КАРИМ МУҲАМЕДОВ

ЭЛЕМЕНТАР МАТЕМАТИКАДАН ҚЎЛЛАНМА

ОЛИЙ ЎҚУВ ЮРТЛАРИГА КИРУВЧИЛАР УЧУН

УЧИНЧИ НАШРИ

„ЎҚИТУВЧИ" НАШРИЁТИ
Тошкент—1976

М $\frac{20202 \text{ № } 26}{353\ (06)-76}$ 134-76

СЎЗ БОШИ

Бу қўлланманинг ушбу нашри ҳам СССР Олий ва махсус ўрта таълим министрлигининг олий ўқув юртларига кирувчилар учун кириш қоидалари ва кириш имтиҳонлари программалари асосида ёзилди. Китобнинг биринчи нашри олий ўқув юртларига кирувчилар ва элементар математикани мустақил ўрганувчиларга яқиндан ёрдам беришни кўзда тутиб ёзилган. Китобнинг иккинчи нашрини тайёрлашда автор олий ўқув юртларига кирувчиларни ва элементар математикани мустақил ўрганувчиларни назарда тутиш билан бир қаторда, республикамиздаги институтлар қошида ишлаб турган тайёрлов курсларининг ўқувчилари учун дарслик вазифасини ўташини ҳам кўзда тутди. Бу мақсадда қўлланманинг иккинчи нашрига кўпгина назарий ва амалий аҳамиятга эга бўлган материаллар қўшилди.

Булардан ташқари, автор китобни иккинчи нашрга тайёрлашда, биринчи нашрида учраган камчилик ва хатоларни тузатишга алоҳида эътибор берди.

Китобнинг иккинчи нашрида баъзи параграфларнинг ўрнини алмаштириш мақсадга мувофиқ деб топилди. Бу қўлланманинг биринчи, иккинчи нашрлари ҳам, албатта, мактабларда дарслик сифатида фойдаланишни кўзда тутмай, балки ўрта маълумотли ва элементар математикадан олган билимларини эсидан чиқарган ҳар бир кишига қисқа муддат ичида мустақил равишда арифметика, алгебра, геометрия ва тригонометриядан кўп нарсаларни эсга тушириб олишга имкон беради.

Олий мактабларга кирувчилар орасида кўп йигит-қизлар таърифларни, теорема ва қоидаларни айтишда ҳамда уларни мисол ва масалалар ечишга татбиқ қилишда ожизлик қиладилар. Шунинг учун қўлланманинг иккинчи нашрида ҳам бу нарсаларга алоҳида эътибор берилди. Лекин қўлланманинг иккинчи нашрида, программадан ташқари, қисқача тарихий маълумотлар, турли хил ўлчовлар ва геометрик алмаштиришлар ҳақидаги тушунчаларни қолдириш мақсадга мувофиқ деб топилди. Қўлланманинг иккинчи нашрида ҳам баъзи содда мисоллар учун жавоблар берилмади Шундай қилиб, китобнинг иккинчи нашри олий ўқув юртлари (асосан, техника олий ўқув юртлари)га кирувчилар учун қўлланма ва институтлар қошидаги тайёрлов курс ўқувчилари учун дарслик вазифасини ўтай олади.

Қўлланманинг иккинчи нашридан фойдаланишда ҳам комплекс сонлар тушунчаси ва стереометрияни ўқишни, тригонометрия бўлимидан керак бўлган материалларни ўқиб чиқишни китобхонларга тавсия қиламиз. Китобнинг биринчи нашрига Ўзбекистон Педагогика фанлари илмий текшириш институти математика секторининг мудири, педагогика фанлари кандидати Ж. Икромовнинг ёзган тақризлари, шубҳасиз, китобнинг иккинчи нашри сифатининг яхшиланишига катта ҳисса қўшди. Бунинг учун автор Ж. Икромовга чексиз миннатдорчилик изҳор этади. Иккинчи нашрига тайёрланган қўлланмани ўқиб чиқиб, самимий маслаҳатлар берганлари учун Тошкент политехника институтининг доценти, кафедра мудири Н. Акбархўжаевга автор самимий ташаккур билдиради. Китобнинг иккинчи нашрини ҳам баъзи камчилик ва хатолардан холи деб бўлмайди, албатта.

Ўз истак ва мулоҳазаларингизни қуйидаги адресга юборишингизни илтимос қиламиз:

Тошкент, Навоий 30, „Ўқитувчи" нашриёти.

Автор.

Қўлланманинг учинчи нашри унинг олдинги нашрларида учраган хатоларни эътиборга олинган ҳолда матрицадан босилди.

Китоб тўғрисидаги ўз фикр ва мулоҳазаларини юборган уртоқларга автор ўз миннатдорчилигини билдиради.

Автор.

I БЎЛИМ

АРИФМЕТИКА

1- §. НАТУРАЛ (БУТУН) СОНЛАР

Арифметика сўзи грекча „аритмос“ — ўзбекча „сон“ сўзидан келиб чиққан бўлиб, сон ҳақидаги фан деган маънони англатади. Арифметика—сонлар (бутун ва каср[1]), улар устидаги амаллар ва уларнинг оддий хоссалари ҳақидаги фандир.

Сонларни ёзиш учун ўнта махсус белги бор: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Бу белгилар[2] рақамлар деб аталади. Юқоридаги ўнта рақамдан фойдаланиб, ҳар қандай сонни ёзиш мумкин. Масалан, 1; 2; 5; 8; 10; 11; 124; 2051 ва ҳоказо. Санаш натижасида ҳосил бўладиган 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; ... ва ҳоказо сонлар натурал сонлар дейилади. Ортиб бориш тартибида жойлашган чексиз давом этувчи 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 , ... сонлар қатори (тўплами) натурал қатор дейилади. Агар сон битта рақамдан иборат бўлса, уни бир хонали сон, иккита рақамдан иборат бўлса, уни икки хонали сон, учта рақамдан иборат бўлса — уч хонали сон дейилади ва ҳ. к. *Масалан,* 7 — *бир хонали сон;* 35 — *икки хонали сон;* 209 — уч хонали сондир ва ҳ. к. Турмушда бутун сонлардан ташқари каср сонлар, рационал сонлар, иррационал сонлар, комплекс сонлар деб аталадиган сонлар ҳам учрайди. Бу сонлар ҳақида китобнинг келгуси параграфларида маълумот берилади.

2- §. ТЎРТ АМАЛ ЭЛЕМЕНТЛАРИНИНГ НОМЛАРИ[3]. ҚОЛДИҚСИЗ ВА ҚОЛДИҚЛИ БЎЛИШ

Тўрт амалнинг асосий хоссалари

Бу параграфда арифметикадаги тўрт амал элементларини конкрет мисоллар билан эслатиб ўтамиз.

Масалан, 1) $8+5=13$ да 8 ва 5 лар *қўшилувчилар,* 13 эса *йиғинди* дейилади.

---

[1] 9- § га қаранг.

[2] Сонда қайси хонанинг бирликлари бўлмаса, шу хонага ноль қўйилади.

[3] Бу китобда бутун сонлар устидаги тўрт амал ва уларнинг хоссаларини *қараш ортиқча деб ҳисобланди;* керак қилган китобхон ҳар қандай арифметика дарсликларидан қараши мумкин.

2) $13-5=8$ да 13 *камаювчи*, 5 *айрилувчи*, 8 эса *айирма* дейилади.

3) $7\cdot 12=84$ да 7 ва 12 лар *кўпайтувчилар*, 84 эса *кўпайтма* дейилади.

4) $84:7=12$ да 84 *бўлинувчи*, 7 *бўлувчи*, 12 эса *бўлинма* дейилади.

Умуман, 1) $A+B=C$ бўлсин; бунда A ва B лар *қўшилувчилар*, C эса *йиғинди* дейилади.

2) $D-E=K$ бўлсин; D – *камаювчи*, E — *айрилувчи*, K эса *айирма* дейилади.

3) $M\cdot N=H$ бўлсин; M ва N лар *кўпайтувчилар*, H эса *кўпайтма* дейилади.

4) $E:F=S$ бўлсин; E — *бўлинувчи*, F *бўлувчи*, S эса *бўлинма* дейилади.

Бу ерда айириш ва бўлиш таърифларини алоҳида эслаб ўтайлик: йиғинди билан бир қўшилувчига кўра иккинчи қўшилувчини топиш — айириш деб аталади. Кўпайтма билан бир кўпайтувчига кўра иккинчи кўпайтувчини топиш — бўлиш деб аталади (буларни юқоридаги мисоллардан яққол кўриш мумкин).

Бир сонни иккинчи сонга бўлганда бутунлай (аниқ) бўлинса, у қолдиқсиз бўлиш деб аталади.

Масалан: $24:3=8$, чунки $3\cdot 8=24$.

Бир сонни иккинчи сонга бўлганда бутунлай (аниқ) бўлинмаса, у қолдиқли бўлиш деб аталади[1].

Масалан:

$$\begin{array}{r|l} 23 & 7 \\ \cline{2-2} -21 & 3 \\ \cline{1-1} 2 & \text{— қолдиқ} \end{array}$$

натижани, $23=7\cdot 3+2$ кўринишда ёзиш мумкин.

Демак, бир сон иккинчи сонга бўлинса, биринчи сон иккинчисининг бўлинувчиси (карралиси), иккинчи сон биринчисининг бўлувчиси ва бўлиш натижасида ҳосил бўлган сон бўлинма дейилади.

Изоҳ. Битта сон бир неча соннинг бўлинувчиси бўлиши мумкин. Масалан, 84 сони 7 дан бошқа яна: 2; 3; 4; 6; 14; 21; 42; 84 сонларининг ҳам бўлинувчисидир.

1) Қўшилувчиларнинг ёки кўпайтувчиларнинг ўринларини алмаштириш билан йиғинди ёки кўпайтманинг қиймати ўзгармайди. Масалан, $7+3=3+7=10$; $7\cdot 3=3\cdot 7=21$. Умуман: $a+b=b+a$; $a\cdot b=b\cdot a$.

2) Қўшилувчилардан бир нечтасини группалаб қўшиб, йиғиндисини қолган қўшилувчиларга қўшсак ёки кўпайтувчилардан бир нечтасини группалаб кўпайтириб кўпайтмасини қол-

---

[1] Бир сон иккинчи сонга қолдиқсиз бўлинса, у ҳолда биринчи сон иккинчи сонга бўлинади дейилади.

ганига кўпайтирсак, йиғинди ёки кўпайтманинг қиймати ўзгармайди.

Масалан, $9+17+25=(9+17)+25=9+(17+25)=(9+25)+17=51$; $9\cdot17\cdot25=(9\cdot17)\cdot25=9\cdot(17\cdot25)=(9\cdot25)\cdot17=3825$. Умуман, $a+b+c=(a+b)+c=(a+c)+b=a+(b+c)$; $a\cdot b\cdot c=(a\cdot b)\cdot c=(a\cdot c)\cdot b=a\cdot(b\cdot c)$.

3) Бирор сондан бир неча сонларнинг йиғиндисини айириш учун шу сондан қўшилувчилардан биттасини айириш, топилган айирмадан қолган қўшилувчиларнинг яна биттасини ва ҳ. к. айириш кифоя.

Масалан, $356-(105+97)=(356-105)-97=(356-97)-105=154$.

Умуман: $a-(b+c)=(a-b)-c=(a-c)-b$.

4) Йиғиндидан сонни айириш учун шу сонни битта қўшилувчидан айириш кифоя.

Масалан, хусусий ҳолда $(72+36)-71=(72-71)+36=37$. Умуман, $(a+b)-c=a+(b-c)=(a-c)+b$.

5) Бир неча сон йиғиндисининг бирор сонга кўпайтмаси ҳар бир қўшилувчини, шу сон билан кўпайтмалари йиғиндисига тенг. Масалан, хусусий ҳолда $(7+19+15)\cdot3=7\cdot3+19\cdot3+15\cdot3=123$; умуман, $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$ бўлади.

6) Йиғиндини бирор сонга бўлиш учун, шу сонга ҳар бир қўшилувчини алоҳида бўлиб, сўнгра топилган бўлинмаларни қўшиш кифоя. Масалан, хусусий ҳолда $(27+45):9=27:9+45:9=3+5=8$; умуман $(a+b):c=a:c+b:c$.

Изоҳ. Бу хоссаларнинг ҳаммаси алгебрада ҳам ўз кучини сақлайди.

8- §. РИМ РАҚАМЛАРИ. ЙИҒИНДИ ВА АЙИРМАНИНГ БЎЛИНИШИ

Ҳозирги вақтда биз фойдаланадиган рақамлар араб рақамлари деб аталади. Лекин, биз араб рақамларидан ташқари, айрим ёзувларда рим рақамларидан ҳам фойдаланамиз. Рим рақамларининг энг сўнги кўриниши қуйидагича:

I = 1 (бир); V = 5 (беш); X = 10 (ўн); $L=50$ (эллик); $C=100$ (юз); $D=500$ (беш юз); $M=1000$ (минг).

Бу рақамлар ёрдами билан сонлар қуйидагича ёзилади:

1) Катта рақамдан кейин кичик рақам ёзилса, у бу рақамларнинг қийматлари йиғиндисига тенг сонни ифода қилади, агар катта рақам олдига кичик рақам ёзилса, айирмасига тенг сонни ифода қилади. Масалан, XV = 10 + 5 = 15; IX = 10 — 1 = 9 ва ҳ.к.

2) *Айрим сонлар битта рақамни такрорлаш йўли билан ёзилади.* Масалан, II = 1 + 1 = 2; III = 1 + 1 + 1 = 3; XX = 10 + 10 = 20; XXX = 10 + 10 + 10 = 30 ва ҳ. к.

Бирдан ўнгача бўлган сонлар қуйидагича ёзилади: I = 1; II = 2; III = 3; IV = 4; V = 5; VI = 6; VII = 7; VIII = 8; IX = 9; X = 10.

Машқлар, 40, 45, 60, 65, 68, 70, 80 сонларини рим рақамлари билан ёзинг.

Энди йиғинди ва айирманинг бўлинишини қараймиз.

1) *Агар ҳар бир қўшилувчи бирор сонга бўлинса, йиғинди ҳам шу сонга бўлинади.* Масалан, $32 + 12 + 8 = 52$ берилган бўлсин. Бунда, 32, 12 ва 8 қўшилувчиларнинг ҳар бири 4 га бўлинади, йиғинди 52 ҳам 4 га бўлинади. Бир сонниг иккинчи сонга бўлиниш-бўлинмаслигини билиш учун бу хоссадан фойдаланишимиз мумкин. Масалан, бўлиш амалини бажармасдан, 1463 нинг 7 га бўлиниш ёки бўлинмаслигини билиш учун, уни $1463 = 1400 + 63$ шаклида ёзамиз, бунда 1400 ҳам, 63 ҳам 7 га қолдиқсиз бўлинишини кўриш осон, демак, йиғинди 1463 ҳам 7 га бўлинади.

Изоҳ. Йиғинди бирор сонга бўлиниб, унинг ҳар бир қўшилувчиси бу сонга бўлинмаслиги мумкин. Масалан, $72 = 61 + 11$. Бунда 72 йиғинди 9 га бўлинади, лекин унинг қўшилувчилари 61 ва 11 эса 9 га бўлинмайди.

2) *Агар камаювчи билан айрилувчининг ҳар бири бирор сонга бўлинса, айирма ҳам шу сонга бўлинади.* Масалан, $144 - 36 = 108$ тенглик берилган бўлсин. Бунда камаювчи 144 ҳам, айрилувчи 36 ҳам 36 га бўлинади, айирма 108 ҳам 36 га бўлинади. Баъзан айирманинг бу хоссасидан фойдаланиб, бир сонниг иккинчи сонга бўлиниш ёки бўлинмаслигини аниқлаш мумкин. Масалан, 297 сони 3 га бўлинадими, деган саволга, бўлиш амалидан фойдаланмай, айирманинг хоссасидан фойдаланиб жавоб берамиз. $297 = 297 + 3 - 3 = 300 - 3$ тенгликдан кўрамизки, 300 ҳам, 3 ҳам 3 га бўлинади, демак айирма 297 ҳам 3 га бўлинади.

4- §. СОНЛАРНИНГ 2, 3, 4, 5, 8, 9, 11 ВА 25 ГА БЎЛИНИШ БЕЛГИЛАРИ

а) 2 ва 5 га бўлиниш белгилари. *Ҳар қандай жуфт*[1] *сон 2 га бўлинади; охирги битта рақами 5 ёки ноль бўлган ҳар қандай сон 5 га бўлинади.* Масалан, 2754 ва 970 сонларининг ҳар бири 2 га бўлинади, чунки улар жуфт сонлардир. 1960, 970 ва 375 сонларининг ҳар бири 5 га бўлинади, чунки уларда охирги рақамлари 0 ва 5 дир.

б) 3 ва 9 га бўлиниш белгилари. *Рақамларининг йиғиндиси 3 га ёки 9 га бўлинган ҳар қандай сон мос равишда 3 га ёки 9 га бўлинади.* Масалан, 132; у 3 га бўлинади, чунки $1 + 3 + 2 = 6$ йиғинди 3 га бўлинади. 252 ни олсак, у 9 га бўлинади, чунки $2 + 5 + 2 = 9$ йиғинди 9 га бўлинади.

в) 4 ва 25 га бўлиниш белгилари. *Охирги икки рақами 4 га бўлинадиган ёки иккита ноль билан тугайдиган ҳар*

---

[1] Охирги битта рақами 2 га бўлинадиган ёки ноль бўлган сонларни жуфт сонлар, қолган сонларни тоқ сонлар дейилади. Масалан, 12, 70, 314, 1150 сонлар жуфт, 35, 29, 1011, 1357 сонлар — тоқ сонлардир.

қандай сон 4 га бўлинади, охирги икки рақами 25 га бўлинадиган ёки иккита ноль билан тугайдиган ҳар қандай сон 25 га бўлинади. Масалан, 4500 ва 7536 ларнинг ҳар бири 4 га бўлинади; 2875 ва 4500 ларнинг ҳар бири 25 га бўлинади.

г) 8 га бўлиниш белгилари. *Охирги учта рақами 8 га бўлинадиган ёки учта ноль билан тугайдиган ҳар қандай сон 8 га бўлинади.* Масалан, 157328 ва 91000 ларнинг ҳар бири 8 га бўлинади.

д) 11 га бўлиниш белгилари. *Агар, соннинг тоқ ўриндаги рақамларининг йиғиндиси, жуфт ўриндаги рақамлари йиғиндисига тенг ёки уларнинг айирмаси 11 га бўлинса, берилган сон ҳам 11 га бўлинади.* Масалан, 2134572 ва 8493419 сонлари 11 га бўлинади, чунки $2 + 3 + 5 + 2 = 12$ ва $1 + 4 + 7 = 12$, иккинчисида $8 + 9 + 4 + 9 = 30$, $4 + 3 + 1 = 8$, $30 - 8 = 22$, бу 11 га бўлинади.

Машқлар. 358, 1730, 318021, 252, 630, 5400, 7625, 425712, 123111, 171816, 21000 сонларни бўлмасдан, уларнинг қайсилари 2; 3; 4; 5; 8; 9 ва 25 га; 1098969, 9180701, 6407813 сонларнинг 8 га ва 1899876, 30891498, 2937 сонларнинг 11 га бўлинишини аниқланг.

5-§ ТУБ ВА МУРАККАБ СОНЛАР

Таъриф. *Фақат ўзига ва бирга бўлинадиган натурал сон туб сон, ўзидан ва бирдан бошқа сонларга ҳам бўлинадиган натурал сон мураккаб сон дейилади.*

Масалан, 2; 3; 5; 7; 13; 23; 37 ва ҳоказолар туб сонлар бўлиб, 4; 6; 8; 9; 10; 12; 14 15; 16 ва ҳоказолар мураккаб сонлардир

Изоҳ. 1 — туб сонларга ҳам мураккаб сонларга ҳам кирмайди.

Мураккаб сонларни туб кўпайтувчиларга ажратиш.

Ҳар қандай мураккаб сонни туб кўпайтувчиларга ажратиш мумкин. Берилган сонни туб сонларга ажратишни кичик туб сонларга бўлиш йўли билан бажариш тавсия этилади.

Масалан, 420 ва 135 ларни туб кўпайтувчиларга ажратиш қуйидагича бажарилади:

420 нинг ўнг томонига вертикал чизиқ чизиб, унинг ўнг томонига биринчи энг кичик (бирдан катта) бўлувчини ёзамиз, бу 2 бўлади. 420 ни 2 га бўламиз, бўлинма 210, буни 420 нинг тагига ёзамиз. 210 учун энг кичик бўлувчи 2 бўлади, шунинг учун 210 ни 2 га бўлиб, бўлинма 105 ни 210 нинг тагига, 2 ни эса ўнг томондаги 2 нинг тагига ёзамиз,энди 105 нинг энг кичик бўлувчиси 3 дир, 105 ни 3 га бўлиб, бўлинма 35 ни 105 нинг тагига, 3 ни эса 2 нинг тагига ёзамиз ва ҳ.к.,

бу хилда бўлишни то чизиқнинг чап томонида бир келиб чиққунча давом эттирамиз:

$$\begin{array}{r|l} 420 & 2 \\ 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Демак, $420 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$.

Шунга ўхшаш:

$$\begin{array}{r|l} 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Демак, $135 = 3 \times 3 \times 3 \times 5$.

Машқлар. 204; 245; 1024; 1635; 3240 сонлар туб кўпайтувчиларга ажратилсин.

6- §. СОНЛАРНИНГ ЭНГ КАТТА УМУМИЙ БЎЛУВЧИСИ ВА ЭНГ КИЧИК УМУМИЙ БЎЛИНУВЧИСИ

Таъриф. *Берилган бир неча соннинг ҳар бири қолдиқсиз бўлинадиган энг катта сон шу сонларнинг энг катта умумий бўлувчиси деб айтилади.* Масалан, 35; 21; 14 — учта сонни олайлик. Бу сонларнинг энг катта умумий бўлувчиси 7 бўлади, чунки: $35 : 7 = 5$; $21 : 7 = 3$ ва $14 : 7 = 2$.

Қоида. *Берилган бир неча соннинг энг катта умумий бўлувчисини топиш учун шу сонларни туб кўпайтувчиларга ажратиб, берилган барча сонлар учун умумий бўлган туб кўпайтувчиларни ўзаро кўпайтириш керак.* Масалан, 60; 75 ва 105 сонларининг энг катта умумий бўлувчиси 15 га тенг, чунки уларнинг ҳар бири қолдиқсиз бўлинадиган энг катта сон 15 дир. Уни биз қуйидаги йўл билан топамиз:

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Буларда умумий туб сонлар 3 ва 5 дир; демак $3 \times 5 = 15$ энг катта умумий бўлувчи.

Машқлар. Қуйидаги сонларнинг энг катта умумий бўлувчиси топилсин: 1) 32, 88 ва 104; 2) 42, 90, 88 ва 64; 3) 105, 144, 210 ва 75; 4) 404, 6768, 1088 ва 2044.

Таъриф. *Берилган бир неча соннинг ҳар бирига қолдиқсиз бўлинадиган энг кичик сон шу сонларнинг энг кичик умумий бўлинувчиси деб айтилади.* Масалан, 4; 8; 12 — учта соннинг энг кичик умумий бўлинувчиси 24 бўлади, чунки $24 : 4 = 6$, $24 : 8 = 3$, $24 : 12 = 2$.

Қоида. *Берилган бир неча соннинг энг кичик умумий бўлинувчисини топиш учун уларни туб кўпайтувчиларга ажратиш, сўнгра берилган сонлар учун умумий бўлган туб сонлардан биттадан, умумий бўлмаганларининг ҳаммасини олиб, уларни ўзаро кўпайтириш керак.* Масалан, 8; 12 ва 16 сонларига бўлинадиган энг кичик сон 48 бўлиб, у берилган сонларнинг энг кичик умумий бўлинувчисидир. Ҳақиқатан, берилган сонларнинг энг кичик умумий бўлинувчисини топиш учун юқоридаги қоидага мувофиқ уларни туб кўпайтувчиларга ажратамиз:

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

ёки буни қисқача ёзиш ҳам мумкин:

$$\begin{array}{ccr|l} 8; & 12; & 16 & 2 \\ 4 & 6 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ & & 1 & 3 \end{array}$$

Булардан кўрамизки, умумий ва умумий бўлмаган туб кўпайтувчилар кўпайтмаси: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 48$. Демак, берилган сонларнинг энг кичик умумий бўлинувчиси 48 сони экани кўрсатилди.

Машқлар. Қуйидаги сонларнинг энг кичик умумий бўлинувчиси топилсин:

1. 18, 27 ва 84.
2. 125, 75 ва 235.
3. 248, 144, 120 ва 640.
4. 125, 130, 225 ва 175.
5. 100, 34 ва 1224.
6. 3264, 128 ва 104.

7- §. ТЕНГСИЗЛИК

Таъриф. *Икки соннинг бири иккинчисидан катта ёки кичик эканлигини кўрсатувчи муносабат тенгсизлик дейилади.* Катталик ишораси $>$ белги билан, кичиклик ишораси $<$ белги билан кўрсатилади[1].

Масалан, 5 нинг 3 дан катта эканлиги $5 > 3$ кўринишда ёзилади. Шунга ўхшаш 8 нинг 11 дан кичиклиги $8 < 11$ кўринишда ёзилади.

8- §. АМАЛЛАР ТАРТИБИ. ҚАВСЛАР ВА УЛАРНИ ОЧИШ

Қўшиш ва айириш — биринчи босқич, кўпайтириш ва бўлиш — иккинчи босқич амаллари деб аталади.

1- қоида. *Бир хил босқич амаллар ёзилиш тартибида бажарилади.*

Масалан, $25 - 17 + 3 = 8 + 3 = 11$; $20 : 4 \cdot 6 = 5 \cdot 6 = 30$; $10 \cdot 2 : 5 = 20 : 5 = 4$.

2- қоида. *Агар ифодада турли босқич амаллари бўлса, олдин юқори босқич, сўнгра қуйи босқич амаллари бажарилади.*

Масалан, $3 \cdot 15 + 14 : 2 - 5 = 45 + 7 - 5 = 47$.

Агар мисол ёки масалада берилган шартларга кўра амалларнинг бу тартибини ўзгартириш тўғри келса, у ҳолда қавслар ишлатилади. Қавслар уч хил бўлади: кичик қавс ( ); ўрта қавс [ ] ва катта қавс { }. Қавсларни очишда[2]: дастлаб кичик қавс, ундан кейин ўрта қавс, энг кейин катта қавс очилади.

Масалан, $\{[3 + 5 \times (13 - 7)] : 11\} + 12 = \{[3 + 5 \times 6] : 11\} + 12 = \{33 : 11\} + 12 = 15$ бўлади.

9- §. ОДДИЙ КАСРЛАР

Таъриф. *Бирликнинг битта ёки бир неча тенг бўлакларини ифодаловчи сон каср дейилади.*

Масалан, еттидан тўрт десак, бу бир бирликни 7 та тенг бўлакка бўлиб, ундан 4 тасини олинганини кўрсатади ва $\frac{4}{7}$ шаклида ёзилади. Шунга ўхшаш: учдан икки деганимизда, бу бир бирликни учта тенг бўлакка бўлиб, 2 тасини олинганини кўрсатади ва $\frac{2}{3}$ шаклида ёзилади ва ҳоказо.

---

[1] Тенгсизликлар ҳақида тўлароқ тушунча II бўлим, 29- § да берилади.

[2] Қавсни очиш деганда, қавс ичида кўрсатилган амалларни бажаришни тушунамиз.

Чизиқ устида турган сон касрнинг *сурати*, чизиқ остидаги сон касрнинг *махражи* деб аталади. Сурат билан махраж касрнинг *ҳадлари* дейилади. Чизиқ эса *каср чизиғи* дейилади.

Масалан, $\frac{4}{7}$ касрда: 4 — сурат, 7 эса махраждир.

Таъриф. *Сурати махражидан кичик бўлган каср тўғри каср, сурати махражидан катта ёки тенг бўлган каср нотўғри каср дейилади.* Масалан: $\frac{14}{3}$ — нотўғри каср, чунки $14 > 3$; $\frac{5}{11}$ — тўғри каср, чунки $5 < 11$.

Таъриф. *Бутун ва касрдан иборат сон — аралаш сон дейилади.* Масалан, $1\frac{2}{3}$; $5\frac{1}{2}$ ва ҳоказо.

1- қоида. *Нотўғри касрни аралаш сонга айлантириш учун касрнинг суратини унинг махражига бўлиш ва қолдиқни топиш керак, бўлинма бутун бирликлар сонини, қолдиқ эса бирлик бўлакларининг сонини билдиради.*

Масалан, $\frac{13}{5}$ аралаш сонга айлантирилсин.

Бундай бажарилади:

$$\begin{array}{r|l} 13 & 5 \\ -10 & \overline{2} \\ \hline 3 & \text{— қолдиқ} \end{array}$$

Демак, $\frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$ — аралаш сон бўлади.

2- қоида. *Аралаш сонни нотўғри касрга айлантириш учун каср махражини ундаги бутун сонга кўпайтириб, ҳосил бўлган кўпайтмага касрнинг суратини қўшиб, уни изланган касрнинг сурати қилиш, махражини эса аввалгича қолдириш керак.*

Масалан,

$$3\frac{7}{11} = \frac{11 \times 3 + 7}{11} = \frac{40}{11};\ 15\frac{3}{8} = \frac{8 \times 15 + 3}{8} = \frac{123}{8}$$

ва ҳоказо. (Амалий ишда булар дилда бажарилади, яъни $4\frac{2}{5} = \frac{22}{5}$ каби.)

Машқлар. $\frac{235}{12}$; $\frac{782}{15}$ ва $\frac{1087}{126}$ нотўғри касрларни аралаш сонга айлантиринг. $11\frac{5}{8}$; $5\frac{12}{25}$; $101\frac{3}{4}$ ва $5\frac{130}{223}$ аралаш сонларни нотўғри касрга айлантиринг.

а) Касрнинг хоссалари

Агар касрнинг сурати бир неча марта орттирилса (камайтирилса) ёки махражи бир неча марта камайтирилса (орттирилса), у ҳолда каср шунча марта ортади (камаяди).

Масалан, $\frac{8}{15}$ нинг суратини 2 марта орттирамиз; махражини 3 марта камайтирамиз: $\frac{8 \times 2}{15} = \frac{16}{15}$ ва $\frac{8}{15:3} = \frac{8}{5}$ ҳосил бўлади.

Буларда $\frac{16}{15}$ каср $\frac{8}{15}$ дан 2 марта катта; $\frac{8}{5}$ каср эса $\frac{8}{15}$ дан 3 марта каттадир. Энди $\frac{8}{15}$ нинг суратини 4 марта камайтирамиз; махражини 3 марта орттирамиз: $\frac{8:4}{15} = \frac{2}{15}$ ва $\frac{8}{15 \times 3} = \frac{8}{45}$ ҳосил бўлади. Буларда, $\frac{2}{15}$ каср $\frac{8}{15}$ дан 4 марта кичик, $\frac{8}{45}$ эса $\frac{8}{15}$ дан 3 марта кичик.

Хулоса. *Касрнинг сурат ва махражини бир хил сонга кўпайтириш ёки бўлиш билан унинг қиймати ўзгармайди.* Масалан, $\frac{2}{5} = \frac{2 \times 3}{5 \times 3} = \frac{6}{15}$ ва $\frac{6}{15} = \frac{6:3}{15:3} = \frac{2}{5}$ ҳосил бўлади.

Махражлари тенг бўлган иккита касрдан қайси бирининг сурати катта бўлса, ўша каср каттадир. Масалан, $\frac{3}{7}$ ва $\frac{5}{7}$ касрларда: $\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$.

Суратлари бир хил бўлган иккита касрдан қайси бирининг махражи кичик бўлса, ўша каср катта. Масалан, $\frac{6}{7}$ ва $\frac{6}{11}$ касрларда: $\frac{5}{7} > \frac{6}{11}$.

б) Касрни қисқартириш

Таъриф. *Касрни қисқартириш деб, унинг сурат ва махражини бир хил сонга бўлиб, ҳадлари кичик бўлган бошқа каср билан алмаштиришга айтилади.* $\frac{238}{294} = \frac{119}{147} = \frac{17}{21}$. Бунда каср 2 ва 7 га, яъни 14 га қисқарди.

Машқлар. $\frac{78}{26}$; $\frac{240}{314}$; $\frac{825}{925}$; $\frac{1024}{988}$ ва $\frac{375}{365}$ касрларни қисқартиринг.

в) Касрларни умумий махражга келтириш

Таъриф. *Касрлар махражларининг энг кичик умумий бўлинувчиси у касрларнинг энг кичик умумий махражи дейилади.*

Қоида. *Касрларни энг кичик умумий махражга келтириш учун уларнинг махражларининг энг кичик умумий бўлинувчисини топиб, уни ҳар қайси касрнинг махражига бўлиб, бўлинмани*[1] *касрнинг суратига кўпайтириб ёзилади.*

---

[1] Бундай бўлинма қўшимча кўпайтувчи дейилади.

Масалан, $\frac{15}{28}$, $\frac{5}{21}$ ва $\frac{11}{14}$ касрларни энг кичик умумий махражга келтирамиз:

$$\begin{array}{rrr|l} 28, & 21, & 14 & 2 \\ 14 & 7 & 7 & 2 \\ 7 & 1 & 1 & \underline{3} \\ & & & \underline{7} \\ & & & 84 \end{array}$$

Бу ҳолда $\frac{15 \cdot 3}{84} = \frac{45}{84}$; $\frac{5 \cdot 4}{84} = \frac{20}{84}$ ва $\frac{11 \cdot 6}{84} = \frac{66}{84}$, демак, 84 берилган касрнинг энг кичик умумий махражидир.

Машқлар. Энг кичик умумий махражга келтиринг:

$$1)\ \frac{3}{17} \text{ ва } \frac{12}{13};\ 2)\ \frac{11}{125}, \frac{32}{75} \text{ ва } \frac{13}{15};\ 3)\ \frac{23}{27} \text{ ва } \frac{75}{522};\ 4)\ \frac{111}{1200} \text{ ва } \frac{781}{950};$$

$$5)\ \frac{121}{624}, \frac{125}{188}, \frac{15}{24} \text{ ва } \frac{11}{124}.$$

г) Касрларни қўшиш ва айириш

Қоида. *Касрларни бир-бирига қўшиш учун улар энг кичик умумий махражга келтирилади, ҳосил бўлган суратларини қўшиб, йиғиндини суратга, умумий махражни эса махраж қилиб ёзиш, сўнгра қисқарса, қисқартириш керак.*

Масалан,

$$\frac{3}{14} + \frac{13}{42} = \frac{9 + 13}{42} = \frac{22}{42} = \frac{11}{21}.$$

Агар қўшилувчилар аралаш сон бўлса, у ҳолда бутун қисмлар йиғиндиси ва каср қисмлар йиғиндиси алоҳида топилади ҳамда бу йиғиндилар қўшилади. Масалан,

$$3\frac{3}{14} + 2\frac{15}{42} = 5\frac{9 + 15}{42} = 5\frac{24}{42} = 5\frac{4}{7}.$$

Бутун сонни касрга ёки касрни бутун сонга қўшиш учун бутун сон каср ёнига бутун қилиб ёзилади.

Масалан,

$$8 + \frac{3}{5} = 8\frac{3}{5}.$$

1-қоида. *Касрдан касрни айириш учун олдин уларни энг кичик умумий махражга келтириб, сўнгра камаювчининг суратидан айирилувчининг суратини айириш ва айирманинг тагига умумий махражини ёзиб, сўнгра қисқарса, қисқартириш керак.*

Масалан,

$$\frac{13}{28} - \frac{5}{12} = \frac{39 - 35}{84} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}.$$

2- қоида. *Аралаш сондан аралаш сонни айириш учун, уларнинг бутун қисмларини алоҳида, каср қисмларини алоҳида айириш керак; агар камаювчи каср айрилувчи касрдан кичик бўлса, у ҳолда камаювчи аралаш соннинг бутунидан биттани, унга тегишли каср махражига майдалаб*[1], *уни камаювчи касрга қўшиб, кейин айириш керак.*

Масалан,

$$1)\ 13\frac{24}{225}-6\frac{13}{425}=7\frac{408-117}{3825}=7\frac{291}{3825};$$

$$2)\ 5\frac{12}{25}-2\frac{11}{15}=3\frac{36-55}{75}=2\frac{75+36-55}{75}=2\frac{111-55}{75}=2\frac{56}{75};$$

$$3)\ 3\frac{7}{15}-1\frac{7}{15}=2+\left(\frac{7}{15}-\frac{7}{15}\right)=2+0=2.$$

Бутундан касрни ёки аралаш сонни айиришда бутундан биттасини каср махражига майдалаб, кейин юқоридаги усуллар билан айрилади.

Масалан,

$$1)\ 11-\frac{7}{12}=10\frac{12}{12}-\frac{7}{12}=10\frac{12-7}{12}=10\frac{5}{12};$$

$$2)\ 7-5\frac{3}{14}=6\frac{14}{14}-5\frac{3}{14}=1\frac{14-3}{14}=1\frac{11}{14}.$$

Мисолда қўшиш ва айириш аралаш келса, бундай мисолларни ҳисоблаш пайтида олдин ҳамма бутун қисмлар устида алоҳида ва ҳамма каср қисмлар устида ҳам алоҳида берилган амаллар бажарилади, кейин ҳосил бўлган бутун сонни — бутун, каср сонни эса каср қилиб ёзилади.

Масалан,

$$1)\ 1\frac{11}{35}-\frac{7}{15}+6\frac{13}{75}=(1-0+6)+\left(\frac{11}{35}-\frac{7}{15}+\frac{13}{75}\right)=$$
$$=7\ \frac{165-245+91}{525}=7\frac{11}{525};$$

$$2)\ 3\ \frac{5}{12}+1\frac{11}{36}-2\frac{3}{26}=(3+1-2)+\frac{195+143-54}{468}=2\ \frac{284}{468}=$$
$$=2\frac{71}{117}$$

бўлади. Практикада бундай ишланади: $11\ \frac{11}{35}-8\ \frac{7}{15}+6\ \frac{13}{75}=$

$$=9\ \frac{165-245+91}{525}=9\frac{11}{525}.$$

---

[1] Бир бутунни каср махражига майдалаш деб, уни каср махражини ўз-ўзига бўлинган кўринишда олишни айтамиз.

Машқлар. Қуйидаги амаллар бажарилсин:

$$12\frac{35}{142}+7\frac{17}{88};\ 7\frac{15}{124}+2\frac{73}{88}-3\frac{29}{120};\ 12\frac{14}{135}-4\frac{31}{200};\ 15-3\frac{23}{35};$$

$$21\frac{18}{135}-11\frac{19}{225}+1\frac{73}{150};\ 12\frac{7}{45}-5\frac{22}{35};\ \ 13-\frac{7}{18};\ 21+2\frac{3}{5};$$

$$17\frac{22}{35}-5\frac{22}{35};\ 6\frac{3}{5}-6\frac{7}{45};\ 5\frac{7}{15}-3;\ 35\frac{3}{14}+1\frac{12}{125}-2\frac{7}{25}.$$

д) Касрларни кўпайтириш ва бўлиш

1- қоида. *Касрни касрга кўпайтириш учун уларнинг суратини суратга кўпайтириб — сурат, махражини махражга кўпайтириб, махраж қилиб ёзиш керак.* Масалан,

$$\frac{7}{12}\cdot\frac{5}{6}=\frac{7\cdot 5}{12\cdot 6}=\frac{35}{72}.$$

Кўпайтиришда (мумкин бўлса) қисқартириш керак. Масалан,

$$\frac{124}{135}\cdot\frac{75}{244}=\frac{124\cdot 75}{244\cdot 135}=\frac{31\cdot 5}{61\cdot 9}=\frac{155}{549}.$$

2- қоида. *Касрни касрга бўлиш учун бўлинувчи касрнинг суратини бўлувчи касрнинг махражига кўпайтириш, бўлинувчи касрнинг махражини бўлувчи касрнинг суратига кўпайтириш ва биринчи кўпайтмани сурат, иккинчи кўпайтмани эса махраж қилиб ёзиш керак.* Масалан,

$$\frac{25}{28}:\frac{3}{11}=\frac{25\cdot 11}{28\cdot 3}=\frac{275}{84}=3\frac{23}{84}.$$

Бўлишда ҳам (мумкин бўлса) қисқартириш керак. Масалан,

$$\frac{122}{175}:\frac{4}{25}=\frac{122\cdot 25}{4\cdot 175}=\frac{61\cdot 1}{2\cdot 7}=\frac{61}{14}=4\frac{5}{14}.$$

Умуман, $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$

Агар касрларни кўпайтириш ва бўлишда, касрлар аралаш сонлардан иборат бўлса, дастлаб улар нотўғри касрга айлантирилади, кейин кўпайтириш ёки бўлиш амаллари бажарилади. Масалан,

$$5\frac{15}{28}\cdot 2\frac{14}{15}=\frac{155}{28}\cdot\frac{44}{15}=\frac{155\cdot 44}{28\cdot 15}=\frac{31\cdot 11}{7\cdot 3}=\frac{341}{21}=16\frac{5}{21};$$

$$3\frac{12}{25}:4\frac{6}{15}=\frac{87}{25}:\frac{66}{15}=\frac{87\cdot 15}{25\cdot 66}=\frac{29\cdot 3}{5\cdot 22}=\frac{87}{110}.$$

Хусусий ҳоллар:

Бутун сонни каср сонга ёки каср сонни бутун сонга кўпайтириш учун бутун сон каср махражига қисқарса қисқартиб, қолган сонни суратга кўпайтириб — сурат, махраждан қолган сонни эса махраж қилиб ёзиш керак.

Масалан,

$$12\cdot\frac{7}{8}=\frac{3\cdot 7}{2}=\frac{21}{2}=10\frac{1}{2};\quad \frac{7}{8}\cdot 12=\frac{21}{2}=10\frac{1}{2}.$$

Шунга ўхшаш $770\cdot\frac{69}{70}=759.$

Бутун сонни аралаш сонга ёки аралаш сонни бутун сонга кўпайтириш учун аралаш сонни нотўғри касрга айлантириб, сўнгра бутун сонни каср сонга ёки каср сонни бутун сонга кўпайтиргандек кўпайтириш кифоя. Масалан,

$$25\cdot 3\frac{7}{15}=25\cdot\frac{52}{15}=\frac{5\cdot 52}{3}=86\frac{2}{3}\ \text{ёки}\ 3\frac{7}{15}\cdot 25=86\frac{2}{3}.$$

Бутун сонни каср сонга бўлиш учун бутун сон каср сурати билан қисқарса қисқартиб, қолган бутун сонни махражга кўпайтириб — сурат, суратдан қолган сонни эса — махраж қилиб ёзиш керак.

Масалан,

$$12:\frac{8}{15}=\frac{3\cdot 15}{2}=22\frac{1}{2}.$$

Бутун сонни аралаш сонга бўлиш учун аралаш сонни нотўғри касрга айлантириб, сўнгра бутун сонни каср сонга бўлгандек бўлиш керак.

Масалан,

$$24:2\frac{12}{13}=24:\frac{38}{13}=\frac{12\cdot 13}{19}=8\frac{4}{19}.$$

Умуман, $a:\frac{c}{d}=\frac{a}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{c};\ \frac{a}{b}:c=\frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{a}{b\cdot c}.$

1-изоҳ. Бутун сонни аралаш сонга кўпайтиришда аралаш сонни нотўғри касрга айлантириш шарт бўлмай, бирданига бутун сонни аралаш сон бутуни билан кўпайтириб — бутун, сўнгра бутун сонни каср сон билан кўпайтириб каср қилиб ёзилса кифоя. Масалан,

$$3\cdot 75\frac{1}{17}=3\cdot 75\frac{3\cdot 1}{17}=225\frac{3}{17},$$

чунки

$$3\cdot 75\frac{1}{17}=3\cdot\left(75+\frac{1}{17}\right)=225+\frac{3}{17}=225\frac{3}{17}.$$

2-изоҳ. Айрим ҳолларда, аралаш сонни бутун сонга бўлиш учун аралаш сонни нотўғри касрга айлантириб ўтириш шарт бўлмай, аралаш соннинг бутунини алоҳида, касрини алоҳида бутун сонга бўлиб ёзилса кифоядир. Масалан,

$$22\frac{121}{205}:11=(22:11)\ \frac{121:11}{205}=2\frac{11}{205}$$

бўлади, чунки

$$22\frac{121}{205}\ :11=\left(22+\frac{121}{205}\right):11=\frac{22}{11}+\frac{121}{205\cdot 11}=2+\frac{11}{205}=2\frac{11}{205}.$$

Машқлар. Қуйидаги амаллар, нотўғри касрга айлантирмай, бажарилсин:

$$13\cdot105\frac{5}{19}=;\ 38\frac{12}{13}\cdot5=;\ 189\frac{99}{124}:9=;\ 225\frac{45}{136}:15=;$$

$$17\frac{103}{210}\cdot100=;\ \ 2100\frac{25}{43}:25=;\ 115\frac{11}{12}:23=;\ 37\cdot11\frac{7}{271}=.$$

Кўпайтириш ва бўлиш амалларига доир бир неча мисоллар келтирамиз.

1-мисол. Кетма-кет кўпайтириш амали бажарилсин:

$$4\frac{5}{11}\cdot3\frac{1}{7}\cdot\frac{12}{13}.$$

Ечиш.

$$4\frac{5}{11}\cdot3\frac{1}{7}\cdot\frac{12}{13}=\frac{49}{11}\cdot\frac{22}{7}\cdot\frac{12}{13}=\frac{7\cdot2\cdot12}{1\cdot1\cdot13}=\frac{168}{13}=12\frac{12}{13}.$$

2-мисол. Кўпайтириш ва бўлиш амаллари бажарилсин:

$$7\cdot\frac{11}{12}\cdot3\frac{1}{5}:2\frac{2}{5}.$$

Ечиш.

$$7\frac{11}{12}\cdot3\frac{1}{5}:2\frac{2}{5}=\frac{95}{12}\cdot\frac{16}{5}:\frac{12}{5}=\frac{95\cdot16\cdot5}{12\cdot5\cdot12}=\frac{95\cdot1\cdot1}{3\cdot1\cdot3}=\frac{95}{9}=10\frac{5}{9}.$$

3-мисол. Кетма-кет бўлиш амали бажарилсин:

$$7\frac{11}{12}:3\frac{1}{5}:2\frac{2}{5}.$$

Ечиш.

$$7\frac{11}{12}:3\frac{1}{5}:2\frac{2}{5}=\frac{95}{12}:\frac{16}{5}:\frac{12}{5}=\frac{95\cdot5}{12\cdot16}:\frac{12}{5}=\frac{95\cdot5\cdot5}{12\cdot16\cdot12}=\frac{2375}{2304}=1\frac{71}{2304}.$$

4-мисол. Кўрсатилган амаллар бажарилсин.

$$\frac{2\frac{3}{5}\cdot 2\frac{1}{12}}{5\frac{2}{3}:2\frac{4}{5}}$$

Дастлаб суратни, ундан кейин махражни алоҳида ҳисоблаб, улардан чиққан натижаларни бўламиз. Амалларни ушбу тартиб билан бажариш мақсадга мувофиқдир.

Ечиш.

1) $2\frac{3}{5}\cdot 2\frac{1}{12}=\frac{13\cdot 25}{5\cdot 12}=\frac{13\cdot 5}{1\cdot 12}=\frac{65}{12}$;

2) $5\frac{2}{3}:2\frac{4}{5}=\frac{17}{3}:\frac{14}{5}=\frac{17\cdot 5}{3\cdot 14}=\frac{85}{42}$;

3) $\frac{\frac{65}{12}}{\frac{85}{42}}=\frac{65\cdot 42}{85\cdot 12}=\frac{13\cdot 7}{17\cdot 2}=\frac{91}{34}=2\frac{23}{34}$.

Машқлар. Қуйидаги амаллар бажарилсин:

1. $2\frac{12}{25}\cdot 1\frac{4}{11}$. 2. $125\frac{3}{4}\cdot\frac{12}{125}$. 3. $18\cdot 3\frac{2}{9}$. 4. $15:6\frac{3}{4}$. 5. $1:\frac{5}{7}$.

6. $8\frac{15}{28}:3\frac{13}{15}$. 7. $\frac{5\frac{18}{25}}{2\frac{4}{15}}$. 8. $12\frac{5}{8}:12$. 9. $5\frac{13}{18}:11\frac{4}{9}\cdot 1\frac{5}{6}$.

10. $120:6\frac{8}{15}:5$;

11. $\frac{3\frac{4}{9}\cdot 7\frac{2}{5}}{5\frac{3}{7}\cdot 7}$. 12. $\frac{4\frac{1}{12}\cdot 8\frac{6}{7}\cdot 7\frac{2}{3}}{6\frac{1}{4}\cdot 1\frac{3}{5}\cdot 5\frac{3}{4}}$. 13. $\frac{2\frac{3}{13}\cdot 1\frac{5}{11}\cdot\frac{1}{5}}{1\frac{2}{5}\cdot 7\frac{5}{7}\cdot 3\frac{3}{4}}:\frac{5\frac{5}{8}\cdot 1\frac{2}{9}}{3\frac{7}{11}\cdot\frac{1}{10}}$.

ж) Нолни сонга, сонни нолга кўпайтириш ва нолни сонга бўлиш

Ҳар қандай соннинг нолга ёки нолнинг ҳар қандай сонга кўпайтмаси нолга тенг.

Масалан, $\begin{cases} 13\cdot 0=0\cdot 13=0; \\ 2\frac{3}{4}\cdot 0=0\cdot 2\frac{3}{4}=0. \end{cases}$

Умуман, $a\cdot 0=0\cdot a=0$ (a—ҳар қандай чекли сон).

Шунга ўхшаш, *нолнинг ундан фарқли сонга бўлинмаси ҳам нолга тенг.*

Масалан,

$$\begin{cases} 0:5=0, \text{ чунки } 0\times 5=0; \\ 0:3\frac{2}{5}=0, \quad \text{»} \quad 0\times 3\frac{2}{5}=0. \end{cases}$$

Умуман, $0 : a = 0$, чунки $0 \cdot a = 0$, $(a \neq 0)$ ($\neq$ — баравар эмаслик белгиси).

Энди нолга бўлишни қараймиз:

1) нолнинг нолга бўлинмаси ҳар қандай сонга тенг бўла олади.

Масалан, $\frac{0}{0} = \pm 1;\ \pm 2\frac{3}{4};\ \pm 5{,}12;\ 132;\ \ldots$, чунки $0 \times (\pm 1) = 0{,}0 \times \left(\pm 2\frac{3}{4}\right) = 0,\ \ldots$. Шунинг учун $\frac{0}{0}$ ноаниқ ифода дейилади;

2) сонни нолга бўлиб бўлмайди[1].

10-§. ЎЗАРО ТЕСКАРИ СОНЛАР

Таъриф. *Берилган касрнинг сурат махражининг ўринларини алмаштиришдан ҳосил бўлган каср берилган касрга тескари каср сон дейилади.* Масалан, $\frac{7}{9}$ га тескари сон $\frac{9}{7}$. Бу ҳолда $\frac{7}{9}$ билан $\frac{9}{7}$ *ўзаро тескари сонлар* дейилади. Яна бир мисол: 5 га тескари сон $\frac{1}{5}$ бўлади. Демак, берилган сонга *тескари сон,* бирни берилган сонга бўлишдан ҳосил бўлади.

Машқлар. $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{8}$; 9; $\frac{2}{7}$; $1\frac{7}{8}$; 0,13; 12 сонларга тескари сонлар ёзилсин.

11-§. КЎПАЙТИРИШ ВА БЎЛИШНИНГ ХОССАЛАРИ

Бутун сонларни кўпайтириш ва бўлиш амаллари бўйсунган хоссалар, каср сонлар устидаги амаллар учун ҳам тўғридир. Биз бу хоссаларни қуйида таърифлаб ўтамиз ва каср сонлар мисолида уларга ишонч ҳосил қиламиз.

1. *Кўпайтувчиларнинг ўринларини алмаштирганда кўпайтма ўзгармайди.* Масалан, $\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 7} = \frac{5 \cdot 1}{2 \cdot 7} = \frac{5}{14}$.

2. *Кўпайтувчиларнинг ҳар қандай группасини уларнинг кўпайтмаси билан алмаштирсак, кўпайтма ўзгармайди.* Масалан,

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{5}{6} = \frac{4}{7}\left(\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}\right) = \ldots = \frac{1}{7}.$$

---

[1] *Лекин, нолдан фарқли a сонниng нолга бўлинмаси* — $\frac{a}{0}$ ифодани чексизлик белгиси (∞) *билан алмаштириб ёзиш* ҳам мумкин, яъни $\frac{a}{0} = \infty$. Бу ҳақда тўлиқроқ маълумотни М. Я. Вигодскийнинг — „Элементар математикадан справочник" китобининг (1964 йил) 83 ва 84-бетларидан қаранг.

3. *Бир неча каср сон йиғиндисининг бирор сонга кўпайтмаси каср сонлардан ҳар бирининг шу сонга кўпайтмалари йиғиндисига тенг.* Масалан,

$$\left(\frac{4}{7}+\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{5}{6}=\frac{4}{7}\cdot\frac{5}{6}+\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{6}=\frac{10}{21}+\frac{1}{2}=\frac{41}{42}.$$

Чунки

$$\left(\frac{4}{7}+\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{5}{6}=\frac{41}{35}\cdot\frac{5}{6}=\frac{41\cdot 1}{7\cdot 6}=\frac{41}{42}.$$

4. *Бир неча кўпайтувчидан бирини бир неча марта орттириб, қолганларини ўзгаришсиз қолдирсак, кўпайтма шунча марта ортади ва, аксинча, у кўпайтувчилардан бири бир неча марта камайтирилса, кўпайтма ҳам шунча марта камаяди.*

Масалан, $\frac{2}{13}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{13}.$ Энди кўпайтувчилардан биттасини 5 марта орттирамиз: $\frac{2}{13}\cdot\frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 5\right)=\frac{2}{13}\cdot\frac{5}{6}\cdot 3=\frac{5}{13}$ бўлади, яъни $\frac{1}{13}$ каср 5 марта ортди. Энди кўпайтувчилардан биттасини 2 марта камайтирамиз: $\left(\frac{2}{13}:2\right)\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{13}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{26},$ яъни кўпайтма 2 марта камайди.

5. *Касрлар йиғиндисини (айирмасини) бирор сонга бўлиш учун уларнинг ҳар бирини бу сонга бўлиш ва ҳосил қилинган бўлинмалар йиғиндисини (айирмасини) топиш кифоя.*

Масалан,

$$\left(\frac{6}{7}+\frac{4}{5}-\frac{3}{4}\right):\frac{2}{3}=\frac{6}{7}:\frac{2}{3}+\frac{4}{5}:\frac{2}{3}-\frac{3}{4}:\frac{2}{3}=\frac{9}{7}+\frac{6}{5}-\frac{9}{8}=$$
$$=1\frac{101}{280}.$$

Изоҳ. Касрлар йиғиндисини (ёки айирмасини) бирор сонга бўлиш учун дастлаб бу йиғиндини (айирмани) ҳисоблаш (олдин қавс ичидаги мисолни ишлаш) ва ундан чиққан натижани бўлиш кифоя.

6. *Кўпайтмани бирор сонга бўлиш учун унинг кўпайтувчиларидан биттасини бу сонга бўлиш кифоя.*

Масалан,

$$\left(\frac{8}{9}\cdot\frac{4}{5}\right):\frac{4}{7}=\frac{8}{9}\cdot\left(\frac{4}{5}:\frac{4}{7}\right)=\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{5}=\frac{56}{45}=1\frac{11}{45},$$

чунки

$$\left(\frac{8}{9}\cdot\frac{4}{5}\right):\frac{4}{7}=\frac{32}{45}:\frac{4}{7}=\frac{32\cdot 7}{45\cdot 4}=\frac{56}{45}=1\frac{11}{45}.$$

7. *Бўлинувчини неча марта орттирсак, бўлинма шунча марта ортади.*

Масалан,

$$\frac{12}{17} : \frac{6}{7} = \frac{14}{17}.$$

Энди, бўлинувчи $\frac{12}{17}$ ни 17 марта орттирсак: $\left(\frac{12}{17} \cdot 17\right) : \frac{6}{7} = 12 : \frac{6}{7} = 14$ бўлади, яъни бўлинма 17 марта ортди.

8. *Бўлувчини бир неча марта орттирсак, бўлинма шунча марта камаяди.*

Масалан, $\frac{12}{17} : \left(\frac{6}{7} \times 2\right) = \frac{12}{17} : \frac{12}{7} = \frac{7}{17}$ бўлади, яъни булинма 2 марта камайди.

12- §. ЎНЛИ КАСРЛАР

Таъриф. *Махражи 10; 100; 1000 ва ҳоказо бўлган касрлар, яъни махражи бир ва ундан кейин (битта ёки бир неча) ноли бўлган касрлар ўнли касрлар дейилади.*

Масалан, $\frac{7}{10}$; $\frac{9}{100}$; $1\frac{31}{100}$; $\frac{11}{1000}$; ... ва ҳоказолар ўнли касрлар бўлиб, улар махражсиз бундай ёзилади: 0,7; 0,09; 1,31; 0,011, ... , яъни

$$\frac{7}{10} = 0{,}7; \quad \frac{9}{100} = 0{,}09; \quad 1\frac{31}{100} = 1{,}31; \quad \frac{11}{1000} = 0{,}011, \ldots.$$

ва бундай ўқилади: ноль бутун ўндан етти; ноль бутун юздан тўққиз; бир бутун юздан ўттиз бир; ноль бутун мингдан ўн бир.

а) Ўнли касрларнинг асосий хоссалари

1. *Ўнли касрнинг ўнг томонига охирги рақамдан кейин ноллар ёзилса ёки ноллари бўлса, уларни ташлаб юбориш билан ўнли касрнинг қиймати ўзгармайди.* Буни ушбу мисолдан кўриш осон:

$$1{,}31 = 1\frac{31}{100} = 1\frac{310}{1000} = 1{,}310; \quad 1{,}3100 = 1\frac{3100}{10000} = 1\frac{31}{100} = 1{,}31.$$

Шунга ўхшаш: 3,7 = 3,70; 2,5 = 2,50 = 2,500 = 2,5000 каби ёзиш мумкин ва ҳоказо.

2. *Ўнли касрдаги вергул ўнг томонга бир, икки, уч ва ҳоказо хона сурилса, каср 10, 100, 1000 ва ҳоказо марта ортади; чап томонга сурганда эса каср 10, 100, 1000 ва ҳокаво марта камаяди.*

Масалан, 2,3517 сони 10 марта ортганда 23,517 ва 10 марта камайганда 0,23517 бўлади.

Машқлар. 72,013; 0,923; 138,702 сонларнинг ҳар бирини 10; 100; 1000 сонларга кўпайтиринг ва бўлинг.

б) Ўнли касрларни яхлитлаш

Қоида. *Ўнли касрни яхлитлаганда, агар ташланадиган рақамларининг (чапдан) биринчиси 5 дан кичик бўлса, охирги қолдириладиган рақам ўзгартирилмайди* (масалан, 3,72189 ни 0,01 гача аниқликда яхлитлангани 3,72 бўлади); *агар 5 дан катта бўлса, охирги қолдириладиган рақамга бир қўшиб ёзилади.*

Масалан: 3,72189 ни 0,001 гача аниқликда яхлитлангани 3,722 бўлади.

Машқлар. 0,15761; 2,023745; 11,189237 ларни 0,1; 0,01 ва 0,001 гача аниқликда яхлитланг. Соннинг яхлитлангани унинг тақрибий қиймати дейилади. Масалан, 3,72 ва 3,722 каби.

в) Ўнли касрларни қўшиш ва айириш

Қоида. *Ўнли касрларни қўшиш ёки айириш учун бутун қисмини бутун қисми тагига, каср қисмини каср қисми тагига* (хоналарга риоя қилиб), *баъзи касрларнинг ўнг томонига, дилда бўлса ҳам, ноллар ёзиб, кейин бутун сонларни қўшиш каби қўшиб ёки айириб, натижага вергулларнинг тўғрисидан вергул қўйиш керак.* (Чунки, ўнли каср, оддий касрнинг хусусий ҳолидир.) Бу қоидани ушбу мисоллар билан ойдинлаштирамиз:

1) $$\begin{array}{r} 4{,}2835 \\ +\;1{,}036 \\ \hline 5{,}3195 \end{array}$$

2) $$\begin{array}{r} 12{,}706 \\ +\;3{,}0925 \\ \hline 15{,}7985 \end{array}$$

3) $$\begin{array}{r} 5{,}3195 \\ -\;4{,}2835 \\ \hline 1{,}0360 \end{array}$$

4) $$\begin{array}{r} 3{,}807 \\ -\;1{,}9162 \\ \hline 1{,}8908 \end{array}$$

5) $$\begin{array}{r} 6{,}000 \\ -\;2{,}763 \\ \hline 3{,}237 \end{array}$$

6) $28 - \{19{,}8004 - [3{,}2005 - (2{,}906 - 0{,}5307)]\}$.

Ечиш (ҳисоблаш тартиби):

$$\begin{array}{r} 2{,}906 \\ -\;0{,}5307 \\ \hline 2{,}3753; \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3{,}2005 \\ -\;2{,}3753 \\ \hline 0{,}8252; \end{array} \qquad \begin{array}{r} 19{,}8004 \\ -\;0{,}8252 \\ \hline 18{,}9752; \end{array} \qquad \begin{array}{r} 28{,}0000 \\ -\;18{,}9752 \\ \hline 9{,}0248. \end{array}$$

(Жавоб. 9,0248.)

г) Ўнли касрларни кўпайтириш ва бўлиш

Қоида. *Ўнли касрларни бир-бирига кўпайтиришда уларнинг вергулларига эътибор қилмай, бутун сонларни кўпайтиргандек кўпайтириш керак, сўнгра кўпаювчи билан кў-*

пайтувчида қанча каср хонаси бўлса, кўпайтмада ўнгдан чапга қараб шунча каср хонани вергул билан ажратиш керак.

Масалан,

$$\begin{array}{r} 2{,}175 \\ \times\ 3{,}212 \\ \hline 4350 \\ +\ 2175 \\ 4350 \\ 6525 \\ \hline 6{,}986100 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 42{,}51 \\ \times\ 2{,}06 \\ \hline 25506 \\ +\ 8502 \\ \hline 87{,}5706 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2{,}3705 \\ \times\ 0{,}0702 \\ \hline 47410 \\ +\ 165935 \\ \hline 0{,}16640910. \end{array}$$

Юқорида кўриб ўтилган ўнли касрларнинг хоссаларига асосланиб қуйидаги қоидани ёзиш мумкин.

Қоида. *Ўнли касрни 10; 100; 1000 ва ҳоказо сонларга кўпайтириш учун кўпайтирувчи соннинг қанча ноли бўлса, кўпаювчидаги вергулни шунча хона ўнгга суриш керак; бўлишда эса чапга қараб суриш керак.*

Масалан, $1{,}279 \times 10 = 12{,}79$; $\quad 1{,}279 : 10 = 0{,}1279$;
$3{,}96 : 100 = 0{,}0396$; $\quad 3{,}96 \times 100 = 396$.

Машқлар. *Амалларни бажаринг:*
$35{,}012 \times 100 = ?$ $\quad 0{,}76 : 10 = ?$

$8{,}36 : 10 = ?$ $\quad 126{,}55 : 100 = ?$ $\quad 0{,}00715 \times 100 = ?$
$0{,}00715 \times 1000 = ?$ $\quad 196 : 10000 = ?$

Ўнли касрни бутун сонга бўлиш

Қоида. *Ўнли касрни бутун сонга бўлишда бўлинувчи бўлувчидан кичик бўлса, бўлинмага ноль бутун ёзиб уни вергул билан ажратамиз, сўнгра бўлиш амалини бутун сонларни бўлишдаги каби бажарамиз,* бўлишдан чиққан қолдиқларни эса майда ўнли улушларга айлантира бориб, бўлишни давом эттирилади.

Мисоллар. 1)

$$\begin{array}{r|l} 5{,}154 & 6 \\ \cline{2-2} -\ 48 & 0{,}859 \\ \cline{1-1} 35 & \\ -\ 30 & \\ \cline{1-1} 54 & \\ -\ 54 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Бу мисолда бўлиш аниқ бажарилди. Бундаги 0,859 аниқ бўлинма дейилади.

2)
$$
\begin{array}{r|l}
-22{,}347 & 21 \\
\underline{21} & \overline{1{,}0641} \\
-134 & \\
\underline{126} & \\
-87 & \\
\underline{84} & \\
-30 & \\
\underline{21} & \\
9 &
\end{array}
$$

Бу мисолда бўлиш амалини яна давом эттириш мумкин. 1,0641 — **тақрибий бўлинма**, 9 — эса **қолдиқ** дейилади.

Ўнли касрни ўнли касрга бўлиш

Қоида. *Ўнли касрни ўнли касрга бўлиш учун бўлувчидаги вергулни ташлаб юбориш ва бунинг натижасида бўлувчи неча марта ортган бўлса, бўлинувчини ҳам шунча марта орттириб, сўнгра бўлишни ўнли касрни бутун сонга бўлиш қоидасига асосан бажариш керак.*

1- мисол. 2,232 ни 1,2 га бўламиз:

$$
\begin{array}{r|l}
-22{,}32 & 12 \\
\underline{12} & \overline{1{,}86} \\
-103 & \\
\underline{96} & \\
-72 & \\
\underline{72} & \\
0 &
\end{array}
$$

2- мисол. 10 ни 3,25 га бўламиз:

$$
\begin{array}{r|l}
-10{,}00 & 3{,}25 \\
\underline{975} & \overline{3{,}076} \\
-2500 & \\
\underline{2275} & \\
-2250 & \\
\underline{1950} & \\
300 &
\end{array}
$$

Машқлар. Қуйидаги амалларни бажаринг:

1) $5 - 4{,}9935 - (0{,}09 - 0{,}0835)$.

(Жавоб. 0.)

2) $1 - 0{,}973 + (2{,}5 - 1{,}114) - (1{,}137 - 0{,}883)$.

(Жавоб. 1,159.)

3) $(3{,}501 + 11{,}011) - (2{,}72 - 1{,}89)$;

4) $(1 - 0{,}6321) + (11{,}1 - 5{,}71) - (0{,}813 + 1{,}03)$;

5) $0{,}025 + (7{,}5 - 0{,}44) - \{8{,}85 - [4{,}037 - (0{,}89 - 0{,}7509)]\}$;

6) $312 - [18{,}071 - (9{,}106 + 11{,}88)]$.

7) Колхознинг учта пахта участкаси бор: биринчи участка 276,2 *га*, иккинчи участка биринчисидан 106,35 *га* катта, учинчиси эса иккинчидан 21,49 *га* кичик. Колхознинг ҳамма пахта майдонини топинг.

(Жавоб. 1019, 81 *га*.)

8) $10{,}07 - [0{,}15 + 1{,}763 - (3{,}63 - 2{,}164)]$;

9) $3 : 5{,}126$; $8{,}276 \times 0{,}102$.

(Жавоб. 9,623.)

10) $0{,}0289 \times 3{,}21$; 11) $1{,}005 \times 2{,}3781$; 12) $3{,}76 : 12$; 13) $12{,}5 : 7{,}05$; 14) $0{,}01892 : 0{,}11$; 15) $15 : 2{,}55$; 16) $1{,}4 : 7{,}15 \cdot 1{,}2$;

17) $1{,}005 : 3781$; 18) $\frac{4{,}6 \times 0{,}25 \times 12{,}2}{1{,}25 \times 0{,}06}$.

(Жавоб. $187\frac{1}{15}$.)

13- §. ОДДИЙ КАСРНИ ЎНЛИ КАСРГА ВА ЎНЛИ КАСРНИ ОДДИЙ КАСРГА АЙЛАНТИРИШ

Масалани ушбу мисолда тушунтирамиз. $\frac{3}{4}$ оддий касрни ўнли касрга айлантиринг, деган масалани кўрайлик. Масалани ечиш учун махражни 100 га тенглаштириш қулайдир:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{75}{100} = 0{,}75.$$

Лекин, каср сурати 3 ни каср махражи 4 га қуйидагидек йўл билан бўлганда ҳам биз 0,75 ни ҳосил қиламиз:

$$\begin{array}{r|l} 3 & 4 \\ \cline{2-2} 30 & 0{,}75 \\ -28 & \\ \hline 20 & \\ -20 & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \frac{3}{4} = 0{,}75 - \text{бу аниқ ўнли каср.}$$

Демак, *оддий касрни ўнли касрга айлантириш учун (умумий ҳолда) оддий касрнинг суратини махражига бўлиш кифоя*.

Энди $\frac{4}{7}$ ни ўнли каср шаклида ёзиб кўрайлик.

$$\begin{array}{r|l} 4 & 7 \\ \cline{2-2} 40 & 0{,}5714 \\ -35 & \\ \cline{1-1} 50 & \\ -49 & \\ \cline{1-1} 10 & \\ -7 & \\ \cline{1-1} 30 & \\ -28 & \\ \cline{1-1} 2 & \text{— қолдиқ} \end{array}$$

$\frac{4}{7} \approx 0{,}5714$ — тақрибий ўнли каср дейилади. ($\approx$ тақрибий тенглик белгиси.) Демак, касрнинг сурати махражига аниқ бўлинмаса, бундай ҳолларда бўлиш тўхтатилади ва бўлинманинг олдинги бир неча рақами билан чекланилади.

Яна мисол. $\frac{27}{14}$ оддий каср ўнли каср шаклида ёзилсин:

$$\begin{array}{r|l} 27 & 14 \\ \cline{2-2} -14 & 1{,}928 \\ \cline{1-1} 130 & \\ -126 & \\ \cline{1-1} 40 & \\ -28 & \\ \cline{1-1} 120 & \\ -112 & \\ \cline{1-1} 8 & \text{— қолдиқ} \end{array}$$

Яъни $\frac{27}{14} \approx 1{,}928$ бўлади.

Энди ўнли касрни оддий касрга айлантирамиз; бунинг учун юқоридаги мисолни бундай ёзамиз: $0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$, натижада 0,75 оддий касрга айланди. Шунга ўхшаш:

$$2{,}2 = 2\frac{2}{10} = 2\frac{1}{5};\ 12{,}26 = 12\frac{26}{100} = 12\frac{13}{50};$$
$$1{,}004 = 1\frac{4}{1000} = 1\frac{1}{250};\ 0{,}012 = \frac{12}{1000} = \frac{3}{250}.$$

Агар оддий каср аниқ ўнли касрга айланмаса, бўлишда чексиз ўнли каср чиқади.

3,72507876192... — чексиз ўнли касрдир.

а) Даврий касрлар

Таъриф. *Чексиз ўнли касрнинг каср қисмидаги бир ёки бир неча рақамлари бир хил тартибда кетма-кет такрорланиб кетаверса, бундай каср даврий ўнли каср дейилади.*

Масалан, 5,8333 ... ва 11,252525 ... ларнинг ҳар бири даврий ўнли касрдир. 5,83333 ... кўринишдаги каср аралаш даврий каср, 11,252525 ... кўринишдаги каср эса, **соф даврий каср** дейилади.

5,8333 ... ни қисқача 5,8 (3) кўринишда, 11,252525... ни эса 11, (25) кўринишда ёзилади.

Ўнли даврий касрларни, қуйидаги қоидага асосан, оддий касрлар билан ифодалаб ёзиш мумкин.

Қоида. *Ҳар қандай ўнли даврий касрни оддий каср ҳолида ёзиш учун, ундаги вергулдан кейинги иккинчи давргача бўлган сондан биринчи давргача бўлган сон айирмасини суратга, махражига эса даврда қанча рақам бўлса ўшанча тўққиз (9) ёзиб, унинг ўнг ёнига вергул билан биринчи давр орасида қанча рақам бўлса, ўшанча ноль ёзиш керак* (касрнинг бутун қисми эса, бутун қилиб ёзилаверади).

Масалан, $5{,}8333... = 5\frac{83-8}{90} = 5\frac{75}{90} = 5\frac{5}{6}$; $7{,}5123123... = 7\frac{5123-5}{9990} = 7\frac{5118}{9990} = 7\frac{2559}{4995}$; $3{,}888... = 3\frac{8-0}{9} = 3\frac{8}{9}$ ва ҳоказо.

Машқлар. Қуйидаги ўнли даврий касрларни оддий касрлар билан ифодаланг: 1) 0,555..., 2) 4,171717...; 3) 2,41212...,; 4) 5,13666...; 5) 1,2312312...; 6) 6,51373737...; 7) 4,78333...; 8) 0,623555... .

14- §. ОДДИЙ ВА ЎНЛИ КАСРЛАР БИЛАН АРАЛАШ МИСОЛЛАР

1- мисол.

$$\left[47\frac{28}{35} - \left(1\frac{5}{12} + 8\frac{3}{28}\right)\cdot 2{,}5\right] : 3\frac{4}{15}.$$

Ҳисоблаш.

$$1)\ 1\frac{5}{12} + 8\frac{3}{28} = 9\frac{35+9}{84} = 9\frac{44}{84} = 9\frac{11}{21};$$

$$2)\ 9\frac{11}{21}\cdot 2{,}5 = \frac{200}{21}\cdot\frac{5}{2} = \frac{500}{21} = 23\frac{17}{21};$$

$$3)\ 47\frac{28}{35} - 23\frac{17}{21} = 24\frac{84-85}{105} = 23\frac{189-85}{105} = 23\frac{104}{105};$$

$$4)\ 23\frac{104}{105} : 3\frac{4}{15} = \frac{2519}{105} : \frac{49}{15} = \frac{2519}{105}\cdot\frac{15}{49} = \frac{2519\cdot 1}{7\cdot 49} = \frac{2519}{343} = 7\frac{118}{343}.$$

(Жавоб. $7\frac{118}{343}$.)

2- мисол

$$\frac{\left(9\frac{37}{42} - 7\frac{43}{96}\right)\cdot\frac{24}{35} + \left(15{,}9 - 13\frac{13}{20}\right) : 1\frac{1}{8}}{\left(0{,}75\cdot\frac{2}{5} + 24{,}15 : 2{,}3 - 10{,}4\right)\cdot 0{,}3125} = ?$$

Ҳисоблаш:

$$1)\ 9\frac{37}{42}-7\frac{43}{96}=2\frac{592-301}{672}=2\frac{291}{672}=\frac{1635}{672};$$

$$2)\ \frac{1635}{672}\cdot\frac{24}{35}=\frac{327}{28}\cdot\frac{1}{7}=\frac{327}{196}=1\frac{131}{196};$$

$$3)\ 15{,}9-13\frac{13}{20}=2\frac{18-13}{2}=2\frac{5}{20}=2\frac{1}{4};$$

4) $2\frac{1}{4}:1\frac{1}{8}=\frac{9}{4}:\frac{9}{8}=\frac{9}{4}\cdot\frac{8}{9}=2$; 5) $1\frac{131}{196}+2=3\frac{131}{196}$ (сурати);

6) $0{,}75\cdot\frac{2}{5}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{3}{10}=0{,}3$; 7) $24{,}15:2{,}3=10{,}5$;

8) $0{,}3+10{,}5-10{,}4=0{,}4$; 9) $0{,}4\cdot0{,}3125=0{,}125=\frac{1}{8}$ (махражи);

$$10)\ 3\frac{131}{196}:\frac{1}{8}=\frac{719}{196}:\frac{1}{8}=\frac{719}{196}\cdot8=\frac{719\cdot2}{49}=\frac{1438}{49}=29\frac{17}{49}.$$

(Жавоб. $29\frac{17}{49}$.)

3- мисол.

$$\frac{\left(3\frac{11}{18}+4\frac{13}{36}-5\frac{61}{63}\right):\frac{15}{28}+(23{,}517:3{,}9):0{,}3}{(14{,}05-1{,}25):0{,}4+13{,}8\cdot13}.$$

Ҳисоблаш:

$$1)\ 3\frac{11}{18}+4\frac{13}{36}-5\frac{61}{63}=2\frac{99+91-244}{252}=2\frac{190-244}{252}=1\frac{442-244}{252}=$$

$$=1\frac{198}{252}=1\frac{11}{14};$$

$$2)\ \frac{23{,}517}{3{,}9}=6{,}03;\quad 3)\ \frac{6{,}03}{0{,}3}=20{,}1;$$

$$4)\ 1\frac{11}{14}:\frac{15}{28}=\frac{25}{14}\cdot\frac{28}{15}=\frac{10}{3}=3\frac{1}{3};$$

$$5)\ 3\frac{1}{3}+20{,}1=3\frac{1}{3}+20\frac{1}{10}=23\frac{13}{30};$$

$$6)\ \begin{array}{r} -\ 14{,}05 \\ 1{,}25 \\ \hline 12{,}80 \end{array}\qquad 7)\ \frac{12{,}8}{0{,}4}=32;\qquad 8)\ \begin{array}{r} \times\ 13{,}8 \\ 13 \\ \hline 414 \\ +\ 138 \\ \hline 179{,}4; \end{array}$$

9) $32+179{,}4=211{,}4$; 10) $23\frac{13}{30}:211{,}4=\frac{703}{30}\cdot\frac{5}{1057}=\frac{703}{6342}$.

(Жавоб. $\frac{703}{6342}$.)

Машқлар. Қуйидаги мисоллар ҳисоблансин:

$$1)\ \frac{5\frac{13}{14}+29\frac{19}{21}-17\frac{39}{56}+0{,}5\cdot 0{,}29-13{,}1625:4{,}05}{\frac{4}{5}\cdot 6\frac{2}{5}-\left(0{,}2\cdot 0{,}75+8\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{5}\right)}.$$

(Жавоб. 10,1.)

$$2)\ \frac{\left[\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{225}\right)\cdot 9+0{,}16\right]:\left(\frac{1}{3}-0{,}3\right)}{(5-1{,}1409:0{,}3):\left(4{,}2:12-0{,}21\cdot\frac{2}{5}\right)}:\frac{1}{57}.$$

(Жавоб. 150.)

$$3)\ \frac{\left(4\frac{11}{48}+7\frac{5}{42}-8\frac{25}{28}\right):1\frac{19}{56}+1{,}2:\frac{2}{5}-14{,}596:7{,}12}{(12{,}48-9{,}75):\frac{3}{4}+4{,}2\cdot 2\frac{2}{5}+266{,}9\cdot 1\frac{1}{5}}.$$

$\left(\text{Жавоб. } \frac{1}{120}.\right)$

$$4)\ \frac{\left[\left(34\frac{42}{337}:500\right)\cdot 14\frac{15}{23}\right]:\left[\left(\frac{5}{9}:\frac{7}{8}\right):5\frac{5}{7}\right]}{\left[\left(\frac{1}{3125}-\frac{0{,}0008}{10}\right):\frac{1}{1250}\right]:\left[\left(\frac{1}{2000}-0{,}0001875\right):\frac{1}{3200}\right]}.$$

(Жавоб. 30.)

$$5)\ \left(42\frac{1}{4}-39{,}0625\right):\left[12\frac{3}{4}-\frac{1{,}8\cdot\frac{1}{5}}{(0{,}63-0{,}27)\cdot\frac{2}{9}}\right]+\left[2\frac{1}{2}+\frac{\left(0{,}2+\frac{1}{3}\right):\frac{2}{3}}{0{,}4}\right]:\frac{3}{5}.$$

$\left(\text{Жавоб. } 7\frac{39}{44}.\right)$

$$6)\ \left(38\frac{1}{2}:35{,}2-60{,}3:73\frac{1}{11}\right)\cdot\frac{68\frac{4}{5}:0{,}86-1338:44{,}6}{\left(22\frac{3}{7}+43\frac{5}{7}:17\right)\cdot 0{,}1}$$

$\left(\text{Жавоб. } 5\frac{3}{8}.\right)$

15- §. ПРОЦЕНТЛАР

Соннинг юздан бир бўлагига ўша соннинг **процен**ти дейилади. Процент % ишора билан ёзилади.

Масалан, 6 процент — 6%; 11 процент — 11% ва ҳоказо ёзилади. 1% га 0,01 тўғри келади; 6% га 0,06 тўғри келади ва ҳоказо.

а) Сонниng бир неча процентини топиш

Қоида. *Сонниng бир неча процентини топиш учун, шу сонни 100 га бўлиб, процент сонига кўпайтириш керак.*

Масалан, 325 сўмнинг 8% и топилсин.

Ечиш. $\frac{325}{100} \cdot 8 = 26$ *сўм.*

Умуман, A сонниng $p\%$ и B сон бўлса, B ушбу формула билан топилади:

$$B = \frac{A}{100} \cdot p.$$

б) Бир исмли иккита сондан биттаси иккинчисининг неча % ини ташкил қилишини топиш

Қоида. *Бир исмли икки сондан биринчиси иккинчисининг неча % ини ташкил қилишини топиш учун биринчи сонни 100 га кўпайтириб, чиққан натижани иккинчи сонга бўлиш кифоя.*

Масалан, 26 килограмм 475 килограммнинг неча % ини ташкил қилади?

$$\text{Ечиш. } \frac{26 \cdot 100}{475} = \frac{104}{19} \approx 5{,}47\%.$$

Умуман, B сон A сонниng p % ини ташкил қилсин, у ҳолда p % ушбу формула билан ҳисобланади:

$$p\ \% = \frac{B \cdot 100}{A}.$$

в) Берилган процентига кўра сонни топиш

Қоида. *Берилган процентига кўра сонни топиш учун берилган сонни 100 га кўпайтириб процент сонига бўлиш керак.*

Масалан, 8 % и 26 бўлган сон топилсин.

Ечиш. $\frac{26 \cdot 100}{8} = 325.$

Умуман, A сонниng p % и B сон бўлсин, у ҳолда A ушбу формула билан ҳисобланади:

$$A = \frac{B \cdot 100}{p}.$$

1-масала. Машинист паровознинг бир суткада ўтадиган йўлини 500 *км* га етказиш мажбуриятини олди. Бир куни у суткалик мажбуриятини 160 % қилиб бажарди. Шу куни паровоз неча километр йўл юрган?

Ечиш. $\frac{500 \cdot 160}{100} = 5 \times 160 = 800$ *км.*

2- масала. Бир колхоз бригадаси 200 *га* ернинг 85 % ига пахта, 5 % ига жўхори, 3 % ига сабзавот ва 7 % ига беда экқан бўлса, у неча гектар ерга пахта, жўхори, сабзавот ва беда экқан?

Ечиш. $\frac{200}{100}\cdot 85 = 170$ *га* — пахта;

$\frac{200}{100}\cdot 5 = 10$ *га* — жўхори;

$\frac{200}{100}\cdot 3 = 6$ *га* — сабзавот; $\frac{200}{100}\cdot 7 = 14$ *га* — беда.

3- масала. Бригада декабрь ойигача 260 тонна пахта топшириб, планни 86 % бажарган бўлса, унинг плани неча тонна?

Ечиш. $\frac{260\cdot 100}{86} = \frac{1300}{43} \approx 302{,}325\,т.$

4- масала. СССР нинг Европа қисмидаги энг муҳим дарёларнинг узунликлари: Волга — 3688 *км*, Днепр — 2285 *км*, Дон — 1967 *км*. Волга дарёсининг узунлигини 100 % деб олиб, Днепр ва Дон дарёларининг узунлиги унга нисбатан % ҳисобида ифода қилинсин.

(Жавоб. Днепр — 61,96 %;
Дон — 53,34 %.)

Машқлар. Қуйидагиларни бажаринг:

1) 638 сўмнинг 12 % и неча сўм бўлади?

2) 1285 *кг* узумнинг 11,5 % и неча килограмм бўлади?

3) 276,5 *т* пахтанинг 6,25 % и неча тонна бўлади?

4) 76,25 *кг* пахта, 528,5 *кг* пахтанинг неча % ини ташкил қилади?

5) 135,4 сўм, 1286,5 сўмнинг неча % ини ташкил қилади?

6) 36 *т* ёғ, 186,5 *т* ёғнинг неча % ини ташкил қилади?

7) Масала. Ер шарининг 29 % ини қуруқлик, 71 % ини эса сув эгаллайди. Шимолий ярим шарда қуруқлик 39 %, сув 61 % юзни, жанубий ярим шарда қуруқлик 19 %, сув 81 % юзни эгаллайди. Агар ер шари тахминан 510 млн. *кв. км* майдонни эгалласа, бутун ер шарини ва ҳар қайси ярим шарни айрим-айрим қанча қуруқлик ва сув банд қилишини топинг.

8) Масала. Мактабда 960 ўқувчи бор. Ўқувчиларнинг $43\frac{3}{4}$ % и I — IV синфларда ўқийди, V — VII синф ўқувчиларининг сони VIII — X синф ўқувчиларининг сонидан 140 та ортиқ. I — IV, V — VII, VIII — X синфларнинг ҳар бирида нечтадан ўқувчи бор?

(Жавоб: 420; 340; 200.)

16- §. НОМАЪЛУМ СОННИ УНИНГ БЕРИЛГАН УЛУШИ ВА УНГА ТЕГИШЛИ МИҚДОРИГА КЎРА ТОПИШ

Қоида. *Номаълум сонни унинг берилган улуши ва унга тегишли миқдорига кўра топиш учун берилган улушга тегишли сонни шу улушининг ўзига бўлиш керак.*

Масалан, шундай сон топилсинки, унинг $\frac{4}{5}$ бўлаги $3\frac{5}{9}$ га тенг бўлсин.

Ечиш. Номаълум соннинг $\frac{4}{5}$ бўлаги $3\frac{5}{9}=\frac{32}{9}$ га тенг; бу ҳолда номаълум соннинг $\frac{1}{5}$ бўлаги $\frac{32}{9\cdot 4}=\frac{8}{9}$ га тенг; номаълум соннинг $\frac{5}{5}$ булаги, $\frac{8}{9}\cdot 5=\frac{40}{9}$ бўлади яъни, $\frac{32}{9}:\frac{4}{5}=\frac{40}{9}$.

Машқлар. 1) Поезд текис ҳаракат қилиб, 36 *км* масофани $\frac{6}{7}$ соатда босиб ўтган бўлса, поезднинг тезлигини топинг.

(Жавоб. 42 *км/соат*.)

2) $2\frac{2}{5}$ метр материал 25 сўм турса, унинг 1 метри неча сўм туради?

(Жавоб. 10,42 сўм.)

3) Шундай сон топингки, унинг $\frac{4}{7}$ бўлаги $12\frac{7}{8}$ га тенг бўлсин.

$\left(\text{Жавоб. } 7\frac{5}{14}.\right)$

17- §. НИСБАТ

Таъриф. *Бир хил исмли ёки исмсиз икки соннинг бири иккинчисидан неча марта катта ёки кичиклигини кўрсатувчи учинчи сон шу икки соннинг нисбати дейилади.*

Нисбат (:) ёки чизиқ (—) бўлув белгиси билан ёзилади.

Масалан, 1) 5 *м* кесмани 7 *м* кесмага нисбати $\frac{5}{7}$ ёки 5 : 7 кўринишда ёзилади.

2) 12 *кг* қанд 34 *кг* қанднинг қанча қисмини ташкил этади?

Ечиш. $12:34=\frac{12}{34}=\frac{6}{17}$ қисмини.

3) 25 сони 75 сонидан неча марта катта?

Ечиш. $25:75=1:3=\frac{1}{3}$ марта.

Икки соннинг нисбати каср билан ифода қилингани учун нисбатнинг хоссалари ҳам каср хоссалари сингари бўлади. Нисбатнинг ҳадлари каср сон бўлиши ҳам мумкин. Масалан,

$$\frac{3\frac{1}{2}}{5};\ 1\frac{5}{6}:3\frac{2}{3};\ \frac{7}{1\frac{2}{3}}\ \text{ва ҳоказо.}$$

Аммо каср ҳадли нисбатни, унга тенг бутун ҳадли нисбатга келтириш мумкин. Масалан,

$$3\frac{1}{2}:5=\frac{7}{2}:5=\left(\frac{7}{2}\cdot 2\right):(5\cdot 2)=7:10;$$

$$1\frac{5}{6}:2\frac{2}{3}=\frac{11}{6}:\frac{8}{3}=11:16;$$

$$7:1\frac{2}{3}=7:\frac{5}{3}=21:5\ \text{ва ҳоказо.}$$

Умуман, a соннинг b сонга нисбати $a:b$ ёки $\frac{a}{b}$ шаклда ёзилади, бунда a нисбатнинг олдинги ҳади, b эса унинг кейинги ҳади дейилади.

а) Тескари нисбат

Масалан, 5 *м* кесманинг 7 *м* кесмага бўлган нисбати $\frac{5}{7}$ ни тўғри нисбат десак, у ҳолда 7 *м* кесманинг 5 *м* кесмага нисбати $\frac{7}{5}$ тескари нисбат бўлади. Умуман, $\frac{a}{b}$ тўғри нисбат бўлганда, $\frac{b}{a}$ эса тескари нисбатдир.

Бирор нисбатнинг унга тескари нисбат билан кўпайтмаси бирга тенг, яъни $\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{5}=1$, умуман, $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$.

б) Абсолют хато ва нисбий хато

1-таъриф. *Ўлчанаётган буюмнинг ҳақиқий қиймати билан унинг тақрибий қиймати орасидаги айирма абсолют хато*[1] *дейилади.* Масалан, бирор буюмнинг ҳақиқий ўлчови A ва тақрибий ўлчови a бўлсин. Қуйидаги икки ҳол бўлиши мумкин.

---

[1] Ўлчанувчи буюмнинг ҳақиқий қиймати жуда кам ҳоллардагина маълум бўлади, шунинг учун абсолют хатонинг ҳақиқий қийматини деярли ҳеч вақт ҳисоблаб бўлмайди. Лекин ҳар хил ўлчашларни бажаришда биз унинг чегарасини тасаввур қила оламиз ва хато бирор муайян сондан ошмаслигини доим айта оламиз. Масалан, дорихона тарозиларида тортишда 0,01 *г* дан ошмайдиган абсолют хато бўлиши мумкин.

1- ҳол. Ўлчаш натижаси буюмнинг ҳақиқий ўлчовидан кичик бўлиши мумкин, яъни $a < A$. Бу ҳолда $A - a = \alpha$ — *абсолют хато* бўлади. Иккинчи ҳолни кўришдан олдин ушбу таърифни берамиз,

2- таъриф. *Абсолют хатонинг тақрибий сонга нисбати нисбий хато дейилади. У* ҳолда $\frac{\alpha}{a}$ $\left(\text{ёки } \frac{A-a}{a}\right)$ нисбий хато бўлади. Одатда нисбий хато процент билан ифодалаб ёзилади, бунинг учун нисбий хатони „100“ га кўпайтириш керак.

$\frac{\alpha \cdot 100}{a}$ $\left(\text{ёки } \frac{(A-a)\cdot 100}{a}\right)$ ни β деб белгилаймиз, у ҳолда нисбий хато $\beta = \frac{\alpha \cdot 100}{a}$ % $\left(\text{ёки } \beta = \frac{(A-a)\cdot 100}{a} \%\right)$ формула билан ҳисобланади.

Мисол. Доира диаметри „D“ нинг ҳақиқий ўлчови 8 *м* бўлиб, уни бир неча марта ўлчаш натижасида „D“ учун 7,8 *м* тақрибий сон ҳосил қилинган бўлсин. У ҳолда $A = 8$ *м* ва $a = 7{,}8$ *м* бўлиб, абсолют хато $\alpha = A - a = 8 - 7{,}8 = 0{,}2$ *м* га тенг бўлади. Нисбий хато эса, $\beta = \frac{\alpha \cdot 100}{a} \% = \frac{0{,}2 \cdot 100}{7{,}8} = \frac{1 \cdot 100}{39} = 2{,}56\%$ бўлади.

2- ҳол. $a > A$ бўлсин, яъни ўлчаш натижаси буюмнинг *ҳақиқий ўлчовидан катта бўлган ҳолда, абсолют хатони топиш* учун шу сонларни каттасидан кичигини айириш керак. Бу айирма *ортиғи билан олинган абсолют хато* дейилади. У ҳолда нисбий хато (процент ифодаси) ортиғи билан олинган абсолют хатони тақрибий сонга бўлиб, бўлинмани юзга кўпайтирилганига тенг ва у *ортиғи билан олинган нисбий хато* деб айтилади.

Мисол. Бирор буюмнинг ҳақиқий ўлчови 25 *т* ва ўлчаш натижасида унинг тақрибий қиймати 25,6 *т* бўлсин. Бу ҳолда ортиғи билан қанча абсолют хато ва қанча нисбий хатога йўл қўйилган бўлади?

Ечиш. 25,6 *т* — 25 *т* = 0,6 *т* ортиғи билан абсолют хато қилинган; $\frac{0{,}6 \cdot 100}{25{,}6} = \frac{75}{32} = 2{,}34$ % ортиғи билан нисбий хато қилинган.

Машқлар. Қуйидаги масалалар ечилсин:

1) Ҳақиқий ўлчови 78,6 *т* бўлган буюмнинг ўлчаш натижасида ҳосил қилинган тақрибий қиймати 79 *т* бўлса, ортиғи билан қанча абсолют хато ва қанча нисбий хато қилинган?

(Жавоб. 0,4; 0,51 %.)

2) Узунлиги 32 *м* бўлган кўприкни ўлчаганда 31,8 *м* чиққан бўлса, неча процент нисбий хатога йўл қўйилган?

(Жавоб. 0,63 %.)

3) Уй полининг тақрибий юзи 24,25 *м*² ва уни ўлчашда 2,2 % нисбий хато қилинган. Шу полнинг ҳақиқий юзи топилсин.

(Ж а в о б. 24,77 *м*².)

4) Оғирлиги 125 *кг* қандни тортиб сотганда 1,25 % нисбий хато қилинган. Шу қандни тортиб сотгандаги оғирлиги топилсин.

(Ж а в о б. 124,7 *кг*.)

18- §. ПРОПОРЦИЯЛАР

Таъриф. *Икки нисбатнинг тенглиги пропорция деб аталади.*

Масалан, $\frac{3}{4}=\frac{12}{16}$; $5:7=25:35$ ва ҳоказо. Умуман: $a:b=c:d$ ларнинг ҳар бири пропорциядир. Пропорцияни тузган сонлар ёки ҳарфлар унинг *ҳадлари* дейилади,

$a:b=c:d$ пропорцияда b ва c — ўрта, a ва d — четки, a ва c — олдинги, b ва d эса кейинги ҳадлари дейилади.

Пропорциянинг хоссалари

$3:4=12:16$ пропорцияни текшириб кўрайлик.

I. $3\times 16=48$ ва $4\times 12=48$. Демак, *пропорциянинг четки ҳадларининг кўпайтмаси ўрта ҳадлари кўпайтмасига тенг.*

Умуман: $a:b=c:d$ пропорцияда $a\cdot d=b\cdot c$.

Бундан: $a=\frac{b\cdot c}{d}$, $b=\frac{a\cdot d}{c}$ ва ҳоказо. Юқоридаги мисолдан:

$$3=\frac{4\cdot 12}{16}=3 \text{ ва } 4=\frac{3\cdot 16}{12}=4.$$

Демак, пропорциянинг битта четки ҳади, унинг ўрта ҳадлари кўпайтмасини қолган четки ҳадига бўлишдан чиққан бўлинмага тенг; ўрта ҳаддан биттаси эса, унинг четки ҳадлари кўпайтмасини қолган ўрта ҳадига бўлишдан чиққан бўлинмага тенг.

Пропорциянинг бирор ҳади номаълум бўлса, у юқоридаги хоссалардан фойдаланиб топилади. Буни мисолларда кўрайлик:

1) $x:6=3:2$ берилган. x ни топинг.

Ечиш.

$$x=\frac{6\cdot 3}{2}=3\cdot 3=9.$$

2) $2x:7=18:5$ берилган. x ни топинг.

Ечиш. $2x=\frac{7\cdot 18}{5}$, бундан $x=\frac{7\cdot 18}{5\cdot 2}=\frac{7\cdot 9}{5}=12{,}6.$

3) $18:2x=4:11$ берилган. x ни топинг.

Ечиш. $2x=\frac{18\cdot 11}{4}$, бундан $x=\frac{9\cdot 11}{2\cdot 2}=\frac{99}{4}=24{,}75$.

4) $2\frac{1}{3}:3{,}3=10:4\frac{2}{7}x$ берилган. x ни топинг.

Ечиш. $4\frac{2}{7}x=\frac{3{,}3\cdot 10}{2\frac{1}{3}}$, бундан $x=\frac{33}{\frac{7}{3}\cdot 4\frac{2}{7}}=\frac{33}{10}=3{,}3$.

II. $3:4=12:16$. пропорциядан: $12:3=16:4$ ва $3:12=4:16$ ва ҳоказо.

Умуман, $a:b=c:d$ пропорциядан: $a:c=b:d$, $c:a=d:b$ ва ҳоказо алмаштиришлар ҳосил қилиш мумкин.

Пропорцияни бузмайдиган шакл ўзгартиришлар:

1) пропорциянинг исталган нисбатини ёки иккала олдинги (ёки иккала кейинги), ёки ҳамма ҳадларини бир вақтда бир хил сон марта орттирсак ёки камайтирсак, пропорция бузилмайди.

Масалан, $3:4=12:16$ пропорцияда: 1) $3:4=\frac{12}{4}:\frac{16}{4}=3:4$ ёки $(3\cdot5):(4\cdot5)=12:16$ ёки $15:20=12:16$,

2) $(3\cdot5):4=(12\cdot5):16$ ёки $15:4=60:16$;

$3:\frac{4}{2}=12:\frac{16}{2}$ ёки $3:2=12:8$.

3) $(3\cdot2):(4\cdot2)=(12\cdot2):(16\cdot2)$ ёки $6:8=24:32$ ва ҳоказо.

Бундай ўзгартиришлар пропорцияни каср ҳадларидан қутқаришга ва соддалаштиришга имкон беради.

Машқлар. Қуйидагилар ечилсин:

1) $3x:5=8:15$: $x=?$ 2) $24:7=x:12$; $x=?$
3) $9:2x=4:3$; $x=?$ 4) $28:11=7:4y$; $y=?$
5) $12:5z=6:8$; $z=?$ 6) $3{,}2:\frac{1}{3}x=\frac{2}{5}:1{,}5$; $x=?$
7) $15{,}6:2{,}88=2{,}6:x$; $x=?$
9) $3\frac{1}{3}x:3{,}5=4\frac{2}{7}:\frac{3}{14}$; $x=?$ 8) $0{,}38:x=4\frac{3}{4}:1\frac{7}{8}$; $x=?$
10) $1{,}2:0{,}14=3x:1{,}4$; $x=?$

19- §. ЎРТА АРИФМЕТИК ҚИЙМАТ

Таъриф. *Бир неча сон йиғиндисини қўшилувчилар сонига булган нисбати шу сонларнинг ўрта арифметик қиймати деб айтилади.*

Қоида. *Бир неча соннинг ўрта арифметик қийматини топиш учун уларни қўшиб, чиққан сонни қўшилувчилар сонига бўлиш керак.*

Масалан, 6; 12; 8; 26 сонларнинг ўрта арифметик қиймати ҳозирги қоидага кўра, $\frac{6+12+8+26}{4}=\frac{52}{4}=13$ булади.

Машқлар. 1) Бир студент биринчи кун 35 *кг*, иккинчи кун 45 *кг*, учинчи кун 55 *кг*, тўртинчи кун 70 *кг*, бешинчи кун 85 *кг* пахта терган.

Студент ўрта ҳисобда бир кунда қанча пахта терган?

(Жавоб. 58 *кг*.)

2) Сайёҳ биринчи куни 42 *км*, иккинчи куни 35 *км*, учинчи куни 30 *км* ва тўртинчи куни 13 *км* йўл босган. Сайёҳ кунига ўрта ҳисоб билан қанча йўл босган?

(Жавоб. 30 *км*.)

20- §. ТЎҒРИ ВА ТЕСКАРИ ПРОПОРЦИОНАЛ МИҚДОРЛАР ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Таъриф. ***Икки миқдордан бирининг бир неча марта ортиши (камайиши) билан иккинчиси ҳам шунча марта ортадиган (камаядиган) миқдорлар тўғри пропорционал миқдорлар дейилади.***

Масалан, 1 *кг* конфет 1,8 сўм турса, 5 *кг* конфет 1,8 сўм $\times$ 5 = 9 сўм туради; 7 *кг* конфет 1,8 сўм $\times$ 7 = 12,6 сўм туради, 10 *кг* конфет 1,8 сўм $\times$ 10 = 18 сўм туради ва ҳоказо.

Бу мисолда конфет миқдори неча марта ортса (камайса) унга тўланадиган пулнинг миқдори ҳам шунча марта ортяпти (камайяпти). Демак, конфет оғирлигининг миқдори билан конфетга тўланадиган пулнинг миқдори тўғри пропорционал миқдорлардир. *Тўғри пропорционалликда:* биринчи миқдорнинг ҳар қандай иккита қийматининг нисбати, иккинчи миқдорнинг уларга мос қийматларининг нисбатига тенг бўлади. Бунга асосланиб, биз қуйидаги иккита тенгликни ёза оламиз:

$$\frac{1}{5}=\frac{1,8}{9};\quad \frac{5}{7}=\frac{9}{12,6}$$

ва ҳоказо.

Демак, ***иккита тўғри пропорционал миқдорлардан бирининг иккита қийматининг нисбати иккинчисининг шунга мос иккита қийматининг нисбатига тенг.***

Масала. 5 *кг* конфет 9 сўм турса, 8 *кг* конфет неча сўм туради?

Ечиш. Пропорция тузамиз:

5 *кг* ~ 9 сўм турса |
8 *кг* ~ x сўм бўлсин | Бундан:

$$\frac{x}{9}=\frac{8}{5},\quad x=\frac{8}{5}\cdot 9=\frac{72}{5}=14,4 \text{ сўм.}$$

Яна юқоридаги мисолдан қуйидагича пропорцияларни ёзиш мумкин:

$$\frac{1}{1{,}8}=\frac{10}{18}=\frac{5}{9} \text{ ва } \frac{7}{12{,}6}=\frac{70}{126}=\frac{5}{9}$$

ва ҳоказо.

Демак, *тўғри пропорционал икки миқдордан бирининг ихтиёрий қийматини иккинчисининг унга тегишли қийматига нисбати доимо ўзгармас сонга тенг.* Бу ихтиёрий қийматлардан бири x ва иккинчиси y бўлсин, бу ҳолда: $\frac{y}{x}=k$ — ўзгармас сон. Бундан, $y=kx$. Бу формула *тўғри пропорционаллик формуласи* дейилади; k ни пропорционаллик *коэффициенти* дейилади.

Таъриф. *Агар ўзаро боғланган икки миқдордан бирининг бир неча марта ортиши (камайиши) билан иккинчиси шунча марта камайса (ортса), бундай миқдорлар тескари пропорционал миқдорлар деб аталади.*

Масалан, 3 ишчи бир ишни 36 кунда тугатса, 6 ишчи бу ишни 18 кунда тугатади, 12 ишчи шу ишни 9 кунда тугатади, 18 ишчи ишни 6 кунда тугатади, 36 ишчи эса ишни 3 кунда тугатади ва ҳоказо.

Бу мисолдан биз кўрамизки, ишчилар сони неча марта ортса, ишнинг бажарилиш куни шунча марта камайяпти.

Демак, ишчилар сони билан ишни бажариш учун кетган вақт тескари пропорционал миқдорлардир.

Энди олинган мисолдан қуйидагиларни ёза оламиз:

$$\frac{3}{6}=\frac{18}{36}; \frac{3}{12}=\frac{9}{36}$$

ва ҳоказо.

Демак, *тескари пропорционал миқдорлардан бирининг иккита қийматининг нисбати иккинчисининг шунга мос иккита қийматининг тескари нисбатига тенг.*

Мисол. Бир ишни 6 ишчи 18 кунда бажарган бўлса, шу ишни 9 ишчи неча кунда бажаради?

Ечиш.

6 ишчи — 18 кунда;
9 ишчи — x кунда бажарсин.

Бундай пропорция тузамиз:

$$\frac{x}{18}=\frac{6}{9},$$

бундан

$$x=\frac{18\cdot 2}{3}=12 \text{ кунда.}$$

Юқоридаги мисолдан қуйидагиларни ёзиш мумкин:

$$3 \times 36 = 108$$
$$6 \times 18 = 108$$
$$12 \times 9 = 108$$

ва ҳоказо

Демак, *тескари пропорционал миқдорларнинг ихтиёрий мос қийматларининг кўпайтмаси ўзгармас сонга тенг.* (Масалан, 108 каби.)

Умуман икки тескари пропорционал миқдорларнинг ихтиёрий мос қийматлари x ва y бўлсин, бу ҳолда: $y \cdot x = k$ — ўзгармас сон.

Бундан: $y = \frac{k}{x}$; *бу тескари пропорционаллик формуласи* дейилади.

Изоҳ. Бундай тўғри ва тескари пропорция усули билан ечиладиган мисолларни бирлик усули билан ечиш ҳам мумкин.

21- §. СОННИ БЕРИЛГАН СОНЛАРГА ТЎҒРИ ПРОПОРЦИОНАЛ ВА ТЕСКАРИ ПРОПОРЦИОНАЛ ҚИСМЛАРГА БЎЛИШ

1-қоида. *Бирор соннинг берилган сонларга тўғри пропорционал қисмларини топиш учун у сонни берилган сонлар йиғиндисига бўлиш ва бўлинмани берилган сонларнинг ҳар бирига кетма-кет кўпайтириш керак.*

Бу қоиданинг тўғрилигини кўриш учун ушбу масалани ечамиз. Тўрт яшик бир хил сортдаги конфетга 127,8 сўм тўланди. Агар биринчи яшикда 20 *кг*, иккинчисида 16 *кг*, учинчисида 22 *кг* ва тўртинчисида 13 *кг* конфет бўлса, ҳар қайси яшикдаги конфет учун қанча пул тўланган?

Ечиш. Бу масалада 127,8 сўмни айрим яшикларнинг оғирликларига пропорционал қилиб тўрт қисмга бўлиш талаб қилинади. Аввал тўртта яшикдаги конфет оғирлигини топамиз:

$$20 + 16 + 22 + 13 = 71 \text{ кг}.$$

Энди 1 *кг* конфет неча сўм туришини топамиз:

$$127{,}8 : 71 = 1{,}8 \text{ сўм}.$$

Энди масаланинг саволига жавоб берамиз:

$$20 \cdot 1{,}8 = 36 \text{ сўм};\ 16 \cdot 1{,}8 = 28{,}8 \text{ сўм};\ 22 \cdot 1{,}8 = 39{,}6 \text{ сўм}$$
$$\text{ва } 13 \cdot 1{,}8 = 23{,}4 \text{ сўм}.$$

Буларни кетма-кет x, y, z, t ҳарфлар билан белгиласак, пропорционал қисмларни юқоридаги қоидага мувофиқ қуйидагича ёзиш мумкин:

$$x = \frac{127{,}8}{20 + 16 + 22 + 13} \cdot 20 = 36 \text{ сўм},\ y = \frac{127{,}8}{71} \cdot 16 = 28{,}8 \text{ сўм};$$

$$z = \frac{127{,}8}{71} \cdot 22 = 39{,}6 \text{ сўм ва}$$

$$t = \frac{127{,}8}{71} \cdot 13 = 23{,}4 \text{ сўм.}$$

Топилган x, y, z, t сўмлар сонларининг ўзаро нисбати масалада берилган оғирлик бирликлари сонларининг ўзаро нисбати кабидир, яъни

$$x : y : z : t = 20 : 16 : 22 : 13.$$

Бунга асосланиб бир мисол ечамиз.

216 ни 4; 3; 5 ларга пропорционал қилиб, учта x, y, z қисмга ажратамиз.

Ечиш.

$$x = \frac{216 \cdot 4}{4 + 3 + 5} = \frac{216 \cdot 4}{12} = 72;$$

$$y = \frac{216 \cdot 3}{12} = 54; \quad z = \frac{216 \cdot 5}{12} = 90.$$

Демак, $x : y : z = 72 : 54 : 90$.

2-қоида. *Бирор соннинг берилган сонларга тескари пропорционал қисмларини топиш учун у сонни тескари сонларга пропорционал қисмларини топиш кифоя.*

Қоиданинг тўғрилигини кўриш учун ушбу масалани ечамиз.

Икки бригадада 80 колхозчи бор. Иккала бригаданинг участкаси баравар ва ҳамма колхозчиларнинг меҳнат унумдорлиги бир хил бўлсин. Агар биринчи бригада ишни 4 кунда, иккинчиси 6 кунда бажарган бўлса, ҳар қайси бригадада неча колхозчи бор? Бу масалада ҳар бир бригададаги колхозчилар сони уларда сарф қилинган иш вақтига тескари пропорционал бўлади, чунки бири ортганда иккинчиси камаяди ва аксинча.

Ечиш. Биринчи бригада бир кунда ишнинг $\frac{1}{4}$ қисмини, иккинчиси эса $\frac{1}{6}$ қисмини бажарган. Бу ерда $\frac{1}{4} > \frac{1}{6}$. Демак, биринчи бригада бир кунда иккинчига қараганда кўпроқ иш бажара олади. Ҳамма колхозчининг меҳнат унумдорлиги бир хил эди, демак, биринчи бригададаги колхозчилар иккинчисидагидан кўп. Шундай қилиб, ҳар қайси бригададаги колхозчилар сони у бригадаларнинг бажара оладиган ишига пропорционал, яъни 80 ни $\frac{1}{4}$ ва $\frac{1}{6}$ сонларга пропорционал қисмларга ажратишимиз керак. Биринчи бригададаги колхозчилар сонини x, иккинчисидагини y ҳарфлари билан белгилаб, биринчи қоидадан фойдалансак:

$$x = \frac{80}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{80}{\frac{5}{12}} \cdot \frac{1}{4} = 192 \cdot \frac{1}{4} = 48;$$

$$y = \frac{80}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}} \cdot \frac{1}{6} = 32.$$

(*Жавоб.* 48 ва 32 колхозчи.)

Бунга асосланиб бир мисол ечамиз: 470 ни 3; 4; 5 ларга тескари пропорционал бўлган уч қисмга ажратинг.

Ечиш.

$$x = \frac{470}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}} \times \frac{1}{3} = \frac{470}{\frac{47}{60}} \times \frac{1}{3} = 600 \times \frac{1}{3} = 200;$$

$$y = \frac{470}{\frac{47}{60}} \times \frac{1}{4} = 600 \times \frac{1}{4} = 150; \quad z = \frac{470}{\frac{47}{60}} \times \frac{1}{5} = 600 \times \frac{1}{5} = 120.$$

(*Жавоб.* 200; 150; 120.)

Машқлар. 1) 2478 ни 2; 5 ва 7 сонларга пропорционал қилиб уч қисмга ажратинг.

(*Жавоб.* 354, 885 ва 1239.)

2) 245 ни $\frac{1}{2}$ ва 3 сонларга пропорционал қилиб икки қисмга ажратинг.

(*Жавоб.* 35; 210.)

3) 61 ни 1; 2; 3; 5 сонларга тескари пропорционал тўрт қисмга ажратинг.

(*Жавоб.* 30, 15, 10 ва 6.)

4) 765 ни $\frac{2}{3}$; 4; $\frac{1}{2}$ сонларга тескари пропорционал қилиб уч қисмга ажратинг.

(*Жавоб.* 306; 51 ва 408.)

5) 20,4 ни шундай учта x, y, z бўлакларга ажратиш керакки, $x : y = 2 : 3$ ва $y : z = 7 : 11$ бўлсин.

(*Жавоб.* 4,2; 6,3 ва 9,9)

II БЎЛИМ

АЛГЕБРА[1]

1- §. АЛГЕБРАИК ИФОДАЛАР

Таъриф. *Ҳарфлар (ёки рақамлар ва ҳарфлар) билан белгиланган бир неча сонларни амал ишоралари ёрдамида бирлаштиришдан иборат бўлган ёзув алгебраик ифода ёки қисқача ифода дейилади.* Масалан,

$$\frac{ab}{2};\ \frac{x}{100}+y;\ \frac{3x+1}{x+5};\ \frac{10(a-b)}{3cd};\quad 3a;\ \frac{221\cdot 2{,}3}{5\cdot 258{,}75};\ b(a-c)$$

ва ҳоказоларнинг ҳар бири ифодадир. Ифода фақат биргина ҳарфдан ёки сондан иборат бўлиши ҳам мумкин. Масалан, a; x; 3; 2.

Алгебраик ифоданинг қиймати деб, ундаги ҳарфлар ўрнига берилган сон қийматларни қўйиб, шу сонлар устида тегишли амалларни бажаргандан кейин келиб чиққан сонга айтилади. Масалан, $\frac{x}{100}+y$ нинг $x=24$, $y=2$ бўлгандаги қиймати бундай топилади:

$$\frac{x}{100}+y=\frac{24}{100}+2=\frac{6}{25}+2=2\frac{6}{25};\ \frac{x}{100} \text{ ва } y \text{ лар } \frac{x}{100}+y$$

ифоданинг *ҳадлари* дейилади.

2- §. АМАЛЛАР ВА УЛАРНИНГ БАЖАРИЛИШ ТАРТИБИ

Арифметикадан маълум бўлган тўрт амал ва уларнинг бажарилиш тартиби алгебрада ҳам ўз кучини сақлайди. Масалан, $ab+\frac{4b}{c}-d$ ифоданинг, $a=\frac{4}{3}$; $b=9$; $c=2$; $d=5$ бўлгандаги сон қиймати топилсин.

Ҳисоблаш.

$$ab+\frac{4b}{c}-d=\frac{4}{3}\cdot 9+\frac{4\cdot 9}{2}-5=4\cdot 3+2\cdot 9-5=12+18-5=25.$$

---

[1] Алгебра — алжабр сўзидан олинган.

Хоразмлик қадимги узбек олими Муҳаммад ибн Мусо ал-Хоразмий (IX аср) ёзган математика китобининг сарлавҳаси шу сўз билан бошланади. Унинг „Ҳисоб ал-жабр ва ал-муқобала" номли китобининг „ал-жабр" сўзидан „алгебра" сўзи келиб чиққандир.

Ифода қавслар билан берилган бўлсин. Масалан, $a\{b - [(d - a)\cdot c + l]\}$ ифоданинг $a = 15$; $b = 75$; $c = 3$; $l = 5$; $d = 35$ бўлгандаги сон қийматини ҳисоблайлик.

Ҳисоблаш:

$$a\{b - [(d - a)\cdot c + l]\} = 15\{75 - [(35 - 15)\cdot 3 + 5]\} =$$
$$= 15\{75 - [20\cdot 3 + 5]\} = 15\cdot\{75 - 65\} = 15\cdot 10 = 150.$$

Машқлар. Ҳарфларга берилган қийматларга асосан ифодаларнинг сон қийматлари топилсин:

$$1)\ 3\frac{x^2}{y},\ x = 1{,}25;\ y = \frac{2}{5};\quad 2)\ \frac{2 - a + a^2}{2 + a - a^2},\quad a = \frac{2}{3};$$

$$3)\ 2x^4 - x^3y + 2x^2y^2,\ x = \frac{2}{3};\quad y = \frac{3}{4};$$

$$4)\ \frac{1 - a^2}{(1 - ab)^2} - (a + b)^2,\quad a = \frac{1}{2};\quad b = \frac{1}{3};$$

$$5)\ \frac{(x + y)^2 - (x - y)^2}{4\,xy},\ x = 1;\quad y = \frac{3}{4};$$

$$6)\ x^3\cdot\left(8\,xyz^3 + \frac{x}{5y}\right),\ x = 10;\ y = 0{,}1;\quad z = \frac{1}{2};$$

$$7)\ \frac{m^3}{2n}\cdot(5m^2n^2 - 0{,}4p),\quad m = \frac{1}{2};\ n = 1{,}5;\ p = 2;$$

$$8)\ \frac{a^2 - 3ab + b^3}{(a + b)^3 + b},\ a = 3;\quad b = \frac{1}{2}.$$

9- §. ҚЎШИШ ВА КЎПАЙТИРИШНИНГ ХОССАЛАРИ

Қўшиш ва кўпайтиришнинг арифметикадан бизга маълум бўлган хоссалари алгебрада ҳам ўз кучини сақлайди. Биз уларни эслатиб ўтамиз.

I. *Қўшилувчиларнинг ёки кўпаювчиларнинг ўринларини алмаштириш билан йиғинди ёки кўпайтманинг қиймати ўзгармайди.*

Масалан,

$$2\frac{1}{2} + 3 = 3 + 2\frac{1}{2} = 5\frac{1}{2};\quad 12\cdot 3\frac{3}{4} = 3\frac{3}{4}\cdot 12 = \frac{15}{4}\cdot 12 = 15\cdot 3 = 45.$$

Умуман:

$$a + b = b + a;\quad a\cdot b = b\cdot a.$$

II. *Қўшилувчилардан бир нечтасини группалаб қўшиб, йиғиндини қолган қўшилувчига қўшсак ёки кўпаювчилардан бир нечтасини группалаб кўпайтириб қолганига кўпайтирилса, йиғинди ёки кўпайтманинг қиймати ўзгармайди.*

Масалан,

$$1)\ 3\frac{1}{2}+1\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\left(3\frac{1}{2}+1\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4}=4\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=5\frac{1}{2}$$

ва

$$3\frac{1}{2}+1\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=4\frac{2+1+3}{4}=4\frac{6}{4}=5\frac{1}{2}.$$

$$2)\ 2\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot2\frac{1}{11}\right)=\frac{11}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{23}{11}\right)=\frac{11}{4}\cdot\frac{46}{33}=\frac{1}{2}\cdot\frac{23}{3}=3\frac{5}{6}$$

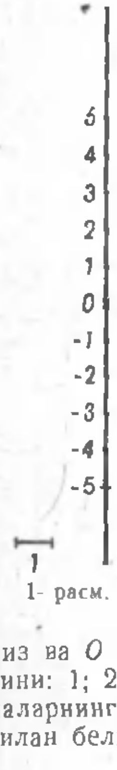
ва

$$2\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot2\frac{1}{11}=\frac{11}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{23}{11}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot23=\frac{23}{6}=3\frac{5}{6}.$$

Умуман: $a+b+c+d=(a+b+c)+d=(a+b)+(c+d)=\ldots$; ва $a\cdot b\cdot c=(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)=b(a\cdot c)$.

4- §. МУСБАТ ВА МАНФИЙ СОНЛАР

Одатда, температуранинг ўзгаришини термометрнинг ноль чизиғидан юқорида олганда плюс (+) ишора билан ва пастда олганда минус (—) ишора билан олиш қабул қилинган.



1- расм.

Масалан, термометр кундуз соат 14 да 3° иссиқни кўрсатди деса, у (+3°) = 3°, агар кеч соат 10 да 2° совуқни кўрсатди деса, у (—2°) кўринишда ёзилади (1- расм). У ҳолда: (+3) =3 *мусбат сон,* (—2) эса *манфий сон* деб аталади. Шундай қилиб: плюс ишора билан ёки ишорасиз ёзилган сонлар мусбат сонлар, минус ишора билан ёзилган сонлар манфий сонлар дейилади.

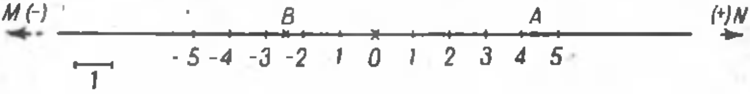
Масалан, 1; 3; 12; $2\frac{3}{5}$; 3,15 ва ҳоказо—мусбат сонлар; — 1; — 4; — 1,2; — 12, — 19 ва ҳоказо — манфий сонлардир.

Изоҳ. Ноль (0) сони мусбат ҳам, манфий ҳам ҳисобланмайди.

а) Сон ўқи

Бирор *MN* тўғри чизиқда ихтиёрий *O* нуқтани белгилаб, унинг *O* нуқтадан бошлаб икки томонини бирор бирлик кесма (масштаб) ёрдамида, масалан, 1 *см* дан қилиб тенг бўлакчаларга бўламиз ва *O* нуқтадан бошлаб ўнг томондаги кесмаларнинг учларини: 1; 2; 3; 4 ва ҳоказо сонлар билан, чап томондаги кесмаларнинг учларини: —1; —2; —3; —4 ва ҳоказо сонлар билан белгилаймиз (2- расм).

Бундай хоссага эга бўлган MN тўғри чизиқ *сон ўқи* дейилади. O нуқта унинг *бошланғич нуқтаси* дейилади. Сон ўқида O дан бошлаб иккала томонга ҳар қандай каср сонни ифодаловчи кесмани қўйиш ҳам мумкин. Масалан, 2- расмда OA кесма $4\frac{1}{3}$ сонни, OB кесма эса, $-2\frac{1}{2}$ сонни тасвирлайди. Демак, сон ўқининг ҳар бир нуқтаси бирор сонни тасвирлайди.



2- расм.

Ишораси билангина фарқ қилган икки сон *қарама-қарши сонлар* дейилади.

Масалан, 3 ва (-3); $+2\frac{2}{3}$ ва $-2\frac{2}{3}$ ва ҳоказо.

б) Сонларнинг абсолют қиймати

Таъриф. *Манфий сонниинг абсолют қиймати деб, унга қарама-қарши мусбат сонга айтилади; мусбат сонниинг абсолют қиймати деб шу сонниинг ўзига айтилади.* Абсолют қиймат $|\quad|$ белги билан ёзилади. Масалан, ± 7 нинг абсолют қиймати: $|\pm 7| = 7$ бўлади.

Шунга ўхшаш $\left|\pm \frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5}$; $|\pm 0{,}72| = 0{,}72$ ва ҳоказо.

Умуман: $a > 0$ да $|\pm a| = a$ ва $a < 0$ да, $|a| = -a$ бўлади. *Бирор a сонниинг абсолют қиймати, сон ўқида бошланғич нуқтадан шу сонни тасвирловчи нуқтагача булган масофадир.*

Сонлар абсолют қийматларининг хоссалари

Икки a ва b сонлар берилганда

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|; \ |a-b| = |a+(-b)| < |a| + |-b|;$$

$$|a\cdot b| = |a|\cdot|b|; \ \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

муносабатларни ёзиш мумкин. Уларни исботсиз қабул қиламиз.

5- §. РАЦИОНАЛ СОНЛАР

Таъриф. *Мусбат, манфий (бутун, каср) сонлар ва ноль рационал сонлар дейилади.*

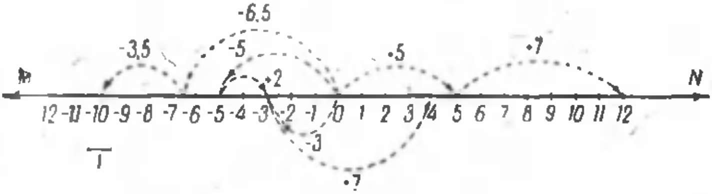
а) Рационал сонларни қўшиш

Қоида. *Бир хил ишорали иккита сонни қўшиш учун уларнинг абсолют қийматларини қўшиб, йиғиндининг олдига уларнинг умумий ишорасини қўйиш керак: агар иккала сон қарама-қарши ишорали бўлса, абсолют қиймати каттасидан кичигини айириш ва айирманинг олдига абсолют қиймати катта бўлган соннинг ишорасини қўйиш керак.*

Мисоллар: 1) $(+5)+(+7)=+12$; 2) $(-3)+(+7)=$ $=+4$; 3) $(-5)+(+2)=-3$; 4) $(-3{,}5)+(-6{,}5)=-10$;

5) $\left(+5\frac{3}{4}\right)+(-1{,}25)=(+5{,}75)-(+1{,}25)=+4{,}5.$

Юқорида ишланган 1- дан 4- гача мисолларнинг сон ўқида ечилишини қуйидаги расмдан осон кўриш мумкин.



3- расм.

Бир неча рационал сонни қўшиш учун, олдинги иккита қўшилувчини қўшиш, кейин чиққан натижага учинчи қўшилувчини қўшиш ва охиригача шундай давом эттириш керак.

Масалан: $(+8)+(-2)+(+12{,}2)+(-5{,}3)=+12{,}9$.

Ҳисоблаш: $(+8)+(-2)=6$; $(+6)+(+12{,}2)=18{,}2$;
$(+18{,}2)+(-5{,}3)=12{,}9$.

Машқлар. Қуйидаги амаллар бажарилсин:

1) $(+1{,}25)+(+3{,}2)+(-1{,}85)+(+2{,}5)+\left(-1\frac{3}{5}\right)$;

2) $(-5{,}4)+(+0{,}2)+(-0{,}6)+(+0{,}08)$;

3) $(-0{,}1)+\left(+8\frac{1}{3}\right)+\left(+11\frac{2}{3}\right)+(+4{,}4)$;

4) $(+0{,}78)+(-2{,}6)+(0{,}7)+(-0{,}78)$;

5) $\left(+1\frac{3}{8}\right)+(2{,}4)+(-1{,}2)+(5{,}4)+(-7{,}2)$;

6) $\left(+\frac{1}{4}\right)+(-0{,}25)+\left(-3\frac{1}{8}\right)+\left(-5\frac{3}{4}\right)$.

б) Рационал сонларни айириш

Қоида. *Икки рационал сонни бир-биридан айириш учун айрилувчини тескари ишора билан камаювчига қўшиш керак.*

Масалан: $(+90) - (+40) = (+90) + (-40) = +50$; $(+52) - \left(-35\frac{1}{2}\right) = (+52) + \left(+35\frac{1}{2}\right) = +87\frac{1}{2}$; $(-80) - (+45) = (-80) + (-45) = -125$; $(-75) - (-25) = (-75) + (+25) = -50$.

Машқлар. Айириш амалларини бажаринг: 1) $(+98) - (+12)$; 2) $(+79) - (-61)$; 3) $(+98{,}3) - (-75)$; 4) $(-81) - (+26)$; 5) $(-236) - (-98)$; 6) $(-718) - (-198)$.

Рационал сонларни таққослаш

Ҳар қандай икки сондан қайси бири сон ўқида ўнг томонда жойлашган нуқта билан тасвирланса, ўшаниси каттадир. Бунга асосан: 1) Ҳар қандай мусбат сон нолдан ва ҳар қандай манфий сондан катта. Масалан,

$$7 > 0;\ 7 > -1;\ 7 > -3\frac{1}{2};\ 7 > -5;\ 7 > -135$$

ва ҳоказо.

2) Ҳар қандай манфий сон нолдан кичик. Масалан, $-12 < 0$.

в) Рационал сонларни кўпайтириш

Қоида. *Бир хил ишорали икки рационал сонни бир-бирига кўпайтириш учун уларнинг абсолют қийматларини кўпайтириб, кўпайтманинг олдига плюс (+) ишора ёзиш керак; агар кўпаювчилар турли ишорали бўлса, кўпайтманинг олдига минус (—) ишора ёзиш керак.*

Масалан, $(+13)\cdot(+5) = +65$; $(-13)\cdot(+5) = (+13)\cdot(-5) = -65$; $(-13)\cdot(-5) = +65$.

Умуман, $(+a)\cdot(+b) = ab$; $(+a)\cdot(-b) = (-a)\cdot(+b) = -ab$ ва $(-a)\cdot(-b) = ab$.

Қоида. *Бир неча рационал сонларни ўзаро кўпайтирганда, ундаги манфий кўпайтувчиларнинг сони жуфт бўлса, кўпайтма мусбат сон; агар тоқ бўлса, манфий сон бўлади.*

Масалан, $(-4)\cdot(+3)\cdot(-5) = +60$; $(-4)\cdot(+3)\cdot(+5) = -60$.

Машқлар. Қуйидаги амалларни бажаринг:

1) $(+18)\cdot(-3)\cdot(+2)$;
2) $(+2{,}5)\cdot(-0{,}12)$;
3) $\left(-1\frac{3}{4}\right)\cdot(0{,}2)$;
4) $(-5)\cdot\left(+1\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)\times(+3)$;
5) $(-1{,}02)\cdot\left(-2\frac{1}{2}\right)\cdot(-4)$;
6) $\left(-7\frac{1}{2}\right)\cdot\left(+1\frac{1}{3}\right)\cdot(-0{,}5)\times(-1{,}5)$;

7) $(-1{,}25)\cdot(+0{,}75)\cdot\left(+2\frac{4}{5}\right)\times$
$\times\left(+1\frac{1}{2}\right)$;

8) $\left(+3\frac{1}{3}\right)\cdot(-1{,}25)\cdot(1{,}2)\times$
$\times\left(+1\frac{5}{6}\right)$;

9) $(+12)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)-(-15)\times$
$\times(-1{,}2)$;

10) $[(+8)-(-5)]\cdot(-3)$;

11) $\left(+\frac{4}{7}\right)\cdot(-14)-(+0{,}4)\cdot(-$
$-1{,}5)\cdot(-2)$;

12) $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot(-3)+(-7)\right]\times$
$\times[(-5)+(-1{,}2)\cdot(-4)]$.

г) Рационал сонларни бўлиш

Қоида. *Бир рационал сонни иккинчи рационал сонга бўлиш учун бўлинувчининг абсолют қийматини бўлувчининг абсолют қийматига бўлиб, улар бир хил ишорали бўлса, бўлинмани (+) ишора билан, ҳар хил ишорали бўлса, (—) ишора билан олиш керак.*

Масалан, $(+12):(+4)=+3$; $(+12):(-4)=(-12):(+4)=-3$; $(-12):(-4)=+3$.

Умуман,

$$(+a):(+b)=(-a):(-b)=+\frac{a}{b};\quad (+a):(-b)=(-a):(+b)=-\frac{a}{b}.$$

Машқлар. Қуйидаги амаллар бажарилсин:

1) $(+0{,}24):(-6)$;
2) $(-8):(-2{,}4)$;
3) $\left(+7\frac{1}{2}\right):\left(-1\frac{3}{4}\right)$;
4) $\left(-6\frac{3}{4}\right):(1{,}6)$;
5) $(-10{,}25):(+3{,}75)$;
6) $(-3{,}46):(+0{,}52)$;
7) $[(+1{,}35):(-1{,}2)]:$
$:(-0{,}85)$;
8) $2\frac{7}{15}:(-1{,}2):\left(-\frac{3}{4}\right)$;
9) $(-1{,}75):[(+2{,}5):(+0{,}15)]$;
10) $\left[\left(-3\frac{5}{6}\right):(+1{,}75)\right]:$
$:(-0{,}25)$;
11) $(-2{,}5)+(-0{,}75):(+4)$;
12) $(-9):(-6)-(+14):$
$:(-1{,}4)$;
13) $(-24):[(-7)+(-2{,}4):$
$:(+3)]$;
14) $[(-8{,}2)+(+4{,}4)]\cdot(-1{,}2)-$
$-[(+4{,}8)-(-1{,}2)]:$
$:\left(-1\frac{1}{2}\right)$.

6- §. КОЭФФИЦИЕНТ

Таъриф. *Ҳарфий кўпайтувчилар олдидаги сон кўпайтувчи коэффициент деб аталади.*

Масалан, $3a$ да: a нинг коэффициенти 3;
$2a$ да: a „ „ „ 2;
a да: a „ „ „ 1.

Шунга ўхшаш: $5\frac{a}{b}$ да: 5 — коэффициент; $\frac{3}{4}ab$ да: $\frac{3}{4}$ — коэффициент; $(x - 5\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{y} + 8xy - y)$ да: x нинг коэффициенти 1; $\frac{x}{y}$ ники $-5\frac{1}{2}$; xy ники 8 ва y ники -1 дир.

Изоҳ. Бир неча кўпайтувчилардан исталган битта ёки бир нечасини қолганлари учун коэффициент дейиш мумкин.

Бутун коэффициентли ифодани коэффициенти бирга тенг бўлган йиғинди кўринишида ёзиш мумкин ва, аксинча, коэффициенти бирга тенг бўлган бир неча бир хил қўшилувчини умумий коэффициентга келтириб қисқача ёзиш мумкин. Масалан,

$$3\frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b};\ 2xy = xy + xy.\ 5\frac{xy}{z} = \frac{xy}{z} + \frac{xy}{z} + \frac{xy}{z} + \frac{xy}{z} + \frac{xy}{z}$$

ва ҳоказо.

Аксинча:

$$x + x + x = 3x;\ \frac{x}{y} + \frac{x}{y} = 2\frac{x}{y};\ \frac{ab}{c} + \frac{ab}{c} + \frac{ab}{c} = 3\frac{ab}{c}.$$

Агар коэффициент каср сон бўлганда, у каср бўлагини кўрсатади. Масалан, $\frac{2}{3}ab$ да коэффициент $\frac{2}{3}$ сони ab нинг 3 дан 2 бўлагини кўрсатади. Бундай ҳолларда ҳам, уларни йиғинди кўринишда ёзиш ва, аксинча, йиғинди кўринишни ихчамлаб ёзиш мумкин.

Масалан,

$$\frac{2}{3}ab = \frac{1}{3}ab + \frac{1}{3}ab; \qquad 1\frac{2}{3}ab = ab + \frac{1}{3}ab + \frac{1}{3}ab.$$

Машқлар. 1) Қуйидаги ифодаларни ёйиб, йиғинди кўринишда ёзинг:

$$3xyz;\ 7\frac{ab}{c} - 2a \text{ ва } 5x^2y.$$

2) Ушбу йиғиндиларни умумий коэффициентлар билан қисқа ёзинг:

$$a + a + b + 2b;\ \frac{a}{c} + \frac{a}{c} + \frac{a}{c} + \frac{a}{c};$$

$$xy + xy + xy - z - z;\ \frac{y}{x} - c + \frac{y}{x} + \frac{y}{x} - c.$$

7- §. АЛГЕБРАИК ЙИҒИНДИ

Таъриф. *Бир неча кетма-кет қўшиш ва айиришни белгиловчи ифода алгебраик йиғинди деб аталади.* Масалан,

$$(15 + 22\frac{3}{4} - 1,2);\ (4x - 15y + \frac{3}{5}xy - y);\ (a + b + c + d)$$

ва ҳоказоларнинг ҳар бири алгебраик йиғиндидир. Алгебраик йиғиндида ҳар бир айиришни айрилувчига қарама-қарши сонни қўшиш билан алмаштириш мумкин.

Масалан,

$$a - b + c = a + (-b) + c$$

(ва аксинча).

8- §. ДАРАЖА ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Таъриф. *Ўзаро тенг бўлган бир неча кўпайтувчининг кўпайтмаси даража деб аталади.*

Масалан, $7 \cdot 7 \cdot 7$; $a \cdot a \cdot a \cdot a$; $ab \cdot ab$; $\frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y}$; $abc \cdot abc$ ва ҳоказоларнинг ҳар бири даражадир ва қисқача бундай ёзилади: $7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3$; $a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$; $ab \cdot ab = (ab)^2$; $\frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} = \left(\frac{x}{y}\right)^3$; $abc \times \times abc = (abc)^2$ ва ҳоказо.

Умуман,

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ \dots \ \cdot a}_{n \text{ марта}} = a^n \qquad (1)$$

a^n — даража, у a нинг n-даражаси деб ўқилади. a^n да: a — ихтиёрий сон бўлиб, у *даражанинг асоси* ва *n—даража кўрсаткичи* дейилади.

Бир хил кўпайтувчилар кўпайтмасини топиш амали *даражага кўтариш* дейилади. Соннинг иккинчи даражаси квадрат, учинчи даражаси эса куб деб ўқилади. Ҳар қандай соннинг биринчи даражаси шу соннинг ўзидан иборат деб ҳисоблаш қабул қилинган, яъни $a^1 = a$, a — ҳар қандай сон.

Мисоллар: $3^1 = 3$; $\left(\frac{2}{7}\right)^1 = \frac{2}{7}$; $(-0{,}7)^1 = -0{,}7$; $\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}$.

Мусбат соннинг натурал кўрсаткичли даражаси мусбат сондир; манфий соннинг жуфт кўрсаткичли даражаси мусбат сон, тоқ кўрсаткичли даражаси эса манфий сондир, яъни $a > 0$ бўлганда:

$$a^m > 0; \ (-a)^{2m} = a^{2m} > 0$$

ва

$$(-a)^{2m+1} = -a^{2m+1} < 0 \quad (m = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ \dots\ .)$$

Мисоллар. $(-4)^2 = 16$; $(-4)^3 = -64$ ва ҳоказо. *m ва n ихтиёрий натурал сонлар бўлганда* $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ формулани ёзиш мумкин.

Исбот. (I) формулага асосан:

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ \dots . a)}_{n} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ \dots \ \cdot a)}_{m} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ \dots \ \cdot a}_{(m+n)} = a^{n+m}.$$

Демак, *бир хил асосли даражаларнинг кўпайтмаси ўша асосли даража бўлиб, кўрсаткичи эса кўпайтувчилар даража кўрсаткичларининг йиғиндисига тенг.*

Мисоллар. $3^2\cdot3^4=3^{2+4}=3^6$; $\left(\frac{4}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2=\left(\frac{4}{5}\right)^5$; $a^4\cdot a^5=a^9$ ва ҳоказо. Шунга ўхшаш, натурал кўрсаткичли даражалар учун яна қуйидаги формулалар ўринлидир:

$$a^n : a^m = a^{n-m} \quad (n > m > 1)$$
$$(a\cdot b\cdot\ \ldots\ \cdot e)^m = a^m b^m \ldots \cdot e^m$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}\ (b \neq 0);$$
$$(a^n)^m = a^{nm}.\ \ldots\ .$$

Исбот. (1) формулага асосланиб, қуйидагиларни ёзиш мумкин:

$$a^n : a^m = \underbrace{(a\cdot a\cdot\ \ldots\ \cdot a)}_{n \text{ марта}} : \underbrace{(a\cdot a\cdot a\cdot\ \ldots\ \cdot a)}_{m \text{ марта}} =$$
$$= \underbrace{(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)}_{(n-m) \text{ марта}}\cdot\underbrace{(a\cdot a\ldots\ \cdot a)}_{m \text{ марта}} : \underbrace{(a\cdot a\cdot\ \ldots\ \cdot a)}_{m \text{ марта}} = \underbrace{(a\cdot a\cdot\ \ldots\ \cdot a)}_{(n-m) \text{ марта}} = a^{n-m}.$$
$$(a\cdot b\cdot\ \ldots\cdot e)^m = \underbrace{(a\cdot b\cdot\ \ldots\ \cdot e)\cdot(a\cdot b\ldots\ e)\ \ldots\ (a\cdot b\cdot\ \ldots\ \cdot e)}_{m \text{ марта}} =$$
$$= \underbrace{(a\cdot a\cdot\ \ldots\ \cdot a)}_{m \text{ марта}}\cdot\underbrace{(b\cdot b\cdot\ \ldots\ \cdot b)}_{m \text{ марта}}\ \ldots\ \underbrace{(e\cdot e\cdot\ \ldots\ \cdot e)}_{m \text{ марта}} = a^m\cdot b^m\cdot\ \ldots\ \cdot e^m;$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ \frac{a}{b}\right)}_{m \text{ марта}} = \frac{a\cdot a\cdot\ \ldots\ \cdot a}{b\cdot b\cdot\ \ldots\cdot b} = \frac{a^m}{b^m}.$$
$$(a^n)^m = \underbrace{a^n\cdot a^n\cdot\ \ldots\ a^n}_{m \text{ марта}} = a^{n+n+\cdots+n} = a^{nm}$$

Энди ноль ва манфий бутун кўрсаткичли даража a^0 ва a^{-m} $(m=1;\ 2;\ 3;\ \ldots)$ ларга ҳам аниқ маъно берамиз. $a^n : a^m = a^{n-m}$ формула $n > m$ учун ўринли эди, $m = n$ бўлсин, бу ҳолда $a^n : a^n = a^{n-n} = a^0$ бўлади. Лекин, a^0 символ даражанинг таърифи (1) га кўра маъносиз. Иккинчи томондан $a^n : a^n = 1$ дир.

Булар $a^n : a^m = a^{n-m}$ ни $(m = n)$ да ҳам ўринли бўлиши учун, a^0 символга қандай маъно (таъриф) бериш кераклигини кўрсатади.

Таъриф. *Ҳар қандай (нолдан фарқли) а соннинг нолинчи даражаси бирга тенг,* яъни $\boxed{a^0 = 1}$ $(a \neq 0)$.

Демак, $a^n : a^m = a^{n-m}$ формула, $n \geqslant m$ да ўринлидир.

Энди, $a^n : a^m = a^{n-m}$ формулани $n < m$ бўлган ҳолда текширамиз. Масалан, $\frac{a^2}{a^5} = \frac{a\cdot a}{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a} = \frac{1}{a\cdot a\cdot a} = \frac{1}{a^3}$. Лекин бўлиш формуласига асосан: $\frac{a^2}{a^5} = a^{2-5} = a^{-3}$ ҳосил бўлади. (a^{-3}) символ, даража таърифига асосан маъносиз нарсадир. Аммо булар, $a^n : a^m = a^{n-m}$ ни $m > n$ да ҳам ўринли бўлиши учун, a^{n-m} га қандай маъно (таъриф) бериш кераклигини кўрсатади.

Таъриф. *Нолдан фарқли ҳар қандай соннинг манфий кўрсаткичли даражаси, бирни ўша соннинг шу кўрсаткичининг қарама-қарши ишора билан олинган даражасига бўлинганига тенг,* яъни

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m};\text{ бунда } m = 1;\ 2;\ 3;\ \ldots \text{ ва } a \neq 0.$$

Мисоллар.

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9};\quad 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125};\ \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}.$$

ва ҳоказо.

1- изоҳ. Даражалар ҳақидаги кўриб ўтилган ҳамма формулалар n ва m ҳар қандай рационал бутун сон бўлганда ҳам тўғридир.

2- изоҳ. Каср кўрсаткичли даражалар ҳақида ҳам, худди ноль ва манфий бутун кўрсаткичли даражалар ҳақидагидек мулоҳазалар юргизилади[1].

3- изоҳ $\left(\frac{0}{0}\right)$ ифодани 0; 1; 5; -8; 125 ва ҳоказо деб ёзиш мумкин, чунки: $0 \cdot 0 = 0$; $0 \cdot 1 = 0$; $0 \cdot 5 = 0$; $0 \cdot (-8) = 0$; $0 \cdot 125 = 0$ ва ҳ. к. Демак, $\left(\frac{0}{0}\right)$ маъносиз (аниқмас) ифодадир. Шунга ўхшаш 0^0, яъни нолнинг нолинчи даражаси ҳам маъносиз (аниқмас) ифодадир.

Машқлар. Қуйидаги даражалар ҳисоблансин: 1) 7^3; $1{,}3^2$; $2{,}2^2$; $0{,}4^3$; $0{,}2^4$; $(-3{,}1)^2$; $1{,}25^2$; $(-7{,}1)^2$; $(-0{,}1)^5$; $\left(-1\frac{2}{3}\right)^4$.

Даражаларни қисқа кўринишда ёзинг:

$$a \cdot a;\ \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y};\ xz \cdot xz;\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2};\ x \cdot x \cdot x.$$

Қуйидаги ифодаларда қисқа ёзилган даражани кўпайтма шаклида ёзинг:

$$x^2y^3z^2;\ x^3y^2;\ \frac{x^2}{y^3};\ 2a^3 - 3b^2;\ (x - 3y)^3;\ m^3 + n^3;\ 9b^2c4d^3.$$

Амаллар бажарилсин:

$$x^3 \cdot x^{12};\ a^{-3} \cdot a^5a^2;\ y^4 \cdot y;\ (a+b)^3 \cdot (a+b);\ y^2 \cdot y^3;\ x \cdot x \cdot y^2 \cdot y \cdot y^3;$$

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^5;\ xy \cdot x^2y^{-3};\ x \cdot x^5 \cdot y^{-2} \cdot y^2;\ x^{12} : x^4;\ z^6 : z^3;\ x : x^3;\ y^6 : y;$$

$$y^2x : x^3y;\ (a^2)^3;\ (ab^2)^4;\ (x^{-2})^3;\ (y^{-4}z^3)^2;\left(\frac{a^2b^4}{3c}\right)^5;\ (5ab)^3 \cdot 2ab - -15a^4b^4;\ 1{,}7 + (2{,}4)^2 \cdot (-0{,}05).$$

---

[1] Каср кўрсаткичли даражалар ҳақида кейинчалик гапирамиз.

9- §. БИРҲАДЛАР ВА КЎПҲАДЛАР

1- таъриф. *Қўшиш, айириш, кўпайтириш, бўлиш ва даражага кўтариш амаллари ёрдамида рақамлар ва ҳарфлар билан белгиланган сонлардан тузилган алгебраик ифодалар рационал ифодалар деб аталади.* Масалан,

$$2 - a;\ \frac{2ab^2}{3};\ \frac{a \cdot b}{c};\ a - b;\ \frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2};\ \frac{x^2 - xy + y}{a + b}$$

ва ҳоказоларнинг ҳар бири рационал ифодадир.

Шунингдек, рақамлардан иборат сон билан ёки битта ҳарф билан белгиланган алгебраик ифода ҳам рационал ифода деб аталади. Масалан, 5; 1,2; a; b каби.

2- таъриф. *Агар рационал ифодада ҳарфий бўлувчи бўлмаса, у бутун рационал ифода; ҳарфий бўлувчи бўлса, каср рационал ифода дейилади.* Масалан, 1) a; $\frac{2ab^2}{3}$; $a - b$ ва ҳоказоларнинг ҳар бири бутун рационал ифода;

2) $\frac{15}{a}$; $\frac{ab}{c}$; $\frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2}$ ва ҳоказоларнинг ҳар бири каср рационал ифодадир.

3- таъриф. *Рақамлар билан ёзилган ҳар қандай айрим сон, биргина ҳарфдан иборат ифода; шунингдек, кўпайтириш ва даражага кўтариш амалларидангина иборат алгебраик ифода бирҳад деб аталади.* Масалан, 5; $3\frac{2}{7}$; a; $\frac{3}{5}ab^2$; $0{,}12\,x^2y$ ва ҳоказоларнинг ҳар бири бирҳаддир.

4- таъриф. *Бир неча бирҳаднинг алгебраик йиғиндиси кўпҳад деб аталади.* Масалан,

$$a + \frac{2}{3}b;\ x + \frac{1}{2}y - z;\ 5abc^2 + 2a^2c;\ y^2 - 5ay^{-2}$$

ва ҳоказоларнинг ҳар бири кўпҳаддир.

а) Ўхшаш ҳадлар ва уларни ихчамлаш

5- таъриф. *Кўпҳаднинг бир-биридан фақат коэффициентлари билан фарқ қилган ёки бутунлай бир хил бўлган ҳадлари ўхшаш ҳадлар дейилади.*

Ўхшаш ҳадларни ихчамлаш учун уларнинг коэффициентлари устида берилган амаллар бажарилади ва чиққан сон ёнига ҳарфий кўпайтувчилар ёзилади. Масалан,

$$1)\ 7x + 3y + 2x - y + 5xy - x - 3xy =$$
$$= (7 + 2 - 1)x + (3 - 1)y + (5 - 3)xy = 8x + 2y + 2xy;$$

$$2)\ 2\frac{2}{3}xy^2 - \frac{1}{2}y - 1\frac{1}{6}y^2x + 3{,}6y - 1\frac{2}{3}\frac{x}{y} + \frac{x}{y} =$$

$$= \left(2\frac{2}{3} - 1\frac{1}{6}\right)xy^2 + \left(3{,}6 - \frac{1}{2}\right)y + \left(1 - 1\frac{2}{3}\right)\frac{x}{y} =$$

$$= 1\frac{1}{2}xy^2 + 3{,}1y - \frac{2}{3}\frac{x}{y}.$$

Машқлар. Қуйидаги кўпҳадларни ихчамланг: 1) $2a^2b - 3bc - a^2b + 5bc$; 2) $3x^3 + 2y^3 - 2x^3 - y^3 + 5$; 3) $8a^2x^4 - by^2 - 3a^2x^4 + 5by^2 - y + 1$; 4) $-9{,}387m - 3{,}89n + 8{,}197m - 1{,}11n - 0{,}002m$; 5) $-1\frac{2}{3}ab^3 + 2a^3b - 4\frac{1}{2}a^2b - ab^3 - \frac{1}{2}a^2b - a^3b$.

Қоида. *Олдида плюс (+) ишораси бўлган қавсни очганда, қавс ичидаги ишоралар ўз ҳолича ёзилади; агар минус (—) бўлса, қавс ичидаги ишоралар қарама-қаршисига алмаштирилади.*

Масалан,

$$+(3a - 2b + c) = 3a - 2b + c$$

$$-(3a - 2b + c) = -3a + 2b - c$$

бўлади.

Мисоллар.

1) $+(50 - 28) = 50 - 28 = 22$, чунки $+(50 - 28) = 22$;

2) $-(50 - 28) = -50 + 28 = -22$, чунки $-(50 - 28) = -22$.

б) Кўпҳадни кўпҳадга қўшиш ва айириш

1- қоида. *Кўпҳадни кўпҳадга қўшиш учун уларни кетма-кет ўз ишоралари билан ёзиб, ўхшаш ҳадлари ихчамланади.*

Мисол. $(4a^2 + 2b - c)$ га $(-3b + 2a^2 - b^2)$ ни қўшинг.

Ечиш.

$(4a^2 + 2b - c) + (-3b + 2a^2 - b^2) = 4a^2 + 2b - c - 3b + 2a^2 - b^2 = 6a^2 - b - b^2 - c$.

2- қоида. *Кўпҳаддан кўпҳадни айириш учун айрилувчи кўпҳадни қарама-қарши ишоралар билан ёзиб, камаювчи кўпҳадга қўшилади*[1].

Мисол. $(15x^2 - 5xy + 3y^2)$ дан $(4x^2 - 3xy + y^2)$ ни айиринг.

Ечиш.

$$(15x^2 - 5xy + 3y^2) - (4x^2 - 3xy + y^2) =$$

$$= 15x^2 - 5xy + 3y^2 - 4x^2 + 3xy - y^2 = 11x^2 - 2xy + 2y^2.$$

Машқлар. Қавслар очилсин:

1) $(-2x + 3xy + 5y - 1)$ ва $-(5x^2 - 2xy - 3y^2 - 5)$.

Амаллар бажарилсин:

2) $(-20x^2 - 15xy + 3y^2 - 2) + (11x^2 + 7xy - 2y^2 + 1)$;

---

[1] Яна бундай айириш ҳам мумкин: $a - (b + c) = (a - b) - c$.

3) $(-51\,a^2b+27\,ab^2-12\,a-8b+1)-(7\,ab^2-37\,a^2b-9\,a+$
$+2b+1)$;

4) $(3\,m+5\,n)-\{[6\,m+2n-(12n-10m)]-m-(7\,m-4n)\}$;

5) $\left(\frac{2}{3}\,x^3-3\,x^2y+\frac{1}{4}\,xy^2-2y^3-1\right)-\left(3\,x^3-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\,y^3-\right.$

$$\left.-\frac{1}{3}\,x^2y\right)+\left(2\,xy^2+1\frac{1}{2}\right);$$

6) $\left(1\frac{3}{4}\,a^2-\frac{3}{8}\,ab+2{,}5\,ac-3\frac{1}{4}\,bc\right)-\left(0{,}08\,a^2+0{,}135\,ab-\right.$

$$\left.-\,ac+1\frac{3}{4}\,bc\right);$$

7) $(4x-2y-z)-\{5x-[8y-2z-(x+y)]-x-$
$-(3y-10\,z)\}$.

в) Бирҳадларни соддалаштириш
(яъни каноник кўринишга келтириш)

Бирҳаднинг каноник кўринишида: 1) битта сонли коэффициент бўлади ва 2) ҳарфлар бўлса, ҳар қайси ҳарфнинг даражаси ёлғиз бир марта кўпайтувчи бўлиб қатнашади.

Мисоллар. Ушбу ифодалар каноник ҳолга келтирилсин:

$$2a^2b^2\cdot 24ab^2;\ \ 12\,x^2y^2\cdot\frac{1}{3}\,x^2z \text{ ва } \frac{85\,a^5b^4c^3}{15\,a^3b^2c^2}.$$

Ечиш. $2\,a^2b\cdot 24ab^2=48a^3b^1$; $12\,x^2y^2.\,\frac{1}{3}\,x^2\,z=4x^4y^2z$ ва $\frac{85\,a^5b^4c^3}{15\,a^3b^2c^2}=\frac{17}{3}\,a^2b^2c$. Шунга ўхшаш: $\left(-1\,\frac{1}{2}\,q^2\right)^3=-\frac{24}{8}\,q^6$.

Машқлар. Қуйидагилар каноник бирҳад кўринишда ёзилсин:

$$\left(1\,\frac{1}{4}\,a^3bc\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\,ab^2c^3\right);\ (-2{,}1\,ab^2)\cdot\left(-\frac{2}{15}\,ab\right);\ (-1{,}2a^2b^3)^2;$$
$$\left(-1\,\frac{1}{2}\,x^2y^3z\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\,xy^2z^3\right);\ \ \frac{15x^3y^4}{3xy^3};\ \left(-\frac{3}{4}\,ab^2c^3d\right)^3.$$

г) Кўпҳадни бирҳадга ва кўпҳадни кўпҳадга
кўпайтириш ва бўлиш

1- қоида. *Кўпҳадни бирҳадга ёки бирҳадни кўпҳадга кўпайтирганда, бирҳадни кўпҳаднинг ҳар бир ҳадига кўпайтириб, кейин ўхшаш ҳадлари ихчамланади.*

Мисоллар.

$$3x\cdot(2x-3y+2xz)=(2x-3y+2xz)\cdot 3x=6x^2-9xy+bx^2z;$$
$$-4a\cdot(3a-5b-8c)=-12a^2+20ab+32ac.$$

2- қоида. *Кўпҳадни кўпҳадга кўпайтириш учун кўпҳадлардан биттасикинг ҳар бир ҳадини иккинчи кўпҳаднинг* *ҳар бир ҳадига кўпайтириб, ҳосил бўлган кўпҳаднинг ўхшаш ҳадлари ихчамланади.*

Мисоллар.

$$(3x^2+2y)\cdot(x-4y)=3x^3-12x^2y+2xy-8y^2;$$

$$(-3x^2+5xy-2y^2)\cdot(6x^2+xy-4y^2)=-18x^4-3x^3y+12x^2y^2+$$
$$+30x^3y+5x^2y^2-20xy^3-12x^2y^2-2xy^3+8y^4=18x^4+27x^3y-$$
$$-7x^2y^2-22xy^3+8y^4.$$

3- қоида. *Кўпҳадни бир ҳадга бўлиш учун кўпҳаднинг ҳар бир ҳадини шу бирҳадга бўлиб, ҳосил бўлган кўпҳаднинг ўхшаш ҳадлари ихчамланади.*

Мисол.

$$(25a^4-8a^2b-3c^2b^2):5a^2bc^3=\frac{25a^4}{5a^2bc^3}-\frac{8a^2b}{5a^2bc^3}-\frac{3c^2b^2}{5a^2bc^3}=$$
$$=\frac{5a^2}{bc^3}-\frac{8}{5c^3}-\frac{3b}{5a^2c}.$$

4- қоида. *Кўпҳадни кўпҳадга бўлиш учун олдин бўлинувчининг энг катта даражали ҳадини бўлувчининг энг катта даражали ҳадига бўлиб, бўлинмани бўлувчининг ҳар бир ҳадига кўпайтириб бўлинувчининг тагига ёзиб айирамиз, кейин бўлишни қолган ҳадлари устида шундай йўл билан давом эттириш керак.*

Мисоллар.

1)
$$\begin{array}{rr|l}
- & 6x^4-19x^3+5x^2+17x-4 & 3x^2-5x+1 \\
 & \underline{-6x^4\pm10x^3\mp2x^2\qquad\qquad} & \overline{2x^2-3x-4} \\
- & -9x^3+3x^2+17x-4 & \\
 & \underline{\mp9x^3\mp15x^2\pm3x\quad} & \\
- & -12x^2+20x-4 & \\
 & \underline{\pm12x^2\mp20x\pm4} & \\
 & .\qquad .\qquad . &
\end{array}$$

2)
$$\begin{array}{rr|l}
- & 2x^3 & 3x-2 \\
 & \underline{-2x^3\pm\frac{4}{3}x^2} & \overline{\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{9}x+\frac{8}{27}} \\
- & \frac{4}{3}x^2 & \\
 & \underline{-\frac{4}{3}x^2\pm\frac{8}{9}x} & \\
- & \frac{8}{9}x & \\
 & \underline{-\frac{8}{9}x\pm\frac{16}{27}} & \\
 & .\qquad\frac{16}{27}\ \text{қолдиқ} &
\end{array}$$

$$3)\quad \begin{array}{r|l} 4x^3-3x^2+5x+1 & -3x^2+2x-1 \\ \cline{2-2} -\;\; -4x^3\mp\frac{8}{3}x^2\pm\frac{4}{3}x & -\frac{4}{3}x+\frac{1}{9} \\ \cline{1-1} -\;-\frac{1}{3}x^2+\frac{11}{3}x+1 & \\ \mp\frac{1}{3}x^2\mp\frac{2}{3}x\pm\frac{1}{9} & \\ \cline{1-1} \frac{31}{9}x+\frac{10}{9} & \end{array} \text{— қолдиқ.}$$

Машқлар. Қуйидаги амалларни бажаринг:

1) $(-2{,}4xy)\cdot(2{,}25x^2-1{,}5xy+2{,}5y^2)$;

2) $(x^3+3x^2y-3xy^2+4y^3)\cdot(2x+3y)$;

3) $(1-0{,}3p+0{,}02p^3)\cdot(1-0{,}4p)$;

4) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}z\right)\cdot\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y-\frac{1}{4}z\right)$;

5) $(6a^2x^5-9a^3x^4+15a^4x^3):\frac{3}{2}a^2x^3$;

6) $(5x^2-9ax-2a^2):(x-2a)$;

(Жавоб. $5x+a$.)

7) $(15a^4-a^3-a^2+4a-70):(3a^2-2a+7)$;

(Жавоб. $5a^2+3a-10$.)

8) $-\frac{3}{4}x^4:\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x-1\right)$.

$\Big($Жавоб. $-\frac{3}{2}x^2+x-\frac{11}{3}$ бўлинма, $\frac{2ax-33}{9}$ қолдиқ$\Big)$.

9) $(17x^2-6x^4+5x^3-23x+7):(7-3x^2-2x)$;

(Жавоб. $2x^2-3x+1$.)

(10 ва 11- мисоллар формулалардан фойдаланмай ечилсин.)

10) $(m^3+3m^2n+3mn^2+n^3):(m^2+2mn+n^2)$.

[Жавоб. $(m+n)$.]

11) $(27+8y^3):(3+2y)$.

10- §. ҚИСҚА КЎПАЙТИРИШ ВА БЎЛИШ ФОРМУЛАЛАРИ

Ўтган параграфдаги кўпайтириш қоидасига мувофиқ:

1) $(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2$

ёки

$$\boxed{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.}$$

Яъни, *икки сон йиғиндисининг квадрати = биринчи сон квадрати, плюс биринчи сон билан иккинчи сон кўпайтмасининг иккилангани плюс иккинчи сон квадрати.*

Мисол. $(3x+2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$.

1- мисолдагига ўхшаш йўл билан яна қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

2) $(a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

ёки

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Яъни, *икки сон айирмасининг квадрати = биринчи сон квадрати, минус биринчи сон билан иккинчи сон кўпайтмасининг иккилангани плюс иккинчи сон квадрати.*

Мисол. $\left(3 - \frac{x}{3}\right)^2 = 9 - 2x + \frac{x^2}{9}$.

3) $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$

ёки

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b).}$$

Яъни, *икки сон квадратларининг айирмаси шу икки сон айирмаси билан уларнинг йиғиндиси кўпайтмасига тенг.*

Мисол.

$$9c^2 - 4 = (3c)^2 - 2^2 = (3c - 2)\cdot(3c+2);$$

$$272^2 - 198^2 = (272-198)\cdot(272+198) = 74\cdot 470 = 34780.$$

4) $(a+b)\cdot(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 2a^2b +$
$+ ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

ёки

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.}$$

Яъни, *икки сон йиғиндисининг куби = биринчи сон куби плюс биринчи сон квадрати билан иккинчи сон кўпайтмасининг учлангани, плюс биринчи сон билан иккинчи сон квадрати кўпайтмасининг учлангани, плюс иккинчи сон куби.*

Мисол.

$$(2x+5)^3 = 8x^3 + 60x^2 + 150x + 125.$$

5) $(a-b)\cdot(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a^2 - 2ab + b^2) = a^3 - 2a^2b +$
$+ ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

ёки

$$\boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$$

Яъни, *икки сон айирмасининг куби=биринчи сон куби, минус биринчи сон квадрати билан иккинчи сон купайтмасининг учлангани, плюс биринчи сон билан иккинчи сон квадрати кўпайтмасининг учлангани минус иккинчи сонниг куби.*

Мисол.

$$(2a-3b)^3 = 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3.$$

6) $(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3=a^3+b^3$ ёки

$$\boxed{a^3+b^3=(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)}$$

Бунда (a^2-ab+b^2) *икки сон айирмасининг чала квадрати,* (a^2+ab+b^2) *эса икки сон йиғиндисининг чала квадрати дейилади.*

Икки сон кубларининг йиғиндиси, биринчи даражали ҳадлар йиғиндиси билан у ҳадлар айирмаси чала квадратининг кўпайтмасига тенг.

Мисол.

$$27c^3a^6+8b^3=(3ca^2)^3+(2b)^3=(3ca^2+2b)\cdot(9a^4c^2-6a^2bc+4b^2).$$

7) $(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3=$
$$=a^3-b^3$$

ёки

$$\boxed{a^3-b^3=(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)}$$

Яъни, *икки сон кубларининг айирмаси, биринчи даражали ҳадлар айирмаси билан у ҳадлар йиғиндиси чали квадратининг кўпайтмасига тенг.*

Мисол.

$$8a^6-125c^3=(2a^2)^3-(5c)^3=(2a^2-5c)\cdot(4a^4+10a^2c+25c^2).$$

Юқоридаги қисқа кўпайтириш формулаларидан фойдаланиб, қуйидаги қисқа бўлиш формулаларини ёзиш мумкин:

8) $\dfrac{a^2-b^2}{a+b}=a-b$ ва $\dfrac{a^2-b^2}{a-b}=a+b;$

9) $\dfrac{a^3+b^3}{a+b}=a^2-ab+b^2$ ва $\dfrac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}=a+b;$

10) $\dfrac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2$ ва $\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}=a-b.$

Мисоллар.

1) $\dfrac{4x^2-9y^2}{2x-3y}=\dfrac{(2x-3y)(2x+3y)}{2x-3y}=2x+3y;$

2) $\dfrac{27a^3+125b^3}{9a^2-15ab+25b^2}=\dfrac{(3a+5b)(9a^2-15ab+25b^2)}{9a^2-15ab+25b^2}=3a+5b.$

Машқлар. Қисқа кўпайтириш ва қисқа бўлиш формулаларидан фойдаланиб, қуйидаги ифодаларни кўпайтувчиларга ажратинг:

1) $25a^4-9b^6$; 2) $a^6b^6-c^2$; 3) $(2m-1)^2-100n^2$;

4) $125x^2+\frac{3}{y^3}$; 5) $1-a^3$; 6) $\frac{a^3-1}{1-a}$;

7) $9m^4+6m^2n^2+n^4$; 8) $x^3-3x^2y+3xy^2+y^3$; 9) $\frac{625+5a^2+4a_4}{15625-8a^6}$;

10) $\frac{27}{64}x^3y^6+\frac{9}{8}x^2y^4z^2+xy^2z^4+\frac{8}{27}z^6$;

11) Агар $x+y+z=0$ бўлса, $x^3+y^3+z^3=3xyz$ бўлиши исбот қилинсин.

11-§. КЎПҲАДЛАРНИНГ БЎЛИНИШИ

Безу теоремаси[1]. Агар x га нисбатан бутун $x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\ldots+b_{n-1}x+b_n$ кўпҳад $(x-a)$га бўлинса, қолдиқ бу кўпҳаднинг $x=a$ бўлгандаги хусусий қиймати $a^n+b_1a^{n-1}+\ldots+b_{n-1}a+b_n$ га тенг бўлади. (n — мусбат бутун сон; a — бирор мусбат ёки манфий сон.)

Исбот. $x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n=R(x)$ бўлсин. Бу ҳолда $R(x)$ ни $(x-a)$ га бўлганда бўлинма $Q(x)$, қолдиқ $q(x)$ бўлсин, яъни

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{c}R(x)\\ (x-a)\,Q(x)\end{array} & \dfrac{x-a}{Q(x)} \\ \hline R(x)-(x-a)\,Q(x)=q(x). & \end{array}$$

$q(x)$ қолдиқ. Бунинг натижасини $R(x)=(x-a)\,Q(x)+q(x)$ шаклда ёзиш мумкин. Энди $x=a$ бўлсин, бу ҳолда $R(a)=(a-a)\,Q(a)+q(a)$ ёки $q(a)=R(a)=a^n+b_1a^{n+1}+\ldots+b_n$ ҳосил бўлади. Теорема исбот қилинди.

1-натижа. $R(x)$ ни $(x+a)$ га бўлишдан чиққан қолдиқ:

$$R(-a)=q(-a)$$

га тенг.

2-натижа. Агар қолдиқ $q(\pm a)=0$ бўлса, у ҳолда $R(x)$ кўпҳад $(x\pm a)$ га бўлинади.

1-мисол. $3x^4-2x^3+4x+2$ кўпҳадни $(x-2)$ га бўлмай туриб, қолдиқ топилсин.

Ечиш. $R(2)=3\cdot2^4-2\cdot2^3+4\cdot2+2=42$ — қолдиқ.

---

[1] Безу — француз математиги (1730—1783 й.).

2- мисол. $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$ кўпҳад $(x - 3)$ га қолдиқсиз бўлинадими?

Ечиш. $R(3) = 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 26 \cdot 3 - 24 = 27 - 81 + 78 - 24 = 105 - 105 = 0$

Демак, бўлинади. Бу ҳолда $x = 3$, $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ тенгламанинг илдизларидан биттаси бўлади. Безу теоремасининг 2- натижасига асосланиб, қуйидаги иккиҳадларнинг бўлинишини текшириш қулай; ҳақиқатан:

1) $x^n + a^n = (x - a)\, Q(x) + q(x)$
ҳамда

$$q(a) = a^n + a^n = 2a^n \neq 0$$

бўлгани учун $x^n + a^n$ иккиҳад $x - a$ ға бўлинмайди.

2) $x^n + a^n = (x + a)\, Q_1(x) + q_1(x)$, $q_1(-a) = (-a)^n + a^n$ бўлгани учун, n — тоқ сон бўлганда $q_1(-a) = 0$, демак, $x^n + a^n$ иккиҳад $x + a$ га бўлинади; n — жуфт сон бўлганда эса $q_1(-a) = 2a^n$ бўлгани учун бўлинмайди.

3) $x^n - a^n = (x - a)\, Q_2(x) + q_2(x)$ ҳамда $q_2(a) = a^n - a^n = 0$. Демак, $x^n - a^n$ иккиҳад $x - a$ га бўлинади.

4) $x^n - a^n = (x + a)\, Q_3(x) + q_3(x)$
ҳамда

$$q_3(-a) = (-a)^n - a^n;$$

n — тоқ сон бўлганда, $q(-a) = -2a^n$ демак, $x^n - a^n$ иккиҳад $x + a$ га бўлинмайди; n — жуфт сон бўлганда эса $q_3(-a) = 0$ бўлгани учун бўлинади.

12- §. КЎПҲАДЛАРНИ КЎПАЙТУВЧИЛАРГА АЖРАТИШ

Кўп ҳолда кўпҳадларни кўпайтувчиларга ажратиш: 1) умумий кўпайтувчини қавс ташқарисига чиқариш; 2) кўпҳаднинг ҳадларини группаларга бирлаштириш; 3) кўпҳаднинг баъзи ҳадини қўшилувчи ҳолида ёзиб олиб, кейин группалаш; 4) қисқа кўпайтириш формулаларидан фойдаланиш усули билан ва шунга ўхшаш йўллар билан бажарилади.

Мисоллар. 1) $(3x^2 - 12x)$ ни кўпайтувчиларга ажратинг.

Ечиш. $3x^2 - 12x = 3x \cdot (x - 4)$;

2) $(12 - 4x - 3x^2 + x^3)$ ни кўпайтувчиларга ажратинг.

Ечиш. $12 - 4x - 3x^2 + x^3 = 4(3 - x) - x^2(3 - x) = (4 - x^2) \cdot (3 - x) = (2 + x)(2 - x)(3 - x)$;

3) $27\ a^3 + \frac{8}{b^3}$ ни кўпайтувчиларга ажратинг.

Ечиш. $27\ a^3 + \frac{8}{b^3} = (3a)^3 + \left(\frac{2}{b}\right)^3 = \left(3a + \frac{2}{b}\right)\left(9a^2 - \frac{6a}{b} + \frac{4}{b^2}\right)$;

4) $(x^3 - 4x^2 + 3)$ ни кўпайтувчиларга ажратинг.

Ечиш. $x^3 - 4x^2 + 3 = x^3 - x^2 - 3x^2 + 3 = x^2(x-1) -$ $-3(x^2-1) = x^2(x-1) - 3(x-1)(x+1) = (x-1)(x^2-3x-3)$;

5) $36a^2 - 25b^4 = (6a)^2 - (5b^2)^2 = (6a+5b^2)\cdot(6a-5b^2)$.

Машқлар. Қуйидаги ифодаларни кўпайтувчиларга ажратинг.

1) $6x^2y + 12xy^2$;
2) $25a^4 - 9b^6$;
3) $a^6b^6 - c^6$;
4) $(2m-1)^2 - 100n^2$;
5) $1 - x^3$;
6) $125x^3 + \frac{8}{y^3}$;
7) $a^3 + ab - a - b$;
8) $x^2 - y^2 + 6y - 9$;
9) $36 - 25y^2$;
10) $8z^3 + 27$;
11) $2x^4 - 4x^3 - 16x^2 + x + 2$;
12) $8a^3 - 12a^2 - 18a + 27$;
13) $3x^3 + 4x^2 + 2x + 1$;
14) $x^2 + 2x - 15$;
15) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$;
16) $10a^2 + 21xy - 14ax - 15ay$;
17) $6by - 15bx - 4ay + 10ax$;
18) $x^3 + 3x^2 + 3x + 9$;
19) $x^2 - 9x - 10$;
20) $-8x^4y^3 - 12x^2y^5 - 15x^5y^2$.

Қуйидаги амалларни қисқа кўпайтиришдан фойдаланиб бажаринг:

$$(1{,}3xy^2 - 2z)(2z + 1{,}3xy^2);\quad 5(a^2-3)^2 - 2(a-4)(a+4);$$
$$3x - 5(x-1)(x+1) + 5(x+2)(x-2);$$
$$3(2x+1)(1-2x) - 4(3x-2)(2+3x) + 6x(4x+1).$$

13- §. АЛГЕБРАИК КАСРЛАР

Таъриф. *Ҳар қандай икки алгебраик ифоданинг ёки соннинг*[1] *булинмаси алгебраик каср дейилади.*

Масалан, $\frac{3a}{2b}$; $\frac{x}{y}$; $\frac{3a^2b}{5a+b^2}$; $\frac{bx}{x-y}$; $\frac{2+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{7a-\frac{2}{a}}{a^2+1}$; $\frac{x^2-3x+6}{2x-3}$

ва ҳоказо. Буларда: $3a$; x; $3a^2b$; bx; $2+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}$; 3; $7a-\frac{2}{a}$; x^2- $-3x+6$ ларни касрларнинг суратлари; $2b$; y; $5a+b^2$, ... , $2x-3$ ларни касрларнинг махражлари дейилади.

Алгебраик касрлар устидаги турли мулоҳаза ва амаллар бажариш усуллари ҳам худди арифметикадаги оддий касрлар устидаги амаллар усуллари каби бўлади.

а) Алгебраик касрларнинг хоссалари

Касрнинг сурат ва махражини нолга тенг бўлмаган бир хил сонга кўпайтириш ёки булиш билан касрнинг қиймати ўзгармайди, яъни

---

[1] Алгебраик касрнинг сурат ва махражи бутун мусбат сондан иборат бўлганда у арифметик касрни беради, демак, арифметик касрни алгебраик касрнинг хусусий ҳоли деб қараш мумкин.

$$\frac{3a}{2b}=\frac{3a\cdot c}{2b\cdot c}=\frac{3ac}{2bc} \text{ ва } \frac{3a}{2b}=\frac{\frac{3a}{c}}{\frac{2b}{c}} \quad (c\neq 0).$$

б) Касрларни қисқартириш

Юқоридаги хоссадан фойдаланиб, касрни қисқартириш (яъни сурат ва махражини бир хил сонга бўлиш) мумкин. Масалан, $\frac{25x^2y}{15xy^3}=\frac{5x}{3y^2}$ бўлади. Бунда каср $(5xy)$ га қисқаради. Демак, касрни қисқартириш учун олдин сурат ва махражининг коэффициентлари уларнинг энг катта бўлувчисига, умумий ҳарфий кўпайтувчилар эса уларнинг сурат ва махражида бўлган энг кичик даражасига бўлинади.

Агар касрнинг сурат ва махражи кўпҳаддан иборат бўлса, олдин унинг сурат ва махражини кўпайтувчиларга ажратиб, кейин қисқартириш керак. Масалан,

1) $\frac{3x^2-3ax}{x^2-a^2}=\frac{3x(x-a)}{(x+a)(x-a)}=\frac{3x}{x+a}$;

2) $\frac{x^2-ax+bx-ab}{x^3+bx+ax+ab}=\frac{x(x-a)+b(x-a)}{x^2(x+b)+a(x+b)}=\frac{(x+b)(x-a)}{(x^2+a)(x+b)}=$
$=\frac{x-a}{x^2+a}$;

3) $\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{a^2+c^2-b^2+2ac}=\frac{-(a-b)^2+c^2}{(a+c)^2-b^2}=\frac{(c-a+b)(c+a+b)}{(a+b+c)(a-b+c)}=$
$=\frac{c-a+b}{c+a+b}$;

4) $\frac{x^2-7x+12}{x^2+x-12}=\frac{x^2-3x-4x+12}{x^2-3x+4x-12}=\frac{x(x-3)-4(x-3)}{x(x-3)+4(x-3)}=$
$=\frac{(x-4)\cdot(x-3)}{(x+4)\cdot(x-3)}=\frac{x-4}{x+4}$.

Машқлар. Касрларни қисқартиринг:

$$\frac{28a^3b^2}{21ab^3};\ \frac{135x^5y^2z}{25x^2y^4z^2};\ \frac{pq^3}{p^2q-pq^2};\ \frac{1-2a+a^2}{a^2-1};\ \frac{27a^6-1}{b-3ab};\ \frac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1};$$

$$\frac{2x^3y+2xy^3}{x^4-y^4};\ \frac{3a^2-6ab+3b^2}{6a^2-6b^2};\ \frac{a-b}{a^2-b^2};\ \frac{x^3+8}{2+x};\ \frac{1+x^3}{1-x+x^2};$$

$$\frac{a+b}{a^3+b^3};\ \frac{8x^3+1}{x+\frac{1}{2}}.$$

в) Касрларни қўшиш ва айириш

Касрларни қўшиш ёки айириш учун уларни олдин умумий махражга келтириб, кейин қўшиш ёки айириш керак. Бир неча мисолларни ечиб кўрамиз (мисолларни ечишда бўладиган мулоҳазалар ўқувчига топширилади).

1-мисол.

$$\frac{5}{6ab}+\frac{3}{2a^2c}-\frac{12}{5ab^3c}=\frac{25ab^2c+45b^3-72a}{30a^2b^3c}.$$

2-мисол.

$$\frac{a+b}{7a-7b}-\frac{ab}{a^2-b^2}+\frac{2a}{a+b}=\frac{a^2+2ab+b^2-7ab+14a^2-14ab}{7(a^2-b^2)}=$$

$$=\frac{15a^2-19ab+b^2}{7(a^2-b^2)}.$$

3-мисол.

$$\frac{2a+1}{a^3-ax(2a-x)}+\frac{2}{a(a-x)}=\frac{3a+1}{a(a-x)^2}+\frac{2}{a(a-x)}=$$

$$=\frac{2a+1+2a-2x}{a(a-x)^2}=\frac{5a-2x+1}{a(a-x)^2}.$$

4-мисол.

$$\frac{7}{8a^2-18b^2}+\frac{1}{2a^2+3ab}-\frac{1}{4ab-6b^2}=\frac{7ab+4ab-6b^2-2a^2-3ab}{2ab(4a^2-9b^2)}=$$

$$=\frac{4ab-3b^2-a^2}{ab(4a^2-9b^2)}.$$

Берилган касрнинг умумий махражини топиш учун махражларни бундай ёзиб олиш қулайдир:

$$8a^2-18b^2=2(4a^2-9b^2)=2(2a-3b)(2a+3b),$$
$$2a^2+3ab=a(2a+3b);\ 4ab-6b^2=2b(2a-3b).$$

Касрларда умумий махраж топиш, умуман, анча кўп вақт талаб қилади. Лекин кўп ҳолларда қуйидаги қоидалардан фойдаланиш умумий махраж топишни осонлаштиради.

1-қоида. *Махражлари бирҳаддан иборат касрларнинг энг кичик умумий махражи — берилган махражлар коэффициентларининг энг кичик умумий бўлинувчисини ўша махражлардаги турли ҳарфларнинг ҳаммасига кўпайтиришдан ҳосил бўлган ифодага тенг.* Бунда ҳар қайси ҳарф бу махражлардаги энг катта кўрсаткичи билан олинади (1-мисолга қаранг .

2-қоида. *Махражлари кўпҳаддан иборат касрларнинг энг кичик умумий махражга келтириш учун, махражларни кўпайтувчиларга ажратиш керак, кейин махражлардаги коэффициентларнинг энг кичик умумий бўлинувчисини топиб, уни махражлардаги энг катта кўрсаткичли бошқа кўпайтувчиларнинг ҳар бирига кўпайтириш керак* (2 ва 3-мисолларга қаранг).

Машқлар. Қуйидаги амалларни бажаринг:

$$\frac{4+5x}{3+2x}-\frac{-9-5x+10x^2}{4x^2-9}.$$

$\left(\text{Жавоб. } \frac{1}{3-2x}.\right)$

$$\frac{1}{x-2a}+\frac{1}{x-2a}+\frac{8a^2}{4a^2x-x^3}.$$

$\left(\text{Жавоб. } \frac{2}{x}.\right)$

$$\frac{\frac{x}{x-1}-\frac{x+1}{x}}{\frac{x}{x+1}-\frac{x-1}{x}}.$$

$\left(\text{Жавоб. } \frac{x+1}{x-1}.\right)$

$$\frac{3a+2}{a^2-2a+1}-\frac{6}{a^2-1}-\frac{3a-2}{a^2+2a+1}.$$

$\left(\text{Жавоб. } \frac{10(a^2+1)}{(a^2-1)^2}.\right)$

$$\frac{1}{p-3}+\frac{3}{2p+6}-\frac{p}{2p^2-12p+18}.$$

$\left(\text{Жавоб. } \frac{4p^2-21p+9}{2(p-3)(p^2-9)}.\right)$

$$\frac{7}{3x^2y}+\frac{3}{15xy^2}-\frac{11}{5x^3y}.$$

$\left(\text{Жавоб. } \frac{3x^2+35xy-33y}{15x^3y^2}.\right)$

$$\frac{5}{3m+3n}-\frac{3(m+n)}{2m^2+4mn+2n^2}.$$

$\left(\text{Жавоб. } \frac{1}{6(m+n)}.\right)$

г) Касрларни кўпайтириш ва бўлиш

Алгебраик касрларда ҳам касрни касрга кўпайтирганда суратини суратига кўпайтириб — сурат, махражини махражига кўпайтириб — махраж қилиб ёзиш керак; агар улар қисқарса, қисқартириб, кейин қолган касрларни кўпайтириш керак.

1- мисол.

$$\frac{8xy}{3(x+y)}\cdot\frac{5x}{7(x+y)}=\frac{40x^2y}{21(x+y)^2}.$$

2- мисол.

$$\frac{4y^2-x^2}{xy-x^2}\cdot\frac{x-y}{(x+2y)y}=\frac{(2y-x)(2y+x)}{x(y-x)}\cdot\frac{x-y}{(x+2y)y}=\frac{2y-x}{-x}\cdot\frac{1}{y}=$$

$$=-\frac{2y-x}{xy}=\frac{x-2y}{xy}.$$

3- мисол.

$$\frac{3a^2+3ab+3b^2}{4a+4b}\cdot\frac{2a^2-2b^2}{9a^3-9b^3}=\frac{3(a^2+ab+b^2)}{4(a+b)}\cdot\frac{2(a-b)(a+b)}{9(a-b)(a^2+ab+b^2)}=\frac{1}{6}.$$

Касрни касрга бўлишда ҳам, арифметикадаги оддий касрларни бир-бирига бўлиш қоидасидан фойдаланиш керак.

4- мисол.

$$\frac{x^2+xy}{5x^2-5y^2}:\frac{x^2-xy}{3x^3-3y^3}=\frac{x(x+y)\cdot 3(x^3-y^3)}{5(x^2-y^2)\cdot x(x-y)}=$$

$$=\frac{x(x+y)}{5(x+y)(x-y)}\cdot\frac{3(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x(x-y)}=\frac{3(x^2+xy+y^2)}{5(x-y)}.$$

5- мисол.

$$\frac{(n+m)^2}{nm-m^2}:\left[-\frac{nm+m^2}{(n-m)^2}\right]=-\frac{(n+m)^2\cdot(n-m)^2}{m(n-m)\cdot m(n+m)}=$$

$$=-\frac{(n+m)(n-m)}{m^2}=-\frac{n^2-m^2}{m^2}=\frac{m^2-n^2}{m^2}.$$

Машқлар. Қуйидаги амалларни бажаринг:

$$\frac{2ax}{yz}:\frac{3bx}{ay};\quad -\frac{4x^4y}{15a^2}\cdot\left(-\frac{125ab^2}{8x^3y}\right);\quad \frac{5\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}{7\frac{1}{4}+1\frac{2}{5}};\quad \frac{a^2+ab}{3a}:\frac{ab+b^2}{9b};$$

$$\frac{5m-5n}{4m+4n}\cdot\frac{8m+8n}{10m-10n};\quad \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2x}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x^2}}.$$

(Жавоб. x.)

$$\frac{am^2-an^2}{m^2+2mn+n^2}:\frac{am^2-2mna+an^2}{3m+3n}.$$

$\left(\text{Жавоб. } \frac{3}{m-n}.\right)$

$$\frac{a^4-x^4}{a^3-x^3}:\frac{a^3+x^2}{a^2-x^2};\quad \frac{x^2-5x+6}{x^2+7x+12}\cdot\frac{x^2+3x}{x^2-4x+4};\quad -\frac{4(a+b)^2}{(a-b)^2}\cdot\frac{3(a-b)^3}{(2a+2b)^3};$$

$$\frac{\frac{x}{x-1}+\frac{x+1}{x}}{\frac{x}{x+1}+\frac{x-1}{x}}.$$

$\left(\text{Жавоб. } \frac{x+1}{x-1}.\right)$

$$\frac{(x+y)^2}{xy-y^2}:\left[-\frac{xy+y^2}{(x-y)^2}\right].$$

$\left[\text{Жавоб. } 1-\left(\frac{x}{y}\right)^2.\right]$

$$\frac{\frac{x}{4}-1+\frac{1}{x}}{\frac{x}{2}+\frac{2}{x}-2}.$$

$\left(\text{Жавоб. } \frac{1}{2}.\right)$

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2+3x-10} : \frac{x^2+7x+12}{x^2-9x+14}.$$

$$\left(\text{Жавоб. } \frac{(x-1)(x-7)}{(x+5)(x+4)}.\right)$$

д) Касрларга доир аралаш мисоллар

Қуйида иккита мисол ишлаб кўрсатамиз. Бу мисолларда амалларнинг бирин-кетин бажарилишини текшириш китобхонга топширилади.

1- мисол.

$$\left[\frac{a-1}{3a+(a-1)^2} - \frac{1-3a+a^2}{a^3-1} - \frac{1}{a-1}\right] : \frac{a^2+1}{1-a} =$$

$$= \left[\frac{a-1}{3a+a^2-2a+1} - \frac{1-3a+a^2}{(a-1)(a^2+a+1)} - \frac{1}{a-1}\right] \cdot \frac{1-a}{a^2+1} =$$

$$= \left[\frac{a-1}{a^2+a+1} - \frac{1-3a+a^2}{(a-1)(a^2+a+1)} - \frac{1}{a-1}\right] \cdot \frac{1-a}{a^2+1} =$$

$$= \frac{a^2-2a+1-1+3a-a^2-a^2-a-1}{(a-1)(a^2+a+1)} \cdot \frac{1-a}{a^2+1} =$$

$$= \frac{-(a^2+1)}{-(a^2+a+1)} \cdot \frac{1}{a^2+1} = \frac{1}{a^2+a+1}.$$

2- мисол.

$$\frac{(a-y)^2}{(z-x)\cdot(z-y)} + \frac{(y-z)^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{(z-x)^2}{(y-x)(y-z)} =$$

$$= \frac{(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3}{(x-y)(z-x)(z-y)} =$$

$$= \frac{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3+y^3-3y^2z+3yz^2-z^3+z^3-3z^2x+3zx^2-x^2}{(x-y)(z-x)(z-y)} =$$

$$= \frac{-3x^2y+3xy^2-3y^2z+3zx^2+3yz^2-3z^2x}{(x-y)(z-x)(z-y)} =$$

$$= \frac{-3xy(x-y)+3z(x^2-y^2)-3z^2(x-y)}{(x-y)(z-x)(z-y)} = \frac{3(x-y)(-xy+zx+zy-z^2)}{(x-y)(z-x)(z-y)} =$$

$$= \frac{3[-z(z-y)+x(z-y)]}{(z-x)(z-y)} = \frac{-3(z-y)(z-x)}{(z-x)(z-y)} = -3.$$

Демак, аралаш мисолларни ечишда, касрлар устидаги ҳамма амалларнинг қоидаларига риоя қилиш керак.

Машқлар. Қуйидаги амалларни бажаринг:

1) $\left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+y} \cdot \left(\frac{x+y}{3x} - x - y\right)\right] : \frac{x-y}{x}.$

$$\left(\text{Жавоб. } \frac{2x}{x-y}.\right)$$

2) $\left(\frac{8+a^3}{x^2-y^2} : \frac{4-2a+a^2}{x-y}\right) : \left(x + \frac{xy+y^2}{x+y}\right).$

$$\left(\text{Жавоб. } \frac{a+2}{(x+y)^2}.\right)$$

3) $\left[\frac{2}{(m+n)^3}\cdot\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{m^2+2mn+n^2}\cdot\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)\right]:\frac{m-n}{m^3n^3}$.

(Жавоб. $\frac{mn}{m-n}$.)

4) $\left(\frac{a^2+b^2}{ab}-2\right):\left(\frac{2a^2+2ab}{a^2+2ab+b^2}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}\right)$.

(Жавоб. $\frac{2}{b}$.)

5) $\left(\frac{1}{p-2q}+\frac{6q}{4q^2-p^2}-\frac{2}{p+2q}\right):\left(\frac{p^2+4q^2}{p^2-4q^2}+1\right)$.

(Жавоб. $-\frac{1}{2p}$.)

6) $\left(\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right):\left(\frac{a^2}{a^3-b^3}-\frac{a}{a^2+ab+b^2}\right)$.

(Жавоб. $-\frac{2ab}{a+b}$.)

7) $\frac{b^2-1}{a^3+b^3}:\left[\frac{a+b}{1+ab-a^2-a^3b}+\frac{ab+1}{(a+b)(a^2-1)}\right]$.

(Жавоб. $-\frac{1+ab}{a^2-ab+b^2}$.)

8) $\left(\frac{3x-2y}{3x^2-5xy+2y^2}-\frac{1}{2y-3x}\right):\frac{1}{x}+\frac{2y^2+3xy-9x^2}{9x^2-12xy+4y^2}$.

(Жавоб. $\frac{x^2-xy+y^2}{(3x-2y)(x-y)}$.)

9) $\frac{x+y}{(y-z)(z-x)}+\frac{y+z}{(z-x)(x-y)}+\frac{z+x}{(x-y)(y-z)}$.

(Жавоб. 0.)

10) $\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-a)(b-c)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}$.

(Жавоб. $\frac{1}{abc}$.)

11) $\left(\frac{x-y}{2y-x}-\frac{x^2+y^2+y-2}{x^2-xy-2y^2}\right):\frac{4x^4+4x^2y+y^2-4}{x^2+y+xy+x}$.

(Жавоб. $\frac{x+1}{(2y-x)(2x^2+y+2)}$.)

12) $\left(\frac{2a+10}{3a-1}+\frac{130-a}{1-3a}+\frac{30}{a}-3\right)\cdot\frac{3a^3+8a^2-3a}{1-\frac{1}{4}a^2}$.

(Жавоб. $\frac{12(2a+5)(a+3)}{a-2}$.)

14- §. ТЕНГЛИК. АЙНИЯТ ВА ТЕНГЛАМАЛАР

1- таъриф. *Иккита ифодани тенглик ишораси билан боғлангани тенглик деб аталади.* Тенгликнинг қисқача ифодасини $a=b$ кўринишида ёзиш мумкин. Хоссалари:

1) $a = b$ бўлса, $b = a$ бўлади; 2) $a = b$ ва $b = c$ бўлса, $a = c$ бўлади; 3) $a = b$ ва $m = n$ бўлса, у ҳолда бу тенгликларнинг ўнг ва чап томонларини ҳаллаб қўшиш, айириш, кўпайтириш ва бўлиш мумкин:

$a+m=b+n$; $a-m=b-n$; $a\cdot m=b\cdot n$ ва $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}$ $(m\neq 0,\ n\neq 0)$.

2-таъриф. *Агар тенгликда қатнашган ифодалардаги ҳарфларнинг мумкин булган ҳамма қийматларида тенглик ўринли булса, бундай тенглик айният дейилади.* Масалан,

$$4\cdot(1+2x)-1=8x+3;\quad x^3-1=(x-1)(x^2+x+1);$$

$$\frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}=a+b$$

ва ҳоказо Тенгликлар айниятдир, чунки, улардаги ҳарфларнинг ҳар қандай қийматида тенглик сақланади.

3-таъриф. *Бир ёки бир неча ҳарфдан иборат тенгликнинг ҳар икки қисми, шу ҳарфларнинг ҳар қандай сон қийматида бир хил сон миқдорига эга бўлавермаса, бундай тенглик тенглама деб аталади.* Бу ҳарфлар билан белгиланган сонлар тенгламанинг *ноъмалум сонлари* дейилади.

Масалан, $3x-2=0$, бу тенглама, чунки ёлғиз $x=\frac{2}{3}$ қийматдагина тенглик сақланади, яъни $3\cdot\frac{2}{3}-2=2-2=0$; $0=0$ — айният ҳосил бўлади, аммо x нинг бошқа қийматларида $3x-2=0$ тенглик ўринли бўлмайди

Тенгламада номаълум сонларни белгиловчи ҳарфлардан бошқа, бирон маълум сонлардан иборат бўлган ҳарфлар ҳам қатнашса, бундай тенглама *ҳарфий тенглама* дейилади.

Масалан, $8x-a=2x-b$, бунда a, b лар маълум сонлар, x— номаълум сон. Бу тенгламани ёлғиз $x=\frac{a-b}{6}$ ифода қаноатлантиради, яъни $8\cdot\frac{a-b}{6}-a=2\frac{a-b}{6}-b$, бундан: $a-4\cdot b=a-4b$ айният ҳосил бўлади.

4 таъриф. *Тенгламадаги номаълумнинг тенгламани қаноатлантирадиган, яъни уни айниятга айлантирадиган сон қийматлари тенгламанинг илдизлари ёки ечимлари дейилади.* Масалан, бизнинг мисоллардаги $x=\frac{2}{3}$ ва $x=\frac{a-b}{6}$.

Тенгламанинг илдизини топиш, уни *ечиш* дийилади.

Тенгламалар бир номаълумли, икки номаълумли, уч номаълумли ва ҳоказо ҳамда биринчи даражали, иккинчи даражали, учинчи даражали ва ҳоказо бўлиши мумкин. Масалан, $7x-5=8-3x$ (1); $2x-3y+5=0$ (2); $7x-4y-5z-1=0$ (3) тенгламалар биринчи даражали тенгламалардир; $x^2-8x+15=0$ (4); $3xy-5x+2y-11=0$ (5) тенгламалар эса иккинчи даражали тенгламалардир.

Тенгламадаги номаълум сонннинг энг катта даража кўрсаткичи тенгламанинг *даражаси* дейилади. Агар тенгламада икки ёки ундан кўп номаълумлар қатнашса, унинг ҳар қайси ҳадидаги номаълумлар даража кўрсаткичлари йиғиндисидан энг каттаси шу тенгламанинг даражаси дейилади. Масалан, бизнинг мисолда (1) тенглама бир номаълумли 1- даражали тенглама, (2) тенглама икки номаълумли биринчи даражали тенглама; (3) тенглама уч номаълумли биринчи даражали тенглама; (4) тенглама бир номаълумли иккинчи даражали (квадрат) тенглама; (5) тенглама икки номаълумли иккинчи даражали тенгламадир.

а) Тенг кучли тенгламалар

Таъриф. *Иккита тенглама илдизларининг сони ва қийматлари ўзаро тенг бўлса, улар тенг кучли тенгламалар дейилади.*

Мисоллар. 1) $7x+5=8-3x$ ва $10x-3=0$ тенгламалар тенг кучли, чунки иккаласини ҳам ёлғиз $x=\frac{3}{10}=0{,}3$ қаноатлантиради.

2) $x^2-1=0$ ва $3x-3=0$ тенгламалар тенг кучли эмас, чунки биринчи тенгламани $x=\pm 1$, иккинчини эса ёлғиз $x=+1$ қаноатлантиради.

Берилган тенгламадан унга тенг кучли тенгламага ўтиш учун тенгламаларнинг қуйидаги икки хоссасидан фойдаланиш мумкин.

1) *Тенгламанинг иккала қисмига бир хил сонни қўшиш, айириш ёки тенгламанинг иккала қисмини нолга тенг бўлмаган бир хил сонга кўпайтириш ёки бўлишдан ҳосил бўлган тенглама берилган тенгламага тенг кучлидир.* Масалан, $12x-8=1+3x$ тенгламанинг иккала қисмига $(+8)$ ни қўшсак $12x=9+3x$. Берилган тенгламанинг иккала қисмини $(+2)$ га кўпайтирсак: $24x-16=2+6x$ ҳосил бўлади. Бу ерда $12x=$ $=9+3x$ ва $24x-16=2+6x$ тенгламалар $12x-8=1+3x$ тенгламага тенг кучлидир, чунки улардан ҳар бирини $x=+1$ гина қаноатлантиради.

2) *Тенгламанинг ҳадларини тенгликнинг бир қисмидан иккинчи қисмига унинг тескари ишораси билан ўтказиш мумкин.*

Масалан, $7x+5=8-3x$ ёки $7x+3x=8-5$; $10x=3$ бўлади, чунки $7x+5=8-3x$ нинг ҳар икки томонига (-5) ва $(+3x)$ ни қўшсак, $7x+3x=8-5$ ёки $10x=3$ бўлади.

б) Биринчи даражали бир номаълумли тенгламалар

$ax+b=0$ ёки $ax=-b$ кўринишдаги тенглама биринчи даражали бир номаълумли тенгламанинг нормал (энг содда) кўринишидир. x — номаълум сон; a ва b — маълум сонлар; b — *озод* ҳад, a — номаълумнинг *коэффициенти.*

— $ax+b=0$ тенгламани ечиш учун озод ҳадни тенгликнинг ўнг қисмига тескари ишора билан ўтказиб, уни номаълумнинг коэффициентига бўлиш керак: $ax=-b$, $x=-\frac{b}{a}$. Бу қиймат тенгламанинг илдизидир[1].

Агар тенглама нормал ҳолда бўлмаса, олдин уни нормал ҳолга келтириб кейин ечиш керак. Масалан, 1) $x+1\frac{1}{2}x+9=$ $=\frac{2}{3}x+4-\frac{6}{5}x+\frac{1}{5}+\frac{5}{6}x$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $x+1\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}x+\frac{6}{5}x-\frac{5}{6}x=4+\frac{1}{5}-9$ ёки

$\frac{30x+45x-20x-25x+36x}{30}=-\frac{24}{5}$ ёки

$116x=-144$; $x=-\frac{144}{116}=-\frac{36}{29}$.

2) $5x-1\frac{1}{2}a=1\frac{1}{2}x+3a$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $5x-1\frac{1}{2}x=3a+1\frac{1}{2}a$, $\frac{10x-3x}{2}=\frac{6a+3a}{2}$, $7x=9a$, $x=\frac{9}{7}a$.

3) $\frac{t+p}{q}-\frac{q}{p}=\frac{t-q}{p}+\frac{p}{q}$ $(p\neq 0,\ q\neq 0)$ тенглама ечилсин.

Ечиш. $\frac{t+p}{q}-\frac{t-q}{p}=\frac{p}{q}+\frac{q}{p}$, $p(t+p)-q(t-q)=p^2+q^2$ ёки $(p-q)t+p^2+q^2=p^2+q^2$, $(p-q)t=0$; $t=\frac{0}{p-q}=0$.

4) $(x+2)^2+3x-x^2-3=0$ тенглама ечилсин.

Ечиш. $(x+2)^2+3x-x^2-3=x^2+4x+4+3x-x^2-3=$ $=7x+1=0$.

Бундан:

$$x=-\frac{1}{7}.$$

5) $\frac{x+1}{a+b}-\frac{ax}{(a+b)^2}=\frac{a^2}{a^3-b^3}-\frac{b^2x}{a^3-ab^2+a^2b-b^3}$ $(a\neq b$ ва $a\neq -b)$ тенглама ечилсин.

---

[1] Биринчи даражали бир номаълумли тенгламаларни ечишнинг умумий қоидасини *Муҳаммад ибн Мусо ал-Хоразмий* (IX аср) берган. У ўзининг „Алжабр ва ал-муқобала" номли асарида тенгламалар ечишда қўлланиладиган икки усулни беради. *Масалан*, $8x-3=5x-2$ *тенглама* берилган бўлсин. „Алжабр"ни татбиқ этамиз, бу ҳолда тенгламанинг иккала томонига 2 ва 3 ни қўшамиз: $8x+2=5x+3$ бўлади, энди „Ал-муқобала"ни татбиқ этамиз, бу ҳолда ҳосил бўлган тенгламадан 2 ва $5x$ ни айирамиз: $3x=1$ ҳосил бўлади. Бундан $x=\frac{1}{3}$ —илдиз. Бу эса тенгламанинг ҳадларини тенгликнинг бир томонидан иккинчи томонига ўтказиб ёзиш қоидасини беради.

Ечиш. Умумий махраж топиш учун, дастлаб махражларни соддалаштирамиз: $a^3 - ab^2 + a^2b - b^3 = a(a^2 - b^2) + b(a^2 - b^2) = (a + b)(a^2 - b^2)$; $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Демак, $(a + b)^2 \cdot (a^3 - b^3)$ — умумий махраж. Энди берилган тенгламани умумий махражга келтириб ёзилса, қуйидагидек бўлади:

$$\frac{x+1}{a+b} - \frac{ax}{(a+b)^2} = \frac{a^2}{a^3-b^3} - \frac{b \cdot x}{(a^2-b^2)(a+b)}.$$

Умумий махражни ташласак, ушбу тенглама ҳосил бўлади:

$$(a + b) \cdot (a^3 - b^3)\, x + (a + b)(a^3 - b^3) - a(a^3 - b^3)\, x =$$
$$= a^2(a+b)^2 - b^2(a^2+ab+b^2)\ x \text{ ёки } [(a+b)(a^3-b^3) - a(a^3-b^3) +$$
$$+ b^2(a^2 + ab + b^2)]\, x = a^2(a + b)^2 - (a + b)(a^3 - b^3) \text{ ёки}$$
$$[(a^2 + ab + b^2)(a^2 - b^2 - a^2 + ab + b^2)]\, x =$$
$$= (a + b)(a^3 + a^2b - a^3 + b^3) \text{ ёки } ab(a^2 + ab + b^2)\, x =$$
$$= b(a + b) \cdot (a^2 + b^2), \text{ бундан } x = \frac{(a+b)(a^2+b^2)}{a(a^2+ab+b^2)}.$$

6) $$\left(\frac{a+1}{ax+1} + \frac{x+1}{x+a^{-1}} - 1\right) : \left[\frac{a+1}{(x+a^{-1})a} - \frac{a(x+1)}{ax+1} + 1\right] = \frac{x}{2}$$

тенглама ечилсин ($ax + 1 \neq 0$).

Ечиш. Дастлаб қавслар ичидаги ифодаларни соддалаштирамиз.

$$\frac{a+1}{ax+1} + \frac{x+1}{x+a^{-1}} - 1 = \frac{a+1}{ax+1} + \frac{x+1}{x+\frac{1}{a}} - 1 = \frac{a+1}{ax+1} +$$
$$+ \frac{a(x+1)}{ax+1} - 1 = \frac{a+1+ax+a-ax-1}{ax+1} = \frac{2a}{ax+1}.$$
$$\frac{a+1}{(x+a^{-1})a} - \frac{a(x+1)}{ax+1} + 1 = \frac{a+1}{ax+1} - \frac{ax+a}{ax+1} + 1 =$$
$$= \frac{a+1-ax-a+ax+1}{ax+1} = \frac{2}{ax+1}.$$

Демак, берилган тенглама $\frac{2a}{ax+1} : \frac{2}{ax+1} = \frac{x}{2}$ куринишга келади. Бу тенгламани соддалаштирсак $a = \frac{x}{2}$ бўлади. Бундан $x = 2a$ — илдиз.

7) $$x + 2 - \frac{2x - \frac{4-3x}{5}}{15} = \frac{7x - \frac{x-3}{2}}{5}$$ тенглама ечилсин.

Ечиш. Тенглама ҳадларини қуйидагича кетма-кет соддалаштирамиз:

$$\frac{2x - \frac{4-3x}{5}}{15} = \frac{10x - 4 + 3x}{75} = \frac{13x - 4}{75}$$

$$x+2-\frac{13x-1}{75}=\frac{75x+150-13x+4}{75}=\frac{62x+154}{75};$$

$$\frac{7x-\frac{x-3}{2}}{5}=\frac{14x-x+3}{10}=\frac{13x+3}{10}.$$

Демак,

$$\frac{62x+154}{75}=\frac{13x+3}{10}.$$

Бу тенгликнинг иккала қисмини 5 га кўпайтириб, умумий махражга келтирсак; $124x+308=195x+45$ ёки $71x=263$ бўлади. Бундан: $x=\frac{263}{71}=3\frac{50}{71}$.

8) $\frac{3(1,2-x)}{10}-\frac{5+7x}{4}=x+\frac{9x+0,2}{20}-\frac{4(13x-0,6)}{5}$ тенглама ечилсин.

Ечиш. Тенглама ҳадларини қуйидаги тартибда соддалаштириб ёзамиз:

$$\frac{3(1,2-x)}{10}+\frac{4(13x-0,6)}{5}=\frac{3,6-3x+104x-4,8}{10}=\frac{101x-1,2}{10};$$

$$x+\frac{9x+0,2}{20}+\frac{5+7x}{4}=\frac{20x+9x+0,2+25+35x}{20}=\frac{64x+25,2}{20}.$$

Демак, $\frac{101x-1,2}{10}=\frac{64x+25,2}{20}$ ёки $202x-2,4=64x+25,2$ ёки $138x=27,6$ тенглама ҳосил бўлади. Бундан:

$$x=\frac{27,6}{138}=0,2.$$

в) Махражида номаълум ҳад бўлган тенгламалар

Кўпинча махражида номаълум ҳад бўлган тенгламаларни ечишга тўғри келади. Бундай тенгламаларни ечиш алоҳида эътибор талаб қилади. Буни мисолларда кўриб чиқамиз.

1- мисол. $\frac{7}{2x-1}=2$ тенглама ечилсин.

Ечиш. $\frac{7}{2x-1}=2$ нинг икки томонини $2x-1\neq0$ га кўпайтирамиз: $7=2(2x-1)$ ёки $7=4x-2$ ёки $4x=9$, бундан: $x=\frac{9}{4}$. Бу қиймат, берилган ва ҳосил бўлган тенгламаларни қаноатлантиради; демак, улар тенг кучли тенгламалар, $x=\frac{9}{4}$ эса илдиз.

2- мисол. $5+\frac{1}{x-4}=\frac{5-x}{x-4}$ тенглама ечилсин.

Ечиш. $5+\frac{1}{x-4}=\frac{5-x}{x-4}$ (1). Бунинг иккала қисмини $(x-4)\neq 0$ га кўпайтирамиз: $5x-20+1=5-x$ (2) ёки $6x=24$, $x=4$ бўлади. $x=4$ (2) тенгламани қаноатлантиради, лекин $x=4$ бўлганда (1) тенгламанинг умумий махражи нолга айланиб, ундаги касрли ҳадлар маъносини йўқотади, $x=4$ бўлиши $x-4\neq 0$ деб қилинган фаразнинг тўғри эмаслигини кўрсатади. Бундаги $x=4$ (1) тенгламанинг чет илдизи дейилади.

3- мисол. $\frac{7}{3x-2}-2=\frac{3x-9}{2-3x}$ тенглама ечилсин.

Ечиш. Тенгламани умумий махражга келтиргандан кейин $7-6x+4=9-3x$ ёки $3x=2$ бўлиб, бундан $x=\frac{2}{3}\cdot$

Текшириш. $\frac{7}{3\cdot\frac{2}{3}-2}-2=\frac{3\cdot\frac{2}{3}-9}{2-3\cdot\frac{2}{3}}$ ёки $\frac{7}{2-2}-2=\frac{-7}{2-2}$; бунинг бўлиши мумкин эмас. Демак, $x=\frac{2}{3}$ чет илдиз.

4- мисол. $\frac{x}{3-x}-5=\frac{3(x-4)}{3-x}$ тенглама ечилсин.

Ечиш. Тенгламани умумий махражга келтириб, соддалаштирсак, $9x-27=0$ бўлиб, бундан $x=\frac{27}{9}=3$.

Текшириш. $\frac{3}{3-3}-5=\frac{3(3-4)}{3-3}$, бу мумкин эмас. Демак, $x=3$ чет илдиз.

5- мисол. $\frac{x-a}{2x-b}-\frac{3x+b}{6x-a}=0$ (1) тенглама ечилсин.

Ечиш. Тенгламанинг иккала қисмини $(6x-a)\cdot(2x-b)\neq 0$ га кўпайтирамиз: $6x^2-6ax-ax+a^2-6x^2-2bx+3bx+b^2=0$ (2) ёки $(7a-b)x=a^2+b^2$, бундан: $x=\frac{a^2+b^2}{7a-b}$ $(7a-b\neq 0)$. Буни (1) тенгламага қўямиз:

$$\frac{\frac{a^2+b^2}{7a-b}-a}{2\cdot\frac{a^2+b^2}{7a-b}-b}-\frac{3\cdot\frac{a^2+b^2}{7a-b}+b}{6\,\frac{a^2+b^2}{7a-b}-a}=\frac{a^2+b^2-7a+ab}{2a^2+2b^2-7ab+b^2}-$$

$$-\frac{3a^2+3b^2+7ab-b^2}{6a^2+6b^2-7a^2+ab}=0$$

ёки

$$6b^4-3a^2b^2+6ab^3-a^2b^3+6a^4-a^3b+ab^3-6a^3b+a^2b^2-6a^4-$$
$$-4a^2b^2-14a^3b-6b^4-9a^2b^2-21ab^3+21a^3b+14ab^3+49a^2b^2=0$$

ёки $0=0$ бўлади.

Демак, $x=\frac{a^2+b^2}{7a-b}$ (1) ва (2) тенгламалар учун умумий илдиз, яъни (1) ва (2) тенгламалар тенг кучлидир.

Машқлар. Қуйидаги тенгламаларни ечинг ва топилган қийматлар тенгламани қаноатлантирадими-йўқми, текшириб кўринг:

1) $\frac{x}{a}-\frac{a}{2x}=\frac{2x+a}{2a}-\frac{a}{x}$;

2) $\frac{a}{t}-\frac{b}{ct}=\frac{d}{ct}-\frac{b-a}{c}$;

3) $2-\frac{x-3}{x+3}=\frac{3x-1}{3x+1}$;

4) $\frac{z+2}{z-2}=\frac{z^2}{z^2-4}+\frac{6}{z+2}$;

5) $\frac{12}{1-9x^2}=\frac{1-3x}{1+3x}+\frac{1+3x}{3x-1}$;

6) $\frac{5-a}{4b-x}-\frac{5+a}{4b+x}=0$;

7) $\frac{3}{x-a}-\frac{2}{x+a}=\frac{3x-7a}{x^2-a^2}$;

8) $2-\frac{3u}{3u-2}=\frac{2u-9}{2u-5}$;

9) $\frac{3}{1-6t}=\frac{2}{6t+1}-\frac{8+9t}{36t^2-1}$;

10) $\frac{5}{7-x}+1=\frac{2x-14}{7-x}$;

11) $3+\frac{2}{x-1}+\frac{3-x}{1-x}=0$;

12) $\frac{1}{3}\cdot(t-2)-\frac{1}{7}(5t-6)=\frac{22t-63}{105}-\frac{1}{5}(3t-4)$.

(Жавоб. 1.)

13) $x-\frac{\frac{x}{2}-\frac{3+x}{3}}{2}=3-\frac{\left(1-\frac{9-x}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}}{2}$.

(Жавоб. 3.)

14) $\frac{9x-0{,}7}{4}-\frac{5x-1\frac{1}{2}}{7}=\frac{7x-1{,}1}{3}-\frac{5\cdot(0{,}4-2x)}{6}$.

(Жавоб. 0,3.)

15) $\frac{b+x}{a^2+2ab+b^2}+\frac{2x}{a}=\frac{x-b}{a^2-b^2}+\frac{x+b}{a+b}+\frac{x-b}{a-b}$.

(Жавоб. a.)

16) $\frac{12y^2+30y-21}{16y^2-9}=\frac{3y-7}{3-4y}+\frac{6y+5}{4y+3}$.

(Жавоб. 3.)

17) $\frac{x}{3a+x}-\frac{x}{x-3a}=\frac{a^2}{9a^2-x^2}$.

(Жавоб. $\frac{a}{6}$.)

18) $\frac{a}{ac+bc}+\frac{a-b}{2bx}=\frac{a+b}{2bc}-\frac{b}{ax+bx}$.

(Жавоб. c.)

15- §. ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАЛАРИ

1. Биринчи даражали икки номаълумли иккита тенглама системаси

Таъриф. *Номаълум x, y сонларни иккита 1- даражали тенгламалар билан боғланишига 1- даражали икки номаъ-*

лумли иккита тенглама системаси дейилади[1]. Бундай тенгламанинг умумий кўринишини

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases} \qquad (1)$$

шаклда ёзиш мумкин.

(1) кўринишдаги система биринчи даражали икки номаълумли икки тенглама системасининг *нормал* кўриниши дейилади. Бунда: x ва y лар номаълум сонлар, a; b; c; a_1; b_1; c_1 лар берилган сонлар ёки *ҳарфий коэффициентлар* дейилади.

Ечиш усуллари:

Қўшиш усули.

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$

берилган бўлсин. Қўшиш усулида номаълум x ва y лардан биттасини, масалан, y ни йўқотиш керак. Бунинг учун (1) нинг биринчи тенгламасини b_1 га, иккинчи тенгламасини $-b$ га ҳадлаб кўпайтирамиз, ундан кейин биринчи тенглама билан иккинчи тенгламани ҳадлаб қўшамиз:

$$+\begin{cases} ab_1x + bb_1y = cb_1 \\ -a_1bx - bb_1y = -cb \end{cases}$$
$$\overline{(ab_1 - a_1b)x = cb_1 - c_1b}$$

бундан: $x = \frac{cb_1 - c_1b}{ab_1 - a_1b}$. Энди x нинг бу қийматини тенгламалардан биттасига қўйиб y ни топамиз, масалан, 1-тенгламага қўйиб, уни соддалаштирсак, $y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}$ ҳосил бўлади. Бу чиқарилган x, y нинг формулаларида махраж $ab_1 - a_1b \neq 0$ бўлиши керак.

1-мисол.

$$\begin{cases} 5x - 2y = 1, \\ 3x + 4y = 24 \end{cases}$$

система қўшиш усули билан ечилсин.

Ечиш. Биринчи тенгламани 2 га, иккинчи тенгламани 1 га ҳадлаб кўпайтириб, натижани ҳадлаб қўшамиз; айтилганларни бундай ёзамиз:

$$+\begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ 3x + 4y = 24 \end{cases}\left|\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}\right.$$
$$\overline{13x + 0 = 26}$$

---

[1] Икки номаълумли икки тенгламада бир хил исмли номаълумлар бир хил сонларни белгиласа, улар система ташкил этади.

бундан: $x = \frac{26}{13} = 2$. Энди y ни топамиз. $5 \cdot 2 - 2y = 1$ ёки $2y = 9$, бундан: $y = \frac{9}{2} = 4{,}5$.

2-мисол.

$$\begin{cases} 3ax + 2by = 8, \\ ax - by = -5 \end{cases}$$

система қўшиш усули билан ечилсин.

Ечиш.

$$+\begin{cases} 3ax + 2by = 8 \\ ax - by = -5 \end{cases}\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$$
$$\overline{5ax + 0 = -2}$$

бундан: $x = -\frac{2}{5a}$. Энди x нинг бу қийматини иккинчи тенгламага қўямиз:

$a \cdot \left(-\frac{2}{5a}\right) - by = -5$, $-2 + 25 = 5bx$, $5by = 23$, бундан: $y = \frac{23}{5b}$.

Ўрнига қўйиш усули.

Ушбу

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$

система берилган бўлсин.

Бу усулда тенгламаларнинг биттасидан, масалан, биринчисидан битта номаълумни, масалан, y ни иккинчи номаълум x билан ифодалаб уни иккинчи тенгламага қўйиб, ҳосил бўлган бир номаълумли биринчи даражали тенгламани ечамиз. Яъни $ax + by = c$ тенгламадан: $y = \frac{c - ax}{b}$, буни иккинчи тенгламага қўйиб соддалаштирсак:

$a_1x + b_1 \cdot \frac{c - ax}{b} = c_1$ ёки $(a_1b - ab_1)x = bc_1 - b_1c$, $(ab_1 - a_1b)x = cb_1 - c_1b$ бўлади. Кейинги тенгламадан x ни топамиз. $x = \frac{cb_1 - c_1b}{ab_1 - a_1b}$. x нинг қийматини ўрнига қўйсак:

$$y = \frac{c - a \cdot \frac{cb_1 - c_1b}{ab_1 - a_1b}}{b} = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}, \quad (ab_1 - a_1b \neq 0).$$

Мисол.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ 13x - 11y = 2 \end{cases}$$

система ўрнига қўйиш усули билан ечилсин.

Ечиш $3x + 2y = 5$ тенгламадан: $y = \frac{5 - 3x}{2}$; y нинг бу қийматини иккинчи тенгламага қўямиз: $13x - 11 \cdot \frac{5 - 3x}{2} = 2$ ёки

$26x - 55 + 33x = 4$ ёки $59x = 59$, бундан: $x = 1$; демак, $y = \frac{5 - 3\cdot 1}{2} = 1$.

(Жавоб. $x = y = 1$.)

Агар тенгламалар системаси нормал ҳолда бўлмаса, олдин уни нормал кўринишга келтириб, ундан кейин юқоридаги усул билан ечиш керак.

Масалан,

$$\begin{cases} \frac{5x - 4}{3y + 2} = \frac{15x - 2}{9y + 4}, \\ 3(3y + 4) + 4(5x - 2) = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системаси ечилсин.

Ечиш. Тенгламалар системасини дастлаб соддалаштириб, ундан кейин ечамиз:

$(5x - 4)(9y + 4) = (15x - 2)(3y + 2)$, $45xy + 20x - 36y - 16 = 45xy + 30x - 6y - 4$, $10x + 30y = -12$, $5x + 15y = -6$;

$$3(3y + 4) + 4(5x - 2) = 0, \quad 9y + 12 + 20x - 8 = 0,$$

ёки $20x + 9y = -4$.

$$+\begin{cases} 20x + 9y = -4 \\ 5x + 15y = -6 \end{cases}\begin{vmatrix} 1 \\ -4 \end{vmatrix}.$$

$$-51y = 20,$$

$$y = -\frac{20}{51}.$$

Энди x ни топамиз:

$$x = \frac{-4 - 9y}{20} = \frac{-4 + \frac{60}{17}}{20} = -\frac{2}{85}.$$

Машқлар. Қуйидаги тенгламалар системалари ечилсин:

$$1)\ \begin{cases} 2x + y = 8; \\ 3x + 4y = 17. \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} 7x + 9y - 8 = 0; \\ 9x - 8y - 69 = 0. \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} 12x + 16y + 1 = 0; \\ 15x + 20y + 10 = 0. \end{cases}$$

$$4)\ \begin{cases} 3ax + 2by = 8; \\ ax + 2by = -3. \end{cases}$$

$$5)\ \begin{cases} \frac{3x - 2y}{5} + \frac{5x - 3y}{3} = x + 1; \\ \frac{2x - 3y}{3} + \frac{4x - 3y}{2} = y + 1. \end{cases}$$

(Жавоб. $x = 3$; $y = 2$.)

6) $$\begin{cases} \dfrac{0{,}2x + 0{,}1y}{2} - \dfrac{4x - y}{10} = \dfrac{3x + 0{,}5y}{30} + \dfrac{x - y}{5}; \\ \dfrac{3x + 2y - 1}{8} = 3 - \dfrac{0{,}8x - 5y}{41}. \end{cases}$$

(Жавоб. $x = 5$; $y = 9$.)

7) $$\begin{cases} \dfrac{15}{x} - \dfrac{7}{y} = 9; \\ \dfrac{4}{x} + \dfrac{9}{y} = 35. \end{cases}$$

$\left(\text{Жавоб. } x = \dfrac{1}{2}; y = \dfrac{1}{3}.\right)$

(*Кўрсатма.* Бундай мисоллар, олдин $\dfrac{1}{x} = u$ ва $\dfrac{1}{y} = v$ деб олиб, кейин ечилса қулай бўлади.)

8) $$\begin{cases} \dfrac{2cx}{a} - \dfrac{y}{a} = 5c; \\ \dfrac{2x}{3} - \dfrac{y}{c} = a. \end{cases}$$

(Жавоб. $x = 3a$; $y = ac$.)

9) $$\begin{cases} 13x - 5y = 6; \\ 13y - 5x = 6. \end{cases}$$

Бу системада тенгламаларнинг биридан иккинчисини ҳосил қилиш учун, ундаги x ни y билан, y ни x билан алмаштириш кифоя. Бундай системаларни ечиш учун, $x = y$ деб, тенгламалардан биттасига қўйиб ечиш қулайдир. $y = x$ ни $13x - 5y = 6$ га қўямиз: $13x - 5x = 6$ ёки $8x = 6$, бундан: $x = \dfrac{3}{4}$. Демак $y = x = \dfrac{3}{4}$.

10) $$\begin{cases} 4\cdot(0{,}1x + 1) + 5 = 1{,}1y; \\ \dfrac{11 + 0{,}3y - x}{x} - 5 = 4\left(\dfrac{1}{x} - 1\right). \end{cases}$$

(Жавоб. 5; 10.)

11) $$\begin{cases} a\left(x - \dfrac{1}{b}\right) = b\left(y + \dfrac{1}{a}\right); \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}. \end{cases}$$

$\left(\text{Жавоб. } \dfrac{a + b}{ab}; \dfrac{a - b}{ab}.\right)$

12) $$\begin{cases} \dfrac{a - 1}{a^2y^2 - 2ay} - \dfrac{x + y}{2y} = \dfrac{1}{a}; \\ \dfrac{x}{2a} + \dfrac{y}{2a - 4} = \dfrac{a + 1}{a^3 - 4a}. \end{cases}$$

$\left(\text{Жавоб. } \dfrac{1}{a - 2}; \dfrac{1}{a + 2}.\right)$

$$13)\ \begin{cases} \frac{8}{x} - \frac{5}{4y} = 6{,}5; \\ \frac{3}{2x} - \frac{}{5y} = 1\frac{3}{20}. \end{cases}$$

(Жавоб. $2; -\frac{1}{2}.$)

$$14)\ \begin{cases} \frac{27}{2x-y} + \frac{32}{x+3y} = 7; \\ \frac{45}{2x-y} - \frac{48}{x+3y} = -1. \end{cases}$$

(Жавоб. 5; 1.)

$$15)\ \begin{cases} 1\ 5x - 1\frac{1}{4} = \frac{3(2x+3)}{4} - \frac{3x+5y}{2(3-2x)}; \\ \frac{3(2x-y)}{2(y-4)} - 4 + \frac{8y+7}{10} = 0{,}8y-1{,}8. \end{cases}$$

(Жавоб. $\frac{1}{2}; \frac{5}{2}$)

2. Уч номаълумли биринчи даражали учта тенглама системаси

Бундай системанинг умумий кўринишини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d, \\ a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2. \end{cases} \qquad (2)$$

Бунда x, y, z лар номаълум сонлар бўлиб, a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 d ,d_1, d_2 лар маълум сонлар (коэффициентлар) дир.

(2) уч номаълумли биринчи даражали учта тенглама системасининг *нормал* кўриниши дейилади. (2) системани ҳам қўшиш ва ўрнига қўйиш усуллари билан ечиш мумкин.

Қўшиш усули. Дастлаб битта номаълум, масалан, z ни йўқотиб, икки номаълумли икки тенглама системасига келтирамиз:

$$+\begin{cases} ax + bv + cz = d \\ a_1x + b_1v + c_1z = d_1 \end{cases} \begin{vmatrix} c_1 \\ -c \end{vmatrix}$$

$$\overline{(ac_1 + a_1c)\,x + (bc_1 - cb_1)y = dc_1 - d_1c;}$$

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases} \begin{vmatrix} c_2 \\ -c \end{vmatrix}$$

$$\overline{(ac_2 - a_2c)\,x + (bc_2 - b_2c)\,y = dc_2 - d_2c;}$$

$$\begin{cases} (ac_1 - a_1c)\,x + (bc_1 - cb_1)y = dc_1 - d_1c; \\ (ac_2 - a_2c)\,x + (bc_2 - b_2c)\,y = dc_2 - a_2c. \end{cases}$$

Бу икки номаълумли икки тенглама системаси юқорида баён қилинган йўллар билан ечилади. Топилган x, y ларнинг қийматларини берилган тенгламадан биттасига қўйилса, ундан z топилади.

1-мисол.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 1, \\ 4x + 3y + z = -9, \\ -x + 4y - z = -4 \end{cases}$$

система қўшиш усули билан ечилсин.

Ечиш. Ечишда бўладиган мулоҳазалар китобхонга топширилади.

$$+\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ 4x + 3y + z = -9 \end{cases} \left| \begin{array}{r} 1 \\ -3 \end{array} \right. \qquad +\begin{cases} 4x + 3y + z = -9 \\ -x + 4y - z = -4 \end{cases}$$

$$-10x - 8y = 28; \qquad\qquad 3x + 7y = -13;$$

$$+\begin{cases} -10x - 8y = 28 \\ \quad 3x + 7y = -13 \end{cases} \left| \frac{3}{10} \right.$$

$$46y = -46;$$

$$y = -\frac{46}{46} = -1; \quad x = \frac{-13 - 7y}{3} = \frac{-13 + 7}{3} = -2$$

Энди x ва y нинг қийматларини берилган тенгламалардан бирортасига қўйиб, z ни топамиз:

$$z = 4y - x + 4 = 4\cdot(-1) - (-2 + 4 = 2 \quad x = -2;$$
$$y = -1; \quad z = +2).$$

2-мисол. Тенгламалар системаси ечилсин:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{5}{12}; \\ \frac{2}{x} - \frac{1}{y} - \frac{4}{z} = \frac{5}{6}; \\ \frac{3}{x} + \frac{5}{y} - \frac{2}{z} = \frac{11}{4}. \end{array} \right.$$

Ечиш. Бу кўринишдаги тенгламаларни ечишда, дастлаб, $\frac{1}{x} = u$; $\frac{1}{y} = v$ ва $\frac{1}{z} = w$ деб белгилаб олиб, ундан кейин ечилса қулайроқ бўлади. Натижада

$$\left| \begin{array}{l} u + 2v + 3w = \frac{5}{12}, \\ 2u - v - 4w = \frac{5}{6}, \\ 3u + 5v - 2w = \frac{11}{4} \end{array} \right.$$

система ҳосил бўлади, бу 1- мисол каби ечилади:

$$+\left\{\begin{array}{l|l} 2u - v - 4w = \frac{5}{6} & -1 \\ 3u + 5v - 2w = \frac{11}{4} & 2 \end{array}\right.$$

$$4u + 11v = \frac{14}{3};$$

$$\left\{\begin{array}{l|l} u + 2v + 3w = \frac{5}{12} & 2 \\ 3u + 5v - 2w = \frac{11}{4} & 3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l|l} 4u + 11v = \frac{14}{3} & 11 \\ 11u + 19v = \frac{109}{12} & -4 \end{array}\right.$$

$$11u + 19v = \frac{109}{12}; \qquad 45v = 15;$$

$$v = \frac{1}{3};\ 4u = \frac{14}{3} - \frac{11}{3} = 1;\ u = \frac{1}{4};$$

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + 3w = \frac{5}{12};\quad w = -\frac{1}{6}.$$

Буларга кўра:

$$x = \frac{1}{u} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4;\ y = 3;\ z = -6.$$

Демак, $x = 4$; $y = 3$; $z = -6$.

Ўрнига қўйиш усули. (2) системада: масалан, $ax + by + cz = d$ тенгламадан z ни топиб, уни иккинчи ва учинчи тенгламаларга қўйиб соддалаштирилса, икки номаълумли икки тенглама системаси ҳосил бўлади:

$$z = \frac{d - ax - by}{c};$$

$$\text{ёки}\quad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1\cdot\frac{d - ax - by}{c} = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2\cdot\frac{d - ax - by}{c} = d_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(a_1 - \frac{ac_1}{c}\right)x + \left(b_1 - \frac{bc_1}{c}\right)y = d_1 - \frac{dc_1}{c}; \\ \left(a_2 - \frac{ac_2}{c}\right)x + \left(b_2 - \frac{bc_2}{c}\right)y = d_2 - \frac{dc_2}{c}. \end{cases}$$

Ҳосил қилинган бу икки номаълумли икки тенглама системаси юқорида баён қилинган маълум йўллар билан ечилади.

Мисол. Ушбу

$$\begin{cases} 15x - 4y + z = 1, \\ 4x + 3y + 2z = 9, \\ -5x + 4y - 3z = 13 \end{cases}$$

тенгламалар системаси ўрнига қўйиш усули билан ечилсин.

Ечиш. $15x - 4y + z = 1$ тенгламадан, $z = 1 - 15x + 4y$ ни топиб, қолган тенгламаларга қўямиз:

$$\begin{cases} 4x + 3y + 2 - 30x + 8y - 9 = 0 \\ -5x + 4y - 3 + 45x - 12y - 13 = 0 \end{cases}$$

ёки

$$+\left\{\begin{array}{r|l} -26x + 11y = 7 & 8 \\ 40x - 8y = 16 & 11 \end{array}\right.$$
$$\overline{232x + 0 = 232;}$$

бундан $x = 1$. Бу ҳолда: $y = 3$; $z = -2$.

(Жавоб. $x = 1$; $y = 3$; $z = -2$.)

Изоҳ. Уч номаълумли уч тенглама системаси одатда қўшиш усули билан ечилади.

Машқлар. Қуйидаги тенгламалар системалари ечилсин:

1) $$\begin{cases} 7x - 3y + 5z = 1, \\ -2x + y - z = -2, \\ x + 5y - 3z = 4. \end{cases}$$

(Жавоб. $x = 1{,}9$; $y = -1{,}65$; $z = -3{,}45$.)

2) $$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{3y}{4} + \frac{5z}{3} = 45, \\ 5{,}1x + \frac{6}{5}y - 4z = 15, \\ 0{,}1x - 0{,}4y + \frac{4}{5}z = 5. \end{cases}$$

(Жавоб. $x = 10$; $y = 20$; $z = 15$.)

3) $$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{6}{z} = 9, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{4}{z} = -5, \\ \frac{1}{z} - \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = -4. \end{cases}$$

(Жавоб. $x = \frac{1}{7}$; $y = \frac{1}{8}$; $z = 1$.)

4) $$\begin{cases} 0{,}4x + 0{,}3y - 0{,}2z = 4, \\ 0{,}6x - 0{,}5y + 0{,}3z = 5, \\ 0{,}3x + 0{,}2y + 0{,}5z = 22. \end{cases}$$

(Жавоб. $x = 10$; $y = 20$; $z = 30$.)

5) $$\begin{cases} \frac{6}{x + y} + \frac{5}{y + 3z} = 2, \\ \frac{15}{x + y} - \frac{4}{x - 2z} = \frac{1}{2}, \\ \frac{10}{y + 3z} - \frac{7}{x - 2z} = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

(Жавоб. $x = 4$; $y = 2$; $z = 1$.)

6) $$\begin{cases} \frac{12}{2x + 3y} - \frac{15}{6x + 8z} = 1, \\ \frac{30}{3x + 4z} + \frac{37}{5y + 9z} = 3, \\ \frac{222}{5y + 9z} - \frac{8}{2x + 3y} = 5. \end{cases}$$

(Жавоб. $x = 1$; $y = 2$; $z = 3$.)

7) $$\begin{cases} \dfrac{5}{2x+y}+\dfrac{2}{3y-z}-\dfrac{2}{5x-z}=\dfrac{1}{20}, \\ \dfrac{10}{2x+y}+\dfrac{5}{3y-z}-\dfrac{3}{5x-z}=\dfrac{2}{5}, \\ \dfrac{10}{2x+y}-\dfrac{1}{3y-z}-\dfrac{3}{5x-z}=-\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

(Жавоб. $x=5$; $y=10$; $z=20$.)

16- §. ИЛДИЗЛАР ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Ҳақиқий a соннинг m-даражали илдизи деб, шундай x сонга айтиладики, унинг m-даражаси a га тенг бўлади, a соннинг m-даражали илдизи мана бундай ёзилади: $\sqrt[m]{a}$ ва a соннинг m-даражали *илдизи* деб ўқилади, *a — илдиз остидаги сон* ёки *ифода; m — илдиз кўрсаткичи дейилади*. Илдиз *радикал* ҳам дейилади. ($\sqrt{}$ — илдиз ишораси 1525 йилда Рудольф деган олим томонидан киритилган.)

$a>0$ ва m жуфт сон бўлганда, $\sqrt[m]{a}$ иккита қарама-қарши сонга тенг бўлади. Масалан, $\sqrt{144}=\pm 12$, чунки $(\pm 12)^2=144$; $\sqrt[4]{256}=\pm 4$, чунки $(\pm 4)^4=256$ ва ҳоказо.

$a>0$ ва m — тоқ сон бўлганда, $\sqrt[m]{a}>0$ бўлади. Масалан, $\sqrt[3]{8}=2$, чунки $2^3=8$.

$a<0$ ва m — тоқ сон бўлганда $\sqrt[m]{a}<0$ бўлади. Масалан, $\sqrt[3]{-125}=-5$, чунки $(-5)^3=-125$. $a>0$ бўлганда, $(\pm\sqrt[m]{a})$ *алгебраик илдиз* дейилади.

Илдизнинг ёлғиз мусбат қиймати унинг *арифметик илдизи* дейилади. Масалан, $\sqrt{144}=12$; $\sqrt{36}=6$ ва ҳоказолар.

Энди, манфий сондан ҳақиқий сонлар соҳасида жуфт кўрсаткичли илдиз чиқариб бўлмаслигини кўрсатамиз: масалан, $\sqrt[4]{81}=\pm 3$ бўлади, чунки $(\pm 3)^4=81$, лекин $\sqrt[4]{-81}\neq\pm 3$, чунки $(\pm 3)^4\neq -81$.

Демак, манфий сондан ҳақиқий сонлар соҳасида жуфт кўрсаткичли илдиз чиқариб бўлмайди.

а) Кўпайтма ва бўлинманинг илдизи

Бир неча кўпайтувчиларнинг кўпайтмасидан илдиз чиқариш учун ҳар бир кўпайтувчидан шу даражали илдиз чиқариб, ҳосил бўлган натижаларни кўпайтириш керак:

$$\sqrt[n]{a\cdot b\cdot c\cdot d}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}\cdot\sqrt[n]{d}. \qquad (1)$$

Бу тенгликнинг тўғрилигини кўрсатамиз:

$$\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}\cdot\sqrt[n]{d}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\cdot\left(\sqrt[n]{b}\right)^n\cdot\left(\sqrt[n]{c}\right)^n\cdot\left(\sqrt[n]{d}\right)^n=a\cdot b\cdot c\cdot d$$

(илдиз таърифига кўра).

Иккинчи томондан $\left[\sqrt[n]{a\cdot b\cdot c\cdot d}\right]^n=a\cdot b\cdot c\cdot d$. Демак, (1) тенглик тўғридир.

Мисол. $\sqrt{9\cdot 4}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{4}=3\cdot 2=6$.

Бўлинмадан илдиз чиқариш учун бўлинувчининг шу даражали илдизини бўлувчининг шу даражали илдизига бўлиш кифоя, яъни

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}. \tag{2}$$

Бу тенгликнинг исботи:

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n}=\frac{a}{b}.$$

Иккинчи томондан: $\left[\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right]^n=\frac{a}{b}$. Демак, (2) тенглик тўғридир.

Мисол. $\sqrt{\frac{25}{9}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}}=\frac{5}{3}$.

Изоҳ. (1) ва (2) айниятларни ўнгдан чапга ўқилса, илдизларни кўпайтириш ва бўлиш қоидалари келиб чиқади.

б) Сонларнинг квадрат илдизини ҳисоблаш

1- мисол. $\sqrt{529}$ ҳисоблансин, 529 ни ўнгдан чапга қараб 2 тадан қилиб *гранларга* ажратамиз, сўнгра тенглик белгисининг ўнг томонига квадрати охирги грандан ортиб кетмайдиган сон 2 ни ёзамиз ва уни квадратга кўтариб охирги грандаги 5 тагига ёзиб айирамиз, сўнгра қолдиқ 1 ёнига иккинчи гран 29 ни туширамиз, кейин 129 нинг чап томонига вертикал чизиқ чизиб, унинг чап томонига топилган 2 ни 2 га кўпайтириб 4 ёзиш керак, сўнгра унинг ўнг томонига шундай рақам ёзиш керакки, ҳосил бўлган соннинг шу рақамга кўпайтмаси қолдиқ сондан ортиб кетмасин, масалан, бизнинг мисолда 3 ёзилса у 43 бўлади; энди 43 ни шу 3 га кўпайтириб кўпайтмани 129 нинг тагига ёзиб айирамиз, сўнгра 3 ни 2 нинг ёнига олиб бориб ёзилса, 23 бўлади. Демак, 529 нинг *квадрат илдизи:*

$$\begin{array}{r|r} & \sqrt{5'29}=23\\ & -4\\ 43 & 129\\ \times\ 3 & -\ 129\\ \hline & 0\end{array}$$

2- мисол. $\sqrt{0{,}0196}$ ни ҳисобланг. 0,0196 ни вергулдан ўнгга қараб иккитадан гранларга ажратамиз ва ўнг томонига тенглик белгисини қўйиб ноль бутун ёзиб олиш керак, ундан кейин қолган иш худди биринчи мисолдагидек бажарилади, яъни

$$\sqrt{0{,}01'96}=0{,}14.$$
$$\times\begin{array}{r}24\\4\end{array}\left|\begin{array}{r}-\;096\\96\\\hline 0\end{array}\right.$$

Сон бирдан катта бўлса, у сондан квадрат илдиз чиқариш учун илдиз остидаги сонни вергулдан чапга қараб, иккитадан қилиб гранларга ажратиш керак. Агар сон бирдан кичик бўлса, у ҳолда вергулдан ўнгга қараб иккитадан гранларга ажратиб, сўнгра уларни юқорида кўрсатилгандек илдиздан чиқариш керак.

Мисоллар.

1) $$\sqrt{17'64}=42;$$
$$\begin{array}{r}-\;16\end{array}$$
$$\times\begin{array}{r}82\\2\end{array}\left|\begin{array}{r}-\;164\\164\\\hline 0\end{array}\right.$$

2) $$\sqrt{10{,}24}=3{,}2;$$
$$\begin{array}{r}-\;9\end{array}$$
$$\times\begin{array}{r}62\\2\end{array}\left|\begin{array}{r}-\;1\,24\\1\,24\\\hline 0\end{array}\right.$$

3) $$\sqrt{9'12'04}=302;$$
$$\begin{array}{r}-\;9\end{array}$$
$$\times\begin{array}{r}602\\2\end{array}\left|\begin{array}{r}-\;0\,1204\\1204\\\hline 0\end{array}\right.$$

4) $$\sqrt{0{,}00001024}=0{,}0032;$$
$$\times\begin{array}{r}\\62\\2\end{array}\left|\begin{array}{r}9\\\hline \overline{124}\\-\;124\\\hline 0\end{array}\right.$$

5) $$\sqrt{0{,}9}=\sqrt{0{,}90}=0{,}94;$$
$$\begin{array}{r}-\;81\end{array}$$
$$\times\begin{array}{r}184\\4\end{array}\left|\begin{array}{r}-\;900\\736\\\hline 164\end{array}\right. \text{(қолдиқ)}$$

демак, $\sqrt{0{,}9}\approx 0{,}94$

Изоҳ. Бир гранни олиб туширилганда у чап томонидаги ҳосил қилинадиган сондан кичик бўлса у ҳолда чап томонда ҳосил бўлган сонга ва асосий сонга ноль бериб кейинги гранни ҳам олиб туширилади (3- мисолдаги каби).

Машқлар. Қуйидаги квадрат илдизлар ҳисоблансин:

1) $\sqrt{225}$; 2) $\sqrt{4,2849}$; 3) $\sqrt{4624}$; 4) $\sqrt{28900}$;

5) $\sqrt{54756}$; 6) $\sqrt{225904}$; 7) $\sqrt{3426201}$; 8) $\sqrt{0,8649}$;

9) $\sqrt{15,0544}$; 10) $\sqrt{\frac{625}{64}}$; 11) $\sqrt{\frac{25}{324}}$; 12) $\sqrt{0,003989}$;

13) $\sqrt{2,3716}$; 14) $\sqrt{0,4}$; 15) $\sqrt{3}$; 16) $\sqrt{11}$;

17) $\sqrt{3,5}$; 18) $\sqrt{1,24}$;

19) $\sqrt{0,00005329}$; 20) $\sqrt{15,0544}$; 21) $\sqrt{342,6201}$; 22) $\sqrt{1,172839}$;

23) $\sqrt{0,91}$; 24) $\sqrt{2,3}$; 25) $\sqrt{0,23}$.

в) Каср кўрсаткичли даражалар ва илдизнинг даража билан берилган ифодаси

Энди каср кўрсаткичли $a^{\frac{n}{m}}$ символга маъно берамиз.

Таъриф. $a > 0$ ни $\frac{n}{m}$ *каср даражага кўтариш деб*, a^n дан *m-даражали илдиз чиқаришга айтилади*. Яъни: $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[n]{a^n}$[1]. n, m — ихтиёрий натурал сонлар.

Мисол.

$$a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}; \quad 4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = \left(\sqrt{4}\right)^3 = 2^8 = 8.$$

Аксинча:

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Бу тенгликнинг тўғрилигини текширамиз, илдиз таърифига кўра: $\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^m = a^{\frac{n}{m}\cdot m} = a^n$. Бу эса илдиз остидаги ифодадир. Демак, берилган тенглик тўғри.

Шундай қилиб, даражадан илдиз чиқариш учун (асосни ўзгартирмай) даража кўрсаткичини илдиз кўрсаткичига бўлиш кифоя.

Мисоллар:

$$\sqrt[3]{5^6} = 5^{\frac{6}{3}} = 5^2 = 25; \quad \sqrt[4]{(1+2x)^8} = (1+2x)^{\frac{8}{4}} = (1+2x)^2;$$

$$\sqrt[3]{(a+b)^2} = (a+b)^{\frac{2}{3}}$$

ва ҳоказо.

---

[1] $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$ тенглик $n > m$, $n = m$ ва $n < m$ бўлганда ҳам тўғридир.

Таъриф. *Агар $a > 0$ ва m, n лар ихтиёрий натурал сон бўлса,*

$a^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{a^{\frac{n}{m}}}$ *бўлади.*

Мисол.

$$125^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{125^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{125^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^6}} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}.$$

г) Кўпайтувчиларни илдиз ишорасидан ташқарига чиқариш ва, аксинча, кўпайтувчиларни илдиз остига киритиш

Илдиз остидаги кўпайтувчини илдиз ишораси остидан чиқариш учун, илдиз остидаги ифодага, кўпайтмадан илдиз чиқариш теоремасини қўлланамиз.

Мисоллар.

$$\sqrt{18} = \sqrt{9\cdot 2} = 3\sqrt{2}; \quad \sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{125\cdot 2} = \sqrt[3]{5^3\cdot 2} = 5\sqrt[3]{2};$$

$$\sqrt{125a^3b^4} = b^2\sqrt{25\cdot 5a^2\cdot a} = 5\,ab^2\sqrt{5a}.$$

Баъзан илдиз ишораси олдидаги кўпайтувчини илдиз ишораси остига киритиш фойдали бўлади. Илдиз ишораси олдида турган кўпайтувчини илдиз ишораси остига киритиш учун шу кўпайтувчини илдиз кўрсаткичи қадар даражага кўтариш ва ҳосил бўлган натижани илдиз остидаги ифодага кўпайтириш кифоя.

Мисоллар. $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2\cdot 3} = \sqrt{12}$. Шунга ўхшаш:

$$5\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{5^3\cdot 2} = \sqrt[3]{250}; \quad 3a\sqrt{\frac{b}{3a}} = \sqrt{9a^2\cdot\frac{b}{3a}} = \sqrt{3ab};$$

$$2(x-y)\cdot\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = \sqrt{4(x-y)^2\cdot\frac{x+y}{x-y}} = \sqrt{4(x^2-y^2)}$$

ва ҳ. к.

Умуман:

$$\boxed{a\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^m b}.}$$

Машқлар. 1) Қуйидаги илдизларнинг ҳар бирини даража билан ёзинг:

$$\sqrt[3]{2};\ \sqrt[4]{5a};\ \sqrt[5]{3^2};\ \sqrt{a};\ \sqrt[4]{ab};\ \sqrt[3]{\left(\frac{3}{x+1}\right)^2};\ \sqrt[5]{\frac{3a}{b}};\ \sqrt[3]{a^2\cdot c}.$$

2) Ушбу ифодалардаги кўпайтувчиларни радикал остига киритинг:

$$5\sqrt{7};\ 3a^2b\sqrt[3]{ab};\ xy\sqrt{\frac{1}{xy}};\ \frac{x}{2}\sqrt{\frac{2}{x}};\ \frac{2}{y+z}\sqrt{\frac{3y^2-3z^2}{2}};$$

$$\frac{a+b}{a-b}\sqrt[3]{\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}};\ xy\cdot\sqrt[5]{xy}.$$

3) Қуйидаги радикалларда, кўпайтувчиларни радикал ишораси остидан чиқаринг:

$$\sqrt{24};\ \sqrt{12b^3};\ \sqrt[3]{16};\ \sqrt{52};\ \sqrt{8a^3};\ \sqrt{28a^3b^5};\ \sqrt[7]{x^8y^{10}};\ \sqrt[5]{1215}.$$

$$\sqrt[3]{\frac{51x^4y}{(3x-1)^4}};\ \sqrt{3072}.$$

4) Ушбу даражаларнинг ҳар бирини радикал ишораси билан ёзинг:

$$3^{\frac{2}{5}};\ (a+b)^{\frac{1}{2}};\ \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{4}};\ 3^{0,5};\ \ 16^{-0,5};\ (x-y)^{\frac{2}{11}}.$$

д) Илдиз кўрсаткичи билан илдиз остидаги ифода кўрсаткичини қисқартириш

Илдизни қисқартириш учун илдиз кўрсаткичи билан илдиз остидаги сон ёки ифода кўрсаткичи бир хил сонга бўлинади.

Масалан, $\sqrt[12]{a^8}=\sqrt[3]{a^2}$. (Бу ерда 8 билан 12 сони 4 га бўлинди).

Шунга ўхшаш:

$$1)\ \sqrt[15]{\frac{a^5}{b^{10}}}=\sqrt[15]{\left(\frac{a}{b^2}\right)^5}=\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}};$$

$$2)\ \sqrt[9]{64a^6b^3}=\sqrt[9]{(4a^2b)^3}=\sqrt[3]{4a^2b}.$$

Аксинча:

$$\sqrt[3]{a^2}=\sqrt[3\cdot4]{a^{2\cdot4}}=\sqrt[12]{a^8};\ 4=\sqrt{16}=\sqrt{4^2}=\sqrt[4]{4^4}\cdot$$

Демак, илдиз кўрсаткичи билан илдиз остидаги сон (ифода) кўрсаткичини бир хил сонга бўлиш ёки кўпайтириш билан унинг қиймати ўзгармайди.

е) Ҳар хил кўрсаткичли илдизларни бир хил кўрсаткичга келтириш

Мисоллар. 1) $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[4]{ab}$ ларни бир хил кўрсаткичли илдизларга келтиринг.

Ечиш.

$$\sqrt{a}=\sqrt[2\cdot6]{a^6}=\sqrt[12]{a^6};\ \sqrt[3]{a^2}=\sqrt[3\cdot4]{a^{2\cdot4}}=\sqrt[12]{a^8};$$

$$\sqrt[4]{ab}=\sqrt[4\cdot3]{a^3b^3}=\sqrt[12]{a^3b^3}.$$

2) $\sqrt[3]{2}$ ва $\sqrt[5]{4}$ ларни бир хил кўрсаткичли илдизларга келтиринг.

Ечиш.

$$\sqrt[3]{2}=\sqrt[3\cdot5]{2^5}=\sqrt[15]{32};\quad \sqrt[5]{4}=\sqrt[5\cdot3]{4^3}=\sqrt[15]{64}.$$

Машқлар. 1) Қуйидаги ифодаларни бир хил кўрсаткичли илдизларга келтиринг:

$$\text{а) } \sqrt[7]{a^3},\ \sqrt[5]{a^2},\ \sqrt[9]{a^6};\ \text{б) } \sqrt[3]{a^{-2}},\ \sqrt[12]{a^{-3}b^8},\ \sqrt[4]{\frac{x^3}{y^6}},\ \sqrt[6]{3ab^2}.$$

2) Қисқартиринг:

$$\sqrt[16]{a^8};\ \sqrt[4]{c^2};\ \sqrt[5]{b^{10}c^5};\ \sqrt[6]{(5a)^{-4}b^2};\ \sqrt[6]{(25\,xy)^3};$$

$$\sqrt[5]{\left(\frac{2x}{y^2}\right)^5};\ \sqrt[14]{\frac{x^4y^6}{z^2}};\ \sqrt[9]{\frac{8a^6b^{12}}{27\,c^3d^6}}.$$

ж) Ўхшаш радикаллар

Таъриф. *Радикалларнинг ишоралари остидаги сон ёки ифодалар бир хил ва радикалларнинг кўрсаткичлари тенг бўлса, улар ўхшаш радикаллар дейилади.*

Масалан, $2\sqrt{ab}$ ва $5a\sqrt{ab}$ ўхшашдир. Кўпинча илдизларнинг ўхшашлигини кўриш учун, олдин уларни соддалаштириш керак.

Масалан,

$$\sqrt[3]{125\,ab^4} \text{ ва } \sqrt[6]{64a^2b^8}$$

ўхшаш, чунки

$$\sqrt[3]{125ab^4} = \sqrt[3]{5^3b^3ab} = 5b\sqrt[3]{ab} \text{ ва}$$

$$\sqrt[6]{64a^2b^8} = \sqrt[6]{2^6\cdot a^2b^6\cdot b^2} = 2b\sqrt[6]{a^2b^2} = 2b\sqrt[3]{ab}.$$

Машқлар. Қуйидаги радикалларнинг ўхшашлиги кўрсатилсин:

$$1)\ \sqrt{8xy^2} \text{ ва } \sqrt[4]{4x^2y^4};\ 2)\ 2\sqrt[3]{3a^2b};\ 5a\sqrt[6]{9a^4b^2} \text{ ва}$$

$$\sqrt[3]{\frac{b}{9a}};\ 3)\sqrt[3]{\frac{72}{343}} \text{ ва } \sqrt[3]{41\frac{2}{3}};\ 4)\ \sqrt[5]{\frac{a}{b}};\ \sqrt[5]{ab^4} \text{ ва } \sqrt[5]{\left(\frac{b}{a}\right)^4};$$

$$5)\ \sqrt[3]{\frac{x+y}{(x-y)^2}} \text{ ва } \sqrt[3]{\frac{1}{y}-\frac{x^2}{y^3}};$$

$$6)\ \frac{1}{\sqrt{a^3b^2-a^2b^3}},\ \sqrt{4a^3b^2-4a^2b^3} \text{ ва } \sqrt{a^3-3a^2b-3ab^2-b^3}.$$

з) Радикалларни қўшиш ва айириш

Радикалларни қўшиш ёки айириш учун уларни плюс ёки минус ишоралари билан бирлаштириб, кейин ўхшашлари бўлса, ихчамлаш керак.

Масалан,

$$5a\sqrt{12x} \pm 2b\sqrt{\frac{x}{3}} = 5a\sqrt{4\cdot3x} \pm 2b\sqrt{\frac{3x}{9}} =$$

$$= 10a\sqrt{3x} \pm \frac{2}{3}b\sqrt{3x} = 2\left(5a \pm \frac{b}{3}\right)\sqrt{3x}.$$

и) Илдизларни кўпайтириш ва бўлиш

16- § да айниятлиги исботланган кўпайтма ва бўлинманинг илдизлари ҳақидаги тенгликнинг чап қисмини ўнг қисмига алмаштирсак, у ҳолда илдизларни кўпайтириш ва бўлиш ҳақидаги айниятлар ҳосил бўлади, яъни:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{a\cdot b\cdot c}$$

ва

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Демак, бир хил кўрсаткичли илдизларни кўпайтириш (бўлиш) учун илдизлар остидаги ифодаларни кўпайтириб (бўлиб), ҳосил бўлган кўпайтма (бўлинма) дан шу даражали илдиз чиқарилса кифоя.

Масалан, $\sqrt{4}\cdot\sqrt{25}=\sqrt{4\cdot 25}=\sqrt{100}=10$, чунки $\sqrt{4}\cdot\sqrt{25}=$

$$=2\cdot 5=10;\ \sqrt{25}:\sqrt{4}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{5}{2},\text{ чунки}$$

$$\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}}=\frac{5}{2};\ \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[nm]{a^m}\cdot\sqrt[mn]{b^n}=\sqrt[mn]{a^m\cdot b^n},$$

шунга ўхшаш:

$$\sqrt[n]{a}:\sqrt[m]{b}=\sqrt[mn]{\frac{a^m}{b^n}}.$$

Машқлар. Амаллар бажарилсин:

$$\sqrt{15}\cdot\sqrt{11};\ \sqrt[3]{7a}\cdot\sqrt{2b};\ \frac{\sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{15}};\quad \frac{\sqrt{124}}{\sqrt[3]{16}};\ \sqrt{3ab}\cdot\sqrt{\frac{11}{6ab}};$$

$$\sqrt[3]{\frac{x}{y}}\cdot\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}};\ \sqrt[5]{a}:\sqrt[10]{a^3};\left(2\sqrt{20}-\sqrt{45}+3\sqrt{18}\right)+$$

$$+(\sqrt{72}-\sqrt{80});\ (\sqrt{9x}-\sqrt[3]{8y})-(\sqrt[3]{27y}-\sqrt{16x});$$

$$\left(\sqrt{32}+\sqrt{0{,}5}-2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)-\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{48};$$

$$\left(5\sqrt{5x}+4\sqrt{x}-6\sqrt{9x}-8\sqrt{2x}\right)+\left(8\sqrt{\frac{x}{4}}+4\sqrt{8x}\right);$$

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{24}-3\sqrt{40}\right)-(\sqrt{150}+\sqrt{54}-\sqrt{1000});$$

$$\left(\sqrt{32}+\sqrt{0{,}5}-2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{48}\right);$$

$$(\sqrt[3]{125x}-\sqrt[3]{8x})-(\sqrt[3]{27x}-\sqrt[3]{64x});$$

$$(5\sqrt{4x}+4\sqrt{x}-6\sqrt{9x}-8\sqrt{2x})+\left(8\sqrt{\frac{1}{4}x}+4\sqrt{8x}+\sqrt{x}\right);$$

$$\left((3\sqrt{8x}-\sqrt{18x}-5\sqrt{\frac{x}{2}}\right)-\left(\sqrt{4\frac{1}{2}x}+\sqrt{50x}-\right.$$

$$\left.-\sqrt{32x}+\sqrt{27x}\right);$$

$$\left(0{,}5\sqrt{\frac{1}{2}}-1{,}5\sqrt{\frac{1}{3}}+\frac{8}{5}\sqrt{\frac{1}{5}}\right):\frac{8}{15}\sqrt{\frac{1}{8}}.$$

$$\left(2\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{ab}-\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{1}{a\cdot b}}\right)\cdot\sqrt{ab};$$

$$(4x\sqrt[3]{x^2}-5y\sqrt[3]{xy}+xy\sqrt[3]{y^2})\cdot 2xy\sqrt[3]{xy}.$$

Қуйидаги тенгликлар исбот қилинсин:

$$\sqrt[4]{\frac{1}{x^2y}}-\sqrt[4]{\frac{x^6}{y^5}}-\sqrt[4]{x^{10}y^7}+\sqrt[4]{\frac{y^3}{x^5}}=\left(\frac{1}{xy}-\right.$$

$$\left.-\frac{x}{y^2}+\frac{1}{x^3}-x^2y\right)\sqrt[4]{x^2y^3};$$

$$(\sqrt{0{,}6}+\sqrt{0{,}3}-\sqrt{0{,}9})\cdot(3\sqrt{0{,}2}+2\sqrt{0{,}3}+\sqrt{0{,}6})=1{,}2.$$

к) Илдизни даражага кўтариш ва илдиздан илдиз чиқариш

Илдизнинг даражаси, илдиз остидаги сон ёки ифода шу даражасининг берилган илдизига тенг.

Масалан,

$$(\sqrt[3]{a^2})^2=\sqrt[3]{(a^2)^2}=\sqrt[3]{a^4};\ \left(\sqrt[5]{\frac{a}{b^3}}\right)^3=\sqrt[5]{\frac{a^3}{b^9}}.$$

Умуман,

$$\boxed{(\sqrt[m]{a^n})^k=\sqrt[m]{a^{kn}}},$$

чунки

$$(\sqrt[m]{a^n})^k=\underbrace{\sqrt[m]{a^n}\cdot\sqrt[m]{a^n}\ldots\sqrt[m]{a^n}}_{k\ \text{та}}=\sqrt[m]{a^{n+n+\cdots+n}}=\sqrt[m]{a^{kn}}$$

Илдиздан илдиз чиқариш учун, илдиз остидаги сон ёки ифодани ўзгартирмай, илдиз кўрсаткичларини кўпайтириб ёзилса кифоя.

Масалан:

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}}=\sqrt[6]{5};\ \sqrt{2\cdot\sqrt[3]{5}}=\sqrt{\sqrt[3]{2^3\cdot 5}}=\sqrt[6]{40}.$$

Умуман,

$$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}},$$

чунки

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^{mn}=\sqrt[n]{\left(\sqrt[m]{a}\right)^{mn}}=\sqrt[n]{a^n}=a \text{ ва } \left(\sqrt[mn]{a}\right)^{mn}=a.$$

Машқлар. Амаллар бажарилсин:

$$\sqrt[6]{3\sqrt{10}};\quad \sqrt[3]{\sqrt{15}};\ \sqrt{\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{16}{3}}};\ \sqrt[5]{4\sqrt[5]{2\sqrt{3}}};\ \left(\sqrt[-2]{11}\right)^{-4};$$

$$\left(-\frac{3}{5}\sqrt[4]{x^3y}\right)^8;\left(3x^2\sqrt[3]{\frac{a}{3x}}\right)^4;\left(\frac{x\sqrt[3]{(x-y)^2}}{x-y}\right)^4;\ (2\sqrt{5}-3\sqrt{2})^2;$$

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+4\sqrt{3}\right)^2;\ (\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6})^2;\ \sqrt{\sqrt{\frac{a}{b}}};\ \sqrt{\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}}};$$

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}};\quad \sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a\sqrt{a}}}.$$

Радикаллар устидаги ҳамма амалларга доир қуйидаги мисоллар ечилсин:

1) $(2\sqrt{20}-\sqrt{45}+3\sqrt{18})+(\sqrt{72}-\sqrt{80});$

2) $\left(\sqrt{9x}-\sqrt[3]{8y}\right)-\left(\sqrt[3]{27y}-\sqrt{16x}\right);$

3) $\left(3\sqrt[3]{32}+\frac{1}{\sqrt[3]{9}}-\sqrt[3]{108}\right)-\left(16\sqrt[3]{\frac{1}{16}}-4\sqrt[3]{\frac{1}{72}}\right);$

4) $\sqrt{3}\cdot(\sqrt{12}-3\sqrt{75});$

5) $\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{4,5}-\sqrt{12,5}-0,5\sqrt{200}+\sqrt{242}+6\sqrt{1\frac{1}{8}}+\sqrt{24,5};$

$\left(\text{Жавоб. } \frac{27}{2}\sqrt{2}.\right)$

6) $4\sqrt[3]{-3}-\sqrt[3]{\frac{8}{9}}+\sqrt[3]{\frac{3}{8}}-$

$-\sqrt[3]{7\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{-0,375}+\sqrt[3]{46\frac{7}{8}};$

$\left(\text{Жавоб. } -\frac{5}{2}\sqrt[3]{3}.\right)$

7) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{a}+\frac{3}{4}a\sqrt{a}-\frac{7}{8}a^2\sqrt{a}\right)\cdot(-16a\sqrt{a});$

[Жавоб. $2a^2(7a^2-6a-4)$.]

$$8)\ (3+2\sqrt{6}-\sqrt{33})(\sqrt{22}+\sqrt{6}+4);$$

$$9)\ (4x\sqrt[3]{x^2}-5y\sqrt{xy}+xy\sqrt[5]{y^2})\cdot 2xy\sqrt[3]{xy}:$$

$$10)\ (3\sqrt{7}-5\sqrt{11})\cdot(3\sqrt{7}+5\sqrt{11});$$

$$11)\ \left(\sqrt[5]{5}-3\sqrt[3]{\frac{15}{2}}+2\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt[4]{24};$$

$$12)\ \left(\frac{3}{4}\sqrt[6]{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}\right)\left(\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{16}\right);$$

$$13)\ (2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2})\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{2}\sqrt[6]{x^5}\right);$$

$$14)\ \left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right):2\sqrt[3]{\frac{1}{3}};$$

(Жавоб. $\frac{9-4\sqrt[3]{9}}{4}$.)

$$15)\ \left(\frac{3x}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}-0{,}4\sqrt{\frac{3}{xy}}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{xy}{2}}\right):\frac{4}{5}\sqrt{\frac{3y}{2x}};$$

$$16)\ (-2a\sqrt[5]{a^2b^3})^4;\quad 17)\ (\sqrt[3]{25a^2}-\sqrt[3]{16b^2}):(\sqrt[3]{5a}-\sqrt[3]{4b});$$

$$18)\ (-3\sqrt[4]{a^3})^3;\ 19)\left(-\frac{3}{2}\sqrt[5]{x^2}\right)^3;\ 20)\left(\frac{1}{4}\sqrt{xy}+2\sqrt{x}\right)^2;$$

$$21)\ (2\sqrt{a}+3\sqrt{b})^2;\ 22)\ (\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}})^2;$$

(Жавоб. 14.)

$$23)\ \left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2;$$

(Жавоб. 12.)

$$24)\ \left(2\sqrt{x-2\sqrt{y}}-2\sqrt{x+2\sqrt{y}}\right)^2;$$

(Жавоб. $8(x-\sqrt{x^2-4y}$.)

$$25)\ \sqrt[3]{2\sqrt{5}};\ 26)\ \sqrt[5]{a^4\sqrt{a}};\ 27)\ \sqrt[3]{3\sqrt{3\sqrt{3}}};\ 28)\ \sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}};$$

(Жавоб. $\sqrt[24]{x^{23}}$.)

$$29)\ \sqrt{\frac{a}{x}\sqrt{\frac{1}{ax}\sqrt{\frac{a}{x}}}}.$$

(Жавоб. $\sqrt[8]{\frac{a^3}{x^7}}$.)

17- §. ИРРАЦИОНАЛ СОН (ИФОДА)ЛАР ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Ҳар қандай бутун ва каср сонлар рационал сонлар деб аталиши бизга маълум. Масалан, 5; $1\frac{4}{7}$; -12; $-3{,}5$; 137 ва ҳоказоларнинг ҳар бири рационал сондир. Ҳар қандай рационал сонни чекли ёки чексиз даврий ўнли каср шаклида ёзиб бўлади.

Таъриф. *Даврий бўлмаган чексиз ўнли каср иррационал сон дейилади*[1]. Масалан, $\sqrt{2} = 1{,}4142136...$; $\pi = 3{,}141592...$; $\sqrt{3} = 1{,}732...$ ва ҳоказолар иррационал сонлардир.

$3{,}14$ сони π нинг $0{,}01$ гача аниқликдаги тақрибий қиймати дейилади. Шунга ўхшаш, $1{,}73$ ва $1{,}4$ лар мос равишда $\sqrt{3}$ ва $\sqrt{2}$ ларнинг $0{,}01$ ва $0{,}1$ аниқликдаги тақрибий қийматларидир.

а) Иррационал кўрсаткичлар ҳақида тушунча

$a > 0$ — ҳақиқий сон, α — иррационал сон бўлганда, a^{α} — иррационал кўрсаткичли даража дейилади.

1) $a > 1$ ва α — мусбат иррационал сон бўлсин.

Масалан, $10^{\sqrt{2}}$ ($\sqrt{2} = 1{,}4142...$). Бу ҳолда: 10^1; $10^{1,4}$; $10^{1,41} < 10^{\sqrt{2}} < 10^2$; $10^{1,5}$; $10^{1,42}$; .... Демак, $10^{\sqrt{2}}$ сон учун 10^1, $10^{1,4}$; $10^{1,41}$, ... сонларнинг ҳар биридан катта ва 10^2, $10^{1,5}$, $10^{1,42}$ лардан кичик сон олиш мумкин.

2) $a < 1$ ва $\alpha > 0$, масалан, $(0{,}5)^{\sqrt{2}}$ бўлсин, $0{,}5^1$; $0{,}5^{1,4}$; $0{,}5^{1,41} < (0{,}5)^{\sqrt{2}} < 0{,}5^{1,5}$; $0{,}5^{1,42}$, ...

3) $a > 1$; $a < 1$ ва $\alpha < 0$, масалан, $10^{-\sqrt{2}}$ ва $0{,}5^{-\sqrt{2}}$ бўлсин. $10^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{10^{\sqrt{2}}}$ ва $0{,}5^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{0{,}5^{\sqrt{2}}}$ бўлади.

Изоҳ. Рационал кўрсаткичли даражалар ҳақидаги ҳамма қоида ва амаллар иррационал кўрсаткичли даражалар учун ҳам айнан тўғридир.

б) Рационал ва иррационал алгебраик ифодалар

Агар алгебраик ифодада қатнашган ҳарфлардан бирортаси (ёки ҳаммаси) илдиз остида бўлса, у ҳолда бу ифода шу ҳарфга нисбатан иррационал; илдиз остида бўлмаган ҳарфларга

---

[1] $\sqrt[n]{a}$, $n = 2; 3; 4...$; да: агар a сонини илдиздан аниқ чиқариб бўлса, $\sqrt[n]{a}$ рационал илдиз (сон); агар аниқ чиқариб бўлмаса иррационал илдиз (сон) дейилади. Масалан, $\sqrt{16} = \pm 4$ ва $\sqrt{5}$ лар каби.

нисбатан эса рационал ифода дейилади. Масалан, $\left(13\frac{x}{y} - 5\sqrt{x}\right)$ ифода x га нисбатан иррационал, y га нисбатан рационалдир.

в) *Каср махражидаги иррационалликни йўқотиш*

Каср махражидаги иррационалликни йўқотиш учун махраждаги илдизни йўқотиб юборадиган сон ёки (нолга тенг бўлмаган) ифодага касрнинг сурат ва махражини кўпайтириб, кейин соддалаштириш керак.

Масалан:

$$1)\ \frac{2}{11\sqrt{3}} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{11\cdot 3} = \frac{2\sqrt{3}}{33}.$$

Бунда касрнинг сурат ва махражи $\sqrt{3}$ га кўпайтирилди.

$$2)\ \frac{5a}{a+\sqrt{a}} = \frac{5a\,(a-\sqrt{a})}{a^2-a} = \frac{5a\,(a-\sqrt{a})}{a\,(a-1)} = \frac{5\,(a-\sqrt{a})}{a-1}.$$

Бунда касрнинг сурат ва махражи $(a-\sqrt{a}) \neq 0$ га кўпайтирилди.

$$3)\ \frac{3x}{\sqrt{3x}-x} = \frac{3x\,(\sqrt{3x}+x)}{(\sqrt{3x}-x)\,(\sqrt{3x}+x)} = \frac{3x\,(\sqrt{3x}+x)}{3x-x^2} = \frac{3\,(\sqrt{3x}+x)}{3-x}.$$

Бунда касрнинг сурат ва махражи $(\sqrt{3x}+x) \neq 0$ га кўпайтирилди.

$$4)\ \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{[(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}]}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2+2\sqrt{6}+3-5} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}\,(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{12} = \frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}}{12} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}.$$

Бунда касрнинг сурат ва махражи $(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}$ билан $\sqrt{6}$ га кўпайтирилди.

$$5)\ \frac{\sqrt{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}}{\sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{12-2}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}\,(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}{10} = \frac{2\sqrt{30}+\sqrt{20}}{10} =$$

$$= \frac{2\sqrt{30}+2\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{30}+\sqrt{5}}{5}.$$

$$6)\ \frac{n}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\frac{n\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^3-\left(\sqrt[3]{b}\right)^3}=\frac{n\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a-b}.$$

Бунда касрнинг сурат ва махражи $\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)\neq 0$ га кўпайтирилди.

Машқлар. Қуйидаги ифодаларнинг махражидаги иррационаллик йўқотилсин:

$$\frac{7}{2\sqrt[3]{7}};\quad \frac{3}{15+\sqrt{5}};\quad \frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}};\quad \frac{30}{2-\sqrt{3}+\sqrt{5}};$$

$$\frac{15}{\sqrt{7-2\sqrt{6}}};\quad \frac{6}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{4}};\quad \frac{18}{3+\sqrt{5}-\sqrt{2}};\quad \frac{42}{5-2\sqrt{3}+\sqrt{7}};$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1};\quad \frac{2}{1+\sqrt[3]{4}}.$$

$$\frac{7\sqrt{15}-2\sqrt{3}}{10\sqrt{3}+8\sqrt{5}};\ \frac{m+n+\sqrt{m^2-n^2}}{m+n-\sqrt{m^2-n^2}};\ \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}};.$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}};\quad \frac{1}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}};\quad \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}}.$$

г) Каср кўрсаткичли даражалар устида амаллар. Ўрта геометрик

Каср кўрсаткичли даражалар устидаги амаллар ҳам бутун кўрсаткичли даражалар устидаги амаллар каби бажарилади.

1) **Кўпайтириш.** Масалан, $a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{3}{4}}=a^{\frac{1}{3}+\frac{3}{4}}=a^{\frac{13}{12}}$.

Умуман: $a^{\frac{n}{m}}\cdot a^{\frac{k}{s}}=a^{\frac{n}{m}+\frac{k}{s}}=a^{\frac{ns+km}{ms}}$.

2) **Бўлиш.** Масалан, $a^{\frac{2}{3}}:\ a^{\frac{3}{5}}=a^{\frac{2}{3}-\frac{3}{5}}=a^{\frac{1}{15}}$.

Умуман:

$$a^{\frac{n}{m}}:a^{\frac{k}{s}}=a^{\frac{n}{m}-\frac{k}{s}}=a^{\frac{ns-km}{ms}}.$$

8) **Даражага кўтариш.** Масалан, $(a^{\frac{3}{4}})^{\frac{5}{6}}=a^{\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}}=a^{\frac{5}{8}}$ бўлади.

Машқлар. Қуйидаги амаллар бажарилсин:

$$1)\ (x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{1}{4}}-z^{\frac{3}{5}})\cdot(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{3}}+2z^5);\ 2)\ (27x^{\frac{5}{6}}\ y^{\frac{2}{5}}):(9x^{\frac{2}{3}}\ y);$$

$$8)\ \left(3x-\frac{1}{2}\,y^{-\frac{1}{2}}\right)^2;\ 4)\ (81\ a^{-3}\ b^{\frac{2}{3}}\ c^{-3})^{\frac{2}{3}};\ 5)\ \left[\left(\frac{4a^2b^{-3}\ c^{-1}}{3d}\right)^2\right]^{-3};$$

$$6)\ \left[\left(\frac{a^3}{2b^{-3}}\right)^{-2}\right]^{\frac{2}{3}};\ 7)\ \left(\frac{24}{25}\,a^3\,b^{\frac{2}{5}}\right):\left(\frac{12}{25}\,a^{\frac{1}{2}}\,b^3\right);\ 8)\ \left(\frac{x}{3y^{-1}}\right)^{-\frac{5}{6}};$$

9) $\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}+x^{\frac{3}{4}}\right)\cdot\left(x^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{x}\right)$; 10) $\left(\frac{3}{14}\,x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{2}}\right):\left(\frac{6}{7}x^{\frac{3}{5}}y\right)$.

Ўрта геометрик. *Бир неча (n та) сон (миқдор): $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ларнинг ўрта геометриги деб бу сон (миқдор)лар кўпайтмасининг n-даражали илдизига айтилади, яъни* $\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}$.

Мисол. 20; 270; 40 сонларининг ўрта геометриги: $\sqrt[3]{20\cdot 270\cdot 40}=60$.

ФУНКЦИЯЛАР

Координаталар методи ҳақида тушунча

Турли сон қийматлар қабул қила оладиган миқдор ўзгарувчи миқдор, ҳар қандай шароитда ёки бир масалани текширишда биргина қийматга эга бўлган миқдор ўзгармас миқдор дейилади.

Масалан, ёниб турган бир бўлак кўмирнинг миқдорини x десак, у ҳолда x ўзгарувчи миқдор, чунки у вақтнинг ўтишига қараб турли сон қийматларга эга бўлади.

Таъриф. *Агар иккита ўзгарувчи x ва y лардан, x га берилган ихтиёрий сон қийматларга қараб, бирор усул ёки қонун бўйича y нинг мос сон қийматлари вужудга келса, у ҳолда y миқдор x нинг* ***функцияси*** *дейилади.*

y миқдор x нинг функцияси эканини қисқача $y=f(x)$ кўринишда ёзиш мумкин. Бунда x — *аргумент,* y — *функция,* f — *характеристика* дейилади. Масалан, доиранинг радиуси — r, юзи S бўлсин, у ҳолда доиранинг юзи $S=\pi r^2$ эди. Бунда r — аргумент, S — функция, π — ўзгармас миқдор. Функциялар асосан уч хил кўринишда берилиши мумкин: формула кўринишда, жадвал кўринишда ва график кўринишда.

Энди $y=f(x)$ берилган бўлсин. Бундаги x нинг ўрнига a қўйсак, $f(a)$ ҳосил бўлади. $f(a)$ ни $f(x)$ нинг $x=a$ бўлгандаги *хусусий қиймати* дейилади.

Мисол. 1) $f(x)=3x^2+x-5$ берилган. $f(0)$, $f(-1)$ ҳисоблансин.

Ечиш. $f(0)=3\cdot 0+0-5=-5$; $f(-1)=3\cdot(-1)^2+(-1)-5=3-1-5=-3$.

2) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+3}}{x^2-x+1}$ берилган. $f(0)$, $f(-1)$, $f(-3)$ ҳисоблансин.

3) $F(y)=\frac{y^3+2y+1}{y^2+3y-4}$ берилган. $F(0)$, $F(2)$, $F\left(\frac{1}{2}\right)$ ҳисоблансин.

4) $\varphi(z) = \frac{\sqrt[3]{z^2}}{z^2 + 1}$ берилган.

$\varphi(0)$, $\varphi(\pm 1)$, $\varphi(\pm 3)$ ҳисоблансин.

Функциянинг маъносини йўқотмайдиган (яъни уни чексиз ёки мавҳумликка айлантирмайдиган) аргументнинг ҳамма қийматлари тўплами шу функциянинг *борлиқ (аниқланиш) соҳаси* дейилади. Агар шундай мусбат A сон мавжуд бўлиб, аргументнинг ҳамма қийматларида функциянинг абсолют қиймати шу A сондан кичик бўлса, бундай функция (аниқланиш соҳасида) *чекланган*; агар функциянинг абсолют қиймати A дан катта бўлса, бундай функция *чекланмаган* дейилади.

Агар $[a, b]$ оралиқда $f(x)$ функциянинг аргументи доимо ўсиб (камайиб) борганда функциянинг қиймати ҳам доимо ўсиб (камайиб) борса, у ҳолда $f(x)$ *ўсувчи*, акс ҳолда *камаювчи* функция дейилади.

Агар аргументнинг битта қийматига функциянинг ҳам битта қиймати мос келса, уни *бир қийматли*, агар бирдан ортиқ қийматлари мос келса, *кўп қийматли* функция дейилади.

Координаталар методи

Текисликда, бошланғич „0“ нуқталари устма-уст тушадиган ўзаро перпендикуляр X_1X ва Y_1Y сон ўқларини олайлик. У ҳолда 0 нуқтадан ўнгда ва юқорида жойлашган кесмалар мусбат сонлар (масалан, 1, 2, 3, 4,...); чапда ва пастда жойлашган кесмаларга эса манфий сонлар (масалан, — 1, —2, —3, — 4, ...) ёзилган бўлади (4-расм).

X_1X ўқда олинган ҳар бир нуқтага мос сонлар *абсциссалар* деб; Y_1Y ўқда олинган ҳар бир нуқтага мос сонлар эса *ординаталар* деб аталади. X_1X ўқни—*абсциссалар ўқи*; Y_1Y ни эса *ординаталар ўқи* ва „0“ нуқта *координаталар боши* дейилади. Уларнинг ҳаммаси биргаликда текисликдаги тўғри бурчакли *Декарт*[1] *координаталари системаси* деб аталади.

(XOY), (YOX_1), (X_1OY_1) ва (Y_1OX) текисликларни *координата текисликлари* дейилади ва улардан (XOY)—биринчи чорак, (YOX_1)—иккинчи чорак, (X_1OY_1) — учинчи чорак ва (Y_1OX)—тўртинчи чорак деб ҳам аталади. Координаталар текислигидаги ҳар бир нуқтанинг вазияти, биринчиси *абсцисса*, иккинчиси *ордината* деб аталувчи икки сон билан белгиланади. Абсцисса билан ордината биргаликда нуқтанинг *координаталари* деб аталади. Берилган координаталар системаси ёрдами билан икки масалани ечиш мумкин:

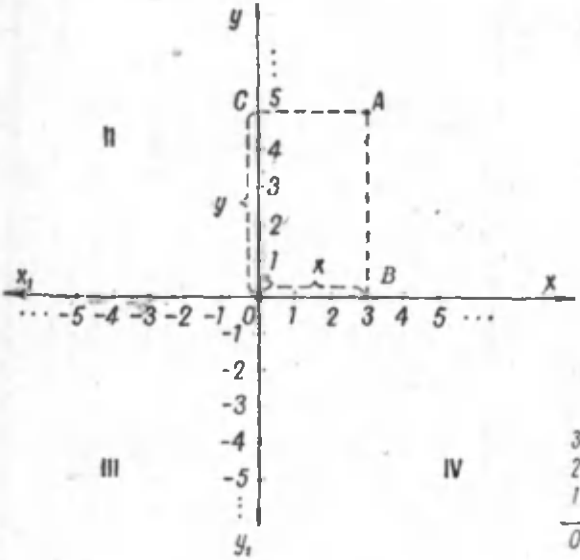
---

[1] Р. Декарт — XVII асрда яшаган машҳур француз математиги.

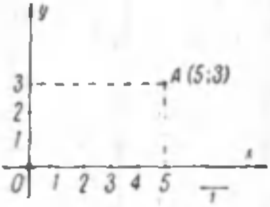
1) текисликда берилган нуқтанинг координаталарини аниқлаш;

2) нуқтанинг координаталари берилганда нуқтани ўзини топиш.

1- **масала.** I чоракда „A“ нуқта берилган, унинг координаталари топилсин.



4- расм.



5- расм.

Ечиш. A нуқтадан ўқларга перпендикулярлар туширилса кифоя, яъни $BA \perp OX$ ва $AC \perp OY$ бўлсин. $AC = x$ — абсцисса, $AB = y$ — ордината, бу ҳолда нуқта бундай ёзилади: $A(x;\ y)$ (4- расм).

2- масала. $A(5;\ 3)$ нуқтанинг текисликдаги ўрни топилсин.

Ечиш. У 5- расмда кўрсатилгандек топилади.

Нуқта тўртта чоракнинг бирортасида ётганда, унинг координаталарининг ишоралари жадвалдагидек бўлади:

Чораклар	I	II	III	IV
Абсциссалар	+	—	—	+
Ординаталар	+	+	—	—

19- §. КОМПЛЕКС СОНЛАР

Таъриф. $a + bi$ *кўринишдаги сон комплекс сон дейилади.* Бунда a; b — ҳақиқий сон; a — комплекс соннинг *ҳақиқий қисми,* (bi) — *мавҳум қисми* дейилади[1]. i — мавҳум бирлик, $i^2 = -1$ деб қабул қилинган.

Масалан, $5 + 3i$; $\frac{2}{3} - i$; $1 + \frac{1}{2} i$ ва ҳоказоларнинг ҳар бири комплекс сондир.

Таъриф. ***Бир комплекс соннинг ҳақиқий қисми иккинчи бир комплекс соннинг ҳақиқий қисмига, мавҳум қисми эса мавҳум қисмига тенг бўлса, улар тенг комплекс сонлар дейилади.***

Масалан, $a + bi$ ва $c + di$ ларда $a = c$ ва $bi = di$ бўлса, у ҳолда $a + bi = c + di$ *бўлади.*

Агар $a = 0$ бўлса, $a + ib = 0 + ib = ib$ — мавҳум сон ҳосил бўлади.

Агар $b = 0$ бўлса, $a + ib = a + i\cdot 0 = a$ — ҳақиқий сон ҳосил бўлади.

Буларга асосан $2i = 0 + 2i$; $3 = 3 + 0\cdot i$ кўринишларда ёзиш ҳам мумкин.

Ёлғиз мавҳум қисмларининг олдидаги ишоралари билан фарқ қилувчи икки комплекс сон *қўшма комплекс* сонлар дейилади. Масалан, $(a + ib)$ ва $(a - ib)$ лар каби.

Манфий сонларнинг квадрат илдизлари

$i^2 = -1$ га асосланиб, манфий соннинг квадрат илдизини мавҳум бирлик (i) билан ифодалаб ёзиш мумкин.

Масалан, $\sqrt{-25} = \sqrt{25\cdot(-1)} = \sqrt{25}\cdot\sqrt{-1} = 5i$, чунки $(5i)^2 = 25i^2 = 25\cdot(-1) = -25$. Шунга ўхшаш: $\sqrt{-3} = i\sqrt{3}$; $\sqrt{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} i$ ва ҳоказо.

а) Комплекс сонлар устида амаллар

1) Қўшиш ва айириш

Комплекс сонларни ўзаро қўшиш ва айириш кўпҳадларни қўшиш ва айириш каби бажарилади.

$$(a + ib) + (c + id) = a + ib + c + id = (a + c) + i(b + d).$$

Мисол. $(3 + 2i) + (5 + 3i) = (3 + 5) + i(2 + 3) = 8 + 5i.$

$$(a + ib) - (c + id) = a + ib - c - id = (a - c) + i(b - d).$$

Мисол. $(7 + 2i) - (5 - 4i) = (7 - 5) + (2 + 4)i = 2 + 6i = 2(1 + 3i).$

---

[1] „Мавҳум сон“ деган ном XVII асрнинг 30- йилларида Декарт томонидан киритилган.

2) Кўпайтириш ва бўлиш

Икки комплекс сонни кўпайтириш ва бўлиш қуйидаги усуллар билан бажарилади.

Кўпайтириш.

$$(a + ib)(c + id) = ac + i^2bd + adi + bci = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Мисол.

$$(2 + 3i)\cdot(4 + 5i) = 8 + i^2 15 + 10i + 12i = 8 - 15 + 22i =$$
$$= -7 + 22i.$$

Бўлиш.

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{c^2 - i^2d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\,\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Мисол.

$$\frac{5 + 2i}{3 + 7i} = \frac{(5 + 2i)(3 - 7i)}{3^2 + 7^2} = \frac{15 - 14i^2 - 35i + 6i}{58} = \frac{29}{58} - i\,\frac{29}{58} = \frac{1}{2}\cdot(1 - i).$$

Демак, комплекс сонларнинг йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси[1] ва бўлинмаси яна комплекс сонни беради.

Машқлар. Қуйидаги амаллар бажарилсин:

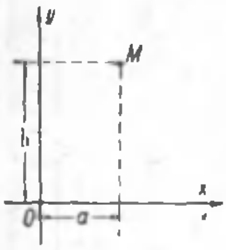
$$(-3 + 8i) + \left(1\frac{2}{3} - i\right);\ \left(2\frac{3}{5} + 3i\right) - \left(1{,}2 - 1\frac{2}{3}\,i\right);$$

$$(8 + 5i) - (3 + 7i);\ \left(5\frac{2}{7} + 1\frac{3}{4}\,i\right)\cdot(0{,}25 - 0{,}125i);$$

$$\frac{12 - 5i}{5 + 3i};\ \ \frac{1{,}4 + \frac{2}{5}\,i}{\frac{1}{2} + 0{,}4i};\ \ (5 + 2i)(-3 - 4i).$$

б) Комплекс соннинг геометрик тасвири

$(a + bi)$ ни геометрик тасвирлаш учун тўғри бурчакли координат системасида абсциссаси a, ординатаси b бўлган бирор M нуқтани топамиз (6- расм). Демак, $(a + ib)$ комплекс сонга геометрик нуқтаи назардан текисликда $M(a, b)$ нуқта тўғри келади ва, аксинча, текисликнинг ҳар бир нуқтасига фақат биргина комплекс сон тўғри келади.



6- расм.

Изоҳ. Ҳақиқий a сонни X ўқи бўйича, мавҳум қисмидаги b сонни Y ўқи бўйича қўйилгани учун, XX_1 ўқни *ҳақиқий ўқ*; YY_1 — *мавҳум ўқ* дейилади.

---

[1] Иккита кўпайтувчи комплекс сонлар ўзаро қўшма комплекс сонлар бўлмаганда.

в) Комплекс сонларнинг тригонометрик[1] шакли

$(a+ib)$ комплекс соннинг тригонометрик шаклини тасвирлаш учун, унга мос бўлган M нуқтани топиб, уни координаталар боши билан туташтирамиз (7- расм).

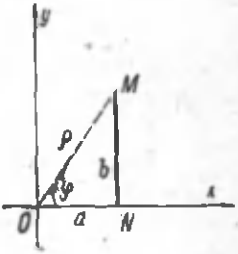
$OM=\rho$, $\angle MON=\varphi$ деб белгилаймиз. ρ, φ лар M нуқтанинг *қутб координиталари* дейилади, $\triangle MON$ дан: $a=\rho\cos\varphi$, $b=\rho\sin\varphi$. Буларга асосланиб, $(a+ib)=\rho\cos\varphi+i\rho\sin\varphi=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ бўлади.

$$\boxed{a+ib=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)}$$

комплекс соннинг *тригонометрик шакли* дейилади. Бундан ташқари, ўша учбурчакдан: $\rho=\sqrt{a^2+b^2}=|a+ib|$ комплекс соннинг *модули* дейилади.

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}, \text{ бундан } \varphi=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}.$$

Мисол. $(1-i)$ нинг тригонометрик шакли топилсин: $a=1$; $b=-1$; $\rho=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$; $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}=\frac{-1}{1}=-1$, бу ҳолда: $\varphi=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7}{4}\pi$ (IV чоракда, чунки $a>0$, $b<0$). $1-i=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$.



7- расм.

Машқлар. Қуйидаги комплекс сонларнинг тригонометрик шакли топилсин:

$$1+i;\ \sqrt{2}+i;\ \sqrt{2}-i;\ 1+\sqrt{3}\,i;\ 1-\sqrt{3}\,i.$$

г) Тригонометрик шаклдаги комплекс сонларни кўпайтириш, бўлиш, даражага кўтариш ва илдиз чиқариш

Кўпайтириш, даражага кўтариш, илдиз чиқариш ва бўлиш формулалари қуйидагидек йўллар билан чиқарилади.

Икки комплекс сон $M_1=\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ ва $M_2=\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ берилган бўлсин. Буларни кўпайтирамиз:

$$M_1\cdot M_2=\rho_1\rho_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+i\cos\varphi_1\sin\varphi_2+i\sin\varphi_1\cos\varphi_2+$$
$$+i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2)=\rho_1\rho_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+$$
$$+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2)]=\rho_1\rho_2\{\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\}.$$

---

[1] Ўқувчига шу китобнинг тригонометрия бўлимини қараб чиқиш тавсия этилади.

Демак, тригонометрик шаклдаги икки комплекс сонни бир-бирига кўпайтирганда, уларнинг модуллари ўзаро кўпайтирилиб, аргументлари эса қўшилади. Шунинг учун $M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 = \rho_1\rho_2 \ [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin \ (\varphi_1 + \varphi_2)] \times \rho_3 (\cos\varphi_3 + \ i\sin \ \varphi_3) = \rho_1\rho_2\rho_3[\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)]$ бўлади ва ҳоказо.

Умуман: $M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot \ \ldots \ \cdot M_n = \rho_1\rho_2 \ldots \rho_{n-1}[\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_{n-1}) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_{n-1})]\rho_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n) = \rho_1\rho_2 \ldots \ldots \rho_n[\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ \ldots \ + \varphi_n) + i\sin \ (\varphi_1 + \varphi_2 + \ \ldots + \varphi_n)]$ . ... (1) Бу *кўпайтириш формуласи* дейилади.

Энди (1) формулада: $M_1 = M_2 = \ldots = M_n = M$; $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_n = \rho$; $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n = \varphi$ бўлсин. Бу ҳолда: $[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ (2) даражанинг формуласи ҳосил бўлиб, уни *Муавр*[1] *формуласи* дейилади (n — ҳар қандай бутун сон ва $n = 0$ бўла олади).

Мисол. $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{20}$ ҳисоблансин.

Ечиш.

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1;$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a} = \sqrt{3}; \ \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Демак,

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{20} = [\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{20} = \left|1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{20} = \right.$$

$$= \cos 20 \cdot \frac{\pi}{3} + i\sin 20 \cdot \frac{\pi}{3} = \cos\left(6\pi + \frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(6\pi + \frac{2}{3}\pi\right) =$$

$$= \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi = \cos 120^\circ + i\sin 120^\circ =$$

$$= \cos(90^\circ + 30^\circ) + i\sin(90^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ + i\cos 30^\circ =$$

$$= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Илдиз чиқариш. $\sqrt{\rho(\cos\varphi - i\sin\varphi)} = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ деб белгилаймиз. Муавр формуласига асосан:

$$\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha).$$

Бундан:

$$\rho = r^2, \ r = \sqrt{\rho}; \ \varphi = 2\alpha, \ \alpha = \frac{\varphi}{2} \text{ ёки } \alpha = \frac{\varphi + 2k\pi}{2}.$$

Аммо синус ва косинусларнинг энг кичик даври 2π бўлгани учун k га 0; 1 қийматлар бериш билан чегараланса бўлади.

---

[1] А. Муавр (1667 — 1754 й) — инглиз математиги.

Демак,

$$\sqrt{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{2}\right).$$

Шунга ўхшаш:

$$\sqrt[5]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[5]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{5} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{5}\right).$$

Умуман:

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$$

[n — бутун мусбат сон, $k = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots\ ;\ (n-1)$].

Мисол. $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \sqrt{1\cdot(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)} =$

$= \sqrt{1}\left(\cos\frac{60^\circ}{2} + i\sin\frac{60^\circ}{2}\right) = \cos 30^\circ + i\sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ва

$$\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \cos\frac{60 + 4\pi}{2} + i\sin\frac{60 + 4\pi}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Энди $M_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ ва $M_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1)$ комплекс сонларнинг бўлинмасини топамиз:

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\right] =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right].$$

Демак, тригонометрик шаклдаги икки комплекс сонни бир-бирига бўлганда, уларнинг модуллари ўзаро бўлиниб, аргументлари эса айирилади.

Мисол.

$$\frac{\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)}{\sqrt{5}(\cos 26^\circ 30' + i\sin 26^\circ 30')} = \sqrt{\frac{2}{5}}\left[\cos(45^\circ - 26^\circ 30') +\right.$$

$$\left. + i\sin(45^\circ - 26^\circ 30')\right] = \sqrt{\frac{2}{5}}(\cos 18^\circ 30' + i\sin 18^\circ 30').$$

20- §. КВАДРАТ ТЕНГЛАМАЛАР. КВАДРАТ УЧҲАДНИ КЎПАЙТУВЧИЛАРГА АЖРАТИШ

Таъриф. *Бир номаълумли иккинчи даражали тенглама квадрат тенглама дейилади.* Масалан, $3x^2 - 5x + 2 = 0$; $4x^2 - x = 0$; $x^2 - 5x + 6 = 0$; $x^2 - 7x + 12 = 0$ ва ҳоказоларнинг ҳар бири квадрат тенгламадир.

а) Чала квадрат тенгламалар ва уларни ечиш

$ax^2+bx=0$; $ax^2+c=0$ ва $ax^2=0$ ларни нормал кўринишдаги чала квадрат тенгламалар дейилади. Буларда: a, b, c лар маълум сон (коэффициент) лардир, x — номаълум сон.

1) $ax^2+bx=0$ тенглама ечилсин.

Ечиш. Бундай тенгламани ечишда x ни қавс ташқарисига чиқариш керак:

$$ax^2+bx=x\cdot(ax+b)=0, \text{ бундан } x_1=0;\ ax+b=0,\ x_2=-\frac{b}{a}.$$

Мисол. $4x^2-x=0$ тенглама ечилсин.

Ечиш. $x\cdot(4x-1)=0$; $x_1=0$; $4x-1=0$; $x_2=\frac{1}{4}$.

2) $ax^2+c=0$ тенглама ечилсин.

Ечиш. $ax^2=-c$ ёки $x^2=-\frac{c}{a}$, бундан $x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Мисол. $4x^2-9=0$ тенглама ечилсин.

Ечиш. $4x^2=9$; $x^2=\frac{9}{4}$; $x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=\pm\frac{3}{2}$.

8) $ax^2=0$ тенглама ечилсин, $a\neq 0$.

Ечиш. $x^2=\frac{0}{a}=0$; $x_{1,2}=0$.

Мисол. $\frac{3}{2}x^2=0$ берилган бўлса, бу ҳолда $x^2=\frac{0}{\frac{2}{3}}=0$ ёки $x_{1,2}=0$.

Машқлар. Қуйидаги тенгламалар ечилсин:

1) $3x^2-5x=0$; 2) $2\frac{1}{2}x^2-1{,}4=0$; 3) $2{,}6x^2-1\frac{2}{3}x=0$;

4) $5{,}3x+4x^2=1\frac{1}{2}x-1{,}2x^2$; 5) $16-3(5+4x)=x(2x-1)+28$;

6) $\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x-1}=2\frac{2}{3}$; 7) $\frac{2y-3}{y}=\frac{7}{9-y}$; 8) $\frac{3}{5}ax^2-\frac{1}{2}bx=0$;

9) $\frac{x+4}{x-4}+\frac{x-4}{x+4}=3\frac{1}{3}$; 10) $\frac{x-2}{3x+14}=\frac{3\cdot(8-x)}{28-x}$; 11) $3{,}72x^2+2\frac{14}{15}x=1\frac{1}{5}x^2+x$.

б) Квадрат учҳаддан тўла квадрат ажратиш

ax^2+bx+c квадрат учҳаддан тўла квадрат ажратиш қуйидагидек йўллар билан бажарилади:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right].$$

Демак, $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$. Агар квадрат учҳад (x^2+px+q) кўринишда бўлса, у ҳолда унга $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ ни қўшамиз ва айирамиз.

$$x^2+px+q=x^2+px+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}.$$

1- мисол. $3x^2+12x+1=3\left(x^2+4x+\frac{1}{3}\right)=3\left(x^2+4x+4-\right.$
$$\left.-4+\frac{1}{3}\right)=3\cdot\left[(x+2)^2-\frac{11}{3}\right].$$

2- мисол. $x^2+8x+3=x^2+8x+16-16+3=$
$$=(x+4)^2-13.$$

3- мисол. $x^2-\frac{3}{2}x+5=\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}+5=$
$$=\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{71}{16}.$$

Машқлар. Қуйидаги квадрат учҳадлардан тўла квадрат ажратилсин:

1) $2x^2-6x+3$; 2) x^2+5x-1; 3) x^2+4x+5; 4) $4y^2-$ $-6y+3$; 5) z^2-z+2; 6) $3x^2-2x+6$; 7) x^2+2x; 8) $5z^2-3z$.

в) Тўла квадрат тенгламалар ва уларни ечиш

$ax^2+bx+c=0$... (1) ва $x^2+px+q=0$... . (2) тенгламалар *нормал* кўринишдаги *тўла квадрат тенгламалар* дейилади. (1) тенглама *умумий кўринишдаги тўла квадрат тенглама;* (2) тенглама эса *келтирилган квадрат тенглама* дейилади. Ҳар вақт (1) тенгламани (2) тенглама кўринишига келтириш мумкин: (1) тенгламани ҳадлаб a $(a\neq 0)$ га бўламиз: $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$, энди $\frac{b}{a}=p$, $\frac{c}{a}=q$ деб белгиласак, $x^2+px+q=0$ ҳосил бўлади.

1) $x^2+px+q=0$ тенгламани ечиш учун унинг чап томони (x^2+px+q) дан тўла квадрат ажратамиз: $x^2+px+q=$ $=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}$. Бу ҳолда $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}=0$ ёки $x+$ $+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, бундан

$$\boxed{x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.}$$

Бу — келтирилган квадрат тенгламанинг *илдизларини топиш формуласи* дейилади. Демак, келтирилган квадрат тенгламанинг илдизлари: биринчи даражали номаълум коэффициенти ярмини тескари ишора билан олинганига шу ярмининг квадрати билан озод ҳад айирмасининг квадрат илдизини қўшилгани ва айрилганига тенг.

Мисол. $x^2-6x+8=0$ тенглама ечилсин.

Ечиш. Формулага асосан $x_{1,2}=\frac{6}{2}\pm\sqrt{3^2-8}=3\pm1$; $x_1=3+1=4$ ва $x_2=3-1=2$.

2) $ax^2+bx+c=0$ тенгламани ечиш учун ҳам ax^2+bx+c квадрат учҳаддан тўла квадрат ажратамиз:

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right].$$

Бу ҳолда

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}=0 \text{ дан } x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

ни топамиз. Бундан:

$$\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.}$$

Бу формула умумий кўринишдаги квадрат тенглама илдизларини топиш формуласи дейилади. Бу формулада тенгламадаги b ва c коэффициентлар қарама-қарши ишора билан олинади.

1- мисол. $3x^2-5x+2=0$ тенглама ечилсин.

Ечиш. $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot3\cdot2}}{2\cdot3}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{6}=\frac{5\pm1}{6}$;

$x_1=\frac{5-1}{6}=\frac{2}{3}$; $x_2=\frac{5+1}{6}=1$. Демак, $x_1=\frac{2}{3}$ ва $x_2=1$.

2- мисол. $x^2+x-6=0$ тенглама ечилсин.

Ечиш.

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\cdot6}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{-1\pm5}{2};$$

$$x_1=-3;\ x_2=2.$$

Агар тўла квадрат тенгламада биринчи даражали номаълумнинг коэффициенти жуфт сон, яъни $ax^2+2bx+c=0$ бўлса, у ҳолда

$$\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}}$$

формула билан унинг илдизларини топиш қулай.

3- мисол. $3x^2-8x+4=0$ тенглама ечилсин.

Ечиш.

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-3\cdot4}}{3}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{3}=\frac{4\pm2}{3};$$

$$x_1 = \frac{4-2}{3} = \frac{2}{3};\ x_2 = \frac{4+2}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

Агар тенглама нормал кўринишда бўлмаса, дастлаб уни нормал кўринишга келтириб, сўнгра ечиш керак.

4- мисол $\frac{x}{7} + \frac{21}{x+5} = 6\frac{5}{7}$ тенглама ечилсин.

Ечиш. $\frac{x}{7} + \frac{21}{x+5} = \frac{47}{7}$ ёки $x(x+5) + 21 \cdot 7 = 47(x+5)$, ёки $x^2 + 5x + 147 - 47x - 235 = 0$ ёки $x^2 - 42x - 88 = 0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Бундан:

$$x_{1,2} = 21 \pm \sqrt{21^2 + 88} = 21 \pm \sqrt{441 + 88} =$$
$$= 21 \pm \sqrt{529} = 21 \pm 23\ \ x_1 = -2;\ x_2 = 44.$$

5- мисол. $\frac{2ax}{2ax-b} = \frac{3b}{2ax+b} - \frac{a^2x^2+2b^2}{b^2-4a^2x^2}$ тенглама ечилсин.

Ечиш. Берилган тенгламани умумий махражга келтириб ҳамда махражни ташлаб юборсак, $2ax(2ax+b) = 3b(2ax-b) + a^2x^2 + 2b^2$ ёки $4a^2x^2 + 2abx = 6ax - 3b^2 + a^2x^2 + 2b^2$, ёки $8a^2x^2 - 4abx + b^2 = 0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Бундан:

$$x_{1,2} = \frac{2ab \pm \sqrt{4a^2b^2 - 3a^2b^2}}{3a^2} = \frac{2ab \pm \sqrt{a^2b^2}}{3a^2} =$$
$$= \frac{2ab \pm ab}{3a^2};\ x_1 = \frac{2ab - ab}{3a^2} = \frac{b}{3a};\ x_2 = \frac{2ab + ab}{3a^2} = \frac{b}{a}.$$

Машқлар. Қуйидаги тенгламалар ечилсин:

1) $3x^2 - 7x + 2 = 0;$

4) $\frac{2x}{x-a} = \frac{x-a}{a};$

6) $5 - \frac{45}{4x^2-1} = \frac{3x}{2x-1} - \frac{39}{2x+1};$

7) $\frac{1 + \frac{1}{2}x}{9x+3} = \frac{x+2}{3x-1} - \frac{8x^2+3}{9x^2-1};$

8) $\sqrt{2}z^2 + 4\sqrt{3}z - 2\sqrt{2} = 0;$

10) $\frac{a}{y-a} - \frac{y}{y+a} = 1,4;$

12) $\frac{2u^2+2u}{6u+3} + \frac{a^2-4}{6a} = \frac{1}{4u+2};$

2) $x^2 - 8x + 15 = 0;$

3) $21x^2 + x - 2 = 0;$

5) $3x + \frac{(x-3)^2}{4} = \frac{(x+3)^2}{8} + \frac{x^2-1}{3};$

(Жавоб. $x_1 = 1;\ x_2 = \frac{4}{33}.$)

9) $z^2 + 2(\sqrt{3}+1)z + 2\sqrt{3} = 0;$

11) $3x^2 - (4a+3b)x + a(a+b) = 0;$

(Жавоб. $x_1 = \frac{a}{3};\ x_2 = a+b.$)

13) $a^2 - \frac{a^2-b^2}{2x-x^2} = \frac{b^2(x+2)}{x-2};$

14) $\frac{1}{ax-cx^2} - \frac{1}{a-c} = \frac{d(x-1)}{a^2-acx-ac+c^2x}.$

(Жавоб. $x_{1,2} = \frac{d-a \pm \sqrt{(a-d)^2 - 4c(a+d-c)}}{2(d-c)}.$)

15) $x^2 + (a-b)x - ab = 0.$

(Жавоб. $x_1 = b;\ x_2 = -a.$)

г) Квадрат тенглама илдизларининг хоссалари

$x^2+px+q=0$ тенгламанинг илдизлари x_1 ва x_2 бўлсин.

Виет теоремаси. *Келтирилган квадрат тенглама илдизларининг йиғиндиси биринчи даражали номаълум коэффициентининг тескари ишора билан олинганига, кўпайтмаси эса озод ҳадга тенг;* яъни:

$$x_1+x_2=-p;\quad x_1\cdot x_2=q.$$

Исбот. $x^2+px+q=0$ тенгламанинг илдизлари $x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ эди. Бу ҳолда:

$$x_1+x_2=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=-2\cdot\frac{p}{2}=-p;$$

$$x_1\cdot x_2=\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{2}-q}\right)\cdot\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{2}-q}\right)=\left(-\frac{p}{2}\right)^2-$$

$$-\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2=\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q=q.$$

Теорема исботланди.

1- мисол. $x_1=4$ ва $x_2=\frac{2}{3}$ илдизларга кўра квадрат тенглама тузилсин.

Ечиш. Қўйилган масала Виет теоремаси билан ечилади. $x_1+x_2=4+\frac{2}{3}=\frac{14}{3}$; $x_1\cdot x_2=4\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$, бу ҳолда тенглама $x^2-\frac{14}{3}x+\frac{8}{3}=0$ ёки $3x^2-14x+8=0$ кўринишда бўлади.

2- мисол. $x_1=\frac{b}{a}$, $x_2=a$ илдизларга кўра квадрат тенглама тузилсин.

Ечиш. $x_1+x_2=\frac{b}{a}+a=\frac{b+a^2}{a}$; $x_1\cdot x_2=\frac{b}{a}\cdot a=b$. Бу ҳолда тенглама $x^2-\frac{b+a^2}{a}x+b=0$ ёки $ax^2-(a^2+b)x+ab=0$ кўринишда бўлади.

3- мисол. $x_1=4\frac{1}{2}$, $x_2=1\frac{3}{2}$ илдизларга эга бўлган квадрат тенглама тузилсин.

Ечиш. $x_1+x_2=4\frac{1}{2}+1\frac{2}{3}=6\frac{1}{6}$; $x_1\cdot x_2=\frac{9}{2}\cdot\frac{5}{3}=\frac{15}{2}$. Демак, тенглама $x^2-\frac{37}{6}x+\frac{15}{2}=0$ ёки $6x^2-37x+45=0$ кўринишда бўлади.

Машқлар. Берилган илдизларига кўра квадрат тенгламалар тузилсин: 1) $x_1=2$; $x_2=\frac{3}{5}$; 2) $x_1=2a$; $x_2=3a$; 3) $x_1=\frac{3}{a}$; $x_2=a$; 4) $x_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$; $x_2=1{,}1$; 5) $x_1=x_2=1\frac{1}{2}$; 6) $x_1=\frac{b}{2}$; $x_2=\frac{3b}{2}$.

д) Квадрат учҳадни чизиқли кўпайтувчиларга ажратиш

1. x^2+px+q квадрат учҳад чизиқли кўпайтувчиларга ажратилсин.

Ечиш. $x^2+px+q=0$, яъни берилган учҳадни нолга тенглаб, унинг x_1, x_2 илдизларини топамиз. Кейин $(x-x_1)$ ва $(x-x_2)$ айирмаларни тузиб, уларни ўзаро кўпайтирамиз:

$$(x-x_1)\cdot(x-x_2)=\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\cdot\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)=$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q=x^2+px+q.$$

Демак,

$$\boxed{x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2).}$$

Бу *квадрат учҳадни чизиқли кўпайтувчиларга ажратиш формуласи* дейилади.

Мисол. x^2-5x+6 квадрат учҳад чизиқли кўпайтувчиларга ажратилсин.

Ечиш. $x^2-5x+6=0$ тенгламадан: $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=$ $=\frac{5\pm1}{2}$; $x_1=3$; $x_2=2$. Демак, $x^2-5x+6=(x-3)\cdot(x-2)$.

2. ax^2+bx+c квадрат учҳад чизиқли кўпайтувчиларга ажратилсин.

Ечиш. $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a(x^2+px+q)=$

$$=a(x-x_1)\cdot(x-x_2).$$

$$\boxed{ax^2+bx+c=a(x-x_1)\cdot(x-x_2).}$$

Бу ҳам *квадрат учҳадни чизиқли кўпайтувчиларга ажратиш формуласи* дейилади.

1-мисол. $3x^2-5x+2$ квадрат учҳад чизиқли кўпайтувчиларга ажратилсин.

Ечиш. $3x^2-5x+2=0$ тенгламадан: $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{6}=$

$$=\frac{5+1}{6};\ x_1=1,\ x_2=\frac{2}{3}.$$

Бу ҳолда

$$3x^2-5x+2=3(x-1)\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right).$$

2-мисол. $2x^2+11x+5$ квадрат учҳад чизиқли кўпайтувчиларга ажратилсин.

Ечиш. $2x^2+11x+5=0$ тенгламадан:

$$x_{1,2}=\frac{-11\pm\sqrt{121-40}}{4}=\frac{-11\pm9}{4};\ x_1=-5,\ x_2=-\frac{1}{2}.$$

Бу ҳолда:

$$2x^2+11x+5=2(x+5)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

Машқлар. Қуйидаги квадрат учҳадлар чизиқли кўпайтувчиларга ажратилсин:

$$x^2-2x-15;\quad x^2-3{,}6x+2{,}88;\quad ay^2-(1+ab)y+b;$$
$$x^2+5x+6;\ 6x^2-7x+2;\ 4x^2+3x-1;\ x^2-2ax+(a^2-b^2);$$
$$3x^2+5x+2;\ mx^2-n(m+1)x+n^2;\ 6x^2+23x+21.$$

Энди, x^2+px+q ни бошқача йўл билан чизиқли кўпайтувчиларга ажратиш усулини кўрамиз. $x^2+px+q=0$ тенгламанинг илдизлари x_1, x_2 ни топамиз. У ҳолда Виет теоремасига асосан:

$$x_1+x_2=-p;\ x_1\cdot x_2=q;\quad p=-(x_1+x_2);\ q=x_1\cdot x_2.$$

Энди p ва q ларнинг қийматларини берилган квадрат учҳадга қўйиб, уни соддалаштирамиз: $x^2+px+q=x^2-x\cdot(x_1+x_2)+$
$$+x_1x_2=x^2-xx_1-xx_2+x_1x_2=x(x-x_1)-x_2(x-x_1)=$$
$$=(x-x_1)\cdot(x-x_2).$$

Демак, юқорида ҳосил бўлган $x^2+px+q=(x-x_1)\cdot(x-x_2)$ формуланинг ўзи келиб чиқди. Шунга ўхшаш:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a(x-x_1)(x-x_2).\ (a\neq 0.)$$

21-§. БИКВАДРАТ ТЕНГЛАМАЛАР

Таъриф. $ax^4+bx^2+c=0$ кўринишдаги тенглама *биквадрат тенглама* дейилади. Тенгламадаги a,b,c — маълум сонлар (коэффициентлар), x эса номаълум сон.

Ечиш. $ax^4+bx^2+c=0$ ни квадрат тенглама қилиб ечсак: $x_{1,2}^2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ҳосил бўлади. Энди бунинг икки қисмидан квадрат илдиз чиқарсак:

$$\boxed{x_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.}$$

Бу — *биквадрат тенгламанинг илдизларини топиш формуласи дейилади.*

Демак, биквадрат тенгламанинг илдизлари, уни маълум сон квадратига нисбатан тўла квадрат тенглама қилиб ечганда чиққан сон (ифода)нинг (±) плюс, минус квадрат илдизига тенг.

1- мисол. $2x^4 - 19x^2 + 9 = 0$ берилган.

Ечиш.

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} = \pm\sqrt{\frac{19 \pm \sqrt{361 - 72}}{4}} = \pm\frac{\sqrt{19 \pm 17}}{2};$$

$$x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{19 + 17}}{2} = \pm\frac{6}{2} = \pm 3; \quad x_{3,4} = \frac{\pm\sqrt{19 - 17}}{2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2- мисол. $a^2b^2x^4 = b^4x^2 - a^2b^2 + a^4x^2$ тенглама ечилсин.

Ечиш. $a^2b^2x^4 = b^4x^2 - a^2b^2 + a^4x^2$ ёки $a^2b^2x^4 - (b^4 + a^4)x^2 + a^2b^2 = 0$. Формулага асосан:

$$x = \pm\sqrt{\frac{(b^4 + a^4) \pm \sqrt{(a^4 + b^4)^2 - 4a^4b^4}}{2a^2b^2}} =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{(a^4 + b^4) \pm \sqrt{a^8 + 2a^4b^4 + b^8 - 4a^4b^4}}{2a^2b^2}} =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{(a^4 + b^4) \pm \sqrt{a^8 - 2a^4b^4 + b^8}}{2a^2b^2}} = \pm\sqrt{\frac{(a^4 + b^4) \pm (a^4 - b^4)}{2a^2b^2}};$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{a^4 + b^4 + a^4 - b^4}{2a^2b^2}} = \pm\frac{a}{b}; \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{a^4 + b^4 - a^4 + b^4}{2a^2b^2}} =$$

$$= \pm\frac{b}{a}. \left(x_{1,2} = \pm\frac{a}{b};\ x_{3,4} = \pm\frac{b}{a}.\right)$$

Машқлар. Қуйидаги тенгламалар ечилсин:

1) $3x^4 - 28x^2 + 9 = 0$; 2) $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$; 3) $3x^4 - 7x^2 + 2 = 0$;
4) $x^4 + 9n^2 - n^2x^2 + 25m^2 = 0$; 5) $d^2y^4 - c^2d^2y^2 = y^2 - c^2$;
6) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$; 7) $3\left(\frac{1}{x^2} - 2\right)^2 - 5\left(\frac{1}{x^2} - 2\right) + 2 = 0$;
8) $4x^4 + a^2 = x^4 + 4a^2x^2$; 9) $3x^4 - 4x^2 - 4 = 0$;
10) $5x^4 - 21x^2 + 4 = 0$; 11) $cy^4 - (c^2 + d)y^2 + cd = 0$;
12) $z^4 - \frac{a + b}{3}z^2 + \frac{ab}{9} = 0$; 13) $9x^4 - (36a^2 + b^2)x^2 + 4a^2b^2 = 0$.

22- §. ИККИ ҲАДЛИ ТЕНГЛАМАЛАР ВА УЛАРНИ ЕЧИШ

1) $x^2 - a^2 = 0$ берилган. Бу тенглама ечилсин.
Ечиш. $x^2 = a^2$, бундан: $x_{1,2} = \pm a$.
2) $x^2 + a^2 = 0$ тенглама ечилсин.
Ечиш. $x^2 = -a^2$, бундан: $x_{1,2} = \pm ai$.
3) $x^3 - a^3 = 0$ тенглама ечилсин.
Ечиш. $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2) = 0$, бундан: $x - a = 0$;

$$x_1 = a; \quad x^2 + ax + a^2 = 0; \quad x_{2,3} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4a^2}}{2} = \frac{-a \pm ai\sqrt{3}}{2}.$$

4) $x^3 + a^3 = 0$ тенглама ечилсин.

Ечиш. $x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)=0$, бундан: $x+a=0$; $x=-a$; $x^2-ax+a^2=0$, $x_{2,3}=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4a^2}}{2}=\frac{a\pm ia\sqrt{3}}{2}$.

5) $x^4-a^4=0$ тенглама ечилсин.

Ечиш. $x^4-a^4=(x^2-a^2)(x^2+a^2)=0$, бундан: $x^2-a^2=0$ ва $x^2+a^2=0$. Булар юқорида ечилган.

6) $x^6-a^6=0$ тенглама ечилсин.

Ечиш. $x^6-a^6=(x^3-a^3)(x^3+a^3)=0$, бундан: $x^3-a^3=0$ ва $x^3+a^3=0$. Булар ҳам юқорида ечилган.

Мисоллар.

1) $x^3+8=0$ тенглама ечилсин.

Ечиш. $x^3+8=x^3+2^3=(x+2)(x^2-2x+4)=0$, бундан:

$$x+2=0 \text{ ва } x^2-2x+4=0;\ x_1=-2,\ x_{2,3}=1\pm i\sqrt{3}.$$

2) $6x^3-5=0$ тенглама ечилсин.

Ечиш. $6x^3-5=0$ ёки $x^3-\frac{5}{6}=0$ ёки $x^3-\left(\sqrt[3]{\frac{5}{6}}\right)^3=$
$=\left(x-\sqrt[3]{\frac{5}{6}}\right)\left(x^2+\sqrt[3]{\frac{5}{6}}\,x+\sqrt[3]{\frac{25}{36}}\right)=0$, бундан: $x-\sqrt[3]{\frac{5}{6}}=0$,

$$x_1=\sqrt[3]{\frac{5}{6}};\ x^2+\sqrt[3]{\frac{5}{6}}\,x+\sqrt{\frac{25}{36}}=0 \text{ дан:}$$

$$x_{2,3}=\frac{-\sqrt[3]{\frac{5}{6}}\pm i\sqrt{3\sqrt[3]{\frac{25}{36}}}}{2}.$$

3) $u^6-49=0$ тенглама ечилсин.

Ечиш. $u^6-49=(u^3)^2-[(\sqrt[3]{7})^3]^2=[u^3-(\sqrt[3]{7})^3][u^3+(\sqrt[3]{7})^3]=0$. Бундан $u^3-(\sqrt[3]{7})^3=0$ ва $u^3+(\sqrt[3]{7})^3=0$ бўлади. Энди буларнинг ҳар бири 1- мисолга ўхшаб ечилади.

Машқлар.

1) $4x^5-3x^4+2x^2-3x-5$ кўпҳадни $(x-1)$ ва $(x+2)$ га бўлмасдан қолдиқ топилсин.

Қуйидаги тенгламалар ечилсин:

2) $x^4-8=0$. (Жавоб. $x_{1,2}=\pm\sqrt[4]{8}$; $x_{3,4}=\pm i\sqrt[4]{8}$.)

3) $8x^3-1=0$. $\left(\text{Жавоб. } x_1=\frac{1}{2},\ x_{2,3}=-\frac{1}{4}\pm i\frac{\sqrt{3}}{4}.\right)$

4) $3x^3-2=0$. $\left(\text{Жавоб. } x_1=\sqrt[3]{\frac{2}{3}};\ x_{2,3}=-\frac{\sqrt[3]{18}}{6}\pm i\frac{\sqrt[6]{12}}{2}.\right)$

5) $2x^6-128=0$. (Жавоб. $x_1=2$; $x_{2,3}=-1\pm i\sqrt{3}$;
$x_4=-2$; $x_{5,6}=1\pm i\sqrt{3}$.)

6) $27y^3+1=0$. $\left(\text{Жавоб. } y_1=-\frac{1}{3};\ y_{2,3}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{6}.\right)$

7) $3z^3+2=0$. (Жавоб. $z_1=-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$; $z_{2,3}=\frac{\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\pm i\sqrt[6]{12}}{2}$.)

23-§. БАЪЗИ ЮҚОРИ ДАРАЖАЛИ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ЕЧИШ

Баъзи юқори даражали тенгламалар кўпайтувчиларга ажратиш, тенгламадаги озод ҳаднинг бўлувчиларини тенгламага қўйиш ва шу каби йўллар билан ечилиши мумкин. Бундай тенгламалардан қуйида бир нечасини ечиб кўрсатамиз.

1. $x^3-2x+4=0$ тенглама ечилсин.

Ечиш. Озод ҳад 4 нинг бўлувчилари ± 1; ± 2; ± 4 дир. Буларни бирин-кетин тенгламадаги x нинг ўрнига қўйилганда, улардан тенгламани қаноатлантиргани тенгламанинг илдизи бўлади. Кейин Безу теоремасининг 2- натижасидан фойдаланиш керак. Бу мисолда $x=-2$ уни қаноатлантиради. Безу теоремасининг 2- натижасига асосан (x^3-2x+4) кўпҳад $(x+2)$га қолдиқсиз бўлинади, яъни берилган тенгламани

$$x^3-2x+4=(x+2)(x^2-2x+2)=0$$

шаклда ёзиш мумкин. Энди $x^2-2x+2=0$ тенгламани ечиб, $x_{2,3}=1\pm\sqrt{1-2}=1\pm i$ эканини топамиз. Демак, $x_1=-2$, $x_{2,3}=1\pm i$.

Энди бу тенгламани бошқа йўл билан ечилишини қуйидагилардан кўриш осон:

$$x^3-2x+4=0;\ x^3-2x+4=x^3-4x+2x+4=$$
$$=x(x^2-4)+2(x+2)=(x+2)[x(x-2)+2]=$$
$$=(x+2)(x^2-2x+2)=0,$$

бундан: $x+2=0$, $x_1=-2$; $x^2-2x+2=0$ дан $x_{2,3}=1\pm\sqrt{1-2}=$ $=1\pm i$.

2. $x^4-3x^3+3x^2-x=0$ тенглама ечилсин.

Ечиш. $x^4-3x^3+3x^2-x=x\ (x^3-3x^2+3x-1)=$ $=x(x-1)^3=0$. Бундан: $x_1=0$; $x_{2,3,4}=1$.

3. $x^5-3x^4+2x^3=0$ тенглама ечилсин.

Ечиш. $x^5-3x^4+2x^3=x^3\ (x^2-3x+2)=0$, бундан $x^3=0$ ва $x^2-3x+2=0$, $x_{1,2,3}=0$ ва $x_{4,5}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}$; $x_4=2$; $x_5=1$.

4. $x^3-6x^2+11x-6=0$ тенглама ечилсин.

Ечиш. 6 нинг бўлувчилари ± 1; ± 2; ± 3; ± 6 ни юқоридагидек тенгламага қўйиб текширамиз.

$x=1$ тенгламани қаноатлантиради. Безу теоремасининг хоссасига асосан:

$$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x^2-5x+6).$$

Энди, $x^2-5x+6=0$ тенгламадан $x_{2,3}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm1}{2}$.

5. $x^4+4x^3+8x^2+16x+16=0$ тенглама ечилсин.

Ечиш. $\pm1;\ \pm2;\ \pm4;\ldots$ ларни тенгламага қўйиб текшириб курамиз, $x=-2$ уни қаноатлантиради. Безу теоремасининг 2- натижасига асосан:

$$x^4+4x^3+8x^2+16x+16=(x+2)(x^3+2x^2+4x+8).$$

Демак, қолган илдизларни топиш учун $x^3+2x^2+4x+8=0$ тенглама ҳосил бўлди. Бунинг чап қисмини группалаб, кўпайтувчиларга ажратиб ечиш қулай, яъни: $x^3+2x^2+4x+8=$ $=x^2(x+2)+4(x+2)=(x+2)(x^2+4)=0$. Бундан: $x+2=0$ ва $x^2+4=0$. Демак, x_1+-2 ва $x_{2,3}=\pm2i$.

6. $x^5-3x^4+4x^3-4x^2+3x-1=0$ тенглама ечилсин.

Ечиш. $x^5-3x^4+4x^3-4x^2+3x-1=x^5-x^4-2x^4+4x^3-$ $-4x^2+x+2x-1=x^4(x-1)-2x(x^3-1)+4x^2(x-1)+$ $+(x-1)=(x-1)(x^4-2x^3-2x^2-2x+4x^2+1)=0.$

Бундан:

$x-1=0$ ва $x^4-2x^3+2x^2-2x+1=0$. $x^4-2x^3+2x^2-2x+1=$ $=x^4-x^3-x^3+2x^2-2x+1=x^3(x-1)-(x^3-1)+2x(x-1)=$ $=(x-1)(x^3-x^2-x-1+2x)=(x-1)(x^3-x^2+x-1)=$ $=(x-1)(x-1)(x^2+1)=0.$

Бундан: $x-1=0,\ x-1=0,\ x^2+1=0$.
Демак, $x_{1,2,3}=1,\ x_{4,5}=\pm i$.

Машқлар. Қуйидаги тенгламалар ечилсин:

1. $x^3-5x^2+8x-4=0$. (Жавоб. $x_1=+1;\ x_2=x_3=+2$.)
2. $x^3-4x^2+5x-2=0$. (Жавоб. $x_1=x_2=+1;\ x_3=+2$.)
3. $x^4-2x^3+2x^2-2x+1=0$. (Жавоб. $x_1=x_2=+1;$ $x_{3,4}=\pm i$.)
4. $x^4-8x^3+15x^2=0$. (Жавоб. $x_1=x_2=0;\ x_3=3;\ x_4=5$.)
5. $18x^4-63x^3+35x^2-28x+12=0$. (Жавоб. $x_1=3;$ $x_2=\frac{1}{2};\ x_{3,4}=\pm\frac{2}{3}$.)

Кўрсатма: $35x^2=27x^2+8x^2$ кўринишда ёзиб олинсин.

6. $x^5+3x^4-10x^3-x^2-3x+10=0$. (Жавоб. $x_1=1;\ x_2=2;$ $x_3=-5;\ x_{4,5}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$.)
7. $x^5-x^4-3x^3+5x^2-2x=0$. (Жавоб. $x_1=0;\ x_2=x_3=$ $=x_4=1;\ x_5=-2$.)
8. $x^3+2x^2-4x-8=0$. (Жавоб. $x_1=x_2=-2;\ x_3=2$.)

9. $6x^3+x^2-4x+1=0$. (Жавоб $x_1=-1;\ x_2=\frac{1}{3};\ x_3=\frac{1}{2}$.)

10. $2x^3-x^2-16x+8=0$ (Жавоб $x_1=\frac{1}{2};\ x_{2,3}=\pm 2\sqrt{2}$.)

24-§. ИРРАЦИОНАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Таъриф. *Агар тенгламадаги (бир ёки бир неча) номаълум сон илдиз ишораси остида қатнашса, бундай тенглама иррационал тенглама дейилади.*

Масалан,

$$\sqrt[5]{25+\sqrt{x-4}}=2;\quad 5\cdot\sqrt{2x+3}-\sqrt{18x-5}=\frac{4(x+3)}{\sqrt{2x+3}};$$

$$x+\sqrt{x-1}=3;\ \sqrt{4x+8}-\sqrt{3x-2}=2;\ \sqrt{5x+4}+\sqrt{2x-1}=$$
$$=\sqrt{3x+1}$$

$$\sqrt{xy}+\sqrt[3]{y}=6.\ \sqrt[3]{y}+x=4$$

ва ҳоказо тенгламаларнинг ҳар бири иррационал тенгламадир, чунки ҳар қайсисида номаълум миқдор x илдиз остида келган.

Иррационал тенгламани ечиш учун, дастлаб уни иррационалликдан қутқарамиз ва ундан кейин ҳосил бўлган тенгламани ечамиз. Иррационал тенглама илдизлари топилгандан кейин, уларни берилган тенгламага қўйиб, текшириш шарт, чунки уни иррационалликдан қутқарганда чет илдизлар кириб қолиши мумкин.

Айтилганларни қуйидаги мисолларда тасвир этамиз:

1) $\sqrt[5]{25+\sqrt{x-4}}=2$ тенглама ечилсин.

Ечиш. $\left(\sqrt[5]{25+\sqrt{x-4}}\right)^5=2^5$ ёки $25+\sqrt{x-4}=32$, ёки $\sqrt{x-4}=7$, $(\sqrt{x-4})^2=7^2$, ёки $x-4=49$; $x=53$.

Текшириш.

$$\sqrt[5]{25\sqrt{x-4}}=\sqrt[5]{25+\sqrt{53-4}}=\sqrt[5]{25+7}=\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2.$$

Демак, $2=2$. Бундан, $x=53$ берилган тенгламанинг илдизидир.

2) $5\sqrt{2x+3}-\sqrt{18x-5}=\frac{4(x+3)}{\sqrt{2x+3}}$ тенглама ечилсин.

Ечиш. Тенгламанинг иккала қисмини $\sqrt{2x+3}$ га кўпайтирамиз.

$5\ (2x+3)-\sqrt{18x-5}\cdot\sqrt{2x+3}=4\,(x+3)$ ёки

$$\left(\sqrt{(18x-5)\ (2x+3)}\right)^2=(6x+3)^2,\ \text{ёки}\ (18x-5)(2x+3)=36x^2+$$
$$+36x+9,\ \text{ёки}\ 36x^2-10x+54x-15=36x^2+36x+9,\ \text{ёки}$$
$$8x=24;\ x=3.$$

Текшириш. $5\sqrt{2\cdot3+3}-\sqrt{18\cdot3-5}=\frac{4(3+3)}{\sqrt{2\cdot3+3}}$, $15-7=\frac{24}{3}$ ёки $8=8$. Демак, $x=3$ илдиздир.

3) $\sqrt{4x+8}-\sqrt{3x-2}=2$ тенглама ечилсин.

Ечиш. $(\sqrt{4x+8})^2=(2+\sqrt{3x-2})^2$; $4x+8=4+4\sqrt{3x-2}+3x-2$; $(4\sqrt{3x-2})^2=(x+6)^2$; $48x^2-32=x^2+12x+36$ ёки $x^2-36x+68=0$.

Бундан:

$$x_{1,2}=18\pm\sqrt{324-68}=18\pm16;\quad x_1=34,\ x_2=2.$$

Текшириш. $\sqrt{4\cdot34+8}-\sqrt{3\cdot34-2}=2, 12-10=2; 2=2$ ва $\sqrt{4\cdot2+8}-\sqrt{3\cdot2-2}=2$ ёки $4-2=2$; $2=2$. Демак, $x_1=34$, $x_2=2$ илдиздир.

4) $\sqrt{5x+4}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x+1}$ тенглама ечилсин.

Ечиш. $(\sqrt{5x+4}-\sqrt{2x-1})^2=(\sqrt{3x+1})^2$ ёки $5x+4-2\sqrt{(5x+4)(2x-1)}+2x-1=3x+1$, ёки $(\sqrt{10x^2+3x-4})^2=(2x+1)^2$, ёки $10x^2+3x-4=4x^2+4x+1$ ёки $6x^2-x-5=0$;

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+120}}{12}=\frac{1\pm11}{12};\quad x_1=1;\ x_2=-\frac{5}{6}.$$

Текшириш. $\sqrt{5\cdot1+4}+\sqrt{2\cdot1-1}=\sqrt{3\cdot1+1}$ ёки $3-1=2$; демак, $x=1$ — илдиз.

$\sqrt{-\frac{25}{6}+4}-\sqrt{-\frac{5}{3}-1}=\sqrt{-\frac{5}{2}+1}$, $\sqrt{-\frac{1}{6}}-\sqrt{-\frac{8}{3}}=\sqrt{-\frac{3}{2}}$, $-\frac{\sqrt{-6}}{2}\neq\frac{\sqrt{-6}}{2}$. Демак, $x=-\frac{5}{6}$ — *чет илдиз.*

5) $\sqrt{5(x-1)}-\sqrt{2x-3}=\sqrt{3x-2}$ тенглама ечилсин.

Ечиш. $(\sqrt{5(x-1)}-\sqrt{2x-3})^2=(\sqrt{3x-2})^2$, $5x-5-2\sqrt{10x^2-25x+15}+2x-3=3x-2$, $(\sqrt{10x^2-25x+15})^2=(2x-3)^2$, $10x^2-25x+15=4x^2-12x+9$, $6x^2-13x+6=0$.

Бу тенгламани ечамиз:

$$x_{1,2}=\frac{13\pm\sqrt{169-144}}{12}=\frac{13\pm5}{12};\quad x_1=\frac{3}{2}\ \text{ва}\ x_2=\frac{2}{3}.$$

Текшириш. $\sqrt{5\cdot\frac{3}{2}-5}-\sqrt{2\cdot\frac{3}{2}-3}=\sqrt{3\cdot\frac{3}{2}-2}$ ёки $\sqrt{\frac{5}{2}}-0=\sqrt{\frac{5}{2}}$. Демак, $x_1=\frac{3}{2}$ — *илдиз;* $\sqrt{5\cdot\frac{2}{3}-5-}$

$-\sqrt{2\cdot\frac{2}{3}-3}=\sqrt{3\cdot\frac{2}{3}-2}$; $\sqrt{-\frac{5}{3}}-\sqrt{-\frac{5}{3}}=0$. Демак, $x_2=\frac{2}{3}$ ҳам тенгламанинг илдизидир.

6) $\sqrt[3]{76+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{76-\sqrt{x}}=8$ тенглама ечилсин.

Ечиш. Бунинг иккала қисмини кубга оширамиз:

$$76+\sqrt{x}+76-\sqrt{x}+$$
$$+3\sqrt[3]{(76+\sqrt{x})^2.(76-\sqrt{x})}+3\sqrt[3]{(76+\sqrt{x})(76-\sqrt{x})^2}=512$$

ёки

$$3\sqrt[3]{(76^2-x)(76+\sqrt{x})}+3\sqrt[3]{(76^2-x)(76-\sqrt{x})}=360.$$
$$\sqrt[3]{76^2-x}\left(\sqrt[3]{76+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{76-\sqrt{x}}\right)=120$$

ёки

$$8\sqrt[3]{76^2-x}=120 \text{ ёки } \sqrt[3]{76^2-x}=15.$$

Бу тенгламанинг иккала қисмини яна кубга оширамиз:

$$76x^2-x=15^3. \text{ Бундан: } x=2401.$$

Текшириш. $\sqrt[3]{76+\sqrt{2401}}+\sqrt[3]{76-\sqrt{2401}}=8$, $\sqrt[3]{76+49}+\sqrt[3]{76-49}=8$, $\sqrt[3]{125}+\sqrt[3]{27}=8$ ёки $5+3=8$; $8=8$. Демак, $x=2401$ — *илдиз.*

Айрим иррационал тенгламаларни белгилаб олиш йўли билан ечилишини кўрсатамиз.

7) $2\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}-3=0$ тенглама ечилсин.

Ечиш. $\sqrt[3]{x}=y$ деб белгилаймиз, бу ҳолда берилган тенглама квадрат тенгламага келади: $2y^2+y-3=0$.

Бундан: $y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{4}=\frac{-1\pm5}{4}$, бундан: $y_1=1$; $y_2=-\frac{3}{2}$.

Демак, $\sqrt[3]{x}=1$, бундан $x_1=1$; $\sqrt[3]{x}=-\frac{3}{2}$, бундан $x_2=-\frac{27}{8}$.

Текшириш. $2\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}-3=2\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{1}-3=2+$ $+1-3=0$; $0=0$, демак, $x_1=1$ — тенгламанинг илдизи;

$$2\sqrt[3]{\left(-\frac{27}{8}\right)^2}+\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}-3=2\cdot\frac{9}{4}-\frac{3}{2}-3=\frac{9}{2}-\frac{9}{2}=0;\ 0=0,$$

демак, $x_2=-\frac{27}{8}$ ҳам тенгламанинг илдизи.

8) $\sqrt[3]{19+2x}=x-1$ тенглама ечилсин.

Ечиш. $(\sqrt[3]{19+2x})^3=(x-1)^3$, бундан: $19+2x=x^3-3x^2+$ $+3x-1$ ёки $x^3-3x^2+x-20=0$; бу тенгламанинг битта илдизи $x_1=4$ бўлади. Қолган иккита илдизи қуйидагича топилади:

$$\begin{array}{r|l}
x^3-3x^2+x-20 & x-4 \\ \cline{2-2}
-\underline{x^3\mp 4x^2} & x^2+x+5. \\
-\quad x^2+\ x & \\
\underline{-x^2\mp 4x} & \\
5x-20 & \\
-\ \underline{5x\pm 20} & \\
0 &
\end{array}$$

Демак, $x^2+x+5=0$ дан:

$$x_{2,3}=\frac{-1\pm\sqrt{1-20}}{2}=-\frac{1}{2}\pm i\,\frac{\sqrt{19}}{2}.$$

(Жавоб. $x_1=4$ — илдиз; $x_{2,3}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{19}}{2}$ — чет илдиз).

9) $\sqrt[3]{75x^2-84}=x^2+2$ тенглама ечилсин.

Ечиш. $(\sqrt[3]{75x^2-84})^3=(x^2+2)^3$ ёки $75x^2-84=x^6+$ $+6x^4+12x^2+8$, бундан $x^6+6x^4-63x^2+92=0$. Бу тенгламада $x^2=y$ деб белгиласак, $y^3+6y^2-63y+92=0$ ҳосил бўлади. Бу тенгламани, 92 нинг бўлувчиларидан фақат $y=4$ қаноатлантиради. Энди, Безу теоремасига кўра:

$$(y^3+6y^2-63y+92):(y-4)=y^2+10y-23.$$

$y^2+10y-23=0$ дан, $y_{2,3}=-5\pm\sqrt{25+23}\approx-5\pm7;$

$$y_2\approx-12 \text{ ва } y_3\approx 2.$$

У ҳолда, $x^2=4$ дан: $x_1=\pm2$; $x^2=-12$ дан: $x_{3,4}=\pm 2i\sqrt{3}$ ва $x^2=2$ дан: $x_{5,6}=\pm\sqrt[2]{2}$ бўлади.

Демак, $x_{1,2}=\pm2$ — тенгламанинг ҳақиқий илдизи; қолган $x_{3,4}=2i\sqrt{3}$ ва $x_{5,6}=\pm\sqrt{2}$ лар эса, тенгламанинг чет илдизларидир. Буларни текшириш ўқувчига тавсия қилинади.

Машқлар. Қуйидаги иррационал тенгламалар ечилсин:

1) $\sqrt[3]{2x+7}-\sqrt[3]{3x-3}=0.$ (Жавоб. $x=10.$)

2) $2\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}=2.$ (Жавоб. $x=34.$)

3) $\frac{3\sqrt{x}-4}{4(\sqrt{x}-2)}=\frac{3\sqrt{x}-5}{4\sqrt{x}-9}.$ (Жавоб. $x=16.$)

4) $5\cdot\sqrt[4]{x-3}-\sqrt{x-3}=6.$ (Жавоб. $x=19.$)

5) $\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}=2.$ $\left(\text{Жавоб. } x=\pm\frac{1}{2}.\right)$

6) $\sqrt{x+7}+\sqrt{4x+1}=\sqrt{13x+10}$. (Ж а в о б. $x=2$.)

7) $\sqrt[3]{(a+x)^2}+4\sqrt[3]{(a-x)^2}=5\sqrt[3]{a^2-x^2}$. (Ж а в о б. $x_1=0$; $x_2=\frac{63}{65}a$.)

8) $\sqrt{5(x-1)}-\sqrt{2x-3}=\sqrt{3x-2}$. $\left(\text{Ж а в о б. } x_1=\frac{2}{3};\ x_2=\frac{3}{2}.\right)$

9) $3\sqrt[3]{x^2}-5\sqrt[3]{x}+2=0$. $\left(\text{Ж а в о б. } x_1=1;\ x_2=\frac{8}{27}.\right)$

10) $\sqrt{x-3}+6=\sqrt[4]{x-3}\cdot 5$. (Ж а в о б. $x_1=84$; $x_2=19$.)

Қуйидаги аралаш мисоллар ечилсин:

1) $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$.

$\left(\text{Ж а в о б. } x=\frac{25}{16}.\right)$

2) $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}=x\cdot\sqrt[3]{2}$.

(*Кўрсатма.* Тенгламанинг икки томонини кубга кўтариш керак.)

3) $$\begin{cases} x-y=\frac{7}{2}\left(\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{xy^2}\right),\\ \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3.\end{cases}$$

(Ж а в о б. $x_1=216$; $x_2=-27$; $y_1=27$; $y_2=-216$.)

(*Кўрсатма:* $\sqrt[3]{x}=u$, $\sqrt[3]{y}=v$ деб белгилаймиз.)

4) $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+8-3\sqrt{x+1}}=\sqrt{5}$.

5) $$\begin{cases}(x-y)\cdot\sqrt{y}=\frac{\sqrt{x}}{2},\\ (x+y)\cdot\sqrt{x}=3\sqrt{y}.\end{cases}$$

(*Кўрсатма.* $\sqrt{\frac{x}{y}}=z$; сўнгра ҳосил бўлган тенгламаларнинг бири иккинчисига бўлинади.)

6) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2$ тенгликнинг тўғрилиги исботлансин.

7) $$\begin{cases}y^2+\sqrt{3y^2-2x+3}=\frac{2}{3}x+5,\\ 3x-2y=5.\end{cases}$$

(*Кўрсатма:* $x = \frac{2y+5}{3}$ ни биринчи тенгламага қўйиб, кейин $\sqrt{\frac{9y^2-4y-1}{3}} = z$ деб белгилансин.)

8) $\sqrt{y-2+\sqrt{2y-5}} + \sqrt{y+2+\sqrt{2y-5}} = 7\sqrt{2}.$

(*Кўрсатма:* $\sqrt{2y-5} = z$ деб белгилансин.)

9) $\frac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1} - \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1} = 4.$

(Жавоб. $x_1 = 8$ — илдиз; $x_2 = -1$ — чет илдиз.)

(*Кўрсатма:* $\sqrt[3]{x} = y$ деб белгилансин.)

10) $4\sqrt[3]{z^4} - 9\sqrt[3]{z^2} + 2 = 0.$

(Жавоб. $z_{1,2} = \pm\frac{1}{8}$; $z_{3,4} = \pm 2\sqrt{2}$.)

11) $\sqrt{x-4a+16} = 2\sqrt{x-2a+4} - \sqrt{x}.$

(Жавоб. $a \geqslant 8$ ва $a \leqslant 0$ бўлганда, $x = \frac{a^2}{4}$ — илдиз.)

12) $$\begin{cases} \frac{12}{\sqrt{x-1}} + \frac{5}{\sqrt{y+\frac{1}{4}}} = 5; \\ \frac{8}{\sqrt{x-1}} + \frac{10}{\sqrt{y+\frac{1}{4}}} = 6. \end{cases}$$

(Жавоб. $x = 17$; $y = 6$.)

25- §. ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ ИЛДИЗЛАРИНИ ТЕКШИРИШ

$ax + b = 0$ тенгламанинг илдизларини текшириш

Агар

$$\left.\begin{array}{l} a > 0 \text{ ва } b < 0 \\ a < 0 \text{ ва } b > 0 \end{array}\right\} \text{ бўлса, } x > 0 \text{ бўлади.}$$

Агар

$$\left.\begin{array}{l} a > 0 \text{ ва } b > 0 \\ a < 0 \text{ ва } b < 0 \end{array}\right\} \text{ бўлса, } x < 0 \text{ бўлади.}$$

Мисол. $3x - 2 = 0$ тенгламанинг илдизи $x = \frac{2}{3} > 0$, чунки $a = 3 > 0$ ва $b = -2 < 0$; $3x + 2 = 0$ тенгламанинг илдизи $x = -\frac{2}{3} < 0$, чунки $a = 3 > 0$ ва $b = 2 > 0$.

Энди, $ax + b = 0$ тенгламада $a = 0$, $b \neq 0$ бўлсин, бу ҳолда $0 \cdot x + b = 0$, бундан $b = 0$, лекин $b \neq 0$ эди. Демак, бу ҳолда тенгламанинг илдизи булмайди (яъни маъноси йўқолади). Агар $a \neq 0$ ва $b = 0$ бўлса, у ҳолда $ax + 0 = 0$, бундан $x = 0$ бўлади. Агар $a = b = 0$ бўлса, у ҳолда тенглама чексиз кўп илдизларга эга бўлади, яъни $0 \cdot x + 0 = 0$, бундан $x = \frac{0}{0} = \pm 1$; $\pm 8; \pm 7\frac{1}{5}; \ldots$.

Биринчи даражали икки номаълумли икки тенглама системасининг илдизларини текшириш

Бундай тенгламалар системасининг умумий кўриниши:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \qquad (1)$$

бўлиб, бу системанинг илдизлари:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \text{ ва } y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \qquad (2)$$

1) Агар (2) даги махраж: $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ёки $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ бўлса (c_1, c_2 лар қандай бўлмасин), (1) система биргина ечимга эга бўлади.

Мисол. $\begin{cases} 5x + 2y = 19 \\ -x + 6y = 9 \end{cases}$ системада: $a_1b_2 - a_2b_1 = 5 \cdot 6 - (-1) \cdot 2 = 32 \neq 0$. Демак, $x = \frac{6 \cdot 19 - 9 \cdot 2}{32} = 3$ ва $y = \frac{5 \cdot 9 - (-1) \cdot 19}{32} = 2$.

2) Агар $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ ёки $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ бўлганда, қуйидаги икки ҳол бўлиши мумкин: а) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ бўлса, бу ҳолда тенгламадан биттасини иккинчисидан ҳосил қилиш мумкин, шунинг учун (1) система чексиз кўп илдизларга эга бўлади.

Мисол. $\begin{cases} 2x - 7y = 3, \\ 4x - 14y = 6 \end{cases}$ да $\frac{2}{4} = \frac{-7}{-14} = \frac{3}{6}$ ёки $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$,

демак,

$x = 0$ бўлганда $y = -\frac{3}{7}$; $x = 1$ бўлганда $y = -\frac{1}{7}$;

$x = -1$ бўлганда $y = -\frac{5}{7}$; $x = 2$ бўлганда $y = \frac{1}{7}$ ва ҳоказо.

б) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ бўлса, (1) система ечимга эга эмас.

Мисол. $\begin{cases} x + y = 3 \\ 5x + 5y = 3 \end{cases}$ да $\frac{1}{5} = \frac{1}{5} \neq \frac{3}{3} = 1$, демак, ечимга эга эмас. Ҳақиқатан, биринчи тенгламанинг чап қисмини 5 марта катталаштирганда иккинчи тенгламанинг чап қисми ҳосил бўлган, аммо уларнинг ўнг қисмлари ўзгармай қолган. Бу тенгламалар бир-бирига зиддиятликда турибди. Уларнинг умумий илдизларининг бўлиши мумкин эмас.

Квадрат тенглама илдизларини текшириш

$ax^2 + bx + c = 0$ тенгламанинг илдизлари $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $(a \neq 0)$ эди. Бунда $b^2 - 4ac$ квадрат тенглама илдизларининг *дискриминанти* дейилади.

1. Агар $b^2 - 4ac > 0$ бўлса, $\sqrt{b^2 - 4ac}$ бирор мусбат сон, у ҳолда x_1 ва x_2 ҳақиқий ва ҳар хил бўлади.

а) $-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} > 0$ (бунинг учун $b < 0$ ва $(-b) > \sqrt{b^2 - 4ac}$ бўлиши керак), у ҳолда x_1 ва x_2 мусбат сон бўлади.

б) $-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} < 0$ (бунинг учун $b > 0$ ва $b > \sqrt{b^2 - 4ac}$ бўлиши керак), у ҳолда x_1 ва x_2 манфий сон бўлади.

в) b мусбат ёки манфий бўлиб, унинг абсолют қиймати $\sqrt{b^2 - 4ac}$ дан кичик бўлганда илдизлардан биттаси мусбат, иккинчиси манфий бўлади.

2. Агар $b^2 - 4ac = 0$ бўлса, иккала илдиз ҳақиқий, ҳам баробар, яъни $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ бўлади.

3. Агар $b^2 - 4ac < 0$ бўлса, у ҳолда: а) $b \neq 0$ бўлганда иккала илдиз қўшма комплекс сонга тенг; б) $b = 0$ бўлганда иккала илдиз мавҳум сонга тенг бўлади, бу ҳолда $c < 0$ бўлмаслиги шарт.

4. Агар $c = 0$, $b \neq 0$ бўлса, битта илдиз нолга, иккинчиси эса ҳақиқий сонга тенг бўлади; агар $b = c = 0$ бўлса, иккала илдиз ҳам нолга тенг бўлади.

Мисоллар.

1) $3x^2 - 7x + 2 = 0$ тенгламанинг илдизлари текширилсин.

Текшириш. $b^2 - 4ac = 49 - 24 = 25 > 0$, демак, x_1 ва x_2 ҳақиқий ва ҳар хил.

2) $x^2 - 3x + 7 = 0$ тенгламанинг илдизлари $b^2 - 4ac = 9 - 28 = -19 < 0$ бўлгани учун мавҳум, яъни x_1 ва x_2 мавҳум ва ҳар хил.

3) $9x^2 - 12x + 4 = 0$ тенгламада $b^2 - 4ac = 12^2 - 144 = 144 - 144 = 0$, демак, x_1 ва x_2 ҳақиқий ва тенг.

Машқлар. Қуйидаги тенгламаларни ечмай, илдизлари текширилсин:

1. $4x^2-15x+9=0.$
2. $2x^2-5x+6=0.$
3. $25x^2-10x+1=0.$
4. $x^2+4x+4=0.$
5. $\begin{cases} x-y=4; \\ \frac{x}{2}-\frac{y}{2}=2. \end{cases}$
6. $\begin{cases} 2x+y=8; \\ 3x+4y=7. \end{cases}$
7. $\begin{cases} 2x=1-y; \\ y+5=x. \end{cases}$
8. $x^2-7x+12=0.$
9. $\begin{cases} 5u-5v=3; \\ 15u-15v=1. \end{cases}$

26-§. ЮҚОРИ ДАРАЖАЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ

$ax^n+bx^{n-m}y^m+cy^n=0$ кўринишдаги тенглама x, y ларга нисбатан *бир жинсли тенглама* дейилади. Чунки ҳар қайси ҳаддаги номаълумлар кўрсаткичларининг йиғиндиси бир хил сон.

Мисол. $3x^2-2xy+y^2=0$ — бир жинсли тенглама.

$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ *иккинчи даражали икки* номаълумли тўла тенглама дейилади.

I. Тенгламалардан биттаси иккинчи даражали, иккинчиси биринчи даражали бўлган ҳол

1-мисол. $\begin{cases} x^2-xy-y^2=19; \\ x-y=7 \end{cases}$

6 - 2 = 4

тенгламалар системаси ечилсин.

Ечиш. Бундай системани ечиш учун, биринчи дарзжали тенгламадан битта номаълум, масалан, y ни иккинчи номаълум x билан ифодалаб, уни иккинчи даражали тенгламага қўйиб ечиш қулай бўлади. Масалан, $x-y=7$ дан: $y=x-7$. Бу ҳолда $x^2-x\cdot(x-7)-(x-7)^2=19$ ёки $x^2-21x+68=0$. Бундан:

$$x_{1,2}=\frac{21\pm\sqrt{441-272}}{2}=\frac{21\pm\sqrt{169}}{2}=\frac{21\pm13}{2};\ x_1=17 \text{ ва } x_2=4.$$

Буларга асосланиб, $y_1=17-7=10$; $y_2=4-7=-3$. Демак,

$$x_1=17;\ y_1=10;\ x_2=4;\ y_2=-3.$$

Изоҳ. Айрим ҳолларда, иккинчи даражали тенгламадан бир номаълумни иккинчиси билан ифодалаб, уни биринчи даражаликка қўйиб ечиш ҳам мумкин.

2-мисол. $\begin{cases} xy=28. \\ x+y=11 \end{cases}$

тенгламалар системаси ечилсин.

Ечиш. $y = \frac{28}{x}$ ни $x + y = 11$ га қўямиз:

$x + \frac{28}{x} = 11$ ёки $x^2 - 11x + 28 = 0$, бундан: $x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121-112}}{2} =$
$= \frac{11 \pm 3}{2}$; $x_1 = 7$; $x_2 = 4$. Бу ҳолда $y_1 = \frac{28}{7} = 4$; $y_2 = \frac{28}{4} = 7$.

Демак, $x_1 = 7$; $y_1 = 4$; $x_2 = 4$; $y_2 = 7$.

Бу системани Виет теоремасига асосланиб ечиш ҳам мумкин. У бундай ечилади: $-p = x + y = 11$ ва $q = xy = 28$. Бу ҳолда тенглама $x^2 - 11x + 28 = 0$ бўлади. Бундан: $x = \begin{cases} 7 \\ 4. \end{cases}$

У ҳолда $y = \begin{cases} 4 \\ 7 \end{cases}$ бўлади.

3- мисол. $\begin{cases} \frac{2x-5}{x-2} + \frac{2y-3}{y-1} = 2, \\ 3x - 4y = 1 \end{cases}$

тенгламалар системасини ечинг.

Ечиш. Бундай системаларни олдин соддалаштириб, сўнгра ечиш керак.

$\frac{2x-5}{x-2} + \frac{2y-3}{y-1} = 2$, буни $(x-2)\cdot(y-1)$ га кўпайтирамиз:

$(2x-5)\cdot(y-1) + (2y-3)\cdot(x-2) = 2(x-2)\cdot(y-1)$ ёки $2xy -$ $- 2x - 5y + 5 + 2xy - 4y - 3x + 6 = 2xy - 2x - 4y - 4$ ёки

$$2xy - 3x - 5y = -7.$$

Энди $\begin{cases} 2xy - 3x - 5y = -7, \\ 3x - 4y = 1 \end{cases}$

ҳосил бўлган системани ечамиз: $3x - 4y = 1$ дан, $y = \frac{3x-1}{4}$ ни 1- тенгламага қўямиз:

$$2x \cdot \frac{3x-1}{4} - 3x - 5 \cdot \frac{3x-1}{4} + 7 = 0$$

ёки $6x^2 - 29x + 33 = 0$ ҳосил бўлади. Бундан:

$$x_{1,2} = \frac{29 \pm \sqrt{841 - 792}}{12} = \frac{29 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{29 \pm 7}{12};$$

$$x_1 = \frac{29+7}{12} = 3; \quad x_2 = \frac{29-7}{12} = \frac{11}{6}.$$

Буларга асосан:

$$y_1 = \frac{3 \cdot 3 - 1}{4} = 2, \quad y_2 = \frac{3 \cdot \frac{11}{6} - 1}{4} = \frac{9}{8}.$$

Демак, $x_1 = 3$; $y_1 = 2$; $x_2 = \frac{11}{6}$; $y_2 = \frac{9}{8}$.

4- мисол. $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{41}{20}, \\ x + y = 41 \end{cases}$

тенгламалар системасини ечинг.

Ечиш. $y = 41 - x$ ни биринчи тенгламага қўямиз: $\sqrt{\frac{x}{41 - x}} + \sqrt{\frac{41 - x}{x}} = \frac{41}{20}$ ёки $20 \cdot (x + 41 - x) = 41 \cdot \sqrt{x\ (41 - x)}$, ёки $(\sqrt{x\ (41 - x)})^2 = 20^2$, $x(41 - x) = 400$, $x^2 - 41x + 400 = 0$. Бундан: $x_{1,2} = \frac{41 \pm \sqrt{1681 - 1600}}{2} = \frac{41 \pm 9}{2}$; $x_1 = 25$; $x_2 = 16$. Буларга асосан: $y_1 = 41 - 25 = 16$; $y_2 = 41 - 16 = 25$. Демак, $x_1 = 25$; $x_2 = 16$; $y_1 = 16$; $y_2 = 25$.

2. Иккала тенгламаси ҳам иккинчи даражали бўлган ҳол

1- мисол. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ xy = 15 \end{cases}$

тенгламалар системаси ечилсин.

Ечиш. $xy = 15$ нинг иккала қисмини 2 га кўпайтириб, натижани биринчи тенгламага қўшамиз: $x^2 + 2xy + y^2 = 64$ ёки $(x + y)^2 = 64$ ёки $x + y = \pm 8$. $x + y = 8$ дан $y = 8 - x$ ни топиб иккинчи тенгламага қўямиз: $x\,(8 - x) = 15$ ёки $x^2 - 8x + 15 = 0$; $x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 15} = 4 \pm 1$; $x_1 = 4 + 1 = 5$; $x_2 = 4 - 1 = 3$. Буларга асосан: $y_1 = \frac{15}{5} = 3$; $y_2 = \frac{15}{3} = 5$.

(Жавоб. $x_1 = 5$, $x_2 = 3$, $y_1 = 3$, $y_2 = 5$.)

Изоҳ. $x + y = -8$ ҳам шундай ечилади.

Бу системани бундай ечиш ҳам мумкин.

$xy = 15$ тенгламадан y ни топиб, $y = \frac{15}{x}$ ни биринчи тенгламага қўямиз: $x^2 + \left(\frac{15}{x}\right)^2 = 34$ ёки $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$, бу биквадрат тенгламадир.

$$x_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{17 \pm \sqrt{289 - 225}} = \pm \sqrt{17 \pm 8};\ x_{1,2} = \pm 5;$$
$$x_{3,4} = \pm 3.$$

Бу ҳолда

$$y_{1,2} = \frac{15}{\pm 5} = \pm 3;\ y_{3,4} = \frac{15}{\pm 3} = \pm 5.$$

2- мисол. $\begin{cases}\sqrt{\frac{y+1}{x-y}}+2\sqrt{\frac{x-y}{y+1}}=3,\\ x+xy+y=7.\end{cases}$

Ечиш. $\sqrt{\frac{y+1}{x-y}}=z$ деб белгилаймиз. Бу ҳолда биринчи тенглама $z^2-3z+2=0$ ни беради. Бундан $z_1=1$, $z_2=2$. У ҳолда

$$\sqrt{\frac{y+1}{x-y}}=1 \text{ ва } \sqrt{\frac{y+1}{x-y}}=2.$$

$\begin{cases}\sqrt{\frac{y+1}{x-y}}=1,\\ x+xy+y=7\end{cases}$ ва $\begin{cases}\sqrt{\frac{y+1}{x-y}}=2,\\ x+xy+y=7\end{cases}$ системалар ҳосил бўлади. Булардан биринчисини ечамиз.

$\left(\sqrt{\frac{y+1}{x-y}}\right)^2=1^2$ ёки $\frac{y+1}{x-y}=1$, бундан $x=2y+1$. Буни иккинчи тенгламага қўйсак: $2y+1+2y^2+y+y=7$ ёки $2y^2+4y-6=0$ ёки $y^2+2y-3=0$. Бундан: $y_1=-3$, $y_2=1$. У ҳолда $x_1=2\cdot(-3)+1=-5$, $x_2=2\cdot1+1=3$.

Изоҳ. Иккинчи система ҳам шундай ечилади.

3- мисол. $\begin{cases}x^2+y^2-xy=201,\\ (2x-y)^2-12\cdot(2x-y)=189\end{cases}$

тенгламалар системаси ечилсин.

Ечиш. $2x-y=z$ деб белгилаймиз. Бу ҳолда иккинчи тенглама ушбу кўринишни олади: $z^2-12z-189=0$. Бундан $z_1=21$; $z_2=-9$. Буларга асосан ушбу иккита системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases}x^2+y^2-xy=201,\\ 2x-y=21\end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases}x^2+y^2-xy=201,\\ 2x-y=-9.\end{cases}$$

Бу ҳосил бўлган системаларнинг ҳар бири юқорида кўрсатилган йўллар билан ечилади.

4- мисол. $\begin{cases}x^2-4xy+4y^2-3x+6y=54,\\ (2x-y)^2-7\,(2x-y)=294\end{cases}$ тенгламалар системаси ечилсин.

Ечиш. Биринчи тенгламани ушбу кўринишга келтирамиз:

$$x^2-4xy+4y^2-3x+6y=(x-2y)^2-3\cdot(x-2y)=54.$$

$x-2y=u$ деб белгилаймиз. У ҳолда $u^2-3u-54=0$ дан: $u_1=-6$, $u_2=9$. Шунга ўхшаш $2x-y=v$ бўлсин. У ҳолда $v^2-7v-294=0$ дан: $v_1=-14$, $v_2=21$.

Буларга асосан: $\begin{cases} x-2y=-6, \\ 2x-y=-14 \end{cases}$ ва $\begin{cases} x-2y=9, \\ 2x-y=21 \end{cases}$ системалар ҳосил бўлади.

Булардан: $x_1=-\frac{22}{3}$; $y_2=-\frac{2}{3}$; $x_2=11$; $y_2=1$ илдизларни топамиз.

5-мисол. $\begin{cases} xy=4, \\ yz=6, \\ x^2+z^2=13 \end{cases}$

система ечилсин.

Ечиш. $xy=4$ ни $yz=6$ га бўламиз. $\frac{xy}{yz}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, бундан $z=\frac{3}{2}x$ ни топиб, $x^2+z^2=13$ га қўямиз: $x^2+\frac{9}{4}x^2=13$ ёки $13x^2=13\cdot 4$; $x^2=4$; $x=\pm 2$. Буларга асосан: $y=\frac{4}{\pm 2}=\pm 2$; $z=\frac{3}{2}\cdot(\pm 2)=\pm 3$.

Демак, $x=\pm 2$, $y=\pm 2$, $z=\pm 3$.

Машқлар. Қуйидаги тенгламалар системалари ечилсин:

1) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=63, \\ x-y=-3. \end{cases}$

(Жавоб. $x_1=6$; $y_1=9$; $x_2=-9$; $y_2=-6$.)

2) $\begin{cases} \frac{3a}{x-y}=\frac{x}{a}, \\ \frac{10a}{x+y}=\frac{y}{a} \end{cases}$ (Жавоб. $x_{1,2}=\frac{a}{\sqrt{2}}$, $\pm 3a$; $y=\mp\frac{5a}{\sqrt{2}}$, $\pm 2a$.)

3) $\begin{cases} x^2+2xy+y^2-4x-4y=45, \\ x^2-2xy+y^2-2x+2y=3. \end{cases}$

(Жавоб. $x_1=6$, $y_1=3$; $x_2=-3$, $y_2=-2$.)

4) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{6}, \\ x-y=5. \end{cases}$

(Жавоб, $x_1=9$, $y_1=4$.)

5) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=9, \\ x\cdot z=\frac{1}{5}, \\ yz=\frac{1}{3}. \end{cases}$

(Жавоб. $x_1=\frac{1}{5}$, $y_1=\frac{1}{3}$, $z_1=1$, $x_2=\frac{8}{5}$, $y_2=\frac{8}{3}$, $z_2=\frac{1}{8}$.)

6) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 7, \\ x \cdot y = 2. \end{cases}$

$\left(\text{Ж а в о б. } x_{1,2} = \pm 2,\ x_{3,4} = \pm \frac{i}{\sqrt{2}},\ y_{1,2} = \pm 1,\ y_{3,4} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{i}.\right)$

7) $\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = -15. \end{cases}$

(Ж а в о б. $x_1 = 5,\ x_2 = -3,\ y_1 = -3,\ y_2 = 5.$)

8) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3. \end{cases}$

(Ж а в о б. $x_1 = 3,\ x_2 = 1,\ y_1 = 1,\ y_2 = 3.$)

9) $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{13a^2}{36}, \\ x - y = \frac{a}{6}. \end{cases}$

$\left(\text{Ж а в о б. } x_1 = \frac{a}{2},\ x_2 = -\frac{a}{3},\ y_1 = \frac{a}{3},\ y_2 = -\frac{a}{2}.\right)$

10) $\begin{cases} 3y^2 - 2xy = 160, \\ y^2 - 3xy - 2x^2 = 8. \end{cases}$

(Ж а в о б. $x = \pm 2, \pm 8{,}5;\ y = \pm 8, \pm 5.$)

11) $\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 7, \\ x^2 + y^2 + xy = 133 \end{cases}$

(Ж а в о б. $x_1 = 9, y_1 = 4,\ x_2 = 4,\ y_2 = 9.$)

12) Агар икки хонали сонни ўзининг рақамлари йиғиндисига бўлсак, бўлинма 6, қолдиқ 2 бўлади. Агар шу сонни рақамлари кўпайтмасига бўлсак, бўлинма 5, қолдиқ 2 бўлади. Шу сонни топинг.

(Ж а в о б. 32.)

13) Икки группа ўқувчилар театрга бир нечта билет олишди. Бир хил билетларга 9 сўм тўланди, иккинчи хил билетлар 20 тийин қиммат туради, лекин бу хилдаги билетлардан олдингисига қараганда 3 та кам билет олинди ва 9,6 сўм тўланди. Ҳар қайси хил билетдан нечтадан ва ҳар бири неча сўмдан олинган?

(Ж а в о б. 15 билет 0,6 сўмдан; 12 билет 0,8 сўмдан.)

а) Тенг кучли тенгламалар системасини ечиш

Мисол. Тенгламалар системаси ечилсин:

$$\begin{cases} x^2 + xy = a, \\ y^2 + xy = a. \end{cases}$$

Бу тенгламалар тенг кучли, чунки уларда x ни y билан ва y ни x билан алмаштирсак, биридан иккинчиси келиб чиқади. Бундай системаларни ечишда $x = y$ деб олиб, сўнгра биттасини ечиш кифоя, яъни:

$y = x$, $x^2 + xy = a$ ёки $x^2 + xx = a$, ёки $2x^2 = a$. Бундан: $x = \pm\sqrt{\frac{a}{2}}$, демак, $y = \pm\sqrt{\frac{a}{2}}$ бўлади. (Жавоб. $x = \pm\sqrt{\frac{a}{2}}$; $y = \pm\sqrt{\frac{a}{2}}$.)

б) Чап томонлари номаълум сонларга нисбатан бир жинсли бўлган тенгламалар системасини ечиш

1- мисол. Тенгламалар системаси ечилсин:

$$\begin{cases} x^2 + xy = a, \\ y^2 + xy = b. \end{cases}$$

Ечиш. $y = zx$ деб белгилаймиз; z — янги номаълум сон. У ҳолда:

$$\begin{cases} x^2 + zx^2 = a, \\ z^2x^2 + zx^2 = b \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} x^2(1+z) = a, \\ zx^2(1+z) = b. \end{cases}$$

Булардан:

$$\frac{zx^2(1+z)}{x^2(1+z)} = \frac{b}{a};\ z = \frac{b}{a}.$$

Демак, $y = \frac{b}{a}x$, буни $x^2 + xy = a$ га қўямиз:

$$x^2 + \frac{b}{a}x^2 = a.$$

Бундан,

$$x_{1,2} = \pm\frac{a}{\sqrt{a+b}},$$

бу ҳолда:

$$y_{1,2} = \pm\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{\sqrt{a+b}} = \pm\frac{b}{\sqrt{a+b}}.$$

Демак,

$$x_{1,2} = \pm\frac{a}{\sqrt{a+b}};\ y_{1,2} = \pm\frac{b}{\sqrt{a+b}}.$$

2- мисол. Тенгламалар системаси ечилсин: $\begin{cases} \frac{x^3}{y} + xy = a^2, \\ \frac{y^3}{x} + xy = b^2. \end{cases}$

Ечиш. $y = zx$ деб белгилаб, уни системага қўямиз:

$$\begin{cases} \frac{x^3}{zx} + zx^2 = a^2, \\ \frac{z^3x^3}{x} + zx^2 = b^2 \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} x^2 \cdot \frac{1+z^2}{z} = a^2, \\ x^2z(1+z^2) = b^2. \end{cases}$$

Булардан:

$$\frac{x^2z(1+z^2)}{x^2(1+z^2)} = \frac{b^2}{a^2} \text{ ёки } z^2 = \left.\frac{b}{a}\right)^2; \quad z = \pm\frac{b}{a}.$$

Бу ҳолда:

$$y = \pm\frac{b}{a}x, \ \frac{x^3}{\pm\frac{b}{a}x} \pm \frac{b}{a}x^2 = a^2.$$

Бундан:

$$x = \pm a\sqrt{\frac{ab}{\pm(a^2 \pm b^2)}} \text{ ва } y = \pm b\sqrt{\frac{ab}{\pm(a^2 \pm b^2)}}.$$

в) Сунъий йўллар билан ечиладиган системалар

3- мисол. Тенгламалар системаси ечилсин:

$$\begin{cases} xy - \frac{x}{y} = a, \\ xy - \frac{y}{x} = \frac{1}{a}. \end{cases}$$

Ечиш. Бундай системани ечиш учун, олдин иккинчи тенгламадан биринчи тенгламани айирамиз: $\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{1}{a} - a.$ Бунинг чап қисми, x, y ларга нисбатан бир жинсли, уни ечиш учун $y = zx$ деб олинса кифоя.

4- мисол. Тенгламалар системаси ечилсин:

$$\begin{cases} xy - x + y = 7, \\ xy - y + x = 13. \end{cases}$$

Ечиш. Бундай системани ечиш учун ҳам иккинчи тенгламадан биринчи тенгламани айирсак: $2x - 2y = 6$ ёки $x - y = 3$ ҳосил бўлади. Бундан $y = x - 3$ ни тенгламалардан биттасига қўйсак: $x(x-3) - x + x - 3 = 7$ ёки $x^2 - 3x - 10 = 0$. Бундан: $x_1 = 5$, $x_2 = -2$. Буларга асосланиб, $y = 5 - 3 = 2$, $y = -2 - 3 = -5$. Демак, $x_1 = 5$, $y_1 = 2$; $x_2 = -2$, $y_2 = -5$.

5- мисол. Тенгламалар системаси ечилсин:

$$\begin{cases} x^2 + xy + xz = a, \\ y^2 + xy + yz = b, \\ z^2 + xz + yz = c. \end{cases}$$

Ечиш.

$$\begin{cases} x(x+y+z) = a, \\ y(y+x+z) = b, \\ z(z+x+y) = c. \end{cases}$$

Булардан:

$$\frac{x}{y}=\frac{a}{b};\ y=\frac{b}{a}x \text{ ва } \frac{x}{z}=\frac{a}{c},\ z=\frac{c}{a}x.$$

Буларни тенгламалардан биттасига қўйсак:

$$x^2+x\cdot\frac{b}{a}x+x\cdot\frac{c}{a}x=a \text{ ёки } x^2=\frac{a^2}{a+b+c}, \text{ бундан:}$$

$$x=\pm\frac{a}{\sqrt{a+b+c}}.$$

Бу ҳолда:

$$y=\pm\frac{b}{\sqrt{a+b+c}};\ z=\pm\frac{c}{\sqrt{a+b+c}}$$

6- мисол. Тенгламалар системаси ечилсин:

$$\begin{cases} x+xy+y=1, \\ y+yz+z=2, \\ z+zx+x=3. \end{cases}$$

Ечиш. Учинчи тенгламадан: $x=\frac{3-z}{1+z}$ ва иккинчи тенгламадан: $y=\frac{2-z}{1+z}$. Буларни биринчи тенгламага қўйиб, соддалаштирсак:

$$z^2+2z-5=0,\ z_{1,2}=-1\pm\sqrt{1+5}=-1\pm\sqrt{6}.$$

Бу ҳолда:

$$x_1=\frac{3+1-\sqrt{6}}{1-1+\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}-3}{3};\ x_2=\frac{3+1+\sqrt{6}}{1-1-\sqrt{6}}=-\frac{2\sqrt{6}+3}{3};$$

$$y_1=\frac{2+1-\sqrt{6}}{1-1+\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}-2}{2};\ y_2=\frac{2+1+\sqrt{6}}{1-1-\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{6}+2}{2}.$$

27- §. БАЪЗИ ФУНКЦИЯЛАР ВА УЛАРНИНГ ГРАФИКЛАРИ

1) $y=ax$ ва $y=ax+b$ кўринишдаги функциялар *чизиқли функциялар* дейилади.

2) $y=ax^2$; $y=ax^2+b$ ва $y=ax^2+bx+c$ кўринишдаги функциялар *квадрат функциялар* дейилади.

3) $y=\frac{a}{cx}$; $y=\frac{ax}{cx+d}$; $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ кўринишдаги функциялар *чизиқли каср функциялар* дейилади.

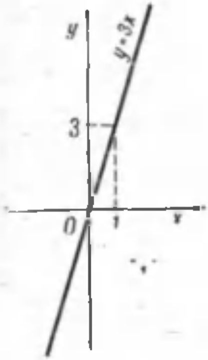
Функцияларнинг графигини нуқталар ёрдамида чизиш учун, дастлаб аргументга бир неча ихтиёрий сон қийматлар бериб, функциянинг унга тегишли сон қийматларини топамиз. Бундан кейин Декарт координаталар системасида ҳар қайси мос

x, y жуфтларнинг топилган сон қийматларига координаталар системасида тегишли нуқталарни топиб, у нуқталарни чизиқ билан бирлаштирамиз.

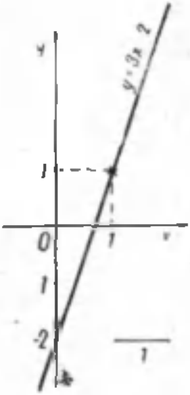
1- мисол. $y = 3x$ функциянинг графиги чизилсин.

Ечиш. $x = 0$ бўлганда $y = 3 \cdot 0 = 0$ ва $x = 1$ бўлганда $y = 3 \cdot 1 = 3$.

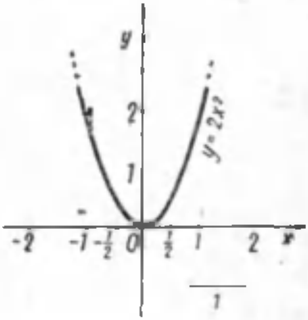
Натижада (0; 0) ва (1: 3) нуқталар топилди. Бу нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқ берилган функциянинг графиги бўлади (8- расм).



8- расм.



9- расм.



10- расм.

2- мисол. $y = 3x - 2$ функциянинг графиги чизилсин.

Ечиш. $x = 0$ да $y = -2$ ва $x = \frac{2}{3}$ да $y = 0$. $(0; -2)$ ва $\left(\frac{2}{3}; 0\right)$ нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқ, берилган функциянинг графиги бўлади (9- расм).

Қурилган бу икки мисолда график тўғри чизиқдан иборат, унинг ўрни икки нуқта билан аниқланиши бизга маълум. Шунинг учун бу мисолларда икки нуқта топиш билан чегараландик. Бундан кейинги мисолларда график чизиш учун *бир неча нуқта топиш зарур бўлади.*

3- мисол. $y = 2x^2$ функциянинг графиги чизилсин.

Ечиш. x ва y нинг қийматларини аниқлаб, уларни жадвал шаклида ёзамиз:

x	0	± 1	± 2	...
y	0	2	8	...

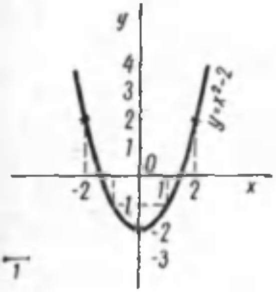
(0; 0), (± 1; 2), (± 2; 8) нуқталарни туташтирувчи эгри чизиқ, берилган функциянинг графигидир (10- расм).

4- *мисол.* $y = x^2 - 2$ функциянинг графиги чизилсин.

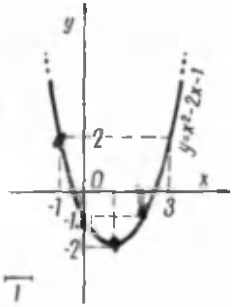
Ечиш. Жадвал тузамиз:

x	0	± 1	± 2	...
y	− 2	− 1	2	...

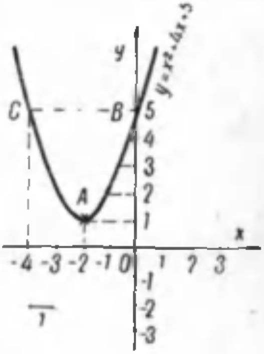
(0; − 2), (± 1; − 1), (± 2; 2) нуқталарни туташтирувчи эгри чизиқ, берилган функциянинг графигидир (11- расм).



11- расм.



12- расм.



13- расм.

5- *мисол.* $y = x^2 - 2x - 1$ функциянинг графиги чизилсин.

Ечиш. Жадвал тузамиз:

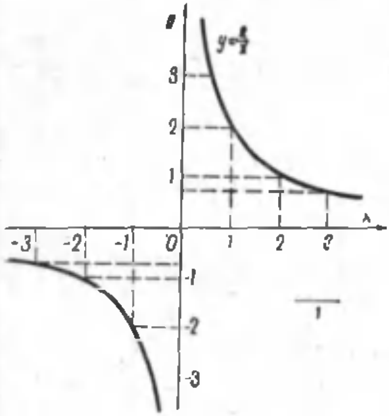
x	0	1	− 1	2	− 2	...
y	− 1	− 2	2	− 1	7	...

(0; − 1), (1; − 2), (− 1; 2). (2; − 1), (− 2; 7), ... нуқталарни туташтирувчи эгри чизиқ берилган функциянинг графиги бўлади (12- расм).

Энди квадрат учҳад графигини бошқача усулда чизишни кўрамиз. Квадрат учҳаднинг графигини „характерли" нуқталар деб аталувчи учта нуқтадан фойдаланиб чизиш ҳам кўпинча қулайлик келтиради. $y = ax^2 + bx + c$ (1) функция берилган бўлсин.

Энди квадрат учҳаднинг графигини „характерли" нуқталар ёрдамида чизишнинг қисқача мазмунини эслатиб ўтамиз.

1- усул. (1) квадрат учҳаддан тўла квадрат ажратамиз: $y = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$. Бундан кўрамизки, (1) квадрат учҳаднинг графиги парабола, унинг учи $A(x_0; y_0)$ нуқтада бўлади $\left(x_0 = -\frac{b}{2a};\ y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right)$. Энди графикни Oy ўқ билан кесишиш нуқтасини аниқлаймиз, $x = 0$ бўлганда $y = c$. Демак $B(0;\ c)$ — изланган нуқтадир. Парабола ўқи $x = -\frac{b}{2a}$ тўғри чизиққа нисбатан B га симметрик бўлган C нуқтани, яъни $C\left(-\frac{b}{a};\ c\right)$ни аниқлаймиз. (Бу топилган учта нуқта параболанинг *характерли* нуқталари дейилади.)



14- расм.

6- мисол. $y = x + 4x + 5$ функциянинг графиги чизилсин.

Ечиш. $y = x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1$. Бундан параболанинг учи $A\ (-2;\ 1)$ бўлиши кўринади. Энди $x = 0$ бўлганда $y = 5$. Демак, $B\ (0;\ 5)$. Энди $C\left(-\frac{b}{a};\ c\right)$ нуқтани топамиз. Бизнинг мисолда $C\ (-4;\ 5)$ (13- расм).

Изоҳ. Характерли нуқталарни аниқлашда кўрсатилган усулдан бошқа усуллар ҳам бор, уларни бу ерда қарамаймиз.

7- мисол. $y = \frac{2}{x}$ функциянинг графиги чизилсин.

Ечиш. Жадвал тузамиз:

x	...	± 1	± 2	± 3	...
y	...	± 2	± 1	$\pm \frac{2}{3}$	...

У ҳолда $(\pm 1;\ \pm 2)$; $(\pm 2;\ \pm 1), \ldots$ нуқталарни туташтирувчи эгри чизиқлар, берилган функциянинг графигидир (14- расм).

Машқлар. Қуйидаги функцияларнинг графиги чизилсин:

$$y = 5x;\ y = \frac{x}{3};\ y = \frac{1}{2}x - 1;\ y = \frac{x^2}{4};\ y = 3x^2 - 5;$$

$$y = 2x^2 + 6x - 4;\ y = \frac{3}{x};\ y = 5 - 2x^2.$$

28- §. АЛГЕБРАИК ТЕНГЛАМАЛАРНИ ГРАФИК УСУЛДА ЕЧИШ

I. Биринчи даражали бир номаълумли тенгламани график усулда ечиш. $ax+b=0$ *тенгламани график усул билан ечиш* учун тенгламанинг чап қисмини y билан белгилаб, $y=ax+b$ функция тузамиз ҳамда унинг графигини чизамиз. У ҳолда графикни абсцисса ўқидан кесган кесмасига тегишли сон (координаталар бошидан бошлаб), берилган тенгламанинг илдизи бўлади.

Мисол. $3x-2=0$ тенглама график усулда ечилсин.

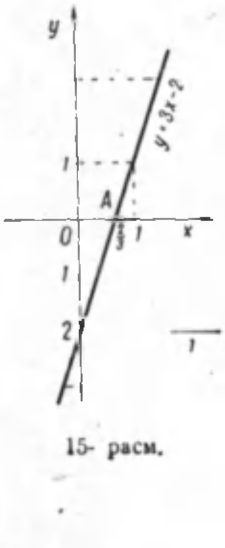
Ечиш. $y=3x-2$ функцияни тузиб, унинг графигини чизамиз (15- расм). Демак, $x=AO=\frac{2}{3}$. $\left(\text{Жавоб. } \frac{2}{3}.\right)$

II. Биринчи даражали икки номаълумли икки тенглама системасини график усулда ечиш.

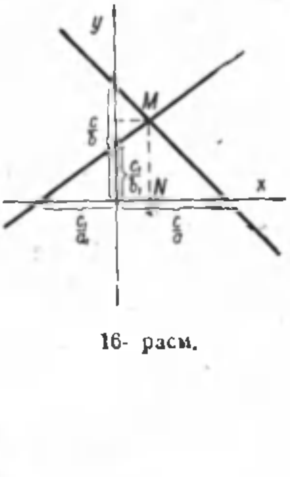
$$\begin{cases} ax+by=c, \\ a_1x+b_1y=c_1 \end{cases}$$

тенгламалар системаси берилган. Бу системани график усул *билан ечиш учун:* $ax+by=c$ ва $a_1x+b_1y=c_1$ функцияларнинг графикларини чизиб, кесишиш нуқтасини топиш керак. Топилган нуқтанинг абсциссаси x нинг, ординатаси эса y нинг қиймати бўлади. Масалан, $ax+by=c$ тенгламадан: $x=0$ бўлганда $y=\frac{c}{b}$ ва $y=0$ бўлганда, $x=\frac{c}{a}$. $a_1x+b_1y=c_1$ тенгламадан: $x=0$ *бўлганда,* $y=\frac{c_1}{b_1}$ *ва* $y=0$ бўлганда, $x_1=\frac{c_1}{a_1}$ ни **топамиз;** у ҳолда $\left(0;\frac{c}{b}\right)$ ва $\left(\frac{c}{a};0\right)$

Энди тўғри бурчакли координаталар системасини чизиб, бу нуқталарни 16-расмда белгиланганидек бўлсин деб фараз қиламиз. Топилган ҳар қай-



15- расм.



16- расм.

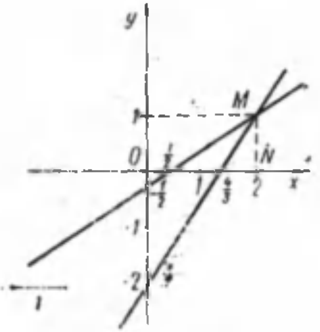
си жуфт нуқта орқали тўғри чизиқлар ўтказсак, кесишиш нуқта M ни топамиз; $ON = m$ ва $MN = n$ бўлсин.

Демак, $x = m$ ва $y = n$ илдизлардир.

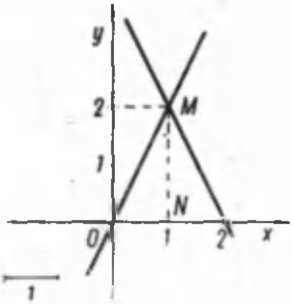
Мисоллар. 1) $\begin{cases}3x - 2y = 4,\\ 2x - 3y = 1\end{cases}$ тенгламалар системаси график усулда ечилсин.

Ечиш. $3x - 2y = 4$ тенгламадан: $x = 0$ бўлганда $y = -2$; $y = 0$ бўлганда $x = \frac{4}{3}$; $2x - 3y = 1$ тенгламадан: $x = 0$ бўлганда $y = -\frac{1}{3}$, $y = 0$ бўлганда $x = \frac{1}{2}$. Сўнгра графикларни чизиб, кесишиш нуқтасини топамиз (17- расм).

(Жавоб. $x = ON = 2$; $y = MN = 1$.)



17- расм.



18- расм.

2) $\begin{cases}2x + y = 4,\\ y = 2x\end{cases}$ тенгламалар системаси график усулда ечилсин.

Ечиш. $2x + y = 4$ тенгламадан: $x = 0$ бўлганда $y = 4$, $y=0$ бўлганда $x = 2$ ва $y = 2x$ тенгламадан: $x = 0$ да $y = 0$, $y = 2$ да $x = 1$. Сўнгра графикларни чизиб, кесишиш нуқтасини топамиз (18- расм).

Демак, $x = ON = 1$; $y = MN = 2$.

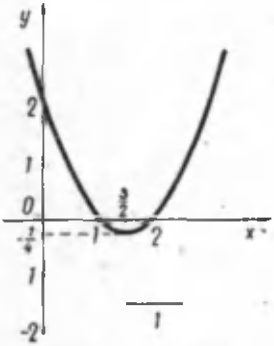
(Жавоб. $x = 1$; $y = 2$.)

III. Квадрат тенгламани график усулда ечиш ва текшириш. $ax^2 + bx + c = 0$ тенгламанинг илдизларини график усул билан топиш учун икки усулни кўриб чиқамиз.

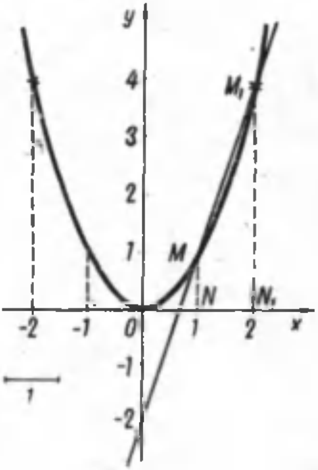
1- усул. $y = ax^2 + bx + c$ функция графигини чизиб, унинг абсцисса ўқи билан кесишиш нуқталарини топамиз. Топилган нуқталарнинг ординаталари ноль, абсциссалари эса тенгламанинг изланган илдизлари бўлади.

Мисол. $x^2-3x+2=0$ тенглама график усулда ечилсин.

Ечиш. $y=x^2-3x+2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$. Бу ҳолда, $x=\frac{3}{2}$ бўлганда $y=-\frac{1}{4}$, демак, чизиладиган параболанинг учи $A\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{4}\right)$ нуқтада бўлади, $x=0$ бўлганда $y=2$, яъни $B(0;\ 2)$ ва $y=0$ бўлганда $x=2$, яъни $C(2;\ 0)$ бўлади. Унинг графиги 19- расмдагидек бўлиб, абсциссалар ўқини (1; 0) ва (2; 0) нуқталарда кесиб ўтади. Демак $x_1=1$ ва $x_2=2$ илдизлардир.



19- расм.



20- расм.

2- усул. $ax^2+bx+c=0$ тенгламани $ax^2=-bx-c$ кўринишда ёзиб, сўнгра $y=ax^2$ ва $y=-bx-c$ деб белгилаб, буларнинг графикларини чизиб, кесишиш нуқталарини топамиз. Графиклар кесишиш нуқталарининг абсциссалари, тенгламанинг изланган илдизлари бўлади.

Масалан, $x^2-3x+2=0$ тенгламани график усул билан ечишни кўрайлик:

$y=x^2$

x	y
0	0
± 1	1
± 2	4

ва

$y=3x-2$

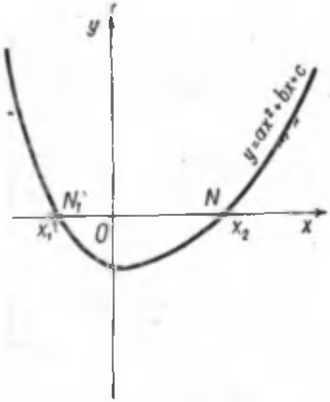
x	y
0	-2
1	1

$y=x^2$ ва $y=3x-2$ функцияларнинг графигини чизамиз (20- расм).

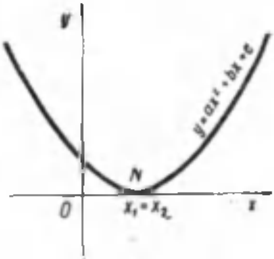
Бу икки чизиқнинг кесишиш нуқталарининг абсциссалари берилган тенгламанинг илдизларидир. Бу илдизлар:

$$x_1 = ON = 1 \text{ ва } x_2 = ON_1 = 2.$$

$ax^2 + bx + c = 0$ тенгламанинг илдизлари $\left(x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$ ни график усул ёрдамида текшириш. $D = b^2 - 4ac$ унинг дискриминанти эди. $y = ax^2 + bx + c$ парабола:



21- расм.

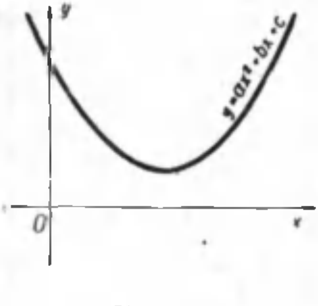


22- расм.

1) $D = b^2 - 4ac > 0$ бўлганда, парабола абсцисса ўқи билан иккита нуқтада кесишади, яъни x_1 ва x_2 илдизлар ҳақиқий ва ҳар хил бўлади, масалан, 21- расмдаги каби.

2) $D = b^2 - 4ac = 0$ бўлганда, парабола абсцисса ўқига уриниб ўтади, яъни x_1 ва x_2 илдизлар ҳақиқий ва тенг бўлади, масалан, 22-расмдаги каби.

3) $D = b^2 - 4ac < 0$ бўлганда парабола абсцисса ўқи билан битта ҳам умумий нуқтага эга бўлмайди, масалан, 23-расмдаги каби. Тенгламанинг ҳақиқий илдизлари мавжуд эмас.



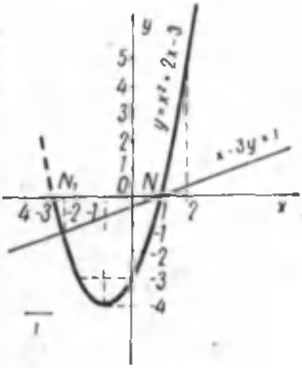
23- расм.

IV. Икки номаълумли иккинчи даражали икки тенглама системасини график усулда ечиш Тенгламалар системасидаги ҳар қайси тенгламага тегишли графиклар чизилганда уларнинг кесишиш нуқталарининг абсциссалари x нинг, ординаталари эса y нинг қийматларини беради.

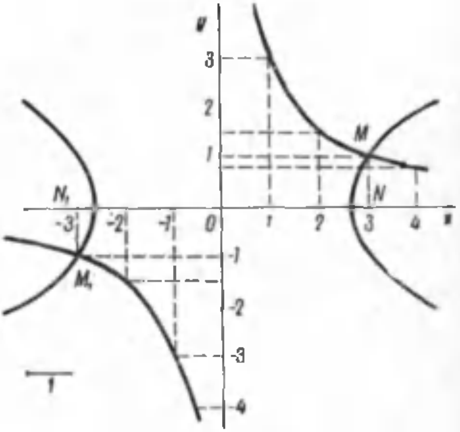
1- мисол. $\begin{cases} x^2 + 2x - y = 3, \\ x - 3y = 1 \end{cases}$

система график усул билан ечилсин.

Ечиш. $x^2 + 2x - y = 3$ ва $x - 3y = 1$ тенгламалар билан берилган функциялар графикларини чизиб, уларнинг кесишиш нуқталарини топамиз (24- расм). Шаклдан кўрамизки, $x_1 = ON = 1$; $y_1 = 0$ ва $x_2 = ON_1 = -2\frac{2}{3}$; $y_2 = M_1N_1 = -\frac{11}{9}$ графикларнинг кесишиш нуқталарининг координаталаридир.



24- расм.



25- расм.

Демак, $(1;\ 0)$ ва $\left(-2\frac{2}{3};\ -\frac{11}{9}\right)$ берилган системанинг ечимлари.

2- мисол. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8, \\ xy = 3 \end{cases}$

система график усулда ечилсин.

Ечиш. $x^2 - y^2 = 8$ ва $xy = 3$ функцияларнинг графикларини чизиб, кесишиш нуқталарини топамиз (25- расм).

Шаклдан кўрамизки, $x_1 = ON = 3$, $y_1 = MN = 1$ ва $x_2 = ON_1 = -3$, $y_2 = M_1N_1 = -1$.

Машқлар. Қуйидаги тенгламалар график усулда ечилсин:

$$5x - 3 = 0;\ x^2 - 7x + 12 = 0;\ 2x^2 - 7x + 3 = 0;$$
$$-2x^2 + 7x - 3 = 0;$$

$$\begin{cases} 4x - y = 1, \\ y = 3x; \end{cases} \quad \begin{cases} x + 5y + 3 = 0, \\ 2x + 3y - 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y = 3, \\ xy = 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 34, \\ x + y = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^2 - y = 4, \\ 2x + y = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 4x + y + 3 = 0, \\ xy = 2. \end{cases}$$

29- §. ТЕНГСИЗЛИК ВА УНИНГ ХОССАЛАРИ. БИР НОМАЪЛУМЛИ ТЕНГСИЗЛИКЛАРНИ ЕЧИШ

Бу ерда тенгсизлик ҳақида тўлароқ тушунча берамиз. Сонлардан ёки ҳарфлардан иборат икки ифодани катта ($>$) ёки кичик ($<$) ишораси билан боғланиши тенгсизликни беради.

Масалан, $2\frac{1}{2} > 1\frac{1}{2}$; $3x - 4 > 2$; $2x^2 < 7x - 3$; $\frac{5a-1}{5a+1} > \frac{a}{a-1}$; $7\cdot 3 - 8 > 7$ ва ҳоказоларнинг ҳар бири тенгсизликдир.

Тенгсизликнинг хоссалари

1) Тенгсизликнинг иккала қисмига бир хил сонни қўшиш ёки айириш билан тенгсизлик ўзгармайди.

Масалан, $2{,}5 > 1{,}2$ тенгсизликнинг иккала қисмига (± 3) ни қўшамиз: $2{,}5 + 3 > 1{,}2 + 3$ ёки $5{,}5 > 4{,}2$; $2{,}5 - 3 > 1{,}2 - 3$ ёки $-0{,}5 > -1{,}8$.

2) Тенгсизликнинг иккала қисми бир хил мусбат сонга кўпайтирилса ёки бўлинса тенгсизлик ўзгармайди.

Масалан, $2{,}5 > 1{,}2$ тенгсизликнинг иккала қисмини ($+2$) га кўпайтирамиз: $2{,}5\cdot(+2) > 1{,}2\cdot(+2)$ ёки $5 > 2{,}4$; кўрамизки, тенгсизлик ўзгармади.

Энди, $2{,}5 > 1{,}2$ тенгсизликнинг иккала қисмини ($+5$) га бўламиз: $2{,}5 : (+5) > 1{,}2 : (+5)$ ёки $0{,}5 > 0{,}24$ бўлади; тенгсизлик ўзгармади.

3) Тенгсизликнинг иккала қисми манфий сонга кўпайтирилса ёки бўлинса, тенгсизлик ишораси қарама-қарши ишора билан алмашади.

Масалан, $2{,}5 > 1{,}2$ тенгсизликнинг иккала қисмини (-2) га кўпайтирамиз: $2{,}5\cdot(-2) = -5$; $1{,}2\cdot(-2) = -2{,}4$. Бундан: $-5 < -2{,}4$; тенгсизлик ишораси қарама-қарши ишорага айланди.

Энди, $2{,}5 > 1{,}2$ ни (-5) га бўлсак: $2{,}5 : (-5) = -0{,}5$; $1{,}2 : (-5) = -0{,}24$. Бундан: $-0{,}5 < -0{,}24$ бўлади. Тенгсизлик ишораси қарама-қарши ишорага айланди.

4) Агар $a > 0, b > 0$ ва $a > b$ бўлса, у ҳолда n ҳар қандай мусбат сон бўлганда $a^n > b^n$; n ҳар қандай манфий сон бўлганда $a^n < b^n$ бўлади.

Масалан: 1) $5 > 3$ тенгсизликнинг иккала қисмини ($+2$) даражага кўтарамиз: $5^2 > 3^2$ ёки $25 > 9$. Энди $5 > 3$ ни (-2) даражага кўтарамиз. $5^{-2} = \frac{1}{25}$ ва $3^{-2} = \frac{1}{9}$ бўлиб, $\frac{1}{25} < \frac{1}{9}$ бўлади. Демак, $5^{-2} < 3^{-2}$. Энди $\frac{3}{4} > \frac{5}{8}$ тенгсизликни олсак, бунда: $\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{2}{3}} < \left(\frac{5}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

2) $\frac{4}{7} > \frac{3}{7}$ тенгсизликни (± 2) даражага кўтарамиз: $\left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{16}{49}$ ва $\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{9}{49}$. Демак, $\left(\frac{4}{7}\right)^2 > \left(\frac{3}{7}\right)^2$; $\left(\frac{4}{7}\right)^{-2} = \frac{49}{16}$ ва $\left(\frac{3}{7}\right)^{-2} = \frac{49}{9}$. Демак, $\left(\frac{4}{7}\right)^{-2} < \left(\frac{3}{7}\right)^{-2}$. Шунга ўхшаш: $0{,}04 < 0{,}16$ берилганда,

$$0{,}04^{\frac{1}{2}} < 0{,}16^{\frac{1}{2}} \text{ ва } 0{,}04^{-\frac{1}{2}} > 0{,}16^{-\frac{1}{2}}$$

бўлади.

5) *Агар $a < 0$, $b < 0$ ва $a > b$ бўлса, у ҳолда n мусбат тоқ сон бўлганда $a^n > b^n$. n мусбат жуфт сон бўлганда $a^n < b^n$ бўлади.*

Масалан, $-\frac{1}{4} > -\frac{1}{3}$ берилган. $\left(-\frac{1}{4}\right)^3 = -\frac{1}{64}$, $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}$, демак, $\left(-\frac{1}{4}\right)^3 > \left(-\frac{1}{3}\right)^3$; $\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$; $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = +\frac{1}{9}$, демак, $\left(-\frac{1}{4}\right)^2 < \left(-\frac{1}{3}\right)^2$. $-5 > -6$ берилган. $(-5)^3 = -125$; $(-6)^3 = -216$, демак, $(-5)^3 > (-6)^3$; $(-5)^2 = 25$, $(-6)^2 = 36$, демак, $(-5)^2 < (-6)^2$.

Биринчи даражали бир номаълумли тенгсизликни ечиш

$ax + b > cx + d$ ёки $ax + b < cx + d$ тенгсизлик биринчи даражали бир номаълумли тенгсизликнинг нормал кўриниши дейилади. Бунда: a, b, c, d лар ҳақиқий маълум коэффициентлар, x—номаълум миқдор. Биринчи даражали бир номаълумли тенгсизликларни ечишда ҳам биринчи даражали бир номаълумли тенгламаларни ечишдаги қоидаларнинг асосий қисмидан фойдаланилади. Берилган тенгсизлик қуйида кўрсатилгандек ечилади.

Ечиш. $ax + b \gtrless cx + d$ ёки $ax - cx \gtrless d - b$ ёки $(a - c)x \gtrless d - b$.

Энди, $a - c \neq 0$ бўлганда, $x \gtrless \frac{d - b}{a - c}$ бўлади, агар $a - c < 0$ бўлса, $x \lessgtr \frac{d - b}{a - c}$ бўлади, агар $a - c = 0$ бўлса, тенгсизлик ечимга эга бўлмайди.

Мисол. $\frac{3x - 1}{x + 1} > 2$ тенгсизлик ечилсин.

Ечиш. $\frac{3x - 1}{x + 1} > 2$ тенгсизликнинг иккала қисмини ($x + 1 > 0$ фараз қилиб) $(x + 1)$ га кўпайтирамиз. $3x - 1 > 2\ (x + 1)$ ҳосил бўлади, бундан: $3x - 2x > 2 + 1$ ёки $x > 3$. Агар $x + 1 < 0$ бўлса, $x < 3$ бўлади. Агар $x + 1 = 0$ бўлса, ечим йўқ.

Изоҳ. Тенгсизлик нормал ҳолда берилмаган бўлса, уни нормал ҳолга келтириб, сўнгра ечиш керак.

Иккинчи даражали бир номаълумли тенгсизликни ечиш

$ax^2+bx+c>0$ (1) ёки $ax^2+bx+c<0$ (2) тенгсизликлар бир номаълумли иккинчи даражали тенгсизлик дейилади; a, b, c — ҳақиқий маълум коэффициентлар, x — номаълум миқдор. (2) тенгсизликнинг иккала қисмини (-1) га кўпайтириб, (1) тенгсизликни ҳосил қилиш мумкин бўлгани учун, ёлғиз (1) тенгсизликнинг ечилишини текшириш билан чегараланамиз.

ax^2+bx+c квадрат учҳаднинг илдизлари[1] x_1 ва x_2; дискриминанти b^2-4ac бўлсин.

Ечиш. ax^2+bx+c квадрат учҳаднинг илдизлари: 1) ҳақиқий ва ҳар хил сонлар бўлсин (яъни $b^2-4ac>0$ ва $a<0$). Бу ҳолда (1) тенгсизликни қаноатлантирувчи x нинг қийматлари $x_1<x<x_2$ бўлади; агар $b^2-4ac>0$ ва $a>0$ бўлса, $x<x_1$ ва $x>x_2$ бўлади;

2) ҳақиқий ва тенг (яъни $b^2-4ac=0$) бўлса, (1) тенгсизликни $a>0$ бўлганда x нинг $x_1=x_2$ дан бошқа ҳамма қийматлари қаноатлантиради; $a<0$ бўлганда тенгсизликнинг ечими йўқ;

3) мавҳум (яъни $b^2-4ac<0$) бўлса, (1) тенгсизликни $a>0$ бўлганда x нинг ҳар қандай қиймати қаноатлантиради; $a<0$ бўлганда эса тенгсизликнинг ечими йўқ.

Мисоллар. 1) $3x^2-7x+2>0$ тенгсизлик ечилсин.

Ечиш. $3x^2-7x+2=0$ тенгламанинг илдизлари $x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{6}=\frac{7\pm5}{6}$; $x_1=\frac{1}{3}$; $x_2=2$; $b^2-4ac=(-7)^2-4\cdot3\cdot2=25>0$, $a=3>0$ бўлгани учун: $x>x_2=2$ ва $x<x_1=\frac{1}{3}$ бўлади.

2) $-2x^2+6x+80>0$ тенгсизлик ечилсин.

Ечиш. $-2x^2+6x+80=0$ тенгламадан $x_1=-5$; $x_2=8$ илдизларни топамиз. $a=-2<0$; $b=6$; $c=80$; демак, $b^2-4ac=6^2=4\cdot(-2)\cdot80=676>0$ бўлгани учун 1- ҳолга асосан $-5<x<8$.

3) $-x^2+6x-9<0$ тенгсизлик ечилсин.

Ечиш. $(-1)\cdot(-x^2+6x-9)<0\cdot(-1)$, бу ҳолда $x^2-6x+9>0$ ҳосил бўлади. $x^2-6x+9=0$ тенгламадан $x_1=x_2=3$ илдизни топамиз.

Энди $a=1$, $b=-6$, $c=9$; $a=1>0$ ва $b^2-4ac=(-6)^2-4\cdot1\cdot9=36-36=0$ бўлгани учун, 2- ҳолга мувофиқ берилган тенгсизликни $x\neq3$ қийматлар қаноатлантиради.

4) $x^2-4x+6>0$ тенгсизлик ечилсин.

Ечиш. $a=1$, $b=-4$, $c=6$. Энди $a=1>0$ ва $b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot1\cdot6=-8<0$. Демак, учинчи ҳолга кўра x нинг

---

[1] Квадрат учҳаднинг илдизи деб $ax^2+bx+c=0$ тенгламанинг илдизини тушунамиз.

ҳар қандай қийматлари берилган тенгсизликни қаноатлантиради.

5) $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-4)>0$ тенгсизлик ечилсин.

Ечиш. $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-4)>0$ тенгсизликдан $\begin{cases} x-\frac{1}{2}>0 \\ x-4>0 \end{cases}$ ва $\begin{cases} x-\frac{1}{2}<0 \\ x-4<0 \end{cases}$ тенгсизликлар келиб чиқади. Булардан эса $x>\frac{1}{2}$, $x>4$ ва $x<\frac{1}{2}$; $x<4$ эканини кўриш осон[1].

Машқлар. Тенгсизликлар ечилсин.

1) $\frac{2}{3}x+2+\frac{1}{4}x>\frac{1}{2}x+3.$ $\left(\text{Жавоб. } x>\frac{12}{5}.\right)$

2) $\frac{5x+2}{2x-1}>3.$ (Жавоб. $x<5$.)

3) $\frac{5x-1}{4}-\frac{3x-13}{10}>\frac{5x+1}{3}.$ (Жавоб. $x<1$.)

4) $3x^2-14x+8>0.$ $\left(\text{Жавоб. } 4<x<\frac{2}{3}.\right)$

5) $-2x^2+11x-5<0.$ $\left(\text{Жавоб. } 5<x<\frac{1}{2}.\right)$

6) $9x^2-12x+4>0.$ $\left(\text{Жавоб. } x\neq\frac{2}{3}.\right)$

7) $5x^2-2x+8>0.$ (Жавоб. x нинг ҳар қандай қийматлари.)

30- §. МАСАЛАЛАРНИ ТЕНГЛАМАЛАР ТУЗИБ ЕЧИШ

Масалаларни тенглама ёки тенгламалар тузиб ечишда қатъий бир кўрсатма ёки қоида йўқ. Лекин масала қандай бўлмасин ундан тенглама ёки тенгламалар тузишда қуйидагиларга, албатта, аҳамият бериш керак: олдин масала яхшилаб бир-икки ўқиб чиқилади, номаълумларни x, y, ... ҳарфлари билан белгилаб, ҳамма берилганлар ёзилади; энг кейин масаланинг шартларига кўра тенглама ёки тенгламалар тузилади. (Арифметикадан масалалар ечишда тамомила бошқача йўллардан фойдаланилади, буни сиз қуйидаги масалаларнинг ечилишидан яққол кўришингиз мумкин.)

---

[1] Тенгсизликларнинг ечилиши ҳақида тўлароқ маълумот олишни истаган китобхонга, А. П. Киселёвнинг „Алгебра" (II қисм) дарслигидан кўриш тавсия қилинади.

Арифметикадан

1- масала. Икки яшикда $38\frac{1}{4}$ *кг* олма бор. Биринчи яшикдан $4\frac{3}{4}$ *кг* олиб иккинчи яшикка солсак, иккала яшикда *олма баравар оғирликда бўлади. Ҳар қайси яшикда неча килограммдан* олма бор?

Ечиш. $38\frac{1}{4}$ *кг* олмани икки яшикка тенг бўлсак, $\frac{38\frac{1}{4}}{2} = 19\frac{1}{8}$ *кг* дан бўлади. Бу ҳолда биринчи яшикда $19\frac{1}{8} + 4\frac{3}{4} = 23\frac{7}{8}$ (*кг*) олма бўлиб, иккинчи яшикда $38\frac{1}{8} - 23\frac{7}{8} = 14\frac{3}{8}$ (*кг*) олма бор.

2- масала. Юмшоқ ўринли вагонга 25 та билет ва қаттиқ ўринли вагонга 60 та билет сотилиб, ҳамма билет учун 476 сўм пул олинди. Қаттиқ ўринли вагоннинг битта билети юмшоқ ўринли вагоннинг битта билетидан 3,4 сўм арзон. Юмшоқ ва қаттиқ вагонларнинг ҳар бир билети неча сўмдан?

Ечиш. Ҳамма билетлар сони $25 + 60 = 85$ та. Ўрта ҳисобда битта билет $\frac{476}{85} = 5{,}6$ сўм. Ҳар бир билетда 3,4 сўмдан кам бўлганда 60 та билетда: $60 \cdot 3{,}4 = 204$ сўм. Энди 204 сўм 85 та билетнинг биттасига неча сўмдан тўғри келади? $\frac{204}{85} = 2{,}4$ сўмдан. Демак, юмшоқ ўринли вагоннинг битта билети $= 5{,}6 + 2{,}4 = 8$ сўм; *қаттиқ ўринли вагоннинг битта билети* $= 8 - 3{,}4 = 4{,}6$ сўм.

3- масала. Цемент ва қумдан иборат 32 *кг* қоришманинг 35% и цемент. Шу цемент 28% ни ташкил қилиши учун олдинги қоришмага яна қанча қум қўшиш керак?

Ечиш. 32 *кг* нинг 35% и $\frac{32}{100} \cdot 35 = 11{,}2$ *кг* бўлади. Энди 28 % и 11,2 *кг* бўлган қоришма: $\frac{11{,}2 \cdot 100}{28} = 40$ *кг*. Демак, 40 *кг* — 32 *кг* = 8 *кг* қум қўшиш керак.

4- масала. Уй уч хонадан иборат. Биринчи хонанинг юзи $24\frac{3}{8}$ *кв. м бўлиб, ҳамма хоналар юзининг* $\frac{13}{36}$ қисмига баравар. Иккинчи хонанинг юзи учинчиникидан $8\frac{1}{8}$ *кв. м* катта. Иккинчи хонанинг юзи топилсин.

Ечиш. Ҳамма хоналар юзи: $\frac{24\frac{3}{8} \cdot 36}{13} = 67\frac{1}{2}$ *кв. м*; иккинчи билан учинчи хонанинг юзи: $67\frac{1}{2} - 24\frac{3}{8} = 43\frac{1}{8}$ *кв. м*; иккинчи ва учинчи хонанинг баравар юзларининг йиғиндиси: $43\frac{1}{8} - 8\frac{1}{8} =$

$= 35$ *кв. м*, энди биттасиники $\frac{35}{2} = 17\frac{1}{2}$ *кв. м* бўлади. Бу ҳолда иккинчи хонанинг юзи:

$$17\frac{1}{2} + 8\frac{1}{8} = 25\frac{5}{8} \text{ кв. м.}$$

Биринчи даражали бир ёки икки номаълумли тенгламалар, квадрат тенгламалар тузиш ва ечиш

5- масала. Омборга 2,4 *т* озиқ-овқат маҳсулоти келтирилди. Ун гўштга қараганда 3 марта кўп, гуруч эса ундан 400 *кг* кам. Омборга ҳар қайси маҳсулотдан неча тоннадан келган?

Тенглама тузиш. Унни x *т* деб белгилайлик, бу ҳолда гўшт 3 марта кам бўлгани учун $\frac{x}{3}$ *т*, гуруч ундан 400 *кг*=0,4*т* кам бўлгани учун $(x - 0{,}4)$ *т*. Энди тенглама тузамиз. Ун, гўшт ва гуруч йиғиндиси 2,4 *т* бўлгани учун $x + \frac{x}{3} + (x - 0{,}4) = 2{,}4$.

Ечиш. $x + \frac{x}{3} + x = 2{,}4 + 0{,}4$ ёки $7x = 8{,}4$ ёки $x = 1{,}2$.

Демак, $x = 1{,}2$ *т* ун; $\frac{x}{3} = \frac{1{,}2}{3} = 0{,}4$ *т* гўшт; $x - 0{,}4 = 0{,}8$ *т* гуруч.

6- масала. СССРда 1949 йил колхозлар, лесхозлар ва совхозлар иҳота ўрмонлари барпо қилиш учун 269600 *га* ер тайёрлашган. Колхозлар совхозларга қараганда 10 марта кўп ва лесхозларга қараганда 84800 *га* кам ер тайёрлаган. Уларнинг ҳар бири неча гектардан ер тайёрлаган?

Тенглама тузиш. Совхозлар x *га* ер тайёрлаган бўлсинлар, бу ҳолда колхозлар $10x$ *га* ва лесхозлар $(10x + 84800)$ *га* ер тайёрлаган бўладилар. Демак $x + 10x + (10x + 84800) = 269600$ тенглама ҳосил бўлади. Энди уни ечамиз: $x + 10x + 10x + 84800 = 296600$ ёки $21x = 269600 - 84800 = 184800$ ёки $x = \frac{184800}{21} = 8800$. Демак, совхозлар 8800 *га*, колхозлар 88000 *га* ва лесхозлар 172800 *га* ер тайёрлаган.

7- масала. Заводнинг бир цехидаги ишчилар сонининг иккинчи цехидаги ишчилар сонига нисбати 3 : 2 каби. Биринчи цехдан 18 киши иккинчи цехга ўтказилса, ишчилар сонининг нисбати 5 : 4 каби бўлади. Ҳар қайси цехдаги ишчилар сонини аниқланг.

Тенглама тузиш. Биринчи цехдаги ишчилар сони x, иккинчи цехдаги ишчилар сони y бўлсин. Масаланинг шартига кўра $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$ ва $\frac{x - 18}{y + 18} = \frac{5}{4}$ тенгламалар системаси тузилади:

Ечиш. $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{3}{2}, \\ \frac{x - 18}{y + 18} = \frac{5}{4}. \end{cases}$

Биринчи тенгламадан: $x = \frac{3}{2}y$; буни иккинчи тенгламага қўйиб, уни ечамиз: $\frac{\frac{3}{2}y - 18}{y + 18} = \frac{5}{4}$ ёки $(3y - 36)\cdot 4 = 2\cdot(y+18)\cdot 5$ ёки $2y = 324$, бундан: $y = \frac{324}{2} = 162$. Бу ҳолда $x = \frac{3}{2} \cdot 162 = 243$. Демак, биринчи цехда 243 ишчи, иккинчи цехда 162 ишчи ишлайди.

8- масала. Станциядаги пассажир ва юк вагонларининг умумий сони 115 та. Пассажир вагонларидан 15 таси, юк вагонларидан 20 таси ремонт қилишга юборилгандан кейин қолган пассажир вагонларининг сони, қолган юк вагонлари сонининг $\frac{1}{3}$ қисмига тенг. Дастлаб станцияда ҳар қайси хил вагондан нечтадан бор эди?

Тенглама тузиш. 1) Юк вагонлари сони x бўлсин; 2) пассажир вагонларининг сони $(115 - x)$ та бўлади. Ремонтга юборилгандан кейин станцияда $115 - x - 15 = 100 - x$ та ва $(x - 20)$ та вагон қолган. Бу ҳолда шартга кўра, тенглама: $\frac{x-20}{3} = 100 - x$ бўлади.

Ечиш. $\frac{x-20}{3} = 100 - x$ ёки $4x = 320$; демак, $x = 80$ та юк вагони, $115 - x = 115 - 80 = 35$ та пассажир вагони.

Изоҳ. Бу масалани система тузиб ечиш ҳам мумкин. x та юк вагони y та пассажир вагони бўлсин. Бу ҳолда масаланинг шартига кўра

$$\begin{cases} x + y = 115, \\ \frac{x-20}{3} = y - 15 \end{cases}$$

система ҳосил бўлади.

9 — 16- масалалардаги тенгламаларнинг тузилишини текширинг ва уни ечинг.

9- масала. Икки ишчи бир ишни биргалашиб ишласа, 12 кунда тамом қилишади. Агар олдин биттаси ишлаб, ишнинг ярмини тамом қилгандан кейин, унинг ўрнига иккинчиси ишласа, иш 25 кунда тамом бўлади. Шу ишни ҳар қайси ишчи ўзи ёлғиз ишласа, неча кунда тамом қилади?

Тенглама тузиш. Биринчи ишчи x кунда ишни тугатса, ишнинг ярмини $\frac{x}{2}$ кунда; иккинчи ишчи $(50 - x)$ кунда, ишнинг ярмини $25 - \frac{x}{2}$ кунда тугатади. У ҳолда биринчи ишчи бир кунда ҳамма ишнинг $\frac{1}{x}$ бўлагини, иккинчиси $\frac{1}{50-x}$ бўлагини бажарган бўлиб, иккаласи биргаликда ишнинг $\frac{1}{12}$ бўлагини бажаради. Демак, тенглама $\frac{1}{x}+\frac{1}{50-x}=\frac{1}{12}$ кўринишда бўлади.

(Жавоб. 20 кун ва 30 кун.)

10- масала. Сув икки трубадан келганда бакни 2 соат-у 55 минутда тўлдиради. Биринчи труба бакни иккинчига қараганда 2 соат олдин тўлдиради. Ҳар қайси трубанинг ёлғиз узи бакни неча соатда тўлдиради?

Тенглама тузиш. I труба $(x-2)$ соатда; II труба x соатда тўлдирсин. Иккови биргаликда 2 соат-у 55 минутда, яъни $2\frac{11}{12}=\frac{35}{12}$ соатда тўлдирар эди. Бу ҳолда тенглама: $\frac{1}{x-2}+$ $+\frac{1}{x}=\frac{12}{35}$ *бўлади.*

(Жавоб. 5 соат; 7 соат.)

11- масала. Қайиқ дарёнинг *оқимига қарши* $22\frac{1}{2}$ *км, оқим* томонга $28\frac{1}{2}$ *км* юриб, ҳамма йўлга 8 соат вақт сарф қилган. Дарё оқимининг тезлиги соатига $2\frac{1}{2}$ *км.* Қайиқнинг турғун сувдаги тезлигини топинг.

Тенглама тузиш. Қайиқнинг турғун сувдаги тезлиги *x км/соат бўлсин.* Қайиқ дарё оқими бўйича $\left(x+\frac{5}{2}\right)$ *км/с;* оқимга қарши $\left(x-\frac{5}{2}\right)$ *км/с* тезлик билан юрган. Бу ҳолда тенглама:

$$\frac{28{,}5}{x+2{,}5}+\frac{22{,}5}{x-2{,}5}=8$$

бўлади.

(Жавоб. 7 *км/с.*)

12- масала. Масофаси 900 *км* бўлган икки шаҳардан бир-бирига қарши икки поезд йўлга чиққан ва улар йўлнинг ўртасида учрашган. Агар биринчи поезд иккинчидан бир соат кеч жўнаган бўлса ва унга қараганда тезлиги соатига 5 *км* ортиқ бўлса, ҳар қайси поезднинг тезлиги топилсин.

Тенглама тузиш. Биринчи поезд тезлиги *x км/соат* бўлсин. Бў ҳолда иккинчи поезд тезлиги $(x-5)$ *км/соат* бўлади. Ярим йўлни биринчи поезд $\frac{450}{x}$ соатда; иккинчи поезд $\frac{450}{x-5}$ соатда босиб ўтади. Масаланинг шартига кўра, тенглама $\frac{450}{x}=\frac{450}{x-5}-1$ бўлади.

Ечиш. Тенгламани касрдан қутқарамиз. $450x - 2250 + x^2 - 5x = 450x$ ёки $x^2 - 5x - 2250 = 0$. Бундан: $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 9000}}{2} = \frac{5 \pm 95}{2}$; $x_1 = \frac{5 + 95}{2} = 50$ *км/с*, $x - 5 = 50 - 5 = 45$ *км/с*. Демак, биринчи поезд соатига 50 *км* ва иккинчи поезд соатига 45 *км* юради.

Масалани тенгламалар системаси ёрдамида ечиш ҳам мумкин.

Тенгламалар тузиш. Биринчи поезднинг тезлиги x *км/с*, иккинчи поезднинг тезлиги y *км/с* бўлсин. Бу ҳолда масаланинг шартига кўра, тенгламалар системаси:

$$\begin{cases} \frac{450}{x} = \frac{450}{y} - 1, \\ x - y = 5 \end{cases}$$

бўлади.

Ечиш. Иккинчи тенгламадан $y = x - 5$ ни топиб, уни биринчи тенгламага қўямиз: $\frac{450}{x} = \frac{450}{x - 5} - 1$. Бундан: $x = 50$ *км/с*, у ҳолда: $y = 50 - 5 = 45$ *км/с*.

13- масала. Икки хонали соннинг ўз рақамлари йиғиндисига кўпайтмаси 814 га тенг, бу соннинг ўнликлар рақами бирликлари рақамидан 3 та ортиқ. Шу сонни топинг.

Тенглама тузиш. (Икки хонали сонни, масалан, $35 = 3 \cdot 10 + 5$ кўринишда ёзиш мумкин.) Топиладиган соннинг ўнлик рақами x бўлсин, бу ҳолда бирлик рақами $x - 3$ бўлади. Топиладиган икки хонали сон $10x + (x - 3) = 11x - 3$ бўлади. Энди масаланинг шартига мувофиқ тенглама тузамиз: $(11x - 3) \cdot [x + (x - 3)] = 814$.

Ечиш.

$$(11x - 3)\ (2x - 3) = 814 \text{ ёки } 22x^2 - 39x - 805 = 0.$$

Бундан:

$$x = \frac{39 \pm \sqrt{1521 + 70840}}{44} = \frac{39 \pm \sqrt{72361}}{44} = \frac{39 \pm 269}{44}.$$

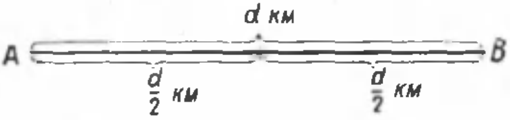
$$x_1 = \frac{39 + 269}{44} = 7.$$

Демак, $11x - 3 = 11 \cdot 7 - 3 = 77 - 3 = 74$.

14- масала. A ва B аэродромлар орасидаги масофа d километр, A дан B га биринчи самолёт учди, m соатдан кейин B дан унга қарши иккинчи самолёт учди. Унинг тезлиги биринчи самолётнинг тезлигидан соатига b километр ортиқ. Улар йўлнинг ўртасида учрашди. Ҳар қайси самолётнинг тезлигини топинг.

Тенглама тузиш.

Биринчи самолёт $\frac{d}{2}$ йўлни $\frac{d}{2x}$ соатда ўтади, иккинчиси эса $\frac{d}{2}$ йўлни $\frac{d}{2(x+b)}$ соатда ўтади. Бу ҳолда тенглама $\frac{d}{2x} - \frac{d}{2(x+b)} = m$ шаклда бўлади (26- расм).



26- расм.

Ечиш. $\frac{d}{2x} - \frac{d}{2(x+b)} = m$ тенгламани умумий махражга келтирамиз:

$$2dx + 2bd - 2dx = 4mx(x+b) \text{ ёки } bd = 2mx^2 + 2mbx$$

$$\text{ёки } 2mx^2 + 2mbx - bd = 0.$$

Бундан, $x = \frac{-mb \pm \sqrt{m^2b^2 + 2bdm}}{2m}$ км/с — 1- самолёт тезлиги;

$x + b = \frac{mb \pm \sqrt{m^2b^2 + 2bdm}}{2m}$ км/с — 2- самолёт тезлиги бўлади.

15- масала. Ғишт терувчи икки устадан бири иккинчисидан $1\frac{1}{2}$ кун кеч иш бошлаб, иккаласи бир ишни 7 кунда *тамомлашади. Агар иккинчи уста шу ишни биринчисига қараганда 3 кун тез тамом қиладиган бўлса, усталарнинг ҳар бири шу ишни неча кунда тамом қилади?*

Тенглама тузиш. Ҳамма ишни бир бутун деб оламиз. 1- уста x кунда, 2- уста $(x-3)$ кунда тамомлайди. Улар $7 - \frac{3}{2} = \frac{11}{2}$ кун бирга ишлаган. Бу ҳолда тенглама: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-3} \cdot \frac{11}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x} = 1$
бўлади.

(Жавоб. 14 ва 11 кун.)

16- масала. 10 та от билан 14 та сигирни боқиш учун кунига 180 *кг* пичан берилар эди. Отлар учун пичан нормаси 25%, сигирлар учун $33\frac{1}{3}$% орттирилгандан кейин, кунига 232 *кг* пичан бериладиган бўлди. Бошда кунига бир отга неча килограмм ва бир сигирга неча килограмм пичан берилар эди?

Тенглама тузиш. Кунига битта отга x *кг*, битта сигирга y *кг* пичан берилган бўлсин. Бу ҳолда масаланинг шартига кўра $10x + 14y = 180$ бўлади. Пичан бериш орттирилгандан кейин битта отга $\left(x + \frac{25}{100}\cdot x\right)$ ёки $\frac{5}{4}$ x *кг*; битта сигирга $\left(y + \frac{33\frac{1}{3}}{100}\cdot y\right)$ ёки $\frac{4}{3}\, y$ *кг* пичан берилади. Буларга асосан тенглама: $10\cdot\frac{5}{4}x + 14\cdot\frac{4}{3}\, y = 232$ бўлади. Энди ҳосил бўлган икки тенгламани система қилиб ечамиз:

$$\begin{cases}10x + 14y = 180,\\ 10\cdot\frac{5}{4}x + 14\cdot\frac{4}{3}y = 232\end{cases}\quad \text{ёки}\quad +\underline{\begin{cases}5x + 7y = 90,\\ 75x + 112y = 1392\end{cases}\left|\begin{matrix}-15\\ 1\end{matrix}\right.}$$

$$7y = 42,$$

бундан $y = 6$ *кг*. Бу ҳолда $5x + 7\cdot 6 = 90$ дан $x = \frac{48}{5} = 9{,}6$ *кг*.

Иккинчи даражали икки номаълумли икки тенглама системаси

17- масала. Икки группа ўқувчилар театрга бир нечта билетлар олишди. Биринчи группа билетларга 9 сўм тўлади, иккинчи группа ундан 20 тийин қиммат турадиган билетлардан, лекин 3 та кам билет олди ва 9,6 сўм тўлади. Ҳар қайси группа нечта билет ва неча сўмлик билетдан олган?

Тенгламалар тузиш. Биринчи группа x сўмдан y дона билет олган бўлсин, бу ҳолда тенглама: $x\cdot y = 9$ бўлади.

Иккинчи группа $(x + 0{,}2)$ сўмлик билетдан $(y - 3)$ дона олган бўлади. Бу ҳолда тенглама: $(x + 0{,}2)\cdot(y - 3) = 9{,}6$

Ечиш. $\begin{cases}x\cdot y = 9,\\ (x + 0{,}2)\cdot(y - 3) = 9{,}6.\end{cases}$

Биринчи тенгламадан $y = \frac{9}{x}$. Буни иккинчи тенгламага қўйиб, уни ечамиз: $(x + 0{,}2)\cdot\left(\frac{9}{x} - 3\right) = 9{,}6$ ёки $x^2 + 0{,}4x - 0{,}6 = 0$. Бундан, $x = -0{,}2 \pm \sqrt{0{,}04 + 0{,}6} = -0{,}2 \pm \sqrt{0{,}64} = -0{,}2 \pm 0{,}8$; $x = -0{,}2 + 0{,}8 = 0{,}6$ сўм. У ҳолда $y = \frac{9}{0.6} = 15$. Демак, 1- группа 0,6 сўмлик билетдан 15 та олган; 2- группа $x + 0{,}2$ ёки $0{,}6 + 0{,}2 = 0{,}8$ сўмлик билетдан $y - 3 = 15 - 3 = 12$ та билет олишган.

18- масала. Тўғри тўртбурчак шаклидаги икки ерга 350 туп мева кўчатлари қаторлаб экилди. Ҳар қайси ердаги қаторларнинг сони, қатордаги дарахтларнинг сонидан 1 та ортиқ. Агар биринчи ердаги дарахтларнинг сони иккинчи ердагидан 130 та ортиқ бўлса, ҳар қайси ердаги ҳар бир қаторга неча туп дарахт экилган?

Тенгламалар тузиш. 1- ердаги қаторда дарахтларнинг сони x туп, 2- ердаги қаторда дарахтларнинг сони y туп бўлсин. Бу ҳолда тенгламалар: $x(x+1)+y(y+1)=350$ ва $x(x+1)-y(y+1)=130$ бўлади.

Ечиш. $\begin{cases} x(x+1)+y(y+1)=350, \\ x(x+1)-y(y+1)=130. \end{cases}$

Буларни қўшсак: $2x(x+1)=480$ ёки $x^2+x-240=0$. Бундан: $x_1=15$; энди $x_1=15$ ни тенгламалардан бирортаси, масалан, иккинчисига қўйсак: $15\cdot16-130=y(y+1)$ ёки $y^2+y-110=0$. Бундан, $y=10$ бўлади. Демак, 15 ва 10 туп кўчат экилган.

19- масала. Бир ишни бажариш икки бригадага топширилган эди. Аввал биринчи бригада бутун ишни бажариш учун иккинчи бригадага қанча вақт керак бўлса, ўша вақтнинг учдан бирича ишлади; кейин иккинчи бригада бутун ишни бажариш учун биринчи бригадага қанча вақт керак бўлса, ўша вақтнинг учдан бирича ишлади. Шундан кейин бутун ишнинг $\frac{13}{18}$ қисми бажарилгани маълум бўлди. Агар иккала бригада биргаликда шу ишни $3\frac{3}{5}$ соатда тамом қилолса, ҳар қайси бригаданинг ўзи шу ишни қанча вақтда тамом қила олар эди?

Тенгламалар тузиш. Ишни 1- бригада x соатда; 2- бригада y соатда тамом қила олсин. 1- бригада бутун ишнинг $\frac{y}{3x}$ қисмини, 2- бригада $\frac{x}{3y}$ қисмини ишлаган. Буларга асосан тенгламалар:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3\frac{3}{5}} \text{ ва } \frac{y}{3x}+\frac{x}{3y}=\frac{13}{18}$$

бўлади.

Ечиш. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{18}, \\ \frac{y}{3x}+\frac{x}{3y}=\frac{13}{18}, \end{cases}$ ёки $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{18}, \\ \frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{13}{6}. \end{cases}$

Энди биринчи тенгламани y га кўпайтириб, ундан $\frac{y}{x}=\frac{5y-18}{18}$ ни топамиз, бу ҳолда: $\frac{x}{y}=\frac{18}{5y-18}$. Буларни 2-тенгламага қўямиз: $\frac{5y-18}{18}+\frac{18}{5y-18}=\frac{13}{6}$ ёки $(5y-18)^2-39(5y-18)+324=0$ бўлади. Энди $5y-18=z$ деб белгилаймиз. Бу ҳолда $z^2-39z+324=0$. Бундан: $z_1=27$; $z_2=12$. Демак, $5y-18=27$ ёки $y_1=9$; шунга ўхшаш $5y-18=12$ ёки $y_2=6$. Энди x ни топамиз: $\frac{1}{x}+\frac{1}{9}=\frac{5}{18}$, бундан: $x_1=6$; шунга ўхшаш, $\frac{1}{x}+\frac{1}{6}=\frac{5}{18}$, бундан: $x_2=9$.

Машқлар. Қуйидаги масалаларни тенгламалар тузиб ечинг.

1- масала. Бир синфда иккинчи синфга қараганда икки марта кўп ўқувчи бор; агар биринчи синфдан иккинчига 10 ўқувчи ўтказилса, биринчи синфдаги ўқувчилар иккинчисидагидан 3 та ортиқ бўлади. Ҳар қайси синфда неча ўқувчи бор?

(Жавоб. 23 ва 46 ўқувчи.)

2- масала. Икки студентнинг бир кунлик терган пахтаси 160 *кг* бўлган. Биринчи студент иккинчи студентга 20 *кг* пахта берадиган бўлса, иккинчи студентнинг пахтаси биринчи студентда қолган пахтадан 3 марта кўп бўлади. Ҳар қайси студент неча килограммдан пахта терган?

(Жавоб. 60 *кг* ва 100 *кг*.)

3- масала. Ота ҳозир a ёшда, ўғли b ёшда. Неча йилдан кейин отанинг ёши ўғлининг ёшидан m марта катта бўлади?

$\left(\text{Жавоб. } \frac{a-mb}{m-1} \text{ йилдан кейин.}\right)$

4- масала. Касрнинг сурати махражидан k бирлик кичик. Агар бу касрнинг махражидан a ни олиб, суратига b қўшилса, $\frac{m}{n}$ га тенг каср ҳосил бўлади. Изланган касрни топинг.

$\left(\text{Жавоб. } \frac{km-am-bn}{kn-am-bn}.\right)$

5- масала. Икки соннинг айирмаси 12 ва нисбати $2\frac{1}{2}:3\frac{1}{2}$ га тенг. Шу сонларни топинг.

(Жавоб. 42 ва 30.)

6- масала. Бир неча киши дам олиш кунини яхши ўтказиш учун баравар пул қўшиб, 24 сўм тўплаши керак эди. Аммо пул тўплаш вақтида улардан иккитаси келмай қолди, шунинг учун қолганлари улар учун ўз хиссаларига 0,4 сўмдан қўшиб тўлашди. Неча киши пул тўлаган?

(Жавоб. 12 киши.)

7- масала. Икки хонали соннинг рақамлари йиғиндиси 5 га тенг. Шу сонни рақамларининг ўринларини алмаштиришдан ҳосил бўлган сонга кўпайтирсак, 736 чиқади. Берилган сонни топинг.

(Жавоб. 32 ёки 23.)

8- масала. Автомобиль n километр йўлни маълум тезлик билан ўтади. Агар автомобилнинг тезлиги соатига a *км* камайтирилса, шу йўлни ўтиши учун b соат ортиқ вақт кетади. Автомобилнинг тезлигини топинг.

$\left(\text{Жавоб. } \frac{ab+\sqrt{a^2b^2+4nab}}{2b} \text{ км/с}\right)$

9- масала. Икки хонали сонни ўз рақамларининг йиғиндисига бўлсак, бўлинма 3, қолдиқ 5 га тенг бўлади. Агар бу сон рақамларининг ўрнини алмаштирсак, ҳосил бўлган сон берилган сондан 45 та ортиқ бўлади. Берилган сонни топинг.

(Жавоб. 38.)

10- масала. Икки A ва B ишчининг ишлаган кунларининг сони бир хил. Агар A ишчи бир кун кам, B ишчи 7 кун кам ишласа, A ишчи 72 сўм, B ишчи эса 64 сўм 80 тийин олади. Агар, аксинча, A ишчи 7 кун кам, B ишчи бир кун кам ишласа, у ҳолда B ишчи A ишчига қараганда 32 сўм 40 тийин ортиқ олади. Ҳар қайсиси нормал ишлаганда неча сўмдан олиши керак?

(Жавоб. 75 сўм; 90 сўм.)

11- масала. Радиуси R бўлган айланада икки нуқта айлана бўйлаб бир хил йўналишда текис ҳаракат қилади. Улардан биттаси бутун айланани иккинчисига қараганда t *сек.* тез айланиб чиқади. Бу икки нуқтанинг бир-бири билан учрашиш вақти T га тенг. Ҳар бир нуқтанинг тезлиги топилсин.

$$\left[\text{Жавоб. } v_1=\frac{\tau R}{T}\left(\sqrt{1+\frac{4T}{t}}+1\right), v_2=\frac{\pi R}{T}\left(\sqrt{1+\frac{4T}{t}}-1\right).\right]$$

12- масала. Битта участкадаги пахтани икки бригада 4 кунда бир сидра териб чиқади. Агар бригадалардан биттаси бутун участкадаги пахтанинг ярмини териб, қолган ярмини иккинчи бригада терса, бутун участкадаги пахта 9 кунда терилиб бўлади. Шу участкадаги пахтани ҳар қайси бригада ёлғиз неча кунда теради?

(Жавоб. 12; 6.)

31- §. ПРОГРЕССИЯЛАР

а) Сонлар кетма-кетлиги

Ортиб бориш тартибида жойлашган чексиз давом этувчи

$$1,\ 2,\ 3, \ldots\ n,\ n+1,\ n+2, \ldots \qquad (1)$$

сонлар тўплами натурал қатор дейилар эди (бу арифметикадан маълум).

Таъриф. *Ҳақиқий сонларни бирор қонун бўйича натурал сонлар тартиби билан кетма-кет ёзилиши сонлар кетма-кетлиги дейилади.*

Масалан, $1, 3, 5, 7, \ldots, (2n-1), \ldots,$ ва $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots,$ умуман $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots,$ (2) ларнинг ҳар бири сонлар кетма-кетлигидир.

(2) кетма-кетликда a_1, a_2, a_3 ва ҳоказолар ҳақиқий сонлар, улар сонлар кетма-кетлигининг *ҳадлари* дейилади.

Агар $a_{n+1} > a_n$ бўлса, кетма-кетлик *ўсувчи*, $a_{n+1} < a_n$ бўлса, у *камаювчи* сонлар кетма-кетлиги дейилади.

Изоҳ. Агар сонлар кетма-кетлигида ҳадларнинг сони аниқ (маълум) бўлса, у *чегараланган* сонлар кетма-кетлиги дейилади.

Масалан, 1, 3, 5, 7, 9, 11 каби.

б) Арифметик прогрессия

Таъриф. *Ҳар бир кейинги ҳади ўз олдидаги ҳадга бир хил ўзгармас сонни қўшишдан ҳосил бўладиган сонлар кетма-кетлиги арифметик прогрессия дейилади.* Бундай ўзгармас сон арифметик прогрессиянинг *айирмаси* дейилади ва у одатда „d“ ҳарфи билан белгиланади.

Арифметик прогрессия олдига ÷ белги ёзилади.

Масалан, ÷3, 5, 7, 9, ... (*) ва ÷8, 2, −4, ... (**) ларнинг ҳар бири арифметик прогрессиядир. (*) прогрессияда айирма $d = 2$, (**) прогрессияда: $d = -6$.

Энди битта мисолни олиб текширамиз: ÷3,5,7,9,11,13,15,17 арифметик прогрессия берилган, бунда $d = 2$.

Таърифга кўра: $5 = 3 + 2$; $7 = 5 + 2 = 3 + 2 + 2 = 3 + 2\cdot 2$; $9 = 7 + 2 = 3 + 2 + 2 + 2 = 3 + 3\cdot 2$ ва ҳоказо. $17 = 15 + 2 = 3 + 7\cdot 2$ бўлади.

Арифметик прогрессия ҳадлари ушбу хоссага эга. *Арифметик прогрессиянинг бошидан ва охиридан тенг узоқликда бўлган ҳадларининг йиғиндиси унинг четки ҳадлари йиғиндисига тенг.*

Буни ушбу мисолдан яққол кўрамиз: $5 + 15 = 7 + 13 = 9 + 11 = 3 + 17 = 20$.

Арифметик прогрессиянинг исталган ҳади ва ҳадлар йиғиндисининг формулалари

÷a_1, a_2, a_3, ..., a_n n та ҳадли арифметик прогрессия берилган бўлсин. n та ҳад йиғиндисини S_n деб белгилаймиз; d — айирма. Таърифга кўра: $a_2 = a_1 + d$; $a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$; $a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$ ва шуларга ўхшаш: $a_8 = a_1 + 7d$; $a_{21} = a_1 + 20d$ ва ҳоказо бўлади. Буларга асосан, арифметик прогрессиянинг n- ҳадини бундай ёза оламиз:

$$\boxed{a_n = a_1 + d\cdot(n-1).} \qquad (1)$$

Демак, *арифметик прогрессиянинг исталган ҳади, прогрессия айирмасининг ҳадлар сонининг битта ками билан кўпайтмасининг биринчи ҳадга қўшилганига тенг.*

(1) формула арифметик прогрессиянинг исталган ҳадини топиш формуласи дейилади ($n = 1,2,3, \ldots, n$).

Энди (1) формулага тегишли арифметик прогрессияни бундай ёзиш мумкин:

$$\boxed{\div\, a_1,\ a_1 + d,\ a_1 + 2d,\ a_1 + 3d, \ldots,\ a_1 + d\,(n-1).}$$

Арифметик прогрессиянинг n та ҳади йиғиндисига формула чиқариш учун, унинг йиғиндисини S_n деб белгилаб, уни қуйидаги икки кўринишда ёзиб, қўшамиз:

$$\begin{array}{l} \ S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n; \\ \underline{+\ S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ 2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + \\ \qquad\qquad + (a_n + a_1). \end{array}$$

Аммо юқоридаги хоссага асосан: $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots = (a_n + a_1)$.

Демак, $2\,S_n = (a_1 + a_n)\cdot n$, бундан:

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}} \quad \text{ёки} \quad \boxed{S_n = \left(a_1 + \frac{n-1}{2}d\right)\cdot n.}$$

Буларнинг ҳар бири арифметик прогрессиянинг n та ҳади йиғиндисини топиш формуласи дейилади.

$d > 0$ бўлганда прогрессия ўсувчи, $d < 0$ бўлганда эса камаювчи арифметик прогрессия дейилади.

Демак, арифметик прогрессия барча ҳадларининг йиғиндиси унинг четки ҳадлари йиғиндиси билан барча ҳадлар сони кўпайтмасининг ярмига тенг.

Мисол. $\div 3,5,7,9,\ldots$ прогрессиянинг 17 та ҳади йиғиндиси топилсин.

Ечиш. $a_1 = 3;\ n = 17;\ d = 5 - 3 = 2;\ S_{17} = ?$

$$a_{17} = a + (17 - 1)\,d = 3 + 16\cdot 2 = 35.$$

Бу ҳолда:

$$S_{17} = \frac{a_1 + a_{17}}{2}\cdot 17 = \frac{3 + 35}{2}\cdot 17 = 19\cdot 17 = 323.$$

в) Геометрик прогрессия

Таъриф. *Ҳар бир кейинги ҳади ўз олдидаги ҳадни бир хил ўзгармас сонга кўпайтиришдан ҳосил бўлган сонлар кетма-кетлиги геометрик прогрессия дейилади.* Бу ўзгармас сон геометрик прогрессиянинг *махражи* дейилади. Геометрик прогрессия олдига ∺ белги қўйилади. Масалан, ∺ 4, 12, 36, ... ва ∺ 16, 8, 4, 2,1, ... кетма-кетликнинг ҳар бири геометрик прогрессиядир. Биринчи прогрессияда махраж 3 га, иккинчи прогрессияда махраж $\frac{1}{2}$ га тенг. $\div\div 4, 12, 36, \dots$ прогрессияда таърифга кўра: $12 = 4\cdot 3$, $36 = 12\cdot 3 = 4\cdot 3^2$, $108 = 36\cdot 3 = 4\cdot 3^3$; $324 = 108\cdot 3 = 4\cdot 3^3\cdot 3 = 4\cdot 3^4$ ва ҳоказо бўлади.

Энди исталган ҳад формуласини чиқарамиз. Бунинг учун ҳарфли прогрессия оламиз: $\div\div b_1, b_2, b_3, \dots, b_m$, унинг махражи q бўлсин, бу ҳолда таърифга асосан: $b_2 = b_1 q$; $b_3 = b_2 q$; $b_3 = b_1 q^2$; $\dots$; $b_m = b_1 q^{m-1}$ бўлади.

$$\boxed{b_m = b_1 q^{m-1}}$$

тенглик геометрик прогрессиянинг исталган ҳадини топиш формуласи дейилади.

Демак, геометрик прогрессиянинг исталган ҳади иккинчи ҳаддан бошлаб биринчи ҳад билан даража кўрсаткичи, ҳадлар сонининг битта камига тенг бўлган махраж кўпайтмасига тенг ($m = 1,2,3, \dots, m$). $|q| > 1$ бўлса, прогрессия *ўсувчи*, $|q| < 1$ бўлса, ***камаювчи*** геометрик прогрессия дейилади[1]. Энди геометрик прогрессиянинг „m" та ҳади йиғиндисининг формуласини чиқарамиз.

$$S_m = b_1 + b_2 + \dots + b_m \tag{1}$$

бўлсин. Бу тенгликнинг иккала қисмини q га кўпайтирамиз:

$$q\cdot S_m = b_1 q + b_2 q + \dots + b_{m-1} q + b_m q = b_2 + b_3 + \dots + b_m + b_m q. \tag{2}$$

Энди (2) тенгликдан (1) тенгликни ҳадлаб айирамиз:

$$(q-1) S_m = (b_2 + b_3 + \dots + b_m + b_m q) - (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_m) = b_m q - b_1.$$

Бундан $\boxed{S_{mq+1} = \frac{b_m q - b_1}{q-1}}$ ёки $\boxed{S_m = \frac{b_1 (q^m - 1)}{q-1}.}$

Бу формула ўсувчи геометрик прогрессиянинг m та ҳади *йиғиндисини* топиш формуласи дейилади. Демак, геометрик прогрессия барча ҳадларининг йиғиндиси шундай касрга тенгки, унинг сурати охирги ҳаднинг прогрессия махражига кўпайтмаси билан 1- ҳад орасидаги айирмадан, махражи эса прогрессия махражи билан бир орасидаги айирмадан иборат. Энди йиғинди формуласининг сурат ва махражини (-1) га кўпайтирсак:

$$\boxed{S_m = \frac{b_1 (1 - q^m)}{1 - q}.}$$

---

[1] $q < 0$ бўлганда, прогрессия амалий аҳамиятга эга бўлмайди.

Бу формула *камаювчи геометрик прогрессиянинг m та ҳади йиғиндисини топиш формуласи дейилади.*

Геометрик прогрессиянинг ҳар бир ҳади ўз олдидаги ҳадга бўлинса, бўлинма ўзаро тенг бўлиб, геометрик прогрессия махражи q га тенг бўлади.

1- мисол. $\div\div 4, 12, 36, \ldots$ геометрик прогрессиянинг 8 та ҳадининг йиғиндиси топилсин.

Ечиш. $b_1 = 4$, $m = 8$, $q = \frac{12}{4} = 3$; $S_8 = ?$ $b_8 = 4 \cdot 3^7$;

$$S_8 = \frac{4 \cdot (3^8 - 1)}{3 - 1} = 2 \cdot (3^8 - 1) = 13120.$$

2- мисол. $\div\div 8, 4, 2, 1, \ldots$ геометрик прогрессиянинг 6 та ҳади йиғиндиси топилсин.

Ечиш. $b_1 = 8, m = 6, q = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}; S_6 = ?\ S_6 = \frac{8\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6\right]}{1 - \frac{1}{2}} =$

$$= \frac{8\left(1 - \frac{1}{64}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{63}{4}.$$

Демак, $S_6 = \frac{63}{4}$.

32- §. ЛИМИТЛАР ҲАҚИДА ТУШУНЧА ВА ЧЕКСИЗ КАМАЮВЧИ ГЕОМЕТРИК ПРОГРЕССИЯ

Биз ўзгарувчи ва ўзгармас миқдорлар ҳақида юқорида танишган эдик. *Масалан, берилган доира юзини ифода қилган* миқдор ўзгармас миқдор, унга ички ёки ташқи чизилган мунтазам кўпбурчакнинг юзини ифода қилган миқдор эса, кўпбурчак томонларининг сони турлича бўлганда ўзгарувчи миқдор бўлади.

Доира юзи k, ички чизилган мунтазам кўпбурчакнинг юзи x бўлсин; бунда k — ўзгармас, x — ўзгарувчи миқдор. Энди ички чизилган мунтазам кўпбурчак томонларининг сонини кўп *марта иккилантирсак, у ҳолда x миқдор k га яқинлашади* (интилади) ва у одатда: $x \to k$ ёки $\lim x = k$ деб ёзилади ҳамда x нинг лимити k га тенг деб ўқилади. Бунда „lim“ лотинча „limes“, французча „limite“ сўзларининг қисқартирилганидир, ўзбекча „чек“ ёки „чегара“ демакдир.

Масалан, $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots$ камаювчи геометрик прогрессиянинг[1] бошидан 15 та ҳади йиғиндисини S_{15} деб белгилаб, уни топамиз:

---

[1] Прогрессия ҳақида 31- § га қаранг.

$$S_{15} = \frac{b_1 - b_1 q^m}{1-q} = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{15}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^{14}}.$$

Шунга ўхшаш: $S_{16} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^{15}}$ ва ҳоказо. $S_{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^n}$ бўлади. Булардан биз, ҳадларининг сони орта борган сари уларнинг йиғиндиси тобора $\frac{3}{2}$ га яқинлашиб бораётганлигини кўрамиз. Чунки, n нинг етарли катта қийматларида, $\frac{1}{3^n}$ каср-нинг махражи етарли катта бўлиб, сурати ўзгармай қолгани учун бу каср берилган ҳар қандай кичик мусбат сондан ҳам кичик бўлади. Яъни $\left| S_{n+1} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon$ бўлса (ε — эпсилон, бу ҳарф билан исталганча кичик мусбат миқдорни белгиладик), у ҳолда $S_{n+1} \to \frac{3}{2}$ ёки $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n+1} = \frac{3}{2}$ бўлади. Энди биз ушбу таърифни бера оламиз.

Таъриф. *Агар бирор ўзгарувчи миқдор* (бизнинг мисолда прогрессия ҳадларининг йиғиндиси) *ўзгаришида тобора бирор ўзгармас сонга* (бизнинг мисолда $\frac{3}{2}$ га) *яқинлаша бориб, бу сон билан ўзгарувчи миқдор орасидаги айирманинг абсолют қиймати берилган ҳар қандай кичик мусбат сон* ε *дан кичиклигича қолса, бундай ўзгармас сон ўзгарувчи миқдорнинг лимити (чеки) деб аталади.*

Чексиз камаювчи геометрик прогрессия

Таъриф. *Ҳадларининг сони чегараланмаган ва махражи* $-1 < q < 1$ *бўлган геометрик прогрессия чексиз камаювчи геометрик прогрессия дейилади.* Масалан, $\div\div 6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$ $\left(\right.$махраж $q = \frac{1}{2} < 1$ ва ҳадларининг сони чегараланмагани учун у чексиз камаювчи геометрик прогрессиядир).

Чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг ҳадлари йиғиндисининг формуласини чиқариш. Ушбу

$$\div\div b_1,\ b_1q,\ b_1q^2,\ b_1q^3, \ldots,\ b_1q^{m-1},\ b_1q^m, \ldots$$

чексиз камаювчи геометрик прогрессия берилган бўлсин $(-1 < q < +1)$. Энди $b_1 + b_1q + b_1q^2 + \ldots + b_1 q^{m-1} + \ldots = S$ ва $b_1 + b_1q + b_1q^2 + \ldots + b_1q^{m-1} = S_m$ деб белгилаймиз.

У ҳолда $S_m = \frac{b_1 - b_1q^m}{1-q} = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1}{1-q}\cdot q^m$ ни ёзиш мумкин.

m чексиз ортади деб фараз қиламиз. У ҳолда $\frac{b_1}{1-q}$ сон ўзгармайди, лекин $q < 1$ бўлгани учун m чексиз ортганда: $|q^m| \to 0$.

Шунинг учун $m \to \infty$ да $S_m \to \frac{b_1}{1-q}$. Бу $\frac{b_1}{1-q}$ чексиз камаювчи геометрик прогрессия ҳадларининг йиғиндиси деб аталади ва у

$$S = \frac{b_1}{1-q}$$

шаклида ёзилади. Бу формула чексиз камаювчи геометрик прогрессия ҳадларининг йиғиндисини топиш формуласи дейилади.

Мисол $\div\div$ $6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$ нинг ҳадлари йиғиндиси топилсин.

Ечиш. $b_1 = 6$, $q = \frac{1}{2}$, $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{6}{1-\frac{1}{2}} = \frac{6}{\frac{1}{2}} = 12.$

Чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг ўнли даврий касрларга татбиқи

I. Соф даврий касрларни олиб қараймиз. Масалан 1,777... ва 2,353535... берилган. Бу касрларни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$1{,}777\ldots = 1 + \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \ldots$ ва $2{,}353535\ldots = 2 + \frac{35}{100} + \frac{35}{10000} + \frac{35}{1000000} + \ldots$. Буларда $\frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \ldots$ ва $\frac{35}{100} + \frac{35}{10000} + \ldots$ ларнинг ҳар бири чексиз камаювчи геометрик прогрессиядир. Улардан биринчисининг махражи $\frac{1}{10}$ га, иккинчисиники $\frac{1}{100}$ га тенг. Бу ҳолда, чексиз камаювчи геометрик прогрессия ҳадлари йиғиндисининг формуласи $S = \frac{b_1}{1-q}$ га асосан, $\frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \ldots = \frac{\frac{7}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{7}{9}$ ва $\frac{35}{100} + \frac{35}{10000} + \frac{35}{1000000} + \ldots = \frac{\frac{35}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{35}{99}$

бўлади. Шундай қилиб, берилган касрларни қуйидаги кўринишда оддий каср билан ёза оламиз:

$$1{,}777\ldots = 1\frac{7}{9} \text{ ва } 2{,}353535\ldots = 2\frac{35}{99}.$$

11. Аралаш даврий касрларни олиб қараймиз. Масалан, 1,5333... ва 0,82424... берилган. Бу касрларни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$1{,}5333\ldots = \frac{5}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots \text{ ва } 0{,}82424\ldots = \frac{8}{10} + \frac{24}{1000} + \frac{24}{100000} + \ldots .$$

Буларда, $\frac{3}{100} + \frac{8}{1000} + \ldots$ ва $\frac{24}{1000} + \frac{24}{100000} + \ldots$ ларнинг ҳар бири чексиз камаювчи геометрик прогрессиядир. Улардан биринчисининг махражи $\frac{1}{10}$, иккинчисиники $\frac{1}{100}$ га тенг. У ҳолда $S = \frac{b}{1-q}$ формулага асосан: $\frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots = \frac{\frac{3}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$ ва

$$\frac{24}{1000} + \frac{24}{100000} + \ldots = \frac{\frac{24}{1000}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{24}{990} = \frac{4}{165}.$$

Шундай қилиб, берилган касрлар қуйидагидек оддий касрлар билан ёзилади:

$$1{,}5333\ \ldots = 1\frac{5}{10} + \frac{1}{30} = 1\frac{8}{15} \text{ ва } 0{,}82424\ldots = \frac{8}{10} + \frac{4}{165} = \frac{136}{165}.$$

Демак, $1{,}5333\ldots = 1\frac{8}{15}$ ва $0{,}82424\ldots = \frac{136}{165}$.

Машқлар. Қуйидаги мисол ва масалалар ечилсин:

1) $\div\div \lambda 12,\ 4,\ \frac{4}{3}, \ldots$; 2) $\div\div 4\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3}}{4}, \ldots$;

3) $\div\div 2, \frac{2}{5}, \frac{2}{5^2}, \ldots, \frac{2}{5^n}$ чексиз камаювчи геометрик прогрессияларнинг йиғиндиси топилсин.

4) $a_1 = 4$; $d = -1{,}5$; $n = 45$ берилган. S_{45} топилсин.

5) $q = 1\frac{1}{2}$; $m = 4$; $b_4 = 9$ лар берилган. b_1 ва S_4 топилсин.

6) 7 билан 35 орасига шў сонлар билан арифметик прогрессия ташкил қиладиган 6 та сон ёзилган. Айирма d ни топинг.

(Жавоб. $d = 4$.)

7) Агар велосипедчи 1- соатда 30 *км* юриб, ундан кейинги ҳар бир соатда олдингисидан 2 *км* кам юрса, 234 *км* масофани неча соатда босади?

(Жавоб. 13 соат.)

8) Ўсувчи геометрик прогрессия ташкил қилувчи учта соннинг йиғиндиси 26. Агар шу сонлардан биринчисига 1, иккинчисига 6 ва учинчисига 3 қўшилса, ҳосил бўлган сонлар арифметик прогрессия ташкил қилади. Шу сонларни топинг.

(Жавоб. 2; 6; 18.)

9) $1 + 4 + 7 + 10 + \ldots + x = 117$ ва $(x + 1) + (x + 4) + \ldots + (x + 28) = 155$ тенгламалар ечилсин.

(Жавоб. 25 ва 1.)

10) 1 апрелдан 12 апрелгача (12 апрель ҳам киради) ҳавонинг температураси ҳар куни 0,5 градус кўтарилди. Шу вақт ичидаги ўртача температура $18\frac{3}{4}$ градус бўлса, 1 апрелдаги ҳавонинг температурасини топинг.

(Жавоб. 16 градус.)

11) Ҳар 30,5 *м* чуқурликда ернинг ички температураси 1°С ортади деб фараз қилинади. Агар ернинг сиртида температура 10°С бўлса:

а) 1000 *м* чуқурликда температура қанча бўлади?

б) Қандай чуқурликда температура сувнинг қайнаш нуқтасига етади?

(Жавоб. $\approx 34°$; 2745 *м*.)

12) Ораларидаги масофа 200 *м* бўлган икки жисм бир вақтда бир-бирига қараб ҳаракат қилади. Биринчи жисм секундига 12 *м*, иккинчи жисм биринчи секундда 20 *м*, кейинги ҳар бир секундда ўзидан олдинги секунддагидан 2 *м* кам юради. Бу жисмлар неча секунддан кейин учрашади?

(Жавоб. 8 секунд.)

13) Арифметик прогрессия билан геометрик прогрессиянинг биринчи ҳадлари 5 га тенг. Бу прогрессияларнинг учинчи ҳадлари ҳам ўзаро тенг, арифметик прогрессиянинг иккинчи ҳади геометрик прогрессиянинг иккинчи ҳадидан 10 та ортиқ. Шу прогрессияларни топинг.

(Жавоб. ÷5, 25, 45, ... ва ∷5, 15, 45, ...)

14) Ҳаво тортувчи насос поршенининг ҳар бир ҳаракатида идишдаги ҳавонинг $\frac{1}{8}$ бўлаги чиқиб кетади. Агар дастлабки босим 760 *мм* бўлса, поршень йигирма марта ҳаракат қилгандан кейин идишдаги ҳавонинг босими қанча бўлади?

(Жавоб. ≈ 53 *мм*.)

15) а) Иккинчи ҳади $1\frac{2}{3}$, махражи $\frac{2}{3}$ бўлган чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг йиғиндисини топинг.

(Жавоб. 7,5.)

б) Чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг йиғиндиси 12,5; биринчи ва иккинчи ҳадлари йиғиндиси 12 га тенг. Шу прогрессияни топинг.

(Ж а в о б. $\div\div 10, 2, \frac{2}{5}, \ldots .$)

33- §. КЎРСАТКИЧЛИ ФУНКЦИЯ ВА УНИНГ ГРАФИГИ ҲАҚИДА ТУШУНЧА

a — ўзгармас, x ва y лар ўзгарувчи миқдорлар бўлсин. У ҳолда $y=a^x$ функция *кўрсаткичли функция* дейилади. Бунда: x — аргумент, y — функция ва $a \neq 1$ мусбат сон. Бу тенгликда x нинг ҳар битта қийматига y нинг битта қиймати мос келгани учун $y=a^x$ *бир қийматли* функциядир.

Кўрсаткичли функциянинг хоссалари:

1) $a > 1$; $y=a^x$ функциянинг аниқланиш (борлиқ) соҳаси барча ҳақиқий сонлар тўпламидан иборат бўлиб, x нинг ҳар қандай қийматида функция мусбат, яъни $a^x > 0$. а) x мусбат бутун сон бўлсин, у ҳолда $a^x > 0$ экани равшан,

б) $x=\frac{p}{q} > 0$ каср бўлсин, у ҳолда $a^x = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ да $a^p > 0$ бўлгани учун $\sqrt[q]{a^p} > 0$ бўлади.

в) x мусбат иррационал сон бўлсин. Энди $\alpha_1 > 0$ ва $\alpha_2 > 0$ лар тартиб билан x нинг ками ва ортиғи билан олинган иккита қиймати бўлсин. У ҳолда $a^{\alpha_1} < a^x < a^{\alpha_2}$ дан $a^x > 0$ бўлади.

г) $x=-k\ (k>0)$ бўлсин. У ҳолда: $a^x = a^{-k} = \frac{1}{a^k}$, $a^k > 0$ бўлгани учун $\frac{1}{a^k} > 0$ бўлади.

Х у л о с а. *$y=a^x$ функция $a>1$ ва x чекли сон бўлганда манфий сонга ҳам, нолга ҳам тенг бўла олмайди.*

2) *$y=a^x$ функция ўсувчи функциядир.*

а) Агар x_1, x_2 лар x нинг иккита мусбат қийматлари бўлиб, $x_1 > x_2$ бўлса, $a^{x_1} > a^{x_2}$, чунки $a > 1$ эди, б) x_1 ва x_2 нинг биттаси ёки иккаласи ҳам иррационал сон бўлиб, x_1 нинг ортиғи билан олинган тақрибий рационал қиймати k_1; x_2 нинг ками билан олинган тақрибий қиймати эса k_2 бўлсин. $x_1 < x_2$ бўлганда k_1 ва k_2 ларни $k_2 > k_1$ тенгсизликни қаноатлантирадиган қилиб танлаб олиш мумкин. У ҳолда: $a^{x_2} > a^{k_2} > a^{k_1} > a^{x_1}$, бундан: $a^{x_2} > a^{x_1}$ бўлади.

3) $x=0$ бўлганда, $a^x = a^0 = 1$, чунки $a \neq 1$; 0.

4) $x=1$ да, a^x нинг қиймати асосига тенг: $a^x = a^1 = a$.

5) $x = 1; 2; 3; \ldots; 100; \ldots$ бўлганда, $y=a^x$ функциянинг қийматлари $y=a$; a^2; $a^3; \ldots; a^{100}; \ldots$ орта боради, чунки $a > 1$ эди, яъни $x \to \infty$ да $y \to \infty$.

Энди $x = -1; -2; \ldots; -100; \ldots$ бўлганда $y=a^x$ нинг қийматлари $y = \frac{1}{a}; \frac{1}{a^2}; \ldots; \frac{1}{a^{100}}; \ldots$ камая боради; яъни $x \to -\infty$ да $y \to 0$.

Бу кўриб ўтилган хоссалар $y = a^x$ функциянинг графиги қуйидаги шартларни қаноатлантириши лозим эканини билдиради:

1. Абсцисса ўқининг ихтиёрий нуқтасидан чиқарилган перпендикуляр a^x функциянинг графигини аниқ бир нуқтада кесади ва график абсцисса ўқининг юқорисига жойлашган. Демак, абсцисса ўқида ва ундан пастда графикка тегишли нуқта бўлмайди.

2. a^x нинг графиги ординаталар ўқини координаталар бошидан бир бирлик юқорида кесиб ўтади.

3. График чапдан ўнгга томон юқорига кўтарила боради.

4. $(1; a)$ нуқта функция графигига тегишлидир.

5. График эгри чизиқ бўлиб, аввал абсцисса ўқидан аста-секин, кейин эса тез узоқлаша боради.

Хулоса. $y = a^x$ $(a > 1)$ *функция ҳақиқий сонлар соҳасида берилган ва ўсувчидир. Аргумент* $-\infty$ дан $+\infty$ гача ортганда a^x функция 0 дан ∞ гача ортади.

Энди $y = a^x$ ни $0 < a < 1$ бўлган ҳолда текширамиз.

1. x нинг ҳар қандай ҳақиқий қийматида $a^x > 0$ бўлади.

2. x ортиши билан a^x функция камаяди, яъни $a^x, a < 1$ бўлганда камаювчидир.

3. $x = 0$ бўлганда $a^x = 1$, чунки $a \neq 1$. Лекин $a < 1$ бўлгани учун $x > 0$ да $a^x < 1$; $x < 0$ да $a^x > 1$ бўлади.

4. $x \to \infty$ да $a^x \to 0$ ва $x \to -\infty$ да $a^x \to \infty$, чунки $a < 1$ дир.

$y = 2^x$ ва $y = \frac{1}{2^x}$ функциялар графигини чизиш. Дастлаб ҳар қайси функцияга жадвал тузамиз:

$y = 2^x$:

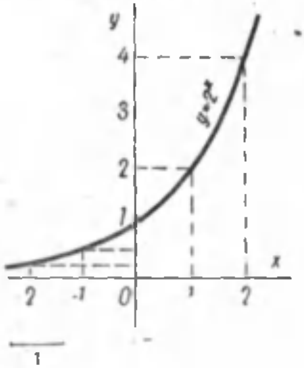
x	0	1	-1	2	-2	...
y	1	2	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{1}{4}$	...

ва $y = \frac{1}{2^x}$:

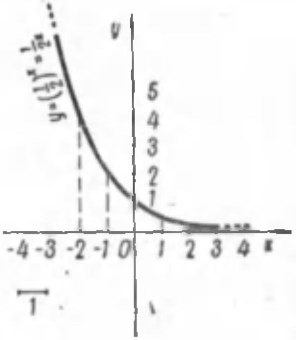
x	0	1	-1	2	-2	...
y	1	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{4}$	4	...

Энди $(0; 1)$, $(1; 2)$, $\left(-1; \frac{1}{2}\right), \ldots$ нуқталарни ва $(0; 1)$, $\left(1; \frac{1}{2}\right)$, $(-1; 2)$, $\left(2; \frac{1}{4}\right)$, $(-2; 4), \ldots$ нуқталарни айрим-айрим Декарт координаталар системасида топиб, уларни бир-бири билан туташтирсак, $y = 2^x$ ва $y = \frac{1}{2^x}$ ларнинг графиклари чизилади (27 ва 28- расм).

Машқлар. $y = 5^x$ ва $y = \frac{1}{5^x}$ ларнинг графиклари чизилсин.



27- расм.



28- расм.

Энди $y = a^x$ нинг $a > 1$ ва $a < 1$ ҳоллардаги ўзгаришини қисқача қуйидаги жадвал билан ифода қилиш мумкин:

$y = a^x$, бунда $a > 0$ ва $a \neq 1$	
$a > 1$	$a < 1$
1. Функциянинг аниқланиш соҳаси ҳақиқий сонлар тўпламидан иборат, x нинг ҳар бир қийматида $a^x > 0$.	
2. Функция манфий сонга ва нолга тенг бўлолмайди.	
3. $x = 0$ да функциянинг қиймати 1 га тенг.	
4. Функция ўсувчи	Функция камаювчи
5. $x = 1$ бўлганда $y = a$ бўлади.	
6. $x < 0$ $y < 1$ бўлганда $x > 0$ $y > 1$	$x < 0$ $y > 1$ бўлганда $x > 0$ $y < 1$
7. $x \to -\infty$ да $y \to 0$ $x \to \infty$ да $y \to \infty$	$x \to -\infty$ да $y \to \infty$ $x \to \infty$ да $y \to 0$

34- §. ЛОГАРИФМЛАР

Даражага кўтаришни биз юқорида кўриб ўтган эдик. Масалан, $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$, шунга ўхшаш $3^4 = 81$ ва ҳоказо эди. Булардаги даража кўрсаткич 2 ва 4 сонлари 9 ва 81 ларнинг асос 3 га кўра логарифми дейилади ва $\log_3 9 = 2$, $\log_3 81 = 4$ кўринишда ёзилади. Умуман $a^n = N$ бўлса, у ҳолда уни $\log_a N = n$ деб ёзиш мумкин. Бунда: a — асос, N — сон, n — логарифм.

Таъриф. *Берилган соннинг берилган асосга кўра логарифми деб, шу сонни ҳосил қилиш учун, берилган асосни кўтариш керак бўлган даража кўрсаткичига айтилади.* Шунинг учун $\log_2 8 = 3$, чунки $2^3 = 8$; $\log_4 64 = 3$, чунки $4^3 = 64$; $\log_{10} 100 = 2$, чунки $10^2 = 100$; $\log_4 \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, чунки $4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$; $\log_{-3}(-27) = 3$, чунки $(-3)^3 = -27$; $\log_{-2}(-32) = 5$, чунки $(-2)^5 = -32$; лекин $\log_2(-32) \neq \pm 5$, чунки $(+2)^5 = +32$; $(+2)^{-5} = \frac{1}{32}$ дир. Демак, *мусбат асосда манфий соннинг логарифми мавжуд бўлмайди*, яъни $a > 0$, $N < 0$ бўлганда, $\log_a N$ нинг маъноси бўлмайди.

а) Логарифмларнинг хоссалари

1) $a \neq 0$ бўлганда, $a^0 = 1$ эди. Бу ҳолда $\log_a 1 = 0$. Демак, *бирнинг нолга тенг бўлмаган ҳар қандай асосли логарифми нолга тенг.* Масалан, $\log_4 1 = 0$, чунки $4^0 = 1$, $\log_{-3} 1 = 0$, чунки $(-3)^0 = 1$.

2) $a^1 = a$ бўлгани учун $\log_a a = 1$. Демак, *асоснинг логарифми бирга тенг.*

3) *$a > 1$ бўлганда $N > M$ бўлсин, бу ҳолда $\log_a N > \log_a M$ бўлади, яъни бир хил асосда катта соннинг логарифми кичик сон логарифмидан каттадир.*

Мисол. $32 > 16$ бўлгани учун; $\log_2 32 > \log_2 16$.

4) *Икки сон (ёки ифоданинг) бир хил асосли логарифмлари тенг бўлса, сон (ёки ифода)ларнинг ўзлари ҳам ўзаро тенг ва, аксинча, икки сон (ёки ифода) ўзаро тенг бўлса, уларнинг логарифмлари ҳам ўзаро тенг бўлади.* Масалан, $\log_a N = \log_a M$ бўлса, у ҳолда $N = M$ бўлади.

5) Логарифмнинг таърифига асосан қуйидаги айният келиб чиқади: $a^{\log_a M} = M$.

Мисоллар. $5^{\log_5 8} = 8$; $10^{\frac{1}{2}\log_{10} x} = 10^{\log_{10}\sqrt{x}} = \sqrt{x}$ ва ҳоказо.

б) Логарифмик функция ва унинг графиги ҳақида тушунча

a асосда x нинг логарифми y бўлсин, яъни $y = \log_a x$ — логарифмик функция дейилади, бунда x — аргумент, y — функциядир.

Таърифга кўра $y = \log_a x$ функция $y = a^x$ функцияга тескари функциядир, $y = \log_3 x$ функциянинг графигини чизиб, унинг хоссаларини текширамиз (29- расм).

1. $y = \log_3 x$ функциянинг аниқланиш соҳаси барча мусбат сонлар тўпламидан иборат, чунки $a^x > 0$ эди.

2. $y = \log_3 x$ функциянинг графиги y ўқининг ўнг томонига жойлашган, шунинг учун (асоси мусбат сон бўлганда) манфий сонлар ва нолнинг логарифми мавжуд эмас.

3. $x = 1$ бўлганда функция нолга тенг.

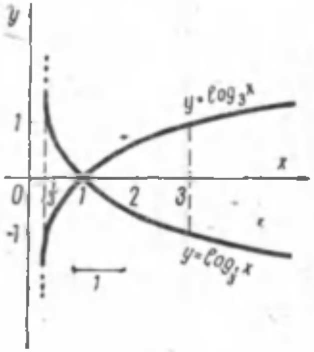
4. $y = \log_3 x$ функция ўсувчидир.

5. $x < 1$ булганда функциянинг қийматлари манфий, $x > 1$ да эса мусбатдир.

6. $x \to \infty$ бўлганда $y \to \infty$ ва $x \to 0$ да $y \to -\infty$.

7. $\log_3 3 = 1$.

Хулоса. *$a > 1$ да $y = \log_a x$ функциянинг борлик соҳаси барча мусбат сонлар тўпламидан иборат булиб, ўсувчидир, $x = 1$ да эса нолга тенг; x чексиз орта борса, функция мусбатлигича қолиб, чексиз орта боради, x камайиб нолга яқинлаша бошлаганда эса функция манфий қийматлар олиб чексиз камаяди.*



29- расм.

в) Логарифмик функцияларнинг хоссалари билан сонлар логарифмларининг хоссалари орасидаги муносабатлар

1. *Логарифмик функциянинг аниқланиш соҳаси мусбат сонлар тупламидан иборат бўлгани учун, ҳар бир мусбат соннинг логарифми биттагинадир.*

2. Аргументнинг ноль ва манфий қийматларида логарифмик функция мавжуд бўлмагани учун, *ноль ва манфий сонларнинг логарифмлари мавжуд эмас.*

3. Аргумент бирга тенг бўлганда, логарифмик функция нолга тенг бўлганлиги учун *бирнинг логарифми нолдир.*

4. $a > 1$ бўлганда, $x < 1$ бўлса, $y < 0$ ва $x > 1$ бўлса $y > 0$; $0 < a < 1$ бўлганда, $x < 1$ бўлса, $y > 0$ ва $x > 1$ бўлса $y < 0$ бўлгани учун *асос $a > 1$ бўлганда бирдан кичик сонларнинг логарифмлари манфий, бирдан катта сонларнинг логарифмлари эса мусбат. $a < 1$ бўлганда бирдан кичик сонларнинг логарифлари мусбат, бирдан катта сонларники эса манфийдир.*

5. *$a > 1$ бўлганда логарифмик функция ўсувчи ва катта сонга катта логарифм тўғри келади. $a < 1$ бўлганда логарифмик функция камаювчи ва катта сонга кичик логарифм тўғри келади.*

6. $\log_a a = 1$ бўлгани учун, *асоснинг логарифми бирга тенг,* чунки $a^1 = a$.

Машқлар.

1) Қуйидаги логарифмларнинг қийматлари ёзилсин:

$$\log_4 16;\ \log_4 256;\ \log_4 \frac{1}{16};\ \log_{\frac{1}{2}} 4;\ \log_3 729;\ \log_{-3}(-243);\ \log_2 1;$$

$$\log_{-5}(-125);\ \log_5 125;\ \log_{\frac{2}{7}} \frac{1}{2};\ \log_5 0.$$

2) Ушбу функцияларнинг графиклари чизилсин:

$$y = \log_2 x;\ y = \log_{\frac{1}{2}} x;\quad y = \log_4 x;\ y = \log_{\frac{1}{4}} x;\ y = \log_5 x;$$

$$y = \log_{\frac{1}{5}} x.$$

г) Логарифмлар ҳақида асосий теоремалар

1-теорема. *Кўпайтманинг логарифми кўпайтувчилар логарифмларининг йиғиндисига тенг:*

$$\log_a(M \cdot N) = \log_a M + \log_a N;\ (M > 0,\ N > 0).$$

Исбот. $\log_a M = q$, $\log_a N = p$ деб белгилаймиз. У ҳолда логарифм таърифига кўра $M = a^q$, $N = a^p$; буларнинг кўпайтмаси $M \cdot N = a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ бўлади. Демак, $\log_a(M \cdot N) = p + q = \log_a N + \log_a M$. Теорема исбот қилинди.

2-теорема. *Бўлинманинг логарифми шу асосга кўра бўлинувчи логарифми билан бўлувчи логарифмининг айирмасига тенг, яъни* $\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$.

Исбот. $M = a^q$; $N = a^p$. Бундан: $\frac{M}{N} = \frac{a^q}{a^p} = a^{q-p}$.

Демак, $\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = q - p = \log_a M - \log_a N$. Теорема исбот қилинди.

3-теорема. *Даражанинг логарифми, даража кўрсаткичининг унинг асоси логарифми билан кўпайтмасига тенг,* яъни

$$\log_a(N^n) = n \cdot \log_a N.$$

Исбот. $N = a^p$ бўлсин. Бунинг икки томонини n-даражага кўтарамиз. $N^n = a^{np}$ бўлади. Бу ҳолда:

$$\log_a(N^n) = n \cdot p = n \cdot \log_a N.$$

Теорема исбот қилинди.

4-теорема. *Илдизнинг логарифми илдиз остидаги ифоданинг логарифми билан илдиз кўрсаткичи нисбатига тенг,* яъни

$$\log_a(\sqrt[n]{N}) = \frac{\log_a N}{n}.$$

Исбот. $\log_a N = p$ ёки $N = a^p$ бўлсин. Бунинг икки томонини $\frac{1}{n}$ даражага кўтарамиз:

$$N^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{p}{n}} \text{ ёки } \sqrt[n]{N} = a^{\frac{p}{n}}.$$

Демак, $\log_a \left(\sqrt[n]{N}\right) = \frac{p}{n} = \frac{\log_a N}{n}$.

Теорема исбот қилинди.

д) Ўнли логарифмлар ва уларнинг хоссалари

Таъриф. *Асос учун 10 олинган логарифм ўнли логарифм дейилади* ва у „lg“ белгиси билан ёзилади, яъни $\log_{10} N = \lg N$.

Мисоллар. $\log_{10} 10 = \lg 10 = 1$; $\log_{10} 100 = \lg 100 = 2$; $\log_{10} 0{,}01 = \lg 0{,}01 = -2$ ва ҳоказо, чунки $10^1 = 10$; $10^2 = 100$; $10^{-2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$. Шунга ўхшаш $\lg 1000 = 3$; $\lg 0{,}1 = -1$; $\lg 0{,}001 = -3$ ва ҳоказо.

1- **қоида.** *Бир ва кейинида ноллар билан тасвирланган бутун соннинг логарифми шу сондаги ноллар сонича бирлар йиғиндисидан иборат мусбат бутун сонга тенг.*

2- **қоида.** *Бир ва олдида ноллар билан тасвирланган каср соннинг логарифми, ноль бутунни ҳисоблаб, шу сондаги ноллар сонича бирлар йиғиндисидан иборат манфий бутун сонга тенг.*

Энди битта бир ва ноллардан иборат бўлмаган сонларни олиб қараймиз. Масалан, 26. Бу $10 < 26 < 100$. Бу ҳолда $\lg 10 < \lg 26 < \lg 100$ ёки $1 < \lg 26 < 2$. Демак, $\lg 26 = 1 +$ каср. Шунга ўхшаш $100 < 123 < 1000$; $\lg 100 < \lg 123 < \lg 1000$ ёки $2 < \lg 123 < 3$. Демак, $\lg 123 = 2 +$ каср; $10 < 15{,}21 < 100$; $1 < \lg 15{,}21 < 2$. Демак, $\lg 15{,}21 = 1 +$ каср; $0{,}1 < 0{,}5 < 1$ бўлгани учун $\lg 0{,}1 < \lg 0{,}5 < \lg 1$ ёки $-1 < \lg 0{,}5 < 0$. Демак, $\lg 0{,}5 = \bar{1} +$ каср.

Демак, ўнли логарифмда битта бир ва ноллардан иборат бўлмаган сонларнинг логарифми ўнли касрдан иборат бўлар экан.

е) Характеристика ва мантисса

Таъриф. *Сон логарифмининг бутун қисми унинг характеристикаси, каср қисми мантиссаси дейилади.*

Масалан, $\lg 123 = 2{,}0899$. Бунда: 2 — характеристика; каср „0899“ — мантиссадир.

1- **қоида.** *1 дан катта сон логарифмининг характеристикаси, сондаги бутун хоналар сонидан битта кам бўлган мусбат бирликка тенг.*

Масалан, $\lg 2{,}5 = 0{,}3979$, $\lg 82 = 1{,}9138$, $\lg 301{,}5 = 2{,}4793$ ва ҳоказо.

2- қоида. 1 *дан кичик ўнли каср логарифмининг характеристикаси, сондаги биринчи қийматли рақамгача бўлган ноллар сонининг йиғиндисидан иборат бўлган манфий бутун сонга тенг* (ноль бутун ҳам шу ҳисобга киради).

Масалан, $\lg 0{,}8 = \bar{1}{,}9031$, $\lg 0{,}025 = \bar{2}{,}3979$, $\lg 0{,}00305 = \bar{3}{,}4843$ ва ҳоказо.

ж) Логарифмлаш ва потенцирлаш

Таъриф. *Бирор ифоданинг логарифмини топиш, уни логарифмлаш дейилади.*

Масалан, $\sqrt[3]{\frac{a^2b}{c}}$ нинг логарифми топилсин.

Логарифмлаш. $\lg\sqrt[3]{\frac{a^2b}{c}} = \frac{1}{3}\lg\frac{a^2b}{c} = \frac{1}{3}[\lg(a^2b) - \lg c] = \frac{1}{3}(2\lg a + \lg b - \lg c)$.

Таъриф. *Логарифмдан ифода ёки сонни топиш потенцирлаш дейилади.*

Масалан, $\lg N = \frac{1}{3}(2\lg a + \lg b - \lg c)$ ни потенцирланг, яъни N ни топинг.

Потенцирлаш:

$$\lg N = \frac{1}{3}(2\lg a + \lg b - \lg c) = \frac{1}{3}\lg\frac{a^2b}{c} = \lg\sqrt[3]{\frac{a^2b}{c}}.$$

Бундан логарифм хоссасига асосан:

$$N = \sqrt[3]{\frac{a^2b}{c}}.$$

Машқлар. Қуйидаги ифодалар логарифмлансин:

$$N = \frac{\sqrt[5]{a^3b^2}}{\sqrt{c}};\ N = \sqrt[7]{\frac{x^2\sqrt{y}}{z}};\ N = \sqrt[5]{\left(\frac{a^3}{b^3\sqrt[4]{c^3}}\right)^2};\quad N = \frac{\sqrt[5]{a\sqrt{a}}}{\sqrt[3]{a\sqrt[3]{b}}};$$

$$N = \sqrt[-3]{\frac{\sqrt{ab}}{a^{-1}}\cdot\sqrt{a^{-1}}};$$

$$N = \frac{10(a^2 - b^2)}{3c^2d};\ N = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$N = 5p^{-2}\cdot\sqrt{\cos 2\alpha};\ N = \frac{n^{-3}\sqrt{\sin^2 x}}{7m^2};$$

$$N = \frac{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b}}}}{b\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a}}}};\quad N = \sqrt[-5]{\frac{x^2}{y^3}\cdot\sqrt[3]{x^{-2}\sqrt{y}}}.$$

Қуйидаги логарифмлар потенцирлансин:

$$\lg N = \frac{2}{3}\lg a + \frac{3}{4}\lg b; \lg N = 2\lg(a+b) - \frac{2}{3}\lg(a-b) + \frac{1}{2}\lg a;$$

$$\lg N = \lg a - \frac{1}{3}\lg b + 2\lg d - \lg c; \lg N = \frac{3\lg a}{2} - \frac{2\lg b}{3};$$

$$\lg N = 3\lg x + \frac{1}{4}\left[\lg(x+y) + \frac{1}{2}\lg(x-y) - \lg x - \lg y\right];$$

$$\lg N = \frac{3}{5}\left[2\lg x + \frac{2}{3}\lg(x-y) - 3\lg(x+y\right] + \frac{2}{3}\lg y;$$

$$\lg N = -5\lg a + \frac{1}{4}\left[3\lg(a-b) - \frac{1}{2}\lg c\right] + \frac{1}{3}\lg b.$$

з) Сонлар билан 10; 100;... сонлар кўпайтмаси ва бўлинмасининг логарифми

Қоида. *Ўнли логарифмда, соннинг битта бир ва ноллардан иборат бутун сонга кўпайтмасининг логарифмини топиш учун, у сон логарифми характеристикасига кўпайтувчи сонда қанча ноль бўлса, ўшанча бирлар йиғиндисидан иборат мусбат бутун сонни қўшиш керак* (мантисса ўзгармайди).

Масалан, $\lg(N\cdot 10) = \lg N + \lg 10 = \lg N + 1$; $\lg(N\cdot 100) = \lg N + \lg 100 = \lg N + 2$; $\lg(N\cdot 1000) = \lg N + \lg 1000 = \lg N + 3$ ва ҳоказо.

Мисол. $\lg(32\cdot 100) = \lg 32 + \lg 100 = 1 +$ каср $+ 2 = 3 +$ каср.

Қоида. *Ўнли логарифмда, соннинг бир ва ноллардан иборат мусбат бутун сонга бўлинмасининг логарифмини топиш учун, у соннинг логарифмидан бўлувчи сонда қанча ноль бўлса, ўшанча бирлар йиғиндисидан иборат мусбат бутун сонни айириш керак.*

Масалан, $\lg(N:10) = \lg N - \lg 10 = \lg N - 1$: $\lg(N\cdot 100) = \lg N - \lg 100 = \lg N - 2$; $\lg(N\cdot 1000) = \lg N - \lg 1000 = \lg N - 3$ ва ҳоказо.

Мисол. $\lg(35:10) = \lg 35 - \lg 10 = \lg 35 - 1$.

Қоида. *Ўнли каср логарифмида соннинг вергул ўрни ўзгартирилганда ва фақат охиридаги ноллар билан фарқ қилган бутун сонлар логарифмида уларнинг мантиссаси ўзгармай, характеристикасигина ўзгаради.*

Масалан, 325,2; 3,252; 0,3252; 3252 ва 72; 720; 72000 ларнинг мантиссаси бир хил бўлиб, характеристикаларигина турлича бўлади.

и) Логарифмларни ўзгартириб тузиш

1- қоида. *Манфий логарифмларнинг мантиссасини мусбат қилиш учун унинг мантиссасига (+ 1) ни, характеристикасига (— 1) ни қўшиш керак.*

Масалан, 1) $-2,3765=-2-0,3765=(-2-1)+(1-0,3765)=$ $=-3+0,6235=\overline{3},6235$. Бу амалий ишда бундай бажарилади: $\overset{-1+1}{-2,3765}=\overline{3},6235$. Шунга ўхшаш; $\overset{-1+1}{-0,7219}=\overline{1},2781$.

2- қоида. *Логарифмнинг мантиссасини манфий қилиш учун характеристикасига (+ 1) ни, мантиссасига (— 1) ни қўшиб, юқоридагидек иш кўриш керак.*

Масалан, $\overset{+1-1}{\overline{1},2781}=-0,7219$.

Машқлар. $-1,0982$; $-3,1275$; $-0,1782$; $-1,9106$; $\overline{2},7865$; $\overline{1},0931$; $\overline{3},2581$ лар ўзгартириб тузилсин.

35- §. ТЎРТ ХОНАЛИ ЛОГАРИФМ ЖАДВАЛЛАРИ ВА УЛАРДАН ФОЙДАЛАНИШ

Математикада маълум усуллардан фойдаланиб, логарифм жадвальлари тузилган, бу жадвалларда турли сонлар ва шу сонларнинг ҳар бири ёнига бу сонни ҳосил қилиш учун 10 ни кўтариш керак бўлган кўрсаткич (логарифм) жойлаштирилган.

Таъриф. *Кетма-кет бутун сонлар қатори учун бир хил асосга кўра ҳисобланган логарифмлар тўплами логарифмлар системаси дейилади.* Масалан, ўнли логарифмлар системаси каби.

Профессор Бригг ўнли логарифмлар жадвалини биринчи марта тузган кишидир (XV — XVI аср). Кўп амалий масалаларни ечишда Брадиснинг тўрт хонали математик жадваллари етарлидир. (Агар масала юқори аниқликни талаб қилса, у ҳолда Пржевальскийнинг беш хонали ва Гауссининг олти хонали ва ҳоказо жадваллардан фойдаланиш тавсия этилади.)

Тўрт хонали логарифм жадвалда 1 дан то 9999 гача ҳамма бутун сонларнинг мантиссаси берилган.

Мантиссалар 4 рақамдан иборат ўнли каср ҳолида олингандир.

Биз энди тўрт хонали математик жадвалдан бир бўлак олиб, фойдаланиб кўрамиз.

(*N*— сон)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7128	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7

Масалан, 1) „5“ нинг мантиссасини топиш учун унинг ёнига иккита ноль қўйиб, 500 нинг мантиссасини топамиз. У „6990“ га тенг, у ҳолда lg 5 = 0,6990 бўлади.

2) „53“ нинг мантиссасини топиш учун, унга битта ноль қўйиб, 530 топилади, у „7243“ га тенгдир.

У ҳолда, lg 53 = 1,7243 бўлади.

3) „524“ нинг мантиссасини топиш учун 52 ни жадвалнинг чап устунидан, 4 ни жадвал юқорисидаги 0 дан 9 гача сонлар орасидан топиб, улар кесишган еридан, 524 нинг мантиссаси „7193“ олинади. Бу ҳолда: lg 524 = 2,7193 бўлади.

4) „5125“ нинг мантиссасини топиш учун олдин 512 ни топамиз, у „7093“ бўлади, сўнг унинг ўнг томонидаги 5 ни, жадвалнинг ўнг томонидаги (1 2 3; 4 5 6 ва 7 8 9) сонлардан топиб, 51 жойлашган йўл ва 5 жойлашган устуннинг кесишган еридаги сон „4“ ни дилда „7093“ га қўшилса кифоя, яъни

$$\begin{array}{r} +\,7093 \\ 4 \\ \hline 7097. \end{array}$$

Демак, lg 5125 = 3,7097.

Агар сон: беш, олти, етти, ... хонали бўлса, унинг мантиссасини топиш учун тўрт рақамдан ортиғини ташлаш керак. Бу ҳолда ташланадиган бешинчи рақам 5 ёки ундан катта бўлса, у ҳолда тўртинчи рақамга бир қўшиб олинади, 5 дан кичик бўлса, қўшилмайди.

Масалан, lg 533,57 = ?

53357 нинг мантиссасини топиш учун, 5336 никини олса ҳам бўлади:

$$\begin{array}{rcr} +\ \lg 533 & = & 2,7267 \\ 0,6 & \sim & 5 \\ \hline \lg 533,6 & = & 2,7272\,. \end{array}$$

Демак, lg 533,57 = 2,7272 бўлади.

Машқлар. Қуйидаги логарифмлар топилсин:

$$\lg 7;\ \ \lg 71;\ \ \lg 375;\ \ \lg 168,7;\ \ \lg 0,905;\ \ \lg 1,09;$$
$$\lg 26,928;\ \ \lg 0,73813;\ \ \lg 0,0293719;\ \lg \frac{50}{513}\,.$$

а) Антилогарифм жадвали ва ундан фойдаланиш

Соннинг логарифми берилганда соннинг ўзини топиш мумкин, уни *антилогарифм* жадвали деб аталган жадвал ёрдамида топиш қулай.

Бу ерда ҳам нусха келтирамиз:

(m — мантисса)

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
0,27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
0,28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	3	4
0,29																			

Масалан, $\lg N = 1{,}261$ берилган, N топилсин.

Ечиш. „m“ нинг тагидан 26 ни, 0 дан 9 гача сонлардан 1 ни топиб, уларнинг кесишган еридан 261 га тегишли 1824 сонни топамиз. Энди характеристика 1 бутун бўлгани учун, вергул билан икки хона бутун ажратамиз, яъни $N = 18{,}24$ бўлади. Шунга ўхшаш:

1) $\lg N = 0{,}2759,\ N = ?$

$$\begin{array}{r} \lg N = 0{,}275 = \lg 1{,}884 \\ + \qquad\qquad 09 \sim 4 \\ \hline \lg N = 0{,}2759 = \lg 1{,}888. \end{array}$$

Демак, $N = 1{,}888$.

2) $\lg N = -1{,}7281,\ N = ?$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle -1+1} \qquad\qquad \\ \lg N = -1{,}7281 = \bar{2}{,}2719; \\ \lg N = \bar{2}{,}271 = \lg 0{,}01866 \\ + \qquad 0{,}9 \sim \qquad 4 \\ \hline \lg N = \bar{2}{,}2719 = \lg 0{,}01870. \end{array}$$

Демак, $N = 0{,}0187$ бўлади.

б) Логарифмлар устида амаллар

Сонларнинг логарифмлари устида бажариладиган тўрт амал қуйидаги мисоллардан кўринади:

1) $\begin{array}{r} + \begin{array}{r} \bar{1}{,}5412 \\ \bar{2}{,}0915 \end{array} \\ \hline \bar{3}{,}6327 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 0{,}6781 \\ \bar{2}{,}3854 \end{array} \\ \hline \bar{1}{,}0635 \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} - \begin{array}{r} \bar{3}{,}2892 \\ 1{,}6784 \end{array} \\ \hline -2{,}3892 = \bar{3}{,}6108 \end{array}$ 4) $\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} \bar{2}{,}4128 \\ 7 \end{array} \\ \hline \overline{12}{,}8896 \end{array}$

5) $\bar{2}{,}4128 \cdot (-7) = (-2 + 0{,}4128) \cdot (-7) = (-1{,}5872) \cdot (-7) = +11{,}1104$; 6) $\bar{4}{,}6324 : 2 = \bar{2}{,}3162$; 7) $\bar{4}{,}6324 : 5 = (-3{,}3675) : 5 = -0{,}6735 = \bar{1}{,}3265$ бўлади.

Машқлар. Қуйидаги амаллар бажарилсин:

1) $\begin{array}{r} + \begin{array}{r} \bar{1}{,}7986 \\ 1{,}3228 \end{array} \\ \hline \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} + \begin{array}{r} \bar{3}{,}1945 \\ \bar{1}{,}9712 \end{array} \\ \hline \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} - \begin{array}{r} \bar{1}{,}6789 \\ \bar{2}{,}1762 \end{array} \\ \hline \end{array}$ 4) $\begin{array}{r} \bar{2}{,}4502 \\ \times \quad 6 \\ \hline \end{array}$

5) $\bar{1}{,}8705 \cdot (-5)$; 6) $\bar{2}{,}1609 : (-4)$; 7) $\bar{5}{,}8756 : (+26)$.

в) Алгебраик ифодаларни логарифм ёрдами билан ҳисоблашга мисоллар

1- мисол.

$$N = \frac{\sqrt[3]{52{,}4^2}}{\sqrt{51 \cdot 532}}$$ ифода ҳисоблансин.

Ҳисоблаш. $\lg N = \lg \frac{\sqrt[3]{52{,}4^2}}{\sqrt{51 \cdot 532}} = \frac{2}{3} \lg 52{,}4 - \frac{1}{2} (\lg 51 + \lg 532) = \frac{2}{3} \cdot 1{,}7193 - \frac{1}{2} \cdot (1{,}7076 + 2{,}7259) = 1{,}1462 - \frac{1}{2} \cdot 4{,}4335 = 1{,}1462 - 2{,}2167 = -1{,}0705 = \overline{2}{,}9295$. Энди антилогарифм жадвалидан сонни топамиз:

$$N = 0{,}08502.$$

2- мисол. $\sqrt[6]{\sqrt[5]{431} + \sqrt{1742}}$ ифода ҳисоблансин.

Ҳисоблаш. Олдин $\sqrt[5]{431}$ ва $\sqrt{1742}$ ларни белгилаб олиб, айрим-айрим ҳисоблаш керак: $\sqrt[5]{431} = a$ ва $\sqrt{1742} = b$ бўлсин; $\lg a = \lg \sqrt[5]{431} = \frac{1}{5} \lg 431 = \frac{1}{5} \cdot 2{,}6345 = 0{,}5269$. Бу ҳолда: $a = 3{,}364$. $\lg b = \lg \sqrt{1742} = \frac{1}{2} \lg 1742 = \frac{1}{2} \cdot 3{,}2410 = 1{,}6205$. Бу ҳолда: $b = 41{,}74$.

$$\lg N = \lg \sqrt[6]{a + b} = \frac{1}{6} \cdot \lg 45{,}104 = \frac{1}{6} \cdot 1{,}6542 = 0{,}2757.$$

Демак, $N = 1{,}886$.

3- мисол. $\sqrt[3]{-\frac{25^2 \cdot 0{,}875}{1{,}27 \cdot 0{,}7^4}}$ ифода ҳисоблансин.

Ҳисоблаш. $\sqrt[3]{-\frac{25^2 \cdot 0{,}875}{1{,}27 \cdot 0{,}7^4}} = -\sqrt[3]{\frac{25^2 \cdot 0{,}875}{1{,}27 \cdot 0{,}7^4}} = -N$.

$$\lg N = \lg \sqrt[3]{\frac{25^2 \cdot 0{,}875}{1{,}27 \cdot 0{,}7^4}} = \frac{2}{3} \lg 25 + \frac{1}{3} \lg 0{,}875 - \frac{1}{3} \lg 1{,}27 - \frac{4}{3} \lg 0{,}7 =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 1{,}3979 + \frac{1}{3} \cdot \overline{1}{,}9420 - \frac{1}{3} \cdot 0{,}1038 - \frac{4}{3} \cdot \overline{1}{,}8451 = 0{,}6725.$$

Демак, $N = 4{,}704$.

Машқлар. Қуйидаги ифодаларни логарифмлаш усули билан ҳисобланг:

1) $N = \sqrt[4]{\frac{763^3 \cdot 58}{424^2 \cdot 1648^3}}$.

2) $N = \frac{374^3 \cdot 5626^2}{4251^2 \cdot 89^3}$

3) $N = \sqrt[3]{\sqrt{237} + \sqrt[3]{39}}$.

4) $N = \sqrt[7]{\frac{\sqrt[4]{417} - \sqrt[6]{684}}{\sqrt[3]{248}}}$

(Жавоб. 0,8189).

5) $N = 1 - (\sqrt[5]{0{,}7})^{2{,}1}$

6) $N = \frac{3{,}89^{-2} \sqrt[8]{-0{,}1536}}{0{,}924^2}$.

(Жавоб. $-0{,}04146$).

7) $N = \frac{0,897^2 \cdot \sqrt[4]{0,0792}}{2,15^3 \cdot \sqrt[3]{12,76^2}}$. 8) $\sqrt[5]{\frac{25 - \sqrt[7]{-136}}{0,00034}}$.

(Ж а в о б. 0,007868.)

9) $N = \frac{4 - 0,0186^2}{\sqrt{0,1} - \sqrt{10}}$. 10) $N = \frac{12,48^3 \cdot \sqrt[4]{5,76}}{1,842 \cdot \sqrt[3]{633,8}}$

(Ж а в о б. — 1,406.) (Ж а в о б. 186,5.)

86- §. КЎРСАТКИЧЛИ ВА ЛОГАРИФМИК ТЕНГЛАМАЛАР

Таъриф. *Даража кўрсаткичида номаълум миқдор қатнашган тенглама кўрсаткичли тенглама дейилади.*

Масалан, $3^{6x+1} - 81 = 0$; $5^{3x} - 17 = 0$; $3 \cdot 4^x - 7 \cdot 2^x + 2 = 0$ ва ҳоказо тенгламаларнинг ҳар бири кўрсаткичли тенгламадир. Кўрсаткичли тенгламаларни ечишда бир неча хил йўллар бор бўлиб, булар: 1) асосларни тенглаш; 2) алгебраик тенгламаларни ечиш (белгилаб олиб, формула ёрдамида ечиш); 3) логарифмлаш йўли билан ечиш усулларидан иборатдир. Бу усуллар билан қуйидаги мисолларда танишамиз.

1- мисол. $3^{6x+1} - 81 = 0$ тенглама ечилсин.

Ечиш. $3^{6x+1} = 3^4$, бунда асослари тенг бўлгани учун кўрсаткичлари ҳам тенг бўлиши керак, $6x + 1 = 4$. Бундан: $x = \frac{1}{2}$.

2- мисол. $5^{3x} - 17 = 0$ тенглама ечилсин.

Ечиш. $5^{3x} = 17$ бунинг икки томонини логарифмлаймиз. $\lg 5^{3x} = \lg 17$ ёки $3x \lg 5 = \lg 17$. Бундан: $x = \frac{\lg 17}{3 \cdot \lg 5} = \frac{1,2304}{3 \cdot 0,6990} \approx$ $\approx 0,58$.

3- мисол. $3 \cdot 4^x - 7 \cdot 2^x + 2 = 0$ берилган.

Ечиш. $3 \cdot 4^x - 7 \cdot 2^x + 2 = 3 \cdot (2^x)^2 - 7 \cdot 2^x + 2 = 0$. Бу 2^x га нисбатан тўла квадрат тенгламадир. У ҳолда $2^x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{6} =$ $= \frac{7 \pm 5}{6}$. Бундан: $2^{x_1} = 2$; $x_1 = 1$, $2^{x_2} = \frac{1}{3}$; $x_2 = -\frac{\lg 3}{\lg 2}$.

4- мисол. $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2}$ тенглама ечилсин.

Ечиш. $3^x + 3 \cdot 3^x + 9 \cdot 3^x = 5^x + 5 \cdot 5^x + 25 \cdot 5^x$ ёки $13 \cdot 3^x =$ $= 31 \cdot 5^x$, ёки $\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{31}{13}$. Буни логарифмлаймиз: $x \lg \frac{3}{5} = \lg \frac{31}{13}$ ёки $x \lg 0,6 = \lg 2,3846$.

Бундан:

$$x = \frac{\lg 2,3846}{\lg 0,6} = \frac{0,3775}{\bar{1},7782} = \frac{0,3775}{-0,2218} = -\frac{3775}{2218} = -1\,\frac{1557}{2218}.$$

5- мисол. $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}$ тенглама ечилсин.

Ечиш. $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{3x-3}=\frac{2}{3}$ ёки $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{3-3x}=\frac{2}{3}$, ёки $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x+3-3x}=\frac{2}{3}$, ёки $\left(\frac{2}{3}\right)^{3-x}=\left(\frac{2}{3}\right)^{1}\cdot$ Бу ҳолда $3-x=1$; $x=2$

6- мисол. $16\sqrt{(0{,}25)^{5-\frac{x}{4}}}=\sqrt{2^{x+1}}$ тенглама ечилсин.

Ечиш. $2^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{20-x}{4}}=2^{\frac{x+1}{2}}$ ёки $2^4\cdot 2^{\frac{x-20}{4}}=2^{\frac{x+1}{2}}$, ёки $2^{4+\frac{x-20}{4}}=$ $=2^{\frac{x+1}{2}}$.

Бундан: $4+\frac{x}{4}-5=\frac{x+1}{2}$ ёки $x-4=2x+2$, бундан $x=-6$.

Таъриф. *Номаълум миқдор логарифм ишораси остида қатнашган тенглама логарифмик тенглама дейилади.*

Масалан, 1) $\lg(2x-1)-\lg(x-1)=\lg 3$; 2) $\frac{1}{2}\lg x=3$; 3) $2\lg^2 x-7\lg x+3=0$ ва ҳоказо тенгламаларнинг ҳар бири логарифмик тенгламадир.

Логарифмик тенгламалар ҳам турли йўллар билан ечилади: 1) *потенцирлаш*[1]; 2) *алгебраик тенгламаларни ечиш*; 3) *логарифмнинг таърифидан фойдаланиш ва ҳоказо.*

Бу усуллар билан қуйидаги мисолларда танишамиз.

1- мисол. $\lg(2x-1)-\lg(x-1)=\lg 3$ тенглама ечилсин.

Ечиш. Бундай тенглама потенцирлаб ечилади: $\lg\frac{2x-1}{x-1}=$ $=\lg 3$, бу ҳолда логарифмнинг (4) хоссасига кўра: $\frac{2x-1}{x-1}=3$ бўлади. Бундан: $x=2$. Текшириш: $\lg(2\cdot 2-1)-\lg(2-1)=$ $=\lg 3-\lg 1=\lg 3-0=\lg 3$.

2- мисол. $\frac{1}{2}\lg x=3$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Бундай тенгламалар таърифга асосан ечилади. $\frac{1}{2}\lg x=3$ ёки $\lg x=6$. Энди логарифмнинг таърифига кўра: $x=10^6$.

3- мисол. $2\lg^2 x-7\lg x+3=0$ тенглама ечилсин.

Ечиш. Бундай тенглама квадрат тенглама деб қараб ечилади:

$$\lg x=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{4}=\frac{7\pm 5}{4};\ \lg x_1=3;\ x_1=10^3=1000;$$

$\lg x_2=\frac{1}{2}$; $x_2=10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$, демак, $x_1=1000$; $x_2=\sqrt{10}$.

---

[1] Бундай ҳолда топилган илдизларни тенгламага қўйиб текшириб кўриш керак, чунки илдизлар орасида чет илдизлар ҳам бўлиши мумкин.

Ҳамма вақт бир системадаги логарифмдан иккинчи бир системадаги логарифмга ўтиш мумкин. Масалан, N соннинг a асосли логарифми x, b асосли логарифми y, яъни $\log_a N=x$; $\log_b N=y$ бўлсин. Логарифмнинг таърифига кўра $N=a^x$ ва $N=b^y$ бўлади. Булардан: $a^x=b^y$. Буни b асосда логарифмлаймиз: $\log_b a^x=\log_b b^y$ ёки $x\log_b a=y\cdot\log_b b=y\cdot 1=y$; $\log_a N\times\times\log_b a=\log_b N$. Бундан:

$$\boxed{\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}}\,(*)$$

формулага эга бўламиз. Бу формула ёрдамида турли асосдаги логарифмлар қатнашган логарифмик тенгламаларни ечиш мумкин. (*) да $b=N$ десак, $\log_a N=\frac{1}{\log_N a}\cdot(**)$

4-мисол. $2\log_4 x+2\log_x 4=5$ тенглама ечилсин.

Ечиш. (*) формулага асосан $\log_x 4=\frac{\log_x 4}{\log_4 x}=\frac{1}{\log_4 x}$, $2\log_4 x+$ $+\frac{2}{\log_4 x}=5$ ёки $2\log_4^2 x-5\log_4 x+2=0$. Бу $\log_4 x$ га нисбатан квадрат тенгламадир. Демак, $\log_4 x=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm 3}{4}$; $\log_4 x=2$, бундан: $x_1=4^2=16$, $\log_4 x=\frac{1}{2}$; бундан: $x_2=$ $=4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=2$.

5-мисол. $\log_2[2+\log_3(3+x)]=0$ тенглама ечилсин.

Ечиш. Бу тенгламадан таърифга асосан $2+\log_3(3+x)=$ $=2^0$ ни ёзиш мумкин. Буни $2+\log_3(3+x)=1$ ёки $\log_3(3+x)=$ $=-1$ ёзиб, яна логарифм таърифидан фойдалансак: $3+x=$ $=3^{-1}=\frac{1}{3}$, бундан: $x=-\frac{8}{3}$.

6-мисол. $1-\lg 5=\frac{1}{3}\left(\lg\frac{1}{2}+\lg x+\frac{1}{3}\lg 5\right)$ тенглама ечилсин.

Ечиш. Берилган тенгламани $\lg 10-\lg 5=\frac{1}{3}\lg\left(\frac{x}{2}\cdot\sqrt[3]{5}\right)$ шаклида ёки $\lg\frac{10}{5}=\lg\sqrt[3]{\frac{x}{2}\cdot\sqrt[3]{5}}$ кўринишда ёзамиз. Энди логарифм хоссасидан фойдалансак, $2=\sqrt[3]{\frac{x}{2}\cdot\sqrt[3]{5}}$ бўлади. Бундан: $x=\frac{18}{\sqrt[3]{5}}$.

7-мисол. $4^{\log_{64}(x-3)+\log_2 5}=50$ тенглама ечилсин.

Ечиш. $\log_{64}(x-3)=\frac{\log_2(x-3)}{\log_2 64}=\frac{\log_2(x-3)}{6}$. Энди берилган тенгламани: $4^{\frac{\log_4(x-3)}{6}+\log_4 5} = 50$ ёки $4^{\log_4\left(5\cdot\sqrt[6]{x-3}\right)} = 50$, ёки $2^{\log_2\left(5\cdot\sqrt[6]{x-3}\right)^2} = 50$ га келтириб оламиз. Аммо $a^{\log_a N} = N$ айниятга асосан: $(5\sqrt[6]{x-3})^2 = 50$ ёки $\sqrt[3]{x-3} = 2$, бундан: $x-3 = 2^3$, $x = 11$.

8- мисол. $\begin{cases} 3^{\log_3 x} - 2^{\log_4 y^2} = 77, \\ 3^{\log_3 \sqrt{x}} - 2^{\log_{16} y^2} = 7 \end{cases}$ система ечилсин.

Ечиш. $3^{\log_3 x} = x$

$3^{\log_3 \sqrt{x}} = \sqrt{x}$

$2^{\log_4 y^2} = 4^{\log_4 y} = y$ ва $2^{\log_{16} y^2} = \sqrt{y}$ ларни ёзиб оламиз. У ҳолда

$\begin{cases} x - y = 77, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 7 \end{cases}$ система ҳосил бўлади. Бундан: $x = 81$; $y = 4$.

9- мисол.

$$\begin{cases} \frac{1}{m}\log_a x + \frac{1}{n}\log_a y = 0 \\ \frac{1}{n}\log_a x + \frac{1}{m}\log_a y = 1 \end{cases}$$ система ечилсин.

Ечиш. Берилган системани $\begin{cases} \log_a\left(\sqrt[m]{x}\cdot\sqrt[n]{y}\right) = 0 \\ \log_a\left(\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[m]{y}\right) = 1 \end{cases}$ кўринишда ёзиб, логарифм таърифидан фойдалансак,

$$\begin{cases} \sqrt[m]{x}\cdot\sqrt[n]{y} = a^0 = 1 \\ \sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[m]{y} = a^1 = a \end{cases}$$

бўлади. Энди ҳосил бўлган тенгламалардан биринчисини n- даражага, иккинчисини m- даражага кўтариб, ҳосил бўлган иккинчи тенгламани биринчи тенгламага ҳадлаб бўламиз:

$$\frac{y\cdot x^{\frac{m}{n}}}{y\cdot x^{\frac{n}{m}}} = a^m \text{ ёки } x^{\frac{m}{n}-\frac{n}{m}} = a^m,$$

бундан:

$$x = a^{\frac{m^2 n}{m^2 - n^2}},$$

у ҳолда $y = a^{\frac{m n^2}{n^2 - m^2}}$ бўлади.

10- мисол. $20\log_{ax}\sqrt{x}+7\log_{a^2x}x^3=3\log_{\frac{x}{\sqrt{a}}}x^2$ тенглама ечилсин.

Ечиш. Тенгламадаги логарифмларни a асосли логарифмга келтирамиз:

$$\log_{ax}\sqrt{x}=\frac{\frac{1}{2}\log_a x}{1+\log_a x};\ \log_{a^2x}x^3=\frac{3\log_a x}{2+\log_a x};\ \log_{\frac{x}{\sqrt{a}}}x^2=\frac{2\log_a x}{\log_a x-\frac{1}{2}}.$$

Бу ҳолда тенглама:

$$20\cdot\frac{\frac{1}{2}\log_a x}{1+\log_a x}+7\cdot\frac{3\log_a x}{2+\log_a x}=3\cdot\frac{2\log_a x}{\log_a x-\frac{1}{2}}$$

кўринишга келади. Бундан:

1) $\log_a x_1=0;\ x_1=a^0=1,$ 2) $\frac{10}{1+\log_a x}+\frac{21}{1+\log_a x}=\frac{12}{2\log_a x-1}.$

Энди иккинчи тенгламани умумий махражга келтириб, сўнгра у соддалаштирилса: $10\log_a^2 x+3\log_a x-13=0$ квадрат тенглама ҳосил бўлади, ундан

$$\log_a x_2=\frac{10}{3},\ x_2=a^{\frac{10}{3}}\ \text{ва}\ \log_a x_3=-\frac{13}{3},\ x_3=a^{-\frac{13}{3}}.$$

Машқлар. Қуйидаги кўрсаткичли ва логарифмик тенгламаларни ечинг:

1) $\sqrt[4]{7^x}=\sqrt[5]{343}.$

$\left(\text{Жавоб. } x=\frac{12}{5}.\right)$

2) $\frac{2\lg x}{\lg(5x-4)}=1.$

(Жавоб. $x_1=4;\ x_2=1.$)

3) $(0{,}25)^{2-x}=\frac{256}{2^{x+3}}.$

(Жавоб. $(x=3.$)

4) $\frac{1}{12}\lg^2 x=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\lg x.$

(Жавоб. $x_1=10;\ x_2=10^{-4}.$)

5) $\log_2\log_3\log_4 x=0.$

(Жавоб. $x=64.$)

6) $\begin{cases}\lg x+\lg y=5\\ \lg x-\lg y=3.\end{cases}$

$\left(\text{Жавоб. } \begin{matrix}x=10^4;\\ y=10,\end{matrix}\right)$

7) $\log_3 x+\log_{\sqrt{x}}x-\log_{\frac{1}{3}}x=6.$

(Жавоб. $x=9.$)

8) $\log_{16}x+\log_4 x+\log_2 x=7.$

(Жавоб. $x=16.$)

9) $2^{\log_2(x^2-6x+9)}=3^{(2\log_x\sqrt{x}-1)}.$

(Жавоб. $x_1=4;\ x_2=2.$)

10) $\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^x=\frac{243}{32}.$

(Жавоб. $x=4.$)

11) $3^{2x-1}+3^{2x-2}-3^{2x-4}=315.$

(Жавоб. $x=3.$)

12) $5\lg^2 x-\lg x=0.$

(Жавоб. $x_1=1;\ x_2=\sqrt[5]{10}.$)

13) $3^{4\sqrt{x}} - 4\cdot 3^{2\sqrt{x}} + 3 = 0.$

$\left(\text{Жавоб. } x_1 = \frac{1}{4};\ x_2 = 0.\right)$

14) $\begin{cases} 3(2\log_{y^2} x - \log_{\frac{1}{x}} y) = 10, \\ xy = 81. \end{cases}$

$\left(\text{Жавоб. } \begin{cases} x_1 = 3; & x_2 = 27 \\ y_1 = 27; & y_2 = 3. \end{cases}\right)$

15) $x^{1+\lg x} = 0{,}001^{-\frac{2}{3}},$

(Жавоб. 10 ва 0,01.)

16) $\frac{2}{\sqrt{2^{2x-1}}} = 8^{3-x}.$

$\left(\text{Жавоб. } \frac{15}{4}.\right)$

17) $\sqrt[x-1]{\sqrt[3]{2^{3x-1}}} - \sqrt[3x-7]{8^{x-3}} = 0.$

$\left(\text{Жавоб. } \frac{5}{3}.\right)$

18) $\log_x(5x^2)\log_5^2 x = 1.$

$\left(\text{Жавоб. } \sqrt{5}; \frac{1}{5}.\right)$

19) $2\lg 2 + \left(1 + \frac{1}{2x}\right)\lg 3 - \lg\left(\sqrt[x]{3} + 27\right) = 0.$

$\left(\text{Жавоб. } \frac{1}{4};\ \frac{1}{2}.\right)$

20) $\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2\cdot 3\sqrt[3]{x-1}} = 1{,}5.$

(Жавоб. 0; 1.)

21) $5^{2+4+6+\ldots+2x} = 0{,}04^{-28}.$

(Жавоб. 7.)

22) $2\cdot(2^{\sqrt{x}+3})^{\frac{1}{2\sqrt{x}}} - \sqrt[\sqrt{x}-1]{16} = 0.$

(Жавоб. 9.)

23) $(0{,}4)^{\lg^2 x+1} - (6{,}25)^{2-\lg x^3} = 0.$

(Жавоб. 10; 10^5.)

24) $x^{(2\lg^2 x - 1{,}5\lg x)} = \sqrt{10}.$

(Жавоб. 10; 0,1.)

25) $\frac{\lg x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\lg 5 - 1}{\frac{1}{4}\lg(x-1)} = \lg 0{,}01.$

(Жавоб. 5.)

26) $5\cdot\lg_2 3 + 2\log_2\sqrt{(x-2)\sqrt{8}} - 1\frac{2}{3}\log_3 27 = 1{,}5.$

(Жавоб. 3.)

27) $\frac{\log_{a^2\sqrt{x}} a}{\log_{2x} a} + \log_{ax} a\cdot\log_{\frac{1}{a}} 2x = 0.$

$\left(\text{Жавоб. } x_1 = \frac{1}{2};\ x_2 = a^2.\right)$

28) $\log_{\sqrt{5}} x \sqrt{\log_x 5\sqrt{5} + \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5}} = -\sqrt{6}.$

$\left(\text{Жавоб. } \frac{1}{5}.\right)$

37- §. МУРАККАБ ПРОЦЕНТЛАР

Таъриф. *Дастлабки миқдоргагина эмас, балки вақт ўтиши билан олинган процентларни ҳам дастлабки миқдорга қўшиб ҳисоблаб чиқарилган процентлар мураккаб процентлар дейилади.*

Масала. Омонат кассага қўйилган a сўм пул ҳар йили p мураккаб процент фойда келтирса, у t йилдан кейин неча сўм бўлади.

Ечиш. a сўмнинг 1 сўми $p\%$ билан 1 йилдан кейин $1 + \frac{p}{100}$ сўм бўлади, у ҳолда a сўм 1 йилдан сўнг $a\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ сўм бўлади. Иккинчи йилдан кейин, $a\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ сўмнинг ҳар бир сўми $1 + \frac{p}{100}$ сўм бўлиб, $a\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ сўм эса $a\left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$ сўм бўлади.

Шунга ўхшаш уч йилдан кейин: $a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$ сўм бўлади ва ҳоказо.

t йилдан кейин $a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$ сўм бўлади. Буни A деб белгиласак,

$$A = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t.$$

Бу формула *мураккаб процентлар формуласи* дейилади.

1- мисол. Омонат кассага қўйилган 324 сўм ҳар йили 3 мураккаб процент фойда келтирса, у 5 йилдан кейин неча сўм бўлади?

Ечиш. $a = 324;\ t = 5;\ p = 3\%;\ A = ?$

$$A = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t = 324 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^5 = 324 \cdot 1{,}03^5.$$

Буни ҳисоблаш учун иккала қисмини логарифмлаймиз:

$$\lg A = \lg 324 + 5 \lg 1{,}03 = 2{,}5105 + 5 \cdot 0{,}0128 = 2{,}5105 + 0{,}0640 = 2{,}5745.$$

Антилогарифмдан:

$$A = 375{,}4 \text{ сўм}.$$

2- мисол. Агар аҳолиси 750 минг бўлган шаҳарнинг халқи ҳар йили 1,05% ортса, 6 йилдан сўнг шу шаҳарда қанча халқ бўлади?

Ечиш. $a=750000$; $t=6$; $p=1{,}05\%$; $A=?$ $A=750000\cdot\left(1+\frac{1{,}05}{100}\right)^6=750000\cdot1{,}0105^6$. Бу ҳолда: $\lg A=\lg 750000+6\lg 1{,}0105=5{,}8751+6\cdot0{,}0047=5{,}9033$. Энди антилогарифмдан:

$$A=800400 \text{ киши.}$$

Машқлар. Қуйидаги масалалар ечилсин:

1) Омонат кассага қўйилган 9172 сўм ҳар йили 4 мураккаб процент фойда келтирса, у 10 йилдан кейин неча сўм бўлади?

(Жавоб. 13570 сўм.)

2) Омонат кассага қўйилган 576 сўм ҳар йили 3 мураккаб процент фойда келтирса, у неча йилда 729,1 сўм бўлади?

(Жавоб. 8 йил.)

3) 3 мураккаб процент билан омонат кассага қўйилган пул 9 йилдан сўнг 16787 сўм 85 тийин бўлган. Омонат кассага неча сўм пул қўйилган?

(Жавоб. 12880 сўм.)

4) Агар бир ўрмондаги дарахтларнинг сони ҳар йили 0,4 % ортиб, 12 йилдан сўнг 268950 туп бўлса, у дастлаб неча туп бўлган эди?

(Жавоб. 256600 туп.)

38- §. БИРЛАШМАЛАР

Таъриф. *Ҳар қандай нарсалардан тузилган ва бир-биридан шу нарсаларнинг ё тартиби билан, ё ўзи билан фарқ қилувчи группалар бирлашмалар дейилади.*

Масалан, 2; 3; 5; 7; 9 рақамлардан 235; 325; 239; 237; 3572; 5372 ва ҳоказо группаларни тузиб текширамиз: 235 ва 325 лар бир-биридан рақамларнинг тартиби билан, 235 ва 239 лар рақамларининг ўзи билан фарқ қилади. Бирлашмаларни ташкил этган нарсалар *элементлар* дейилади.

Элементларни $a, b, c, \ldots$ ҳарфлар билан белгилаймиз.

Бирлашмалар уч хил бўлади: а) ўринлаштириш; б) ўрин алмаштириш ва в) группалаш.

а) Ўринлаштиришлар

Таъриф. *m элементни n тадан ўринлаштириш деб, шундай бирлашмаларга айтиладики, уларнинг ҳар бирида берилган m элементдан олинган n та элемент бўлиб, улар бир-бирларидан ё элементлари билан, ёки элементларининг тартиби билан фарқ қилади* ($n\leqslant m$ бўлиши шарт). m та элементдан n тадан тузилган ўринлаштиришлар сони

A_m^n символ билан белгиланади. (A — французча „arrangement“, яъни ўринлаштириш деган сўзнинг бош ҳарфидир.)

Ўринлаштиришлар сонининг формуласини чиқариш. Масалан, учта a, b, c нарсалардан биттадан: a, b, c; иккитадан; ab, ac, bc, ba, ca, cb; учтадан: abc, acb, bca, cab, cba бирлашмаларни тузамиз. Булардан ab, ac, bc, ca ва cb ларни олиб текширамиз. Бунда ab, ac, bc лар нарсалари билан, ab ва ba; ac ва ca; bc ва cb лар нарсаларининг тартиби билан фарқ қилади. Лекин ҳар икковида ҳам элементлар сони бир хил. Бундай бирлашмалар уч элементдан 2 тадан ўринлаштириш дейилади ва A_3^2 шаклда ёзилади. Умуман бизга m та: $a, b, c, \ldots, k, e$ элементлар берилган бўлсин.

Биттадан тузилгани m га тенг: $A_m^1 = m$.

Иккитадан тузиш учун: a нинг ёнига қолган $b, c, \ldots, k, e$ $(m-1)$ тасини, b нинг ёнига қолган $a, c, \ldots, k, e$ $(m-1)$ тасини ва ҳоказо қўйиб чиқамиз. У ҳолда m элементдан 2 тадан ўринлаштириш:

$$m\ \text{та} \left\{\begin{array}{ll} ab, ac, \ldots, ak, ae & (m-1) \text{ та ўринлаштириш;} \\ ba, bc, \ldots, bk, be & (m-1) \text{ та ўринлаштириш;} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ ea, eb\ ec, \ldots, ek & (m-1) \text{ та ўринлаштириш.} \end{array}\right.$$

Демак, m элементдан 2 тадан ҳамма ўринлаштиришлар сони $A_m^2 = m(m-1)$ бўлади.

Энди учтадан тузиш учун тузилган 2 тадан ўринлаштиришлардан ҳар бирининг ёнига қолган $(m-2)$ та элементни биттадан қўйиб чиқамиз.

$$m(m-1)\ \text{та} \left\{\begin{array}{ll} abc, abd, \ldots, abk; abe & (m-2) \text{ та ўринлаштириш;} \\ acb, acd, \ldots, ack, ace & (m-2) \text{ та ўринлаштириш;} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ eka, ekb, \ldots & (m-2) \text{ та ўринлаштириш.} \end{array}\right.$$

Демак, m элементдан 3 тадан ҳамма ўринлаштиришлар сони $A_m^3 = m(m-1)(m-2)$ бўлади. Шунга ўхшаш: $A_n^4 = m(m-1)\cdot(m-2)\cdot(m-3)$ бўлади ва ҳоказо. Умуман: $A_m^n = m(m-1)\cdot(m-2)(m-3)\ldots[m-(n-1)] = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$. Демак,

$$\boxed{A_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1).}$$

Бу *ўринлаштиришлар сонини топиш формуласи дейилади.*

1- мисол. $A_7^4 = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 840$.

2- мисол. Синфда 10 фандан дарс бўлиб, ҳар куни 5 хил дарс ўтилади. Бир кунлик дарс неча хил усул билан тақсимланиши мумкин?

Ечиш. Масала ўринлаштиришлар сонини аниқлаш билан ечилади.

$A_{10}^5 = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6 = 30240$ усул билан тақсимлаб қўйиш мумкин.

б) Ўрин алмаштириш

Таъриф. *Фақат элементларининг тартиби билангина фарқ қилган* (яъни $n = m$) *ўринлаштиришлар ўрин алмаштиришлар дейилади.*

m элементдан тузилган ўрин алмаштиришлар сони P_m символ билан белгиланади. (P — французча „Permution“, яъни ўрин алмаштириш сўзининг бош ҳарфидир.)

Формуласини чиқариш. Таърифга кўра:

$P_m = A_m^m = m(m-1)(m-2)\ldots[(m-(m-3)][m-(m-2)]\cdot$ $\cdot[m-(m-1)] = m(m-1)(m-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1 = 1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-2)\cdot$ $\cdot(m-1)\ m = m!$ ($m!$ — эм факториал деб ўқилади.) Демак,

$$\boxed{P_m = 1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-2)\cdot(m-1)\cdot m.}$$

Бу формула *ўрин алмаштиришлар сонини топиш формуласи* дейилади.

Мисоллар. $P_3 = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$; $P_6 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 720$; $P_5 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$ ва ҳоказо.

Масала. 8 та стул қўйилган; унга 8 кишини неча хил усул билан ўтқазиш мумкин.

Ечиш. Бу масала ўрин алмаштиришлар сонини аниқлаш билан ечилади.

$P_8 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 = 40320$ хил усул билан.

в) Группалаш

Таъриф. *m та элементдан n тадан тузилган группалаш деб, m элементдан n тадан тузилган уринлаштиришлардан бир-биридан энг камида битта элементи билан фарқ қиладиган ўринлаштиришларга айтилади.*

m элементдан n тадан группалаш сони C_m^n символ билан белгиланади (C — французча „Combinasion“, яъни группалаш деган сўзнинг бош ҳарфи).

Масалан, тўрт элемент a, b, c, d дан 3 тадан тузилган abc, abd, acd, bcd группаларни олиб текширамиз.

Бу группаларнинг ҳар бирида мумкин бўлган барча ўрин алмаштиришларни қилсак, тўрт элементдан 3 тадан мумкин бўлган барча ўринлаштиришларни ҳосил қиламиз:

abc	*abd*	*acd*	*bcd*
acb	*adb*	*adc*	*bdc*
bac	*bad*	*cad*	*cbd*
bca	*bda*	*cda*	*cdb*
cba	*dab*	*dac*	*dbc*
cab	*dba*	*dca*	*dcb*

Бундай ўринлаштиришларнинг сони $= 6 \cdot 4 = 24$. Бунда: 6 — ўрин алмаштиришлар сони, 4 — группалар сони, 24 — ўринлаштиришлар сони.

Демак, $A_4^3 = C_4^3 P_8$. Шунга ўхшаш: $A_7^4 = C_7^4 \cdot P_4$; $A_{16}^7 = C_{16}^7 \cdot P^7$ ва ҳоказо. Умуман: $A_m^n = C_m^n \cdot P_n$. Бундан:

$$\boxed{C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 4 \ldots n}.}$$

Бу формула *группалашлар сонини топиш формуласи* дейилади. Бунда $C_n^0 = 1$ деб қабул қилинган.

Мисоллар. 1) $C_9^5 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 126$, 2) $C_{25}^4 = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 12650$.

3) $C_{2x}^2 = 1$ тенглама ечилсин.

Ечиш. $C_{2x}^2 = \frac{2x(2x-1)}{1 \cdot 2} = 1$ ёки $2x^2 - x - 1 = 0$, бундан: $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$; $x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}$. Булардан ёлғиз $x_1 = 1$ берилган тенгламани қаноатлантиради, $x = -\frac{1}{2}$ берилган тенгламанинг чет илдизидир.

4) $C_{m+1}^{n+1} : C_{m+1}^n : C_{m+1}^{n-1} = 5:5:3$ берилган. n ва m сонлар топилсин.

Ечиш. $$1 = \frac{5}{5} = \frac{C_{m+1}^{n+1}}{C_{m+1}^n} = \frac{\frac{(m+1)m(m-1)\ldots(m+1-n+1)(m+1-n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n(n+1)}}{\frac{(m+1)m(m-1)\ldots(m+1-n+1).}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}} =$$

$$= \frac{m-n+1}{n+1}$$ ёки $n + 1 = m - n + 1$, бундан: $m = 2n$.

Яна:

$$\frac{5}{3} = \frac{C_{m+1}^n}{C_{m+1}^{n-1}} = \frac{\frac{(m+1)m(m-1)\ldots(m+1-n+2)(m+1-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)n}}{\frac{(m+1)m(m-1)\ldots(m-1-n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)}} =$$

$$= \frac{m-n+2}{n}$$

ёки $5n = 3m - 3n + 6$, бундан: $n = \frac{3m+6}{8}$. Энди бундаги m нинг ўрнига топилган $m = 2n$ ни қўйсак: $n = \frac{3 \cdot 2n + 6}{8}$ ёки $2n = 6$, $n = 3$ бўлади. Бу ҳолда $m = 2 \cdot 3 = 6$.

5) $12C_{x+1}^{x-1} = 55A_{x+1}^{2}$ тенгламани қаноатлантирувчи x нинг қиймати топилсин. (Бу мисолда $C_m^n = C_m^{m-n}$ формуладан фойдаландик, бу формуланинг исботи кейинчалик берилади.)

Ечиш. $12 \cdot C_{x+3}^{x-1} = 12C_{x+3}^{x+3-x+1} = 12C_{x+3}^{4} = 12 \cdot \frac{(x+3)(x+2)(x+1) \cdot x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{(x+3)(x+2)(x+1) \cdot x}{2}$; $A_{x+1}^{2} = (x+1)\,x$; $\frac{(x+3)(x+2)(x+1) \cdot x}{2} = 55(x+1)\,x$ ёки $(x+3) \cdot (x+2) = 110$, $x^2 + 5x - 104 = 0$, $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 416}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{441}}{2} = \frac{-5 \pm 21}{2}$;

$x_1 = 8$; $x_2 = -13$ — чет илдиз. (Жавоб. $x = 8$.)

6) $\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2} \\ C_x^2 = 153 \end{cases}$

система ечилсин.

Ечиш. $C_x^y = \frac{x(x-1)\ldots(x-y+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots y}$;

$C_x^{y+2} = \frac{x(x-1)\ldots(x-y+1)(x-1)(x-y-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots y(y+1)(y+2)}$.

$C_x^2 = \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}$.

Буларни ўринларига қўйиб соддалаштирсак:

$$\begin{cases} (x-y)(x-y-1) = (y+1)(y+2), \\ x^2 - x - 306 = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системаси ҳосил бўлади. Иккинчи тенгламадан: $x = 18$ бўлиб, буни 1- тенгламага қўйсак: $(18-y)(17-y) = y^2 + 3y + 2$ ёки $38y = 304$; $y = \frac{304}{39} = 8$.

$C_m^n = C_m^{m-n}$ тенгликнинг исботи. Бунинг учун қуйидагидек ишлар қиламиз:

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-n)} =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-n)(m-n+1)\ldots(m-1)\,m}{P_n \cdot P_{m-n}} = \frac{P_m}{P_n \cdot P_{m-n}}.$$

Бу группалашлар сони формуласининг бошқача кўриниши. Энди чиқарилган бу формулада n ни $(m-n)$ билан алмаштирсак:

$$C_m^{m-n} = \frac{P_m}{P_{m-n}\cdot P_n} = C_m^n$$

ҳосил бўлади. Демак,

$$\boxed{C_m^n = C_m^{m-n}.}$$

Мисол. $C_{25}^{23} = C_{25}^{25-23} = C_{25}^{2}\frac{25\cdot 24}{1\cdot 2} = 300.$

Машқлар. Қуйидагилар ҳисоблансин:

1) $C_{21}^{18};\ C_{50}^{45};\ C_{120}^{110};\ \frac{A_8^3+A_6^4}{A_{12}^4};\ \frac{2P_3+3A_4^3}{5P_5-P^8}$

2) Ушбу тенгламалар ечилсин:

$A_x^2 = 0;\ A_x^2 = 4x-6;\ C_x^4 = 0;\ C_{x-3}^2 = 21;\ C_{x+1}^5 = \frac{3A_x^3}{8}.$

3) Тенгламалар системаси ечилсин:

а) $\begin{cases} C_x^{y+1} = 2\,5x, \\ C_{x-1}^{y} = 10. \end{cases}$ б) $\begin{cases} A_x^{n-3} : A_x^{n-2} = 1:8, \\ C_x^{n-3} : C_x^{n-2} = 5:8. \end{cases}$

(Жавоб. $x=6$, $y=3$.) (Жавоб. $x=12$, $n=7$.)

4) Ушбу тенгликларнинг тўғрилиги текшириб кўрилсин:

а) $C_m^n + C_m^{n-1} = C_{m+1}^n$; б) $C_{m+1}^7 = C_{m+1}^{m-6}.$

39-§. БИНОМ ДАРАЖАСИНИНГ ФОРМУЛАСИ ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Бином—икки ҳад деган сўздир. Энди биз $(x+a)$кўринишда бином олиб, n — ҳар қандай мусбат бутун сон бўлганда $(x+a)^n$ учун формула чиқарамиз. Бундан x ва a — *бином ҳадлари, n эса бином кўрсаткичи* дейилади. Формула чиқариш учун бир неча тенг биномларни ўзаро кўпайтириб кўрамиз:

$$(x+a)\cdot(x+a) = x^2+2ax+a^2 = (x+a)^2;$$

$$(x+a)(x+a)\cdot(x+a) = (x+a)^3 = (x+a)^2\cdot(x+a) =$$
$$= (x^2+2ax+a^2)\cdot(x+a) = x^3+3ax^2+3xa^2+a^3;$$
$$(x+a)\cdot(x+a)(x+a)\cdot(x+a) = (x+a)^4 = (x+a)^3\cdot(x+a) =$$
$$= (x^3+3ax^2+3xa^2+a^2)\times$$
$$\times(x+a) = x^4+4x^3a+6x^2a^2+4xa^3+a^4;$$
$$(x+a)(x+a)(x+a)\cdot(x+a)\cdot(x+a) = (x+a)^5 =$$
$$= (x+a)^4\cdot(x+a) = x^5+5x^4a+10x^3a^2+10x^2a^3+5xa^4+a^5.$$

Бу кўпайтмаларга диққат билан қарасак, уларнинг ҳаммаси бир хил қонунга асосланиб тузилганликларини кўрамиз, яъни кўпайтмаларнинг ҳар бири x нинг биттадан камайиб борган даражаси бўйича жойлашган кўпҳаддан иборат, биринчи ҳад кўрсаткичи ҳам, охирги ҳад кўрсаткичи ҳам бином даража кўрсаткичига тенг ва у ҳадларнинг ҳар бирининг коэффициенти бирга тенг, уларда x нинг кўрсаткичи биттадан камайиб, a нинг даража кўрсаткичи эса биттадан ортиб боради, иккинчи ҳаднинг коэффициенти бином даража кўрсаткичига тенг, ундан кейинги ҳад коэффициентларининг ҳар бири ўзидан олдинги ҳад коэффициентини x нинг кўрсаткичига кўпайтириб, уни топмоқчи бўлган ҳадгача ҳадлар сонига бўлишдан ҳосил бўлишини текшириб ишониш мумкин. Шунинг учун,

$$(x+a)^8 = x^8 + 8x^7a + \frac{8\cdot7}{1\cdot2}x^6a^2 + \frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}x^5a^3 + \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4}x^4\,a^4 +$$
$$+\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}x^3a^5 + \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot4\cdot5\cdot6}x^2a^6 + \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}xa^7 +$$
$$+\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}\cdot x^0a^8 = x^8 + 8x^7a + 28x^6a^2 + 56x^5a^3 + 70x^4\,a^4 +$$
$$+ 56x^3a^5 + 28x^2a^6 + 8xa^7 + a^8.$$

Умуман, n — мусбат бутун сон бўлганда:

$$(x+a)^n = x^n + nx^{n-1}a + \frac{n(n-1)}{1\cdot2}x^{n-2}a^2 +$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}x^{n-3}a^3 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot2\cdot3\ldots k}x^{n-k}a^k +$$
$$+ \ldots + a^n \qquad (1)$$

формула ҳосил бўлади[1].

Бу формула *бином даражасининг формуласи* дейилади. Бу формула *Насириддин Туси* биномининг формуласи ва тенгликнинг ўнг томонидаги кўпҳад *бином ёйилмаси* дейилади. (1) формулани n ҳар қандай бутун мусбат сон бўлганда тўғри деб фараз қиламиз ва унинг тўғри эканлигини кўрсатиш учун ундаги n ни $(n+1)$ билан алмаштирганда ҳосил бўлган формула ҳам (1) формуланинг ҳосил бўлиш қонунига бўйсунганлигини кўрсатамиз. Формуланинг тўғрилигини кўрсатишда фойдаланаётган бу усулимиз „*математик индукция*" методи деб аталади. Бунинг учун (1) формуланинг икки томонини $(x+a)$ га кўпайтирамиз:

$$(x+a)^n\cdot(x+a) = (x+a)^{n+1} = (x^n + nx^{n-1}a + \frac{n(n-1)}{1\cdot2}x^{n-2}a^2 +$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}x^{n-3}a^3 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot2\cdot3\ldots k}x^{n-k}a^k +$$

---

[1] 1962 йилга қадар бином даражасининг формуласи Ньютон номи билан юритилар эди, лекин Ньютон бу формулани n манфий ва каср сон бўлган ҳолларга умумлаштирган, холос. Эндиликда архив ҳужжатлари бу формулани озарбайжан олими Насириддин Туси (XIII аср) ники деб тасдиқлайди.

$$+\ldots+a^n)\cdot(x+a)=x^{n+1}+nx^na+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,x^{n-1}a^2+\ldots+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}\,x^{n-k+1}a^k+\ldots+a^nx+ax^n+nx^{n-1}a^2+$$
$$+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,x^{n-2}a^3+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}\,x^{n-k}a^{k+1}+$$
$$+\ldots+a^{n+1}=x^{n+1}+(n+1)\,x^na+\frac{(n+1)\,n}{1\cdot 2}\,x^{n-1}a^2+$$
$$+\frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\,x^{n-2}a^3+\ldots+\frac{(n+1)\,n\,(n-1)\ldots(n-k+2)}{1\cdot 2\ldots k}\times$$
$$\times\, x^{n-k+1}a^k+\ldots+a^{n+1}.$$

Буни диққат билан қарасак, биз кўрамизки, n та бином учун тўғри деб олинган қонунга $(n+1)$ та бином кўпайтмаси бўйсунди. Демак, (1) формула n ҳар қандай мусбат бутун сон бўлганда ҳам тўғридир.

Изоҳ. „Математик индукция" методи билан прогрессиялар, бирлашмалар ва ҳоказолар формулаларининг ҳам тўғрилигини исботлаш мумкин.

Энди (1) формуладаги a ни $(-a)$ билан алмаштириб, соддалаштирсак:

$$(x-a)^n=x^n-nx^{n-1}a+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,x^{n-2}a^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,x^{n-3}a^3+$$
$$+\ldots+(-1)^k\,\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}\,x^{n-k}a^k+\ldots+$$
$$+(-1)^na^n\ldots \qquad (2)$$

формула ҳосил бўлади.

Бином даражаси формуласининг хоссалари. Дастлаб қуйидаги икки бином даражасининг формулаларини текширамиз:

$$(x+a)^7=x^7+7x^6a+21x^5a^2+35x^4a^3+35x^3a^4+21x^2a^5+$$
$$+7xa^6+a^7 \text{ ва } (x+a)^{10}=x^{10}+10x^9a+45x^8a^2+120x^7a^3+$$
$$+210x^6a^4+252x^5a^5+210x^4a^6+120x^3a^7+45x^2a^8+10xa^9+a^{10}.$$

Бу икки мисолдан равшан кўрамизки:

1) Бином ёйилмаси ҳадларининг сони бином кўрсаткичи билан бирнинг йиғиндисига тенг, чунки ёйилмада x нинг кўрсаткичлари 0 дан то n гачадир. Масалан, биринчи мисолда ҳадлар сони $7+1=8$, иккинчисида эса $10+1=11$ дир. Демак $(x+a)^n$ ёйилмасида ҳадлар сони $(n+1)$ га тенгдир.

2) Бином ёйилмасида x нинг кўрсаткичи биттадан камайиб боради, a ники эса биттадан ортиб боради, ҳар бир ҳаддаги x ва a кўрсаткичларининг йиғиндиси бином кўрсаткичига тенг.

3) Бином кўрсаткичи тоқ сон бўлганда ёйилмада иккита ўрта ҳад, жуфт сон бўлганда эса битта ўрта ҳад бўлади. (Мисоллардаги 35 ва 252 каби.)

4) Бином ёйилмасининг $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}\,x^{n-k}a^{k}$ ҳади унинг *умумий ҳади* дейилади, уни T_{k+1} деб белгиласак,

$$T_{k+1}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}\,x^{n-k}a^{k} \text{ ёки}$$

$$T_{k+1}=C_n^k x^{n-k}a^k \quad (k=0;\ 1;\ 2;\ 3;\ldots). \qquad (3)$$

Бу формула ёйилманинг *исталган ҳадини топиш формуласи* дейилади.

$$T_{k+2}=C_n^{k+1}x^{n-(k+1)}a^{k+1}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k\cdot(k+1)}\times$$

$$\times\, x^{n-(k+1)}a^{k+1}=\frac{C_n^k\cdot(n-k)}{k+1}x^{n-(k+1)}a^{k+1}.$$

5) Бином ёйилмасида унинг бошидан ва охиридан тенг узоқликда бўлган ҳадларининг коэффициентлари ўзаро тенг.

6) Бином ёйилмасининг ҳамма коэффициентлари йиғиндиси 2^n га тенг, яъни $1+n+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}+$ $+\ldots+n+1=2^n$. Бунинг тўғрилигини кўрсатиш учун (1) формулада $x=a=1$ деб фараз қилсак, у ҳолда

$$(1+1)^n=2^n=1^n+n\cdot 1^{n-1}\cdot 1+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot 1^{n-2}\cdot 1^2+\ldots+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}1^{n-k}\cdot 1^k+\ldots+1^n=1+n+$$

$$+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}+\ldots+n+1$$

ҳосил бўлади.

7) Энди (2) формулада $x=a=1$ деб фараз қиламиз,

$$0=1-n+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+$$

$$+(-1)^k\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}+\ldots+(-1)^n.$$

Демак, тоқ ўринда турган биномиал коэффициентлар йиғиндиси жуфт ўринда турган биномиал коэффициентлар йиғиндисига тенг.

Мисол. $\left(\frac{\sqrt{x}}{3}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{18}$ бином даражасини ёймай туриб, унинг x^4 қатнашган ҳади топилсин.

Ечиш.

$$T_{k+1}=C_{18}^k\left(\frac{\sqrt{x}}{3}\right)^{18-k}\cdot\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^k=C_{18}^k\frac{3^k}{3^{18-k}}\cdot\frac{(\sqrt{x})^{18-k}}{(\sqrt[3]{x})^k}=$$

$$=C_{18}^k\,3^{2k-18}\,x^{\frac{54-5k}{5}}.$$

Шартга кўра: $x^{\frac{54-5k}{6}} = x^4$. Бундан: $\frac{54-5k}{6} = 4$, $k = 6$. Демак,

$$T_7 = C_{18}^6 3^{-6} x^4 = \frac{18\cdot17\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\cdot\frac{x^4}{3^6} = \frac{6188}{243}x^4.$$

Машқлар.

Бином ёйилмасига ёйинг: 1) $\left(\sqrt{a} + \frac{1}{a}\right)^6$;

2) $\left(\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$;

3) $(2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x})^7$;

4) $\left(\frac{5}{\sqrt[3]{a}} + \sqrt{a}\right)^{26}$ бином ёйилмасидан 11- ҳади топилсин.

(Жавоб. $C_{26}^{10}\frac{5^{16}}{\sqrt[3]{a}}$.)

5) $\left(3\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{17}$ бином ёйилмасида x нинг биринчи даражаси қатнашган ҳади топилсин.

(Жавоб. $C_{17}^7\cdot3^{10}x$.)

6) $\left(z\sqrt[3]{\frac{1}{z}} + \sqrt[7]{z^{-2}}\right)^{10}$ биномнинг z қатнашмаган ҳади топилсин.

(Жавоб. 120.)

7) $\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{b} + \frac{b}{\sqrt[4]{x}}\right)^{18}$ биномнинг (x^{-1}) ни ичига олган ҳади топилсин.

(Жавоб. $18564\ b^6x^{-1}$.)

8) $\left(\frac{x\sqrt[3]{x}}{y} + \frac{1}{\sqrt[15]{x^{28}}}\right)^n$ бином ёйилмасининг биринчи учта ҳад коэффициентларининг йиғиндиси 79 га тенг. Биномнинг x қатнашмаган ҳади топилсин.

(Жавоб. $T_6 = 792\ y^{-7}$.)

9) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{y^2}} + \frac{\sqrt[4]{y}}{\sqrt[8]{x^3}}\right)^n$ бином ёйилмасининг тўртинчи ҳад коэффициентини иккинчи ҳад коэффициентига нисбати 187 га тенг. Биномнинг y^6 қатнашган ҳади топилсин.

(Жавоб. $6545\ y^6\ x^{-12}$.)

40- §. АЛГЕБРАДА УЧРАЙДИГАН АСОСИЙ ФОРМУЛАЛАР

Даражалар: $\boxed{a^n\cdot a^m=a^{n+m}}$ $\boxed{a^n : a^m = a^{n-m} = \frac{1}{a^{m-n}}\ (a\neq 0)}$

$$\boxed{a^{-n}=\frac{1}{a^n}}\quad \boxed{\begin{matrix}a^0=1\\ a\neq 0;\end{matrix}}\quad \boxed{(a^n)^k=a^{nk}}\quad \boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}}$$

$$\boxed{(a\cdot b\cdot c\cdot d)^n=a^n\cdot b^n\cdot c^n\cdot d^n}.$$

Қисқа кўпайтириш ва бўлиш формулалари.

$$\boxed{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}\quad \boxed{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$$

$$\boxed{a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)}\quad \boxed{(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$$

$$\boxed{(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}\quad \boxed{a^3-b^3=(a-b)\ (a^2+ab+b^2)};$$

$$\boxed{a^3+b^3=(a+b)\ (a^2-ab+b^2)}\quad \boxed{\frac{a^2-b^2}{a-b}=a+b}$$

$$\boxed{\frac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2}\quad \boxed{\frac{a^3+b^3}{a+b}=a^2-ab+b^2}$$

$$(x+a)\cdot(x+b)=x^2+(a+b)\,x+ab;\quad \frac{a^4-b^4}{a^2\mp b^2}=a^2\pm b^2;$$

$$\frac{a^n-b^n}{a-b}=a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1};$$

$$\frac{a^n\ b^n}{a+b}=a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-a^{n-4}b^3+\ldots+ab^{n-2}-b^{n-1}$$

(буларда n — мусбат бутун сон).

Илдизлар ҳақидаги формулалар.

$$\boxed{\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}}\quad \boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}\quad \boxed{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^k=\sqrt[n]{a^{mk}}}$$

$$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n.m]{a}}\quad \boxed{a\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n\cdot b}}\quad \boxed{\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}}.$$

$(a+bi)$ — комплекс соннинг алгебраик шакли. $\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ — комплекс соннинг тригонометрик шакли.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a};\ \rho = \sqrt{a^2+b^2};\ a = \rho\cos\varphi;\ b = \rho\sin\varphi.$$

Муавр формуласи:

$$\boxed{(a+bi)^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}$$

$$\boxed{\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)}$$

— комплекс сондан илдиз чиқариш формуласи.

Квадрат тенглама илдизларининг формулалари.

$x^2+px+q=0$: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$. $ax^2+bx+c=0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.\ ax^2+2bx+c=0:$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-ab}}{a}.$$

$x^2+px+q=0$ нинг илдизлари x_1 ва x_2 бўлганда: $x_1+x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$ — Виет теоремаси.

Квадрат учҳадни кўпайтувчиларга ажратиш:

$x^2+px+q = (x-x_1)\cdot(x-x_2)$; $ax^2+bx+c = a(x-x_1)\cdot(x-x_2)$.

$ax^4+bx^2+c=0$ тенгламанинг ечими:

$x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$ —биквадрат тенглама илдизлари.

$\div a_1,\ a_1+d,\ a_1+2d, \ldots, a_1+(n-1)d$ — арифметик прогрессиянинг умумий кўриниши;

$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)\ d}$ — охирги ҳад; $\boxed{S_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}}$

— n та ҳад йиғиндиси ($n = 1,2,3, \ldots, n$).

$∺ b_1,\ b_1\ q,\ b_1\ \ q^2, \ldots,\ b\,q^{m-1}$ — геометрик прогрессиянинг умумий кўриниши;

$\boxed{b_m = b_1\ q^{m-1}}$ — охирги ҳад.

$\boxed{S_m = \frac{b_m q - b_1}{q-1}}$ — m та ҳад йиғиндиси ($m = 1,2,3, \ldots, m$).

$\div\div\, b_1 \cdot b_1q,\ b_1q^2, \ldots, b_1q^{m-1},\ b_1q^m$ — чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг умумий кўриниши;

$$\boxed{S = \frac{b_1}{1-q} \ (|q| < 1)}$$

—чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг ҳадлар йиғиндиси.

Алгебрада қараладиган баъзи функцияларнинг умумий кўриниши

$y = ax + b$ чизиқли функция; $y = ax^2 + bx + c$ квадрат функция; $y = a^x$ кўрсаткичли функция; $y = \log_a x$ логарифмик функция.

Логарифмлар ҳақидаги асосий формулалар

$$\lg (M \cdot N) = \lg M + \lg N; \ \lg \left(\frac{M}{N}\right) = \lg M - \lg N; \lg (M^n) = n \cdot \lg M;$$

$$\lg \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \cdot \lg M.$$

Бир логарифм системасидан иккинчи логарифм системасига ўтиш формуласи:

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}.$$

Мураккаб процент

$A = a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$ — мураккаб процентни топиш формуласи.

Бирлашмалар

$A_m^n = m(m-1)(m-2) \ldots [m - (n-1)]$ — ўринлаштиришлар сони.

$P_m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1) \cdot m = m!$ — ўрин алмаштиришлар сони.

$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2) \ldots [m-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$ — группалаш сони. $C_m^n = C_m^{m-n}$ — айният.

Бином даражасининг ёйилмаси

$$(x+a)^n = x^n + nx^{n-1}a + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2}a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3}a^3 +$$

$$+ \ldots + \frac{n(n-1)(n-2) \ldots [n-(k-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} x^{n-k}a^k + \ldots + a^n.$$

$T_{k+1} = C_n^k x^{n-k} a^k$ — бином даражаси ёйилмасининг исталган ҳадини топиш формуласи.

41- §. ҚЎШИМЧА МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

1- масала. Заводнинг уч цехида 1200 ишчи ишлайди. Биринчи цехда иккинчидагидан икки марта кўп ишчи бор, учинчи цехда биринчидагидан 400 ишчи ортиқ. Ҳар қайси *цехда қанчадан ишчи бор.*

Тенглама тузиш. I цехда x ишчи бўлсин, у ҳолда масаланинг шартига кўра: II цехда $\frac{x}{2}$ ишчи, III цехда $(x+400)$ ишчи бўлади. Бу ҳолда: $x + \frac{x}{2} + x + 400 = 1200$ тенглама тузилди.

Ечиш. $x + \frac{x}{2} + x = 1200 - 400$ ёки $\frac{5}{2}x = 800$, бундан: $x = 320$.

(Жавоб. 320; 160 ва 720 ишчи.)

2- масала. Бир мактаб ўқувчилари 16,2 сўм пул тўплашиб, театр ва киногa 55 та билет олишди. Театр билети 36 тийиндан, кино билети 24 тийиндан. Театр билетидан нечта ва кино билетидан нечта олинган?

Тенглама тузиш. Театр билети x дона бўлсин. Кино билети $(55-x)$ дона бўлади. Бу ҳолда: ҳамма театр билети $(36 \cdot x)$ тийин бўлади ва ҳамма кино билети $24 \cdot (55-x)$ тийин бўлади. Демак, $36x + 24 \cdot (55-x) = 1620$ тенглама тузилади.

Ечиш. $36x + 24 \cdot (55-x) = 1620$ ёки $12x = 300$. $x = 25$; $55 - x = 55 - 25 = 30$.

(Жавоб. 25 та театр, 30 та кино билети.)

3- масала. Бир паровоз ва 15 вагондан иборат пассажир поездининг оғирлиги 370,5 тонна бўлиб, паровознинг оғирлиги 4 та вагоннинг оғирлигидан 13,3 тонна ортиқ. Бир вагоннинг оғирлигини ва паровознинг оғирлигини топинг.

Тенглама тузиш. Битта вагон оғирлиги x тонна бўлсин. Паровоз оғирлиги $(4x + 13{,}3)$ тонна бўлади. Бу ҳолда: $4x + 13{,}3 + 15x = 370{,}5$ тенглама тузилади.

Ечиш. $19x = 357{,}2$; бундан: $x = \frac{357{,}2}{19} = 18{,}8$ *т*. У ҳолда паровоз оғирлиги: $4x + 13{,}3 = 4 \cdot 18{,}8 + 13{,}3 = 88{,}5$ *т*.

(Жавоб. 18,8 *т* ва 88,5 *т*.)

3- масалани яна қуйидагидек система тузиб ечиш ҳам мумкин:

Система тузиш. Битта вагон оғирлиги x тонна ва паровоз оғирлиги y тонна бўлсин. У ҳолда,

$$\begin{cases} y - 4x = 13{,}3; \\ y + 15x = 370{,}5. \end{cases}$$

Ечиш. Иккинчи тенгламадан биринчи тенгламани айирсак: $19x = 357{,}2$; бундан: $x = 18{,}8$ T; $y = 4x + 13{,}3 = 4 \cdot 18{,}8 + 13{,}3 = 88{,}5$ T.

4- масала. Бир гала зоғча биттадан шохга қўнганда битта зоғча ортиб қолади, иккитадан қўнса, битта шох ортиб қолади. Зоғча нечта ва шох нечта?

Тенглама тузиш. Зоғча x дона, шохча y дона бўлсин. У ҳолда $x - y = 1$ ва $y - \frac{x}{2} = 1$ тенгламалар ҳосил бўлади.

Ечиш.

$$+\begin{cases} x - y = 1, \\ y - \frac{x}{2} = 1. \end{cases}$$
$$x - \frac{x}{2} = 2 \text{ ёки } \frac{x}{2} = 2,$$

ёки $x = 4$. Бу ҳолда: $y = 4 - 1 = 3$. Жавоб. 4 та зоғча, 3 та шохча. (Бу масалани система тузмай ечиш ҳам мумкин.)

5- масала. Икки хонали сон ўзининг рақамлари йиғиндисига бўлинса, бўлинмада 4 ва қолдиқда 3 чиқади. Агар ўша рақамлар билан, лекин тескари тартибда тузилган сонни бирликлари ва ўнликлари рақамларининг айирмасига бўлсак, бўлинма 26, қолдиқ 1 га тенг. Шу сон топилсин.

Тенглама тузиш. Сон: $(xy) = 10x + y$ бўлсин. У ҳолда $10x + y = 4(x + y) + 3$ ва $10y + x = 26 \cdot (y - x) + 1$ тенгламалар тузилади.

Ечиш.

$$\begin{cases} 10x + y = 4 \cdot (x + y) + 3, \\ 10y + x = 26(y - x) + 1 \end{cases} \text{ ёки } +\begin{cases} 16y - 27x = -1 \\ -y + 2x = 1 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 16 \end{vmatrix}$$
$$32x - 27x = 16 - 1 = 15.$$

$5x = 15$, $x = 3$. $y = 2x - 1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$. Демак, сон $10x + y = 10 \cdot 3 + 5 = 35$.

6- масала. Икки ишчи бир ишни биргалашиб ишлаб, t соатда тамом қилишади. Биринчи ишчи ёлғиз ўзи ишласа, иккинчига қараганда ишни 4 соат тез битиради. Шу ишни ҳар қайси ишчи ёлғиз ишласа, неча соатда битира олади?

Тенглама тузиш. I ишчи x соатда, II ишчи $(x - 4)$ соатда битирсин, бу ҳолда

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x - 4} = \frac{1}{t}$$

ни ёзиш мумкин.

Ечиш.

$$x^2 - 4x = 2tx - 4t \text{ ёки } x^2 - 2(2 + t)x + 4t = 0.$$

Бундан:

$$x_{1,2} = (2 + t) \pm \sqrt{(2 + t)^2 - 4t} = 2 + t \pm \sqrt{t^2 + 4} \text{ соат.}$$

(Бу масалани система тузиб ечиш ҳам мумкин.)

7-мисол. $\sqrt{\log_x 5\sqrt{5} + \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5} \cdot \log_{\sqrt{5}} x} = -\sqrt{6}$ тенглама ечилсин.

Ечиш. $\log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5} = \log_{\sqrt{5}} (\sqrt{5})^3 = 3 \log_{\sqrt{5}} \sqrt{5} = 3 \cdot 1 = 3;$

$\log_x 5\sqrt{5} = \frac{\log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5}}{\log_{\sqrt{5}} x} = \frac{3}{\log_{\sqrt{5}} x}$. Демак, буларни ўрнига қўйсак,

$$\sqrt{3 \cdot \frac{1}{\log_{\sqrt{5}} x} + 3 \cdot \log_{\sqrt{5}} x} = -\sqrt{6} \text{ ёки } \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{1 + \log_{\sqrt{5}}^2 x}}{\sqrt{\log_{\sqrt{5}} x}} \cdot \log_{\sqrt{5}} x =$$
$$= -\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}.$$

Буни $\sqrt{3}$ га қисқартириб, сўнгра квадратга кўтарсак, $(1 + \log_{\sqrt{5}} x)\, \mathrm{lo}_{\sqrt{5}} x = 2$ ёки $\log_{\sqrt{5}}^2 x + \log_{\sqrt{5}} x - 2 = 0$ бўлади. Бундан:

$\log_{\sqrt{5}} x_1 = 1$, $x_1 = \sqrt{5}$; $\log_{\sqrt{5}} x_2 = -2$; $x_2 = \frac{1}{5}$. Булардан: $x = \frac{1}{5}$ — илдиз, $x = \sqrt{5}$ — чет илдиз.

8-масала. Омонат кассага иккита бир хил миқдорда (сумма) пул қўйилган. Биринчи пул m ойдан сўнг p сўм, иккинчи пул n ойдан сўнг q сўм қилиб олинган. Қўйилган пулнинг ҳар қайсиси неча сўмдан бўлган ва омонат касса неча процентдан тўлаган?

Тенглама тузиш. Омонат касса $x\%$ дан тўлаган бўлсин, ҳар қайси қўйилган пул y сўмдан бўлсин. Бу ҳолда тенгламалар:

$$\frac{m}{12} \cdot \frac{y}{100} \cdot x + y = p \text{ ва } \frac{n}{12} \cdot \frac{y}{100} \cdot x + y = q.$$

Ечиш.

$$\begin{cases} \left(\frac{mx}{1200} + 1\right) \cdot y = p, \\ \left(\frac{nx}{1200} + 1\right) \cdot y = q. \end{cases}$$

Буларнинг биринчисини иккинчисига бўлсак $\frac{mx + 1200}{nx + 1200} = \frac{p}{q}$ бўлади. Бундан:

$$x = \frac{1200(p - q)}{mq - np} \%.$$

$$y = \frac{1200\,p}{mx + 1200} = \frac{1200\,p}{\dfrac{1200\,m\,(p-q)}{mq-np} + 1200} =$$

$$= \frac{1200\,p\,(mq-np)}{1200mp - 1200mq + 1200mq - 1200np} = \frac{1200\,p\,(mq-np)}{1200\,p\,(m-n)} = \frac{mq-np}{m-n} \text{ сўм.}$$

$\left(\text{Жавоб. } x = \dfrac{1200\,(p-q)}{mq-np}\ \%;\ y = \dfrac{mq-np}{m-n} \text{ сўм.}\right)$

9) $\sqrt[3]{(a+x)^2} + 4\sqrt[3]{(a-x)^2} = 5\sqrt[3]{a^2-x^2}$ тенглама ечилсин.

Ечиш. Тенгламанинг икки томонини $\sqrt[3]{a^2-x^2}$ га бўламиз $\left(\sqrt[3]{a^2-x^2} \neq 0\right)$. $\sqrt[3]{\dfrac{a+x}{a-x}} + 4\sqrt[3]{\dfrac{a-x}{a+x}} = 5$ ҳосил бўлади. $\sqrt[3]{\dfrac{a+x}{a-x}} = k$ деб белгилаймиз. Бу ҳолда: $k + 4\cdot\dfrac{1}{k} = 5$ ёки $k^2 - 5k + 4 = 0$. Бундан: $k_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2}$; $k_1 = 4$; $k_2 = 1$. Демак, $\sqrt[3]{\dfrac{a+x}{a-x}} = 4$ дан: $x_1 = \dfrac{63}{65}a$; $\sqrt[3]{\dfrac{a+x}{a-x}} = 1$ дан: $x_2 = 0$.

(Жавоб. $x_2 = 0$.)

10) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^3}} - \sqrt[5]{a^3}\right)^n$, n-даражали биномнинг олтинчи ҳадида a қатнашмайди. Кўрсаткич n ни топинг.

Ечиш. $T_{k+1} = C_n^k x^{n-k} a^k$ формулага асосан:

$$T_6 = C_n^5 \left(\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}\right)^{n-5} \left(\sqrt[5]{a^3}\right)^5 \cdot (-1)^5 = -C_n^5\, a^{\frac{15-3n}{4}} \cdot a^3 = -C_n^5\, a^{\frac{27-3n}{4}}$$

Энди, шартга кўра $a^{\frac{27-3n}{4}} = a^0$ бўлади. Бундан: $\dfrac{27-3n}{4} = 0$ ёки $9 - n = 0$.

(Жавоб. $n = 9$.)

11) $(z + \sqrt{5})^6$, 6- даражали биномнинг 5- ҳадидан 3- ҳадининг айирмаси 300 га тенг. z топилсин.

Ечиш. Шартга кўра: $T_5 - T_3 = 300$ ёки $C_6^4 z^2 \cdot (\sqrt{5})^4 - C_6^2 z^4 (\sqrt{5})^2 = 300$ ёки $\dfrac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot 25 \cdot z^2 - \dfrac{6\cdot5}{1\cdot2}\cdot 5z^4 = 300$ ёки $375z^2 - 75z^4 - 300 = 0$ ёки $z^4 - 5z^2 + 4 = 0$ бўлади. Бундан: $z_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2}} = \pm\sqrt{\dfrac{5 \pm 3}{2}}$; $z_{1,2} = \pm 2$ ва $z_{3,4} = \pm 1$.

(Жавоб. $z = \pm 2$ ва $z = \pm 1$.)

12) $\left(x\cdot\sqrt{xy}+\frac{1}{x^3\cdot\sqrt{x}}\right)^n$ бином даража ёйилмасининг тўртинчи ва саккизинчи ҳадларининг коэффициентлари ўзаро тенг бўлса, унинг x қатнашмаган ҳади топилсин.

Ечиш. $T_{k+1}=C_n^k x^{n-k}a^k$ формуладан фойдаланамиз.

$T_{k+1}=C_n^k(x\sqrt{xy})^{n-k}\left(\frac{1}{x^3\sqrt{x}}\right)^k$ бўлади.

$T_4=C_n^3(x\sqrt{xy})^{n-3}\left(\frac{1}{x^3\sqrt{x}}\right)$ ва $T_8=C_n^7(x\sqrt{xy})^{n-7}\cdot\left(\frac{1}{x^3\sqrt{x}}\right)^7$.

Берилган шартга кўра:

а) $C_n^3=C_n^7$ бўлади. $C_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}$ ва $C_n^7=$ $=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-6)}{1\cdot2\cdot3\ldots7}$; у ҳолда, $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}=$ $=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-6)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots7}$, бундан: $\frac{(n-3(n-4)\ldots(n-6)}{4\cdot5\cdot6\cdot7}=1$ ёки $n^4-18n^3+119n^2-342n-480=0$ (1). Бу тенгламадаги озод ҳад 480 нинг бўлувчилари: ±1; ±2; ±3; ±4; ±6; ±8; ±10; ±12; ±24; ±48. Булардан бирортаси n учун қиймат бўлади.

б) $(x\sqrt{x})^{n-k}\cdot\left(\frac{1}{x^3\sqrt{x}}\right)^k=x^0$ ёки $x^{\frac{3n-3x}{2}-\frac{7k}{2}}=x^0$,

бундан:

$$\frac{3n-3k}{2}-\frac{7k}{2}=0 \text{ ёки } 10k=3n,\quad k=\frac{3\cdot n}{10}\ldots(*).$$

Лекин k ва n лар мусбат бутун сонлардир. Демак, (*) тенгликда k мусбат бутун сон бўлиши учун, (1) тенгламадан n нинг 10 га тенг қийматларинигина олишни талаб қилади, яъни $n=10$. У ҳолда (*) дан $k=\frac{3\cdot10}{10}=3$ бўлади. Демак, у ҳолда: $T_4=C_{10}^8(\sqrt{y})^{10-3}=\frac{10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3}y^{\frac{7}{2}}=120y^3\sqrt{y}.$

(Жавоб. $120y^3\cdot\sqrt{y}$.)

III БЎЛИМ

ГЕОМЕТРИЯ[1]

а) ПЛАНИМЕТРИЯ

АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАР

Геометрик жисм деб, ясалган материали, ранги, қаттиқ ёки юмшоқлиги ва шунга ўхшаш томонлари эътиборга олинмай, фақат шакли ва ўлчовларигина эътиборга олинган жисмга айтилади. Масалан, металл шар, ёғоч шар, футбол тўпи, резина копток ва ҳоказоларнинг ҳаммаси бир хил шаклда, яъни шар шаклидадир. Жисмнинг чегараси — сирт; сиртнинг чегараси — чизиқ; чизиқ бўлагининг ҳар бир учи — нуқтадир. Нуқта, чизиқ ва сиртларни геометрик жисмлардан айрим ҳолда тасаввур қилиш мумкин.

Одатда нуқталарни латин алфавитининг бош ҳарфлари (масалан, A,B,C,D ва ҳоказолар) билан белгилаб ёзиш қабул қилинган.

1-§. ТУҒРИ ЧИЗИҚ, НУР, КЕСМА, СИНИҚ ЧИЗИҚ ВА ТЕКИСЛИК ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Синф доскасининг чети, таранг тортилган ип ва ҳоказолар тўғри чизиқ тасаввурини бера олади.

Тўғри чизиқ ё латин алфавитининг битта кичик ҳарфи билан, ёки иккита бошқа-бошқа нуқтасига қўйилган иккита бош ҳарф билан белгилаб ўқилади. Масалан, a ёки AB тўғри чизиқ каби (30- расм).

Тўғри чизиқни энг содда чизиқ дейиш мумкин. Тўғри чизиқни қарама-қарши томонга чексиз давом эттирилиши мумкин бўлишини ақлда тасаввур қилиш мумкин, албатта.

Икки нуқтадан тўғри чизиқ ўтказиш мумкин ҳам фақат битта (30- расм). Бир томондангина чегараланган тўғри чизиқ — *нур* дейилади (31- расм).

Нурни чегаралаган бу нуқта унинг *бошланғич нуқтаси* дейилади. Тўғри чизиқнинг икки нуқта билан чегараланган

---

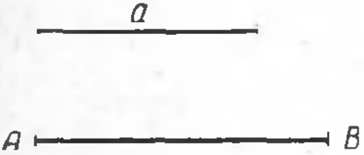
[1] Геометрия сўзи грекча бўлиб, ер ўлчаш деган маънони англатади. Бу фанга бундай исм берилишининг сабаби шуки, қадим замонда геометриянинг асосий мақсади ер сиртидаги масофаларни ва юзларни ўлчашдан иборат бўлган.

қисми — *кесма* дейилади (32- расм). Кесмани чегараловчи икки нуқта унинг *учлари деб* аталади.

Изоҳ. Тўғри чизиқ чизиш учун одатда чизғич ишлатилади. Бир тўғри чизиқда ётмаган бир неча кесмадан иборат чизиқ — *синиқ чизиқ* дейилади (33- расм).

30- расм.

31- расм.



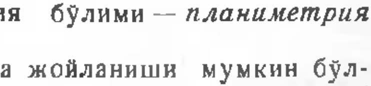
32- расм.

33- расм

а) Текислик

Стол сирти, идишда тинч турган сувнинг сирти, дераза ойнасининг сирти ва ҳоказолар текислик тасаввурини бера олади[1] (34- расм).

Хоссаси. Текисликнинг ихтиёрий икки нуқтасидан тўғри чизиқ ўтказилса, бу тўғри чизиқнинг ҳамма нуқталари шу текисликда ётади. Бирор қонун билан алоҳида ёки бир-бири билан турли комбинацияларда олинган нуқта, чизиқ, сирт (ёки жисмлар) *геометрик фигуралар* ҳосил қилади.



34- расм.

Ҳамма қисмлари битта текисликка жойланиши мумкин бўлган фигураларни ўрганувчи геометрия бўлими — *планиметрия* дейилади.

Геометриянинг битта текисликка жойланиши мумкин бўлмаган фигураларни ўрганувчи бўлими *стереометрия* деб аталади. Шундай қилиб, мактаб геометрияси — планиметрия ва стереометрия деган икки бўлимдан иборатдир.

---

[1] Нуқта, тўғри чизиқ ва текислик — бошланғич тушунча деб олинади.

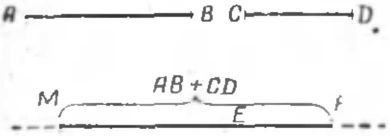
б) Кесмалар устида амаллар

Кесмалар устида амалларни бажаришда циркуль ёки чизғичдан фойдаланилади. Агар икки кесмани устма-уст қўйганда уларнинг учларидаги нуқталари ҳам устма-уст тушса, улар *тенг кесмалар* дейилади.

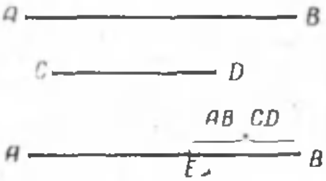
Кесмалар устидаги амалларни мисолларда кўрсатамиз.

1- мисол. AB ва CD кесманинг йиғиндиси топилсин.

Ечиш. Ихтиёрий тўғри чизиқ чизиб, унда бирон M нуқтани белгилаб, сўнгра циркуль ёки чизғич ёрдамида M дан бошлаб AB ни ва унинг давомига CD ни кетма-кет қўямиз. У ҳолда $AB = ME$ ва $CD = EF$ бўлиб, MF кесма, AB ва CD ларнинг йиғиндиси бўлади, яъни $MF = ME + EF = AB + CD$ (35- расм).



35- расм.



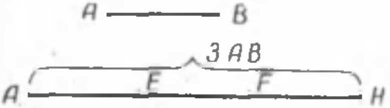
36- расм.

Изоҳ. Қўшилувчи кесмалар сони иккитадан ортиқ бўлганда ҳам кесмалар шу тартибда қўшилади.

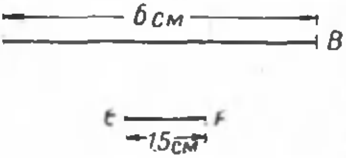
2- мисол. AB кесмадан CD кесмани айиринг.

Ечиш. AB кесманинг устига, масалан, A учдан бошлаб CD ни қўямиз, AB кесманинг қолган қисми айирма кесма бўлади (36- расм).

Демак, $EB = AB - AE = AB - CD$, чунки $AE = CD$.



37- расм.



38- расм.

3- мисол. AB кесмани бутун мусбат сонга, масалан, 3 га кўпайтиринг.

Ечиш. Бунинг учун AB кесмани 3 марта ўз-ўзига қўшиш кифоя (37- расм).

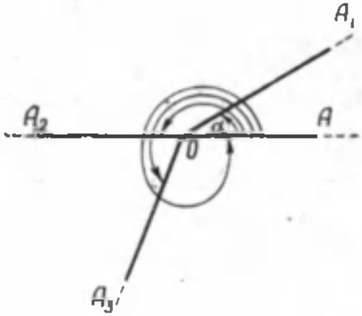
Демак, $AH = AE + EF + FH = AB + AB + AB = 3\,AB$. Энди, $3\,AB = AH$ дан $AB = \frac{AH}{3}$ деб ёзиш мумкин.

4- мисол. $AB = 6$ *см* кесманинг $\frac{1}{4}$ бўлаги топилсин[1].

Ечиш. AB кесманинг $\frac{1}{4}$ қисми EF кесма бўлсин, бу ҳолда $EF = \frac{1}{4}AB = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ *см* (38- расм).

2- §. БУРЧАКЛАР ҲАҚИДА ТУШУНЧА. НУҚТАДАН ТЎҒРИ ЧИЗИҚҚА ПЕРПЕНДИКУЛЯР ТУШИРИШ

Геометрияда *бурчак деб, текисликда бир бошланғич нуқтага эга бўлган икки нурдан ташкил топган геометрик фигурага айтилади* (39- расм) (ёки *OA нурнинг O нуқта атрофида айланишидан ҳосил бўладиган фигурани бурчак* дейиш мумкин). O нуқта бурчак учи; OA ва OA_1 нурлар AOA_1 бурчакнинг томонлари дейилади. Бурчак $\angle$ белги билан ёзилади. Масалан: $\angle AOA_1$; $\angle AOA_2$; $\angle AOA_3$ ва ҳоказо. Бурчак ташкил этувчи икки нур, агар тўғри чизиқ ҳосил қилса, ундай бурчак ёйиқ бурчак дейилади. $\angle AOA_2$— ёйиқ бурчак. Нурнинг бошланғич нуқта атрофида тўлиқ айланишидан ҳосил бўлган бурчак *тўла бурчак*, бошқача айтганда, нур бошланғич нуқта атрофида бурилиб, натижада ўзининг дастлабки ҳолатини олса, ҳосил бўлган бурчак тўла бурчак дейилади, масалан, $\angle AOA$ (39- расм).



39- расм.

Бурчакнинг, масалан, OA томоннинг O нуқта атрофида OA_1 ҳолатини олгунча айланиш (бурилиш) миқдори — *бурчак ўлчови* дейилади (39- расм). Масалан, $\angle AOA_1$ нинг миқдори α бўлсин, у ҳолда $\angle AOA_1 = \alpha$ деб ёзиш мумкин. Бурчакнинг учи битта бурчакка тегишли бўлса, уни бурчак учига қўйилган битта ҳарф билан, акс ҳолда учта ҳарф билан ифода қилиб ёзиш қулай. Масалан, 40- расмда $\angle B$ деб ёзиш; 41- расмда эса $\angle ABC$ ва $\angle CBD$ деб ёзиш қулайдир.

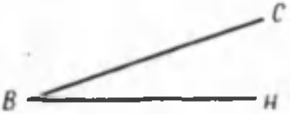
а) Бурчакларнинг тенглиги. Икки бурчакдан бирини иккинчиси устига қўйганда улар устма-уст тушса, улар ўзаро тенг бурчаклар дейилади; агар иккита бурчакни устма-уст қўйганда биттаси иккинчисининг ичида қолса, уни иккинчи бурчакдан *кичик* ва иккинчиси эса биринчидан *катта*

---

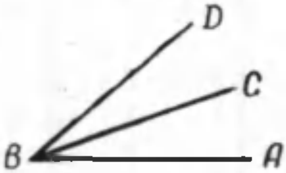
[1] Кесмани ҳар қандай бутун сонга бўлиш ёки каср сонга кўпайтириш амалини бажаришда, олдин 19- § даги кесмани бир неча тенг бўлакка бўлиш усулидан хабардор бўлиш керак, албатта.

бурчак дейилади. $\angle AOB$ ва $\angle A_1O_1B_1$ лар берилган бўлсин. $\angle A_1O_1B_1$ ни $\angle AOB$ устига қўйганда устма-уст тушсин, бу ҳолда $\angle A_1O_1B_1 = \angle AOB$ деб ёзилади (42- расм).

б) Бурчакларни қўшиш ва айириш. Берилган икки бурчакни қўшиш учун уларни шундай ёндоштириб қўйиш

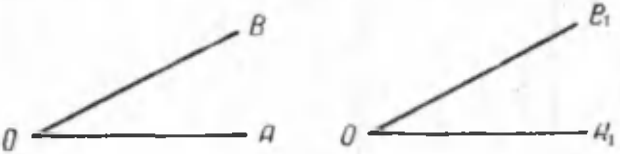


40- расм.



41- расм.

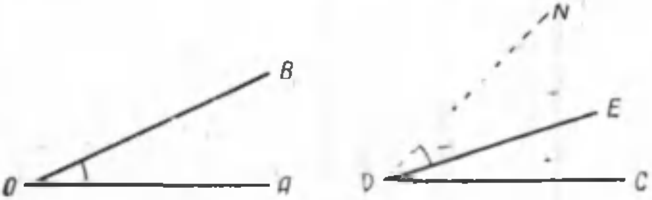
керакки, уларнинг учлари ва биттадан томонлари умумий бўлиб, ички соҳалари устма-уст тушмасин. Масалан, AOB ва CDE бурчакларни қўшиш талаб қилинсин (43- расм).



42- расм.

AOB ва CDE бурчакларни шундай ёндоштириб қўямизки, $\angle CDN = \angle CDE + \angle EDN = \angle CDE + \angle AOB$ бўлади.

Бурчакдан бурчакни айириш учун, уларни шундай ёндоштириб қўйиш керакки, уларнинг учлари, биттадан томонлари

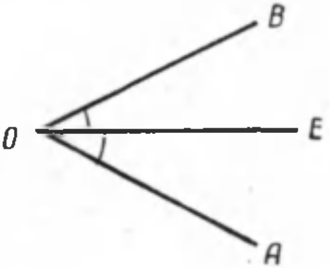


43- расм.

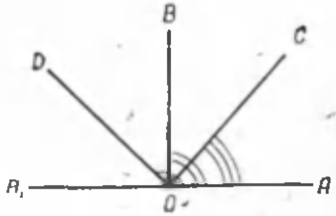
ва ички соҳалари устма-уст тушсин. Масалан, $\angle GDN$ дан $\angle AOB$ ни айириш талаб қилинади (43- расм).

O нуқтани D нуқта устига, OB томонни DN томон устига шундай қилиб қўямизки, OA томони $\angle CDN$ ичида DE ҳолатини олсин. У ҳолда: $\angle CDE = \angle CDN - \angle EDN = \angle CDN - \angle AOB$ бўлади (буларда, $\angle EDN = \angle AOB$). Қўшилувчи бурчакларнинг сони иккитадан ортиқ бўлганда ҳам шу қоида ишлатилади.

в) Бурчакларни сонга кўпайтириш ва бўлиш. Агар 43- расмда $\angle CDE = \angle EDN$ бўлса, у ҳолда $\angle CDN = \angle CDE + \angle CDE = 2 \cdot \angle CDE$ бўлади. Демак, бурчакни сонга кўпайтириш бурчакни ўша сон марта ўзаро қўшиш демакдир. Кейинги тенгликдан $\angle CDE = \frac{1}{2} \angle CDN$ келиб чиқади.



44- расм.



45- расм.

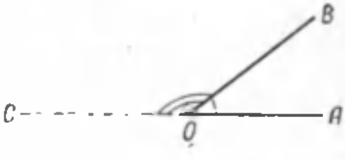
г) Биссектриса. *Бурчакни тенг иккига бўлувчи нур шу бурчакнинг биссектрисаси дейилади.*

$\angle AOB$ да: $\angle AOE = \angle BOE$ бўлсин (44- расм).

Демак, OE нур $\angle AOB$ нинг биссектрисаси бўлади.

д) Тўғри, ўткир ва ўтмас бурчаклар.

Таърифлар. *Ёйиқ бурчакнинг тенг ярми тўғри бурчак дейилади; тўғри бурчакдан кичик бурчак ўткир бурчак; тўғри бурчакдан катта, лекин ёйиқ бурчакдан кичик бурчак ўтмас бурчак дейилади* (45- расм). $\angle AOC$ — ўткир бурчак; $\angle AOB$ — тўғри бурчак ва $\angle AOD$ — ўтмас бурчак. Тўғри бурчакнинг миқдори d ҳарфи билан белгиланади. $\angle AOB = \angle A_1OB = d$ (d — французча „droit“ деган сўзнинг бош ҳарфи; бизнингча „тўғри“ деган сўздир). Тўғри бурчак томонлари ўзаро *перпендикуляр чизиқлар* дейилади ва $OB \perp AA_1$ шаклда ёзилади ($\perp$ перпендикуляр белгиси).



46- расм.

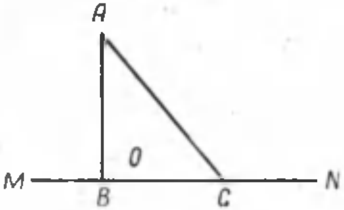
е) Қўшни бурчаклар. Битта томони ва учи умумий, қолган икки томони бири иккинчисининг давоми бўлган бурчаклар *қўшни бурчаклар* дейилади.

$\angle AOB$ берилган. OA нинг давоми OC бўлсин; бу ҳолда $\angle BOC$ берилган $\angle AOB$ га қўшни бурчакдир (46- расм).

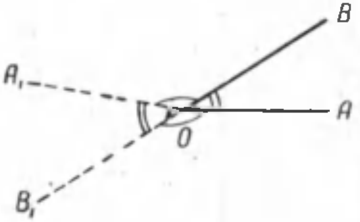
Изоҳ. Тўғри бурчак чизиш учун *чизмачилик учбурчаги* ишлатилади.

ж) Чизмачилик учбурчагидан фойдаланиб нуқтадан тўғри чизиққа перпендикуляр тушириш.

Масала. Берилган A нуқтадан берилган MN тўғри чизиққа перпендикуляр туширилсин (47- расм).



47- расм.



48- расм.

Ечиш. Чизмачилик учбурчаги 47-расмда кўрсатилгандек қилиб қўйилса, у ҳолда AB кесма MN га перпендикуляр[1] бўлади ва у $AB \perp MN$ шаклда ёзилади. Бунда AC кесма MN кесмага *оғма* дейилади. Энди 46-расмдан яққол кўрамизки, иккита қўшни бурчакнинг йиғиндиси ёйиқ бурчакка, яъни $2d$ га тенг ($\angle AOB + \angle BOC = 2d$). Бу ҳолда тўла бурчак $= 2d + 2d = 4d$.

з) Вертикал бурчаклар. Учи умумий ва томанлари бир-бирининг томонларининг давомидан иборат бўлган иккита бурчак *вертикал* бурчаклар дейилади.

Вертикал бурчаклар ўзаро тенг, яъни $\angle AOB = \angle A_1OB_1$ эканини исбот қиламиз.

Исбот. 48- расмда $\angle AOB$ ва $\angle A_1OB_1$ ларга $\angle A_1OB$ қўшни бурчак бўлганлиги учун: $\angle AOB + \angle BOA_1 = 2d$ ва $\angle B_1OA_1 + \angle A_1OB = 2d$. Бу ҳолда $\angle AOB + \angle BOA_1 = \angle A_1OB_1 + \angle A_1OB$. Демак, $\angle AOB = \angle A_1OB_1$. Шунга ўхшаш: $\angle AOB_1 = \angle BOA_1$ дир.

Масала. Қўшни бурчаклардан биттаси $\frac{3}{4}\ d$ га тенг. Бошқа қўшни бурчакнинг учдан икки қисми топилсин.

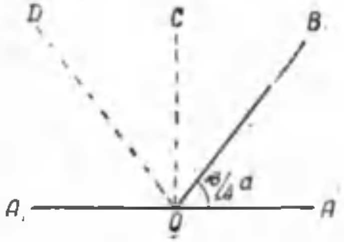
Ечиш. 49- расмда кўрсатилган бурчакларни чизамиз. $\angle AOA_1$ ёйиқ бурчак бўлгани учун: $\angle AOB + \angle BOA_1 = 2d$. Демак, $\angle BOA_1 = 2d - \frac{3}{4}d = \frac{5}{4}d$; $\angle BOD = \frac{2}{3}\angle BOA_1 = \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}d = \frac{5}{6}d$.

---

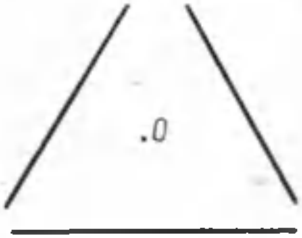
[1] Демак, тўғри чизиқ ташқарисидаги бир нуқтадан унга фақат битта перпендикуляр тушириш мумкин.

Машқлар. 1. Қўшни бурчаклардан бири иккинчисидан $\frac{1}{4}$ d қадар катта. Шу бурчаклардан ҳар бирининг катталиги топилсин.

(Жавоб. $\frac{7}{8}$ d ва $\frac{9}{8}$ d.)



49- расм.



50- расм.

2. Икки тўғри чизиқнинг кесишувидан ҳосил бўлган бурчаклардан бири $\frac{3}{7}$ d га тенг. Қолган бурчакларни топинг.

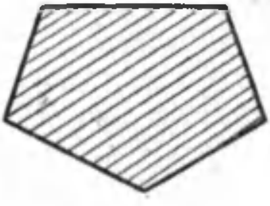
(Жавоб. $\frac{3}{7}$ d ва $\frac{11}{7}$ d.)

3. Берилган O нуқтадан берилган учта тўғри чизиққа перпендикуляр ўтказинг (50- расм).

3- §. ЕПИҚ ЧИЗИҚЛАР ВА КЎПБУРЧАК ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Таъриф. *Текисликдаги моддий нуқта чизиқ бўйича ҳаракатини давом эттириб босган йўли бўйича (орқага қайтмай) уни бир марта айланиб чиқиши мумкин бўлса, унда бу чизиқ ёпиқ чизиқ дейилади* (51- расм).

51- расм.



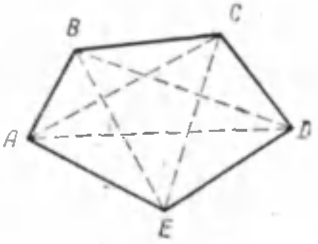
52- расм.

Ёпиқ чизиқ кесмалардан тузилган бўлса, у *ёпиқ синиқ чизиқ* деб аталади (52- расм).

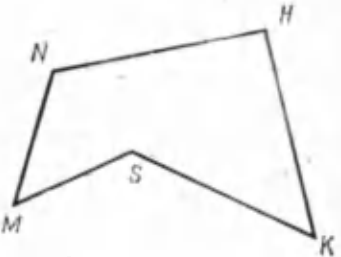
Текисликнинг ёпиқ синиқ чизиқ билан чегараланган бўлаги *кўпбурчак* деб аталади. Масалан, $ABCDE$ кўпбурчак берилган (53- расм).

Бу кўпбурчакда AB, BC, CD, DE, EA кесмалар — унинг томонлари; A, B, C, D, E нуқталар — унинг учлари; $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$, $\angle E$ лар — унинг *ички бурчаклари*. AC, AD, BD, CE, BE лар унинг *диагоналлари* дейилади.

Изоҳ. Кўпбурчак томонларининг сони: 3; 4; 5; 6; 7; ...; n та бўлиши мумкин.



53- расм



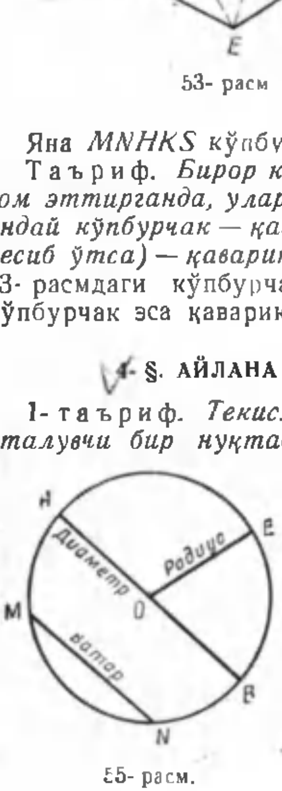
54- расм.

Яна $MNHKS$ кўпбурчак берилган бўлсин (54- расм).

Таъриф. *Бирор кўпбурчакнинг ҳамма томонларини давом эттирганда, улардан бирортаси ҳам уни кесиб утмаса, ундай кўпбурчак — қавариқ кўпбурчак, акс ҳолда (агар уни кесиб ўтса) — қавариқмас (ботиқ) кўпбурчак деб аталади.* 53- расмдаги кўпбурчак — қавариқ кўпбурчак, 54- расмдаги кўпбурчак эса қавариқмас кўпбурчаклир.

4- §. АЙЛАНА ВА ДОИРА ҲАҚИДА ТУШУНЧА

1- таъриф. *Текисликда ҳар бир нуқтаси марказ деб аталувчи бир нуқтадан тенг узоқликда турган ёпиқ чизиқ айлана деб аталади* (55- расм).



55- расм.

2- таъриф. *Текисликнинг айлана билан чегараланган* (ва айлана маркази ётган) *қисми доира деб аталади* (55- расм).

Марказдан айланагача бўлган масофа унинг *радиуси* дейилади. Айлананинг икки нуқтасини туташтирувчи кесма *ватар* дейилади. Марказдан ўтган ватар *диаметр* дейилади. Диаметр икки радиусга тенгдир (55-расм).

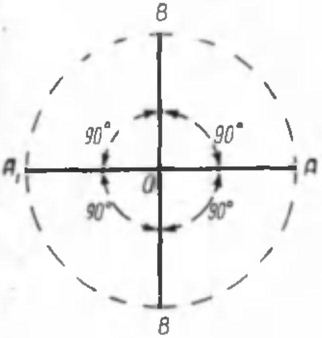
Диаметр одатда D ҳарфи билан белгиланади. 55- расмда: OE — радиус; AB — диаметр; MN — ватар. $OE = R$ бўлсин, бу ҳолда $AB = D = OA + OB = R + R = 2R$.

Диаметр доира ва айланани тенг иккига бўлади, буни биз 55- расмдан яққол кўрамиз Икки радиус орасидаги бурчак *марказий бурчак* дейилади; масалан, $\angle AOE$ — марказий бурчак. Доиранинг марказий бурчакка тегишли қисми *сектор* дейилади. Доиранинг битта ватар билан кесилган ҳар қайси бўлаги *сегмент* дейилади. Масалан, 55- расмда доиранинг AOE бўлаги — сектор; MHN ва MEN сегментлардир. Айлана бўлаги ***ёй*** дейилади ва $\frown$ белги билан ёзилади. Масалан, AE ёйи $\overset{\frown}{AE}$ шаклида ёзилади. (Тенг марказий бурчакларнинг ёйлари ҳам тенг ва аксинча тенг ёйларнинг марказий бурчаклари ҳам тенгдир.)

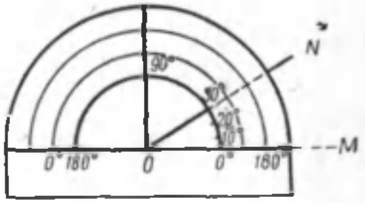
5- §. ЕЙ ВА БУРЧАК ГРАДУСЛАРИ

Таъриф. *Айлананинг $\frac{1}{360}$ қисми (бўлаги) ёй градуси дейилади.* Бир ёй градуснинг $\frac{1}{60}$ бўлаги ***ёй минути*** (1′), бир ёй минутининг $\frac{1}{60}$ *бўлаги* ***ёй секунди*** (1″) дейилади; тўлиқ айлана $= 360°$.

Таъриф. 1° ***ёйга тегишли*** *марказий бурчак* ***бурчак градуси*** *дейилади.*



56- расм.



57- расм.

Таърифга асосан, марказий бурчакка тегишли ёйда қанча ёй градуси, минути ва секунди бўлса, унга мос марказий бурчакда ҳам шунча бурчак градуси, минути ва секунди бўлади.

Демак, марказий бурчак ўзи тиралган[1] ёй билан ўлчанади.

Ҳар қайси тўғри бурчак $= \frac{360°}{4} = 90°$ дир (56- расм). Демак, $d = 90°$ бўлади.

Транспортир ёрдамида бурчакларни ўлчаш ва ясаш. ***Транспортир*** деб, бурчакларни ўлчаш ва уларни ясаш учун ишлатиладиган асбобга айтилади. Масалан, 57- расмда транспортир ёрдамида $\angle MON$ нинг ўлчаниши кўрсатилган. Демак, $\angle MON = 30°$. Агар 30° ли бурчак ясалсин дейилса, у ҳолда иш олдинги қилинганнинг тескарисидек бўлади.

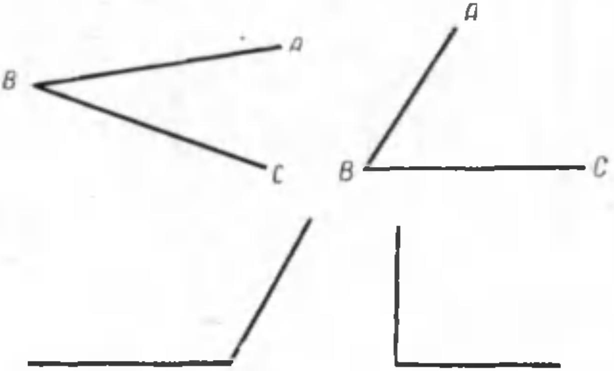
---

[1] *Доирадаги ҳар қандай бурчак, унинг томонлари орасидаги ёйга тиралади деб айтиш қабул қилинган.*

Машқлар. 1) 58- расмдаги бурчакларни транспортир ёрдамида ўлчаб, сон қийматлари ёзилсин.

2) Транспортир ёрдамида 30°; 50°; 25° 30′ ли бурчаклар ясалсин.

Изоҳ. Геометрияда бурчаклар градус ва баъзан тўғри бурчак d нинг бўлаклари билан ўлчанади.



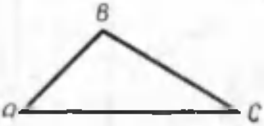
58- расм.

6- §. УЧБУРЧАКЛАР ҲАҚИДА ТУШУНЧА

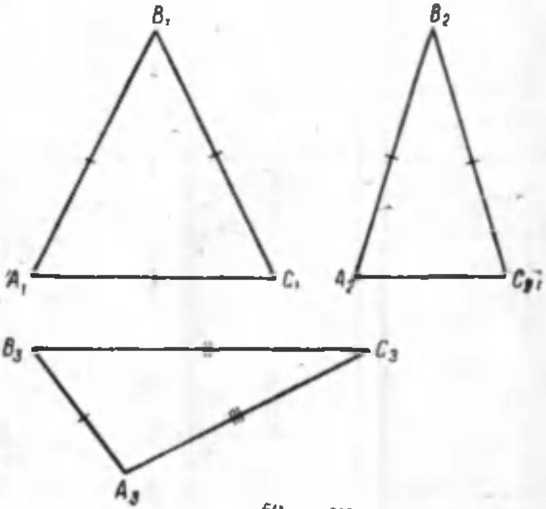
1- таъриф. *Учта томонли кўпбурчак учбурчак дейилади* (59- расм).

Масалан, ABC учбурчак — $\triangle ABC$ шаклда ёзилади.

2- таъриф. Учбурчакнинг учала томони ўзаро тенг бўлса, у *тенг томонли* учбурчак; иккита томони ўзаро тенг бўлса, уни *тенг ёнли* учбурчак; учала томонлари ўзаро тенг бўлмаса, *турли томонли учбурчак* дейилади (60- расм).

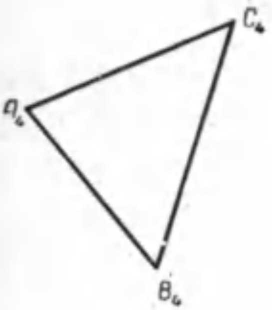


59- расм.

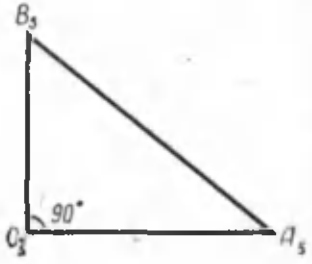


60- расм.

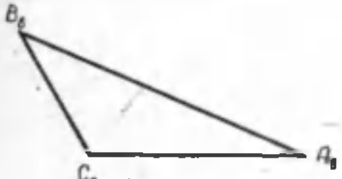
3- таъриф. Учбурчакнинг ҳамма бурчаклари ўткир бўлса *ўткир бурчакли* учбурчак; битта бурчаги тўғри (90°) бўлса, *тўғри бурчакли* учбурчак; битта бурчаги ўтмас бўлса, *ўтмас бурчакли* учбурчак дейилади (61, 62 ва 63- расмлар). Учбурчакнинг исталган бир учи қаршисидаги томонни унинг *асоси* деб олиш мумкин. Учбурчак учидан асосга (ёки асос давомига) туширилган перпендикуляр унинг *баландлиги*; учидан тушиб асосни тенг икки қисмга ажратувчи кесма —учбурчакнинг *медианаси* дейилади ва бундай кесманинг узунлиги — *медиана узунлиги* дейилади.



61- расм.



62- расм.

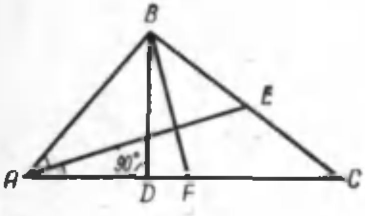


63- расм.

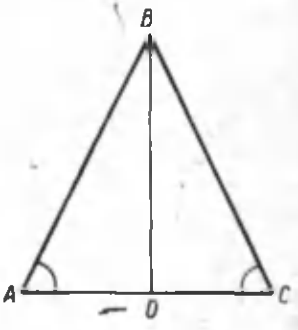
Учбурчакнинг бирор бурчагини тенг иккига бўлувчи кесма унинг *биссектрисаси* дейилади.

Учбурчакнинг икки томони ўрталарини туташтирувчи кесма унинг ўрта чизиғи дейилади.

$\triangle ABC$ да $BD \perp AC$ бўлсин, демак BD — баландлик; $\angle BAE = \angle EAC$ бўлсин, демак AE — биссектриса; $AF = FC$ бўлсин, демак, BF — медиана (64- расм.)



64- расм.



64- *а* расм.

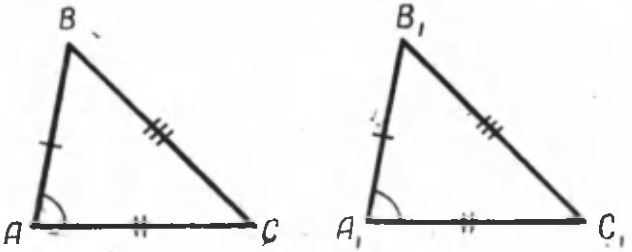
Буларга кўра, ҳар бир учбурчак учта баландлик, учта медиана ва учта биссектрисаларга эгадир.

Теорема. *Тенг ёнли учбурчакнинг учидан асосига ўтказилган биссектриса ҳам баландлик, ҳам медиана бўлиб, асосга ёпишган 2 та ички бурчаги ўзаро тенгдир.*

Исбот. $\triangle ABC$ тенг ёнли, яъни $AB = BC$ ва BD — биссектриса ($\angle CBD = \angle ABD$) бўлсин (64- *а* расм). $BD \perp AC$ ва $\angle A = \angle C$ эканини кўрсатамиз. $\angle BDC$ ни $\angle BDA$ нинг устига қўямиз. Бу ҳолда, BC томон AB нинг устига тушади, чунки $\angle CBD = \angle ABD$. C учи A учи билан устма-уст тушади, чунки $BC = AB$. Бу ҳолда $DC = DA$; $\angle C = \angle A$; $\angle CDB = \angle ADB$ лар ҳосил бўлади. Демак. $BD \perp AC$. Теорема исбот қилинди.

а) Учбурчаклар тенглигининг уч аломати.

1- теорема. *Агар бир учбурчакнинг икки томони ва улар орасидаги бурчаги иккинчи учбурчакнинг икки томони ва улар орасидаги бурчагига мос равишда тенг бўлса, бундай учбурчаклар бир-бирига тенг.*



65- расм.

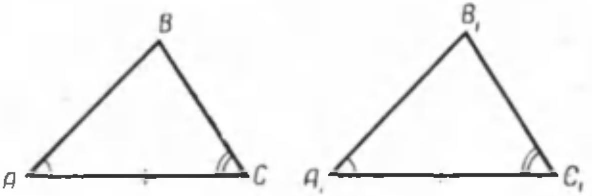
Исбот. $\triangle ABC$ ва $\triangle A_1B_1C_1$ ларда $AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$ ва $\angle A = \angle A_1$ бўлсин (65- расм). $\triangle ABC$ ни $\triangle A_1B_1C_1$ устига шундай қўямизки, уларнинг A ва A_1 учлари устма-уст тушсин. Бу ҳолда $\angle A = \angle A_1$ бўлгани учун, AC томон A_1C_1 ва AB томон A_1B_1 бўйлаб кетади. B нуқта B_1, C нуқта C_1 устига тушади; унда BC ва B_1C_1 томонлар ҳам устма-уст жойлашади. $\triangle ABC$ ва $\triangle A_1B_1C_1$ лар устма-уст жойлашади, демак, улар ўзаро тенг.

2- теорема. *Агар бир учбурчакнинг бир томони ва унга ёпишган икки бурчаги, иккинчи учбурчакнинг бир томони ва унга ёпишган икки бурчагига мос равишда тенг бўлса, бундай учбурчаклар ўзаро тенгдир.*

Исбот. $\triangle ABC$ ва $\triangle A_1B_1C_1$ да $AC = A_1C_1$ ва $\angle A = A_1$, $\angle C = \angle C_1$ бўлсин (66- расм). $\triangle ABC$ ни $\triangle A_1B_1C_1$ устига шундай қўямизки, A нуқта A_1 устига, AC томон A_1C_1 устига тушсин. Бу ҳолда $\angle A = \angle A_1$ ва $\angle C = \angle C_1$ бўлгани учун, AB томон A_1B_1 томон бўйлаб, CB томон C_1B_1 бўйлаб кетади.

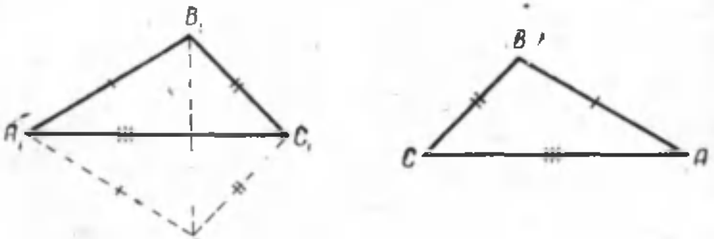
Икки тўғри чизиқ бир нуқтада кесишгани учун, B нуқта B_1 устига тушади. ΔABC ва $\Delta A_1B_1C_1$ лар устма-уст жойлашади, демак, улар ўзаро тенг.

3- теорема. *Агар бир учбурчакнинг уч томони иккинчи учбурчакнинг уч томонига мос равишда тенг бўлса, бундай учбурчаклар ўзаро тенг.*



66- расм.

Исбот. $\triangle ABC$ ва $\triangle A_1B_1C_1$ да $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ ва $BC = B_1C_1$ бўлсин (67- расм). $\triangle ABC$ ва $\triangle A_1B_1C_1$ ларни шундай ёнма-ён қилиб қўямизки, AC томон A_1C_1 устига тушсин. У вақтда ABC учбурчак $\triangle A_1B_2C_1$ ҳолатини олади.



67- расм.

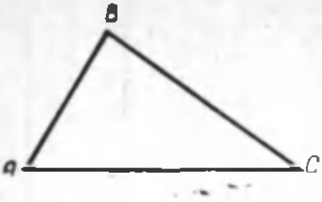
$\Delta A_1B_1B_2$ ва $\Delta B_1C_1B_2$ лар тенг ёнли учбурчаклар бўлгани учун, $\angle A_1B_1B_2 = \angle A_1B_2B_1$ ва $\angle C_1B_1B_2 = \angle C_1B_2B_1$; демак, $\angle B_1 = \angle B_2 = \angle B$. Бу ҳолда 1- теоремага асосан, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ дир. Теорема исбот қилинди.

Изоҳ. *Тўғри бурчакли учбурчакларнинг тенглик белгилари буларнинг хусусий ҳолларидир.*

б) Учбурчак томонлари ҳақида теорема.

Теорема. *Ҳар қандай учбурчакнинг икки томони йиғиндиси учинчи томонидан катта, айирмаси эса учинчи томонидан кичик.*

Исбот. $\triangle ABC$ да $AB + AC > BC$. Чунки $AB + AC$ синиқ чизиқ, BC эса уларни туташтирувчи кесма (68- расм). Тенгсизликнинг икки томонидан AB ни айирсак, $AC > BC - AB$ ҳосил бўлади.



68- расм.

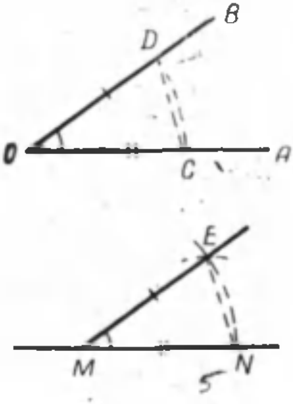
в) Учбурчакнинг учта баландлиги, учта медианаси, учта биссектрисасининг биттадан нуқтада кесишиши. Ҳар қандай учбурчакда: учта баландлиги ёки уларнинг давоми, учта медианаси, учта биссектрисаси биттадан нуқтада кесишади. Бунинг тўғри эканлигига чизмасини чизиб кўриб ишонч ҳосил қилиш мумкин.

7- §. ЯСАШГА ДОИР МАСАЛАЛАР

Қуйидаги масалалар кўрсатилгандек йўллар билан чизгич ва циркуль ёрдамида ечилади.

Берилган бурчакка тенг бурчак ясаш.

1- масала. $\angle AOB$ га тенг бурчак ясалсин (69- расм).



69- расм.

Ясаш. Ихтиёрий тўғри чизиқ чизиб, унда бирон M нуқтани оламиз. Сўнгра ихтиёрий OC радиусни олиб O ни марказ қилиб CD ни чизамиз. Кейин M ни марказ ва $MN = OC$ радиус билан $\overset{\frown}{NE}$ ни чизамиз. Кейин циркуль билан CD ватарни ўлчаб уни радиус ва N ни марказ деб ёй чизиб, E нуқтани топамиз. E ни M билан туташтирсак, $\angle EMN$ изланган бурчак, яъни $\angle EMN = \angle AOB$ бўлади, чунки $\triangle DOC$ ва $\triangle EMN$ ларнинг томонлари мос равишда тенг (69- расм).

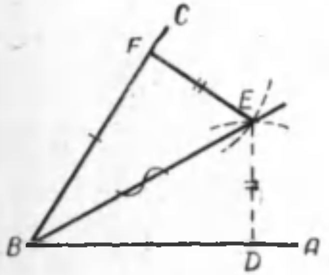
Берилган бурчакни тенг иккига бўлиш.

2- масала. Берилган $\angle ABC$ тенг иккига бўлинсин (70- расм).

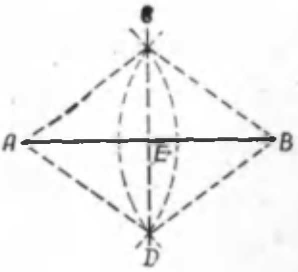
Ясаш. BA ва BC томонларда ихтиёрий $BD = BF$ кесмалар олиб D ва F нуқталарни марказ қилиб ихтиёрий $DE = EF$ радиуслар билан ёйлар чизилса, ёйлар кесишган E нуқта топилади. Сўнгра E ни B билан туташтирсак, BE биссектриса бўлади, чунки $\triangle BDE = \triangle BEF$ ларнинг томонлари тенг. Бундан: $\angle DBE = \angle FBE$ дир.

Кесмани тенг иккига бўлиш

3- масала. Берилган AB кесма тенг иккига бўлинсин.



70- расм.



71- расм.

Ясаш. A ва B нуқталарни марказ қилиб бир хил ихтиёрий радиус билан бир-бирини кесадиган иккита ёй чизамиз (71- расм). Ёйлар кесишган C ва D нуқталарни туташтирсак, у AB кесмани E нуқтада тенг иккига бўлади: $AE = BE$, чунки A ва B нуқталарни C ва D билан бирлаштиришдан ҳосил бўлган $\triangle CAD = \triangle CBD$.

Тўғри чизиқнинг ихтиёрий нуқтасига перпендикуляр тушириш.

4- масала. Берилган MN тўғри чизиқнинг берилган E нуқтасига перпендикуляр туширилсин (72- расм).

Ясаш. MN да E нуқтадан бир хил узоқликда ихтиёрий икки H ва F нуқта олиб, уларни марказ қилиб, EH дан катта, ихтиёрий радиус билан иккита ёй чизамиз. Бу ёйлар кесишган S нуқта билан E ни туташтирган ES тўғри чизиқ изланган перпендикулярдир.

Тўғри чизиқда ётмаган бир нуқтадан тўғри чизиққа перпендикуляр тушириш.

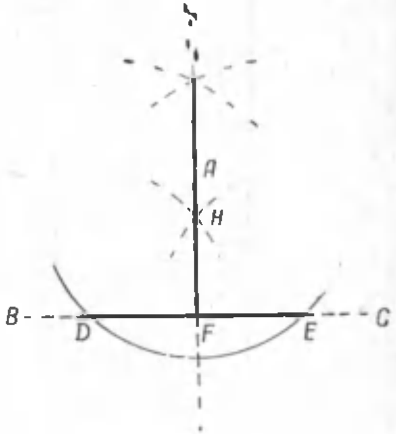
5- масала. Берилган A нуқтадан берилган BC тўғри чизиққа перпендикуляр туширилсин (73- расм).

Ясаш. A ни марказ қилиб, BC тўғри чизиқни кесиб ўтувчи $\overset{\frown}{DE}$ ни чизамиз. Кейин D ва E нуқталарни марказ қилиб, $\frac{DE}{2}$ дан катта радиус билан бир нуқтада, масалан, H нуқтада кесишувчи иккита ёй ўтказамиз. У ҳолда A ва H нуқталар орқали ўтказилган AF тўғри чизиқ изланган перпендикуляр бўлади.

Учбурчаклар ясаш

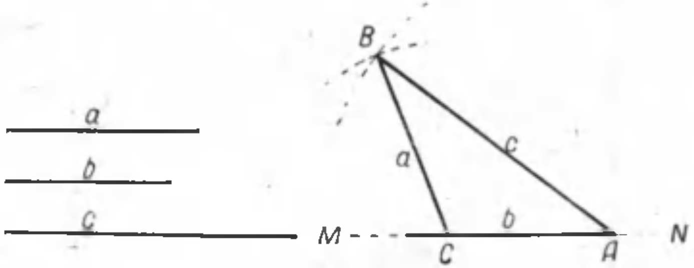
6- масала. 1) Учта кесма; 2) битта кесма ва унга ёпишган иккита бурчак; 3) иккита кесма ва улар орасидаги бурчак берилган. Учбурчаклар ясалсин. 74- расмда учта a, b, c кесма берилган.

72- расм.



73- расм.

Ясаш. Ихтиёрий MN тўғри чизиқда берилган томонлардан бирортасига, масалан, b га тенг AC кесма оламиз. Кейин A ва C ларни марказ ва a, c ларни радиуслар қилиб, иккита ёй чизамиз. Бу ёйлар кесишган B нуқтани A ва C нуқта билан бирлаштирсак, изланган $\triangle ABC$ ҳосил бўлади (74- расм).



74- расм.

Изоҳ. а) Кесмалардан энг узуни, масалан $c < a + b$ бўлгандагина, улардан учбурчак ясаш мумкин;

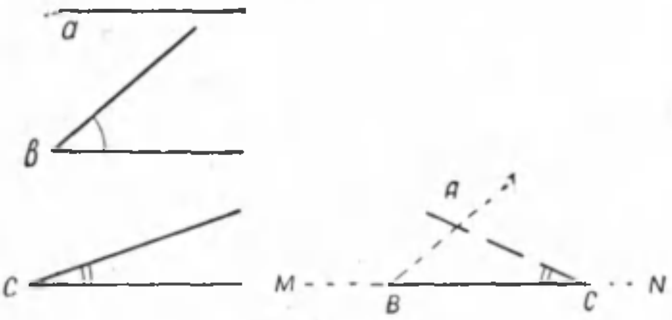
б) масала битта ечимга эга.

Битта a кесма ва унга ёпишган иккита B ҳамда C бурчаклар берилган.

Ясаш. Ихтиёрий MN тўғри чизиқда a га тенг BC кесма оламиз (75- расм).

Транспортир ёрдамида B нуқтада $\angle B$ ни, C нуқтада $\angle C$ ни ясаймиз, уларнинг томонларининг давоми бир нуқтада, масалан, A да кесишади. Ҳосил бўлган учбурчак, изланган $\triangle ABC$ бўлади.

Изоҳ. а) $\angle B + \angle C < 180°$ бўлганда, учбурчак ясаш мумкин;
б) масала битта ечимга эга.

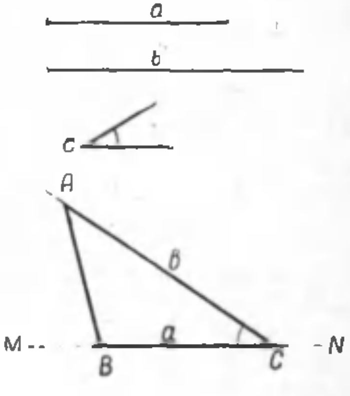


75- расм.

Иккита a ва b кесма ва улар орасидаги C бурчак берилган.

Ясаш. MN тўғри чизиқда берилган томонлардан биттаси, масалан, $BC = a$ ни оламиз. Кейин C нуқтада, транспортир ёрдамида $\angle C$ ни белгилаб, унинг томони бўйлаб кетган нурда b га тенг CA кесмани оламиз. Сўнгра A билан B ни бирлаштирсак, изланган $\triangle ABC$ ҳосил бўлади (76- расм).

Изоҳ. а) $\angle C < 180° \cdot k$ бўлганда, учбурчак ясаш мумкин;
б) масала битта ечимга эга ($k = 1, 2, 3, \ldots$).



76- расм.

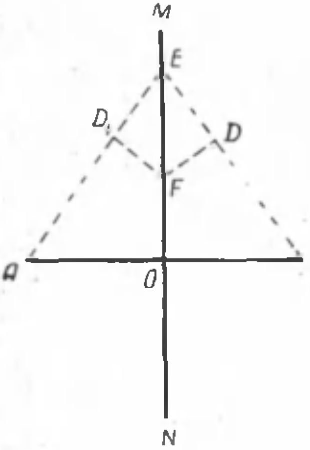
Машқлар. 1) $a=6$ *см*, $b=4$ *см* $c = 2$ *см* — учта кесма берилган. Учбурчак ясалсин.

2) $a = 5$ *см*, $\angle B = 40°$, $\angle C = 60°$ берилган. Учбурчак ясалсин.

3) $a = 4$ *см*, $b = 6$ *см* ва $\angle C = 50°$ берилган. Учбурчак ясалсин.

8-§. КЕСМАНИНГ ЎРТАСИДАН ЎТКАЗИЛГАН ПЕРПЕНДИКУЛЯРНИНГ ХОССАЛАРИ ВА БУРЧАК БИССЕКТРИСАСИНИНГ ХОССАСИ

Теорема. *Кесманинг ўртасидан ўтказилган перпендикулярда ётган ҳар бир нуқта шу кесманинг учларидан баробар узоқликда ётади.*



77- расм.

Исбот. $MN \perp AB$ ва $AO = OB$ бўлсин (77- расм).

MN да ихтиёрий E нуқта оламиз. $AE = BE$ бўлишини кўрсатамиз. $\triangle AOE = \triangle BOE$, чунки $AO = OB$; OE — умумий томон ва $\angle AOE = \angle BOE$. Демак, $\triangle AOE = \Delta BOE$. Бундан: $AE = BE$.

Натижа. MN ни $\angle AEB$ нинг биссектрисаси дейиш мумкин.

Демак, бурчак биссектрисасидаги ҳар бир нуқта бурчак томонларидан бир хил масофада туради (77- расмда, масалан, ихтиёрий F нуқта AE ва BE лардан бир хил масофададир, яъни $FD = FD_1$; $FD \perp BE$ ва $FD_1 \perp AE$).

9-§. ПАРАЛЛЕЛ ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАР

Таъриф. *Бир текисликда ётган ва умумий нуқтага эга бўлмаган икки тўғри чизиқ параллел тўғри чизиқлар дейилади*[1].

MN ва EF икки тўғри чизиқ параллел бўлсин (78- расм). Улар $MN \parallel EF$ равишда ёзилади ($\parallel$ — параллеллик белгиси).

Икки тўғри чизиқни учинчи тўғри чизиқ кесганда ҳосил бўлган бурчакларнинг номлари (79- расм).

1) $\angle 1$ ва $\angle 5$; $\angle 3$ ва $\angle 7$; $\angle 2$ ва $\angle 6$; $\angle 4$ ва $\angle 8$ — мос бурчаклар;

2) $\angle 3$ ва $\angle 6$; $\angle 4$ ва $\angle 5$ — ички алмашинувчи бурчаклар;

3) $\angle 1$ ва $\angle 8$; $\angle 2$ ва $\angle 7$ — ташқи алмашинувчи бурчаклар;

4) $\angle 3$ ва $\angle 5$; $\angle 4$ ва $\angle 6$ — ички бир томонли бурчаклар;

5) $\angle 1$ ва $\angle 7$; $\angle 2$ ва $\angle 8$ — ташқи бир томонли бурчаклар дейилади.

Икки тўғри чизиқнинг параллеллик белгилари.

1- теорема. *Агар иккита AB ва CD тўғри чизиқлар учинчи EF тўғри чизиққа перпендикуляр бўлса, унда бу перпендикулярлар ўзаро параллел бўлади* (80- расм).

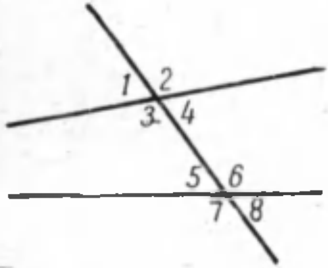
---

[1] Чексизликдаги нуқта бундан мустаснодир.

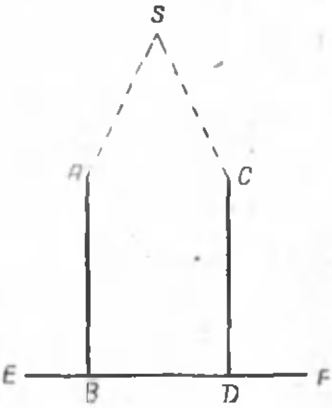
Исбот. $AB \perp EF$; $CD \perp EF$ бўлсин. $AB \parallel CD$ бўлишини кўрсатамиз. AB ва CD лар параллел эмас деб фараз қилайлик, бу ҳолда улар давом эттирилганда бирор S нуқтада кесишади. Унда S нуқтадан EF га иккита перпендикуляр тушган бўлади, бу мумкин эмас эди. Демак, $AB \parallel CD$ дир.

2- теорема. *Агар икки тўғри чизиқни учинчи тўғри чизиқ кесиб ўтганда ички алмашинувчи бурчаклари тенг бўлса ёки мос бурчаклари тенг бўлса, ёки ички бир томонли бурчакларининг йиғиндиси $2d$ га тенг бўлса, бу икки тўғри чизиқ ўзаро параллелдир.*

78- расм.



79- расм.



80- расм.

Исбот. $\angle 4 = \angle 5$ бўлсин. $AB \parallel CD$ эканини кўрсатамиз (81- расм). EF нинг ўртаси H нуқтадан CD га $HM \perp CD$ ни тушириб, тўғри бурчакли HMF учбурчакни ҳосил қиламиз. Сўнгра HM ни AB билан кесишгунча давом эттирамиз. Энди $AB \perp MN$ лигини исбот қилсак, у ҳолда биринчи теоремага асосан $AB \parallel CD$ бўлади. 81- расмда $\triangle HNE = \triangle HMF$ дир, чунки $\angle 4 = \angle 5$ берилган, $EH = FH$ деб олинган, $\angle MHF = \angle NHE$ вертикал бурчаклар, учбурчаклар тенглигининг 2- аломатига асосан: $\triangle HMF = \triangle HNE$. Бундан: $\angle HNE = \angle HMF = 90°$, яъни $AB \perp MN$. Демак, $AB \parallel CD$ дир.

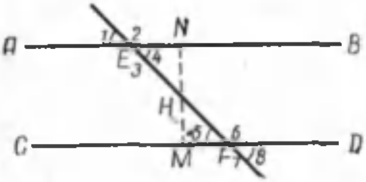
$\angle 1 = \angle 5$ бўлсин. $AB \parallel CD$ бўлишини кўрсатамиз. Бу ҳолда 81- расмдан яққол кўрамизки, $\angle 1 = \angle 4$ вертикал бурчаклар, бу ҳолда $\angle 4 = \angle 1 = \angle 5$, яъни $\angle 4 = \angle 5$. Бу ҳолда $AB \parallel CD$ бўлиши ҳозиргина исбот қилинди.

$\angle 4 + \angle 6 = 2d$ бўлсин. $AB \parallel CD$ эканини исбот қиламиз. Бу ҳолда 81- расмдан $\angle 4 + \angle 3 = 2d$; $\angle 5 + \angle 6 = 2d$ — қўшни бурчаклар бўлгани учун. Кейинги тенгликларни ҳадлаб қўшамиз.

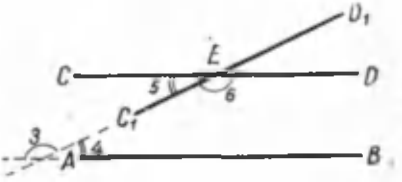
$\angle 4 + \angle 6 + \angle 3 + \angle 5 = 4d$ ёки $\angle 3 + \angle 5 = 2d = \angle 3 + + \angle 4$. Бундан: $\angle 4 = \angle 5$. Яна биринчи ҳолга келдик. Демак: $AB \parallel CD$.

2- теоремадан қуйидаги натижа келиб чиқади:

Икки параллел тўғри чизиқни учинчи тўғри чизиқ кесганда ҳосил бўлган мос бурчаклар тенг; алмашинувчи бурчаклар тенг ва ички ёки ташқи бир томонли бурчакларнинг йиғиндиси 2d га тенг бўлади.



81- расм.



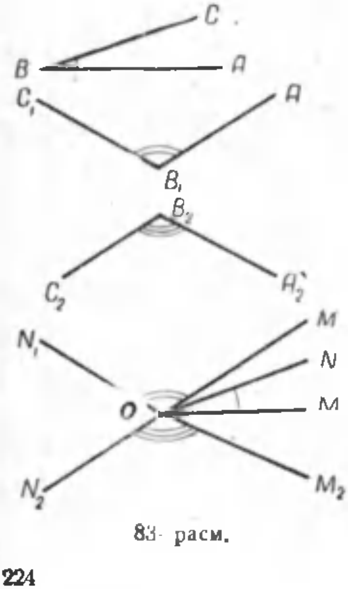
82- расм.

Параллел чизиқлар аксиомалари.

а) Бир нуқтадан бир тўғри чизиққа параллел бўлган иккита тўғри чизиқ ўтказиш мумкин эмас.

Масалан, $CD \parallel AB$ бўлсин (82- расм). Бу ҳолда E дан ўтган бошқа, ихтиёрий, C_1D_1 тўғри чизиқ AB га параллел бўлолмайди, чунки C_1D_1 нинг давоми AB ни кесади ва $\angle 3$, $\angle 4$ лар ҳосил бўлади. Энди, E нуқта орқали CD тўғри чизиқни шундай қилиб ўтказамизки, ички алмашинувчи $\angle 4$ ва $\angle 5$ бурчаклар (ёки $\angle 3$ ва $\angle 6$ лар) ўзаро тенг бўлсин. Бу ҳолда $CD \parallel AB$ (82- расм).

б) Икки параллел тўғри чизиқдан биттаси учинчи тўғри чизиққа параллел бўлса, унда иккинчиси ҳам учинчи тўғри чизиққа параллел бўлади.



83- расм.

10- §. БУРЧАКЛАРНИ БИР БОШЛАНҒИЧ НУҚТАГА КЎЧИРИШ

Бурчакни бир бошланғич нуқтага кўчириш учун, у нуқтадан бурчак томонларига параллел чизиқлар ўтказилса кифоя. Масалан, $\angle ABC$, $\angle A_1B_1C_1$ ва $\angle A_2B_2C_2$ бир ихтиёрий O нуқтага кўчирилсин (83- расм). Ихтиёрий нуқта *O бошланғич* нуқта дейилади.

Кўчириш шаклда кўрсатилгандек бажарилади: $BA \parallel OM$, $BC \parallel ON$

қилиб чизамиз; демак, $\angle MON = \angle ABC$. $B_1A_1 \parallel OM_1$, $B_1C_1 \parallel ON_1$ қилиб чизамиз; демак, $\angle A_1B_1C_1 = \angle M_1ON_1$. $B_2A_2 \parallel OM_2$. $B_2C_2 \parallel ON_2$ қилиб чизамиз; демак, $\angle A_2B_2C_2 = \angle M_2ON_2$ бўлади.

11-§. ТОМОНЛАРИ МОС РАВИШДА ПАРАЛЛЕЛ ЁКИ ПЕРПЕНДИКУЛЯР БЎЛГАН БУРЧАКЛАР

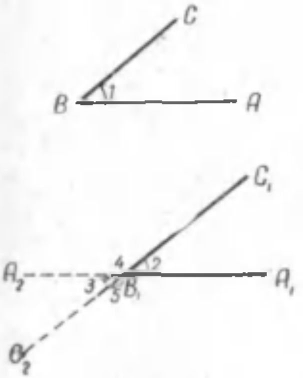
1-теорема. *Агар икки бурчакнинг томонлари мос равишда параллел бўлса, у бурчаклар ё бир-бирига тенг, ё йиғиндиси 2d бўлади* (84-расм).

Исбот. $\angle ABC$ ва $\angle A_1B_1C_1$ ларда: $BC \parallel B_1C_1$; $BA \parallel B_1A_1$ ёки $BC \parallel B_1C_2$; $BA \parallel B_1A_2$ бўлсин. $\angle 1 = \angle 2$ ва $\angle 1 + \angle 4 = \angle 1 + \angle 5 = 2d$ эканини исбот қиламиз.

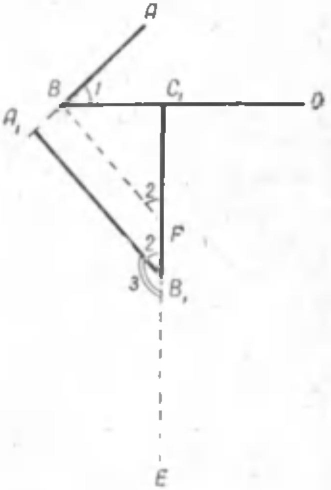
1) $\angle ABC$ ни B_1 нуқтага кўчирамиз, кўчириш қоидасига мувофиқ бурчак томонлари параллел булгани учун, BC томон B_1C_1 бўйлаб, BA томон B_1A_1 бўйлаб кетади. Бундан $\angle 1 = \angle 2$ экани келиб чиқади.

2) $\angle 3 = \angle 2$, чунки вертикал бурчаклар. Демак, $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$. Қўшни бурчаклар йиғиндиси $2d$ бўлгани учун: $\angle 1 + \angle 4 = \angle 2 + \angle 4 = \angle 2 + \angle 5 = 2d$.

2-теорема. *Агар икки бурчакнинг томонлари ёки томонларининг давомлари мос равишда перпендикуляр бўлса, бу икки бурчак ўзаро тенг ёки уларнинг бурчаклари йиғиндиси 2d га тенг* (85-расм).



84-расм.



85-расм.

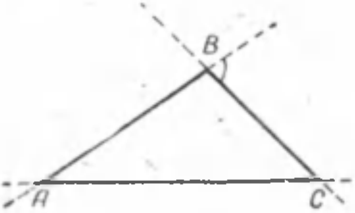
Исбот. $\angle ABC = \angle 1$ ва $\angle A_1B_1C_1 = \angle 2$ ларда $B_1A_1 \perp BA$ нинг давомига; $B_1C_1 \perp BC$ ва $\angle A_1B_1E = \angle 3$; $BC \perp EB_1$ нинг давомига. $\angle 1 = \angle 2$ ва $\angle 1 + \angle 3 = 2d$ бўлишини исбот қиламиз.

$BF \parallel A_1B_1$ ни ўтказамиз, у ҳолда $\angle BFC_1 = \angle A_1B_1C_1 = \angle 2$, чунки мос бурчаклардир. Аммо, $\angle 1 + \angle C_1BF = \angle ABF = 90^\circ$ ва $\triangle BFC$ дан: $\angle 2 + \angle C_1BF = 90^\circ$. Булардан: $\angle 1 + \angle C_1BF = \angle 2 + \angle C_1BF$ ёки $\angle 1 = \angle 2$. Энди, $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 3 = 2d$, чунки ($\angle 2 + \angle 3$) қўшни бурчаклар йиғиндисидир.

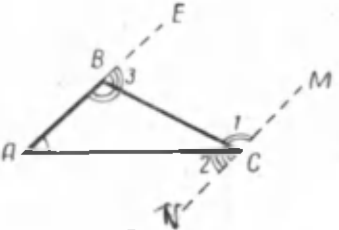
12- §. УЧБУРЧАК ВА КЎПБУРЧАК ИЧКИ БУРЧАКЛАРИНИНГ ЙИҒИНДИСИ. ТАШҚИ БУРЧАКЛАР

Таъриф. *Учбурчакнинг бирор томони давомида унинг бурчаги билан қўшни бўлган бурчак учбурчакнинг ташқи бурчаги дейилади* (86- расм).

1- теорема. 1) *Учбурчакнинг ташқи бурчаги ўзига қўшни бўлмаган иккита ички бурчак йиғиндисига тенг;* 2) *учбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси $2d = 180^\circ$ га тенг.*



86- расм.



87- расм.

Исбот. $\triangle ABC$ берилган (87- расм), бунда ташқи бурчак $EBC = \angle A + \angle C$ ва $\angle A + \angle B + \angle C = 2d$ эканини исбот қиламиз.

$MN \parallel AB$ ни ўтказамиз; бунда $MN \parallel AB$ ларни BC ва AC лар кесиб ўтган тўғри чизиқлар бўлгани учун, $\angle 2 = \angle A$; $\angle 3 = \angle BCN$; $\angle 1 = \angle ABC$ — ички алмашинувчи бурчаклар. Аммо $\angle BCN = \angle 2 + \angle ACB = \angle A + \angle C$. Демак, $\angle 3 = \angle A + \angle C$. Лекин $\angle 3 + \angle B = 2d$, чунки ёйиқ (бир томонли) бурчакдир. Энди $\angle 3$ ни ўрнига исботланган ($\angle A + \angle C$) ни қўйсак: $\angle B + \angle C + \angle A = 2d$ ҳосил бўлади. Демак, $\angle 3 = \angle A + \angle C$ ва $\angle A + \angle B + \angle C = 2d = 180^\circ$. Теорема исбот қилинди. Теоремага асосланиб ушбу натижаларни ҳосил қиламиз.

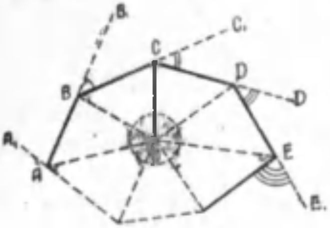
1- натижа. *Учбурчакнинг ташқи бурчаги ўзига қўшни бўлмаган ички бурчакларнинг ҳар биридан катта,* яъни $\angle 3 > \angle A$ ёки $\angle 3 > \angle C$.

2- натижа. *Тенг томонли учбурчакнинг ҳар бир ички бурчаги 60° га тенг.*

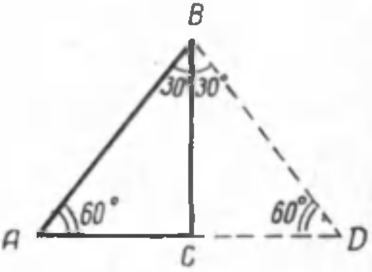
Ҳақиқатан, тенг томонли учбурчакнинг бурчаклари ҳам тенг. Демак, 1- теореманинг 2 бандига мувофиқ ҳар бир бурчак 60° дир.

2-теорема. *n томонли қавариқ кўпбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси $2d\cdot(n-2)$ га тенг; ташқи бурчакларнинг йиғиндиси эса $4d$ га тенг.*

Исбот. ($ABCDE\ \dots$) n томонли қавариқ кўпбурчак берилган бўлсин (88-расм). ($ABCDE\ \dots$) кўпбурчак ичида ихтиёрий O нуқтани олиб, уни A, B, C, D, E, ... учлар билан туташтириб: $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle COD$, ... n та учбурчак ҳосил қиламиз. Аммо учбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси $2d$ ва тўла бурчак (O нуқта атрофига жойлашган бурчаклар йиғиндиси) $4d$ эди. Бу ҳолда: $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+$ $+\angle E+\ \dots=2d\cdot n-4d=2d\cdot(n-2)$. Энди $ABCDE\ \dots$ кўпбурчак томонларини давом эттириб: $\angle A_1AB$, $\angle B_1BC$, $\angle C_1CD$ ... ташқи бурчакларни ҳосил қиламиз (88-расм). Аммо, ҳамма ички ва ташқи бурчаклар йиғиндиси $2dn$ га тенглигини кўрсатиш қийин эмас, китобхон буни ўзи исбот қилолади. Демак, ташқи бурчаклар йиғиндиси: $2dn-2d(n-2)=2dn-$ $-2dn+4d=4d$.



88-расм,



89 расм.

30° бурчак қаршисидаги катет; учбурчакнинг томонлари билан бурчаклари орасидаги муносабат.

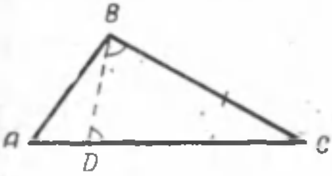
3-теорема. *Тўғри бурчакли учбурчакда 30° ли бурчак қаршисидаги катет гипотенузанинг ярмига тенг.*

Исбот. $\triangle ABC$ да $\angle ABC=30°$ бўлсин. $AC=\frac{AB}{2}$ эканини кўрсатамиз (89-расм). $CD=AC$ ни чизиб, D ни B билан туташтирсак, тенг томонли $\triangle ABD$ ҳосил бўлади.

$AB=BD=AD$ ва $\angle A=\angle D=\angle ABD=60°$. Демак, $AC=$ $=\frac{AD}{2}=\frac{AB}{2}$. Теорема исбот қилинди.

Теорема. *Учбурчакнинг катта томони қаршисида катта бурчаги ётади.*

Исбот. $\triangle ABC$ да $AC>BC$ бўлсин. $\angle B>\angle A$ бўлишини кўрсатамиз (90-расм). BC ни AC устига қўйганда $BC=CD$ ҳосил бўлсин. Бу ҳолда $\triangle BCD$ тенг ёнли учбурчак бўлгани учун, $\angle DBC=\angle CDB$ бўлади. $\angle CDB$ $\triangle ABD$ га нисбатан ташқи бурчак, $\angle CDB = \angle A + \angle ABD$, бу ҳолда: $\angle A < \angle CDB = \angle CBD$. Лекин $\angle CBD$ $\angle B$ нинг бир қисми бўлганлигидан, $\angle B > \angle A$ дир. Теорема исбот қилинди.



90- расм.

1- натижа. *Учбурчакнинг кичик бурчаги қаршисида кичик томон ётади.*

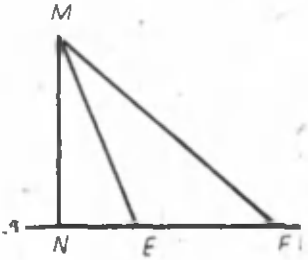
2- натижа. *Учбурчакнинг тенг бурчаклари қаршисида тенг томонлар ётади.* (1 ва 2-натижалар бу ерда исботсиз олинди.)

13- §. ПЕРПЕНДИКУЛЯР ВА ОҒМАЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ

1- теорема. *Бирор нуқтадан тўғри чизиққа ўтказилган перпендикуляр ўша нуқтадан шу тўғри чизиққа ўтказилган ҳар қандай оғмадан кичик.*

Исбот. AB тўғри чизиққа MN перпендикуляр ва ME оғма бўлсин (91-расм). $MN < ME$ бўлишини кўрсатамиз.

$\angle MNA = 90°$ ли бурчак бўлиб, $\triangle MNE$ га нисбатан ташқи бурчакдир, яъни $90° = \angle MNA = \angle NEM + \angle NME$. Бундан биз кўрамизки: $\angle NEM < 90° = \angle MNE$. Шунинг учун, 12- § даги 1- натижага асосан $MN < ME$ бўлади.



91- расм.

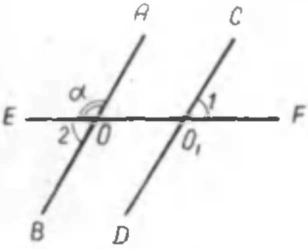
2- теорема. *M нуқтадан AB тўғри чизиққа перпендикуляр ва бир неча оғма ўтказилса, булардан асослари перпендикулярнинг асосидан узоқда бўлгани катта бўлади* (91- расм.)

Исбот. $NF > NE$ бўлсин; $MF > ME$ бўлишини кўрсатамиз. NEM бурчак $\triangle MEF$ га нисбатан ташқи бурчак, яъни $\angle NEM = \angle EFM + \angle EMF$. Бундан, $\angle EFM < \angle NEM$. Аммо, $\angle NEM + \angle MEF = 180°$ (ёйиқ бурчак) ва $\angle NEM < 90°$ (1-теорема исботига қаранг), яъни $\angle MEF > 90°$. Демак, $\angle MEF > \angle MFE$. Шунинг учун 12- § даги 1- натижага асосан MF оғма $> ME$ оғмадан бўлади.

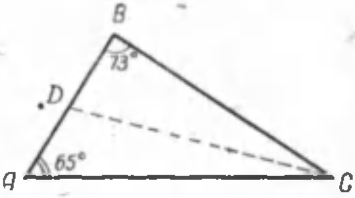
14- §. БАЪЗИ МИСОЛЛАРНИНГ ЕЧИЛИШ НАМУНАЛАРИ

Мисоллар. 1) 92- расмда $\angle 1 = \frac{5}{7}\, d$ ва $\angle 2$ ўзига қўшни бурчакдан $1\frac{4}{5}$ марта кичик. $AB \parallel CD$ экани исбот қилинсин.

Исбот. $\angle 2 + \angle AOE = \angle 2 + \alpha = 2d$ (қўшни бурчаклар йиғиндиси). Шартга кўра: $\angle 2 = \frac{5}{9}\alpha$. Буни ўрнига қўйсак: $\frac{5}{9}\alpha + \alpha = 2d$. Бундан $\alpha = \frac{9}{7}d$. $\angle 2 = \frac{5}{9}\alpha = \frac{5}{9}\cdot\frac{9}{7}d = \frac{5}{7}d$. Демак, $\angle 1 = \angle 2$. Аммо $\angle 2 = \angle AOF$, $\angle DO_1E = \angle 1$; $\alpha = \angle BOF$; $\angle EO_1C = \angle FO_1D$ — қарама-қарши бурчаклардир. Шунинг учун, $AB \parallel CD$ бўлади.



92- расм.



93- расм.

2) $\triangle ABC$ да $\angle A = 65°$, $\angle B = 73°$ берилган. $\angle C$ нинг CD биссектрисаси $\triangle ABC$ ни $\triangle CBD$ ва $\triangle ACD$ ларга бўлади. Шу учбурчакларнинг бурчакларини аниқланг (93- расм).

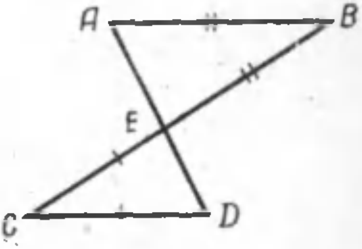
Ечиш. $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ эди. Бундан: $\angle C = 180° - (65° + 73°) = 42°$; $\angle DCB = \angle ACD = \frac{\angle C}{2} = \frac{42°}{2} = 21°$;

$\angle BDC = 180° - (73° + 21°) = 86°$;
$\angle ADC = 180° - (65° + 21°) = 94°$.

Машқлар. 1) $\triangle ABC$ да $\angle A = 48°$; $\angle C = 56°$. B учидан AC томонга туширилган перпендикуляр билан биссектриса орасидаги бурчак топилсин.

(Жавоб. 4°.)

2) 94- расмда, агар $AB = BE$ ва $CD = CE$ бўлса, $AB \parallel CD$ бўлиши исбот қилинсин.



94- расм.

3) Ички бурчакларнинг йиғиндиси 2160° бўлган кўпбурчак томонларининг сони топилсин.

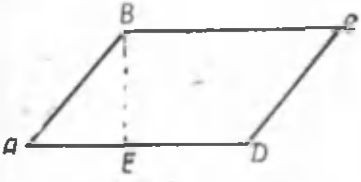
(Жавоб. 14.)

15- §. ТУРТБУРЧАК, ПАРАЛЛЕЛОГРАММ, РОМБ, ТУҒРИ ТЎРТБУРЧАК, ТРАПЕЦИЯ ВА КВАДРАТЛАР ҲАҚИДА ТУШУНЧА

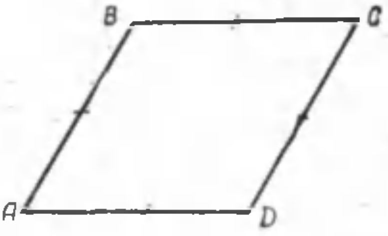
1- таъриф. *Тўртта томонли кўпбурчак тўртбурчак дейилади.*

2- таъриф. *Қарама-қарши томонлари ўзаро параллел бўлган тўртбурчак параллелограмм дейилади* (95- расм).

3- таъриф. *Ҳамма томонлари ўзаро тенг параллелограмм ромб дейилади* (96- расм). $AB = BC = CD = AD$.



95- расм.

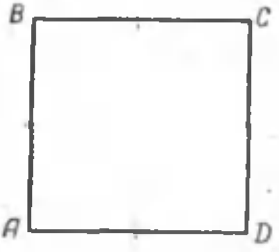


96- расм.

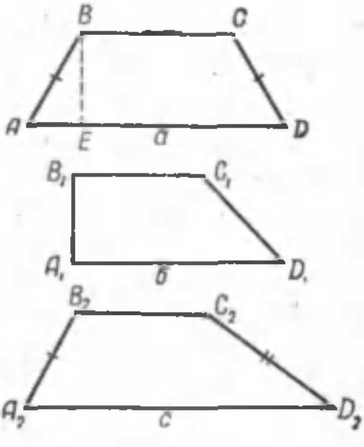
4- таъриф. *Бурчаги 90° бўлган параллелограмм тўғри тўртбурчак дейилади* (97- расм).

$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = d = 90^\circ.$$

97- расм.



98- расм.



99- расм.

5- таъриф. *Томонлари ўзаро тенг тўғри тўртбурчакни квадрат дейилади* (98- расм). $AB = BC = CD = AD$ ва $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$.

6- таъриф. *Икки қарама-қарши томони параллел ва қолган икки томони параллел бўлмаган тўртбурчак трапеция дейилади* (99- расм).

99- *а* расмда $AB = CD$, $BC \parallel AD$ *тенг ёнли* трапеция; 99-*б* ва 99- *с* расмларда $B_1C_1 \parallel A_1D_1$; $A_1B_1 \neq C_1D_1$ ва $B_2C_2 \parallel A_2D_2$,

$A_2B_2 \neq C_2D_2$ лар тенг ёнли булмаган трапециялардир, 99- *б* расмда тўғри бурчакли трапеция тасвир этилган.

Таърифлар. Трапециянинг иккита параллел томони, унинг *асослари* дейилади. Масалан, 99- расмда AD ва BC каби.

Трапециянинг ўзаро параллел бўлмаган икки томони, унинг *ён томонлари* дейилади.

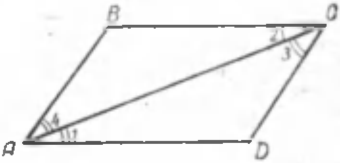
Трапеция ён томонларининг ўрталарини туташтирувчи кесма, унинг *ўрта чизиғи* дейилади.

Трапециянинг асослари орасидаги масофа, унинг *баландлиги* дейилади, масалан, 99- *а* расмда $BE \perp AD$; BE — баландлик.

а) Параллелограммнинг хоссалари

Теорема. *Параллелограммнинг диагонали уни ўзаро тенг иккита учбурчакка бўлади.*

Исбот. $ABCD$ параллелограмм берилган (100- расм); унда: $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$. AC диагональ ўтказамиз ва $\triangle ABC = \triangle ADC$ эканини кўрсатамиз. Расмда кўрсатилгандек, бурчакларни номерласак, у ҳолда $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ (ички алмашинувчи бурчаклар бўлгани учун) ва AC томон умумий, бу ҳолда учбурчакнинг тенглиги ҳақидаги 2- теоремага асосан $\triangle ABC = \triangle ALC$ бўлади. Теорема исбот қилинди.



100- расм.

Натижа. Параллелограммнинг қарама-қарши томонлари ўзаро тенг ва қарама-қарши бурчаклари ҳам ўзаро тенг. Чунки $\triangle ABC = \triangle ADC$ дан: $AB = CD$, $BC = AD$ параллел томонлардир ва

$$\angle B = \angle D, \qquad + \begin{array}{l} \angle 1 = \angle 2 \\ \underline{\angle 4 = \angle 3} \\ \angle 1 + \angle 4 = \angle 2 + \angle 3, \end{array}$$

яъни $\angle A = \angle C$

б) ПАРАЛЛЕЛОГРАММ, ТЎҒРИ ТЎРТБУРЧАК, РОМБ ВА КВАДРАТ ДИАГОНАЛЛАРИНИНГ ХОССАЛАРИ

Теорема. *Тўғри тўртбурчакнинг диагоналлари ўзаро тенг.*

Исбот. $ABCD$ тўғри тўртбурчак берилган. $AC = BD$ бўлишини кўрсатамиз (101- расм).

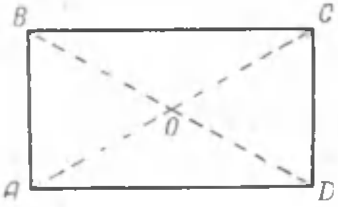
$\triangle BAD = \triangle CDA$, чунки AD — умумий томон, $AB = CD$.
Бундан $AC = BD$ келиб чиқади.

Теорема. *Параллелограммнинг диагоналлари кесишиш нуқтасида бир-бирини тенг икки бўлакка ажратади* (102- расм).

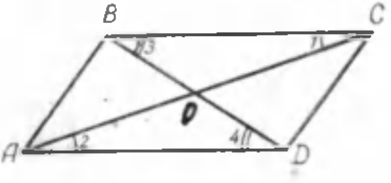
Исбот. $OA = OC$, $OB = OD$ эканини исбот қиламиз.

$\triangle BOC = \triangle AOD$, чунки $\angle 1 = \angle 2$ ва $\angle 3 = \angle 4$ — ички алмашинувчи бурчаклардир, $BC = AD$. $\triangle BOC = \triangle AOD$ дан: $OA = OC$ ва $OB = OD$.

Теорема. *Ромбнинг диагоналлари ўзаро перпендикуляр ва ромбнинг бурчакларини тенг иккига бўлади.*

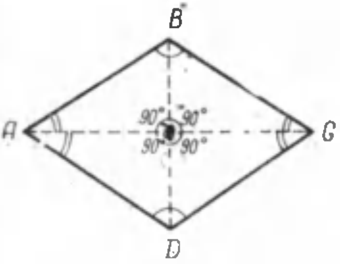


101- расм.



102- расм.

Исбот. $ABCD$ ромб берилган $AC \perp BD$ ва $\angle BCO = \angle DCO$; $\angle BAO = \angle DAO$; $\angle CBO = \angle ABO$ бўлишини кўрсатамиз (103-расм). $\triangle BCD$ ни BD атрофида айлантириб, $\triangle BAD$ устига ётқизсак, ромб тенг томонли параллелограмм бўлгани учун, $OC = OA$ ва $OB = OD$ бўлади. C нуқта A нуқта устига ва CD, CB томонлар AD, AB лар устига жойлашади; демак, $\triangle ABD = \triangle BCD$. Бундан: $\angle CBO = \angle ABO$; $\angle CDO = \angle ADO$ бўлади. Бу учбурчаклар тенг ёнли бўлгани учун OA, OC лар ҳам баландлик, ҳам биссектриса, ҳам медиана бўлади. Демак, $AC \perp BD$; $\angle BCO = \angle DCO$; $\angle BAO = \angle DAO$ бўлади. Теорема исбот қилинди.



103- расм.

Натижа. Квадрат — ҳам параллелограмм, ҳам тўғри тўртбурчак ва ромб бўлгани учун, буларнинг ҳамма хоссаларига эгадир.

16- §. АЙЛАНАГА УРИНМА ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Таъриф. *Айлана билан биргина умумий нуқтага эга бўлган тўғри чизиқ уринма дейилади ва умумий нуқта уриниш нуқта дейилади.*

Теорема. *Айлананинг уриниш нуқтасига тегишли радиус уринмага перпендикулярдир.*

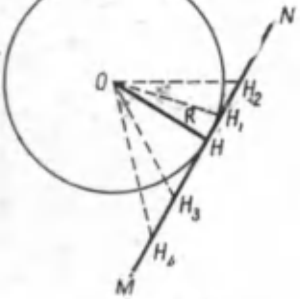
Исбот. MN — айланага H нуқтада уринма бўлсин (104-расм). $R = OH$ нинг MN га перпендикуляр бўлишини исбот қиламиз. MN нинг H дан бошқа ҳамма H_1, H_2, H_3, H_4, ... нуқталари айлана ташқарисида ётганлиги учун $OH_1 > OH$, $OH_2 >$

$> OH$ ва ҳоказо (13- § даги 1- теоремага асосан). Демак, $OH = R$ радиус O билан MN орасидаги энг қисқа масофа. Шунинг учун $OH \perp MN$.

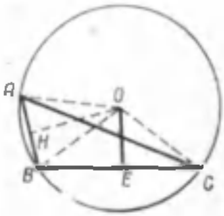
17- §. УЧБУРЧАҚ ВА ТЎРТБУРЧАККА ТАШҚИ ВА ИЧКИ ЧИЗИЛГАН АЙЛАНАЛАР

Теорема. *Ҳар қандай учбурчакнинг учта учи орқали ёлғиз битта айлана ўтказиш мумкин.*

$\triangle ABC$ да H ва E нуқталар AB ва BC томонларнинг ўртаси бўлсин (105- расм). E ва H нуқталардан AB ва BC томонларга ўтказилган перпендикулярлар ёлғиз битта O нуқтада кесишади, шунингдек AC ўртасидан ўтган перпендикуляр ҳам, „O“ нуқтадан ўтади, чунки A, B, C нуқталар бир тўғри чизиқда ётмайди. A, B, C нуқталар O нуқтадан бир хил масофада бўлишини кўрсатиш осон. Демак, O нуқта марказ; $OA = OB = OC$ лар радиуслар бўлади.



104- расм.



105- расм.

1- натижа. *Бир тўғри чизиқда ётмаган уч нуқта орқали ёлғиз битта айлана ўтади.*

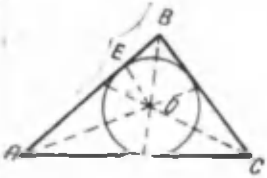
2- натижа. *Учбурчакка ташқи чизилган айлананинг маркази унинг томонлари ўртасига ўтказилган перпендикулярларнинг кесишган нуқтасидадир.*

Теорема. *Ҳар қандай учбурчак ичига айлана чизиш мумкин, ва фақат биргина.*

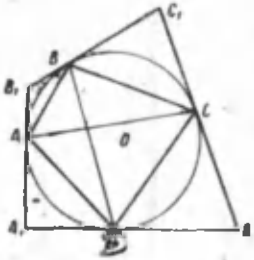
Исбот. $\triangle ABC$ берилган бўлсин (106- расм). Бу учбурчакка ички чизилган айлананинг маркази AB, AC ва BC томонлардан тенг узоқликдаги нуқта бўлиши равшан. Бурчак биссектрисасининг ҳар бир нуқтаси, унинг томонларидан тенг узоқликда туришини биламиз (8- § даги теорема натижаси). Шунинг учун ички чизилган айлананинг маркази учбурчак биссектрисаларининг кесишган O нуқтасида бўлади; марказдан томонларнинг биттасига туширилган перпендикуляр, масалан,

OE унинг радиуси бўлади ($OE = r$). Биссектрисалар ёлғиз битта нуқтада кесишгани учун, бундан бошқа ички чизилган айлана бўлиши мумкин эмас. Теорема исбот қилинди.

Тўртбурчакнинг ҳамма учлари айланада ётса, уни *ички тўртбурчак* (айланани эса *ташқи айлана*); агар унинг ҳар бир томони айланага уринган бўлса *ташқи тўртбурчак* (айланани эса *ички айлана*) дейилади (106- *а* расм).



106- расм.



106- *а* расм.

Ички қавариқ тўртбурчак диагоналларининг кўпайтмаси қарама-қарши томонлари кўпайтмасининг йиғиндисига тенг, яъни $AC\cdot BD = AB\cdot CD + BC\cdot AD$. Бунга, Птоломей теоремаси дейилади.

Изоҳ. 1) Қарама - қарши томонларининг йиғиндиси ўзаро тенг тўртбурчакка ички айлана чизиш мумкин.

2) Қарама-қарши бурчакларининг йиғиндиси 180° бўлган тўртбурчакка ташқи айлана чизиш мумкин.

Масалан, 106- *а* расмдан: $A_1B_1 + C_1D_1 = A_1D_1 + B_1C_1$ ва $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$ бўлиши керак.

18- §. ДОИРАДАГИ БУРЧАКЛАР ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Биз марказий бурчак ўзи тиралган ёй билан ўлчанишини кўриб ўтган эдик, яъни $\angle AOB = \overset{\smile}{AB}$ (107- расм).

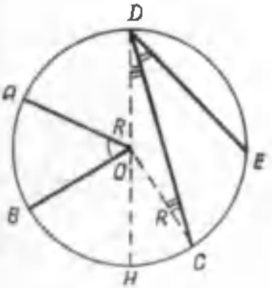
а) Ички чизилган бурчак

Таъриф. *Айланадаги бир нуқтада кесишган икки ватар орасидаги бурчак ички чизилган бурчак дейилади.* Масалан, 107- расмдаги $\angle CDE$ — ички чизилган бурчак.

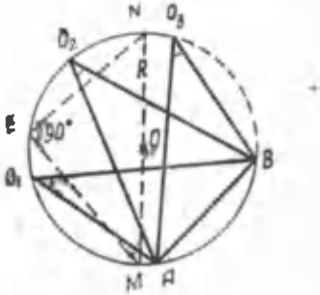
Теорема. *Ички чизилган бурчак ўзи тиралган ёйнинг ярми билан ўлчанади.*

Исбот. $\angle CDE = \frac{\overset{\smile}{CE}}{2}$ бўлишини исбот қиламиз. D дан DH диаметр ўтказиб, O марказни C билан бирлаштирамиз. Бу ҳолда $\angle HOC = \angle ODC + \angle OCD$, чунки у $\triangle COD$ га нисбатан ташқи бурчакдир. $OD = OC = R$ радиус, яъни $\triangle COD$ тенг ёнли бўлгани учун $\angle ODC = \angle OCD$. Демак, $\angle HOC = 2\ \angle ODC$, бундан:

$\angle ODC = \frac{\angle HOC}{2} = \frac{\overset{\frown}{HC}}{2}$ ёки $\angle HDC = \frac{\overset{\frown}{HC}}{2}$. Энди расмдан $\angle CDE = \angle HDE - \angle HDC = \frac{\overset{\frown}{HE}}{2} - \frac{\overset{\frown}{HC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{HE} - \overset{\frown}{HC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{CE}}{2}$. Шунинг учун ҳар қандай ички чизилган бурчак, ўзи тиралган ёйнинг ярми билан ўлчанади.

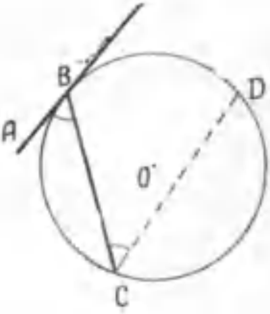


107- расм.



108- расм.

1- натижа. *Бир ёйга тиралган ҳамма ички чизилган бурчаклар ўзаро тенгдир.* 108- расмда $\angle C_1 = \angle C_2 = \angle C_3 = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$.



109- расм:

2- натижа. *Диаметрга тиралган ички чизилган бурчак $d = 90°$ га тенг* (108- расм). $\angle E = 90°$.

3- натижа. *Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси унга чизилган ташқи айлана диаметрига тенг.* $\triangle MEN$ да гипотенуза $MN = 2R = D$ — *диаметрдир.*

б) Уринма билан ватардан тузилган бурчак

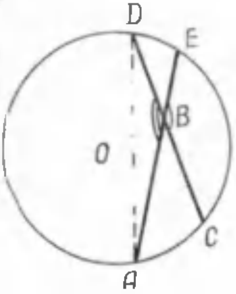
Теорема. *Уринма билан ватардан тузилган бурчак ўз ичига олган ёйнинг ярми билан ўлчанади.*

Исбот. Айланада AB уринма ва BC ватар бўлсин. $\angle ABC = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$ бўлишини исбот қиламиз (109- расм). Бунинг учун C дан $CD \parallel AB$ ни ўтказсак, $\angle ABC = \angle BCD$, чунки улар ички алмашинувчи бурчаклар. Аммо $\angle C = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2}$ ва $CD \parallel AB$ бўлгани учун $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{BC}$ ва $\angle B = \angle C = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$.

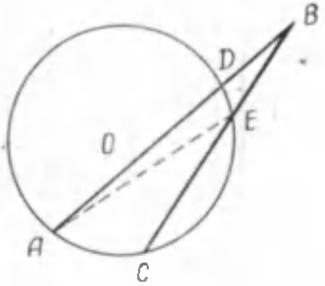
в) Иккита ватарнинг кесишишидан ҳосил бўлган бурчаклар

Теорема. *Ихтиёрий иккита ватарнинг кесишишидан ҳосил бўлган ҳар қайси вертикал бурчак, уларнинг томонлари тиралган ёйлар йиғиндисининг ярми билан ўлчанади.*

Исбот. $\angle ABC$ — CD ва AE ватарларнинг кесишишидан ҳосил бўлган бурчаклардан биттаси бўлсин (110- расм). $\angle ABC = \frac{\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{DE}}{2}$ бўлишини кўрсатамиз. Бунинг учун A ва D нуқталарни бирлаштирамиз, у ҳолда $\angle ABC$ $\triangle ABD$ га нисбатан



110- расм.



111- расм.

ташқи бурчак бўлади. Демак, $\angle ABC = \angle ADC + \angle DAE$. Аммо $\angle ADC = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$, $\angle DAE = \frac{\overset{\frown}{DE}}{2}$. Шунинг учун: $\angle ABC = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} + \frac{\overset{\frown}{DE}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{DE}}{2}$.

г) Айлананинг ташқарисидаги бир нуқтадан унга ўтказилган икки кесувчи орасидаги бурчак

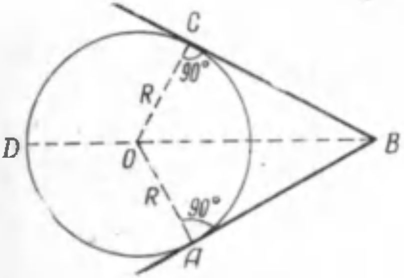
Теорема. *Айлана ташқарисидаги бир нуқтадан унга ўтказилган икки кесувчи орасидаги бурчак (ABC) кесувчилар орасидаги AC ва DE ёйлар айирмасининг ярмига тенг.*

Исбот. B — айлана ташқарисидаги нуқта; AB ва BC кесувчилар бўлсин (111- расм). $\angle B = \frac{\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{DE}}{2}$ бўлишини кўрсатамиз. Бунинг учун A ва E нуқтани бирлаштирамиз. $\angle AEC$ $\triangle AEB$ да ташқи бурчак бўлади. Демак, $\angle AEC = \angle B + \angle DAE$, бундан: $\angle B = \angle AEC - \angle DAE$. Аммо $\angle AEC = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$ ва $\angle DAE = \frac{\overset{\frown}{DE}}{2}$. Буларни ўрнига қўйсак: $\angle B = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} - \frac{\overset{\frown}{DE}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{DE}}{2}$.

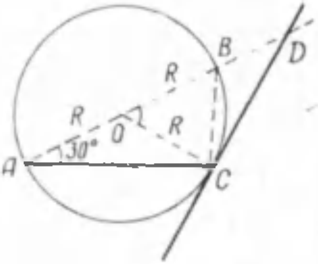
д) Айлана ташқарисидаги бир нуқтадан унга ўтказилган икки уринманинг хоссаси

Теорема. *Айлана ташқарисидаги бир нуқтадан унга иккита уринма ўтказилса, уларнинг ўша нуқтадан уриниш нуқталаргача бўлган кесмалари ўзаро тенг ва айлананинг маркази улар орасидаги бурчак биссектрисасида ётади; бу бурчак 2d билан уринмалар тиралган ёй айирмасига тенг.*

Исбот. BC ва BA лар айланага C ва A нуқталардаги уринмалар ва BD биссектриса бўлсин. $AB = CB$ ва O марказнинг BD да ётишини ҳамда $\angle B = 180° - \overset{\frown}{AC}$ эканини кўрсатамиз (112- расм). OA ва OC радиуслар ўтказилса, $OA \perp BA$ ва $OC \perp BC$ бўлгани учун; $\triangle AOB$ ва $\triangle COB$ лар тўғри бурчакли учбурчаклардир. $\triangle AOB = \triangle COB$, чунки OB гипотенуза умумий, $OA = OC = R$. Учбурчакларнинг тенглигидан: $AB = BC$. Энди $OC = OA = R$ ва $OA \perp BA$; $AB = BC$; $OC \perp BC$ бўлгани учун O марказ доимо BD биссектрисада ётади. Энди, олдин исбот қилинган теоремага асосан:



112- расм.



113- расм.

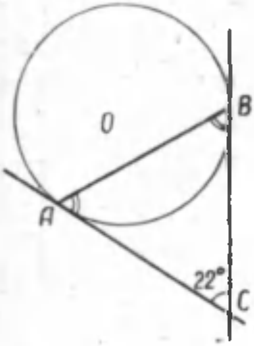
$$\angle B = \frac{\overset{\frown}{ADC} - \overset{\frown}{AC}}{2} = \frac{360° - \overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{CA}}{2} = 180° - \overset{\frown}{AC},$$

демак, $\angle B = 2d - \overset{\frown}{AC}$ бўлади. Теорема исбот қилинди.

1- масала. Маркази O нуқтада бўлган айлананинг AB диаметри билан AC ватари $30°$ ли бурчак ҳосил қилади. C нуқтадан ўтувчи уринма, AB диаметрнинг давомини D нуқтада кесиб ўтади. $OC = \frac{1}{2} OD$ экани исбот қилинсин (113- расм).

Исбот. OC радиус CD уринмага перпендикуляр, демак, OCD тўғри бурчакли учбурчак. Шартга кўра: $\angle A = 30°$; $\angle A = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = 30°$ (ички чизилган бурчак). Бундан $\overset{\frown}{BC} = 60°$, аммо $\angle BOC = \overset{\frown}{BC}$ — марказий бурчак; демак, $\angle BOC = 60°$. Бу ҳолда $\triangle OCD$ да $\angle D = 30°$. Лекин, 30° бурчак қаршисидаги катет гипотенузанинг ярмига тенг эди. Шунинг учун $OC = \frac{1}{2} OD$ бўлади.

2- масала. Айлана ташқарисидаги ихтиёрий бир C нуқтадан унга туширилган икки CA ва CB уринма орасидаги бурчак 22° га тенг. Уриниш нуқталарини бирлаштирган AB ватар билан шу уринмалар орасидаги бурчаклар топилсин (114- расм).



114- расм.

$\angle C = 22°$; $\angle B = \angle A$ ни топамиз.

Ечиш. $\angle A = \angle B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$ (уринма ва ватардан тузилган бурчак), $\angle A + \angle B = 180° - \angle C = 180° - 22° = 158°$.

$2\angle A = 158°$; $\angle A = \frac{158°}{2} = 79°$, демак, $\angle A = \angle B = 79°$.

Машқлар. 1) Айланани 3:5 нисбатда бўлувчи ватарнинг бирор учидан ўтказилган диаметр билан ташкил этган бурчак топилсин.

(Жавоб. 22°30′.)

2) 52° ли марказий бурчак ташкил этган икки радиуснинг учларига ўтказилган уринмалар орасидаги бурчак топилсин.

(Жавоб. 128°.)

3) A, B, C нуқталар айланани 11:3:4 нисбатдаги ёйларга бўлади. A, B ва C нуқталар орқали уринмалар ўтказиб, бир-бири билан кесишгунча давом эттирилган. Ҳосил бўлган учбурчакнинг бурчакларини топинг.

(Жавоб. 40°; 60° ва 80°.)

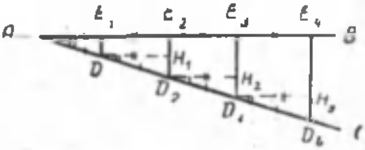
19- §. БУРЧАК ТОМОНЛАРИДАН ПАРАЛЛЕЛ ЧИЗИҚЛАР БИЛАН АЖРАТИЛГАН КЕСМАЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ

Теорема. *Агар бурчакнинг учидан бошлаб унинг бир томонида тенг кесмалар олиб, уларнинг охирларидан, иккинчи томони билан кесишгунча параллел кесмалар ўтказсак, унда бурчакнинг иккинчи томонида ҳам ўзаро тенг кесмалар ажралади.*

Ихтиёрий BAC бурчакнинг (115- расм) A учидан бошлаб, AC томонда ихтиёрий тенг кесмалар, масалан, 4 та кесма: $AD_1 = D_1D_2 = D_2D_3 = D_3D_4$ оламиз ва D_1, D_2, D_3, D_4 нуқталардан AB билан кесишгунча $D_1E_1 \parallel D_2E_2 \parallel D_3E_3 \parallel D_4E_4$ кесмаларни ўтказамиз.

Энди ҳосил бўлган AE_1, E_1E_2, E_2E_3, E_3E_4 кесмаларнинг ўзаро тенглигини исбот қиламиз. Бунинг учун AB га параллел қилиб, D_1H_1, D_2H_2, D_3H_3 кесмаларни ўтказсак, ҳар хил параллелограммлар ва ўзаро тенг учбурчаклар, яъни $\triangle AE_1D_1 = \triangle D_1H_1D_2 = \triangle D_2H_2D_3 = \triangle D_3H_3D_4$ ҳосил бўлади. Булардан: $AE_1 = E_1E_2 = E_2E_3 = E_3E_4$ деб ёзиш мумкин. Теорема исбот қилинди.

Исбот қилинган теоремага асосланиб, қуйидаги натижаларни ҳосил қиламиз.



115- расм.

1- натижа. Ихтиёрий кесмани бир неча тенг (масалан, AE_4 кесмани 4 та тенг) бўлакка бўлиш учун, берилган кесмани бурчакнинг бир томони деб қабул қилиб, ихтиёрий бурчак чизиш керак, кейин бурчакнинг чизилган томонини, бурчак учидан бошлаб керагича тенг бўлакларга бўлиб, охирги бўлиниш нуқта билан кесмани қолган учини туташтирувчи кесмага, қолган бўлиниш нуқталар орқали, берилган кесма билан кесишгунча параллел кесмалар ўтказилса кифоя.

2- натижа. *Учбурчакнинг ўрта чизиғи унинг асосининг ярмига тенг* (115- расм). Буни кўрсатиш учун E_2AD_2 учбурчакни олиб текширамиз: бунда $AD_1 = D_1D_2$ (шартга кўра); $AE_1 = E_1E_2$ (исбот қилинганига кўра), бу ҳолда учбурчак ўрта чизиғи таърифига асосан D_1E_1 кесма, $\triangle E_2AD_2$ учун ўрта чизиқдир ва D_2E_2 унинг асоси бўлади. Лекин, $D_1E_1 \parallel D_2E_2$ (олинишига кўра). Демак, учбурчак ўрта чизиғи асосига параллел бўлади. Энди $D_1E_1 = E_2H_1$ (параллелограмм хоссасига кура); $D_1E_1 = D_2H_1$ (исбот қилинганига кўра). Демак, асоси $D_2E_2 = D_2H_1 + H_1E_2 = D_1E_1 + D_1E_1 = 2D_1E_1$, бундан $D_1E_1 = \frac{D_2E_2}{2}$ бўлади.

3- натижа. *Трапециянинг урта чизиғи унинг асослари йиғиндисининг ярмига тенг* (115- расм). Буни исбот қилиш учун $D_1E_1E_3D_3$ трапецияни олиб текширамиз: $D_1D_2 = D_2D_3$ (шартга кўра); $E_1E_2 = E_2E_3$ (исбот қилинганига кўра), демак, трапеция ўрта чизиғи таърифига кўра, бу трапеция учун D_2E_2 кесма ўрта чизиқ бўлади. Лекин, шартга кўра $D_1E_1 \parallel D_2E_2 \parallel D_3E_3$ эди. Демак, *трапециянинг ўрта чизиғи унинг асосларига параллел бўлади.* Энди 115- расмга ва исбот қилинганларга асосан:

$$D_1E_1 = \frac{1}{2} D_2E_2$$

ва

$$D_3E_3 = D_3H_2 + H_2E_3 = D_1E_1 + D_2E_2 = \frac{1}{2} D_2E_2 + D_2E_2 = \frac{3}{2} D_2E_2.$$

Буларни ҳадлаб қўшсак:

$$D_1E_1 + D_3E_3 = \frac{1}{2}D_2E_2 + \frac{3}{2}D_2E_2 = 2D_2E_2,$$

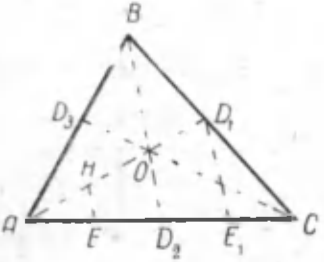
бундан:

$$D_2E_2 = \frac{D_1E_1 + D_3E_3}{2}.$$

20- §. МЕДИАНАЛАРНИНГ БУЛАГИ ҲАҚИДА ТЕОРЕМА

Теорема. *Ҳар қандай учбурчакда медианаларнинг кесишган нуқтасидан мос томонгача булган қисми, бутун медиананинг учдан бир бўлагига тенг.*

Исбот. $\triangle ABC$ да AD_1, BD_2, CD_3 — медианалар ва O улар кесишган нуқта бўлсин (116- расм).

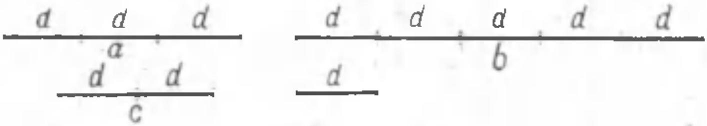


116- расм.

$\angle D_1AC$ дан фойдаланиб, AD_1 ни тенг уч бўлакка бўламиз. Бунинг учун AC да $AE = \frac{AD_2}{2} = D_2E_1 = \frac{D_2C}{2}$ ларни олиб, $EH \parallel OD_2 \parallel E_1D_1$ лар ўтказилса, $AH = HO = OD_1$ ҳосил бўлади (19- § га қаранг). Демак, $AD_1 = AH + HO + OD_1 = 3OD_1$, бундан, $OD_1 = \frac{1}{3}AD_1$ бўлади. Шунга ўхшаш: $OD_2 = \frac{1}{3}BD_2; OD_2 = \frac{1}{3}CD_3$.

21- §. УМУМИЙ ЎЛЧОВЛИ ВА УМУМИЙ ЎЛЧОВСИЗ КЕСМАЛАР ҲАҚИДА ТУШУНЧА

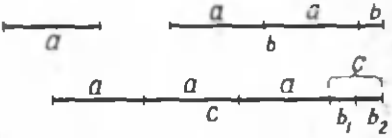
Таъриф. *Икки кесманинг ҳар бирига бутун марта жойлашадиган учинчи кесма — бу икки кесманинг умумий ўлчови дейилади.* Масалан, AB ва CD икки кесмага EF кесма мос равишда 4 ва 3 марта жойлашсин, у ҳолда EF кесма — AB ва CD кесмаларнинг умумий ўлчови бўлади



117- расм.

Таъриф. *Бир неча кесмаларнинг энг катта умумий ўлчови деб, уларнинг ҳар бирида бутун марта жойлашадиган энг катта кесмага айтилади.* Масалан, 1) d кесма: a кесмада 3 марта, b кесмада 5 марта ва c кесмада 2 марта жойлашсин (117- расм). Демак, d кесма — a, b, c кесмаларнинг энг катта умумий ўлчовидир.

2) $a < b < c$ кесмалар 118- расмдагидек берилган бўлсин. Берилган a, b, c кесмаларга умумий ўлчов топиш учун, дастлаб a ни b га қўйганда 2 бутун марта ётиб, b_1 қолдиқ; c га қўйганда 3 марта ётиб, c_1 қолдиқ қолсин ва $b_1 < c_1$ бўлсин. Энди b_1 ни c_1 га қўйсак 2 бутун марта; a га қўйганда 3 бутун марта ётсин. Бу ҳолда, $c_1 = 2b_1$; $a = 3b_1$; $b = 2a + b_1 = 2 \cdot 3b_1 + b_1 = 7b_1$ ва $c = 3a + c_1 = 3 \cdot 3b_1 + 2b_1 = 11\ b_1$ бўлади. Демак, b_1 кесма берилган a, b, c кесмаларнинг энг катта умумий ўлчовидир. Икки ёки ундан кўп кесмалар бир умумий ўлчовга эга бўлса, уларни умумий *ўлчовли*, акс ҳолда умумий *улчовсиз кесмалар* деб аталади.



118- расм.

22- §. КЕСМАЛАРНИНГ НИСБАТИ ВА ПРОПОРЦИОНАЛ КЕСМАЛАР

а) Кесмаларнинг нисбати

Таъриф. *Икки кесманинг нисбати деб, кесмалар бир исмли бирликлар билан улчанганда, улардан бири иккинчисидан неча марта катта ёки кичиклигини кўрсатувчи исмсиз сонга айтилади.* Масалан, кесма $a = 12$ *м* ва кесма $b = 3$ *м* берилган бўлсин. Кесмаларнинг нисбати бўлинма (каср) шаклида ифодаланади:

$$\frac{a}{b} = \frac{12\ м}{3\ м} = 4 \ \text{нисбат}; \quad \frac{b}{a} = \frac{3\ м}{12\ м} = \frac{1}{4} \ \text{нисбат}.$$

1- изоҳ. Агар кесмалар ҳар хил исмли бўлса, уларни бир хил исмга келтириб, сўнгра нисбат олиш керак. Масалан, кесма $a = 1{,}5$ *м* ва кесма $b = 5$ *дм* берилган.

$$a = 1{,}5\ м = 15\ дм; \ \frac{a}{b} = \frac{15\ дм}{5\ дм} = 3 \ \text{нисбат}.$$

2- изоҳ. $\frac{a}{b}$ нисбатда, a — нисбатнинг *олдинги ҳади*, b — *кейинги ҳади* дейилади.

б) Пропорционал кесмалар

Таъриф. *Нисбатлари ўзаро тенг 4 та кесма пропорционал кесмалар дейилади.* Масалан, 4 та кесма: $a = 8$ *см*, $b = 12$ *см*, $c = 4$ *см*, $d = 6$ *см* берилган бўлсин. Улардан:

$$\frac{a}{b} = \frac{8\ см}{12\ см} = \frac{2}{3} \ \text{ва} \ \frac{c}{d} = \frac{4\ см}{6\ см} = \frac{2}{3}.$$

Демак, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *геометриядаги пропорция* дейилади. У ҳолда a, b, c, d кесмалар *пропорционал кесмалар* дейилади.

Геометриядаги нисбат ва пропорция ҳам, арифметикадаги нисбат ва пропорциянинг ҳамма хоссаларига эгадир, чунки a, b, c, d лар кесмаларнинг узунликларини ифода қилувчи сонлар ҳамдир. Шунинг учун $\frac{a}{x} = \frac{c}{b}$ дан: $x = \frac{a \cdot b}{c}$; $\frac{a}{x} = \frac{b}{a}$ дан: $x = \frac{a^2}{b}$ ва $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ дан: $x = \sqrt{ab}$ деб ёзиш мумкин.

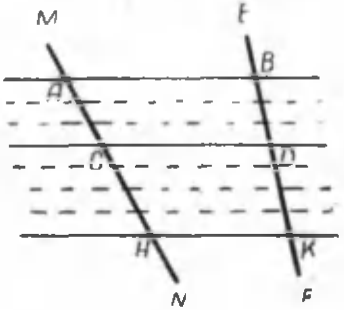
Геометриядаги пропорциянинг хоссалари

Тўртта a, b, c, d кесмалар берилган бўлиб, улар орасида $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ пропорция мавжуд бўлсин, бу пропорция қуйидаги хоссаларга эга:

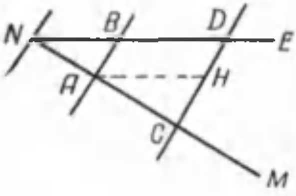
$$1)\ \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ ёки } \frac{b}{a} = \frac{d}{c};\quad 2)\ \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \text{ ёки } \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d};$$

$$3)\ \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c} \text{ ёки } \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c};\quad 4)\ \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

4- хоссага асосланиб, бир неча тенг нисбатлар: $\frac{MN}{M_1N_1} = \frac{EF}{E_1F_1} = \ldots = \frac{HS}{H_1S_1}$ берилганда, $\frac{MN}{M_1N_1} = \frac{EF}{E_1F_1} = \ldots = \frac{HS}{H_1S_1} = \frac{MN + EF + \ldots + HS}{M_1N_1 + E_1F_1 + \ldots + H_1S_1}$ деб ёза оламиз. Демак, бир неча тенг нисбатлар берилганда, уларнинг олдинги ҳадлари йиғиндисини кейинги ҳадлари йиғиндисига бўлган нисбати берилган нисбатларнинг ҳар бирига тенгдир.



119- расм.



119- *а* расм.

Теорема. *Агар икки тўғри чизиқ бир-бирига параллел учта чизиқ билан кесилса, у ҳолда биринчи тўғри чизиқда ҳосил бўлган икки кесманинг нисбати иккинчи тўғри чизиқда ҳосил бўлган иккита мос кесманинг нисбатига тенг* (119- расм).

Исбот. Иккита MN ва EF тўғри чизиқ, учта $AB \parallel CD \parallel HK$ тўғри чизиқлар билан кесилган бўлсин, AC нинг узунлиги p, CH нинг узунлиги q бўлсин. Масалан, $p=3$, $q=4$ бўлсин. Бу ҳолда AC ни тенг уч, CH ни тенг 4 бўлакка бўлиб, бўлиниш нуқталари орқали AB, CD ва HK ларга параллел чизиқлар ўтказамиз. У вақтда EF да ҳам бир-бирига тенг кесмалар ажралади (бурчак томонларини тенг бўлакларга бўлиш теоремасига асосан), лекин бундай кесмалар BD да 3 та, DK да 4 та бўлади. Демак, $\frac{AC}{CH}=\frac{3}{4}$ ва $\frac{BD}{DK}=\frac{3}{4}$ бўлгани учун, $\frac{AC}{CH}=\frac{BD}{DK}$. Шунинг учун, AC, CH, DK, BD лар пропорционал кесмалардир. Шунга ўхшаш $\frac{AH}{CH}=\frac{7}{4}$ ва $\frac{BK}{DK}=\frac{7}{4}$, демак, $\frac{AH}{CH}=\frac{BK}{DK}$.

1-изоҳ. p, q ларнинг ҳар қандай бутун қийматлари учун бу теорема тўғридир.

2-изоҳ. p, q лар берилган ўлчов бирликларида бутун сонлар билан ифода қилинмаса, унда шундай майда бирлик олиш керакки, у AC, CH ларга умумий ўлчов бўла олсин.

3-изоҳ. Кесувчи параллел тўғри чизиқларнинг биттаси берилган чизиқларнинг кесишиш нуқтасидан ўтган ҳолда ҳам исбот қилинган теорема тўғридир (119- a расм). Исбот қилинган теоремага асосан

$$\frac{NA}{AC}=\frac{NB}{BD} \text{ ва } \frac{NC}{AN}=\frac{ND}{BN};\ \frac{AB}{CD}=\frac{AN}{CN}.$$

ва ҳоказо бўлади ($AB \parallel CD$ ва $AH \parallel NE$).

Пропорция хоссасига асосан:

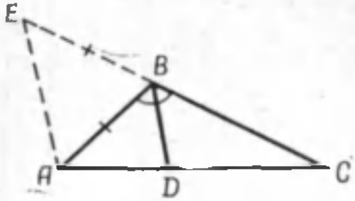
$$\frac{NA+AC}{NA}=\frac{NB+BD}{NB} \text{ ёки } \frac{NC}{NA}=\frac{ND}{NB}.$$

Натижа. *Бурчак томонларини бир неча параллел чизиқлар билан кесганда, улар пропорционал бўлакларга ажралади.*

23-§. УЧБУРЧАК ИЧКИ БУРЧАГИ БИССЕКТРИСАСИНИНГ ХОССАСИ

Теорема. *Учбурчак ички бурчагининг биссектрисаси, шу бурчак қаршисидаги томонни қолган икки томон билан пропорционал бўлакларга бўлади.*

Исбот. $\triangle ABC$ да BD биссектриса бўлсин ($\angle ABD = \angle CBD$, 120- расм). $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC}$ эканини кўрсатамиз. A дан BC нинг давоми билан кесишган $AE \parallel BD$ ни ўтказамиз. Энди $\angle C$ нинг томонлари $AE \parallel BD$ лар билан кесилган деб қарасак,



120- расм.

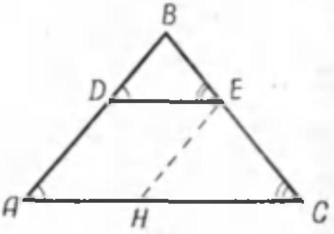
$\frac{EB}{BC} = \frac{AD}{DC}$ бўлади (22- § га қаранг). Энди $EB = AB$ эканлиги кўрсатилса кифоя. Расмдан: $\angle ABD = \angle BAE$ (ички алмашинувчи бурчаклар), $\angle CBD = \angle BEA$ (мос бурчаклар). Демак, $\triangle ABE$ тенг ёнли, яъни $EB = AB$. Буни урнига қуйсак, $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$ булади.

24- §. УЧБУРЧАК ВА КЎПБУРЧАКЛАРНИНГ ЎХШАШЛИГИ ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Иккита учбурчакдан бирининг бурчаклари иккинчисининг бурчакларига мос равишда тенг бўлса, унинг тенг бурчаклари қаршисидаги томонлар уларнинг *ўхшаш томонлари* дейилади.

Таъриф. *Иккита учбурчакдан бирининг бурчаклари иккинчисининг бурчакларига мос равишда тенг ва уларнинг ўхшаш томонлари пропорционал булса, бу учбурчаклар ўхшаш учбурчаклар дейилади.*

Теорема. *Ҳар қандай учбурчакнинг бирор томонига параллел қилиб ўтказилган тўғри чизиқ шу учбурчакдан унга ўхшаш учбурчак ажратади.*



121- расм.

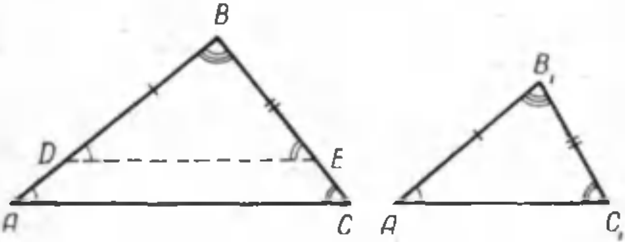
Исбот. Ихтиёрий $\triangle ABC$ нинг AC томонига параллел қилиб DE кесмани ўтказамиз (121- расм). $\triangle DBE \sim \triangle ABC$ эканини исбот қиламиз. $\triangle DBE$ ва $\triangle ABC$ да: $\angle BED = \angle C$; $\angle BDE = \angle A$ мос бурчаклар; $\angle B$ — умумий. E дан $EH \parallel AB$ ни ўтказамиз; бунда $DE = AH$. Энди, $\angle B$ нинг томонларини $DE \parallel AC$; $\angle C$ нинг томонларини $EH \parallel AB$ томонлар кесиб ўтган деб қаралса, у ҳолда 23- § даги 3- изоҳга асосан $\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{BE} = \frac{AC}{DE}$ булади. Демак, $\triangle DBE$ ва $\triangle ABC$ ларнинг мос бурчаклари тенг ва ўхшаш томонлари пропорционал бўлгани учун, таърифга кўра улар ўхшаш учбурчаклардир, яъни $\triangle DBE \sim \triangle ABC$. Теорема исбот қилинди.

а) *Учбурчаклар ўхшашлигининг уч аломати*

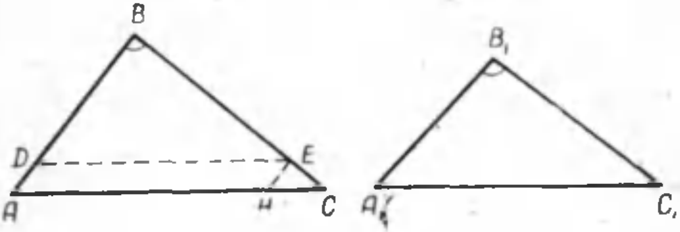
Теорема. *Агар ҳар қандай икки учбурчакдан:* 1) *бирининг икки бурчаги иккинчисининг икки бурчагига мос равишда тенг бўлса, ёки* 2) *бирининг икки томони иккинчисининг икки томонига пропорционал ва улар орасидаги бур-*

чаклари тенг бўлса, ёки 3) *бирининг уч томони иккинчисининг уч томонига пропорционал бўлса, бундай учбурчаклар ўхшашдир.*

Исбот. 1) $\triangle ABC$ ва $\triangle A_1B_1C_1$ да $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$ бўлсин. $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ (122- расм) эканини исбот қиламиз. B дан бошлаб BA да $BD = A_1B_1$ ни оламиз. $DE \parallel AC$ ни ўтказиб $\triangle ABC \backsim \triangle DBE$ ни ҳосил қиламиз. Бу ҳолда $\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{BE} = \frac{AC}{DE}$ бўлади. Энди $\triangle DBE = \triangle A_1B_1C_1$, чунки $\angle D = \angle A = \angle A_1$, $\angle E = \angle C = \angle C_1$ бўлгани учун $\angle B = \angle B_1$ ва олинишга кўра $BD = A_1B_1$. Бу учбурчакларнинг тенглигидан: $DE = A_1C_1$ ва $BE = B_1C_1$. Буларга асосан $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_2C_1}$ бўлади. Демак, таърифга кўра $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.



122- расм.



123- расм.

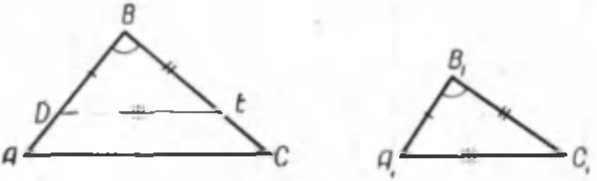
2) $\triangle ABC$ ва $\triangle A_1B_1C_1$ да: $\angle B = \angle B_1$ ва $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ бўлсин. $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ эканини (123- расм) исбот қиламиз

$\angle B_1 = \angle B$ бўлгани учун, BA да $BD = B_1A_1$ ва BC да $BE = B_1C_1$ ларни оламиз ва D ни E билан бирлаштирсак $\triangle DBE = \triangle A_1B_1C_1$ ҳосил бўлади (учбурчаклар тенглигининг 1- аломати). Энди $DE \parallel AC$ эканлиги кўрсатилса кифоя. $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ эди. Лекин $B_1C_1 = BE$, $A_1B_1 = BD$ эди. Бунга кўра

$\frac{AB}{BD}=\frac{BC}{BE}$ бўлади. Демак, бурчак томонларини пропорционал бўлакларга бўлишнинг исбот қилинган теоремасига асосан $DE \parallel AC$ бўлади. Учбурчакнинг бирор томонига параллел кесманинг хоссасига мувофиқ $\triangle ABC \backsim \triangle DBE - \triangle A_1B_1C_1$.

3) $\triangle ABC$ ва $\triangle A_1B_1C_1$ да $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$ бўлсин.

$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ (124- расм) эканини исбот қиламиз.



124- расм.

BA да $BD = A_1B_1$ ни олиб $DE \parallel AC$ ни ўтказсак: $\frac{AB}{BD}=\frac{BC}{BE}=\frac{AC}{DE}$ бўлади. Энди $\triangle DBE = \triangle A_1B_1C_1$ эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун $\frac{AB}{BD}=\frac{BC}{BE}$ ва $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$ ларни солиштирамиз. $BD = A_1B_1$ (олинишга кўра), $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{BE}=\frac{BC}{B_1C_1}$, бундан: $BE = B_1C_1$. Шунга ўхшаш $DE = A_1C_1$. Демак, $BD = A_1B_1$, $BE = B_1C_1$, $DE = A_1C_1$ бўлгани учун, $\triangle DBE = \triangle A_1B_1C_1$. Бу ҳолда $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

б) Ўхшаш кўпбурчаклар

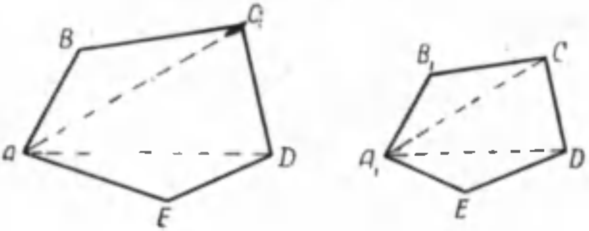
1- таъриф. *Бурчаклари (томонлари) нинг сони тенг бўлган кўпбурчаклар бир исмли кўпбурчаклар дейилади.*

2- таъриф. *Иккита бир исмли кўпбурчакда бирининг бурчаклари иккинчисининг бурчакларига мос равишда тенг ва тенг бурчакларни ўз ораларига олган томонлари пропорционал бўлса, бундай иккита кўпбурчак ўхшаш кўпбурчаклар деб аталади.* Масалан, $ABCDE$ кўпбурчак $\backsim A_1B_1C_1D_1E_1$ кўпбурчак бўлиши учун: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\angle D = \angle D_1$, $\angle E = \angle E_1$ ва $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}= \ldots =\frac{EA}{E_1A_1}$ бўлиши керак (125- расм).

Теорема. *Иккита ўхшаш кўпбурчакдаги ихтиёрий иккита мос бурчаклари учларидан ўтказилган диагоналлар бу кўпбурчакларни бир хил сонда ўхшаш учбурчакларга ажратади.*

Исбот. $ABCDE$ билан $A_1B_1C_1D_1E_1$ кўпбурчаклар ўхшаш бўлсин. Ўхшаш кўпбурчакларнинг A ва A_1 учидан ўтказилган диагоналлар уни $\triangle ABC$, $\triangle ACD$, $\triangle ADE$ ва $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_1 C_1D_1$,

$\triangle A_1D_1E_1$ ларга ажратади. $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, $\triangle ACD \backsim \triangle A_1C_1D_1$, $\triangle ADE \backsim \triangle A_1D_1E_1$ эканини исбот қиламиз. $\triangle ABC$ ва $\triangle A_1B_1C_1$ ларда $\angle B = \angle B_1$ ва $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_2C_1}$ (таърифга кўра) бўлгани учун, $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$. Шунга ўхшаш: $\triangle ADE \backsim \triangle A_1D_1E_1$, чунки $\angle E = \angle E_1$ ва $\frac{AE}{A_1E_1} = \frac{ED}{E_1D_1}$; $\triangle ACD \backsim \triangle A_1C_1D_1$, чунки $\angle ADC = \angle A_1D_1C_1$, $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$.



125- расм.

Теорема. *Ўхшаш кўпбурчаклар периметрларининг нисбати ўхшаш томонларининг нисбатига тенг.*

Исбот. $ABCDE \backsim A_1B_1C_1D_1E_1$ бўлсин (125- расм). Таърифга кўра $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{EA}{E_1A_1}$ эди. Бу тенг нисбатлар булгани учун, $\frac{AB + BC + CD + DE + EA}{A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1E_1 + E_1A_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \ldots = \frac{EA}{E_1A_1}$ бўлади.

25- §. ТЎҒРИ БУРЧАКЛИ УЧБУРЧАК ЭЛЕМЕНТЛАРИ ОРАСИДАГИ МЕТРИК МУНОСАБАТЛАР

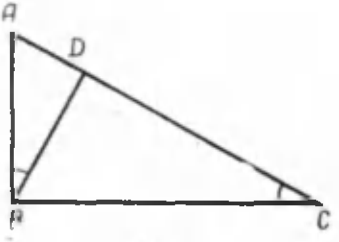
Теорема. *Тўғри бурчакли учбурчакнинг тўғри бурчаги учидан гипотенузасига туширилган перпендикуляр гипотенузанинг бўлаклари орасида ўрта пропорционал миқдордир; ҳар бир катет эса гипотенуза билан унинг шу катетга ёпишган кесмаси орасида ўрта пропорционалдир.*

Исбот. $\triangle ABC$ берилган бўлиб, унда $\angle B = 90^\circ$ ва $BD \perp AC$ бўлсин (126- расм). $\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{DC}$, $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$, $\frac{DC}{BC} = \frac{BC}{AC}$ эканини исбот қиламиз. $BD \perp AC$, $AB \perp BC$ бўлгани учун; $\angle C = \angle ABD$. Демак, $\triangle ABD \backsim \triangle BCD$, бундан, $\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{DC}$ бўлади. Шунга ўхшаш $\triangle ABD \backsim \triangle ACB$ бўлгани учун $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$ дир; $\triangle BDC \backsim \triangle ABC$ бўлгани учун $\frac{DC}{BC} = \frac{BC}{AC}$.

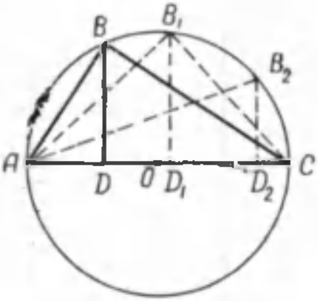
Натижа. *Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси унга ташқи чизилган айлананинг диаметридан иборат бўлгани учун, айлананинг исталган нуқтасидан диаметрга туширилган перпендикуляр диаметрнинг бўлаклари орасида ўрта пропорционалдир,* яъни

$$\frac{AD}{BD}=\frac{BD}{DC};\ \frac{AD_1}{B_1D_1}=\frac{B_1D_1}{D_1C};\ \frac{AD_2}{B_2D_2}=\frac{B_2D_2}{D_2C}$$

ва ҳоказо (127- расм).



126- расм.



127- расм.

26- §. ПИФАГОР ТЕОРЕМАСИ[1]

Теорема. *Томонлари бир хил бирлик билан ўлчанганда, тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси узунлигининг квадрати, унинг катетлар узунликлари квадратларининг йиғиндисига тенг.*

Исбот. $\triangle ABC$ да AB — гипотенуза; AC, BC лар катетлар бўлсин (128- расм). $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ деб белгилаймиз. $c^2 = a^2 + b^2$ эканини исбот қиламиз. Бунинг учун $CD \perp AB$ ни тушириб, ҳосил бўлган учбурчакларнинг ўхшашлигидан фойдаланамиз. $\triangle ACD \backsim \triangle ACB$ бўлгани учун $\frac{AD}{b}=\frac{b}{c}$, бундан $AD=\frac{b^2}{c}$; $\triangle CBD \backsim \triangle ACB$ бўлгани учун $\frac{DB}{a}=\frac{a}{c}$, бундан $DB=\frac{a^2}{c}$. Энди буларни ҳадлаб қўшамиз: $c = AD + DB = \frac{b^2}{c}+\frac{a^2}{c}=\frac{b^2+a^2}{c}$. Бундан:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2.}$$

---

[1] Пифагорга қадар тўғри бурчакли учбурчак гипотенузасининг квадрати катетлари квадратларининг йиғиндисига тенглиги ҳақидаги теорема шарқда маълум бўлган ва ундан фойдаланганлар. Бу теоремани 25- § га натижа деб қараш ҳам мумкин.

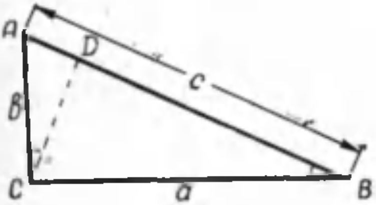
Мисол. Катетлари 3 *дм* ва $3\sqrt{3}$ *дм* бўлган учбурчакнинг гипотенузаси топилсин. Яъни $a = 3$ *дм*, $b = 3\sqrt{3}$ *дм*. c ни топамиз.

Ечиш. $c^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + (3\sqrt{3})^2 = 36$; $c = \sqrt{36} = 6$ *дм*.

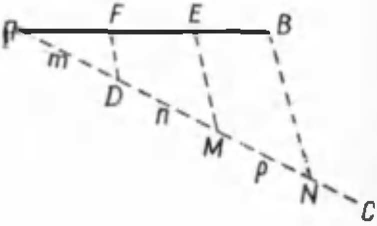
27- §. КЕСМАНИ ПРОПОРЦИОНАЛ БЎЛАКЛАРГА БЎЛИШ ВА ЯСАШГА ДОИР МАСАЛАЛАР

1- масала. AB кесма берилган $m:n:p$ нисбатда учта бўлакка бўлинсин (m, n, p — кесмалар ёки сонлар) (129- расм)

Ечиш. Ихтиёрий $\angle BAC$ ни ҳосил қилиб, AC томонда m, n, p га тенг AD, DM, MN кесмаларни оламиз. Кейин N нуқтани B нуқта билан бирлаштириб, D, M нуқталардан, AB билан кесишадиган, BN га параллел ME ва DF чизиқларни ўтказамиз. Бу ҳолда: $AF:FE:EB = m:n:p$ (22- § га қаранг).

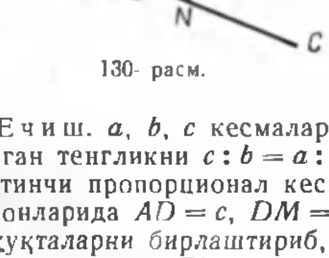


128- расм.

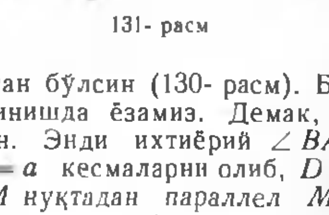


129- расм.

2- масала. $x = \frac{a \cdot b}{c}$ тенгликка кўра x кесма ясалсин.



130- расм.



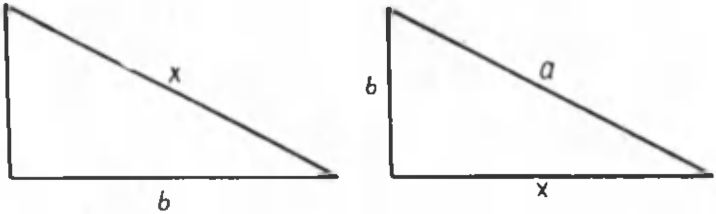
131- расм

Ечиш. a, b, c кесмалар берилган бўлсин (130- расм). Берилган тенгликни $c:b = a:x$ кўринишда ёзамиз. Демак, x тўртинчи пропорционал кесма экан. Энди ихтиёрий $\angle BAC$ томонларида $AD = c$, $DM = b$, $AE = a$ кесмаларни олиб, D ва E нуқталарни бирлаштириб, унга M нуқтадан параллел MN чизиқ ўтказсак, EN кесма, изланган x кесма бўлади.

Топшириқ. Худди шунга ўхшаш усул билан $x = \frac{a^2}{c}$ тенгликдаги x кесма ясалсин.

3- масала. $x = \sqrt{a \cdot b}$ тенгликдаги x кесма ясалсин (131-расм).

Ечиш. $x = \sqrt{a \cdot b}$ ни $x^2 = a \cdot b$ ёки $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ кўринишда ёзсак, гипотенузасининг бўлаклари, a, b кесмалар бўлган учбурчакнинг BD баландлиги изланган x кесма бўлади, чунки у гипотенуза бўлаклари орасида ўрта пропорционал бўлар эди.



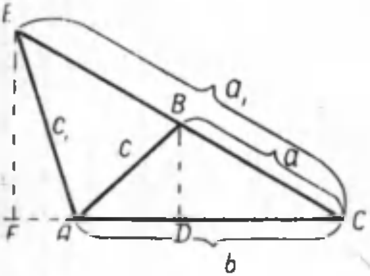
132- расм.

4- масала. $x = \sqrt{a^2 \pm b^2}$ тенгликдан x кесма ясалсин (132-расм).

Ечиш. $x^2 = (\sqrt{a^2 \pm b^2})^2 = a^2 \pm b^2$. Бундан биз кўрамизки, илдиз остида плюс ишора олганда x кесма, катетлари a, b кесмалардан иборат учбурчакнинг гипотенузаси бўлади; минус ишора олганда эса гипотенузаси a ва бир катети b бўлган учбурчакнинг иккинчи катети бўлади.

28- §. УЧБУРЧАКНИНГ ЎТКИР ВА ЎТМАС БУРЧАКЛАРИ ҚАРШИСИДАГИ ТОМОНЛАРИНИНГ ХОССАЛАРИ

Теорема. 1) *Учбурчакнинг ўткир бурчаги қаршисидаги томон квадрати қолган икки томон квадратлари йиғиндиси билан бу икки томондан бирининг ўткир бурчак учидан баландликкача бўлган кесмага кўпайтмасининг иккиланган айирмасига тенг;* 2) *агар бурчак ўтмас бўлса, шундай кўпайтманинг қўшилганига тенг.*



133- расм.

Исбот. 1) $\triangle ABC$ да $\angle BAC < 90°$, $BD \perp AC$ бўлсин (133- расм). $a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot AD$; 2) $\triangle ACE$ учун $a_1^2 = b^2 + c_1^2 - 2b \cdot AF$ бўлишини исбот қиламиз.

$\triangle BDC$ дан: $a^2 = BD^2 + DC^2 = BD^2 + (b - AD)^2 = BD^2 + b^2 - 2b \cdot AD + AD^2$. $\triangle ABD$ дан: $BD^2 = c^2 - AD^2$. Буни ўрнига қўйсак:

$$a^2 = c^2 - AD^2 + b^2 - 2b \cdot AD + AD^2.$$

Демак,

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot AD.}$$

2) $\triangle AEC$ да $90° < \angle EAC < 180°$; $EF \perp AF$ бўлсин (133-расм). $\triangle ECF$ дан: $a_1^2 = EF^2 + FC^2 = EF^2 + (b + AF)^2 = EF^2 + b^2 + 2b \cdot AF + AF^2$. $\triangle EAF$ дан: $EF^2 = c_1^2 - AF^2$. Буни ўрнига қўйсак: $a_1^2 = c_1^2 - AF^2 + b^2 + 2b \cdot AF + AF^2$. Демак,

$$\boxed{a_1^2 = b^2 + c_1^2 + 2b \cdot AF.}$$

29- §. ДОИРАДАГИ ПРОПОРЦИОНАЛ КЕСМАЛАР

1- теорема. *Доирада ҳар қандай икки ватар бир-бири билан кесишса, уларнинг кесмалари кўпайтмаси ўзаро тенг.*

Исбот. AB ва CD ватарлар E нуқтада кесишган бўлсин. $AE \cdot BE = CE \cdot DE$ бўлишини кўрсатамиз (134- расм). Бунинг учун A ва C, D ва B нуқталарни бирлаштириб, $\triangle AEC \backsim \triangle BED$ ни ҳосил қиламиз, чунки $\angle C = \angle B = \frac{AD}{2}$ ва $\angle BED = \angle AEC$ (вертикал бурчаклар). Бу учбурчакларнинг ўхшашлигидан: $\frac{AE}{DE} = \frac{CE}{BE}$, бундан, $AE \cdot BE = DE \cdot CE$ бўлади.

2- теорема. *Агар доира ташқарисидаги бир нуқтадан унга уринма ва кесувчи ўтказилса, уринманинг квадрати кесувчи билан унинг ташқи қисми кўпайтмасига тенг.*

Исбот. AB — уринма, AC — кесувчи бўлсин. $AB^2 = AC \cdot AD$ эканини исбот қиламиз (135- расм). Бунинг учун D,C нуқталарни B нуқта билан бирлаштириб, $\triangle ABC \backsim \triangle ABD$ ҳосил қиламиз, чунки, $\angle DBA = \angle C = \frac{\overset{\smile}{DB}}{2}$ ва $\angle A$ — умумий. Бу учбурчакларнинг ўхшашлигидан: $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$, бундан $AB^2 = AC \cdot AD$ бўлади.

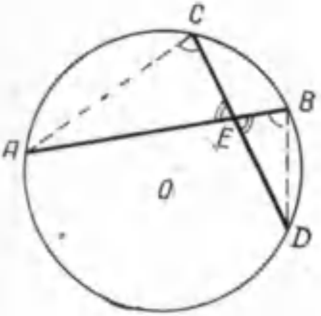
1- масала. Айлананинг бирор нуқтасидан диаметрга туширилган перпендикуляр, диаметрни: а) 24 *см* ва 6 *см*; б) 8 *см* ва 4,5 *см*; в) 6 *дм* ва 15 *см* бўлакларга ажратади. Шу перпендикулярнинг узунлиги топилсин.

Ечиш. $MN \perp AB$; а) $AN = 24$ *см*, $BN = 6$ *см* бўлсин (135- *а* расм). 25- § даги натижага асосан: $\frac{AN}{MN} = \frac{MN}{NB}$ ёки $\frac{24}{MN} =$

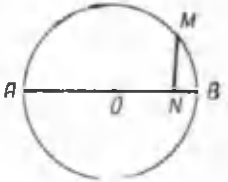
$= \frac{MN}{6}$, бундан: $MN = \sqrt{24\cdot 6} = 12$ *см.* Шунга ўхшаш, б) агар $AN = 8$ *см* ва $NB = 4{,}5$ *см* бўлса, у ҳолда:

$$MN = \sqrt{8\cdot 4{,}5} = \sqrt{36} = 6 \text{ см.}$$

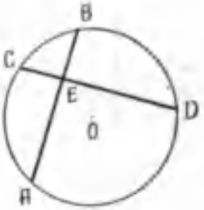
в) $AN = 6$ *дм* ва $NB = 15$ *см* бўлса, у ҳолда: $MN = \sqrt{6\cdot 1{,}5} = \sqrt{9} = 3$ *дм.*



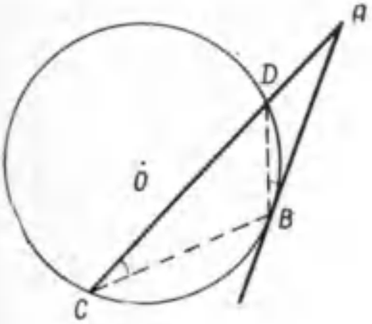
134- расм.



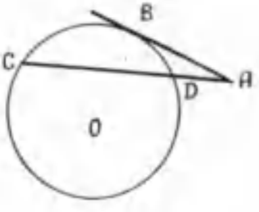
135- *а* расм.



135- *б* расм.



135- расм.



135- *с* расм.

2- масала. Доирадаги иккита кесишган ватардан бирининг бўлаклари 0,4 *м* ва $\frac{5}{6}$ *м*; иккинчи ватар бўлакларининг нисбати 1 : 3 каби. Иккинчи ватар узунлиги топилсин.

Ечиш. $AE = \frac{5}{6}$ *м*, $BE = 0{,}4$ *м* ва $CE : DE = 1 : 3$ бўлсин (135- *б* расм). Бундан: $CE = 1\cdot x$; $DE = 3x$.

29- § даги биринчи теоремага асосан:

$AE\cdot BE = CE\cdot DE$. Бу ҳолда: $\frac{5}{6}\cdot 0{,}4 = x\cdot 3x$ ёки $3x^2 = \frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{3}$. Демак,

$$CD = CE + ED = x + 3x = 4x = 4\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{3}\ м.$$

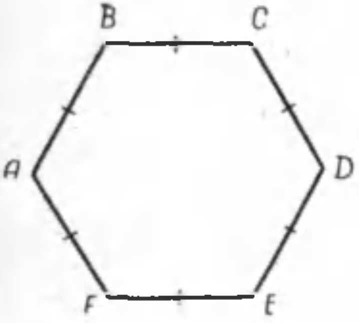
3- масала. Ташқаридаги бир нуқтадан айланага уринма ва кесувчи ўтказилган. Уринманинг узунлиги 20 *см*, кесувчининг айлана ичидаги қисми 30 *см*. Кесувчининг бутун узунлиги топилсин.

Ечиш. $AB = 20$ *см*; $CD = 30$ *см* берилган. AC кесувчини топиш керак (135- *с* расм). 29- § даги 2- теоремага асосан: $AB : AC = AD : AB$ ёки $20 : (AD + 30) = AD : 20$, бундан $AD^2 + 30\ AD = 20\cdot 20$ ёки $AD^2 + 30\ AD - 400 = 0$, бундан $AD = 10$ *см*. Демак, $AC = AD + DC = 10 + 30 = 40$ *см*.

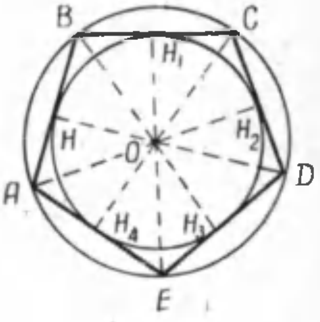
30- §. МУНТАЗАМ КЎПБУРЧАКЛАР ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Таъриф. *Томонлари ўзаро тенг ва бурчаклари ўзаро тенг бўлган кўпбурчак мунтазам кўпбурчак дейилади.*

$ABCDEF$ — мунтазам кўпбурчак бўлсин, яъни: $AB = BC = CD = DE = EF = FA$ ва $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \angle F$ (136- расм).



136- расм.

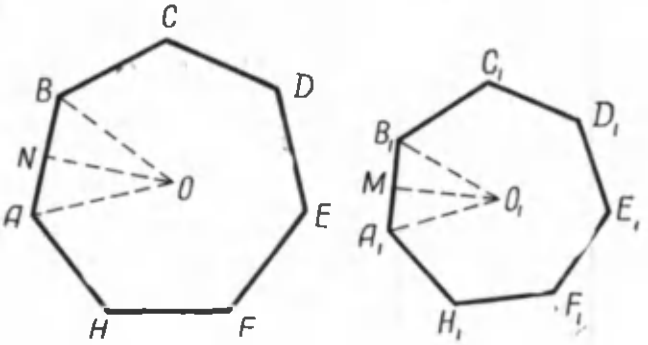


137- расм.

Теорема. *Мунтазам кўпбурчакка ички ва ташқи айланалар чизиш мумкин.*

Исбот. $ABCDE$ — мунтазам кўпбурчак бўлсин (137- расм). Дастлаб бурчаклардан биттаси, масалан $\angle B$ ни олиб, унинг томонлари ўртаси H ва H_1 дан перпендикулярлар ўтказсак, улар бирор O нуқтада кесишади. Агар $\angle C$ нинг томонлари ўртасидан перпендикулярлар ўтказсак, улар ҳам шу O нуқтада кесишганини кўрамиз, чунки $\angle C = \angle B$ ва $AB = BC = CD$. Топилган O нуқтани марказ ва ундан томонларгача бўлган масофани радиус қилиб айлана чизилса, у изланган ички чизилган айлана бўлади. Энди A, B, C, D, E нуқталарни O билан бирлаштирсак: $\triangle AOH = \triangle BOH = \triangle BOH_1 = \ldots$ тенгликлар ҳосил бўлади, чунки $OH = OH_1 = OH_2 = \ldots$ ва $AH = BH = BH_1 = CH_1 = \ldots$ Бу учбурчакларнинг тенглигидан $OA = OB = OC = OD = OE$. Шунинг учун O нуқтани марказ, OA ни радиус қилиб айлана чизсак, у изланган ташқи чизилган айлана бўлади.

Таъриф. *Айлана маркази O мунтазам $ABCDE$ кўпбурчакнинг маркази ва $OH = OH_1 = OH_2 = OH_3 = OH_4$ перпендикулярлар унинг апофемаси дейилади.*



138- расм.

Теорема. 1) *Мунтазам бир исмли икки кўпбурчак ўхшашдир.*

2) *Ўхшаш кўпбурчаклар периметрларининг нисбати, ўхшаш томонларининг нисбати, ички чизилган айлана радиусларининг нисбати ва ташқи айлана радиусларининг нисбати ўзаро тенг.*

Исбот. $ABCDEFH$ ва $A_1B_1C_1D_1E_1F_1H_1$ — бир исмли мунтазам кўпбурчаклар ҳамда O ва O_1 нуқталар уларнинг марказлари бўлсин. ON, O_1M — ички чизилган айлана радиуслари, OA, O_1A_1 — ташқи чизилган айлана радиуслари бўлсин (138-расм). 1) $ABCDEFH \backsim A_1B_1C_1D_1E_1F_1H_1$ ва

2) $\dfrac{AB + BC + CD + \ldots + HA}{A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + \ldots + H_1A_1} = \dfrac{ON}{O_1M} = \dfrac{OA}{O_1A_1}$ бўлишини исбот қиламиз.

1) Қавариқ n томонли кўпбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси $2d(n-2)$ га тенг, бу ҳолда n томонли мунтазам кўпбурчакнинг ҳар бир бурчаги $= \dfrac{2d(n-2)}{n}$ бўлади (бизда $n = 7$), $AB = BC = CD = \ldots = HA$ ва $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = \ldots =$

$=H_1A_1$ бўлгани учун $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\ldots=\frac{HA}{H_1A_1}$. Демак, $ABCDEFH \backsim A_1B_1C_1D_1E_1F_1H_1$.

2) Биз юқорида $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\ldots=\frac{HA}{H_1A_1}=\frac{AB+BC+\ldots+HA}{A_1B_1+B_1C_1+\ldots+H_1A_1}$ эканини кўриб ўтган эдик. Аммо $\angle NBO=\angle NAO=\angle MB_1O_1=\angle MA_1O_1$ бўлгани учун $\triangle AOB \backsim \triangle A_1O_1B_1$. Бундан:

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{ON}{O_1M}=\frac{OA}{O_1A_1}.$$

Демак,

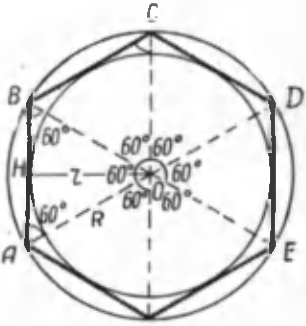
$$\frac{AB+BC+CD+\ldots+HA}{A_1B_1+B_1C_1+C_1D_1+\ldots+H_1A_1}=\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{ON}{O_1M}=\frac{OA}{O_1A_1}.$$

Изоҳ. Кўпбурчак томонларининг сони $n \geqslant 3$ бўлиши керак экани равшан. $n=3$ да кўпбурчак тенг томонли учбурчак; $n=4$ да квадрат; $n=6$ да мунтазам олтибурчак ҳосил бўлади.

31- §. БАЪЗИ МУНТАЗАМ КЎПБУРЧАКЛАРНИНГ ТОМОНЛАРИНИ ТАШҚИ ВА ИЧКИ ЧИЗИЛГАН АЙЛАНА РАДИУСЛАРИ БИЛАН ИФОДАЛАШ

$ABCDEF$ мунтазам олтибурчакда ташқи чизилган айлананинг радиуси R, ички чизилган айлана радиуси $OH=r$ ва маркази O нуқта бўлсин (139- расм). $AB=BC=\ldots=FA=a_6$ деб белгилаймиз. Марказдаги ёйиқ бурчак олтита тенг бўлакка бўлингани учун $\angle AOB=60°$, $OA=OB=R$ бўлганидан $\triangle AOB$ тенг томонли, яъни $\angle ABO=\angle BAO=60°$. У ҳолда $a_6=AB=OA=OB=R$.
Демак,

$$\boxed{a_6=R.}$$



139- расм.

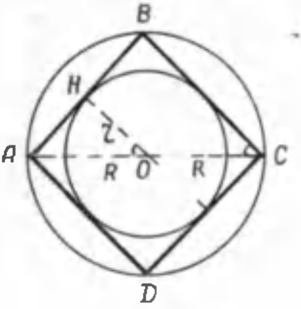
Энди $\triangle HOA$ дан $r=OH=\sqrt{OA^2-AH^2}=\sqrt{R^2-\frac{R^2}{4}}=\frac{R}{2}\sqrt{3}$, бундан: $R=\frac{2r}{\sqrt{3}}=\frac{2r\sqrt{3}}{3}$. Демак,

$$\boxed{a_6=\frac{2r\sqrt{3}}{3}}$$

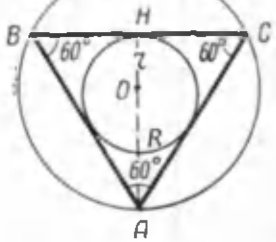
бўлади.

$ABCD$ квадратга радиуси $OA = R$ бўлган ташқи чизилган айлана ва радиуси $OH = r$ бўлган ички чизилган айлана ўтказилган бўлсин ва $AB = BC = CD = DA = a_4$ (140- расм). $\triangle ABC$ дан: $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (Пифагор теоремасига мувофиқ) ёки $4R^2 = a_4^2 + a_4^2 = 2a_4^2$. Бундан: $\boxed{a_4 = R\sqrt{2}.}$ Шаклдан: $2r = BC = a_4$, демак, $\boxed{a_4 = 2r.}$

Тенг томонли $\triangle ABC$ га радиуси $OA = R$ бўлган ташқи чизилган айлана, радиуси $OH = r$ бўлган ички чизилган айлана ўтказилган бўлсин (141- расм). $\triangle ABH$ дан: $AH^2 = AB^2 - BH^2$.



140- расм.



141- расм.

$AB = BC = AC = a_3$; $AH = r + R$. Бу ҳолда: $(r + R)^2 = a_3^2 - \left(\frac{a_3}{2}\right)^2 = \frac{3a_3^2}{4}$, бундан: $a_3 = \frac{2(r + R)}{\sqrt{3}}$. Аммо, $r = OH = \frac{1}{3} \cdot AH$ эди; $r = \frac{r + R}{3}$, бундан: $r = \frac{R}{2}$. Буни ўрнига қўйсак:

$$a_3 = \frac{2\left(\frac{R}{2} + R\right)}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\,R; \boxed{a_3 = R\sqrt{3}} \text{ ва } a_3 = \frac{2(r + 2r)}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\,r;$$

$$\boxed{a_3 = 2\sqrt{3} \cdot r.}$$

32- §. ЮЗЛАРНИ ҲИСОБЛАШ

а) Тўғри тўртбурчак ва квадратнинг юзи

$ABCD$ тўғри тўртбурчакда: $AD = BC = a$ асос, $AB = CD = b$ баландлик бўлсин (142- расм) (a, b лар тўғри тўртбурчакнинг *ўлчовлари* дейилади). $ABCD$ юзи $= S_т$ деб белгилаймиз. Энди тўғри тўртбурчакнинг юзини ҳисоблаш учун, олдин a ва b лар бир хил бирликка келтириб олинади, кейин AD ни a та, AB ни b та тенг бўлакларга бўлиб, тўғри чизиқлар ўтказилса, $ABCD$ да $(a\cdot b)$ та квадратчалар ҳосил бўлади. Бу ҳолда: $ABCD$ юзи $= S_{\text{т}} = a\cdot b$ квадрат бирлик.

Мисол. Ўлчовлари 3,4 *дм* ва 5,2 *дм* бўлган тўғри тўртбурчакнинг юзини ҳисобланг.

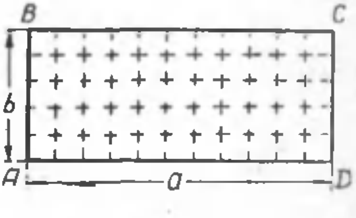
Ечиш. $a = 5{,}2$ *дм*; $b = 3{,}4$ *дм*; $S_{\text{т}} = ?$, $S_{\text{т}} = a\cdot b = 5{,}2\ дм\cdot 3{,}4\ дм = 17{,}68\ дм^2$. Демак, *тўғри тўртбурчакнинг юзи асоси билан баландлигининг кўпайтмасига тенг.* Агар $b = a$ бўлса, у ҳолда квадрат ҳосил бўлиб, унинг юзи $S_{\text{кв}} = a\cdot a = a^2$ бўлади.

$$\boxed{S_{\text{кв}} = a^2\text{кв/б — к.}}$$

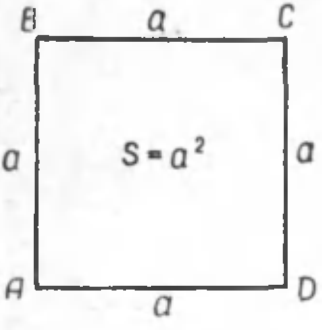
Демак, *квадратнинг юзи томонларидан биттасининг квадратига тенг* (143- расм).

1- мисол. Тўртбурчакнинг томонлари $a = 10\ м$, $b = 5\ м$, унинг юзи топилсин.

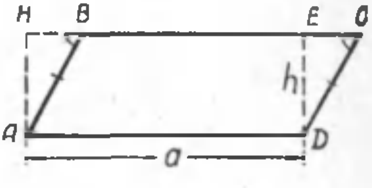
Ечиш. $S_{\text{т}} = a\cdot b = 10\ м\cdot 5\ м = 50\ м^2$.



142- расм.



143- расм.



144- расм.

2- мисол. Тўртбурчакнинг томонлари $a = 12\ дм$, $b = 4\ м$, унинг юзи топилсин.

Ечиш. $S_{\text{т}} = a\cdot b = 1{,}2м\cdot 4м = 4{,}8\ м^2$.

3- мисол. Томони 6 *см* бўлган квадратнинг юзи топилсин.

Ечиш. $S_{\text{кв}} = a^2 = (6\ см)^2 = 36\ см^2$.

б) Параллелограмм; учбурчак; ромб; трапеция ва мунтазам кўпбурчакларнинг юзи.

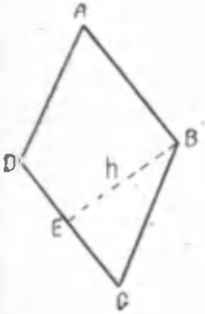
$ABCD$ параллелограммда $AH \perp BC$, $DE \perp BC$ ларни тушириб, $AHED$ тўғри тўртбурчак ҳосил қиламиз (144- расм). $AD = a$; $DE = h$ бўлсин. $AHED$ юзи $= AD \cdot DE = a \cdot h$, лекин $\triangle AHB = \triangle DEC$, чунки $AB = DC$ ва $\angle ABH = \angle C$ (мос бурчак). Демак, $ABCD$ юзи $= AHED$ юзи $= a \cdot h$. Энди, $ABCD$ юзини $S_{\text{пар}}$ деб белгилаймиз. Бу ҳолда

$$\boxed{S_{\text{пар}} = a \cdot h_{\text{кв/б — к.}}}$$

Параллелограммнинг юзи унинг асоси билан баландлиги кўпайтмасига тенг.

Ромб томонлари тенг бўлган параллелограмм бўлгани учун, *ромбнинг юзи томони билан баландлигининг кўпайтмасига тенгдир* (145- расм). $AD = DC = CB = BA = a$ ва баландлик $h = BE \perp DC$ бўлсин. $S_{\text{ромб}} = DC \cdot BE = a \cdot h$;

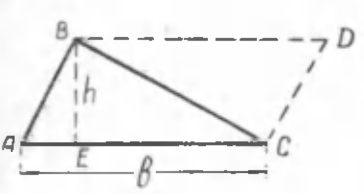
$$\boxed{S_{\text{ромб}} = a \cdot h_{\text{кв/б — к.}}}$$



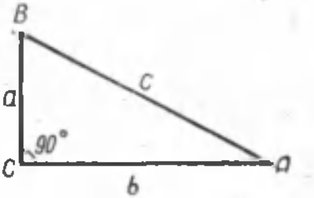
145- расм.

Натижа. *Ромбнинг юзи унинг диагоналлари кўпайтмасининг ярмига тенг.*

Параллелограмм битта диагонали билан иккита тенг учбурчакка бўлинар эди. $\triangle ABC$ ни $ABCD$ параллелограммга



146- расм.



147- расм.

тўлдирамиз (146- расм). $BE \perp AC$ бир вақтда $\triangle ABC$ ва $ABCD$ параллелограммга баландлик бўлади. Бу ҳолда:

$$\triangle ABC_{\text{юзи}} = S_{\triangle} = \frac{(ABCD \text{ параллелограмм) юзи}}{2} = \frac{AC \cdot BE}{2} = \frac{b \cdot h}{2}.$$

$$\boxed{S_{\triangle} = \frac{b \cdot h}{2} \text{ кв/б — к.}}$$

Демак, *ҳар қандай учбурчакнинг юзи асоси билан баландлиги кўпайтмасининг ярмига тенг.*

Натижа. *Тўғри бурчакли учбурчакнинг юзи унинг катетлари кўпайтмасининг ярмига тенг* (147- расм).

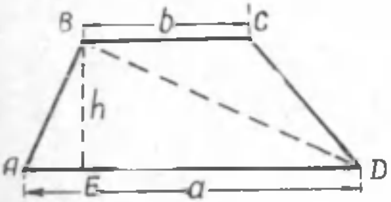
$$\boxed{\triangle ABC_{\text{юзи}} = \frac{a\cdot b}{2}\ \text{кв/б — к.}}$$

1- масала. $\triangle ABC$ нинг асоси $AC = 12$ *см* ва унга туширилган баландлик $BE = 5$ *см* берилган (146- расм). Учбурчакнинг юзи $S_\triangle$ топилсин.

Ечиш. $S_\triangle = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}\cdot 12\cdot 5 = 30$. Демак, $S_\triangle = 30\ \text{см}^2$.

2- масала. Гипотенузаси $c = 5$ *дм* ва катети $a = 3$ *дм* бўлган тўғри бурчакли учбурчакнинг юзи топилсин (147- расм).

Ечиш. Олдин иккинчи катетни топамиз: $b^2 = c^2 - a^2 = 5^2 - 3^2 = 16$; $b = 4$ *дм*. $S_\triangle = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4 = 6$. Демак, $S_\triangle = 6\ \text{дм}^2$.



148- расм.

$ABCD$ трапеция берилган бўлсин. $BE \perp AD$ баландлик (148- расм). $AD = a$; $BC = b$; $BE = h$ бўлсин. Унинг юзини $S_{\text{тр}}$ билан белгилаймиз ва бу юзни топиш масаласини қараймиз. Бу ерда трапеция юзини ҳисоблаш учун, унга бирор диагональ, масалан, BD ни ўтказиб, уни умумий баландлик BE га эга бўлган иккита $\triangle ABD$ ва $\triangle BCD$ ларга ажратамиз. У ҳолда:

$$S_{\text{тр}} = \triangle ABD_{\text{юзи}} + \triangle BCD_{\text{юзи}} = \frac{1}{2}AD\cdot BE + \frac{1}{2}BC\cdot BE = \frac{AD+BC}{2}\cdot BE = \frac{a+b}{2}\cdot h.$$

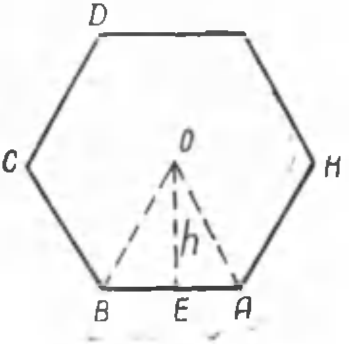
$$\boxed{S_{\text{тр}} = \frac{a+b}{2}\cdot h\ \text{кв/б — к.}}$$

Демак, *трапециянинг юзи асослари йиғиндисининг ярми билан баландлигининг кўпайтмасига тенг* (ёки унинг ўрта чизиғи билан баландлигининг кўпайтмасига тенг).

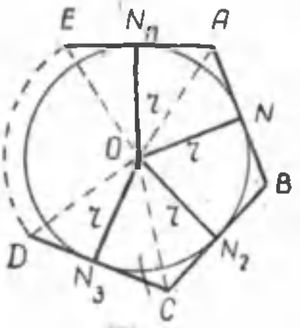
Мунтазам n бурчак берилган бўлсин (149- расм). $AB = BC = \ldots = HA = a$; $OE \perp AB$ апофема (ички айлана радиуси) ва O марказ бўлсин. $\triangle AOB$ юзи $= \frac{1}{2}AB\cdot OE = \frac{1}{2}a\cdot h$. Бу ҳолда мунтазам n бурчакнинг юзи $= \frac{1}{2}ah\cdot n = \frac{na\cdot h}{2}$; мунтазам n бурчакнинг периметрини P билан белгилаймиз. Бу ҳолда $P = na$. Буларга асосан $S_{м/к} = (ABC...\text{юзи}) = \frac{P\cdot h}{2}$ кв. бирлик.

$$\boxed{S_{м/к} = \frac{Ph}{2}\ \text{кв/б — к.}}$$

Демак, *мунтазам кўпбурчакнинг юзи унинг периметри билан апофемаси кўпайтмасининг ярмига тенг.*



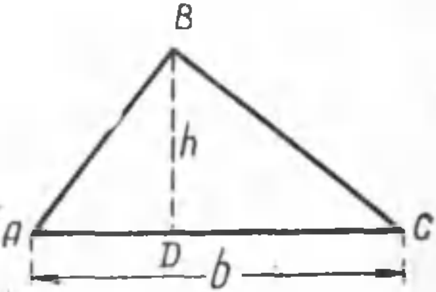
149- расм.



150- расм.

Теорема. *Айланага ташқи чизилган ҳар қандай кўпбурчакнинг юзи, унинг периметрининг ярми билан айлана радиуси кўпайтмасига тенг.*

Исбот. Радиуси r бўлган айланага ихтиёрий ташқи n бурчакли кўпбурчак чизилган бўлсин (150- расм). Кўпбурчак юзи $S_{к/б}$ ва унинг периметри P_n бўлсин. Ташқи чизилган кўпбурчакни (150- расмда кўрсатилгандек) n та учбурчакка ажратамиз. Бу ҳолда:



151- расм.

$$S_{к/б} = (ABCD\ldots E_{юзи}) = \triangle AOB_{юзи} + \triangle BOC_{юзи} + \triangle COD_{юзи} + \ldots + \triangle EOA_{юзи} = \frac{1}{2}AB\cdot ON_1 + \frac{1}{2}BC\cdot ON_2 + \frac{1}{2}CD\cdot ON_3 + \ldots + \frac{1}{2}EA\cdot ON_n = \frac{AB+BC+CD+\ldots+EA}{2}\cdot r = \frac{P_n\cdot r}{2}.$$

Демак,

$$\boxed{S_{к/б} = \frac{P_n}{2}\cdot r\ \text{кв/б — к.}}$$

Теорема. *Агар $\triangle ABC$ нинг учта томони a, b, c ва ярим периметри $p = \frac{a+b+c}{2}$ бўлса, у ҳолда шу учбурчакнинг юзи $S_\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ формула билан аниқланади.*

Исбот. $BD \perp AC$ ни туширамиз. У ҳолда $S_\triangle = \frac{1}{2}\, b \cdot BD$ бўлади (151- расм). $\triangle ADB$ ва $\triangle BDC$ лардан: $BD^2 = c^2 - AD^2$ ва $DC^2 = a^2 - BD^2$. Шаклдан: $AD = b - DC$.
Бунга кўра:

$$BD^2 = c^2 - (b - DC)^2 = c^2 - b^2 + 2b \, . DC - DC^2 =$$
$$= c^2 - b^2 + 2b\ \sqrt{a^2 - BD^2} - a^2 + BD^2.$$

Бундан:

$$\sqrt{a^2 - BD^2} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}.$$

Бунинг икки томонини квадратга кўтариб, BD^2 ни топамиз:

$$BD^2 = a^2 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4b^2} = \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4b^2} =$$
$$= \frac{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)\cdot(2ab - a^2 - b^2 + c^2)}{4b^2} =$$
$$= \frac{[(a+b)^2 - c^2]\cdot[(c^2 - (a-b)^2]}{4b^2} =$$
$$= \frac{(a+b+c)(a+b-c)(c-a+b)(c+a-b)}{4b^2}.$$

Энди $a + b + c = 2p$ тенгликдан $a + b - c = 2(p - c)$; $a + c - b = 2(p - b)$; $b + c - a = 2(p - a)$ эканини топамиз. Буларни кейинги тенгликка қўйсак:

$$BD^2 = \frac{2p \cdot 2(p-c) \cdot 2(p-a) \cdot 2(p-b)}{4b^2} =$$
$$= \frac{4}{b^2} \cdot p(p-a)(p-b)(p-c);$$
$$BD = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

бўлади. Буни ўрнига қўямиз:

$$S_\triangle = \frac{1}{2}\, b \cdot \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$
$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Демак,

$$\boxed{S_\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ \text{кв/б — к.}}$$

Бу формула **Герон**[1] формуласи дейилади.

---

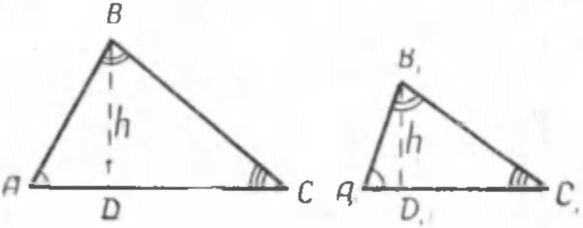
[1] Герон — эрамиздан тахминан III — II аср аввал Искандарияда яшаган математик.

33- §. ЎХШАШ УЧБУРЧАКЛАР ВА КЎПБУРЧАКЛАР ЮЗЛАРИНИНГ НИСБАТЛАРИ

Теорема. *Ўхшаш учбурчаклар ёки кўпбурчаклар юзларининг нисбати, ўхшаш томонлари квадратларининг нисбатига тенг.* Теоремани дастлаб учбурчаклар учун исбот қиламиз.

Исбот. $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ да $BD = h$; $B_1D_1 = h_1$ баландликлар бўлсин (152- расм).

$$\frac{\triangle ABC_{\text{юзи}}}{\triangle A_1B_1C_{1\text{юзи}}} = \left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2 = \left(\frac{BC}{B_1C_1}\right)^2 = \left(\frac{AC}{A_1C_1}\right)^2$$



152- расм.

эканини исбот қиламиз.

$$\triangle ABC_{\text{юзи}} = \frac{1}{2} AC \cdot h \text{ ва } \triangle A_1B_1C_{1\text{юзи}} = \frac{1}{2} A_1C_1 \cdot h_1,$$

бу ҳолда:

$$\frac{\triangle ABC_{\text{юзи}}}{\triangle A_1B_1C_{1\text{юзи}}} = \frac{\frac{1}{2} AC \cdot h}{\frac{1}{2} A_1C_1h_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \cdot \frac{h}{h_1}. \qquad (*)$$

$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ дан: $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$; $\triangle ABD \backsim$ $\backsim \triangle A_1B_1D_1$дан: $\frac{h}{h_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$ бўлади. Буларни (*) га қўйсак:

$$\frac{\triangle ABC_{\text{юзи}}}{\triangle A_1B_1C_{1\text{юзи}}} = \frac{AB}{A_1B_1} \cdot \frac{AB}{A_1B_1} = \left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2.$$

Демак,

$$\frac{\triangle ABC_{\text{юзи}}}{\triangle A_1B_1C_{1\text{юзи}}} = \left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2 = \left(\frac{BC}{B_1C_1}\right)^2 = \left(\frac{AC}{A_1C_1}\right)^2$$

Теорема исботланди.

Энди теоремани кўпбурчаклар учун исбот қиламиз.

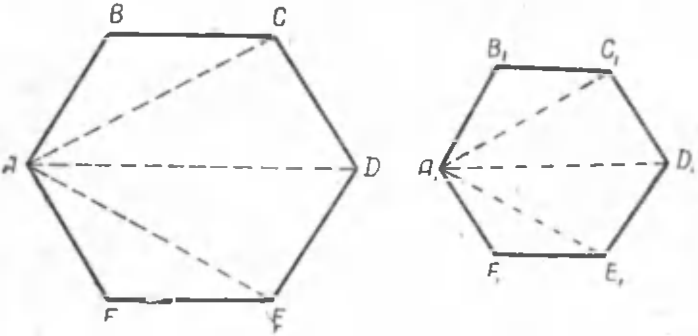
$$ABCDEF \backsim A_1B_1C_1D_1E_1F_1$$

бўлсин.

$$\frac{ABCDEF_{\text{юзи}}}{A_1B_1C_1D_1E_1F_{1\text{юзи}}} = \left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2 = \left(\frac{BC}{B_1C_1}\right)^2$$

эканини кўрсатиш талаб этилади. Бунинг учун берилган ўхшаш икки кўпбурчакни 153- расмда кўрсатилгандек бир неча ўхшаш учбурчакларга ажратамиз. Бу ҳолда $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, $\triangle ACD \backsim \triangle A_1C_1D_1$ ва ҳоказо бўлиши равшан. Демак,

$$\frac{\triangle ABC_{\text{юзи}}}{\triangle A_1B_1C_{1\text{юзи}}} = \left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2 = \left(\frac{BC}{B_1C_1}\right)^2; \ \frac{\triangle ACD_{\text{юзи}}}{\triangle A_1C_1D_{1\text{юзи}}} = \left(\frac{CD}{C_1D_1}\right)^2 \text{ ва ҳоказо.}$$



153- расм.

Аммо, кўпбурчакларнинг ўхшашлигидан: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \ldots = \frac{FA}{F_1A_1}$. Шунинг учун:

$$\frac{\triangle ABC_{\text{юзи}}}{\triangle A_1B_1C_{1\text{юзи}}} = \frac{\triangle ACD_{\text{юзи}}}{\triangle A_1C_1D_{1\text{юзи}}} = \ldots = \frac{\triangle AEF_{\text{юзи}}}{\triangle A_1E_1F_{1\text{юзи}}} = \left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2.$$

Тенг нисбатлардан

$$\frac{\triangle ABC_{\text{юзи}} + \triangle ACD_{\text{юзи}} + \ldots + \triangle AEF_{\text{юзи}}}{\triangle A_1B_1C_{1\text{юзи}} + \triangle A_1C_1D_{1\text{юзи}} + \ldots + \triangle A_1E_1F_{1\text{юзи}}} = \frac{(ABCDEF)_{\text{юзи}}}{(A_1B_1C_1D_1E_1F_1)_{\text{юзи}}} = \left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2$$

эканини ёзамиз. Теорема исбот бўлди.

34- §. АЙЛАНА ВА УНИНГ БЎЛАКЛАРИ УЗУНЛИГИ

Таъриф. *Айлананинг узунлиги деб унга ички ёки ташқи чизилган мунтазам кўпбурчак периметрининг кўпбурчак томонлари сони чексиз ортгандаги лимитига айтилади.*

Теорема. *Ҳар қандай айлана узунлигининг ўз диаметрига нисбати ўзгармас сон бўлади.*

Исбот. Радиуслари R ва r бўлган икки айланага ички бир исмли мунтазам кўпбурчаклар чизамиз; уларнинг периметрлари мос равишда P_n ва p_n бўлсин. У ҳолда 30- § га мувофиқ $\frac{P_n}{p_n}=\frac{R}{r}$ деб ёзиш мумкин. Радиуси R бўлган айлананинг узунлиги C, радиуси r бўлган айлана узунлиги C_1 бўлсин. Энди мунтазам ички кўпбурчакларнинг томонлари сонини чексиз орттирсак, таърифга кўра, $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = C$ ва $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = C_1$ бўлади. У ҳолда $\frac{C}{C_1}=\frac{R}{r}$ ҳосил бўлади. Бундан, пропорциянинг хоссасига кўра $\frac{C}{2R}=\frac{C_1}{2r}$ деб ёзиш мумкин. Теорема исботланди.

Энди бу ўзгармас нисбат $\frac{C}{2R}=\frac{C_1}{2r}$ ларнинг қандай сонга тенг бўлишини кўриш учун, иккита ёки учта айлана шаклига эга бўлган турли идишларни оламиз. Улардан ҳар бирининг айлана ва диаметрини бирор ип ёки ингичка сим билан ўлчаб, сўнгра ҳар қайси айлананинг узунлигини ифода қилувчи сонни, унинг диаметрини ифода қилувчи сонга бўлсак, у нисбатларнинг ҳар бири бир хил ўзгармас 3,1415... сонга тенг эканлигини кўрамиз. Бу ўзгармас сон 3,1415 ... ни грек ҳарфи π билан белгилаш қабул қилинган, яъни $\pi = 3,1415...$; π — грекча „περτφεπα“, бизнингча айлана деган сўзнинг бош ҳарфи бўлиб, тахминан XVII асрда киритилгандир ($\pi = 3,1415...$ — иррационал сон). Демак, $\frac{C}{2R}=\frac{C_1}{2r} = 3,1415 ... = \pi$. Бундан $\boxed{C = 2\pi R}$ келиб чиқади. Бу формула *айлана узунлигини ҳисоблаш формуласи* дейилади. $\pi = 3,14$ деб олсак, бу қиймат, π нинг 0,01 гача аниқликдаги тақрибий қийматидир. 1° ёй узунлиги бутун айлана узунлигининг $\frac{1}{360}$ бўлагини ташкил этади, яъни $\frac{2\pi R}{360}=\frac{\pi R}{180}$. У ҳолда $n°$ ёй узунлиги $\frac{\pi R}{180}\cdot n$ бўлади. Уни $L_{\text{ёй}}$ деб белгиласак,

$$\boxed{L_{\text{ёй}} = \frac{\pi R}{180}\cdot n \text{ узунлик бирлик.}}$$

Бу — *ёй узунлигини ҳисоблаш формуласи.*

1- масала. Радиуси 5 *см* бўлган айлананинг узунлигини ҳисобланг.

Ечиш. $C = 2\pi R = 2\cdot 3,14\cdot 5 = 31,4$ *см.*

2- масала. Радиуси 10 *см* бўлган айлананинг 36° ли ёйининг узунлигини ҳисобланг.

Ечиш. $R = 10$ *см*, $n = 36$. $L_{\text{ёй}} = \frac{\pi R n}{180} = \frac{3,14\cdot 10\cdot 36}{180} = 6,28$ *см.*

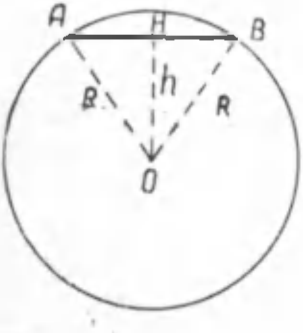
3- масала. Шкивнинг диаметри 400 *мм*, тасма шкивни $n = 244°30'$ бурчак остида қоплаб туриши маълум. Шкивнинг тасма билан қопланган ёйининг узунлиги 1 *мм* гача аниқлик билан топилсин.

Ечиш. $D = 2R = 400$ *мм*; $R = 200$ *мм*; $n = 244°30' = 244{,}5°$;

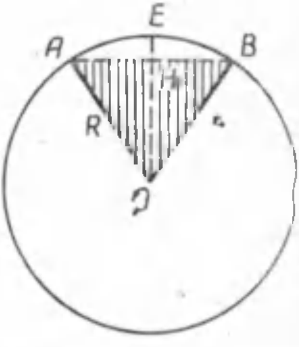
$$L_{\text{ёй}} = \frac{\pi R n}{180} = \frac{3{,}14 \cdot 200 \cdot 244{,}5}{180} = \frac{3{,}14 \cdot 2440}{9} = 853{,}14 \text{ мм}.$$

35- §. ДОИРА ВА УНИНГ БЎЛАКЛАРИ ЮЗИ

Таъриф. *Доиранинг юзи деб, унга ички ёки ташқи чизилган мунтазам кўпбурчак юзининг кўпбурчак томонлари сони чексиз ортгандаги лимитига айтилади.*



154- расм.



155- расм.

Доира юзини ҳисоблаш формуласини чиқариш учун, радиуси R бўлган айланага периметри P_n ва апофемаси h_n бўлган ички мунтазам кўпбурчак чизамиз (154- расм). У ҳолда 32- § га асосан мунтазам ички кўпбурчакнинг юзини $S_n = \frac{P_n \cdot h_n}{2}$ формула билан ёзиш мумкин. Энди, мунтазам кўпбурчак томонларининг сонини чексиз орттирсак, таърифга кўра: $\lim\limits_{n \to \infty} P_n = C = 2\pi R$; $\lim\limits_{n \to \infty} h_n = R$ ва $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = K$ (K — доира юзи). Бу ҳолда: $K = \frac{C \cdot R}{2} = \frac{2\pi R \cdot R}{2} = \pi R^2$. Демак,

$$\boxed{K = \pi R^2 \text{ кв/б — к.}}$$

Бу — *доиранинг юзини ҳисоблаш формуласи.*

а) Сектор ва сегментнинг юзи

Радиуси $OA = OB = R$ бўлган айланада $\overset{\frown}{AEB} = n°$ ли AOB сектор юзи S_c бўлсин. 1° ёйга тегишли сектор юзи доира юзининг $\frac{1}{360}$ бўлагини ташкил этади, яъни $\frac{\pi R^2}{360}$. Бу ҳолда, ёйи $n°$ бўлган секторнинг юзи $\frac{\pi R^2}{360}\cdot n$, яъни

$$\boxed{S_c = \frac{\pi R^2}{360}\cdot n \text{ кв/б — к.}}$$

Бу — *секторнинг юзини ҳисоблаш формуласи.* Аммо $\frac{\pi R}{180}\cdot n = L_{\text{ёй}}$ эди,

$$\boxed{S_c = \frac{L_{\text{ёй}}\cdot R}{2} \text{ кв/б — к.}}$$

Демак, секторнинг юзи, унга тегишли ёй узунлиги билан айлана радиуси кўпайтмасининг ярмига тенг.

Энди ABE сегментнинг асоси $AB = b$, баландлиги $HE = h$ бўлсин. $\overset{\frown}{AEB}$ катта бўлмаганда, унга тегишли сегмент юзи учун $\frac{2}{3} AB\cdot HE = \frac{2}{3} b\cdot h$ ни олиш мумкин.

Демак,

$$\boxed{S_{\text{сег}} = \frac{2}{3} bh \text{ кв/б — к.}}$$

Бу — *сегмент юзини ҳисоблаш формуласи.* Умуман, $S_{\text{сег}} = S_{\text{сек}} - S\triangle_{AOB}$; бу аниқ юзани беради.

1- мисол. Доира шаклидаги столнинг радиуси 36 *см*, унинг юзини топинг.

Ечиш. $R = 36$ *см*; $K = \pi R^2 = \pi\cdot 36^2 = 1296\ \pi$ *см*^{2}.

2- мисол. Радиуси 12 *см* бўлган доиранинг 20° ли марказий бурчагига тегишли секторининг юзи топилсин.

Ечиш. $R = 12$ *см*; $n° = 20°$; $S_{\text{сек}}$ ни топамиз.

$$S_{\text{сек}} = \frac{\pi R^2\cdot n}{360} = \frac{\pi\cdot 12^2\cdot 20}{360} = 8\pi \text{ см}^2.$$

Масала. Доирага ички чизилган мунтазам учбурчакнинг ҳар бир томони, доирадан юзи $(4\pi - 3\sqrt{3})$ *дм*^{2} га тенг сегмент ажратади. Шу учбурчак томонининг узунлиги топилсин.

Ечиш. $S_{\text{сег}} = S_{\text{сек}} - S_{\triangle AOB}$; $AB = BC = AC = a_3 = R\sqrt{3}$. $\angle AOB = \frac{360°}{3} = 120°$. $\triangle AOB$ тенг ёнли бўлгани учун $OA = OB = R$, бу ҳолда $\angle ABO = \angle BAO = \frac{60°}{2} = 30°$. $\triangle AOH$ да $OH \perp AB$ бўлиб, OH — 30° ли бурчак қаршисида ётган катет. Демак, $OH = \frac{OA}{2} = \frac{R}{2}$. $\triangle AOB$ юзи $= \frac{1}{2} OH\cdot AB = \frac{1}{2}\cdot\frac{R}{2}\sqrt{3}\cdot R =$

$= \frac{\sqrt{3}R^2}{4}$; $S_{сек} = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi R^2 \cdot 120}{360} = \frac{\pi R^2}{3}$. Буларга асосан $S_{сег} = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{\sqrt{3}R^2}{4} = \frac{R^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3}.)$ Демак, $\frac{R^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3}) = 4\pi - 3\sqrt{3}$ ёки $\frac{R^2}{12} = 1$, бундан: $R = 2\sqrt{3}$ *дм*. $a_3 = R\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 2\cdot 3 = 6$ *дм.*

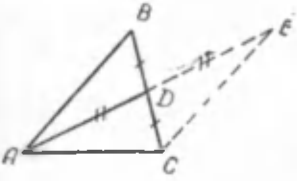
36- §. ГЕОМЕТРИЯДАГИ БАЪЗИ МАСАЛАЛАРНИ ЕЧИШ НАМУНАЛАРИ

1- масала. $\triangle ABC$ нинг AD медианаси ўзига тенг DE кесма қадар узайтирилган ва E нуқта C нуқта билан туташтирилган. $\angle ACD = 56°$; $\angle ABD = 40°$. $\angle ACE$ ни топинг (156- расм).

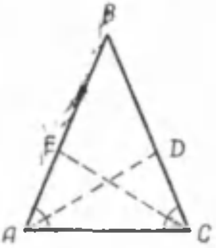
Ечиш. $\triangle ADB = \triangle EDC$, чунки $BD = CD$ (берилишга кўра), $AD = DE$ (шартга кўра) ва $\angle ADB = \angle EDC$ (вертикал бурчак). Бу учбурчакларнинг тенглигидан: $\angle ECD = \angle ABD = 40°$.

Расмдан: $\angle ACE = \angle ACD + \angle ECD = 56° + 40° = 96°$.

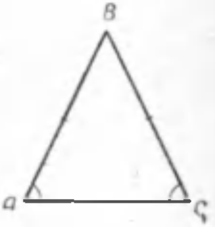
2- масала. Тенг ёнли учбурчакнинг асосидаги бурчакларининг биссектрисалари тенг эканлигини исбот қилинг.



156- расм.



157- расм.



158- расм.

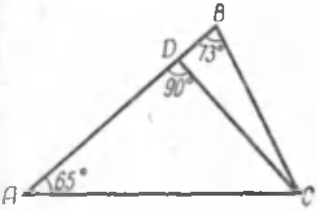
Исбот. $\triangle ABC$ тенг ёнли ($AB = BC$; $\angle A = \angle C$) ва $\angle A$ нинг биссектрисаси AD; $\angle C$ нинг биссектрисаси CE бўлсин. $AD = CE$ эканини кўрсатамиз (157- расм). $\triangle ADC = \triangle AEC$, чунки $\angle A = \angle C$ ва AC томон умумий. Учбурчакларнинг тенглигидан $AD = CE$.

3- масала. Тенг ёнли учбурчак икки томони узунликларининг нисбати 3 : 8 каби. Учбурчакнинг периметри 38 *см*. Учбурчакнинг томонларини топинг (158- расм).

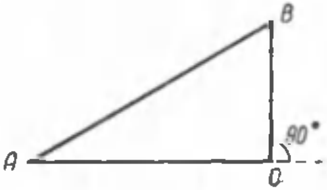
Ечиш. $\triangle ABC$ тенг ёнли ва $AC : AB = 3 : 8$ бўлсин. Бу ҳолда $AC = 3 \cdot x$ *см*, $AB = 8 \cdot x$ *см* деб ёзиш мумкин бўлади. Аммо, $AC + AB + BC = 38$ ёки $3 \cdot x + 2 \cdot 8x = 38$ тенгламани ҳосил қиламиз. Уни ечсак, $x = 2$. Демак, $AC = 3x = 3 \cdot 2 = 6$ *см*. $BC = AB = 8x = 8 \cdot 2 = 16$ *см*.

4- масала. $\triangle ABC$ да $\angle A = 65°$, $\angle B = 73°$ (159- расм). Учбурчакнинг C учидан туширилган баландлик билан, AC ва BC томонлари орасида қандай бурчаклар ҳосил бўлади?

Ечиш. $\triangle ABC$ да: $\angle A = 65°$, $\angle B = 73°$, $CD \perp AB$ бўлсин. $\triangle ABC$ да: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ ёки $65° + 73° + \angle C = 180°$; бундан: $\angle C = 42°$. Энди $\triangle ADC$ ва $\triangle BDC$ лардан: $\angle A + \angle ACD = 90°$, бундан $\angle ACD = 90° - 65° = 25°$ ва $\angle BCD = 90° - 73° = 17°$.



159- расм.

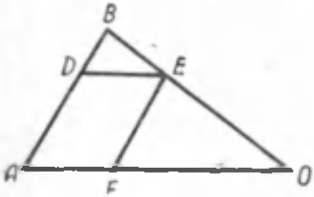


160- расм.

5- масала. Учбурчакнинг ташқи бурчаги 90° га тенг ва бунга қўшни бўлмаган ички бурчакларнинг нисбати 3 : 5 каби. Шу ички бурчаклардан ҳар бирининг катталиги топилсин.

Ечиш. Бу учбурчак тўғри бурчакли учбурчак бўлади. $\triangle ABC$ ва $\angle A : \angle B = 3 : 5$ берилган (160- расм). Бу ҳолда, $\angle A = 3x$ ва $\angle B = 5x$ деб ёзиш мумкин. Демак, $\angle A + \angle B = 3x + 5x = 90°$. Бундан: $x = \frac{90°}{8}$. Шунинг учун:

$$\angle A = 3 \cdot \frac{90°}{8} = \frac{270°}{8} = 33°45' \text{ ва } \angle B = \frac{450°}{8} = 56°15'.$$



161- расм.

6- масала. $\triangle ABC$ га 161- расмда кўрсатилгандек, $ADEF$ ички параллелограмм чизилган. Учбурчакда $AC : AB = 24 : 36$ каби нисбатда. Параллелограмм томонларининг нисбати 1 : 3 каби. Шу параллелограммнинг томонларини топинг.

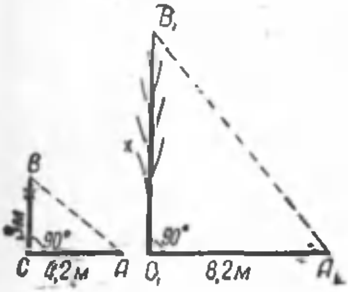
Ечиш. $DE : EF = 1 : 3$, бундан, $DE = x$; $EF = 3x$ деб ёзиш мумкин. $\triangle BDE \backsim \triangle EFC$, чунки $\angle D = \angle A = \angle F$ (мос бурчаклар); $\angle B = \angle CEF$ ва $\angle C = \angle DEB$ (мос бурчаклар). $\triangle BDE \backsim \triangle EFC$ бўлгани учун $\frac{DE}{FC} = \frac{BD}{EF}$ ёки $\frac{x}{24 - x} = \frac{36 - 3x}{3x}$, бундан: $x = 8$. Демак, $DE = 8$ *см* ва $AD = EF = 24$ *см*.

7- масала. Баландлиги 3 *м* бўлган вертикал симёғочнинг сояси 4,2 *м* бўлса, сояси 8,2 *м* бўлган дарахтнинг баландлигини топинг.

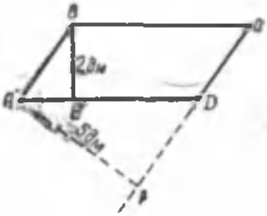
Ечиш. Масаланинг шартида кўрсатилгандек расмларни чизамиз (162- расм). Дарахтнинг баландлиги $B_1C_1 = x$ бўлсин.

Ҳосил бўлган ўхшаш тўғри бурчакли учбурчаклар $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ дан: $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC}$ ёки $\frac{x}{3} = \frac{8,2}{4,2}$, бундан: $x = \frac{41}{7} \approx$ $\approx 5,9$ *м.*

8- масала. Параллелограммнинг периметри 70 *дм.* Параллелограммнинг баландликлари 2 *дм* ва 5 *дм.* Унинг томонларини ва юзини топинг.



162- расм.



163- расм.

Ечиш. $ABCD$ параллелограммда (163- расм): $2 \cdot (AB + AD) = 70$ ёки $AB + AD = 35$. $BE = 2$ *дм*; $AF = 5$ *дм* бўлсин. Энди параллелограммнинг юзи: $S_п = AD \cdot BE = 2 \cdot AD$ ёки $S_п = AB \cdot AF = 5 \cdot AB$. Булардан $2 \cdot AD = 5 \cdot AB$ ёки $AD = \frac{5}{2} \cdot AB$. Буни $AD + AB = 35$ га қўйсак: $\frac{5}{2} \cdot AB + AB = 35$, ёки $AB = 10$ *дм.* Демак, $AD = 25$ *дм.* $2 \cdot AD = 2 \cdot 25 = 50$ (*дм*^{2}).

Жавоб. 10 *дм*, 25 *дм*, 50 *дм*^{2}.

Бу масалани қуйидагидек ечса ҳам бўлади.

$AB + AD = 35$; $BE = 2$ *дм*; $AF = 5$ *дм.*

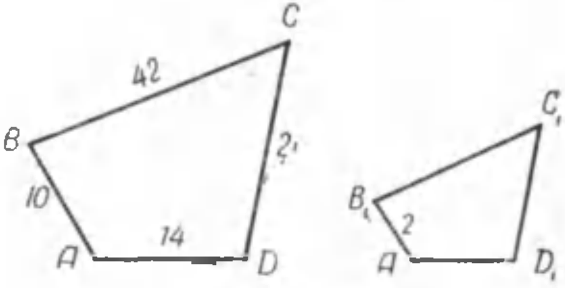
$\triangle ABE \backsim \triangle ADF$ ларни ҳосил қилиб, бундан: $\frac{BE}{AF} = \frac{AB}{AD}$ ёки $\frac{2}{5} = \frac{AB}{AD}$; $AD = \frac{5}{2} \cdot AB$, буни ўрнига қўйсак: $AB + \frac{5}{2}\ AB = 35$, $AB = 10$ *дм*; у ҳолда $AD = 25$ *дм*; $S_п = BE \cdot AD = 2 \cdot 25 = 50$ (*дм*^{2}).

9- масала. Тўртбурчакнинг томонлари: 14 *см*, 21 *см*, 10 *см* ва 42 *см.* Шу тўртбурчакка ўхшаш тўртбурчакнинг кичик томони 2 *см* га тенг бўлса, қолган томонларини топинг (164- расм.)

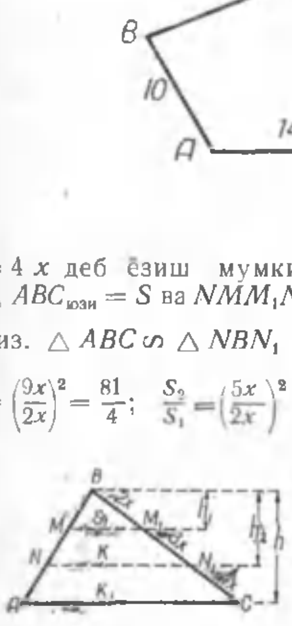
Ечиш. $ABCD$ тўртбурчак $A_1B_1C_1D_1$ тўртбурчакка ўхшаш бўлсин. $ABCD \backsim A_1B_1C_1D_1$ бўлгани учун $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{A_1D_1}{AD}$ ёки $\frac{2}{10} = \frac{B_1C_1}{42} = \frac{C_1D_1}{21} = \frac{A_1D_1}{14}$. Булардан: $B_1C_1 = \frac{2 \cdot 42}{10} = 8,4$ *см*; $C_1D_1 = 4,2$ *см*; $A_1D_1 = 2,8$ *см.*

10- масала. Учбурчакнинг ён томони (учидан ҳисоблаганда) 2:3:4 нисбатда бўлинган ва бўлиниш нуқталари орқали асосга параллел тўғри чизиқлар ўтказилган. Учбурчакнинг юзи қандай нисбатда бўлинган бўлади?

Ечиш. $\triangle ABC$ да (165- расм) масаланинг шартига кўра $BM_1 : M_1N_1 : N_1C = 2:3:4$. У ҳолда, $BM_1 = 2x$; $M_1N_1 = 3x$; $N_1C = 4x$ деб ёзиш мумкин. $\triangle MBM_{1\text{юзи}} = S_1$; $\triangle NBN_{1\text{юзи}} = S_2$; $\triangle ABC_{\text{юзи}} = S$ ва $NMM_1N_{1\text{юзи}} = K$; $ANN_1C_{\text{юзи}} = K_1$ деб белгилаймиз. $\triangle ABC \backsim \triangle NBN_1 \backsim \triangle MBM_1$ дан: $\frac{S}{S_2} = \left(\frac{9x}{5x}\right)^2 = \frac{81}{25}$; $\frac{S}{S_1} = \left(\frac{9x}{2x}\right)^2 = \frac{81}{4}$; $\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{5x}{2x}\right)^2 = \frac{25}{4}$. Булардан: $25S = 81S_2$; $4S = 81S_1$; $4S_2 = 25S_1$. $K = S_2 - S_1 = \frac{25}{4}S_1 - S_1 = \frac{21}{4}S_1$; $K_1 = S - S_2 = \frac{81}{25}S_2 - S_2 = \frac{56}{25}S_2 = \frac{56}{25} \cdot \frac{25}{4}S_1 = 14S_1$. Энди S_1, K, K_1 ларнинг нисбатини келтирамиз: $S_1 : K : K_1 = S_1 : \frac{21}{4}S_1 : 14S_1 = \frac{4}{S_1}\left(S_1 : \frac{21}{4}S_1 : 14S_1\right) = 4:21:56$.



164- расм.



165- расм.

10- масалани бошқа усул билан ечиш.

$\triangle ABC \backsim NBN_1$дан: $\frac{AC}{NN_1} = \frac{9x}{5x} = \frac{9}{5}$, бундан $AC = \frac{9}{5}NN_1$; $\frac{h}{h_2} = \frac{9}{5}$, бундан $h = \frac{9}{5}h_2$; $\triangle NBN_1 \backsim \triangle MBM_1$ бўлганидан $\frac{MM_1}{NN_1} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$ ва $\frac{h_1}{h_2} = \frac{2}{5}$, булардан:

$$MM_1 = \frac{2}{5}NN_1 \quad \text{ва} \quad h_1 = \frac{2}{5}h_2.$$

Энди юзларни аниқлаймиз:

$$S_1 = \frac{1}{2} MM_1 h_1 = \frac{1}{2} NN_1 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} h_2 = \frac{2}{25} NN_1 \cdot h_2;$$

$$K = \frac{NN_1 + MM_1}{2} (h_1 - h_1) = \frac{21}{50} NN_1 \cdot h_2;$$

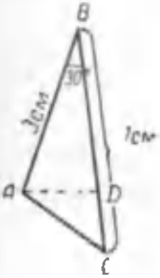
$$K_1 = \frac{AC + NN_1}{2} (h - h_2) = \frac{28}{25} NN_1 \cdot h_2.$$

Энди нисбатларни тузамиз:

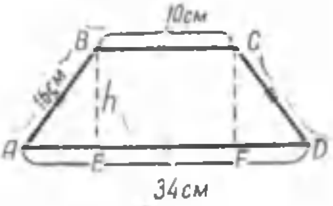
$$S_1 : K : K_1 = \frac{2}{25} NN_1 \cdot h_2 : \frac{21}{50} NN_1 \cdot h_2 : \frac{28}{25} NN_1 \cdot h_2 = \frac{4}{50} : \frac{21}{50} : \frac{56}{50} =$$
$$= 4 : 21 : 56.$$

Яна биринчи усулдаги жавоб ҳосил бўлди.

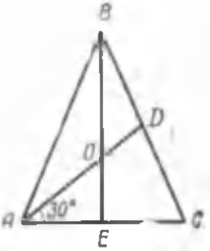
11- масала. Учбурчакнинг икки томони 3 *см* ва 7 *см*. Улар орасидаги бурчак 30°. Шу учбурчакнинг юзи топилсин.



166- расм.



167- расм.



168- расм.

Ечиш. $\triangle ABC$ ни чизиб (166- расм), $AD \perp BC$ баландлик туширамиз; $AB = 3$ *см*; $BC = 7$ *см*.

$\triangle ABC_{юзи} = \frac{1}{2} AD \cdot BC = \frac{7}{2} \cdot AD$. Аммо, 30° ли бурчак қаршисидаги катет $AD = \frac{AB}{2}$; $AD = \frac{3}{2}$. У ҳолда, $\triangle ABC_{юзи} = \frac{7}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{21}{4} = 5{,}25$ (*см*²).

12- масала. Ён томони 16 *см* бўлган тенг ёнли трапеция асослари 10 *см* ва 34 *см*. Шу трапециянинг юзи топилсин (167- расм).

Ечиш. $BE = h \perp AD$ туширамиз.

$$AE = \frac{AD - BC}{2} = \frac{34 - 10}{2} = 12 \text{ см}.$$

$\triangle ABE$ дан: $BE^2 = AB^2 - AE^2 = 256 - 144 = 112$; $h = BE = \sqrt{112} \approx 10{,}6$ *см*. У ҳолда, $S_{тр} = \frac{AD + BC}{2} \cdot h = \frac{34 + 10}{2} \cdot 10{,}6 = 22 \cdot 10{,}6 = 233{,}2$.

13- масала. Ўхшаш учта кўпбурчак юзларининг йиғиндиси 232 $см^2$, периметрларининг нисбати 2 : 3 : 4 каби. Ҳар қайси кўпбурчакнинг юзини топинг.

Ечиш. I кўпбурчак юзи S, периметри P ва бир томони AB; II кўпбурчакнинг юзи S_1, периметри P_1 ва бир томони A_1B_1; III кўпбурчакнинг юзи S_2, периметри P_2 ва бир томони A_2B_2 деб белгилаймиз. Бу ҳолда:

$$S + S_1 + S_2 = 232 \text{ см}^2 \text{ ва } P : P_1 : P_2 = 2 : 3 : 4.$$

Кўпбурчакларнинг ўхшашлигидан $P : P_1 : P_2 = AB : A_1B_1 : A_2B_2$ ва $S : S_1 : S_2 = AB^2 : A_1B_1^2 : A_2B_2^2$. Берилган нисбатларга мувофиқ $AB = 2x$; $A_1B_1 = 3x$; $A_2B_2 = 4x$ деб ёзиш мумкин. $\frac{S}{S_1} = \frac{AB^2}{A_1B_1^2} = \frac{4x^2}{9x^2} = \frac{4}{9}$; $\frac{S_1}{S_2} = \frac{9}{16}$. Булардан:

$$S = \frac{4}{9}S_1; \quad S_2 = \frac{16}{9}S_1.$$

S ва S_2 ни ўринларига қўйсак, $\frac{4}{9}S_1 + S_1 + \frac{16}{9}S_1 = 232$, бундан $S_1 = 72$ $см^2$. Демак, $S = \frac{4}{9} \cdot 72 = 32$ $см^2$ ва $S_2 = \frac{16}{9} \cdot 72 = 128 см^2$.

14- масала. Тенг ёнли ABC учбурчакда A учидан ўтказилган медиана 30 *см* га тенг бўлиб, учбурчакнинг AC асоси билан 30° ли бурчак ҳосил қилади. $\triangle ABC$ нинг B учидан ўтказилган баландликни аниқланг (168- расм).

Ечиш. $AD = 30$ *см*; $\angle DAC = 30°$ бўлсин. Медианалар хоссасига асосан: $OE = \frac{1}{3}BE$ ва $AO = \frac{2}{3}AD = \frac{2}{3} \cdot 30 = 20$. $\triangle AOE$ да 30° ли бурчак қаршисидаги катет $OE = \frac{OA}{2} = \frac{20}{2} = 10$ *см*. Бу ҳолда: $BE = 3 \cdot EO = 30$ *см*.

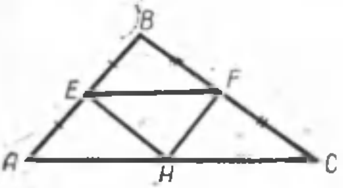
15- масала. Учбурчак томонларининг нисбати 7 : 8 : 9 каби. Учлари берилган учбурчак томонларининг ўрталарида бўлган учбурчакнинг периметри 24 *см* га тенг. Берилган учбурчакнинг томонларини топинг.

Ечиш. Ихтиёрий $\triangle ABC$ чизамиз (169- расм). Унда $AE = BE$, $BF = CF$, $AH = CH$ берилган. $EF + HF + HE = 24$ *см* ва $AB : BC : AC = 7 : 8 : 9$. Бу нисбатга мувофиқ $AB = 7x$; $BC = 8x$; $AC = 9x$ деб ёзиш мумкин.

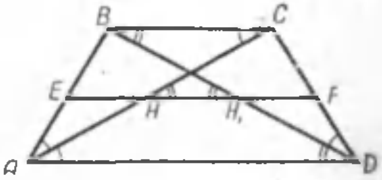
$EF = \frac{AC}{2} = \frac{9}{2}x$; $HF = \frac{AB}{2} = \frac{7}{2}x$; $HE = \frac{BC}{2} = \frac{8}{2}x = 4x$ (учбурчакнинг ўрта чизиқлари бўлгани учун). Буларни ўрнига қўйсак: $\frac{9}{2}x + \frac{7}{2}x + 4x = 24$. Бундан: $x = 2$. Демак, $AB = 7x = 7 \cdot 2 = 14$ (*см*); $BC = 8x = 8 \cdot 2 = 16$ (*см*); $AC = 9x = 9 \cdot 2 = 18$ (*см*).

16- масала. Трапециянинг диагоналлари унинг ўткир бурчакларининг биссектрисалари бўлиб, ўрта чизиқни 10 *см* ва 18 *см* га тенг бўлган икки қисмга бўлади. Трапециянинг периметрини топинг.

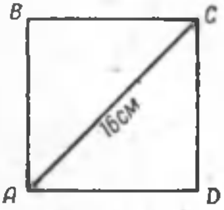
Ечиш. $ABCD$ трапеция чизамиз (170- расм). AC, BD диагоналлар ва EF ўрта чизиқ ўтказамиз. $EH = 10$ *см*, $HF = 18$ *см* бўлсин, $\angle DAC = \angle CAB$ ва $\angle ADB = \angle BDC$ (шартига кўра). Энди, $\angle DAC = \angle ACB$ ва $\angle ADB = \angle DBC$ (ички алмашинувчи бурчаклар бўлгани учун). У ҳолда, $\triangle ABC$ ва $\triangle BDC$ — тенг ёнли. Улардан: $AB = BC = CD$. Аммо, трапециянинг ўрта чизиғи $EF = \frac{AD + BC}{2}$ дан: $AD + BC = 2EF = 2(EH + HF) = 2(10 + 18) = 56$ *см*. $\triangle ABC$ нинг ўрта чизиғи $EH = \frac{BC}{2}$ дан: $BC = 20$ *см*. Демак, $P = AB + BC + CD + AD = 20 + 20 + 20 + 36 = 96$ *см*.



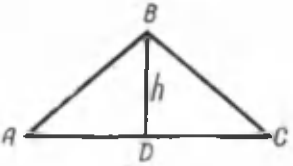
169- расм.



170- расм.



171- расм.



172- расм.

17- масала. Диагонали 16 *см* бўлган квадратнинг томони ва юзи топилсин.

Ечиш. $ABCD$ квадратнинг диагонали $AC = 16$ *см* бўлсин (171- расм). $AB = BC = CD = AD = ?$ ва $ABCD_{юзи} = S_{кв} = ?$

$\triangle ABC$ дан, Пифагор теоремасига асосан $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2AB^2$;

$$AB = \sqrt{\frac{AC^2}{2}} = \sqrt{\frac{16^2}{2}} = 8\sqrt{2} \text{ см}; \; S_{кв} = (8\sqrt{2})^2 = 128 \text{ см}^2.$$

18- масала. Тенг ёнли учбурчакнинг баландлиги 35 *см*, асосининг ён томонига нисбати 48 : 25 каби бўлса, шу учбурчак томонлари топилсин.

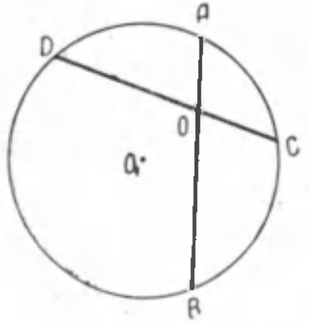
Ечиш. Тенг ёнли ABC учбурчак берилган (172- расм), $h = 35$ *см*; $AC : AB = 48 : 25$, бунга кўра $AC = 48\,x$; $AB = 25\,x$ бўлади. $\triangle\, ABD$ дан:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + h^2 = \left(\frac{48\,x}{2}\right)^2 + 35^2 \text{ ёки}$$

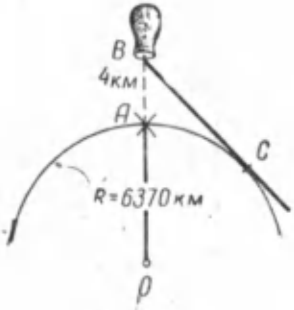
$$(25\,x)^2 = (24\,x)^2 + 1225.$$

Бундан $x = 5$; у ҳолда: $AB = 25\,x = 125$ (*см*). $AC = 48x = 48 \cdot 5 = 240$ (*см*).

19- масала. Иккита ватар доира ичида кесишади. Бирининг кесмалари 25 *см* ва 27 *см*, иккинчи ватар кесмаларининг нисбати 3 : 5 каби. Иккинчи ватар узунлигини топинг.



173- расм.



174- расм.

Ечиш. Ихтиёрий доира чизамиз (173- расм). $OA = 25$ *см*, $OB = 27$ *см*; $OC : OD = 3 : 5$, бу ҳолда $OC = 3x$; $OD = 5x$ бўлади. Кесишган икки ватар кесмалари узунликларининг кўпайтмаси ўзаро тенг эди, яъни $OA \cdot OB = OC \cdot OD$ ёки $25 \cdot 27 = 3x \cdot 5x = 15x^2$, бундан: $x = \sqrt{45} \approx 6{,}7$. У ҳолда: $OC = 3x = 3 \cdot 6{,}7 = 20{,}1$ (*см*). $OD = 5x = 5 \cdot 6{,}7 = 33{,}5$ (*см*). $CD = OC + OD = 20{,}1 + 33{,}5 = 53{,}6$ (*см*).

20- масала. Ердан 4 *км* баландликка кўтарилган ҳаво шаридан қанча узоқликдаги масофа кўринади? (Ернинг радиуси 6370 *км*.)

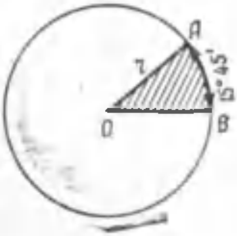
Ечиш. $OA = 6370$ *км*, $AB = 4$ *км*, BC ни топамиз (174- расм). Кесувчи билан унинг ташқи қисмининг кўпайтмаси уринма квадратига тенг эканлигини биламиз, яъни $(2AO + AB) \cdot AB = BC^2$ ёки $BC^2 = (2 \cdot 6370 + 4) \cdot 4 = 12744 \cdot 4$, бундан: $BC = \sqrt{12744 \cdot 4} = 2 \cdot 112{,}8 = 225{,}6$ (*км*).

21- масала. Насос поршени кесимининг юзи 12,56 $см^2$, поршеннинг диаметрини топинг.

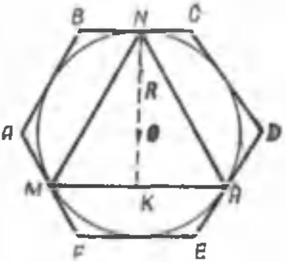
Ечиш. Насос поршенининг кесими доира шаклида, унинг юзи πR^2 га тенг.

Бу ҳолда $\pi R^2 = 12{,}56$. Бундан: $R = \sqrt{\frac{12{,}56}{\pi}} = \sqrt{\frac{12{,}56}{3{,}14}} = 2$; $AB = 2R = 2\cdot 2 = 4$ (*см*).

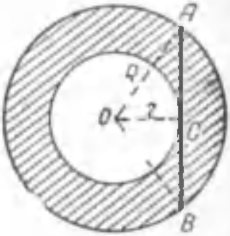
22- масала. Доиранинг юзи ташқи чизилган квадратнинг юзидан 4,3 $м^2$ кичик. Шу доиранинг юзини аниқланг.



175- расм.



176- расм.



177- расм.

Ечиш. $AB = BC = CD = AD$ бўлсин. Квадратнинг юзи $= AB^2$. Доиранинг юзи $= \pi R^2$. Масаланинг шартига кўра: $AB^2 - \pi R^2 = 4{,}3$. Аммо, $AB = 2R$. Демак, $4R^2 - \pi R^2 = 4{,}3$; бундан: $R^2 = \frac{4{,}3}{0{,}86} = 5$. Доира юзи $= \pi R^2 = 5\pi м^2$.

23- масала. Радиуси R ва ёйи 15°45′ бўлган сектор юзи топилсин (175- расм).

Ечиш. $S_{сек} = \frac{\pi R^2 \cdot n}{360} \cdot n^\circ = 15^\circ 45'$ ни ўрнига қўйсак,

$$S_{сек} = \frac{\pi R^2 \cdot 15^\circ 45'}{360} = \frac{15\frac{3}{4}\pi R^2}{360} = \frac{63}{4\cdot 360}\pi R^2 = \frac{7}{160}\pi R^2$$ кв. бирлик.

24- масала. Мунтазам олтибурчакка ички чизилган айланага мунтазам ички учбурчак чизилган. Олтибурчакнинг томони a га тенг. Учбурчакнинг юзини топинг (176- расм).

Ечиш. $AB = BC = CD = DE = EF = AF = R$ эди. Берилганга асосан $R = a$; $MN = NH = MH = a_3 = \sqrt{3}R = \sqrt{3}\cdot a$;

$$NK = ON + OK = R + \frac{R}{2} = \frac{3}{2}R = \frac{3}{2}a.$$ У ҳолда,

$$S_\Delta = \frac{NK\cdot MH}{2} = \frac{\frac{3}{2}a\cdot\sqrt{3a}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$$ кв. бирлик.

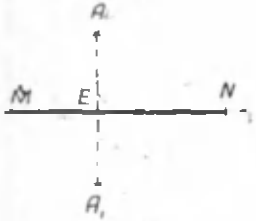
25- масала. Иккита концентрик айланадан ясалган ҳалқада катта доиранинг кичик доирага уринган ватари a га тенг. Шу ҳалқанинг юзини аниқланг (177- расм).

Ечиш. $OC = r$; $OB = OA = R$ бўлсин. $AB = a$. Бу ҳолда ҳалқанинг юзи $= \pi R^2 - \pi r^2 = \pi (R^2 - r^2)$. $OC \perp AB$ бўлгани учун $\triangle AOC$ дан: $AC^2 = OA^2 - OC^2$ ёки $\frac{a^2}{4} = R^2 - r^2$, буни ўрнига қўйсак: ҳалқанинг юзи $= \pi \frac{a^2}{4}$ кв. бирлик.

37- §. ГЕОМЕТРИК АЛМАШТИРИШЛАР ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Таъриф. *Текисликдаги ҳар бир A нуқтани янги A_1 нуқтага алмаштирадиган ҳар қандай қоида геометрик алмаштириш деб аталади.*

Ҳар бир фигура нуқталардан ташкил топганлиги учун, текисликдаги ихтиёрий H фигурадан геометрик алмаштириш натижасида, бошқа H_1 фигура ҳосил қилиш мумкин. Бунда, H фигура кесма, эгри чизиқ, айлана, учбурчак ва ҳоказолар бўлиши мумкин. Энди, геометрик алмаштиришларнинг қуйидаги бир неча турлари билан танишамиз.



178- расм.

а) Ўққа нисбатан симметрия

1- таъриф. *Агар AA_1 кесма MN тўғри чизиққа перпендикуляр бўлса ва шу тўғри чизиқ билан кесишганда тенг иккига бўлинса, A ва A_1 нуқталар MN тўғри чизиққа нисбатан симметрик нуқталар деб аталади* (178- расм). Бу ҳолда таърифга кўра: $A_1E = AE$; $AE \perp MN$; $A_1E \perp MN$.

2- таъриф. *H фигуранинг барча нуқталари MN тўғри чизиққа нисбатан H_1 фигуранинг барча нуқталарига симметрик бўлса, H_1 фигура MN тўғри чизиққа нисбатан H фигурага симметрик фигура дейилади.*

Масалан, текисликда MN тўғри чизиқ ва $\triangle ABC$ берилган бўлсин (179- расм).

$\triangle ABC$ га MN тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлган $\triangle A_1B_1C_1$ ни ҳосил қилиш учун, A, B, C нуқталарга MN га нисбатан симметрик бўлган A_1, B_1, C_1 нуқталарни топиб, сўнгра топилган нуқталар туташтирилса кифоя. Агар H фигура MN тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлса, MN тўғри чизиқ H фигуранинг *симметрия ўқи* дейилади. Масалан, ҳар қандай айлана учун, унинг ҳар бир диаметри симметрия ўқи бўлади, яъни 180- расмдаги AB, CD ва ҳоказолар.

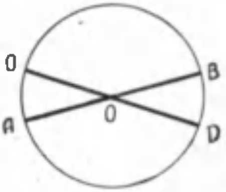
б) Ўққа нисбатан симметриянинг хоссалари

1- теорема. *Бирор тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлган фигуралар бир-бирига тенг бўлади.* Бу теореманинг тўғрилигини кўриш учун, масалан, симдан ясалган айланани бирор диаметри (симметрия ўқи) атрофида 180° букилса, ҳосил бўлган ярим айланалар (H ва H_1 фигура) устма-уст тушганини кўрамиз. Демак, улар бир-бирига тенг (яъни $H = H_1$).

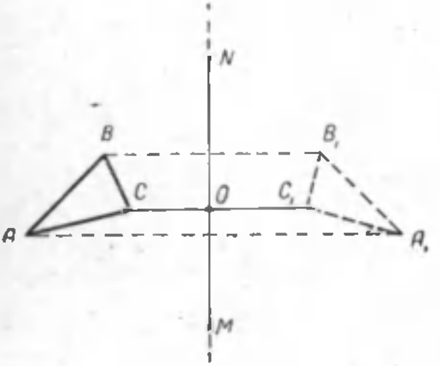
1- натижа. *MN тўғри чизиққа нисбатан AB кесмага симметрик бўлган фигура, AB кесмага тенг бўлган A_1B_1 кесмадан иборат* (181- расм.)

Ҳақиқатан, расмдан $AE = A_1E$; $BF = B_1F$; $AB = A_1B_1$ бўлишини кўриш осон.

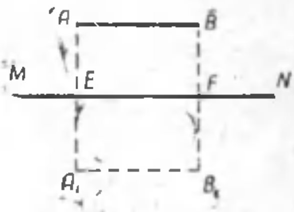
2- натижа. *MN тўғри чизиққа нисбатан R радиусли айланага симметрик бўлган фигура ўша R радиусли айлана-*



180- расм.



179- расм.



181- расм.

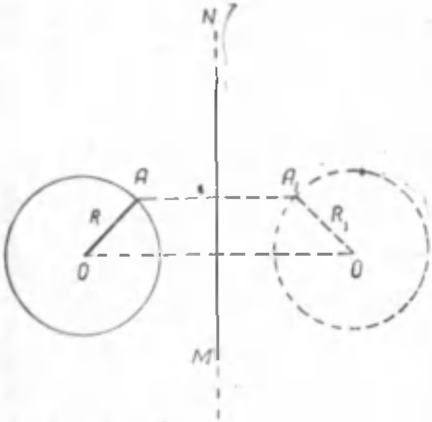
дан иборат. Берилган айлананинг ихтиёрий нуқтаси A бўлсин; MN га нисбатан O ва A нуқталарга симметрик бўлган O_1 ва A_1 нуқталарни топамиз (182- расм). Расмдан $OA = O_1A_1 = R$ эканини кўриш осон. A нуқта берилган айланадаги ихтиёрий нуқта бўлгани учун A_1 каби топилган барча нуқталар тўплами радиуси $O_1A_1 = OA = R$ бўлган янги симметрик айлана ҳосил қилади.

2- теорема. *MN тўғри чизиққа нисбатан AB тўғри чизиққа симметрик бўлган A_1B_1 фигура ҳам тўғри чизиқ бўлади* (183- расм). Агар AB тўғри чизиқ MN билан бирор E нуқтада кесишса A_1B_1 ҳам MN билан ўша E нуқтада кесишади ва AB, A_1B_1 тўғри чизиқлар MN билан бир хил бурчаклар ташкил қилади. Агар $AB \parallel MN$ бўлса, $A_1B_1 \parallel MN$ бўлади.

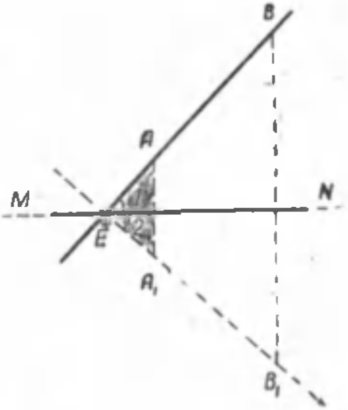
Исбот. MN тўғри чизиққа нисбатан A_1 нуқта A га, B_1 нуқта B га симметрик бўлгани учун (1- теоремага асосан) A_1B_1 ҳам тўғри чизиқдир. AB тўғри чизиқ MN ни E нуқтада кесган бўлса, A_1B_1 ҳам E нуқтадан ўтади. $\angle 1 = \angle 2$, чунки улар чизмани MN тўғри чизиқ бўйлаб букканда устма-уст тушади.

Энди $AB \parallel MN$ бўлсин (181- расм). Бу ҳолда A_1B_1 тўғри чизиқ MN билан кесишмайди, чунки акс ҳолда AB ҳам MN

билан ўша нуқтада кесишган бўлади, бу мумкин эмас ($AB \parallel MN$ эди). Демак, $A_1B_1 \parallel MN$. 183- расмдан яна шундай нарсаларни ёзиш мумкин: 1) $\triangle BEB_1$ тенг ёнли, чунки $BE = B_1E$ ва $\angle 1 = \angle 2$; MN тўғри чизиқ эса биссектрисадир. Шунинг учун, тенг ёнли учбурчакнинг симметрия ўқи унинг учидаги бурчагининг биссектрисасидан иборатдир. 2) ABA_1B_1 тенг ёнли трапеция бўлгани учун MN тўғри чизиқ симметрия ўқидир. Демак, тенг ёнли трапеция асосларининг ўрталаридан ўтувчи MN тўғри чизиқ шу трапециянинг симметрия ўқидир. Ўққа нисбатан симметрия ёрдами билан геометриядаги айрим теоремаларни исбот қилиш мумкин. Масалан:



182- расм.



183- расм.

Теорема. *Кесманинг ўртасидан ўтказилган перпендикулярда ётган ҳар бир нуқта шу кесманинг учларидан баравар узоқликда бўлади.*

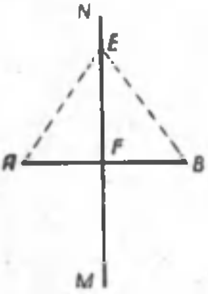
Исбот. AB кесмага перпендикуляр MN тўғри чизиқда олинган ихтиёрий нуқта E бўлсин (184- расм). $AB \perp MN$; $AF = BF$; $AE = BE$ эканини кўрсатиш керак.

A ва B нуқталар MN га нисбатан симметрик, у ҳолда AE ва BE лар MN га нисбатан симметрик, демак (1- теоремага асосан), $AE = BE$. (Бу теоремани биз юқорида ҳам кўриб ўтган эдик.)

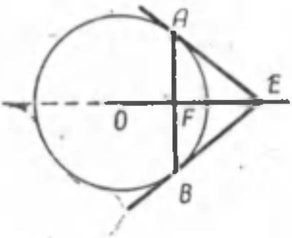
Теорема. *Айлана ташқарисидаги бирор E нуқтадан унга ўтказилган EA ва EB уринмалар AB ватар билан бир хил бурчаклар ташкил қилади.* EA ва EB кесмалар ўзаро тенг, E нуқтани айлана маркази билан туташтирувчи EO тўғри чизиқ AB ватарга перпендикуляр ва бу ватарнинг ўртасидан (F нуқтада) кесиб ўтади (185- расм).

Исбот. OE тўғри чизиқ (диаметрнинг давоми) айлананинг симметрик ўқидир. Бу ўққа нисбатан симметрик алмаштириш-да айлана билан биттагина умумий нуқтаси бўлган *EA* уринма *OE* га нисбатан *EB* уринмага алмашади. Шундай қилиб, *OE* га нисбатан симметрияда *EA* кесма *EB* кесмага, *EFA* бурчак *EFB* бурчакка, *AF* кесма *BF* кесмага алмашади. У ҳолда: $EA = EB$, $\angle EAF = \angle EBF$, $\angle EFA = \angle EFB = 90°$; $AF = BF$.

Изоҳ. Шунга ўхшаш яна бир неча теоремаларни симметрияга асосланиб исбот қилиш мумкин.



184- расм.



185- расм.

186- расм.

в) Марказий симметрия (нуқтага нисбатан симметрия).

1-таъриф. *Агар* AA_1 *кесма* O *нуқтадан ўтиб, шу нуқтада тенг иккига бўлинса,* A *ва* A_1 *нуқталар* O *нуқтага нисбатан симметрик нуқталар дейилади* (186- расм). $AO = A_1O$.

2-таъриф. H *фигуранинг ҳамма нуқталари* O *нуқтага нисбатан* H_1 *фигуранинг ҳамма нуқталарига симметрик бўлса,* H_1 *фигура* O *нуқтага нисбатан* H *га симметрик фигура дейилади* (187- расм). O нуқтага нисбатан H фигурага симметрик бўлган H_1 фигурага ўтиш *O нуқтага нисбатан симметрик алмаштириш ёки марказий симметрик алмаштириш* дейилади. Буни биз қисқача *марказий симметрия* деб атаймиз.

Изоҳ. Юқоридаги расмларга асосан марказий симметрия фигурани берилган O нуқта атрофида 180° га буриш демакдир.

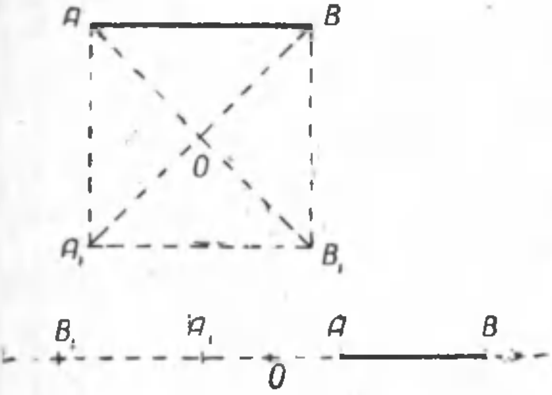
г) Марказий симметриянинг хоссалари

1-теорема. *Марказий симметрик икки фигура ўзаро тенг.* Ҳақиқатан ҳам, бу икки фигуранинг бирини 180° га буриш билан уларни бир-бирига устма-уст тушириш мумкин. Демак, улар ўзаро тенгдир.

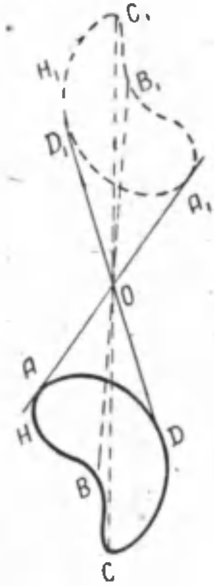
2-теорема. O *нуқтага нисбатан* AB *кесмага симметрик бўлган фигура шу* AB *га тенг бўлган* A_1B_1 *кесмадан* *иборат* (188- расм); A_1 ва B_1 нуқталар O нуқтага нисбатан A ва B ларга симметрик нуқталар бўлади; AB ва A_1B_1 кесмалар ёки параллел, ёки O нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқларда ётади.

3-теорема. *O нуқтага нисбатан R радиусли айланага симметрик бўлган фигура ҳам радиуси R га тенг айланадан иборат.* Унинг маркази O нуқтага нисбатан берилган айлана марказига симметрик нуқтадир (189- расм).

$CE = C_1E_1 = R$. Бу тенглик асосида H айлананинг ҳар бир E нуқтасини H_1 фигуранинг мос E_1 нуқтаси билан марказий симметрияда қўйиш мумкин.



187- расм.



188- расм.

Буриш

Биз юқорида 180° га буришни кўриб ўтган эдик; энди ҳар қандай бурчакка бурииш билан танишамиз. Масалан, циркулни ихтиёрий оралиқда очиб, қоғоз бетига игнали учини санчиб O нуқтани, қалам қўйилган учи билан бошқа бир A нуқтани белгилаймиз (190- расм).

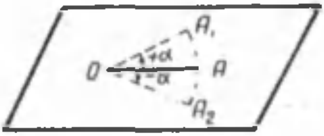
Кейин циркулнинг қаламли учини соат стрелкасига тескари йўналишда ва соат стрелкаси йўналишида α бурчакка бурсак, O нуқтага нисбатан A_1 ва A_2 нуқталар ҳосил бўлади. Буриш соат стрелкасига тескари йўналишда бўлганда, α бурчакни мусбат; соат стрелкаси йўналишида бўлганда эса манфий деб ҳисоблаймиз. A_1 ва A_2 нуқталар A нуқтани O нуқта атрофида $(\pm\alpha)$ бурчакка буриш натижасида ҳосил қилинади деймиз.

Энди O нуқта ва $(+\alpha)$ ёки $(-\alpha)$ бурчак берилган бўлсин. O дан фарқли бўлган бирор A нуқтани олиб, қуйидаги икки шарт билан аниқланувчи нуқтани A_1 билан белгилаймиз: 1) OA нур билан OA_1 нур орасидаги бурчак α га тенг; 2) OA_1 кесма

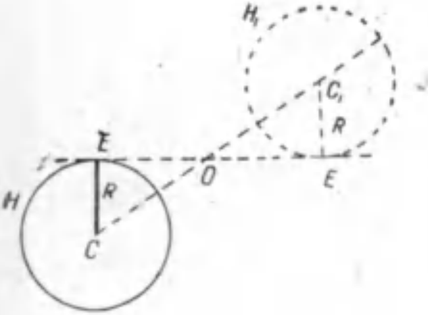
OA кесмага тенг. *A* нуқтадан A_1 нуқтага ўтиш ***O нуқта атрофида*** α ***бурчакка буриш*** деб аталади.

д) Фигурани буриш

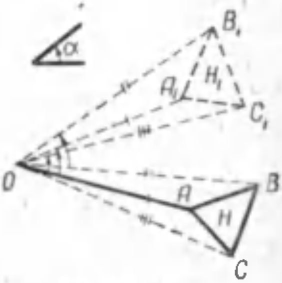
Текисликда бирор *H* фигура берилган бўлсин, унинг ҳар қандай *A* нуқтасини бирор *O* нуқта атрофида α бурчакка буриш натижасида уни бошқа бир A_1 нуқтага алмаштириш мумкин (191- расм).



190- расм.



189- расм.



191- расм.

Таъриф. *H фигуранинг ҳамма нуқталарини O нуқта атрофида* α *бурчакка буриш натижасида ҳосил қилинган нуқталардан ташкил топган* H_1 *фигура H фигурани O нуқта атрофида* α *бурчакка буриш натижасида ҳосил қилинган фигура деб аталади.*

е) Буришнинг хоссалари

Буриш қуйидаги хоссаларга бўйсунади. Уларнинг тўғри эканига ишонч ҳосил қилиш осон.

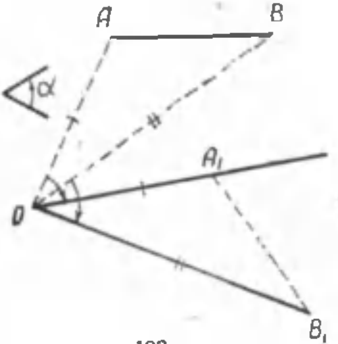
1- теорема. *H фигурани O нуқта атрофида* α *бурчакка буришдан ҳосил қилинган* H_1 *фигура H фигурага тенгдир.* Ҳақиқатан ҳам, *H* фигурани бирор *O* нуқта атрофида α бурчакка бурсак, у H_1 фигура билан устма-уст тушади (191- расм).

2- теорема. *AB кесмани O нуқта атрофида* α *бурчакка бурганда ҳосил қилинган фигура AB кесмага тенг бўлган* A_1B_1 *кесмадан иборат.*

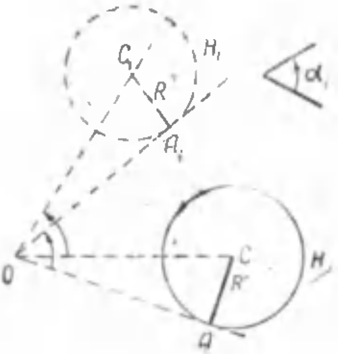
A_1 ва B_1 нуқталар *A* ва *B* нуқталарни *O* нуқта атрофида α бурчакка буришдан ҳосил бўлиши шаклдан равшан кўринади (192- расм).

3-теорема. *H айланани O нуқта атрофида α бурчакка буришдан ҳосил қилинган фигура H айланага тенг бўлган H_1 айланадир.* H айлананинг маркази берилган айлана марказини α бурчакка буриш натижасида ҳосил бўлади (193-расм).

4-теорема. *Ихтиёрий MN тўғри чизиқни O нуқта атрофида α бурчакка буриш натижасида ҳосил қилинган тўғри чизиқ M_1N_1 бўлсин. У ҳолда MN ва M_1N_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчак $|\alpha|$ га тенг бўлади.* Бунда қуйидаги икки ҳол бўлиши мумкин:



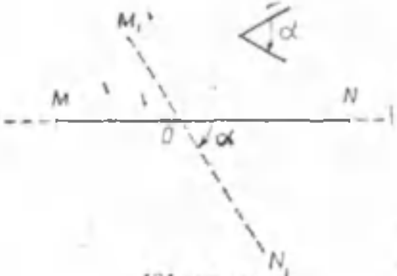
192-расм



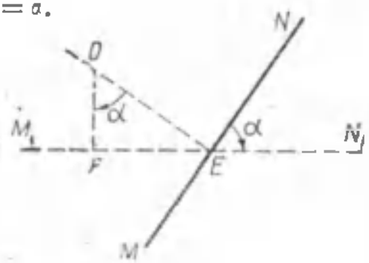
193-расм.

1) MN тўғри чизиқ O нуқтадан ўтади (194-*а* расм).

2) MN тўғри чизиқ O нуқтадан ўтмайди (194-*б* расм). $OE \perp MN$;
$OF \perp M_1N_1$; $\angle NEN_1 = \angle EOF = \alpha$.



194-*а* расм.



194-*б* расм.

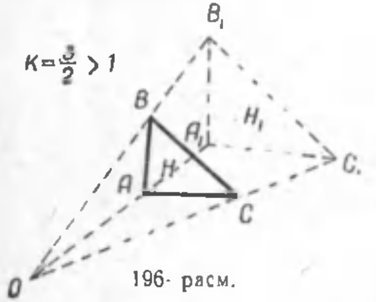
ж) Гомотетия

Мусбат коэффициентли гомотетия

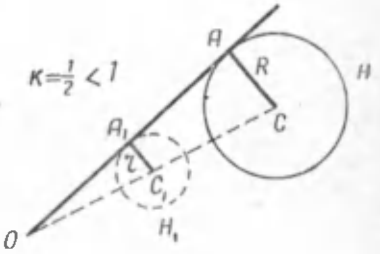
Текисликда бирор O нуқта ва k — маълум мусбат сон берилган бўлсин. OA нурда O дан фарқли ҳар қандай A нуқта учун $OA_1 = k \cdot OA$ тенгликни қаноатлантирадиган A_1 нуқтани ҳамма вақт топиш мумкин (195-расм), бу ҳолда $\frac{OA_1}{OA} = k$.

Таъриф. *A нуқтадан A_1 нуқтага $OA_1 = k\cdot OA$ тенглик билан ўтиш O марказли ва k коэффициентли гомотетия дейилади.* Энди, текисликда O нуқта, бирор H фигура ва мусбат k сон берилган бўлсин. H фигуранинг ихтиёрий A нуқтаси учун A дан маркази O, коэффициенти k бўлган гомотетия ёрдамида текисликнинг бошқа бир A_1 нуқтаси ҳосил қилинади (196- расм). Масалан, $OA = 2{,}5$ *см*, $OB = 3{,}5$ *см*, $OC = 4{,}1$ *см*, $k = \frac{3}{2} > 1$ бўлсин. У ҳолда, $OA_1 = k\cdot OA = \frac{3}{2}\cdot 2{,}5 = 3{,}75$(*см*), $OB_1 = k\cdot OB = \frac{3}{2}\cdot 3{,}5 = 5{,}3$ (*см*), $OC_1 = k\cdot OC = \frac{3}{2}\cdot\ 4{,}1 = 6{,}15$ (*см*). Энди, $k = \frac{1}{2} < 1$ бўлсин. $OC = 5{,}1$ *см*, $OA = 5$ *см*. У ҳолда $OC_1 = k\cdot OC = \frac{1}{2}\cdot 5{,}1 = 2{,}55$ (*см*), $OA_1 = k\cdot OA = \frac{1}{2}\cdot 5 = 2{,}5$ (*см*). Демак, $k > 1$ бўлганда гомотетия фигураларни катталаштиради, $k < 1$ бўлганда эса кичиклаштиради (196 ва 197- расмлар каби).

195- расм.



196- расм.



197- расм.

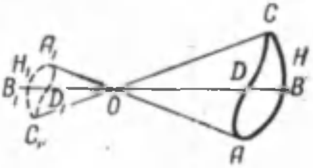
Манфий коэффициентли гомотетия

Текисликда O нуқта ва маълум манфий k сон берилган бўлсин. О дан фарқли ихтиёрий A нуқта учун OA нурнинг қарама-қарши йўналишида ҳамма вақт $OA_1 = |k|\cdot OA$ тенгликни қаноатлантирадиган A_1 нуқта топилади (198- расм). Бу ҳолда ҳам A нуқтадан A_1 нуқтага ўтиш маркази O ва коэффициенти $k < 0$ бўлган гомотетия дейилади. Энди текисликда O нуқта, $k < 0$ сон ва H фигура берилган бўлсин (199- расм), H фигуранинг ихтиёрий A нуқтаси учун ундан маркази O ва коэффициенти $k < 0$ бўлган гомотетия ёрдами билан ҳосил қилинадиган A_1 нуқтани топиш мумкин. Масалан,

$OA = 2{,}5$ *см*, $OB = 3{,}1$ *см*, $OD = 2{,}5$ *см*, $k = -\frac{1}{2} < 0$; $OC = 3$ *см*, У ҳолда

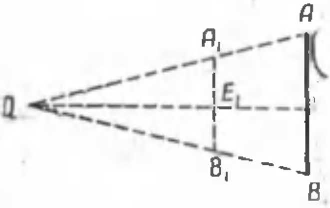
$$OA_1 = |k|\cdot OA = \left|-\frac{1}{2}\right|\cdot 2{,}5 = +1{,}25,\ OB_1 = |k|\cdot OB =$$
$$= \left|-\frac{1}{2}\right|\cdot 3{,}1 = +1{,}55,\ OD_1 = \left|-\frac{1}{2}\right|\cdot 2{,}5 = 1{,}25;\ OC_1 =$$
$$= \left|-\frac{1}{2}\right|\cdot 3 = 1{,}5.$$

198- расм.



199- расм.

H фигура нуқталаридан гомотетия ёрдамида ҳосил қилинадиган барча нуқталар тўплами янги H_1 фигурани беради. 199-расмдаги каби $k < 0$ бўлганда ҳам; $|k| > 1$ бўлганда гомотетия фигураларни катталаштиради, $|k| < 1$ бўлганда эса кичиклаштиради.



200- расм.

з) Гомотетия хоссалари

Гомотетиянинг ушбу хоссаларини исботсиз кўрсатиб ўтамиз.

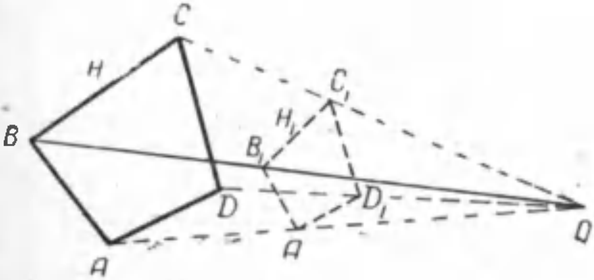
1-теорема. *Кесмага гомотетик бўлган фигура кесма бўлиб, унинг учлари берилган кесманинг учларидан яна ўша гомотетия ёрдамида ҳосил қилинади.* Ҳосил қилинган кесма берилган кесмага параллел ва узунлиги $|k|$ билан берилган кесма узунлиги кўпайтмасига тенг (200- расм).

2-теорема. *k коэффициентли гомотетияда z кўпбурчакка гомотетик бўлган фигура шу кўпбурчакка ўхшаш z_1 кўпбурчакдан иборат бўлиб, ўхшашлик коэффициенти $|k|$ бўлади. z_1 кўпбурчакнинг учлари z кўпбурчак учларидан шу гомотетия ёрдамида ҳосил қилинади* (201- расм).

3-теорема. *k коэффициентли гомотетияда R радиусли айланага гомотетик фигура ($|k|\cdot R$) радиусли айлана бўлади. Ҳосил қилинган айлана маркази берилган айлана марказидан ўша гомотетия ёрдамида ҳосил қилинади.*

и) Векторлар ҳақида тушунча

Сон қиймати билан бирликда йўналиши ҳам эътиборга олинган миқдор ***вектор*** дейилади. Масалан, куч, тезлик, тезланиш ва ҳоказоларнинг ҳар бири вектор миқдордир. Геометрик тасвирда вектор — бир томони стрелкадан иборат кесма билан белгилаб ёзилади. Демак, геометрияда вектор йўналишга эга бўлган кесмадир. Масалан, $\overrightarrow{AB}$ вектор берилган (202- расм). (Вектор, йўналган кесма бўлгани учун уни битта ҳарф билан белгилаш ҳам мумкин.) Векторнинг сон қиймати унинг узунлиги дейилади. 202- расмда A нуқта векторнинг боши, B нуқта эса охири дейилади. Ўқ деб бирор йўналиши белгиланган тўғри чизиқ тушунилади ва бунда узунликларни ўлчаш учун масштаб бирлиги ҳам берилган бўлади. Вектор ҳам кесмадан



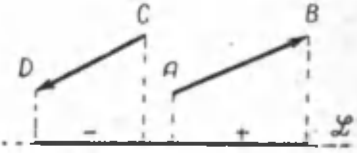
201- расм.

202- расм.

иборат бўлгани учун унинг ўқдаги проекцияси, геометриядаги кесманинг чизиқдаги проекцияси каби бўлади, лекин, бунда проекциянинг йўналиши ўқ йўналиши билан бир хил бўлса, проекциянинг миқдори мусбат, қарама-қарши бўлса, манфий деб ҳисобланади. Масалан $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$ вектор проекциялари каби (203- расм).

к) Векторларнинг тенглиги

Таъриф. *Икки вектордан бирининг узунлиги иккинчисининг узунлигига тенг ва иккovининг йўналишлари бир хил бўлса, бундай векторлар бир-бирига тенг векторлар дейилади* (204- расм).



203- расм.

Таъриф. *Икки векторнинг узунликлари тенг ва йўналишлари қарама-қарши бўлса, улар қарама-қарши векторлар дейилади* (205- расм).

Хоссаси. Икки векторнинг ҳар бири учинчи векторга тенг бўлса, у икки вектор ҳам ўзаро тенг бўлади (206- расм).

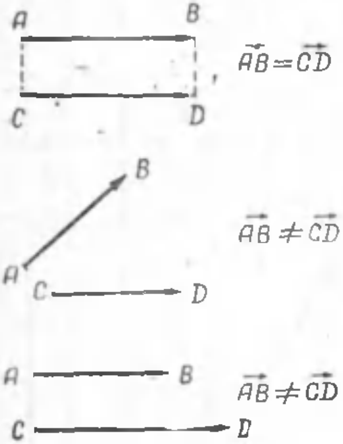
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF} \text{ ва } \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF},$$

демак,

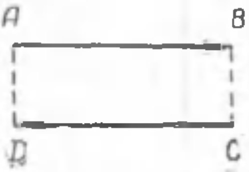
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$$

л) Параллел кўчириш таърифи

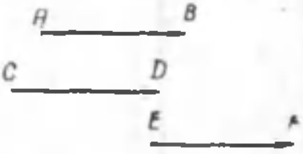
Бирор $\overrightarrow{AB}$ *вектор берилган бўлсин. Ихтиёрий C нуқта учун D билан шундай нуқтани белгилаймизки,* $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$ *тенглик ўринли бўлсин* (207- расм).



204- расм.



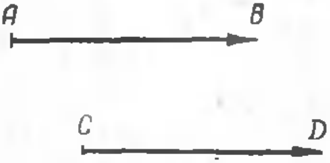
205- расм.



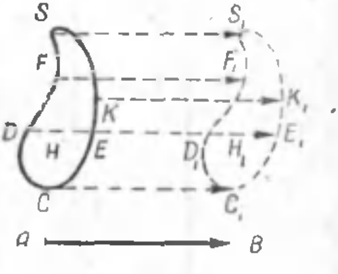
206- расм.

C нуқтадан D нуқтага ўтиш AB вектор қадар *параллел кўчириш* дейилади.

Таъриф. *H фигуранинг ҳамма нуқталарини AB вектор қадар параллел кўчиришдан ҳосил қилинган* H_1 *фигура AB вектор қадар параллел кўчиришдан ҳосил қилинган фигура дейилади* (208- расм).



207- расм.



208- расм.

м) Параллел кўчириш хоссалари

1-теорема. *H фигурани параллел кўчиришдан ҳосил қилинган* H_1 *фигура H фигурага тенг бўлади.*

2-теорема. *CD кесмани $\overrightarrow{AB}$ вектор қадар параллел кўчирганда ҳосил қилинган фигура CD га тенг бўлган A_1B_1 кесмадан иборат. A_1, B_1 нуқталар параллел кўчириш натижасида A, B нуқталардан ҳосил бўлади.*

3-теорема. *H айланани параллел кўчириш натижасида ҳосил қилинган H_1 фигура H айланага тенг айлана бўлади. H_1 нинг маркази H марказидан ўша параллел кўчириш натижасида ҳосил қилинади.*

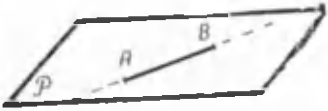
Изоҳ. Геометрик алмаштиришлар ҳақидаги тушунча бу китобда қўшимча бир нарса бўлганлиги учун, унга тегишли масалалар берилмади. Қизиққан китобхонлар 7-синф учун „Геометрия" дарслигидан қарашлари мумкин.

Б) СТЕРЕОМЕТРИЯ

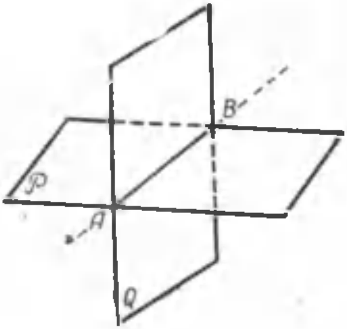
1- §. ДАСТЛАБКИ ТУШУНЧАЛАР

Таъриф. *Стереометрия деб, ҳамма нуқталари бир текисликда жойлаша олмайдиган фазовий фигураларни ўргатадиган геометрия бўлимига айтилади.* Фазовий фигуралар чизмада киши кўзига фигуранинг тахминан ўзидек таассурот қолдирадиган расмлар ёрдами билан тасвирланади.

Текислик ҳақида аксиомалар: 1) *Агар тўғри чизиқнинг ихтиёрий икки нуқтаси бир текисликда ётса, бу тўғри чизиқнинг ҳар бир нуқтаси шу текисликда ётади* (209- расм).

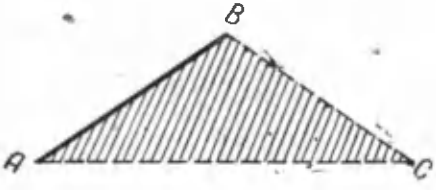


209- расм.

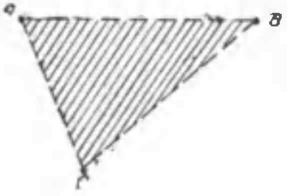


210- расм.

2) *Агар икки текислик кесишса, уларнинг кесими тўғри чизиқ бўлади* (210- расм).



211- расм.



212- расм.

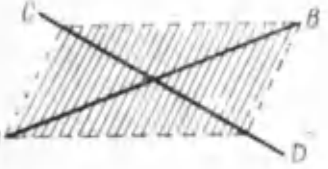
3) *Бир тўғри чизиқда ётмаган ҳар қандай уч нуқтадан фақат битта текислик ўтказиш мумкин* (211- расм).

а) *Тўғри чизиқ ва унинг ташқарисида ётган нуқтадан фақат битта текислик ўтказиш мумкин* (212- расм.)

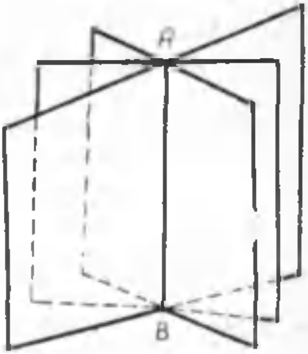
б) *Кесишувчи икки тўғри чизиқдан фиқат битта текислик ўтказиш мумкин* (213- расм).

4) *Фазодаги бир тўғри чизиқдан чексиз кўп текисликлар ўтказиш мумкин* (214- расм.)

AB тўғри чизиқдан ўтувчи текисликлар тўпламини, *текисликлар дастаси* ва *AB* тўғри чизиқ унинг *ўқи* дейилади.



213- расм.



214- расм.

2- §. ПАРАЛЛЕЛ ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАР ВА ТЕКИСЛИКЛАР

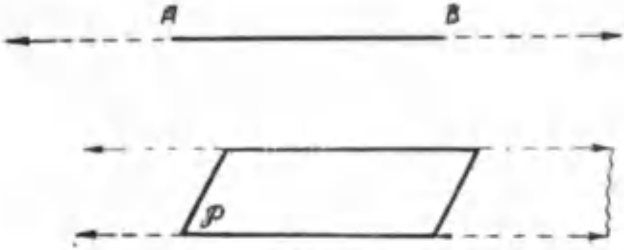
Таъриф. *Бир текисликка жойлашадиган фазодаги икки тўғри чизиқ битта ҳам умумий нуқтага эга бўлмаса, улар ўзаро параллел тўғри чизиқлар дейилади* (215- расм). (Чексизликдаги нуқта бундан мустаснодир.)

Изоҳ. Икки параллел тўғри чизиқдан фақат битта текислик ўтказиш мумкин.

215- расм.

Таъриф. *Текислик ва унда ётмаган тўғри чизиқ битта ҳам умумий нуқтага эга бўлмаса, улар ўзаро параллел дейилади* (216- расм).

Теорема. *Агар P текислик ташқарисидаги AB тўғри чизиқ шу текисликдаги бирор тўғри чизиққа параллел бўл-*

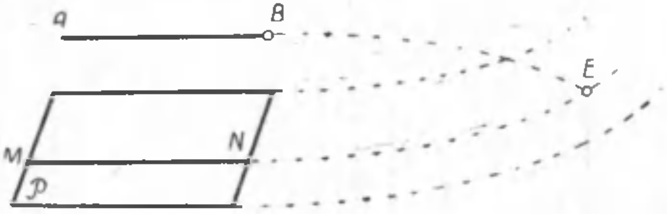


216- расм.

са, AB тўғри чизиқ шу текисликка ҳам параллел бўлади.

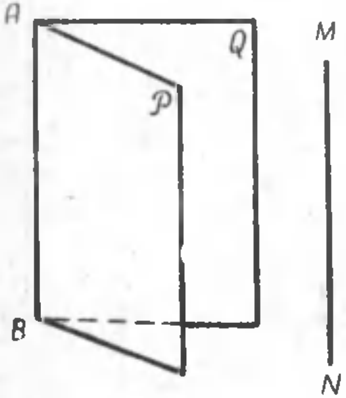
Исбот. MN тўғри чизиқ P текисликда ётган тўғри чизиқ бўлиб, у фазодаги AB тўғри чизиққа параллел бўлсин (217-расм). $AB \parallel P$ эканини исбот қилиш керак.

AB ва P ларни давом эттирганда улар бирор E нуқтада кесишади деб фараз қиламиз. У ҳолда кесишиш E нуқта AB ва MN ларни ҳам давом эттиргандаги кесишиш (яъни умумий) нуқтаси бўлади. Бу мумкин эмас, чунки $AB \parallel MN$ эди. Шунинг учун AB тўғри чизиқ P текислик билан учрашмайди (яъни умумий нуқтаси бўлмайди). Демак, улар таърифга кўра параллел, $AB \parallel P$.

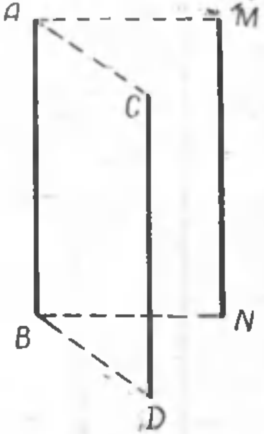


217- расм.

Энди қуйидаги натижаларни исботсиз берамиз:



218- расм.



219- расм.

1) *Агар MN тўғри чизиқ бир-бири билан кесишган икки* **P** *ва Q текисликнинг ҳар бирига параллел бўлса, уларнинг кесишган AB чизиғига ҳам параллел бўлади* (218- расм). $MN \parallel P$ ва $MN \parallel Q$ бўлса, $MN \parallel AB$ дир.

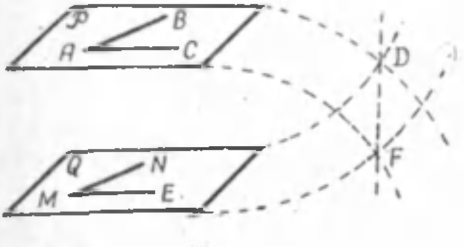
2) *Икки AB ва CD тўғри чизиқ учинчи MN тўғри чизиққа параллел бўлса, улар ўзаро параллел бўлади* (219- расм).

$AB \parallel MN$ ва $CD \parallel MN$ бўлса, $MN \parallel AB \parallel CD$ дир.

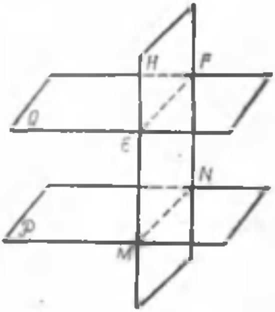
Икки текисликнинг параллеллиги ҳақида тушунча

Таъриф. *Иккита текислик умумий чизиққа эга бўлмаса, улар ўзаро параллел текисликлар дейилади.* (Чексизликдаги чизиқ бундан мустаснодир.)

Теорема. *Агар бир P текисликдаги кесишувчи иккита AB ва AC тўғри чизиқ, иккинчи Q текисликдаги кесишувчи иккита MN ва ME тўғри чизиқларга мос равишда параллел бўлса, у текисликлар ўзаро параллел бўлади.*



220- расм.



221- расм.

Исбот. Теореманинг шартига кўра: $AB \parallel MN$ ва $AC \parallel ME$. $P \parallel Q$ эканлигини исбот қилиш керак (220- расм).

Олдинги теоремага асосан AB ва AC лар Q текисликка параллел. Энди, P ва Q текисликлар давом эттирилганда, улар бирор DF тўғри чизиқда кесишади деб фараз қиламиз; у ҳолда 1- натижага асосан, $AB \parallel DF$ ва $AC \parallel DF$ бўлади. Бу мумкин эмас, чунки P текисликда бир A нуқтадан DF га параллел иккита тўғри чизиқ ўтказиб бўлмайди. Шундай қилиб, P ва Q текисликлар бир умумий чизиққа эга эмас, демак, улар параллел, $P \parallel Q$. Теорема исбот қилинди.

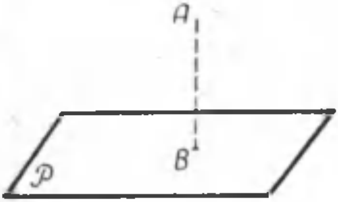
Теорема. *Агар икки P ва Q параллел текислик бирор учинчи H текислик билан кесилса, текисликларнинг кесишиш чизиқлари (MN ва EF лар) ҳам ўзаро параллел бўлади* (221- расм). $P \parallel Q$ берилган. $MN \parallel EF$ эканини исбот қиламиз.

Исбот. MN ва EF тўғри чизиқларнинг иккови кесувчи H текисликда ётади; ундан ташқари MN кесим P да, EF кесим Q да (яъни иккита параллел текисликда) ётади. Шунинг учун улар ҳар қанча давом эттирилганда ҳам кесишмайди, яъни умумий нуқтаси бўлмайди.

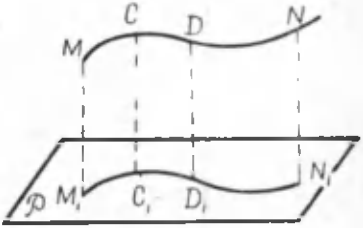
Демак, таърифга кўра $MN \parallel EF$ бўлади.

3- §. НУҚТАНИНГ ВА КЕСМАНИНГ ТЕКИСЛИКДАГИ ПРОЕКЦИЯСИ

Нуқтадан берилган текисликка туширилган перпендикулярнинг асоси шу нуқтанинг текисликдаги *ортогонал проекцияси* деб айтилади. Масалан, A нуқтанинг P текисликдаги ортогонал проекциясини топиш учун A нуқтадан P текисликка перпендикуляр туширамиз: $AB \perp P$, бу ҳолда B нуқта A нинг P даги ортогонал проекцияси бўлади (222- расм).

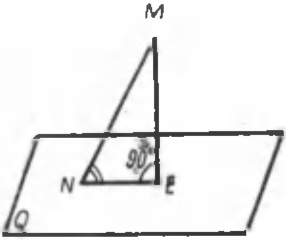


222- расм.

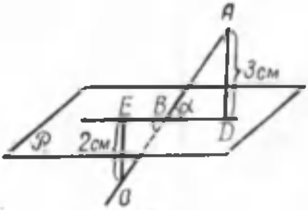


223- расм.

Фазодаги ҳар қандай MN чизиқ барча нуқталарининг P текисликдаги ортогонал проекцияларининг геометрик ўрни, бу чизиқнинг P текисликдаги ортогонал проекцияси дейилади. Масалан, MN чизиқда бир неча M, C, D, . . . нуқталарни олиб уларни P текисликка проекциялаб, ҳосил бўлган M_1, C_1, D_1, . . . нуқталарни бирлаштирамиз. У ҳолда M_1N_1 чизиқ MN нинг P текисликдаги ортогонал проекцияси бўлади (223- расм).



224- расм.



225- расм.

Тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчак

Таъриф. ***Тўғри чизиқ билан унинг текисликдаги ортогонал проекцияси орасидаги бурчак тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчак деб аталади.*** Масалан, MN тўғри чизиқнинг P текисликдаги проекцияси NE бўлсин. Бу ҳолда MNE бурчак MN тўғри чизиқ билан Q текислик орасидаги бурчак бўлади (224- расм).

Масала. 10 *см* узунликдаги кесма текисликни кесиб ўтиб, унинг учлари текисликдан 3 *см* ва 2 *см* узоқликда туради. Шу кесма билан текислик орасидаги бурчак топилсин.

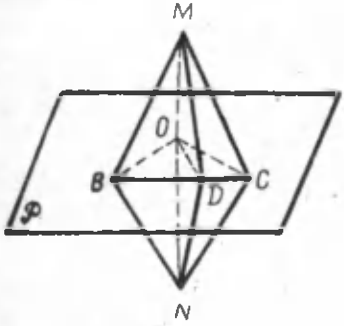
225- расмда: $AC = 10$ *см*; $AD = 3$ *см*; $CE = 2$ *см* бўлсин. $\angle ABD$ ни топамиз.

Ечиш. $\triangle ABD \backsim \triangle CBE$ бўлганидан $\frac{AD}{CE} = \frac{AB}{CB}$ ёки $\frac{3}{2} = \frac{AB}{10 - AB}$ ёки $30 - 3\cdot AB = 2\cdot AB$ ёки $30 = 5\cdot AB$; $AB = 6$ *см*. $\triangle ABD$ дан: $\sin \alpha = \frac{AD}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Бундан:

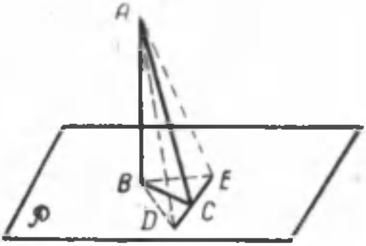
$$\alpha = \frac{\pi}{6}.$$

4- §. ТЕКИСЛИККА ПЕРПЕНДИКУЛЯР ВА ОҒМА ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАР

1- теорема. *Агар P текислик билан кесишувчи MN тўғри чизиқ шу тўғри чизиқ билан текисликнинг кесишув O нуқтасидан текисликда ўтказилган ҳар қандай икки OB ва OC тўғри чизиққа перпендикуляр бўлса, у шу текисликдаги кесишув нуқтаси (O) дан ўтказилган ихтиёрий учинчи OD тўғри чизиққа ҳам перпендикуляр бўлади* (226- расм).



226- расм.



227- расм.

$MN \perp OB$ ва $MN \perp OC$ берилган; $MN \perp OD$ эканини исбот қиламиз.

Исбот. MN тўғри чизиқда, ихтиёрий $OM = ON$ ни оламиз. B, D ва C нуқталар BC тўғри чизиқда ётсин. M ва N нуқталарни B, D, C нуқталар билан бирлаштирсак бир қанча учбурчаклар ҳосил бўлади. Кесманинг ўртасидан ўтувчи перпендикуляр хоссасига асосан $MC = NC$ ва $MB = NB$.

Бу ҳолда $\triangle MBC = \triangle NBC$, чунки мос томонлари бир-бирига тенг. Бундан $\angle MCB = \angle NCB$.

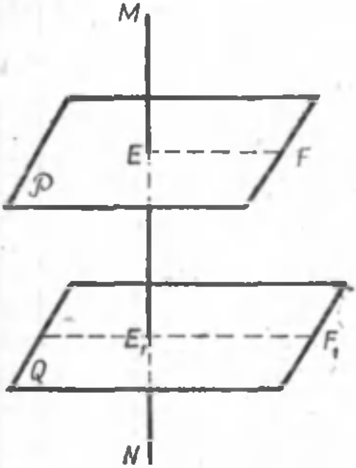
$\triangle MCD = \triangle NCD$, чунки DC — умумий, $MC = NC$ ва $\angle MCD = \angle NCD$. Бундан $MD = ND$. Энди, $\triangle MOD = \triangle NOD$, чунки ўхшаш томонлари бир-бирига тенг. Бундан, $\angle MOD = \angle NOD$, аммо булар қўшни бурчаклар бўлгани учун, ҳар бири 90° га тенгдир. Демак, $MN \perp OD$. Теорема исботланди.

Натижа. *Текисликда ётган ва ўзаро кесишган икки тўғри чизиққа перпендикуляр булган учинчи туғри чизиқ, шу текисликка ҳам перпендикуляр бўлади.* Масалан, $MO \perp P$. MD, MB ва MC лар *оғма* тўғри чизиқлар, OD; OB; OC лар эса бу оғмаларнинг P текисликдаги *проекциялари* дейилади.

2-теорема. *Оғманинг текисликдаги учидан утиб, унинг проекциясига перпендикуляр булган тўғри чизиқ оғманинг ўзига ҳам перпендикуляр бўлади.* (Бу теорема *уч перпендикуляр ҳақидаги теорема* деб аталади.)

$AB \perp P$; AC — оғма; BC — оғманинг P текисликдаги проекцияси, DE — оғма учидан ўтган тўғри чизиқ. $AB \perp BC \perp DE$ берилган. $DE \perp AC$ эканини исбот қиламиз (227- расм).

Исбот. $DC = EC$ қилиб оламиз; D, E нуқталарни B ва A нуқталар билан туташтирамиз. У ҳолда: $\triangle BCD = \triangle BCE$, чунки $DC = EC$, BC — умумий ва $\angle DCB = \angle ECB = 90°$, бундан, $BD = BE$ бўлади.



228- расм.

$\triangle ABD = \triangle ABE$, чунки $BD = BE$, AB — умумий ва $\angle ABD = \angle ABE = 90°$, бундан: $AD = AE$. $\triangle ACD = \triangle ACE$, чунки тенг томонли, бундан: $\angle ACD = \angle ACE$, лекин булар тенг қўшни бурчаклар бўлгани учун $\angle ACE = \angle ACD = 90°$, яъни $DE \perp AC$.

3-теорема. *Икки $P \parallel Q$ текисликдан бири P га перпендикуляр бўлган MN тўғри чизиқ, иккинчи Q текисликка ҳам перпендикулярдир* (228- расм). $MN \perp P$; $P \parallel Q$ берилган. $MN \perp Q$ эканини исбот қиламиз.

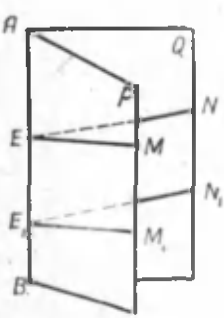
Исбот. $EF \parallel E_1F_1$ ни ўтказсак, у ҳолда икки параллел чизиқни учинчи MN тўғри чизиқ кесиб ўтади. Бу ҳолда мос бурчаклар бўлгани учун, $\angle MEF = \angle ME_1F_1$. Шартга кўра $ME \perp EF$, яъни $\angle MEF = 90°$. Шунинг учун, $\angle ME_1F_1 = \angle MEF = 90°$, демак, $MN \perp Q$.

5-§. ИККИ ЁҚЛИ БУРЧАКЛАР ҲАҚИДА ТУШУНЧА

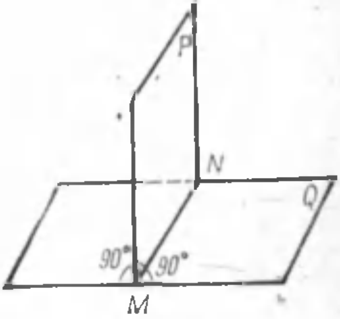
Таъриф. *Битта умумий чегарага эга бўлган иккита ярим текисликдан ташкил топган фигура икки ёқли бурчак дейилади.* Масалан, $PABQ$ икки ёқли бурчакдир (229- расм).

Умумий чегара AB тўғри чизиқ унинг *қирраси*; P ва Q текисликлар унинг *ёқлари* дейилади. Икки ёқли бурчак қиррасининг ихтиёрий бир нуқтасига ёқларидан туширилган иккита перпендикуляр орасидаги бурчак унинг *чизиқли бурчаги* дейилади, масалан, $\angle MEN$ ($ME \perp AB$ ва $NE \perp AB$). $M_1E_1 \parallel ME$ ва $N_1E_1 \parallel NE$ бўлгани учун $\angle M_1E_1N_1 = \angle MEN$ дир.

Демак, *икки ёқли бурчакнинг ҳамма чизиқли бурчаклари ўзаро тенг.*



229- расм



230- расм.

Таъриф. *Иккита икки ёқли бурчакдан бирини иккинчисининг ичига қўйганда бир-бирига жойлашса, улар тенг икки ёқли бурчаклар, акс ҳолда тенгмас икки ёқли бурчаклар дейилади.*

Планиметриядаги бурчаклар сингари икки ёқли бурчаклар ҳам тенг, қўшни, вертикал ва ҳоказо бўла олади.

Таъриф. *Ўзаро тенг қўшни икки ёқли бурчакларнинг ҳар бири икки ёқли тўғри бурчак дейилади ва бундай ҳолда, унинг ёқлари ўзаро перпендикуляр текисликлар дейилади* (230 - расм).

Теорема. 1) *Бир-бирига тенг икки ёқли бурчакларга тенг чизиқли бурчаклар тўғри келади; 2) катта икки ёқли бурчакка катта чизиқли бурчак тўғри келади ва аксинча.*

Исбот. 1) $\angle P_1A_1B_1Q_1 = \angle FABQ$ бўлсин (231 - расм). $\angle M_1E_1N_1 = \angle MEN$ эканини кўрсатамиз.

$\angle P_1A_1B_1Q_1$ ни $\angle PABQ$ ичига қўйганда устма-уст жойлашсин, бу ҳолда $\angle M_1E_1N_1$ ва $\angle MEN$ лар мос томонлари параллел бўлган бурчаклар бўлади. Демак, $\angle M_1E_1N_1 = \angle MEN$.

2) $\angle P_1A_1B_1Q_1$ $\angle PAbQ$ бўлсин. $\angle P_1A_1B_1Q_1$ ни $\angle PABQ$ ичига қўйганда Q_1 ёқ H ёқ ҳолатини олади, чунки $\angle P_1A_1B_1Q_1 < \angle PABQ$ эди. Бу ҳолда чизиқли $\angle M_1E_1N_1 = \angle MEN_2 < \angle MEN$ бўлади.

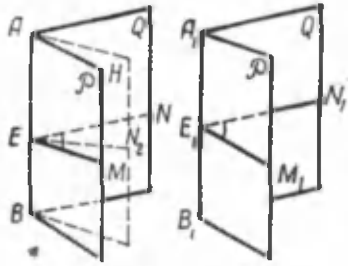
Икки ёқли бурчак ўзининг чизиқли бурчагининг миқдори билан ўлчанади.

Теорема. *Агар икки параллел AB ва CD тўғри чизиқдан бири P текисликка перпендикуляр бўлса, иккинчиси ҳам P га перпендикуляр бўлади.*

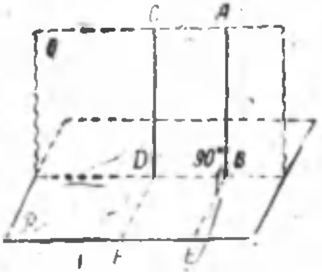
$AB \perp P$ ва $AB \parallel CD$ берилган (232- расм).

$CD \perp P$ эканини исбот қиламиз.

Исбот. (3) аксиомага асосан $AB \parallel CD$ тўғри чизиқлар орқали Q текислик ўтказсак икки ёқли бурчак ҳосил бўлади. Бу ҳолда $\angle ABE$ ва $\angle CDF$ лар $QDBP$ икки ёқли бурчакнинг чизиқли бурчаклари бўлгани учун улар ўзаро тенг, яъни $\angle CDF = \angle ABE$.



231- расм.



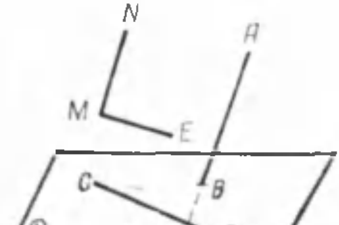
232- расм.

Аммо, $\angle ABE = 90°$, чунки $AB \perp P$ эди. Шунинг учун $\angle CDF = \angle ABE = 90°$, демак, $CD \perp P$.

6- §. УЧРАШМАС (АЙҚАШ) ИККИ ТЎҒРИ ЧИЗИҚ ҲАҚИДА ТУШУНЧА

CD тўғри чизиқ P текисликда ётсин. AB тўғри чизиқ эса P текисликни B нуқтада кесиб ўтсин (233- расм).

Бу ҳолда AB ва CD тўғри чизиқлар умумий нуқтага эга бўлмаса, бундай икки тўғри чизиқ *учрашмас айқаш тўғри чизиқлар* дейилади. Фазодаги ихтиёрий M нуқтадан $ME \parallel CD$ ва $MN \parallel AB$ лар ўтказилса, ҳосил бўлган икки тўғри чизиқ орасидаги EMN бурчак AB ва CD айқаш чизиқлар орасидаги бурчак дейилади.



233 расм.

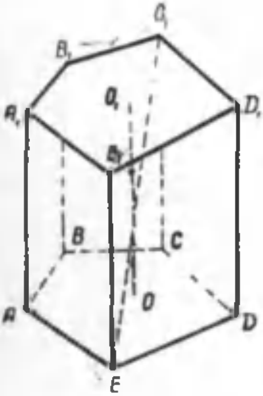
7- §. КЎПЁҚЛАР

7- §. КЎПЁҚЛАР

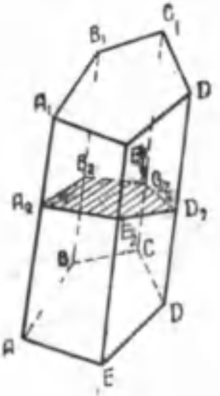
Таъриф. *Текис кўпбурчаклар билан чегараланган жисм кўпёқ деб аталади.* Бундаги текис кўпбурчаклар унинг *ёқлари;* қўшни ёқларининг кесишган чизиғи унинг *қирралари;* қирраларининг кесишишидан ҳосил бўлган нуқталар унинг *учлари* ва бир ёғида ётмаган икки учини туташтирувчи кесма, унинг *диагонали* дейилади. (Кўпёқни унинг бирор диагоналининг учларига қўйилган икки ҳарф билан ҳам ўқиш мумкин.)

а) Призма ва унинг сирти

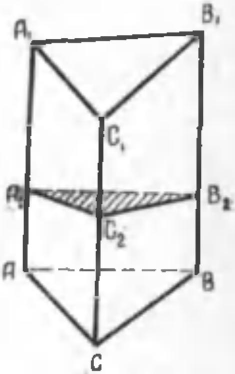
Таъриф. ***Икки ёғи ўзаро параллел текис кўпбурчакдан, қолган ёқлари эса параллелограммлардан иборат бўлган кўпёқ призма дейилади.*** Параллел кўпбурчаклар унинг *асослари*; параллелограммлар эса унинг ***ён ёқлари*** дейилади. Масалан, 234- расмда беш бурчакли (EC_1) тўғри (ён ёқлари асос текислигига перпендикуляр) призма берилган.



234- расм.



235- расм.



236- расм.

Асосларининг томонлари ўзаро тенг ва баландлиги асос марказидан ўтган кўпёқ мунтазам кўпёқ дейилади.

Ён ёқлари асос текисликларига перпендикуляр бўлмаса, у *оғма призма* дейилади (235- расм).

$h = OO_1$ асос юзига перпендикуляр бўлганда призманинг *баландлиги* дейилади. Оғма призма AD_1 нинг ён қирраларига перпендикуляр текислик билан кесишдан ҳосил бўлган $A_2B_2C_2D_2E_2$ кўпбурчак *перпендикуляр кесим* дейилади (235- расм).

Теорема. *Призманинг ён сирти перпендикуляр кесимнинг периметри билан ён қиррасининг кўпайтмасига тенг* (235- расм).

AC_1 призма берилган бўлсин. AC_1 призма ён сиртини „$S_{\text{ён пр}}$“ деб белгилаймиз. $S_{\text{ён пр}} = (A_2B_2 + B_2C_2 + C_2D_2 + D_2E_2 + E_2A_2)\cdot AA_1$ эканини исбот қиламиз.

Исбот. Берилган призманинг ён ёқлари параллелограммлардан иборат бўлиб, уларнинг баландликлари A_2B_2, $B_2C_2, \ldots,$ E_2A_2. Бу ҳолда $S_{\text{ён пр}} = AA_1\cdot A_2B_2 + BB_1\cdot B_2C_2 + \ \ldots \ + EE_1\cdot$

$\cdot E_2A_2$ бўлади. Аммо қирралар: $AA_1 = BB_1 = CC_1 = \ldots = EE_1$. Шунинг учун,

$$S_{\text{ён пр.}} = (A_2B_2 + B_2C_2 + \ldots + E_2A_2) \cdot AA_1.$$

Натижа. *Тўғри призманинг ён сирти асосининг периметри билан ён қирраси кўпайтмасига тенг.*

Масала. Уч бурчакли оғма призманинг ён қирралари 8 *см;* перпендикуляр кесимининг томонлари 9 : 10 : 17 каби нисбатда ва унинг юзи 144 *см*^{2}. Шу призманинг ён сиртини топинг.

Ечиш. $ABCA_1B_1C_1$ оғма призма берилган бўлсин. $\triangle A_2B_2C_2$ перпендикуляр кесим (236- расм).

$$AA_1 = BB_1 = CC_1 = 8 \text{ см};$$
$$A_2C_2 : C_2B_2 : A_2B_2 = 9 : 10 : 17.$$

Бу ҳолда,

$$A_2C_2 = 9x;\ C_2B_2 = 10\ x;$$
$$A_2B_2 = 17\ x \text{ деб ёзса бўлади.}$$
$$\triangle\ A_2B_2C_{2\ \text{юзи}} = 144\ \text{см}^2.$$

Герон формуласидан фойдаланамиз:

$$S_\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$\text{бунда } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Бизнинг мисолда $p = \frac{9x + 10x + 17x}{2} = 18x$; демак, $144 = \sqrt{18x \cdot (18x - 9x)(18x - 10x)(18x - 17x)} = 36x^2$. Бундан: $x = 2$. Демак, $A_2B_2 = 17x = 34$ *см*; $B_2C_2 = 10x = 20$ *см*; $A_2C_2 = 9\ x = 18$ *см*.

$S_{\text{ён пр.}} = (A_2C_2 + C_2B_2 + B_2A_2) \cdot AA_1 = (18 + 20 + 34) \cdot 8 = 576$ (*см*^{2}).

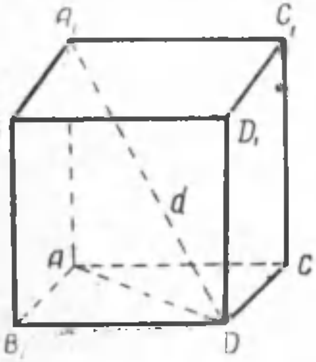
Таъриф. *Кўпёқларнинг тўла сирти деб, унинг ён сирти билан асослари юзларининг йиғиндисига айтилади.*

б) Параллелепипед; унинг қирралари, ёқлари ва диагоналларининг хоссалари

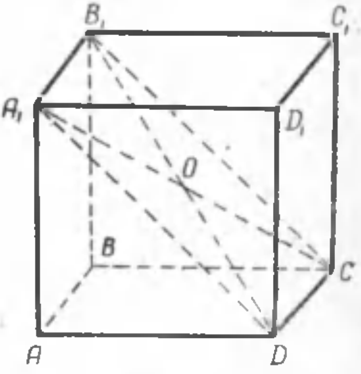
Таъриф. *Асослари параллелограммлардан иборат бўлган призма параллелепипед дейилади.*

Параллелепипеднинг асослари параллелограмм ва ён ёқлари тўғри тўртбурчаклардан иборат бўлса, у *тўғри параллелепипед;* агар асослари ҳам тўғри тўртбурчаклар бўлса, у ҳолда *тўғри бурчакли параллелепипед* дейилади. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг бир учидан чиққан учта қирраси унинг *уч ўлчови* дейилади. Масалан: AB, AC, AA_1 (237- расм).

Теорема. *Тўғри бурчакли параллелепипед ҳар бир диагоналининг квадрати, унинг уч ўлчовининг квадратлари йиғиндисига тенг.* 237- расмда $A_1D = d$ — диагональ; $d^2 = AB^2 + AC^2 + AA_1^2$ эканини исбот қиламиз.



237- расм.



238- расм.

Исбот. A ва D нуқталарни бирлаштириб, $\triangle A_1AD$ ва $\triangle ABD$ ларни ҳосил қиламиз. $\triangle A_1AD$ дан, Пифагор теоремасига асосан $A_1D^2 = AA_1^2 + AD^2$ ва $\triangle ABD$ дан: $AD^2 = AB^2 + BD^2 = AB^2 + AC^2$; демак, $d^2 = AA_1^2 + AD^2 = AA_1^2 + AB^2 + AC^2$.

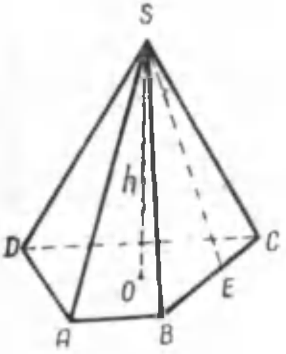
Изоҳ. Таърифга кўра, параллелепипед ҳам призма бўлгани учун, унинг ён сирти призманинг ён сирти каби топилади.

Таъриф. *Уч ўлчови ўзаро тенг бўлган тўғри бурчакли параллелепипед куб дейилади.*

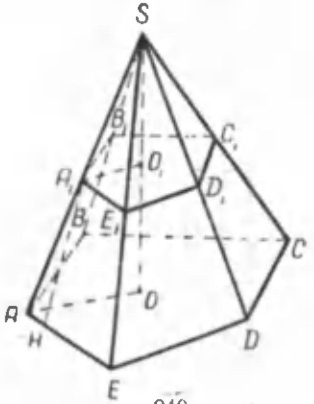
Теорема. *Ҳар қандай параллелепипедда*: 1) *қарама-қарши ёқлари тенг ва параллел;* 2) *ҳамма диагоналлари бир нуқтада кесишади ва шу нуқтада ҳар қайси диагонали тенг иккига бўлинади.*

AC_1 параллелепипедда (238- расм): $AA_1 \# BB_1$ ва $DD_1 \# CC_1$ ($\#$ тенг ва параллеллик белгиси) бўлгани учун, улар орқали ўтган текислик AA_1B_1B ва DD_1C_1C лар ҳам ўзаро параллел ва тенг, яъни $AA_1B_1B \# DD_1C_1C$. Шунга ўхшаш: $AA_1D_1D \# BB_1C_1C$ ва $ABCD \# A_1B_1C_1D_1$.

Энди, масалан, DB_1 ва CA_1 диагоналларини ўтказамиз. Сўнгра D нуқтани A_1 нуқта билан, C нуқтани B_1 нуқта билан бирлаштирсак, DA_1B_1C параллелограмм ҳосил бўлади, чунки DA_1 ва CB_1 диагоналлар $AA_1D_1D \# BB_1C_1C$ ёқларнинг диагоналларидир ва $DC \#\!\!\!= A_1B_1$ эди. Параллелограммнинг диагоналлари кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинар эди: $OD = OB_1$ ва $OA_1 = OC$. Энди бу диагоналлардан биттасини учинчи диагональ билан кесиштириб, олдингидек мулоҳазалар қилинса, биринчидагидек натижага эга бўламиз; худди шундай иш тўртинчи диагональ устида ҳам қилинади. Натижада тўртала диагональ ҳам бир нуқтада кесишади ва ҳар бири тенг иккига бўлинади.



239- расм.



240- расм.

в) Пирамида ҳақида тушунча

Таъриф. *Асоси деб аталган бир ёғи кўпбурчак ва ён ёқлари бир умумий учга эга бўлган учбурчаклардан иборат кўпёқ пирамида дейилади* (239- расм). S — пирамиданинг учи; $SO \perp$ асос $ABECD_{\text{юзи}}$ бўлсин, бу ҳолда $SO = h$ — пирамиданинг *баландлиги* дейилади. $SE \perp BC$ бўлсин; SE — пирамиданинг *апофемаси* дейилади. Демак, *пирамиданинг учидан асос томонларининг бироргасига туширилган перпендикуляр апофема деб аталади.* Ҳар бир ёғи унинг асоси бўла оладиган мунтазам уч бурчакли пирамида *тетраэдр* дейилади.

Пирамидадаги параллел кесимларнинг хоссалари

Теорема. *Агар пирамида асосига параллел текислик билан кесилса:* 1) *ён қирралари ва баландлиги шу текислик билан пропорционал бўлакларга ажралади;* 2) *кесимда асосга ўхшаш кўпбурчак ҳосил бўлади;* 3) *кесим ва асос юзларининг нисбати, улардан пирамиданинг учигача бўлган масофалар ёки мос томонлар квадратларининг нисбатига тенг бўлади.* $SABCDE$ пирамида берилган бўлсин (240- расм).

$A_1B_1C_1D_1E_1A_1$ кўпбурчак — параллел кесим бўлсин: 1) $\frac{A_1S}{AA_1} = \frac{B_1S}{BB_1} = \ldots = \frac{O_1S}{OO_1}$; 2) $A_1B_1C_1D_1E_1A_1 \backsim ABCDEA$ ва 3) $\frac{A_1B_1C_1D_1E_1A_{1\text{юзи}}}{ABCDEA_{\text{юзи}}} = \frac{O_1S^2}{OS^2} = \frac{A_1B_1^2}{AB^2}$ — эканини исбот қилиш керак.

Исбот. 1) $\angle ASB$ ни икки $AB \parallel A_1B_1$ тўғри чизиқлар кесгани учун, китобимизнинг планиметрия қисмида 22-§ даги 3-изоҳга асосан $\frac{A_1S}{AA_1} = \frac{B_1S}{BB_1}$ бўлади. Шунга ўхшаш $\angle ASO$ да: $\frac{A_1S}{AA_1} = \frac{O_1S}{OO_1}$; $\angle BSC$ да: $\frac{B_1S}{BB_1} = \frac{C_1S}{CC_1}$ ва ҳоказо. Булардан: $\frac{A_1S}{AA_1} = \frac{B_1S}{BB_1} = \ldots = \frac{E_1S}{EE_1} = \frac{SO_1}{OO_1}$ ҳосил бўлади.

2) $\triangle ASB$ да $A_1B_1 \parallel AB$ кесганда, яна 3-изоҳга асосан: $\frac{A_1S}{AS} = \frac{B_1S}{BS} = \frac{A_1B_1}{AB}$. Шунга ўхшаш: $\frac{B_1S}{BS} = \frac{C_1S}{CS} = \frac{B_1C_1}{BC}$; $\frac{A_1S}{AS} = \frac{O_1S}{OS} = \frac{A_1O_1}{AO}$ ва ҳоказо. Булардан $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \ldots = \frac{A_1E_1}{AE}$ ва томонлари параллел бўлган бурчаклар бўлгани учун $\angle A_1 = \angle A$; $\angle B_1 = \angle B$; . . . ; $\angle E_1 = \angle E$. Бу ҳолда таърифга кўра: $(A_1B_1C_1D_1E_1A_1) \backsim (ABCDEA)$.

3) Планиметрияда ўхшаш кўпбурчаклар юзларининг нисбати, мос томонлари квадратларининг нисбатига тенг эди, яъни

$$\frac{A_1B_1C_1D_1E_1A_{1\,юзи}}{ABCDEA_{юзи}} = \frac{A_1B_1^2}{AB^2} = \left(\frac{A_1B_1}{AB}\right)^2;$$ лекин $\frac{A_1S}{AS} = \frac{O_1S}{OS} = \frac{A_1B_1}{AB}$ дир. Шунинг учун, $\frac{A_1B_1C_1D_1E_1A_{1\,юзи}}{ABCDEA_{юзи}} = \frac{A_1B_1^2}{AB^2} = \frac{O_1S^2}{OS^2}$ бўлади.

Изоҳ. 240-расмдаги $A_1B_1C_1D_1E\ ABCDE$ *фигура кесик пирамида* дейилади. Демак, *асослари иккита кўпбурчакдан, ёқлари трапециялардан иборат бўлган кўпёқ кесик пирамида* дейилади.

$A_1B_1C_1D_1E_1 \parallel ABCDE$ текисликлар унинг асослари, асосларига перпендикуляр OO_1 чизиқ унинг *баландлиги* ва $A_1H \perp AE$ ни унинг *апофемаси* дейилади.

8-§. ТУЛА ВА КЕСИК ПИРАМИДАЛАРНИНГ ЕН СИРТИ

Теорема. *Мунтазам пирамиданинг ён сирти пирамида асосининг периметри билан апофемаси кўпайтмасининг ярмига тенг.*

$SABCD$ мунтазам тўрт бурчакли пирамида берилган бўлсин (241-расм). Унинг ён сиртини $S_{ён\ пир}$ деб белгилаймиз. $AB = BC = CD = AD$; $P_4 = 4\,AB$ бўлсин. $a = SE \perp AD$ (a — апофема).

$S_{ён\ пир} = \frac{P_4 \cdot a}{2}$ (кв. бирлик) эканини исбот қиламиз.

Исбот. $S_{ён\ пир} = 4 \cdot \triangle ASD_{юзи} = 4\,\frac{AD \cdot SE}{2} = \frac{4 \cdot AD \cdot a}{2} = \frac{P_4 \cdot a}{2}.$

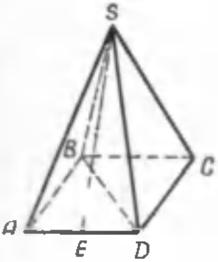
Энди мунтазам n бурчакли пирамиданинг ён сирти

$$\boxed{S_{\text{ён пир}} = \frac{P_n \cdot a}{2} (кв.\ б - к)}$$

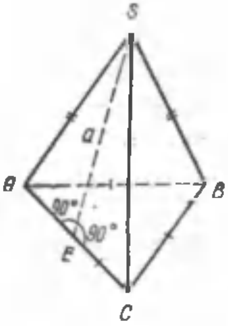
формула билан аниқланиши равшан.

Натижа. *Пирамида мунтазам бўлмаса, у ҳолда унинг ён сирти, ён ёқлари юзларининг йиғиндисига тенг.* Бу натижанинг ўринли эканини кўриш осон.

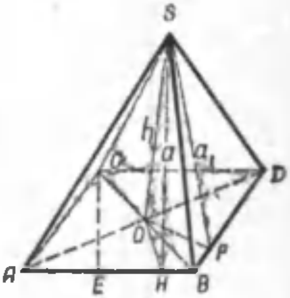
1- масала. Уч бурчакли мунтазам пирамиданинг ён қирраси 10 *см*, ён сирти 144 *см*^{2}. Асосининг томони ва апофемаси топилсин.



241- расм.



242- расм.



243- расм.

Ечиш. Ихтиёрий $SABC$ мунтазам уч бурчакли пирамида чизамиз (242- расм). $AB = BC = AC$; $SE = a$ — апофемаси бўлсин. $AS = BS = CS = 10$ *см*; $S_{\text{ён пир}} = 144$ *см*^{2} берилган. $\Delta\ AES$ дан, $AS^2 = SE^2 + AE^2$ ёки $100 = a^2 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2$. Энди, $144 = 3 \cdot \frac{AC \cdot a}{2}$, бундан:

$$AC = \frac{96}{a}.$$

Бу ҳолда

$$100 = a^2 + \frac{2304}{a^2}$$

ёки

$$a^4 - 100\,a^2 + 2304 = 0,$$

бундан:

$$a = \pm\sqrt{50 + \sqrt{2500 - 2304}} = \pm\sqrt{50 \pm 14};\ a = 8$$

ёки

$$a = 6.$$

Демак,

$$AC = \frac{96}{8} = 12 \text{ ёки } \quad AC = \frac{96}{6} = 16.$$

2- масала. Пирамиданинг асоси томонлари 20 *см* ва 36 *см* ҳамда юзи 360 $см^2$ бўлган параллелограмм бўлиб, баландлиги 12 *см* га тенг ва диагоналларнинг кесишган нуқтасидан ўтади. Пирамиданинг ён сирти топилсин (243- расм).

Ечиш. Ихтиёрий $SABCD$ пирамида чизиб, $CD = AB = 36$ *см*, $BD = AC = 20$ *см* ва баландлик $OS = 12$ *см* деб белгилаймиз. Шаклда: $OB = OC$, $OD = OA$, $CE \perp AB$, $SH \perp AB$; $(ABCD)_{юзи} = 360\ см^2$. $360 = AB \cdot CE = 36 \cdot CE$, бундан: $CE = 10$ *см*; $OH = \frac{CE}{2} = \frac{10}{2} = 5$ (*см*). $\triangle\ SOH$ дан: $a = SH = \sqrt{SO^2 + OH^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ (*см*).

Энди BD га $OF \perp BD$ ни туширамиз, у ҳолда $SF \perp BD$ бўлади (уч перпендикуляр ҳақидаги теоремага асосан). $2 \cdot \triangle BOD_{юзи} + 2 \cdot \triangle\ AOB_{юзи} = 360\ см^2$.

$2 \cdot \triangle\ BOD_{юзи} = OF \cdot BD = 20 \cdot FO$; $2 \cdot \triangle\ AOB_{юзи} = AB \cdot OH = 36 \cdot 5 = 180\ см^2$.

Бу ҳолда: $20 \cdot FO + 180 = 360$, бундан: $OF = 9$ *см*.

Энди $\triangle\, SOF$ дан:

$$a_1 = SF = \sqrt{OS^2 + OF^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15 \ (см).$$

$$S_{ён\ пир} = AB \cdot a + BD \cdot a_1 = 36 \cdot 13 + 20 \cdot 15 = 768 \ (см^2).$$

Теорема. *Мунтазам кесик пирамиданинг ён сирти унинг иккала асоси периметрлари йиғиндиси билан апофемаси кўпайтмасининг ярмига тенг.*

Ихтиёрий мунтазам тўрт бурчакли кесик пирамида ($ABCD\ A_1B_1C_1D_1$) ни чизамиз. $AB = BD = CD = AC$; $AA_1 = BB_1 = DD_1 = CC_1$ ва $A_1B_1 = B_1D_1 = D_1C_1 = A_1C_1$ ($a = A_1E \perp AB$ — апофемаси) бўлсин (244- расм).

$4 \cdot AB = P_4$ ва $4 \cdot A_1B_1 = p_4$ деб белгилаймиз. $ABCD\ A_1B_1C_1D_1$ кесик пирамида ён сирти $= S_{ён\ к/пир}\ \frac{P_4 + p_4}{2} \cdot a$ (кв. бирлик) эканини исбот қиламиз.

Исбот. Кесик пирамиданинг ён ёқлари трапециялардан иборат бўлгани учун, $S_{ён\ к/пир} = 4 \cdot ABA_1B_1$ трапеция юзи $= 4 \cdot \frac{AB + A_1B_1}{2} \cdot A_1E = \frac{4 \cdot AB + 4 \cdot A_1B_1}{2} \cdot a = \frac{P_4 + p_4}{2} \cdot a.$

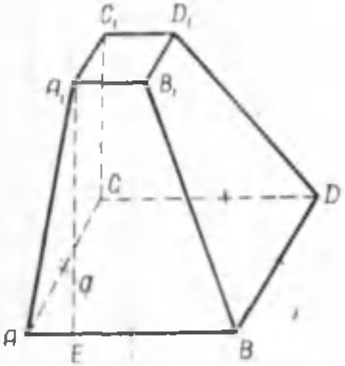
Мунтазам n бурчакли кесик пирамида бўлганда, $S_{ён\ к/пир.} = \frac{P_n + p_n}{2} \cdot a$ (кв. бирлик) бўлиши равшан.

Натижа. *Кесик пирамида мунтазам бўлмаса, у ҳолда унинг ён сирти, айрим-айрим ёқлари юзининг йиғиндисига тенг бўлади.*

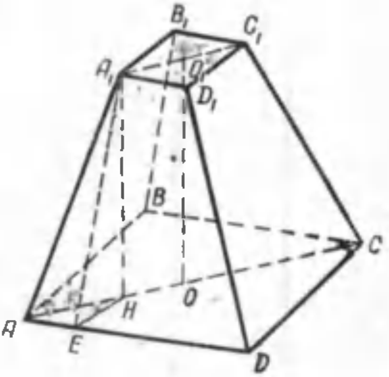
1- масала. Тўрт бурчакли мунтазам кесик пирамида асосларининг томонлари 8 *м* ва 2 *м*, баландлиги 4 *м*. Тўла сирти топилсин.

Ечиш. Мунтазам $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (245- расм) кесик пирамида берилган, унга O_1O баландликни чизамиз. У ҳолда масаланинг шартига кўра: $O_1O = 4$ *м*; $AD = DC = BC = AB = 8$ *м*; $A_1D_1 = D_1C_1 = B_1C_1 = A_1B_1 = 2$ *м*.

$$S_т = 4 \cdot \frac{AD + A_1D_1}{2} A_1E + (ABCD)_{юзи} + (A_1B_1C_1D_1)_{юзи}.$$



244- расм.



245- расм.

Шаклдан:

$$AE = \frac{AD - A_1D_1}{2} = \frac{8-2}{2} = 3\ (м).$$

$$\triangle\ AEH \backsim \triangle\ ADC \text{ дан: } \frac{EH}{DC} = \frac{AE}{AD}$$

$$\text{ёки } \frac{EH}{8} = \frac{3}{8};\ EH = 3\ м.$$

$\triangle\ A_1EH$ дан: $A_1E = \sqrt{A_1H^2 + EH^2} = \sqrt{O_1O^2 + 9} = \sqrt{16 + 9} = 5$ (*м*).

Демак,

$$S_т = 4 \cdot \frac{8+2}{2} \cdot 5 + 8^2 + 2^2 = 168\ (м^2).$$

2- масала. Кесик пирамиданинг асослари — томонлари a ва b бўлган мунтазам учбурчаклардан иборат; ён қирралардан бири d га тенг бўлиб, асос текислигига перпендикулярдир. Шу кесик пирамиданинг ён сиртини аниқланг ($a = 5$ *м*, $b = 3$ *м*, $d = 1$ *м*).

Ечиш. Мунтазам $ABCA_1B_1C_1$ уч бурчакли кесик пирамида чизамиз (246- расм): $AB = BC = AC = a$; $A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1 = b$; $B_1B = C_1C$; $A_1A = d$ ва $A_1A \perp \triangle\ ABC$ юзи берилган. $B_1H \perp$

$\perp AB$ ва $B_1E \perp BC$ ларни ўтказсак: $BH = AB - A_1B_1 = a - b$; $BE = \frac{BC - B_1C_1}{2} = \frac{a-b}{2}$, $S_{ен} = 2 \cdot \frac{AB + A_1B_1}{2} \cdot AA_1 + \frac{BC + B_1C_1}{2} \cdot$ $\cdot B_1E = (a+b) \cdot d + \frac{a+b}{2} \cdot B_1E = (a+b) \cdot \left(d + \frac{B_1E}{2}\right)$; энди B_1E ни топамиз: $BB_1^2 = B_1H^2 + BH^2 = AA_1^2 + (a-b)^2 = d^2 + (a-b)^2$;

$$B_1E = \sqrt{BB_1^2 - BE^2} = \sqrt{d^2 + (a-b)^2 - \frac{(a-b)^2}{4}} =$$

$= \frac{1}{2}\sqrt{4d^2 + 3(a-b)^2}$. Буларга кўра: $S_{ен} = (a+b) \cdot \left(d + \right.$ $\left. + \frac{1}{4}\sqrt{4d^2 + 3(a-b)^2}\right)$ бўлади. Энди сон қийматини ҳисоблаймиз:

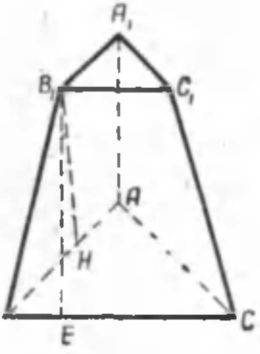
$$S_{ен} = (5+3) \cdot (1 + \frac{1}{4}\sqrt{4 \cdot 1 + 3 \cdot (5-3)^2}) = 8 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot 4\right) = $$
$$= 16 \ (м^2).$$

Изоҳ. Ҳар қандай пирамиданинг тўла сирти, унинг ён сирти билан асос юзларининг йиғиндисига тенг.

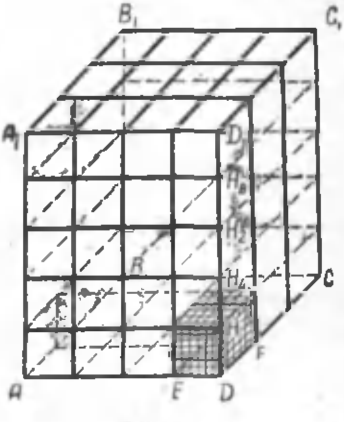
9-§. КЎПЕҚЛАРНИНГ ҲАЖМИНИ ҲИСОБЛАШ

а) Параллелепипеднинг ҳажми

Теорема. *Тўғри бурчакли параллелепипеднинг ҳажми унинг уч ўлчови кўпайтмасига тенг.*



246- расм.



247- расм.

Исбот. $AD = a$; $DC = b$; $AA_1 = c$ бўлсин (247- расм). Параллелепипеднинг ҳажмини $V_{пар}$ деб белгилаймиз.

$V_{пар} = a \cdot b \cdot c$ (куб бирлик) эканини исбот қиламиз.

a, b, c лар бутун сонлар бўлсин, масалан: $a = 4$ *см*; $b = 3$ *см*; $c = 5$ *см*.

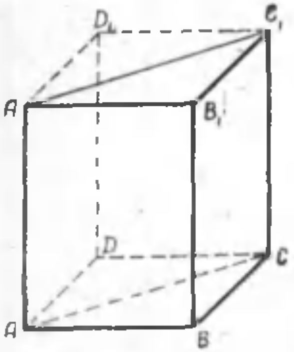
Бу ҳолда AD ни тенг 4 бўлакка; DC ни 3 бўлакка; AA_1 ни 5 бўлакка бўлиб, бўлиниш нуқталари орқали параллел тўғри чизиқлар ўтказамиз. $ED = DF = DH = 1$ бирлик. $ABCD$ юзи $= a\cdot b$ (кв. бирлик) $= 4\cdot 3 = 12$ ($см^2$). Бу ҳолда шаклдан кўрамизки,

1-қават (DH га): ($a\cdot b\cdot 1$) куб бирлик ҳажм;

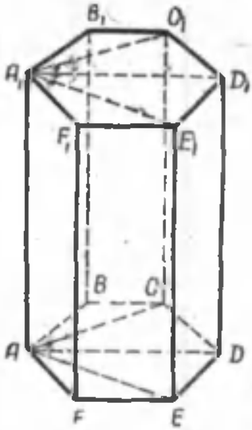
2-қават (DH_1 га): ($a\cdot b\cdot 2$) куб бирлик ҳажм ва ҳоказо c-қават (DD_1 га): ($a\cdot b\cdot c$) куб бирлик ҳажм тўғри келади.

Демак, $\boxed{V_{\text{пар}} = a\cdot b\cdot c \text{ (куб бирлик).}}$ Бизнинг мисолда $V_{\text{пар}} = a\cdot b\cdot c = 4\cdot 3\cdot 5 = 60$ ($см^3$).

1) AD, DC ва AA_1 лар каср сонлар бўлганда ҳам ҳажм учун чиқарилган формула ўз кучини сақлайди.



248- расм.



249- расм.

2) Кубнинг ҳажми: $V_{\text{куб}} = a\cdot a\cdot a = a^3$ куб бирлик (a — кубнинг қирраси).

$$\boxed{V_{\text{куб}} = a^3 \text{ (куб бирлик).}}$$

3) Параллелепипеднинг ҳажми асос юзи билан баландлиги кўпайтмасига тенг.

б) Призманинг ҳажми

Теорема. *Тўғри призманинг ҳажми асос юзи билан ён қирра узунлиги кўпайтмасига тенг.*

Исбот. 1) Уч бурчакли призма $ABCA_1B_1C_1$ берилган бўлсин (248- расм).

Бу уч бурчакли призмани шаклда кўрсатилгандек, параллелепипедга тўлдирамиз. Бу ҳолда $ABCA_1B_1C_1$ призманинг

$$\text{ҳажми} = \frac{(ABCDA_1B_1C_1D_1 \text{ параллелепипед ҳажми})}{2} = \frac{(ABCD_{\text{юзи}})\cdot AA_1}{2} =$$

$$= \frac{2\cdot \triangle ABC_{\text{юзи}}\cdot AA_1}{2} = \triangle ABC_{\text{юзи}}\cdot AA_1 \text{ (куб бирлик).}$$

2) Энди кўп бурчакли призма берилган бўлсин (249- расм). Бу ҳолда уни шаклда кўрсатилгандек бир қанча уч бурчакли призмаларга ажратамиз.

Демак, $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_{1_{\text{ҳажми}}} = \triangle ABC_{\text{юзи}}\cdot AA_1 + \triangle ACD_{\text{юзи}}\cdot AA_1 + \triangle ADE_{\text{юзи}}\cdot AA_1 + \triangle AEF_{\text{юзи}}\cdot AA_1 = (\triangle ABC_{\text{юзи}} + \triangle ACD_{\text{юзи}} + \triangle ADE_{\text{юзи}} + \triangle AEF_{\text{юзи}})\cdot AA_1 = ABCDEF_{\text{юзи}}\cdot AA_1$ (куб бирлик) $= Q\cdot l$ (куб бирлик).

Бунда: $ABCDEF_{\text{юзи}} = Q$; $AA_1 = l$. Демак,

$$\boxed{V_{\text{пр}} = Q\cdot l \text{ (куб бирлик).}}$$

Изоҳ. Агар призма оғма бўлса, унинг ҳажми перпендикуляр кесим юзи билан ён қирра узунлиги кўпайтмасига тенгдир.

в) Пирамидаларнинг ҳажмлари

Теорема. *Пирамиданинг ҳажми асосининг юзи билан баландлиги кўпайтмасининг учдан бирига тенг.*

Исбот. 1) Уч бурчакли $SABC$ пирамида берилган бўлсин (250- расм). $H = SO$ — унинг баландлиги. Уни шаклда кўрсатилгандек уч бурчакли $ABCA_1B_1C_1$ призмага тўлдирамиз. Энди, масалан, B ва A_1 ни BA_1 кесма билан бирлаштириб учта тенгдош, яъни ҳажмлари ўзаро тенг бўлган $SABC$, SA_1B_1B ва SA_1BA пирамидалар ҳосил қиламиз. $SABC$ ва SA_1B_1B пирамидаларда ABC ва A_1B_1S асослар тенг ва баландлик умумий. Энди SA_1B_1B ва SA_1BA пирамидаларда A_1B_1B ва ABA_1 асослар тенг ва баландлик умумий. Шунинг учун: $SABC$ пирамида

$$\text{ҳажми} = \frac{ABCA_1B_1S_{\text{призма ҳажми}}}{3} = \frac{\triangle ABC_{\text{юзи}}\cdot SO}{3} = \frac{\triangle ABC_{\text{юзи}}\cdot H}{3}$$

куб бирлик ($SO = AA_1$).

2) Энди кўп бурчакли пирамида берилган бўлсин (251- расм).

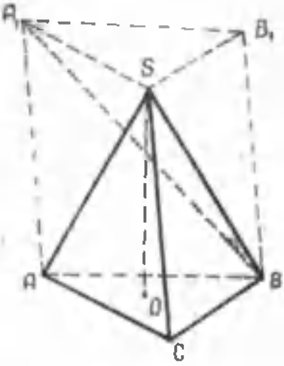
Бу ҳолда уни шаклда кўрсатилгандек, бир қанча уч бурчакли пирамидаларга ажратамиз. Демак, $SABCDE$ пирамида

$$\text{ҳажми} = \frac{\triangle ABC_{\text{юзи}}\cdot SO}{3} + \frac{\triangle ACD_{\text{юзи}}\cdot SO}{3} + \frac{\triangle ADE_{\text{юзи}}\cdot SO}{3} =$$

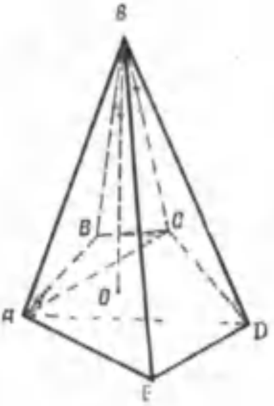
$= \frac{(ABCDE_{\text{юзи}})\cdot SO}{3}$. Шунинг учун ҳар қандай пирамиданинг ҳажми $V_{\text{пир}}$, асосининг юзи Q ва баландлиги H бўлганда

$$\boxed{V_{\text{пир}} = \frac{QH}{3} \text{ (куб бирлик)}}$$ бўлади.

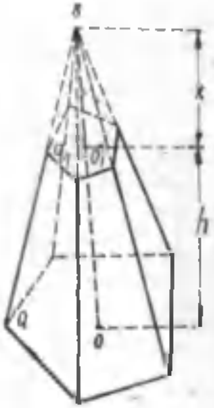
Теорема. *Кесик пирамиданинг ҳажми ҳар бирининг баландлиги кесик пирамида баландлигига тенг ва биттасининг асоси кесик пирамиданинг катта асосига, иккинчисиники кичик асосига, учинчисиники катта ҳамда кичик асос юзларининг ўрта геометригига тенг бўлган учта тўлиқ пирамида ҳажмларининг йиғиндисига тенг.*



250- расм.



251- расм.



252- расм.

Кесик пирамиданинг ҳажми $V_{к/пир}$, катта асоси Q, кичик асоси q ва баландлиги $OO_1 = h$ бўлсин (252- расм).

$$V_{к/пир} = \frac{h}{3}Q + \frac{h}{3}q + \frac{h}{3}\sqrt{Qq} = \frac{h}{3}(Q + \sqrt{Qq} + q)$$

эканини исбот қиламиз.

Исбот. Кесик пирамидани 252- расмда кўрсатилгандек тўлиқ пирамидага тўлдирамиз ва $SO_1 = x$ деб белгилаймиз. Бу ҳолда:

$V_{к/пир} = \frac{1}{3}Q(h + x) - \frac{1}{3}qx = \frac{1}{3}[Qh + (Q - q)x]$. Энди x ни топиб ўрнига қўямиз. Планиметриядаги 33- § га асосан:

$$\frac{Q}{q} = \frac{(h + x)^2}{x^2},$$

бундан:

$$\frac{x + h}{x} = \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{q}} \text{ ёки } x = \frac{h\sqrt{q}}{\sqrt{Q} - \sqrt{q}} = \frac{h\sqrt{q}(\sqrt{Q} + \sqrt{q})}{Q - q} =$$

$$= \frac{h\sqrt{Qq} + hq}{Q - q}.$$

Демак,

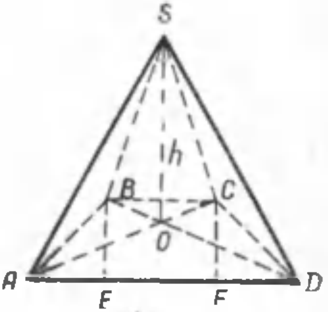
$$V_{\text{к/пир}} = \frac{1}{3}\left[Qh + (Q-q)\cdot\frac{h\sqrt{qQ}+hq}{Q-q}\right] = \frac{h}{3}(Q+\sqrt{Qq}+q).$$

$$\boxed{V_{\text{к/пир}} = \frac{h}{3}(Q+\sqrt{Qq}+q)\ \text{куб бирлик.}}$$

10-§. БАЪЗИ МАСАЛАЛАРНИ ЕЧИШ НАМУНАЛАРИ

1-масала. Мунтазам уч бурчакли пирамида асосининг томони 4 *дм*, ён қирраси асос текислиги билан 30° ли бурчак ташкил қилади. Пирамиданинг ҳажми топилсин.

253- расм.



254- расм.

Ечиш. $AB = BC = AC = 4$ *дм*; $\angle SCD = 30°$; $SO = h$ бўлсин (253- расм). $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}Qh = \frac{1}{3}\triangle ABC_{\text{юзи}}\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\frac{AB\cdot DC}{2}\cdot h =$ $= \frac{4\cdot DC}{6}\cdot h = \frac{2}{3}DC\cdot h$; энди $\triangle ADC$ дан: $DC = \sqrt{AC^2 - AD^2} =$ $= \sqrt{4^2-2^2} = 2\sqrt{3}$; планиметриядан $OC = \frac{2}{3}DC$ экани маълум. $OC = \frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{3} = \frac{4}{3}\cdot\sqrt{3} = \frac{4}{\sqrt{3}}$; $\triangle SOC$ дан: $h = OC\cdot$ $\cdot\text{tg}\ 30° = \frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}$. Демак, $V_{\text{пир}} = \frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\frac{4}{3} = \frac{16}{9}\sqrt{3}$; $V_{\text{пир}} = \frac{16}{9}\sqrt{3}$ *дм*^{3}.

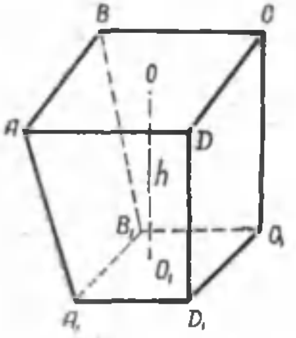
Изоҳ. Бу мисолда баландлик h нинг қийматини тригонометрияни қўлланмай топиш ҳам мумкин. Планиметриядан биламизки, 30° ли бурчак қаршисидаги катет гипотенузанинг ярмига тенг, яъни $h = \frac{sc}{2}$, бундан: $sc = 2h$. Энди $\triangle SOC$ дан: $SC^2 - SO^2 = OC^2$ ёки $4h^2 - h^2 = \frac{16}{3}$; бундан: $h = \frac{4}{3}$.

2-масала. Пирамиданинг асоси тенг ёнли трапеция бўлиб, унинг асослари 3 *см* ва 5 *см*, ён томони эса 7 *см*. Пирамиданинг баландлиги асос диагоналларининг кесишган нуқтасидан ўтади ва катта ён қирраси 10 *см* га тенг. Шу пирамиданинг ҳажми топилсин.

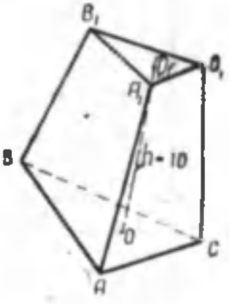
Ечиш. $AD = 5$ *см*; $BC = 3$ *см*; $AB = CD = 7$ *см*; $AS = SD = 10$ *см*. $V_{\text{пир}}$ ни топамиз (254- расм). $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}(ABCD_{\text{тр.юзи}}) \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{AD + BC}{2} \cdot BE \cdot h = \frac{5+3}{6} \cdot BE \cdot h = \frac{4}{3} BE \cdot h.$

Энди, $AE = \frac{AD - BC}{2} = \frac{5-3}{2} = 1$; $\triangle AEB$ дан: $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{7^2 - 1^2} = 4\sqrt{3}$; $\triangle BED$ дан: $BD = \sqrt{BE^2 + DE^2} = \sqrt{48 + 4^2} = 8$;

$\triangle AOD \backsim BOC$ дан: $\frac{AD}{BC} = \frac{OD}{OB} = \frac{OD}{BD - OD} = \frac{OD}{8 - OD} = \frac{5}{3}$. Бундан: $OD = 5$ *см*. $\triangle SOD$ дан: $h = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}$; $V_{\text{пир}} = \frac{4}{3} BE \cdot h = \frac{4}{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3} = 80$ ($см^3$).



255- расм.



256- расм.

3-масала. Асослари квадратлардан иборат бўлган кесик пирамида шаклидаги идишга 349 *гл* сув кетади. Катта асоснинг томони 2,3 *м*, кичик асоснинг томони 1,4 *м*. Идишнинг баландлигини топинг.

Ечиш. $AB = BC = CD = DA = 2{,}3$*м*; $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = D_1A_1 = 1{,}4$ *м* (255- расм).

$$V_{\text{к/пир}} = 349 \text{ гл} = 349 \cdot 100 = 34900 \text{ л} = \frac{34900 \text{ м}^3}{1000} = 34{,}9 \text{ м}^3.$$

$$V_{\text{к/пир}} = \frac{h}{3}\left(Q + \sqrt{Q \cdot q} + q\right); \; Q = ABCD_{\text{юзи}} = 2{,}3^2 = 5{,}29;$$

$$q = A_1B_1C_1D_{1\text{юзи}} = 1{,}4^2 = 1{,}96; \; \sqrt{Q \cdot q} = \sqrt{5{,}29 \cdot 1{,}96} = 3{,}22.$$

демак,

$$34{,}9 = \frac{h}{3}(5{,}29 + 3{,}22 + 1{,}96);\ 34{,}9 = 3{,}49\,h,$$

бундан:

$$h = \frac{34{,}9}{3{,}49} = 10.$$

демак,

$$h = 10\ \text{м}.$$

4-масала. *Уч бурчакли кесик пирамиданинг баландлиги 10 м, бир асосининг томонлари 27 м, 29 м ва 52 м; иккинчи асоснинг периметри 72 м.га тенг. Кесик пирамиданинг ҳажми топилсин.*

Ечиш. $h = O_1O = 10$ м; $AC = 27$ м; $AB = 29$ м; $BC = 52$ м; $A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1 = 72$ м; $V_{\text{к/пир}}$ ни топамиз (256- расм).

$$V_{\text{к/пир}} = \frac{h}{3}(Q + \sqrt{Qq} + q) \text{ куб бирлик.}$$

$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ дан: $\frac{AC + BC + AB}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$.

$\frac{27}{A_1C_1} = \frac{29}{A_1B_1} = \frac{52}{B_1C_1} = \frac{27 + 29 + 52}{72} = \frac{108}{72} = \frac{3}{2}$. Булардан: $A_1C_1 = 18$ м; $A_1B_1 = \frac{58}{3}$ м; $B_1C_1 = \frac{104}{3}$ м бўлади. $Q = \triangle ABC_{\text{юзи}} = \sqrt{54 \cdot 27 \cdot 25 \cdot 2} = 270$ (м²) (Герон формуласига асосан).

$$q = \triangle A_1B_1C_{1\,\text{юзи}} = \sqrt{36 \cdot 18 \cdot \frac{50}{3} \cdot \frac{4}{3}} = 120\ (\text{м}^2). \text{ Демак,}$$

$$V_{\text{к/пир}} = \frac{10}{3}(270 + \sqrt{270 \cdot 120} + 120) = \frac{10}{3} \cdot 570 = 1900\ (\text{м}^3).$$

11-§. ЦИЛИНДР, КОНУС ВА КЕСИК КОНУС

а) Цилиндр

Таъриф. *Бирор MN тўғри чизиқнинг берилган EF текис эгри чизиқ билан доимо кесишиб ўз-ўзига параллеллигини сақлаган ҳолда қилган ҳаракатларидан ҳосил бўлган сирт цилиндрик сирт дейилади.*

MN тўғри чизиқни унинг *ясовчиси*, *EF* чизиқ эса унинг *йўналтирувчиси* дейилади (257- расм).

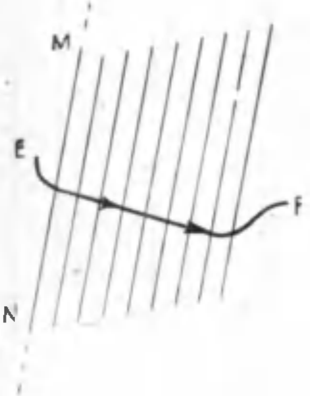
Таъриф. *Цилиндрик сирт иккита ўзаро параллел текислик билан кесилганда ҳосил бўлган жисм цилиндр дейилади.*

Параллел кесимлар цилиндрнинг *асослари*; улар орасидаги масофа унинг *баландлиги* дейилади. Масалан, $P \parallel Q$; $h = OO_1 \perp P$ ва Q каби (258- расм).

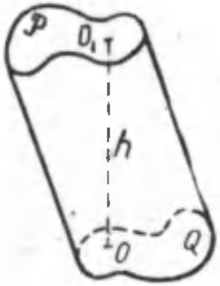
Цилиндрнинг ясовчиси асос текисликларига перпендикуляр бўлса, у *тўғри цилиндр,* акс ҳолда *оғма цилиндр* дейилади.

Асослари доирадан иборат цилиндр *тўғри доиравий цилиндр* дейилади (259- расм). (Бундан кейин биз фақат тўғри доиравий цилиндр устида тўхталамиз; тўғри доиравий цилиндрни тўғридан-тўғри *цилиндр* деб атаймиз.)

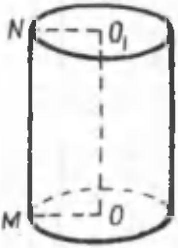
б) Цилиндрнинг ён сирти ва ҳажми



257- расм.



258- расм.



259- расм.

Теорема. *Цилиндрнинг* 1) *ён сирти асос айланасининг узунлиги билан баландлигининг кўпайтмасига тенг;* 2) *ҳажми — асос юзи билан баландлигининг кўпайтмасига тенг.* 259- расмдаги цилиндрда асос айланасининг узунлиги — C; баландлиги — $OO_1 = h$; ён сирти — $S_{\text{ён.ц}}$; асос юзи — K; ҳажми — $V_{\text{ц}}$; асос радиуси R бўлсин. $S_{\text{ён. ц}} = C \cdot h = 2\pi Rh$ кв. бирлик ва $V_{\text{ц}} = K \cdot h = \pi R^2 \cdot h$ (куб бирлик) бўлишини исбот қиламиз.

Исбот. Цилиндрга ички (ёки ташқи) мунтазам кўп бурчакли призма чизамиз (260- расм). Бу ички чизилган призма асосининг периметри — $P_{\text{пр}}$, асосининг юзи — $K_{\text{пр}}$, ён сирти — $S_{\text{ён. пр}}$, ҳажми $V_{\text{пр}}$ бўлсин. Бу ҳолда:

$$S_{\text{ён. пр}} = P_{\text{пр}} \cdot h \text{ ва } V_{\text{пр}} = K_{\text{пр}} \cdot h.$$

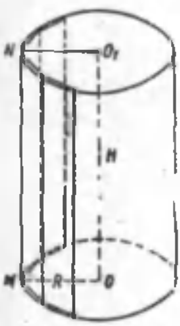
Энди призманинг асос томонларининг сонини чексиз орттирсак, $\lim\limits_{n \to \infty} S_{\text{ён. пр}} = S_{\text{ён. ц}}$. $\lim\limits_{n \to \infty} P_{\text{пр}} = C = 2\pi R$; $\lim\limits_{n \to \infty} K_{\text{пр}} = K = \pi R^2$ ва $\lim\limits_{n \to \infty} V_{\text{пр}} = V_{\text{ц}}$. Демак, $S_{\text{ён. ц}} = C \cdot h = 2\pi Rh$ (кв. б-к); $V_{\text{ц}} = K \cdot h = \pi R^2 h$ (куб б-к).

$$\boxed{S_{\text{ён. ц}} = 2\pi R\cdot h \text{ кв. бирлик.}}$$

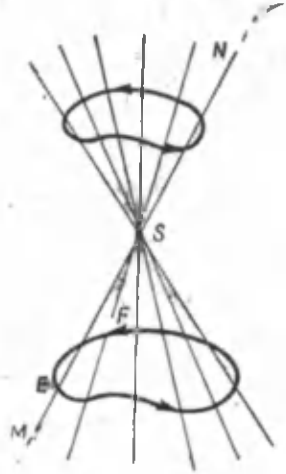
$$\boxed{V_{\text{ц}} = \pi R^2\cdot h \text{ куб бирлик.}}$$

в) Конус

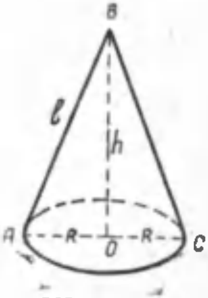
Таъриф. *Фазодаги бирор қўзғалмас S нуқтадан доим ўтувчи ва берилган EF чизиқни кесувчи MN тўғри чизиқнинг ҳаракатидан ҳосил бўлган сирт конус сирт дейилади* (261- расм).



260- расм.



261- расм.



262- расм.

S нуқта — конус сиртнинг *учи*, EF чизиқ — унинг *йўналтирувчиси*, MN чизиқ — конус сиртнинг *ясовчиси* дейилади.

Таъриф. *Бир томондан конус сирт, иккинчи томондан унинг учидан ўтмаган кесувчи текислик бўлаги билан чегараланган жисм конус дейилади.*

Кесувчи текислик бўлаги унинг *асоси* дейилади. Ясовчилари ўзаро тенг ва асоси доирадан иборат бўлган конус *тўғри доиравий конус* дейилади. 262- расмда: $AO = OB = R$ — асос радиуси; OS асос юзига тик, $OS = h$ — конуснинг баландлиги; $AS = l$ — унинг ясовчиси.

Изоҳ. Тўғри доиравий конус тўғридан-тўғри *конус* деб ҳам аталади.

Таъриф. *Конуснинг учидан ўтмаган иккита параллел текислик орасидаги қисми кесик конус дейилади.*

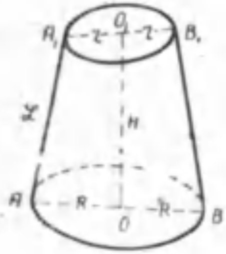
263- расмда: $OA = OB = R$; $O_1A_1 = O_1B_1 = r$ — кесик конус асосларининг радиуслари; $OO_1 = H$ асослари юзига тик; H — баландлик; $AA_1 = L$ — ясовчиси.

Изоҳ. Цилиндрни тўғри тўртбурчакнинг бирор томони атрофида; конусни тўғри бурчакли учбурчакнинг бирор катети атрофида ёки тенг ёнли учбурчакнинг ўз баландлиги атрофида; кесик конусни эса, тенг ёнли трапециянинг ўз симметрия ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмлар деб ҳам қаралса бўлади.

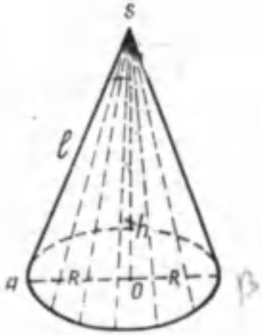
г) Конуснинг ён сирти ва ҳажми

Теорема. 1) *Конуснинг ён сирти асос айланаси узунлиги билан ясовчиси купайтмасининг ярмига тенг.*

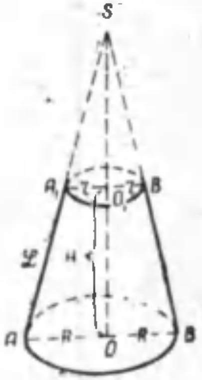
2) *Конуснинг ҳажми асос юзи билан баландлиги кўпайтмасининг учдан бирига тенг.*



263- расм.



264- расм.



265- расм.

ASB конусда $AS = l$; $OA = R$; $SO = h$; конус ҳажми $V_к$ ва ён сирти $S_{ён/к}$ бўлсин (264- расм).

$S_{ён/к} = \pi Rl$ (кв. бирлик), $V_к = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h$ (куб бирлик) бўлишини исбот қиламиз.

Исбот. ASB конусга ички мунтазам кўп бурчакли пирамида чизамиз (264- расм). Пирамида асосининг периметри $P_п$; ён сирти $S_{пир}$; ҳажми $V_{пир}$; асос юзи $K_п$ бўлсин. Бу ҳолда $S_{пир} = \frac{1}{2} P_п \cdot l$ ва $V_{пир} = \frac{1}{3} K_п \cdot h$.

Энди пирамида асосининг томонлари сонини чексиз кўп орттирсак, у ҳолда:

$$P_п \to C = 2\pi R; \ K_п \to K = \pi R^2 \text{ ва } V_{пир} \to V_к = \frac{1}{3} Kh.$$

Демак,

$$S_{ён/к} = \frac{1}{2} C \cdot l = \frac{1}{2} \cdot 2\pi Rl = \pi R \cdot l;$$

$$V_к = \frac{1}{3} Kh = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} S_{ен/к} = \pi R \cdot l \text{ кв. бирлик.} \\ V_к = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h \text{ куб бирлик.} \end{array}}$$

д) Кесик конуснинг ён сирти ва ҳажми

Теорема. 1) *Кесик конуснинг ён сирти унинг асосларидаги айланалар узунликлари йиғиндисининг ярми билан ясовчисининг кўпайтмасига тенг.*

2) *Кесик конуснинг ҳажми кесик конус билан бир хил баландликка эга бўлган учта конус ҳажмларининг йиғиндисига тенг; бунда улардан бирининг асоси шу конуснинг катта асоси, иккинчисиники кичик асоси бўлиб, учинчиси асосининг юзи эса катта ва кичик асосларининг юзлари орасида ўрта геометрик бўлган доирадир.*

AA_1B_1B кесик конусда $AO = R$; $A_1O_1 = r$; $OO_1 = H$; $AA_1 = L$ (265- расм). Кесик конуснинг ён сиртини $S_{к/к}$; ҳажмини $V_{к/к}$ деб белгилаймиз.

Исбот. 1) AA_1B_1B кесик конусни тўлиқ конусга тўлдирамиз. Бу ҳолда: $S_{к/к} = ASB$ конус сирти — A_1SB_1 конус ён сирти $= AS \cdot \pi R - A_1S \cdot \pi r$. Шаклдан: $AS = h + A_1S$. Бунга кўра:

$$S_{к/к} = (L + A_1S)\pi R - A_1S\pi r = L\pi R + A_1S(R - r)\pi.$$

Энди $\triangle\ AOS \backsim \triangle\ A_1O_1S$ дан: $\frac{R}{r} = \frac{AS}{A_1S} = \frac{L + A_1S}{A_1S}$,

бундан:

$$A_1S = \frac{Lr}{R - r}.$$

Буни ўрнига қўйсак:

$$S_{к/к} = \pi RL + \frac{Lr}{R - r}(R - r)\pi = \pi RL + \pi rL = L \cdot \pi(R + r).$$

Шундай қилиб,

$$\boxed{S_{к/к} = L\pi(R + r) \text{ кв. бирлик.}}$$

2) $AA_1B_1B_{к/к\ ҳажми} = ASB$ конус ҳажми — A_1SB_1 конус ҳажми $= \frac{1}{3}(H + SO_1)\pi R^2 - \frac{1}{3}SO_1 \cdot \pi r^2 = \frac{\pi}{3}\left[HR^2 + (R^2 - r^2) \cdot SO_1\right]$.

Аммо $\triangle\ AOS \backsim \triangle\ A_1O_1S$ бўлгани учун $\frac{R}{r} = \frac{OS}{O_1S} = \frac{H + SO_1}{SO_1}$,

бундан: $SO_1 = \frac{Hr}{R - r}$. Буни ўрнига қўйсак:

$$V_{к/к} = \frac{\pi}{3}\left[HR^2 + (R^2 - r^2)\frac{Hr}{R - r}\right] = \frac{\pi}{3}\left[HR^2 + (R + r)Hr\right] =$$
$$= \frac{H\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2).$$

Шундай қилиб,

$$\boxed{V_{к/к}=\frac{\pi H}{3}(R^2+Rr+r^2)\ \text{куб бирлик.}}$$

д) Ўхшаш цилиндрлар ва конуслар ҳақида тушунча.

Иккита ухшаш тўғри тўртбурчаклар ёки тўғри бурчакли учбурчакларнинг мос томонлари атрофида айланишидан ҳосил бўлган цилиндрлар ёки конусларни *ўхшаш цилиндрлар* ёки *ўхшаш конуслар* дейилади.

$ABCD \backsim A_1B_1C_1D_1$ ва $\triangle ACD \backsim \triangle A_1C_1D_1$ дан: $\frac{AD}{A_1D_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}$ ёки $\frac{R}{r}=\frac{L}{l}=\frac{H}{h}=\ldots.$ Энди тенг нисбатлар хоссасига асосан

$$\frac{R}{r}=\frac{L}{l}=\frac{H}{h}=\frac{R+L+H}{r+l+h}$$

бўлади.

Теорема. *Икки ўхшаш цилиндр ёки конуснинг ён сирти (ёки тўла сирти) нинг нисбати, радиуслари ёки баландликлари квадратларининг нисбатига тенг, ҳажмларининг нисбати эса радиуслари ёки баландликлари кубларининг нисбатига тенг.*

Иккита ўхшаш цилиндр ёки кунуслардан бирининг ён сирти S; ҳажми V; иккинчисиники: S_1 ва V_1 бўлсин. $S=\pi RL$; $V=\frac{1}{3}\pi R^2H$ ва $S_1=\pi rl$; $V_1=\frac{1}{3}\pi r^2h$. Бу ҳолда:

$$\frac{S}{S_1}=\frac{R}{r}\cdot\frac{L}{l}\ \text{ва}\ \frac{V}{V_1}=\frac{R^2}{r^2}\cdot\frac{H}{h}.$$

Аммо, $\frac{L}{l}=\frac{H}{h}=\frac{R}{r}$ эди. Демак, $\frac{S}{S_1}=\frac{R^2}{r^2}$ ва $\frac{V}{V_1}=\frac{R^3}{r^3}$.

12-§. БАЪЗИ МАСАЛАЛАРНИ ЕЧИШ НАМУНАЛАРИ

1-масала. Тенг ёнли учбурчак ўзининг баландлиги атрофида айланади. Учбурчакнинг периметри 30 *см*. Ҳосил бўлган айланма жисмнинг тўла сирти 60 π *см*^{2}. Шу учбурчакнинг томонларини аниқланг (266-расм).

Ечиш. $AC=BC\neq AB$; $2\cdot AC+AB=30$ ва $\pi R\cdot AC+\pi R^2=60\pi$. ($AC$ — конус сиртнинг ясовчиси).

$$AB=2R;\quad 2\cdot AC+2R=30,\quad AC=15-R.$$

Бу ҳолда:

$$R(15-R)+R^2=60,$$

бундан:

$$R = 4 \text{ см}.$$

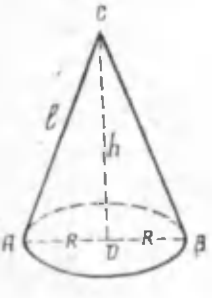
Демак, $BC = AC = 15 - 4 = 11$ (*см*); $AB = 2R = 2 \cdot 4 = 8$ (*см*).

2-масала. Конуснинг баландлиги 28 *м* ва асосининг радиуси 10 *м*. Конуснинг ён сирти топилсин.

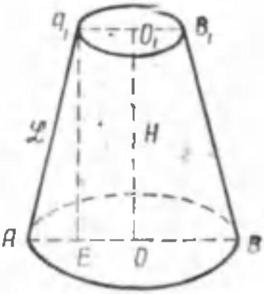
Ечиш. Бу ерда ҳам юқоридаги расмдан фойдаланиш мумкин. $R = 10\,м$; $h = 28\,м$; $S_{\text{ён. к}} = \pi R \cdot l = 10 \cdot \pi \cdot l$. Энди $\triangle AOC$ дан:

$l = \sqrt{k^2 + h^2} = \sqrt{28^2 + 10^2} = \sqrt{884} \approx 29$ (*м*). $S_{\text{ён. к}} = 10\pi \cdot 29 = 290\ \pi$ ($м^2$).

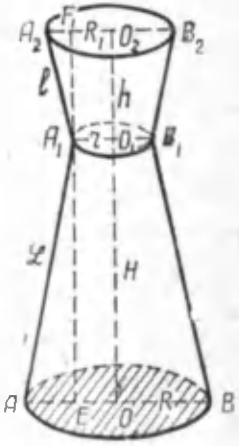
3-масала. Агар 1 $м^2$ томни бўяшга 0,12 *кг* бўёқ кетса, асосининг диаметри 10 *м* ва баландлиги 12 *м* бўлган конус шаклидаги тунука томни бўяш учун неча килограмм бўёқ кетади?



266- расм.



267- расм.



268- расм.

Ечиш. Юқоридаги расмдан фойдаланиш мумкин. $2R = 10\ м$; $R = 5\ м$; $h = 12\ м$. Энди $\triangle AOC$ дан:

$$AC = l = \sqrt{R^2 + h^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13\ (м);\ S_{\text{ён/к}} = \pi R l = \pi \cdot 5 \cdot 13 = 65\pi\ (м^2) = 204{,}1\ (м^2).$$

Бу ҳолда томни бўяшга $204{,}1 \cdot 0{,}12 = 24{,}492$ (*кг*) бўёқ кетади.

4-масала. Катта асосининг диаметри 2,2 *дм*, кичик асосининг диаметри 1,8 *дм* ва баландлиги 3 *дм* бўлган кесик конус шаклида карнай ясаш учун, неча квадрат метр тунука керак? (Чокка букиш ҳисобга олинмайди.)

Ечиш. 267- расмни чизамиз; унда $AB = 2R = 2{,}2\ дм$; $R = 1{,}1\ дм$, $A_1B_1 = 2r = 1{,}8$; $r = 0{,}9\ дм$; $OO_1 = H = 3\,дм$ бўлсин.

$A_1E \perp AB$ ни тушириб, $\triangle AEA_1$ дан: $AA_1 = L =$ $= \sqrt{A_1E^2 + AE^2} = \sqrt{H^2 + (R - r)^2} = \sqrt{3^2 + (1{,}1 - 0{,}9)^2} =$ $= \sqrt{9{,}04} \approx 3{,}01$ ($дм$). $S_{ён\ к/к} = \pi (R + r) \cdot L = 3{,}14 \cdot (1{,}1 +$ $+ 0{,}9) \cdot 3{,}01 = 18{,}9$ ($дм^2$).

5-масала. Чоклари учун 3% қўшиш керак бўлса, ўлчовлари қуйида кўрсатилгандек, икки кесик конусдан иборат (катта асоси ёпиқ) тунука идишни ясаш учун қанча тунука керак бўлади?

$AB = 2R = 32$ $см$, $R = 16$ $см$; $A_1B_1 = 2r = 12$ $см$, $r = 6$ $см$; $A_2B_2 = 2R_1 = 20$ $см$, $R_1 = 10$ $см$; $OO_1 = H = 81$ $см$; $O_1O_2 = h = 8$ $см$ (268- расм).

Ечиш. $A_1E \perp AB$ ва $A_1F \perp A_2B_2$ ларни туширамиз.

$$\triangle AEA_1 \text{ дан: } L = \sqrt{H^2 + (R - r)^2} = \sqrt{81^2 + 10^2} = \sqrt{6661} \approx 81{,}6;$$

$$\triangle A_2FA_1 \text{ дан: } l = \sqrt{h^2 + (R_1 - r)^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} \approx 9.$$

Топмоқчи бўлган сиртни S десак, $S = \pi (R + r) \cdot L + \pi R^2 + \pi (R_1 + r) l = 3{,}14 (22 L + 16^2) + 3{,}14 \cdot 16 \cdot 9 = 3{,}14 (22 \cdot 81{,}6 + 256 + 16 \cdot 9) = 6892{,}43$; бунинг 3% и $\frac{6892{,}43}{100} \cdot 3 = 206{,}76$ ($см^2$). Демак, $6892{,}43 + 206{,}76 = 7099{,}19$.

Жавоб. 7099,19 $см^2$.

6-масала. Тўпланган қум конус шаклида бўлиб, асосининг радиуси 2 $м$, ясовчиси эса 3,5 $м$. Шундай қум уюмларидан 10 тасини ташиш учун қанча машина керак? 1 $м^3$ қум 2,1 $т$ келади. Бир машинага 1,5 $т$ ортилади.

Ечиш. $AO = R = 2$ $м$, $AS = l = 3{,}5$ $м$. $V_к = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 4h \approx 4{,}19\, h$ (269- расм). Энди $\triangle AOS$ дан: $h = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{3{,}5^2 - 2^2} = \sqrt{8{,}25} \approx 2{,}8$ $м$; $V_к = 4{,}19 \cdot 2{,}8 = 11{,}3$ ($м^3$). Бу ҳолда: $10\ V_к = 10 \cdot 11{,}3 = 113$ ($м^3$).
Демак, $113 \cdot 2{,}1 = 237{,}3$ ($т$) бўлади.

Демак, $\frac{237{,}3}{1{,}5} \approx 158$ та машина керак бўлади.

7-масала. Конуснинг ясовчиси $l = 1{,}2$ $м$ бўлиб, у асос текислиги билан 60° ли бурчак ясайди. Шу конуснинг ҳажми топилсин.

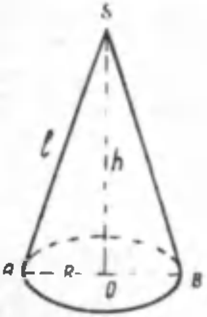
Ечиш. Юқоридаги расмдан фойдаланиш мумкин.

$\angle SAO = 60°$ бўлсин. $\triangle AOS$ да: $\angle ASO = 30°$ бўлгани учун $R = AO = \frac{l}{2} = \frac{1{,}2}{2} = 0{,}6$; $h = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{1{,}2^2 - 0{,}6^2} \approx 1{,}03$; $V_к = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 0{,}6^2 \cdot 1{,}03 = 0{,}1236\, \pi$.

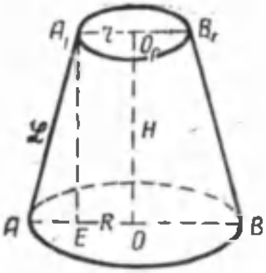
Жавоб. $V_к = 0{,}1236\ \pi м^3$.

8- масала. Кесик конус асосларининг радиуслари ва ясовчиларининг ўзаро нисбатлари $4:11:25$ каби, ҳажми 181 $\pi м^3$. Шу кесик конус асосларининг радиуслари ва ясовчиси топилсин.

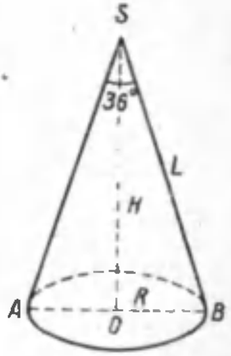
Ечиш. $AB = 2R$, $A_1B_1 = 2r$, $AA_1 = L$; $OO_1 = H$ бўлсин (270- расм). $r : R : L = 4 : 11 : 25$. Бу ҳолда: $r = 4x$; $R = 11x$;



269- расм.



270- расм.



270- *а* расм.

$L = 25x$ деб ёзиш мумкин. $\triangle AEA_1$ дан: $H = \sqrt{L^2 - (R-r)^2} = \sqrt{(25x)^2 - (7x)^2} = 24x$; $V_{к/к} = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$ эди. $181\pi = \frac{\pi 24x}{3}(121x^2 + 44x^2 + 16x^2) = 8x\pi \cdot 181x^2$; бундан:

$$1 = 8x^3,\ x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}.$$

У ҳолда:

$$r = 4x = 4\cdot\frac{1}{2} = 2;\ R = 11x = 11\cdot\frac{1}{2} = 5{,}5;\ L = 25x = 25\cdot\frac{1}{2} = 12{,}5.$$

Жавоб. $r = 2$ *м*; $R = 5{,}5$ *м*; $L = 12{,}5$.

9- масала. Параллел томонлари 7 *см* ва 17 *см*, юзи 144 *см*² бўлган тенг ёнли трапеция ўрта баландлиги атрофида айланади. Ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми топилсин.

Ечиш. $AB = 2R = 17$ *см*; $A_1B_1 = 2r = 7$ *см*;
ABA_1B_1 трапеция юзи $= 144$ *см*² (270- расм).

$$V_{к/к} = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2) = \frac{\pi H}{3}(8{,}5^2 + 8{,}5\cdot 3{,}5 + 3{,}5^2) = \frac{\pi H}{3}\cdot 11{,}25.$$

Энди H ни топамиз: $AA_1B_1B_{\text{тр. юзи}} = \frac{AB + A_1B_1}{2}\cdot OO_1$ ёки $144 = \frac{17+7}{2}\cdot H = 12H$, бундан: $H = 12$ *см.* У ҳолда $V_{к/к} =$

$$= \frac{\pi\cdot 12}{3}\cdot 114{,}25 = 457\pi.$$

Жавоб. $V_{к/к} = 457\pi\,см^3$.

10-масала. Ён сирти $90\,\pi$ *м*² бўлган конус ёйилганда, бурчаги 36° бўлган доиравий секторни беради. Конуснинг ҳажми топилсин (270- *а* расм).

Ечиш.

$$\breve{AB}_{уз} = \frac{\pi l\cdot 36^\circ}{180^\circ} = 2\pi R,\ \text{бундан: } l = 10R.$$

$$S_{ён/к} = \pi Rl = 10\pi R^2$$

$$90\pi = 10\pi R^2,\ \text{бундан: } R = 3\ м.$$

Конус баландлиги: $H = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{100R^2 - R^2} =$ $= \sqrt{99\cdot 9} = 9\cdot\sqrt{11}$;

$$V_к = \frac{1}{3}\pi R^2\cdot H = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 9\cdot 9\sqrt{11} = 27\pi\sqrt{11}\ (м^3).$$

Жавоб. $27\pi\sqrt{11}$ *м*³.

13-§. ШАР ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Таъриф. 1) *Фазода марказ деб аталувчи битта нуқтадан тенг узоқликдаги нуқталарнинг геометрик ўрни шар сирти ёки сферик сирт дейилади. 2) Бундай сирт билан чегараланган жисм шар дейилади.*

Бошқача таъриф. *Ярим ёки тўла доиранинг ўз диаметри атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмни шар; айлананинг айланишидан ҳосил бўлган сирт шар сирти дейилади.*

Яна бошқача таъриф. Агар, сиртнинг текислик билан ихтиёрий ҳамма кесмалари ёпиқ чизиқлардан иборат бўлса, уни *ёпиқ сирт* дейилади.

Агар, ёпиқ сиртнинг ҳамма нуқталари, унинг ичкарисидаги марказ деб аталувчи бир нуқтадан тенг узоқликда бўлса, уни *шар сирти* ёки *сферик сирт* дейилади. Бундай сирт билан чегараланган жисм *шар* деб аталади.

Шар элементларининг номлари ҳам, доира ёки айлананики сингари бўлади. Шарнинг текислик билан кесими доирани беради. Шарнинг марказидан ўтган текислик билан кесими, унинг *катта доираси* дейилади (271- расм).

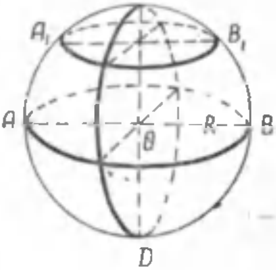
$$A_1B_1 < AB;\ A_1O_1 < AO = OB = R;\ AB = OA + OB =$$
$$= R + R = 2R.$$

Демак, радиуси R бўлган шар катта доирасининг юзи πR^2 га тенг.

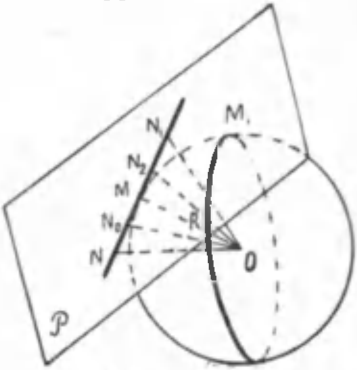
а) Шарга уринма текислик

Таъриф. *Шар билан биргина умумий нуқтага эга бўлган текислик уринма текислик дейилади.*

Радиуси R бўлган шар билан P текислик учун M нуқта уриниш нуқта бўлсин, бу ҳолда $OM = R \perp P$ бўлади (272-расм). Чунки P текисликда MN, MN_1 кесмаларни олиб, шар ташқарисидаги N; N_0; N_1; N_2; . . . нуқталарни O билан бирлаштирсак, ON; ON_0; . . . ; ON_1; ON_2; . . . оғмалар бўлиб, $OM = R$ улардан энг кичик кесма эканини кўрамиз ва $OM \perp MN_1$. Демак, $OM = R \perp P$.



271- расм.



272- расм.

б) Шарнинг ва шар сиртининг бўлаклари

Таъриф. *Шарнинг бирор текислик билан кесиб олинган бўлаги шар сегменти дейилади.*

Масалан, $A_1CB_1E_1$ — шар сегменти (273- расм). Кесим A_1B_1 юзи — *сегмент асоси*; $CE_1 \perp (A_1B_1$ юзига) — *сегмент баландлиги*; $A_1E_1 = B_1E_1$ — *сегмент асосининг радиуси дейилади.*

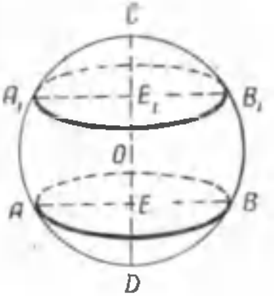
Таъриф. *Шар сиртининг икки параллел (AB ҳамда A_1B_1) текислик орасидаги қисмини шар камари ёки зона дейилади* (273- расм). EE_1 — *зона баландлиги*; параллел кесим AB ҳамда A_1B_1 чегараларига *зона асослари* дейилади.

Таъриф. *AOA_1 доиравий секторнинг CD диаметри атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм — шар сектори дейилади* (274- расм). Хусусий ҳолда A_1OC доиравий сектор ҳам CD атрофида айланиб шар секторини беради. A_1CB_1 сирт юзи ва AA_1B_1B сирт юзи шар секторларининг *асослари* дейилади.

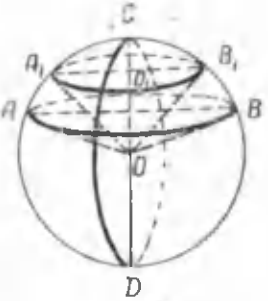
в) Шар ва шар бўлакларининг сирти

Лемма. *Уч жисм: конус, кесик конус ва цилиндрлардан ҳар бирининг ён сирти, шу жисмнинг баландлиги билан шундай айлана узунлигининг купайтмасига тенгки, у айлананинг радиуси ясовчининг ўртасидан ўқ билан кесишгунча утказилган перпендикуляр бўлади.*

1) $\triangle ABC$ ни AB катетнинг давоми MN ўқ атрофида айланишидан баландлиги AB, радиуси $BC = R$ ва ясовчиси $AC = l$ бўлган конус ҳосил бўлсин. $AE = CE$ ва $DE \perp AC$ бўлсин (275- расм).



273- расм.

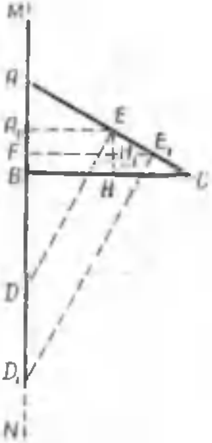


274- расм.

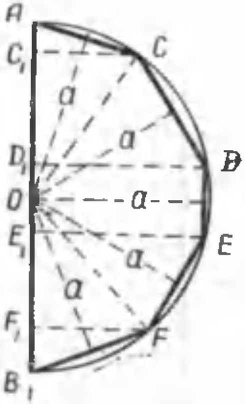
ABC конус сирт $= 2\pi \cdot DE \cdot AB$ эканини исбот қиламиз.

Исбот. $S_{\text{сн/к}} = \pi Rl = \pi \cdot BC \cdot AC$.

$\triangle AED \backsim \triangle ABC$ дан $\frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AE}$ ёки $BC \cdot AE = DE \cdot AB$. Аммо $AE = \frac{1}{2}\ AC$ бўлгани учун кейинги тенглик $BC \cdot AC = 2DE \cdot AB$



275- расм.



276- расм.

кўринишни олади. Буни ўрнига қўйсак: $S_{\text{сн/к}} = 2\pi \cdot DE \cdot AB$ ҳосил бўлади.

2) Энди A_1ECB трапецияни MN атрофида айланишидан асосининг радиуслари $BC = R$ ва $A_1E = r$; ясовчиси $EC = l$; ба-

ландлиги A_1B бўлган кесик конус ҳосил бўлсин. $EE_1 = CE_1$ ва $D_1E_1 \perp EC$ бўлсин (275- расм). A_1ECB кесик конус ён сирти, $S_{к/к} = 2\pi \cdot D_1E_1 \cdot A_1B$ бўлишини исбот қиламиз.

Исбот. $S_{к/к} = \pi(R + r)\ l = \pi(BC + A_1E) \cdot EC$; E_1F ўрта чизиқ, $EH \perp BC$ кесмаларни ўтказиб, $\triangle D_1FE_1 \backsim \triangle EHC$ ни ҳосил қиламиз. Бундан:

$$\frac{E_1F}{EH} = \frac{D_1E_1}{EC},\ E_1F \cdot EC = D_1E_1 \cdot EH = D_1E_1 \cdot A_1B.$$

Аммо,

$$E_1F = \frac{BC + A_1E}{2}.$$

Бу ҳолда:

$$\frac{BC + A_1E}{2} \cdot EC = D_1E_1 \cdot A_1B \text{ ёки } (BC + A_1E) \cdot EC = 2D_1E_1 \cdot A_1B.$$

Буни ўрнига қўйсак,

$$S_{к/к} = 2\pi \cdot D_1E_1 \cdot A_1B$$

ҳосил бўлади.

3) Энди A_1EHB тўғри тўртбурчакнинг MN атрофида айланишидан радиуси BH, ясовчиси EH бўлган цилиндр ҳосил бўлади. Бу ҳолда ҳам лемма тўғридир, чунки $FH_1 = BH$. Демак,

$$S_ц = 2\pi \cdot FH_1 \cdot A_1B.$$

Теорема. *Шарнинг сирти, унинг катта доираси юзининг тўртланганига тенг.*

Диаметри AB бўлган ярим айлана AB атрофида айланиб, шар сиртини чизсин (276- расм).

$AB = 2R$ бўлсин. Энди ярим айланага ички мунтазам синиқ чизиқ $ACDEFB$ ни чизамиз ва AB га CC_1; DD_1; EE_1; FF_1 перпендикулярларни ўтказамиз. У ҳолда айланиш натижасида $\triangle AC_1C = \triangle BF_1F$ лар конус, D_1DEE_1 эса цилиндр, $DE \parallel AB$; $C_1CDD_1 = E_1EF_1F$ лар кесик конуслар чизади. Буларда, ўқ AB дан ясовчиларининг ўртасига туширилган перпендикулярнинг ҳар бири синиқ чизиқнинг апофемасига тенг, унинг узунлиги a бўлсин. Бу ҳолда леммага асосан:

AC нинг айланишидан ҳосил бўлган сирт $= 2\pi a \cdot AC_1$;
CD нинг айланишидан ҳосил бўлган сирт $= 2\pi a \cdot C_1D_1$;
$+$ DE нинг айланишидан ҳосил бўлган сирт $= 2\pi a \cdot D_1E_1$;
EF нинг айланишидан ҳосил бўлган сирт $= 2\pi a \cdot E_1F_1$;
BF нинг айланишидан ҳосил бўлган сирт $= 2\pi a \cdot F_1B$.

$ACDEFB$ синиқ чизиқ чизган сирт $= 2\pi a\ (AC_1 + C_1D_1 + \ldots + F_1B) = 2\pi a \cdot AB = 2\pi a \cdot 2R = 4\pi aR$ ҳосил бўлади. Энди ички чизилган синиқ чизиқ томонларининг сонини чексиз орттирсак, у ҳолда:

$a \to R$, яъни $\lim a = R$; $\lim (AC + CD + \ldots + FB)_{сирт} = S_{ш.}$ бўлади.

Демак, $S_{ш.} = 4\pi R \cdot R = 4\pi R^2$. $\boxed{S_{ш.} = 4\pi R^2 \text{ кв. бирлик.}}$

Хусусий ҳоллар

AC нинг айланишидан ҳосил бўлган сирт — баландлиги AC_1 га тенг бўлган сегментнинг сиртидир. Демак, сегментнинг сирти $= 2\pi R \cdot AC_1$ (кв. бирлик) бўлади.

$AC_1 = h$ деб белгилаймиз;

$$\boxed{S_{сег} = 2\pi R \cdot h \text{ кв. бирлик.}}$$

Яна 276- расмда $DE \parallel AB$; $\overset{\smile}{DE}$ нинг AB атрофида айланишидан баландлиги D_1E_1 га тенг камар сирти ҳосил бўлади. Демак, шар камарининг сирти $= 2\pi R \cdot D_1E_1$ (кв. бирлик). $D_1E_1 = h$ ва шар камарининг сирти $S_{ш/к}$ бўлсин.

$$\boxed{S_{ш/к} = 2\pi R \cdot h \text{ кв. бирлик.}}$$

Демак, *шар сегментининг сирти (ёки шар камарининг сирти) — унинг баландлиги билан катта доира айланаси узунлигининг кўпайтмасига тенг.*

г) Шар ва шар бўлакларининг ҳажми

Лемма. Агар ABC учбурчак, ўз текислигида ётувчи ва унинг A учидан ўтган, аммо BC томонни кесмайдиган MN тўғри чизиқ атрофида айланса, айланиш натижасида ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми BC томон билан ҳосил қилинган сиртни шу томонга A учидан туширилган h баландликнинг учдан бири билан кўпайтирилганига тенг (277- расм).

Исбот. Бир неча ҳоллар бўлиши мумкин: 1) AB томон MN тўғри чизиқ билан устма-уст тушади (278- расм). $CD \perp AB$ ни туширамиз. Бу ҳолда $\triangle ABC$ нинг MN атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми:

$$V_{\triangle ABC} = V_{\triangle BDC} + V_{\triangle ADC} = \frac{1}{3}\pi \cdot DC^2 \cdot BD + \frac{1}{3}\pi \cdot DC^2 \cdot AD =$$
$$= \frac{\pi DC^2}{3} \cdot (BD + AD) = \frac{\pi \cdot DC}{3} \cdot DC \cdot AB = \frac{\pi \cdot DC}{3} \cdot BC \cdot h$$

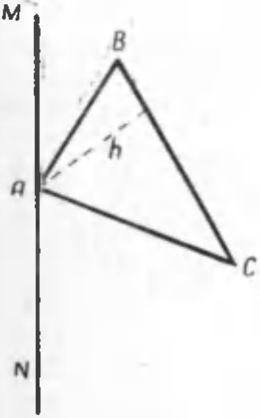
Аммо:

$$\pi \cdot DC \cdot BC = (BC) \text{ сирт.}$$

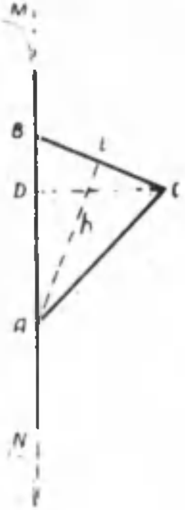
Демак,

$$V_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}\,(BC_{\text{сирт}})\cdot h \text{ (куб бирлик).}$$

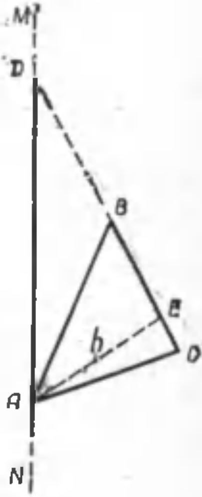
2) AB томон MN тўғри чизиқ билан устма-уст тушмайди ва $BC \nparallel MN$[1] (279- *а* расм). BC томонни MN билан кесишгунча давом эттирсак, 1- ҳол ҳосил бўлади. Яъни: $V_{\Delta ABC} = V_{\Delta ADC} -$



277- расм.



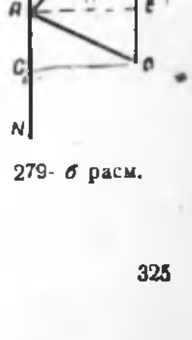
278- расм.



279- *а* расм.

$$- V_{\Delta ADB} = \frac{1}{3}\,(DC_{\text{сирт}})\cdot h - \frac{1}{3}\,(DB_{\text{сирт}})\cdot h = \frac{1}{3}\,(DC_{\text{сирт}} - DB_{\text{сирт}})\cdot h = \frac{1}{3}\,(BC_{\text{сирт}})\cdot h \text{ бўлади.}$$

3) $BC \parallel MN$ бўлсин. $CC_1 \perp MN$; $BB_1 \perp MN$ ва $AE \perp BC$, $AE \perp MN$ га (279- *б* расм). $V_{\Delta ABC} = (BC_{\text{сирт}})\cdot \frac{1}{3} h$ бўлади.



279- *б* расм.

Теорема. *Шарнинг ҳажми шар сирти билан радиуси купайтмасининг учдан бирига тенг.*

Исбот. Бир томондан $ACDEFB$ синиқ чизиқ билан чегараланган текисликнинг AB диаметр атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажми $V_л$ ва шар ҳажми $V_{ш.}$ бўлсин (276-расм). У ҳолда леммага асосан, $V_л = \frac{1}{3}(AC_{\text{сирт}})\cdot a +$

---

[1] ∦ — параллел — эмаслик белгиси.

$+\frac{1}{3}(CD_{\text{сирт}})\cdot a+\ldots+\frac{1}{3}(FB_{\text{сирт}})\cdot a=\frac{a}{3}(AC+CD+\ldots+FB)_{\text{сирт}}$ бўлади.

Энди ички чизилган синиқ чизиқ томонларининг сонини чексиз орттирсак, у ҳолда: $\lim a=R$; $\lim V_n=V_{\text{ш}}$ ва $\lim(AC+CD+\ldots+FB)_{\text{сирт}}=S_{\text{ш}}$. Демак, $V_{\text{ш.}}=\frac{R}{3}S_{\text{ш.}}=\frac{R}{3}\times 4\pi R^2=\frac{4}{3}\pi R^3$.

$$\boxed{V_{\text{ш.}}=\frac{4}{3}\pi R^3 \text{ куб бирлик}} \text{ ёки } \boxed{V_{\text{ш.}}=\frac{\pi}{6}\cdot D^3 \text{ куб бирлик.}}$$

Бу шар ҳажмини ҳисоблаш формуласи. Хусусий ҳоллар: 276- расмда доира сектори AB диаметр атрофида айланишидан ҳосил бўлган, масалан, AOC шар секторининг ҳажми $V_{\text{сек}}=\frac{1}{3}(AC_{\text{сирт}})\cdot R=\frac{1}{3}\,2\pi R\cdot AC_1\cdot R=\frac{2}{3}\pi R^2h$ формула билан ифодаланади. Демак,

$$\boxed{V_{\text{сек}}=\frac{2}{3}\pi R^2h \text{ куб бирлик.}}$$

Шундай қилиб, *шар секторининг ҳажми — унинг асосининг сирти билан шар радиусининг учдан бири кўпайтмасига тенг.* Буларга асосан шар сегментининг ҳажми $V_{\text{сег}}=\pi h^2\cdot\left(R-\frac{1}{3}h\right)$ формула билан ифодаланади ($AC_1=h$ — сегмент баландлиги).

д) Баъзи бир масалаларни ечиш намуналари

1- масала. Диаметри 25 *см* бўлган коптоқ учун неча квадрат метр резина сарф бўлган?

Ечиш. $D=25$ *см* $=0{,}25$ *м*.

Шар сирти: $S_{\text{ш}}=4\pi R^2=\pi D^2$ эди. Демак, коптоқ сирти $=S_{\text{ш.}}=\pi L^2=3{,}14\cdot 0{,}25^2=0{,}196$ ($м^2$).

2- масала. 2 *кг* қўрғошиндан, диаметри $D=4$ *мм* бўлган шар шаклидаги золдирчалар қўйилган (қўрғошиннинг солиштирма оғирлиги 11,3; чиқит ҳисобга олинмайди). Неча дона золдирча олиш мумкин?

Ечиш. Шар ҳажми $V_{\text{ш.}}=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{\pi}{6}D^3$ эди. Бир куб миллиметр қўрғошиннинг оғирлиги 0,0113 *г*. Бу ҳолда бир дона шар шаклидаги золдирчанинг оғирлиги: $\frac{1}{6}\pi D^3\cdot 0{,}0113=\frac{1}{6}\times 3{,}14\cdot 4^3\cdot 0{,}0113\approx 0{,}38$ *г*. Демак, 2 *кг* қўрғошиндан $\frac{2000}{0{,}38}\approx 5263$ дона золдир чиқади.

3- масала. 0,1 *л* сув олиш учун, диаметри 0,15 *см* бўлган (шар шаклидаги) сув томчисидан неча дона олиш керак бўлади?

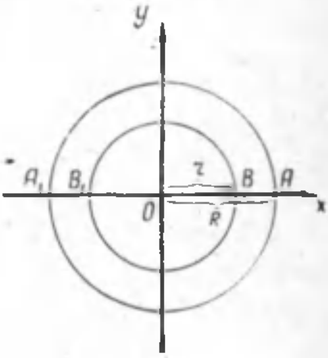
Ечиш. Бир томчи сувнинг ҳажми $V_{ш.} = \frac{1}{6}\pi D^3 = \frac{1}{6}\cdot 3,14\cdot 0,15^3 = 0,0018$ $(см^3)$; $0,1$ *л* $= 100$ $см^3$.

Бу ҳолда: $\frac{100}{0,0018} \approx 55556$ дона.

4-масала. Деворининг қалинлиги 3 *см* бўлган ёғоч шарнинг ташқи диаметри 26 *см* га тенг. Ёғочнинг солиштирма оғирлиги 0,7. Шу ёғоч шарнинг оғирлиги топилсин (280-расм).

Ечиш. $AA_1 = 26$ *см*; $AB = 3$ *см*; $BB_1 = AA_1 - 2\,AB = 26 - 6 = 20$; $OA = \frac{26}{2} = 13$; $OB = \frac{20}{2} = 10$;

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\cdot 13^3;\ V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\cdot 10^3;\ V = V_1 - V_2 = \frac{4}{3}\pi(13^3 - 10^3) = 5001,44\ (см^3).$$



280- расм.

Бу ҳолда ёғоч шарнинг оғирлиги: $5001,44\cdot 0,0007 \approx 3,5$ *(кг)*.

Машқлар.

1) 1,2 *кг* қўрғошиндан диаметри 2 *мм* бўлган қўрғошин шарчалардан неча дона қўйиш мумкин? (Қўрғошиннинг солиштирма оғирлиги 11,3.)

Жавоб. ≈ 25000 дона.

2) Сирти 28,26 $дм^2$ га тенг бўлган шарнинг ҳажми топилсин.

Жавоб. ≈ 14,13 $дм^3$.

3) Ташқи диаметри 14 *см* ва деворининг қалинлиги $\frac{1}{4}$ *см* бўлган чўян шар сувда чўкмай суза оладими? (Чўяннинг солиштирма оғирлиги 7,8.)

Жавоб. Мумкин: $369\pi < 457\pi$.

4) Баландлиги 14 *см* ва диаметри 1,6 *см* бўлган (ойнадан ишланган) цилиндр шаклдаги идишнинг бир асоси ярим шар шаклида тугаган. Шу идишнинг ҳажми топилсин.

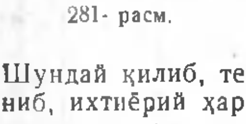
Жавоб. ≈ 28 $см^3$.

IV БЎЛИМ

ТРИГОНОМЕТРИЯ[1]

1-§. БУРЧАКЛАР ВА ЕЙЛАР, УЛАРНИНГ ГРАДУС ҲАМДА РАДИАН ЎЛЧОВЛАРИ

Тригонометрик таъриф. *Текисликдаги нурнинг бошланғич нуқтада қилган ҳаракати натижасида ҳосил бўлган фигура бурчак дейилади.* Масалан, текисликда O нуқтадан чиққан OA нур, O нуқта атрофида ҳаракат қилиб (айланиб) OA_1 ҳолатини олганда, AOA_1 бурчак; OA_2 ҳолатини олганда эса AOA_2 бурчак ҳосил бўлади (281- расм). $\angle AOA_1 = \alpha$, $\angle AOA_2 = \beta$ деб белгилаймиз. OA ва OA_1 нурлар α бурчакнинг *томонлари*; OA ва OA_2 нурлар β бурчакнинг *томонлари* дейилади. O нуқта бурчакнинг *учи* дейилади. Бунда α бурчак OA нурнинг соат стрелкасининг айланишига қарама-қарши ҳаракатидан ҳосил бўлган бурчак бўлиб, β эса OA нурнинг соат стрелкасининг айланиши бўйича ҳаракатидан ҳосил бўлган бурчакдир.



281- расм.

Соат стрелкасининг айланишига қарама-қарши олинган бурчак *мусбат* бурчак, соат стрелкасининг айланиши бўйича олинган бурчак *манфий* бурчак деб қабул қилинган. Демак, 281- расмда $\angle AOA_1$ — мусбат бурчак, $\angle AOA_2$ — манфий бурчакдир. (Мусбат бурчакнинг катталиги мусбат сон билан, манфий бурчакнинг катталиги манфий сон билан ифода қилинади.) Шундай қилиб, текисликда OA нур O нуқта атрофида айланиб, ихтиёрий ҳар қандай катталикда мусбат ёки манфий бурчакларни ҳосил қилиши мумкин.

Тригонометрияда қараладиган бурчак (ёй) лар: 1) градус ўлчовлар ва 2) радиан ўлчовлар билан ўлчанади[2].

Нурнинг бошланғич нуқтада тўла айланишининг $\frac{1}{360}$ бўлаги *бурчак градуси* дейилади ва у $\frac{T_{айл}}{360} = 1°$ деб ёзилади ($T_{айл}$ —

---

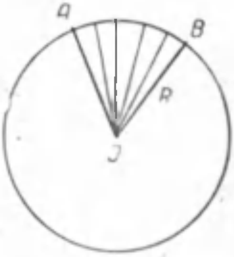
[1] Тригонометрия сўзи грекча бўлиб, „учбурчакларни ўлчаш фани" деган сўздир.

[2] Градус ўлчови амалий масалаларда, радиан ўлчови эса назарий масалаларда кўпроқ ишлатилади.

тўлиқ айлана узунлиги). Бир градуснинг 60 дан бир бўлаги $\frac{1^\circ}{60}$ *минут* (1′), бир минутнинг 60 дан бир бўлаги $\frac{1'}{60}$ *секунд* дейилади ва $\frac{1'}{60} = 1''$ деб ёзилади.

Таъриф. *Марказий бурчакка тегишли ёй узунлигининг ўша ёй радиусига нисбати шу бурчакнинг радиан ўлчови дейилади.*

Бурчакнинг радиан ўлчови бирлиги қилиб, узунлиги радиусга тенг бўлган ёйга тиралувчи мусбат марказий бурчак олингандир. 282- расмда $\overset{\frown}{AB} = R$; $\angle AOB$ — *радиан* ва $\overset{\frown}{AB}$ — *радиан бирлиги* дейилади. Битта тўла мусбат айланишнинг радиан ўлчови $\frac{2\pi R}{R} = 2\pi$ бўлади; 1° нинг радиан ўлчови $\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$ га тенг, бу ҳолда β нинг радиан ўлчови $\frac{\pi}{180} \cdot \beta$ бўлади; буни α деб белгиласак, $\boxed{\alpha = \frac{\pi}{180} \cdot \beta}$ (1) формула ҳосил бўлади. Энди (1) формула ёрдамида қуйидаги баъзи бурчакларнинг радиан ўлчовлари жадвалини берамиз:



282- расм.

Градуслар	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Радианлар	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Энди радиан ўлчовидан градус ўлчовига ўтиш учун (1) формуладан:

$$\boxed{\beta^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \alpha} \qquad (2)$$

формулани ҳосил қиламиз. $\alpha = 1$ бўлсин; у ҳолда: 1 радиан $= \frac{180^\circ}{\pi} \cdot 1 = \frac{180^\circ}{3,14} = 57^\circ\ 17'\ 45''$. Демак, $\boxed{1 \text{ радиан} = 57^\circ\, 17'\, 45''.}$

Мисол. 1) 15° га тенг бурчакнинг радиан ўлчови топилсин.

Ечиш. $\alpha = \frac{\pi}{180^\circ} \beta = \frac{\pi}{180} \cdot 15 = \frac{\pi}{12}$.

2) 3 радианга тенг бўлган бурчакнинг градус ўлчови топилсин.

Ечиш. $\beta^\circ = \frac{180^\circ}{\pi}\alpha = \frac{180^\circ}{3.14}\cdot 3 = (57^\circ\ 17'\ 45'')\cdot 3 = 171^\circ\ 53'\ 15''$.

Машқлар. 1) 40° га тенг бурчакнинг радиан ўлчови топилсин.

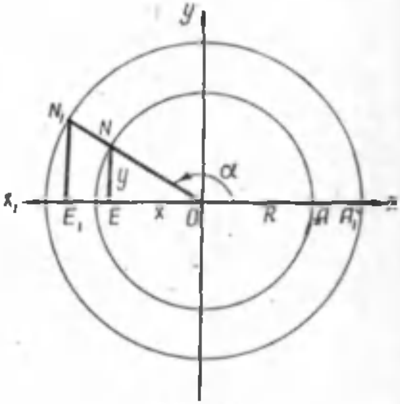
2) 2 радианга тенг бўлган бурчакнинг градус ўлчови топилсин.

2-§. ИХТИЁРИЙ БУРЧАКНИНГ ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАРИ

Текисликда тўғри бурчакли координаталар системаси берилган бўлсин (283- расм).

X ва *У* ўқлари координаталар текислигини тўртта тенг бўлакка бўлади; ҳар қайси бўлакни *чорак* деб аталади. Энди,

283- расм.



284- расм.

маркази координаталар бошида ва радиуси R бўлган доира чизамиз[1]. ($R = 1$ бўлганда доира — ***бирлик доира*** дейилади.) Кейин $\angle AOB = \alpha$ ни чизамиз; бунда OA — қўзғалмас радиус, OB — қўзғалувчи радиус бўлсин.

$\angle AOB = \alpha$ бурчакка бир неча бутун марта тўлиқ бурчак 2π ни қўшганда (айирганда) ҳосил бўладиган бурчаклар OB томонга келиб тугалланади. Буни 283- расмдан яққол кўриш мумкин. Бу чексиз кўпбурчаклар катталигининг умумий кўриниши $\alpha + 2k\pi$ сон билан ифодаланади (бунда $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$). Энди 284- расмда ихтиёрий $\angle AON = \alpha$ бурчак чизамиз. N нуқтанинг абсциссаси x, ординатаси y бўлсин, яъни:

$$OE = x,\ NE = y,\ N(x;\ y).$$

---

[1] Бундай доира тригонометрик доира, айлана эса тригонометрик айлана дейилади.

Ҳозир биз $\frac{x}{R}$; $\frac{y}{R}$ нисбатларнинг қийматлари ва уларга тескари $\frac{R}{x}$; $\frac{R}{y}$ нисбатларнинг қийматлари ON қўзғалувчи радиуснинг узунлигига боғлиқ эмаслигини исбот қиламиз. Бунинг учун $ON_1 \neq ON$ радиус билан бошқа доира чизамиз ва $N_1E_1 \perp OX_1$ ни туширсак, $\triangle EON \backsim \triangle E_1ON_1$ ҳосил бўлади; $OE_1 = x_1, N_1E_1 = y_1$ бўлсин. У ҳолда учбурчакларнинг ўхшашлигидан $\frac{x}{R} = \frac{x_1}{R_1}$; $\frac{y}{R} = \frac{y_1}{R_1}$ ва $\frac{R}{x} = \frac{R_1}{x_1}$; $\frac{R}{y} = \frac{R_1}{y_1}$ (жуфти билан) тенг нисбатларни ҳосил қиламиз. Демак, бу нисбатларнинг қийматлари унга тегишли доира радиусининг узунлигига боғлиқ бўлмай, балки α бурчакнинг миқдорига боғлиқ бўлади.

Изоҳ. N нуқта абсцисса ўқида ётганда: $\frac{x}{R} = \pm 1$, $y = 0$; ордината ўқида ётганда эса: $\frac{y}{R} = \pm 1$, $x = 0$ лар ҳосил бўлади.

1-таъриф. *Абсциссалар ўқи билан ихтиёрий α бурчак ҳосил қилган қўзғалувчи радиус охирги учи ординатасининг шу радиус узунлигига нисбати $\frac{y}{R}$ ни α бурчакнинг синуси деб аталади* ва бундай ёзилади: $\frac{y}{R} = \sin\alpha$.

2-таъриф. *Абсциссалар ўқи билан ихтиёрий α бурчак ҳосил қилган қўзғалувчи радиус охирги учи абсциссасининг шу радиус узунлигига нисбати $\frac{x}{R}$ ни α бурчакнинг косинуси деб аталади* ва бундай ёзилади: $\frac{x}{R} = \cos\alpha$.

3-таъриф. *α бурчак синусининг шу бурчак косинусига нисбати α бурчакнинг тангенси деб аталади* ва бундай ёзилади:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha; \ \cos\alpha \neq 0.$$

4-таъриф. *α бурчак косинусининг шу бурчак синусига нисбати α бурчакнинг котангенси деб аталади* ва бундай ёзилади:

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha; \ \sin\alpha \neq 0.$$

5-таъриф. *α бурчак косинусининг тескари қиймати α бурчакнинг секанси деб аталади* ва бундай ёзилади:

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha; \ \cos\alpha \neq 0.$$

6- **таъриф.** *α бурчак синусининг тескари қиймати α бурчакнинг косеканси деб аталади* ва бундай ёзилади:

$$\frac{1}{\sin\alpha} = \csc\alpha; \ \sin\alpha \neq 0.$$

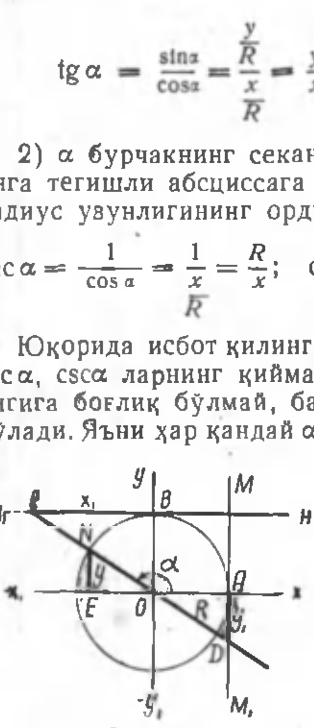
Энди, тангенс ва котангенс, секанс ва косекансларнинг таърифларидан бундай хулосалар чиқариш мумкин: 1) α бурчакнинг тангенси OX ўқи билан α бурчак ҳосил қилган қўзғалувчи радиус охирги учи ординатасининг унинг абсциссасига нисбатидан иборат; котангенси эса, аксинча, бу радиус охирги учи абсциссасининг унинг ординатасига нисбатидан иборат, яъни:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{y}{R}}{\frac{x}{R}} = \frac{y}{x}; \ \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\frac{x}{R}}{\frac{y}{R}} = \frac{x}{y} \ (x \neq 0; \ y \neq 0).$$

2) α бурчакнинг секанси қўзғалувчи радиус узунлигининг унга тегишли абсциссага нисбатидан иборат; косеканси эса шу радиус узунлигининг ординатага нисбатидан иборат, яъни:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{x}{R}} = \frac{R}{x}; \quad \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\frac{y}{R}} = \frac{R}{y} \ (x \neq 0; \ y \neq 0).$$

Юқорида исбот қилинганларга асосан, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$, $\sec\alpha$, $\csc\alpha$ ларнинг қийматлари қўзғалувчи радиуснинг узунлигига боғлиқ бўлмай, балки α бурчакнинг миқдорига боғлиқ бўлади. Яъни ҳар қандай α бурчакка $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$, $\sec\alpha$, $\csc\alpha$ лар (агар улар маънога эга бўлса) ҳар бирининг бирор қиймати мос келади. Демак, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$, $\sec\alpha$, $\csc\alpha$ лар α бурчакнинг функцияларидан иборат ва уларни *тригонометрик функциялар*, α бурчак эса уларнинг *аргументи* дейилади. Аммо, марказий бурчак ўзи тиралган ёй билан ўлчаниши геометриядан маълум, шунинг учун тригонометрик функцияларнинг аргументи бўлмиш α бурчак ўрнига унга тегишли айлана ёйини олиш ҳам мумкин.



285- расм.

Энди, 285- расмда кўрсатилгандек, айлананинг A ва B нуқталарига MM_1 ва HH_1 уринмалар ўтказамиз; MM_1 *тангенслар ўқи*, HH_1 эса ***котангенслар ўқи*** дейилади. Тангенс ва котангенс ўқларининг мусбат ва манфий йўналишлари координаталар ўқлариники каби бўлади, яъни тангенснинг горизонтал диаметридан юқорига кетган йўналиши мусбат (+), пастга кетган йўналиши манфий (—), котангенсники эса вертикал диаметридан ўнгга кетган йўналиши мусбат (+), чапга кетгани эса манфий (—) бўлади. Қўзғалувчи радиус ON ни MM_1 ва HH_1 лар билан кесишгунча давом эттириб, кесишиш нуқтаси D ва F ларни топамиз (285- расм). $AD = y_1$; $BF = x_1$ деб белгиласак D ҳамда F нуқталарнинг координаталари $D(R;\ y_1)$, $F(x_1;\ R)$ бўлади. Ихтиёрий α бурчакнинг тангенси, тангенслар ўқидаги мос D нуқтанинг ординатаси билан тегишли доира радиуси нисбатига тенг, котангенси эса котангенслар ўқидаги мос F нуқтанинг абсциссаси билан шу доира радиуси нисбатига тенг, яъни:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AD}{OA} = \frac{AD}{R} = \frac{y_1}{R};\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{BF}{OB} = \frac{BF}{R} = \frac{x_1}{R}.$$

Изоҳ. Агар N нуқта ордината ва абсцисса ўқларида ётган бўлса, $\operatorname{tg}\alpha$ ва $\operatorname{ctg}\alpha$ лар мос равишда мавжуд бўлмайдилар. 285- расмдаги FD тўғри чизиқни эса *секанс* ва *косеканслар* ўқи деб атаймиз. Секанс ва косекансаар ўқининг йўналиши — қўзғалувчи радиус давоми бўйлаб кетган қисми мусбат, унга қарама-қарши кетган қисми эса манфий ҳисобланади. Масалан, 285- расмда OF — мусбат йўналишда, OD эса манфий йўналишдадир.

α бурчакнинг секанси, секанс ва косеканслар ўқидаги OD кесма билан тегишли доира радиуси узунлиги нисбатига тенг; косеканси эса шу ўқдаги OF кесма билан тегишли радиуснинг нисбатига тенг. $\triangle NOE \backsim \triangle AOD \backsim \triangle BOF$ бўлгани учун:

$$\sec\alpha = \frac{OD}{R} = \frac{ON}{x} = \frac{R}{x} = \frac{1}{\frac{x}{R}} = \frac{1}{\cos\alpha};$$

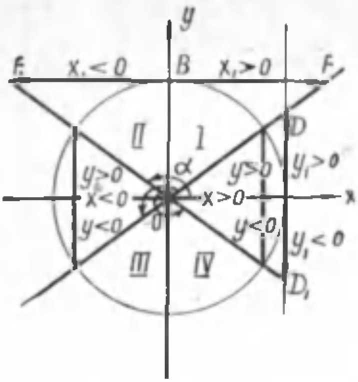
$$\operatorname{csc}\alpha = \frac{OF}{R} = \frac{ON}{NE} = \frac{R}{y} = \frac{1}{\frac{y}{R}} = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Изоҳ. 285- расмдаги NE; OE; AD; BF; OD; OF тўғри чизиқ кесмаларини α бурчакнинг мос равишда *синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс* ва *косеканс чизиқлари* дейилади.

3- §. ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАР ҚИЙМАТЛАРИНИНГ ЧОРАКЛАРДАГИ ИШОРАЛАРИ

1) $\sin\alpha$ ва $\cos\alpha$ лар доирадаги OX ўқ (2- § га қаранг) билан α бурчак ташкил қилган қўзғалувчи радиус охири ординатасининг радиусга нисбати ва абсциссасининг радиусга нисбати билан аниқлангани учун тригонометрик доира айланасидаги нуқталарнинг ординаталари ва абсциссалари қайси чоракда мусбат (манфий) бўлса, шу чоракларда тамомланувчи бурчаклар учун синус ва косинусларнинг қийматлари ҳам мусбат (манфий) бўлади (286- расм).

Демак, I ва II чоракларда тугаган бурчаклар (ёйлар) синусларининг қийматлари мусбат, III ва IV чоракларда эса ман-



286- расм.

фий бўлади. I ва IV чоракларда тугаган бурчаклар (ёйлар) косинусларининг қийматлари мусбат, II ва III чоракларда эса манфийдир.

2) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ ва $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$ бўлгани учун нуқталарнинг координаталари қайси чоракларда бир хил (қарама-қарши) ишорага эга бўлса, шу чоракда тугаган бурчаклар учун тангенс ва котангенсларнинг қийматлари мусбат (манфий) бўлади (286- расм). (Секанс ва косекансларники ҳам шуларга ўхшашдир.)

Юқоридагилардан қуйидаги жадвал ҳосил бўлади:

функциялар номи / чораклар	Синус	Косинус	Тангенс	Котангенс	Секанс	Косеканс
I	+	+	+	+	+	+
II	+	—	—	—	—	+
III	—	—	+	+	—	—
IV	—	+	—	—	+	—

4- §. ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ДАВРИЙЛИГИ

Биз юқоридаги 283- расмда қўзғалувчи радиус OB ни бирбиридан тўлиқ бурчак билан фарқ қилувчи чексиз кўп $(\alpha + 2k\pi)$ бурчакларнинг сўнгги томони эканини кўриб ўтган эдик.

Энди $(\alpha + 2k\pi)$ бурчакка тегишли ҳамма тригонометрик чизиқларни чизамиз. 287- расмдан биз яққол кўрамизки, $\alpha + 2k\pi$ бурчак учун ҳам, α бурчак учун ҳам тригонометрик чизиқлар бир хил бўлади. Демак,

$$\frac{A_1B_1}{R} = \sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha + 2\cdot 2\pi) = \ldots = \sin(\alpha + 2k\pi);$$

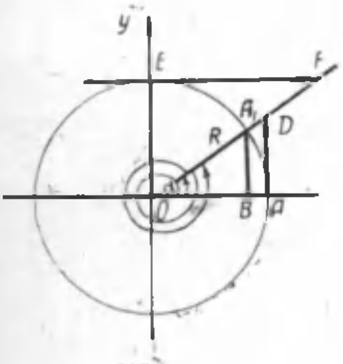
$$\frac{OB_1}{R} = \cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha + 2\cdot 2\pi) = \ldots = \cos(\alpha + 2k\pi);$$

$$\frac{AD}{R} = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + 2\pi) = \operatorname{tg}(\alpha + 2\cdot 2\pi) = \ldots = \operatorname{tg}(\alpha + 2k\pi);$$

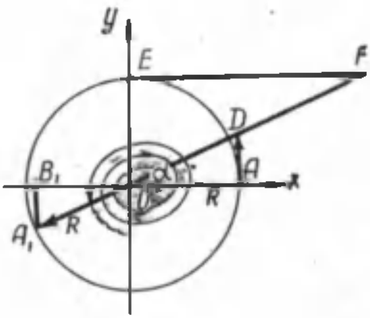
$$\frac{EF}{R} = \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + 2\pi) = \operatorname{ctg}(\alpha + 2\cdot 2\pi) = \ldots = \operatorname{ctg}(\alpha + k\pi);$$

$$\frac{OD}{R} = \sec\alpha = \sec(\alpha + 2\pi) = \sec(\alpha + 2\cdot 2\pi) = \ldots = \sec(\alpha + 2k\pi);$$
$$\frac{OF}{R} = \csc\alpha = \csc(\alpha + 2\pi) = \csc(\alpha + 2\cdot 2\pi) = \ldots = \csc(\alpha + 2k\pi).$$

Тригонометрик функциялар бундай хоссаға эга бўлгани учун улар *даврий функциялар* дейилади. Шунинг билан баробар, 2π ҳамма тригонометрик функцияларнинг *даври* деб аталади. 2π синус, косинус, секанс ва косекансларнинг *энг кичик даври* ҳисобланади. Тангенс ва котангенсларнинг энг кичик даври эса π эканини кўриш қийин эмас.



287- расм.



288- расм.

288- расмдан:

$$\frac{AD}{R} = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg}(\alpha + 2\pi) =$$
$$= \operatorname{tg}(\alpha + 3\pi) = \ldots = \operatorname{tg}(\alpha + k\pi);$$
$$\frac{EF}{R} = \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + \pi) = \operatorname{ctg}(\alpha + 2\pi) =$$
$$= \operatorname{ctg}(\alpha + 3\pi) = \ldots \operatorname{ctg}(\alpha + k\pi)$$

бўлиши равшан кўринади.

Демак, *тригонометрик функцияларнинг ихтиёрий аргументига унинг энг кичик даврини бир ёки бир неча марта қўшганда ёки айирганда тригонометрик функцияларнинг қиймати ўзгармайди.* Даврий функциялар техникада, механикада, физикада ва шунга ўхшашларда катта аҳамиятга эгадир.

Тригонометрик функцияларнинг даврийлиги уларни текширишда катта қулайлик туғдиради, чунки даврий функциянинг хоссаларини ўрганиш учун унинг хоссаларини давр узунлигига тенг бўлган бирор оралиқда ўрганиш кифоядир.

5-§. АСОСИЙ ТРИГОНОМЕТРИК АЙНИЯТЛАР

1) *Бир хил аргументнинг синуси ва косинуси квадратларининг йиғиндиси 1 га тенг:*

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.} \qquad (1)$$

Исбот. α ихтиёрий бурчак (ёй) бўлсин; биз юқорида (284- расм) $\sin\alpha = \frac{y}{R}$; $\cos\alpha = \frac{x}{R}$ эканини кўриб ўтган эдик. $\triangle NOE$ дан $y^2 + x^2 = R^2$ деб ёзиш мумкин. Бундан, $\left(\frac{y}{R}\right)^2 + \left(\frac{x}{R}\right)^2 = 1$ ёки $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. (1) нинг айниятлиги исботланди.

Тангенс ва котангенснинг таърифидан:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \text{ ва } \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.} \qquad (2)$$

Секанс ва косекансларнинг таърифидан:

$$\boxed{\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \text{ ва } \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}} \qquad (3)$$

Натижалар. (2) айниятларни ҳадлаб кўпайтирамиз:

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1, \text{ яъни } \boxed{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1.} \qquad (4)$$

(1) айниятни ҳадлаб аввал $\cos^2\alpha$ га, кейин $\sin^2\alpha$ га бўламиз:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \text{ ёки } 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha \qquad \text{ва}$$

$$1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \text{ ёки } 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \csc^2\alpha.$$

Демак,

$$\boxed{1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha \text{ ва } 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \csc^2\alpha.} \qquad (5)$$

(1), (4) ва (5) айниятларга асосан:

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{\sec^2\alpha}} = \pm\frac{\sqrt{\sec^2\alpha - 1}}{\sec\alpha} =$$

$$= \pm\frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha - 1}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \pm\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}}.$$

Шунга ўхшаш:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{\csc^2\alpha}} = \pm\frac{\sqrt{\csc^2\alpha-1}}{\csc\alpha} =$$

$$= \pm\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\pm\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}.$$

Шунга ўхшаш:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\pm\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}.$$

(3) айниятдан:

$$\cos\alpha\cdot\sec\alpha = 1,$$
$$\sin\alpha\cdot\csc\alpha = 1.$$

Мисоллар. 1) $\sec\alpha = 3$ $(0 < \alpha < 90^\circ)$ берилган. Қолган ҳамма тригонометрик функцияларнинг қийматлари топилсин.

Ечиш. $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = 3$, бундан: $\cos\alpha = \frac{1}{3}$; $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha = 3^2 = 9$; бундан: $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}$. Шунга ўхшаш

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4};\ \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} =$$

$$= \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3};$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

2) $\operatorname{tg}\alpha = -2\,(90^\circ < \alpha < 180^\circ)$ берилган. Қолган тригонометрик функцияларнинг қийматлари топилсин.

Ечиш. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$; $\sec\alpha = -\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = -\sqrt{1+4} = -\sqrt{5}$;

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha},$$

бундан:

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5};\quad \csc\alpha = \sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} = \sqrt{1+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2};$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

бўлади.

8) $\sin\alpha = 0{,}2\ (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ берилган. Қолган тригонометрик функцияларнинг қийматлари топилсин.

Ечиш. $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-0{,}04} = \sqrt{0{,}96} = 0{,}4\sqrt{6}$;

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}2}{0{,}4\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12},\ \operatorname{ctg}\alpha = 2\sqrt{6}\ \ \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} =$$

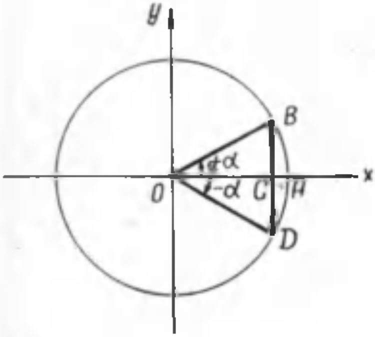
$$= \frac{1}{0{,}4\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{12}.$$

Машқлар. Қуйида тригонометрик функциялардан бири берилган, қолган тригонометрик функцияларнинг қийматлари топилсин:

1) $\cos\alpha = \frac{1}{2}\ (0 < \alpha < 90°)$; 2) $\sec\alpha = 5\ \left(\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}\right)$; 3) $\operatorname{ctg}\alpha = 4\ \left(\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}\right)$; 4) $\sin\alpha = -0{,}3\ \ (270° < \alpha < 360°)$; 5) $\csc\alpha = 2\ \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

8-§. ТРИГОНОМЕТРИК ФУНЦИЯЛАРНИНГ ЖУФТ ВА ТОҚЛИГИ

$f(x)$ функция берилган бўлсин. Агар x нинг ишораси қарама-қарши ишорага ўзгарганда функциянинг ишораси қарама-қаршисига ўзгарса, яъни $f(-x) = -f(x)$ бўлса, $f(x)$ функцияни *тоқ функция* дейилади, акс ҳолда, яъни $f(-x) = f(x)$ бўлса, $f(x)$ *жуфт функция* дейилади.



289- расм.

289- расмда $\angle AOB$ мусбат, $\angle AOD$ эса манфий, $\angle AOB = \alpha$; $\angle AOD = -\alpha\ (\alpha > 0)$ бўлсин. $BC = -DC$. $\triangle BOC$ дан: $\frac{BC}{R} = \sin(+\alpha)$, $\frac{OC}{R} = \cos(+\alpha)$; $\triangle DOC$ дан: $\frac{DC}{R} = \sin(-\alpha)$; $\frac{OC}{R} = \cos(-\alpha)$.

Булардан: $\sin(-\alpha) = \frac{DC}{R} = -\frac{BC}{R} = -\sin\alpha$ ва $\cos(-\alpha) = \frac{OC}{R} = \cos\alpha$.

Демак, $\boxed{\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,}$ $\boxed{\cos(-\alpha) = \cos\alpha}$, яъни синус—*тоқ*, косинус—*жуфт функция*. Чиқарилганларга асосан:

$$\operatorname{tg}(-\alpha)=\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha; \qquad \boxed{\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha.}$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha)=\frac{1}{\operatorname{tg}(-\alpha)}=-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha; \qquad \boxed{\operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha.}$$

$$\sec(-\alpha)=\frac{1}{\cos(-\alpha)}=\frac{1}{\cos\alpha}=\sec\alpha; \qquad \boxed{\sec(-\alpha)=\sec\alpha.}$$

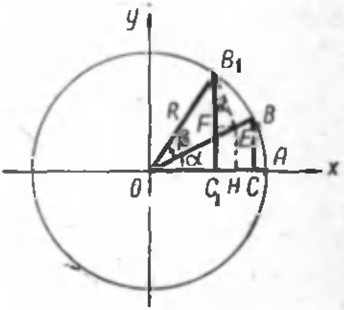
$$\csc(-\alpha)=\frac{1}{\sin(-\alpha)}=-\frac{1}{\sin\alpha}=-\csc\alpha; \qquad \boxed{\csc(-\alpha)=-\csc\alpha.}$$

Демак, секанс—жуфт; тангенс, котангенс, косекансlар эса тоқ функциялардир.

Мисоллар. 1) $\sin(-35°)=-\sin 35°$; 2) $\cos(-75°)=\cos 75°$; 3) $\sec(-17°)=\sec 17°$; 4) $\operatorname{ctg}(-26°)=-\operatorname{ctg} 26°$ ва ҳоказо.

7-§. ИККИ БУРЧАК ЙИҒИНДИСИ ВА АЙИРМАСИНИНГ ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАРИ

290- расмда $\angle BOC=\alpha$; $\angle BOB_1=\beta$ бўлсин. $\angle C_1OB_1=\alpha+\beta$ бўлади. Бу ҳолда B_1C_1 кесма $\alpha+\beta$ бурчакнинг синус чизиғи, OC_1 эса унинг косинус чизиғи. Демак, $\sin(\alpha+\beta)=\frac{B_1C_1}{R}$ ва $\cos(\alpha+\beta)=\frac{OC_1}{R}$. Энди $B_1E\perp OB$ ва $EF\perp B_1C_1$ ни тушириб, $\triangle EB_1F$ ни ҳосил қиламиз. $\angle EB_1F=\alpha$, чунки $B_1C_1\perp OC$ ва $B_1E\perp OB$ дир. $EH\perp OC$ ни тушириб, $\triangle EOH$ ни ҳосил қиламиз. $B_1C_1=B_1F+FC_1=B_1F+EH$; $\triangle EOH$, $\triangle B_1OE$ дан: $EH=OE\times\sin\alpha=R\cos\beta\sin\alpha$; $\triangle EB_1F$, $\triangle B_1OE$ дан: $B_1F=B_1E\cdot\cos\alpha=R\sin\beta\cos\alpha$. Буларга кўра: $B_1C_1=R(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$. Буни ўрнига қўйсак:



290- расм.

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{R(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)}{R} \text{ ёки}$$

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.}$$

Бу формула икки бурчак йиғиндиси синусини қўшилувчи бурчаклар синус ва косинуслари орқали ифода этади. Энди

$\cos(\alpha+\beta)=\frac{OC_1}{R}$ устида ҳам юқоридагидек ишлар қилингандан сўнг, $\cos(\alpha+\beta)$ учун қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.}$$

Бу формула икки бурчак йиғиндиси косинусини қўшилувчи бурчаклар синус ва косинуслари орқали ифода этади. Чиқарилган икки формулага асосланиб, қуйидаги формулаларни ҳосил қиламиз:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta},$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}.}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta},$$

$$\sec(\alpha+\beta)=\frac{1}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=$$

$$=\frac{\sec\alpha\sec\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1+\operatorname{tg}^2\beta)}}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$

$$\csc(\alpha+\beta)=\frac{1}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{1}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}=\frac{\frac{1}{\sin\alpha\cos\beta}}{1+\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=$$

$$\frac{\sec\beta\csc\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2\beta)(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)}}{1+\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}.$$

Шуларга асосан:

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin[\alpha+(\beta+\gamma)]=\sin\alpha\cos(\beta+\gamma)+\cos\alpha\cdot\sin(\beta+\gamma)=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cdot\cos\beta\sin\gamma.$$

Шунга ўхшаш:

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\cdot\sin\beta\cos\gamma-\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\gamma-\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma.$$

Мисоллар. 1) $\operatorname{tg}75^\circ=\operatorname{tg}(30^\circ+45^\circ)=\frac{\operatorname{tg}30^\circ+\operatorname{tg}45^\circ}{1-\operatorname{tg}30^\circ\operatorname{tg}45^\circ}$,

2) $\sin75^\circ=\sin(30^\circ+45^\circ)=\sin30^\circ\cos45^\circ+\cos30^\circ\sin45^\circ$.

3) $\sin\alpha = \frac{3}{4}$, $\cos\beta = -\frac{2}{3}$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2},\ 90° < \beta < 180°\right)$ берилган. $\sin(\alpha+\beta)$ ва $\cos(\alpha+\beta)$ топилсин.

Ечиш. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ ва $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4};\ \sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} =$$

$$= \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3};\ \sin(\alpha+\beta) = \frac{3}{4}\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{35}}{12};\ \cos(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} = -\frac{\sqrt{7}}{6} - \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

Энди формулалар чиқаришда тригонометрик функцияларнинг жуфт ва тоқлигидан фойдаланамиз: $\sin(\alpha-\beta) = \sin[\alpha+(-\beta)] = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$. Демак,

$\boxed{\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.}$ Бу формула икки бурчак айирмаси синусини шу бурчаклар синус ва косинуслари орқали ифода этади. $\cos(\alpha-\beta) = \cos[\alpha+(-\beta)] = \cos\alpha\cdot\cos(-\beta) - \sin\alpha\cdot\sin(-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$. Демак, $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$. Бу формула икки бурчак айирмаси косинусини шу бурчаклар синус ва косинуслари орқали ифодалайди:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \operatorname{tg}[\alpha+(-\beta)] = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(-\beta)}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}(-\beta)} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}.$$

Демак, $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$.

Шунга ўхшаш:

$$\sec(\alpha-\beta) = \frac{\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1+\operatorname{tg}^2\beta)}}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta};\ \csc(\alpha-\beta) =$$

$$= \frac{\sqrt{(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)(1+\operatorname{tg}^2\beta)}}{1-\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}.$$

Мисоллар. 1) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $\sin\beta = -\frac{3}{5}$ $(0 < \alpha < 90°$ ва $180° < \beta < 270°)$ берилган. $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$ топилсин.

Ечиш. $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ ва

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \frac{12}{13};$$

$$\cos\beta = -\sqrt{1-\sin^2\beta} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}.$$

Бу ҳолда

$$\sin(\alpha-\beta)=\frac{12}{13}\left(-\frac{4}{5}\right)-\frac{5}{13}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{48}{65}+\frac{3}{13}=-\frac{33}{65};$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{5}{13}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{12}{13}=-\frac{4}{13}-\frac{36}{65}=-\frac{56}{65}.$$

Бурчаклар сони иккитадан ортиқ бўлганда, чиқарилган формулалардан фойдаланиш мумкин. Бунинг учун бу формулаларни бир неча марта қўлланиш керак.

8-§. ИККИЛАНГАН БУРЧАКНИНГ ВА ЯРИМ БУРЧАКНИНГ ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАРИ

Юқорида чиқарилган: $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$: $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ ва $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$ формулаларда $\beta=\alpha$ деб фараз қилсак, у ҳолда: $\sin(\alpha+\alpha=$ $=\sin 2\alpha=\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$;

$$\cos(\alpha+\alpha)=\cos 2\alpha=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\alpha)=\operatorname{tg}2\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha}=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}2\alpha}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{2}\ \operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha);$$

$$\sec 2\alpha=\frac{1}{\cos 2\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha};\ \csc 2\alpha=\frac{1}{\sin 2\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}.$$

Демак,

$$\boxed{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha};\quad \boxed{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha};\quad \boxed{\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}};$$

$$\boxed{\sec 2\alpha=\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}\quad \text{ва}\quad \boxed{\csc 2\alpha=\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}}$$

формулалар ҳосил бўлади. Булар иккиланган бурчаклар тригонометрик функцияларини бурчакнинг ўзини тригонометрик функциялари орқали ифода этади. Шуларга ўхшаш:

$$\sin 3\alpha=\sin(\alpha+2\alpha)=\sin\alpha\cdot\cos 2\alpha+\cos\alpha\cdot\sin 2\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;$$

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha;$$

$$\operatorname{tg}3\alpha=\operatorname{tg}(\alpha+2\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}2\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha}=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$\operatorname{ctg}3\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^3\alpha-3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha-1}.$$

Энди $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ (*) формулани олиб, бунинг икки томонига $(+1)$ ни қўшамиз:

$$1+\cos 2\alpha=1+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha+(1-\sin^2\alpha,=2\cos^2\alpha.$$

Бундан: $\boxed{\cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}.}$

Энди (*) нинг икки томонини (+ 1) дан айирамиз:

$$1-\cos 2\alpha = 1-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha = 2\sin^2\alpha.$$

Бундан:

$$\boxed{\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}.}$$

Бу ҳолда:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}.}$$

Бу формулалар α бурчак тригонометрик функцияларини иккиланган 2α бурчак тригонометрик функциялари орқали ифода этади.

Чиқарилган бу формулаларнинг ҳар бирида α ни $\frac{\alpha}{2}$ билан алмаштирсак, у ҳолда:

$$\boxed{\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};}$$

$$\boxed{\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};} \qquad \boxed{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}};}$$

$$\boxed{\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2};} \qquad \boxed{\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}.}$$

Бу формулалар ярим бурчак тригонометрик функцияларини бутун бурчак тригонометрик функциялари орқали ифода этади.

Мисоллар. 1) $\cos\alpha = \frac{3}{4}$ $(0 < \alpha < 90°)$ берилган. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ топилсин.

Ечиш. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}}} = \frac{\sqrt{7}}{7}.$

2) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$ ва $\operatorname{tg}\beta = \frac{2}{3}$ берилган. $\operatorname{tg}(2\alpha-\beta)$ ва $\sec 2\alpha$ топилсин.

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{4}; \quad \operatorname{tg}(2\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\beta} =$$

$$= \frac{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}}{1+\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{1}{18}; \quad \sec 2\alpha = \frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1+\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{5}{4}.$$

Демак, $\operatorname{tg}(2\alpha-\beta)=\frac{1}{18}$; $\sec 2\alpha=\frac{5}{4}$.

Машқлар. 1) $\operatorname{tg}\alpha=-2$ берилган. $\sin 2\alpha$, $\operatorname{tg}2\alpha$, $\sec 2\alpha$ функциялар топилсин. 2) $\sec\frac{\alpha}{2}=4$ $(0^\circ<\alpha<90^\circ)$ берилган. $\operatorname{tg}\alpha$, $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}2\alpha$ функциялар топилсин. 3) $\sin\alpha=0{,}32$ $(90^\circ<\alpha<180^\circ)$ берилган. $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ функциялар топилсин.

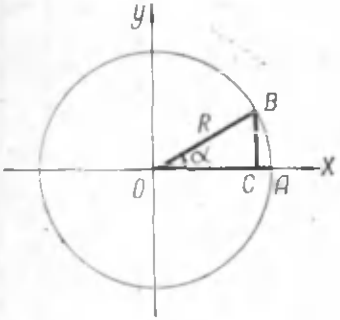
Тригонометрик функцияларни ярим аргумент тангенси билан ифодалаш.

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\quad \operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

9-§. БАЪЗИ БУРЧАКЛАР ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАРИНИНГ ҚИЙМАТЛАРИ

Радиуси R бўлган доирада OA қўзғалмас, OB—қўзғалувчи ралиус ва $\angle AOB=\alpha$ бўлсин (291-расм). $\triangle BOC$ да $\sin\alpha=\frac{BC}{R}$; $\cos\alpha=\frac{OC}{R}$. Маълум бурчаклар тригонометрик функцияларининг қийматларини топиш учун, юқорида кўриб ўтилган формулалар ва бир бурчакнинг тригонометрик функциялари орасидаги муносабатлардан ҳам фойдаланамиз. Агар,



291-расм.

1) $\alpha=0$ бўлса, у ҳолда: $BC=0$; $OC=OA=R$ бўлади. Демак,

$$\sin 0^\circ=\frac{BC}{R}=\frac{0}{R}=0;\quad \cos 0^\circ=\frac{OC}{R}=\frac{R}{R}=1;\quad \operatorname{tg}0^\circ=\frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ}=\frac{0}{1}=0;$$

$$\operatorname{ctg}0^\circ=\frac{1}{\operatorname{tg}0^\circ}=\frac{1}{0}=\infty^1;\quad \sec 0^\circ=1;$$

$$\csc 0^\circ=\infty.$$

---

[1] Нолдан фарқли сонни нолга жуда ҳам яқин сон (яъни нолга интиладиган сон) га нисбатини, чексиз катта ёки „чексизга тенг" дейилади ва $\frac{a}{0}=\infty$ $(a\neq 0)$ равишда ёзилади.

Шундай қилиб, бурчак 0° бўлганда.

$$\boxed{\begin{gathered}\sin 0^\circ = 0;\ \cos 0^\circ = 1;\ \operatorname{tg} 0^\circ = 0;\ \operatorname{ctg} 0^\circ = \infty;\\ \sec 0^\circ = 1;\ \csc 0^\circ = \infty.\end{gathered}}$$

2) $\alpha = 30^\circ$ бўлса, 30° ли бурчак қаршисидаги катет гипотенузанинг ярмига тенглиги геометриядан маълум, яъни $BC = \frac{OB}{2} = \frac{R}{2}$.

Демак,

$$\sin 30^\circ = \frac{BC}{R} = \frac{\frac{R}{2}}{R} = \frac{1}{2};\ \cos 30^\circ = \sqrt{1-\sin^2 30^\circ} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2};\ \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3};\ \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3};$$

$$\sec 30^\circ = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Шундай қилиб, бурчак 30° бўлганда,

$$\boxed{\begin{gathered}\sin 30^\circ = \frac{1}{2};\ \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3};\ \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3};\\ \sec 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3};\ \csc 30^\circ = 2.\end{gathered}}$$

3) $\alpha = 45^\circ$ бўлса, у ҳолда *BOC* тенг катетли учбурчак бўлади, бундан: $BC = OC$. Демак, $\sin 45^\circ = \frac{BC}{R}$ ва $\cos 45^\circ = \frac{OC}{R} = \frac{BC}{R}$. $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$. Буни $\cos 45^\circ$ га бўлсак, $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$ бўлади.

$\operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{1}{1} = 1.$ $\sec 45^\circ = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 45^\circ} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$

бундан, $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Демак, бурчак 45° бўлганда,

$$\boxed{\begin{gathered}\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};\\ \sec 45^\circ = \csc 45^\circ = \sqrt{2};\ \operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1.\end{gathered}}$$

Энди биз 60°, 90°, 180°, 270° ва 360° бурчаклар учун тригонометрик функциялар қийматини қуйидагидек йўллардан фойдаланиб топамиз:

$$4)\ \sin 60^\circ = \sin(2\cdot 30^\circ) = 2\sin 30^\circ \cos 30^\circ = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 60^\circ = \cos(2\cdot 30^\circ) = \cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3};\ \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\sec 60^\circ = \frac{1}{\cos 60^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2;\ \csc 60^\circ = \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Демак, бурчак 60° бўлганда,

$$\boxed{\begin{array}{c} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3};\ \sec 60^\circ = 2; \\ \cos 60^\circ = \frac{1}{2};\ \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3};\ \csc 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}. \end{array}}$$

$$5)\ \sin 90^\circ = \sin(2\cdot 45^\circ) = 2\sin 45^\circ\cdot\cos 45^\circ = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 1;$$

$$\cos 90^\circ = \cos(2\cdot 45^\circ) = \cos^2 45^\circ - \sin^2 45^\circ = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0;$$

$$\operatorname{tg} 90^\circ = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0} = \infty\text{[1]};\ \operatorname{ctg} 90^\circ = \frac{\cos 90^\circ}{\sin 90^\circ} = \frac{0}{1} = 0;$$

$$\sec 90^\circ = \frac{1}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0} = \infty;\ \csc 90^\circ = \frac{1}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{1} = 1.$$

Демак, бурчак 90° бўлганда,

$$\boxed{\begin{array}{lll} \sin 90^\circ = 1; & \operatorname{tg} 90^\circ = \infty; & \sec 90^\circ = \infty; \\ \cos 90^\circ = 0; & \operatorname{ctg} 90^\circ = 0; & \csc 90^\circ = 1. \end{array}}$$

Шунга ўхшаш:

$$6)\ \sin 180^\circ = \sin 2\cdot 90^\circ = 2\sin 90^\circ \cos 90^\circ = 0;$$

$$\cos 180^\circ = \cos^2 90^\circ - \sin^2 90^\circ = 0 - 1 = -1;$$

$$\operatorname{tg} 180^\circ = \frac{0}{-1} = 0;\ \operatorname{ctg} 180^\circ = \frac{-1}{0} = -\infty;$$

$$\sec 180^\circ = \frac{1}{-1} = -1;\ \csc 180^\circ = \frac{1}{0} = \infty.$$

---

[1] $\alpha \to \pm\frac{\pi}{2}$ да $\operatorname{tg}\alpha \to \pm\infty$ деб тушуниш керак, бошқалари ҳам шундай (мавжуд эмас деб тушуниш керак).

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin 180^\circ = 0;\ \cos 180^\circ = -1;\ \mathrm{tg}\, 180^\circ = 0;\ \mathrm{ctg}\, 180^\circ = -\infty;\\ \sec\ 180^\circ = -1;\ \csc\ 180^\circ = \infty.\end{array}}$$

7) $\sin 270^\circ = \sin(90^\circ + 180^\circ) = \sin 90^\circ \cos 180^\circ + \cos 90^\circ \sin 180^\circ =$
$= 1 \cdot (-1) + 0 = -1;$

$\cos 270^\circ = \cos(90^\circ + 180^\circ) = \cos 90^\circ \cos 180^\circ - \sin 90^\circ \sin 180^\circ =$
$= 0 - 0 = 0;$

$$\mathrm{tg}\, 270^\circ = \frac{-1}{0} = +\infty;\ \mathrm{ctg}\, 270^\circ = \frac{0}{-1} = 0;\ \sec 270^\circ = \frac{1}{0} = -\infty;$$

$$\csc 270^\circ = \frac{1}{-1} = -1.$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin 270^\circ = -1;\ \cos 270^\circ = 0;\ \mathrm{tg}\, 270^\circ = +\infty;\\ \mathrm{ctg}\, 270^\circ = 0;\ \sec 270^\circ = -\infty;\ \csc 270^\circ = -1.\end{array}}$$

8) $\sin 360^\circ = \sin 2 \cdot 180^\circ = 2 \cdot \sin 180^\circ \cos 180^\circ = 0;$

$\cos 360^\circ = \cos 2 \cdot 180^\circ = \cos^2 180 - \sin^2 180 = (-1)^2 - 0 = +1;$

$$\mathrm{tg}\, 360^\circ = \frac{0}{1} = 0;\ \mathrm{ctg}\, 360^\circ = \frac{1}{0} = -\infty;\ \sec\ 360^\circ = \frac{1}{1} = 1.$$

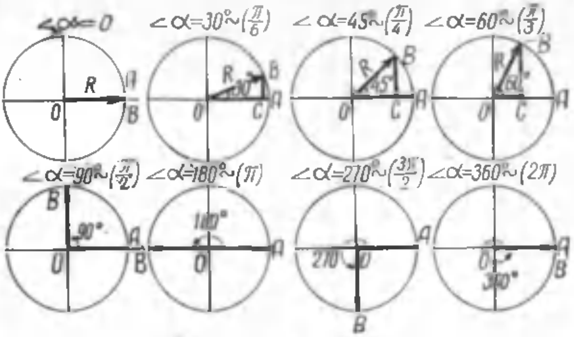
$$\csc\ 360^\circ = \frac{1}{0} = -\infty.$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\sin 360^\circ = 0;\ \cos 360^\circ = 1;\ \mathrm{tg}\, 360^\circ = 0;\\ \mathrm{ctg}\, 360^\circ = -\infty;\ \sec 360^\circ = 1;\ \csc 360^\circ = -\infty.\end{array}}$$

Юқорида ҳосил қилинган натижаларни қуйидаги жадвал шаклида ёзиш мумкин:

Бурчаклар / функциялар	0°	30° $\left(\frac{\pi}{6}\right)$	45° $\left(\frac{\pi}{4}\right)$	60° $\left(\frac{\pi}{3}\right)$	90° $\left(\frac{\pi}{2}\right)$	180° (π)	270° $\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	360° (2π)
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	$+\infty$	0
ctg	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\infty$	0	$-\infty$
sec	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-1	$-\infty$	1
csc	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	∞	-1	$-\infty$

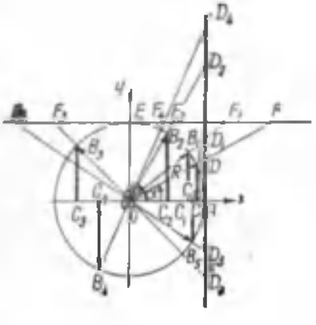
Бу 8 та бурчакни қуйидаги 292- расмдан яққол кўриш мумкин:



292- расм.

10- §. БУРЧАК 0° ДАН 360° ГАЧА ОРТГАНДА ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАРНИНГ УЗГАРИШИ

Биз 293- расмдан кўрамизки, α бурчак 0° дан 90° гача ортганда BC, AD ва OD лар ортиб, OC, OF ва EF лар камаяди. Демак, α бурчак 0° дан 90° гача ортганда $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ ва $\sec\alpha$ лар ортиб, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\cos\alpha$ ва $\csc\alpha$ лар камаяди. Шундай қилиб, бурчак 0° дан 90° гача ортганда: $\sin\alpha$ 0 дан $+1$ гача ортади; $\cos\alpha$ эса $+1$ дан 0 гача камаяди; $\operatorname{tg}\alpha$ 0 дан $+\infty$ гача ортади; $\operatorname{ctg}\alpha$ эса $+\infty$ дан 0 гача камаяди; $\sec\alpha$ $+1$ дан $+\infty$ гача ортади; $\csc\alpha$ эса $+\infty$ дан $+1$ гача камаяди. Худди шунга ўхшаш α бурчак 90° дан 180° гача, 180° дан 270° гача, 270° дан 360° гача ортганда ҳам тригонометрик функцияларнинг ўзгариши I чоракдагидек текширилади. Ёлғиз уларнинг ишораларига риоя қилиш керак ва битта чоракда ортганлари иккинчи бир чоракда камайиши мумкин, холос.



293- расм.

Натижада қуйидаги жадвал ҳосил бўлади:

∠ α функциялар номи	I чорак 0° дан 90°	II чорак 90° дан 180°	III чорак 180° дан 270°	IV чорак 270° дан 360°
sin	0 дан + 1	1 дан 0	0 дан — 1	— 1 дан 0
cos	+ 1 дан 0	0 дан — 1	— 1 дан 0	0 дан + 1
tg	0 дан + ∞	— ∞ дан 0	0 дан + ∞	— ∞ дан 0
ctg	+ ∞ дан 0	0 дан — ∞	∞ дан 0	0 дан — ∞
sec	1 дан + ∞	— ∞ дан — 1	— 1 дан — ∞	∞ дан 1
csc	∞ дан 1	1 дан ∞	— ∞ дан 1	— 1 дан — ∞

Тригонометрик функцияларнинг ўсиши ва камайиши

Биз 10- § га асосланиб қуйидаги хоссаларни ёза оламиз (293- расм).

1) $0 \leqslant \alpha \leqslant 90^\circ$ қийматларда
$\left\{\begin{array}{l} \sin\alpha \text{ — ўсувчи; } \cos\alpha \text{ — камаювчи;} \\ \operatorname{tg}\alpha \text{ — ўсувчи; } \operatorname{ctg}\alpha \text{ — камаювчи;} \\ \sec\alpha \text{ — ўсувчи; } \csc\alpha \text{ — камаювчи.} \end{array}\right.$

2) $90^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$ қийматларда
$\left\{\begin{array}{l} \sin\alpha \text{ — камаювчи; } \cos\alpha \text{ — ўсувчи;} \\ \operatorname{tg}\alpha \text{ — камаювчи; } \operatorname{ctg}\alpha \text{ — ўсувчи;} \\ \sec\alpha \text{ — камаювчи; } \csc\alpha \text{ — ўсувчи.} \end{array}\right.$

3) $180^\circ \leqslant \alpha \leqslant 270^\circ$ қийматларда
$\left\{\begin{array}{l} \sin\alpha \text{ — ўсувчи; } \cos\alpha \text{ — камаювчи;} \\ \operatorname{tg}\alpha \text{ — ўсувчи; } \operatorname{ctg}\alpha \text{ — камаювчи;} \\ \sec\alpha \text{ — ўсувчи; } \csc\alpha \text{ — камаювчи.} \end{array}\right.$

4) $270^\circ \leqslant \alpha \leqslant 360^\circ$ қийматларда
$\left\{\begin{array}{l} \sin\alpha \text{ — камаювчи; } \cos\alpha \text{ — ўсувчи;} \\ \operatorname{tg}\alpha \text{ — камаювчи; } \operatorname{ctg}\alpha \text{ — ўсувчи;} \\ \sec\alpha \text{ — камаювчи; } \csc\alpha \text{ — ўсувчи.} \end{array}\right.$

11-§. КЕЛТИРИШ ФОРМУЛАЛАРИ

Энди биз икки бурчак йиғиндиси, айирмаси ҳамда иккиланган бурчак тригонометрик функцияларининг формулалари ва асосий тригонометрик айниятлар ва баъзи бурчак тригонометрик функцияларининг сон қийматларидан фойдаланиб, қуйидаги йўллар билан келтириш формулалари деб аталган формулаларни чиқарамиз.

$$\sin(\beta \pm \alpha) = \sin\beta\cos\alpha \pm \cos\beta\sin\alpha;$$

$\cos(\beta \pm \alpha) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$ формулаларда:

1) $\beta = 90^\circ$ деб белгилаймиз, у ҳолда:

$$\sin(90^\circ \pm \alpha) = \sin 90^\circ \cos\alpha \pm \cos 90^\circ \sin\alpha = \\ = 1\cdot\cos\alpha \pm 0\cdot\sin\alpha = \cos\alpha.$$

Демак,

$$\boxed{\sin(90^\circ \pm \alpha) = \cos\alpha.}$$

$$\cos(90^\circ \pm \alpha) = \cos 90^\circ \cos\alpha \mp \sin 90^\circ \sin\alpha = 0 \mp 1\cdot\sin\alpha = \mp\sin\alpha.$$

Демак,

$$\boxed{\cos(90^\circ \pm \alpha) = \mp\sin\alpha.}$$

Энди бу икки формулага асосан,

$$\operatorname{tg}(90^\circ \pm \alpha) = \frac{\sin(90^\circ \pm \alpha)}{\cos(90^\circ \pm \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\mp\sin\alpha} = \mp\operatorname{ctg}\alpha.$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(90^\circ \pm \alpha) = \mp \operatorname{ctg}\alpha.}$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ \pm \alpha) = \frac{\cos(90^\circ \pm \alpha)}{\sin(90^\circ \pm \alpha)} = \mp \operatorname{tg}\alpha.$$

$$\boxed{\operatorname{ctg}(90^\circ \pm \alpha) = \mp \operatorname{tg}\alpha.}$$

$$\sec(90^\circ \pm \alpha) = \frac{1}{\cos^{\circ}(90^\circ \pm \alpha)} = \frac{1}{\mp \sin\alpha} = \mp \csc\alpha;$$

$$\boxed{\sec(90^\circ \pm \alpha) = \mp \csc\alpha.}$$

$$\csc(90^\circ \pm \alpha) = \frac{1}{\sin(90^\circ \pm \alpha)} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha.$$

$$\boxed{\csc(90^\circ \pm \alpha) = \sec\alpha.}$$

2) $\beta = 180^\circ$ деб белгилаймиз, у ҳолда:

$$\sin(180^\circ \pm \alpha) = \sin 180^\circ \cos\alpha \pm \cos 180^\circ \sin\alpha =$$
$$= 0 \pm \sin\alpha \cdot (-1) = \mp \sin\alpha.$$

Демак,

$$\boxed{\sin(180^\circ \pm \alpha) = \mp \sin\alpha.}$$

$$\cos(180^\circ \pm \alpha) = \cos 180^\circ \cos\alpha \mp \sin 180^\circ \sin\alpha = -\cos\alpha.$$

$$\boxed{\cos(180^\circ \pm \alpha) = -\cos\alpha.}$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ \pm \alpha) = \frac{\sin(180^\circ \pm \alpha)}{\cos(180^\circ \pm \alpha)} = \frac{\mp \sin\alpha}{-\cos\alpha} = \pm \operatorname{tg}\alpha.$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(180^\circ \pm \alpha) = \pm \operatorname{tg}\alpha.}$$

Шунга ўхшаш:

$$\boxed{\operatorname{ctg}(180^\circ \pm \alpha) = \pm \operatorname{ctg}\alpha.}$$

$$\boxed{\sec(180^\circ \pm \alpha) = -\sec\alpha \text{ ва } \csc(180^\circ \pm \alpha) = \mp \csc\alpha.}$$

3) $\beta = 270^\circ$ деб белгилаймиз, у ҳолда:

$$\sin(270^\circ \pm \alpha) = \sin 270^\circ \cos\alpha \pm \sin\alpha \cos 270^\circ =$$
$$= -1 \cdot \cos\alpha \pm 0 = -\cos\alpha.$$

$$\boxed{\sin(270^\circ \pm \alpha) = -\cos\alpha.}$$

$$\cos(270^\circ \pm \alpha) = \cos 270^\circ \cos\alpha \mp \sin 270 \sin\alpha =$$
$$= 0 \mp (-1)\sin\alpha = \pm\sin\alpha;$$

$$\boxed{\begin{gathered}\cos(270^\circ - \alpha) = -\sin\alpha.\\ \cos(270^\circ + \alpha) = \sin\alpha.\end{gathered}}$$

$$\operatorname{tg}(270^\circ \pm \alpha) = \frac{\sin(270^\circ \pm \alpha)}{\cos(270^\circ \pm \alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{\pm\sin\alpha} = \mp\operatorname{ctg}\alpha;$$

$$\boxed{\begin{gathered}\operatorname{tg}(270^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha.\\ \operatorname{tg}(270^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.\end{gathered}}$$

Шунга ўхшаш:

$$\operatorname{ctg}(270^\circ \pm \alpha) = \frac{1}{\mp\operatorname{ctg}\alpha} = \mp\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\boxed{\operatorname{ctg}(270^\circ \pm \alpha) = \mp\operatorname{tg}\alpha.}$$

$$\sec(270^\circ \pm \alpha) = \frac{1}{\cos(270^\circ \pm \alpha)} = \frac{1}{\pm\sin\alpha} = \pm\csc\alpha;$$

$$\boxed{\sec(270^\circ \pm \alpha) = \pm\csc\alpha.}$$

Шунга ўхшаш:

$$\csc(270^\circ \pm \alpha) = \frac{1}{-\cos\alpha} = -\sec\alpha;$$

$$\boxed{\csc(270^\circ \pm \alpha) = -\sec\alpha.}$$

4) $\beta = 360^\circ$ деб белгилаймиз, у ҳолда:

$$\sin(360^\circ \pm \alpha) = \sin 360^\circ \cos\alpha \pm \sin\alpha \cos 360^\circ = 0 \pm \sin\alpha \cdot 1 =$$
$$= \pm\sin\alpha;$$

$$\boxed{\begin{gathered}\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin\alpha.\\ \sin(360^\circ + \alpha) = \sin\alpha.\end{gathered}}$$

$$\cos(360^\circ \pm \alpha) = \cos 360^\circ \cos\alpha \mp \sin 360^\circ \sin\alpha = 1 \cdot \cos\alpha \mp 0 = \cos\alpha;$$

$$\boxed{\cos(360^\circ \pm \alpha) = \cos\alpha.}$$

$$\operatorname{tg}(360^\circ \pm \alpha) = \frac{\pm \sin \alpha}{\cos \alpha} = \pm \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(360^\circ \pm \alpha) = \pm \operatorname{tg} \alpha.}$$

Шунга ўхшаш:

$$\boxed{\operatorname{ctg}(360^\circ \pm \alpha) = \pm \operatorname{ctg} \alpha.}$$

$$\sec(360^\circ \pm \alpha) = \frac{1}{\cos(360^\circ \pm \alpha)} = \frac{1}{\cos \alpha} = \sec \alpha;$$

$$\boxed{\sec(360^\circ \pm \alpha) = \sec \alpha.}$$

Шунга ўхшаш:

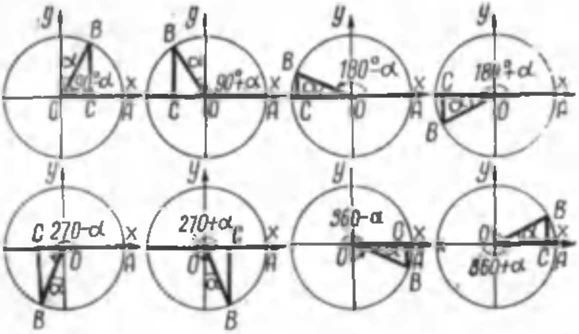
$$\boxed{\csc(360^\circ \pm \alpha) = \pm \csc \alpha.}$$

Юқорида ҳосил қилинган натижаларни қуйидаги жадвал шаклида ёзамиз:

Бурчаклар Функциялар	$90^\circ - \alpha$ $\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right)$	$90^\circ + \alpha$ $\frac{\pi}{2} + \alpha$	$180^\circ - \alpha$ $(\pi - \alpha)$	$180 + \alpha$ $(\pi + \alpha)$	$270^\circ - \alpha$ $\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$	$270^\circ + \alpha$ $\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$360^\circ - \alpha$ $(2\pi - \alpha)$	$360^\circ + \alpha$ $(2\pi + \alpha)$
sin	cos α	cos α	sin α	—sin α	—cos α	—cos α	—sin α	sin α
cos	sin α	—sin α	—cos α	—cos α	—sin α	sin α	cos α	cos α
tg	ctg α	—ctg α	—tg α	tg α	ctg α	—ctg α	—tg α	tg α
ctg	tg α	—tg α	—ctg α	ctg α	tg α	—tg α	—ctg α	ctg α
sec	csc α	—csc α	—sec α	—sec α	—csc α	csc α	sec α	sec α
csc	sec α	sec α	+csc α	—csc α	—sec α	—sec α	—csc α	csc α

Бу 8 та бурчакни 294- расмдан яққол кўриш мумкин.

Қоида. Агар α бурчак горизонтал диаметрдан бошлаб ҳисобланадиган бўлса ($\pm \alpha$; $\pi \pm \alpha$; $2\pi \pm \alpha$ бурчакларга тегишли формулалар), тенгликнинг икки томонидаги функциялар бир хил исмда бўлади; агар α бурчак вертикал диаметрдан бошлаб ҳисобланадиган бўлса $\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha;\ \frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right.$ бурчакларга доир формулалар), тенгликнинг икки томонидаги функциялар бир-бирига ўхшаш исмда (синус ва косинус; тангенс ва котангенс ва ҳ. к.) бўлади. Ўнг томондаги тригонометрик функциянинг қандай ишора билан олинишини аниқлаш учун α бурчакни ўткир бурчак ҳисоблаб, изланувчи ишора чап томондаги ишорага қараб аниқланади.



294- расм.

12- §. ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАР ҚУПАЙТМАСИНИ ЙИҒИНДИ ЁКИ АЙИРМА ШАКЛИГА КЕЛТИРИШ ФОРМУЛАЛАРИ

Бу формулалар қуйидаги йўллар билан чиқарилади:

1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

экани бизга маълум. Бу тенгликларни ҳадлаб қўшиб, натижани 2 га бўламиз, бу ҳолда ушбу формула ҳосил бўлади:

$$\boxed{\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)].}$$

2) Энди шунга ўхшаш йўл билан давом этамиз.

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

тенгликларни қўшиб, 2 га бўлсак:

$$\boxed{\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)];}$$

иккинчисидан биринчисини айириб, 2 га бўлсак:

$$\boxed{\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]}$$

формула ҳосил бўлади.

Мисоллар.

$$1)\ \sin 25^\circ \cos 5^\circ = \frac{1}{2}[\sin(25^\circ + 5^\circ) + \sin(25^\circ - 5^\circ)] =$$

$$= \frac{1}{2}(\sin 30^\circ + \sin 20^\circ) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \sin 20^\circ\right);$$

$$2)\ \sin 15^\circ \sin 75^\circ = \frac{1}{2}[\cos(15^\circ - 75^\circ) - \cos(15^\circ + 75^\circ] =$$

$$= \frac{1}{2}[\cos(-60^\circ) - \cos 90^\circ] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{1}{4}.$$

Машқлар. Қуйидаги кўпайтмалар ҳисоблансин:

1) $\cos 43^\circ \cdot \cos 47^\circ$.
2) $\cos 135^\circ \cdot \cos 85^\circ$.
3) $\sin 72^\circ \cdot \sin 18^\circ$.
4) $\cos 35^\circ \cdot \cos 75^\circ$.
5) $\sin 82^\circ \cdot \sin 8^\circ$.
6) $\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$.
7) $\sin\frac{\pi}{10} \cdot \cos\frac{\pi}{8}$.
8) $\sin 5\alpha \cdot \sin 3\alpha$.
9) $\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos\alpha$.
10) $4\cos 8^\circ \cdot \cos 10^\circ \cdot \cos 6^\circ$.
11) $2\sin 40^\circ \cdot \cos 10^\circ \cdot \cos 8^\circ$.
11) $4\cos\alpha \cdot \cos 3\alpha \cdot \cos 4\alpha$.

13- §. ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАР ЙИҒИНДИСИ ВА АЙИРМАСИНИ КУПАЙТМА ВА БУЛИНМА ШАКЛИГА КЕЛТИРИШ ФОРМУЛАЛАРИ

Бу формулаларни қуйидагидек йўллар билан чиқарилади:

1) $\sin\alpha \pm \sin\beta$ ни кўпайтма шаклига келтирамиз. Бунинг учун $\alpha = x + y$ ва $\beta = x - y$ деб белгилаймиз.

$$\sin\alpha + \sin\beta = \sin(x + y) + \sin(x - y) =$$

$$= \sin x \cos y + \cos x \sin y + \sin x \cos y - \cos x \sin y = 2\sin x \cos y.$$

Аммо,

$$+\begin{array}{l} \alpha = x + y \\ \underline{\beta = x - y} \\ \alpha + \beta = 2x \end{array} \quad x = \frac{\alpha + \beta}{2};\ y = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Буларни ўрнига қўйсак:

$$\boxed{\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}.}$$

Шунга ўхшаш:

$$\boxed{\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2}.}$$

2) $\cos\alpha + \cos\beta = \cos(x + y) + \cos(x - y) = \cos x \cos y -$
$- \sin x \sin y + \cos x \cos y + \sin x \sin y = 2\cos x \cos y = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2};$

$$\boxed{\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}.}$$

Шунга ўхшаш:

$$\boxed{\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}.}$$

Изоҳ. Бу формулаларни 12- § да чиқарилган формулалардан фойдаланиб чиқариш ҳам мумкин.

3) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.}$$

Шунга ўхшаш:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.}$$

$$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}}$$

ва

$$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}}$$

бўлади.

4) $\sin\alpha + \cos\beta = \sin\alpha + \sin(90^\circ - \beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2} + 45^\circ\right)\times$ $\times\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - 45^\circ\right)$. Агар $\beta = \alpha$ бўлса, у ҳолда:

$$\boxed{\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\cdot\cos(\alpha - 45^\circ)}$$

бўлади.

5) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(90^\circ - \beta) = \frac{\sin[90^\circ + (\alpha-\beta)]}{\cos\alpha\cos(90^\circ - \beta)} =$

$$= \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}.$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}.}$$

Агар $\beta = \alpha$ бўлса, у ҳолда:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos(\alpha-\alpha)}{\cos\alpha\sin\alpha} = \frac{2\cos 0}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha} = 2\csc 2\alpha$$

бўлади.

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 2\csc 2\alpha.}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{-\sin\beta\cos\alpha}.}$$

Агар, $\beta = \alpha$ бўлса, у ҳолда:

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = \frac{2\cos 2\alpha}{-2\sin\alpha\cos\alpha} = -2\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = -2\operatorname{ctg} 2\alpha.$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)};\ \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta} = \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta;$$

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{2};\ \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha - \cos\beta} = -\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}$. Бу формулаларнинг тўғрилигини текшириб кўриб ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Мисоллар. 1) $\cos 48° - \cos 12° = +2\sin\frac{48°+12°}{2}\cdot$ $\cdot\sin\frac{12°-48°}{2} = -2\sin 30°\cdot\sin 18° = -2\cdot\frac{1}{2}\sin 18° = -\sin 18°.$

2) $$\frac{\sin 40° + \sin 50°}{\cos 40° + \cos 50°} = \frac{2\sin\frac{40°+50°}{2}\cos\frac{40°-50°}{2}}{2\cos\frac{40°+50°}{2}\cos\frac{40°-50°}{2}} = \frac{\sin 45°}{\cos 45°} = 1.$$

Машқлар. Қуйидагилар соддалаштирилсин:

1) $\sin 36° - \sin 54°.$

2) $\cos 28° + \cos 152°.$

3) $\frac{\operatorname{tg} 25° + \operatorname{tg} 20°}{\operatorname{tg} 25° - \operatorname{tg} 20°}.$

4) $\frac{\sin 87° + \cos 57°}{\cos 51° - \cos 39°}.$

5) $\operatorname{tg} 76° \pm \operatorname{tg} 31°.$

6) $\operatorname{ctg} 72° + \operatorname{tg} 48°.$

Қуйидаги тенгликлар исботлансин:

1) $\cos 24° + \cos 48° - \cos 84° - \cos 12° = \frac{1}{2}.$

2) $\sin 47° + \sin 61° - \sin 11° - \sin 25° = \cos 7°.$

3) $\frac{\sin 14° + \sin 28° - \sin 42°}{\sin 42° + \sin 14° - \sin 56°} = \frac{1}{2\cos 14°}.$

4) $4\sin^2\alpha - 3 = 4\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right).$

14-§. ИСТАЛГАН КАТТАЛИКДАГИ БУРЧАК ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯСИНИ ЎТКИР БУРЧАК ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯСИГА КЕЛТИРИШ

Исталган катталикдаги бурчак тригонометрик функциясини ўткир бурчак тригонометрик функциясига келтириш масаласини конкрет мисолларда ойдинлаштирамиз. (Асосан, бундай мисолларни ечишда тригонометрик функцияларнинг жуфт ва тоқлигидан, даврийлигидан ва келтириш формулаларидан фойдаланилади.)

1) $\sin(-1897°11')$ ўткир бурчак тригонометрик функциясига келтирилсин.

Ечиш. $\sin(-1897°11') = -\sin 1897°11' = -\sin(97°11' + 5\cdot 360°) = -\sin 97°11' = -\sin(90° + 7°11') = -\cos 7°11'$.

2) $\cos(-2778°)$ ўткир бурчак тригонометрик функциясига келтирилсин.

Ечиш. $\cos(-2778°) = \cos 2778° = \cos(258° + 7\cdot 360°) = \cos 258° = \cos(270° - 12°) = -\sin 12°$.

3) $\mathrm{tg}(789°6'15'')$ ўткир бурчак тригонометрик функциясига келтирилсин.

Ечиш. $\mathrm{tg}(789°\,6'15'') = \mathrm{tg}(69°6'15'' + 4\cdot 180°) = \mathrm{tg}\,69°6'15''$.

4) $\sec(-968°19')$ ни 45° дан кичик бурчак тригонометрик функциясига келтирилсин.

Ечиш. $\sec(-968°19') = \sec 968°19' = \sec(248°19' + 2\cdot 360°) = \sec 248°19' = \sec(270° - 21°41') = -\csc 21°41'$.

Машқлар. Қуйидаги тригонометрик функциялар ўткир бурчак тригонометрик функциясига келтирилсин:

1) $\cos(-1709°20')$; 2) $\sin(-2097°18')$; 3) $\mathrm{tg}(1807°56')$;

4) $\csc(999°\,9'9'')$; 5) $\mathrm{ctg}(-7895°12'\,19'')$; 6) $\sin\left(-\frac{846}{5}\pi\right)$;

7) $\mathrm{tg}\left(\frac{198}{9}\pi\right)$; 8) $\cos\left(\frac{988}{5}\pi\right)$.

15- §. ТРИГОНОМЕТРИК ЖАДВАЛЛАР

Амалий ҳисоблаш ишларида тригонометрик функцияларнинг тақрибий қийматлари жадвалидан ва уларнинг логарифмларидан фойдаланилади. Бунинг учун В. М. Брадиснинг тўрт хонали математик жадвали етарлидир. Брадис китобининг VIII жадвалида синус ва косинусларнинг 0 дан 90° гача бурчаклар учун ҳар 6′ дан кейин тўртта каср хона билан тақрибий қийматлари берилган. Аммо: $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$; $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$ бўлгани учун синус ва косинусларнинг қийматларини ҳисоблашда VIII жадвалнинг ўзигина етарлидир.

Брадис жадвалида (VIII) синус аргументининг қийматлари юқоридан пастга, косинус аргументининг қийматлари пастдан юқорига қараб жойлаштирилган. Бурчакни бутун сон градуси „A“ устун таги ёки устидан каср градуси (минутлар) юқориги ёки пастки сатрдан топилади. VIII жадвалнинг ўнг четидаги (1′, 2′, 3′) устунлардан тузатмалар олинади. Энди VIII жадвалдан парча келтирамиз:

VIII. СИНУСЛАР

A	0	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	60′		1′ 2′ 3
0°	0,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0,0175	89°	3 6 9
1°	0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	88°	3 6 9
2°	0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	0523	87°	3 6 9
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
19°	3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	0,3420	70°	3 5 8
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
88°	9994	9995	9995	9996	9996	9997	9997	9997	9998	9998	0,9998	1°	0 0 0
89°	0,9998	9999	9999	9999	9999	0000	0000	0000	0000	0000	1,0000	0°	0 0 0
90°	1,0000												
	60′	54′	48′	42′	36′	30′	24′	18′	12′	6′	0′	A	1′2′3′

КОСИНУСЛАР

Мисоллар. 1) sin 19°18′ ни топинг. Бунинг учун 19° ни чап четидаги „А“ устун тагидан топиб, 18′ ни юқоридан топиб, улар турган йўл ва устуннинг кесишган жойидан 3305 сон олинади, яъни sin 19°18′ = 0,3305 бўлади.

2) cos 70°30′ ни топинг. Жадвалнинг ўнг четидаги „А“ устунда пастдан юқорига юриб 70° ни, пастки сатрдан 30′ ни топиб, уларнинг кесишган жойидан 3338 сонни оламиз, яъни cos 70° 30′ = 0, 3338 бўлади.

3) sin 19°20′ ни топинг. Бунинг учун олдин sin 19°18′ = 0,3305 ни топамиз (sin 19°20′ > sin 19°18′ дан); энди тузатмадан 2′ га тўғри келган 5 ни топиб қўшамиз, яъни sin 19°20′ = = 0,3305 + 0,0005 = 0,3310 бўлади.

4) cos 70°32′ ни топинг. Олдин cos 70°30′ = 0, 3338, кейин 2′ га тўғри келган 5 тузатмани топиб айирамиз, чунки cos 70°32′ < cos 70°30′. cos 70°32′ = 0,3338 — 0,0005 = 0,3333 бўлади.

В. М. Брадиснинг IX ва X жадваллари бўйича тангенс ва котангенсларнинг қийматлари топилади. Масалан, IX жадвалда тангенснинг қиймати 0° дан 76° гача ҳар 6′ дан кейин берилган. X жадвалда эса тангенснинг 76° дан 89° гача қийматлари ҳар 1′ дан кейин берилган. (IX ва X жадваллардан фойдаланиш ҳам VIII жадвалдан фойдаланиш каби ижро этилади ва тузатмалар устидаги гап ҳам айнан синус ва косинусларники каби бўлади.)

Тригонометрик функцияларнинг қийматлари берилганда, бурчакни топиш яна шу жадвал бўйича ижро этилади. Масалан, sin α = 0,0384 берилган. α топилсин.

Ечиш. VIII жадвалдан 0384 ни топиб, ундан чапга қараб юриб „А“ нинг тагидан 2° ва юқоридан 12′ ни топамиз, яъни $\alpha = 2°12'$ бўлади.

В. М. Брадиснинг III — VII жадвалларида тригонометрик функция логарифмлари аргументнинг 0° дан 90° ораликдаги қийматлари учун тўрт каср хонаси билан берилган. Биринчи чоракда: $\lg\sin\alpha$ ва $\lg\operatorname{tg}\alpha$ лар ортади; $\lg\cos\alpha$ ва $\lg\operatorname{ctg}\alpha$ лар камаяди, чунки биринчи чоракда $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ ўсувчи функциялар бўлиб, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ эса камаювчи функциялардир. III — VII жадвалларнинг тузилиши ва улардан фойдаланиш худди VIII жадвалдагидек бўлади.

Мисоллар. 1) $\lg\sin 32°16'$ ни топинг. Буни IV жадвалдан топамиз: „A“ нинг тагидан 32° ни топиб, юқоридан 18′ ни топиб, уларнинг кесишган жойидан $\bar{1},7278$ ни оламиз; сўнгра ортиқча 2′ га тузатмадан 4 сонни топиб айирамиз, $\bar{1},7278 - 0,0004 = \bar{1},7274$. Демак, $\lg\sin 32°16' = \bar{1},\ 7274$ бўлади.

2) $\lg\operatorname{ctg} 47°12'$ ни топинг. Буни VI жадвалдан топамиз. Пастдаги „A“ нинг устидан 47°ни топиб ва пастдаги йўлдан 12′ ни топиб уларнинг кесишган жойидан $\bar{1},9666$ ни оламиз, яъни: $\lg\operatorname{ctg} 47°12' = \bar{1},9666$.

3) $\lg\cos\alpha = \bar{1},9772$; IV жадвалдан топамиз. 9772 ни топиб, ундан ўнг томондаги „A“ нинг устидан 18° ни, пастдан 24′ ни оламиз, яъни $\alpha = 18°24'$.

16- §. ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАРНИНГ БЕРИЛГАН ҚИЙМАТИ БЎЙИЧА БУРЧАК ЯСАШ

Маркази координаталар бошида ва радиуси R бўлган доира берилган.

1- мисол. Синуси K сонга тенг бўлган бурчак ясалсин, бунда K ($K > 0$) берилган сон.

Ечиш. Ордината ўқида $M\ (0; K)$, $N\ (0; -K)$ нуқтани олиб, у нуқталардан абсцисса ўқига параллел EF ва E_1F_1 тўғри чизиқларни ўтказамиз (295- расм). Бунда қуйидаги уч ҳолни учратиш мумкин:

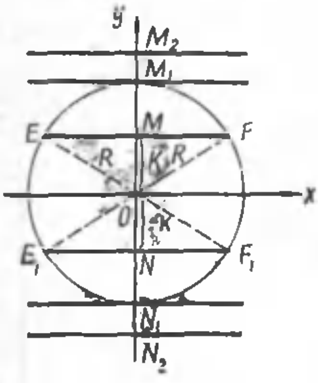
1) $-R < K < R$ бўлсин, бу ҳолда $M\ (0; K)$ нуқта доира ичида ётади. $EF \parallel OX$; F нуқта ўнг ярим текисликда, E нуқта эса чап ярим текисликда ётади. $OF = OE = R$ ни чизамиз. Бу ҳолда MF кесма изланаётган бурчакнинг бошланғич томони, $OF = R$ эса сўнгги томонини белгилайди, яъни изланган бурчак OFM дир. Худди шунга ўхшаш: $\angle OEM = \angle OE_1N = \angle OF_1N$ лар ҳам изланаётган бурчакка тенг.

2) $K = \pm R$ бўлсин, бу ҳолда $K = R$ учун изланаётган бурчакнинг сўнгги томони $OM_1 = R$ ва $K = -R$ учун эса ON_1 бўлади. Натижада $K = R$ бўлганда, $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ ва $K = -R$ бўлганда, $\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ бурчаклар ҳосил бўлади (n — ихтиёрий бутун сон).

8) $|K| > R$ бўлсин, бу ҳолда масаланинг ечими йўқ, чунки синуси бундай K сонга тенг бўлган бурчак мавжуд эмас.

2- мисол. Тангенси K сонга тенг бўлган бурчак ясалсин, бунда K — берилган ҳар қандай ҳақиқий сон.

Тангенс чизиғида $D(R; K)$ нуқтани оламиз (296- расм). Энди $D(R, K)$ нуқтани координаталар боши O билан туташтирсак, у ҳолда OD кесма изланаётган бурчакнинг сўнгги томони бўлади, яъни $\angle AOD$ изланаётган бурчак (296- расм).



295- расм.

Изоҳ. Косинус ва котангенслар берилганда бурчакни ясаш худди синус ва тангенслардагидек йўллар билан бажарилади.

3- мисол. $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ ёки $\alpha = \arcsin\frac{2}{3}$ берилган; $\angle\alpha$ ясалсин.

4- мисол. $\operatorname{tg}\alpha = -1{,}5$ ёки $\alpha = \operatorname{arctg}(-1,5)$ берилган; $\angle\alpha$ ясалсин.

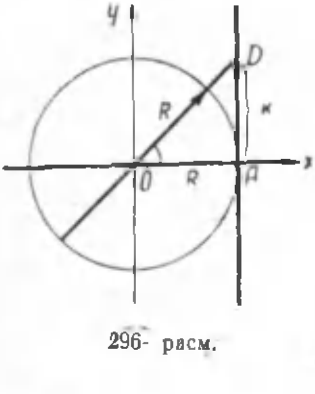
Бу икки мисолнинг ечилиши 297- расмда кўрсатилгандек бўлади.

Машқлар. $\sin\alpha = \frac{3}{4}$ ёки $\alpha = \arcsin\frac{3}{4}$;

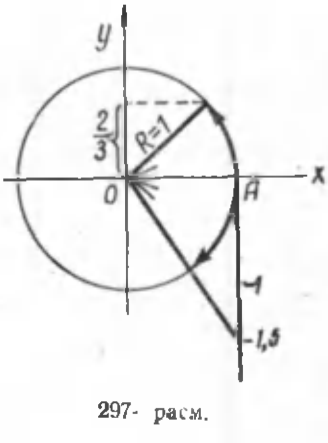
$\cos\alpha = 0{,}4$ ёки $\alpha = \arccos 0{,}4$;

$\operatorname{tg}\alpha = \pm 3$ ёки $\alpha = \operatorname{arctg}(\pm 3)$

лар берилган; $\angle\alpha$ ясалсин.



296- расм.



297- расм.

17- §. СОН АРГУМЕНТНИНГ ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАРИ ВА УЛАРНИНГ АНИҚЛАНИШ СОҲАЛАРИ

Тригонометрик функцияларнинг аргументлари бурчак (ёй) дангина эмас, балки шу бурчакларни ифодаловчи сонлардан иборат бўлиши ҳам мумкин. Бунда бурчакларни ва ёйларни радиан билан ўлчаш қабул қилинган. Масалан, $\sin 32$ ифода, 32 радианга тенг бўлган бурчакнинг синуси демакдир.

Биз алгебрада (18- §) функциянинг борлиқ (аниқланиш) соҳасининг таърифини бериб ўтган эдик. Бу таъриф тригонометрик функциялар учун ҳам ўз кучини сақлайди.

1) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ларнинг аниқланиш соҳаси барча ҳақиқий сонлар тўпламидан иборатдир (яъни $\alpha = 0$; $\pm\frac{\pi}{5}$; $\pm\frac{\pi}{7}$; $\pm\pi$ ва ҳоказо сонлар бўла олади).

2) $\operatorname{tg}\alpha$ нинг аниқланиш соҳаси $\frac{\pi}{2} + n\pi$ (n — бутун сон) дан бошқа барча ҳақиқий сонлар тўпламидан иборатдир (яъни $\frac{\pi}{2} + n\pi$ радианга тенг бўлган бурчакларнинг тангенси йўқ).

3) $\operatorname{ctg}\alpha$ нинг аниқланиш соҳаси $n\pi$ дан бошқа ҳамма ҳақиқий сонлар тўпламидан иборатдир (яъни $n\pi$ радианга тенг бўлган бурчакларнинг котангенси йўқ).

18- §. ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ЧЕКЛАНГАНЛИГИ ВА ЧЕКЛАНМАСЛИГИ

Олдин биз функциянинг чекланган ва чекланмаганлик таърифлари билан танишган эдик.

Олдинда кўрилган хоссаларга асосан $\sin\alpha$ ва $\cos\alpha$ функциялар чекланган, чунки $|\sin\alpha| \leqslant 1$ ва $|\cos\alpha| \leqslant 1$ дир. $\operatorname{tg}\alpha$ ва $\operatorname{ctg}\alpha$ функциялар чекланмаган, чунки $|\operatorname{tg}\alpha| \leqslant \infty$; $|\operatorname{ctg}\alpha| \leqslant \infty$ дир.

Тўғри ва тескари тригонометрик функциялар даврий функциялардир; уларнинг қуйида чизилган графикларидан биз яққол кўрамизки, даврий функцияларнинг хоссаларини ўрганиш учун уларнинг хоссаларини давр узунлигига тенг бўлган бирор ораликда ўрганиш кифоя.

19- §. ТРИГОНОМЕТРИК ВА ТЕСКАРИ ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАР, УЛАРНИНГ ГРАФИКЛАРИ

а) Тригонометрик функцияларнинг графиклари

Китобнинг алгебра қисмида функцияларнинг графигини жадвал тузиб, нуқталар ёрдамида чизишни кўриб ўтган эдик. Бу ерда ҳам ўша йўллар ва юқорида кўрилган хоссалардан фойдаланиб, тригонометрик функцияларнинг графикларини чизамиз:

1. $y = \sin x$ функциянинг графиги чизилсин (x — аргумент, y — функция).

Чизиш. Дастлаб жадвал тузиб, бир қанча нуқталарни аниқлаймиз:

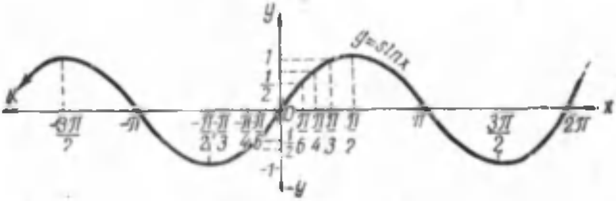
x	0	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{4}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{2}$	$\pm\pi$	$\pm\frac{3\pi}{2}$	$\pm 2\pi +$
y	0	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$	± 1	0	∓ 1	0...

Энди тўғри бурчакли координаталар системасини олиб, унда:

$$(0;0),\ \left(\pm\frac{\pi}{6};\ \pm\frac{1}{2}\right),\ \left(\pm\frac{\pi}{4};\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(\pm\frac{\pi}{3};\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(\pm\frac{\pi}{2};\ \pm 1\right),$$

$$(\pm\pi;0),\ \left(\pm\frac{3\pi}{2};\ 1\right),\ (\pm 2\pi;0),\ \ldots$$

нуқталарнинг ўрнини аниқлаб, улар бирлаштирилса эгри чизиқ ҳосил бўлади; бу эгри чизиқ $y = \sin x$ нинг графиги ёки *синусоида* дейилади (298- расм).



298- расм.

Қолган тригонометрик функцияларнинг графиги худди синусники каби йўл билан чизилади.

2. $y = \cos x$ нинг графиги чизилсин.

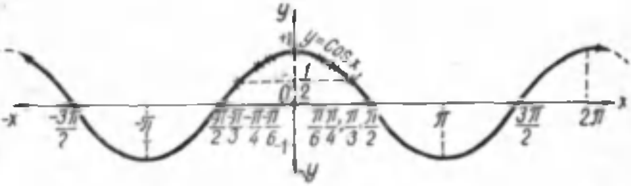
Чизиш. Дастлаб жадвал тузиб, бир қанча нуқталарни аниқлаймиз:

x	0	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{4}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{2}$	$\pm\pi$	$\pm\frac{3\pi}{2}$	$\pm 2\pi$
y	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

$$(0;\ 1),\ \left(\pm\frac{\pi}{6};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(\pm\frac{\pi}{4};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(\pm\frac{\pi}{3};\ \frac{1}{2}\right),\left(\pm\frac{\pi}{2};\ 0\right);$$

$$(\pm\pi;\ -1),\ \left(\pm\frac{3\pi}{2};\ 0\right),\ (\pm 2\pi;\ 1),\ \ldots.$$

Бу топилган нуқталарга асосан $y = \cos x$ нинг графиги 299-расмдагидек бўлади.



299- расм.

3. $y = \operatorname{tg} x$ нинг графиги чизилсин (тангенсоида).

Чизиш. Дастлаб жадвал тузиб, бир қанча нуқталарни аниқлаймиз:

x	0	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{4}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{2}$	$\pm\pi$	$\pm\frac{3\pi}{2}$	$\pm 2\pi$
y	0	$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$	± 1	$\pm\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0

$$(0;\ 0),\ \left(\pm\frac{\pi}{6};\ \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\left(\pm\frac{\pi}{4};\ \pm 1\right),\left(\pm\frac{\pi}{3};\ \pm\sqrt{3}\right),\left(\pm\frac{\pi}{2};\ \pm\infty\right),$$

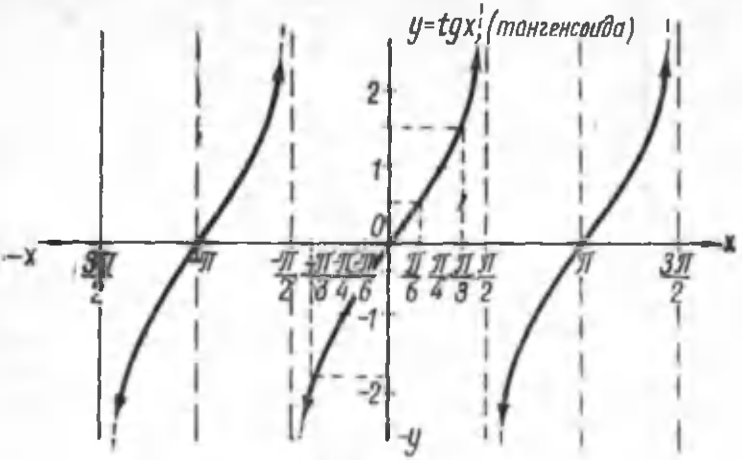
$$(\pm\pi;\ 0),\ \left(\pm\frac{3\pi}{2};\ \pm\infty\right),\ (\pm 2\pi;\ 0),\ \ldots.$$

Бу топилган нуқталарга асосан $y = \operatorname{tg} x$ нинг графиги 300-расмдагидек бўлади.

4. $y = \sec x$ нинг графиги чизилсин.

Чизиш. x ва y лар қийматлари жадвалини тузамиз ва бир неча нуқталарни аниқлаймиз:

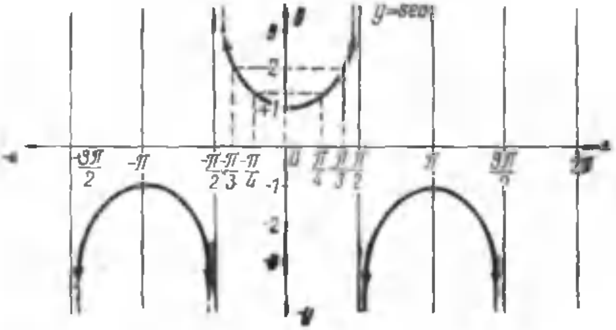
x	0	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{4}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{2}$	$\pm\pi$	$\pm\frac{3\pi}{2}$	$\pm 2\pi$
y	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-1	∞	1



300- расм.

$$(0;\ 1);\ \left(\pm\frac{\pi}{6};\ \frac{2\sqrt{3}}{3}\right),\ \left(\pm\frac{\pi}{4};\sqrt{2}\right),\ \left(\pm\frac{\pi}{3};2\right),\ \left(\pm\frac{\pi}{2};\infty\right),$$
$$(\pm\pi;-1),\ \left(\pm\frac{3\pi}{2};\infty\right),\ (\pm 2\pi;\ 1),\ \ldots.$$

Бу топилган нуқталарга асосан $y = \sec x$ нинг графиги 301-расмдагидек бўлади.



301- расм.

Изоҳ. $y = \text{ctg}\, x$ ва $y = \csc x$ ларнинг графиклари ҳам тангенс ва секансларники каби чизилади.

б) Тескари тригонометрик функциялар ва уларнинг графиклари

Тескари функция. $y = f(x)\ldots$ (1) функция берилган бўлсин. (1) ни x га нисбатан ечсак, $x = \varphi(y)\ldots$ (2) ҳосил бўлсин. У ҳолда (2) ни (1) нинг *тескари функцияси* дейилади. (1) да x — аргумент, y — функция; (2) да y — аргумент, x — функциядир. Шунга ўхшаш: $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$; $y = \sec x$ ва $y = \csc x$ ларнинг ҳар бирини бурчак (ёй) x га нисбатан ечганда ҳосил бўлган функциялар берилган тригонометрик функцияларга тескари тригонометрик функциялар (ёки тескари доиравий функциялар) деб аталади ва улар $x = \operatorname{Arcsin} y$; $x = \operatorname{Arccos} y$; $x = \operatorname{Arctg} y$; $y = \operatorname{Arcctg} y$ ва ҳоказо кўринишда ёзилади. Бундаги Arc — лотинча Arcus, яъни ёй сўзининг қисқарганидир. $x = \operatorname{Arcsin} y$; $x = \operatorname{Arccos} y$; $x = \operatorname{Arctg} y$ ва ҳоказоларда x ни y билан, y ни x билан алмаштирсак, у ҳолда улар $y = \operatorname{Arcsin} x$; $y = \operatorname{Arccos} x$; $y = \operatorname{Arctg} x$ ва ҳоказо кўринишда ёзилади (ёлғиз одатланганимиз учун). $\operatorname{Arc\,sin} x$ ни арксинус икс, $\operatorname{Arccos} x$ ни арккосинус икс, $\operatorname{Arctg} x$ ни арктангенс икс ва ҳоказо ...$\operatorname{Arccsc} x$ ни арккосеканс икс деб ўқилади. (Тескари тригонометрик функциялар ҳам даврий функциядир.) Энди $y = \operatorname{Arc\,sin} x$ функциянинг графигини чизиб, текширамиз. Дастлаб жадвал тузиб, бир неча нуқталарни аниқлаймиз:

x	$=0$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$	± 1	0	∓ 1	0
y	$=0$	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{4}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{2}$	$\pm\pi$	$\pm\frac{3\pi}{2}$	$\pm 2\pi$

Энди тўғри бурчакли координаталар системасини олиб, унда $(0;\ 0)$, $\left(\pm\frac{1}{2};\ \pm\frac{\pi}{6}\right)$, $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ \pm\frac{\pi}{4}\right)$, $)\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ \pm\frac{\pi}{3}\Big)$, $(0,\ \pm\pi)$, $\left(\pm 1;\ \pm\frac{3\pi}{2}\right)$, $(0;\ \pm 2\pi)$, ... нуқталарнинг ўрнини аниқлаб, улар бирлаштирилса, $y = \operatorname{Arc\,sin} x$ нинг графиги ҳосил бўлади: (302-расм). Шаклдан биз кўрамизки, $y = \operatorname{Arcsin} x$ даврий функция бўлиб, $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ да бир қийматли, чунки x нинг $[-1;\ +1]$ даги ҳар бир қийматига y нинг ҳам битта қиймати мос келади. Шунинг учун $y = \operatorname{Arcsin} x$ нинг $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ ораликдаги қисми унинг бош бурчаги ёки *бош қиймати* дейилади ва $y = \arcsin x$ равишда ёзилади. Демак, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant +\frac{\pi}{2}$ (302- расм). Бошқа тескари тригонометрик функцияларнинг графиклари ва бош қийматлари худди $y = \arcsin x$ ники каби йўллар билан аниқланади, яъни: $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$ (303- расм). $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < +\frac{\pi}{2}$ (304- расм).

Таъриф. $\operatorname{Arc}\sin x = y$ эгри чизиқнинг бир қисми бўлган AB эгри чизиқни, $\arcsin x$ *нинг графиги* дейилади (302- расм).

Қуйидаги муносабатларни чиқарамиз:

$$y = \arcsin x \text{ дан } x = \sin y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right).$$

Бундан: $\frac{\pi}{2} - y = \arccos x$ ёки $\frac{\pi}{2} - \arcsin x = \arccos x$. Демак,

$$\boxed{\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.}$$

Шунга ўхшаш:

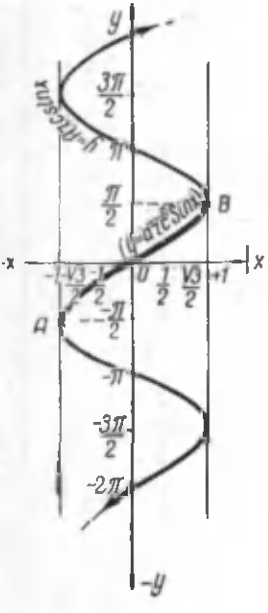
$$\boxed{\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2};}$$

$$\boxed{\operatorname{arc\,sec} x + \operatorname{arc\,csc} x = \frac{\pi}{2}.}$$

Таърифга кўра: $\sin(\arcsin x) = x$; $\cos(\arccos x) + x$; $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$ деб ёза оламиз.

Мисоллар. 1) $\cos\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ нинг қиймати топилсин.

Ечиш. $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \alpha$; $\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \beta$ деб белгилаймиз. Бу ҳолда, берилган ифода $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ шаклга келади.



302- расм.

Аммо: $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ва $\sin 2\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ёки $\begin{cases} 2\sin\beta\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ \sin^2\beta + \cos^2\beta = 1 \end{cases}$

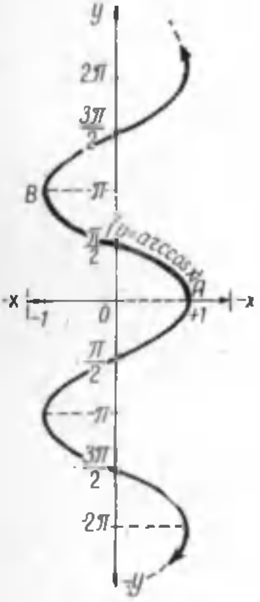
дан: $\sin\beta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ ва $\pm\frac{1}{2}$; $\cos\beta = \pm\frac{1}{2}$ ва $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$; $\cos(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$. Демак, $\cos\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{ars}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$.

2) $2\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \operatorname{arctg}\frac{7}{23} = \frac{\pi}{4}$ эканлиги исбот қилинсин.

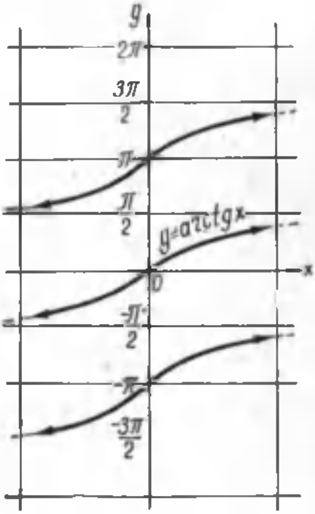
Исбот. $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}=\alpha$, $\operatorname{arctg}\frac{7}{23}=\beta$ деб белгилаймиз, бундан: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{4}$; $\operatorname{tg}\beta=\frac{7}{23}$ бўлади. $2\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\operatorname{arctg}\frac{7}{23}=2\alpha+\beta$. Бунинг икки томони тангенсини ҳисоблаймиз.

$$\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\operatorname{arctg}\frac{7}{23}\right)=\operatorname{tg}(2\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=\frac{\frac{8}{15}+\frac{7}{23}}{1-\frac{8}{15}\cdot\frac{7}{23}}=$$

$$=\frac{289}{289}=1;\ \operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2\cdot\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{8}{15}.$$



303- расм.



304- расм.

Демак, $2\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$ ёки $2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4}+\operatorname{arc\,tg}\frac{7}{23}=\frac{\pi}{4}$. Теорема исбот қилинди.

Энди, $\operatorname{Arc\,sin}x$, $\operatorname{Arccos}x$, $\operatorname{Arctg}x$, $\operatorname{Arcctg}x$ лар билан $\operatorname{arc\,sin}x$, $\operatorname{arccos}x$, $\operatorname{arctg}x$, $\operatorname{arcctg}x$ лар орасидаги муносабатларни қуйидагича ёзиш мумкин: $\operatorname{Arc\,sin}x=k\pi+(-1)^k\operatorname{arc\,sin}x$, $\operatorname{Arc\,cos}x=2k\pi\pm\operatorname{arc\,cos}x$, $\operatorname{Arctg}x=k\pi+\operatorname{arctg}x$, $\operatorname{Arc\,ctg}x=k\pi+\operatorname{arc\,ctg}x$ ($k=0;\ \pm1;\ \pm2;\ \ldots$).

Мисол. 1) $\operatorname{Arc\,sin}\frac{\sqrt{3}}{2}=k\pi+(-1)^k\operatorname{ars\,sin}\frac{\sqrt{3}}{2}=k\pi+$

$$+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{3};$$

2) $\operatorname{Arc\,cos}\frac{1}{2}=2k\pi\pm\operatorname{arc\,cos}\frac{1}{2}=2k\pi\pm\frac{\pi}{6}.$

Машқлар. Қуйидаги ифодаларнинг қийматлари топилсин:

1) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. $\left(\text{Жавоб. } \frac{\sqrt{3}}{2}.\right)$

2) $\cos\left(2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. (Жавоб. 0.)

3) $\operatorname{ctg}\left[\operatorname{arctg}(-1)\right]$. (Жавоб. -1.)

4) $\sin\left(3\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. (Жавоб. 1.)

5) $\cos\left(\arccos\frac{9}{\sqrt{82}}+\arccos\frac{\sqrt{41}}{8}\right)$. $\left[\text{Жавоб. } \frac{1}{8\sqrt{2}}\left(9-\sqrt{\frac{23}{41}}\right)\cdot\right]$

6) $\cos\left(2\arcsin\frac{2}{7}\right)$. $\left(\text{Жавоб. } \frac{41}{49}.\right)$

Қуйидаги айниятлар исбот қилинсин:

1) $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arcctg}\frac{5}{12}\right)=-\frac{119}{169}$.

2) $\arcsin\frac{4}{5}-\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}=\operatorname{arcctg}2$.

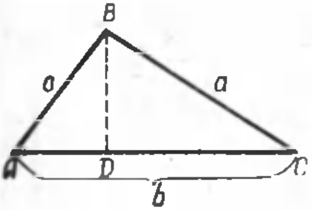
3) $2\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{4}=\operatorname{arctg}\frac{32}{43}$.

4) $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}-\arccos\frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$.

20- §. УЧБУРЧАК ЮЗИ

Теорема. *Учбурчакнинг юзи, унинг икки томони ва улар орасидаги бурчак синуси кўпайтмасининг ярмига тенг.*

$\triangle ABC$ нинг томонлари a, b, c ва юзи S_Δ бўлсин. У ҳолда $S_\Delta=\frac{1}{2}bc\sin A$ эканини исбот қиламиз.



305- расм.

Исбот. $\triangle ABC$ да $BD\perp AC$ ни туширамиз (305- расм). У ҳолда $S_\Delta=\frac{1}{2}AC\cdot BD$. Аммо $AC=b$, $BD=c\cdot\sin A$. Демак, $S_\Delta=\frac{1}{2}bc\sin A$ бўлади. Теорема исбот қилинди. Шунга ўхшаш, $S_\Delta=\frac{1}{2}ac\sin B$ ва $S_\Delta=\frac{1}{2}ab\cdot\sin C$ деб ёзса ҳам бўлади.

21- §. СИНУСЛАР ВА КОСИНУСЛАР ТЕОРЕМАЛАРИ

1- теорема *(синуслар теоремаси). Ҳар қандай учбурчакнинг томонлари ўз қаршисида ётган бурчак синусига пропорционалдир.*

$\triangle ABC$ томонлари a, b, c бўлсин (306- расм). a — A бурчак қаршисидаги томон; b — B бурчак қаршисидаги томон; c — C бурчак қаршисидаги томон.

$\triangle ABC$ га радиуси R бўлган ташқи айлана чизамиз.

Энди $\triangle ABC$ нинг ихтиёрий иккита, масалан, A ва C учи орқали диаметрлар ўтказиб, тўғри бурчакли $\triangle EBC$; $\triangle AFB$ ва $\triangle ACF$ ларни ҳосил қиламиз. Шаклдан $\angle BAC = \angle BEC$, чунки иккови ҳам бир хил $(\overset{\frown}{BFC})$ ёйга тиралгандир. Шунга ўхшаш $\angle AFB = \angle ACB$ ва $\angle AFC = \angle ABC$ дир.

$\triangle EBC$ дан $\frac{BC}{EC} = \sin\angle BEC$ ёки $\frac{a}{2R} = \sin A$, бундан: $\frac{a}{\sin A} = 2R$;

$\triangle AFB$ дан $\frac{AB}{AF} = \sin\angle AFB$ ёки $\frac{c}{2R} = \sin C$, , $\frac{c}{\sin C} = 2R$;

$\triangle ACF$ дан $\frac{AC}{AF} = \sin\angle AFC$ ёки $\frac{b}{2R} = \sin B$, , $\frac{b}{\sin B} = 2R$.

Бу чиқарилган учта тенгликнинг ўнг томонлари ўзаро тенг $(2R)$ бўлгани учун $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ дир. Теорема исбот қилинди.

Синуслар теоремасининг бошқача исботи

Бизга 20- § дан учбурчакларнинг юзини ҳисоблашнинг қуйидаги: $S_\triangle = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A$ формулалари маълум эди. Бу тенгликлардан, $ab\sin C = ac\sin B$ ва $ab\sin C = bc\sin A$ ни ёзиб қуйидаги пропорцияларни тузамиз: $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ ва $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. Булардан: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. Теорема исбот қилинди.

2- теорема *(косинуслар теоремаси). Учбурчак томонининг квадрати, қолган икки томон квадратларининг йиғиндисидан, шу икки томони ва улар орасидаги бурчак косинусининг иккиланган кўпайтмасини айириш натижасига тенг.*

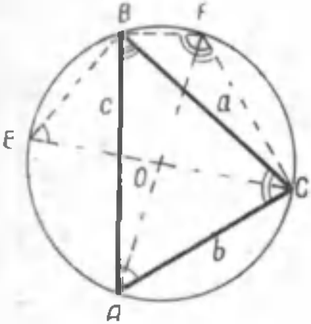
Ихтиёрий $\triangle ABC$ нинг томонлари a, b, c бўлсин. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ эканини исбот қиламиз.

Исбот. $\triangle ABC$ нинг бирор учидан, масалан, B учидан $BD \perp AC$ ни туширамиз (307- расм), у ҳолда планиметрияга асосан: $a^2 = b^2 + c^2 - 2b\,AD$. Аммо $\triangle BDA$ да $AD = c\cdot\cos A$ дир. Бу ҳолда, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos A$ бўлади. Шунга ўхшаш: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ ва $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ бўлади. Агар $\angle A = \angle B_1AC$ (ўтмас) бўлса, у ҳолда: $a_1^2 = b^2 + c_1^2 + 2b\cdot AD_1$ бўлар эди. $\triangle AB_1D_1$ дан: $AD_1 = c_1\cdot\cos(180° - A) = -c_1\cos A$ дир. Бу ҳолда ҳам $a_1^2 = b^2 + c_1^2 - 2bc_1\cos A$ бўлади.

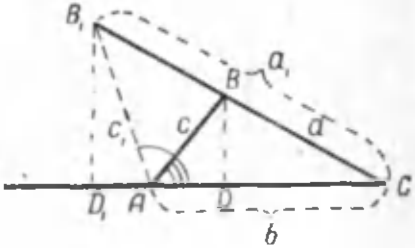
Демак, теорема, бурчакнинг қандайлигидан қатъи назар, тўғридир. Шундай қилиб:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,\ \ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Теорема исбот қилинди.



306- расм.



307- расм.

22- §. ТАНГЕНСЛАР ТЕОРЕМАСИ

Теорема. *Ҳар қандай △ ABC нинг томонлари a, b, c ва бурчаклари A, B, C деб белгиланса, у ҳолда:*

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}};\quad \frac{a-c}{a+c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A-C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A+C}{2}};\quad \frac{b-c}{b+c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}}$$

бўлади.

Исбот. $\frac{a}{\sin A} = 2R$ ва $\frac{b}{\sin B} = 2R$ дан $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$. Бу тенгликларни ҳадлаб қўшамиз. $a+b = 2R(\sin A + \sin B)$ ёки $a + b = 4R\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$. Шунга ўхшаш, $a - b = 4R\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$. Кейинги тенгликларни ҳадлаб бўламиз:

$$\frac{a-b}{a+b} = \operatorname{tg}\frac{A-B}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{A+B}{2} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}},$$

Теоремадаги бошқа тенгликлар ҳам худди шундай исбот қилинади.

23- §. УЧБУРЧАКЛАРНИ ЕЧИШ

а) Тўғри бурчакли учбурчакларни ечиш

ABC тўғри бурчакли учбурчакда $\angle C = 90^\circ$, c — гипотенуза, a ва b лар A ва B ўткир бурчак қаршисидаги катетлар, $S_\Delta = \triangle ABC$ юзи (308- расм). $\triangle ABC$ дан:

$$\angle A + \angle B = 90^\circ \qquad (1)$$

ва $\frac{AC}{AB} = \sin B = \cos A$; $\frac{BC}{AB} = \sin A = \cos B$ ёки $\frac{b}{c} = \sin B = \cos A$ ва

$$\frac{a}{c} = \sin A = \cos B; \qquad (2)$$

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} A = \operatorname{ctg} B, \qquad (3)$$

(a, b, c, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ ва S_Δ лар *учбурчакнинг элементлари* дейилади).

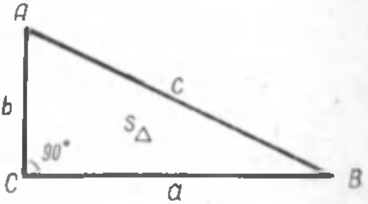
Тўғри бурчакли учбурчакнинг юзи унинг катетлари кўпайтмасининг ярмига тенг эди:

$$S_\Delta = \frac{1}{2} a \cdot b = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} bc \sin A. \qquad (4)$$

Пифагор теоремасига асосан:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Энди бу формулаларга асосланиб, биз тўғри бурчакли учбурчакларни ечиш масаласи билан танишамиз.



308- расм.

1) Битта ўткир бурчак ва томонларидан биттаси берилганда, учбурчакнинг қолган элементларини топиш. $\angle A = 25^\circ$ ва катет $a = 6$ *см* берилган, учбурчакнинг қолган элементлари топилсин.

Ечиш. (1) дан $\angle B = 90^\circ - \angle A = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$; (2) дан $\frac{a}{c} = \sin A$, бундан $c = \frac{a}{\sin A} = \frac{6}{\sin 25^\circ} = \frac{6}{0{,}4226} \approx 14{,}2$ *см*$\cdot$ $\frac{b}{c} = \sin B$ дан: $b = c \sin B = 14{,}2 \cdot \sin 65^\circ = 14{,}2 \cdot 0{,}9063 = 12{,}9$ (*см*). (4) дан $S_\Delta = \frac{1}{2} a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12{,}9 = 38{,}7$ (*см*^{2}). Шундай қилиб: $\angle B = 65^\circ$; $c = 14{,}2$ *см*; $b = 12{,}9$ *см* ва $S_\Delta = 38{,}7$ *см*^{2}.

2) Томонларидан иккитаси берилганда, $\triangle ABC$ нинг қолган элементларини топиш. Гипотенуза $c = 12$ *см*, катет $a = 8$ *см* берилган; учбурчакнинг қолган элементлари топилсин.

Ечиш. (2) дан $\frac{a}{c} = \sin A$; $\sin A = \frac{a}{c} = \frac{8}{12} = 0{,}6667$, демак, $\angle A = 41^\circ 49'$ бўлади. Энди (1) дан $\angle B = 90^\circ - \angle A = 90^\circ - 41^\circ 49' =$

$= 48°11'$; (2) дан $b = c \cdot \sin B = 12 \cdot \sin 48°11' = 12 \cdot 0,7453 = 8,9$ *см*. (4) дан $S_\Delta = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8,9 = 35,6$ ($см^2$). Шундай қилиб: $\angle A = 41°49'$, $\angle B = 48°11'$; $b = 8,9$ *см*; $S_\Delta = 35,6$ $см^2$.

3) Учбурчакнинг юзи ва ўткир бурчагидан биттаси берилганда, унинг қолган элементларини топиш. $\triangle ABC$ нинг юзи $S_\Delta = 14$ $см^2$ ва ўткир бурчак $\angle A = 36°$ берилган, унинг қолган элементлари топилсин.

Ечиш. (4) дан $S_\Delta = \frac{1}{2} ab = 14$; $a \cdot b = 28$. Энди (3) дан $\frac{b}{a} = \text{ctg } A = \text{ctg } 36° = 1,3764 \approx 1,4$; $b = 1,4\, a$; буни $a \cdot b = 28$ га қўйсак: $1,4 a^2 = 28$; $a^2 = 20$; $a = 2\sqrt{5}$ *см*; $b = 2,8\sqrt{5}$ *см*. $\angle B = 90° - 36° = 54°$. $c^2 = a^2 + b^2 = 20 + 39,2 = 59,2$. Бундан $c \approx 7,6$ *см*.

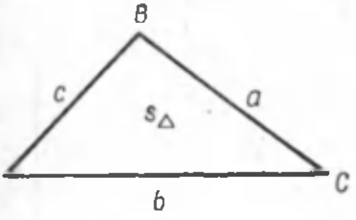
б) Қийшиқ бурчакли учбурчакларни ечиш

$\triangle ABC$ — қийшиқ бурчакли учбурчак бўлсин ва ундаги a, b, c лар мос равишда A, B, C бурчаклар қаршисидаги томонлар; S_Δ — $\triangle ABC$ юзи бўлсин (309- расм). Планиметриядан

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°, \qquad (1)$$

$$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad (2)$$

экани маълум ($2p = a + b + c$). Бундан ташқари $S_\Delta = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B$ (3); $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ (4) (синуслар теоремаси); $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$; $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ ва $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ (5) (косинуслар теоремаси). Энди бу формулаларга асосланиб, биз қуйида қийшиқ бурчакли учбурчакларни ечишни кўрсатамиз.



309- расм.

1) Учбурчакнинг учта томони берилганда унинг қолган элементларини топиш. $a = 8,5$ *см*; $b = 11,25$ *см*; $c = 9,7$ *см* берилган; унинг қолган элементлари: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ ва S_Δ лар топилсин.

Ечиш. (5) дан $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ ёки $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{11,25^2 + 9,7^2 - 8,5^2}{2 \cdot 11,25 \cdot 9,7} = \frac{126,5 + 94,09 - 72,25}{22,5 \cdot 9,7} = \frac{14834}{225 \cdot 97}$. Энди буни логарифмлаб ҳисоблаш қулай, яъни: $\lg \cos A = \lg 14834 - \lg 225 - \lg 97 = 4,1712 - 2,3522 - 1,9868 = 4,1712 - 4,3390 = -0,1678 = \bar{1},8322$. Бу ҳолда: $\bar{1},8322 = \lg \cos A$, бундан $\angle A = 47°12'$. (4) дан $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ёки $\sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a} = \frac{11,25 \cdot \sin 47°12'}{8,5}$.

Буни логарифмлаймиз: $\lg \sin B = \lg 11{,}25 - \lg 8{,}5 + \lg \sin 47°12' = 1{,}0512 - 0{,}9294 + 1{,}8655 = 0{,}1218 - 0{,}1345 = -0{,}0127 = \bar{1}{,}9873$. Бу ҳолда $\angle B = 76°12'$. Энди $\angle C = 180° - (A + B) = 180° - 123°24' = 56°36'$.

(3) дан $S_\Delta = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2}.\ 8{,}5 \cdot 9{,}7\ \sin B = 4{,}25 \cdot 9{,}7\ \sin B$.

Энди буни ҳам логарифмлаб топиш қулай бўлади. $\lg S_\Delta = \lg 4{,}25 + \lg 9{,}7 + \lg \sin B = 0{,}6284 + 0{,}9868 - 0{,}0127 = 1{,}6025$. Бунга кўра $S_\Delta = 40{,}04$ *см*^{2}. Шундай қилиб: $\angle A = 47°12'$; $\angle B = 76°12'$; $\angle C = 56°36'$ ва $S_\Delta = 40{,}04$ *см*^{2}.

2) Учбурчакнинг икки бурчаги ва бир томони берилганда унинг қолган элементларини топиш. Ўткир бурчаклари $\angle A = 25°18'$, $\angle B = 35°20'$ ва $b = 18{,}2$ *см* берилган, унинг колган элементлари топилсин ($a = ?$ $c = ?$ $S_\Delta = ?$ ва $\angle C = ?$).

Ечиш. (1) дан $\angle C = 119°22'$; (4) дан $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ ёки $c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{18{,}2 \cdot \sin 119°22'}{\sin 35°20'}$; $\lg c = \lg 18{,}2 + \lg \sin 119°22' - \lg \sin 35°20' = 1{,}2601 + \lg \cos 29°22' - \bar{1}{,}7622 = 1{,}2601 + \bar{1}{,}9402 + 0{,}2378 = 1{,}4381$. Бундан:

$$c = 27{,}43. \text{ (4) дан } a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{18{,}2 \cdot \sin 25°18'}{\sin 35°20'}.$$

Буни ҳам логарифмлаб, сўнг жадвал ёрдамида топиш қулайдир, яъни

$$\lg a = \lg 18{,}2 + \lg \sin 25°18' - \lg \sin 35°20' = 1{,}2601 + \bar{1}{,}6308 - \bar{1}{,}7622 = 1{,}2601 - 0{,}3692 + 0{,}2378 = 1{,}4979 - 0{,}3692 = 1{,}1287.$$

Бунга кўра:

$a = 13{,}45$ *см*. (3) дан $S_\Delta = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 18{,}2 \cdot 27{,}43 \cdot \sin 25°18' = 9{,}1 \cdot 27{,}43 \cdot \sin 25°18'$.

$$\lg S_\Delta = \lg 9{,}1 + \lg 27{,}43 + \lg \sin 25°18' = 0{,}9590 + 1{,}4383 + \bar{1}{,}6308 = 2{,}0281.$$

Бу ҳолда

$$S_\Delta = 106{,}7 \text{ см}^2.$$

Шундай қилиб:

$S_\Delta = 106{,}7$ *см*^{2}, $a = 13{,}45$ *см*, $c = 27{,}43$ *см*, $'\angle C = 119°22'$.

3) Учбурчакнинг икки томони ва битта бурчаги берилганда унинг қолган элементларини топиш. $a = 12{,}4$ *см*, $b = 14{,}1$ *см* ва $\angle C = 37°$ берилган, унинг қолган c, $\angle A$, $\angle B$ ва S_Δ элементлари топилсин.

Ечиш. (5) дан $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 12{,}4^2 + 14{,}1^2 - 2\cdot 12{,}4\cdot 14{,}1\cos 37^\circ = 153{,}8 + 198{,}8 - 349{,}7\cdot 0{,}7986 = 352{,}6 - 279{,}8 = 72{,}8$.

Бундан:

$$c = \sqrt{72{,}8} \approx 8{,}5 \text{ см. (4) дан } \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \text{ ёки } \sin A = \frac{a\sin C}{c} = \frac{12{,}4\sin 37^\circ}{8{,}5}.$$

Бунинг икки томонини логарифмлаб, сўнг жадвалдан фойдаланамиз:

$$\lg\sin A = \lg 12{,}4 + \lg\sin 37^\circ - \lg 8{,}5 = 1{,}0934 + \bar{1}{,}7795 - 0{,}9294 = 0{,}1640 - 0{,}2205 = -0{,}0565 = \bar{1}{,}9435.$$

Бундан:

$\angle A = 61^\circ 24'$, энди (1) дан $\angle B = 180^\circ - 98^\circ 24' = 81^\circ 36'$. (3) дан

$$S_\Delta = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}\cdot 14{,}1\cdot 8{,}5\cdot\sin A = 7{,}05\cdot 8{,}5\sin A.$$

Логарифмлаймиз:

$$\lg S_\Delta = \lg 7{,}05 + \lg 8{,}5 + \lg\sin A = 0{,}8482 + 0{,}9294 - 0{,}0565 = 1{,}7211.$$

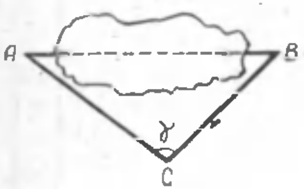
Бундан:

$$S_\Delta = 52{,}61 \text{ см}^2.$$

Шундай қилиб:

$$c = 8{,}5 \text{ см};\ S_\Delta = 52{,}61 \text{ см}^2;\ \angle B = 81^\circ 36';\ \angle A - 61^\circ 24'.$$

Машқлар. 1. Қуйидаги берилганларга кўра, тўғри бурчакли учбурчакларнинг қолган элементлари топилсин: 1) гипотенуза $c = 15{,}4$ см; ўткир бурчак $\angle A = 52^\circ 11'$; 2) катет $a = 11{,}2$ см; ўткир бурчак $\angle B = 25^\circ 32'$; 3) катет $b = 8{,}25$ см ва гипотенуза $c = 28{,}8$ см; 4) катетлар $a = 326$ см ва $b = 128$ см; 5) учбурчакнинг юзи $S_\Delta = 82$ см^2 ва $\angle A = 37^\circ 21'$.



310- расм.

2. Қуйидаги берилганларга кўра, қийшиқ бурчакли учбурчакларнинг қолган элементлари топилсин: 1) $\triangle ABC$ нинг бир томони $a = 262$ см ва икки бурчаги: $\angle A = 45^\circ 32'$, $\angle B = 62^\circ 12'$; 2) $\triangle ABC$ нинг учала томони: $a = 28$ м, $b = 16$ м ва $c = 22$ м; 3) $\triangle ABC$ нинг икки томони $b = 40$ см, $c = 21$ см ва бир бурчаги $\angle C = 32^\circ 7'$; 4) $\triangle ABC$ нинг юзи $S_\Delta = 24$ см^2, бир бурчаги $\angle A = 62^\circ 11'$ ва бир томони $a = 8{,}25$ см; 5) AB масофани бевосита ўлчаб бўлмайди (310- расм); AB ни ўлчаш учун C нуқтани шундай танлаб олиш керакки, ундан A ва B нуқталар

кўринсин ҳамда BC, AC ва улар орасидаги бурчак ACB ни ўлчаб ҳам бўлсин. $BC = a = 72$ *м*, $AC = b = 120$ *м* ва $\angle ACB = \angle C = 29^\circ 26'$ берилган. AB ни топиш керак.

(Жавоб. $AB = 67{,}3$ *м.*)

24-§. ТРИГОНОМЕТРИК ТЕНГЛАМАЛАР

Таъриф. *Номаълум сон тригонометрик функцияларда аргумент бўлиб қатнашган тенглама тригонометрик тенглама дейилади.* Масалан,

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0;\ \cos^2 x - \sin^2 x + \cos x = 0;$$
$$\cos x - 2\operatorname{tg} x = 0;\ 2\cos^2 x - \cos x = 0;\ 3\sin^2 x + 5\sin x = 0$$

каби тенгламаларнинг ҳар бири тригонометрик тенгламадир. Буларда x — номаълум сон. Тригонометрик тенгламаларни ечишда кўп хил усуллар бор. Булардан баъзиларини биз қуйида мисоллар ечиш ёрдамида кўрсатиб ўтамиз.

I. Берилган тригонометрик функцияга нисбатан алгебраик тенглама

Масалан, $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ тенглама берилган.

Ечиш. Бу тенглама $\sin x$ га нисбатан тўла квадрат тенгламадир. У ҳолда, $\sin x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$; $\sin x_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$ ва $\sin x_2 = \frac{-1-3}{4} = -1$, булардан:

$x_1 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi$ ва $x_2 = (-1)^k \frac{3\pi}{2} + k\pi$ бўлади; буларда $k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots\ .$

Кўпайтувчиларга ажратиб ечиш усули

Масалан, а) $2\cos^2 x - \cos x = 0$ берилган.

Ечиш. $2\cos^2 x - \cos x = \cos x\,(2\cos x - 1) = 0$, бундан: $\cos x_1 = 0$ ва $2\cos x - 1 = 0$ ёки $\cos x_2 = \frac{1}{2}$; у ҳолда, $x_1 = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $x_2 = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ бўлади.

б) $3\sin^2 x + 5\sin x = 0$ берилган.

Ечиш. $3\sin^2 x + 5\sin x = \sin x \cdot (3\sin x + 5) = 0$, бундан: $\sin x_1 = 0$ ва $3\sin x + 5 = 0$ ёки $\sin x_2 = -\frac{5}{3}$. Булардан, $\sin x_1 = 0$ ечимга эга, яъни $x_1 = k\pi$; $\sin x_2 = -\frac{5}{3}$ эса, ечимга эга эмас, чунки $-\frac{5}{3} < -1$.

Бир хил тригонометрик функцияли тенгламага келтириб ечиш усули

Масалан, $\cos^2 x - \sin^2 x + \cos x = 0$ тенглама берилган.

Ечиш. $\cos^2 x - \sin^2 x + \cos x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + \cos x = \cos^2 x - 1 + \cos^2 x + \cos x = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Бу эса $\cos x$ га нисбатан тўлиқ квадрат тенгламадир. Шунинг учун,

$$\cos x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}; \ \cos x_1 = \frac{1}{2}; \ \cos x_2 = -1.$$

У ҳолда:

$$x_1 = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ва } x_2 = \pm \pi + 2k\pi = (2k \pm 1)\pi;$$

$$(k = 0; \ \pm 1; \ \pm 2; \ \ldots).$$

II. Кўриб ўтилган усулларни биргаликда ишлатиб ечиш

Масалан, $\cos^2 x + \mathrm{tg}^2 x - \sin^2 x = 1$ тенглама берилган.

Ечиш. $\cos^2 x + \mathrm{tg}^2 x - \sin^2 x = 1$ ёки $\mathrm{tg}^2 x - \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$, ёки $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 2\sin^2 x = 0$, ёки $\sin^2 x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 2\right) = 0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Бундан: $\sin^2 x = 0$ ва $\frac{1}{\cos^2 x} - 2 = 0$ ёки $\cos^2 x = \frac{1}{2}$, $\cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. У ҳолда: $\sin^2 x = 0$ дан, $x_{1,2} = k\pi$; $\cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ дан, $x_{3,4} = \frac{\pi}{4}(8k \pm 1)$.

Демак,

$$x_{1,2} = k\pi; \ x_{3,4} = \frac{\pi}{4}(8k \pm 1).$$

III. Бир жинсли тригонометрик тенгламаларни ечиш усули

Агар тенгламанинг ҳар бир ҳадидаги кўпайтувчи синус ва косинуслар даража кўрсаткичларининг йиғиндиси бир хил сонга тенг бўлса, ундай тенглама *бир жинсли тригонометрик тенглама* дейилади.

Масалан, $\sin^2 x - 5\sin x \cdot \cos x + 4\cos^2 x = 0$ бир жинсли тенглама берилган.

Ечиш. Берилган тенгламани $\cos^2 x \neq 0$ га бўламиз, у ҳолда $\mathrm{tg}^2 x - 5\,\mathrm{tg}\, x + 4 = 0$. $\mathrm{tg}\, x$ га нисбатан квадрат тенглама ҳосил бўлди. Уни ечамиз:

$$\mathrm{tg}\, x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}; \ \mathrm{tg}\, x_1 = 4; \ \mathrm{tg}\, x_2 = 1.$$

Демак, $x_1 = \mathrm{arc\,tg}\, 4 + k\pi$; $x_2 = \frac{\pi}{4}(4k + 1)$.

IV. Қўшиш формулаларидан фойдаланиб ечиш усули

Масалан, $\sin(2x - 30°) + \cos(2x + 30°) = 0$ тенглама берилган.

Ечиш.

$$\sin(2x - 30^\circ) + \cos(2x + 30^\circ) = \sin 2x \cos 30^\circ - \cos 2x \sin 30^\circ + \cos 2x \cos 30^\circ - \sin 2x \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}-1}{2}\cos 2x = 0$$

ёки $\sin 2x + \cos 2x = 0$ ни ҳосил қиламиз.

Бунинг икки томонини $\cos 2x \neq 0$ га бўламиз: $\operatorname{tg} 2x + 1 = 0$ ҳосил бўлади. Бундан: $\operatorname{tg} 2x = -1$; $2x = -\frac{\pi}{4} + k\pi = \frac{\pi}{4}(4k-1)$; $x = \frac{\pi}{8}(4k-1)$ *бўлади. Демак,* $x = \frac{\pi}{8}(4k-1)$.

$2\operatorname{ctg} x \cdot \sec^2 x = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ тенглама берилган.

Ечиш.

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} + \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x} + \frac{\operatorname{tg} x - 1}{1 + \operatorname{tg} x} = \frac{(\operatorname{tg} x + 1)^2 + (\operatorname{tg} x - 1)^2}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2\sec^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

ни ҳосил қиламиз.

У ҳолда $2\operatorname{ctg} x \sec^2 x = \frac{2\sec^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ бўлади. Энди $\sec^2 x \neq 0$ ва $1 - \operatorname{tg}^2 x \neq 0$ *бўлганда*, $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ ёки $1 - \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg} x$, ёки $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 1 = 0$ ҳосил бўлади. Бундан: $\operatorname{tg} x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; $x_{1,2} = \operatorname{arc\,tg}\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} + k\pi$.

V. Келтириш формулаларидан фойдаланиб ечиш усули

Масалан, $\sin\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) + 2\cos(2\pi - x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ тенглама берилган.

Ечиш. $\sin\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) + 2\cos(2\pi - x) = -\cos x + 2\cos x = \cos x$.

Демак, $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Бундан:

$$x = \frac{\pi}{6}(12k \pm 1).$$

VI. Аргументларни иккилаш ва иккига бўлиш формулаларидан фойдаланиб ечиш усули

Масалан, $1 + \sin^2 2x = 4\sin^2 x$ тенглама берилган.

Ечиш. $1 + \sin^2 2x = 1 + (2\sin x \cos x)^2 = 1 + 4\sin^2 x \cos^2 x$ бўлгани учун $1 + 4\sin^2 x \cos^2 x = 4\sin^2 x$ ни ҳосил қиламиз.

Бундан:

$$1 = 4\sin^2x(1-\cos^2x) = 4\sin^2x\cdot\sin^2x = 4\sin^4x.$$

У ҳолда $\sin^4x = \frac{1}{4}$ ёки $\sin^2x = \pm\frac{1}{2}$; $\sin^2x = \frac{1}{2}$ дан $\sin x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_{1,2} = \frac{\pi}{4}[4k \pm (-1)^k]$ бўлади; $\sin^2x = -\frac{1}{2}$ эса ечимга эга эмас.

VII. Тригонометрик функцияларнинг кўпайтмасини йиғинди, йиғиндисини эса кўпайтмашаклига келтириш формулаларидан фойдаланиб ечиш усули

Масалан, $\sin x\cdot\sin3x = \sin5x\cdot\sin7x$ тенглама берилган.

Ечиш. Берилган тенгламанинг икки томонига $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$ формулани қўлланамиз:

$$\sin x\cdot\sin3x = \frac{1}{2}[\cos(x-3x) - \cos(x+3x)] = \frac{1}{2}(\cos2x - \cos4x);\ \sin5x\cdot\sin7x = \frac{1}{2}[\cos(5x-7x) - \cos(5x+7x)] = \frac{1}{2}(\cos2x - \cos12x).$$

Бу ҳолда

$$\cos2x - \cos4x = \cos2x - \cos12x \text{ ёки } \cos4x - \cos12x = 0$$

бўлади.

Энди ҳосил бўлган тенгламага, $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ формулани қўлланамиз: $\cos4x - \cos12x = -2\sin\frac{4x+12x}{2}\cdot\sin\frac{4x-12x}{2} = +2\sin8x\times\sin4x = 0.$

Бундан:

$$\sin8x = 0 \text{ ва } \sin4x = 0$$

У ҳолда, $8x_1 = k\pi$, $x_1 = \frac{k}{8}\pi$ ва $x_2 = \frac{k}{4}\pi$ бўлади ($k = 0; \pm1; \pm2; \ldots$). $\sin x + \sin2x + \sin3x = 1 + \cos x + \cos2x$ тенглама берилган.

Ечиш. $(\sin x + \sin3x) + \sin2x = (1 + \cos2x) + \cos x$ кўринишда ёзиб, тегишли формулаларни қўлланамиз, у ҳолда $2\sin2x\cos x + \sin2x = 2\cos^2x + \cos x$ ёки $(1 + 2\cos x)\cdot\sin2x = (1 + 2\cos x)\cdot\cos x$ ҳосил бўлади. Бундан: $(1 + 2\cos x)\times(\sin2x - \cos x) = 0$. Демак, $1+2\cos x=0$ ва $\sin2x - \cos x=0$ тенгламалар ҳосил бўлади.

Энди, $\cos x = -\frac{1}{2}$; $x_1 = \frac{2\pi}{3}(3k \pm 1)$ ва $\sin2x - \cos x = 2\sin x\cos x - \cos x = \cos x(2\sin x - 1) = 0$. Бундан:

$2\sin x - 1 = 0$ ёки $\sin x = \frac{1}{2}$, $x_2 = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}$; $\cos x_3 = 0$,

$$x_3 = \frac{\pi}{2}(2k \pm 1).$$

Демак, $x_1 = \frac{2\pi}{3}(3k \pm 1)$; $x_2 = k\pi + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6}$; $x_3 = \frac{\pi}{2}(2k \pm 1)$.

VIII. Тригонометрик тенгламаларни ечишда хусусий усуллар

Масалан, а) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{3}$ тенглама берилган.

Ечиш. Берилган тенгламани $\frac{1}{2}$ га кўпайтирамиз, у ҳолда $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ тенглама бўлади. Энди $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$; $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$ деб олсак, $\cos\frac{\pi}{6}\sin x + \sin\frac{\pi}{6}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ёки $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ тенглама ҳосил бўлади. Бундан: $x + \frac{\pi}{6} = (-1)^k \frac{\pi}{3} + k\pi$ ёки $x = \frac{\pi}{3}\left[\left(3k - \frac{1}{2}\right) + (-1)^k\right]$.

б) Умумий кўринишда $a\sin x + b\cos x = c$ тенглама берилган.

Ечиш. Берилган тенгламанинг иккала қисмини $\cos x \neq 0$ га бўламиз: $a\,\mathrm{tg}\,x + b = \frac{c}{\cos x}$ ёки $a\,\mathrm{tg}x + b = c \cdot \sec x$, ёки $a\,\mathrm{tg}x + b = c \cdot \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 x}$, ёки $(a^2 - c^2)\mathrm{tg}^2 x + 2ab\,\mathrm{tg}x + (b^2 - c)^2 = 0$ тенглама ҳосил бўлади. Бу $\mathrm{tg}\,x$ га нисбатан тўла квадрат тенгламадир. Биз юқорида бундай тенгламанинг ечилишини кўриб ўтганмиз.

Машқлар. Қуйидаги тригонометрик тенгламалар ечилсин:

1) $\cos^2 x = 1 - \cos x$.

2) $\sin 2x - 2\sin x = 0$.

3) $2\,\mathrm{tg}\,x + 3\,\mathrm{ctg}\,x = 5$.

4) $1 + \sin x \cos x - \sin x - \cos x = 0$.

5) $\sin\frac{7}{2}x \cdot \cos\frac{3}{2}x + \sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{5x}{2} + \sin 2x \cdot \cos 7x = 0$

(Жавоб. $x_1 = \frac{k\pi}{6}$, $x_2 = (2k + 1)\frac{\pi}{6}$, k—бутун сон)

6) $\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

7) $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(x - \pi) = 0$. (Жавоб. $k\pi - \frac{\pi}{4}$; $2k\pi$).

8) $\sin x + \cos x = \cos 2x$.

9) $\frac{1 - \cos 2x}{2\sin x} = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$. ($k\pi$ ва $2\,k\pi$ берилган тенгламага жавоб бўла олмайди).

10) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$.

(Жавоб. $\frac{\pi}{2}(4k \pm 1)$; $\pi(4k \pm 1)$; $\frac{2}{5}k\pi$.)

11) $\sin^2 x - \sin^2 2x = \sin^2 3x$. (Жавоб. $\frac{k\pi}{2}$; $\frac{\pi}{6}$ $(6k \pm 1.)$

12) $\sin x + \cos x = \sqrt{1 - 2\sin^2 x}$.

(Ж а в о б. $2k\pi$; $\frac{3\pi}{4}\left(\frac{4k}{3} + 1\right)$.)

13) $\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} 5x = 0$. (Ж а в о б. $\frac{k\pi}{3}$.)

14) $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$.
15) $\sin 2x - \cos 3x = 0$.
16) $\cos^4 x - \sin^4 x = 0$.
17) $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x$.

$\left(\text{Ж а в о б. } x = k\frac{\pi}{2} + (-1)^k \frac{\arcsin(\sqrt{3} - 1)}{2}.\right)$

18) $\sin^4 \frac{x}{3} + \cos^4 \frac{x}{3} = \frac{5}{8}$. (Ж а в о б. $x = (3k \pm 1)\frac{\pi}{2}$.)

19) $\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + 7 = 0$.

$\left(\text{Ж а в о б. } x = k\pi \pm \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}.\right)$

20) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$.

(Ж а в о б. $x_1 = (2k + 1)\frac{\pi}{6}$; $x_2 = \frac{1}{2}k\pi$; $x_3 = k\pi$.)

21) $\sin x \cdot \sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$.

$\left(\text{Ж а в о б. } x_1 = 4k\pi \pm \pi;\ x_2 = 2k\pi + (-1)^k\left(\pm\frac{\pi}{3}\right).\right)$

22) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x$.

(Ж а в о б. $x_1 = k\pi$; $x_2 = \frac{1}{2}k\pi$; $x_3 = \frac{1}{3}k\pi$.)

23) $\sin^2 2x - \sin^2 x = \sin^2\frac{\pi}{6}$.

(Ж а в о б. $x_1 = k\pi \pm \arcsin\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{8}}$;

$x_2 = k\pi \pm \arcsin\sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{8}}$.)

24) $\sin x + \cos x + \sin x \cdot \cos x = 1$.

$\left(\text{Ж а в о б. } x_1 = 2k\pi;\ x_{2,3} = 2k\pi + (-1)^k\left(\pm\frac{\pi}{3}\right).\right)$

25- §. ПРОЕКЦИЯЛАР

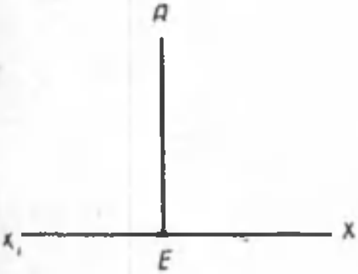
а) Текисликдаги проекциялар

1) Текисликдаги A нуқтанинг XX_1 тўғри чизиқдаги проекцияси топилсин.

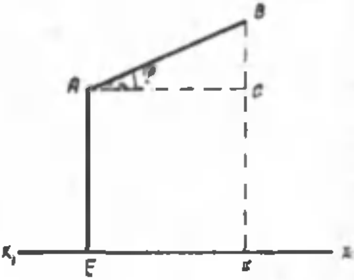
Ечиш. $AE \perp XX_1$ ни туширамиз, бу ҳолда E нуқта, A нинг XX_1 даги *проекцияси* дейилади (311- расм). XX_1 тўғри чизиқ *проекция ўқи* дейилади.

2) Текисликдаги AB кесманинг XX_1 ўқдаги проекцияси топилсин.

Ечиш. A ва B нуқталарни XX_1 га проекциялаймиз, улар мос равишда E ва F нуқталар бўлсин, у ҳолда EF кесма AB нинг XX_1 даги *проекцияси* дейилади. Энди A дан $AC \perp BF$ ни ўтказсак, $AC = BF$ бўлади, чунки $AE \parallel BF$, $\angle BAC = \varphi$ бўлсин. $\triangle BAC$ дан: $EF = AC = AB \ \cos\varphi$, $EF = AB \cdot \cos\varphi$ (312- расм). *Демак, AB кесманинг XX_1 ўқдаги проекцияси AB кесма билан проекция ўқи орасидаги бурчак косинусининг кўпайтмасига тенг.*



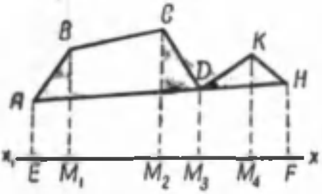
311- расм.



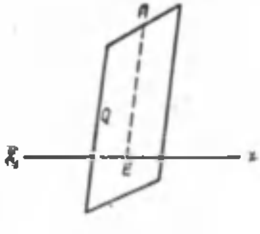
312- расм.

3) $ABCDKH$ синиқ чизиқнинг XX_1 ўқдаги проекцияси топилсин.

Ечиш. $ABCDKH_{\text{пр}} = AB_{\text{пр}} + BC_{\text{пр}} + CD_{\text{пр}} + DK_{\text{пр}} + KH_{\text{пр}} = EM_1 + M_1M_2 + M_2M_3 + M_3M_4 + M_4F = EF$. Иккинчи томондан AH нинг XX_1 даги проекцияси EF. Шунинг учун: $ABCDKH_{\text{пр}} = AH_{\text{пр}} = EF$ бўлади (313- расм). Демак, *синиқ чизиқнинг проекцияси, унинг учларини туташтирувчи кесманинг ўқдаги проекциясига тенг.*



313- расм.



314- расм.

б) Фазодаги проекциялар.

1) Фазодаги A нуқтанинг XX_1 тўғри чизиқдаги проекцияси топилсин.

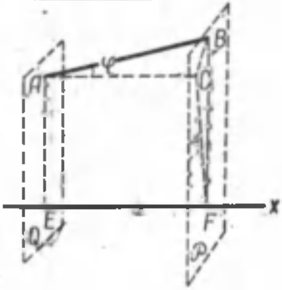
Ечиш. A нуқта орқали XX_1 ўққа перпендикуляр қилиб Q текислик ўтказамиз (314- расм). Бу ҳолда Q текислик билан XX_1 ўқнинг кесишган E нуқтаси A нуқтанинг XX_1 даги проекцияси дейилади.

Бунда ҳам фазодаги XX_1 тўғри чизиқ *проекция ўқи* дейилади.

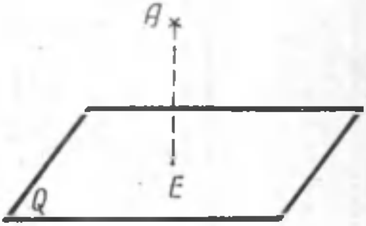
2) Фазодаги берилган AB кесманинг XX_1 ўқдаги проекцияси топилсин.

Ечиш. Кесманинг A ва B учлари XX_1 ўққа проекцияланса, улар мос равишда E ва F бўлсин, у ҳолда EF кесма, AB нинг XX_1 даги проекцияси дейилади (315- расм). Энди $AC \parallel XX_1$ ўтказамиз. $Q \parallel P$ бўлгани учун $AC = EF$ бўлади. $\triangle ABC$ дан:

$\boxed{AC = AB\cdot\cos\varphi.}$ Демак, $\boxed{EF = AB\cdot\cos\varphi.}$



315- расм.



316- расм.

3) Фазодаги A нуқтанинг текисликдаги проекцияси топилсин (316- расм).

Ечиш. $AE \perp Q$ ни ўтказамиз, бу ҳолда E нуқта A нинг Q текисликдаги проекцияси дейилади. Q текислик проекция текислиги дейилади.

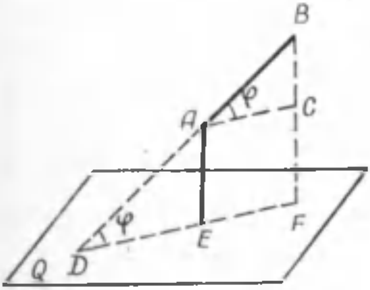
4) Фазодаги AB кесманинг Q текисликдаги проекцияси топилсин (317- расм).

Ечиш. A ва B нуқталарни Q текисликка проекциялаймиз. Улар E ва F нуқталардир. У ҳолда EF кесма AB кесманинг Q текисликдаги проекцияси дейилади. $AC \parallel EF$ ни ўтказамиз, $\angle BAC = \varphi$ бўлсин. AB ва EF кесмаларни давом эттирсак: $\angle ADE = \angle BAC = \varphi$ бўлади. $EF = AC = AB\cdot\cos\varphi$; $\boxed{EF = AB\cdot\cos\varphi.}$

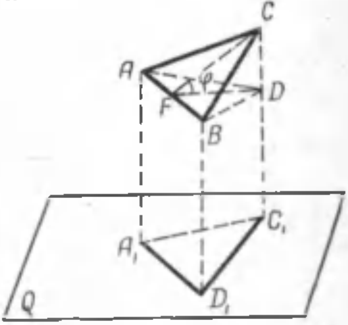
5) Фазодаги $\triangle ABC$ нинг Q текисликдаги проекцияси топилсин.

Ечиш. Q текисликка A, B ва C нуқталардан $AA_1 \perp Q$, $BB_1 \perp Q$ ва $CC_1 \perp Q$ перпендикулярларни туширамиз. Бу ҳолда $\triangle ABC$ нинг Q даги проекцияси $\triangle A_1B_1C_1$ ҳосил бўлади. Энди AB орқали $\triangle ABD \parallel \triangle A_1B_1C_1$ ни ўтказамиз, у ҳолда $\triangle ABD = \triangle A_1B_1C_1$ бўлади. AB орқали CC_1 га перпендикуляр текислик ўтказамиз; $DF \perp AB$ ва $CF \perp AB$. Расмдан $\triangle A_1B_1C_{1\,\text{юзи}} = \triangle ABD_{\text{юзи}} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot DF$; $\triangle CFD$ дан: $DF = CF\cdot\cos\varphi$. Бу ҳолда, $\triangle A_1B_1C_{1\text{юзи}} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CF \cdot \cos\varphi$. Аммо, $\triangle ABC_{\text{юзи}} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CF$ дир. Шунинг учун: $(\triangle ABC_{\text{юзи}})_{\text{пр}} = \triangle A_1B_1C_{1\text{юзи}} = \triangle ABC_{\text{юзи}} \cdot \cos\varphi$ (318- расм).

Демак, *бирор геометрик шакл юзининг бирор текисликка проекцияси, у шакл юзи билан унинг проекцияси орасидаги бурчак косинуси кўпайтмасига тенг*[1]



317- расм,



318- расм.

26- §. ГЕОМЕТРИЯ МАСАЛАЛАРИГА ТРИГОНОМЕТРИЯНИНГ ТАТБИҚИ

Тригонометрия, ҳар хил геометрик шаклларнинг элементларини ҳисоблашга доир масалаларни ечишга татбиқ қилинади. Буни биз қуйидаги масалалардан яққол кўрамиз.

1- масала. Тенг ёнли трапециянинг асослари 28 *см* ва 20 *см*, ён томони билан катта асоси орасидаги бурчак 32°. Шу трапециянинг юзи ва ён томони топилсин.

Ечиш. $AD = 28$ *см*, $BC = 20$ *см* ва $\angle ADC = 32°$ бўлсин. $S_{\text{тр}}$ ва $AB = CD$ ни топамиз (319- расм). $CE \perp AD$ ни туширамиз, бу ҳолда $ED = \frac{AD - BC}{2} = \frac{28 - 20}{2} = 4$ *см*; $\triangle CED$ дан: $CE = ED \operatorname{tg} \angle D = 4 \cdot \operatorname{tg} 32° = 4 \cdot 0{,}6249 = 2{,}4996 \approx 2{,}5$ (*см*).

$$CD = \frac{ED}{\cos\angle D} = \frac{4}{\cos 32°} = \frac{4}{0{,}848} = 4{,}7 \ (\text{см}).$$

$$S_{\text{тр}} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CE = \frac{(28 + 20)}{2} \cdot 2{,}5 = 24 \cdot 2{,}5 = 60 \quad (\text{см}^2).$$

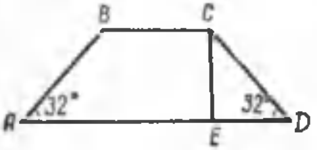
2- масала. Радиуси R бўлган доирада икки параллел ватар ўтказилган, уларнинг ҳар бири α градусли ёйга тиралган. Доиранинг ватарлар орасидаги бўлагининг юзи топилсин.

Ечиш. Радиуси R бўлган доира чизамиз (320- расм). $(ABCD)_{\text{юзи}} = \pi R^2 - 2 \cdot (AEB_{\text{сег}\cdot\text{юзи}})$ экани расмдан кўринади.

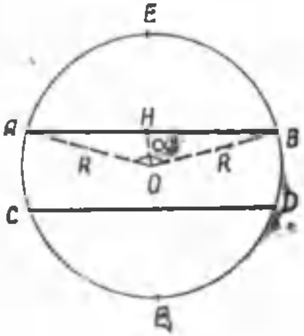
---

[1] Шаклнинг юзи ўрнига жисмнинг ҳажми олиниши ҳам мумкин.

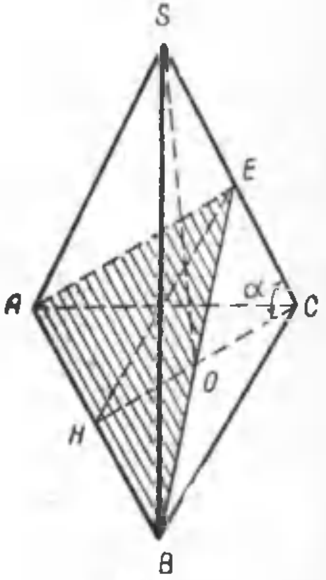
$AEB_{\text{сег. юзи}} = CE_1D_{\text{сег. юзи}}$; $\overset{\frown}{AEB} = \overset{\frown}{CE_1D} = \alpha^\circ$ ва $OB = OA = R$; $\angle AOB = \alpha$, чунки марказий бурчак; $OAEBO_{\text{сектор юзи}} = \frac{\pi R^2\alpha}{360}$; $\angle A = \angle B = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$; $\triangle AOB_{\text{юзи}} = \frac{1}{2}\, AB \cdot OH$. Аммо $\triangle AOH$ дан: $OH = R \sin A = R \sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = R\cos\frac{\alpha}{2}$; $AB = 2R\cos\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 2R \sin\frac{\alpha}{2}$. Бу ҳолда, $\triangle AOB_{\text{юзи}} = \frac{1}{2} \cdot 2R\sin\frac{\alpha}{2} \cdot R\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{R^2}{2}\sin\alpha$ бўлади.



319 -расм.



320- расм.



321- расм.

Энди, $AEB_{\text{сег-юзи}} = AEBO_{\text{сектор юзи}} - \triangle AOB_{\text{юзи}} = \frac{\pi R^2\alpha}{360} - \frac{R^2}{2}\sin\alpha = \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right)$. Буни ўрнига қўйсак: $(ABCD_{\text{юзи}}) = \pi R^2 - 2 \cdot \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right) = R^2\left[\pi\left(1 - \frac{\alpha}{180}\right) + \sin\alpha\right]$.

3- масала. Мунтазам уч бурчакли пирамида асосининг томони a га тенг, ён қирраси асос текислиги билан α бурчак ясайди. Асоснинг бир томони билан ён қирранинг ўртасидан ўтган кесимнинг юзи топилсин (321- расм).

Ечиш. $SABC$ пирамидада $\angle OCS = \alpha$, $AB = AC = BC = a$ берилган; кесим $\triangle AEB_{\text{юзи}} = ?$ $CE = SE$; $AH = BH$. $\triangle CBH$ дан:

$CH=\sqrt{BC^2-BH^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$; $CH=\frac{\sqrt{3}}{2}a$. SO — баландлик. $CO=\frac{2}{3}CH=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{a}{\sqrt{3}}$. $\triangle SOC$ дан: $2\cdot CE=CS=$ $=\frac{OC}{\cos\alpha}=\frac{a}{\sqrt{3}\cos\alpha}$; $CE=\frac{a}{2\sqrt{3}\cos\alpha}$; $\triangle EHC$ дан, косинуслар теоремасига асосан:

$$HE=\sqrt{CH^2+CE^2-2\,CE\cdot CH\cos\alpha}=\frac{a}{2\sqrt{3}}\sqrt{\sec^2\alpha+3}=$$

$$=\frac{a}{2\sqrt{3}}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha+3}=\frac{a}{2\sqrt{3}}\sqrt{4+\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

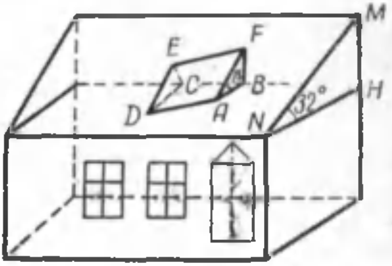
Энди кесим $\triangle AEB_{юзи}=\frac{1}{2}AB\cdot HE=\frac{1}{2}a\cdot\frac{a}{2\sqrt{3}}\sqrt{4+\operatorname{tg}^2\alpha}=$

$$=\frac{a^2}{4\sqrt{3}}\sqrt{4+\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Демак, кесим $\triangle ABE_{юзи}=\frac{a^2}{4\sqrt{3}}\sqrt{4+\operatorname{tg}^2\alpha}.$

4-масала. Томнинг труба ўтадиган тешигининг юзи 2100 *см*^{2}. Томнинг қиялик бурчаги 32°. Труба призма шаклида. Призма асосининг томони топилсин (322- расм).

Ечиш. $(ADEF_{юзи})=2100$ *см*^{2} ва $\angle MNH=\angle BAF=32°$ берилган. $AB=BC=CD=$ $=AD=$? $ABCD_{юз}$, $AFED$ юзнинг проекциясидир. Шунинг учун $(ABCD_{юзи})=(AFED_{юзи})\cdot$ $\cdot\cos\angle FAB$ ёки $(AB)^2=2100\cdot$ $\cdot\cos 32°=2100\cdot 0{,}848=21\cdot$ $\cdot 84{,}8=1780{,}8$ $(см^2)$. Бундан: $AB=\sqrt{1780{,}8}\approx 42{,}2$ *см*; $AB=$ $=42{,}2$ *см*.



322- расм.

5-масала. Тўғри параллелепипеднинг асоси—ромб, ромбнинг кичик диагонали d га, ўткир бурчаги α га тенг. Параллелепипеднинг баландлиги $\frac{d}{2}$; унинг бутун сирти топилсин (323- расм).

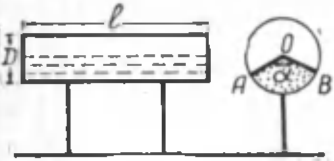
Ечиш. $\angle BAD=\angle BCD=\alpha$; $BD=d$ берилган. $S=$? $\triangle BAO$ дан: $AB=\frac{OB}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{d}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. У ҳолда: $S_{ён}=4\cdot AB\cdot AA_1=$ $=4\cdot\frac{d}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{d}{2}=\frac{d^2}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. $\triangle AOB$ дан: $OA=OB\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{d}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$;

3) Мунтазам тўрт бурчакли пирамиданинг баландлиги 7 *см*, асосининг томони 8 *см*. Ён қирраси асос текислигига қандай бурчак остида қияланган?

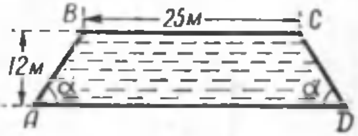
Жавоб. 51°3′.

4) Трапециянинг асослари 25 *см* ва 15 *см*, бир ён томони 12 *см*; у томон билан катта асос орасидаги бурчак 50°. Трапециянинг юзи топилсин.

Жавоб. $S_{\text{тр}} = 183{,}8$ *см*².



326- расм.



327- расм.

5) Ярим айлана 4:7 нисбатда бўлинган ва бўлиниш нуқтасидан диаметрга перпендикуляр ўтказилган. Агар диаметрнинг узунлиги 11 *см* бўлса, унинг кесмалари топилсин.

Жавоб. 3,215 *см* ва 7, 78 *см*.

6) 327- расмда темир йўл остига ётқизилган тупроқ уюмининг кесими берилган (α бурчак, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$ билан аниқланади). 1 метр узунликдаги йўлга неча куб метр тупроқ тўғри келади?

$\angle BAD = \angle CDA = \alpha$, $BC = 25$ *м* ва $BE = 12$ *м* берилган. Ҳажм V топилсин?

Жавоб. $V = 516$ *м*³.

7) Уч бурчакли пирамида асосининг томонлари 13 *см*, 14 *см* ва 15 *см* бўлиб, ён ёқлари асос текислиги билан 45° бурчак ҳосил қилади. Пирамиданинг тўлиқ сирти топилсин.

Жавоб. $84\cdot(1+\sqrt{2})$ *см*².

8) Пирамиданинг асоси, томони a, ўткир бурчаги α бўлган ромбдан иборат. Ён ёғини асос текислиги билан ташкил қилган бурчаги β га тенг. Пирамиданинг ҳажми ва тўлиқ сирти топилсин. ($a = 25{,}3$; $\alpha = 50°25'$; $\beta = 35°17'$).

Жавоб. $V = \frac{1}{6}a^3 \operatorname{tg}\beta \sin^2\alpha$; $S_{\text{тўлиқ}} = \frac{2a^2 \sin\alpha \cos^2\frac{\beta}{2}}{\cos\beta}$.

27- §. ТРИГОНОМЕТРИЯДА УЧРАЙДИГАН ФОРМУЛАЛАР ЖАДВАЛИ

$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \beta^\circ}$ —градусдан радианга ўтиш формуласи, α—радиан; β — градус. Аксинча, $\beta^\circ = \frac{180^\circ \alpha}{\pi}$ —радиандан градусга ўтиш формуласи.

Келтириш формулалари

$$\begin{aligned}
&\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha\\
&\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha\\
&\mathrm{tg}(90^\circ - \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha\\
&\mathrm{ctg}(90^\circ - \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha\\
&\sec(90^\circ - \alpha) = \mathrm{cosec}\,\alpha\\
&\mathrm{cosec}(90^\circ - \alpha) = \sec\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha\\
&\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha\\
&\mathrm{tg}(90^\circ + \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha\\
&\mathrm{ctg}(90^\circ + \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha\\
&\sec(90^\circ + \alpha) = -\mathrm{cosec}\,\alpha\\
&\mathrm{cosec}(90^\circ + \alpha) = \sec\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha\\
&\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha\\
&\mathrm{tg}(180^\circ - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha\\
&\mathrm{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha\\
&\sec(180^\circ - \alpha) = -\sec\alpha\\
&\mathrm{cosec}(180^\circ - \alpha) = \mathrm{cosec}\,\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha\\
&\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha\\
&\mathrm{tg}(180^\circ + \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha\\
&\mathrm{ctg}(180^\circ + \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha\\
&\sec(180^\circ + \alpha) = -\sec\alpha\\
&\mathrm{cosec}(180^\circ + \alpha) = -\mathrm{cosec}\,\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos\alpha\\
&\cos(270^\circ - \alpha) = -\sin\alpha\\
&\mathrm{tg}(270^\circ - \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha\\
&\mathrm{ctg}(270^\circ - \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha\\
&\sec(270^\circ - \alpha) = -\mathrm{cosec}\,\alpha\\
&\mathrm{cosec}(270^\circ - \alpha) = -\sec\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sin(270^\circ + \alpha) = -\cos\alpha\\
&\cos(270^\circ + \alpha) = \sin\alpha\\
&\mathrm{tg}(270^\circ + \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha\\
&\mathrm{ctg}(270^\circ + \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha\\
&\sec(270^\circ + \alpha) = \mathrm{cosec}\,\alpha\\
&\mathrm{cosec}(270^\circ + \alpha) = -\sec\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin\alpha\\
&\cos(360^\circ - \alpha) = \cos\alpha\\
&\mathrm{tg}(360^\circ - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha\\
&\mathrm{ctg}(360^\circ - \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha\\
&\sec(360^\circ - \alpha) = \sec\alpha\\
&\mathrm{cosec}(360^\circ - \alpha) = -\mathrm{cosec}\,\alpha
\end{aligned}$$

Асосий тригонометрик айниятлар (яъни бир бурчак тригонометрик функциялари орасидаги муносабатлар)

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;\ \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\ \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};\ \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha};$$

$$\mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha};\ 1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha;\ 1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \mathrm{cosec}^2\,\alpha;\ \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1.$$

Икки бурчак йиғиндиси ва айирмасининг тригонометрик функциялари

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta;\quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;$$

мисоллар ечиш, ечилган мисолларни анализ қилиш йўли билан бойитилади. Қуйида биз бир неча айниятларни исбот қилиб берамиз.

1- мисол. $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=2\,\mathrm{ctg}\,\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ айният исботлансин.

Исбот. $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1+\cos\alpha-1+\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}=$

$$=\frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha}=2\,\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

2- мисол. $\frac{1+\mathrm{tg}^4\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha}=\mathrm{tg}^2\alpha$ айният исботлансин.

Исбот. $\frac{1+\mathrm{tg}^4\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha}=\frac{1+\mathrm{tg}^4\alpha}{\frac{\mathrm{tg}^4\alpha+1}{\mathrm{tg}^2\alpha}}=\mathrm{tg}^2\alpha.$

3- мисол. $(1+\mathrm{ctg}\,\alpha)^2+(1-\mathrm{ctg}\,\alpha)^2=2\,\mathrm{cosec}^2\alpha$ айниятни исботланг.

Исбот. $(1+\mathrm{ctg}\,\alpha)^2+(1-\mathrm{ctg}\,\alpha)^2=1+2\,\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha+1-$

$$-2\,\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha=2\,(1+\mathrm{ctg}^2\alpha)=2\,\mathrm{cosec}^2\alpha.$$

4- мисол. $\mathrm{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\mathrm{ctg}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$ айният исбот қилинсин.

Исбот. $\mathrm{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}-\cos^2\alpha=\cos^2\alpha\cdot\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}=$

$$=\cos^2\alpha\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\mathrm{ctg}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha.$$

5- мисол. $\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}\left(\alpha\neq\frac{\pi}{4}+n\pi,\alpha\neq\frac{\pi}{2}+n\pi\right)$ айният исбот қилинсин.

Исбот. $\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}.$

6- мисол. $\sin^3\alpha\,(1+\mathrm{ctg}\,\alpha)+\cos^3\alpha\,(1+\mathrm{tg}\,\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha$ айният исбот қилинсин.

Исбот. $\sin^3\alpha\,(1+\mathrm{ctg}\,\alpha)+\cos^3\alpha(1+\mathrm{tg}\,\alpha)=\sin^3\alpha\left(1+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}\right)+$ $+\cos^3\alpha\,(1+\mathrm{tg}\,\alpha)=(1+\mathrm{tg}\,\alpha)\left(\frac{\sin^3\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha}+\cos^3\alpha\right)=\left(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)\cdot(\cos\alpha\cdot$ $\cdot\sin^2\alpha+\cos^3\alpha)=(\cos\alpha+\sin\alpha)\cdot(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha.$

7- мисол. $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ айният исбот қилинсин.

Исбот. $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=(\sin^2\alpha)^3+(\cos^2\alpha)^3=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\cdot$ $\cdot(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)=\sin^2\alpha\,(1-\cos^2\alpha)-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+$ $+\cos^2\alpha\,(1-\sin^2\alpha)=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$[1].

---

[1] 7- мисолни, $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ тенгликнинг икки томонини кубга кўтариб исботлаш ҳам мумкин.

8- мисол. $3(\sin^4\beta+\cos^4\beta)-2(\sin^6\beta+\cos^6\beta)=1$ айният исботлансин.

Исбот. $3(\sin^4\beta+\cos^4\beta)-2(\sin^6\beta+\cos^6\beta)=3\sin^4\beta+$ $+3\cos^4\beta-2[(\sin^2\beta)^3+(\cos^2\beta)^3]=3\sin^4\beta+3\cos^4\beta-2(\sin^2\beta+$ $+\cos^2\beta)(\sin^4\beta-\sin^2\beta\cos^2\beta+\cos^4\beta)=\sin^4\beta+2\sin^2\beta\cos^2\beta+\cos^4\beta=$ $=(\sin^2\beta+\cos^2\beta)^2=1^2=1.$

9- мисол. $\frac{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha}=2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha$ айният исбот қилинсин.

Исбот. $\frac{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha}=$

$$=\frac{\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)+\cos^2\alpha(1-\cos^2\alpha)}{\cos^4\alpha}=\frac{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha}=$$

$$=\frac{2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha.$$

10- мисол. $\frac{\sin(360^\circ-\alpha)\,\mathrm{tg}(90^\circ+\alpha)\,\mathrm{ctg}(270^\circ-\alpha)}{\cos(360^\circ+\alpha)\,\mathrm{tg}(180^\circ+\alpha)}=1$ айният исбот қилинсин.

Исбот. $\frac{\sin(360^\circ-\alpha)\,\mathrm{tg}(90^\circ+\alpha)\,\mathrm{ctg}(270^\circ-\alpha)}{\cos(360^\circ+\alpha)\,\mathrm{tg}(180^\circ+\alpha)}=\frac{-\sin\alpha(-\mathrm{ctg}\,\alpha)\mathrm{tg}\,\alpha}{\cos\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\alpha}=$

$$=\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha}{\mathrm{ctg}\,\alpha}=1.$$

11- мисол.

$$\frac{\sin^2(-212^\circ)\cos 302^\circ+\cos^3(-148^\circ)}{\sin(-82^\circ)\cos(-8^\circ)+\sin 368^\circ\sin(-172^\circ)-\sin 58^\circ\sin 148^\circ}=$$

$=\cos 32^\circ-\sin 32^\circ$ айният исбот қилинсин.

Исбот. $\frac{\sin^2(-212^\circ)\cdot\cos 302^\circ+\cos^3(-148^\circ)}{\sin(-82^\circ)\cos(-8^\circ)+\sin 368^\circ\sin(-172^\circ)-\sin 58^\circ\sin 148^\circ}=$

$$=\frac{[-\sin(180^\circ+32^\circ)]^2\cos(270^\circ+32^\circ)+[\cos(180^\circ-32^\circ)]^3}{\sin(90^\circ-8^\circ)\cos 8^\circ+\sin(360^\circ+8^\circ)[-\sin(180^\circ-8^\circ)]-\sin(90^\circ-32^\circ)\sin(180^\circ-32^\circ)}=$$

$$=\frac{\sin^2 32^\circ\sin 32^\circ+(-\cos 32^\circ)^3}{-\cos 8^\circ\cdot\cos 8^\circ-\sin 8^\circ\cdot\sin 8^\circ-\cos 32^\circ\cdot\sin 32^\circ}=$$

$$=\frac{\sin^3 32^\circ-\cos^3 32^\circ}{-(\cos^2 8^\circ+\sin^2 8^\circ)-\sin 32^\circ\cos 32^\circ}=$$

$$=\frac{(\cos 32^\circ-\sin 32^\circ)(\cos^2 32^\circ+\sin^2 32^\circ\cos 32^\circ+\sin^2 32^\circ)}{1+\sin 32^\circ\cos 32^\circ}=$$

$$=\frac{(\cos 32^\circ-\sin 32^\circ)(1+\sin 32^\circ\cos 32^\circ)}{1+\sin 32^\circ\cos 32^\circ}=\cos 32^\circ-\sin 32^\circ.$$

12- мисол. $\sin(\alpha+30^\circ)-\sin(\alpha-30^\circ)=\cos\alpha$ айният исбот қилинсин.

Исбот. $\sin(\alpha+30^\circ)-\sin(\alpha-30^\circ)=\sin\alpha\cdot\cos 30+$ $+\cos\alpha\sin 30^\circ-\sin\alpha\cos 30^\circ+\cos\alpha\sin 30^\circ=2\cos\alpha\cdot\frac{1}{2}=\cos\alpha.$

13- мисол. $\frac{\sin(\alpha+\beta)-2\sin\alpha\cos\beta}{2\sin\alpha\sin\beta+\cos(\alpha+\beta)}=\mathrm{tg}(\beta-\alpha)$ айният исбот қилинсин.

22- мисол. $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}=\operatorname{tg} 3\alpha$ айният исбот қилинсин.

Исбот. $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}=\frac{(\sin\alpha+\sin 5\alpha)+\sin 3\alpha}{(\cos\alpha+\cos 5\alpha)+\cos 3\alpha}=$

$$=\frac{2\sin 3\alpha\cos 2\alpha+\sin 3\alpha}{2\cos 3\alpha\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}=\frac{(1+2\cos 2\alpha)\sin 3\alpha}{(2\cos 2\alpha+1)\cos 3\alpha}=\frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha}=\operatorname{tg} 3\alpha.$$

23- мисол. $\frac{\cos\alpha-\cos 3\alpha+\cos 5\alpha-\cos 7\alpha}{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$ айният исбот қилинсин.

Исбот. $\frac{\cos\alpha-\cos 3\alpha+\cos 5\alpha-\cos 7\alpha}{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}=$

$$=\frac{(\cos\alpha-\cos 7\alpha)+(\cos 5\alpha-\cos 3\alpha)}{(\sin\alpha+\sin 7\alpha)+(\sin 5\alpha+\sin 3\alpha)}=\frac{2\sin 4\alpha\sin 3\alpha-2\sin 4\alpha\sin\alpha}{2\sin 4\alpha\cos(-3\alpha)+2\sin 4\alpha\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\sin 3\alpha-\sin\alpha}{\cos 3\alpha+\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cdot\cos 2\alpha}{2\cos 2\alpha\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$$

24- мисол. $\frac{\left(\cos\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\sin\alpha+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$ айният исбот қилинсин.

Исбот. $\frac{\left(\cos\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\sin\alpha+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=$

$$=\frac{\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(2\cos\frac{\alpha}{2}+1\right)^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\left[\left(2\cos\frac{\alpha}{2}+1\right)\cos\frac{\alpha}{2}-1\right]^2+\left(2\cos\frac{\alpha}{2}+1\right)^2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\left(2\cos\frac{\alpha}{2}+1\right)^2\cos^2\frac{\alpha}{2}-2\left(2\cos\frac{\alpha}{2}+1\right)\cos\frac{\alpha}{2}+1+\left(2\cos\frac{\alpha}{2}+1\right)^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\left(2\cos\frac{\alpha}{2}+1\right)^2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)-2\left(2\cos\frac{\alpha}{2}+1\right)\cos\frac{\alpha}{2}+1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\left(2\cos\frac{\alpha}{2}+1\right)\left(2\cos\frac{\alpha}{2}+1-2\cos\frac{\alpha}{2}\right)+1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\left(1+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{4}}{2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}}=\frac{\cos\frac{\alpha}{4}}{\sin\frac{\alpha}{4}}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$$

а) Баъзи тригонометрик ифодаларни соддалаштириш, қийматини ҳисоблаш.

25- мисол. $\frac{\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)+\cos\alpha\sin\beta}=$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta+\cos\alpha\sin\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\cos\beta}=1.$$

26- мисол. $\frac{\cos 65^\circ\cos 40^\circ+\sin 65^\circ\sin 40^\circ}{\sin 37^\circ\cos 12^\circ-\cos 37^\circ\sin 12^\circ}=\frac{\cos(65^\circ-40^\circ)}{\sin(37^\circ-12^\circ)}=$

$$=\frac{\cos 25^\circ}{\sin 25^\circ}=\operatorname{ctg}25^\circ.$$

27- мисол. $\sin 22^\circ+\sin 50^\circ\cos 28^\circ-\cos 50^\circ\sin 28^\circ=\sin 22^\circ+$ $+\sin(50^\circ-28^\circ)=\sin 22^\circ+\sin 22^\circ=2\sin 22^\circ$.

28- мисол. $\cos(50^\circ+\alpha)\cos(26^\circ+\alpha)-\sin(50^\circ+\alpha)\sin(26^\circ+$ $+\alpha)=\cos(50^\circ+\alpha+26^\circ+\alpha)=\cos(76^\circ+2\alpha)$.

29-мисол. $\frac{\cos(-150^\circ)}{\cos 330^\circ}-\frac{\operatorname{tg}150^\circ\cdot\sin 300^\circ}{\cos 360^\circ}+\cos(-240^\circ)\cdot\operatorname{ctg}120^\circ=$

$$=\frac{\cos(90^\circ+60^\circ)}{\cos(360^\circ-30^\circ)}-\frac{\operatorname{tg}(90^\circ+60^\circ)\sin(360^\circ-60^\circ)}{1}+$$

$$+\cos(270^\circ-30^\circ)\operatorname{ctg}(180^\circ-60^\circ)=\frac{-\sin 60^\circ}{\cos 30^\circ}+\operatorname{ctg}60^\circ\cdot(-\sin 60^\circ)-$$

$$-\sin 30^\circ\cdot(-\operatorname{ctg}60^\circ)=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-9}{6}.$$

30- мисол. $\frac{\sin 160^\circ\cdot\cos 70^\circ-\cos 200^\circ\cdot\sin 70^\circ-\cos 235^\circ\cdot\sin 215^\circ}{\operatorname{tg}55^\circ\cdot\operatorname{ctg}215^\circ}=$

$$=\frac{\sin(90^\circ+70^\circ)\cos 70^\circ-\sin 70^\circ\cos(270^\circ-70^\circ)-\cos(180^\circ+55^\circ)\sin(270^\circ-55^\circ)}{\operatorname{tg}55^\circ\cdot\operatorname{ctg}(270^\circ-55^\circ)}=$$

$$=\frac{\cos^2 70^\circ+\sin^2 70^\circ+\cos 55^\circ(-\cos 55^\circ)}{\operatorname{tg}55^\circ\cdot\operatorname{tg}55^\circ}=\frac{1-\cos^2 55^\circ}{\operatorname{tg}^2 55^\circ}=$$

$$=\frac{\sin^2 55^\circ}{\frac{\sin^2 55^\circ}{\cos^2 55^\circ}}=\cos^2 55^\circ.$$

3. $\lg 2 + \lg (2^{2x-4} + 9) = 1 + \lg (2^{x-2} + 1)$ логарифмик тенглама ечилсин. (Жавоб. $x_1 = 2$; $x_2 = 4$.)

4. $x^{2(\lg x)^2 - \frac{3}{2}\lg x} = \sqrt{10}$ кўрсаткичли тенглама ечилсин. (Жавоб. $x_1 = 10$; $x_2 = 0{,}1$.)

5. $\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + 4\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ ифода соддалаштирилсин. (Жавоб. $4x$.)

6. $\left(6a + \frac{a}{a-2} - \frac{a}{a+2}\right) : \frac{4a}{a^4 - 2a^3 + 8a - 10}$ ифода соддалаштирилсин ва $a = -2{,}5$ қийматда ҳисоблансин. $\left(\text{Жавоб.} -\frac{595}{36}.\right)$

7. $(a + b^{\frac{3}{2}} : \sqrt{a})^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}\right)^{-\frac{1}{2}}$ ифода соддалаштирилсин.

8. $\log_3 (3^x - 1) \cdot \log_3 (3^{x+1} - 3) = 6$ логарифмик тенглама ечилсин. (Жавоб. $x_1 = \log_3 28 - 3$ ва $x_2 = \log_3 10$.)

9. $\log_{11} \log_8 \log_2 \frac{2}{1-x} = 0$ логарифмик тенглама ечилсин. $\left(\text{Жавоб. } x = \frac{3}{4}.\right)$

10. $\begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{5}{y} = \frac{31}{15}, \\ \frac{5}{x} + \frac{y}{5} = \frac{31}{10} \end{cases}$ система ечилсин. (Жавоб: $x = 2$; $y = 3$.)

11. $x = 1 - \sqrt{1 - x\sqrt{16 + x^2}}$ *иррационал тенглама ечилсин.* (Жавоб. $x = -3$.)

12. $\begin{cases} 2^{x+y+5} = 8, \\ 4^{2x^2+3y+4} = 1 \end{cases}$ система ечилсин. $\left(\text{Жавоб. } x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = 2,\ y_1 = -\frac{3}{2},\ y_2 = -4.\right)$

13. $\begin{cases} \log_{12} x \cdot \left(\frac{1}{\log_x 2} + \log_2 y\right) = \log_2 x, \\ \log_2 x \cdot \log_3 (x + y) = 3\log_3 x \end{cases}$ система ечилсин. (Жавоб. $x = 1$, $y = 7$ ва 12.)

14. $\begin{cases} \sqrt[x-y]{x + y} = 2\sqrt{3}, \\ (x + y) \cdot 2^{y-x} = \frac{1}{\log_{\frac{1}{8}} (2^{-1})} \end{cases}$ система ечилсин. $\left(\text{Жавоб. } x = -\frac{23}{24},\ y = \frac{25}{24}.\right)$

15. $\log_{\frac{b}{a}} x = \frac{\log_b x \cdot \log_a x}{\log_a x - \log_b x}$ ифоданинг айниятлиги исботлансин.

16. $\dfrac{\frac{1}{4}\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{-\frac{3}{4}}\cdot\frac{2a}{(a-b)^2}}{\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{1}{4}}}-\dfrac{1}{2a}\cdot\dfrac{1}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$ ифода соддалаштирилсин ва $a=1{,}2$; $b=0{,}4$ қийматларда ҳисоблансин. (Жавоб $\dfrac{ab^2}{a^4-b^4}$.)

17. $(1+\log_c a)\log_a x\cdot\log_b c=\log_b x\cdot\log_c x\cdot\log_a c$ тенглама ечилсин.

(Жавоб. 1; $a\cdot c$.)

18. Геометрик прогрессия ташкил қилувчи тўртта соннинг биринчисидан 2, иккинчисидан 1, учинчисидан 7, тўртинчисидан 27 айирилса, ҳосил бўлган сонлар арифметик прогрессия ташкил қилади. Шу сонлар топилсин.

(Жавоб. 7; 14; 28; 56.)

Геометриядан

19. Кичик диагонали 7 *см*, асосининг томонлари $2\sqrt{2}$ *см* ва 5 *см*, улар орасидаги бурчак эса 45 бўлган тўғри параллелепипеднинг ҳажми топилсин.

20. Тўғри призманинг асоси ромбдан иборат. Ромбнинг ўткир бурчаги α, кичик диагонали эса d га тенг бўлиб, призманинг кичик диагонали билан β бурчак ташкил қилади. Шу призманинг ҳажми топилсин.

21. Агар конуснинг ҳажми $16\,\pi$ *см*^{3} бўлиб, учидаги бурчаги 60° бўлса, унинг тўла сирти топилсин.

22. Мунтазам уч бурчакли пирамида учидаги текис бурчаги α, пирамида асосига ташқи чизилган айлана узунлиги C га тенг. Шу пирамиданинг сирти топилсин.

23. Баландлиги $h=6$ *м*, асос томони $a=8$ *см* бўлган мунтазам саккиз бурчакли призманинг тўла сирти ва ҳажми топилсин.

24. Тўғри призманинг асоси мунтазам учбурчакдан иборат бўлиб, асосга ички чизилган айлананинг радиуси $r=2$ *м*, призманинг баландлиги эса, айланага ташқи чизилган мунтазам олтибурчакнинг томонига тенг. Шу призманинг тўла сирти ва ҳажми топилсин.

25. Асос томонлари 6 *см* ва 15 *см* бўлган тўғри тўртбурчакдан иборат пирамиданинг баландлиги асос диагоналларининг кесишиш нуқтаси орқали ўтади. Ён сирти 126 *см*^{2} га тенг. Шу пирамиданинг ҳажми топилсин.

26. Конуснинг ясовчиси l га тенг, у асос текислиги билан α бурчак ташкил қилади. Шу конусга ички чизилган шар ҳажми топилсин.

(Жавоб. $\frac{4}{3}\pi l^3\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^3\alpha$.)

27. $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ айният исботлансин.

28. $\cos 3x-\sin x=\sqrt{3}(\cos x-\sin 3x)$ тригонометрик тенглама ечилсин.

29. $\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin 2\alpha}{4}$ айният исботлансин.

30. $(1+\cos 4x)\sin 2x=\cos^2 2x$ тригонометрик тенглама ечилсин.

31. $1-\sin 3x=\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2$ тригонометрик тенглама ечилсин.

32. $\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 8x=\frac{1}{4}\sin 12x$ тригонометрик тенглама ечилсин.

33. $\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x=\frac{\cos x-\sin x}{\frac{1}{2}\sin 2x}$ айният исботлансин.

34. $\cos 3x-\sin 3x=0$ тригонометрик тенглама ечилсин.

35. $(1+\sin x)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=\sec x-\cos x$ тригонометрик тенглама ечилсин.

36. $1+\cos 6x=32\cos^6 x$ тригонометрик тенглама ечилсин.
[Жавоб. $x_1=(2k+1)\frac{\pi}{2}$; $x_2=\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+k\pi$.]

Кўрсатма: $\cos 6x=4\cos^3 2x-3\cos 2x$ ва $\cos^6 x=(\cos^2 x)^3=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3$ лардан фойдаланилса тенглама қулай ечилади.

37. $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x+\sin^2 4x$ тригонометрик тенглама ечилсин. (Жавоб. $x=\pm\frac{2k+1}{2}\pi$ ва $x=\frac{k\pi}{5}$.)

Кўрсатма: Тенгламанинг ҳар бир ҳадига $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ формула қўлланилса, қулай ечилади.

38. $\begin{cases}\sin x+\sin y=\sin(x+y)\\ |x|+|y|=1\end{cases}$ система ечилсин.

(Жавоб. $x_1=\frac{1}{2}$, $y_1=\frac{1}{2}$; $x_2=-\frac{1}{2}$; $y_2=\frac{1}{2}$; $x_3=1$, $y_3=0$; $x_4=-1$, $y_4=0$; $x_5=0$, $y_5=1$; $x_6=0$, $y_6=-1$.)

Кўрсатма: биринчи тенгламанинг чап томонига $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ ва ўнг томонига $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$ формулалари қўлланилса қулай ечилади.

Изоҳ. Лекин, имтиҳонларда бундай кўрсатмалар берилмайди.

Қуйида ёзма имтиҳонларда фойдаланилган мисол ва масалаларни ечимлари билан келтирамиз.

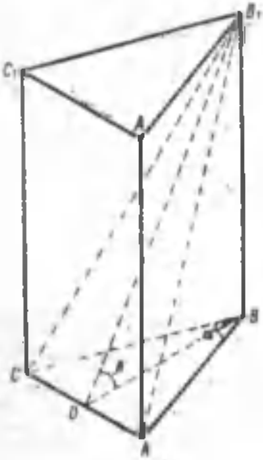
1-масала. Тўғри призманинг асоси тўғри бурчакли учбурчак, унинг катети билан гипотенузасининг йиғиндиси m га ва улар орасидаги бурчак α га тенг. Иккинчи катет ва унинг қаршисидаги призманинг уч ёқли бурчагининг учи орқали текислик ўтказилган. Шу текислик билан призманинг асоси орасидаги бурчак β га тенг. Призманинг ҳажми топилсин.

Ечиш. Масаланинг шартига кўра (328- расм):

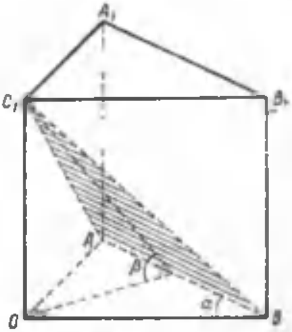
$$\angle ACB = 90^\circ,\ \angle ABC = \alpha;\ AB + BC = m \text{ ва } \angle BEB_1 = \beta.$$

$$V_{\text{пр}} = ?$$

$V_{\text{пр.}} = S_\Delta \cdot h$, бунда $S_\Delta = \triangle ABC_{\text{юзи}}$, $h = CC_1 = BB_1 = AA_1$; $\angle BCB_1 = \angle BEB_1 = \beta$ (икки ёқли бурчакнинг чизиқли бурчаклари бўлгани учун).



328- расм.



329- расм.

$\triangle BCB_1$ дан: $h = BB_1 = BC \cdot \operatorname{tg}\beta$; $\triangle ABC$ дан: $BC = AB \cdot \cos\alpha$; $AB = m - BC = m - AB \cdot \cos\alpha$, бундан $AB = \frac{m}{1 + \cos\alpha} = \frac{m}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$;

$$AC = AB\sin\alpha = \frac{m \cdot \sin\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{m\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = m\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2};\ S_\Delta = \triangle ABC_{\text{юзи}} =$$

$$= \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot m\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{m}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} \cdot \cos\alpha = \frac{m^2}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\ \frac{\cos\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} \text{ ва}$$

$h = \frac{m\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} \cdot \operatorname{tg}\beta$ бўлади.

Демак, $V_{\text{пр.}} = S_\Delta \cdot h = \frac{m^2}{4} \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\ \frac{m\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} \cdot \operatorname{tg}\beta =$

$$= \frac{m^3}{8} \cdot \frac{\cos^2\alpha \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\beta}{\cos^4\frac{\alpha}{2}}.$$

2-масала. *Тўғри призманинг асоси, гипотенузаси c ва ўткир бурчаги α га тенг бўлган тўғри бурчакли учбурчакдан иборат. Призма пастки асосининг гипотенузасидан ва юқори асосидаги тўғри бурчакнинг учидан ўтказилган текислик призма асос текислиги билан β бурчак ташкил қилади. Кесилиш натижасида ҳосил бўлган уч бурчакли пирамиданинг ҳажми топилсин.*

Ечиш. Масаланинг шартига кўра (329- расм): $\angle C = 90°$, $\angle ABC = \alpha$, $\angle CEC_1 = \beta$, $AB = c$ берилган.

$$V_{пир.} = ?\ V_{пир.} = \frac{1}{3} S_\Delta \cdot h;\ S_\Delta = \triangle ABC_{юзи},\ h = CC_1.$$

$S_\Delta = \triangle ABC_{юзи} = \frac{1}{2}\ AC \cdot BC$, аммо $AC = c \cdot \sin\alpha$, $BC = c \cdot \cos\alpha$. У ҳолда: $S_\Delta = \frac{c^2}{2}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{c^2}{4}\sin 2\alpha$. $\triangle CEC_1$ дан: $h = CC_1 = CE \operatorname{tg}\beta$, аммо $\triangle CEB$ дан: $CE = BC \cdot \sin\alpha = c\cos\alpha \cdot \sin\alpha = \frac{c}{2}\sin 2\alpha$. У ҳолда $h = \frac{c}{2}\sin 2\alpha \operatorname{tg}\beta$.

Демак, $V_{пир} = \frac{1}{3} \cdot \frac{c^2}{4}\sin 2\alpha \cdot \frac{c}{2}\sin 2\alpha \operatorname{tg}\beta = \frac{c^3}{24}\sin^2 2\alpha \operatorname{tg}\beta$.

3-масала. *Учбурчакнинг томонлари арифметик прогрессия ташкил қилади. Учбурчакнинг периметри 24 га тенг. Учбурчакнинг юзи топилсин.*

Ечиш. Томонлари a, b, c бўлган ихтиёрий учбурчак чизамиз (309- расм). Масаланинг шартига кўра $\div a, b, c$ ёки $\div b, a, c$ ёки $\div c, b, a$ арифметик прогрессияларни ёзиш мумкин. Буларнинг биринчисидан: $b - a = c - b$ ва берилганга кўра $a + b + c = 24$; булардан: $b = 8$. Шунга ўхшаш $a = c = 8$ бўлади. Энди, Герон формуласига асосан:

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24 \cdot 3 \cdot (24 - 8)} =$$
$$= 24\sqrt{2} \text{ кв./б—к.}$$

Жавоб. $24\sqrt{2}$ кв./б-к.

Мисоллар.

1. $\lg(x-2) + \lg(27-x) < 2$ тенгсизлик ечилсин.

Ечиш. $\lg(x-2) + \lg(27-x) = \lg(x-2)\cdot(27-x)$ ва $2 = \lg 100$. У ҳолда $\lg(x-2)\ (27-x) < \lg 100$, бундан $(x-2)\ (27-x) < 100$ ёки $x^2 - 29x + 154 > 0$. Энди бу ҳосил бўлган иккинчи даражали тўлиқ тенгсизликни ечамиз:

$$x^2 - 29x + 154 = 0 \text{ дан } x_{1,2} = \frac{29 \pm \sqrt{841 - 616}}{2} = \frac{29 \pm 15}{2},$$
$$x_1 = 7 \text{ ва } x_2 = 22.$$

Аммо, дискриминанти $b^2 - 4ac = 225 > 0$ ва $a > 0$ бўлгани учун, тенгсизликнинг ечими: $x < x_1 = 7$ ва $x > x_2 = 22$ бўлади.

2. $\cos(45^\circ+\alpha)+\cos(45^\circ-\alpha)=n$ берилган.

$$\cos^2(45^\circ+\alpha)+\cos^2(45^\circ-\alpha)=\,?$$

Ечиш. $n^2=[\cos(45^\circ+\alpha)+\cos(45^\circ-\alpha)]^2=\cos^2(45^\circ+\alpha)+\cos^2(45^\circ-\alpha)+2\cos(45^\circ+\alpha)\cos(45^\circ-\alpha)$.
Бундан $\cos^2(45^\circ+\alpha)+\cos^2(45^\circ-\alpha)=n^2-2\cos(45^\circ+\alpha)\cdot\cos(45^\circ-\alpha)=n^2-2(\cos 45^\circ\cos\alpha-\sin 45^\circ\sin\alpha)(\cos 45^\circ\cos\alpha+\sin 45^\circ\sin\alpha)=n^2-(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)=n^2-(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=n^2-\cos 2\alpha$.

3. $\cos^4 x-\cos^2 x+\sin^2 x$ ифоданинг энг катта қиймати топилсин.

Ечиш.

$$\cos^4 x-\cos^2 x+\sin^2 x=(\cos^2 x)^2-\cos 2x=\frac{(1+\cos 2x)^2}{4}-\cos 2x=$$
$$=\frac{1+2\cos 2x+\cos^2 2x-4\cos 2x}{4}=\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}=$$
$$=\frac{(1-\cos 2x)^2}{4}=\frac{4\sin^4 x}{4}=(\sin x)^4.$$

Демак, жавоб: $\sin(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$ бўлади ($k=0;\ 1;\ 2;\ \ldots$).

4. $\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}=7$ берилган. $\sin^2 2\alpha=\,?$

Ечиш. $7=\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+$

$$+\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha\,\cos^2\alpha}=\frac{\cos^4\alpha+\sin^4\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha\,\cos^2\alpha}=$$
$$=\frac{4(1+\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)}{\sin^2 2\alpha},$$

бундан: $\sin^2 2\alpha=\frac{4}{7}(1+\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)$ бўлади.

5. $4^{\frac{1}{x}}+6^{\frac{1}{x}}=9^{-\frac{1}{x}}$ тенглама ечилсин.

Ечиш. Тенгламанинг икки томонини $9^{-\frac{1}{x}}$ га бўлиб, қисқартирсак: $\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{x}}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{x}}=1$ ёки $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{x}}\right]^2+\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{x}}-1=0$,

бу эса, $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{x}}$ га нисбатан тўлиқ квадрат тенгламадир.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{x}}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2};$$

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{x}}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, бундан $-\frac{1}{x}\lg\frac{2}{3}=\lg\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, бу

мумкин эмас, чунки мусбат асосда, манфий соннинг логарифми бўлмайди.

2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{x}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, бундан $x = \frac{\lg\frac{3}{2}}{\lg\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

6. $5^{\lg x} - 3^{\lg x-1} = 3^{\lg x+1} - 5^{\lg x-1}$ тенглама ечилсин.

Ечиш. $5^{\lg x} - \frac{1}{3}\cdot 3^{\lg x} = 3^{\lg x}\cdot 3 - \frac{1}{5}\cdot 5^{\lg x}$, бундан: $\frac{6}{5}\cdot 5^{\lg x} = \frac{10}{3}\cdot 3^{\lg x}$ ёки $\left(\frac{5}{3}\right)^{\lg x} = \frac{25}{9} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$, бундан $\lg x = 2$, $x = 100$.

7. $5^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} = 10$ тенглама ечилсин.

Ечиш. Тенгламанинг чап томонидаги иккинчи ҳадни логарифмлаймиз:

$\log_5 (x^{\log_5 x}) = \log_5 x \cdot \log_5 x = \log^2{}_5 x$. Шундай қилиб берилган тенгламани $5^{\log_5 (x^{\log_5 x})} + x^{\log_5 x} = 10$ ёки $x^{\log_5 x} + x^{\log_5 x} = 10$, ёки $2x^{\log_5 x} = 10$ кўринишда ёза оламиз. $x^{\log_5 x} = 5$ нинг икки томонини 5 асосда логарифмлаймиз. $\log_5 (x^{\log_5 x}) = \log_5^2 x = 1$ ёки $\log_5^2 x = 1$, ёки $\log_5 x = \pm 1$; $x_1 = 5^1 = 5$; $x_2 = 5^{-1} = \frac{1}{5}$.

Изоҳ. Келтирилган бу мисол ва масалалар, Тошкент темир йўл институти, Тошкент қишлоқ хўжалигини ирригациялаш ва механизациялаш инженерлари институти, Тошкент политехника институти ва Тошкент алоқа институтига 1964/65 ва 1967 ўқув йилидаги кириш ёзма имтиҳонида фойдаланилган билетларидан олинган. Булардан ечилмаганларини ечиб кўришни китобхонга тавсия қиламиз.

30- §. ЎЛЧОВЛАР

1. Янги ўлчов бирликлари ҳақида тушунча

Янги халқаро бирлик система (СИ) 1963 йилнинг 1 январидан бошлаб қўлланила бошланди. Бу бирликлардан, кўпроқ математикага тегишли бўлганларинигина бу ерда беришга ҳаракат қиламиз.

(СИ) системадаги асосий бирликлардан: узунлик учун — метр (*м*), масса учун—килограмм (*кг*), вақт учун—секунд (*сек*) олинган.

Шу билан бирга, узунлик учун—метрнинг $\frac{1}{100}$ бўлаги — сантиметр (*см*), 1 *см* $= 0{,}01$ *м*; масса учун—килограммнинг $\frac{1}{1000}$ бўлаги—грамм (*г*), 1 *г* $= 0{,}001$ *кг* олинган.

Тезлик учун—сантиметр секунд (*см/сек*), 1 *см/сек* $= 10^{-2}$ *м/сек*; тезланиш учун—сантиметр секунд квадрат (*см/сек*^{2}) 1 *см/сек*^{2} $= 10^{-2}$ *м/сек*^{2}; юза (текис сатҳ) учун—сантиметр квадрат (*см*^{2}), 1 *см*^{2} $= 10^{-4}$ *м*^{2} олинган.

Ҳажм учун—сантиметр куб (*см*^{3}), 1 *см*$^3 = 10^{-6}$ *м*^{3}; зичлик учун—грамм сантиметр куб (*г*/*см*^{3}), 1 *г*/*см*$^3 = 10^{-3}$ *кг*/*м*^{3} олинган.

Қуйидаги сўзлар: кило (*к*)—1000 ни, гекто (*г*)—100 ни, дека (*да*)—10 ни, деци (*д*) $\frac{1}{10}$ ни, санти (*с*) $\frac{1}{100}$ ни, милли (*м*) $\frac{1}{1000}$ ни англатади.

а) Узунлик ўлчовлари[1]

Узунликнинг бирлик ўлчови метрдир.

Метр билан бир қаторда ундан катта ва кичик ўлчов бирликлари ҳам бор.

Узунлик ўлчов жадвали:

1 километр (*км*) = 10 гектометр (*гм*) = 1000 метр (*м*).
1 гектометр (*гм*) = 10 декаметр (*дкм*) = 100 метр.
1 декаметр (*дкм*) = 10 метр.
1 метр (*м*) = 10 дециметр (*дм*) = 100 сантиметр (*см*).
1 сантиметр (*см*) = 10 миллиметр (*мм*).
1 дюйм = 25,4 *мм*.

б) Юз ўлчовлари

Квадрат ўлчов жадвали:

1 *кв. км* = 100 *кв. гм*
1 *кв. гм* = 100 *кв. дкм*
1 *кв. дкм* = 100 *кв. м* = 1 *ар*
1 *кв. м* = 100 *кв. дм*
1 *кв. дм* = 100 *кв. см*
1 *кв. см* = 100 *кв. мм*

10 000 *кв. м* = гектар, яъни (1 *га* = 100 *ар* = 10 000 *кв. м*).

в) Ҳажм ўлчовлари

Ҳажм ўлчов жадвали:

1 куб *км* = 1000 *куб гм*
1 *куб гм* = 1000 *куб дкм*
1 *куб дкм* — 1000 *куб м*
1 *куб м* = 1000 *куб дм*
1 *куб дм* = 1000 *куб см*
1 *куб см* = 1000 *куб мм*
1 гектолитр (*гл*) = 100 литр
1 куб дециметр = 1 литр

г) Оғирлик ўлчовлари

Оғирликнинг ўлчов бирлиги — *килограммдир*. Килограмм билан бир қаторда ундан катта ва ундан кичик ўлчов бирликлари ҳам бордир.

1 *кг* — 1 *куб дециметр ҳажмдаги, Цельсий бўйича 4° иссиқликдаги тозаланган сувнинг оғирлигига тенг.*

---

[1] Ўлчовларда, турмушда ва фанда кўп ишлатиладиган сонларгина олинди; масалан, 1 йил—365,25 сутка олиш ўрнига, 365 сутка олинган ва шунга ўхшашлар.

Оғирлик ўлчови жадвали:
1 *кг* = 1000 грамм
1 *г* = 1000 миллиграмм
1 *ц* = 100 *кг*
1 *т* = 1000 *кг*
1 пуд = 16 *кг*, 9 *г*

д) Вақт ўлчовлари

Ернинг қуёш атрофида бир марта айланиб чиқиш вақтига йил деб аталади.

Йил вақтнинг ўлчов бирлиги дейилади. Ернинг ўз ўқи атрофида бир марта айланиб чиқиш вақтига сутка дейилади.

Вақт ўлчов жадвали:
(Оддий йил)
1 йил = 365 сутка
1 сутка = 24 соат
1 соат = 60 минут
1 минут = 60 секунд

ж) Машқлар.

1) 11, 2 *км* неча гектометр; неча декаметр; неча метр; неча сантиметр бўлади?

2) 235,25 *кв.* метр неча квадрат километр; неча *кв. гм*; неча *кв. дм*; неча *кв. см* бўлади?

3) 6,5 *куб км* неча куб метр; неча *куб гм*: неча *куб дм*; неча *куб см* бўлади?

4) 3961,24 *кг* неча тонна; неча центнер; неча грамм бўлади?

5) $3\frac{1}{3}$ йил неча кун, неча ой; неча сутка; неча соат; неча минут ва неча секунд бўлади?

31-§. МАТЕМАТИКА ФАНИ ҲАҚИДА ҚИСҚАЧА МАЪЛУМОТЛАР

Математика икки қисмга бўлинади: 1) элементар математика ва 2) олий математика. Элементар ва олий математика орасидаги чегара шартлидир. Элементар математикага: арифметика, элементар алгебра, элементар геометрия ва тригонометриялар киради, яъни буларнинг ҳаммаси биргаликда — элементар математика деб аталади. Алгебра икки қисмдан иборат: 1) элементар алгебра ва 2) олий алгебра.

Геометрия ҳам асосан, икки қисмдан иборат: 1) элементар геометрия ва 2) олий геометрия деб аталувчи геометрия. Тригонометрия ҳам икки қисмдан иборат: 1) тўғри чизиқли тригонометрия ва 2) эгри чизиқли тригонометрия, яъни сферик тригонометрия деб аталувчи тригонометрия.

32- §. ТАРИХИЙ МАЪЛУМОТЛАР

Ўрта Осиё халқлари жуда бой ва мазмундор маданият ҳамда фан тарихига, шу жумладан, математика тарихига эгадир. IX — XV асрларда математиканинг ривожланишида Ўрта Осиё ва Закавказье халқлари етакчи роль ўйнаган.

Ўрта Осиё математикаси ҳам астрономия, география, геодезиянинг эҳтиёжларидан келиб чиққан амалий ҳисоблаш масалаларини ҳал қилиш зарурлиги билан жипс боғланган ҳолда ривожлангандир.

Ўрта Осиё олимларининг математика, астрономия ва шунга ўхшаш фанларнинг ривожланишидаги ишлари Европага қараганда бир неча аср илгари вужудга келган.

Уларнинг математикани ривожлантиришдаги аҳамиятини англаш учун Ўрта Осиё олимларидан: ўзбек олими Аҳмад ал-Фарғоний; машҳур ўзбек математиги, астрономи, философи Мусо ал-Хоразмий; ал-Беруний; Саид ал-Жаухари; Абдулла ал-Мервозий; Улуғбек; машҳур тожик философи, астрономи, буюк ҳакими ва математиги Абу Али ибн Сино; тожик классик шоири, астрономи ва математиги Умар Хайём; машҳур озарбайжон философи, астрономи ва математиги Насриддин Тусий ва бошқаларнинг номларини эслаш кифоя қилади.

Машҳур ўзбек олими Мусо ал-Хоразмий хоразмлик бўлиб, ўрта асрда (830- йилларда) яшаган. У ўзининг математика соҳасида ёзган классик асарлари билан фан тарихида алоҳида ўрин тутади.

Хоразмлик машҳур математик ва астроном, философ Абу Райҳон Беруний (973 — 1048) математика ва астрономия фанлари соҳасида, мамлакатимиз халқлари билан Ҳиндистон халқлари орасида маданий алоқалар ўрнатишда катта хизмат қилди.

Ал-Беруний Ҳиндистонда 40 йил яшаган. У ҳинд ва санскрипт тилларини қунт билан ўрганди ва ҳинд олимларининг асарларини араб тилига таржима қилди ва ҳинд халқларига ўз билимларини ўргатди.

Ўрта асрнинг машҳур донишманди, тожик халқининг классик шоири Умар Хайём (1040 — 1123) математика ва астрономия соҳасида ажойиб асарлар яратган. Умар Хайём алгебра соҳасида бир қанча янгиликлар ижод этди. У математика тарихида биринчи бўлиб учинчи даражали тенгламаларни геометрик усул билан ечиш методларини берди. Унинг алгебра соҳасидаги ишлари ўрта аср математикасининг энг юксак чўққиси ҳисобланади. Хайём 1069 — 71 йилларда „Алжабр ва ал-Муқобала масалаларининг исботлари ҳақида“ номли асар ёзди. Хайёмнинг „Евклиднинг қийин постулатларига комментариялар“ номли асари Б. А. Розенфельд томонидан 1953 йилда биринчи марта рус тилига таржима қилинди.

X асрда яшаган тожик астрономи Абул Вафо, синус ва косинус чизиқлари қаторига тенгенс, котангенс, секанс ва косеканс чизиқларини ҳам киритган. (Синус ва косинус чизиқлари X асргача ҳиндлар томонидан киритилган.)

Тригонометрия Ўрта Осиё олимларининг асарларида мустақил илмий фан шаклини олган; бунда тригонометрик функцияларни текшириш воситаси сифатида фақат геометрик ясашларгагина эмас, балки тригонометрик функциялар орасидаги алгебраик муносабатлар ҳам ишлатилган. Самарқандда яшаган (XV аср) машҳур астроном Улуғбек раҳбарлигида, унинг обсерваториясида тригонометрия жадвалларини тузишнинг ғоят аниқ усуллари ишлаб чиқилган. Ўрта Осиё математикаси бир қанча энг муҳим кашфиётларни Ғарбий Европа фанига қараганда анча олдин берган.

Масалан, Насриддин Тусий (XIII аср) тригонометрияни Европада тригонометрияга асос солувчи немис олими Региомонтанга қараганда 200 йил олдин мустақил фан сифатида ривожлантирган, бином кўрсаткичи ҳар қандай бутун мусбат сон бўлгандаги формулани, сонлардан ҳар қандай даражали илдиз чиқариш ва ҳоказоларни ҳам берган.

Кейинчалик, яъни XVI асрлардан бошлаб рус олимлари математиканинг кўпгина соҳаларини ривожлантиришда етакчи ўринни эгаллаб келди ва келмоқда. Бу фикрни асослаш учун рус олимларидан Эйлер, Лобачевский, Остроградский, Чебишев, Ляпунов ва бошқаларнинг номларини эслаш кифоядир. Француз математиги Лаплас „Эйлер асарларини ўқинг, у ҳаммамизнинг ўқитувчимиз“ деб айттан эди. Бу сўзларда Эйлерга яқин замондош математикларнинг ҳурмати изҳор қилинган. Ҳозир Эйлернинг 865 та илмий асари маълум. Математика тарихида энг ҳурматли ўринлардан бири академик М. В. Остроградскийга тегишлидир. Унинг шуҳрати шунчалик улуғ эдики, ўша давр ёшлари олий ўқув юртларига ўқишга жўнаб кетаётганларида дўстлари ва қариндошлари, Остроградскийдек бўлингиз, деб айтишар эдилар.

Ляпунов ва Чебишевлар фанлар тарихида ва рус маданиятининг ўсишида ўчмас из қолдирдилар.

Сонларни ҳарфлар билан белгилашни дастлаб 1591 йилда француз математиги Виет киритган.

Кейинчалик ҳарфлар билан белгилашни кенг равишда қўллаган олим машҳур француз философи ва математиги Рене Декарт (1596 — 1650) бўлди.

Ҳозирги вақтда алгебрада қўлланиладиган ишора ва белгилар турли вақтларда турли математиклар томонидан киритилган.

Масалан, қўшиш ва айириш ишоралари „+“ ва „—“ 1489 йилда немис математиги Видман томонидан киритилган.

Тенгликни кўрсатиш учун инглиз алгебрачиси Рекорд томонидан „=“ ишора 1557 йилда киритилган. Инглиз математиги Херриот > ва < ишораларни ва кўпайтириш ишораси қилиб нуқта „·“ ни киритган (1631 йил). Немис математиги Лейбниц илгари чизиқ билан ишораланадиган бўлиш ишораси ўрнига „:“ ни киритди (1694 йил). ( ); [ ] ва { } қавслар биринчи марта фламанд математиги Жирар асарларида учрайди (1629 йил).

Алгебраик символиканинг ҳозирги шакли фақат XVIII асрнинг охирларида қатъий равишда ўрнашган деб ҳисоблаш мумкин.

Ҳинд математиги Бхаскара (XII аср) манфий соннинг даражасидан фойдаланган. Унинг „Системалар тожи“ номли асарида бундай дейилади:

Мусбат ва манфий соннинг квадрати мусбат сонни беради. Масалан, $(\pm\ 7)^2 = +49$.

XVII асрдан бошлаб манфий сонлар математикага мустаҳкам кириб олди ва амалда қўлланилиб кетди.

1 дан 60 гача бўлган сонлар квадратларининг жадвали бундан тахминан тўрт минг йилча олдин тузилган. Хитойларнинг эрамиздан илгари II асрда яна ҳам қадимийроқ манбалардан олиб ёзилган математика қўл ёзмаларида квадрат илдизлар чиқариш усулининг таърифи бор.

Ҳиндлар ҳам эрамизнинг IV — V асрларидаёқ сонлардан квадрат илдиз чиқаришни билганлар. XII аср ҳинд математиги Бхаскара мусбат соннинг иккита — мусбат ва манфий квадрат илдизи борлигини ҳамда манфий сондан квадрат илдиз чиқариш мумкин эмаслигини қайд қилган.

Квадрат тенгламаларни ечишда квадрат илдиз чиқариш машҳур ўзбек математиги ал-Хоразмийнинг асарида ҳам учрайди.

Тригонометрия ҳам бошқа фанлар сингари, инсониятнинг амалий фаолияти эҳтиёжларидан келиб чиққан. Тригонометрияга асос солувчилардан бири эрамиздан олдинги II асрда яшаган грек астрономи Гиппарх ҳисобланади. Тригонометриянинг ривожланишига эрамизнинг V — XII асрларида ҳинд математикаси ва XIII асрда Ўрта Осиё математикаси муҳим ҳисса қўшган. Ҳиндлар „Синуслар“ жадвалини тузганлар.

Ғарбий Европада тригонометриядан биринчи илмий асарлар XV асрда чиққан. Алгебраик символларнинг ривожланиши тригонометрик муносабатларни формула кўринишида ёзишга имкон берган. Манфий сонлар назариясини татбиқ қилиш туфайли тригонометрик чизиқлар ҳақидаги тушунчани исталган бурчакларга жорий қилиш мумкин бўлади.

Тригонометриянинг бундан кейинги ривожланиши рус фанлар академиясининг аъзоси буюк Л. Эйлер (1707 — 1783) номи билан боғланган. Ҳозирги замонда тригонометрик функцияларга сон аргументли функциялар сифатида қараш кўп жиҳатдан физика, механика фанларининг ҳамда техниканинг ривожланишидан келиб чиққандир. Ҳозирги замонда тригонометрик функцияларнинг хоссаларини ўрганиш алоҳида аҳамиятга эгадир. Табиат ҳодисаларининг қонунларини ўрганиш ва бу қонунлардан кишиларнинг амалий фаолиятида фойдаланиш учун зарур бўлган ҳозирги замон математик аппаратида бу функцияларнинг аҳамияти айниқса муҳимдир.

Шубҳасиз, бизнинг мамлакатимиздаги илмий фаолиятнинг характерига Улуғ Октябрь социалистик революцияси ҳал қилувчи таъсир кўрсатди.

Мамлакатни индустрлаштириш ва коммунистик қурилиш мустақил равишда илмий текшириш ишларини олиб боришга қобил бўлган ҳамда ўсиб борувчи саноатимизга, транспортимизга ва қишлоқ хўжалигимизга актив ёрдам бера оладиган жуда кўп олий малакали математикларни талаб қилди ва қилади.

Совет фани халққа хизмат қилишда ва мамлакатимизда коммунизм қуришда етакчилик ролини эгаллади ва эгаллайди.

МУНДАРИЖА

III БЎЛИМ ГЕОМЕТРИЯ

а) Планиметрия

б) Стереометрия

IV БЎЛИМ. ТРИГОНОМЕТРИЯ

На узбекском языке

КАРИМ МУХАМЕДОВ

ПОСОБИЕ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Для поступающих в вузы

ТРЕТЬЕ ИЗДАНИЕ

Издательство „Ўқитувчи“
Ташкент — 1976

Махсус редактор *проф. М. Камолов*
Редакторлар: *А. Маҳдиев, М. Саъдуллаев, Ў. Хусанов*
Бадиий редактор *П. Бродский*
Техредактор *Д. Аухадиева*
Корректор *М. Ёқубова*

Матрицадан босишга рухсат этилди 15/VII 1975. Қоғози № 3 60×90. Физ. б. л. 2,60.
Нашр л. 27,3. Тиражи 40000

„Ўқитувчи“ нашриёти. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Шартнома 138-75. Баҳоси 76 т.
Муқоваси 10 т.

Ўзбекистон ССР Министрлар Советининг нашриётлар, полиграфия ва китоб савдоси ишлари
Давлат комитетининг Тошкент полиграфия комбинатида терилиб. Морозов номли
босмахонада босилди. Самарқанд ш., Кузнецкая кўчаси. 82. 1976. Заказ № 5385.