt{3j}$; $\overrightarrow{OB} = 4\sqrt{3}j$; $\overrightarrow{BC} = 4i$; $\overrightarrow{CD} = 2i - 2\sqrt{3}j$; $\overrightarrow{DE} = -2i - 2\sqrt{3}j$; $\overrightarrow{OC} = 4i + 4\sqrt{3}j$; $\overrightarrow{OD} = 6i + 2\sqrt{3}j$.

45. 1) $8j$; 2) $6i + 8j$; 3) $6i$; 4) $6i$; 5) $-6i$; 6) $-6i + 8j$.

46. 1) $-a - b + \frac{1}{2}c$; 2) $-a + c$; 3) $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b - c$; 4) $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$; 5) $-a$; 6) $a - c + b$; 7) $-b + c$; 8) $-\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + c$

47. 1) $-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$; 2) $\frac{1}{2}(a + b)$; 3) a; 4) $\frac{1}{2}(a - b)$; 5) $-\frac{1}{2}(a + b)$; 6) $a + b$; 7) $\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}b$; 8) $b - a$; 9) $-\frac{3}{2}a - \frac{1}{2}b$; 10) $2a$.

48. 7. **49.** $-1;\ -\frac{1}{2}$.

50. 1) 0°; 2) 90°; 3) 90°; 4) 90°; 5) 90°; 6) $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

51. 1) 90°; 2) $0° \leqslant \varphi < 90°$; 3) $90° < \varphi \leqslant 180°$; 4) $-a^2$; 5) ka^2.

52. 45°. **53.** $2\sqrt{3}$. **54.** 6.

55. 1) 90°; 2) 90°; 3) $\cos\varphi = -\frac{3}{\sqrt{13}}$.

56. 90°, 45°, 45°. **59.** 5. **61.** 6. **62.** -6.

63. $\cos\varphi = \frac{3}{5}$. 64. $\cos\varphi = \frac{3}{5}$.

65. 1) $(b + c)^2 + 2a \cdot b$; 2) $2i$.

66. 1) $-4i + 7j + 6k$; 2) $i + 2j + k$; 3) $-3i + 4j + 2k$; 4) $3i + 6j + 3k$; 5) $-2i + 6j + 3k$; 6) $4i - 2j - k$; 7) $4i - 2j - 6k$; 8) $5i + 10j + 5k$; 9) $20i + 10j + 20k$; 10) $20i + 10j + 15k$.

67. $-6j$. 68. $-12j$. 69. 7. 70. $\sqrt{429}$.

71. 25. **72.** $7\sqrt{5}$. **73.** 48; 4,8; 9,6.

II БОБ

1. Тўғри чизиқ A (0; 3) ва B (2; 4) нуқталардан ўтади.

2. $x=3+t$; $y=-2+3t$. **4.** $4x-y-11=0$.

6. $2x+5y-26=0$. **7.** $x-y-7=0$.

9. $3x-2y-13=0$. **10.** $4x+y-5=0$.

12. $x=3$. **14.** $2x+3y=0$.

15. $2x-y+5=0$ (AB), $2x+y-9=0$ (BC), $2x-5y-15=0$ (AC), $x-y=0$ (AA'), $10x-y-3=0$ (BB'), $2x+7y-3=0$ (CC').

16. $x=4$, $y=-3$. **17.** $x=5$, $y=-2$.

18. (4; 0);, (0; —6).

19. 1) $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$; $\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=1$; 3) $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1$; 4) $\frac{x}{-3}+\frac{y}{-2}=1$.

20. $x+3y+5=0$, $3x-y+5=0$; $3x-y-5=0$.

21. $S_{\Delta}=6$. **22.** $x+2y-4=0$. **23.** $x+y-6=0$.

24. $2x+y-8=0$. **25.** $S_{\Delta}=20$.

26. 1) $2x-3y-23=0$; 2) $3x+2y-2=0$.

27. $x-\sqrt{3}y+3+4\sqrt{3}=0$. **28.** $x-y+2=0$.

29. $k=\frac{3}{7}$; $b=\frac{2}{7}$. **30.** $4x-3y-27=0$.

31. $2x-3y+4=0$. **32.** $2x-3y=0$.

33. $3x-5y-27=0$. **37.** Биринчи тўғри чизиқ.

35. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$, $b=\frac{13}{4}$.

37. 1) $k=\frac{3}{4}$; 2) $k=-\frac{4}{3}$.

38. $k=-\frac{5}{3}$, $\alpha\approx121^\circ$. **39.** 135°.

40. 1) $k=\frac{3}{2}$, $b=4$; 2) $k=3$, $b=3$; 3) $k=-1$, $b=3$.

41. 1) $3x-4y+8=0$; 2) $y=2x-3$; 3) $5x+y+3=0$; 4) $3x+2y-10=0$.

42. $k=\frac{1}{5}$. **43.** $y=5x+9$.

44. 1) 135°; 2) 45°; 3) 0°; 4) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{7}{9}$; 5) 90°; 6) 0°; 7) 90°; 8) $\operatorname{tg}\alpha=-5$; 9) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{b^2-a^2}{2ab}$. **46.** $l_1\perp l_2$, $l_2\parallel l_4$.

47. 1) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-5=0$; 4) $\frac{5}{13}x-\frac{12}{13}y+2=0$.

49. 1) 2,5; 2) 3; 3) 6,5.

50. 1) $4x-3y=0$; 2) $4x-3y-30=0$.

51. (—3; 1). 52. 1) $2x+5y-4=0$; 2) $2x+5y+25=0$.

53. $|d|=\frac{6}{\sqrt{13}}$. **54.** (3; 2). **55.** $x+y-4=0$.

56. а) l_1 l_2 билан устма-уст тушади; б) (4;—4); в) $l_1 \parallel l_2$; г) $l_1 \parallel l_2$

57. (1; 3), (2; 1), (5; 4), (6; 2).

58. $5x+4y-23=0$. **59.** $|d|=\frac{8}{\sqrt{13}}$.

60. $\frac{1}{\sqrt{5}}x-\frac{2}{\sqrt{5}}y\pm 3=0$. **61.** $12x-18y+83=0$. **62.** (2; 3).

63. $\left(\frac{11}{6};\ \frac{35}{6}\right)$, (—3; 1), $\left(9\frac{3}{7};\ -9\frac{5}{14}\right)$

64. (—2; 5), (1; —3), (5; —9), (8; —17).

65. 1) (3; 2); 2) (4; 3); 3) (2; 5).

66. $3x-y-2=0$ (MP); $x-5y+4=0$ (NE); $x+3y-12=0$ (ND).

67. N (3; —1), $M\left(4\frac{1}{3};\ -2\right)$, $P\left(2\frac{2}{3};\ -2\right)$.

68. $x-y-17{,}5=0$.

III БОБ

1. $x^2+y^2=16$. **2.** $x^2+y^2=9$.

3. $(x-5)^2+y^2=9$. **4.** $(x-2)^2+(y\pm 3)^2=9$.

5. $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, $(x-5)^2+(y-5)^2=25$.

6. $(x-2)^2+(y+1)^2=25$.

7. $(x-1{,}5)^2+(y-2)^2=6{,}25$.

8. $\left(-\frac{19}{25};\ 6\frac{17}{25}\right)$, (—2; —2).

9. $(x-3)^2+(y-7)^2=49$. **10.** $(x-2)^2+(y-3)^2=4$.

11. $(x+1)^2+(y+1)^2=5{,}76$.

12. 1 Айлана, C (3; —5) ва $R=5$; 2) (—5; 4) нуқтани; 3) айлана, C (1; —2) ва $R=5$; 4) айлана, C (3; 0) ва $R=\sqrt{3}$; 5) айлана C (0; 2) ва $R=\sqrt{7}$; 6) айлана, $C\left(0;\ -\frac{1}{2}\right)$ ва $R=\frac{1}{2}$.

13. 1) Айланадан ташқарида; 2) айланада; 3) айлана ичида; 4) айланадан ташқарида; 5) айлана ичида; 6) айланадан ташқарида;

14. 8. **15.** $3x-4y=0$. **16.** $3x+2y-6=0$.

17. $(x-5)^2+(y+2)^2=1$. **18.** $(x-6)^2+(y-6)^2=25$.

19. $(x+2)^2+y^2=4$; (0; 0), (—2; 2), (—2; —2).

20. $(x-3{,}1)^2+(y+2{,}3)^2=22{,}1$. **21.** $(x+2)^2+(y+1)^2=40$.

22. 1) кесади; 2) уринади; 3) айланадан ташқаридан ўтади.

23. 1) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$; 3) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; 4) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; 5) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

24. 1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$; 2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}=1$; 3) $\frac{x^2}{28}+\frac{y^2}{64}=1$; 4) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$; 5) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{100}=1$.

25. 1) $a=4$, $b=3$, $(4;\ 0)$, $(-4;\ 0)$, $(0;\ 3)$, $(0;\ -3)$, $F_1(\sqrt{7};\ 0)$, $F_2(-\sqrt{7};\ 0)$, 2) $a=3$, $b=4$, $(3;\ 0)$ $(-3;\ 0)$, $(0;\ 4)$, $(0;\ -4)$, $F_1(0;\ \sqrt{7})$, $F_2(0;\ -\sqrt{7})$; 3) $a=\frac{3}{2}$, $b=3$, $\left(\frac{3}{2};\ 0\right)$, $\left(-\frac{3}{2};\ 0\right)$, $(0;\ 3)$; $(0;\ -3)$, $F_1\left(0;\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, $F_2\left(0;\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$; 4) $a=2$, $b=\frac{2}{3}$, $(2;\ 0)$, $(-2;\ 0)$, $\left(0;\ \frac{2}{3}\right)$, $\left(0;\ -\frac{2}{3}\right)$, $F_1\left(\frac{4\sqrt{2}}{3};\ 0\right)$, $F_2\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3};\ 0\right)$; 5) $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{3}$, $(0{,}5;\ 0)$, $(-0{,}5;\ 0)$, $\left(0;\ \frac{1}{3}\right)$, $\left(0;\ -\frac{1}{3}\right)$, $F_1\left(\frac{\sqrt{5}}{6};\ 0\right)$, $F_2\left(-\frac{\sqrt{5}}{6};\ 0\right)$; 6) $a=2$, $b=1$, $(2;\ 0)$, $(-2;\ 0)$, $(0,1)$, $(0;\ -1)$, $F_1(\sqrt{3};\ 0)$, $F_2(-\sqrt{3};\ 0)$.

26. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$. **27.** $2a=10$, $2b=6$, $2c=8$, $F_1(4;\ 0)$, $F_2(-4;0)$, $\varepsilon=\frac{4}{5}$.

29. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$. **30.** $4\sqrt{3}$. **31.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$.

32. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. **33.** $2a=14$, $2b=10$, $F_1(2\sqrt{6};0)$, $F_2(-2\sqrt{6};\ 0)$, $\varepsilon=\frac{2\sqrt{6}}{7}$.

34. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$. **35.** $\left(-3;\ \frac{8}{5}\right)$, $\left(-3;\ -\frac{8}{5}\right)$.

36. $S=24$. **37.** $x^2+3y^2-16=0$. **38.** 3 и 7.

39. $\left(\frac{\sqrt{21}}{2};\ 2\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{21}}{2};\ 2\right)$, $\left(\frac{\sqrt{21}}{2};\ -2\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{21}}{2};\ -2\right)$.

40. $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$.

41. Эллипснинг катта ёки кичик ўқи Ox ўққа ётишига боғлиқ равишда $\frac{x^2}{(25/4)^2}+\frac{(y-5)^2}{25}$ ёки $\frac{x^2}{25}+\frac{(y-5)^2}{(25/4)^2}=1$.

42. $\frac{(x-5)^2}{320/11}+\frac{(y-8)^2}{64}=1$. 44. $3x-y-12=0$.

45. $(4;-5)$. 47. $\frac{(x-5)^2}{8}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$.

48. 1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{28}-\frac{y^2}{36}=1$; 3) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$; 4) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$; 5) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$; 6) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

49. 1) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=-1$; 2) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$; 3) $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{576}=-1$; 4) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$.

50. 1) $a=4,\ b=3$; 2) $a=\frac{1}{4},\ b=1$; 3) $a=3,\ b=1$; 4) $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{3}$; 5) $a=2,\ b=2$; 6) $a=4,\ b=3$.

51. 1) $a=4,\ b=3$; 2) $F_1(5;0)$, $F_2(-5;0)$; 3) $(4;0)$, $(-4;0)$; 4) $y=\pm\frac{3}{4}x$.

52. 1) $b=4,\ a=3$; 2) $(0;4)$, $(0;-4)$; 3) $F_1(0;5)$, $F_2(0;-5)$; 4) $y=\pm\frac{3}{4}x$.

54. $\frac{x^2}{28}-\frac{y^2}{36}=1$. 55. $x=5$; $x=-5$.

56. $F_1(5;0)$, $F_2(-5;0)$, $(4;0)$, $(-4;0)$, $\varepsilon=\frac{5}{4}$, $y=\pm\frac{3}{4}x$.

57. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$. 58. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

59. $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$. 60. $a=b$.

61. 1) Йўқ; 2) $\left(-1+3\sqrt{3};\ \frac{-9+3\sqrt{3}}{4}\right)$, $\left(-1-3\sqrt{3};\ \frac{-9-3\sqrt{3}}{4}\right)$; 3) $\left(5;\ \frac{9}{4}\right)$ (уриниш нуқтаси.)

63. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. 64. $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$. 67. $\sqrt{2}$.

68. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$. 69. $\frac{(x-3)^2}{25}-\frac{(y-2)^2}{16}=1$. 70. $\frac{(x-3)^2}{144}-\frac{(y-2)^2}{25}=1$.

71. 1) $x^2=8y$; 2) $x^2=-12y$; 3) $y^2=6x$; 4) $y^2=-10x$.

72. $x^2=-12y$. 73. $y^2=-24x$.

74. $x^2=16y$. **75.** $x^2=\frac{3}{2}y$.

76. 1) (0; 0), (5; 0), 2) (0; 0), (0;3), 3) (0;0), (—2,5; 0); 4) (0;0), (0,25; 0): 5) (0; 0), (0; —1); 6) (0; 0), (0; 0,25).

78. $x^2=y$. **79.** $y^2+9x-36=0$. **80.** y^2-16x.

81. $y^2=1,8x$. **82.** $y^2=8x$. **83.** $y^2=-12(x-3)$.

84. $y^2=4x$. **85.** $(y-5)^2=8(x+4)$.

86. $(y+4)^2=-4(x+2)$. **87.** 1) (0; 0), (4; 4); 2) (0; 0), (—4; 4) 3) (4; 4), (—2; 1); 4) (2; 1), (8; 16).

88. (4; 2). **89.** $\left(\frac{11}{4}; \frac{-\sqrt{55}}{2}\right), \left(\frac{11}{4}; \frac{\sqrt{55}}{2}\right)$.

90. $x^2=5y$; $y+1,25=0$.

91. $(x-2)^2=16(y-5)$; (—6; 9), (10; 9).

92. $x-2y+6=0$. **93.** $90y=x^2$.

94. $(x-2)^2+y^2=16$; (2; 4), (2; —4).

ҚЎЛЛАНИЛГАН СИМВОЛЛАР РЎЙХАТИ

A, B, C, M, N — нуқталар

$(A; B)$ — нуқталарнинг тартибланган жуфти

$l, (AB)$ — ўқ

$[AB]$ — кесма

$[AB)$ — нур

$|AB|$ — A нуқтадан B нуқтагача бўлган масофа (AB кесманинг узунлиги)

$\{AB\}$ — элементлари A ва B бўлган тўплам

$\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AB}$ — вектор

$|\mathbf{a}|$, $|\overrightarrow{AB}|$ векторнинг узунлиги

$\mathbf{0}$, $\overrightarrow{AA}$ — ноль вектор

$\uparrow\uparrow$ —бир хил йўналган нурлар (векторлар)

$\uparrow\downarrow$ — қарама-қарши йўналган нурлар (векторлар)

f — алмаштириш

E — айний алмаштириш

f^{-1} — тескари алмаштириш

$f_2 \circ f_1$ — f_1 ва f_2 алмаштиришлар композицияси

$\parallel$ — параллел

$\nparallel$ — параллел эмас

$\in$ — тегишли

$\notin$ — тегишли эмас

$\perp$ — перпендикуляр

$\angle$ — бурчак

$\wedge$ — бурчак катталиги

$\widehat{(l_1; l_2)}$ — l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар орасидаги бурчак

$\widehat{(\mathbf{a}; \mathbf{b})}$ — $\mathbf{a}$ ва $\mathbf{b}$ векторлар орасидаги бурчак

S_Δ — учбурчак юзи