МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ: ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Донецк 2010

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ: ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Учебное пособие
для студентов экономических специальностей

Утверждено на заседании Учёного Совета
Донецкого национального университета
Протокол № 8 от 25.09. 2009 г.

Донецк ДонНУ 2010

УДК 519. 869 (075)
ББКУ 012. 18 в 621.5

Рецензенты:

Лепа М.М. – д-р экон. наук, ст. научный сотрудник, директор научно-исследовательского центра информационных технологий Института экономики промышленности НАН Украины

Гузь Н.Г. – д-р экон. наук, проф. кафедры экономической кибернетики Донецкого национального университета

Ответственный за выпуск: В.В. Христиановский, д-р экон. наук, проф.

Х 935 Христиановский В.В., Щербина В.П. Экономико-математические методы и модели: теория и практика: Учебное пособие. – Донецк, 2010. – ДонНУ. – 335 с.

Учебное пособие содержит программу курса, основные теоретические положения, примеры решения задач и инструкции по использованию персонального компьютера (в частности офисного приложения Microsoft Excel).

Состоит из пяти разделов: оптимизационные модели и методы решения задач, задачи эконометрии, производственные функции, временные ряды, методы измерения экономического риска.

Пособие предназначено для студентов экономических специальностей, изучающих курс экономико-математические методы и модели.

ВВЕДЕНИЕ

Особенностью нынешнего этапа развития отечественной экономической науки является повышение интереса специалистов к научному решению проблем с использованием экономико-математических методов и моделей. Это вызвано тем, что математические методы и модели позволяют более удобно описывать сложнейшие экономические ситуации, что делает управленческие решения научно обоснованными.

Экономико-математические модели дают фундаментальную основу решения аналитических задач различных сфер деятельности современных предпринимателей. Построение математических моделей в экономике во многих случаях связано напрямую с анализом статистических данных, для получения которых часто требуются большие материальные и временные затраты. Поэтому изучение данного предмета требует от студентов глубоких знаний, как в области экономики, так и математики и статистики.

Основная цель данного учебного пособия – формирование системы теоретических знаний, умений и навыков относительно возможности использования аппарата высшей математики, теории вероятностей и математической статистики при построении моделей экономических явлений и процессов. Под экономико-математической моделью понимают описание исследуемого экономического процесса или явления с помощью абстрактных математических соотношений. Использование математического моделирования в экономике и управлении позволяет углубить количественный экономический анализ, расширить область использования экономической информации, интенсифицировать экономические расчеты. Разработка экономико-математических моделей является важным звеном в теоретических и прикладных экономических исследованиях.

Предлагаемое пособие состоит из пяти разделов.

В первом разделе рассматриваются оптимизационные и балансовые модели. Подробно описывается построение оптимизационных задач, их решение и анализ с помощью методов математического программирования.

Во втором разделе рассматривается теория и практика построения современных эконометрических моделей, обосновываются условия применения метода наименьших квадратов в корреляционно-регрессионном анализе. Описываются методы анализа мультиколлинеарности, гетероскедастичности и автокорреляции, рассматриваются фиктивные переменные, используемые при построении эконометрических моделей. Рассмотрены системы одновременных уравнений, косвенный и двухшаговый метод наименьших квадратов, применяемые для решения взаимосвязанных систем.

Третий раздел посвящен наиболее распространенной в экономических приложениях производственной функции Кобба-Дугласа. Рассматриваются возможные схемы проведения экономического анализа с помощью этой функции.

В четвертом разделе большое внимание уделяется анализу временных рядов. Рассматриваются аддитивные и мультипликативные модели кривых роста, оценки качества и точности моделей временных рядов. Рассматриваются вопросы моделирования экономических процессов, подверженных сезонным колебаниям.

В пятом разделе рассматриваются основные понятия экономического риска, классификация риска, методы его определения и снижения. Излагается метод определения оптимальной структуры портфеля ценных бумаг.

В пособии подробно излагается методика решения задач математического программирования и корреляционно-регрессионного анализа средствами программной среды MS EXCEL. Это позволяет с помощью использования встроенных функций, пакетов анализа и поиска решения успешно решать не только учебные примеры, приведенные в учебном пособии, но и сложные экономические задачи, имеющие практическое значение.

Данное пособие предназначено для самостоятельного изучения курса студентами-экономистами. Оно также может быть полезным для специалистов, желающих самостоятельно изучать и применять на практике разнообразные экономико-математические методы и модели.

Программа курса
«Экономико-математические методы и модели»

Введение

Исторический экскурс моделирования в экономике. Предмет и объект экономико-математического моделирования. Случайность и неопределенность экономического развития.

1. Основные определения из алгебры и теории выпуклых множеств

Матрицы. Определители. Миноры. Алгебраическое дополнение. Векторы. Понятие n-мерного векторного пространства. Линейная зависимость системы векторов, ранг и базис системы векторов. Разложение вектора по векторам базиса. Системы уравнений. Метод Жордана-Гаусса решения систем линейных уравнений. Виды решений систем линейных уравнений: общее, частное, базисное. Собственные числа и собственные векторы матриц. Выпуклые множества, замкнутые, ограниченные, множества, выпуклый многогранник, понятие гиперплоскости и полупространства, опорная гиперплоскость.

2. Математическое моделирование экономических систем

Процесс принятия решений в экономике и его основные этапы. Понятие математической модели и их виды. Примеры составления математических моделей задач: математическая модель задачи оптимального планирования, задача о рационе, задача на смеси и соединения, задача о раскрое материалов, транспортная задача, задача о выборе или о назначениях, модель межотраслевого баланса (модель В. Леонтьева), модель международной торговли.

3. Постановка задач линейного программирования (ЗЛП)

Общая, стандартная и каноническая формы моделей задач линейного программирования. Переход от произвольной формы задачи линейного программирования к канонической и стандартной. Виды записи задач линейного программирования: развёрнутая, свёрнутая, векторная, матричная.

4. Геометрическая интерпретация задач линейного программирования и графический метод её решения

Геометрическое представление системы ограничений и целевой функции задач линейного программирования. Виды областей допустимых значений задачи и нахождение оптимальных точек на плоскости. Решение задачи линейного программирования, представленных в канонической форме при условии, что $n-m=2$. Алгоритм графического решения задач линейного программирования на плоскости. Выводы из геометрической интерпретации задач линейного программирования .

5. Свойства решений задач линейного программирования

Теорема об области допустимых значений (ОДЗ) задач линейного программирования. Теорема о целевой функции. Теорема об угловой точке (необходимое и достаточное условия), понятие опорного плана. Выводы и следствия из теорем.

6. Симплексный метод решения задач линейного программирования

Идея симплекс-метода и его геометрическая интерпретация. Критерий оптимальности задачи. Построение начального опорного плана с заданным базисом. Оформление симплексных таблиц. Симплексное отношение. Переход от одного опорного плана к другому. Вырожденность в симплексном методе. Единственность оптимального решения, множество оптимальных решений, отсутствие оптимального решения при решении задачи симплекс-методом.

Метод искусственного базиса.

Двойственный симплекс–метод.

Методика решения задачи симплекс-методом с использованием Microsoft Excel.

7. Двойственность в линейном программировании

Экономическая интерпретация двойственной задачи. Правило составления двойственных задач. Связь между прямой и двойственной задачами. Теоремы двойственности.

Нахождение оптимального решения двойственной задачи на основании решения исходной задачи.

Экономический анализ решения задач линейного программирования с помощью Microsoft Excel. Анализ чувствительности оптимального решения оптимизационных задач.

8. Транспортная задача линейного программирования

Матричная постановка транспортной задачи и её математическая модель. Свойства решений транспортной задачи. Методы построения первоначального опорного плана (распределения) транспортной задачи. Метод потенциалов. Критерий оптимальности. Переход от одного распределения к другому. Вырожденность в транспортной задаче. Множество оптимальных решений в транспортной задаче. Усложненные постановки транспортных задач. Алгоритм решения транспортной задачи. Решение транспортной задачи с помощью Microsoft Excel.

9. Задача динамического программирования

Идея решения задач динамического программирования. Принцип оптимальности и рекуррентное соотношение Беллмана. Задача о распределении капитальных вложений и алгоритм ее решения.

10. Методы решения специальных задач математического программирования

Экономическая постановка и математическая модель задачи целочисленного линейного программирования и её решение методом Гомори и методом ветвей и границ.

Экономическая постановка и математическая модель задачи дробно-линейного программирования. Геометрическая интерпретация решений задачи на плоскости. Приведение задач дробно-линейного программирования к задаче линейного программирования.

Экономическая постановка и математическая модель задачи нелинейного программирования, её геометрическая интерпретация. Градиентные методы решения нелинейных задач. Метод множителей Лагранжа.

Квадратическое программирование.

Параметрическое программирование.

11. Введение в эконометрику

Эконометрика как наука, её сущность, перспективы. Понятие эконометрической модели, их классификация. Основные этапы построения и использования эконометрических моделей. Спецификация модели. Макро и микроэкономические модели.

12. Основные понятия статистики, используемые в эконометрике

Математическое ожидание. Дисперсия. Среднеквадратическое отклонение. Ковариация. Коэффициент парной, множественной корреляции. Корреляционная матрица и её построение. Шкала Чеддока. Регрессия. Теснота линейной и нелинейной связи. Критерии значимости.

13. Модель парной линейной регрессии

Предпосылки применения метода наименьших квадратов. Оценка параметров линейной модели методом наименьших квадратов. Система нормальных уравнений. Матричные преобразования при нахождении параметров модели. Доверительные интервалы параметров модели. Проверка адекватности эконометрической модели: коэффициент детерминации, *F*-тест проверки адекватности модели, *t*-тест проверки значимости параметров модели, средняя относительная ошибка аппроксимации. Прогнозирование с помощью парной линейной модели. Ошибка прогноза.

14. Множественные линейные регрессионные модели

Экономическая постановка множественной эконометрической модели. Отбор факторов для построения множественных моделей. Оценка качества уравнения регрессии. Проверка значимости уравнения регрессии в целом и отдельных ее параметров. Экономическая интерпретация параметров модели, коэффициента детерминации, множественного коэффициента корреляции, коэффициента эластичности $Э_j$, бета β_j и дельта Δ_j коэффициентов.

15. Проверка выполнения предпосылок метода наименьших квадратов

Мультиколлинеарность, ее влияние на оценки параметров модели. Методы определения мультиколлинеарности, способы ее устранения. Алгоритм Фаррара- Глобера выявления мультиколлинеарности. Гетероскедастичность в моделях. Критерий μ и параметрический тест Гольфельда-Квандта проверки наличия гетероскедастичности. Автокорреляции ошибок. Критерий Дарбина-Уотсона проверки автокорреляции остатков. Использование обобщённого метода наименьших квадратов (метода Эйткена) при наличии гетероскедастичности и автокорреляции в регрессионных моделях.

16. Фиктивные переменные

Виды фиктивных переменных. Преимущества использования фиктивных переменных. Количество градаций и количество фиктивных переменных в эконометрических моделях.

17. Системы одновременных структурных уравнений

Примеры систем одновременных структурных уравнений на макроуровне. Три вида систем регрессионных уравнений. Эндогенные и экзогенные переменные. Структурная и приведенная формы моделей. Понятие идентификации. Проблема оценки параметров. Косвенный и двухшаговый метод наименьших квадратов (2МНК).

18. Производственные функции

Производственная функция Кобба-Дугласа, ее построение, расчет экономических показателей на основании функции Кобба-Дугласа, экономические выводы.

19. Временные ряды

Основные понятия и определения. Этапы анализа и построения моделей временных рядов. Аддитивные и мультипликативные модели. Построение моделей временных рядов. Кривые роста. Оценка качества и точности моделей временных рядов. Построение точечных и интервальных прогнозов с помощью временных рядов. Адаптивные модели прогнозирования. Автокорреляционная функция и коррелограмма. Моделирование экономических процессов, подверженных сезонным колебаниям.

20. Использование встроенных функций и пакета прикладных программ для решения эконометрических задач с помощью Microsoft EXCEL

21.Экономический риск и его измерение

Определение риска и его классификация. Основные пути и способы снижения риска. Система количественных оценок экономического риска. Склонность, несклонность к риску, ожидаемая полезность. Нахождение оптимальной структуры портфеля ценных бумаг с помощью компьютера.

РАЗДЕЛ 1

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

1.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗ АЛГЕБРЫ И ТЕОРИИ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

1.1.1. Матрицы и определители

Матрицей размером $m\times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются элементами матрицы. Матрицы имеют вид

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$ матрица – размером $m\times n$, $$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$ – единичная матрица.

Матрицы обозначаются

$$A=(\dots),\ A=[\dots],\ A=\|\dots\|,\ A=\left(a_{ij}\right)_{(m\times n)},\ A=\|a_{ij}\|.$$

Транспонированной матрицей называется матрица, у которой строки и столбцы поменялись местами, а именно для $m\times n$ матрицы $A=\left(a_{ij}\right)$ транспонированной является $n\times m$ матрица $A'=\left(a'_{ij}\right)$, где $a'_{ij}=a_{ji}$. Например,

$$\begin{pmatrix} -8 & -9 & 0 \\ 1 & -8 & 1 \end{pmatrix}'=\begin{pmatrix} -8 & 1 \\ -9 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}'=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}.$$

Сложение матриц и умножение матриц на число производится поэлементно.

Пример 1.1.1. Заданы матрицы A и B. Найти $2A$–$3B$.

Решение.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2A-3B=\begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & 3 & -9 \\ 12 & -3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8 & -7 & 9 \\ -10 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Произведением матрицы $A=\left(a_{ij}\right)_{m,r}$ размером $m\times r$ на матрицу $B=\left(b_{ij}\right)_{r,n}$, размером $r\times n$ называется матрица $C=\left(c_{ij}\right)_{m,n}$, размером $m\times n$, у которой элемент c_{ij} равный скалярному произведению i - ой строки матрицы A на j -ый столбец матрицы B, т.е. $c_{ij}=\sum\limits_{p=1}^{r}a_{ip}b_{pj}$.

Пример 1.1.2. Найти произведение матриц A и B, если

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\3&-2&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&1&0\\2&-1&1\\4&2&3\end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\3&-2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&1&0\\2&-1&1\\4&2&3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot3+\ 0\cdot2+(-1)\cdot4 & 1\cdot1+0\cdot(-1)+(-1)\cdot2 & 1\cdot0+0\cdot1+(-1)\cdot3\\ 3\cdot3+(-2)\cdot2+4\cdot4 & 3\cdot1+(-2)\cdot(-1)+4\cdot2 & 3\cdot0+(-2)\cdot1+4\cdot3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&-1&-3\\21&13&10\end{pmatrix}.$$

Чтобы произведение матриц было определено, надо, чтобы количество столбцов первой матрицы было равно количеству строк второй матрицы.

Если $AA^{-1}=A^{-1}A=E$, то $A^{-1}-$ обратная матрица к квадратной матрице A.

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&...&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&...&A_{n2}\\..&...&...&...\\A_{1n}&A_{2n}&...&A_{nn}\end{pmatrix}$$ – обратная матрица к матрице $$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&...&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&...&a_{2n}\\..&...&...&...\\a_{n1}&a_{n1}&...&a_{nn}\end{pmatrix}.$$

Здесь A_{ij} алгебраическое дополнение к элементу a_{ij} (см стр.13).

Обратную матрицу удобно находить с помощью метода Жордана-Гаусса. Для этого справа от матрицы A пишут единичную матрицу. Методом Жордана-Гаусса на месте матрицы A делают единичную матрицу, тогда на месте единичной матрицы будет находиться обратная матрица A^{-1}. В виде схемы это записывается следующим образом $\left(A\middle|E\right)\sim\left(E\middle|A^{-1}\right)$.

Пример 1.1.3. Найти обратную матрицу к матрице

$$A=\begin{Vmatrix}2&1&-1\\3&2&-2\\1&-1&2\end{Vmatrix}$$

Решение.

$$(A\mid E)=$$

$$=\left\|\begin{array}{ccc|ccc}[2]&1&-1&1&0&0\\3&2&-2&0&1&0\\1&-1&2&0&0&1\end{array}\right\|\begin{array}{l}:2,\left[\times\left(-\frac{3}{2}\right)\right],\left[\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\\ \\ \\ \end{array}\sim\left\|\begin{array}{ccc|ccc}1&1/2&-1/2&1/2&0&0\\0&[1/2]&-1/2&-3/2&1&0\\0&-3/2&5/2&-1/2&0&1\end{array}\right\|\begin{array}{l}\\ \times 2,\left[\times(-1)\right],\ \times 3\\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left\|\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&-1&0\\0&1&-1&-3&2&0\\0&0&[1]&-5&3&1\end{array}\right\|\sim\left\|\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&-1&0\\0&1&0&-8&5&1\\0&0&1&-5&3&1\end{array}\right\|=(E\mid A)\Rightarrow A^{-1}=\left\|\begin{array}{ccc}2&-1&0\\-8&5&1\\-5&3&1\end{array}\right\|$$

Определителем квадратной матрицы называется число, которое по определённому правилу ставится в соответствие квадратной матрице. Определитель матрицы A обозначается $\det(A)$, $|a_{ij}|$, Δ.

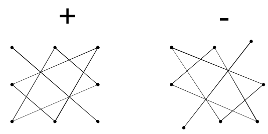
Определитель второго порядка вычисляется по формуле

$$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc,\ \text{например}\ \begin{vmatrix}2&5\\8&-5\end{vmatrix}=2\cdot(-5)-5\cdot 8=-50.$$

Определителем матрицы третьего порядка $A=\left(a_{ij}\right)_{(3\times 3)}$ называется число, которое вычисляется по формуле

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Правило вычисления „положительных" и „отрицательных" членов определителя 3-го порядка можно изобразить схемами:



Пример 1.1.4. Вычислить определитель третьего порядка.

$$\begin{vmatrix}2&3&4\\1&-2&0\\-1&5&6\end{vmatrix}=2\cdot(-2)\cdot 6+3\cdot 0\cdot(-1)+1\cdot 5\cdot 4-(-1)\cdot(-2)\cdot 4-2\cdot 0\cdot 5-1\cdot 3\cdot 6=$$

$$=-24-0+20-8-0-18=-30.$$

Для вычисления определителей третьего порядка удобно пользоваться следующим методом. Справа дописывают два первых столбца, а потом делают вычисления, как показано на схеме в примере 1.1.4 (правило Сариуса).

Пример 1.1.5. Вычислить определитель третьего порядка.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & -7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 0 & -7 & 8 & 0 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$2\cdot5\cdot8+3\cdot6\cdot0+(-1)\cdot4\cdot(-7)-0\cdot5\cdot(-1)-(-7)\cdot6\cdot2-8\cdot4\cdot3=96.$$

Определители высших порядков, как правило, находят, используя метод Гаусса и свойства определителей. Основными свойствами определителей являются: определитель матрицы не меняется при транспонировании; перемена местами двух строк (столбцов) меняет знак определителя и не меняет абсолютной его величины; общий множитель элементов любой строки (столбца) можно выносить за знак определителя; определитель, имеющий две одинаковые строки (столбца) равен нулю; определитель с нулевой строкой или столбцом равен нулю; если к элементам, какой либо строки (столбца) добавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на на одно и то же число, то определитель не изменится; определитель равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения. Такими действиями вычисление определителя сводится к вычислению определителя треугольного вида и к определителям меньших порядков.

Пример 1.1.6. Вычислим определитель четвёртого порядка двумя способам: а) разложением по третьему столбцу, б) сведением к треугольному виду.

а)

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \\ 8 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = a_{13}\cdot A_{13}+a_{23}\cdot A_{23}+a_{33}\cdot A_{33}+a_{43}\cdot A_{43} =$$

$$-1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 8 & 8 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -1\cdot(-224)+0\cdot(-78)+3\cdot50-3\cdot30=284.$$

б)

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \\ 8 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} [-1] & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \\ 3 & 6 & 8 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} (\times3) = - \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 15 & 14 & 8 \\ 0 & 7 & 7 & 10 \end{vmatrix} = (-1)(-1) \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & [1] & 4 & 4 \\ 0 & 14 & 15 & 8 \\ 0 & 7 & 7 & 10 \end{vmatrix} \times(-14)\ \times(-7) =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -41 & -76 \\ 0 & 0 & -21 & -32 \end{vmatrix} \times(-2) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & [1] & -12 \\ 0 & 0 & -21 & -32 \end{vmatrix} \times(21) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 284 \end{vmatrix} = (-1)\cdot1\cdot1\cdot(-284) = 284.$$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $n-1$-го порядка, который получается из данного определителя вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Минором k-го порядка матрицы A называется определитель k-го порядка, составленный из элементов матрицы, расположенных на пересечении выделенных k строк и k столбцов.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя называется минор M_{ij}, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, то есть

$$A_{ij} = (-1)^{(i+j)} M_{ij}.$$

Пример 1.1.7. Найти миноры M_{23}, M_{31} и алгебраические дополнения A_{23}, A_{12} определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

Решение. $M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 3 = 13,\ M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 - 4 \cdot (-2) = 8,$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -13,\ A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = -\,6.$$

1.1.2. n - мерные векторы и n -мерные векторные пространства

n - *мерным вектором* называется упорядоченный набор из n чисел. Одномерные, двумерные и трёхмерные векторы имеют геометрическую интерпретацию направленных отрезков. Векторы обозначаются $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\boldsymbol{a}$, $\overline{a}$, $\overline{X}$. Числа $x_1, x_2, ..., x_n$ называются координатами вектора $\overline{X}$.

Сложение векторов $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $\overline{Y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$, умножение вектора $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ на число λ определяется формулами:

$\overline{X} + \overline{Y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$ – сложение векторов;

$\lambda\overline{X} = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$ – умножение вектора $\overline{a}$ на число λ.

Совокупность всех n – мерных векторов, для которых введены операции сложения векторов и умножения вектора на число, называется линейным *n-мерным векторным пространством***,** которое обозначается R^n.

Линейной комбинацией векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_k$ называется вектор $\overline{b} = \lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_1\overline{a}_2 + ... + \lambda_k\overline{a}_k$, где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ – некоторые числа.

Векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_k$ *линейно независимы*, если равенство $\lambda_1 \overline{a}_1 + \lambda_1 \overline{a}_2 + ... + \lambda_k \overline{a}_k = \overline{0}$ возможно, только если $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0$, где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ – некоторые числа.

Максимально возможная линейно независимая подсистема данной системы векторов называется её *базисом*.

Рангом матрицы A называется наибольший порядок минора этой матрицы, отличный от нуля.

Максимальное число линейно независимых векторов системы равно рангу матрицы A, составленной из компонент векторов этой системы.

Базисом n- мерного пространства называется совокупность n линейно независимых векторов этого пространства.

Система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ образует базис n- мерного векторного пространства, если определитель, составленный из координат этих векторов, отличен от нуля.

Любой вектор можно представить, и притом единственным образом, в виде линейной комбинации векторов базиса. Если $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ базис R^n, то любой вектор $\overline{b} \in R^n$ можно представить в виде $\overline{b} = \lambda_1 \overline{a}_1 + \lambda_2 \overline{a}_2 + ... + \lambda_n \overline{a}_n$. Числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ называются координатами вектора $\overline{b}$ в базисе $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$. Система единичных векторов $\overline{E}_1 = (1,0,0,...,0)$, $\overline{E}_2 = (0,1,0,...,0)$, …, $\overline{E}_n = (0,0,0,...,1)$ образует один из базисов $n-$мерного векторного пространства, который называется единичным базисом. В единичном базисе вектор $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет разложение

$$\overline{X} = x_1 \overline{E}_1 + x_2 \overline{E}_2 + \cdots + x_n \overline{E}_n.$$

Пример 1.1.8. Проверить, образуют ли векторы $\overline{a}_1 = (1,2,-1)$, $\overline{a}_2 = (1,1,3)$, $\overline{a}_3 = (2,3,1)$ базис в трехмерном пространстве, и найти координаты вектора $\overline{b} = (-1,0,-7)$ в этом базисе.

Решение. Определитель, составленный из координат векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2, \overline{a}_3$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1+12-3+2-9-2 = 1 \neq 0$$

отличный от нуля. Поэтому векторы $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2, \overline{a}_3$ образуют базис трёхмерного пространства. Находим координаты вектора $\overline{b}$ в этом базисе. Это значит, что надо найти числа x_1, x_2, x_3 из равенства $\overline{b} = x_1 \overline{a}_1 + x_2 \overline{a}_2 + x_3 \overline{a}_3$.

В координатной форме это равенство принимает вид:

$$(-1,0,-7)=x_1\,(1,2,-1)+x_2(1,1,3)+x_3(2,3,1)=\left(x_1+x_2+2x_3,2x_1+x_2+3x_3,-x_1+3x_2+x_3\right).$$

Решаем систему:

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=-1,\\2x_1+x_2+3x_3=0,\\-x_1+3x_2+x_3=-7,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=-1,\\-x_2-7x_3=2,\\4x_2+3x_3=-8,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1\qquad-5x_3=1,\\-x_2-7x_3=2,\\-25x_3=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=1,\\x_2=-2,\\x_3=0.\end{cases}$$

Ответ. $\bar{b}=\bar{a}_1-2\bar{a}_2+0\cdot\bar{a}_3=\bar{a}_1-2\bar{a}_2$.

1.1.3. Системы линейных алгебраических уравнений

Решением системы линейных уравнений

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\tag{1.1.1}$$

называется совокупность n чисел $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$, таких, что при подстановке их вместо неизвестных, каждое уравнение системы обращается в тождество.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет, хотя бы одно решение. Если же система не имеет ни одного решения, то она называется *несовместной*. Две системы называются равносильными, или эквивалентными, если они имеют одно и то же множество решений.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет только одно решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения.

При решении систем используют три основных действия, которые не меняют эквивалентность систем. Они называются элементарными преобразованиями Гаусса:

1. Уравнения можно менять местами.

2. Уравнения можно умножать на число, не равное нулю.

3. Уравнения можно складывать. До одного уравнения можно прибавить другое уравнение, умноженное на любое число.

Общим решением системы линейных уравнений, называется решение, в котором одни переменные, называемые *базисными*, представлены через другие переменные, называемые *свободными*.

Общее решение принято записывать в виде:

$$\begin{cases} x_1 = b_1' + \ldots + \ a_{1\,r+1}' \ x_{r+1} + \cdots + a_{1j}' x_j + \cdots + a_{1n}' x_n, \\ x_2 = b_2' + \ldots + a_{2\,r+1}' \ x_{r+1} + \cdots + a_{2j}' x_j + \cdots + a_{2n}' x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_i = b_i' + \ldots + a_{i\,r+1}' \ x_{r+1} + \cdots + a_{ij}' x_j + \cdots + a_{in}' x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_r = b_r' \qquad + a_{r\,r+1}' \ x_{r+1} + \cdots + a_{rj}' x_j + \cdots + a_{rn}' x_n. \end{cases} \tag{1.1.2}$$

В дальнейшем считаем $r = m$, то есть система уравнений совместна и её ранг равен m. Здесь базисными переменными являются $x_1, x_2, ..., x_r$, а свободными – $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$.

Придавая в равенстве (1.1.2) переменным $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$ произвольные числовые значения $x_{r+1} = \alpha_{r+1},\ x_{r+2} = \alpha_{r+2},\ ...,\ x_n = \alpha_n$, вычисляют соответствующие значения остальных неизвестных $x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2,\ ...,\ x_r = \alpha_r$ и тем самим получают частное решение $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ системы (1.1.1).

Базисным решением системы линейных уравнений называется частное решение, в котором свободные переменные имеют нулевые значения.

В нашем случае

$$\overline{X}_Б = \left(b_1', b_2', ..., b_r', 0, 0, ..., 0\right). \tag{1.1.3}$$

Количество общих и соответственно базисных решений системы 1.1.1 не превышает величины C_n^m.

Допустимым базисным решением называется базисное решение с неотрицательными компонентами.

Базисное решение называется *невырожденным*, если оно содержит $r = m$ положительных компонент, а если меньше, то *вырожденным*.

Пример 1.1.9. Найти одно общее и одно базисное решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + \ \ x_4 = -1, \\ 3x_1 + \qquad x_3 + 2x_4 = \ 4. \end{cases}$$

Решение. Система содержит два независимых уравнения, так как её ранг равен двум. Из двух независимых уравнений можно две неизвестные выразить через остальные. Соответственно, можно получить не больше шести общих решений. Базисными переменными могут быть пары

$$(x_1; x_2);\ (x_1; x_3);\ (x_1; x_4);\ (x_2; x_3);\ (x_2; x_4);\ (x_3; x_4).$$

Найдём, например, общее решение системы с базисными переменными $(x_2;x_3)$.

$\begin{cases} 2x_1+[x_2]+x_3+\quad x_4=-1, \\ 3x_1+\qquad [x_3]+2x_4=\ 4. \end{cases}$ В первом уравнении базисной переменной является переменная x_2, так как она входит только в одно уравнение. Она называется изолированной, так как присутствует в первом и отсутствует во втором уравнении. Во втором уравнении изолированной переменной ещё нет. Чтобы сделать переменную x_3 базисной во втором уравнении исключим её из первого уравнения. Для этого вычитая из первого уравнения второе, получаем

$\begin{cases} -x_1+x_2-\qquad x_4=-5, \\ 3x_1+\quad x_3+2x_4=\ \ 4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=-5+x_1+\ \ x_4, \\ x_3=\ 4-3x_1-2x_4, \end{cases}$ – одно общее решение.

Чтобы найти базисное решение надо в общее решение подставить нулевые значения свободных переменных, $x_1=0,\ x_4=0$. Следовательно, $\overline{X}_{Б1}=(0,-5,4,0)$.

1.1.4. Собственные векторы и собственные значения матриц

Вектор $X\neq 0$ называется *собственным вектором* квадратной матрицы A, если существует такое число $\lambda\neq 0$, что

$$AX=\lambda X\ . \tag{1.1.4}$$

Число λ называется *собственным значением* (числом) матрицы A, соответствующим вектору X .

Если переписать систему (1.1.4) в развёрнутом виде, чтобы в правых частях были нули, то получим систему уравнений

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+(a_{nn}-\lambda)x_n=0 \end{cases} \tag{1.1.5}$$

или в матричном виде

$$(A-\lambda E)X=0.$$

Полученная однородная система всегда имеет нулевое решение $X=(0,0,...,0)$. Собственный вектор X является ненулевым решением линейной однородной системы $(A-\lambda E)X=0$, которое существует тогда и только тогда, когда определитель $|\,A-\lambda E\,|=0$.

Следовательно, собственные значения матрицы могут быть вычислены как корни уравнения $|A-\lambda E|=0$, а собственные векторы – как решения соответствующих однородных систем.

Уравнение $|A-\lambda E|=0$ называется *характеристическим уравнением* матрицы A, а многочлен $|A-\lambda E|$ – характеристическим многочленом.

Пример 1.1.10. Найти собственные числа и собственные векторы квадратной матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение и решаем его.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (2-\lambda)^2-9=0 \Rightarrow 2-\lambda=\pm 3 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=-1, \\ \lambda_2=5. \end{cases}$$

λ_1, λ_2 – характеристические числа.

При $\lambda_1=-1$ система для нахождения собственных векторов принимает вид

$$\begin{cases} (2+1)x_1+3x_2=0, \\ 3x_1+(2+1)x_2=0, \end{cases} \Rightarrow x_1=-x_2.$$

Собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda_1=-1$ равен $X_1=(a,-a)$, где a – произвольное число.

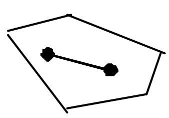
При $\lambda_2=5$ система для нахождения собственных векторов принимает вид

$$\begin{cases} (2-5)x_1+3x_2=0, \\ 3x_1+(2-5)x_2=0, \end{cases} \Rightarrow x_1=x_2.$$

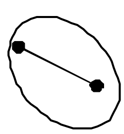
Собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda_2=5$ равен $X_2=(a,a)$, где a – произвольное число.

1.1.5. Выпуклые множества

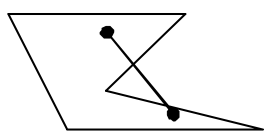
Множество точек называется *выпуклым*, если вместе с произвольными двумя своими точками, оно содержит и все точки отрезка, который их соединяет.



Выпуклое множество.



Выпуклое множество.



Не выпуклое множество.

Математически это записывается с помощью выпуклой линейной комбинации.

Выпуклой линейной комбинацией точек $A_1,\ A_2,...,\ A_k$ называется множество точек $A=\lambda_1 A_1+\lambda_2 A_2+...+\lambda_k A_k$ таких, что $\lambda_j \geq 0,\ \sum_{j=1}^{k}\lambda_j=1$.

Выпуклое множество можно определить ещё следующим образом.

Множество точек называется выпуклым, если произвольная выпуклая линейная комбинация его точек также является точкой этого множества.

Угловыми точками выпуклого множества называются точки этого множества, которые не могут быть представлены в виде выпуклой линейной комбинации каких-либо других точек данного множества. Если известны все угловые точки выпуклого ограниченного множества, то произвольная точка множества является их выпуклой линейной комбинацией. Пересечение двух (нескольких) выпуклых множеств является выпуклым множеством, если оно не пусто.

Выпуклое, ограниченное, замкнутое множество с конечным числом угловых точек называется выпуклым многогранником (на плоскости – многоугольником).

Опорной прямой выпуклого многоугольника называется прямая, которая имеет хотя бы одну общую точку с этим многоугольником и многоугольник расположен по одну сторону от нее. Аналогично в трехмерном пространстве определяется опорная плоскость.

Множество точек $M\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ в R^n называется ограниченным, если существует число $d>0$ не связанное с точками данного множества, что выполняются следующие соотношения $\left|x_1\right|\leq d,\ \left|x_2\right|\leq d,\ ...,\ \left|x_n\right|\leq d$. Точка называется внутренней точкой множества, если существует её окрестность, которая полностью принадлежит множеству. Граничной точкой множества называется точка, для которой произвольная её окрестность содержит как точки, принадлежащие множеству, так и точки, которые ему не принадлежат. Совокупность всех граничных точек – граница области. Область открыта, если произвольная ее точка является внутренней.

Множество замкнуто, если ему принадлежат все его граничные точки.

Обобщением плоскости в *n*-мерном пространстве является гиперплоскость. Гиперплоскостью называется множество точек $X(x_1,\ x_2,...,\ x_n)$ *n*-мерного пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению $a_1x_1+\ a_2x_2+...+a_nx_n=b\ \ (\overline{a}\cdot\overline{X}=b)$. Гиперплоскость делит *n*-мерное пространство на два полупространства**.** Полупространство – это множество точек $M\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ в R^n, координаты которых удовлетворяют неравенству $a_1x_1+\ a_2x_2+...+a_nx_n\leq b$ или $a_1x_1+\ a_2x_2+...+a_nx_n\geq b$.

1.2. ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1.2.1. Общая схема построения математических моделей задач линейного программирования

В общем смысле модель – это система, способная заменить оригинал (то есть реальную систему) так, чтобы её изучение давало информацию об оригинале. Модель может полностью или частично воспроизводить структуру моделируемой системы и её функции. Моделирование – процесс построения, реализации и исследования модели, который способен заменить реальную систему и дать информацию о ней. В курсе экономико-математического моделирования рассматриваются математические, экономико-математические и эконометрические модели.

Математическая модель – система математических и логических соотношений, которые описывают структуру и функции реальной системы.

Экономико-математическая модель – это математическое описание экономического процесса или явления с целью его исследования и управления.

Эконометрическая модель – разновидность экономико-математической модели, параметры которой оцениваются с помощью методов математической статистики.

Процесс принятия решений в экономике производится следующим образом:

1) осуществляют экономическую постановку задачи, для чего формулируют объект и цель исследования, выделяют функциональные, структурные элементы и наиболее важные качественные характеристики объекта исследования, словесно, качественно описывают взаимосвязи между элементами модели;

2) вводят символические обозначения для учета характеристик экономического объекта и формализируют взаимосвязи между ними, то есть составляют математическую модель;

3) с помощью определенных методов проводят расчеты математической модели и анализируют полученный результат;

4) корректируют построенную модель, если она не дает желаемых результатов.

Математическая модель задачи линейного программирования (ЗЛП) составляется путем экономического анализа по следующей схеме:

1) вводят переменные;

2) формируют целевую функцию;

3) формируют ограничения;

4) налагают условия неотрицательности переменных (или указывают интервалы изменения переменных).

1.2.2. Задача оптимального выпуска продукции

Пусть предприятием выпускается n видов продукции $П_1$, $П_2$, …, $П_n$ из m видов сырья S_1, S_2 ,…, S_m. Известны запасы сырья b_1, b_2, …, b_m, расходы a_{ij} ($i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$) единиц i-го сырья на единицу j-й продукции и цены c_j реализации единицы продукции j-го вида. Составим математическую модель задачи таким образом, чтобы определить, сколько единиц продукции каждого вида необходимо выпускать предприятию, чтобы доход от реализации всей продукции был максимальным. Данные сведем в табл. 1.2.1.

Таблица 1.2.1. *Данные, характеризующие выпуск продукции*

Сырьё	Продукция					Запасы сырья
	$П_1$	…	$П_j$	…	$П_n$	
S_1	$a_{1\,1}$	…	$a_{1\,j}$	…	$a_{1\,n}$	b_1
S_2	$a_{2\,1}$	…	$a_{2\,j}$	…	$a_{2\,n}$	b_2
…	…	…	…	…	…	…
S_m	$a_{m\,1}$	…	$a_{m\,j}$	…	$a_{m\,n}$	b_m
Цена реализации единицы продукции	c_1	…	c_j	…	c_n	
Количество продукции	x_1	…	x_j	…	x_n	

Построение модели задачи. Введем переменные: x_j ($j=\overline{1,n}$) – количество единиц продукции j-го вида, которое предполагается выпускать. Тогда $c_j x_j$ – стоимость всей выпускаемой продукции j-го вида, $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ – стоимость всей выпускаемой продукции. $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$ – затраты i-го вида сырья на всю выпускаемую продукцию. Затраты не могут превышать запаса b_i, поэтому $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i$. Такие условия необходимо записать по всем видам сырья. По смыслу задачи все переменные должны быть неотрицательными.

Математическая модель задачи будет следующей:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \max,$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \tag{1.2.1}$$
$$x_j \ge 0 \;\; (j=\overline{1,n}).$$

Пример 1.2.1. Предприятие с ограниченной ответственностью «Скала» предполагает выпускать соки трех видов: яблочный, виноградный, яблочно-виноградный. Информация о количестве ресурсов, необходимых для выпуска одной банки сока каждого вида, цена реализации одной банки сока и наличие сырья для производства соков приведена в табл. 1.2.2.

Требуется найти такой план выпуска продукции, при котором общая стоимость продукции будет максимальной.

Таблица 1.2.2. *Исходные данные выпуска соков на предприятии*

Ресурсы	Нормы расхода ресурсов на одну банку сока			Наличие ресурсов
	Яблочный сок	Виноградный сок	Яблочно-виноградный сок	
Яблоки	1000 г	-	500 г	6000 кг
Виноград	50 г	1100 г	600 г	3000 кг
Сахарный сироп	300 г	150 г	200 г	2000 л
Лимонная кислота	20 г	35 г	30 г	200 кг
Крышки	1 шт.	1 шт.	1 шт.	12000 шт.
Банки	1 шт.	1 шт.	1 шт.	11000 шт.
Цена одной банки сока	4,8 грн.	6 грн.	5 грн.	

Ограничимся составлением математической модели задачи. Обозначим через $x_1,\ x_2,\ x_3$ число банок сока каждого вида, которое предполагается изготавливать.

Целевая функция – это выражение, которое необходимо максимизировать

$$Z = 4{,}8x_1 + 6x_2 + 5\,x_3 \to \max. \tag{1.2.2}$$

Ограничения по ресурсам

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}5x_3 \le 6000, \\ 0{,}05x_1 + 1{,}1x_2 + 0{,}6x_3 \le 3000, \\ 0{,}3x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}2x_3 \le 2000, \\ 0{,}02x_1 + 0{,}035x_2 + 0{,}03x_3 \le 200, \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 12000, \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 11000. \end{cases} \tag{1.2.3}$$

Диапазон изменения переменных

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \tag{1.2.4}$$

1.2.3. Задача о рационе

Для откорма животных используют n видов кормов $K_1, K_2, \dots, K_n$. Для рационального откорма каждое животное должно ежедневно получать не менее чем $b_1, b_2, \dots, b_m$ единиц питательных веществ $S_1, S_2, \dots, S_m$ соответственно. Известно содержание a_{ij} i-ых ед. питательных веществ в одном килограмме j-го корма и цена c_j ($j=\overline{1,n}$) одного килограмма корма.

Найти оптимальный дневной рацион, чтобы его стоимость была минимальной при необходимой питательности. Данные сведём в табл.1.2.3.

Таблица 1.2.3. *Характеристика рациона животных*

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ в единице корма					Минимум единиц питательных веществ в рационе
	K_1	…	K_j	…	K_n	
S_1	a_{11}	…	a_{1j}	…	a_{1n}	b_1
S_2	a_{21}	…	a_{2j}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…	…
S_m	a_{m1}	…	a_{mj}	…	a_{mn}	b_m
Стоимость единицы корма	c_1	…	c_j	…	c_n	
Количество корма каждого вида в рационе	x_1	…	x_j	…	x_n	

Составление математической модели**.** Введем переменные Z – цена ежедневного рациона, x_j ($j=\overline{1,n}$) – количество корма j-го вида в рационе Тогда $c_j x_j$ – стоимость корма j-го вида в рационе, $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ – стоимость всего корма, включённого в рацион, $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$ – количество питательных веществ i-го вида в рационе. Количество питательных веществ i-го вида в рационе должно быть не меньше нормы b_i, поэтому $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \ge b_i$.

По смыслу задачи все переменные должны быть неотрицательными.

Поэтому математическая модель задачи будет такой

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \min,$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \ge b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \ge b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \ge b_m, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \ \ (j=\overline{1,n}). \tag{1.2.5}$$

Пример 1.2.2. При откорме каждое животное ежедневно должно получить не менее 60 ед. питательного вещества S_1, не менее 55 ед. вещества S_2 и не менее 600 ед. вещества S_3. Для составления рациона используют четыре вида корма. Содержание количества ед. питательных веществ в 1 кг каждого вида корма и стоимость 1 кг корма приведены в табл. 1.2.4.

Таблица 1.2.4. *Дневной рацион животных*

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ в 1 кг корма				Минимальное количество единиц питательных веществ в рационе
	Корм I	Корм II	Корм III	Корм IV	
S_1	1	2	4	3	60
S_2	5	0	3	1	55
S_3	20	10	30	40	600
Стоимость 1 кг корма, коп	50	10	80	45	

Необходимо составить дневной рацион нужной питательности, причём затраты на него должны быть минимальными.

Обозначим через x_1, x_2, x_3, x_4 соответственно количество килограммов корма I, II, III и IV в дневном рационе. Принимая во внимание, что количество единиц питательных веществ не менее предусмотренного, получаем систему ограничений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \geq 60, \\ 5x_1 + 3x_3 + x_4 \geq 55, \\ 20x_1 + 10x_2 + 30x_3 + 40x_4 \geq 600. \end{cases} \quad (1.2.6)$$

Цель данной задачи – добиться минимальных затрат на дневной рацион, поэтому общую стоимость рациона можно выразить в виде линейной функции

$$Z = 0,5x_1 + 0,1x_2 + 0,8x_3 + 0,45x_4 \to \min. \quad (1.2.7)$$

Кроме этого на переменные накладываем условия неотрицательности $x_j \geq 0,\ (j = \overline{1,4})$.

1.2.4. Задача о раскрое материала

На раскрой (распил, обработку) поступает однородный материал. Необходимо изготовить из него n разных изделий длиной s_1, s_2, ... ,s_j, ..., s_n метров. Эту задачу можно рассматривать в двух постановках.

1) Найти оптимальный план раскроя, который обеспечивал бы получение k_1, k_2, ..., k_j, ..., k_n шт. изделий каждого вида, при минимальном количестве отходов. Количество материала неограниченно.

2) Найти оптимальный план раскроя, обеспечивающий получение максимального числа комплектов изделий, если в каждом комплекте количество изделий пропорционально числам $b_1, b_2, ..., b_j, ..., b_n$ $\left(b_1 : b_2 : ... : b_j : ... : b_n\right)$. На распил поступает a единиц материала.

При решении задач на раскрой, прежде всего, надо определить способы раскроя. Пусть каждая единица материала может быть раскроена m разными способами. При использовании i-го способа получается a_{ij} единиц j-х изделий. Исходные данные внесем в табл. 1.2.5.

1) обозначим x_i – количество единиц материала, которое кроится i-м способом, Z – общая длина остатков, δ_i – остаток материала (м) при использовании i – го способа раскроя, u_j – неиспользованные изделия j-го вида. Тогда математическая модель имеет вид:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \delta_i x_i + \sum_{j=1}^{n} u_j s_j \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i - u_j = k_j, \tag{1.2.8}$$

$$x_i \geq 0, \quad u_j \geq 0,$$

$$\left(j = \overline{1, n} \; ; \; i = \overline{1, m} \right).$$

Таблица 1.2.5. *Схема раскроя материала*

Варианты раскроя	Количество изделий разных размеров, длины, получаемых при разных способах раскроя, шт.						Остаток материала, (м)	Число ед. материала, которое режется i-ым способом, шт.
1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1n}	δ_1	x_1
2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2n}	δ_2	x_2
…	…	…	….	…	…	…	…	…
i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{ij}	…	a_{in}	δ_i	x_i
…	…	…	…	…	…	…	…	…
m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mi}	…	a_{mn}	δ_m	x_m
Размеры изделий	s_1	s_2	…	s_j	…	s_n		
Требуемое количество изделий, шт.	k_1	k_2	…	k_j	…	k_n		
Остаток изделий, шт.	u_1	u_2	…	u_j	…	u_n		
Коэффициенты пропорциональности	b_1	b_2	…	b_j	…	b_n		

2) обозначим дополнительно через x количество комплектов, которое надо получить. Тогда математическая модель имеет вид

$$Z = x \to \max,$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} x_i = x b_j \quad (j = \overline{1,n}), \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = a, \end{cases} \qquad (1.2.9)$$

$$x \ge 0, \;\; x_i \ge 0 \;\; (i = \overline{1,m}) .$$

Пример 1.2.3. Неограниченное количество заготовок длиной 3м надо разрезать на детали длиной 1,2 м, 1 м и 0,8 м. Первых надо получить 50 шт., вторых − 60 шт., третьих − 40 шт. Необходимо определить количество заготовок для разрезания при минимальном количестве отходов, чтобы получить требуемое количество деталей.

Составим схему раскроя, то есть, определим способы раскроя, Рис.1.2.1.

| 1,2 | 1,2 | 0,6 | ~ x_1

| 1,2 | 1 | 0,8 | ~ x_2

| 1,2 | 0,8 | 0,8 | 0,2 | ~ x_3

| 1 | 1 | 1 | ~ x_4

| 1 | 1 | 0,8 | 0,2 | ~ x_5

| 1 | 0,8 | 0,8 | 0,4 | ~ x_6

| 0,8 | 0,8 | 0,8 | 0,6 | ~ x_7

Рис.1.2.1. Способы раскроя заготовок

В данном примере существует семь способов раскроя. Способы раскроя и соответствующие переменные желательно внести в табл.1.2.6.

Таблица 1.2.6. *Схема раскроя заготовок*

Размер детали (м)	Требуемое количество деталей (шт.)	Варианты раскроя							Остаток заготовок (шт.)
		1	2	3	4	5	6	7	
1,2	50	2	1	1	0	0	0	0	u_1
1	60	0	1	0	3	2	1	0	u_2
0,8	40	0	1	2	0	1	2	3	u_3
Остаток материала (м)		0,6	0	0,2	0	0,2	0,4	0,6	
Число заготовок, которые режутся i-м способом		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	

Обозначаем Z − количество отходов (м), $x_j \geq 0$ $(j=\overline{1,7})$ − число заготовок (шт.), которые режутся j-м способом, $u_i \geq 0$ $(i=\overline{1,3})$ − остаток заготовок (шт.) длиной 1,2 м, 1 м, 0,8 м соответственно. Тогда математическая модель задачи имеет вид:

$$Z = 0{,}6x_1 + 0\cdot x_2 + 0{,}2x_3 + 0\cdot x_4 + 0{,}2x_5 + 0{,}4x_6 + 0{,}6x_7 + 1{,}2u_1 + u_2 + 0{,}8u_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - u_1 = 50, \\ x_2 + 3x_4 + 2x_5 + x_6 - u_2 = 60, \\ x_2 + 2x_3 + x_5 + 2x_6 + 3x_7 - u_3 = 40, \end{cases} \qquad (1.2.10)$$

$$x_j \geq 0 \ (j=\overline{1,7}),\ u_i \geq 0 \ (i=\overline{1,3}).$$

1.2.5. Транспортная задача

Пусть имеется m поставщиков $A_1, A_2, ..., A_m$ с запасами однородного груза $a_1, a_2, ..., a_m$ и n потребителей $B_1, B_2, ..., B_n$ с потребностями этого груза $b_1, b_2, ..., b_n$. При этом груз измеряется в одних и тех же единицах (тонны, штуки, вагоны т. д.). Задача называется закрытой, если $a_1 + a_2 + ... + a_m = b_1 + b_2 + ... + b_n$. Если $a_1 + a_2 + ... + a_m \neq b_1 + b_2 + ... + b_n$, то задача называется открытой.

Рассмотрим закрытую задачу.

Известны цены (тарифы) перевозок c_{ij} единицы груза от i-го поставщика к j-му потребителю. Необходимо составить такой план перевозки груза от каждого поставщика каждому потребителю, при котором вывозится весь груз, удовлетворяются все потребности, и суммарная стоимость перевозки минимальна.

Обозначим через x_{ij} – количество груза, который планируется перевозить от i-го поставщика j-му потребителю, Z – общая стоимость перевозок.

Математическая модель закрытой задачи имеет вид

$$Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min, \qquad (1.2.11)$$ – стоимость перевозки груза

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i=\overline{1,m}) & \text{– у } i\text{-го поставщика весь груз вывозится.} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j=\overline{1,n}), & \text{– } j\text{-го потребителя потребности полностью удовлетворяются.} \end{cases} \qquad (1.2.12)$$

$$x_{ij} \geq 0.$$

Пример 1.2.4. Две шахты обеспечивают три электростанции углём. Расстояния от каждой шахты к каждой электростанции, запасы угля на каждой шахте и потребности в угле каждой электростанции внесены в табл.1.2.7.

Таблица 1.2.7. *Матрица перевозки угля*

Количество угля на шахтах, тыс. т	Потребности в угле электростанциями, тыс. т		
	1700	1100	1600
1200	30 x_{11}	40 x_{12}	0 x_{13}
3200	20 x_{21}	50 x_{22}	15 x_{23}

Определить план закрепления шахт за электростанциями, чтобы транспортные расходы (суммарное количество тонно-километров) были минимальными (ограничиться составлением математической модели).

Построение модели. Введём переменные $x_{ij} \geq 0$ $\left(i = \overline{1,2};\ j = \overline{1,3}\right)$ – количество угля, которое планируется перевозить от i-ой шахты до j-ой электростанции (например, x_{11} – количество угля, которое планируется перевозить от первой шахты до первой электростанции), Z – общее количество тонно-километров.

Модель нашей задачи закрыта, так как объём ресурсов равен объёму потребностей: 1200+3200=1700+1100+1600.

Общее количество тонно-километров при перевозке равно $Z = 30x_{11} + 40x_{12} + 0 \cdot x_{13} + 20x_{21} + 50x_{22} + 15x_{23}$. Эта величина должна принимать минимальное значение.

Количество вывезенного угля с первой шахты равно $x_{11}+x_{12}+x_{13}$ и оно равно 1200 тыс. т, что записывается в виде равенства $x_{11}+x_{12}+x_{13} = 1200$. Количество привезённого угля на первую электростанцию равно $x_{11}+x_{21} = 1700$. Поступая аналогично, по второй шахте и по остальным электростанциям, получаем математическую модель задачи

$$Z = 30x_{11} + 40x_{12} + 0 \cdot x_{13} + 20x_{21} + 50x_{22} + 15x_{23} \to \min, \qquad (1.2.13)$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1200, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 3200, \\ x_{11} + x_{21} = 1700, \\ x_{12} + x_{22} = 1100, \\ x_{13} + x_{23} = 1600, \end{cases} \qquad (1.2.14)$$

$$x_{ij} \geq 0 \ \left(i = \overline{1,2};\ j = \overline{1,3}\right).$$

1.2.6. Задача о выборе или о назначениях

Пусть имеется n специалистов и n видов работ. Известна эффективность каждого специалиста при выполнении каждого вида работ c_{ij} $(i,j=\overline{1,n})$. Каждый специалист может быть направлен только на одну работу и каждая работа может быть выполнена только одним специалистом. Необходимо определить направления специалистов на работу, чтобы суммарная эффективность выполнения всей работы была максимальной.

Ограничимся составлением математической модели.

Обозначим через x_{ij} направление i-го специалиста на j-ю роботу. Будем считать, что

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если } i\text{ - й специалист направляется на } j\text{ - ю работу,}\\ 0, & \text{если } i\text{ - й специалист не направляется на } j\text{ - ю работу.}\end{cases}$$

Матрица назначений имеет вид табл. 1.2.8.

Таблица 1.2.8. *Матрица назначения специалистов на работу*

Работы / Специалисты	Раб. 1	Раб. 2		Раб. j		Раб. n
Сп. 1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}
Сп. 2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2j} x_{2j}	…	c_{2n} x_{2n}
…	…	…	…	…	…	…
Сп. i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	…	c_{ij} x_{ij}	…	c_{in} x_{in}
…	…	…	…	…	…	…
Сп. n	c_{n1} x_{n1}	c_{n2} x_{n2}	…	c_{nj} x_{nj}	…	c_{nn} x_{nn}

Математическая модель задачи следующая:

$$Z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\max,\quad \begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=1, & \left(i=\overline{1,n}\right),\\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_{ij}=1, & \left(j=\overline{1,n}\right),\end{cases} \tag{1.2.15}$$

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если } i\text{ - й специалист направляется на } j\text{ - ю работу,}\\ 0, & \text{если } i\text{ - й специалист не направляется на } j\text{ - ю работу.}\end{cases}$$

Замечание. Модель этой задачи совпадает с моделью транспортной задачи с ресурсами и потребностями, равными единице. Ее можно решать как обыкновенную транспортную задачу, при условии, что все оценки должны быть ≥0, так как задача решается на max. Задача о назначении решается также с помощью «венгерского метода».

Пример 1.2.5. Трём операторам Кате, Вале и Гале надо набирать текст на трёх языках: украинском, русском, английском. Производительность каждого оператора на соответствующем языке (количество страниц, которое оператор может набрать на каждом языке в течение дня) внесено в табл.1.2.9.

Таблица 1.2.9. *Исходные данные назначения операторов*

Язык / Оператор	Украинский	Русский	Английский
Катя	40	30	10
Валя	20	40	40
Галя	30	45	35

Каждый оператор может быть назначен печатать лишь на одном языке и с каждым языком должен работать лишь один оператор. Составить оптимальный план направления операторов (ограничиться составлением математической модели).

Введём переменные. Обозначим через x_{ij} направление i-го оператора на j-й язык. Считаем, что

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й оператор направляется на } j\text{-й язык,} \\ 0, & \text{если } i\text{-й оператор не направляется на } j\text{-й язык,} \end{cases}$$

Z − общее количество напечатанных страниц за день.

Исходные данные и x_{ij} для наглядности запишем в табл. 1.2.10.

Таблица 1.2.10. *Матрица направления операторов на работы*

Язык / Оператор	Украинский	Русский	Английский
Катя	40 x_{11}	30 x_{12}	10 x_{13}
Валя	20 x_{21}	40 x_{22}	40 x_{23}
Галя	30 x_{31}	45 x_{32}	35 x_{33}

Общее количество напечатанных страниц равно

$$40x_{11} + 30x_{12} + 10x_{13} + 20x_{21} + 40x_{22} + 40x_{23} + 30x_{31} + 45x_{32} + 35x_{33}.$$

Из чисел x_{ij} в каждой строке и каждом столбце одно равно единице, а остальные нулю.

Поэтому математическая модель задачи имеет следующий вид:

$$Z = 40x_{11} + 30x_{12} + 10x_{13} + 20x_{21} + 40x_{22} + 40x_{23} + 30x_{31} + 45x_{32} + 35x_{33} \to \max,$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1, \end{cases} \tag{1.2.16}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й оператор направляется на } j\text{-й язык}, \\ 0, & \text{если } i\text{-й оператор не направляется на } j\text{-й язык}. \end{cases}$$

1.2.7. Модель межотраслевого баланса (модель В. Леонтьева)

Эффективное функционирование экономики предполагает наличие баланса между отдельными отраслями. Каждая отрасль при этом выступает, с одной стороны, как производитель некоторой продукции, а с другой – как потребитель продуктов, вырабатываемых другими отраслями.

Рассмотрим наиболее простой вариант математического описания межотраслевого баланса, модель «затраты-выпуск», так называемой модели Леонтьева.

Пусть весь производственный сектор народного хозяйства разбит на n «чистых» отраслей. «Чистая» отрасль – это условное понятие некоторой части народного хозяйства, более или менее цельная (например, угольная, энергетическая, машиностроительная, сельскохозяйственная и т.п.).

Введём следующие обозначения:

x_{ij} – количество продукции i-й отрасли, расходуемое в j-ой отрасли;

X_i – объём производства i-й отрасли за данный промежуток времени, который принято называть валовым выпуском i-ой продукции;

Y_i – объём потребления продукции i-ой отрасли в непроизводственной сфере, объём конечного потребления;

Z_j – условно чистая продукция j-й отрасли, включающая оплату труда, чистый доход и амортизацию.

В табл. 1.2.11 отражена схема межотраслевого баланса (МОБ).

Таблица 1.2.11. *Схема межотраслевого баланса*

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				Конечный продукт	Валовой продукт
	1	2	…	n		
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	Y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	Y_2	X_2
…	…	…	…	…	…	…
n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}	Y_n	X_n
Условно «чистая» продукция	Z_1	Z_2	…	Z_n	$\sum_{j=1}^{n} Z_j = \sum_{i=1}^{n} Y_i$	
Валовой продукт	X_1	X_2	…	X_n		$\sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Материальные затраты j-й потребляющей отрасли и её условно чистая продукция равна валовой продукции этой отрасли. Этот вывод можно записать в виде соотношения

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + Z_j, \quad (j = \overline{1, n}.) \tag{1.2.17}$$

Равенство (1.2.17) получим, складывая в МОБ числа по столбцам. Аналогично складывая в МОБ числа по строкам видим, что валовая продукция той или иной отрасли равна сумме материальных затрат, потребляющих её продукцию отраслей и конечной продукции данной отрасли

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i, \quad (i = \overline{1, n}.) \tag{1.2.18}$$

Эти уравнения называются уравнениями распределения продукции отраслей материального производства по направлениям использования.

Балансовый характер таблицы выражается в том, что

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{1.2.19}$$

$$\sum_{j=1}^{n} Z_j = \sum_{i=1}^{n} Y_i. \tag{1.2.20}$$

Основу экономико-математической модели МОБ составляет матрица коэффициентов прямых затрат $A = \left(a_{ij}\right)$. Коэффициент прямых затрат a_{ij} показывает, какое количество продукции i-й отрасли соответствует единице продукции j-й отрасли, если учитывать только прямые затраты

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j} \quad (i, j = \overline{1, n}). \tag{1.2.21}$$

Отсюда

$$x_{ij} = a_{ij} X_j. \tag{1.2.22}$$

Подставляя (1.2.22) в (1.2.18), получаем

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + Y_i, \quad (i = \overline{1, n}). \tag{1.2.23}$$

или в матричном виде

$$X = AX + Y, \tag{1.2.24}$$

где

$$X=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y=\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_n \end{pmatrix} \qquad (1.2.25)$$

С помощью этой матрицы можно выполнять три вида плановых расчётов.

Задавая для каждой отрасли величины валовой продукции (X_i), можно определить объёмы конечной продукции каждой отрасли (Y_i)

$$Y=(E-A)X. \qquad (1.2.26)$$

Задавая величины конечной продукции всех отраслей (Y_i), можно определить величины валовой продукции каждой отрасли (X_i)

$$X=(E-A)^{-1}Y. \qquad (1.2.27)$$

Задавая для ряда отраслей величины валовой продукции, а для всех остальных отраслей – объёмы конечной продукции, можно найти величины конечной продукции первых и объёмы валовой продукции вторых.

Обозначив обратную матрицу $B=(E-A)^{-1}$, система (1.2.27) записывается в виде

$$X=BY. \qquad (1.2.28)$$

Элементы матрицы B называются коэффициентами полных материальных затрат. Они показывают, сколько всего нужно произвести продукции отрасли i для выпуска в сферу конечного использования единицы продукции отрасли j.

Плановые расчёты по модели Леонтьева можно выполнять, если соблюдаются условия продуктивности матрицы A. Неотрицательную матрицу A будем называть продуктивной, если существует такой неотрицательный вектор $X \geq 0$, что

$$X > AX. \qquad (1.2.29)$$

Это условие означает существование положительного вектора конечной продукции $Y > 0$ для модели межотраслевого баланса (1.2.24).

Существует несколько критериев продуктивности матрицы A. Приведём несколько из них. Для того, чтобы матрица коэффициентов материальных затрат A была продуктивной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из перечисленных ниже условий:

1. $(E-A)^{-1} \geq 0$.

2. $B=(E-A)^{-1}=E+A+A^2+A^3+\ldots$.

3. Наибольшее по модулю собственное значение λ матрицы A, т.е. решение характеристического уравнения $\det(\lambda E-A)=0$ строго меньше единицы.

4. Все главные миноры матрицы $(E-A)$, т.е. определители матриц, образованные элементами первых строк и первых столбцов этой матрицы, порядка от 1 до n положительны.

5. Если $a_{ij} \geq 0$ для любых $i, j=1,2,\ldots,n$, и максимум сумм элементов её столбцов не превосходит единицы:

$$\max_{j=1,2,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1,$$

при этом хотя бы для одного из столбцов сумма элементов строго меньше единицы:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1.$$

Пример 1.2.6. Даны коэффициенты прямых затрат a_{ij}, конечный продукт Y_i для трёхотраслевой экономической системы

$$A=\begin{Vmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}3 \end{Vmatrix}, \quad Y=\begin{Vmatrix} 500 \\ 200 \\ 100 \end{Vmatrix}$$

Найти
коэффициенты полных затрат;
вектор валового выпуска;
межотраслевые поставки продукции;
проверить продуктивность матрицы A;
заполнить схему межотраслевого баланса.

Решение. Вычисления выполняем в среде Excel.

$$E-A=\begin{Vmatrix} 0{,}8 & -0{,}1 & -0{,}5 \\ -0{,}1 & 0{,}6 & -0{,}2 \\ -0{,}4 & 0 & 0{,}7 \end{Vmatrix}$$

Коэффициентами полных затрат являются соответствующие элементы матрицы

$$B=\left(E-A\right)^{-1}=\begin{Vmatrix} 2{,}090 & 0{,}348 & 1{,}592 \\ 0{,}746 & 1{,}791 & 1{,}045 \\ 1{,}194 & 0{,}199 & 2{,}338 \end{Vmatrix}$$

Вектор валового выпуска

$$X=BY=\begin{Vmatrix} 1273{,}632 \\ 835{,}821 \\ 870{,}647 \end{Vmatrix}$$

Межотраслевые поставки определяются матрицей

$$x_{ij}=a_{ij}X_j=\begin{Vmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}3 \end{Vmatrix}\times\begin{Vmatrix} 1273{,}63 & 835{,}82 & 870{,}647 \\ 1273{,}63 & 835{,}82 & 870{,}647 \\ 1273{,}63 & 835{,}82 & 870{,}647 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 254{,}73 & 83{,}58 & 435{,}32 \\ 127{,}36 & 334{,}33 & 174{,}13 \\ 509{,}45 & 0{,}00 & 261{,}19 \end{Vmatrix}$$

Матрица A продуктивная, так как все элементы матрицы $\left(E-A\right)^{-1}$ неотрицательные.

Заполняем схему межотраслевого баланса.

Таблица 1.2.12. *Схема межотраслевого баланса примера 1.2.6*

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечный продукт	Валовой продукт
	1	2	3		
1	254,73	83,58	435,32	500	1273,63
2	127,36	334,33	174,13	200	835,82
3	509,45	0,00	261,19	100	870,65
Условно чистая продукция	382,09	417,91	0,01	800	
Валовой продукт	1273,63	835,82	870,65		2980,10

1.2.8. Модель международной торговли

С помощью модели международной торговли можно определить, какими должны быть соотношения бюджетов стран, торгующих между собой, чтобы торговля была взаимовыгодной.

Рассмотрим модель международной торговли, в которой участвуют n стран.

Обозначим:

x_i – национальный доход i-й страны;

a_{ij} – доля национального дохода j-ой страны, которую она расходует на закупку товаров i-й страны;

p_i – общая выручка от внутренней и внешней торговли для i-й страны.

Предположим, что каждое государство расходует весь свой национальный доход на закупку товаров внутри страны и на импорт из других стран.

Это означает, что

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, \quad j = \overline{1,n}.$$

Матрица A, элементами которой являются коэффициенты a_{ij}, называется структурной матрицей торговли. Сумма элементов каждого столбца этой матрицы равна единице.

Предположим, что в течение определённого фиксированного промежутка времени структура международной торговли не меняется, а национальные доходы торгующих стран могут измениться.

Требуется определить эти национальные доходы, чтобы международная торговля осталась сбалансированной, т.е., чтобы сумма платежей всех государств была равна суммарной выручке от внешней и внутренней торговли.

Для любой страны выручка от внутренней и внешней торговли составит

$$p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n.$$

В сбалансированной системе международной торговли не должно быть дефицита, т.е. у каждой страны выручка от торговли должна быть не меньше её национального дохода

$$p_i \geq x_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Последнее неравенство справедливо только в том случае, когда $p_i = x_i$, $i = \overline{1,n}$, т.е. у всех торгующих стран выручка от внешней и внутренней торговли должна совпадать с национальным доходом. В матричной записи это означает, что имеет место равенство $AX = X$, где $A-$ структурная матрица международной торговли, а $X -$ вектор национальных доходов.

Вектор X является собственным вектором структурной матрицы торговли A, а соответствующее собственное значение равно единице. Отсюда следует, что баланс в международной торговле будет достигнут, если единица является собственным числом структурной матрицы международной торговли, а вектор национальных доходов торгующих стран – собственным вектором этой матрицы, отвечающим её единичному собственному значению.

Пример 1.2.7. Найти национальные доходы x_1, x_2, x_3 трёх торгующих стран в сбалансированной системе международной торговли. Структурная матрица торговли трёх стран имеет вид

$$A=\begin{pmatrix}1/4 & 1/3 & 1/3\\ 1/4 & 0 & 1/3\\ 1/2 & 2/3 & 1/3\end{pmatrix}.$$

Решение. Решаем систему $AX = X$.

$$\begin{pmatrix}1/4 & 1/3 & 1/3\\ 1/4 & 0 & 1/3\\ 1/2 & 2/3 & 1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{4}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3=x_1\\ \frac{1}{4}x_1 \qquad\quad +\frac{1}{3}x_3=x_2\\ \frac{1}{2}x_1+\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3=x_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x_1+4x_2+4x_3=12x_1\\ 3x_1 \qquad\quad +4x_3=12x_2\\ 3x_1+4x_2+2x_3=6x_3\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-9x_1+4x_2+4x_3=0\\ 3x_1-12x_2+4x_3=0\\ 3x_1+4x_2-4x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-9x_1+4x_2+4x_3=0\\ 12x_1-16x_2=0\\ -6x_1+8x_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-9x_1+4x_2+4x_3=0\\ 3x_1-4x_2=0\\ 3x_1-4x_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_3=2c\\ x_1=\frac{4}{3}c\\ x_2=c\end{cases}$$

Отсюда следует, что сбалансированность торговли трёх стран достигается при векторе национальных доходов $\overline{X}=\left(\frac{4}{3}c, c, 2c\right)$, т.е. при соотношении национальных доходов стран $\frac{4}{3}:1:2$ или $4:3:6$.

1.3. ФОРМЫ МОДЕЛЕЙ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ (ЗЛП) И СВЯЗЬ МЕЖДУ НИМИ

1.3.1. Общая форма задачи линейного программирования. План задачи. Возможный, допустимый, оптимальный план. Область допустимых значений (ОДЗ) задачи

Общая форма ЗЛП записывается следующим образом.

Найти значения переменных $X=(x_1,x_2,...,x_n)$, которые удовлетворяли бы условиям

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2 \ +\cdots+a_{1n}x_n=(\le,\ge)b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2 \ +\cdots+a_{2n}x_n=(\le,\ge)b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=(\le,\ge)b_m \end{cases} \qquad (1.3.1)$$

и обеспечивали бы max или min целевой функции

$$Z=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n \to \max \ (\min). \qquad (1.3.2)$$

Дополнительно налагаются условия неотрицательности переменных

$$x_1\ge 0, \qquad x_2\ge 0, \qquad \cdots \qquad x_n\ge 0 \qquad (1.3.3)$$

или указываются диапазоны их изменения:

$$\left.\begin{array}{cccc} x_1\le 0, & x_2\le 0, & ... & x_n\le 0; \\ x_1-\text{произвольного знака}, & x_2-\text{произвольного знака}, & ... & x_n-\text{произвольного знака}; \\ x_1\in[a_1,b_1], & x_2\in[a_2,b_2], & ... & x_n\in[a_n,b_n]. \end{array}\right\}$$

На каждую переменную налагается одно из написанных ограничений.

Решение, которое удовлетворяет условию (1.3.1) называется возможным, условиям (1.3.1), (1.3.3) – допустимым или планом. Решение, которое удовлетворяет условиям (1.3.1), (1.3.2), (1.3.3) называется оптимальным.

1.3.2. Стандартная форма задачи линейного программирования

Стандартная форма ЗЛП в матричном виде записывается следующим образом

$$\begin{array}{ccc} Z=CX\to\min, & & Z=CX\to\max, \\ AX\ge B, & \text{или} & AX\le B, \\ X\ge 0 & & X\ge 0. \end{array}$$

Чтобы привести задачу к стандартному виду, необходимо:

1) некоторые неравенства умножают на –1, чтобы поменять знак неравенства;

2) чтобы перейти от нахождения max к нахождению min или наоборот необходимо сделать замену $Z = -Z'$;
3) сделать переменные неотрицательными (это рассматривается в пункте 1.3.3.);
4) уравнение $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ можно заменить системой неравенств

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \ge b, \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \le b. \end{cases}$$

Если ограничения записаны в виде системы уравнений, то методом Жордана-Гаусса находят одно общее решение системы и подставляют выражения каждой базисной переменной в целевую функцию. Отбрасывая базисные переменные из каждого уравнения общего решения, учитывая их неотрицательность, превращают уравнения в неравенства и получают ЗЛП относительно свободных переменных в стандартной форме. При этом количество переменных уменьшается.

Пример 1.3.1. Привести к стандартному виду задачу

$$Z = -x_1 + x_2 - 2x_3 \to \max, \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = -1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 3, \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0, \; x_3 \ge 0, \\ x_4 \ge 0, \; x_5 \ge 0. \end{pmatrix}$$

Решение. Методом Жордана-Гауса в каждом уравнении выделяем базисные переменные

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & [1] & -1 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -2 & -3 & [1] & 2 \\ 3 & 1 & -1 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & [2] & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -2 & -3 & 1 & 2 \\ -7 & 1 & 3 & 4 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1/2 & 0 & [1] & 1 & 0 & 1/2 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & [1] & 3 \\ -11/2 & [1] & 0 & 1 & 0 & -5/2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x_1 + x_3 + x_4 = \dfrac{1}{2}, \\ 4x_1 - x_4 + x_5 = 3, \\ -\dfrac{11}{2}x_1 + x_2 + x_4 = -\dfrac{5}{2}. \end{cases} \Rightarrow \tag{1.3.4}$$

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}x_1 - x_4 \ge 0, \\ x_5 = 3 - 4x_1 + x_4 \ge 0, \\ x_2 = -\dfrac{5}{2} + \dfrac{11}{2}x_1 - x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Выражаем Z через свободные переменные

$$Z=-x_1+\left(-\frac{5}{2}+\frac{11}{2}x_1-x_4\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_1-x_4\right)=-\frac{7}{2}+\frac{7}{2}x_1+x_4 .$$

Отбрасывая в системе (1.3.4) базисные переменные, получаем стандартный вид ЗЛП

$$Z=-\frac{7}{2}+\frac{7}{2}x_1+x_4\to\max, \qquad Z'=\frac{7}{2}-\frac{7}{2}x_1-x_4\to\min,$$

$$\begin{cases}-\frac{1}{2}x_1+x_4\le\frac{1}{2},\\ 4x_1-x_4\le 3,\\ -\frac{11}{2}x_1+x_4\le-\frac{5}{2},\end{cases} \quad\text{или}\quad \begin{cases}\frac{1}{2}x_1-x_4\ge-\frac{1}{2},\\ -4x_1+x_4\ge-3,\\ \frac{11}{2}x_1-x_4\ge\frac{5}{2},\end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\ x_4\ge 0 \qquad\qquad x_1\ge 0,\ x_4\ge 0.$$

1.3.3. Каноническая форма задачи линейного программирования

Для решения и исследования ЗЛП с помощью универсальных методов она должна быть приведена к канонической форме, виду (КЗЛП), которая характеризуется тремя условиями

все ограничения имеют вид равенства, « = »;
все переменные неотрицательные, ($x_j\ge 0$);
находится минимум целевой функц*ии*, $Z\to\min$.

Иногда третье условие пишут в виде $Z\to\max$.

Рассмотрим правило сведения общей ЗЛП к КЗЛП.
Если в задаче $Z\to\max$, то делается замена

$$Z'=-Z=-c_1x_1-c_2x_2-\dots-c_jx_j-\ldots-c_nx_n\to\min .$$

Чтобы из неравенства сделать равенство, надо в его левую часть прибавить дополнительную (балансовую) неотрицательную переменную, если ограничение типа «$\le$», или отнять, если ограничение типа «$\ge$». При этом в каждое неравенство вводится своя $(n+i)$-я дополнительная переменная. Если некоторая $x_j\le 0$, то делают замену $x_j=x_j''-x_j'$ $\left(x_j'',x_j'\ge 0\right)$. Если какая-то переменная x_j может иметь произвольный знак, то тоже делают замену $x_j=x_j''-x_j'$ $\left(x_j'',x_j'\ge 0\right)$.

Любую ЗЛП можно привести к канонической форме.

Пример 1.3.2. Привести к канонической форме ЗЛП

$$Z = x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \le 2, \\ 4x_1 + x_3 \ge -5, \\ 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 0, \end{cases}$$

$$x_1 \le 0, \qquad x_3 \ge 0.$$

Решение. Делаем замену $x_1 = x_1'' - x_1'$ $(x_1'' \ge 0,\ x_1' \ge 0)$, $x_2 = x_2'' - x_2'$ $(x_2'' \ge 0,\ x_2' \ge 0)$, $Z' = -Z$ и добавляем балансовые переменные: в первом ограничении прибавляем дополнительную (балансовую) переменную x_4, а во втором вычитаем x_5. После указанных преобразований получаем КЗЛП

$$Z' = -Z = -x_1 + 2x_2 - x_3 = -(x_1'' - x_1') + 2(x_2'' - x_2') - x_3 = -x_1'' + x_1' + 2x_2'' - 2x_2' - x_3 .$$

$$Z' = -x_1'' + x_1' + 2x_2'' - 2x_2' - x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1'' - x_1' - 2x_2'' + 2x_2' + x_3 + x_4 = 2, \\ 4x_1'' - 4x_1' + x_3 - x_5 = -5, \\ 3x_1'' - 3x_1' - 4x_2'' + 4x_2' - 5x_3 = 0, \end{cases}$$

$$x_1'' \ge 0,\ x_1' \ge 0,\ x_2' \ge 0,\ x_2'' \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0.$$

1.3.4. Замена неравенств равенствами

Теорема. Каждому решению $X=(\beta_1, \beta_2,\dots,\beta_n)$ неравенства $a_1x_1+ a_2x_2+\dots+ a_n x_n \le b$ соответствует единственное решение $Y=(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \beta_{n+1})$ уравнения $a_1x_1+ a_2x_2+\dots+ a_n x_n +x_{n+1}=b$ $(x_{n+1} \ge 0)$ и наоборот каждому решению $Y=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n,\beta_{n+1})$ уравнения $a_1x_1+ a_2x_2+\dots+ a_n x_n +x_{n+1}=b$ $(x_{n+1} \ge 0)$ соответствует единственное решение $X=(\beta_1, \beta_2,\dots, \beta_n)$ неравенства $a_1x_1+ a_2x_2+\dots+ a_nx_n \le b$.

Из приведенной теоремы следует: чтобы из неравенства $a_1x_1+ a_2x_2+\dots+ a_n x_n \le (\ge)\ b$ сделать равенство, к левой части прибавляют (отнимают) балансовую переменную $x_{n+1} \ge 0$: $a_1x_1+ a_2x_2+\dots+ a_n x_n +x_{n+1}=b$ $(a_1x_1+ a_2x_2+\dots+ a_nx_n - x_{n+1}=b)$.

1.3.5. Виды записи задач линейного программирования

Не ограничивая общности, рассмотрим каноническую форму ЗЛП.

1. Развёрнутый вид записи ЗЛП

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad \begin{array}{c} Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \min, \\ x_j \ge 0 \;\; (j = \overline{1,n}). \end{array} \tag{1.3.5}$$

2. Запись ЗЛП с использованием знаков суммирования

$$\begin{gathered} Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i (i = \overline{1,m}), \\ x_j \ge 0 \;\; (j = \overline{1,n}). \end{gathered} \tag{1.3.6}$$

3. Матричная форма

$$\begin{gathered} Z = CX \to \min, \\ AX = B, \\ X \ge 0, \end{gathered} \tag{1.3.7}$$

где $\quad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{pmatrix}, \;\; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \;\; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}, \;\; A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$

4. Векторная форма

$$\begin{gathered} Z = \overline{C} \cdot \overline{X} \to \min, \\ \overline{A}_1 x_1 + \overline{A}_2 x_2 + \cdots + \overline{A}_n x_n = \overline{B}, \\ \overline{X} \ge 0, \end{gathered} \tag{1.3.8}$$

где:

$$\begin{array}{l} \overline{C} = (c_1, c_2, \ldots, c_n), \\ \overline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{array} \;\; \overline{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \overline{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \overline{A}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \ldots, \overline{A}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \overline{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

1.4. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ЕЕ РЕШЕНИЯ

1.4.1. Геометрическая интерпретация задач линейного программирования

Рассмотрим общую форму задачи линейного программирования.

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max\ (\min).$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ + \cdots + a_{1n}x_n = (\leq, \geq) b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ + \cdots + a_{2n}x_n = (\leq, \geq) b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = (\leq, \geq) b_m \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, ..., x_j \geq 0, ..., x_n \geq 0\,.$$

Каждое из уравнений системы определяет в $n-$мерном пространстве некоторую гиперплоскость, представляющую собой выпуклое множество. Каждое неравенство определяет выпуклое множество – полупространство. Условия неотрицательности определяют полупространства с граничными гиперплоскостями $x_j = 0,\ j = 1, 2, ..., n$. Пересечение гиперплоскостей и полупространств является выпуклым множеством. Если это множество ограничено, то оно представляет собой многогранник в $n-$мерном пространстве. Поэтому, если система ограничений совместна, то ОДЗ задачи – выпуклый многогранник. В общем случае совокупность допустимых решений задачи может быть гиперплоскостью, полупространством, неограниченным и ограниченным многогранником, точкой, пустым множеством.

Выясним геометрическую сущность целевой функции.

Линией (поверхностью) уровня функции называется совокупность всех точек пространства, в каждой из которых данная функция принимает одно и то же значение. Приравнивая целевую функцию произвольному числу a $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = a$, получаем множество поверхностей уровня (гиперплоскостей). Для линейной функции все линии (поверхности) уровня коллинеарны.

Таким образом, геометрически задача линейного программирования представляет собой отыскание такой точки многогранника решений, координаты которой доставляют линейной функции минимальное (максимальное) значение.

Очевидно, экстремальными точками ОДЗ будут те ее точки, которые отвечают опорному положению гиперплоскости, полученной из целевой функции. Назовём *опорной гиперплоскостью* такое положение поверхности уровня, при котором она проходит хотя бы через одну точку ОДЗ, но не содержит ни одной её внутренней точки. Для нахождения опорной гиперплоскости нужно построить какую-нибудь поверхность уровня, например $c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = 0$, и передвигать её параллельно самой себе в направлении градиента целевой функции $gradf = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2}; ...; \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$, пока она не станет опорной к области допустимых значений задачи. Предельное положение поверхности уровня (совпадение с опорной гиперплоскостью) отвечает максимальному (минимальному) значению целевой функции.

Приведенные рассуждения являются основой графической иллюстрацией решения задач линейного программирования.

1.4.2. Графическое решение задач линейного программирования с двумя переменными

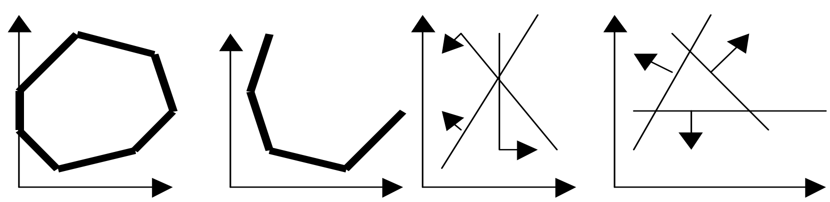
Графический метод используется для решения ЗЛП с двумя неизвестными, а также в том случае, когда ЗЛП, записанная в канонической форме, сводится к задаче, записанной в стандартной форме с двумя переменными, т.е. $n - m = 2$, где $n-$ количество переменных в системе уравнений ЗЛП, а $m-$ ранг системы ограничений.

Рассмотрим ЗЛП

$$\begin{aligned} &Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max(\min), \\ &a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \le (\ge =)\ b_i,\ (i = \overline{1, m}). \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

Рассмотрим решение этой задачи на плоскости. Каждое неравенство системы ограничений определяет полуплоскость. Если система неравенств совместна, то область допустимых значений (ОДЗ) задачи (пересечение полуплоскостей) – выпуклое ограниченное или неограниченное множество.

ОДЗ может быть а) выпуклым многоугольником, б) выпуклой многоугольной неограниченной областью, в) точкой, г) пустым множеством $\varnothing$ (Рис.1.4.1.).



а) б) в) г)

Рис. 1.4.1. Виды ОДЗ задачи линейного программирования на плоскости

Вектор $\overline{c} = gradZ = \left(\frac{\partial Z}{\partial x_1}; \frac{\partial Z}{\partial x_2} \right) = (c_1; c_2)$ – направление наибольшего возрастания функции Z. Прямая $c_1 x_1 + c_2 x_2 = C = const$ – линия уровня функции Z, то есть линия, вдоль которой функция Z принимает постоянное значение C. Она всегда перпендикулярна вектору $\overline{c}$. Поэтому, чтобы найти точку, в которой функция Z достигает максимального значения, необходимо прямую $c_1x_1 + c_2x_2 = C = const$ (можно $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$) перемещать в направлении вектора $\overline{c}$, пока она станет опорной, и перемещать в противоположном направлении, если находится минимальное значение функции Z.

Опорной прямой выпуклого многоугольника называется прямая, которая имеет с ним хотя бы одну общую точку и многоугольник расположен по одну сторону от неё.

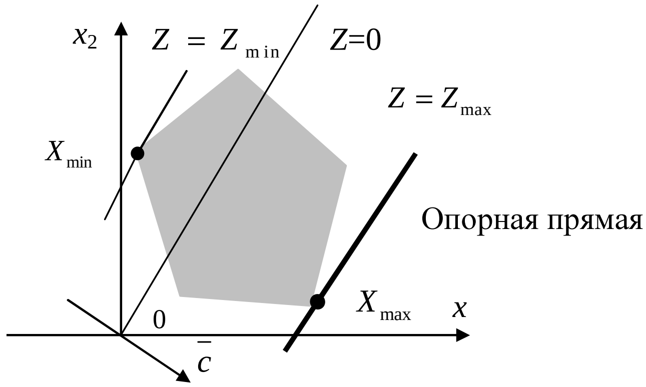


Рис. 1.4.2. Схема графического нахождения оптимального значения ЗЛП с двумя переменными

При решении ЗЛП могут возникнуть следующие случаи: а) задача имеет единственное решение, б) задача имеет бесконечное количество решений (альтернативный оптимум), в) $Z_{\max} \to +\infty$ $(Z_{\min} \to -\infty)$, г) ОДЗ пустое множество $\varnothing$ (Рис.1.4.3.).

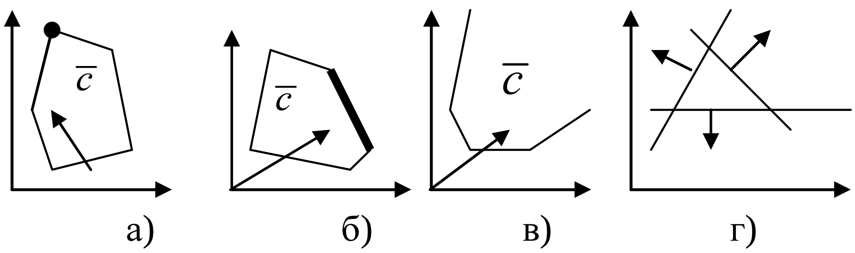


Рис.1.4.3. Возможные случаи графического решения ЗЛП

Пример 1.4.1. Решить графически задачу линейного программирования

$$Z = 4x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 9, & \sim\ l_1 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 18, & \sim\ l_2 \\ -2x_1 + x_2 \ge -10, & \sim\ l_3 \\ 2x_1 - x_2 \ge 0, & \sim\ l_4 \end{cases} \qquad (1.4.2)$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Решение. Строим область допустимых решений. Для этого строим граничные прямые и определяем полуплоскости, координаты точек которых удовлетворяют неравенствам-ограничениям.

Рассмотрим первое ограничение $-x_1+3x_2 \le 9$. Строим прямую l_1 $-x_1+3x_2=9$ как прямую в отрезках по двум точкам: $x_1=0$, $x_2=3$ и $x_2=0$, $x_1=-9$. Берём произвольную точку, не лежащую на этой прямой, например, О(0,0). Подставляем её координаты в первое ограничение. Если неравенство в этой точке выполняется, то первое ограничение определяет полуплоскость, которая содержит выбранную точку, если нет, то оно определяет полуплоскость, в которой не лежит выбранная точка. В точке О(0,0) неравенство выполняется ($-0+3\cdot 0=0<9$). Поэтому первое ограничение определяет полуплоскость, расположенную ниже прямой l_1. На рис. 1.4.4 это отмечено двумя стрелками ↘.

Аналогично поступаем со следующими тремя ограничениями. Результаты вычислений запишем в виде табл. 1.4.1. Пятое и шестое ограничения определяют первую четверть системы координат.

Таблица 1.4.1. *Определение ОДЗ*

Прямая	Уравнение прямых	Точки на прямых	Точка $\notin$ прямой	Знак неравенства в этой точке	Принадлежность точки полуплоскости, определяемой неравенством
l_1	$-x_1+3x_2=9$	(0,3); (−9,0)	О(0,0)	−0+0 <9	О принадлежит
l_2	$2x_1+3x_2=18$	(0,6); (9,0)	О(0,0)	2·0+3·0 <18	О принадлежит
l_3	$2x_1-x_2=10$	(0,−10);(7,4)	О(0,0)	2·0−0<10	О принадлежит
l_4	$2x_1-x_2=0$	(0,0);(2,4)	*М*(0,5)	−5<0	*М* не принадлежит

Из условий $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$ следует, что ОДЗ находится в первой четверти системы координат. Выделяем ОДЗ – пятиугольник О*ABCD*. Строим вектор $\overline{c}=(c_1;c_2)=(4;2)$ – направление наибольшего возрастания функции *Z*.

$$\overline{c}=(c_1;c_2)=\mathrm{grad}Z=\left(\frac{\partial Z}{\partial x_1};\frac{\partial Z}{\partial x_2}\right).$$

Строим прямую перпендикулярную вектору $\overline{c}$, можно строить прямую $4x_1+2x_2=0$.

Перемещаем эту прямую в направлении вектора $\overline{c}$, пока она станет опорной к ОДЗ. Она становится опорной в точке *C*.

Находим координаты точки *C*: $\begin{cases} l_2 \\ l_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1+3x_2=18, \\ 2x_1-\quad x_2=10, \end{cases} \begin{cases} x_1=6, \\ x_2=2. \end{cases}$

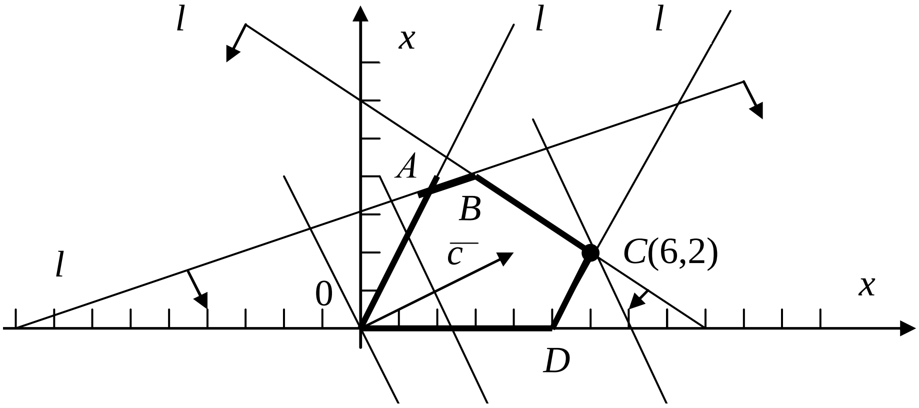


Рис.1.4.4. Графическое решение ЗЛП

Ответ. $Z_{\max}= 4\cdot6+2\cdot2=28$, $X_{max}= (6,2)$.

Замечание. Оптимальное решение в математическом программировании принято обозначать $Z_{\min}$, $Z_{\max}$, Z_{Opt}, Z^*.

В данной задаче $Z_{\min} = 4\cdot 0 + 2\cdot 0 = 0$ в точке O(0,0).

Пример 1.4.2. Решить графически задачу линейного программирования

$$Z = -x_1 - x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3, & \sim\ l_1 \\ x_2 \leq 2x_1, & \sim\ l_2 \\ x_1 - 2x_2 \leq 6. & \sim\ l_3 \end{cases} \qquad (1.4.3)$$

Решение аналогично предыдущему примеру. Поэтому сделаем чертёж без объяснений.

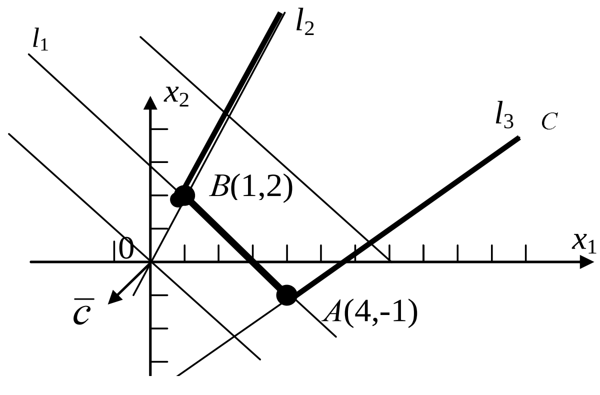


Рис. 1.4.5. Графическое решение ЗЛП

Так как отрезок $AB \perp$ вектору $\bar{c} = (-1,-1)$, то максимальное значение функция принимает во всех точках отрезка AB. Запишем это решение как выпуклую линейную комбинацию точек A и B покомпонентно:

$$x^*_{1,\max} = \lambda \cdot 4 + (1-\lambda)\cdot 1 = 3\lambda + 1,\ x^*_{2,\max} = \lambda \cdot (-1) + (1-\lambda)\cdot 2 = -3\lambda + 2.$$

Тогда $X_{\max} = (1+3\lambda, 2-3\lambda)\ \ (0 \le \lambda \le 1)$.

Подставив значение $X_{\max}$ в целевую функцию, получаем

$$Z_{\max} = Z(X_{\max}) = Z(A) = Z(B) = -1 - 3\lambda - 2 + 3\lambda = -3,\ Z_{\min} = -\infty.$$

Замечание 1. Если бы целевая функция имела вид $Z = -x_1 + 2x_2$, то она принимала бы минимальное значение во всех точках луча AC. В этом случае $Z_{\min} = Z(A) = -1\cdot 4 + 2\cdot(-1) = -6,\ Z_{\max} = +\infty$.

Замечание 2. В математическом программировании область допустимых значений (ОДЗ) часто называют областью допустимых решений (ОДР) или многогранником решений.

1.4.3. Графическое решение задач линейного программирования, записанных в канонической форме при условии, что $n - m = 2$

Покажем на примере методику графического решения ЗЛП со многими переменными.

Пример 1.4.3. Решить задачу линейного программирования

$$Z = x_2 + 4x_5 + 2x_6 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 = 10, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 3x_5 - x_6 = 18, \\ -x_1 + x_5 + x_6 = 4, \\ -x_1 + x_3 + 3x_5 - 2x_6 = 10, \end{cases} \qquad x_j \ge 0\ \ (j = \overline{1,6}\ ).$$

Так как для этой задачи $n - m = 2$, то её можно решить графически.

Выделяем методом Жордана-Гаусса базисные переменные:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 3 & -1 & 18 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & [1] & 0 & 3 & -2 & 10 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ [-1] & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & 10 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_4 = 14 - 2x_5 - x_6 \ge 0, \\ x_2 = 8 - x_6 \ge 0, \\ x_1 = -4 + x_5 + x_6 \ge 0, \\ x_3 = 6 - 2x_5 + 3x_6 \ge 0. \end{cases} \qquad (1.4.4)$$

Выражая целевую функцию через свободные переменные и отбрасывая базисные переменные из полученной системы ограничений с учетом их неотрицательности, получаем ЗЛП с двумя переменными

$$Z = 8 - x_6 + 4x_5 + 2x_6 = 8 + 4x_5 + x_6 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_5 + x_6 \le 14, \\ x_6 \le 8, \\ x_5 + x_6 \ge 4, \\ 2x_5 - 3x_6 \le 6, \end{cases}$$

$$x_5 \ge 0, \quad x_6 \ge 0.$$

Решая эту задачу, находим x_5, x_6 и $Z_{\max}$.

Таблица 1.4.2. *Определение ОДЗ*

Прямая	Уравнения прямых	Точки на прямых	Точка $\notin$ прямой	Знак неравенства в этой точке	Принадлежность точки полуплоскости с ОДЗ
l_1	$2x_5+x_6=14$	(0,14); (7,0)	O(0,0)	$2\cdot0+0 <14$	O принадлежит
l_2	$x_6=8$	Полуплоскость, которая находится ниже прямой $x_6=8$.			
l_3	$x_5+x_6=4$	(0,4); (4,0)	O(0,0)	$0+0<4$	O не принадлежит
l_4	$2x_5-3x_6=6$	(0,–2); (3,0)	O(0,0)	$2\cdot0-3\cdot0<6$	O принадлежит

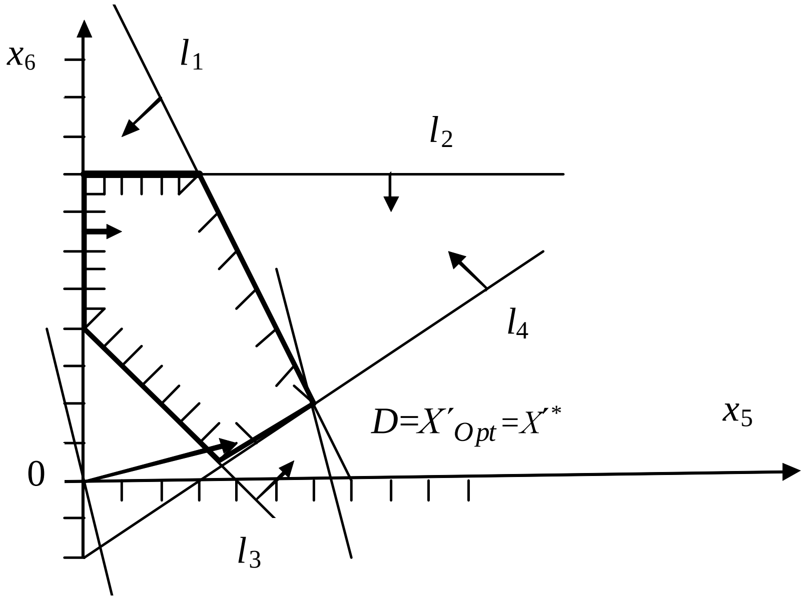


Рис.1.4.6 . Графическое решение ЗЛП

Максимальное значение целевая функция принимает в точке *D*, находим её координаты

$$D\colon \begin{cases} l_1 \\ l_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_5 + x_6 = 14, \\ 2x_5 - 3x_6 = 6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_5 + x_6 = 14, \\ 4x_6 = 8,, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_5 = 6, \\ x_6 = 2. \end{cases}$$

Из (1.4.4) находим значения остальных (базисных) переменных.

x_4=14 –2·6 –2=0, x_2=8 –2=6, x_1= – 4+6+2=4, x_3=6 –2·6+3·2=0, $Z_{\max}$ = 8+4·6+2=34.

Ответ: $X_{\max} = (4,6,0,0,6,2)$, $Z_{\max} = 34$.

1.4.4. Алгоритм графического решения задач линейного программирования

1. Записывают уравнения граничных прямых $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i \ (i = \overline{1,m})$ и строят их на плоскости $x_1 0 x_2$.

2. Определяют полуплоскости, которые соответствуют каждому ограничению-неравенству. Для этого берут произвольную точку, которая не находится на прямой, и её координаты подставляют в ограничение-неравенство. Если неравенство в выбранной точке выполняется, то искомая полуплоскость будет та, которая содержит выбранную точку, если нет, то неравенство определяет полуплоскость, в которой не лежит выбранная точка.

3. Выделяют ОДЗ. Если имеется условие неотрицательности переменных, то ОДЗ расположена в первой четверти. $x_2 \geq 0$ определяет верхнюю полуплоскость, $x_1 \geq 0$ – правую полуплоскость.

4. Строят вектор $\overline{c} = (c_1; c_2)$ – направление наибольшего возрастания функции Z.

5. Строят прямую перпендикулярную вектору $\overline{c}$.

6. Перемещают эту прямую в направлении вектора $\overline{c}$, если задача на max, и в противоположном направлении, если задача на min, пока она станет опорной. Если прямая не может стать опорной, то $Z \to -\infty$ или $Z \to +\infty$.

7. Вычисляют координаты оптимальной точки и оптимальное значение функции Z.

1.5. СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГАММИРОВАНИЯ

1.5.1. Теорема об области допустимых значений (ОДЗ) задач линейного программирования

Рассмотрим каноническую форму ЗЛП:

$$Z = \overline{C}\ \overline{X} \to \min, \tag{1.5.1}$$

$$\overline{A}_1 x_1 + \overline{A}_2 x_2 + \dots + \overline{A}_n x_n = \overline{B}, \tag{1.5.2}$$

$$\overline{X} \geq 0, \tag{1.5.3}$$

где

$$\overline{C} = (c_1, c_2, ..., c_n), \quad \overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n),$$

$$\overline{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ \overline{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ \overline{A}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \ \overline{A}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \ \overline{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Теорема 1.5.1. Множество всех допустимых решений ЗЛП является выпуклым (если оно не пусто).

Множество ОДЗ задачи линейного программирования имеет особенности:

Множество допустимых решений ЗЛП всегда содержит конечное число угловых точек.

Произвольную точку множества допустимых решений ЗЛП, если оно ограничено, можно представить в виде выпуклой линейной комбинации ее угловых точек.

1.5.2. Теорема о целевой функции

Теорема 1.5.2. Если ЗЛП имеет оптимальное решение, то целевая функция принимает его в одной из угловых точек многогранника решений. Если оптимальное значение целевая функция принимает более чем в одной угловой точке, то она принимает его и в каждой точке, которая является выпуклой линейной комбинацию этих угловых точек.

1.5.3. Теорема об угловой точке (необходимое и достаточное условия), понятие опорного плана

Допустимое решение $\overline{X}=(x_1,x_2,...,x_n)$ задачи линейного программирования 1.5.1-1.5.3 называется планом.

План $\overline{X}=(x_1,x_2,...,x_n)$ называется *опорным,* если векторы $\overline{A}_j$ $(j=1,2,...,n)$, входящие в разложение (1.5.2) с положительными коэффициентами x_j, являются линейно независимыми.

Так как векторы $\overline{A}_j$ m-мерные, то число положительных компонент в опорном плане не может превышать m.

Опорный план называется невырожденным, если он содержит ровно m положительных компонент, если меньше – вырожденным.

Сформулируем теоремы, которые устанавливают связь между множеством опорных планов задачи линейного программирования и множеством угловых точек её допустимого многогранника решений.

Теорема 1.5.3. (Достаточное условие). Если известно, что система векторов $\overline{A}_1,\overline{A}_2,...,\overline{A}_k$ $(k\le n)$ в разложении (1.5.2) линейно независима и такова, что $\overline{A}_1x_1+\overline{A}_2x_2+\cdots+\overline{A}_kx_k=\overline{B}$, где все $x_j>0$, то точка $\overline{X}=(x_1,x_2,...,x_k,0,0,...,0)$ является угловой точкой многогранника решений.

Теорема 1.5.4. (Необходимое условие). Если $\overline{X}=(x_1,x_2,...,x_n)$ – угловая точка многогранника решений, то векторы в разложении (1.5.2), соответствующие положительным x_j являются линейно независимыми.

1.5.4. Следствия из теорем и вывод

Каждый опорный план $\overline{X}=(x_1,x_2,...,x_n)$ определяется системой m линейно независимых векторов, содержащихся в данной системе из n векторов $\overline{A}_1,\overline{A}_2,...,\overline{A}_n$.

Все числа $x_1,x_2,....,x_n$ в опорном плане неотрицательные и среди них не более m отличных от нуля.

Если существует оптимальный план, то существует такая точка многогранника решений, в которой линейная функция достигает своего наибольшего (наименьшего) значения.

Каждой угловой точке многогранника решений соответствует опорное решение, и каждый опорный план соответствует угловой точке многогранника решений.

Поэтому для отыскания оптимального плана задачи линейного программирования достаточно исследовать только опорные планы.

1.6. СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Согласно теоремам 1.5.3 и 1.5.4 для отыскания оптимального плана задачи достаточно исследовать только опорные планы, допустимые базисные решения, которых не больше, чем C_n^m. При больших значениях m и n найти оптимальный план, перебирая все опорные планы ЗЛП, весьма трудно. Поэтому необходимо иметь схему, позволяющую осуществлять упорядоченный переход от одного опорного плана к другому. Такой схемой является симплекс-метод, который позволяет, исходя из известного опорного плана задачи, за конечное число шагов получить оптимальный план. Каждый шаг состоит в нахождении нового опорного плана, которому соответствует меньшее (не большее), если задача на $\min$, чем в предыдущем плане значение целевой функции. Процесс перебора опорных планов продолжается до тех пор, пока не будет найден план, соответствующий экстремуму целевой функции.

Симплексный метод состоит из трёх вычислительных процедур: с заданным базисом; с искусственным базисом; двойственный симплекс-метод.

Рассмотрим эти процедуры.

1.6.1. Симплекс-метод с заданным базисом

Для применения симплексного метода к решению ЗЛП, задача должна быть сведена к каноническому виду (КЗЛП) с неотрицательными $(b_i \geq 0)$ свободными членами.

Чтобы применить симплекс-метод с заданным базисом КЗЛП должна содержать единичную подматрицу порядка m, т. е. каждое уравнение должно содержать переменную, которая входит только в одно уравнение с коэффициентом равным единице. В этом случае очевиден первоначальный опорный план (неотрицательное базисное решение системы ограничений).

Для проверки полученного опорного плана на оптимальность необходимо воспользоваться критерием оптимальности, суть которого заключается в том, что для каждого вектора $\overline{A}_j$ в системе ограничений задачи рассчитывается величина

$$\Delta_j = z_j - c_j, \tag{1.6.1}$$

где:

$$z_j = \overline{C}^{(базис)} \cdot \overline{A}_j = \sum_{i=1}^{m} c_i^{(базис)} a_{ij}, \quad j = \overline{1,n}. \tag{1.6.2}$$

Величины $z_j - c_j$ называются оценками оптимальности. Величина $\Delta_j = z_j - c_j$ показывает, на сколько уменьшится *Z*, если свободную переменную x_j увеличить на единицу.

Сформулируем теорему оптимальности.

Теорема. Если для известного опорного плана $\overline{X}_0$ при некотором фиксированном j разность $z_j - c_j > 0$, то можно построить такое множество опорных планов задачи, что для любого из них $Z < Z_0$, где Z – значение целевой функции, соответствующее этому опорному плану.

Для проверки допустимого решения на оптимальность просматривают все $z_j - c_j$. При этом могут возникнуть такие случаи:

1) если все $\Delta_j \le 0$, то план оптимальный, т.е. имеем min *Z*;

2) если имеются $\Delta_j > 0$ и среди чисел a_{ij}, стоящих в столбце, который соответствует вектору $\overline{A_j}$, нет положительных, то целевая функция неограничена на множестве её планов ($Z \to -\infty$);

3) если имеются $\Delta_j > 0$ и среди чисел a_{ij} имеются положительные, то можно перейти к новому опорному плану, который дает значение целевой функции, не больше предыдущего;

4) если для оптимального плана $\Delta_j = 0$ хотя бы для одной небазисной переменной и среди чисел a_{ij} имеются положительные, то оптимальный план не единственный. Для базисного вектора всегда $\Delta_j = 0$.

Если после оценивания опорного плана на оптимальность он окажется не оптимальным, необходимо перейти к новому опорному плану путём перехода к новому базису по правилу полных жордановых исключений, которое будет описано ниже в примере.

Пример 1.6.1. Для выпуска двух видов продукции по цене 2 грн. и 3 грн. используется три вида сырья с запасами 60 кг, 54 кг, 60 кг. Расходы сырья на единицу продукции первого вида соответственно равны 3; 1; 2 кг, второго – 2; 3; 3 кг. Данные сведены в табл.1.6.1.

Таблица 1.6.1. *Исходные данные выпуска продукции*

Сырьё	Продукция (расходы сырья на единицу продукции)		Запасы сырья
	P_1	P_2	
S_1	3 кг	2 кг	60 кг
S_2	1 кг	3 кг	54 кг
S_3	2 кг	3 кг	60 кг
Цена ед. продукции	2 грн.	3 грн.	
Количество продукции	x_1	x_2	

Определить план выпуска продукции, чтобы доход от её реализации был максимальный.

Решение. Обозначим через x_1 количество выпускаемой продукции первого вида, x_2 – второго вида, Z – доход от реализации всей продукции. Тогда математическая модель задачи принимает вид

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 60, \\ x_1 + 3x_2 \le 54, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 60, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \qquad (1.6.3)$$

Переходим к канонической форме модели. Для этого добавляем в левую часть каждого ограничения дополнительную (балансовую) неотрицательную переменную, чтобы преобразовать его в равенство. Преобразовываем и целевую функцию, делая замену $Z' = -Z$.

Замечание. Балансовые переменные вводятся в целевую функцию с коэффициентом ноль.

$$Z' = -Z = -2x_1 - 3x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \to \min,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 60, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 54, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_5 = 60, \end{cases} \qquad (1.6.4)$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0, x_5 \ge 0.$$

Систему ограничений удобно записывать в векторной форме

$$\overline{B} = x_1 \cdot \overline{A}_1 + x_2 \cdot \overline{A}_2 + x_3 \cdot \overline{A}_3 + x_4 \cdot \overline{A}_4 + x_5 \cdot \overline{A}_5, \qquad (1.6.5)$$

где:

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} 60 \\ 54 \\ 60 \end{pmatrix},\ \overline{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \overline{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \overline{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{A}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (1.6.6)$$

Ограничение (1.6.5) называется разложением вектора $\overline{B}$ по векторам $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$, $\overline{A}_4$, $\overline{A}_5$. За базис этой системы векторов можно взять систему единичных векторов $Б_1 = \left(\overline{A}_3, \overline{A}_4, \overline{A}_5\right)$. Допустимое базисное решение будет определять начальный опорный план.

Выпишем начальный опорный план и значение целевой функции для него. Для этого свободные переменные приравниваем к нулю $x_1 = 0, x_2 = 0$, а базисные переменные после этого находим из системы (1.6.4)

$$x_3 = 60, x_4 = 54, x_5 = 60.$$

$$\overline{X}_{Б_1} = (0,0,60,54,60),\ Z'\left(\overline{X}_{Б_1}\right) = -2\cdot 0 - 3\cdot 0 + 0\cdot 60 + 0\cdot 54 + 0\cdot 60 = 0.$$

Для удобства решения задачи составляем симплексную таблицу.

Симплексная таблица составляется следующим образом. В первой строке шапки симплекс-таблицы указаны векторы исходной системы ограничений задачи, во второй – коэффициенты при переменных в целевой функции задачи. В первом столбце (столбец $Б_1$) указаны векторы, образующие базис заданной системы векторов, во втором – коэффициенты целевой функции при базисных переменных. Во всех остальных клетках таблицы (кроме последней строки, о которой будет сказано ниже) стоят коэффициенты разложения соответствующих векторов по векторам базиса.

Так как для нашей задачи выбран единичный базис, то в первой симплексной таблице в столбцах $\overline{B}_1$, $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$, $\overline{A}_4$, $\overline{A}_5$ будут стоять соответствующие коэффициенты системы ограничений.

Последняя строка называется индексной или $(m+1)$-ой. В третьем столбце этой строки стоит значение целевой функции при проверяемом опорном плане. В нашем случае $Z'\left(\overline{X}_{Б_1}\right) = 0$. Во всех остальных клетках индексной строки находятся оценки оптимальности $z_j - c_j$ для векторов исходной системы. Здесь z_j – значение целевой функции, если в неё вместо переменных подставить коэффициенты разложения вектора $\overline{A}_j$ по векторам базиса, а c_j – коэффициенты целевой функции при соответствующих переменных.

Таблица 1.6.2. *Исходная симплекс-таблица*

$Б_1$	$\overline{C}_{Б_1}$	$\overline{B}_1$	$\overline{A}_1$	↓ $\overline{A}_2$	$\overline{A}_3$	$\overline{A}_4$	$\overline{A}_5$	$\frac{b_i}{a_{i2}\,(a_{i2}>0)}$	
			-2	-3	0	0	0		
$\overline{A}_3$	0	60	3	2	1	0	0	60/2=30	
← $\overline{A}_4$	0	54	1	**[3]**	0	1	0	**[54/3=18]**	[-1] [-2/3]
$\overline{A}_5$	0	60	2	3	0	0	1	60/3=20	
$z_j - c_j$		0	2	3	0	0	0		

Индексная строка рассчитывается следующим образом:

$$Z\left(\overline{X}_{Б_1}\right) = \sum_{i=1}^{m} c_i^{Б} \cdot b_i = \overline{C}_{Б_1} \cdot \overline{B}_1, \tag{1.6.7}$$

$$z_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_i^{Б_1} x_{ij} - c_j = \overline{C}_{Б_1} \cdot \overline{A}_j - c_j, \quad j = \overline{1,5}. \qquad (1.6.8)$$

В нашем случае выбран единичный базис, поэтому $x_{ij} = a_{ij}$.

В первой симплексной таблице имеем

$Z'\left(\overline{X}_{Б_1}\right)$ = 0·60+0·54+0·60 = 0, $z_1 - c_1$ = 0·3+0·1+0·2– (–2) =2,

$z_2 - c_2$ = 0·2+0·3+0·3 – (–3) = 3, $z_3 - c_3$ = 0·1+0·0+0·0 – 0 = 0,

$z_4 - c_4$ = 0·0+0·1+0·0 – 0 = 0, $z_5 - c_5$ = 0·0+0·0+0 – 0 = 0.

Первый опорный план проверяем на оптимальность. Из-за того, что в индексной строке есть положительные числа он не оптимален. Переходим к новому плану. Вектор, вводимый в базис, выбираем по наибольшему числу в индексной строке. Это – вектор $\overline{A}_2$.

Вектор, выводимый из базиса, выбираем по симплексному отношению. Суть его в том, чтобы при жордановых преобразованиях не получить отрицательных свободных членов.

Поясним это на нашем примере. На изготовление единицы второй продукции используется 2 кг первого сырья, запас которого 60кг. Поэтому запас первого сырья допускает выпуск второй продукции не более чем 60/2=30 единиц. Запас второго сырья дает ограничение $x_2 \le 54/3 = 18$. Запас третьего сырья дает ограничение $x_2 \le 60/3 = 20$. Поэтому x_2 можно увеличивать максимально от нуля до 18. Если бы a_{i2} = 0, то i-ое сырье для изготовления второй продукции не использовалось бы и запас i-го сырья не влиял бы на изменение x_2. Таким образом, предельно допустимое увеличение x_2 определяется соотношением, которое называется симплексным

$$\theta = \theta_{02} = \min\left\{\frac{60}{2}, \frac{54}{3}, \frac{60}{3}\right\} = 18.$$

В общем виде симплексное отношение для $\overline{A}_j$ находится по формуле

$$\theta = \theta_{0j} = \min_{x_{ij}>0} \frac{b_i}{x_{ij}} \ \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right). \qquad (1.6.9)$$

Симплексное отношение находится лишь для положительных a_{ij} $\left(x_{ij}\right)$. По симплексному отношению вторую переменную мы можем увеличить на 18. Поэтому при втором опорном плане значение целевой функции будет равняться 0 – 18·3 = – 54.

Таким образом, из базиса выводим вектор $\overline{A}_4$.

Столбец, в котором находится вектор, вводимый в базис, называется разрешающим (направляющим), строка, в которой находится вектор, выводимый из базиса, называется разрешающей (направляющей). Элемент, находящийся на пересечении разрешающих столбца и строки – разрешающим элементом.

Составляем новую симплексную таблицу. Для этого пересчитываем коэффициенты исходной системы по методу полных жордановых исключений. Это правило состоит в следующем.

В столбце $\overline{A}_2$ необходимо получить с помощью элементарных преобразований Гаусса единичный вектор. Для этого разрешающую строку делим на разрешающий элемент (в нашем случае на 3). К первой строке системы прибавляем разрешающую строку, умноженную на (–2/3). Разрешающую строку умножаем на (–1) и прибавляем к третьей строке. Так же (для контроля) пересчитываем индексную строку и соответственно меняем первый и второй столбцы в таблице.

Элементы, которые находятся не в разрешающей строке и столбце, иногда удобно пересчитывать по правилу прямоугольника (вторая модификация правила полных жордановых исключений (см. 1.6.10)).

Таблица 1.6.3. *Правило прямоугольника*

a_{pr}	…	a_{pj}
…		…
a_{ir}	…	$[\boldsymbol{a_{ij}}]$

$\Rightarrow$

a'_{pr}	…	0
…		…
$a'_{ir} = a_{ir} / a_{ij}$	…	1

Правило прямоугольника выполняется следующим образом:

1) элементы направляющей i-й строки делим на разрешающий элемент таблицы a_{ij};

2) для того чтобы в направляющем столбце все остальные элементы стали равными нулю, элементы полученной строки умножаем последовательно на $\left(-a_{pj}\right)$ $\left(p=1,2,...,i-1,i+1,...m\right)$ и прибавляем к соответствующим элементам p-й строки. Тогда вместо числа a_{pr} в p-й строке станет число

$$a'_{pr} = a_{pr} - \frac{a_{ir}a_{pj}}{a_{ij}} \text{ или } a'_{pr} = \frac{a_{pr}a_{ij} - a_{ir}a_{pj}}{a_{ij}}. \qquad (1.6.10)$$

Числитель в этой формуле находим как определитель второго порядка, за первую диагональ выбираем диагональ, на которой находится пересчитывающийся элемент.

Например,

$$b_3' = b_3 - \frac{b_2 \cdot a_{33}}{a_{32}} = 60 - \frac{54 \cdot 3}{3} = \frac{60 \cdot 3 - 54 \cdot 3}{3} = 6,\ a_{34}' = 0 - \frac{1 \cdot 3}{3} = \frac{0 \cdot 3 - 1 \cdot 3}{3} = -1.$$

По этому правилу можно также пересчитывать для контроля и индексную строку.

Разъясним еще раз правило полных жордановых исключений.

Наша задача заключается в том, чтобы столбец для вектора $\overline{A}_2$ сделать единичным. Чтобы на месте 3 получить единицу, разделим вторую строку системы на 3. Чтобы получить ноль на месте элемента $a_{12} = 2$, умножим разрешающую строку на (–2/3) и прибавим к первой строке. Тогда получим

60	3	2	1	0	0	–	Первая строка
-36	-2/3	-2	0	-2/3	0	–	Разрешающая строка, умноженная на -2/3
24	7/3	0	1	-2/3	0	–	Результат векторного сложения

Результат записываем на месте первой строки в новую симплекс-таблицу.

Таблица 1.6.4. *Вторая симплексная таблица*

$Б_2$	$\overline{C}_{Б_2}$	$\overline{B}_2$	$\overline{A}_1$ ↓	$\overline{A}_2$	$\overline{A}_3$	$\overline{A}_4$	$\overline{A}_5$	θ	
			–2	–3	0	0	0		
$\overline{A}_3$	0	24	7/3	0	1	–2/3	0	72/7	
$\overline{A}_2$	-3	18	1/3	1	0	1/3	0	54	
← $\overline{A}_5$	0	6	**[1]**	0	0	–1	1	**[6]**	[–1/3][–7/3][–1]
$z_j - c_j$		–54	1	0	0	–1	0		

Получили второй опорный план

$$\overline{X}_{Б_2} = (0,18,24,0,6),\ Z'\left(\overline{X}_{Б_2}\right) = -54.$$

Значение целевой функции на втором шаге решения уменьшится на величину $(z_2 - c_2) \cdot \theta$, т.е.

$$Z'\left(\overline{X}_{Б_2}\right) = Z'\left(\overline{X}_{Б_1}\right) - (z_2 - c_2) \cdot \theta = 0 - 3 \cdot 18 = -54.$$

Второй опорный план не является оптимальным, потому что в индексной строке есть положительное число. Аналогично предыдущему переходим к третьему опорному плану.

Таблица 1.6.5. *Третья симплексная таблица*

$Б_3$	$\overline{C}_{Б_3}$	$\overline{B}_3$	$\overline{A}_1$	$\overline{A}_2$	$\overline{A}_3$	$\overline{A}_4$ ↓	$\overline{A}_5$	θ	
			–2	–3	0	0	0		
← $\overline{A}_3$	0	10	0	0	1	**[5/3]**	–7/3	[6]	[–2/5] [3/5]
$\overline{A}_2$	–3	16	0	1	0	2/3	–1/3	24	←
$\overline{A}_1$	–2	6	1	0	0	–1	1	–	←
$z_j - c_j$		–60	0	0	0	0	–1		

$$\overline{X}_{Б_3} = (6{,}16{,}10{,}0{,}0);\ Z'\left(\overline{X}_{Б_3}\right) = Z_{\min} = -\,60$$

или

$$Z'\left(\overline{X}_{Б_3}\right) = Z'\left(\overline{X}_{Б_2}\right) - (z_1 - c_1)\cdot\theta = -54 - 1\cdot 6 = -60.$$

Третий план оптимален, но не единственен, потому что свободный вектор $\overline{A}_4$ имеет нулевую оценку. Вводя его в базис, получаем альтернативный оптимальный опорный план.

Замечание. Базисные векторы всегда имеют нулевые оценки. Если свободная переменная в оптимальном плане имеет нулевую оценку, это означает неединственность оптимального решения.

Таблица 1.6.6. *Четвёртая (альтернативная) симплексная таблица*

$Б_4$	$\overline{C}_{Б_4}$	$\overline{B}_4$	$\overline{A}_1$	$\overline{A}_2$	$\overline{A}_3$ ↓	$\overline{A}_4$	$\overline{A}_5$	θ
			–2	–3	0	0	0	
← $\overline{A}_4$	0	6	0	0	**[3/5]**	1	–7/5	**[10]**
$\overline{A}_2$	–3	12	0	1	–2/5	0	3/5	–
$\overline{A}_1$	–2	12	1	0	3/5	0	–2/5	20
$z_j - c_j$		–60	0	0	0	0	–1	

$$\overline{X}_{Б_4} = (12{,}12{,}0{,}6{,}0),\ Z'\left(\overline{X}_{Б_4}\right) = Z_{\min} = -60 \text{ или}$$

$$Z'\left(X_{Б_4}\right) = Z'\left(X_{Б_3}\right) - (z_4 - c_4)\cdot\theta_{04} = -60 - 0\cdot 6 = -\,60.$$

Свободный вектор $\overline{A}_3$ имеет нулевую оценку, поэтому если ввести его в базис, то опять получим оптимальный опорный план. Но если вектор $\overline{A}_3$ ввести в базис, то снова получим табл. 1.6.5.

Получили два оптимальных плана $\overline{X}_1^* = (12{,}12), \overline{X}_2^* = (6{,}16)$.

Оптимальным решением будет выпуклая линейная комбинация этих решений, то есть

$$\overline{X}_{\max} = \lambda \overline{X}_1^* + (1-\lambda)\overline{X}_2^* = \lambda(12{,}12) + (1-\lambda)(6{,}16) = \left(6+6\lambda,\ 16-4\lambda\right)\left(0 \le \lambda \le 1\right).$$

$$Z_{\max} = 60.$$

Сформулируем алгоритм симплексного метода:

1) модель задачи приводим к каноническому виду с неотрицательными правыми частями;

2) находим начальный опорный план (в каждом уравнении должна быть переменная с коэффициентом единица, которая входит только в одно уравнение);

3) составляем симплексную таблицу;

4) проверяем знаки $z_j - c_j$;

5) если все $z_j - c_j \le 0$ – оптимальное решение найдено, есть минимум *Z*;

6) если имеются $z_j - c_j > 0$ – составляем новую симплексную таблицу и опять проверяем знаки чисел в индексной строке. Итерации продолжаем до тех пор, пока получим в индексной строке все неотрицательные числа или установим отсутствие оптимального решения задачи ($z_j - c_j > 0$, а все числа $a'_{ij} \le 0$ для вектора, вводящегося в базис);

7) новую симплексную таблицу пересчитываем по правилу полных жордановых исключений.

Замечание 1. Если задача задана на max, то не обязательно переходить к нахождению min. Можно решать задачу на max, но тогда в индексной строке необходимо получить неотрицательные оценки. В базис вводят вектор с наименьшей отрицательной оценкой.

Замечание 2. Разрешающий элемент можно выбирать из условия $\max\limits_{z_j - c_j > 0}\left[\theta_{0j}\left(z_j - c_j\right)\right]$, $j = \overline{1,n}.$ Таким способом можно уменьшить количество итераций.

1.6.2. Метод искусственного базиса (*M* - метод)

При решении задачи линейного программирования симплекс-методом предполагалось, что среди векторов $\overline{A}_1,\ \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_j, \ldots, \overline{A}_n$ имеется m – единичных векторов. Это значит, что в каждом уравнении есть базисная переменная. Это переменная, которая является изолированной, т.е., переменная, которая входит лишь в одно уравнение с коэффициентом 1 и отсутствует в остальных уравнениях. Если этого нет, то базисные переменные можно формально дописать по следующему правилу.

Рассмотрим исходную задачу, заданную в канонической форме и в системе ограничений которой отсутствуют изолированные переменные:

$$
Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to \min,
$$

$$
\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.6.11}
$$

$$
x_j \ge 0\,(j = \overline{1,n}),\; b_i \ge 0\,(i = \overline{1,m}).
$$

Предполагается, что $b_i \ge 0\;(i = \overline{1,m})$ (если $b_i < 0$, то соответствующее уравнение умножаем на –1).

Составим расширенную задачу (или *M*-задачу), образованную из исходной формальным добавлением новых базисных (искусственных) переменных в уравнения, где их нет. В целевую функцию их дописываем с большим положительным коэффициентом *M*. Получим расширенную задачу

$$
Z' = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + Mx_{n+1} + Mx_{n+2} + \dots + Mx_{n+m} \to \min,
$$

$$
\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases} \tag{1.6.12}
$$

$$
x_j \ge 0\,(j = \overline{1,n+m}),\; b_i \ge 0\,(i = \overline{1,m}).
$$

Ясно, что искусственные переменные должны равняться нулю, чтобы выполнялись условия равенства системы ограничений. Если среди них окажутся не равные нулю, то исходная задача несовместна. Или, по-другому – ОДЗ задачи будет представлять собой пустое множество $\{\varnothing\}$.

Расширенная задача решается обычным симплекс-методом. Числа в индексной строке имеют вид $a+bM$. Для их записи в симплексной таблице индексную строку разбиваем на две подстроки и записываем их в виде $\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$, т.е. в двух уровнях. В $(m+1)$-ю строку вносят a, а в $(m+2)$ -ю b. Знак числа $\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$ определяется знаком числа b если $b \ne 0$. Поэтому, сначала направляющий столбец выбираем по нижней строке, а после перевода всех искусственных переменных в свободные оптимизация производится по верхней индексной строке.

Если все искусственные векторы вышли из базиса, то получаем систему уравнений равносильную системе уравнений исходной задачи.

При использовании метода искусственного базиса в качестве критерия необходимо руководствоваться следующим правилом: *если оптимальное решение M-задачи содержит искусственные переменные или M-задача неразрешима, то исходная задача также неразрешима.*

Замечание. Если $(m+2)$-я индексная строка в результате преобразований превращается в нулевую, то это свидетельствует, что построен начальный опорный план исходной задачи и дальнейшая оптимизация производится по предпоследней индексной строке.

Пример 1.6.2. Решить задачу

$$Z = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \max; \quad \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 \le -1, \\ x_1 + 2x_2 \le 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \;\; (j = \overline{1,3}). \qquad (1.6.13)$$

Решение. Переходим к канонической форме модели. Делаем замену $Z' = -Z$. В первое и второе ограничение дописываем балансовые переменные x_4, x_5. Первое ограничение, чтобы применять симплекс-метод, умножим на -1.

$$Z' = -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \min,$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \end{cases} \qquad (1.6.14)$$
$$x_j \ge 0 \; (j = \overline{1,5}).$$

В первое и третье уравнение прибавим искусственные переменные x_6 и x_7 с коэффициентом равным единице. В целевую функцию дописываем их с коэффициентом M. Получим расширенную задачу

$$Z'' = -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7 \to \min,$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + [x_6] = 1, \\ x_1 + 2x_2 + [x_5] = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + [x_7] = 3, \end{cases} \qquad (1.6.15)$$
$$x_j \ge 0 \;\; (j = \overline{1,7}).$$

Задачу решаем симплекс методом. Имеем начальный опорный план

$$\overline{X}_{Б\,1} = (0,0,0,0,1,1,3)$$

и

$$Z''(\overline{X}_{Б\,1}) = -1\cdot 0 - 2\cdot 0 - 2\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 1 + M\cdot 1 + M\cdot 3 = 0 + 4M = 4M.$$

Таблица 1.6.7. *Исходная симплекс-таблица*

$Б_1$	$\overline{C}_{Б_1}$	$\overline{B}_1$	$\overline{A}_1$	$\overline{A}_2$	$\overline{A}_3$	$\overline{A}_4$	$\overline{A}_5$	$\overline{A}_6$	$\overline{A}_7$	θ	
			–1	–2	–2	0	0	M	M		
$\overline{A}_6$	M	1	1	–2	**[1]**	–1	0	1	0	**[1/1]**	[–1][**–2**]
$\overline{A}_5$	0	1	1	2	0	0	1	0	0	–	
$\overline{A}_7$	M	3	1	2	1	0	0	0	1	3/1	
$z_j - c_j$		0	1	2	2	0	0	0	0		
		4	2	0	2	–1	0	0	1		

Покажем, как находится индексная строка.

$$Z''(\overline{X}_{Б\,1}) = 1\cdot M + 1\cdot 0 + 3\cdot M = 0 + 4M = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$z_1 - c_1 = 1\cdot M + 1\cdot 0 + 1\cdot M + 1 = 1 + 2M = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$z_2 - c_2 = -2\cdot M + 2\cdot 0 + 2\cdot M + 2 = 2 + 0\cdot M = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$z_3 - c_3 = 1\cdot M + 0\cdot 0 + 1\cdot M + 2 = 2 + 2M = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

и так далее.

Первый план не оптимален. В нижней индексной строке наибольшую оценку имеют $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_3$. Выбираем $\overline{A}_3$, так как $\frac{2}{2} > \frac{1}{2}$ и этот вектор вводим в базис. Симплексное отношение $\theta = \theta_{03} = \min\left\{\frac{1}{1}, \frac{3}{1}\right\} = 1$. Выводим из базиса вектор $\overline{A}_6$. Составляем новую симплекс-таблицу.

После выведения из базиса столбцов, которые отвечают искусственным переменным, эти столбцы дальше можно не вычислять (они обведены двойной линией), но при рассмотрении двойственных задач их обязательно вычисляют.

Таблица 1.6.8. *Вторая симплекс-таблица*

$Б_2$	$\overline{C}_{Б_2}$	$\overline{B}_2$	$\overline{A}_1$	↓ $\overline{A}_2$	$\overline{A}_3$	$\overline{A}_4$	$\overline{A}_5$	$\overline{A}_6$	$\overline{A}_7$	θ
			–1	–2	–2	0	0	M	M	
A_3	–2	1	1	–2	1	–1	0	1	0	–
A_5	0	1	1	2	0	0	1	0	0	1/2
← $\boldsymbol{A_7}$	M	2	0	**[4]**	0	1	0	–1	1	**[1/2]**
$z_j - c_j$		–2	–1	6	0	2	0	–2	0	
		2	0	4	0	1	0	2	0	

Делаем пересчеты симплекс-таблиц до получения отрицательных оценок в индексной строке.

Таблица 1.6.9. *Третья симплекс-таблица*

$Б_3$	$\overline{C}_{Б_3}$	$\overline{B}_3$	$\overline{A}_1$	$\overline{A}_2$	$\overline{A}_3$	$\overline{A}_4$	$\overline{A}_5$	$\overline{A}_6$	$\overline{A}_7$	θ
			–1	–2	–2	0	0	M	M	
A_3	–2	2	1	0	1	–1/2	0	1/2	1/2	–
A_5	0	0	1	0	0	–1/2	1	1/2	–1/2	–
← A_2	–2	1/2	0	1	0	**[1/4]**	0	–1/4	1/4	**[2]**
$z_j - c_j$		–5	–1	0	0	1/2	0	–1/2 –1	–3/2 –1	

Таблица 1.6.10. *Четвёртая симплекс-таблица*

$Б_4$	$\overline{C}_{Б_4}$	$\overline{B}_4$	$\overline{A}_1$	$\overline{A}_2$	$\overline{A}_3$	$\overline{A}_4$	$\overline{A}_5$	$\overline{A}_6$	$\overline{A}_7$
			–1	–2	–2	0	0	M	M
A_3	–2	3	1	2	1	0	0	0	1
A_5	0	1	1	2	0	0	1	0	0
A_4	0	2	0	4	0	1	0	–1	1
$z_j - c_j$		–6	–1	–2	0	0	0	0 –1	–2 –1

$Z''_{\min} = -6$, $\overline{X}_{Opt.} = \overline{X}_{Б_3} = (0,0,3,2,1,0,0)$. Все искусственные векторы выведены из базиса, а все искусственные переменные равны нулю, поэтому значения начальных переменных определяют оптимальный план.

Ответ. $Z_{\max} = -Z''_{\min} = 6$, $\overline{X}_{\max} = (0,0,3)$.

Замечание. Если задача решается на max, то не обязательно переходить к нахождению min. Можно решать задачу на max, но в этом случае целевую функцию надо записать в виде

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n - Mx_{n+1} - Mx_{n+2} - \cdots - Mx_{n+m} \to \max, \quad (1.6.16)$$

где M большое положительное число. При этом вектор, вводимый в базис, определяется по наименьшей отрицательной оценке. В оптимальном плане все оценки должны быть неотрицательные.

1.6.3. Двойственный симплекс-метод

Двойственный симплекс – метод состоит в том, что переход от одного базисного решения к следующему осуществляется без необходимости выполнения требования, чтобы все $b_i \geq 0,\ i = \overline{1,m}$. При этом свободные члены могут быть временно отрицательными. Этот метод позволяет избавиться от необходимости введения искусственных переменных.

Решать ЗЛП двойственным методом начинают, как всегда, сведением ее к канонической форме и образованию полного единичного базиса методом Жордана-Гаусса. Знаки свободных членов могут быть произвольными.

Решение задач с помощью двойственного симплекс-метода разделяется на два этапа.

На первом этапе достигается условие оптимальности при недопустимости построенного опорного плана.

1. Разрешающая строка выбирается произвольно. Пусть это будет r-я строка.

2. Разрешающий столбец выбирается по min небазисного двойственного отношения

$$\min_{x_{rj} > 0,\ z_j - c_j \ge 0} \frac{z_j - c_j}{x_{rj}} = \frac{z_k - c_k}{x_{rk}},$$ где x_{rk} – разрешающий элемент.

Итерации продолжаем до получения условий оптимальности, то есть получения псевдоплана.

Псевдопланом называется базисное решение, для которого выполняются условия оптимума, но он не является допустимым.

Если в псевдоплане все компоненты неотрицательные, то решение задачи закончено.

На втором этапе достигается неотрицательность компонент псевдоплана.

1. Разрешающую строку выбираем по наименьшему отрицательному свободному члену. Пусть это будет p-я строка.

2. Разрешающий столбец выбираем по min двойственного симплексного отношения:

$$\min_{x_{pj} < 0,\ z_j - c_j \le 0} \frac{z_j - c_j}{x_{pj}} = \frac{z_q - c_q}{x_{pq}},$$ где x_{pq} – разрешающий элемент.

Процесс продолжается до получения оптимального решения.

Замечание. Если на каком-то этапе в некотором уравнении получится отрицательный свободный член, а среди коэффициентов при неизвестных в этом уравнении отрицательных нет, то задача не имеет решения, так как исходная система несовместна.

Это очевидно, так как левая и правая части уравнения будут иметь разные знаки.

Пример 1.6.3. Решить двойственным симплекс-методом ЗЛП

$$Z = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max, \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 \ge 4, \\ -x_1 - 2x_2 \le -6, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,3}).$$

Решение. Переходим к каноническому виду

$$Z' = -x_1 - x_2 - 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = -4, \\ -x_1 - 2x_2 + x_5 = -6, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,5}).$$

Задачу (1.6.16) решаем двойственным симплекс-методом.

Таблица 1. 6.11

$Б_1$	$\overline{C}_{Б_1}$	$\overline{B}_1$	$\overline{A}_1$	$\overline{A}_2$ ↓	$\overline{A}_3$	$\overline{A}_4$	$\overline{A}_5$
			-1	-1	-2	0	0
$\overline{A}_3$	-2	8	1	1	**1**	0	0
$\overline{A}_4$	0	-4	-1	1	0	1	0
← $\overline{A}_5$	0	-6	-1	$[-2]$	0	0	1
$z_j - c_j$		-16	-1	-1	0	0	0

В данном примере условия оптимальности для начального базисного решения выполняются. Поэтому первого этапа выполнять не надо. Имеем псевдоплан $\overline{X}_{Б_1} = (0,0,8,-4,-6)$.

Делаем пересчёт симплекс-таблицы. Разрешающую строку выбираем по наименьшему свободному члену (-6). Разрешающий столбец выбираем по минимуму двойственного симплексного отношения

$$\min_{x_{3j} < 0,\ z_j - c_j \le 0} \frac{z_j - c_j}{x_{3j}} = \min\left\{\frac{-1}{-1}, \frac{-1}{-2}\right\} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, в базис вводим вектор $\overline{A}_2$, а выводим вектор $\overline{A}_5$. Выполняем такие итерации до тех пор, пока все свободные члены станут неотрицательными.

Таблица 1.6.12

$Б_2$	$\overline{C}_{Б_2}$	$\overline{B}_2$	$\overline{A}_1$ ↓	$\overline{A}_2$	$\overline{A}_3$	$\overline{A}_4$	$\overline{A}_5$
			-1	-1	-2	0	0
$\overline{A}_3$	-2	5	1/2	0	1	-1	1/2
← $\overline{A}_4$	0	-7	**[−3/2]**	0	0	1	1/2
$\overline{A}_2$	-1	3	1/2	**1**	0	0	$-1/2$
$z_j - c_j$		-13	$-1/2$	0	0	2	$-1/2$

Наименьший отрицательный свободный член (-7), $\min\left\{\frac{-1/2}{-3/2}\right\} = \frac{1}{3}$.

Таблица 1.6.13

$Б_3$	$\overline{C}_{Б_3}$	$\overline{B}_3$	$\overline{A}_1$	$\overline{A}_2$	$\overline{A}_3$	$\overline{A}_4$	$\overline{A}_5$
			-1	-1	-2	0	0
$\overline{A}_3$	-2	8/3	0	0	1	1/3	2/3
$\overline{A}_1$	-1	14/3	1	0	0	$-2/3$	$-1/3$
$\overline{A}_2$	-1	2/3	0	1	0	1/3	$-1/3$
$z_j - c_j$		$-32/3$	0	0	0	$-1/3$	$-2/3$

Условия оптимальности выполнены.

Ответ:

$$Z_{\max} = Z^* = \frac{32}{3},$$

$$X^* = \left(\frac{14}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{8}{3}\right).$$

1.6.4. Методика решения задачи симплекс-методом с использованием Microsoft Excel

Алгоритм получения решения задачи симплекс-методом с использованием офисного приложения Microsoft Excel рассмотрим на примере 1.6.1. Математическая модель задачи имеет следующий вид

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 60, \\ x_1 + 3x_2 \le 54, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 60, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Для получения решения исходной задачи будем использовать надстройку «Поиск решения».

<u>Ввод исходных данных задачи</u>

При решении задачи линейного программирования симплекс-методом с использованием офисного приложения Microsoft Excel необходимо сначала ввести данные задачи. Для этого создается новая рабочая книга Microsoft Excel, в свободные ячейки которой вносятся коэффициенты целевой функции, левой части ограничений, значения правой части ограничений.

Экранная форма для ввода условий задачи имеет следующий вид (Рис. 1.6.1)

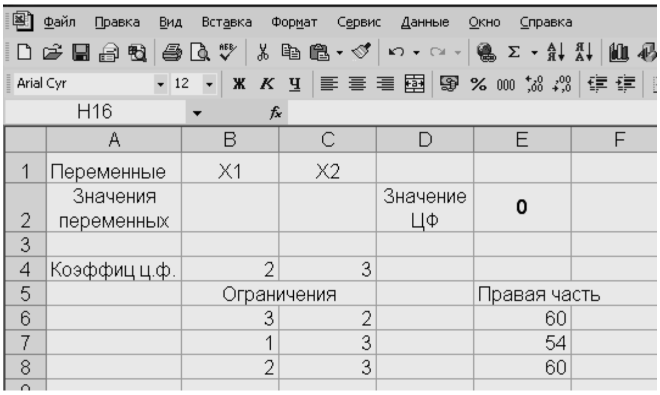


Рис. 1.6.1

В ячейках **B4:C4** находятся значения коэффициентов целевой функции; в массиве **B6:C8 –** коэффициенты левой части ограничений; в столбце **E6:E8** значения правой части ограничений. Ячейки **B2:C2** соответствуют переменным задачи, а в ячейке **E2** будет отображаться значение целевой функции. Сюда необходимо ввести формулу, по которой это значение рассчитывается, то есть $2x_1 + 3x_2$. Чтобы ввести эту формулу, курсор ставится в ячейку и далее набирается следующее выражение: $= B2 * B4 + C2 * C4$.

Имена ячеек можно набирать непосредственно с клавиатуры, либо делая на них ссылку мышью.

Значение целевой функции также можно рассчитать, используя надстройку «**Мастер функций**», а именно, функцию «СУММПРОИЗВ». Для этого необходимо выполнить следующие действия:

поставить курсор в поле **E2;**

выбрать на панели инструментов кнопку f_x**;**

в окне «**Категория**» выбрать «Математические». В окне «**Выберите функцию**» - «**СУММПРОИЗВ**» (Рис. 1.6.2) и нажать «**ОК**»;

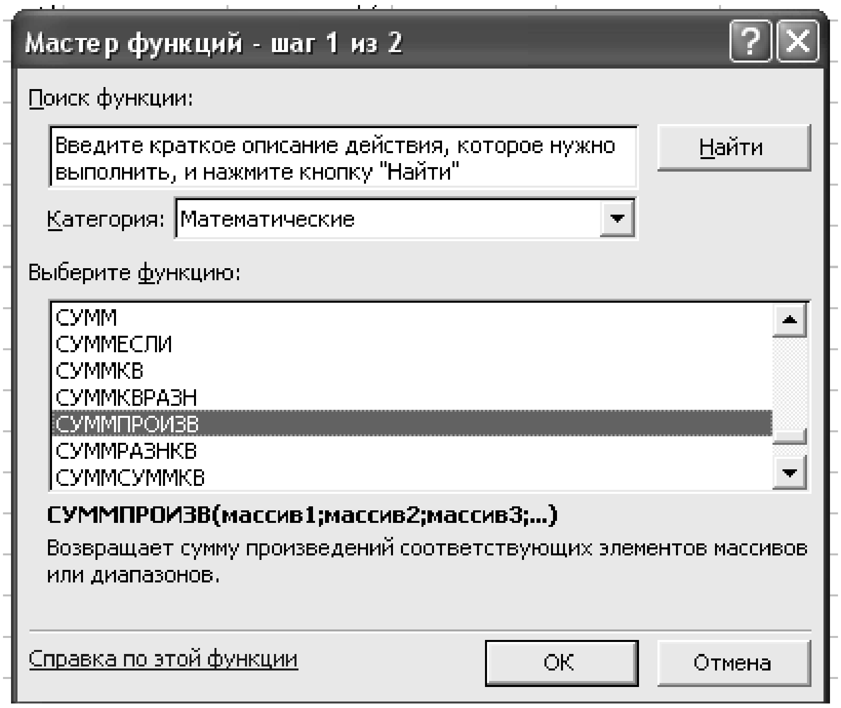


Рис. 1.6.2

ввести аргументы функции: в строку «**Массив 1**» выражение B2:C2, а в строку «**Массив 2**» выражение B4:C4 (можно, выделяя соответствующие массивы с помощью мыши) (Рис. 1.6.3) и нажать «ОК».

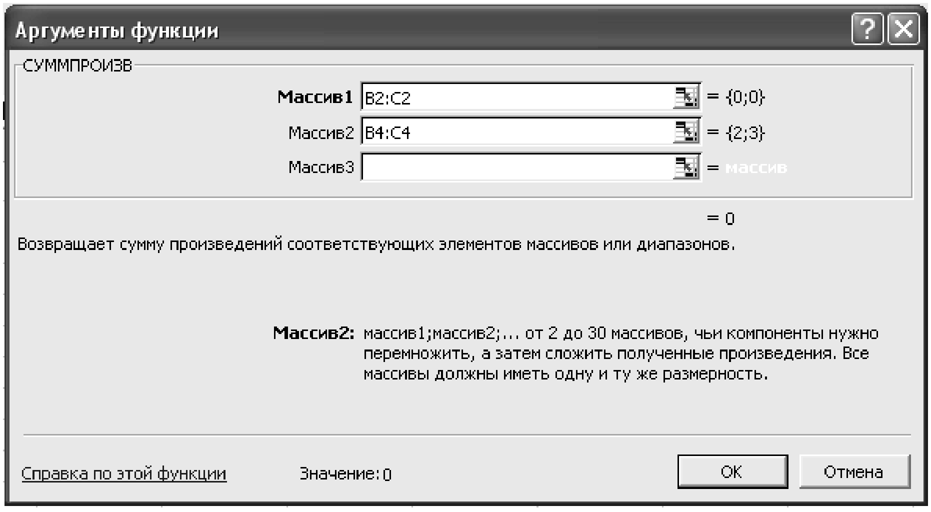
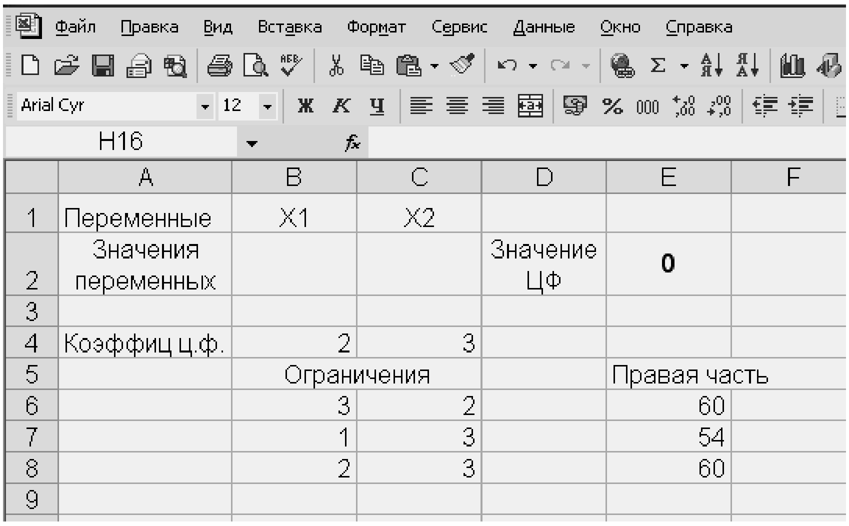


Рис. 1.6.3

После этого в ячейке E2 появится текущее значение целевой функции, вычисленное по введенной формуле. Оно равно нулю, так как переменные в данный момент равны нулю.

Аналогично в ячейки **D6:D8** вводятся формулы для расчета левых частей ограничений (Рис. 1.6.4):



	A	B	C	D	E	F
1	Переменные	X1	X2			
2	Значения переменных			Значение ЦФ	**0**	
3						
4	Коэффиц ц.ф.	2	3			
5		Ограничения			Правая часть	
6		3	2		60	
7		1	3		54	
8		2	3		60	
9						

Рис. 1.6.4

Для ячейки **D6** формула имеет вид $3x_1 + 2x_2$, а ее реализация в ячейке: $= B2 * B6 + C2 * C6$ или =СУММПРОИЗВ(B2:C2;B6:C6).

Для ячейки **D7** формула имеет вид $x_1 + 3x_2$, а ее реализация в ячейке: $= B2 * B7 + C2 * C7$ или =СУММПРОИЗВ(B2:C2;B7:C7).

Для ячейки **D8** формула имеет вид $2x_1 + 3x_2$, а ее реализация в ячейке: $= B2 * B8 + C2 * C8$ или =СУММПРОИЗВ(B2:C2;B8:C8).

Как видно, формулы для расчета левой части ограничений отличаются друг от друга только именем второго массива (строчки коэффициентов ограничения), первый же массив (массив значений переменных) один и тот же. Поэтому можно ввести формулу один раз, а затем скопировать ее, сделав абсолютную ссылку на массив переменных **B2:C2.**

Для того, чтобы сделать абсолютную ссылку на определенный столбец, необходимо поставить символ $, перед буквой, обозначающей имя столбца. Например, **$B2:$C2.** Для того, чтобы зафиксировать строку, символ $ ставится перед номером строки: **B$2:C$2.** Если необходимо сделать абсолютную ссылку на конкретную ячейку (ячейки), символ $ ставится и перед именем столбца и перед номером строки: **$B$2:$C$2.**

Абсолютную ссылку на ячейку (ячейки) можно сделать, нажав клавишу **F4,** когда курсор находится в поле имени ячейки. При однократном нажатии клавиши будет сделана абсолютная ссылка на массив или ячейку (**$B$2: $C$2**). Если клавишу нажать дважды, будет сделана абсолютная ссылка на номер строки (**B$2: C$2**). При следующем нажатии клавиши ссылка будет сделана на имя столбца (**$B2: $C2**).

При данном способе реализации симплекс-метода достаточно сделать ссылку лишь на соответствующую строку: **B$2: C$2.** В то же время, допустима и абсолютная ссылка на конкретный массив ячеек: **$B$2: $C$2.**

Таким образом, для ячейки **D6** формула будет иметь вид $= B\$2 * B6 + C\$2 * C6$ или =СУММПРОИЗВ(B$2: C$2;B6:C6) (в случае абсолютной ссылки на массив =СУММПРОИЗВ($B$2: $C$2;B6:C6)).

Затем эту формулу необходимо скопировать в ячейки **D7** и **D8.** Копировать формулу можно с помощью клавиш «**Ctrl-Insert**» **-** копировать и клавиш «**Shift- Insert» -** вставить. Другой способ копирования формул — поставить курсор в ячейку, содержащую формулу и протянуть ее за правый нижний угол на все ячейки, в которые ее необходимо скопировать.

После этого экранная форма условий задачи будет иметь вид (Рис. 1.6.5)

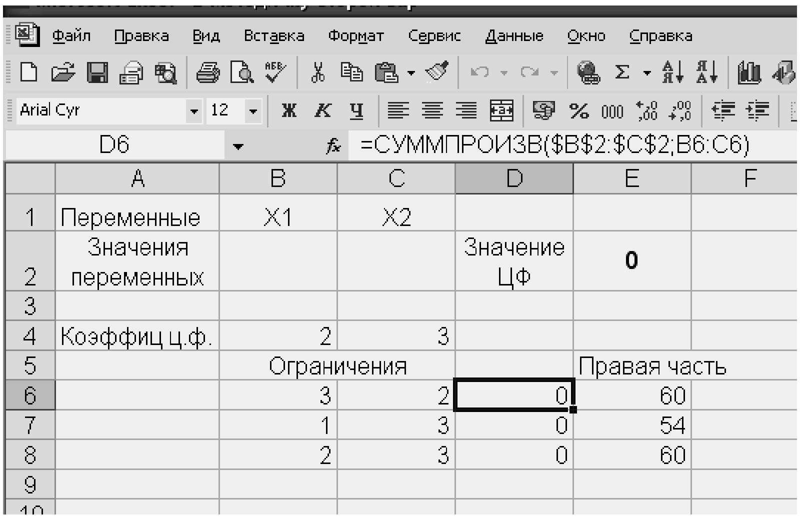


Рис. 1.6.5

<u>Ввод ограничений</u>

Для получения решения задачи используется надстройка «**Поиск решения**», которая находится в меню «**Сервис**».

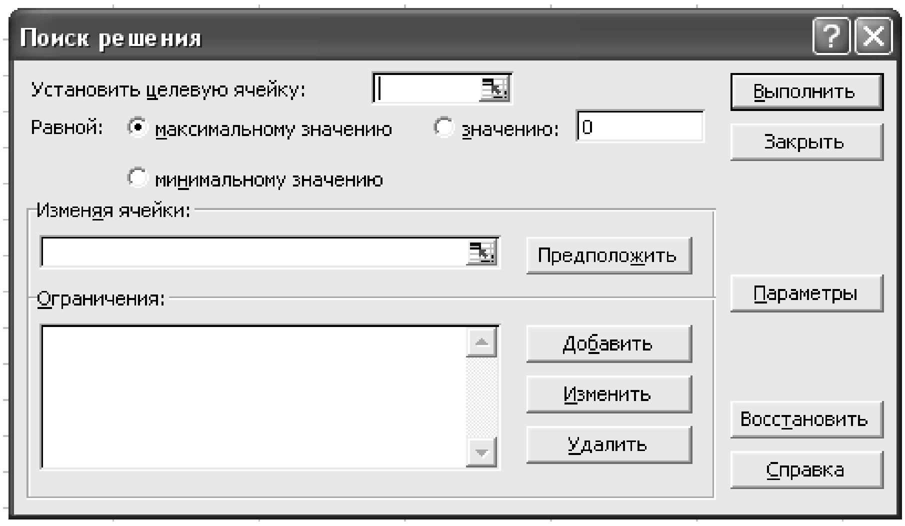


Рис. 1.6.6

В диалоговом окне «**Поиск решения**» (Рис. 1.6.6) необходимо выполнить следующие действия:

Поставить курсор в поле «**Установить целевую ячейку**» и ввести адрес ячейки, в которой находится формула для расчета значения целевой функции (можно сделать ссылку на ячейку мышью). В примере – это ячейка **E2.**

Выбрать критерий оптимизации целевой функции (максимизация, минимизация или точное значение). В примере – это максимум.

Поставить курсор в поле «**Изменяя ячейки**» и ввести адрес массива, в котором находятся значения переменных. В примере – это **B2:C2.** Адрес можно внести также с помощью выделения мышью соответствующих ячеек.

В окне «**Ограничения**» выбрать кнопку «**Добавить**», после чего появится окно «**Добавление ограничения**» (Рис. 1.6.7).

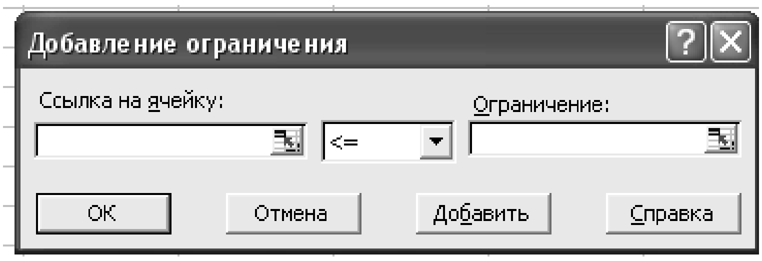


Рис. 1.6.7

В поле «**Ссылка на ячейку**» ввести адрес ячейки, в которой содержится левая часть ограничения. (Это можно сделать путем выделения мышью соответствующей ячейки на экране). В поле знака открыть список предлагаемых знаков и выбрать нужный. В поле «**Ограничения**» ввести адрес ячейки, содержащей правую часть ограничений. В примере первое ограничение: **D6<=E6** в диалоговом окне представлено следующим образом (Рис. 1.6.8)

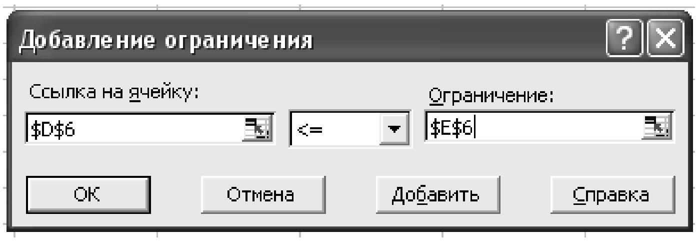


Рис. 1.6.8

Нажать кнопку «**Добавить»** и аналогично ввести остальные ограничения. Если при вводе ограничений задачи возникает необходимость изменить или удалить ограничения, то для этого используются кнопки «**Изменить**» и «**Удалить**» соответственно.

Диалоговое окно надстройки «**Поиск решения**» после ввода данных имеет следующий вид (Рис. 1.6.9)

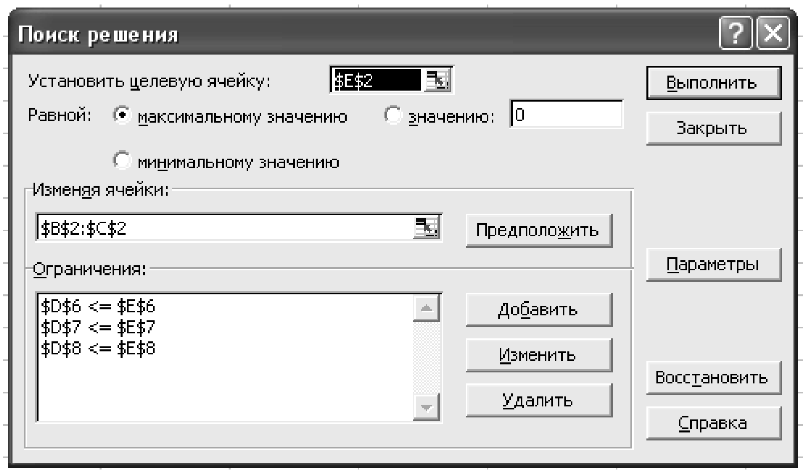


Рис. 1.6.9

Для обеспечения выполнения условия неотрицательности переменных, а также установления конкретных параметров решения задачи оптимизации используется кнопка «**Параметры**» (Рис. 1.6.10)

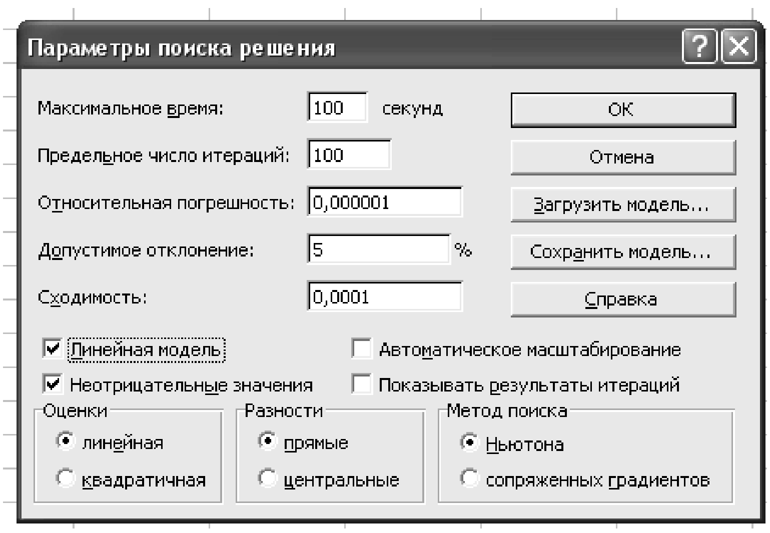


Рис. 1.6.10

Установка флажка «**Линейная модель**» обеспечивает ускорение процесса решения линейной задачи, а установление флажка «**Неотрицательные значения**» – неотрицательность переменных.

Подтверждаются установленные параметры нажатием кнопки «**ОК**».

Решение задачи

Для решения задачи необходимо в диалоговом окне «**Поиск решения**» нажать кнопку «**Выполнить**», после чего на экране появится окно «**Результат поиска решения**». В случае успешного решения задачи сообщение имеет вид «Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены» (Рис. 1.6.11)

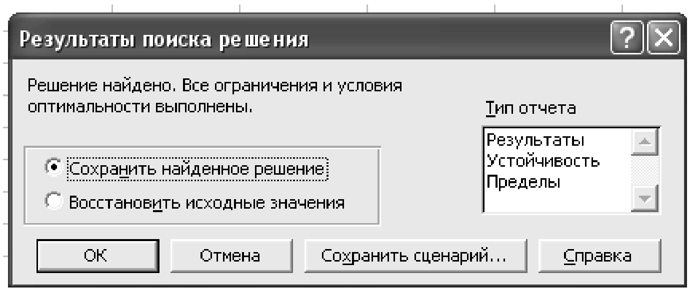


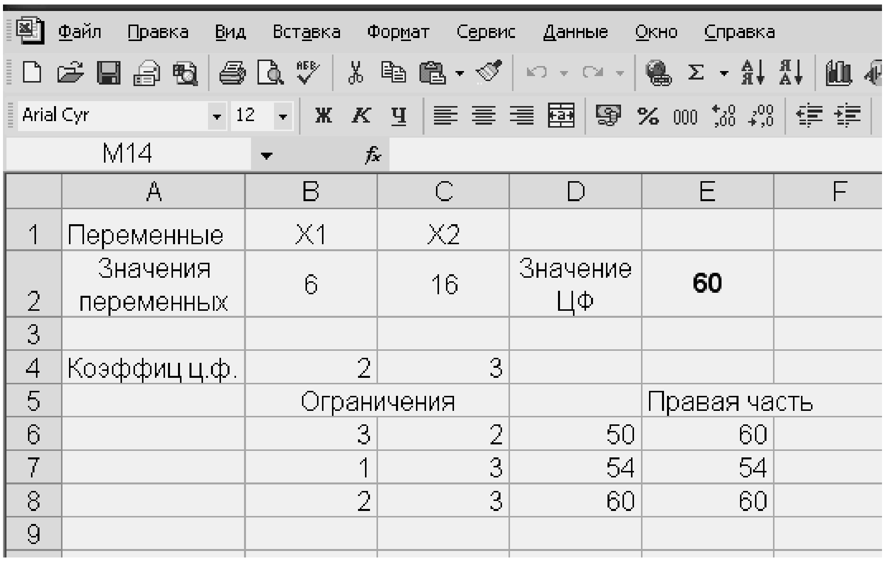
Рис. 1.6.11

Если задача не имеет решения из-за противоречивости системы ограничений или неограниченности целевой функции, сообщение будет иметь вид: «Поиск не может найти подходящего решения» или «Значения целевой ячейки не сходятся» соответственно. Иногда такой результат может быть связан с тем, что в ходе ввода данных были допущены ошибки. Поэтому в случае такого ответа надо проверить правильность ввода данных.

В окне «**Результат поиска решения**» приведены типы отчета: «**Результаты**», «**Устойчивость**», «**Пределы**», которые используются для анализа чувствительности. Чтобы получить отчет, необходимо выбрать соответствующий тип и нажать кнопку «**ОК**». Результаты каждого отчета будут выведены на отдельных листах рабочей книги с названиями: «Отчет по результатам 1», «Отчет по устойчивости 1», «Отчет по пределам 1» (Рис. 1.6.12)

Рис. 1.6.12

Если необходимо получить только решение задачи, достаточно нажать кнопку «**ОК**» в диалоговом окне «**Результат поиска решения**» (Рис, 1. 6.11), после чего на экране в соответствующих ячейках появятся значения переменных и целевой функции. В нашем примере значения переменных находятся в ячейках **B2:C2,** а значение целевой функции – в ячейке **E2** (Рис. 1.6.13).



	A	B	C	D	E	F
1	Переменные	X1	X2			
2	Значения переменных	6	16	Значение ЦФ	**60**	
3						
4	Коэффиц ц.ф.	2	3			
5		Ограничения			Правая часть	
6		3	2	50	60	
7		1	3	54	54	
8		2	3	60	60	
9						

Рис. 1.6.13

Итак, решение задачи найдено: $x_1 = 6;\ \ x_2 = 16,\ Z_{\max} = 60$.

Заметим, что надстройка «**Поиск решения**» позволяет получать решение и в том случае, если в условии задачи все или некоторые переменные могут принимать только целые значения. Для получения целочисленного решения приведенной выше задачи в описанный процесс необходимо внести некоторые дополнения.

Дополнения вносятся на этапе ввода ограничений. К имеющимся в задаче ограничениям необходимо добавить условие целочисленности переменных. Для этого в диалоговом окне «**Поиска решения**» надо выбрать кнопку «**Добавить**», в поле «**Ссылка на ячейку**» ввести адрес ячеек, содержащих значения переменных (в примере это ячейки **B2:C2),** а в поле ввода знака ограничения выбрать целое **(цел). (**Рис. 1.6.14**)**

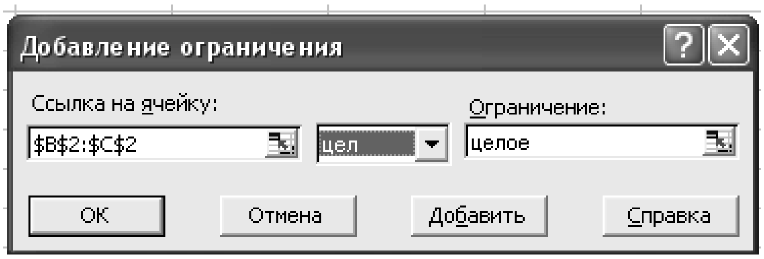


Рис.1.6.14

Подтверждается ввод условия целочисленности нажатием кнопки «**ОК**».

Замечание. С помощью надстройки «**Поиска решения**» можно получить только одно решение. Если задача имеет альтернативное решение, что видно из индексной строки последней симплекс-таблицы, то его можно получить пересчётом последней симплексной таблицы.

1.7. ДВОЙСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1.7.1. Составление двойственных задач и их экономическая интерпретация

С каждой задачей линейного программирования тесно связана другая линейная задача, называемая двойственной (сопряжённой) по отношению к исходной или прямой задаче. Целевую функцию прямой задачи принято обозначать Z, переменные – $x_1, x_2, ..., x_n$. Целевую функцию двойственной задачи принято обозначать F, переменные – $y_1, y_2, ..., y_m$. Переменные двойственной задачи y_i в экономической литературе получили различные названия: учётные, неявные, теневые, объективно обусловленные оценки, двойственные оценки или цены ресурсов. Исходная и двойственная задачи при определении оптимального плана выпуска продукции могут интерпретироваться следующим образом.

Прямая задача: сколько и какой продукции $\overline{X} = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ необходимо произвести, чтобы при заданных стоимостях единицы продукции $c_j\left(j = \overline{1,n}\right)$, объемах имеющихся ресурсов $b_i\left(i = \overline{1,m}\right)$ и нормах расходов a_{ij} максимизировать выпуск продукции в стоимостном выражении.

Двойственная задача: какова должна быть оценка единицы каждого из ресурсов $\overline{Y} = \left(y_1, y_2, ..., y_m\right)$, чтобы при заданных b_i, c_j и a_{ij} минимизировать общую сумму затрат на всю продукцию.

Условие, которым можно пользоваться при составлении двойственных задач, заключается в следующем. Если задача задана на max, то ограничение вида «≤» будем называть согласованным или правильным, а «≥» – неправильным, несогласованным. Если задача задана на min, то ограничение « ≥ » – правильное, а « ≤ » – неправильное.

Сформулируем соотношения между отдельными элементами прямой (1.3.1) и двойственной задач:

1) количество двойственных переменных равно количеству ограничений исходной задачи (каждому ограничению ставится в соответствие двойственная переменная);

2) целевая функция двойственной задачи имеет вид $F = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m$;

3) если $Z \to$ max, то $F \to$ min; если $Z \to$ min, то $F \to$ max (направление цели F противоположно направлению цели Z);

4) количество ограничений двойственной задачи равно количеству переменных исходной задачи. Каждой переменной исходной задачи ставится в соответствие ограничение двойственной задачи;

5) левая часть j-го ограничения двойственной задачи равна $\overline{Y} \cdot \overline{A_j} = \left(a_{1j} \cdot y_1 + a_{2j} \cdot y_2 + a_{3j} \cdot y_3 + ... + a_{mj} \cdot y_m\right)$, а правая c_j. Если $x_j \geq 0$, то j-е

ограничение в двойственной задаче правильное. Если $x_j \le 0$, то *j*-е ограничение – неправильное, если x_j имеет любой знак, то *j*-ое ограничение является равенством;

6) если *i*-е ограничение исходной задачи правильное, то $y_i \ge 0$, если *i*-ое ограничение исходной задачи неправильное, то $y_i \le 0$, если *i*-ое ограничение исходной задачи « = », то y_i – может иметь любой знак;

7) матрицы исходной и двойственной задач взаимно транспонированные.

Пользуясь данными соотношениями, прямая и двойственная задачи будут иметь следующий вид.

Прямая задача

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to \max,$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,n}).$$

Двойственная задача

$$F = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \to \min,$$
$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \ge c_n, \end{cases} \qquad (1.7.1)$$
$$y_i \ge 0 \ (i = \overline{1,m}).$$

Такие задачи называются сопряжённой парой.

Двойственная задача к двойственной будет исходной.

Рассмотрим составление двойственной задачи к исходной на примере.

Пример 7.1. Написать двойственную задачу к заданной задаче.

Прямая задача

$$Z = 4x_1 - x_3 + 5x_4 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 12, \sim y_1 \text{ люб. зн.} \\ 15x_1 + 4x_3 - 9x_4 \le 8, \sim y_2 \ge 0 \\ 10x_1 + 9x_2 - 7x_3 + 6x_4 \ge -9, \sim y_3 \le 0 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \le 0, \quad x_4 \le 0.$$

Двойственная задача

$$F = 12y_1 + 8y_2 - 9y_3 \to \min;$$
$$\begin{cases} y_1 + 15y_2 + 10y_3 \ge 4, \sim x_1 \ge 0 \\ -3y_1 + 9y_3 \le 0, \sim x_2 \le 0 \\ 5y_1 + 4y_2 - 7y_3 = -1, \sim x_3 \text{ люб. зн} \\ 2y_1 - 9y_2 + 6y_3 \le 5, \sim x_4 \le 0 \end{cases}$$
$$y_2 \ge 0, \ y_3 \le 0.$$

Решение двойственной задачи можно получить, исследуя решение прямой задачи, на основании первой и второй теорем двойственности.

1.7.2. Теоремы двойственности

Первая теорема двойственности. Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальное решение, то вторая также имеет оптимальное решение, причем

$$Z_{\max} = F_{\min} \qquad (Z_{\min} = F_{\max}). \qquad (1.7.2)$$

Если целевая функция одной из пары двойственных задач не ограничена, то во второй задаче система ограничений несовместна.

Если одна из пары двойственных задач несовместима, то вторая задача, либо несовместна, либо её целевая функция неограниченна.

Вторая теорема двойственности. Если при подстановке компонент оптимального плана в систему ограничений исходной задачи i-е ограничение выполняется как строгое неравенство, то i-я компонента оптимального плана двойственной задачи равна нулю.

Если i-я компонента оптимального плана двойственной задачи ненулевая, то i-е ограничение исходной задачи удовлетворяется ее оптимальным планом как равенство.

С помощью матриц эту теорему можно записать так:

$$Y(AX - B) = 0; \quad (YA - C)X = 0 \tag{1.7.3}$$

Содержание второй теоремы двойственности простое: если сырья больше потребности, то ее теневая цена равна нулю, оно не дефицитное. Если теневая цена сырья ненулевая (сырьё дефицитное), то оно используется полностью.

Если одна из двойственных задач решена, то эти теоремы можно применить для нахождения решения второй.

Третья теорема двойственности. В оптимальном плане двойственной задачи значения двойственных переменных y_i^* численно равны частным производным $y_i^* = \dfrac{\partial Z_{\max}}{\partial b_i}$ для исходной задачи.

Из этой теоремы следует, что

$$\Delta Z \approx \sum_{i=1}^{m} y_i^* \Delta b_i = y_1^* \Delta b_1 + y_2^* \Delta b_2 + \ldots + y_i^* \Delta b_i + \ldots + y_m \Delta b_m . \tag{1.7.4}$$

Наибольшему значению y_i^* соответствует наибольший дефицит i-го ресурса; наименьшему y_i^* отвечает наименьший дефицит ресурса; $y_i^* = 0$ – i-й ресурс недефицитный.

Если $a_{i\,n+1}$ – соответствующие расходы сырья на новый $(n+1)$-й вид продукции с ценой c_{n+1}, а y_i^* – теневые цены соответствующего сырья и

$$\Delta_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_{i\,n+1} y_i^* - c_{n+1} , \tag{1.7.5}$$

то при $\Delta_{n+1} < 0$ новый вид продукции улучшает план, а при $\Delta_{n+1} > 0$ нецелесообразно вводить новый вид продукции в производство.

1.7.3. Нахождение оптимального решения двойственной задачи по последней симплекс–таблице решения исходной задачи

Оптимальный план исходной задачи линейного программирования можно находить по формуле $X^* = D^{-1}B$, где матрица D^{-1} является обратной к матрице, составленной из векторов, входящих в последний базис, при котором получен оптимальный план исходной задачи. Оптимальное решение двойственной задачи можно находить по формуле $Y^* = C^*_{базис.}D^{-1}$. При решении задач линейного программирования симплекс методом оптимальные значения переменных y_i^* двойственной задачи можно определить из индексной строки последней симплексной таблицы по следующему правилу.

Чтобы найти y_1^* надо:

1) в первой строке первой симплексной таблицы выбрать столбец, в котором находится базисная переменная. Пусть это будет столбец, соответствующий вектору $\overline{A}_k$;

2) в этом столбце взять число, которое находится в индексной строке последней симплексной таблицы, т.е. $z_k - c_k$;

3) к этому числу прибавить коэффициент целевой функции из этого столбца. Это будет y_1^*, т.е. $y_1^* = z_k - c_k + c_k = z_k$.

Аналогично по второй, третьей строке и т. д. первой симплексной таблицы и элементам индексной строки последней таблицы находят y_2^*, y_3^*, и т.д.

При нахождении решения двойственной ЗЛП необходимо пользоваться правилом

1) при умножении целевой функции на (–1) все двойственные переменные меняют знак;

2) при добавлении балансовых и искусственных переменных, значения двойственных переменных не изменяются;

3) при умножении *i*-го ограничения на (–1) *i*-я двойственная переменная меняет знак.

Пример 1.7.2. Провести экономико-математический анализ задачи из примера 1.6.1.

Математическая модель исходной задачи

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 60, & \sim y_1 \ge 0, \\ x_1 + 3x_2 \le 54, & \sim y_2 \ge 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 60, & \sim y_3 \ge 0, \end{cases} \qquad (1.7.6)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Двойственная задача

$$F = 60y_1 + 54y_2 + 60y_3 \to \min;$$
$$\begin{cases} 3y_1 + \ \ y_2 + \ 2\,y_3 \ge 2, & \sim x_1 \ge 0, \\ 2y_1 + \ 3y_2 + \ 3\,y_3 \ge 3, & \sim x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad (1.7.7)$$
$$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0, \quad y_3 \ge 0.$$

Решение двойственной задачи можно найти по индексной строке последней симплексной таблицы прямой задачи.

Таблица 1.7.1. *Первая симплексная таблица*

$Б_1$	$\overline{C}_{Б_1}$	$\overline{B}_1$	$\overline{A}_1$	$\overline{A}_2$	$\overline{A}_3$	$\overline{A}_4$	$\overline{A}_5$
			–2	–3	0	0	0
$\overline{A}_3$	0	60	3	2	1	0	0
$\overline{A}_4$	0	54	1	3	0	1	0
$\overline{A}_5$	0	60	2	3	0	0	1
$z_j - c_j$		0	2	3	0	0	0

Таблица 1.7.2. *Последняя симплексная таблица*

$Б_4$	$\overline{C}_{Б_4}$	$\overline{B}_4$	$\overline{A}_1$	$\overline{A}_2$	$\overline{A}_3$	$\overline{A}_4$	$\overline{A}_5$
			–2	–3	0	0	0
$\overline{A}_4$	0	6	0	0	3/5	1	–7/5
$\overline{A}_2$	–3	12	0	1	–2/5	0	3/5
$\overline{A}_1$	–2	12	1	0	3/5	0	–2/5
$z_j - c_j$		–60	0	0	0	0	–1
					y_1^*	y_2^*	y_3^*

Из индексной строки табл.1.7.2 получаем:

$$F_{\min} = 60\,,\ y_1^* = -(0+0) = 0,\ \ y_2^* = -(0+0) = 0,\ \ y_3^* = -(-1+0) = 1.$$

Замечание. Полученные числа умножали на (-1), так как целевую функцию умножали на (-1) при переходе к нахождению $\min$.

Так как $y_3^* > 0$, то это говорит о том, что третье сырье используется полностью. Из двойственных оценок следует, что первое и второе сырье используется частично (может быть не полностью). Для проверки этого утверждения надо значения $\overline{X}_1^* = (12{,}12), \overline{X}_2^* = (6{,}16)$ подставить в левые части системы ограничений исходной задачи. Так, при подстановке $\overline{X}_1^* = (12{,}12)$ левые части ограничений задачи соответственно будут равны 60, 48, 60. Это означает, что первое и третье сырьё используется полностью, а второго сырья остается неиспользованным 6 кг.

Пример 1.7.3. Составить двойственную задачу к задаче примера 1.6.2 и найти её решение.

Решение. Исходная задача

$$
\begin{gathered}
Z = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \max, \\
\begin{cases}
-x_1 + 2x_2 - x_3 \le -1, & \sim y_1 \ge 0 \\
x_1 + 2x_2 \le 1, & \sim y_2 \ge 0 \\
x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, & \sim y_3 \text{ произвольного знака}
\end{cases} \\
x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.
\end{gathered}
\tag{1.7.8}
$$

Двойственная задача к исходной имеет вид

$$
\begin{gathered}
F = -y_1 + y_2 + 3y_3 \to \min, \\
\begin{cases}
-y_1 + y_2 + y_3 \ge 1, & \sim x_1 \ge 0 \\
2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \ge 2, & \sim x_2 \ge 0 \\
-y_1 + y_3 \ge 2, & \sim x_3 \ge 0
\end{cases} \\
y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0.
\end{gathered}
\tag{1.7.9}
$$

Выпишем последнюю симплекс-таблицу решения примера 1.6.2.

Таблица 1.7.3. *Последняя симплекс-таблица примера 1.6.2*

$Б_4$	$\overline{C}_{Б_4}$	$\overline{B}_4$	$\overline{A}_1$	$\overline{A}_2$	$\overline{A}_3$	$\overline{A}_4$	$\overline{A}_5$	$\overline{A}_6$	$\overline{A}_7$
			–1	–2	–2	0	0	M	M
A_3	-2	3	1	2	1	0	0	0	1
A_5	0	1	1	2	0	0	1	0	0
A_4	0	2	0	4	0	1	0	–1	1
$z_j - c_j$		–6	–1	–2	0	0	0	0	–2
		0	0	0	0	0	0	–1	–1
							y_2^*	y_1^*	y_3^*

Оптимальное значение целевой функции двойственной задачи находим по первой теореме двойственности, а значения двойственных переменных из индексной строки табл. 1.7.3: $F_{\min} = Z_{\max} = 6$, $Y_{opt}^* = \left(y_1^*, y_2^*, y_3^*\right) = \left(0, 0, 2\right)$.

Например, $y_3^* = -(-2 - M + M)) = 2$. В этом примере умножаем полученный результат на (–1), так как коэффициенты целевой функции умножали на (–1).

Пример 1.7.4. Написать двойственную задачу к задаче примера 1.6.3 и найти её решение.

Решение

Прямая задача

$$Z = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, & \sim\ y_1 - \textit{знак любой} \\ x_1 - x_2 \geq 4, & \sim\ y_2 \leq 0 \\ -x_1 - 2x_2 \leq -6, & \sim\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1,3}).$$

Двойственная задача

$$F = 8y_1 + 4y_2 - 6y_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 - y_3 \geq 1, & \sim\ x_1 \geq 0 \\ y_1 - y_2 - 2y_3 \geq 1, & \sim\ x_2 \geq 0 \\ y_1 \geq 2, & \sim\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$y_2 \leq 0,\ \ y_3 \geq 0.$$

Примечание: решение этой задачи выбрано из индексной строки табл. 1.6.13. Знаки оптимальных значений двойственных переменных поставлены в соответствии с правилом составления двойственных задач.

Ответ: $F^* = \dfrac{32}{3}$, $Y^* = \left(2; -\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$.

Контроль: $F^* = 8y_1^* + 4y_2^* - 6y_3^* = 8 \cdot 2 + 4 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right) - 6 \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{32}{3}$.

1.7.4. Анализ чувствительности оптимального решения с помощью Microsoft Excel

Для проведения экономического анализа решения задачи линейного программирования можно использовать **Microsoft Excel.**

Сначала необходимо получить решение задачи, как это было описано в предыдущем разделе

Чтобы провести анализ чувствительности, необходимо в диалоговом окне «**Результаты поиска решения**» выделить с помощью мыши требуемый тип отчета: «**Результаты**», «**Устойчивость**», «**Пределы**» (Рис. 1.7.1) и нажать кнопку «**ОК**».

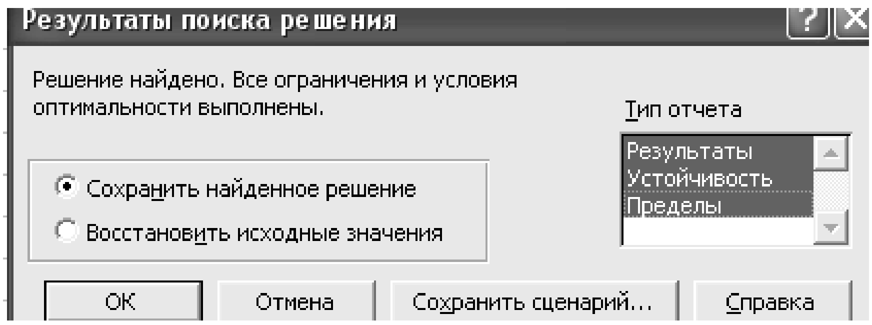
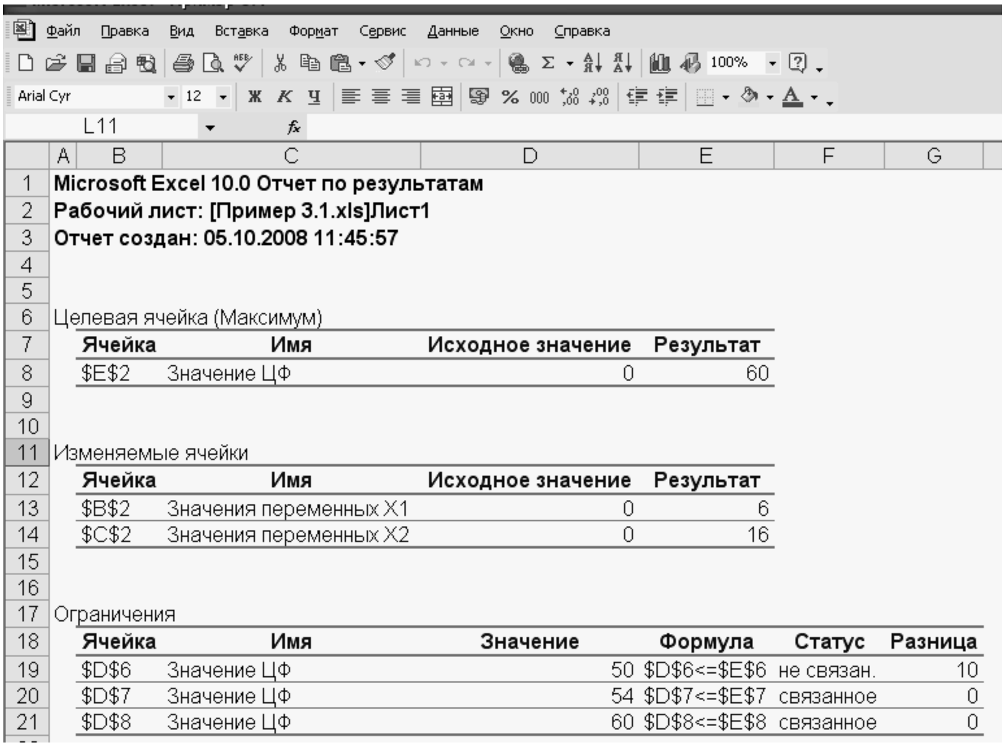


Рис. 1.7.1

Результаты каждого отчета будут выданы на отдельных листах рабочей книги (Рис. 1.7.2; 1.7.3).

В таблице «**Отчет по результатам**» приведена информация о значениях переменных, целевой функции, а также статусе ограничений (Рис. 1.7.2).



Microsoft Excel 10.0 Отчет по результатам
Рабочий лист: [Пример 3.1.xls]Лист1
Отчет создан: 05.10.2008 11:45:57

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$E$2	Значение ЦФ	0	60

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$B$2	Значения переменных X1	0	6
$C$2	Значения переменных X2	0	16

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$D$6	Значение ЦФ	50	$D$6<=$E$6	не связан.	10
$D$7	Значение ЦФ	54	$D$7<=$E$7	связанное	0
$D$8	Значение ЦФ	60	$D$8<=$E$8	связанное	0

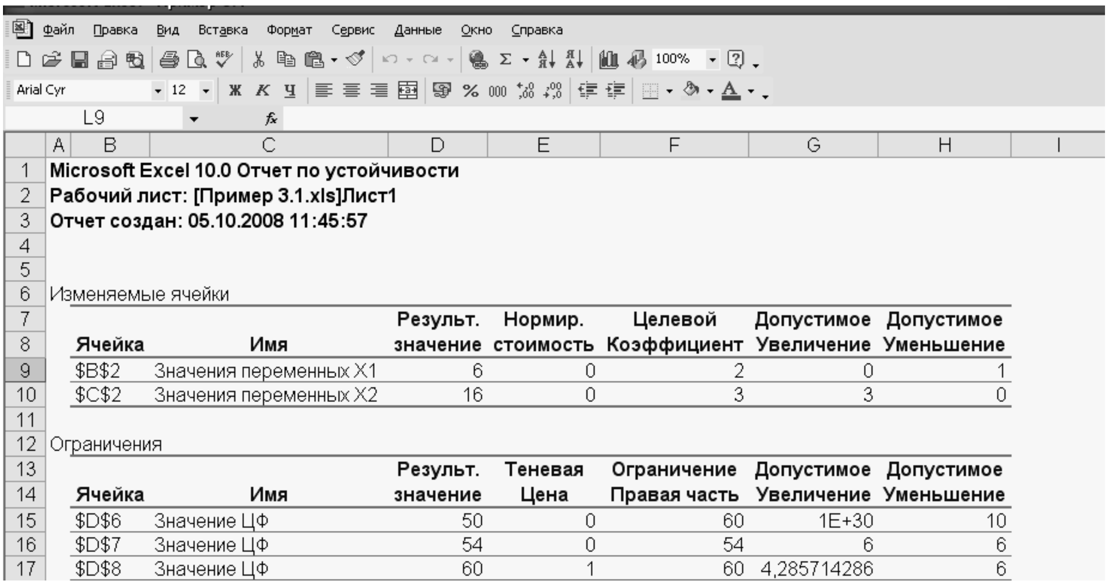
Рис. 1.7.2

В первой таблице указано оптимальное значение целевой функции. Результат: 60.

Вторая таблица позволяет найти значения переменных принятия решения (результат: $x_1 = 6,\ \ x_2 = 16.$)

В третьей таблице отчета указаны значения левой части ограничений при данных значениях переменных, статус ограничений (связующее или не связующее), а также разность между правой и левой частью. Для связующих ограничений разность равна нулю, для не связующих – больше нуля

«**Отчет по устойчивости**» состоит из двух таблиц (Рис. 1.7.3)



Microsoft Excel 10.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [Пример 3.1.xls]Лист1
Отчет создан: 05.10.2008 11:45:57

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$2	Значения переменных X1	6	0	2	0	1
$C$2	Значения переменных X2	16	0	3	3	0

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$D$6	Значение ЦФ	50	0	60	1E+30	10
$D$7	Значение ЦФ	54	0	54	6	6
$D$8	Значение ЦФ	60	1	60	4,285714286	6

Рис. 1.7.3

В первой таблице приведена информация о переменных

1) результат решения, то есть значения переменных;

2) нормированная стоимость, или альтернативная цена, которая для небазисных переменных показывает, как изменится значение целевой функции, если соответствующую переменную ввести в базис со значением, равным единице. Для базисных переменных нормированная стоимость равна нулю. В данной задаче обе переменные являются базисными, поэтому их альтернативная цена равна нулю;

3) коэффициенты целевой функции при соответствующих переменных;

4) предельные приращения коэффициентов целевой функции, при которых текущее базисное решение не изменится. Так, для переменной x_1 границы устойчивости коэффициента целевой функции составляют $(1; 2)$, поскольку максимальное увеличение коэффициента возможно на 0, а уменьшение на 1. Другими словами, текущее оптимальное решение не изменится, пока цена за единицу первого вида продукции будет находиться в пределах от 1 грн. до 2 грн. Аналогично можно провести анализ предельного приращения целевой функции для переменной x_2.

Вторая таблица содержит данные об ограничениях

1) в столбце «**Результ. значение**» указано значение левой части ограничений;

2) в столбце **«Теневая цена»** находится решение двойственной задачи. Теневая цена показывает, на сколько изменится значение целевой функции, если правая часть ограничения увеличится на одну единицу. В приведенном примере первое ограничение не является связующим, то есть, первый вид сырья используется не полностью. Таким образом, можно закупать его меньше на соответствующую величину, то есть на 10 единиц. Это уменьшит затраты как на закупку сырья, так и на его хранение. Теневая цена третьего ограничения, равная 1, свидетельствует о том, что каждая дополнительная единица третьего вида сырья увеличит прибыль на 1 грн. Можно также утверждать, что это максимальная цена, которую можно заплатить за 1 единицу сырья третьего вида;

3) в столбцах «**Допустимое увеличение (уменьшение)**» находятся предельные приращения правых частей ограничений, при которых текущий опорный план не изменится. В примере для первого вида сырья границы устойчивости $(50; +\infty)$, так как допустимое уменьшение возможно на 10 ед. а увеличение $+\infty$. (запись 1E+30 равносильна 10^{30}). Для второго вида сырья границы устойчивости составляют (48; 60), а для третьего – (54; 64,2857). Это означает, что, до тех пор, пока количество сырья будет находиться в данных пределах, оптимальное решение задачи не изменится.

«Отчет по пределам» для рассматриваемой задачи имеет следующий вид (Рис. 1.7.4):

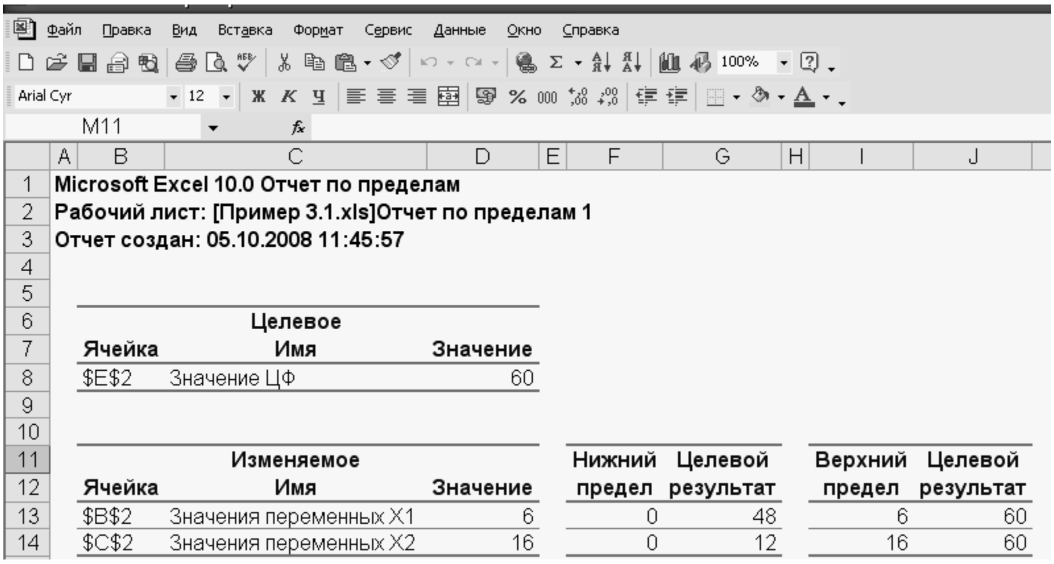


Рис. 1.7.4

Здесь при $x_1 = 0 \quad Z = 3 \cdot 16 = 48$; $\qquad x_2 = 0 \quad Z = 2 \cdot 6 = 12$;

$x_1 = 6 \quad Z = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 16 = 60$; $\qquad x_2 = 16 \quad Z = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 16 = 60$

Необходимо отметить, что при решении задачи с использованием надстройки «**Поиск решения**» не важно, в какой форме записана задача линейного программирования и содержит ли система ограничений полный единичный базис. Решение осуществляется так, как было описано выше.

В заключение рассмотрим подробно ещё один пример решения задачи симплексным методом и проведём анализ полученного решения.

Анализ чувствительности задач, решаемых с помощью симплекс-метода – это исследование влияния изменения параметров ЗЛП (коэффициентов целевой функции, правых частей ограничений, технологических коэффициентов) на полученное оптимальное решение.

На этом примере рассмотрим четыре типа изменений параметров ЗЛП и проанализируем, как эти изменения повлияют на оптимальное решение задачи:

1) изменение правой части ограничений (изменение объёмов ресурсов);

2) добавление новой деятельности;

3) изменение коэффициента целевой функции при небазисной переменной;

4) изменение коэффициента целевой функции при базисной переменной.

Проводимый анализ чувствительности оптимального решения к изменениям основных параметров модели позволяет определить диапазон, в котором могут находиться управляемые параметры, при которых полученное оптимальное решение задачи остается оптимальным.

Пример 1.7.5. Решить задачу линейного программирования и сделать анализ оптимального решения на чувствительность.

Фирма планирует изготовить три вида продукции $П_1, П_2, П_3$, для чего использует три вида ресурсов. Затраты ресурсов по видам заданы в табл. 1.7.4.

Таблица 1.7.4. *Исходные данные примера 1.7.5*

Ресурсы	Продукция			Объём ресурсов
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	
Трудовые ресурсы, чел./час.	15	20	25	1200 чел./час.
Сырье, кг	2	3	2,5	150 кг
Электроэнергия, квт/час.	35	60	60	3000 квт/час.
Цена реализации, грн./ ед.	300	250	450	

Цель решения задачи: определить план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную выручку от реализации продукции.

Решение задачи осуществляем по следующему алгоритму.

1. Составляем математическую модель задачи. Обозначим через x_1, x_2, x_3 количество единиц продукции $П_1, П_2, П_3$, которое планирует выпускать фирма.

Сформируем целевую функцию (выручка от реализованной продукции) и составим систему ограничений по ресурсам:

$$Z = 300x_1 + 250x_2 + 450x_3 \to \max. \tag{1.7.10}$$

$$\begin{cases} 15x_1 + 20x_2 + 25x_3 \le 1200, \\ 2x_1 + \ \ 3x_2 + 2,5x_3 \le 150, \\ 35x_1 + 60x_2 + 60x_3 \le 3000. \end{cases} \tag{1.7.11}$$

$$x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0, \ \ x_3 \ge 0. \tag{1.7.12}$$

Поскольку количество продукции не может быть отрицательным числом, то вводим ограничения (1.7.12).

2. Составляем двойственную задачу, для чего каждому ограничению ставим в соответствие двойственную переменную y_1, y_2, y_3 соответственно. Согласно правилу составления двойственных задач записываем целевую функцию, систему ограничений и интервалы изменения двойственных переменных

$$Z = 1200y_1 + 150y_2 + 3000y_3 \to \min. \tag{1.7.13}$$

$$\begin{cases} 15y_1 + 2y_2 + 35y_3 \ge 300, \\ 20y_1 + 3y_2 + 60y_3 \ge 250, \\ 25y_1 + 2,5y_2 + 60y_3 \ge 450, \end{cases} \tag{1.7.14}$$

$$y_1 \ge 0, \ \ y_2 \ge 0, \ \ y_3 \ge 0. \tag{1.7.15}$$

3. Осуществляем решение исходной задачи симплекс-методом, для этого путём добавления балансовых переменных x_4, x_5, x_6 приводим задачу к каноническому виду

$$Z = 300x_1 + 250x_2 + 450x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 \to \max . \quad (1.7.16)$$

$$\begin{cases} 15x_1 + 20x_2 + 25x_3 + x_4 = 1200, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2{,}5x_3 + x_5 = 150, \\ 35x_1 + 60x_2 + 60x_3 + x_6 = 3000, \end{cases} \quad (1.7.17)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0. \quad (1.7.18)$$

4. *Находим начальный опорный план*, который получается приравниванием свободных переменных к нулю: $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$. Базисные переменные принимают значения $x_4 = 1200,\ x_5 = 150,\ x_6 = 3000$. Следовательно, начальный опорный план задачи будет

$$\overline{X}_{Б_1} = (0,0,0,1200,150,3000)$$

$$Z\left(\overline{X}_{Б_1}\right) = 300 \cdot 0 + 250 \cdot 0 + 450 \cdot 0 + 1200 \cdot 0 + 150 \cdot 0 + 3000 \cdot 0 = 0.$$

Все вычисления по алгоритму оформляем симплекс-таблицами.

Таблица 1.7.5. *Симплекс-таблица 1*

$Б_1$	$\overline{C}_{Б_1}$	$\overline{B}_1$	$\overline{A}_1$	$\overline{A}_2$	$\overline{A}_3$	$\overline{A}_4$	$\overline{A}_5$	$\overline{A}_6$	$\frac{b_i}{a_{ij}(>0)}$	
			300	250	450	0	0	0		
$\overline{A}_4$	0	1200	15	20	**[25]**	1	0	0	1200/25=**48**	**:** :25,[–1/10],[–12/5]
$\overline{A}_5$	0	150	2	3	2,5	0	1	0	150/2,5=60	
$\overline{A}_6$	0	3000	35	60	60	0	0	1	3000/60=50	
$z_j - c_j$		0	–300	–250	–450	0	0	0	Индексная или $(m+1)$-я строка	

5. *Проверяем план на оптимальность*. План оптимальный, если оценки в индексной строке $z_j - c_j \geq 0$ (для задачи на max).

Значение целевой функции находится в столбце $\overline{B}_1$ индексной строки.

Индексная строка рассчитывается следующим образом:

$$Z\left(\overline{X}_{Б_1}\right) = \sum_{i=1}^{m} c_i^{\delta} \cdot b_i = 0 \cdot 1200 + 0 \cdot 150 + 0 \cdot 3000 = 0.$$

Оценки оптимальности рассчитываются следующим образом:

$$z_i - c_i = \sum_{i=1}^{m} c_i^{\delta} \cdot x_{ij} - c_j,\ j = \overline{1, n}.$$

Например, $z_1 - c_1 = 0 \cdot 15 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 35 - 300 = -300$. Остальные оценки записаны в индексной строке.

В нашем случае план не оптимальный.

Составлением второй симплекс-таблицы переходим к другому опорному плану, для чего в базис вводим вектор с наименьшей отрицательной оценкой (в нашем случае это вектор $\overline{A}_3$), а из базиса выводим вектор, определяемый симплексным отношением

$$\theta = \theta_{o_j} = \min_{a_{ij}>0} \frac{b_i}{a_{ij}} = \min \frac{b_i}{a_{ij}\left(a_{ij} > 0\right)}$$

(в нашем случае это вектор $\overline{A}_4$). Методом Жордана-Гаусса пересчитываем симплекс-таблицу 1 (табл. 1.7.5).

Обведённые двумя линиями строка и столбец называются разрешающими. Элемент, находящейся на пересечении разрешающей строки и столбца называется разрешающим, он выделен жирным шрифтом и взят в квадратные скобки.

Таблица 1.7.6. *Симплекс-таблица 2*

$Б_2$	$\overline{C}_{Б_2}$	$\overline{B}_2$	$\overline{A}_1$	$\overline{A}_2$	$\overline{A}_3$	$\overline{A}_4$	$\overline{A}_5$	$\overline{A}_6$	$\frac{b_i}{a_{ij}(>0)}$	
			300	250	450	0	0	0		
$\overline{A}_3$	0	48	3/5	4/5	**1**	1/25	0	0	48/(3/5)=**80**	
$\overline{A}_5$	0	30	**[1/2]**	1	0	–1/10	1	0	30/(1/2)=60	×2 [–2] [–6/5]
$\overline{A}_6$	0	120	–1	12	0	–12/5	0	1	-	
$z_j - c_j$		21600	–30	110	0	18	0	0		

Анализируем индексную строку симплексной таблицы 2 (Табл. 1.7.6). Снова имеется отрицательная оценка (–30), а это значит, что и второй опорный план не оптимальный.

Аналогично предыдущему составляем третью симплекс-таблицу.

Таблица 1.7.7. *Симплекс-таблица 3*

$Б_3$	$\overline{C}_{Б_3}$	$\overline{B}_3$	$\overline{A}_1$	$\overline{A}_2$	$\overline{A}_3$	$\overline{A}_4$	$\overline{A}_5$	$\overline{A}_6$
			300	250	450	0	0	0
$\overline{A}_3$	450	12	0	–2/5	1	4/25	–6/5	0
$\overline{A}_1$	300	60	1	2	0	–1/5	2	0
$\overline{A}_6$	0	180	0	14	0	–13/5	2	1
$z_j - c_j$		23400	0	170	0	12	60	0
						y_1^*	y_2^*	y_3^*
						12	60	0

В индексной строке этой таблицы все оценки оптимальности неотрицательные, значит оптимальное решение найдено.

6. По вышеизложенной методике определяем оптимальные решения прямой и двойственной задачи:

$$X_{\max} = (60, 0,\ 12),\ Z_{\max} = 23400.$$
$$Y_{\min} = (12, 60,\ 0),\ F_{\min} = 23400.$$

Замечание. Для нахождения оптимальных значений двойственной задачи y_i^* необходимо в первой симплекс-таблице выбрать столбец, соответствующий базисному вектору. К числу, находящемуся в индексной строке последней симплекс-таблицы выбранного столбца, добавляем коэффициент целевой функции этого столбца.

Для анализа прямой и двойственной задачи, их решения удобно записывать в таком виде

$$Z^* = Z_{\max} = 23400,$$

$$X^* = X_{opt} = \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3 & x_4, & x_5, & x_6 \\ \underbrace{60, \quad 0, \quad 12,}_{n} & & & \underbrace{0, \quad 0, \quad 80}_{m} & & \end{pmatrix},$$

$$F^* = F_{\min} = 23400,$$

$$Y^* = Y_{opt} = \begin{pmatrix} y_1, & y_2, & y_3 & y_4, & y_5, & y_6 \\ \underbrace{12, \quad 60, \quad 0,}_{m} & & & \underbrace{0, \quad 170, \quad 0}_{n} & & \end{pmatrix}.$$

7. Анализ решения прямой и двойственной задач. При решении будем пользоваться следующими правилами.

В оптимальном решении прямой задачи X^* ненулевые n-коэффициенты используются при составлении оптимального плана производства, а нулевые для использования в производстве не предлагаются.

Нулевые m-коэффициенты являются признаком дефицитности ресурса и дальнейшее их увеличение целесообразно, а ненулевые из m-коэффициентов являются признаком избытка ресурсов.

В оптимальном решении двойственной задачи Y^* ненулевые m-коэффициенты показывают, на сколько изменится функция цели при изменении соответствующего ресурса на единицу. Дальнейшее увеличение нулевых коэффициентов не будет влиять на значение функции цели.

Ненулевые n-коэффициенты являются неоптимальными и показывают убытки, то есть, на сколько уменьшится функция цели при их использовании.

Двойственные оценки называют объективно-обусловленными оценками или теневыми ценами. Теневая цена (двойственная оценка) i-го ограничения это величина, на которую улучшится оптимальное значение целевой функции (увеличится при решении задачи на максимум и уменьшится при решении задачи на минимум), если мы увеличим значение b_i на единицу (с b_i до b_i+1). При этом текущий базис остаётся оптимальным. Таким образом, двойственные оценки определяют степень дефицитности ресурса.

Осуществим анализ решения прямой задачи (вектора X^*).

Для получения максимальной выручки в размере 23400 грн. необходимо выпустить первой продукции 60 ед., вторую продукцию не выпускать, а третьей продукции надо изготовить 12 ед. $(x_1=60,\ x_2=0, x_3=12)$. Трудовые ресурсы и сырьё будут полностью использованы $(x_4=0,\ x_5=0)$, т.е. являются дефицитными ресурсами. Избыток электроэнергии составляет 80 квт/час, поэтому дальнейшее её увеличение не повлияет на количество выпущенной продукции.

Анализ решения двойственной задачи (вектора Y^*) позволяет сделать следующие выводы.

Увеличение трудовых ресурсов (x_4) на 1 чел./час. приведёт к дополнительной выручке 12 грн., т.е. Z увеличиться на 12 грн., а увеличение сырья (x_5) на 1 кг увеличит Z на 60 грн. Принудительный выпуск одного второго изделия (x_2) приведёт к уменьшению выручки на 170 грн.

8. *Матрица взаимозаменяемости ресурсов*. Коэффициент взаимозаменяемости ресурсов $R_{ij}=\dfrac{Y_j^*}{Y_i^*}$ показывает, сколько единиц i-го ресурса необходимо дополнительно иметь, чтобы компенсировать уменьшение j-го ресурса на единицу. Матрица взаимозаменяемости ресурсов представлена в табл. 1.7.8. В этой таблице видно, что для избыточных ресурсов (в нашей задаче электроэнергия) элементы столбца будут равны нулю, а в строке будет знак неопределённости (~), то есть избыточный ресурс не взаимозаменяем с другими.

Таблица 1.7.8. *Матрица взаимозаменяемости ресурсов*

Ресурс, который уменьшается, j / Ресурс, который увеличивается, i			Трудовые ресурсы	Сырьё	Электро-энергия
			1	2	3
			12	60	0
Трудовые ресурсы	12	1	1	5	0
Сырьё	60	2	0,2	1	0
Электроэнергия	0	3	~	~	1

9. Сформулируем альтернативный вариант производства и оценим его конкурентоспособность

Предположим, что фирма имеет возможность выпускать четвёртый вид продукции с затратами ресурсов 20, 3, 52 соответственно и стоимостью 400 грн. Определим доход, который может получить фирма при выпуске четвертой продукции

$$\Delta_4 = a_{14} \cdot y_1^* + a_{24} \cdot y_2^* + a_{34} \cdot y_3^* - c_4 = 20 \cdot 12 + 3 \cdot 60 + 52 \cdot 0 - 400 = 20\,.$$

Мы видим, что затраты превышают выручку от реализации, а поэтому вводить четвёртый вид продукции с предложенными характеристиками нецелесообразно.

10. Оценим границы устойчивости полученных решений

Рассмотрим следующие корректировки полученного решения по коэффициентам системы:

объем дефицитного ресурса уменьшается на величину Δb^-;

объем дефицитного ресурса увеличивается на величину Δb^+;

цена единицы продукции уменьшается на Δc^-;

цена единицы продукции увеличивается на Δc^+.

Найдем сначала интервалы устойчивости правых частей ограничений.

Интервалы устойчивости правых частей ограничений – это интервалы, в которых могут изменяться $b_1,\ b_2,...,b_m$ при условии, что текущий опорный план остается оптимальным (двойственные оценки остаются неизменными).

Интервалы устойчивости $\left(\Delta b_i^-,\ \Delta b_i^+\right)$, т.е. $\left[b_i - \Delta b_i^-; b_i + \Delta b_i^+\right]$ можно определять:

по формулам;

с помощью компьютерных программ;

непосредственными вычислениями.

Найдём интервалы устойчивости непосредственно и с помощью системы «**Поиск решений**» в Excel.

Пусть величина b_1 изменилась на Δ. Находим новое оптимальное решение

$$X_1^* = D^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1200+\Delta \\ 150 \\ 3000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/25 & -6/5 & 0 \\ -1/5 & 2 & 0 \\ -13/5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1200+\Delta \\ 150 \\ 3000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12+0{,}16\Delta \\ 60-0{,}2\Delta \\ 180-2{,}6\Delta \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12+0{,}16\Delta \ge 0 \\ 60-0{,}2\Delta \ge 0 \\ 180-2{,}6\Delta \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}16\Delta \ge -12 \\ 0{,}2\Delta \le 60 \\ 2{,}6\Delta \le 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \ge -75 \\ \Delta \le 300 \\ \Delta \le 69{,}23 \end{cases} \Rightarrow -75 \le \Delta \le 69{,}23 \cdot$$

Таким образом: $\Delta b_1^- = 75$, $\Delta b_1^+ = 69{,}23$ и $\left[b_1 - \Delta b_1^-; b_1 + \Delta b_1^+\right] =$

$= \left[1200 - 75; 1200 + 69{,}23\right] = [1125;\ 1269{,}23]$.

Пусть величина b_2 изменится на Δ. Находим новое оптимальное решение

$$X_2^* = D^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1200 \\ 150+\Delta \\ 3000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/25 & -6/5 & 0 \\ -1/5 & 2 & 0 \\ -13/5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1200 \\ 150+\Delta \\ 3000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12-1,2\Delta \\ 60+2\Delta \\ 180+2\Delta \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 12-1,2\Delta \ge 0 \\ 60+2\Delta \ge 0 \\ 180+2\Delta \ge 0 \end{pmatrix} \begin{cases} 12-1,2\Delta \ge 0 \\ 60+2\Delta \ge 0 \\ 180+2\Delta \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1,2\Delta \le 12 \\ 2\Delta \ge -60 \\ 2\Delta \ge -180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \le 10 \\ \Delta \ge -30 \Rightarrow -30 \le \Delta \le 10 \\ \Delta \ge -90 \end{cases}$$

Таким образом $\Delta b_2^- = 30$, $\Delta b_2^+ = 10$ и $\left[b_2 - \Delta b_2^-; b_1 + \Delta b_2^+ \right] = = \left[150-30;150+10\right] = [120;\ 160]$.

Пусть b_3 изменится на Δ. Находим новое оптимальное решение

$$X_3^* = D^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1200 \\ 150 \\ 3000+\Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/25 & -6/5 & 0 \\ -1/5 & 2 & 0 \\ -13/5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1200 \\ 150 \\ 3000+\Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 60 \\ 180+\Delta \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 12 \\ 60 \\ 180+\Delta \end{pmatrix} \begin{cases} 12 \ge 0 \\ 60 \ge 0 \\ 180+\Delta \ge 0 \end{cases} \Rightarrow -180 \le \Delta < +\infty$$

Таким образом: $\Delta b_3^- = 180$, $\Delta b_3^+ = +\infty$ и $\left[b_3 - \Delta b_3^-; b_3 + \Delta b_3^+ \right] = \left[3000-180;3000+\infty\right] = \left[2820;\ \infty\right)$.

Существенный недостаток такого подхода состоит в том, что так находятся интервалы устойчивости при изменении объема только одного ресурса. Если изменяются запасы всех ресурсов, то можно пользоваться правилом 100% или решать систему

$$X_4^* = D^{-1} \cdot \left(B + \Delta B\right) \ge 0,\ X_4^* = D^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1200+\Delta_1 \\ 150+\Delta_2 \\ 3000+\Delta_3 \end{pmatrix} \ge 0.$$

Определим изменение решения при уменьшении Δb_1^- на 20 чел./час и увеличении трудовых ресурсов на Δb_1^+ на 50 чел./час.

Таблица 1.7.9

		$\Delta_1^- = 20$		
Базис	Решение	a'_{i4}	$-a'_{i4} \cdot \Delta_1^-$	Смешение решения
Z	23400	12	-240	23160
x_3	12	4/25	-16/5	44/5
x_1	60	-1/5	4	56
x_4	180	-13/5	52	232

Таблица 1.7.10

$\Delta_1^+ = 50$		
a'_{i4}	$a'_{i4} \cdot \Delta_1^+$	Смешение решения
12	600	24000
4/25	8	20
-1/5	-10	50
-13/5	-65	115

Из табл. 1.7.9 и 1.7.10 можно сделать следующий вывод. При уменьшении трудовых ресурсов на 20 чел./час выручка уменьшиться на 240 грн. и составит 23160 грн. При этом первой продукции надо выпускать 56 ед., что на 4 ед. меньше запланированного, третьей продукции надо выпускать 8,8 ед., что на 3,2 ед. меньше запланированного. Остаток электроэнергии уменьшится на 52 квт/час и составит 232 квт/час.

При увеличении трудовых ресурсов на 50 чел./час выручка увеличится на 600 грн. и составит 24000 грн. При этом первой продукции нужно выпускать 50 ед., что на 10 ед. меньше запланированного, третьей продукции надо выпускать 20 ед., что на 8 ед. больше запланированного, остаток электроэнергии уменьшится на 65 квт/час. и составит 115 квт/час.

Определим изменение решения при уменьшении сырья на 10 кг (Δb_2^-) и увеличении сырья на 5 кг $\left(\Delta b_2^+\right)$.

Таблица 1.7.11

		$\Delta_2^- = -10$		
Базис	Решение	a'_{i5}	$a'_{i5} \cdot \Delta_2^-$	Смешение решения
Z	23400	60	–600	22800
x_3	12	–6/5	12	44
x_1	60	2	–20	40
x_4	180	2	–100	232

Таблица 1.7.12

$\Delta_2^+ = 5$		
a'_{i5}	$a'_{i5} \cdot \Delta_2^+$	Смешение решения
60	300	23700
–6/5	–6	6
2	10	70
2	10	190

Анализ результатов, отображаемых в табл. 1.7.11, 1.7.12 аналогичен анализу результатов в табл. 1.7.9, 1.7.10.

Найдем интервалы устойчивости для стоимости продукции.

Интервалы устойчивости для стоимости продукции определяются по разному для небазисных и базисных переменных.

Для небазисных переменных x_j интервал устойчивости c_j имеет вид

$$\left(-\infty; c_j + \left(z_j - c_j\right)\right],$$

то есть в числах:

$$\left(-\infty; 250 + 170\right] = \left(-\infty; 420\right].$$

Важное значение при анализе решений ЗЛП имеет понятие снижающей оценки, связанное с ценой продукции.

Снижающая оценка $z_j - c_j$ для небазисной (свободной) переменной (в задаче на max) показывает максимальное значение, на которое должен быть увеличен соответствующий коэффициент, при котором текущий базис перестаёт быть оптимальным, и свободную переменную представляется выгодным сделать базисной.

Снижающая оценка показывает, на сколько ухудшится значение целевой функции, если соответствующая переменная будет введена в базисные с коэффициентом равным единице. Снижающая оценка – это альтернативная цена, представляющая собой наибольший убыток, который будет получен от возможного предпринимательского решения отличного от оптимального.

Если изменяется цена только на одну продукцию, то интервалы устойчивости для базисных переменных находятся решением системы $\left(C+\Delta C\right)D^{-1}\geq 0$.

Находим интервал устойчивости для цены на первую продукцию, при условии, что изменяется только она.

Пусть цена на первую продукцию $c_1 = 300$ возросла на Δ, тогда

$$\left(c_3 \quad c_1+\Delta \quad 0\right)\cdot D^{-1} = \left(450 \quad 300+\Delta \quad 0\right)\begin{pmatrix} 4/25 & -6/5 & 0 \\ -1/5 & 2 & 0 \\ -13/5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \left(12-0,2\Delta \quad 60+2\Delta \quad 0\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} 12-0,2\Delta\geq 0 \\ 60+2\Delta\geq 0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 0,2\Delta\leq 12 \\ \Delta\geq -30 \end{cases}\Rightarrow -30\leq\Delta\leq 60.$$

Таким образом $\Delta c_1^- = 30$, $\Delta c_1^+ = 60$ и $\left[c_1-\Delta c_1^-;c_1+\Delta c_1^+\right]=$
$=\left[300-30;300+60\right]=[270;\ 360]$.

Пусть цена на третью продукцию $c_3 = 450$ возросла на Δ, тогда

$$\left(c_3+\Delta \quad c_1 \quad 0\right)\cdot D^{-1} = \left(450+\Delta \quad 300 \quad 0\right)\begin{pmatrix} 4/25 & -6/5 & 0 \\ -1/5 & 2 & 0 \\ -13/5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \left(12+0,16\Delta \quad 60-1,2\Delta \quad 0\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} 12+0,16\Delta\geq 0 \\ 60-1,2\Delta\geq 0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 0,16\Delta\geq -12 \\ 1,2\Delta\leq 60 \end{cases}\begin{cases} \Delta\geq -75 \\ \Delta\leq 50 \end{cases}\Rightarrow -75\leq\Delta\leq 50.$$

Таким образом $\Delta c_1^- = 75$, $\Delta c_1^+ = 50$ и $\left[c_3-\Delta c_3^-;c_3+\Delta c_3^+\right]=$
$=\left[450-75;450+50\right]=[375;\ 500]$.

Рассмотрим еще один вариант анализа. Необходимо оценить изменение оптимального плана при принудительном выпуске 10 ед. неоптимальной продукции $\left(x_2\right)$. Результаты решения внесем в табл. 1.7.13.

Таблица 1.7.13

$\Delta^{+}_{x_2}=10$				
Базис	Решение	a'_{i2}	$-a'_{i2}\cdot\Delta^{+}_{x_2}$	Смешение решения
Z	23400	170	-1700	21700
x_3	12	$-2/5$	-4	8
x_1	60	2	-20	40
x_4	180	14	-140	40
x_2	0	-1	10	10

Из этой таблицы видно, что при выпуске 10 изделий второго вида выручка от реализации продукции составит 21 700 грн., что на 1 700 грн. меньше оптимальной. При этом первой продукции будет изготовлено 40 ед., что на 20 ед. меньше оптимального количества. Третьей продукции будет изготовлено 8 ед., что на 4 ед., меньше оптимального количества и использование электроэнергии увеличится на 140 квт/час. и её остаток будет равен 10квт/час.

***

Проведение экономического анализа оптимального решения задачи и нахождение интервалов устойчивости оптимального плана довольно громоздкая процедура. Для упрощения анализа все вычисления можно выполнять с помощью Excel. Для усвоения материала этого раздела ещё раз приведём кратко методику решения ЗЛП и нахождения интервалов устойчивости с помощью компьютера в Excel.

Решение состоит из двух этапов:

1. Ввести согласно стандартному приёму формулы математической модели задачи в Excel;

2. В диалоговом режиме произвести решение задачи по выбранной программе «Поиск решения».

На первом этапе необходимо набрать исходные данные ЗЛП в произвольном месте таблицы Excel, как показано в табл. 1.7.14. Клетки **F21:F23**, где должны находиться знаки ограничений, оставляем свободными (они обведены двумя линиями). В клетке **F20** (обведённой жирной линией) будет находиться значение целевой функции. В клетках **C24:E24** (обведённых жирной штриховой линией) будут находиться значения переменных x_1, x_2, x_3, на них в процессе решения будет делаться абсолютная ссылка.

Таблица 1.7.14. *Данные примера 1.7.5, внесённые в Excel*

	C	*D*	*E*	*F*	*L*
20	300	250	450		
21	15	20	25		1200
22	2	3	2,5		150
23	35	60	60		3000
24					

По общим правилам вводим формулы математической модели задачи.

Вводим зависимости для целевой функции и ограничений. Для этого курсор ставится в клетку **F20** и выполняются действия: **Вставка**; **Функция**; **Математические**; **СУММПРОИЗ**; **ОК**.

В строку **Массив 1** вводится **C20:E20**; В строку **Массив 2** вводится **C24:E24**. Чтобы на массив **C24:E24** была абсолютная ссылка, надо нажать **F4**, когда этот массив выделен. Возле номеров второго массива появится знак **$**; **ОК**.

Протянуть маленький + вниз по клеткам, выделенным двойными линиями. В этих клетках появятся нули.

Математическая модель, за исключением знаков ограничений и вида оптимума, внесена.

На втором этапе необходимо запустись команду **«Поиск Решения»**: **Сервис**; **Поиск решения** (если «Поиск Решения» нет, то в Надстройке поставить галочку возле Поиск Решения); **ОК**.

Дальше работаем в диалоговом режиме. Действия, которые необходимо выполнять кратко перечислены ниже.

Установить целевую ячейку **F20**; Указать максимальное значение; Изменяя ячейки **C24:E24**; **Добавить**;

В ссылке на ячейку вводится ячейка **F21** выделенная двумя линиями, знак неравенства оставляем ≤, в ограничения выделяем клетку с числом 1200; **Добавить**; в ссылке на ячейку вводится ячейка **F22**, знак неравенства оставляем ≤, В ограничения выделяем клетку с числом 150; **Добавить**. В ссылке на ячейку вводится ячейка **F23**, знак неравенства оставляем ≤. В ограничения выделяем клетку с числом 3000; **ОК**; **Параметры**; **Линейная модель**; **Неотрицательные значения**; **ОК**; **Выполнить**; **Сохранить найденное решение**. С помощью Ctrl выделить **Результаты**; **Устойчивость**; **Пределы**; **ОК**.

В результате получим решение и его анализ.

Таблица 1.7.15. *Решение примера 1.7.5 в Excel*

300	250	450	$Z_{\max} = 23400$	
15	20	25	1200	1200
2	2	2,5	150	150
35	60	60	2820	3000
$x_1^* = 60$	$x_2^* = 0$	$x_3^* = 12$		

Анализ решения ЗЛП в Excel имеет вид

Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам
Рабочий лист: [Книга1] Лист1
Отчет создан: 26.05.2009 9:29:44

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$F$20		0	23400

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$C$24		0	60
$D$24		0	0
$E$24		0	12

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$F$23		2820	$F$23<=$G$23	не связан.	180
$F$22		150	$F$22<=$G$22	связанное	0
$F$21		1200	$F$21<=$G$21	связанное	0

Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [Книга1] Лист1
Отчет создан: 26.05.2009 9:26:01
Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стои-мость	Целевой ко-эффициент	Допусти-мое увели-чение	Допусти-мое умень-шение
$C$24		60	0	300	60	30
$D$24		0	-170	250	170	1E+30
$E$24		12	0	450	50	75

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая цена	Ограничение. Правая часть	Допусти-мое увели-чение	Допусти-мое умень-шение
$F$21		1200,000	12,000	1200,000	69,231	1200,000
$F$22		150,000	60,000	150,000	10,000	150,000
$F$23		2820,000	0,000	3000,000	1E+30	2820,000

Microsoft Excel 11.0 Отчет по пределам
Рабочий листКнига1]Лист1Отчет по пределам 3
Отчет создан: 26.05.2009 9:26:018:14:36

Ячейка	Целевое имя	Значение				
$F$20		23400				
Ячейка	Изменяемое имя	Значение	Нижний предел	Целевой результат	Верхний предел	Целевой результат
$C$24		60	0	5400	60	23400
$D$24		0	0	23400	0	23400
$E$24		12	0	18000	12	23400

Из этих таблиц выписываем необходимые результаты. Чтобы не было сложностей с копированием таблиц (непосредственно они не помещаются на странице текста), желательно их представлять в виде рисунков (копированием экрана монитора).

1.8. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

1.8.1. Матричная постановка транспортной задачи

Пусть имеется m поставщиков с запасами однородного груза a_i $(i=\overline{1,m})$ и n потребителей с потребностями этого груза b_j $(j=\overline{1,n})$. При этом груз измеряется в одних и тех же единицах (тонны, штуки, вагоны т. д.).

Задача называется закрытой, если $a_1+a_2+\ldots+a_m=b_1+b_2+\ldots+b_n$.

Если $a_1+a_2+\ldots+a_m\neq b_1+b_2+\ldots+b_n$, то задача называется открытой.

Рассмотрим вначале закрытую задачу.

Известны цены (тарифы, расстояния) перевозок c_{ij} единицы груза от i-го поставщика к j-му потребителю. Необходимо составить такой план перевозки груза от каждого поставщика каждому потребителю, при котором вывозится весь груз, удовлетворяются все потребности, и суммарная стоимость перевозки минимальная.

Обозначим через x_{ij} – количество груза, который планируется перевозить от i-го поставщика j - ому потребителю, Z – общая стоимость перевозок. Данные задачи записывают в табл. 1.8.1, которая называется матрицей планирования.

Таблица 1.8.1. *Матрица планирования перевозки груза*

Запасы груза у i-го поставщика	Потребности груза j-го потребителя					
	b_1	b_2		b_j		b_n
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2j} x_{2j}	…	c_{2n} x_{2n}
…	…	…	…	…	…	…
a_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	…	c_{ij} x_{ij}	…	c_{in} x_{in}
…	…	…	…	…	…	…
a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}

Математическая модель в случае закрытой задачи имеет вид:

$$Z=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\ldots+c_{mn}x_{mn}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\min,$$

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i \quad (i=\overline{1,m}),\\ \sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j \quad (j=\overline{1,n}),\end{cases}\qquad x_{ij}\geq 0,\qquad \begin{matrix}i=\overline{1,m},\\ j=\overline{1,n}.\end{matrix} \tag{1.8.1}$$

Рассмотрим следующие две модели открытой транспортной задачи

Если $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то $Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min,\ \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i=\overline{1,m}), \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j \quad (j=\overline{1,n}), \end{cases} \quad x_{ij} \ge 0.$ (1.8.2)

Если $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то $Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min,\ \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \quad (i=\overline{1,m}), \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j=\overline{1,n}), \end{cases} \quad x_{ij} \ge 0.$ (1.8.3)

Чтобы решить открытую задачу, ее преобразуют в закрытую. Если $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводят фиктивного $m+1$-го поставщика с запасом груза $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ и нулевыми тарифами перевозки $c_{m+1\,1} = c_{m+1\,2} = ... = c_{m+1\,n} = 0$. Для этого в таблицу вводится дополнительная строка.

Если $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводят фиктивного $n+1$-го потребителя с потребностями груза $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ и нулевыми тарифами перевозки $c_{1\,n+1} = c_{2\,n+1} = ... = c_{m\,n+1} = 0$. Для этого в таблицу вводится дополнительный столбец.

1.8.2. Свойства решений транспортной задачи

Если закрытую транспортную задачу рассматривать как ЗЛП, то в её математической модели будет $m+n$ уравнений с $m \cdot n$ неизвестными. Приведём три теоремы, отражающие свойства решений транспортной задачи.

*Теорема 1***.** Каждая закрытая транспортная задача имеет решение.

Теорема 2. Если все объёмы запасов (a_i) и потребности (b_j) в каждом пункте потребления являются целыми числами, то все базисные решения транспортной задачи – целочисленные. Следовательно, существует, по крайней мере, одно целочисленное оптимальное решение этой задачи.

Теорема 3. Ранг матрицы условий ограничений транспортной задачи равен $m+n-1$.

По теореме 3 ранг матрицы условий ограничений равен $n+m-1$, а это значит, что линейно-независимых уравнений будет $m+n-1$, то есть базисных переменных будет $m+n-1$, а свободных – $(m-1)\cdot\ (n-1)$.

Значения поставок записывают в таблицу. Те клетки, где записаны значения базисных переменных, называются занятыми. Занятых (заполненных) клеток должно быть $m+n-1$.

Опорность плана при записи условий транспортной задачи в виде таблицы 1.8.1 заключается в его ацикличности, т.е. в таблице нельзя построить замкнутый цикл, все вершины которого лежат в занятых клетках. Циклом называется набор клеток вида $(i_1 j_1)$ $(i_1 j_2)$ $(i_2 j_2)$ ... $(i_k j_k)$, в которых две и только две соседние клетки расположены в одном столбце или в одной строке таблицы, причём последняя клетка находится в той же строке или столбце, что и первая. Построение циклов начинают с какой-либо занятой клетки и переходят по столбцу (строке) к другой занятой клетке, в которой делают поворот под прямым углом и движутся по строке (столбцу) к следующей занятой клетке и т.д., пытаясь возвратиться к первоначальной клетке. Если такой возврат возможен, то получен цикл и план не является опорным. Клетки, в которых происходит поворот под прямым углом, определяют вершину цикла. В противном случае план является опорным.

Опорный план в транспортной задаче представляется в виде матрицы и называется *распределением*.

Если распределение вырождено, т.е. заполненных клеток окажется меньше, чем $m+n-1$, то дополнительно в некоторые клетки дописывают нули так, чтобы в результате образовался ацикличный набор из $m+n-1$заполненных еклеток. Это означает, что все заполненные $m+n-1$ клетки можно соединить ломаной с горизонтальными и вертикальными звеньями, делая повороты только в заполненных клетках. Вырожденность может возникнуть в двух случаях: при составлении первоначального распределения и составлении перераспределения.

1.8.3. Методы нахождение начального распределения

Рассмотрим два метода нахождения начального распределения.

1. Метод северо-западного угла нахождения первоначального распределения.

Сущность метода северо-западного угла состоит в том, что максимально возможные поставки последовательно вводятся в северо-западную клетку таблицы. Этот метод заключается в том, что заполнения начинают с верхней левой клетки, которая является северо-западной. Вначале первый поставщик предельно допустимо удовлетворяет первого потребителя, потом грузом, который остался, предельно допустимо удовлетворяет второго потребителя и так далее, пока у него не закончится груз. Потом второй поставщик удовлетворяет таким же образом следующего потребителя и так далее. На каждом шаге вычёркивваетя либо только строка, либо только столбец, а не то и другое одновеменно. Если при заполнении клетки вычёркиватся одновременно строка и стобец, то дополнттельно в правую или нижнюю от неё клетку ставят фиктивную нулевую поставку.

Пример 1.8.1. Составить методом северо-западного угла первоначальное распределение в следующей транспортной задаче:

Таблица. 1.8.2. *Исходные данные примера 1.8.1*

a_i \ b_j	60	70	120	130	100
140	2	3	4	2	1
180	3	4	1	4	1
60	4	7	3	7	2

Вначале проверяем открытая или закрытая транспортная задача.

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 140 + 180 + 60 = 380,\ \sum_{j=1}^{5} b_j = 60 + 70 + 120 + 130 + 100 = 480.$$

Так как $\sum_{i=1}^{3} a_i \neq \sum_{j=1}^{5} b_j$, то модель открытая. Вводим фиктивного поставщика с запасом груза равным a_4= 480 – 380 = 100 и нулевыми тарифами перевозок $c_{4\,1}= c_{4\,2} = c_{4\,3}= c_{4\,5}= 0$.

Заполняем таблицу. От первого поставщика направляем 60 единиц груза первому потребителю. После этого у первого поставщика остаётся 80 единиц груза (80 записываем справа от первой строки таблицы) и первый потребитель больше не нуждается в грузе (над первым столбцом сверху пишем ноль). Из оставшихся 80 единиц груза у первого поставщика 70 распределяем второму потребителю. Второму потребителю больше не надо груза, сверху над вторым столбцом пишем нуль. У первого поставщика ещё остаётся 10 единиц груза. 10 пишем справа от 80 в первой строке. Таким образом, двигаясь в юго-восточный угол, заполняем всю табл. 1.8.3.

Таблица. 1.8.3. *Первоначальное распределение груза в примере 1.8.1*

	0	0	110, 0	60, 0	0	
a_i \ b_j	60	70	120	130	100	
140	2 **60**	3 **70**	4 **10**	2	1	80, 10, 0
180	3	4	1 **110**	4 **70**	1	70, 0
60	4	7	3	7 **60**	2 **0***	60, 0
100	0	0	0	0	0 **100**	0

Заполненных клеток должно быть $m + n - 1$= 4+5 – 1 = 8. Так как заполненных клеток 7, то в одной свободной клетке ставим нуль и считаем ее заполненной. Нуль нельзя ставить в клетки: (1;4), (2;1), (2;2), (3;1), (3;2), (3;3). Нуль **0*** записали в клетку (3,5). Если при заполнении клетки закрываются одновременно строка и столбец, то **0*** можно написать рядом в нижней или правой от неё клетках. Получили начальное распределение

$$X_1 = \begin{pmatrix} 60 & 70 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 110 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 0^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} \qquad Z(X_1) = \\ = 60\cdot 2 + 70\cdot 3 + 10\cdot 4 + 110\cdot 1 + 70\cdot 4 + 60\cdot 7 = \\ 1180(\textit{грн}).$$

2. Метод двойного предпочтения нахождения первоначального распределения. В методе северо-западного угла не учитываются тарифы перевозок. Чтобы их учесть, в каждой строке и в каждом столбце отмечают клетки с минимальными тарифами. Некоторые клетки будут иметь две метки, некоторые одну, некоторые ни одной. Заполнение таблицы начинают с клеток, которые имеют две метки, потом одну. Оставшуюся часть таблицы заполняют по наименьшим тарифам. При заполнении таблицы в каждой клетке обязательно записывают максимально допустимый груз.

Пример 1.8.2. Составить начальное распределение методом двойного предпочтения в задаче из предыдущего примера.

Последовательность заполнения клеток обозначена числами в скобках.

Таблица 1.8.4.

	20, 0	10, 0	0	90, 0	0	
a_i \ b_j	60	70	120	130	100	
140	ˇ $\boxed{2}$ 40 [3]	ˇ $\boxed{3}$	$\boxed{4}$	ˇ $\boxed{2}$	ˇˇ $\boxed{1}$ **100** [2]	40, 0
180	$\boxed{3}$ **20** [4]	$\boxed{4}$	ˇˇ $\boxed{1}$ **120**[1]	$\boxed{4}$ **40** [5]	ˇˇ $\boxed{1}$	60, 40, 0
60	$\boxed{4}$	$\boxed{7}$ **60** [6]	$\boxed{3}$	$\boxed{7}$	ˇ $\boxed{2}$	0
100	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$ **10** [7]	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$ **90** [8]	$\boxed{0}$	90, 0

Таким образом, получили

$$X_2 = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 20 & 0 & 120 & 40 & 0 \\ 0 & 60 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 90 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Z\left(X_2\right) = 40\cdot 2 + 100\cdot 1 + 20\cdot 3 + 120\cdot 1 + 40\cdot 4 + 60\cdot 7 + 10\cdot 0 + 90\cdot 0 = 940.$$

Замечание. Распределение, полученное таким методом не хуже, так как $1180 > 940$, чем методом северо-западного угла, но оно не обязательно оптимальное.

1.8.4. Теорема оптимальности распределения поставок транспортной задачи.

Построенное исходное распределение надо проверить на оптимальность и в случае его неоптимальности делать перераспределения до получения оптимального.

Для этого используют теорему оптимальности распределения.

Теорема. Распределение $X^* = \left(x_{ij}^*\right)$ $\left(i=\overline{1,m};\, j=\overline{1,n}\right)$ будет оптимальным тогда и только тогда, когда найдутся такие числа u_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$ и v_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$, называемые потенциалами соответственно строк и столбцов, что будут выполняться соотношения:

$u_i + v_j = c_{ij}$ при $x_{ij} > 0$;

$\left(u_i + v_j\right) - c_{ij} = \delta_{ij} \le 0$ при $x_{ij} = 0$.

δ_{ij} – оценка оптимальности.

1.8.5. Решение транспортной задачи методом потенциалов

Рассмотрим решение транспортной задачи с подробным описанием алгоритма решения на конкретном примере.

Пример 1.8.3. Решить транспортную задачу.

Таблица 1.8.5. *Исходные данные примера 1.8.3*

a_i \ b_j	120	80	300
150	4	1	3
50	2	0	1
200	3	5	6

Решение. Проверяем наличие закрытости транспортной модели.

Проверяем закрытость задачи. В нашем случае $\sum_{i=1}^{3} 150+50+200=400$, $\sum_{i=1}^{3} 120+80+300=500$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \ne \sum_{j=1}^{m} b_j \quad (400 \ne 500)\cdot$$

Задача открытая.

Так как спрос больше потребления, то вводим фиктивного поставщика с запасом груза равным 500 – 400=100 и тарифами перевозок равными нулю. Для этого в матрицу транспортной задачи вводим дополнительную строку, соответствующую фиктивному поставщику с $a_{m+1} = a_4 = 100$ и $c_{4\,1} = c_{4\,2} = c_{4\,3} = 0$.

Таблица 1.8.6. *Закрытая транспортная задача примера 1.8.3*

a_i \ b_j	120	80	300
150	4	1	3
50	2	0	1
200	3	5	6
100	0	0	0

Методом северо-западного угла находим начальное распределение.

У первого поставщика берём 120 ед. груза и отдаём их первому потребителю. Оставшиеся 30 ед. груза даём второму потребителю. Второму потребителю надо ещё 50 ед. груза. Его берём у второго поставщика. Первый и второй потребители полностью удовлетворены в своих потребностях. Весь груз первого и второго поставщиков распределён. 200 ед. груза даём третьему потребителю от третьего поставщика и 100 ед. груза от фиктивного четвёртого поставщика. Проверяем баланс по каждой строке и каждому столбцу.

Таблица 1.8.7. *Первоначальное распределение примера 1.8.3*

	0	50,0	100,0	
a_i \ b_j	120	80	300	
150	4 **120**	1 **30**	3	30,0
50	2	0 **50**	1	50,0
200	3	5	6 **200**	200,0
100	0	0	0 **100**	0

Начальное распределение

$$X_1 = \begin{pmatrix} 120 & 30 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix},$$

$$Z(X_1) = 120 \cdot 4 + 30 \cdot 1 + 50 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 200 \cdot 6 + 100 \cdot 0 = 1710.$$

Проверяем распределение на вырожденность. Заполненных клеток должно быть $m+n-1=4+3-1=6$. Мы получили пять заполненных клеток. Такое распределение считается вырожденным. Для того, чтобы сделать распределение невырожденным, ставят поставку объемом равным нулю в клетку, которая образует с другими заполненными клетками, так называемую вычеркиваемую комбинацию. Это означает, что от каждой заполненной клетки можно перейти в любую другую заполненную клетку перемещаясь только горизонтально и вертикально делая повороты только в заполненных клетках. В одну незаполненную клетку (2;3) ставим ноль и считаем ее заполненной. Ноль можно ставить не в любую незаполненную клетку. В нашем случае нельзя ставить в клетку (2;1).

Проверка текущего распределения на оптимальность осуществляется методом потенциалов. Находим потенциалы. Каждому поставщику и потребителю ставим соответствующие числа u_i, v_j (потенциалы), таким образом, чтобы их сумма равнялась тарифам соответствующих заполненных клеток.

$$u_i + v_j = c_{ij} \text{ если } (i;j) \text{ - заполненная клетка} \qquad (1.8.5)$$

Таблица 1.8.8. *Начальное распределение, потенциалы и оценки незаполненных клеток*

a_i \ b_j	120	80	300	u_i
150	4 **120**	1 **30**	3 [–1]	u_1=0
50	2 [1]	0 **50**	1 **0***	u_2 = – 1
200	3 [5]	5 [0]	6 **200**	u_3 = 4
100	0 [2]	0 [–1]	0 **100**	u_4 = –2
v_j	v_1 = 4	v_2 = 1	v_3 = 2	

Получили систему уравнений:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 4,\ u_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 4 \\ u_1 + v_2 = 1,\ \Rightarrow v_2 = 1 \\ u_2 + v_2 = 0, \Rightarrow u_2 = -1 \\ u_2 + v_3 = 1, \Rightarrow v_3 = 2 \\ u_3 + v_3 = 6, \Rightarrow u_3 = 4 \\ u_4 + v_3 = 0, \Rightarrow u_4 = -2 \end{cases}$$

Получили систему из пяти уравнений. Она неопределённая, т. е. имеет бесконечное множество решений. Один из потенциалов приравниваем к нулю, а остальные находятся однозначно из системы 1.8.5. Пусть $u_1 = 0$. Тогда из первого уравнения находим $v_1 = 4$, из второго – $v_2 = 1$ и т.д.

Находим оценки незаполненных клеток:

$$\delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}, \qquad (1.8.6)$$

δ_{13}= 0+2 –3 = – 1<0, δ_{21} = 4–1 –2= 1>0, δ_{31} = 4+4 –3= 5 > 0,
δ_{32} = 4–+1 – 5 = 0, δ_{41} = −2+4 – 0= 2>0, δ_{42} = −2+1 – 0= – 1<0.

Их значения записываем в клетках таблицы в нижнем левом углу. Величины груза выделены жирным шрифтом, а значения оценок выделены квадратными скобками.

Текущий опорный план будет оптимальным, если для всех незаполненных клеток оценки будут неположительными: $\delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \le 0$

В данной задаче план не является оптимальным, поскольку имеются положительные оценки для пустых клеток. Оценка 5 в клетке (3;1) показывает, что если в эту клетку поместить единицу груза, то стоимость перевозок уменьшится на пять единиц. Действительно, если в эту клетку внести единицу груза, то для сохранения баланса из клетки (3;3) необходимо отнять единицу груза, в клетку (2;3) прибавить, из клетки (2;2) отнять, в клетку (1;2) добавить, из клетки (1;1) отнять. При этом стоимость перевозки изменится на величину $3-6+1-0+1-4=-5$, т.е. уменьшиться на 5 ед.

Переходим к новому опорному плану. Переход осуществляется заполнением свободной клетки, которой соответствует наибольшая положительная оценка оптимальности.

Для клетки (3;1) строим цикл пересчёта (цепочку перераспределения). Циклом для незаполненной клетки называется последовательность заполненных клеток, в которые поочерёдно прибавляется и вычитается груз для сохранения баланса, если в незаполненную клетку поместить некоторый груз. Для каждой свободной ячейки всегда существует только одна цепочка. Она составляется таким образом, что на каждом углу цепочки стоят заполненные клетки, а один угол цепочки находится в клетке, куда осуществляется перераспределение.

Определяем груз ρ, который будем перемещать по циклу. По циклу перемещаем груз равный минимуму грузов стоящих в клетках, в которых груз вычитается от объемов в клетках.

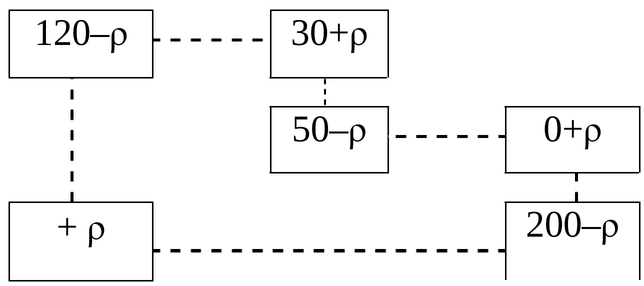


Рис. 1.8.1. Цепочка перераспределения для клетки (3;1)

$$\rho = \min(120, 50, 200) = 50.$$

Составляем новую таблицу. Так как в клетку (3;1) будем ставить груз равный 50 единицам, то значение целевой функции при втором распределении уменьшится следующим образом:

$$Z(X_2) = Z(X_1) - \delta_{31} \cdot \rho = 1710 - 5 \cdot 50 = 1460.$$

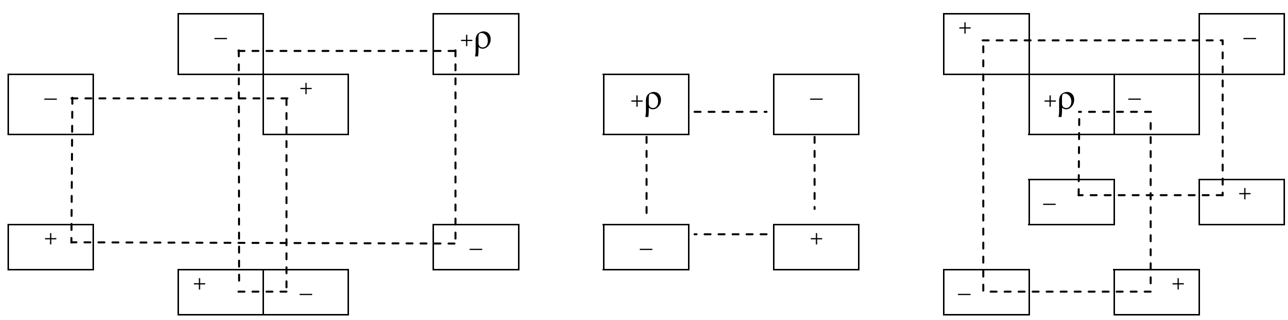


Рис. 1.8.2. Виды цепочек перераспределения. В каждой строке и столбце участвуют только две клетки

Таблица 1.8.9. *Второе распределение примера 1.8.3*

a_i \ b_j	120	80	300	u_i
150	4 **70**	1 **80**	3 • [4]	u_1=0
50	2 [−4]	0 [−5]	1 **50**	u_2 = – 6
200	3 **50**	5 [−5]	6 **150**	u_3 = −1
100	0 [−3]	0 [–6]	0 **100**	u_4 = –7
v_j	v_1 = 4	v_2 = 1	v_3 = 7	

$$X_2 = \begin{pmatrix} 70 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \\ 50 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}.$$

Значение целевой функции при распределении X_2 можно подсчитать как и в первом случае: $Z(X_2)$=70·4+80·1+50·1+50·3+150·6=1460.

Продолжаем итерации до получения неположительных оценок незаполненных клеток.

Находим потенциалы и оценки оптимальности для незаполненных клеток второго опорного плана. Вычисления выполняем непосредственно в табл. 1.8.9.

Второй план также не оптимален, так как имеется положительная оценка для свободной клетки (1;3). Сделаем перераспределение в клетку (1;3). Для этой клетки составляем цепочку перераспределения и определим груз, который будем перемещать по этой цепочке.

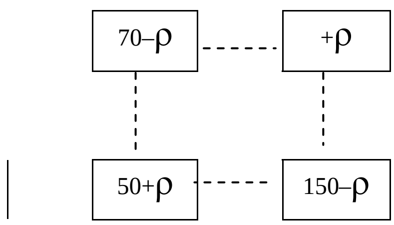


Рис. 1.8.3. Цепочка перераспределения для клетки (1;3)

ρ = min (70, 150)=70.

Заполняем новую таблицу.

Таблица 1.8.10. *Третье распределение примера 1.8.3*

b_j / a_i	120	80	300	u_i
150	4 [−4]	1 **80**	3 **70**	u_1=0
50	2 [−4]	0 [−1]	1 **50**	u_2 = – 2
200	3 **120**	5 [−5]	6 **80**	u_3 = – 1
100	0 [−3]	0 [–2]	0 **100**	u_4 = –3
v_j	$v_1 = 0$	$v_2 = 1$	$v_3 = 3$	

Получили третий опорный план (распределение).

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 80 & 70 \\ 0 & 0 & 50 \\ 120 & 0 & 80 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

Третий план оптимальный**,** так как все оценки оптимальности отрицательные.

$$X_{Opt} = X_{\min} = X^* = \begin{pmatrix} 0 & 80 & 70 \\ 0 & 0 & 50 \\ 120 & 0 & 80 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix},$$

$$Z_{Opt.} = Z_{min.} = Z^* = 80 \cdot 1 + 70 \cdot 3 + 50 \cdot 1 + 120 \cdot 3 + 80 \cdot 6 = 1180.$$

План единственный, так как все оценки свободных клеток строго меньше нуля.

Ответ: $X_{Opt} = \begin{pmatrix} 0 & 80 & 70 \\ 0 & 0 & 50 \\ 120 & 0 & 80 \end{pmatrix}$, $Z_{Opt.} = 1180$.

Третий потребитель недополучает 100 ед. груза.

Замечание1. Если оценка оптимальности отрицательна, то необязательно находить ее значение. Достаточно поставить вместо числа знак «–», т. е. отметить что клетка благоприятная.

Замечание 2. Если задача имеет, например, три опорных оптимальных решения

$$X_1=\begin{pmatrix}200&0&0\\100&0&0\\0&300&0\\50&0&100\\0&0&250\end{pmatrix},X_2=\begin{pmatrix}200&0&0\\0&100&0\\0&200&100\\150&0&0\\0&0&250\end{pmatrix},X_3=\begin{pmatrix}200&0&0\\0&100&0\\100&200&0\\50&0&100\\0&0&250\end{pmatrix},$$

то общее решение можно записать в виде выпуклой линейной комбинации этих решений

$$X_{Opt.}=\lambda_1X_1+\lambda_2X_2+\lambda_3X_3=\begin{pmatrix}200&0&0\\100\lambda_1&100(\lambda_2+\lambda_3)&0\\100\lambda_3&300\lambda_1+200(\lambda_2+\lambda_3)&100\lambda_2\\50(\lambda_1+\lambda_3)+150\lambda_2&0&100(\lambda_1+\lambda_3)\\0&0&250\end{pmatrix},$$

где $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1,\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\geq 0.$

Замечание 3. При решении транспортной задачи нужно постоянно проверять условие баланса, количество заполненных клеток, вырожденность решения.

1.8.6. Алгоритм решения транспортной задачи методом потенциалов

Проверяется открытая или закрытая модель. Если задача открытая, то вводят фиктивного поставщика или фиктивного потребителя с нулевыми тарифами перевозок.

Составляют начальный опорный план (первоначальное распределение).

Проверяют на вырожденность (заполненных клеток, должно быть $m+n$-1). Если заполненных клеток меньше, то дополнительно в определённые незаполненных клетках ставят нули.

Находят потенциалы.

Находят оценки оптимальности незаполненных клеток.

Если есть «неблагоприятные» клетки, то для клетки с наибольшей оценкой строят цикл пересчета.

Определяют величину перераспределения ρ и заполняют новую таблицу.

Итерации продолжают до получения всех неположительных оценок

Если все свободные клетки имеют оценки ≤ 0, то оптимальное решение задачи найдено. Если все оценки незанятых клеток <0, то оптимальный план единственный. Если некоторые оценки в оптимальном плане незанятых клеток равны 0, то план не единственный. Эти клетки можно сделать занятыми, но общая стоимость перевозки не изменится.

1.8.7. Усложнённые постановки транспортных задач

Если от *к*-го поставщика запрещена перевозка к q-му потребителю, то клетку (*к*,q) блокируем, т.е. вместо тарифа c_{kq} пишем большое число *M* (по большой цене не рационально перевозить груз). Дальше задачу решаем обычным методом.

Если от *к*-го поставщика можно перевозить к q-му потребителю не более чем b'_q ($b'_q < b_q$) груза, то q-ый столбец разбиваем на два столбца. В одном пишем потребность в грузе b'_q, а во втором b_q -b'_q. В первом столбце тарифы оставляем предыдущими, а во втором в *к*-ой строке вместо c_{kq} пишем большое число *M*, т.е. эту клетку блокируем. Другие тарифы во втором столбце оставляем без изменения. После решения новой задачи эти столбцы объединяем в один путём сложения соответствующих грузов.

Если общая потребность в грузе больше, чем имеются ресурсы и q-й потребитель должен удовлетворяться реальным грузом, то в m+1-й строке пишем нулевые тарифы, а вместо $c_{m+1\ q}$ пишем большое число *M*.

Постановку и модель задачи усложняет наличие промежуточных транспортных узлов, в которых производится обработка груза.

Если в открытой задаче спрос превышает предложение, то для определения рекомендаций наращивания запасов груза у поставщиков добавляют фиктивного поставщика с тарифами перевозок $c_{m+1\,j} = \min\limits_{i=1,2,\ldots,m} c_{ij}\ \left(j=\overline{1,n}\right)$. Если $x^*_{m+1\,j} > 0$, то рекомендуется наращивать производство у производителя, для которого c_{ij} наименьшее в j-м столбце на величину $x^*_{m+1\,j}$.

Если в открытой задаче предложение превышает спрос, то для определения рекомендаций наращивания спроса на груз у потребителей добавляют фиктивного потребителя с тарифами перевозок $c_{i\ n+1} = \min\limits_{j=1,2,\ldots,n} c_{ij}\ \left(i=\overline{1,m}\right)$. Если $x^*_{i\ n+1} > 0$, то рекомендуется наращивать потребности потребителей, для которых c_{ij} наименьшее в i-й строке на величину $x^*_{i\ n+1}$.

1.8.8. Методика решения транспортной задачи с помощью Microsoft Excel

Транспортная задача является двухиндексной задачей линейного программирования. Двухиндексные задачи решаются в Excel аналогично одноиндексным. Особенность ввода данных задачи состоит в том, что переменные и коэффициенты вводятся в виде матриц.

Алгоритм решения транспортной задачи с помощью надстройки «**Поиск решения**» рассмотрим на примере 1.8.3. Так как исходная задача открытая, сделаем ее закрытой. Компьютерная программа при решении делает задачу закрытой самостоятельно.

Таблица 1.8.11. *Закрытая транспортная задача примера 1.8.3*

a_i \ b_j	120	80	300
150	4	1	3
50	2	0	1
200	3	5	6
100	0	0	0

Составим математическую модель закрытой транспортной задачи. Пусть x_{ij} - количество единиц груза, перевозимого от i-го поставщика j-му потребителю, $i=\overline{1,4}$, $j=\overline{1,3}$

$$x_{ij} \ge 0 \quad i=\overline{1,4}, \quad j=\overline{1,3}$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=150, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=50, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}=200, \\ x_{41}+x_{42}+x_{43}=100, \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=120, \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=80, \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=300; \end{cases} \tag{1.8.7}$$

$$Z=4x_{11}+x_{12}+3x_{13}+2x_{21}+0\cdot x_{22}+x_{23}+$$
$$+3x_{31}+5x_{32}+6x_{33}+0\cdot x_{41}+0\cdot x_{42}+0\cdot x_{43}\to \min$$

Экранная форма ввода данных транспортной задачи приведена на рисунке 1.8.4

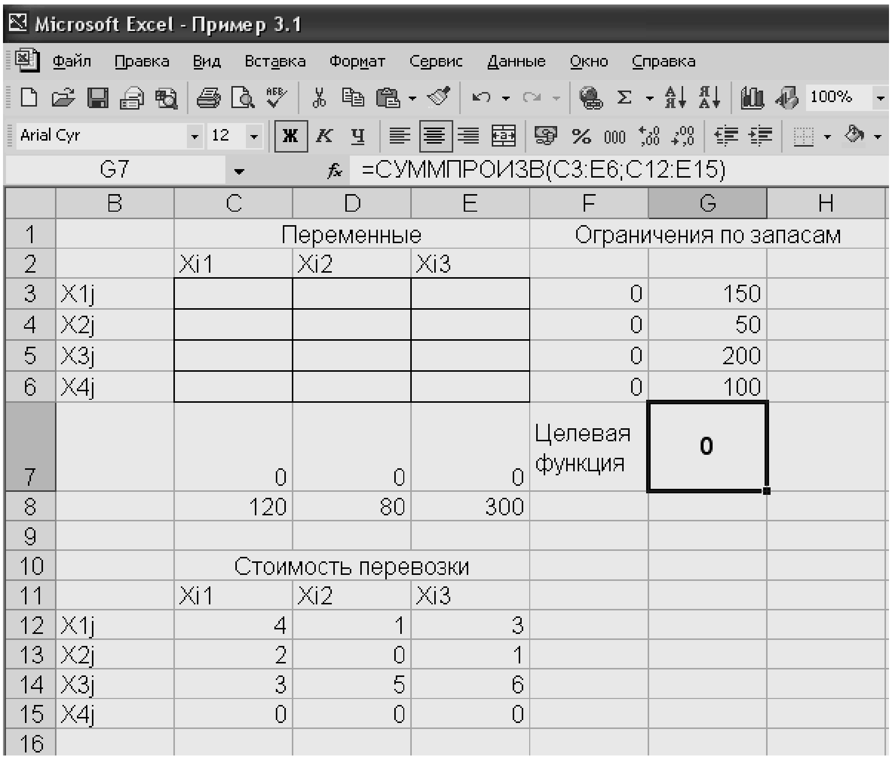


Рис. 1.8.4. Экранная форма ввода данных транспортной задачи.

В ячейках **F3:F6** находятся формулы для ограничений по возможностям поставщиков: для **F3** =СУММ(C3:E3); для **F4** =СУММ(C4:E4); для **F5** =СУММ(C5:E5), для **F6** =СУММ(C6:E6).

В ячейках **C7:E7 –** ограничения по потребностям: **C7**: =СУММ(C3:C6); **D7:** =СУММ(D3: D6); **E7:** =СУММ(E3:E6).

В ячейке **G7** находится формула для расчета значения целевой функции, отражающая затраты на перевозку груза: =СУММПРОИЗВ(C3:E6;C12: E15)

Воспользуемся надстройкой «**Поиск решения**» (рис. 1.8.5)

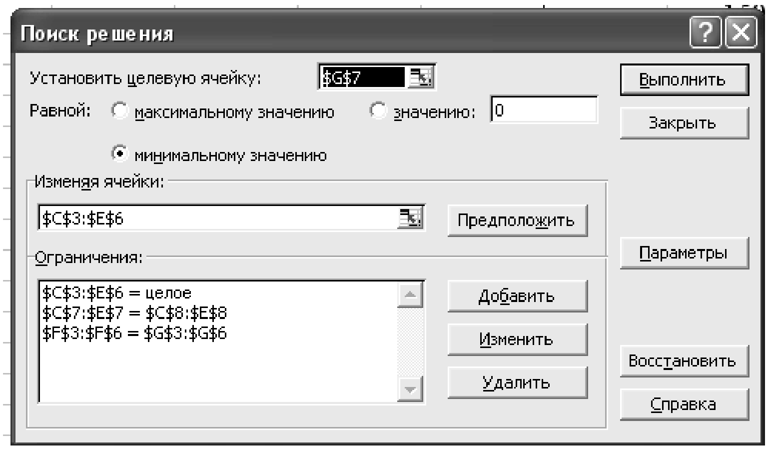
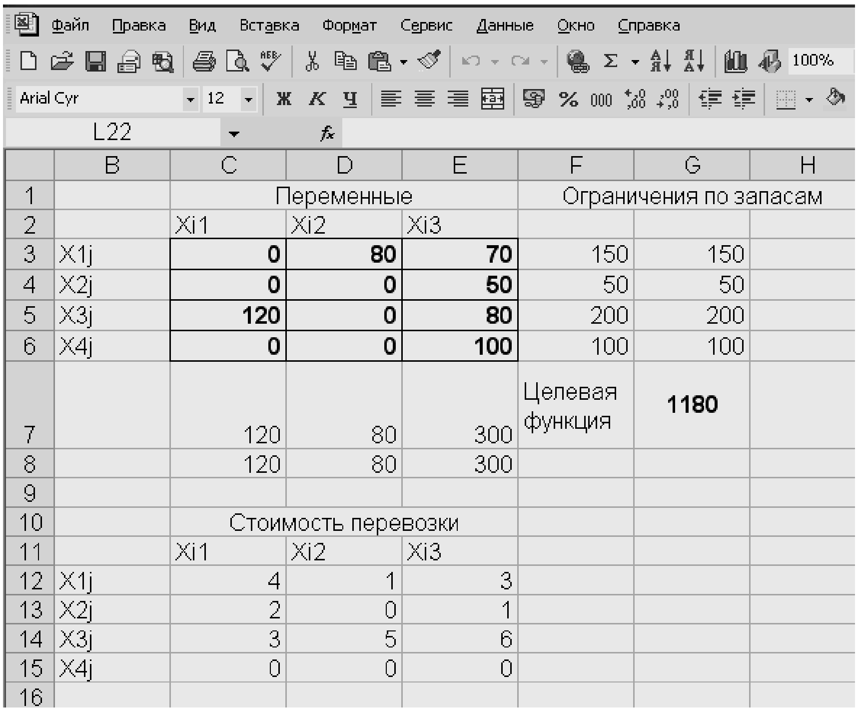


Рис. 1.8.5. Поиск решения транспортной задачи

Первое ограничение обеспечивает выполнение условия целочисленности переменных.

Результат решения приведен на рисунке 1.8.6:



	B	C	D	E	F	G	H
1		Переменные			Ограничения по запасам		
2		Xi1	Xi2	Xi3			
3	X1j	**0**	**80**	**70**	150	150	
4	X2j	**0**	**0**	**50**	50	50	
5	X3j	**120**	**0**	**80**	200	200	
6	X4j	**0**	**0**	**100**	100	100	
7		120	80	300	Целевая функция	**1180**	
8		120	80	300			
9							
10		Стоимость перевозки					
11		Xi1	Xi2	Xi3			
12	X1j	4	1	3			
13	X2j	2	0	1			
14	X3j	3	5	6			
15	X4j	0	0	0			
16							

Рис. 1.8.6. Экранная форма решения транспортной задачи

Оптимальное решение

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 80 & 70 \\ 0 & 0 & 50 \\ 120 & 0 & 80 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} \text{ или } X_{Opt} = \begin{pmatrix} 0 & 80 & 70 \\ 0 & 0 & 50 \\ 120 & 0 & 80 \end{pmatrix}$$

Транспортные затраты составят 1180 грн. Из решения видно, что третий потребитель недополучит 100 единиц продукции, которые ему планируется поставлять от фиктивного поставщика.

Ответы, полученные непосредственным решением, и решением с помощью компьютера совпали. Но при решении с помощью компьютера имеем экономию времени решения и анализ оптимального решения.

1.9. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1.9.1. Идея метода динамического программирования и его геометрическая интерпретация

Динамическое программирование представляет собой раздел математического программирования, в котором изучаются задачи, формулирующиеся как *многошаговые процессы решения* или такие задачи, которые могут быть сведены к ним. Решение таких задач распадается на отдельные этапы, в результате чего одна большая задача со многими переменными заменяется рядом последовательно решаемых задач с существенно меньшим ч*ислом переменных*.

Оптимизация этого многошагового процесса проводится на основе сформулированного Р. Беллманом принципа оптимальности. *Оптимальное поведение обладает тем свойством, что каковы бы ни были первоначальное состояние и первоначальное управление, последующее управление должно быть оптимальным относительно состояния, полученного в результате первоначального управления.*

Смысл этого принципа состоит в том, что поэтапное планирование многошагового процесса должно проводиться таким образом, чтобы при планировании каждого шага учитывалась не выгода, получаемая только на данном шаге, а общая выгода, получаемая по окончании всего процесса. Оптимальное управление производится относительно общей выгоды. Выбирая управление на каждом шаге надо делать это «с оглядкой на будущее», иначе возможны серьезные ошибки.

Рассмотрим пример: пусть планируется работа группы предприятий, одни из которых заняты выпуском предметов потребления, другие же производят для этого средства производства (машины). Задачей является получение за m лет максимального объема выпуска предметов потребления. Производятся капиталовложения на первый год. Исходя из узких интересов данного шага (года) мы должны были бы все средства вложить в производство предметов потребления, пустить машины на полную мощность и добиться к концу года max объема продукции. Но такое решение не будет правильным с точки зрения всего периода времени (за m лет). Имея ввиду будущее, необходимо выделить какую-то долю средств и на производство машин. При этом объем продукции за первый год, естественно, снизится, зато будут созданы условия, позволяющие увеличивать ее производство в последующие годы. И так необходимо поступать на каждом шаге.

При решении задач методом динамического программирования необходимо ответить на вопрос: как находить оптимальное управление в многошаговом процессе? Общее правило ответа заключается в сформулированном выше принципе оптимальности Беллмана, т.е. на каждом шаге управление необходимо выбирать с учетом будущего.

Однако из этого правила есть исключение – это последний шаг, где можно действовать без оглядки на будущее, т.к. его на последнем шаге нет. Управление на последнем шаге надо выбирать так, чтобы оно дало наибольший эффект, т.е. было бы на этом последнем шаге наилучшим. Поэтому процесс динамического программирования развивается с конца. Сначала планируется последний шаг. Но для того, чтобы его спланировать, необходимо знать состояние системы на предпоследнем шаге, а оно неизвестно. Поэтому делаются разные предположения (гипотезы) о состоянии системы на предпоследнем шаге и для каждого из них выбирается управление оптимальным образом.

Это приводит к понятию *условно-оптимального управления*, т.е. оптимального управления, найденного в предположении (при условии), что предыдущий шаг окончился так-то. Динамическое программирование основывается на принципе нахождения на каждом шаге условно оптимального управления для каждого из возможных исходов предшествующего шага.

Руководствуясь этим принципом, мы и разворачиваем процесс нахождения оптимального управления с конца, находя сначала условно оптимальное управнение для каждого возможного исхода предпоследнего шага задачи на основе его условно-оптимального управления на предпоследнем шаге и т.д. пока не дойдем до первого шага.

На первом шаге нам не надо делать гипотез о состоянии системы, так как мы знаем с чего начинается процесс и можем с учетом найденных условно оптимальных управлений на последующих шагах найти *безусловно оптимальное управление*. Это будет такое управление, которое с учетом всех условно оптимальных управлений на последующих шагах давать оптимальное управление для всего процесса. В результате безусловно-оптимального управления на первом шаге система перейдет в состояние S_1, для которого мы снова найдем безусловно оптимальное управление на втором шаге и т.д.

Таким образом, в процессе оптимизации управления методом динамического программирования многошаговый процесс проходит дважды:

- ✓ первый раз от конца к началу, в результате чего находятся условные оптимальные управления на каждом шаге и оптимальный выигрыш (тоже условный) на всех шагах, начиная с данного и до конца процесса;
- ✓ второй раз от начала к концу, в результате чего находятся (уже не условные) оптимальные шаговые управления на всех шагах операции.

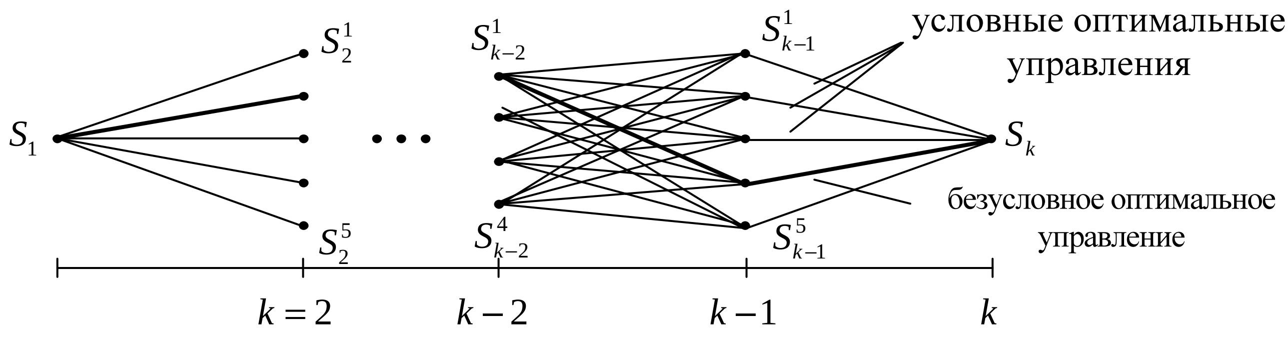


Рис. 1.9.1. Геометрическая интерпретация идеи метода динамического программирования

1.9.2. Требования, предъявляемые к задачам, решаемым методом динамического программирования

Задачи, решаемые методом динамического программирования, должны обладать следующими особенностями.

1. Задача должна допускать возможность интерпретировать ее как k-шаговый процесс принятия решений (ее можно интерпретировать как процесс поведения некоторой системы во времени).

2. Задача должна быть определена для любого числа шагов и ее структура не должна изменяться с изменением числа шагов.

3. При рассмотрении k-шаговой задачи должен быть задан параметр, характеризующий состояние системы. Этот же параметр должен описывать состояние системы при любом количестве шагов.

4. Выбор управления процессом состоит в преобразовании набора параметров, характеризующих состояние системы на k-м шаге в такой же набор параметров с другими числовыми значениями на $k+1$ шаге.

5. Если система в рассматриваемый момент времени (на k-м шаге) находится в некотором состоянии, то ее поведение в дальнейшем определяется этим состоянием и выбираемым управлением и не зависит от предыстории системы (т.е. от того, в каких состояниях находилась система до этого момента).

Символически решение задачи методом динамического программирования можно изобразить

$$S\left(\overline{X_k}\right)\xrightarrow{U_k}S\left(\overline{X_{k+1}}\right),$$

где S – система;

$\overline{X_k}=\left(x_1^k,\, x_2^k,\ldots,\, x_n^k\right)$ – набор параметров, характеризующих состояние системы на k-м шаге;

$x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,\, n}$ – параметры состояния;

U_k – управление на k-м шаге;

$S\left(\overline{X_k}\right)$ – состояние системы на k-м шаге.

1.9.3. Рекуррентное соотношение Беллмана (для получения условно-оптимального управления)

Чтобы применить принцип Беллмана практически, ему необходимо дать математическую формулировку, которая записывается в виде формулы рекуррентного соотношения Беллмана:

$$w_k\left(\xi\right)=\max_{0\le x\le \xi}\left\{g_k\left(x\right)+w_{k-1}\left(\xi-x\right)\right\}. \qquad (1.9.1)$$

Здесь: ξ – параметр, определяющий состояние всей системы,

x – изменяющийся параметр системы на каждом шаге;

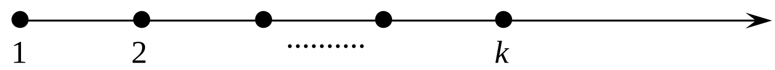
$g_k(x)$ – доход, который получает система на первом шаге (с конца);

w_k, w_{k-1} – доход, который получает система за k и $k-1$ шагов;

$\xi - x$ – функция изменения состояния системы.

1.9.4. Экономическая постановка и построение математической модели задачи динамического программирования (на примере задачи о распределении капиталовложений)

Имеется система, состоящая из группы $\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_m$ предприятий (промышленных), функционирование которых рассматривается на протяжении k хозяйственных периодов (лет).



В начале первого периода на развитие системы предприятий выделяются основные средства ξ_1 (капиталовложения), которые должны быть както распределены между m предприятиями.

В процессе функционирования выделенные средства расходуются (амортизируются), а каждое предприятие приносит некоторый доход $W_i,\ i = \overline{1,m}$, зависящий от вложенных средств. В начале каждого хозяйственного года имеющиеся средства могут перераспределяться между предприятиями.

Ставится вопрос: как нужно в начале каждого года распределять имеющиеся средства между предприятиями, чтобы суммарный доход от всей системы предприятий за весь период $T = k$ шагов был максимальным.

Опишем эту задачу.

В качестве системы S выступает группа промышленных предприятий $\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_m$.

В качестве шага выбирается 1 год функционирования S системы. В данной задаче будет k шагов.

Управление процессом состоит в распределении (перераспределении) средств в начале каждого шага (хозяйственного года). Состояние системы будет характеризоваться m параметрами

$$S\left(\overline{X_k}\right) \qquad \overline{X_k} = \left(x_1^k, x_2^k, ..., x_m^k\right),$$

где x_i^k – выделенные средства i-му предприятию на k-м шаге.

Пусть в начале k-го года предприятиям $\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_m$ выделяются соответственно средства

$$x_1^k, x_2^k, ..., x_m^k. \tag{1.9.2}$$

Совокупность этих значений представляет собой управление на k-м шаге, т.е.

$$\overline{U_k} = \left(x_1^k,\, x_2^k, ...,\, x_m^k\right), \tag{1.9.3}$$

$$\overline{U_k} = f\left(\overline{X_k}\right).$$

Выделенные предприятиям средства (капиталовложения) будут определять состояние системы $S\left(\xi_k\right)$. В этой задаче состояние системы характеризуется одним параметром $\left(\xi_k\right)$ и в начале каждого года оно будет различным, т.е. $\xi_1,\, \xi_2, ...,\, \xi_k$.

Управление $\bar{U}$ на всем периоде $T = k$ будет представлять собой совокупность всех шаговых управлений

$$\bar{U} = \left(\bar{u}_1,\, \bar{u}_2, ...,\, \bar{u}_k\right). \tag{1.9.4}$$

Управление может быть хорошим или плохим, и его эффективность оценивается по какому-то критерию W. В нашей задаче целевая функция представляет собой суммарный доход от всей системы за k лет. Этот доход зависит от управления $\bar{U}$ и от всей совокупности шаговых управлений:

$$W = w\left(\bar{u}\right) = w\left(u_1,\, u_2, ...,\, u_k\right). \tag{1.9.5}$$

Решение задачи будет заключаться в выборе пошаговых управлений $u_1,\, u_2, ...,\, u_k$, чтобы величина $W \to \max$.

Для нашей задачи показатель эффективности w представляет собой сумму доходов за все отдельные шаги (годы), т.е.

$$W = \sum_{j=1}^{k} w_j\left(\bar{u}_j\right) = \sum_{j=1}^{k} w_j\left(x_1^j,\, x_2^j, ...,\, x_m^j\right) \to \max, \tag{1.9.6}$$

где $w_j\left(\bar{u}_j\right)$ – доход от всей системы предприятий за j-й год.

Функция (1.9.6) называется сепарабельной функцией.

Математическая модель поставленной задачи будет иметь следующий вид:

$$W = \sum_{j=1}^{k} w_j\left(\bar{u}_j\right) = \sum_{j=1}^{k} w_j\left(x_1^j,\, x_2^j, ...,\, x_m^j\right) \to \max \tag{9.1.7}$$

$$x_1^j + x_2^j + ... + x_m^j = \xi_j, \quad j = \overline{1, k} \tag{1.9.8}$$

$$\xi_j \ge 0,\; x_i^j \ge 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, k}. \tag{1.9.9}$$

Если потребовать, чтобы все x_i^j и ξ_j были целыми числами, то получим задачу целочисленного сепарабельного программирования. Метод динамического программирования как раз предназначен для решения подобных задач.

Задачу можно упростить и рассмотреть ее только на одном шаге. Тогда такая задача будет заключаться в распределении средств (капиталовложений) ξ между предприятиями $\Pi_1, \Pi_2,..., \Pi_m$ с целью получения максимального эффекта. Управление $\bar{U}$ таким процессом будет заключаться в распределении выделенных капиталовложений ξ между предприятиями $\bar{U} = (x_1, x_2,..., x_m)$,

а максимизируемый суммарный эффект будет представлять

$$W = w(\bar{u}) = w(x_1, x_2,..., x_m) = \sum_{i=1}^{m} w(x_i) \to \max \tag{1.9.10}$$

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = \xi \tag{1.9.11}$$

$$x_i \geq 0, \xi \geq 0, \ \ i = \overline{1, m}. \tag{1.9.12}$$

Задача (1.9.10-1.9.12) решается с помощью рекуррентного соотношения Беллмана 1.9.1.

1.9.5. Примеры решения задач методом динамического программирования

Пример 1.9.1. Задача о распределении капитальных вложений

Пусть в распоряжении производственного объединения имеются некоторые ресурсы (материалы, оборудование, трудовые ресурсы и т.д.), которые в стоимостном выражении имеют объем $b = 700000$ грн. Требуется так распределить имеющиеся ресурсы между четырьмя предприятиями объединения, чтобы доход (прибыль), полученный от вложенных средств, был максимальным. Функция, отражающая доход, который дает k-е предприятие при вложении в него x_j грн. капиталовложений представлена в таблице (для простоты будем считать объемы капиталовложений кратными 100000).

Таблица 1.9.1

x_j	0	100	200	300	400	500	600	700
$f_1(x_j)$	0	20	34	46	53	55	60	60
$f_2(x_j)$	0	18	29	45	62	78	90	98
$f_3(x_j)$	0	25	41	52	74	82	88	90
$f_4(x_j)$	0	30	52	76	90	104	116	125

$f_k(x_j^k), \ k = 1,2,3,4, \ \ j = \overline{1, 8}.$

Математическая модель задачи может быть представлена следующим образом:

найти $W = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \to \max$ при ограничениях:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 700000,$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3,4.$$

Для решения задачи воспользуемся методом, описанным в п. 1.9.3-1.9.4.

1. В качестве управляемого процесса выступает процесс распределения капитальных вложений между предприятиями, а в качестве системы S – предприятия объединения.

В качестве параметра состояния выступает ξ – количество гривень (средств), выделяемых *первым* k предприятиям.

Фазовое пространство Ω в этом случае:

$$\Omega = \left\{ \xi : 0 \le \xi \le 700000 \right\}.$$

Шаг индексирует величина k – выделение средств первым k предприятиям: $k = 1,2,3,4$, т.е. как распределяются выделенные средства по k предприятиям.

Под управлением подразумевается выделение стольких-то средств такому-то предприятию: $U_k = x_j^k$.

2. Функция дохода на k-м шаге будет иметь вид: $f_k\left(\overline{x}_j\right)$.

3. Функция, отражающая изменение состояния системы:
$S_k' = \xi - x_j^k$.

4. Основное функциональное уравнение

$$W_k = w_k\left(S^k,\, x_j^k\right) = \max_{0 \le x_j^k \le \xi} \left\{ f^k\left(x_j^k\right) + w_{k-1}\left(\xi - x_j^k\right) \right\}.$$

5. Найдем условный оптимальный выигрыш для первого шага, руководствуясь основным функциональным уравнением. Здесь $k = 1$, а это значит, что речь идет о выделении средств одному первому предприятию:

$$W_1(\xi) = \max_{0 \le x_j^1 \le \xi} \left\{ f_1\left(x_j^1\right) + w_{k-1}\left(\xi - x_j^1\right) \right\} = \max_{0 \le x_j^1 \le \xi} \left\{ f_1\left(x_j^1\right) \right\} = f_1(\xi) = \left\{0, 20, 34, 46, 53, 55, 60, 60\right\}.$$

6. Руководствуясь основным функциональным уравнением, найдем $w_k(\xi)$ для всех шагов, т.е. для $k = 2,3,4$. Данные сведем в следующие таблицы. В таблицах будут указаны суммы $\left\{ f_k\left(x_j^k\right) + w_{k-1}\left(\xi - x_j^k\right) \right\}$.

Таблица 1.9.2. для $k = 2$

x_j^2	$\xi - x_j^2$	0	100	200	300	400	500	600	700
	$W_1(\xi)$ / $f_2(x_j^2)$	0	20	34	46	53	55	60	60
0	0	0	20*	34	46	53	55	60	60
100	18	18	38*	52*	64	71	73	78	
200	29	29	49	63	75	82	84		
300	45	45	65*	79	91	98			
400	62	62	82*	96	108				
500	78	78	98*	112*					
600	90	90	110			Здесь значений быть не может			
700	98	98							

Условный оптимальный выигрыш на втором шаге для различных значений состояния ξ и x_j^2, которые в сумме должны давать 700, определятся как max значение из чисел, стоящих по диагоналям.

Выпишем условные оптимальные выигрыши при различных значениях состояния ξ в табл. 1.9.3

Таблица 1.9.3

ξ	0	100	↓ 200	300	400	500	600	700	
$w_2(\xi)$	0	20	38	52	65	82	98	112	– условные оптимальные выигрыши
$u_2^* = \left[x_j^2(\xi)\right]^*$	0	0	00*	100	300	400	500	500	– условные оптимальные управления

Рассмотрим теперь то же самое для $k = 3$, т.е. шаг, когда трем предприятиям выделяются средства в объеме ξ.

Данные опять сведем в табл. 1.9.4

Таблица 1.9.4. для $k = 3$

x_j^3	$\xi - x_j^3$	0	100	200	300	400	500	600	700
	$f_3(x_j^3)$ \ $W_2(\xi)$	0	20	38	52	65	82	98	112
0	0	0	20	38	52	65	82	98	112
100	25	25*	45*	63*	77	90	107	123	
200	41	41	61	79*	93	106	123		
300	52	52	72	90	104	117			
400	74	74	94*	112*	126*				
500	82	82	102	120					
600	88	88	108						
700	90	90							

– условные оптимальные управления на втором шаге

Здесь значений быть не может, т.к. $x_j^3 + \left(\xi - x_j^3\right) \geq 700$

Находим условные оптимальные выигрыши и условное оптимальное управление в зависимости от состояния ξ.

Таблица 1.9.5

ξ	0	100	200	300	400	500	600	700
$w_3(\xi)$	0	25	45	63	79	94	112	126
$u_3^* = \left[x_j^3(\xi)\right]^*$	0	100	100	100	200*	400	400	400

– условные оптимальные выигрыши

– условные оптимальные управления для третьего предприятия

Делаем последний шаг $k = 4$

Таблица 1.9.6

x_j^4	$\xi - x_j^4$ / $W_3(\xi)$ / $f_4(x_j^4)$	0	100	200	300	400	500	600	700
		0	25	45	63	79	94	112	126
0	0	0	25	45	63	79	94	112	126
100	30	30	55	75	93	103	124	144	
200	52	52	77	97	115	131	146		
300	76	76	101	121	139	$\boxed{155}$*			
400	90	90	115	135	153				
500	104	104	129	149					
600	116	116	141						
700	125	125							

Здесь значений быть не может, так как $x_j^4 + (\xi - x_j^4) \geq 700$

Так как предприятиям дается ресурсов на 700 тыс. грн., то есть смысл рассматривать только эту величину. Величина 700000 грн. является конечным состоянием системы. Этот условный оптимальный выигрыш является и безусловным выигрышем для системы. Другими словами, распределив оптимальным образом средства в размере 700 тыс. грн. между четырьмя предприятиями объединение получит доход в размере 155 ед.

Найдем теперь безусловное оптимальное управление, зная, что четвертому предприятию будет выделено $u_4^* = \left[x_j^4\right]^* = 300$ тыс. гривень.

Отсюда найдем, что всем трем остальным предприятиям будет выделено средств $\xi = 700000 - 300000 = 400000$ грн.

По таблице 1.9.5 находим, что третьему предприятию в этом случае надо выделить 200000 грн. $u_3^* = \left[x_j^3\right]^* = 200$ тыс. грн.

Тогда двум первым предприятиям будет выделено средств
700 тыс. – 300 тыс. – 200 тыс. = 200 тыс. грн.

По таблице 1.9.3 находим, что второму предприятию будет выделено 100 тыс. грн., т.е. $u_2^* = \left[x_j^2\right]^* = 100$ тыс. грн. Тогда первому предприятию будет выделено $u_1^* = \left[x_j^1\right]^* =$ 700 тыс. – 300 тыс. – 200 тыс. – 100 тыс. = 100 тыс. грн.

Безусловное оптимальное управление будет:

$$U^* = \left(u_1^*, u_2^*, u_3^*, u_4^*\right) = (100000; 100000; 200000; 300000)$$

и max выигрыш $W_{\max} = 155$ условных единиц.

Ответ: $U^* = (100000; 100000; 200000; 300000)$. $W_{\max} = 155$ у.е.

Распишем более подробно формирование условно-оптимального управления еще на одном примере.

Пример 1.9.2. Задача о распределении капитальных вложений.

1. Постановка задачи. Концерн, состоящий из 4 крупных предприятий машиностроения решил выделить на их реконструкцию 500000 $. Эффективность функционирования каждого из предприятий после их реконструкции представлена функциями $g_i(x_i)$ и определена в табл. 1.9.7.

Таблица 1.9.7

	0	100	200	300	400	500
$g_1(x_i)$	0	30	33	35	39	43
$g_2(x_i)$	0	32	34	38	42	45
$g_3(x_i)$	0	19	27	33	40	43
$g_4(x_i)$	0	28	31	33	37	42

Необходимо распределить капиталовложения между предприятиями таким образом, чтобы эффективность работы всех предприятий была максимальной.

2. Построим математическую модель задачи.

$$Q(\xi) = g_1(x_1) + g_2(x_2) + g_3(x_3) + g_4(x_4) \to \max \tag{1.9.13}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \xi \tag{1.9.14}$$

$$x_i \geq 0, \ \ i = \overline{1, 4}, \ \ \xi \geq 0. \tag{1.9.15}$$

3. Рекуррентное соотношение Беллмана для нахождения условно-оптимальных управлений:

$$W_k(\xi) = \max_{0 \leq x \leq \xi} \left\{ g_k(x) + w_{k-1}(\xi - x) \right\}. \tag{1.9.16}$$

4. Решение задачи.

Выделим средства сначала одному предприятию. Тогда

$$W_1(\xi) = \max_{0 \leq x_1 \leq \xi} \left\{ g_1(x) + w_0(\xi - x) \right\} = \max_{0 \leq x \leq \xi} \left\{ g_1(x) \right\}. \tag{1.9.17}$$

Если мы выделили все средства 1-му предприятию, то по таблице 1 видим, что общий доход будет составлять 43 ед.

Выделим средства первому и второму предприятию. Тогда, пользуясь формулой (1.9.16), получим условно-оптимальные управления следующие:

$$W_2(\xi) = \max_{0 \le x \le \xi} \left\{ g_2(x) + w_1(\xi - x) \right\} \tag{1.9.18}$$

$W_2(0) = 0$.

$W_2(100) = \max\limits_{0 \le x \le 100} \left\{ g_2(0) + w_1(100 - 0),\ g_2(100) + w_1(0) \right\} = \max\{30, 32\} = 32.$

$W_2(200) = \max\limits_{0 \le x \le 200} \left\{ g_2(0) + w_1(200),\ g_2(100) + w_1(100),\ g_2(200) + w_1(0) \right\} =$

$= \max\{33,\ 32 + 30, 34\} = 62.$

$W_2(300) = \max\{38,\ 32 + 33,\ 34 + 30, 35\} = 65.$

$W_2(400) = \max\{42,\ 38 + 30,\ 34 + 33,\ 32 + 35, 39\} = 68.$

$W_2(500) = \max\{45,\ 42 + 30,\ 38 + 33,\ 34 + 35,\ 32 + 39,\ 0 + 43\} = 72.$

Тогда $W_2(\xi) = \{0,\ 32,\ 62,\ 65,\ 68,\ 72\}$.

Для удобства расчетов составлены таблицы.

Таблица 1.9.8

$W_1(\xi)$		0	100	200	300	400	500
$g_2(x)$	$g_1(x)$	0	30	33	35	39	43
0	0	0	30	33	35	39	43
100	32	32*	62*	65*	67	71	×
200	34	34	64	67	69	×	×
300	38	38	68*	71	×	×	×
400	42	42	72*	×	×	×	×
500	45	45	×	×	×	×	×

Выпишем в таблицу условно-оптимальное управление на втором шаге

Таблица 1.9.8а

ξ	0	100	200	300	400	500
$w_2(\xi)$	0	32	62	65	68*	72
u_2^{opt}	0	100	100	100	200	400

Для трех предприятий

Таблица 1.9.9

$g_3(\xi)$ \ $W_2(\xi)$		0	100	200	300	400	500
		0	32	62	65	67	72
0	0	0	32*	62*	65	67	72
100	19	19	51	81*	84	86	×
200	27	27	61	89*	92	×	×
300	33	33	65	95*	×	×	×
400	40	40	72	×	×	×	×
500	43	43	×	×	×	×	×

Таблица 1.9.9а

ξ	0	100	200	300	400	500
$w_3(\xi)$	0	32	62	81	89	95
$u_3 = x_3(opt)$	0	0	0	100	200	300

Для четырех предприятий

Таблица 1.9.10

$g_4(\xi)$ \ $W_3(\xi)$		0	100	200	300	400	500
		0	32	62	81	89	95
0	0	0	32*	62*	81	89	95
100	28	28	60	90*	109*	$\boxed{117}$*	×
200	31	31	63	93	112	×	×
300	33	33	65	95	×	×	×
400	37	37	69	×	×	×	×
500	42	42	×	×	×	×	×

Таблица 1.9.10а

ξ	0	100	200	300	400	500
$w_4(\xi)$	0	32	62	90	109	117
$x_4(opt)$	0	0	0	100	100	100

Таким образом, из таблицы 1.9.10 видим, что максимальный эффект составляет $W_{opt} = 117$ ед. Теперь будем находить безусловно-оптимальное управление. Для этого будем использовать таблицы 1.9.8a, 1.9.9a, 1.9.10a. Максимальный эффект на четвёртом шаге получится, если четвертому предприятию мы выделим 100000, т.е. $x_4 = 100$, а трём оставшимся предприятиям выделим 400000$. Оптимальный эффект на третьем шаге будет получен при выделении третьему предприятию 300000$, т.е. $x_3 = 300$ (из табл. 1.9.9a).

Теперь видно, что для первого и второго предприятия остается 100000$. Из таблицы 1.9.8a видим, что максимальный эффект при выделении первым двум предприятиям 100000 будет достигнут, если второму предприятию мы выделим 100000$, т.е. $x_2 = 100$. Тогда $x_1 = 0$.

Ответ: $x_1 = 0$; $x_2 = 100$; $x_3 = 300$; $x_4 = 100$ и $Q_{\max} = 117$ усл.ед.
$\overline{X}_{opt} = (0, 100, 300, 100)$. $W_{\max} = 117$.

1.10. ЗАДАЧИ ДРОБНО-ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Среди оптимизационных плановых задач большое значение имеют такие, в которых необходимо экстремизировать удельные экономические показатели, т.е. например такие, как себестоимость, рентабельность и т.п. Но в таких случаях допустимые условия могут ничем не отличаться от допустимых условий обычной линейной задачи, а вот целевая функция представляет собой дробь, в числителе и знаменателе которой стоят линейные формы от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ – искомых планов выпуска интересующих нас товаров. Например, рентабельность выпуска этих товаров может быть представлена в виде следующей дробно-линейной функции:

$$r = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n}{d_1 x_1 + d_2 x_2 + ... + d_n x_n},$$

где r – рентабельность, x_j – искомый план выпуска j-го товара, c_j – прибыль от реализации единицы товара j, d_j – затраты на производство единицы товара j $\left(j = \overline{1, n}\right)$.

Общую постановку задачи дробно-линейного программирования приведем в следующем виде: найти такие значения переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, которые бы отвечали условиям

$$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1, n}\right), \tag{1.10.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad \left(i = \overline{1, m}\right) \tag{1.10.2}$$

и приносили нужный экстремум (максимум или минимум в зависимости от экономического смысла критерия) целевой функции

$$\varphi = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}. \tag{1.10.3}$$

Задача (1.10.1) – (1.10.3) является задачей нелинейного программирования. Воспользовавшись некоторыми преобразованиями переменных, мы задачу (1.10.1) – (1.10.3) приведем к линейному виду, что нам позволит использовать симплексный метод для ее решения.

Если вся совокупность допустимых решений рассматриваемой задачи совместна, то (1.10.1) – (1.10.2) выделяют в n-мерном пространстве переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ выпуклое многогранное множество, которое обозначим через Ω. Числитель целевой функции (1.10.3) обозначим через φ_1, знаменатель –

через φ_2. Полагаем, что в допустимой области Ω знаменатель $\varphi_2 = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0 \neq 0$. Сделав такое предположение, мы тем самым считаем, что в области допустимых решений Ω знаменатель целевой функции сохраняет постоянство знака. Не нарушая общности рассуждений, можно считать знаменатель положительным $(\varphi_2 > 0)$, т.к. в случае отрицательности φ_2 знак минус можно отнести к числителю.

Задачу (1.10.1) – (1.10.3) ниже перепишем в новых переменных, которые будут обозначены через $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$. Для этого полагаем

$$\varphi_2 = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0 = \frac{1}{y_0} \tag{1.10.4}$$

и

$$y_j = y_0 x_j \quad \left(j = \overline{1, n}\right). \tag{1.10.5}$$

Тогда в новых переменных задача (1.10.1) – (1.10.3) примет вид

$$y_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1, n}\right), \tag{1.10.6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0 \quad \left(i = \overline{1, m}\right). \tag{1.10.7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_j y_j + d_0 y_0 = 1, \tag{1.10.8}$$

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j + c_0 y_0 \to extr. \tag{1.10.9}$$

По отношению к новым переменным y_j задача (1.10.6) – (1.10.9) уже является задачей линейного программирования, которую можно решать с помощью симплексного метода. Приведем дополнительные пояснения к получению записей (1.10.6) – (1.10.9). Начнем с целевой функции. В исходном виде целевая функция имеет вид

$$\varphi = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0}.$$

Так как мы переобозначили знаменатель целевой функции φ_2 через $\frac{1}{y_0}$, то вправе записать

$$\varphi = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\varphi_1}{1/y_0} = \varphi_1 \cdot y_0 = \left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_0 \right) y_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j y_0 + c_0 y_0 .$$

Но в силу (1.10.5) $x_j y_0 = y_j$.

Поэтому для целевой функции получаем

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j y_0 + c_0 y_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j + c_0 y_0 ,$$

что как раз и совпадает с записью (1.10.9). А теперь поясним получение остальных записей (1.10.6) – (1.10.8). В исходной задаче имеем требования $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}$, поэтому, учитывая подстановку (1.10.5), т.е. $y_j = y_0 x_j$, и то, что $y_0 = \dfrac{1}{\varphi_2}$ и по допущению $\varphi_2 > 0$, можно считать справедливыми требования $y_j = y_0 x_j = \dfrac{x_j}{\varphi_2} \ge 0$, т.е. $y_j \ge 0$, а это и есть условия (1.10.6). Для получения условий (1.10.7) умножим равенства (1.10.2) слева и справа на величину y_0, получим

$$\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right] y_0 = b_i y_0$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j y_0 - b_i y_0 = 0 \cdot$$

Делая в силу (1.10.5) замену $x_j y_0 = y_j$, получаем запись (1.10.7), т.е. $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0$. И еще в условиях эквивалентной задачи мы должны учесть, что переменная y_0 подчинена равенству

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0 = \frac{1}{y_0}$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x_j y_0 + d_0 y_0 = 1 \cdot$$

А учитывая замену (1.10.5), получаем $\sum\limits_{j=1}^{n} d_j y_j + d_0 y_0 = 1$, т.е. запись

(1.10.8). Эта запись как раз и отражает ту закономерность, которой должна отвечать величина y_0 в эквивалентной задаче.

Преобразование задачи дробно-линейного программирования к виду (1.10.6) – (1.10.9) и последующее симплексное решение проиллюстрируем на следующем примере:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 6, \end{cases} \\ \varphi = \dfrac{2x_1 - x_2}{x_1 + 2x_2 + 1} \to \max. \end{array}\right\} \qquad (1.10.10)$$

В задаче (1.10.10) условия неотрицательности сохраняем, а остальные ограничения с помощью балансовых переменных $x_3 \ge 0$ и $x_4 \ge 0$ преобразуем в уравнения. Тогда получаем

$$\begin{array}{l} x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0, \\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \qquad = 2, \\ 2x_1 + x_2 \qquad + x_4 = 6, \end{cases} \\ \varphi = \dfrac{2x_1 - x_2}{x_1 + 2x_2 + 1} \to \max. \end{array} \qquad (1.10.11)$$

Этот вид задачи уже является аналогичным виду (1.10.1) – (1.10.3). Для знаменателя целевой функции φ вводим новое обозначение $x_1 + 2x_2 + 1 = \dfrac{1}{y_0}$.

Если еще ввести новые переменные $y_j = y_0 x_j$ $\left(j = \overline{1,4}\right)$, то согласно вышеизложенной методике для задачи (1.10.11) можно получить линейный аналог

$$\left.\begin{array}{l} y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0,\ y_4 \ge 0, \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \qquad - 2y_0 = 0, \\ 2y_1 + y_2 \qquad + y_4 \ - 6y_0 = 0, \\ y_1 + 2y_2 \qquad\qquad + \ y_0 = 1, \\ \varphi = 2y_1 - y_2 \to \max. \end{array}\right\} \qquad (1.10.12)$$

Задача (1.10.12) уже является задачей линейного программирования и, если с помощью третьего уравнения исключить y_0 из первого и второго уравнений, то мы получим задачу

$$
\begin{cases}
y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0,\ y_4 \ge 0, \\
3y_1 + \ 2y_2 + y_3 \qquad\qquad = 2, \\
8y_1 + 13y_2 \qquad + y_4 \qquad = 6, \\
\ \ y_1 + \ 2y_2 \qquad\qquad + y_0 = 1, \\
\varphi - 2y_1 - y_2 \qquad\qquad\quad = 0,\ \varphi \to \max,
\end{cases}
\tag{1.10.13}
$$

в которой в качестве базисных переменных удобно использовать переменные $y_3,\ y_4,\ y_0$. В записи задачи (1.10.13) целевая функция переписана в том же виде, что и остальные уравнения, т.е. слева размещены все переменные, а справа – свободный член. Полученную задачу (1.10.13) решаем с помощью симплексных таблиц

Б	$C_Б$	*B*	y_1	y_2	y_3	y_4	y_0
			2	–1	0	0	0
y_3	0	2	3	2	1	0	0)
y_4	0	6	8	13	0	1	0
y_0	0	1	1	2	0	0	1
$\varphi_j - c_j$		0	–2	1	0	0	0
y_1	2	2/3	1	2/3	1/3	0	0
y_4	0	2/3	0	23/3	–8/3	1	0
y_0	0	1/3	0	4/3	–1/3	0	1
$\varphi_j - c_j$		4/3	0	7/3	2/3	0	0

$\theta_{01} = \min\left(\frac{2}{3}, \frac{6}{8}, \frac{1}{1}\right) = \frac{2}{3}$, что соответствует 1-й строке.

Во второй таблице уже получен оптимальный результат $Y^{Opt} = \left(\frac{2}{3}, 0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\varphi_{\max} = \frac{4}{3}$. Учитывая, что $y_0 = \frac{1}{3}$, получаем следующий ответ в исходных переменных

$$
x_1 = \frac{y_1}{y_0} = \frac{2/3}{1/3} = 2;\ x_2 = \frac{y_2}{y_0} = 0;\ x_3 = \frac{y_3}{y_0} = 0;\ x_4 = \frac{y_4}{y_0} = \frac{2/3}{1/3} = 2 \cdot
$$

Итак, $X^{Opt} = (2, 0, 0, 2)$, $\varphi_{\max} = \frac{4}{3}$. Или для исходного задания задачи (1.10.10) $x_1^{Opt} = 2$, $x_2^{Opt} = 0$ и $\varphi_{\max} = \frac{4}{3}$.

В дополнение к изложенному рассмотрим графическое решение простейшей задачи дробно-линейного программирования:

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \tag{1.10.14}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \end{cases} \tag{1.10.15}$$

$$\varphi = \frac{c_1x_1 + c_2x_2 + c_0}{d_1x_1 + d_2x_2 + d_0} \to \max(\min). \tag{1.10.16}$$

Как более простой вариант рассмотрим случай, когда $c_0 = 0$, $d_0 = 0$. Тогда при начальном рассмотрении мы будем иметь дело с целевой функцией

$$\varphi = \frac{c_1x_1 + c_2x_2}{d_1x_1 + d_2x_2}. \tag{1.10.17}$$

Согласно условиям (1.10.14) и (1.10.15) мы получаем в общем случае в качестве области допустимых решений выпуклое многогранное множество в первом квадранте системы переменных x_1, x_2. Если область допустимых решений ограничена, то мы имеем дело с выпуклым многоугольником.

Как же ведет себя целевая функция (1.10.17) в зависимости от x_1 и x_2? Пусть φ фиксировано, т.е. $\varphi = const = \overline{\varphi}$. Тогда из записи $\overline{\varphi} = \frac{c_1x_1 + c_2x_2}{d_1x_1 + d_2x_2}$ и, полагая $d_1x_1 + d_2x_2 \ne 0$, получаем

$$\overline{\varphi}\left(d_1x_1 + d_2x_2\right) = c_1x_1 + c_2x_2. \tag{1.10.18}$$

Это равенство характеризует геометрическое место точек, соответствующих линии уровня целевой функции $\varphi = \overline{\varphi}$. Из (1.10.18) выражаем x_2 через x_1:

$$x_2 = \frac{c_1x_1 - \overline{\varphi}d_1x_1}{\overline{\varphi}d_2 - c_2} = \frac{c_1 - \overline{\varphi}d_1}{\overline{\varphi}d_2 - c_2}x_1 = kx_1. \tag{1.10.19}$$

Итак, линии уровня целевой функции (1.10.17) суть прямые линии (1.10.19), проходящие через начало координат системы x_1, x_2 и имеющие при изменяющейся величине цели φ тангенс угла наклона к оси Ox_1

$$k = \frac{c_1 - \varphi d_1}{\varphi d_2 - c_2}. \tag{1.10.20}$$

Чтобы оценить изменение тангенса угла наклона в зависимости от величины целевой функции, рассмотрим производную $\frac{dk}{d\varphi}$, исходя из записи (1.10.20)

$$\frac{dk}{d\varphi}=\frac{c_2d_1-c_1d_2}{\left(\varphi d_2-c_2\right)^2}. \qquad (1.10.21)$$

Видно, что искомая производная предстала в виде дроби, знаменатель которой положителен. Числитель же не зависит от φ. Следовательно, производная (1.10.21) имеет постоянный знак, который определяется знаком числителя $\left(c_2d_1-c_1d_2\right)$.

Если $c_2d_1-c_1d_2>0$, то линии уровня возрастают против часовой стрелки (Рис. 1.10.1а); если же $c_2d_1-c_1d_2<0$, то уровни цели возрастают по часовой стрелке (Рис. 1.10.1б).

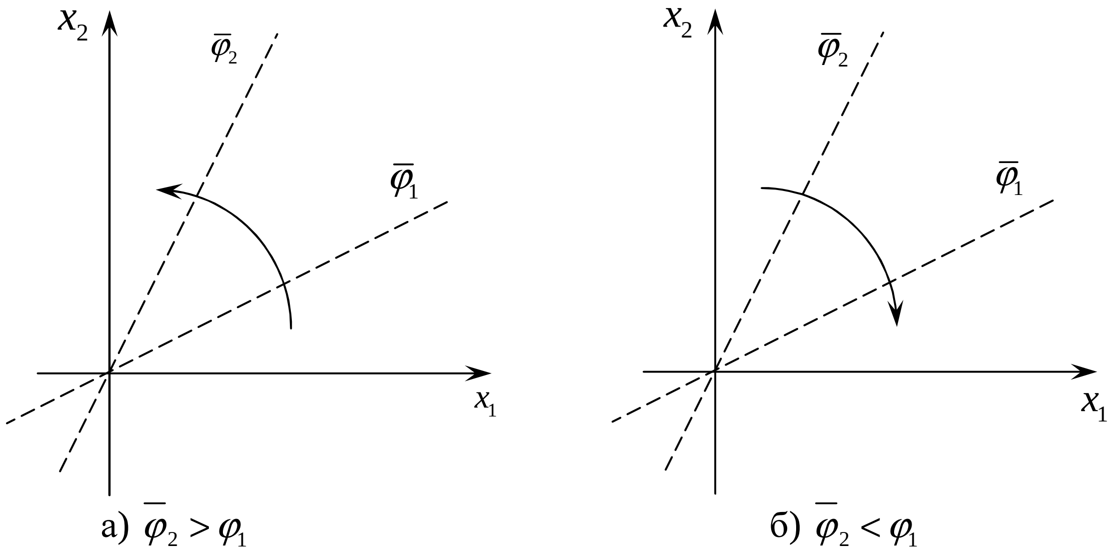


Рис. 1.10.1

На рис. 1.10.2 показано графическое решение следующей задачи:

$$\begin{cases} x_1\ge 0,\ x_2\ge 0 \\ x_1+x_2\ge 5, \\ -x_1+3x_2\le 7, \\ 3x_1-x_2\le 11, \end{cases} \qquad (1.10.22)$$

$$\varphi=\frac{3x_1-x_2}{x_1+x_2}\to\max\left(\min\right). \qquad (1.10.23)$$

Согласно ограничениям (1.10.22) областью допустимых решений рассматриваемого примера будет треугольник *ABC*. Координаты угловых точек

$A(2,3)$, $B(5,4)$, $C(4,1)$. В силу (1.10.23) $c_1 = 3$, $c_2 = -1$, $d_1 = 1$, $d_2 = 1$. Поэтому $c_2 d_1 - c_1 d_2 = -1 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = -4$. Но это означает, что $\frac{dk}{d\varphi} < 0$. Следовательно, уровни целевой функции суть прямые, проходящие через начало координат и возрастающие по часовой стрелке. Из рисунка становится очевидно, что в точке $A(2,3)$ будет наблюдаться минимум целевой функции φ, а в точке $C(4,1)$ – максимум, причем соответственно $\varphi_{\min} = \frac{3}{5}$ и $\varphi_{\max} = \frac{11}{5}$.

В заключение рассмотрим графическое решение задачи при более общем виде задания целевой функции. Именно, пусть

$$\varphi = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_0}{d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_0} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}. \tag{1.10.24}$$

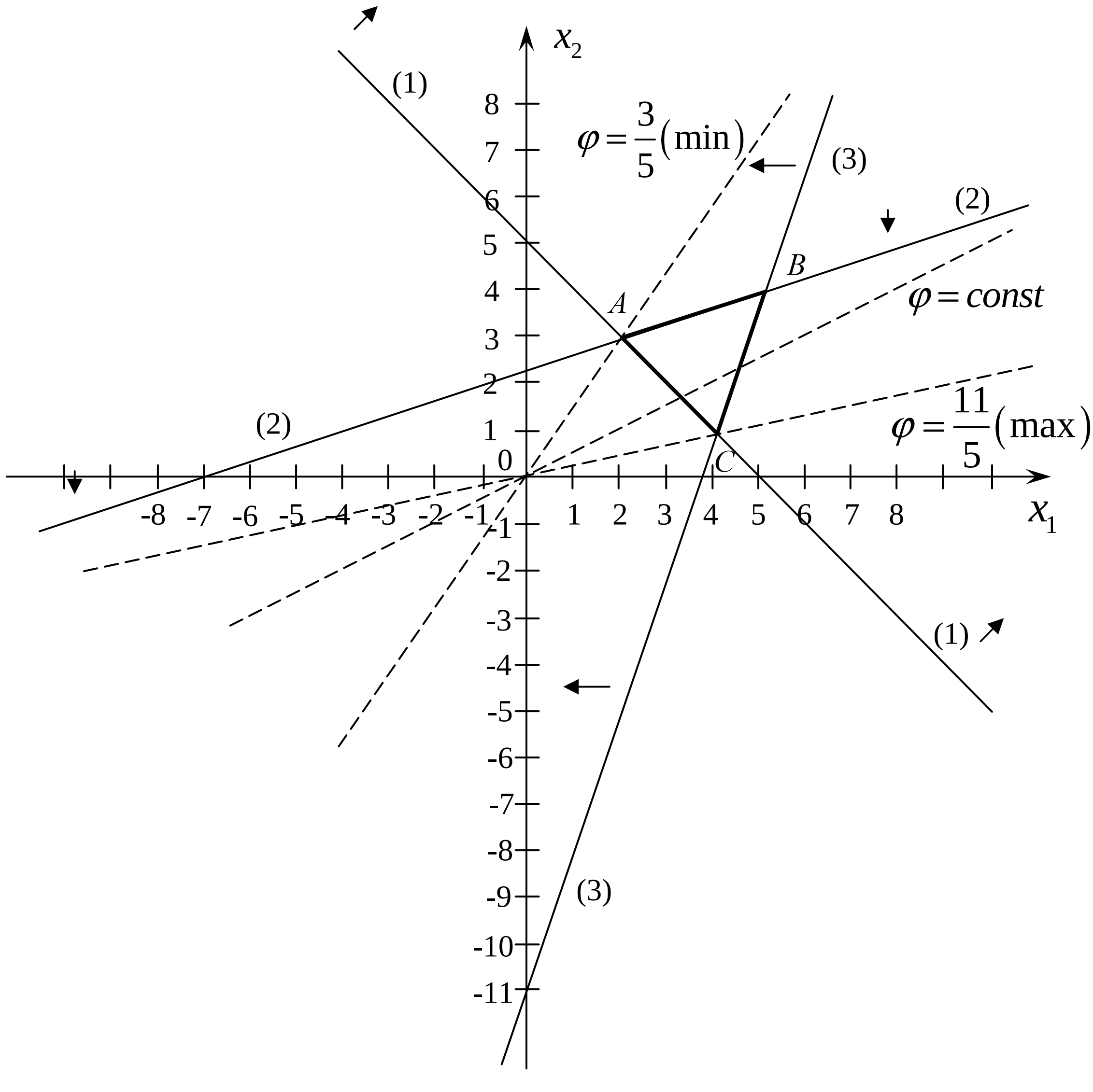


Рис. 1.10.2

Считая $\varphi_2 \neq 0$, т.е. $d_1x_1 + d_2x_2 \neq 0$, можно записать
$\varphi\left(d_1x_1 + d_2x_2 + d_0\right) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_0$
или

$$\left(\varphi d_2 - c_2\right)x_2 = \left(c_1 - \varphi d_1\right)x_1 + \left(c_0 - \varphi d_0\right).$$

Отсюда, считая $\varphi d_2 - c_2 \neq 0$, получаем

$$x_2 = \frac{c_1 - \varphi d_1}{\varphi d_2 - c_2}x_1 + \frac{c_0 - \varphi d_0}{\varphi d_2 - c_2}. \qquad (1.10.25)$$

Алгебраически, используя замену переменных, можно показать, что при различных фиксированных значениях φ мы получаем пучок прямых, проходящих через центр $0^*\left(x_1^*, x_1^*\right)$, координаты которого определяются из решения системы уравнений

$$\begin{cases} c_1x_1^* + c_2x_2^* + c_0 = 0 \\ d_1x_1^* + d_2x_2^* + d_0 = 0. \end{cases} \qquad (1.10.26)$$

При всем этом положение и конфигурация области допустимых решений не изменяются. Особо лишь заметим, что в области допустимых решений знаменатель φ_2 целевой функции не должен обращаться в нуль. В противном случае правильного решения не получится. Предлагаемую схему решения проиллюстрируем с помощью следующего примера:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,$$

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 9, \\ \quad x_1 + \quad x_2 \leq 6, \\ 2x_1 - \quad x_2 \leq 10, \end{cases} \qquad (1.10.27)$$

$$\varphi = \frac{x_1 - x_2 + 3}{2x_1 + 3x_2 + 1} \to \max\left(\min\right). \qquad (1.10.28)$$

На рис.1.10.3 показано решение этого примера. В силу ограничений (1.10.27) областью допустимых решений примера является пятиугольник *OABCD*. В соответствии с (1.10.26) центр пучка прямых (уровней целевой функции) определяем из уравнений

$$\begin{cases} x_1^* - x_2^* + 3 = 0 \\ 2x_1^* + 3x_2^* + 1 = 0. \end{cases}$$

Получаем $x_1^* = -2$, $x_2^* = 1$.

Этот центр на рис. 1.10.3 обозначен 0^*. Направление возрастания уровней целевой функции определяем согласно знаку выражения $(c_2 d_1 - c_1 d_2)$. В нашем примере $c_2 d_1 - c_1 d_2 = -1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = -5 < 0$, что означает возрастание изоцелей по часовой стрелке. Из рис. 1.10.3 видно, что максимум наступает в точке $O(0,0)$ и $\varphi_{max} = 3$, а минимум в точке $A(0,3)$, в которой $\varphi_{\min} = 0$. Заметим, что в области допустимых решений $\varphi_2 \neq 0$, т.к. линия $\varphi_2 = 0$ проходит вне пятиугольника *OABCD*.

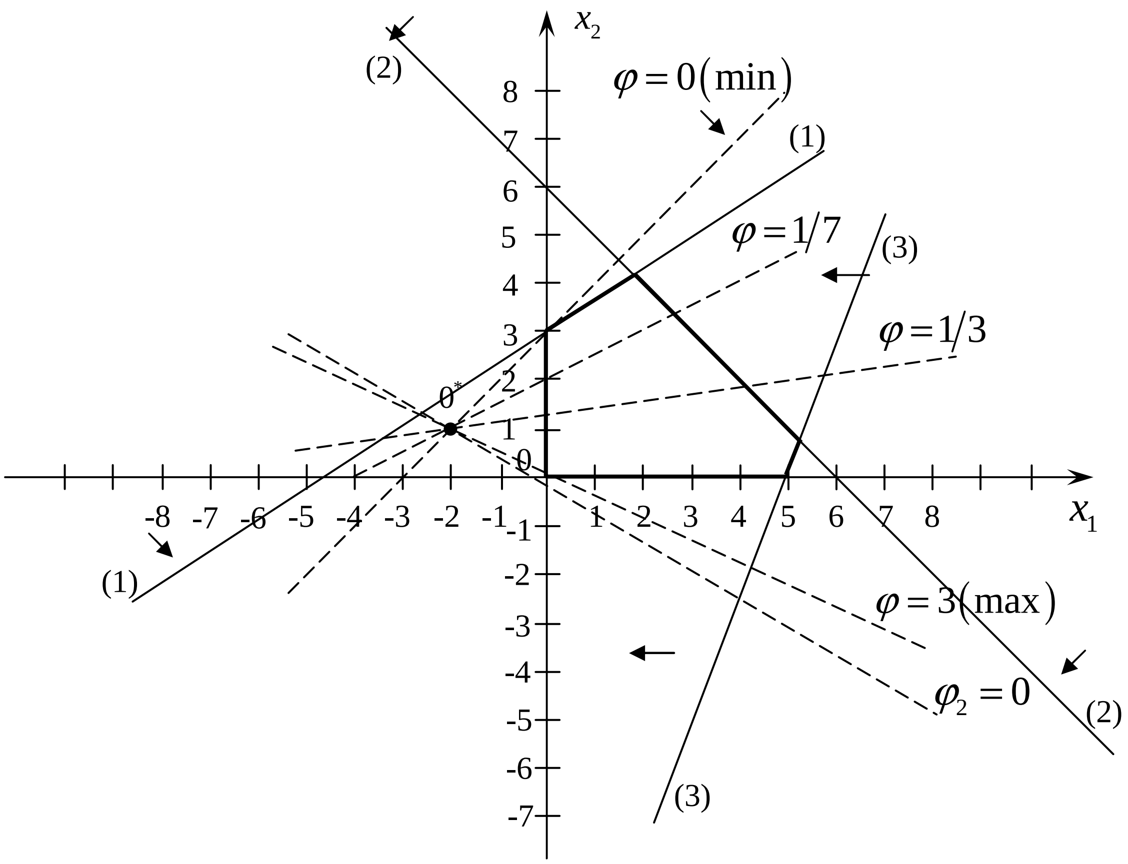


Рис. 1.10.3

1.11. ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В целочисленном программировании решаются задачи, в которых оптимальное решение должно быть представлено в целых числах. Математическая модель целочисленной задачи выглядит следующим образом:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to opt \tag{1.11.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ \ i = \overline{1,\ m} \tag{1.11.2}$$

$$x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,\ n}, x_j \text{ – целые},\ \ j = \overline{1,\ k}\text{, где } k \le n. \tag{1.11.3}$$

Если условие (1.11.3) накладывается на все переменные, т.е. $k = n$, то мы имеем дело с *полностью целочисленной задачей*, а если $k < n$, то *частично-целочисленной*.

Для решения целочисленных задач используются две группы методов: отсечения и комбинаторные.

Рассмотрим *методы отсечения*. Представим, что решается задача с помощью симплекс-метода. Если получается целочисленное оптимальное решение, то решение задачи окончено. Если же полученное оптимальное решение не является целочисленным, то по определенному алгоритму строится отсечение, согласно которому отсекался бы полученный нецелочисленный результат, но в ОДР оставались бы все допустимые точки с целыми координатами.

Рассмотрим алгоритм *Гомори* полностью целочисленной задачи.

1. Умножаем каждое из неравенств (1.11.2) на необходимое число; добиваемся, чтобы в системе все коэффициенты и свободные члены стали целыми числами.

2. Если полученное с помощью симплекс-метода решение будет иметь все целочисленные координаты, то решение задачи окончено. Если же будет хотя бы одна дробная координата, то строится отсечение.

3. При построении отсечения используется понятие дробной части числа.

Дадим понятие дробной части числа.

Пусть дано число b.

Обозначим через $[b]$ наибольшее целое число ***не превосходящее*** b.

Разность $b - [b] = \beta$ назовем дробной частью числа.

Пример:

а) $b = -3{,}7$. Тогда $[b] = -4$ и $\beta = -3{,}7 - (-4) = 0{,}3$;

б) $b = -0{,}3$. Тогда $[b] = -1$ и $\beta = -0{,}3 - (-1) = 0{,}7$;

в) $b = 2{,}3$. Тогда $[b] = 2$ и $\beta = 2{,}3 - 2 = 0{,}3$.

Итак, пусть среди координат оптимального решения имеются дробные. Выберем ту из них, дробная часть которой самая большая. Пусть это будет координата $x_s = b_s$. Она соответствует s-й строке таблицы, в которой получен оптимальный, но не целочисленный результат. По коэффициентам этой строки будет построено отсечение. Выпишем строку с b_s

$$\sum_{j=1}^{n} b_{sj} x_j = b_s. \tag{1.11.4}$$

Для всех чисел b_{sj} и b_s определим их дробные части β_{sj} и β_s.

Отсечение примет вид следующего неравенства:

$$-\sum_{j=1}^{n} \beta_{sj} x_j \le -\beta_s. \tag{1.11. 5}$$

Приводя условие (1.11.5) к канонической записи, получим:

$$-\sum_{j=1}^{n} \beta_{sj} x_j + \xi_1 = -\beta_s. \tag{1.11.6}$$

Условие (1.11.6) добавляется в последнюю симплекс-таблицу и дальше опять решается задача симплекс-методом. Появилась новая переменная ξ_1, которая, являясь базисной, будет отрицательной $(\xi_1 = -\beta_s)$, что недопустимо.

Симплекс-процедуру осуществляют относительно вновь введенной строки по принципу двойственного симплекс-метода.

Если в очередной таблице опять получим нецелочисленное оптимальное решение, то будет введено дополнительное отсечение с новой дополнительной переменной ξ_2. Так будем поступать до тех пор, пока не получим решение с полностью целочисленными координатами.

Пример 1.11.1. Рассмотрим пример полностью целочисленной задачи:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 5, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 6, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ j = \overline{1,3},\ x_j \text{ – целые},\ j = \overline{1,3}$$

$$Z = -x_1 - x_2 + 2x_3 \to \min.$$

Приведем задачу к канонической форме.

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+x_4=5, \\ x_1+2x_2+2x_3 \ \ +x_5=6, \end{cases}$$

$$Z=-x_1-x_2+2x_3+0\cdot x_4+0\cdot x_5$$

$$Б_1=\left(\overline{A_4},\overline{A_5}\right),\ \overline{X}_{Б_1}=\left(0,0,0,5,6\right),\ Z\left(\overline{X}_{Б_1}\right)=0.$$

Таблица 1.11.1

	$Б_1$	$\overline{C}_{Б_1}$	$\overline{B}_1$	$\overline{A}_1$ ↓	$\overline{A}_2$	$\overline{A}_3$	$\overline{A}_4$	$\overline{A}_5$
				–1	–1	2	0	0
←	$\overline{A}_4$	0	5	2	3	1	1	0
	$\overline{A}_5$	0	6	1	2	2	0	1
	Z_j-C_j		0	1	1	–2	0	0

→

Таблица 1.11.2

$Б_2$	$\overline{C}_{Б_2}$	$\overline{B}_2$	$\overline{A}_1$	$\overline{A}_2$	$\overline{A}_3$	$\overline{A}_4$	$\overline{A}_5$
			–1	–1	2	0	0
$\overline{A}_1$	–1	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\overline{A}_5$	0	$\frac{7}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
Z_j-C_j		$-\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

$$Z\left(\overline{X}_{Б_2}\right)=\left(\frac{5}{2},0,0,0,\frac{7}{2}\right),\ Z\left(\overline{X}_{Б_2}\right)=-\frac{5}{2}.$$

Выберем строку для $\overline{A}_5$ и строим для нее отсечение.

$$0\cdot x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{3}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4+x_5=\frac{7}{2};$$
$$b_1=0,\left[b_1\right]=0,\ \beta_1=0;$$
$$b_2=\frac{1}{2},\left[b_2\right]=0,\ \beta_2=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2};$$
$$b_3=\frac{3}{2},\left[b_3\right]=1,\ \beta_3=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2};$$
$$b_4=-\frac{1}{2},\left[b_4\right]=-1,\ \beta_4=-\frac{1}{2}-\left(-1\right)=\frac{1}{2};$$
$$b_5=1,\left[b_5\right]=1,\ \beta_5=1-1=0;$$
$$b_{s-7}=\frac{7}{2},\left[b_7\right]=3,\ \beta_7=\frac{7}{2}-3=\frac{1}{2}.$$

Отсечение будет

$$-\left(0\cdot x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4+0\cdot x_5\right)\le-\frac{1}{2}.$$

Дополнительная строка, которая будет вноситься в таблицу, будет:

$$-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4+\xi_1=-\frac{1}{2}.$$

Таблица 1.11.3

$Б_3$	$\overline{C}_{Б_3}$	$\overline{B}_3$	$\overline{A}_1$	$\overline{A}_2$	$\overline{A}_3$	$\overline{A}_4$	$\overline{A}_5$	$\overline{A}_6$
			-1	-1	2	0	0	0
$\overline{A}_4$	-1	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0
$\overline{A}_5$	0	$\frac{7}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0
← $\overline{A}_6$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1
Z_j-C_j		$-\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0

Таблица 1.11.4

$Б_4$	$\overline{C}_{Б_4}$	$\overline{B}_4$	$\overline{A}_1$	$\overline{A}_2$	$\overline{A}_3$	$\overline{A}_4$	$\overline{A}_5$	$\overline{A}_6$
			-1	-1	2	0	0	0
$\overline{A}_1$	-1	1	1	0	-1	-1	0	-3
$\overline{A}_5$	0	3	0	0	1	-1	1	1
$\overline{A}_2$	-1	1	0	1	1	1	0	-2
Z_j-C_j		2	0	0	-2	0	0	-1

$Б_4=\left(\overline{A}_1,\,\overline{A}_5,\,\overline{A}_2\right);\; Z\left(\overline{X}_{Б_4}\right)=2.$

$\overline{X}_{Б_4}=(1,1,0,0,3)$ – это не угловая точка, а внутренняя, т.к. имеет три положительных компоненты.

Получено оптимальное целочисленное решение:

$\overline{X}_{opt}=(1,1,0,0,3),\quad Z_{\min}=2.$

Эту же задачу можно рассмотреть на рис. *1.11.1*:

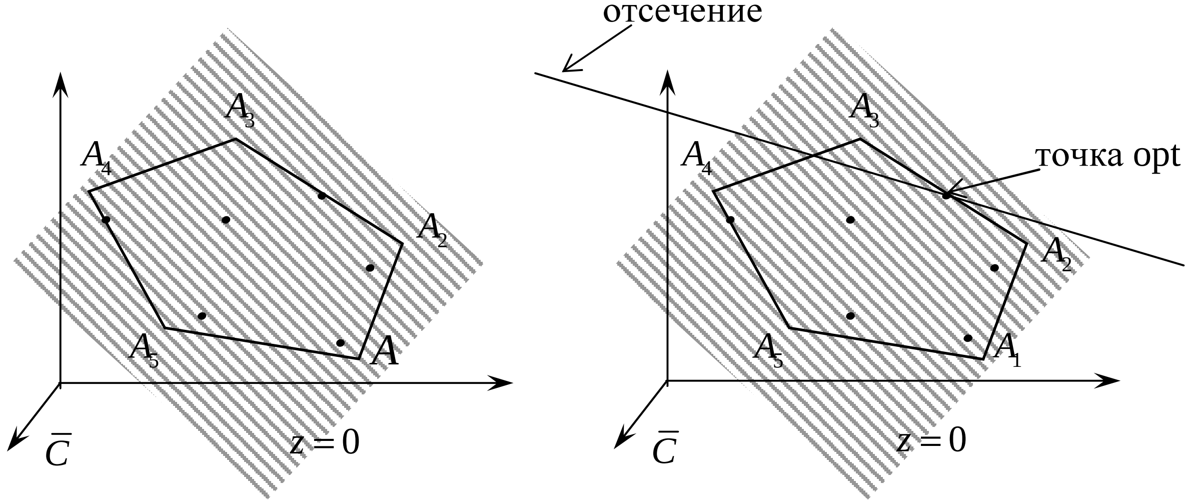


Рис. 1.11.1. Метод отсечения

1.12. ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В экономических исследованиях реальные ситуации часто описываются нелинейными зависимостями. Например, *зависимость общих затрат от объема выпускаемой продукции* носит нелинейный характер $S = f\left(\bar{X}\right)$, где f – нелинейная зависимость.

Тарифные цены на билет в зависимости от расстояния носят характер параболической зависимости.

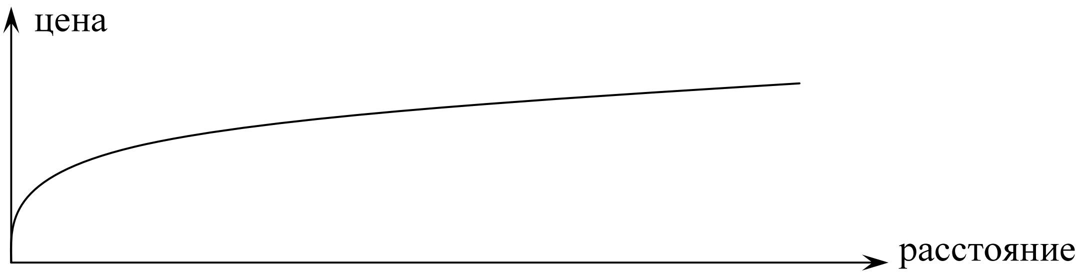


Рис. 1.12.1. Зависимость цены на билет от расстояния

Нелинейности возникают как в ОДЗ, так и в формулировке целевой функции задачи.

Задача нелинейного программирования в общем виде может быть сформулирована следующим образом:

$$g_i\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \overset{\leq}{\underset{\geq}{=}} b_i, \quad i = \overline{1, m}. \tag{1.12.1}$$

$$F = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \to opt. \tag{1.12..2}$$

Здесь $x_1, x_2, ..., x_n$ могут быть любые, а функции g_i и $f, i = \overline{1, m}$ действительные нелинейные, регулярные функции, зависящие от n действительных переменных.

Задачи нелинейного программирования отличаются от задач линейного программирования тем, что:

ОДЗ задачи может быть невыпуклой, а это значит, что локальный и глобальный экстремум находятся не в одной точке;

экстремум целевой функции может достигаться в любой точке ОДЗ, а не только на ее границе.

В нелинейном программировании для решения задач используется градиентный подход, который состоит в том, что с помощью направляющего вектора целевой функции, указывающего направление максимального возрастания цели для рассматриваемой точки, оптимальное решение ищется в этом направлении.

Процедура поиска совершается в итеративном режиме от первоначально выбранной точки к точкам с лучшим показателем. Покажем идею решениянелинейных задач на рисунке.

Пусть Ω – ОДЗ задачи, а итеративный процесс расчетов начинается с точки

$$A_1 \in \Omega. \quad A_1 = \left(x_1^{A_1},\, x_2^{A_1},\ldots,\, x_n^{A_1}\right).$$

Градиент целевой функции $F = f\left(x_1,\, x_2,\ldots,\, x_n\right)$ равен

$$grad_{A_1} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2},\ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{A_1}. \tag{1.12.3}$$

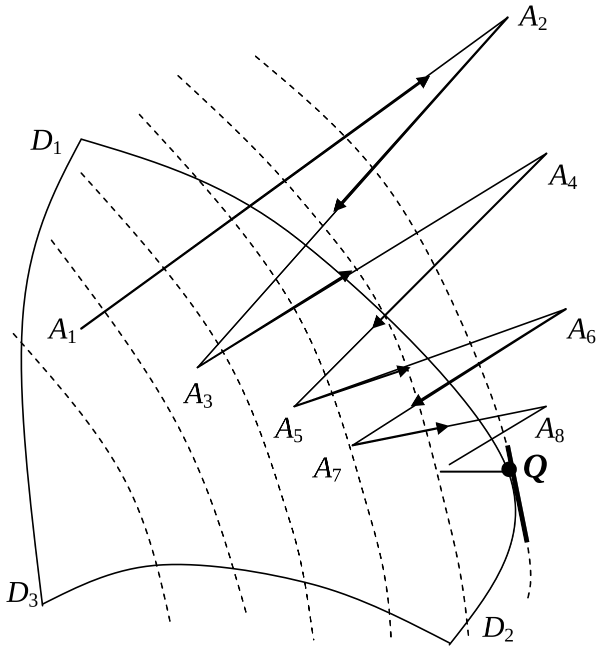


Рис. 1.12.2. Градиентный метод нахождения оптимального решения

Из точки A_1 мы перемещаемся в точку A_2, координаты которой будут определяться как

$$x_j^{A_2} = x_j^{A_1} + h\left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_{A_1}, \; j = \overline{1, n} \tag{1.12.4}$$

Здесь h – постоянный или переменный параметр, определяющий величину шага перехода.

Если подставить (1.12.4) в выражение для целевой функции, то можно проверить произошло ли улучшение результата.

Для этого нужен критерий, проверяющий, не является ли новая точка оптимальной.

Критерий строится следующим образом.

Если opt точка находится внутри допустимой области Ω, а целевая функция непрерывная гладкая функция, то критерием opt попадания в оптимальную точку будет *обращение в нуль координат вектора-градиента* (или с заданной точностью приближение к нулевому значению).

Движение к точке оптимума совершается либо с одинаковым шагом на каждой итерации, либо с подбираемым, обеспечивающим не ухудшаемый результат целевой функции, при переходе к очередной точке.

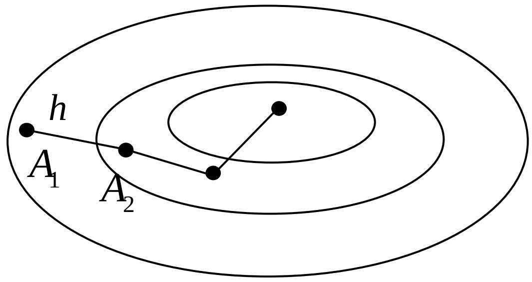


Рис. 1.12.3. Итерации градиентного метода

Если экстремум целевой функции наступает на границе, то критерием оптимальности будет с достаточной степенью *достигнутая коллинеарность вектора-градиента целевой функции* и *вектора-градиента границы, на которой наступает искомый* экстремум.

На рисунке *1.12.2* поиск экстремума начинается в точке A_1. По градиенту делается переход в точку A_2 по формуле (1.12.4). Затем по градиенту к нарушенной границе делается возврат в область Ω. По мере приближения к точке оптимума значения градиентов сближаются. Поэтому идеальным критерием остановки процесса будет *коллинеарность градиента цели и градиента нарушенной границы*.

Особенности решения нелинейных задач можно объяснить на следующем примере.

Пример. Решить графически нелинейную задачу

$$\left.\begin{array}{ll} x_1^2 - 6x_1 + x_2^2 - 4x_2 + 4 \le 0 & (1) \\ x_1 \ge 2 & (2) \\ x_2 \ge 0 & (3) \\ f = -x_1^2 + x_2 \to \max & (4) \end{array}\right\}$$

После преобразований задача будет представлять собой

$$\left\{\begin{array}{ll} (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \le 9 \text{ – круг } r = 3 \text{ с центром } Q = (3;\, 2), & (5) \\ x_1 \ge 2, \;\; x_2 \ge 0, & (6) \end{array}\right.$$

$x_2 = x_1^2$ – целевая функция в виде параболы. (7)

Строим ОДЗ и целевую функцию на графике *1.12.4*.

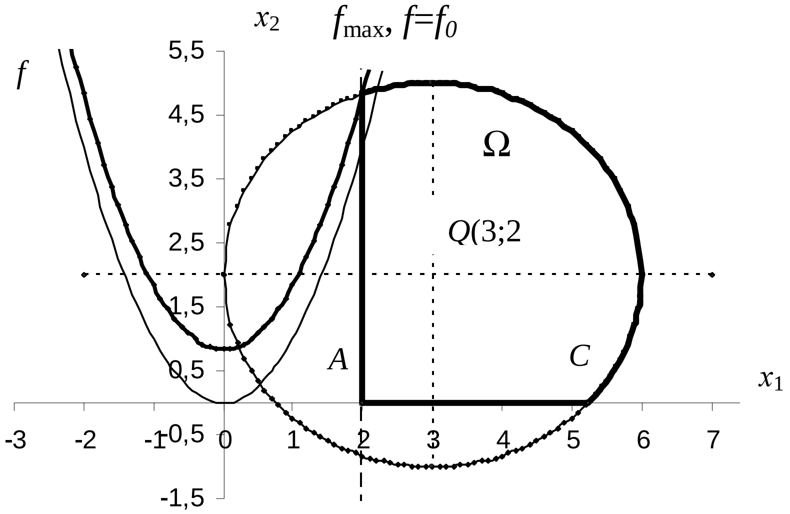


Рис.1.12.4. Графическое решение нелинейной задачи

Ответ. Максимальное значение функция f принимает в точке $B\left(2;\sqrt{8}+2\right)$, $f_{\max}=\sqrt{8}-2\approx 0,83$.

1.13. ЗАДАЧИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Модель параметрической задачи в общем виде записывается следующим образом:

$$Z = (c' + tc'')x \to \min(\max) \quad (1.13.1)$$

$$(A' + \lambda A'')X = B' + \mu B'' \quad (1.13.2)$$

$$x \ge 0 \quad (1.13.3)$$

где: λ, μ, t – числовые параметры, $\lambda, \mu, t \in N$.

Если $t \in [\alpha, \beta]$, а $\lambda = \mu = 0$, то мы имеем дело с параметром в целевой функции, если $\lambda = t = 0$, а $\mu \in [p, q]$, то это задача линейного программирования с параметром в правой части ограничений. Случай, когда $\lambda \in [s, k]$, а $t = \mu = 0$, т.е. задача с параметром в системе ограничений является наиболее сложным случаем.

Рассмотрим задачу с параметром в целевой функции, т.е. задачу вида

$$AX = B \quad (1.13.4)$$

$$x \ge 0 \quad (1.13.5)$$

$$Z = \overline{(c' + tc'')} \cdot \bar{x} \to \min(\max), \;\; t \in [\alpha, \beta]. \quad (1.13.6)$$

В этой задаче ОДЗ не изменяется, а изменяется градиент целевой функции в зависимости от изменения параметра t:

$$Z = (c_1' + tc_1'')x_1 + (c_2' + tc_2'')x_2 + ... + (c_n' + tc_n'')x_n \to \max(\min). \quad (1.13.7)$$

Это означает, что при некоторых значениях t оптимум будет сохраняться в полученном опорном плане (угловой точке), а при других значениях t оптимальной окажется другая точка. Если ОДЗ не ограничена, то оптимальных решений при некоторых t может совсем не быть.

Целью решения задачи параметрического программирования является выявление пределов t, при которых имеет место оптимум в выявленной угловой точке, а при каких значениях t оптимальное значение меняется. Этим способом можно исследовать оптимальное решение задачи на устойчивость.

Решение задачи производится следующим образом.

1. Зафиксируем значение параметра t. Если $t \in [-\infty, +\infty]$, то берем $t = 0$, а если $t \in [\alpha, \beta]$, то берем $t = \alpha$;

2. Решаем задачу при $t = \alpha$ симплекс-методом и получаем оптимальное решение (если оно имеется);

3. В исходную таблицу дополнительно введем две строки. В верхней будут стоять значения c_j', а в нижней – c_j'', $j = \overline{1, n}$.

Элементы этих строк будут использоваться нами для выяснения диапазона изменения параметра t при найденном оптимальном результате. Они позволяют также перейти от одного оптимального результата к другому и сделать вывод об отсутствии оптимального решения.

Рассмотрим пример

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + \ \ x_2 - 3x_3 &\le 5 \\ x_1 + 4x_2 + \ \ x_3 &\le 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\le 9 \end{aligned}\right\} \tag{1.13.8}$$

$$x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,3};$$

$$Z = tx_1 + \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}t\right)x_2 \to \max\,, \tag{1.13.9}$$

$$t \in [-1;\,3].$$

Решение.

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + \ \ x_2 - 3x_3 + x_4 \qquad\qquad &= 5 \\ x_1 + 4x_2 + \ \ x_3 \qquad + x_5 \qquad &= 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \qquad\qquad + x_6 &= 9 \end{aligned}\right\} \tag{1.13.10}$$

$$x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,6}$$

$$Z = -tx_1 - \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}t\right)x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 + 0\cdot x_6 \to \min$$

При $t = -1$

$Z = x_1 - 2x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 + 0\cdot x_6$.

Таблица 1.13.1

	$Б_1$	$\bar{C}_{Б_1}$	$\bar{B}_1$	$\bar{A}_1$	↓ $\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_4$	$\bar{A}_5$	$\bar{A}_6$
				-1	-2	0	0	0	0
	$\bar{A}_2$	0	5	2	1	-3	1	0	0
←	$\bar{A}_5$	0	8	1	4	1	0	1	0
	$\bar{A}_6$	0	9	3	2	2	0	0	1
	$c'_{t=1}$	0	0	0	$\frac{5}{2}$	0	0	0	0
	$c''_{t=1}$	0	0	-1	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0
	$z_j - c_j$		0	-1	2	0	0	0	0

Таблица 1.13.2

$Б_2$	$\bar{C}_{Б_4}$	$\bar{B}_4$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_4$	$\bar{A}_5$	$\bar{A}_6$
			-1	-2	0	0	0	0
$\bar{A}_4$	0	3	$\frac{7}{4}$	0	$-\frac{13}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	-3
$\bar{A}_2$	-2	2	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0
$\bar{A}_6$	0	5	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1
$c'_{t=1}$	0	-5	$-\frac{5}{8}$	0	$-\frac{5}{8}$	0	$-\frac{5}{8}$	0
$c''_{t=1}$	0	1	$-\frac{7}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	0
$z_j - c_j$		-4	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0

$\overline{X}_{opt} = (3, 2, 0, 0, 0, 5)$, $Z_{\min} = -4$.

Мы получили оптимальный опорный план. Теперь с помощью строки c' и c'' определим, при каких t, $\overline{X}_{opt}$ будет сохранять $Z_{\min} = -4$.

Для этого решим совокупность неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} -\frac{5}{8}-\frac{7}{8}t \ge 0, \\ -\frac{5}{8}+\frac{1}{8}t \ge 0, \\ -\frac{5}{8}+\frac{1}{8}t \ge 0, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -5-7t \ge 0, \\ -5 \quad +t \ge 0, \\ -5 \quad +t \ge 0, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -5-7t \ge 0, \\ -5 \quad +t \ge 0, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t \le -\frac{5}{7}, \\ t \ge \quad 5. \end{array}\right.$$

Оптимальное значение сохраняется в пределах $-\frac{5}{7} \ge t$, $t \ge 5$.

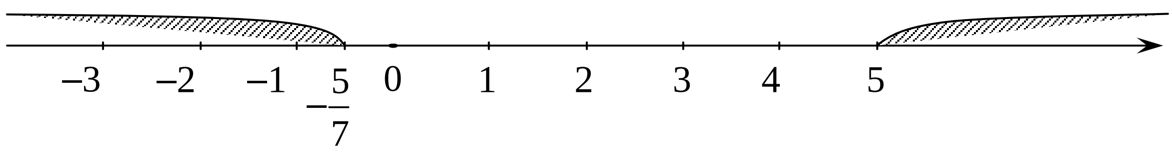


Рис. 1.13.1. Интервалы параметров, в которых сохраняется точка оптимума

РАЗДЕЛ 2
ЭКОНОМЕТРИКА

2.1. ЭКОНОМЕТРИКА КАК НАУКА

Эконометрика определяется как измерения в экономике (начало XX века).

Одним из самых распространенных определений является определение Айвазяна С.А.: Эконометрика – это самостоятельная научная дисциплина, объединяющая совокупность теоретических результатов, приемов, методов и моделей, предназначенных для того, чтобы на базе экономической теории, экономической статистики, математико-статистического инструментария придавать конкретное количественное выражение общим закономерностям, обусловленных экономической теорией взаимосвязей экономических явлений и процессов (Айвазян С.А. Прикладная статистика и основы эконометрии. – М.: ЮНИТИ, 1998.).

Нобелевские премии по экономике (в т.ч. и за эконометрику):

Фриш и Ян Тинберген (1969); Клейн (1980); Хаавельмо (1989); Роберт Лукас (1995); Хекман, Мак-Фадден (2000); Энгл, Клайв, Грейнджер (2003).

2.1.1. Общие понятия эконометрических моделей

При построении эконометрических моделей используются следующие типы экономических данных:

пространственные (объем производства, количество работников, доход и др. по разным фирмам в один и тот же момент времени);

временные ряды – отражают динамику какой-либо переменной в промежутке времени (ежеквартальные данные по инфляции, по средней заработной плате, национальному доходу, денежной эмиссии за несколько лет и др.).

Специфика экономических данных:

многие экономические данные неотрицательны;

доля нечисловых данных в экономике существенно выше, чем в технике;

количество изучаемых объектов часто ограничено (в пространстве и времени);

экономические процессы развиваются во времени, поэтому много требуется анализа временных рядов, в т.ч. и многомерных.

Особенности временных рядов:

уровни временных рядов взаимозависимы;

информационная ценность наблюдений убывает по мере их удаления от текущего момента времени;

с увеличением количества уровней временного ряда точность статистических характеристик не увеличивается пропорционально числу наблюдений.

Переменные, участвующие в любой эконометрической модели:

результирующая Y (зависимая, эндогенная) играет роль функции. По своей природе эндогенна – внутренняя и всегда случайна;

объясняющая X (независимая, экзогенная). Это аргументы результирующей функции Y. По своей природе могут быть случайные и неслучайные.

Выделяется три основных класса эконометрических моделей:

модели временных рядов;

регрессионные модели с одним уравнением;

системы эконометрических уравнений.

Модели временных рядов представляют собой модели зависимости результативного признака от времени: адаптивные модели; модели кривых роста (трендовые), модели авторегрессии, модели скользящего среднего. Используются для прогноза. $Y = f(t) = f(a,t)$.

Регрессионные модели с одним уравнением представляются в виде $Y = f(X_1, X_2, ..., X_k)$, где k – количество факторов. В зависимости от вида функции $f(X_1, ..., X_k)$ модели делятся на *линейные* и *нелинейные*, а в зависимости от включенных в модель факторов X – на *однофакторные* (парная модель регрессии) и *многофакторные* (модель множественной регрессии).

Пример задач регрессионных моделей:

исследование зависимости зарплаты Y от возраста X_1, уровня образования X_2, пола X_3, стажа работы X_4;

прогноз и планирование выпускаемой продукции по факторам производства: количества капитала K и количества труда L (производственная функция Кобба-Дугласа $Y = a_0 K_1^{a_1} L^{a_2}$);

зависимость спроса от среднедушевого дохода, которая выражается кривой Энгеля $y = \dfrac{a_0}{1 + a_1 e^{-a_2 x}}$, где y – спрос, x – среднедушевой доход.

Системы эконометрических уравнений применяются в тех случаях, когда исследуемое явление нельзя описать только с помощью одного уравнения. Они образуют следующие классы моделей:

системы независимых уравнений;

системы рекурсивных уравнений;

системы взаимосвязанных уравнений.

В системах *независимых уравнений* каждая зависимая переменная $y_i\left(i = \overline{1,n}\right)$ представлена как функция одного и того же набора независимых переменных $x_j\left(j = \overline{1,m}\right)$. Каждое уравнение этой системы можно рассматривать самостоятельно как уравнение регрессии и коэффициенты регрессии находятся с помощью метода наименьших квадратов (МНК).

В системах *рекурсивных уравнений* зависимые переменные $y_i\left(i=\overline{2,n}\right)$ представлены как функции независимых переменных $x_j\left(j=\overline{1,m}\right)$ и определенных ранее зависимых переменных $y_i\left(i=1,n-1\right)$.

В системах *взаимозависимых уравнений* каждая зависимая переменная $y_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ представлена как функция остальных зависимых переменных $y_k\left(k\neq i\right)$ и независимых переменных $x_j\left(j=\overline{1,m}\right)$.

Эта система наиболее распространенная, её называют структурной формой модели. Для нахождения параметров этой модели не применим простой МНК. Используются специальные методы – косвенный, двухшаговый, трехшаговый МНК и т.д.

2.1.2. Основные понятия математической статистики, используемые в эконометрике

Стохастическая (вероятностная) природа экономических данных обуславливает необходимость применения соответствующих статистических методов для их обработки и анализа.

Между признаками могут быть два типа связей:

функциональные – величина начисленной зарплаты при повременной оплате труда зависит от количества отработанных часов; стоимость ж/д билета в зависимости от расстояния.

корреляционные – между изменением двух признаков нет полного соответствия, и воздействие отдельных факторов проявляется лишь в среднем. Это приводит к тому, что одному и тому же значению признака-фактора соответствует целое распределение значений результативного признака. При наличии корреляционной зависимости устанавливается лишь тенденция изменения результативного признака при изменении величины факторного признака.

Взаимосвязи между признаками могут быть:

по направлению (прямые и обратные). Пример: чем выше квалификация рабочего, тем выше уровень производительности труда (прямая связь); чем выше производительность труда, тем ниже себестоимость выпускаемой продукции (обратная связь);

по форме (линейные и нелинейные). Линейная связь – прямая линия, нелинейная – кривая (парабола, гипербола и т.п.);

по количеству факторов (однофакторные и многофакторные).

Основная задача корреляционного анализа – выявление взаимосвязи между случайными переменными путем точечной и интервальной оценки парных коэффициентов корреляции, вычисления и проверки значимости множественного коэффициента корреляции и детерминации. Корреляция непосредственно не выявляет причинных связей между параметрами (что причина, а что следствие), но устанавливает численное значение этих связей и достоверность суждений об их наличии.

При проведении корреляционного анализа вся совокупность данных рассматривается как множество переменных (факторов), каждая из которых содержит n наблюдений.

Если два фактора (парная корреляция), то их обозначают $Y=\left(y_1,\, y_2,\ldots,\, y_n\right)$ и $X=\left(x_1,\, x_2,\ldots,\, x_n\right)$.

2.1.3. Основные соотношения математической статистики, используемые в эконометрике

1. $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$, – *выборочная средняя*, оценка математического ожидания MX.

2. $\sigma_x^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2$ – *дисперсия генеральной совокупности.*

3. $\sigma_x=\sqrt{\sigma_x^2}$ – *среднеквадратическое отклонение.*

4. $S_x^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2$ – *несмещённая оценка дисперсии*. Дисперсия (оценка дисперсии S_x^2) характеризует степень разброса значений $x_1, x_2,\ldots, x_n$ вокруг своего среднего $\overline{x}$.

Для получения несмещенной оценки дисперсии сумму квадратов отклонений необходимо делить на число степеней свободы $n-p$, где n – объем выборки, а p – число наложенных на выборку связей.

5. Степень разброса значений надо измерять в тех же единицах, что и сама переменная. Поэтому среднеквадратическое отклонение решает эту проблему:

$$S_x=\sqrt{S_x^2}.$$

6. *Ковариация* – это статистическая мера взаимодействия двух переменных. Она рассчитывается следующим образом:

$$C\text{ov}\left(X,Y\right)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right), \qquad (2.1.1)$$

где $\overline{x}$ и $\overline{y}$ – оценки математического ожидания.

Ковариация зависит от единиц, в которых измеряются переменные X и Y. Она является ненормированной величиной. Её трудно интерпретировать из-за различных единиц измерения. Поэтому для измерения силы связи используется коэффициент корреляции.

7. *Коэффициент парной корреляции* для двух переменных X и Y определяется:

$$r_{yx}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{S_x\cdot S_y}=\frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{S_x\cdot S_y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}},\quad(2.1.2)$$

$$-1\le r_{yx}\le 1,$$

где S_x^2, S_y^2 – оценки дисперсий величин X и Y.

Для качественной оценки коэффициента корреляции применяют шкалу Чеддока:

0,1-0,3	0,3-0,5	0,5-0,7	0,7-0,9	0,9-1,0
слабая	заметная	умеренная	высокая	весьма высокая

8. *Понятие уровня значимости.* Гипотеза H_0, подлежащая проверке, называется нулевой (основной). Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу H_1, которая противоречит нулевой. В итоге проверки гипотезы могут быть допущены ошибки двух родов. Ошибка первого рода состоит в отклонении правильной нулевой гипотезы. Вероятность ошибки первого рода называют уровнем значимости и обозначают α. Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята нулевая гипотеза, в то время как в действительности верна альтернативная гипотеза. Вероятность ошибки второго рода обозначают β.

Статистическим критерием называют случайную величину K, которая служит для проверки нулевой гипотезы.

9. *Понятие числа степеней свободы*. В статистике количеством степени свободы называют разность между количеством наблюдений и количеством констант, определяемых в результате этих наблюдений независимо друг от друга.

10. Проверка значимости коэффициента корреляции. Коэффициент корреляции представляет собой оценку степени взаимной согласованности в изменениях признаков и не определяет причинно-следственную связь.

Так как выборка почти всегда ограничена при ее извлечении из генеральной совокупности, то необходимо всегда осуществлять оценку значимости линейного коэффициента корреляции.

При малых выборках такая оценка осуществляется с использованием t-критерия Стьюдента:

$$t_{факт.}=\sqrt{\frac{r_{yx}^2}{1-r_{yx}^2}(n-2)}.\quad(2.1.3)$$

По таблице выбирается $t_{табл.}$ с учетом заданного уровня значимости α и числа степеней свободы $n-2$.

Если $t_{факт.} > t_{табл.}$, то оценка коэффициента корреляции значима (т.е. нулевая гипотеза, утверждающая равенство нулю коэффициента корреляции отвергается).

$$-1 \le r_{yx} \le 1. \qquad (2.1.4)$$

Если $r_{yx} = 0$, то корреляционная связь между переменными отсутствует.

Если r_{yx} имеет положительное значение, то при возрастании одной величины другая имеет тенденцию в среднем возрастать, а если связь отрицательная – убывать.

Для анализа связи необходимо строить на плоскости корреляционное поле (диаграмму рассеивания).

11. Матрица коэффициентов парной корреляции

Если признаков много, то получают *матрицу коэффициента парной корреляции*. Если есть переменные Y и $X_1, X_2,..., X_m$, каждая из которых содержит n наблюдений, то наблюдаемые значения записывают в виде таблицы

Переменные / Номер наблюдения	Y	X_1	X_2	…	X_m
1	y_1	x_{11}	x_{21}	…	x_{m1}
…	…	…	…	…	…
n	y_n	x_{1n}	x_{2n}	…	x_{mn}

По этим данным вычисляют *матрицу коэффициентов парной корреляции* r, которая симметрична относительно главной диагонали:

$$r = \begin{Bmatrix} 1 & r_{yx_1} & r_{yx_2} & ... & r_{yx_m} \\ r_{x_1y} & 1 & r_{x_1x_2} & ... & r_{x_1x_m} \\ r_{x_2y} & r_{x_2x_1} & 1 & ... & r_{x_2x_m} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ r_{x_my} & r_{x_mx_1} & r_{x_mx_2} & ... & 1 \end{Bmatrix} \qquad (2.1.5)$$

Анализ матрицы коэффициентов корреляции осуществляют при построении моделей множественной регрессии.

В многомерном корреляционном анализе рассматриваются две задачи:

определение тесноты связи одной случайной величины с совокупностью остальных величин, включенных в анализ;

определение тесноты связи между двумя величинами при фиксировании или исключении влияния остальных величин.

12. Первая задача решается с помощью выборочного *коэффициента множественной корреляции* по формуле

$$R_j = R_{j,1,2,\dots,j-1,j+1,\dots,m} = \sqrt{1-\frac{|r|}{R_{jj}}}, \tag{2.1.6}$$

$$0 \le R_j \le 1,$$

где $|r|$ – определитель матрицы (см. формулу (2.1.5), R_{jj} – алгебраическое дополнение элемента r_{jj} той же матрицы r (см. формулу (2.1.5).

13. Выборочный множественный коэффициент детерминации показывает, какую долю вариации (случайного разброса) исследуемой величины X_j объясняет вариация остальных случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_m$.

$$D_j = R^2_{j,1,2,\dots,j-1,j+1,\dots,m}. \tag{2.1.7}$$

Коэффициенты множественной корреляции и детерминации являются величинами положительными, принимающими значения в интервале от 0 до 1.

$$0 \le D_j \le 1 \tag{2.1.8}$$

Коэффициент множественной корреляции R_j может только увеличиваться, если в модель включать дополнительные переменные, и не уменьшиться, если исключить какой-либо из признаков.

Проверка значимости коэффициента детерминации осуществляется с помощью F-критерия Фишера

$$F_{расч.} = \frac{R^2/(p-1)}{(1-R^2)/(n-p)}, \tag{2.1.9}$$

где p – количество параметров модели, а n – количество наблюдений. $F_{табл.}(\alpha, \nu_1, \nu_2)$ выбирается по таблице при уровне значимости α и степенями свободы $\nu_1 = p-1$ и $\nu_2 = n-p$.

Если $F_{расч.} > F_{табл.}$, то R^2 значим (значимо отличается от нуля).

14. Частный коэффициент корреляции

Если необходимо определить связь между двумя случайными величинами при исключении влияния остальных, то используется *выборочный частный коэффициент корреляции*

$$
r_{jk(1,2,\ldots,m)} = -\frac{R_{jk}}{\sqrt{R_{jj} \cdot R_{kk}}}, \qquad (2.1.10)
$$

где R_{jk}, R_{jj}, R_{kk} – алгебраические дополнения к соответствующим элементам матрицы r (см. формулу (2.1.5)).

Частный коэффициент корреляции $r_{jk(1,2,\ldots,m)}$ изменяется, как и парный от –1 до +1.

2.1.4. Оценка тесноты нелинейной связи между факторами

Индекс корреляции (корреляционное отношение) применяется в том случае, когда линейный коэффициент корреляции теряет смысл как характеристика тесноты связи. Индекс корреляции определяется как отношение межгрупповой дисперсии к общей дисперсии.

Для определения эмпирического корреляционного отношения совокупность значений результативного признака Y разбивается на отдельные группы. В основу группировки кладется признак X (исследуемый фактор).

Пусть произведено группирование данных на k интервалов группирования в соответствии с изменением x, при этом $m_j \left(j = \overline{1,k} \right)$ – количество элементов выборки в j-м интервале группировки, $n = \sum\limits_{j=1}^{k} m_j$.

Среднее значение Y в j-й группе

$$
\overline{y_j} = \frac{1}{m_j} \sum_{l=1}^{m_j} y_{jl}, \qquad (2.1.11)
$$

а общая средняя во всей группе

$$
\overline{y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} m_j \cdot \overline{y}_j. \qquad (2.1.12)
$$

Межгрупповая дисперсия

$$
S_{y_j}^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} m_j \left(\overline{y}_j - \overline{y} \right)^2, \qquad (2.1.13)
$$

а общая дисперсия

$$
S_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \overline{y} \right)^2. \qquad (2.1.14)
$$

Корреляционное отношение (как отношение дисперсий)

$$\eta = \sqrt{\frac{S_{y_j}^2}{S_y^2}} = \frac{S_{y_j}}{S_y} \qquad (2.1.15)$$

η изменяется от 0 до 1: $0 \le \eta \le 1$.

Как показатель тесноты связи корреляционное отношение имеет более универсальный характер, чем линейный коэффициент корреляции. В этом случае факторный признак может быть не количественным, а ранговым и даже номинальным.

Близкое к нулю значение линейного коэффициента корреляции может означать как отсутствие взаимосвязи в данных, так и наличие нелинейной взаимосвязи без преобразования направленности. Сильная нелинейная взаимосвязь может быть даже тогда, когда линейный коэффициент корреляции равен нулю.

2.2. ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ПАРНОЙ РЕГРЕССИИ

2.2.1. Общие предпосылки регрессионного анализа

Основатель регрессионного анализа английский статистик. Ф. Гальтон изучал зависимость роста детей от роста родителей.

Основная задача регрессионного анализа – исследование зависимости изучаемой переменной от различных факторов и отображение их взаимосвязи в форме регрессионной модели.

Функция $Y = f\left(X_1, X_2, ..., X_m\right)$ называется функцией регресса. $X_1, X_2, ..., X_m$ – независимые (объясняющие) переменные; Y – зависимая (объясняемая) переменная; f – вид функции. Она показывает, каково будет в среднем значение Y, если X_j примут конкретные значения. Используется для анализа и прогнозирования экономических явлений.

Если аргумент X один, то будет однофакторная (парная) регрессия, а если аргументов много: $X_1, X_2, ..., X_m$, то – множественная.

Математическая постановка задачи построения линейной модели парной регрессии следующая.

Пусть имеется набор значений двух переменных $Y = \left(y_1, y_2, ..., y_n\right)$ и $X = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, где n – количество наблюдений. Пусть между X и Y теоретически существует некоторая линейная зависимость

$$Y = f\left(X\right) = a_0 + a_1 X . \qquad (2.2.1)$$

Уравнение (2.2.1) – истинное (теоретическое).

В действительности между X и Y наблюдается не столь жесткая связь и отдельные y_i отклоняются от линейной зависимости из-за воздействия на неё неизвестных факторов, возмущений, помех, ошибок измерений, неправильного выбора вида уравнения и т.д.

Учитывая множество случайных воздействий, теоретическое линейное уравнение регрессионной связи (2.2.1) представим следующим образом:

$$Y = a_0 + a_1 X + \varepsilon , \qquad (2.2.2)$$

где ε – случайная составляющая.

Покомпонентно условие (2.2.2) запишется

$$y_i = a_0 + a_1 x_i + \varepsilon_i , \; i = \overline{1, n} . \qquad (2.2.3)$$

Здесь a_0 – свободный член уравнения; a_1 – коэффициент регрессии, определяющий наклон линии, вдоль которой рассеяны данные наблюдения; ε_i – случайная переменная, остаток, возмущение.

Коэффициент регрессии a_1 характеризует изменение переменной y_i при изменении значения x_i на единицу. Если $a_1 > 0$, то переменные x_i и y_i скоррелированны положительно, а если $a_1 < 0$, то отрицательно.

Случайная составляющая ε_i отражает тот факт, что изменение y_i будет неточно описываться изменением x_i, т.к. присутствуют другие факторы, неучтенные в модели.

Таким образом, в уравнении (2.2.3) значение каждого наблюдения y_i представлено как сумма двух частей:

систематической (объясненной) $a_0 + a_1x_i$, $i = \overline{1, n}$;

случайной (не объясненной) ε_i, $i = \overline{1, n}$.

Разбиение зависимой переменной на две части: объясненную и случайную является общим моментом для любой эконометрической модели.

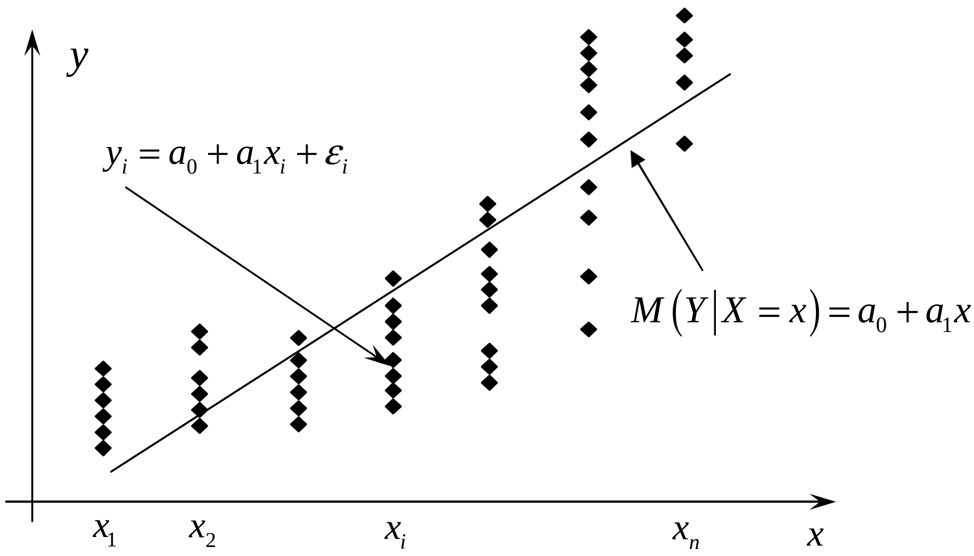


Рис. 2.2.1. Теоретическая линия регрессии

Задача линейного регрессионного анализа состоит в том, чтобы по имеющимся статистическим данным (x_i, y_i), $i = 1, 2, ..., n$ для переменных X и Y:

получить наилучшие оценки неизвестных параметров a_0 и a_1;

проверить статистические гипотезы о параметрах модели (т.е. проверить саму модель и ее параметры на достоверность с помощью F-критерия Фишера и t-критерия Стьюдента);

проверить, достаточно ли хорошо модель согласуется со статистическими данными (адекватность модели данным наблюдений).

Следовательно, по выборке ограниченного объема мы должны построить, так называемое, эмпирическое уравнение регрессии

$$\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1X, \tag{2.2.4}$$

которое для отдельных значений записывается в виде

$$\hat{y}_i = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_i,\ i = \overline{1, n}, \tag{2.2.5}$$

где $\hat{y}_i$ – оценка условного математического ожидания $M\left(Y \middle| X = x_i\right)$, $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$ – оценки неизвестных параметров a_0 и a_1.

Но однако и здесь зависимость (2.2.4) не точна, а поэтому $Y = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X + e$. Покомпонентно в конкретном случае

$$y_i = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_i + e_i,\ i = \overline{1, n}. \tag{2.2.6}$$

Здесь отклонение e_i – оценка теоретического случайного отклонения ε_i:

$$e_i = \hat{\varepsilon}_i.$$

Данная задача, т.е. нахождение неизвестных параметров модели, решается с помощью метода наименьших квадратов (МНК).

2.2.2. Основные предпосылки метода наименьших квадратов (МНК)

Свойства коэффициентов регрессии существенным образом зависят от свойств случайной составляющей ε_i. Для получения качественных моделей по МНК необходимо, чтобы выполнялись следующие условия (условия Гаусса-Маркова).

1. Математическое ожидание случайной составляющей в любом наблюдении должно быть равно нулю

$$M\left(\varepsilon_i\right) = M_{\varepsilon_i} = 0,\quad i = \overline{1, n}.$$

Если уравнение регрессии включает постоянный член, т.е. a_0, то условие $M\left(\varepsilon_i\right) = 0$ выполняется автоматически, так как роль константы состоит в определении любой систематической тенденции Y, которую не учитывают объясняющие переменные, включенные в уравнение регрессии.

2. В модели (2.2.2) возмущение ε_i и значение зависимой переменной y_i есть величины случайные, а объясняющая переменная x_i – величина неслучайная. Если это условие выполнено, то теоретическая ковариация между независимой переменной x_i и случайным членом ε_i равна нулю.

$$\mathrm{Cov}\left(x_i, \varepsilon_i\right) = 0,\ i = \overline{1, n}.$$

Это выражение объясняет отсутствие мультиколлинеарности между x_i и ε_i.

3. В любых двух наблюдениях отсутствует систематическая связь между значениями случайной составляющей. Случайные составляющие должны быть независимы друг от друга

$$\operatorname{Cov}\left(\varepsilon_i,\varepsilon_j\right)=M\left(\left(\varepsilon_i-\overline{\varepsilon}_i\right)\cdot\left(\varepsilon_j-\overline{\varepsilon}_j\right)\right)=M\left(\left(\varepsilon_i-0\right)\cdot\left(\varepsilon_j-0\right)\right)=M\left(\varepsilon_i\cdot\varepsilon_j\right)=0\ \left(i\neq j\right).$$

Это условие означает, что отклонения регрессии (а значит и сама зависимая переменная) не коррелируют. В случае временного ряда y_t это условие означает отсутствие автокорреляции.

4. Дисперсия случайной составляющей должна быть постоянна для всех наблюдений

$$D\left(\varepsilon_i\right)=\sigma_\varepsilon^2.$$

Это условие называется условием гомоскедастичности (равноизменчивости) случайной составляющей.

К имеющимся условиям Гаусса-Маркова добавляется еще одно следующее условие.

5. Случайный член ε_i должен быть нормально распределен. Если случайный член нормально распределен, то тогда также будут распределены и коэффициенты регрессии.

Оценки $\hat{a}_0$ и $\hat{a}_1$, полученные по МНК, при выполнении указанных предпосылок, будут обладать свойствами

несмещенности,

эффективности,

состоятельности.

Несмещенность оценки означает, что математическое ожидание остатков равно нулю. Такие оценки можно сравнивать между собой по разным исследованиям (выборкам).

Оценки считаются эффективными, если они характеризуются наименьшей дисперсией.

Состоятельность оценок характеризует увеличение их точности с увеличением объема выборки.

Оценку любого параметра θ модели принято обозначать буквой $\hat{\theta}=\hat{\theta}_n$. Она зависит от случайной выборки и поэтому является случайной величиной, зависящей от объема выборки n.

Оценки параметров должны иметь следующие свойства:

1) несмещенность, т.е. $M\left(\hat{\theta}\right)=\theta$. Смещенность оценки определяется величиной $Q=M\left(\hat{\theta}\right)-\theta$;

2) состоятельность $\lim\limits_{n\to\infty}\left(P\left|\hat{\theta}_n-\theta\right|<\varepsilon\right)=1$;

3) эффективность $\sigma_{\hat{\theta}}^2\leq\sigma_{\breve{\theta}}^2$;

4) инвариантность, т.е. $g\left(\hat{\theta}\right)$ также дает оценку параметра θ.

Случайную величину y_i можно представить как

$$y_i = \hat{y}_i + e_i,\ i = \overline{1, n}. \qquad (2.2.7)$$

Отсюда оценка случайной переменной

$$e_i = y_i - \hat{y}_i,\ i = \overline{1, n}, \qquad (2.2.8)$$

где $\hat{y}_i$ – оценка зависимой переменной, полученная по формуле

$$\hat{y}_i = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

2.2.3. Оценка параметров регрессионного уравнения с помощью метода наименьших квадратов (решение нормальных уравнений, матричный вид)

МНК дает оценки, имеющие наименьшую дисперсию. Он минимизирует сумму квадратов отклонения наблюдаемых значений y_i от модельных значений $\hat{y}_i$, т.е.

$$Q\left(\hat{a}_0, \hat{a}_1\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_i\right)^2 \to \min. \qquad (2.2.9)$$

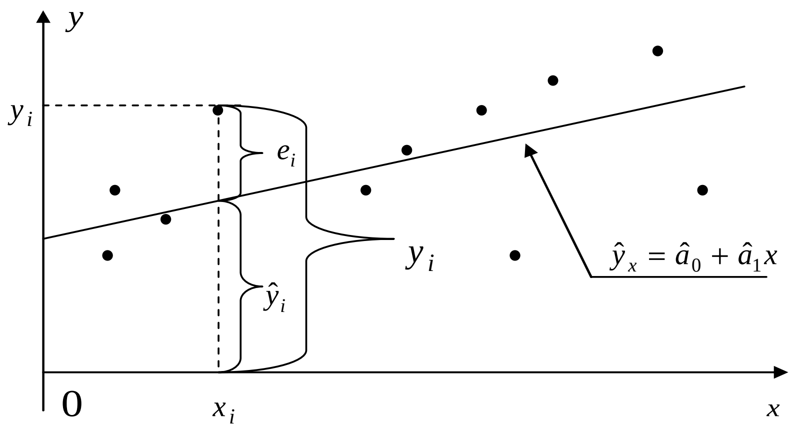


Рис. 2.2.2. Графическая иллюстрация метода наименьших квадратов

Приравнивая частные производные выражения (2.2.9) по $\hat{a}_0$ и $\hat{a}_1$ к нулю, получим систему нормальных уравнений

$$\begin{cases} n\hat{a}_0 + \hat{a}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ \hat{a}_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + \hat{a}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \end{cases} \qquad (2.2.10)$$

Система (2.2.10) является системой двух линейных уравнений с двумя неизвестными $\hat{a}_0$ и $\hat{a}_1$, и может быть решена методом подстановки.

Оценки $\hat{a}_0$ и $\hat{a}_1$ следующие:

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})(x_i - \overline{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(X)} \qquad (2.2.11)$$

или в удобном для расчета виде

$$\hat{a}_1 = \frac{\overline{yx} - \overline{y}\cdot\overline{x}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2} = r_{yx}\frac{S_y}{S_x}. \qquad (2.2.12)$$

$$\hat{a}_0 = \overline{y} - \hat{a}_1\overline{x}. \qquad (2.2.13)$$

Формула (2.2.11) может иметь место, если $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \neq 0$. Это равносильно отличию от нуля определителя системы (2.2.10). Это условие называется условием идентифицируемости модели наблюдений и означает, что не все значения $x_1, x_2, ..., x_n$ совпадают между собой.

В выражении (2.2.11) в знаменателе стоит формула выборочной дисперсии $S_x^2 = \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$, а в числителе – выборочной ковариации: $\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})(x_i - \overline{x})$.

В матричной форме модель парной регрессии имеет вид

$$Y = X\cdot A + \varepsilon, \qquad (2.2.14)$$

где

Y – вектор – столбец размерности $n\times 1$ наблюдаемых значений зависимой переменной;

X – матрица размерности $n\times 2$ наблюдаемых значений факторных признаков (дополнительный фактор X_0, состоящий из одних единиц, вводится для вычисления свободного члена);

A – вектор – столбец размерности 2×1 неизвестных, подлежащих оценке, т.е. $A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$;

ε – вектор – столбец размерности $n\times 1$ ошибок наблюдений.

Таким образом

$$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_i \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}_{n\times 1}, \; X=\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_i \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}_{n\times 2}, A=\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}_{2\times 1}, \; \varepsilon=\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_i \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}_{n\times 1}.$$

Решение системы нормальных уравнений в матричной форме имеет вид:

$$\hat{A}=\left(X'\cdot X\right)^{-1}\cdot X'Y. \tag{2.2.15}$$

Здесь $X'=X^{Трасп.}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_n \end{pmatrix}_{(2\times n)}$

2.2.4. Оценка качества уравнения регрессии

Качество модели регрессии связано с ее адекватностью наблюдаемым (эмпирическим) данным. Проверка адекватности (соответствия) модели регрессии наблюдаемым данным проводится на основе анализа остатков e_i.

Остаток e_i представляет собой отклонение фактического значения зависимой переменной от ее значения, полученного расчетным путем, т.е.

$$e_i=y_i-\hat{y}_i, \;\; i=\overline{1,n}. \tag{2.2.16}$$

При анализе качества модели регрессии используется основное положение дисперсионного анализа, согласно которому общая сумма квадратов отклонений зависимой переменной от среднего значения $\overline{y}$ может быть разложена на две составляющие: объясненную и необъясненную уравнением регрессии, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i-\overline{y}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\hat{y}_i\right)^2, \tag{2.2.17}$$

где $\hat{y}_i=\hat{a}_0+\hat{a}_1x_i$. Выражение (2.2.17) можно записать как

$$SST=SSR+SSE. \tag{2.2.18}$$

Качество регрессионного уравнения, полученного с помощью МНК, оценивается с помощью трех величин: коэффициента детерминации, коэффициента множественной корреляции и средней относительной ошибки аппроксимации. Рассмотрим количественные выражения этих коэффициентов.

$$R^2=\frac{SSR}{SST}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i-\overline{y}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}=1-\frac{SSE}{SST}=1-\frac{\sum_{i=1}^{n}e_i^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}. \tag{2.2.19}$$

Коэффициент детерминации R^2 показывает долю вариации результативного признака, вызванную воздействием изучаемых факторов, т.е. показывает, какая доля вариации признака Y учтена в модели и обусловлена влиянием на нее известных факторов.

Коэффициент детерминации изменяется в пределах

$$0 \le R^2 \le 1. \tag{2.2.20}$$

Чем ближе R^2 к единице, тем выше качество модели.

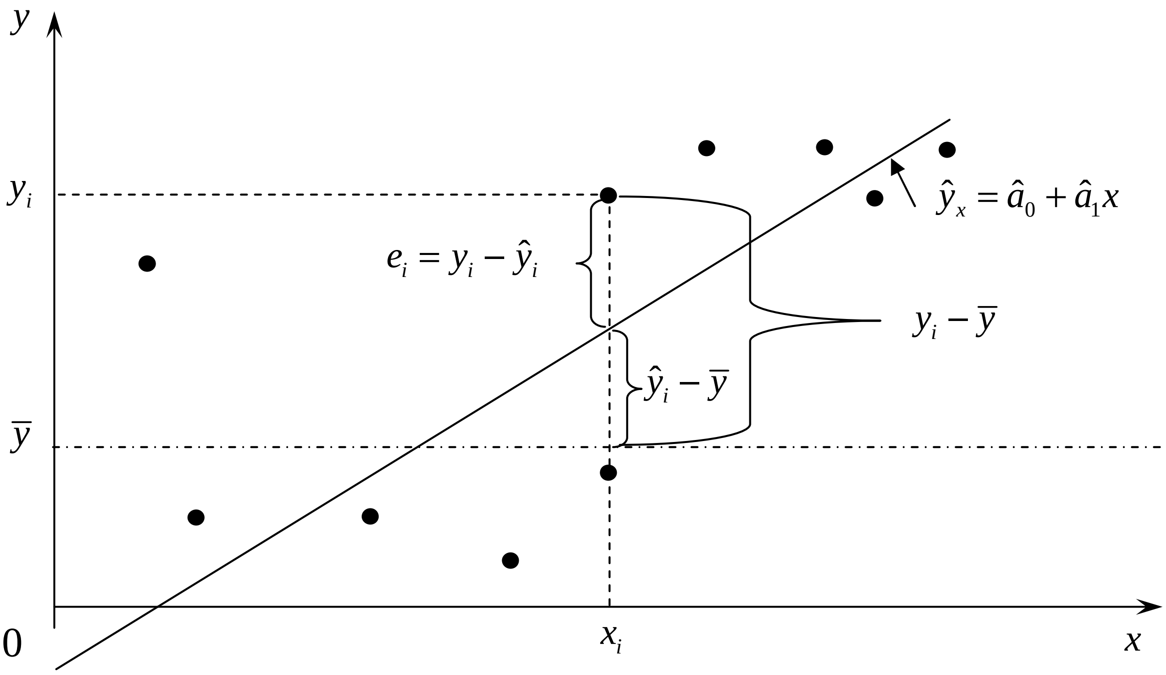


Рис. 2.2.3. Объяснение коэффициента детерминации

Для оценки качества регрессионных моделей используется также *коэффициент множественной корреляции*

$$R = \sqrt{R^2} = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}}. \tag{2.2.21}$$

Этот коэффициент универсален, так как он отражает тесноту связи и точность модели, а также может использоваться при любой форме связей переменных. Он также, как и коэффициент детерминации изменяется в пределах

$$0 \le R \le 1.$$

Для оценки качества регрессионных моделей используется также средняя относительная ошибка аппроксимации

$$E_{ср.отн.} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|y_i - \hat{y}_i|}{y_i}\cdot 100\% = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|e_i|}{y_i}\cdot 100\%. \qquad (2.2.22)$$

Чем меньше рассеяние эмпирических точек вокруг теоретической линии регрессии, тем меньше средняя ошибка аппроксимации. Если $E_{ср.} < 7\%$, то это свидетельствует о хорошем качестве модели.

2.2.5. Проверка значимости уравнения регрессии в целом

Значимость уравнения регрессии, т.е. соответствие эконометрической модели $Y = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X + e$ фактическим (эмпирическим) данным, позволяет установить, пригодно ли уравнение регрессии для практического использования (для анализа и прогноза), или нет.

Для проверки выдвигается основная гипотеза H_0 о незначимости уравнения в целом, которая формально сводится к гипотезе о равенстве нулю параметров регрессии $\hat{a}_0$ и $\hat{a}_1$, или, что то же самое, о равенстве нулю коэффициента детерминации $R^2 = 0$. Альтернативная гипотеза H_1 о значимости уравнения – гипотеза о неравенстве нулю параметров регрессии.

Для проверки значимости уравнения используется F- критерий Фишера. Он вычисляется по фактическим данным как отношение несмещенной дисперсии остаточной компоненты к дисперсии исходного ряда.

F-критерий служит для проверки гипотезы – наклон прямой равен нулю ($\hat{a}_1 = 0$). Если данная гипотеза подтверждается, то рассматриваемые данные лучше аппроксимировать с помощью средней величины $(\hat{y}_i = \bar{y})$.

F-тест проверяет гипотезу H_0 о статистической незначимости уравнения регрессии и показателя тесноты связи. Для этого выполняется сравнение фактического $F_{факт}$ и критического (табличного) $F_{табл}$ значений F-критерия Фишера. $F_{факт}$ определяется из соотношения значений факторной и остаточной дисперсий, рассчитанных на одну степень свободы.

$$F_{факт} = \frac{\sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2 / m}{\sum(y_i - \bar{y})^2 / (n - m - 1)} = \frac{r_{xy}^2}{1 - r_{xy}^2}(n-2), \qquad (2.2.23)$$

где m – число регрессоров, в нашем случае $m = 1$.

Для проверки гипотезы по таблице определяют табличное значение критерия Фишера $F_{табл}$. Эта таблица есть в каждой книге по эконометрике.

$F_{табл}(\alpha, \nu_1, \nu_2)$ – это максимально возможное значение критерия в зависимости от влияния случайных факторов при данных степенях свободы $\nu_1 = m$, $\nu_2 = n - m - 1$, и уровне значимости α. Здесь m – количество аргументов в модели.

Уровень значимости α – вероятность отвергнуть правильную гипотезу, но при условии, что она верна (ошибка первого рода). Обычно α принимается равной 0,05 или 0,01.

Если $F_{факт} > F_{табл}$, то H_0 – гипотеза о случайной природе оцениваемых характеристик отклоняется и признается их статистическая значимость и надежность. Если $F_{факт} < F_{табл}$, то гипотеза H_0 не отклоняется и признается статистическая незначимость, ненадежность уравнения регрессии.

В качестве меры точности аппроксимации применяют несмещенную оценку дисперсии остаточной компоненты S_e^2, определяемой по формуле:

$$S_e^2 = \frac{1}{n-m-1}\sum_{i=1}^{n} e_i^2\ , \tag{2.2.24}$$

$$S_e = \sqrt{S_e^2} = \sqrt{\frac{1}{n-m-1}\sum_{i=1}^{n} e_i^2}\ . \tag{2.2.25}$$

Здесь S_e – стандартная ошибка (стандартное отклонение).

Для модели парной регрессии

$$S_e = \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n} e_i^2}\ . \tag{2.2.26}$$

2.2.6. Анализ статистической значимости параметров модели регрессии $y_i = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_i + e_i$

Значения y_i, соответствующие данным x_i при теоретических значениях a_0 и a_1 являются случайными. Случайными являются рассчитанные по конкретным данным и параметры $\hat{a}_0$ и $\hat{a}_1$.

Надежность полученных оценок $\hat{a}_0$ и $\hat{a}_1$ зависит от дисперсии случайных отклонений (ошибок), определяемых как

$$e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_i,\ \ i = \overline{1, n}\,.$$

Так как ошибки e_i считаются нормально распределенными, то среднеквадратическое отклонение ошибок используется для измерения этой вариации.

Стандартные ошибки коэффициентов $\hat{a}_0$ и $\hat{a}_1$ рассчитываются следующим образом:

$$S_{\hat{a}_0} = \frac{S_e\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}} = \sqrt{\frac{S_e^2\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}} = \frac{S_e\sqrt{\sum x_i^2}}{n\sigma_x}; \tag{2.2.27}$$

$$S_{\hat{a}_1} = \frac{S_e\sqrt{n}}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}} = \sqrt{\frac{S_e^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}} = \frac{S_e}{\sqrt{n}\cdot\sigma_x}. \qquad (2.2.28)$$

В этих формулах $\overline{x}$ – среднее значение независимой переменной x, а S_e – стандартная ошибка, вычисляемая по формуле (2.2.25), т.е.

$$S_e^2 = \frac{\sum\left(y - \hat{y}_x\right)^2}{n-2}.$$

Оценка статистической значимости коэффициентов регрессии и корреляции осуществляется следующим образом.

Выдвигается гипотеза H_0 о случайной природе параметров, т.е. о незначимом их отличии от нуля. Оценка значимости коэффициентов регрессии и корреляции с помощью t-критерия Стьюдента проводится путем сопоставления их значений с величиной их случайной ошибки

$$t_{\hat{a}_1} = \frac{\left|\hat{a}_1\right|}{S_{\hat{a}_1}}; \qquad t_{\hat{a}_0} = \frac{\left|\hat{a}_0\right|}{S_{\hat{a}_0}}; \qquad t_r = \frac{R\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R^2}}. \qquad (2.2.29)$$

Стандартные ошибки параметров линейной регрессии можно записать в более удобном для расчета виде

$$S_{\hat{a}_0} = S_e\sqrt{C_{00}}, \qquad (2.2.30)$$

$$S_{\hat{a}_1} = S_e\sqrt{C_{11}}, \qquad (2.2.31)$$

где: C_{00} и C_{11} – элементы, стоящие на главной диагонали обратной матрицы $\left(X'\cdot X\right)^{-1}$.

Сравнивая фактическое $t_{факт}$ и критическое (табличное) $t_{табл}$ значение t-статистики, принимаем или отвергаем гипотезу H_0.

Если $t_{факт} > t_{табл}$, то H_0 отклоняется, а это значит, что $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$ и r_{xy} не случайно отличаются от нуля и сформировались под влиянием систематически действующего фактора X. Если $t_{факт} < t_{табл}$, то гипотеза H_0 не отклоняется и признается случайная природа формирования $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$ и r_{xy}.

2.2.7. Доверительные интервалы параметров регрессии

Так как $\hat{a}_0$ и $\hat{a}_1$ являются случайными оценками теоретических параметров модели a_0 и a_1, то необходимо для них определять доверительные интервалы.

Для расчета доверительного интервала определяем предельную ошибку Δ для каждого параметра:

$$\Delta_{a_0} = t_{табл} \cdot S_{\hat{a}_0}, \qquad \Delta_{a_1} = t_{табл} \cdot S_{\hat{a}_1}. \tag{2.2.32}$$

Формулы для расчета доверительных интервалов имеют следующий вид:

$$\hat{a}_0 - \Delta_{a_0} < a_0 < \hat{a}_0 + \Delta_{a_0}, \quad \hat{a}_1 - \Delta_{a_1} < a_1 < \hat{a}_1 + \Delta_{a_1}. \tag{2.2.33}$$

Это означает, что интервалы $\left(\hat{a}_0 - \Delta_{a_0}; \hat{a}_0 + \Delta_{a_0}\right)$, $\left(\hat{a}_1 - \Delta_{a_1}; \hat{a}_1 + \Delta_{a_1}\right)$ с надежностью $1-\alpha$ накрывают определяемые параметры a_0, a_1.

Замечание. Если в границы доверительного интервала попадает ноль, т.е. нижняя граница отрицательна, а верхняя положительна, то оцениваемый параметр принимается нулевым, так как он не может одновременно принимать и положительное и отрицательное значение.

2.2.8. Прогнозирование с применением уравнения регрессии, доверительные интервалы прогноза

Прогнозируемое значение переменной Y получается при подстановке в уравнение регрессии ожидаемой прогнозной величины фактора X:

$$\hat{y}_{прогн} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_{прогн}. \tag{2.2.34}$$

Данный прогноз называется точечным. Значение независимой переменной $x_{прогн}$ не должно значительно отличаться от значений, входящих в выборку, по которой вычислено уравнение регрессии.

Вероятность реализации точечного прогноза теоретически равна нулю. Поэтому рассчитывается средняя ошибка или доверительный интервал прогноза с достаточно большой надежностью.

Доверительные интервалы для прогноза зависят от следующих параметров:

стандартной ошибки отклонения S_e, определяемой по формуле (2.2.25);

удаления $x_{прогн}$ от среднего значения;

количества наблюдений n;

уровня значимости прогноза α.

Обозначим $\hat{y}_{прогн}$ как $\hat{y}_{pr}$, а $x_{прогн}$ как x_{pr}. Тогда средняя стандартная ошибка прогноза определяется по формуле

$$\Delta_{\hat{y}_{pr}} = t_{табл} \cdot S_e \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{\left(x_{pr} - \overline{x}\right)^2}{n \cdot \sigma_x^2}}. \qquad 2.2.35)$$

Доверительный интервал для прогнозных значений имеет вид:

$$\left(\hat{y}_{pr} - \Delta_{\hat{y}_{pr}};\ \ \hat{y}_{pr} + \Delta_{\hat{y}_{pr}}\right)$$

или

$$\hat{y}_{pr} - \Delta_{\hat{y}_{pr}} < a_0 + a_1 x_{pr} < \hat{y}_{pr} + \Delta_{\hat{y}_{pr}}. \tag{2.2.36}$$

Доверительный интервал прогноза или ошибку прогноза можно записать еще и так:

$$\Delta_{\hat{y}_{pr}} = t_{табл} \sqrt{S_e^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{\left(x_{pr} - \overline{x}\right)^2}{n \cdot \sigma_x^2}\right)}. \tag{2.2.37}$$

Таким образом, для того, чтобы по построенной регрессионной модели получить прогнозное значение изучаемой переменной Y, необходимо по формуле (2.2.34) определить точечный прогноз и по формулам (2.2.35), (2.2.37) построить для него доверительный интервал (2.2.36).

Пример 2.2.1. Имеются следующие статистические данные значений показателей X и Y (табл. 2.2.1):

Таблица 2.2.1

y_i	0	2	4	8	11
x_i	4,1	6	8	15	22

Требуется:
1) найти оценки коэффициентов уравнения линейной регрессии $\hat{y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x$;
2) найти линейный коэффициент корреляции, сделать вывод;
3) найти коэффициент детерминации, сделать вывод;
4) проверить значимость уравнения регрессии в целом;
5) проверить значимость коэффициентов регрессии и коэффициента корреляции;
6) найти доверительные интервалы для параметров регрессии;
7) найти ошибку аппроксимации, сделать вывод;
8) найти прогнозное значение результативного признака при данном $x_{pr} = 1{,}1\overline{x}$;
9) найти доверительный интервал для индивидуального значения результативного признака y_{pr};
10) построить корреляционное поле и линию регрессии на нём.

Замечание. Вычисления произвести с помощью аналитических формул и с помощью пакета «Анализ данных».

При статистическом анализе результатов использовать доверительную вероятность $\gamma = 0,95$ (значимость $\alpha = 0,05$).

Решение. 1. В регрессионном анализе рассматривается три основные задачи: построение уравнения регрессии, статистическая проверка качества полученного уравнения, прогнозирование по полученному уравнению. Рассмотрим эти задачи.

Построение уравнения регрессии. Анализируя корреляционное поле (Рис. 2.2.4, Рис. 2.2.5.) можно строить как линейную модель, так и нелинейную. Здесь больше подходит нелинейная модель.

Примечание. Методика построения диаграмм в Excel следующая.

Выделить столбцы со значениями X и Y. «**Мастер диаграмм**»; «»; «**Стандартны**е»; «**Точечная**»; «»; «**Далее**»; «**Далее**»; «**Далее**»; «**Готово**»; «**Диаграмма**»; «**Добавить линию тренда**»; «**Параметры**»; «**Показать уравнение на диаграмме**»; «**ОК**».

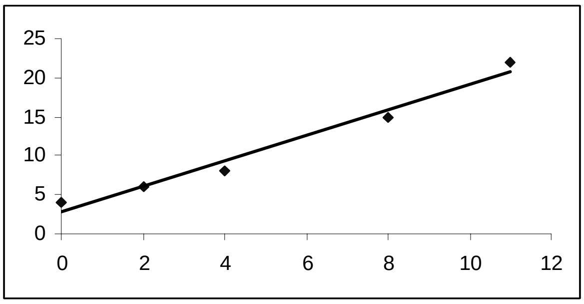


Рис. 2.2.4. Линейная модель
$\hat{y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x$

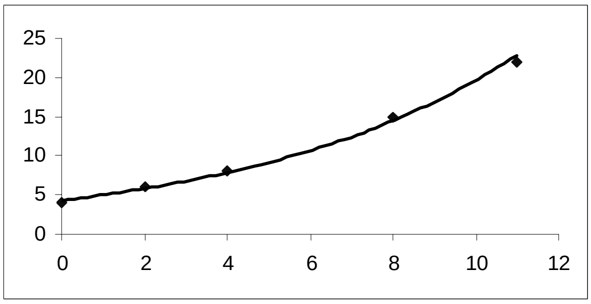


Рис. 2.2.5. Нелинейная модель
$\hat{\hat{y}} = \hat{\hat{a}}_0 + \hat{\hat{a}}_1 x + \hat{\hat{a}}_2 x^2$

Заменой $x = x_1$, $x^2 = x_2$ для стандартного анализа нелинейная модель сводится к линейной $\hat{\hat{y}} = \hat{\hat{a}}_0 + \hat{\hat{a}}_1 x_1 + \hat{\hat{a}}_2 x_2$. А поэтому все расчёты проведём для линейной модели.

Предположим, что между x и y существует теоретическая линейная связь $y = a_0 + a_1 x + \varepsilon$, где ε – случайная составляющая.

Методом наименьших квадратов найдём оценки параметров a_0, a_1, которые обозначим как $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$.

Таким образом, мы должны получить уравнение

$$y = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x + e$$

где $e = \hat{\varepsilon}$ или $\hat{y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x$ – уравнение регрессии y на x.

Построение модели, оценка параметров, в основном осуществляется тремя способами:

1.1) Параметры модели оценивают решением системы нормальных уравнений:

$$\begin{cases} n\hat{a}_0 + \hat{a}_1\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ \hat{a}_0\sum_{i=1}^{n} x_i + \hat{a}_1\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \end{cases}$$

1.2) Используют матричный подход

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \end{pmatrix} = \left(X'X \right)^{-1} X'Y .$$

1.3) Используют компьютерные программы EXCEL

Для парной регрессии корреляционное поле и уравнение регрессии можно получить, выполняя действия по указанной методике. Получим рис. 2.2.6.

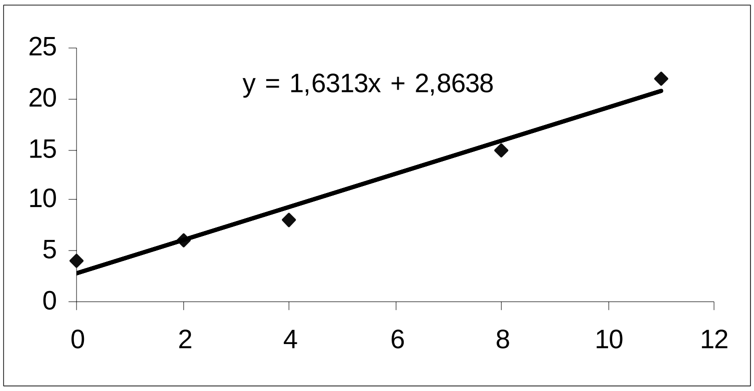


Рис. 2.2.6

Рассмотрим эти способы в отдельности.

При первом способе надо найти указанные суммы систем нормальных уравнений и ёё решить. Для анализа полученной модели основную роль играют остатки $e_i = y_i - \hat{y}_i$.

Вычисления оформляем в табл. 2.2.2.

Таблица 2.2.2

№	x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	y_i^2	$\hat{y}_i$	$\left(x_i - \bar{x}\right)^2$	$\left(y_i - \bar{y}\right)^2$	e_i	e_i^2	$E_i = \left\lvert \frac{e_i}{y_i} \right\rvert$
1	0	4,1	0	0	16,81	2,864	25	47,886	1,236	1,528	0,060
2	2	6	12	4	36	6,126	9	25,200	-0,126	0,016	0,004
3	4	8	32	16	64	9,389	1	9,120	-1,389	1,929	0,035
4	8	15	120	64	225	15,914	9	15,840	-0,914	0,835	0,012
5	11	22	242	121	484	20,808	36	120,560	1,193	1,422	0,011
Сумма	25	55,1	406	205	825,8	-	80	$SST =$	-	$SSE =$	0,122
Ср. зн.	5	11,02	81,2	41	165,1	-	-	$= 218{,}608$	-	$= 5{,}730$	-
S	4,472	7,393									

Для наглядности вычислим средние значения и несмещённые оценки дисперсии показателей X и Y:

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\,,\ \overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\,,\ S_x^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2,$$

$$\overline{x}=\frac{0+2+4+8+11}{5}=\frac{25}{5}=5,\ \overline{y}=\frac{4{,}1+6+8+15+22}{5}=\frac{55{,}1}{5}=11{,}02\,,$$

$$S_x=\sqrt{\frac{(0-5)^2+(2-5)^2+(4-5)^2+(8-5)^2+(11-5)^2}{5-1}}=4{,}472$$

$$S_y=\sqrt{\frac{(4{,}1-11{,}02)^2+(6-11{,}02)^2+(8-11{,}02)^2+(15-11.02)^2+(22-11{,}02)^2}{5-1}}=7{,}393$$

Составим систему нормальных уравнений и решим её

$$\begin{cases}5\hat{a}_0+\ \ 25\hat{a}_1=55{,}1\\ 25\hat{a}_0+205\hat{a}_1=406\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}\hat{a}_0\\ \hat{a}_1\end{pmatrix}=\begin{Vmatrix}5 & 25\\ 25 & 205\end{Vmatrix}^{-1}\cdot\begin{Vmatrix}55{,}1\\ 406\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0{,}513 & -0{,}063\\ -0{,}063 & 0{,}013\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}55{,}1\\ 406\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}2{,}864\\ 1{,}631\end{Vmatrix}$$

Получим модель

$$\hat{y}=2{,}864+1{,}631x\,.$$

Замечание. Оценки параметров модели можно также находить по формулам:

$$\hat{a}_1=\frac{\overline{yx}-\overline{y}\cdot\overline{x}}{\overline{x^2}-\left(\overline{x}\right)^2}=r_{yx}\frac{S_y}{S_x},$$

$$\hat{a}_0=\overline{y}-\hat{a}_1\overline{x}\,.$$

При втором способе строим модель линейной регрессии, используя матричный подход

$$\hat{A}=\begin{pmatrix}\hat{a}_0\\ \hat{a}_1\end{pmatrix}=\left(X'X\right)^{-1}X'Y\,,$$

Запишем матрицы X, X' и Y:

$$X = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 8 \\ 1 & 11 \end{Vmatrix} \qquad X' = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & 11 \end{Vmatrix} \qquad Y = \begin{Vmatrix} 4{,}1 \\ 6 \\ 8 \\ 15 \\ 22 \end{Vmatrix}$$

Матрица X получается дописыванием слева столбца из единиц к столбцу из наблюдаемых значений объясняющей переменной.

X' – матрица, транспонированная к матрице X.

Транспонированную матрицу в EXCEL получают следующим образом. Выделяем место расположения транспонированной матрицы; «**Вставка»**; «**Функция»**; «**Ссылки и Массивы»**; «**ТРАНСП»**; «**ОК»**; выделяют массив, который надо транспонировать; одновременно нажимают две клавиши «⇑,Ctrl**»** и, не отпуская их, нажимают и отпускают «**Ente**r**»**.

Найдём матрицу $X'X$:

$$X'X = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & 11 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 8 \\ 1 & 11 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 5 & 25 \\ 25 & 205 \end{Vmatrix}$$

Произведение матриц в EXCEL получают следующим образом. Выделяем место расположения произведения матриц, четыре клетки 2×2; «**Вставка»**; «**Функция»**; «**Математические»; «МУМНОЖ»**; «**ОК»**; выделяют «**Массив1»**; переводят курсор в **«Массив 2»** и выделяют вторую матрицу; одновременно нажимают две клавиши «⇑,Ctrl**»** и, не отпуская их, нажимают и отпускают «**Enter»**.

Находим обратную матрицу $(X'X)^{-1}$. Её можно находить аналитически по формуле:

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{Vmatrix}$$

$$\Delta = 5 \cdot 55 - 15 \cdot 15 = 400,$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} 205 = 205, A_{12} = (-1)^{1+2} 25 = -25, \ A_{21} = (-1)^{2+1} 25 = -25,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} 5 = 5.$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{400} \cdot \begin{Vmatrix} 205 & -25 \\ -25 & 5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0{,}513 & -0{,}063 \\ -0{,}063 & 0{,}013 \end{Vmatrix}$$

Обратную матрицу в EXCEL получают следующим образом. Выделяем место расположения обратной матрицы, четыре клетки 2×2; «**Вставка»;** «**Функция»**; «**Математические»**; «**МОБР»**; «**ОК»**; выделяют исходную матрицу; одновременно нажимают две клавиши ⇑,Ctrl и, не отпуская их, нажимают и отпускают **«Enter»**.

Находим $\left(X'X\right)^{-1}X'$

$$\left(X'X\right)^{-1}X' = \begin{Vmatrix} 0{,}513 & -0{,}063 \\ -0{,}063 & 0{,}013 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & 11 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 0{,}513 & 0{,}388 & 0{,}263 & 0{,}013 & -0{,}175 \\ -0{,}064 & -0{,}038 & -0{,}014 & 0{,}039 & 0{,}075 \end{Vmatrix}$$

Находим оценки параметров регрессии

$$\hat{A} = \left(X'X\right)^{-1}X'Y = \begin{Vmatrix} 0{,}513 & 0{,}388 & 0{,}263 & 0{,}013 & -0{,}175 \\ -0{,}063 & -0{,}038 & -0{,}013 & 0{,}038 & 0{,}075 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 4{,}1 \\ 6 \\ 8 \\ 15 \\ 22 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2{,}864 \\ 1{,}631 \end{Vmatrix}$$

Получили ту же формулу парной линейной модели, что и путём решения системы нормальных уравнений.

$$\hat{y} = 2{,}864 + 1{,}631x\,.$$

Третий, основной способ построения и анализа регрессионной модели с помощью компьютера осуществляется в следующей последовательности.

Открыть Excel; копировать или набрать массив данных (если массив данных расположен строками, то транспонированием располагают их столбцами):

Таблица 2.2.3

Y	X
4,1	0
6	2
8	4
15	8
22	11

«Сервис»; **«Анализ данных»**; **«Регрессия»**; **«ОК»**; внести входные интервалы, выделяя их последовательно курсором (Рис. 2.2.7.).

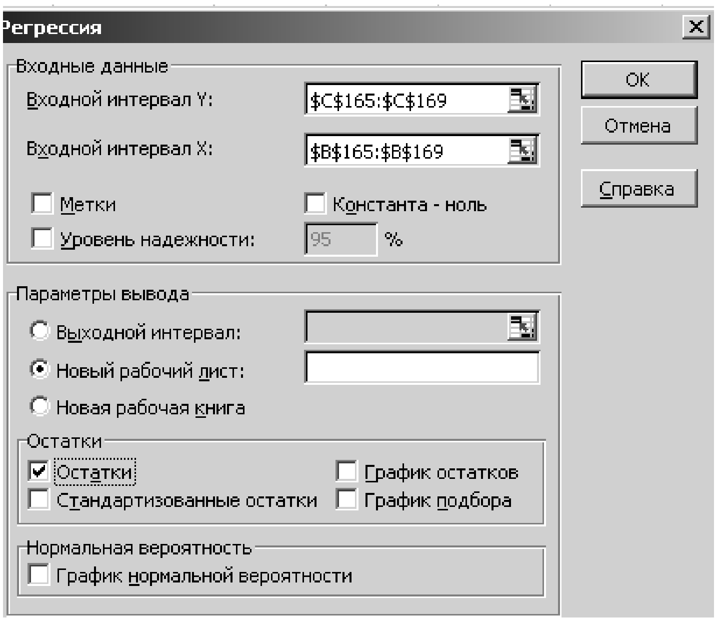


Рис. 2.2.7. Ввод данных для нахождения уравнения регрессии с помощью **«Анализ данных»**

После нажатия курсора на **«ОК»** появится протокол выполнения регрессивного анализа

Протокол выполнения регрессивного анализа:

Регрессионная статистика	
Множественный R	0,9868
R-квадрат	0,9738
Нормированный R-квадрат	0,9651
Стандартная ошибка	1,3820
Наблюдения	5

Дисперсионный анализ

	df	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*
Регрессия	1	212,8781	212,8781	111,4569	0,0018
Остаток	3	5,7299	1,9100		
Итого	4	218,6080			

	Коэффициенты	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P – Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*
Y-пересечение	2,8638	0,9894	2,8945	0,0628	-0,2849	6,0124
Переменная X 1	1,6313	0,1545	10,5573	0,0018	1,1395	2,1230

Вывод остатка

Наблюдение	*Предсказанное Y*	*Остатки*
1	2,8638	1,2363
2	6,1263	−0,1263
3	9,3888	−1,3888
4	15,9138	−0,9138
5	20,8075	1,1925

Надо заметить, что некоторые числа в протоколе выполнения регрессионного анализа могут отличаться от чисел, полученных непосредственными расчётами из-за округления расчётов.

После построения модели необходимо осуществить проверку качества уравнения регрессии.

2. Вычисляем линейный коэффициент корреляции r_{xy}:

$$r_{xy} = \hat{a}_1 \cdot \frac{S_x}{S_y} = 1{,}631 \cdot \frac{4{,}472}{7{,}393} = 0{,}987.$$

Близость коэффициента корреляции к единице указывает на тесную положительную линейную связь между признаками.

3. Вычисляют коэффициент детерминации:

$$R^2 = r_{xy}^2 = 0{,}987^2 = 0{,}974,$$

который показывает, что уравнением регрессии объясняется 97,4% дисперсии результативного признака, а на долю прочих факторов приходится лишь 2,6%.

Коэффициент детерминации можно находить также по следующей формуле:

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{5{,}730}{218{,}608} = 0{,}974.$$

4. Проверяем адекватность модели в целом по F- критерию Фишера. Для этого находим фактическое значение критерия Фишера:

$$F_{\text{факт}} = \frac{\sum\left(\hat{y}_i - \overline{y}\right)^2 / m}{\sum\left(y_i - \overline{y}\right)^2 / (n-m-1)} = \frac{R^2}{1-R^2}(n-2) = \frac{0{,}974}{1-0{,}974} \cdot 3 = \frac{0{,}974}{0{,}026} \cdot 3 = 112{,}384$$

Табличное значение критерия Фишера при степенях свободы $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = n-2 = 3$ и уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ равно $F_{\text{табл}} = 10{,}13$. Так как $F_{\text{факт}} > F_{\text{табл}}$, то признается статистическая значимость уравнения в целом.

5. Оценка статистической значимости коэффициентов регрессии и коэффициента корреляции проводится с помощью t-критерий Стьюдента. Для этого вычислим случайные ошибки параметров линейной регрессии и коэффициента корреляции:

$$S_e^2 = \frac{\sum\left(y - \hat{y}_x\right)^2}{n-2} = \frac{5{,}730}{5-2} = 1{,}91, \quad S_e = \sqrt{S_e^2} = 1{,}382,$$

$$S_{\hat{a}_0} = S_e \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}} = 1,382\sqrt{\frac{205}{5\cdot 80}} = 0,989,$$

$$S_{\hat{a}_1} = \frac{S_e}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}} = \frac{1,382}{\sqrt{80}} = 0,155.$$

Фактические значения t - статистик

$$t_{\hat{a}_0} = \frac{|\hat{a}_0|}{S_{\hat{a}_0}} = \frac{2,864}{0,989} = 2,896, \qquad t_{\hat{a}_1} = \frac{|\hat{a}_1|}{S_{\hat{a}_1}} = \frac{1,631}{0,155} = 10,523,$$

$$t_r = \frac{R\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R^2}} = \frac{0,987\sqrt{3}}{\sqrt{1-0,974}} = \frac{0,987\cdot 1,732}{0,161} = 10,618.$$

Табличное значение t-критерия Стьюдента при уровне значимости $\alpha = 0,05$ и числе степеней свободы $\nu = n-2 = 3$ равно $t_{\text{табл}} = 3,183$. Так как $t_{\hat{a}_1} > t_{\text{табл}}$, $t_{\hat{a}_0} > t_{\text{табл}}$ и $t_r > t_{\text{табл}}$, то признаем статистическую значимость параметров регрессии и коэффициента корреляции.

6. Для расчёта доверительных интервалов параметров регрессии определяем предельную ошибку Δ для каждого показателя:

$$\Delta_{a_0} = t_{\text{табл}}\cdot S_{\hat{a}_0}, \qquad \Delta_{a_1} = t_{\text{табл}}\cdot S_{\hat{a}_1}.$$

Формулы для расчёта доверительных интервалов имеют следующий вид:

$$\hat{a}_0 - \Delta_{a_0} < a_0 < \hat{a}_0 + \Delta_{a_0}, \qquad \hat{a}_1 - \Delta_{a_1} < a_1 < \hat{a}_1 + \Delta_{a_1}.$$

Это означает, что интервалы $\left(\hat{a}_0 - \Delta_{a_0}; \hat{a}_0 + \Delta_{a_0}\right)$, $\left(\hat{a}_1 - \Delta_{a_1}; \hat{a}_1 + \Delta_{a_1}\right)$ с надёжностью $1-\alpha$ покрывают определяемые параметры a_0, a_1.

Рассчитаем доверительные интервалы для параметров регрессии a_0, a_1

$$\hat{a}_0 \pm t_{\text{табл}}\cdot S_{\hat{a}_0} \text{ и } \hat{a}_1 \pm t_{\text{табл}}\cdot S_{\hat{a}_1}.$$

Получаем, что

$$a_0 \in \left(2{,}864 - 3{,}183 \cdot 0{,}989;\ \ 2{,}864 + 3{,}183 \cdot 0{,}989\right),\ a_0 \in \left(-0{,}283;\ \ 6{,}011\right)$$

и

$$a_1 \in \left(1{,}631 - 3{,}183 \cdot 0{,}155;\ \ 1{,}631 + 3{,}183 \cdot 0{,}155\right),\ a_1 \in \left(1{,}138;\ \ 2.124\right).$$

7. Ошибка аппроксимации

$$E_{\text{отн. ошиб.}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{y_i - \hat{y}_{x_i}}{y_i}\right| \cdot 100\% = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{e_i}{y_i}\right| \cdot 100\% = \frac{0{,}122}{5} \cdot 100\% = 2{,}44\%$$

говорит о хорошем подборе модели для исходных данных.

8. Прогнозное значение $y_{pr} \approx \hat{y}_{pr}$ определяется путём подстановки в уравнение регрессии $\hat{y}_x = \hat{y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 \cdot x$ соответствующего (прогнозного) значения x_{pr}.

Рассчитаем прогнозное значение результативного фактора $\hat{y}_{pr}$ при значении фактора-признака, который по условию составляет 110% от среднего уровня $x_{pr} = 1{,}1 \cdot \bar{x} = 1{,}1 \cdot 5 = 5{,}5$.

$$\hat{y}_{pr} = 2{,}864 + 1{,}631 \cdot 5{,}5 = 11{,}835$$

9. Определяем ошибку прогноза и доверительный интервал прогноза.

Средняя стандартная ошибка прогноза

$$\Delta_{\hat{y}_{pr}} = t_{\text{табл}} \cdot S_e \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{\left(x_{pr} - \bar{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}} = 3{,}183 \cdot 1{,}382 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{5} + \frac{\left(5{,}5 - 5\right)^2}{80}} = 4{,}824.$$

Доверительный интервал для прогнозных значений имеет вид

$$\left(\hat{y}_{pr} - \Delta_{\hat{y}_{pr}};\, \hat{y}_{pr} + \Delta_{\hat{y}_{pr}}\right) = \left(11{,}835 - 4{,}824;\ 11{,}835 + 4{,}824\right) = \left(7{,}011;\ 16{,}659\right).$$

Доверительный интервал математического ожидания прогноза имеет вид:

$$M\left(y_{pr}\right) \in \left(\hat{y}_{pr} - t_{\text{табл}} \cdot S_e \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\left(x_{pr} - \bar{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}};\ \hat{y}_{pr} + t_{\text{табл}} \cdot S_e \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\left(x_{pr} - \bar{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}}\right)$$

$$t_{\text{табл}} \cdot S_e \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\left(x_{pr} - \overline{x}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}} = 3{,}183 \cdot 1{,}382 \cdot \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{(5{,}5-5)^2}{80}} = 1{,}983$$

$$M\left(y_{pr}\right) \in (11{,}835 - 1{,}983;\ 11{,}835 + 1{,}983) = (9{,}852;\ 13{,}818).$$

10. На одном графике строим корреляционное поле и линию регрессии (Рис.2.2.6).

В заключение этого параграфа представим таблицу вывода итогов, в которую сведены все основное формулы, используемые при проведении регрессионных статистических расчетов (см. табл. 2.2.4).

ВЫВОД ИТОГОВ

Таблица 2.2.4

Регрессионная статистика

Наименование показателя в отчёте Excel	***Принятые обозначения***	***Наименование показателя в отчёте Excel***	***Формула***
Множественный R	R	Коэффициент множественной корреляции, индекс корреляции	$R=\sqrt{R^2}$
R-квадрат	R^2	Коэффициент детерминации R^2	$R^2=1-\frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i-\overline{y}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}$
Нормированный R-квадрат	$\overline{R}^2$	Скорректированный R-квадрат	$\overline{R}^2=1-\left(1-R^2\right)\cdot\frac{n-1}{n-m-1}$
Стандартная ошибка	S	Среднеквадратическое отклонение от модели	$S_e=\sqrt{S_e^2}=\sqrt{\frac{1}{n-m-1}\sum_{i=1}^{n} e_i^2}$
Наблюдения	n	Количество наблюдений	n

Дисперсионный анализ

	df	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*
Регрессия	*m*	$\sum\left(\hat{y}_i-\overline{y}\right)^2=SSR$	*SSR / df*	$F=\frac{SSR/m}{SSE/\left(n-m-1\right)}=\frac{R^2}{\left(1-R^2\right)}\cdot\frac{n-m-1}{m}$ Статистика *F= MS(регр) / MS(ост)*	*F распр (F;df (регр);df (ост))* Значимость F должна быть меньше выбранного уровня значимости α (0,01;0,05)
Остаток	*n-m*-1	$\sum\left(y_i-\hat{y}_i\right)^2=SSE$	*SSE / df*		
Итого	*n*-1	$\sum\left(y_i-\overline{y}_i\right)^2=SST$			

	Коэфф	*Станд ошибка*	*t-статистика*	*P-значение*	*Нижние95%*	*Верхние95%*
y-пересечение	$\hat{a}_0$	$S_{\hat{a}_0}$	$t_{a_0}=\hat{a}_0/S_{\hat{a}_0}$	P-значение = СТЬЮДРАСПРЕ-ДЕЛЕНИЕ (t-статистика; n-m-1)	*нижние и верхние границы 95% доверительных интервалов коэффициентов регрессии*	
x_1	$\hat{a}_1$	$S_{\hat{a}_1}$	$t_{a_1}=\hat{a}_1/S_{\hat{a}_1}$			
x_2	$\hat{a}_2$	$S_{\hat{a}_2}$	$t_{a_2}=\hat{a}_2/S_{\hat{a}_2}$			

ВЫВОД ОСТАТКА

Дополнительные расчёты с остатками e_i, $\hat{y}_i$, y_i и т. д.

Наблюдение	*Предсказанное y*	*Остатки*					
Номер	$\hat{y}_i$	e_i					

2.3. МОДЕЛЬ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ

2.3.1. Определение множественной регрессии

На любой экономический показатель чаще всего оказывает влияние не один, а несколько факторов. Например, спрос на некоторый товар определяется не только его ценой, но и доходами потребителей, наличием заменяющих его товаров и многими другими факторами. В этом случае вместо парной регрессии $M(Y|X)=f(X)$ рассматривается множественная регрессия

$$M(Y|X_1,\, X_2,\, ...,\, X_m)=f(X_1,\, X_2, ...,\, X_m). \qquad (2.3.1)$$

Задача оценки статистической взаимосвязи переменных Y и $X_1,\, X_2, ...,\, X_m$ формулируется аналогично случаю парной регрессии.

Теоретическая модель множественной регрессии может быть представлена в виде

$$Y=f(a,\, X)+\varepsilon \qquad (2.3.2)$$

где Y – зависимая (объясняемая) переменная; $X=(X_1,\, X_2, ...,\, X_m)$ – вектор независимых (объясняющих) переменных; a – вектор параметров (подлежащих определению); ε – случайная ошибка (отклонение). Предполагается, что для данной генеральной совокупности имеется функция f, связывающая исследуемую переменную Y с вектором независимых переменных X.

Множественная регрессия – уравнение связи с несколькими независимыми переменными.

2.3.2. Виды моделей множественной регрессии

Наиболее распространенными связями между регрессантом Y и регрессорами $X_1,\, X_2, ...,\, X_m$ являются следующие зависимости:

линейная – $Y=a_0+a_1\cdot X_1+a_2\cdot X_2+...+a_m\cdot X_m+\varepsilon$;

степенная – $Y=a_0\cdot X_1^{a_1}\cdot X_2^{a_2}\cdot ...\cdot X_m^{a_m}\cdot\varepsilon$,
$\ln Y=\ln a_0+a_1\cdot\ln X_1+a_2\cdot\ln X_2+...+a_m\cdot\ln X_m+\ln\varepsilon$;

гиперболическая – $Y=a_0+\dfrac{a_1}{X_1}+\dfrac{a_2}{X_2}+...+\dfrac{a_m}{X_m}+\varepsilon$,

$Y=a_0+a_1\cdot Z_1+a_2\cdot Z_2+...+a_m\cdot Z_m+\varepsilon$, где $Z_j=\dfrac{1}{X_j}$, $j=\overline{1,m}$;

квадратичная – $Y=a_0+a_1\cdot X_1^2+a_2\cdot X_2^2+...+a_m\cdot X_m^2+\varepsilon$,

$Y=a_0+a_1\cdot Z_1+a_2\cdot Z_2+...+a_m\cdot Z_m+\varepsilon$, где $Z_j=X_j^2$, $j=\overline{1,m}$.

Здесь $a_0,\, a_1,\, a_2, ...,\, a_m$ – параметры, которые надо определить; ε – стохастическая составляющая, отклонение.

2.3.3. Оценка параметров множественной регрессии

Спецификация модели предполагает выбор факторов, а также вида функции, которая используется. Если до модели не включена существенная объясняющая переменная, то возникают ошибки, которые смещают оценки параметров.

Вопрос о выборе наилучшего типа зависимости должен основываться на проверке степени согласованности вида функции с данными наблюдений.

Рассмотрим самую употребляемую и наиболее простую из моделей множественной регрессии – модель множественной линейной регрессии.

Теоретическое линейное уравнение регрессии имеет вид:

$$Y = a_0 + a_1 \cdot X_1 + a_2 \cdot X_2 + ... + a_m \cdot X_m + \varepsilon, \tag{2.3.3}$$

или для индивидуальных наблюдений i:

$$y_i = a_0 + a_1 \cdot x_{i1} + a_2 \cdot x_{i2} + ... + a_m \cdot x_{im} + \varepsilon_i, \tag{2.3.4}$$

где $i = 1, 2, ..., n$.

Каждое уравнение (2.3.4) этой системы можно рассматривать самостоятельно как уравнение регрессии. Поэтому ε_i рассматриваются как случайные величины.

Коэффициент регрессии a_j показывает, на какую величину в среднем изменится результативный признак Y, если переменная X_j увеличится на 1 единицу измерения, т.е. a_j является нормативным коэффициентом.

После выбора линейной функции в качестве модели зависимости необходимо оценить параметры регрессии.

Пусть имеется n наблюдений в каждой из объясняющих переменных $X = (X_1, X_2, ..., X_m)$ и зависимой переменной Y:

Таблица 2.3.1

Переменные / № наблюдения	Y	X_1	X_2	...	X_m
1	y_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1m}
2	y_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2m}
...	...	...	...	...	...
i	y_i	x_{i1}	x_{i2}	...	x_{im}
...	...	...	...	...	...
n	y_n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nm}

Для возможности оптимального выбора параметров линейной регрессии необходимо, чтобы число наблюдений $n \gg m+1$. В данном случае число $\nu = n - m - 1$ называется числом степеней свободы. Считается, что при оценивании множественной линейной регрессии для обеспечения статистической надежности требуется, чтобы число наблюдений, по крайней мере, в 6-7 раз превосходило число оцениваемых параметров, т.е. $n \geq 7(m+1)$.

Воспользуемся матричной формой записи уравнения (2.3.3).

$$Y = XA + \varepsilon, \tag{2.3.5}$$

где:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_i \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}_{n\cdot 1}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{i1} & x_{i2} & \ldots & x_{im} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nm} \end{pmatrix}_{n\cdot(m+1)}, \quad A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_i \\ \ldots \\ a_m \end{pmatrix}_{(m+1)\cdot 1}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \ldots \\ \varepsilon_i \\ \ldots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}_{n\cdot 1}.$$

Y – матрица-вектор зависимой переменной; X – матрица наблюдений независимых переменных размерностью $n \cdot (m+1)$ (единичный столбец добавляется в эту матрицу для получения коэффициента a_0 в регрессионном уравнении). A – матрица-столбец размерностью $(m+1)\cdot 1$. ε – вектор-матрица случайных отклонений (возмущений) размерностью $n \cdot 1$. Величины $a_0, a_1, ..., a_m$ оцениваются на основе выборочных наблюдений, поэтому расчетные показатели не являются истинными, а представляют собой их статистические оценки.

Теоретическая модель (2.3.5) представляется как эмпирическая в матричной записи

$$Y = X\hat{A} + e = \hat{Y} + e. \tag{2.3.6}$$

Оценка параметров модели множественной регрессии производится с помощью МНК по формуле:

$$\hat{A} = \left(X' \cdot X\right)^{-1} \cdot X' \cdot Y. \tag{2.3.7}$$

При этом:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = Y'Y - \hat{A}'X'Y. \tag{2.3.8}$$

Оценки параметров можно находить и решением системы нормальных уравнений. Для двух факторов система имеет вид:

$$
\begin{cases}
\hat{a}_0 n + \hat{a}_1 \sum_{i=1}^{n} x_{i1} + \hat{a}_2 \sum_{i=1}^{n} x_{i2} = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\
\hat{a}_0 \sum_{i=1}^{n} x_{i1} + \hat{a}_1 \sum_{i=1}^{n} x_{i1}^2 + \hat{a}_2 \sum_{i=1}^{n} x_{i1} x_{i2} = \sum_{i=1}^{n} x_{i1} y_i, \\
\hat{a}_0 \sum_{i=1}^{n} x_{i2} + \hat{a}_1 \sum_{i=1}^{n} x_{i1} x_{i2} + \hat{a}_2 \sum_{i=1}^{n} x_{i2}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_{i2} y_i.
\end{cases}
\tag{2.3.9}
$$

2.3.4. Отбор факторов для построения множественной регрессионной модели

При построении модели множественной регрессии отбор наиболее существенных факторов, воздействующих на результативный признак, проводится на основе качественного, теоретического анализа в сочетании с использованием статистических приемов.

Сначала на основе содержательного анализа составляется перечень показателей $X_1,...,X_m$. Затем производится сбор статистической информации и предварительный анализ данных, после чего осуществляется сравнительная оценка и отсев части факторов. Это достигается путем анализа парных коэффициентов корреляции по формуле

$$
r_{yx} = \frac{Cov(X,Y)}{S_x \cdot S_y} = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{S_x \cdot S_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}}
\tag{2.3.10}
$$

и оценкой их значимости путем сравнения фактического и табличного t-критерия Стьюдента:

$$
t_{факт.} = \sqrt{\frac{r_{yx}^2}{1-r_{yx}^2}(n-m-1)}, \quad t_{табл.}(\alpha;\ n-m-1).
\tag{2.3.11}
$$

Если $t_{факт} > t_{табл}$, то парный коэффициент корреляции значим.

Для отбора показателей в регрессионную модель составляется матрица парных коэффициентов корреляции r, измеряющая тесноту связи каждого из факторов с результативным признаком и между собой.

Корреляционная матрица r имеет вид

$$
r = \begin{pmatrix}
1 & r_{yx_1} & r_{yx_2} & \dots & r_{yx_j} & \dots & r_{yx_m} \\
r_{x_1y} & 1 & r_{x_1x_2} & \dots & r_{x_1x_j} & \dots & r_{x_1x_m} \\
r_{x_2y} & r_{x_2x_1} & 1 & \dots & r_{x_2x_j} & \dots & r_{x_2x_m} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
r_{x_jy} & r_{x_jx_1} & r_{x_jx_2} & \dots & 1 & \dots & r_{x_jx_m} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
r_{x_my} & r_{x_mx_1} & r_{x_mx_2} & \dots & r_{x_mx_j} & \dots & 1
\end{pmatrix}_{(m+1)\cdot(m+1)} . \qquad (2.3.12)
$$

Путем анализа корреляционной матрицы и t-критериев Стьюдента производится отбор факторов для построения модели.

Существуют две схемы отбора факторов для модели: метод включения – дополнительное введение фактора и метод исключения – отсев факторов из полного его набора.

Первая схема: признак X_j включается в уравнение в том случае, если его включение существенно увеличивает значение множественного коэффициента корреляции, рассчитываемого по формуле

$$
R_{y\,x_j} = \sqrt{1 - \frac{|r|}{R_{jj}}}, \quad j = \overline{1,m}, \qquad (2.3.13)
$$

где $|r|$ – определитель корреляционной матрицы r (см. формулу 2.3.12), а R_{jj} – алгебраическое дополнение элемента r_{jj} той же матрицы r.

Примечание. Из практики можно считать, что существенным увеличением является увеличение множественного линейного коэффициента корреляции не менее, чем на 10%.

Так как значение множественного коэффициента корреляции зависит от количества включаемых в модель аргументов X_j, то при расчетах необходимо использовать скорректированный множественный коэффициент корреляции

$$
\overline{R}^2_{y\,x_j} = 1 - \left(1 - R^2_{y\,x_j}\right)\frac{n-1}{n-m-1}, \quad j = \overline{1,m}. \qquad (2.3.14)
$$

Этот коэффициент также необходимо проверить на значимость с помощью F-критерия Фишера

$$
F = \frac{R^2/m}{\left(1-R^2\right)\left(n-m-1\right)}. \qquad (2.3.15)
$$

Рассчитанный по формуле (2.3.15) $F_{расч}$ сравнивается с табличным

$F_{табл}(\alpha, \nu_1, \nu_2) = F_{табл}(0{,}05; m; n-m-1)$.

Если $F_{расч} > F_{табл}$, то проверяемый множественный коэффициент корреляции значим.

Расчет по формуле (2.3.14) скорректированных множественных коэффициентов корреляции и их проверка по F-критерию Фишера позволяет последовательно отбирать факторы, оказывающие существенное влияние на результативный признак. При этом первым в уравнение включается фактор, наиболее тесно коррелирующий с Y, вторым – тот фактор, который в паре с первым из отобранных дает максимальное значение R и т.д.

На каждом шаге получают новое значение множественного коэффициента корреляции R_{yx_j}, бо́льшее, чем на предыдущем. Тем самым определяется вклад каждого отобранного фактора в объясненную дисперсию Y.

Вторая схема пошаговой регрессии основана на последовательном исключении факторов с помощью t-*критерия Стьюдента*. Она заключается в том, что после построения уравнения регрессии и оценки значимости всех коэффициентов регрессии из модели исключается тот фактор, коэффициент при котором незначим и имеет наименьшее значение t-критерия. После этого получают новое уравнение множественной регрессии и снова производят оценку значимости всех оставшихся коэффициентов. Если среди них окажутся незначимые, то опять исключают фактор с наименьшим значением t-критерия. Процесс исключения факторов останавливается на том шаге, когда все регрессионные коэффициенты становятся значимыми.

Расчётный t-критерий Стьюдента определяют по формуле

$$t_{\hat{a}_j}^{расч.} = \frac{\left|\hat{a}_j\right|}{S_{\hat{a}_j}}, \; j = \overline{1, m}, \tag{2.3.16}$$

где:

$$S_{\hat{a}_j} = S_e\sqrt{C_{jj}}, \; j = \overline{1, m}, \tag{2.3.17}$$

$$S_e = \sqrt{\frac{1}{n-m-1}\sum_{i=1}^{n} e_i^2} \, . \tag{2.3.18}$$

Здесь C_{jj} – диагональный элемент матрицы $\left(X' \cdot X\right)^{-1}$.

Замечание. При отборе факторов рекомендуется пользоваться следующим правилом: число включаемых факторов в 6-7 раз меньше объема совокупности, по которой строится регрессия.

После отбора факторов по одной из указанных схем и построения множественной регрессионной модели по формуле (2.3.6) осуществляется статистическая проверка этой модели по методике, аналогичной рассмотренной для статистического анализа парной регрессионной модели.

Проверяется:

качество построенной модели, т.е. ее соответствие эмпирическим данным, для чего рассчитывается коэффициент детерминации, множественный коэффициент корреляции и относительная ошибка аппроксимации;

значимость построенной множественной регрессионной модели по критерию Фишера;

статистическая значимость параметров модели $a_1, a_2, ..., a_m$ и строятся для них доверительные интервалы;

осуществляется прогноз по построенной модели (точечный и интервальный);

осуществляется статистический анализ степени влияния фактор-аргументов на выходной показатель Y.

2.3.5. Проверка качества уравнения регрессии

Опишем последовательно этапы статистической проверки множественной регрессионной модели.

Общее качество множественной регрессии проверяется с помощью анализа остатков $e_i = y_i - \hat{y}_i$. Для этого вычисляют коэффициент детерминации, коэффициент множественной корреляции, среднюю относительную ошибку аппроксимации.

Коэффициент детерминации равен

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i - \bar{y}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2} = 1 - \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2}. \qquad (2.3.19)$$

Коэффициент множественной корреляции равен

$$R = \sqrt{R^2}$$

Коэффициент детерминации и коэффициент множественной корреляции изменяется в пределах $[0,1]$

Добавление объясняющих переменных не уменьшает коэффициента детерминации, но он может неоправданно расти с увеличением числа факторов. Поэтому вводится *скорректированный* (исправленный) коэффициент детерминации

$$\overline{R}^2 = 1 - \frac{SSE/(n-m-1)}{SST/(n-1)} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2/(n-m-1)}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2/(n-1)} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2} \cdot \frac{n-1}{n-m-1} \quad (2.3.20)$$

Его можно представить в виде

$$\overline{R}^2 = = 1 - \left(1 - R^2\right)\frac{n-1}{n-m-1}. \qquad (2.3.21)$$

$\overline{R}^2$ корректирует R^2 в сторону уменьшения.

Проверка гипотезы H_0 об одновременном равенстве нулю всех параметров при объясняющих переменных H_0 $\left(a_1 = a_2 = ... = a_m = 0\right)$ осуществляется путём проверки значимости уравнения регрессии в целом с помощью $F-$ критерия Фишера, фактическое значение которого рассчитывается по формуле:

$$F_{факт} = \frac{\sum\left(\hat{y}_i - \overline{y}\right)^2 / m}{\sum\left(y_i - \overline{y}\right)^2 / \left(n-m-1\right)} \qquad (2.3.22)$$

Табличное значение критерия Фишера $F_{табл} = F_{\alpha,\nu_1,\nu_2} = F_{\alpha,\, m,\, n-m-1}$ выбираем из таблиц в зависимости от уровня значимости α и степеней свободы ν_1, ν_2.

Если $F_{факт} > F_{табл}$, то гипотеза H_0 отклоняется и признаётся, что уравнение регрессии достаточно качественно отражает динамику изменения зависимой переменной Y.

Статистическая значимость коэффициента детерминации проверяется аналогично путём сравнения $F_{факт}$ и $F_{табл}$, где

$$F_{факт} = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-m-1}{m} \qquad (2.3.23)$$

Если $F_{факт} > F_{табл} = F_{\alpha,\nu_1,\nu_2} = F_{\alpha,m,n-m-1}$, то принимается гипотеза о том, что $R^2 > 0$, т.е. R^2 статистически значим.

Для проверки значимости коэффициента множественной корреляции вычисляют t-критерий Стьюдента

$$t_{\text{расч}} = \frac{R}{\sqrt{1-R^2}} \cdot \sqrt{n-m-1} \qquad (2.3.24)$$

По таблице находим $t_{\text{табл}}$ – соответствующее табличное значение t-критерия Стьюдента с $n - m - 1$ степенями свободы, и уровнем значимости α.

Если $\left|t_{\text{расч}}\right| > t_{\text{табл}} = t_{\alpha;\, n\text{-}m\text{-}1}$, то коэффициент множественной корреляции между регрессантом и регрессорами значим.

Для определения стандартных ошибок и нахождения доверительных интервалов оценок параметров $\hat{a}_j$ используется дисперсионно-ковариационная матрица

$$Cov\hat{A} = \begin{pmatrix} Var(\hat{a}_0) & Cov(\hat{a}_0,\hat{a}_1) & ... & Cov(\hat{a}_0,\hat{a}_m) \\ Cov(\hat{a}_1,\hat{a}_0) & Var(\hat{a}_1) & ... & Cov(\hat{a}_1,\hat{a}_m) \\ ... & ... & ... & ... \\ Cov(\hat{a}_m,\hat{a}_0) & Cov(\hat{a}_m,\hat{a}_1) & ... & Var(\hat{a}_m) \end{pmatrix} = S_e^2 \left(X'X\right)^{-1}. \quad (2.3.25)$$

Значимость коэффициентов уравнения регрессии проверяется с помощью сравнения фактических и табличных значений $t-$критерия Стьюдента:

$t_{\hat{a}_j}^{факт} = \dfrac{|\hat{a}_j|}{S_{\hat{a}_j}}$, $j = \overline{(1,m)}$, где $S_{\hat{a}_j} = S_e\sqrt{C_{jj}}$, а $C_{jj}-$ диагональный элемент матрицы $\left(X'X\right)^{-1}$.

Если $t_{факт} > t_{табл} = t_{\alpha;\, n\text{-}m\text{-}1}$, то коэффициент $\hat{a}_j$ считается статистически значимым. Доверительные интервалы для параметров модели имеют вид

$$\hat{a}_j - t_{\alpha,n-m-1}S_{\hat{a}_j} \le a_j \le \hat{a}_j + t_{\alpha,n-m-1}S_{\hat{a}_j}, \quad \left(j = \overline{1,n}\right). \quad (2.3.26)$$

Средняя относительная ошибка аппроксимации находится по формуле

$$E_{ср.отн.} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|y_i - \hat{y}_i|}{y_i}\cdot 100\% = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|e_i|}{y_i}\cdot 100\% \quad (2.3.27)$$

2.3.6. Прогноз с помощью модели множественной регрессии

Прогнозное значение y_{pr} определяется путем подстановки в эмпирическое уравнение регрессии $\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1\cdot X_1 + \hat{a}_2\cdot X_2 + ... + \hat{a}_m\cdot X_m$ соответствующих (известных) значений факторов – аргументов X_j, $j = \overline{1,m}$. Для этого формируется вектор $X'_{pr} = \left(1, x_{1pr}, x_{2pr}, ..., x_{m\,pr}\right)$. Тогда

$$\hat{y}_{pr} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1\cdot x_{1pr} + \hat{a}_2\cdot x_{2pr} + ... + \hat{a}_m\cdot x_{m\,pr}. \quad (2.3.28)$$

Запишем соотношение (2.3.28) в матричном виде:

$$\hat{y}_{pr} = X'_{pr}\cdot\hat{A}. \quad (2.3.29)$$

Будущие значения прогноза y_{pr} с вероятностью $(1-\alpha)$ попадут в доверительный интервал

$$\hat{y}_{pr} - \Delta_{pr} \le y_{pr} \le \hat{y}_{pr} + \Delta_{pr}, \tag{2.3.30}$$

где:

$$\Delta_{pr} = S_e t_\alpha \sqrt{1 + X'_{pr} \left(X' \cdot X \right)^{-1} \cdot X_{pr}}\ . \tag{2.3.31}$$

В (2.3.31) S_e – среднеквадратическое отклонение ошибки модели, t_α – табличный критерий Стьюдента при уровне значимости α, $X'_{pr} = \left(1, x_{1pr}, x_{2pr}, ..., x_{m\ pr}\right)$, $\left(X' \cdot X \right)^{-1}$ – обратная матрица, полученная при построении исходной модели множественной регрессии.

$$y_{pr} \in \left(\hat{y}_{pr} - S_e t_\alpha \sqrt{1 + X'_{pr} \cdot \left(X'X \right)^{-1} \cdot X_{pr}} ; \hat{y}_{pr} + S_e t_\alpha \sqrt{1 + X'_{pr} \cdot \left(X'X \right)^{-1} \cdot X_{pr}} \right), \tag{2.3.32}$$

Значения прогноза для математического ожидания прогнозного значения y_{np} с вероятностью $(1-\alpha)$ попадут в доверительный интервал

$$M\left(y_{pr}\right) \in \left(\hat{y}_{pr} - S_e t_\alpha \sqrt{X'_{pr} \cdot \left(X'X \right)^{-1} \cdot X_{pr}} ; \hat{y}_{pr} + S_e t_\alpha \sqrt{X'_{pr} \cdot \left(X'X \right)^{-1} \cdot X_{pr}} \right). \tag{2.3.33}$$

Здесь $\Delta_{pr} = S_e t_\alpha \sqrt{X'_{pr} \cdot \left(X'X \right)^{-1} \cdot X_{pr}}$. (2.3.34)

2.3.7. Определение степени влияния фактор-аргументов на результирующий показатель Y

Важную роль при оценке влияния факторов играют коэффициенты построенной регрессионной модели. Коэффициент $\hat{a}_j$ показывает, что при увеличении x_j на единицу его измерения, зависимая переменная увеличится на a_j единиц своего измерения.

Однако непосредственно с их помощью нельзя сопоставлять факторы по степени их влияния на зависимую переменную из-за различия единиц измерения и степени их колеблемости. Для устранения таких различий при экономической интерпретации степени влияния фактор-аргументов на результирующую функцию применяются

коэффициенты эластичности $Э_j$;

бета-коэффициенты β_j;

дельта-коэффициенты Δ_j.

Эластичность Y по отношению к X_j определяется как процентное изменение Y, отнесенное к соответствующему процентному изменению X_j. Эластичность определяется соотношением

$$Э_j = \hat{a}_j \frac{\overline{x}_j}{\overline{y}}, \ j = \overline{1,m}. \qquad (2.3.35)$$

Например, если $Э_j = 3$, то это означает, что если $\overline{x}_j$ изменится на 1%, то это приведет к увеличению $\overline{y}$ на 3%. Если $Э_j = -0,4$, то это означает, что увеличение $\overline{x}_j$ на 1% приведет к уменьшению $\overline{y}$ на 0,4%.

Коэффициент эластичности не учитывает степень колеблемости факторов. Для учета степени колеблемости факторов используются β-коэффициенты.

Бета-коэффициент показывает, на какую часть величины среднеквадратического отклонения S_y изменится зависимая переменная Y, если соответствующая независимая переменная X_j изменится на величину своего среднеквадратического отклонения при фиксированном значении остальных независимых переменных.

Бета-коэффициент определяется по формуле

$$\beta_j = \hat{a}_j \frac{S_{x_j}}{S_y}, \ j = \overline{1,m}, \qquad (2.3.36)$$

где:

$$S_{x_j}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2, \ S_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y - \overline{y}\right)^2.$$

Долю влияния каждого фактора в суммарном влиянии всех факторов можно оценить по величине *дельта-коэффициента*.

$$\Delta_j = r_{yx_j}\beta_j / R^2. \qquad (2.3.37)$$

Здесь r_{yx_j} – коэффициент парной корреляции между $j-$м фактором и зависимой переменной, β_j – бета-коэффициент, а R^2 – коэффициент детерминации регрессионной модели.

Таким образом, анализ влияния фактор-аргументов на результирующий признак Y позволяет проранжировать все фактор-аргументы по величине их влияния. Это дает возможность принимать меры воздействия при принятии решений по управлению результирующим признаком целенаправленно.

Рассмотрим далее пример на построение множественной регрессионной модели и проведение её статистического анализа.

Пример 2.3.1 Изучается влияние стоимости основных фондов и оборотных активов на величину валового дохода торговых предприятий. Для этого по восьми предприятиям были получены данные, приведенные в табл. 2.3.2.

Таблица 2.3.2

Номер предприятия	Валовой доход за год, млн. грн.	Среднегодовая стоимость, млн. грн.	
		Основных фондов	Оборотных средств
	Y	X_1	X_2
1	12	6	6
2	9	3	4
3	16	10	8
4	11	5	5
5	16	11	8
6	20	14	10
7	15	10	7
8	16	10	8

Предполагая, что между переменными Y, X_1, X_2 существует линейная корреляционная зависимость, требуется:

1) найти уравнение регрессии Y на X_1 и X_2;

2) определить коэффициент детерминации, коэффициент множественной корреляции, скорректированный (нормированный) коэффициент множественный детерминации;

3) проверить значимость модели регрессии, проверить значимость коэффициента множественной корреляции;

4) оценить статистическую значимость коэффициентов регрессии, найти доверительные интервалы коэффициентов регрессии;

5) найти среднюю относительную ошибку аппроксимации;

6) найти прогнозное значение y_{pr} для $x_{1pr} = 8$ и $x_{2\,pr} = 9$, построить доверительные интервалы для индивидуального прогнозного значения зависимой переменной;

7) дать экономическую интерпретацию коэффициентов регрессии, найти эластичность, бета-коэффициенты**,** дельта коэффициенты, сделать экономические выводы.

Примечание. Вычисления произвести с помощью аналитических формул и с помощью пакета «Анализ данных» при значимости $\alpha = 0,05$.

Решение. 1. Составим уравнение линейной регрессии. Теоретическое уравнение линейной регрессии имеет вид

$$Y = a_0 + a_1 \cdot X_1 + a_2 \cdot X_2 + \varepsilon .$$

Его покомпонентная запись:

$$y_i = a_0 + a_1 \cdot x_{i1} + a_2 \cdot x_{i2} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1,8} .$$

Составим корреляционную матрицу

$$r=\begin{pmatrix} r_{yy} & r_{yx_1} & r_{yx_2} \\ r_{x_1y} & r_{x_1x_1} & r_{x_1x_2} \\ r_{x_2y} & r_{x_2x_1} & r_{x_2x_2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0,992 & 0,995 \\ & 1 & 0,982 \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Как видно из матрицы r связь между показателями Y, X_1 и X_2 достаточно высокая, что свидетельствует о правильном выборе спецификации модели.

Найдём оценки $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2$ этого уравнения. Коэффициенты $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2$ определим матричным способом. Оценки параметров находятся по формуле

$$\hat{A}=\left(X'\cdot X\right)^{-1}\cdot X'\cdot Y.$$

Выполняем соответствующие этой формуле действия над матрицами:

$$X=\begin{Vmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 10 & 8 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 11 & 8 \\ 1 & 14 & 10 \\ 1 & 10 & 7 \\ 1 & 10 & 8 \end{Vmatrix} \qquad Y=\begin{Vmatrix} 12 \\ 9 \\ 16 \\ 11 \\ 16 \\ 20 \\ 15 \\ 16 \end{Vmatrix}$$

$$X'=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 10 & 5 & 11 & 14 & 10 & 10 \\ 6 & 4 & 8 & 5 & 8 & 10 & 7 & 8 \end{Vmatrix}$$

$$X'X=\begin{Vmatrix} 8 & 69 & 56 \\ 69 & 687 & 531 \\ 56 & 531 & 418 \end{Vmatrix}$$

$$\left(X'X\right)^{-1}=\begin{Vmatrix} 7,677 & 1,319 & -2,704 \\ 1,319 & 0,307 & -0,566 \\ -2,704 & -0,566 & 1,084 \end{Vmatrix}$$

$$X'Y=\begin{Vmatrix} 115 \\ 1080 \\ 852 \end{Vmatrix} \qquad \hat{A}=\left(X'X\right)^{-1}X'Y=\begin{Vmatrix} 3,509 \\ 0,416 \\ 1,040 \end{Vmatrix}$$

Линейное уравнение множественной регрессии имеет вид

$$\hat{y}_x = 3{,}509 + 0{,}416 \cdot x_1 + 1{,}040 \cdot x_2 .$$

Оценим качество уравнения регрессии. Качество модели регрессии связывают с её адекватностью наблюдаемым (эмпирическим) данным. Проверка адекватности (или соответствия) модели регрессии наблюдаемым данным проводится на основе анализа остатков e_i.

Для удобства дальнейших вычислений составим табл. 2.3.3.

Таблица 2.3.3

№	y_i	x_{i1}	x_{i2}	$(y_i - \overline{y})^2$	$\hat{y}_i$	e_i	e_i^2	$E_i = \lvert e_i \rvert / y_i$
1	12	6	11	5,641	12,243	-0,243	0,059	0,020
2	9	4	10	28,891	8,916	0,084	0,007	0,009
3	16	8	10	2,641	15,987	0,013	0,000	0,001
4	11	6	9	11,391	10,788	0,212	0,045	0,019
5	16	8	12	2,641	16,403	-0,403	0,162	0,025
6	20	10	16	31,641	19,730	0,270	0,073	0,013
7	15	8	12	0,391	14,947	0,053	0,003	0,004
8	16	7	13	2,641	15,987	0,013	0,000	0,001
$\overline{y} = 14{,}375$		$\overline{x}_1 = 8{,}625$	$\overline{x}_2 = 7$	$SST = \sum = 85{,}875$	-	$SSE = \sum e_i^2 = 0{,}350$		$\Sigma = 0{,}093$ $E = 1{,}2\%$

2. Рассчитываем коэффициент детерминации по формуле

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST},$$

где: SSR – объяснённая сумма квадратов, а SST – общая сумма квадратов.

Коэффициент детерминации представим в следующем виде:

$$R^2 = \frac{\sum(\hat{y}_x - \overline{y})^2}{\sum(y - \overline{y})^2} = 1 - \frac{\sum(y - \hat{y}_x)^2}{\sum(y - \overline{y})^2} = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum(y - \overline{y})^2} = 1 - \frac{0{,}35}{85{,}875} = 0{,}996.$$

Так как $R^2 \approx 1$, то качество модели можно считать высоким. Это означает, что $99{,}6\%$ изменения валового дохода торговых предприятий зависит от стоимости основных и оборотных средств.

Рассчитаем коэффициент множественной корреляции

$$R = \sqrt{R^2} = \sqrt{0{,}996} = 0{,}998,\ 0 \le R \le 1.$$

Скорректированный (нормированный) множественный коэффициент детерминации $\overline{R}^2$ рассчитывается так:

$$\overline{R}^2 = 1 - \left(1 - R^2\right) \cdot \frac{n-1}{n-m-1} = 1 - \left(1 - 0,996\right) \cdot \frac{8-1}{8-2-1} = 0,994.$$

Это означает, что дисперсия результативного признака y, объясняется на $99,4\%$ влиянием аргументов X_1 и X_2. Оставшаяся доля дисперсии 0,6% вызвана влиянием других, не учтённых в модели факторов.

Множественный коэффициент корреляции и его скорректированное значение, соответственно, равны: $R = 0,998$; $\overline{R} = 0,994$. Близость его к единице говорит о тесной связи результативного признака с исследуемыми факторами.

Далее необходимо проверить значимость построенной модели.

3. Для проверки значимости уравнения регрессии и значимости коэффициента детерминации используется F-критерий Фишера, вычисляемый по формуле

$$F_{\text{расч}} = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n-m-1}{m} = \frac{0,996}{1 - 0,996} \cdot \frac{8-2-1}{2} = 622,5.$$

Табличное значение F-критерия Фишера при степенях свободы $\nu_1 = m = 2$, $\nu_2 = n - m - 1 = 8 - 2 - 1 = 5$ и уровне значимости $\alpha = 0,05$ равно $F_{\text{табл}} = 5,79$.

Так как $F_{\text{расч}} > F_{\text{табл}}$, то признается статистическая значимость уравнения в целом.

Для проверки значимости коэффициента множественной корреляции вычисляем t-критерий Стьюдента

$$t_{\text{расч}} = \frac{R}{\sqrt{1 - R^2}} \cdot \sqrt{n-m-1} = \frac{0,998}{\sqrt{1 - 0,996}} \sqrt{8-2-1} = 35,350.$$

По таблице находим $t_{\text{табл}}$ – соответствующее табличное значение t-распределения Стьюдента с $n - m - 1$ степенями свободы, и уровнем значимости α. $t_{\text{табл}} = t_{\alpha;\, n\text{-}m\text{-}1} = t_{0,05;\ 5} = 2,571$.

Так как $\left|t_{\text{расч}}\right| > t_{\text{табл}}$, то коэффициент множественной корреляции между регрессантом и регрессорами значим.

4. Анализ статистической значимости параметров модели (коэффициентов регрессии) проводится с использованием t-статистики путём проверки гипотезы о равенстве нулю j-го параметра уравнения (кроме свободного члена):

$$t_{\hat{a}_j} = \frac{\left|\hat{a}_j\right|}{S_{\hat{a}_j}} \quad \left(j = 1, 2, \ldots, m\right),$$

где $S_{\hat{a}_j}$ – стандартное (среднеквадратическое) отклонение коэффициента уравнения регрессии $\hat{a}_j$.

$$S_{\hat{a}_j} = S_e\sqrt{C_{jj}},\ j = \overline{1,m},$$

где C_{jj} – диагональный элемент матрицы $(X'X)^{-1}$.

Значения C_{jj}, взяты из матрицы $(X'X)^{-1}$. Они будут равны: $C_{00} = 7{,}677$, $C_{11} = 0{,}307$, $C_{22} = 1{,}084$, $\sqrt{C_{00}} = 2{,}771$, $\sqrt{C_{11}} = 0{,}554$, $\sqrt{C_{22}} = 1{,}041$,

$$S_e = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-m-1}} = \sqrt{\frac{0{,}350}{8-2-1}} = 0{,}264,$$

$$S_{\hat{a}_0} = S_e\sqrt{C_{00}} = 0{,}264 \cdot 2{,}771 = 0{,}732,\quad t_{\hat{a}_0} = \frac{|\hat{a}_0|}{S_{\hat{a}_0}} = \frac{3{,}509}{0{,}732} = 4{,}793,$$

$$S_{\hat{a}_1} = S_e\sqrt{C_{11}} = 0{,}264 \cdot 0{,}554 = 0{,}146,\quad t_{\hat{a}_1} = \frac{|\hat{a}_1|}{S_{\hat{a}_1}} = \frac{0{,}416}{0{,}146} = 2{,}849,$$

$$S_{\hat{a}_2} = S_e\sqrt{C_{22}} = 0{,}264 \cdot 1{,}041 = 0{,}275,\quad t_{\hat{a}_2} = \frac{|\hat{a}_2|}{S_{\hat{a}_2}} = \frac{1{,}040}{0{,}275} = 3{,}782.$$

Если $t_{\hat{a}_j}^{\text{расч}} > t_{\alpha;\, n-m-1}$, то коэффициент регрессии $\hat{a}_j$ считается значимым. В противном случае фактор, соответствующий этому коэффициенту, следует исключить из модели (при этом её качество не ухудшится).

В нашем случае $t_{\hat{a}_1}^{\text{расч}} > t_{\alpha;\, n-m-1}$ и $t_{\hat{a}_2}^{\text{расч}} > t_{\alpha;\, n-m-1}$, а поэтому коэффициенты $a_1,\ a_2$ значимы. Значимость параметра a_0 не проверяется.

Доверительные интервалы коэффициентов регрессии определяются по формуле $\left(\hat{a}_j - \Delta_{a_j};\ \hat{a}_j + \Delta_{a_j}\right)$, где $\Delta_{a_j} = t_{\text{табл}} \cdot S_{\hat{a}_j}$.

Находим доверительные интервалы коэффициентов регрессии:

$$\Delta_{a_0} = t_{\text{табл}} \cdot S_{\hat{a}_0} = 2{,}571 \cdot 0{,}732 = 1{,}882$$

$$a_0 \in \left(\hat{a}_0 - \Delta_{a_0};\ \hat{a}_0 + \Delta_{a_0}\right) = (3{,}509\text{-}1{,}882;\ 3{,}509\text{+}1{,}882) = (1{,}627;\ 5{,}391)$$

$$\Delta_{a_1} = t_{\text{табл}} \cdot S_{\hat{a}_1} = 2{,}571 \cdot 0{,}146 = 0{,}375$$

$$a_1 \in \left(\hat{a}_1 - \Delta_{a_1};\ \hat{a}_1 + \Delta_{a_1}\right) = (0{,}416\text{-}0{,}375;\ 0{,}416\text{+}0{,}375) = (0{,}041;\ 0{,}791)$$

$$\Delta_{a_2} = t_{\text{табл}} \cdot S_{\hat{a}_2} = 2{,}571 \cdot 0{,}275 = 0{,}707$$

$$a_2 \in \left(\hat{a}_2 - \Delta_{a_2};\ \hat{a}_2 + \Delta_{a_2}\right) = \left(1{,}040\text{-}0{,}707;\ 1{,}040\text{+}0{,}707\right) = \left(0{,}333;\ 1{,}747\right)$$

5. Среднюю относительную ошибку аппроксимации найдем по формуле

$$E_{\text{отн. ошибка}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{y_i - \hat{y}_{x_i}}{y_i}\right| \cdot 100\% = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{e_i}{y_i}\right| \cdot 100\% = \frac{1}{8} \cdot 0{,}093 \cdot 100\% = 1{,}163\%.$$

Можно сделать вывод, что полученная нами модель хорошо аппроксимирует исходные данные.

6. По построенной модели можно сделать прогноз следующим образом: по формуле $y_{pr} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_{1pr} + \hat{a}_2 x_{2pr}$ находим прогнозное значение y_{pr} для $x_{1pr} = 8$, $x_{2pr} = 9$.

Вычисления прогнозных значений произведем в матричном виде

$$X_{pr} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 8 \\ 9 \end{Vmatrix} \qquad\qquad X'_{pr} = \begin{Vmatrix} 1 & 8 & 9 \end{Vmatrix}$$

$$\hat{y}_{pr} = X'_{pr} \cdot \hat{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 8 & 9 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 3{,}509 \\ 0{,}416 \\ 1{,}040 \end{Vmatrix} = 16{,}195.$$

Будущие значения прогноза y_{pr} с вероятностью 0,95 попадут в доверительный интервал: $\hat{y}_{pr} - \Delta_{pr} \le y_{pr} \le \hat{y}_{pr} + \Delta_{pr}$.

Рассчитаем доверительный интервал для нашего случая по формуле (2.3.32):

$$X'_{pr} \cdot \left(X'X\right)^{-1} \cdot X_{pr} = \begin{Vmatrix} 1 & 8 & 9 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 7{,}677 & 1{,}319 & -2{,}704 \\ 1{,}319 & 0{,}307 & -0{,}566 \\ -2{,}704 & -0{,}566 & 1{,}084 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 1 \\ 8 \\ 9 \end{Vmatrix} = 5{,}997.$$

$$\Delta_{pr} = S_e t_\alpha \sqrt{1 + X'_{pr} \cdot \left(X'X\right)^{-1} \cdot X_{pr}} = 0{,}264 \cdot 2{,}571 \cdot \sqrt{1 + 5{,}997} = 1{,}795.$$

Тогда:

$$y_{pr} \in \left(\hat{y}_{pr} - S_e t_\alpha \sqrt{1 + X'_{pr} \cdot \left(X'X\right)^{-1} \cdot X_{pr}};\ \hat{y}_{pr} + S_e t_\alpha \sqrt{1 + X'_{pr} \cdot \left(X'X\right)^{-1} \cdot X_{pr}}\right),$$

$$y_{pr} \in \left(16{,}195 - 1{,}795;\ 16{,}195 + 1{,}795\right) = \left(14{,}4;\ 19{,}99\right).$$

Средняя ошибка математического ожидания прогноза находится по формуле

$$\Delta_{M\left(y_{pr}\right)} = S_e t_\alpha \sqrt{X'_{pr} \cdot \left(X'X\right)^{-1} \cdot X_{pr}} = 0,264 \cdot 2,571 \cdot \sqrt{5,997} = 1,662 .$$

Будущие значения прогноза математического ожидания прогнозного y_{pr} с вероятностью $(1-\alpha)$ попадут в доверительный интервал

$$M\left(y_{pr}\right) \in \left(16,195 - 1,662;\ 16,195 + 1,662\right) = \left(14,533;\ 17,857\right).$$

7. По полученным результатам можно сделать некоторые экономические выводы.

Коэффициент $\hat{a}_1 = 0,416$ показывает, что при увеличении основных фондов на один миллион гривен валовой доход за год увеличиться на 0,416 млн. грн. Соответственно, при увеличении оборотных средств на 1 млн. грн. валовой доход увеличится на 1,040 млн. грн. $\left(\hat{a}_2 = 1,040\right)$.

Для каждого коэффициента регрессии вычислим коэффициенты эластичности, бета-коэффициенты и дельта-коэффициенты.

$$Э_1 = \hat{a}_1 \overline{x_1} / \overline{y} = 0,416 \cdot 8,625/14,375 = 0,250 ,$$
$$Э_2 = \hat{a}_2 \overline{x_2} / \overline{y} = 1,040 \cdot 7/14,375 = 0.506 ,$$
$$\beta_1 = a_1 S_{x_1} / S_y = 0,416 \cdot 3,623/3,503 = 0,430 ,$$
$$\beta_2 = a_2 S_{x_2} / S_y = 1,040 \cdot 1,927/3,503 = 0,572 ,$$
$$\Delta_1 = r_{yx_1} \beta_1 / R^2 = 0,992 \cdot 0,430/0,996 = 0,428 ,$$
$$\Delta_2 = r_{yx_2} \beta_2 / R^2 = 0,995 \cdot 0,572/0,996 = 0,572 .$$

Коэффициент эластичности $Э_1$ показывает, что при увеличении основных фондов на 1% валовой доход увеличится на 0,25%, а при увеличении оборотных средств на 1% валовой доход увеличится на 0,506% .

Коэффициент β_1 показывает, что при увеличении основных фондов на 1 ед. среднеквадратического отклонения S_{x_1} валовой доход увеличится на 0,430 среднеквадратического отклонения S_y .

Дельта-коэффициент Δ_1 показывает, что 42,8% валового дохода зависит от основных фондов, а 57,2% – от оборотных активов.

Для управления процессом, который исследуется (валовой доход) можно сказать, что оборотные активы и основные фонды существенно влияют на валовой доход. Большее влияние оказывают оборотные активы. Поэтому для более быстрого роста валового дохода торговых предприятий необходимо обращать внимание больше всего на рост оборотных активов, так как они на 14,4% сильнее воздействуют на рост валового дохода по сравнению с основными фондами.

Теперь покажем решение этой же задачи с помощью **Анализа данных** в **«Excel»**. Для этого необходимо разместить столбцами единой таблицей исходные данные для Y и X_1, X_2, а затем выполнить следующую последовательность операций: **«Сервис»**; **«Анализ данных»**; **«Регрессия»**; **«ОК»**; выделяем входной интервал Y; переводим курсор во входной интервал X и выделяем одновременно оба столбца X_1, X_2; **«Остатки»**; **«ОК»**.

Получим следующие таблицы:

Вывод итогов

Множественный R	0,998
R-квадрат	0,996
Нормированный R-квадрат	0,994
Стандартная ошибка	0,264
Наблюдения	8

Дисперсионный анализ

	df	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*
Регрессия	2,000	85,525	42,763	611,669	0,00000106
Остаток	5,000	0,350	0,070		
Итого	7,000	85,875			

	Коэффициенты	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*
Y-пересечение	3,509	0,733	4,790	0,005	1,626	5,392
Переменная X 1	0,416	0,146	2,840	0,036	0,039	0,792
Переменная X 2	1,040	0,275	3,777	0,013	0,332	1,747

Вывод остатка

Наблюдение	*Предсказанное Y,* $\hat{y}_i$	*Остатки* e_i
1	12,243	-0,243
2	8,916	0,084
3	15,987	0,013
4	10,788	0,212
5	16,403	-0,403
6	19,730	0,270
7	14,947	0,053
8	15,987	0,013

2.4. СТАТИСТИТЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ПРЕДПОСЫЛОК МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

2.4.1. Общие положения

Формально, что часто так и делают, строят парную или многофакторную регрессионную модель для любых пространственных выборок и временных рядов. Возникает вопрос правомочия применения метода наименьших квадратов к такой информации.

Свойства коэффициентов регрессии существенным образом зависят от свойств случайной составляющей ε_i. Для того чтобы регрессионный анализ, основанный на обычном МНК, давал наилучшие из всех возможных результатов, должны выполнятся предпосылки МНК (условия Гаусса-Маркова). Они были формулированы раньше при рассмотрении парной регрессии.

Самыми важными предпосылками являются *отсутствие гетероскедастичности, независимость случайных составляющих в различных наблюдениях и отсутствие мультиколлинеаности*.

Приведём графическую иллюстрацию этих предпосылок.

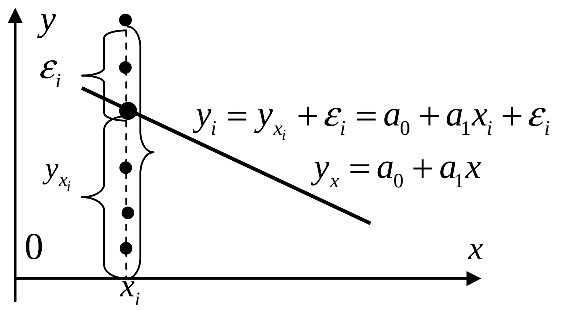


Рис. 2.4 1. Теоритическая регрессия

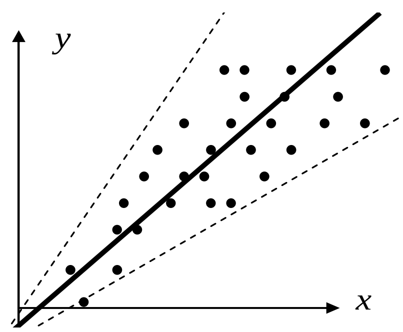


Рис. 2.4.2. Наличие гетероскедастичности

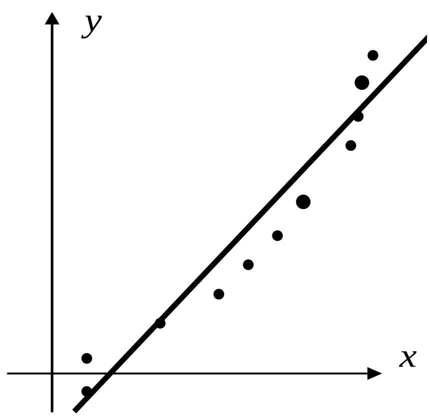


Рис. 2.4.3 . Наличие автокорреляции остатков при явной ошибочной спецификации

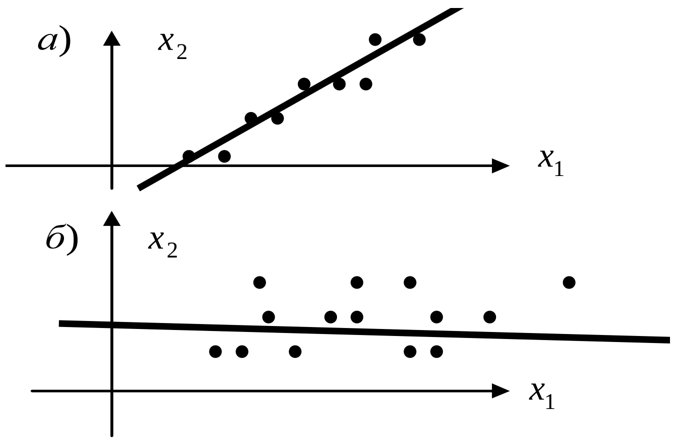


Рис. 2.4 4. а) Наличие мультиколлинеарности между x_1 и x_2; б) отсутствие мультиколлинеарности между x_1 и x_2

Остальные предпосылки, как правило, выполняются автоматически. Выполнимость указанных выше трёх предпосылок обязательно надо проверять. Формально составленная регрессионная модель при невыполнимости этих предпосылок может быть полностью неадекватна исходным статистическим данным. Для их проверки по определённым формулам рассчитывают критерии сопоставимости и сравнивают их с табличными значениями, т.е. проверяют гипотезу H_0.

Рассмотрим эти проблемы.

2.4.2. Мультиколлинеарность. Алгоритм Фаррара-Глобера выявления мультиколлинеарности

Одним из условий регрессионной модели является предположение о линейной независимости объясняющих переменных. Для экономических показателей это условие выполняется не всегда.

Под *мультиколлинеарностью* понимается высокая взаимная коррелированность объясняющих переменных, которая приводит к линейной зависимости нормальных уравнений.

Мультиколлинеарность проявляется в двух формах.

Линейной функциональной, когда определитель матрицы $X'X$ равен нулю. Это приводит к невозможности решения соответствующей системы нормальных уравнений, а значит и получения оценок параметров регрессионной модели.

Стохастической, когда хотя бы между двумя объясняющими переменными существует тесная корреляционная связь. В этом случае определитель матрицы $X'X$ хотя и не равен нулю, но очень мал.

Главными признаками мультиколлинеарности являются:

наличие высоких значений парных коэффициентов корреляции $r_{x_i x_j} \geq 0{,}8$. Это означает, что переменные x_i и x_j связаны почти линейной корреляционной зависимостью;

существенное приближение коэффициента множественной корреляции к единице;

наличие малых значений оценок параметров модели при высоком уровне коэффициента детерминации R^2 и F-критерия Фишера;

существенное изменение оценок параметров модели при дополнительном введении в нее новой объясняющей переменной;

резкое изменение значений параметров при дополнительном увеличении числа наблюдений.

Основными последствиями мультиколлинеарности являются:

снижение точности оцениваемых параметров;

оценки некоторых параметров модели могут показать нарушение гипотезы о значимости связи;

оценки параметров модели становятся очень чувствительными к размерам совокупности наблюдений и даже небольшое ее увеличение иногда может приводить к значительным изменениям в оценках параметров;

экономическая интерпретация параметров уравнения регрессии затруднена, так как некоторые из его коэффициентов могут иметь неправильные, с точки зрения экономической теории, знаки и неоправданно большие значения.

Все это делает модель непригодной для анализа и прогнозирования.

Рассмотрим способы обнаружения мультиколлинеарности.

Существует несколько способов для определения наличия или отсутствия мультиколлинеарности:

анализ матрицы коэффициентов парной корреляции. Мультиколлинеарность существует, если коэффициент парной корреляции между двумя переменными больше 0,8: $r_{x_i x_j} > 0{,}8$;

если определитель матрицы $X'X$ близок к нулю, то это свидетельствует о наличии мультиколлинеарности;

алгоритм Фаррара-Глобера.

Рассмотрим подробнее алгоритм Фаррара-Глобера, который позволяет статистически подтверждать или опровергать гипотезу о наличии тесной корреляционной связи между аргументами X_i модели. Основу алгоритма составляют три статистических критерия, с помощью которых проверяется мультиколлинеарность.

На первом шаге с помощью критерия χ^2 Пирсона определяют наличие мультиколлинеарности во всем массиве данных $X_1, X_2, ..., X_m$.

На втором шаге с помощью F- критерия Фишера определяют для каждого аргумента $k = \overline{1,m}$ существует или нет мультиколлинеарность между ним и другими факторами.

На третьем шаге с помощью t-критерия Стьюдента определяют наибольшую связь между выделенным X_k на втором шаге и всеми остальными факторами поочередно.

Предварительно рассчитываются две матрицы r и C через стандартизированные переменные, определяемые по следующей формуле:

$$x_{ik}^* = \frac{x_{ik} - \overline{x}_k}{\sqrt{\sigma_{x_k}^2 \cdot n}},\ i = \overline{1,n},\ k = \overline{1,m}, \tag{2.4.1}$$

где:

$$\overline{x}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{ik}}{n},\ \sigma_{x_k}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_{ik} - \overline{x}_k \right)^2}{n},\ i = \overline{1,n};\ \ k = \overline{1,m}.$$

Находят матрицы $X^*,\ r,\ C$.

$$X^* = \begin{pmatrix} x_{11}^* & x_{12}^* & \dots & x_{1m}^* \\ x_{21}^* & x_{22}^* & \dots & x_{2m}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}^* & x_{n2}^* & \dots & x_{nm}^* \end{pmatrix} \qquad (2.4.2)$$

матрица нормализованных переменных. $X^{*\prime} = \left(X^*\right)^T$ – транспонированная матрица к матрице X^*.

$$r = r_{xx} = X^{*\prime} \cdot X^* \; - \qquad (2.4.3)$$

корреляционная матрица, которая симметрична относительно главной диагонали и имеет вид

$$r = \begin{pmatrix} 1 & r_{x_1x_2} & \dots & r_{x_1x_m} \\ r_{x_2x_1} & 1 & \dots & r_{x_2x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{x_mx_1} & r_{x_mx_2} & \dots & 1 \end{pmatrix}. \qquad (2.4..4)$$

Каждый элемент этой матрицы характеризует тесноту связи одной объясняющей переменной с другой. Поскольку диагональные элементы характеризуют тесноту связи каждой независимой переменной с этой же переменной, то они равны единице.

$$C = r^{-1} = \left(X^{*\prime} \cdot X^*\right)^{-1}. \qquad (2.4.5)$$

$$C = r^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & r_{x_1x_2} & \dots & r_{x_1x_m} \\ r_{x_2x_1} & 1 & \dots & r_{x_2x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{x_mx_1} & r_{x_mx_2} & \dots & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1m} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{m1} & C_{m2} & \dots & C_{mm} \end{pmatrix} \qquad (2.4.6)$$

Матрица C симметрична относительно главной диагонали и ее диагональные элементы всегда положительные.

Наличие *мультиколлинеарности* во всем массиве данных $X_1,\dots,X_m$ проверяют с помощью критерия Пирсона – χ^2 («хи»-квадрат), который рассчитывается по формуле

$$\chi^2 = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}\cdot(2m+5)\right]\cdot \ln|r|, \qquad (2.4.7)$$

где $|r|$ – определитель корреляционной матрицы $r = \left(r_{ij}\right)$. Значение этого критерия сравнивается с табличным критерием χ^2 при $\nu = \frac{1}{2} m(m-1)$ степенях свободы и уровнем значимости α. Если $\chi^2_{расч} > \chi^2_{табл}$, то в массиве объясняющих переменных существует мультиколлинеарность.

С помощью F*-критерия Фишера* для каждого фактор-аргумента X_k $\left(k = \overline{1,m}\right)$ устанавливают мультиколлинеарность аргумента X_k с каким-то другим аргументом, находящимся в основном массиве. Он рассчитывается по формуле

$$F_k^{расч} = \left(C_{kk} - 1\right) \cdot \frac{n-m}{m-1}, \quad k = \overline{1,m}, \tag{2.4.8}$$

где C_{kk} – диагональный элемент матрицы C.

Фактические значения критерия сравниваются с табличным при $(m-1)$ и $(n-m)$ степенях свободы и уровне значимости α. Если $F_k^{расч} > F_{табл}$, то соответствующая k-я объясняющая переменная мультиколлинеарна с другими.

Примечание. Если коэффициент детерминации для каждой переменной, рассчитываемый по формуле

$$R_k^2 = 1 - \frac{1}{C_{kk}} \tag{2.4.9}$$

приближается к единице, то объясняющая переменная мультиколлинеарна с другими.

Для определения переменной, с которой мультиколлинеарна X_k рассчитывают t-критерий Стьюдента для каждой пары аргументов (выделенного по второму критерию X_k и всеми остальными).

t-критерий Стьюдента вычисляют по формуле

$$t_{kj}^{расч} = \frac{r_{kj}\sqrt{n-m}}{\sqrt{1-r_{kj}^2}}, \quad j = \overline{1,m}, \tag{2.4.10}$$

где

$$r_{kj} = \frac{-C_{kj}}{\sqrt{C_{kk} \cdot C_{jj}}}. \tag{2.4.11}$$

В выражении (2.4.11) C_{kj}, C_{kk}, C_{jj} – элементы матрицы C, стоящие на соответствующих местах, определяемых индексами.

Фактические значения критериев $t_{kj}^{расч}$ сравниваются с табличными при $(n-m)$ степенях свободы и уровне значимости α. Если $t_{kj}^{расч} > t_{табл}$, то между объясняющими переменными X_k и X_j существует мультиколлинеарность.

Методы устранения мультиколлинеарности

Устранить мультиколлинеарность в эконометрической модели можно, отбросив одну из переменных мультиколлинеарной пары. Но такой метод часто противоречит действительности экономических связей между факторами и к нему надо относиться осторожно.

Можно преобразовать объясняющие переменные и вместо их абсолютных значений взять их отклонения от средней $\left(x_{ij}-\overline{x}_j\right)$. Можно также взять их относительные значения: $\frac{x_{ij}}{\overline{x}_j},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}$ или стандартизировать объясняющие переменные, что предложено в рассмотренном алгоритме Фаррара-Глобера.

Если вышеуказанные приёмы не помогают исключить мультиколлинеарность, то надо поменять спецификацию модели (взять не линейную, а другой вид модели).

Если и эти действия не привели к необходимой цели, то есть мы не избавились от мультиколлинеарности, то оценки параметров следует рассчитывать с помощью другого метода, например, метода главных компонент.

Рассмотрим пример на проверку мультиколлинеарности.

Пример 2.4.1. На среднемесячную заработную плату Y влияют независимые переменные – производительность труда $\left(X_1\right)$, фондоёмкость $\left(X_2\right)$ и коэффициент текучести рабочей силы $\left(X_3\right)$. Необходимо исследовать на мультиколлинеарность переменные X_1, X_2, X_3 и при наличии мультиколлинеарности предложить меры по её устранению.

Статистические данные по десяти предприятиям приведены в табл. 2.4.1.

Таблица 2.4.1.

№ предприятия	Производительность труда, человеко-дней, X_1	Фондоёмкость, млн. д.е., X_2	Коэффициент текучести рабочей силы, %, X_3
1	31	0,88	8,1
2	28	0.45	9,2.
3	31	0,75	7,2
4	24	0,53	14,3
5	31	0,51	7,1
6	28	0,66	10,2
7	25	0,43	12,3
8	19	0,51	20,1
9	30	0,92	7,3
10	29	0,52	10,1

Проверку наличия мультиколлинеарности в представленной информации проведем с помощью алгоритма Фаррара-Глобера.

Вычисления матриц r и C проводим в Excel. Расчёты приведены в табл. 2.4.2 по формуле

$$x_{ik}^* = \frac{x_{ik} - \bar{x}_k}{\sqrt{\sigma_{x_k}^2 \cdot n}}. \qquad (2.4.12)$$

Таблица 2.4.2

	x_{i1}	x_{i2}	x_{i3}	$x_{i1} - \overline{x_1}$	$x_{i2} - \overline{x_2}$	$x_{i3} - \overline{x_3}$	X_1^*	X_2^*	X_3^*
1	31	0,88	8,1	3,400	0,264	-2,490	0,291	0,496	–0,203
2	28	0,45	9,2	0,400	–0,166	–1,390	0,034	–0,312	–0,113
3	31	0,75	7,2	3,400	0,134	–3,390	0,291	0,252	–0,277
4	24	0,53	14,3	-3,600	–0,086	3,710	–0,308	–0,162	0,303
5	31	0,51	7,1	3,400	–0,106	–3,490	0,291	–0,199	–0,285
6	28	0,66	10,2	0,400	0,044	–0,390	0,034	0,083	–0,032
7	25	0,43	12,3	–2,600	–0,186	1,710	–0,223	–0,349	0,140
8	19	0,51	20,1	–8,600	–0,106	9,510	–0,736	–0,199	0,776
9	30	0,92	7,3	2,400	0,304	–3,290	0,205	0,571	–0,268
10	29	0,52	10,1	1,400	–0,096	–0,490	0,120	–0,180	–0,040
$\bar{x}_k$	27,600	0,616	10,590					$\parallel$ X^*	
$\sigma_{x_k}^2$	13,640	0,028	15,015						
$\sigma_{x_k}^2 \cdot n$	136,400	0,283	150,149						
$\sqrt{\sigma_{x_k}^2 \cdot n}$	11,679	0,532	12,254						

$$X^* = \begin{pmatrix} 0,291 & 0,496 & -0,203 \\ 0,034 & -0,312 & -0,113 \\ 0,291 & 0,252 & -0,277 \\ -0,308 & -0,162 & 0,303 \\ 0,291 & -0,199 & -0,285 \\ 0,034 & 0,083 & -0,032 \\ -0,223 & -0,349 & 0,140 \\ -0,736 & -0,199 & 0,776 \\ 0,205 & 0,571 & -0,268 \\ 0,120 & -0,180 & -0,040 \end{pmatrix} \qquad (2.4.13)$$

Рассчитаем матрицы r и C:

$$r = X^{*\prime} \cdot X^* = \begin{Vmatrix} 0{,}291 & 0{,}034 & 0{,}291 & -0{,}308 & 0{,}291 & 0{,}034 & -0{,}223 & -0{,}736 & 0{,}205 \\ 0{,}496 & -0{,}312 & 0{,}252 & -0{,}162 & -0{,}199 & 0{,}083 & -0{,}349 & -0{,}199 & 0{,}571 \\ -0{,}203 & -0{,}113 & -0{,}277 & 0{,}303 & -0{,}285 & -0{,}032 & 0{,}140 & 0{,}776 & -0{,}268 \end{Vmatrix} \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} 0{,}291 & 0{,}496 & -0{,}203 \\ 0{,}034 & -0{,}312 & -0{,}113 \\ 0{,}291 & 0{,}252 & -0{,}277 \\ -0{,}308 & -0{,}162 & 0{,}303 \\ 0{,}291 & -0{,}199 & -0{,}285 \\ 0{,}034 & 0{,}083 & -0{,}032 \\ -0{,}223 & -0{,}349 & 0{,}140 \\ -0{,}736 & -0{,}199 & 0{,}776 \\ 0{,}205 & 0{,}571 & -0{,}268 \\ 0{,}120 & -0{,}180 & -0{,}040 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1{,}000 & 0{,}522 & -0{,}983 \\ 0{,}522 & 1{,}000 & -0{,}479 \\ -0{,}983 & -0{,}479 & 1{,}000 \end{Vmatrix},$$

$$r = X^{*\prime} \cdot X^* = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}522 & -0{,}983 \\ 0{,}522 & 1 & -0{,}479 \\ -0{,}983 & -0{,}479 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.4.14}$$

$\det r = 0{,}023$.

$$C = \left(X^{*\prime} \cdot X^*\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 33{,}856 & -2{,}217 & 32{,}232 \\ -2{,}217 & 1{,}444 & -1{,}489 \\ 32{,}232 & -1{,}489 & 31{,}985 \end{pmatrix}. \tag{2.4.15}$$

Проверяем наличие мультиколлинеарности в массиве объясняющих переменных.

С помощью критерия Пирсона χ^2

$$\begin{gathered} \chi^2_{расч} = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}\cdot(2m+5)\right]\cdot \ln|r| = \\ = -\left[10 - 1 - \frac{1}{6}\cdot(2\cdot 3+5)\right]\cdot \ln 0{,}023 = 27{,}129 \end{gathered} \tag{2.4.16}$$

проверяем наличие мультиколлинеарности между X_1, X_2, X_3.

По таблице χ^2 при $\nu = \frac{1}{2}m(m-1) = 0{,}5\cdot 3\cdot(3-1) = 3$ степенях свободы и уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ находим $\chi^2_{табл} = \chi^2_{\alpha;\nu} = \chi^2_{0{,}05;3} = 7{,}81$.

Так как $\chi^2_{расч} > \chi^2_{табл}$, то во всём массиве независимых переменных X наблюдается мультиколлинеарность.

Проверка с помощью F-критерия Фишера мультиколлинеарности между выбранным X_k и остальными аргументами производится по формуле

$$F_k^{расч} = \left(C_{kk} - 1\right)\frac{n-m}{m-1}, \quad k = \overline{1,m}, \qquad (2.4.17)$$

где C_{kk} – элементы матрицы C, стоящие на главной диагонали.

Находим табличное значение F-критерия при $\nu_1 = n - m = 10 - 3 = 7$ и $\nu_2 = m - 1 = 3 - 1 = 2$ степенях свободы и уровне значимости α=0,05. $F_{табл} = F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}$=$F_{\alpha,2,7}$=4,74. Вычисляем F-критерии для каждого из X_1, X_2, X_3. Сравниваем фактическое и табличное значение F-критериев. Расчеты приведем в табл. 2.4.3.

Таблица 2.4.3

$F_1 = \left(C_{11} - 1\right)\cdot\frac{n-m}{m-1} = \left(33{,}856 - 1\right)\cdot\frac{10-3}{3-1} = 114{,}995$	$F_1 > F_{табл}$
$F_2 = \left(C_{22} - 1\right)\cdot\frac{n-m}{m-1} = \left(1{,}444 - 1\right)\cdot\frac{10-3}{3-1} = 1{,}553$	$F_2 < F_{табл}$
$F_3 = \left(C_{33} - 1\right)\cdot\frac{n-m}{m-1} = \left(31{,}985 - 1\right)\cdot\frac{10-3}{3-1} = 108{,}447$	$F_3 > F_{табл}$

Независимые переменные X_1 и X_3 мультиколлинеарны с другими переменными, потому что $F_1^{расч}$ и $F_3^{расч}$ больше $F_{табл}$. Аргумент X_2 не мультиколлинеарен.

С помощью t-критерия Стьюдента проверяем наличие мультиколлинеарности между парами факторов.

По таблице находим табличное значение t-критерия при $n - m = 10 - 3 = 7$ степенях свободы и уровне значимости $\alpha = 0{,}05$. $t_{табл} = t_{\alpha,n-m}$=$t_{0{,}05;7}$=1,895.

Определяем частные коэффициенты корреляции, т.е. значения t-критериев Стьюдента для каждого аргумента и делаем сравнение с $t_{табл}$:

Таблица 2.4.4

$r_{12} = \frac{-C_{12}}{\sqrt{C_{11}\cdot C_{22}}} = \frac{2{,}217}{\sqrt{33{,}856\cdot 1{,}444}} = 0{,}317$	$t_{12}^{расч} = \frac{r_{12}\sqrt{n-m}}{\sqrt{1-r_{12}^2}} = \frac{0{,}317\sqrt{10-3}}{\sqrt{1-0{,}317^2}} = 0{,}885$
$r_{13} = \frac{-C_{13}}{\sqrt{C_{11}\cdot C_{33}}} = \frac{-32{,}232}{\sqrt{33{,}856\cdot 31{,}985}} = \text{-0,980}$	$t_{13}^{расч} = \frac{r_{13}\sqrt{n-m}}{\sqrt{1-r_{13}^2}} = \frac{\text{-0,980}\sqrt{n-m}}{\sqrt{1-\left(\text{-0,980}\right)^2}} = \text{-12,864}$
$r_{23} = \frac{-C_{23}}{\sqrt{C_{22}\cdot C_{33}}} = \frac{1{,}488}{\sqrt{1{,}444\cdot 31{,}985}} = 0{,}219$	$t_{23}^{расч} = \frac{r_{23}\sqrt{n-m}}{\sqrt{1-r_{23}^2}} = \frac{0{,}219\sqrt{n-m}}{\sqrt{1-0{,}219^2}} = 0{,}594$

$$t_{12}^{расч} < t_{табл},$$

$$\left|t_{13}^{расч}\right| > t_{табл},$$
$$t_{23}^{расч} < t_{табл}.$$

Делаем вывод, что между X_1 и X_2, X_2 и X_3 связь не мультиколлинеарна, а между X_1 и X_3 существует мультиколлинеарная связь.

На третьем этапе переменную X_2 можно было бы не рассматривать, так как по критерию Фишера мы уже установили, что она не мультиколлинеарна с другими, т.е. с X_1 и X_3.

Чтобы избавиться от мультиколлинеарности, можно исключить одну из переменных мультиколлинеарной пары X_1 и X_3. Удалить следует переменную X_1, т.к. у неё больше значение F-критерия, а следовательно, она больше влияет на объясняющие переменные, т.е. на аргументы X_2 и X_3. Экономические соображения также совпадают с полученным статистическим выводом.

2.4.3. Проверка линейного уравнения регрессии на гомо - и гетероскедастичность. Графический анализ остатков; критерий μ; параметрический тест Гольдфельда-Квандта

Определение гомо- и гетероскедастичности.

Одной из ключевых предпосылок МНК является условие постоянства дисперсий случайных отклонений, т.е. дисперсия случайных отклонений ε_i должна быть постоянной. Свойство постоянства дисперсии в наблюдениях называется *гомоскедастисчностью.* Невыполнимость данной предпосылки называется *гетероскедастичностью (непостоянство дисперсий отклонений).*

Если

$$\sigma_{\varepsilon_i}^2 = \sigma_{\varepsilon_j}^2 = \sigma^2 = const \text{ для } i, j = \overline{1,n}, \tag{2.4.18}$$

то построенная модель гомоскедастична (см. рис. 2.4.5). В этом случае

$$C\text{ov}\left(\varepsilon_i, \varepsilon_j\right) = \sigma^2 E = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Если $\sigma_{\varepsilon_i}^2 \neq \sigma_{\varepsilon_j}^2$ для $i, j = \overline{1,n},\ i \neq j$, то наблюдается гетероскедастичность.

$$
Cov(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\begin{pmatrix} \sigma^2_{\varepsilon_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2_{\varepsilon_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2_{\varepsilon_n} \end{pmatrix} = \sigma^2\Omega = \sigma^2 \begin{pmatrix} \omega_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2.4.19}
$$

Суть этих явлений изображена графически на рисунках 2.4.5, 2.4.6, 2.4.7.

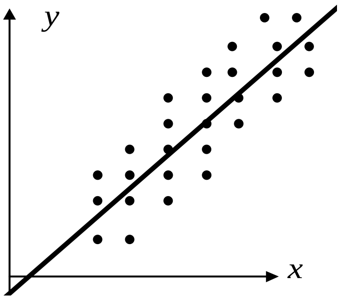


Рис. 2.4.5.
Гомоскедастичность

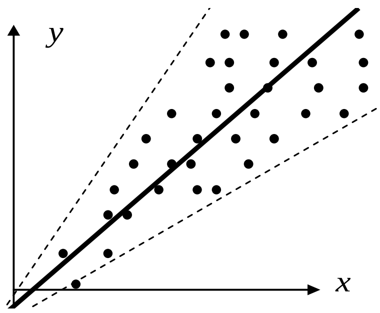


Рис. 2.4.6.
Гетероскедастичность

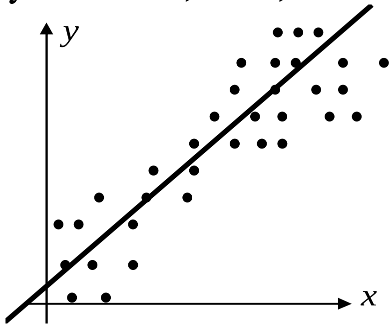


Рис. 2.4.7.
Гетероскедастичность (общий случай)

Из представленных рисунков видно, что с ростом регрессора X дисперсия переменной Y остаётся одинаковой для различных значений x_i (Рис.2.4.5). На рис. 2.4.6 и 2.4.7 с ростом переменной x_i дисперсия Y не остаётся постоянной: увеличивается с ростом x_i на рис. 2.4.6 и уменьшается, а потом увеличивается на рис. 2.4.7.

Примеры гетероскедастичности:

люди с бóльшим доходом в среднем потребляют больше, чем люди с меньшим доходом, и, кроме того, разброс в их потреблении более существенен для большего уровня дохода;

количество потерянного груза при перевозке в среднем увеличивается с увеличением количества перевезённого груза, и, кроме того, разброс потерь более существенен для большего количества перевезённого груза.

Примеры гомоскедастичности:

разброс процента потерь при перевозке груза;

рост ВВП в зависимости от оборачиваемости оборотных активов;

количество потребляемой соли с ростом дохода.

Многие экономические показатели являются гетероскедастичными, что очень плохо для регрессионного анализа. Основной причиной гетероскедастичности является существенное различие в величине исходных данных внутри выборки. Для качественного построения моделей показатели должны быть гомоскедастичны.

Последствия гетероскедастисности.

Последствия применения МНК при наличии гетероскедастичности следующие.

1. Оценки коэффициентов $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m$ по-прежнему остаются несмещёнными и состоятельными, но не эффективными (т.е. они не будут

иметь наименьшую дисперсию по сравнению с оценками данного параметра, полученными другими методами), они не будут даже асимптотически устойчивыми.

2. Дисперсии оценок будут рассчитываться со смещением. Это возникает потому, что S_e^2 все время растет.

3. Выводы на основе t- и F- статистик ненадёжные. Чтобы получить более точные оценки надо, к примеру, учитывать «вес» оценок e_i.

Методы обнаружения гетероскедастичности.

На практике часто для каждого конкретного значения x_i определяется единственное значение y_i, что не позволяет оценить дисперсию случайной величины y для данного x_i, а поэтому обнаружение гетероскедастичности в каждом конкретном случае является сложной задачей.

Не существует какого-либо однозначного метода определения гетероскедастичности. Однако к настоящему времени для такой проверки разработано довольно большое число тестов и критериев.

Наиболее распространёнными методами проверки наличия гетероскедастичности являются

графический анализ остатков;

критерий μ;

параметрический тест Гольдфельда-Квандта;

непараметрический тест Гольдфельда-Квандта;

тест Глейсера.

Графический метод анализа на гетероскедастичность.

Графический анализ отклонений остатков является удобным и достаточно надёжным методом обнаружения гетероскедастичности в случае парной регрессии. При множественной регрессии графический анализ возможен для каждой из объясняющих переменных X_j $\left(j=\overline{1,m}\right)$ отдельно. Для этого по оси абсцисс откладывают значения x_i или x_{ij}, или линейную комбинацию объясняющих переменных X_j, а по оси ординат либо отклонение e_i, либо их квадраты e_i^2 $\left(i=\overline{1,n}\right)$. Графический анализ парной регрессии на гомо- и гетероскедастичность показан на рис. 2.4.8 и 2.4.9.

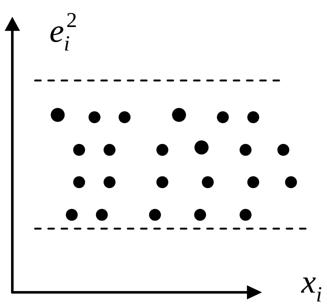


Рис.2.4.8а. Гомоскедастичность

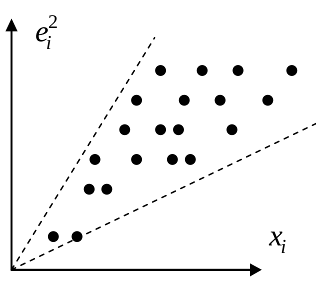


Рис.2.4.8б. Наличие гетероскедастичности

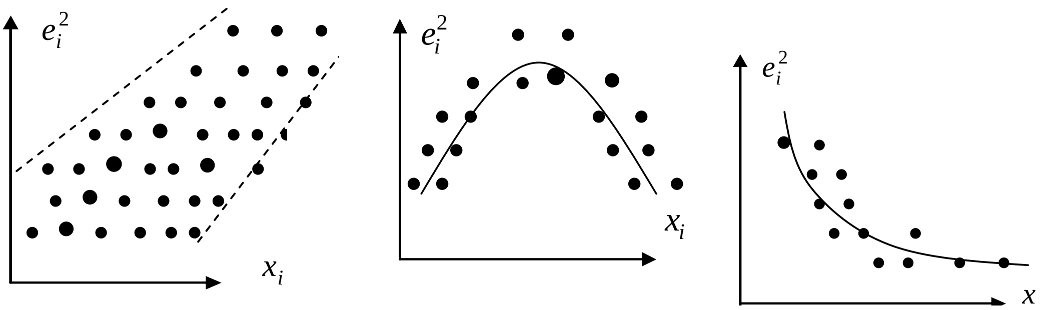


Рис. 2.4.9. Наличие гетероскедастичности

Критерий μ.

Этот критерий используется при большом количестве значений совокупности наблюдений n. Он состоит из следующих шагов.

1. Входные данные зависимой переменной y разбивают на k групп с номерами $r = 1, 2, ..., k$.

Таблица 2.4.5

y_i	y_1	y_2	y_3	y_4	$\cdots$	y_{n_1}	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	y_n
Группы	y_{11}	y_{21}	y_{31}	y_{41}	$\cdots$	$y_{n_1 1}$	$\cdots$	y_{1r}	y_{2r}	$\cdots$	y_{ir}	$\cdots$	$y_{n_r r}$	$\cdots$	y_{1k}	$\cdots$	$y_{n_k k}$
	1-я группа							r-я группа							k-я группа		

2. Для каждой группы наблюдений рассчитывается сумма квадратов отклонений

$$S_r = \sum_{i=1}^{n_r} \left(y_{ir} - \overline{y}_r \right)^2, \tag{2.4.20}$$

где:

$$\overline{y}_r = \frac{1}{n_r} \sum\nolimits_{i=1}^{n_r} y_{ir}, \tag{2.4.21}$$

n_r – число наблюдений в r-й группе.

3. Вычисляют сумму квадратов отклонений в целом для совокупности наблюдений

$$S = \sum_{r=1}^{k} S_r = \sum_{r=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_r} \left(y_{ir} - \overline{y}_r \right)^2 \tag{14.22}$$

4. Вычисляют параметр λ

$$\lambda = \frac{\prod_{r=1}^{k}\left(\frac{S_r}{n_r}\right)^{\frac{n_r}{2}}}{\left(\frac{\sum_{r=1}^{k} S_r}{n}\right)^{\frac{n}{2}}} = \frac{\left(\frac{S_1}{n_1}\right)^{\frac{n_1}{2}} \cdot \left(\frac{S_2}{n_2}\right)^{\frac{n_2}{2}} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{S_k}{n_k}\right)^{\frac{n_k}{2}}}{\left(\frac{S}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}. \tag{2.4.23}$$

5. Вычисляют критерий

$$\mu = -2\ln\lambda. \tag{2.4.24}$$

Этот критерий приближенно соответствует распределению χ^2 со степенью свободы $(k-1)$ и уровнем значимости α. Если $\mu > \chi^2_{табл} = \chi^2_{\alpha,k-1}$, то в рассматриваемом множестве наблюдений имеет место гетероскедастичность.

Тест Гольдфельда-Квандта

Данный тест используется для проверки такого типа гетероскедастичноси, когда дисперсия остатков возрастает пропорционально квадрату одной из независимых переменных X_j $(j=1,2,..,m)$, которая подозревается на гетероскедастичность. Если априори тяжело определить такую X_j, то делают проверку по каждой переменной и в каждом случае применяют тест Гольдфельда-Квандта. При этом предполагается, что случайная составляющая ε распределена нормально. Таким способом можно проранжировать все переменные X_j по подозрению на гетероскедастичность.

Чтобы обнаружить наличие гетероскедастичности по тесту Гольдфельда-Квандта, необходимо выполнить следующие шаги.

1. Упорядочить n наблюдений по мере возрастания переменной X_j.

2. Исключить c средних наблюдений из общего количества наблюдений. Оптимальное значение c определяется по формуле:

$$c = \frac{4}{15}\cdot n. \tag{2.4.25}$$

Примечание. Можно брать c приближённо равным четверти наблюдений. Если наблюдений мало, то ничего не исключают, а только разбивают наблюдаемые значения на две подгруппы.

3. Разделить совокупность на две группы (соответственно, с малыми и большими значениями выбранного фактора) и по каждой из групп определить уравнение регрессии $\hat{y}_i = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_i$.

4. Определить остаточную сумму квадратов для первой $S_1 = \sum_{i=1}^{n_1}(y_i - \hat{y}_{1i})^2$ и второй регрессии $S_2 = \sum_{i=n-n_1+1}^{n}(y_i - \hat{y}_{2i})^2$.

5. Вычислить отношение:

$$R^* = \frac{S_1}{S_2} \text{ или } R^* = \frac{S_2}{S_1}. \tag{2.4.26}$$

В числителе должна быть бóльшая сумма квадратов.

Смысл этого отношения очевиден, если $S_1 = S_2$, то гетероскедастичность отсутствует.

Полученное отношение приближённо имеет F-распределение критерия Фишера со степенями свободы $\upsilon_1 = (n - c - 2m)/2$, $\upsilon_2 = (n - c - 2m)/2$.

По статистическим таблицам определяют значение $F_{табл}$ при степенях свободы $\upsilon_1 = (n - c - 2m)/2$, $\upsilon_2 = (n - c - 2m)/2$ и уровнем значимости α.

Если $R^* > F_{табл}$, то гетерескедастичноть имеет место.

Устранение гетероскедасичности

Эконометрическая модель, которая является гетероскедастичной, называется обобщённой моделью.

Поскольку явление гетероскедастичности связано с тем, что изменяется дисперсия остатков, а ковариация между ними отсутствует, то для расчетов параметров регрессии матричным способом формируется матрица Ω при соотношении $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \sigma^2\Omega$, которая должна быть положительно определенной и диагональной

$$\Omega = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \frac{1}{\lambda_i} & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}. \tag{2.4.27}$$

Для этой матрицы значения λ_i можно вычислять тремя путями, в зависимости от гипотезы, которая выдвинута относительно изменения дисперсии остатков.

Если

$$\sigma^2_{\varepsilon_i} = \sigma^2 x_{ij}, \text{ то } \lambda_i = \frac{1}{x_{ij}}, \ i = \overline{1,n} \text{ для выбранного } X_j; \tag{2.4.27а}$$

$$\sigma^2_{\varepsilon_i} = \sigma^2 x^2_{ij}, \text{ то } \lambda_i = \frac{1}{x^2_{ij}}, \ i = \overline{1,n} \text{ для выбранного } X_j; \tag{2.4.27б}$$

$$\sigma^2_{\varepsilon_i}=\sigma^2\left|\varepsilon_i\right|^2\text{, то }\lambda_i=\left|e_i\right|^2,\ i=\overline{1,n}\text{ для выбранного }X_j. \qquad (2.4.27c)$$

Здесь j – номер выбранной независимой переменной X_j, i – номер наблюдаемого для неё значения.

При наличии гетероскедастичности для оценки параметров модели целесообразно использовать обобщённый метод наименьших квадратов (метод Эйткена), оператор оценивания которого имеет вид:

$$\hat{\hat{A}}=\left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1}\cdot\left(X'\Omega^{-1}Y\right), \qquad \textbf{(2.4.28)}$$

или

$$\hat{\hat{A}}=\left(X'V^{-1}X\right)^{-1}\left(X'V^{-1}Y\right)\text{, где }V=\sigma^2_{\varepsilon}\Omega. \qquad (2.4.29)$$

При таком оценивании вектор $\hat{\hat{A}}$ имеет несмещённую линейную оценку параметров модели, которая имеет наименьшую дисперсию.

Этот метод дает более точные результаты оценок при построении регрессионных моделей по сравнению с обычным МНК.

Пример 2.4.2. Пусть имеется зависимость среднедушевых сбережений за год y от дохода x в 15 семьях, представленных в табл. 2.4.6.

Табл.2.4.6

Номер семьи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
y, *тыс. грн.*	0,8	0,9	1,2	0,9	1,6	1,3	1,8	1,4	2,9	1,7	3,5	2,1	4,6	2,1	5,1
x, *тыс. грн.*	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

Требуется:

построить регрессионную модель, характеризирующую зависимость денежных сбережений Y от среднедушевого дохода X ;

проверить выполнение условия гомоскедастичности остатков;

в случае обнаружения гетероскедастичности остатков для построения модели применить обобщенный МНК.

Решение.

Регрессионную модель можно строить «вручную», с помощью Анализа данных, или с помощью Мастера диаграмм. По представленным данным построена парная регрессионная модель, которая имеет следующий вид:

$$\hat{y}=-1,923+0,238x. \qquad (2.4.30)$$

Проверим эту модель на наличие гетероскедастичности последовательно графическим методом, с помощью критерия μ и с помощью критерия Гольдфельда-Квандта.

1. Применим графический метод выявления зависимости e_i и e_i^2 от значений x_i. С помощью «Анализа данных» найдём остатки e_i и построим графики, рис. 2.4.10.

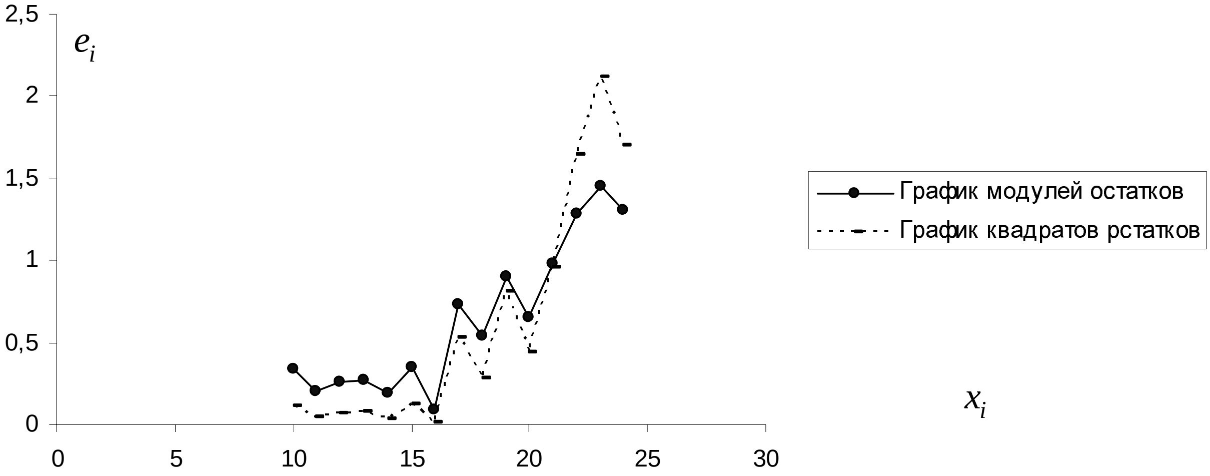


Рис. 2.4.10. Графики $|e_i|$ и e_i^2

По графику на рис. 2.4.10 очевидно наличие гетероскедастичности.

2. Применим критерий μ.

Исходные данные зависимой переменной Y разобьем на $k = 3$ группы.

Таблица 2.4.7

Группа 1	Группа 2	Группа 3
$n_1 = 5$	$n_2 = 6$	$n_3 = 4$
0,8	1,3	2,1
0,9	1,8	4,6
1,2	1,4	2,1
0,9	2,9	5,1
1,6	1,7	
	3,5	

Для каждой выделенной группы находим

$$\overline{y}_r = \frac{1}{n_r}\sum_{i=1}^{n_r} y_{ir}, \quad S_r = \sum_{i=1}^{n_r}\left(y_{ir} - \overline{y}_r\right)^2 \ \text{и} \ S = \sum_{r=1}^{k} S_r. \tag{2.4.31}$$

По этим величинам находим

$$\lambda = \frac{\left(\frac{S_1}{n_1}\right)^{\frac{n_1}{2}} \cdot \left(\frac{S_2}{n_2}\right)^{\frac{n_2}{2}} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{S_k}{n_k}\right)^{\frac{n_k}{2}}}{\left(\frac{S}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}, \tag{2.4.32}$$

$$\mu = -2\ln\lambda \qquad (2.4.33)$$

Для удобства вычислений составляем таблицу 2.4.8.

Таблица 2.4.8

№	Гр. 1	Гр. 2	Гр. 3	$\left(y_{i1}-\overline{y}_1\right)^2$	$\left(y_{i2}-\overline{y}_2\right)^2$	$\left(y_{i3}-\overline{y}_3\right)^2$	
1	0,8	1,3	2,1	0,078	0,64	1,891	
2	0,9	1,8	4,6	0,032	0,09	1,266	
3	1,2	1,4	2,1	0,014	0,49	1,891	
4	0,9	2,9	5,1	0,032	0,64	2,641	
5	1,6	1,7		0,270	0,16		
6		3,5			1,96		
$\overline{y}_r$	1,08	2,1	3,475	$S_1=0{,}428$	$S_2=3{,}98$	$S_3=7{,}688$	$S=12{,}096$
				$n_1=5$	$n_2=6$	$n_3=5$	$n=15$

$$\left(\frac{S_1}{n_1}\right)^{\frac{n_1}{2}} = \left(\frac{0{,}428}{5}\right)^{\frac{5}{2}} = 0{,}002,\ \left(\frac{S_2}{n_2}\right)^{\frac{n_2}{2}} = \left(\frac{3{,}98}{6}\right)^{\frac{6}{2}} = 0{,}292,\ \left(\frac{S_3}{n_3}\right)^{\frac{n_3}{2}} = \left(\frac{7{,}688}{4}\right)^{\frac{4}{2}} = 3{,}694,$$

$$\left(\frac{S}{n}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{12{,}096}{15}\right)^{\frac{15}{2}} = 0{,}199.$$

По формуле (2.4.32) определим λ

$$\lambda = \frac{0{,}002\cdot 0{,}292\cdot 3{,}694}{0{,}199} = 0{,}012.$$

По формуле (2.4.33) определим критерий μ

$$\mu = -2\ln\lambda = -2\ln(0{,}012) = -2\cdot(-4{,}459) = 8{,}912.$$

По статистическим таблицам определяем критерий $\chi^2_{табл}$ при числе степеней свободы $\nu = k-1 = 3-1 = 2$ и $\alpha = 0{,}05$.

Табличное значение $\chi^2_{табл} = \chi^2_{0{,}05,\ 2} = 5{,}991$.

Так как $\mu > \chi^2_{табл}$, то с надёжностью не менее 95% можно утверждать, что в массиве данных наблюдается гетероскедастичность.

3. Применим параметрический тест Гольдфельда-Квандта.

Предположим, что дисперсии остатков пропорциональны квадратам значений независимой переменной X, т.е. $e_i^2 = k\cdot x_i^2$, $i=\overline{1,n}$.

Упорядочим наблюдения Y по мере возрастания переменной X (они уже упорядочены и представлены в исходных данных).

Исключаем c средних наблюдений из общего количества наблюдений. Оптимальное значение c определяется по формуле

$$c = \frac{4}{15} \cdot n = \frac{4}{15} \cdot 15 = 4.$$

Можно брать c приближённо равным четверти наблюдений.

Для упрощения дальнейших расчетов отбросим 5 средних значений.

Разделим оставшуюся совокупность на две группы (соответственно с малыми и большими значениями выбранного фактора и по каждой группе определяем уравнение регрессии (см. табл. 2.4.9 и табл. 2.4.10).

Таблица 2.4.9

x_i	y_i	$\hat{y}_{1i}$	$\left(\hat{y}_{1i} - y_i\right)^2$
10	0,8	0,76	0,0016
11	0,9	0,92	0,0004
12	1,2	1,08	0,0144
13	0,9	1,24	0,1156
14	1,6	1,4	0,04
		Σ	0,172

$\hat{y}_1 = 0,16x - 0,84;$

Таблица 2.4.10

x_i	y_i	$\hat{y}_{2i}$	$\left(\hat{y}_{2i} - y_i\right)^2$
20	3,5	2,84	0,4356
21	2,1	3,16	1,1236
22	4,6	3,48	1,2544
23	2,1	3,8	2,89
24	5,1	4,12	0,9604
		Σ	6,664

$\hat{y}_2 = 0,32x - 3,56.$

Эти вычисления целесообразно выполнять с помощью «Анализа данных».

Определим остаточную сумму квадратов для первой регрессии $S_1 = \sum_{i=1}^{n_1} \left(y_i - \hat{y}_{1i}\right)^2 = 0,172$ и второй регрессии $S_2 = \sum_{i=n-n_1+1}^{n} \left(y_i - \hat{y}_{2i}\right)^2 = 6,664$.

Вычислим отношение

$$R^* = \frac{S_2}{S_1} = \frac{6,664}{0,172} = 38,744.$$

Полученное отношение приближённо имеет F-распределение критерия Фишера со степенями свободы

$$\upsilon_1 = (n - c - 2m)/2 = (15 - 4 - 2)/2 = 4,5 \approx 5,\ \upsilon_2 = (n - c - 2m)/2 = 4,5 \approx 5.$$

По статистическим таблицам определяют значение $F_{табл} = F_{0,05,\ 5,\ 5} = 5,05$.

Так как $R^* > F_{табл}$, то гетероскедастичноть имеет место.

Определяем оценки параметров регрессионной модели по обобщённому, взвешенному методу наименьших квадратов (ОМНК), матричная запись которого имеет вид:

$$\hat{\hat{A}} = \left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1} X'\Omega^{-1}Y,$$

где:

$$\hat{\hat{A}} = \begin{pmatrix} \hat{\hat{a}}_0 \\ \hat{\hat{a}}_1 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} x_1^2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & x_2^2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & x_n^2 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ ... & ... \\ 1 & x_n \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Примечание. Если бы было несколько объясняющих переменных $X_1, X_2, ..., X_j, ..., X_m$ и была бы выбрана j-я переменная, то на главной диагонали матрицы Ω стояли бы числа $x_{1j}^2, x_{2j}^2, x_{3j}^2, ..., x_{n-1j}^2, x_{nj}^2$.

В нашем случае:

$$X' = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \end{Vmatrix}$$

$$\Omega = \begin{Vmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 121 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 144 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 169 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 196 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 225 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 256 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 289 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 324 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 361 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 441 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 484 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 529 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 576 \end{Vmatrix}$$

$$\Omega^{-1} = \begin{Vmatrix} 0,01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,008 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,007 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,006 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,005 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,004 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,004 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,003 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,003 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,003 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,004 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,002 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,002 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,002 \end{Vmatrix}$$

$$X'\Omega^{-1} = \begin{Vmatrix} 0,010 & 0,008 & 0,007 & 0,006 & 0,005 & 0,004 & 0,004 & 0,004 & 0,003 & 0,003 & 0,003 & 0,002 & 0,002 & 0,002 & 0,002 \\ 0,100 & 0,091 & 0,083 & 0,077 & 0,071 & 0,067 & 0,063 & 0,059 & 0,056 & 0,053 & 0,050 & 0,048 & 0,046 & 0,044 & 0,042 \end{Vmatrix}$$

$$X'\Omega^{-1}X = \begin{Vmatrix} 0{,}064 & 0{,}947 \\ 0{,}947 & 15{,}000 \end{Vmatrix}$$

$$\left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1} \begin{Vmatrix} 218{,}834 & -13{,}816 \\ -13{,}816 & 0{,}939 \end{Vmatrix}$$

$$X'\Omega^{-1}Y = \begin{Vmatrix} 0{,}1044 \\ 1{,}7653 \end{Vmatrix}$$

$$\hat{\hat{A}} = \begin{pmatrix} \hat{\hat{a}}_0 \\ \hat{\hat{a}}_1 \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} -1{,}5400 \\ 0{,}2149 \end{Vmatrix}$$

Таким образом, уравнение регрессии, полученное ОМНК, имеет вид

$$\hat{\hat{y}} = 0{,}215x - 1{,}540\,.$$

Это уравнение лучше отражает зависимость между x и y, чем уравнение $\hat{y} = 0{,}238x - 1{,}923$, полученное МНК. Это показано на Рис.2.4.11.

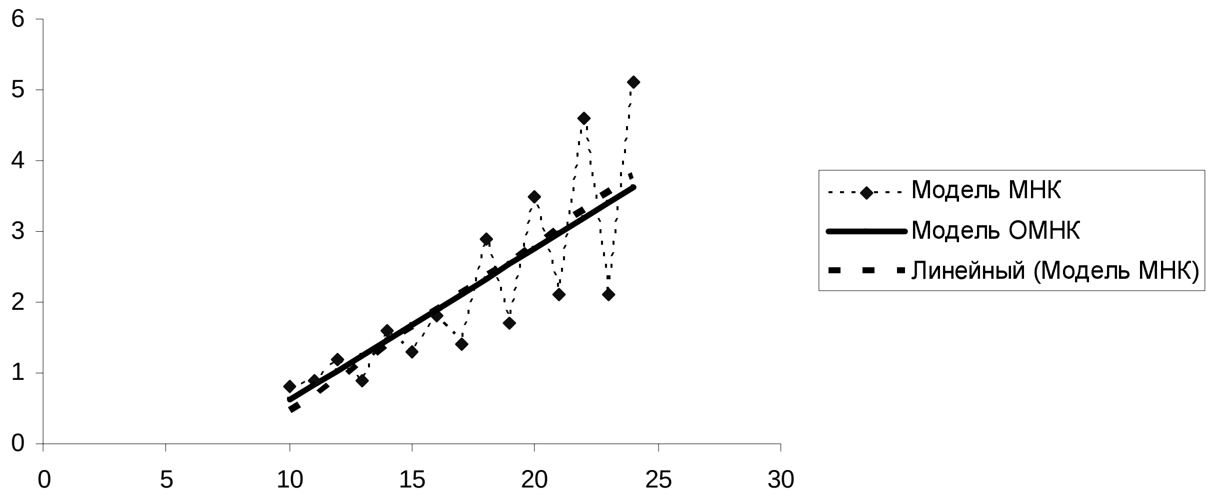


Рис. 2.4.11. Уравнение регрессии $\hat{y} = 0{,}238x - 1{,}923$ (модель МНК) и $y = -1{,}540 + 0{,}215x$ (модель ОМНК) примера 2.4.2

2.4.4. Автокорреляция в регрессионных моделях. Метод рядов и критерий Дарбина-Уотсона обнаружения автокорреляции

Если не выполняется третье требование метода наименьших квадратов, т.е.

$$C\operatorname{ov}\left(\varepsilon_i, \varepsilon_j\right) \neq 0, \text{ при } i, j = \overline{1,n}, \qquad (2.4.34)$$

то говорят об автокорреляции остатков (случайной составляющей) в построенной модели.

Зависимость текущих значений случайного члена от их непосредственно предшествующих значений называется автокорреляцией.

Если в качестве одного из аргументов регрессионной модели выбирается фактор, в котором существует корреляция между последовательными его значениями, то будет наблюдаться и корреляция последовательных значений остатков. Автокорреляция остатков чаще всего наблюдается тогда, когда эконометрическая модель строится на основе временных рядов.

Остатки ε_i подчинены авторегрессионному процессу первого порядка, если

$$\varepsilon_i = \rho\varepsilon_{i-1} + \delta_i,\ i = \overline{1,n}. \tag{2.4.35}$$

Здесь ρ – коэффициент лагового остатка. Если $|\rho| < 1$, то с каждым шагом влияние лагового остатка уменьшается. Если $\rho = 0$, то автокорреляция отсутствует.

Наиболее распространенными причинами автокорреляции в регрессионных моделях являются

ошибочная спецификация регрессионной модели, т.е. вместо какой-либо нелинейной зависимости (полиномиальной, степенной, экспоненциальной и т.д.) выбрана линейная;

отсутствие среди аргументов модели новой, независимой переменной, более точно определяющей колеблемость фактор-функции;

инерционность и цикличность многих экономических процессов, лаговые опоздания в экономических процессах.

Последствия автокорреляции следующие:

построенная регрессионная модель является нереальной, несмотря на большие значения (близкие к единице) коэффициента детерминации и коэффициента множественной корреляции и отсутствие значимости коэффициентов регрессии;

используемый для построения модели МНК дает несмещенные и состоятельные, но неэффективные оценки коэффициентов модели;

неэффективность оценок параметров эконометрической модели приводит к неэффективным прогнозам по модели;

статистические критерии Фишера и Стьюдента (F-критерий и t-критерий) не могут быть использованы;

ввиду неэффективности оценок регрессионных уравнений тестирование гипотез становится недостоверным.

Способы устранения автокорреляции следующие:

введение в модель в качестве фактор-аргумента времени;

переход к темповым или относительным показателям;

включение в модель дополнительно неучтенных факторов;

использование для построения регрессионных моделей ОМНК (метода Эйткена).

Методы обнаружения автокорреляции следующие:

метод рядов;

критерий Дарбина-Уотсона;

критерий фон Неймана и другие.

Рассмотрим два первых метода.

Метод рядов.

Этот метод является начальным этапом проверки наличия автокорреляции. С его помощью проверяют коррелированность остатков, являющуюся необходимым, но недостаточным условием автокорреляции. Проверяется коррелированность только соседних величин ε_i. Соседними считаются величины, которые расположены последовательно или по времени или по возрастающей независимой переменной.

Для этого последовательно проверяются знаки отклонения ε_i.

Рядом называется непрерывная последовательность одинаковых знаков. Длина ряда – это количество знаков в ряду.

Вводятся следующие обозначения:

n – число наблюдений;

n_1 – общее количество знаков «+»;

n_2 – общее количество знаков «–»;

k – количество рядов.

Для небольшого числа наблюдений ($n_1 < 20$ и $n_2 < 20$) по специальным таблицам Сведа-Эйзенхарта в зависимости от уровня значимости $\alpha = 0,05$ и в зависимости от n_1 и n_2 находят числа k_1 и k_2 (критические числа).

Если $k_1 < k < k_2$ – автокорреляция отсутствует,

если $k \le k_1$ имеем положительную автокорреляцию остатков,

если $k \ge k_2$ имеем отрицательную автокорреляцию остатков.

Пример.2.4.3. Пусть построена парная регрессионная модель, в результате чего получена следующая последовательность остатков

Таблица 2.4.11

e_i	8,3	4,26	-12,46	-1,86	-7,38	5,26	-9,66	-2,26	8,34	7,46
Знак	+	+	–	–	–	+	–	–	+	+

В данном примере $n_1 = 5$ (пять плюсов), $n_2 = 5$ (пять минусов), $k = 5$ (5 рядов).

По таблицам Сведа-Эйзенхарта в зависимости от n_1, n_2 и α находим числа $k_1 = 2$, $k_2 = 10$.

Так как $k_1 < k < k_2$, т.е. $2 < 5 < 10$, то автокорреляция отсутствует.

Критерий Дарбина-Уотсона.

Тест Дарбина-Уотсона применяется в том случае, если выполняются следующие условия:

в регрессионном уравнении присутствует свободный член;

регрессоры (фактор-аргументы) являются нестохастическими;

в регрессионном уравнении нет лаговых значений зависимой переменной Y.

dw-критерий Дарбина-Уотсона определяется по формуле

$$dw = \frac{\sum_{j=2}^{n} \left(e_i - e_{i-1}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}, \qquad (2.4.36)$$

где $e_i = y_i - \hat{y}_i$, $i = \overline{1,n}$.

dw-статистика учитывает только автокорреляцию первого порядка.

Значение dw-статистики по своему распределению близко к распределению величины

$$2\left(1 - r(1)\right),$$

где $r(1)$ – выборочная автокорреляционная функция остатков первого порядка. Она определяется по формуле

$$r(1) = r_{e_i, e_{i-1}} = \frac{\sum_{i=2}^{n} e_i \cdot e_{i-1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} e_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=2}^{n} e_{i-1}^2}}. \qquad (2.4.37)$$

Значение dw-статистики распределяется в интервале от 0 до 4. Идеальное значение статистики равно 2. В этом случае автокорреляция отсутствует.

Если значение $dw < 2$, то это соответствует о положительной автокорреляции остатков, а если $dw > 2$ – отрицательной.

Оценки, получаемые по dw-критерию являются не точечными, а интервальными.

Возникает вопрос, какие значения dw-критерия можно считать статистически близкими к 2? Для ответа на этот вопрос разработаны специальные таблицы критических точек статистики Дарбина-Уотсона, позволяющие при данном числе наблюдений n, количестве фактор-аргументов m и заданном уровне значимости α определять границы преемственности (критические точки) наблюдаемой статистики dw.

Для заданных α, n и m в таблице указываются два числа d_1 и d_2, где

d_1 – нижняя граница (нижнее критическое значение),

d_2 – верхняя граница (верхнее критическое значение статистики dw).

Для проверки гипотезы об отсутствии автокорреляции остатков используется числовой отрезок (Рис. 2.4.12).

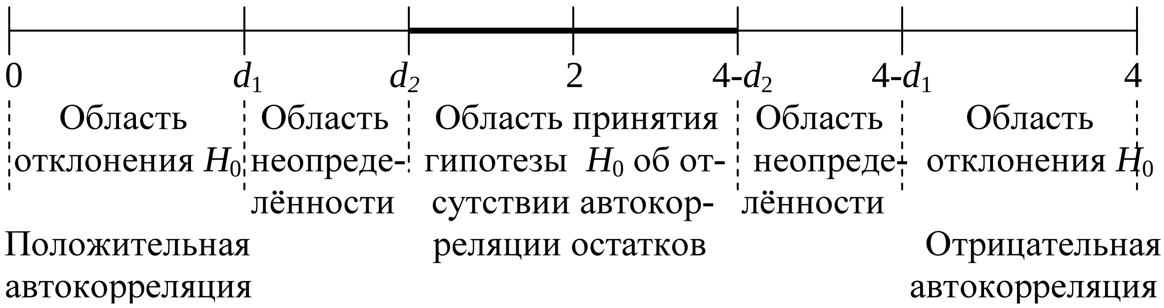


Рис. 2.4.12. Нижние и верхние границы критических точек Дарбина-Уотсона

Выводы о наличии или отсутствии автокорреляции осуществляются по следующей схеме. Если

$dw < d_1$, то это свидетельствует о положительной автокорреляции остатков;

$dw > 4 - d_1$, то это свидетельствует об отрицательной автокорреляции остатков;

при $d_2 < dw < 4 - d_2$ гипотеза H_0 об отсутствии автокорреляции остатков принимается, т.е. автокорреляция отсутствует;

если $d_1 < dw < d_2$ или $4 - d_2 < dw < 4 - d_1$, то гипотеза об отсутствии автокорреляции не может быть ни принята, ни отклонена.

Примечание. Не обращаясь к таблице критических точек Дарбина-Уотсона, можно пользоваться грубым правилом и считать, что автокорреляция остатков отсутствует, если $1{,}5 < dw < 2{,}5$.

Если ситуация оказалась неопределенной, т.е. $d_1 < dw < d_2$, то в качестве критерия применяют коэффициент автокорреляции первого порядка:

$$r(1) = \frac{\sum_{i=2}^{n} e_i \cdot e_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}. \qquad (2.4.39)$$

Для принятия решения о наличии или отсутствии автокорреляции в исследуемом ряду, фактическое значение коэффициента автокорреляции, вычисленное по формуле (2.4.39) сопоставляется с табличным (критическим) значением.

Если $r(1)_{расч} < r(1)_{табл}$, то автокорреляция в исследуемом ряду отсутствует, если же $r(1)_{расч} > r(1)_{табл}$, то делается вывод о наличии автокорреляции.

Приведём пример использования предлагаемых методов для обнаружения автокорреляции в остатках.

Пример 2.4.4. В табл. 2.4.11 приведены данные о доходе населения X в млн. грн. и розничный товарооборот Y (в млн. грн.).

Требуется:

построить линейную модель зависимости $\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x$;

проверить гипотезу о наличии автокорреляции в остатках с помощью критерия Дарбина-Уотсона;

при наличии автокорреляции применить методы по ее устранению (изменить спецификацию модели).

Решение. Уравнение регрессии $\hat{y} = 1,311x - 3,031$. По этому уравнению составляем табл. 2.4.11.

Таблица 2.4.11

№ п/п	x_i	y_i	$\hat{y}_i$	$e_i = y_i - \hat{y}_i$	e_i^2	$(e_i - e_{i-1})^2$
1	2,5	1,1	0,247	0,853	0,728	–
2	3	1,2	0,902	0,297	0,089	0,309
3	3,2	1,3	1,165	0,135	0,018	0,026
4	3,5	1,3	1,558	-0,258	0,067	0,155
5	3,6	1,4	1,689	-0,289	0,084	0,001
6	3,7	1,5	1,821	-0,320	0,103	0,001
7	4	2	2,214	-0,214	0,046	0,011
8	4,2	2,2	2,476	-0,276	0,076	0,004
9	4,5	2,4	2,869	-0,469	0,220	0,037
10	4,7	2,7	3,131	-0,431	0,186	0,001
11	4,9	3	3,394	-0,394	0,155	0,001
12	5	3,4	3,525	-0,125	0,015	0,072
13	5,1	3,9	3,656	0,244	0,060	0,136
14	5,5	4,5	4,180	0,320	0,102	0,006
15	5,8	5,5	4,574	0,927	0,858	0,368
$\sum=$					2,806	1,129

Рассчитаем критерий Дарбина-Уотсона

$$dw_{расч} = \frac{\sum_{i=2}^{n}(e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{n} e_i^2} = \frac{1,129}{2,806} = 0,403 \cdot$$

Определим по таблице критические точки d_1 и d_2 критерия $dw_{табл}$ для числа наблюдений $n = 15$, числа независимых переменных в модели $m = 1$ и уровня значимости $\alpha = 0,05$. Получим: $d_1 = 1,08$; $d_2 = 1,36$.

Так как $0 < dw_{расч} < d_1$, т.е. ($0 < 0,403 < 1,08$), то имеется положительная автокорреляция остатков и пользоваться построенной моделью нельзя.

Попробуем изменить линейную спецификацию модели на параболическую. Тогда по МНК получим:

$$\hat{y} = 0,475x^2 - 2,661x + 4,863.$$

Вычисление фактического значения $dw_{расч}$ приведено в табл. 2.4.12.

Таблица 2.4.12

$\hat{y} = 0,475x^2 - 2,661x + 4,863$						
№ п/п	x_i	y_i	$\hat{y}_i$	$e_i = y_i - \hat{y}_i$	e_i^2	$(e_i - e_{i-1})^2$
1	2,5	1,1	1,179	-0,079	0,006	
2	3	1,2	1,155	0,045	0,002	0,015
3	3,2	1,3	1,212	0,089	0,008	0,002
4	3,5	1,3	1,368	-0,068	0,005	0,025
5	3,6	1,4	1,439	-0,039	0,002	0,001
6	3,7	1,5	1,520	-0,020	0,000	0,004
7	4	2	1,819	0,181	0,033	0,040
8	4,2	2,2	2,066	0,135	0,018	0,002
9	4,5	2,4	2,507	-0,107	0,011	0,058
10	4,7	2,7	2,849	-0,149	0,022	0,002
11	4,9	3	3,229	-0,229	0,052	0,006
12	5	3,4	3,433	-0,033	0,001	0,038
13	5,1	3,9	3,646	0,254	0,064	0,082
14	5,5	4,5	4,596	-0,096	0,009	0,122
15	5,8	5,5	5,408	0,092	0,009	0,035
					0,243	0,430

$$dw_{расч} = \frac{\sum_{i=2}^{n}(e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{n} e_i^2} = \frac{0,430}{0,243} = 1,770$$

Фактическое значение критерия Дарбина-Уотсона составляет: $d = 1,770$.

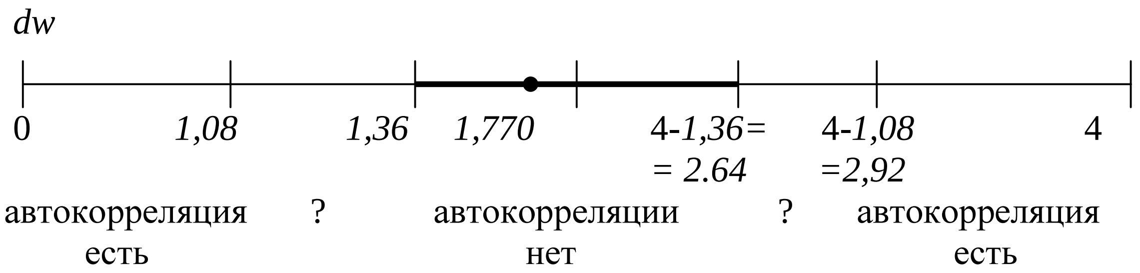


Рис. 2.4.12.

Так как $d_1 < d < 4 - d_1$ $(1,36 < 1,770 < 2,64)$, то, следовательно, автокорреляция в остатках не наблюдается.

Цель исследования достигнута.

Корректировку модели регрессии при наличии автокорреляции в остатках можно также проводить с помощью ОМНК (метода Эйткена).

2.5. ФИКТИВНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ В РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЯХ

В регрессионных моделях в качестве объясняющих переменных часто приходится использовать не только количественные (определяемые численно), но и качественные переменные. Это могут быть разного рода признаки: профессия, пол, климатические условия, и др. Чтобы ввести такие переменные в регрессионную модель, им должна быть присвоена некоторая цифровая метка, т.е. качественные переменные должны быть преобразованы в количественные. Такого вида сконструированные переменные в эконометрике принято называть фиктивными, структурными или искусственными.

Например, при опросе группы людей, 1 может означать, что опрашиваемый – мужчина, 0 – женщина. К фиктивным переменным иногда относят регрессор, состоящий из одних единиц (т.е. константу, свободный член), а также временной тренд.

Если надо изучить зависимость размера заработной платы Y работников не только от количественных факторов $X_1, X_2, ..., X_m$, но и от качественного признака Z, например, пола работника, то можно поступить двумя способами, рассмотреть две регрессионные модели по женщинам и мужчинам отдельно

$$y_i^{(M,\,Ж)} = a_0 + a_1 x_{i1} + a_2 x_{i2} + ... + a_m x_{im} + \varepsilon_i \left(i = \overline{1,n}\right) \qquad (2.5.1)$$

а затем изучить различие между ними.

Но в основном используют другой подход, позволяющий оценивать влияние значений количественных переменных и уровней качественных признаков с помощью одного уравнения регрессии. В этом случае первоначальная регрессионная модель заработной платы изменится и примет вид

$$y_i = a_0 + a_1 x_{i1} + a_2 x_{i2} + ... + a_m x_{im} + \alpha z_i + \varepsilon_i \ \left(i = \overline{1,n}\right), \qquad (2.5.2)$$

где:

$$z_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й работник мужского пола;} \\ 0, & \text{если } i\text{-й работник женского пола.} \end{cases}$$

Фиктивные переменные позволяют строить и оценивать кусочно-линейные модели, которые можно применять для исследования структурных изменений.

Пусть, например, исследуется зависимость выпуска продукции Y от размера основного фонда предприятия X. При этом есть основания считать, что в момент времени t произошла структурная перестройка, и характер зависимости изменился.

Чтобы оценить такую ситуацию, введём бинарную переменную

$$\nu_t = \begin{cases} 0 & \text{при } t \le t_0, \\ 1 & \text{при } t > t_0. \end{cases} \qquad (2.5.3)$$

Наша модель запишется в виде

$$y_t = a_0 + a_1 x_t + a_2 \left(x_t - x_{t_0} \right) \nu_t, \ t = \overline{1,T}. \qquad (2.5.4)$$

При $t \le t_0$ линия регрессии имеет наклон a_1, при $t > t_0$ наклон равен $\left(a_1 + a_2 \right)$ и разрыва в точке x_t не происходит. При $a_2 = 0$ приходим к выводу, что в момент t_0 структурного изменения не происходит.

Виды фиктивных переменных. В регрессионных моделях с временными рядами используют три основных вида фиктивных переменных. Рассмотрим их последовательно.

1. Переменные – индикаторы принадлежности наблюдения к определённому периоду. Их используют для моделирования скачкообразных структурных сдвигов. Постоянный структурный сдвиг моделируется переменной, равной 0 до определённого момента времени и 1 для всех наблюдений после этого момента времени (см. формулу 2.5.4).

2. Сезонные переменные – для моделирования сезонности.

Например, модель потребления, учитывающая сезонные колебания:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3, \qquad (2.5.5)$$

где:

$$x_1 = \begin{cases} 1 & \text{для зимних месяцев,} \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$x_2 = \begin{cases} 1 & \text{для весенних месяцев,} \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$x_3 = \begin{cases} 1 & \text{для летних месяцев,} \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Следует отметить, что вводить четвёртую переменную x_4 для осенних месяцев не требуется, так как в этом случае все переменные оказались бы связанными тождеством

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \qquad (2.5.6)$$

что привело бы их к полной коллинеарности и вырожденности информационной матрицы $\left(X' \cdot X\right)$.

Объём потребления составит

$$
\begin{array}{ll}
y = b_0 & \text{для осенних месяцев;} \\
y = b_0 + b_1 & \text{для зимних месяцев;} \\
y = b_0 + b_2 & \text{для весенних месяцев;} \\
y = b_0 + b_3 & \text{для летних месяцев.}
\end{array}
$$

При этом, если в результате регрессионного анализа окажется, что $b_3 = 0$, то это значит, что между летними и осенними сезонами различие в потреблении несущественно. Если $b_1 = b_2$, то отсутствует различие между потреблением зимой, весной и т.д.

3. Линейный временной тренд используется для моделирования плавных постепенных структурных сдвигов. Эта фиктивная переменная показывает, какой промежуток времени прошёл от некоторого «нулевого» момента времени до того момента времени, к которому относится данное наблюдение (координаты данного наблюдения на временной шкале). Если промежутки времени между последовательными наблюдениями одинаковы, то временной тренд можно составить из номеров наблюдений. Временной тренд отличается от бинарных фиктивных переменных тем, что имеется возможность использовать его степени: t^2, t^3 и т. д. Они помогают моделировать гладкий, но нелинейный тренд.

Возможна комбинация фиктивных переменных различных видов. Она позволяет моделировать изменение наклона тренда с определённого момента. В этом случае помимо тренда в регрессию вводится переменная, которая в начале выборки до некоторого момента времени равна 0, а далее представляет собой временной тренд (1,2,3… в случае одинаковых интервалов между наблюдениями).

Замечание. Если в регрессионной модели учитываются факторы с бо́льшим, чем две, числом k градаций, то необходимо ввести в модель $k-1$ бинарных переменных. При этом следует увеличить объём выборки n, так как надёжность статистических выводов существенно зависит от отношения объёма выборки к общему числу всех параметров регрессионной модели: чем больше величина отношения $n/(m+1)$, тем надёжнее статистические выводы.

Преимущества использования фиктивных переменных следующие:

интервалы между наблюдениями не обязательно должны быть одинаковыми. В выборке могут быть пропущены наблюдения;

коэффициенты при фиктивных переменных легко интерпретировать, они наглядно представляют структуру динамического процесса;

для оценивания модели не приходится выходить за рамки классического метода наименьших квадратов.

Рассмотрим использование фиктивных переменных на конкретных примерах.

Пример 2.5.1. Построить регрессионную модель зависимости заработной платы работника (Y) от возраста (X) с использованием фиктивной переменной Z по фактору «пол» по 20 работникам одного предприятия (табл.2.5.1).

Таблица 2.5.*1*

№п/п	Y	X	Z	№п/п	Y	X	Z
1	1500	27	0	11	1300	25	0
2	2000	38	1	12	1800	29	1
3	1600	34	0	13	2000	22	1
4	1700	30	0	14	2000	46	1
5	1000	21	1	15	1100	28	0
6	1700	43	0	16	1600	37	1
7	1800	36	0	17	1850	38	1
8	2000	38	1	18	1800	36	1
9	1900	48	1	19	1300	27	0
10	2000	45	1	20	1250	22	1

Решение. Введём в модель фиктивную переменную z, которая принимает два значения: 1 – если пол мужской; 0 – если пол женский.

Оценим параметры модели $y = a_0 + a_1 x + a_2 z$ методом наименьших квадратов. Для вычислений воспользуемся пакетом «Анализ данных» в Excel:

ВЫВОД ИТОГОВ	
Множественный R	0,730
R-квадрат (коэффициент детерминации)	0,532
Нормированный R-квадрат	0,477
Стандартная ошибка	231,211
Наблюдения *n*	20

Дисперсионный анализ					
	df	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*
Регрессия	*m* = 2	*SSR*=1034207	517103,5	9,673	0,002
Остаток	*n*-*m*-1 = 17	*SSE*=908792,9	53458,41		
Итого	*n*-1 = 19	*SST*=1943000			

	Коэффи-циенты	*Стандарт. ошибка*	*t-стати-стика*	*P-зна-чение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*
Y-пересеч.	763,527	220,296	3,466	0,003	298,743	1228,311
Перемен. *X*	23,567	6,546	3,600	0,002	9,756	37,378
Перемен. *Z*	178,290	108,350	1,645	0,118	-50,309	406,889

Уравнение множественной регрессии $y = 763{,}527 + 23{,}567x + 178{,}290z$, коэффициент детерминации равен $R^2 = 0{,}532$. Уравнение регрессии значимо по F–критерию при 5%-ом уровне значимости, так как $F_{факт} = 9{,}673 > F_{табл(0{,}05;\ 2;\ 17)} = 3{,}79$.

Из полученного уравнения регрессии следует, что при одинаковом возрасте заработная плата у работников-мужчин на 178,290 грн. выше, чем у женщин.

Из модели с фиктивной переменной можно получить частные уравнения для мужчин (при $z = 1$) и женщин (при $z = 0$):

$$y = 941{,}817 + 23{,}567x \qquad (z = 1),$$
$$y = 763{,}527 + 23{,}567x \qquad (z = 0).$$

Изобразим полученные модели на графике (см. рис. 2.5.1).

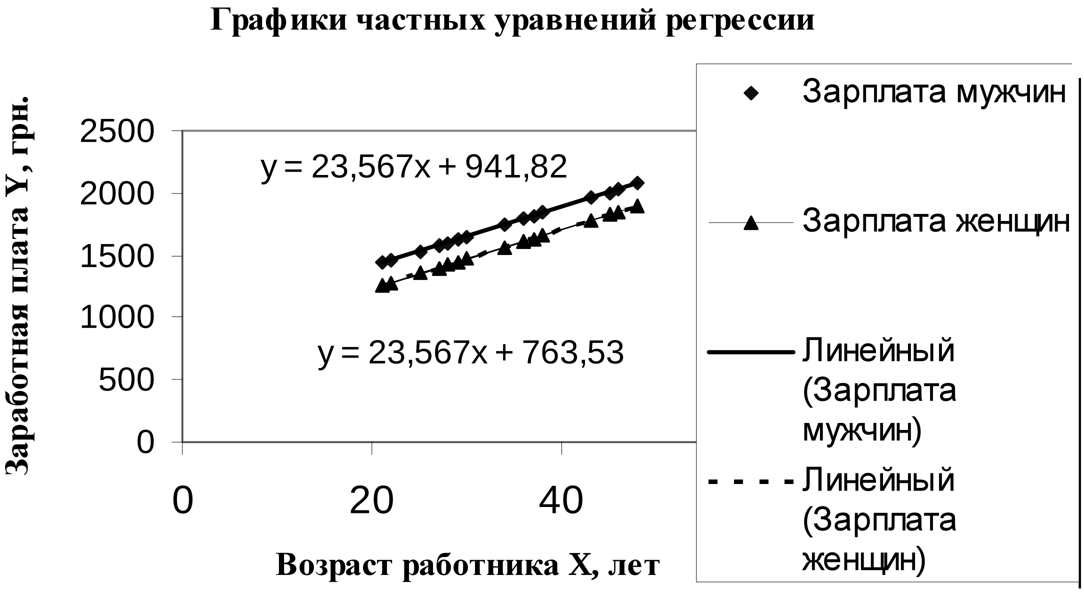


Рис. 2.5.1

Графики частных регрессий параллельны и график уравнения регрессии для мужчин находится выше графика частного уравнения регрессии женщин, что отражает вышеописанную закономерность.

Пример 2.5.2. Пусть необходимо построить эконометрическую модель, которая характеризует зависимость прибыли от потребления безалкогольных напитков Y от доходов населения X, используя квартальные данные за пять лет. На потребление безалкогольных напитков влияют природноклиматические условия, то есть весенне-летние и осенне-зимние периоды, а поэтому необходимо для построения модели использовать фиктивные переменные.

Исходные данные приведены в табл. 2.5.2.

Таблица 2.5.2

Год, квартал		Прибыль от продаж Y, млн. грн.	Доходы населения X, млн. грн.	D_2	D_3	D_4
2005	– I	110	1400	0	0	0
	– II	130	1410	1	0	0
	– III	160	1405	0	1	0
	– IV	120	1405	0	0	1
2006	– I	100	1410	0	0	0
	– II	140	1425	1	0	0
	– III	165	1440	0	1	0
	– IV	105	1401	0	0	1
2007	– I	105	1405	0	0	0
	– II	135	1406	1	0	0
	– III	150	1430	0	1	0
	– IV	110	1410	0	0	1
2008	– I	120	1420	0	0	0
	– II	145	1435	1	0	0
	– III	170	1445	0	1	0
	– IV	115	1402	0	0	1
2009	– I	118	1430	0	0	0
	– II	142	1442	1	0	0
	– III	155	1420	0	1	0
	– IV	110	1400	0	0	1

Решение. Эмпирическое уравнение регрессии имеет вид:

$$\hat{y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x + \hat{b}_2 D_2 + \hat{b}_3 D_3 + \hat{b}_4 D_4,$$

где

$\hat{y}$ – прибыль от потребления безалкогольных напитков,

x – доходы населения,

$$D_2 = \begin{cases} 1 & \text{для второго квартала,} \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$D_3 = \begin{cases} 1 & \text{для третьего квартала,} \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$D_4 = \begin{cases} 1 & \text{для четвёртого квартала,} \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

При решении указанной задачи можно построить разные эконометрические модели:

модель на основе всей информации, объединяя данные за пять лет по всем кварталам;

четыре простых модели на основании данных одного квартала за пять лет;

модель потребления безалкогольных напитков с фиктивными переменными, которые отображают потребление в зависимости от тёплых и холодных кварталов года;

модель, которая отображала бы влияние фиктивных переменных непосредственно на параметры при переменных регрессионной модели.

Первые две задачи решаются стандартным МНК. Четвёртая решается по аналогии с третьей. Поэтому рассмотрим решение только третьей задачи.

Эконометрическая модель задачи будет иметь следующий вид:

$$\hat{y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x + \hat{a}_2 D_2 + \hat{a}_3 D_3 + \hat{a}_4 D_4 .$$

Так как надо учесть четыре качественных переменных, то необходимо ввести три фиктивные переменные, которые обозначим в соответствии с часто используемыми обозначениями $D_2,\ D_3,\ D_4$.

Матрица фиктивных переменных D содержит три вектора, каждый из которых отображает отличие информации II-IV кварталов от первого. Решение получим с помощью «Анализа данных»:

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

	A	B	C	D	E	F	G
1	ВЫВОД ИТОГОВ						
2							
3	*Регрессионная статистика*						
4	Множественный R	0,971					
5	R-квадрат	0,943					
6	Нормированный R-квадрат	0,927					
7	Стандартная ошибка	5,924					
8	Наблюдения	20					
9							
10	Дисперсионный анализ						
11		*df*	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*	
12	Регрессия	4	8635,286	2158,822	61,509	0,0000000040	
13	Остаток	15	526,464	35,098			
14	Итого	19	9161,750				
15							
16		*Коэффициенты*	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*
17	Y-пересечение	-351,124	162,931	-2,155	0,048	-698,403	-3,845
18	Переменная X	0,327	0,115	2,834	0,013	0,081	0,573
19	Переменная D2	24,336	3,941	6,175	0,000	15,936	32,737
20	Переменная D 3	44,498	4,127	10,783	0,000	35,703	53,294
21	Переменная D 4	4,472	3,900	1,146	0,270	-3,842	12,785
22							

Рис. 2.5.2

Ответ. Построенная модель будет следующая:

$$\hat{y} = -351{,}124 + 0{,}327x + 24{,}336 D_2 + 44{,}498 D_3 + 4{,}472 D_4 .$$

Она представляет собой общее уравнение регрессии. Частные уравнения регрессий по кварталам можно получить, если подставлять вместо значений соответствующих фиктивных переменных ноль и единицу.

2.6. СИСТЕМЫ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

2.6.1. Виды систем эконометрических уравнений

Системы эконометрических уравнений применяются в том случае, когда экономические явления невозможно адекватно описать с помощью только одного соотношения (уравнения). Модели с одним уравнением не отражают взаимосвязей между объясняющими переменными и их связей с другими переменными. Кроме того, некоторые переменные могут оказывать взаимные воздействия и трудно однозначно определить, какая из них является зависимой, а какая независимой переменной. Поэтому при построении эконометрической модели прибегают к системам уравнений.

Выделяют следующие три вида эконометрических систем:

система независимых уравнений;

система рекурсивных уравнений;

система взаимосвязанных уравнений.

Система независимых уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = b_{11} \cdot x_1 + b_{12} \cdot x_2 + \ldots + b_{1m} \cdot x_m + \varepsilon_1, \\ y_2 = b_{21} \cdot x_1 + b_{22} \cdot x_2 + \ldots + b_{2m} \cdot x_m + \varepsilon_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_k = b_{k1} \cdot x_1 + b_{k2} \cdot x_2 + \ldots + b_{km} \cdot x_m + \varepsilon_k. \end{cases} \tag{2.6.1}$$

В этих системах в левых частях находятся зависимые переменные, а в правых только независимые переменные и случайные ошибки. Некоторые коэффициенты могут быть равны нулю.

Система рекурсивных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = & b_{11} \cdot x_1 + b_{12} \cdot x_2 + \ldots + b_{1m} \cdot x_m + \varepsilon_1, \\ y_2 = a_{21} \cdot y_1 & + b_{21} \cdot x_1 + b_{22} \cdot x_2 + \ldots + b_{2m} \cdot x_m + \varepsilon_2, \\ y_3 = a_{31} \cdot y_1 + a_{32} \cdot y_2 & + b_{31} \cdot x_1 + b_{32} \cdot x_2 + \ldots + b_{3m} \cdot x_m + \varepsilon_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_k = a_{k1} \cdot y_1 + a_{k2} \cdot y_2 + \ldots + a_{kk-1} \cdot y_{k-1} + b_{k1} \cdot x_1 + b_{k2} \cdot x_2 + \ldots + b_{km} \cdot x_m + \varepsilon_k. \end{cases} \tag{2.6.2}$$

В этих системах каждая зависимая переменная y_i представляется функцией независимых переменных, определённых ранее зависимых переменных $y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}$ и случайной ошибоки ε_i.

Системой взаимосвязанных уравнений называется система уравнений, в которой одни и те же зависимые переменные в одних уравнениях входят в левую часть, а в других – в правую.

Системы взаимосвязанных уравнений получили также названия системы совместных уравнений, одновременных уравнений. Их также называют структурной формой модели.

Система взаимосвязанных уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{cases} y_1 = \qquad a_{12} \cdot y_2 + a_{13} \cdot y_3 + ... + a_{1\,k} \cdot y_k + b_{11} \cdot x_1 + b_{12} \cdot x_2 + ... + b_{1m} \cdot x_m + \varepsilon_1, \\ y_2 = a_{21} \cdot y_1 \qquad + a_{23} \cdot y_3 + ... + a_{2k} \cdot y_k + b_{21} \cdot x_1 + b_{22} \cdot x_2 + ... + b_{2m} \cdot x_m + \varepsilon_2, \\ y_3 = a_{31} \cdot y_1 + a_{32} \cdot y_2 + ... + a_{3k} \cdot y_k + a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + ... + a_{3m} \cdot x_m + \varepsilon_3, \\ .... \\ y_k = a_{k1} \cdot y_1 + a_{k2} \cdot y_2 + ... + a_{k\,k-1} \cdot y_{k-1} \qquad + \; b_{k1} \cdot x_1 + b_{k2} \cdot x_2 + ... + b_{km} \cdot x_m + \varepsilon_k. \end{cases} \quad (2.6.3)$$

Здесь $y_1, y_2, y_3, ..., y_k$ – зависимые переменные, $x_1, x_2, x_3, ..., x_m$ – независимые переменные, a_{ij}, b_{il} $\left(i = \overline{1,k}\ ;\ j = \overline{1,k};\ l = \overline{1,m} \right)$– параметры модели, ε_i $\left(i = \overline{1,k} \right)$– случайные члены.

Эту систему удобно записывать в виде

$$Y = AY + BX + \varepsilon. \quad (2.6.4)$$

Надо отметить, что матричное решение структурных уравнений имеет сложное представление.

Замечание. В структуре эконометрических систем уравнений рассматриваются два вида уравнений: поведенческие (описывают взаимодействия между переменными) и уравнения тождества.

Уравнения тождества должны выполняться во всех случаях и не содержать параметров и случайных составляющих.

Пример 2.6.1. Рассмотрим систему одновременных уравнений

$$\begin{cases} P = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot W + \varepsilon_1, \\ P' = \beta_0 + \beta_1 \cdot P + \beta_3 \cdot T + \varepsilon_2, \\ Q = \gamma_0 + \gamma_1 \cdot P + \gamma_2 \cdot P' + \gamma_3 \cdot W + \varepsilon_3, \end{cases} \quad (2.6.5)$$

где: P – цена на хлопок; P' – цена на хлопковые продукты; Q – количество проданных хлопковых товаров; W – индекс погодных условий; T – налоговые тарифы на хлопковые товары.

Цена на хлопок определяется погодой, а цена на хлопковые товары – ценой на хлопок и налогами и т. д.

Пример 2.6.2. Система одновременных взаимосвязанных уравнений, по которой исследуют зависимость спроса и предложения некоторого товара от его цены и дохода, модель «Спрос-предложение», имеет следующий вид:

$$\begin{array}{ll} \text{Функция спроса} & \\ \text{Функция предложения} & \\ \text{Условие равновесия} & \end{array} \begin{cases} Q_t^D = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot P_t + \alpha_2 \cdot Y_t + \varepsilon_{1t}, \ \ \alpha_1 < 0, \\ Q_t^S = \beta_0 + \beta_1 \cdot P_t + \varepsilon_{2t}, \ \ \beta_1 > 0, \\ Q_t^D = Q_t^S = Q_t, \end{cases} \quad (2.6.6)$$

где: Q_t^D – величина спроса в момент времени t, Q_t^S – величина предложения в момент времени t, P_t – цена товара в момент времени t, Y_t – доход в момент времени t, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1$ – параметры, подлежащие определению, $\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}$ – случайные составляющие.

В этом примере первые два уравнения поведенческие, а третье тождество.

Для переменных, входящих в систему, принято употреблять такие три названия.

Эндогенные переменные – взаимозависимые переменные y, которые определяются внутри модели (системы). Это зависимые переменные, число которых равно числу поведенческих уравнений системы.

Экзогенные переменные – независимые переменные x, которые определяются вне модели. Это заданные переменные, влияющие на эндогенные переменные, но не зависящие от них.

Предопределённые переменные – экзогенные и лаговые эндогенные переменные системы за предыдущие моменты времени $y_{i\,t-1}, y_{i\,t-2}, \ldots$ Предопределённые переменные относят к экзогенным.

Коэффициенты a_i и b_i при переменных – структурные коэффициенты модели.

Переменные и параметры в моделях обозначаются большим набором букв. Предполагается, что в каждом уравнении экзогенные переменные не коррелированны со случайным остатком. В общем случае эндогенные переменные коррелированны со случайным остатком, а поэтому применение метода наименьших квадратов (МНК) к структурной форме модели приводит к смещённым и несостоятельным оценкам структурных коэффициентов.

Для оценивания параметров систем взаимосвязанных уравнений разработаны специальные методы. Параметры системы независимых уравнений и системы рекурсивных уравнений можно оценить непосредственно с помощью обычного МНК.

Рассмотрим далее, как решаются системы одновременных уравнений, так как для них МНК неприменим. Для определения структурных коэффициентов структурная форма модели преобразуется в приведённую форму.

Приведенной формой модели называется система уравнений, в каждом из которых эндогенные переменные выражены только через экзогенные и случайные составляющие. Уравнения, составляющие исходную модель, называют структурными уравнениями модели.

Приведенная форма исходной модели имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = b'_{11} \cdot x_1 + b'_{12} \cdot x_2 + \ldots + b'_{1m} \cdot x_m + \nu_1, \\ y_2 = b'_{21} \cdot x_1 + b'_{22} \cdot x_2 + \ldots + b'_{2m} \cdot x_m + \nu_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_k = b'_{k1} \cdot x_1 + b'_{k2} \cdot x_2 + \ldots + b'_{km} \cdot x_m + \nu_k. \end{cases} \tag{2.6.7}$$

Здесь $y_1, y_2, ..., y_k$ – зависимые, эндогенные переменные; $x_1, x_2, x_3, ..., x_m$ – независимые, экзогенные переменные; $b'_{11}, b'_{12}, ..., b'_{1m}, ..., b'_{k1}, b'_{k2}, ...b'_{km}$ – параметры (коэффициенты) приведенной формы модели, $v_1, v_2, ..., v_k$ – случайные составляющие модели.

Коэффициенты приведенной формы оцениваются обычным методом наименьших квадратов (МНК), поскольку в ней экзогенные переменные не коррелированны со случайными членами.

2.6.2. Идентифицируемость уравнений

Рассчитанные по МНК коэффициенты приведенной формы могут быть использованы для оценивания структурных коэффициентов.

При этом возможны три случая:

структурные коэффициенты однозначно выражаются через приведенные коэффициенты;

структурные коэффициенты имеют несколько разных оценок через приведенные коэффициенты;

структурные коэффициенты не выражаются через приведенные коэффициенты.

В соответствии с этим введены следующие определения:

структурный коэффициент называется *точно идентифицируемым*, если его можно однозначно вычислить на основе приведенных коэффициентов;

структурный коэффициент называется *сверхидентифицируемым*, если он имеет несколько разных оценок через приведенные коэффициенты;

структурный коэффициент называется *неидентифицируемым*, если он не выражается через приведенные коэффициенты.

Точно идентифицируемый и сверхидентифицируемый коэффициент называют идентифицируемым.

Какое-либо структурное уравнение является идентифицируемым, если идентифицируемы все его коэффициенты. Если хотя бы один структурный коэффициент неидентифицируемый, то и всё уравнение является неидентифицируемым. Модель считается идентифицируемой, если каждое её уравнение идентифицируемо. Если хотя бы одно из уравнений системы неидентифицируемо, то и вся модель неидентифицируема.

Непосредственно проверять идентифицируемость сложно (см. пример 2.6.6.). Для этого надо устанавливать разрешимость нелинейной системы уравнений. Поэтому для определения идентифицируемости используют определенное правило, состоящее из необходимого и достаточного условия.

Необходимое условие идентифицируемости (условие порядка). Пусть k_s – количество эндогенных переменных в s-м уравнении структурной формы; m – общее количество экзогенных переменных модели; m_s – количество экзогенных переменных, которые входят в s – е уравнение структурной формы модели.

Тогда имеет место *необходимое условие идентифицируемости: если для $s-$го уравнения выполняется неравенство $k_s - 1 \le m - m_s$, то оно идентифицируемо.*

Запишем это условие в виде

$$
\begin{aligned}
&k_s - 1 = m - m_s \text{ – уравнение точно идентифицируемо;}\\
&k_s - 1 < m - m_s \text{ – уравнение сверхидентифицируемо;}\\
&k_s - 1 > m - m_s \text{ – уравнение неидентифицируемо.}
\end{aligned}
\tag{2.6.8}
$$

Одни только необходимые условия не гарантируют идентифицируемость уравнения. Может случиться, что условие порядка $k_s - 1 \le m - m_s$ для некоторого уравнения выполнено, а уравнение неидентифицируемо. Для уточнения вопроса идентифицируемости уравнения добавляют к необходимому условию ещё и достаточное.

Достаточное условие идентифицируемости (ранговое условие). Уравнение идентифицируемо, если ранг матрицы, составленной из коэффициентов при переменных у всех других уравнениях, кроме данного, отсутствующих в исследуемом уравнении, равен числу эндогенных переменных системы без единицы, т.е. $rang\ A = k - 1$.

Рассмотрим применение условий идентифицируемости уравнений на конкретном примере.

Пример 2.6.3. Рассматривается модель

$$
\begin{aligned}
&C_t = a_1 + b_{11} \cdot Y_t + b_{12} \cdot C_{t-1} + \varepsilon_1, && \text{– функция потребления;}\\
&I_t = a_2 + b_{21} \cdot r_t + b_{22} \cdot I_{t-1} + \varepsilon_2, && \text{– функция инвестиций;}\\
&r_t = a_3 + b_{31} \cdot Y_t + b_{32} \cdot M_t + \varepsilon_3, && \text{– функция денежного рынка;}\\
&Y_t = C_t + I_t + G_t && \text{– тождество дохода.}
\end{aligned}
$$

Здесь:

C_t – расходы на потребление в период t;

Y_t – совокупный доход в период t;

I_t – инвестиции в период t;

r_t – процентная ставка в период t;

M_t – денежная масса в период t;

G_t – государственные расходы в период t;

C_{t-1} – расходы на потребление в период $t-1$;

I_{t-1} – инвестиции в период $t-1$;

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – случайные ошибки.

Решение. Модель представляет собой систему одновременных уравнений. Для определения способа оценок параметров модели проверим каждое уравнение на идентифицируемость.

Модель включает четыре эндогенные переменные C_t, I_t, Y_t, r_t и четыре предопределенные переменные (две экзогенные переменные – M_t, G_t и две лаговые эндогенные переменные – C_{t-1}, I_{t-1}), т.е. $k=4,\ m=4$.

Проверим необходимое условие идентифицируемости уравнений исходной модели.

Первое уравнение включает две эндогенные переменные C_t, Y_t $(k_1=2)$ и одну предопределённую C_{t-1}. В этом уравнении присутствует одна предопределенная переменная $(m_1=1)$. Значения k_s, m_s для трёх уравнений и предварительные выводы по необходимому условию идентифицируемости представлены в таблице.

Уравнение	k_s – число эндогенных переменных в уравнении	m_s – число предопределенных переменных в уравнении	Вид неравенства $(m=4)$	Вид идентифицируемости уравнения
1	2	1	$k_1-1<m-m_1$ $2-1<4-1$	Сверхидентифицируемо
2	2	1	$k_2-1<m-m_2$ $2-1<4-1$	Сверхидентифицируемо
3	2	1	$k_3-1<m-m_3$ $2-1<4-1$	Сверхидентифицируемо
4	Уравнение - тождество			

Замечание. Уравнение 4 представляет собой тождество, параметры которого известны. Необходимости в его идентификации нет.

Проверим для каждого из уравнений ещё и достаточное условие. Для этого составим матрицу коэффициентов при переменных модели.

$$
\begin{array}{l|cccccccc}
 & C_t & Y_t & C_{t-1} & I_t & r_t & I_{t-1} & M_t & G_t \\
\hline
\text{1 уравнение} & -1 & b_{11} & b_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\text{2 уравнение} & 0 & 0 & 0 & -1 & b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\
\text{3 уравнение} & 0 & b_{31} & 0 & 0 & -1 & 0 & b_{32} & 0 \\
\text{Тождество} & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

Матрица A

Матрица коэффициентов при переменных, не входящих в первое уравнение

$$A_1=\begin{Vmatrix} -1 & b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & b_{32} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},\ \det A_1^* \neq 0,\ \text{где } A_1^*=\begin{Vmatrix} b_{12} & 0 & 0 \\ 0 & b_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \Rightarrow rang A_1=3$$

Ранг матрицы A_1 равен трём, так как определитель квадратной матрицы третьего порядка A_1^* этой матрицы не равен нулю. Первое уравнение точно идентифицируемо.

Аналогично первому уравнению выписываем матрицу коэффициентов при переменных, не входящих во второе уравнение, и находим её ранг:

$$A_2 = \begin{Vmatrix} -1 & b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ 0 & b_{31} & 0 & b_{32} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \det A_2^* \neq 0, \text{ где } A_2^* = \begin{Vmatrix} b_{12} & 0 & 0 \\ 0 & b_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \Rightarrow rangA_2 = 3.$$

Второе уравнение также точно идентифицируемо.

Аналогично выписываем матрицу коэффициентов при переменных, не входящих в третье уравнение и находим её ранг:

$$A_3 = \begin{Vmatrix} -1 & b_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & b_{22} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \det A_3^* \neq 0, \text{ где } A_3^* = \begin{Vmatrix} b_{12} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \Rightarrow rangA_3 = 3.$$

Третье уравнение также точно идентифицируемо.

Таким образом, все уравнения модели точно идентифицируемы. Для оценки их параметров можно применить двухшаговый метод наименьших квадратов.

Пример 2.6.4. Провести идентификацию системы

$$\begin{cases} Q_t = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot P_t + \alpha_2 \cdot x_t + \varepsilon_{1t}, & \alpha_1 < 0, \\ Q_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot P_t + \varepsilon_{2t}, & \beta_1 > 0. \end{cases}$$

Решение. Модель представляет собой систему одновременных уравнений. Для определения способа оценок параметров модели проверим каждое уравнение на идентифицируемость. Модель включает две эндогенные переменные Q_t, P_t $(k = 2)$ и одну предопределенную (экзогенную переменную $-x_t$, $m = 1$)

Урав-нение	k_s – число эндогенных переменных в уравнении	m_s – число предопределенных (экзогенных) переменных в уравнении	Вид неравенства $(m=1)$	Вид идентифицируемости
1	2	1	$k_1 - 1 > m - m_1$ $2-1>1-1$	Неидентифицируемо
2	2	0	$k_2 - 1 = m - m_2$ $2-1=1-0$	Идентифицируемо

Первое уравнение неидентифицируемо, так как не выполняется необходимое условие идентифицируемости $k_1 - 1 > m - m_1$, т.е $2-1>1-1$.

Необходимое условие идентифицируемости для второго уравнения выполяется.

Проверим выполнимость достаточного условия для второго уравнения.

Для этого выпишем матрицу коэффициентов при переменных, не входящих в это уравнение, т.е. матрицу A_2.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Q_t & P_t & x_t \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccc} -1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ -1 & \beta_1 & 0 \end{array} \right\| \end{array} \qquad A_2 = (\alpha_2),\ \det A_2 = \alpha_2 \neq 0 \Rightarrow rangA_2 = 1$$

Следовательно, второе уравнение точно идентифицируемо.

Однако, необходимо сделать вывод, что вся система неидентифицируема.

2.6.3. Методы оценивания параметров структурных уравнений

Коэффициенты структурной модели могут быть оценены различными способами в зависимости от вида системы одновременных уравнений. Наибольшее распространение получили

косвенный метод наименьших квадратов;

метод инструментальных переменных;

двухшаговый метод наименьших квадратов (2МНК);

трехшаговый метод наименьших квадратов (3МНК).

2.6.4. Косвенный метод наименьших квадратов

Рассмотрим косвенный метод наименьших квадратов на конкретном примере.

Предположим, что необходимо оценить параметры уравнения функции потребления в простой модели Кейнса формирования доходов, которая имеет следующий вид:

$$\begin{cases} C_t = \alpha + \beta Y_t + \varepsilon & \text{– функция потребления,} \\ Y_t = C_t + I_t & \text{– тождество дохода,} \end{cases}$$

где C_t, Y_t и I_t – объем потребления, совокупный доход и инвестиции соответственно; α и β – структурные коэффициенты, причём β характеризует предельную склонность к потреблению; ε_t – случайный член.

В исходной модели C_t, Y_t – эндогенные (внутренние, зависимые) переменные, I_t – экзогенная (внешняя, независимая) переменная.

Непосредственное оценивание параметров α и β в структурном уравнении функции потребления даёт смещённые и несостоятельные оценки, так как объясняющая переменная Y_t является одновременно и эндогенной (зависимой) переменной.

Разрешая структурную систему относительно эндогенных переменных, можно получить приведенную систему уравнений

$$\begin{cases} C_t = \dfrac{\alpha}{1-\beta} + \dfrac{\beta}{1-\beta} I_t + \dfrac{\varepsilon_t}{1-\beta}, \\ Y_t = \dfrac{\alpha}{1-\beta} + \dfrac{1}{1-\beta} I_t + \dfrac{\varepsilon_t}{1-\beta}. \end{cases} \qquad (2.6.9)$$

Уравнение для C_t в приведенной форме запишем в виде

$$C_t = \alpha' + \beta' I_t + \varepsilon_t',$$

где $\alpha' = \dfrac{\alpha}{1-\beta}$; $\beta' = \dfrac{\beta}{1-\beta}$; $\varepsilon_t' = \dfrac{\varepsilon_t}{1-\beta}$.

Уравнение в приведенной форме включает экзогенную переменную I_t, которая некоррелированна со случайным членом ε_t', поэтому для оценки параметров α', β' можно использовать обычный метод наименьших квадратов (МНК).

Оцененное с помощью МНК уравнение в приведенной форме, полученное по выборочным данным, будет иметь вид:

$$\hat{C}_t = \hat{\alpha}' + \hat{\beta}' I_t$$

Полученные таким образом оценки будут представлять собой несмещённые и состоятельные оценки параметров.

Используя приведенные выше соотношения параметров исходной-структурной системы уравнений и приведенной системы уравнений, можно получить оценки параметров структурной системы уравнений:

$$\alpha = \frac{\hat{\alpha}'}{1+\hat{\beta}'}; \quad \beta = \frac{\hat{\beta}'}{1+\hat{\beta}'}.$$

Поскольку получены единственные оценки структурных коэффициентов, α, β через оценки $\hat{\alpha}'$, $\hat{\beta}'$, то структурное уравнение функции потребления является точно определённым, т.е. точно идентифицируемым.

Для первого уравнения $k_1 = 2$, $m_1 = 0$, $m = 1$, поэтому $k_1 - 1 = 2 - 1 = 1 = m - m_1 = 1 - 0$, т.е. необходимое условие идентифицируемости выполняется. Достаточное условие также выполняется: $A_1 = (1)$, $rangA_1 = 1 = k - 1 = 2 - 1$.

2.6.5. Двухшаговый метод наименьших квадратов (2МНК)

Этот метод применяется для решения задач по определению параметров сверхидентифицируемого, а значит и точно идентифицируемого уравнения.

Его применение состоит из двух этапов.

Первый этап. На основе приведенной формы модели получают для сверхиденфицируемого уравнения теоретические (расчетные) значения эндогенных переменных, содержащихся в правой части уравнения. Приведенную форму в общем виде не находят.

Второй этап. Подставляя теоретические значения эндогенных переменных вместо их фактических значений в сверхидентифицируемое уравнение и применяя обычный МНК, определяют его структурные коэффициенты.

Метод получил название двухшагового, так как МНК используется дважды: при нахождении теоретических значений эндогенных переменных из приведенной формы модели и при определении структурных коэффициентов по теоретическим значениям эндогенных переменных и исходным данным экзогенных переменных.

Рассмотрим применение 2МНК на конкретном примере.

Пример 2.6.5. Рассмотрим модель представляющую собой зависимость валового национального дохода от личного потребления и конечного спроса населения

$$\begin{cases} y = a_1 + b_1 \cdot (C + G) + \varepsilon_1, \\ C = a_2 + b_2 \cdot y + b_3 \cdot y_{-1} + \varepsilon_2, \end{cases} \tag{2.6.10}$$

где: y – валовой национальный доход;

y_{-1} – валовой национальный доход предшествующего года;

C – личное потребление;

G – конечный спрос (помимо личного потребления);

$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$ – случайные составляющие.

Информация для модели представлена в таблице:

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9
G	–6,8	22,4	–17,3	12,0	5,9	44,7	23,1	51,2	32,3
y_{-1}	46,7	3,1	22,8	7,8	21,4	17,8	37,2	35,7	46,6
y	3,1	22,8	7,8	21,4	17,8	37,2	35,7	46,6	56,0
C	7,4	30,4	1,3	8,7	25,8	8,6	30,0	31,4	39,1

Требуется:

провести идентификацию модели;

рассчитать параметры структурных уравнений с помощью 2МНК.

Решение. Проверяем идентифицируемость уравнений. В данной модели две эндогенные переменные (y, C) и две экзогенные (G, y_{-1}).

Урав-нение	k_s – число эндогенных переменных в уравнении	m_s – число пред-определенных переменных в уравнении	Вид неравенства $(m=2)$	Вид идентифицируемости
1	1	1	$k_1 - 1 < m - m_1$ $(1-1<2-1)$	Сверхидентифицируемо
2	2	1	$k_2 - 1 = m - m_2$ $(2-1=2-1)$	Идентифицируемо

В первом уравнении одна эндогенная переменная y. Переменная C в данном уравнении не рассматривается как эндогенная, так как она участвует в данном уравнении не самостоятельно, а вместе с переменной G, т.е. $k_s = 1$. В данном уравнении присутствует одна экзогенная переменная G, имеющаяся в системе, т.е. $m_s = 1$. В системе две эндогенные переменные, т.е. $m = 2$. Следовательно $k_s - 1 = 1 - 1 < m - m_s = 2 - 1$ и первое уравнение сверхидентифицируемо.

Во втором уравнении две эндогенные переменные C и y, следовательно $k_s = 2$. В этом уравнении одна экзогенная переменная y_{-1}. Поэтому $m_s = 1$, $k_s - 1 = 2 - 1 = m - m_s = 2 - 1$ второе уравнение идентифицировано.

Проверяем достаточное условие идентифицируемости. Для этого составим матрицу коэффициентов при переменных модели:

Уравнение	y	$C+G$	C	y_{-1}
1	-1	b_1	0	0
2	b_2	0	-1	b_3

Матрица коэффициентов при переменных, не входящих в первое уравнение, имеет вид $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & b_3 \end{pmatrix}$, отсюда $rang(A_1) = 1$, $k - 1 = rang(A)$. Достаточное условие для первого уравнения выполняется.

Матрица коэффициентов при переменных, не входящих во второе уравнение, имеет вид $A_2 = (b_1)$; $k - 1 = rang(A) = 1$. Достаточное условие для второго уравнения также выполняется.

Для определения параметров сверхидентифицированного первого уравнения применяем 2МНК. Для оценивания параметров второго уравненния мрименим 2МНК и косвенный метод.

Первый шаг. Методом МНК, используя исходные данные, находим оценки приведенных уравнений (для этого используем «Анализ данных»)

$$\begin{cases} \hat{y} = 8,219 + 0,669 \cdot G + 0,261 \cdot y_{-1}, & (2.6.11) \\ \hat{C} = 8,636 + 0,338 \cdot G + 0,202 \cdot y_{-1}. & (2.6.12) \end{cases}$$

Подставляя последовательно табличные значения G и y_{-1} в приведенное уравнение (2.6.12), определим теоретические значения эндогенной переменной C и значения $\hat{C}_i + G_i$. Результаты записываем в таблицу.

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9
G_i	–6,8	22,4	–17,3	12,0	5,9	44,7	23,1	51,2	32,3
$\hat{C}_i$	15,8	16,8	7,4	14,3	15,0	27,4	24,0	33,2	29,0
$\hat{C}_i + G_i$	9	39,2	–9,9	26,3	20,9	72,1	47,1	84,4	61,3
y_i	3,1	22,8	7,8	21,4	17,8	37,2	35,7	46,6	56,0

Второй шаг. В сверхидентифицированном первом уравнении структурной формы модели (2.6.10) заменяем фактические значения $C+G$ теоретическими $\hat{C}+G$.

Обыкновенным МНК находим оценку первого структурного уравнения (для этого используем «Анализ данных»):

$$\hat{y} = 7,678 + 0,512 \cdot (C+G).$$

Находим оценку второго структурного уравнения. Так как оно идентифицировано, то можно применить косвенный метод. Из оценки первого приведенного уравнения (2.6.11) найдём G:

$$G = -12,288 + 1,495y - 0,390y_{-1}.$$

Подставляя во второе приведенное уравнение (2.6.12), получаем:

$$C = 4,477 + 0,506y + 0,070y_{-1}.$$

Это уравнение можно также получить двухшаговым МНК. Используя исходные данные G, y_{-1} по уравнению (2.6.11) вычисляем теоретические значения $\hat{y}_i$. По исходным данным C, y_{-1} и найденным значениям $\hat{y}_i$ составляем уравнение регрессии C на y, y_{-1}, т.е. находим оценки коэффициентов второго уравнения (2.6.10).

Ответ. Система структурных уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} \hat{y} = 7,678 + 0,512 \cdot (C+G), \\ \hat{C} = 4,477 + 0,506y + 0,070y_{-1}. \end{cases}$$

Двухшаговый метод наименьших квадратов разработан для сверхидентифицированных уравнений. Но его можно применять и для идентифицированных уравнений. В этом случае косвенный метод наименьших квадратов и 2МНК дают идентичные оценки.

Покажем ещё один пример построения систем одновременных уравнений.

Пример 2.6.6. Рассмотрим зависимость объема продаж хлебобулочных изделий и цен на них от дохода населения. Условные данные приведены в таблице.

Год	Индекс объёма продаж (в % по отношению к 1995 году, 1995=100%)	Индекс цен на хлебобулочные изделия (в % по отношению к 1995 году, 1995=100%)	Реальные личные расходы на душу населения, средние за данный год в грн.
	Q	P	x
1995	79	102	840
1996	88	104	850
1997	89	105	870
1998	93	107	875
1999	86	107	890
2000	95	109	900
2001	94	110	990
2002	102	127	993
2003	104	112	994
2004	115	116	1004
2005	103	134	1105
2006	118	125	1100
2007	120	130	1200
2008	90	119	1225

Сформируем соответствующие функции спроса и предложения:

$$\begin{array}{ll} \text{функция спроса} & \\ \text{функция предложения} & \\ \text{условие равновесия} & \end{array} \begin{cases} Q^D = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot P + \alpha_2 \cdot x_t + \varepsilon_1, \quad \alpha_1 < 0, \\ Q^S = \beta_0 + \beta_1 \cdot P + \varepsilon_2, \quad \beta_1 > 0, \\ Q^D = Q^S = Q \ , \end{cases} \qquad (2.6.13)$$

где: Q , P – эндогенные переменные; x – экзогенная переменная.

Функция предложения точно идентифицируема, функция спроса неидентифицируема, а поэтому параметры функции спроса нельзя оценить.

Оценим функцию предложения. Для этого применим 2МНК.

Первый шаг. По наблюдаемым значениям P, x , используя МНК, можно найти оценки параметров функции $P = a + b \cdot x + \varepsilon$, т.е. значение оценок $\hat{a}$ и $\hat{b}$. Для этого находим уравнение регрессии P на X по исходным статистическим данным с помощью пакета «Анализ данных».

P	102	104	105	107	107	109	110	127	112	116	134	125	130	119
X	840	850	870	875	890	900	990	993	994	1004	1105	1100	1200	1225

Получим регрессионную модель: $\hat{P} = 48{,}059 + 0{,}068x$.

Второй шаг. Находим регрессионные значения $\hat{p}_i = 48{,}059 + 0{,}068x_i$ $(i = 1, 2, ..., 9)$ и по табличным значениям Q и $\hat{P}$ с помощью «Анализ данных» получаем оценки структурного уравнения функции предложения:

Q_i	79	88	89	93	86	95	94	102	104	115	103	118	120	90
$\hat{P}_i$	104,8	105,4	106,8	107,1	108,2	108,8	114,9	115,1	115,2	115,8	122,7	122,3	129,1	130,8

$$\hat{Q}_i^S = \text{-}7{,}011 + 0{,}917 P_i .$$

Дальше применим косвенный МНК для оценки параметров системы (2.6.13).

Для этого напишем приведенную форму

$$\begin{cases} P = a + b \cdot x + u, \\ Q^s = c + d \cdot x + w \end{cases}$$

и методом наименьших квадратов находим оценки a, b, c, d. Получим систему:

$$\begin{cases} \hat{P} = \hat{a} + \hat{b} \cdot x, \\ \hat{Q}^s = \hat{c} + \hat{d} \cdot x. \end{cases} \qquad (2.6.14)$$

Из условия равновесия

$$\alpha_0 + \alpha_1 \cdot P + \alpha_2 \cdot x_t + \varepsilon_1 = \beta_0 + \beta_1 \cdot P + \varepsilon_2$$

определяем

$$P = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{\beta_1 - \alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_1 - \alpha_1} \cdot x + u_1 , \qquad (2.6.15)$$

где $u_1 = \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\beta_1 - \alpha_1}$.

Подставляя P во второе уравнение системы (2.6.13), получаем

$$Q^s = \frac{\alpha_0 \beta_1 - \beta_0 \alpha_1}{\beta_1 - \alpha_1} + \frac{\alpha_2 \beta_1}{\beta_1 - \alpha_1} \cdot x + w_1 . \qquad (2.6.16)$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты уравнений (2.6.14), (2.6.15), (2.6.16) получаем систему четырёх уравнений с пятью неизвестными:

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_0-\beta_0}{\beta_1-\alpha_1}=\hat{a}, \\ \dfrac{\alpha_2}{\beta_1-\alpha_1}=\hat{b}, \\ \dfrac{\alpha_0\beta_1-\alpha_1\beta_0}{\beta_1-\alpha_1}=\hat{c}, \\ \dfrac{\alpha_2\beta_1}{\beta_1-\alpha_1}=\hat{d}. \end{cases} \qquad (2.6.17)$$

Два параметра β_0 и β_1 из этой системы определяются однозначно:

$$\begin{cases} \beta_1=\dfrac{\hat{d}}{\hat{b}}, \\ \beta_0=\hat{c}-\beta_1\hat{a}. \end{cases} \qquad (2.6.18)$$

Параметра $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ из системы (2.6.17) не определяются однозначно. Они имеют бесконечное количество значений.

Это означает, что уравнение спроса неидентифицируемо. Этот вывод можно также получить с помощью необходимого и достаточного условий идентифицируемости.

Замечание. Для сверхидентифицированного уравнения при нахождении параметров структурной формы модели может быть несколько оценок типа: $\hat{\beta}_1'=\dfrac{\hat{d}}{\hat{b}};\ \hat{\beta}_1''=\dfrac{\hat{c}}{\hat{b}}$. Но это проблема числа наблюдений. С ростом числа наблюдений разные значения параметра стремятся к одному числу.

По табличным данным найдём оценки функций цены и предложения приведенных уравнений:

$$\begin{cases} \hat{P}=48{,}059+0{,}068x \\ \hat{Q}^s=37{,}076+0{,}062x \end{cases} \Rightarrow \hat{a}=48{,}059;\ \hat{b}=0{,}068;\ \hat{c}=37{,}076;\ \hat{d}=0{,}062.$$

По формулам (2.6.18) получаем оценки коэффициентов структурной формы функции потребления:

$$\hat{\beta}_1=\frac{\hat{d}}{\hat{b}}=\frac{0{,}062}{0{,}068}=0{,}917, \quad \beta_0=\hat{c}-\beta_1\hat{a}=37{,}076\text{-}0{,}917\cdot 48{,}060=-7{,}010,$$

$$Q_t^S=-7{,}011+0{,}917P_t.$$

2.6.6. Метод инструментальных переменных

Проблема нахождения параметров уравнения модели при коррелированности объясняющей переменной y_t со случайным членом ε_t, если переменная y_t находится в правой части уравнения структурной формы, может быть разрешена с помощью метода инструментальных переменных. Для применения этого метода необходимо найти такую переменную, которая коррелируется с объясняющей переменной y_t и не коррелируется со случайным членом ε_t.

Идея метода инструментальных переменных состоит в том, что если структурное уравнение сверхидентифицируемо, то есть уравнение с избыточным числом экзогенных переменных, то их можно использовать как инструментальные переменные.

В случае неиндентифицируемости уравнения модели структурную модель необходимо изменить путём ввода в неё новых переменных, которые бы позволили добиться идентифицируемости всех уравнений модели.

Случай неидентифицируемости уравнения рассмотрим на примере следующей модели спроса и предложения:

$$\begin{array}{ll} \text{функция спроса} & \\ \text{функция предложения} & \\ \text{условие равновесия} & \end{array} \begin{cases} Q^D = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot P + \varepsilon_1, \\ Q^S = \beta_0 + \beta_1 \cdot P + \varepsilon_2, \\ Q^D = Q^S = Q, \end{cases}$$

где: Q^D – количество спроса, Q^S – количество предложения, P – цена товара, $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ – параметры, подлежащие определению, ε_1, ε_2 – случайные составляющие.

Переменные Q, P являются эндогенными, их значения определяются в процессе установления рыночного равновесия. В рассматриваемой модели нет экзогенных переменных, поэтому ни одно из этих уравнений не является идентифицированным. Чтобы модель имела решение, в неё необходимо ввести экзогенные переменные.

Если на все продаваемые товары ввести специальный налог T с выручки от продажи, то данные об этом налоге могут быть включены в состав данных, используемых для анализа. При этом изменится только уравнение предложения. Система примет вид

$$\begin{array}{ll} \text{функция спроса} & \\ \text{функция предложения} & \\ \text{условие равновесия} & \end{array} \begin{cases} Q^D = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot P + \varepsilon_1, \\ Q^S = \beta_0 + \beta_1 \cdot P + \gamma \cdot T + \varepsilon_2, \\ Q^D = Q^S = Q, \end{cases}$$

где $T -$ экзогенная переменная, $\gamma -$ дополнительный параметр.

Уравнение спроса будет идентифицируемым и T может выступать как инструментальная переменная для P в функции спроса.

В уравнение спроса можно включить переменную $x -$ доход на душу населения, при этом система примет вид

$$\begin{array}{ll} \text{функция спроса} & \left\{ \begin{array}{l} Q^D = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot P + \delta \cdot x + \varepsilon_1, \\ \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{cases} Q^D = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot P + \delta \cdot x + \varepsilon_1, & \text{функция спроса} \\ Q^S = \beta_0 + \beta_1 \cdot P + \gamma \cdot T + \varepsilon_2, & \text{функция предложения} \\ Q^D = Q^S = Q, & \text{условие равновесия} \end{cases}$$

где $x-$ экзогенная переменная, определяющая доход на душу населения; $\delta-$ дополнительный параметр.

Экзогенную переменную x можно использовать, как инструментальную для уравнения спроса. В итоге полученная система будет представлять собой точно идентифицируемую модель спроса и предложения.

2.6.7. Трёхшаговый метод наименьших квадратов (3МНК)

Для оценки параметров любой системы уравнений в целом используется трехшаговый метод наименьших квадратов. Его применяют в тех случаях, когда переменные, объясняемые в одном уравнении, в другом выступают в роли объясняющих. При оценке параметров таких моделей необходимо учитывать всю систему соотношений. В трехшаговом методе такой подход реализуется в три этапа. На первых двух этапах реализуется двухшаговый метод наименьших квадратов, где рассчитываются коэффициенты регрессии. На третьем этапе увязывают все уравнения между собой. В качестве меры связи берут матрицу ковариаций оценок. Используя обобщённый метод наименьших квадратов, получают оценки параметров всей системы.

При некоторых ограничениях на параметры 3МНК является наиболее эффективным.

РАЗДЕЛ 3. ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ КОББА-ДУГЛАСА

В экономико-математических исследованиях широко используется аппарат производственных функций.

Производственной функцией (ПФ) называется зависимость между объемами затрачиваемых в производстве ресурсов (независимые переменные $X_1, X_2, ..., X_m$, число которых равно числу ресурсов) и объемом выпускаемой продукции Y.

Основными производственными ресурсами являются труд L и капитал K. Способы производства (производственные технологии) определяют, какой объем продукции выпускается при заданном количестве труда и капитала. Математически существующие технологии выражаются через производственную функцию.

Производственная функция описывает множество существующих в данный момент технологий. Изменения в технологии изменяют и производственную функцию.

Производственные функции позволяют:

проводить разнообразные аналитические расчеты;

определять эффективность использования ресурсов и целесообразность их дополнительного вовлечения в сферу производства;

прогнозировать выпуск товаров, продукции при тех или иных вариантах развития объекта.

Особенностями оценки параметров производственных функций является то, что

большинство производственных функций не являются линейными относительно параметров и не сводятся к линейным путём аналитических преобразований;

в качестве критерия оценки параметров используются функции достаточно сложного вида;

как производственные функции, так и критерии оценки параметров могут быть не дифференцируемыми.

Поэтому в общем случае задача оценки параметров производственных функций не сводится ни к решению нормальных уравнений, ни к задаче линейного программирования.

С другой стороны, ряд особенностей задачи оценивания параметров производственных функций облегчает вычислительные сложности:

число параметров обычно не превосходит 10;

количество наблюдаемых данных обычно не превосходит 50;

для большинства параметров можно указать априорные границы допустимых оценок;

достаточна относительно грубая оценка параметров, минимизирующих критерий, в частности, не обязательно достижение глобального минимума;

не всегда обязательно определять доверительные интервалы оценок параметров.

В силу этих особенностей для оценки параметров различных производственных функций наибольшее распространение получили итерационные методы.

Однако приведём пример применения эконометрического подхода для построения производственной функции Кобба-Дугласа, которая является наиболее используемой при проведении экономического анализа.

Понятие «производственная функция» введено американскими учёными Коббом и Дугласом в 1928 году. Функция Кобба-Дугласа принадлежит к классическому примеру эконометрического моделирования и широко используется в экономических исследованиях, особенно на макроуровне.

Аналитически функция Кобба-Дугласа записывается как

$$y = f\left(L, K\right), \tag{3.1}$$

где: y – объем выпускаемой продукции;

L – труд в обобщенном (неявном) виде;

K – капитал (основные фонды) в обобщенном виде.

Функция Кобба-Дугласа является степенной функцией. В классическом виде она записывается как

$$y = a_0 L^{a_1} K^{a_2}, \tag{3.2}$$

где y – объем выпускаемой продукции;

L – затраты труда;

K – основной капитал, производственные фонды;

a_0 – коэффициент пропорциональности;

a_1, a_2 – параметры, которые характеризуют степень однородности производственных функций.

Параметры модели изменяются в пределах

$$\left(0 < a_1 < 1,\ 0 < a_2 < 1\right). \tag{3.3}$$

При $a_1 + a_2 > 1$ темп роста объема выпускаемой продукции выше темпа роста объема обоих производственных ресурсов; при $a_1 + a_2 < 1$ – наоборот, темп роста объема продукции ниже темпа роста ресурсов.

Рассмотрим на конкретном примере методику нахождения производственной функции и анализ с её помощью некоторых экономических показателей.

Пример 3.1. В таблице 3.1 приведены данные фирмы о выпуске продукции y, затратах производственных фондов K и затратах труда L за десять лет.

Таблица 3.1

Годы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Выпуск продукции – y	4,3	5,2	6,1	6,9	8,3	9,1	10,8	11,2	12,1	13,1
Затраты труда – L	1,8	1,9	2,3	2,5	2,8	3,3	3,6	3,7	4,1	5,1
Затраты фондов – K	4,8	5,7	6,6	7,9	8,2	9,6	10,9	11,8	13,1	16,2

Используя эти данные, требуется построить производственную функцию Кобба-Дугласа в виде $y = a_0 L^{a_1} K^{a_2}$ и с её помощью проанализировать некоторые экономические показатели фирмы.

Решение. Для построения функции К-Д будем применять подход, описанный подробно в разделе 2. Отметим, что в этой модели число наблюдений $n = 10$, а количество регрессоров $m = 2$.

Рассчитаем параметры a_0, a_1, a_2 производственной функцию Кобба-Дугласа $y = a_0 L^{a_1} K^{a_2}$ с помощью метода наименьших квадратов.

Функция Кобба-Дугласа является степенной. Чтобы использовать метод наименьших квадратов, предназначенный для линейных зависимостей, прологарифмируем ее и перейдем к линейной функции

$$\ln y = \ln a_0 + a_1 \ln L + a_2 \ln K \, . \tag{3.4}$$

Замечание. На этапе моделирования свободный член $\ln a_0$ желательно исключать, так как он ухудшает статистические свойства модели. В этом случае в исходной мультипликативной модели a_0 принимается, соответственно, за единицу. Параметр a_0 в экономической литературе интерпретируется как коэффициент нейтрального технического процесса.

Для общности и простоты рассуждений мы не будем исключать этот параметр в модели (3.4).

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} A_0 &= \ln a_0, \qquad & Z &= \ln y, \\ A_1 &= a_1, & x_1 &= \ln L, \\ A_2 &= a_2. & x_2 &= \ln K. \end{aligned} \tag{3.5}$$

В новых обозначениях

$$Z = A_0 + A_1 x_1 + A_2 x_2 \, . \tag{3.6}$$

Исходные данные тоже подлежат логарифмированию. Результаты логарифмирования представлены в таблице 3.2.

Таблица 3.2

$Z = \ln y$	1,459	1,649	1,808	1,932	2,116	2,208	2,380	2,416	2,493	2,573
$x_1 = \ln L$	0,588	0,642	0,833	0,916	1,030	1,194	1,281	1,308	1,411	1,629
$x_2 = \ln K$	1,569	1,740	1,887	2,067	2,104	2,262	2,389	2,468	2,573	2,785

Методом наименьших квадратов находим параметры функции Кобба-Дугласа (3.6). Правило её нахождения определено в предыдущем разделе пособия и определяется следующей зависимостью:

$$Z = X\hat{A}, \text{ где } \hat{A} = \left(X'X\right)^{-1} X'Z. \tag{3.7}$$

В модели (3.7)

$$X = \begin{Vmatrix} 1 & 0{,}59 & 1{,}57 \\ 1 & 0{,}64 & 1{,}74 \\ 1 & 0{,}83 & 1{,}89 \\ 1 & 0{,}92 & 2{,}07 \\ 1 & 1{,}03 & 2{,}1 \\ 1 & 1{,}19 & 2{,}26 \\ 1 & 1{,}28 & 2{,}39 \\ 1 & 1{,}31 & 2{,}47 \\ 1 & 1{,}41 & 2{,}57 \\ 1 & 1{,}63 & 2{,}79 \end{Vmatrix} \qquad Z = \begin{Vmatrix} 1{,}46 \\ 1{,}65 \\ 1{,}81 \\ 1{,}93 \\ 2{,}12 \\ 2{,}21 \\ 2{,}38 \\ 2{,}42 \\ 2{,}49 \\ 2{,}57 \end{Vmatrix}$$

$$X' = \begin{Vmatrix} 1{,}000 & 1{,}000 & 1{,}000 & 1{,}000 & 1{,}000 & 1{,}000 & 1{,}000 & 1{,}000 & 1{,}000 & 1{,}000 \\ 0{,}588 & 0{,}642 & 0{,}833 & 0{,}916 & 1{,}030 & 1{,}194 & 1{,}281 & 1{,}308 & 1{,}411 & 1{,}629 \\ 1{,}569 & 1{,}740 & 1{,}887 & 2{,}067 & 2{,}104 & 2{,}262 & 2{,}389 & 2{,}468 & 2{,}573 & 2{,}785 \end{Vmatrix}$$

$$X'X = \begin{Vmatrix} 10 & 10{,}8 & 21{,}8 \\ 10{,}8 & 12{,}8 & 24{,}8 \\ 21{,}8 & 24{,}8 & 49 \end{Vmatrix} \qquad \left(X'X\right)^{-1} = \begin{Vmatrix} 60{,}8 & 67{,}8 & -61{,}4 \\ 67{,}8 & 80{,}6 & -71 \\ -61{,}4 & -71 & 63{,}3 \end{Vmatrix} \qquad X'Z = \begin{Vmatrix} 21 \\ 23{,}9 \\ 47{,}2 \end{Vmatrix}$$

$$\hat{A} = \left(X'X\right)^{-1} X'Z = \begin{Vmatrix} 0{,}226 \\ 0{,}301 \\ 0{,}710 \end{Vmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0{,}226 \\ 0{,}301 \\ 0{,}710 \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Замечание. Уравнение регрессии (3.6) можно также найти с помощью последовательности операций: «**Excel»,** «**Сервис»**, «**Анализ данных»**, «**Регрессия»**, «**ОК»**, «**Работа в диалоговом режиме»**.

Таким образом:

$$Z = 0{,}226 + 0{,}301x_1 + 0{,}710x_2 . \qquad (3.9)$$

С учётом обозначений (3.5) получим следующую модель:

$$\ln y = 0{,}226 + 0{,}301 \cdot \ln L + 0{,}710 \cdot \ln K . \qquad (3.10)$$

Потенцированием получаем функцию Кобба-Дугласа:

$$y = e^{0{,}226+0{,}301\ln L+0{,}710\ln K} = e^{0{,}226} \cdot L^{0{,}301} \cdot K^{0{,}710} = 1{,}254 \cdot L^{0{,}301} \cdot K^{0{,}710}. \qquad (3.11)$$

Таким образом, функция Кобба-Дугласа будет иметь следующий вид

$$y = 1{,}254 \cdot L^{0{,}301} \cdot K^{0{,}710} . \qquad (3.12)$$

Для проведения экономического анализа рассчитаем основные характеристики функции Кобба-Дугласа.

1. *Средняя производительность труда* равна

$$\mu_1 = \frac{y}{L} = \frac{a_0 \cdot L^{a_1} \cdot K^{a_2}}{L} = \frac{a_0 \cdot K^{a_2}}{L^{(1-a_1)}} = \frac{1.254 \cdot K^{0{,}710}}{L^{0{,}699}} . \qquad (3.13)$$

Следовательно, с увеличением затрат труда L (при неизменных затратах производственных фондов K) средняя производительность труда снижается. Наоборот, увеличение затрат производственных фондов K (при неизменных затратах труда L) ведет к росту средней производительности труда. Этот факт полностью соответствует логике экономического анализа роста производительности труда.

2. *Средняя фондоотдача* равна

$$\mu_2 = \frac{y}{K} = \frac{a_0 \cdot L^{a_1} \cdot K^{a_2}}{K} = \frac{a_0 \cdot L^{a_1}}{K^{(1-a_2)}} = \frac{1{,}254 \cdot L^{0{,}301}}{K^{0{,}290}} . \qquad (3.14)$$

Из формулы (3.14) следует, что с увеличением затрат производственных фондов K (при неизменных затратах труда L) средняя фондоотдача снижается. Увеличение же затрат труда L (при неизменных затратах производственных фондов K) ведет к росту средней фондоотдачи.

3. П*редельная производительность труда*

$$\nu_1 = \frac{\partial y}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}\left(a_0 \cdot L^{a_1} \cdot K^{a_2}\right) = a_0 \cdot a_1 \cdot L^{(a_1-1)} \cdot K^{a_2} = \frac{a_0 \cdot a_1 \cdot K^{a_2}}{L^{(1-a_1)}} = \frac{0,377 \cdot K^{0,710}}{L^{0,699}}. \quad (3.15)$$

Из формулы (3.15) следует, что с увеличением затрат труда L (при неизменных затратах производственных фондов K) предельная производительность труда снижается. Наоборот, увеличение затрат производственных фондов K (при неизменных затратах труда L) ведет к росту предельной производительности труда.

4. *Предельная фондоотдача*

$$\nu_2 = \frac{\partial y}{\partial K} = \frac{\partial}{\partial K}\left(a_0 \cdot L^{a_1} \cdot K^{a_2}\right) = a_0 \cdot a_2 \cdot L^{a_1} \cdot K^{(a_2-1)} = \frac{a_0 \cdot a_2 \cdot L^{a_1}}{K^{(1-a_2)}} = \frac{0,890 \cdot L^{0,301}}{K^{0,290}}. \quad (3.16)$$

Таким образом, с увеличением затрат производственных фондов K (при неизменных затратах труда L) предельная фондоотдача снижается. Увеличение же затрат труда L (при неизменных затратах производственных фондов K) ведет к росту предельной фондоотдачи. Одновременное изменение обеих переменных может приводить к различным результатам.

5. *Эластичность выпуска продукции по затратам труда*

$$E_{y/L} = \frac{L}{y}\frac{\partial y}{\partial L} = \frac{L}{a_0 \cdot L^{a_1} \cdot K^{a_2}}\left(a_0 \cdot a_1 \cdot L^{(a_1-1)} \cdot K^{a_2}\right) = a_1 = 0,301. \quad (3.17)$$

Видно, что при увеличении затрат труда L на 1% выпуск продукции y предельно увеличивается на $0,301\%$.

6. *Эластичность выпуска продукции по производственным фондам*

$$E_{y/K} = \frac{K}{y}\frac{\partial y}{\partial K} = \frac{K}{a_0 \cdot L^{a_1} \cdot K^{a_2}}\left(a_0 \cdot a_2 \cdot L^{a_1} \cdot K^{(a_2-1)}\right) = a_2 = 0,710. \quad (3.18)$$

Этот показатель указывает на то, что при увеличении производственных фондов K на 1% выпуск продукции предельно увеличивается на $0,710\%$.

Производственная функция позволяет рассчитать потребность в одном из ресурсов при заданном объеме выпуска продукции y и фиксированной величине другого ресурса.

7. *Потребность в ресурсах труда* L составляет

$$L = \left(\frac{y}{a_0 \cdot K^{a_2}}\right)^{\frac{1}{a_1}} = \left(\frac{1}{a_0}\right)^{\frac{1}{a_1}} \cdot \frac{y^{\frac{1}{a_1}}}{K^{\frac{a_2}{a_1}}} = 0,470 \cdot \frac{y^{3.332}}{K^{2.359}}. \quad (3.19)$$

8. *Потребность в производственных фондах* K составляет

$$K = \left(\frac{y}{a_0 \cdot L^{a_1}} \right)^{\frac{1}{a_2}} = \left(\frac{1}{a_0} \right)^{\frac{1}{a_2}} \cdot \frac{y^{\frac{1}{a_2}}}{L^{\frac{a_1}{a_2}}} = 0,727 \cdot \frac{y^{1,408}}{L^{0,424}}. \tag{3.20}$$

9. Производственная функция позволяет исследовать вопросы соотношения, замещения и взаимодействия ресурсов. В частности, на основе соотношения *K*/*L* определяется важный экономический показатель – *фондовооруженность труда*:

$$\frac{K}{L} = \frac{\left(\frac{y}{a_0 \cdot L^{a_1}} \right)^{\frac{1}{a_2}}}{L} = \left(\frac{1}{a_0} \right)^{\frac{1}{a_2}} \cdot \frac{y^{\frac{1}{a_2}}}{L^{\left(\frac{a_1}{a_2}+1\right)}} = 0,727 \cdot \frac{y^{1,408}}{L^{1,424}}. \tag{3.21}$$

10. Взаимодействующие в рамках производственной функции ресурсы *L* и *K* могут замещать друг друга. *Предельная норма замещения затрат труда L производственными фондами K* равна:

$$h = -\frac{dK}{dL} = -\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{K}{L} = -0,424 \cdot \frac{K}{L}. \tag{3.22}$$

Предельная норма замещения h зависит не только от параметров a_1 и a_2 производственной функции Кобба-Дугласа, но и от соотношения объемов ресурсов L и K.

Знак «минус» означает, что при фиксированном объеме выпуска продукции y необходимо при уменьшении одного ресурса увеличивать другой.

11. Влияние соотношения объемов ресурсов на предельную норму замещения h находит свое выражение в показателе *эластичности замещения ресурсов*. Этот показатель определяется как отношение относительных приращений фондовооруженности труда и предельной нормы замещения ресурсов

$$\omega = \frac{h}{\frac{K}{L}} \cdot \frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{dh} = \left(-\frac{a_2}{a_1} \right) \left(-\frac{a_1}{a_2} \right) = 1. \tag{3.23}$$

Отсюда следует, что эластичность замещения ресурсов для производственной функции Кобба-Дугласа всегда равна 1. Т.е. изменению фондовооружённости труда на 1% соответствует изменение предельной нормы замещения также на 1%.

12. Найдем точечный прогноз выпуска продукции y_{np} для заданных значений $L = 10.2$ и $K = 20$:

$$y_{np} = 1,254 \cdot 10,2^{0,301} \cdot 20^{0,710} = 21,166. \tag{3.24}$$

13. Рассмотрим поведение функции Кобба-Дугласа при изменении масштаба производства. Пусть затраты каждого ресурса увеличатся в λ раз. Тогда новое значение производственной функции равно:

$$y^* = a_0 \left(\lambda L\right)^{a_1} \left(\lambda K\right)^{a_2} = \lambda^{a_1 + a_2} \cdot y. \tag{3.25}$$

Если $a_1 + a_2 = 1$, то уровень эффективности ресурсов не зависит от масштаба производства. Если $a_1 + a_2 < 1$, то с расширением масштабов производства средние затраты ресурсов в расчете на единицу продукции уменьшаются, а если $a_1 + a_2 > 1$, – увеличиваются. В последнем случае подразумевается интенсивное развитие производства.

Таким образом, функция Кобба-Дугласа даёт возможность анализировать производственную деятельность фирмы и на основании анализа давать рекомендации по усовершенствованию управления фирмой.

РАЗДЕЛ 4. ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

4.1. Основные понятия и определения

При изучении многих экономических явлений часто используют ежегодные, ежеквартальные, ежемесячные, ежедневные данные. Например, месячная инфляция, месячная заработная плата, годовой ВВП, ежедневные курсы валют и т. п. Для рационального анализа необходимо систематизировать моменты получения соответствующих статистических данных.

Динамическим рядом называется совокупность наблюдений какого-либо явления (показателя), упорядоченная в зависимости от последовательности значений другого явления (признака).

Временной ряд – это набор чисел, привязанных к последовательным, обычно равноотстоящим моментам времени. Временной ряд – это совокупность значений какого-либо показателя за несколько последовательных моментов или периодов.

Числа, составляющие временной ряд и полученные в результате наблюдения за ходом какого-либо процесса, называются *уровнями* (или элементами) ряда. Длиной временного ряда называют количество входящих в него уровней n. Временной ряд обычно обозначают $Y(t)$ или y_t, где $t=\overline{1,n}$.

В моделях временного ряда выделяют две основные составляющие:

детерминированную (систематическую);

случайную.

Детерминированной составляющей временного ряда $y_1, y_2, ..., y_n$ называют числовую последовательность, элементы которой вычисляются по определённому правилу как функция времени t. Исключив детерминированную составляющую из данных, получим колеблющийся вокруг нуля ряд, который может представлять или случайные скачки, или плавное колебательное движение.

Детерминированная составляющая может содержать следующие структурные компоненты: тренд; сезонную компоненту; циклическую компоненту.

В общем случае каждый уровень временного ряда можно представить как функцию четырёх компонент: $f(t)$, $S(t)$, $U(t)$, $\varepsilon(t)$, отражающих закономерность и случайность развития, где

$f(t)$ *– тренд (долговременная тенденция) развития;*

$S(t)$ *– сезонная компонента;*

$U(t)$ *– циклическая компонента;*

$\varepsilon(t)$ *– остаточная компонента.*

Тренд, или тенденция $f(t)$, представляет собой устойчивую закономерность, наблюдаемую в течение длительного периода времени. Он описывается с помощью некоторой неслучайной функции $f(t)$, где t – время.

Сезонная компонента $S(t)$ описывает регулярные колебания, которые носят заранее известный периодический или близкий к нему характер и заканчиваются в течение периода наблюдения (года, квартала, месяца).

Циклическая компонента $U(t)$ – неслучайная функция, описывающая длительные периоды (более одного года) относительного подъема и спада и состоящая из циклов переменной длительности и амплитуды (вековые циклы, экономические циклы Кондратьева).

Случайная компонента $\varepsilon(t)$ – это составная часть временного ряда, оставшаяся после выделения систематических компонент. Она отражает воздействие многочисленных факторов случайного характера.

В анализе случайной компоненты экономических временных рядов важную роль играет сравнение случайной величины ε_t с хорошо изученной формой случайных процессов – стационарными случайными процессами.

Стационарным процессом в узком смысле называется такой случайный процесс, вероятностные свойства которого с течением времени не изменяются.

Случайный процесс называется *стационарным в широком смысле,* если его математическое ожидание постоянно, а автокорреляционная функция $r(\tau)$ зависит только от длины временного интервала τ.

В зависимости от вида связи между перечисленными компонентами может быть построена либо *аддитивная модель* временного ряда

$$Y(t) = f(t) + S(t) + U(t) + \varepsilon(t), \tag{4.1.1}$$

либо *мультипликативная* модель

$$Y(t) = f(t) \cdot S(t) \cdot U(t) + \varepsilon(t). \tag{4.1.2}$$

Не всегда предполагается участие всех четырёх компонент, но случайная составляющая рассматривается всегда.

Основная цель статистического анализа временных рядов – изучить соотношение между закономерностью и случайностью в формировании значений уровней ряда и оценить количественную меру их влияния.

Применяемые при обработке временных рядов методы во многом опираются на методы математической статистики, которые базируются на достаточно жестких требованиях к исходным данным:

сопоставимость данных;

однородность данных;

устойчивость тенденции;

полнота данных.

4.2. Этапы анализа временного ряда

Экстраполяционное прогнозирование (прогнозирование на будущее) экономических процессов с помощью временных рядов сводится к выполнению следующих основных этапов:

предварительный анализ данных;

построение моделей временных рядов, числовое оценивание параметров модели;

оценка качества моделей (проверка их адекватности и оценка точности);

построение точечного и интервального прогноза.

Рассмотрим эти этапы в отдельности.

Предварительный анализ данных.

К процедурам предварительного анализа данных относятся:

выявление аномальных наблюдений;

проверка наличия тренда;

сглаживание временных рядов;

расчёт показателей динамики экономических процессов;

анализ динамических рядов с помощью автокорреляционной функции.

Выявление аномальных наблюдений является обязательной процедурой во время предварительного анализа. Для диагностики аномальных наблюдений разработаны различные критерии, например, *метод Ирвина*. Для всех или только для подозреваемых в аномальности наблюдений вычисляется величина λ_t

$$\lambda_t = \frac{y_t - y_{t-1}}{S_y},\ t = \overline{1,n}, \tag{4.2.3}$$

где:

$$S_y = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}\left(y_t - \overline{y}\right)^2},\ \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_t. \tag{4.2.4}$$

Если рассчитанная величина λ_t превышает табличное значение, т.е.

$$\lambda_t^{расч} > \lambda_t^{табл}, \tag{4.2.5}$$

где $\lambda_t^{табл}\left(0,05;\ n-1\right)$, то уровень y_t считается аномальным. Аномальные наблюдения необходимо исключить из временного ряда и заменить их расчётным значением.

Самый простой способ замены аномального значения – в качестве нового принимается среднее из двух соседних значений.

Проверка исходной информации на наличие тренда.

Отметим, что тренд это изменение не только среднего значения показателя (уменьшение, увеличение), но и изменение дисперсии, автокорреляции, корреляции с другими показателями и т. д. Тенденцию среднего, дисперсии можно определить визуально из графика исходных данных.

Проверка наличия или отсутствия неслучайной (зависящей от времени t) составляющей сводится к проверке гипотезы о неизменности среднего значения временного ряда. Процедура проверки может быть осуществлена с помощью различных критериев:

критерий серий, основанный на медиане;

критерий восходящих и нисходящих серий;

критерий сравнения средних уровней ряда.

Рассмотрим их последовательно.

Критерий серий, основанный на медиане.

Члены анализируемого временного ряда располагают в порядке возрастания, т. е. образуют ряд

$$y_{(1)}, y_{(2)}, \dots, y_{(n)}.$$

Определяют выборочную медиану по формуле

$$y_{мед} = \begin{cases} y_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, & \text{если } n \text{ нечётно;} \\ \frac{1}{2}\left(y_{\left(\frac{n}{2}\right)} + y_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right), & \text{если } n \text{ чётно.} \end{cases} \qquad (4.2.6)$$

Затем по исходному временному ряду строят последовательность знаков по следующей схеме: вместо y_t ставится знак «+», если $y_t > y_{мед}$, и «–», если $y_t < y_{мед}$ (члены равные $y_{мед}$ не учитываются). Образованная последовательность плюсов и минусов характеризуется общим числом серий $\upsilon(n)$ и протяжённостью самой длинной серии $K_{\max}$. Под серией понимается последовательность подряд идущих «+» или «–».

Справедлив следующий приближённый статистический критерий проверки гипотезы о неизменности среднего значения временного ряда: если хотя бы одно из неравенств

$$\begin{cases} \upsilon(t) > \left[\frac{1}{2}\left(n + 2 - 1{,}96\sqrt{n-1}\right)\right], \\ K_{\max} < \left[3{,}3\left(\lg n + 1\right)\right] \end{cases} \qquad (4.2.7)$$

окажется нарушенным, то гипотеза о неизменности среднего временного ряда отвергается с вероятностью ошибки $0{,}05 < \alpha < 0{,}0975$ и тем самым подтверждается наличие зависящей от времени неслучайной составляющей в разложении $Y(t)$. В выражении (4.2.7) квадратная скобка означает целую часть числа.

Критерий восходящих и нисходящих серий.

В этом методе на t-м месте ставится знак «+», если $y_{t+1} - y_t > 0$, и «–», если $y_{t+1} - y_t < 0$.

Если два или несколько последовательных значений равны между собой, то во внимание принимается только одно из них. Как и в предыдущем случае, общее число серий не может быть слишком малым, а их протяжённость – слишком большой.

При уровне значимости $0,05 < \alpha < 0,0975$ критерий имеет вид

$$\begin{cases} \upsilon(n) > \left[\dfrac{2n-1}{3} - 1,96\sqrt{\dfrac{16n-29}{90}} \right], \\ K_{\max} < \left[K_0(n) \right], \end{cases} \tag{4.2.8}$$

где величина $K_0(n)$ определяется следующим образом:

$$K_0(n) = 5 \text{ при } n \le 26;$$
$$K_0(n) = 6 \text{ при } 26 < n \le 153;$$
$$K_0(n) = 7 \text{ при } 153 < n \le 1170.$$

Если хотя бы одно из неравенств окажется нарушенным, то гипотезу о неизменности среднего значения временного ряда отвергают. Это будет означать, что данная модель должна содержать тренд.

Сравнение средних уровней ряда.

Для проверки обнаружения тренда временной ряд разбивают на две примерно равные по числу уровней части, каждая из которых рассматривается как самостоятельная выборочная совокупность, имеющая нормальное распределение. Если временной ряд имеет тенденцию к тренду, то средние значения, вычисленные для каждой совокупности, должны значимо различаться между собой. Если же расхождение между средними значениями несущественно (случайно), то временной ряд не имеет тенденции. Таким образом, проверка наличия тренда в исследуемом ряду сводится к проверке гипотезы о равенстве средних двух нормально распределённых совокупностей.

Сглаживание временного ряда.

Сглаживание временного ряда – это замена фактических уровней расчётными значениями, имеющими меньшую колеблемость, чем исходные данные. Соответствующие преобразования называются фильтрованием.

Сглаживание временных рядов проводится в следующих случаях:

если при графическом изображении временного ряда тренд прослеживается недостаточно хорошо;

применяемые методы для анализа и прогнозирования требуют сглаживания временного ряда;

при устранении аномальных наблюдений;

при непосредственном прогнозировании экономических показателей и прогнозировании изменения тренда – точек поворота.

Существующие методы сглаживания делятся на две группы.

Аналитические методы. Для сглаживания используется кривая, проведенная относительно фактических значений ряда так, чтобы она отображала тенденцию, присущую ряду, и одновременно освобождала его от мелких незначительных колебаний. Такие кривые называются *кривыми роста*. Они применяются, главным образом, для прогнозирования экономических показателей.

Методы механического сглаживания. Сглаживается каждый отдельный уровень ряда с использованием фактических значений соседних с ним уровней.

Рассмотрим вторую группу методов, т.е. методы механического сглаживания. Для сглаживания временных рядов часто используются методы:

простой скользящей средней;

взвешенной скользящей средней;

экспоненциального сглаживания.

Метод простой скользящей средней состоит в следующем. Определяется количество наблюдений, входящих в интервал сглаживания. При этом, если необходимо сгладить мелкие беспорядочные колебания, то интервал сглаживания берут по возможности большим. Если нужно сохранить более мелкие волны, но освободиться от периодических повторяющихся колебаний, то интервалы сглаживания уменьшают. Вычисляется среднее значение наблюдений, образующих интервал сглаживания, которое одновременно является сглаживающим значением уровня, находящегося в центре интервала сглаживания. Если m нечётное число, то

$$\tilde{y}_t = \frac{1}{m}\sum_{i=t-p}^{i=t+p} y_i\,, \qquad (4.2.9)$$

где m – количество наблюдений, входящих в интервал сглаживания, p – количество наблюдений, стоящих по разные стороны от сглаживаемого.

Если количество наблюдений в интервале сглаживания нечетно, то $p = \dfrac{m-1}{2}$. Первым сглаженным наблюдением будет $\tilde{y}_{p+1}$.

Интервал сглаживания несколько раз сдвигается вправо, пока в интервал сглаживания не войдёт последнее наблюдение временного ряда.

Если развитие процесса носит нелинейный характер, то применение метода простой скользящей средней может привести к значительным искажениям исследуемого процесса. В таких случаях более надёжным является использование других методов сглаживания, например метода взвешенной скользящей средней.

*Метод взвешенной скользящей средней***.** Сглаживание ведётся не по прямой, а по кривой более высокого порядка.

Если сглаживание производится с помощью полинома второго или третьего порядка, то веса берутся, например, следующие:

$$\frac{1}{35}(-3;12;17;12;-3) \text{ для } m=5;$$

$$\frac{1}{21}(-2;3;6;7;6;3;-2) \text{ для } m=7. \qquad (4.2.10)$$

Веса определяются экспериментальным путем, но с учетом следующих особенностей:

веса симметричны относительно центрального члена;

сумма весов с учётом общего множителя равна единице.

Недостаток метода: первые и последние p наблюдений ряда остаются несглаженными.

Метод экспоненциального сглаживания позволяет получить сглаженные значения последних уровней так же как и остальных, что очень важно для прогноза. Прибегая к нему при выравнивании каждого наблюдения используются только предыдущие сглаженные значения уровней.

Сглаженное значение наблюдения ряда S_t на момент времени t определяется из рекуррентного соотношения:

$$S_t(y) = \alpha y_t + (1-\alpha) S_{t-1}(y), \qquad (4.2.11)$$

где $(0 < \alpha < 1)$.

Если учитывать и предыдущие значения уровней ряда, то формулу (4.2.11) можно записать в виде

$$S_t(y) = \alpha \sum_{k=0}^{t-k} (1-\alpha)^k y_{t-k} + (1-\alpha)^k S_0(y), \qquad (4.2.12)$$

где $0 \le k \le t-1$ – число периодов отставания от момента t; $S_0(y)$ – величина, характеризующая начальные условия.

При использовании метода экспоненциального сглаживания возникают трудности с выбором параметра α и определения начальных условий $S_0(y)$. Параметр α подбирается эмпирическим путем, а в качестве $S_0(y)$ берется либо исходное (первое) значение y_t наблюдения временного ряда, либо среднее значение уровней за прошлые (не входящие в модель) наблюдения.

Расчёт основных показателей динамики экономических процессов.

Это заключительный этап предварительного анализа данных.

Традиционными показателями, отражающими динамику процесса, являются показатели роста и прироста.

Основные показатели динамики представлены в табл. 4.2.1.

Таблица 4.2.1

	Абсолютный прирост	Темп роста	Темп прироста
Цепной	$\Delta y_t^ц = y_t - y_{t-1}$	$T_t^ц = \dfrac{y_t}{y_{t-1}} \cdot 100\%$	$T_{npt}^ц = T_t^ц - 100\%$
Базисный	$\Delta y_t^б = y_t - y_t^б$	$T_t^б = \dfrac{y_t}{y_t^б} \cdot 100\%$	$T_{npt}^б = T_t^б - 100\%$
Средний	$\overline{\Delta y} = \dfrac{y_n - y_1}{n-1}$	$\overline{T} = \sqrt[n-1]{\dfrac{y_n}{y_1}} \cdot 100\%$	$\overline{T}_{np} = \overline{T} - 100\%$

Показатель среднего абсолютного прироста $\overline{\Delta y}$ используется для построения простейших (наивных) прогнозов. Прогноз на k шагов вперёд рассчитывается по формуле

$$y_{n+k} = y_n + \overline{\Delta y} \cdot k\,, \tag{4.2.13}$$

где: $k = 1, 2, ...$ – время упреждения; y_n – последний по времени уровень ряда.

Данный подход используется лишь как первый ориентир будущего развития.

Анализ динамических рядов с помощью автокорреляционной функции.

Для характеристики динамики изменения экономических показателей часто используется *понятие автокорреляции*, которая характеризует не только взаимозависимость уровней одного и того же ряда, относящихся к разным моментам наблюдений, но и степень устойчивости развития процесса во времени, величину оптимального периода прогнозирования и т.п.

Степень тесноты статистической связи между уровнями временного ряда, сдвинутыми на τ единиц времени, определяется величиной коэффициента корреляции $r(\tau)$. Так как $r(\tau)$ измеряет тесноту связи между уровнями одного и того же временного ряда, то его принято называть коэффициентом автокорреляции. При этом τ – длину временного смещения – называют обычно *лагом.*

Коэффициент автокорреляции вычисляют по формуле:

$$r(\tau) = \frac{(n-\tau)\sum_{t=1}^{n-\tau} y_t y_{t+\tau} - \sum_{t=1}^{n-\tau} y_t \sum_{t=1}^{n-\tau} y_{t+\tau}}{\sqrt{\left[(n-\tau)\sum_{t=1}^{n-\tau} y_t^2 - \left(\sum_{t=1}^{n-\tau} y_t\right)^2\right]\left[(n-\tau)\sum_{t=1}^{n-\tau} y_{t+\tau}^2 - \left(\sum_{t=1}^{n-\tau} y_{t+\tau}\right)^2\right]}}\,. \tag{4.2.14}$$

При большой протяжённости исследуемого ряда расчёт коэффициентов автокорреляции можно упростить. Для этого находят отклонения не от средних коррелируемых рядов, а от общей средней всего ряда. В этом случае

$$r(\tau)=\frac{\sum_{t=1}^{n-\tau}\left(y_t-\overline{y}\right)\left(y_{t+\tau}-\overline{y}\right)}{\sum_{t=1}^{n}\left(y_t-\overline{y}\right)^2}. \qquad (4.2.15)$$

Порядок коэффициентов автокорреляции определяется временным лагом первого порядка (при $\tau=1$), второго порядка (при $\tau=2$) и т.д.

Последовательность коэффициентов автокорреляции уровней первого, второго и последующих порядков называют *автокорреляционной функцией*. Значения автокорреляционной функции могут колебаться от -1 до +1. График автокорреляционной функции называется *коррелограммой.*

Анализ автокорреляционной функции и коррелограммы позволяет определить лаг, при котором автокорреляция наиболее высокая, т.е. при помощи анализа автокорреляционной функции и коррелограммы можно выявить структуру ряда.

Если наиболее высоким окажется коэффициент автокорреляции первого порядка, исследуемый ряд содержит только тенденцию.

Если наиболее высоким окажется коэффициент автокорреляции порядка τ, то ряд содержит циклические колебания с периодичностью в τ моментов времени.

Если ни один из коэффициентов автокорреляции не является значимым, то можно сделать одно из двух предположений относительно структуры этого ряда: либо ряд не содержит тенденции и сезонных колебаний, либо ряд содержит сильную нелинейную тенденцию, для выявления которой нужно провести дополнительные исследования.

Поэтому коэффициент автокорреляции уровней и автокорреляционную функцию целесообразно использовать для выявления во временном ряде наличия или отсутствия трендовой компоненты $f(t)$ и сезонной компоненты $S(t)$.

4.3. Построение моделей временных рядов

Рассмотрим аналитические методы выделения неслучайной составляющей временного ряда.

Формирование уровней ряда определяется закономерностями трёх основных типов и, соответственно, их анализом:

инерцией тенденции (анализ и моделирование тенденций);

инерцией взаимосвязи между последовательными уровнями ряда (анализ и моделирование взаимосвязи между последовательными уровнями ряда);

инерцией и анализом взаимосвязи между исследуемым показателем и показателями-факторами (составление математической модели причинных взаимосвязей между исследуемым показателем и факторами).

Первая из указанных выше задач решается с помощью моделей кривых роста; вторая – с помощью адаптивных методов и моделей, а третья – с помощью регрессионных моделей.

Рассмотрим указанные задачи более подробно.

Модели кривых роста.

Плавную кривую (гладкую функцию), аппроксимирующую временной ряд, принято называть *кривой роста.*

Наиболее часто на практике используются кривые роста, которые позволяют описывать процессы трёх основных типов:

без предела роста;

с пределом роста без точки перегиба;

с пределом роста и с точкой перегиба.

Для описания *процессов без предела роста* служат функции:

$$\begin{aligned} &\text{прямая } y_t = a_0 + a_1 t, \\ &\text{парабола } y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2, \\ &\text{экспонента } y_t = e^{a_0 + a_1 t}. \end{aligned} \tag{4.3.16}$$

Процессы такого типа характерны, в основном, для абсолютных объёмных показателей. Например, объём продаж товара (ед. тыс. шт.) за последние 10 лет хорошо описывается параболой $y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$.

Для описания процессов с пределом роста без точек перегиба используются функции кривой Джонсона $y(x) = e^{a + b/x}$ и модифицированной экспоненты.

Процессы с пределом роста характерны для многих относительных показателей (душевое потребление продуктов питания, внесение удобрений на единицу площади, затраты на одну гривну производимой продукции).

Для описания процессов с пределом роста и точкой перегиба используется *логистическая кривая* (кривая Перла-Рида $y(t) = \dfrac{k}{1 + ae^{-bt}}$) и *кривая Гомперца* $y(t) = ka^{b^t}$.

Такой тип развития характерен для спроса на некоторые виды товаров.

Параметры, построенных таким образом моделей, могут быть содержательно интерпретированы. Параметр a_0 во всех моделях без предела роста задаёт начальное условие развития, а в моделях с пределом роста – асимптоту функции. Параметр a_1 определяет скорость (или интенсивность) развития, параметр a_2 – изменение скорости (или интенсивности), т.е. ускорение развития.

Параметры кривых роста, как правило, оцениваются по методу наименьших квадратов. Например, для простейшей модели $y_t = a_0 + a_1 t$ используется система нормальных уравнений (см. раздел построение парной регрессии), которая для временного ряда выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \hat{a}_0\, n \quad + \hat{a}_1 \sum_{t=1}^{n} t \;= \sum_{t=1}^{n} y_t, \\ \hat{a}_0 \sum_{t=1}^{n} t + \hat{a}_1 \sum_{t=1}^{n} t^2 = \sum_{t=1}^{n} t \cdot y_t. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно оценок $\hat{a}_0$ и $\hat{a}_1$, получим:

$$\begin{cases} \hat{a}_1 = \sum_{t=1}^{n} \left(t - \bar{t}\right) \cdot \left(y_t - \bar{y}\right) / \sum_{t=1}^{n} \left(t - \bar{t}\right)^2, \\ \hat{a}_0 = \bar{y} - \hat{a}_1 \bar{t}. \end{cases} \tag{4.3.17}$$

В основе экстраполяционных методов прогнозирования лежит предположение о том, что основные факторы и тенденции, имевшие место в прошлом, сохраняются и в будущем. Сохранение этих тенденций – непременное условие успешного прогнозирования. При этом необходимо, чтобы учитывались лишь те тенденции, которые ещё не устарели и до сих пор оказывают влияние на изучаемый процесс.

При краткосрочном прогнозировании обычно более важна динамика развития исследуемого показателя в конце периода наблюдений, а не тенденция его развития, сложившаяся в период предыстории.

Свойство динамичности развития экономических процессов часто преобладает над свойством инерционности. Поэтому более эффективными являются адаптивные методы, учитывающие информационную неравноценность данных. Цель адаптивных методов заключается в построении самокорректирующихся (самонастраивающихся) экономико-математических моделей, которые способны отражать изменяющиеся во времени условия и давать достаточно точные оценки будущих членов данного ряда.

4.4. Оценка качества моделей временных рядов

Модель считается качественной, если со статистической точки зрения она адекватна и достаточно точна. А поэтому, необходимо обязательно осуществлять полный статистический анализ построенных моделей, который заключается в следующем.

Проверка адекватности модели производится с помощью анализа остатков $e_t = y_t - \hat{y}_t$.

Наиболее важными свойствами остаточной компоненты являются:

равенство математического ожидания нулю;

независимость последовательных уровней ряда остатков;

случайность остатков и соответствие их нормальному закону распределения.

Проверка равенства математического ожидания уровней ряда остатков нулю осуществляется проверкой нулевой гипотезы $H_0 : \left|\overline{\varepsilon}\right| = 0$. Для этого строится t - статистика:

$$t_{расч} = \frac{\left|\overline{e}\right|}{S}\sqrt{n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\left|\sum_{t=1}^{n} e_t\right|}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}\left(e_t - \overline{e}\right)^2}}. \tag{4.4.18}$$

При уровне значимости α гипотеза о равенстве нулю математического ожидания уровней ряда остатков отклоняется, если

$$t_{расч} > t_{табл\ (\alpha,\ \nu)} = t_{табл\ (0{,}05;\ n-1)}. \tag{4.4.19}$$

Здесь $t_{табл\ (\alpha,\ n-1)}$ – критерий Стьюдента с уровнем значимости α и $(n-1)$ степенями свободы.

Проверка условия случайности возникновения отдельных отклонений от тренда.

Для проверки случайности отклонений уровней ряда от тренда могут быть использованы критерии:

критерий «восходящих» и «нисходящих» серий (описан ранее, см. формулу (4.2.8));

критерий пиков, или критерий поворотных точек.

Опишем второй критерий.

Значение случайной переменной считается поворотной точкой, если оно одновременно больше (меньше) соседних с ним элементов. Если остатки случайны, то поворотная точка приходится примерно на 1,5 наблюдения. Если их больше, то возмущения быстро колеблются и это не может быть объяснено только случайностью. Если же их меньше, то последовательные значения случайной компоненты положительно коррелированны.

Критерий случайности отклонения от тренда при уровне вероятности 0,95 можно представить как

$$p > \left[\frac{2}{3}\left(n-2\right) - 1{,}96\sqrt{\frac{16n-29}{90}}\right], \tag{4.4.20}$$

где p – фактическое количество поворотных точек в случайном ряду; 1,96 – квантиль нормального распределения для 5%-уровня значимости. Квадратная скобка означает целую часть числа.

Если неравенство (4.4.20) не выполняется, то ряд остатков нельзя считать случайным, т. е. он содержит регулярную компоненту, а значит, модель не является адекватной.

Проверка условия независимости, или отсутствия автокорреляции в отклонениях от модели роста осуществляется с помощью критерия Дарбина-Уотсона (см. раздел 2).

Соответствие ряда остатков нормальному закону распределения важно с точки зрения правомерности построения доверительных интервалов прогноза. Ввиду малого числа наблюдений в большинстве случаев это свойство может быть проверено лишь приближёнными методами. Таким, в частности, является метод, основанный на вычислении коэффициентов асимметрии As и эксцесса Ex для ряда остатков.

$$As = \frac{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} e_t^3}{\sqrt{\frac{1}{n}\left(\sum_{t=1}^{n} e_t^2\right)^3}}, \tag{4.4.21}$$

$$Ex = \frac{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} e_t^4}{\frac{1}{n}\left(\sum_{t=1}^{n} e_t^2\right)^2} - 3. \tag{4.4.22}$$

Если одновременно выполняются неравенства

$$|As| < 1{,}5\sigma_{As}, \quad \left|Ex + \frac{6}{n+1}\right| < 1{,}5\sigma_{Ex}, \tag{4.4.23}$$

то гипотеза о нормальном характере распределения случайной компоненты не отвергается.

Если выполняется хотя бы одно из неравенств:

$$|As| \geq 2\sigma_{As}, \quad \left|Ex + \frac{6}{n+1}\right| \geq 2\sigma_{Ex}, \tag{4.4.24}$$

то гипотеза о нормальном характере распределения отвергается.

Здесь

$$\sigma_{As} = \sqrt{6(n-2)(n+1)(n+3)}, \tag{4.4.25}$$

$$\sigma_{Ex} = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}}, \tag{4.4.26}$$

где σ_{As} – среднеквадратическая ошибка выборочной характеристики асимметрии; σ_{Ex} – среднеквадратическая ошибка выборочной характеристики эксцесса.

В случае попадания коэффициентов асимметрии и эксцесса в зону неопределённости между 1,5 и 2 единиц среднеквадратического отклонения используются другие критерии, в частности RS-критерий.

$$RS = \frac{e_{\max} - e_{\min}}{S}, \tag{4.4.27}$$

где: $S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}\left(e_t - \bar{e}\right)^2}$.

Если расчётное значение RS попадает между табулированными границами с заданным уровнем вероятности, то гипотеза о нормальном распределении ряда остатков принимается. В этом случае допустимо строить доверительные интервалы. Если все пункты проверки дают положительные результаты, то выбранная трендовая модель адекватна реальному ряду и её можно использовать для построения прогнозных оценок. В противном случае – модель надо улучшить.

4.5. Оценка точности моделей временных рядов

В статистическом анализе временных рядов известно большое число характеристик точности их моделей. Кроме среднеквадратического отклонения (СКО) используются:

максимальная по абсолютной величине ошибка

$$E_{\max} = \max\left|e_t\right|,\ t = \overline{1,n}; \tag{4.5.28}$$

относительная максимальная ошибка

$$E_{отн\max} = \frac{E_{\max}}{\bar{y}} \cdot 100\%; \tag{4.5.29}$$

средняя по модулю ошибка

$$\left|E_{ср}\right| = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left|e_t\right|; \tag{4.5.30}$$

средняя по модулю относительная ошибка

$$\left|E_{отн}\right| = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{\left|e_t\right|}{y_t} \cdot 100\%. \tag{4.5.31}$$

Лучшей по точности считается та модель, у которой выбранная характеристика имеет меньшую величину. Однако, характеристики могут по-разному отражать степень точности модели и давать противоречивые выводы. Поэтому в качестве оценки точности выбирается один основной показатель и его используют на всём протяжении процесса анализа.

4.6. Построение точечных и интервальных прогнозов

Экстраполяция, проводимая в будущее, называется перспективной, а в прошлое – ретроспективной.

Прогнозирование методом экстраполяции базируется на следующих предположениях:

развитие исследуемого явления в целом описывается плавной кривой;

общая тенденция развития явления в прошлом и настоящем не указывает на серьезные изменения в будущем;

учёт случайности позволяет оценить вероятность отклонения от закономерного развития.

Как и при прогнозе с помощью регрессионных моделей прогноз временных рядов может быть точечный и интервальный.

Точечный прогноз для временных моделей получается подстановкой в модель (уравнение тенденции) соответствующего значения фактора времени, т.е. $t = n+1, n+2, ..., n+k$. Величина прогнозного значения, зависит от вида уравнения тренда.

Интервальные прогнозы строятся на основе точечных прогнозов.

При построении доверительного интервала для точечного прогноза рассчитывается величина $U(k)$, которая для линейной модели имеет вид

$$U(k) = S_e t_\alpha \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{\left(n+k-\bar{t}\right)^2}{\sum_{t=1}^{n}\left(t-\bar{t}\right)^2}}, \tag{4.6.32}$$

где:

$$S_e = \sqrt{\frac{1}{n-p}\sum_{t=1}^{n} e_t^2}. \tag{4.6.33}$$

В этих формулах S_e – стандартная ошибка (среднеквадратическое отклонение от линии тренда); $n-p$ – число степеней свободы; k – количество шагов упреждения.

Для линейной модели $y = a_0 + a_1 t$ количество параметров $p = 2$, $t_\alpha = t_{\alpha,n-m-1} = t_{\alpha,n-2}$.

Доверительный интервал прогноза будет иметь следующие границы:

$y_{прогн(n+r)} + U(k)$ – верхняя граница;

$y_{прогн(n+r)} - U(k)$ – нижняя граница.

4.7. Адаптивные модели прогнозирования

При оценке параметров адаптивных моделей (в отличии от моделей кривых роста) наблюдениям (уровням ряда) присваиваются различные веса в зависимости от того, насколько сильным признаётся их влияние на текущий уровень. Это позволяет учитывать изменения в тенденции, а также любые колебания, в которых прослеживается закономерность. Все адаптивные модели базируются на двух схемах:

скользящей средней (СС-модели);

авторегрессии (АР-модели).

Согласно схеме *скользящей средней*, оценкой текущего уровня является взвешенное среднее всех предшествующих уровней, причём, веса при наблюдениях убывают по мере удаления от последнего уровня, т.е. информационная ценность наблюдений признаётся тем больше, чем ближе они к концу интервала наблюдения.

Реакция на ошибку прогноза и дисконтирование уровней временного ряда в моделях, базирующихся на схеме СС, определяется с помощью параметров сглаживания (адаптации), значение которых могут изменяться от 0 до 1. Более высокое значение этих параметров означает придание бóльшего веса последним уровням ряда, а низкое – предшествующим наблюдениям.

В *авторегрессионной схеме* оценкой текущего уровня служит взвешенная сумма не всех, а нескольких предшествующих уровней, при этом весовые коэффициенты при наблюдениях не ранжированы. Информационная ценность наблюдений определяется не их близостью к моделируемому уровню, а теснотой связи между ними.

Общая схема построения адаптивных моделей следующая:

по нескольким первым наблюдениям ряда оцениваются значения параметров модели;

по имеющейся модели даётся прогноз на один шаг, причём, его отклонение от фактических значений ряда расценивается как ошибка прогнозирования;

по модели со скорректированными параметрами рассчитывается прогнозная оценка на следующий момент времени, и весь процесс повторяется вновь до исчерпания фактических членов ряда. Таким образом, модель постоянно «впитывает» новую информацию, адаптируется к ней и к концу периода отражает фактическую тенденцию развития;

прогнозирование на будущее осуществляется с использованием параметров, определённых на последнем шаге по последним фактическим наблюдениям ряда.

В практике статистического прогнозирования наиболее часто используются две базовые СС-модели: Брауна и Хольта. Первая из них является частным случаем второй. Эти модели представляют процесс как развитие линейной тенденции с постоянно изменяющимися параметрами.

Модель Брауна может отображать развитие не только в виде линейной тенденции, но и в виде случайного процесса, не имеющего тенденции, а также в виде параболической тенденции. Различают три вида моделей Брауна: модель нулевого порядка, модель первого порядка и модель второго порядка.

Модель нулевого порядка описывает процессы, не имеющие тенденции развития. Эта модель имеет лишь один параметр a_0 (оценка текущего уровня). Прогнозное значение по такой модели на τ шагов вперёд осуществляется по формуле $y_{t+\tau} = a_0$. Такая модель называется наивной (будет, как было). Доверительный интервал прогноза по этой модели производится по формуле

$$\left(y_{t+\tau} - S_e t_\alpha \sqrt{\alpha / (2-\alpha)};\ y_{t+\tau} + S_e t_\alpha \sqrt{\alpha / (2-\alpha)} \right). \tag{4.7.34}$$

Модель первого порядка представляет развитие процесса в виде линейной тенденции. Она имеет два параметра:

a_0 – значение, близкое к последнему уровню и представляющее собой как бы закономерную составляющую этого уровня;

a_1 определяет прирост, сформировавшийся в основном к концу периода наблюдений. Он отражает также (правда в меньшей степени) скорость роста на более ранних этапах.

Прогноз получается по формуле

$$y_{t+\tau} = a_0 + a_1\tau. \tag{4.7.35}$$

Доверительный интервал прогноза для модели (4.7.35) рассчитывается по формуле

$$y_{t+\tau}^{пр.} \pm S_e t_\alpha \sqrt{\frac{\alpha\left[1+4(1-\alpha)+5(1-\alpha)^2+2\alpha(4-3\alpha)\tau+2\alpha^2\tau^2\right]}{(2-\alpha)^3}}. \tag{4.7.36}$$

Модель второго порядка отражает развитие в виде параболической тенденции с изменяющимися «скоростью» и «ускорением». Эта модель имеет три параметра a_0, a_1 и a_2 (a_2 – оценка текущего прироста, или «ускорение»).

Прогноз осуществляется по формуле

$$y_{t+\tau} = a_0 + a_1\tau + +a_2\tau^2. \tag{4.7.37}$$

Рассмотрим далее этапы построения линейной адаптивной модели Брауна двумя способами, связанными с различным представлением формул.

Алгоритм первого способа следующий.

1. По первым пяти точкам временного ряда оценивают значения a_0 и a_1 параметров модели с помощью метода наименьших квадратов для линейной аппроксимации по формуле:

$$\hat{y}_t = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 t. \tag{4.7.38}$$

2. С использованием параметров $\hat{a}_0$ и $\hat{a}_1$, которые соответствуют нулевому моменту времени, по модели Брауна делают прогноз на первый шаг $(\tau = 1)$:

$$\hat{y}_t = \hat{a}_{0(0)} + \hat{a}_{1(0)}\tau = \hat{a}_{0(0)} + \hat{a}_{1(0)}. \qquad (4.7.39)$$

3. Расчётное значение $\hat{y}_1$ показателя сравнивают с фактическим значением y_1 и находят отклонение e_1:

$$e_1 = y_1 - \hat{y}_1. \qquad (4.7.40)$$

Для остальных членов ряда отклонение (остаточная компонента) находится по формуле:

$$e_{(t)} = y_{(t)} - \hat{y}_{(t)}. \qquad (4.7.41)$$

Эти отклонения используют для корректировки параметров модели в соответствии со следующей схемой.

4. Корректируют параметры модели $a_{0(t)}$ и $a_{1(t)}$ по следующим формулам:

$$\begin{aligned} a_{0(t)} &= a_{0(t-1)} + a_{1(t-1)} + (1-\beta)^2 e_{(t)}, \\ a_{1(t)} &= a_{1(t-1)} + (1-\beta)^2 e_{(t)}. \end{aligned} \qquad (4.7.42)$$

Коэффициент β называется коэффициентом дисконтирования данных, отражающих бóльшую степень доверия более поздним наблюдениям; $1-\beta = \alpha$ – параметр сглаживания.

Оптимальное значение β находят итеративным путём, т.е. многократным построением модели при разных значениях β и выбором наилучшей. Параметры вычисляют последовательно, от уровня к уровню, и их значения для последнего уровня определяют окончательный вид модели.

5. По модели со скорректированными параметрами $a_{0(t)}$ и $a_{1(t)}$ находят прогноз на следующий момент времени (для $\tau = 1$):

$$\hat{y}_t(\tau) = a_{0(t)} + a_{1(t)}\tau = \hat{y}_{(t+1)} = a_{0(t)} + a_{1(t)}. \qquad (4.7.43)$$

6. Если $t < n$, то возвращаемся к выполнению пункта 3.

Если $t = n$, то построенную модель можно использовать для прогнозирования на будущее. Точечный прогноз рассчитывают по формуле:

$$\hat{y}_{(n+\tau)} = a_{0(n)} + a_{1(n)}\tau,\ \tau = 1, 2, ... \qquad (4.7.44)$$

Второй способ.

1. По первым пяти точкам временного ряда оценивают значения a_0 и a_1 параметров модели с помощью метода наименьших квадратов для линейной аппроксимации по формуле:

$$\hat{y}_t = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 t. \tag{4.7.45}$$

2. С использованием параметров $\hat{a}_0$ и $\hat{a}_1$, которые соответствуют моменту времени $t = 0$, вычисляют начальные условия экспоненциальных средних:

$$\begin{aligned} S_0^{(1)} &= a_{0(0)} - \frac{\beta}{\alpha} a_{1(0)}, \\ S_0^{(2)} &= a_{0(0)} - \frac{2\beta}{\alpha} a_{1(0)}. \end{aligned} \tag{4.7.46}$$

3. С учётом выбранного значения параметра сглаживания α или коэффициента дисконтирования $\beta(\alpha + \beta = 1)$ вычисляют значения экспоненциальных средних:

$$\begin{aligned} S_t^{(1)} &= \alpha y_t + \beta S_{t-1}^{(1)}, \\ S_t^{(2)} &= \alpha S_t^{(1)} + \beta S_{t-1}^{(2)}. \end{aligned} \tag{4.7.47}$$

4. Корректируют параметры модели $a_{0(t)}$ и $a_{1(t)}$ по следующим формулам:

$$\begin{aligned} a_{0(t)} &= 2S_t^{(1)} - S_t^{(2)}, \\ a_{1(t)} &= \frac{\alpha}{\beta}\left(S_t^{(1)} - S_t^{(2)}\right). \end{aligned} \tag{4.7.48}$$

5. По модели со скорректированными параметрами $a_{0(t)}$ и $a_{1(t)}$ находят прогноз на следующий момент времени:

$$\hat{y}_t(\tau) = a_{0(t)} + a_{1(t)}\tau = \hat{y}_{(t+1)} = a_{0(t)} + a_{1(t)}. \tag{4.7.49}$$

6. Если $t < n$, то возвращаемся к выполнению пункта 3.

Если $t = n$, то построенную модель можно использовать на будущее. Точечный прогноз рассчитывают по формуле:

$$\hat{y}_{(n+\tau)} = a_{0(n)} + a_{1(n)}\tau, \quad \tau = 1, 2, \ldots \tag{4.7.50}$$

4.8. Моделирование экономических процессов, подверженных сезонным колебаниям

Под сезонными колебаниями понимают регулярные, периодические внутригодовые, внутриквартальные, внутримесячные подъёмы и спады производства, деловой активности, грузооборота, товарооборота и прочего, в основном связанного со сменой времён года. Под сезонностью понимается ограниченность годового периода под влиянием этого фактора.

Временной ряд, в котором наблюдаются тренд и сезонные колебания, будем называть тренд-сезонным временным рядом. Сезонность отрицательно влияет на экономические процессы, поэтому её необходимо уметь измерять, анализировать и учитывать в строящихся моделях.

Для исследования и прогнозирования тренд-сезонных экономических процессов независимо от причин, порождающих сезонные колебания, необходимо решать следующие задачи:

определять наличие во временном ряде тренда;

выявлять присутствие во временном ряде сезонных колебаний;

осуществлять фильтрацию временного ряда, т.е. разделять ряд на составляющие его компоненты: тренд, сезонную и случайную компоненту;

анализировать динамку сезонной волны, т.е. выявить изменяются ли со временем ее амплитуда, и происходит ли перемещение точек экстремума сезонной волны;

составлять прогноз тренд - сезонного экономического процесса. Порядок решения перечисленных задач, их состав, может изменяться в зависимости от цели исследования, методов решения, используемых пакетов прикладных программ и других факторов.

Решение задачи определения наличия во временном ряде тренда можно осуществить или визуально, путём нанесения на график соответствующего исходного временного ряда, или аналитическими методами. При использовании визуального метода необходимо последовательно нанести на график все уровни тренд-сезонного временного ряда.

Для определения наличия во временном ряде сезонных колебаний рекомендуется использовать следующие критерии:

дисперсионный;

гармонический;

критерий, основанный на сравнении распределения коэффициента автокорреляции с распределением циклического коэффициента автокорреляции.

Смысл применения указанных критериев сводится к проверке на случайность остаточной компоненты, оставшейся после выделения из исходного временного ряда тренда. При применении дисперсионного критерия выдвигается гипотеза о том, что во временном ряде, из которого отфильтрован тренд, отсутствуют сезонные колебания. В случае справедливости данной гипотезы F-статистика будет иметь F-распределение с $\left(T_0-1\right)$ и $\left(n-T_0\right)$ степенями свободы. Здесь T_0 – период сезонных колебаний во временном ряде ($T_0=4$ для ряда квартальных данных и $T_0=12$ – для месячных); n – количество наблюдений во временном ряде.

$$F=m\frac{n-T_0}{T_0}\frac{\sum_{j=1}^{T_0}\left(\bar{e}_j-\bar{e}\right)^2}{\sum_{j=1}^{T_0}\sum_{i=1}^{m}\left(e_{ij}-\bar{e}_j\right)^2}, \tag{4.8.51}$$

где: $\bar{e}_j = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} e_{ij}$, $\bar{e} = \frac{1}{T_0}\sum_{j=1}^{T_0}\bar{e}_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{T_0}\sum_{i=1}^{m} e_{ij}$.

В (4.8.51) используются следующие обозначения: e_{ij} – значения остаточного ряда после выделения из него тренда, $i = \overline{1,m}; j = \overline{1,T_0}$, T_0 – период колебаний, m – число лет наблюдений, n – количество наблюдений во временном ряде, $n = mT_0$.

Для обнаружения сезонных колебаний с использованием коэффициента автокорреляции его значения рассчитываются по формуле

$$r(\tau) = \frac{\sum_{t=1}^{n}\left(e_t - \bar{e}\right)\left(e_{t+\tau} - \bar{e}\right)}{\sum_{t=1}^{n}\left(e_t - \bar{e}\right)^2}. \qquad (4.8.52)$$

Рассчитанные значения коэффициента автокорреляции сравниваются с табличными значениями с заданным уровнем значимости и степенью свободы. В случае, когда расчётное значение больше табличного, соответствующий коэффициент признаётся значащим, что может свидетельствовать о наличии сезонных колебаний.

Автокоррелированность остаточного ряда может быть также проверена по критерию Дарбина-Уотсона.

Для большей наглядности отсутствие или наличие сезонных колебаний проверяется с помощью графика автокорреляционной функции остаточного временного ряда.

4.9. Фильтрация компонент тренд-сезонных колебаний временного ряда

Разделение тренд-сезоного временного ряда на компоненты можно осуществлять регрессионными, спектральными и итерационными методами. В экономических исследованиях чаще используют итерационные методы, которые отличает простота и приемлемая точность фильтрации. Выбор конкретного итерационного метода определяется предположением о том, какая существует зависимость между компонентами тренд-сезонного временного ряда (аддитивная или мультипликативная). Выбор также зависит от требуемой точности определения компонент.

Принято считать, что аддитивное соотношение между компонентами тренд-сезонного временного ряда имеет место в том случае, когда с течением времени сезонная компонента существенно не изменяется. В тех случаях, когда сезонная составляющая из года в год возрастает или снижается, используют мультипликативное соотношение.

Рассмотрим алгоритм фильтрации одного итерационного метода, предположив наличие аддитивной взаимосвязи между компонентами ряда, т.е. рассмотрим следующую модель:

$$Y = U + S + E. \qquad (4.9.53)$$

Последовательность алгоритма следующая.

1. Сглаживаем исходный временной ряд методом центрированной скользящей средней по формуле:

$$y'_t = \frac{1}{T_0}\left[\frac{y_{t-T_0/2}}{2} + y_{t-T_0/2+1} + \ldots + y_t + \ldots + y_{t+T_0/2-1} + \frac{y_{t+T_0/2}}{2}\right] \qquad (4.9.54)$$

В выражении (4.9.54) используются весовые коэффициенты:

$\frac{1}{4}\left(1/2,1,1,1,1/2\right)$ для квартальных данных;

$\frac{1}{12}\left(1/2,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1/2\right)$ для годовых данных.

В результате получим временной ряд, являющийся предварительным выражением тренда.

2. Из исходного временного ряда вычитаем сглаженные значения:

$$e_{ij} = y_{ij} - \tilde{y}_{ij},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,T_i}. \qquad (4.9.55)$$

Здесь m – количество сезонных колебаний ($i-$ номер года, порядковый номер наблюдения), а T_i – количество уровней в сезонном колебании ($j-$номер квартала, месяца в году).

Полученный ряд содержит сезонную и случайную компоненты.

3. Усредняем полученные значения e_{ij} за все годы по каждому месяцу или кварталу по формуле

$$\bar{e}_j = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} e_{ij}, \qquad (4.9.56)$$

где $\bar{e}_j$ – сезонная компонента, «невыправленная» сезонная волна.

4. Корректируем среднее значение $\bar{e}_j$, увеличивая или уменьшая его на одно и то же число так, чтобы сумма всех отклонений была равна нулю. После преобразования получим «выправленную» сезонную волну.

Корректирующее число рассчитываем следующим образом: сумма оценок сезонных компонент делится на 12 (при месячных данных) или на 4 (при квартальных данных). На эту величину корректируется среднее значение $\bar{e}_j$ за каждый месяц (квартал) так, чтобы их сумма равнялась нулю. Получим S_j – сезонную волну, т.е. значения сезонной компоненты для каждого месяца (квартала).

5. Проводим десезонализацию исходных данных: вычитаем соответствующие значения сезонной компоненты из фактических значений ряда за каждый месяц (квартал), т.е.

$$u_{ij} = y_{ij} - S_j. \qquad (4.9.57)$$

Вычисленные таким образом значения ряда состоят из тренда и из случайной компоненты.

6. Подбираем для полученного ряда кривую роста, аппроксимирующую тренд. Находим параметры уравнения кривой и подставляем в него последовательно значения t. Полученные оценки (обозначим их через y'_{ij}) и будут являться значениями тренда.

7. Определяем значения случайной компоненты:

$$\varepsilon_{ij} = y_{ij} - y'_{ij} - S_j, \qquad (4.9.58)$$

которые можно использовать для определения точности и адекватности систематических компонент – тренда и сезонной волны.

8. Осуществляем прогнозирование тренд-сезонного экономического процесса путём сложения (для аддитивной модели) значений тренда, рассчитанных по уравнению тренда для каждого момента времени прогнозного периода, с соответствующим месячным (квартальным) значением сезонной компоненты:

$$\hat{y}_{ij} = y'_{ij} + S_j. \qquad (4.9.59)$$

Выполнив все пункты алгоритма, получим прогнозное значение исследуемого показателя, функционирование которого описывается аддитивной моделью.

Если принимается гипотеза о мультипликативной модели исследуемого динамического ряда, т.е.

$$Y = U \cdot S + E, \qquad (4.9.60)$$

то алгоритм его фильтрации будет следующий.

1. Пункт 1 алгоритма такой же, как и в аддитивной модели.

2. Делим значения исходного временного ряда на соответствующие сглаженные значения ряда:

$$e_{ij} = \frac{y_{ij}}{\tilde{y}_{ij}}. \qquad (4.9.61)$$

3. Пункт 3 такой же, как и в аддитивной модели.

4. Корректируем средние значения сезонных компонент за каждый месяц (квартал) так, чтобы их сумма, делённая на 12 (месячные наблюдения) или на 4 (квартальные наблюдения), равнялась единице.

5. Проводим десезонализацию исходных данных: исходные уровни временного ряда делим на соответствующие скорректированные значения сезонной волны, т.е.

$$u_{ij} = y_{ij} / S_j. \qquad (4.9.62)$$

6. Пункт 6 такой же, как и в аддитивной модели.

7. Определяем значения случайной компоненты:

$$\varepsilon_{ij} = y_{ij} - u_{ij}S_j. \qquad (4.9.63)$$

8. Осуществляем прогнозирование тренд-сезонного экономического процесса путём умножения значений тренда, рассчитанных по уравнению тренда для каждого момента времени прогнозного периода на соответствующие месячные (квартальные) значения сезонной компоненты:

$$\hat{y}_{ij} = y'_{ij}S_j. \qquad (4.9.64)$$

4.10. Модели авторегрессии и модели стационарных и нестационарных временных рядов

Авторегрессионным процессом называется такой процесс, при котором каждое значение временного ряда находится в линейной зависимости от его предыдущих значений. Если текущее значение зависит только от одного предыдущего значения – это авторерессионный процесс первого порядка, если от двух – второго порядка и т.д. вплоть до порядка с номером p.

Авторегрессионой моделью называют такую модель, в которой моделируемые значения являются линейной функцией от предыдущих наблюдений. Например, процесс авторегрессии четвёртого порядка можно представить следующим образом:

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + a_3 y_{t-3} + a_4 y_{t-4}. \qquad (4.10.65)$$

Предполагается, что авторегрессионый процесс является стационарным. Если исследуемый процесс нестационарный, то для соответствующего временного ряда рассчитывают разности уровней с тем, чтобы получить стационарный временной ряд. Такую процедуру называют интегрированием. Первоначальный ряд называется интегрированным рядом первого порядка, если его первые разности составляют стационарный временной ряд. Если для получения стационарного ряда требуется рассчитать вторые разности, то исходный временной ряд будет называться интегрированным рядом второго порядка.

Исходный стационарный временной ряд называют интегрированным рядом нулевого порядка. Например, если курс акций компании линейно возрастает, то соответствующий временной ряд представляет собой интегрированный ряд первого порядка, а временной ряд, отображающий доходность этой компании, будет интегрированным рядом нулевого порядка.

Разновидностью авторегрессионных моделей являются модели скользящей средней. В них моделируемая величина задаётся в виде линейной функции от прошлых ошибок, т.е. от разности между прошлыми фактическими и прошлыми смоделированными наблюдениями

$$y_t = b_0 + b_1\varepsilon_{t-1} + b_2\varepsilon_{t-2} + \ldots, \qquad (4.10.66)$$

где: $\varepsilon_t = y_t - \hat{y}_t$.

(Используемый здесь термин «скользящая средняя» нужно не путать со схожим термином, используемым при «механическом» сглаживании временных рядов).

На практике часто используют комбинированные модели, сочетающие авторегрессионный процесс с моделью скользящей средней или к ним ещё добавляется процедура интегрирования. В первом сочетании такие модели называются авторегрессионными моделями скользящей средней. Они имеют p временных лагов в авторегрессионном процессе и q интервалов в модели скользящей средней. Например, если $p = 3$, $q = 2$, то модель имеет следующий вид:

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + a_3 y_{t-3} + b_1 \varepsilon_{t-1} + b_2 \varepsilon_{t-2} + u_t, \qquad (4.10.67)$$

где: u_t – остаточный член ошибки в данном уравнении.

Таким образом, при моделировании стохастических процессов, представленных в виде временных рядов, необходимо определять их автокорреляции (авторегрессии), интегрированности и порядок скользящей средней.

Для измерения степени автокорреляции временных рядов используются коэффициенты автокорреляции. Проверка значимости коэффициентов автокорреляции осуществляется с помощью критерия стандартного отклонения и Q-критерия Бокса-Пирса. Критерий стандартного отклонения используется для определения значимости каждого коэффициента автокорреляции в отдельности, а Q-критерий Бокса-Пирса для проверки значимости всего множества коэффициентов как группы.

Критерий стандартного отклонения коэффициента автокорреляции рассчитывается следующим образом:

$$S_{r_k} = z\sqrt{n}, \qquad (4.10.68)$$

где: z – критическое (двустороннее) значение вероятностей нормального распределения; n – число наблюдений.

Статистический Q-критерий Бокса-Пирса рассчитывается по формуле

$$Q = n\sum_{k=1}^{m} r_k^2 = \chi_m^2, \qquad (4.10.69)$$

где: r_k – коэффициент автокорреляции с лагом k; m – максимально рассматриваемый лаг; χ_m^2 – распределение χ^2 с числом степеней свободы m.

Задачу выбора модели авторегрессии значительно облегчают частные коэффициенты автокорреляции. Они измеряют связь между текущим значением переменой y_t и предыдущими значениями этой переменной $y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}, ..., y_{t-k}$, когда влияние всех промежуточных временных лагов устранено. Таким образом, частный коэффициент автокорреляции первого порядка будет равен коэффициенту автокорреляции первого порядка, так как нет промежуточных лагов.

Частные коэффициенты автокорреляции второго и третьего порядков вычисляются соответственно по формулам:

$$\varphi_2 = \frac{r_2 - r_1^2}{1 - r_1^2}, \ \varphi_3 = \frac{r_3 - r_1^2 r_3 + r_1^3 - 2r_1 r_2 + r_1 r_2^2}{1 - 2r_1^2 + 2r_1^2 r_2 - r_2^2}. \quad (4.10.70)$$

В авторегрессионом процессе, в котором m – максимальный лаг, частные коэффициенты автокорреляции значимо отличаются от нуля для временных лагов от 0 до m и затем резко падают до нулевого значения для интервалов $m+1$ и более. Таким образом, максимальный лаг m определяет последний статистически значимый коэффициент автокорреляции.

В случае, когда значения частных коэффициентов автокорреляции резко не падают, а снижаются по экспоненте, можно предположить, что такому процессу больше соответствует модель скользящей средней, а не авторегрессии. Если же в процессе присутствуют элементы и авторегрессии, и скользящей средней, то для проверки автокорреляции может быть использован критерий Люнга-Бокса

$$LB = n(n+2)\sum_{k=1}^{m} \frac{r_k^2}{n-k} = \chi^2_{m-p-q}, \quad (4.10.71)$$

где: m – максимальное число временных лагов, рассматриваемых в модели; p – порядок авторегрессии; q – порядок процесса скользящей средней.

Проверка необходимости интегрирования временного ряда, т.е. его преобразования с помощью разностей к стационарному виду, может быть проведена либо методом Тинтнера, либо с помощью критерия Дикки-Фуллера.

При использовании критерия Дики-Фуллера осуществляется проверка наличия в модели

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + e_t \quad (4.10.72)$$

значения коэффициента α (это значение равно единице или меньше единицы).

Могут быть следующие случаи:

если $\alpha = 1$, то ряд является интегрированным рядом первого порядка;

если $0 < \alpha < 1$, то ряд стационарен.

Во временных рядах, соответствующих финансовым показателям, α обычно не бывает больше единицы. При анализе нестационарных процессов, уравнения которых имеют порядок авторегрессии больше единицы, дисперсия y_t растёт вместе с t, так как остатки автокоррелированы. В связи с этим следует использовать зависимость, выражающую изменение y_t в следующем виде:

$$\Delta y_t = \beta y_{t-1} + e_t, \quad (4.10.73)$$

где: $\beta = \alpha_t - 1$.

Могут быть два случая:

если $\beta = 0$, то ряд y_t является интегрированным рядом первого порядка, а ряд Δy_t – стационарным;

если $\beta < 0$, т. е $\alpha_t < 1$, то ряд y_t стационарен.

В обоих уравнениях предполагается, что моделируемые временные ряды имеют нулевое значение средней и что в них отсутствует тренд. Эти предположения для временных рядов финансовых показателей выполняются крайне редко. Поэтому, например, при моделировании прибыли устойчиво функционирующего коммерческого банка с положительной постоянной нормой прибыли, когда среднее значение показателя положительно, указанные уравнения модифицируются следующим образом:

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + e_t, \\ \Delta y_t &= \alpha_0 + \beta y_{t-1} + e_t. \end{aligned} \qquad (4.10.74)$$

В случае равномерно возрастающей нормы прибыли в уравнения включают ещё и тренд

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \gamma T + e_t, \\ \Delta y_t &= \alpha_0 + \beta y_{t-1} + \gamma T + e_t. \end{aligned} \qquad (4.10.75)$$

Здесь $T = \overline{1,n}$.

Проверка степени стационарности временных рядов проводится с использованием расширенного критерия Дики-Фуллера. При использовании этого критерия прошлые значения независимой переменной включаются в уравнение регрессии с лагом, достаточным для того, чтобы избавиться от автокорреляции остатков. Такое уравнение имеет вид

$$\Delta y_t = \alpha_0 + \beta_1 y_{t-1} + \gamma_1 \Delta y_{t-1} + \gamma_2 \Delta y_{t-2} + \ldots + \gamma_n \Delta y_{t-n} + e_t. \qquad (4.10.76)$$

Порядок использования критерия Дики-Фуллера следующий:

Рассчитывается значение статистического критерия β_1 / S_{β_1} (здесь S_{β_1} – стандартное отклонение коэффициента β_1) и сравнивается с модифицированным пороговым значением критерия Дики-Фуллера

$$\beta_1 / S_{\beta_1} < \Phi_\infty + \Phi_1 / n + \Phi_2 / n^2. \qquad (4.10.77)$$

В выражении (4.10.77) $\Phi_\infty, \Phi_1, \Phi_2$ – коэффициенты, величина которых зависит от уровня значимости проверяемой гипотезы, а также от того, учитывает или нет уравнение наличие в нём положительной средней и тренда; n – количество наблюдений во временном ряде.

При выполнении неравенства (4.10.77) исследуемый временной ряд признаётся стационарным, в противном случае порядок авторегрессии этого ряда равен единице. Значение коэффициентов при уровне значимости 0,01 и 0,05 приведены в следующей табл. 4.10.2.

Таблица 4.10.2

Коэффициенты	Без учёта средней и тренда		С учётом средней		С учётом средней и тренда	
	1%	5%	1%	5%	1%	5%
Φ_∞	–2,57	–1,94	–3,43	–2,86	–3,96	–3,41
Φ_1	–1,96	–0,398	–6,0	–2,74	–8,35	–4,04
Φ_2	–10,04	0	–29,25	–8,36	–47,44	–17,83

Для расчёта параметров выбранного уравнения используется метод наименьших квадратов.

4.11. Решение примеров по анализу временных рядов

Пример 4.11.1. Известны размеры месячной заработной платы y_t (тыс. грн.) на некотором предприятии за последние 12 месяцев.

Таблица 4.11.3

t, месяцы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_t, тыс. грн.	1,2	1,3	1,2	2,1	1,6	1,5	2	1,6	0,9	2	2,4	2,5

Провести анализ данного временного ряда, сделать прогноз на следующие три месяца.

Решение.

1. Выявление аномальных наблюдений. Применим критерий Ирвина. Для всех уровней ряда вычисляем величину λ_t (табл. 4.11.4).

$$\lambda_t = \frac{|y_t - y_{t-1}|}{S_y}, \text{ где } S_y = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}\left(y_t - \overline{y}\right)^2}, \quad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_t .$$

Таблица 4.11.4

Месяцы	Зарплата	λ_t
1	1,2	–
2	1,3	0,20
3	1,2	0,20
4	2,1	***1,77***
5	1,6	0,99
6	1,5	0,20
7	2	0,99
8	1,6	0,79
9	0,9	***1,38***
10	2	***2,17***
11	2,4	0,79
12	2,5	0,20

$\overline{y} =$ 1,69

$S_y^2 =$ 0,26

$S_y =$ 0,51

Критические значения критерия Ирвина при $p = 0,95$

Таблица 4.11.5

Число наблюдений	Критическое значение λ
10	1,5
20	1,3
12	1,46

Замечание. Критическое значение λ при $n=12$ в таблице не приводится. Поэтому его находим с помощью линейной интерполяции $\lambda_{кр} = 1,5 - 0,1 \cdot$ $\cdot (1,5 - 1,3) = 1,46$.

Аномальными являются наблюдения 4,9,10, табл. 4.11.4, рис. 4.11.1.

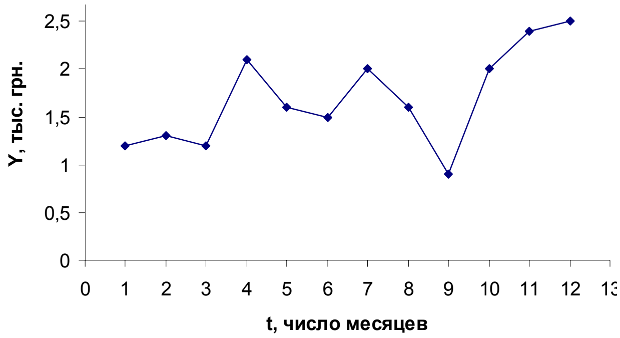


Рис. 4.11.1

Эти значения надо исключить или вместо них взять средние значения двух соседних. Вместо четвёртого и девятого уровней берём средние значения двух соседних уровней. После усреднения аномальных наблюдений, получаем новый временной ряд табл. 4.11.6, Рис. 4.11.2, в котором аномальных наблюдений нет.

Таблица 4.11.6

Месяцы	Зарплата	λ_t
1	1,2	–
2	1,3	0,23
3	1,2	0,23
4	1,4	0,45
5	1,6	0,45
6	1,5	0,23
7	2	1,14
8	1,6	0,91
9	1,8	0,45
10	2	0,45
11	2,4	0,91
12	2,5	0,23

$\bar{y} =$ 1,71

$S_y^2 =$ 0,19

$S_y =$ 0,44

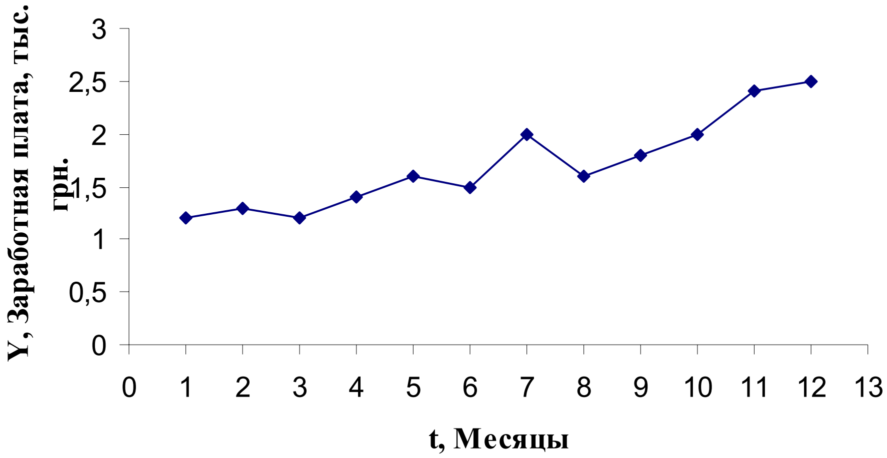


Рис. 4.11.2. Ряд с исключёнными аномальными уровнями

2. Проверим наличия тренда в ряде. Для этого делим исходный временной ряд на две равные или примерно равные по числу уровней части $n_1 = 6,\ n_2 = 6\ \left(n_1 + n_2 = n = 12\right)$.

Для каждой из этих частей вычисляем среднее значение и дисперсии:

Таблица 4.11.7

I-часть	
Месяцы	Зарплата
1	1,2
2	1,3
3	1,2
4	1,4
5	1,6
6	1,5

$\overline{y} = 1{,}367$

$$S_{y_1}^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}\left(y_i - \overline{y}\right)^2 = 0{,}027$$

Таблица 4.11.8

II-часть	
Месяцы	Зарплата
7	2
8	1,6
9	1,8
10	2
11	2,4
12	2,5

$\overline{y} = 2{,}05$

$$S_{y_2}^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=1}^{n_2}\left(y_i - \overline{y}\right)^2 = 0{,}119$$

3. Проверяем гипотезу о равенстве (однородности) дисперсий обеих частей ряда с помощью $F-$критерия Фишера. Для этого большую дисперсию делим на меньшую и сравниваем с табличным значением:

$$F_{расч} = \frac{0{,}119}{0{,}027} = 4{,}462 < F_{табл} = F_{\alpha;\, n_1-1;\, n_2-1} = F_{0{,}05;\ 5;\ 5} = 5{,}05.$$

Дисперсии различаются незначимо с вероятностью 0,95.

4. Проверим основную гипотезу о равенстве средних значений по $t-$критерию Стьюдента:

$$t=\frac{\left|\bar{y}_1-\bar{y}_2\right|}{\sqrt{(n_1-1)S_{y_1}^2+(n_2-1)S_{y_2}^2}}\sqrt{\frac{n_1n_2(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}}=$$

$$=\frac{|1{,}367-2{,}050|}{\sqrt{(6-1)0{,}027+(6-1)0{,}119}}\sqrt{\frac{6\cdot 6(6+6-2)}{6+6}}=4{,}39,$$

$$t_{расч}=4{,}39>t_{табл}=t_{\alpha;\,n-2}=2{,}23.$$

Так как $t_{расч}>t_{табл}$, то принимаем гипотезу о наличии тренда.

Наличие тренда видно и из графика (см. рис. 4.11.2).

5. Сглаживание временного ряда.

Проведём сглаживание временного ряда методом простой скользящей средней и методом экспоненциального сглаживания.

Метод простой скользящей средней.

а) Определим количество наблюдений m, входящих в интервал сглаживания, пусть $m=3$.

б) Вычисляем средние значения наблюдений по формуле

$$\tilde{y}_t=\frac{1}{m}\sum_{i=t-p}^{i=t+p}y_i=\frac{1}{3}\sum_{i=t-1}^{i=t+1}y_i\quad (t=2,3,\ldots,11).$$

Количество наблюдений, стоящих по разные стороны от сглаживаемого равно p. p рассчитываем по формуле: $p=\frac{m-1}{2}=\frac{3-1}{2}=1$.

в) Интервал слеживания сдвигается на один член вправо (вниз) и т.д. пока в интервал сглаживания не войдёт последнее наблюдение временного ряда. Первое и последнее значения ряда остаются несглаженными.

Первым сглаженным наблюдением будет $\tilde{y}_{p+1}=\tilde{y}_{1+1}=\tilde{y}_2$, последним $\tilde{y}_{n-p}=\tilde{y}_{12-1}=\tilde{y}_{11}$.

Получим сглаженный простой скользящей средней ряд, (см. табл. 4.11.9)

Таблица 4.11.9.

t, месяцы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\tilde{y}_t$, тыс. грн.	–	1,23	1,53	1,63	1,73	1,7	1,7	1,5	1,5	1,77	2,3	–

Экспоненциальное сглаживание. Чтобы получить выравнивание последнего уровня ряда (что очень важно) и учесть с некоторым весом все предыдущие значения временного ряда, применим метод экспоненциального сглаживания.

Сглаженное значение наблюдения ряда S_t на момент времени t определяется по формуле

$$S_t(y)=\alpha y_t-(1-\alpha)S_{t-1}(y)\ \ (0<\alpha<1).$$

Возьмём $\alpha = 0{,}6$; $S_0(y) = y_1 = 1{,}2$; $t = 2{,}3{,}...12$; $0 < \alpha < 1$ – сглаживаемый параметр.

Результаты вычислений вносим в табл. 4.11.10.

Таблица 4.11.10

t	y	$\tilde{y}_t$	$S_t(y)$
1	1,2		1,20
2	1,3	1,23	1,26
3	1,2	1,53	1,22
4	2,1	1,63	1,75
5	1,6	1,73	1,66
6	1,5	1,70	1,56
7	2	1,70	1,83
8	1,6	1,50	1,69
9	0,9	1,50	1,22
10	2	1,77	1,69
11	2,4	2,30	2,11
12	2,5		2,35

Рис. 4.11.3

Выявим аномальные наблюдения в сглаженном методом экспоненциального сглаживания ряде:

Таблица 4.11.11

$S_t(y)$	Параметр Ирвина λ_t
1,20	–
1,26	0,16
1,22	0,10
1,75	1,44
1,66	0,25
1,56	0,26
1,83	0,72
1,69	0,37
1,22	1,30
1,69	1,29
2,11	1,17
2,35	0,63

Рассчитаем критерий и сравним его с табличным.

$$S_y = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}\left(y_t - \overline{y}\right)^2} = 0{,}366,\ \ \lambda_{крит} = 1{,}96\,.$$

Делаем вывод, что аномальных наблюдений в рассматриваемом ряде нет.

6. Анализ степени тесноты статистической связи между уровнями временного ряда.

Тесноту статистической связи между уровнями временного ряда определяем с помощью коэффициентов автокорреляции, автокорреляционной функции и коррелограммы.

Коэффициенты автокорреляции найдём по формулам, указанным ниже и результаты запишем в табл. 4.11.12.

$$r(\tau)=\frac{\sum_{t=1}^{n-\tau}\left(y_t-\overline{y}\right)\left(y_{t+\tau}-\overline{y}\right)}{\sum_{t=1}^{n}\left(y_t-\overline{y}\right)^2},\ r(1)=\frac{\sum_{t=1}^{n-1}\left(y_t-\overline{y}\right)\left(y_{t+1}-\overline{y}\right)}{\sum_{t=1}^{n}\left(y_t-\overline{y}\right)^2},\ r(2)=\frac{\sum_{t=1}^{n-2}\left(y_t-\overline{y}\right)\left(y_{t+2}-\overline{y}\right)}{\sum_{t=1}^{n}\left(y_t-\overline{y}\right)^2}.$$

Таблица 4.11.12

t	y_t	$\overline{y}$	$y_t-\overline{y}$	$\left(y_t-\overline{y}\right)^2$	$y_{t+1}-\overline{y}$	$\left(y_t-\overline{y}\right)\cdot\left(y_{t+1}-\overline{y}\right)$	$y_{t+2}-\overline{y}$	$\left(y_t-\overline{y}\right)\cdot\left(y_{t+2}-\overline{y}\right)$	$y_{t+3}-\overline{y}$	$\left(y_t-\overline{y}\right)\cdot\left(y_{t+3}-\overline{y}\right)$	$y_{t+4}-\overline{y}$	$\left(y_t-\overline{y}\right)\cdot\left(y_{t+4}-\overline{y}\right)$
1	1,2	1,71	-0,51	0,26	-0,41	0,21	-0,51	0,26	-0,31	0,16	-0,11	0,06
2	1,3	1,71	-0,41	0,17	-0,51	0,21	-0,31	0,13	-0,11	0,04	-0,21	0,09
3	1,2	1,71	-0,51	0,26	-0,31	0,16	-0,11	0,06	-0,21	0,11	0,29	-0,15
4	1,4	1,71	-0,31	0,10	-0,11	0,03	-0,21	0,06	0,29	-0,09	-0,11	0,03
5	1,6	1,71	-0,11	0,01	-0,21	0,02	0,29	-0,03	-0,11	0,01	0,09	-0,01
6	1,5	1,71	-0,21	0,04	0,29	-0,06	-0,11	0,02	0,09	-0,02	0,29	-0,06
7	2	1,71	0,29	0,09	-0,11	-0,03	0,09	0,03	0,29	0,09	0,69	0,20
8	1,6	1,71	-0,11	0,01	0,09	-0,01	0,29	-0,03	0,69	-0,07	0,79	-0,09
9	1,8	1,71	0,09	0,01	0,29	0,03	0,69	0,06	0,79	0,07		
10	2	1,71	0,29	0,09	0,69	0,20	0,79	0,23				
11	2,4	1,71	0,69	0,48	0,79	0,55						
12	2,5	1,71	0,79	0,63								
$\overline{y}=$	1,71		Σ	2,13		1,30		0,78		0,29		0,07

$$r(1)\approx\frac{1,30}{2,13}=0,61,\ r(2)\approx\frac{0,78}{2,13}=0,37,\ r(3)\approx\frac{0,29}{2,13}=0,14,\ r(4)\approx\frac{0,07}{2,13}=0,03.$$

Для расчета коэффициентов автокорреляции надо использовать функцию **КОРРЕЛ** из **EXCEL**. Для этого значения y_t располагают столбцом. Если они расположены строкой, то транспонируют строку. Последовательно в **EXCEL** выполняем действия: Выделяем клетку, где будет находится $r(1)$; **Вставка**; **Функция**; **Статистические**; **Коррел**; **ОК**; в Массив 1 выделяем $n-1$ верхних числа из столбца y_t, а в Массив 2 − нижние $n-1$ числа из столбца y_t; **ОК**; появится $r(1)$. Чтобы найти $r(2)$ переводим курсор в нижнюю под $r(1)$ клетку и аналогично в Массив 1 выделяют $n-2$ верхних числа из столбца y_t, а в Массив 2 − нижние $n-2$ числа из столбца y_t; **ОК**; появится $r(2)$. Этот процесс продолжаем до получения $r(9)$.

Последовательность коэффициентов автокорреляции уровней первого, второго и последующих порядков называют автокорреляционной функцией. Значения автокорреляционной функции могут колебаться от –1 до +1. График автокорреляционной функции называется коррелограммой.

Если наиболее высоким оказался коэффициент автокорреляции первого порядка, исследуемый ряд содержит только тенденцию. Если наиболее высоким оказался коэффициент автокорреляции порядка τ, то ряд содержит циклические колебания с периодичностью в τ моментов времени. Если ни один из коэффициентов не является значим, то ряд либо не содержит тенденции и сезонных колебаний, либо содержит сильную нелинейную тенденцию. Поэтому автокорреляционную функцию используют для выявления трендовой компоненты $f(t)$ и сезонной компоненты $S(t)$.

Таблица 4.11.13

Лаг	Коэффициенты автокорреляции вычисленные с помощью функции КОРРЕЛ
1	0,82
2	0,81
3	0,68
4	0,68
5	0,83
6	0,78
7	0,85
8	0,50
9	0,33

Построим коррелограмму.

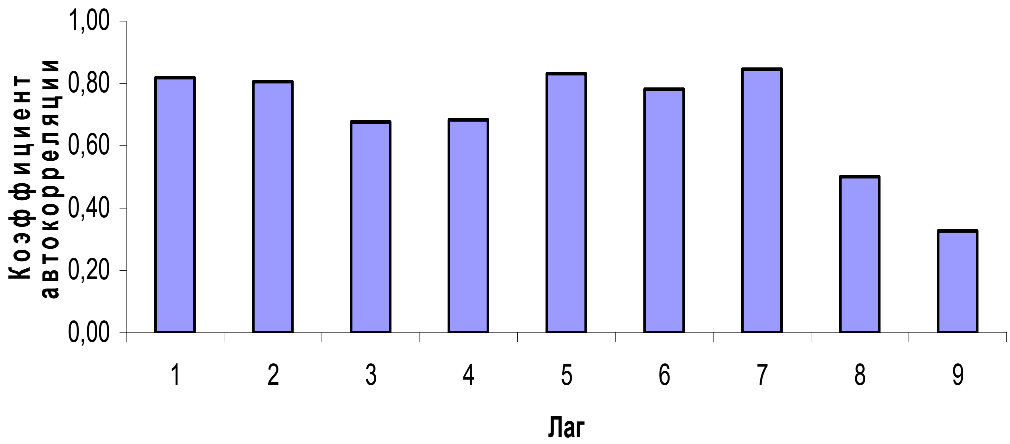


Рис. 4.11.4. Коррелограмма исследуемого ряда

Из рис. 4.11.4 делаем вывод, что в данном ряде отсутствует тренд и сезонные колебания.

7. Построение модели временного ряда.

Построим линейную модель временного ряда.

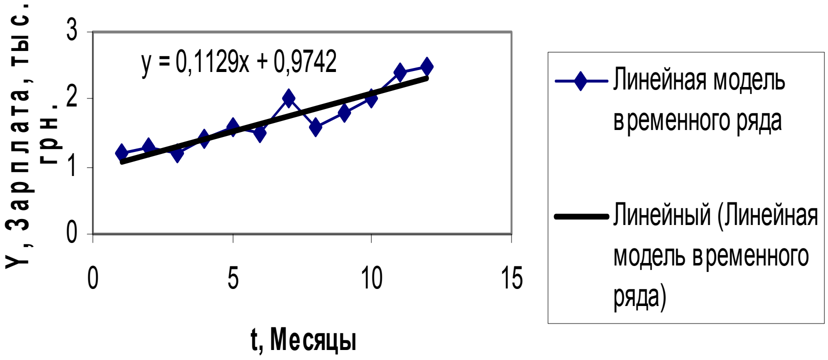


Рис. 4.11.5. Линейная модель временного ряда

Линейная модель временного ряда имеет вид $\hat{y} = 0{,}113t + 0{,}974$

8. Оценка качества модели.

Оценка качества модели основывается на анализе остатков e_t. Поэтому для дальнейшего анализа найдём значения $\hat{y}_t$ и остатки e_t:

Таблица 4.11.14

t	y_i	$\hat{y}_i$	e_i
1	1,2	1,09	0,11
2	1,3	1,20	0,10
3	1,2	1,31	-0,11
4	1,4	1,43	-0,03
5	1,6	1,54	0,06
6	1,5	1,65	-0,15
7	2	1,76	0,24
8	1,6	1,88	-0,28
9	1,8	1,99	-0,19
10	2	2,10	-0,10
11	2,4	2,22	0,18
12	2,5	2,33	0,17

ДИСП=0,03

$$S = \sqrt{0{,}03} = 0{,}167$$

а) Проверим равенство математического ожидания уровней ряда остатков нулю.

В нашем случае $\bar{e} = 0$, а поэтому гипотеза о равенстве математического ожидания значений остаточного ряда нулю выполняется.

б) Проверка условия случайности возникновения отдельных отклонений от тренда.

Из рис. *4.11.5.* видно, что поворотных точек $p = 5$.

Неравенство

$$p = 5 > \left[\frac{2}{3}(n-2) - 1{,}96\sqrt{\frac{16n-29}{90}}\right] = \left[\frac{2}{3}(12-2) - 1{,}96\sqrt{\frac{16\cdot 12-29}{90}}\right] = [4{,}029] = 4$$

выполняется. Следовательно, исследуемый ряд случаен.

в) Проверим условие независимости отклонений от модели роста с помощью критерия Дарбина-Уотсона. Данные сводим в табл. 4.11.15.

Таблица 4.11.15

$(e_t - e_{t-1})^2$	e_t^2	$\dfrac{\lvert e_t\rvert}{y_t}$
–	0,013	0,02
0,000	0,010	0,02
0,045	0,013	0,11
0,008	0,001	0,18
0,008	0,004	0,08
0,045	0,023	0,02
0,150	0,055	0,09
0,263	0,077	0,03
0,008	0,036	0,49
0,008	0,011	0,12
0,082	0,034	0,07
0,000	0,029	0,13
0,617	0,305	1,37

$$dw = \frac{0{,}617}{0{,}305} = 2{,}020 \qquad E_{отн} = \frac{1}{12}\sum_{t=1}^{12}\frac{\lvert e_t\rvert}{y_t}\cdot 100\% \approx 11\%$$

Критерий Дарбина-Уотсона рассчитываем по формуле

$$dw = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=2}^{n} e_t^2} = \frac{0{,}617}{0{,}305} = 2{,}020\,.$$

Критические значения выбираем из таблицы: $d_1 = 0{,}971$, $d_2 = 1{,}311$. Анализируем построенный рис.4.11.6.

Рис. 4.11.6. Критические значения критерия Дарбина-Уотсона и его фактическое значение

Из рисунка делаем вывод, что автокорреляция в остатках отсутствует.

г) *Соответствие ряда остатков нормальному закону распределения* проверим с помощью RS – критерия

$$RS = \frac{e_{\max} - e_{\min}}{S},$$

где: $e_{\max}$ – максимальный уровень ряда остатков, $e_{\min}$ – минимальный уровень ряда остатков, S – среднеквадратическое отклонение:

$$e_{\max} = 0{,}24\,,\ e_{\min} = -0{,}28\,,\ S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(e_i - \bar{e}\right)^2} = 0{,}167\,,$$

$$RS = \frac{0{,}24 - (-0{,}28)}{0{,}167} = 3{,}11\,.$$

Граничные значения RS – критерия выберем из таблицы 4.11.16.

Таблица 4.11.16

Число наблюдений	Нижняя граница	Верхняя граница
10	2,67	3,69
15	2,96	4,14
12	2,786	3,87

Так как $RS_{расч} = 3{,}11 \in \left(2{,}786;\ 3{,}87\right)$, то делаем вывод, что остатки исследуемого ряда распределены по нормальному закону.

д) *Для оценки точности модели* вычислим среднюю ошибку аппроксимации, табл. 4.11.15

$$E_{отн} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|e_i|}{y_i}\cdot 100\% = 11{,}38\%\,.$$

На основании последних пяти пунктов можно сделать вывод, что модель адекватна статистическим данным и по ней можно строить прогноз.

9. Построение точечного и интервального прогноза на три шага вперёд

Для вычисления точечного прогноза в построенную модель подставляем соответствующие значения фактора-аргумента $t = n + k$:

$$\hat{y}_{прогн(n+k)} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 \cdot \left(n + k\right),$$

$$\hat{y}_{13} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 \cdot t = 0{,}974 + 0{,}113t \ = 0{,}974 + 0{,}113 \cdot 13 = 2{,}44\,,$$
$$\hat{y}_{14} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 \cdot t = 0{,}974 + 0{,}113t \ = 0{,}974 + 0{,}113 \cdot 14 = 2{,}55\,,$$
$$\hat{y}_{15} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 \cdot t = 0{,}974 + 0{,}113t \ = 0{,}974 + 0{,}113 \cdot 15 = 2{,}67\,.$$

Для построения интервального прогноза вычислим доверительный интервал прогноза.

$$U(k) = S_e t_\alpha \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{\left(n+k-\bar{t}\right)^2}{\sum_{t=1}^{n}\left(t-\bar{t}\right)^2}},$$

где

$$S_e = \sqrt{\frac{1}{n-p}\sum_{i=1}^{n} e_i^2} = \sqrt{\frac{1}{12-2}0,305} = \sqrt{\frac{0,305}{10}} = 0,175,$$

$$t_\alpha = t_{\alpha;\nu} = t_{0,05;n-m-1} = t_{0,05;n-2} = t_{0,05;10} = 2,23, \quad \bar{t} = 6,5, \quad \sum_{t=1}^{n}\left(t-\bar{t}\right)^2 = 143.$$

$$U(1) = 0,175 \cdot 2,23 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{12} + \frac{(12+1-6,5)^2}{143}} = 0,46,$$

$$U(2) = 0,175 \cdot 2,23 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{12} + \frac{(12+2-6,5)^2}{143}} = 0,47,$$

$$U(3) = 0,175 \cdot 2,23 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{12} + \frac{(12+3-6,5)^2}{143}} = 0,49.$$

$$y_{прогн\ (n+k)} \in \left(\hat{y}_{n+k} - U(k);\ \hat{y}_{n+k} + U(k)\right):$$

$$y_{прогн\ (13)} \in \left(\hat{y}_{13} - U(1); \hat{y}_{13} + U(1)\right) = (2{,}44\text{-}0{,}46;\ 2{,}44\text{+}0{,}46) = (1{,}98;\ 2{,}90),$$

$$y_{прогн\ (14)} \in \left(\hat{y}_{14} - U(2); \hat{y}_{13} + U(2)\right) = (2{,}55\text{-}0{,}47;\ 2{,}55\text{+}0{,}47) = (2{,}08;\ 3{,}03),$$

$$y_{прогн\ (15)} \in \left(\hat{y}_{15} - U(3); \hat{y}_{13} + U(3)\right) = (2{,}67\text{-}0{,}49;\ 2{,}67\text{+}0{,}49) = (2{,}18;\ 3{,}16).$$

Изобразим на графике результаты моделирования и прогнозирования.

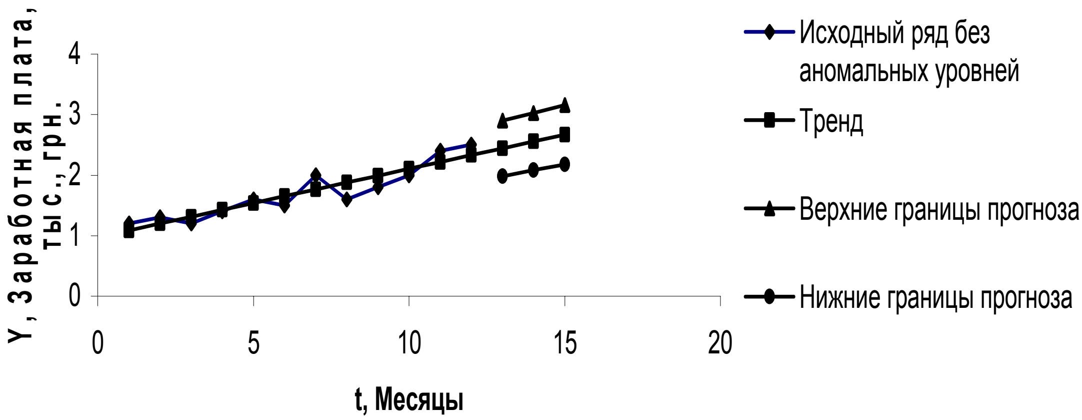


Рис. 4.11.7. Результаты моделирования и прогнозирования

10. Построим адаптивную модель Брауна с линейной тенденцией и сделаем прогноз на три шага вперёд.

10.1. По первым пяти точкам временного ряда оцениваем с помощью МНК значения a_0 и a_1 параметров линейной модели: $\hat{y}_t = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 t$.

Получим: $\hat{y}_t \;=\; 1{,}07 + 0{,}09t$.

10.2. Находим прогноз на первый шаг $\hat{y}_1 = \hat{a}_{0(0)} + \hat{a}_{1(0)} = 1{,}07 + 0{,}09 = 1{,}16$.

10.3 Находим величину отклонения $e_1 = y_1 - \hat{y}_1 = 0{,}04$.

Дальнейшие расчёты оформляем в табл. 4.11.17.

Таблица 4.11.17

t	y_t	$\hat{a}_0$	$\hat{a}_1$	$\hat{y}_t$	$e_t = y_t - \hat{y}_t$	$\frac{\lvert e_t \rvert}{y_t} \cdot 100\%$
0	–	1,07	0,09	–	–	–
1	1,20	1,16	0,09	1,16	0,04	3,33
2	1,30	1,26	0,10	1,26	0,04	3,29
3	1,20	1,34	0,08	1,36	-0,16	13,21
4	1,40	1,42	0,08	1,43	-0,03	1,96
5	1,60	1,51	0,09	1,51	0,09	5,90
6	1,50	1,59	0,08	1,60	-0,10	6,89
7	2,00	1,70	0,11	1,67	0,33	16,30
8	1,60	1,79	0,09	1,81	-0,21	13,29
9	1,80	1,88	0,08	1,88	-0,08	4,64
10	2,00	1,96	0,09	1,96	0,04	2,07
11	2,40	2,08	0,12	2,05	0,35	14,64
12	2,50	2,23	0,15	2,20	0,30	12,07

10.4. Корректируем параметры модели $a_{0(t)}$ и $a_{1(t)}$ $\left(t=1\right)$

$$a_{0(t)} = a_{0(t-1)} + a_{1(t-1)} + \left(1-\beta\right)^2 e_{(t)} = 1{,}07{+}0{,}09{+}\left(1-0{,}7\right)^2 \cdot 0{,}04{=}1{,}16,$$

$$a_{1(t)} = a_{1(t-1)} + \left(1-\beta\right)^2 e_{(t)} = 0{,}09{+}\left(1\text{-}0{,}7\right)^2 \cdot 0{,}04{=}0{,}09.$$

10.5. Находим прогноз на следующий момент времени $\left(t=2\right)$:

$$\hat{y}_2 = 1{,}16{+}0{,}09{=}1{,}26.$$

10.6. Возвращаемся к пункту 10.3. Вычисления повторяем до конца наблюдений.

Для выбора лучшей модели вычисляем показатели точности при разных значениях параметра α:

$$\left(\alpha+\beta=1,\quad \beta=1-\alpha,\quad \alpha=0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4;\ 0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}9\right).$$

Приведенные расчеты выполнены при «лучшем» $\beta = 0{,}7$.

Значение β определяется графически из рис. *4.11.8, 4.11.9*. Из рисунков видно, что наименьшие ошибки будут, если $\alpha \approx 0,3$ $(\beta \approx 0,7)$.

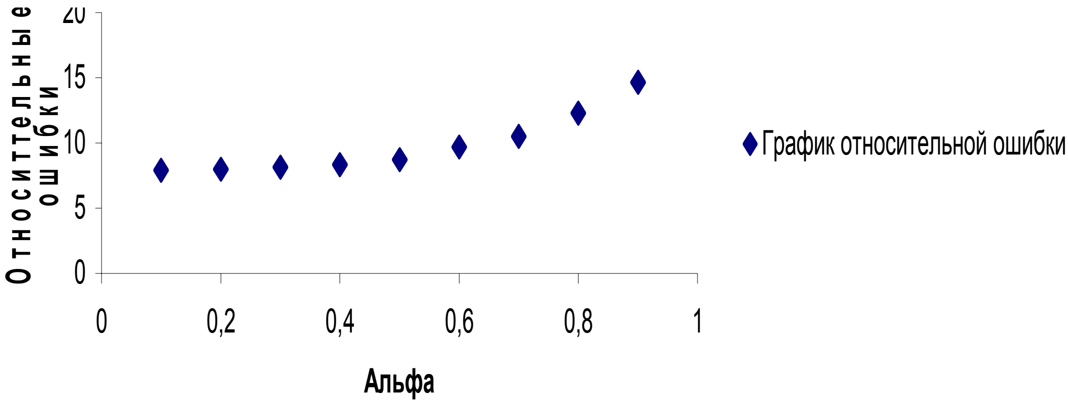


Рис. 4.11.8. График относительной ошибки

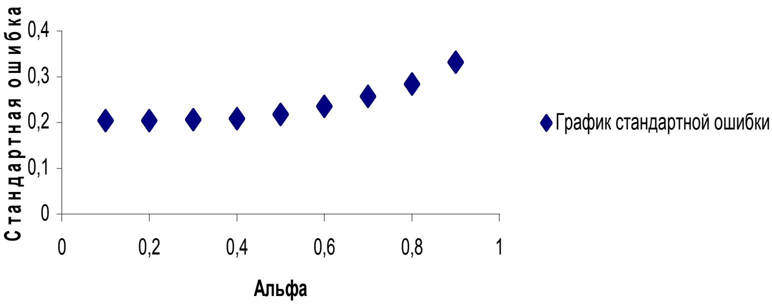


Рис. 4.11.9. График стандартной ошибки

10.7. Параметры модели, полученные в последний момент времени, используем для построения прогноза:

$$\hat{y}_{12}(1) = \hat{y}_{13} = a_{0(12)} + a_{1(12)} \cdot 1 = 2,344 + 0,219 \cdot 1 = 2,564,$$

$$\hat{y}_{12}(2) = \hat{y}_{14} = a_{0(12)} + a_{1(12)} \cdot 2 = 2,344 + 0,219 \cdot 2 = 2,783,$$

$$\hat{y}_{12}(3) = \hat{y}_{15} = a_{0(12)} + a_{1(12)} \cdot 3 = 2,344 + 0,219 \cdot 3 = 3,002.$$

Изобразим графически полученные результаты.

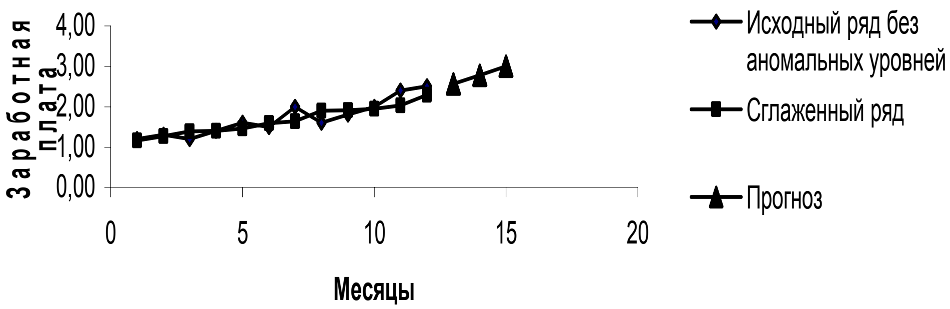


Рис. 4.11.10. Исходные данные и результаты моделирования по Брауну при $\alpha = 0,3;\ \beta = 0,7$

Далее рассмотрим два примера на фильтрацию компонент тренд-сезонных колебаний временного ряда.

Пример 4.11.2. В таблице указаны непроизводственные поквартальные издержки на фирме «Можем всё» за последние 16 кварталов.

Таблица 4.11.18

Год	2005				2006				2007				2008			
№ п.п.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
№ квартала	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Издержки, тыс. грн.	1,9	0,9	0,9	1,7	2	1	1,1	2,4	2,5	1,2	1,4	2,8	3	1,3	1,6	3

Проверить наличие сезонных колебаний во временном ряде, провести фильтрацию ряда, дать прогноз издержек на следующий год, т.е. на следующие четыре квартала, при условии, что заданный ряд описывается аддитивной моделью.

Решение. Построим коррелограмму.

С помощью функции КОРРЕЛ находим последовательно коэффициенты автокорреляции перового, второго и т. д. уровней, значения которых вносим в табл. 4.11.19.

Таблица 4.11.19.

Лаг, τ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$r(\tau)$	0,14	-0,59	0,28	0,97	-0,04	-0,81	0,24	0,96	-0,30	-0,95	0,33	0,98	-0,64

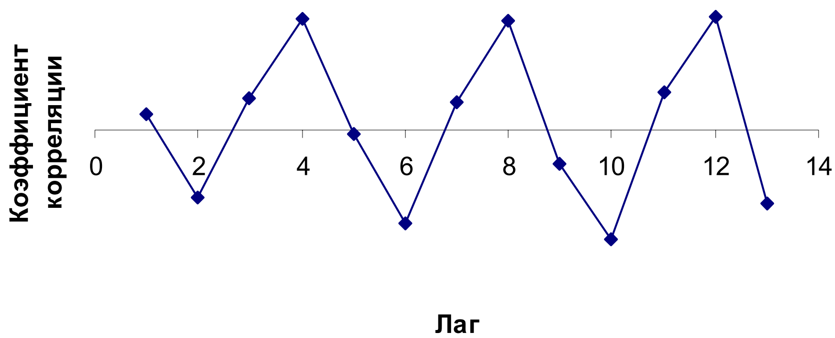


Рис. 4.11.11. Коррелограмма в виде точечной диаграммы

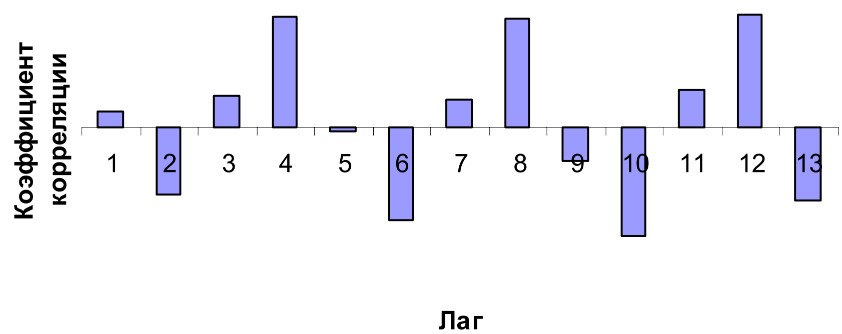


Рис. 4.11.12. Коррелограмма в виде гистограммы

Анализ значений автокорреляционной функции позволяет сделать вывод о наличии сезонных колебаний периодичностью в 4 квартала.

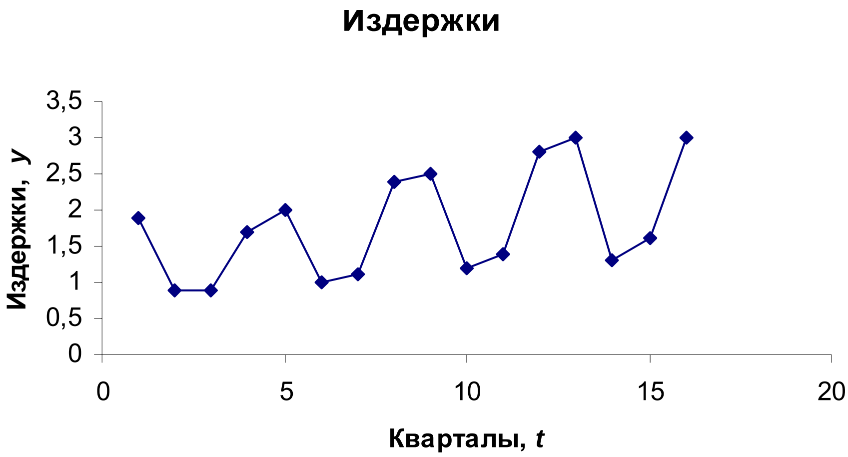


Рис. 4.11.13.

Сезонная вариация – это повторение данных через небольшой промежуток времени. Под «сезоном» можно понимать и день, и неделю, и месяц и квартал. Если же промежуток времени будет длительным, то это циклическая вариация. Остановимся на изучении данных для небольшого интервала времени, т е. на сезонной вариации.

Сначала на основании прошлых данных определяется сезонная вариация. Исключив сезонную вариацию (проведя десезонализацию данных) с помощью модели линейной (или нелинейной) регрессии находим уравнение тренда (кривой роста). По уравнению тренда и прошлым данным вычисляют величины ошибок. По трендовым составляющим и сезонными составляющим находим прогноз на следующие моменты времени.

Предположим наличие аддитивной взаимосвязи между компонентами ряда, т.е.

$$Y = U + S + E.$$

1. *Сглаживаем исходный* временной ряд методом центрированной скользящей средней, используя формулу для квартальных данных

$$\tilde{y}_t = \frac{1}{4}\left(\frac{y_{t-2}}{2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + \frac{y_{t+2}}{2}\right).$$

Результаты вычислений $\tilde{y}_{ij}$ вносим в табл. 4.11.20. Сглаженные данные находятся в столбце 4 этой таблицы.

2. Находим оценки сезонной вариации. Для этого из исходного временного ряда вычитаем сглаженные значения

$$e_{ij} = y_{ij} - \tilde{y}_{ij}$$

и записываем их в пятом столбце табл. 4.11.20.

Здесь i – номер года, номер наблюдения; j – номер квартала в году.

Таблица 4.11.20.

№ квартала, i	№ квартала в году, j	Объем издержек, тыс. грн.	Сглаженные значения	Оценка сезонной вариации (сезонная и случайная компонента)
1	2	3	4	5
		y_{ij}	$\tilde{y}_{ij}$	$e_{ij} = y_{ij} - \tilde{y}_{ij}$
1	**1**	**1,9**		
2	2	0,9		
3	3	0,9	1,36	-0,46
4	4	1,7	1,39	0,31
5	**1**	**2**	1,43	0,58
6	2	1	1,54	-0,54
7	3	1,1	1,69	-0,59
8	4	2,4	1,78	0,63
9	**1**	**2,5**	1,84	0,66
10	2	1,2	1,93	-0,73
11	3	1,4	2,04	-0,64
12	4	2,8	2,11	0,69
13	**1**	**3**	2,15	0,85
14	2	1,3	2,20	-0,90
15	3	1,6		
16	4	3		

Прогноз

17	1	3,14
18	2	1,80
19	3	2,03
20	4	3,21

Таблица 4.11.21.

№ квар. в году	Сезонная составляющая	Десезонализованные исходные данные	Трендовые значения	Значения случайной компоненты	Относительная ошибка
6	7	8	9	10	11
	S_j	u_{ij}	y'_{ij}	ε_{ij}	$\lvert\varepsilon_{ij}\rvert / y_{ij}$
1	0,71	1,19	1,23	-0,04	0,021
2	-0,71	1,61	1,31	0,30	0,336
3	-0,55	1,45	1,38	0,07	0,077
4	0,55	1,15	1,46	-0,31	0,182
1	0,71	1,29	1,53	-0,24	0,120
2	-0,71	1,71	1,61	0,10	0,103
3	-0,55	1,65	1,68	-0,03	0,028
4	0,55	1,85	1,76	0,09	0,038
1	0,71	1,79	1,83	-0,04	0,015
2	-0,71	1,91	1,91	0,00	0,003
3	-0,55	1,95	1,98	-0,03	0,022
4	0,55	2,25	2,06	0,19	0,068
1	0,71	2,29	2,13	0,16	0,054
2	-0,71	2,01	2,21	-0,20	0,151
3	-0,55	2,15	2,28	-0,13	0,081
4	0,55	2,45	2,36	0,09	0,030

Σ 1,328

$$E_{отн.\ ошиб} = \frac{1{,}328}{16} \cdot 100\% = 8{,}30\%$$

Заполняем табл. 4.11.22. Оценки сезонной вариации запишем под соответствующим номером квартала в году.

3. Усредняем полученные значения e_{ij} за все годы по каждому кварталу: (сумму чисел в столбце, выделенных жирным шрифтом) делим на (количество чисел в столбце). Сумма чисел в строке «Среднее» равна (- 0,05).

4. Корректируем средние значения $\bar{e}_j$, увеличивая или уменьшая их на одно и то же число так, чтобы их сумма была равна нулю. В результате получим «выправленную» сезонную волну. В нашем примере из чисел в строке «Среднее» под номерами кварталов вычитаем числа $-0{,}01146 = \frac{-0{,}05}{4}$. В по-

следней строке получены значения сезонной вариации для соответствующего квартала года.

Таблица 4.11.22

		Номер квартала в году				
		1	2	3	4	
				-0,46	0,31	
		0,58	-0,54	-0,59	0,63	
		0,66	-0,73	-0,64	0,69	
		0,85	-0,90			
Среднее	$\bar{e}_j$	0,70	-0,72	-0,56	0,54	-0,05
Скорректированная сезонная вариация	S_j	0,71	-0,71	-0,55	0,55	0

5. Проведём десезонализацию исходных данных: вычтем соответствующие значения сезонной компоненты из фактических значений ряда за каждый квартал, т.е.

$$u_{ij} = y_{ij} - S_j .$$

Вычисленные таким образом значения ряда состоят из тренда и случайной компоненты.

6. Подбираем для полученного ряда кривую роста, аппроксимирующую ряд. Она будет выглядеть следующим образом:

$$y = 0{,}07t + 1{,}16 .$$

7. Определяем значение случайной компоненты

$$\varepsilon_{ij} = y_{ij} - y'_{ij} - S_j .$$

8. Вычислим прогнозные значения издержек на четыре квартала следующего года.

$$y_{ij}^{(Прогноз)} = y_{i\,j} = y_{2009\,j} = y'_{ij} + S_j \quad (i = 17,18,19,20;\ j = 1,2,3,4),$$

$$y_{17\ 1} = y_{2009\ 1} = 0{,}07 \cdot 17 + 1{,}16 + 0{,}71 = 3{,}12,$$

$$y_{18\ 2} = y_{2009\ 2} = 0{,}07 \cdot 18 + 1{,}16 - 0{,}71 = 1{,}80,$$

$$y_{19\ 3} = y_{2009\ 3} = 0{,}07 \cdot 19 + 1{,}16 - 0{,}55 = 2{,}03,$$

$$y_{20\ 4} = y_{2009\ 4} = 0{,}07 \cdot 20 + 1{,}16 + 0{,}55 = 3{,}21.$$

Рассмотрим методику анализа и составления прогноза для временного ряда при мультипликативной модели.

Пример 4.11.3. В таблице указан объем продаж на фирме «Застройщик» в последние 12 кварталов:

Таблица 4.11.23

Год	2006				2007				2008			
№ п.п.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
№ квартала	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Издержки, тыс. грн.	52	63	68	110	54	69	79	125	59	73	80	140

Необходимо проверить наличие сезонных колебаний во временном ряде, провести фильтрацию ряда, дать прогноз продаж на следующий год, т.е. на следующие четыре квартала.

Решение.

Построим коррелограмму. С помощью функции КОРРЕЛ находим последовательно коэффициенты автокорреляции перового, второго и т. д. уровней, значения которых вносим в табл. 4.11.24.

Таблица 4.11.24

Лаг, τ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$r(\tau)$	-0,13	-0,17	-0,35	0,99	-0,03	-0,16	-0,47	1,00	0,80

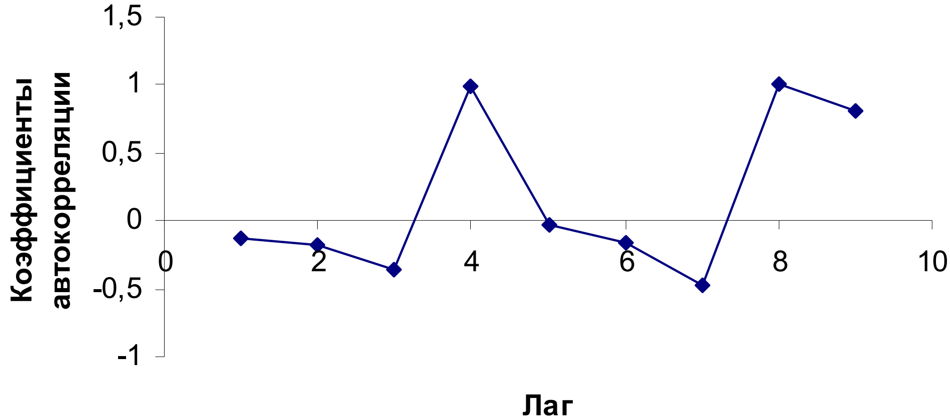


Рис. 4.11.14. График автокорреляционной функции.

Анализ значений автокорреляционной функции позволяет сделать вывод о наличии сезонных колебаний периодичностью в 4 квартала.

Предположим наличие мультипликативной взаимосвязи между компонентами ряда, т.е.

$$Y = U \cdot S + E.$$

1. Сглаживаем исходный временной ряд $\tilde{y}_{ij}$ методом центрированной скользящей средней, используя формулу для квартальных данных:

$$\tilde{y}_t = \frac{1}{4}\left(\frac{y_{t-2}}{2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + \frac{y_{t+2}}{2}\right).$$

Результаты вычислений вносим в табл. 4.11.25.

Сглаженные данные находятся в столбце 4 табл. 4.11.25.

2. Проводим оценку сезонной вариации. Делим значения исходного временного ряда на соответствующие сглаженные значения ряда

$$e_{ij} = y_{ij} / \tilde{y}_{ij}.$$

Результаты записываем в пятом столбце табл. 4.11.25.

Таблица 4.11.25

Номер квартала, i	Номер квартала в году, j	Объем продаж, тыс.грн.	Центрированные скользящие средние	Оценка сезонной вариации (сезонная и случайная компонента)
1	2	3	4	5
		y_{ij}	$\tilde{y}_{ij}$	$e_{ij} = y_{ij} / \tilde{y}_{ij}$
1	**1**	52		
2	2	63		
3	3	68	73,50	0,93
4	4	110	74,50	1,48
5	**1**	54	76,63	0,70
6	2	69	79,88	0,86
7	3	79	82,38	0,96
8	4	125	83,50	1,50
9	**1**	59	84,13	0,70
10	2	73	86,13	0,85
11	3	80		
12	4	140		

Прогноз

13	1	63,83
14	2	60,98
15	3	87,42
16	4	139,45

Таблица 4.11.26

Номер квартала в году	Сезонная составляющая	Десезонализация	Трендовые значения	Значения случайной компоненты	Относительная ошибка
6	7	8	9	10	11
	S_j	u_{ij}	y'_{ij}	ε_{ij}	$\lvert\varepsilon_{ij}\rvert / y_{ij}$
1	0,705	73,74	77,5059	-2,658	0,051
2	0,666	94,53	79,0688	10,305	0,164
3	0,945	71,96	80,6317	-8,199	0,121
4	1,491	73,76	82,1946	-12,583	0,114
1	0,705	76,57	83,7575	-5,067	0,094
2	0,666	103,53	85,3204	12,138	0,176
3	0,945	83,60	86,8833	-3,107	0,039
4	1,491	83,82	88,4462	-6,906	0,055
1	0,705	83,66	90,0091	-4,476	0,076
2	0,666	109,54	91,572	11,972	0,164
3	0,945	84,65	93,1349	-8,015	0,100
4	1,491	93,87	94,6978	-1,230	0,009

Σ 1,163

$$E_{отн.\ ошиб} = \frac{1{,}163}{12} \cdot 100\% = 8{,}31\%$$

Заполняем табл. 4.11.27. Оценки сезонной вариации записываем под соответствующим номером квартала в году.

3. Усредняем полученные значения e_{ij} за все годы по каждому кварталу: (сумму чисел в столбце, выделенных жирным шрифтом) делим на (количество чисел в столбце). Сумма чисел в строке «Среднее» равна 3,988.

4. Значение сезонной вариации – это доли при числе сезонов равным 4. Поэтому необходимо, чтобы сумма средних была равна 4. Следовательно,

итоговые коэффициенты сезонности нужно умножить на множитель $1{,}003 = \dfrac{4}{3{,}988}$. В последней строке табл. 4.11.27 указаны окончательные коэффициенты сезонности. Получены значения сезонной вариации для соответствующего квартала года.

Таблица 4.11.27

		Номер квартала в году				
		1	2	3	4	
				0,925	1,477	
		0,705	0,864	0,959	1,497	
		0,701	0,848			
Среднее	$\bar{e}_j$	0,703	0,856	0,942	1,487	3,988
Скорректированная сезонная вариация	S_j	0,705	0,858	0,945	1,491	4,000

5. Проведём десезонализацию исходных данных: исходные уровни временного ряда делим на соответствующие скорректированные значения сезонной компоненты, т.е.

$$u_{ij} = y_{ij} / S_j .$$

Вычисленные таким образом значения ряда состоят из тренда и случайной компоненты.

6. Подбираем для полученного ряда кривую роста, аппроксимирующую ряд:

$$y = 1{,}56\,t + 75{,}94 .$$

7. Определяем значение случайной компоненты (10-й столбец табл. 4.11.26).

$$\varepsilon_{ij} = y_{ij} - u_{ij} \cdot S_j$$

и относительную ошибку (11-й столбец табл. 4.11.26.)

$$E_{Отн.\ ошиб} = \frac{1}{12} \cdot \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{4} \frac{|\varepsilon_{ij}|}{y_{ij}} \cdot 100\% = \frac{1}{12} \cdot 1{,}163 \cdot 100\% = 8{,}31\%.$$

8. Вычисляем прогнозные значения на четыре квартала следующего года:

$$y_{ij}^{(Прогноз)} = y_{ij} = y_{i\ 2009} = y'_{ij} \cdot S_j \quad (i = 13{,}14{,}15{,}16;\ j = 1{,}2{,}3{,}4),$$

$$y_{13\ 1} = y_{2009\ 1} = (1{,}56 \cdot 13 + 75{,}94) \cdot 0{,}705 = 63{,}83,$$

$$y_{14\ 2} = y_{2009\ 2} = (1{,}56 \cdot 14 + 75{,}94) \cdot 0{,}666 = 60{,}98,$$

$$y_{15\ 3} = y_{2009\ 3} = (1{,}56 \cdot 15 + 75{,}94) \cdot 0{,}945 = 87{,}42,$$

$$y_{16\ 4} = y_{2009\ 4} = (1{,}56 \cdot 16 + 75{,}94) \cdot 1{,}491 = 139{,}45.$$

РАЗДЕЛ 5. ЭКОНОМИЧЕСКИЙ РИСК И МЕТОДЫ ЕГО ИЗМЕРЕНИЯ

5.1. Определение риска и его классификация

В литературе имеется более 100 определений риска. Дадим три определения риска, которые отражают наиболее существенные стороны этого понятия.

Риск – *это ситуационная характеристика деятельности любого производителя, отображающая неопределённость её исхода и её возможные неблагоприятные последствия в случае неуспеха.*

Риск – *это вероятность угрозы потери предприятием части своих ресурсов, недополучение доходов, или появление дополнительных расходов в результате осуществления определённой производственной и финансовой деятельности.*

Риск – *это постоянная потребность человека преодолевать разные препятствия при достижении поставленной цели.*

Слово «риск» имеет корень древнегреческого слова «$\rho\iota\varsigma\alpha$», что означает скала. В древности под риском понимали риск мореплавания, а теперь, в современном мире с этим словом связывают в основном, финансовые преграды.

Выделяют три источника риска:

недостаток времени;

недостаток информации;

недостаток возможностей относительно управления ситуацией.

Источниками риска является неопределённый характер научно-технического прогресса, конъюнктуры рынка, внутреннего и внешнеэкономического положения страны, погодных условий, полезных ископаемых. Неопределённость означает отсутствие однозначных условий функционирования системы. Различают две неопределённости:

статистическую;

нестатистическую.

В случае статистической неопределённости вероятность наступления события определяют через относительную частоту. В случае нестатистической неопределённости вероятность наступления событий определяют как субъективную вероятность – число, заключенное между нулем и единицей, характеризирующее степень убеждённости субъекта в наступлении события. Отсюда следует, что риск имеет объективно-субъективный характер.

Существует много видов риска. Сложность классификации экономических рисков заключается в их многообразии. Классификацию рисков проводят в зависимости от целей, которые ставит исследователь. Можно предложить следующую достаточно полную классификацию рисков.

По общим положениям риск связывают с хозяйственной деятельностью; личными качествами лица, принимающего решение; недостатком информации о состоянии внешней среды.

По месту возникновения риски бывают: внешние; внутренние (кадровые).

По общности: общие (информационные); специфические (банковские, производственные).

По уровню принятия решений: макроэкономические (глобальные); микроэкономические (локальные).

По длительности действия: кратковременные (транспортный, неплатёж по конкретной сделке); постоянные (риск стихийных бедствий в определённом районе, правовой в определенной стране).

По уровню потерь: минимальный; средний; оптимальный; максимальный или допустимый; критический; катастрофический.

По степени правомерности: правомерный (оправданный); неправомерный (неоправданный).

По возможности страхования: страхуемый; нестрахуемый.

По угрозе постоянства потерь: статический (простой); динамический (спекулятивный).

Относительно аспектов риска: психологический, социальный, экономический, юридический, политический, медико-биологический, комбинированный.

По объективности: с объективной вероятностью; с субъективной вероятностью; с субъективно-объективной вероятностью.

Относительно времени принятия решений: опережающий; своевременный; запоздалый.

По типам: рациональный (обоснованный); нерациональный (не обоснованный); авантюрный (азартный).

По количеству лиц, принимающих решение: индивидуальный; групповой.

Видовые риски: пожары, стихийные бедствия, инфляция.

Зона допустимого риска − это зона, в которой данный вид предпринимательской деятельности сохраняет свою целесообразность. Ожидаемые убытки в этой зоне меньше ожидаемой прибыли, а предпринимателю угрожает только недополучение намеченной прибыли.

Зона критического риска характеризуется областью случайных убытков, размеры которых превышают величину ожидаемой прибыли, величину всех средств, вложенных в дело. Предприниматель не только не получает никакого дохода, но и несёт убытки в сумме равной всем затратам.

Зона катастрофического риска – это область случайных убытков, которые могут достигнуть величины, равной имущественному состоянию предпринимателя. Катастрофический риск способен привести к банкротству, закрытия предприятия и распродаже имущества. К такому виду можно отнести риск с угрозой для жизни.

5.2. Основные пути и способы снижения риска

Методы и пути снижения риска следует разбить на две группы: внешние (по отношению к предприятию) и внутренние.

Основными внутренними методами снижения экономического риска являются: страхование; резервирование средств; диверсификация; лимитирование; передача риска; хеджирование; проверка партнёров по бизнесу; грамотное составление контракт-сделок; планирование и прогнозирование деятельности предприятия; составление бизнес-плана; тщательный отбор кадров; организация защиты коммерческой тайны; получение дополнительной информации.

Основным недостатком такого метода снижения риска как диверсификация является распыление средств. Диверсификация может привести и к увеличению риска. Любое мероприятие, направленное на снижение риска, как правило, имеет свою «цену». В предпринимательской деятельности надо не избегать риска, а предвидеть его, стремясь снизить до возможно более низкого уровня.

5.3. Система количественных оценок экономического риска

Общими методами оценки экономического риска являются: статистический метод; метод экспертных оценок; метод построения дерева решений; метод аналогий.

Обозначим величину риска буквой W. Тогда риск в абсолютном выражении будет определяться следующим образом.

1. $W = p_H$, где p_H – вероятность наступления неблагоприятных последствий (так наиболее часто определяют риск в обиходе).

2. $W = p_H x$, где p_H – вероятность наступления неблагоприятных последствий, x величина этих последствий.

3. $W = M(X) = M_X = m_x$ – математическое ожидание неблагоприятных последствий.

4. $W = D(X) = \sigma_x^2$ – дисперсия, рассеивание показателя вокруг среднего значения.

В экономических расчётах наиболее часто используют как показатель риска дисперсию. Стандартное отклонение измеряет вероятность того, что наблюдение будет располагаться на определённом расстоянии от среднего. Чем больше это расстояние, тем больше рассеивание. Большое рассеивание означает, что существует высокая вероятность больших колебаний значений анализируемых явлений. Но стандартное отклонение как мера рассеивания подходит только для случайных явлений. Если наблюдения коррелированные (или имеют серийную корреляцию), то тогда использование стандартного отклонения как меры рассеивания в значительной степени уменьшается.

Риск в относительном выражении определяется следующим образом.

1. Соотношение максимально возможного объема убытка $(У)$ и объема собственных финансовых ресурсов (C):

$$W = \frac{Y}{C} \left(0 \le \mathrm{W} < \infty \right). \tag{5.3.1}$$

При таком способе определения риска его оптимальная величина, например, для инвестора, считается равной 0,3. При величине 0,7 и более инвестиционная деятельность ведёт к банкротству.

2. $W = CV = \dfrac{\sigma(X)}{M(X)}$ − коэффициент вариации. (5.3.2)

3. Риск определения планируемых показателей на уровне z:

$$K_z = -\frac{M^-}{M^+} = -\frac{M\left(x - z \mid x \le z\right)}{M\left(x - z \mid x > z\right)} = -\frac{M\left(x \mid x \le z\right) - z}{M\left(x \mid x > z\right) - z} = -\frac{\dfrac{\sum x_i \left(x_i \le z\right)}{n} - z}{\dfrac{\sum x_i \left(x_i > z\right)}{N - n} - z} \quad \left(0 \le K_z < \infty\right). \tag{5.3.3}$$

Здесь: z – максимально допустимая величина полученных убытков; K_z − отношение наблюдаемых средних убытков к наблюдаемым средним прибылям; N − множество статистических данных, n − множество статистических данных, для которых показатель принимал значение не больше, чем z.

Систематический риск β. Систематический риск β определяет уровень колебаний или отклонений в результатах деятельности отрасли по отношению к результатам деятельности рынка или всей экономики. С его помощью можно сопоставлять, например, эффективность конкретной ценной бумаги с эффективностью всего рынка ценных бумаг. Систематический риск находится по формуле

$$\beta = \frac{V_{R_i R}}{\sigma_R^2} = \rho_{R_i R} \frac{\sigma_{R_i}}{\sigma_R}. \tag{5.3.4}$$

где: R − случайная величина, характеризующая всю экономику, R_i − случайная величина, характеризующая i-ю отрасль экономики, $V_{R_i R}$ – ковариация между R и R_i, $\rho_{R_i R}$ – коэффициент корреляции.

Систематический риск также называют коэффициентом чувствительности. Он, как и дисперсия, является основным показателем риска в расчетах.

5.4. Шкалы рисков

1. Если риск измеряется формулой 5.3.1, то ему соответствует шкала риска, представленная в табл. 5.4.1и 5.4.2.

Таблица 5.4.1

№	Величина отношения	Наименование градации риска
1	0,0 − 0,1	Минимальный
2	0,1 − 0,3	Малый
3	0,3 − 0,4	Средний
4	0,4 − 0,6	Высокий
5	0,6 − 0,81	Максимальный
6	0,8 − 1	Критический

Таблица 5.4.2

№	Величина отношения	Наименование градации риска
1	0,0 − 0,25	Приемлемый
2	0,25 − 0,5	Допустимый
3	0,5 − 0,75	Критический
4	0,75 − 1	Катастрофический

2. Риск, рассчитанный как коэффициент вариации $W = \dfrac{\sigma}{M(X)}$ соответствует следующей градации.

Таблица 5.4.3

№	Величина коэффициента вариации	Наименование градаций вариации
1	$\leq 0,1$	Слабая
2	0,1 − 0,25	Умеренная
3	$\geq 0,25$	Высокая

3. Если риск измеряется по формуле 5.3.3, то ему соответствует следующая градация.

Таблица 5.4.4

№	Величина K_z	Наименование градаций риска (поведение)
1	$< 0,2$	Пессимистическое
2	0,2 − 0,4	Осторожное
3	0,4 − 0,6	Средне рискованное
4	0,6 − 0,8	Рискованное
5	0,8 − 1	Высокой степени риска
6	>1	Азартное

4. Систематическому риску β соответствует следующая таблица градаций.

Таблица 5.4.5

№	Значение β	Характеристика степени риска.
1	$\beta = 0$	Риск отсутствует
2	$0 < \beta = 1$	Риск ниже среднерыночного
3	$\beta = 1$	Риск на уровне среднего по рынку для данного вида вложений.
4	$\beta > 1$	Риск выше среднерыночного

Опишем кратко подход к расчёту общего риска портфеля акций и инвестиций ценных бумаг.

Общий риск портфеля состоит из двух частей:

диверсифицированный (несистематический) риск, т.е. риск, который может быть элиминирован за счет диверсификации (инвестирование 1 млн. грн. в акции десяти компаний менее рискованно, нежели инвестирование той же суммы в акции одной компании);

недиверсифицированный (систематический), который нельзя уменьшить путем изменения структуры портфеля.

Исследования показали, что если портфель состоит из 10-ти различных видов ценных бумаг, включенных в него с помощью случайной выборки изменяющегося на рынке ценных бумаг набора, то несистематический риск может быть сведен к минимуму.

Несистематический риск поддается элиминированию довольно несложными методами. Здесь главная опасность – распыление средств, что не может привести к глобальному существенному улучшению состояния фирмы. Поэтому, основное внимание следует уделять возможному уменьшению систематического риска. Эти вопросы уже больше относятся к чисто экономическим проблемам.

Оценка инвестиционного проекта с помощью бета – модели затруднительна по следующим причинам. Она базируется на трактовке понятия риска, которая резко отличается от принятой в проектной практике. Здесь термином «риск» охватывают любые положительные или отрицательные отклонения доходности проекта от средней.

На практике всегда существует большая разница между проектируемым предприятием и предприятием-аналогом. В этом случае риск проекта оценивается колебаниями доходности акций предприятия, что означает оценку эффективности проекта с точки зрения акционеров, а не с точки зрения предприятия.

Модель фондового рынка, созданная на какой-то период, не может экстраполироваться на весь срок, на который рассчитаны капиталовложения, так как отождествление риска проекта с риском фирмы не всегда обосновано. В чистом виде бета-модель учитывает только один тип рисков.

Указанные и некоторые другие недостатки бета-модели обуславливают разработку иных, приближенных методов вычисления β-коэффициента.

Один из таких методов базируется на экспертных оценках. Рассмотрим пример.

Пример 5.4.1**.**

Эксперты каждому фактору риска приписывают степень риска. Порядок расчета экспертным методом ясен из табл.5.4.6.

Таблица 5.4.6

Факторы риска	**Всего**	**Степень риска**								
		Низкая (1)			**Средняя (2)**			**Высокая (3)**		
		Класс риска								
		1,1	1,2	1,3	2,1	2,2	2,3	3,1	3,2	3,3
Соответствующее значение β		0	0,25	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75	2,2
Общеэкономические факторы										
Социально-политический риск									+	
Внутриэкономический риск							+			
Внешнеэкономический риск				+						
Отраслевые факторы										
Циклический характер						+				
Стадия развития										+
Конкуренция									+	
Регулирование								+		
Препятствие к вхождению в рынок				+						
Факторы риска на уровне фирмы										
Ликвидность							+			
Стабильность дохода					+					
Финансовый рычаг								+		
Операционный рычаг			+							
Доля на рынке										+
Диверсификация клиентуры									+	
Диверсификация продукции						+				
Диверсификация по территории								+		
Технологический уровень										+
Риски несогласованности интересов										
Возможность проведения политики в ущерб интересам держателей ценных бумаг фирмы					+					
Итого число наблюдений	18	0	1	2	2	2	2	3	3	3
Расчет средневзвешенного β	23	0	0,25	1	1,5	2	2,5	4,5	5,25	6

Таким образом, в соответствии с таблицей 5.4.6 рассчитанный коэффициент β составляет $\beta = 23/18 = 1{,}28$.

Это значит, что колебания результатов предприятия выше отраслевых и среднерыночных.

Самыми распространенными на сегодня методами диагностики банкротства предприятий, то есть количественной оценки риска, является предложенная в 1968 году известным экономистом Э. Альтманом Z модель и модель Чессера надзора за ссудами.

5.5. Склонность, несклонность к риску, ожидаемая полезность

Принимающий решение не склонен к риску, если он предпочитает получить ожидаемый выигрыш в любой невырожденной лотерее вместо участия в ней. Он склонен к риску, если предпочитает участие в любой невырожденной лотерее получению ожидаемого выигрыша в этой лотерее. Он безразличен к риску, если ему безразлично получение наверняка ожидаемого выигрыша в любой невырожденной лотерее или участие в этой лотерее.

Отношение к риску можно отразить с помощью функции полезности.

Функцией полезности называется действительная функция $u(x)$, определённая на упорядоченном по предпочтительности множестве $X = \lfloor x_*, x^* \rfloor$, если она монотонна, то есть, если для всех $x, y \in X$ из $x \prec y$ следует $u(x) < u(y)$.

Запись $x \prec y$ означает, что y предпочтительнее x.

Функции полезности довольно подробно изучены и записаны в аналитическом виде, отражающем определенное поведение инвесторов. Известно, что принимающий решение несклонен к риску, если его функция полезности вогнута $(u''(x) < 0)$, склонен к риску, если его функция полезности выпукла $(u''(x) > 0)$ и нейтрален к риску, если его функция полезности линейная. Наиболее полную характеристику отношения к риску принимающим решение даёт функция несклонности к риску

$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}. \tag{5.5.5}$$

Имеет место следующий принцип полезности. Если люди ведут себя последовательно, то они поступают так, чтобы максимизировать ожидаемое значение полезности.

Функция полезности должна характеризовать поведение принимающих решение, т.е. должна быть функцией типа функции Неймана.

Ожидаемая полезность определяется формулой

$$Mu(\tilde{x}) = \sum p_i u(x_i) \text{ или } Mu(\tilde{x}) = \int_a^b u(x) f(x) dx, \tag{5.5.6}$$

где: $\tilde{x}$ – случайный выигрыш (доход).

Рассмотрим пример, поясняющий основные высказанные тезисы этого раздела.

Пример 5.2. Пусть лицо, принимающее решение (ЛПР) сталкивается с одним из двух способов действий (контракты), которые, как показано в табл. 5.5.7, приводят к различным выигрышам и проигрышам с указанными вероятностями.

Надо проранжировать эти действия по математическому ожиданию, дисперсии, коэффициенту вариации, ожидаемой полезности по двум функциям полезности $u_1(x) = \ln(x+25)$ и $u_2(x) = e^{0.1x}$. Первая функция отражает действия инвестора с убывающей несклонностью к риску, имеющего порог разорения (-25). Вторая отражает действия инвестора с постоянной склонностью к риску. Решение вносим в таблицу.

Таблица 5.5.7

Контракты		Выигрыши, их вероятности и полезности				$M(\tilde{x})$	σ	CV	$Mu(\tilde{x})$
I	Величина выигрыша	-20	0	10	40	12	21,4	1,78	3.32
	Вероятности выигрыша	0,2	0,1	0,4	0,3				
	Полезности выигрыша $u_1(x) = \ln(x+25)$	1,61	3,2	3,56	4,17				
	Полезности выигрыша $u_2(x) = e^{0.1x}$	0,14	1	2,72	54,60				17,59
II	Величина выигрыша	-10	10	20	40	12	14	1,17	3,52
	Вероятности выигрыша	0,2	0,4	0,3	0,1				
	Полезности выигрыша $u_1(x) = \ln(x+25)$	2,71	3,56	3,81	4,18				
	Полезности выигрыша $u_2(x) = e^{0.1x}$	0,37	2,72	7,39	54,60				8,84

Без учёта субъективной оценки контрактов более привлекательный первый контракт.

Лицо, не склонное к риску, с функцией полезности $u_1(x) = \ln(x+25)$ выберет второй контракт, так как он для него более выигрышный $(3,52 > 3,32)$.

Лицо, склонное к риску, с функцией полезности $u_2(x) = e^{0.1x}$ выберет первый контракт, так как $17,59 > 8,84$.

Аналогично можно анализировать поведение отдельных людей и групп людей, занимающихся определённой деятельностью, которая, как правило, складывает стереотип поведения.

5.6. Нахождение оптимальной структуры портфеля ценных бумаг с помощью компьютера

Пусть имеется n направлений вложения средств (ценных бумаг) с известными эффективностями вложения $m_1, m_2, ..., m_n$. Считается, что известны также ковариации (корреляционные моменты) между эффективностями по этим ценным бумагам, представленные в табл. 5.6.8.

Таблица 5.6.8

Номера ценных бумаг	1	2	…	j	…	n
1	V_{11}	V_{12}	…	V_{1j}	…	V_{1n}
2	V_{21}	V_{22}	…	V_{2j}	…	V_{2n}
…	…	…	…	…	…	…
i	V_{i1}	V_{i2}	…	V_{ij}	…	V_{in}
…	…	…	…	…	…	…
n	V_{n1}	V_{n1}	…	V_{nj}	…	V_{nn}

Необходимо найти доли $x_i \left(i = 1,2,...,n\right)$ вложения капитала в каждый вид ценных бумаг, чтобы получить ожидаемую эффективность m_p при наименьшей дисперсии портфеля, которая будет определять риск портфеля.

Математическая модель задачи имеет вид:

$$V = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j==1}^{n} x_i x_j V_{ij} \to \min, \qquad (5.6.7)$$

$$\begin{cases} m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_n x_n = m_p, \\ x_1 + x_2 + ... + x_n = 1. \end{cases} \qquad (5.6.8)$$

Например, для трёх ценных бумаг целевая функция имеет вид:

$$V = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j==1}^{3} x_i x_j V_{ij} = V_{11} \cdot x_1 \cdot x_1 + V_{22} \cdot x_2 \cdot x_2 + V_{33} \cdot x_3 \cdot x_3 + \\ + 2V_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + 2V_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + 2V_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 \to min. \qquad (5.6.9)$$

Задача нахождения структуры оптимального портфеля является задачей квадратического программирования с двумя ограничениями. Первое уравнение ограничений отражает требуемую эффективность портфеля. Второе ограничение показывает, что сумма долей вложения в каждый вид ценных бумаг равна единице. Решать такую задачу удобно с помощью EXCEL.

Выражение (5.6.7), представляющее целевую функцию, получается путём нахождения дисперсии, которую необходимо минимизировать:

$$V_p = M\left(R_p - m_p\right)^2 = M\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\left(R_j - m_j\right)\right)^2 = M\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\left(R_i - m_i\right)\right)\cdot$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\left(R_j - m_j\right)\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j M\left\{\left(R_i - m_i\right)\left(R_j - m_j\right)\right\} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j V_{ij} \to \min. \qquad (5.6.9)$$

Здесь: $R_p = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i$, $m_p = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i$;

R_i – эффективность ценной бумаги i -го вида;

R_p – эффективность портфеля;

R_i, R_p – случайные величины.

R_i определяются предварительно по статистическим данным и по ним рассчитываются исходные характеристики ценных бумаг.

$$R_i = \left\{R_i^{(1)}, R_i^{(2)}, R_i^{(3)}, ..., R_i^{(T)}\right\}, \qquad (5.6.10)$$

где: T – количество наблюдений.

Эффективностью ценной бумаги или нормой прибыли $R^{(t)}$ в t -ом периоде $\left(t = 1, 2, ..., T\right)$ называется величина

$$R^{(t)} = \frac{P^{(t)} - P^{(t-1)} + D^{(t)}}{P^{(t)}} \cdot 100\%, \qquad (5.6.11)$$

где: $P^{(t)}$ – цена бумаги в конце t -го периода; $P^{(t-1)}$ – цена бумаги в конце $\left(t-1\right)$ -го периода; $D^{(t)}$ – дивиденды, насчитанные в t-ом периоде.

Рассмотрим пример на определение эффективности портфеля ценных бумаг.

Пример 5.6.3. Эффективности трёх ценных бумаг и эффективность рынка ценных бумаг за последние 12 контролируемых периодов внесены в табл. 5.6.9.

Таблица 5.6.9

Контролируемые периоды	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
Эффективности первой ценной бумаги	8	9	3	8	20	7	7	9	17	19	9	9
Эффективности второй ценной бумаги	3	7	10	9	3	9	3	20	3	19	3	21
Эффективности третьей ценной бумаги	20	9	10	8	20	19	17	20	17	19	20	21
Эффективности рынка ценных бумаг	20	9	11	9	19	18	17	19	15	21	20	20

Найти:

1. Точечные оценки математических ожиданий $\hat{m}_1, \hat{m}_2, \hat{m}_3, \hat{m}_R$;

2. Оценки ковариации $\hat{V}_{ij}$;

3. Оценки дисперсий $\hat{V}_{11} = \hat{\sigma}_1^2,\ \hat{V}_{22} = \hat{\sigma}_2^2,\ \hat{V}_{33} = \hat{\sigma}_3^2,\ \hat{V}_{RR} = \hat{\sigma}_R^2$;

4. Оценить риск по дисперсии; по коэффициенту вариации; по систематическому риску;

5. Найти коэффициент риска K_z для третьей ценной бумаги;

6. Сформировать портфель ценных бумаг с эффективностью $m_p = 12\%$.

Решение. Решение задачи осуществляем с помощью *EXCEL.*

Для решения поставленной задачи необходимо открыть *EXCEL* и набрать табл.5.6.9 числовых данных.

Дальше необходимо выполнить следующие процедуры.

1. Чтобы найти $\hat{m}_1, \hat{m}_2, \hat{m}_3, \hat{m}_R$ выделяем в произвольном месте вертикально четыре клетки; ставим курсор в первую верхнюю клетку выделенных клеток, «Вставка»; «Функция»; «f_x»; «Статистические»; «СРЕДЗНАЧ». В Массиве 1 выделяем строку эффективностей первой ценной бумаги, «ОК». В выделенной клетке будет $\hat{m}_1$. Потянув вниз маленький плюсик по выделенным клеткам, получим все значения $\hat{m}_1, \hat{m}_2, \hat{m}_3, \hat{m}_R$. Они внесены в табл. 5.6.10.

2. Чтобы найти оценки ковариаций $\hat{V}_{ij}$, выполняем следующие действия: выделяем массив 4×4, где будут находиться значения ковариаций; «Сервис»; «Анализ данных» (если нет «Анализ данных», то в НАДСТРОЙКЕ надо поставить галочку возле «Анализ данных); «Ковариация»; «ОК». В появившемся окне во Входном интервале выделяем все 48 данных; поставить галочку По столбцам; активизировать выходной интервал. В выходном интервале выделить выделенный ранее массив 4×4, где будут находиться ковариации. Окно будет иметь вид, изображенный на рис. 5.6.1; «ОК». Появится табл. 5.6.11. В ней будут смещённые оценки ковариаций. Чтобы получить несмещённые оценки, надо все эти числа умножить на $\frac{n}{n-1} = \frac{12}{11}$. В результате этих операций получим табл. 5.6.12.

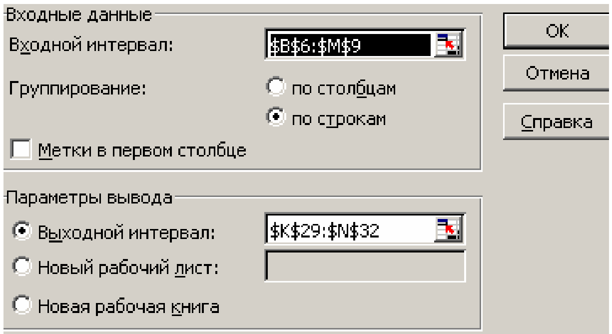


Рис. 5.6.1

Таблица 5.6.10

№	$\hat{m}_i$
1	10,417
2	9,167
3	16,667
Рынок ц.б.	16,500

Таблица 5.6.11

Матрица ковариаций из Excel V_{ij}				
	Строка 1	*Строка 2*	*Строка 3*	*Строка 4*
Строка 1	25,576			
Строка 2	-0,403	45,806		
Строка 3	8,556	4,722	21,056	
Строка 4	7,792	6,083	19,000	18,083

Таблица 5.6.12

Оценки ковариаций $\hat{V}_{ij} = \frac{n}{n-1} V_{ij} = \frac{12}{11} V_{ij}$				
№	1	2	3	Рынок ц.б.
1	27,902			
2	-0,439	49,970		
3	9,333	5,152	22,970	
Рынок ц.б.	8,500	6,636	20,727	19,727

3. Оценки дисперсий $\hat{V}_{11} = \hat{\sigma}_1^2$, $\hat{V}_{22} = \hat{\sigma}_2^2$, $\hat{V}_{33} = \hat{\sigma}_3^2$, $\hat{V}_{RR} = \hat{\sigma}_R^2$ находятся на главной диагонали табл. 5.6.12, т.е.:

$$\hat{\sigma}_1^2 = 27{,}902;\ \hat{\sigma}_2^2 = 49{,}970;\ \hat{\sigma}_3^2 = 22{,}970;\ \hat{\sigma}_R^2 = 19{,}727.$$

4. Для оценки риска проведём соответствующие расчеты, результаты которых внесены в табл. 5.6.13.

Таблица 5.6.13

	$\hat{m}_i$	$\hat{\sigma}_i^2$	$\hat{\sigma}_i$	CV_i	$\hat{V}_{iR}$	$\hat{\sigma}_R^2$	β_i
Первая ценная бумага	10,417	27,902	5,282	0,507	8,500	19,727	0,431
Вторая ценная бумага	9,167	49,970	7,069	0,771	6,636		0,336
Третья ценная бумага	16,667	22,970	4,793	0,288	20,727		1,051
Рынок ц. б.	16,500	19,727	4,442	0,269			

Анализируя данные табл. 5.6.13 можно сказать, что по оценке риска $\hat{\sigma}_i$ наиболее рисковая вторая ценная бумага, а наименее − третья. По CV_i наиболее рисковая вторая ценная бумага, а наименее − третья. По β_i первая и вторая ценные бумаги имеют риск ниже среднерыночного, третья – немного выше среднерыночного, но она ведёт себя как рынок ценных бумаг.

5. Вычисляем коэффициент риска K_z при $z = 17$ и $z = 12$.

$$K_z = -\frac{M^-}{M^+} = -\frac{M(x - z \mid x \le z)}{M(x - z \mid x > z)} = -\frac{M(x \mid x \le z) - z}{M(x \mid x > z) - z} = -\frac{\frac{\sum x_i (x_i \le z)}{n} - z}{\frac{\sum x_i (x_i > z)}{N - n} - z} \quad (0 \le K_z < \infty).$$

$$K_{17} = -\frac{\frac{9+10+8+17+17}{5} - 17}{\frac{20+20+19+20+19+20+21}{7} - 17} = 1{,}68,$$

$$K_{12} = -\frac{\frac{9+10+8}{3} - 12}{\frac{20+20+19+17+20+17+19+20+21}{9} - 12} = 0{,}42.$$

Достичь эффективности $z = 17$ по третьей ценной бумаге определяет азартное поведение ЛПР, а эффективности $z = 12$ – среднерисковое поведение.

6. Структуру оптимального портфеля ценных бумаг с эффективностью $m_p = 12\%$ сформируем с помощью «Поиск решений» в *EXCEL*. Для этого надо решить следующую задачу квадратического программирования.

$$V = V_{11}x_1^2 + V_{22}x_2^2 + V_{33}x_3^2 + 2V_{12}x_1x_2 + 2V_{13}x_1x_3 + 2V_{23}x_2x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = m_p, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

В нашем случае она имеет вид

$$V = 27{,}902x_1^2 + 49{,}970x_2^2 + 22{,}970x_3^2 + \\ +2 \cdot (-0{,}439) \cdot x_1x_2 + 2 \cdot 9{,}333 \cdot x_1x_3 + 2 \cdot 5{,}152 \cdot x_2x_3 \to \min; \tag{5.6.12}$$

$$\begin{cases} 10{,}417x_1 + 9{,}167x_2 + 16{,}667x_3 = 12, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases} \tag{5.6.13}$$

Эта задача решается с помощью «Поиска решений» аналогично решению задачи линейного программирования. Изложим кратко методику решения этой задачи.

1. Вносим матрицу ковариаций и коэффициенты двух ограничений в *EXCEL* (см. рис. 5.6.2).

60	A	B	C	D	E
61	27,902	0	0		
62	-0,439	49,970	0		
63	9,333	5,152	22,970		
64					
65					
66	10,417	9,167	16,667		12
67	1	1	1		1
68	x_1	x_2	x_3		
69				Ц. Ф.	

Рис. 5.6.2

Выбираем изменяющиеся клетки, в которых будут находиться оптимальные значения x_1, x_2, x_3. Это будут клетки A69, B69, C69. Выбираем клетку, в которой будет значение целевой функции (клетку D69). Выбранные клетки должны быть свободными.

2. Записываем формулы левых частей уравнений-ограничений в ячейках D66 и D67. Для этого ставим курсор в ячейку D66 и выполняем действия: «Вставка»; «Функция»; «Математические»; «СУММПРОИЗВ»; «ОК». В массиве 1 выделяем ячейки A66, B66, C66. Ставим курсор в Массив 2 и выделя-

ем ячейки A68, B68, C68. Чтобы на клетки A68, B68, C68 была абсолютная ссылка, то при выделении этих клеток нажимаем F4. Возле выделенных клеток будет стоят знак $. Протянем маленький плюс в клетку D67, в клетках D66, D67 будут находиться нули.

3. Запишем формулу целевой функции в клетке D69. Для этого в этой клетке ставим знак = и набираем формулу целевой функции, как показано на рис. 5.6.3.

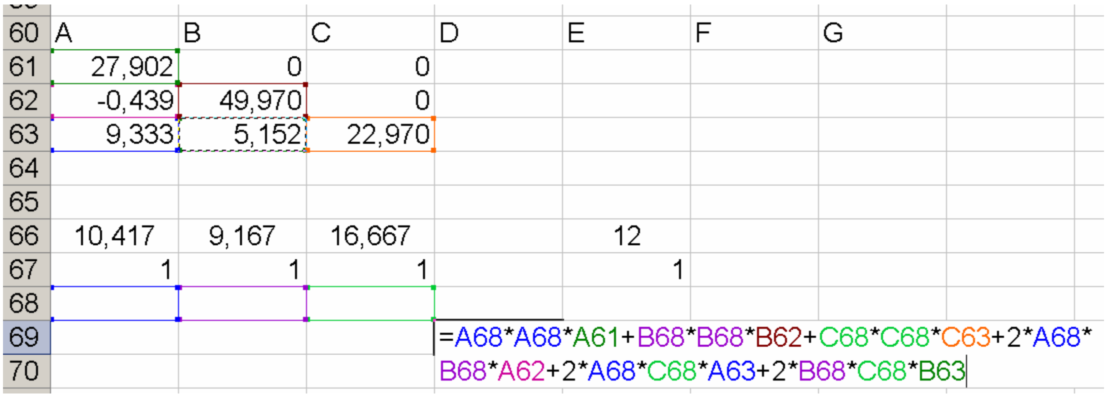


Рис. 5.6.3

После набора формулы нажимают клавишу Enter. В клетке D69 появится 0.

Замечание. В пунктах 1,2,3 записывалась математическая модель задачи. Все действия полностью аналогичны простейшим математическим операциям в *EXCEL*.

4. Выполняем решение с помощью «Поиска решений». Для этого выполняем следующие действия: «Сервис»; «Поиск решений». Заполняем появившееся окно рис.5.6.4. «Установить целевую ячейку: выделяем ячейку, где набирали целевую функцию, это ячейка D69»; «Минимальное значение»; «Изменяя ячейки»: выделяем ячейки A68, B68, C68, где должны находиться значения x_1, x_2, x_3; «Добавить»: в появившемся окне в левой части выделяем клетку D66, посредине выбираем знак «=», в правой части выделяем клетку E66, рис. 5.6.4»; «Добавить»: в появившемся окне в левой части выделяем клетку D67, посредине выбираем знак «=», в правой части выделяем клетку E67, рис. 5.6.5; «ОК».

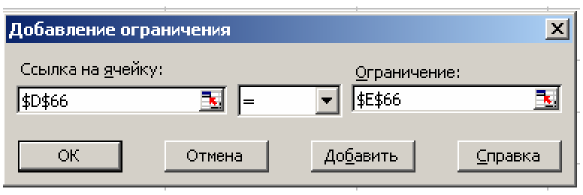


Рис.5.6.4

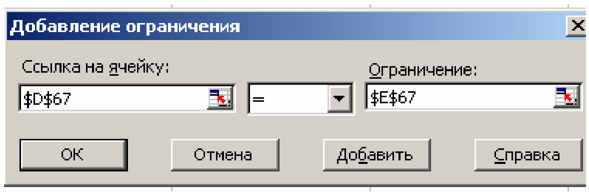
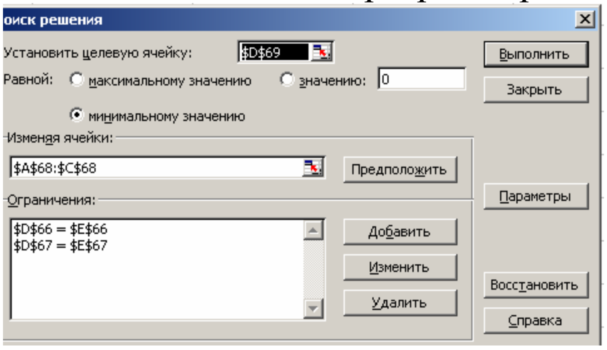


Рис.5.6.5

В появившемся окне выбираем «Параметры»; «Выполнить» (рис. 5.6.6). В появившемся окне «ОК» (рис. 5.6.7); В появившемся окне «ОК» (рис. 5.6.8). Здесь можно получить не только решение, но и его анализ: Результаты, Устойчивость, Пределы. Смысл этих действий такой же, как и при решении задач линейного программирования.



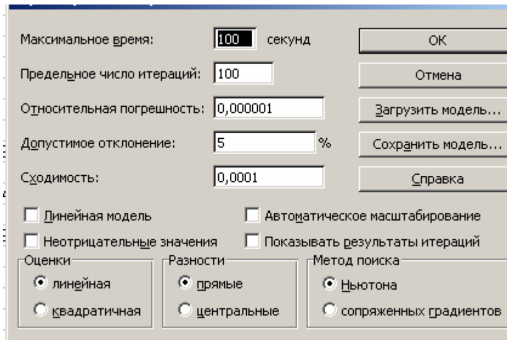


Рис. 5.6.6 *Рис.5.6.7*

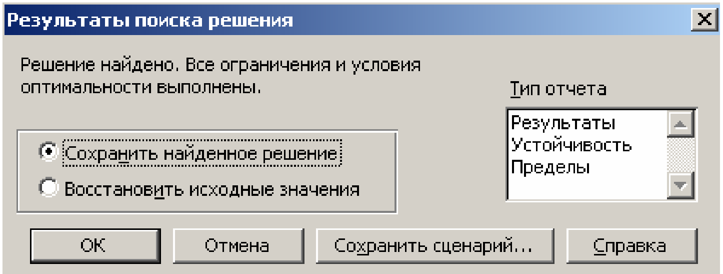


Рис.5.6.8

5. Получим решение (см. рис. 5.6.8).

60	A	B	C	D	E
61	27,902	0	0		
62	-0,439	49,970	0		
63	9,333	5,152	22,970		
64					
65					
66	10,417	9,167	16,667	12	12
67	1	1	1	1	1
68	0,42156	0,27093	0,30752		
69				13,9763	

Рис.5.6.9

Выписываем полученное решение:

$$x_1 = 0{,}422,\ x_2 = 0{,}271,\ x_3 = 0{,}307,\ V_{\min} = 13{,}98\,.$$

Замечание. Значение целевой функции для этой задачи явной роли не играет.

Результат решения задачи определения оптимальной структуры портфеля ценных бумаг сформулируем следующим образом. Чтобы портфель имел эффективность 12% при минимальном риске, необходимо в первые ценные бумаги вложить 42,2% инвестиционной суммы, во вторые – 27,1%, а в третьи – 30,7%.

Рассмотрим ещё один вариант решения этой же задачи. Предположим, что на рынке ценных бумаг имеются безрисковые ценные бумаги с эффективностью 6%. В этом случае $V_{14}=0$. $V_{24}=0$. $V_{34}=0$. $V_{44}=0$ и математическая модель примет вид:

$$V=V_{11}x_1^2+V_{22}x_2^2+V_{33}x_3^2+V_{44}x_4^2+2V_{12}x_1x_2+ \\ +2V_{13}x_1x_3+2V_{14}x_1x_4+2V_{23}x_2x_3+2V_{24}x_2x_4+2V_{34}x_3x_4\to\min; \tag{5.6.14}$$

$$\begin{cases} m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3+m_4x_4=m_p, \\ x_1+x_2+x_3+x_4=1. \end{cases} \tag{5.6.15}$$

С учётом данных рассматриваемой задачи модель будет иметь следующий вид:

$$V=27{,}902x_1^2+49{,}970x_2^2+22{,}970x_3^2+2\cdot(\text{-}0{,}439)\cdot x_1x_2+2\cdot 9{,}333\cdot x_1x_3+2\cdot 5{,}152\cdot x_2x_3\to\min$$

$$\begin{cases} 10{,}417x_1+9{,}167x_2+16{,}667x_3+6x_4=m_p, \\ x_1+x_2+x_3+x_4=1. \end{cases}$$

Эта задача решается аналогично предыдущей. Однако она позволяет получить принципиально новый результат.

Объясним его на примере. Оптимальные структуры портфелей при $m_p=12;14;17$ и наличии безрисковых ценных бумаг, которые легко получить с помощью «Поиска решений», будут такими (см. табл. 5.6.15):

Таблица 5.6.15

Ожидаемая эффективность портфеля	Оптимальная структура портфеля			
m_p	x_1	x_2	x_3	x_4
12	0,008	0,003	0,558	0,430
17	0,015	0,006	1,023	-0,045
14	0,011	0,005	0,744	0,240

Одна доля портфеля (как видно из табл. 5.6.15) получилась отрицательной. Её можно трактовать экономически как сумму займа в долг 4,5% от имеющейся для инвестиций суммы под 6% годовых, которые через год необходимо отдать с процентами заёмщику. Ситуация с займами в экономической деятельности является существенной, а поэтому при решении подобных задач не надо требовать условия неотрицательности переменных. Среди множества неотрицательных переменных задача вообще может не иметь оптимального решения, что будет соответствовать возможной экономической ситуации.

В заключение найдём структуру рисковой части портфеля, решение оформим в таблице 5.6.16.

Таблица 5.6.16

m_p	x_1	x_2	x_3	$x_1+x_2+x_3$	$\frac{x_1}{x_1+x_2+x_3}$	$\frac{x_2}{x_1+x_2+x_3}$	$\frac{x_3}{x_1+x_2+x_3}$
12	0,008	0,003	0,558	0,570	0,015	0,006	0,980
17	0,015	0,006	1,023	1,045	0,015	0,006	0,980
14	0,011	0,005	0,7441	0,760	0,015	0,006	0,980

Делаем вывод: структура рисковой части портфеля при наличии безрисковых ценных бумаг постоянна, т.е. не зависит от требуемой общей эффективности и представляет:

$$x_1^{(risk)} = 0{,}015\,, \quad x_2^{(risk)} = 0{,}006\,, \quad x_3^{(risk)} = 0{,}979\,.$$

Необходимо покупать в основном безрисковые ценные бумаги.

Пример 5.6.4 *(для самостоятельного решения).*

Пусть инвестор решил четверть денег из имеющейся суммы 100 тыс. евро вложить в безрисковые ценные бумаги, а остальные – в рисковые. Определить оптимальное распределение вложений.

Решая эту задачу по вышеописанной методике получим:

В безрисковые ц.б. надо вложить 25 тыс. евро,

В первые ц. б. $0{,}015 \times 75$=1,1 тыс. евро,

Во вторые ц. б. $0{,}006 \times 75$=0,4 тыс. евро,

В третьи ц. б. $0{,}979 \times 75$=73,5 тыс. евро.

Вывод. Практически все средства надо вкладывать в третьи и безрисковые ценные бумаги, т.е. на эти два вида ценных бумаг можно потратить 98,5 тыс. евро из 100 тысяч.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном учебном пособии рассмотрены наиболее важные задачи экономико-математического моделирования, которые необходимы в подготовке специалистов по экономическим специальностям. Применение математического моделирования в экономике и управлении позволяет углубить количественный экономический анализ, расширить область использования экономической информации, интенсифицировать экономические расчёты. Разработка экономико-математических моделей не является окончательной продукцией экономико-математического моделирования. Это пособие нельзя рассматривать только как ориентацию на использование математических и статистических средств. Его целесообразно рассматривать как средство, позволяющее изучать связь между экономическими явлениями с помощью моделей, решение которых основано на комплексном рассмотрении наиболее распространённых экономико-математических методов.

Данное учебное пособие поможет овладеть методами построения экономических моделей и даст навыки использования соответствующего математического аппарата при решении экономических и управленческих задач. Предлагаемые модели и методы также помогут студентам в выполнении курсовых и дипломных работ, позволят им усилить практику использования персональных компьютеров для развития творческих и аналитических навыков. Овладение этим курсом поможет полнее и глубже обосновывать и использовать современные экономико-математические методы и способы их реализации в современной экономической практике.

Данное пособие нельзя считать полым. В нём выбраны наиболее важные темы, которые необходимы в подготовке специалистов по экономике. Овладение ими поможет студентам самостоятельно решать поставленные производственные и управленческие задачи.

Список рекомендованной литературы

Основная

1. Христиановский В.В. Задачи по математическому программированию: теория и практика/ В.В. Христиановский, В.Ф. Ходыкин, А.А. Преображенский. – Донецк: ДонНУ, 2003. – 250с.

2. Кремер Н.Ш. Эконометрика: Учебник для вузов/ Н.Ш.Кремер, Б.А. Путко. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2008. – 311с.

3. Лук'яненко І.Г. Економетрика: практикум з використанням комп'ютера/ І.Г. Лук'яненко, Л.І. Краснікова. – К.: Товариство «Знання», КОО, 1998. – 220с.

4. Наконечний С.І., Економетрія: навчальний посібник/ С.І. Наконечний, Т.О. Терещенко, Т.П. Романюк. – К.: КНЕУ, 1997. – 352с.

5. Христиановский В. В. Решение задач математического программирования: курс лекций для студентов экономических специальностей/ В. В. Христиановский, В.Г. Ерин, О. В. Ткаченко. – Донецк: ДонГУ, 1992. – 254с.

6. Христиановский В. В.Сборник задач по математическому программированию: в помощь студентам - экономистам/ В. В. Христиановский, В.Г. Ерин, О. В. Ткаченко. – Киев:УМК ВО, 1992. – 336с.

7. Христиановский В.В. Практикум по прогнозу и риску/ В.В. Христиановский, В.П. Щербина, М.И.Медведева и др. – Донецк, 1999. – 288с.

8. Христиановский В.В. Экономико-математическое моделирование: Учебно-методическое пособие/ Христиановский В.В., Щербина В.П., Пелашенко А.В., Синицкая Е.В. –Донецк, 2009. – ДонНУ. – 135 с.

Рекомендованная (дополнительная)

1. Айвазян С.А. Прикладная статистика и основы эконометрики: учебник для вузов/ С.А. Айвазян, С.В. Мхитарян. – М.: Юнити, 1998. – 1022с.

2. Вітлінський В.В. Математичне програмування: навч.-метод. посібник для самостійного вивчення дисципліни/ В.В. Вітлінський, С.І. Наконечний, Т.О. Терещенко. – К.: КНЕУ, 2001. – 248с.

3. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: учебное пособие для студентов экономических специальностей вузов/ И.Л. Акулич. – М.: Высш. шк., 1986. – 319с.

4. Кузнецов Ю.Н. Математическое программирование: учебник/ Ю.Н. Кузнецов, В.И. Кузубов, А. Б. Волощенко. – М.: Высш. шк., 1980. – 300с.

5. Мангус Я.Р. Эконометрика. Начальный курс/ Я.Р. Мангус, П.К. Катышев, А.А. Персецкий. – М.: Дело, 1997. – 248с.

6. Христиановский В. В. Методическое пособие и контрольные задания для студентов-заочников экономических специальностей/ В. В. Христиановский, В.Г. Ерин, О. В. Ткаченко. – Донецк: ДонГУ, 1999. – 156с.

СТАТИСТИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

1. Таблица значений *F* - критерия Фишера при уровне значимости α = 0,05

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161	200	216	225	230	234	239	244	249	254,3
2	18,5	19	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,4	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,9	2,71
10	4,96	4,1	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,2	3,09	2,95	2,79	2,61	2,4
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3	2,85	2,69	2,5	2,3
13	4,67	3,8	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,6	2,42	2,21
14	4,6	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,7	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,9	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,2	2,96	2,81	2,7	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,9	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,1	2,87	2,71	2,6	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,3	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,4	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,8	2,64	2,53	2,38	2,2	2	1,76
24	4,26	3,4	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,6	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,3	2,13	1,93	1,67
28	4,2	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,7	2,54	2,43	2,28	2,1	1,9	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,83	1,57
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2	1,79	1,51
45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,76	1,48
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,4	2,29	2,13	1,95	1,74	1,44
60	4	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,1	1,92	1,7	1,39
70	3,98	3,13	2,74	2,5	2,35	2,23	2,07	1,89	1,67	1,35
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,88	1,65	1,31
90	3,95	3,1	2,71	2,47	2,32	2,2	2,04	1,86	1,64	1,28
100	3,94	3,09	2,7	2,46	2,3	2,19	2,03	1,85	1,63	1,26
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,01	1,83	1,6	1,21
150	3,9	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2	1,82	1,59	1,18
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	1,98	1,8	1,57	1,14
300	3,87	3,03	2,64	2,41	2,25	2,13	1,97	1,79	1,55	1,1
400	3,86	3,02	2,63	2,4	2,24	2,12	1,96	1,78	1,54	1,07
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,11	1,96	1,77	1,54	1,06
1000	3,85	3	2,61	2,38	2,22	2,1	1,95	1,76	1,53	1,03
∞	3,84	2,99	2,6	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1,00

2. Критические значения *t*-критерия Стьюдента при уровне значимости 0,10, 0,05,0,01(двухсторонний)

Число степеней свободы d.f	α			Число степеней свободы d.f	α		
	0,1	0,05	0,01		0,1	0,05	0,01
1	6,314	12,71	63,657	18	1,734	2,101	2,8784
2	2,92	4,303	9,9248	19	1,729	2,093	2,8609
3	2,353	3,183	5,8409	20	1,725	2,086	2,8453
4	2,132	2,776	4,6041	21	1,721	2,08	2,8314
5	2,015	2,571	4,0321	22	1,717	2,074	2,8188
6	1,943	2,447	3,7074	23	1,714	2,069	2,8073
7	1,895	2,365	3,4995	24	1,711	2,064	2,7969
8	1,86	2,306	3,3554	25	1,708	2,06	2,7874
9	1,833	2,262	3,2498	26	1,706	2,056	2,7787
10	1,813	2,228	3,1693	27	1,703	2,052	2,7707
И	1,796	2,201	3,1058	28	1,701	2,048	2,7633
12	1,782	2,179	3,0545	29	1,699	2,045	2,7564
13	1,771	2,16	3,0123	30	1,697	2,042	2,75
14	1,761	2,145	2,9768	40	1,684	2,021	2,7045
15	1,753	2,132	2,9467	60	1,671	2	2,6603
16	1,746	2,12	2,9208	120	1,658	1,98	2,6174
17	1,74	2,11	2,8982	∞	1,645	1,96	2,5758

3. Критические значения коэффициентов корреляции для уровневой значимости 0,05 и 0,01

d.f.	α =0,05	α = 0,01	d.f.	α = 0,05	α = 0,01
1	0,996917	0,9998766	17	0,4555	0,5751
2	0,95	0,99	18	0,4438	0,5614
3	0,8783	0,95873	19	0,4329	0,5487
4	0,8114	0,9172	20	0,4227	0,5368
5	0,7545	0,8745	25	0,3809	0,4869
6	0,7067	0,8343	30	0,3494	0,4487
7	0,6664	0,7977	35	0,3246	0,4182
8	0,6319	0,7646	40	0,3044	0,3932
9	0,6021	0,7348	45	0,2875	0,3721
10	0,576	0,7079	50	0,2732	0,3541
И	0,5529	0,6835	60	0,25	0,3248
12	0,5324	0,6614	70	0,2319	0,3017
13	0,5139	0,6411	80	0,2172	0,283
14	0,4973	0,6226	90	0,205	0,2673
15	0,4821	0,6055	100	0,1946	0,254
16	0,4683	0,5897			

Для простой корреляции `d.f.` на 2 меньше, чем число пар вариантов; в случае частной корреляции необходимо также вычесть число исключаемых переменных.

4. Критерий Пирсона χ^2 с уровнем надёжности 0.95 и 0,99

df \ $1-\alpha$	0,95	0,99	df \ $1-\alpha$	0,95	0,99
1	3.84	6,93	13	22,36	27,69
2	5,99	9,21	14	23,68	29,14
3	7,81	11,34	15	25,00	30,58
4	9,49	13,28	16	26,30	32,00
5	11,07	15,09	18	28,87	34,81
6	12,59	16,81	20	31,41	37,57
7	14,07	18,8	24	36,42	42,98
8	15,51	20,09	30	43,77	50,89
9	16,92	21,67	40	55,76	63,79
10	18,31	23,21	60	79,08	88,38
11	19,68	24,73	120	146,57	158,95
12	21,03	26,22			

5. Значения статистик Дарбина-Уотсона d_L d_U при 5%-ном уровне значимости

n	k=1		k=2		k=3		k=4		k=5	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
6	0,61	1,4	-	-	-	-				
7	0,7	1,36	0,47	1,9	-	-				
8	0,76	1,33	0,56	1,78	0,37	2,29				
9	0,82	1,32	0,63	1,7	0,46	2,13				
10	0,88	1,32	0,7	1,64	0,53	2,02				
11	0,93	1,32	0,66	1,6	0,6	1,93				
12	0,97	1,33	0,81	1,58	0,66	1,86				
13	1,01	1,34	0,86	1,56	0,72	1,82				
14	1,05	1,35	0,91	1,55	0,77	1,78				
16	1,1	1,37	0,98	1,54	0,86	1,73	0,74	1,93	0,62	2,15
17	1,13	1,38	1,02	1,54	0,9	1,71	0,78	1,9	0,67	2,1
18	0,16	1,39	1,05	1,53	0,93	1,69	0,82	1,87	0,71	2,06
19	0,18	1,4	1,08	1,53	0,97	1,68	0,86	1,85	0,75	2,02
20	1,201	1,41	1,1	1,54	1	1,68	0,9	1,83	0,79	1,99
21	1,221	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67	0,93	1,81	0,83	1,96
22	1,24	1,43	1,15	1,54	1,05	1,66	0,96	1,8	0,86	1,94
23	1,26	1,44	1,17	1,54	1,08	1,66	0,99	1,79	0,90	1,92
24	1,27	1,45	1,19	1,55	1,1	1,66	1,01	0,78	0,93	1,9
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,66	1,04	0,77	0,95	1,89
26	1,3	1,46	1,22	1,55	1,14	1,65	1,06	0,76	0,98	1,88
27	1,32	1,47	1,24	1,56	1,16	1,65	1,08	0,76	1,01	1,86
28	1,33	1,48	1,26	1,56	1,18	1,65	1,1	0,75	1,03	1,85
29	1,34	1,48	1,27	1,56	1,2	1,65	1,12	1,74	1,05	1,84
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83

6. Критические значения первого коэффициента автокорреляции $r(1)$ при уровне значимости $\alpha = 0,05$

Число наблюдений n	$r(1)$
10	0,360
15	0,328
20	0,300
25	0,276
30	0,257

7. Граничные значения RS – критерия

Число наблюдений n	Нижняя граница	Верхняя граница
10	2,67	3,69
15	2,96	4,14
20	3,18	4,49
25	3,34	4,71
30	3,47	4,89

8. Критические значения критерия Ирвина λ

Число наблюдений n	λ	
	$P = 0,95$	$P = 0,99$
2	2,8	3,7
3	2,2	2,9
10	1,5	2,0
20	1,3	1,8
30	1,2	1,7
50	1,1	1,6
100	1,0	1,5
400	0,9	1,3
1000	0,8	1,2

Содержание

Учебное пособие

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ: ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Христиановский Вадим Владимирович,
Щербина Владимир Петрович

Редактор Е. И. Хвостова

План изд. 2010, под №106

Подписано к печати 12.10.2009 г. Формат 60/ 84. 1/16. Бумага офсет. Печать офсет: Усл. - печ. л. 9,3. Уч. изд. л. Тираж 400 экз. Заказ №

Донецкий национальный университет, 83055, Донецк-55, Университетская, 24

Напечатано: