O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

TERMIZ DAVLAT UNIVERSITETI

FIZIKA- MATEMATIKA FAKULTETI

ALGEBRA VA GEOMETRIYA KAFEDRASI

DISKRET MATEMATIKA VA MATEMATIK MANTIQ

fani bo‘yicha

MA’RUZALAR MATNI

Termiz-2019

Diskret matematika va matematik mantiq fani bo‘yicha ma’ruzalar matni

Ta’lim yo‘nalishlari: 5130200-Amaliy matematika va informatika

5130100 - Matematika

Tuzuvchilar: Kafedra dots. Artiqov M.

Kafedra o‘q. Esonturdiyev M

Kafedra o‘q. Gulmirzayeva S

1-Ma'ruza. To'plam. To'plamlar ustida amallar

Reja:

1. **To'plam tushunchasi.**
2. **To'plamlar ustida amallar.**
3. **To'plamlarning dekart ko'paytmasi.**

To'plam tushunchasi

To'plam matematikaning boshlang'ich tushunchalaridan biri. Bu tushunchani o'zidan soddaroq tushunchalar orqali (bunday tushunchalar yo'q) ta'riflab bo'lmaydi. Ayni paytda, to'plam tushunchasini misollar orqali anglash qiyin emas. Masalan, kutubxonadagi kitoblar to'plami, ushbu $x^3-6x^2+11x-6=0$ x tenglamaning ildizlari to'plami, bitta nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar to'plami.

Demak, to'plam deganda biror umumiy xususiyatga ega bo'lgan narsalar (predmetlar) guruhi, majmuasi, yig'ilmasi tushiniladi.

To'plamni tashkil etgan narsalar uning elementlari deyiladi.

Odatda to'plamalar bosh harflar (malasan, $A,B,C,D,...$) bilan, uning elementlari esa kichik harflar (masalan, $a,b,c,d,....$) bilan belgilanadi.

Biror to'plamni olaylik. Uni A bilan belgilaylik. Agar a narsa (predmet) A to'plamning elementi bo'lsa, $a\in A$, b narsa (predmet) B to'plamning elementi bo'lmasa $b\notin B$ kabi belgilanadi va "a element A to'plamga tegishli ", "b element B to'plamga tegishli emas" deb o'qiladi. Misol tariqasida barcha natural sonlardan tashkil topgan to'plamni olaylik. Odatda bu to'plamni N harfi bilan belgilanadi va $N=\{1,2,3,....,n,....\}$ kabi yoziladi . Ravshanki, $5\in N$, lekin $7{,}05\notin N$ bo'ladi. [1](116-bet)

To'plamlar ikki xil - chekli hamda cheksiz to'plamlar bo'ladi.

Agar to'plamni tashkil etgan elementlar soni chekli son bo'lsa, uni chekli to'plam deyiladi.

Chekli bo'lmagan to'plamlarni cheksiz to'plamlar deb qaraladi.

Masalan, $x^3-6x^2+11x-6=0$ tenglamaning yechimlar to'plami

$$E=\{x : x^3-6x^2+11x-6=0\}$$

chekli to'plami bo'ladi. Haqiqatdan ham,

$$x^3-6x^2+11x-6=0 \text{, ya'ni } (x-1)(x-2)(x-3)=0$$

tenglamani echib , $x_1=1, x_2=2, x_3=3$ bo'lishini topamiz. Demak, $N=\{1,2,3\}$ bo'lib, u chekli to'plamdir. Natural sonlar to'plami N cheksiz to'plamga misol bo'ladi.

Aytaylik, E to'plam ushbu

$$x^4+x^3+2x^2+x+1=0 \quad (1)$$

tenglamaning haqiqiy echimlaridan iborat to'plam bo'lsin:

$$E=\{x \vdots x^4+x^3+2x^2+x+1=0\}$$

E to'plamning elementlarini topish maqsadida

$$x^4+x^3+2x^2+x+1=0$$

tenglamani yechamiz.

Ravshanki

$$x^4+x^3+2x^2+x+1=(x^2+x+1)(x^2+1)$$

Demak,

$$(x^2+x+1)(x^2+1)=0$$

bo'ladi. Keyingi tenglikdan, $x^2+x+1=0, x^2+1=0$ bo'lishi kelib chiqadi. Bu kvadrat tenglamalarning diskriminatlari manfiy bo'lganligi sababli, ular haqiqiy echimlarga ega emas.

Binobarin, berilgan 1-tenglama haqiqiy echimlarga ega emas. Demak, E to'plamning elementlari yo'q ekan. Bunday vaziyat bo'sh to'plam tushunchasini kiritilishini taqozo etadi.

Birorta ham elementga ega bo'lmagan har qanday to'plam bo'sh to'plam deyiladi va uni $\varnothing$ kabi belgilanadi.

Yuqorida keltirilgan E bo'sh to'plam bo'ladi: $E=\varnothing$

Ikkita A va B to'plamlari berilgan bo'lsin.

Agar A to'plamning har bir elementi B to'plamning ham elementi bo'lsa, A to'plam B ning qismi (qismiy to'plami; to'plam osti) deyiladi va $A \subset B$ kabi belgilanadi.

Misollar.1) $A = \{0, \pi, 2\pi\}, B = \{x : \sin x = 0\}$, bo'lsin. Agar B to'plamning elementlar $\sin x = 0$ tenglamaning echimlari, ya'ni $x = n\pi, n \in Z$ ko'rinishdagi sonlardan iborat ekanligini e'tiborga olsak , $E = \varnothing$ ekanini topamiz.

2) $A = \{2, 4, 6, 8, ...2n....\}, B = N = \{1, 2, 3, ...n, ...\}$ bo'lsin.

Ravshanki, $A \subset B$ bo'ladi.

Eslatma. Bo'sh to'plam $\varnothing$ har qanday A to'plamning qismi deb qaraladi: $\varnothing \subset A$. SHuningdek $A \subset A$ bo'ladi . [1](120-bet)

Ravshanki, A, B, C to'lamlari berilgan holda $A \subset B, B \subset C$ bo'lsa, undan $A \subset C$ bo'lishi kelib chiqadi.

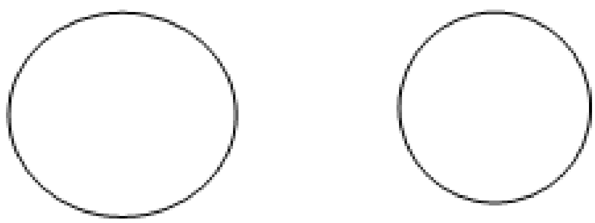
Biror A to'plam berilgan bo'lsin. Bu to'plamning barcha qismiy to'plamlaridan tashkil topgan to'plamni $P(A)$ kabi belgilaymiz. [1](121-bet)

A va B to'plamlari berilgan bo'lsin. Agar A to'plam B to'plamning qismi, B to'plam A to'plamning qismi bo'lsa, A va B to'plamlar teng to'plamlar deyiladi va $A = B$ kabi yoziladi.

Masalan, $A = \{2, 3\}, B = \{x : x^2 - 5x + 6 = 0\}$ to'plamlar uchun $A = B$ bo'ladi, chunki $x^2 - 5x + 6 = 0$ kvadrat tenglamaning echimlari $x_1 = 2, x_2 = 3$. Demak, $B = \{2, 3\}$.

Ko'p hollarda to'plamlar va ular orasidagi munosabatlarni yaqqolroq tassavur qilishda to'plamlarni simvolik ravishda tekislikdagi biror shakl, masalan doirachalar bilan tasvirlash qulay bo'ladi.

Masalan, A va B to'plamlar quyidagicha



A B

tasvirlansa, unda $A \subset B$ bo'lishi quyidagicha tasvirlanadi:

To'plamlar ustida amallar

A va B to'plamlar berilgan bo'lsin.

<u>1 – ta'rif</u>. *A va B to'plamlarning barcha elementlaridan tashkil topgan to'plam A va B to'plamlarning birlashmasi (yig'indisi) deyiladi va $A\cup B$ kabi belgilanadi* (1-chizma)

$A\cup B$

1-chizma.

<u>Eslatma</u>. To'plamni tashkil etgan elementlar orasida aynan bir-biriga teng bo'lgan (bir xil) elementlar shu to'plam elementi sifatida faqat bittasigina olinadi.

Masalan, $(x-1)^2(x+2)=0$ tenglamaning (ildizlari) echimlari to'plami $\{1,-2\}$ bo'ladi.

Aytaylik, $A=\{1,2,3,4,5\}, B=\{3,4,5,6,7\}$ bo'lsin. Unda $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ bo'ladi.

Agar $N_1=\{1,3,5,7,....\}, N_2=\{2,4,6,8,....\}$ bo'lsa, $N_1\cup N_2=N$ bo'ladi.

Faraz qilaylik, $A_1, A_2, ...A_n$ to'plamlar berilgan bo'sin. Bu to'plamlarning birlashmasi yuqoridagiga o'xshash ta'riflanadi:

$$A_1\cup A_2\cup A_3=(A_1\cup A_2)\cup A_3$$

$$A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4=(A_1\cup A_2\cup A_3)\cup A_4$$

$$A_1\cup A_2\cup A_3\cup....\cup A_{n-1}\cup A_n=(A_1\cup A_2\cup A_3\cup....\cup A_{n-1})\cup A_n$$

Yuqorida keltirilgan $A_1, A_2, \ldots A_n$ birlashmasi quyidagicha $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ yozish mumkin.

Umuman, yuqoridagidek biror α indeks $(\alpha \in I)$, bo‘yicha A_α to‘plamlar birlashmasi ta’riflanadi va u $\bigcup_{i\in I} A_i$ kabi belgilanadi. Biror-bir a predmet $A_\alpha (\alpha \in I)$ larning birlashmasi $\bigcup_{i\in I} A_i$ ga tegishli bo‘ladi, faqat va faqat, agarda shunday $\alpha_0 \in I$ topilib, $a \in A_{\alpha_0}$ bo‘lsa; to‘plamlarning birlashmasi (yig‘indisi) ta’rifidan bevosita quyidagi tengliklarning o‘rinli bo‘lishi kelib chiqadi:

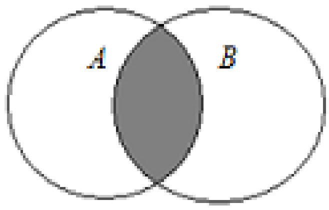
1. $A \cup A = A$ (birlashmaning idempotentligi)

2. $A \cup B = B \cup A$ (birlashmaning kommutativligi)

3. Agar $A \subset B$ bo‘lsa, u holda $A \cup B = B$ bo‘ladi.

4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (birlashmaning assotsiativligi).

2-ta’rif. *A va B to‘plamlarning umumiy elementlaridan tashkil topgan to‘plam A va B to‘plarning kesishmasi (ko‘paytmasi) deyiladi va $A \cap B$ kabi belgilanadi (2-chizma).*



$A \cap B$

2-chizma

Masalan, $A = \{1,2,3,4,5\}, B = \{3,4,5,6,7\}, C = \{6,7,8,9,10\}$ bo‘lsa, $A \cap B = \{3,4,5\}, A \cap C = \varnothing, B \cap C = \{6,7\}$ bo‘ladi.

Yuqoridagi N_1 va N_2 to‘plamlar uchun $N_1 \cap N_2 = \varnothing$ bo‘ladi.

Ikki to‘plam kesishmasi bo‘sh to‘plam bo‘lsa, bu to‘plamlar kesishmaydigan (diz’yunkt) to‘plamlar deyiladi.

Masalan, yuqoridagi A va C hamda N_1 va N_2 to‘plamlar diz’yunkt to‘plamlarga misol bo‘ladi.

Aytaylik $A_1, A_2, ...A_n$ to‘plamlar berilgan bo‘lsin. Bu to‘plamlarning kesishmasi $A_1 \cap A_2 \cap .... \cap A_n$ yuqoridagiga o‘xshash ta’riflanadi.

Quyidagi xossalar o‘rinli:

5. $A \cap A = A$ (kesishmaning idempotentligi)

6. $A \cap B = B \cap A$ (kesishmaning kommutativligi)

7. Agar $A \subset B$ bo‘lsa, u holda $A \cap B = A$ bo‘ladi.

8. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (kesishmaning assotsiativligi)

9. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (birlashmaning kesishmaga nisbatan distributivligi)

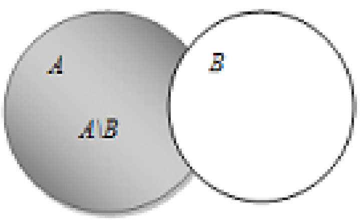
10. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ kesishmaning birlashmaga nisbatan distributivligi)

11. $A \cup (A \cap B) = A$

12. $A \cap (A \cup B) = A$

Bu xossalarning isbotlari birlashma va kesishma ta’riflaridan kelib chiqadi.

3-ta’rif. *A to‘plamning B to‘plamga tegishli bo‘lmagan barcha elementlaridan tashkil topgan to‘plam A to‘plamdan B to‘plamning ayirmasi deyiladi va $A \setminus B$ kabi belgilanadi (3-chizma)*



3-chizma.

A, B va C to‘plamlari berilgan bo‘lsin. U holda

13. $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$

14. $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$ bo‘ladi.

Bu xossalardan birini, masalan, 13-xossani isbotlaymiz.

$A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$ ni isbotlash uchun

$A\setminus(B\cup C)\subset(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$ va $A\setminus(B\cup C)\supset(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$

munosabatlarning bajarilishini ko‘rsatish etarli.

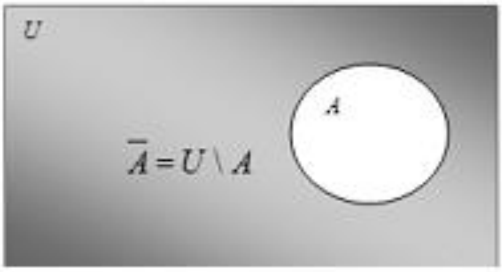
$\forall a\in A\setminus(B\cup C)$, bo‘lsin. U holda $a\in A$, $a\notin B\cup C\Rightarrow a\notin B$ va $a\notin C$ bo‘lib, $a\in A\setminus B$ va $a\in A\setminus C$ bo‘ladi. Demak, $a\in(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$, bundan $A\setminus(B\cup C)\subset(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$ bo‘lishi kelib chiqadi.

Endi $\forall a\in(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$ bo‘lsin. U holda $a\in(A\setminus B)$ va, $a\in(A\setminus C)\Rightarrow a\in A, a\notin B, a\notin C$ bo‘lib, $a\in A, a\notin B\cup C$ bo‘ladi.Demak, $a\in A\setminus(B\cup C)$.

Bundan, $(A\setminus B)\cap(A\setminus C)\subset A\setminus(B\cup C)$ bo‘lishi kelib chiqadi.

To‘plamlar ustida amallar kiritilishida, ularni ixtiyoriy to‘plamlar deb qaraldi. Masalan, A deb shkafdagi kitoblar to‘plamini, B deb suv havzasidagi baliqlar to‘plamini olish mumkin edi. Bunday to‘plamlarning birlashmasi, kesishmasi shunchaki aytilishi mumkin bo‘lsada, ma’lum g‘ayritabiiylikni yuzaga keltiradi.Muayyan vaziyatdan chiqish uchun biror U to‘plami (odatda uni universal to‘plam deyiladi) olinib, uning qism to‘plamlari ustida amallar bajariladi. (masalan, U deb doska tekisligidagi barcha nuqtalar to‘plamini olish mumkin). Xuddi shuningdek, A to‘plam $P(A)$ uchun universal to‘plam bo‘ladi. [1](121-bet)

4-ta’rif. *Ushbu $U\setminus A$ to‘plam A to‘plamni U to‘plamgacha to‘ldiruvchi to‘plami deyiladi va $\overline{A}$ kabi yoziladi:*



4-chizma.

Quyidagi tengliklar o‘rinli bo‘ladi:

15. $A \cup \overline{A} = U$

16. $A \cap \overline{A} = \varnothing$

17. $\overline{\overline{A}} = A$ (to‘ldiruvchi amalining involyutivligi).

18. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (birlashma uchun de Morgan qonuni)

19. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (kesishma uchun de Morgan qonuni)

20. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ (ayirma amalini kesishma va to‘ldiruvchi amallari orqali ifodalash).

Bu tengliklarni isbotlash qiyin emas. Ulardan birini, masalan, 18-tenglikning isbotini keltiramiz .

$\forall x \in \overline{A \cup B}$ bo‘lsin. U holda $x \notin A \cup B$ bo‘lib, $x \notin A, x \notin B$ ekanligi kelib chiqadi. Ravshanki, $x \notin A$, bo‘lgani uchun, $x \in \overline{A}, x \notin B$ bo‘lgani uchun $x \in \overline{B}$.

Demak, $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Bu esa $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ (2)

bo‘lishini bildiradi.

Endi $\forall x \in \overline{A} \cap \overline{B}$ bo‘lsin. Unda $x \in \overline{A}, x \in \overline{B}$ bo‘lib, $x \notin A, x \notin B$ bo‘ladi.

Demak, $x \notin A \cup B$. Bu holda $x \in \overline{A \cup B}$ bo‘ladi. Bu esa $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ (3)

ekanini bildiradi. (2) va (3) munosabatlardan $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ tenglik kelib chiqadi. 18-xossa isbot bo‘ldi.

<u>5-ta’rif.</u> *Ushbu $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ to‘plamga A va B to‘plamlarning simmetrik ayirmasi deyiladi va $A \vartriangle B$ kabi belgilanadi.*

Yuqorida keltirilgan 24-ta’rif va (9, 10) xossalardan foydalanib, $A \vartriangle B$ uchun quyidagi ikki munosabat o‘rinli ekanligiga ishonch hosil qilamiz:

$$A \Delta B = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \quad A \vartriangle B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$

1-Misol.

Berilgan A, B, C to‘plamlar uchun $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$ assotsiativlik munosabati o‘rinli ekanligi ko‘rsatilsin.

Yechish**:** Quyidagi belgilashni kiritaylik: $D = A\Delta B$

U holda $(A\Delta B)\Delta C = D\Delta C = (D \cup C) \cap (\bar{D} \cup \bar{C})$ bo‘ladi. Endi $D \cup C$ va $\bar{D} \cup \bar{C}$ larni hisoblaymiz:

$$((A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})) \cup C = (A \cup B \cup C) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup C)$$

$$\bar{D} \cup \bar{C} = \overline{((A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B))} \cup \bar{C} = (\overline{(A \cap \bar{B})} \cap \overline{(\bar{A} \notin \cap B)}) \cup \bar{C} =$$

$$= (C\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B})) \cup \bar{C} = ((\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B})) \cup \bar{C} = (\bar{A} \cup B \cup \bar{C}) \cap (A \cup \bar{B} \cup \bar{C})$$

Shunday qilib,

$$(A\Delta B)\Delta C = (A \cup B \cup C) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup C) \cap (\bar{A} \cup B \cup \bar{C}) \cap (A \cup \bar{B} \cup \bar{C})$$

ekan.

Xuddi shunga o‘xshash $B\Delta C$ ni D_1 orqali belgilab,

$$A\Delta D_1 = A\Delta(B\Delta C) = (A \cup B \cup C) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup C) \cap (\bar{A} \cup B \cup \bar{C}) \cap (A \cup \bar{B} \cup \bar{C})$$

ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Demak, $A\Delta(B\Delta C) = A\Delta(B\Delta C)$ o‘rinli bo‘lar ekan.

Ravshanki, $A = B$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy C to‘plam uchun $(A\Delta C) = (B\Delta C)$ bo‘ladi.

Bu tasdiqning teskarisi o‘rinli bo‘larmikan?

2-misol. Biror C to‘plam uchun $A\Delta C = B\Delta C$ bo‘lsa, $A = B$ ekanligi ko‘rsatilsin.

Yechish. $A\Delta C = B\Delta C$ dan $(A\Delta C)\Delta C = (A\Delta C)\Delta C$ ga ega bo‘lamiz.

1-misol echimiga binoan esa, $(A\Delta C)\Delta C = A\Delta(C\Delta C) = A\Delta\varnothing = A$ bo‘ladi.

Xuddi shunga o‘xshash, $(B\Delta C)\Delta C = B\Delta(C\Delta C) = B\Delta\varnothing = B$ Demak, $A = B$ bo‘lar ekan.

To‘plamlarning dekart ko‘paytmasi

Ikkita A va B to‘plamlar berilgan bo‘lib, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ bo‘lsin. A to‘plamga tegishli bo‘lgan biror a elementni va B to‘plamga tegishli bo‘lgan biror b elementni olamiz. Birinchi elementi a, ikkinchi elementi b bo‘lgan tartiblangan (a,b) juftlikni hosil qilamiz.

1-ta‘rif. *Barcha (a,b) ko‘rinishdagi juftliklardan tashkil topgan $\{(a,b): a\in A, b\in B\}$ to‘plam A va B to‘plamlarning dekart (to‘g‘ri) ko‘paytmasi deyiladi va $A\times B$ kabi belgilanadi.* [1](123-bet)

Demak, $A\times B=\{(a,b): a\in A, b\in B\}$

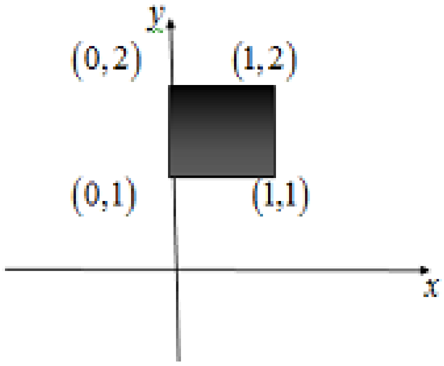
Masalan, $A=\{0,1\}$, $B=\{a,b\}$ to‘plamlarning dekart ko‘paytmasi $A\times B$ quyidagicha

$A\times B=\{(0,a),(0,b),(1,a),(1,b)\}$ bo‘ladi. $B\times A$ esa ushbu

$B\times A=\{(a,0),(b,0),(a,1),(b,1)\}$ bo‘ladi.

Demak, umuman aytganda, $A\times B\neq B\times A$ ekan.

Keyingi misol tariqasida A to‘plam deb $[0,1]$ segment nuqtalaridan iborat $A=\{x\in R: 0\le x\le 1\}$ to‘plamni, B to‘plam deb $[1,2]$ cegment nuqtalaridan iborat $B=[y\in R: 1\le y\le 2]$ to‘plamni olaylik. Bu to‘plamlarning dekart ko‘paytmasi $A\times B=\{(x,y): 0\le x\le 1, 1\le y\le 2\}$ to‘plam 5-chizmada tasvirlangan kvadrat nuqtalardan iborat to‘plam bo‘ladi:



5-chizma .

Shuni ta’kidlash lozimki, ikki (a,b) va (c,d) juftliklar $a=s$, va $b=d$ bo‘lgandagina teng deb qaraladi.

To‘plamlarning dekart ko‘paytmasi quyidagi xossalarga ega. Faraz qilaylik, bizga A, B va C to‘plamlar berilgan bo‘lsin. U holda

1. $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

2. $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$ munosabatlar o'rinli bo'ladi. Bu xossalardan 1-ni isbotlaymiz.

Aytaylik, $x\in A\times(B\cap C)$ bo'lsin. Unda $x=(a,d)$ bo'lib, $a\in A$, $d\in B\cap C$ bo'ladi. $d\in B\cap C$, bo'lishidan esa, $d\in B$, $d\in C$ ekanligini topamiz.

$$a\in A,\ d\in B;\quad (a,d)\in A\times B$$

$$a\in A,\ d\in C;\quad (a,d)\in A\times C$$

Demak, $(a,d)\in(A\times B)\cap(A\times C)$ ya'ni $x\in(A\times B)\cap(A\times C)$ (4)

bo'ladi.

Endi $x\in(A\times B)\cap(A\times C)$ bo'lsin. Unda $x\in(A\times B)$, $x\in(A\times C)$ bo'ladi.

Ta'rifga binoan

$x\in A\times B$; $x=(a,b)$; $a\in A$, $b\in B$

$x\in A\times C$; $x=(a,c)$; $a\in A$, $c\in C$ bo'ladi.

Ravshanki : $x=(a,b)=(a,c);b=c$

Demak,

$a\in A$, $b\in B\cap C$; $(a,b)\in A\times(B\cap C)$ ya'ni $x\in A\times(B\cap C)$ (5)

bo'ladi.

(4) va (5) munosabatlardan $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$ bo'lishi kelib chiqadi. [1] (123-bet)

1.-misol. $A=\{1,2,3\}$, $B\{3,4\}$ bo'lsa, $A\times B$ hisoblansin.

Echish: $A\times B=\{(1,3),(1,4),(2,3),\ (2,4),\ (3,3),\ (3,4)\}$ bo'ladi.

2. -misol. A va B to'plamlar U to'plamning chekli qism to'plamlari bo'lsin. $n(A)$ va $n(B)$ lar esa, A va B to'plam elementlar sonini belgilasin. U holda $n(A\setminus B)=n(A)\setminus n(A\cap B)$ ekanligi ko'rsatilsin.

Echish: Ravshanki, $A\cap B=\varnothing$ bo'lsa, $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$ bo'ladi.

$A \setminus B = C$ bo'lsin. U holda, $A = C \cup (A \cap B)$ tenglik o'rinli ekanligini ko'rsatish qiyin emas. Bundan tashqarii, $C \cap (A \cap B) = \emptyset$ bo'ladi. SHu sababli, $n(A) = n(C) + n(A \cap B) \Rightarrow n(C) = n(A) - n(A \cap B)$ kelib chiqadi. $C = A \setminus B$ sababli, $n(A \setminus B) = n(A) \setminus n(A \cap B)$ bo'ladi.

Asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012.(115-123 betlar)

1. Mendelson E. Vvedenie v matematicheskuyu logiku. M.: Nauka, 1984
2. YUnusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.
3. Lavrov I. A., Maksimova L. L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M.: Fiz.-mat. literatura, 1995.

Ma'ruza 2-3: Binar munosabatlar va funksiyalar. Tartib munosabatlar turlari(4 soat)

Reja:

4. **Binar munosabatlar.**
5. **Tartib munosabatlar turlari.**
6. **Ekvivalentlik munosabati.**

BINAR MUNOSABATLAR.

Ixtiyoriy A to'plam berilgan bo'lsin.

A^g to'plamning ixtiyoriy R qism to'plami A to'plamda **binar munosabat** deyiladi. Agar $(x, u) \in R$ bo'lsa, u holda x element u element bilan R binar munosabatda deyiladi va xRu kabi yoziladi. [1](584-bet)

Matematikadagi muhim binar munosabatlar uchun ayrim belgilar kiritilgan.

Misollar. I) R haqiqiy sonlar to'plamida x va u sonlarning tenglik munosabati. Uning belgisi $x = u$. Bu munosabat R^2 tekisliqsagi $u = x$ to'g'ri chiziq nuqtalari bilan beriladi.

2) R haqiqiy sonlar to'plamida x va u sonlarning tengmaslik munosabati. Uning belgisi $x \neq u$. Bu munosabat R^2 tekislikda $u = x$ to'g'ri chiziqqa kirmagan barcha nuqtalardan iborat bo'lgan to'plam bilan beriladi.
3) R da u sonning x sondan katta ekanligi munosabati: belgisi $u > x$ yoki $x < u$. Bu munosabat R^2 da $u = x$ to'g'ri chiziqdan yuqorida yotuvchi nuqtalar to'plami bilan beriladi;
4) $A = V$ — to'plamlarning tenglik munosabati;
5) $A \neq V$ — to'ilamlarning tengmaslik munosabati;
6) $A \subseteq V$ yoki $V \supseteq A$ — qism to'plam munosabati;
7) $A \subset V$ yoki $V \supseteq A$ — xos qism to'plam munosabati;
8) $\alpha \parallel \beta$— to'g'ri chiziqlarning parallellik munosabati;
9) $a \perp \beta$ — to'g'ri chiziqlarning tiklik munosabati;
10) $a \Rightarrow \beta$ — bir tenglamalar tizimi ikkinchisiningnatijasi ekanligi;

11) $a \Leftrightarrow \beta$ — ikkita tenglamalar tizimining teng kuchlilik munosabati.

Agar A to'plamda berilgan biror R munosabat shunday bo'lsaki, har qanday $a \in A$ uchun aRa o'rinli bo'lsa, u **refleksiv** munosabat deyiladi. Agar aRb munosabatdan $a \neq b$ munosabat kelib chiqsa, (ya'ni aRa munosabat hech qanday $a \in A$ element uchun bajarilmasa), bunday munosabat **antirefleksiv** deyiladi.

Agar aRb munosabatning bajarilishidan bRa munosabatning ham bajarilishi kelib chiqsa, bunday munosabat A da **simmetriklik munosabati** deyiladi.

Agar aRb va bRs munosabatlarning bajarilishidan aRs bajarilishi kelib chiqsa, bunday munosabat **tranzitivlik** deyiladi.

Ta'rif . *Agar A to'plamdagi R munosabat refleksiv, simmetrik va tranzitiv bo'lsa, uni A da* ***ekvivalentlik*** *munosabati deyiladi va uning uchun aRb belgi o'rniga ko'pincha* $a \sim b$ *belgi ishlatiladi.*

Ekvivalentlikka misollar: 1) haqiqiy sonlarning tenglik munosabati;

2) to'plamlarning tenglik munosabati;
3) tenglamalar tizimlarining teng kuchlilik munosabati;
4) funksiyalarning tenglik munosabati.
5) Muhim misol. A to'plamda N o'zgartirishlar guruhi berilgan bo'lsin.

Bu N o'zgartirishlar guruhi yordamida A da ekvivalentlik tushunchasini kiritamiz.

Agar A to'plamning a va b elementlari uchun shunday $h \in H$ bieksiya mavjud bo'lsaki, $h(a) = b$ bo'lsa, bu elementlar N — zkvivalent deyiladi va $a \sim b$ ko'rinishda yoziladi.

Agar ixtiyoriy $a \in A$ ni olib, $h \in N$ sifatida e_A ni olsak (e_A — birlik aks ettirish o'zgartirishlar guruhining ta'rifidagi d_2) shartga ko'ra H ga tegishli, $e_A(a) = a$,ya'ni har qanday $a \in A$ uchun $a \sim a$ (refleksivlik).

Endi $a \sim b$ bo'lsin. U holda shunday $h \in N$ mavjudki, $h(a) = b$. O'zgartirishlar guruhining ta'rifidagi d_3) shartga ko'ra. $h^{-1} \in N$. U holda $h(a) = b$ tenglikka h^{-1} tatbiq qilsak, $h^{-1}(h(a)) = h^{-1}(b)$. Bundan $a = h^{1}(b)$, ya'ni $b \sim a$ (simmetriklik).

Agar $a \sim b$ va $b \sim s$ bo'lsa, shunday $h_1 \in N$ va $h_2 \in N$ bieksiyalar mavjudki, $h_1(a) = b$, $h_2(b) = s$. Bulardan $h_2(b) = h_2(h_1(a) = s$, ya'ni $(h_2h_1(a) = s$. O'zgartirishlar guruhining d_1) shartiga ko'ra $h_2h_1 \in N$. Bundan va $(h_2h_1)(d) = s$ tenglikdan $a \sim c$ munosabatni olamiz (tranzitivlik). [1](586-bet)

Demak, $a \sim b$ (N — ekvivalentlik) haqiqatan ham ekvivalentlik munosabati ekan.

Kelajakda bu ekvivalentlikni N o'zgartirishlar guruhi hosil qilgan ekvivalentlik (H-ekvivalentlik) deb ataymiz.

A to‘plam biror usul bilan sinflarga bo‘lingan bo‘lsin: $V = \{A_t,\ t \in T\}$, $A = \cup A_t$,

$t \in T$. Bu bo‘linma yordamida A to‘plamga ekvivalentlik munosabatini kiritamiz.

Agar $x, u \in A$ elementlar V bo‘linmadagi bir sinfga tegishli bo‘lsa, ularni V bo‘linmaga nisbatan ekvivalent deymiz va $x \sim u$ shaqlda yozamiz.

Bu ekvivalentlik refleksivlik, simmetriklik va tranzitivlik xossalariga ega.

Ixtiyoriy A to‘plamda har qanday ekvivalentlik munosabati shunday hosil qilinishi mumkinligini ko‘rsatamiz.

A to‘plamda biror "~" ekvivalentlik munosabati berilgan bo‘lsin. Ixtiyoriy $x \in A$ uchun x' orqali x ga ekvivalent bo‘lgan barcha $u \in A$ elementlar to‘plamini belgilaymiz va $\{x',\ x \in A\}$ to‘plamlar tizimi A ni sinflarga bo‘lishini ko‘rsatamiz.

Refleksivlik xossasiga asosan har bir $x \in A$ uchun $x \in x'$, ya’ni $\cup x' = A$. Endi har bir $x \in A$ element yagona sinfga tegishli ekanligini ko‘rsatamiz. Faraz qilaylik, $x \in x'$ va $x \in z'$ bo‘lsin, ya’ni $z \sim x$. Bundan simmetriklik xossasiga asosan $x \sim z$.

Ixtiyoriy $u \in z'$ elementni olamiz. U holda $z \sim y$. YUqoridagi $x \sim z$ va $z \sim y$ munosabatlardan tranzitivlik xossasiga asosan $x \sim u$ ni olamiz, ya’ni $u \in x'$. Ushbu $u \in z'$ element ixtiyoriy bo‘lgani uchun $z' \subseteq x'$. YUqoridagiga o‘xshash mulohazalar bilan $x' \subseteq z'$ munosabat ham ko‘rsatiladi, ya’ni $x' = z'$. Bu bilan $\{x',\ x \in A\}$ to‘plamlar tizimi A to‘plamni sinflarga bo‘lishi ko‘rsatildi.

SHunday qilib, A to‘plamdagi ekvivalentlik munosabati bilan A ni sinflarga bo‘lish orasida o‘zaro bir qiymatli bog‘lanish ko‘rsatildi.

Asosiy darsliklar va o‘quv qo‘llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (584-586 betlar)

2. Mendelson E. Vvedenie v matematicheskuyu logiku. M.: Nauka, 1984

3.Lavrov I. A., Maksimova L. L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M.: Fiz.-mat. literatura, 1995.

Ma'ruza 4: Fikrlar mantiqi. Fikrlar mantiqining tatbiqlari

Reja:

1. **Fikr tushunchasi.**
2. **Fikrlar ustida mantiqiy amallar.**
3. **Chinlik jadvali.**
4. **Fikrlar algebrasining formulalari.**

Fikr tushunchasi

Shuni ta'kidlash lozimki, har qanday darak gap fikr bo'lavermaydi.

Masalan, oliy o'quv yurtining talabasi degan darak gap fikr emas, chunki talaba haqida hech narsa tasdiqlanmagan.

SHuningdek, agar uchburchakning barcha tomonlari bir-biriga teng bo'lsa, bunday uchburchak teng tomonli deyiladi degan darak gap ham fikr bo'la olmaydi, chunki u tasdiqlovchi bo'lmay, balki, aniqlovchi gapdir.

Demak, fikr deganda, chinligi yoki yolg'onligini bir qiymatli aniqlash mumkin bo'lgan har qanday tasdiqlovchi darak gap tushinilar ekan.

Fikrlar bosh harflar, masalan,

$$A,\ B,\ C,\ D,\ A_1,\ B_1,\ C_1,\dots,\ A_n,\ B_n,\ C_n,\dots,$$

bilan, ulardan tuzilgan to'plam Φ harfi bilan belgilanadi.

Matematik mantiqda fikrlarning ma'no yoki mazmuni bilan emas, balki ularning chin yoki yolg'on ekanini aniqlash bilan shug'ullaniladi.Har bir fikr faqat ikkita: chin yoki yolg'on «qiymat»-larga ega bo'ladi. qulaylik uchun chinni 1, yolg'onni 0 «qiymat» lar bilan belgilaymiz.

Demak, fikrlar to'plami Φ da shunday

$$\mu = \mu(A)\ *$$

funksiya aniqlanib,

$$\mu(A) = \begin{cases} 1\ \text{агар}\ \ A - \text{чин фикр булса}, \\ 0,\ \text{агар}\ \ A - \text{ёлгон фикр булса}, \end{cases}$$

bo'lar ekan. $\mu = \mu(A)$ mantiqiy funksiya, μ_0 ga esa $(\mu_0 = \mu(A_0),\ \ A_0 \in \Phi)$ mantiqiy qiymat deyiladi. [1](2-bet)

Odatda, fikrlar bir-birlari bilan turli usullarda bog'lanib, yangi murakkab fikrlarni yuzaga keltiradi. Albatta, bunday fikrlarning murakkabligi ularning bog'lanishlariga bog'liq bo'ladi. Quyida shunday bog'lanishlarni (mantiqiy amallarni) qaramaymizki, bunda murakkab fikrning chinligi, unda qatnashgan fikrlarning chinligi orqali bir qiymatli aniqlanadigan bo'lsin.

Endi fikrlar ustida bajariladigan mantiqiy amallarni keltiramiz.

1⁰. Inkor amali. Biror A fikrni qaraylik. A chin bo'lganda yolg'on, A yolg'on bo'lganda chin bo'ladigan fikr A fikrning inkori deyiladi. Uni A fikr oldiga ushbu $\rceil$ ishorani qo'yish bilan belgilanadi va «A emas» deb o'qiladi. [1](3-4-bet)

Demak, A fikr, ($\rceil A$) esa uning inkori. Bu holda

$$A\text{-chin bo'lganda } \mu(A)=1,\ \ \mu(\rceil A)=0$$

$$A\text{-yolg'on bo'lganda } \mu(A)=0,\ \ \mu(\rceil A)=1$$

bo'ladi.

2⁰. Kon'yunksiya amali. Ikki A va B fikrlarni qaraylik. A va B fikrlar bir vaqtda chin bo'lgandagina chin bo'ladigan fikr A va B larning kon'yunksiya bog'lanishidan sodir bo'lgan fikr (qisqacha A va B fikrlarning kon'yunksiyasi) deyiladi. Uni $(A\wedge B)$ kabi belgilanib, «A kon'yunksiya B» deb o'qiladi. [1](4-bet)

Bu holda A va B fikrlar $(A\wedge B)$ ning kon'yunktiv hadlari deyiladi.

(Kon'yunksiya mantiqiy amal, so'zlashuvlarda «va» bog'lovchisini ifodalaydi).

Ravshanki,

$$\begin{aligned}
&\mu(A)=1,\ \mu(B)=1 \ \text{булганда}\ \ \mu(A\wedge B)=1\\
&\mu(A)=1,\ \mu(B)=0 \ \text{булганда}\ \ \mu(A\wedge B)=0\\
&\mu(A)=0,\ \mu(B)=1 \ \text{булганда}\ \ \mu(A\wedge B)=0\\
&\mu(A)=0,\ \mu(B)=0 \ \text{булганда}\ \ \mu(A\wedge B)=0
\end{aligned}$$

bo'ladi.

3⁰. Diz'yunksiya amali. A va B fikrlarning kamida bittasi chin bo'lgandagina chin bo'ladigan fikrlarning diz'yunktiv bog'lanishidan sodir bo'lgan fikr (qisqacha A va B fikrlarning diz'yunksiyasi) deyiladi.

Uni $(A \vee B)$ kabi belgilanib, «A diz'yunksiya B» deb o'qiladi. A va B fikrlar $(A \vee B)$ ning diz'yunktiv hadlari deyiladi. (Diz'yunksiya mantiqiy amali so'zlashuvlarda «yoki» bog'lovchisini ifodalaydi). Bu holda

$$\begin{aligned} &\mu(A)=1,\ \mu(B)=1 \text{ булганда } \mu(A \vee B)=1 \\ &\mu(A)=1,\ \mu(B)=0 \text{ булганда } \mu(A \vee B)=1 \\ &\mu(A)=0,\ \mu(B)=1 \text{ булганда } \mu(A \vee B)=1 \\ &\mu(A)=0,\ \mu(B)=0 \text{ булганда } \mu(A \vee B)=0 \end{aligned}$$

bo'ladi. [1](4-bet)

4⁰. Implikatsiya amali. A fikr chin, B fikr yolg'on bo'lgandagina yolg'on bo'lib, qolgan barcha hollarda chin bo'ladigan fikr A va B larning implikativ bog'lanishidan sodir bo'lgan fikr (qisqacha A va B larning implikatsiyasi) deyiladi. Uni $(A \to B)$ kabi belgilanib, «A implikatsiya B» deb o'qiladi. [1](6-bet)

Implikatsiya uchun

$$\begin{aligned} &\mu(A)=1,\ \mu(B)=1 \text{ булганда } \mu(A \to B)=1 \\ &\mu(A)=1,\ \mu(B)=0 \text{ булганда } \mu(A \to B)=0 \\ &\mu(A)=0,\ \mu(B)=1 \text{ булганда } \mu(A \to B)=1 \\ &\mu(A)=0,\ \mu(B)=0 \text{ булганда } \mu(A \to B)=1 \end{aligned}$$

bo'ladi.

SHunday qilib fikrlar ustida inkor ($\urcorner$), kon'nksiya $(\wedge)$, diz'yunksiya $(\vee)$, implikatsiya $(\to)$ va ekvivalensiya $(\leftrightarrow)$ amallari kiritildi.

YUqoridagi (1^0), (2^0), (3^0), (4^0) va (5^0) munosabatlarni inobatga olib, quyidagi chinlik jadvalini tuzamiz:

CHinlik jadvali[1](10-bet)

$\mu(A)$	$\mu(B)$	$\mu(\urcorner A)$	$\mu(A \wedge B)$	$\mu(A \vee B)$	$\mu(A \to B)$	$\mu(A \leftrightarrow B)$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Propozitsional formalar[1](25-bet)

YUqorida biz fikrlar ustida mantiqiy amallar bilan tanishdik. Unda A va B fikrlar bo‘lganda

$$(\rceil A),\ (A \wedge B),\ (A \vee B),\ (A \to B),\ (A \leftrightarrow B)$$

lar ham fikr bo‘lishini ko‘rdik. Ayni paytda bu fikrlar A va B lardan tashkil topgan murakkab fikrlarni ifodalaydi.

Aytaylik, A chin, B yolg‘on fikr bo‘lsin. Unda

$$(A \vee B)$$

chin fikr bo‘ladi.

Agar C fikr yolg‘on, D fikr chin bo‘lsa, unda

$$(C \leftrightarrow (\rceil D))$$

chin fikr bo‘ladi. Ravshanki,

$$((A \vee B) \to (C \leftrightarrow (\rceil D))$$

chin fikr bo‘lib, u fikrlar va mantiqiy amallardan tashkil topgan ifodadir.

SHunga o‘shash,

$$(((A \wedge B) \to C) \vee ((A \vee C) \wedge (\rceil B)))$$

ham fikrlar va amallardan tuzilgan ifoda bo‘ladi.

Endi fikrlar va mantiqiy amallardan tashkil topgan ifodalarni chuqurroq o‘rganamiz.

Bu formula tushunchasiga olib keladi.

Fikrlar to‘plami Φ hamda mantiqiy amallar $\rceil, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$ lardan tashkil topgan ushbu $<\Phi; \rceil, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow>$

- oltilik fikrlar algebrasi deyiladi.

Eslatma. Aslida fikrlar algebrasi deganda ushbu $<\Phi; \rceil, \wedge, \vee>$ to‘rtlik tushuniladi. Buning boisi shuni , biz $\to, \leftrightarrow$ amallarini $\rceil, \wedge, \vee$ murakkob funksiya sifatida ifodalanishi mumkinligini ko‘rsatamiz.

Bunda Φ fikrlar algebrasining asosiy to'plami; $\rceil$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ lar esa fikrlar algebrasining asosiy amallari deyiladi.

Ma'lumki, fikrlar turlicha bo'lib, ularni biror o'zgaruvchining «qiymatlari» deb qarash mumkin.

O'zgarish sohasi fikrlar to'plamidan iborat bo'lgan har qanday o'zgaruvchi propozitsional o'zgaruvchi deyiladi. Bunday o'zgaruvchilarni biz

$$X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1, \ldots, X_n, Y_n, Z_n \ (X, Y, Z \ X_1, Y_1, Z_1)$$

harflari bilan belgilaymiz.

Endi fikrlar algebrasining asosiy tushunchalaridan biri formula tushunchasini keltiramiz.

Fikrlar algebrasining formulasi (qisqacha F.A.F) deyilganda fikrlar va mantiqiy amallarning bog'lanishidan tashkil topgan ifodani tushunamiz.

Demak, biz yuqorida F.A.F ga bir necha bor duch kelgan ekanmiz.

F.A.F tushunchasi induktiv usulda beriladi.

1.1-Ta'rif. 1) Har qanday propozitsional o'zgaruvchi F.A.F bo'ladi.

2) Agar F_1 ва F_2 lar F.A.F bo'lsa, u holda

$(\rceil F_1)$, $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \rightarrow F_2)$, $(F_1 \leftrightarrow F_2)$,

ifodalar ham F.A.F bo'ladi.

3) Boshqacha ko'rinishli F.A.F yuq, ya'ni har qanday F.A.F faqat yuqorida keltirilgan 1 va 2 bandlar yordamida hosil qilinadi.

Demak, propozitsional o'zgaruvchilar - mantiqiy amallar (bog'lovchilar) $\rceil$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ va qavslardan tuzilgan ifodalar faqat va faqat 1 va 2 bandlar yordamida tashkil topsagina F.A.F bo'lar ekan.

Misol 1. Ushbu

$$((X_1 \wedge X_2) \rightarrow ((\rceil X_1) \vee X_2))$$

ifodani qaraylik.

Ta'rifning 1) bandiga ko'ra $X_1, X_2, \ X_3$ lar, 2) bandiga ko'ra $(\rceil X_1)$, $(X_1 \wedge X_2)$ lar F.A.F bo'ladi. Yana 2) bandga ko'ra $((\rceil X_1) \vee X_2)$ va $((X_1 \wedge X_2) \to ((\rceil X_1) \vee X_2))$ ifodalarni F.A.F bo'lishini topamiz.

Demak,

$$((X_1 \wedge X_2) \to ((\rceil X_1) \wedge X_2))$$

ifoda F.A.F bo'ladi.

Misol. 2. Ushbu $((X_2 \wedge X_3) \leftrightarrow (X_2 \vee X_3))$ ifodani qaraylik.

Ta'rifning 1 va 2 bandlariga binoan X_2, X_3, X_4, $((X_1 \wedge X_2) \cdot (X_2 \vee X_4))$ lar va nihoyat

$$((X_1 \wedge X_2) \leftrightarrow (X_2 \vee X_4))$$

ifoda F.A.F bo'ladi.

Misol. 3. Ushbu

$$(\rceil X_1) \to ((\rceil X_2) \wedge X_3))$$

ifodani qaraylik.

Ravshanki, X_1, X_2, X_3 hamda $(\rceil X_1), (\rceil X_2)$ lar F.A.F bo'ladi. Ayni paytda ( ) ifoda F.A.F emas, chunki ( ) da butun ifodani o'rovchi chap qavs etishmaydi.

Aytaylik, $X_1, X_2, \ldots, \ X_n$ propozitsional o'zgaruvchilar bo'lsin. Bu o'zgaruvchilardan tuzilgan F.A.F ni umumiy holda quyidagicha

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

belgilaymiz.

Endi (*) da $X_1, X_2, \ldots, X_n$ larning o'rniga mos ravishda tayin olingan $A_1, A_2, \ldots, \ A_n \quad (A_k \in \Phi, \quad k = 1, 2, \ldots, n$ fikrlarni qo'yib

$$\mathrm{F}(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n)$$

murakkab fikrni hosil qilamiz.

Har bir A_k $(\mathrm{k} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n})$ fikrning qiymati $\mu(\mathrm{A}_k)$ $(\mathrm{k} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n})$ ga ko'ra, $\mathrm{F}(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n)$ murakkab fikrning qiymati ushbu

$$\mu(\mathrm{F}(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n)) = \mathrm{F}(\mu(\mathrm{A}_1), \mu(\mathrm{A}_2), \ldots, \mu(\mathrm{A}_n))$$

tenglikdan topiladi.

Ma'lumki, har bir fikr 1 yoki 0 qiymatni (fikr chin bo'lganda 1 ni, fikr yolg'on bo'lganda 0 ni) qabul qiladi.

Yuqorida keltirilgan $(*)$ dan ko'rinadiki, murakkab $F(A_1, A_2, ..., A_n)$ fikrning qiymati $\mu(F(A_1, A_2, ..., A_n))$ ni $A_1, A_2, ..., A_n$ fikrlar o'rniga, ularning mantiqiy qiymatlari 1 yoki 0 ni (1 yoki 0 simvollarni) qo'yib, so'ngra bu simvollarga nisbatan formulada ishtirok etgan amallar ketma-ket (chinlik jadvaliga binoan) bajarilishi natijasida topiladi.

Masalan, $F(A_1, A_2, ..., A_n) = ((A_1 \to A_2) \wedge (\rceil A_3))$

bo'lib,

$$\mu(A_1) = 1, \quad \mu(A_2) = 0, \quad \mu(A_3) = 1$$

bo'lsin. Unda

$$\mu(F(A_1, A_2, ..., A_n) = \mu((A_1 \to A_2) \wedge (\rceil A_3)) = ((\mu(A_1) \to \mu(A_2) \wedge (\rceil A_3)) = (1 \models 0) \wedge 0) = 0$$

bo'ladi.

Odatda, bunday holda $X_1, X_2, ..., X_n$ propozitsional o'zgaruvchilar mos ravishda 0,1 qiymatlarni qabul qilganda

$$((X_1 \to X_2) \wedge (\rceil X_3))$$

formula 0 qiymatni qabul qiladi deyiladi. Ko'p hollarda $\mu(A) = 0, \quad \mu(B) = 1$ o'rniga $A = 0, \quad B = 1$ deb yozish qulay bo'ladi.

Bu kelishuvga ko'ra, $X_1, X_2, ..., X_n$ o'zgaruvchilarning chinlik qiymatlari mos ravishda $e_1, e_2, ..., e_n$ (bunda $e_i = 1$ yoki $e_i = 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$) bo'lgan, $A_k \in \Phi$ $(k = \overline{1, n})$ fikrlar uchun $\mu(F(A_1, A_2, ..., A_n) = e$ deb yozish o'rniga, $F(e_1, e_2, ..., e_n) = e$ deb yozamiz.

Asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012.(4-10,25-26 betlar)

2.Mendelson E. Vvedenie v matematicheskuyu logiku. M.: Nauka, 1984

3. YUnusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.

Ma'ruza 5-6:Tavtologiya tushunchasi. Tavtologiya haqida teoremalar. Formulalarning ekvivalentligi (4 soat)

Reja:

1. **Tavtologiya tushunchasi.**
2. **Tavtologiya haqida teoremalar.**
3. **Formulalarning ekvivalentligi.**

Tavtologiya tushunchasi.

Propozitsional o'zgaruvchilar $X_1, X_2, ..., X_n$ bo'lgan F.A.F. $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $i(i=1,2,3,...,n)$ lar uchun $e_i = 0$ yoki $e_i = 1$ bo'lsa, $e_1, e_2, e_3, ..., e_n$ ketma-ketlik $X_1, X_2, ..., X_n$ propozitsional o'zgaruvchilarning chinlik taqsimoti deyiladi.

Demak, propozitsional o'zgaruvchilar $x_1, x_2, ..., x_n$ larning chinlik taqsimoti 0 va 1 simvollardan tuzilgan ixtiyoriy $e_1, e_2, e_3, ..., e_n$ ketma-ketlikni ifodalar ekan.

1-ta'rif. Agar $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ formulada $x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilarning shunday chinlik taqsimoti $e_1, e_2, e_3, ..., e_n$ topilib, $F(e_1, e_2, ..., e_n) = 1$ $(F(e_1, e_2, ..., e_n) = 0)$ bo'lsa, $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ bajariluvchi (radlanuvchi) formula deyiladi.

Misol1. $F(x_1, x_2) = (x_1 \to x_2)$ formulada $F(1,0) = 0$ sababli u radlanuvchi formula, $F(1,0) = 1$ sababli u bajariluvchi formula bo'ladi.

2-ta'rif. Agar $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ formula propozitsional o'zgaruvchi $x_1, x_2, ..., x_n$ larning ixtiyoriy chinlik taqsimotida bir (nol) qiymat qabul qilsa, $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ tavtologiya (ziddiyat) deyiladi.

Misol 2. $F_1(x_1, x_2) = ((x_1 \wedge x_2) \to (x_1 \vee x_2))$

formulada $F_1(0,0) = F_1(1,0) = F_1(0,1) = F_1(1,1) = 1$ bo'lgani uchun $F_1(x_1, x_2)$ formula tavtologiya bo'ladi.

Quyidagi $F_2(x_1, x_2) = ((x_1 \wedge x_2) \to \neg(x_1 \vee x_2))$ formulada esa $F_1(0,0) = F_2(1,0) = F_2(0,1) = F_2(1,1) = 0$ bo'lganligi sababli F_2 formula ziddiyat bo'ladi.

Odatda $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ formulani tavtologiya ekani, uni oldiga ushbu $\vdash$ belgini qo'yish bilan ifodalanib, $\vdash F(x_1, x_2, ..., x_n)$ kabi yoziladi.

Faraz qilaylik,

$F(x_1, x_2, ..., x_n)$ hamda

$$F_1(x_1, x_2, ..., x_n),\ \ F_2(x_1, x_2, ..., x_n),\ \ ...,\ \ F_s(x_1, x_2, ..., x_n)$$

formulalar berilgan bo‘lsin.

3-ta’rif. Agar $x_1, x_2, ..., x_n$ larning ixtiyoriy chinlik taqsimoti $e_1, e_2, ..., e_n$ lar uchun

$$\begin{gathered} F_1(e_1, e_2, ..., e_n) = 1, \\ F_2(e_1, e_2, ..., e_n) = 1, \\ F_3(x_1, x_2, ..., x_n) = 1 \end{gathered}$$

bo‘lishidan $F(e_1, e_2, ..., e_n) = 1$ ekani kelib chiqsa, u holda $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ formula $F_1(x_1, x_2, ..., x_n),\ F_2(x_1, x_2, ..., x_n),\ ...,\ F_s(x_1, x_2, ..., x_n)$ formulalarning mantiiqiy natijasi deyiladi. Uni

$F_1,\ F_2, ..., F_s\ \vdash F\ (x_1, x_2, ..., x_n)$ kabi belgilanadi.

Misol.3. $F(x_1, x_2) = (x_1 \vee x_2)$ hamda $F_1 = x_1,\ F_2 = x_2,$ bo‘lsin. Ravshanki, $F_1(x_1, x_2) = x_1,\ \ F_2(x_1, x_2) = x_2,\ \ F(x_1, x_2) = (x_1 \vee x_2)$

lar uchun $F_1(1,1) = 1,\ F_2(1,1) = 1$ hamda $F_1(1,1) = 1$ bo‘ladi. Demak,

$F_1,\ F_2 \vdash F(x_1, x_2)$ ya’ni $x_1,\ x_2\ \vdash (x_1 \vee x_2)$ bo‘ladi. (Bu misolda x_1, x_2 larning qolgan chinlik taqsimotlari uchun $F_1(e_1, e_2) = 0,\ \ F_2(e_1, e_2) = 0$ bo‘lganligi uchun F_1 va F_2 larning bu qiymatlari qaralmadi).

Misol 4. $F_1(x_1, x_2) = x_1,\ \ F(x_1, x_2) = (x_1 \wedge x_2)$

misolda $F_1(1,0) = 1,\ \ F(1,0) = 0$ bo‘lganligi sababli $F(x_1, x_2) = (x_1 \wedge x_2)$ formula $F_1(x_1, x_2) = x_1$ formulaning mantiqiy natijasi bo‘lmaydi (ya’ni $x_1 \nvdash (x_1 \wedge x_2)$ munosabat o‘rinli emas).

Tavtologiya haqidagi teoremalar

1-teorema. Agar $F = F(x_1, x_2, ..., x_n)$ formula

$$F_1 = F_1(x_1, x_2, ..., x_n),\ \ F_2 = F_2\ (x_1, x_2, ..., x_n),\ \ ...,\ \ F_s = F_s(x_1, x_2, ..., x_n)$$

formulalarning mantiqiy natijasi bo'lsa, $((F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_s) \to F)$ formula tavtologiya bo'ladi va aksincha:

$$F_1, F_2, ..., F_s \vdash F \text{ bo'lsa } \vdash ((F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_s) \to F)$$

Isbot. Aytaylik, F formula $F_1, F_2, ..., F_s$ formulalarning mantiqiy natijasi bo'lsin: $F_1, F_2, ..., F_s \vdash F$. SHunga qaramasdan $((F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_s) \to F)$ formula tavtologiya bo'lmasin deb faraz qilaylik. Unda propozitsional o'zgaruvchilar $x_1, x_2 ...., x_n$ larning shunday chinlik taqsimoti $e_1, e_2 ...., e_n$ topiladiki, $(F_1 (e_1, e_2, ..., e_n) \wedge ... \wedge F_s (e_1, e_2, ..., e_n) = 1$ bo'lib, $F(e_1, e_2, ..., e_n) = 0$ bo'ladi.

Ravshanki, $(F_1 (e_1, e_2, ..., e_n) \wedge F_2 (e_1, e_2, ..., e_n) \wedge F_s (e_1, e_2, ..., e_n)) = 1$

bo'lishidan $F_1 (e_1, e_2, ..., e_n) = 1$, $F_2 (e_1, e_2, ..., e_n) = 1$, $F_s (e_1, e_2, ..., e_n) = 1$

bo'lishi kelib chiqadi. Ayni paytda $F(e_1, e_2, ..., e_n) = 0$ bo'lishi $F_1, F_2, ..., F_s \vdash F$

ga ziddir. Bu ziddiyatni kelib chiqishiga sabab $((F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_s) \to F)$ formula tavtologiya bo'lmasin deb qilingan farazdir. Demak, $F_1, F_2, ..., F_s \vdash F$ bo'lsa $\models$ $((F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_s) \to F)$ bo'lar ekan.

Aytaylik, $((F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_s) \to F)$ formula tavtologiya bo'lsin: $\vdash$ $((F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_s) \to F)$

Unda implikatsiyaning chinlik jadvaliga binoan, biror $e_1, e_2 ...., e_n$ chinlik taqsimoti uchun

$(F_1 (e_1, e_2, ..., e_n) \wedge F_2 (e_1, e_2, ..., e_n) \wedge F_s (e_1, e_2, ..., e_n)) = 1$

bo'lishidan, albatta $F(e_1, e_2, ..., e_n) = 1$ bo'lishi kelib chiqadi. Binobarin, $F_1 (e_1, e_2, ..., e_n) = 1$, $F_2 (e_1, e_2, ..., e_n) = 1$, $F_s (e_1, e_2, ..., e_n) = 1$

bo'ladi. Bundan esa, $F(x_1, x_2 ...., x_n)$ formula $F_1 (x_1, x_2, ..., x_n)$, $F_2 (x_1, x_2, ..., x_n)$, $F_s (x_1, x_2, ..., x_n)$ formulalarning mantiqiy natijasi ekanini topamiz: $F_1, F_2, ..., F_s \vdash F$. Teorema isbot bo'ldi.

2-teorema. $F(x_1, x_2 ...., x_n)$ formulaning ziddiyat bo'lishi uchun $\rceil$ $F(x_1, x_2 ...., x_n)$ formulaning tavtologiya bo'lishi zarur va etarli. Bu teoremaning isboti ravshan.

3-teorema. Agar $F(x_1, x_2, ..., x_n)$, hamda $(F(x_1, x_2, ..., x_n) \rightarrow G(x_1, x_2, ..., x_n))$ formulalar tavtologiya bo‘lsa, u holda $G(x_1, x_2, ..., x_n)$ formula ham tavtologiya bo‘ladi.

Isbot. Teskarisini faraz qilaylik, ya’ni teoremaning sharti bajarilsa ham $G(x_1, x_2, ..., x_n)$ formula tavtologiya bo‘lmasin. U holda $x_1, x_2, ..., x_n$ larning shunday $e_1, e_2, ..., e_n$ chinlik taqsimoti topiladiki, $G(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ bo‘ladi.

$F(x_1, x_2, ..., x_n)$ hamda $(F(x_1, x_2, ..., x_n) \rightarrow G(x_1, x_2, ..., x_n))$ lar tavtologiya bo‘lganligi uchun

$F(e_1, e_2, ..., e_n) = 1$, $(F(e_1, e_2, ..., e_n) \rightarrow G(e_1, e_2, ..., e_n)) = 1$ bo‘ladi.

Ikkinchi tomondan $G(e_1, e_2, ..., e_n)) = 0$, $F(e_1, e_2, ..., e_n) = 1$ bo‘lishidan $(F(e_1, e_2, ..., e_n) \rightarrow G(e_1, e_2, ..., e_n)) = 0$ ekanligini topamiz. Bu esa $(F(x_1, ..., x_n) \rightarrow G(x_1, ..., x_n))$ ning tavtologiya ekanligiga zid. Teorema isbot bo‘ldi.

Faraz qilaylik, $F = F(x_1, x_2, ..., x_n)$ formula berilgan bo‘lsin. Bu formuladagi $x_1, x_2, ..., x_n$ larning o‘rniga mos ravishda

$$F_1(y_1, y_2, ..., y_m), F_2(y_1, y_2, ..., y_m), F_s(y_1, y_2, ..., y_m)$$

larni qo‘yish natijasida hosil bo‘lgan formulani F_* deylik: $F_*(y_1, y_2, ..., y_m)$

4-teorema. Agar $F = F(x_1, x_2, ..., x_n)$ formula tavtologiya bo‘lsa, u holda $F_* = F_*(y_1, y_2, ..., y_m)$ ham tavtologiya bo‘ladi.

Isbot. Formuladagi $y_1, y_2, ..., y_m$ propozitsional o‘zgaruvchilarning ixtiyoriy chinlik taqsimoti $e_1', e_2', ..., e_m'$ bo‘lsin. Unda

$$F_1(e_1', e_2', ..., e_m') = e_1,$$
$$F_2(e_1', e_2', ..., e_m') = e_1,$$
$$F_n(e_1', e_2', ..., e_m') = e_n,$$

bo‘ladi. Agar bu qiymatlarni $F = F(x_1, x_2, ..., x_n)$ dagi $x_1, x_2, ..., x_n$ o‘zgaruvchilarning o‘rniga qo‘yilsa, unda F ning chinlik qiymati bilan F_* ning chinlik qiymati ustma-ust tushishini aniqlaymiz. Unda, $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ formula tavtologiya bo‘lgani uchun

$F(e_1, e_2, ..., e_n) = 1$ bo‘ladi.

Demak, $F_*(e_1', e_2', ..., e_m') = 1$ bo‘lib $F_*(y_1', y_2', ..., y_m')$ tavtologiya bo‘ladi.

Bu esa teoremani isbotlaydi.

Endi fikrlar algebrasida muhim bo'lgan formulalarning ekvivalentligi tushunchasini keltiramiz.

Ikki F va G formulalar berilgan bo'lsin.

4-ta'rif. Agar $(F \leftrightarrow G)$ formula tavtologiya bo'lsa, ya'ni $\vdash (F \to G)$ bo'lsa, u holda F va G mantiqiy ekvivalent formulalar deyiladi va $F \sim G$ kabi belgilanadi. [1](25-bet)

Ma'lumki, ekvivalentlik tushunchasi to'plamlarni sinflarga ajratish imkonini berar edi. Bu erda ham formulalarning ekvivalentligi tushunchasi hamma formulalarni sinflarga ajratadi. Bir sinfga mansub bo'lgan formulalar bir-biriga ekvivalent bo'ladi.

Misol4. Ushbu $F(x_1, x_2) = (x_1 \to x_2)$, $\quad G(x_1, x_2) = (\rceil x_1 \vee x_2)$

formulalarni qaraymiz. Ular uchun chinlik jadvalini tuzamiz:

x_1	x_2	$x_1 \to x_2$	$(x_1 \to x_2) \to (\rceil x_1 \vee x_2)$	$\rceil x_1 \vee x_2$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Bu jadvaldan ko'rinadiki, $((x_1 \to x_2) \to (\rceil x_1 \vee x_2))$ formula tavtologiya, ya'ni $\vdash ((x_1 \to x_2) \to (\rceil x_1 \vee x_2))$ ekan.

Bu esa ta'rifga binoan F va G formulalarning ekvivalent bo'lishini bildiradi: $(x_1 \to x_2) \sim (\rceil x_1 \vee x_2)$

F va G formulalar berilgan bo'lsin.

5-teorema. Kuyidagi uchta shart o'zaro teng kuchli:

1) $F \sim G$

2) $\vdash ((F \to G) \wedge (G \to F))$

$$3)\ F \vdash G, \quad G \vdash F$$

Isbot. Aytaylik, F va G formulalar mantiqiy ekvivalent bo‘lsin: $F \sim G$. Ta’rifga binoan $\vdash (F \leftrightarrow G)$ bo‘ladi. Bunda, agar F va G formulalarda ishtiok etuvchi o‘zgaruvchilarning shunday chinlik taqsimoti topilib qolsaki, ular uchun $\mu((F \to G) \wedge (G \to F)) = 0$ bo‘ladigan bo‘lsa,

$$\mu((F \to G) = 0 \text{ yoki } \mu((G \to F) = 0$$

bo‘lib, $(\mu(F) \to \mu(G)) = 0$, yoki $(\mu(G) \to \mu(F)) = 0$ undan esa

$\mu(F) = 1,\ \mu(G) = 0$ yoki $\mu(G) = 1,\ \mu(F) = 0$ bo‘lib qolishini aniqlaymiz. Bu esa $F \sim G$ bo‘lishiga ziddir. Demak, $\vdash ((F \to G) \wedge (G \to F))$.

SHunday qilib, $F \sim G$ bo‘lganda $\vdash ((F \to G) \wedge (G \to F))$ bo‘lishi ko‘rsatildi.

Aytaylik, $\vdash ((F \to G) \wedge (G \to F))$ bo‘lsin. U holda kon’yunksiyaning chinlik jadvaliga ko‘ra ixtiyoriy chinlik taqsimotida

$$\mu(F \to G) = 1,\ \mu(G \to F) = 1$$

bo‘ladi. Demak,

$$\vdash F \to G, \text{ va } \vdash G \to F \text{ bo‘lar ekan}$$

Unda 1-teoremaga muvofiq $F \vdash G, \quad G \vdash F$ bo‘ladi.

SHunday qilib $\vdash ((F \to G) \wedge (G \to F))$ bo‘lishidan $F \vdash G, \quad G \vdash F$ bo‘lishi kelib chiqadi.

Endi $F \vdash G$, va $G \vdash F$ bo‘lsin. Unda 1-teoremaga ko‘ra $(F \to G)$ hamda $(G \to F)$ formulalar tavtologiya bo‘lmasin deb qaraydigan bo‘lsak, u holda shunday chinlik taqsimot topilib, $\mu(F) \neq \mu(G)$ bo‘lib qoladi.

Bunda $\mu(F) = 1,\ \mu(G) = 0$ bo‘ladigan bo‘lsa, $F \vdash G$, bo‘lishiga zid, $\mu(F) = 0,\ \ \mu(G) = 1$ bo‘lsa, $G \vdash F$ bo‘lishiga zid natijalarga kelamiz.

Demak, ixtiyoriy chinlik taqsimotda $\mu(F) = \mu(G)$ ya’ni $\vdash (F \leftrightarrow G)$ bo‘ladi. Ta’rifga binoan $F \sim G$ bo‘ladi.

SHunday qilib, 5-teoremadagi 1, 2 va 3 tasdiqlar orasida

$$1) \Rightarrow\ 2) \Rightarrow\ 3) \Rightarrow\ 1)$$

munosabat borligi ko'rsatildi. Bu esa teoremani isbotlaydi.

Asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (25-31 betlar)

2.Mendelson E. Vvedenie v matematicheskuyu logiku. M.: Nauka, 1984

3.Yunusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.

4.Lavrov I. A., Maksimova L. L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M.: Fiz.-mat. literatura, 1995.

Ma'ruza 7: Teng kuchli formulalar. Asosiy teng kuchliliklar

Reja:

1. **Teng kuchli formulalar .**
2. **Keltirilgan formula.**
3. **Asosiy teng kuchliliklar.**

Teng kuchli formulalar va asosiy teng kuchliliklar

1-ta'rif. Agar mulohazalar algebrasining $U(A_1, A_2, ..., A_n)$ va $B(A_1, A_2, ..., A_n)$ formulalari propozitsional o'zgaruvchilar qiymatlarining barcha tanlanmalarida bir xil qiymat qabul qilsalar, bu formulalar teng kuchli formulalar deyiladi va bu $U \equiv B$ ko'rinishida yoziladi.

1-misol. $F(A,B,C) \rightleftharpoons (A \Rightarrow B) \wedge C$ va $G(A,B,C) \rightleftharpoons (\neg A \vee B) \wedge C$ formulalar teng kuchli formulalar ekanligini ko'rsatamiz:

A	B	C	$\neg A$	$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$	$(A \Rightarrow B) \wedge C$	$(\neg A \vee B) \wedge C$
1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	0

Agar F va G formulalar teng kuchli bo'lsalar, u holda $F \Rightarrow G$ va $G \Rightarrow F$ lar AR formulalar bo'lishi ravshandir. Aksincha, qandaydir F va G (bir xil propozitsional o'zgaruvchilarga ega bo'lgan) formulalar uchun $F \Rightarrow G$ va $G \Rightarrow F$ lar AR formulalar bo'lsa, u holda $F \equiv G$ bo'ladi.

$A \Leftrightarrow B$ va $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ formulalar teng kuchli formulalar ekanligini ko'rsataylik:

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Leftrightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

Shunday qilib, bu tebgkuchliliklardan ko'rinadiki, $F \equiv G$ bo'lishi uchun $F \Leftrightarrow G$ formula AR formula bo'lishi zarur va yetarlidir. Teng kuchli bo'lish munosabati ekanligi binary munosabat ekanligi ravshandir, ya'ni bu munosabat

1. $F \equiv F$ - refleksivlik
2. Agar $F \equiv G$ bo'lsa, u holda $G \equiv F$ bo'ladi- simmetriklik
3. Agar $F \equiv G$ va $G \equiv H$ bo'lsa, u holda $F \equiv H$ bo'ladi- tranzitivlik xossalariga egadir.

1-teorema. $F(B)$ - jumlalar algebrasining ixtiyoriy formulasi, B uning qism formulasi bo'lsin. Agar $B \equiv C$ bo'lsa, u holda $F(B) \equiv F(C)$ bo'ladi.

Isbot. $B \equiv C$ bo'lgani uchun B va C formulalar ularda qatnashgan proporsional o'zgaruvchilar qiymatlarining barcha tanlanmalarida bir xil qiymatlarga erishadilar. B va C formulalarining qiymatlarning qiymatlari 1 yoki 0 bo'lgani uchun yo $F(1)=F(1)$ yoki, $F(0)=F(0)$ hosil bo'ladi. Bu esa $F(B)=F(C)$ ekanini ko'rsatadi.

2-teorema. $F(A_1,A_2,...,A_n)=G(A_1,A_2,...,A_n)$ $A_1,A_2,...,A_n$ lar F va G formulalarning har birida qatnashgan barcha propozitsional o'zgaruvchilar, $C_1,C_2,...,C_n$ lar esa ixtiyoriy formulalar bo'lsin. U holda $F(C_1,C_2,...,C_n)=G(C_1,C_2,...,C_n)$ bo'ladi; bunda har bir A_i $(i=\overline{1,n})$ propozitsional o'zgaruvchi berilgan tengkuchlilikda necha joyda qatnashgan bo'lsa, shuncha joyda mos C_i formula bilan almashtiriladi.

Isbot. $F(A_1,A_2,...,A_n)=G(A_1,A_2,...,A_n)$ tengkuchlilikda qatnashgan har bir propozitsional o'zgaruvchi 1 yoki 0 qiymat qabul qiladi. $C_i(i=\overline{1,n})$ formula ham o'zi qatnashgan propozitsional o'zgaruvchilar qiymatlarining barcha tanlanmalarida 1 yoki 0 qiymat qabul qiladi. $C_i(i=\overline{1,n})$ formula tarkibida qatnashgan propozitsional o'zgaruvchilar $B_1,B_2,...,B_k$ bo'lsin. $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ bu propozitsional o'zgaruvchilar qiymatlari tanlanmalaridan biri va $(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)$ $C_1,C_2,...,C_n$ formulalarning $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k)$ tanlanmadagi qiymatlari tanlanmai bo'lsin. Uzunligi n bo'lgan $(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)$ tanlanma $A_1,A_2,...,A_n$ propozitsional o'zgaruvchilar qabul qiladigan qiymatlar tanlanmalari orasida mavjuddir. F va G formulalar 2^n ta tanlanmaning har birida bir xil qiymatga ega bo'lishi uchun $(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)$ tanlanmada ham bir hil qiymat qabul qiladilar.

Yuqorida isbotlangan teoremalardan bevosita quyidagi natijalar kelib chiqadi.

Agar $F_1=G_1$ va $F_2=G_2$ bo'lsa, u holda

1. $F_1\vee F_2=G_1\vee G_2$
2. $F_1\wedge F_2=G_1\wedge G_2$
3. $F_1\Rightarrow F_2=G_1\Rightarrow G_2$

4. $F_1 \Leftrightarrow F_2 \equiv G_1 \Leftrightarrow G_2$

5. $\neg F_1 \equiv \neg G_1$ (yoki $\neg F_2 \equiv \neg G_2$)

2-ta'rif. Agar F formulaning tarkibida faqat konyuksiya, dizyunksiya va inkor amallari qatnashgan bo'lib, inkor amalsi propozitsional o'zgaruvchilargagina tegishli bo'lsa, u holda bunday formula keltirilgan formula deyiladi.

2-misol. $\neg A \wedge B \vee A \wedge \neg C \vee A \wedge B$ keltirilgan formuladir, ammo $\neg(A \Rightarrow B) \wedge \neg B \vee C$ keltirilgan formula emas, chunki bu formulada implikatsiya amalsi qatnashishi bilan birgalikda inkor amalsi murakkab formula $A \Rightarrow B$ ga tegishlidir.

3-teorema. Mulohazalar algebrasining har bir F formulasining yo o'zi keltirilgandir yoki uni teng kuchli keltirilgan formula bilan almashtirish mumkin.

Bu teoremani isbotlash uchun mulohazalar algebrasining asosiy tengkuchliliklari bilan tanishib chiqamiz. Mulohazalar algebrasining tengkuchliliklari quyidagilar:

I. $\neg\neg A \equiv A$ (qo'sh inkor tengkuchlilikgi)

II. $A \vee B \equiv B \vee A$ (konyuksiya va dizyunksiyaning

III. $A \wedge B \equiv B \wedge A$ kommutativligi)

IV. $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$ (konyuksiya va dizyunksiyaning

V. $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$ assosiativligi)

VI. $A \wedge (B \vee C) \equiv A \wedge B \vee A \wedge C$ (dizyunksiyaning konyuksiyaga va

VII. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ konyuksiyaning dizyunksiyaga nisbatan distributivligi)

VIII. $A \vee A \equiv A$ (dizyunksiya va konyuksiyaning

IX. $A \wedge A \equiv A$ idempotentligi)

X. $A \wedge (A \vee B) \equiv A$ (yutilish tengkuchliliklari)

XI. $A \vee A \wedge B \equiv A$

XII. $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ (de Morgan

XIII. $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ tengkuchliliklari)

XIV. $A \vee \neg A \equiv 1$ (uchinchini inkor etish tengkuchliligi)

XV. $A \wedge \neg A \equiv 0$ (qarama-qarshilik tengkuchliligi)

XVI. a) $A \vee 1 \equiv 1$ b) $A \wedge 1 \equiv A$ c) $A \vee 0 \equiv A$ d) $A \wedge 0 \equiv 0$

XVII. $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$ (kontropozitsiya tengkuchliligi)

Bu tengkuchliliklar o'rinli ekanligini rostlik jadvali yordamida bevosita tekshirib ko'rish mumkin. Masalan, XIII tengkuchlilik uchun rostlik jadvalini ko'raylik:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

II-XI, XIV-XVI tengkuchliliklarni tashkil etuvchi formulalar keltirilgan formulalar ekanligi ravshandir. (propozitsional o'zgaruvchilar va mantiqiy konstantalar keltirilgan formula hisoblanadi).

Bundan tashqari,

$$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

tengkuchlilik o'rinli ekanligini rostlik jadvali tuzib ko'rsatish qiyin emas. Yuqorida $A \Rightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ ekanligi ko'rsatilgan edi. Implikatsiya inkor va dizyunksiya bilan almashtirish mumkin ekanligidan quyidagi tengkuchlilikni hosil qilamiz:

$$A \Rightarrow B \equiv (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \qquad (2)$$

Demak, $A \Leftrightarrow B$ va $A \Rightarrow B$ formulalar keltirilgan formulalar bilan almashtirilishi mumkin ekan. I, XII, XIII teng kuchliliklar qo'sh inkor hamda dizyunksiya va konyuksiyalar inkorlarini qanday keltirilgan formulalar bilan almashtirilishi mumkin ekanini ko'rsatadi.

Endi 3- teoremaning isbotini keltiramiz. Agar F formulaning o'zi keltirilgan formula bo'lsa, u holda teorema isbotlangan bo'ladi.

Agar F formula tarkibida implikatsiya va ekvivalentsiya amallari qatnashgan bo'lsa, ularni (1) va (2) tengkuchliliklar yordamida almashtirish mumkin; formula tarkibida $\neg\neg B$ ko'rinishdagi qism formula qatnashgan bo'lsa, uni B bilan, $\neg(B \vee C)$ yoki $\neg(B \wedge C)$ ko'rinishidagi qism formula qatnashgan bo'lsa, ularni mos ravishda $\neg B \wedge \neg C$ va $\neg B \vee \neg C$ formulalar bilan almashtirish mumkin. Bu jarayonni yetarli marta takrorlab, nihoyat, F formulaga teng kuchli bo'lgan keltirilgan formulaga kelamiz.

Shunday qilib, 3-teoremaga asosan mulohazalar algebrasining har bir formulasini asosiy va boshqa tengkuchliliklar yordamida almashtirib, unga teng kuchliliklar yordamida almashtirib, unga teng kuchli formulalar hosil qilish mumkin. Bu shakl almashtirishlar ba'zi bir masalalarni yechishda keng ko'lamda ishlatiladi. Bu yerda formulalarni shakl almashtirishga oid ba'zi namunalarni keltiramiz.

3-misol. $(\neg A \vee \neg B) \wedge C \Rightarrow \neg(A \wedge B \vee \neg C)$ formulaning shaklini almashtiring va soddalashtiring.

$$
\begin{aligned}
&(\neg A \vee \neg B) \wedge C \Rightarrow \neg(A \wedge B \vee \neg C) \equiv \neg((\neg A \vee \neg B) \wedge C) \vee \neg(A \wedge B \vee \neg C) \equiv \\
&\equiv \neg(\neg A \vee \neg B) \vee \neg C \vee \neg(A \wedge B) \wedge \neg\neg C \equiv \\
&\equiv \neg\neg A \wedge \neg\neg B \vee \neg C \vee (\neg A \vee \neg B) \wedge \neg\neg C \equiv \\
&\equiv A \wedge B \vee \neg C \vee (\neg A \vee \neg B) \wedge C \equiv \\
&\equiv A \wedge B \vee (\neg C \vee \neg A \vee \neg B) \wedge (\neg C \vee C) \equiv \\
&\equiv A \wedge B \vee (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge 1 \equiv \\
&\equiv A \wedge B \vee \neg A \vee \neg B \vee \neg C \equiv \\
&\equiv (A \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg A) \vee \neg B \vee \neg C \equiv \\
&\equiv 1 \wedge (B \vee \neg A) \vee \neg B \vee \neg C \equiv \\
&\equiv \neg A \vee B \vee \neg B \vee \neg C \equiv \\
&\equiv \neg A \vee 1 \vee \neg C \equiv 1
\end{aligned}
$$

Demak, berilgan formula AR formula ekan.

Yuqorida aniqlangan „ Sheffer shtrixi " va „pers strelkasi'' amallariga qaytamiz. Mantiqiy amallarning jadval formalarini taqqoslasak:

$$
\begin{aligned}
A \mid B &\equiv \neg(A \wedge B) \\
A \downarrow B &\equiv \neg(A \vee B)
\end{aligned}
$$

ekanligini ko'ramiz. Demak, „sheffer shtrixi'' va „Pirs strelkasi'' inkor mos ravishda konyuksiya va dizyunksiya orqali ifoda qilinar ekan.

Asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (25-31 betlar)

2.Mendelson E. Vvedenie v matematicheskuyu logiku. M. «Nauka». 1984

3.Yunusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi, T,2008.

4.Lavrov I.A., Maksimova L.L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M. «Nauka» 1995

Ma'ruza 8-9:Mulohazalar algebrasi formulalarining normal formalari (4 soat)

Reja:

1. Yechilish muammosi.
2. Dizyunktiv va konyunktiv normal formalar .
3. Mukammal dizyunktiv va konyunktiv normal formalar .

Yechilish muammosi. DNF va KNF. MDNF va MKNF

Har qanday mantiqiy sistemalaridagidek mulohazalar algebrasi uchun masalani qo'yish mumkin: mulohazalar algebrasining har qanday formulasi AR formula yoki AR formula emasligini chekli qadamdan so'ng aniqlab beradigan yagona usul (algoritm) mavjudmi yoki mavjud emasmi? Bu masala yechilish muammosi deb ataladi. Yechilish muammosini faqat AR formulalar uchun emas, balki AR formulalar sinfidan kengroq bo'lgan bajariluvchi formulalar sinfi uchun qo'ysa bo'ladi. Albatta, keyingi muammoning yechimi oldingi muammoning ham yechimi bo'lishi ravshandir.

Mulohazalar algebrasi uchun bu muammo ijobiy tarzda hal etiladi. Haqiqatan, $F-$ mulohazalar algebrasining ixtiyoriy formulasi bo'lsa, uning rostlik jadvalini tuzish bilan F formulaning bajariluvchi formula yoki AYo formula ekanligini bir qiymatli aniqlash mumkin. Demak, yuqoridagi muammoni ijobiy hal etuvchi yagona usul (algortm) mavjud bo'lib, bu algortm rostlik jadvalidan iboratdir.

Ammo bu algortmning muhim kamchligi bor ekanligini sezish mumkin. Haqiqatan, F formula tarkibida n ta propozitsional o'zgaruvchi qatnashgan bo'lsa, u holda uning qiymatlarini propozitsional o'zgaruvchilar qiymatlarining 2^n ta tanlanmaida hisoblashga to'g'ri keladi. Ravshanki, bu usul hatto uncha murakkab bo'lmagan formulalar qiymatlarini hisoblashda ham juda katta qiyinchiliklar tug'diradi. Shuning uchun ham bu usul amaliy foydalanish nuqtai nazaridan qulaysizdir. Biz quyida amaliy jihatdan katta qulaylik beradigan boshqa usul tanishamiz.

Eslatma. Biz bu paragrafda $A \wedge B$ formulani qiqacha AB ko'rinishida yozamiz.

Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$A^{\alpha} = \begin{cases} agar \quad \alpha = 1 \quad bo'lsa, \quad A \\ agar \quad \alpha = 0 \quad bo'lsa, \ \neg A \end{cases}$$

1-ta'rif. $A_1,...,A_n$ propozitsional o'zgaruvchilar $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ 1 va 0 lardan tuzilgan tanlanma bo'lsa, u holda $A_1^{\alpha_1}, A_2^{\alpha_2}, ..., A_n^{\alpha_n}$ formula elementar konyunksiya deyiladi (bunda propozitsional o'zgaruvchilar takrorlangan bo'lishi ham mumkin).

1-misol. $A, A\neg BC, A\neg AB, AAB\neg BC$ formulalar elementar konyunksiyalardir.

2-ta'rif. Elementar konyunksiyalarning har qanday dizyunksiyasi dizyunktiv normal forma (DNF) deyiladi.

2-misol. $A \vee A\neg BC \vee A\neg AB \vee AAB\neg BC$ formula 6.1-misolda keltirilgan elementar konyunksiyalardan tuzilgan DNF dir.

3-ta'rif. Agar elementar konyunksiyasiga har bir propozitsional o'zgaruvchi (inkor belgisi qatnashganini ham e'tiborga olsak) bir martadan ortiq kirmagan bo'lsa, bunday elementar konyunksiya to'g'ri elementar konyunksiya deyiladi.

3-misol. $A\neg BC, \neg AB\neg C, A_1A_2\neg A_3\neg A_4$ formulalar to'g'ri elementar konyunksiyalardir. 6.2-misolda keltirilgan formulaning dastlabki ikkita hadi to'g'ri elementar konyunksiyadir.

4-ta'rif. $A_1, A_2, ..., A_n$ propozitsional o'zgaruvchilardan tuzilgan to'g'ri elementar konyunksiyadagi har bir propozitsional o'zgaruvchi bu konyunksiyaga faqat bir marta kirgan bo'lsa, bunday elementar konyunksiyaga faqat bir marta kirgan bo'lsa, bunday elementar konyunksiya $A_1, A_2, ..., A_n$ o'zgaruvchilarga nisbatan to'liq elementar konyunksiya deyiladi.

4-misol. Elementar konyunksiyalar A, B, C o'zgaruvchilardan tuzilgan bo'lsin. U holda ABC, $\neg AB\neg C$, $AB\neg C$, $A\neg BC$ formulalar to'liq elementar konyunksiyalardir.

5-ta'rif. Tarkibida bir xil elementar konyunksiyalar bo'lmagan hamda barcha elementar konyunksiyalar $A_1, ..., A_n$ o'zgaruvchilarga nisbatan to'g'ri va to'liq bo'lgan DNF $A_1, ..., A_n$ o'zgaruvchilarga nisbatan mukammal dizyunktiv normal forma (MDNF) deyiladi.

5-misol. $ABC \vee A\neg BC \vee \neg A\neg B\neg C$ formula A, B, C o'zgaruvchilarga nisbatan MDNF dir. DNF va MDNF larning ta'rifidan ko'rinadiki, bunday formulalar keltirilgan formulalardir.

1-teorema. Mulohazalar algebrasining AYO formula bo'lmagan ixtiyoriy U formulasi yagona MDNF ga teng kuchlidir. [1]**(31-bet)**

Isbot. $F(A_1, ..., A_n)$– mulohazalar algebrasining ixtiyoriy AYo formula bo'lmagan formulasi bo'lsin. Demak, F bajariluvchi formula bo'lib, u propozitsional o'zgaruvchilar qiymatlarining hech bo'lmaganida bitta tanlanmaida 1 qiymat qabul qiladi. F formulani rostga aylantiruvchi tanlanmalar to'plami $M_{(p)}$ bo'lsin:

$$M_{(p)} = \{(\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, ..., \alpha_n^{(1)}), (\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, ..., \alpha_n^{(2)}), ..., (\alpha_1^{(r)}, \alpha_2^{(r)}, ..., \alpha_n^{(r)})\},$$

bunda $1 \leq r \leq 2^n$. Quyidagi DNF ni qaraylik:

$$G(A_1, A_2, ..., A_n) \rightleftharpoons A_1^{\alpha_1^{(1)}} A_2^{\alpha_2^{(1)}} ... A_n^{\alpha_n^{(1)}} \vee ... \vee A_1^{\alpha_1^{(r)}} A_2^{\alpha_2^{(r)}} ... A_n^{\alpha_n^{(r)}} \quad (2)$$

Mazkur DNF MDNF ekanligi ravshandir, chunki $M_{(p)}$ ning elementlari har xil tanlanmalaridir. $U(A_1, A_2, ..., A_n) = B(A_1, A_2, ..., A_n)$ ekanligini ko'rsatamiz. $(\alpha_1^{(s)}, \alpha_2^{(s)}, ..., \alpha_n^{(s)}) \in M_{(p)}$ bo'lsin. U holda $F(\alpha_1^{(s)}, \alpha_2^{(s)}, ..., \alpha_n^{(s)}) = 1$ bo'ladi. ($M_{(p)}$ to'plamning tanlanishiga asosan). $G(A_1, A_2, ..., A_n)$ formulaning $(\alpha_1^{(s)}, \alpha_2^{(s)}, ..., \alpha_n^{(s)})$ tanlanmadagi qiymatini hisoblaylik. (2) dagi MDNF tarkibida $A_1^{\alpha_1^{(s)}} A_2^{\alpha_2^{(s)}} ... A_n^{\alpha_n^{(s)}}$ to'liq elementar konyunksiya qatnashgan bo'lib, $G(A_1, A_2, ..., A_n)$ ning $(\alpha_1^{(s)}, \alpha_2^{(s)}, ..., \alpha_n^{(s)})$ tanlanmadagi $G(\alpha_1^{(s)}, \alpha_2^{(s)}, ..., \alpha_n^{(s)})$ qiymatini hisoblashda $(\alpha_1^{(s)})^{\alpha_1^{(s)}}, (\alpha_2^{(s)})^{\alpha_2^{(s)}}, ..., (\alpha_n^{(s)})^{\alpha_n^{(s)}}$ had hosil qiladi. (1) ga asosan $1^1 = 1$ hamda $0^0 = \neg 0 = 1$ dir, chunki $A^1 = A, A^0 = \neg A.$ Demak, $\alpha_i^{(s)}$ qanday bo'lishidan qat'iy nazar $(\alpha_i^{(s)})^{\alpha_i^{(s)}} = 1$ $(i = 1, 2, ... n)$ hamda

$$(\alpha_1^{(s)})^{\alpha_1^{(s)}}, (\alpha_2^{(s)})^{\alpha_2^{(s)}}, ..., (\alpha_n^{(s)})^{\alpha_n^{(s)}} = 1 \qquad (1 \le s \le r)$$

$A \vee 1 = 1$ ga asosan $G(\alpha_1^{(s)}, \alpha_2^{(s)}, ..., \alpha_n^{(s)}) = 1$ bo'ladi. Shunday qilib, $M_{(p)}$ ga tegishli tanlanmalarda berilgan F formula ham, G formula ham 1 qiymat qabul qilar ekan.

$\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \notin M_{(p)}$ bo'lgan ixtiyoriy tanlanma bo'lsin. U holda bu tanlanma $M_{(p)}$ ga kiruvchi ixtiyoriy $(\alpha_1^{(s)}, \alpha_2^{(s)}, ..., \alpha_n^{(s)})$ tanlanmadan hech bo'lmaganda bitta elementi bilan farq qiladi. (bu tanlanmalar tartiblangan tanlanmalar ekanligini eslatib o'tamiz) B ning β tanlanmadagi qiymatini hisoblashda hosil bo'ladigan ifodada qatnashgan ixtiyoriy

$$(\beta_1)^{\alpha_1^{(s)}}, (\beta_2)^{\alpha_2^{(s)}}, ..., (\beta_n)^{\alpha_n^{(s)}}, \qquad (1 \le s \le r)$$

hadda hech bo'lmaganda bitta i uchun $\beta_i \neq \alpha_i^{(s)}$ dir. (1) ga asosan $1^0 = \neg 1 = 0$ va $0^1 = 0$ bo'lgani uchun (3) ifodaning qiymati 0 ga tengdir. Bundan $G(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = 0$ ekanligi kelib chiqadi. $\overline{\beta} \in M_{(p)}$ bo'lgani uchun $F(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = 0$ demak $M_{(p)}$ ga kirmagan tanlanmalarda F va G formulalar 0 qiymatga ega ekan. Shunday qilib, $F = G$ ya'ni F formula (2)

MDNF ga teng kuchli ekanligi kelib chiqadi. F formula yagona usulda MDNF ga yoyilishi ravshandir, chunki, G formula F formulaning qiymatini 1 ga aylantiruvchi barcha tanlanmalar yordamida yagona usulda hosil qilinadi.

Natija. Teng kuchli formulalar bir xil MDNF ga ega.

3-teoremaga asosan mulohazalar algebrasining ixtiyoriy F formulasining o'zi keltirilgan formuladir yoki uni teng kuchli almashtirishlar yordamida keltirilgan formula shakliga olib kelish mumkin.

Biz quyida har qanday keltirilgan formulani MDNF ga yoyish algortmini keltiramiz.

F ixtiyoriy formula bo'lsin.

1-qadam. Agar U keltirilmagan formula bo'lsa, u holda unga 4.3-teoremani qo'llanib, undagi implikatsiya amallari yo'qotiladi; natijada hosil bo'lgan formulada faqat inkor, konyunksiya va dizyunksiya amallari qatnashgan bo'ladi.

2-qadam. Agar hosil bo'lgan formulada inkor murakkab formula oldida qatnashgan bo'lsa, u holda uni I, XII va XIII tengkuchliliklar yordamida shunday shakl almashtiriladiki, hosil bo'lgan formulada inkor faqat propozitsional o'zgaruvchilarga tegishli bo'ladi.

3-qadam. 2-qadamdan so'ng hosil bo'lgan formulani VI-VII tengkuchliliklar yordamida shunday shakl almashtirish kerakki, yangi hosil bo'lgan formulada konyunksiya dizyunksiyadan oldin bajarilsin, ya'ni natijadan DNF hosil bo'lsin.

4-qadam. Agar hosil bo'lgan DNF da bir necha bir xil elementar konyunksiyalar qatnashgan bo'lsa, ulardan bittasini qoldirib, qolganlarini tashlab yuboriladi (VIII tengkuchlilikka asosan).

5-qadam. 4-qadamdan keyin hosil bo'lgan DNF da qatnashgan biror elementar konyunksiyada propozitsional o'zgaruvchi va uning inkori qatnashgan bo'lsa, bunday elementar konyunksiya AYo formula bo'lib, XV va XVII tengkuchliliklarga asosan uni tashlab yuboriladi).

6-qadam. Elementar konyunksiyada biror propozitsional o'zgaruvchining o'zi yoki uning inkori bir necha marta qatnashgan bo'lsa, u holda undan faqat bittasini qoldirib, qolganlari tashlab yuboriladi. (IX tengkuchlikka asosan). Bu qadamdan keyin hosil bo'lgan DNF da barcha elementar konyunksiyalar to'g'ri elementar konyunksiyalardan iborat bo'ladi.

7-qadam. Agar hosil bo'lgan DNF da to'liqmas elementar konyunksiya qatnashgan bo'lsa, uni to'liq elementar konyunksiya qatnashgan bo'lsa, uni to'liq elementar konyunksiyaga aylantirish uchun quyidagi shakl almashtirish bajariladi:

$$A_1^{\alpha_1},\ A_2^{\alpha_2},\dots,A_{i-1}^{\alpha_{i-1}}A_{i+1}^{\alpha_{i+1}}\dots A_n^{\alpha_n}$$

to'liqmas elementar konyunksiya bo'lsin. (bu elementar konyunksiyada A_i propozitsional o'zgaruvchi qatnashgan emas). U holda bu to'g'ri elementar konyunksiyani unga teng kuchli

$$A_1^{\alpha_1},\ A_2^{\alpha_2},\dots,A_{i-1}^{\alpha_{i-1}}(A_i\vee\neg A_i)A_{i+1}^{\alpha_{i+1}}\dots A_n^{\alpha_n}$$

formula bilan almashtirish mumkin. Agar yetishmaydigan propozitsional o'zgaruvchi bir nechta bo'lsa, u holda elementar konyunksiyani bir nechta $A\vee\neg A$ ko'rinishdagi konyuktiv had bilan to'ldirish kerak.

7-qadamdan so'ng hosil bo'lgan DNF da yana bir xil elementar konyunksiyalar paydo bo'lishi mumkin. U holda unga yana 4-qadam qo'llaniladi. Mazkur algoritmni qo'llanilganda albatta kerakli joyda II-V tengkuchliliklardan foydalaniladi.

6-misol. $(A\vee\neg B)\wedge C\Rightarrow(\neg A\vee B)\wedge C$ formulaning MDNF ini yozing. [1] **(31-bet)**

Berilgan formula keltirilmagan bo'lgani uchun undagi implikatsiyani dizyunksiya va inkor bilan almashtiramiz:

$$(A\vee\neg B)\wedge C\Rightarrow(\neg A\vee B)\wedge C$$

Hosil bo'lgan formulada $\neg$ amalsi murakkab formula $(A\vee\neg B)\wedge C$ oldida qatnashgan. Shuning uchun unga de Morgan tengkuchliliklari va qo'sh inkor tengkuchligini qo'llaymiz:

$$\begin{aligned}&\neg((A\vee\neg B)\wedge C)\vee(\neg A\vee B)\wedge C\equiv\neg(A\vee\neg B)\vee\neg C\vee(\neg A\vee B)\wedge C\equiv\\&\equiv\neg A\wedge\neg\neg B\vee\neg C\vee(\neg A\vee B)\wedge C\equiv\\&\equiv\neg A\wedge B\vee\neg C\vee(\neg A\vee B)\wedge C.\end{aligned}$$

Bu keltirilgan formulada dizyunksiya konyunksiyadan oldin bajariladigan had mavjud; shuning uchun distributivlik tengkuchliligini qo'llasak, quyidagi DNF hosil bo'ladi:

$$\neg A\wedge B\vee\neg C\vee(\neg A\vee B)\wedge C\equiv\neg A\wedge B\vee\neg C\vee\neg A\wedge C\vee B\wedge C$$

Ushbu DNF da qatnashgan barcha elementar konyunksiyalar to'g'ri elementar konyunksiyalar bo'lsa-da, ammo to'liq elementar konyunksiyalar emas. Shuning uchun quyidagi shakl almashtirish bajariladi:

$\neg A\wedge B$ ni $\neg A\wedge B\wedge(C\vee\neg C)$ bilan, $\neg C$ ni $(A\vee\neg A)\wedge(B\vee\neg B)\vee\neg C$ bilan, $\neg A\wedge C$ ni $\neg A\wedge(B\vee\neg B)\wedge C$ bilan, $B\wedge C$ ni esa $(A\vee\neg A)\wedge B\wedge C$ bilan almashtiramiz. Ravshanki, natijada teng kuchli formula hosil bo'ladi:

$$\begin{aligned}&\neg A\wedge B\vee\neg C\vee\neg A\wedge C\vee B\wedge C\equiv\neg A\wedge B\wedge(C\vee\neg C)\vee(A\vee\neg A)\wedge\\&(B\vee\neg B)\wedge\neg C\vee\neg A\wedge(B\vee\neg B)\wedge C\vee(A\vee\neg A)\wedge B\wedge C\end{aligned}$$

Ushbu formulaga yana distributivlikni qo'llasak:

$$\neg A \wedge B \wedge (C \vee \neg C) \vee (A \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg B) \wedge \neg C \vee$$
$$\forall \neg A \wedge (B \vee \neg B) \wedge C \vee (A \vee \neg A) \wedge B \wedge C \equiv$$
$$\equiv A \wedge B \wedge C \vee A \wedge B \wedge \neg C \vee A \wedge \neg B \wedge \neg C \vee \neg A \wedge B \wedge C \vee$$
$$\vee \neg A \wedge B \wedge \neg C \vee \neg A \wedge \neg B \wedge C \vee \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$$

tengkuchlilikka ega bo'lamiz. Bundagi bir xil elementar konyunksiyalarni tashlab yuborsak (faqat bittasini qoldirib) u holda quyidagi oxirgi natijaga kelamiz:

$$A \wedge B \wedge C \vee A \wedge B \wedge \neg C \vee A \wedge \neg B \wedge \neg C \vee \neg A \wedge B \wedge C \vee$$
$$\vee \neg A \wedge B \wedge \neg C \vee \neg A \wedge \neg B \wedge C \vee \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \quad (4)$$

Tengkuchlilikning o'ng tomoni berilgan formulaning MDNF idir. Ushbu MDNF ni formulaning rostlik jadvali bilan taqqoslaylik:

A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee \neg B$	$(A \vee \neg B) \wedge C$	$(\neg A \vee B) \wedge C$	$(A \vee \neg B) \wedge C \Rightarrow (\neg A \vee B) \wedge C$
1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	1

Bu jadvaldan ko'rinadiki: berilgan formula propozitsional o'zgaruvchilar qiymatlarining (1,1,1), (1,1,0), (1,0,0), (0,1,1), (0,1,0), (0,0,1) va (0,0,0) tanlanmalarida 1 (rost) qiymati qabul qiladi.

1-teoremaga asosan berilgan formula quyidagi MDNF fa teng kuchlidir:

$$A^1B^1C^1 \vee A^1B^1C^0 \vee A^1B^0C^0 \vee A^0B^1C^1 \vee A^0B^1C^0 \vee$$
$$\vee A^0B^0C^1 \vee A^0B^0C^0$$

(1) ga asosan esa bu ifoda quyidagi ifodadan iboratdir:

$$ABC \vee AB\neg C \vee A\neg B\neg C \vee \neg ABC \vee \neg AB\neg C \vee \neg A\neg BC \vee \neg A\neg B\neg C$$

yoki

$$A \wedge B \wedge C \vee A \wedge B \wedge \neg C \vee A \wedge \neg B \wedge \neg C \vee \neg A \wedge B \wedge C \vee$$
$$\vee \neg A \wedge B \wedge \neg C \vee \neg A \wedge \neg B \wedge C \vee \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$$

ya'ni natijada (4) ning o'ng tomoni hosil bo'ladi. Berilgan formula 7 ta tanlanmada 1 qiymatga, bitta tanlanmada esa 0 qiymatga egadir, demak, u AP formula emas. (4) dan ko'rinadiki, berilgan formulaning MDNF iga 7 ta bog'liq elementar konyunksiya kiradi. Demak, tekshirilayotgan $F(A_1, A_2, ..., A_n)$ formula AR formula bo'lsa, uning MDNF iga 2^n ta to'liq elementar konyunksiya kiradi. Shunday qilib, mulohazalar algebrasining $F(A_1, A_2, ..., A_n)$ formulasini AR formulami yoki yo'qmi ekanligini aniqlash uchun uni MDNF ga yoyib uni MDNF dagi to'liq elementar konyunksiyalar sonini sanash kerak: to'liq elementar konyunksiyalar soni $s = 2^n$ ta bo'lsa, berilgan formula AR formula, $0 < s < 2^n$ bo'lganda- bajariluvchi formula bo'ladi. Agar $s = 0$ bo'lsa, u holda berilgan formula AYo formula bo'lishi ravshandir.

Yuqoridagi 1-5- ta'riflarda ,,konyunksiya'' so'zi ,,dizyunksiya'' bilan,,,dizyunksiya'' so'zini ,,konyunksiya'' so'zi bilan almashtirsak, u holda ,,elementar dizyunksiya'' ,,to'liq elementar dizyunksiya'' ,,mukammal konyuktiv normal forma'' (MKNF) tushunchalari hosil bo'ladi.

MKNF lar uchun quyidagi teorema o'rinli.

2-teorema. *Mulohazalar algebrasining AP formula bo'lmagan ixtiyoriy formulasi yagona MKNF ga teng kuchlidir.*

Asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (30-31 betlar)

2.Mendelson E. Vvedenie v matematicheskuyu logiku. M. «Nauka». 1984

3.Yunusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi, T,2008.

4. Lavrov I.A., Maksimova L.L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M. «Nauka» 1995

Ma'ruza 10: Bul funksiyalari va ularning berilish usullari

Reja:

1. **Bul funksiyalari.**
2. **Elementar bul funksiyalari.**
3. **Formula tushunchasi.**

Bul funksiyalari va ularning berilish usullari

Faraz qilaylik, E to'plam elementlari 0 va 1 lardan iborat bo'lgan bo'lsin, yani $E=\{0,1\}$.

Endi E^1 ni $E^1=E$ deb, $n\geq 2$ uchun E^n to'plamni quyidagicha

$$E^n=\{(e_1, e_2, ..., e_n): e_i\in E\}$$

aniqlaymiz. E^n to'plamning elementlarini n liklar deb ataymiz. [1] **(812-bet)**

Masalan,

$$E^2=\{(0,0),\ (0,1), (1,0), (1,1)\},$$

$$E^3=\{(0,0,0),\ (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$$

bo'ladi.

Demak, E^2 elementlari tartiblangan ikkiliklardan iborat 4 ta elementli, E^3 elementlari tartiblangan uchliklardan iborat 8 ta elementli, umuman, E^n elementlari tartiblangan n liklardan iborat bo'lib, 2^n ta elementli to'plam bo'lar ekan.Ravshanki, bu to'plamlar chekli to'plamlardir.

1-ta'rif. E^n to'plamni E to'plamga akslantiruvchi har qanday

$$f: E^n\to E$$

funksiya chinlik funksiyasi yoki n ta argumentli Bul funksiyasi deyiladi va uni $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ kabi belgilanadi.

Odatda $x_1, x_2, ..., x_n$ larni Bul o‘zgaruvchilari deyiladi.

Bul funksiyasinung aniqlanish va o‘zgarish sohalari chekli to‘plamlardan iborat bo‘ladi. Bu hol Bul funksiyasini jadval yordamida ifodalash imkonini beradi. [1]**(813-bet)**

Aytaylik, $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ Bul funksiyasi bo‘lib, uning qiymatlari $e_0, e_1, ..., e_{2^n-1}$ bo‘lsin.Bu funksiyaning argumentlari $x_1, x_2, ..., x_n$ larning qiymtalariga mos funksiya qiymatlaridan foydalanib, ushbu jadvalni tuzamiz:

x_1	x_2	$\dots$	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, x_2, ..., x_n)$
0	0	$\dots$	0	0	e_0
0	0	$\dots$	0	1	e_1
0	0	$\dots$	1	0	e_2
.	.	$\dots$	.	.	.
.	.	$\dots$	.	.	.
1	1	$\dots$	1	0	e_{2^n-2}
1	1	$\dots$	1	1	e_{2^n-1}

Endi jadval tuzilishiga qisqacha izoh beramiz:

Bu jadvalda 2^n ta satr bor. Jadvaldagi satrlarning satr nomeri bilan $x_1, x_2, ..., x_n$ o‘zgaruvchilarning qabul qiladigan qiymatlari (0 va 1 simvollar) moslashtirilgan.

Satrda qatnashgan 0 va 1 simvollar ushbu satr nomerining ikkilik sistemasidagi ifodasidir. Masalan,

0-satrda

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0,0,..,0,0)$$

bo‘lib,

$$0 = 0 \cdot 2^{n-1} + 0 \cdot 2^{n-2} + \ldots + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

1-satrda

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0,0,..,0,1)$$

bo‘lib,

$$1 = 0 \cdot 2^{n-1} + 0 \cdot 2^{n-2} + \ldots + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

2-satrda

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0,0,..,0,1,0)$$

bo‘lib,

$$2 = 0 \cdot 2^{n-1} + 0 \cdot 2^{n-2} + \ldots + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

umuman, $2^n - 1$ -satrda

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (1,1,..,1)$$

bo‘lib,

$$2^n - 1 = 1 \cdot 2^{n-1} + 1 \cdot 2^{n-2} + \ldots + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

bo‘ladi.

Bul funksiyasi n ta o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lsa, uni quyidagicha ham aniqlash mumkin:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (e_0, e_1, \ldots, e_{2^n-1}).$$

Masalan,

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

jadval yordamida aniqlangan $f(x_1, x_2, x_3)$ funksiyani $f(x_1, x_2, x_3) = (10011011)$ kabi aniqlash mumkin.

Barcha Bul funksiyalar to'plaminini P_2 orqali belgilaymiz.

1- teorema. n ta o'zgaruvchili barcha Bul funksiyalari soni 2^{2^n} ga teng.

Endi elementar funksiyalar deb ataluvchi funksiyalarni keltiramiz. [1] **(814-bet)**

1^0. Ushbu

x	$f(x)$
0	0
1	0

jadval bilan aniqlangan funksiya nol funksiya deyiladi va uni 0 kabi belgilanadi: $f(x) = 0$

2^0. Ushbu

x	$f(x)$
0	1

1	1

jadval bilan aniqlanadigan funksiya birlik funksiya deyiladi va uni 1 kabi belgilanadi: $f(x) = 1$

3^0. Ushbu

x	$f(x)$
0	1
1	0

jadval bilan aniqlanadigan funksiya inkor funksiya deyiladi va uni $\bar{x}$ kabi belgilanadi: $f(x) = \bar{x}$

4^0. Ushbu

x	$f(x)$
0	0
1	1

jadval bilan aniqlanadigan funksiya ayniy funksiya deyiladi va uni $\varepsilon(x)$ kabi belgilanadi: $f(x) = x$

5^0. Ushbu

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

jadval bilan aniqlanadigan funksiya kon'yunksiya deyiladi va uni $x_1 \wedge x_2$ yoki $x_1 \cdot x_2$ kabi belgilanadi: $f(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2 = x_1 x_2$

6^0. Ushbu

x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

jadval bilan aniqlanadigan funksiya diz'yunksiya deyiladi va uni $x_1 \vee x_2$ kabi belgilanadi: $f(x_1,x_2) = x_1 \vee x_2$

7^0. Ushbu

x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

jadval bilan aniqlanadigan funksiya implikasiya deyiladi va uni $x_1 \to x_2$ kabi belgilanadi: $f(x_1,x_2) = x_1 \to x_2$

8^0. Ushbu

x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

jadval bilan aniqlanadigan funksiya ekvivalensiya deyiladi va uni $x_1 \leftrightarrow x_2$ kabi belgilanadi: $f(x_1,x_2) = x_1 \leftrightarrow x_2$

9^0. Ushbu

x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

jadval bilan aniqlanadigan funksiya ikki modul bo'yicha olingan yig'indi funksiya deyiladi va uni $x_1 + x_2$ kabi belgilanadi: $f(x_1,x_2) = x_1 + x_2$

10^0. Ushbu

x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

jadval bilan aniqlanadigan funksiya Sheffer (strixi) funksiyasi deyiladi va uni x_1 / x_2 kabi belgilanadi: $f(x_1,x_2) = x_1 / x_2$.

11^0. Ushbu

x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

jadval bilan aniqlanadigan funksiya Pirs (strelkasi) funksiyasi deyiladi va uni $x_1 \downarrow x_2$ kabi belgilanadi: $f(x_1,x_2) = x_1 \downarrow x_2$

Elementar funksiyalar yordamida formulalar qurish mumkin. Aytaylik, $\mathcal{B} \subseteq P_2$- qandaydir Bul funksiyalar to'plamibo'lsin. $\mathcal{B}$ ustidagi formulaga quyidagicha ta'rif beramiz.

2-ta'rif. a) Barcha o'zgaruvchilarni $\mathcal{B}$ ustidagi formula deb ataymiz;

b) $f(x_1, x_2,....,x_n) \in \mathcal{B}$ va $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ ifodalar $\mathcal{B}$ ustidgia formulalar bo'lsa, $f(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)$ ifodani $\mathcal{B}$ ustida formula deb ataymiz.

Masalan, $\mathcal{B}$ - elementar funksiyalar to'plami bo'lsin. Quyidagi ifodalar $\mathcal{B}$ ustidagi formula bo'ladi.

1) $(((x_1 \wedge x_2) + x_1) \vee x_3)$

2) $\left(\left(\overline{(x_1 \wedge x_2)} + x_1\right) \leftrightarrow \overline{x_3}\right)$

3) $\overline{\left(\left((x_1 \to x_2) \to x_1\right) \leftrightarrow x_3\right)}$.

$\mathcal{B}$ ustidagihar bir $\Phi(x_1, x_2,....,x_n)$ formula biror bir $f(x_1, x_2,....,x_n)$ Bul funksiyasini aniqlaydi. Ushbu aniqlangan $f(x_1, x_2,....,x_n)$ funksiyaga $\mathcal{B}$ dan olingan funksiyalarning **superpozitsiyasi** deyiladi. $\mathcal{B}$ dan $f(x_1, x_2,....,x_n)$ funksiyani hosil qilish jarayonini superpozitsiya amali deyiladi. Yana

$f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyani $\mathcal{B}$ ustidagi $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n)$ formula ko'rinishida ifodalash mumkin deyiladi. $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n)$ formulaga $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiya mos quyilgan deymiz. Bir funksiya bir necha formulaga mos quyilishi mumkin.

Asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (811-814 betlar)

2.Yablonskiy S.V. Vvedenie v diskretnuyu matematiku. M. «Nauka» 1986

3.Lavrov I.A., Maksimova L.L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M. «Nauka» 1995

Ma'ruza 11: Formulalar ekvivalentligi. Duallik printsipi

Reja:

1. **Formulalarning ekvivalentligi.**
2. **Duallik printsipi.**
3. **Funksiyani o'zgaruvchilar bo'yicha yoyish.**

Formulalarning ekvivalentligi

Yuqorida aytilganidek, turli formulalarga bitta Bul funksiyasi mos qo'yilishi mumkin. Masalan, $x_1 \downarrow x_2$ va $\overline{x_1 \vee x_2}$ formulalarga bitta funksiya mos qo'yiladi.

1-ta'rif. Mos qo'yilgan funksiyalari f_Φ va f_Ψ teng bo'lgan Φ va Ψ formulalarga ekvivalent formulalar deyiladi va $\Phi \sim \Psi$ kabi belgilanadi.

Boshqacha aytganda formulalar bir xil rostlik jadvaliga ega bo'lsa, ular ekvivalent formulalar deyiladi.

Misollar.

1) $x \vee \overline{x} \sim 1$

2) $\left(\overline{x_1}(x_2 + x_3)\right) \sim \overline{x_1 \vee ((x_2 \to x_3)(x_3 \to x_2))}$

3) $(x \to y) \sim (\overline{y} \to \overline{x})$

Quyidagi ekvivalent formulalar elementar funksiyalarning xossalarini ko'rsatadi. [1]**(815-bet)**

1)	$x \wedge x \sim x$	2)	$x \vee x \sim x$
3)	$x \wedge 1 \sim x$	4)	$x \wedge 0 \sim 0$
5)	$x \vee 0 \sim x$	6)	$x \vee 1 \sim 1$
7)	$x \wedge \overline{x} \sim 0$	8)	$x \vee \overline{x} \sim 1$
9)	$x \wedge y \sim y \wedge x$	10)	$x \vee y \sim y \vee x$
11)	$(x \wedge y) \wedge z \sim x \wedge (y \wedge z)$	12)	$(x \vee y) \vee z \sim x \vee (y \vee z)$

13) $(x+y)+z \sim x+(y+z)$

14) $(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z \sim x \leftrightarrow (y \leftrightarrow z)$

15) $(x \wedge y) \vee z \sim (x \vee z) \wedge (y \vee z)$

16) $(x \vee y) \wedge z \sim (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$

17) $\overline{\overline{x}} \sim x$

18) $\overline{x \wedge y} \sim \overline{x} \vee \overline{y}$

19) $\overline{x \vee y} \sim \overline{x} \wedge \overline{y}$

20) $x \to y \sim \overline{x} \vee y$

[1]**(817-bet)**

<u>2-ta'rif.</u> Ushbu tenglik yordamida aniqlangan

$$f^{*}(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})}$$

funksiyani $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaga dual funksiya deyiladi.

Dual funksiyaning jadvali $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaning jadvalidan 0 ni 1 ga va1 ni 0 ga o'zgartirib, yuqoridan pastga aylantirib hosil qilinadi. Quyidagi jadvalga qarang. [1]**(816-bet)**

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	$f^{*}(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	0

Misol. Quyidagi funksiyalarga dual funksiyani toping:

1) $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1 \vee ((x_2 \to x_3)(x_3 \to x_2))}$

2) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1001101100011011)$

Yechish: 1) ta'rifga ko'ra

$$f^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})} = \overline{\overline{\overline{x_1} \vee ((\overline{x_2} \to \overline{x_3})(\overline{x_3} \to \overline{x_2}))}}$$

17-ekvivalentlik formulasiga ko'ra

$$f^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{x_1} \vee ((\overline{x_2} \to \overline{x_3})(\overline{x_3} \to \overline{x_2})).$$

2) Bu misolni yechish uchun dual funksiyaning qiymatral jadvali to'g'risida aytilgan mulohazalardan foydalanamiz, yani 0 ni 1 ga va1 ni 0 ga o'zgartirib, teskari aylantirib dual funksiyani hosil qilamiz:

$$f^*(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0010011100100110).$$

1-teorema. Agar

$F(x_1, x_2, ..., x_n) = f(f_1(x_{11}, ..., x_{1p_1}), ..., f_m(x_{m1}, ..., x_{mp_m}))$ bo'lsa, u holda

$F^*(x_1, x_2, ..., x_n) = f^*(f_1^*(x_{11}, ... x_{1p_1}), ..., f_m^*(x_{m1}, ... x_{mp_m}))$.

Isbot.

$$F^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f(f_1(\overline{x_{11}}, ..., \overline{x_{1p_1}}), ..., f_m(\overline{x_{m1}}, ..., \overline{x_{mp_m}}))} = \overline{f(\overline{\overline{f_1(\overline{x_{11}}, ..., \overline{x_{1p_1}})}}, ..., \overline{\overline{f_m(\overline{x_{m1}}, ..., \overline{x_{mp_m}})}})}$$

$$= \overline{f(\overline{f_1^*(x_{11}, ..., x_{1p_1})}, ..., \overline{f_m^*(x_{m1}, ..., x_{mp_m})})} = f^*(f_1^*(x_{11}, ... x_{1p_1}), ..., f_m^*(x_{m1}, ... x_{mp_m})).$$

Teorema isbotlandi.

Duallik printsipi

Teoremadan quyidagi duallik printsipi kelib chiqadi. [1]**(816-bet)**

Duallik printsipi. Agar $\Phi = \tilde{N}[f_1, ..., f_s]$ formula $f(x_1, ..., x_n)$ funksiyani aniqlasa, u holda Φ formuladagi $f_1, ..., f_s$ funksiyalarni $f_1^*, ..., f_s^*$ funksiyalarga mos ravishda almashtirib hosil qilingan $\Phi^* = \tilde{N}[f_1^*, ..., f_s^*]$ formula $f^*(x_1, ..., x_n)$ funksiyani aniqlaydi. $\Phi^* = \tilde{N}[f_1^*, ..., f_s^*]$ formulani Φ formulaga dual formula deb ataymiz.

Elementar funksiyalarga dual funksiyalarni ko'rsatamiz

$f(x_1, x_2)$	$f^*(x_1, x_2)$

0	1
1	0
$\bar{x}$	$\bar{x}$
x	x
$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$
$x_1 \vee x_2$	$x_1 \wedge x_2$
$x_1 \to x_2$	$\overline{x_1} \wedge x_2$
$x_1 \leftrightarrow x_2$	$x_1 + x_2$
$x_1 + x_2$	$x_1 \leftrightarrow x_2$
$x_1 \mid x_2$	$x_1 \downarrow x_2$
$x_1 \downarrow x_2$	$x_1 \mid x_2$

Misol. Duallik printsipidan foydalanib berilgan funksiyaga dual funksiyani toping. 1) $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1 \vee ((x_2 \to x_3)(x_3 \to x_2))}$

2) $f(x_1, x_2, x_3) = \left(\left(\left(x_1 \wedge x_2\right) + x_1\right) \vee x_3\right)$

Yechish: 1) Yuqoridagi jadvaldan foydalanib, berilgan funksiyada qatnashgan barcha funksiyalarni dualiga almashtiramiz $f^*(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1 \wedge ((\overline{x_2} \wedge x_3) \vee (\overline{x_3} \wedge x_2))}$

2) $f^*(x_1, x_2, x_3) = \left(\left(\left(x_1 \vee x_2\right) \leftrightarrow x_1\right) \wedge x_3\right)$.

<u>2-ta'rif.</u> Quyidagi tenglik

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

o'rinli bo'lsa, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiyani o'z-o'ziga dual funksiya deyiladi.

Biz yuqorida fikrlar algebrasining formulalarini o'rganishda, undan tegishli mantiqiy xulosalar chiqarishda muhim bo'lgan formulalarning ekvivalentligi tushunchasini bayon etgan edik.

Ma'lumki, har bir formulani, unga ekvivalent bo'lgan, ayni paytda soddaroq tuzilgan formulaga keltirish muhimdir.

Endi fikrlar algebrasining har qanday formulasini $\bar{\ }, \wedge, \vee$ mantiqiy amallar yordamida tuzilgan maxsus formulaga (odatda bunday formulalarni diz'yunktiv normal forma, kon'yunktiv normal forma deyiladi) keltiramiz.

Propozisional o'zgaruvchi x uchun ushbu

$$x^e = \begin{cases} x, & agar \quad e=1 \quad bo'lsa \\ \bar{x}, & agar \quad e=0 \quad bo'lsa \end{cases}$$

belgilashni kiritamiz. $(e \in E)$

1-Teorema (funksiyani o'zgaruvchilar bo'yicha yoyish haqida). *Fikrlar algebrasining har qanday* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *funksiyasini ixtiyoriy* m $(1 \le m \le n)$ *uchun ushbu ko'rinishda ifodalash mumkin:*

$$f(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) =$$
$$\bigvee_{(e_1, \ldots, e_m)} (x_1^{e_1} \wedge \ldots \wedge x_m^{e_m} \wedge f(e_1, \ldots, e_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)) \quad (*)$$

bu yerda diz'yunksiya $x_1, \ldots, x_m$ *o'zgaruvchilarning barcha qabul qilishi mumkin qiymatlar bo'yicha olinadi.*

Isbot. Ixtiyoriy $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E^n$ uchun (*) tenglikni chap va ong tomoni bir xil qiymat qabul qilishini ko'rsatamiz. Chap tomoni $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ga teng. O'ng tomoni esa

$$\bigvee_{(e_1, \ldots, e_m)} (\alpha_1^{e_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_m^{e_m} \wedge f(e_1, \ldots, e_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n)) =$$
$$= \alpha_1^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_m^{\alpha_m} \wedge f(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

Teorema isbotlandi.

Bu teoremadan quyidagi natijalarni olishmiz mumkin.

1) *m=1* bolganida funksiyani o'zgaruvchi bo'yicha yoyish:

$$f(x_1,\ldots, x_n)=$$

$$(x_1 \wedge f(1,x_2,\ldots,x_n)) \vee (\overline{x_1} \wedge f(0,x_2,\ldots,x_n))$$

2) $m=n$ bolganida funksiyani barcha o‘zgaruvchilar bo‘yicha yoyish:

$$f(x_1,\ldots, x_n)=\bigvee_{(e_1,\ldots,e_n)}(x_1^{e_1} \wedge\ldots\wedge x_n^{e_n} \wedge f(e_1,\ldots, e_n))$$

Agar $f(x_1,\ldots, x_n)\neq 0$ bo‘lsa, yoqoridagi tenglikni o‘ng tomonidagi formulani quyidagicha almashtirishimiz mumkin:

$$\bigvee_{(e_1,\ldots,e_n)}(x_1^{e_1} \wedge\ldots\wedge x_n^{e_n} \wedge f(e_1,\ldots, e_n)) = \bigvee_{\substack{(e_1,\ldots,e_n) \\ f(e_1,\ldots,e_n)=1}} (x_1^{e_1} \wedge\ldots\wedge x_n^{e_n}).$$

Natijada $f(x_1,\ldots, x_n)=\bigvee_{\substack{(e_1,\ldots,e_n) \\ f(e_1,\ldots,e_n)=1}} (x_1^{e_1} \wedge\ldots\wedge x_n^{e_n})$ hosil qilamiz.

Asosiy darsliklar va o’quv qo’llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (811-814 betlar)

2.Yablonskiy S.V. Vvedenie v diskretnuyu matematiku. M. «Nauka» 1986

3.Lavrov I.A., Maksimova L.L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M. «Nauka» 1995

Ma'ruza 12: Bul funksiyalarining normal formalari

Reja:

1. **Elementar kon'yunksiya.**
2. **Dizyunktiv va konyunktiv normal formalar .**
3. **Mukammal dizyunktiv va konyunktiv normal formalar**

Elementar kon'yunksiya

Ixtiyoriy $f(x_1,\dots,x_n)$ Bul funksiyasi uchun D_f orqali agar $f(x_1,\dots,x_n)\equiv 0$ bo'lsa, $x_1\wedge\overline{x_1}$ formulani, aks holda $\bigvee\limits_{\substack{(e_1,\dots,e_n)\\ f(e_1,\dots,e_n)=1}}(x_1^{e_1}\wedge\dots\wedge x_n^{e_n})$ formulani belgilaymiz.

Quyidagi

$$x_k^{e_k}\qquad (k=1,2,3,\dots)$$

hamda ulardan tuzilgan

$$(x_1^{e_1}\wedge x_2^{e_2}\wedge\dots\wedge x_k^{e_k}),\qquad (k=1,2,3,\dots)$$

Formulalar *elementar kon'yunksiya* deyiladi.

1-ta'rif. Diz'yunktiv normal forma (qisqachaD.N.F.) tushunchasi quyidagicha induktiv ta'riflanadi:

1) har qanday elementar kon'yunksiya D.N.F. bo'ladi;

2) agar F_1, F_2 lar D.N.F. bo'lsa, u holda $F_1\vee F_2$ ham D.N.F. bo'ladi;

3) boshqacha ko'rinishli D.N.F. yo'q.

Masalan, quyidagi formulalarning har biri D.N.F. bo'ladi;

$$x_1,\ \overline{x_2},\ x_1\vee\overline{x_2},\quad (x_1\wedge x_2\wedge x_3)$$
$$(x_1\wedge x_2)\vee(\overline{x_1}\wedge\overline{x_2}\wedge\overline{x_3}),\ x_1\vee(x_2\wedge x_3)$$

2-teorema. Fikrlar algebrasining har qanday formulasi uchun unga mantiqiy ekvivalent D.N.F. mavjud. [2]**(27-bet)**

Isbot. Aytaylik, F fikrlar algebrasining formulasi bo‘lib, unga Bul funksiyasi f_F mos quyilsin.

Unda, 1- teoremaga binoan, shunday D_{f_F} formula topiladiki,

$$f_{D_{f_F}} = f_F$$

bo‘ladi. Binobarin,

$$f_{D_{f_F}} = f$$

bo‘lishidan

$$\mathrm{D}_{\mathrm{f}_{\mathrm{F}}} \sim \mathrm{F}$$

ekanligi kelib chiqadi.

Ikkinchi tomondan, D_{f_F} formulaning tuzilishi (u teoremada keltirilgan) uning D.N.F. bo‘lishini ko‘rsatadi.

Teorema isbot bo‘ldi.

Eslatma. Yuqorida keltirilgan teorema fikrlar algebrasining formulasi uchun unga mantiqiy ekvivalent D.N.F. ning mavjud bo‘lishini isbotlabgina qolmasdan, diz’yunktiv normal formadagi formulani topish usulini ham ko‘rsatadi.

Misol. Ushbu

$$F = (x_1 \wedge x_2) \to (x_1 \vee x_2)$$

formulani qaraylik. Bu holda

$$f_0(0,0) = f_F(0,1) = f_F(1,0) = f_F(1,1) = 1$$

bo‘ladi.

Agar

$$C_0 = (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2})$$

$$C_1 = (\overline{x_1} \wedge x_2)$$

$$C_2 = (x_1 \wedge \overline{x_2})$$

$$C_3 = (x_1 \wedge x_2)$$

ekanligini e'tiborga olsak, unda

$$D_f = (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (x_1 \wedge x_2)$$

bo‘lishini topamiz.

Demak, fikrlar algebrasining F formulasi unga ekvivalent bo‘lgan D.N.F. ko‘rinishga keldi.Quyidagi

$$x_k^e \qquad (k = 1,2,3,...)$$

hamda ulardan tuzilgan

$$(x_1^e \vee x_2^e \vee ... \vee x_k^e), \qquad (k = 1,2,3,...)$$

Formulalar *elementar diz'yunksiya* deyiladi.

2-ta'rif. Kon'yunktiv normal forma (qisqacha K.N.F.) tushunchasi quyidagicha induktiv ta'riflanadi:

1) har qanday elementar diz'yunksiya K.N.F. bo‘ladi.

2) agar F_1, F_2 lar K.N.F. bo‘lsa, u holda $F_1 \wedge F_2$ ham K.N.F. bo‘ladi.

3) boshqacha ko‘rinishli K.N.F. yo‘q.

Masalan, quyidagi formulalarning har biri K.N.F. bo‘ladi:

$$x_1,\ \overline{x_3},\ x_1 \wedge \overline{x_3},\ (x_1 \vee \overline{x_3}),\ x_1 \wedge (x_1 \vee \overline{x_3}),\ x_1 \wedge \overline{x_3} \wedge (x_1 \vee \overline{x_3}),$$
$$(x_1 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_3})$$

3-teorema. Fikrlar algebrasining har qanday formulasi uchun unga mantiqiy ekvivalent K.N.F. mavjud. [2] **(27-bet)**

Isbot. Faraz qilaylik, F fikrlar algebrasining formulasi bo‘lsin. 2-§ da aytilganlardan foydalanib berilgan F formula uchun F^* ni topamiz. So‘ng 2.1-teoremaga ko‘ra Ushbu

$$F^* \sim D_{F^*}$$

munosabatni hosil qilamiz. Bunda, ravshanki, $D_{F^\bullet}$-D.N.F. bo'ladi.

Yuqoridagi munosabatdan esa, 1-teoremaga binoan

$$(F^\bullet)^\bullet \sim \left(D_{F^\bullet}\right)^\bullet$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak,

$$F \sim D^\bullet_{F^\bullet}$$

bo'ladi. Ayni paytda, $D^\bullet_{F^\bullet}$ formulaning tuzilishidan, uning K.N.F. ko'rinishda ekanligini payqash qiyin emas. Teorema isbot bo'ldi.

Eslatma. Bu teorema fikrlar algebrasining formulalarini kon'yuktiv normal formadagi formulalarga keltirish usulini ham ko'rsatadi.

Garchi 2-teorema hamda 3-teoremalar isboti fikrlar algebrasining formulalarni D.N.F. yoki K.N.F. ko'rinishidagi formulalarga keltirish usulini ifodalasa-da, undan amaliyotda foydalanish ancha qiyin bo'ladi. Formulalardagi propozisional o'zgaruvchilarning sonini o'sib borishi, katta sondagi satrli jadvalni tuzishga olib keladi.

Masalan, formuladagi propozisional o'zgaruvchilar soni $n = 8$ bo'lganda, satrlar soni $2^8 = 256$ ta bo'lgan jadvalni tuzishga to'g'ri keladi. Bunday hollarda, mantiqiy ekvivalent formulalardan foydalanish qulay bo'ladi.

Misol. Ushbu $(x_1 \wedge x_2) \to (x_3 \vee x_4)$ formulani qaraylik.

Yuqorida aytilganlardan foydalanib, uni quyidagicha D.N.F. va K.N.F. ko'rinishlariga keltiramiz:

$$(x_1 \wedge x_2) \to (x_3 \vee x_4) \sim \overline{(x_1 \wedge x_2)} \vee (x_3 \vee x_4) \sim (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \vee (x_3 \vee x_4) \sim \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4$$

bu D.N.F bo'ladi.

Shuningdek $(x_1 \wedge x_2) \to (x_3 \vee x_4) \sim (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4)$ K.N.F. bo'ladi.

Endi mukammal diz'yunktiv normal forma (qisqacha: M.D.N.F.) hamda mukammal kon'yunktiv normal forma (qisqacha: M.K.N.F.) tushunchalarini keltiramiz.

Aytaylik, $x_1,...,x_n$ propozisional o‘zgaruvchilarga bog‘liq $D(x_1,...,x_n)$ D.N.F. berilgan bo‘lsin.

3-ta’rif. D.N.F bo‘lgan $D(x_1, x_2,....,x_n)$ formula ushbu shartlarni qanoatlantirsa

1). $D(x_1, x_2,....,x_n)$ da ishtirok etuvchi har bir elementar kon’yunksiyalarning har birida $x_1, x_2,....,x_n$ lardan ixtiyoriysi yoki inkor ishorasi bilan yoki inkor ishorasisiz faqat bir marta ishtirok etsa,

2). $D(x_1, x_2,....,x_n)$ da ikkita bir xil diz’yunktiv had ishtirok etmasa, $D(x_1, x_2,....,x_n)$ formula mukammal diz’yunktiv normal forma (M.D.N.F.) deyiladi. $[2]$**(27-bet)**

4-teorema. Fikrlar algebrasining ziddiyat bo‘lmagan har qanday formulasini unga mantiqiy ekvivalent bo‘lgan yagona mukammal diz’yunktiv normal formaga keltirish mumkin. $[2]$**(28-bet)**

Isbot. Faraz qilaylik, ziddiyat bo‘lmagan formula berilgan bo‘lsin. Uni 1.2-teoremadan foydalanib diz’yunktiv normal formaga keltiriladi.

Agar bordi-yu bu D.N.F. da bir xil diz’yunktiv had, masalan,

$$(x_1^{e_1} \wedge x_2^{e_2} \wedge ... \wedge x_n^{e_n}) \vee (x_1^{e_1} \wedge x_2^{e_2} \wedge ... \wedge x_n^{e_n})$$

ishtirok etsa, u holda ushbu

$$x \vee x \sim x$$

ekvivalentlikdan foydalanib faqat bittasini qoldiramiz.

Agar bordi-yu

$$(x_1^{e_1} \wedge x_2^{e_2} \wedge ... \wedge x_n^{e_n})$$

elementar kon’yunksiyada x_i o‘zi va o‘zining inkori bilan ishtirok etsa, unda

$$(x_1^{e_1} \wedge ..... \wedge x_i \wedge \overline{x_i} \wedge ... \wedge x_n^{e_n}) \sim 0$$

munosabatdan foydalanib, bu diz’yunktiv hadni tashlab yuboramiz. Agar biror diz’yunktiv

$$(x_1^{e_1} \wedge x_2^{e_2} \wedge ... \wedge x_n^{e_n})$$

hadda x_i va $\overline{x_i}$ lardan birortasi ishtirok etmagan bo‘lsa, u holda

$$(x_1^{e_1} \wedge ... \wedge x_n^{e_n}) \sim (x_1^{e_1} \wedge ... \wedge x_n^{e_n}) \wedge (x_i \vee \overline{x_i}) \sim$$
$$(x_1^{e_1} \wedge ... \wedge x_i \wedge ... \wedge x_n^{e_n}) \vee (x_1^{e_1} \wedge ... \wedge \overline{x_i} \wedge ... \wedge x_n^{e_n})$$

bo‘lishidan foydalanamiz.

Shu usulda keltirilgan formula 3-ta’rifning barcha shartlarini bajaradi. Binobarin u mukammal diz’yunktiv normal formadagi formula bo‘ladi. Teorema isbot bo‘ldi.

Yuqorida keltirilgan M.D.N.F. tushunchasiga o‘xshash mukammal kon’yunktiv normal forma (M.K.N.F.) tushunchasi kilritib, quyidagi teoremani isbotlash mumkin.

5-teorema. Fikrlar algebrasining tavtologiya bo‘lmagan har qanday formulasini unga mantiqiy ekvivalent bo‘lgan yagona mukammal kon’yunktiv normal forma ko‘rinishga keltirish mumkin.

Asosiy darsliklar va o’quv qo’llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (811-814 betlar)

7. Yablonskiy S.V. Vvedenie v diskretnuyu matematiku. M. «Nauka» 1986
8. Lavrov I.A., Maksimova L.L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M. «Nauka» 1995

Ma'ruza 13: To'liqlik va yopiqlik. Muhim yopiq sinflar

Reja:

1. **To'liqlik va yopiqlik.**
2. **Jegalkin ko'phadi.**
3. **Muhim yopiq sinflar.**

To'liqlik va yopiqlik

Yuqorida biz ixtiyoriy Bul funksiyasi $\bar{x}, x_1 \wedge x_2$ *va* $x_1 \vee x_2$ elementar funksiyalar yordamida formula ko'rinishida ifodalash mumkinligini ko'rdik. Quyida biz, shunday hususiyatga ega funksiyalar sistemalari bilan bog'liq bo'lgan tushunchalarga to'xtalib o'tamiz.

Faraz qilaylik, bizga $B = \{f_1, f_2, \ldots, f_s, \ldots\} \subseteq P_2$ - Bul funksiyalar sistemasi berilgan bo'lsin. [1] **(817-bet)**

1- ta'rif. Agarda ixtiyoriy Bul funksiyasini B funksiyalar sistemasi ustida formula ko'rinishida ifodalash mumkinbo'lsa, B to'liq sistema deyiladi.

1-misol. P_2 –barcha Bul funksiyalar to'plami – to'liq sistema bo'ladi.

2-misol. $B = \{\bar{\ }, \wedge, \vee\}$ - funksiyalar sistemasini to'liq sistema ekanligi ko'rsatildi.

Quyidagi teorema yordamida biz bir sistemaning to'liqligi masalasini ikkinchi sistemaning to'liqligiga keltirishimiz mumkin.

1-teorema. Agar $B_1 = \{f_1, f_2, \ldots\}$ va $B_2 = \{f_1, f_2, \ldots\}$ Bul funksiyalar sistemalaridan B_1 - to'liq sistema bo'lib, uning har bir funksiyasini B_2 ustida formula ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lsa, u holda B_2 funksiyalar sistemasi to'liqdir. [2] **(30-bet)**

3-misol. $B = \{\bar{\ }, \wedge\}$ - funksiyalar sistemasini toliqligini 1-teoremaga asoslanib ko'rsatamiz. B_1 sifatida 2-misoldagi sistemani, B_2 sifatida esa 3-misoldagi sistemani qaraymiz va $x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}}$ ayniyatdan foydalansak, $B = \{\bar{\ }, \wedge\}$ sistemaning to'liqligi kelib chiqadi.

4-misol. $B = \{\bar{\ }, \vee\}$ - funksiyalar sistemasi to'liqdir. Bu sustemaning to'liqligi 3-misol kabi ko'rsatiladi.

5-misol. $B=\{/\}$ - funksiyalar sistemasi to‘liqdir. Quyidagi ayniyatlarning o‘rinli ekanligini ko‘rsatish qiyin emas.

$$\bar{x}=x/x, \quad x_1 \wedge x_2=(x_1/x_2)/(x_1/x_2)$$

Demak 3-misoldagi sistemaning barcha funksiyalari bu sistema ustida formula ko‘rinishida ifodalanadi.

6-misol. $B=\{0,1,x_1\cdot x_2,x_1+x_2\}$ - funksiyalar sistemasi to‘liqdir. Quyidagi ayniyatlarning o‘rinli ekanlini ko‘rsatish qiyin emas.

$$\bar{x}=x+1, \quad x_1 \wedge x_2=x_1\cdot x_2$$

Demak 3-misoldagi sistemaning barcha funksiyalari bu sistema ustida formula ko‘rinishida ifodalanadi.

Ixtiyoriy Bul funksiyasini $0,1,x_1\cdot x_2$ va x_1+x_2 funksiyalari yordamida formula ko‘rinishida ifodalagandan keyin, qavslarni ochib chiqib, algebraik almashtirishlar bajarib mod 2 bo‘yicha ko‘phad (Jegalkin ko‘phadi) ko‘rinishida ifodalanadi. Quyidagi teorema o‘rinli.

2-teorema.(Jegalkin). [2] **(32-bet)**Ixtiyoriy Bul funrsiyasi Jegalkin ko‘phadi yordamida ifodalanishi mumkin, ya’ni $\forall f(x_1,\dots,x_n)\in P_2$ uchun

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{(i_1,\dots,i_s)} a_{i_1\dots i_s}x_{i_1}\dots x_{i_s}\text{, bu yerda } a_{i_1\dots i_s}\in E.$$

Ushbu ko‘phadda

$$x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_s}$$

ko‘rinishidagi hadlar soni 1 dan n gacha bo‘lgan natural sonlar to‘plamining $\{i_1,\dots,i_s\}$ qism to‘plamlari soniga, ya’ni 2^n ga teng. Ularning $a_{i_1\dots i_s}$ koeffitsiyentlari faqat 0 yoki 1 qiymat qabul qilgani uchun barcha n o‘zgaruvchili Jegalkin ko‘phadlarining soni 2^{2^n} ga, ya’ni barcha n o‘zgaruvchili Bul funksiyalarining soniga teng. Bu esa Bul funksiyasini Jegalkin ko‘phadi yordamida yagona ravishda ifodalanishini bildiradi.

Misol. Ushbi funksiyani Jegalkin ko‘phadi ko‘rinishida ifodalang:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1/x_2)+(x_1\wedge x_3)$$

Yechish: Berilgan funksiya uchun noma'lum koeffisientli ko'phad ko'rinishidagi ifodasini izlaymiz:

$$(x_1/x_2)+(x_1\wedge x_3)=ax_1x_2x_3+bx_1x_2+cx_1x_3+dx_2x_3+ex_1+fx_2+gx_3+h$$

Funksiyaning qiymatlar jadvalida noma'lum koeffisientlarni aniqlaymiz:

x_1	x_2	x_3	$(x_1/x_2)+(x_1\wedge x_3)$	$ax_1x_2x_3+bx_1x_2+cx_1x_3+dx_2x_3+$ $+ex_1+fx_2+gx_3+h$	
0	0	0	1	*h*	*h=1*
0	0	1	1	*g+h*	*g=0*
0	1	0	1	*f+h*	*f=0*
0	1	1	1	*d+f+g+h*	*d=0*
1	0	0	1	*e+h*	*e=0*
1	0	1	0	*c+e+g+h*	*c=1*
1	1	0	0	*b+e+f+h*	*b=1*
1	1	1	1	*a+b+c+d+e+f+g+h*	*a=0*

Jadvalning 4 va 5- ustunlarini tenglashtirishdan hosil bo'lgan tenglamalar (noma'lum koeffisientlarga nisbatan) sistemasini yechib, 6- ustunni hosil qilamiz. Demak

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1/x_2)+(x_1\wedge x_3)=x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+1$$

To'liqlik tushunchasi bilan yopilma va yopiq sinf tushunchalari bevosita bog'liq hisoblanadi. [2]**(33-bet)**

2-ta'rif. Aytaylik $M \in P_2$ bo'lsin. M to'plamning funksiyalari yordamida formula ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lgan barcha funksiyalar to'plamiga M to'plamning yopilmasi deyiladi. M to'plamning yopilmasi [M] kabi belgilanadi.

***Misol**:* 1) $M=P_2$ bo'lsa, ko'rinib turibdiki $[M]=P_2$ bo'ladi.

2) $M = \{1, x_1 + x_2\}$ bo'lsa, bu to'plamning yopilmasi barcha chiziqli funksiyalar sinfi L, yani $f(x_1,\ldots,x_n) = c_0 + c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$ ko'rinishidagi funksiyalar sinfi bo'ladi.

3- ta'rif. Agarda M to'plamning yopilmasi o'ziga teng, yani [M]=M bo'lsa, M yopiq to'plam deyiladi.

Misol: 1) $M=P_2$ sinf yopiq sinf bo'ladi.

2) $M = \{1, x_1 + x_2\}$ sinf yopiq emas.

3) L sinf yopiq.

Muhim yopiq sinflar

Ushbu mavzuda biz ba'zi muhim yopiq sinflarni o'rganamiz. [2] **(34-bet)**

1. Nolni saqlovchi barcha Bul funksiyalari sinfini T_0 orqali belgilaymiz, yani $T_0 = \{ f(x_1,..,x_n) \mid f(0,0,..,0) = 0 \}$.

Masalan, 0, x, $x_1 \wedge x_2$, $x_1 \vee x_2$, $x_1 + x_2$ funksiyalar T_0 sinfga tegishli bo'ladi.

1-Tasdiq. *T_0 – yopiq sinfdir.*

Isbot. Biz ixtiyoriy $f, f_1,..., f_m \in T_0$ funksiyalar uchun $F(x_1, x_2,...., x_n) = f(f_1(x_{11},...,x_{1p_1}),..., f_m(x_{m1},...,x_{mp_m}))$ funksiyani T_0 sinfga tegishli ekanigini ko'rsatsak yetarli. Haqiqatan

$$F(0, 0,....,0) = f(f_1(0,...,0),..., f_m(0,...,0)) = f(0,\ldots,0) = 0$$

2. Birni saqlovchi barcha Bul funksiyalari sinfini T_1 orqali btlgilaymiz, yani $T_1 = \{ f(x_1,..,x_n) \mid f(1,1,..,1) = 1 \}$.

Masalan, 1, x, $x_1 \wedge x_2$, $x_1 \vee x_2$, $x_1 \to x_2$ funksiyalar T_1 sinfga tegishli bo'ladi.

2- Tasdiq. *T_1 – yopiq sinfdir.*

Isbot. Biz ixtiyoriy $f, f_1, ..., f_m \in T_1$ funksiyalar uchun $F(x_1, x_2, ..., x_n) = f(f_1(x_{11}, ..., x_{1p_1}), ..., f_m(x_{m1}, ..., x_{mp_m}))$ funksiyani T_1 sinfga tegishli ekanigini ko'rsatsak yetarli. Haqiqatan

$$F(1, ..., 1) = f(f_1(1, ..., 1), ..., f_m(1, ..., 1)) = f(1, \ldots, 1) = 1$$

3. O'z-o'ziga dual barcha Bul funksiyalar sinfini S orqali btlgilaymiz, yani $S = \{f(x_1, ..., x_n) \mid f(x_1, ..., x_n) = f^*(x_1, ..., x_n)\}$.

Masalan, x va $\overline{x}$ funksiyalar S sinfiga tegishli bo'ladi.

3- Tasdiq. *S – yopiq sinfdir.*

Isbot. Biz ixtiyoriy $f, f_1, ..., f_m \in S$ funksiyalar uchun $F(x_1, x_2, ..., x_n) = f(f_1(x_{11}, ..., x_{1p_1}), ..., f_m(x_{m1}, ..., x_{mp_m}))$ funksiyani S sinfga tegishli ekanigini ko'rsatsak yetarli. Haqiqatan

$$F^*(x_1, x_2, ..., x_n) = f^*(f_1^*(x_{11}, ..., x_{1p_1}), ..., f_m^*(x_{m1}, ..., x_{mp_m})) =$$
$$= f(f_1(x_{11}, ..., x_{1p_1}), ..., f_m(x_{m1}, ..., x_{mp_m})) = F(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Quyidagi lemma o'z-o'ziga dual bo'lmagan funksiya haqidagi lemma deb yuriniladi.

1-lemma. Agar $f(x_1, ..., x_n) \notin S$ bo'lsa, u holda ushbu funksiyadan x va $\overline{x}$ funksiyalarni o'rniga qo'yish yo'li bilan bir o'zgaruvchili o'z-o'ziga dual bo'lmagan funksiyani, yani konstantani, hosil qilish mumkin. [2] **(35-bet)**

Isbot. Ayraylik $f(x_1, ..., x_n) \notin S$ bo'lsin. U holda shunday $\alpha = (e_1, ..., e_n) \in E^n$ borki $f(\overline{e_1}, ..., \overline{e_n}) = f(e_1, ..., e_n)$ tenglik o'rinli. Quyidagi funksiyalarni qaraymiz $\varphi_i(x) = x^{e_i}$ va ular yordamida $\varphi(x)$ funksiyani aniqlaymiz:

$$\varphi(x) = f(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$$

Bu $\varphi(x)$ funksiya $f(x_1,...,x_n)\notin S$ funksiyadan x va $\overline{x}$ funksiyalarni o'zgaruvchilar o'rniga qo'yish bilan hosil qilindi va konstantaga teng. Haqiqatan,

$$\varphi(0)=f(\varphi_1(0),\ldots,\varphi_n(0))=f(0^{e_1},\ldots,0^{e_n})=f(\overline{e_1},\ldots,\overline{e_n})=f(e_1,\ldots,e_n)$$
$$=f(1^{e_1},\ldots,1^{e_n})=f(\varphi_1(1),\ldots,\varphi_n(1))=\varphi(1).$$

Lemma isbotlandi.

Asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (816-819 betlar)

2. Yablonskiy S.V. Vvedenie v diskretnuyu matematiku. M. «Nauka» 1986

3. Lavrov I.A., Maksimova L.L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M. «Nauka» 1995

Ma’ruza 14-15: Post teoremasi va uning natijalari (4 soat)

Reja:

4. **Muhim yopiq sinflar.**
5. **Post teoremasi.**
6. **Post teoremasining natijalari.**

Muhim yopiq sinflar

Avvalgi mavzuni davom ettiramiz.

4. E^n da quyidagi tartib munosabatini kiritamiz:

$\alpha=(e_1,..,e_n)$, $\beta=(e_1^{'},..,e_n^{'})\in E^n$ uchun $\alpha\le\beta \Leftrightarrow e_1\le e_1^{'},\ \ e_2\le e_2^{'},...,e_n\le e_n^{'}$;

Ushbu munosabat o‘rinli bo‘lsa, $\alpha=(e_1,..,e_n)$ -*n* lik $\beta=(e_1^{'},..,e_n^{'})\in E^n$ -*n* likdan *“oldin keladi”* deyiladi. Masalan, $(0,1,1,0)\le(0,1,1,1)$, ammo $(0,1,0)$ va $(1,0,0)$ uchliklarni solishtirib bo‘lmaydi. Bu munosabat qisman tartib munosabat bo‘ladi.

1-ta’rif. Agar $f(x_1,...,x_n)$ Bul funksiyasi uchun ixtiyoriy shunday $\alpha=(e_1,..,e_n)$, $\beta=(e_1^{'},..,e_n^{'})\in E^n$ topilsaki, ular uchun $\alpha\le\beta \ \Rightarrow\ f(\alpha)\le f(\beta)$ shart bajarilsa, $f(x_1,...,x_n)$ funksiya monoton funksiya deyiladi. [1] **(817-bet)**

Barcha monoton funksiyalari sinfini M orqali belgilaymiz, yani
$M=\{f(x_1,...,x_n)/\,\alpha\le\beta\Rightarrow f(\alpha)\le f(\beta)\}$.

Masalan, $0,1,\ x,\ x_1\wedge x_2,\ x_1\vee x_2$ funksiyalar S sinfiga tegishli bo‘ladi.

4-Tasdiq. M – yopiq sinfdir.

Agar $\alpha=(e_1,\ldots,e_{i-1},e_i,e_{i+1},\ldots,e_n)$ va $\beta=(e_1,\ldots,e_{i-1},\overline{e_i},e_{i+1},\ldots,e_n)$ bo‘lsa, α va β *n* liklar *qo‘shni* (*i*- koordinata bo‘yicha) deyiladi.

Quyidagi lemma monoton bo‘lmagan funksiya haqidagi lemma deb yuriniladi.

2-lemma. Agar $f(x_1,...,x_n)\notin M$ bo‘lsa, u holda ushbu funksiyadan $0,1$ va x funksiyalarni o‘rniga qo‘yish yoli bilan $\overline{x}$ funksiyani hosil qilish mumkin. [2] **(37-bet)**

Isbot. $f(x_1,..,x_n)\notin M$ bo‘lsin. Avval $\alpha\le\beta$ va $f(\alpha)>f(\beta)$ shartni qanoatlantiradigan *qo‘shni* α va β *n* liklar mavjudligini ko‘rsatamiz. $f(x_1,..,x_n)\notin M$ bo‘lgani uchun shunday α^1 va β^1 *n* liklar mavjudki, $\alpha^1\le\beta^1$ va $f(\alpha^1)>f(\beta^1)$ shart bajariladi. Agar ular *qo‘shni* bo‘lsa, maqsad bajariladi. Agar α^1 va β^1 lar *qo‘shni* bo‘lmasa, ular k ta koordinatasi bilan farq qiladi. α^1 usbu koordinatalarda 0 qiymatga ega, β^1 esa 1 qiymatga ega. Bunga asoslanib, α^1 va β^1 lar orasiga k-1 ta turli $\alpha^2, \alpha^3, \ldots, \alpha^k$ n liklarni shunday joylashtirish mumkinki

$$\alpha^1 \leq \alpha^2 \leq \alpha^3 \leq \ldots \leq \alpha^k \leq \beta^1$$

shart o'rinli bo'ladi. Bu qatorda yonma-yon turgan n liklar *qo'shni* bo'ladi. $f(\alpha^1) > f(\beta^1)$ bo'lgani uchun, $\exists t < k$ $f(\alpha^t) > f(\alpha^{t+1})$ o'rinli. $\alpha = \alpha^t$ va $\beta = \alpha^{t+1}$ deb olamiz. Aytaylik ular *i*- koordinata bo'yicha *qo'shni* bo'lishsin, yani

$$\alpha = (e_1, \ldots, e_{i-1}, 0, e_{i+1}, \ldots, e_n)$$

$$\beta = (e_1, \ldots, e_{i-1}, 1, e_{i+1}, \ldots, e_n)$$

Quyida aniqlangan $\varphi(x)$ funksiyani qaraymiz:

$$\varphi(x) = f(e_1, \ldots, e_{i-1}, x, e_{i+1}, \ldots, e_n).$$

Bu $\varphi(x)$ funksiya $f(x_1, .., x_n) \notin M$ funksiyadan 0, 1 va x funksiyalarni o'zgaruvchilar o'rniga quyishbilan hosil qilindi va $\varphi(x) = \overline{x}$. Haqiqatan, $\varphi(0) = f(e_1, \ldots, e_{i-1}, 0, e_{i+1}, \ldots, e_n) = f(\alpha) > f(\beta) =$
$f(e_1, \ldots, e_{i-1}, 1, e_{i+1}, \ldots, e_n) = \varphi(1)$.

Demak $\varphi(0) = 1$ va $\varphi(1) = 0$, yani $\varphi(x) = \overline{x}$. Lemma isbotlandi.

5. Barcha chiziqli Bul funksiyalari sinfi L quyidagi sinf bo'ladi.
   $L = \{ f(x_1, ..., x_n) / f(x_1, ..., x_n) = c_0 + c_1 \cdot x_1 + \ldots + c_n x_n \}$.

Masalan, x , $\overline{x}$ va $x_1 + x_2$ funksiyalar Lsinfiga tegishli bo'ladi.

5-Tasdiq. L – yopiq sinfdir.

Quyidagi lemma chiziqli bo'lmagan funksiya haqidagi lemma deb yuriniladi.

3-lemma. Agar $f(x_1, .., x_n) \notin L$ bo'lsa, u holda ushbu funksiyadan $0, 1, x$ va $\overline{x}$ funksiyalarni o'rniga qo'yish, shuningdek, yoki f funksiyaning inkorini olish yoli bilan $x_1 \wedge x_2$ funksiyani hosil qilish mumkin. [1] **(38-bet)**

Isbot. $f(x_1, \ldots, x_n)$ funksiyaning Jegalkin ko'phadiga yoyilmasini qaraymiz:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(i_1, \ldots, i_k)} a_{i_1 \ldots i_k} x_{i_1} \ldots x_{i_k}.$$

Funksiya chiziqli bo‘lmagani uchun ushbu ko‘phadning hech bo‘lmaganda bitta hadi ikkitadan ko‘p ko‘paytuvchiga ega bo‘ladi. Umumiylikdan chiqmagan holda, ushbu ko‘paytuvchilarning orasida x_1 va x_2 o‘zgaruvchilar mavjud deb hisoblaymiz. Shunda ko‘phadni quyidagi ko‘rinishga keltirish mumkin:

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_s)} a_{i_1\ldots i_s} x_{i_1}\ldots x_{i_s} = x_1x_2f_1(x_3,\ldots,x_n) + x_1f_2(x_3,\ldots,x_n) + x_2f_3(x_3,\ldots,x_n) + f_4(x_3,\ldots,x_n)$$

bu erda $f_1(x_3,\ldots,x_n)\neq 0$.

Aytaylik $f_1(e_3,\ldots,e_n)=1$ bo‘lsin. U holda

$$\alpha = f_2(e_3,\ldots,e_n)$$
$$\beta = f_2(e_3,\ldots,e_n) \text{ deb olamiz.}$$
$$\gamma = f_2(e_3,\ldots,e_n)$$

Quyida aniqlangan $\varphi(x_1,x_2)$ funksiyani qaraymiz:

$$\varphi(x_1,x_2) = f(x_1,x_2,e_3,\ldots,e_n) = x_1x_2 + \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma\,.$$

Bu $\varphi(x_1,x_2)$ funksiya $f(x_1,..,x_n)\notin L$ funksiyadan 0, 1, x va $\overline{x}$ funksiyalarni o‘zgaruvchilar o‘rniga qo‘yish bilan hosil qilindi. Endi $\varphi(x_1,x_2)$ funksiya yordamida quyida aniqlangan $\psi(x_1,x_2)$ funksiyani qaraymiz:

$$\psi(x_1,x_2) = \varphi(x_1+\beta, x_2+\alpha,) + \alpha\beta + \gamma\,.$$

Bu $\psi(x_1,x_2)$ funksiya $\varphi(x_1,x_2)$ funksiyadan x va $\overline{x}$ funksiyalarni o‘zgaruvchilar o‘rniga qo‘yish va balki $\varphi(x_1,x_2)$ dan inkor olish bilan hosil qilindi va $\psi(x_1,x_2) = x_1 \wedge x_2$.

Haqiqatan,

$$\begin{aligned}
\psi(x_1,x_2) &= \varphi(x_1+\beta, x_2+\alpha,) + \alpha\beta + \gamma = \\
&= (x_1+\beta)(x_2+\alpha) + \alpha(x_1+\beta) + \beta(x_2+\alpha) + \gamma + \alpha\beta + \gamma = \\
&= x_1x_2 + \beta x_2 + \alpha x_1 + \alpha\beta + \alpha x_1 + \alpha\beta + \beta x_2 + \alpha\beta + \alpha\beta + \gamma = x_1x_2.
\end{aligned}$$

Lemma isbotlandi.

Quyidagi jadval T_0, T_1, S, M va L sinflarni o‘zora turli ekanligini ko‘rsatadi.

	T_0	T_1	S	M	L
0	+	-	-	+	+

1	-	+	-	+	+
$\overline{x}$	-	-	+	-	+

1-teorema(Post). $B \subseteq P_2$ funksiyalar sistemasi to'liq bo'lishi uchun B yuqoridagi beshta T_0, T_1, S, M va L sinflarning hech birining qism to'plami bo'lmasligi zarur va etarli. $[2]$ **(40-bet)**

Isbot. Zaruriyligi. B to'liq sistema bo'lsin. Faraz qilaylik biror-bir $B_1 \in \{T_0, T_1, S, M, L\}$ uchun $B \subseteq B_1$. U holda $P_2 = [B] \subseteq [B_1] = B_1$. Demak $B_1 = P_2$, bu esa farazga zid. Zaruriylik isbotlandi.

Yetarlilik. B funksiyalar sistemasi T_0, T_1, S, M va L sinflarning hech birining qism to'plami bo'lmasin. B funksiyalar sistemasidan T_0, T_1, S, M va L sinflarning hech birining qism to'plami bo'lmaydigan, beshtadan ko'p bo'lmagan funksiyani o'z ichiga olgan B_1 qism sistema ajratish mumkin. Buning uchun B funksiyalar sistemasidan T_0, T_1, S, M va L sinflariga mos ravishda tegishli bo'lmagan f_0, f_1, f_s, f_m va f_l funksiyalarni tanlaymiz va $B_1 = \{f_0, f_1, f_s, f_m, f_l\}$ deb olamiz.

Yetarlilikni uchta etapda isbotlaymiz.

I. Konstantalar 0 va 1 larni f_0, f_1 va f_s funksiyalar yordamida hosil qilamiz. $f_0 \notin T_0$ bo'lganiuchun 2 ta hol bo'lishi mumkin:

1) $f_0(1,\ldots,1) = 1$. Bunda $\varphi(x) = f_0(x,\ldots,x) = 1$, chunki

$$\varphi(0) = f_0(0,\ldots,0) = 1, \qquad \varphi(1) = f_0(1,\ldots,1) = 1$$

Ikkinchi konstantani f_1 funksiyadan olamiz: $f_1(1,\ldots,1) = 0$.

2) $f_0(1,\ldots,1) = 0$. Bunda $\varphi(x) = f_0(x,\ldots,x) = \overline{x}$, chunki

$$\varphi(0) = f_0(0,\ldots,0) = 1, \qquad \varphi(1) = f_0(1,\ldots,1) = 0.$$

Endi biz $\overline{x}$ funksiyaga egamiz va $f_s (f_s \notin S)$ dan 1– lemmaga asosan konstantani hosil qilishimiz mumkin. $\overline{x}$ funksiyaga ega bo'lganimiz uchun ikkinchi konstantani ham topamiz. Ikki holda ham 0 va 1 konstantalarni hosil qildik.

II. 2 – lemmaga asosan 0,1 va $f_m (f_m \notin M)$ funksiyalar yordamida $\overline{x}$ funksiyani hosil qilamiz.

III. 3 – lemmaga asosan 0,1, $x$va $\overline{x}$ funksiyalar yordamida $x_1 \wedge x_2$ funksiyani hosil qilamiz.

Shunday qilib, $\overline{x}$ va $x_1 \wedge x_2$ funksiyalarni B_1 ustida formula ko'rinishida ifodaladik. 1 – teoremaga ko'ra B_1 – to'liq sistema. Yetarlilik isbotlandi.

Teorema isbotlandi.

Post teoremasidan kelib chiqadigan natijalarga o‘z e’tiborimizni jalb etaylik.Zeroki, har bir teoremaning mohiyati undan kelib chiqadigan natijalar bilan o‘lchanadi. Quyida biz Post teoremasidan kelib chiqadigan uch natija ustida to‘xtalamiz.

2-Ta’rif. Bizga, $B \subseteq P_2$ berilgan bo‘lsin.

B-birkam to‘liq deyiladi, agarda

1) B to‘liq bo‘lmasa, ya’ni $\left[B\right] \neq P_2$;

2) ixtiyoriy $f \in P_2 \setminus B$ uchun $[B \bigcup \{f\}] = P_2$ bo‘lsa.

1-Natija. $B \subseteq P_2$ birkam to‘liq bo‘lishi uchun $\mathrm{B} \in \{T_0, T_1, S, M, L\}$ bo‘lishi zarur va etarli. $[2]$ **(41-bet)**

Zarurligi. Faraz qilaylik, B birkam to‘liq bo‘lsin. U holda Post teoremasiga binoan, biror-bir $\mathrm{B}_1 \in \{T_0, T_1, S, M, L\}$ uchun $\mathrm{B} \subseteq B_1$ bo‘ladi. Aytaylik, $B \neq B_1$ bo‘lsin. U holda $f \in B_1 \setminus B$ ni qaraymiz. B ning birkam to‘liqligiga binoan, $B \cup \{f\}$ to‘liq bo‘ladi. $B \cup \{f\} \subseteq B_1 \Rightarrow \overline{B \cup \{f\}} \subseteq \bar{B}_1 = B_1$. Bu esa, $P_2 \neq B_1$ ga zid. Demak, $B = B_1$

Etarliligi. T_0, T_1, S, M va L sinflarni o‘zora turli ekanligi va Post teoremasidan ularning birkam to‘liq ekanligi kelib chiqadi.

2-Natija. To‘liq bo‘lmagan ixtiyoriy yopiq sinf T_0, T_1, S, M va L sinflardan birini qismi bo‘ladi.

3-Natija. Ixtiyoriy to‘liq sustemadan to‘rtta elementdan ortiq bo’lmagan to‘liq qism sistema ajratib olish mumkin. $[2]$ **(41-bet)**

Isbot. Agarda B to‘liq bo‘lmasa, u holda Post teoremasiga binoan, quyidagi

$$F_B = \{f_0, f_1, f_s, f_m, f_l\},$$

bu yerda f_0-nolni saqlamaydigan B sistemanig funksiyasi, f_1-birni saqlamaydigan B sistemanig funksiyasi, f_s-o‘z-o‘ziga dual bo‘lmagan B sistemanig funksiyasi, f_m-monoton bo‘lmagan B sistemanig funksiyasi, f_l-chiziqli bo‘lmagan B sistemanig funksiyasi, to‘plam to‘liq bo‘ladi. Ammo bu besh elementli to‘plam. Quyidagi ikki holda $f_0 \notin F_0$ bo‘ladi.

1-hol. $f_0(1,1,..,1) = 1$

2-hol. $f_0(1,1,..,1) = 0$

Birinchi holda $f_0(0,0,..,0)=f_0(1,1,..,1)=1$ bo‘lib, f_0 o‘zi-o‘ziga ikkilangan emas, shu sababli f_s ni chiqarib tashlasa bo‘ladi.

Ikkinchi holda, f_0 birni saqlamaydi, shu sababli, f_1 ni chiqarib tashlasak bo‘ladi. Shunday qilib, birinchi holda $\{f_0, f_1, f_m, f_l\}$, ikkinchi holda esa $\{f_0, f_s, f_l\}$ to‘liq bo‘ladi.

3- natijada « to‘rtta elementdan ortiq bo’lmagan » shartini « uchtta elementdan ortiq bo’lmagan » sharti bilan almashtirib bo‘lmaydi.

Haqiqatan, quyidagi $f_0=1$, $f_1=0$, $f_m=x_1+x_2+x_3$, $f_l=x_1\cdot x_2$ funksiyalar to‘plami. Post teoremasiga binoan to‘liq, chunki

$$f_0\notin T_0,\ \ f_1\notin T_1\cup S \quad f_m\notin M, \quad f_l\notin L.$$

Ammo, $\{f_1, f_m, f_l\}\subseteq T_0$, $\{f_0, f_m, f_l\}\subseteq T_1$, $\{f_0, f_1, f_l\}\subseteq M$, $\{f_0, f_1, f_m\}\subseteq L$ sababli, Post teoremasiga binoan, to‘liq bo‘lmaydilar.

Asosiy darsliklar va o’quv qo’llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (816-819 betlar)
2. Yablonskiy S.V. Vvedenie v diskretnuyu matematiku. M. «Nauka» 1986
3. Lavrov I.A., Maksimova L.L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M. «Nauka» 1995

Ma’ruza 16: Mulohazalar hisobi uchun aksiomalar sistemasi

Reja:

1. **Formal aksiomatik nazariya.**
2. **Teorema tushunchasi. Keltirib chiqaeish.**
3. **Mulohazalar sistemasi uchun aksiomalar sistemasi.**

Formal aksiomatik nazariya

Matematikada aksiomatik metod eramizdan oldin qadimgi yunon matematiklarining ishlarida paydo bo‘lgan. Ammo aksiomatik metod XIX asrda rus matematigi N.I.Lobachevskiy tomonidan noevklid geometriyasining kashf etilishi bilan o‘zining alohida yo‘nalish sifatida yangi rivojlanish pog‘onasiga o‘tdi. Shunday qilib, aksiomatik metod matematik nazariyalarni qurish va o‘rganishda kuchli apparat ekanligi XIX asr matematiklari tomonidan to‘la-to‘kis e’tirof etildi va bu apparat matematikada keng ko‘lamda qo‘llanila boshlandi.

Mulohazalar algebrasini o‘rganganimizda bu asosan rostlik jadvali orqali ko‘pgina savollarga javob olgan edik. Mantiqning ba’zi qiyinroq masalalarini bu metod bilan xal qilish mumkin bo‘lmaganligi sababli, biz endi aksiomatik metodni qo‘llaymiz va aynan rost formulalar to‘plamini deduktiv sistema yordamida aniqlaymiz. Boshqacha aytganda, biz «dastlabki» aynan rost formulalar sifatida mulohazalar xisobi aksiomalarini aniqlaymiz va shu aksiomalardan xuddi shunday formulalarni keltirib chiqarish mumkin bo‘ladigan keltirib chiqarish qoidalarini ifodalaymiz. Bunday qoidalar mantiqa xizmat qilib, keltirib chiqarish jarayonini sof mexanik xisoblashlarga aylantirgani uchun ham mulohazalar mulohazalar xisobi atamasi paydo bo‘lgan.

Endi esa formal aksiomatik nazariyani ifodalashga o‘taylik. [2]**(36-bet)**

Agar quyidagi shartlar bajarilsa, u holda L formal (aksiomatik) nazariya aniqlangan xisoblanadi:

(1) Sanoqli simvollar to‘plami- L nazariyaning simvollari berilgan bo‘lsa L nazariyaning chekli simvollari ketma-ketligi L ning ifodasi deyiladi.

(2) L nazariyaning formulalari deb ataluvchi L ning ifodalari to‘plami berilgan bo‘lsa. (odatda, berilgan ifodaning formula bo‘lish bo‘lmasligini aniqlovchi effektiv jarayon beriladi).

(3) L nazariyaning aksiomalari deb ataluvchi formulalar majmuasi to‘plami ajratilgan bo‘lsa. (ko‘pgina hollarda L nazariyaning berilgan formulasi aksioma

bo'lish yoki bo'lmasligini effektiv aniqlash mumkin bo'ladi; bu holda L ni effektiv aksiomalashtirilgan yoki aksiomatik nazariya deyiladi).

(4) Formulalar orasida keltirib chiqarish qoidalari deb ataluvchi chekli $R_1, \ldots, R_n$ munosabatlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Har bir R_i uchun shunday musbat butun j soni topiladiki, j ta formulalardan iborat xar qanday to'plam uchun hamda ixtiyoriy F formula uchun, berilgan j ta formulalar F formula bilan R_i munosabatda bo'ladimi, degan savol effektiv xal etilishi kerak. Agar bu savolga xa deb javob olinsa, u holda F formula berilgan j ta formulalarning R_i qoidasi bo'yicha bevosita natijasi deyiladi.

Agar $F_1, \ldots, F_n$ formulalar ketma-ketligi berilgan bo'lib, har qanday i uchun $(1 \le i \le n)$ F_i formula yoki aksioma bo'lsa, yoki o'zidan oldingi qandaydir formulalarning bevosita natijasi bo'lsa, u holda berilgan formulalar ketma-ketligi L da keltirib chiqarish deyiladi.

Agar L da keltirib chiqarish mavjud bo'lib, bu keltirib chiqarishning oxirgi formulasi F formula bilan ustma-ust tushsa, u holda F formula L nazariyaning teoremasi deyiladi; bunday keltirib chiqarish F formulaning keltirib chiqarishi deyiladi. (Berilgan nazariyaga nisbatan).

Xatto, effektiv aksiomalashtirilgan L nazariyada ham, teorema tushunchasi effektiv bo'lishi shart emas, chunki umuman olganda berilgan formulaning L da keltirib chiqarilishi mavjudligini aniqlovchi effektiv algoritm mavjud bo'lmasligi ham mumkin.

Bunday algoritm mavjud bo'lgan nazariyani echiluvchan nazariya, aks holda esa echilmaydigan nazariya deyiladi.

Biroz oldinga o'tib shuni aytish mumkinki, mulohazalar xisobi uchun qurilgan L formal aksiomatik nazariya echiluvchan nazariya, tor ma'nodagi predikatlar xisobi nazariyasi esa echilmaydigan nazariyadir.

F formula L nazariyada formulalar to'plami Γ ning mantiqiy natijasi (mulohazalar xisobida mantiqiy natija) bo'lishi uchun shunday $F_1, \ldots, F_n$ formulalar ketma-ketligi mavjud bo'lishi kerakki, bunda F_n formula F dan iborat bo'lib, ixtiyoriy i $(1 \le i \le n)$ uchun F_i formula yoki aksioma, yoki Γ to'plamning elementi, yoki birorta keltirib chiqarish qoidasi orqali o'zidan oldingi formulalarning bevosita natijasi bo'lishi zarur va etarlidir. Bunday formulalar ketma-ketligi Γ formulalar to'plamidan F ni keltirib chiqarilishi deyilib, Γ ning elementlari esa, keltirib chiqarish gipotenuzalari deyiladi.

Qulaylik uchun, «F formula Γ formulalar to'plamning natijasi» degan tasdiqni $\Gamma \vdash F$ ko'rinishda yozamiz. [2]**(37-bet)**

Agar Γ chekli to'plam bo'lsa, ya'ni $\Gamma = \{F_1, \ldots, F_n\}$, u holda $\{F_1, \ldots, F_n\} \vdash F$ yozuvni $F_1, \ldots, F_n \vdash F$ ko'rinishda yozamiz. Agar $\Gamma = \varnothing$, bo'lsa, u holda $\Gamma \vdash F$ yozuv F formula L da teorema bo'lganda va faqat shu xoldagina o'rinli bo'ladi. Odatda $\varnothing \vdash F$ yozuv o'rniga, $\vdash F$ ko'rinishda yoziladi. Shunday qilib $\vdash F$ yozuv «F formula L da teoremadir» degan tasdiqning qisqartirilganidir.

Aniqlangan $\vdash_L$-keltirib chiqarilishining ba'zi xossalarini ko'rib o'taylik.

1-hossa. Agar $\Gamma \subseteq \Delta$ va $\Gamma \vdash F$, bo'lsa, u holda $\Delta \vdash F$ bo'ladi.

Haqiqatan ham, $\Gamma \vdash F$ deganda quyidagini tushunamiz: shunday $F_{i1}, \ldots, F_{ik}$ ketma-ketlik mavjudki, bunda F_n formula F dan iborat bo'lib, ixtiyoriy $i(1 \leq i \leq n)$ uchun F_i formula, yoki aksioma, yoki Γ ning elementi, yoki o'zidan oldingi formulalardan birorta keltirib chiqarish qoidasi orqali hosil qilinsa bevosita natijasidir.

Agar $F_1, \ldots, F_n$ formulalar Γ to'plamga tegishli bo'lsa, $\Gamma \subset \Delta$ bo'lgani uchun $F_1, \ldots, F_n$ lar Δ ga ham tegishli bo'ladi.

Bu esa $\Delta \vdash F$ ekanini bildiradi.

2-hossa. $\Gamma \vdash F$ bo'lishi uchun Γ ning qandaydir chekli Δ qism to'plami topilib, $\Delta \vdash F$ bo'lishi zarur va etarlidir.

3-hossa. Agar $\Delta \vdash F$ bo'lib Δ to'plamning ixtiyoriy G elementi uchun $\Gamma \vdash F$ bo'lsa, u holda $\Gamma \vdash F$ bo'ladi. [2]**(37-bet)**

Ikkinchi va uchinchi xossalarning iboti ham xuddi birinchi xossadagidek bevosita $\vdash$ ning ta'rifidan kelib chiqadi.

$\vdash$ ning bu uchta xossasidan kelajakda juda ko'p marta foydalanamiz.

Mulohazalar hisobi uchun aksiomalar sistemasi

Biz endi mulohazalar hisobining L aksiomatik nazariyasini kiritamiz. [2] **(38-bet)**

(1) L ning simvollari sifatida $\rceil$, $\rightarrow$, (,) va butun musbat indeksli X_i propozitsional xarflarni olamiz: $X_1, X_2, X_3, \ldots$.

Bu erda $\rceil$ *va* $\to$ *lar primitiv bog'lovchilar deyiladi. Mulohazalar xisobining muhim tushunchasi hisoblangan formula tushunchasini kiritamiz.*

(2) (a) Barcha propozitsional harflar formulalardir:

(b) agar F *va* G *lar formulalar bo'lsa, u holda* $\rceil F, (F \to G)$ *lar ham formulalardir.*

(3) L *nazariyaning* F, G, H *formulalari qanday bo'lishidan qat'iy nazar quyidagi formulalar* L *ning aksiomalaridir:*

$$(A_1)\ (F \to (G \to F));$$
$$(A_2)\ ((F \to (G \to H)) \to ((F \to G) \to (F \to H)));$$
$$(A_3)\ ((\rceil G \to \rceil F) \to (F \to G));$$

(4) Yagona keltirib chiqarish qoidasi bo'lib, u ham bo'lsa, modus ponens qoidasi xizmat qiladi: F *va* $F \to G$ *formulalarning bevosita natijasi* G *dir. Bu qoidani qisqacha* MP *ko'rinishda belgilaymiz.* [1] **(71-bet)**

Xuddi mulohazalar algebrasigidek qavslarni soddalashtirishga kelishib olaylik.

L nazariyaning cheksiz aksiomalari to'plami faqat yuqoridagi 3 ta aksiomalar qolini $(A_1), (A_2), (A_3)$ orqali beriladi.

Har bir formulaning aksioma bo'lish yoki bo'lmasligini osongina tekshirish mumkin va shuning uchun L effektiv aksiomalashtirilgan nazariyadir.

Bizning maqsadimiz L sistemani shunday qurishdan iboratki, unda uning barcha teoremalari sinfi mulohazalar mantiqini barcha tavtologiyalari sinfi bilan ustma-ust tushish.

Boshqa bog'lovchilarni quyidagicha aniqlaymiz:

(D_1) $(F \wedge G)$ *formula* $\rceil (F \to \rceil G)$ *ekanini;*

(D_2) $(F \vee G)$ *formula* $(\rceil F \to G)$ *ekanini;*

(D_3) $(F \leftrightarrow G)$ *formula* $(F \to G) \wedge (G \to F)$

ekanini bildiradi.

Bu ta'riflarning ma'nosi, masalan (D_1) da, F va G formulalar qanday bo'lganda ham $(F \wedge G)$ ifoda $\rceil(F \to \rceil G)$ formulaning qisqartirilgan ifodasi ekanini bildiradi.

1-lemma $\vdash (F \to F)$, bu erda F ixtiyoriy formuladir.

Isbot. L nazariyada $F \to F$ formulani keltirib chiqarishini quramiz.

(1) $(F \to ((F \to F) \to F)) \to ((F \to (F \to F)) \to (F \to F))$ $((A_2)$ aksioma sxemasi)

(2) $F \to ((F \to F) \to F)$ $((A_1)$ aksioma sxemasi)

(3) $(F \to (F \to F)) \to (F \to F)$ ((1) va (2) ga *MP* qo'llandi)

(4) $F \to (F \to F)$ $((A_1)$ aksioma sxemasi)

(5) $F \to F$ ((3) va (4) ga *MP* qo'llandi)

Shunday qilib, biz (1), (2), (3), (4), (5) formulalardan iborat chekli ketma-ketlikni qurdik. Bunda har bir formula yo aksioma, yoki o'zidan oldingi formulalardan MP qoidasi bo'yicha hosil qilindi va oxirgi formula teorema ekanini isbotlanishi kerak bo'lgan formula bilan ustma-ust tushdi.

Asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (69-72 betlar)

4. Mendelson E. Vvedenie v matematicheskuyu logiku. M. «Nauka». 1984
5. Lavrov I.A., Maksimova L.L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M. «Nauka» 1995

Ma’ruza 17: Deduksiya teoremasi. Keltirib chiqariladigan formulalar

Reja:

1. **Deduksiya teoremasi.**
2. **Deduksiya teoremasining natijalari.**
3. **Asosiy keltirib chiqariladigan formulalar.**

DEDUKSIYA TEOREMASI

Quyidagi teorema gipotezalardan ko‘p uchraydigan formulalarni keltirib chiqarishga imkon beradi. [2] **(40-bet)**

1-teorema (Deduksiya teoremasi). *Agar Γ -formulalar to‘plami, F va G lar esa formulalar bo‘lib, $\Gamma\cup\{F\}\vdash G$ bo‘lsa, u holda $\Gamma\vdash F\rightarrow G$ bo‘ladi. Xususan, agar $F\vdash G$ bo‘lsa, u holda $\vdash F\rightarrow G$ bo‘ladi.*

Isbot. Faraz qilaylik $F_1,...,F_n$ ketma-ketlik $\Gamma\cup\{F\}$ dan G ni keltirib chiqarish bo‘lib, $F_n=G$ bo‘lsin. $i\,(1\le i\le n)$ bo‘yicha induksiya metodidan foydalanib $\Gamma\vdash F\rightarrow F_i$ ekanini isbotlaymiz.

$i=1$ bo‘lsin. U holda F_1 formula G ni $\Gamma\cup\{F\}$ dan keltirib chiqarishi bo‘ladi. U holda, ma’lumki F_1 formula yo aksioma, yoki Γ ning elementi, yoki F bilan ustma-ust tushadi.

$$F_1\rightarrow(F\rightarrow F_1)$$

ifoda (A_1) aksioma sxemasidir. Shuning uchun, dastlabki ikki holda quyidagi ketma-ketlik $F\rightarrow F_1$ ning Γ dan keltirib chiqarilishi bo‘ladi:

(1) F_1

(2) $F_1\rightarrow(F\rightarrow F_1)$ ((A_1) aksioma sxemasi)

(3) $F\rightarrow F_1$ ((1), (2) ga *MP* qo‘llandi)

ya’ni, (dastlabki ikki holda) (1), (2), (3) ketma-ketlik $F\rightarrow F_i$ formulaning Γ to‘plamdan keltirib chiqarilishi bo‘ladi.

Eslatma. Uchinchi holda $F\rightarrow F_i$ formulaning Γ dan keltirib chiqarilishi 1-lemmaning isbotida qurilgan formulalar ketma-ketligidan isborat. Shunday qilib $i=1$ bo‘lgan xol isbotlandi.

Endi faraz qilaylik ixtiyoriy $k<i$ bo‘lgan holda $\Gamma \vdash F \to F_k$ bo‘lsin. F_i uchun quyidagi to‘rtta xol bo‘lishi mumkin:

F_i aksioma, yoki $F_i \in \Gamma$, yoki F_i formula F bo‘ladi, yoki F_i formula qandaydir F_j va F_m, bu erda $j<i$, $m<i$, formulalardan *MP* qoidasi bo‘yicha kelib chiqadi va F_m formula $F_j \to F_i$ ko‘rinishda bo‘ladi. Dastlabki uchta holda $\Gamma \vdash F \to F_i$ ekani xudi $i=1$ dagidek isbotlanadi. Oxirgi xolda esa $\Gamma \vdash F \to F_j$ va $\Gamma \vdash F \to (F_j \to F_i)$ larga asoslangan induktiv farazni qo‘llaymiz. (A_2) aksioma sxemasiga asosan

$$\vdash (F \to (F_j \to F_i)) \to ((F \to F_j) \to (F \to F_i))$$

ga ega bo‘lamiz. Bulardan esa ikki marta *MP* qiodasini qo‘llab, avval

$\vdash (F \to F_j) \to (F \to F_j)$ ni, so‘ngra $\Gamma \vdash F \to F_i$ ni hosil qilamiz.

Shunday qilib, induksiya metodi bo‘yicha $i=n$ bo‘lgan xol ham isbotlandi.

1-natija. *Agar* $\Gamma \vdash F \to G$ *bo‘lsa, u holda* $\Gamma \cup \{F\} \vdash G$ *bo‘ladi.*

Isbot. Faraz qilaylik $F_1, \ldots, F_n$ ketma-ketlik $F \to G$ formulaning Γ dan keltirib chiqarilishi bo‘lsin. U holda, keltirib chiqarishning ta’rifiga asosan F_n formula $F \to G$ dan iboratdir. Endi esa G ning $\Gamma \cup \{F\}$ dan keltirib chiqarilishini quramiz:

$$F_1, F_2, \ldots, F_n = F \to G, \quad F = F_{n+1}.$$

Endi F_n va F_{n+1} larga *MP* qoidasini qo‘llab $F_{n+1} + G$ ga ega bo‘lamiz. Bu esa G $\cup \{F\}$ dan G ning keltirib chiqarilgani ko‘rsatadi.

2-natija. L *nazariyaning ixtiyoriy* F, G, H *formulalari uchun quyidagilar o‘rinlidir:*

$$(a) \;\; F \to G,\; G \to H \;\; \vdash F \to H$$

$$(b) \;\; F \to (G \to H),\; G \;\; \vdash F \to H$$ [2]**(40-bet)**

Isbot. Masalan (b) ning isbotlaylik.

(1) $F \to (G \to H)$ gipoteza

(2) G gipoteza

(3) F gipoteza

(4) $G \to H$ (1) va (3) lar *MP* qo'llandi.

(5) H (2) va (4) lar *MP* qo'llandi.

Demak, $F \to (G \to H),\ G, F \vdash H$

Bunga deduksiya teoremasini qo'llab

$F \to (G \to H),\ G \vdash F \to H$ ni hosil qilamiz.

(a) bandning isbotini mustaqil bajarish uchun o'quvchi e'tiboriga xavola etiladi.

L nazariyaning asosiy keltirib chiqariladigan formulalari

1-teorema. *L nazariyaning ixtiyoriy F, G formulalari uchun quyidagi formulalar L ning teoremalaridir:*

(a) $\neg\neg G \to G;$

(b) $G \to \neg\neg G;$

(c) $\neg F \to (F \to G);$

(d) $(F \to G) \to (\neg G \to \neg F);$

(e) $F \to (\neg G \to \neg(F \to G));$

(f) $(\neg F \to F) \to F;$

(g) $(\neg G \to \neg F) \to (\neg G \to F) \to G);$

(h) $(F \to G) \to ((\neg F \to G) \to G)$. [2] **(41-bet)**

Isbot.

(a) $\vdash \neg\neg G \to G$.

(1) $\neg\neg G$ gipoteza

(2) $\neg\neg G \to (\neg\neg(\neg G \to \neg\neg G) \to \neg\neg G)$ (A_1) aksioma sxemasi;

(3) $\neg\neg G(\neg G \to \neg\neg G) \to \neg\neg G$; (1) va (2) ga *MP* qo'llandi;

(4) $(\neg\neg(\neg G \to \neg\neg G) \to \neg\neg G) \to (\neg G \to \neg(\neg G \to \neg\neg G))$ (A_3) aksioma sxemasi;

(5) $\rceil G \to \rceil(\rceil G \to \rceil\rceil G)$ (3) va (4) ga *MP* qo'llandi;

(6) $(\rceil G \to \rceil(\rceil G \to \rceil\rceil G)) \to ((\rceil G \to \rceil\rceil G) \to G)$ (A_3) sxemasi;

(7) $(\rceil G \to \rceil\rceil G) \to G)$ (5) va (6) ga *MP* qo'llandi;

(8) $\rceil\rceil G \to (\rceil G \to \rceil\rceil G)$ (A_1) aksioma sxemasi;

(9) $\rceil\rceil G \to G$ 2-natija a) ni (8) va (7) qo'llashdan kelib chiqadi.

(10) G (1) va (9) ga *MP* qo'llandi;

Demak, $\rceil\rceil G \vdash G$ hosil bo'ldi. Bunga deduksiya teoremasini qo'llasak $\vdash \rceil\rceil G \to G$ hosil bo'ladi.

(b) $\vdash G \to \rceil\rceil G$.

(1) $\rceil\rceil\rceil G \to \rceil G$ (a) punkt;

(2) $(\rceil\rceil\rceil G \to \rceil G) \to (G \to \rceil\rceil G)$

(A_3) aksioma sxemasi;

(3) $G \to \rceil\rceil G$ (1) va (2) ga *MP* qo'llandi;

Demak, $\vdash G \to \rceil\rceil G$ hosil bo'ldi.

(c) $\vdash \rceil F \to (F \to G)$.

(1) $\rceil F$ gipoteza;

(2) F gipoteza.

(3) $\rceil F \to (\rceil G \to \rceil F)$ (A_1) aksioma sxemasi;

(4) $\rceil G \to \rceil F$

(5) $(\rceil G \to \rceil F) \to (F \to G)$ (A_3) aksioma sxemasi;

(6) $F \to G$ (4) va (5) ga *MP* qo'llandi;

(7) G (2) va (6) ga *MP* qo'llandi;

Shunday qilib, $\rceil F,\ F \vdash G$, ga ikki marta deduksiya teoremasini qo'llasak $\vdash \rceil F \to (F \to G)$ hosil bo'ladi.

(d) $\vdash (F \to G) \to (\rceil G \to \rceil F)$. [1]**(75-bet)**

(1) $F \to G$ gipoteza.

(2) $G \to \rceil\rceil G$ (b) punkt;

(3) $\rceil\rceil F \to F$ (a) punkt;

(4) $\rceil\rceil F \to G$ (1) va (3) ga Natija 2.2. (a);

(5) $\rceil\rceil F \to \rceil\rceil G$ (2) va (4) ga Natija 2.2. (a);

(6) $(\rceil\rceil F \to \rceil\rceil G) \to (\rceil G \to \rceil F)$ (A_3) aksioma sxemasi;

(7) $(\rceil G \to \rceil F)$

Demak, $(F \to G) \vdash (\rceil G \to \rceil F)$ dan deduksiya teoremasiga asosan $\vdash (F \to G) \to (\rceil G \to \rceil F)$ ni hosil qilamiz:

(e) $\vdash F \to (\rceil G \to \rceil (F \to G))$.

Ma'lumki $F, F \to G \vdash G$ o'rinlidir. Bunga ikki marta deduksiya teoremasini qo'llasak: $\vdash F \to ((F \to G) \to G)$ ni hosil qilamiz..

$((F \to G) \to G) \to (\rceil G \to \rceil (F \to G))$ (d) punkt sxemasi;

Oxirgi ikki ifodaga 2-Natija (a) ni qo'llab $\vdash F \to (\rceil G \to \rceil (F \to G))$ ni hosil qilamiz.

Xususan, bu G ning o'rniga F ni, F ning o'rniga esa $\rceil F$ ni qo'yib (e)

$\vdash \rceil F \to (\rceil F \to \rceil (F \to F))$

ni ham hosil qilishimiz mumkin.

(f) $\vdash (\rceil F \to F) \to F$.

(1) $\rceil F \to (\rceil F \to \rceil (\rceil F \to F))$ (e^*) punkt;

(2) $(\rceil F \to (\rceil F \to \rceil (\rceil F \to F))) \to ((\rceil F \to \rceil F) \to (\rceil F \to \rceil (\rceil F \to F)))$ (A_2) aksioma sxemasi;.

3. MP (1, 2) $(\neg F \to \neg F) \to (\neg F \to \neg(\neg F \to F))$ (1) va (2) ga MP qo'llandi;.

(4) $\neg F \to \neg F$ 1-lemma. ga asosan;

(5) $\neg F \to \neg(\neg F \to \neg F)$ (3) va (4) ga MP qo'llandi;

(6) $(\neg F \to \neg(\neg F \to F)) \to ((\neg F \to F) \to F)$ (A_3) aksioma sxemasi;

(7) $(\neg F \to F) \to F$ (5) va (6) ga MP qo'llandi;

(g). $\vdash (\neg G \to \neg F) \to ((\neg G \to F) \to G$

(1) $\neg G \to \neg F$ gipoteza;

(2) $\neg G \to F$ gipoteza;

(3) $(\neg G \to \neg F) \to (F \to G)$ (A_3) aksioma sxemasi;

(4) $F \to G$ (1) va (3) ga MP qo'llandi;

(5) $\neg G \to G$ (a) punkt;

(6) $(\neg G \to G) \to G$ (f) punkt;

(7) G (5) va (6) ga MP qo'llandi;.

Endi esa, $\neg G \to \neg F$, $\neg G \to F$, $\vdash G$ ga ikki marta deduksiya teoremasini qo'llasak.

$\vdash (\neg G \to \neg F) \to ((\neg G \to F) \to G)$.

(h) $\vdash (F \to G) \to ((\neg F \to G) \to G)$.

(1) $F \to G$ gipoteza

(2) $\neg F \to G$ gipoteza

(3) $(F \to G) \to (\neg G \to \neg F)$ (d) punkt

(4) $\neg G \to \neg F$ (1) va (3) ga MP qo'llandi;

(5) $\neg G \to G$ (2) va (4) ga 2-Natija (a) ni qo'llandi;

(6) $(\neg G \to G) \to G$ (f) punkt

(7) G (5) va (6) ga MP qo'llandi;

Shunday qilib, $F \to G, \neg F \to G, \vdash G$, ni hosil qildik. Bunga ikki marta deduksiya teoremasini qo‘llasak:

$\vdash (F \to G) \to ((\neg F \to G) \to G)$ kelib chiqadi.

Mashqlar.

quyidagi formulalar L nazariyaning teoremalari bo‘lishini isbotlang.

1. $((F \to G) \to F) \to F$.
2. $F \to (G \to \neg(F \to \neg G))$.
3. $F \to (G \to H) \vdash G \to (F \to H)$.
4. $\neg(F \to \neg G) \to G$.
5. $G \to (\neg G \to \neg G)$.

Asosiy darsliklar va o’quv qo’llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (72-75 betlar)

2.Mendelson E. Vvedenie v matematicheskuyu logiku. M. «Nauka». 1984

3.Lavrov I.A., Maksimova L.L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M. «Nauka» 1995

Ma'ruza 18-19: L nazariya uchun Gyodelning to'liqlik haqida teoremasi

(4 soat)

Reja:

1. **Mos keltirib chiqarish haqida lemma.**
2. **Gyodelning to‘liqlik haqidagi teoremasi .**
3. **Gyodel teoremasining natijalari.**

Mos keltirib chiqarish haqida lemma.

Quyidagi lemma har bir tavtologiyaning teorema bo‘lishligini isbotlashda qo‘llaniladi. [2] **(43-bet)**

1-lemma. *Faraz qilaylik F formula $X_1,\cdots,X_k$ − lar esa F formula tarkibiga kiruvchi propozitsional xarflar bo‘lsin va bundan tashqari $X_1,\cdots,X_k$ lar uchun rostlik (chin) qiymatlarining qandaydir taqsimoti berilgan bo‘lsin. X_i orqali agar X_i rost qiymat qabul qilsa X_i ni, agar X_i yolg‘on qiymat qabul qilsa $\urcorner X_i$ belgilaymiz. Xudi shunday F' orqali agar shu taqsimotda F formula rost qiymat qabul qilsa F ni, agar F formula yolg‘on qiymat qabul qilsa $\urcorner F$ ni belgilaylik. U holda*

$$X_1', X_2', \cdots, X_k' \vdash F'$$

Agar, masalan F formula $(\urcorner X_1 \to X_2)$ ko‘rinishda bo‘lsa, u holda

X_1	X_2	$\urcorner X_1 \to X_2$
yo	*yo*	*yo*
yo	*ch*	*ch*
ch	*yo*	*ch*
ch	*ch*	*ch*

rostlik jadvalining har bir satri uchun 1-lemma ularga mos kelgan keltirib chiqarishni bildiradi.

Xususan, uchinchi satr uchun

$$X_2,\ \urcorner X_3 \vdash (\urcorner X_1 \to X_2),$$

to‘rtinchi satr uchun esa

$$\rceil X_2, \rceil X_3) \vdash \rceil(\rceil X_1 \to X_2)$$

tasdiqlar mos keladi.

Isbot. Isbotni F formulaning tarkibiga kiruvchi primitiv bog'lovchilar soni n bo'yicha olib boriladi (tabiiyki, F formula soddalashtirishlarsiz yozilgan deb faraz qilamiz).

Agar $n=0$ bo'lsa, u holda F formula X_1 propozitsional xarf ko'rinishda bo'ladi va lemmaning tasdig'i $X_1 \vdash X_1$ va $\rceil X_1 \vdash \rceil X_1$ ko'rinishda bo'ladi.

Endi esa, faraz qilaylik lemma barcha $j < n$ lar uchun o'rinli bo'lsin.

<u>1a-hol.</u> F formula $\rceil G$ ko'rinishda bo'lsin. G ning tarkibiga kiruvchi primitiv bog'lovchilar soni n dan kichikdir.

Rostlik qiymatlarining berilgan taqsimotida G rost qiymat qabul qilsin. U holda F yolg'on qiymat qabul qiladi. Shunday qilib, G' formula G, ko'rinishda, F' formula esa $\rceil F$ ko'rinishda bo'ladi. Induksiya faraziga bilan $X_1^{'},...,X_n^{'} \vdash G$ ga ega bo'lamiz.

1-teoremaning (b) punktiga va *MP* qoidasiga asosan $X_1^{'},...,X_n^{'} \vdash \rceil\rceil G$. kelib chiqadi. Ammo $\rceil\rceil G$ esa F' ni bildiradi.

<u>1b-hol.</u> G rost qiymat qabul qilsin. U holda G' formula $\rceil G$, bo'lib F' esa F bilan ustma-ust tushadi. Induksiya faraziga asosan $X_1^{'},...,X_n^{'} \vdash \rceil G$ hosil bo'ladi. $\rceil G$ formula esa F' dan iborat bo'lgani uchun bu hol ham isbotlandi.

<u>2-hol.</u> F formula $(G \to H)$ ko'rinishda bo'lsin. U holda . G va H lar tarkibiga kiruvchi primitiv bog'lovchilar soni F dagi bog'lovchilar sonidan kichik.

Shuning uchun induksiya farazga asosan

$$X_1^{'},...,X_n^{'} \vdash G'$$

va

$$X_1^{'},...,X_n^{'} \vdash H'.$$

larga ega bo‘lamiz.

2a-hol. G rost qiymat qabul qilsin. U holda F' formula F va G' formula $\rceil G$ ko‘rinishga ega bo‘ladi. Shunday qilib, $X_1',...,X_n' \vdash \rceil G$ ga

va 1-teorema (c) punktga asosan

$$X_1',...,X_n' \vdash G \to H$$

hosil bo‘ladi. $G \to H$ formula F bo‘lgani uchun, bu hol ham isbotlandi.

2b-hol. H rost qiymat qabul qilsin. U holda F formula ham rost qiymat qabul qiladi va H' formula H va F' formula F ko‘rinishga ega bo‘ladi.

$$X_1',...,X_n' \vdash H$$

dan va (A_1): $(H \to (G \to H))$ aksiomadan

$$X_1',...,X_n' \vdash G \to H$$

ni hosil qilamiz. $G \to H$ esa F' dan iboratdir.

2s-hol. G rost va H yolg‘on qiymat qabul qilsin. U holda F' formula yolg‘on qiymat qabul qiladi va u $\rceil F$ ko‘rinishda bo‘ladi, G' esa G va H' formula $\rceil H$ ko‘rinishda bo‘ladi.

$$X_1',...,X_n' \vdash G$$

va $X_1',...,X_n' \vdash \rceil H$ larga ega bo‘lamiz.

Bu erda 1-teorema (e) punktga asosan $X_1',...,X_n' \vdash \rceil(G \to H)$, hosil bo‘ladi. $\rceil(G \to H)$ formula esa F' dan iboratdir.

1-teorema. *L nazariyaning har qanday teoremasi tavtologiya bo‘ladi.*

Isbot. L nazariyaning har bir aksiomasi tavtologiya bo‘lishini osongina tekshirib ko‘rish mumkin. Ravshanki, MP qoidasini tavtologiyalarga qo‘llash natijasida hosila bo‘lgan formulalar ham tavtologiya bo‘ladi. Demak, L nazariyaning har qanday teoremasi tavtologiya bo‘lar ekan.

2-teorema. (**Gyodelning to‘liqlik haqidagi teoremasi**). [2] **(44-bet)**

Agar F formula L nazariyada tavtologiya bo‘lsa, u holda u L nazariyaning teoremasi bo‘ladi.

Isbot (Kalmar). Faraz qilaylik, F formula tavtologiya va $X_1,\ldots,X_n$ lar F tarkibiga kiruvchi propozitsional xarflar bo‘lsin. $X_1,\ldots,X_n$ xarflarning har bir chinlik taqsimoti uchun 4.1-lemma. ga asosan

$$X_1',\ldots,X_n' \vdash F.$$

ga ega bo‘lamiz, chunki F tavtologiya bo‘lgani uchun F' formula F dan iboratdir. Shuning uchun, X_n rost qiymat qabul qilsa

$$X_1',\ldots,X_{n-1}',\ X_n \vdash F \text{ ga,}$$

X_n yolg‘on qiymat qabul qilganda esa

$$X_1',\ldots,X_{n-1}' \vdash X_n \to F \text{ ga}$$

ega bo‘lamiz. Bularga deduksiya teoremasini qo‘llab,

$$X_1',\ldots,X_{n-1}',\ \rceil X_n \vdash F.$$

$$X_1',\ldots,X_{n-1}',\ \rceil X_n \to F.$$

larni hosil qilamiz.

1-teorema (h) punktga asosan

$$X_1',\ldots,X_{n-1}' \vdash F.$$

ni hosil qilamiz.

Xuddi shu jarayonni takrorlab, X_{n-1} ni ham yo‘qotish mumkin. Umuman n qadamda keyin esa biz $\vdash F$ ga ega bo‘lamiz.

1-natija. *Agar G ifoda $\rceil, \to, \wedge, \vee, \leftrightarrow$ belgilarni o‘z ichiga olsa va L nazariyaning qandaydir F formulasining soddalashtirilgani ($D_1 - D_3$) ta’riflarga* *qarang) bo'lsa, u holda G formula tavtologiya bo'lishi uchun F formula L nazariyaning teoremasi bo'lishi zarur va etarlidir.* [2] **(44-bet)**

2-natija. L *sistema zidsiz sistemadir, ya'ni* L *da bir vaqtda* F *ham,* $\neg F$ *ham teorema bo'ladigan* F *formula mavjud emas.* [2] **(44-bet)**

Isbot. 1-teoremaga asosan L nazariyaning har qanday teoremasi tavtologiya bo'ladi. Tavtologiyaning inkori esa tavtologiya bo'la olmaydi. Shuning uchun xech bir F formula uchun F va $\neg F$ formulalar bir vaqtda L nazariyaning teoremalari bo'la olmaydi.

L nazariyaning zidsizligidan unda teorema bo'lmaydigan formulaning mavjudligi kelib chiqadi (masalan, ixtiyoriy teoremaning inkori).

Ikkinchi tomondan esa, L ning zidsizligini L nazariyada teorema bo'lmaydigan formulalarning mavjudligidan keltirib chiqarish mumkin edi. Haqiqatan ham, 1-teorema (c) punktga asosan

$$\vdash \neg F \to (F \to G)$$

ga ega bo'lamiz va demak agar L nazariya ziddiyatli nazariya bo'lganda edi, ya'ni qandaydir F formula va o'zining inkori chiqariladigan bo'lganda edi, u holda $\vdash \neg F \to (F \to G)$ va MP qoidasiga asosan L dagi har qanday G formula keltirib chiqariladigan bo'lar edi.

Barcha formulalari teorema bo'lmaydigan nazariyani absolyut zidsiz nazariya ham deyiladi. Demak, biz qarayotgan L nazariya absolyut zidsiz nazariya ekan.

Biz bu erda keltirgan aksiomalar sistemasi E.Mendelson kitobida kiritilgan aksiomalar sistemasidan uchinchi aksiomasi bilan farq qiladi.

E.Mendelson kitobida isbotlangan lemmalar va biz isbotini keltirgan faktlar shuni ko'rsatadiki, bu ikkala taklif qilingan aksiomalar sistemasi ekvivalent ekan (ya'ni teoremalar to'plami ustma-ust tushadi).

Asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (71-74 betlar)

1. Mendelson E. Vvedenie v matematicheskuyu logiku. M. «Nauka». 1984

2. Lavrov I.A., Maksimova L.L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M. «Nauka» 1995

Ma'ruza 20: Predikatlar algebrasi. predikatlar va kvantorlar

Reja:

1. **Predikatlar va kvantorlar .**
2. **Predikatlar ustida mantiqiy amallar.**
3. **Aynan rost predikat.**

Predikatlar va kvantorlar

M to`plam $P$ -xossa bo`lsin. «x P xossaga ega» degan darak gapni $P(x)$ bilan belgilaylik . Agar $a \in M$ bo`lib, $a$ element $P$ xossaga ega bo`lsa, u holda $P(a)$ rost, a P xossaga ega bo`lmasa, $P(a)$ yolg`on mulohaza bo`lishi ravshandir. Demak $P(x)$ mulohazaviy forma ekan.

Endi $Q(x,y)$:«x *va* y *lar* Q munosabatda» degan darak gapni bildirsin. Agar M to`plamning $a$ *va* $b$ elementlari o`zaro Q munosabatda bo`lsa, u holda $Q(a,b)$ rost mulohaza, $a$ *va* $b$ elementlar o`zaro Q munosabatda bo`lmasa, $Q(a,b)$ yolg`on mulohazadir. Demak $Q(x,y)$ ikki o`zgaruvchili mulohazaviy forma ekan.

Huddi shunga o`xshash uch o`zgaruvchili, to`rt o`zgaruvchili va h.k n o`zgaruvchili mulohazaviy formalar haqida gapirish mumkin.

Mulohazaviy formalarning quyidagi xususiyati haqida to`xtalib o`tamiz.

$$E = \{0,1\}\left(1 - "rost",\ 0 - "yolg`on"\right)$$

ikki elementli to`plam, $M$ ixtiyoriy to`plam, $P(x)$ M to`plamda aniqlangan mulohazaviy forma bo`lsin. M to`plamning $P$ xossaga ega bo`lgan elementlarini M_1, P xossaga ega bo`lmagan elementlarini $M_2$ to`plamlarga yig`aylik. Ravshanki $M = M_1 \cup M_2$ *va* $M_1 \cap M_2 = \varnothing$ dir.

U holda $P(x)$ mulohazaviy formani M to`plamni $E$ to`plamga akslantiruvchi funksiya deb qarash mumkin, bunda M_1 ning elementlari 1 ga, M_2 ning elementlari esa 0 ga akslanadi, ya'ni $P: M \to E$. Shunday qilib, mulohazaviy forma o`zi aniqlangan to`plamni maxsus $E = \{1,0\}$ to`plamga akslantiruvchi funksiya ekan.

Bundan tashqari, ikki o`zgaruvchili $Q(x,y)$ mulohazaviy forma $M$ to`plam dekart k o`paytmasi $M^2$ ni $E$ ga akslantiruvchi funksiya ekanligi ravshandir, chunki $M$ to`plamning Q munosabatda bo`lgan elementlari juftliklarini $M_1^2$ to`plamga, Q munosabatda bo`lmagan elementlari juftliklarini $M_2^2$ to`plamga to`plasak, $M_1^2$ ning elementlari (juftliklar) 1 ga, $M_2^2$ elementlari (ular ham juftliklar) 0 ga akslanishini ko`ramiz.

Demak, $Q: M^2 \to E$ ikki o`zgaruvchili funksiya ekan. Hozirgi mulohazalarimiz, albatta, uch o`zgaruvchili va h.k. n o`zgaruvchili mulohazaviy formalar uchun ham o`rinli ekanligi ravshandir. Mulohazaviy formalarni ba'zan shart yoki predikat ham deb ataladi.

1-ta'rif. *M to`plamda aniqlangan n -ar predikat (mulohazaviy forma) deb $P: M^n \to E$ funksiyaga aytiladi.*

Yuqorida aytilganlaridan ko`rinadiki, $M$ to`plamda aniqlangan $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ n -ar predikat M^n (n=1,2,3,…) to`plamning yagona qism to`plamini ajratib berar ekan (bu qism to`plamga kirgan har bir $(x_1, x_2, ..., x_n)$ $n$ -lik uchun $P(x_1, x_2, ......, x_n)$ rost bo`lib, qolgan n -liklarda esa $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ yolg`ondir). Bu qism to`plam $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ predikatning rostlik sohsi deyiladi va P bilan belgilanadi.

Shunday qilib $P \subseteq M^n$ bo`lib,

$$P = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \setminus (x_1, x_2, ...x_n) \in M^n \ \& \ P(x_1, x_2, ..., x_n) = rost\} \quad \text{dir.}$$

$P(x_1, x_2, ..., x_n)$ predikat P to`plamning harakteristik funksiyasi bo`lishini ko`rish qiyin emas. Demak, $n-ar$ predikatni yana quyidagicha ta'riflasa bo`lar ekan:

2-ta'rif. *M to`plamda aniqlangan $n-ar$ predikat deb $M^n$ to`plamning ixtiyoriy qism to`plamiga aytiladi.*

$n=1$ bo`lganga $(P: M \to E)$ predikat unar (bir argumentli ), $n=2$ bo`lganda $(P: M^2 \to E)$ predikat binar (ikki argumentli), $n=3$ bo`lganda ($P: M^3 \to E$) predikat ternar (uch argumentli) predikat deyiladi va hokazo.

Unar predikatlar, odatda, o`zi aniqlangan to`plam elementlarining xossalarini, ko`p argumentli predikatlar esa to`plam elementlari orasidagi munosabatlarni bildiradi.

Predikatlarni $P, Q, T, S, ...P_1, P_2, ...$ simvollar yordamida ifodalaymiz.

1-misol. $M=\{1,2,3,4\}$ to`plamda $P(x):\ll x-tub\ son \gg$ predikati aniqlangan bo`lsin.

Bu predikat $x=2\ va\ x=3$ bo`lgandagina rost mulohazaga aylanadi, ya'ni olingan predikatning rostlik sohasi $P=\{2,3\}\subseteq M$ to`plamdan iboratdir.

$Q(x):"x<4"$ predikatni ham shu M to`plamda qaraylik . Bu predikat $x=1,\ x=2,\ x=3$ bo`lgandagina rost mulohazaga aylanadi, ya'ni uning rostlik sohasi $P=\{1,2,3\}\subseteq M$ to`plamdan iboratdir.

Yana shu to`plamda $W(x,y):"x\ y\ ning\ bo`luvchisi"$ predikatini qaraylik. Ravshanki bu predikat $(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,4)\ va\ (4,4)$ juftliklarada rost mulohazaga aylanib qolgan tartiblangan juftliklarda yolg`on qiymat qabul qiladi. Demak, $W(x,y)$ predikatning rostlik sohasi

$$W=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,4),(4,4)\}\subseteq M^{n}$$

to`plamdan iborat ekan.

$W(x,y)$ predikat W to`plamning harakteristik funksiyasi bo`lishi ravshandir:

$$W=\{(x,y)|x,\ y\in M\ \&W(x,y)=rost\}.$$

Agar M to`plam chekli quvvatga ega bo`lsa, ya'ni $|M|=k$ bo`lsa, u holda bu to`plamda nechta unar, binar va h.k predikatlar aniqlash mumkin ekanligi 2-ta'rifdan bevosita ko`rinadi. Haqiqatan, $M$ to`plamda aniqlanish mumkin bo`lgan $n-ar$ $(n=1,2,...)$ predikat $M^{n}$ to`plamning ixtiyoriy qism to`plami bo`lganligi uchun, tabiiy, M^{n} to`plamning qancha qism to`plami mavjud bo`lsa, $M$ to`plamda aniqlanish mumkin bo`lgan $n-ar$ $(n=1,2,...)$ predikatlar ham shuncha bo`lishi kerak. Ma'lumki, M^{n} to`plamning barcha qism to`plamlarining soni $2^{|M^{n}|}$ ga tengdir. $|M|=k$ bo`lgani uchun $|M^{n}|=k^{n}$ , demak, $|B(M^{n})|=2^{k^{n}}$ bo`ladi, bunda $B(M^{n})$ M^{n} to`plamning bo`lagidir.

M to`plamda $P(x)$ predikat aniqlangan bo`lsin. $"M\ to`plamning\ barcha\ elementlari\ P\ xossaga\ ega"$ va $"M\ to`plamda\ P\ xossaga\ ega\ bo`lgan\ elementlar\ mavjud"$

degan darak gaplar mulohazalar ekanligi ravshandir. Bu mulohazalarga quyidagicha tus berish mumkin:

"*Barcha x lar P xossaga ega*","*Shunday x mavjudki,u P xossaga ega*".

Yuqoridagi mulohazalar tarkibida qatnashgan "*barcha x lar*" *va* "*shunday x mavjudki*" iboralar mos ravishda umumiylik va mavjudlik kvantori deyiladi hamda $\forall x$ *va* $\exists x$ simvollar bilan belgilanadi. Shunday qilib yuqorida keltirilgan mulohazalar qisqacha $\forall xP(x)$ *va* $\exists xP(x)$ ko`rinishida belgilanadi. $P(x)$ predikat tarkibidagi $x$ o`zgaruvchi erkin predmet o`zgaruvchi deb ataladi.

Shuni ham aytish kerakki, $\forall xP(x)$ *va* $\exists xP(x)$ mulohazalarda x predmet o`zgaruvchi qatnashsa-da, $x$ endi erkinlik xususiyatini yo`qotadi va bog`liq predmet o`zgaruvchiga aylanadi.(kvantorlar yordamida bog`langan).

Endi $Q(x,y)$ binar predikat bo`lsin. Ma'lumki retraksiya yordamida, ya'ni $x$ *va* $y$ predmet o`zgaruvchilarni M to`plam elementlari bilan alamashtirish yordamida $Q(x,y)$ predikatdan jumla hosil qilish mumkin.

Agar $Q(x,y)$ predikatdan faqat bitta predmet o`zgaruvchi (masalan $y$ ) ni $M$ to`plamning elementi (masalan b) bilan almashtirsak, u holda faqat bitta erkin predmet o`zgaruvchiga bog`liq bo`lgan $Q(x,b)$ predikat hosil bo`ladi. Yuqorida aytilganidek, x predmet o`zgaruvchini kvantorlar bilan bog`lasak, $\forall xQ(x,b)$ *yoki* $\exists xQ(x,b)$ mulohazalarni hosil qilamiz.

$Q(x,y)$ predikatning erkin predmet o`zgaruvchilarini to`rt xil usulda kvantorlar yordamida bog`lash mumkin:

$$\forall x\forall yQ(x,y),\ \forall x\exists yQ(x,y),\ \exists x\forall yQ(x,y),\ \exists x\exists yQ(x,y)$$

Bularning har biri mulohaza ekanligini sezish qiyin emas.

Xullas, ixtoyoriy predikatdan ikki xil usulda mulohazalar hosil qilish mumkin ekan:

1. Predikatda qatnashgan barcha erkin predmet o`zgaruvchilar o`rniga muayyan predmetlarni (to`plam elementlarini) qo`yish (retraksiya usuli).
2. Predikatning barcha erkin predmet o`zgaruvchilarini kvantorlar yordamida bog`lash (bu usul «predikatga kvantorlarni osish» deyiladi). Shunday qilib,«predikatga kvantor osish» predikatdan mulohaza hosil qilish operatsiyasi ekan.

Predmet o`zgaruvchlarning muayyan qiymatlarida predikatlar 1 yoki 0 (rost yoki yolg`on) qiymat hosil qilganliklari uchun, ular ustida mantiqiy operatsiyalar bajarish mumkin.

$P(x)\ va\ Q(x)$ predikatlar M to`plamda aniqlangan bo`lsin. $R(x)=P(x)\,\&\,Q(x)$ M to`plamda aniqlangan xossa bo`lib, bu xossaga ham P ham Q xossalarga ega bo`lgan elementlargina egadir, ya'ni $R(x)$ predikat $P(x)\ va\ Q(x)$ predikatlar bilan bir paytda rost bo`lgandagina rost bo`luvchi predikatdir. Ma'lumki $P(x)$ predikat $M$ to`plamning M_1 qism to`plamining, $Q(x)$ esa $M_2$ qism to`plamining harakteristik funksiyalaridir. $R(x)$ predikat esa $M_1 \cap M_2 \subseteq M$ to`plamning harakteristik funksiyasi bo`lishi ravshandir. Shunday qilib, M to`plamning qism to`plamlari kesishmasi ularning harakteristik funksiyalarining konyuksiyasi bilan harakterlanar ekan.

Huddi shunday $P(x)\ va\ Q(x)$ predikatlar dizyunksiyasi $T(x)=P(x)\vee Q(x)$ $M_1\ va\ M_2$ larning birlashmasi $M_1 \cup M_2$ ni harakterlanishini ko`rish qiyin emas. [1]**(43-bet)**

"*x P xossaga ega emas*" degan darak gap, tabiiy, $P(x)$ predikatning inkoridir: u yangi predikat bo`lib, uni $S(x)=\urcorner P(x)$ bilan belgilaylik. $M$ to`plamning P xossaga ega bo`lgan elementlari, tabiiy $S=\urcorner P$ xossaga ega bo`lmaydilar va aksincha: demak, $P(x)\ va\ S(x)$ predikatlar harakterlovchi to`plamlar bir-birining $M$ to`plamgacha to`ldiruvchilaridir, ya'ni

$$P=C_M S, \quad S=C_M P, \quad (S\subseteq M, \quad P\subseteq M)$$

Endi $P(x)\Rightarrow Q(x)$ ifodani ko`raylik. Implikatsiya amalini diz`yunksiya va inkor orqali ifoda qilish mumkinligini mulohazalar algebrasida ko`rgan edik.

Shunga asosan, $P(x)\Rightarrow Q(x)$ va $\urcorner P(x)\vee Q(x)$ lar teng kuchli ifodalar ekanligini hamda $P(x)\Rightarrow Q(x)$ predikat $C_M P\cup Q$ to`plamning harakteristik funksiyasi ekanligini ko`ramiz.

Nihoyat $P(x)\Leftrightarrow Q(x)$ va $\left[P(x)\Rightarrow Q(x)[\&]Q(x)\Rightarrow P(x)\right]$ ifodalar teng kuchli ekanligiga, $P(x)\Leftrightarrow Q(x)$ predikat esa $(C_M P\cup Q)\cap(C_M Q\cup P)$ to`plamning harakteristik funksiyasi bo`lishiga ishonch hosil qilish qiyin emas.

Yuqorida keltirilganlar ko`p argumentli predikatlar uchun ham butunlay o`rinlidir.

Shunday qilib, biz predikatlar ustida mantiqiy amallar va predmet o`zgaruvchilar bo`yicha predikatlarga «kvantorlar osish» amallar bajarilishini ko`rdik.

Shuni ham qayd qilib o`tish kerakki, $M$ to`plamda aniqlangan har qanday predikat aynan rost , aynan yolg`on va bajariluvchi bo`ladi.

3-ta'rif. *Agar M to`plamda aniqlangan $P(x)$ predikat to`plamning har bir elementi uchun rost qiymat qabul qilsa, bunday predikat M to`plamda $AR$ predikat deyiladi. Agar $P(x)$ predikat har qanday $M$ to`plamda AR predikat bo`lsa, bunday predikat AR predikat deyiladi.*

2-misol. $P(x) \equiv F(x) \vee \rceil F(x)$ predikat AR predikatdir. (isbotlang !).

4-ta'rif. *M to`plamda aniqlangan $P(x)$ predikat $M$ to`plamning har bir elementi uchun yolg`on qiymat qabul qilsa, bunday predikat $M$ to`plamda AYo predikat deyiladi. Agar $P(x)$ ixtiyoriy M to`plamda AYo predikat bo`lsa, u holda uni AYo predikat deyiladi.*

3-misol. $P(x) \equiv F(x) \,\&\, \rceil F(x)$ predikat AE predikatdir (isbotlang!).

5-ta'rif. *M to`plamda aniqlangan $P(x)$ predikat uchun $M$ to`plamda shunday x_0 element topilsaki, $P(x_0) = 1$ bo`lsa, u holda $P(x)$ $M$ to`plamda bajariluvchi predikat deyiladi.. Agar $P(x)$ ixtiyoriy M to`plamda bajariluvchi bo`lsa, u holda $P(x)$ bajariluvchi predikat deyiladi.*

4-misol. $P(x): \{x > 5 \,\&\, x \neq 10\}$ natural sonlar to'plamda bajariluvchi predikatdir.

Asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (36-44 betlar)

6. Mendelson E. Vvedenie v matematicheskuyu logiku. M. «Nauka». 1984
7. Lavrov I.A., Maksimova L.L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M. «Nauka» 1995

Ma'ruza 21-22: Predikatlar algebrasining formulalari(4 soat)

Reja:

1. **Predikatlar algebrasi va uning formulalari.**
2. **Aynan rost formulalar.**
3. **Predikatlar algebrasining tengkuchli formulalari.**

Predikatlar algebrasi va uning formulalari

Mulohazalar algebrasida biz faqat mulohazalar bilan ko`rgan bo`lsak, predikatlar algebrasida mulohazalar bilan bir qatorda barcha predikatlar asosiy o`rganish obektlari bo`ladi. Predikatlar algebrasi (PA) mulohazalar algebrasidan kengroq bo`lib, uning barcha formulalarini o`z ichiga oladi.

PA ni qurish uchun alfavitiga qanday simvollar kirishini ko`raylik. PA ning barcha tushunchalari qandaydir ixtiyoriy $M$ to`plam PA ning predmet sohasi, uning $a,b,c,....a_1,a_2,...$ elementlari esa doimiy predmetlar (yoki individual predmetlar) deb ataladi. M to`plamda o`zgaradigan $x,y,z,...,x_1,x_2,..$ noma'lumlar bu sohaning predmet o`zgaruvchilari deyiladi. $A,B,C,...A_1,A_2,...,$ harflar bilan propozitsional o`zgaruvchilarni , $P(x),Q(x,y),S(x,y,z),....T(x_1,x_2,...x_n),..$ lar bilan esa o`zgaruvchi predikatlarni belgilaymiz.

Bundan tashqari, PA alfavitida mantiqiy konstantalar 1 va 0, mantiqiy amallar simvollari $\&,\wedge,\Rightarrow,\Leftrightarrow,\rceil,\forall,\exists$ hamda qavslar qatnashadi.

Endi PA ning formulasi tushunchasini kiritamiz. [1] **(45-bet)**

1-ta'rif. 1^0. *Har bir propozitsional o`zgaruvchi formuladir.*

2^0. $P-n-ar$ *predikat o`zgaruvchi* $t_1,t_2,...t_n$ *lar predmet o`zgaruvchilar yoki individual predmetlar bo`lsa,* $P(t_1,t_2,....,t_n)$ *ifoda formuladir.* $(n=1,2,....)$.

3^0. $U(x)$ *formula bo`lib,* $x$ *erkin predmet o`zgaruvchisi bo`lsa, u holda* $\forall xU(x)$ *va* $\exists xU(x)$ *lar formulalardir.*

4^0. U *va* B *lar formula bo`lib, ularda birida bog`liq, ikkinchisida erkin bo`lgan predmet o`zgaruvchilar bo`lmasin. U holda quyidagi ifodalar formuladir:*

$$(U\,\&\,B),\ (U\vee B),\ (U\Rightarrow B),\ (U\Leftrightarrow B),\ (\rceil U)$$

Izoh. 4^0 punktdagi $U \; va \; B$ formulalarning birida predmet o`zgaruvchi bog`lib bo`lib, ikkinchisida erkin bo`lsa, hamda $U \; va \; B$ formulalardan 4^0 punktda ko`rsatilgan kabi ifodalar hosil qilinsa, u holda bu ifodalarda o`zgaruvchilar kolliziyasi paydo bo`ladi deyiladi. Ta'rifga ko`ra o`zgaruvchilar kolliziyasiga ega bo`lgan ifodalarni formula hisoblaymiz.

$1^0 \; va \; 4^0$ lardan ko`rinadiki, m.a. ning har bir formulasi PA ning formulasidan iborat ekan.

$1^0, 2^0$ punktlarda keltirilgan formulalar PA ning elementar formulalari deyiladi.

$\forall x U(x) \; va \; \exists x U(x)$ formulalarda $U(x)$ formula umumiylik va mavjudlik kvantorlarining ta'sir sohasi deyiladi.

1-misol. $(\forall x \exists y (A \vee (P(x) \& F(x,y))) \Rightarrow \exists t P(t))$ ifoda PA ning formulasidir; bu yerda A-propozitsional o`zgaruvchi, $P(x), F(x,y)$ -lar o`zgaruvchi predikatlar, $\forall x \; va \; \exists y$ kvantorlarning ta'sir sohasi $(A \vee (P(x) \& F(x,y)))$ formuladir.

2-misol. $((A \Rightarrow \exists x (P(x) \Rightarrow \forall y F(y,t))) \& P(x)$ ifoda PA ning formulasi emas, chunki $(\rceil A \Rightarrow \exists x (P(x) \Rightarrow \forall y F(y,t))$ formulada x predmet o`zgaruvchi bog`langan bo`lib, ifodaning ikkinchi qismi $P(x) \; da \; x$ erkin o`zgaruvchidir, ya'ni berilgan ifodada x predmet o`zgaruvchiga nisbatan kolliziya paydo bo`lgan.

Izoh. PA formulalari yozuvlarini soddalashtirish maqsadida m.a dagidek operatsiyalarning kuchli bog`lashiga qarab quyidagicha joylashtiramiz: odatdagidek $\rceil$ operatsiya ifodalarni eng kuchli bog`lovchi operatsiya hisoblanadi. Undan so`ng esa kvantorlar va nihoyat, mantiqiy amallar m.a dagidek tartibda joylashadilar. Bu kelishuvdan so`ng formuladan bir necha qavslarni tashlab yuborishga imkon tug`iladi: bundan tashari formulani o`rab turgan tashqi qavslarni ham tashlab yuborishga kelishamiz.

3-misol. $(\exists x ((F(x) \& A) \Rightarrow (\forall y P(x,y) \vee (\rceil B))))$ formula ortiqcha qavslarni tashlab yuborilgach, quyidagi ko`rinish oladi:

$$\exists x (F(x) \& A \Rightarrow \forall y P(x,y) \vee \rceil B$$

Bunda $\exists x$ dan keyin turgan chap qavs va unga mos keluvchi o`ng qavsni tashlab yuborish mumkin emas, chunki $\exists x$ kvantorning ta'sir sohasi ushbu qavslar ichidagi barcha formulalardir.

PA formulasi ta;rifidan ko`rinadiki, PA formulasi tarkibiga propozitsional o`zgaruvchilar, mantiqiy konstantalar, o`zgaruvchi predikatlar, predmet o`zgaruvchilari, va individlar kirar ekan, ya'ni formula quyidagi ko`rinishda bo`lar ekan:

$$U(A_1,....,A_k;a_1,...,a_m;x_1,...,x_s;P_1,...P_r);$$

Bu yerda $A_1,....,A_k$-propozitsional o`zgaruvchilar, $a_1,...,a_m$-individlar, $x_1,...,x_s$-predmet o`zgaruvchilari va nihoyat, $P_1,...P_r$ lar o`zgaruvchi predikatlardir.

Shuni ham aytish kerakki, agar P o`zgaruvchi predikat simvoli bo`lsa (bir yoki ko`p argumentli), uni turli predmet sohalarida turlicha aniqlash mumkin.

4-misol. $\exists x(P(x) \Rightarrow \forall t F(x,t))$ formuladagi $P(x)$ *va* $F(x,t)$ predikatlarni N natural sonlar sohasida, masalan.

$$P(x):"x-3=0", \quad F(x,t):"x<t+5"$$

kabi aniqlasak, M matematika fakulteti talabalari to`pllami bo`lganda esa:

$$P(x):"x - hushchaqchaq\ talaba"$$

$F(x,t)$:"*x t ning do`sti*" kabi belgilash mumkin.

Birinchi holda olgan formulamiz:
"*Shunday x natural son topiladiki, agar* $x-3=0$ *bo`lsa u holda barcha t natural sonlar uchun* $x<t+5$ *bo`ladi*"

degan jumla bo`lsa ikkinchisi:

"*Shunday x talaba mavjudki,agar u hushchaqchaq bo`lsa, u holda u ixtiyoriy t talaba bilan do`stdir*"

degan jumla hosil bo`ladi.

Shuning uchun o`zgaruvchi P predikat muayyan to`plamda aniqlangan, bo`lsa u holda uni shu to`plamda aniqlangan individual predikat deb ataladi.

2-ta'rif. *Predikatlar algebrasining* $U(A_1,....,A_k;a_1,...,a_m;x_1,...,x_s;P_1,...P_r);$

Formulasi $P_1,...P_r$ *predikatalar* M *to`plamda ixtiyoriy ravishda aniqlanganda,* $x_1,...,x_s$ *predmaet o`zgaruvchilarni* M *to`plamning ixtiyoriy elementlari bilan alamashtirganda hamda* $A_1,....,A_k$ *propozitsional o`zgaruvchilar qiymatlarining ixtiyoriy tanlanmasida 1 qiymat qabul etsa, u holda* U M *to`plamda aynan rost formula deyiladi. Agar* $U$ *formula ixtiyoriy* $M$ *to`plamda aynan rost bo`lsa, u holda* U *aynan rost formula deyiladi.*

5-misol. $P(x)$ natural sonlar to`plamida aniqlangan ixtiyoriy unar predikat bo`lsin. Quyidagi formula natural sonlar to`plamida aynan rost formuladir: $P(1)\,\&\left[x\in N\,\&\,P(x)\Rightarrow P(x+1)\right]\Rightarrow \forall yP(y)$. Ushbu $\forall x\left[P(x)\vee \urcorner P(x)\right]$ formula esa har qanday to`plamda aynan rostdir.

2-ta'rifda 1 ni 0 bilan, rost so`zini yolg`on so`zi bilan alamashtirsak, u holda $M$ to`plamda aynan yolg`on formula tushunchalari hosil bo`ladi.

3-ta'rif. $U(A_1,....,A_k;a_1,...,a_m;x_1,...,x_s;P_1,...P_r)$; *formula* $P_1,...P_r$ *predikatlarni* M *to`plamda kamida bitta usulda aniqlanganda,* $x_1,...,x_s$ *predmet o`zgaruvchilarni* M *to`plam elementlari bilan kamida bitta usulda almashtirilganda hamda* $A_1,....,A_k$ *propozitsional o`zgaruvchilar qiymatlarining kamida bitta naborida 1 qiymat qabul qilsa,* U *formula* M *to`plamda bajariluvchi deyiladi.* $U$ *formula ixtiyoriy* $M$ *to`plamda bajariluvchi bo`lsa, uni bajariluvchi formula deyiladi.*

6-misol. $\exists x\left[A\,\&\,P(x)\Rightarrow \forall tF(x,t)\right]$ formula natural sonlar to`plamida bajariluvchidir. Haqiqatan $P(x)$:"*x tub son*", $F(x,t)$ *esa* "$x\leq t$" bo`lsa, A

propozitsional o`zgaruvchini masalan rost jumla bilan alamashtirsak, qaralayotgan formula rost qiymat qabul qiladi.

4-ta'rif. *Predikatlar algebrasining* M *predmet sohasi ustida qaralayotgan* U *va* B *formulalari tarkibida* $A_1,....,A_k$ *propozitsional o`zgaruvchilar,* $a_1,...,a_m$*-individlar,* $x_1,...,x_s$*-predmet o`zgaruvchilari va* $P_1,...P_r$ *o`zgaruvchi predikatlar qatnashgan bo`lsin.Agar bu formulalarda propozitsional o`zgaruvchilar qiymatlarining ixtiyoriy tanlanmasida erkin predmet o`zgaruvchilari va o`zgaruvchi predikatlarni* $M$ *to`plamda ixtiyoriy individual predmetlar va individual predikatlar bilan almashtirganda bir xil qiymat qabul qilsa, bunday formulalar* M *to`plamda teng kuchli deyiladi va* $U\equiv B$ *ko`rinishda belgilanadi. Agar* U *va* B *formulalar ixtiyoriy* M *predmet sohada teng kuchli bo`lsalar, u holda bunday formulalar teng kuchli formulalar deyiladi.*

7-misol. [1] **(48-bet)**

$\exists x(P(x) \Rightarrow \forall y Q(y)$ *formula*

$\exists x(\rceil P(x) \vee \forall y Q(y)$ *formulaga teng kuchlidir.*

8-misol.

$\exists x(P(x) \& Q(x))$ *formula*

$\exists x P(x) \& \exists x Q(x)$ *formulaga teng kuchli emas,*

Chunki shunday M predmet soha va undan shunday individual predikatlar topish mumkinki, bu ikkita formulaning qiymatlari har xil bo`ladi.

Masalan, $P(x)$:"*x tub son*"., Q(x): "*x – to`liq kvadrat*" predikatlar bo`lib, predmet soha esa N natural sonlar to`plami bo`lsin. U holda $\exists x(P(x) \& Q(x))$: «shunday x topiladiki, u tub son va to`liq kvadrat» yolg`on jumla, $\exists x P(x) \& \exists x Q(x)$ «shunday x topiladiki, u tub son va shunday x topiladik, u to`liq kvadrat» esa rost jumladir.

Biz yuqorida m.a ning asosiy teng kuchliliklarini sanab o`tgan edik. Mazkur tengkuchliliklar PA ning ham asosiy tengkuchliliklari bo`lib qolaveradilar. Ulardan tashqari PA ning ham o`ziga xos asosiy tengkuchliliklari mavjudki, biz ularni quyida qayd qilamiz.

A ixtiyoriy propozitsionl o`zgaruvchi, $P(x)$ *va* $F(x)$ lar esa o`zgaruvchi predikatlar bo`lsin. U holda [1] **(45,46-bet)**

1^0. $\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$;

2^0. $\exists x \neg P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$;

3^0. $\forall x(P(x) \,\&\, F(x)) \equiv \forall x P(x) \,\&\, \forall x F(x)$;

4^0. $\forall x(A \,\&\, P(x)) \equiv A \,\&\, \forall x P(x)$;

5^0. $\forall x(A \vee P(x)) \equiv A \vee \forall x P(x)$;

6^0. $\forall x P(x) \vee \forall x F(x) \equiv \forall x \forall y (P(x) \vee F(y))$;

7^0. $\forall x(P(x) \Rightarrow A) \equiv \exists x P(x) \Rightarrow A$;

8^0. $\forall x(A \Rightarrow P(x)) \equiv A \Rightarrow \forall x P(x)$;

9^0. $\exists x(P(x) \vee F(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x F(x)$;

10^0. $\exists x P(x) \,\&\, \exists x F(x) \equiv \exists x \exists y (P(x) \,\&\, F(y))$;

11^0. $\exists x(P(x) \Rightarrow A 12^0. \exists x(A \,\&\, P(x)) \equiv A \,\&\, \exists x P(x)$;

13^0. $\exists x(A \vee P(x)) \equiv A \vee \exists x P(x);) \equiv \forall x P(x) \Rightarrow A$;

14^0. $\exists x(A \Rightarrow P(x)) \equiv A \Rightarrow \exists x P(x)$;

15^0. $\exists x(P(x) \Rightarrow F(x)) \equiv \forall x P(x) \Rightarrow \exists x F(x)$;

16^0. $\forall x P(x) \equiv \forall y P(y)$;

17^0. $\forall x P(x) \equiv \forall y P(y)$.

Bu tengkuchliliklardan birinchisini isbot qilaylik. $\forall x P(x)$ formula ma'lumki, "*Barcha x lar P xossaga ega*" deb o`qiladi. Bu mulohazaning inkorini "*Barcha x lar P xossaga ega emas*" deb hisoblasak albatta hato bo`ladi. [1]**(46-bet)**

Bunga misol keltiraylik. $P(x)$:"*x tub son*" bo`lsin, u holda bu xossaga qarama qarshi xossa $\neg P(x)$:"$x -$ *murakkab son*" bo`ladi; "*barcha x tub son emas*" degan mulohaza natural sonlar sohasida, tabiiy yolg`ondir, chunki "*barcha x lar tub son*" degan mulohazaga o`laroq natural sonlar sohasida qarama-qarshi xossaga ega bo`lgan natural sonlar ham mavjuddir. Demak, "*barcha x lar tub son*" daegan mulohazaning inkori shunday $x$ son topiladiki, u murakkab son degan mulohaza bo`lar ekan.

Ixtiyoriy M predmet sohasida $P_0(x)$ predikat aniqlangan bo`lsin. Agar $\forall x P_0(x) \equiv 1$ bo`lsa, ya'ni M sohaning barcha elementlari P_0 xossaga ega bo`lsa, u holda $M$ sohaning birorta ham elementi $\neg P_0$ xossaga ega bo`lmaydi va demak $\exists x \neg P_0(x) \equiv 0$ bo`ladi; $\forall x P_0(x) \equiv 1$ bo`lgani uchun $\neg\forall x P_0(x) \equiv 0$ bo`ladi ya'ni

$\neg\forall x P_0(x) \equiv \exists x \neg P_0(x)$ bo`ladi. Agar $\forall x P_0(x) \equiv 0$ bo`lsa, $P_0(x)$ predikat yo AE predika, yo shunday $x_0 \in M$ topiladiki, u P_0 xossaga ega bo`lmaydi, ya'ni $x_0$ element $\neg P_0$ xossaga ega bo`ladi.

Agar $P_0(x)$ predikat AE predikat bo`lsa, u holda $M$ ning barcha elementlari $\neg P_0$ xossaga ega bo`ladi-bu esa $\exists x \neg P_0(x)$ rost mulohaza degan so`zdir. $\forall x P_0(x) \equiv 0$ bo`lgani uchun, $\neg\forall x P_0(x) \equiv 1$ bo`ladi, ya'ni yana $\neg\forall x P_0(x) \equiv \exists x \neg P_0(x)$ bo`ladi.

Endi M to`plamda $P_0$ xossaga ega bo`lmagan x_0 element mavjud bo`lsin.

U holda bu element $\neg P_0$ xossaga ega bo`ladi va demak, $\exists x \neg P_0(x) \equiv 1$ bo`ladi. $\forall x P_0(x) \equiv 0$ bo`lgani uchun yana $\neg\forall x P_0(x) \equiv \exists x \neg P_0(x)$ kelib chiqadi.

M predmet soha va unda aniqlangan $P_0(x)$ predikat ixtiyoriy tanlangani uchun 1^0 tengkuchlilik o`rinlidir.

Endi 6^0 tengkuchlilikni isbotlaylik.

Avvalo $\forall x$ kvantor $\vee$ ga nisbatan distributiv emasligini misolda ko`rsataylik.

$M = \{1,2,3,4,5\}, P(x): "(x-1)(x-2)=0", F(x): "(x-3)(x-4)(x-5)=0"$ bo`lsin. Ravshanki $M$ sohada $\forall x P(x)$ *va* $\forall x F(x)$ mulohazalar yolg`ondir, va demak, 6^0 ning chap tomoni ham yolg`on mulohazadir. Agar $\forall x$ kvantor $\vee$ ga nisbatan distributive, ya'ni $\forall x(P(x) \vee F(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x F(x)$ bo`lganda edi, $\forall x(P(x) \vee F(x))$ rost mulohaza bo`lganligi uchun qarama qarshilik hosil bo`lar edi.

Demak, $\forall x(P(x) \vee F(x)) \neq \forall x P(x) \vee \forall x F(x)$ ekan. Endi 6^0 ning o`ng tomoni , $6^0$ ning chap tomoni bilan bir xil qiymat qabul qilishini ko`rsatamiz.

Agar $\forall x P(x) \equiv 1$ *yoki* $\forall x F(x) \equiv 1$ bo`lsa u holda $6^0$ tengkuchlilik o`rinli ekanligi ravshandir; bunda faqat $\forall x P(x) \equiv \forall y P(y)$; ekanligini ko`rsatish kifoyadir. Ammo bu tengkuchlilik tabiiydir, chunki $x$ predmet o`zgaruvchi ham, y predmet o`zgaruvchi ham M ning har bir elementini qiymat sifatida qabul qiladi.

$\forall x P(x) \equiv 0$ va $\forall x F(x) \equiv 0$ bo`lsin. U holda $6^{0}$ ning chap tomoni 0 qiymatga egadir. $6^{0}$ ning o`ng tomonida $\forall x$ kvantorning ta'sir sohasi $P(x) \vee F(y)$ formula bo`lsada, $F(y)$ predikatda $x$ predmet o`zgaruvchi qatnashmaganligi sababli, $\forall x$ ta'siri faqat $F(y)$ ga ta'sir etadi. Demak, $\forall x \forall y (P(x) \vee F(y))$ formula ham 0 qiymatga ega bo`ladi.

Asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (45-50 betlar)

8. Mendelson E. Vvedenie v matematicheskuyu logiku. M. «Nauka». 1984
9. Lavrov I.A., Maksimova L.L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M. «Nauka» 1995

Ma'ruza 23: Predikatlar algebrasi formulalarining normal formalari

Reja:

1. **Predikatlar algebrasining keltirilgan formulalari.**
2. **Predikatlar algebrasi tilini matematik mulohazalarni ifoda etishga qo`llanish.**
3. **Predikatlar algebrasida yechilish muammosi.**

Predikatlar algebrasining keltirilgan formulalari

3-teoremada Mulohazalar algebrasining har bir formulasining o`zi keltirilgan yoki uni keltirilgan teng kuchli formula bilan almashtirish mumkin ekanligi haqida aytilgan edi. Keltirilgan formulalarda amallardan faqat $\&, \vee, va\ \rceil$ qatnashib, $\rceil$ amali faqat propozitsional o`zgaruvchilarga tegishli bo`ladi.

Predikatlar algebrasi da ham 3-ta'rif (keltirilgan formula ta'rifi) va 3-teoremaning o`xshashlari mavjud bo`lib, ular quyidagi mazmunga egadir.

1-ta'rif. *U formula Predikatlar algebrasining ixtiyoriy formulasi bo`lsin. Agar bu formulada faqat $\&, \vee, \rceil, \forall$ va $\exists$ amallar qatnashib, $\rceil$ amali faqat propozitsional o`zgaruvchilar va o`zgaruvchi predikatlarga tegishli bo`lsa, bunday formula keltirilgan formula deyiladi.*

1-teorema. *PA ning ixtiyoriy formulasi yo o`zi keltirilgan yoki qandaydir keltirilgan formulaga teng kuchlidir.*

Isbot. U formula Predikatlar algebrasi ning ixtiyoriy formulasi bo`lsin. Agar keltirilgan formula bo`lsa, teorema o`rinlidir. $U$ keltirilgan formula ko`rinishida bo`lmasin. Agar $U$ formula $B \Rightarrow C$ ko`rinishida bo`lsa, u $\rceil B \vee C$ formulaga teng kuchlidir; shunday qilib formula tarkibida qatnashgan $\Rightarrow$ amallarni yo`qotish mumkin. Agar U formula $\rceil \forall x B(x)$ ko`rinishida bo`lsa, u holda asosiy tengkuchliliklarning 1^0siga asosan uni $\exists x \rceil B(x)$ ko`rinishga keltirish mumkin.

Agar U $\rceil(B \& C)$ ko`rinishda bo`lsa, uni $\rceil B \vee \rceil C$ teng kuchli formula bilan almashtirish mumkin. Nixoyat U $B \Leftrightarrow C$ ko`rinishida bo`lsa uni $(\rceil B \vee C) \& (\rceil C \vee B)$ teng kuchli formula bilan almashtiriladi. Agar U formula

Bu shakl almashtirishlardan keyin keltirilgan formula ko`rinishiga kelmasa, u holda mazkur shakl alamashtirishlar $B$ va $C$ formulalarga qo`llaniladi.

2-ta'rif. *Predikatlar algebrasining keltirilgan formulasi tarkibida kvantorlar qatnashmasa yoki kvantorlar mantiqiy amallarni barchasidan oldin kelsa, bunday formula normal keltirilgan formula deyiladi.*

2-teorema. *Predikatlar algebrasining ixtiyoriy formulasi uchun unga teng kuchli bo`lgan normal keltirilgan formula mavjudir.*

Isbot. Predikatlar algebrasi ning ixtiyoriy formulasi uchun 1-teoremaga asosan unga teng kuchli keltirilgan formula mavjud bo`lgani uchun teoremani faqat keltirilgan formulalar uchun isbotlash kifoyadir.

U formula Predikatlar algebrasi ning ixtiyoriy keltirilgan formulasi bo`lsin. Agar u kvantorlarga ega bo`lmasa, teorema o`rinli bo`ladi. Agar u kvantorli formula bo`lib,

$$\forall xB(x)\,\&\,\forall xC(x), A\,\&\,\forall xB(x), A\vee\forall xB(x), \forall xB(x)\vee\forall xC(x),$$
$$\exists xB(x)\vee\exists xC(x), A\,\&\,\exists xB(x), \exists xB(x)\,\&\,\exists xC(x)$$

ko`rinishga ega bo`lsa, uni $3^0-6^0, 9^0-12^0$ asosiy tengkuchliliklarga asosan mos teng kuchli formula bilan almashtirish mumkin; bunda A propozitsional o`zgaruvchi o`rnida MA ning murakkab formulasi ham turishi mumkin, $B(x)$ *va* $C(x)$ esa kvantorsiz formuladir.

Agar U formula $\neg\forall xB(x)$ ko`rinishhga ega bo`lsa uni $\exists x\neg B(x)$ teng kuchli formula bilan almashtiriladi. (1^0 *va* 2^0 ga asosan).

Predikatlar algebrasi tilini matematik mulohazalarni ifoda etishga qo`llanish

Har qanday matematik fanda qaralayotgan obektlar haqidagi mulohazalar bilan ish ko`radi. Mantiq va to`plamlar nazariyasining simvollari hamda berilgan fanning maxsus simvollari yordamida shunday mulohazalar formula ko`rinishida ifodalanishi mumkin.

Quyidagi asosiy matematik tushunchalar –ta'rif va teoremalarni predikatlar algebrasi tili yordamida qanday ifodalash mumkinligini ko`rib chiqamiz.

Ta'rif chap tomoni yangi kiritilayotgan simvol, o`ng tomon esa ma'lum simvollardan tuzilgan ifodadan iborat bo`lgan tenglik yoki ekvivalentlik yordamida ifodalanishi mumkin.

Ta'rifni bildiruvchi formulalarni boshqa formulalardan farqlash uchun bu formulalardagi «teng» likning (ekvivalaentlikning) ostiga (yoki) ustiga df (

fransuzcha definition-ta'rif) harflar qo`yiladi. Masalan $f(x)$ funksiyaning nuqtadagi uzluksizligi quyidagi formula bilan ifodalanadi:

$$f(x)\, funksiya\, x = x_0\, nuqtada\, uzluksiz \overset{df}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0$$
$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\left[|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\right].$$

1-misol. Xalqa aksiomalari predikatlar algebrasi tili yordamida quyidagicha yoziladi:

$$< G;+,\bullet > \quad \text{algebra} - \text{xalqa} \overset{df}{\Leftrightarrow}$$

$$1. \forall x,\ y \in G\ \left[x + y = y + x\right],$$
$$2. \forall x, y, z \in G\ \left[(x + y) + z = x + (y + z)\right],$$
$$3. \exists 0 \in G\ \forall x \in G\ \left[x + 0 = 0 + x = x\right],$$
$$4. \forall x \in G \exists (-x) \in G\ \left[x + (-x) = -x + x = 0\right],$$
$$5. \forall x, y, z \in G\ \left[x \bullet (y + z) = x \bullet y + x \bullet z\right],$$
$$6. \forall x, y, z \in G\left[(y + z) \bullet x = y \bullet x + z \bullet x\right].$$

Predikatlar algebrasida yechilish muammosi

Predikatlar algebrasi uchun yechilish muammosi mulohazalar algebrasidagidek qo`yiladi:

Predikatlar algebrasining ixtiyoriy formulasi U shu algebrada bajariluvchimi yoki bajariluvchi emasmi ekanligini aniqlab beruvchi yagona usul mavjudmi?

Agar ushbu problema mulohazalar algebrasi uchun oson yechilgan bo`lsa, predikatlar algebrasi uchun bu problemani hal etish katta qiyinchiliklarga duch keladi. O`tgan asrning 30-yillarida algoritm tushunchasini aniq ta'rif berilgandan so`ng mazkur muammo ijobiy hal etilishi mumkin emasligi, ya'ni izlangan algoritm mavjud emasligi ma'lum bo`lib qoldi. Predikatlar algebrasi uchun yechilish muammosi ijobiy yechilmasligini birinchi marta amerikalik matematik A.Chyorch isbotladi.

Yechilish muammosi predikatlar algebrasi uchun ijobiy yechilmasada, predikatlar algebrasi formulalarining bazi sinflari uchun bu muammo ijobiy yechiladi.

Biz quyida predikatlar algebrasi formulalarining qanday sinflari uchun yechilish muammosi ijobiy hal etilishi haqida sharh beramiz.

Tarkibida faqat unar (bir argumentl, bitta predmet o`zgaruvchiga bog`liq bo`lgan) predikatlar qatnashgan formulalar uchun yechilish problemasi ijobiy hal etilishi quyidagi teoremadan ko`rinadi. [1]**(51-bet)**

3-teorema. *Tarkibiga n ta unar predikat kirgan predikatlar algebrasining U formulasi biror M to`plamda bajariluvchi bo`lsa, bu formula elementlari soni 2^n dan katta bo`lmagan $M^{'}$ to`plamda ham bajariluvchi bo`ladi.*

Ushbu teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. *Tarkibiga n ta faqat unar predikat kirgan U formula elementlari soni 2^n dan ko`p bo`lmagan istalgan to`plamda AR formula bo`lsa, U formula ixtiyoriy to`plamda AR formula bo`ladi.*

Lyovgeymning quyidagi teoremasi predikatlar algebrasining katta sinfni tashkil qiluvchi formulalari uchun yechilish problemasi hal qiladi.

4-teorema. *Agar predikatlar algebrasining U formulasi biror cheksiz to`plamda bajariluvchi bo`lsa, u holda u sanoqli to`plamda ham bajariluvchi bo`ladi.*

Lyovgeymning quyidagi teoremasi ham diqqatga sazovordir.

5-teorema. *Erkin predmet o`zgaruvchilar qatnashmagan ( ammo, balki individual predmetlar qatnashgan ) U formula biror to`plamda bajariluvchi bo`lsa, bu formula chekli yoki sanoqli to`plamda ham bajariluvchi bo`ladi.*

Asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (48-51 betlar)

10. Mendelson E. Vvedenie v matematicheskuyu logiku. M. «Nauka». 1984
11. Lavrov I.A., Maksimova L.L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M. «Nauka» 1995

Ma'ruza 24-25: Primitiv rekursiv va qismiy rekursiv funksiyalar (4 soat)

Reja:

1. **Primitiv rekursiya operatori.**
2. **Minimizatsiya operatori.**
3. **Rekursiv funksiyalar.**

Rekursiv funksiyalar

$X \subset N$ va $Y \subset N$ bo`sh bo`lmagan to`plamlar berilgan bo`lsin.Agar X to`plamning ba'zi elementlariga $Y$ to`plamning bir qiymatli aniqlangan elementlari mos qo`yilgan bo`lsa u holda X to`plamda f qismiy funksiya berilgan deyiladi.

$f: X \to Y$ qismiy funksiya $X = Z^n$ bo`lsa hold $f$ $Z$ to`plamda berilgan

n argumentli funksiya deyiladi.Qismiy funksiyalar orasida qismiy arifmetik yoki sonli funksiyalar alohida ahamiyatga ega. [3] **(112-113bet)**

$f: Z^n \to Y$ qismiy funksiya $Z = N$ to`plamda aniqlangan bo`lib, qiymatlar to`plami ham natural sonlar to`plamida bo`lsa, bunday qismiy funksiya n argumentli qismiy sonli funksiya deyiladi. $f: N^m \to N$ m-argumentli qismiy sonli funksiya $(x_1, x_2, ..., x_m) \in N^m$, $f$ funksiya $(x_1, x_2, ..., x_m)$ ga $y$ natural sonni mos qo`ygan bo`lsa u holda $f(x_1, x_2, ..., x_m) = y$ kabi yoziladi.

Agar $f^m(x_1, x_2, ... x_m)$ m-o`rinli funksiya uchun $\delta_{f^m} = N^m$ ($\delta_{f^m} - f^m$

funksiyaning aniqlanish sohasi) bo`lsa f^m hamma yerda aniqlangan funksiya deyiladi.

Hamma yerda aniqlangan sonli funksiyaga misollar:

$$a) f(x) = x + 1$$
$$b) y = x^2 + 1$$
$$c) f(x, y) = x^y$$
$$d) f(x, y)\begin{cases} x - y \\ 0 \end{cases}$$
$$e) f(x) = \left[e^x\right]$$

Endi esa qismiy sonli funksiyalarga misol keltiramiz:

$$a) f(\text{x})=\frac{x}{2}$$
$$b) f(x) = x - y$$
$$c) f(x) = \sin x$$
$$d) f(x) = \sqrt{x}$$

Hamma yerda aniqlangan quyidagi funksiyalar

$$\begin{cases} s(x) = x + 1 \\ \theta(x) = 0 \\ I_m^n(x_1, x_2, \ldots x_n) = x_m \quad (1 \le m \le n) \end{cases}$$

alohida ahamiyatga ega bo`lib, ular sodda funksiyalar deyiladi.

$s(x)$ -„keyin kelish" funksiyasi bo`lib u natural son berilganda undan keyin keluvchi natural sonni hisoblaydi.

$\theta(x)$ -nol funksiya

$I_m^n(x_1, x_2, \ldots x_n) = x_m$ m-argumentni tanlovchi funksiya.

Endi ular ustida bajariladigan asosiy amallarni ko`rib chiqamiz, ular operatorlar deyiladi.

I. Superpozitsiya operatori (S-operator)[3](112-113bet)

$g^m, f_i^n \ (i = 1, m)$-qismiy sonli funksiyalar berilgan bo`lsin. U holda

$h(x_1,x_2,...x_n)=g^m(f_1(x_1,x_2,...x_n),...,f_m(x_1,x_2,...x_n))$ bo`lsa $\boldsymbol{h}$ funksiya g^m, f_i^n $(i=1,m)$ funksiyalardan superpozitsiya operatori yordamida hosil qilingan deyiladi hamda $h=S(g,f_1,f_2,...f_n)$ kabi belgilanadi.

Agar $g,f_1,f_2,...f_n$ lar hamma yerda aniqlangan funksiyalar bo`lsa $S(g,f_1,f_2,...f_n)$ ham hamma yerda aniqlangan funksiya bo`ladi.

1) $\quad f(x)=x+n$

$$f(x)=\underbrace{S(S(S....S(x).........)}_{n\ marta}$$

2) $\quad f(x)=n$

$$f(x)=\underbrace{S(S(S....S}_{n\ marta}(0(x))....))$$

II. Primitiv rekursiya operatori (PR-operator) [3] (112-113bet)

$h^{n+2}(x_1,x_2,......,x_n,y,z)$, $g(x_1,x_2,...,x_n)$ qismiy funksiyalar bo`lsin, $f(x_1,x_2,..,x_n,x_{n+1})$ funksiyani

$$f^{n+1}(x_1,x_2,..,x_n,0)=g^n(x_1,x_2,..,x_n)$$
$$f^{n+1}(x_1,x_2,..,x_n,y+1)=h^{n+2}\left(x_1,x_2,..,x_n,y,f^{n+1}(x_1,x_2,..,x_n,y)\right)$$

sxema yordamida hosil qilish mumkin bo`lsa u holda berilgan funksiyalardan

f^{n+1} funksiyani primitiv rekursiv operator yordamida hosil qilingan deyiladi.

h^{n+2}, g^n lar hamma yerda aniqlangan funksiyalar bo`lsa , tabiiyki $f(x_1,x_2,...x_n,y)$ ham hamma yerda aniqlangan funksiya bo`ladi. $n=0$ uchun ko`rib chiqamiz. Bunda $g$, 0 argumentli funksiya bo'lib, ya'ni $g=a$, $a\in N, g$ esa ikki argumentli binar funksiya bo`ladi. U holda primitiv rekursiya operatorining ko`rinishi quyidagicha

$$\begin{cases} f(0) = a \\ f(y+1) = g(y, f(y)) \end{cases}$$

1-misol.

1. $f(x,y) = x + y$

$$\begin{cases} f(x,0) = g(x) = I_1^1(x) \\ f(x,y+1) = h(x,y,f(x,y)) = s(I_3^3(x,y,f(x,y)) \end{cases}$$

Buni tog`riligini tekshirish uchun quyidagi xusisiy hollarni ko`rib chiqamiz:

$$\begin{aligned} &f(x,0) = x \\ &f(x,1) = f(x,0) + 1 = x + 1 \\ &f(x,2) = f(x,1) + 1 = x + 2 \\ &f(x,3) = f(x,2) + 1 = x + 3 \\ &f(x,4) = f(x,3) + 1 = x + 4 \end{aligned}$$

berilgan funksiya primitiv rekursiv operatori yordamida hosil qilindi, demak berigan funksiyamiz primitive rekursiv funksiya ekan.

2. $f(x,y) = xy$

$$\begin{cases} f(x,0) = g(x) = \theta(x) = 0 \\ f(x,y+1) = h(x,y,f(x,y)) = I_1^3(x,y,f(x,y)) + I_3^3(x,y,f(x,y)) = \\ = x + f(x,y) \end{cases}$$

Buni tog`riligini tekshirish uchun quyidagi xusisiy hollarni ko`rib chiqamiz:

$$\begin{aligned} &f(x,1) = x + f(x,0) = x + 0 = x \\ &f(x,2) = x + f(x,1) = x + x = 2x \end{aligned}$$

3. $f(x,y) = x^y, (0^0 = 1)$

$$\begin{aligned} &f(x,0) = 1 \\ &f(x,y+1) = x \cdot f(x,y) \end{aligned}$$

Buni tog`riligini tekshirish uchun quyidagi xusisiy hollarni ko`rib chiqamiz:

$f(x,1) = x \cdot f(x,0) = x$
$f(x,2) = x \cdot f(x,1) = x \cdot x = x^2$

III. Minimizatsiya operatori [3] (112-113bet).

$g^{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$, $f^n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qismiy funksiyalar bo`lsin, agar $f^n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiya aniqlangan va $y$ ga teng faqat va faqat shu holdaki $g(x_1, x_2, \ldots x_n, 0), \ldots g(x_1, x_2, \ldots x_n, y-1)$ lar aniqlangan va noldan farqli bo`lib $g(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$ bo`lsa, $f^n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiyasi $g^{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ funksiyadan minimizatsiya operatori orqali hosil qilingan deyiladi va quyidagi ko`rinishda belgilanadi:

$$f^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mu y[g^{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0]$$

2-misol.

1. $K(x, y)$-eng kichik umumiy karrali. $K(x,0) = K(0, y) = 0$ deb qabul qilamiz.

$$K(x, y) = \mu z[z \cdot \overline{sg}(x \cdot y) + sg(x \cdot y)[\overline{sg}z + rest(z, x) + rest(z, y)] = 0$$

sxema bo`yicha hisoblanadi.

Misol uchun bu sxema k(6,8)=24 ekanini hisoblab beradi.

2. $\pi(y) - y$ dan oshmaydigan tub sonlar soni. $p(x) - x$ tub son.

$$
\begin{array}{ll}
\pi(0)=0 & p(0)=2 \\
\pi(1)=0 & p(1)=3 \\
\pi(2)=1 & p(2)=5 \\
\pi(3)=2 & p(3)=7 \\
\pi(4)=2 & p(4)=11 \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

$p(x)=\mu y\left[\left|\pi(y)-1\right|=0\right]\leq 2^{2^x}$ sxema yordamida hisoblanadi.

Rekursiv funksiyalar $[3]$ **(112-113bet).**

1-ta'rif . Eng sodda funksiyalarga superpozitsiya va primitiv rekursiya operatorlarini chekli marta qo`llab hosil qilingan har qanday funksiya primitiv rekursiv funksiya deyiladi.

Ushbu ta'rifdan ko`rinadiki, bazis funksiyalarga dastlabki primitiv rekursiv funksiyalar deyilib, boshqa primitive rekursiv funksiyalar ulardan S-operator va PR-operatorlar yordamidahosil qilinadi.Primitiv rekursiv funksiya tushunchasiga yana ta'rif berish mumkin.

2-ta'rif. Eng sodda funksiyalarga $S,\ PR\ va\ \mu$ operatorlarni chekli marta qo`llash natijasida hosil bo`lgan har qanday funksiya qismiy rekursiv funksiya deyiladi.

Ushbu ta'rifdan ko`rinadiki, har qanday primitiv rekursiv funksiya qismiy rekursiv funksiya, ammo har qanday qismiy rekursiv funksiya primitive rekursiv funksiya bo`lishi shart emas

$F_{q.r}$ -qismiy rekursiv funksiyalar to`plami

$F_{p.r}$ -primitiv rekursiv funksiyalar to`plami

$$F_{p.r}\subset F_{q.r}$$

3-ta'rif . Hamma yerda aniqlangan qismiy rekursiv funksiya umumrekursiv funksiya deyiladi.

$F_{u.m.r}$ -umumrekursiv funksiyalar

$$F_{u.m.r} \subset F_{q.r}$$

Funksiyalarning har qanday chekli to`plamidan $S,\ PR,\ \mu y$ operatorlarni bir martadan qo`llash natijasida quvvati sanoqlidan yuqori bo`lgan funksiyalar to`plamini hosil qilish mumkinligi tufayli $F_{p.r},\ F_{q.r}\ va\ F_{u.m.r}$ to`plamlarning har biri sanoqli to`plamdir.

Asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (888-988 betlar)

2.Rodjers H. Teoriya rekursivnih funktsiy I effektivnaya vichislimost. Moskva. „Mir"-1972.

3.Lavrov I.A., Maksimova L.L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M. «Nauka» 1995

Ma'ruza 26: Rekursiv va rekursiv sanaluvchi to`plamlar

Reja:

4. **Rekursiv to`plamlar.**
5. **Rekursiv sanaluvchi to`plamlar.**
6. **Post teoremasi.**

Rekursiv va rekursiv sanaluvchi to`plamlar va ularning xossalari

A naturalsonlarto`plami N={0,1,2,…..n,…}ning qism to`plami bo`lsin.

1-ta'rif .

$$\chi_A(x) = \left\{\begin{matrix} 1 & agar\ x \in A \\ 0 & agar\ x \notin A \end{matrix}\right\}$$

funksiya A to`plamning harakteristik funksiyasi deyiladi. [2]**(82-83 bet)**

Ushbu ta'rifdan to`plamning harakteristik funksiyasi hamma yerda aniqlangan funksiya ekanligini ko`ramiz.

2-ta'rif . Harakteristik funksiyasi umumrekursiv bo`lgan to`plam rekursiv to`plam deyiladi.
Xususan harakteristik funksiyasi primitiv rekursiv bo`lgan to`plam primitiv rekursiv to`plam deyiladi.

1-misol.

$A = \varnothing$ **,** $A = N$ **,** $A = N_2$ lar rekursiv to`plamlardir. Ularning harakteristik funksiyalari mos ravishda

$$\chi_{\varnothing}(x) = 0$$

$$\chi_N(x) = 1$$

$$\chi_{N_2} = rest(x,2)$$

1-teorema. Agar A va B lar rekursiv to`plamlar u holda $A \cup B$, $A \cap B$ va $\overline{A}$ lar ham rekursiv to`plamlardir.

Isbot: $\chi_A(x), \chi_B(x)$ mos ravishda A va B larning harakteristik funksiyalari bo`lsin.

$$\chi_{A \cup B}(x) = sg(\chi_A(x) + \chi_B(x))$$
$$\chi_{A \cap B}(x) = sg(\chi_A(x) \bullet \chi_B(x))$$
$$\chi_{\overline{A}}(x) = \overline{sg(\chi_A(x))}$$

lar mos ravishda $A \cup B$, $A \cap B$ va $\overline{A}$ larning harakteristik funksiyasi bo`ladi.Bundan ko`rinib turibdiki $\chi_{A \cup B}(x)$, $\chi_{A \cap B}(x)$, $\chi_{\overline{A}}(x)$ lar primitiv rekursiv funksiyadir.

Rekursiv to`plamlar algoritmlar nazariyasida asosiy ro`llardan birini o`ynaydi. $x$ natural sonning $A$ to`plamga kirishi yoki kirmasligi chekli qadamda ko`rsatib beradigan, ya'ni $A$ to`plamning harakteristik funksiyasi qiymatlarini hisoblaydigan algaritmni topish kerak. Bu A to`plamga „kirish muammosi" deyilib, bunday algaritmlarning mavjud bo`lishi A to`plamning haraktetistik funksiyasining umumrekursiv bo`lishiga teng kuchlidir. Shuning uchun rekursiv to`plamlarni „kirish muammosi" algaritmik yechiluvchi to`plamlar deb qarash mumkin.

3-ta'rif. Bo`sh yoki biror umumrekursiv funksiya qiymatlarini to`plamidan iborat bo`lgan to`plam rekursiv sanab chiqiluvchi to`plam deyiladi. O`znavbatida mazkur funksiya to`plamni sanab chiquvchi funksiyasi deyiladi. [2]**(82-83 bet)**

1. Toq sonlar to`plami, 3ga bo`lganda 2qoldiq beradigan natural sonlar:5,8,11,….,
barcha natural sonlar to`plami rekursiv sanab chiqiluvchi to`plamdir. Ularni mos ravishda $f(x)=2x+1$

$f(x)=3x+2,$

$f(x)=x$

funksiyalar sanab chiqadi.

$$E_1=\{0,2,4,6,...\}$$

$$E_2=\{2,3,5,7,11,..\}$$

$$E_3=\{2^0,2^1,2^2,2^3,...\}=\{1,2,4,8,..2^n..\}$$

ham rekursiv sanab chiqiluvchi to`plamlardir ularni sanab chiquvchi funksiyalari mos ravishda

$$\varphi(x)=2x,$$

$$\varphi(x)=Px$$

$$\varphi(x)=2^x \text{ lardir.}$$

Rekursiv sanab chiqiluvchi to`plam ta'rifidan ko`ramizki, A rekursiv sanab chiqiluvchi to`plam, $\varphi(x)$ uni sanab chiquvchi umumrekursiv funksiyasi bo`lsa u holda $A=\{\varphi(0),\varphi(1),\varphi(2),...\}$ bo`lib u sanoqlidir.Rekursiv sanab chiqiluvchi to`plamlarning birlashmasi va kesishmasi yana rekursiv sanab chiqiluvchi to`plam bo`ladi.

Masalan: $f(x)$ va $g(x)$ mos ravishda rekursiv sanab chiqiluvchi A va B to`plamlarning sanab chiquvchi funksiyasi bo`lsin.

$$h(x)=\begin{cases} f(\frac{x}{2}) & x \text{ juft bo`lsa} \\ g(\frac{x-1}{2}) & x \text{ toq bo`lsa} \end{cases}$$

funksiya $A\cup B$ ni sanab chiqadi.
Rekursiv sanab chiquvchi to`plamning to`ldiruvchisi rekursiv sanab chiqiluvchi to`plam bo`lmasligi mumkin. [2]**(82-83 bet)**

Umumrekursiv funksiyalar sinfi $F_{u.r.}$ sanoqli to`plam bo`lganligi, har bir umumrekursiv funksiya esa faqat bitta to`plamni sanab chiqa olishi sababli rekursiv sanab chiqiluvchi to`plamlar sinfi sanoqlidir. Ma'lumki barcha natural sonlar to`plamining barcha to`plamostilari sinfi sanoqsiz to`plamdir. Bu esa rekursiv sanab chiqilmaydigan to`plamlar mavjud deyishga asos bo`ladi.

2-teorema. Agar A rekursiv to`plam bo`lsa u holda u rekursiv sanaluvchi to`plam bo`ladi. [2]**(82- bet)**

Isbot. Mumkin bo`lgan 3ta holni qaraymiz.

a) $A=\varnothing$ bo`lsa teorema o`rinli ekani ma'lum

b) $A=\{a_0,a_1,...a_k\}$ chekli to`plam bo`lsin. U holda bu to`plamni sanab chiquvchi funksiya

$$f(x)=\begin{cases} a_x & x\le k \\ a_k & x>k \end{cases} \text{ bo`ladi.}$$

v) A cheksiz to`plam $\chi_A(x)$ ning harakteristik funksiyasi bo`lsin, u holda

$$f(0)=\mu y\left[\chi_A(y)\right]=1$$

$$f(x+1)=\mu y\left[\chi_A(y)=1\wedge(y>f(x))\right]$$

yordamida aniqlangan $f(x)$ funksiya A to`plamning sanab chiquvchi funksiyasidir.

2-misol. $K=\{x\,|\,\varphi_x(x)-yaqinlashuvchi\}$ -rekursiv sanaluvchi to`plam lekin rekursiv to`plam emas.

3-misol.

$M=\{x\,|\,\varphi_x-umumrekursiv\}$ -rekursiv sanaluvchi to`plam emas. [2]**(83- bet)**

3-teorema. (Post). A rekursiv to`plam bo`lishi uchun A ning o`zi va $\overline{A}=N\setminus A$ to`ldiruvchisi ham rekursiv sanaluvchi bo`lishi zarur va yetarli. [2]**(82- bet)**

Isbot. Zarurligi: 2-teoremaga ko`ra $A$ rekursiv to`plam bo`lsa $A$ rekursiv sanab chiqiluvchi to`plam bo`ladi. 1-teoremaga ko`ra esa $\overline{A}$ ham rekursiv to`plam va demak $\overline{A}$ rekursiv sanaluvchi to`plam bo`ladi.

Yetarliligi: A *va* $\overline{A}$ lar rekursiv sanaluvchi to`plamlar bo`lsin. $A=\varnothing$ bo`lsa yetarliligi ravshandir. Agar $A\neq\varnothing,\overline{A}\neq\varnothing$ bo`lsa u holda A *va* $\overline{A}$ to`plamlar mos ravishda qandaydir $f(x)$ *va* $g(x)$ umumrekursiv funksiyalar qiymatlari to`plamidan iborat bo`ladi.

Ushbu algaritmik jarayonni qaraylik.

a natural son bo`lsa, u $A$ to`plamga kiradimi yoki $\overline{A}$ ga kiradimi degan masalani hal etish uchun $f(0),g(0),f(1),g(1),...,f(n),g(n),...$ sonlarni ketma-ket qarab chiqamiz.

Agar a $f(x)$ funksiyaning qiymati bo`lsa, u holda $a\in A$, agar $a$ $g(x)$ funksiyaning qiymati bo`lsa $a\in\overline{A}$ bo`lib, $A\cup\overline{A}=N$ bo`lgani uchun a albatta $f(x)$ yoki $g(x)$ ning qiymatlaridan iborat bo`ladi. Boshqacha aytganda $A$ to`plamning harakteristik funksiyasi to`liq aniqlangan umumrekursiv funksiya, $A$ ning o`zi esa rekursiv to`plam bo`ladi.

4-ta'rif. Shunday $f(x)$ umumrekursiv funksiya mavjud bo`lsaki, $A$ to`plam $f(x)$ ning qiymatlar to`plamidan iborat bo`lib $f(x)$ o`suvchi funksiya bo`lsa u holda A o`sib borish tartibida rekursiv sanaluvchi to`plam deyiladi.

4-misol. 1,3,5,7,9,… toq sonlar to`plami o`sib borish tartibida rekursiv sanaluvchi to`plamlardir. $f(x)=2x+1$ o`suvchi umumrekursiv funksiyaning qiymatlari to`plamidan iboratdir.

4-teorema. A cheksiz to`plam bo`lsin. A rekursiv to`plam bo`lishi uchun u o`sib borish tartibida rekursiv sanaluvchi to`plam bo`lishi zarur va yetarli.

Isbot. Zarurligi: A cheksiz va rekursiv to`plam bo`lsin. χ_A ning harakteristik funksiyasi

$$f(0)=\mu y\left[\chi_A(y)\right]=1$$

$$f(x+1)=\mu y\left[\chi_A(y)=1\wedge(y>f(x))\right]$$

Sxema yordamida hosil qilingan funksiya umumrekursiv hamda A to`plam bu funksiya qiymatlari to`plamidan iborat ekanligi 2-teoremadan ma'lum. $f(x)$ o`suvchi funksiya ekanligi ravshandir. Demak $A$ o`sib borish tartibida rekursiv sanaluvchi to`plamdir.

Yetarliligi: $f(x)$ ni A o`sib borish tartibida sanovchi funksiyasi deymiz. $a$ natural sonnig $A$ ga kirish yoki kirmasligini aniqlash uchun $f(x)$ ning qiymatlarini hisoblay boshlaymiz. Bu jarayonni $f(x)$ ning $a$ dan katta qiymati paydo bo`lguncha davom ettiramiz. $f(0), f(1),.....f(x)...$ larni hisoblab, a dan katta son paydo bo`lsa $a\in A$, paydo bo`lmasa $a\notin A$ ekanligi ayondir. Demak A to`plamning harakteristik funksiyasi hamma yerda aniqlangan aniqlangan funksiya bo`lib, uning qiymatlarini hisoblaydigan jarayon mavjuddir. Demak u umumrekursiv funksiya, A esa rekursiv to`plam ekan.

5-teorema. Har qanday cheksiz rekursiv sanaluvchi to`plam cheksiz rekursiv qism to`plamiga ega. [2]**(84- bet)**

Isbot. A cheksiz rekursiv sanaluvchi to`plam bo`lsin.

$$g(0)=f(0)$$

$$g(x+1)=f(\mu y[f(y)>g(x)\})$$

sxema yordamida berilgan funksiyani qaraylik. Bu funksiyaning qiymatlari to`plami qandaydir B to`plamdan iborat bo`lib, $g(x)$ uni o`sib borish tartibida sanab chiqadi. Oldingi teoremaga asosan B cheksiz va rekursiv to`plamdir. $B\subset A$ ekanligi $g(x)$ funksiyaning aniqlanishidan kelib chiqadi.

Asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (888-988 betlar)

2.Rodjers H. Teoriya rekursivnih funktsiy I effektivnaya vichislimost. Moskva. „Mir"-1972.

Ma'ruza 27: Rekursiv sanaluvchi to`plamlar haqida asosiy teorema

Reja:

1. **Rekursiv sanaluvchi to`plamlar haqidagi asosiy teorema.**
2. **Asosiy teoremaning natijalari.**
3. **Rekursiv bo`lmagan ammo rekursiv sanaluvchi bo`ladigan to`plam.**

Rekursiv sanaluvchi to`plamlar haqidagi asosiy teorema

Navbatdagi teorema rekursiv sanaluvchi to`plamlar uchun bir necha o`ziga hos xususiyatlarni ko`rsatadi. Bu oddiy lekin muhim natijadir. [2]**(82-83 bet)**

1-teorema. (Rekursiv sanaluvchi to`plamlar haqidagi asosiy teorema) $A$ rekursiv sanaluvchi to`plam bo`lishi uchun $A$ biror qismiy rekursiv funksiyani aniqlanish sohasi bo`lishi zarur va yetarlidir. [2]**(84- bet)**

Isbot. Zarurligi:a) $A=\varnothing$ bo`lsa ψ sifatida hech qayerda aniqlanmagan qismiy rekursiv funksiyani olamiz. U holda $A=\arg\psi$.

b) $A\neq\varnothing$ biror f umumrekursiv funksiyaning qiymatlari sohasi bo`ladi.

ψ funksiyani quyidagicha aniqlaymiz:

$\psi(x)$ ni hisoblash uchun f funksiyaning qiymatlari to`plamini hosil qilish kerak. A gar $x$ $f$ funksiyaning qiymatlari to`plamidan hosil bo`lsa $x$ ni qiymatini olish kerak. $\psi$ qismiy rekursiv funksiya bo`lib, $A=Arg\psi$ ekani ko`rinib turibdi.

Yetarliligi: ψ qismiy rekursiv funksiya va $A=\arg\psi$ bo`lsin. Agar $A\neq\varnothing$ bo`lsa A ni hosil qiluvchi effektiv jarayonni aniqlaymiz. Bu jarayon bosqichlar orqali hosil qilinadi.

1-bosqich. $\psi(0)$ ni hisoblash uchun 1-qadam bajariladi agar $\psi(0)$ ni hisoblash 1-qadamda yakunlansa 0 ni A to`plam ro`yxatiga joylashtiriladi.

n+1-bosqich.

$\psi(0),\psi(1),...\psi(n)$ larni hisoblash uchun n+1 qadam bajariladi $\psi(k)$ ni hisoblash jarayoni (n+1)-qadamda yoki avvalroq yakunlansa bunday k larni , $0\leq k\leq n$, A to`plamlar ro`yxatiga qo`shiladi.

Endi η ni quyidagicha aniqlaymiz:

$\eta(0)$ =ro`yxatdagi birinchi element.

$$\eta(x+1)=\begin{cases} \mu y[y \text{ bu ro`yxatga } x+1 \text{ bosqichda qo`shilgan} \\ \text{va } y \notin \{\eta(0),\eta(1),...\eta(x)\}] \text{ agar shunday} \\ y \text{ mavjud bo`lsa;} \\ \quad \eta(0) \qquad\qquad\qquad \text{qolgan hollarda} \end{cases}$$

Chyorch tezisiga binoan η qismiy rekursiv funksiya bo`ladi. Agar $A=\varnothing$ bo`lsa u holda A ta'rifga asosan rekursiv sanaluvchi to`plam bo`ladi.

Agar $A\neq\varnothing$ bo`lsa $\eta$ qurilishga binoan hamma yerda aniqlangan bo`ladi va $Val\eta = Arg\psi = A$ shunday qilib A rekursiv sanaluvchi to`plam bo`ladi.

Bu teoremadan bir qancha natijalar kelib chiqadi.

1-natija. A rekursiv sanaluvchi to`plam bo`lishi uchun A ning biror qismiy rekursiv funksiyasi qiymatlar sohasi bo`lishi zarur va yetarlidir. [2]**(86-bet)**

Isbot: **Zarurligi:**

1) asosiy teoremani 1-holidek isbotlanadi.
2) Teoremani isbotida qurilgan ψ funksiyadan

$A = Arg\psi = Val\psi$ bo`lgani uchun bu yerda ham foydalanish mumkin.

Yetarliligi: Huddi avvalgidek A to`plam uchun avval tashkil etilgan ro`yxatga elementlarning kirishi emas balki chiqishi bosqichlari bo`yicha qo`shib boriladi.Shunday qilib , A to`plam qismiy rekursiv funksiyaning aniqlanish sohasi bo`lishi uchun zarur va yetarli shart A ning qismiy rekursiv funksiyaning qiymatlari sohasi bo`lishdan iborat.

Quyidagi natija bu tasdiqni kuchliroq shaklda ifodalaydi.

2-natija. Shunday f *va* g umumrekursiv funksiyalar mavjudki, barcha x lar uchun

$$Val\varphi_{f(x)} = Arg\varphi_x$$
$$Arg\varphi_{g(x)} = Val\varphi_x$$

bo`ladi. [2]**(86- bet)**

1-teorema rekursiv sanaluvchanlikni aniqlashni qulay usulini beradi. Undan foydalanib ko`plab to`plamlarning rekursiv sanaluvchi ekanini ko`rsatish mumkin. Xususan $\{x \mid \varphi_x(x) \ \ yaqinlashadi\}$ shu to`plamni rekursiv sanaluvchi ekanini ko`rsatish mumkun. Avval bu to`plamga maxsus nom beramiz.

1-ta'rif. $K = \{x \mid \varphi_x(x) \ \ yaqinlashadi\} = \{x \mid x \in W_x\}$.

2-ta'rif . $W_x = Arg\varphi_x$

2-teorema. Rekursiv bo`lmagan ammo rekursiv sanaluvchi bo`ladigan to`plam mavjuddir va $K$ shunday to`plam bo`ladi. [2]**(88- bet)**

Isbot:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & agar \ \ \varphi_x(x) \ \ yaqinlashsa \\ uzoqlashadi, & agar \ \ \varphi_x(x) \ \ uzoqlashsa \end{cases}$$

Qurilishidan ko`rinib turibdiki $\psi$ qismiy rekursiv funksiya bo`ladi va $K = Arg\psi$ demak 1-teoremaga asosan K to`plam rekursiv sanaluvchi to`plam bo`ladi.

Endi K to`plamnbing rekursiv emasligini isbotlaymiz.Teskarisini faraz qilamiz ya'ni $K$ rekursiv to`plam bo`lsin 2-teoremaga asosan biror m uchun $\overline{K} = W_m$ bo`ladi. U holda K to`plamning ta'rifiga asosan $m \in K \Leftrightarrow m \in W_m$, biroq m ning tanlanishiga binoan $m \in \overline{K} \Leftrightarrow m \in W_m$. Hosil qilingan zidlik K to`planning rekursiv bo`la olmasligini ko`rsatadi.

Shunday qilib biz K rekursiv sanaluvchi to`plam bo`lgani uchun $\overline{K}$ to`plam rekursiv sanaluvchi bo`lmaydi , bundan tashqari 4- teoremaga asosan K to`plam o`sish tartibida rekursiv sanaluvchi to`plam ham bo`la olmaydi.

3-teorema. Agar ψ qismiy rekursiv funksiya va A rekursiv sanaluvchi bo`lsa u holda $\psi^{-1}(A)$ rekursiv sanaluvchi to`plam bo`ladi. [2]**(88- bet)**

Rekursiv va rekursiv sanaluvchi to`plam tushunchalari faqat natural sonlar qism to`plamlari uchungina emas balki natural sonlar juftliklari, uchliklari, umuman n-liklari to`plamlari uchun ham kiritilishi mumkin. Buning uchun natural sonlar barcha juftliklarini natural sonlar bilan nomerlab chiqish lozim.

$N^2, N^3, ..., N^n, ... n = 2,3....$ to`plamlar elementlari natural sonlar bilan nomerlab chiqilgach endi masalan natural sonlar juftliklari to`plami N^2 ning qism to`plami rekursiv yoki rekursiv sanaluvchi to`plam ekanligi uning elementlarini nomerlaridan tuzilgan to`plamning rekursiv yoki rekursiv sanaluvchi to`plam ekanligini orqali aniqlanadi.

Asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (888-988 betlar)

9. Rodjers H. Teoriya rekursivnih funktsiy I effektivnaya vichislimost. Moskva. „Mir"-1972.

10. Lavrov I.A., Maksimova L.L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M. «Nauka» 1995

Amaliy mashg'ulot 1. To'plam. To'plamlar ustida amallar

Ishdan maqsad: To'plamlar ustida bajariladigan asosiy amallarga doir misollarni yechishni o'rganish.

Masalaning qo'yilishi: Tinglovchi variant bo'yicha berilgan ikkita to'plamning tengligini isbotlay olishi lozim.

Amaliy topshiriqlar

1. Agarda $A=\{a,b,c,\}$, $B=\{b,c,d,e\}$ bo‘lsa, $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, $A\Delta B$ lar hisoblansin.
2. A va B to‘plamlar uchun $A\subseteq B$ bo‘lishi uchun $A\cap B=A$ bo‘lishi zarur va etarli ekanligi ko‘rsatilsin.
3. A-to‘plam o‘nta elementdan iborat bo‘lsa, $P(A)$ nechta elementdan iborat bo‘ladi?
4. $A=\{1,2,3,...,n\}$ bo‘lsa, $P(A)$ nechta elementdan iborat bo‘ladi?
5. A va B to‘plamlar U to‘plamning chekli qism to‘plamlari bo‘lsa, quyidagilar isbotlansin:

$$a)\ agarda\quad A\cap B=\varnothing\quad bo'lsa,\ n(A\cup B)=n(A)+n(B);$$

$$b)\ n(A\setminus B)=n(A)\setminus n(A\cap B);$$

$$в)\ n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

6. Quyida keltirilgan munosabatlar o‘rinli bo‘lsa, isbotini keltiring, aks holda o‘rinli emasligini tasdiqlovchi misol keltiramiz:

$$a)\ A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C);$$

$$b)\ A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cup C;$$

$$в)\ (\overline{A\setminus B})=(\overline{B\setminus A});$$

$$г)\ A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C);$$

$$d)\text{agar}\ \ A\Delta C=B\Delta C\ \ \text{bo'lsa},\ \ A=B\ \ \text{bo'ladi.}$$

Asosiy darsliklar va o‘quv qo‘llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012.(115-123 betlar)

11.Mendelson E. Vvedenie v matematicheskuyu logiku. M.: Nauka, 1984

12.YUnusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.

13.Lavrov I. A., Maksimova L. L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M.: Fiz.-mat. literatura, 1995.

Amaliy mashg'ulot 2-3. Binar munosabatlar va funksiyalar. Tartib munosabatlar turlari (4 soat)

Ishdan maqsad: Binar munosabatlar ustida bajariladigan asosiy amallarga doir misollarni yechishni o'rganish.

Masalaning qo'yilishi: Tinglovchi variant bo'yicha berilgan binar munosabatlar turlarini aniqlay olishi lozim.

Amaliy mashg'ulotda echish uchun masalalar

M i s o l. Ushbu $A=\{-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$ to'plamni olaylik.

Bu to'plamda quyidagi binar munosabatlarini turlarini aniqlang :

1) R_1 munosabat: $\forall x,y\in A$, $xR_1y: x-y$ ayirmaning 3 ga qoldiqsiz bo'linishini ifodalasin;

2) R_2 munosabat barcha $x,y\in A$ lar uchun $xR_2y: x$ ning y dan kichik yoki tengligini ifodalasin;

3) R_3 munosabat barcha $x,y\in A$ lar uchun $xR_3y: y$ ning x ga qoldiqsiz bo'linishini ifodalasin;

4) R_4 munosabat barcha $x,y\in A$ lar uchun $xR_4y: 0 \quad x\cdot y$ ko'paytmaning manfiy emasligini ifodalasin;

5) R_5 munosabat barcha $x,y\in A$ lar uchun $xR_5y: x$ ninig kvadrati y ning kvadratiga teng ekanligini ifodalasin.

Asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (584-586 betlar)

2.Mendelson E. Vvedenie v matematicheskuyu logiku. M.: Nauka, 1984

3.YUnusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.

4.Lavrov I. A., Maksimova L. L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M.: Fiz.-mat. literatura, 1995.

Amaliy mashg’ulot 4: Fikrlar mantiqi. Fikrlar mantiqining tatbiqlari

Ishdan maqsad: Berilgan formulalarning rostlik jadvalini to’ldirish orqali ularning tavtologiya bo’lishi yoki bo’lmasligini aniqlash.

Masalaning qo’yilishi: Tinglovchi variant bo’yicha berilgan formulani rostlik jadvalini to’ldira olishi lozim.

Amaliy mashg‘ulotda echish uchun masalalar

Quyidagi formulalarning chinlik jadvalini tuzing.

1. $(A \vee \neg B) \wedge \neg C$.
2. $((\neg A \wedge B) \vee \neg C)$.
3. $((\neg A \wedge B) \vee (\neg C \wedge \neg B))$.
4. $((\neg A \wedge B) \to (B \vee C))$.
5. $(((A \to B) \to A) \to (A \to (B \wedge A)))$.
6. $((C \to A) \to (\neg(B \vee C) \to A))$.

Asosiy darsliklar va o‘quv qo‘llanmalar

1. 1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (584-586 betlar)
2. 2.Mendelson E. Vvedenie v matematicheskuyu logiku. M.: Nauka, 1984
3. 3.YUnusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.
4. 4.Lavrov I. A., Maksimova L. L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M.: Fiz.-mat. literatura, 1995.

Amaliy mashg'ulot 5-6: Tavtologiya tushunchasi. Tavtologiya haqida teoremalar. Formulalarning kvivalentligi (4 soat)

Ishdan maqsad: Berilgan formulalarning rostlik jadvalini to'ldirish orqali ularning tavtologiya bo'lishi yoki bo'lmasligini aniqlash.

Masalaning qo'yilishi: Tinglovchi variant bo'yicha berilgan formulani rostlik jadvalini to'ldira olishi lozim.

Amaliy mashg'ulotda echish uchun masalalar

Quyidagi formulalarning qaysi biri tavtologiya bo'ladi.

1. $(A \to B) \to (B \to A)$.
2. $(A \to B) \to (\neg A \to \neg B)$.
3. $(A \vee (B \wedge \neg C))$.
4. $((\neg A \wedge B) \to (B \vee C))$.
5. $(((A \to B) \to A) \to (A \to (B \wedge A)))$.
6. $((C \to A) \to (\neg(B \vee C) \to A))$.
7. $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$.
8. $(A \to (\neg B \to \neg(A \to B)))$.

Asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (584-586 betlar)

2.Mendelson E. Vvedenie v matematicheskuyu logiku. M.: Nauka, 1984

3.YUnusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.

4.Lavrov I. A., Maksimova L. L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M.: Fiz.-mat. literatura, 1995.

Amaliy mashg'ulot 7: Teng kuchli formulalar. Asosiy teng kuchliliklar

Ishdan maqsad: Berilgan formulalarning rostlik jadvalini to'ldirish orqali ularning teng kuchli bo'lishi yoki bo'lmasligini aniqlash.

Masalaning qo'yilishi: Tinglovchi variant bo'yicha berilgan formulani rostlik jadvali va almashtirishlar yordamida teng kuchli bo'lishi yoki bo'lmasligini aniqlay olishi lozim.

Amaliy mashg'ulotda yechish uchun masalalar.

Quyidagi tengkuchliliklarni isbotlang.

1. $A \wedge (B \vee C) = A \wedge B \vee A \wedge C$.
2. $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.
3. $A \wedge (A \vee B) = A$.
4. $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$.
5. $A \Rightarrow B = \neg B \Rightarrow \neg A$.

Asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (584-586 betlar)

2.Mendelson E. Vvedenie v matematicheskuyu logiku. M.: Nauka, 1984

3.YUnusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.

4.Lavrov I. A., Maksimova L. L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M.: Fiz.-mat. literatura, 1995.

Amaliy mashg'ulot 8-9: Mulohazalar algebrasi formulalarining normal formalari (4 soat)

Ishdan maqsad: Berilgan formulalarni mukammal diz'yunktiv va kon'yunktiv normal formalarga keltirish.

Masalaning qo'yilishi: Tinglovchi variant bo'yicha berilgan formulani rostlik jadvali va almashtirishlar yordamida mukammal diz'yunktiv va kon'yunktiv normal formalarga keltira olishi lozim.

Amaliy mashg'ulotda yechish uchun masalalar.

Quyidagi formulalarni MDNF va MKNF larine tuzing.

1. $(A \vee \neg B) \wedge \neg C$.
2. $((\neg A \wedge B) \vee \neg C)$.
3. $((\neg A \wedge B) \vee (\neg C \wedge \neg B))$.
4. $((\neg A \wedge B) \to (B \vee C))$.
5. $(((A \to B) \to A) \to (A \to (B \wedge A)))$.
6. $((C \to A) \to (\neg(B \vee C) \to A))$.

Asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (584-586 betlar)

2.Mendelson E. Vvedenie v matematicheskuyu logiku. M.: Nauka, 1984

3.YUnusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.

4.Lavrov I. A., Maksimova L. L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M.: Fiz.-mat. literatura, 1995.

Amaliy mashg'ulot 10: Bul funksiyalari va ularning berilish usullari

Ishdan maqsad: Berilgan formulalarning rostlik jadvalini to'ldirish orqali ularning tavtologiya bo'lishi yoki bo'lmasligini aniqlash.

Masalaning qo'yilishi: Tinglovchi variant bo'yicha berilgan formulani rostlik jadvalini to'ldira olishi lozim.

Amaliy mashg'ulotda yechish uchun masalalar.

1.Quyidagifunksiyalarni chinlilik jadvalini tuzing:

1.1. $f(x,y) = xy + y + 1$

1.2. $f(x,y) = \overline{xy + y} + 1$

1.3. $f(x,y) = (xy \vee y) \to \overline{y}$

1.4. $f(x,y) = x \vee \overline{(x \to y)}$

1.5. $f(x,y,z) = \overline{xz \vee xy \vee yz}$

1.6. $f(x,y,z) = \overline{x \to y} \vee \overline{y \to z}$

1.7. $f(x,y,z) = \overline{x \to zy} \vee \overline{xy \to z}$

1.8. $f(x,y,z) = (x \to z) \vee \overline{(x \to y)}$

1.9. $f(x,y,z) = xz \vee \overline{(x \to y)}$

1.10 $f(x,y,z) = \overline{xz \vee \overline{(x \to y)}}$

1.11. $f(x,y,z) = \overline{x \to z \vee \overline{(x \to y)}} + 1$

1.12. $f(x,y,z) = xz \vee \overline{(x \to y)} + x + 1$

1.13. $f(x,y,z) = (x \to z) \vee \overline{(x \to y)} + x + 1$

1.14. $f(x,y,z) = xz \vee (x \to y) + x + 1$

1.15. $f(x,y,z) = xz \vee \overline{(x \to y) + x + 1}$

1.16. $f(x,y,z) = \overline{xz \vee (x \to y)} + x + 1$

1.17. $f(x,y,z) = \overline{xz \vee \overline{(x \to y) + 1}}$

1.18. $f(x,y,z) = xz \vee xy + x + 1$

1.19. $f(x,y,z) = \overline{xz \vee (x \to \overline{y}) + x + 1}$

1.20. $f(x,y,z) = \overline{x}z \vee (x \to y) + \overline{x} + 1$

Asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (811-814 betlar)

2.Yablonskiy S.V. Vvedenie v diskretnuyu matematiku. M. «Nauka» 1986

3.Lavrov I.A., Maksimova L.L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M. «Nauka» 1995

Amaliy mashg'ulot 11: Formulalar ekvivalentligi. Duallik printsipi

Ishdan maqsad: Berilgan formulalarning rostlik jadvalini to'ldirish orqali ularning teng kuchli bo'lishi yoki bo'lmasligini aniqlash.

Masalaning qo'yilishi: Tinglovchi variant bo'yicha berilgan formulani rostlik jadvali va almashtirishlar yordamida teng kuchli bo'lishi yoki bo'lmasligini aniqlay olishi lozim.

Amaliy mashg'ulotda yechish uchun masalalar.

Quyidagi funksiyalarga dual funksiyalarni toping.

1. $f(x,y)=(x+y)(x\vee y)$
2. $f(x,y)=(1+x\vee y)\to xy$
3. $f(x,y)=xy+y+1$
4. $f(x,y)=(xy\vee y)\to\overline{y}$
5. $f(x,y)=(1+xy)\to(x\vee y)$
6. $f(x,y)=x\vee\overline{x\to y}$
7. $f(x,y)=\overline{xy+y}+1$
8. $f(x,y,z)=\overline{x\to zy}\vee\overline{xy\to z}$

Formulalarning ekvivalentligini ko'rsating

1. $\overline{(x\vee y)}\sim\overline{x}\,\overline{y}$
2. $\overline{(xy)}\sim\overline{x}\vee\overline{y}$
3. $x\to y\sim\overline{x}\vee y$
4. $(x+y)z\sim xz+yz$
5. $x+y\sim\overline{(x\leftrightarrow y)}$
6. $x+y\sim(\overline{x}y)\vee(x\overline{y})$

11. $x\downarrow y\sim\overline{x}\,\overline{y}$
12. $x/y\sim\overline{x}\vee\overline{y}$
13. $\overline{x}\sim x/x$
14. $xy\sim(x/y)/(x/y)$
15. $x\to y\sim x/(y/y)$
16. $\overline{x}\sim x\downarrow x$

7. $x \vee y \sim xy + x + y$

8. $\bar{x}\bar{y} \sim xy + x + y$

9. $(x \rightarrow y) \sim xy + x + 1$

10. $(x \leftrightarrow y) \sim x + y + 1$

17. $xy \sim (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$

18. $x \downarrow y \sim ((x / x)/(y / y))/((x / x)/(y / y))$

19. $x / y \sim ((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)) \downarrow ((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y))$

20. $(x \leftrightarrow y) \sim (xy) \vee \overline{(xy)}$.

Asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (811-814 betlar)

2.Yablonskiy S.V. Vvedenie v diskretnuyu matematiku. M. «Nauka» 1986

3.Lavrov I.A., Maksimova L.L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M. «Nauka» 1995

Amaliy mashg'ulot 12: Bul funksiyalarining normal formalari

Ishdan maqsad: Berilgan formulalarni mukammal diz'yunktiv va kon'yunktiv normal formalarga keltirish.

Masalaning qo'yilishi: Tinglovchi variant bo'yicha berilgan formulani rostlik jadvali va almashtirishlar yordamida mukammal diz'yunktiv va kon'yunktiv normal formalarga keltira olishi lozim.

Amaliy mashg'ulotda yechish uchun masalalar.

Quyidag formulalarni MDNF va MKNF ga keltiring

1. $(x \to z) \wedge (\overline{y} \to \overline{z})$;
2. $(\overline{x} \wedge \overline{y}) \to (x \wedge y)$;
3. $((\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee z) \to (z \wedge y)$;
4. $((x \to (y \wedge z)) \to (\overline{y} \to \overline{x})) \to \overline{y}$;
5. $((x \to y) \wedge (y \to z)) \to (x \to z)$.
6. $(x \vee y) \wedge (\overline{x} \vee z)$
7. $(x \vee y \vee x) \to (x \to \overline{z})$
8. $(x \vee y \vee \overline{x}) \wedge (x \to \overline{z})$
9. $((x \to (y \vee z)) \to (\overline{y} \to \overline{x})) \to \overline{y}$
10. $(x \leftrightarrow z) \wedge (y \to \overline{z})$

Asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (811-814 betlar)

2.Yablonskiy S.V. Vvedenie v diskretnuyu matematiku. M. «Nauka» 1986

3.Lavrov I.A., Maksimova L.L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M. «Nauka» 1995

Amaliy mashg'ulot 13: To'liqlik va yopiqlik. Muhim yopiq sinflar

Ishdan maqsad: Berilgan formulalarni Jegalkin polinomi ko'rinishiga keltirish.

Masalaning qo'yilishi: Tinglovchi variant bo'yicha berilgan formulani rostlik jadvali yordamida nolni yoki birni saqlashini aniqlay olishi lozim.

Amaliy mashg'ulotda yechish uchun masalalar.

Quyidagifunksiyalarni Jegalkin polinomi ko'rinishida ifodalang:

1. $f(x,y,z)=\bar{x}z\vee(x\to y)+\bar{x}+1$
2. $f(x,y,z)=\overline{xz\vee xy\vee yz}$
3. $f(x,y,z)=xz\vee\overline{(x\to y)}+x+1$
4. $f(x,y,z)=\overline{x\to y}\vee\overline{y\to z}$
5. $f(x,y,z)=(x\to z)\vee\overline{(x\to y)}+x+1$
6. $f(x,y,z)=\overline{x\to zy}\vee\overline{xy\to z}$
7. $f(x,y,z)=xz\vee(x\to y)+x+1$
8. $f(x,y,z)=(x\to z)\vee\overline{(x\to y)}$
9. $f(x,y,z)=xz\vee\overline{(x\to y)+x+1}$
10. $f(x,y,z)=xz\vee\overline{(x\to y)}$

Ushbu funksiyalar nolni saqlaydimi?

1. $f(x,y,z)=\overline{xz\vee\overline{(x\to y)}}$
2. $f(x,y,z)=\overline{(x+z)\vee\overline{(x\to y)}}$
3. $f(x,y,z)=xy\to x+y+1$
4. $f(x,y,z)=xyz\to xz+1$
5. $f(x,y,z)=x\to z+(y\vee\bar{y})$
6. $f(x,y,z)=z+xy+y+\bar{z}+1$
7. $f(x,y,z)=\overline{xyz\bar{z}+y}+1$
8. $f(x,y,z)=(xy\vee y)\to\bar{y}+z$
9. $f(x,y)=x\vee\overline{(x\to y)}\to z$
10. $f(x,y,z)=\overline{xz\vee xy\vee yz}+1$

Asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (811-814 betlar)

2.Yablonskiy S.V. Vvedenie v diskretnuyu matematiku. M. «Nauka» 1986

3.Lavrov I.A., Maksimova L.L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M. «Nauka» 1995

Amaliy mashg'ulot 14-15: Post teoremasi va uning natijalari (4 soat)

Ishdan maqsad: Berilgan bul funksiyalari sinfini to'liq bo'lish yoki bo'lmasligini aniqlash masalasi.

Masalaning qo'yilishi: Tinglovchi variant bo'yicha berilgan bul funksiyalari sinfini to'liq bo'lish yoki bo'lmasligini aniqlay olishi lozim.

Amaliy mashg'ulotda yechish uchun masalalar.

Quyidagi funksiyalarni monotonligini tekshiring:

1. $f(x,y,z) = xy \vee xz \vee \overline{xz}$;
2. $f(x,y) = x \to (x \to y)$;
3. $f(x,y) = \overline{(x \vee y)} \leftrightarrow \bar{x} \vee \bar{y}$;
4. $f(x,y,z) = xy \vee xz \vee \bar{x}z$;
5. $f(x,y) = \overline{(x \vee y)} \leftrightarrow \bar{x}\bar{y}$;
6. $f(x,y) = xy \vee x \vee \bar{x}z$;
7. $f(x,y,z) = xy \vee yz \vee xz$
8. $f(x,y) = xy + x \to \bar{y}$
9. $f(x,y) = (x \leftrightarrow y)(x \vee y)$
10. $f(x,y) = xy + x \leftrightarrow y$

Quyidagi sistemalarni to'liqligini ko'rsating:

1. $\{\vee, ^{-}\}$; 2 $\{\cdot, ^{-}\}$; 3. $\{\to, ^{-}\}$;

4. $\{/\}$; 5. $\{\downarrow\}$; 6. $\{+, \cdot, 1\}$;

7. $\{x+y, x \vee y, 1\}$; 8. $\{x+y+z, xy, 0, 1\}$; 9. $\{x \to y, 0\}$;

10. $\{xy, x+y, 1\}$; 11. $\{xy, \bar{x}\}$; 12. $\{\overline{xy}\}$;

13. $\{\overline{x \vee y}\}$; 14. $\{\bar{x}, 1\}$; 15. $\{x \cdot y, x \vee y\}$;

16. $\{x+y, \bar{x}\}$; 17. $\{xy \vee yz \vee xz, \bar{x}\}$; 18. $\{x+y, xy, 1\}$;

19. $\{\overline{x \vee y \vee z}\}$; 20. $\{x \cdot y, x+y, 1, 0\}$

Asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (811-814 betlar)

2.Yablonskiy S.V. Vvedenie v diskretnuyu matematiku. M. «Nauka» 1986

3.Lavrov I.A., Maksimova L.L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M. «Nauka» 1995

Amaliy mashg'ulot 16. MULOHAZALAR HISOBI UCHUN AKSIOMALAR SISTEMASI.

Ishdan maqsad: Berilgan formulaning teorema ekanini isbotlash maqsadida formulalar ketma-ketligini tuzish masalasi.

Masalaning qo'yilishi: Keltirib chiqarish qoidalari yordamida berilgan formulaning teorema ekanini isbotlay olishi lozim.

Amaliy mashg'ulotda yechish uchun masalalar.

L nazariyaning ixtiyoriy F, G, H formulalari uchun quyidagi formulalar L ning teoremalari bo'lishini isbotlang.

(a) $\vdash (\rceil F \to F) \to F$;

(b) $F \to G, G \to H \ \vdash F \to H$

(c) $F \to (G \to H) \vdash G \to (F \to H)$

(d) $\rceil G \to \rceil F \ \vdash F \to G$

(e) $\vdash (\rceil G \to \rceil F) \to (F \to G)$;

(f) $F \wedge G \ \vdash G$

Asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (69-72 betlar)

12.Mendelson E. Vvedenie v matematicheskuyu logiku. M. «Nauka». 1984

13.Lavrov I.A., Maksimova L.L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M. «Nauka» 1995

Amaliy mashg'ulot 17: Deduksiya teoremasi. Keltirib chiqariladigan formulalar.

Ishdan maqsad: Berilgan formulaning teorema ekanini isbotlash maqsadida formulalar ketma-ketligini tuzish masalasi.

Masalaning qo'yilishi: Keltirib chiqarish qoidalari yordamida berilgan formulaning teorema ekanini isbotlay olishi lozim.

Amaliy mashg'ulotda yechish uchun masalalar

L nazariyaning ixtiyoriy F, G, H formulalari uchun quyidagi formulalar L ning teoremalari bo'lishini isbotlang.

1. $((F \to G) \to F) \to F$.
2. $F \to (G \to \rceil(F \to \rceil G))$.
3. $F \to (G \to H) \vdash G \to (F \to H)$.
4. $\rceil(F \to \rceil G) \to G$.
5. $G \to (\rceil G \to \rceil G)$.

Asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (69-72 betlar)

14.Mendelson E. Vvedenie v matematicheskuyu logiku. M. «Nauka». 1984

15.Lavrov I.A., Maksimova L.L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M. «Nauka» 1995

Amaliy mashg'ulot 18-19: L nazariya uchun gyodelning toliqlik haqida teoremasi (4 soat)

Ishdan maqsad: Berilgan formulaning teorema ekanini isbotlash maqsadida bu formulaning tavtologiya bo'ishidan foydalanish masalasi.

Masalaning qo'yilishi: Keltirib chiqarish qoidalari va formulaning tavtologiya bo'ishidan foydalanib berilgan formulaning teorema ekanini isbotlay olishi lozim.

Amaliy mashg'ulotda yechish uchun masalalar

L nazariyaning ixtiyoriy F, G, H formulalari uchun quyidagi formulalar L ning teoremalari bo'lishini isbotlang.

1. $\neg A \to (A \to B)$.
2. $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$.
3. $A \to A$.
4. $(A \to (\neg B \to \neg(A \to B)))$.
5. $\neg\neg A \to A$.

Asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (69-72 betlar)

16.Mendelson E. Vvedenie v matematicheskuyu logiku. M. «Nauka». 1984

17.Lavrov I.A., Maksimova L.L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M. «Nauka» 1995

Amaliy mashg'ulot 20: Predikatlar algebrasi. Predikatlar va kvantorlar

Ishdan maqsad: Predikatlar algebrasining berilgan formulalarni almashtirishlar yordamida ularning teng kuchli bo'lishi yoki bo'lmasligini aniqlash.

Masalaning qo'yilishi: Tinglovchi variant bo'yicha berilgan formulani almashtirishlar yordamida teng kuchli bo'lishi yoki bo'lmasligini aniqlay olishi lozim.

Amaliy mashg'ulotda yechish uchun masalalar

A ixtiyoriy propozitsionl o`zgaruvchi, $P(x)\ va\ F(x)$ lar esa o`zgaruvchi predikatlar bo`lsa, quyidagi tengkuchliliklarni isbotlang.

1^0. $\neg\forall xP(x) \equiv \exists x \neg P(x);$

2^0. $\exists x \neg P(x) \equiv \forall x \neg P(x);$

3^0. $\forall x(P(x) \& F(x)) \equiv \forall xP(x) \& \forall xF(x);$

4^0. $\forall x(A \& P(x)) \equiv A \& \forall xP(x);$

5^0. $\forall x(A \vee P(x)) \equiv A \vee \forall xP(x);$

6^0. $\forall xP(x) \vee \forall xF(x) \equiv \forall x \forall y(P(x) \vee F(y));$

7^0. $\forall x(P(x) \Rightarrow A) \equiv \exists xP(x) \Rightarrow A;$

8^0. $\forall x(A \Rightarrow P(x)) \equiv A \Rightarrow \forall xP(x);$

9^0. $\exists x(P(x) \vee F(x)) \equiv \exists xP(x) \vee \exists xF(x);$

10^0. $\exists xP(x) \& \exists xF(x) \equiv \exists x \exists y(P(x) \& F(y));$

11^0. $\exists x(P(x) \Rightarrow A 12^0$. $\exists x(A \& P(x)) \equiv A \& \exists xP(x);$

13^0. $\exists x(A \vee P(x)) \equiv A \vee \exists xP(x);) \equiv \forall xP(x) \Rightarrow A;$

Asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (36-44 betlar)

2.Mendelson E. Vvedenie v matematicheskuyu logiku. M. «Nauka». 1984

3.Lavrov I.A., Maksimova L.L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M. «Nauka» 1995

Amaliy mashg'ulot 21-22: Predikatlar algebrasining formulalari (4 soat)

Ishdan maqsad: Predikatlar algebrasining berilgan formulalarni almashtirishlar yordamida ularning teng kuchli bo'lishi yoki bo'lmasligini aniqlash.

Masalaning qo'yilishi: Tinglovchi variant bo'yicha berilgan formulani almashtirishlar yordamida teng kuchli bo'lishi yoki bo'lmasligini aniqlay olishi lozim.

Amaliy mashg'ulotda yechish uchun masalalar

A ixtiyoriy propozitsionl o`zgaruvchi, $P(x)$ *va* $F(x)$ lar esa o`zgaruvchi predikatlar bo`lsa, quyidagi tengkuchliliklarni isbotlang.

1^0. $\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$;

2^0. $\exists x \neg P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$;

3^0. $\forall x(P(x) \& F(x)) \equiv \forall x P(x) \& \forall x F(x)$;

4^0. $\forall x(A \& P(x)) \equiv A \& \forall x P(x)$;

5^0. $\forall x(A \vee P(x)) \equiv A \vee \forall x P(x)$;

6^0. $\forall x P(x) \vee \forall x F(x) \equiv \forall x \forall y(P(x) \vee F(y))$;

7^0. $\forall x(P(x) \Rightarrow A) \equiv \exists x P(x) \Rightarrow A$;

8^0. $\forall x(A \Rightarrow P(x)) \equiv A \Rightarrow \forall x P(x)$;

9^0. $\exists x(P(x) \vee F(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x F(x)$;

10^0. $\exists x P(x) \& \exists x F(x) \equiv \exists x \exists y(P(x) \& F(y))$;

11^0. $\exists x(P(x) \Rightarrow A 12^0. \exists x(A \& P(x)) \equiv A \& \exists x P(x)$;

13^0. $\exists x(A \vee P(x)) \equiv A \vee \exists x P(x);) \equiv \forall x P(x) \Rightarrow A$;

14^0. $\exists x(A \Rightarrow P(x)) \equiv A \Rightarrow \exists x P(x)$;

15^0. $\exists x(P(x) \Rightarrow F(x)) \equiv \forall x P(x) \Rightarrow \exists x F(x)$;

16^0. $\forall x P(x) \equiv \forall y P(y)$;

17^0. $\forall x P(x) \equiv \forall y P(y)$.

Asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (36-44 betlar)

2.Mendelson E. Vvedenie v matematicheskuyu logiku. M. «Nauka». 1984

Amaliy mashg'ulot 23: Predikatlar algebrasi formulalarining normal formalari

Ishdan maqsad: Predikatlar algebrasining berilgan formulalarini keltirilgan normal formalarga keltirish.

Masalaning qo'yilishi: Tinglovchi variant bo'yicha berilgan formulani teng kuchli almashtirishlar yordamida keltirilgan normal formalarga keltira olishi lozim.

Amaliy mashg'ulotda yechish uchun masalalar.

A ixtiyoriy propozitsionl o`zgaruvchi, $P(x)$ *va* $F(x)$ lar esa o`zgaruvchi predikatlar bo`lsa, quyidagi tengkuchliliklarni isbotlang.

1^0. $\neg\forall xP(x) \equiv \exists x \neg P(x)$;

2^0. $\exists x \neg P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$;

3^0. $\forall x(P(x) \& F(x)) \equiv \forall xP(x) \& \forall xF(x)$;

4^0. $\forall x(A \& P(x)) \equiv A \& \forall xP(x)$;

5^0. $\forall x(A \vee P(x)) \equiv A \vee \forall xP(x)$;

6^0. $\forall xP(x) \vee \forall xF(x) \equiv \forall x\forall y(P(x) \vee F(y))$;

7^0. $\forall x(P(x) \Rightarrow A) \equiv \exists xP(x) \Rightarrow A$;

8^0. $\forall x(A \Rightarrow P(x)) \equiv A \Rightarrow \forall xP(x)$;

9^0. $\exists x(P(x) \vee F(x)) \equiv \exists xP(x) \vee \exists xF(x)$;

10^0. $\exists xP(x) \& \exists xF(x) \equiv \exists x\exists y(P(x) \& F(y))$;

11^0. $\exists x(P(x) \Rightarrow A12^0$. $\exists x(A \& P(x)) \equiv A \& \exists xP(x)$;

13^0. $\exists x(A \vee P(x)) \equiv A \vee \exists xP(x);) \equiv \forall xP(x) \Rightarrow A$;

14^0. $\exists x(A \Rightarrow P(x)) \equiv A \Rightarrow \exists xP(x)$;

15^0. $\exists x(P(x) \Rightarrow F(x)) \equiv \forall xP(x) \Rightarrow \exists xF(x)$;

16^0. $\forall xP(x) \equiv \forall yP(y)$;

17^0. $\forall xP(x) \equiv \forall yP(y)$.

Asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (36-44 betlar)

2.Mendelson E. Vvedenie v matematicheskuyu logiku. M. «Nauka». 1984

3.Lavrov I.A., Maksimova L.L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M. «Nauka» 1995

Amaliy mashg'ulot 24-25: Primitiv rekursiv va qismiy rekursiv funksiyalar (4 soat).

Ishdan maqsad: Sonli funksiyalarning primitiv rekursiv yoki qismiy rekursiv bo'lishini eng sodda funksiyalardan keltirib chiqarish masalasi.

Masalaning qo'yilishi: Primitiv rekursiya, superpozisiya va minimizasiya operatorlari yordamida eng sodda funksiyalardan berilgan funksiyani hosil qila olishi lozim.

Amaliy mashg'ulotda yechish uchun masalalar.

Quyidagi funksiyalarni primitiv rekursiv yoki qismiy rekursiv funksiya ekanligini isbotlang.

1. $sg(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$

$sg(0)=0$

$sg(x+1)=s(\theta(x))$

2. $\overline{sg}(x)=\begin{cases}0, & x>0\\ 1, & x=0\end{cases}$

$\overline{sg}(0)=1$

$\overline{sg}(x+1)=\theta(x)$

3. $x\dot{-}1=\begin{cases}0, & x=0\\ x-1, & x>0\end{cases}$

$0\dot{-}1=0$

$(x+1)\dot{-}1=x$

4. $x\dot{-}y=\begin{cases}0, & x\le y\\ x-y, & x>y\end{cases}$

$x\dot{-}0=x$

$x\dot{-}(y+1)=(x\dot{-}y)\dot{-}1$

5. $|x-y|$

$|x-y|=(x\dot{-}y)+(y\dot{-}x)$

6. $\max(x,y)$

$\max(x,y)=x sg(x\dot{-}y)+y\overline{sg}(x\dot{-}y)$

7. $\min(x,y)$

$$\min(x,y) = xsg(y \dot{-} x) + y\overline{sg}(x \dot{-} y)$$

8. $\left[\frac{x}{y}\right]$ $\left(\left[\frac{x}{0}\right] = x\right)$

$$\left[\frac{x}{y}\right] = \sum_{i=1}^{x} \overline{sg}(iy \dot{-} x)$$

$$\left[\frac{5}{2}\right] = \sum_{i=1}^{5} \overline{sg}(2i \dot{-} 5) = \overline{sg}(2 \dot{-} 5) +$$

$$+\overline{sg}(4 \dot{-} 5) + \overline{sg}(6 \dot{-} 5) + \overline{sg}(8 \dot{-} 5) +$$

$$+\overline{sg}(10 \dot{-} 5) = \overline{sg}(0) + \overline{sg}(0) + \overline{sg}(1) +$$

$$+\overline{sg}(3) + \overline{sg}(5) = 1 + 1 = 2$$

9. $rest(x,y) - x$ *ni* y *ga bo\`lgandagi qoldiq*

$$rest = x \dot{-} \left[\frac{x}{y}\right] \cdot y$$

$$rest(x,0) = x$$

$$x = 7, y = 2$$

$$rest = 7 \dot{-} \left[\frac{7}{2}\right] \cdot 2 = 1$$

10. $\tau(x) - x$ *ning bo\`luvchilari soni*

$$\tau(x) = \sum_{i=1}^{x} \overline{sg}(rest(x,i))$$

$$x = 8$$

$$\tau(8) = \overline{sg}(rest(8,1)) + \overline{sg}(rest(8,2)) +$$

$$+\overline{sg}(rest(8,3)) + \overline{sg}(rest(8,4)) +$$

$$+\overline{sg}(rest(8,5)) + \overline{sg}(rest(8,6)) +$$

$$+\overline{sg}(rest(8,7)) + \overline{sg}(rest(8,8)) =$$

$$= 1 + 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 = 4$$

$11.\theta(x) - x$ *ning bo`luvchilari soni yig`indisi*

$$\theta(x) = \sum_{i=1}^{x} i \cdot \overline{sg}(rest(x,i))$$

$x = 6$

$$\theta(6) = 1 \cdot \overline{sg}(rest(6,1)) + 2 \cdot \overline{sg}(rest(6,2)) +$$
$$+3 \cdot \overline{sg}(rest(6,3)) + 4 \cdot \overline{sg}(rest(6,4)) +$$
$$+5 \cdot \overline{sg}(rest(6,5)) + 6 \cdot \overline{sg}(rest(6,6)) =$$
$$= 1 + 2 + 3 + 6 = 12$$

12. $lh(x) - x$ *ni tub bo`luvchilari soni*

$$lh(0) = 0$$

$$lh(x) = \sum_{i=1}^{x} \overline{sg}(|\tau(i) - 2| + rest(x,i))$$

$$x = 7 lh(7) = \overline{sg}(\|\tau(1) - 2\| + rest(7,1)) +$$
$$+\overline{sg}(\|\tau(2) - 2\| + rest(7,2)) +$$
$$+\overline{sg}(\|\tau(3) - 2\| + rest(7,3)) +$$
$$+\overline{sg}(\|\tau(4) - 2\| + rest(7,4)) +$$
$$+\overline{sg}(\|\tau(5) - 2\| + rest(7,5)) +$$
$$+\overline{sg}(\|\tau(6) - 2\| + rest(7,6)) +$$
$$+\overline{sg}(\|\tau(7) - 2\| + rest(7,7)) =$$
$$= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1 = 1$$

Asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (888-988 betlar)

2.Rodjers H. Teoriya rekursivnih funktsiy I effektivnaya vichislimost. Moskva. „Mir"-1972.

3.Lavrov I.A., Maksimova L.L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M. «Nauka» 1995

Amaliy mashg'ulot – 26: Rekursiv va rekursiv sanaluvchi to`plamlar

Ishdan maqsad: Sonli funksiyalarning primitiv rekursiv yoki qismiy rekursiv bo'lishini eng sodda funksiyalardan keltirib chiqarish masalasi.

Masalaning qo'yilishi: Primitiv rekursiya, superpozisiya va minimizasiya operatorlari yordamida eng sodda funksiyalardan berilgan funksiyani hosil qila olishi lozim.

Amaliy mashg'ulotda yechish uchun masalalar.

1.Quyidagi predikatlarning primitive rekursivligini isbotlang.

a) $x = y$

b) $x + y = z$

c) $x \cdot y = z$

d) x y ni bo'ladi.

e) x va y lar o'zaro tub sonlar.

2. Agar $P(x_1,....x_n)$ va $Q(x_1,....x_n)$ lar primitiv rekursiv predikatlar bo'lsa, u holda quyidagi predikatlarning ham primitive rekursivligini isbotlang.

a) $P(x_1,....x_n) \wedge Q(x_1,....x_n)$

b) $P(x_1,....x_n) \vee Q(x_1,....x_n)$

c) $\neg P(x_1,....x_n)$

d) $P(x_1,....x_n) \to Q(x_1,....x_n)$

3. Agar A va B to'plamlar rekursiv to'plamlar bo'lsa, u holda $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A}$ larning ham rekursiv to'lamlar bo'lishini isbotlang.
4. Agar A va B to'plamlar rekursiv sanaluvchi to'plamlar bo'lsa, u holda $A \cap B$, $A \cup B$ larning ham rekursiv sanaluvchi to'lamlar bo'lishini isbotlang.

Asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (888-988 betlar)

2.Rodjers H. Teoriya rekursivnih funktsiy I effektivnaya vichislimost. Moskva. „Mir"-1972.

3.Lavrov I.A., Maksimova L.L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M. «Nauka» 1995

Amaliy mashg'ulot 27: Rekursiv sanaluvchi to`plamla haqida asosiy teorema

Ishdan maqsad: Sonli funksiyalarning primitiv rekursiv yoki qismiy rekursiv bo'lishini eng sodda funksiyalardan keltirib chiqarish masalasi.

Masalaning qo'yilishi: Primitiv rekursiya, superpozisiya va minimizasiya operatorlari yordamida eng sodda funksiyalardan berilgan funksiyani hosil qila olishi lozim.

Amaliy mashg'ulotda yechish uchun masalalar.

Quyidagi funksiyalarni primitiv rekursiv yoki qismiy rekursiv funksiya ekanligini isbotlang

1. $sg(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$

$sg(0)=0$

$sg(x+1)=s(\theta(x))$

2. $\overline{sg}(x)=\begin{cases}0, & x>0\\ 1, & x=0\end{cases}$

$\overline{sg}(0)=1$

$\overline{sg}(x+1)=\theta(x)$

3. $x\dot{-}1=\begin{cases}0, & x=0\\ x-1, & x>0\end{cases}$

$0\dot{-}1=0$

$(x+1)\dot{-}1=x$

4. $x\dot{-}y=\begin{cases}0, & x\le y\\ x-y, & x>y\end{cases}$

$x\dot{-}0=x$

$x\dot{-}(y+1)=(x\dot{-}y)\dot{-}1$

5. $|x-y|$

$|x-y|=(x\dot{-}y)+(y\dot{-}x)$

6. $\max(x,y)$

$\max(x,y)=xsg(x\dot{-}\mathrm{y})+\mathrm{y}\overline{sg}(x\dot{-}y)$

7. $\min(x,y)$

$\min(x,y)=xsg(y\dot{-}x)+y\overline{sg}(x\dot{-}y)$

$8.\left[\frac{x}{y}\right] \quad \left(\left[\frac{x}{0}\right]=x\right)$

$$\left[\frac{x}{y}\right]=\sum_{i=1}^{x}\overline{sg}(iy \dot{-} x)$$

$$\left[\frac{5}{2}\right]=\sum_{i=1}^{5}\overline{sg}(2i \dot{-} 5)=\overline{sg}(2 \dot{-} 5)+$$

$$+\overline{sg}(4 \dot{-} 5)+\overline{sg}(6 \dot{-} 5)+\overline{sg}(8 \dot{-} 5)+$$

$$+\overline{sg}(10 \dot{-} 5)=\overline{sg}(0)+\overline{sg}(0)+\overline{sg}(1)+$$

$$+\overline{sg}(3)+\overline{sg}(5)=1+1=2$$

9. $rest(x,y)-x$ *ni* y *ga bo\`lgandagi qoldiq*

$$rest = x \dot{-} \left[\frac{x}{y}\right]\cdot y$$

$$rest(x,0)=x$$

$$x=7, y=2$$

$$rest = 7 \dot{-} \left[\frac{7}{2}\right]\cdot 2 = 1$$

10. $\tau(x)-x$ *ning bo\`luvchilari soni*

$$\tau(x)=\sum_{i=1}^{x}\overline{sg}(rest(x,i))$$

$$x=8$$

$$\tau(8)=\overline{sg}(rest(8,1))+\overline{sg}(rest(8,2))+$$

$$+\overline{sg}(rest(8,3))+\overline{sg}(rest(8,4))+$$

$$+\overline{sg}(rest(8,5))+\overline{sg}(rest(8,6))+$$

$$+\overline{sg}(rest(8,7))+\overline{sg}(rest(8,8))=$$

$$=1+1+0+1+0+0+0+1=4$$

$11.\theta(x) - x$ *ning bo`luvchilari soni yig`indisi*

$$\theta(x) = \sum_{i=1}^{x} i \cdot \overline{sg}(rest(x,i))$$

$x = 6$

$$\theta(6) = 1 \cdot \overline{sg}(rest(6,1)) + 2 \cdot \overline{sg}(rest(6,2)) +$$
$$+3 \cdot \overline{sg}(rest(6,3)) + 4 \cdot \overline{sg}(rest(6,4)) +$$
$$+5 \cdot \overline{sg}(rest(6,5)) + 6 \cdot \overline{sg}(rest(6,6)) =$$
$$= 1 + 2 + 3 + 6 = 12$$

12. $lh(x) - x$ *ni tub bo`luvchilari soni*

$$lh(0) = 0$$

$$lh(x) = \sum_{i=1}^{x} \overline{sg}(|\tau(i) - 2| + rest(x,i))$$

$$x = 7 lh(7) = \overline{sg}(\|\tau(1) - 2\| + rest(7,1)) +$$
$$+\overline{sg}(\|\tau(2) - 2\| + rest(7,2)) +$$
$$+\overline{sg}(\|\tau(3) - 2\| + rest(7,3)) +$$
$$+\overline{sg}(\|\tau(4) - 2\| + rest(7,4)) +$$
$$+\overline{sg}(\|\tau(5) - 2\| + rest(7,5)) +$$
$$+\overline{sg}(\|\tau(6) - 2\| + rest(7,6)) +$$
$$+\overline{sg}(\|\tau(7) - 2\| + rest(7,7)) =$$
$$= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1 = 1$$

Asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. (888-988 betlar)

2.Rodjers H. Teoriya rekursivnih funktsiy I effektivnaya vichislimost. Moskva. „Mir"-1972.

3.Lavrov I.A., Maksimova L.L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M. «Nauka» 1995

28-MAVZU: Kambinatorika asoslari

,,Kambinatorika’’ iborasi G.Leybnisning ,,Kombinatorika san’at haqidagi mulohazqalar’’ nomli asarida birinchi bor 1665- yilda keltirilgan.

Kombinatsiya- bu kombinatorikaning asosiy tushunchasi. Bu tushuncha yordamida ixtiyoriy to‘plamning qandaydir sondagi elementlaridan tashkil topgan tuzilmalar ifodalanadi. Kombinatorikada bunday tuzilmalarning o‘rin almashtirishlar, o‘rinlashtirishlar va guruhlashlar, deb ataluvchi asosiy ko rinishlari o‘rganiladi.

Matematik induksiya usuli: ketma-ket bajariladigan ikkita qismdan iborat. Ya’ni, isbotlanishi kerak bo‘lgan tasdiq birorta xususiy $n = n_0$ qiymat (masalan, $n_o = 1$) uchun to‘g‘ri bo‘lsin(usulning bu qismi baza yoki asos, deb ataladi). Agar bu tasdiqning istalgan $n = k \succ n_0$ uchun to‘g‘riligidan uning $n = k + 1$ uchun to‘g‘riligi kelib chiqsa, u holda tasdiq istalgan natural $n \ge n_0$ son uchun to‘g‘ri bo‘ladi (induksion o‘tish).

1-misol: Ixtiyoriy n natural son uchun

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{(1 + n)}{2} n$$

tenglikning o‘rinli bo‘lishini matematik induksiya usuli yordamida isbotlaymiz.

Baza: $n = 1$ bo‘lsin, bu holda yuqoridagi tenglik o‘rinli ekanligi ravshan: $1 = \frac{(1 + 1)}{2} 1$.

Induksion o‘tish: isbotlanishi kerak bo‘lgan tenglik $n = k$ uchun o‘rinli bo‘lsin, ya’ni:

$$1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{(1 + k)}{2} k$$

Bu tenglikning chap va o‘ng tomonlariga $(k + 1)$ ifodani qo‘shib, uni

$$1 + 2 + 3 + ... + k + (k + 1) = \frac{(1 + k)}{2} k + (k + 1)$$

ko‘rinishda yozamiz. Oxirgi tenglikning o‘ng tomonida quyidagicha o‘zgartirishlarni bajaramiz:

$$\frac{(1 + k)}{2} k + (k + 1) = (k + 1)\frac{(k + 2)}{2} = \frac{(1 + (k + 1))}{2}(k + 1)$$

Demak,

$$1 + 2 + 3 + ... + k + (k + 1) = \frac{(1 + (k + 1))}{2}(k + 1)$$

Oxirgi munosabat isbotlanishi kerak bo‘lgan tenglik bo‘lgan holidir.

2-misol. Matematik induksion usuli yordamida arifmetik pogressiyaning umumiy hadini topish formulasini isbotlang.

Isbot: $a_n = a_1 + (n-1)d$ ekanligini isbotlaymiz. Baza: $n=1$ bo‘lsin, bu holda yuqoridagi tenglik o‘rinli ekanligi ravshan:

$$a_1 = a_1 + (1-1)d$$

Induksion o‘tish: isbotlanishi kerak bo‘lgan tenglik $n=k$ uchun o‘rinli bo‘lsin, ya’ni:

$$a_k = a_1 + (k-1)d$$

deb faraz qilaylik.

Arifmetik progressiyaning a_{k+1} hadi a_k hadiga d ni qo‘shish natijasida hosil bo‘ladi:

$$a_{k+1} = a_k + d$$

Bu tenglikning o‘ng tomonida qatnashgan a_k hadining o‘rniga $a_k = a_1 + (k-1)d$ ni qo‘yasak:

$$a_{k+1} = a_1 + (k-1)d + d$$

hosil bo‘ladi. Bundan esa,

$$a_{k+1} = a_1 + ((k+1)-1)d$$

Isbotlanishi kerak bo‘lgan tengliikni hosil qilamiz.

Topshiriqlar:

1. Matematik induksiya usuli yordamida arifmetik va geometrik progressiyalarning dastlabki n ta hadlari yig‘indisini toppish formulasini toping.
2. Ixtiyoriy $n \in N$ uchun $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ son 133 ga qoldiqsiz bo‘linishini isbotlang.
3. Matematik induksion usuli yordamida geometrik pogressiyaning umumiy hadini topish formulasini isbotlang.
4. Quyidagi tengsizlik $n \in N$ va $n \geq 2$ uchun o‘rinli bo‘lishini isbotlang:
$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \succ 2(\sqrt{n+1} - 1)$$
5. Ixtiyoriy $n \in N$ son va chekli A to‘plam uchun $|A^n| = |A|^n$ tenglik o‘rinli bo‘lishini matematik induksiya usuli yordamida isbotlang.

Mustaqil ishlash uchun topshiriqlar:

1. Matematik induksiya usulini qo‘llab quyidagi formulalarni isbotlang:

a) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$

b) $\sin x + sib(x+h) + \ldots + \sin(x+nh) = \dfrac{\sin(x + \frac{nh}{2}) \sin \frac{(n+1)h}{2}}{\sin(\frac{h}{2})}$

bu yerda $h \neq 2\pi k, k \in Z$.

2. $2^n \succ n^2$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladigan barcha natural n sonlarni toping.

3. Ixtiyoriy chekli A to‘plam uchun $\left|2^{A}\right| = 2^{|A|}$ tenglik o‘rinli bo‘lishini matematik induksiya usuli yordamida isbotlang.
4. Ixtiyoriy chekli A va B to‘plamlar uchun $|A \times B| = |A||B|$ tenglik o‘rinli bo‘lishini isbotlang.

Foydalanilgan adabyotlar ro‘yxati:

1. H.T.To‘rayev, I.Azizov. Matematik mantiq va diskret matematika 1-jild. Toshkent 2011.
2. H.T.To‘rayev, I.Azizov, S.Otaqulov. Kombinatorika va graflar. Toshkent-„ILM ZIYO’’-2009

29-MAVZU: O‘rinlashtirishlar va kombinatsiyalar. Binomial koeffitsiyentlar va ularga oid ayniyatlar

Elementlari $a_1, a_2, ..., a_n$ bo‘lgan to‘plamni qaraymiz. Bu to‘plam elementlarini har xil tartibda joylashtirib (yozib), tuzilmalar (kombinatsiyalar) hosil qilish mumkin, masalan:

$a_1, a_2, ..., a_n; a_2, a_1, ..., a_n; a_3, a_2, ..., a_n$ Bu tuzilmalarning har birida berilgan to‘plamning barcha elementlari ishtirok etgan holda ular bir-biridan faqat elementlarining joylashish o‘rinlari bilan farq qiladilar.

1-ta’rif. Shu usul bilan hosil qilingan kombinatsiyalarning har biri $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ to‘plam elementlarining o‘rin almashtirishi deb ataladi.

Berilgan n ta elementli to‘plam uchun barcha o‘rin almashtirishlar soni P_n bilan belgilash qabul qilingan.

1-teorema. Elementlari soni n ta bo‘lgan to‘plam uchun o‘rin almashtirishlar soni $n!$ ga teng, ya’ni $P_n = n!$. (Matematik induksiya usuli yordamida isbotlanadi)

2-ta’rif. $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ to‘plamning ixtiyoriy m ta elementidan hosil qilingan tartiblangan

$\{a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_m}\}$ tuzilmaga (kombinatsiyaga) n ta elementdan m tadan o‘rinlashtirish deb ataladi.

Berilgan n ta elementdan m tadan o‘rinlashtirishlar soni, odatda A_n^m bilan belgilanadi.

2-teorema. n ta elementdan m tadan o‘rinlashtirishlar soni eng kattasi n ga teng bo‘lgan m ta ketma-ket natural sonlarning ko‘paytmasiga tengdir, ya’ni $A_n^m = n(n-1)...(n-m+1)$.

Isbot. N – ixtiyoriy natural son bo‘lsin. Induksiyani m uchun bajaramiz.

Baza: m=1 ligi aniq.

Induksion o‘tish: m=k<n uchun to‘g‘ri bo‘lsin deb faraz qilaylik. n ta elementdan (k+1) tadan o‘rinlashtirishlarning ixtiyoriy bittasini quyidagicha hosil qilish mumkin. Bunday o‘rinlashtirishning birinchi elementi sifatida berilgan $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ to‘plamning istalgan elementini, masalan, a_1 ni tuzilayotgan o‘rinlashtirishga joylashtiramiz. Undan keyin umumiy soni A_{n-1}^k ga teng bo‘lgan (n-1) ta elementdan k tadan o‘rinlashtirishlarning ixtiyoriy biridagi barcha elementlarni joylashtiramiz. Birinchi elementi a_1 dan iborat bo‘lgan barcha n ta elementdan (k+1) tadan o‘rinlashtirishlarning soni A_{n-1}^k ga tengdir. Bunday o‘rinlashtirishlarning birinchi elementi sifatida $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ to‘plamning ixtiyoriy elementini tanlash mumkinligini e’tiborga olsak, ko‘paytirish qoidasiga asosan, berilgan n ta elementdan (k+1) tadan o‘rinlashtirishlar soni quyidagicha aniqlanishi kelib chiqadi:

$$A_n^{k+1} = nA_{n-1}^k = n(n-1)...((n-1)-k+1) = n(n-1)...(n-(k+1)+1).$$

Bu munosabat isbotlanayotgan formulaning m=k+1 uchun to‘g‘riligini ko‘rsatadi.

$A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ tengligi ravshandir.

$\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ to‘plam berilgan bo‘lsin. Bu n elementli to‘plamning elementlaridan m ta elementga ega qism to‘plamlarni shunday tashkil etamizki, ular bir-biridan elementlerining joylashish tartibi bilan emas, faqat tarkibi bilan farq qilsinlar.

3-ta’rif. Bunday m ta elementli qism to‘plamlarning har biriga n ta elementdan m tadan guruhlash deb ataladi.

n ta elementdan m tadan guruhlashlar soni C_n^m bilan belgilanadi.

3-teorema. n ta elementdan m tadan guruppalashlar soni eng kattasi n ga teng bo‘lgan m ta ketma-ket natural sonlar ko‘paytmasining dastlabki m ta natural sonlar ko‘paytmasiga nisbati kabidir:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

C_n^m sonlarni binomial koeffitsiyentlar deb ham atashadi.

1-misol. Besh nafar tomoshabinlarning beshta o‘rinni egallash imkoniyatlari (variantlari) sonini toping.

Agar tomoshabinlarni a, b, c, d, e harflar bilan belgilasak, u holda T={ a, b, c, d, e } tomoshabinlar to‘plamiga ega bo‘lamiz. Tomoshabinlarni o‘rinlarga joylashtirish imkoniyatlarining har biriga tomoshabinlar T to‘plami elementlarining qandaydir o‘rin almashtirishi mos keladi. T to‘plam beshta elementli bo‘lgani uchun 1-teoremaga asosan, $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

2-misol. Turli 5 rangdagi bo‘yoqlardan 3 xil rangli bo‘yoq tanlash imkoniyatlari sonini aniqlang.

Bu yerda 5 ta elementli bo‘yoqlar to‘plamining tartiblangan 3 ta elementli qism to‘plamlarini aniqlash zarur. Bu esa 5 ta elementdan 3 tadan guruhlashlar sonini aniqlash demakdir. 3-teoremaga ko‘ra, n=5, m=3 bo‘lgan holda

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

Topshiriqlar:

1. Yetti so‘mdan ortiq butun son bilan ifodalanuvchi pul to‘lovini faqat 3 so‘m va 5 so‘mliklar bilan amalga oshirish mumkinligini isbotlang.
2. „Kombinatorika’’ so‘zidan bitta unli va bitta undosh harf tanlash imkoniyatlari sonini aniqlang.
3. Agar A va B shaharlarni to‘rtta yo‘l, B va C shaharlarni esa uchta yo‘l bog‘lasa, u holda A shahardan B shahar orqali C shaharga borish imkoniyatlari sonini aniqlang.
4. Agar tarkibida n ta savoli bo‘lgan so‘rovnomaning har bir savoliga a) „ha’’ yoki „yo‘q’’, b) „ha’’ , „yo‘q’’, „bilmayman’’ degan javobni yozish mumkin bo‘lsa,u holda so‘rovnomaning savollariga berish mumkin bo‘lgan barcha javoblar imkoniyatlarini sonini aniqlang.