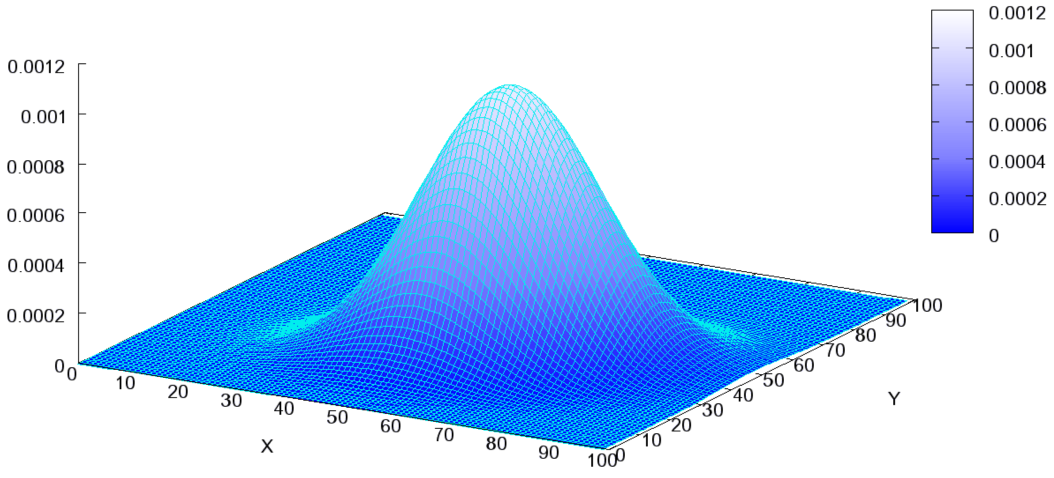
A.A.Abdushukurov

EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA



Toshkent-2010

A.A.Abdushukurov

EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA

Toshkent-2010

Taqrizchilar:

fizika-matematika fanlari doctori Ya.M. Xusanboyev

fizika-matematika fanlari doctori Sh.Sh.Shorahmetov

Mundarija

EHTIMOLLAR NAZARIYASI

I bob. Tasodifiy hodisalar

II bob. Tasodifiy miqdorlar

III bob. Ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar

IV bob. Tasodifiy miqdorlarning funksiyalari

V bob. Ehtimollar nazariyasining limit teoremalari

MATEMATIK STATISTIKA

VI bob. Tanlanma va uning xarakteristikalari

VII bob. Noma’lum parametrlarni baholash

VIII bob. Statistik gipotezalarni tekshrish

IX bob. Ko‘p o‘lchovli statistik tahlil usullari

Kirish

Ushbu o‘quv qo‘llanma muallifi ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanini ko‘pgina oliy ta’lim muassasalarida taxsil olayotgan talabalarga tushunarli bo‘lishi uchun engil shaklda bayon qilishni o‘z oldiga maqsad qilib oldi. Tuzilishi bo‘yicha o‘quv qo‘llanma uning nomiga moniy ravishda ikki qismga bo‘linadi: “ehtimollar nazariyasi” va “matematik statistika”. Qo‘lllanma materiallarini bayon qilishda har bir tushuncha va mavzularga oid tipik masala va misollar keltirishga e’tibor berilib, har bir bobning so‘ngida talabalar mustaqil ishlashlari uchun bir qator misollar to‘plami keltirilgandir. Muallif murakkab matematik hisoblarni chetlab o‘tish bilan bir qatorda ko‘rilayotgan masalalarning nazariy – ehtimoliy va statistik mohiyatiga chuqurroq e’tibor berib o‘tgandir.

Ushbu qo‘llanmani ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fani o‘qitilishi nazarda tutilgan barcha bakalavriat ta’lim yo‘nalishlari hamda magistratura mutahassisliklariga tavsiya etish mumkin. Undan ilmiy tadqiqot izlanishlarida ham foydalanish mumkin.

I bob. Tasodifiy hodisalar

1.1 Ehtimollar nazariyasining predmeti

Ehtimollar nazariyasi “tasodifiy tajribalar”, ya’ni natijasini oldindan aytib bo‘lmaydigan tajribalardagi qonuniyatlatni o‘rganuvchi matematik fandir. Bunda shunday tajribalar qaraladiki, ularni o‘zgarmas (ya’ni, bir xil) shartlar kompleksida hech bo‘lmaganda nazariy ravishda ixtiyoriy sonda takrorlash mumkin, deb hisoblanadi. Bunday tajribalar har birining natijasi *tasodifiy hodisa* ro‘y berishidan iboratdir. Insoniyat faoliyatining deyarli hamma sohalarida shunday holatlar mavjudki, u yoki bu tajribalarni bir xil sharoitda ko‘p matra takrorlash mumkin bo‘ladi. Ehtimollar nazariyasini sinovdan-sinovga o‘tishida natijalari turlicha bo‘lgan tajribalar qiziqtiradi. Biror tajribada ro‘y berish yoki bermasligini oldindan aytib bo‘lmaydigan hodisalar tasodifiy hodisalar deyiladi. Masalan, tanga tashlash tajribasida har bir tashlashga ikki tasodifiy hodisa mos keladi: tanganing gerb tomoni tushishi yoki tanganing raqam tomoni tushishi. Albatta, bu tajribani bir marta takrorlashda shu ikki tasodifiy hodisalardan faqat bittasigina ro‘y beradi. Tasodifiy hodisalarni biz tabiatda, jamiatda, ilmiy tajribalarda, sport va qimor o‘yinlarida kuzatishimiz mumkin. Umumlashtirib aytish mumkinki, tasodifiyat elementlarisiz rivojlanishni tasavvur qilish qiyindir. Tasodifiyatsiz umuman hayotning va biologik turlarning yuzaga kelishini, insoniyat tarihini, insonlarning ijodiy faoliyatini, sotsial-iqtisodiy tizimlarning rivojlanishini tasavvur etib bo‘lmaydi. Ehtimollar nazariyasi esa aynan mana shunday tasodifiy bog‘liqliklarning matematik modelini tuzish bilan shug‘illanadi. Tasodifiyat insoniyatni doimo qiziqtirib kelgandir. Shu sababli ehtimollar nazariyasi boshqa matematik fanlar kabi amaliyot talablariga mos ravishda rivojlangan. Ehtimollar nazariyasi boshqa matematik fanlardan farqli o‘laroq nisbatan qisqa, ammo o‘ta shijoatlik rivojlanish tarixiga ega. Endi qisqacha tarixiy ma’lumotlarni keltiramiz. Ommaviy tasodifiy hodisalarga mos masalalarni sistematik ravishda o‘rganish va ularga mos matematik apparatning yuzaga kelishi XVII asrga to‘g‘ri keladi. XVII asr boshida, mashhur fizik Galiley fizik o‘lchashlardagi xatoliklarni tasodifiy deb hisoblab, ularni ilmiy tadqiqot qilishga uringan. Shu davrlarda kasallanish, o‘lish, baxtsiz hodisalar statistikasi va shu kabi ommaviy tasodifiy hodisalardagi qonuniyatlarni tahlil qilishga asoslangan sug‘urtalanishning umumiy nazariyasini yaratishga ham urinishlar bo‘lgan. Ammo, ehtimollar nazariyasi matematik ilm sifatida murakkab tasodifiy jarayonlarning o‘rganishdan emas, balki eng sodda qimor o‘yinlarini tahlil qilish natijasida yuzaga kela boshlagan. Shu boisdan ehtimollar nazariyasining paydo bo‘lishi XVII asr ikkinchi yarmiga mos keladi va u Paskal (1623-1662), Ferma (1601-1665) va Gyuygens (1629-1695) kabi olimlarning qimor o‘yinlarini nazariyasidagi tadqiqotlari bilan bog‘liqdir. Ehtimollar nazariyasi rivojidagi katta qadam Yakov Bernulli (1654-1705) ilmiy izlanishlari bilan bog‘liqdir. Unga, ehtimollar nazariyasining eng muhim qonuniyati, deb hisoblanuvchi “katta sonlar qonuni” tegishlidir. Ehtimollar nazariyasi rivojidagi yana bir muhim qadam de Muavr (1667-1754) nomi bilan bog‘liqdir. Bu olim tomonidan normal qonun (yoki normal taqsimot) deb ataluvchi muhim qonuniyat mavjudligi sodda holda asoslanib berildi. Keyinchalik, ma’lum bo‘ldiki, bu qonuniyat ham, ehtimollar nazariyasida muhim rol’ o‘ynar ekan. Bu qonuniyat mavjudligini asoslovchi teoremalar “markaziy limit teoremalar” deb ataladi. Ehtimollar nazariyasi rivojlanishida katta hissa mashhur matematik Laplasga (1749-1827) ham tegishlidir. U birinchi bo‘lib ehtimollar nazariyasi asoslarini qat’iy va sistematik ravishda ta’rifladi, markaziy limit teoremasining bir formasini isbotladi (Muavr-Laplas teoremasi) va ehtimollar nazariyasining bir necha tadbiqlarini keltirdi. Ehtimollar nazariyasi rivojidagi etarlicha darajada oldinga siljish Gauss (1777-1855) nomi bilan bog‘liqdir. U normal qonuniyatga yanada umumiy asos berdi va tajribadan olingan sonli ma’lumotlarni qayta ishlashning muhim usuli – “kichik kvadratlar usuli”ni yaratdi. Puasson (1781-1840) katta sonlar qonunini umumlashtirdi va ehtimollar nazariyasini o‘q uzish masalalariga qo‘lladi. Uning nomi bilan ehtimollar nazariyasida katta rol’ o‘ynovchi taqsimot qonuni nomlangandir. XVII va XIX asrlar uchun ehtimollar nazariyasining keskin rivojlanishi va u bilan har tomonlama qiziqish xarakterlidir. Keyinchalik ehtimollar nazariyasi rivojiga Rossiya olimlari V.Ya. Bunyakovskiy (1804-1889), P.L. Chebishev (1821-1894), A.A. Markov (1856-1922), A.M. Lyapunov (1857-1918), A.Ya. Xinchin (1894-1959), V.I. Romanovskiy (1879-1954), A.N. Kolmogorov (1903-1987) va ularning shogirdlari bebaho hissa qo‘shdilar. O‘zbekistonda butun dunyoga taniqli Sarimsokov (1915-1995) va S.X. Sirojiddinov (1920-1988) larning muhim rollarini alohida ta’kidlab o‘tish joizdir.

1.2 Tasodifiy hodisalar, ularning klassifikatsiyasi

Dastlab ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri “tasodifiy hodisa” tushunchasini keltiramiz. Natijasini oldindan aytib bo‘lmaydigan tajriba o‘tkazilayotgan bo‘lsin. Bunday tajribalar ehtimollar nazariyasida tasodifiy deb ataladi.

✓ *Tasodifiy hodisa*(yoki hodisa) deb, tasodifiy tajriba natijasida ro‘y berishi oldindan aniq bo‘lmagan hodisaga aytiladi.

Hodisalar, odatda, lotin alifbosining bosh harflari $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots$lar bilan belgilanadi.

✓ Tajribaning har qanday natijasi *elementar hodisa* deyiladi va ω orqali belgilanadi.

✓ Tajribaning natijasida ro‘y berishi mumkin bo‘lgan barcha elementar hodisalar to‘plami *elementar hodisalar fazosi* deyiladi va Ω orqali belgilanadi.

1.1-misol. Tajriba nomerlangan kub(o‘yin soqqasi)ni tashlashdan iborat bo‘lsin. U holda tajriba 6 elementar hodisadan hodisalar $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ lardan iborat bo‘ladi. ω_i hodisa tajriba natijasida $i\ (i = 1,2,3,4,5,6)$ ochko tushishini bildiradi. Bunda elementar hodisalar fazosi: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

✓ Tajriba natijasida albatta ro‘y beradigan hodisaga *muqarrar hodisa* deyiladi.

Elementar hodisalar fazosi muqarrar hodisaga misol bo‘la oladi.

Aksincha, umuman ro‘y bermaydigan hodisaga mumkin bo‘lmagan hodisa deyiladi va u $\varnothing$ orqali belgilanadi.

1.1-misolda keltirilgan tajriba uchun quyidagi hodisalarni kiritamiz:

A={5 raqam tushishi};

B={juft raqam tushishi};

C={7 raqam tushishi};

D={butun raqam tushishi};

Bu yerda A va B hodisalar tasodifiy, C hodisa mumkin bo‘lmagan va *D* hodisa muqarrar hodisalar bo‘ladi.

1.3 Hodisalar ustida amallar

Tasodifiy hodisalar orasidagi munosabatlarni keltiramiz:

✓ A va B *hodisalar yig‘indisi* deb, A va B hodisalarning kamida bittasi(ya’ni yoki A, yoki B, yoki A va B birgalikda) ro‘y berishidan iborat $C = A \cup B$ ($\mathrm{C} = \mathrm{A} + \mathrm{B}$) hodisaga aytiladi.

A va B *hodisalar ko'paytmasi* deb, A va B hodisalar ikkilasi ham(ya'ni A va B birgalikda)ro'y berishidan iborat $C = A \cap B$ ($C = A \cdot B$)hodisaga aytiladi.

A hodisadan B *hodisaning ayirmasi* deb, A hodisa ro'y berib, B hodisa ro'y bermasligidan iborat $C = A \setminus B$ ($C = A - B$) hodisaga aytiladi.

✓ A hodisaga *qarama-qarshi* $\overline{A}$ hodisa faqat va faqat A hodisa ro'y bermaganda ro'y beradi(ya'ni $\overline{A}$ hodisa A hodisa ro'y bermaganda ro'y beradi). $\overline{A}$ ni A uchun teskari hodisa deb ham ataladi.

✓ Agar A hodisa ro'y berishidan B hodisaning ham ro'y berishi kelib chiqsa A hodisa B hodisani *ergashtiradi* deyiladi va $A \subseteq B$ ko'rinishida yoziladi.

✓ Agar $A \subseteq B$ va $B \subseteq A$ bo'lsa, u holda A va B hodisalar *teng*(*teng kuchli*) hodisalar deyiladi va $A = B$ ko'rinishida yoziladi.

1.2-misol. A, B va C-ixtiyoriy hodisalar bo'lsin. Bu hodisalar orqali quyidagi hodisalarni ifodalang: *D*={uchchala hodisa ro'y berdi}; *E*={bu hodisalarning kamida bittasi ro'y berdi}; *F*={bu hodisalarning birortasi ham ro'y bermadi}; *G*={bu hodisalarning faqat bittasi ro'y berdi}.

Hodisalar ustidagi amallardan foydalanamiz: $D = A \cap B \cap C (D = A \cdot B \cdot C)$; $E = A + B + C$; $F = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$; $G = A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$.

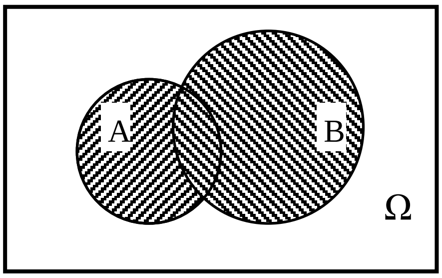
Demak hodisalarni to'plamlar kabi ham talqin etish mumkin ekan.

Belgilash	To'plamlar nazariyasidagi talqini	Ehtimollar nazariyasidagi talqini
Ω	Fazo (asosiy to'plam)	Elementar hodisalar fazosi, muqarrar hodisa
$\omega, \quad \omega \in \Omega$	ω fazo elementlari	ω elementar hodisa
$A, \quad A \subseteq \Omega$	A to'plam	A hodisa
$A \cup B, A + B$	A va B to'plamlarning yig'indisi, birlashmasi	A va B hodisalar yig'indisi (A va B ning kamida biri ro'y berishidan iborat hodisa)
$A \cap B, A \cdot B$	A va B to'plamlarning kesishmasi	A va B hodisalar ko'paytmasi (A va B ning birgalikda ro'y berishidan iborat hodisa)
$A \setminus B, A - B$	A to'plamdan B to'plamning ayirmasi	A hodisadan B hodisaning ayirmasi(A ning ro'y berishi, B ning ro'y bermasligidan iborat hodisa)
$\varnothing$	Bo'sh to'plam	Mumkin bo'lmagan hodisa
$\overline{A}$	A to'plamga to'ldiruvchi	A hodisaga teskari hodisa(A

		ning ri'y bermasligidan iborat)
$A\cap B=\varnothing$, $A\cdot B=\varnothing$	A va B to'plamlar kesishmaydi	A va B hodisalar birgalikda emas
$A\subseteq B$	A to'plam B ning qismi	A hodisa B ni ergashtiradi
$A=B$	A va B to'plamlar ustma-ust tushadi	A va B hodisalar teng kuchli

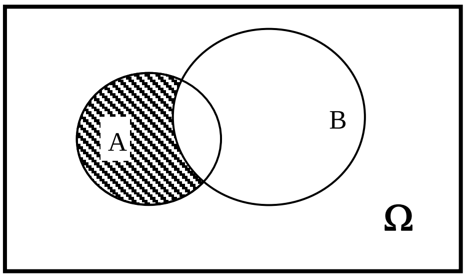
Hodisalar va ular ustidagi amallarni Eyler-Venn diarammalari yordamida tushuntirish(tasavvur qilish) qulay. Hodisalar ustidagi amallarni 1-5 rasmlardagi shakllar kabi tasvirlash mumkin.

$A+B$



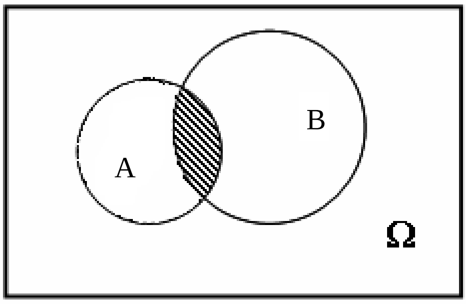
1-rasm.

$A\text{-}B$



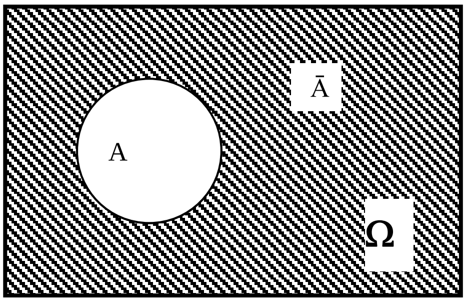
2-rasm.

$A{\cdot}B$



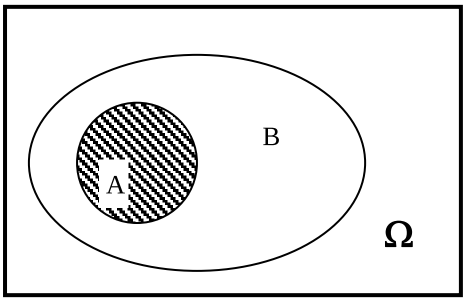
3-rasm.

$\overline{A}$



4-rasm.

$A\subseteq B$



5-rasm.

Hodisalar ustidagi amallar quyidagi xossalarga ega:

- $A+B=B+A, \quad A\cdot B=B\cdot A$;
- $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C,$;
- $(A+B)+C=A+(B+C), \quad (A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$;
- $A+A=A, \quad A\cdot A=A$;
- $\mathrm{A}+\Omega=\Omega, \quad A\cdot\Omega=A \quad A+\varnothing=A, \quad A\cdot\varnothing=\varnothing$;
- $A+\overline{A}=\Omega, \quad A\cdot\overline{A}=\varnothing$;
- $\overline{\varnothing}=\Omega, \quad \overline{\Omega}=\varnothing, \quad \overline{\overline{A}}=A$;
- $A-B=A\cdot\overline{B}$;
- $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$ va $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$ - de Morgan ikkilamchilik prinsipi.

1.3-misol.
a) $(A+B)\cdot(A+\overline{B})$ ifodani soddalashtiring.
Yuqoridagi xossalardan foydalanamiz:
$(A+B)\cdot(A+\overline{B})=A\cdot A+A\cdot\overline{B}+B\cdot A+B\cdot\overline{B}=A+A\cdot(\overline{B}+B)+\varnothing=A+A\cdot\Omega=A+A=A$
Demak, $(A+B)\cdot(A+\overline{B})=A$ ekan.
b) $A+B=A+\overline{A}\cdot B$ formulani isbotlang.
$A+B=(A+B)\cdot\Omega=A\cdot\Omega+B\cdot\Omega=A\cdot\Omega+B\cdot(A+\overline{A})=A\cdot\Omega+(A+\overline{A})\cdot B=$
$=A\cdot\Omega+A\cdot B+A\cdot\overline{B}=(\Omega+B)\cdot A+A\cdot\overline{B}=\Omega\cdot A+A\cdot\overline{B}=A+A\cdot\overline{B}$.

1.4 Tasodifiy hodisalar. Hodisalar algebrasi

Ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalarini keltiramiz.

Natijasi tasodifiy bo`lgan biror tajriba o`tkazilayotgan bo`lsin. $\Omega$-tajriba natijasida ro`y berishi mumkin bo`lgan barcha elementar hodisalar to`plami elementar hodisalar fazosi deyiladi; tajribaning natijasi ω esa elementar hodisa deyiladi.

✓ Agar Ω chekli yoki sanoqli to`plam bo`lsa (ya`ni elementlarini natural sonlar yordamida nomerlash mumkin bo`lsa), u holda uning ixtiyoriy qism to`plami A tasodifiy hodisa (yoki hodisa) deyiladi: $\mathrm{A}\subseteq\Omega$.

Ω to`plamdagi $\mathrm{A}$ qism to`plamga tegishli elementar hodisalar A hodisaga qulaylik yaratuvchi hodisalar deyiladi.

✓ Ω to`plam muqarrar hodisa deyiladi. $\varnothing$-bo`sh to`plam mumkin bo`lmagan hodisa deyiladi.

S-Ω ning qism to`plamlaridan tashkil topgan sistema bo`lsin.

✓ Agar

1. $\varnothing\in S$, $\Omega\in S$;
2. $A\in S$ munosabatdan $\overline{A}\in S$ kelib chiqsa;
3. $A\in S$ va $B\in S$ munosabatdan $A+B\in S$, $A\cdot B\in S$ kelib chiqsa S sistema algebra tashkil etadi deyiladi.

Ta'kidlash joizki, $A+B=\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}}$, $A\cdot B=\overline{\overline{A}+\overline{B}}$ ekanligidan 3 shartdagi $A+B\in S$ va $A\cdot B\in S$ munosabatlardan ixtiyoriy bittasini talab qilish yetarlidir.

1.4-misol. $S=\{\varnothing,\Omega\}$ sistema algebra tashkil etadi: $\varnothing+\Omega=\Omega$, $\varnothing\cdot\Omega=\varnothing$, $\overline{\varnothing}=\Omega$, $\overline{\Omega}=\varnothing$.

Agar 3 shart o`rniga quyidagilarni talab qilsak $A_n\in S$, $n=1,2,...$, munosabatdan $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in S$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in S$ kelib chiqsa S sistema σ-algebra deyiladi.

Agar Ω chekli yoki sanoqli bo'lsa, Ω-to`plamning barcha qism to`plamlaridan tashkil topgan hodisalar sistemasi algebra tashkil etadi.

1.5 Ehtimollikning statistik ta'rifi

A hodisa n ta bog'liqsiz tajribalarda n_A marta ro'y bersin. n_A son A hodisaning chastotasi, $\frac{n_A}{n}$ munosabat esa A hodisaning nisbiy chastotasi deyiladi.

Nisbiy chastotaning statistik turg'unlik xossasi deb ataluvchi xossasi mavjud, ya'ni tajribalar soni oshishi bilan nisbiy chastotasi ma'lum qonuniyatga ega bo'ladi va biror son atrofida tebranib turadi.

Misol sifatida tanga tashlash tajribasini olaylik. Tanga A={Gerb} tomoni bilan tushishi hodisasini qaraylik. Byuffon va K.Pirsonlar tomonidan o'tkazilgan tajribalar natijasi quyidagi jadvalda keltirilgan:

Tajriba o'tkazuvchi	Tajribalar soni, n	Tushgan gerblar soni, n_A	Nisbiy chastota, n_A/n
Byuffon	4040	2048	0.5080
K.Pirson	12000	6019	0.5016
K.Pirson	24000	12012	0.5005

Jadvaldan ko'rinadiki, n ortgani sari n_A/n nisbiy chastota $\frac{1}{2}=0.5$ ga yaqinlashar ekan.

✓ Agar tajribalar soni etarlicha ko‘p bo‘lsa va shu tajribalarda biror A hodisaning nisbiy chastotasi biror o‘zgarmas son atrofida tebransa, bu songa A hodisaning *statistik ehtimolligi* deyiladi.

A hodisaning ehtimolligi P(A) simvol bilan belgilanadi. Demak,

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n_A}{n}=P(A)$ yoki yetarlicha katta *n* lar uchun $\frac{n_A}{n}\approx P(A)$.

Statistik ehtimollikning kamchiligi shundan iboratki, bu yerda statistik ehtimollik yagona emas. Masalan, tanga tashlash tajribasida ehtimollik sifatida nafaqat 0.5, balki 0.49 yoki 0.51 ni ham olishimiz mumkin. Ehtimollikni aniq hisoblash uchun katta sondagi tajribalar o‘tkazishni talab qiladi, bu esa amaliyotda ko‘p vaqt va xarajatlarni talab qiladi.

Statistik ehtimollik quyidagi xossalarga ega:

1. $0\le P(A)\le 1$;
2. $P(\varnothing)=0$;
3. $P(\Omega)=1$;
4. $A\cdot B=\varnothing$ bo‘lsa, u holda $P(A+B)=P(A)+P(B)$;

Isboti. 1) Ihtiyoriy A hodisaning chastotasi uchun $0\le n_A\le n\Rightarrow 0\le\frac{n_A}{n}\le 1$.

Etarlicha katta *n* lar uchun $\frac{n}{n_A}\approx P(A)$ bo‘lgani uchun $0\le P(A)\le 1$ bo‘ladi.

2) Mumkin bo‘lmagan hodisa uchun $n_A=0$.

3) Muqarrar hodisaning chastotasi $n_A=n$.

4) Agar $A\cdot B=\varnothing$ bo‘lsa, u holda $n_{A+B}=n_A+n_B$ va

$$P(A+B)\approx\frac{n_{A+B}}{n}=\frac{n_A+n_B}{n}=\frac{n_A}{n}+\frac{n_B}{n}\approx P(A)+P(B).\qquad\blacksquare$$

1.6 Ehtimollikning klassik ta’rifi

Ω chekli *n* ta teng imkoniyatli elementar hodisalardan tashkil topgan bo‘lsin.

✓ A hodisaning ehtimolligi deb, A hodisaga qulaylik yaratuvchi elementar hodisalar soni *k* ning tajribadagi barcha elementar hodisalar soni *n* ga nisbatiga aytiladi.

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{k}{n}\qquad(1.6.1)$$

Klassik ta'rifdan foydalanib, ehtimollik hisoblashda kombinatorika elementlaridan foydalaniladi. Shuning uchun kombinatorikaning ba'zi elementlari keltiramiz. Kombinatirikada qo'shish va ko'paytirish qoidasi deb ataluvchi ikki muhim qoida mavjud.

$A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ va $B=\{b_1,b_2,...,b_m\}$ chekli to'plamlar berilgan bo'lsin.

✓ *Qo'shish qoidasi:* agar A to'plam elementlari soni n va B to'plam elementlari soni m bo'lib, $A\cdot B=\varnothing$(A va B to'plamlar kesishmaydigan) bo'lsa, u holda $A+B$ to'plam elementlari soni $n+m$ bo'ladi.

✓ *Ko'paytirish qoidasi:* A va B to'plamlardan tuzilgan barcha (a_i,b_j) juftliklar to'plami $C=\{(a_i,b_j): i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}\}$ ning elementlari soni $n\cdot m$ bo'ladi.

n ta elementdan m ($0<m\le n$)tadan tanlashda ikkita sxema mavjud: qaytarilmaydigan va qaytariladigan tanlashlar. Birinchi sxemada olingan elementlar qayta olinmaydi(orqaga qaytarilmaydi), ikkinchi sxemada esa har bir olingan element har qadamda o'rniga qaytariladi.

I. Qaytarilmaydigan tanlashlar sxemasi

✓ *Guruhlashlar soni:* n ta elementdan m ($0<m\le n$)tadan guruhlashlar soni quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad (1.6.2)$$

C_n^m sonlar Nyuton binomi formulasining koeffisientlaridir:

$$(p+q)^n = p^n + C_n^1 p^{n-1}q + C_n^2 p^{n-2}q^2 + ... + q^n .$$

✓ *O'rinlashtirishlar soni:* n ta elementdan m ($0<m\le n$) tadan o'rinlashtirishlar soni quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (1.6.3)$$

✓ *O'rin almashtirishlar soni:* n ta elementdan n tadan o'rinlashtirish o'rin almashtirish deyiladi va u quyidagicha hisoblanadi:

$$P_n=n!. \qquad (1.6.4)$$

O‘rin almashtirish o‘rinlashtirishning xususiy holidir, chunki agar (1.6.3.)da $n=m$ bo‘lsa $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{n!}{0!} = n!$ bo‘ladi.

II. Qaytariladigan tanlashlar sxemasi

✓ *Qaytariladigan guruhlashlar soni:* n ta elementdan m $(0 < m \le n)$ tadan qaytariladigan guruhlashlar soni quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m \tag{1.6.5}$$

✓ *Qaytariladigan o‘rinlashtirishlar soni:* n ta elementdan m $(0 < m \le n)$ tadan qaytariladigan o‘rinlashtirishlari soni quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$\overline{A}_n^m = n^m . \tag{1.6.6}$$

✓ *Qaytariladigan o‘rin almashtirishlar soni:* k hil n ta elementdan iborat to‘plamda 1-element n_1 marta, 2-element n_2 marta,…, k- element n_k marta qaytarilsin va $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ bo‘lsin, u holda n ta elementdan iborat o‘rin almashtirish $P_n(n_1, n_2, ..., n_k)$ orqali belgilanadi va u quyidagicha hisoblanadi:

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!} . \tag{1.6.4}$$

Endi ehtimollik hisoblashga doir misollar keltiramiz.

1.5-misol. Telefon nomerini terayotganda abonent oxirgi ikki raqamni eslay olmadi. U bu raqamlar har xil ekanligini eslab, ularni tavakkaliga terdi. Telefon nomeri to‘g‘ri terilganligi ehtimolligini toping.

Oxirgi ikki raqamni A_{10}^2 usul bilan terish mumkin. A={telefon nomeri to‘g‘ri terilgan} hodisasini kiritamiz. A hodisa faqat bitta elementdan iborat bo‘ladi(chunki kerakli telefon nomeri bitta bo‘ladi). Shuning uchun klassik ta’rifga ko‘ra $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{A_{10}^2} = \frac{1}{10 \cdot 9} = \frac{1}{90} \approx 0.011$.

1.6-misol. 100 ta lotoreya biletlarlaridan bittasi yutuqli bo‘lsin. Tavakkaliga olingan 10 lotoreya biletlari ichida yutuqlisi bo‘lishi ehtimolligini toping.

100 ta lotoreya biletlaridan 10 tasini C_{100}^{10} usul bilan tanlash mumkin. B={10 lotoreya biletlari ichida yutuqlisi bo‘lishi } hodisasi bo‘lsa, $N(B)=C_1^1\cdot C_{99}^9$ va $P(B)=\dfrac{N(B)}{N(\Omega)}=\dfrac{C_1^1\cdot C_{99}^9}{C_{100}^{10}}=\dfrac{1}{10}=0.1$.

1.7-misol. Pochta bo‘limida 6 xildagi otkritka bor. Sotilgan 4 ta otkritkadan: a) 4 tasi bir xilda; b) 4 tasi turli xilda bo‘lishi ehtimolliklarini toping.

6 xil otkritkadan 4 tasini $\overline{C_6^4}$ usul bilan tanlash mumkin. a) A={4 ta bir xildagi otkritka sotilgan} hodisasi bo‘lsin. A hodisaning elementar hodisalari soni otkritkalar xillari soniga teng, ya’ni $N(A)$=6. Klassik ta’rifga ko‘ra $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}=\dfrac{6}{\overline{C_6^4}}=\dfrac{6}{126}=\dfrac{1}{21}$ bo‘ladi. b) B={4 ta har xil otkritka sotilgan} hodisasi bo‘lsin, u holda $\mathrm{N(B)}=C_6^4$ ga teng va $P(B)=\dfrac{N(B)}{N(\Omega)}=\dfrac{C_6^4}{\overline{C_6^4}}=\dfrac{15}{126}=\dfrac{5}{42}$.

Klassik ehtimollik quyidagi xossalarga ega:

1. $P(\varnothing)=0$;
2. $P(\Omega)=1$;
3. $0\le P(A)\le 1$;
4. Agar $A\cdot B=\varnothing$ bo‘lsa, u holda $P(A+B)=P(A)+P(B)$;
5. $\forall A,B\in\Omega$ uchun $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$

Isboti. 1) $N(\varnothing)=0$ bo‘lgani uchun klassik ta’rifga ko‘ra $P(\varnothing)=\dfrac{N(\varnothing)}{N(\Omega)}=0$.

2) Klassik ta’rifga ko‘ra $P(\Omega)=\dfrac{N(\Omega)}{N(\Omega)}=1$.

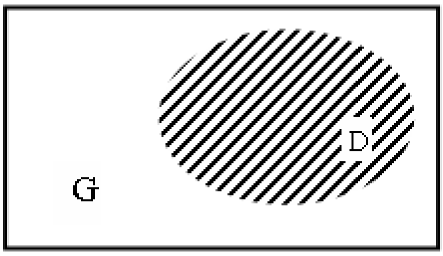
3) Ihtiyoriy A hodisa uchun $\varnothing\subseteq A\subseteq\Omega$ ekanligidan $0\le P(A)\le 1$ bo‘ladi.

4) Agar $A\cdot B=\varnothing$ bo‘lsa, u holda $N(A+B)=N(A)+N(B)$ va $P(A+B)=\dfrac{N(A+B)}{N(\Omega)}=\dfrac{N(A)+N(B)}{N(\Omega)}=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}+\dfrac{N(B)}{N(\Omega)}=P(A)+P(B)$.

5) $A+B$ va B hodisalarni birgalikda bo‘lmagan ikki hodisalar yig‘ndisi shaklida yozib olamiz: $A+B=A+B\cdot\overline{A}\,(1.3-misol)$, $B=B\cdot\Omega=B\cdot(A+\overline{A})=A\cdot B+B\cdot\overline{A}$, u holda 4-xossaga ko‘ra $P(A+B)=P(A)+P(B\cdot\overline{A})$ va $P(B)=P(A\cdot B)+P(B\cdot\overline{A})$. Bu ikki tenglikdan $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$ kelib chiqadi. ■

1.7 Ehtimollikning geometrik ta'rifi

Ehtimolning klassik ta'rifiga ko'ra Ω - elementar hodisalar fazosi chekli bo'lgandagina hisoblashimiz mumkin. Agar Ω cheksiz teng imkoniyatli elementar hodisalardan tashkil topgan bo'lsa, geometrik ehtimollikdan foydalanamiz.



6-rasm.

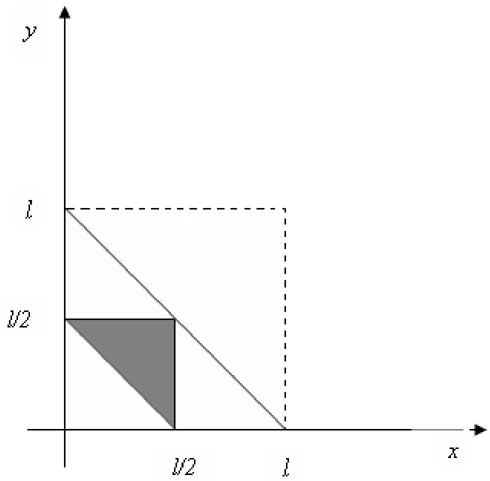
O'lchovli biror G soha berilgan bo'lib, u D sohani o'z ichiga olsin. G sohaga tavakkaliga tashlangan X nuqtani D sohaga tushishi ehtimolligini hisoblash masalasini ko'ramiz. Bu yerda X nuqtaning G sohaga tushishi muqarrar va D sohaga tushishi tasodifiy hodisa bo'ladi. $A=\{X\in D\}$ -X nuqtaning D sohaga tushishi hodisasi bo'lsin.

✓ A hodisaning geometrik ehtimolligi deb, D soha o'lchovini G soha o'lchoviga nisbatiga aytiladi, ya'ni

$$P(A)=\frac{mes\{D\}}{mes\{G\}},$$

bu yerda *mes* orqali uzunlik, yuza, hajm belgilangan.

1.8-misol. l uzunlikdagi sterjen tavakkaliga tanlangan ikki nuqtada bo'laklarga bo'lindi. Hosil bo'lgan bo'laklardan uchburchak yasash mumkin bo'lishi ehtimolligini toping.



7-rasm.

Birinchi bo'lak uzunligini *x*, ikkinchi bo'lak uzunligini *y* bilan belgilasak, uchinchi bo'lak uzunligi *l-x-y* bo'ladi. Bu yerda $\Omega=\{(x,y):0<x+y<l\}$, ya'ni $0<x+y<l$ sterjenning bo'laklari uzunliklarining barcha bo'lishi mumkin bo'lgan kombinatsiyasidir. Bu bo'laklardan uchburchak yasash mumkin bo'lishi uchun quyidagi shartlar bajarilishi kerak: $x+y>l-x-y,$ $x+l-x-y>y,\ y+l-x-y>x$.

Bulardan $x < \frac{l}{2}, \quad y < \frac{l}{2}, \quad x + y > \frac{l}{2}$ ekanligi kelib chiqadi.

Bu tengsizliklar 7-rasmdagi bo‘yalgan sohani bildiradi. Ehtimollikning geometrik ta’rifiga ko‘ra:

$$P(A) = \frac{mes\{A\}}{mes\{G\}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{2}}{\frac{1}{2}\cdot l \cdot l} = \frac{1}{4}.$$

1.9-misol. (Uchrashuv haqida)

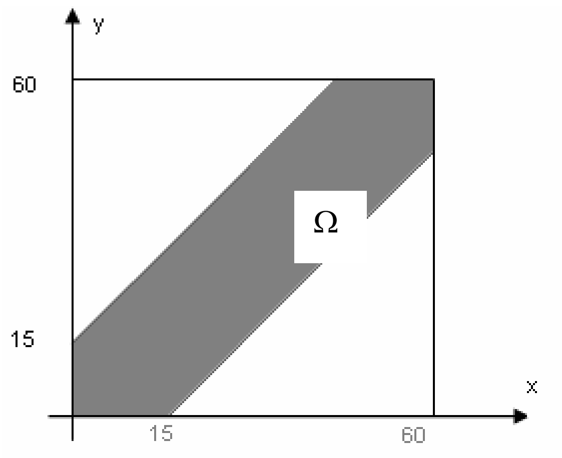
Ikki do‘st soat 9 bilan 10 orasida uchrashishga kelishishdi. Birinchi kelgan kishi do‘stini 15 daqiqa davomida kutishini, agar shu vaqt mobaynida do‘sti kelmasa u ketishi mumkinligini shartlashib olishdi. Agar ular soat 9 bilan 10 orasida ixtiyoriy momentda kelishlari mumkin bo‘lsa, bu ikki do‘stning uchrashishi ehtimolini toping.

Birinchi kishi kelgan momentni *x*, ikkinchisinikini *y* bo‘lsin: $0 \le x \le 60$, $0 \le y \le 60$ U holda ularning uchrashishlari uchun $|x - y| \le 15$ tengsizlik bajarilishi kerak.

Demak, $\Omega = \{(x, y) : 0 \le x \le 60,\ 0 \le y \le 60\}$, $A = \{(x, y) : |x - y| \le 15\}$. *x* va *y* larni Dekart koordinatalar tekisligida tasvirlaymiz(8-rasm).

U holda

$$P(A) = \frac{mes\{A\}}{mes\{G\}} = \frac{60^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 45\cdot 45}{60^2} = \frac{7}{16}.$$



8-rasm.

1.8 Ehtimollikning aksiomatik ta’rifi

Ehtimollar nazariyasini aksiomatik qurishda A.N. Kolmogorov tomonidan 30-yillarning boshlarida asos solingan.

Ω- biror tajribaning barcha elementar hodisalar to‘plami, *S*-hodisalar algebrasi bo‘lsin.

✓ *S* hodisalar algebrasida aniqlangan, haqiqiy qiymatlar qabul qiluvchi $P(A)$ fuksiya ehtimollik deyiladi, agar u uchun quyidagi aksiomalar o‘rinli bo‘lsa:

A1: ihtiyoriy $A \in S$ hodisaning ehtimolligi manfiy emas $P(A) \geq 0$ (nomanfiylik aksiomasi);

A2: muqarrar hodisaning ehtimolligi birga teng $P(\Omega) = 1$ (normallashtirish aksiomasi);

A3: juft-jufti bilan birgalikda bo‘lmagan hodisalar yig‘indisining ehtimolligi shu hodisalar ehtimollari yig‘indisiga teng, ya’ni agar $A_i \cdot A_j = \varnothing, \quad i \neq j$ bo‘lsa, u holda

$$P(\bigcup_k A_k) = \sum_k P(A_k)$$

(additivlik aksiomasi);

(Ω, S, P) uchlik ehtimollik fazosi deyiladi, bu yerda Ω-elementar hodisalar fazosi, *S*-hodisalar algebrasi, *P*- A1-A3 aksiomalarni qanoatlantiruvchi sanoqli funksiya.

1.9 Ehtimollikning xossalari

Kolmogorov aksiomalarining tatbiqi sifatida quyidagi xossalarni keltiramiz:

1. Mumkin bo‘lmagan hodisaning ehtimoli nolga teng

$$P(\varnothing) = 0 .$$

2. Qarama-qarshi hodisalarning ehtimolliklari yig‘indisi birga teng

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 .$$

3. Ixtiyoriy hodisaning ehtimolligi uchun quyidagi munosabat o‘rinli:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

4. Agar $A \subseteq B$ bo‘lsa, u holda $P(A) \leq P(B)$.

5. Agar birgalikda bo‘lmagan $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalar to‘la gruppani tashkil etsa, ya’ni $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ va $A_i \cdot A_j = \varnothing, \quad i \neq j$ bo‘lsa u holda

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1 .$$

Isboti:

1. $A+\varnothing=A,\quad A\cdot\varnothing=\varnothing$ tengliklardan A3 aksiomaga ko‘ra $P(A)+P(\varnothing)=P(A)\Rightarrow P(\varnothing)=0$

2. $A+\overline{A}=\Omega \quad A\cdot\overline{A}=\Omega$ tengliklardan $P(A)+P(\overline{A})=P(\Omega)$ hamda A2 va A3 aksiomalardan esa $P(A)+P(\overline{A})=1$ tenglik kelib chiqadi.

3. 2-xossaga ko‘ra $P(A)=1-P(\overline{A})$ va A1 aksiomaga asosan $0\le P(A)\le 1$.

4. $A\subseteq B$ ekanligidan $B=(B-A)+A$ va $(B-A)A=\varnothing$. A3 aksiomaga ko‘ra $P(B)=P(B-A)+P(A)$, ammo $P(B-A)\ge 0$ bo‘lgani uchun $P(A)\le P(B)$.

5. $A_1+A_2+...+A_n=\Omega$ tenglik, A2 va A3 aksiomalarga ko‘ra $P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)$. ■

1.10 Ehtimolliklar fazosi

Elementar hodisalar fazosi cheksiz bo‘lsin: $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_n,...\}$. S esa Ω ning barcha qism to‘plamlaridan tashkil topgan hodisalar algebrasi bo‘lsin. Har bir $\omega_i\in\Omega,\quad i=1,2,...$ elementar hodisaga $p(\omega_i)$ sonni mos qo‘yamiz. $p(\omega_i)$-elementar hodisaning ehtimoli deyiladi. Demak, Ω da quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi sonli $p(\omega_i)$ funksiya kiritamiz:

1. $\forall\omega_i\in\Omega,\quad P(\omega_i)\ge 0$;

2. $\sum_{i=1}^{\infty}p(\omega_i)=1$.

U holda $A\in\Omega$ hodisaning ehtimolligi yig‘indi shaklida ifodalanadi:

$$P(A)=\sum_{\omega_i\in A}P(\omega_i) \tag{1.10.1}$$

Ehtimollikni bunday aniqlash Kolmogorov aksiomalarini qanoatlantiradi:

1. $P(A)=\sum_{\omega_i\in A}P(\omega_i)\ge 0$, chunki har bir $P(\omega_i)\ge 0$;

2. $P(\Omega)=\sum_{\omega_i\in\Omega}p(\omega_i)=\sum_{i=1}^{n}p(\omega_i)=1$;

3. Agar $A\cdot B=\varnothing$ bo‘lsa, u holda

$$P(A+B)=\sum_{\omega_i\in A+B}p(\omega_i)=\sum_{\omega_i\in A}p(\omega_i)+\sum_{\omega_i\in B}p(\omega_i)=P(A)+P(B).$$

Bunday aniqlangan $\{\Omega, S, P\}$ uchlik ehtimolliklar fazosi(yoki diskret ehtimolliklar fazosi) deyiladi.

Agar $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$- chekli fazo va tajribadagi barcha elementar hodisalar teng imkoniyatli bo‘lsa, ya’ni

$$p(\omega_1) = p(\omega_2) = ... = p(\omega_n) = \frac{1}{n}, \qquad (1.10.2)$$

u holda (1.10.1) formula quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i) = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n}}_{m} = \frac{m}{n}. \qquad (1.10.3)$$

Bu yerda m A hodisaga tegishli elementar hodisalar soni. Bu esa ehtimollikni klassik ta’rifga ko‘ra hisoblashdir. Demak, klassik ehtimol (1.10.1) formula orqali aniqlangan ehtimollikning xususiy holi ekan.

1.11 Shartli ehtimollik

A va B hodisalar biror tajribadagi hodisalar bo‘lsin.

✓ B hodisaning A hodisa ro‘y bergandagi *shartli ehtimolligi* deb,

$$\frac{P(A \cdot B)}{P(A)} \quad (P(A) \neq 0) \qquad (1.11.1)$$

nisbatga aytiladi. Bu ehtimollikni $P(B/A)$ orqali belgilaymiz.

Shartli ehtimollik ham Kolmogorov aksiomalarini qanoatlantiradi:

1. $P(B/A) \geq 0$;

2. $P(\Omega/A) = \frac{P(\Omega \cdot A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$;

3. Agar $B \cdot C = \varnothing$ bo‘lsa, u holda

$$P((B+C)/A) = \frac{P((B+C)\cdot A)}{P(A)} = \frac{P(B\cdot A + C\cdot A)}{P(A)} = \frac{P(B\cdot A) + P(C\cdot A)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B\cdot A)}{P(A)} + \frac{P(C\cdot A)}{P(A)} = P(B/A) + P(C/A),$$

chunki $B\cdot C=\varnothing$ ekanligidan, $(B\cdot A)\cdot(C\cdot A)=B\cdot A\cdot A\cdot C=B\cdot C\cdot A=\varnothing\cdot A=\varnothing$

1.10-misol. Idishda 3 ta oq va 7 ta qora shar bor. Tavakkaliga ketma-ket bittadan 2 ta shar olinadi. Birinchi shar oq rangda bo‘lsa ikkinchi sharning qora rangda bo‘lishi ehtimolligini toping.

Bu misolni ikki usul bilan yechish mumkin:

1) A={birinchi shar oq rangda}, B={ikkinchi shar qora rangda}. A hodisa ro‘y berganidan so‘ng idishda 2 ta oq va 7 ta qora shar qoladi. Shuning uchun $P(B/A)=\frac{7}{9}$.

2) (1.11.1) formuladan foydalanib, hisoblaymiz: $P(A)=\frac{3}{10}$, $P(AB)=\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}=\frac{7}{30}$

Shartli ehtimollik formulasiga ko‘ra: $P(B/A)=\frac{P(A\cdot B)}{P(A)}=\frac{7/30}{3/10}=\frac{7}{9}$.

Shartli ehtimollik formulasidan hodisalar ko‘paytmasi ehtimolligi uchun ushbu formula kelib chiqadi:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B) \qquad (1.11.2)$$

(1.11.2) tenglik ko‘paytirish qoidasi(teoremasi) deyiladi. Bu qoidani n ta hodisa uchun umumlashtiramiz:

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)\ldots\cdot P(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1}). \qquad (1.11.3)$$

✓ Agar $P(A/B)=P(A)$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda A hodisa B hodisaga bog‘liq emas deyiladi va $A\perp B$ orqali belgilanadi.

Agar $A\perp B$ bo‘lsa, u holda (1.11.2) formulani quyidagicha yozish mumkin:

$$P(A\cdot B)=P(B)\cdot P(A/B)=P(B)\cdot P(A).$$

✓ A va B hodisalar o‘zaro bog‘liq emas deyiladi, agar

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$$

munosabat o‘rinli bo‘lsa.

Lemma. Agar $A\perp B$ bo‘lsa, u holda $A\perp\overline{B}$, $\overline{A}\perp B$ va $\overline{A}\perp\overline{B}$ bo‘ladi.

Isboti: $A \perp B$ bo‘lsin. U holda $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$ munosabat o‘rinli bo‘ladi. $P(B) + P(\overline{B}) = 1$ tenglikdan foydalanib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$P(A \cdot \overline{B}) = P(A \cdot (\Omega - B)) = P(A \cdot \Omega - A \cdot B) = P(A - A \cdot B) = P(A) - P(A \cdot B) =$$
$$= P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P(\overline{B}).$$

Demak, $P(A \cdot \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B}) \Rightarrow A \perp \overline{B}$. Qolganlari ham xuddi shunday isbotlanadi. ■

1.12 To‘la ehtimollik va Bayes formulalari

$A_1, A_2, ..., A_n$ juft-jufti bilan birgalikda bo‘lmagan hodisalar to‘la gruppani tashkil etsin, ya’ni $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ va $A_i \cdot A_j = \varnothing, \ i \neq j$. U holda $A_1 + A_2 + ... + A_n = \Omega$ ekanligini hisobga olib, B ni $B = B \cdot \Omega = B \cdot (A_1 + A_2 + ... + A_n) = B \cdot A_1 + B \cdot A_2 + ... + B \cdot A_n$ ko‘rinishda yozamiz. $A_i \cdot A_j = \varnothing, \ i \neq j$ ekanligidan $(B \cdot A_i) \cdot (B \cdot A_j) = \varnothing, \ i \neq j$ ekani kelib chiqadi. B hodisaning ehtimolligini hisoblaymiz:

$$P(B) = P(B \cdot A_1 + B \cdot A_2 + ... + B \cdot A_n) =$$
$$= P(B \cdot A_1) + P(B \cdot A_2) + ... + P(B \cdot A_n)\,. \qquad (1.12.1)$$

Ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra $P(B \cdot A_i) = P(A_i) \cdot P(B / A_i), \, i = \overline{1,n}$ bo‘ladi. Bu tenglikni (1.12.1) ga qo‘llasak,

$$P(B) = P(A_1)P(B / A_1) + P(A_2)P(B / A_2) + ... + P(A_n)P(B / A_n)\,.$$

✓ Agar $B \subset \sum_{i=1}^{n} A_i$ bo‘lsa, u holda

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B / A_i) \qquad (1.12.2)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu tenglik *to‘la ehtimollik formula*si deyiladi.

1.11-masala. Detallar partiyasi uch ishchi tomonidan tayyorlanadi. Birinchi ishchi barcha detallarning 25%ini, ikkinchi ishchi 35%ini, uchinchsi esa 40%ini tayyorlaydi. Bu uchchala ishchining tayyorlagan detallarining sifatsiz bo‘lish ehtimolliklari mos ravishda 0.05,0.04 va 0.02

ga teng bo‘lsa, tekshirish uchun partiyadan olingan detalning sifatsiz bo‘lish ehtimolligini toping.

A_i={detal i-ishchi tomonidan tayyorlangan} $i=\overline{1,3}$, B={tekshirish uchun olingan detal sifatsiz} hodisalarni kiritamiz va quyidagi ehtimolliklarni hisoblaymiz:

$$P(A_1)=\frac{25\%}{100\%}=0.25,\quad P(A_2)=\frac{35\%}{100\%}=0.35,\quad P(A_3)=\frac{40\%}{100\%}=0.4\,,$$

$P(B/A_1)=0.05,\quad P(B/A_2)=0.04,\quad P(B/A_3)=0.02$. To‘la ehtimollik formulasiga asosan $P(B)=0.25\cdot 0.05+0.35\cdot 0.04+0.4\cdot 0.02=0.0345$.

A_i va B hodisalar ko‘paytmasi uchun

$$P(A_i\cdot B)=P(B)\cdot P(A_i/B) \tag{1.12.3}$$

$$P(A_i\cdot B)=P(A_i)\cdot P(B/A_i) \tag{1.12.4}$$

tengliklar o‘rinli. (1.12.3) va (1.12.4) tengliklardan quyidagilarni hosil qilamiz:

$$P(B)\cdot P(A_i/B)=P(A_i)\cdot P(B/A_i)\,,$$

$$P(A_i/B)=\frac{P(A_i)P(B/A_i)}{P(B)}\,. \tag{1.12.5}$$

Bu yerda $P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B/A_i)$. (1.12.5) tenglik *Bayes formulasi* deyiladi. Bayes formulasi yana *gipotezalar teoremasi* deb ham ataladi. Agar $A_1,A_2,...,A_n$ hodisalarni gipotezalar deb olsak, u holda $P(A_i)$ ehtimollik A_i gipotezaning aprior(“a priori” lotincha tajribagacha), $P(A_i/B)$ shartli ehtimollik esa aposterior(“a posteriori” tajribadan keyingi) ehtimolligi deyiladi.

1.12-masala. 1.11-misolda sifatsiz detal ikkinchi ishchi tomonidan tayyorlangan bo‘lishi ehtimolligini toping. Bayes formulasiga ko‘ra:

$$P(A_2/B)=\frac{0.35\cdot 0.04}{0.25\cdot 0.05+0.35\cdot 0.04+0.4\cdot 0.02}=\frac{28}{69}\approx 0.4\,.$$

1.13 Bog‘liqsiz tajribalar ketma-ketligi. Bernulli formulasi

Agar bir necha tajribalar o‘tkazilayotganida, har bir tajribada biror A hodisaning ro‘y berish ehtimolligi boshqa tajriba natijalariga bog‘liq bo‘lmasa, bunday tajribalar bog‘liqsiz tajribalar deyiladi.

n ta bog‘liqsiz tagribalar o‘tkazilayotgan bo‘lsin. Har bir tajribada A hodisaning ro‘y berish ehtimolligi $P(A)=p$ va ro‘y bermasligi ehtimolligi $P(\overline{A})=1-p=q$ bo‘lsin.

Masalan, 1) nishonga qarata o‘q uzish tajribasini ko‘raylik. Bu yerda A={o‘q nishonga tegdi}-muvaffaqqiyat va $\overline{A}$={o‘q nishonga tegmadi}-muvaffaqqiyatsizlik; 2) n ta mahsulotni sifatsizlikka tekshirilayotganda A={mahsulot sifatli}-muvaffaqqiyat va $\overline{A}$={mahsulot sifatsiz}-muvaffaqqiyatsizlik bo‘ladi.

Bu kabi tajribalarda elementar hodisalar fazosi Ω faqat ikki elementdan iborat bo‘ladi: $\Omega=\{\omega_0,\omega_1\}=\{\overline{A},A\}$, bu erda ω_0-A hodisa ro‘y bermasligini, ω_1-A hodisa ro‘y berishini bildiradi. Bu hodisalarning ehtimolliklari mos ravishda p va q $(p+q=1)$ lar orqali belgilanadi.

Agar n ta tajriba o‘tkazilayotgan bo‘lsa, u holda elementar hodisalar fazosining elementar hodisalari soni 2^n ga teng bo‘ladi. Masalan, $n=3$ da $\Omega=\{\omega_0,\omega_1,...,\omega_7\}=\{\overline{A}\overline{A}\overline{A},\overline{A}\overline{A}A,\overline{A}A\overline{A},\overline{A}AA,A\overline{A}\overline{A},A\overline{A}A,AA\overline{A},AAA\}$, ya’ni Ω to‘plam $2^3=8$ ta elementar hodisadan iborat. Har bir hodisaning ehtimolligini ko‘paytirish teoremasiga ko‘ra hisoblash mumkin:

$$p(\omega_0)=P(\overline{A}\overline{A}\overline{A})=P(\overline{A})P(\overline{A})P(\overline{A})=q^3,$$
$$p(\omega_1)=P(\overline{A}\overline{A}A)=P(\overline{A})P(\overline{A})P(A)=pq^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p(\omega_7)=P(AAA)=P(A)P(A)P(A)=p^3.$$

n ta bog‘liqsiz tajribada A hodisa m marta ro‘y berish ehtimolligini hisoblaylik:

$$P_n(m)=P(\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{mta}\cdot\underbrace{\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot\ldots\cdot\overline{A}}_{(n-m)ta})+P(\overline{A}\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{mta}\cdot\underbrace{\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot\ldots\cdot\overline{A}}_{(n-(m-1))ta})+\ldots+$$
$$P(\underbrace{\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot\ldots\cdot\overline{A}}_{(n-(m-1))ta}\cdot\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{mta}\cdot\overline{A})+P(\underbrace{\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot\ldots\cdot\overline{A}}_{(n-m)ta}\cdot\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{mta}).$$

Har bir qo‘shiluvchi ko‘paytirish teoremasiga ko‘ra $p^m q^{n-m}$ ga teng. Demak,

$$P_n(m) = \underbrace{p^m q^{n-m} + p^m q^{n-m} + ... + p^m q^{n-m}}_{C_n^m \ ta \quad qo'shiluvchi} = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 0,1,...n.$$

✓ Agar *n* ta bo‘g‘liqsiz tajribaning har birida *A* hodisaning ro‘y berish ehtimolligi *p* ga, ro‘y bermasligi *q* ga teng bo‘lsa, u holda *A* hodisaning *m* marta ro‘y berish ehtimolligi quyidagi ifodaga teng bo‘ladi:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 0,1,...n. \qquad (1.13.1)$$

(1.13.1) formula Bernulli formulasi deyiladi. $P_n(m)$ ehtimolliklar uchun $\sum_{m=0}^{n} P_n(m) = 1$ tenglik o‘rinlidir. Haqiqatan ham,

$$(q + px)^n = q^n + C_n^1 q^{n-1} px + C_n^2 q^{n-2} p^2 x^2 + ... + p^n x^n$$

Nyuton binomi formulasida $x = 1$ deb olsak,
$(q + p)^n = q^n + C_n^1 q^{n-1} p + C_n^2 q^{n-2} p^2 + ... + p^n$, ya’ni
$1 = P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(n) = \sum_{m=0}^{n} P_n(m)$ bo‘ladi.

(1.13.1) ehtimolliklar xossalari:

1. $\sum_{m=0}^{n} P_n(m) = 1$.

2. Agar $m_1 \le m \le m_2$ bo‘lsa, $P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m)$.

3. *n* ta bog‘liqsiz tajribada *A* hodisaning kamida 1 marta ro‘y berishi ehtimolligi $P = 1 - q^n$ bo‘ladi.
Chunki, $P_n(0) + \underbrace{P_n(1) + ... + P_n(n)}_{P} = 1 \Rightarrow P = 1 - P_n(0) = 1 - q^n$.

4. Agar $P_n(m)$ ehtimollikning eng katta qiymati $P_n(m_0)$ bo‘lsa, u holda m_0 quyidagicha aniqlanadi: $np - q \le m_0 \le (n+1)p$, m_0-eng ehtimolli son deyiladi va
a) agar *np-q* kasr son bo‘lsa, u holda m_0 yagonadir;
b) agar *np-q* butun son bo‘lsa, u holda m_0 ikkita bo‘ladi.

1.13-misol. Ikki teng kuchli shaxmatchi shaxmat o‘ynashmoqda. Qaysi hodisaning ehtimolligi katta: 4 ta partiyadan 2 tasida yutishmi yoki 6 ta partiyadan 3 tasida yutish. Birinchi holda: n=4, m=2, p=$\frac{1}{2}$, Bernulli formulasiga ko‘ra $P_4(2)=C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^{4-2}=6\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2^2}=\frac{6}{16}$.

Ikkinchi holda n=6, m=3, p=$\frac{1}{2}$ va Bernulli formulasiga ko‘ra $P_6(3)=C_6^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^{6-3}=20\cdot\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{2^3}=\frac{5}{16}$. $\frac{6}{16}>\frac{5}{16}\Rightarrow P_4(2)>P_6(3)$. Demak, 4 ta partiyadan 2 tasida yutish ehtimolligi katta ekan.

1.14 Limit teoremalar

Agar n va m lar katta sonlar bo‘lsa, u holda Bernulli formulasidan foydalanib, $P_n(m)$ ehtimollikni hisoblash qiyinchilik tug‘diradi. Xuddi shunday, $p(q)$ ehtimollik juda kichik qiymatlar qabul qilsa ham qiyinchiliklarga duch kelamiz. Shu sababli, $n\to\infty$ da $P_n(m)$ uchun asimptotik(taqribiy) formulalar topish muammosini tug‘diradi.

Puasson formulasi

✓ Agar $n\to\infty$ da A hodisaning ro‘y berish ehtimolligi p har bir tajribada cheksiz kamaysa(ya’ni $np\to a>0$), u holda

$$\lim_{n\to\infty}P_n(m)=\frac{a^m\cdot e^{-a}}{m!},\ m=0,1,2,\dots\ . \qquad (1.14.1)$$

(1.14.1) formula Puassonning asimptotik formulasi deyiladi.

$p=\frac{a}{n}$ belgilash kiritib, Bernulli formulasidan

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\left(\frac{a}{n}\right)^m\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-m}=$$

$$=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(m-1))}{m!}\cdot\frac{a^m}{n^m}\cdot\left(1-\frac{a}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-m}=$$

$$=\frac{a^m}{m!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-(m-1)}{n}\cdot\left(1-\frac{a}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-m}=$$

$$=\frac{a^m}{m!}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{a}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-m} \qquad (1.14.2)$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^n=e^{-a}$ ekanligini e'tiborga olib, (1.14.2) tenglikdan limitga o‘tamiz:

$$\lim_{n\to\infty}P_n(m)=\frac{a^m}{m!}e^{-a}.$$

Demak, yetarlicha katta n larda (kichik p da)

$$P_n(m)\approx\frac{a^m\cdot e^{-a}}{m!},\quad a=np,\quad m=0,1,\ldots,n \qquad (1.14.3)$$

(1.14.3) formula Puasson formulasi deyiladi. Odatda Puasson formulasidan $n\geq 50,\quad np\leq 10$ bo‘lgan hollarda foydalaniladi.

1.14-misol. Telefon stansiyasi 2000 ta abonentga xizmat ko‘rsatadi. Agar har bir abonent uchun unig bir soatning ichida qo‘ng‘iroq qilishi ehtimolligi 0.003 bo‘lsa, bir soatning ichida 5 ta abonent qo‘ngiroq qilishi ehtimolligini toping.

n=2000, p=0.003, m=5, a=np=2000·0.003=6<10. Demak, Puasson formulasiga ko‘ra $P_{2000}(5)=\frac{6^5\cdot e^{-6}}{5!}\approx 0,13$.

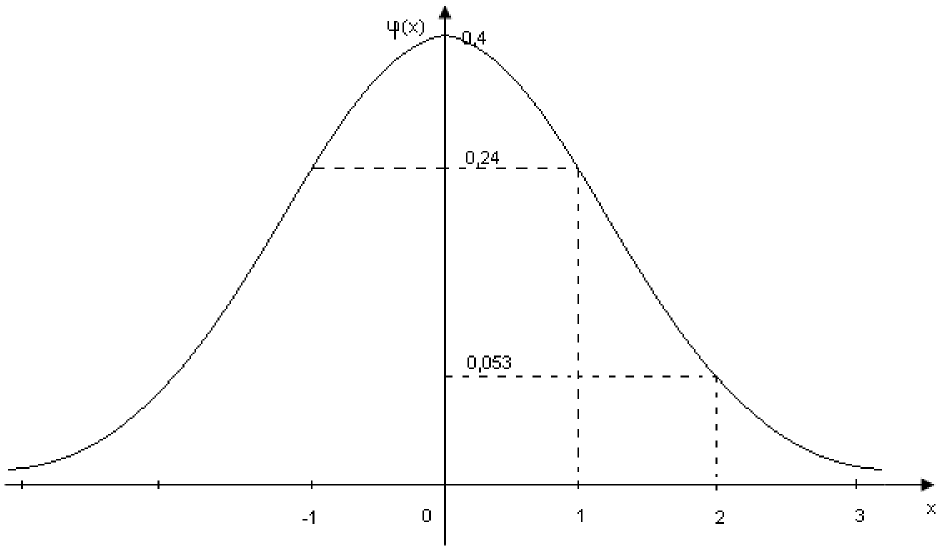
Muavr-Laplasning lokal teoremasi

Agar p ($p\neq 0,\ p\neq 1$)ehtimollik nol atrofidagi son bo‘lmasa va n etarlicha katta bo‘lsa, u holda $P_n(m)$ ehtimollikni hisoblash uchun Muavr-Laplas teoremasidan foydalanish mumkin.

Teorema(Muavr-Laplas) Agar n ta bog‘liqsiz tajribada A hodisaning ro‘y berish ehtimolligi $0<p<1$ bo‘lsa, u holda yetarlicha katta n larda

$$P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}},\ x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}} \qquad (1.14.4)$$

-taqribiy formula o‘rinli. Bu yerda $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ funksiya Gauss funksiyasi deyiladi(9-rasm).



9-rasm.

$\varphi(x)$ funksiya uchun x argument qiymatlariga mos qiymatlari jadvali tuzilgan(1-ilova). Jadvaldan foydalanayotganda quyidagilarni e’tiborga olish kerak:

1) $\varphi(x)$ funksiya juft funksiya, ya’ni $\varphi(-x)=\varphi(x)$.

2) agar $x\geq 4$ bo‘lsa, $\varphi(x)=0$ deb olish mumkin.

1.15-misol. Bitta o‘q otilganda o‘qning nishonga tegish ehtimolligi 0.7 ga teng. 200 ta o‘q otilganda nishonga 160 ta o‘q tegishi ehtimolligini toping.

Bu yerda n=200, p=0.7, q=1-p=0.3, m=160. (1.14.4) ga ko‘ra $\sqrt{npq}=\sqrt{200\cdot 0.7\cdot 0.3}=\sqrt{42}\approx 6.48$, $x=\frac{160-200\cdot 0.7}{\sqrt{42}}=\frac{20}{6.48}\approx 3.09$. Agar $\varphi(3.09)\approx 0.0034$ ekanligini hisobga olsak, u holda $P_{200}(160)\approx\frac{1}{6.48}\cdot 0.0034\approx 0.0005$.

Muavr-Laplasning integral teoremasi

Agar *n* yetarlicha katta va *A* hodisa n ta tajribada kamida m_1 va ko‘pi bilan m_2 marta ro‘y berish ehtimolligi $P_n(m_1\leq m\leq m_2)$ ni topish talab etilsa, u holda Muavr-Laplasning integral teoremasidan foydalanish mumkin.

Teorema(Muavr-Laplas) Agar A hodisaning ro‘y berish ehtimolligi($0 < p < 1$) o‘zgarmas bo‘lsa, u holda

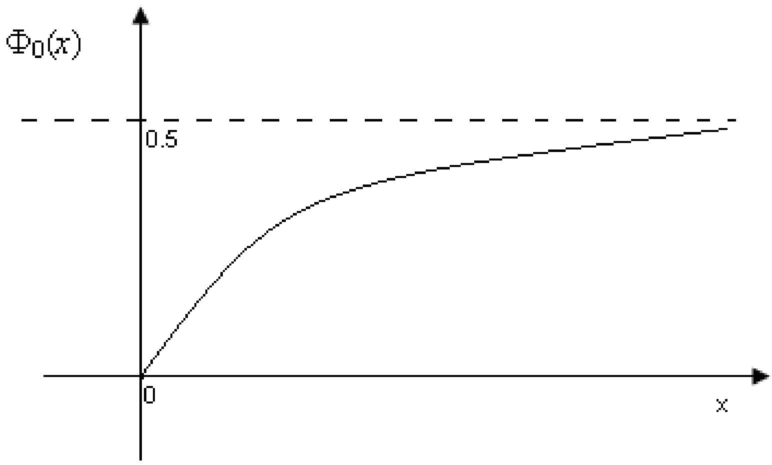
$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-x^2/2} dx, \qquad (1.14.5)$$

taqribiy formula o‘rinli, bu yerda $x_i = \dfrac{m_i - np}{\sqrt{npq}}, \quad i = 1,2$.

(1.14.5) formuladan foydalanilganda hisoblashlarni soddalashtirish uchun maxsus funksiya kiritiladi:

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt. \qquad (1.14.6)$$

(1.14.6)-Laplas funksiyasi deyiladi.



10-rasm.

$\Phi_0(x)$ funksiya toq funksiya:

$$\Phi_0(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-x} e^{-t^2/2} dt = [t = -z] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz = -\Phi_0(x).$$

Agar $x \ge 5$ bo‘lsa, u holda $\Phi_0(x) = 0.5$ deb hisoblash mumkin; $\Phi_0(x)$ funksiya grafigi 10-rasmda keltirilgan.

(1.14.5) dagi tenglikning o‘ng qismini $\Phi_0(x)$ funksiya orqali ifodalaymiz:

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-x/2} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-t/2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{0} e^{-x/2} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x_2} e^{-x/2} dx = \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1). \quad (1.14.7)$$

$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ -Laplasning funksiyasi bilan bir qatorda Gauss funksiyasi deb nomlanuvchi funksidan ham foydalaniladi:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt \,. \qquad (1.14.8)$$

Bu funksiya uchun $\Phi(-x) + \Phi(x) = 1$ tenglik o‘rinli va u $\Phi_0(x)$ funksiya bilan

$$\Phi(x) = 0.5 + \Phi_0(x) \qquad (1.14.9)$$

formula orqali bog‘langan.

1.16-misol. Sex ishlab chiqargan mahsulotining o‘rtacha 96% i sifatli. Bazada mahsulotni qabul qilib oluvchi sexning 200 ta mahsulotini tavakkaliga tekshiradi. Agar tekshirilgan mahsulotlardan sifatsizlari soni 10 tadan ko‘p bo‘lsa butun mahsulotlar partiyasi sifatsiz deb, sexga qaytariladi. Mahsulotlar partiyasining qabul qilinishi ehtimolligini toping.

Bu yerda n=200, p=0.04(mahsulotning sifatsiz bo‘lish ehtimolligi), q=0.96, m_1=0, m_2=10 va mahsulotlar partiyasining qabul qilinishi ehtimolligi $P_{200}(0 \le m \le 10)$ ni (1.14.7) formula orqali hisoblaymiz:

$$x_1 = \frac{0 - 200 \cdot 0.04}{\sqrt{200 \cdot 0.04 \cdot 0.96}} \approx -2.89, \quad x_2 = \frac{10 - 200 \cdot 0.04}{\sqrt{200 \cdot 0.04 \cdot 0.96}} \approx 0.72,$$

$$P_{200}(0 \le m \le 10) = \Phi_0(0.72) - \Phi_0(-2.89) = 0.26424 + 0.49807 = 0.7623\,.$$

Agar $\Phi(x)$ funksiyadan foydalansak,

$$P_{200}(0 \le m \le 10) = \Phi(0.72) - \Phi(-2.89) =$$

$$= 0.7642 - (1 - \Phi(2.89)) = 0.7642 - (1 - 0.998074) = 0.7623\,.$$

Laplas funksiyasi yordamida n ta bog‘liqsiz tajribada nisbiy chastotaning ehtimollikdan chetlashishi ehtimolligini hisoblash mumkin.

- ✓ Biror $\varepsilon > 0$ son uchun

$$P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|\le\varepsilon\right\}=2\Phi_0\left(\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \qquad (1.14.10)$$

tenglik o‘rinli.

Haqiqatan ham, buni isbotlash uchun $\left|\frac{n_A}{n}-p\right|\le\varepsilon$ tengsizlik ehtimolligini hisoblash kerak. Buning uchun bu tengsizlikni unga teng kuchli $-\varepsilon\le\frac{n_A}{n}-p\le\varepsilon$ yoki $-\varepsilon\le\frac{n_A-np}{n}\le\varepsilon$ tengsizliklar bilan almashtiramiz. Bu tengsizliklarni musbat $\sqrt{\frac{n}{pq}}$ songa ko‘paytiramiz:

$$-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\le\frac{n_A-np}{\sqrt{npq}}\le\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\ .$$

Agar $m=\frac{n_A-np}{\sqrt{npq}}$ belgilashni kiritsak, u holda (1.14.5) formulaga asosan:

$$P_n\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\le m\le\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}e^{-t^2/2}dt=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}e^{-t^2/2}dt=2\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

■

1.17-misol. Detalning nostandart bo‘lishi ehtimolligi 0.6 ga teng. n=1200 ta detal ichida nostandart detallar bo‘lishi nisbiy chastotasining p=0.6 ehtimollikdan chetlashishi absolut qiymati $\varepsilon=0.05$ dan katta bo‘lmasligi ehtimolligini toping.

(1.4.10) ga asosan,

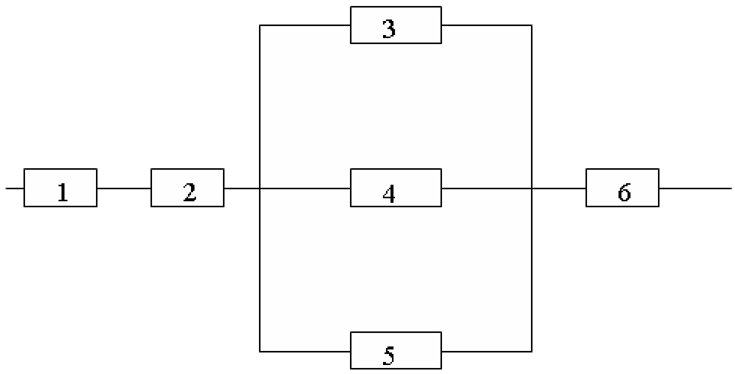
$$P_{1200}\left\{\left|\frac{n_A}{n}-0.6\right|\le 0.05\right\}=2\Phi_0\left(0.05\sqrt{\frac{1200}{0.6\cdot 0.4}}\right)=2\Phi_0(3.54)\approx 0.9996\,.$$

I bobga doir misollar

1. A, B va C hodisalar uchun quyidagilarni isbotlang: a) $B=A\cdot B+\overline{A}\cdot B$;

b) $(A+B)\cdot(B+C)=A\cdot B+C$; c) $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$.

2. 11-rasmda 6 elementdan iborat sxema berilgan. A_i ($i=\overline{1,6}$) hodisalar ma’lum T vaqt oralig‘ida mos elementlarning beto‘xtov ishlashi bo‘lsa, bu hodisalar orqali ma’lum T vaqt oralig‘ida sxemaning beto‘xtov ishlashini ifodalang.



11-rasm.

3. Ixtiyoriy ikki qo‘shni raqamlari har xil bo‘lgan nechta to‘rt xonali son hosil qilish mumkin?

4. Musobaqaning 10 ta ishtirokchisiga 3 ta yutuqni necha xil usul bilan taqsimlash mumkin.

5. Ma’lum uchta kitob yonma-yon turadigan qilib, 7 ta kitobni tokchaga necha xil usul bilan taxlash mumkin.

6. Birinchi talabada 7 xil, ikkinchisida 16 xildagi kitoblar bor bo‘lsa, kitobga kitobni necha xil usul bilan almashtirishlari mumkin. 2 ta kitobga 2 ta kitobnichi?

7. 3,3,5,5,8 raqamlaridan nechta besh xonali son hosil qilish mumkin.

8. 9 qavatli bino liftiga 4 kishi kirdi. Ularning har biri bir-biriga bo‘gliqsiz ravishda ixtiyoriy qavatda chiqishlari mumkin. Ular : a) turli qavatlarda; b) bitta qavatda: c) 5-qavatda chiqishlari ehtimolliklarini toping.

9. Imtihon biletlariga kiruvchi 60 savoldan talaba 50 tasini biladi. Tavakkaliga tanlangan 3 ta savoldan: a) hammasini; b) ikkitasini bilishi ehtimolligini toping.

10. Idishda 5 ta ko‘k, 4 ta qizil va 3 ta yashil shar bor. Tavakkaliga olingan 3 ta sharning: a) bir xil rangda; b) har xil rangda; c) 2 tasi ko‘k va 1 tasi yashil rangda bo‘lishi ehtimolligini hisoblang.

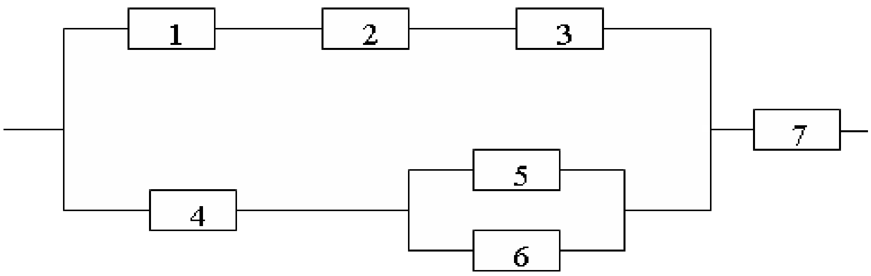
11. R radiusli doiraga teng tomonli uchburchak ichki chizilgan. Doiraga tavakkaliga tashlangan nuqtaning uchburchakka tushishi ehtimolligini toping.

12. [0,5] kesmadan tavakkaliga bitta nuqta tanlanadi. Shu nuqtadan kesmaning o‘ng oxirigacha bo‘lgan masofa 1.6 birlikdan oshmasligi ehtimolligini toping.

13. Idishda 4 ta oq, 3 ta ko‘k va 2 ta qora shar bor. Tavakkaliga, ketma-ket, bittadan 3 ta shar olindi. Birinchi shar oq, ikkinchisi ko‘k va uchinchisi qora rangda bo‘lishi ehtimolligini toping.

14. Shoshqol toshni tashlash tajribasida A={juft raqam tushishi} va B={3 dan katta raqam tushishi} hodisalari bo‘lsin. A va B hodisalar bog‘liqsizmi?

15. Quyida berilgan bir-biriga bog‘liqsiz ravishda ishlaydigan elementlardan iborat sxemaning safdan chiqishi ehtimolligini toping, $i(i=1,2,\dots,7)$-elementning safdan chiqishi ehtimolligi 0.2 ga teng .



12-rasm.

16. Asbob ikki mikrosxemadan iborat. Birinchi mikrosxemaning 10 yil ichida ishdan chiqishi ehtimolligi 0.07, ikkinchisiniki-0.10. Bitta mikrosxema ishdan chiqgani ma’lum bo‘lsa, bu mikrosxema birinchisi ekanligi ehtimolligini toping.

17. Talaba imtihon 40 ta biletlarining faqat 30 tasiga javob bera oladi. Talabaga imtihonga birinchi bo‘lib kirishi foydalimi, yoki ikkinchi?

18. Zavod ishlab chiqargan mahsulotning 90% i sifat talablariga javob beradi. Tekshruvchi mahsulotni 0.96 ehtimollik bilan sifatli, 0.06 ehtimollik bilan sifatsiz deb topadi. Tavakkaliga olingan mahsulotning sifatli deb topilishi ehtimolligini toping.

19. Oilada 3 ta farzand bor. Agar o‘g‘il bola tug‘ilishi ehtimolligi 0.51, qiz bola tug‘lishi ehtimolligi 0.49 ga teng bo‘lsa, a) bolalarning hammasi o‘g‘illar, b) 1 tasi o‘g‘il va 2 tasi qiz bo‘lishi ehtimolliklarini hisoblang.

20. Shoshqol tosh 10 marta tashlanganda:

a) 6 raqami bir marta tushishi ehtimolligini;

b) 6 raqami kamida bir marta tushish ehtimolligini;

c) 6 raqami tushishi soni ehtimolligi maksimal qiymatga erishadigan miqdorni toping.

21. “Ehtimollar nazariyasi” fanidan ma’ruza darsida 84 ta talaba ishtirok etmoqda. Shu talabalarning ikkitasini tug‘ilgan kuni shu kuni bo‘lishi ehtimolligini toping.

22. Mahsulotning sifatsiz bo‘lishi ehtimolligi 0.02 ga teng. 200 ta mahsulotning ichida sifatsizlari bittadan ko‘p bo‘lmasligi ehtimolligiti toping.

23. *A* hodisaning ro‘y berish ehtimolligi 0.6 ga teng. 100 ta bog‘liqsiz tajribada *A* hodisaning 70 marta ro‘y berishi ehtimolligini toping.

24. Shunday *m* sonini topingki, 0.95 ehtimollik bilan 800 ta yangi tug‘ilgan chaqaloqlardan kamida *m* tasi qizlar deb aytish mumkin bo‘lsin. Qiz bola tug‘ilishi ehtimolligini 0.485 deb hisoblang.

25. Detalning nostandart bo‘lishi ehtimolligi 0.1 ga teng. Tavakkaliga olingan 400 ta detal ichida nostandart detallar bo‘lishi nisbiy chastotasining p=0.1 ehtimollikdan chetlashishi absolut qiymati $\varepsilon = 0.03$ dan katta bo‘lmasligi ehtimolligini toping.

II bob Tasodifiy moqdorlar

2.1 Tasodifiy miqdor tushunchasi

Ehtimollar nazariyasining muhim tusunchalaridan biri tasodifiy miqdor tushunchasidir.

✓ Tajriba natijasida u yoki bu qiymatni qabul qilishi oldindan ma’lum bo‘lmagan miqdor *tasodifiy miqdor* deyiladi.

Tasodifiy miqdorlar lotin alifbosining bosh harflari $X,Y,Z,\ldots$(yoki grek alifbosining kichik harflari ξ(ksi), η(eta), ζ(dzeta),…) bilan qabul qiladigan qiymatlari esa kichik harflar $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots$ bilan belgilanadi.

Tasodifiy miqdorlarga misollar keltiramiz: 1) X-tavakkaliga olingan mahsulotlar ichida sifatsizlari soni; 2) Y-n ta o‘q uzilganda nishonga tekkanlari soni; 3) Z-asbobning beto‘htov ishlash vaqti; 4) U-[0,1] kesmadan tavakkaliga tanlangan nuqtaning koordinatalari; 5) V-bir kunda tug‘iladigan chaqaloqlar soni va h.k..

✓ Agar tasodifiy miqdor(t.m.) chekli yoki sanoqli qiymatlar qabul qilsa, bunday t.m. *diskret tipdagi t.m.* deyiladi.

✓ Agar t.m. qabul qiladigan qiymatlari biror oraliqdan iborat bo‘lsa *uzluksiz tipdagi t.m.* deyiladi.

Demak, diskret t.m. bir-biridan farqli alohida qiymatlarni, uzluksiz t.m. esa biror oraliqdagi ihtiyoriy qiymatlarni qabul qilar ekan. Yuqoridagi X va Y t.m.lar diskret, Z esa uzluksiz t.m. bo‘ladi.

Endi t.m.ni qat’iy ta’rifini keltiramiz.

✓ Ω elementar hodisalar fazosida aniqlangan X sonli funksiya t.m. deyiladi, agar har bir ω elementar hodisaga $X(\omega)$ conni mos qo‘ysa, yani $X=X(\omega)$, $\omega\in\Omega$.

Masalan, tajriba tangani 2 marta tashlashdan iborat bo‘lsin. Elementar hodisalar fazosi $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$, $\omega_1=GG, \omega_2=GR, \omega_3=RG, \omega_4=RR$ bo‘ladi. X-gerb chiqishlari soni bo‘lsin, u holda X t.m. qabul qiladigan qiymatlari: $X(\omega_1)=2$, $X(\omega_2)=1$, $X(\omega_3)=1$, $X(\omega_4)=0$.

Agar Ω chekli yoki sanoqli bo‘lsa, u holda Ω da aniqlangan ixtiyoriy funksiya t.m. bo‘ladi. Umuman, $X(\omega)$ funksiya shunday bo‘lishi kerakki: $\forall x\in R$ da $A=\{\omega: X(\omega)<x\}$ hodisa S σ-algebrasiga tegishli bo‘lishi kerak.

2.2 Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni

X-diskret t.m. bo‘lsin. X t.m. $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ qiymatlarni mos $p_1, p_2, ..., p_n, ...$ ehtimolliklar bilan qabul qilsin:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

jadval diskret t.m. taqsimot qonuni jadvali deyiladi. Diskret t.m. taqsimot qonunini $p_i = P\{X = x_i\}, i = 1, 2, ..., n, ...$ ko‘rinishda yozish ham qulay.

$\{X = x_1\}, \{X = x_2\}, ...$ hodisalar birgalikda bo‘lmaganligi uchun ular to‘la gruppani tashkil etadi va ularning ehtimolliklari yig‘indisi birga teng bo‘ladi, ya’ni $\sum_i p_i = \sum_i P\{X = x_i\} = 1$.

✓ X t.m. *diskret t.m.* deyiladi, agar $x_1, x_2, ...$ chekli yoki sanoqli to‘plam bo‘lib, $P\{X = x_i\} = p_i > 0 \; (i = 1, 2, ...)$ va $p_1 + p_2 + ... = 1$ tenglik o‘rinli bo‘lsa.

✓ X va Y diskret t.m.lar *bog‘liqsiz* deyiladi, agar $A_i = \{X = x_i\}$ va $B_i = \{Y = y_j\}$ hodisalar $\forall i = 1, 2, ..., n, \; j = 1, 2, ..., m$ da bog‘liqsiz bo‘lsa, ya’ni $P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\}$, $n, m \geq \infty$.

2.1-misol. 10 ta lotoreya biletida 2 tasi yutuqli bo‘lsa, tavakkaliga olingan 3 ta lotoreya biletlari ichida yutuqlilari soni X t.m.ning taqsimot qonunini toping.

X t.m.ni qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$. Bu qiymatlarning mos ehtimolliklari esa

$$p_1 = P\{X = 0\} = \frac{C_2^0 \cdot C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{56}{120} = \frac{7}{15};$$

$$p_2 = P\{X = 1\} = \frac{C_2^1 \cdot C_8^2}{C_{10}^3} = \frac{56}{120} = \frac{7}{15};$$

$$p_3 = P\{X = 2\} = \frac{C_2^2 \cdot C_8^1}{C_{10}^3} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}.$$

X t.m. taqsimot qonunini jadval ko‘rinishida yozamiz:

X	0	1	2
P	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

$$\sum_{i=1}^{3} p_i = \frac{7}{15} + \frac{7}{15} + \frac{1}{15} = 1$$

2.3 Taqsimot funksiyasi va uning xossalari

Diskret va uzluksiz t.m.lar taqsimotlarini berishning universal usuli ularning taqsimot funksiyalarini berishdir. Taqsimot funksiya $F(x)$ orqali belgilanadi.

✓ $F(x)$ funksiya X t.m.ning *taqsimot funksiyasi* $\forall x \in R$ son uchun quyidagicha aniqlanadi:

$$F(x) = P\{X < x\} = P\{\omega : X(\omega) < x\}. \qquad (2.3.1)$$

Taqsimot funksiyasi quyidagi xossalarga ega:

1. $F(x)$ chegaralangan:
$$0 \le F(x) \le 1.$$

2. $F(x)$ kamaymaydigan funksiya: agar $x_1 < x_2$ bo‘lsa, u holda $F(x_1) \le F(x_2)$.

3. $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1.$

4. $F(x)$ funksiya chapdan uzluksiz:
$$\lim_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0).$$

Isboti: 1. Bu xossa (2.3.1) va ehtimollikning xossalaridan kelib chiqadi.
2. $A = \{X < x_1\}, B = \{X < x_2\}$ hodisalarni kiritamiz. Agar $x_1 < x_2$ bo‘lsa, u holda $A \subseteq B$ va $P(A) \le P(B)$, ya’ni $P(X < x_1) \le P(X < x_2)$ yoki $F(x_1) \le F(x_2)$.
3. $\{X < -\infty\} = \varnothing$ va $\{X < +\infty\} = \Omega$ ekanligi va ehtimollikning xossasiga ko‘ra

$$F(-\infty) = P\{X < -\infty\} = P\{\varnothing\} = 0$$
$$F(+\infty) = P\{X < +\infty\} = P\{\Omega\} = 1.$$

4. $A = \{X < x_0\}, A_n = \{X < x_n\}$ hodisalarni kiritamiz. Bu yerda $\{x_n\}$ ketma-ketlik monoton o‘suvchi, $x_n \uparrow x_0$. A_n hodisalar ketma-ketligi ham o‘suvchi bo‘lib, $\bigcup\limits_n A_n = A$. U holda $P(A_n) \to P(A)$, ya’ni $\lim\limits_{x \uparrow x_0} F(x) = F(x_0)$. ■

Diskret t.m. taqsimot funksiyasi quyidagicha ifodalanadi:

$$F(x)=\sum_{x_i<x} p_i\ . \qquad (2.3.2)$$

2.2-misol. 2.1-misoldagi *X* t.m. taqsimot funksiyasini topamiz.

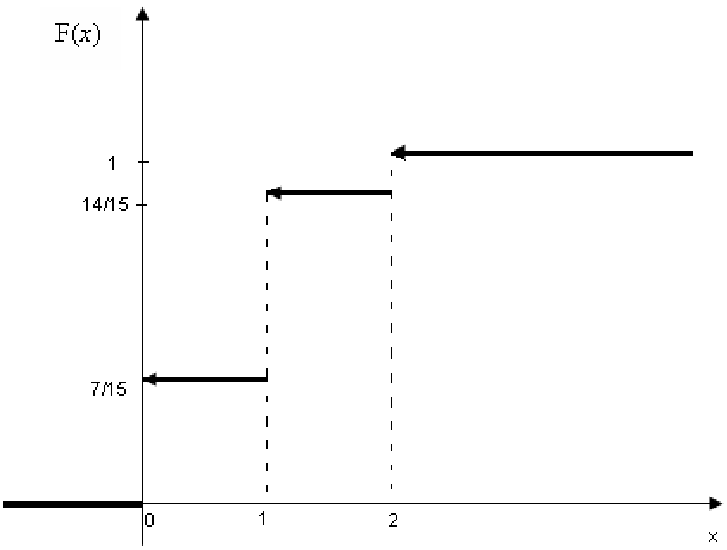
X	0	1	2
P	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

1. Agar $x\le 0$ bo‘lsa, $F(x)=P\{X<0\}=0$;
2. Agar $0<x\le 1$ bo‘lsa, $F(x)=P\{X<1\}=P\{X=0\}=\frac{7}{15}$;
3. Agar $1<x\le 2$ bo‘lsa, $F(x)=P\{X=0\}+P\{X=1\}=\frac{7}{15}+\frac{7}{15}=\frac{14}{15}$;
4. Agar $x>2$ bo‘lsa, $F(x)=P\{X=0\}+P\{X=1\}+P\{X=2\}=\frac{7}{15}+\frac{7}{15}+\frac{1}{15}=1$.

Demak,

$$F(x)=\begin{cases} 0,\ agar\ x\le 0 \\ 7/15,\ agar\ 0<x\le 1 \\ 14/15,\ agar\ 1<x\le 2 \\ 1,\ agar\ x>2 \end{cases}$$

F(*x*) taqsimot funksiya grafigi 13-rasmda keltirilgan.



13-rasm.

✓ X t.m. uzluksiz deyiladi, agar uning taqsimot funksiyasi ixtiyoriy nuqtada uzluksiz bo‘lsa.

Agar $F(x)$ taqsimot funksiya uzluksiz t.m. taqsimot funksiyasi bo‘lsa, taqsimot funksiyaning 1-4 xossalaridan quyidagi natijalarni keltirish mimkin:

1. X t.m.ning [a,b) oraliqda yotuvchi qiymatni qabul qilish ehtimolligi taqsimot funksiyaning shu oraliqdagi orttirmasiga teng:

$$P\{a \le X < b\} = F(b) - F(a). \tag{2.3.3}$$

2. X uzluksiz t.m.ning tayin bitta qiymatni qabul qilishi ehtimolligi nolga teng:

$$P\{X = x_i\} = 0$$

1-natijada $[a,b]$, $(a,b]$, (a,b) oraliqlar uchun ham (2.3.3) tenglik o‘rinli, ya’ni

$$P\{a \le X < b\} = P\{a \le X \le b\} = P\{a < X \le b\} = P\{a < X < b\} = F(b) - F(a).$$

Masalan, $P\{a \le X < b\} = P\{X = a\} + P\{a < X < b\} = P\{a < X < b\}$.

Isboti. 1. $a<b$ bo‘lgani uchun $\{X < b\} = \{X < a\} + \{a \le X < b\}$. $\{X < a\}$ va $\{a \le X < b\}$ hodisalar birgalikda bo‘lmagani uchun $P\{X < b\} = P\{X < a\} +$ $+P\{a \le X < b\}$. $P\{a \le X < b\} = P\{X < b\} - P\{X < a\} = F(b) - F(a)$.

2. (2.3.3.) tenglikni $[a,x)$ oraliqqa tatbiq etamiz: $P\{a \le X < x\} = F(x) - F(a)$. $F(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz bo‘lgani uchun $\lim\limits_{x \to a} F(x) = F(a)$.

$\lim\limits_{x \to a} P\{a \le X < x\} = P\{X = a\} = \lim\limits_{x \to a} F(x) - F(a) = F(a) - F(a) = 0$. ■

2.4 Zichlik funksiyasi va uning xossalari

Uzluksiz t.m.ni asosiy xarakteristikasi zichlik funksiya hisoblanadi.

✓ Uzluksiz t.m. *zichlik funksiyasi* deb, shu t.m. taqsimot funksiyasidan olingan birinchi tartibli hosilaga aytiladi.

Uzluksiz t.m. zichlik funksiyasi $f(x)$ orqali belgilanadi. Demak,

$$f(x) = F'(x). \tag{2.4.1}$$

Zichlik funksiyasi quyidagi xossalarga ega:

1. $f(x)$ funksiya manfiy emas, ya'ni

$$f(x) \geq 0.$$

2. X uzluksiz t.m.ning $[a,b]$ oraliqqa tegishli qiymatni qabul qilishi ehtimolligi zichlik funksiyaning a dan b gacha olingan aniq integralga teng, ya'ni

$$P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x)dx.$$

3. Uzluksiz t.m. taqsimot funksiyasi zichlik funksiya orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt. \qquad (2.4.2)$$

4. Zichlik funksiyasidan $-\infty$ dan $+\infty$ gacha olingan xosmas integral birga tengdir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Isbotlar: 1. $F(x)$ kamaymaydigan funksiya bo'lgani uchun $F'(x) \geq 0$, ya'ni $f(x) \geq 0$.

2. $P\{a \leq X < b\} = F(b) - F(a)$ tenglikdan Nyuton-Leybnis formulasiga asosan:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Bu yerdan $P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x)dx.$

3. 2-xossadan foydalanamiz:

$$F(x) = P\{X < x\} = P\{-\infty < X < x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

4. Agar 2-xossada $a = -\infty$ va $b = +\infty$ deb olsak, u holda muqarrar $X \in (-\infty, +\infty)$ ga hodisaga ega bo'lamiz, u holda

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = P\{-\infty < X < +\infty\} = P\{\Omega\} = 1.$$

■

2.3.-misol. X t.m. zichlik funksiyasi $f(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$ tenglik bilan berilgan. O'zgarmas a parametrni toping.

Zichlik funksiyaning 4-xossasiga ko‘ra $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a}{1+x^2}dx=1$, ya’ni $a\cdot\lim\limits_{\substack{d\to+\infty\\ c\to-\infty}}\int_c^d\frac{1}{1+x^2}dx=a\cdot\lim\limits_{\substack{d\to+\infty\\ c\to-\infty}}arctgx\,|_c^d=a\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=a\cdot\pi=1$. Demak, $a=\frac{1}{\pi}$.

2.5 Tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalari

X diskret t.m. taqsimot qonuni berilgan bo‘lsin: $\{\,p_i=P\{X=x_i\},\,i=1,2,...,n,...\,\}$.

Matematik kutilma

✓ *X* t.m. *matematik kutilmasi* deb, $\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_i p_i$ qator yig‘indisiga aytiladi va

$$MX=\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i \qquad (2.5.1)$$

orqali belgilanadi.

Matematik kutilmaning ma’nosi shuki, u t.m. o‘rta qiymatini ifodalaydi. Haqiqatan ham $\sum\limits_{i=1}^{\infty}p_i=1$ ekanligini hisobga olsak, u holda

$$MX=\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i=\frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_i p_i}{\sum\limits_{i=1}^{\infty}p_i}=x_{o'rtacha}.$$

✓ Uzluksiz t.m. *matematik kutilmasi* deb

$$MX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx \qquad (2.5.2)$$

integralga aytiladi. (2.5.2) integral absolut yaqinlashuvchi, ya’ni $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot f(x)dx<\infty$ bo‘lsa matematik kutilma chekli, aks holda matematik kutilma mavjud emas deyiladi.

Matematik kutilmaning xossalari:

1. O‘zgarmas sonning matematik kutilmasi shu sonning o‘ziga teng, ya’ni

$$MC=C.$$

2. O‘zgarmas ko‘paytuvchini matematik kutilish belgisidan tashqariga chiqarish mumkin,

$$M(CX)=CMX.$$

3. Yig‘indining matematik kutilmasi matematik kutilmalar yig‘indisiga teng,

$$M(X+Y)=MX+MY.$$

4. Agar X⊥Y bo‘lsa,

$$M(X\cdot Y)=MX\cdot MY.$$

Isbotlar: 1. O‘zgarmas C sonni faqat 1 ta qiymatni bir ehtimollik bilan qabul qiluvchi t.m. sifatida qarash mumkin. Shuning uchun $MC=C\cdot P\{X=C\}=C\cdot 1=C$.

2. $C\cdot X$ diskret t.m. $C\cdot x_i\ (i=\overline{1,n})$ qiymatlarni p_i ehtimolliklar bilan qabul qilsin, u holda $MCX=\sum_{i=1}^{n} C\cdot x_i p_i = C\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = C\cdot MX$.

3. $X+Y$ diskret t.m. x_i+y_i qiymatlarni $p_{ij}=P\{X=x_i, Y=y_j\}$ ehtimolliklar bilan qabul qiladi, u holda ixtiyoriy n va m lar uchun

$$M(X+Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i+y_j)p_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i p_{ij}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_j p_{ij}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{m}p_{ij}+\sum_{j=1}^{m}y_i\sum_{i=1}^{n}p_{ij}=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i+\sum_{j=1}^{m}y_j p_j=MX+MY$$

Bu yerda $\sum_{j=1}^{m} p_{ij}=p_i$ va $\sum_{i=1}^{n} p_{ij}=p_j$ bo‘ladi. Chunki,

$$\bigcup_{j=1}^{m}\{X=x_i;Y=y_j\}=\{X=x_i\}\bigcup_{j=1}^{m}\{Y=y_j\}=\{X=x_i\}\cap\Omega=\{X=x_i\},$$

$$p_i=P\{X=x_i\}=P\left(\bigcup_{j=1}^{m}\{X=x_i;Y=y_j\}\right)=\sum_{j=1}^{m}P\{X=x_i;Y=y_j\}=\sum_{j=1}^{m}p_{ij}\ .$$

4. Agar $X\perp Y$ bo‘lsa, u holda

$$p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\}=p_i\cdot p_j \text{ va}$$

$$MXY=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_iy_i\underbrace{P\{X=x_i,Y=y_j\}}_{p_{ij}}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_iy_i\underbrace{P\{X=x_i\}}_{p_i}\underbrace{P\{Y=y_j\}}_{p_j}=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i\sum_{j=1}^{m}y_ip_j=MX\cdot MY.$$

■

Matematik kutilmaning xossalari t.m. uzluksiz bo‘lganda ham hiddi shunga o‘xshash isbotlanadi. Masalan, $MCX=\int_{-\infty}^{+\infty}C\cdot x\cdot f(x)dx=C\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx=C\cdot MX$.

2.4.-misol. X diskret t.m. taqsimot qonuni berilgan bo‘lsa, X t.m.ning matematik kutilmasini toping.

X	500	50	10	1	0
P	0.01	0.05	0.1	0.15	0.69

MX=500·0.01+50·0.05+10·0.1+1·0.15+0·0.69=8.65.

2.5.-misol. X uzluksiz t.m. zichlik funksiyasi berilgan

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin(0,1)\\ C\cdot x^2, & x\in(0,1)\end{cases}.$$

C va MX ni toping.

Zichlik funksiyaning 4-xossasiga ko‘ra $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$. Demak,

$$C\int_0^1 x^2dx=C\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=C\cdot\frac{1}{3}=1,\quad C=3 \text{ va } f(x)=\begin{cases}0, & x\notin(0,1)\\ 3x^2, & x\in(0,1)\end{cases}.$$

Endi matematik kutilmani hisoblaymiz:

$$MX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx=3\int_0^1 x\cdot x^2dx=\frac{3}{4}.$$

Dispersiya

✓ X t.m. dispersiyasi deb, $M(X-MX)^2$ ifodaga aytiladi. Dispersiya DX orqali belgilanadi. Demak,

$$DX=M(X-MX)^2. \qquad (2.5.3)$$

Agar X dickret t.m. bo‘lsa,

$$DX=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-MX)^2\cdot p_i\,, \qquad (2.5.4)$$

Agar X uzluksiz t.m. bo‘lsa,

$$DX=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-MX)^2\cdot f(x)dx \qquad (2.5.5)$$

T.m. dispersiyasini hisoblash uchun quyidagi formula qulaydir:

$$DX=MX^2-(MX)^2 \qquad (2.5.6)$$

Bu formula matematik kutilma xossalari asosida quyidagicha keltirib chiqariladi:

$$DX=M(X-MX)^2=M(X^2-2XMX+(MX)^2)=MX^2-M(2XMX)+M(MX)^2=$$
$$=MX^2-2MXMX+(MX)^2=MX^2-(MX)^2$$

Dispersiyaning xossalari:

1. O‘zgarmas sonning dispersiyasi nolga teng $DC=0$.
2. O‘zgarmas ko‘paytuvchini kvadratga ko‘tarib, dispersiya belgisidan tashqariga chiqarish mumkin,

$$D(CX)=C^2DX.$$

3. Agar $X\perp Y$ bo‘lsa,

$$D(X+Y)=DX+DY.$$

Isbotlar: 1. $DC=M(C-MC)^2=M(C-C)^2=M0=0$.

2. $D(CX)=M(CX-M(CX))^2=M(CX-CMX)^2=M(C^2(X-MX)^2)=$
$=C^2M(X-MX)^2=C^2DX$.

3. (2.5.6.) formulaga ko‘ra

$$D(X+Y)=M(X+Y)^2-(M(X+Y))^2=MX^2+2MXY+MY^2-(MX)^2-2MXMY-(MY)^2=$$
$$=MX^2-(MX)^2+MY^2-(MY)^2+2(MXY-MXMY)=DX+DY+2(MXMY-MXMY)=DX+DY$$

■

2.6.-misol. X diskret t.m. taqsimot qonuni berilgan:

X	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.3	0.4

MX va DX ni hisoblaymiz:

MX=-1·0.2+0·0.1+1·0.3+2·0.4=0.9,

$DX=(-1)^2\cdot 0.2+1^2\cdot 0.3+2^2\cdot 0.4-(0.9)^2=1.29$.

✓ X t.m. *o‘rtacha kvadratik tarqoqligi*(*chetlashishi*) deb, dispersiyadan olingan kvadrat ildizga aytiladi:

$$\sigma_X = \sqrt{DX} \tag{2.5.7}$$

Dispersiyaning xossalaridan o‘rtacha kvadratik tarqoqlikning xossalari kelib chiqadi: 1. $\sigma_C = 0$; 2. $\sigma_{CX} = |C|\sigma_X$;

2.6 Ba’zi muhim taqsimotlar
Binomial taqsimot

✓ *X* diskret t.m. *binomial qonun* bo‘yicha taqsimlangan deyiladi, agar u 0,1,2,…n qiymatlarni

$$p_m = P\{X = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{2.6.1}$$

ehtimollik bilan qabul qilsa.
Bu yerda $0 < p < 1,\ q = 1 - p,\ m = 0,1,...,n$.

Binomial qonun bo‘yicha taqsimlangan *X* diskret t.m. yaqsimot qonuni quyidagi ko‘rinishga ega:

$X=m$	0	1	2	…	m	…	n
$p_m = P\{X = m\}$	q^n	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	$C_n^m p^m q^{n-m}$	…	p^n

Nyuton binomiga asosan $\sum_{m=0}^{n} p_m = (p+q)^n = 1$. Bunday taqsimotni $Bi(n,p)$ orqali belgilaymiz.

Uning taqsimot funksiyasi quyidagicha bo‘ladi:

$$F(x) = \begin{cases} 0,\ agar\ x \le 0 \\ \sum\limits_{m<x} C_n^m p^m q^{n-m},\ agar\ 0 < x \le n \\ 1,\ agar\ n < x. \end{cases}$$

Endi bu taqsimotning sonli xarakteristikalarini hisoblaymiz.

$$MX = \sum_{m=0}^{n} m \cdot P\{X = m\} = \sum_{m=1}^{n} m \cdot P\{X = m\} = \sum_{m=1}^{n} m \cdot C_n^m p^m q^{n-m} = np \sum_{m=1}^{n} C_{n-1}^{m-1} p^{m-1} q^{n-m} =$$

$$= np(p+q)^{n-1} = np.$$

$DX = \sum_{m=0}^{n} m^2 P\{X = m\} - (np)^2 = \sum_{m=1}^{n} m^2 C_n^m p^m q^{n-m} - (np)^2 = | \, m^2 = m(m-1) + m$

almashtirish bajaramiz$| = n(n-1)p^2 \sum_{m=2}^{n} C_{n-2}^{m-2} p^{m-2} q^{n-m} + np \sum_{m=1}^{n} C_{n-1}^{m-1} p^{m-1} q^{n-m} - (np)^2 =$

$n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = npq$.

Demak, $MX = np; \quad DX = npq$.

Puasson taqsimoti

✓ Agar X t.m. 0,1,2,…m,… qiymatlarni

$$p_m = P\{X = m\} = \frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!} \tag{2.6.2}$$

ehtimolliklar bilan qabul qilsa, u *Puasson qonuni* bo‘yicha taqsimlangan t.m. deyiladi. Bu yerda a biror musbat son.

Puasson qonuni bo‘yicha taqsimlangan X diskret t.m.ning taqsimot qonuni quyidagi ko‘rinishga ega:

$X=m$	0	1	2	…	m	…
$p_m = P\{X = m\}$	e^{-a}	$\frac{a \cdot e^{-a}}{1!}$	$\frac{a^2 \cdot e^{-a}}{2!}$	…	$\frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!}$	…

Teylor yoyilmasiga asosan, $\sum_{m=0}^{\infty} p_m = e^{-a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} = e^{-a} \cdot e^a = 1$. Bu taqsimotni $\Pi(a)$ orqali belgilaymiz. Uning taqsimot funksiyasi quyidagicha bo‘ladi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ agar \ m \le 0 \\ \sum_{m<x} \frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!}, \ agar \ 0 < m \le x \end{cases}$$

Endi bu taqsimotning sonli xarakteristikalarini hisoblaymiz:

$$MX = \sum_{m=0}^{\infty} m \cdot \frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!} = e^{-a} \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot \frac{a^m}{m!} = a \cdot e^{-a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^{m-1}}{(m-1)!} = a \cdot e^{-a} \cdot e^a = a,$$

$$DX=\sum_{m=0}^{\infty}m^2\cdot\frac{a^m\cdot e^{-a}}{m!}-a^2=a\sum_{m=1}^{\infty}m\cdot\frac{a^{m-1}\cdot e^{-a}}{(m-1)!}-a^2=$$

$$=a\cdot\left[\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{a^k\cdot e^{-a}}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k\cdot e^{-a}}{k!}\right]-a^2=a(a+1)-a^2=a$$

Demak, $MX=a;\quad DX=a$.

Geometrik taqsimot

- ✓ Agar X t.m. 1,2,…m,… qiymatlarni

$$p_m=P\{X=m\}=q^{m-1}p \tag{2.6.3}$$

ehtimolliklar bilan qabul qilsa, u *geometrik qonuni* bo‘yicha taqsimlangan t.m. deyiladi. Bu yerda $p=1-q\in(0,1)$.

Geometrik qonun bo‘yicha taqsimlangan t.m.larga misol sifatida quyidagilarni olish mumkin: sifatsiz mahsulot chiqqunga qadar tekshirilgan mahsulotlar soni; gerb tomoni tushgunga qadar tashlangan tangalar soni; nishonga tekkunga qadar otilgan o‘qlar soni va hokazo.

Geometrik qonun bo‘yicha taqsimlangan X diskret t.m. taqsimot qonuni quyidagi ko‘rinishga ega:

X=m	1	2	…	m	…
$p_m=P\{X=m\}$	p	qp	…	$q^m p$	…

$$\sum_{m=1}^{\infty}q^{m-1}p=p\sum_{m=1}^{\infty}q^{m-1}=p\cdot\frac{1}{1-q}=\frac{p}{p}=1,$$

chunki p_m ehtimolliklar geometrik progressiyani tashkil etadi: $p, qp, q^2p, q^3p,\ldots$. Shuning uchun ham (2.6.3) taqsimot geometrik taqsimot deyiladi va $Ge(p)$ orqali belgilanadi.

Uning taqsimot funksiyasi quyidagicha bo‘ladi:

$$F(x)=\begin{cases}0,\ agar\ m<1\\ \sum\limits_{m<x}q^{m-1}p,\ agar\ 1\le m\le x\end{cases}$$

Endi bu taqsimotning sonli xarakteristikalarini hisoblaymiz:

$$MX = \sum_{m=1}^{\infty} m\cdot q^{m-1}p = p\sum_{m=1}^{\infty} m\cdot q^{m-1} = p\left(\sum_{m=0}^{\infty} q^m\right)_q' = p\left(\frac{1}{1-q}\right)_q' =$$

$$= p\cdot\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p},$$

$$DX = \sum_{m=1}^{\infty} m^2\cdot q^{m-1}p - \frac{1}{p^2} = (m^2 = m(m-1)+m \text{ almashtirishni bajaramiz}) =$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m\cdot(m-1)q^{m-1}p + \sum_{m=1}^{\infty} m\cdot q^{m-1}p - \frac{1}{p^2} = pq\sum_{m=1}^{\infty} m\cdot(m-1)q^{m-2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} =$$

$$q\left(\sum_{m=0}^{\infty} q^m\right)_{q^2}'' + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = pq\frac{2}{(1-q)^3} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2pq}{p^3} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Demak, $MX = \frac{1}{p}$; $DX = \frac{q}{p^2}$.

Tekis taqsimot

✓ Agar uzluksiz *X* t.m. zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, \text{ agar } x \in [a,b], \\ 0, \text{ agar } x \notin [a,b] \end{cases} \qquad (2.6.4)$$

ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, u *[a,b] oraliqda tekis taqsimlangan* t.m. deyiladi.

Bu t.m.ning grafigi 14-rasmda berilgan. [*a,b*] oraliqda tekis taqsimlangan X t.m. ni $X \sim R[a,b]$ ko‘rinishda belgilanadi. $X \sim R[a,b]$ uchun taqsimot funksiyasini topamiz. (2.4.2) formulaga ko‘ra agar $a \le x \le b$ bo‘lsa

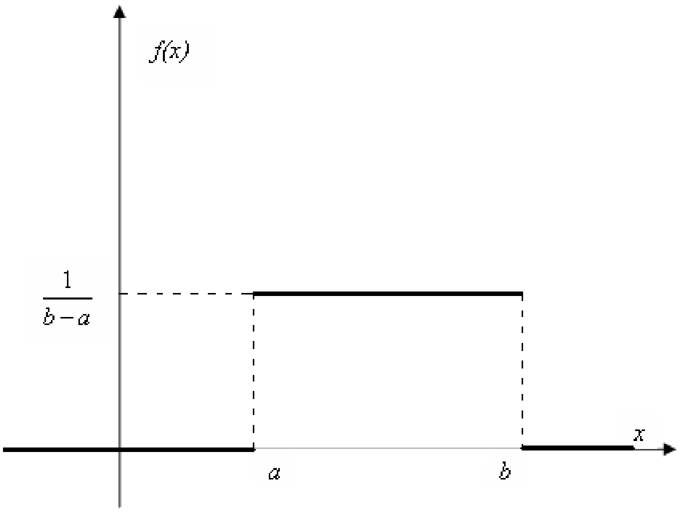
$$F(x) = \int_a^x \frac{dt}{b-a} = \left.\frac{t}{b-a}\right|_a^x = \frac{x-a}{b-a},$$

agar $x < a$ bo‘lsa, $F(x) = 0$ va $x > b$ bo‘lsa,

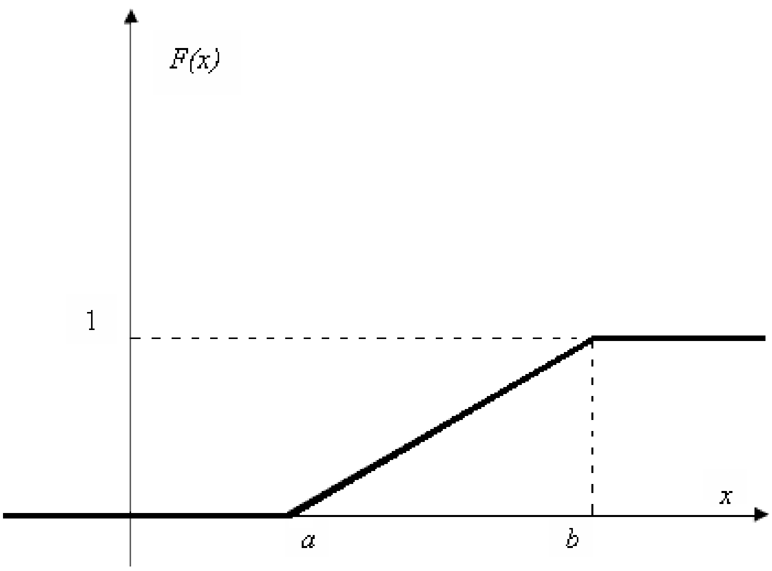
$$F(x) = \int_{-\infty}^{a} 0dt + \int_a^b \frac{dt}{b-a} + \int_b^x 0dt = \left.\frac{t}{b-a}\right|_a^b = 1$$ bo‘ladi. Demak,

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{agar } x<a \text{ bo'lsa,}\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{agar } a\le x\le b \text{ bo'lsa,}\\ 1, & \text{agar } b<x \text{ bo'lsa,}\end{cases}$$

$F(x)$ taqsimot funksiyaning grafigi 15-rasmda keltirilgan.



14-rasm.



15-rasm.

$X \in R[a,b]$ t.m. uchun MX va DX larni hisoblaymiz:

$$MX=\int_{-\infty}^{a}x\cdot 0dx+\int_{a}^{b}\frac{x}{b-a}dx+\int_{b}^{+\infty}x\cdot 0dx=\left.\frac{x^2}{2(b-a)}\right|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2},;$$

$$DX=\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\cdot\frac{dx}{b-a}=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{3}\left.\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\right|_a^b=$$

$$=\frac{1}{3(b-a)}\left(\frac{(b-a)^3}{8}-\frac{(a-b)^3}{8}\right)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

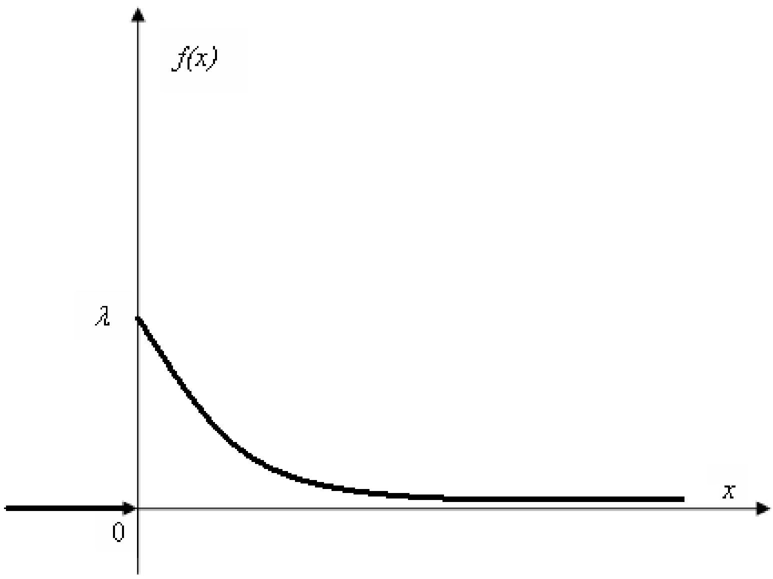
Demak, $MX=\dfrac{a+b}{2}$, $DX=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Ko‘rsatkichli taqsimot

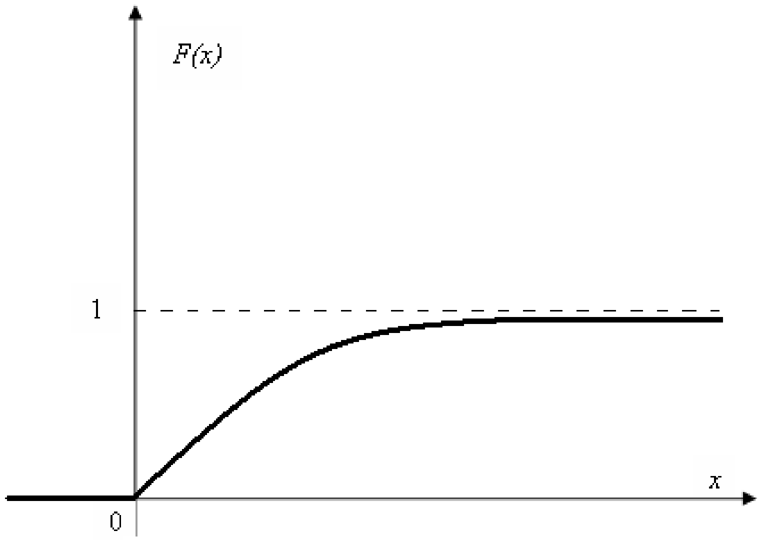
✓ Agar uzluksiz X t.m. zichlik funksiyasi

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, \text{ agar } x\geq 0,\\ 0, \text{ agar } x<0\end{cases} \qquad (2.6.5)$$

ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, X t.m. *ko‘rsatkichli qonun* bo‘yicha taqsimlangan t.m. deyiladi. Bu yerda λ biror musbat son. λ parametrli ko‘rsatkichli taqsimot $E(\lambda)$ orqali belgilanadi. Uning grafigi 16-rasmda keltirilgan.



16-rasm.



17-rasm.

Taqsimot funksiyasi quyidagicha ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, \text{ agar } x\geq 0,\\ 0, \text{ agar } x<0.\end{cases}$$

Uning grafigi 17-rasmda keltirilgan.

Endi ko‘rsatkichli taqsimotning matematik kutilmasi va dispersiyasini hisoblaymiz:

$$MX=\int_{0}^{+\infty} x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx=\lim_{b\to\infty}\left(-\int_{0}^{b} xde^{-\lambda x}\right)=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(-x\cdot e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{b}+\int_{0}^{b} e^{-\lambda x}dx\right)=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Bigg|_{0}^{b}\right)=\frac{1}{\lambda},$$

$$DX=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-(MX)^2=\lambda\int_{0}^{+\infty} x^2\cdot e^{-\lambda x}dx-\frac{1}{\lambda^2}=$$

$$=[\text{bo'laklab integrallash formulasini ikki marta qo'llaymiz}]=$$

$$= \lambda \left(\lim_{b\to\infty} \left(-\frac{x^2}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{2}{\lambda} \left(-\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x} \right) \right) \Bigg|_0^b \right) - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Demak, agar $X \sim E(\lambda)$ bo‘lsa, u holda $MX = \frac{1}{\lambda}$ va $DX = \frac{1}{\lambda^2}$.

Normal taqsimot

Normal taqsimot ehtimollar nazariyasida o‘ziga xos o‘rin tutadi. Normal taqsimotning xususiyati shundan iboratki, u limit taqsimot hisoblanadi. Ya’ni boshqa taqsimotlar ma’lum shartlar ostida bu taqsimotga intiladi. Normal taqsimot amaliyotda eng ko‘p qo‘llaniladigan taqsimotdir.

✓ X uzluksiz t.m. *normal qonun* bo‘yicha taqsimlangan deyiladi, agar uning zichlik funksiyasi quyidagicha ko‘rinishga ega bo‘lsa

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \ x \in R \qquad (2.6.6)$$

a va $\sigma > 0$ parametrlar bo‘yicha normal taqsimot $N(a,\sigma)$ orqali belgilanadi. $X \sim N(a,\sigma)$ normal t.m.ning taqsimot funksiyasi

$$F(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt. \qquad (2.6.7)$$

Agar normal taqsimot parametrlari a=0 va $\sigma = 1$ bo‘lsa, u standart normal taqsimot deyiladi. Standart normal taqsimotning zichlik funksiyasi quyidagicha ko‘rinishga ega:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Bu funksiya bilan 1.14 paragrafda tanishgan edik(uning grafigi 9-rasmda keltirilgan). Taqsimot funksiyasi

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$$

ko‘rinishga ega va u Laplas funksiyasi deyiladi(uning grafigi 10-rasmda keltirilgan).

a va σ parametrlarni ma’nosini aniqlaymiz. Buning uchun $X \sim N(a,\sigma)$ t.m.ning matematik kutilmasi va dispersiyasini hisoblaymiz:

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = \left[\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma} = \text{t almashtirish bajaramiz}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sqrt{2}\sigma t + a)e^{-t^2}\sqrt{2}\sigma dt = \frac{\sigma\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}dt + \frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = 0 + \frac{a}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\pi} = a$$

Birinchi integral nolga teng, chunki integral ostidagi funksiya toq, integrallash chegarasi esa nolga nisbatan simmetrikdir. Ikkinchi integral esa Puasson integrali deyiladi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}\,.$$

Shunday qilib, a parametr matematik kutilmani bildirar ekan. Dispersiya hisoblashda $\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}$ =t almashtirish va bo‘laklab integrallashdan foydalanamiz:

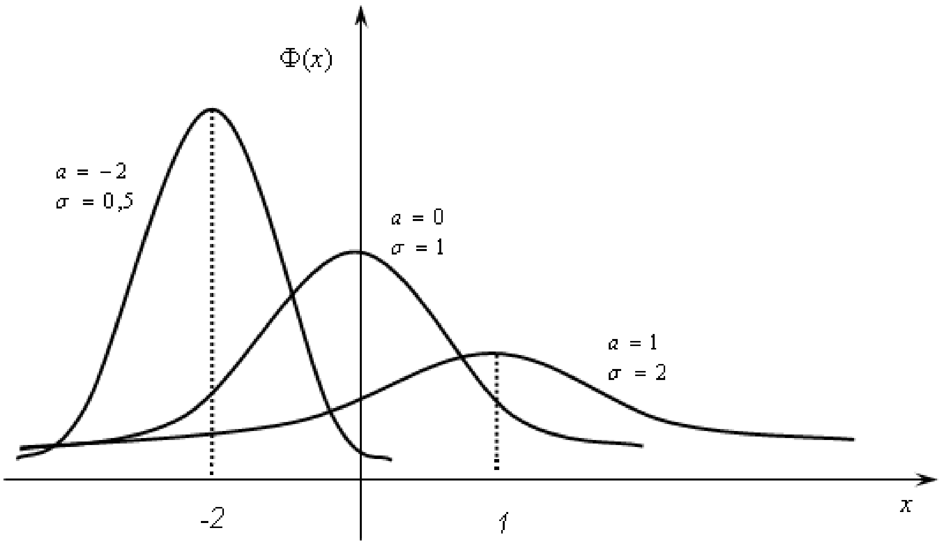
$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2\cdot f(x)dx = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\sigma^2 t^2 e^{-t^2}\sigma\sqrt{2}dt = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2}dt = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\left(-\frac{1}{2}te^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt\right) =$$

$$= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \sigma^2\,.$$

Demak, $DX = \sigma^2$ va σ o‘rtacha kvadratik tarqoqlikni bildirar ekan.

18-rasmda a va σ larning turli qiymatlarida normal taqsimot grafigining o‘zgarishi tasvirlangan:



18-rasm.

$X \sim N(a,\sigma)$ t.m.ning (α,β) intervalga tushishi ehtimolligini hisoblaymiz. Avvalgi mavzulardan ma'lumki,

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = \left[\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma} = \text{t}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Laplas funksiyasidan foydalanib((1.14.6) formula), quyidagiga ega bo'lamiz:

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi_0\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \tag{2.6.8}$$

Normal taqsimot taqsimot funksiyasini Laplas funksiyasi orqali quyidagicha ifodalasa bo'ladi:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt=P\{-\infty<X<x\}=\Phi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)-\Phi_0\left(\frac{-\infty-a}{\sigma}\right)=$$

$$\Phi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)+\Phi_0(+\infty)=\Phi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)+\frac{1}{2} \qquad (2.6.9)$$

Agar Laplas funksiyasi $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt$ bo‘lsa, u holda $F(x)=\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$ va (2.6.8) formulani quyidagicha yozsa bo‘ladi:

$$P\{\alpha<X<\beta\}=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \qquad (2.6.10)$$

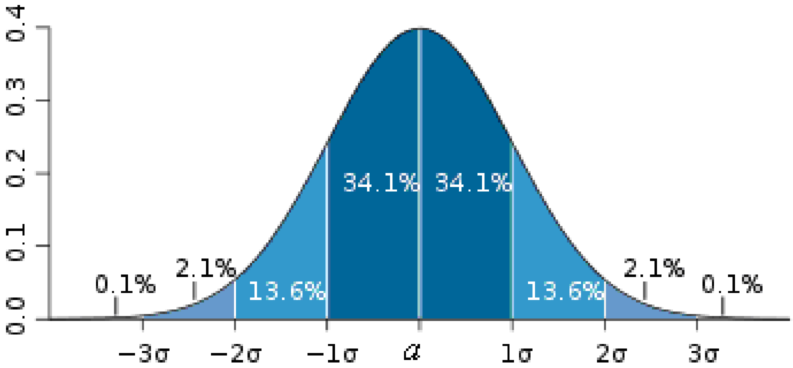
Amaliyotda ko‘p hollarda normal t.m.ning *a* ga nisbatan simmetrik bo‘lgan intervalga tushishi ehtimolligini hisoblashga to‘gri keladi. Uzunligi $2l$ bo‘lgan $(a\text{-}l,a+l)$ intervalni olaylik, u holda $P\{a-l\le X\le a+l\}=P\{|X-a|\le l\}=$

$$\Phi_0\left(\frac{a+l-a}{\sigma}\right)-\Phi_0\left(\frac{a-l-a}{\sigma}\right)=2\Phi_0\left(\frac{l}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{l}{\sigma}\right)-1.$$

Demak,

$$P\{|X-a|\le l\}=2\Phi_0\left(\frac{l}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{l}{\sigma}\right)-1. \qquad (2.6.11)$$

(2.6.11) da $l=3\sigma$ deb olsak, $P\{|X-a|\le 3\sigma\}=2\Phi_0(3)$ bo‘ladi. $\Phi_0(x)$ funksiyaning qiymatlari jadvalidan $\Phi_0(3)=0.49865$ ni topamiz. U holda $P\{|X-a|\le 3\sigma\}\approx 0.9973$ bo‘ladi. Bundan quyidagi muhim natijaga ega bo‘lamiz: Agar $X \sim N(a,\sigma)$ bo‘lsa, u holda uning matematik kutilishidan chetlashishining absolut qiymati o‘rtacha kvadratik tarqoqligining uchlanganidan katta bo‘lmaydi. Bu qoida “*uch sigma qoidasi*” deyiladi(19-rasm).



19-rasm.

2.7.-misol. Detallarni o‘lchash jarayonida $\sigma = 10$ mm parametrli normal taqsimotga bo‘ysuvuvchi tasodifiy xatoliklarga yo‘l qo‘yildi. Bog‘liqsiz 3 marta detalni o‘lchaganda hech bo‘lmasa bitta o‘lchash xatoligining absolut quymati 2 mm dan katta bo‘lmasligi ehtimolligini baholang.

(2.6.11) formulaga ko‘ra $P\{|X-a| \le 2\} = 2\Phi_0\left(\frac{2}{10}\right) \approx 2 \cdot 0.07926 = 0.15852.$ Bitta tajribada(o‘lchashda) xatolikning 2 mm dan oshishi ehtimolligi $P\{|X-a| > 2\} = 1 - P\{|X-a| < 2\} \approx 0.84148$. Tajribalarimiz bog‘liqsiz bo‘lganligi uchun uchchala tajribada xatolikning 2 mm dan oshishi ehtimolligi $0.84148^3 \approx 0.5958$ bo‘ladi. Qidirilayotgan ehtimollik 1-0.5958=0.4042.

II bobga doir misollar

1. Birinchi talabaning imtihonni topshira olishi ehtimolligi 0.6, ikkinchisiniki esa 0.9. Quyidagi hollar uchun imtihonni topshira olgan talabalar soni *X* t.m.ning taqsimot qonunini toping: a) Imtihonni qayta topshirish mumkin emas; b) imtihonni bir marta qayta topshirish mumkin.

2. *A* hodisaning ro‘y berishi ehtimolligi 0.7 ga teng. Bog‘liqsiz uchta tajribada *A* hodisaning ro‘y berishlari soni X t.m.ning taqsimot qonunini toping.

3. Agar

X	1	2	3	4
P	0.3	0.2	0.4	0.1

bo‘lsa, X t.m.ning taqsimot funksiyasini toping.

4. Ikki ovchi bir nishonga qarata o‘q uzishmoqda. Birinchi ovchining nishonga tekkazishi ehtimolligi 0.6, ikkinchisiniki esa 0.8 bo‘lsa, nishonga tekkan o‘qlar soni X t.m.ning taqsimot qununini toping va taqsimot funksiyasini tuzing.

5. Taqsimot funksiyasi

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ agar } x < 0, \\ 0.2, \text{ agar } 0 \le x < 1, \\ 0.6, \text{ agar } 1 \le x < 2, \\ 1, \text{ agar } x \ge 2 \end{cases}$$

bo‘lgan X t.m.ning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari va ularga mos ehtimolliklarini toping.

6. Agar $P\{X > 3\} = \frac{1}{3}$ bo‘lsa, $F_X(3)$ ni hisoblang.

7. Quyidagi funksiyalardan qaysilari zichlik funksiya bo‘ladi: $f_1(x) = -x^2$, $f_2(x) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}$, $f_3(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$.

8. Tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2, & |x| \le h, \\ 0, & |x| > h, \end{cases}$$

bo‘lsa h ning qiymatini toping.

9. Taqsimot funksiyasi

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ agar } x \le 0, \\ \frac{x^2}{2}, \text{ agar, } 0 < x \le \sqrt{2}, \\ 1, \text{ agar } x > \sqrt{2}, \end{cases}$$

bo‘lgan X t.m.ning zichlik funksiyasini toping va $P\{x < X < 1\}$ ehtimollikni hisoblang.

10. Agar X t.m.ning taqsimot funksiyasi

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ agar } x \le -1, \\ a(x+1)^2, \text{ agar, -1} < x \le 2, \\ 1, \text{ agar } x > 2 \end{cases}$$

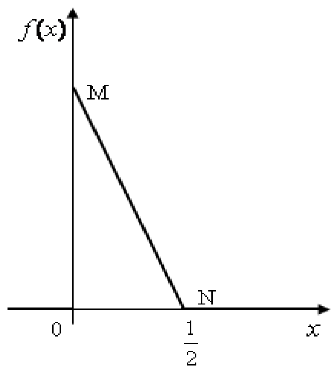
bo‘lsa, o‘zgarmas *a* ning qiymatini hisoblang.

11. Tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x)=\begin{cases} 0, \text{ agar } x < -\frac{\pi}{2}, \\ a\cos x, \text{ agar } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ 0 \text{ agar } x > \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

bo‘lsa, o‘zgarmas *a* ning qiymatini va t.m.ning taqsimot funksiyasini hisoblang.

12. Uzluksiz X t.m. zichlik funksiyasining grafigi berilgan:



20-rasm.

zichlik funksiya $f(x)$ ning ifodasini, $F(x)$ taqsimot funksiyasini va $\left\{1 < X < \frac{1}{4}\right\}$ hodisaning ehtimolligini hisoblang.

13. $X \sim R(0,a)$ va $P\left\{X > \frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3}$ bo‘lsa, *a* ning qiymatini toping.

14. Uzluksiz X t.m.ning zichlik funksiyasi:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{agar } x \le 0 \text{ va } x > \pi,\\ \dfrac{1}{2}\sin x, & \text{agar } 0 < x < \pi,\end{cases}$$

bo‘lsa, *MX* va *DX* ni hisoblang.

15. *X* va *Y* bog‘liqsiz diskret t.m.lar bo‘lib, *MX*=0, *MY*=-3, *DX*=2, *DY*=9 bo‘lsa, *Z*=5*X*-3*Y*+2 t.m. uchun *MZ* va *DZ* ni hisoblang.

16. Uzluksiz *X* t.m.ning taqsimot qonuni:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{agar } x \le A,\\ 0.25x^2, & \text{agar } A < x \le B,\\ 1, & \text{agar } x > B,\end{cases}$$

bo‘lsa, *A* va *B* qiymatlarini toping, *MX* va σ_X ni hisoblang.

17. $X \sim N(3,2)$ bo‘lsa, $P\{-3 < X < 5\}$, $P\{X \le 4\}$, $P\{|X-3| < 6\}$ ehtimolliklarni hisoblang.

18. Agar $X \sim Bi(1;0.5)$ bo‘lsa, $(MX)^2$ va *DX* ni taqqoslang.

19. Quyida *X* t.m.ning taqsimot jadvali berilgan:

X	-0.5	0	0.5	1	1.5
P	0.1	0.4	0.1	0.3	0.1

a) *Y*=10*X*-1;

b) $Z=-X^2$

c) $V=2^X$ t.m.larning matematik kutilmasi va dispersiyaslarini hisoblang.

20. Agar $X \sim \Pi(23)$ va *Y*=1-*X* bo‘lsa $F_Y(2)$ ni hisoblang.

21. Uzluksiz X t.m.ning zichlik funksiyasi quyidagicha ko‘rinishga ega:

$$f(x)=\begin{cases}3h, & x \in [-1,0],\\ h, & x \in [0,2],\\ 0, & \text{aks holda.}\end{cases}$$

h ni, *X* t.m.ning taqsimot funksiyasi *F*(*x*) ni, *M*[(2-*X*)(*X*-3)] va *D*[2-3*X*] ni hisoblang.

22. *X* t.m.ning taqsimot funksiyasi

$$F(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x}, & \text{agar } x \ge 1,\\ 0, & \text{agar } x > 1,\end{cases}$$

bo‘lsa, $P\{X > a\} = \frac{1}{3}$ tenglik o‘rinli bo‘ladigan *a* ning qiymatini toping.

23. X uzluksiz t.m.ning taqsimot funksiyasi $F(x) = c + b\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}$ formula orqali aniqlanadi. Quyidagilarni toping: a) o‘zgarmas *a*, *b* va *c* larning qiymatlari; b) *X* t.m.ning zichlik funksiyasi.

24. X t.m.ning taqsimot funksiyasi

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

ko‘rinishga ega bo‘lsa, $M[(X-4)(5-X)], P\{X \leq MX\}$ va $D(3-2X)$ larni hisoblang.

25. Agar $f(x)$ zichlik funksiyasi bo‘lsa, u holda $f(-x)$ funksiya zichlik funksiya bo‘ladimi?

III bob. Ko‘p o‘lchovli tasodifiy miqdorlar

3.1 Ko‘p o‘lchovli tasodifiy miqdorlar va ularning birgalikdagi taqsimot funksiyasi

Bir o‘lchovli t.m.lardan tashqari, mumkin bo‘lgan qiymarlari 2 ta, 3 ta, ..., n ta son bilan aniqlanadigan miqdorlarni ham o‘rganish zarurati tug‘iladi. Bunday miqdorlar mos ravishda ikki o‘lchovli, uch o‘lchovli, … , *n* o‘lchovli deb ataladi.

Faraz qilaylik, $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ehtimollik fazosida aniqlangan $X_1, X_2, ..., X_n$ t.m.lar berilgan bo‘lsin.

✓ $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ vektorga tasodifiy vektor yoki *n*-o‘lchovli t.m. deyiladi.

Ko‘p o‘lchovli t.m. har bir elementar hodisa ω ga n ta $X_1, X_2, ..., X_n$ t.m.larning qabul qiladigan qiymatlarini mos qo‘yadi.

✓ $F_{X_1, X_2, ..., X_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = P\{X_1 < x_1, X_2 < x_2, ..., X_n < x_n\}$ *n* o‘lchovli funksiya $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ tasodifiy vektorning taqsimot funksiyasi yoki $X_1, X_2, ..., X_n$ t.m.larning birgalikdagi taqsimot funksiyasi deyiladi.

Qulaylik uchun $F_{X_1, X_2, ..., X_n}(x_1, x_2, ..., x_n)$ taqsimot funksiyani $X_1, X_2, ..., X_n$ indekslarini tushirib qoldirib, $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ ko‘rinishida yozamiz.

$F(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiya $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ tasodifiy vektorning taqsimot funksiyasi bo‘lsin. Ko‘p o‘lchovli $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ taqsimot funksiyaning asosiy xossalarini keltiramiz:

1. $\forall x_i: \ 0 \le F(x_1, x_2, ..., x_n) \le 1,$ ya’ni taqsimot funksiya chegaralangan.

2. $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiya har qaysi argumenti bo‘yicha kamayuvchi emas va chapdan uzluksiz.

3. Agar biror $x_i \to +\infty$ bo‘lsa, u holda

$$\lim_{x_i \to +\infty} F(x_1, x_2, ..., x_n) = F(x_1, ..., x_{i-1}, \infty, x_{i+1}, ..., x_n) = \\ = F_{X_1, ..., X_{i-1}, X_{i+1}, ..., X_n}(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) \tag{3.1.1}$$

4. Agar biror $x_i \to -\infty$ bo‘lsa, u holda $\lim_{x_i \to -\infty} F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$.

3-xossa yordamida keltirib chiqarilgan (3.1.1) taqsimot funksiyaga marginal(xususiy) taqsimot funksiya deyiladi. $X=(X_1, X_2, ..., X_n)$ tasodifiy vektorning barcha marginal taqsimot funksiyalari soni $k=C_n^1+C_n^2+...+C_n^{n-1}=\sum_{n=0}^{n}C_n^m-C_n^0-C_n^n=2^n-2$ ga tengdir.

Masalan, $X=(X_1, X_2)$ (n=2) ikki o‘lchovlik tasodifiy vektorning marginal taqsimot funksiyalari soni $k=2^2-2=2$ ta bo‘lib, ular quyidagilardir: $F(x_1,+\infty)=F_1(x_1)=P(X_1<x_1)$; $F(+\infty,x_2)=F_2(x_2)=P(X_2<x_2)$.

Soddalik uchun n=2 bo‘lgan holda, ya’ni (X,Y) ikki o‘lchovlik tasodifiy vector bo‘lgan holni ko‘rish bilan cheklanamiz.

3.2 Ikki o‘lchovli diskret tasodifiy miqdor va uning taqsimot qonuni

(X,Y) ikki o‘lchovli t.m. taqsimot qonunini

$$p_{ij}=P\{X=x_i, Y=y_j\};\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m} \qquad (3.2.1)$$

formula yordamida yoki quyidagi jadval ko‘rinishida berish mumkin:

X \ Y	y_1	y_2	…	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2m}
…	…	…	…	…
x_n	p_{n1}	p_{21}	…	p_{nm}

(3.2.2)

bu yerda barcha p_{ij} ehtimolliklar yig‘indisi birga teng, chunki $\{X=x_i, Y=y_j\}$ $i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}$ birgalikda bo‘lmagan hodisalar to‘la gruppani tashkil etadi $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p_{ij}=1$. (3.2.1) formula ikki o‘lchovli diskret t.m.ning taqsimot qonuni, (3.2.2) jadval esa birgalikdagi taqsimot jadvali deyiladi.

(X,Y) ikki o‘lchovli diskret t.m.ning birgalikdagi taqsimot qonuni berilgan bo‘lsa, har bir komponentaning alohida (marginal) taqsimot qonunlarini topish mumkin. Har bir $i=\overline{1,n}$ uchun

$\{X=x_i, Y=y_1\}, \{X=x_i, Y=y_2\}, ..., \{X=x_i, Y=y_m\}$ hodisalar birgalikda bo‘lmagani sababli: $p_{x_i}=P\{X=x_i\}=p_{i1}+p_{i2}+...+p_{im}$. Demak, $p_{x_i}=P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{m} p_{ij}$, $i=\overline{1,n}$, $p_{y_j}=P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{n} p_{ij}$ $j=\overline{1,m}$.

3.1-misol. Ichida 2 ta oq, 1 ta qora, 1 ta ko‘k shar bo‘lgan idishdan tavakkaliga ikkita shar olinadi. Olingan sharlar ichida qora sharlar soni X t.m. va ko‘k rangdagi sharlar soni Y t.m. bo‘lsin. (X,Y) ikki o‘lchovli t.m.ning birgalikdagi taqsimot qonunini tuzing. X va Y t.m.larning alohida taqsimot qonunlarini toping.

X t.m. qabul qilishi mumkin qiymatlari: 0 va 1: Y t.m.ning qiymatlari ham 0 va 1. Mos ehtimolliklarni hisoblaymiz:

$p_{11}=P\{X=0,Y=0\}=\frac{C_2^2}{C_4^2}=\frac{1}{6}$ (yoki $\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$);

$p_{12}=P\{X=0,Y=1\}=\frac{C_2^1}{C_4^2}=\frac{2}{6}$; $p_{21}=P\{X=1,Y=0\}=\frac{2}{6}$;

$p_{22}=P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{6}$.

(X,Y) vaktorning taqsimot jadvali quyidagicha ko‘rinishga ega:

X \ Y	0	1
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$
1	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

Bu yerdan $P\{X=0\}=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}=\frac{1}{2}$, $P\{X=1\}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$; $P\{Y=0\}=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}=\frac{1}{2}$, $P\{Y=1\}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$ kelib chiqadi. X va Y t.m.larning alohida taqsimot qonunlari quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\begin{cases} X: & 0, & 1 \\ p: & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \end{cases} \text{ va } \begin{cases} Y: & 0, & 1 \\ p: & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \end{cases}.$$

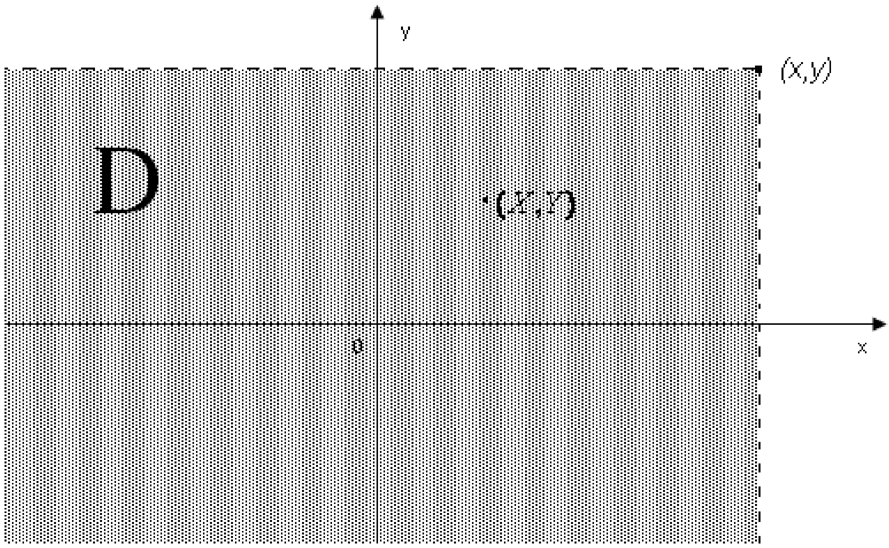
3.3 Ikki o‘lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi va uning xossalari

Ikki o‘lchovli t.m. taqsimot funksiyasini $F(x,y)$ orqali belgilaymiz.

✓ *Ikki o‘lcholi (X,Y) t.m.ning taqsimot funksiyasi*, x va y sonlarning har bir jufti uchun $\{X \le x\}$ va $\{Y \le y\}$ hodisalarning birgalikdagi ehtimolligini aniqlaydigan $F(x,y)$ funksiyasidir: ya’ni

$$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}=P\big((X.Y)\in(-\infty,x)\times(-\infty,y)=D\big). \qquad (3.3.1)$$

(3.3.1.) tenglikning geometrik tasviri 21-rasmda keltirilgan.



21-rasm.

(X,Y) ikki o‘lchovlik diskret t.m. taqsimot funksiyasi quyidagi yig‘indi orqali aniqlanadi:

$$F(x,y)=\sum_{x_i<x}\sum_{y_j<y} p_{ij}\,. \qquad (3.3.2)$$

Ikki o‘lchovlik t.m. taqsimot funksiyasining xossalari:

1. $F(x,y)$ taqsimot funksiya chegaralangan: $0\le F(x,y)\le 1$.

2. $F(x,y)$ funksiya har qaysi argumenti bo‘yicha kamayuvchi emas:

agar $x_2>x_1$ bo‘lsa, $F(x_2,y)\ge F(x_1,y)$,

agar $y_2>y_1$ bo‘lsa, $F(x,y_2)\ge F(x,y_1)$.

3. $F(x,y)$ funksiyaning biror argumenti $-\infty$ bo‘lsa(limit ma’nosida), u holda $F(x,y)$ funksiya nolga teng, $F(x,-\infty)=F(-\infty,y)=F(-\infty,-\infty)=0$.

4. Agar $F(x,y)$ funksiyaning bitta argumenti $+\infty$ bo‘lsa(limit ma’nosida), u holda

$$F(x,+\infty)=F_1(x)=F_X(x);\ F(+\infty,y)=F_2(y)=F_Y(y). \qquad (3.3.3)$$

4'. Agar ikkala argumenti $+\infty$ bo‘lsa(limit ma’nosida), u holda $F(+\infty,+\infty)=1$.

5. $F(x,y)$ funksiya har qaysi argumenti bo‘yicha chapdan uzluksiz, ya’ni $\lim\limits_{x\to x_0-0}F(x,y)=F(x_0,y)$, $\lim\limits_{y\to y_0-0}F(x,y)=F(x,y_0)$.

Isboti. 1. $F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$ ehtimollik bo‘lgaligi uchun $0\le F(x,y)\le 1$.

2. (x,y) argumentlarning birortasini kattalashtirsak, 21-rasmda bo‘yalgan D soha kattalashadi, demak bu sohaga (X,Y) tasodifiy nuqtaning tushishi ehtimolligi kamaymaydi.

3. $\{X<-\infty\},\{Y<-\infty\}$ hodisalar va ularning ko‘paytmasi mumkin bo‘lmagan hodisalardir. Demak, bu hodisalarning ehtimolligi nolga teng.

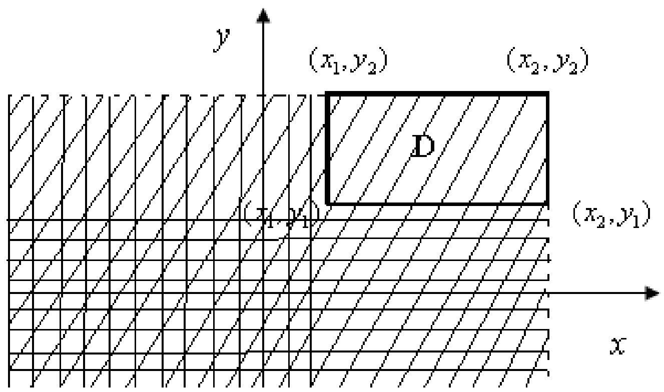
4. $\{X<+\infty\}$ muqarrar hodisa bo‘lgani uchun $\{X<+\infty\}\cdot\{Y\le y\}=\{Y\le y\}$ bo‘ladi. Demak, $F(+\infty,y)=P\{X<+\infty;Y\le y\}=P\{Y\le y\}=F_Y(y)$. Xuddi shunday $F(x,+\infty)=P\{X\le x;Y<+\infty\}=P\{X\le x\}=F_X(x)$.

4'. $\{X<+\infty\}$ va $\{Y<+\infty\}$ hodisalar muqarrar hodisalar bo‘lganligi uchun $\{X<+\infty\}\cdot\{Y<+\infty\}$ ham muqarrar hodisa bo‘ladi va bu hodisaning ehtimolligi 1 ga teng. ■

$F(x,y)$ taqsimot funksiya yordamida (X,Y) t.m. biror $D=\{(x,y): x_1\le x\le x_2, y_1\le y\le y_2\}$ sohaga tushishi ehtimolligini topish mumkin:

$$\begin{aligned}P\{(X,Y)\in D\}&=P\{x_1\le X\le x_2, y_1\le Y\le y_2\}=\\&=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1).\end{aligned}\qquad(3.3.4)$$

22-rasmda (3.3.4) tenglikning geometrik isboti keltirilgan.



22-rasm.

3.2-misol. 3.1-misoldagi (X,Y) ikki o‘lchovlik t.m.ning hamda X va Y t.m.larning taqsimot funksiyalarini toping.
Avvalgi bobdagi (2.3.2) formuladan:

$$F_1(x)=\begin{cases}0, \text{ agar } x\le 0,\\ 0.5, \text{ agar } 0<x\le 1,\\ 1, \text{ agar } x>1,\end{cases} \qquad F_2(y)=\begin{cases}0, \text{ agar y}\le 0,\\ 0.5, \text{ agar } 0<y\le 1,\\ 1, \text{ agar y}>1.\end{cases}$$

(X,Y) ikki o‘lchovlik t.m.ning $F(x,y)$ taqsimot funksiyasini (3.3.2) formulaga ko‘ra topamiz:

X \ Y	$y\le 0$	$0<y\le 1$	$y>1$
$x\le 0$	0	0	0
$0<x\le 1$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\left(=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}\right)$
$x>1$	0	$\frac{1}{2}\left(=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}\right)$	$1\left(=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\right)$

3.4 Ikki o‘lchovlik uzluksiz tasodifiy miqdor zichlik funksiyasi va uning xossalari

✓ Ikki o‘lchovlik t.m. uzluksiz deyiladi, agar uning taqsimot funksiyasi $F(x,y)$: 1. uzluksiz bo‘lsa;
2. har bir argumenti bo‘yicha differensiyallanuvchi;
3. $F''_{xy}(x,y)$ ikkinchi tartibli aralash hosila mavjud bo‘lsa.

✓ *Ikki o‘lchovlik (X,Y) t.m.ning zichlik funksiyasi*

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=F''_{xy}(x,y) \qquad (3.4.1)$$

Tenglik orqali aniqlanadi.

(X,Y) t.m.ning G sohaga(23-rasm) tushishi ehtimolligi (3.3.4) formulaga ko‘ra: $P\{x\le X<x+\Delta x, y\le Y<y+\Delta y\}=$

$$= F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x, y+\Delta y) - F(x+\Delta x, y) + F(x, y),$$

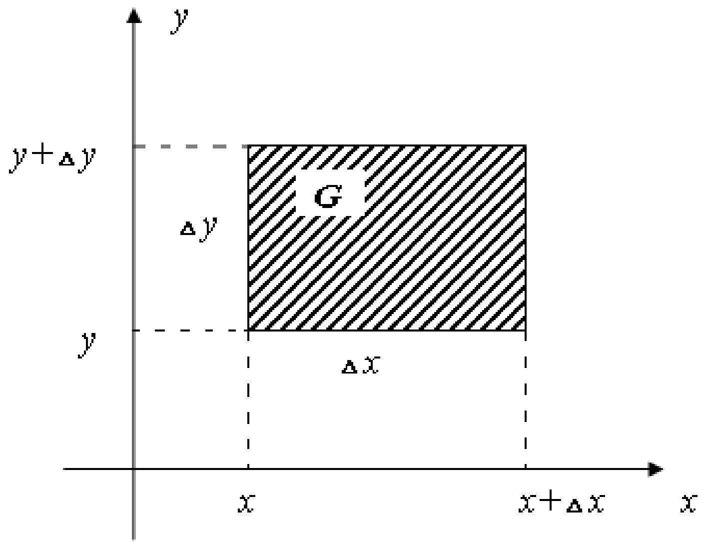
$$f_{\text{o'rtacha}} = \frac{P\{x \le X < x+\Delta x, y \le Y < y+\Delta y\}}{\Delta x \cdot \Delta y} =$$

$$= \frac{1}{\Delta y}\left(\frac{F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x, y+\Delta y)}{\Delta x} - \frac{F(x+\Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x} \right).$$

$\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ da limitga o‘tamiz,

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f_{\text{o'rtacha}} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F'_x(x, y+\Delta y) - F'_x(x, y)}{\Delta y},$$

ya’ni $f(x, y) = \left(F'_x(x, y) \right)'_y = F''_{xy}(x, y)$.



23-rasm.

Demak, (X,Y) ikki o‘lchovli tasodifiy vektorning zichlik funksiyasi deb,

$$P\{x \le X < x+dx, y \le Y < y+dy\} \approx f(x, y)dxdy \tag{3.4.2}$$

tenglikni qanoatlantiruvchi funksiya ekan.

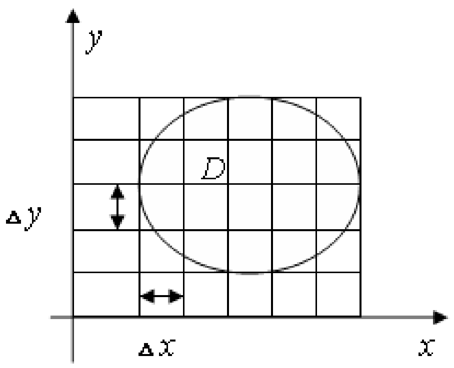
$f(x,y)$ zichlik funkiyasi quyidagi xossalarga ega:

1. $f(x,y) \geq 0$.
2. $P\{(X,Y) \in D\} = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$. (3.4.3)
3. $F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$. (3.4.4)
4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$.
5. X va Y t.m.larning bir o‘lchovlik zichlik funksiyalarini quyidagi tengliklar yordamida topish mumkin:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = f_X(x); \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = f_Y(y). \qquad (3.4.5)$$

Isboti. 1. Bu xossa $F(x,y)$ funksiyaning har qaysi argumenti bo‘yicha kamaymaydigan funksiya ekanligidan kelib chiqadi.

2. $f(x,y)dxdy$ ifoda (X,Y) tasodifiy nuqtaning tomonlari dx va dy bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakka tushish ehtimolligini bildiragi. D sohani to‘g‘ri to‘rtburchaklarga ajratamiz(24-rasm) va har biri uchun (3.4.2) formulani qo‘llaymiz:



24-rasm.

$P\{(X,Y) \in D\} \approx \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta x \Delta y$ bo‘ladi. Endi $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ da limitga o‘tib, $P\{(X,Y) \in D\} = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$ ni hosil qilamiz.

3. (3.4.3) formuladan:

$$F(x,y) = P\{X < x, Y < y\} = P\{-\infty < X < x, -\infty < Y < y\} = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv.$$

4. $F(+\infty,+\infty)=1$ va (3.4.4) formulada $x=y=+\infty$ deb olsak(limit ma'nosida),

$$F(+\infty,+\infty)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1.$$

5. Avval X va Y t.m.larning taqsimot funksiyalarini topamiz:

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dudv=\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,y)dy\right)du,$$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv=\int_{-\infty}^{y}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,v)dx\right)dv. \tag{3.4.5}$$

Birinchi tenglikni *x* bo'yicha, ikkinchisini *y* bo'yicha differensiyallasak, X av Y t.m.larnin zichlik funksiyalarini hosil qilamiz:

$$f_X(x)=F_X^{'}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

va

$$f_Y(y)=F_Y^{'}(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx.$$

■

Izoh. Agar *X* va *Y* t.m.larning alohida zichlik funksiyalari berilgan bo'lsa, (umumiy holda) ularning birgalikdagi zichlik funksiyalarini topish mumkin emas.

3.3-misol. (*X*,*Y*) ikki o'lchovli t.m.ning birgalidagi zichlik funksiyasi berilgan

$$f(x,y)=\begin{cases} Ce^{-x-y}, & \text{agar } x\ge 0, y\ge 0 \\ 0, & \text{aks holda.}\end{cases}$$

Quyidagilarni toping: 1) O'zgarmas son C; 2) $F(x,y)$; 3) $F_X(x)$ va $F_Y(y)$; 4) $f_X(x)$ va $f_Y(y)$; 5) $P\{X>0,Y<1\}$.

1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$ tenglikdan

$$C\int\limits_{0}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x-y}dxdy = C\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}dx\cdot\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-y}dy = C = 1.$$

2) $F(x,y) = \int\limits_0^x\int\limits_0^y e^{-u-v}dudv = \int\limits_0^x e^{-u}du\cdot\int\limits_0^y e^{-v}dv = (1-e^{-x})(1-e^{-y})$, $x \geq 0, y \geq 0$,

ya'ni

$$F(x,y) = \begin{cases}(1-e^{-x})(1-e^{-y}), & x \geq 0, y \geq 0,\\ 0, & \text{aks holda.}\end{cases}$$

3) $F_X(x) = F(x,+\infty) = \int\limits_0^x\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-u}e^{-v}dv\right)du = \int\limits_0^x 1\cdot e^{-u}du = 1 - e^{-x}$, $x \geq 0$, demak

$$F_X(x) = \begin{cases}(1-e^{-x}), & x \geq 0,\\ 0, & x < 0.\end{cases}$$

Aynan shunday,

$$F_Y(x) = \begin{cases}(1-e^{-y}), & y \geq 0,\\ 0, & y < 0.\end{cases}$$

4) $f_X(x) = F_X'(x) = \begin{cases}(1-e^{-x})_x', & x \geq 0,\\ 0, & x < 0,\end{cases} = \begin{cases}e^{-x}, & x \geq 0,\\ 0, & x < 0,\end{cases}$

va shu kabi

$$f_Y(y) = \begin{cases}e^{-y}, & y \geq 0,\\ 0, & y < 0.\end{cases}$$

5) $P\{X > 0, Y < 1\} = \int\limits_0^{\infty} e^{-x}dx\int\limits_0^1 e^{-y}dy = -(e^{-1}-1)\int\limits_0^{\infty} e^{-x}dx = 1 - \frac{1}{e} \approx 0.63.$

3.5 Tasodifiy miqdorlarning bog‘liqsizligi

✓ X va Y t.m.lar *bog‘liqsiz* deiladi, agar $\forall x, y \in R$ uchun $\{X < x\}$ va $\{Y < y\}$ hodisalar bog‘liqsiz bo‘lsa.

Endi t.m.lar bog‘liqsizligining zarur va yetarli shartini keltiramiz.

Teorema. X va Y t.m.lar bog‘liqsiz bo‘lishi uchun

$$F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \tag{3.5.1}$$

tenglik bajarilishi zarur va yetarlidir.

Isboti. Zarurligi. Agar X va Y t.m.lar bog‘liqsiz bo‘lsa, $\{X < x\}$ va $\{Y < y\}$ hodisalar ham bog‘liqsiz bo‘ladi. U holda $P\{X < x, Y < y\} = P\{X < x\} \cdot P\{Y < y\}$, ya’ni $F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$.

Yetarliligi. (3.5.1) tenglik o‘rinli bo‘lsin, u holda $P\{X < x, Y < y\} = P\{X < x\} \cdot P\{Y < y\}$ bo‘ladi. Bu tenglikdan X va Y t.m.lar bog‘liqsizligi kelib chiqadi. ■

1-natija. X va Y uzluksiz t.m.lar bog‘liqsiz bo‘lishi uchun

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \tag{3.5.2}$$

tenglik bajarilishi zarur va yetarlidir.

Isboti. Zarurligi. Agar X va Y t.m.lar bog‘liqsiz bo‘lsa, u holda (3.5.1) tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu tenglikni x bo‘yicha, keyin esa y bo‘yicha differensiyallab, $f(x, y) = \frac{d}{dx} F_X(x) \cdot \frac{d}{dy} F_Y(y)$ tengliklarni, ya’ni $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ hosil qilamiz.

Yetarliligi. (3.5.2) tenglik o‘rinli bo‘lsin. Bu tenglikni x bo‘yicha va y bo‘yicha integrallaymiz:

$$\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v) du dv = \int_{-\infty}^{x} f_X(u) du \cdot \int_{-\infty}^{y} f_Y(v) dv .$$

Bu esa $F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$ tenglikning o‘zidir. Teoremaga ko‘ra X va Y t.m.lar bog‘liqsizligi kelib chiqadi. ■

2-natija. X va Y diskret t.m.lar bog‘liqsiz bo‘lishi uchun ihtiyoriy $i=1,2,...n,\ j=1,2,...m$ larda

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\} \qquad (3.5.3)$$

tengliklarning bajarilishi zarur va yetarlidir.

3.4-misol. a) 3.1-misoldagi X va Y t.m.lar bog‘liqmi? b) 3.3-misoldagi X va Y t.m.lar bog‘liqsizmi?

a) $p_{11}=P\{X=0,Y=0\}=\frac{1}{6}$, $P\{X=0\}\cdot P\{Y=0\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, ya’ni $P\{X=0,Y=0\}\neq P\{X=0\}\cdot P\{Y=0\}$. Demak, X va Y t.m.lar bog‘liq.

b) $f(x,y)=\begin{cases} e^{-x-y}, & \text{agar } x\geq 0, y\geq 0 \\ 0, & \text{aks holda,}\end{cases}$ $\quad f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\geq 0, \\ 0, & x<0,\end{cases}$

$f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y}, & y\geq 0, \\ 0, & y<0.\end{cases}$ $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$ tenglik o‘rinli, demak, X va Y t.m.lar bog‘liqsiz.

3.6 Shartli taqsimot qonunlari

(X,Y) ikki o‘lchovlik t.m.ni tashkil etuvchi X va Y t.m.lar bog‘liq bo‘lsa, ularning bog‘liqligini xarakterlovchi shartli taqsimot qonunlari tushunchalari keltiriladi.

✓ (X,Y) ikki o‘lchovli diskret t.m. birgalikdagi taqsimot qonuni $p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}$, $i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}$ bo‘lsin. U holda

$$P\{Y=y_j / X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}},\ i=1,2,...n,\ j=1,2,...m \qquad (3.6.1)$$

ehtimolliklar to‘plami, ya’ni $p(y_1/x_i), p(y_2/x_i),...p(y_m/x_i)$ lar Y t.m.ning $X=x_i$ dagi *shartli taqsimot qonuni* deyiladi. Bu yerda

$$\sum_{j=1}^{m}p(y_j/x_i)=\sum_{j=1}^{m}\frac{p_{ij}}{p_{x_i}}=\frac{1}{p_{x_i}}\sum_{j=1}^{m}p_{ij}=\frac{p_{x_i}}{p_{x_i}}=1.$$

Xuddi shunday,

$$P\{X = x_i / Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_i\}}, \; i = 1,2,...n, \; j = 1,2,...m \qquad (3.6.2)$$

ehtimolliklar to‘plami, ya’ni $p(x_1 / y_j), p(x_2 / y_j),...p(x_n / y_j)$ lar X t.m.ning $Y = y_j$ dagi shartli taqsimot qonuni deyiladi.

3.5-misol. (X,Y) ikki o‘lchovlik t.m.ni birgalikdagi taqsimot jadvali berilgan:

$X \setminus Y$	1	2	3
0.1	0.12	0.08	0.40
0.2	0.16	0.10	0.14

Quyidagilarni toping: a) X av Y t.m.larning alohida taqsimot qonunlari; b) X t.m.ning Y=2 dagi shartli taqsimot qonuni.

a) $p_{x_i} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$ va $p_{y_j} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$ tengliklardan:

X	0.1	0.2
P	0.60	0.40

,

Y	1	2	3
P	0.28	0.10	0.54

b) (3.6.2) formulaga asosan: $P\{X = 0.1 / Y = 2\} = \frac{0.08}{0.18} = \frac{4}{9}$,

$P\{X = 0.2 / Y = 2\} = \frac{0.10}{0.18} = \frac{5}{9}$. X t.m.ning Y=2 dagi shartli taqsimot qonuni quyidagiga teng:

X	0.1	0.2
$P_{Y=2}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$

Endi (X,Y) ikki o‘lchovli t.m. uzluksiz bo‘lgan holni ko‘ramiz. $f(x, y)$ (X,Y) t.m.ning birgalikdagi zichlik funksiyasi, $f_X(x)$ va $f_Y(y)$ lar esa X va Y t.m.larning alohida zichlik funksiyalari bo‘lsin.

- ✓ Y t.m.ning X=x bo‘lgandagi *shartli zichlik funksiyasi*

$$f(y / x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{f(x, y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy}, \; f_X(x) \neq 0 \qquad (3.6.3)$$

ifodaga orqali aniqlanadi.

Shartli zichlik funksiyasi zichlik funksiyasining $f(y/x) \ge 0,\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(y/x)dy = 1$ kabi xossalariga egadir.

- ✓ Xuddi shunday, X t.m.ning $Y=y$ bo‘lgandagi shartli zichlik funksiyasi

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx},\ f_y(y) \ne 0, \qquad (3.6.4)$$

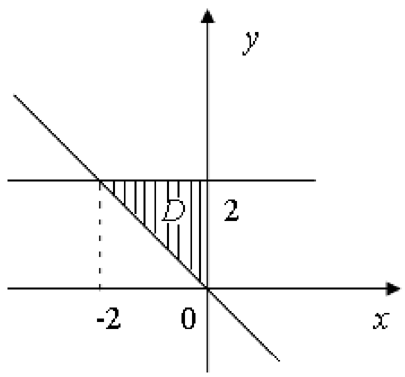
tenglik orqali aniqlanadi.

(3.6.3) va (3.6.4) tengliklarni hisobga olib, $f(x,y)$ zichlik funksiyani quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f(y/x) = f_Y(y) \cdot f(x/y). \qquad (3.6.5)$$

(3.6.5) tenglik zichlik funksiyalarning ko‘paytirish qoidasi(teoremasi) deyiladi.

3.6-misol. (X,Y) ikki o‘lchovli uzluksiz t.m.ning birgalikdagi zichlik funksiyasi berilgan: $f(x,y) = \begin{cases} Cxy, & \text{agar } (x,y) \in D, \\ 0, & \text{agar } (x,y) \notin D, \end{cases}$



25-rasm.

bu yerda $D = \{(x,y): y > -x,\ y < 2,\ x < 0\}$(25-rasm). 1) $f_X(x)$ va $f(x/y)$ larni toping. 2) X va Y t.m.larning bog‘liqligini ko‘rsating.

1) Avval o‘zgarmas son C ni topamiz:

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\int_{-2}^{0}dx\int_{-x}^{2}Cxydy=C\int_{-2}^{0}xdx\left(\frac{y^2}{2}\Big|_{-x}^{2}\right)=C\int_{-2}^{0}x\left(2-\frac{x^2}{2}\right)dx=-2C\,.$$

Bundan $C=\frac{1}{2}$. $f_X(x)$ ni topamiz:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_{-2}^{0}\left(-\frac{1}{2}xy\right)dy=-\frac{1}{4}x(4-x^2),\ \ x\in(-2,0)\,.$$

$f(x/y)$ ni (3.6.4) formulasidan foydalanamiz, buning uchun dastlab $f_Y(y)$ ni hisoblash kerak:

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_{-y}^{0}\left(-\frac{1}{2}xy\right)dx=\frac{y^3}{4},\ \ y\in(0,2),$$

$$f(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{-\frac{1}{2}xy}{\frac{y^3}{4}}=-\frac{2x}{y^2},\ (x,y)\in D.$$

2) X va Y t.m.lar bog‘liqsiz bo‘lsa, $f(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{f_X(x)\cdot f_Y(y)}{f_Y(y)}=f_X(x)$ tenglik o‘rinli. $f_X(x)=-\frac{1}{4}x(4-x^2)$, $x\in(-2,0)$ va $f(x/y)=-\frac{2x}{y^2}$, $(x,y)\in D$ funksiyalarlar bir-biridan farqli bo‘lganligi uchun X va Y t.m.lar bog‘liq.

3.7 Ikki o‘lchovli tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari

(X,Y) tasodifiy vektorning sonli xarakteristikalari sifatida turli tartibdagi momentlar ko‘riladi. Amaliyotda eng ko‘p I va II – tartibli momentlar bilan ifodalanuvchi matematik kutilma, dispersiya va korrelatsion momentlardan foydalaniladi.

✓ Ikki o‘lchovli diskret (X,Y) t.m.ning *matematik kutilmasi* (MX,MY) bo‘lib, bu yerda

$$MX = m_x = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i p_{ij}, \quad MY = m_y = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_i p_{ij} \tag{3.7.1}$$

va $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$.

Agar (X,Y) t.m. uzluksiz bo‘lsa, u holda

$$MX = m_x = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x,y)dxdy, \quad MY = m_y = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f(x,y)dxdy. \tag{3.7.2}$$

✓ X va Y t.m.larning *kovariatsiyasi*

$$K_{XY} = \mathrm{cov}(X,Y) = M\Big((X - m_x)(Y - m_y)\Big) = \mu_{1,1} \tag{3.7.3}$$

tenglik bilan aniqlanadi. Agar (X,Y) t.m. diskret bo‘lsa, uning kovariatsiyasi

$$K_{XY} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (x_i - m_x)(y_j - m_y)p_{ij}, \tag{3.7.4}$$

agar uzluksiz bo‘lsa,

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x,y)dxdy \tag{3.7.5}$$

formulalar orqali hisoblanadi.

Kovariatsiyani quyidagicha hisoblash ham mumkin:

$$K_{XY} = \mathrm{cov}(X,Y) = MXY - MX \cdot MY. \tag{3.7.6}$$

Bu tenglik (3.7.3) formula va matematik kutilmaning xossalaridan kelib chiqadi:

$$K_{XY} = M\Big((X - m_x)(Y - m_y)\Big) = M(XY - Xm_y - Ym_x + m_x m_y) =$$

$$= MXY - m_y MX - m_x MY + m_x m_y = MXY - m_y m_x - m_x m_y + m_x m_y = MXY - MXMY.$$

Kovariatsiya orqali *X* va *Y* t.m.larning dispersiyalarini aniqlash mumkin:

$$DX = \mathrm{cov}(X, X) = M(X - MX)^2 = MX^2 - (MX)^2,$$

$$DY = \mathrm{cov}(Y, Y) = M(Y - MY)^2 = MY^2 - (MY)^2.$$

(*X*,*Y*) vektorning kovariatsiya matritsasi

$$C = M\left\{(X,Y)^{\mathrm{T}} \cdot (X,Y) - (m_x, m_y)^{\mathrm{T}}(m_x, m_y)\right\} =$$

$$= \begin{Vmatrix} DX & \mathrm{cov}(X,Y) \\ \mathrm{cov}(Y,X) & DY \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} K_{XX} & K_{XY} \\ K_{YX} & K_{YY} \end{Vmatrix}$$ - ifoda bilan aiqlanadi.

Kovariatsiyaning xossalari:

1. $K_{XY} = K_{YX}$;
2. Agar $X \perp Y$ bo‘lsa, u holda $K_{XY} = 0$;
3. Agar *X* va *Y* ixtiyoriy t.m.lar bo‘lsa, u holda $D(X \pm Y) = DX + DY \pm 2K_{XY}$;
4. $K_{CX,Y} = CK_{XY} = K_{X,CY}$ yoki $\mathrm{cov}(CX, Y) = C\,\mathrm{cov}(X, Y) = \mathrm{cov}(X, CY)$;
5. $K_{X+C,Y} = K_{XY} = K_{X,Y+C} = K_{X+C,Y+C}$ yoki $\mathrm{cov}(X + C, Y) = \mathrm{cov}(X, Y) = \mathrm{cov}(X, Y + C) = \mathrm{cov}(X + C, Y + C)$;
6. $|K_{XY}| \le \sigma_X \cdot \sigma_Y$.

Isboti. 1. (3.7.3) dan kelib chiqadi.

2. Agar $X \perp Y$ bo‘lsa, u holda $X - m_x$ va $Y - m_y$ lar ham bog‘liqsiz bo‘ladi va matematik kutilmaning xossasiga ko‘ra $K_{XY} = 0$.

3. $D(X \pm Y) = M((X \pm Y) - M(X \pm Y))^2 = M((X - MX) \pm (Y - MY))^2 =$
$= M(X - MX)^2 \pm 2M(X - MX)(Y - MY) + M(Y - MY)^2 = DX + DY \pm 2K_{XY}$.

4. $K_{CX,Y} = M(CX - MCX)(Y - MY) = M\left[C(X - MX)(Y - MY)\right] = CK_{XY}$.

5. $K_{X+C,Y} = M((X + C) - M(X + C))(Y - MY) = M(X + C - MX - C)(Y - MY) =$
$= M(X - MX)(Y - MY) = K_{XY}$

6. 3-xossani $\dfrac{X - m_x}{\sigma_x}$ va $\dfrac{Y - m_y}{\sigma_y}$ t.m.larga qo‘llasak,

$$D\left(\frac{X - m_x}{\sigma_x} \pm \frac{Y - m_y}{\sigma_y}\right) = D\left(\frac{X - m_x}{\sigma_x}\right) + D\left(\frac{Y - m_y}{\sigma_y}\right) \pm$$

$$\pm 2M\left[\left(\frac{X-m_x}{\sigma_x}-M\left(\frac{X-m_x}{\sigma_x}\right)\right)\left(\frac{Y-m_y}{\sigma_y}-M\left(\frac{Y-m_y}{\sigma_y}\right)\right)\right]=$$

$$=1+1\pm 2M\left(\frac{X-m_x}{\sigma_x}\cdot\frac{Y-m_y}{\sigma_y}\right)=2\left(1\pm\frac{K_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}\right).$$

Dispersiya manfiy bo‘lmasligidan $2\left(1\pm\frac{K_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}\right)\geq 0$, ya’ni $|K_{XY}|\leq \sigma_X\cdot\sigma_Y$.■

3-xossaga ko‘ra, agar $K_{XY}\neq 0$ bo‘lsa, X va Y t.m.lar bo‘gliq bo‘ladi. Bu holda X va Y t.m.lar korrelatsiyalangan deyiladi. Lekin $K_{XY}=0$ ekanligidan X va Y t.m.larning bog‘liqsizligi kelib chiqmaydi. Demak, X va Y t.m.larning bog‘liqsizligida ularning korrelatsiyalanmaganligi kelib chiqadi, teskarisi esa har doim ham o‘rinli emas.

✓ X va Y t.m.larning *korrelatsiya koeffitsienti*

$$r_{XY}=\frac{K_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} \tag{3.7.7}$$

formula bilan aniqlanadi.

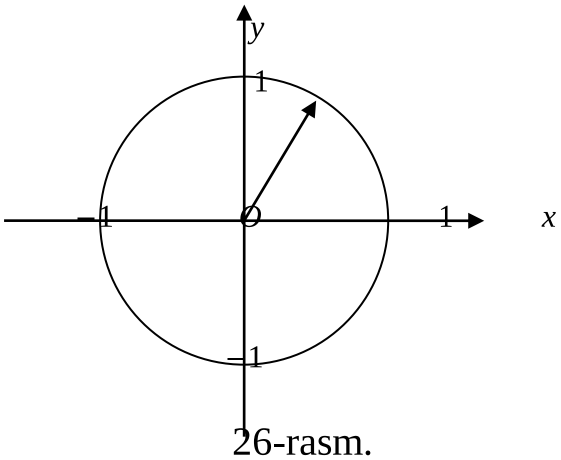
Korrelyatsiya koeffisiyentining xossalari:

1. $|r_{XY}|\leq 1$, ya’ni $-1\leq r_{XY}\leq 1$;
2. Agar $X\perp Y$ bo‘lsa, u holda $r_{XY}=0$;
3. Agar $|r_{XY}|=1$ bo‘lsa, u holda X va Y t.m.lar chiziqli funksional bog‘liq bo‘ladi, teskarisi ham o‘rinli.

Shunday qilib, bogliqsiz t.m.lar uchun $r_{XY}=0$, chiziqli bog‘langan t.m.lar uchun $|r_{XY}|=1$, qolgan hollarda $-1<r_{XY}<1$. Agar $r_{XY}>0$ bo‘lsa, t.m.lar musbat korrelatsiyalangan va aksincha agar $r_{XY}<0$ bo‘lsa, ular manfiy korrelyatsialangan deyiladi.

3.8 Ba’zi muhim ikki o‘lchovlik taqsimotlar

Doiradagi tekis taqsimot. Radiusi $R=1$ bo‘lgan doirada (X,Y) t.m. tekis taqsimotga ega bo‘lsin(26-rasm).



26-rasm.

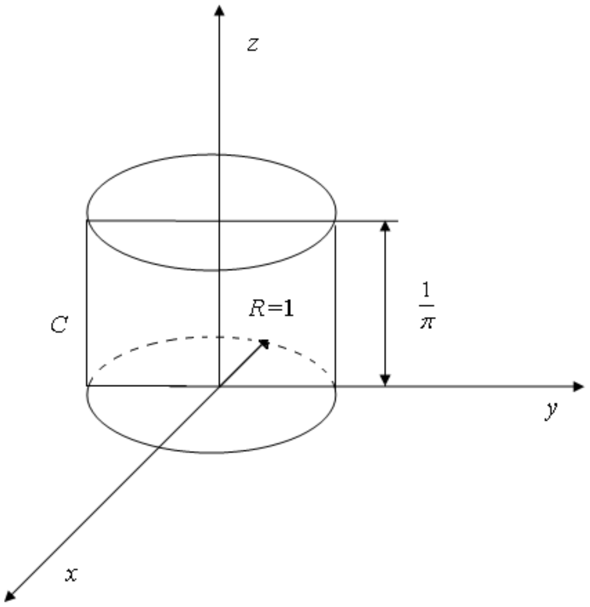
Demak, (X,Y) ning birgalikdagi zichlik funksiyasi

$$f(x,y)=\begin{cases} C, \text{ agar } x^2+y^2\le 1, \\ 0, \text{ agar } x^2+y^2>1. \end{cases}$$

O‘zgarmas C ni

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1, \text{ ya'ni } \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} C\,dxdy=1$$

shartdan aniqlaymiz. Bu karrali integralni geometrik ma'nosidan kelib chiqqan holda hisoblash osonroq(27-rasm).



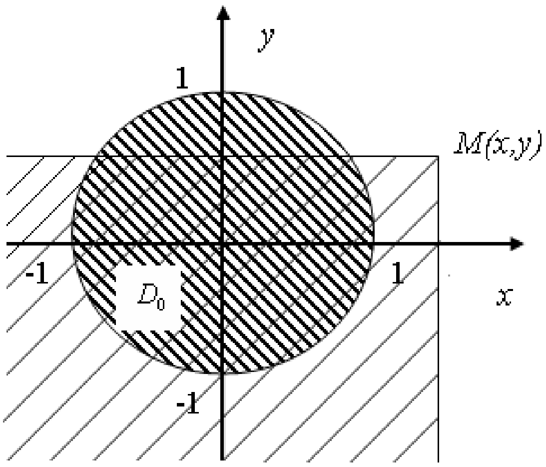
27-rasm.

$f(x,y)$ sirt va OXY tekislik bilan chegaralangan jismning hajmi 1 ga tengdir. Bizning holda bu asosi $\pi R^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi$ va balandligi C bo‘lgan silindr hajmidir $V = \pi C = 1$. Demak, $C = \dfrac{1}{\pi}$ va izlanayotgan zichlik funksiyasi

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, \text{agar } x^2 + y^2 \le 1, \\ 0, \text{agar } x^2 + y^2 \le 1. \end{cases}$$

Unga mos taqsimot funksiyani hisoblaymiz:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dudv = \int_{-1}^{x}\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{y} \frac{1}{\pi}\,dudv\,.$$



28-rasm.

Tabiiyki, bu integral $x^2 + y^2 \le 1$ doira bilan uchi M nuqtada bo‘lgan $D = \{(a,b) \in R^2 : a \le x, b \le y\}$- kvadrantning $\dfrac{1}{\pi}$ aniqligida kesishishidan hosil bo‘lgan soha D_0 yuzasiga tengdir(28-rasm). Tabiiyki, $x \le -1, -\infty < y < +\infty$ da $F(x,y) = 0$, chunki bu holda $D_0 = \varnothing$, endi $x > 1$ va $y > 1$ da $F(x,y) = 1$, chunki bu holda D_0 - soha $x^2 + y^2 \le 1$ doira bilan ustma-ust tushadi.

Endi X va Y larning marginal taqsimot funksuyalari F_X va F_Y larni hisoblaymiz: $-1 < x < 1$ da

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,dudv=\int_{-1}^{x}\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}}\frac{1}{\pi}dudv=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-1}^{x}\left(v\Big|_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}}\right)du=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-1}^{x}2\sqrt{1-u^2}\,du=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\left[\left(x\sqrt{1-x^2}\right)+\arcsin u\Big|_{-1}^{x}\right]=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right).$$

Demak,

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & \text{agar } x\le -1,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\cdot\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right), & \text{agar } -1<x\le 1,\\ 1, & \text{agar } x>1.\end{cases}$$

Aynan shunga o‘xshash

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & \text{agar } y\le -1,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\cdot\left(y\sqrt{1-y^2}+\arcsin y\right), & \text{agar } -1<y\le 1,\\ 1, & \text{agar } y>1.\end{cases}$$

Nihoyat, X va Y larning marginal zichliklarini hisoblaymiz:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2}{\pi}\cdot\sqrt{1-x^2},\quad -1\le x\le 1,$$

va shu kabi

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}dx=\frac{2}{\pi}\cdot\sqrt{1-y^2},\quad -1\le y\le 1.$$

Ko‘rinib turibdiki, $f(x,y)\ne f_X(x)\cdot f_Y(y)$, demak, X va Y bog‘liq t.m.lar ekan.

Shuni ta’kidlab o‘tish lozimki, tekis taqsimotga ega bo‘lgan har qanday (X,Y) juftlik doimo bog‘liq bo‘ladi deb aytish noto‘g‘ridir. Chunki X va Y larning bog‘liqlik xossalari ular qanday sohada tekis taqsimotga ega ekanligiga bog‘liqdir. Shu boisdan keyingi taqsimotni ko‘rib o‘tamiz.

Kvadratdagi tekis taqsimot. (X,Y) juftlik $[0,1]\times[0,1]$ kvadratda tekis taqsimotga ega bo‘lsin. U holda ular birgalikdagi taqsomot funksiyasi ko‘rinishi quyidagidek bo‘ladi:

$$F(x,y)=\begin{cases}0, \ x,y\le 0,\\ x\cdot y, \ 0<x,y<1,\\ 1, \ x,y\ge 1.\end{cases}$$

Bundan

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=F(x,1)=\begin{cases}0, \ x\le 0,\\ x, \ 0<x<1,\\ 1, \ x\ge 1.\end{cases}$$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=F(1,y)=\begin{cases}0, \ y\le 0,\\ y, \ 0<y<1,\\ 1, \ y\ge 1.\end{cases}$$

Demak, barcha $x,y\in R^1$ lar uchun $F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$, ya’ni X va Y bog‘liq emas ekan.

Ikki o‘lchovlik normal(Gauss) taqsimoti. (X,Y) tasodifiy vektor ikki o‘lchovli normal taqsimotga ega bo‘lsin. U holda (X,Y) ning birgalikdagi zichlik funksiyasi

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^{\ 2}}-2r\cdot\frac{(x-a_1)}{\sigma_1}\cdot\frac{(y-a_2)}{\sigma_2}+\frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^{\ 2}}\right]\right\}.$$

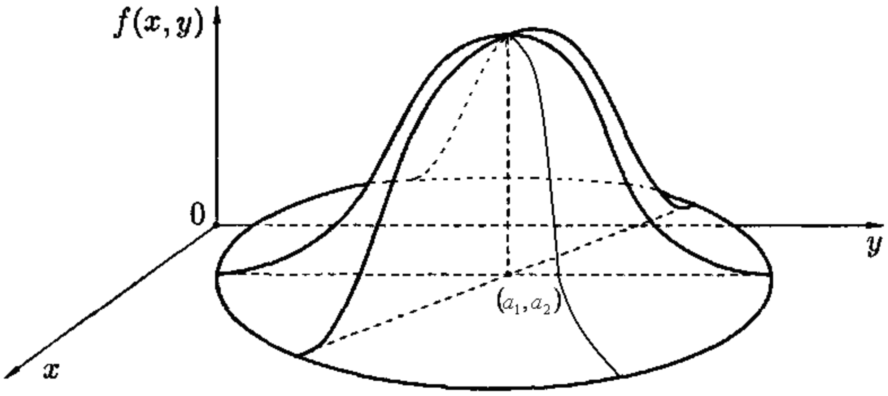
Geometrik nuqtayi nazardan $f(x,y)$ grafigi cho‘qqisi (a_1,a_2) nuqtada joylashgan «tog‘» shaklini bildiradi(29-rasm). Agarda biz bu tog‘ni OXY tekisligiga пarallel tekislik bilan kesadigan bo‘lsak, u holda kesilish chiziqlari quyidagi ellipslardan iborat bo‘ladi:

$\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^{\ 2}}-2r\cdot\frac{(x-a_1)}{\sigma_1}\cdot\frac{(y-a_2)}{\sigma_2}+\frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^{\ 2}}=C$ -konstanta, bu yerda $a_1=MX$, $a_2=MY$, $\sigma_1^{\ 2}=DX$, $\sigma_2^{\ 2}=DY$, va $r=r_{X,Y}$ -korrelatsiya koeffitsientidir. Agar $r=0$ bo‘lsa, bu chiziqlar aylanalardan iborat bo‘lib qoladi. Biz r ning aynan korrelatsiya koeffisienti bo‘lishiga ishonch hosil qilish maqsadida

$$Z_1 = \frac{X - a_1}{\sigma_1^{\ 2}} \ \text{va} \ Z_2 = \frac{Y - a_2}{\sigma_2^{\ 2}}$$

yangi t.m.larni kiritamiz. Tabiiyki, $MZ_k = 0, DZ_k = 1, k = 1,2$. U holda (Z_1, Z_2) ning zichlik funksiyasi

$$g(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \cdot \exp\left\{ -\frac{z_1^{\ 2} - 2r \cdot z_1 z_2 + z_2^{\ 2}}{2(1-r^2)} \right\}.$$



29-rasm.

Endi korrelatsiya koeffitsientini hisoblaymiz:

$$r_{X,Y} = Cov(Z_1, Z_2) = MZ_1 Z_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} z_1 z_2 g(z_1, z_2) dz_1 dz_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{\infty} z_2 e^{-\frac{z_2^{\ 2}}{2}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} (z_1 - rz_2 + rz_2) \cdot \exp\left\{ -\frac{(z_1 - rz_2)^2}{2(1-r^2)} \right\} dz_1 \right) dz_2 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z_2 \cdot e^{-\frac{z_2^{\ 2}}{2}} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{1-r^2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (z_1 - rz_2) \cdot \exp\left\{ -\frac{(z_1 - rz_2)^2}{2(1-r^2)} \right\} \cdot d(z_1 - rz_2) \right] dz_2 +$$

$$+ \frac{r}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} z_2^{\ 2} \cdot e^{-\frac{z_2^{\ 2}}{2}} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{1-r^2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{(z_1 - rz_2)^2}{2(1-r^2)} \right\} d(z_1 - rz_2) \right] dz_2 = r.$$

Oxirgi tenglikni hosil qilishda quyidagi integrallardan foydalandik:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{1-r^2}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} u\cdot e^{-\frac{u^2}{2\left(1-r^2\right)}}du=0, \quad u=z_1-rz_2,$$

-markazlashtirilgan normal t.m.ning matematik kutilmasi;

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{1-r^2}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2\left(1-r^2\right)}}du=1, \quad u=z_1-rz_2,$$

-zichlik funksiya integrali;

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} z_2{}^2\cdot e^{-\frac{z_2{}^2}{2}}dz_2=1,$$

-standart normal t.m. dispersiyasi.

Demak, $r(X,Y)=r$ ekan. Agar ikki normal taqsimotga ega bo‘lgan X va Y t.m.lar bog‘liq bo‘lmasa, $r=0$ bo‘lishi r ning xossasidan kelib chiqadi. Endi shu t.m.lar uchun $r=0$ bo‘lsin. U holda

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1{}^2}+\frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2{}^2}\right]\right\}=f_X(x)\cdot f_Y(y),$$

bu yerda

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\cdot\exp\left\{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1{}^2}\right\}, \quad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\cdot\exp\left\{-\frac{(y-a_2)^2}{2\sigma_2{}^2}\right\}$$

funksiyalar $N\left(a_1,\sigma_1{}^2\right), N\left(a_2,\sigma_2{}^2\right)$ normal t.m.lar zichlik funksiyalaridir. Demak, t.m.lar korrelyatsiyalanmaganligidan ularning bog‘liqsizligi ham kelib chiqar ekan. Bu hol ikki o‘lchovlik normal taqsimotni boshqa taqsimotlardan ajratib turadi.

3.9 Xarakteristik funksiyalar va uning xossalari

Taqsimot funksiya bilan bir qatorda u haqidagi hamma ma’lumotni o‘z ichiga oluvchi xarakteristik funksiyalardan ham foydalaniladi. Xarakteristik funksiya yordamida bog‘liqsiz t.m.larning yig‘indisining taqsimotini topish, sonli xarakteristikalarni hisoblash bir muncha osonlashadi.

✓ X t.m.ning *xarakteristik funksiyasi* e^{itX} t.m.ning matematik kutilmasi bo‘lib, uni $\varphi_X(t)$ yoki $\varphi(t)$ orqali belgilaymiz. Shunday qilib, ta’rifga ko‘ra:

$$\varphi(t) = Me^{itX}. \tag{3.9.1}$$

Agar X t.m. $x_1, x_2, ...x_n, ...$ qiymatlarni $p_k = P\{X = x_k\}, k = 1, 2, ...$ ehtimolliklar bilan qabul qiluvchi diskret t.m. bo‘lsa, u holda uning xarakteristik funksiyasi

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itx_k} p_k \tag{3.9.2}$$

formula orqali, agar zichlik funksiyasi $f(x)$ bo‘lgan uzluksiz t.m. bo‘lsa, u holda uning xarakteristik funksiyasi

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx \tag{3.9.3}$$

formula orqali aniqlanadi.

Xarakteristik funksiyaning xossalari:

1. Barcha $t \in R$ uchun quyidagi tengsizlik o‘rinli:

$$|\varphi(t)| \le \varphi(0) = 1.$$

2. Agar $Y = aX + b$ bo‘lsa, bu yerda a va b o‘zgarmas sonlar, u holda

$$\varphi_Y(t) = e^{itb}\varphi_X(at).$$

3. Agar X va Y t.m.lar bog‘liqsiz bo‘lsa, u holda X+Y yig‘indining xarakteristik funksiyasi X va Y t.m.larning xarakteristik funksiyalari ko‘paytmasiga teng:

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t).$$

4. Agar X t.m.ning k-tartibli boshlang‘ich momenti $\alpha_k = MX^k$ mavjud bo‘lsa, u holda unga mos xarakteristik funksiyaning k-tartibli hosilasi mavjud bo‘lib, uning t=0 dagi qiymati

$$\varphi_X^{(k)}(0) = i^k M(X^k) = i^k \cdot \alpha_k .$$

Isboti. 1. $|\varphi(t)| = |Me^{itX}| \le M|e^{itX}| = M1 = 1$, chunki $|e^{itX}| = |\cos tX + i\sin tX| = \sqrt{\cos^2 tX + \sin^2 tX} = 1$. $\varphi(0) = Me^0 = M1 = 1$.

2. $\varphi_Y(t) = Me^{itY} = Me^{it(aX+b)} = M(e^{itb}e^{iaXt}) = e^{itb}Me^{iatX} = e^{itb}\varphi_X(at)$.

3. $\varphi_{X+Y}(t) = Me^{it(X+Y)} = M(e^{itX}e^{itY}) = Me^{itX}\cdot Me^{itY} = \varphi_X(t)\cdot\varphi_Y(t)$. Bu xossa n ta bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlar yig‘indisi uchun ham o‘rinlidir.

4. Hisoblashdan ko‘rinadiki, $\varphi_X^{(k)}(t) = \dfrac{d^k Me^{itX}}{dt^k} = i^k M(X^k e^{itX})$. Demak t=0 bo‘lsa, $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k M(X^k) = i^k \cdot \alpha_k$. ■

4-xossadan $\alpha_k = i^{-k}\varphi_X^{(k)}(0)$.

$$\alpha_1 = MX = -i\varphi'(0);\ \alpha_2 = MX^2 = -\varphi''(0);$$
$$DX = \alpha_2 - \alpha_1^2 = -\varphi''(0) + (\varphi'(0))^2 . \qquad (3.9.4)$$

3.7-misol. Agar $X \sim Bi(n;p)$ bo‘lsa, u holda X t.m.ning xarakteristik funksiyasi, matematik kutilmasi va dispersiyasini toping.

X t.m. 0,1,2,…,n qiymatlarni $p_k = P\{X = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$ $k = 0,1,...,n$ ehtimolliklar bilan qabul qiladi. (3.9.2) va Nyuton binomi formulalaridan foydalansak, $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk}C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (e^{it}\cdot p)^k q^{n-k} = (e^{it}p+q)^n$, ya’ni X t.m.ning xarakteristik funksiyasi $\varphi(t) = (e^{it}p+q)^n$ ifoda bilan aniqlanishiga ishonch hosil qilamiz. (3.9.4) formulaga ko‘ra: $MX = -i(n(e^{it}p+q)^{n-1}\cdot pe^{it}\cdot i)\big|_{t=0} = np$ va shu kabi $DX = npq$.

3.8-misol. Agar $X \sim N(a,\sigma)$ bo‘lsa, u holda X ning xarakteristik funksiyasi, matematik kutilmasi va dispersiyasini toping.

(3.9.3) formulaga asosan: $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx =$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2-2(a+it\sigma^2)x+a^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2-2x(a+it\sigma^2)+(a+it\sigma^2)^2+a^2-(a+it\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-(a+it\sigma^2))^2}{2\sigma^2}}\cdot e^{\frac{2ait\sigma^2+(it\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{2ait\sigma^2-t^2\sigma^4}{2\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-(a+it\sigma^2))^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{iat-\frac{t^2\sigma^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x-(a+it\sigma^2)}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}d\left(\frac{x-(a+it\sigma^2)}{\sqrt{2}\sigma}\right)\cdot\sqrt{2}\sigma=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{iat-\frac{t^2\sigma^2}{2}}\sqrt{\pi}=e^{iat-\frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}\ \text{Puasson integrali}\right)$. Shunday qilib, agar $X \sim N(a,\sigma)$ bo‘lsa, u holda $\varphi(t)=e^{iat-\frac{t^2\sigma^2}{2}}$. Endi X t.m.ning matematik kutilmasi va dispersiyasini hisoblaymiz.

$$MX=\left[-i\varphi'(0)\right]=-ie^{iat-\frac{t^2\sigma^2}{2}}(ia-t\sigma^2)\Big|_{t=o}=-i\cdot 1\cdot ia=a\ ,$$

$$DX=\left[-\varphi''(0)-(\varphi'(0))^2\right]=-\left(-\sigma^2e^{iat-\frac{t^2\sigma^2}{2}}+(ia-t\sigma^2)^2e^{iat-\frac{t^2\sigma^2}{2}}\right)\Big|_{t=o}+(ia)^2=$$

$$=\sigma^2-i^2a^2+i^2a^2=\sigma^2.$$

III bobga doir misollar

1. (X,Y) ikki o‘lchovli uzluksiz t.m.ning birgalikdagi zichlik funksiyasi $f(x,y)=\frac{C}{(1+x^2)(1+y^2)}$ ko‘rinishida berilgan bo‘lsa, quyidagilarni toping:

1) o‘zgarmas son C; 2) $F(x,y)$; 3) $P\{X<1, Y<1\}$; 4) $f(x)$va $f(y)$.

2. Agar (X,Y) vektor taqsimoti quyidagicha bo‘lsa:

Y	-1	0	1
0	0.1	0.2	0.1
1	0.2	0.3	0.1

$Z=XY$ ning matematik kutilmasini hisoblang.

3. (X,Y) ikki o‘lchovlik uzluksiz t.m. uchlari O(0,0), A(0,4), B(4,0) nuqtalarda bo‘lgan uchburchak ichida tekic taqsimlangan(ya’ni $f(x,y)=c$). Quyidagilarni hisoblang: 1) birgalikdagi zichlik funksiyasi $f(x,y)$; 2) $f(x)$va $f(y)$; 3) $A=\{0<X<1,\ 1<Y<3\}$ hodisaning ehtimolligini.

4. (X,Y) tasodifiy vektor zichligi $f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1, \\ 0, & \text{aks holda} \end{cases}$ bo‘lsa, MX va MY larni hisoblang.

5. Agar (X,Y) tasodifiy vektorning taqsimoti

Y \ X	0	1
0	1/8	0
1	1/4	1/8
2	1/8	3/8

bo‘lsa, u holda $M(X+Y)=MX+MY$, $D(X+Y)=DX+DY+2Cov(x,y)$ tengliklar o‘rinli ekanligini ko‘rsating.

6. Quyida (X,Y) ikki o‘lchovli uzluksiz t.m.ning birgalikdagi zichlik funksiyasi berilgan: $f(x,y)=\begin{cases} Cxy, & \text{agar } (x,y)\in D, \\ 0, & \text{agar } (x,y)\notin D \end{cases}$, bu erda D tekislikdagi quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi soha: $\begin{cases} y>-x, \\ y<2, \\ x<0. \end{cases}$ O‘zgarmas son C ni toping, X va Y t.m.lar bog‘liq ekanligini ko‘rsating.

7. Agar $X\sim Bi(2;0.2),\ Y\sim Bi(1;0.8)$ va $X\perp Y$ bo‘lsa, u holda $Z=X+Y$ t.m.ning taqsimot funksiyasini toping va $F_Z(1)$ ni hisoblang.

8. Agar X va Y t.m.larning birgalikdagi taqsimoti

X \ Y	-1	0	1	2
-1	0.05	0.3	0.15	0.05
1	0.1	0.05	0.25	0.05

bo‘lsa, u holda $Z=|Y-X|$ va $U=Y^2-X^2$ larning taqsimotlarini toping.

9. (X,Y) ikki o‘lchovlik diskret t.m.ning birgalikdagi taqsimot jadvali berilgan:

X \ Y	1	2	3	4
1	0.07	0.04	0.11	0.11
2	0.08	0.11	0.06	0.08
3	0.09	0.13	0.10	0.02

X va Y t.m.lar bog‘liq yoki bog‘liqsizligini tekshiring va cov(X,Y) ni hisoblang.

10. X va Y t.m.larning birgalikdagi zichlik funksiyasi berilgan:

$$f(x,y)=\begin{cases} a(1-xy^3), & \text{agar } |x|\le 1, |y|\le 1, \\ 0, & \text{aks holda.} \end{cases}$$

O‘zgarmas son a va korrelatsiya koeffitsientini hisoblang.

11. X va Y t.m.larning birgalikdagi zichlik funksiyasi berilgan:

$$f(x,y)=\begin{cases} C(x+y), & \text{agar } 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, \\ 0, & \text{aks holda.} \end{cases}$$

1) X va Y t.m.lar bog‘liqmi? 2) X va Y t.m.larning matematik kutilmasi va dispersiyasini hisoblang.

12. (X,Y) tasodifiy vektorning birgalikdagi taqsimoti

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & x<0, y<0, \\ \dfrac{xy}{8}, & 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 4, \\ 1, & x>2, y>2, \end{cases}$$

bo‘lsa, X va Y o‘zaro bog‘liqmi?

13. Agar (X,Y) tasodifiy vektorning birgalikdagi taqsimoti berilgan bo‘lsa, $Cov(X,Y)$ ni hisoblang.

X \ Y	1	2
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
2	0	$\frac{1}{3}$

14. $X \sim R(-a,a)$ bo‘lsa, X va $Y=X^2$ lar uchun $Cov(X,Y)$ ni hisoblang. X va Y lar bog‘liqmi?

15. Agar X va Y bog‘liqsiz, bir xil taqsimlangan va $MX^2,\ MY^2<\infty$ bo‘lsa, u holda $Cov(X+Y, X-Y)=0$ ekanini isbotlang.

16. Agar $X \sim E(1)$, $DY=2$ va $D(X-Y)=3$ bo‘lsa, r_{XY} ni hisoblang.

17. Agar $\begin{cases} X: & -\dfrac{\pi}{2} & 0 & \dfrac{\pi}{2} \\ P_X: & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \end{cases}$ bo‘lsa, $Y=\sin X$ va $Z=\cos X$ uchun $Cov(Y,Z)=0$, ammo Y va Z bog‘liqligini ko‘rsating.

18. Agar (X,Y) zichlik funksiyasi $f(x,y)=e^{-x-y}$, $x,y\ge 0$ bo‘lsa, shartli zichlik funksiyalar $f(x/Y=y)$ va $g(y/X=x)$ ni hisoblang.

19. Agar (X,Y) tasodifiy vektorning birgalikdagi zichlik funksiyasi $f(x,y)=\begin{cases} x+2y, & (x,y)\in[0,1]\times[0,1], \\ 0, & \text{aks holda} \end{cases}$ bo‘lsa, $M(Y/X=x)$ ni $x=1$ da hisoblang.

20. Agar (X,Y) ning birgalikdagi taqsimoti bo‘lsa, r_{XY} ni hisoblang .

$X \backslash Y$	1	2	3
1	2/9	1/9	0
2	1/9	0	1/9
3	2/9	1/9	1/9

21. Agar *X* va *Y* t.m.larning birgalikdagi zichlik funksiyasi $f(x,y)=\dfrac{1}{3\pi}e^{-\frac{x^2+4y^2}{6}}$ bo‘lsa, u holda (*X*,*Y*) tasodifiy nuqtaning $\{|x|\le 1,\ |y|\le 2\}$ sohaga tushishi ehtimolligini toping.

22. [*a*,*b*] oraliqda tekis taqsimlangan *X* t.m.ning xarakteristik funksiyasini toping.

23. Agar *X* t.m. *a* parametrli Puasson taqsimotiga ega bo‘lsa, uning matematik kutilmasini xarakteristik funksiya yordamida hisoblang.

24. X t.m.ning zichlik funksiyasi berilgan: $f(x)=\begin{cases} -2x, & \text{agar } x\in[-1,0], \\ 0, & \text{agar } x\notin[-1,0], \end{cases}$ $\varphi_X(t)$ ni hisoblang.

25. Agar *X* va *Y* t.m.larning birgalikdagi taqsimoti quyidagi jadval yordamida berilgan bo‘lsa, *P*(*X*=1/*Y*=1), *P*(*X*=0/*Y*=1), *MX* va *MY* larni toping.

Y \ X	0	1	2
0	1/4	1/8	1/8
1	1/8	1/8	1/4

IV bob. Tasodifiy miqdorlarning funksiyalari

4.1 Bir argumentning funksiyalari

✓ Agar X t.m.ning har bir qiymatiga biror qoida bo‘yicha mos ravishda Y t.m.ning bitta qiymati mos qo‘yilsa, u holda Y ni X tasodifiy argumentning funksiyasi deyiladi va $Y=\varphi(X)$ kabi yoziladi.

X diskret t.m. $x_1, x_2, ..., x_n$ qiymatlarni mos $p_1, p_2, ..., p_n$ ehtimolliklar bilan qabul qilsin: $p_i = P\{X = x_i\}, i = 1, 2, ..., n$. Ravshanki, $Y=\varphi(X)$ t.m. ham diskret t.m. bo‘ladi va uning qabul qiladigan qiymatlari $y_1=\varphi(x_1)$, $y_2=\varphi(x_2), \ldots, y_n=\varphi(x_n)$, mos ehtimolliklari esa $p_1, p_2, ..., p_n$ bo‘ladi. Demak, $p_i = P\{Y = y_i\} = P\{Y=\varphi(x_i)\}, i=1,2,...,n$. Shuni ta’kidlash lozimki, X t.m.ning har xil qiymatlariga mos Y t.m.ning bir xil qiymatlari mos kelishi mumkin. Bunday hollarda qaytarilayotgan qiymatlarning ehtimolliklarini qo‘shish kerak bo‘ladi.

$Y=\varphi(X)$ t.m.ning matematik kutilmasi va dispersiyasi quyidagi tengliklar orqali aniqlanadi:

$$MY = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_i, \quad DY = \sum_{i=1}^{n} (\varphi(x_i) - MY)^2 p_i \ .$$

4.1-misol. X diskret t.m.ning taqsimot jadvali berilgan:

X	-1	1	2
p	0.1	0.2	0.6

Agar: 1) $Y = X^2$; 2) $Y = 2X+10$ bo‘lsa, MY ni hisoblang.

1) Y t.m.ning qabul qiladigan qiymatlari: $y_1=\varphi(x_1)=(-1)^2=1, \quad y_2=1^2=1,$ $y_3=2^2=4$, ya’ni uning qabul qiladigan qiymatlai 1 va 4. Y t.m. X t.m.ning -1 va 1 qiymatlarida 1 qiymat qabul qilganligi uchun

$p_1 = P\{Y=1\} = P\{X=-1\} + P\{X=1\} = 0.1+0.3 = 0.4$,

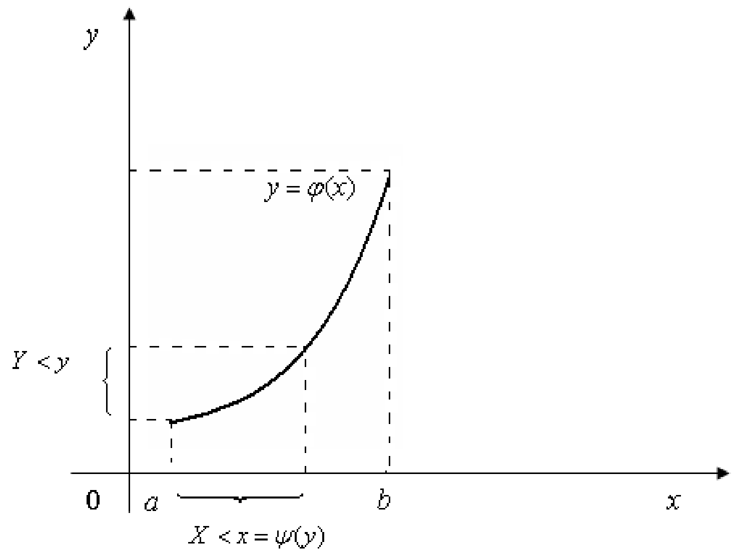
$p_2 = P\{Y=4\} = P\{X=2\} = 0.6$. Demak, $\begin{cases} Y: & 1, \quad 4 \\ P: & 0.4, \ 0.6 \end{cases}$ va

$MY = 1\cdot 0.4 + 4 \cdot 0.6 = 2.8$.

2) Y t.m.ning taqsimot qonuni quyidagi ko‘rinishga ega: $\begin{cases} Y: & 8, \quad 12, \quad 14 \\ P: & 0.1, \ 0.3, \ 0.6 \end{cases}$.

$MY = 8\cdot 0.1 + 12\cdot 0.3 + 14\cdot 0.6 = 12.8$.

Zichlik funksiyasi $f(x)$ bo‘lgan X uzluksiz t.m. berilgan bo‘lsin. Y t.m. esa X t.m.ning funksiyasi $Y=\varphi(X)$. Y t.m.ning taqsimotini topamiz. $Y=\varphi(X)$ funksiya X t.m.ning barcha qiymatlarida uzluksiz, (a,b) intervalda qat’iy o‘suvchi va differensiallanuvchi bo‘lsin, u holda $y=\varphi(x)$ funksiyaga teskari $x=\psi(y)$ funksiya mavjud. Y t.m.ning taqsimot funksiyasi $G(y)=P\{Y<y\}$ formula orqali aniqlanadi. $\{Y<y\}$ hodisa $\{X<\psi(y)\}$ hodisaga ekvivalent (30-rasm).



30-rasm.

Yuqoridagilarni e’tiborga olsak,

$$G(y)=P\{Y<y\}=P\{X<\psi(y)\}=F_X(\psi(y))=\int\limits_a^{\psi(y)} f(x)dx. \qquad (4.1.1)$$

(4.1.1) ni y bo‘yicha differensiallaymiz va Y t.m.ning zichlik funksiyasini topamiz: $g(y)=\dfrac{G(y)}{dy}=f(\psi(y))\cdot\dfrac{d}{dy}(\psi(y))=f(\psi(y))\psi'(y)$.

Demak,

$$g(y)=f(\psi(y))\psi'(y). \qquad (4.1.2)$$

Agar $y=\varphi(x)$ funksiya (a,b) intervalda qat’iy kamayuvchi bo‘lsa, u holda $\{Y<y\}$ hodisa $\{X<\psi(y)\}$ hodisaga ekvivalent. Shuning uchun,

$$G(y)=\int_{\psi(y)}^{b} f(x)dx=-\int_{b}^{\psi(y)} f(x)dx.$$

Bu yerdan,

$$g(y)=-f(\psi(y))\psi^{'}(y) \qquad (4.1.3)$$

Zichlik funksiya manfiy bo‘lmasligini hisobga olib, (4.1.2) va (4.1.3) formulalarni umumlashtirish mumkin:

$$g(y)=f(\psi(y))\left|\psi^{'}(y)\right|. \qquad (4.1.4)$$

Agar $y=\varphi(x)$ funksiya (a,b) intervalda monoton bo‘lmasa, u holda $g(y)$ ni topish uchun (a,b) intervalni n ta monotonlik bo‘lakchalarga ajratish, har biri bo‘yicha teskari funksiyasi ψ_i ni topish va quyidagi formuladan foydalanish kerak:

$$g(y)=\sum_{i=1}^{n} f(\psi_i(y))\left|\psi_i^{'}(y)\right|. \qquad (4.1.5)$$

Agar X zichlik funksiyasi $f(x)$ bo‘lgan uzluksiz t.m. bo‘lsa, u holda $Y=\varphi(X)$ t.m.ning sonli xarakteristikalarini hisoblash uchun Y t.m.ning taqsimotini qo‘llash shart emas:

$$MY=M(\varphi(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)f(x)dx,$$

$$DY=D(\varphi(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}(\varphi(x)-MY)^2 f(x)dx. \qquad (4.1.6)$$

4.2-misol. X zichlik funksiyasi $f(x)$ bo‘lgan uzluksiz t.m. bo‘lsa, Y=-5X+2 t.m.ning zichlik funksiyasini toping.

$y=-5x+2$ funksiya $(-\infty;+\infty)$ intervalda monoton kamayuvchi. Teskari funksiyasi $x=\frac{1}{5}(2-y)=\psi(y)$ mavvud, $\psi^{'}(y)=-\frac{1}{5}$. U holda (4.1.4) formulaga ko‘ra, $g(y)=f\left(\frac{2-y}{5}\right)\cdot\left|-\frac{1}{5}\right|=\frac{1}{5}f\left(\frac{2-y}{5}\right)$, $y\in(-\infty;+\infty)$.

4.2-misol yordamida taqsimot va zichlik funksiyalarning formulalarini tekshiramiz:

$$G(y)=P\{Y<y\}=P\{-5X+2<y\}=P\left\{X>\frac{2-y}{5}\right\}=$$

$$=1-P\left\{X\le\frac{2-y}{5}\right\}=1-\left(P\left\{X<\frac{2-y}{5}\right\}+P\left\{X=\frac{2-y}{5}\right\}\right)=$$

$$=1-P\left\{X<\frac{2-y}{5}\right\}=1-F_X\left(\frac{2-y}{5}\right).$$

Demak, $G(y)=1-F_X\left(\frac{2-y}{5}\right)$, u holda $g(y)=G'(y)=\left(1-F_X\left(\frac{2-y}{5}\right)\right)'_y=$

$=-f_X\left(\frac{2-y}{5}\right)\cdot\left(\frac{2-y}{5}\right)'_y=-f\left(\frac{2-y}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)$, ya’ni

$g(y)=\frac{1}{5}f\left(\frac{2-y}{5}\right),\ y\in(-\infty;+\infty)$.

Y=*aX*+*b* chiziqli almashtirish taqsimot xarakterini o‘zgartirmaydi: normal t.m.dan normal t.m.; tekis t.m.dan tekis t.m. hosil bo‘ladi.

4.3-misol. X t.m. $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ intervalda tekis taqsimlangan. $Y=\cos X$ t.m.ning matematik kutilmasini a) $g(y)$ zichlik funksiyani topib; b) $g(y)$ zichlik funksiyani topmasdan hisoblang.

a) X t.m.ning zichlik funksiyasi $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi},\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\\ 0,\ x\notin\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$ bo‘ladi. $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ intervalda $y=\cos x$ funksiya monoton emas: $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ intervalda o‘suvchi, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ intervalda esa kamayuvchi. Birinchi intervalda teskari funksiya, $x_1=-\arccos y=\psi_1(y)$ ikkinchi intervalda esa $x_2=\arccos y=\psi_2(y)$ ga teng. U holda (4.1.5) formulaga asosan

$$g(y)=f(\psi_1(y))\left|\psi_1^{'}(y)\right|+f(\psi_2(y))\left|\psi_2^{'}(y)\right|=\frac{1}{\pi}\left|\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right|+\frac{1}{\pi}\left|-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right|=\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}$$

Demak,

$$g(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & \text{agar } 0<y<1,\\ o, & \text{agar } y\le 0 \text{ yoki } y\ge 1.\end{cases}$$

U holda

$$MY=\left[\int_{-\infty}^{+\infty} yg(y)dy\right]=\int_0^1 y\cdot\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}dy=$$

$$=-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-y^2)=-\frac{1}{\pi}\cdot 2\sqrt{1-y^2}\,\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}.$$

b) (4.1.6) formuladan foydalanamiz:

$$MY=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot\frac{1}{\pi}dx=\frac{1}{\pi}\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\pi}(1-(-1))=\frac{2}{\pi}.$$

4.2 Ikki argumentning funksiyalari

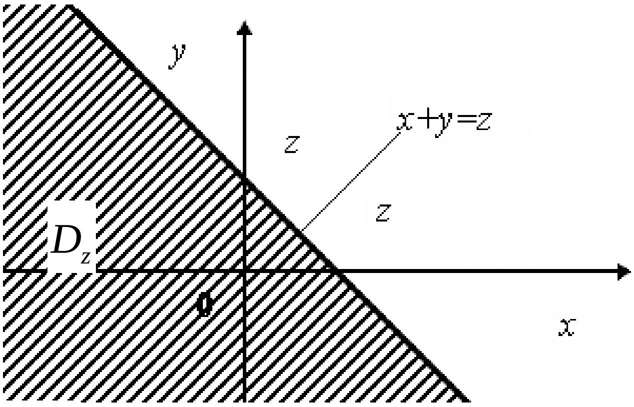
✓ Agar *X* va *Y* t.m.lar qabul qiladigan qiymatlarining har bir juftligiga biror qoidaga ko‘ra *Z* t.m. mos qo‘yilsa, u holda *Z* t.m. *X* va *Y* ikki tasodifiy argumentning funksiyasi deyiladi va $Z=\varphi(X,Y)$ kabi belgilanadi.

$Z=\varphi(X,Y)$ funksiyaning amaliyotda muhim ahamiyatga ega bo‘lgan xususiy holi $Z=X+Y$ t.m.ning taqsimotini topamiz.

(X,Y) ikki o‘lchovli uzluksiz t.m. $f(X,Y)$ birgalikdagi zichlik funksiyaga ega bo‘lsin. (3.4.3) formuladan foydalanib, $Z=X+Y$ t.m.ning taqsimot funksiyasini topamiz:

$$F_Z(z)=P\{Z<z\}=P\{X+Y<z\}=\iint_{D_z} f(x,y)dxdy\,, \qquad (4.2.1)$$

bu yerda $D_z=\{(x,y): x+y<z\}$ (31-rasm).



31-rasm.

U holda $F_Z(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{z-x} f(x,y)dy\right)dx$. Hosil bo‘lgan tenglikni z o‘zgaruvchi bo‘yicha differensiallab, $Z=X+Y$ t.m. uchun zichlik funksiyaga ega bo‘lamiz:

$$f_Z(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx. \qquad (4.2.2)$$

Agar X va Y t.m.lar bog‘liqsiz bo‘lsa, $f(x,y)=f(x)\cdot f(y)$ tenglik o‘rinli bo‘ladi va (4.2.2) formula

$$f_Z(z)=f_{X+Y}(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(z-x)dx \qquad (4.2.3)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

✓ Bog‘liqsiz t.m.lar yig‘indisining taqsimoti shu t.m.lar taqsimotlarining *kompozitsiyasi* deyiladi. Z t.m.ning zichlik funksiyasi $f_{X+Y}=f_X*f_Y$ ko‘rinishda yoziladi, bu yerda * - kompozitsiya belgisi.

Xuddi shunday agar $Z=Y+X$ ko‘rinishda yozib olsak, $f_Z(z)$ uchun boshqa formulaga ega bo‘lamiz:

$$f_Z(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy,$$

agar X va Y t.m.lar bog‘liqsiz bo‘lsa, u holda

$$f_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(z-y) f_2(y) dy .$$

$Z = X - Y, Z = X \cdot Y$ t.m.larning taqsimotlarini topish ham xuddi shunga o‘xshash amalga oshiriladi.

4.4-misol. Agar X va Y t.m.lar bog‘liqsiz bo‘lib, $X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(0,1)$ bo‘lsa, $Z = X + Y$ ning taqsimotini toping. (4.2.3) formulaga asosan:

$$f_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} dx = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2x^2-2zx+z^2}{2}} dx = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2\left(\left(x-\frac{z}{2}\right)^2+\frac{z^2}{4}\right)}{2}} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{\frac{z^2}{4}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2} d\left(x - \frac{z}{2}\right) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\left(\sqrt{2}\right)^2}} ,$$

ya’ni $f_{X+Y}(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\left(\sqrt{2}\right)^2}}$. Demak, bog‘liqsiz, normal taqsimlangan t.m.lar ($a=0, \sigma=1$ parametrli) yig‘indisi ham normal taqsimlangan ($a=0, \sigma=\sqrt{2}$ parametrli) bo‘lar ekan.

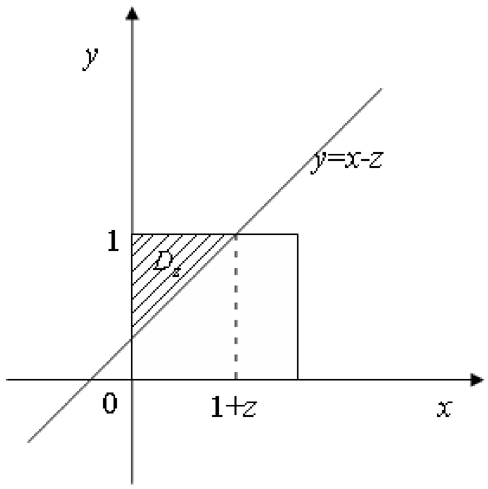
4.5-misol. X va Y t.m.larning birgalikdagi zichlik funksiyasi berilgan:

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, \text{ agar } 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, \\ 0, \text{ aks holda.} \end{cases}$$

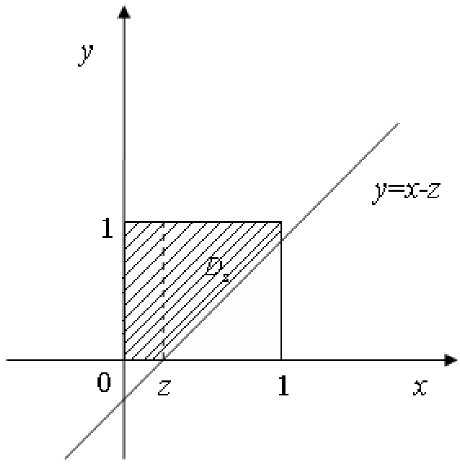
$Z = X - Y$ t.m.ning zichlik funksiyasini toping.
Avval Z t.m.ning taqsimot funksiyasi $F_Z(z)$ ni topamiz.

$$F_Z(z) = P\{Z < z\} = P\{X - Y < z\} = \iint\limits_{D_z} (x+y) dxdy ,$$

bu yerda $D_z=\{(x,y): x-y<z\}$, z ixtiyoriy son. 32–rasmda D_z sohani $-1<z\le 0$ bo‘lgandagi integrallash sohasi, 33-rasmda esa $0<z\le 1$ bo‘lgandagi integrallash sohasi tasvirlangan.



32-rasm.



33-rasm.

$-1<z\le 0$ bo‘lganda:

$$F_Z(z)=\iint\limits_{D_z}(x+y)dxdy=\int\limits_0^{1+z}dx\int\limits_{x-z}^{1}(x+y)dy=\int\limits_0^{1+z}dx\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x-z}^{1}=$$

$$=\int\limits_0^{1+z}\left(x+\frac{1}{2}-x^2+xz-\frac{(x-z)^2}{2}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x-\frac{x^3}{3}+z\frac{x^2}{2}-\frac{(x-z)^3}{6}\right)\Bigg|_0^{1+z}=$$

$$=\frac{(1+z)^2}{2}+\frac{1+z}{2}-\frac{(1+z)^3}{3}+\frac{z(1+z)^2}{2}-\frac{1}{6}-\frac{z^3}{6}=\frac{(1+z)^2}{2}.$$

Agar $0<z\le 1$ bo‘lsa,

$$F_Z(z)=\iint\limits_{D_z}(x+y)dxdy=\int\limits_0^{z}dx\int\limits_{x-z}^{1}(x+y)dy+\int\limits_z^{1}dx\int\limits_{x-z}^{1}(x+y)dy=$$

$$=\int\limits_0^{z}dx\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1+\int\limits_z^{1}dx\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x-z}^{1}=\int\limits_0^{z}\left(x+\frac{1}{2}\right)dx+$$

$$+\int_z^1\left(x+\frac{1}{2}-x^2+xz-\frac{(x-z)^2}{2}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\right)\Big|_0^x+$$

$$+\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}-\frac{x^3}{3}+z\frac{x^2}{2}-\frac{(x-z)^3}{6}\right)\Big|_z^1=\frac{-z^2+2z+1}{2}.$$

Yuqoridagi hisoblardan

$$F_z(z)=\begin{cases}0, & \text{agar } z\le -1,\\ \dfrac{(1+z)^2}{2}, & \text{agar -1<z} \le 0,\\ \dfrac{-z^2+2z+1}{2}, & \text{agar 0<z} \le 1,\\ 1, & \text{agar z>1.}\end{cases}$$

Zichlik funksiyasi esa,

$$F_z^{'}(z)=f_Z(z)=\begin{cases}0, & \text{agar } z\le -1, z>1,\\ z+1, & \text{agar -1<z} \le 0,\\ 1-z, & \text{agar 0<z} \le 1.\end{cases}$$

IV bobga doir misollar

1. X diskret t.m.ning taqsimot jadvali berilgan:

X	-2	-1	0	1	2	3
p	0.10	0.20	0.30	0.25	0.10	0.05

a) $Y=2X^2-3$; b) $Y=\sqrt{X+2}$; c) $Y=\sin\frac{\pi}{3}X$ t.m.larning taqsimot qonunlarini toping.

2. Diskret X t.m.ning taqsimot qonuni

X	-2	-1	0	1	2
p	0.2	0.1	0.3	0.1	0.3

bo‘lsa, $Y=X^2+1$, $Z=|X|$ t.m.larning taqsimot qonunlarini toping.

3. Agar $X \in R[-2,2]$ bo‘lsa, $Y = X+1$ t.m.ning zichlik funksiyasi va dispersiyasini toping.

4. Agar $X \in N(0,1)$ bo‘lsa, a) $Y = 3X^3$; b) $Y = |X|$ t.m.larning zichlik funksiyasini toping.

5. $X \in R(0,2)$ va $Y=-3X+1$ bo‘lsa, Y t.m.ning taqsimot funksiyasini toping.

6. Taqsimoti

X	-1	0	1
P	0.4	0.1	0.5

bo‘lgan t.m.dan tuzilgan $У=2^X$ t.m.ning matematik kutilmasi va dispersiyasini toping.

7. Taqsimoti $P(X=-1)=P(X=1)=1/2$ bo‘lgan t.m.dan olingan $Z_1=\cos X\pi$, $Z_2=\sin X\pi$ t.m.larning matematik kutilmalari va dispersiyalarini toping.

8. Taqsimoti

X	-1	0	1	2
P	0.2	0.3	0.3	0.2

bo‘lgan t.m.dan tuzilgan У=|X| t.m. ning matematik kutilmasi va dispersiyasini toping.

9. $X \in Bi(2,1/3)$; $\begin{cases} Y: & -1, \quad 1 \\ P: & 1/4, \quad 3/4 \end{cases}$ va $X \perp Y$ bo‘lsa, $Z=X+2Y$ t.m.ning matematik kutilmasi va dispersiyasini toping.

10. Ikkita tanga va kub tashlash tajribasida “gerb”lar soni X va kubdagi ochkolar soni У ning birgalikdagi taqsimot jadvalini tuzing va DX, DУ larni hisoblang.

11. X uzluksiz t.m.ning zichlik funksiyasi berilgan bo‘lsin: $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{agar } x \ge 0, \\ 0, & \text{agar } x < 0. \end{cases}$ a) $Y = 2X-1$; b) $Y = X^2$ t.m.larning zichlik funksiyalarini toping.

12. Agar $X \in R[0,4]$, $Y \in R[0,1]$ va $X \perp Y$ bo‘lsa, $Z = X+Y$ t.m.ning zichlik funksiyasini toping.

13. Bog‘liqsiz *X* va *Y* t.m.larning taqsimot qonunlari berilgan

X	-1	1	2
p	0.4	0.3	0.3

Y	-1	0	1	2
p	0.2	0.25	0.3	0.25

bo‘lsa, *X+Y* va *XY* t.m.larning taqsimot qonunlarini toping.

V bob. Ehtimollar nazariyasining limit teoremalari

Ehtimollar nazariyasining limit teoremalari deb nomlanuvchi qator tasdiq va teoremalarni keltiramiz. Ular yetarlicha katta sondagi tajribalarda t.m.lar orasidagi bog‘lanishni ifodalaydi. Limit teoremalar shartli ravishda ikki guruhga bo‘linadi. Birinchi guruh teoremalar katta sonlar qonunlari(KSQ) deb nomlanadi. Ular o‘rta qiymatning turg‘unligini ifodalaydi: yetarlicha katta sondagi tajribalarda t.m.larning o‘rta qiymati tasodifiyligini yo‘qotadi. Ikkinchi guruh teoremalar markaziy limit teoremalar(MLT) deb nomlanadi. Yetarlicha katta sondagi tajribalarda t.m.lar yig‘indisining taqsimoti normal taqsimotga intilishi shartini ifodalaydi. KSQ ni keltirishdan avval yordamchi tengliklarni isbotlaymiz.

5.1 Chebishev tengsizligi

Teorema(Chebishev). Agar X t.m. DX dispersiyaga ega bo‘lsa, u holda $\forall\varepsilon>0$ uchun quyidagi tengsizlik o‘rinli:

$$P\{|X-MX|\geq\varepsilon\}\leq\frac{DX}{\varepsilon^2}. \qquad (5.1.1)$$

(5.1.1) tengsizlik Chebishev tengsizligi deyiladi.

Isboti. $P\{|X-a|\geq\varepsilon\}$ ehtimollik X t.m.ning $[a-\varepsilon;a+\varepsilon]$ oraliqqa tushmasligi ehtimolligini bildiradi bu yerda $a=MX$. U holda

$$P\{|X-a|\geq\varepsilon\}=\int_{-\infty}^{a-\varepsilon}dF(x)+\int_{a+\varepsilon}^{+\infty}dF(x)=\int_{|x-a|\geq\varepsilon}dF(x)=$$

$$=\int_{|x-a|\geq\varepsilon}1\cdot dF(x)\leq\int_{|x-a|\geq\varepsilon}\frac{(x-a)^2}{\varepsilon^2}dF(x),$$

chunki $|x-a|\geq\varepsilon$ integrallash sohasini $(x-a)^2\geq\varepsilon^2$ ko‘rinishda yozish mumkin. Bu yerdan $\frac{(x-a)^2}{\varepsilon^2}\geq1$ ekanligi kelib chiqadi. Agar integrallash sohasi kengaytirilsa, musbat funksiyaning integrali faqat kattalashishini hisobga olsak,

$$P\left\{|X-a|\geq\varepsilon\right\}\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{|x-a|\geq\varepsilon}(x-a)^2dF(x)\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2dF(x)=\frac{1}{\varepsilon^2}DX\ . \qquad \blacksquare$$

Chebishev tengsizligini quyidagi ko‘rinishda ham yozish mumkin:

$$P\left\{|X-MX|<\varepsilon\right\}\geq1-\frac{DX}{\varepsilon^2}. \tag{5.1.2}$$

Chebishev tengsizligi ihtiyoriy t.m.lar uchun o‘rinli. Xususan, X t.m. binomial qonun bo‘yicha taqsimlangan bo‘lsin, $P\{X=m\}=C_n^m p^m q^{n-m},\ m=0,1,...,n,$ $q=1-p\in(0,1)$. U holda $MX=a=np,\ DX=npq$ va (5.1.1) dan

$$P\left\{|m-np|<\varepsilon\right\}\geq1-\frac{npq}{\varepsilon^2}; \tag{5.1.3}$$

n ta bog‘liqsiz tajribalarda ehtimolligi $p=M\left(\frac{m}{n}\right)=a$, dispersiyasi $D\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{qp}{n}$ bo‘lgan hodisaning $\frac{m}{n}$ chastotasi uchun,

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}\geq1-\frac{qp}{n\varepsilon^2}. \tag{5.1.4}$$

X t.m.ni $[\varepsilon;+\infty)$ oraliqga tushushi ehtimolligini baholashni Markov tengsizligi beradi.

Teorema(Markov). Manfiy bo‘lmagan, matematik kutilmasi MX chekli bo‘lgan X t.m. uchun $\forall\varepsilon>0$ da

$$P\left\{X\geq\varepsilon\right\}\leq\frac{MX}{\varepsilon} \tag{5.1.5}$$

tengsizlik o‘rinli.

Isboti. Quyidagi munosabatlar o‘rinlidir:

$$P\left\{X\geq\varepsilon\right\}=\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}dF(x)\leq\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{x}{\varepsilon}dF(x)=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{0}^{+\infty}xdF(x)=\frac{MX}{\varepsilon}\ . \qquad \blacksquare$$

(5.1.5) tengsizlikdan (5.1.1) ni osongina keltirib chiqarish mumkin.

(5.1.5) tengsizlikni quyidagi ko‘rinishda ham yozish mumkin:

$$P\{X<\varepsilon\}\geq 1-\frac{MX}{\varepsilon}. \qquad (5.1.6)$$

5.1.-misol. X diskret t.m.ning taqsimot qonuni berilgan:

$\begin{cases} X: & 1 \quad 2 \quad 3 \\ P_X: & 0.3 \ \ 0.2 \ \ 0.5. \end{cases}$ Chebishev tengsizligidan foydalanib, $P\left\{|X-MX|<\sqrt{0.4}\right\}$ ehtimollikni baholaymiz. X t.m.ning sonli xarakteristikalarini hisoblaymiz: $MX=1\cdot 0.3+2\cdot 0.2+3\cdot 0.5=2.2$; $DX=1^2\cdot 0.3+2^2\cdot 0.2+3^2\cdot 0.5-2.2^2=0.76$.

Chebishev tengsizligiga ko‘ra: $P\left\{|X-2.2|<\sqrt{0.4}\right\}\geq 1-\frac{0.76}{0.4}=0.9.$

5.2 Katta sonlar qonuni Chebishev va Bernulli teoremalari

Ehtimollar nazariyasi va uning tadbiqlarida ko‘pincha yetarlicha katta sondagi t.m.lar yig‘indisi bilan ish ko‘rishga to‘g‘ri keladi. Yig‘indidagi har bir t.m.ning tajriba natijasida qanday qiymatni qabul qilishini oldindan aytib bo‘lmaydi. Shuning uchun katta sondagi t.m.lar yig‘indisining taqsimot qonunini hisoblash burmuncha qiyinchilik tug‘diradi. Lekin ma’lum shartlar ostida yetarlicha katta sondagi t.m.lar yig‘indisi tasodifiylik xarakterini yo‘qotib borar ekan. Amaliyotda juda ko‘p tasodifiy sabablarning birgalikdagi ta’siri tasodifga deyarli bog‘liq bo‘lmaydigan natijaga olib keladigan shartlarni bilish juda muhimdir. Bu shartlar “Katta sonlar qonuni” deb ataluvchi teoremalarda keltiriladi. Bular qatoriga Chebishev va Bernulli teoremalari kiradi.

✓ $X_1, X_2, ...X_n, ...$ t.m.lar o‘zgarmas son A ga ehtimollik bo‘yicha yaqinlashadi deyiladi, agar $\forall\varepsilon>0$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{|X_n-A|<\varepsilon\right\}=1$$

munosabat o‘rinli bo‘lsa. Ehtimollik bo‘yicha yaqinlashish $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} A$ kabi belgilanadi.

✓ $X_1, X_2, ...X_n, ...$ t.m.lar ketma-ketligi mos ravishda $MX_1, MX_2, ...MX_n, ...$ matematik kutilmalarga ega bo‘lib, $\forall\varepsilon>0$ son uchun $n\to\infty$ da

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

munosabat bajarilsa, $X_1, X_2, ...X_n$ t.m.lar ketma-ketligi *katta sonlar qoniniga bo‘ysunadi* deyiladi.

Teorema(Chebishev). Agar bog‘liqsiz $X_1, X_2, ...X_n, ...$ t.m.lar ketma-ketligi uchun shunday $\exists C>0$ bo‘lib $DX_i \le C, i=1,2,...$ tengsizliklar o‘rinli bo‘lsa, u holda $\forall\varepsilon>0$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i\right| < \varepsilon\right\} = 1 \qquad (5.2.1)$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Isboti. $DX_i \le C, i=1,2,...$ bo‘lgani uchun
$D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i = \frac{1}{n^2}\left(DX_1+...+DX_n\right) \le \frac{1}{n^2}\left(C+...+C\right) =$
$= \frac{1}{n^2} Cn = \frac{C}{n}$. U holda Chebishev tengsizligiga ko‘ra:

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i\right| < \varepsilon\right\} \ge 1 - \frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{\varepsilon^2} \ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}\ . \qquad (5.2.2)$$

Endi $n\to\infty$ da limitga o‘tsak, $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i\right| < \varepsilon\right\} = 1$. ■

Natija. Agar $X_1, X_2, ...X_n, ...$ bog‘liqsiz va bir xil taqsimlangan t.m.lar va $MX_i = a, DX_i = \sigma^2$ bo‘lsa, u holda $\forall\varepsilon>0$ uchun quyidagi munosabat o‘rinli

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right\} = 1. \qquad (5.2.3)$$

Bernulli teoremasi katta sonlar qonuninig sodda shakli hisoblanadi. U nisbiy chastotaning turg‘unligini asoslaydi.

Teorema(Bernulli). Agar A hodisaning bitta tajribada ro‘y berishi ehtimolligi p bo‘lib, n ta bog‘liqsiz tajribada bu hodisa n_A marta ro‘y bersa, u holda $\forall\varepsilon>0$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1 \qquad (5.2.4)$$

munosabat o‘rinli.

Isboti. $X_1, X_2,...X_n$ indikator t.m.larni quyidagicha kiritamiz: agar *i*-tajribada A hodisa ro‘y bersa, $X_i=1$; agar ro‘y bermasa $X_i=0$. U holda n_A ni quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin: $n_A=\sum_{i=1}^{n} X_i$. X_i t.m.ning taqsimot qonuni ixtiyoriy i da: $\begin{cases} X_i: 0 & 1 \\ P: 1-p & p \end{cases}$ bo‘ladi. X_i t.m.ning matematik kutilmasi $MX_i=1\cdot p+0\cdot(1-p)=p$ ga, dispersiyasi $DX_i=(0-p)^2(1-p)+(1-p)^2 p= \; =p(1-p)=pq$. X_i t.m.lar bog‘liqsiz va ularning dispersiyalari chegaralangan, $p(1-p)=p-p^2=\frac{1}{4}-\left(p-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{4}$.

U holda Chebishev teoremasiga asosan: $\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i\right|<\varepsilon\right\}=1$ va $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i=\frac{n_A}{n}$; $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i=\frac{1}{n}np=p$ bo‘lgani uchun $\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1$.

■

5.3 Markaziy limit teorema

Markaziy limit teorema t.m.lar yig‘indisi taqsimoti va uning limiti – normal taqsimot orasidagi bog‘lanishni ifodalaydi. Bir xil taqsimlangan t.m.lar uchun markaziy limit teoremani keltiramiz.

Teorema. $X_1, X_2,...X_n$ bog‘liqsiz, bir xil taqsimlangan, $MX_i=a$ chekli matematik kutilma va $DX_i=\sigma^2, i=\overline{1,n}$ dispersiyaga ega bo‘lsin,

$0<\sigma^2<\infty$ u holda $Z_n=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-M\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)}}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-na}{\sigma\sqrt{n}}$ t.m.ning taqsimot qonuni $n\to\infty$ da standart normal taqsimotga intiladi

$$F_{Z_n}(x)=P\{Z_n<x\}\xrightarrow[n\to\infty]{}\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt. \qquad (5.3.1)$$

Demak, (5.3.1) ga ko‘ra yetarlicha katta n larda $Z_n \sim N(0,1)$, $S_n=X_1+\ldots+X_n$ yig‘indi esa quyidagi normal qonun bo‘yicha taqsimlangan bo‘ladi: $S_n \sim N(na,\sqrt{n}\sigma)$. Bu holda $\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ t.m. asimptotik normal taqsimlangan deyiladi.

Agar X t.m. uchun $MX=0, DX=1$ bo‘lsa X t.m. markazlashtirilgan va normallashtirilgan(yoki standart) t.m. deyiladi. (5.3.1) formula yordamida yetarlicha katta n larda t.m.lar yig‘indisi bilan bog‘liq hodisalar ehtimolligini hisoblash mumkin. $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ t.m.ni standartlashtirsak, yetarlicha katta n larda

$$P\left\{\alpha\le\sum_{i=1}^{n}X_i\le\beta\right\}=P\left\{\frac{\alpha-na}{\sigma\sqrt{n}}\le\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-na}{\sigma\sqrt{n}}\le\frac{\beta-na}{\sigma\sqrt{n}}\right\}\approx\Phi\left(\frac{\beta-na}{\sigma\sqrt{n}}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-na}{\sigma\sqrt{n}}\right),$$

yoki

$$P\{\alpha\le S_n\le\beta\}\approx\Phi\left(\frac{\beta-MS_n}{\sqrt{DS_n}}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-MS_n}{\sqrt{DS_n}}\right). \qquad (5.3.2)$$

5.2-misol. X_i bog‘liqsiz t.m.lar [0,1] oraliqda tekis taqsimlangan bo‘lsa, $Y=\sum\limits_{i=1}^{100}X_i$ t.m.ning taqsimot qonunini toping va $P\{55<Y<70\}$ ehtimollikni hisoblang.

Markaziy limit teorema shartlari bajarilganligi uchun, Y t.m.ning zichlik funksiyasi $f_Y(y) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(y-MY)^2}{2\sigma_y^2}}$ bo‘ladi. Tekis taqsimot matematik kutilmasi va dispersiyasi formulasidan $MX_i = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$, $DX_i = \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{12}$ bo‘ladi. U holda $MY = M\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \sum_{i=1}^{100} MX_i = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50,$

$DY = D\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \sum_{i=1}^{100} DX_i = 100 \cdot \frac{1}{12} = \frac{25}{3}$, $\sigma_Y = \frac{5\sqrt{3}}{3}$, shuning uchun, $f_Y(y) \approx \frac{3}{5\sqrt{6\pi}} e^{-\frac{3(y-50)^2}{50}}$. (5.3.2) formulaga ko‘ra,

$$P\{55 < S_n < 70\} \approx \Phi\left(\frac{70-50}{\frac{5\sqrt{3}}{3}}\right) - \Phi\left(\frac{55-50}{\frac{5\sqrt{3}}{3}}\right) = \Phi\left(4\sqrt{3}\right) - \Phi\left(\sqrt{3}\right) \approx 0.04.$$

V bobga doir misollar

1. Bog‘liqsiz bir xil taqsimlangan $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ t.m.lar ketma-ketligining taqsimot qonuni berilgan

X_n	a	$-a$
P	$\frac{n}{2n+1}$	$\frac{n+1}{2n+1}$

Bu ketma-ketlik K.S.Q. bo‘ysunadimi?

2. Bog‘liqsiz bir xil taqsimlangan $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ t.m.lar ketma-ketligining taqsimot qonuni berilgan

X_n	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
P	$1/2^n$	$1-\frac{1}{2^n}$	$1/2^n$

Bu ketma-ketlik K.S.Q. bo‘ysunadimi?

3. Diskret t.m. taqsimot qonuni berilgan:

X	0.1	0.4	0.6
P	0.2	0.3	0.5

Chebishev tengsizligidan foydalanib $|X - MX| < \sqrt{0.4}$ ni baholang.

4. $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ bog‘liqsiz t.m.lar ketma-ketligi quyidagi taqsimotga ega bo‘lsin: $P\{X_n = \pm 2^n\} = 2^{-(2n+1)}$, $P\{X_n = 0\} = 1 - 2^{-2n}$. Bu t.m.lar uchun K.S.Q. o‘rinlimi?

5. Detalning nostandart bo‘lish ehtimolligi 0.2 ga teng. 400 ta detaldan iborat partiyada nostandart detal chiqishning chastotasi va ehtimoli orasidagi farqning moduli 0.05 dan kichik bo‘lishini ehtimolligini baholang.

6. Chebishev tengsizligidan foydalanib, quyidagi ehtimollikni baholang: simmetrik tanga 500 marta tashlanganda gerb tushushlari soni k uchun $200 \le k \le 300$ o‘rinli.

Ikkinchi bo‘lim
MATEMATIK STATISTIKA

VI bob. Tanlanma va uning xarakteristikalari

6.1 Matematik statistika predmeti

Oldingi bo`limlardan ma`lumki, ehtimollar nazariyasi tasodifiy hodisalar bilan bog`liq jarayonlarning matemetik modellarini o`rganish bilan shug`ullanadi. Ixtiyoriy tasodifiy jarayonlarga mos matematik modellar yordamida bizni qiziqtirayotgan u yoki bu hodisalarning ro`y berish ehtimolligini topishimiz mumkin.

Matematik statistika tasodifiy hodisalar yoki jarayonlar haqida shu hodisalarni kuzatish yoki tajribalar natijasida olingan ma’lumotlar asosida umumiy xulosalar chiqaradigan matematik fandir. Bu xulosalar umumiylik xususiyatlariga ega bo‘lib, kuzatilayotgan tasodifiy holatlarning barchasiga taaluqlidir. Matematik statistika ehtimollar nazariyasiga tayangan holda, uning usullari va nazariy hulosalari asosida o‘rganilayotgan obyekt haqida xulosalar chiqaradi. Agarda ehtimollar nazariyasida biz o‘rganayotgan matematik model to‘la-to‘kis berilgan deb hisoblab, bu model bizni qiziqtirayotgan holatlarni o‘rgansak, matematik statistikada biz qandaydir tasodifiy hodisalar natijalaridan kelib chiqqan holda(bular ko‘pchilik hollarda sonlardan iborat bo‘ladi), tasodifiy jarayonlarning matematik modelini tuzishga harakat qilamiz. Matematik statistika o‘zining xulosa chiqarish usullari yordamida o‘rganilayotgan obyektning nazariy ehtimoliy modelini tuzishga qaratilgan. Masalan, Bernulli sxemasida biz kuzatayotgan A hodisaning bitta tajribada ro‘y berish ehtimolligi p bo‘lsin. Bizni n ta bog‘liqsiz tajribalar natijasida A hodisasining $k(k \le n)$ marta ro‘y berish ehtimolligi qiziqtirsin. Bu masala ehtimollar nazariyasining usullari bilan to‘liq hal etiladi. Endi shunday masala qo‘yilsin: n ta bog‘liqsiz tajribalarda bizni qiziqtiradigan A hodisa k marta ro‘y bersin. U holda shu hodisaning bitta tajribada ro‘y berish ehtimolligi p deb qanday miqdorni olish kerak? Bu hol matematik statistikaning namunaviy masalasidir. Ko‘rinib turibdiki, matematik statistika masalalari ehtimollar nazariyasi masalalariga teskari masalalar ekan.

Matematik statistika o‘z hulosalarida biz qiziqayotgan tasodifiy hodisalarni tavsiflaydigan, odatda sonlardan iborat bo‘lgan statistic ma’lumotlar asosida o‘rganilayotgan tasodifiy jarayonning nazariy-ehtimoliy qonuniyatlarini tuzish uchun turli usullarni ishlab chiqishga qaratilgandir.

Endi Bernulli sxemasi misolida matematik statistika shug'ullanadigan va hal qilinadigan asosiy masalalarni ko'rib chiqaylik.

I. Noma'lum parametrni statistik baholash. n ta tajriba natijasida biz kuzatayotgan A hodisa m marta ro'y bersin. U holda, shu ma'lumotlar asosida biz shunday $\hat{p}$ miqdorni aniqlaylikki, uni $p = P(A)$ sifatida qabul qilish mumkin bo'lsin. Bizning holimizda A hodisaning chastotasini $\hat{p} = \frac{m}{n}$ deb qabul qilishimiz tabiiy. Albatta, biz statistik baho deb taklif etayotgan $\hat{p}$ miqdor ma'lum ma'noda noma'lum parametr p ga yaqin bo'lishi kerak.

II.Ishonchlilik oralig'i. Ba'zi hollarda noma'lum parametr p ning aniq qiymati emas, balki 1 ga yetarlicha yaqin ehtimollik bilan uning qiymatini statistik ma'lumotlar asosida aniqlanadigan biror $[\hat{p}_1; \hat{p}_2]$ oraliqqa tegishli bo'lishi qiziqtiradi. Bunda oraliq chegaralari $\hat{p}_1$ va $\hat{p}_2$ - t.m.lar faqat m ga bog'liq bo'ladi. Tajriba natijasida to'liq aniqlanadigan $[\hat{p}_1; \hat{p}_2]$ oraliq - ishonchlilik oralig'i deyiladi.

III. Statistik gipotezalarni tekshirish. Faraz qilatlik, qandaydir (aprior) mulohazalar asosida $p = p_0$ degan xulosaga keldik. Bu yerda p_0 - aniq miqdor. Nisbiy chastota $\frac{m}{n}$ asosida biz statistik gipoteza $p = p_0$ ning to'g'ri yoki noto'g'riligini tekshirishimiz kerak. Yetarli katta n lar uchun $\frac{m}{n}$ nisbiy chastota p ehtimollikka yaqin bo'lgani uchun, statistik gipoteza $p = p_0$ ni tekshiruvchi alomat $\left|\frac{m}{n} - p_0\right|$ ayirma asosida quriladi. Agarda bu ayirma katta bo'lsa, asosiy gipoteza $p = p_0$ rad etiladi, agarda bu ayirma yetarlicha kichik bo'lsa, statistik gipotezani rad etishga asos bo'lmaydi.

Yuqorida ko'rsatilgan va boshqa statistik ma'lumotlarni hal etish matematik statistikaning vazifasidir. Matematik statistika bu masalalarni o'zining tushunchalari va statistik usullari bilan hal etadi.

6.2 Bosh va tanlanma to'plam

Aytaylik, ishlab chiqarilgan mahsulotlarning katta to'piga tegishli biron-bir xususiyat (masalan, mahsulotning o'lchami, og'irligi, narxi va hokazo) o'rganilayotgan bo'lsin. To'pga tegishli barcha mahsulotlar *bosh to'plamni* tashkil qiladi deyiladi. Ko'p hollarda , bosh to'plamga mahsulotlar juda ko‘p miqdorda bo‘lib, ularning barchasini uzluksiz o‘lchash amaliyotda mumkin bo‘lmaydi. Ba’zi hollarda bu umuman mumkin bo‘lmasa, ayrim hollarda juda katta xarajatlarni talab qiladi. Bunday hollarda bosh to‘plamdan tasodifiy ravishda chekli sondagi mahsulot ajratib olinadi va ularning xususiyatlari o‘rganiladi. Bu jarayon tanlanmalarga olib keladi. Demak, *tanlanma* bosh to‘plamdan tasodifiy ravishda olingan elementlar. Tanlanmalar usuli deganda biz bosh to‘plamdan tasodifiy ravishda olingan elementlarga xos bo‘lgan qaralayotgan xususiyatlarni statistik tahlil qilib, shular asosida bosh to‘plam elementlariga xos bo‘lgan xususiyatlar haqida umumiy xulosalar chiqarishni tushunamiz.

Matematik statistikada har qanday mulohaza va xulosalar statistik ma’lumotlarga yoki boshqacha qilib aytganda tajriba natijalariga tayanadi. Odatda tajriba natijalari taqsimoti $F(x)$ bo‘lgan X t.m.ning $X_1, X_2, ..., X_n$ kuzatilmalaridan iborat bo‘ladi. Demak, kuzatilmalar bog‘liqsiz va X t.m. bilan bir xil taqsimlangan t.m.lar ekan.

✓ Kuzatilmalardan tuzilgan $(X_1, X_2, ..., X_n)$ vektor hajmi n ga teng bo‘lgan t*anlanma* deyiladi.

Endi $\mathscr{X}$ bilan X t.m. qabul qiladigan qiymatlar to‘plami bo‘lsin. $\mathscr{X}$ to‘plam bosh to‘plamdan iborat bo‘ladi. $\mathscr{X}$ to‘plam chekli yoki cheksiz bo‘lishi mumkin. Mavzu boshida ko’rilgan misoldagi barcha mahsulotlarning xususiyatlaridan iborat to‘plam-bosh to‘plam va shu xususiyatlarning sonli ifodasi esa X t.m. qiymatlaridan iborat bo‘ladi. Bosh to‘plam $\mathscr{X}$ dan qiymatlar qabul qiluvchi X t.m.ning taqsimot funksiyasini va sonli xarakteristikalarini (masalan, matematik kutilma, dispersiya, yuqori tartibli momentlar va hokazo) mos ravishda nazariy taqsimot va nazariy sonli xarakteristikalar deyiladi. Kuzatishlar asosida aniqlangan taqsimot funksiya va unga mos sonli xarakteristikalar empirik yoki tanlanma taqsimot funksiyasi va sonli xarakteristikalari deyiladi.

6.3 Empirik taqsimot funksiya

Faraz qilaylik, taqsimot funksiyasi $F(x)$ bo‘lgan X t.m. kuzatilayotgan bo‘lsin. $(X_1, X_2, ..., X_n)$ – vektor esa unga mos hajmi n ga teng bo‘lgan tanlanma bo‘lsin. Shu vektorning biron-bir aniq qiymati:

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \tag{6.3.1}$$

X t.m.ning amalga oshgan qiymati deyiladi. Har qanday tajriba natijalari (6.3.1) qatordan iborat bo‘lgan sonlar to‘plami bo‘ladi.

✓ Birinchi satri tajriba nomerlari, ikkinchisi esa X ning mos amaldagi qiymatlaridan iborat bo‘lgan quyidagi jadvalga

1	2	3	…	n
x_1	x_2	x_3	…	x_n

statistik qator deb ataladi. Statistik qator turli maqsadlarda va turli usullar bilan tahlil qilinishi mumkin. Mana shunday tahlilning maqsadi X t.m.ning empirik(yoki statistik) taqsimot funksiyasini tuzishdan iborat bo‘lishi mumkin.

(6.3.1) qatorni kamaymasligi bo‘yicha tartiblaymiz:

$$x_{(1)} \le x_{(2)} \le ... \le x_{(n)} \tag{6.3.2}$$

hosil bo‘lgan (6.3.2) qator *variatsion qator* deyiladi.

Ixtiyoriy statistik qator (6.3.1) yordamida empirik yoki tanlanma taqsimot funksiyasi aniqlanishi mumkin.

✓ Quyidagicha

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_i \le x) \tag{6.3.3}$$

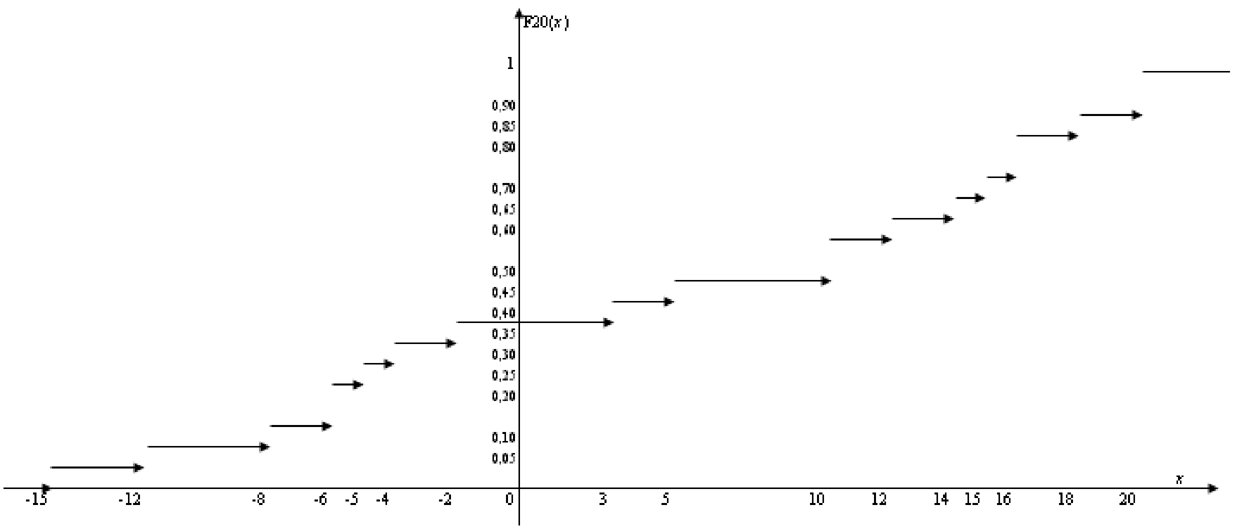
aniqlangan funksiya *empirik*(yoki tanlanma) *taqsimot funksiyasi* deyiladi. Bu yerda $I(A)$ orqali A hodisa indikatori belgilangan. Statistik qator (6.3.1) t.m.lardan iborat bo‘lgani uchun, empirik taqsimot funksiya ham har bir tayinlangan x da t.m. bo‘ladi.

6.1-misol. Uzoqlikni o‘lchovchi asbob bilan ma’lum masofa o‘lchanganda tasodifiy xatolikka yo‘l qo‘yildi. Tajriba 20 marta takrorlanganda yo‘l qo‘yilgan xatoliklar statistik taqsimot funksiyasini tuzing. Statistik qator quyidagicha bo‘lsin:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	5	-8	10	15	3	-6	-15	20	12	15

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	-4	-2	20	14	-8	-12	16	10	-5	18

Eng kichik kuzatilma -15. Demak, $\hat{F}_{20}(-15)=0$. -15 bir marta kuzatildi, demak, uning chastotasi $\frac{1}{20}$. Shuning uchiun, -15 nuqtada empirik taqsimot funksiya $\frac{1}{20}$ ga teng bo‘lgan sakrashga ega, -15 nuqtadan -12 nuqtagacha bo‘lgan oraliqda $\hat{F}_n(x)$ funksiya $\frac{1}{20}$ ga teng. -12 niqtada empirik taqsimot funksiya $\frac{1}{20}$ ga teng bo‘lgan sakrashga ega, -12 nuqtadan -8 nuqtagacha bo‘lgan oraliqda $\hat{F}_n(x)$ funksiya $\frac{2}{20}$ ga teng. -8 niqtada empirik taqsimot funksiya $\frac{2}{20}$ ga teng bo‘lgan sakrashga ega, chunki -8 qiymat ikki marta uchraydi va hokazo. Empirik taqsimot funksiya grafigini chizamiz.



34-rasm.

Har qanday t.m.ning empirik taqsimot funksiyasi kuzatilgan nuqtalarda shu kuzatilmaning chastotasiga teng va sakrashga ega bo‘lgan pog‘onali, uzlukli funksiyadan iborat bo‘ladi.

Bernulli teoremasiga asosan tajribalar soni n cheksiz o‘sganda $\{X < x\}$ hodisaning chastotasi shu hodisaning ehtimolligiga intiladi. Bu esa empirik taqsimot funksiyaning n cheksizlikka intilganda haqiqiy taqsimot funksiya $F(x) = P\{X < x\}$ ga istalgancha yaqin bo‘lishini anglatadi.

Empirik taqsimot haqida quyidagi tasdiqni keltirish mumkin.

Teorema(Glivenko-Kantelli). Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun quyidagi munosabat o‘rinli

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\sup_x \left|\hat{F}_n(x) - F(x)\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Demak n ortgani sari $\hat{F}_n(x)$ funksiya $F(x)$ ga barcha x larda 1 ehtimollik bilan tekis yaqinlashar ekan.

6.4 Gistogramma va poligon

Tajribalar soni katta bo‘lsa, tajriba natijalari statistik qatori ham katta bo‘ladi. Shuning uchun, ko‘p hollarda intervallik statistik qatordan foydalanish maqsadga muvofiq bo‘ladi.

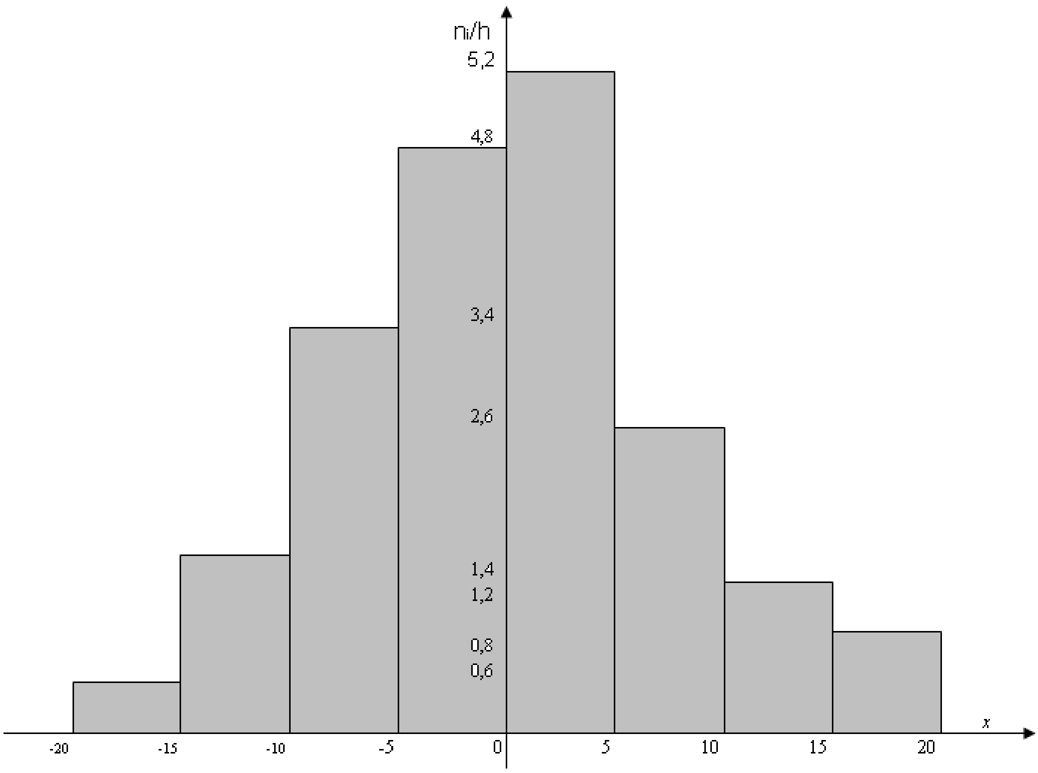
Faraz qilaylik, biron-bir usul bilan tajriba natijalari intervallarga ajratilgan bo‘lsin. Har bir intervaldagi kuzatilmalarning chastotasini hisoblaymiz. Olingan ma’lumotlar asosida jadval tuzamiz. Hosil bo‘lgan jadval tanlanma majmua deyiladi.

6.2-misol. Ma’lum masofa 100 marta o‘lchanganda yo‘l qo‘yilgan xatolar quyidagilardan iborat:

Guruhlar	[-20;-15)	[-15;-10)	[-10;-5)	[-5;0)	[0;5)	[5;10)	[10;15)	[15;20]
Guruhlardagi xatolar soni	2	8	17	24	26	13	6	4
Chastotalar	0.02	0.08	0.17	0.24	0.26	0.13	0.06	0.04

✓ Statistik majmuaning grafik tasviri *gistogramma* deyiladi. Uni qurish uchun t.m.ning qiymatlar sohasini uzunligi h ga teng bo‘lgan k ta oraliqlarga bo‘linadi va kuzatilmalarning har bir oraliqqa tushgan sonlari aniqlanadi. Masalan, n_i - soni i- oraliqqa tushgan kuzatilmalar soni bo‘lsin, u holda $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

Chastotalar gistogrammasi deb asoslari oraliq uzunligi h ga teng bo‘lgan va balandliklari $\frac{n_i}{h}$ bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan tuzilgan shaklga aytiladi. Chastotalar gistogrammasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:



35-rasm.

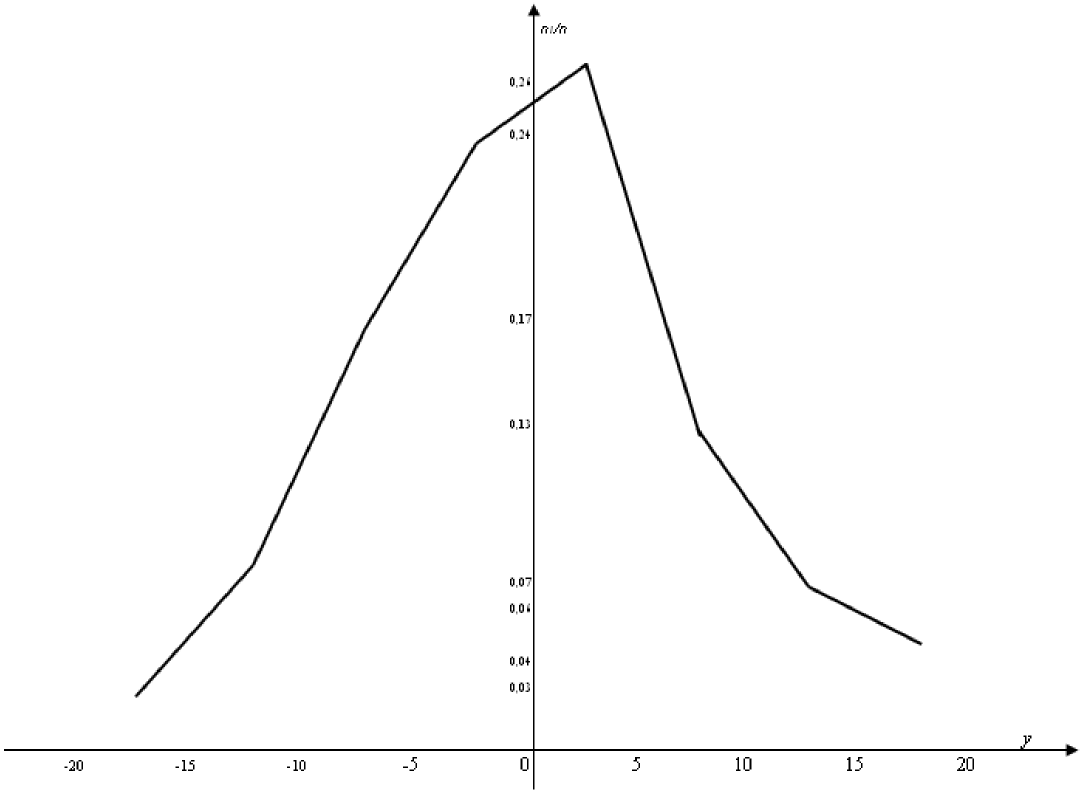
Hosil bo‘lgan fuguraning yuzasi n ga teng, chunki $\frac{n_i}{h}\cdot h = n_i$, $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

Nisbiy chastotalar gistogrammasi deb asoslari h bo`lgan, balandliklari $\frac{n_i}{h}$ bo`lgan to`rtburchaklardan tuzilgan pog`onali figuraga aytiladi. Bu holda hosil bo`lgan figura yuzasi 1 ga teng.

Misol. Masofa 100 marta o`lchanganda hosil bo`lgan xatolarning nisbiy chastotalar gistogrammasini yasang. Buning uchun 1-jadvaldan foydalanamiz.

35-rasmdan ko`rinib turibdiki, nisbiy chastotalar gistogrammasi xatolar taqsimotining zichlik funksiyasiga yaqin bo`ladi. Bu yaqinlik yanada aniqroq bo`lishi talab qilinsa, nisbiy chastotalar poligonidan foydalangan ma`qul.

✓ Tekislikda $\left(y_2, \frac{n_1}{n}\right), \left(y_2, \frac{n_2}{n}\right), ..., \left(y_k, \frac{n_k}{n}\right)$ nuqtalarni siniq chiziqlar bilan birlashtirishdan hosil bo`lgan figura *nisbiy chastotalar poligoni* deyiladi.



36-rasm.

6.5 Tanlanma xarakteristikalari

Ma`lumki, ehtimollar nazariyasida taqsimot funksiyani bilish shu taqsimot funksiyasiga ega bo`lgan t.m. haqida to`liq ma`lumotga ega bo`lishni anglatadi. Ammo juda ko`p amaliy masalalarni hal qilishda t.m.ni to`liq bilish shart bo`lmay, balki uning ayrim sonli xarakteristikalarini bilish kifoya bo`ladi. T.m.ning asosiy sonli xarakteristikalari bu-matematik kutilma va dispersiyalardir. Matematik kutilma t.m.ning qiymatlari zich joylashadigan o`rta qiymatni anglatsa, dispersiya esa t.m. qiymatlarini shu o`rta qiymat atrofida qanchalik tarqoqligini bildiradi. Shunga o`xshash sonli xarakteristikalarni statistik taqsimot funksiyasiga nisbatan ham kiritish mumkin. Matematik kutilmaning statistik o`xshashi empirik o`rta qiymat yoki tanlanma o`rta qiymatidan iborat bo`ladi va u (6.3.1) amaliy qiymat yordamida quyidagicha aniqlanadi

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ . \qquad (6.5.1)$$

O‘rta qiymatni quyidagi ko‘rinishda ham yozish mumkin:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i \,, \tag{6.5.2}$$

bu yerda n_i har bir x_i variantaning mos chastotasidir.

Empirik dispersiya yoki tanlanma dispersiyasi esa quyidagicha aniqlanadi:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right), \text{(yoki} \quad S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \bar{x}\right)n_i \text{)} \tag{6.5.3}$$

r-ichi tartibli tanlanma momentlar va markaziy momentlar ham shunga o`xshash aniqlanadi:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r, \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_k - \bar{x}\right)^r \tag{6.5.4}$$

Agar tajribalar soni cheksiz katta bo`lsa barcha statistik taqsimot xarakteristikalari nazariy sonli xarakteristikalarga yaqin bo`ladi. Endi shu yaqinlikni o`rganishga kirishamiz.

6.3 – misol. Test natijalariga ko‘ra talabalar quyidagi ballarni yig‘dilar: {5,3,0,1,4,2,5,4,1,5}. Ushbu tanlanmaning sonli xarakteristikalarini hisoblang.

Avval ushbu tanlanmaga mos chastotali taqsimot tuzamiz:

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	1	2	1	1	2	3

(6.5.2) va (6.5.3) formulalarga asosan:

$\bar{x} = \frac{1}{10}\left(0\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1 + 4\cdot 2 + 5\cdot 3\right) = 3$**,**

$S^2 = \frac{1}{10}\left((0-3)^2\cdot 1 + (1-3)^2\cdot 2 + (2-3)^2\cdot 1 + (3-3)^2\cdot 1 + (4-3)^2\cdot 2 + (5-3)^2\cdot 3\right) = 3.2$

.

VI bobga doir misollar

1. Quyida berilgan tanlanma uchun variatsion qator hamda chastotali taqsimot tuzing: {5,3,7,10,5,5,2,10,7,2,7,7,4,2,4}.

2. Tavakkaliga tanlangan 30 ta talabalarning bo‘y uzunliklaridan iborat quyidagi tanlanma berilgan:

178	160	154	183	155	153	167	186	155	163
157	175	170	166	159	173	182	167	169	171
179	165	156	179	158	171	175	173	172	164

Ushbu tanlanma uchun interval statistik taqsimot tuzing.

3. Chastotali taqsimoti berilgan tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasini toping:

a)

X_i	15	16	17	18	19
n_i	1	4	5	4	2

b)

X_i	2	3	4	5	6	7	8
n_i	1	3	4	6	5	2	1

4. Quyidagi tanlanma uchun:

X_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	8	14	20	25	30	24	16	12	7	4

nisbiy chastotali gistogramma yasang.

5. Quyidagi tanlanma uchun:

X_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
n_i	2	4	5	6	5	2	1

poligon yasang.

6.

X_i	-1	0	1	2	3
n_i	3	6	7	6	4

tanlanmaning sonli xarakteristikalarini hisoblang.

7. Quyidagi tanlanmaning o‘rta qiymati va dispersiyasini hisoblang:

Interval chegarasi	34-36	36-38	38-40	40-42	42-44	44-46
n_i	2	3	30	40	20	5

8. Agar har bir variantani a) d songa kattalashtirilsa(yoki kichiklashtirilsa); b) k marta kattalashtirilsa(yoki kichiklashtirilsa) tanlanma o‘rta qiymati va dispersiyasi qanday o‘zgaradi?

9. Talabalardan 24 savoldan iborat test sinovi o‘tkazildi. Ushbu test natijalariga ko‘ra talabalar quyidagicha taqsimlanishdi:

To‘g‘ri javoblar soni	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20	20-22	22-24
Talabalar soni	2	4	8	12	16	10	3

Tanlanma sonli xarakteristikalarini hisoblang.

VII bob. Noma’lum parametrlarni baholash

7.1 Statistik baholar va ularning xossalari

Faraz qilaylik, taqsimot funksiyasi noma`lum parametr $\theta$ ga bog`liq bo`lgan t.m. $X$ berilgan bo`lsin. Boshqacha qilib aytganda, kuzatilayotgan t.m. X ning taqsimot funksiyasi $f(x,\theta)$ bitta parametrli parametrik taqsimot funksiyalar oilasiga tegishli bo`lsin. Endi tajriba natijasida olingan ma`lumotlar yordamida noma`lum parametr $\theta$ ni “tiklash”, ya`ni ma`lum ma`noda unga yaqin bo`lgan va tajribalar asosida to`liq tiklanadigan biron-bir miqdorni tuzish masalasini ko`raylik. Θ orqali θ ning qiymatlari to‘plamini belgilaymiz.

Faraz qilaylik, $(X_1,\ldots,X_n)$ X t.m.ning xajmi n ga teng bo`lgan tanlanmasi bo`lsin.

✓ $X_1,\ldots,X_n$ kuzatilmalarning ixtiyoriy $T_n = T\left(X_1,\ldots,X_n\right)$ funksiyasi *statistika* deyiladi.

Ta`rifdan kelib chiqadiki, statistika faqat kuzatilmalarga bog`liq bo`lgan tasodifiy miqdor bo`lib, u tajriba natijasida to`liq aniqlanadi.

✓ Agar $T_n \in \Theta$ bo‘lsa, u holda T_n statistika noma’lun parametr θ uchun *baho* deb ataladi.

Ta`rifdan kelib chiqadiki, bitta parametr uchun bir necha statistik baho taklif qilinishi mumkin. Shuning uchun, statistik baholardan ma`lum ma`noda “yaxshi” xossalarga ega bo`lishlari talab etiladi. Odatda har qanday statistik baholarning quyidagi xossalarga ega bo`lishligi maqsadga muvofiqdir.

Siljimagan baho

✓ Agarda statistik bahoning matematik kutilmasi noma`lum parametrga teng, ya`ni

$$MT_n = MT\left(X_1,\ldots,X_n\right) = \theta \tag{7.1.1}$$

bo`lsa, statistik baho *siljimagan baho* deyiladi.

Agar statistik baho $T_n = T\left(X_1,\ldots,X_n\right)$ uchun $b = MT\left(X_1,\ldots,X_n\right) - \theta \neq 0$ bo`lsa, u *siljigan baho* deyiladi va $b$-siljish kattaligi bo`ladi.

Noma`lum parametr $\theta$ $X$ t.m.ning matematik kutilmasi va $X_1,\ldots,X_n$ lar unga mos kuzatilmalar bo`lsin. Quyidagi statistikani kiritamiz

$$T\left(X_1,\dots,X_n\right)=a_1X_1+\dots+a_nX_n\,. \qquad (7.1.2)$$

Bu yerda $a_1,...,a_n$ -lar $a_1+...+a_n=1$ tenglikni qanoatlantiruvchi o`zgarmas sonlar. $MX=\theta$ va demak, $MX_1=...MX_n=\theta$ matematik kutilmani hisoblash qoidasidan

$$MT\left(X_1,\dots,X_n\right)=M\left(a_1X_1+\dots+a_nX_n\right)=a_1\theta+\dots+a_n\theta=\left(a_1+\dots+a_n\right)\theta=\theta \qquad (7.1.3)$$

ega bo`lamiz. Bu tenglikdan (7.1.2) statistikaning noma`lum θ parametr uchun siljimagan baho ekanligi kelib chiqadi. Xususan, $a_1=1, a_2=...=a_n=0$ bo`lsa (7.1.2) dan $T\left(X_1,\dots,X_n\right)=X_1$ statistikaga, agarda $a_1=...=a_n=\dfrac{1}{n}$ bo`lsa $T\left(X_1,\dots,X_n\right)=\bar{x}$ statistikaga ega bo`lamiz. (7.1.3) munosabat $a_1+...+a_n=1$ tenglik bajariladigan ixtiyoriy $a_1,...,a_n$ lar uchun to`g`ri bo`lganligidan x_1 va $\bar{x}$ statistikalar ham noma`lum θ parametr uchun siljimagan baho ekanligi kelib chiqadi. Demak, bitta parametr uchun bir nechta siljimagan baho tuzish mumkin ekan. Bu xulosadan, tabiiy, siljimagan baholarni taqqoslash zaruriyati kelib chiqadi.

Optimal baho

Noma`lum parametr $\theta$ uchun siljimagan baholar to`plamini U bilan belgilaylik. Oldingi boblardan ma`lumki, t.m. dispersiyasi shu t.m.ning qiymatlari uning matematik kutilmasi atrofida qanchalik zich yoki tarqoq joylashganligining mezoni bo`ladi. Shuning uchun, tabiiy, siljimagan baholarni ularning dispersiyasiga ko`ra taqqoslaymiz.

Faraz qilaylik, $T_1(X_1,\dots,X_n)$ va $T_2(X_1,\dots,X_n)$ lar noma`lum $\theta$ parametr uchun siljimagan baholar bo`lsin, $T_1(X_1,\dots,X_n)\in U$ va $T_2(X_1,\dots,X_n)\in U$. Agarda shu statistikalar uchun

$$D\,T_1(X_1,\dots,X_n)<D\,T_2(X_1,\dots,X_n)$$

munosabat bajarilsa, $T_1(X_1,\dots,X_n)$ baho $T_2(X_1,\dots,X_n)$ bahodan aniqroq baho deyiladi.

Demak, bitta parametr uchun bir necha siljimagan baholar mavjud bo`lsa, uning statistik bahosi sifatida aniqroq bahoni qabul qilish maqsadga muvofiq bo`ladi. Yuqorida biz noma`lum matematik kutilma $\theta$ uchun ikkita siljimagan $X_1$ va $\bar{x}$-lardan iborat bo`lgan baholarni ko`rdik. Endi ularni taqqoslaylik. Dispersiyani hisoblash qoidasiga asosan:

$$D\bar{x} = D\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Dx_i = \frac{1}{n}DX \qquad (7.1.4)$$

va $DX_1 = DX$ bo`ladi. yuqorida keltirilgan taqqoslash qoidasiga muvofiq, ko`rinib turibdiki $\bar{x}$ baho X_1 bahoga nisbatan aniqroq bo`ladi.

✓ Agar $\inf DT(X_1,\dots,X_n) = DT^*(X_1,\dots,X_n)$ $T(X_1,\dots,X_n)\in U$ bo`lsa, $T^*(X_1,\dots,X_n)$ - statistik baho *optimal baho* deyiladi.

Ko`rsatish mumkinki $\bar{x}$ statistika noma`lum matematik kutilma θ uchun barcha siljimagan chiziqli baholar ichida eng aniq (optimal) bahodir.

Asosli baho

✓ Agarda n cheksizlikka intilganda $T(X_1,\dots,X_n)$ statistika ehtimol bo`yicha noma`lum parametr θ ga yaqinlashsa, ya`ni ixtiyoriy kichik ε>0 son uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\{|T(X_1,\dots,X_n)-\theta| < \varepsilon\} = 1$$

munosabat o'rinli bo`lsa, u holda $T(X_1,\dots,X_n)$ statistik baho *asosli baho* deyiladi.

Demak, asosli baho $T_n(X_1,\dots,X_n)$ tajribalar soni ortib borganida noma`lum $\theta$ parametrga ehtimol bo`yicha yaqinlashar ekan. Odatda har qanday statistik bahodan asosli bo`lish talab etiladi. Matematik ststistikada asosli bo`lmagan baholar o`rganilmaydi.

7.1 – misol. Tanlanma o`rta qiymat $\bar{x}$ noma`lum matematik qurilma $MX = \theta$ ga asosli baho ekanligini ko`rsating.

Chebishev tengsizligiga va (7.1.3) munosabatga ixtiyoriy kichik ε>0 son uchun

$$P\{|\bar{x}-\theta| \ge \varepsilon\} \le \frac{D\bar{x}}{\varepsilon^2} = \frac{DX}{n\varepsilon^2}.$$

Oxirgi tengsizlikda dispersiya chekli bo`lsa, $n \to \infty$ da limitga o`tsak, haqiqatan ham $\bar{x}$ statistikaning asosli baholigi kelib chiqadi.

Umuman, ixtiyoriy siljimagan baho $T(X_1,\dots,X_n)$ ning noma`lum $\theta$ parametrga asosli baho bo`lishlik shartini keltiramiz.

Teorema. Agar $T_n = T(X_1,\dots,X_n)$ statistika θ parametr uchun siljimagan baho bo`lib, $n \to \infty$ uning dispersiyasi $DT_n \to 0$ bo`lsa, u holda u asosli baho bo`ladi.

Isbot. $T(X_1,\dots,X_n)$ statistika siljimagan baho bo`lgani uchun $MT(X_1,\dots,X_n) = \theta$. U holda ixtiyoriy ε>0 uchun Chebishev tengsizligidan quyidagi tengsizlikni yoza olamiz:

$$P\{|T_n - \theta| < \varepsilon\} \le 1 - \frac{DT_n}{\varepsilon^2}. \qquad (7.1.5)$$

Ammo, shartga ko`ra, ixtiyoriy tayinlangan ε>0 uchun $n \to \infty$ da $\frac{DT_n}{\varepsilon^2} \to 0.$

Demak, (7.1.5) tengsizlikdan $T(X_1,...,X_n)$ statistikaning asosli baho ekanligi kelib chiqadi.

7.2 Nuqtaviy baholash usullari

Biz oldingi paragraflarda statistik baholar va ularning xossalari bilan tanishdik. Statistik baholar qanday topiladi? Mana shu savolga javob beramiz. Statistik baholar tuzishning ikki usulini ko`rib chiqamiz.

I. Momentlar usuli

Faraz qilaylik, X kuzatilmalari $X_1,...,X_n$ lardan iborat va taqsimot funksiyasi $F(x,\theta)$ noma`lum parametr $\theta = (\theta_1,...,\theta_r)$ ga bog`liq bo`lgan t.m. bo`lsin. Birinchi bobda tanlanma momentlar tushunchalarini kiritdik va ularning ayrim xossalari bilan tanishdik. Xususan, KSQ ga asosan tanlanma momentlar tajribalar soni katta bo`lganida nazariy momentlarga istalgancha yaqin bo`lishligini bildik. Momentlar usuli asosida mana shu yaqinlik g`oyasi yotadi.

Faraz qilaylik X tasodifiy miqdorning birinchi r ta $\alpha_k = MX^k$, $k=1,...,r$ momentlari mavjud bo`lsin. Tabiiyki, ular noma`lum θ parametrning $\alpha_k = \alpha_k(\theta)$ funksiyalari bo`ladilar. $A_{nk} = \sum_{i=1}^{n} X_i^k,\ k=1,...,r$, tanlanma momentlarini mos ravishda $\alpha_k,\ k=1,...,r$, larda tenglashtirib r ta tenglamalar sistemasini tuzib olamiz:

$$\begin{cases} \alpha_1(\theta) = A_{n1}, \\ \alpha_2(\theta) = A_{n2}, \\ \vdots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_r(\theta) = A_{nr}. \end{cases} \tag{7.2.1}$$

Mana shu tenglamalar sistemasini $\theta_1,...,\theta_r$ larga nisbatan yechib, $\theta_k = \theta_k(X_1,\dots,X_n),\ k=1,...,r$ yechimlarga ega bo‘lamiz. Shunday topilgan θ_k, $k=1,...,r$ statistikalar *momentlar usuli* bilan noma’lum θ_k, $k=1,...,r$ paramertlar uchun tuzilgan statistik baholar bo‘ladi.

7.2 - misol. Matematik kutilmasi va dispersiyasi no‘malum bo‘lgan, zichlik funksiyasi $f(x,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}} e^{-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\theta_2}}$ bo‘lgan normal qonunni qaraylik. Noma’lum θ_1 va θ_2 parametrlarni momentlar usulida baholaylik. Bu holda (7.2.1) tenglamalar quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$\theta_1 = A_{n1} \text{ va } \theta_2 + \theta_1^2 = A_{n2}.$$

Natijada momentlar usuli bilan tuzilgan statistik baholar

$$\tilde{\theta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{x},\ \ \tilde{\theta}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{x})^2 = S^2$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Momentlar usuli bilan topilgan statistik baholar ayrim hollarda siljimagan, asosli va eng aniq baholar bo‘ladi.

II. Haqiqatga maksimal o‘xshashlik usuli

Kuzatilmalari $X_1,...,X_n$ lardan va umumlashgan zichlik funksiyasi $p(x,\theta)$ dan iborat X t.m.ni olaylik. Agar X diskret t.m. bo‘lsa, $p(x,\theta) = P\{X = x;\theta\}$ ehtimolliklardan, X uzluksiz t.m. bo‘lgan holda esa

$p(x,\theta)=f(x;\theta)$ zichlik funksiyadan iborat bo‘ladi. Quyidagi funksiyaga $L(x_1,...,x_n,\theta)=p(x_1,\theta)\cdot...\cdot p(x_n,\theta)$ haqiqatga maksimal o‘xshashlik funksiyasi deyiladi. Faraz qilaylik, $L(x_1,...,x_n,\theta)$ funksiya $\theta\in\Theta$ yopiq sohada biror θ^* nuqtada eng katta qiymatga erishsin:

$$L(x_1,...,x_n,\theta^*)=\max_{\theta\in\Theta}L(x_1,...,x_n,\theta).$$

Haqiqatga maksimal o‘xshashlik funksiyasi eng katta qiymatga erishadigan θ^* qiymat noma’lum θ parametr uchun haqiqatga maksimal o‘xshashlik usuli bilan tuzilgan statistik baholar deb ataladi. Ularni quyidagi tenglamalr sistemasidan ham topish mumkin:

$$\left.\frac{\partial L(x_1,...,x_n,\theta)}{\partial\theta_k}\right|_{\theta=\theta^*}=0,\ k=1,...r. \qquad (7.2.2)$$

(7.2.2) tenglamalar sistemasi haqiqatga maksimal o‘xshashlik tenglamalri deyiladi.

Ko‘p ollarda (7.2.2) tenglamalar sistemasi o‘rniga quyidagi tenglamar sistemasini yechish qulay bo‘ladi:

$$\left.\frac{\partial\ln L(x_1,...,x_n,\theta)}{\partial\theta_k}\right|_{\theta=\theta^*}=0,\ k=1,...r. \qquad (7.2.3)$$

7.3 -misol. Matematik kutilmasi va dispersiyasi noma’lum bo‘lgan, zichlik funksiyasi $f(x,\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta_2}e^{-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\theta_2}}$ bo‘lgan normal qonunni olaylik. Haqiqatga maksimal o‘xshashlik funksiyasini tuzamiz:

$$L(x_1,...,x_n,\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(X_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta_2}e^{-\frac{(X_i-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}}=$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\theta_2\right)^n}\exp\left\{-\frac{1}{2\theta_2^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta_1)^2\right\}.$$

Bundan

$$\ln L(x_1,...,x_n,\theta) = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - n\ln\theta_2 - \sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}.$$

Avval (7.2.3) sistemaning birinchi tenglamasini qaraylik:

$$\frac{\partial \ln L(x_1,...,x_n,\theta)}{\partial\theta_1} = \frac{1}{2\theta_2}\sum_{i=1}^{n}2(X_i-\theta_1)=0\,.$$

Soddalashtirgandan so‘ng $\sum_{i=1}^{n}X_i - n\theta_1 = 0$ tenglamaga kelamiz.

Endi (7.2.3) sistemaning ikkinchi tenglamasini tuzamiz:

$$\frac{\partial \ln L(x_1,...,x_n,\theta)}{\partial\theta_k} = -n\cdot\frac{1}{\theta_2}+\frac{1}{\theta_2^3}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta_1)^2=0\,.$$

Soddalashtirgandan so‘ng $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta_1)^2 - n\theta_2^2 = 0$ tenglamaga kelamiz.

Natijada θ_1 va θ_2^2 lar uchun

$$\widehat{\theta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i = \overline{x},\quad \widehat{\theta}_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{x})^2 = S^2$$

Ko‘rinishdagi statistik baholarni topamiz.

Demak, normal qonun uchun momentlar va haqiqatga maksimal o‘xshashlik usullari bilan tuzilgan statistik baholar aynan bir xil ekan.

7.3 Interval baholash

Ishonchlilik oralig‘i

Oldingi paragraflarda biz noma’lum parametrlarning nuqtaviy statistik baholari bilan tanishdik. Tuzilgan nuqtaviy baholar tanlanmaning aniq funksiyalari bo‘lgan t.m. bo‘lib, ular noma’lum parametrlarning asl qiymatiga yaqin bo‘lgan nuqtani aniqlab beradi xolos. Ko‘p masalalarda noma’lum parametrlarni statistik baholash bilan birgalikda bu bahoning aniqligini, ishonchliligini topish talab etiladi. Matematik statistikada statistik baholarning aniqligini topish ishonchlilik oralig‘i va unga mos ishonchlilik ehtimolligi orqali hal etiladi.

Faraz qilaylik, tanlanma yordamida noma’lum θ parametr uchun siljimagan $T(x_1,\ldots,x_n)$ baho tuzilgan bo‘lsin. Tabiiyki $\left| T(x_1,\ldots,x_n)-\theta \right|$ ifoda noma’lum θ parametr bahosining aniqlik darajasini belgilaydi. $T(x_1,\ldots,x_n)$ statistik bahoning noma’lum θ parametrga qanchalik yaqinligini aniqlash masalasi qo‘yilsin. Oldindan biron-bir β ($0<\beta<1$)-sonni 1 ga yetarlicha yaqin tanlab qo‘yaylik. Endi quyidagi

$$P\{\left| T(x_1,\ldots,x_n)-\theta \right|<\delta\}=\beta$$

munosabat o‘rinli bo‘ladigan $\delta>0$ sonini topish lozim bo‘lsin. Bu munosabatni boshqa ko‘rinishda yozamiz

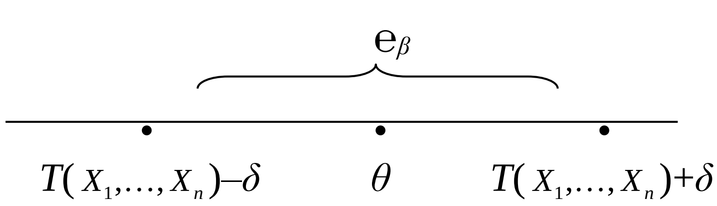
$$P\{T(x_1,\ldots,x_n)-\delta<\theta<T(x_1,\ldots,x_n)+\delta\}=\beta \qquad (7.3.1)$$

(7.3.1) tenglik noma’lum θ parametrning qiymati β ehtimollik bilan

$$e_\beta=(T(x_1,\ldots,x_n)-\delta\,;\,T(x_1,\ldots,x_n)+\delta) \qquad (7.3.2)$$

oraliqda ekanligini anglatadi.

Shuni aytish joizki, (7.3.2) dagi e_β – oraliq tasodifiy miqdorlardan iborat chegaralarga ega. Shuning uchun, β – ehtimollikni noma’lum θ parametrning aniq qiymati e_β – oraliqda yotish ehtimoli deb emas, balki e_β – oraliq θ nuqtani o‘z ichiga olish ehtimoli deb talqin qilish to‘g‘ri bo‘ladi (37 – rasm).



37 – rasm.

✓ Demak, aniqlangan e_β oralig‘i ishonchlilik oralig‘i, β – ehtimol esa *ishonchlilik ehtimoli* deyiladi.

Matematik kutilma uchun ishonchlilik oralig‘i

Faraz qilaylik, X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi θ va dispersiyasi σ^2 bo‘lsin. Noma’lum θ – parametr uchun ishonchlilik ehtimoli β – ga teng bo‘lgan e_β – ishonchlilik oralig‘ini tuzish masalasini qaraylik.

$X_1, \ldots, X_n$ – hajmi n – ga teng bo‘lgan tanlanma va unga mos tanlanma o‘rta qiymati va dispersiyasini tuzaylik:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \ , \quad S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x})^2 \, .$$

Eslatib o‘tamiz, $\bar{x}$ – bir xil taqsimlangan, bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlar yig‘indisidantuzilgandir. Shuning uchun, markaziy limit teoremaga asosan uning taqsimot funksiyasi normal qonunga yaqindir. $\bar{x}$ ning matematik kutilmasini va dispersiyasini hisoblaymiz:

$$M\bar{x} = \theta, \qquad D\bar{x} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Endi $\delta_\beta > 0$ sonni shunday topaylikki, u uchun quyidagi munosabat o‘rinli bo‘lsin:

$$P\{|\bar{x} - a| < \delta_\beta\} = \beta \, . \tag{7.3.3}$$

$\bar{x}$ - t.m.ning taqsimot funksiyasi normal qonunga yaqinligini hisobga olib, (7.3.3) – tengsizlikning o‘ng tomondagi β – sonini Laplas funksiyasi bilan bog‘laymiz:

$$P\{|\bar{x} - a| < \delta_\beta\} \approx \left[\Phi\left(\frac{\delta_\beta}{\sigma_{\bar{x}}\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta_\beta}{\sigma_{\bar{x}}\sqrt{2}}\right)\right]. \tag{7.3.4}$$

Bu yerda $\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}$ - o‘rta kvadratik chetlanish.

Laplas funksiyasining $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ xossasini inobatga olsak, (7.3.4) - tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$P\{|\bar{x} - a| < \delta_\beta\} = 2\Phi\left(\frac{\delta_\beta}{\sigma_{\bar{x}}\sqrt{2}}\right) - 1 \tag{7.3.5}$$

(7.3.3) va (7.3.5) tengliklardan quyidagini hosil qilamiz:

$$\Phi\left(\frac{\delta_\beta}{\sigma_{\bar{x}}\sqrt{2}}\right)=\frac{1+\beta}{2}.$$

Oxirgi tenglikdan δ_β ni aniqlaymiz:

$$\delta_\beta=\sigma_{\bar{x}}\sqrt{2}\Phi^{-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right) \tag{7.3.6}$$

Bu yerda $\Phi^{-1}(x)$ orqali Laplas funksiyasiga teskari funksiyani belgiladik. (7.3.6) – tenglik bilan aniqlangan δ_β – soni noma'lum $\sigma_{\bar{x}}$ miqdor orqali yoziladi. Yetarli katta n lar uchun tanlanma dispersiya S^2 nazariy dispersiyaga yaqin bo‘lgani uchun $\sigma_{\bar{x}}$ ni taqriban $\sqrt{\frac{S^2}{n}}$ ga teng deyish mumkin, ya'ni

$$\sigma_{\bar{x}}\approx\sqrt{\frac{S^2}{n}}$$

Shunday qilib, noma'lum o‘rta qiymat θ – uchun β – ishonchlilik ehtimoliga teng e_β – ishonchlilik oralig‘i

$$e_\beta=\left(\bar{x}-\delta_\beta,\bar{x}+\delta_\beta\right) \tag{7.3.7}$$

ga teng bo‘ladi. Bu yerda $\delta_\beta=\sqrt{\frac{2S^2}{n}}\Phi^{-1}(\beta)$.

7.4 -misol. *X* t.m.ning tajriba natijasida 20 ta qiymati olindi.

i	X_i	i	X_i
1	10.9	11	10.8
2	10.7	12	10.3
3	11.0	13	10.5
4	10.5	14	10.8
5	10.6	15	10.9
6	10.4	16	10.6
7	11.3	17	11.3
8	10.8	18	10.8
9	11.2	19	10.9
10	10.9	20	10.7

X t.m.ning matematik kutilmasi θ uchun β = 0.86 ishonchlilik ehtimoliga mos keluvchi ishonchlilk oralig‘ini tuzing.

Tanlanma o‘rta qiymat va dispersiyani topamiz.

$$\overline{X} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} X_i = 10.78;\ S^2 = \frac{20}{19}\left(\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} X_i^2 - 10.78^2\right) = 0.064;$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{S^2}{n}} = 0.0564.$$

(7.3.7) formula bo‘yicha ishonchlilik oralig‘ini tuzamiz:

$$\delta_\beta = 0.0564\sqrt{2}\Phi^{-1}(0.86) = 0.083 \text{ va } \bar{x} - \delta_\beta = 10.78 - 0.083 \approx 10.70;$$

$$\bar{x} + \delta_\beta = 10.78 + 0.083 \approx 10.86,$$

u holda ishonchlilk oralig‘i e_β=(10.70; 10.86) ekan.

Normal taqsimot matematik kutilmasi uchun ishonchlilik oralig‘i. Styudent taqsimoti

Oldingi paragraflarda biz taqsimoti funksiyasi ixtiyoriy bo‘lgan t.m. matematik kutilmasi uchun taqribiy ishonchlilik oralig‘i tuzdik. Agarda tanlanma o‘rta qiymatining taqsimoti ma’lum bo‘lsa, aniq ishonchlilik oralig‘ini tuzish mumkin.

Faraz qilaylik, $X_1, \ldots, X_n$ lar matematik kutilmasi θ va dispersiyasi σ^2 bo‘lgan normal qonun bo‘yicha taqsimlangan X t.m.ning tajribalar natijasida olingan hajmi n – ga teng bo‘lgan tanlanmasi bo‘lsin.

Quyidagi statistikani kiritamiz:

$$t = \sqrt{n-1}\,\frac{\bar{x} - \theta}{\overline{S}} \qquad (7.3.8)$$

Bu yerda,

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad \overline{S}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$$

Teorema. Agarda $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – bog‘liqsiz va (θ, σ^2) parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlan statistik tanlanma bo‘lsa, u holda t – statistika erkinlik darajasi n-1 ga teng bo‘lgan Styudent taqsimotiga ega bo‘ladi.

Styudent taqsimotining zichlik funksiyasi quydagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$S_{n-1}(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

$\Gamma(x)=\int\limits_0^\infty u^{x-1}e^{-u}du$ - gamma funksiya yuqoridagi formuladan ko‘rinib turibdiki, Styudent taqsimoti $\bar{x}$ va $\bar{S}$ statistikalarga bog‘liq bo‘lmay, faqat kuzatilmalar hajmi n ga bog‘liqdir.

Endi Styudent taqsimotining ishonchlilik oralig‘i qurishga tadbiqini ko‘raylik.

Normal qonun bo‘yich taqsimlangan X t.m.ning tajribalar natijasida $X_1,\ldots,X_n$ qiymatlari topilgan bo‘lsin. Bular asosida $\bar{x}$ va $\bar{S}$ statistikalarni hisoblaymiz. T.m. noma’lum matematik kutilmasi θ – uchun ishonchlilik ehtimoli β (0<β<1) bo‘lgan e_β ishonchlilik oralig‘ini qurish masalasini qaraylik.

Quyidagi ehtimolni ko’raylik:

$$P\left\{|\bar{x}-\theta|<\delta_\beta\right\}=\beta\ .$$

Bu tenglikning chap tomonida $\bar{x}$ t.m.dan t – statistikaga o‘tamiz. Buning uchun $|\bar{x}-\theta|<\delta_\beta$ tengsizlikning ikkala tomonini $\frac{\sqrt{n}}{\bar{S}}$ ga ko‘paytiramiz.U holda,

$$P\left\{\frac{\sqrt{n}\,|\bar{x}-\theta|}{\bar{S}}<\frac{\delta_\beta}{\frac{\bar{S}}{\sqrt{n}}}\right\}=\beta$$

tenglik hosil bo‘ladi. (7.3.8) formuladan foydalansak,

$$P\left\{|t|<\frac{\delta_\beta}{\frac{\bar{S}}{\sqrt{n}}}\right\}=\beta$$

munosabatga kelamiz.

Styudent taqsimoti zichlik funksiyasining juftligidan foydalanib quyidagini hosil qilamiz:

$$P\{|t| < t_\beta\} = 2\int_0^{t_\beta} S_{n-1}(t)dt = \beta \qquad (7.3.9)$$

Endi (7.3.9) tenglikdan t_β ni topishiniz mumkin. Styudent taqsimoti qiymatlari jadvaldan foydalanib, ishonchlilik ehtimoli β va erkinlik darajasi n-1 ga mos t_β ni aniqlaymiz:

$$\delta_\beta = t_\beta \frac{\bar{S}}{\sqrt{n}}$$

Bu esa e_β ishonchlilik oralig‘i uzunligining yarmiga teng

Demak,

$$e_\beta = \left(\bar{x} - t_\beta \frac{\tilde{S}}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_\beta \frac{\tilde{S}}{\sqrt{n}}\right).$$

7.5 - misol. (θ, σ^2) parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangan X t.m.ning 10 ta bog‘liqsiz tajribalar natijasida quyidagi qiymatlari topildi:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_i	2.5	2	-2.3	1.9	-2.1	2.4	2.3	-2.5	1.5	-1.7

matematik kutilma θ uchun ishonchlilik ehtimoli β = 0.95 bo‘lgan e_β – ishonchlilik oralig‘ini toping.

Tanlanmaning o‘rta qiymati va dispersiyasini topamiz:

$$\bar{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = 0.4, \quad \bar{S} = \frac{10}{9}\left[\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - (0.4)^2\right] \approx 4.933.$$

Jadvaldan erkinlik darajasi n-1=9 va ehtimollik β = 0.95 bo‘yicha Styudent taqsimotining (1-t_β) – kvantilini topamiz t_β=2.26. Demak,

$$\delta_\beta = t_\beta \frac{\bar{S}}{\sqrt{n}} \approx 1.58$$

va izlanayotgan ishonchlilik oralig‘i $e_\beta = (\bar{x} - \delta_\beta, \bar{x} + \delta_\beta)$ = (-1.18; 1.98) ko‘rinishda bo‘lar ekan.

VII bobga doir misollar

1. Binomial taqsimot θ parametrik uchun $T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i + 1$ statistika baho bo‘la oladimi?

2. Empirik taqsimot funksiyaning siljimagan va asosli baho ekanini ko‘rsating.

3. Agar ξ ixtiyoriy taqsimotga ega bo‘lsa, $a = M\xi$ va $\sigma = D\xi$ lar uchun $\bar{x}$, S^2 lar qanday baho bo‘ladi?

4. $X_1,...,X_n$ tanlanma [0, θ] oraliqda tekis taqsimlangan bo‘lsa, θ parametr uchun quyidagi baholarning siljimaganlik va asoslilik xossalarini tekshiring: a) $2\bar{x}$;

b) $\bar{x} + X_{(n)}/2$; c) $(n+1)X_{(1)}$; d) $X_{(1)} + X_{(n)}$; e) $\frac{n}{n+1}X_{(n)}$

5. $\xi \in Bi(1,\theta)$ modelda θ uchun haqiqatga maksimal o‘xshashlik bahosi $\widehat{\theta}$ toping.

6. $\xi \in \Pi(\theta)$ modelda noma’lum parametrini baholang va xossalarga tekshiring.

7. $\xi \in E(\theta)$ modelda haqiqatga maksimal o‘xshashlik bahosi $\widehat{\theta}$ toping.

8. Momentlar usulidan foydalanib, a) [0, θ]; b) [0,2θ]; c) [θ-1, θ+1]; d) [-θ,θ] oraliqdagi tekis taqsimot noma’lum parametri θ ni baholang.

9. Agar ξ т.м. kuzatish natijasida olingan tanlanma $X^{(n)} = (X_1,...,X_n)$ bo‘lsa, $X_{(n)} = \max(X_1,...,X_n)$ va $X_{(1)} = \min(X_1,...,X_n)$ -statistikalarning taqsimot funksuyasini toping.

10. X t.m. o‘rtacha kvadratik chetlashishi σ =3 ma’lum bo‘lgan normal taqsimotga ega. Tanlanma hajmi n=36 va bahoning ishonchliligi γ=0,95 berilgan. Noma’lum a matematik kutilma uchun ishonch intervalini tuzing.

11. Quyida tasodifan tanlangan 100 ta talabaning bo‘ylari haqidagi ma’lumotlar keltirilgan:

x_i	154-158	158-162	162-166	166-170	170-174	174-178	178-182
n_i	10	14	26	28	12	8	2

Talabalarning bo‘yi (a,θ^2) parametrli normal taqsimotga ega va o‘rtacha bo‘y $a=\bar{x}$ ma’lum deb olib, θ^2 uchun ishonchlilik intervalini tuzing(γ=0,995).

VIII bob. Statistik gipotezalarni tekshirish

8.1 Statistik gipotezalar. Statistik gipotezalarni tekshirish alomatlari va ularning xossalari

Ko‘p hollarda tajribalardan olingan ma’lumotlar asosida o‘rganilayotgan tasodif bilan bog‘liq bo‘lgan jarayonlar xarakteristikalari haqida bir yoki bir necha turli gipotezalar(tahminlar) qilish mumkin. Statistik ma’lumotlar asosida tasodifiy jarayon taqsimoti yoki boshqa xarakteristikalari haqida aytilgan gipotezalarni tekshirishni matematik statistikaning statistik gipotezalar nazariyasi bo‘limi o‘rganadi.

✓ Kuzatilayotgan t.m. haqida aytilgan ixtiyoriy fikrga *statistik gipoteza* deyiladi.

8.1-misol. Hosildorligi a_0 bo‘lgan bug‘doy navini hosildorligi a_1 bo‘lgan bug‘doy navi bilan solishtirilmoqda. Ma’lum tumanda birinchi nav bug‘doy ikkinchi navga qaraganda ko‘proq hosil beradi degan gipotezani tekshirish kerak.

Keltirilgan misoldan ko‘rinib turibdiki, mavjud bo‘lishi mumkin bo‘lgan gipotezalar turlicha bo‘lishi mumkin. Biron – bir obyekt haqida aytilgan gipoteza statistik ma’lumotlar asosida tekshirilishi mumkin.

✓ Tekshirilishi kerak bo‘lgan gipoteza *asosiy gipoteza* deyiladi va u H_0 bilan belgilanadi. Asosiy gipotezadan qarama-qarshi bo‘lgan ixtiyoriy gipotezaga *raqobatlashuvchi* yoki *alternativ gipoteza* deb ataladi.

Afsuski, statistik ma’lumotlar asosida aniq va qat’iy bir yechimga kelish qiyin, shuning uchun har qanday yechimda ma’lum xatolikka yo‘l qo‘yish mumkin. Matematik statistikada statistik gipotezalarni tekshirishda ikki xil xatolikka yo‘l qo‘yishi mumkin. Statistik yechim asosida asosiy faraz u to‘g‘ri bo‘lgan holda ham rad etilishi mumkin. Bunday xatolik *birinchi tur xatolik* deyiladi. Statistik yechim asosida alternativ gipoteza to‘g‘ri bo‘lsa ham rad etilishi mumkin. Bunday xatolik *ikkinchi tur xatolik* deyiladi. Tabiiyki, xatoliklarni imkon qadar kamaytirish lozim. Statistik gipotezalarni tekshirish iloji boricha bir emas, bir necha marotaba takrorlanishi va ular asosida xulosaga kelinishi maqsadga muvofiqdir.

Statistik gipotezalarni tekshirish statistik ma’lumotlarga asoslanadi. Faraz qilaylik, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ lar n – ta bog‘liqsiz tajribalardagi X t.m.ning kuzatilmalari bo‘lsin. X t.m.ning biron – bir xarakteristikasi haqidagi asosiy H_0 gipoteza ko’rilayotgan bo‘lsin. Endi statistik ma’lumotlar asosida asosiy gipoteza H_0 ni qabul qilish yoki rad etish qoidasini tuzish kerak. Asosiy gipoteza H_0 ni qabul qilish yoki rad etish qoidasi - H_0 gipotezani tekshirishning statistik alomati deyiladi. Odatda statistik gipotezalarni tekshirish – statistik ma’lumotlar asosida asosiy gipotezani tasdiqlash yoki uni rad etishdan iborat bo‘ladi. Endi statistik alomatlarni tuzish qoidalari bilan tanishamiz. Odatda statistik alomatni qurish empirik ma’lumotarni asosiy H_0 gipoteza bo‘yicha tavsiflovchi statistika T = $T(X_1,\ldots,X_n)$ ni tanlashdan boshlanadi. Bunday tanlashda ikki xossa bajarilishi talab etiladi: a) statistika manfiy qiymatlar qabul qilmaydi; b) asosiy gipoteza to‘g‘ri bo‘lganda statistikaning aniq yoki gipotezaiy taqsimoti ma’lum bo‘lishi kerak. Faraz qilaylik, bunday stastistika topilgan bo‘lib, $S = \{t: t = T(X_1,\ldots,X_n), X_1,\ldots,X_n$ – tanlanma fazosiga tegishli} - statistikaning qiymatlar to‘plami bo‘lsin. Oldindan 0<α<1 – sonini tayinlaylik. Endi S sohani shunday kesishmaydigan $S_{1\alpha}$ va $S \setminus S_{1\alpha}$ sohalarga ajratamizki, bunda asosiy gipoteza H_0 to‘g‘ri bo‘lganida $T(X_1,\ldots,X_n) \in S_{1\alpha}$ tasodifiy hodisaning ro‘y berish ehtimoli α dan oshmasin:

$$P\left\{T\left(X_1,\ldots,X_n\right) \in S_{1\alpha}/H_0\right\} \le \alpha \,.$$

Asosiy gipoteza H_0 ni takshirish qoidasi quyidagicha bo‘ladi: $x=(x_1, \ldots, x_n)$ t.m. X ning biror tanlanmasi qiymati bo‘lsin. Agar $t = T(x)$ miqdor $S_{1\alpha}$ sohaga tegishli bo‘lsa: $T(x) \in S_{1\alpha}$, u holda asosiy gipoteza H_0 to‘g‘ri bo‘lganida rad etiladi. Aks holda, ya’ni $T(x) \notin S_{1\alpha}$ bo‘lsa asosiy gipoteza H_0 ni qabul qilishga asos bo‘ladi, chunki statistik ma’lumotlar asosida qilingan hulosalar asosiy gipotezani rad etmaydi. Shuni ta’kidlash lozimki, $t \in S \setminus S_{1\alpha}$ bo‘lishi asosiy gipoteza H_0 ni albatta to‘g‘ri bo‘lishini tasdiqlamaydi, balki bu holat statistik ma’lumotlar va nazariy gipotezaning yetarli darajada muvofiqligini ko‘rsatadi xalos. Yuqorida keltirilgan qoidada $T=T(X_1,\ldots,X_n)$ statistikani statistik alomat statistikasi, $S_{1\alpha}$ - soha alomatning kritik sohasi deyiladi. Odatda α ning qiymatlari uchun 0.1; 0.05; 0.01 sonlari qabul qilinadi. Yuqorida keltirilgan qoidadan shu kelib chiqadiki, alomatning kritik sohasi asosiy gipoteza H_0 to‘g‘ri bo‘lganida alomat statistikasining barcha kichik ehtimolli qiymalari to‘plamini o‘z ichiga olishi lozim. Odatda kritik sohalar $\{t \ge t_\alpha\}$ yoki $\{|t| \ge t_\alpha\}$ ko‘rinishida bo‘ladi.

Asosiy gipoteza H_0 ni tekshirish uchun yuqorida keltirilgan qoidaga asoslanganimizda biz ikki turdagi xatolikka yo‘l qo‘yishimiz mumkin: aslida to‘g‘ri bo‘lgan asosiy gipoteza H_0 ni rad etishimiz mumkin, ya’ni H_0 to‘g‘ri bo‘lganida $t \in S_{1\alpha}$ hodisasi ro‘y beradi. Bunday xatolik birinchi turdagi xatolik deyiladi. Demak, shartga asosan birinchi turdagi xatolik α dan oshmaydi. Ammo aslida noto‘g‘ri bo‘lgan asosiy gipoteza H_0 ni qabul qilishimiz, ya’ni H_0 noto‘g‘ri bo‘lganida $t = T(x) \in S \setminus S_{1\alpha}$ bo‘lib biz H_0 ni qabul qilishimiz mumkin. Bunday xatolik ikkinchi turdagi xatolik deyiladi. Statistik alomatlarga qo‘yiladigan asosiy talablardan biri bu ikki turdagi xatoliklarni iloji boricha kichik bo‘lishini ta’minlamog‘i kerak.

Demak, asosiy gipoteza H_0 ni tekshirish uchun turli statistikalarga asoslangan statistik alomatlarni tuzish mumkin ekan. Tabiiyki, bunda statistik alomatlarni solishtirish masalasi kelib chiqadi.

Faraz qilaylik, $S_{1\alpha}$ alomatning kritik sohasi bo‘lsin. U holda H gipoteza to‘g‘ri bo‘lganida statistikaning qiymati kritik sohaga tegishli bo‘lish ehtimolligi

$$W(H) = P\left\{T\left(X_1, ..., X_n\right) \in S_1 / H\right\}$$

alomatning quvvat funksiyasi deyiladi. Alomat quvvati $H=H_1$ bo‘lganida, ya’ni $W(H_1)$ ehtimollik asosiy gipoteza noto‘g‘ri bo‘lganida to‘g‘ri yechimni qabul qilishi ehtimolligini anglatadi. Alomatning siljimaganlik xossasi muhim o‘rin tutadi va bu xossa

$$P\{T(X_1, ..., X_n) \in S_{1\alpha} / H_1\} \leq \alpha$$

tengsizlik bilan aniqlanadi.

Asosiy gipoteza H_0 ni tekshirish uchun qiymatdorlik darajasi α bo‘lgan ikkita $S_{1\alpha}$ va $S_{1\alpha}^*$ - alomat to‘plamlari aniqlangan bo‘lsin. Mavjud statistik gipotezalarni ikki guruhga ajratish mumkin: parametrik va noparametrik gipoteza. T.m.larning taqsimot funksiyasi paramerli taqsimotlar oilasiga tegishli bo‘lsin. Ammo, taqsimotning parametrlari $\theta = (\theta_1, ..., \theta_n)$ noma’lumdir. Masalan, t.m. normal qonunlar oilasiga tegishli bo‘lsa, uning taqsimot funksiyasi ikkita: o‘rta qiymat va dispersiya orqali to‘liq aniqlanadi va H_0 gipoteza, bu holda matematik kutilma hamda dispersiya qiymatlari haqida bo‘ladi. Demak H_0 gipoteza asosiy noma’lum parametr qiymatlari haqida bo‘lar ekan. Bunday statistik gipotezaga *parametrik gipoteza* deb ataladi.

Agarda t.m.ning taqsimot funksiyasi umuman noma’lum bo‘lsa, noparametrik gipoteza qabul qilinadi. Noparametrik gipoteza taqsimot funksiyasining ma’lum xossalarga ega ekanligi haqida bo‘lishi mumkin.

Endi parametrik statistik alomatlarini qaraylik. X t.m.ning asl taqsimot funksiyasi quyidagi taqsimotlar oilasiga tegishli bo‘lsin:

$$\mathscr{F}=\{F(x,\theta),\theta\in\Theta\}$$

Bu yerda $\theta=(\theta_1, \ldots, \theta_r)$ – r - o‘lchovli vektor, $\Theta\subseteq R^r$ parametrlar qiymati to‘plami bo‘lsin. U holda asosiy gipoteza H_0 ga asosan $\theta\in\Theta_0$, alternativ gipotezaga asosan esa $\theta\in\Theta_1=\Theta\setminus\Theta_0$. Asosiy gipoteza H_0 ni tekshirish uchun $S_{1\alpha}$ va $S^*_{1\alpha}$ ikkita kritik to‘plamlar bo‘lib, ular har birining qiymatdorlik darajasi α bo‘lsin. Faraz qilaylik,

$$W\left(S^*_{1\alpha},\theta\right)\le W(S_{1\alpha},\theta), \quad \theta\in\Theta_0 \tag{8.1.1}$$

va

$$W\left(S^*_{1\alpha},\theta\right)\ge W(S_{1\alpha},\theta), \quad \theta\in\Theta_1 \tag{8.1.2}$$

bo‘lsin.

Aytaylik, (8.1.2) tengsizlikda hech bo‘lmaganda θ ning bitta qiymati uchun qat’iy tengsizlik o‘rinli bo‘lsin. U holda $S^*_{1\alpha}$ ga asoslangan statistik alomat $S_{1\alpha}$ nikiga nisbatan tekis quvvatliroq deyiladi. Tabiiyki, bu holda $S^*_{1\alpha}$ ga asoslangan statistik alomatni $S_{1\alpha}$ nikiga afzal ko‘rmoq maqsadga muvofiq bo‘ladi, chunki u alomat kam xatolikka yo‘l qo‘yadi.

Agarda (8.1.1) va (8.1.2) munosabatlar ixtiyoriy $S_{1\alpha}$ uchun o‘rinli bo‘lsalar, $S^*_{1\alpha}$ ga mos alomat tekis eng quvvatli (t.e.q.) alomat deyiladi.

8.2 Parametrik statistik alomat tuzish usullari

Oldingi paragrafda biz tekis eng quvvatli alomat haqida so‘z yuritdik. Tabiiyki t. e. q. alomat har doim mavjud bo‘lavermaydi. Endi parametrik statistik alomatlar orasida bo‘ladigan holni ko‘raylik. Faraz qilamiz, parametlar to‘plam Θ ikki elementdan iborat bo‘lsin: $\Theta = \{\theta_1,\theta_2\}$. Asosiy gipoteza H_0 ga asosan $\theta=\theta_0$ bo‘lsin. U holda alternativ H_1 gipotezaga ko‘ra esa $\theta = \theta_1$ bo‘ladi.

Demak, shartga binoan biz o‘rganayotgan X t.m. H_0 gipotezaga asosan $F_0(x)=F(x,\theta_0)$ taqsimotga, ammo H_1 raqobatlashuvchi gipotezaga ko‘ra esa $F_1(x)=F(x,\theta_1)$ taqsimotiga ega bo‘ladi. Hajmi n – ga teng bo‘lgan $(X_1,X_2, ..., X_n)$ tanlanma asosida qaysi gipoteza to‘g‘ri ekanini aniqlash kerak. Bu statistik masala Yu. Neyman va E. Pirsonlar tomonidan hal qilingan.

Faraz qilaylik, $F_0(x)$ va $F_1(x)$ taqsimot funksiyalar absolut uzluksiz taqsimot funksiyalar bo‘lib, mos ravishda $f_0(x)$ va $f_1(x)$ lar ularning zichlik funksiyalari bo‘lsin. Quyidagi nisbatni ko‘raylik

$$l(x)=\frac{\prod_{i=1}^{n} f_1(x_i)}{\prod_{i=1}^{n} f_0(x_i)}$$

Mana shunday aniqlangan $l(x)$ – haqiqatga o‘xshashlik nisbati deyiladi. Bu funksiya bilan bo‘g‘liq

$$\Psi(c)=P\{l(x)\geq c/H_0\}$$

ehtimollikni kiritamiz. Bu yerda c – soni $\Psi(c)=\alpha$ tenglama bilan aniqlanadi.

Teorema(Neyman – Pirson). Yuqorida keltirilgan shartlar bajarilganda har doim tekis eng quvvatli alomat mavjud va u quyidagi kritik to‘plam bilan aniqlanadi

$$S_{1\alpha}^{*}=\{x: l(x)\geq c\}.$$

Bu yerda c- kritik nuqta $\Psi(c)=\alpha$ tenglamadan topiladi.

T. e. q. alomat taqsimoti funksiyasi absolyut uzluksiz bo‘lgan hol uchun keltirildi. Ammo bunday alomat diskret taqsimotlar uchun ham mavjud bo‘ladi.

8.2 – misol. $X_1, X_2, ..., X_n$ lar noma’lum θ o‘rta qiymatli va ma’lum σ^2 dispersiyali normal taqsimlangan t.m.ning bog‘liqsiz tajribalar natijasida olingan kuzatilmalari bo‘lsin. Asosiy gipotezaga ko‘ra H_0 : $\theta=\theta_0$, raqobatlashuvchi gipoteza H_1 ga ko‘ra $\theta=\theta_1$ va $\theta_1>\theta_0$ bo‘lsin. Demak,

$$f_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-\theta_0)}{2\sigma^2}}, \quad f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\sigma^2}}$$

Endi haqiqatga o‘xshashlik statistik nisbati $l(x)$ ni topaylik

$$l(x)=\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i-\theta_1)^2-(x_i-\theta_0)^2\right]\right\}=\exp\left\{\frac{n}{\sigma^2}(\theta_1-\theta_0)\overline{x}-\frac{n}{2\sigma^2}\left(\theta_1^2-\theta_0^2\right)\right\}$$

U holda $l(x) \geq c$ tengsizlik quyidagi

$$\bar{x} \geq \sigma^2 \ln c / \left[n(\theta_1 - \theta_0)\right] + (\theta_1 - \theta_0)/2$$

tengsizlikka ekvivalent. Oxirgi tengsizlikni quyidagicha yozish mumkin.

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{x} - \theta_0) \geq \frac{\sigma}{\sqrt{n}(\theta_1 - \theta_0)} \ln c + \frac{\sqrt{n}}{2\sigma}(\theta_1 - \theta_0) = t(c)$$

$\bar{x}$ - tanlanma o‘rta qiymat θ_0 va σ^2/n- parametrlik normal qonun bo‘yicha taqsimlangani uchun

$$\Psi(c) = P\{l(x) \geq c/H_0\} = P\left\{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{x} - \theta_0) \geq t(c)\right\} = \Phi(-t(c))$$

Bu yerda $\Phi(x)$ - Laplas funksiyasi. Tanlangan ixtiyoriy $\alpha \in (0;1)$ ehtimollik uchun, $t(c_\alpha) = t_\alpha$, $\Phi(-t_\alpha) = \alpha$ tengliklar bajariladigan c_α soni har doim mavjud. Demak, Neyman – Pirson teoremasining barcha shartlari qanoatlantiriladi. Shu teoremaga asosan t. e. q. alomat mavjud va uning kritik to‘plami quyidagicha aniqlanadi.

$$S_{1\alpha}^* = \left\{x : \sqrt{n}\,(\bar{x} - \theta_0)/\sigma \geq t_\alpha\right\}, \quad \Phi(-t_\alpha) = \alpha$$

Mana shu alomatning quvvatini hisoblaylik. Alternativ H_1 gipotezaga ko‘ra $\bar{x}$- tanlanmaning o‘rta qiymati θ_1 va σ^2/n - parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangandir. U holda

$$W(S_{1\alpha}^*, \theta_1) = P\left(\bar{x} \geq \theta_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_\alpha / H_1\right) = P\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{x} - \theta_1) \geq -\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\theta_1 - \theta_0) + t_\alpha / H_1\right) =$$
$$= \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\theta_1 - \theta_0) - t_\alpha\right) \qquad (8.2.1)$$

(8.2.1) munosabatdan ikkinchi tur xatolik $\beta = \beta(\alpha, n) = \Phi\left(t_\alpha - \sqrt{n}(\theta_1 - \theta_0)\right)$ ekanligi kelib chiqadi.

Endi quyidagi masalani ko‘raylik. Aliomatning qiymatdorlik darajasi α ga teng bo‘lganida, ikkinchi tur xatolik β ga teng bo‘lishi uchun nechta kuzatilma kerak?; ya'ni tanlanmaning hajmi qanday bo'lishi kerak? Kerakli n soni topish uchun ikkita tenglamaga egamiz. Bular

$$\Phi(-t_\alpha)=\alpha \text{ va } \Phi\left(t_\alpha-\sqrt{n}(\theta_1-\theta_0)\right)=\beta \qquad (8.2.2)$$

$\Phi(y)=p$ tenglamaning yechimini ko'raylik. Bu tenglamaning yechimi y_p normal qonunning p – chi kvantili deyiladi. U holda (8.2.2) ga asosan $-t_\alpha=y_\alpha,\ \ t_\alpha-\sqrt{n}(\theta_1-\theta_0)/\sigma=y_\beta$. Oxirgi ikki tenglikdan $n=\frac{\sigma^2\left(y_\alpha+y_\beta\right)^2}{(\theta_1-\theta_0)^2}+1$ munosabatga ega bo'lamiz. Qidirayotgan son butun bo'lishi lozim. Shuning uchun, $n^*=\left[\frac{\sigma^2\left(y_\alpha+y_\beta\right)^2}{(\theta_1-\theta_0)^2}\right]+1$. Bu erda $[a]$ – a sonning butun qismi. Masalan, $\alpha=\beta=0.05$ va $\frac{\theta_1-\theta_0}{\sigma}=0.1$ bo'lsa, u holda $n^*=1076$ bo'ladi; agarda $\alpha=\beta=0.001$, $\frac{\theta_1-\theta_0}{\sigma}=1$ bo'lsa, $n^*=39$ bo'ladi.

8.3 Noparametrik muvofiqlik alomatlari

Faraz qilaylik, $X_1, X_2, ..., X_n$ lar bog'liqsiz n ta tajriba natijasida X t.m.ning olingan kutilmalari bo'lsin. X t.m.ning taqsimoti noma'lum $F(x)$ funksiyadan iborat bo'lsin. Noparametrik asosiy gipotezaga ko'ra $H_0: F(x)=F_0(x)$. Mana shu statistik gipotezani tekshirish talab etilsin.

1. **A. Kolmogorovning muvofiqlik alomati**

$X_1, X_2, ..., X_n$ kuzatilmalar asosida $F_n(x)$ empirik taqsimot funksiyasini tuzamiz. Faraz qilamiz, $F(x)$ uzluksiz taqsimot funksiyasi bo'lsin. Quyidagi statistikani kiritamiz

$$D_n=D_n\left(X_1,X_2,...,X_n\right)=\sup_{-\infty<x<\infty}\left|F_n(x)-F(x)\right|$$

Glivenko teoremasiga ko'ra n yetarli katta bo'lganda D_n kichik qiymat qabul qiladi. Demak, agar asosiy gipoteza H_0 o'rinli bo'lsa D_n statistika kichik bo'lishi kerak. Kolmogorovning muvofiqlik alomati D_n statistikaning shu xossasiga asoslangandir.

Teorema(Kolmogorov). Ixtiyoriy uzluksiz $F(x)$ taqsimot funksiyasi va λ uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\sqrt{n}D_n < \lambda\right\} = K(\lambda) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i e^{-2i^2\lambda^2}$$

bo‘ladi.

D_n – statistikaga asoslangan statistik alomat kritik to‘plami quyidagicha aniqlanadi

$$S_{1\alpha} = \left\{t : t = D_n(x_1, x_2, ..., x_n) > t_\alpha\right\}.$$

Bu yerdan $0<\alpha<1$ – alomatning qiymatdorlik darajasi.

Kolmogorov teoremasidan quyidagi xulosalar kelib chiqadi:

a) D_n – statistikaning H_0 gipoteza to‘g‘ri bo‘lgandagi taqsimoti $F(x)$ bog‘liq emas;

b) Amaliy nuqtayi nazardan n ≥ 20 bo‘lgandayoq teoremadagi yaqinlashish juda yaxshi natija beradi, ya’ni $P\left\{\sqrt{n}D_n < \lambda\right\}$ ni K(λ) bilan almashtirishdan yo‘l qo‘yiladigan xatolik yetarlicha kichikdir.

Bu xulosalardan kelib chiqadiki, $n \geq 20$ bo‘lsa kritik chegara t_α ni $\lambda_\alpha / \sqrt{n}$ ga teng deb olish mumkin. Bu yerda λ_α $K(\lambda_\alpha) = 1- \alpha$ tenglamaning ildizlaridan iborat. Haqiqatan ham berilgan $0< \alpha <1$ uchun

$$P\left\{D_n \in S_{1\alpha} / H_0\right\} = P\left\{\sqrt{n}D_n \geq \lambda_\alpha / H_0\right\} \approx 1 - K(\lambda_\alpha) = \alpha .$$

Shunday qilib, Kolmogorov alomati quyidagicha aniqlanadi:

1) berilgan α orqali K(λ_α) = 1- α tenglama yechimi λ_α jadval yordamida topiladi.
2) berilgan tajriba natijalari $x_1, x_2, \ldots, x_n$ larga ko‘ra $t=D_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qiymati hisoblanadi,
3) $\sqrt{nt}$ va λ_α solishtiriladi, agar $\sqrt{nt} \geq \lambda_\alpha$ bo‘lsa asosiy gipoteza H_0 rad eriladi, aks holda tajriba H_0 ni tasdiqlaydi.

2. K. Pirsonning xi–kvadrat muvofiqlik alomati

Amaliyotda Kolmogorov statistikasini hisoblash ancha murakkab va undan tashqari Kolmogorov alomatini qo‘llash faqat taqsimot funksiya $F(x)$ uzluksiz bo‘lgandagina mimkindir. Shuning uchun, amaliyotda ko‘p hollarda Pirsonning xi – kvadrat alomati qo‘llaniladi. Bu alomat universal xarakterga ega bo‘lib, kuzatilmalarni guruhlash usuliga asoslangandir.

Faraz qilaylik, $\mathscr{X}$ – kuzatilayotgan va taqsimot funksiyasi noma’lum $F(x)$ bo‘lgan X t.m.ning qiymatlari to‘plami bo‘lsin. $\mathscr{X}$ ni k ta kesishmaydigan oraliqlarga ajratamiz:

$$\mathscr{X} = \bigcup_{i=1}^{k} \varepsilon_i, \ \ \varepsilon_i \bigcap \varepsilon_j = \emptyset, \ i \neq j, \ i, j = 1,2,...,k$$

Takrorlanishlar vektori deb ataladigan $\nu = (\nu_1,...,\nu_k)$ vektorni olaylik. Bu vektorning $i-$ koordinatasi kuzatilmalardan ν_i tasi ε_i oraliqqa tushganligini anglatadi. Ko‘rinib turibdiki, takrorlanishlar vektori ν tanlanma ($X_1,\dots,X_n$) orqali bir qiymatli aniqlanadi va $\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_k = n$. Asosiy gipoteza *H0* to‘g‘ri, bo‘lgandagi kuzatilmaning ε_i oraliqqa tushish, ehtimolligini P_{i0} bilan belgilaylik:

$$P_{i0} = P\{X \in \varepsilon_i / H_0\}, \ i = 1,2,...,k.$$

Quyidagi statistikani kiritamiz

$$\mathrm{Y}_n^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(\nu_k - nP_{i0}\right)^2}{nP_{i0}}$$

va *H0* : $F(x) = F_0(x)$ asosiy gipotezani to‘g‘riligini tekshiramiz.

Kuchaytirilgan katta sonlar qonuniga asosan nisbiy chastota ν_r / n bir ehtimollik bilan nazariy ehtimollik P_{r0} ga intiladi. Demak, agar *H0* gipoteza o‘rinli bo‘lsa, u holda Y_n^2 statistikaning qiymati yetarli darajada kichik bo‘lishi kerak.Demak, Pirsonning χ^2 mezoni Y_n^2 statistikaning katta qiymatlarida asosiy gipoteza *H0* ni rad etadi, ya’ni alomatning kritik sohasi $S_{1\alpha} = \{t : t > t_\alpha\}$ ko‘rinishda bo‘ladi. Asosiy gipoteza *H0* to‘g‘ri bo‘lganida Y_n^2 statistikaning aniq taqsimotini hisoblash ancha murakkab, bu esa o‘z navbatida alomatning kritik chegarasi t_α ni topishda qiyinchilik tug‘diradi. Ammo, n yetarli katta bo‘lsa *H0* gipoteza to‘g‘ri bo‘lganida Y_n^2 statistikaning taqsimotini limit taqsimot bilan almashtirish mumkin.

Teorema(Pirson). Agar 0<P_{i0}<1, $i = 1,2,...,k.$ bo‘lsa, u holda

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\mathrm{Y}_n^2 < t / H_0\right) = P\left\{\chi_{k-1}^2 < t\right\}.$$

Bu yerda χ_{k-1}^2 erkinlik darajasi k-1 bo‘lgan xi – kvadrat taqsimotiga ega bo‘lgan t.m.dir:

$$P\{\chi_{k-1}^2 < t\} = \frac{1}{2^{\frac{k-1}{2}} \Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)} \int_0^t x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx \ ,$$

$\Gamma(n)$ - Gamma funksiya. ■

Amaliyotda bu teorema natijasidan n≥50, $\nu_i \geq 45$, $i = 1,2,...,k.$ bo‘lganda foydalanish mumkin. Bu holda t_α $P\{\chi^2_{k-1} > t_\alpha\} = \alpha$, $0 < \alpha < 1$ tenglamadan topiladi.

8.4 Matematik kutilma va dispersiyalar haqidagi statistik gipotezalarni tekshirish

Ikki bosh to‘plamlar matematik kutilmalari va dispersiyalarining tengligini tekshirish masalalariini ko‘raylik. Ikkala bosh to‘plam normal taqsimlangan deb faraz qilamiz. Demak, birinchi bosh to‘plamdan $X^{(n)}=(X_1, ..., X_n)$, ikkinchi bosh to‘plamdan esa $Y^{(m)}=(Y_1, ..., Y_m)$ tanlanmalari olingan bo‘lsin.

1. Matematik kutilmalar noma’lum bo‘lganida dispersiyalar tengligi haqidagi gipotezani tekshirish

$X_1, X_2, ..., X_n$ lar o‘rta qiymati noma’lum va dispersiyasi σ_x^2 bo‘lgan normal taqsimlangan X t.m. kuzatilmalari va $Y_1, Y_2, ..., Y_m$ lar esa o‘rta qiymati noma’lum va dispersiyasi σ_y^2 bo‘lgan normal taqsimlangan t.m.ning kuzatilmalari bo‘lsin. Asosiy gipoteza H_0 : $\sigma_x^2 = \sigma_y$ tasdiqdan, alternativ gipoteza H_1 : $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$ tasdiqdan iborat bo‘lsin. Dispersiyalarining eng yaxshi statistik baholarini ko‘raylik:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{x}\right)^2 \quad \text{va} \quad \sigma_y^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(Y_i - \overline{y}\right)^2$$

F – statistika deb ataluvchi quyidagi statistikani kiritamiz

$$F = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{x}\right)^2}{\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(Y_i - \overline{y}\right)^2}$$

Teorema(Snedekor). Agarda X o‘rta qiymati θ_1 va dispersiyasi σ_x^2 bo‘lgan normal qonun bo‘yicha taqsimlangan t.m. va Y o‘rta qiymati θ_2 va dispersiyasi σ_y^2 bo‘lgan normal qonun bo‘yicha taqsimlangan t.m.lar bo‘lsa, u holda

$$\frac{\sigma_y^2 \sigma_x^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2}$$

t.m. erkinlik darajalari n-1 va m-1 bo‘lgan Snedekor taqsimotiga ega bo‘ladi. ■

Snedekor taqsimotining zichlik funksiyasi

$$f_{n,m}(x)=\left(\frac{n}{m}\right)^{n/2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\cdot\frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{\left(1+nx/m\right)^{\frac{n+m}{2}}},\ x>0$$

formula bilan aniqlanadi.

Alomatning kritik sohasi quyidagicha tiziladi. Agarda

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}<C_1 \text{ yoki } \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}>C_2 \qquad (C_1<1<C_2)$$

bo‘lsa, asosiy gipoteza H_0 ni rad etmoq lozim.

Yuqorida keltirilgan Snedekor teoremasidan foydalanib C_1 va C_2 – sonlarni aniqlaylik. Jadvaldan erkinlik darajasiga asosan Snedekor taqsimotining 1-α kvantili topiladi. Masalan, α = 0.15 va n = m = 9 bo‘lsa C_1 = 3.44, $C_1=\frac{1}{C_2}=0.29$.

2. Matematik kutilmalar ma’lum bo‘lganida dispersiyalar tengligi haqidagi gipotezani tekshirish

Bu gipoteza oldingi gipotezaga o‘xshash tekshiriladi. Ammo σ_x^2 va σ_y^2 dispersiyalar mos ravishda quyidagicha hisoblanadi:

$$\sigma_x^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\theta_x\right)^2,\ \sigma_y^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(Y_i-\theta_y\right)^2,$$

Bu yerda θ_x va θ_y lar X va Y t.m.lar o‘rta qiymatlaridir.

3. Dispersiyalar noma'lum bo'lganida matematik kutilmalar tengligi haqidagi gipotezani tekshirish

Faraz qilaylik, *X* va *Y* t.m.lar mos ravishda o'rta qiymatlari θ_x va θ_y, dispersiyalari $\sigma_x^2=\sigma_y^2=\sigma^2$ bo'lgan normal qonun bo'yicha taqsimlangan bo'lib, σ^2, θ_x va θ_y lar noma'lum bo'lsin. $(X_1, \ldots, X_n)$ *X* t.m.ning tanlanmasi va $(Y_1, \ldots, Y_m)$ –*Y* t.m.ning tanlanmasi bo'lsin. Asosiy gipoteza H_0 : $\theta_x = \theta_y$ va alternativ gipoteza H_1 : $\theta_x \neq \theta_y$ lardan biri o'rinli ekanini tekshirish kerak. Tanlanmalar o'rta qiymatlari ayirmasi $\bar{x}-\bar{y}$ ni qaraylik. Shartga ko'ra

$$D\left(\bar{x}-\bar{y}\right)=\sigma^2\,\frac{n+m}{n\cdot m}.$$

Quyidagi statistikani kiritamiz:

$$t=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\left[(n-1)\sigma_x^2+(m-1)\sigma_y^2\right]\Big/(n+m-2)}}\cdot\sqrt{\frac{n\cdot m}{n+m}}$$

Bu statistika erkinlik darajasi $n + m - 2$ bo'lgan Styudent taqsimotiga ega bo'ladi. U holda asosiy gipoteza H_0 o'rinli bo'lishini tekshiruvchi statistik alomat quyidagicha tuziladi: agarda $|t|>t_\alpha(n+m-2)$ bo'lsa gipoteza H_0 gipoteza rad etiladi. Bu yerda $t_\alpha(n+m-2)$ qiymatdorlik darajasi α – bo'lgan Styudent taqsimotining kritik nuqtasidir.

4. Dispersiyalar ma'lum bolganida o'rta qiymatlar tengligi haqidagi gipotezani tekshirish

Endi o'rta qiymatlar tengligi haqidagi gipotezani dispersiyalar ma'lum bo'lganida tekshiruvchi alomat ko'rib o'tamiz. Bu holda

$$t=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}+\frac{\sigma_y^2}{m}}}$$

t.m. standart normal qonunga ega. Shuning uchun agarda $|t|>U_\alpha$ bo'lsa H_0 : $\theta_x=\theta_y$ asosiy gipoteza rad etiladi. Bu yerda U_α– qiymatdorlik darajasi α $(0<\alpha<1)$ bo'lgan standart normal qonun kritik nuqtasidir.

VIII bobga doir misollar

1. Telefon stansiyasida har minutda noto‘g‘ri ulanishlar soni X ustida kuzatishlar olib borilib 1 soat davomida quyidagi ma’lumotlar olindi: 3; 1; 3; 1; 4; 2; 2; 4; 0; 3; 0; 2; 2; 0; 2; 1; 4; 3; 3; 1; 4; 2; 2; 1; 1; 2; 1; 0; 3; 4; 1; 3; 2; 7; 2; 0; 0; 1; 3; 3; 1; 2; 4; 2; 0; 2; 3; 1; 2; 5; 1; 1; 0; 1; 1; 2; 2; 1; 1; 5. Bu tanlamaning nazariy taqsimoti Puasson taqsimotidan iboratligi haqidagi H gipotezani tekshiring(α=0.05).

2. Ma’lum mahsulotning narxi X ning dispersiyasi $\sigma^2 = 2.25$ ga teng va quyidagi statistik tanlanmaga ega:

Narxlar Intervali	3.0-3.6	3.6-4.2	4.2-4.8	4.8-5.4	5.4-6.0	6.0-6.6	6.6-7.2
Chastotasi	2	8	35	43	22	15	5

Xi -kvadrat alomat yordamida bu tanlanmaning 99% ishonch bilan $N(5;2.25)$ normal taqsimotga ega ekanligi haqidagi H gipoteza o‘rinli bo‘lishini tekshiring.

3. Byuffon tangani n=4040 marta tashlaganida gerb tomoni m=2048 marta tushgan. Bu tajriba natijanlari tanga simmetrikligi haqidagi H gipoteza bilan muvofiq keladimi? Bunda α=0.05 va α=0.1 bo‘lgan hollarni ko‘ring.

IX bob. Ko‘p o‘lchovli statistik tahlil usullari

Ko‘p sondagi korrelatsiyalangan miqdorlardan, yangi oz sondagi korrelatsiyalanmagan miqdorlarga o‘tish ko‘p o‘lchovli statistik tahlilning mohiyatini tashkil qiladi.

9.1 Faktorli tahlil

Iqtisodiy ko‘rsatkichlarning o‘zgarishini belgilovchi va iqtisodiy obyektlarni tasniflashni o‘rganuvchi “ yashirin” faktorlarni aniqlash va ularni tahlil qilish ko‘p o‘lchovli statistik tahlilni asosiy masalalaridir.

Iqtisodiy ko‘rsatkichlar o‘zgarishini belgilovchi omillar to‘plami komponentalari orasida stoxastik bog‘lanishlar bo‘lgan ko‘p o‘lchovli vektor sifatida hamda “yashirin” faktorlar esa markazlashtirilgan va korrelatsiyalanmagan t.m.lar deb qaraladi. Mana shunday “yashirin” faktorlarni aniqlash faktorli tahlilning, xususan, bosh komponentalar usulining asosiy masalalarini tashkil qiladi.

Iqtisodiy obyektlarni tasniflashda ko‘p o‘lchovli tanlanma iqtisodiy omillar qiymatlaridan tuziladi. Har bir ko‘p o‘lchovli tanlanma – ko‘p o‘lchovli t.m.ning amalga olingan qiymatlaridan iborat bo‘lib, u o‘rganilayotgan iqtisodiy ob’ektni tavsiflashga, sinflarga ajratishga xizmat qiladi. Shu maqsad yo‘lida ko‘p o‘lchovli t.m.ning taqsimot funksiyasi haqida oldindan ma’lumotga ega bo‘lish muhimdir. Agar mana shunday ma’lumot bo‘lmasa, sinflarga ajratish ularni tashkil qiluvchi obyektlar “yaqinligi” asosida amalga oshiriladi; bunda bir sinfdagi obyektlar “yaqin”, turli sinfdagilari esa bir – birlaridan “uzoq” da bo‘ladilar. Obyektlar orasidagi “yaqinlik” ni belgilovchi masofa turlicha aniqlanishi mumkin, xususan, n o‘lchovli Yevklid fazosidagi masofa deb ham aniqlanishi mumkin.

Endi faktorli tahlil usuliga o‘taylik. Quyidagi holatni o‘rganaylik. Aniq bir shaxsga yakka holda kiyim tikish lozim. Buning uchun shu yakka shaxsni qaddi – qomatini tavsiflaydigan bir nechta ma’lumotlar yig‘iladi. Shu kiyim sanoat korxonasida ishlab chiqilsa faqat uchta o‘zaro bog‘liq ma’lumotlarga asoslanadi xolos: o‘lcham, bo‘y va to‘lalik. Bu holat faktorli tahlilning asosiy masalasini to‘liq namoyish qiladi: boshlang‘ich ko‘p sondagi o‘zaro bog‘langan $F_1, \ldots, F_k$, $k<t$ “yashirin” omillarga o‘tish masalasi.

Iqtisodiyotda shu turdagi masalalar ko‘plab uchraydi. Masalan, ishlab chiqarish manbalaridan samarali foydalanish uchun bir necha umumlashtiruvchi ko‘rsatkichlarni topish zarurati tug‘iladi.

Faktorli tahlil modeli quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$X_i = a_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} F_j + v_i \varepsilon_i \ , \quad i = 1, 2, \ldots, m, \ k < m \qquad (9.1.1)$$

Bu yerda $MX_i = a_i$, F_j, $j = 1, 2, \ldots, k$ – umumiy (“yashirin”) faktorlar;
a_{ij} - boshlang‘ich ko‘rsatkichlarning umumiy faktorlariga ta’sir koeffitsentlari;
ε_i , $i = 1,2,...,m$ - maxsus faktorlar ;
v_i - ko‘rsatkichlarning maxsus faktorlarga ta’siri.

Umumiy va maxsus faktorlar markazlashtirilgan ($MF_j = 0,\ j = 1,2,...,k$, $M\varepsilon_i = 0, i = 1,2,...,m$), normallangan ($MF_j^2 = 1,\ j = 1,2,...,k$, $M\varepsilon_i^2 = 1, i = 1,2,...,m$) va korrelyatsiyalanmagan ($MF_j F_{j'} = 0,\ j \neq j'$, $M\varepsilon_i \varepsilon_{i'} = 0, i \neq i'$, $MF_j \varepsilon_{j'} = 0$, $j, j' = 1,2,...k$, $i, i' = 1,2,...,m$) deb faraz qilamiz.

Faktorli tahlilning (9.1.1) modeli matritsalar yordamida quyidagicha yoziladi

$$X = a + AF + V\varepsilon , \qquad (9.1.2)$$

bu yerda $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ - boshlang‘ich ko‘rsatkichlar va ularning matematik kutilmalaridan tuzilgan vektor ustun.

$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_k \end{pmatrix}$, $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{pmatrix}$ - umumiy va maxsus faktorlar vektor ustuni.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mk} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & v_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & v_m \end{pmatrix} -$$

umumiy va maxsus faktorlar ta’sir koeffitsientlari matritsalari.

(9.1.2) ga asosan *X* ko‘p o‘lchovli ko‘rsatkich uchta korrelatsiyalanmagan tarkibiy qo‘shiluvchilardan iborat ekan:
1) a - tasodifiy bo‘lmagan tarkibiy bo‘lak (matematik kutilma);
2) umumiy faktorlar aniqlaydigan AF – tasodifiy tarkibiy bo‘lak;
3) maxsus faktorlar aniqlaydigan V_ε tasodifiy tarkibiy bo‘lak.

Faktorli tahlilning (9.1.2) modelini amalga oshirish (qo‘llash) uchun hech bo‘lmaganda uning birinchi ikki tarkibiy qoshiluvchilarini statistik ma’lumotlar asosida statistik baholash lozim. Bulardan, birinchisi matematik kutilma a ni tanlanmaning o‘rta qiymati a ga, ikkinchi qo‘shiluvchini ularning statistik baholariga, ya’ni umumiy faktorlar ta’sir koeffitsientlari bahosi va umumiy faktorlar bahosiga almashtirish kerak.

Yuqoridagi masalalarni yechish uchun bir necha usullar mavjud. Ana shulardan biri – bosh komponentalar usulidir.

9.2 Bosh komponentalar usuli

Bosh komponentalar usulu (ingl. Principal component analysis, PCA) — olingan ma’lumotlarni eng kam informatsiya yo‘qotgan holda o‘lchovini pasaytirishning asosiy usullaridan biri hisoblanadi. U K. Pirson tomonidan 1901 yilda taklif etilgan bo‘lib, ko‘pgina amaliy masalalarni echishda keng qo‘llaniladi. Bosh komponentalarni hisoblash boshlang‘ich ma’lumotdan tuzilgan kovariatsion matrisaning hos son va hos vectorlarni hisoblashga keltiriladi.

Bosh komponentalar usuli butun to‘lig‘icha umumiy ko‘rsatkichlarga asoslanib hulosa chiqaradi. Bu usulda ham faktorlar markazlashtirilgan, normallangan va korrelatsiyalanmagandir.

✓ O’rganilayotgan *X* ko’rsatkichlar sistemasining birinchi bosh komponentasi $Y_1(X)$ ushbu ko’rshatkichlardan tuzilgan normallashgan, markazlashtirilgan shunday chiziqli kombinatsiyasiki, u qolgan barcha shunday chiziqli kombinatsiyalar orasida eng katta dispersiyaga ega bo‘lishi kerak.

✓ O’rganilayotgan *X* ko’rsatkichlar sistemasining *k*-bosh komponentasi $Y_1(X)$ ushbu ko’rshatkichlardan tuzilgan normallashgan, markazlashtirilgan shunday chiziqli kombinatsiyasiki, u oldingi *k*-1 bosh komponentalar bilan korrelyatsiyalanmagan va qolgan barcha normallashgan, markazlashtirilgan va korrelyatsiyalanmagan oldingi *k*-1 chiziqli kombinatsiyalar orasida eng katta dispersiyaga egadir.

Uning mohiyati quyidagicha. Ushbu

$$X_i = a_i + \sum_{j=1}^{m} a_j F_j, \quad i = 1,2,...,m \tag{9.2.1}$$

yoki matritsa ko‘rinishida yozib oladigan bo‘lsak,

$$X = a + AF$$

ifodani ko‘raylik. Markazlashtirilgan boshlang‘ich ko‘rsatkichlarni $Y_j = X_j - a_j, \quad j = 1,2,...,m$ deb belgilaylik. U holda (9.2.1) munosabatni (9.1.2) bilan solishtirish natijasida quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$Y = A \cdot F , \tag{9.2.2}$$

A – faktorlar ta’siri koeffitsienti matritsasini aniqlash maqsadida boshlang‘ich ko‘rsatkichlar kovariatsiyasi matritsasining xos sonlarini λ va xos vektorlarini l bilan belgilaylik:

$$(m \times m) \quad B = \left\| \operatorname{cov}\left(x_i, x_j\right) \right\| = \left\| \operatorname{cov}(y_i, y_j) \right\| = MYY' .$$

Eslatib o‘tish joizki, xos sonlar quyidagi tenglamadan topiladi:

$$B \cdot l = \lambda \cdot l \quad \text{yoki} \quad (B - \lambda E_m) l = 0 . \tag{9.2.3}$$

Bu yerda E_m – birlik matritsa. (9.2.3) bir jinsli tenglamalar sistemasi noldan farqli yechimga ega bo‘lishi uchun bosh determinanti nol bo‘lishi kerak

$$\left| B - \lambda \cdot E \right| = 0 \tag{9.2.4}$$

(9.2.4) tenglama λ ga nisbatan m ta tenglamalardan iborat bo‘lib, B – matritsaning $\lambda_1,...,\lambda_m$ xos sonlaridan iborat bo‘lgan yechimlarga ega.

Turli xos sonlarga mos keluvchi xos vektorlar ortogonal, shuning uchun

$$L = (l_1,...,l_m)$$

matritsa normallangan xos vektorlardan tuzilgan bo‘lganligi uchun ham ortogonal matritsadir. Ortogonal matritsa koordinatalar o‘qini burishni anglatadi.

Shuning uchun, markazlashtirilgan boshlang‘ich ko‘rsatkichlarni ortogonal L' matritsa yordamida chiziqli almashtirish koordinatalar o‘qini burishni anglatadi:

$$f = L'Y, \quad Y = Lf \tag{9.2.5}$$

Hosil bo‘lgan yangi ko‘rsatkichlar korrelatsiyalanmagan bo‘ladi. Haqiqatan ham, (9.2.5) ga asosan ko‘rsatkichlar markazlashtirilgan bo‘lgani uchun

$$\left\| \mathrm{cov}(f_i, f_j) \right\| = Mff' = ML'YY'L = L'MYY'L = L'BL =$$

$$= \left\| I_i{}' B I_j \right\| = \left\| I' \lambda I_j \right\| = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix}.$$

Demak,

$$\mathrm{cov}(f_i, f_j) = 0\ ,\ i \neq j\ ,\ \ Df_i = \mathrm{cov}(f_i, f_i) = \lambda_i\ .$$

Ortogonal almashtirish masofani saqlaydi, shu sababli

$$\sum_{i=1}^{m} Y_i^2 = \sum_{i=1}^{m} f_i^2\ .$$

Demak, boshlang‘ich ko‘rsatkichlarni barcha dispersiyasi normallashmagan bosh komponentalar dispersiyasiga tengdir:

$$\sum_{i=1}^{n} DX_i = M\left(\sum_{i=1}^{m} Y_i^2 \right) = M\left(\sum_{i=1}^{m} f_i^2 \right) = \sum_{i=1}^{n} Df_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\ . \tag{9.2.6}$$

Oxirgi tenglikdan ko‘rinadiki, boshlang‘ich ko‘rsatkichlarning barcha dispersiyasi xos sonlar yig‘indisiga teng ekan. Bosh komponentalar usulida xos sonlar tartiblanadi $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_m$.

Amaliyotda katta xos sonlarga mos keluvchi bir necha bosh komponentalar bilan ish ko‘riladi. Bunga asos bo‘lib (9.2.6) tenglik xizmat qiladi, ya'ni boshlang'ich ko'rsatkichlarning dispersiyasi shu xos sonlar yig'indisiga juda yaqin bo'ladi.

Bosh komponentalarni normallashtiraylik $F_i = \dfrac{f_i}{\sqrt{\lambda_i}}$ yoki $F = \Lambda^{-1/2} f$ -matritsa ko'rinishida yozamiz. Bu yerda

$$\Lambda^{-1/2} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_m}} \end{pmatrix}.$$

Endi $f = \Lambda^{1/2} F$ bo'lganligi uchun $Y = L \cdot f = L \cdot \Lambda^{1/2} F = A \cdot F$.

Oxirgi tenglikdan boshlang'ich ko'rsatkichlarning umumiy faktorlarga ta'siri

$$A = L \cdot \Lambda^{1/2}, \qquad \Lambda^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_m} \end{pmatrix} \tag{9.2.7}$$

ko'rinishda ekanligi kelib chiqadi.

Amaliyotda yuqorida chiqarilgan xulosalar va bajarilgan hisoblarni nazariy matematik kutilma a va kovariatsiyalar matritsasi B uchun emas, balki tanlanmalar yordamida ular uchun qurilgan $\hat{a}$ va $\hat{B}$ statistik baholar uchun bajarish kerak. Buni quyidagi misolda ko'raylik.

9.1 – misol. 24 ta (n=24) toshbaqalarning tosh pansirlari ko'rsatkichlari: uzunligi X_1, eni X_2 va balandligi X_3 ni (mm larda) o'lchash natijasida quyidagi kovariatsion matrisa $\hat{B}$ hosil qilingan bo'lsin,

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 451.39 & 271.17 & 168.70 \\ 271.17 & 171.73 & 103.29 \\ 168.70 & 103.29 & 66.65 \end{pmatrix}.$$

(9.2.4)ga asosan quyidagi mos 3-darajali

$$\begin{vmatrix} 451.39-\lambda & 271.17 & 168.70 \\ 271.17 & 171.73-\lambda & 103.29 \\ 168.70 & 103.29 & 66.65-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

tenglamani echib mos ravishda λ_1=680.40, λ_2=6.50 va λ_3=2.86 ekanligini aniqlaymiz. Topilgan xos sonlarni mos ravishda (9.2.5) sistemaga qo'yib, ularni noma'lum $l_i = (l_{i1}, l_{i2}, l_{i3})$ larga nisbatan hisoblaymiz:

$$l_1' = \begin{pmatrix} 0.8126 \\ 0.4955 \\ 0.3068 \end{pmatrix},\ l_2' = \begin{pmatrix} -0.5454 \\ 0.8321 \\ 0.1006 \end{pmatrix},\ l_3' = \begin{pmatrix} -0.2054 \\ -0.2491 \\ 0.9465 \end{pmatrix}$$

U holda bosh komponentalar quyidagiga teng bo'ladi:

$$f(1) = 0.81X_1 + 0.50X_2 + 0.31X_3;$$
$$f(1) = -0.55X_1 + 0.83X_2 + 0.10X_3;$$
$$f(1) = -0.21X_1 - 0.25X_2 + 0.95X_3.$$

IX bobga doir misollar

1. Tavakkaliga tanlangan 20 talabalarning vazni (X), yoshi (Y) va bo'yi (Z) to'g'risidagi ma'lumotlar asosida tuzilgan quyidagi $\hat{B}$ kovariatsion matrisa uchun bosh komponentalarini hisoblang:

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 19.69 & 1.11 & 14.13 \\ 1.11 & 2.09 & 1.33 \\ 14.13 & 1.33 & 17.61 \end{pmatrix}.$$

2. Quyidagi kovariatsion matrisalar uchun $Df_i = \mathrm{cov}(f_i, f_i) = \lambda_i$ larni hamda bosh komponentalarini hisoblang.

a) $\begin{pmatrix} 3.74 & 1.85 & 2.12 \\ 1.85 & 6.33 & 0.70 \\ 2.12 & 0.70 & 2.00 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 26.03 & 16.50 & 16.40 \\ 16.50 & 64.95 & 9.56 \\ 16.40 & 9.56 & 19.79 \end{pmatrix}$.

ILOVA

1-ilova

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$ **funksiyaning qiymatlari jadvali**

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3327	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

2-ilova

$$\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2/2}dt$$ funksiyaning qiymatlari jadvali

x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$
0,00	0,0000	**0,45**	0,1736	**0,90**	0,3159	**1,35**	0,4115
0,01	0,0040	**0,46**	0,1772	**0,91**	0,3186	**1,36**	0,4131
0,02	0,0080	**0,47**	0,1808	**0,92**	0,3212	**1,37**	0,4147
0,03	0,0120	**0,48**	0,1844	**0,93**	0,3238	**1,38**	0,4162
0,04	0,0160	**0,49**	0,1879	**0,94**	0,3264	**1,39**	0,4177
0,05	0,0199	**0,50**	0,1915	**0,95**	0,3289	**1,40**	0,4192
0,06	0,0239	**0,51**	0,1950	**0,96**	0,3315	**1,41**	0,4207
0,07	0,0279	**0,52**	0,1985	**0,97**	0,3340	**1,42**	0,4222
0,08	0,0319	**0,53**	0,2019	**0,98**	0,3365	**1,43**	0,4236
0,09	0,0359	**0,54**	0,2054	**0,99**	0,3389	**1,44**	0,4251
0,10	0,0398	**0,55**	0,2088	**1,00**	0,3413	**1,45**	0,4265
0,11	0,0438	**0,56**	0,2123	**1,01**	0,3438	**1,46**	0,4279
0,12	0,0478	**0,57**	0,2157	**1,02**	0,3465	**1,47**	0,4292
0,13	0,0517	**0,58**	0,2190	**1,03**	0,3485	**1,48**	0,4306
0,14	0,0557	**0,59**	0,2224	**1,04**	0,3508	**1,49**	0,4319
0,15	0,0596	**0,60**	0,2257	**1,05**	0,3531	**1,50**	0,4332
0,16	0,0636	**0,61**	0,2291	**1,06**	0,3554	**1,51**	0,4345
0,17	0,0675	**0,62**	0,2324	**1,07**	0,3577	**1,52**	0,4357
0,18	0,0714	**0,63**	0,2357	**1,08**	0,3599	**1,53**	0,4370
0,19	0,0753	**0,64**	0,2389	**1,09**	0,3621	**1,54**	0,4382
0,20	0,0793	**0,65**	0,2422	**1,10**	0,3643	**1,55**	0,4394
0,21	0,0832	**0,66**	0,2454	**1,11**	0,3665	**1,56**	0,4406
0,22	0,0871	**0,67**	0,2486	**1,12**	0,3686	**1,57**	0,4418
0,23	0,0910	**0,68**	0,2517	**1,13**	0,3708	**1,58**	0,4429
0,24	0,0948	**0,69**	0,2549	**1,14**	0,3729	**1,59**	0,4441
0,25	0,0987	**0,70**	0,2580	**1,15**	0,3749	**1,60**	0,4452
0,26	0,1026	**0,71**	0,2611	**1,16**	0,3770	**1,61**	0,4463
0,27	0,1064	**0,72**	0,2642	**1,17**	0,3790	**1,62**	0,4474
0,28	0,1103	**0,73**	0,2673	**1,18**	0,3810	**1,63**	0,4484
0,29	0,1141	**0,74**	0,2703	**1,19**	0,3830	**1,64**	0,4495
0,30	0,1179	**0,75**	0,2734	**1,20**	0,3849	**1,65**	0,4505
0,31	0,1217	**0,76**	0,2764	**1,21**	0,3869	**1,66**	0,4515
0,32	0,1255	**0,77**	0,2794	**1,22**	0,3883	**1,67**	0,4525
0,33	0,1293	**0,78**	0,2823	**1,23**	0,3907	**1,68**	0,4535
0,34	0,1331	**0,79**	0,2852	**1,24**	0,3925	**1,69**	0,4545
0,35	0,1368	**0,80**	0,2881	**1,25**	0,3944	**1,70**	0,4554
0,36	0,1406	**0,81**	0,2910	**1,26**	0,3962	**1,71**	0,4564
0,37	0,1443	**0,82**	0,2939	**1,27**	0,3980	**1,72**	0,4573
0,38	0,1480	**0,83**	0,2967	**1,28**	0,3997	**1,73**	0,4582
0,39	0,1517	**0,84**	0,2995	**1,29**	0,4015	**1,74**	0,4591
0,40	0,1554	**0,85**	0,3023	**1,30**	0,4032	**1,75**	0,4599
0,41	0,1591	**0,86**	0,3051	**1,31**	0,4049	**1,76**	0,4608
0,42	0,1628	**0,87**	0,3078	**1,32**	0,4066	**1,77**	0,4616
0,43	0,1664	**0,88**	0,3106	**1,33**	0,4082	**1,78**	0,4625
0,44	0,1700	**0,89**	0,3133	**1,34**	0,4099	**1,79**	0,4633

1,80	0,4641	**2,02**	0,4783	**2,44**	0,4927	**2,86**	0,4979
1,81	0,4649	**2,04**	0,4793	**2,46**	0,4931	**2,88**	0,4980
1,82	0,4656	**2,06**	0,4803	**2,48**	0,4934	**2,90**	0,4981
1,83	0,4664	**2,08**	0,4812	**2,50**	0,4938	**2,92**	0,4982
1,84	0,4671	**2,10**	0,4821	**2,52**	0,4941	**2,94**	0,4984
1,85	0,4678	**2,12**	0,4830	**2,54**	0,4945	**2,96**	0,4985
1,86	0,4686	**2,14**	0,4838	**2,56**	0,4948	**2,98**	0,4986
1,87	0,4693	**2,16**	0,4846	**2,58**	0,4951	**3,00**	0,49865
1,88	0,4699	**2,18**	0,4854	**2,60**	0,4953	**3,20**	0,49931
1,89	0,4706	**2,20**	0,4861	**2,62**	0,4956	**3,40**	0,49966
1,90	0,4713	**2,22**	0,4868	**2,64**	0,4959	**3,60**	0,499841
1,91	0,4719	**2,24**	0,4875	**2,66**	0,4961	**3,80**	0,499928
1,92	0,4726	**2,26**	0,4881	**2,68**	0,4963	**4,00**	0,499968
1,93	0,4732	**2,28**	0,4887	**2,70**	0,4965	**4,50**	0,499997
1,94	0,4738	**2,30**	0,4893	**2,72**	0,4967	**5,00**	0,499997
1,95	0,4744	**2,32**	0,4898	**2,74**	0,4969		
1,96	0,4750	**2,34**	0,4904	**2,76**	0,4971		
1,97	0,4756	**2,36**	0,4909	**2,78**	0,4973		
1,98	0,4761	**2,38**	0,4913	**2,80**	0,4974		
1,99	0,4767	**2,40**	0,4918	**2,82**	0,4976		
2,00	0,4772	**2,42**	0,4922	**2,84**	0,4977		

3-ilova

χ^2 taqsimotning kritik nuqtalari

k ozodlik darajasi soni	α qiymatdorlik darajasi					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,55	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Foydalanilgan adabiyotlar

1. *Abdushukurov A.A.* Xi-kvadrat kriteriysi: nazariyasi va tatbiqi, O‘zMU, 2006.
2. *Abdushukurov A.A., Azlarov T.A., Djamirzayev A.A.* Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan misol va masalalar to‘plami. Toshkent «Universitet», 2003.
3. *Azlarov T.*A.*, Abdushukurov A.A.* Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan Inglizcha-ruscha-o‘zbekcha lug‘at. Toshkent: «Universitet», 2005.
4. *Abdushukurov A.*A. Ehtimollar nazariyasi. Ma’ruzalar matni. Toshkent: «Universitet», 2000.
5. *Бочаров П. П., Печинкин А. В.* Теория вероятностей. Математическая статистика. - 2-е изд. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
6. *Ватутин В.А., Ивченко Г.И., Медведев Ю.И., Чистяков В.П.* Теория вероятностей и математическая статистика в задачах М.: 2003.
7. *Ивченко Г.И., Медведев Ю.И.* Математическая статистика. М.: Высшая школа, 1984.
8. *Кибзун А. И., Горяинова Е. Р., Наумов А. В., Сиротин А. Н.* Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами / Учебн. пособие. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
9. *Кибзун А.И., Панков А.Р., Сиротин А.Н.* Учебное пособие по теории вероятностей. — М.: Изд-во МАИ, 1993.
10. *Коршунов Д.А., Чернова Н.И.* Сборник задач по математической статистике: учебное пособие. 2-е изд., испр. –Новосибирск, изд-во Института математики, 2004.
11. *Кремер Н.Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. 2-е изд., перераб. и доп.- М.: ЮНИТИДАНА, 2004.
12. *Максимов Ю.Д. Куклин Б.А., Хватов Ю.А.* Математика. Выпуск 6. Теория вероятностей. Контрольные задания с образцами решений. Тесты. Конспект-справ. / Под ред. Ю.Д. Максимова СПб.: Изд-во ИЗkВО СПбГТУ, 2002.
13. *Максимов Ю.Д.* Маrематика. Выпуск 8. Математическая статистика: Опорный конспект. СПб.: Изд-во ИЗkВО СПбГТУ, 2002.
14. *Писменный Д.Т.* Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике. М.: Айрис-пресс, 2004.

15.*Пугачев В.С.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Учеб. пособие. 2-е изд., исправл. и допол. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
16.http://www.el.tfi.uz/pdf/enmcoq22.uzl.pdf;
17.http://www.nsu.ru/icem/grants/etfm/;
18.http://www.lib.homelinex.org/math/;
19.http://www.eknigu.com/lib/mathematics/;
20.http://www.eknigu.com/info/M_Mathematics/MC.