Sh. Sh. ShOHAMIDOV

AMALIY MATEMATIKA UNSURLARI

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi Oliy texnika o'quv yurtlari talabalari uchun o'quv qo'llanma sifatida tavsiya etgan

Ikkinchi nashri

TOShKENT - «FAN VA TEXNOLOGIYA» - 2004

Sh. Sh. Shohamidov. Amaliy matematika unsurlari. Toshkent, "Fan va texnologiya", 2004 yil, 212 b.

Mazkur o'quv qo'llanmasining 1-6- boblarida hisoblash matematikasining xatoliklar nazariyasi, algebraik va transsendent tenglamalarni taqribiy yechish usullari, chiziqli va chiziqsiz tenglamalar tizimini yechish usullari, interpolyasion formulalar, differensial tenglamalarni taqribiy yechish usullari, aniq integrallarni taqribiy hisoblash formulalari keltiriladi.

Yettinchi va sakkizinchi boblar esa amaliy matematikaning muhim bo'limlaridan bo'lgan ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistikaga bag'ishlanadi. Matematik programmalashtirish qo'llanmaning to'qqizinchi bobidan joy olgan. Qo'llanmaning so'nggi o'ninchi bobida variatsion hisob haqidagi dastlabki ma'lumotlar berilgan. Qo'llanma oliy texnika institutlarining talabalari va ilmiy xodimlar uchun mo'ljallangan bo'lsada, shu sohaga qiziquvchilar undan mustaqil o'rganish maqsadida ham foydalanishlari mumkin.

Muharrir Yu. **MUZAFFARXO'JAEV**

$A \frac{1602000000}{M351(04)04} 04$

SO'Z BOShI

Elektron hisoblash mashinalari (EHM) ning inson faoliyatining turli sohalariga tobora chuqurroq kirib borishi hozirgi zamon muhandis (injener)laridan hisoblash texnikasi va amaliy matematika usullarini yetarli darajada bilishlarini talab etmoqda. Oliy texnika o'quv yurtlarining talabalari birinchi kursdayoq hisoblash usullari va algoritmik tillarni o'rganadilar, ulardan umummuhandislik va maxsus fanlar bo'yicha laboratoriya ishlari, kurs ishlari hamda diplom ishlarini bajarishda foydalanadilar.

Hisoblash usullarini yuqori malakali mutaxassislar yaratadilar. Oliy texnika o'quv yurtlarining talabalari va ilmiy xodimlari shu usullarning asosiy g'oyalarini tushunsalar va o'z masalalarini yechishda ulardan foydalana olsalar shuning o'zi yetarlidir. Hozirgi paytda amaliy matematikaning qator bo'limlari bo'yicha chuqur mazmunli darsliklar, ilmiy va o'quv qo'llanmalari mavjud. Ammo, ularni o'rganish uchun maxsus matematik tayyorgarlikka ega bo'lmaganliklari tufayli bu fanni o'zlashtirishda qiynaladilar. Ayniqsa hisoblash matematikasi usullari har tomonlama tushunarli qilib yozilgan qo'llanma va darsliklar o'zbek tilida yetarli emasligi talabalar uchun bir qancha qiyinchiliklar tug'dirmoqda. Ushbu o'quv qo'llanmasi shu qiyinchiliklarni ozmi-ko'pmi yengillashtiradi degan umiddamiz.

O'quv qo'llanmasi o'nta bobdan tashkil topgan. Ularda hisoblash matematikasi usullari (I–VI boblar), ehtimollar nazariyasi va matematik statistika (VII–VIII boblar), matematik programmalashtirish (IX bob) va variasion hisob haqida dastlabki ma'lumotlar (X bob) keltirilgan.

O'quv qo'llanmasi oliy texnika o'quv yurtlari talabalari va ilmiy xodimlari uchun mo'ljallangan bo'lib, u hisoblash ishlari bilan mashg'ul bo'lgan turli sohadagi xodimlar uchun ham foydali bo'lishi mumkin.

Qo'llanmani yozishda muallif o'zining ko'p yillar davomida Toshkent to'qimachilik va engil sanoat institutining «Amaliy matematika» kafedrasini boshqarish mobaynida talabalarga hamda malaka oshirish kurslarida o'tgan mashg'ulotlarida to'plagan tajribalarini asos qilib oldi. Shuningdek, so'nggi yillarda mazkur soha bo'yicha o'zbek tilida chiqqan adabiyotdan ham foydalanildi (ularnig ro'yxati qo'llanmaning oxirida keltirilgan).

Qo'llanmaning ustida ishlashda hamkasblarimiz S. G'oyipov, M. Otamirzaev, J. Quraqboyev, M. Isroilov va A. Xushboqovlar katta yordam berdilar. Muallif ularga o'zining samimiy minnatdorchiligini izhor etadi.

I BOB
XATOLIKLAR NAZARIYASI

1.1-§. Aniq va taqribiy sonlar haqida tushuncha

Kundalik hayotimizda va texnikada uchraydigan ko'pdan-ko'p masalalarni yechishda turli sonlar bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi. Bular aniq yoki taqribiy sonlar bo'lishi mumkin. A n i q s o n l a r biror kattalikning aniq qiymatini ifodalaydi. T a q r i b i y s o n l a r esa biror kattalikning aniq qiymatiga juda yaqin bo'lgan sonni ifodalaydi. Taqribiy sonning aniq songa yaqinlik darajasi hisoblash yoki o'lchash jarayonida yo'l qo'yilgan xatolik bilan ifodalanadi.

Masalan, ushbularda: «kitobda 738 ta varaq», «auditoriyada 30 ta talaba», «uchburchakda 3 ta qirra», «telefon apparatida 10 ta raqam»,– 738, 30, 3, 10 – aniq sonlar. Ushbularda esa: «yer bo'lagining perimetri 210 m», «Yerning radiusi 6000 km», «qalamning og'irligi 8 g», – 210, 6000, 8 taqribiy sonlar. Bu kattaliklarning taqribiy *bo'lishlariga sabab, o'lchov asboblarining takomillashmaganligidir.* Mutlaq aniq o'lchaydigan o'lchov asboblari yo'q bo'lib, ulardan foydalanganda ma'lum xatoliklarga yo'l qo'yiladi.

Bundan tashqari, Yer aniq shar shaklida bo'lmaganligi tufayli, uning radiusi taqribiy olingan. Uchinchi misolda esa qalamlar har xil bo'lganligi uchun ularning og'irligi turlicha 8 g deb o'rtacha qalamning og'irligi olingan.

Amaliyotda taqribiy son a deb, aniq qiymatli son A dan biroz farq qiladigan va hisoblash jarayonida uning o'rnida ishlatiladigan songa aytiladi.

Qisqalik uchun bundan keyin aniq qiymatli son o'rniga a n i q s o n, kattalikning taqribiy qiymati o'rniga t a q r i b i y s o n deb yozamiz.

Amaliy masalalarni yechish asosan quyidagi ketma-ket qadamlardan iborat:

1) yechilayotgan masalani matematik ifodalar orqali yozish;

2) qo'yilgan matematik masalani yechish.

Tabiatda uchraydigan masalalarni doim ham aniq matematik tilda *ifodalash mumkin bo'lmaganligi tufayli masala* ma'lum darajada ideallashgan model vositasida yoziladi, ya'ni xatolikka yo'l qo'yiladi (birinchi qadamda).

Masalaning tarkibiga kirgan ba'zi parametrlar tajribadan olinganligi tufayli, bunda ham xatolikka yo'l qo'yiladi. Bularning yig'indisi esa b o sh l a n g' i ch i n f o r m a ts i ya x a t o l i- g i n i keltirib chiqaradi.

Juda ko'p hollarda matematik masalaning (ikkinchi qadam) aniq yechimini (analitik) topishning iloji bo'lmaydi. Shuning uchun amaliyotda taqribiy matematik usullar qo'llaniladi. Aniq yechimning o'rniga taqribiy yechimni qabul qilish (majburiy ravishda) yana xatolikni keltirib chiqaradi. Masalani yechish jarayonida boshlang'ich shartlarni va hisoblash natijalarini yaxlitlashda ham xatolikka yo'l qo'yiladi, buni *hisoblash xatoliklari* deyiladi.

Taqribiy sonlar bilan ish ko'rilayotganda quyidagilarga amal qilish lozim:

1) taqribiy sonlarning aniqligi haqida ma'lumotga ega bo'lish;

2) boshlang'ich qiymatlarning aniqlik darajasini bilgan holda natijaning aniqligini baholash;

3) boshlang'ich qiymatlarning aniqlik darajasini shunday tanlash kerakki, natija belgilangan aniqlikda bo'lsin.

1.2-§. Absolyut va nisbiy xatoliklar

Faraz qilaylik A – aniq son, a – uning taqribiy qiymati bo'lsin. Agar $a < A$ bo'lsa, *a kami bilan olingan taqribiy son* deyiladi. Agar $a > A$ bo'lsa, *a ortig'i bilan olingan taqribiy son* deyiladi.

1- ta'rif. Taqribiy sonning xatoligi deb A va a orasidagi ayirmaga aytiladi.

Xatolikni Δa deb belgilasak,

$$\Delta a=A-a; \qquad (1.1)$$

$$A=\Delta a+a \ (1.2) \qquad (1.2)$$

bo'ladi.

2- ta'rif Taqribiy sonning absolyut xatoligi deb A va a orasidagi ayirmaning moduliga aytiladi.

Absolyut xatolikni Δ deb belgilasak, u holda

$$\Delta=|A-a| \qquad (1.3)$$

bo'ladi.

Amaliyotda ko'p hollarda «0,01 gacha aniqlik bilan», «1 sm gacha aniqlik bilan» va h.k. lar uchraydi. Bu esa absolyut xatolikning 0,01; 1 *sm va h.k. ga teng ekanligini* bildiradi.

1- misol. L uzunlikdagi kesmani 0,01 sm aniqlikda o'lchadilar va l=21,4 sm natijani oldilar.

Bu *yerda absolyut xatolik* Δl=0,01 *sm*. (1.2) formulaga asosan L=21,4±0,01, ya'ni 21,39≤L≤21,41.

Absolyut xatolik o'lchash yoki hisoblashni faqat miqdoriy tomondan *ifodalaydi va sifat tomonlari tavsiflamaydi*. Shu munosabat bilan n i s b i y x a t o l i k tushunchasi kiritiladi.

3- ta'rif. Taqribiy son a ning nisbiy xatoligi $\delta(a)$ deb absolyut xatolik Δa *ning* A *ning moduliga nisbatiga aytiladi:*

$$\delta(a)=\frac{\Delta a}{|A|} \qquad (1.4)$$

yoki

$$\delta(a)=\frac{\Delta a}{|a|} \qquad (1.5)$$

(1.4) va (1.5) formulalarni 100 ga ko'paytirilsa, nisbiy xatolik foiz hisobida chiqadi.

2- misol. a=35,148±0,00074 taqribiy sonning nisbiy xatosi (foizlarda) topilsin.

Bu yerda Δa=0,00074; A=35,148. (1.4) ga asosan

$$\delta(a)=0{,}00074:(35{,}148)=0{,}000022\approx 0{,}003\%$$

3- misol. Nisbiy xatoligi $\delta(a)$=0,01% bo'lgan a=4,123 taqribiy sonning absolyut xatoligi Δa topilsin.

Foizni o'nli kasr orqali ifodalab va (1.5) formulaga asosan: $\Delta a=|a|\cdot\delta(a)=4{,}123\cdot 0{,}0001\approx 0{,}0005$. A=4,123±0,0005.

4- misol. Jismning og'irligini o'lchashda R=23,4±0,2 g natija olingan. Nisbiy xatolik topilsin.

Bu yerda ΔR=0,2. U holda

$$\delta(r)=\frac{0{,}2}{23{,}4}\cdot 100\%=0{,}9\%.$$

1.3- §. Taqribiy sonlar ustida amallar

Taqribiy sonlarni qo'shganda yoki ayirganda ularning absolyut xatoliklari qo'shiladi:

$$\Delta(a \pm b) = \Delta a + \Delta b, \tag{1.6}$$

bu yerda a va b – taqribiy sonlar.

Taqribiy sonni taqribiy songa bo'lganda yoki ko'paytirganda ularning nisbiy xatoliklari qo'shiladi:

$$\delta(a \cdot b) = \delta(a) + \delta(b); \tag{1.7}$$

$$\delta\left(\frac{a}{b}\right) = \delta\,(a) + \delta\,(b)$$

Taqribiy sonni darajaga oshirilganda, uning nisbiy xatoligi shu daraja ko'rsatkichiga ko'paytiriladi.

$$\delta(a^n) = n \cdot \delta(a) \tag{1.8}$$

Misol. Quyidagi funktsiyaning nisbiy xatoligi topilsin:

$$y = \left(\frac{a+b}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

(1.6), (1.7) va (1.8) formulalardan foydalansak,

$$\delta(y) = \frac{1}{2}\,\delta\,(a+b) + 3\delta(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta a + \Delta b}{|a+b|} + 3\frac{\Delta x}{|x|}\right).$$

Faraz qilaylik, a bir o'zgaruvchili funktsiya $u=f(x)$ ning argument x ning taqribiy qiymati, Δa esa uning absolyut xatoligi bo'lsin. Bu funktsiyaning absolyut xatoligi sifatida uning orttirmasi Δu ni olish mumkin. Orttirmani esa differensial bilan almashtirsak:

$$\Delta u \approx dy$$

U holda

$$\Delta u = |f'(a)| \cdot \Delta a$$

Ushbu mulohazani ko‘p o‘zgaruvchili funktsiyaga ham qo‘llash mumkin.

$U=f(x, y, z)$ funktsiyaning argumentlari x, y, z lar uchun taqribiy qiymatlar a, b, c lar bo‘lsin. U holda

$$\Delta u=\left|f'_x(a,\ b,\ c)\right|\cdot\Delta a+\left|f'_y(a,\ b,\ c)\right|\cdot\Delta b+\left|f'_z(a,\ b,\ c)\right|\cdot\Delta c, \qquad (1.9)$$

bu yerda Δa, Δb, Δs – argumentlar absolyut xatoligi; f'_x, f'_y, f'_z – mos ravishda x, y, z bo‘yicha olingan xususiy hosilalar.

Nisbiy xatolik esa quyidagi formuladan aniqlanadi:

$$\delta(u)=\frac{\Delta u}{\left|f(a,b,c)\right|} \qquad (1.10)$$

II BOB
ALGEBRAIK VA TRANSSENDENT TENGLAMALARNI TAQRIBIY YEChISh USULLARI

2.1- §. Masalaning qo‘yilishi

Bir noma’lum istalgan tenglamani quyidagi ko‘rinishga keltirish mumkin

$$f(x)=0 \qquad (2.1)$$

bu yerda $f(x)$ funktsiya $[a, b]$ oraliqda aniqlangan va uzluksiz.

Ta’rif. (2.1) tenglamaning *ildizi (yechimi)* deb shunday $\xi(a\le\xi\le b)$ songa aytiladiki, ξ ni (2.1) ga qo‘yganda

$$f(\xi)=0$$

ayniyat hosil bo‘ladi.

Agar (2.1) da $f(x)$ funktsiya algebraik, ya’ni

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n \qquad (2.2)$$

bo‘lsa, u holda (2.1) algebraik tenglama deb ataladi. ((2.2) da a_0, a_1, ..., a_n – natural son.)

Algebraik tenglamaga misollar:

$$x^2-5x+6=0;\ \sqrt{2x+6}+\sqrt{6x-4}=14;$$

$$\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}=\frac{x-1}{4} \text{ va h.k.}$$

Algebraik tenglama deganda (2.2) ko'rinishdagi tenglama ko'zda tutiladi. Keltirilgan misollardagi ikkinchi va uchinchi tenglamalarni sodda amallar bajarib (2.2) ko'rinishga keltirish mumkin.

Agar (2.1) tenglamada $f(x)$ funktsiya algebraik bo'lmasa, ya'ni uni (2.2) ko'rinishda ifodalab bo'lmasa, u holda (2.1) ga t r a n s s e n d e n t t e n g l a m a deyiladi. Transsendent tenglamaga misollar:

x-10sin$x$=0; 2x-2cos$x$=0; $lg\,(x+1)=tgx$ va h.k.

Ko'rsatkichli (a^x), logarifmik ($log_a x$), trigonometrik ($\sin_x$, $\cos_x$, tg_x, ctg_x va h.k.) funktsiyalar algebraik bo'lmagan (transsendent) funktsiyalardir.

(2.1) tenglama haqiqiy yoki kompleks ildizga ega bo'lishi mumkin. Biz faqat haqiqiy ildizlar topish bilan shug'ullanamiz va quyidagi masalalarni yechamiz:

1) *(2.1) tenglama haqiqiy ildizga egami yoki yo'qmi; agar ega* bo'lsa ildizlar soni nechta?

2) Har qanday n tartibli algebraik tenglamaning ildizlari soni n dan katta bo'lmaydi.

3) Har qanday haqiqiy koeffitsientli algebraik tenglama faqat juft sonli kompleks ildizlarga ega bo'lishi mumkin.

4) Har qanday toq darajali algebraik tenglama juda bo'lmaganda bitta haqiqiy ildizga ega.

Algebraik tenglama ildizlarini qanday topamiz?

1-, 2- tartibli tenglamalar uchun tayyor hisoblash formulalari mavjud bo'lib, ular bizga o'rta maktab matematikasidan ma'lum. Bu formulalarda ildizlar tenglamaning koeffitsientlari orqali ifodalanadi (masalan kvadrat tenglamaning ildizlarini hisoblashda). 3- va 4- tartibli *tenglamalar uchun ham formulalar mavjud.* Biroq bu formulalar murakkab ko'rinishda. 5- va undan yuqori darajali algebraik tenglamalar uchun bunday formulalarning bo'lishi mumkin emas. Buni Norvegiyalik matematik Abel isbotlagan. Bunday tenglamalarni faqat xususiy hollardagina echish mumkin (masalan $ax^n=b$ ni).

Shu munosabat bilan hisoblash matematikasida qator taqribiy usullar ishlab chiqilgan. Bu usullar bilan istalgan darajali algebraik yoki transsendent tenglamalarni berilgan aniqlikda yechish mumkin. Shuning uchun taqribiy usullar yuqori darajali tenglamalarni yechish uchun asos bo'ladi.

«Berilgan aniqlikdagi taqribiy yechim» deganda nimani tushunamiz?

Faraz qilaylik, ξ (2.1) ning aniq yechimi, x esa uning ε aniqlikdagi taqribiy yechimi ($0<\varepsilon<1$) bo'lsin. U holda yuqoridagi savolimizning javobi $|\xi-x|\leq\varepsilon$ bo'ladi. Ushbu bobda biz bir noma'lumli algebraik va transsendent tenglamalarni ba'zi taqribiy yechish usullari bilan tanishib chiqamiz.

2.2- §. Ildizlarni ajratish. Oraliqni ikkiga bo'lish usuli

Tenglamalarni taqribiy yechish jarayoni ikkita bosqichga ajratiladi:

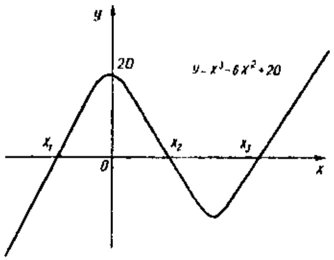
1) ildizlarni ajratish;

2) ildizlarni berilgan aniqlikda topish.

$[a;\ b]$ kesmada $f(x)=0$ tenglamaning ξ dan boshqa ildizi yo'q bo'lsa, ildiz ξ ajratilgan hisoblanadi. Ildizlarni ajratish uchun $[a;\ b]$ kesmani shunday kesmachalarga bo'lish kerakki, bu kesmachalarda tenglamaning faqat bitta ildizi bo'lsin. Ildizlarni g r a f i k va a n a l i t i k usullar bilan ajratish mumkin.

Ildizlarni grafik usulda ajratish. 1- usul. Bu usul juda sodda bo'lib quyidagicha bajariladi. Dekart koordinat tizimida $y=f(x)$ funktsiyaning grafigini chizamiz (bu bizga o'rta maktab dasturidan ma'lum). Shu grafikning Ox o'qi bilan kesishgan nuqtalari izlanayotgan ildizlar (taqribiy) bo'ladi.

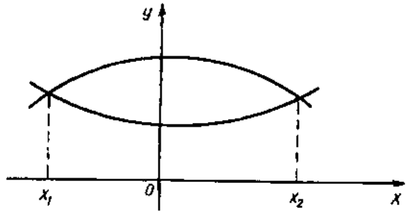
Misol. x^3-$6x^2$+20=0 tenglamaning taqribiy yechimlari x_1, x_2, x_3 1-rasmda ko'rsatilgan.



1- rasm

2- usul. $f(x)=0$ tenglamani $f(x)=f_2(x)$ ko'rinishda yozib olamiz.

Dekart koordinat tizimida $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funktsiyalarning grafiklarini chizamiz. Agar bu egri chiziqlar o'zaro kesishsa, kesishgan nuqtalaridan Ox o'qiga tik chiziq (perpendikulyar) o'tkazamiz. Hosil bo'lgan nuqtalar (yoki nuqta) taqribiy yechimlar bo'ladi. 2- rasmdagi x1 va x2 lar (2.1) tenglamaning taqribiy yechimlaridir.



2- rasm

Bu usullar bilan tenglamalar yechganda aniqroq yechimlar olish uchun grafiklarni iloji boricha aniq chizish va katta masshtab olish lozim bo'ladi. Shunga qaramay grafik usullar bilan ildizlarni yuqori aniqlikda hisoblab bo'lmaydi. Grafik usul bilan tenglamaning ildizlarini biror chegaralangan kesmada aniqlaymiz, ya'ni chizmani istalgancha katta o'lchovda ololmaymiz va tenglama nechta ildizga ega ekanligiga javob bera olmaymiz. Ildizlarni yuqori aniqlikda topish lozim bo'lsa, boshqa taqribiy usullardan foydalanish kerak.

Ildizlarni analitik usulda ajratish. $f(x)=0$ tenglamaning ildizlarini analitik usulda ajratish uchun oliy matematika kursidan ba'zi teoremalarni isbotsiz keltiramiz.

1- t e o r e m a. *Agar $f(x)$ funktsiya* $[a, b]$ *kesmada uzluksiz bo'lib, kesmaning chekka nuqtalarida turli ishorali qiymatlar qabul qilsa, u holda* $[a, b]$ *kesmada $f(x)=0$ tenglamaning juda bo'lmaganda bitta ildizi yotadi.*

2- t e o r e m a. *Agar $f(x)$ funktsiya* $[a, b]$ *kesmada uzluksiz va monoton bo'lib, kesmaning chekka nuqtalarida turli ishorali qiymatlar qabul qilsa, u holda* $[a, b]$ *kesmada $f(x)=0$ tenglamaning faqat bitta ildizi yotadi.*

3- t e o r e m a. *Agar $f(x)$ funktsiya* $[a, b]$ *kesmada uzluksiz bo'lib va kesmaning chekka nuqtalarida turli ishorali qiymatlar qabul qilib,* $[a, b]$ *kesmaning ichida $f'(x)$ hosilasining ishorasi o'zgarmasa, u holda* $[a, b]$ *kesmada $f(x)=0$ tenglamaning faqat bitta ildizi yotadi.*

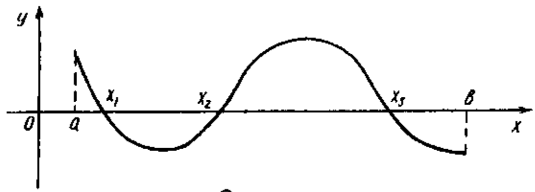
Eslatma. 1) $y=f(x)$ funktsiya berilgan intervalda monoton deyiladi, agar shu intervalga tegishli istalgan $x_2>x_1$ uchun $f(x_1)\geq f(x_1)$ ($f'(x)\geq 0$) (monoton o'suvchi) yoki $f(x_2)\leq f(x_1)$ ($f'(x)\leq 0$) (monoton kamayuvchi) bo'lsa.

2) Agar $y=f(x)$ funktsiya berilgan intervalda uzluksiz bo'lib, intervalning hamma nuqtalarida hosilalari mavjud bo'lsa, u holda funktsi-

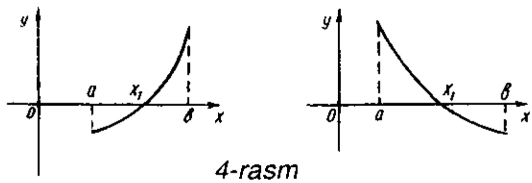
yaning bu intervalda monoton bo'lishi uchun $f'(x)\geq 0$ yoki $f'(x)\leq 0$ tengsizliklarning bajarilishi zarur va etarli.

3- va 4- rasmlarda 1- va 2- teoremalarning yaqqol tasviri berilgan.

Oraliqni ikkiga bo'lish usuli. Faraz qilaylik, $f(x)=0$ tenglamaning biror ξ ildizi $[a, b]$ kesmada ajratilgan bo'lsin. Kesmaning uzunligi $d=b-a$ deb belgilaylik. Tenglamaning ξ echimi $\varepsilon=0{,}001$ aniqlikda topilsin. ξ ildiz $[a, b]$ ning ichida bo'lganligi ($a<\xi<b$) uchun a ni kami bilan olingan taqribiy ildiz. b ni



3-rasm



4-rasm

ortig'i bilan olingan taqribiy ildiz deb olishimiz mumkin. Agar $d\leq 0{,}001$ bo'lsa masala yechilgan hisoblanadi va a hamda b lar $f(x)=0$ tenglamaning berilgan $\varepsilon=0{,}001$ aniqlikdagi yechimlari bo'ladi. Bu holda taqribiy yechim sifatida a va b lardan tashqari bular orasida yotgan istalgan $x_0(a<x_0<b)$ ni olish mumkin. Taqribiy yechim sifatida $x_0=\frac{a+b}{2}$ ni olish maqsadga muvofiq.

Endi faraz qilaylik $d>0{,}001$ va $[a, b]$ kesmaning o'rtasida $s=\frac{a+b}{2}$ nuqta olingan bo'lsin. U holda $[a, b]$ kesma uzunliklari $(b-a)/2$ ga teng bo'lgan $[a, c]$ va $[c, b]$ kesmalarga ajraydi. Shu ikki kesmadan qaysi birining chekka nuqtalarida $f(x)$ funktsiya ishorasini o'zgartirsa, shu kesmani olib qolib keyingisini tashlab yuboramiz. Qolgan kesmaning uzunligi $d_1\leq\varepsilon$ bo'lsa, shu yerda to'xtaymiz. Agar shart bajarilmasa, olib qolingan kesmada yuqoridagi mulohazalarni takrorlaymiz. Ikkiga bo'lish jarayonini kesmaning uzunligi $d_n \le \varepsilon$ (n – ikkiga bo'lishlar soni) bo'lguniga qadar davom ettiramiz.

Misol. $x^3-4x-1=0$ tenglama $\varepsilon=0{,}001$ aniqlikda yechilsin.

Quyidagi jadvalni tuzamiz.

x	–1	0	1	2	2,1	2,2
$f(x)$ ning ishorasi	+	–	–	–	–	+

Jadvaldan ko'rinyaptiki [–1;0]; [2,1; 2,2] kesmalarda taqribiy yechim (1- teoremaga asosan) bor. Biz uchun qulay kesma [2,1; 2,2]. Bunda $f(2{,}1)=-1{,}39<0$; $f(2{,}2)=0{,}850>0$. Bizda $a=2{,}1$; $b=2{,}2$. Bundan $d=b-a=0{,}1>\varepsilon$. Demak hisoblashni davom ettirish kerak.

$$f(2{,}11)=-0{,}046<0;\ f(2{,}12)=0{,}046>0.$$

Bu yerdan $a=2{,}11$; $b=2{,}12$; $d=b-a=0{,}001>\varepsilon$

Hisoblashni yana davom ettiramiz:

$$f(2{,}114)=-0{,}0085<0;\ f(2{,}115)=0{,}0009>0.$$

$a=2{,}114$; $b=2{,}115$; $d=b-a=2{,}115-2{,}114=0{,}001=\varepsilon$.

Qo'yilgan maqsadga erishdik, ya'ni kesmaning uzunligi d avvaldan berilgan aniqlik $\varepsilon=0{,}001$ dan katta emas. Bu misolda izlanayotgan taqribiy yechim ξ quyidagi oraliqda bo'ladi $2{,}114<\xi<2{,}115$, ya'ni 2,114 va 2,115 larni taqribiy yechim tarzida olish mumkin (ξ aniqlik bilan). Amalda bularning o'rta arifmetigi olinsa yechim aniqligi yanada oshadi.

2.3- §. Vatarlar usuli

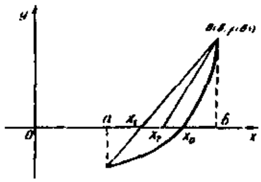
Algebraik va transsendent tenglamalarni yechishda vatarlar usuli keng qo'llanadigan usullardan biridir. Bu usulni ikki holat uchun ko'rib chiqamiz.

1- h o l a t. Faraz qilaylik $f(x)=0$ tenglamaning ildizi $[a, b]$ kesmada ajratilgan va kesmaning chekka nuqtalarida $f(a)\cdot f(b)<0$ bo'lsin. Bundan tashqari birinchi va ikkinchi hosilalari bir xil ishorali qiymatlarga ega bo'lsin, ya'ni $f'(x)\cdot f''(x)>0$ yoki $f(a)<0$; $f(b)>0$; $f'(x)>0$; $f''(x)>0$ (5- rasm).

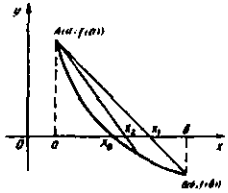
$f(x)=0$ – tenglamaning aniq yechimi, $f(x)$ funktsiya grafigining Ox o'qi bilan kesishgan nuqtasi x_0. A va V nuqtalarni to'g'ri chiziq (vatar) bilan tutashtiramiz.

Oliy matematikadan ma'lumki, A va V nuqtalarda (5- rasm) o'tgan to'g'ri chiziqning tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a} \qquad (2.3)$$



5-rasm



6-rasm

O'tkazilgan vatarning *Ox* o'qi bilan kesishgan nuqtasi x_1 ni taqribiy yechim deb qabul qilamiz va uning koordinatasini aniqlaymiz. (2.3) tenglikda $x=x_1$, $y=0$ deb hisoblab uni x_1 ga nisbatan yechamiz:

$$x_1 = a - \frac{f(a)(b - a)}{f(b) - f(a)} \qquad (2.4)$$

Izlanayotgan yechim x_0 endi $[x_1;\ b]$ kesmaning ichida. Agar topilgan x_1 yechim bilan qanoatlantirmasa yuqorida aytilgan mulohazalarni $[x_1;\ b]$ kesma uchun takrorlaymiz va x_2 nuqtaning koordinatini aniqlaymiz:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)\,(b - x_1)}{f(b) - f(x_1)}. \qquad (2.5)$$

Agar x_2 ildiz ham bizni qanoatlantirmasa, ya'ni avvaldan berilgan ε aniqlik uchun $|x_2 - x_1| \le \varepsilon$ shart bajarilmasa, x_3 ni hisoblaymiz:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)\,(b - x_2)}{f(b) - f(x_2)} \qquad (2.6)$$

yoki umumiy holda,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\,(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)}, \tag{2.7}$$

ya'ni hisoblashni $|x_{n+1} - x_n \leq \varepsilon|$ shart bajarilgunga qadar davom ettiramiz.

Yuqorida keltirilgan formulalarni $f(a)>0$; $f(b)<0$; $f'(x)<0$; $f''(x)<0$ uchun ham qo'llash mumkin.

2- h o l a t. $f(x)$ funktsiyaning birinchi va ikkinchi hosilalari turli ishorali qiymatlarga ega deb faraz qilaylik, ya'ni $f'(x)\cdot f''(x)<0$ yoki $f(a)>0$, $f(b)<0$, $f'(x)<0$, $f''(x)>0$ (6- rasm).

A va *V* nuqtalarni to'g'ri chiziq (vatar) bilan tutashtirib uning tenglamasini yozamiz

$$\frac{y - f(b)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - b}{b - a}. \tag{2.8}$$

Bu tenglamada $y=0$ va $x=x_1$ deb qabul qilib, uni x_1 ga nisbatan yechsak,

$$x_1 = b - \frac{f(b)\,(b - a)}{f(b) - f(a)}. \tag{2.9}$$

Topilgan x_1 ni taqribiy yechim deb olish mumkin. Agar topilgan x_1 ning aniqligi bizni qanoatlantirmasa, yuqoridagi mulohazani $[a, x_1]$ kesma uchun takrorlaymiz, ya'ni x_2 ni hisoblaymiz:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)\,(x_1 - a)}{f(x_1) - f(a)}. \tag{2.10}$$

Agar $|x_2 - x_1| \leq \varepsilon$ shart bajarilsa, taqribiy yechim sifatida x_2 olinadi, bajarilmasa x_3, x_4, ... lar hisoblanadi, ya'ni

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\,(x_n - a)}{f(x_n) - f(a)}. \tag{2.11}$$

Hisoblash jarayoni $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$ bo'lgunga qadar davom ettiriladi. $f(a)<0$, $f(b)>0$, $f'(x)>0$, $f''(x)<0$ bo'lgan hol uchun ham taqribiy ildiz (2.9) – (2.11) formulalar bilan hisoblanadi. Demak, agar $f'(x)\cdot f''(x)>0$ bo'lsa taqribiy yechim (2.4–2.7) formulalar bilan $f'(x)\times f''(x)<0$ bo'lsa (2.9) – (2.11) formulalar bilan hisoblanadi.

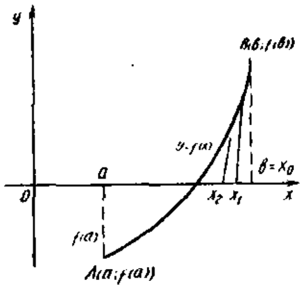
Misol. $x^3+x^2-3=0$ tenglama $\varepsilon=0,005$ aniqlikda vatarlar usuli bilan hisoblansin.

Y e ch i sh. Ildizlarni ajratsak, $0,5<x<1,5$ ga ega bo'lamiz; bu yerda $f(0,5)=-2,625<0$; $f(1,5)=2,600>0$; $f'(x)=3x^2+2x$; $f''(x)=6x+2$. Qidirilayotgan taqribiy ildiz [0,5; 1,5] kesmada ekan. Bu kesmada esa $f'(x)>0$; $f''(x)>0$. *Demak biz taqribiy ildizni (2.4) – (2.7) formulalar yordamida* hisoblaymiz (1- holat). (2.4) dan $x_1=1,012$ ni, (2.5) dan $x_2=1,130$ ni; (2.6) dan $x_3=1,169$ ni, (2.7) dan ($n=3$) $x_3=1,173$ ni topamiz. Bu erda $|x_4 - x_3|=1,173 - 1,169=0,004<\varepsilon$. Demak, shart 4- qadamda bajarildi. Shuning uchun $x_4=1,173$ yuqoridagi tenglamaning $\varepsilon=0,005$ aniqlikdagi ildizi bo'ladi.

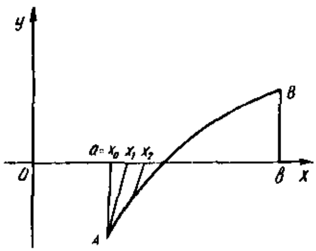
2.4-§. Urinmalar usuli. (Kombinatsiyalangan usul)

Urinmalar usulini Nyuton usuli deb ham ataydilar. Bu usulni ham ikki holat uchun ko'rib chiqamiz.

1- h o l a t. Faraz qilaylik, $f(a)<0$, $f(b)>0$, $f'(x)>0$, $f''(x)>0$ yoki $f(a)>0$, $f(b)<0$, $f'(x)<0$, $f''(x)<0$ (7- rasm.)



7- rasm



8- rasm

$y=f(x)$ egri chiziqqa V nuqtada urinma o'tkazamiz va urinmaning Ox o'qi bilan kesishgan nuqtasi x_1 ni aniqlaymiz.

Urinmaning tenglamasi quyidagicha:

$$y-f(b)=f'(b)\,(x-b), \tag{2.12}$$

bu yerda $y=0$, $x=x_1$ deb, (2.12) ni x_1 ga nisbatan yechsak,

$$x_1=b-\frac{f(b)}{f'(b)}. \qquad (2.13)$$

Shu mulohazani $[a;\ x_1]$ kesma uchun takrorlab, x_2 ni topamiz:

$$x_2=x_1-\frac{f(x)}{f'(x)}. \qquad (2.14)$$

Umuman olganda

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \qquad (2.15)$$

Hisoblashni $|x_{n+1}-x_n|\leq\varepsilon$ shart bajarilganda to'xtatamiz.

2- h o l a t. Faraz qilaylik, $f(a)<0$, $f(b)>0$, $f'(x)>0$, $f''(x)<0$ yoki $f(a)>0$, $f(b)<0$, $f'(x)<0$, $f''(x)>0$ (8- rasm). $y=f(x)$ egri chiziqqa A nuqtada urinma o'tkazamiz, uning tenglamasi:

$$y-f(a)=f'(a)\,(x-a). \qquad (2.16)$$

Bunda $u=0$, $x=x_1$ desak,

$$x_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)}. \qquad (2.17)$$

$[x_1;\ b]$ kesmadan

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \qquad (2.18)$$

Umuman

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \qquad (2.19)$$

(2.13) va (2.17) formulalardan bir-biri bilan solishtirsak, ular bir-birlaridan boshlang'ich yaqinlashishi (a yoki b) ni tanlab olish bilan farqlanadilar.

Boshlang'ich yaqinlashishni tanlab olishda quyidagi qoidadan foydalaniladi; boshlang'ich yaqinlashish tarzida $[a;\ b]$ kesmaning shunday chekka (a yoki b) qiymatini olish kerakki, bu nuqtada $f(x)$ funktsiyaning ishorasi uning ikkinchi hosilasining ishorasi bilan bir xil bo'lsin.

Misol. $x-\sin x=0{,}25$ tenglamaning ildizi $\varepsilon=0{,}0001$ aniqlikda urinmalar usuli bilan aniqlansin.

Y e ch i sh. Tenglamaning ildizi [0,982; 1,178] kesmada ajratilgan (buni tekshirishni kitobxonga havola qilamiz); bu yerda a=0,982; b=1,178; $f(x)$=1– –cos$x$; $f'(x)$>0, ya'ni boshlang'ich yaqinlashishda x_0=1,178. Hisoblashni (2.13) – (2.15) formulalar vositasida bajaramiz. Hisoblash natijalari quyidagi 2.1- jadvalda berilgan.

2.1- jadval

n	x_n	$-\sin x_n$	$f(x_n)=x_n-$ $-\sin x_n-0{,}25$	$f'(x_n)=$ $=1-\cos x_n$	$\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1,178	–0,92384	0,00416	0,61723	-0,0065
1	1,1715	–0,92133	0,00017	0,61123	-0,0002
2	1,1713	–0,92127	0,00003	0,61110	-0,00005
3	1,17125				

Jadvaldan ko'rinadiki, $|x_3-x_2|$=|1,17125-1,1713|= =0,00005<ε. Demak, yechim deb x=1,17125 ni (ε=0,0001 aniqlikda) olish mumkin.

5–8- rasmlarga diqqat bilan e'tibor qilsak, shuni ko'ramizki, $f(x)$=0 tenglamaning taqribiy yechimlarini vatarlar va urinmalar usuli bilan topganda aniq yechimga ikki chekkadan yaqinlashib kelinadi. Shuning uchun ikkala usulni bir vaqtning o'zida qo'llash natijasida maqsadga tezroq erishish mumkin. Bu usulni k o m b i n a ts i ya l a n g a n u s u l deb ataydilar. Kombinatsiyalangan usul yuqorida keltirilgan usullarning umumlashmasi bo'lgani tufayli bu to'g'rida ko'p to'xtalmaymiz.

2.5-§. Ketma-ket yaqinlashish usuli

Bizdan f(x)=0 tenglamaning ildizini aniqlash talab etilsin. Bu *tenglamani quyidagi (teng kuchli) ko'rinishda yozamiz:*

$$x=\varphi(x). \qquad (2.20)$$

x_1 ni birinchi yaqinlashish bo'yicha (2.20) ning ildizi deyiladi. Keyingi yaqinlashishlar quyidagicha topiladi:

$$x_2=\varphi(x_1),$$
$$x_3=\varphi(x_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n=\varphi(x_n\text{-}1),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Buning natijasida quyidagi ketma-ketlikni tuzamiz:

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n. \tag{2.21}$$

Agar (2.21) ketma-ketlikning limiti mavjud bo'lsa $(\lim_{n\to\infty} x_n = x)$, u holda x (2.20) ning ildizi bo'ladi. Buning isboti juda sodda. Agar $\varphi(x)$ni uzluksiz funktsiya desak,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(x_{n-1}) = \varphi(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = \varphi(\bar{x}),$$

ya'ni $\bar{x} = \varphi(x)$ bo'lib, $\bar{x}$ (2.20) ning ildizi bo'ladi.

Agar (2.20) ketma-ketlikning limiti mavjud bo'lmasa, u holda ketma-ket yaqinlashish usulining ma'nosi bo'lmaydi.

Yuqorida aytilganlardan xulosa shuki, biz bu usul bilan $f(x)=0$, $[x=\varphi(x)]$ tenglamaning yechimini topmoqchi bo'lsak, quyidagi ketma-ket bajarilishi lozim bo'lgan jarayonni hisoblashimiz kerak bo'ladi:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \varphi(x_0), \\ x_2 = \varphi(x_1), \\ x_3 = \varphi(x_2), \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n = \varphi(x_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{2.22}$$

bu yerda $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ketma-ket yaqinlashishlar; x_0 – boshlang'ich yaqinlashish; x_1 – birinchi yaqinlashish; x_2 – ikkinchi yaqinlashish va h.k.

(2.22) jarayon yaqinlashuvchi bo'lishning yetarlilik shartlarini quyidagi teorema ifodalaydi (teoremani isbotsiz keltiramiz).

Teorema. $x=\varphi(x)$ *tenglamaning ildizi* $[a, b]$ *kesmada ajratilgan bo'lib, bu kesmada quyidagi shartlar bajarilsa:*

1) $\varphi(x)$ *funktsiya* $[a, b]$ *da aniqlangan va differensiallanuvchi;*

2) *barcha* $x\in[a; b]$ *uchun* $\varphi(x)\in[a, b]$;

3) barcha $x\in[a; b]$ *da* $|\varphi'(x)|\le M<1$ *bo'lsa, u holda* (2.22) *jarayon* ***yaqinlashuvchi*** *bo'ladi.*

Bu yerda shuni ta'kidlash lozimki, teoremaning shartlari faqat yetarli bo'lib, zaruriy emasdir, ya'ni (2.23) jarayon bu shartlar bajarilmaganda ham yaqinlashuvchi bo'lishi mumkin. (2.23) ni hisoblaganimizda, hisoblashni avvaldan berilgan ε aniqlik uchun quyidagi tengsizlik bajarilgunga qadar davom ettiramiz:

$$|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon \qquad (n=1,2,3,4, \ldots)$$

Misol. $4x-5\ln x=5$ tenglama $\varepsilon=0{,}0001$ aniqlikda ketma-ket yaqinlashish usuli bilan yechilsin.

Y e ch i sh. Tenglamani $\ln x=\frac{4x-5}{5}$ ko'rinishda yozamiz va $y_1=\ln x$; $y_2=\frac{4x-5}{5}$ chiziqlar kesishgan nuqtani aniqlaymiz. Bular $x_0=2{,}28$; $x_0=0{,}57$. Bularni boshlang'ich yaqinlashish nuqtalari deb olamiz. Berilgan boshlang'ich yaqinlashish nuqtalari deb olamiz. Berilgan tenglamani $x=1{,}25(1+\ln x)$ ko'rinishda yozsak, $\varphi(x)=1{,}25(1+\ln x)$ bo'ladi, bundan $\varphi'(x)=\frac{1{,}25}{x}$. Bu holda $x_0=2{,}28$ uchun ketma-ket yaqinlashish jarayoni yaqinlashuvchi bo'ladi:

$$\varphi'(x)=\frac{1{,}25}{x}<1 .$$

Hisoblash natijalari quyidagi 2.2- jadvalda keltirilgan:

2.2- jadval

(1)	(2)	(3)
x	ln(1)+1	1,25·(2)
2,28	1,82418	2,28022
2,28022	1,82427	2,28034
2,28034	1,82432	2,28040
2,28040	1,82435	2,28044
2,28044	1,82437	2,28046

Boshlang'ich yaqinlashish $x_0=0{,}57$ atrofida jarayon yaqinlashuvchi bo'lmaydi, chunki

$$\varphi'(x)=\frac{1{,}25}{x_0}\approx\frac{1{,}25}{0{,}57}>1 .$$

Bu holda berilgan tenglamani $x=e^{0{,}8x-1}$ ko'rinishda yozib, hisoblashni davom ettirish kerak.

III BOB

CHIZIQLI VA CHIZIQLI BO'LMAGAN ALGEBRAIK TENGLAMALAR TIZIMINI YECHISH

3.1-§. Vektorlar va matritsalar haqida ba'zi ma'lumotlar. Masalaning qo'yilishi

Ushbu paragrafda tenglamalar tizimlarini yechish usullarini ko'rishda lozim bo'ladigan vektorlar va matritsalar haqidagi asosiy ma'lumotlarni keltiramiz. Bular o'quvchiga oliy matematika kursidan ma'lum bo'lsa-da, bu ma'lumotlar ushbu bobni yoritishda muhim bo'lganligi tufayli bu haqda qisqacha to'xtalishni lozim topdik.

Vektor fazoning ikkita nuqtasi: uning boshi va oxiri bilan aniqlanadi. Faraz qilaylik, barcha vektorlar fazoning birdan-bir nuqtasi – koordinata boshidan boshlansin. U holda bu vektorni aniqlash uchun faqat bitta nuqtani, ya'ni uning oxirini ko'rsatish yetarli bo'ladi, bu nuqta o'z navbatida uning koordinatalari bo'lmish uchta son orqali ifodalanadi.

Shunday qilib, koordinata boshidan boshlang'ich har qanday vektor tartiblangan sonlarning uchligi bilan aniqlanadiki, u v e k - t o r o x i r i n i n g k o o r d i n a t a l a r i deb ataladi. Aksincha, har qanday tartiblangan sonlar uchligi koordinata boshi bilan shu uchta son koordinatalari vazifasini o'tovchi nuqtani birlashtiruvchi yagona vektorni aniqlaydi. Biz x vektorga uning koordinatalari yoki tashkil etuvchilari deb atalmish x_1, x_2, x_3 sonlar uchligini mos qo'yamiz.

Endi vektorlar ustida bajariladigan amallarni ko'rib chiqaylik.

V e k t o r n i s o n g a k o' p a y t i r i sh uchun uning koordinatalari shu songa ko'paytiriladi, ya'ni

$$\lambda\cdot(x_1, x_2, x_3)=(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3). \qquad (3.1)$$

Shunga o'xshash

$$(x_1, x_2, x_3)\pm(y_1, y_2, y_3)=(x_1\pm y_1, x_2\pm y_2, x_3\pm y_3). \qquad (3.2)$$

V e k t o r n i n g m o d u l i (u z u n l i g i) quyidagicha aniqlanadi:

$$|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}. \qquad (3.3)$$

x va *u* **vektorlarning skalyar ko'paytmasi** deb ularning modullarining hamda oralaridagi burchak kosinusining ko'paytmasiga aytiladi:

$$x\cdot u=|x|\cdot|u|\cos(\hat{x,y})$$

Agarda *x* va *u* vektorlar mos ravishda (x_1, x_2, x_3) va (u_1, u_2, u_3) koordinatalarga ega bo'lsalar, ularning skalyar ko'paytmasi quyidagicha aniqlanadi:

$$x\cdot u=x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3. \tag{3.4}$$

Xuddi yuqoridagi kabi biz endi *n* o'lchovli vektor va ular ustida bajariladigan amallarni aniqlashimiz mumkin. *n* o'lchovli vektor deb tartiblangan *n* ta haqiqiy x_1, x_2, ..., x_n sonlarni aytamiz. Vektorning λ songa ko'paytmasi quyidagicha aniqlanadi:

$$\lambda\cdot(x_1, x_2, ..., x_n)=(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n).$$

(x_1, x_2, ..., x_n) hamda (u_1, u_2, ..., u_n) **vektorlarning yig'indisi** va **ayirmasi** esa quyidagiga teng:

$$(x_1, x_2, ..., x_n)\pm(u_1, u_2, ..., u_n)=(x_1\pm u_1, x_2\pm u_2, ..., x_n\pm y_n).$$

n o'lchovli **vektorning moduli** deb quyidagi songa aytiladi:

$$|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}.$$

Ikki vektorning bir-biriga **skalyar ko'payt-masi** esa quyidagiga teng:

$$x\cdot u=x_1u_1+x_2u_2+ ... +x_ny_n.$$

Ba'zi hollarda bitta vektor o'rniga vektorlar tizimi bilan ishlashga to'g'ri keladi. Bunday **vektorlar tizimining koordinatalari** to'g'ri burchakli jadval ko'rinishiga ega bo'ladi va **matritsa** deb ataladi. Matritsa elementlari ikkita raqamli (indeksli) bitta harf orqali ifodalanadi (masalan a_{ij}). Bularning birinchisi satr raqamini, ikkinchisi esa ustun raqamini bildiradi. Matritsa elementlari ikki tomonidan qavslar yoki ikkita vertikal to'g'ri chiziq orasiga olib yoziladi. Masalan, uchta satr va to'rtta ustundan iborat (3×4 tartibli) matritsa quyidagicha yoziladi:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

Bu matritsani uchta to'rt o'lchovli vektor satrlar tizimi sifatida yoki to'rtta uch o'lchovli vektor ustunlar tizimi sifatida qarash mumkin.

Ko'pincha ustunlari va satrlari soni bir xil bo'lgan matritsalar uchraydi. n ta ustun va n ta satrdan iborat matritsani n- t a r t i b l i k v a d r a t m a t r i t s a deyiladi.

Matritsalar ustida amallar oddiygina aniqlanadi. Bizga kelgusida faqat matritsani vektorga ko'paytirish va ularning ko'paytmasi kerak bo'lishi tufayli shularnigina ko'rib chiqamiz.

M a t r i t s a n i n g v e k t o r g a k o' p a y t m a s i deb shunday vektor ustunga aytiladiki, uning koordinatalari matritsa satrlaridagi vektorlarning berilgan vektor ustunga skalyar ko'paytmalaridan iborat, ya'ni

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix},$$

bu yerda

$$c_1=a_{11}b_1+a_{12}b_2+\dots+a_{1n}b_n,$$
$$c_2=a_{21}b_1+a_{22}b_2+\dots+a_{2n}b_n,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$c_m=a_{m1}b_1+a_{m2}b_2+\dots+a_{mn}b_n.$$

Matritsalarning bir-biriga ko'paytmasini sodda misol tariqasida kvadrat matritsalar uchun aniqlaymiz. Ikkita bir xil tartibli kvadrat m a t r i ts a n i n g k o' p a y t m a s i quyidagicha aniqlanadi:

$$\begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1} a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} b_{12} \dots b_{1n} \\ b_{21} b_{22} \dots b_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ b_{n1} b_{n2} \dots b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} c_{12} \dots c_{1n} \\ c_{21} c_{22} \dots c_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ c_{n1} c_{n2} \dots c_{nn} \end{pmatrix}.$$

bu yerda

$$c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+...+a_{1n}b_{n1},$$
$$c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+...+a_{1n}b_{n2},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$c_{21}=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+...+a_{2n}b_{n1}.$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

va umuman

$$c_{ik}=a_{i1}b_{ik}+a_{i2}b_{2k}+...+a_{ik}b_{nk},$$

ya'ni i- satr va b- ustundagi element birinchi matritsa i- satrining ikkinchi matritsa k- ustuniga skalyar ko'paytmasiga teng.

Asosiy diagonalidagi elementlar birga, barcha qolganlari esa nolga teng bo'lgan kvadrat matritsa muhim ahamiyatga ega. Bunday matritsani birlik matritsa deyiladi va E bilan belgilanadi:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Bunday matritsa «birlik» deb atalishiga asosiy sabab ixtiyoriy kvadrat matritsa A uchun

$$A\cdot E=E\cdot A=A$$

tenglik o'rinli.

Ko'pchilik hollarda teskari matritsa tushunchasi ham ishlatiladi. A matritsaga t e s k a r i A^{-1} m a t r i ts a deb shunday matritsaga aytiladiki, uning uchun

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Yuqorida keltirilganlardan foydalanib chiziqli tenglamalar tizimini matritsalar yordamida ifodalaymiz.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n=b_{n1} \end{array}\right\} \qquad (3.5)$$

tizim berilgan bo'lsin. A bilan noma'lumlar oldidagi koeffitsientlardan tashkil topgan matritsani belgilaymiz:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}a_{n2}\dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

V bilan ozod hadlardan iborat vektor ustunni, X bilan esa noma'lumlardan iborat vektor ustunni belgilaymiz:

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}; \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

U holda berilgan (3.5) tizim quyidagicha yoziladi:

$$A{\cdot}X=V$$

Nazariy va amaliy matematikaning ko'pgina masalalari chiziqli algebraik tenglamalar tizimini yechishga olib keladi.

Chiziqli algebraik tenglamalarni yechish asosan ikki usulga – a n i q va i t e r a s i o n usullarga bo'linadi.

Aniq usul deganda shunday usul tushuniladiki, uning yordamida chekli miqdordagi arifmetik amallarni aniq bajarish natijasida masalaning aniq yechimini topish mumkin bo'ladi. Hammaga ma'lum bo'lgan Kramer qoidasi aniq usulga misol bo'la oladi. Lekin, Kramer qoidasi amalda juda kam qo'llaniladi, chunki bu usul bilan n- tartibli chiziqli algebraik tenglamalar tizimini yechganda nihoyatda ko'p arifmetik amallarni bajarishga to'g'ri keladi.

Biz hisoblash uchun tejamli bo'lgan G a u s s va b o sh e l e- m e n t l a r aniq usullarini ko'rib chiqamiz. Bular noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish g'oyasiga asoslangan.

Iteratsion (ketma-ket yaqinlashish) *usul* shu bilan xarakterlanadiki, bu usulda chiziqli algebraik tenglamalar tizimining yechimi ketma-ket yaqinlashishlarning limitidek topiladi.

Iteratsion usullarni qo'llayotganda faqat ularning yaqinlashishlarigina emas, balki yaqinlashishlarning tezligi ham katta ahamiyatga ega.

Bu usullar ayrim tizimlar uchun juda tez yaqinlashib, boshqa tizimlar uchun sekin yaqinlashishi yoki umuman yaqinlashmasligi ham mumkin. Shuning uchun ham iteratsion usullarni qo'llayotganda tizimni avval tayyorlab olish kerak. Ya'ni, berilgan tizimni unga teng kuchli bo'lgan shunday tizimga almashtirish kerakki, hosil bo'lgan tizim uchun tanlangan usul tez yaqinlashsin.

Tizimdagi tenglamalardan noma'lumlarni ketma-ket yo'qotishni ikki yo'l bilan amalga oshirish mumkin:

a) tenglamalarning kerakli kombinatsiyalarini tuzish;

b) almashtirishning har bir qadamida tizim matritsasining biror elementini yoki biror ustundagi diagonal elementning ostidagi barcha elementlarini nolga aylantirish maqsadida bu matritsani maxsus ravishda tanlab olingan matritsaga ko'paytirish.

Har ikkala holda ham e'tibor shunga qaratilishi kerakki, almashtirishlar natijasida berilgan tizim unga teng kuchli bo'lgan tizimga almashishi hamda sodda ko'rinishga ega bo'lishi lozim.

3.2-§. Gauss usuli

Gaussning noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish usuli chiziqli algebraik tenglamalar tizimini yechish usullari ichida eng universal va eng samaralisidir. Soddalik uchun to'rtta noma'lumli to'rtta chiziqli tizimni yechishning Gauss usulini ko'rib chiqamiz.

Ushbu tizim berilgan bo'lsin.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3; \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4; \end{cases} \tag{3.7}$$

bu yerda $x_i(i=1,4)$ – noma'lum sonlar, $a_{ij}(j=1,4)$ va $b_i(i=1,4)$ – ma'lum koeffitsientlar. Qulaylik uchun $a_{15}=b_1$, $a_{25}=b_2$, $a_{35}=b_3$, $a_{45}=b_4$ deb olamiz.

Gauss usulining to'liq tavsifiga o'tamiz. Birinchi qadamning yetakchi elementi deb ataladigan a_{11} koeffitsientni noldan farqli deb hisoblaymiz. (3.7) dagi birinchi tenglamaning hamma hadlarini a_{11} ga bo'lib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$x_1+b_{12}x_2+b_{13}x_3+b_{14}x_4=b_{15} \tag{3.8}$$

bu yerda

$$b_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \; (j = 2,3,4,5).$$

(3.8) tenglikdan foydalanib (3.7) tizimning ikkinchi, uchinchi va to'rtinchi tenglamalaridan x_1 noma'lumni yo'qotamiz. Buning uchun (3.8) tenglamani a_{21}, a_{31} va a_{41} ga ko'paytirib natijani mos ravishda tizimning ikkinchi, uchinchi va to'rtinchi tenglamalaridan ayirish kerak. U holda uch noma'lumli quyidagi tizimga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 = a_{25}^{(1)}; \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + a_{34}^{(1)}x_4 = a_{35}^{(1)}; \\ a_{42}^{(1)}x_2 + a_{43}^{(1)}x_3 + a_{44}^{(1)}x_4 = a_{45}^{(1)}, \end{cases} \qquad (3.9)$$

bu yerda

$$a_{ij}^{1} = a_{ij} - a_{i1}b_{1j} \; (i = 2,3,4,5) \qquad (3.10)$$

Endi shu tizimni o'zgartirishga kirishamiz.

Ikkinchi qadamni bajarishga o'tishdan oldin ikkinchi qadamning yetakchi elementi deb ataladigan a_{22}^{1} elementni noldan farqli deb faraz qilamiz (aks holda tenglamalarning o'rnini tegishli ravishda almashtirish lozim). (3.9) tizimning birinchi tenglamasini a_{22}^{1} ga bo'lamiz, u holda

$$x_2 + b_{23}^{(1)}x_3 + b_{24}^{(1)}x_4 = b_{25}^{(1)}, \qquad (3.11)$$

bu yerda

$$b_{2j}^{(1)} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \; (j=3,4,5)$$

Yuqoridagiga o'xshash x_2 ni yo'qotsak,

$$\begin{cases} a_{33}^{(2)}x_3 + a_{34}^{(2)}x_4 = a_{35}^{(2)}; \\ a_{43}^{(2)}x_3 + a_{44}^{(2)}x_4 = a_{45}^{(2)} \end{cases} \qquad (3.12)$$

tizimga ega bo'lamiz, bu yerda

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)} b_{2j}^{(1)} \quad (i = 3{,}4;\ j = 3{,}4{,}5) \tag{3.13}$$

(3.12) ning birinchi tenglamasini $a_{33}^{(2)}$ ga bo'lamiz, u holda

$$x_3 + b_{34}^{(2)} x_4 = b_{35}^{(2)}$$

bo'ladi, bu yerda

$$b_{34}^{(2)} = \frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}, \quad b_{35}^{(2)} = \frac{a_{35}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}.$$

Bu tenglama yordamida (3.12) tizimning ikkinchi tenglamasidan x_3 ni yo'qotib, quyidagi tenglamaga ega bo'lamiz:

$$a_{44}^{(3)} x_4 = a_{45}^{(2)},$$

bu yerda

$$a_{4j}^{(3)} = a_{4j}^{(2)} - a_{43}^{(2)} b_{3j}^{(2)} \quad (j = 4{,}5). \tag{3.14}$$

Shunday qilib, (3.7) tizimni uchburchak matritsali o'ziga teng kuchli bo'lgan quyidagi tizimga keltirdik:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12} x_2 + b_{13} x_3 + b_{14} x_4 = b_{15}; \\ x_2 + b_{23}^{(1)} x_3 + b_{24}^{(1)} x_4 = b_{25}^{(1)}; \\ x_3 + b_{34}^{(2)} x_4 = b_{35}^{(2)}; \\ a_{44}^{(3)} x_4 = a_{45}^{(3)}. \end{cases} \tag{3.15}$$

Bu yerdan ketma-ket quyidagilarni aniqlaymiz:

$$\begin{cases} x_4 = \dfrac{a_{45}^{(3)}}{a_{44}^{(3)}}; \\ x_3 = b_{35}^{(2)} - b_{34}^{(2)} x_4; \\ x_2 = b_{25}^{(1)} - b_{24}^{(1)} x_4 - b_{23}^{(1)} x_3; \\ x_1 = b_{15} - b_{14} x_4 - b_{13} x_3 - b_{12} x_2. \end{cases} \tag{3.16}$$

Shunday qilib, (3.7) tizimni yechish ikki bosqichdan iborat:

b i r i n ch i b o s q i ch – to‘g‘ri yo‘l – (3.7) tizimni (3.15) uchburchak ko‘rinishiga keltirish;

i k k i n ch i b o s q i ch – teskari yo‘l – noma’lumlarni (3.16) formulalar yordamida aniqlash.

Qo‘lda hisoblayotganda xatoga yo‘l qo‘ymaslik uchun hisoblash jarayonini tekshirish ma’quldir. Buning uchun biz ushbu

$$a_{i,n+2} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + f_i \quad (i = \overline{1, n})$$

yig‘indidan foydalanamiz.

Agar satr elementlari ustida bajarilgan amallarni har bir satrdagi tekshiruvchi yig‘indi ustida ham bajarsak va hisoblashlar xatosiz bajarilgan bo‘lsa, u holda tekshiruvchi yig‘indilardan tuzilgan ustunning har bir elementi mos ravishda almashtirilgan satrlar elementlarining yig‘indisiga teng bo‘ladi. Bu hol esa birinchi bosqich (to‘g‘ri yurish) ni tekshirish uchun xizmat qiladi. Ikkinchi bosqich (teskari yurish) da esa, tekshiruv $\overline{x}_j = x_j + 1 (j = \overline{1, 4})$ larni topish bilan bajariladi.

Tenglamalar tizimini qo‘lda yechilganda hisoblashlarni quyidagi 3.1- jadvalda ko‘rsatilgan Gaussning ixcham tarhi bo‘yicha bajarish ma’quldir. (Jadvalda soddalik uchun to‘rtta tenglamalar tizimini yechish tarhi keltirilgan.)

3.1- jadval

x_1	x_2	x_3	x_4	**Ozod hadlar**	Σ	**Tarh qismlari**
a_{11} a_{21} a_{31}	a_{12} a_{22} a_{33}	a_{13} a_{23} a_{33}	a_{14} a_{24} a_{34}	b_1 b_2 b_3	a_{16} a_{26} a_{36}	A

a_{41} ... 1	a_{44} ... $\frac{a_{12}}{a_{11}}$	a_{43} ... $\frac{a_{13}}{a_{11}}$	a_{44} ... $\frac{a_{14}}{a_{11}}$	b_4 ... $\frac{b_1}{a_{11}}$	a_{46} ... $\frac{b_{16}}{a_{11}}$	
...	$a_{22}^{(1)}$ $a_{32}^{(1)}$ $a_{42}^{(1)}$ ... 1	$a_{23}^{(1)}$ $a_{33}^{(1)}$ $a_{43}^{(1)}$ ... $\frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}}$	$a_{24}^{(1)}$ $a_{34}^{(1)}$ $a_{44}^{(1)}$ ... $\frac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}}$	$b_2^{(1)}$ $b_3^{(1)}$ $b_4^{(1)}$ ... $\frac{b_2^{(1)}}{a_{22}}$	$a_{26}^{(1)}$ $a_{36}^{(1)}$ $a_{46}^{(1)}$ ... $\frac{a_{26}^{(1)}}{a_{22}}$	A_1
...	...	$a_{33}^{(2)}$ $a_{43}^{(2)}$ ... 1	$a_{34}^{(2)}$ $a_{44}^{(2)}$ ... $\frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}}$	$b_3^{(2)}$ $b_4^{(2)}$ ... $\frac{b_3^{(2)}}{a_{33}}$	$a_{36}^{(2)}$ $a_{46}^{(2)}$ ... $\frac{a_{36}^{(2)}}{a_{33}}$	A_2
...	...	...	$a_{44}^{(3)}$ ... 1	$b_4^{(3)}$ ... $\frac{b_4^{(3)}}{a_{44}}$	$a_{46}^{(3)}$ ... $\frac{a_{46}^{(3)}}{a_{44}}$	A_3
1	1	1	1	x_4 x_3 x_2 x_1	$\overline{x}_4$ $\overline{x}_3$ $\overline{x}_2$ $\overline{x}_1$	V

Misol. Quyidagi tizim Gauss usuli bilan yechilsin

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 6; \\ 2x_1 + x_2 + x_2 - x_4 = 3; \\ -x_1 + 2x_2 - x_2 + 2x_4 = -8; \\ x_1 + 2x_2 - x_2 + 2x_4 = 11. \end{cases}$$

Tizimni yechish jarayoni quyidagi 3.2- jadvalda keltirilgan.

3.2- jadval

x_1	x_2	x_3	x_4	Ozod hadlar	Σ	Tarh qismlari
1	1	–2	1	6	7	
2	1	1	–1	3	6	
–1	–3	–1	1	–8	–12	*A*
1	2	–3	2	11	13	
...	...	...	...	...	...	
1	1	-2	1	6	7	
	–1	5	–3	–9	–8	
	–2	–3	2	–2	–5	
	1	1	1	5	8	A_1
...	...	...	...	...	...	
	1	–5	3	9	8	
		–13	8	16	11	
		6	–2	–4	0	
		...	...	...	...	A_2
		1	$-\frac{8}{13}$	$-\frac{16}{13}$	$-\frac{11}{13}$	
			$-\frac{22}{13}$	$-\frac{44}{13}$	$-\frac{66}{13}$	A_3
			1	2	3	
		1		0	1	
	1			3	4	*V*
1				1	2	

Shunday qilib,

$$x_1=1;\ x_2=3;\ x_3=0;\ x_4=2$$

yechimiga ega bo'ldik.

Bosh elementlar usuli.

Gauss usulida yetakchi elementlar doim ham noldan farqli bo'lavermaydi. Ba'zan esa ular nolga yaqin sonlar bo'lishi mumkin; bunday sonlar hosil bo'ladi. Buning natijasida taqribiy yechim aniq yechimdan sezilarli darajada chetlashib ketadi.

Hisoblashda bunday chetlashishdan qutilish uchun Gauss usuli bosh elementni tanlash yo'li bilan qo'llaniladi. Bu usulning Gauss usulining ixcham tarhidan farqi quyidagidan iborat. Faraz qilaylik, noma'lumlarni yo'qotish jarayonida ushbu tizimga egamiz:

$$\begin{cases} x_1 + b_{13}^{(1)}x_2 + b_{13}^{(1)}x_3 + \ldots + b_{1n}^{(1)}x_n = b_{1,n+1}^{(1)}, \\ \cdot \\ x_m + b_{m,m+1}^{(m)}x_{m+1} + \ldots + b_{mn}^{(m)}x_n = b_{m,n+1}^{(1)}, \\ a_{m+1,m+1}^{(m)}x_{m+1} + \ldots + a_{m+1}^{(m)}x_n = b_{m,n+1}^{(2)}, \\ \cdot \\ a_{n,m+1}^{(m)}x_{m+1} + \ldots + a_{n,n}^{(m)}x_n = a_{n,n+1}^{(m)}, \end{cases} \quad \text{bu yerda}$$

$$b_{m,j}^{(m)} = \frac{a_{m,j}^{(m)}}{a_{mm}^{(m)}}; \quad a_{i,j}^{(m)} = a_{i,j}^{(m-1)} - a_{im}^{(m-1)}b_{mj}^{(m)} \quad (i,\ j \geq m+1).$$

Endi $|a_{m+1,k}^{(m)}|=\max|a_{m+1,j}^{(m)}|$ tenglikni qanoatlantiradigan k-raqamni topib, o'zgaruvchilarni qayta belgilaymiz: $x_{m+1}=x_k$ va $x_k=x_{m+1}$. So'ngra (m+2) tenglamadan boshlab, barchasidan x_{m+1} noma'lumni yo'qotamiz. Bunday qayta belgilashlar yo'qotish tartibini o'zgartirishga olib keladi va ko'p hollarda hisoblash xatoligini kamaytirishga xizmat qiladi.

Misol. Bosh elementlar usulidan foydalanib quyidagi tizim yechilsin.

$$\begin{cases} 1{,}1161x_1 + 0{,}1254x_2 + 0{,}1397x_3 + 0{,}1490x_4 = 1{,}5471, \\ 0{,}182x_1 + 1{,}1675x_2 + 0{,}1768x_3 + 0{,}2271x_4 = 1{,}6471, \\ 0{,}1968x_1 = 0{,}2071x_2 + 1{,}2168x_3 + 0{,}2271x_4 = 1{,}7471, \\ 0{,}2368x_1 + 0{,}2471x_2 + 0{,}2568x_3 + 1{,}2671x_4 = 1{,}8471. \end{cases}$$

Tizimni yechish jarayoni quyidagi 3.3- jadvalda keltirilsin.

3.3- jadval

	i	m_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	$\Sigma=a_{i6}$
I	1	0,11759	1,11610	0,1254	0,1397	0,1490	1,5471	3,07730
	2	0,14766	0,1582	1,1675	0,1768	0,1871	1,6471	3,33760

	3	0,17923	0,1968	0,2071	0,2168	0,2271	1,7471	3,59490
	4		0,2368	0,2471	0,2568	1,2671	1,8471	3,85490
II	1	0,09353	1,08825	0,09634	0,10950		1,32990	2,62399
	2	0,11862	0,12323	1,13101	0,13888		1,37436	2,76748
	3		0,15436	0,16281	1,17077		1,41604	2,90398
III	1	0,07296	1,07381	0,08111			1,19746	2,35238
	2		0,10492	0,11170			1,20639	2,42301
IV	1		1,06616				1,10944	2,17560
V	1		1				1,04059	2,04059
	2			1			0,98697	1,98697
	3				1		0,98505	1,93505
	4					1	0,88130	1,88130

bu yerda $m_i = a_{iq}/a_{pq}$; barcha $i \neq p$ lar uchun a_{pq} – bosh element. Jadvaldan quyidagi yechimni hosil qilamiz:

$$x_1=1,04059; x_2=0,98697$$
$$x_3=0,93505; x_4=0,88130$$

3.3-§. Iteratsion usullar

3.1-§ da iteratsion usullarda yechim cheksiz ketma-ketliklarning limiti sifatida topilishi haqida aytib o'tilgan edi.

Bugunda turli tamoyil (prinsip)larga asoslangan juda ko'plab iteratsion usullar mavjud. Umuman, bu usullarning, o'ziga xos tomonlaridan biri shundan iboratki, yo'l qo'yilgan xatoliklari har qadamda to'g'rilanib boradi. Aniq usullar bilan ishlayotganda, agar biror qadamda xatoga yo'l qo'yilsa, bu xato oxirgi natijaga ham ta'sir qiladi. Yaqinlashuvchi iteratsion jarayonning biror qadamida yo'l qo'yilgan xatolik esa faqat bir necha iteratsiya qadamini ortiqcha bajarishgagina olib keladi xolos. Biror qadamda yo'l qo'yilgan xatolik keyingi qadamlarda tuzatilib boriladi. Boz ustiga bu usullarning hisoblash tartibi sodda bo'lib, ularni EHM larda hisoblash qulaydir. Lekin har bir iteratsion usulning qo'llanish sohasi chegaralangandir. Chunki iteratsiya jarayoni berilgan tizim uchun uzoqlashishi yoki shuningdek, sekin yaqinlashishi mumkinki, buning oqibatida amalda yechimni qoniqarli aniqlikda topib bo'lmaydi.

Shuning uchun ham iteratsion usullarda faqat yaqinlashish masalasigina emas, balki yaqinlashish tezligi masalasi ham katta ahamiyatga egadir. *Yaqinlashish tezligi dastlabki yaqinlashish vektorning qulay* tanlanishiga ham bog'liqdir.

Bu paragrafda avval iteratsion usullarning umumiy xarakteristikasini ko'rib chiqamiz, so'ngra esa hisoblash amaliyotida keng qo'llaniladigan iteratsion usullarni keltiramiz.

3.3.1. Iteratsion usullarning umumiy xarakteristikasi

Yuqorida qayd etilganidek, iteratsion usullar tizimning izlangan x yechimiga yaqinlashadigan u_0, u_1, u_2, ... iteratsion ketma-ketliklarni qurishga asoslangan. Har bir shunday usul navbatdagi u_{k+1} ni hisoblashda faqat bitta avvalgi u_k iteratsiyadan foydalaniladi. Bunday usullar bir qadamli deyiladi. Bir qadamli usullar uchun iteratsion formulani quyidagi standart kanonik ko'rinishda yozish

$$B_{k+1}\frac{y_{k+1}-y_k}{\tau_{k+1}}+Ay_k=f \qquad (3.17)$$

qabul qilingan; bunda τ_{k+1} – iteratsion parametrlar ($\tau_{k+1}>0$), B_{k+1} – yordamchi maxsusmas matritsalar. Agar τ va V lar k+1 indeksga bog'liq bo'lmasa, ya'ni (3.17) formula ixtiyoriy k lar uchun bir xil ko'rinishga ega bo'lsa, u holda bu iteratsion usul statsionar usul deyiladi. Statsionar usullar hisoblash jarayonini tashkil etish nuqtai nazaridan soddadir. Ammo nostatsionar usullar boshqa ustunliklarga ega: ular $\{P\tau_{k+1}\}$, $\{B_{k+1}\}$ ketma-ketliklarni tanlash bilan bog'langan qo'shimcha «erkinlik darajasiga» ega. Bundan y_k iteratsiyalar tizimning x yechimiga yaqinlashish tezligini oshirishda foydalanish mumkin.

(3.17) iteratsion formula yordamida navbatdagi u_{k+1} yaqinlashishni topish ushbu

$$B_{k+1}y_{k+1}=F_{k+1} \qquad (3.18)$$

tenglamalar tizimini yechishni talab etadi. Bunda

$$F_{k+1}=(B_{k+1}-\tau_{k+1}A)y_k+\tau_{k+1}f. \qquad 3.19)$$

Shunday hisoblashni har bir qadamda bajarishga to'g'ri keladi. V_{k+1} matritsa sifatida birlik $B_{k+1}=E$ matritsa olsak, iteratsion ketma-ketlik hadlarini hisoblash uchun eng sodda tarhga ega bo'lamiz. Bu holda navbatdagi u_{k+1} iteratsiyani topish uchun u_{k+1} ning komponentlarini (3.18) uchburchakli tizimdan birin-ketin Gauss usulining teskari yurishiga qilinganidek topishga keltiriladi.

Qandaydir iteratsion usulning qo'llanishi $\{y_k\}$ ketma-ketlik tizimning x yechimiga yaqinlashishni bildiradi:

$$\lim_{k\to\infty} y_k = x. \qquad (3.20)$$

(3.20) tenglik quyidagini anglatadi:

$$\sqrt{(y_1^{(k)} - x_1)^2 + (y_2^{(k)} + x_2 + \ldots + (y_n^{(k)} - x_n)} \to 0. \qquad (3.21)$$

(3.21) dan ko'rinadiki, u_k vektorlar ketma-ketligining x vektorga yaqinlashishining zaruriy va yetarli sharti har bir komponentning yaqinlashuvchiligidan iborat:

$$\lim_{k\to\infty} y_i^{(k)} = x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ushbu ayrim $z_k=y_k-x$ xatolik deyiladi. y_k ni $y_k=x+z_k$ ko'rinishda yozib va (3.17) ga qo'yib, xatolik uchun,

$$B_{k+1}=\frac{z_{k+1} - z_k}{\tau_{k+1}}+Az_k=0 \qquad (3.22)$$

iteratsion formulani hosil qilamiz. (3.17) dan farqli o'laroq, u tizimning o'ng tomoni (f) ni o'z ichiga olmaydi, ya'ni bir jinslidir. (3.20) yaqinlashishni talab etish z_k ning nolga intilishi lozimligini anglatadi:

$$\lim_{k\to\infty} z_k = 0 \qquad (3.23)$$

Har bir iteratsion usul yaqinlashuvchiligining yetarlilik shartlari A, V_{k+1} matritsalar va τ_{k+1} iteratsion parametrlarni optimal tanlashga oid shartlarni tekshirish qiyin. Natijada hisoblashlarni bajarayotganda iteratsion parametrlarni ko'pincha tajriba yo'li bilan (empirik) tanlashga to'g'ri keladi.

3.3.2. Oddiy iteratsion usul

Faraz qilaylik,

$$Ax=b \tag{3.24}$$

tizim biror usul bilan

$$x=Cx+f \tag{3.25}$$

ko'rinishga keltirilgan bo'lsin, bu erda C – qandaydir matritsa, f – vektor ustun. Dastlabki yaqinlashish vektori $x^{(0)}$ biror usul bilan (masalan, $x^{(0)}=0$) topilgan bo'lsin. Agar keyingi yaqinlashishlar.

$$x^{(k+1)}=Cx^{(k)}+f \qquad (k=0,1,2,\ ...)$$

rekkurent formula yordamida topilsa, bunday usul oddiy iteratsiya usuli deyiladi.

Agarda C matritsa elementlari

$$\sum_{j=1}^{n}\left|C_{ij}\right| \le a < 1 \qquad (i=1,\ 2,\ ...,\ n) \tag{3.26}$$

va

$$\sum_{i=1}^{n}\left|C_{ij}\right| \le \beta < 1 \qquad (j=1,\ 2,\ ...,\ n) \tag{3.27}$$

shartlardan birortasini qanoatlantirsa, u holda iteratsion jarayon berilgan tenglamaning x yechimiga ixtiyoriy boshlang'ich $x^{(0)}$ vektorda yaqinlashishi isbotlangan, ya'ni

$$x = \lim_{k\to\infty} x^{(k)}.$$

Shunday qilib, tizimning aniq yechimi cheksiz qadamlar natijasida hosil qilinadi va hosil qilingan ketma-ketlikning ixtiyoriy $x^{(k)}$ vektori taqribiy yechimni beradi. Bu taqribiy yechimning xatoligini quyidagi formulalardan biri orqali ifodalash mumkin:

$$(x_i\text{-}\ x_i^{(k)}| \le \frac{a}{1-a} \max_{j=1,2,...,n} |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}|, \tag{3.28}$$

agarda (3.26) shart bajarilsa, yoki

$$|x_i\text{-}\ x_i^{(k)} \le \frac{\beta}{1-\beta}\sum_{j=1}^{n} |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}| \tag{3.29}$$

agarda (3.27) shart bajarilsa. Bu baholarni mos ravishda quyidagicha kuchaytirish mumkin:

$$m|x_i - x_i^{(k)}| \le \frac{a}{1-a} \max |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|.$$

yoki

$$\sum_{j=1}^{n} |x_i - x_i^{(k)}| \le \frac{\beta}{1-\beta} \sum_{j=1}^{n} |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}|.$$

Iteratsion jarayonlarni yuqoridagi baholar oldindan berilgan aniqlikni qanoatlantirganda tugallaydilar.

Boshlang'ich $x^{(0)}$ vektor, umuman olganda, ixtiyoriy tanlanishi mumkin. Ba'zan $x^{(0)}=f$ deb olishadi. Ammo $x^{(0)}$ vektorning komponentlari sifatida noma'lumlarning qo'pol taxminlarda aniqlangan qiymatlari olinadi.

(3.24) tizimni (3.25) ko'rinishga keltirishni bir necha xil usullarda amalga oshirish mumkin. Faqat (3.26) yoki (3.27) shartlardan birortasining bajarilishi lozim. Shunday usullardan ikkitasiga to'xtalamiz.

Birinchi usul. Agarda A matritsaning dioganal elementlari noldan farqli bo'lsa, ya'ni

$$a_{ii} \ne 0 \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

u holda berilgan tizimni

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n), \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}), \end{cases} \tag{3.30}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu holda C matritsa elementlari quyidagicha aniqlanadi:

$$C_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \ (i \ne j), \ C_{ii}=0$$

hamda (3.26) va (3.27) shartlar mos ravishda quyidagi ko'rinishni qabul qiladi:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| \le a < 1 \quad (i=1,2,\ldots,n), \tag{3.31}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| \le \beta < 1 \quad (j=1,2,\ldots,n). \tag{3.32}$$

(3.31) va (3.32) tengsizliklar A matritsaning diagonal elementlari

$$|a_{ii}| > \sum_{i=1} |a_{ij}| \quad (i=1,2,\ldots,n) \tag{3.33}$$

shartlarni qanoatlantirganda o'rinli bo'ladi.

Ikkinchi usul. Bu usulni quyidagi misol orqali namoyish qilamiz.

Umuman olganda, har qanday keltirilmagan matritsali tizim uchun yaqinlashuvchi iteratsion usullar mavjud, ammo ularning barchasi hisoblash uchun qulay emas.

Agarda iteratsiya usuli yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda bu usul yuqorida ko'rilgan usullardan quyidagi afzalliklarga ega bo'ladi:

1. Iteratsion jarayon tezroq yaqinlashsa, ya'ni tizimning yechimini aniqlash uchun n dan kamroq iteratsiya talab qilinsa, u holda vaqtdan *yutiladi, chunki arifmetik amallar soni n^2 ga mutanosib (proporsional)* (Gauss usuli uchun esa bu son n^3 ga mutanosib).

2. Yaxlitlash xatoliklari iteratsiya usulida natijaga kamroq ta'sir etadi. Bundan tashqari iteratsiya usuli o'z xatoligini to'g'rilab boruvchi usuldir.

3. Iteratsiya usuli tizimning muayyan koeffitsientlari nolga teng bo'lgan holda juda ham qulaylashadi. Bunday tizimlar xususiy hosilasi differensial tenglamalarni yechganda ko'proq uchraydi.

4. Iteratsiya jarayonida bir xil turdagi amallar bajariladi, bu esa EHM uchun programmalashtirishni osonlashtiradi.

1- misol. Quyidagi tizim oddiy iteratsiya usuli bilan yechilsin:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 6, \\ -x_1 + 25x_2 - x_3 - 5x_4 - 2x_5 = 11, \\ 2x_1 + x_2 - 20x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -19, \\ x_2 - x_3 + 10x_4 - 5x_5 = 10, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 - 20x_5 = -32. \end{cases}$$

Y e ch i sh. Birinchi usulda aytilganidek, bu tizimning tenglamalarini mos ravishda 10, 25, –20, 10, 20 larga bo'lib, quyidagi ko'rinishda yozib olamiz.

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}6 - 0{,}1x_2 + 0{,}3x_3 + 0{,}2x_4 - 0{,}1x_5, \\ x_2 = 0{,}44 + 0{,}04x_1 - 0{,}04x_3 + 0{,}2x_4 + 0{,}08x_5, \\ x_3 = 0{,}95 + 0{,}1x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}1x_4 - 0{,}15x_5, \\ x_4 = 1 - 0{,}1x_2 + 0{,}1x_3 + 0{,}5x_5, \\ x_5 = 1{,}6 + 0{,}05x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}05x_3 + 0{,}1x_4, \end{cases}$$

bu yerda (3.31) shart bajariladi. Haqiqatan ham,

$$\sum_{j=1}^{5} |S_{1j}|=0{,}3<1; \quad \sum_{j=1}^{5} |C_{2j}|=0{,}28<1;$$

$$\sum_{j=1}^{5} |C_{3j}|=0{,}41<1; \quad \sum_{j=1}^{5} |C_{4j}|=0{,}5<1;$$

$$\sum_{j=1}^{5} |C_{5j}|=0{,}3<1.$$

Dastlabki yaqinlashish $x^{(0)}$ sifatida ozod hadlar ustuni (0,6; 0,44; 0,95; 1; 1,6) ni olib keyingi yaqinlashishlarni topamiz:

$$x_1^{(1)} = 0{,}6 - 0{,}1x_2^{(0)} + 0{,}3_3^{(0)} + 0{,}2x_4^{(0)} - 0{,}1x_5^{(0)} =$$
$$=0{,}6-0{,}1\cdot 0{,}44+0{,}3\cdot 0{,}95+0{,}2\cdot 1-0{,}1\cdot 1{,}6=0{,}881,$$
$$x_2^{(1)} = 0{,}44 + 0{,}04 \cdot 0{,}6 - 0{,}04 \cdot 0{,}95 + 0{,}2 \cdot 1 + 0{,}08 \cdot 1{,}6 = 0{,}754.$$

Shunga o'xshash $x_3^{(1)}=0{,}892$; $x_4^{(1)}=1{,}851$; $x_5^{(1)}=1{,}72$. Hisoblashlarning davomini 3.4- jadvalda keltiramiz:

3.4- jadval

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$	$x_5^{(k)}$
0	0,6	0,44	0,95	1	1,6
1	0,881	0,754	0,892	1,851	1,72
2	0,9884	0,9482	1,0029	1,9147	1,9859

3	0,9904	0,9814	0,9908	1,9939	1,9854
4	0,99944	0,99753	0,99769	1,99364	1,99897
5	0,99839	0,99865	0,99929	1,99954	1,99970
6	0,99986	0,99989	0,99977	1,99976	1,99960
7	0,999934	0,999920	1,000018	1,999788	1,999947
8	0,999974	0,999976	0,999976	2,000042	1,999978

Yuqoridagi 3,4- jadvaldan ko'ramizki, 8-iteratsiya $x_1=0{,}999974$; $x_2=0{,}999951$; $x_3=0{,}99998$; $x_4=2{,}00004$; $x_5=1{,}99998$ yechimdan iborat. *Bu topilgan taqribiy yechim aniq yechim*

$$x_1^* = x_2^* = x_3^* = 1; \qquad x_4^* = x_5^* = 2$$

dan beshinchi xonaning birliklari bo'yichagina farqlanadi.

2- misol.

$$\begin{cases} 1{,}02x_1 - 0{,}05x_2 - 0{,}10x_3 = 0{,}795, \\ -0{,}11x_1 - 1{,}03x_2 0{,}05x_3 = 0{,}849, \\ -0{,}11x_1 - 0{,}12x_2 + 1{,}04x_3 = 1{,}398 \end{cases}$$

tizimni 3 ta iteratsiya bajarib yeching va xatoligini baholang.

Y e ch i sh. Berilgan tizim-matritsaning dioganal elementlari birga yaqin, qolganlari esa birdan ancha kichik. Shu sababli iteratsiya usulini qo'llash uchun berilgan tizimni quyidagicha yozib olamiz:

$$x_1=0{,}795-0{,}02x_1+0{,}05x_2+0{,}10x_3;$$
$$x_2=0{,}849+0{,}11x_1-0{,}03x_2+0{,}05x_3;$$
$$x_3=1{,}398+0{,}11x_1+0{,}12x_2-0{,}04x_3.$$

(3.31) yaqinlashish sharti bu tizim uchun bajariladi. Haqiqatan ham,

$$\sum_{j=1}^{3} |S_{1j}|=0{,}02+0{,}05+0{,}10=0{,}17<1,$$

$$\sum_{j=1}^{3} |C_{2j}|=0{,}11+0{,}03+0{,}05=0{,}19<1,$$

$$\sum_{j=1}^{3} |C_{3j}|=0{,}11+0{,}12+0{,}04=0{,}27<1.$$

Boshlang'ich yaqinlashish $x^{(0)}$ sifatida ozod hadlar ustuni elementlarini ikki xona aniqlikda olamiz

$$x^{(0)}=\begin{pmatrix}0,80\\0,85\\1,40\end{pmatrix}$$

Endi ketma-ket quyidagilarni aniqlaymiz:

k=1 da

$$x_1^{(1)}=0,795-0,016+0,0425+0,140=0,9615\approx0,962,$$

$$x_2^{(1)}=0,849+0,088-0,255+0,070=0,9815\approx0,982,$$

$$x_3^{(1)}=1,398+0,088+0,1020-0,056=1,532;$$

k=2 da

$$x_1^{(3)}=0,980,\quad x_2^{(3)}=1,004,\quad x_3^{(3)}=1,563.$$

k=3 da

$$x_1^{(3)}=0,980,\quad x_2^{(3)}=1,004,\quad x_3^{(3)}=1,563.$$

Noma'lumlarning k=2 va k=3 dagi qiymatlari $3\cdot10^{-3}$ dan kamroq farq qilayapti, shuning uchun noma'lumlarning taqribiy qiymatlari sifatida

$$x^1\approx0,980,\quad x^2\approx1,004,\quad x^3\approx1,563$$

larni olamiz. U holda yo'l qo'yilgan xatolik quyidagicha baholanadi:

$$\frac{0,27}{1-0,27}\cdot3\cdot10^{-3}<1,1\cdot10^{-3}$$

3.3.3. Zeydel usuli

Zeydel usuli chiziqli bir qadamli birinchi tartibli iteratsion usuldir. Bu usul oddiy iteratsion usuldan shu bilan farq qiladiki, dastlabki yaqinlashish $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, ..., $x_n^{(0)}$ ga ko'ra $x_1^{(1)}$ topiladi. So'ngra $x_1^{(1)}$, $x_2^{(0)}$, ..., $x_n^{(0)}$ ga ko'ra $x_2^{(1)}$ topiladi va h.k. Barcha $x_i^{(1)}$ lar aniqlangandan so'ng $x_i^{(2)}$, $x_i^{(3)}$, ... lar topiladi. Aniqroq aytganda, hisoblashlar quyidagi tarh (sxema) bo'yicha olib boriladi:

$$x_1^{(k+1)}=\frac{b_1}{a_{11}}-\sum_{j=2}^{n}\frac{a_{1j}}{a_{11}}x_j^{(k)},$$

$$x_i^{(k+1)}=\frac{b_2}{a_{22}}-\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(k+1)}-\sum_{j=3}^{n}\frac{a_{2j}}{a_{22}}x_j^{(k)},$$

. . . .

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ij}} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)},$$

. . . .

$$x_n^{(k+1)} = \frac{b_n}{a_{nn}} - \sum_{j=1}^{n-1} x_j^{(k+1)}.$$

3.3.2. dagi yaqinlashish shartlari Zeydel usuli uchun ham o'rinlidir. Ko'pincha Zeydel usuli oddiy iteratsiya usuliga nisbatan yaxshiroq yaqinlashadi, ammo har doim ham bunday bo'lavermaydi. Bundan tashqari, Zeydel usuli programmalashtirish uchun qulaydir, chunki $x_i^{(k+1)}$ *ning qiymati hisoblanayotganda* $x_1^{(k)}, \ldots, x_{i-1}^{(k)}$ *larning qiymatini* saqlab qolishning hojati yo'q.

Misol. Zeydel usuli bilan 3.3.2. dagi 1- misolning yechimi 5 xona aniqlikda topilsin.

Y e ch i sh. Tizimni

$$x_1=0{,}6-0{,}1x_2+0{,}3x_3+0{,}2x_4-0{,}1x_5,$$
$$x_2=0{,}44+0{,}04x_1-0{,}04x_3+0{,}2x_4+0{,}08x_5,$$
$$x_3=0{,}95+0{,}1x_1+0{,}05x_2+0{,}1x_4-0{,}15x_5,$$
$$x_4=1-0{,}1x_2+0{,}1x_3+0{,}5x_5,$$
$$x_5=1{,}6+0{,}05x_1+0{,}1x_2+0{,}05x_3+0{,}1x_4$$

ko'rinishda yozib olamiz va dastlabki yaqinlashish $x^{(0)}$ *sifatida oddiy* iteratsiya usulidagidek $x^{(0)}=(0{,}6;\ 0{,}44;\ 0{,}95;\ 1;\ 1{,}6)$ deb olamiz.

Iteratsiyaning birinchi qadamini bajaramiz:

$$x_1^{(1)} = 0{,}6 - 0{,}1x_2^{(0)} + 0{,}3x_3^{(0)} + 0{,}2x_4^{(0)} - 0{,}1x_5^{(0)} =$$
$$= 0{,}6 - 0{,}1 \cdot 0{,}44 + 0{,}3 \cdot 0{,}95 + 0{,}2 \cdot 1 - 0{,}1 \cdot 1{,}6 = 0{,}881;$$
$$x_2^{(1)} = 0{,}44 + 0{,}04 \cdot x_1^{(4)} - 0{,}04x_3^{(0)} + 0{,}2x_4^{(0)} + 0{,}08x_5^{(0)} =$$
$$= 0{,}44 + 0{,}04 \cdot 0{,}881 - 0{,}04 \cdot 0{,}95 + 0{,}2 \cdot 1 + 0{,}08 \cdot 1{,}6 = 0{,}771;$$
$$x_3^{(1)} = 0{,}95 + 0{,}1x_1^{(1)} + 0{,}05x_2^{(1)} + 0{,}1x_4^{(0)} - 0{,}1x_5^{(0)} =$$
$$= 0{,}95 + 0{,}1 \cdot 0{,}881 + 0{,}05 \cdot 0{,}771 + 0{,}1 \cdot 1 -$$
$$- 0{,}15 \cdot 0{,}16 = 0{,}937;$$
$$x_4^{(1)} = 1 - 0{,}1x_2^{(1)} + 0{,}1x_3^{(1)} + 0{,}5x_5^{(0)} = 1{,}817;$$
$$x_5^{(1)} = 1{,}6 + 0{,}05x_1^{(1)} + 0{,}1x_2^{(1)} + 0{,}05x_3^{(1)} + 0{,}1x_4^{(1)} = 1{,}948.$$

Keyingi yaqinlashishlarni 3.5- jadvalda keltiramiz:

3.5- jadval

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$	$x_5^{(k)}$
0	0,6	0,44	0,95	1	1,6
1	0,881	0,771	0,937	1,817	1,948
2	0,973	0,961	0,985	1,974	1,992
3	0,995	0,995	0,999	1,996	1,999
4	0,9995	0,9991	0,9997	1,9995	1,9998
5	0,99992	0,99989	0,99997	1,99991	1,99997
6	0,99999	0,99998	0,99999	1,99999	2,00000

Ko'rinib turibdiki, Zeydel usuli oddiy iteratsiya usuliga nisbatan tezroq yaqinlashmoqda.

3.4-§. Chiziqli bo'lmagan tenglamalar tizimi uchun ketma-ket yaqinlashish usuli

Shu paytgacha biz faqat chiziqli tenglamalar tizimini yechish usullari bilan tanishdik. Endi tenglamalar tizimi chiziqli bo'lmagan hol ustida to'xtalamiz. Soddalik uchun ikki noma'lumli ikkita chiziqli bo'lmagan tizimni oddiy iteratsiya usuli bilan yechishga to'xtalamiz. Bunday tizim quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \tag{3.34}$$

Faraz qilaylik boshlang'ich x_0, u_0 yaqinlashishlar berilgan bo'lsin. Berilgan tizimni quyidagicha yozamiz:

$$\begin{cases} x = F(x, y), \\ y = \Phi(x, y) \end{cases} \tag{3.35}$$

hamda bu tizimning o'ng tomonidagi x va u lar o'rniga boshlang'ich yaqinlashish x_0, u_0 larni qo'yib, birinchi yaqinlashishni aniqlaymiz:

$$\begin{cases} x_1 = F(x_0, y_0), \\ y_1 = \Phi(x_0, y_0). \end{cases} \tag{3.36}$$

Xuddi shuningdek ikkinchi yaqinlashishni aniqlaymiz:

$$x_2=F(x_1,\ y_1),$$
$$y_2=\Phi(x_1,\ y_2) \qquad (3.37)$$

va umuman

$$\begin{cases} x_n = F(x_{n-1},\ y_{n-1}), \\ y_n = \Phi(x_{n-1},\ y_{n-1}). \end{cases} \qquad (3.38)$$

Agarda $F(x, y)$ va $\Phi(x, y)$ funktsiyalar uzluksiz, hamda $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ va $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda ularning limitlari berilgan tenglamaning yechimi bo'ladi.

Endi yuqorida keltirilgan iteratsion jarayonning yaqinlashuvchi bo'lish shartlariga to'xtalamiz.

Teorema. $\overline{x}$ va $\overline{y}$ (3.34) tizimning aniq echimlari, $a < \overline{x} < b,\ c < \overline{y} < d$ bo'lib, $x=a$, $x=b$, $y=c$ va $u=d$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan to'g'ri to'rtburchak ichida boshqa yechimlar yo'q bo'lsa, u holda ko'rsatilgan to'g'ri to'rtburchakda quyidagi

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| \le P_1,\quad \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \le q_1,\quad \left|\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right| \le q_2$$

($P_1+P_2 \le M<1$ va $q_1+q_2 \le M<1$) tengsizliklar bajarilsa, iteratsion jarayon yaqinlashuvchi bo'ladi va boshlang'ich yaqinlashish x_0, u_0 sifatida to'g'ri to'rtburchakning ixtiyoriy nuqtasini olish mumkin.

Teoremaning isbotini keltirib o'tirmaymiz.

Misol:

$$\begin{cases} f(x,\ y) = x^3 + y^3 - 6x + 3 = 0, \\ \varphi(x,\ y) = x^3 - y^3 - 6y + K = 0 \end{cases}$$

tizimning musbat yechimini iteratsion usul bilan uch xona aniqlikda toping.

Berilgan tizimni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$x = \frac{x^3 + y^3}{6} + \frac{1}{2}F(x,\ y),$$
$$y = \frac{x^3 - y^3}{6} + \frac{1}{3}\Phi(x,\ y).$$

$0 \le x \le 1$, $0 \le u \le 1$ kvadratni qaraymiz. Agarda x_0, u_0 nuqta shu kvadratga tegishli bo'lsa, u holda $0<F(x_0,\ y_0)<1$ va $0<\Phi(x_0,\ y_0)<1$ bo'ladi.

$(x_0,\ u_0)$ boshlang'ich yaqinlashish qanday tanlanishidan qat'i nazar $(x_k,\ y_k)$ yaqinlashishlar kvadratga tegishli bo'ladi, chunki

$$0<(x_0^3+y_0^3)/6<\frac{1}{3},$$

$$-1/6<(x_0^3-y_0^3)/6<\frac{1}{6}.$$

Bundan tashqari $(x_k,\ y_k)$ nuqtalar $\frac{1}{2}<x<\frac{5}{6},\ \frac{1}{6}<y<\frac{1}{2}$ kvadratga tegishli. Bu kvadrat nuqtalari uchun:

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}<\frac{\frac{25}{36}+\frac{1}{4}}{2}=\frac{34}{72}<1,$$

$$\left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right|=\frac{x^2}{2}+\left|\frac{y^2}{2}\right|<\frac{34}{72}<1$$

bajariladi.

Demak, ko'rsatilgan kvadratga tizim yagona yechimga ega va uni iteratsion usulda aniqlash mumkin.

$x_0=\frac{1}{2}$ va $y_0=\frac{1}{2}$ deb olamiz, u holda

$$x_1=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}{6}=0{,}542,\quad y_1=\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}{6}=0{,}333;$$

$$x_2=\frac{1}{2}+\frac{0{,}542^3+0{,}333^3}{6}=0{,}533,$$

$$y_2=\frac{1}{3}+\frac{0{,}542^3-0{,}333^3}{6}=0{,}354;$$

$$x_3=\frac{1}{2}+\frac{0{,}533^3+0{,}354^3}{6}=0{,}533,$$

$$y_3=\frac{1}{3}+\frac{0{,}533^3-0{,}354^3}{6}=0{,}351;$$

$$x_4 = \frac{1}{2} + \frac{0{,}533^3 + 0{,}351^3}{6} = 0{,}532,$$

$$y_n = \frac{1}{3} + \frac{0{,}533^3 - 0{,}351^3}{6} = 0{,}351.$$

Bu yerda $q_1=q_2=34/72<0{,}5$ bo'lgani sababli birinchi uchta o'nlik *raqamlarning mos tushganligi kerakli aniqlikdagi yechimni* topish imkoniyatini beradi. Shunday qilib quyidagi yechimga ega bo'ldik:

$$x=0{,}532; \quad u=0{,}351.$$

IV B O B
INTERPOLYATSIYALASH

4.1-§. Masalaning qo'yilishi

Aksariyat hisoblash usullari masalaning qo'yilishida qatnashadigan funktsiyalarni unga biror muayyan ma'noda yaqin va tuzilishi soddaroq bo'lgan funktsiyalarga almashtirish g'oyasiga asoslangan. Bu bobda funktsiyalarni yaqinlashtirish masalasining eng sodda va juda keng *qo'llaniladigan qismi — funktsiyalarni interpolyatsiyalash* masalasi ko'rib chiqiladi.

Interpolyatsiya masalasining mohiyati quyidagidan iborat. Faraz qilaylik $y=f(x)$ funktsiya jadval ko'rinishida berilgan bo'lsin:

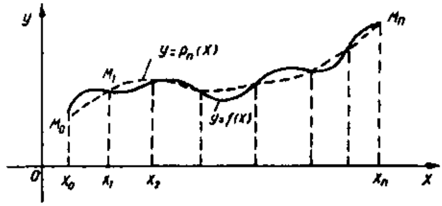
$$Y_0=f(x_0),\ y_1=f(x_1),\ \ldots,\ y_n=f(x_n).$$

Odatda interpolyatsiyalash masalasi quyidagicha ko'rinishda qo'yiladi: Shunday n- tartiblidan oshmagan $P(x)=P_n(x)$ ko'phad topish kerakki, $P(x_i)$ berilgan $x_i(i=0,1,\ \ldots,\ n)$ nuqtalarda $f(x)$ bilan bir xil qiymatlarni qabul qilsin, ya'ni $P(x_i)=y_i$.

Bu masalaning geometrik ma'nosi quyidagidan iborat: darajasi n dan ortmaydigan shunday

$$y=P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n \qquad (4.1)$$

ko'phad qurilsinki, uning grafigi berilgan $M_i(x_i,\ y_i)$ $(i=0,1,\ \ldots,\ n)$ nuqtalardan o'tsin (9- rasm). Bu yerdagi x_i $(i=0,1,2,\ \ldots,\ n)$ nuqtalar interpolyatsiya tugun nuqtalari yoki t u g u n l a r deyiladi. $R(x)$ esa i n t e r p o l ya ts i ya l o v ch i f u n k ts i ya deyiladi.



9- rasm

Amalda topilgan $P_n(x)$ interpolyatsion formula $f(x)$ funktsiyaning berilgan x argumentning (interpolyatsiya tugunlaridan farqli) qiymatlarini hisoblash uchun qo'llaniladi. Ushbu operatsiya f u n k ts i ya n i i n t e r p o l ya ts i ya l a sh deyiladi. (Agar $x\in(a, b)$ bo'lsa i n t e r p o l ya ts i ya l a sh $x\overline{\in}[a, b]$ bo'lsa, e k s t r a p o l ya ts i ya l a sh deyiladi).

4.2-§. Chekli ayirmalar va ularning xossalari

Faraz qilaylik argumentning o'zaro teng uzoqlikda joylashgan $x_i=x_0+ih$, $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i=h$=conts (h – jadval qadami) qiymatlarida $f(x)$ funktsiyaning mos ravishdagi $y_i=f(x_i)$ qiymatlari berilgan bo'lsin.

Birinchi tartibli chekli ayirmalar deb

$$\Delta y_i=f(x_{i+1})-f(x_i)=y_{i+1}-y_i \qquad (4.2)$$

ifodaga, ikkinchi tartibli chekli ayirmalar deb

$$\Delta 2y_i=\Delta(\Delta y_i)=\Delta y_{i+1}-\Delta y_i=y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i \qquad (4.3)$$

ifodaga va hokazo n- tartibli chekli ayirmalar deb

$$\Delta^n y_i=\Delta(\Delta^{n-1}y_i)=\Delta^{n-1}y_{i+1}-\Delta^{n-1}y_i \qquad (4.4)$$

ifodaga aytiladi. Chekli ayirmalarni quyidagi 4.1- jadval ko'rinishida ham olish mumkin.

4.1- jadval

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	...
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$		
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$			
x_3	y_3	Δy_3				
x_4	y_4					
...						

(4.2) dan quyidagiga egamiz:

$$y_{i+1}=y_i+\Delta y_i=(1+\Delta)y_i. \qquad (4.5)$$

Bu yerdan ketma-ket quyidagilarni keltirib chiqaramiz:

$$y_{i+2}=(1+\Delta)y_{i+1}=(1+\Delta)^2y_i,$$
$$y_{i+3}=(1+\Delta)y_{i+2}=(1+\Delta)^3y_i,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_{i+n}=(1+\Delta)^ny_i.$$

Nyuton binomi formulasidan foydalanib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$y_{i+n}=y_i+C_n^1\Delta y_i+\ldots+\Delta^n y_i.$$

Bundan esa:

$$\Delta^n y_i=[(1+\Delta)-1]^n y_i=(1+\Delta)^n y_i-C_n^1(1+\Delta)^{n-1}y_i+$$
$$+C_n^2(1+\Delta)^{n-2}y_i-\ldots+(-1)^n y_i$$

yoki

$$\Delta^n y_i=y_{i+1}-C_n^1 y_{n+i-1}+C_n^2 y_{n+i-2}-\ldots+(-1)^n y_i. \qquad (4.6)$$

Masalan, (4.6) dan

$$\Delta^2 y_i=y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i,$$
$$\Delta^3 y_i=y_{i+3}-3y_{i+2}+3y_{i+1}-y_i$$

va h.k.

Chekli ayirmalar quyidagi x o s s a l a r g a ega.

1. Funksiyalar yig'indisining (ayirmasining) chekli ayirmasi funksiyalarning chekli ayirmalari yig'indisiga (ayirmasiga) teng:

$$\Delta^n(f(x)\pm\varphi(x))=\Delta^n f(x)\pm\Delta n\varphi(x).$$

2. Funksiya o'zgarmas songa ko'paytirilsa, uning chekli ayirmasi o'sha songa ko'payadi:

$$\Delta^n(k\cdot f(x))=k\cdot\Delta^n f(x).$$

3. n- tartibli chekli ayirmaning m- tartibli chekli ayirmasi $(n+m)$-tartibli chekli ayirmaga teng:

$$\Delta^m(\Delta^n y)=\Delta^{m+n}y.$$

4. n- tartibli ko'phadning n- tartibli chekli ayirmasi o'zgarmas songa, n+1- tartibli chekli ayirmasi esa nolga teng.

Misol. Jadval qadamini h=1 va dastlabki qiymatni x_0=0 deb hisoblab, $y=2x^3-2x^2+3x-1$ ko'phadning ayirmalar jadvali tuzilsin.

Y e ch i sh. u ning $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$ nuqtalardagi qiymatlarni hisoblaymiz: $u_0=-1$, $u_1=2$, $u_2=13$, $u_3=44$. Bundan esa quyidagilar kelib chiqadi: $\Delta u_0=u_1-u_0=3$, $\Delta u_1=u_2-u_1=11$, $\Delta^2 u_0=\Delta u_1-\Delta u_0=8$. Bu qiymatlarni 4.2-jadvalga joylashtiramiz:

4.2- jadval

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	-1	8		
1	2	11	8	12
2	13	31	20	12
3	44	63	32	12
4	107	107	44	
5	214			
...	...	...	...	...

Berilgan funktsiya 3- darajali ko'phad bo'lganligi sababli uning 3-tartibli ayirmasi o'zgarmas son bo'lib, $\Delta^3 u_i=12$ bo'ladi. Jadvalning qolgan ustunlari

$$\Delta^2 y_{i+1}=\Delta^2 y_i+12, \quad (i=0,1,2,...);$$
$$\Delta y_{i+1}=\Delta y_i+\Delta^2 y_i \quad (i=1,2,...);$$
$$y_{i+1}=y_i+\Delta y_i \quad (i=2,3,...)$$

formulalar yordamida to'ldiriladi.

4.3-§. Nyutonning birinchi interpolyatsion formulasi

Faraz qilaylik $y=f(x)$ funksiya uchun $y_i=f(x)$ qiymatlar berilgan va interpolyatsiya tugunlari teng uzoqlikda joylashgan bo'lsin, ya'ni $x_i=x_0+ih$ (i=0,1,2,..., h) (h- interpolyatsiya qadami). Argumentning mos qiymatlarida darajasi h dan oshmaydigan mos qiymatlar oladigan ko'phad tuzish lozim bo'lsin va bu ko'phad quyidagi ko'rinishga ega bo'lsin:

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+...+$$

$$+a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}) \qquad (4.7)$$

Bu n-tartibli ko'phad. Interpolyatsiya masalasidagi shartga ko'ra $P_n(x)$ ko'phad x_0, x_1, ..., x_n interpolyasiya tugunlarida $P_n(x_0)=y_0$. $P_n(x_1)=y_1$, $P_n(x_2)=y_2$, ..., $P_n(x_n)=y_n$ qiymatlarni qabul qiladi, $x=x_0$ deb tasavvur etsak, (4.7) formuladan $y_0=P_n(x_0)=a_0$, ya'ni $a_0=u_0$, so'ngra x ga x_1 va x_2 larning qiymatlarini berib, ketma-ket quyidagiga ega bo'lamiz:

$$y_1=P_n(x_1)=a_0+a_1(x_1-x_0), \text{ bundan } a_1=\frac{\Delta y_0}{h},$$

$$y_2=P_n(x_2)=a_0+a_1(x_2-x)+a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1).$$

ya'ni

$$y_2-2\Delta y_0-y_0=2h^2a_2$$

yoki $y_2-2y_1+y_0=2h^2a_2$, bundan $a_2=\dfrac{\Delta^n y_0}{2!\,h^2}$.

Bu jarayonni davom ettirib, $x=x_n$ uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$a_n=\frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}.$$

Topilgan a_0, a_1, a_2, ..., a_n koeffitsientlarning qiymatlarini (4.7) formulaga qo'ysak,

$$P_n(x)=y_0+\frac{\Delta y_0}{1!\,h}(x-x_0)+\frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x-x_1)+\ldots+$$

$$+\frac{\Delta^n y_0}{n!\,y^n}(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1}) \qquad (4.8)$$

ko'rinishga ega bo'lamiz. Bu formulada $\dfrac{x-x_0}{h}=q$. ya'ni $x=x_0+h_q$ belgilash kiritilsa, u holda

$$\frac{x-x_1}{h}=\frac{x-x_0-h}{h}=q-1,$$

$$\frac{x-x_2}{h}=\frac{x-x_0-2h}{h}=q-2 \text{ va h.k.}$$

Natijada Nyutonning 1- interpolyatsion formulasiga ega bo'lamiz:

$$P_n(x)=P_n(x_0+q_h)=y_0+q\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\ldots+$$
$$+\frac{q(q-1)\cdot\ldots\cdot(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \qquad (4.9)$$

Nyutonning 1- interpolyatsion formulasini [a, b] ning boshlangich nuqtalarida qo'llash qulay.

Agar $n=1$ bo'lsa, u holda $P_1(x)=y_0+q\Delta y_0$ ko'rinishdagi chiziqli interpolyatsion formulaga, $n=2$ bo'lganda esa

$$P_2(x)=y_0+q\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0$$

ko'rinishdagi parabolik interpolyatsion formulaga ega bo'lamiz.

Nyutonning 1- formulasini *oldinga qarab interpolyatsiyalash formulasi* ham deyiladi.

(4.9) formulaning qoldiq hadi

$$R_n(x)=h^{n+1}\frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi), \qquad (4.10)$$

bu yerda $\xi\in[x_0,\ x_n]$.

Funksiyaning analitik ko'rinishi har doim ham ma'lum bo'lavermaydi. Bunday hollarda chekli ayirmalar tuzilib,

$$f^{(n+1)}(\xi)\approx\frac{\Delta^{n+1}y_0}{h^{n+1}}$$

deb olinadi. U holda Nyutonning birinchi interpolyatsion formulasi uchun xatolik

$$R_n(x)\approx\frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{(n+1)!}\Delta^{(n+1)}y_0 \qquad (4.11)$$

formula orqali topiladi.

Misol. $y=\lg x$ funksiyaning 4.3- jadvalda berilgan qiymatlaridan foydalanib uning $x=1001$ bo'lgan holdagi qiymatini toping.

x	u	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$
1000	3,0000000	43214	- 426	8
1010	3,0043214	42788	- 418	9
1020	3,0086002	42370	- 409	8
1030	3,0128372	41961	- 401	
1040	3,0170333	41560		
1050	3,0211893			

Yechish. Chekli ayirmalar jadvalini tuzamiz. 4.3- jadvaldan ko'rinib turibdiki, 3- tartibli chekli ayirma o'zgarmas, shu sababli (4.9) formula uchun n=3 olish yetarli:

$$y(x)=P^3(x)=y_0+q\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0,$$

x=1001 uchun q=0,1 (h=10). *Shuning uchun*

$$\lg 1001=3{,}0000000+0{,}1\cdot 0{,}0043214+\frac{0{,}1\cdot 0{,}9}{2}\times$$

$$\times 0{,}0000426+\frac{0{,}1\cdot 0{,}9\cdot 1{,}9}{6}\cdot 0{,}0000008=3{,}0004341.$$

Endi *qoldiq hadni baholaymiz.* (4.10) *formulaga asosan* n=3 *bo'lganda quyidagiga egamiz:*

$$R_3(x)=\frac{h^4\cdot q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}f^{(4)}(\xi)$$

bu yerda $1000<\xi<1030$.

$f(x)=\lg x$ bo'lgani sababli $f^{(4)}(x)=-\dfrac{3!}{x^4}\lg e$; *shuning uchun*

$$|f^{(4)}(\xi)|<\frac{3!}{(1000)^4}\lg e.$$

h=10 va q=0,1 uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$$|R_3(1001)|<\frac{0{,}1\cdot 0{,}9\cdot 1{,}9\cdot 2{,}9\cdot 10^4\lg e}{4\cdot(1000)^4}\approx 0{,}5\cdot 10^{-9}.$$

Shunday qilib, qoldiq had $R_3(1001)\approx 0{,}5\cdot 10^{-9}$ *ekan.*

4.4-§. Nyutonning ikkinchi interpolyatsion formulasi

Nyutonning birinchi interpolyatsion formulasi jadvalning boshida va ikkinchi formulasi esa jadvalning oxirida interpolyatsiyalash uchun mo'ljallangan. Nyutonning ikkinchi interpolyatsion formulasini keltirib chiqaramiz.

Faraz qilaylik $y=f(x)$ funksiyaning $n+1$ ta qiymati ma'lum bo'lsin, ya'ni argumentning $n=1$ $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ qiymatlarida funksiyaning qiymatlari $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ bo'lsin. Tugunlar orasidagi masofa h o'zgarmas bo'lsin. Quyidagi ko'rinishdagi interpolyatsion ko'phadni quramiz:

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_n)+a_2(x-x_n)(x-x_{n-1})+ \\ +a_3(x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2})+...+ \\ +a_n(x-x_n)(x-x_{n-1})...(x-x_1). \qquad (4.12)$$

Bunda qatnashayotgan $a_0, a_1, ..., a_n$ noma'lum koeffitsientlarni topishni $x=x_n$ bo'lgan holdan boshlash kerak. So'ngra argumentga $x_{n-1}, x_{n-2}, ...$ qiymatlar berib, qolgan koeffitsientlar aniqlanadi.

4.3-§ da ko'rilgan mulohazalarni (4.12) formula uchun ham qo'llasak, u holda noma'lum koeffitsientlar $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ larni topish uchun quyidagilarni hosil qilamiz:

$$a_0=y_n,\ a_1=\frac{\Delta y_{n-1}}{1!\,h},\ a_2=\frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!\,h^2},...,a_n=\frac{\Delta_n y_0}{n!\,h^n}.$$

Topilgan koeffitsientlarning qiymatlarini (4.12) formulaga qo'ysak,

$$P_n(x)=y_n+\frac{\Delta y_{n-1}}{1!\,h}(x-x_n)+\frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!\,h^2}(x-x_2)x- \\ -x_{(n-1)}+...+\frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x-x_n)...(x-x_1) \qquad (4.13)$$

ko'rinishdagi *Nyutonning ikkinchi interpolyatsion formulasi* kelib chiqadi. Bu formulada $q=(x-x_n)/h$ belgilash kiritsak,

$$P_n(x)=y_n+q\Delta y_{n-1}+\frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2}+...+ \\ +\frac{q(q+1)...(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0 \qquad (4.14)$$

hosil bo'ladi. Ba'zan bu formulani *orqaga qarab interpolyatsiyalash formulasi* ham deyiladi. (4.14) formuladan $[a, b]$ kesmaning oxirgi nuqtalarida foydalanish qulayroqdir.

Nyutonning ikkinchi interpolyatsion formulasining qoldiq hadini baholash formulasi quyidagicha bo'ladi:

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q+1)...(q+n)}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\xi).$$

bu yerda $q=(x-x_n)/h$, $\xi\in[x_0, x_n]$.

Agar funktsiyaning analitik ko'rinishi ma'lum bo'lmasa, u holda chekli ayirmalar tuzilib,

$$f^{(n+1)}(\xi)\approx\frac{\Delta^{n+1}y_0}{h^{n+1}}$$

deb olinadi. Shuning uchun Nyutonning ikkinchi interpolyatsion formulasi uchun xatolik formulasi

$$R_n(x)\approx\frac{q(q+1)...(q+n)}{(n+1)!}\Delta^{(n+1)}y_n$$

bo'ladi.

Misol. $y=\lg x$ funktsiyaning 4.4- jadvalda berilgan qiymatlaridan foydalanib, uning $x=1044$ dagi qiymatini hisoblang ($h=10$).

4.4- jadval

x	u
1000	3,0000000
1010	3,0043214
1020	3,0086002
1030	3,0128372
1040	3,0170333
1050	3,0211893

Y e ch i sh. Chekli ayirmalar jadvalini tuzamiz:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1000	3,0000000	43214	−426	8
1010	3,0043214	42788	−418	9
1020	3,0086002	42370	−409	<u>8</u>
1030	3,0128372	41961	<u>−401</u>	
1040	3,0170333	<u>41560</u>		
<u>1050</u>	3,0211893			

x_n=1050 bo'lsin, u holda

$$q = \frac{x - x_n}{h} = \frac{1044 - 1050}{10} = -0{,}6. \qquad (4.14)$$

4.5- jadvaldagi tagiga chizilgan ayirmalardan foydalangan holda (4.14) formulaga asosan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\lg 1044=3{,}0211893+(-0{,}6)\cdot 0{,}0041560+$$
$$+\frac{(-0{,}6)\cdot(-0{,}6+1)}{2}\times 0{,}0000401+$$
$$+\frac{(-0{,}6)\cdot(-0{,}6+1)\cdot(-0{,}6+2)}{6}\cdot 0{,}0000008=3{,}0187005.$$

4.5-§. Lagranjning interpolyatsion formulasi

Topilishi lozim bo'lgan ko'phadning ko'rinishini quyidagicha olaylik:

$$L_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n, \qquad (4.15)$$

bu yerda a_i (i=0, 1, 2, ..., n) – noma'lum o'zgarmas koeffitsientlar. Shartga ko'ra $L_n(x)$ funksiya x_0, x_1, ..., x_n interpolyatsiyalash tugunlarida $L_n(x_0)=y_0$, $L_n(x_1)=y_1$, ..., $L_n(x_n)=q_n$ qiymatlarga erishadi. Buni hisobga olgan holda (4.15) dan quyidagilarni topish mumkin:

x_0 interpolyatsiya tugunida

$$L_n(x_1)=a_0+a_1x_1+a_2\,x_1^2+\ldots+a_n x_1^n$$

va nihoyat x_n interpolyatsiya tugunida

$$L_n(x_n)=a_0+a_1x_n+a2\,x_n^2+\ldots+a_n x_n^n.$$

Ushbu ifodalarni tenglamalar tizimi ko'rinishida yozsak:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_nx_0^n = y_0, \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_nx_1^n = y_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0 + a_1n_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_nx_n^n = y_n, \end{cases} \tag{4.16}$$

bu yerda x_i va y_i (i=0,1,2, ..., n) — berilgan funktsiyaning jadval qiymatlari. Bu tizimning determinanti

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2x_0^3\ldots x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2x_1^3\ldots x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2x_n^3\ldots x_n^n \end{vmatrix}$$

x_0, x_1, x_2, ..., x_n tugunlar ustma-ust tushmagan holda noldan farqli bo'ladi. Masala mazmunidan ravshanki, x_0, x_1, ..., x_n nuqtalar bir-biridan farqli, demak bu determinant noldan farqlidir. Shuning uchun ham (4.16) tizim va shu bilan birga qo'yilgan interpolyatsiya masalasi yagona yechimga ega. Bu tizimni yechib, a_0, a_1, ..., a_n larni topib (4.15) ga qo'ysak, $L_n(x)$ ko'phad aniqlanadi. Biz $L_n(x)$ ning oshkor ko'rinishini topish uchun boshqacha yo'l tutamiz. Avvalo fundamental ko'phadlar deb ataluvchi $Q_i(x)$ larni, ya'ni

$$Q_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ agar } i \neq j \text{ bo'lganda}, \\ 1, \text{ agar } i = j \text{ bo'lganda} \end{cases} \tag{4.17}$$

shartlarni qanoatlantiradigan n- darajali ko'phadlarni quramiz.

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_iQ_i(x) \tag{4.18}$$

izlanayotgan interpolyatsion ko'phad bo'ladi. (4.17) shartni qanoatlantiruvchi ko'phad

$$Q_i(x)=\frac{(x-x_0)\,(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})\,(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\,(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})\,(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} \tag{4.19}$$

ko'rinishda bo'ladi. (4.19) ni (4.18) ga qo'ysak,

$$L_n(x)=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}\cdot y_i. \quad (4.20)$$

ko'rinishdagi Lagranj interpolyatsion formulasiga ega bo'lamiz.

Bu formulaning xususiy hollarini ko'raylik: $n=1$ bo'lganda Lagranj ko'phad uchta ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini beradi:

$$L_1(x)=\frac{x-x_1}{x_1-x_0}y_0+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}y_1.$$

Agar $n=2$ bo'lsa, u holda kvadratik interpolyatsion ko'phadga ega bo'lamiz, bu ko'phad uchta nuqtadan o'tuvchi va vertikal o'qqa ega bo'lgan parabolani aniqlaydi:

$$L_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2.$$

Lagranj interpolyatsion formulasining boshqa ko'rinishini keltiramiz. Buning uchun

$$w_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

ko'phadni kiritamiz. Bundan hosila olsak,

$$w'_{n+1}(x)=\sum_{k=0}^{n}\left[\prod_{i\neq k}(x-x_i)\right].$$

Kvadrat qavs ichidagi ifoda $x=x_j$ va $k\neq j$ bo'lganda nolga aylanadi, chunki (x_j-x_i) ko'paytuvchi qatnashadi. Demak,

$$w'_{n+1}(x_j)=\prod_{i\neq j}(x_i-x_i).$$

Shuning uchun ham, $\prod_{i\neq j}\frac{x-x_i}{x_j-x_i}$ Lagranj koeffitsientini

$$\frac{w_{n+1}(x)}{w'_{n+1}(x_j)\,(x-x_j)}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bunda esa Lagranj ko'phadi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{f(x_j)w_{n+1}(x)}{w_{n+1}(x_j)\,(x-x_j)}. \tag{4.21}$$

Endi tugunlar bir xil uzoqlikda joylashgan $x_1-x_0=$ $=x_2-x_1=...=x_n-x_{n-1}=h$ xususiy holni ko'ramiz.

Bu holda soddalik uchun $x=x_0+th$ almashtirish bajaramiz, u holda

$$x-x_j=h(t-j),\ w_{n+1}(x)=h^{n+1}\,w^*_{n+1}(t),$$

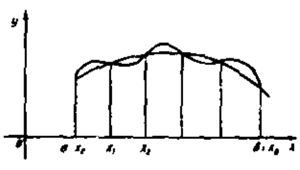
bu yerda

$$w^*_{n+1}(t)=t(t-1)...(t-n),\ w^*_{n+1}(x_j)=(-1)j!(h-j)!\,h^n$$

bo'lib, (4.21) Lagranj interpolyatsion ko'phadi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$L_n(x+th)=w^*_{n+1}(x)\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{n-j}f(x_j)}{(t-j)j!(n-j)!} \tag{4.22}$$

Endi Lagranj interpolyatsion formulasining qoldiq hadini baholashni ko'ramiz. Agar biror $[a, b]$ oraliqda berilgan $f(x)$ funksiyani $L_n(x)$ interpolyatsion ko'phad bilan almashtirsak, ular interpolyatsiya tugunlarida o'zaro ustma-ust tushib, boshqa nuqtalarda esa bir-biridan farq qiladi (10- rasm). Shuning uchun qoldiq hadning $R(x)=f(x)-L_n(x)$ ko'rinishini topish va uni baholash bilan shug'ullanish maqsadga muvofiq. Buning uchun interpolyatsiya tugunlarini o'z ichiga oladigan $[a, b]$ oraliqda $f(x)$ funktsiya $(n+1)$ – tartibli $f^{(n+1)}(x)$ uzluksiz hosilaga ega deb faraz qilamiz. Interpolyatsiyaning qoldiq hadi $R(x)$ uchun quyidagi teorema o'rinlidir:



10-rasm

Teorema. Agar $f(x)$ funktsiya $[a, b]$ oraliqda $(n+1)$- tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lsa, u holda interpolyatsiya qoldiq hadini

$$f(x) - L_n(x)=R(x)=f^{(n+1)}(\xi)\frac{w_{n+1}(x)}{(n+1)!} \qquad (4.23)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin. Bu yerda $\xi\in[a, b]$ *bo'lib, umuman aytganda x ning funksiyasidir.*

I s b o t i. Teoremani isbotlash uchun yordamchi $\varphi(z)= =R(z) - Kw_{n+1}(z)$ funksiyani tekshiramiz (bu yerda K noma'lum o'zgarmas koyffitsiyent). Bu funksiyaning $z=x_0, x_1, ..., x_n$ larda nol qiymatlarini qabul qilishi ravshan. Noma'lum K koeffitsientni shunday tanlaymizki, $\varphi(z)$ funksiya $z=x\in(a, b]$ va $x=x_i(i=\overline{0, n})$ nuqtalarda nol qiymatini qabul qilsin. Demak,

$$K=\frac{R(x)}{w_{n+1}(x)}. \qquad (4.24)$$

Natijada $\varphi(z)$ funksiya $[a, b]$ oraliqning $n+2$ ta $x_0, x_1, ..., x_n$ nuqtalarida nolga aylanadi. Roll teoremasiga ko'ra $\varphi'(z)$ bu oraliqda kamida $n+1$ ta nuqtada nolga aylanadi, $\varphi''(z)$ esa kamida n ta nuqtada va hokazo, $\varphi^{n+1}(z)$ kamida bitta nuqtada nolga aylanadi. Aytaylik, bu nuqta ξ bo'lsin: $\varphi^{(n+1)}(\xi)=0$.

Bundan $L_n(x)$ ning n- darajali ko'phad ekanligini hisobga olsak:

$$\varphi^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)- L_n^{n+1}(\xi)-K w_{n+1}^{(n+1)}(\xi)= =f^{(n+1)}(\xi)-K(n+1)!=0,$$

ya'ni

$$K=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Bundan va (4.24) dan, (4.23) formulaning o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

Misol. Agar ln100, ln101, ln102, ln103 larning qiymatlari ma'lum bo'lsa, Lagranjning interpolyatsion formulasi yordamida ln100,5 ni qanday aniqlikda hisoblash mumkin?

Yechish. Lagranj interpolyatsion formulasining qoldiq hadi, agar $n=3$ bo'lsa, quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$R_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

Bizning holda $x_0=100$, $x_1=101$, $x_2=102$, $x_3=103$, $x=100{,}5$; $100<\xi<100{,}5$. Chunki $f(x)=\ln x$ u holda $f^{(4)}(x)=-\frac{6}{x^4}$. Shunday qilib,

$$|R(100{,}5)|\le\frac{6}{(100^4\cdot 4!)}\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 1{,}5\cdot 2{,}5=0{,}23\cdot 10^{-8}.$$

4.6-§. Ekstrapolyatsiya. Teskari interpolyatsiya

I. Ekstrapolyatsiya. Ekstrapolyatsiya, ya'ni argumentning jadvaldagi qiymatlaridan tashqari qiymatlarida funksiyaning qiymatini topish masalasi ustida to'xtalib o'tamiz. Ekstrapolyatsiyalash odatda, jadvalning bir-ikki qadami miqyosida bajariladi. Chunki argumentning jadvaldagi qiymatidan uzoqroq qiymatida ekstrapolyatsiyalanganda xato ortib ketadi. Jadval boshida ekstrapolyasiyalash uchun Nyutonning birinchi interpolyatsion formulasi qo'llanilib, jadval oxirida esa ikkinchisi qo'llaniladi. Interpolyatsion ko'phadning tartibi odatda jadvalning amaliy o'zgarmas ayirmalarining tartibiga teng qilib olinadi.

Misol. 4.6- jadvaldan foydalanib $x=1{,}210$ va $x=1{,}2638$ nuqtalar uchun ko'phadning ko'rinishi aniqlansin.

4.6- jadval

x	$y=f(x)$	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
1,215	0,106044	7232	-831	95
1,220	0,113276	6395	-742	93
1,225	0,119671	5653	-649	93
1,230	0,125324	5004	-556	91
1,235	0,130328	44448	-465	90
1,240	0,134776	3983	-375	88
1,245	0,138759	3608	-287	87
1,250	0,142367	3321	-200	
1,255	0,145688	3121		
1,260	0,148809			

Y e ch i sh. Jadvaldagi uchinchi tartibli ayirma amalda o'zgarmasdir. Shuning uchun ham uchinchi tartibli interpolyatsion formuladan foydalanamiz. Jadval boshida va oxirida ekstrapolyatsiyalash uchun formulalar quyidagicha yoziladi:

$$P_3(x)=0{,}106044+0{,}007232q+(-0{,}000837)\cdot\frac{q(q-1)}{2}+$$

$$+0{,}000095\cdot\frac{q(q-1)(q-2)}{3!}.$$

$$P_3(x)=0{,}148809+0{,}003121q+(-0{,}000200)\cdot\frac{q(q-1)}{2}+$$

$$+0{,}000087\cdot\frac{q(q+1)(q+2)}{3!}$$

Birinchi formulaga $q=(x-x0)/h=\frac{1{,}210-1{,}215}{0{,}005}=-1$ qiymatni qo'ysak:

$$u(1{,}210)\approx 0{,}106044+(-1)\cdot 0{,}007232+\frac{(-1)\cdot(-2)}{2}\cdot$$

$$\cdot(-0{,}0000837)+\frac{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)}{3!}\cdot 0{,}000095=0{,}097880.$$

Shunga o'xshash $q=\frac{x-x_4}{h}=\frac{1{,}2638-1{,}260}{0{,}005}=0{,}76$ ni ikkinchi formulaga qo'ysak,

$$u(1{,}2638)\approx 0{,}148809+0{,}76\cdot 0{,}003121+\frac{0{,}76\cdot 1{,}76}{2}\times$$

$$\times(-0{,}000200)+\frac{0{,}76\cdot 1{,}76\cdot 2{,}76}{3!}\cdot 0{,}0000535=0{,}1511007.$$

II. Teskari interpolyatsiya. Shu paytgacha $y=f(x)$ funksiyaning jadvali berilgan holda argumentning berilgan qiymati x da funksiyaning taqribiy qiymatini topish masalasi bilan shug'ullandik. Teskari interpolyatsiya masalasi quyidagicha qo'yiladi: $y=f(x)$ funksiyaning berilgan $\bar{y}$ qiymati uchun argumentning shunday $\bar{x}$ qiymatini to-pish kerakki, $f(\bar{x})\bar{y}$ bo'lsin. Faraz qilaylik, jadvalning qaralayotgan oralig'ida $f(x)$ funksiya monoton va demak, bir qiymatli teskari funksiya $x=\varphi(y)$ $(f(\varphi(y))=y)$ mavjud bo'lsin. Bunday holda teskari interpolyatsiya $\varphi(u)$ funksiya uchun odatdagi interpolyatsiyaga keltiriladi. $x=\varphi(\bar{y})$ qiymatni topish uchun Lagranj yoki Nyutonning tugunlari har xil uzoqlikda joylashgan hol uchun formulalardan foydalanish mumkin. Masalan, Lagranjning interpolyatsion formulasi

$$\text{Ln(y)}=\sum_{i=0}^{n}x_i\prod_{j\neq i}\frac{y-y_i}{y_i-y_i} \qquad (4.25)$$

ko'rinishga ega bo'lib, qoldiq hadi

$$\varphi(y)-L_n(y)=\frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i\neq K}^{n}(y-y_i)$$

bo'ladi.

Agar $f(x)$ monoton bo'lmasa, yuqoridagi formula yaramaydi. Bunday holda u yoki bu interpolyatsion formulani yozib, argumentning ma'lum qiymatlaridan foydalanib va funksiyani ma'lum deb hisoblab, hosil bo'lgan tenglama u yoki bu usul bilan argumentga nisbatan yechiladi.

Misol. Funksiyaning quyidagi qiymatlari jadvali berilgan:

4.7- jadval

x	0,880	0,881	0,882	0,883
$y=f(x)$	2,4109	2,4133	2,4157	2,4181

x argumentning shunday qiymati topilsinki, u=2,4 bo'lsin.

Yechish. 4.7- jadvaldagi qiymatlarga ko'ra funksiya monoton, shuning uchun ham n=3 deb olib, (4.25) formuladan foydalanamiz:

$$L_3(y)=\frac{(2{,}4142-2{,}4133)(2{,}4142-2{,}4157)(2{,}4142-2{,}4181)}{(2{,}4109-2{,}4133)(2{,}4109-2{,}4157)(2{,}4109-2{,}4181)}0{,}880+$$

$$+\frac{(2{,}4142-2{,}4109)(2{,}4142-2{,}4157)(2{,}4142-2{,}4181)}{(2{,}4133-2{,}4109)(2{,}4133-2{,}4157)(2{,}4133-2{,}4181)}0{,}881+$$

$$+\frac{(2{,}41-2{,}4109)(2{,}4142-2{,}4133)(2{,}4142-2{,}4181)}{(2{,}4157-2{,}4109)(2{,}4157-2{,}4133)(2{,}4157-2{,}4181)}0{,}882+$$

$$+\frac{(2{,}4142-2{,}4109)(2{,}4142-2{,}4133)(2{,}4142-2{,}4157)}{(2{,}4181-2{,}4109)(2{,}4181-2{,}4133)(2{,}4181-2{,}4157)}0{,}883+$$

$$= -0{,}0634766\cdot 0{,}880+0{,}6982421\cdot 0{,}881+$$
$$+0{,}4189452\cdot 0{,}882-0{,}0537109\cdot 0{,}883=0{,}88137.$$

4.3-4.6-§§ da keltirilgan mulohazalardan so'ng quyidagilarni aytish mumkin:

Nyutonning birinchi interpolyatsion formulasi [a, b] kesmaning boshlang'ich nuqtalarida interpolyatsiyalash va kesmaning oxirgi nuqtalarida ekstrapolyatsiyalash uchun, ikkinchi formulasi esa kesmaning oxirgi nuqtalarida interpolyatsiyalash va kesmaning boshlang'ich nuqtalarida ekstroplyatsiyalash uchun qo'llaniladi. Shuni ham aytish lozimki, ekstroplyatsiyalash interpolyatsiyalashga qaraganda kattaroq xatoliklar beradi, ya'ni uning qo'llanish chegarasi cheklangan. Lag-ranj va Nyuton interpolyatsion formulalarini bir-birlari bilan solishtirsak quyidagilar bilan farqlanishini ko'ramiz.

Lagranj formulasidagi har bir teng huquqli n-tartibli ko'phaddan iborat. Shuning uchun avvaldan (hisoblanmasdan avval) birorta hadini tashlab yubora olmaymiz. Nyuton formulasining hadlari esa darajasi oshib boruvchi ko'phadlardan iborat bo'lib, ularning koeffitsiyentlari faktorriallarga bo'lingan chekli ayirmalardan iborat. Bu ketma-ket chekli ayirmalar odatda 4.2-§ ga muvofiq tez kichrayib boradi. Shuning uchun Nyuton formulasidagi kichik koeffitsientlar oldidagi hadlarni tashlab yuborishimiz mumkin. Ya'ni bu holda funksiyaning oraliq qiymatlarini yetarli aniqlikda sodda interpolyatsion formulalardan foydalanib hisoblash mumkin.

V BOB
INTEGRALLARNI TAQRIBIY HISOBLASH

5.1-§. Masalaning qo'yilishi

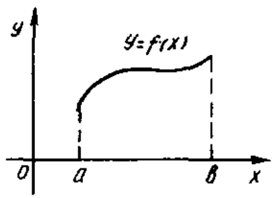
Kundalik hayotimizda uchraydigan ko'p muhandislik masalalarini yechishda aniq integrallarni hisoblashga to'g'ri keladi. Faraz qilaylik, $\int_a^b f(x)dx$ ni hisoblash talab etilsin. Bu erda $f(x)$ – [a,b] kesmada berilgan uzluksiz funksiya. Bu integralni hisoblashda quyidagi formula (Nyuton-Leybnis formulasi) qo'llaniladi:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \qquad (5.1)$$

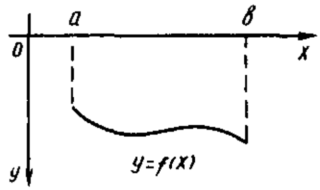
bu yerda $F(x)$ – boshlang'ich funksiya. Agar boshlang'ich funktsiya $F(x)$ ni elementar funksiyalar orqali ifodalab bo'lmasa yoki integral ostidagi funksiya $f(x)$ jadval ko'rinishida berilsa, u holda (5.1) formuladan foydalanish mumkin emas. Bu holda aniq integralni taqribiy formulalar orqali hisoblashga to'g'ri keladi. Bunday formulalarga *kvadratur formulalar* deyiladi.

Bunday formulalarni keltirib chiqarish uchun aniq integralning geometrik ma'nosini bilmoq lozim.

Agar $[a; b]$ kesmada $f(x)\geq 0$ bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x)\,dx$ ning qiymati son jihatidan $u = f(x)$ funksiyani grafigi hamda $x = a$, $x = b$, to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan shakl (figura)ning yuziga teng (11-rasm). Agar $[a; b]$ kesmada $f(x)\leq 0$ bo'lsa, integralning qiymati yuqorida keltirilgan shaklning teskari ishora bilan olingan yuziga teng (12-rasm).



11-rasm



12-rasm

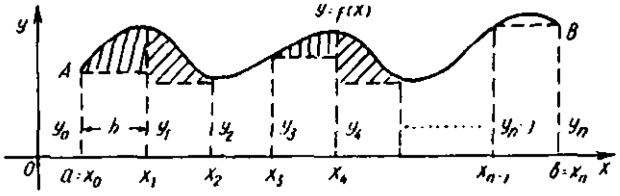
Shunday qilib, aniq integralni hisoblash deganda biror shaklning yuzini hisoblash tushuniladi. Quyida aniq integralni hisoblash uchun ba'zi taqribiy formulalar bilan tanishib chiqamiz.

5.2-§. To'g'ri to'rtburchaklar va trapetsiyalar formulasi

Faraz qilaylik, bizdan $\int_a^b f(x)\,dx$ aniq integralning taqribiy qiymatini topish talab etilsin. $x_0, x_1, x_2, ..., x_p$ nuqtalar yordamida [a; b] kesmani p ta teng bo'lakchalarga bo'lamiz. Har bir bo'lakchaning uzunligi $p = \frac{b-a}{n}$. Bo'linish nuqtalari esa:

$$x_0=a;\ x_1=a+h;\ x_2=a+2h;\ x_3=a+3h \ldots x_{n-1}=a+(n-1)h;\ x_n=b.$$

Bu nuqtalarni tugun nuqtalar deb ataymiz. $f(x)$ funksiyaning tugun nuqtalaridagi qiymatlari $u_0, u_1, u_2, ..., u_p$ bo'lsin. Bular $u_0 = f(a)$; $u_1 = f(x_1)$ ... $u_p = f(b)$ larga teng bo'ladi (13-rasm).



13-rasm

13-rasmdan ko'rinadiki, *aAVb* egri chiziqli trapetsiyaning yuzini topish uchun [*a*; *b*] kesmani bo'lish natijasida hosil bo'lgan barcha to'rtburchaklarning yuzini hisoblab, ularni jamlash kerak bo'ladi. Albatta bu yuzachalarni hisoblashlarda ma'lum darajada xatoliklarga yo'l qo'yiladi (shtrixlangan yuzachalar). Bularni va 5.1-§ da aytilgan aniq integralning geometrik ma'nosini hisobga olsak, quyidagini yozishimiz mumkin bo'ladi:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx hy_0 + hy_1 + hy_2 + \ldots + hy_{n-1} =$$

$$= h(y_0+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}) = h\sum_{k=0}^{n-1} y_k .$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\sum_{k=0}^{n-1} y_k . \qquad (5.2)$$

Bu yerda to'g'ri to'rtburchak yuzini hisoblashda uning chap tomon ordinatasi olindi. Agar o'ng tomon ordinatani olsak ham shunday formulaga ega bo'lamiz:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h(y_0+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}) = h\sum_{k=1}^{n} y_k ;$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\sum_{k=1}^{n} y_k . \qquad (5.3)$$

(5.2) va (5.3) larni mos ravishda *chap* va *ung formulalar* deyiladi. Agar 13-rasmga e'tibor bersak, (5.2) formula bilan integralning qiymati *hisoblanganda integralning taqribiy qiymati aniq qiymatidan ma'lum* darajada kamroq chiqadi, (5.3) yordamida hisoblanganda esa taqribiy qiymat aniq qiymatdan ma'lum darajada kattaroq chiqadi. Ya'ni (5.2) va

(5.3) formulalar yordamida aniq integralning taqribiy qiymati hisoblanganda bu formulalardan biri integralning aniq qiymatini kami bilan ifodalasa, ikkinchisi esa ko'pi bilan ifodalaydi. 13-rasmdan ko'rinadiki, (5.2) va (5.3) formulalarni qo'llaganda yo'l qo'yiladigan xatolikni kamaytirish uchun bo'linish nuqtalarini iloji boricha ko'proq olish, ya'ni qadam *h* ni tobora kichraytirish lozim bo'ladi. Albatta, *h* ni kichraytirish hisoblash jarayonining keskin o'sishiga olib keladi. Bu narsadan xavotirga tushmasligimiz kerak, chunki butun hisoblash jarayoni EHM ga yuklanadi.

Misol. To'g'ri to'rtburchaklar formulalari (5.2) va (5.3) yordamida $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ integralning taqribiy qiymatlari topilsin.

Y e ch i sh. Bu yerda $a=0$; $b=1$, $p=10$; $h=(b-a)/n=0,1$.

$$f(x)=\frac{1}{1+x}.$$

$$x_0=a=0;\ x_1=a+h=0,1;\ x_2=a+2h=0,2;\ x_3=a+3h=0,3;$$
$$x_4=a+4h=0,4\ldots x_9=a+9h=0,9;\ x_{10}=b=1.$$

$$y_0=f(x)=\frac{1}{1+x_0}=\frac{1}{1+0}=1;\quad y_1=f(x_1)=\frac{1}{1+0{,}1}=0{,}909.$$

$$y_2=f(x_2)=0{,}833;\ y_3=f(x_3)=0{,}769;\ldots\ y_9=f(x_9)=0{,}53;\ y_{10}=f(x_{10})=0{,}5.$$

(5.2) dan $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx 0{,}1(1+0{,}909+\ldots+0{,}526)=0{,}718.$

(5.3) dan $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx 0{,}1(0{,}909+0{,}833+\ldots+0{,}5)=0{,}6688.$

Ma'lumki, $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}=\ln 2$, $\mathrm{Ln}2 \approx 0{,}693$. Bulardan ko'rinadiki, aniq yechim chap va o'ng formulalar orqali topilgan yechimlar orasida yotadi.

Topilgan yechimlar 0,718 va 0,668 ning o'rta arifmetigini olsak, bu 0,693 ga teng bo'ladi, bu esa aniq yechim bilan ustma-ust tushadi.

Bu xulosalarni nazarga olgan holda (5.2) va (5.3) formulalar hadlarini mos ravishda qo'shib o'rta arifmetigini olsak, quyidagi ifoda hosil bo'ladi:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{1}{2}y_0+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}+\frac{1}{2}y_n\right)=$$

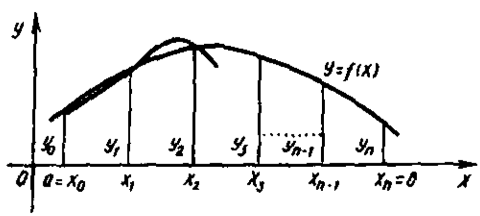
$$=h\left(\frac{y_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}y_k+\frac{y_n}{2}\right) \tag{5.4}$$

(5.4) *formula trapetsiyalar formulasi* deb ataladi. Bu formula yordamida topilgan integralning taqribiy qiymatining aniqligini oshirish uchun bo'linish nuqtalari soni «*n*» ni ikki, uch va h.k. marta oshirish kerak bo'ladi. Albatta bunda ham hisoblash hajmi bir necha marotaba oshadi.

5.3-§. Simpson formulasi

Simpson formulasi yuqorida keltirib chiqarilgan (5.2), (5.3) va (5.4) formulalarga karaganda aniqligi yuqori bo'lgan formula hisoblanadi. Bu formulada integralning qiymatini yuqori aniqlikda olish uchun bo'linish qadamlarini tobora oshirish talab etilmaydi. [a; b] kesmani $a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots x_{n-1} < x_n = b$ nuqtalar bilan $n=2\ m$ ta juft teng bo'lakchalarga ajratamiz. $u = =f(x)$ egri chiziqqa tegishli bo'lgan (x_0, u_0), (x_1, u_1), (x_2, y_2) nuqtalar orqali parabola o'tkazamiz (14-rasm). Bizga ma'lumki, bu parabolaning tenglamasi

$$y = Ax^2+Bx+C \tag{5.5}$$



14-rasm

bo'ladi, bu yerda *A, B, C* — hozircha noma'lum bo'lgan koeffitsientlar. $[x_0, x_2]$ kesmadagi egri chiziqli trapetsiyaning yuzini shu kesmadagi parabola bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi bilan almashtirsak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_2} (Ax^2+Bx+C)\,dx = \left[A\frac{x^3}{3}+Cx+B\frac{x^2}{2}\right]_{x_0}^{x_2} =$$

$$= A\frac{x_2^3-x_0^3}{3}+B\frac{x_2^2-x_0^2}{2}+C(x_2-x_0).$$

(x_2—x_0) ni qavsdan tashqariga chiqarib, umumiy maxrajga keltirsak:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \frac{x_2-x_0}{6}\,[2A(x_0^2+x_0x_2+x_2^2)+$$

$$+3B(x_0+x_2)+6C].$$

(5.5) dagi noma'lum *A*, *B*, *C* koeffitsientlar quyidagicha topiladi: *x* ning x_0, x_1, x_2 qiymatlarida *f(x)* ning

qiymatlari u_0, u_1, u_2 ekanini va $x_1 = \dfrac{x_0+x_2}{2}$ jamini hisobga olsak,

(5.5) dan:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= Ax_0^2+Bx_0+C,\\ y_1 &= A\left(\frac{x_0+x_2}{3}\right)^2+B\frac{x_0+x_2}{2}+C,\\ y_2 &= Ax_2^2+Bx_2+C. \end{aligned}\right\}$$

(5.7) ning ikkinchi ifodasini to'rtga ko'paytirib, uchala tenglikni bir-biriga qo'shsak:

$$\begin{aligned} &y_0+4y_1+y_2 = A\,[x_0^2+(x_0+x_2)^2+\\ &+x_2^2]+B\,[x_0+2(x_0+x_2)+x_2]+6C=\\ &=2A\,[x_0^2+x_0x_2+x_2^2]+3B(x_0+x_2)+6C. \end{aligned} \qquad (5.8)$$

Bu ifodani (5.6) bilan solishtirsak, bularning o'ng taraflari bir xil ekanligini ko'ramiz. (5.8) ni (5.6) ning o'ng tarafiga qo'ysak va $x_2 - x_0 = 2h$ [$h=(b-a)/n$] ekanligini e'tiborga olsak, quyidagi taqribiy tenglikni topamiz:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2). \qquad (5.9)$$

Xuddi shunday formulani kesma uchun ham keltirib chiqarish mumkin:

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4). \qquad (5.10)$$

Bu formulalarni butun kesma [a, b] uchun keltirib chiqarib, bir-biriga qo'shsak, quyidagini hosil qilamiz:

$$\int_{b}^{a} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + \qquad (5.11)$$

$$+ 2y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}).$$

Bu topilgan formula *Simpson formulasidir.* Ba'zi hollarda uni *parabolalar formulasi* deb ham ataydilar.

(5.11) ni eslab qolish unchalik qiyin emas; toq raqamli ordinatalar to'rtga, juft raqamli ordinatalar (ikki chekkadagi ordinatadan tashqari) ikkita ko'paytiriladi. Chekkadagi ordinatalar u_0, u_{2l} esa birga ko'paytiriladi.

Misol. $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ integralning qiymatini trapetsiyalar formulasi hamda Simpson formulasi yordamida toping.

Yechish: Bu erda $0 \le x \le 1$; $n=10 \cdot a=0$; $b=1 \cdot h=(b-a)/n=0,1$; $f(x)=y=\frac{1}{1+x^2}$. Quyidagi 5.1-jadvalni tuzamiz:

5.1-jadval

x	x^2	$1+x^2$	$y=f(x)=\frac{1}{1+x^2}$	x	x^2	$1+x^2$	$y=f(x)==\frac{1}{1+x^2}$
0,0	0,00	1,00	1,0000000	0,6	0,36	1,36	0,73522941
0,1	0,01	1,01	0,9900990	0,7	0,49	1,49	0,6711409
0,2	0,04	1,04	0,9615385	0,8	0,64	1,64	0,6097561
0,3	0,09	1,09	0,9174312	0,9	0,81	1,81	0,5524862
0,4	0,16	1,16	0,8620690	1,0	1,00	2,00	0,5000000
0,5	0,25	1,25	0,8000000				

Trapetsiyalar formulasiga asosan

$$I=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\approx h\left(\frac{y_0+y_{10}}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_9\right)=$$

$$=0{,}1\left(\frac{1+0{,}5}{2}+0{,}9900990+\ldots+0{,}5524862\right)=0{,}7849815.$$

Simpson formulasiga asosan

$$I=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\approx\frac{h}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+4y_5+$$

$$+2y_6+4y_7+2y_8+4y_9+y_{10})=$$

$$=\frac{0{,}1}{3}[1+0{,}5+4(0{,}9900990+0{,}9174312+\ldots+$$

$$+0{,}5524862+2(0{,}9615385+\ldots+0{,}6097561)]=0{,}7853981.$$

Bizga ma'lumki, $\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}\approx0{,}78539816.$

Bulardan ko'rinadiki,
bu misol uchun trapetsiyalar formulasi qo'llanganda *nisbiy* xatolik 0,06% dan oshmaydi.

Simpson formulasi qo'llanganda esa nisbiy xatolik deyarli yo'q.

5.4-§. Integrallarni taqribiy hisoblashda yo'l qo'yilgan xatoliklarni baholash

Faraz qilaylik, $\int_b^a f(x)dx$ integralning aniq qiymati I bo'lsin. U holda

$$I=I_m+R, \qquad (5.12)$$

bu yerda I_m — trapetsiyalar formulasi yoki Simpson formulasi yordamida integralni hisoblaganda chiqqan natija; R — shu formulalarni qo'llaganda yo'l qo'yilgan xatolik. Agar integral ostidagi *f(x)* funksiya analitik (formula) ko'rinishda bo'lsa, integrallarni taqribiy hisoblash xatoligini ifodalovchi *formulalarni matematik analiz usullari bilan keltirib chiqarish mumkin*. Agar integral ostidagi funksiya jadval yoki grafik ko'rinishda bo'lsa, bunday formulalarni keltirib chiqarishning iloji bo'lmaydi. Shuning uchun bu holda boshqa usullar qo'llashga to'g'ri keladi. Shulardan ba'zi birlarini ko'rib chiqamiz.

O'quvchiga ortiqcha qiyinchiliklar tug'dirmaslik hamda qisqalik uchun formulalarni keltirib chiqarishni (isbotlashni) lozim ko'rmadik. Yuqorida aytilganidek, bular hammasi matematik analiz usullari yordamida isbotlanadi.

Faraz qilaylik $\int_b^a f(x)dx$ integralni $n = 2m$ ta va $n = 4m$ ta bo'lakchalarga bo'lib, Simpson formulasini qo'llab olingan natijalar I_{2m} va I_{4m} bo'lsin. I_{2m} ning qiymatini I_{4m} bilan solishtirib Simpson formulasining aniqligi haqida mulohaza yuritish mumkin. Bunda I_{4m} ning xatoligi quyidagi sondan katta bo'lmaydi:

$$R_{4m} \leqslant \frac{|I_{4m} - I_{2m}|}{15}. \tag{5.13}$$

[a, b] kesmada $M_k = \max f^{k}(x)$. (5.12) dan $R = I - I_{2m}$. Bu holda xatoliklar quyidagicha baholanadi:

Trapetsiyalar formulasi uchun

$$|R| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}; \quad (M_2 = f''(x)). \tag{5.14}$$

Simpson formulasi uchun

$$|R| \leqslant \frac{M_4(b-a)^5}{180(2m)^4}; \quad (M_4 = f^{(IV)}(x)). \tag{5.15}$$

Misol. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ - integralni trapetsiyalar va Simpson formulalari yordamida hisoblaganda yo'l qo'yiladigan xatoliklar topilsin.

Y e ch i sh.

$f(x) = \frac{1}{1+x}$; $f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$; $f^{(IV)}(x) = \frac{2}{(x+1)^5}$. [0; 1] kesmada

$|f''(x)| \leq 2$; $|f^{(IV)}(x)| \leq 24$.

$n = 8$ da (5.14) dan trapetsiyalar formulasi uchun:

$$|R| \leqslant \frac{2}{12 \cdot 64} = \frac{1}{384} < 0{,}003.$$

(5.15) dan Simpson formulasi uchun:

$$|R| \leqslant \frac{24}{180 \cdot 8^4} = \frac{1}{30720} < 0{,}000034.$$

VI BOB
ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI TAQRIBIY YECHISH USULLARI

6.1-§. Differensial tenglama haqida dastlabki ma'lumot. Masalaning qo'yilishi

Agar tenglamada noma'lum funksiya hosila yoki differensial ostida qatnashsa, bunday tenglama *differensial tenglama* deyiladi.

Agar differensial tenglamadagi noma'lum funksiya faqat bir o'zgaruvchiga bog'liq bo'lsa, bunday tenglama *oddiy differensial tenglama* deyiladi. Masalan:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{3}\,(1-2y); \quad y' = \frac{x^4}{2}; \quad \frac{dy}{dt} = t^2 - 1;$$

$$\sqrt{2}\,\frac{d^2y}{dx^2} = x^2 + 1; \quad xdy = 3dx.$$

Agar differensial tenglamadagi noma'lum funksiya ikki yoki undan ortiq o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lsa, bunday tenglama *xususiy hosilali differensial tenglama* deyiladi. Masalan:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z).$$

Differensial tenglamaning tartibi deb, shu tenglamada qatnashuvchi hosilaning (differensialning) eng yuqori tartibiga aytiladi. Masalan:

$$\frac{dz}{dx} = 5(z-1); \quad (u')^3 = x^2 + 2$$

birinchi tartibli tenglamalar,

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 5\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial z^3}\right), \quad \frac{d^4 T}{dt^4} = 1 - (t' + 2)$$

esa 4-tartibli differensial tenglamalardir.

Bu bobda faqat oddiy differensial tenglamalarni ko'rib chiqamiz. n-tartibli oddiy differensial tenglamaning umumiy ko'rinishi quyidagicha:

$$J(x, u, u', u'', \ldots, u^{(n)}) = 0, \qquad (6.1)$$

bu erda x — erkli o'zgaruvchi; u — noma'lum funksiya, $u', u'', \ldots, u^{(n)}$ — noma'lum funksiyaning hosilalari.

(6.1)ni ko'p hollarda quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$u^{(n)} = f(x, u, u', u'', \ldots, u^{(n-1)}). \qquad (6.2)$$

(6.2) ning yechimi (yoki integrali) deb uni qanoatlantiruvchi shunday $u = \varphi(x)$ funksiyaga aytiladiki, $\varphi(x)$ ni (6.2)ga qo'yganda, u ayniyatga aylanadi.

Oddiy differensial tenglama yechimining grafigi uning integral egri chizig'i deyiladi.

n-tartibli differensial tenglamaning yechimida p ta erkli o'zgarmas son qatnashadi. Bu o'zgarmas sonlarni o'z ichiga olgan yechim *umumiy yechim (umumiy integral)* deyiladi. Umumiy yechimning grafik ko'rinishi integral egri chiziqlar dastasini ifodalaydi. Umumiy yechimda qatnashuvchi erkli o'zgarmaslarning aniq son qiymatlari ma'lum bo'lsa, umumiy yechimdan xususiy yechimni ajratib olish mumkin.

Umumiy yechimga kiruvchi erkli o'zgarmaslar masalaning boshlang'ich shartlaridan aniqlanadi. Bunda masala quyidagicha qo'yiladi: (6.1) differensial tenglamaning shunday yechimi $u=\varphi(x)$ ni topish kerakki, bu yechim erkli o'zgaruvchi x ning berilgan qiymati $x = x_0$ da quyidagi qo'shimcha shartlarni qanoatlantirsin:

$$x=x_0 \text{ da } u=u_0,\ u'=u'_0,\ y''=u''_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)} \qquad (6.3)$$

(6.3) shartlar *boshlang'ich shartlar* deyiladi, $x_0, u_0, u'_0, u''_0, \ldots, u_0^{(n-1)}$ — sonlar esa *yechimning boshlang'ich qiymatlari* deyiladi. Boshlang'ich shartlar (6.3) yordamida umumiy yechimdan xususiy yechimni ajratib olinadi. (6.2) differensial tenglamaning yechimini (6.3) boshlangich shartlar asosida topishga *Qoshi masalasi* deyiladi. Birinchi tartibli differensial tenglama *(p=1)* ychun Qoshi masalasi quyidagichadir: boshlang'ich shart $x = x_0$ da $u = u_0$ ni qanoatlantiruvchi $u' = f(x, u)$ differensial tenglamaning yechimi topilsin.

Birinchi tartibli differensial uchun Qoshi masalasining geometrik ma'nosi shundaki, umumiy yechimdan (egri chiziqlar dastasidan) koordinatalari $x = x_0$, $u = u_0$ bo'lgan nuqtadan o'tuvchi integral egri chiziq ajratib olinadi.

Misol. $\frac{dy}{dx} = 2x$ tenglamani $x_0 = 1$ da $y_0 = 2$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

Y e ch i sh. $dy = 2xdx$. Bundan $u = x^2 + c$. Bu yechim parabo-lalar dastasini ifodalaydi. Boshlang'ich shartdan foydalansak, $2 = 1 + c$; $c=1$. Demak, xususiy yechim $u = x^2+1$ bo'ladi. Ya'ni parabolalar dastasidan (umumiy yechimdan) M_0 (1; 2) nuqtadan o'tuvchi parabola ajratib olindi.

Agar $f(x, u)$ biror $R_{[a,b]}=\{|x - x_0| < a;\ |u - u_0| < b\}$ sohada uzluksiz bo'lib, shu sohada Lipshis sharti

$$|f(x, \bar{y}) - f(x, y)| \leq N|\bar{y} + y|$$

bajarilsa, u holda Qoshi masalasi $u(x_0) = u_0$ shartni bajaruvchi yagona yechimga egadir (bunda N — Lipshis doimiysi).

Differensial tenglamalarni aniq yechimini topish juda kamdan-kam hollardagina mumkin bo'ladi. Amaliyotda uchraydigan ko'pdan-ko'p masalalarda aniq. Yechimni topishning iloji bo'lmaydi. Shuning uchun differensial tenglamalarni yechishda taqribiy usullar muhim rol o'ynaydi. Bu usullar yechimlar qay tarzda ifodalanishlariga qarab quyidagi guruhlarga bo'linadilar:

1. *Analitik usullar.* Bu taqribiy usullarda yechim analitik (formula) ko'rinishda chiqadi.
2. *Grafik usullar.* Bu hollarda yechimlar grafik ko'rinishlarda ifodalanadi.
3. *Raqamli usullar.* Bunda yechim jadval ko'rinishida olinadi.

Hisoblash matematikasida mazkur uch guruhga kiruvchi bir qancha usullar ishlab chiqilgan. Bu usullarning bir-birlariga nisbatan muayyan kamchiliklari va ustunliklari mavjud. Muhandislik masalalarini yechishda shularni hisobga olgan holda u yoki bu usulni tanlab olish lozim bo'ladi.

6.2-§. Ketma-ket yaqinlashish usuli (Pikar algoritmi)

Pikar algoritmi analitik usullardan bo'lib amaliy masalalarni yechishda qo'llaniladi.

Faraz qilaylik,

$$u'=f(x, u)$$

differensial tenglamaning o'ng tomoni $\{|x - x_0| \le a;\ |u - u_0| \le b\}$ to'rtburchakda uzluksiz va u bo'yicha uzluksiz xususiy hosilaga ega bo'lsin. (6.4) tenglamaning $x = x_0$ da

$$u(x_0)=u_0 \qquad (6.5)$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin. (6.4) dan $u'=\frac{dy}{dx}=f(x,\ u)$; $du=f(x,\ u)dx$. Bu ifodaning ikkala tomonini x_0 dan x gacha integrallasak,

$$\int_{x_0}^{x} dy = \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx$$

Bundan (6.5) ni hisobga olinsa,

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx. \qquad (6.6)$$

(6.6) da noma'lum funksiya integral ifodasi ostida qatnashganligi tufayli u integral tenglama deb ataladi. (6.6) da $f(x,\ u)$ funksiyadagi u ning o'rniga uning ma'lum qiymati u_0 ni qo'yib birinchi yaqinlashish bo'yicha yechimni topamiz:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,. \qquad (6.7)$$

Endi (6.6) dagi $f(x,\ u)$ funksiyadagi u ning o'rniga uning ma'lum qiymati u_1 ni qo'ysak, ikkinchi yaqinlashish bo'yicha yechim $u_2(x)$ ni topamiz:

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\,dx. \qquad (6.8)$$

Ushbu jarayonni davom ettirsak.

$$\begin{cases} y_3(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(x, y_2)\,dx, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\,dx. \end{cases} \qquad (6.9)$$

Shunday qilib, quyidagi funksiyalar ketma-ketligini *{u_i(x)}* tashkil qildik:

$$y_1(x),\ u_2(x),\ u_3(x),\ ....\ u_p(x). \qquad (6.10)$$

(6.10) ketma-ketlik yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo'lishi mumkin. Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz:

Teorema. *Agar $(x_0;\ u_0)$ nuqta atrofida f (x, u) funksiyaning uzluksiz va chegaralangan xususiy xosilasi $f'_y(x,\ u)$ mavjud bo'lsa, u holda {u, (x) } ketma-ketlik (6.4) tenglamaning yechimi bo'lgan va $u(x_0)=u_0$ shartni qanoatlantiruvchi u(x) funksiyaga yaqinlashadi.*

Demak, differensial tenglamalarni yechishda ushbu teoremaning shartlari bajarilsa (ya'ni (6.10) yaqinlashuvchi bo'lsa), Pikar usulini qo'llash mumkin. Agar (6.10) uzoqlashuvchi bo'lsa, bu usulning ma'nosi bo'lmaydi.

Misol. Ketma-ket yaqinlashish usuli bilan (Pikar usuli) $u' = \frac{dy}{dx} = x+y;$ differensial tenglamaning $x=0$ da $u=1$ shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimi topilsin.

Y e ch i sh. $\frac{dy}{dx} = x+y$. Bundan $x = 0$ da $u=1$ ekanligini hisobga olsak,

(6.7) ga asosan, $$y=1+\int_0^x (x+y)\,dx.$$

$$y_1=1+\int_0 (x+1)\,dx=1+x+\frac{x^2}{2}.$$

(6.8) ga asosan

$$y_2=1+\int_0^x\left(x+1+x+\frac{x^2}{2}\right)\cdot dx=1+x+x^2+\frac{x^3}{6}.$$

u_3 va y_4 ni hisoblaymiz:

$$y_3=1+\int_0^x\left(x+1+x+x^2+\frac{x^3}{6}\right)dx=1+x+x^2+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{24};$$

$$y_4 = 1 + \int_0^x \left(x + 1 + x + x^2 + \frac{x^4}{24}\right) dx = 1 + x + x^2 +$$

$$+ \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{120}.$$

Berilgan tenglamaning aniq yechimi.

$$y = 2e^x - x - 1 = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} +$$

$$+ \frac{x^5}{60} + \frac{x^6}{360} + \dots$$

Bundan ko'rinadigan taqribiy yechimlar u_3 va u_4 aniq yechimdan faqat oxirgi hadlari bilan farq qiladilar.

6.3-§. Darajali qatorlar yordamida integrallash. Ketma-ket differensiyallash usuli

Faraz qilaylik, n-tartibli

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \tag{6.11}$$

differensial tenglama uchun

$$x = x_0,\ y = y_0,\ y' = y'_0,\ y''_0,\ \dots,\ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \tag{6.12}$$

boshlang'ich shartlar berilgan.

(6.11) ning o'ng tomoni $M_0(x_0, u_0, u'_0, \dots, u_0^{(n-1)})$ boshlang'ich nuqtada analitik funksiya. (611) ning yechimi $u = u(x)$ ni Teylor qatori (x_0 — nuqta atrofida) ko'rinishida qidiramiz:

$$y = y_0 + y'_0(x - x_0) + \frac{y''_0}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \tag{6.13}$$

$$\frac{y_0^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n + \dots,$$

bu yerda $|x - x_0| < h$; h — yetarli kichik son.

(6.13) qatorning koeffitsiyentlarini topish uchun, (6.12) ni hisobga olgan holda (6.11) dan talab qilingan miqdorda hosila olinadi. Topilgan koeffitsientlar u', u''_0, u'''_0, $y_0^{(n)}$ ni (6.13) ga qo'ysak, yechimni $(x - x_0)$ darajalari bo'yicha qator ko'rinishda olamiz. Agar $x_0 = 0$ bo'lsa, yechim x

ning darajalari bo'yicha qator ko'rinishida chiqadi. Yuqorida keltirilgan usulni oddiy differensial tenglamalar tizimi uchun ham qo'llash mumkin.

Misol.

$$u'' = x^2 u \qquad (6.14)$$

tenglamaning $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $y'_0 = 0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

Y e ch i sh. Bu misol uchun (6.13) qator quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$y = 1 + \frac{y''_0}{2!}x^2 + \frac{y'''_0}{3!}x^3 + \ldots + \frac{y_0^{(n)}}{n!}x^n + \ldots \qquad (6.15)$$

(6.14) /ish ketma-ket hosila olsak,

$$y''' = 2xy + x^2y';$$
$$y^{(4)} = 2y + 2xy' + 2xy' + x^2y'' = 2y + 4xy' + x^2y;$$
$$y^{(5)} = 2y' + 4y' + 4xy'' + 2xy'' = x^2y''' = 6y' + 6xy'' + x^2y''';$$
$$y^{(6)} = 12y'' + 8xy''' + x^2y^{(4)};$$
$$y^{(7)} = 20y''' + 10xy^{(4)} + x^2y^{(4)};$$
$$y^{(8)} = 30y^{(4)} + 12xy^{(5)} + x^2y^{(6)}.$$

Bu tengliklarning har biriga $x = x_0$, $y_2=1$, $u'_0=0$ boshlang'ich shartni qo'llasak, quyidagilarni topamiz: $y''_0=0$; $y'''_0=0$; $y_0^{(4)}=2$; $y_0^{(5)}= y_0^{(6)}= y_5^{(7)}=0$; $y^{(8)}=30\cdot2=60$.

Bularni (6.15) ga qo'yib izlanavotqan vechimni topamiz:

$$y = 1 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{672}x^8 + \ldots$$

6.4-§. Noma'lum koeffitsientlar usuli

Faraz qilaylik, ushbu

$$y' = f(x, u) \qquad (6.16)$$

differensial tenglama uchun $x = x_0$; $u=u_0$ boshlang'ich shart berilgan. Noma'lum koeffitsientlar usuli (6.16) ning yechimini koeffitsiyentlari noma'lum bo'lgan quyidagi qator ko'rinishida izlashga asoslangan:

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \ldots \qquad (6.17)$$

Noma'lum a_0, a_1, a_2 koeffitsiyentlar quyidagicha topiladi:

(6.17) dan hosila olib (6.16) ga qo'yiladi. So'ngra x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsiyentlari bir-birlariga tenglashtiriladi va $x = x_0$ da $u = u_0$ ni hisobga olgan holda noma'lum a_0, a_1, a_2, ... koeffitsiyentlar topiladi. Topilgan a_0, a_1, a_2... koeffitsiyentlarni (6.17) ga qo'ysak, izlanayotgan yechimni topamiz.

Misol. $y''=x^2y$ tenglamaning $x_0=0$ boshlang'ich shartda $y_0 = 1$, $y'_0 = 0$ ni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

Y e ch i sh. Bu misolni 6.3-§ da ko'rgan edik. $x_0 = 0$ bo'lgani uchun yechimni quyidagi qator ko'rinishda qidiramiz:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_px^p + ... \qquad (6.18)$$

Bundan ikki marta hosila olsak,

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + ... + na_nx^{n-1}, \qquad (6.19)$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + ... + a_nn(n-1)x^{n-2}. \qquad (6.20)$$

(6.18) va (6.19) dan boshlang'ich shartni hisobga olgan holda $a_0=1$; $a_1=0$ ekanligini aniqlaymiz. a_0 va a_1 ni (6.18) ga qo'ysak,

$$u = 1+a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + ... + a_px^p. \qquad (6.21)$$

Bu qatorning qolgan koeffitsiyentlarini topish uchun (6.20) va (6.21) larni $u'' = x^2u$ ga qo'ysak, quyidagini aniqlaymiz:

$$2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + 30a_6x^4 + ... +$$
$$+ n(n-1)a_nx^{n-2} - x^2(1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + ... +$$
$$+ a_nx^n + ...) = 0$$

Bu tenglikni x ning darajalari bo'yicha guruhlarga ajratamiz:

$$2a_2 + 6a_3x + (12a_4 - 1)x^2 + 20a_5)x^3 + 30a_6 - a_2)x^4 +$$
$$+ (42a_7 - a_3)x^5 + ... = 0.$$

Biz yechimni $x \neq 0$ bo'lgan hol uchun qidirayotganimiz tufayli x ning oldidagi koeffitsiyentlarni 0 ga tenglashtirishimiz lozim bo'ladi: $a_2 = 0$; $a_3 = 0$; $12a_4 - 1=0$. Bundan $a_4=\frac{1}{12}$; $a_5=0$; $30a_6- a_2=0$. Bundan esa $a_6 = 0$ va h.k.

Bularni hisobga olgan holda yechimni quyidagicha yozish mumkin:

$$y = 1 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{672}x^8 + ...$$

6.5-§. Eyler va Runge - Kutta usullari

Yuqorida (6.2- 6.4-§§. da) ko'rilgan usullar taqribiy analitik usullar bo'lib, bu hollarda yechimlar analitik (formula) ko'rinishlarida olindi. Bu usullar bilan topilgan yechimning aniqlik darajasi haqida fikr yuritish birmuncha murakkab bo'ladi. Masalan, ketma-ket differensiallash usulini qo'llaganda qatorning juda ko'p hadlarini hisoblashga to'g'ri keladi va ko'p hollarda bu qatorning umumiy hadini aniqlab bo'lmaydi. Pikar algoritmini qo'llaganimizda esa, juda ko'p murakkab integrallarni hisoblashga to'g'ri keladi va ko'p hollarda integral ostidagi funksiyalar elementar funksiyalar orqali ifodalanmaydi. Amaliy masalalarni yechishda yechimlarni formula ko'rinishida emas, balki jadval ko'rinishida olish qulay bo'ladi. Differensial tenglamalarni raqamli usullar bilan yechganda yechimlar jadval ko'rinishida olinadi. Amaliy masalalarni yechishda ko'p qo'llaniladigan Eyler va Runge - Kutta usullarini ko'rib chiqamiz.

Eyler usuli. Quyidagi

$$y' = f(x, u) \qquad (6.22)$$

birinchi tartibli differensial tenglamaning [a, b] kesmada boshlang'ich shart $x = x_0$ bo'lgan hol uchun $u = u_0$ ni qanoatlantiruvchi yechimi topilishi lozim bo'lsin. [a, b] kesmani $x_0, x_1, x_2 \ldots x_p$ nuqtalar bilan p ta teng bo'lakchalarga ajratamiz; bunda $x_i = x_0 + ih$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$, $h = \dfrac{b-a}{n}$ - qadam.

(6.22) tenglamani [a, b] kesmaga tegishli bo'lgan biror $[x_k, x_{k+1}]$ kesmada integrallasak,

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y)\,dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} y' dx =$$

$$= y(x)\Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = y(x_{k+1}) - y(x_k) = y_{k+1} - y_k,$$

ya'ni

$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y)\,dx. \qquad (6.23)$$

Bu yerda integral ostidagi funksiyani $x—x_k$ nuqtada boshlang'ich o'zgarmas qiymatiga teng deb qabul qilinsa, quyidagini hosil qilamiz:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y)\,dx = f(x_k, y_k)\cdot x\Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = f(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k) = y_k\cdot h.$$

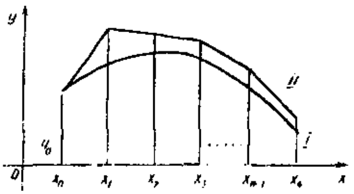
U holda (6.23) dan

$$y_{k+1} = y_k + y'_k h. \qquad (6.24)$$

$y_{k+1} - y_k = \Delta y_k$, ya'ni $y'_k h = \Delta y_k$ deb belgilasak,

$$y_{k+1} = \Delta y_k. \qquad (6.25)$$

Ushbu jarayonni [*a*, *b*] ga tegishli bo'lgan har bir kesmacha uchun takrorlab, (6.22) ning yechimini ifodalovchi jadvalini tuzamiz. Eyler usulining geometrik ma'nosi shundayki, bunda (6.22) ning yechimini ifodalovchi integral egri chiziq siniq (II) chiziqlar bilan almashtiriladi (15-rasm). Eyler usulini differensial tenglamalar tizimini yechishda ham qo'llash mumkin.



15-rasm

Quyidagi tizim

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z), \\ z' = f_2(x, y, z) \end{cases} \qquad (6.26)$$

uchun

$$x = x_0 \text{ da } u = u_0,\ z = z_0 \qquad (6.27)$$

boshlang'ich shart berilgan. (6.26) ning taqribiy yechimlari quyidagi formulalar orqali topiladi:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i,\quad z_{i+1} = z_i + \Delta z_i,$$

bu yerda

$$\Delta y_i = hf_1(x_i, y_i, z_i);\ \Delta z_i = hf_2(x_i, y_i, z_i);\ (i=0, 1, 2, \ldots)$$

Misol. $u' = u - x$ tenglamaning yechimi [0; 1,5] kesma uchun Eyler usuli bilan topilsin. Boshlang'ich shart $x_0 = 0$; u_0=1,5; qadam h= 0,25.

Y e ch i sh. Quyidagi 6.1-jadvalni tuzamiz.

6.1.-jadval

i	x_i	y_i	$y_i' = y_i - x_i$	$\Delta y_i = hy_i'$
1	2	3	4	5
0	0	1,5000	1,5000	0,3750
1	0,25	1,8750	1,6250	0,4062
2	0,50	2,2812	1,7812	0,4453
3	0,75	2,7265	1,9765	0,4941
4	1,00	3,2206	2,2206	0,5552
5	1,25	3,7758	2,5258	0,6314
6	1,50	4,4702		

Bu jadvalni quyidagicha tuzamiz:

I. Boshlang'ich shart sifatida 2- va 3-ustunlarning 1-satrini yozamiz.

II. $u_i' = u_i - x_i$ tenglamadan u_i' $(i = 0, 1, 2, \ldots, 5)$ ni topamiz va uni (4) ustunning 1-satriga yozamiz.

III. 4-ustunning qiymatini h ga ko'paytirib ($\Delta u_i = h\ u_i'$, i = 1,2, ..., 5 ni hisoblab), natijani 5-ustunga yozamiz.

IV. 3-ustundagi qiymatni 5-ustundagi qiymatga (satrlarni moslab) qo'shib $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$ ni hisoblaymiz va natijani 3-ustunning keyingi satriga yozamiz. Bu jarayonni [0; 1, 5] kesmadagi hamma nuqtalar uchun takrorlaymiz.

Runge—Kutta usuli. Runge—Kutta usuli ko'p jihatdan Eyler usuliga o'xshash, ammo aniqlik darajasi Eyler usuliga nisbatan yuqori bo'lgan usullardan biridir. Runge—Kutta usuli bilan amaliy masalalarni yechish juda qulay. Chunki, bu usul orqali noma'lum funksiyaning x_{i+1} dagi qiymatini topish uchun uning x_i dagi qiymati aniq bo'lishi yetarlidir. Runge—Kutta usuli uning aniqlash darajasiga ko'ra bir necha turlarga bo'linadi. Shulardan *amaliyotda eng ko'p qo'llaniladigani to'rtinchi* darajali aniqlikdagi Runge—Kutta usulidir.

Birinchi tartibli $u = f(x, u)$ differensial tenglama uchun $x = x_i$ (i = 0, 1, 2, ... p) $u = u_i$ ma'lum bo'lsin. Bu yerda y_i boshlang'ich shart ma'nosida bo'lmasligi ham mumkin. Noma'lum funksiya u ning $x = x_{i+1}$ dagi qiymati $y_{i+1} = y_{i+1}(x)$ ni topish uchun quyidagi ketma-ket hisoblash jarayonini amalga oshirmoq lozim bo'ladi:

$$\begin{cases} K_1^{(i)} = hf_i(x_i, y_i), \\ K_2^{(i)} = hf_i(x_i + h/2, y_i + K_1^{(i)}/2), \\ K_3^{(i)} = hf_i(x_i + h/2, y_i + K_2^{(i)}/2), \\ K_4^{(i)} = hf_i'(x_i + h, y_i + K_3^{(i)}). \end{cases} \tag{6.28}$$

Funksiyaning orttirmasi Δy_i quyidagi formuladan topiladi:

$$\Delta y_i = (1/6)\,(K_1^{(i)} + 2\,K_2^{(i)} + 2\,K_3^{(i)} + K_4^{(i)}), \tag{6.29}$$

bu yerda $h = (b - a)/p$ — integrallash qadami. Tenglamaning yechimi qidirilayotgan $[a, b]$ kesma $x_i = x_0 + ih$ $(i=0, 1, 2, ..., p)$ nuqtalar bilan o'zaro teng p ta bo'lakka bo'lingan. i ning har bir qiymati uchun (6.28) va (6.29) dagi amallarni bajaramiz va noma'lum funksiya u ning qiymatlarini (tenglamaning yechimini) quyidagi formuladan topamiz:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \; (i = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{6.30}$$

Runge—Kutta usuli bilan differensial tenglamani yechishda jadval tuzilsa hisoblash jarayoni birmuncha aniqlashadi. Jadvalni tuzish tartibi quyidagicha:

I. 2- va 3-ustunlarga x va u ning kerak bo'lgan qiymatlari yoziladi.

II. x va u larning qiymatlarini (2- va 3-ustunlardan) $u'=f(x,u)$ tenglamaning o'ng tarafiga qo'yiladi va natijalarni 4-ustunga (satrlarni mos keltirib) qo'yiladi.

III. Topilgan $f(x, u)$ qiymatlarni integrallash qadami h ga ko'paytiriladi va natijalar 5-ustunga yoziladi.

IV. $K_1^{(0)}$ ni 1 ga, $K_2^{(0)}$ va $K_3^{(0)}$ larni 2 ga, $K_4^{(0)}$ ni l ga ko'paytirib ularni 6-ustunga yozamiz.

I—IV jarayonni K^i ning $(i=0, 1, 2, ...p)$ har bir qiymati uchun takrorlaymiz. 6-ustundagi qiymatlarning yig'indisini hisoblab, natijani 6 ga bo'lamiz va $\Delta u = (K_1^{(i)} + +2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4)$ ni topamiz. Va nihoyat, $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$ topiladi. Yuqorida keltirilgan hisoblash tartibini $[a; b]$ kesmaning barcha nuqtalari uchun takrorlaymiz.

Jadval quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

6.2-jadval

	x	y	$y'=f(x,y)$	$k=hf(x,y)$	Δy
1	2	3	4	5	6
0	x_0	y_0	$f(x_0, y_0)$	$k_1^{(0)}$	$k_1^{(0)}$
	$x+\frac{h}{2}$	$y_0+\frac{k_1^{(0)}}{2}$	$f(x_0+\frac{h}{2}; y_0+\frac{k_1^{(0)}}{2})$	$k_2^{(0)}$	$2k_2^{(0)}$
	$x_0+\frac{h}{2}$	$y_0+\frac{k_2^{(0)}}{2}$	$f(x_0+\frac{h}{2}; y_0+\frac{k_2^{(0)}}{2})$	$k_3^{(0)}$	$2k_3^{(0)}$
	x_0+h	$y_0+k_3^{(0)}$	$f(x_0+h; y_0+k_3^{(0)})$	$k_4^{(0)}$	$k_3^{(0)}$
					$\frac{1}{6}\sum=\Delta y_0$
1	x_1	$y_1=y_0+\Delta y_0$	$f(x_1, y_1)$	$k_1^{(1)}$	$k_1^{(1)}$
	$x_1+\frac{h}{2}$	$y_1+\frac{k_1^{(1)}}{2}$	$f(x_1+\frac{h}{2}; y_1+\frac{k_1^{(1)}}{2})$	$k_2^{(1)}$	$2k_2^{(1)}$
	$x_1+\frac{h}{2}$	$y_1+\frac{k_2^{(1)}}{2}$	$f(x_1+\frac{h}{2}; y_1+\frac{k_2^{(1)}}{2})$	$k_3^{(1)}$	$2k_3^{(1)}$
	x_1+h	$y_1+k_3^{(1)}$	$f(x_1+h; y_1+k_3^{(1)})$	$k_4^{(1)}$	$k_4^{(1)}$
					$\frac{1}{6}\sum=\Delta y_1$
2	x_2	$y_2=y_1+\Delta y_1$			

VII BOB

EHTIMOLLIKLAR NAZARIYASI

Ehtimolliklar nazariyasi matematika fanining muhim tarmoqlaridan biridir. Ehtimolliklar nazariyasining unsurlari (elementlari) XVI—XVII asrlarda vujudga kela boshladi. Shu davrlarda qimor o'yinlari juda keng tarqalgan bo'lib, bu o'yinlar matematiklarning ham e'tiborini o'ziga jalb etgan edi. Bu o'yinlarda kuzatilayotgan hodisalar o'ziga xos qonuniyatlarga bo'ysunishini bilgan Gyuygens, Paskal, Ferma, Kardano va boshqa olimlar bu qonunlarni har tomonlama o'rgandilar va ehtimolliklar nazariyasiga oid ehtimollik, matematik kutilma va shunga o'xshash tushunchalarni kiritdilar.

Ehtimolliklar nazariyasi rivojining keyingi bosqichi Yakov Bernulli (1654—1705) nomi bilan bog'liq. U isbotlagan teorema keyinchalik «katta sonlar qonuni» nomini olgan bo'lib, oldinroq yig'ilgan faktlarning birinchi nazariy asoslanishi edi.

Ehtimolliklar nazariyasining keyingi yutuqlari Muavr, Laplas, Gauss, Pausson va boshqalar nomi bilan bog'liqdir.

Ehtimolliklar nazariyasi rivojining yangi, ayniqsa samarador davri P. L. Chebishev (1821—1894) va uning shogirdlari A. A. Markov (1856—1922), A. M. Lyapunov (1857—1918) nomlari bilan bog'liq. Bu davrda ehtimolliklar nazariyasi uyg'unlashgan matematik fan bo'lib qoldi. Uning keyingi rivojlanishi Fisher, V. Feller, S. N. Bernshteyn, A. N. Kolmogorov, A. Ya. Xinchin, B. V. Gnedenko, N. V. Smirnov va boshqalar nomlari bilan bog'liq.

O'zbekistonda ehtimolchilar maktabining vujudga kelishi V. I. Romanovskiy, T. A. Sarimsoqov, S. X. Sirojiddinov va ularning shogirdlari nomlari bilan bog'liqdir. O'zbek ehtimolchilari maktabi umumiy muammolarning qo'yilishi va ularning hal etilishi, fundamental ilmiy tadqiqot ishlarining sifati va salmog'i bo'yicha jahonda oldingi o'rinlardan birida turadi.

Ehtimolliklar nazariyasi matematik statistikaning asosiy apparatigina bo'lib qolmay, bundan tashqari uning usullari ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasida, ishonchlilik nazariyasida, texnologik jarayonni tahlil qilishda va boshqa maqsadlarda qo'llaniladi.

7.1-§. Hodisa va ehtimolliklar tushunchasi. Hodisalar ustida amallar

Ehtimolliklar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri «tajriba» va tajriba natijasida kuzatilishi mumkin bo'lgan hodisalar tushunchalaridir. Tajriba hodisani ro'yobga keltiruvchi shartlar majmui «S» ning bajarilishini ta'minlashdan iboratdir.

Tajribadan tajrpbaga o'tganda ro'y berayotgan hodisalar o'zgarib turadigai hollar hayotda keng miqyosda uchrab turadi. Bu yerda esa, albatta, tajribani vujudga keltiruvchi shartlar majmui «S» o'zgarmas bo'lgan hollar tushuniladi. Masalan, o'tkazilayotgan tajriba bir jinsli tangani muayyan sharoitda tashlashdan iborat bo'lsin. Albatta, bu erda tajribadan tajribaga o'tganda ro'y beruvchi hodisalar har xil bo'ladi, masalan, bir tajribada «Gerb» (Г) tushgan bo'lsa, boshqasida tanganing ikkinchi tomoni — «raqam» (P) tushishi mumkin.

Tajriba, kuzatishlar, o'lchashlarning natijalari hodisalardan iborat bo'ladi. Tajriba natijasida ro'y berishi oldindan aniq bo'lmagan hodisa *tasodifiy hodisa* deyiladi. Tajribaning har qanday natijasi *elementar hodisa* deyiladi. Tajriba natijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan barcha elementar hodisalar to'plami *elementar hodisalar fazosi* deyiladi. Elementar hodisalar fazosini U orqali, har bir elementar hodisani esa e orqali belgilaymiz.

2-misol. Tajriba simmetrik, bir jinsli tangani ikki marta tashlashdan iborat bo'lsin. Bunda elementar hodisalar quyidagicha bo'ladi:

e_1=(ГГ) — birinchi tashlashda gerb, ikkinchisida ham gerb tushish hodisasi;

e_2=(ГР) — birinchi tashlashda gerb, ikkinchisida esa raqam tushish hodisasi;

e_3= (РГ) — birinchi tashlashda raqam, ikkinchisida gerb tushish hodisasi;

e_4=(РР) — birinchi tashlashda ham, ikkinchisida ham raqam tushish hodisasi;

3-misol. Tajriba nuqtani [2,5] segmentga tasodifiy ravishda tashlashdan iborat bo'lsin, bu erda elementar hodisalar fazosi U=[e]= [2,5] to'plamdan iboratdir, yaьni u kontinium quvvatga ega.

Bu aytganlarimizni yakunlab, shunday xulosa qilishimiz mumkin: har qanday tajriba uning natijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan elementar hodisalar to'plamini vujudga keltiradi va bu hodisalar to'plami chekli, sanoqli va hatto kontinium quvvatga ega bo'lishi mumkin. Har qanday tasodifiy hodisa esa elementar hodisalar to'plamidan iborat bo'lib, uning «katta-kichikligi» unga kirgan elementar hodisalarning soniga bog'liq bo'ladi.

Tasodifiy hodisalarni, odatda, lotin alifbosining bosh harflari *A, B, C,...*. lar bilan belgilanadi. «Eng katta» hodisa *U* bo'lib, u barcha elementar hodisalar to'plamidan iboratdir.

Agar tajriba natijasida $A(A\subset U)$ ga kirgan *e* elementar hodisalarning birortasi ro'y bersa, *A hodisa ro'y berdi* deyiladi. Agar shu elementar hodisalardan birortasi ham ro'y bermasa, *A* hodisa ro'y bermadi va *A* hodisaga teskari hodisa (uni $\overline{A}$ orqali belgilaymiz) ro'y berdi deymiz. *A* va $\overline{A}$ *o'zaro qarama-qarshi hodisalar* deyiladi.

Tajriba natijasida har gal ro'y beradigan hodisa *muqarrar hodisa* deyiladi. Yuqorida keltirilgan barcha elementar hodisalar fazosi *U* muqarrar hodisaga misol bo'la oladi. Birorta ham elementar hodisani o'z ichiga olmagan hodisa *mumkin bo'lmagan hodisa* deyiladi va *V* orqali belgilanadi. Tabiiyki, bu hodisa tajriba natijasida sira ham ro'y berishi mumkin emas. Ro'y bermaydigan hodisa *V* ni to'plami ma'nosida $\varnothing$ bo'sh to'plam bilan, muqarrar hodisa *U* ni Ω universal to'plam bilan belgilaymiz, ya'ni $U=\Omega$, $V=\varnothing$.

4-misol. *A* hodisa ikkinchi misoldagi tajribada gerb ikki marta tushishidan iborat bo'lsin. Bu holda $A = (e_1)$ bo'ladi, ya'ni tajriba natijasida e_1 ro'y bersa, *A* hodisa ro'y berdi deymiz. Agar e_1 ro'y bermasa, A hodisa ro'y bermadi deymiz, u holda A ga qarama-qarshi hodisa $\overline{A}$ ro'y bergan bo'ladi.

Tasodifiy hodisalar orasida quyidagicha munosabatlar bo'lishi mumkin:

1. Agar A hodisani tashkil etgan elementar hodisalar B hodisaga ham tegishli bo'lsa, A hodisa B hodisani ergashtiradi deyiladi va $A \subset B$ kabi belgilanadi. Ko'rinib turibdiki, bu holda A ro'y bersa, B ham albatta ro'y beradi, lekin B ro'y bersa, A ning ro'y berishi shart emas.

2. Agar A va B hodisalar bir xil elementar hodisalar to'plamidan tashkil topgan bo'lsa, ya'ni A ni tashkil etgan barcha elementar hodisalar albatta B ga ham tegishli va aksincha, B ni tashkil etgan barcha elementar hodisalar albatta A ga ham tegishli bo'lsa, A va B hodisalar teng deyiladi va $A = B$ kabi belgilanadi.

3. A va B hodisalarning yig'indisi deb A yoki B ning yoki ikkalasining ham ro'y berishidan iborat C hodisani aytamiz. A va B hodisalarning yig'indisini $A \cup B$ yoki $A+B$ orqali belgilanadi.

4. A va B hodisalarning bir vaqtda ro'y berishini ta'minlovchi barcha $e \in U$ lardan tashkil topgan C hodisa A va B hodisalarning ko'paytmasi deyiladi va $A \cap B$ yoki AB kabi belgilanadi.

5. A va B hodisalarning ayirmasi deb A ro'y berib, B ro'y bermasligidan iborat C hodisaga aytiladi. A va B hodisalarning ayirmasi $A \backslash B$ yoki $A—B$ kabi belgilanadi.

6. Agar $A \cap B = \varnothing$ bo'lsa, A va B hodisalar birgalikda emas deyiladi.

7. A hodisaga qarama-qarshi $\overline{A}$ hodisa A ga kirmagan barcha elementar hodisalar to'plamidan iboratdir, ya'ni $A \cap \overline{A} = \varnothing$ va $A \cup \overline{A} = U$.

8. Agar $A_1 U ... U A_p = U$ bo'lsa, $A_1, ..., A_p$ hodisalar hodisalarning to'liq guruhini tashkil etadi deyiladi. Xususan, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, ..., p$ va $A_1 + ... + A_p = U$ bo'lsa, $A_1, ..., A_p$ hodisalar o'zaro birgalikda bo'lmagan hodisalarning to'liq guruhini tashkil etadi deyiladi.

Shunday qilib, tasodifiy hodisalarning ta'rifidan foydalanib, quyidagi munosabatlarning o'rinli ekanligini ko'rsatish mumkin:

a) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ — kommutativlik qonuni;

b) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ – assosi-ativlik qonuni;

v) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$ – ayniylik qonuni;

g) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ — distributivlik qonuni.

7.2-§. Ehtimollikning ta'riflari

7.2.1. Ehtimollikning mumtoz ta'rifi

Oldingi paragrafda ko'rib o'tilgan misollarda elementar hodisalar fazosi Ω chekli yoki sanoqli bo'lishini ko'rdik.

Agar elementar hodisalar fazosi chekli hodisalardan iborat bo'lsa, u *elementar hodisalarning diskret fazosi* deyiladi. Agar Ω da musbat qiymatli $R(e_i)$ funktsiya berilgan bo'lsa va u $P(\Omega)=\sum_{e\in\Omega} P(e) = 1$ shartni qanoatlantirsa, u holda Ω da ehtimolliklar taqsimoti berilgan deyiladi.

Ta'rif. Har qanday $A\in\Omega$ tasodifiy *hodisaning ehtimolligi* deb, ushbu $P(A) = \sum_{e\in A} P(e)$ songa aytiladi.

5-misol. Bir jinsli kubni tashlashda i ochko (i=1,2,3,4,5,6) tushish hodisasini e_i bilan belgilaylik.

U holda elementar hodisalar fazosi $\Omega=\{e\}$, $i=\overline{1,6}$ bo'ladi. Kub bir jinsli bo'lgani sababli e_i hodisaning ro'y berish ehtimolligi $P(e_i)=\frac{1}{6}$ bo'ladi. Bunday aniqlangan ehtimollik quyidagi xossalarga ega:

$$1.\ P(\varnothing)=0,\ P(\Omega)=\sum_{e\in\Omega} P(e)=1.$$

$$2.\ P(A\cup B)=\sum_{e\in A\cup B} P(e)=\sum_{e\in A} P(e)+\sum_{e\in B} P(e)-$$
$$-\sum_{e\in A\cup B} P(e)=P(A)+p(B)-p(A\cap B).$$

$$3.\ P(\bar{A})=\sum_{e\in \bar{A}} P(e)=\sum_{e\in\Omega/A} P(e)=\sum_{e\in\Omega} P(e)-$$
$$-\sum_{e\in A} P(e)=1-P(A).$$

Ikkinchi xossadan, xususiy holda $A\cap B=\Omega$ bo'lganda, $P(A\cap B)=$ $=P(A)+P(B)$ (qo'shish teoremasi) kelib chiqadi. Buni ehtimollikning chekli additivlik xossasi deyiladi va u birgalikda ro'y bermaydigan ($A_i\cap A_j=\varnothing$, $i\neq j$) har qanday $\{A_i\}$ hodisalar uchun ham o'rinli.

Agar Ω chekli n ta elementar hodisadan tashkil topgan bo'lib, har bir elementar hodisa e_i ning ehtimolligi $P(e_i)$ ni $\frac{1}{n}$ ga teng deb olinsa, e_i elementar hodisalar teng imkoniyatli deyiladi. Bunday fazoda har qanday A hodisaning ehtimolligi quyidagicha aniqlanadi:

$$P(A)=\sum_{e_i\in A} P(e_i)=\frac{A \text{ ga kirgan elementlar soni}}{n}=\frac{m}{n}$$

Hodisa funktsiyasi $P(A)$ ning ehtimollikning hamma xossalariga ega ekanligini ko'rish mumkin. Ehtimollikning yuqoridagi kiritilgan ta'rifi uning mumtoz (klassik) ta'rifi deyiladi. Mumtoz ta'rif faqat teng imkoniyatli chekli sondagi elementar hodisalardan tashkil topgan Ω fazo uchun kiritilishi mumkin, bu hol esa mumtoz ta'rifni qo'llashni chegaralaydi, sababi Ω elementlari chekli bo'libgina kolmay, balki turli imkoniyatli bo'lishi ham mumkin.

6-misol. Beshta bir xil qog'ozning har biriga quyidagi harflardan biri yozilgan: q, a, y, i, q. Qog'ozlar yaxshilab aralashtirilgan. Bittalab olingan va ketma-ket bir qator qilib terilgan «qayiq» so'zini o'qish mumkinligi ehtimolini toping.

Y e ch i sh. Tajribalarning hamma bo'lishi mumkin bo'lgan natijalar soni 5 ta harfdan tuzish mumkin bo'lgan barcha o'rin almashtirishlar soniga, ya'ni $5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$ ga teng. Shulardan faqat bittasi «qayiq» so'zini tashkil qiladi. Shuning uchun bu erda $t=1$, $n=120$. A hodisasining izlanayotgan ehtimolligi esa

$$P(A)=\frac{1}{120}\approx 0{,}008.$$

7.2.2. Ehtimollikning geometrik ta'rifi

Biror Q soha berilgan bo'lib, Q_1 sohani o'z ichiga olsin: $Q_1\subset Q\cdot Q$ sohaga tavakkaliga tashlangan nuqtaning Q_1 sohaga ham tushishi ehtimolligini topish talab etilsin. Tashlangan nuqta Q_1 ga albatta tushsin va uning biror Q_1 qismiga tushish ehtimolligi shu Q_1 qismning o'lchamiga (uzunligiga, yuziga, hajmiga) proporsional bo'lib, Q_1 ning tuzilishiga va Q_1 ni Q_1 ning qaerida joylashganligiga bog'liq bo'lmasin. Bu shartlarda qaralayotgan hodisaning ehtimolligi

$$P=\frac{mesQ_1}{mesQ}$$

formula yordamida aniqlanadi. Bu yerda aniqlangan R funksiya ehtimollikning barcha xossalarini qanoatlantiradi.

7-misol. Uzunligi 20 sm bo'lgan L kesmaga uzunligi 10 sm bo'lgan l kesma joylashtirilgan. Katta kesmaga tavakkaliga qo'yilgan nuqtaning kichik kesmaga ham tushish ehtimolligini toping. Nuqtaning kesmaga tushish ehtimolligi kesmaning uzunligiga mutanosib (proporsional) bo'lib, uning joylashishiga bog'liq emas, deb faraz qilinadi.

Y e ch i sh. Masalaning shartiga ko'ra l=10 sm, L= 20 sm. Umumiylikka xalal keltirmasdan L, kesmaning sanoq boshi l kesma bilan ustma-ust tushadi deb qaraymiz. Unda qaralayotgan hodisaning ehtimolligi

$$P = \frac{10см}{20см} = \frac{1}{2}.$$

7.2.3. Ehtimollikning statistik ta'rifi

Uzoq kuzatishlar shuni ko'rsatadiki, shartlar o'zgarmas bo'lganda biror A hodisaning ro'y berishi yoki ro'y bermasligi ma'lum turg'unlik xarakteriga ega bo'lar ekan. A hodisaning p ta tajribada ro'y berishlar sonini β deb olsak, u holda juda ko'p sondagi kuzatishlar uchun $\frac{\beta}{n}$ nisbat deyarli o'zgarmas miqdor bo'lib qolaveradi. $\frac{\beta}{n}$ nisbat A hodisaning ro'y berish chastotasi deyiladi. Chastotaning turg'unlik xususiyati «demografik» xarakterdagi hodisalarda yaqqol seziladi. Masalan, qadimgi zamonlarda butun bir davlat uchun va katta shaharlar uchun tug'ilgan o'g'il bolalar sonining hamma tug'ilgan bolalar soniga nisbati yildan-yilga deyarli o'zgarmasligi kuzatilgan. Qadimgi Xitoyda bizning eramizdan 2238 yil avval aholining ro'yxatida bu son asosan $\frac{1}{2}$ ga teng deb hisoblangan.

Agar tajribalar soni yetarlicha ko'p bo'lsa, u holda shu tajribalarda qaralayotgan A hodisaning ro'y berish chastotasi biror o'zgarmas $R\in[0,1]$ son atrofida turg'un ravishda tebransa, bu R sonni A hodisaning ro'y berish ehtimolligi deb qabul qilamiz. Bu usulda aniqlangan ehtimollik hodisaning statistik ehtimolligi deyiladi. Ehtimollikning bu ta'rifi juda bo'sh, sababi biror hodisaning ro'y berish chastotalari ketma-ketligi turli tajribalar o'tkazilganda turlicha bo'ladi. Bundan tashqari, biz chastotalar ketma-ketligini emas, balki uning chekli elementlarini olamiz, chunki hamma ketma-ketlikni olib bo'lmaydi.

7.3-§. Ehtimollikning xossalari

Ehtimollikning quyidagi to'qqiz xossasini keltirish mumkin:

1. Agar A hodisa B hodisani ergashtirsa, ya'ni $A \subset B$ bo'lsa, u holda $P(A) \leq P(B)$ bo'ladi.

I s b o t i. Hamma hollarning umumiy soni n dan A va B hodisalarga, mos ravishda t_1 tasi va t_2 tasi qulaylik tug'dirsin. Binobarin, $P(A)=\frac{m_1}{n}$; $P(B)=\frac{m_2}{n}$. Shartga ko'ra A hodisa B hodisani ergashtiradi, shuning uchun A hodisaga qulaylik tug'diruvchi t_2 ta hol B hodisaga qulaylik tug'diruvchi m_2 ta holning tarkibiga kiradi, ya'ni $m_1 \leq m_2$ yoki $P(A) \leq P(B)$.

2. Agar A va B hodisalar teng kuchli bo'lsa, u holda ularning ehtimolliklari teng: $P(A)=P(B)$.

I s b o t i. Agar A va B hodisalar teng kuchli bo'lsa, u holda A hodisa B hodisani ergashtiradi. B hodisa esa A hodisani ergashtiradi. Shuning uchun birinchi xossaga asosan $P(A) \leq P(B)$ va $P(B) \leq P(A)$ deb yozish mumkin. Bundan $P(A)=P(B)$ bo'ladi.

3. Har qanday A hodisaning ehtimolligi manfiy bo'la olmaydi, ya'ni $P(A) \geq 0$.

I s b o t i. Har doim $m \geq 0$ va $n \leq 0$ bo'lganligi uchun $P(A)=\frac{m}{n}$ formulaga ko'ra $P(A)=\frac{m}{n} \geq 0$.

4. Muqarrar hodisaning ehtimolligi birga teng.

5. B mumkin bo'lmagan hodisaning ehtimolligi nolga teng, ya'ni $P(B)=0$.

6. $P=(\overline{A})=1-P(A)$.

Bu xossa $A \cup \overline{A}=\Omega$ va $A \cap \overline{A}=B$ dan kelib chiqadi.

7. $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$, chunki, $A \cup B=A \cup (A/(A \cap B))$, $B=AB+(B/AB)$.

8. $P(A \cup B) \leq P(A)+P(B)$.

9. $0 \leq P(A) \leq 1$.

Shunday qilib, istalgan A tasodifiy hodisaning ehtimolligi musbat to'g'ri kasr bilan ifodalanadi. Bu kasr qanchalik birga yaqin bo'lsa, A hodisaning ro'y berishiga ishonch shunchalik ko'p bo'ladi. Agar bu kasr nolga yaqin bo'lsa, u holda bitta sinashda hodisani amalda mumkin bo'lmaydi deb hisoblaydilar. Yuqoridagi xossalar *ehtimollikning mumtoz* (klassik) ta'rifiga asosan ifodalanadi.

Ehtimollikning statistik ta'rifi uchun ham shu xossalarning o'rinli ekanligini isbotlash mumkin.

Mashq uchun masalalar

1. Qutichada rangidan boshqa hech farqi bo'lmagan 10 ta qalam *bor, ulardan 7 tasi qora, 3 tasi qizil* va *yaxshilab aralashtirilgan.* Tavakkaliga olingan qalamning qizil bo'lish ehtimolligini toping.

Javob: $P = 0{,}3$.

2. Guruhda 17 ta talaba bo'lib, ulardan 8 tasi qizlar. Shu talabalar orasida 7 bilet o'ynalmoqda. Biletga ega bo'lganlar orasida 4 ta qiz bo'lishi ehtimolligini toping.

Javob: $P \approx 0{,}302$.

3. Telefonda raqam tera turib, abonent bitta raqamni esidan chiqarib qo'ydi va uni tavakkaliga terdi. Qerakli raqam terilganlik ehtimolligini toping.

Javob: $P = \frac{1}{10}$.

7.4-§. Shartli ehtimolliklar. Hodisalarning bog'liqmasligi

Biz hodisaning ehtimolligini aniqlashning asosida S kompleks shart-sharoit yotishini bilamiz.

Agar $P(A)$ ehtimollikni hisoblashda S kompleks shart-sharoitdan boshqa hech qanday shart-sharoit talab qilinmasa, bunday ehtimollik *shartsiz ehtimollik* deyiladi.

Ba'zan A *hodisaning ehtimolligini biror B hodisa ro'y bergandan* so'ng hisoblashga to'g'ri keladi. Bunday ehtimollik shartli ehtimollik deyiladi va $P(A/B)$ yoki $P_B(A)$ kabi belgilanadi.

Misol. Qutida 8 ta oq va 7 ta qora shar bor. Tavakkaliga olingan sharning oq bo'lishini A hodisa deb, qora bo'lishini B hodisa deb olamiz. *Qutidan ikki marta tavakkaliga bittadan shar olamiz,* ularni qaytarib solmasdan sinashdan oldin A hodisaning ro'y berish ehtimolligi $P(A)=\frac{8}{}$, B hodisaning ro'y berish ehtimolligi $P(B)=\frac{7}{}$ bo'ladi. Faraz qilaylik, agar birinchi olgan sharimiz oq bo'lgan bo'lsa *(A* hodisa), u holda ikkinchi olgan sharimizning qora bo'lish *(B* hodisa) ehtimolligi $P(B)=\frac{7}{}=\frac{1}{}$ *bo'ladi.*

Shunday qilib, shartli ehtimollik ta'rifi umumiy holda quyidagicha ifodalanadi:

1-ta'rif. (Ω, F, P) ehtimollik fazosi berilgan bo'lib, $A, B \in £$ va $P(B) > 0$ bo'lsin. U holda A hodisaning B shartdagi ehtimolligi deb, quyidagi formula bilan aniqlanadigan ehtimollikka aytiladi:

$$P(A/B)= \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Shartli ehtimollikning xossalari:

1. $P(A/B) \geq 0$;
2. $P(\Omega/B) = 1$;
3. $A_1, A_2 \in \Omega$, $A_1 \cap A_2 = B$ *bo'lsa*, u holda $P(A_1+A_2/B) =$
   $= P(A_1 / B) + P(A_2 / B)$ tenglik o'rinli bo'ladi;

4. Agar A va $\bar{A}$ hodisalar o'zaro qarama-qarshi hodisalar bo'lsa, u holda $P(A/B) = 1 — P(A/B)$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Shuningdek, agar $P(A) > 0$ bo'lsa, B hodisaning A shartdagi ehtimolligi.

$$P(B/A)= \frac{P(AB)}{P(A)}$$

formula yordamida topiladi. Shartli ehtimollikni topish formulasidan hodisalarning ko'paytmasi ehtimolligini topish uchun quyidagi formulani keltirib chiqarish mumkin:

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A / B) = P(A) \cdot P(B / A). \qquad (7.1)$$

2- ta'rif. Agar $P(A/B) = P(A)$ tenglik bajarilsa A hodisa B hodisaga *bog'liq emas* deyiladi. Shuningdek, A hodisa B hodisaga bog'liq bo'lmasa va B hodisa ham A ga bog'liq bo'lmasa $P(B / A) = P(B)$ tenglik bajariladi.

3- ta'rif. $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalar berilgan bo'lsin. $1 \leq \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leq n$ sonlarni olamiz. Agar

$$P\left(\prod_{k=1}^{s} A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^{s} P(A_{i_k}) \ (1 \leq s \leq n)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $A_1, ..., A_n$ hodisalar birgalikda bog'liq emas deyiladi.

Shuningdek, hodisalarning juft-jufti bilan bog'liqmasligidan birgalikda bog'liqmasligi kelib chiqmaydi.

8-misol. Sexda 7 erkak ishchi va 6 ayol ishchi ishlaydi. Tabel raqamlari bo'yicha tavakkaliga 3 kishi ajratildi. Barcha ajratib olingan kishilar erkaklar bo'lish ehtimolligini toping.

Y e ch i sh: Hodisalarni quyidagicha belgilaylik: A_1 — birinchi ajratilgan erkak kishi, A_2 — ikkinchi ajratilgan erkak kishi, A_3 — uchinchi ajratilgan erkak kishi. Uchala ajratilgan erkak kishi hodisasini esa A deb belgilaylik. U holda $P(A_1) = \frac{7}{10}$; $P(A_2/A_1) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$; $P(A_3/A_1A_2) = \frac{5}{8}$ tengliklar o'rinli bo'ladi. Agar $A = A_1A_2A_3$ ekanini e'tiborga olsak, izlanayotgan hodisaning ehtimolligi quyidagicha bo'ladi:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1A_2) = \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} = \frac{7}{24}.$$

7.5-§. To'liq ehtimollik formulasi. Beyes formulasi

Faraz qilaylik, A hodisa to'liq guruh tashkil etuvchi birgalikda bo'lmagan $B_1, B_2, ..., B_n$ hodisalardan bittasi va faqat bittasi ro'y berganlik shartidagina ro'y bersin, boshqacha qilib aytganda,

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} AB_i,$$

bu yerda $(AV_i) \cap (AV_j) = \varnothing$, $i \neq j$. U holda qo'shish teoremasiga asosan,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(AB_i).$$

Agar $P(AB_i) = P(A/B_i) \cdot P(B_i)$ ekanligini e'tiborga olsak, u holda

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A/B_i). \qquad (7.2)$$

Bu tenglik to'liq ehtimollik formulasi deyiladi.

9-misol. Ikki tikuvchi erkaklar shimini tikmoqda. Birinchi tikuvchi tayyorlagan shimlarining 1-navli bo'lish ehtimolligi 0,8 ga, ikkinchisi tayyorlagan shimlarining 1-navli bo'lish ehtimolligi 0,9 ga teng.

Tavakkaliga (tavakkaliga tanlagan tikuvchidan) olingan shimning 1-navli bo'lish ehtimolligini toping.

Y e ch i sh. Tavakkaliga olingan shim uchun quyidagi gipotezalar o'rinli bo'ladi:

H_1 gipoteza — shimning birinchi tikuvchi tayyorlagan bo'lish ehtimolligi;

H_2 gipoteza — shimning ikkinchi tikuvchi tayyorlagan bo'lish ehtimolligi.

Ularning ehtimolliklari quyidagicha bo'ladi:

$$P(H_1)=\frac{1}{2};\ P(H_2)=\frac{1}{2}.$$

Agar olingan shimning 1-navli bo'lishini A hodisa deb olsak, u holda bu hodisalarning turli gipotezalardagi ehtimolligi, masalaning shartiga ko'ra, $P(A/H_1)=0{,}8$, $P(A/H_2)=0{,}9$ bo'ladi. Yuqorida topilganlarni to'liq ehtimollik formulasiga qo'yib, izlanayotgan hodisa uchun quyidagini topamiz:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 0{,}8+\frac{1}{2}\cdot 0{,}9=0{,}85.$$

Endi to'liq ehtimollik formulasidan foydalanib Beyes formulasini keltirib chiqaramiz B_i, va A hodisalarning ko'paytmasi uchun ushbu

$$P(B_i/A)=P(A)\cdot P(B_i/A)=P(B_i)\cdot P(A/B_i)$$

formulaning o'rinliligidan

$$P(B_i/A)=\frac{P(B_i)\cdot P(A/B_i)}{P(A)}$$

munosabatga ega bo'lamiz. To'liq ehtimollik formulasini qo'llasak, Beyes formulasini hosil qilamiz.

$$P(B_i/A)=\frac{P(B_i)\cdot P(A/B_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}(B_i)\cdot P(A/B_i)}. \qquad (7.3)$$

Beyes formulasi A hodisa ro'y berganligi ma'lum bo'lgandan so'ng gipotezalar ehtimolliklarini qayta baholashga imkon beradi

Mashq uchun masalalar

1. Qutida 10 ta ipli g'altak bo'lib, ulardan 4 tasi bo'yalgan. Yig'uvchi tavakkaliga 3 ta ipli g'altak oldi. Olingan ipning hech bo'lmaganda bittasi bo'yalgan bo'lish ehtimolligini toping.

Javob: $P = \frac{5}{6}$.

2. Texnik nazorat bo'limi buyumlarning standartga muvofiqligini tekshiradi. Buyumning standartga muvofiq bo'lish ehtimolligi 0,9 ga teng. Tekshirilgan ikkita buyumdan faqat bittasi standartga muvofiq bo'lish ehtimolligini toping.

Javob: $P = 0{,}18$.

3. *Hisoblash markazida 6 ta klavishli avtomat* va 4 ta yarimavtomat bor. Biror hisoblash ishini bajarish davomida avtomatning ishdan chiqmaslik ehtimolligi 0,95 ga teng; yarim avtomat uchun bu ehtimollik 0,8 ga teng. Talaba hisoblash ishini tavakkaliga tanlangan mashinada bajaradi. Hisoblash tugaguncha mashinaning ishdan chiqmaslik ehtimolligini toping.

Javob: $P = 0{,}89$.

7.6-§. Bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma-ketligi. Bernulli formulasi

Biror hodisani kuzatish lozim bo'lsa, buning uchun odatda bir nechalab tajribalar o'tkaziladi. Bu tajribalar bir-biriga bog'liq bo'lishi ham, bog'liq bo'lmasligi ham mumkin. Masalan, ikki mergan *nishonga bittadan* o'q uzdi, deylik. Bunda birinchi merganning o'qi nishonga tegishi yoki tegmasligi bilan ikkinchi merganning o'qi nishonga tegishi yoki tegmasligi o'zaro bog'liq bo'lmagan hodisalardir.

Faraz qilaylik, o'zaro bog'liq bo'lmagan n ta tajriba o'tkazilayotgan bo'lib, har bir tajribada kuzatilayotgan A hodisaning ro'y berish ehtimolligi P va ro'y bermaslik ehtimolligi $q = 1 - r$ bo'lsin.

Kuzatilayotgan A hodisaning n marta sinashda m marta ro'y *berish ehtimolligini* va *demak*, $n-m$ marta ro'y bermaslik ehtimolligi $P_n(m)$ ni hisoblashni o'z oldimizga maqsad qilib qo'yaylik. Bunda shuni aytib o'tish joizki, A hodisaning m marta aniq bir ketma-ketlikda ro'y berishi talab qilinmaydi. Masalan, agar A hodisani to'rt marta sinashda uch marta ro'y berishi to'g'risida gap ketsa, u holda quyidagi murakkab hodisalar bo'lishi mumkin:

$$A\bar{A}AA, AA\bar{A}A, AAA\bar{A} \text{ va } \bar{A}AAA.$$

n marta sinash o'tkazilganda kuzatilayotgan A hodisaning m marta ro'y berib, $n - m$ marta ro'y bermaslik imkoniyatlarining soni C_n^m ga teng bo'lishini ko'rish mumkin.

Agar n ta ketma-ket o'tkazilgan sinashlarni bitta murakkab sinash desak, bu murakkab sinash natijasida ro'y beradigan hodisaning ko'rinishi $A_m, A_2,...,A_n$ bo'lib, bunda $A_i(i=\overline{1,n})$ $\bar{A}$ ga yoki A ga teng bo'ladi. Bunday hodisalarning soni 2^n ga teng bo'ladi. Haqiqatan ham, $A_1, A_2,..., A_n$ hodisalar ichida:

1) $A_i=A$ $(i=\overline{1,n})$ shartni qanoatlantiruvchi hodisa bitta;

2) bittasi $\bar{A}$, qolganlari A dan iborat bo'lgan hodisalar n ta, chunki $\bar{A}$ ni p ta o'ringa bir martadan qo'yish bilan n ta turli hodisani hosil qilish mumkin.

... va hokazo ... $(n-m+1)n-m$ tasi $\bar{A}$, qolganlari A dan iborat bo'lgan hodisalar soni n ta o'ringa $n - m$ ta $\bar{A}$ larni joylashtirishlar soni $C_n^{n-m} = C_n^m$ ga teng va hokazo.

Demak, biz ko'rayotgan murakkab sinashlar natijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan barcha elementlar hodisalar soni $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$ ekan.

Agar p ta sinashda kuzatilayotgan A hodisaning t marta ro'y berish hodisasini E deb belgilab olsak,

$$E=(A\cdot A\cdot...\cdot A\cdot\bar{A}\cdot\bar{A}\cdot\bar{A})\cup(A\cdot\bar{A}\cdot A\cdot...\cdot A\cdot\bar{A}\cdot A\cdot...\cdot\bar{A})\cup...\cup$$
$$(\bar{A}\cdot...\cdot\bar{A}\cdot\bar{A}\cdot A\cdot...\cdot A) \qquad (a)$$

bo'lib, u C_n^m ta qo'shiluvchidan iborat bo'ladi. Sinashlar ketma-ketligi bir-biriga bog'liq bo'lmaganligi sababli $P(AA...A\bar{A}\bar{A}...\bar{A}) = P(A)\cdot...\cdot P(A)\cdot P(\bar{A})\cdot...\cdot P(\bar{A}) = = P^m q^{n-m}$ bo'ladi. Bu yerda $AA...A\bar{A}...\bar{A}$ m ta sinashda A ning, $n - m$ ta sinashda esa $\bar{A}$ ning ro'y berganligini ko'rsatadi.

Shuningdek, (a) tenglikning o'ng tomonidagi C_n^m ta hodisaning ixtiyoriy ikkitasi bir vaqtda ro'y bermasligidan, $P(E) = C_n^m P^m q^{n-m}$ ni olish mumkin. Agar A hodisaning n ta sinashda m marta ro'y berish ehtimolligini $P_n(m)$ deb belgilasak,

$$P_n(m)=C_n^m P^m q^{n-m} \qquad (7.4)$$

hosil bo'ladi. (7.4) Bernulli formulasi deyiladi.

$P_n(m)$ ehtimolliklar uchun $\sum_{m=0}^{n} P_n(0) = 1$ o'rinli bo'lishini

ko'rish mumkin. Haqiqatan ham $\sum_{m=0}^{n} C_n^m P^m q^{n-m} = (q+p)n = =1$ (7.4) ifoda $p(x+q)^n$ binom yoyilmasining x^n qatnashgan hadining koeffitsienti bo'lgani sababli $P_n(m)$ larni ehtimollikning binomial taqsimot qonuni deyiladi.

n da $P_n(m)$ ehtimollik m ning funksiyasi ekanligi ko'rinib turibdi. Bu funksiyani tekshirib ko'raylik:

$$\frac{P_n(m+1)}{P_n(m)} = \frac{n-m}{m+1} = \frac{P}{q} \qquad (b)$$

1) agar $(n - m)p > (m + 1)d$, ya'ni $np - q > m$ bo'lsa, (b) tenglikdan $P_n(m+1) > P_n(m)$ bo'ladi.

2) agar $np - d = m$ bo'lsa, (b) tenglikdan $P_n(m+1) = = P_n(m)$ kelib chiqadi.

3) agar $np - q < m$ bo'lsa, (b) tenglikdan $P_n(m+1) < < P_n(m)$ kelib chiqadi.

Bu tekshirishlardan ko'rinadiki, $P_n(m)$ ehtimollik m o'sishi bilan oldin o'sib borib, eng katta qiymatga erishib, m ning keyingi o'sishlarida kamayuvchi funksiya bo'lar ekan. Shuningdek, agar $np - q$ butun son bo'lsa, $P_n(m)$ ehtimollik m ning ikkita $m_0 = np - q$ va $m_0 = np + 1$ qiymatida eng katta qiymatga erishishini ko'ramiz. Agar $np - q$ butun son bo'lmasa, $P_n(m)$ ehtimollik o'zining eng katta qiymatiga m_0 dan katta bo'lgan eng kichik butun son qiymatida erishadi.

Agar kuzatilayotgan hodisaning eng katta ehtimoli yuz berish sonini δ deb olsak, $np - q$ butun son bo'lmaganda

$$np - q < \delta < np + p \qquad (7.5)$$

tengsizliklar hosil bo'ladi. Bu tengsizliklar n marta sinashda A hodisaning eng katta ehtimoli yuz berish soni yotadigan chegarani ko'rsatadi.

10-misol. *Zayomning o'ynash muddatida bitta obligatsiyaning* yutish ehtimolligi 0,25 ga teng. 8 ta obligatsiya mavjud bo'lsa, shulardan ikkitasining yutish ehtimolligi nechaga teng?

Y e ch i sh. Masala shartiga ko'ra $n=8$, $m=2$, $p=0,25$, $q=0,75$. Bernulli formulasiga ko'ra hisoblaymiz.

$$P_8(2)=C_8^2p^2q^6=\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}(0,25)^2\cdot(0,75)^6=28\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{729}{4096}\approx 0,3115.$$

Demak, 8 ta obligatsiyadan ikkitasining yutish ehtimolligi $\approx 0,3115$ ga teng.

7.7-§. Muavr — Laplasning lokal teoremasi

Agar n va m katta sonlar bo'lsa, u holda $P_n(m)$ ehtimollikni Bernulli formulasidan foydalanib hisoblash ma'lum qiyinchilikka olib keladi, chunki bunda katta sonlar ustida amallar bajarish, talab etiladi. Bundan, bizni qiziqtirayotgan ehtimollikni Bernulli formulasini o'ylamasdan ham hisoblash mumkin degan savol tug'ilishi tabiiy.

Bu mumkin ekan. Laplasning lokal teoremasi sinashlar soni yetarlicha katta bo'lganda hodisaning n ta tajribada rosa m marta ro'y berish ehtimolligini taqribiy hisoblash uchun asimptotik formula beradi.

Shuni aytib o'tish kerakki, xususiy holda, $P=\frac{1}{2}$ uchun asimptotik formulani 1730 yilda Muavr isbot qilgan edi. 1783 yilda esa Muavr formulasini Laplas 0 va 1 dan farqli ixtiyoriy $P\in[0,1]$ uchun umumlashtirgan. Shu sababli bu yerda so'z borayotgan teorema ba'zan Muavr — Laplas teoremasi deb ataladi. Biz faqat Laplasning lokal teoremasining o'zini va uning qo'llanilishini ko'rsatamiz xolos.

Teorema. *Agar har bir sinashda A hodisaning ro'y berish ehtimolligi P(0<p<1) o'zgarmas bo'lib, nol va birdan farqli bo'lsa, u holda n ta, sinashda A hodisaning rosa m marta ro'y berish ehtimolligi $P_n(m)$ taqriban (p qancha katta bo'lsa, shuncha aniq)*

$$Y=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2p}}\cdot e^{\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x)$$

funksiyaning $X=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ *dagi qiymatiga teng.*

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ funksiyaning x argumentining musbat qiymatlariga mos qiymatlaridan tuzilgan jadvallar mavjud. $\varphi(-x)=\varphi(x)$ bo'lganligi sababli bu jadvallardan argumentning qiymatlari manfiy bo'lganda ham foydalaniladi. Shunday qilib, n ta erkli sinashda A hodisaning rosa m marta ro'y berish ehtimolligi taqriban quyidagiga teng:

$$P(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \tag{7.6}$$

bu yerda $X = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$

11-misol. Korxonada ishlab chiqarilgan buyumning yaroqsiz bo'lish ehtimolligi 0,2 ga teng bo'lsa, 400 ta buyumdan iborat partiyadagi yaroqsiz buyumlar soni rosa 80 bo'lish ehtimolligini toping.

Y e ch i sh. Shartga ko'ra n=400, m=80, p=0,2, q=0,8.

Laplasning asimptotik formulasidan foydalanamiz:

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \cdot \varphi(x) = \frac{1}{8} \cdot \varphi(x)$$

x ning qiymatini hisoblaymiz:

$$x = \frac{80 - 400 \cdot 0{,}2}{8} = 0.$$

Jadvaldan $\varphi(0)$ =0,3989 ekanligini topamiz.

Izlanayotgan ehtimollik:~

$$P_{400}(80) = \frac{1}{8} \cdot 0{,}3989 = 004986$$

7.8-§. Laplasning integral teoremasi

Faraz qilaylik, n ta tajriba o'tkazilayotgan bo'lib, ularning har birida A hodisaning ro'y berish ehtimolligi o'zgarmas va p ga ($0<p<1$) teng bo'lsin. n ta tajribada A hodisaning kamida m_1 marta va ko'pi bilan m_2 marta ro'y berish ehtimolligi $P_n(m_1, m_2)$ ni qanday hisoblash mumkin? Bu savolga Laplasning integral teoremasi javob beradi. Uni quyida isbotsiz keltiramiz:

Teorema. *Agar har bir sinashda A hodisaning ro'y berish ehtimolligi P o'zgarmas bo'lib, nol va birdan farqli bo'lsa, u holda n ta sinashda A hodisaning m_1 dan m_2 martagacha ro'y berish ehtimolligi $P_n(m_1, m_2)$ taqriban quyidagi aniq, integralga teng:*

$$P_n(m_1, m_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \tag{7.7}$$

bu yerda $a = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$ va $b = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$

Laplasning integral teoremasini qo'llash bilan yechiladigan masalalarda

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

ifodani hisoblashga to'g'ri keladi. Bu integral uchun maxsus jadval bor. Bu jadvalda $\Phi(x)$ funksiyaning musbat x larga mos qiymatlari keltirilgan. $\Phi(x)$ funksiyaning toqligidan foydalanib, jadvaldan $x<$ <0 bo'lgan holda ham foydalaniladi. Jadvalda $\Phi(x)$ funksiyaning $x\in[0,5]$ segmentdagi qiymatlari berilgan, agar $x>5$ bo'lsa, u holda $\Phi(x)=0,5$ deb olinadi. Jadvaldan foydalanish oson bo'lishi uchun quyidagi formuladan foydalanish qulaydir:

$$P_n(m_1, m_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{7.8}$$

12-misol. Ixtiyoriy olingan pillaning yaroqsiz chiqish ehtimolligi 0,2 ga teng. Tasodifan olingan 400 ta pilladan 70 tadan 100 tagachasi yaroqsiz bo'lish ehtimolligini toping.

Y e ch i sh. Shartga ko'ra r=0,2; q=0,8; n=400; m_1=70; m_2=100.

Laplasning integral formulasidan foydalanamiz:

$$P_{400}(70,100) \approx \Phi(b) - \Phi(a)$$

Integralning yuqori va quyi chegaralarini hisoblaymiz:

$$a=\frac{70-400\cdot 0{,}2}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}=-1{,}25,$$

$$b=\frac{100-400\cdot 0{,}2}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 08}}=2{,}5$$

Shunday qilib, quyidagini hosil qilamiz:

$$R_{400}(70,100)=\Phi(2{,}5)-\Phi(1{,}25)=\Phi(2{,}5)+\Phi(1{,}25).$$

Jadvaldan quyidagini topamiz:

$$\Phi(2{,}5)=0{,}4938;\ \Phi(1{,}25)=0{,}3944.$$

Izlanayotgan ehtimollik

$$R_{400}(70,100)=0{,}4938+0{,}3944=0{,}8882.$$

7.9-§. Puasson teoremasi

Laplasning lokal teoremasi p va q ehtimollik 0,5 atrofida bo'lganda $P_p(t)$ ni hisoblash uchun yaxshi natijalar beradi, Ammo, r va d lar 1 ga yoki 0 ga yaqin bo'lganda bu formula ma'lum xatoliklarga olib keladi. Shu sababli, p va q lar 1 ga yoki 0 ga yaqin bo'lganda $P_n(t)$ uchun lokal teoremadan boshqa asimptotik formula topish zarurati tug'iladi. Bu masalani Puasson teoremasi hal qiladi.

Teorema. *Agar $p\to\infty$ da $P_p\to 0$ munosabat bajarilsa, u holda*

$$P_n(m)-\frac{(nP_n)^m}{m!}e^{-nP_n}\to 0$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Isboti. $a=np$ deb belgilaymiz va $P_p(t)=C_n^m p^m q^{n-m}$ formuladan $P=\frac{a}{n}$ va $q=1-\frac{a}{n}$ ekanligini e'tiborga olib, quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$P_n(m)=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{m!}\cdot\left(\frac{a}{n}\right)^m\cdot\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-m}=$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{m!}\frac{a^m}{n}\left(1-\frac{a^n}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{a}{n}\right)^m=$$

$$= \frac{a^m}{m!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-m+1)}{n} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{a}{n}\right)^{-m} =$$

$$= \frac{a^m}{m!} \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) .. \left(1-\frac{m-1}{n}\right)\left(1-\frac{a}{n}\right)^n \left(1-\frac{a}{n}\right)^{-m}.$$

Bu tenglikda m sonni chekli deb hisoblab, $n \to \infty$ da limitga o'tamiz:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) .. \left(1-\frac{m-1}{n}\right)\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-m} = 1$$

va $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^n = e^{-a}$ larni hisobga olib, uzil-kesil quyidagi formulani hosil qilamiz:

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a} \text{ yoki } P_n(m) \approx \frac{a^m}{m!} e^{-a}. \qquad (7.9)$$

Bu formula Puasson taqsimoti qonunini ifodalaydi. A va m ma'lum bo'lganda $P_n(m)$ ni topish uchun maxsus jadvallar mavjud.

13-misol. Yigiruvchi 1000 urchuqda ishlaydi. Bir minut mobaynida bitta urchuqda ipning uzilish ehtimolligi 0,004 ga teng. Bir minut mobaynida beshta urchuqda ipning uzilish extimolligi topilsin.

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra n=1000; p=0,004; m=5. Ko'rinib turibdiki, n deyarli katta, r esa juda kichik miqdor. Shuning uchun $P(m) \approx \frac{a^m}{m!} e^{-a}$ Puasson formulasini qo'llaymiz:

$$a=np;\ a=1000.0{,}002=4$$

Ehtimollik esa

$$P_{1000}(m) \approx \frac{4^5}{5!} \cdot e^{-4} = 0{,}1563$$

Mashq uchun masalalar

1. Paxta urug'ining unib chiqishi 70% ni tashkil etadi. 10 ta ekilgan paxta urug'idan: a) 8 tasining, b) kamida 8 tasining unib chiqish ehtimolligini toping.

Javob: a) 0,2334; b)0,3827.

2. Paxtaning 70 % ni uzun tolalar tashkil etadi. Tavakkaliga uzun tola bo'lish ehtimolligini toping.

Javob: 0,1727.

3. Yo'lovchining poyezdga kechikish ehtimolligi 0,2 ga teng bo'lsa, 855 ta yo'lovchidan poyezdga kechikkanlarning eng katta ehtimol soni topilsin.

Javob: 17.

4. Fakultet talabalarining imtihon sessiyasidan «4 va 5» bilan o'tish ehtimolligi 0,9 ga teng. Tasodifiy olingan 400 talabadan 34 tadan 55 tagacha hech bo'lmasa bitta fandan «4» dan past baho olish ehtimolligini toping.

Javob: 0,8351.

5. Zavodda ishlab chiqarilgan mahsulotning sifatini kuzatish natijasida barcha mahsulotning o'rtacha 0,4 brak bo'lishi aniqlangan. 1000 ta mahsulotdan iborat bo'lgan partiyada beshtadan ko'p bo'lmagan brak mahsulot bo'lishi ehtimolligi topilsin.

Javob: Ya=0,7852.

7.10-§. Tasodifiy miqdorlar va taqsimot funksiyalari

Biz ba'zi bir miqdorlarning u yoki bu tasodifiy ta'sir natijasida turli qiymatlarni qabul qilishini ko'ramiz. Masalan:

1) 1- yanvarda Toshkentda tug'ilgan qiz bolalar soni;

2) g'o'za tupidagi gullagan ko'saklar soni; 3) paxta tolasining uzunligi;

4) har yilgi quyoshli kunlar soni — bular bari turlicha bo'ladi, ya'ni tasodifiy xarakterga ega.

Tasodifiy miqdor ta'rifini berishdan oldin o'lchov-li funksiya tushunchasini kiritamiz. Bizga $<R,G>$ o'lchovli fazolar va $\xi:\Omega\to R$ funksiya berilgan bo'lib, bu funksiya uchun $A\in G$ ekanidan $\xi^{-1}(A)=\{/W/\gamma(W)\in A\}\in F$ ekani kelib chiqsa, bunday funksiya *o'lchovli funksiya* deyiladi.

Agar (Ω, J, r) ixtiyoriy ehtimollik fazosi bo'lsa, har qanday $\xi:(\Omega,F)\to(R,G)$ o'lchovli funksiya *tasodifiy miqdor* deyiladi.

14-misol. Tanga tashlaganimizda 0 ikkita elementar hodisa — gerb va raqam tushishi sodir bo'ladi. Agar tanganing gerbli tomoni tushsa 1, raqamli tomoni tushsa 0 yozsak, u holda 1 yoki 0 ni kabul qiluvchi tasodifiy miqdorni hosil qilamiz.

Tasodifiy miqdorning ta'rifiga ko'ra ixtiyoriy $X\in R$ uchun

$$\{W \mid \xi(\varpi)<x\}=\{\xi<x\}^{-1}(-\infty,x)\in F,\text{sababi } (-\infty,x)\in G.$$

Bundan $J\xi(x)=\{\varpi:\gamma<x\}$ funksiyaning R da aniqlanganligi kelib chiqadi. Bu funksiya ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi deyiladi.

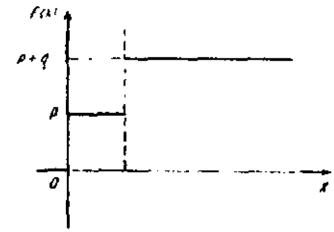
a) Agar ξ tasodifiy miqdor 0,1, 2,...,p qiymatlarni

$$p\{\xi = R\}G_n^R P^R - q^{n-R}, R = 0, n$$

ehtimollik bilan qabul qilsa, bu tasodifiy miqdor binomial qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi. Uning taqsimot funksiyasi quyidagicha bo'ladi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x < 0 \quad \text{bo'lsa,} \\ \sum\limits_{R<x} C_n^R P^R q^{n-R}, & \text{agar } 0 \leqslant x \leqslant n \quad \text{bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } n < x \quad \text{bo'lsa,} \end{cases}$$

Grafigi esa quyidagicha bo'ladi:



16-rasm

b) ξ tasodifiy miqdor X_1, $X_2,...,X_p$ qiymatlarni $P\{\gamma = x_R\} = \frac{1}{N}$, R=1, N ehtimolliklar bilan qabul qilsa, bu tasodifiy miqdor tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi. Uning taqsimot funksiyasi quyidagicha bo'ladi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ \text{agar } X \leqslant X_1 & \text{bo'lsa,} \\ \frac{R}{N}, \ \text{agar } X_R < X \leqslant X_{R+1} & \text{bo'lsa,} \\ 1, \ \text{agar } X_N < X. \end{cases}$$

v) Agar tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$\Phi(x) = C \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-a)^2}{2G^2}} du$$

ko'rinishda bo'lsa, bunday tasodifiy miqdor **normal** taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi (bu yerda $C>0$, $0>0$, $-\infty<a<\infty-$ o'zgarmas sonlar).

Taqsimot funksiyasi quyidagi xossalarga ega:

1. Barcha haqiqiy x lar uchun $0\le F_\xi(x)\le 1$;
2. $F_\xi(x)$ kamaymaydigan funksiya;
3. Taqsimot funksiyasi chapdan uzluksiz, ya'ni

$$F_\xi(x)=F_\xi(x-0)=\lim_{x_m\to+x} F(x_m);$$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1.$

5. Taqsimot funksiyasining sakrashga ega bo'lgan nuqtalar to'plami ko'pi bilan sanoqli bo'lishi mumkin.

1-ta'rif. Agar ξ tasodifiy miqdor chekli yoki sanoqli sondagi $\{X_R\}$ qiymatlarni $\{P_R\}$ $(\Sigma P_n=1)$ ehtimolliklar bilan qabul qilsa, uni diskret tasodifiy miqdor deyiladi. Masalan, 100 ta chaqaloq ichida o'g'il bolalar soni 0,1,2,. ..,100 qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo'lgan tasodifiy miqdorlar diskret tasodifiy miqdorlar bo'ladi. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$F(x)=\sum_{\{R:X_R<x\}} P_R$$

formula bilan aniqlanadi.

2-ta'rif. Agar ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, bu tasodifiy miqdorni **absolyut uzluksiz taqsimlangan** tasodifiy miqdor deyiladi. Bu yerdagi $f(x)$ funksiya ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi deyiladi. Ta'rifga ko'ra $F(x)=f(x)$ bo'ladi.

Zichlik funksiyasi quyidagi xossalarga ega:

Zichlik funksiyasi manfiy emas:

$$f(x)\ge 0.$$

Haqiqatan ham, $R(x)$ funksiya kamaymaydigan funksiya bo'lgani uchun, uning hosilasi hamma nuqtalarda doim musbat bo'ladi.

2. Agar $f(x)$ zichlik funksiyasi, Xo nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $P(x_0 \leq \xi < X_0 + dx$ ehtimollik zichlik funksiyasining X_0 nuqtadagi qiymatiga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor aniqligida ekvivalent bo'ladi:

$$P(x_0 \leq \xi < x_0 + dx) \approx f(x)dx.$$

4. Zichlik funksiyasidan]—∞, -4-∞[oraliq bo'yicha olingan integral 1 ga teng:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

7.11-§. Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari

1. Matematik kutilma

Yuqorida aytilganlardan taqsimot qonuni tasodifiy miqdorni to'liq xarakterlashini bilamiz. Lekin ko'pincha taqsimot qonuni noma'lum bo'lib, kam ma'lumotlar bilan cheklanishga to'g'ri keladi. Ba'zan hatto tasodifiy miqdorni yig'ma tasvirlaydigan sonlardan foydalanish qulayroq bo'ladi. Bunday sonlar tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalari deyiladi. Muhim sonli xarakteristkalar jumlasiga matematik kutilma ham taalluqlidir.

Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasini alohida-alohida ko'rib o'tamiz.

1-ta'rif. ξ tasodifiy miqdor $\{X_R\}$ qiymatlarni $\{R_R\}$ ehtimolliklar bilan qabul qilsin. U holda $\sum_{R=1}^{\infty} X_R P_R$ qator yig'indisi ξ tasodifiy miqdorning *matematik kutilmasi* deyiladi va

$$M(\gamma) = \sum_{R=1}^{\infty} x_R P_R \qquad (7.10)$$

kabi belgilanadi.

15-misol. Tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini bo'lgan holda uning matematik kutilmasini toping:

γ	3	5	2
P	0,1	0,6	0,3

Y e ch i sh. Izlanayotgan matematik kutilma, (7.10) formulaga asosan, $M(\xi)=3\cdot 0,1+5\cdot 0,6+2\cdot 0,3=3,9$ bo'ladi.

2-ta'rif. *Uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi* deb

$$M(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \qquad (7.11)$$

integralga (agar bu integral absolyut yaqinlashuvchi bo'lsa) aytiladi.

16-misol. *[a, b] oraliqda tekis taqsimlangan γ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.*

Y e ch i sh. Mazkur matematik kutilma quyidagicha topiladi:

$$M(\xi)=\int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{b+a}{2}$$

Matematik kutilma quyidagi xossalarga ega:

1. O'zgarmas sonning matematik kutilmasi shu sonning o'ziga teng.
2. $|M\xi|\le M|\xi|$ tengsizlik o'rinli.
3. Agar $M\xi$, $M\eta$ va $M(\xi+\eta)$ larning ixtiyoriy ikkitasi mavjud bo'lsa, u holda ushbu $M(\xi+\eta)=M(\xi)+M(\eta)$ tenglik o'rinli bo'ladi.
4. O'zgarmas sonni matematik kutilma ishorasidan tashqariga chiqarib yozish mumkin, ya'ni $M(s\xi)=sM(\xi)$, s=sonst.
5. Agar $\delta\le\xi\le\beta$ bo'lsa, $\delta\le M(\xi)\le\varepsilon$ bo'ladi.
6. Agar $\xi\ge 0$ va $M(\xi)=0$ bo'lsa, u holda $\xi=0$ tenglik 1 *ehtimollik bilan bajariladi.*
7. ξ va η tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liq bo'lmasin. Agar $M(\xi)$ va $M(\eta)$ mavjud bo'lsa, u holda $M(|\xi\eta)=M(\xi)\times M(\eta)$

2. Dispersiya

1-ta'rif. *Tasodifiy miqdorning dispersiyasi deb* $M[\xi-M(\gamma)^2$ ifodaga aytiladi va $D(\xi)$ kabi belgilanadi. Demak,

$$D(\xi)=M(\xi-M(\xi))^2. \qquad (7.12)$$

Agar ξ tasodifiy miqdor $\{x_n\}$ qiymatlarni $\{p_k\}$ ehtimolliklar bilan qabul qilsa, $\eta=[\xi-M(\xi)]^2$ tasodifiy miqdor $\{(x_n-M(\xi))^2\}$ qiymatlarni ham $\{p_k\}$ ehtimolliklar bilan qabul qiladi va bu tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi uchun

$$M(\eta) = D(\xi) = \sum_{R=1}^{\infty}[x_R - M(\xi)]^2 p_R \tag{7.13}$$

Shuningdek, ξ tasodifiy miqdorning dispersiyasini quyidagi formula bilan hisoblash qulaydir:

$$D(\xi)=M(\xi^2)-[M(\xi)]^2 \tag{7.14}$$

Endi uzluksiz tasodifiy mikqdor dispersiyasining ta'rifini beramiz. ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $f(x)$ bo'lsin.

2-ta'rif. *Uzluksiz tasodifiy miqdorning dispersiyasi* deb

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}[x - M(\xi)]^2 f(x)dx \tag{7.15}$$

integralning qiymatiga aytiladi. Agar mumkin bo'lgan qiymatlar [a,b] kesmaga tegishli bo'lsa, u holda uzluksiz tasodifiy miqdorning dispersiyasi deb

$$D(\xi) = \int_{a}^{b}[x - M(\xi)]^2 f(x)\cdot dx \tag{7.16}$$

integralning qiymatiga aytiladi.

16-misol. [a,b] oralikda tekis taqsimlangan ξ tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

Y e ch i sh. $M(\xi) = \dfrac{a+b}{2}$ ekanini hisobga olsak,

$$D(\xi) = \int_{a}^{b} x^2 \cdot \frac{dx}{b-a} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

3-ta'rif. Taqsimot funksiyasi $F(x)$ bo'lgan tasodifiy miqdorning dispersiyasi bunday aniqlanadi:

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}[x - M(\xi)]^2 dF(x) \tag{7.17}$$

Dispersiyani hisoblashda quyidagi formulalardan foydalanish qulaydir:

$$D(\xi) = \int_{a}^{b} x^2 f(x)dx - [M(\xi)]^2, \tag{7.18}$$

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(\xi)]^2. \qquad (7.19)$$

Dispersiya quyidagi x o s s a l a r g a ega:

1. O'zgarmas sonning dispersiyasi nolga teng:

$$D(C)=0.$$

2. O'zgarmas sonni kvadratga oshirib, dispersiya ishorasidan tashqariga chiqarish mumkin, ya'ni

$$D(C\xi)=C^2 D(\xi)$$

3. O'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar yig'indisining dispersiyasi bu tasodifiy miqdorlar dispersiyasining yig'indisiga teng, ya'ni

$$D(\xi+\eta)=D(\xi)+D(\eta)$$

17-misol. Agar X va Y tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liq bo'lmasa, $O(X — Y)= D(X) + D(Y)$ bo'ladi.

Y e ch i sh. 2 va 3-xossalarga asosan

$$D(X-Y)=D(X)+D(-Y)=D(X)+(-1)^2 DY=D(X)+D(Y).$$

Mashq uchun misollar

1. O'g'il va qiz bolalarning tug'ilish ehtimolliklarini teng deb faraz qilib, 5 bolali oilada o'g'il bolalar sonini ifodalovchi X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing.

2. γ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi quyidagicha:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{agar } X \le 0 \text{ bo'lsa,} \\ \dfrac{X}{4}, \text{ agar } 0 < X \le 4 \text{ bo'lsa,} \\ 1, \text{ agar } X > 4 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Bu tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.

3. Quyidagi integral funksiya bilan berilgan u tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini va dispersiyasini toping.

$$F(x) = \begin{cases} X \le 0 \text{ да } 0; \\ 0 < X \le 1 \text{ да } X; \\ X > 1 \text{ да } 1. \end{cases}$$

7.12-§. Katta sonlar qonuni

Ma'lumki, tasodifiy miqdor sinash yakunida mumkin bo'lgan qiymatlardan qaysi birini qabul qilishini avvaldan ishonch bilan aytib bo'lmaydi, chunki u hisobga olib bo'lmaydigan bir qancha tasodifiy sabablarga bog'liq, bo'lib, biz ularni hisobga ololmaymiz. Har bir tasodifiy miqdor haqida ana shu ma'noda juda kam ma'lumotga ega bo'lganimiz uchun yetarlicha katta sondagi tasodifiy miqdorlar yig'indisi to'g'risida ham biror narsa ayta olishimiz qiyindek ko'rinadi. Aslida esa bu unday emas. Muayyan nisbatan keng shartlar ostida yetarlicha katta sondagi tasodifiy miqdorlar yig'indisining tasodifiylik xarakteri deyarli yo'qolib va u qonuniyatga aylanib qolar ekan.

Amaliyot uchun juda ko'p tasodifiy sabablarning birgalikdagi ta'siri tasodifga deyarli bog'liq bo'lmaydigan natijaga olib keladigan shartlarni bilish juda katta ahamiyatga ega, chunki bu hol hodisalarning qanday rivojlanishini ko'ra bilishga imkon beradi. Bu shartlar umumiy nom bilan katta sonlar qonuni deb yuritiladigan teoremalarda ko'rsatiladi. Bular jumlasiga Chebishev va Bernulli teoremalari (boshqa teoremalar ham bor, lekin ular bu yerda qaralmaydi) mansub. Chebishev teoremasi katta sonlar qonunining eng umumiysi, Bernulli teoremasi esa eng soddasidir. Biz bu yerda teoremalarning o'zini isbotsiz va ularning qo'llanishini o'rganamiz.

1. Chebishev teoremasi

Agar ξ_1, $\xi_2,\ldots$, ξ_n erkli tasodifiy miqdorlar bo'lib, ularning dispersiyalari tekis chegaralangan (o'zgarmas S sondan katta emas) bo'lsa, u holda ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{M(\xi_1)+M(\xi_2)+\ldots+M(\xi_n)}{n}\right|\geq\varepsilon\right\}=0$$

Shunday qilib, **Chebishev teoremasi** bunday da'vo qiladi: *agar dispersiyalari chegaralangan tasodifiy miqdorlarning yetarlicha ko'p sondagisi qaralayotgan bo'lsa, u holda bu tasodifiy miqdorlarning o'rtacha arifmetik qiymati n o'sishi bilan bu tasodifiy miqdorlar o'rta qiymatlarining o'rta arifmetigiga istalgancha yaqin bo'ladi.*

Yuqoridagi biz ko'rgan Chebishev teoremasining mohiyati bunday: ayrim erkli tasodifiy miqdorlar o'z matematik kutilmasidan ancha farq qiladigan qiymatlar qabul qilsada, yetarlicha katta sondagi tasodifiy miqdorlarning arifmetik o'rtacha qiymati katta ehtimollik bilan tayin o'zgarmas songa, chunonchi

$$\frac{M(\xi_1)+M(\xi_2)+\ldots+M(\xi_n)}{n}$$

songa (yoki, xususiy holda *a* songa) yaqin qiymatlarni katta ehtimollik bilan qabul qiladi. Boshqacha so'z bilan aytganda, ayrim tasodifiy miqdorlar anchagina sochilgan bo'lishi mumkin, lekin ularning arifmetik o'rtacha qiymati kam tarqoq bo'ladi.

Shunday qilib, har bir tasodifiy miqdor mumkin bo'lgan qiymatlardan qaysinisini qabul qilishini avvaldan aytib bo'lmaydi, ammo ularning arifmetik o'rtacha qiymati qanday qiymat qabul qilishini oldindan ko'ra bilish mumkin. Chebishev teoremasi faqat diskret tasodifiy miqdorlar uchun emas, balki uzluksiz miqdorlar uchun ham o'rinlidir.

Chebishev teoremasining amaliyot uchun ahamiyati kattadir. Masalan, odatda biror fizik kattalikni o'lchash uchun bir nechta o'lchashlar o'tkaziladi va ularning arifmetik o'rtacha qiymati izlanayotgan o'lchash sifatida qabul qilinadi. Qanday shartlarda bunday o'lchash usulini to'g'ri deb hisoblash mumkin? Bu savolga Chebishev teoremasi (uning xususiy holi) javob beradi.

Statistikada qo'llaniladigan tanlama usul Chebishev teoremasiga asoslangan. Bu usulning mohiyati shundan iboratki, unda uncha katta bo'lmagan tasodifiy tanlamaga asoslanib barcha tekshirilayotgan ob'ektlar to'plami (bosh to'plam) to'g'risida mulohaza yuritiladi. Masalan, bir toy paxtaning sifati haqida har er-har eridan olingan paxta tolalaridan iborat tutamning sifatiga qarab xulosa chiqariladi. Tutamdagi paxta tolalarining soni toydagidan ancha kam bo'lsa ham, tutam yetarlicha ko'p sondagi yuzlab tolalardan iboratdir.

2. Bernulli teoremasi

Faraz qilaylik, o'zaro bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma-ketligi o'tkazilgan bo'lsin. har bir tajribada *A* hodisaning ro'y berish *ehtimolligi P ga teng bo'lsin. A hodisaning k-tajribada ro'y berish* sonini ξ_R desak, u holda ξ_1, $\xi_2 \ldots \xi_R \ldots$ o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi hosil bo'ladi. Bular uchun $M\xi_R=P$; $D\xi_R=Pq$. Bu tasodifiy miqdorlarning *n* tasining o'rtacha arifmetigi *A* hodisa ro'y berishlarining nisbiy chastotasi $\frac{S_n}{n}$ bo'ladi, bu yerda

$S_n=\xi_1+\xi_2+...+\xi_n$ chastota p ta o'zaro bog'liq bo'lmagan tajribada A hodisaning ro'y berishlar soni. Ma'lumki $MS_n=np$; $DS_n=npq$.

Teorema (Bernulli). *Ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n}-P\right|\geq\varepsilon\right)=0$$

Demak, tajribalar soni etarlicha katta bo'lsa, A hodisa ro'y berishining nisbiy chastotasi A hodisaning ro'y berish ehtimolligiga yaqin bo'ladi.

Bernulli teoremasidan shunday xulosa chiqarish mumkin: ayrim shartlar ostida qo'shiluvchilar soni etarlicha katta bo'lganda tasodifiy mikdorlar yig'indisi o'zining tasodifiylik xarakterini ma'lum ma'noda «yo'qotar» ekan. Bu esa ehtimolliklar nazariyasining asosiy masalalaridan biri hisoblanadi.

3. Yaqinlashish turlari

Biz tasodifiy miqdorlarni bitta (Ω,F,P) ehtimollik fazosida berilgan deb faraz qilamiz. O'lchovli funksiyalar nazariyasidan ma'lumki, o'lchovli funksiyalar ustida qo'shish, ayirish, ko'paytirish va (maxrajdagi funksiya noldan farqli bo'lsa) bo'lish amali bajarish natijasida hosil bo'ladigan funksiya yana o'lchovli, shu bilan birga o'lchovli funksiyalar ketma-ketligining limiti (agar mavjud bo'lsa) yana o'lchovli bo'ladi. Shunga o'xshash natajalar tasodifiy miqdorlar uchun ham o'rinli. Tasodifiy miqdorlar ketma-ketligining yaqinlashishi masalaning talabiga qarab turlicha bo'lishi mumkin.

1-ta'rif. Agar ixtiyoriy musbat $\varepsilon>0$ son uchun $n\to\infty$ da $p\{|\xi_n-\xi|\geq\varepsilon\to0$ bo'lsa, u holda $\xi_1, \xi_2,... \xi_n,...$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi P ehtimollik bo'yicha ξ tasodifiy miqdorga yaqinlashadi deymiz va $\xi_n\xrightarrow{P}\xi$ kabi belgilaymiz.

Aytaylik, g ixtiyoriy uzluksiz, chegaralangan funksiya bo'lsin. Agar $\xi_n\xrightarrow{P}\xi$ bo'lsa, u holda

$$Mg(\xi_n)\to Mg(\xi) \qquad (7.20)$$

Agar ξ_n va ξ larning taqsimot funksiyalarini mos ravishda $F_p(x)$ va $F(x)$ deb belgilasak, u holda (7.20) ni quyidagicha yozamiz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dFn(x)\to\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x). \qquad (7.21)$$

2-ta'rif. Agar $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun

$$P\left\{w\xi \lim_{n\to\infty} \xi_n(w) = \xi(w)\right\} = 1$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi ξ tasodifiy miqdorga 1 ehtimollik bilan yaqinlashadi deymiz, ya'ni yaqinlashish uchun lim $\xi_n(w) = \xi(w)$ munosabatni qanoatlantirmaydigan w nuqtalarning o'lchovi nolga teng bo'ladi.

Biz 1 ehtimollik bilan yaqinlashishni $\xi_n \xrightarrow{P(1)} \xi$ kabi belgilaymiz. 1 ehtimollik bo'yicha yaqinlashish

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{w: \sup_{m>n} (\xi_n - \xi > \varepsilon)\right\} = 0$$

ga teng kuchlidir.

3-ta'rif. Agar $n\to\infty$ da $M|\xi_n - \xi| \to 0$ shart bajarilsa, $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi ξ ga o'rtacha r-tartibda yaqinlashadi, deymiz. Bu yaqinlashishni $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ kabi belgilaymiz.

Xususan, $r=2$ da bu yaqinlashish o'rtacha kvadratik yaqinlashish deyiladi va $1 \cdot i \cdot m \cdot \xi_n = \xi$ kabi belgilanadi.

Bizga $\{\xi n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo'lib, $F_p(x) = P\{\xi n < x\}$ bo'lsin.

4-ta'rif. Agar $\{F_p(x)\}$ taqsimot funksiyalari ketma-ketligi $n\to\infty$ da $F(x)=P\{\xi<x\}$ ga $R(x)$ taqsimot funksiyasining har bir uzluksizlik nuqtasida yaqinlashsa, u holda $\{\xi n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi ξ ga taqsimot bo'yicha yaqinlashadi, deyiladi va $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$ kabi belgilanadi (bu yerda D inglizcha «disizi-bution» — taqsimot so'zining bosh harfidan olingan).

Aytaylik, $N=\{N\}$ to'plam $N=N(x)$ funksiyalardan iborat sinf bo'lib, bu to'plamdagi funksiyalar quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1) $N(x)$ kamaymaydigan funksiya;
2) $H(-\infty)=0$, $H(+\infty) \leq 1$;
3) $N(x)$ chapdan uzluksiz funksiya.

Biz $F = \{F\}$ deb H sinfning shunday qism to'plamini olamizki, bunda $F(+\infty)=1$, ya'ni $R(x)$ tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasining xuddi o'zi bo'ladi.

5-ta'rif. Agar ixtiyoriy uzluksiz va chegaralangan $h(x)$ funksiya uchun

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x)dH_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)dH(x)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, NEN_p funksiyalar ketma-ketligi $HЭH$ funksiyaga sust yaqinlashadi deyiladi va qisqacha $H_n \xrightarrow{W} H^*$ kabi belgilanadi (bu yerda W harfi inglizcha «Weak» — «sust» so'zining bosh harfidan olingan).

7.13-§. Markaziy limit teorema

Ko'p hollarda tasodifiy mikdorlar yig'indisining taqsimot qonunlarini aniqlashga to'g'ri keladi. Faraz qilaylik, o'zaro bog'liq bo'lmagan $\xi_1, \xi_2,..., \xi_n$ tasodifiy miqdorlarning yig'indisi $S= \xi_1+\xi_2 +..., \xi_n$ berilgan bo'lsin va har bir ξ_i ($i=1,n$) tasodifiy miqdor «0» yoki «1» qiymatini mos ravishda q va r ehtimollik bilan qabul qilsin. U holda S_n tasodifiy miqdor binominal qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor bo'lib, ularning matematik kutilmasi np, ga dispersiyasi esa npq ga teng bo'ladi. S_n tasodifiy miqdor 0,1, $2,...,n$ qiymatlarni qabul qila oladi va demak, n ortishi bilan S_n tasodifiy mikdorning qabul qiladigan qiymatlari istalgancha katta son bo'lishi mumkin, shuning uchun S_n tasodifiy miqdor o'rniga tasodifiy miqdorni ko'rish maqsadga muvofiqdir. Bu ifodada A_n, V_n lar p ga bog'liq

$$\eta_n = \frac{S_n - A_n}{B_n}$$

bo'lgan sonlar. Xususan, A_n va B_n larni $A_n=MS_n = np$, $B_n = DS_n = npq$ ko'rinishda tanlansa, u holda **Muavr — Laplasning integral teoremasini** quyidagicha bayon etish mumkin: *agar* $0 < p < 1$ *bo'lsa,* $n\to\infty$ *da ixtiyoriy* a, $b \in (-\infty, \infty)$ *da* munosabat o'rinli bo'ladi.

$$p\left\{a \le \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < b\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}} dz \qquad (7.22)$$

Tabiiy ravishda bunday savol tug'iladi: (7.22) munosabat ixtiyoriy tasodifiy miqdorlar uchun ham o'rinli bo'ladimi? (7.22) o'rinli bo'lishi uchun S_n dagi qo'shiluvchilarning taqsimot funksiyalariga qanday shartlar qo'yish kerak?

Bu masalani hal qilishda P. L. Chebishev va *uning shogirdlari* A. A. Markov, A. M. Lyapunovlarning xizmatlari kattadir. Ularning tadqiqotlari shuni ko'rsatadiki, qo'shiluvchi tasodifiy miqdorlarga juda ham umumiy shartlar qo'yish mumkin ekan. Bu shartlarning ma'nosi — ayrim olingan qo'shiluvchining umumiy yig'indiga sezilmaydigan *ta'sir ko'rsatishini ta'minlashdir.*

Ta'rif. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Agar shunday $\{A_n\}$, $\{B_n\}$, $B_n>0$ sonlar ketma-ketligi mavjud bo'lsaki, $n \to \infty$ da

$$P\left\{\frac{\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n-A_n}{B_n}<X\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{X} e^{-\frac{u}{2}^2} du$$

munosabat $X \in (-\infty, \infty)$ da *bajarilsa*, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun markaziy limit teoremasi o'rinli deyiladi. Bu holda

$$\frac{\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n-A_n}{B_n}$$

tasodifiy miqdor $n \to \infty$ da asimptotik normal taqsimlangan deyiladi.

Markaziy limit teoremasining ba'zi ko'rinishlarini keltiramiz.

1. Bir xil *taqsimlangan* bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun markaziy limit teorema

Matematik kutilmasi a va dispersiyasi G^2 bo'lgan, o'zaro bog'liq bo'lmagan, bir xil taqsimlangan $\{\xi n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Umumiylikka zarar keltirmasdan, $a=0$, $G^2=1$ deymiz. Quyidagi tasodifiy miqdorni kiritamiz va teoremani isbotsiz beramiz:

$$Sn = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n, \eta_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$$

Teorema. Yuqorida keltirilgan $\{\xi n\}$ *ketma-ketlik uchun* $n \to \infty$ *da*

$$P\{\eta_n<x\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

munosabat ixtiyoriy X $(X \in K)$ *da bajariladi.*

2. Bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun markaziy limit teorema

Bog'liq bo'lmagan $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun $M\xi_k=a_k$, $D\xi_k=G_k^2$ bo'lsin. Quyidagi belgilarni kiritamiz va teoremani isbotsiz beramiz:

$$A_n=\sum_{k=1}^{n} a_k,\ B_n^2=\sum_{k=1}^{n} G_k^2,\ S_n=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n,$$

$$\eta_n=\frac{S_n-A_n}{B_n},\ F_k(x)=P(\xi_k<x),$$

$$L_n(r)=\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x-a_k|>rB_n}(x-a_n)^2dF_k(x),$$

$$f_k(t)=Me^{it\xi_k},\ \varphi_n(t)=Me^{it\eta_n}$$

Teorema. *Ixtiyoriy $r>0$ uchun $n\to\infty$ da*

$$L_n(r)\to 0 \tag{7.23}$$

bo'lsa, $\{\xi_n\}$ uchun markaziy limit teorema o'rinli bo'ladi.

(7.23) shart Lindberg sharti deyiladi. Lindberg shartining bajarilishi ixtiyoriy R da $\frac{1}{B_n}=(\xi_k-a_k)$ qo'shiluvchilarning tekis ravishda kichikligini ta'minlaydi. Xaqiqatan ham,

$$P|\xi_R-a_R|>rR_n=\int_{|x-a_R|>rBn}dF_R(x)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{(rBn)^2}\int_{|x-a_R|>rBn}(x-a_R)^2dF_R(x)$$

ekanligi e'tiborga olinsa,

$$P\left\{\max_{1\leqslant R\leqslant n}|\xi_R-a_R|>rBn\right\}=P\bigcup_{k=1}^{n}(|\xi_R-a_R|>$$

$$>rBn)\leqslant\sum_{R=1}^{n}P(|\xi_R-a_R|>rBn)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{r^2B_n^2}\sum_{R=1}^{n}\int_{|x-a_R|>rBn}(x-a_R)^2dF_R(x).$$

Agar Lindberg sharti bajarilsa, u holda oxirgi tengsizlikning o'ng tomoni, $r > 0$ son har qanday bo'lganda ham, $n \to \infty$ da nolga intiladi.

Teorema (A. M. Lyapunov). *Agar* $n \to \infty$ *da* $\frac{C}{B_n^2 + S} \to 0$ *shart bajarilsa,* $n \to \infty$, $X \in (-\infty, \infty)$ *da* $P(\eta_n < x) \to \varphi(x)$ *munosabat bajariladi.*

18-misol. Quyidagi bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun markaziy limit teoremaning o'rinliligi tekshirilsin:

$$P(\xi_R = \pm R) = \frac{1}{2}^{\left(-\frac{1}{2}\right)} R,\quad P(\xi_n = 0) = 1 - R^{-\frac{1}{2}}$$

Y e ch i sh. Lyapunov shartini tekshiramiz:

$$M\xi_R = 0;\ D\xi_R = R^{\frac{3}{2}} = G_R^2;\ B_n^2 \approx A_1 n^{5/2};$$

$$C_R^3 \pm R^{5/2};\ C_n = \sum_{R=1}^{n} R^{5/2} \approx A_2 n^{7/2}.$$

Demak,

$$\frac{Cn}{Bn} \approx \frac{A_2 n^{7/2}}{A_1 n^{15/4}} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Shunday qilib, *markaziy limit teorema o'rinli ekan.*

VIII B O B
MATEMATIK STATISTIKA UNSURLARI

8.1-§. Matematik statistikaning asosiy masalalari. Bosh va tanlanma to'plam

Statistika fani tabiatda va jamiyatda bo'ladigan ommaviy hodisalarni o'rganadi. Statistika so'zi lotincha bo'lib, holat, vaziyat degan ma'noni anglatadi.

Matematik statistika – statistik ma'lumotlarni kuzatish, to'plash va shu asosda ba'zi bir xulosalar chiqarish bilan shug'ullanuvchi fandir.

Matematik statistikaning asosiy masalalari:

I. Faraz qilaylik, ξ tasodifiy miqdor ustida n ta o'zaro bog'liq bo'lmagan tajriba o'tkazilib, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *qiymatlari olinsin.* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ lar bo'yicha ξ tasodifiy miqdorning noma'lum $F(x)$ taqsimot funksiyasini baholash matematik statistikaning vazifalaridan biridir.

2. ξ tasodifiy miqdor R ta noma'lum parametrga bog'liq, ma'lum ko'rinishdagi taqsimot funksiyasiga ega bo'lsin. γ tasodifiy miqdor ustida kuzatishlarga asoslanib bu noma'lum parametrlarni baholash matematik statistikaning ikkinchi vazifasidir.

3. Kuzatilgan miqdorlarning taqsimot qonunlari va ba'zi xarakteristikalari haqidagi turli farazlar «statistik gipotezalar» deb ataladi. U yoki bu gipotezani tekshirish uchun kuzatishlar orqali yoki maxsus tajribalar o'tkazish yo'li bilan ma'lumotlar olib, ularni qilingan gipotezaga muvofiq nazariy jihatdan kuzatilayotgan ma'lumotlar bilan taqqoslab ko'rish matematik statiskaning navbatdagi vazifasidir.

* * *

Odatda, bir jinsli ob'ektlar to'plamini bu ob'ektlarni xarakterlovchi biror sifat yoki son belgisiga nisbatan o'rganish talab qilinadi.

Masalan, paxtazordagi hali ochilmagan ko'saklarning o'rtacha og'irligini aniqlash kerak bo'lsin. Talab etilgan o'rtacha og'irlikni bilish uchun daladagi hamma ko'saklarni yig'ib olish va ularni tortish lozim, lekin bu bilan katta daladagi hosil isrof qilingan bo'lar edi.

Bunday hollarda ko'saklarning bir qisminigina yig'ib olib, ularning o'rtacha og'irligini bilgan holda butun daladagi ko'saklarning o'rtacha og'irligi to'g'risida fikr yuritish mumkin. Tekshirishning bunday usuli tanlanma usul, o'lchash uchun yig'ib olingan ko'saklar tanlanma to'plam, paxtazordagi hamma ko'saklar to'plami esa bosh to'plam deyiladi.

Shunday qilib, *tanlanma to'plam* deb tasodifiy ravishda olingan ob'ektlar to'plamiga, *bosh to'plam* deb esa tanlanma to'plam ajratib olinadigan ob'ektlar to'plamiga aytiladi.

Bosh yoki tanlanma *to'plamning hajmi* deb, bu to'plamdagi ob'ektlar soniga aytiladi.

Bosh to'plam hajmini M, tanlanma to'plam hajmini esa p bilan belgilaymiz. Tanlanmani bir necha usulda olish mumkin.

Agar bosh to'plamdan tanlanma to'plam ajratilib, bu to'plam ustida kuzatish olib borgandan so'ng bu tanlanma to'plam keyingi tanlashdan oldin yana bosh to'plamga qaytarilsa va keyin yana tanlanma olinsa va h.k. ravishda davom ettirilsa, bunday tanlash usuli takroriy tanlanma deyiladi.

Agar bosh to'plamdan tanlanma to'plam ajratib, bu to'plam ustida kuzatish olib borilgandan so'ng bosh to'plamga qaytarilmasa, bunday tanlash usuli *takroriy bo'lmagan tanlanma* deyiladi. Amalda ko'pincha takroriy bo'lmagan tanlab olish usulidan foydalaniladi. Albatta, bu ikkala tanlanma olish usulida ham tanlanma to'plam bosh to'plamning barcha xususiyatlarni saqlagan holda olinishi kerak.

Agar tanlanma to'plam bosh to'plamning deyarli barcha xususiyatlarini o'zida saqlasa, u holda bunday tanlanma *reprezentativ (vakolatli) tanlanma* deyiladi.

Reprezentativ tanlanma hosil qilish uchun biz tanlanmani tasodifiy qilib tuzamiz. Tanlab olish usuli bosh to'plamning bizni qiziqtiradigan belgisiga hech qanday ta'sir qilmaydi va bosh to'plamning har bir elementi tanlanmada bir xil imkoniyat bilan qatnashishi ta'minlanadi.

8.2-§. Variatsion qator. Tanlanmaning taqsimot funksiyasi

Faraz qilaylik, tajribalar bir xil sharoitda bir-biriga bog'liq bo'lmagan biror tasodifiy miqdor ustida *p* marta o'tkazilib,

$$X_1,\ X_2,\ldots,\ X_n \tag{8.1}$$

Natijalar olingan bo'lsin. Ma'lumki, tajriba natijalari son qiymatlari bo'yicha tartibsiz joylashgan bo'lishi mumkin.

Agar (8.1) ifodani qiymatlari bo'yicha o'sish (yoki kamayish) tartibida

$$X_1^* \le X_2^* \le \ldots \le X_n^* \ \text{(yoki } X_n^* \ge \ldots \ge X_n^*\text{)}$$

joylashtirilsa, $X_1,\ X_2,\ldots,\ X^*_n$ variatsion qator deyiladi, (8.1) tanlanmadagi X_i, $i = 1,\ 2,\ldots,\ n$ larni esa varoiantaalar deb yuritiladi.

Masalan, pillalarning uzunligini o'lchashda ushbu qiymatlar (sm. hisobida) hosil bo'lgan: 3,30; 3,40; 3,25; 3,40; 3,60; 3,45; 3,43; 3,50; 3,35; 3,55. Bunda mos variatsion qator quyidagi ko'rinishda yoziladi: 3,25; 3,30; 3,35; 3,40; 3,40; 3,43; 3,45; 3,50; 3,55; 3,60, Umuman, (8.1) variantlarning har biri bir necha marta takrorlanishi mumkin. Masalan, X_n^* variantda p_1 marta,..., X_n^* variantda esa p_R marta takrorlansin va $n=n_1+n_2+\ldots+n_R$ bo'lsin, $n_1,\ n_2,\ldots,n_R$ sonlar chastotalar deyiladi. Variatsion qator va unga mos chastotalar ushbu

$$\begin{matrix} X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^* \\ n_1,\ n_2,\ldots,n_R \end{matrix}$$

ko'rinishda yoziladi. Bundan keyin, soddalik uchun variatsion qatordagi «*» belgisini qo'ymaymiz.

Agar tahlil qilinishi lozim bo'lgan to'plamda variantlar soni ko'p bo'lsa, ularni guruhlarga ajratib, so'ngra jadval yoki qator ko'rinishida yozib kuzatish olib borish maqsadga muvofiq bo'ladi. Albatta, variantlarni guruhlarga sifat jihatdan yoki son jihatdan ajratish mumkin.

Masalan, 8.1-jadvalda paxta seleksiyasi va genetika ilmiy tekshirish institutidan tajriba stansiyasida ma'lum navli 60 tup g'o'zaning asosiy poyasidagi bo'g'inlar sonini hisoblash natijasi keltirilgan.

8.1-jadval

12	12	12	10	13	11	14	11	14	11
12	11	11	11	12	11	13	11	10	12
11	12	13	13	11	12	12	12	13	13
11	13	15	13	14	13	13	14	13	12
12	13	11	14	11	12	13	13	12	13
13	12	12	14	14	12	11	12	12	12

Berilgan to'plamdagi qiymatlarni ko'zdan kechirib, 8.2-jadvalni hosil qilamiz:

8.2-jadval

G'o'zaning asosiy poyasidagn bo'g'inlar soni (X_i)	10	11	12	13	14	15	Jami
Bo'g'inlar soni X_i bo'lgan g'o'zalar soni (n_i)	2	15	20	16	6	1	60

8.2-jadvalning birinchi (yuqori) satri variantlarning qiymatlaridan iborat. Ikkinchi (quyi) satrdagi sonlar variantlar qiymatlarining takrorlanishini ko'rsatadi. Har bir chastotaning tanlanma hajmiga nisbati shu variantning nisbiy chastotasi deyiladi va

$$W_i = \frac{n_i}{n}, i = \overline{1, R} \qquad (8.2)$$

kabi belgilanadi. Shuningdek, $W_1 = \frac{n_1}{n}$, $W_2 = \frac{n_2}{n}$,...,

$W_R = \frac{n_R}{n}$ nisbatlar belgining tegishli qiymatlariga mos bo'lgan nisbiy chastotalarni tashkil qiladi. Natijada quyidagi jadvalga ega bo'lamiz:

8.3-jadval

x_i	$x_1, x_2, \ldots, x_k$
W_i	$W_1, W_2, \ldots, W_k$

Ko'p hollarda 8.3-jadval *u tasodifiy miqdorning statistik yoki empirik* taqsimoti deyiladi.

Nisbiy chastotalar yig'indisi birga teng. Haqiqatan ham, 8.2-jadvalda *berilgan variatsion* qator uchun statistik taqsimot quyidagicha yoziladi:

$$W_1 + W_2 + \ldots + W_R = \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \ldots + \frac{n_R}{n} =$$

$$= \frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_R}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

8.2- jadvalda berilgan variatsion qator uchun statistik taqsimot quyidagicha *yoziladi:*

X_i	10	11	12	13	14	15
W_i	$\frac{2}{60}$	$\frac{15}{60}$	$\frac{20}{60}$	$\frac{16}{60}$	$\frac{6}{60}$	$\frac{1}{60}$

Berilgan *variantlarni son jihatdan guruhlarga ajratib kuzatish ham* mumkin.

Uzluksiz o'zgaruvchan variantlarda to'plamdagi hamma variantlarni *ma'lum sondagi guruhlarga ajratiladi,* so'ngra esa har bir guruhga kirgan variantlar soni hisoblanadi. Natijada variatsion qator jadval ko'rinishda hosil bo'ladi. Ammo takrorlanishlar soni ayrim, alohida olingan variantga *tegishli* bo'lmasdan, balki guruhga tegishli bo'ladi, ya'ni guruhning takrorlanish soni bo'ladi. Masalan, berilgan katta yoshdagi erkak ishchilarning bo'yiga ko'ra taqsimlanishi uzluksiz variantga *misol* bo'la oladi (8.4-jadval). Bunday variatsion qator intervalli variatsion qator deyiladi.

Guruhlar sonini tanlashda (bu sonni *R* harfi *bilan* belgilaymiz), odatda, quyidagi mulohazalarga amal qilinadi:

1) guruhlar sonini toq bo'lgani ma'qul;

2) to'plamning *hajmi katta bo'lganda* (ga>100) guruhlar soni katta (masalan, 9,11, 13) bo'lgani, hajmi kichik bo'lganda esa

kichik (masalan, 5,7,9) bo'lgani ma'qul. Tajriba shuni ko'rsatadiki, to'plamni nechta guruhga ajratishgagina emas, balki birinchi guruhning chegaralari qanday aniqlanishiga ham befarq qarab bo'lmaydi. Guruh oralig'i (kengligi)ni katta olmaslik kerak va birinchi guruhning chegaralarini shunday olish kerakki, eng kichik variant shu guruhning taxminan o'rtasiga to'g'ri kelsin.

8.4- jadval

Bo'yi (sm, hisobida)	Erkaklar soni, p_i	Bo'yi (sm. hisobida)	Erkaklar soni, p_i
143—146	1	167—170	170
146—149	2	170—173	120
149—152	8	173—176	64
152—155	26	176—179	28
155—158	65	179—182	10
158—161	120	182—185	3
161—164	181	185—188	1
164-167	201		
		jami	1000

Bu mulohazalarning hammasi oqibat natijada taqsimotning xarakterli xususiyatlarini to'sib qo'ymaslik, tasodifiy o'zgarishlarni esa silliqlab yuborish maqsadini ko'zda tutadn.

Guruhlar oralig'i (kengligi) va ular chegaralarining joylashishi masalasining hal etilishini biz 8.4- jadvalda berilgan to'plam misolida ko'ramiz. Guruhning kengligi ΔXi hamma guruhlar uchun bir xil bo'ladi va u eng katta va eng kichik variantlar ayirmasini guruhlar soniga nisbati bilan aniqlanadi. Bu misolda X_{tax},=188 va X_{min}=143, guruhlar soni R=15 deb olamiz, u holda

$$\Delta X_i = \frac{188-143}{15} = \frac{45}{15} = 3.$$

Ko'pincha, bizning shu misoldagi kabi, $X_{tm}—X_{tt}$ guruhlar soni R ga (qabul qilingan aniqlikda) qoldiqsiz bo'linmaydi. Bunday hollarda guruh kengligini ortish tomonga yaxlitlanadi, chunki aks holda variatsiya oralig'ining umumiy kengligi kamaygan bo'lar edi va demak, variantlarning chetki qiymatlari unga kirmay qolar edi. Bunday yaxlitlashda butun interval birmuncha kengayadi, shu bilan birga kengaytirishni kichik qiymatlar tomoniga ham, katta qiymatlar tomoniga ham qilish mumkin, lekin kengaytirishni shunday bajarish kerakki, qiymatlarning bittasi ham guruhlarning chegarasiga tushmasin.

To'plamni guruhlarga ajratish o'rganilayotgan belgining faqat diskret yoki uzluksiz o'zgaruvchanligiga emas, balki to'plamning hajmiga ham bogliq bo'lishini esda saqlashimiz kerak bo'ladi. To'plam variantlarining bir qismi (ulushi) biror X sondan kichik, teng yoki undan katta bo'lishi mumkin. Shuning uchun har bir X ga yig'ilgan nisbiy chastotalar mos keladi, ularni $R_p(x)$ orqali belgilaymiz. X o'zgarishi bilan yig'ilgan nisbiy chastotalarning kiymatlari ham o'zgaradi. Shuning uchun $F_p(x)$ ni X ning funksiyasi deb hisoblaymiz.

Variantlarning X sondan kichik bo'lgan qiymatlarining nisbiy chastotasi empirik taqsimot funksiyasi deyiladi, ya'ni

$$F_n(x) = \frac{m(X < x)}{n} \text{ ёки } F_n(x) = \frac{m(x)}{n}, \qquad (8.3)$$

bu yerda $t(x)$ ifoda X dan kichik bo'lgan variantlar soni, p — to'plam hajmi. Bosh to'plam taqsimotning $F(x)$ integral funksiyasini tanlanma taqsimotining empirik funksiyasidan farq qilgan holda taqsimotning nazariy funksiyasi deyiladi. Empirik va nazariy funksiyalar orasidagi farq shundaki, $F(x)$ *nazariy funksiya* $X<x$ hodisa ehtimolligini, $F_p(x)$ empirik funksiya esa shu hodisani o'zining nisbiy chastotasini aniqlaydi. $F_p(x)$ funksiyaning ta'rifidan uning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

1) *Empirik funksiyaning qiymatlari* $[0;1]$ *kesmaga* tegishli;

2) $F_p(x)$ kamaymaydigan funksiya;

3) Agar X_1 — eng kichik variantda bo'lsa, u holda $X \leq X_1$ da $F_p(x) = 0$, X_R *eng katta variantda bo'lsa, u holda* $X_i \geq X_R$ da $F_n(x)=1$.

Shunday qilib, tanlanma taqsimotining empirik funksiyasi bosh to'plam taqsimotining nazariy funksiyasini baholash uchun xizmat qiladi.

Misol. Tanlanmaning quyida berilgan taqsimoti bo'yicha uning empirik funksiyasini toping. Variantlar X_i: 5 7 10 15

Chastotalar n_i: 2 3 8 7

Y e ch i sh. Tanlanma hajmini topamiz:

$$n=2+3+8+7=20.$$

Eng kichik varianta 5 ga teng, demak,

$$X \le 5 \text{ da } F_p(x)=0.$$

$X<7$ qiymat, xususan $X_1=5$ qiymat 2 marta kuzatilgan, demak,

$$5<x\le 7 \text{ da } F_n(x)=\frac{2}{20}=0{,}1.$$

X<10 qiymatlar, jumladan $X_1=5$ va $X_2=7$ qiymatlar 2+3=5 marta *kuzatilgan, demak,*

$$7<X\le 10 \text{ da } F_p(X)=\frac{5}{20}=0{,}25.$$

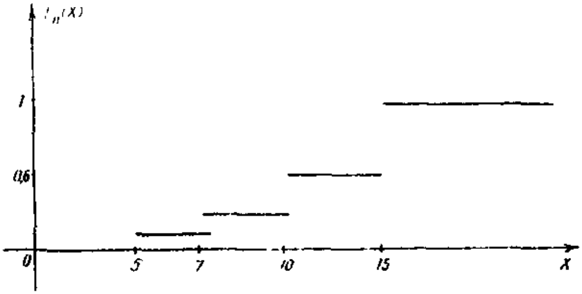
$X<15$ qiymatlar, jumladan $X_1=5$, $X_2=7$ va $X_3=10$ qiymatlar 2+3+8=13 marta kuzatilgan, demak,

$$10<X\le 15 \text{ da } F_n(x)=\frac{13}{20}=0{,}65.$$

$X=15$ eng katta varianta bo'lgani sababli $X>15$ da $F_b(x)=1$. Izlanayotgan empirik funksiya:

$$F_n(x)\begin{cases} X \le 5 \, \partial a \, 0; \\ 5 \le X \le 7 \, \partial a \, 0{,}1; \\ 7 < X \le 10 \, \partial a \, 0{,}25; \\ 10 < X \le 15 \, \partial a \, 0{,}65; \\ X > 15 \, \partial a \, 1. \end{cases}$$

To'g'ri burchakli koordinatalar tizimida bu funksiyaning grafigini *yasaymiz (17-rasm).*



17-rasm

8.3-§. Taqsimotlarni grafik ravishda tasvirlash

To'plamda variantlar guruhlarga ajratilgandan so'ng taqsimotning xarakteri ozmi-ko'pmi oydinlashadi. Lekin taqsimotni grafik ravishda tasvirlaganda uning xarakteri yanada yaqqollashadi.

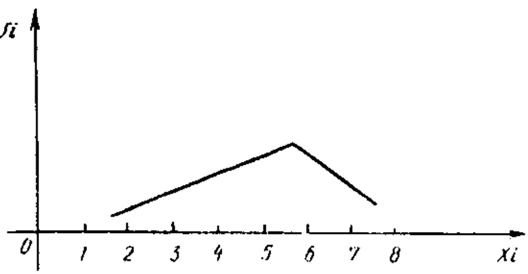
Taqsimotni grafik ravishda tasvirlash usullari ichida juda ko'p qo'llaniladigan ikkitasini — poligon va gistogramma yasashni ko'rib chiqamiz.

1. **Chastotalar poligoni** deb, kesmalari (X_1, n_1), (X_2, n_2),..., (X_R, n_R) nuqtalarni tutashtiradigan siniq chiziqqa aytiladi. Poligonni yasash uchun absissalar o'qiga X_i variantlarni, ordinatalar o'qiga esa ularga mos n_i, chastotalarni qo'yib chiqiladi. So'ngra (Xi, n_i) nuqtalarni to'g'ri chiziq kesmalari bilan tutashtirib, chastotalar poligonini hosil qilamiz.

2. Nisbiy chastotalar deb, kesmalari (X_1, W_1),...,(X_R, W_r) nuqtalarni tutashtiradigan siniq chiziqqa aytiladi. Nisbiy chastotalar poligonini yasash uchun absissalar o'qiga Xi variantlarini, ordinatalar o'qiga esa ularga mos W_i chastotalarni qo'yib chiqiladi. So'ngra hosil bo'lgan nuqtalarni to'g'ri chiziq kesmalari bilan tutashtirib, nisbiy chastotalar poligoni hosil qilinadi.

Masalan, 18-rasmda ushbu

X_i:	1,5	3,5	5,5	7,5
W_i:	0,1	0,2	0,4	0,3



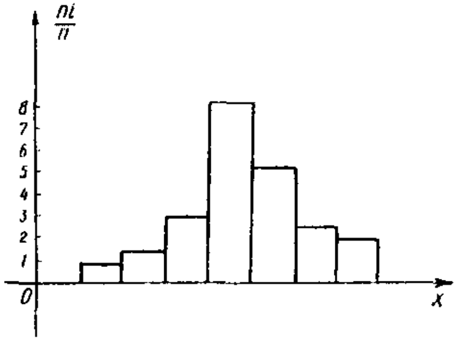
18-rasm

taqsimotning nisbiy chastotalari poligoni tasvirlangan.

3. Chastotalar gistogrammasi deb, asoslari uzunlikdagi intervallar, balandliklarga esa p, dan iborat bo'lgan to'g'ri to'rt burchaklardan iborat pog'onasimon shaklga aytiladi. Bu erda p — bosh to'plamning bizni

qiziqtiradigan belgisining kuzatilgan qiymatlarini o'z ichiga olgan interval uzunligi, n esa i - intervalga tushgan variantlar soni. Ko'p hollarda chastota gistogrammasi belgi uzluksiz bulgan holda qo'llaniladi.

Chastotalar gistogrammasini yasash uchun absissalar o'qiga qismiy intervallar, ularning ustiga esa $\frac{n_i}{n}$ masofada absissalar o'qiga parallel kesmalar o'tkaziladi. Masalan, 19- rasmda 8.5- jadvalda keltirilgan n=100 hajmli taqsimot chastotalari gistogrammasi tasvirlangan.



19- rasm

8.5- jadval

Uzunligi n=5 bo'lgan qismning intervali	n_i interval variantlarning chastotalari yig'indisi	Chastota zichligi n_i / n
5—10	4	0,8
10—15	b	1.2
15—20	16	3.2
20—25	36	7.2
25—30	24	4.8
30—35	10	2.0
35—40	4	0.5

4. Nisbiy chastotalar gistrogrammasi deb asoslari h uzunlikdagi intervallar, balandliklari esa $\frac{W_i}{h}$ nisbatga (nisbiy chastota zichligiga) teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan iborat

pog'onaviy shaklga aytiladi. Nisbiy chastotalar poligonini yasash uchun absissalar o'qiga qismiy intervallarni qo'yib chiqiladi, ularning tepasidan esa $\frac{W_i}{h}$ masofada absissalar o'qiga parallel kesmalar o'tkaziladi.

8.4-§. Taqsimotning sonli xarakteristikalari

Statistik hisobning asosiy masalalaridan biri parametrlar deb ataladigan va variatsion qatorning xususiyatlarini yetarli darajada ifodalab beradigan xarakteristikalarni aniqlashdan iborat. Variatsion qatorlar quyidagilarga asosan bir-biridan farq qilishi mumkin:

a) belgining atrofida ko'pchilik variantlarning to'plangan qiymati bo'yicha. Belgining bu qiymati to'plamda belgining rivojlanish darajasini yoki boshqacha aytganda, qatorning *markaziy tendensiyasini, ya'ni qatorning* - o'ziga xosligini aks ettiradi;

b) parametrlarning qator markaziy tendensiyasini aks ettiruvchi qiymat atrofida o'zgaruvchanligi darajasi, ya'ni o'sha qiymatdan farq qilish darajasi bo'yicha.

Bunga mos ravishda statistik ko'rsatkichlar ikki guruhga bo'linadi: qatorning *markaziy tendensiyasini (yoki rivojlanish darajasini) ifodalovchi* ko'rsatkichlar: qatorning o'zgaruvchanlik darajasini ifodalovchi ko'rsatkichlar.

Birinchi guruhga turli «o'rtacha qiymatlar» moda, mediana, arifmetik o'rtacha qiymat, geometrik o'rtacha qiymat kiradi.

Ikkinchi guruhga — absolyut o'rtacha farq (chetlanish), o'rtacha kvadratik farq, dispersiya, variatsiya va assimetriya koeffitsientlari kiradi.

1. (8.1) tanlanmaning o'rtacha arifmetik qiymati deb,

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \qquad (8.4)$$

ifodaga aytamiz.

Misol. 5 ta bir xil kattalikdagi yer bo'lagining har bir gektaridan 32, 28, 30, 31, 33 sentnerdan paxta hosili yig'ib olingan bo'lsa, bu holda o'rtacha hosil

$$\overline{X} = \frac{32+28+30+31+33}{5} + 30{,}8\, s$$

bo'ladi

Agar tasodifiy miqdor ustida olib borilgan uzatish natijalari $X_1,...,X_R$ mos ravishda $p_1,..., p_R$ marta takrorlansa, u holda o'rtacha arifmetik qiymat quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{R} n_i X_i}{\sum_{i=1}^{R} n_i}. \tag{8.5}$$

Masalan, 8.6-jadvalda har bir gektar yerdan olingan paxta hosili taqsimoti (s. hisobida) berilgan. Bunda 28 s. hosil ikki marta, 29 s. hosil 5 marta kuzatilgan va h.k.

8.6-jadval

x_i	28	29	30	31	32
n_i	2	5	8	4	3
xi	56	145	240	124	96

Bu holda o'rtacha hosil

$$\bar{X} = \frac{2 \cdot 28 + 5 \cdot 29 + 8 \cdot 30 + 4 \cdot 31 + 3 \cdot 32}{2+5+8+4+3} = \frac{661}{22} 30{,}05s.$$

2. O'rtacha arifmetik qiymat tanlanma to'plam uchun son belgisining qaysi qiymati xarakterli ekanligini ko'rsatadi. Ammo u tanlanma to'plamni xarakterlash uchun etarli emas, chunki tanlanma to'plam hadlarining o'zgaruvchanligi to'plamning asosiy xususiyati hisoblanadi. Yuqoridagi masalalarda variantlarning qiymatlari ularning o'rtacha arifmetik qiymatidan ozmi-ko'pmi tarqoq bo'lishi mumkinligini ko'rdik. Shu tarqoqlikni xarakterlash uchun tanlanma dispersiya tushunchasi kiritiladi.

(8.1) tanlanmaning *tanlama dispersiyasi* deb,

$$G^2 = \frac{\sum_{i=1}^{R} n_i (X_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{R} n_i} \tag{8.6.}$$

ifodaga aytiladi. Tanlanma dispersiyadan olingan kvadrat ildiz

$$G = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{R} n_i (X_i - \overline{X})^2}{\sum_{i=1}^{R} n_i}} \qquad (8.7.)$$

ga *taqsimotning o'rtacha kvadratik xatosi* (o'rtacha kvadratik chetlanishi) deyiladi.

(8.6) va (8.7) ga o'xshash bosh tanlanmaning d i s p e r s i ya s i v a o' r t a ch a k v a d r a t i k ch e t l a n i sh i n i kiritish mumkin:

$$G_Б^2 = \frac{\sum_{i=1}^{S} n_i (X_i - \overline{X})^2}{N};$$

$$G_Б = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{S} n_i (X_i - \overline{X})^2}{N}}, \qquad (8.8.)$$

bu yerda $N = \sum_{i=1}^{S} n_i$.

Dispersiyani hisoblashda quyidagi formuladan foydalanish maqsadga muvofiq bo'ladi:

$$G^2 = X^2 - (X)^2. \qquad (8.9)$$

3. Tanlanma to'plamning o'rtacha arifmetik qiymati va tanlama dispersiyasidan boshqa xarakteristikalari ham mavjud bo'lib, ularga mediana va moda kiradi:

a) Variatsion qatorni variantlar soni teng bo'lgan ikki qismga ajratadigan varianti variatsion qatorning *medianasi* deyiladi va *Me* deb belgilanadi. Agar variantlar soni toq, ya'ni $p = 2R+1$ bo'lsa, u holda $M = X_{R+1}$ bo'ladi; agar variantlar soni juft, ya'ni $p = 2R$ bo'lsa, u holda

$$Me = \frac{X_R + X_{R+1}}{2}$$

deb olinadi. Agar to'plamning hajmi katta bo'lsa, avval uni guruhlarga ajratiladi, so'ngra yig'ilgan takrorlanishlar qatori tuziladi va mediana quyidagi formula bo'yicha hisoblanadi:

$$Me = X_0 + h\frac{S_1 - S_2}{f}, \qquad (8.10)$$

bu yerda X_0 — kuzatishlar natijalarining yarmi joylashgan guruhning quyi chegarasi; N — oraliqning qiymati; S_1 — qator umumiy sonining yarmi; S_2 — mediana joylashgan guruhdan oldingi guruhning yig'ilgan takrorlanishi; f—mediana joylashgan guruhning takrorlanishi.

b) Eng katta chastotaga ega bo'lgan variantga *moda* deyiladi va *Mo* bilan belgilanadi. Masalan, ushbu

varianta	1	4	7	9
chastota	5	2	20	6

qator uchun moda 7 ga teng. Uzluksiz variatsion qatorlarda moda, odatda, varoiantalar soni eng ko'p bo'lgan guruhda bo'ladi. Bu guruh m o d a l g u r u h deb ataladi.

Guruh ichida kuzatishlar tekis taqsimlanmagan bo'lishi mumkin, shuning uchun modaning qiymatini quyidagi formula bo'yicha hisoblaganda yaxshiroq natijaga ega bo'lish mumkin:

$$Mo = X_0 + h\frac{n_m - n_{m-1}}{(n_m - n_{m-1}) + (n_m - n_{m+1})}, \qquad (8.11)$$

bu yerda X_0 — modal guruhning quyi chegarasi, N — guruh oralig'i (kengligi), n_M, n_{M-1}, n_{M+1} - modal guruh hamda unga mos ravishda chap va o'ngdan qo'shni *guruhlarning takrorlanishlari.*

4. *G* ning bir o'zi o'rganilayotgan miqdorning o'zga-ruvchanligini to'liq xarakterlab bera olmaydi. Masalan, o'rtacha uzunligi 5,4 mm bo'lgan bug'doy donlari uchun G = 1,8 mm standart variantlarning anchagina tarqoq ekanligini bildirsa, o'rtacha uzunligi 129 mm bo'lgan bodringlar uchun esa o'sha G=1,8 mm qiymat uzunliklariga nisbatan

bu bodringlarning deyarli bir xil ekanligini ko'rsatadi. Shu sababli variatsiya koeffitsienti (nisbiy o'rtacha farq) tushunchasi kiritiladi. *Variatsiya koeffitsienti* deb

$$V = \frac{G}{X} \cdot 100\,\% \qquad (8.12)$$

ifodaga aytiladi. Variatsiya koeffitsienti hadlari turli o'lcham birliklariga ega bo'lgan to'plamlarning o'zgaruvchanligini taqqoslashga ham imkoniyat beradi, chunki u taqqoslanadigan miqdorlarning o'lcham birligiga bog'liq bo'lmagan nisbiy sondir.

5. Arifmetik o'rtacha qiymat va o'rtacha kvadratik chetlanish variatsion qatorning muhim xarakteristikalaridir. Ammo ular varoiantalarning arifmetik o'rtacha qiymatiga nisbatan guruhlarga qanday taqsimlanishi haqida hech qanday ma'lumot bermaydi. Lekin variatsion qatorning tuzilishi haqidagi ma'lumot hodisaning biometrik tahlilning muhim elementini tashkil etadi.

Variatsion qatorlarda varoiantalar guruhlarga arifmetik o'rtacha qiymatning ikkala tomonidan yetarli darajada tekis taqsimlanishi mumkin, ya'ni simmetrik taqsimotlarning moda, mediana va arifmetik o'rtacha qiymatlari bir-biriga teng bo'lishi mumkin. Ammo statistik amaliyotda asimmetrik deyiladigan (ya'ni simmetrik bo'lmagan) taqsimotlar ham uchrab turadi.

Taqsimotning *asimmetriya* (qiyshayganlik) *koeffitsienti* deb

$$A_S = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{R} n_i (X_i - \overline{X})^3}{G^3} \qquad (8.13)$$

ifodaga aytiladi. Bu koeffisient yordamida taqsimotning nosimmetrikligi aniqlanadi. Simmetrik taqsimot funksiyalar uchun $A_S=0$. Agar $A_S \leq 0{,}25$ bo'lsa, asimmetriya kam deb hisoblanadi. $A_S \leq 0{,}5$ da taqsi-motning asimmetrikligi ko'p bo'ladi.

6. Empirik taqsimotning normal taqsimotdan chetlanishini baholashda ekssessdan ham foydalaniladi. *Taqsimotning ekssessi* deb

$$E_R = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{R} n_i (X_i - \overline{X})^3}{G^4} - 3 \qquad (8.14)$$

ifodaga aytiladi.

Mashq uchun masalalar

1. Ipakchilik ilmiy tekshirish institutida 60 dona pillaning bo'yi va eni haqida olingan ma'lumotlar quyida keltirilgan. Ularni guruhlarga ajratib, variatsion qator tuzing, taqsimot gistogrammasi va poligonini yasang.

a) pillaning eni (sm. hisobida)

1,65	1,60	1,55	1,67	1,67	1,67
1,75	1,64	1,60	1,70	1,70	1,60
1,57	1,65	1,75	1,50	1,60	1,55
1,64	1,64	1,57	1,65	1,63	1,60
1,70	1,73	1,48	1,70	1,70	1,60
1,52	1,55	1,70	1,52	1,65	1,55
1,55	1,65	1,60	1,60	1,45	1,70
1,60	1,65	1,58	1,75	1,55	1,60
1,60	1,72	1,62	1,55	1,70	1,55
1,45	1,70	1,65	1,70	1,65	1,70

b) pillaning bo'yi (sm. hisobida)

3,20	3,30	3,20	3,20	3,45	3,30
3,45	3,25	3,40	3,45	3,10	3,30
3,30	3,40	3,40	3,50	3,35	3,30
3,34	3,40	3,45	3,35	3,40	2,25
3,45	3,45	3,20	3,50	3,10	3,30
2,20	3,25	3,40	3,20	3,30	3,35
3,25	3,25	3,30	3,30	3,10	3,40
3,20	3,20	3,30	2,90	3,40	3,35
2,90	3,20	3,45	3.45	2,90	3,35
3,25	3,30	3,20	3,35	3,50	3,10

Bu misoldagi to'plamchalarning empirik taqsimot funksiyalarini toping va grafigini yasang.

2. Quyida erkaklar bo'ylari haqida (sm. hisobida) ma'lumotlar berilgan.

162	151	161	170	167	164	166	164	173	172
165	153	164	169	170	154	163	159	161	167
168	164	170	166	176	157	159	158	160	161
167	155	168	167	173	165	175	165	174	167
170	169	159	159	160	156	161	162	161	181
158	169	160	169	161	161	166	164	170	180
158	169	169	165	166	172	168	171	178	179
171	165	161	162	182	164	171	169	176	177
170	169	171	160	165	165	179	161	170	175
168	171	163	165	168	166	166	169	178	173
167	172	169	171	168	162	165	168	167	166
165	168	167	170	170	159	169	160	171	174

X arifmetik o'rtacha qiymat, Me, Mo va *G* ni aniqlang.

8.5-§. Korrelyatsiya nazariyasi elementlari

1. Statistik munosabatlar

Ko'pincha tajriba ishlarida turli son va sifat belgilari orasidagi munosabatlarni o'rganishga to'g'ri keladi. Belgilar orasida ikki turdagi bog'lanish — funksional va korrelyatsion (yoki statistik) bog'lanishlar mavjud.

Funksional bog'lanishlarda bir o'zgaruvchan miqdorning har qaysi qiymatiga boshqa o'zgaruvchan miqdorning aniq bitta qiymati mos keladi. Bunday bog'lanishlar aniq fanlar — matematika, fizika va ximiyada ayniqsa yaqqol kuzatiladi. Masalan: *termometrdagi simob ustunining balandligi havo* yoki suvning harorati haqida aniq va bir qiymatli ma'lumot beradi. Ammo ko'pincha bir belgining aniq qiymatiga boshqa belgining bir emas, balki bir qancha turli qiymatlari to'g'ri keladi, ba'zan bu qiymatlar aniqmas bo'lib qolishi *ham mumkin.* Masalan; *hosil solingan* o'g'it miqdoriga bog'liq, lekin bu bog'lanishda aniq moslik yo'q. Bir xil sifatli, bir xil miqdorda o'g'it berilganda ham hosil turlicha bo'lishi mumkin, chunki hosilning miqdori o'g'itdan tashqari boshqa ko'p sabablarga ham bog'liq bo'ladi.

Agar γ *tasodifiy* miqdorning har bir qiymatiga biror qonun asosida η tasodifiy miqdorning aniq qiymati mos kelsa, u holda γ va η orasidagi munosabat statistik yoki korrelyatsion munosabat deyiladi. Agar γ va η tasodifiy miqdorlar ustida *kuzatish olib borilgan bo'lib, kuzatishlar natijalari mos ravishda* $X_1, X_2,...,X_n$ va $Y_1, Y_2,...,Y_n$ lardan iborat bo'lsa, u holda γ va η orasidagi munosabatni quyidagi jadval ko'rinishida ifodalash mumkin:

8.7-jadval

γ	X_1	X_2	...	X_n
η	Y_1	Y_2	...	Y_n

Agar kuzatishlar natijasida hosil bo'ladigan X_i, U_i, juftlarning soni katta bo'lsa va ular orasida takrorlanadigan juftlar bo'lsa, u holda 8.7-jadvalni quyidagi «ikki o'lchovli» jadval bilan almashtirish mumkin:

8.8-jadval

γ / η	X_1	X_2	X_3	...	X_R	X_n
Y_1	m_{11}	m_{12}	m_{13}	...	m_{1R}	m_{y1}
Y_2	m_{21}	m_{22}	m_{23}	...	m_{2R}	m_{y1}
Y_3	m_{31}	m_{32}	m_{33}	...	m_{3R}	m_{y1}
...	...	...	...	...	...	...
Y_3	m_{32}	m_{32}	m_{33}	...	m_{3R}	m_{y2}
m_y	m_{x1}	m_{x1}	m_{x3}	...	m_{xR}	n

8.8-jadval korrelyatsion jadval deyiladi. Uning ba'zi xossalarini ko'rib chiqamiz:

1. X_1, $X_2,...,X_K$ sonlar γ tasodifiy miqdorning R ta turli qiymatini ifodalaydi. Y_1, $Y_2,...,Y_S$ sonlar esa η miqdorning 5 ta turli qiymatini ifodalaydi.

2. Jadvalning i - satr va j – ustunlarning kesishish joyida kuzatishlarda γ va η miqdorlarning mos X_i Y_j juft qiymatlarining necha marta ro'y berganini ko'rsatuvchi m_{ij} son turadi. m_{ij} sonlar takrorlanishlar deyiladi.

3. Oxirgi satrda m_{x1}, $m_{x2},...$, m_{xR} sonlar turadi. Ular hamma kuzatishlarda mos X_1, $X_2,...,X$ qiymatlar necha marta ro'y berganini ko'rsatadi. m_{x1}, $m_{x2},...$, m_{xR} sonlarning har biri mos ustunning hamma takrorlanishlari yig'indisiga teng, ya'ni

$$m_{xi}=m_{ii}+m_{i2}+...+m_{is}.$$

4. Oxirgi ustunda m_{y1}, $m_{y2},...$, m_{ys} sonlarga egamiz. Ular barcha kuzatishlarda mos Y_1, $Y_2,...,Y_s$ qiymatlar necha marta ro'y berganini ko'rsatadi. m_{y1}, $m_{y2},...$, m_{ys} sonlarning har biri mos satrning hamma takrorlanishlari yig'indisiga teng, ya'ni

$$m_{yj}=m_{1j}+m_{2j}+...+m_{Rj}.$$

5. m_{x1}, m_{x2},..., m_{xR} sonlarning yig'indisi t_{y1}, t_{y2},..., t_{ys} sonlarning yig'indisiga teng va bu yig'indilarning har biri alohida barcha *kuzatishlar soni p ga teng bo'ladi, ya'ni*

$$\sum_{i=1}^{R} m_{xi} = \sum_{j=1}^{n} m_{yi} = n.$$

6. 8.8-korrelyatsion jadvalda γ tasodifiy miqdorning har bir ayrim qiymatiga η tasodifiy miqdorning aniq taqsimoti mos keladi. Korrelyatsion munosabatlar to'g'ri va teskari, to'g'ri chiziqli va egri chiziqli, oddiy va ko'p belgilar orasidagi bog'lanishlar bo'lishi mumkin.

To'g'ri korrelyatsion munosabatda korrelyatsiyalanayotgan belgilardan birining ortishi (kamayishi) boshqasining ortishiga (kamayishiga) olib keladi. *Masalan, atrofdagi havoning harorati pasayishi bilan nafas olish* tezligi kamayadi. Teskari turdagi munosabatda korrelirlanayotgan belgilardan birining ortishi bilan boshqasi kamayadi.

2. Korrelyatsiya koeffitsienti

Biz yuqorida to'g'ri korrelyatsion munosabatdan belgilardan birining ortishi (kamayishi) boshqasining ortishiga (kamayishiga) olib kelishini bilamiz.

Bog'liqlik miqdori (korrelyatsiya koeffitsienti)ni

$$r_{xy} = \frac{\Sigma X_i - Y_i - n\overline{X}\overline{Y}}{nG_x G_y} \qquad (8.15)$$

formula yordamida aniqlash mumkin, bu yerda G_x G_y mos ravishda X va Y ning o'rtacha kvadratik chetlanishi, $\overline{X}$ va $\overline{Y}$ — tanlanmaning o'rtacha arifmetigi.

Nazariy korrelyatsiya koeffitsientining xossalari (8.15) ifoda uchun ham o'rinlidir. Agar $-1 \leq r_{xy} \leq 0$ bo'lsa, *u holda bu* miqdorlardan birining ortishi mos ravishda ikkinchisining kamayishiga olib keladi. Agar $|r_{xy}|=1$ bo'lsa, bu hol X va Y orasida chiziqli korrelyatsiya mavjudligini ko'rsatadi va aksincha.

Korrelyatsiya koeffitsienti $r_{xy}=0$ bo'lganda X va Y orasida to'g'ri chiziqli korrelyatsion munosabat mavjud bo'lishi mumkin emas, ammo egri chiziqli korrelyatsion munosabat mavjud bo'lishi mumkin.

3. Regressiya tenglamasi

Korrelyatsiya koeffitsienti ikkita belgining o'zaro bog'lanish darajasini ko'rsatadi, lekin belgining ikkinchi belgiga qarab son jihatdan qanday o'zgarishini ochib bera olmaydi. Bu munosabatni X va Y belgilar orasida regressiya tenglamasi deb ataluvchi bog'lanish ma'lum darajada ochib bera oladi. Bunda X ning o'zgarishiga qarab Y ni aniqlash va aksincha, Y ning o'zgarishiga qarab, X ni aniqlash mumkin. Eng kichik kvadratlar usuli deb ataluvchi usuldan foydalanib, X va Y lar orasidagi chiziqli regressiya tenglamasi $Y_x=kx+b$ ni tuzamiz (bu yerda k va b — noma'lum koeffitsientlar). Bu usulga ko'ra, agar $Y_1, Y_2,...,Y_n$ lar kuzatish natijalaridan iborat bo'lib, bu qiymatlar bilan Y_x ning $X_1, X_2,...,X_n$ lariga mos keluvchi qiymatlari orasidagi ayirmalar kvadratlarining yig'indisi kichik bo'lsa, yaxshi natijaga erishilgan bo'ladi. Shu maqsadda

$$F(k,b)=\sum_{i=1}^{n}(Y_{xi}^{2}-Y_i)^2 \qquad (8.16)$$

yoki

$$F(k,b)=\sum_{i=1}^{n}(kx_i+b-y_i)^2$$

funksiyani ko'ramiz. Bu ifoda eng kichik qiymatga erishishi uchun

$$\frac{dF(k,b)}{dk}=2\sum_{i=1}^{n}(kX_i+b-Y_i)X_i=0$$

$$\frac{dF(k,b)}{db}=2\sum_{i=1}^{n}(kX_i+b-Y_i)=0$$

yoki

$$\begin{cases} R\sum_{i=1}^{n}X_i^2+b\sum_{i=1}^{n}X_i=\sum_{i=1}^{n}X_iY_i, \\ R\sum_{i=1}^{n}X_i+nd\sum_{i=1}^{n}Y_i \end{cases}$$

tengliklar bajarilishi kerak. Bu tizimning yechimi:

$$k=\frac{n\sum_{i=1}^{n}X_iY_i-\sum_{i=1}^{n}X_i\sum_{i=1}^{n}Y_i}{n\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)}=r_{xy}\cdot\frac{G_y}{G_x};$$

$$b=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sum_{i=1}^{n}Y_i+\sum_{i=1}^{n}X_i\sum_{i=1}^{n}X_iY_i}{n\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2}=\overline{Y}-k\overline{X}.$$

$Z_{xy}\dfrac{G_y}{G_x}$ ifoda Y ning X ga nisbatan regressiya koeffitsienti deyiladi. X ning Y ka nisbatan korrelyatsiya koeffitsientini K_{xu} orqali belgilasak, u holda Y ning X ga nisbatan regressiya tenglamasi

$$Y_x=ky_jx\cdot(X-\overline{X})+\overline{Y};$$

X ning Y ka nisbatan regressiya tenglamasi

$$X_y=kx_j\cdot(Y-\overline{Y})+\overline{X}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Chiziqli regressiyadan tashqari egri chiziqli regressiya ham mavjud. Eng sodda egri chiziqli regressiya tenglamalari sifatida

$$Y_x=ax^2+bx+c;\quad Y_x=ax^3+bx^2+cx+b;$$

$$Y_x=\frac{a}{x}+b$$

larni qarash mumkin.

Mashqlar

1. Quyida berilgan jadvaldan foydalanib, Y bilan X orasidagi chiziqli regressiya tenglamasini tuzing:

$y \backslash x$	10	15	20	25	30	35	40	45	p_y
80	2	1	—	—	—	—	—	—	3
100	3	4	3	—	—	—	—	—	10
120	—	—	5	10	8	—	—	—	23
140	—	—	—	1	—	6	1	1	9
160	—	—	—	—	—	—	4	1	5
n_x	5	5	8	11	8	6	5	2	n=50

2. Quyida berilgan korreklyatsion jadvaldan foylanib, Y ning X ga nisbatan to'g'ri chiziqli regressiya tenglamasini tuzing:

$y \backslash x$	5	8	11	14	17	20	n_y
10	3	5	—	-	-	-	8
15	—	4	4	-	-	-	8
20	-	-	7	35	8	-	50
25	-	-	2	10	8	-	20
50	-	-	-	5	6	3	14
n_x	3	9	13	50	22		n=100

IX-BOB

MATEMATIK PROGRAMMALASHTIRISH

Bugungi ishlab chiqarish jarayonining tobora murakkablashib, bozor munosabatlarining kengayib borish jarayonida har bir ishni tahlil qilib, ulardan to'g'ri xulosa chiqarishga asos beruvchi ilmiy nazariyalar juda zarur bo'lmoqda. Bunday nazariyaning asosini matematik programmalashtirish tashkil etadi.

«Programmalashtirish» deganda masalaning yechimlarini ketma-ket hosil qilish jarayonini tushunish kerak. Bu shunday jarayonki, unda eng avval boshlang'ich yechim topiladi, so'ngra bu yechim qadam-baqadam yaxshilanib boriladi. Bu jarayon eng yaxshi programma topilguncha davom ettiriladi. Har bir bosqichda maxsus ko'rsatkichlar yordamida qanday ish tutish kerakligi, optimal yechimga qanday yaqinlashish kerakligi ko'rsatib boriladi.

Matematik programmalashtirish matematikaning asosan ko'p varoiantali yechimga ega bo'lgan iqtisodiy masalalarning eng yaxshi, maqsadga muvofiq (optimal) yechimini topishga yordam beruvchi bir tarmog'idir.

Matematik programmalashtirish chiziqli programmalashtirish bo'lmagan programmalashtirish va dinamik programmalashtirish deb ataluvchi qismlarni o'z ichiga oladi. Shuni aytib o'tish kerakki, chiziqli bo'lmagan programmalashtirish masalani yechish uchun umumiy universal usul yo'q. Shu paytgacha yaratilgan usullar asosan chiziqli bo'lmagan programmalashtirish masalalarining ayrim xususiy hollari uchun moslashtirilgan. Ayrim chiziqli bo'lmagan programmalashtirish masalalari uchun chiziqli approksimatsiya topilib, ularni chiziqli programmalashtirish usullarini qo'llab yechish mumkin.

Ba'zi iqtisodiy jarayonlar vaqtga bog'liq bo'ladi. Bunday masalalarning turli bosqichlardagi yechimini aniqlash uchun dinamik programmalashtirish usullari qo'llaniladi. Ushbu kitobda biz faqat chiziqli programmalashtirishni ko'rish bilan chegaralanamiz.

9.1-§. Chiziqli programmalashtirish

Agar maqsad funksiyasi va cheklanishlar tizimi noma'lumlarga nisbatan chiziqli bo'lsa, u holda programmalashtirish *chiziqli programmalashtirish* deyiladi. Agar ular chiziqli bo'lmagan ifodalardan tashkil topgan bo'lsa, u holda programmalashtirish chiziqli bo'lmagan programmalashtirish deyiladi.

Umumiy holda chiziqli programmalashtirish masalasi bunday ta'riflanadi. Ushbu

$$\begin{cases} f_1(x_1\ x_2,\dots,\ x_n)=0 \\ f_2(x_1\ x_2,\dots,\ x_n)=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_m(x_1\ x_2,\dots,\ x_n)=0 \end{cases} \tag{9.1}$$

chiziqli cheklanishlar tizimida

$$y=\varphi\ (x_1,\ x_2,\dots,\ x_n) \tag{9.2}$$

chiziqli funksiyaning ekstremum qiymatlari topilsin. Bu yerda *u* funksiya chiziqli bo'lganligi sababli, umumiy holda $\frac{dy}{dx}\neq 0$ bo'ladi. Unda (9.1) shartlarni qanoatlantiruvchi sohaning ichki nuqtalarida funksiya ekstremum qiymatga erishmaydi. Funksiyaga ekstremum qiymat beruvchi nuqta bu sohaning chetlarida yotadi. Shu sababli funksiyaning (9.1) shartli cheklanishlardagi ekstremum qiymatini topish uchun oliy matematika kursidagi funksiyaning shartsiz ekstremum qiymatini topish usullaridan farq qiluvchi maxsus usullar ishlatilishini talab qilinadi. Chiziqli programmalashtirish shunday usullarni o'rganadi.

9.2-§. Iqtisodiy masalalarning matematik modellarini tuzish

Biz yuqorida matematik programmalashtirish ko'p variantali yechimga ega bo'lgan masalalarning optimal yechimini aniqlash uchun qo'llanishini aytgan edik. Bunday masalalarga chiziqli programmalashtirish usullarini qo'llashdan oldin ularning matematik modelini tuzish kerak. Boshqacha aytganda berilgan iqtisodiy masalaning chegaralovchi shartlarini, maqsadini matematik formulalar orqali ifodalab olish kerak. Har qanday iqtisodiy masalaning matematik modelini tuzish uchun:

1) Masalaning iqtisodiy ma'nosini o'rganib, undagi asosiy shartlar va maqsadini aniqlash;

2) Masaladagi noma'lumlarni (topish kerak bo'lgan o'zgaruvchilarni) belgilash;

3) Masalaning shartlarini algebraik tenglamalar yoki tengsizliklar orqali ifodalash;

4) Masalaning maqsadini chiziqli funksiya orqali ifodalash kerak bo'ladi.

Misol tariqasida eng sodda iqtisodiy masalaning matematik modelini tuzish jarayoni bilan tanishamiz.

Parhez masalasi

Sanoatda optimal aralashmalar tayyorlash, qishloq xo'jaligida mollar uchun optimal rasion tayyorlash va ma'lum bir fiziologik xususiyatli kishilar uchun optimal parhez taomlar tayyorlash masalalari umumiy nom bilan «parhez masalasi» deb ataladi.

Faraz qilaylik, kishi organizmi uchun bir sutkada p xil A_1, $A_2,...,A_p$ ozuqa moddalari kerak bo'lsin. Shu jumladan A_1 ozuqa moddasidan bir sutkada b_1 miqdorda, A_2 ozuqa moddasidan b_2 miqdorda va hokazo, A_p dan b_p miqdorda zarur bo'lib, ularni t ta V_1, $B_2,...,V_n$ mahsulotlarning tarkibidan olish mumkin bo'lsin. har bir V_i birlik mahsulotning tannarxi S_i pul birligiga teng bo'lsin. Shu bilan birga har bir B_i mahsulotning tarkibidagi A_i ozuqa moddasining miqdori a_{ij} birlikni tashkil qilsin. Masalaning berilgan o'lchamlari quyidagi jadvalda berilgan bo'lsin.

9.1-jadval

Ozuqa modda / Mahsulot	A_1	A_2	...	A_n	Mahsulot bahosi
V_1	a_{11}	a_{12}		A_{1n}	c_1
V_2	a_{21}	a_{22}	...	A_{2n}	c_2
...	...	...	...	...	...
V_t	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	c_m
Ozuqa modda normasi	b_1	b_2	...	B_n	

Masalaning iqtisodiy ma'nosi: bir kunlik ovqatlanish rejasini shunday tuzish kerakki, natijada kishi organizmi kerakli ozuqa moddalarini to'la qabul qilsin va sarf qilingan xarajatlar minimal bo'lsin.

Bir sutkada ishlatiladigan B_i mahsulotning miqdorini X_i bilan belgilaymiz. Bu holda organizmning A_1 ozuqa moddasiga bo'lgan talabi to'la qondirilsin degan shart quyidagi tenglama orqali ifodalanadi:

$$a_{11}x_{11}+a_{21}x_2+...+a_{m1}x_m=b_1.$$

Xuddi shuningdek, organizmning boshqa ozuqa moddalariga bo'lgan talabi to'la qondiriladigan shart quyidagi tenglamalar tizimi orqali ifodalanadi:

$$\begin{cases} a_{12}x_1+a_{22}x_2+...+a_{m2}x_m=b; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ; \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_m=b_n. \end{cases}$$

Masalaning iqtisodiy ma'nosiga ko'ra, noma'lumlar manfiy bo'lmasligi, ya'ni $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0, \ldots, x_m \geq 0$ bo'lish kerak. Masalaning maqsadi bir sutkalik ovqatlanish uchun sarf qilinadigan xarajatlarni minimallashtirishdan iborat. Bu shart quyidagi chiziqli funksiya orqali ifodalanadi:

$$z_{min}=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_mx_m$$

Shunday qilib, parhez masalasining matematik modelini bunday ifodalash mumkin ekan:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+\ldots+a_{m1}x_m=b_1; \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{m2}x_m=b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\ldots+a_{mn}x_m=b_m. \end{cases} \qquad (9.3)$$

$$x_1\geq0,\ x_2\geq0,\ldots,\ x_m\geq0, \qquad (9.4)$$

$$z_{min}=c_1x_1+\ldots+c_mx_m\ . \qquad (9.5)$$

9.3-§. Chiziqli programmalashtirish masalalarini turli ko'rinishlarda ifodalash

Chiziqli programmalashtirish masalasi umumiy holda quyidagicha ifodalanadi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\geq b_1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\leq b_m, \end{cases} \qquad (9.6)$$

$$x_1\geq0,\ldots,\ x_n\geq0; \qquad (9.7)$$

$$z_{(max)min}=c_1x_1+\ldots+c_nx_n\ . \qquad (9.8)$$

(9.6) va (9.7) shartlarni qanoatlantiruvchi noma'lumlarning shunday qiymatlarini topish kerakki, ular (9.8) chiziqli funksiyaga minimal (maksimal) qiymat bersin. Masalaning (9.6) va (9.7) shartlari uning chegaralovchi shartlari deb, (9.8) *chiziqli funksiyani esa masalaning* m a q s a d i yoki maqsad funksiyasi deb ataladi. Masaladagi (9.6) shartning chap tomoni va maqsad funksiyasi noma'lumlarga nisbatan chiziqli ekani ko'rinib turibdi. Shuning uchun ham (9.6) — (9.8) masala chiziqli programmalashtirish masalasi deb ataladi.

Aniq masalalarda (9.6) shart tenglamalar tizimidan iborat bo'lishi mumkin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{9.9}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots,\ x_m \geq 0, \tag{9.10}$$

$$z_{min} = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m \tag{9.11}$$

(9.9) — (9.11) ko'rinish chiziqli programmalashtirish masalasining kanonik ko'rinishi deb ataladi.
Berilgan (9.9) — (9.14.) masala vektorlar yordamida quyidagicha *ifodalanadi:*

$$A_1X_1 + A_2X_2 + \ldots + A_nA_n = A_0; \tag{9.12}$$

$$x \geq 0; \tag{9.13}$$

$$z_{min} = CX. \tag{9.14}$$

Bu yerda

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ . \\ . \\ . \\ a_{mn} \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ B_m \end{pmatrix}$$

$C = (c1,\ c2, \ldots, c_n)$ — vektor qator
$X = (x1,\ x2, \ldots, x_n)$ — vektor ustun.

Masalaning matritsa yordamidagi ifodasi bunday:

$$AX=A_0; \qquad (9.15)$$

$$X\geq 0; \qquad (9.16)$$

$$z_{min}=CX, \qquad (9.17)$$

bu yerda $S=(s_1, s_2, ..., s_p)$ — matritsa qator, $A=a_{ij}$ koeffitsientlardan tashkil topgan matritsa:

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A_0=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$$ – ustun matritsa

Berilgan masalani yig'indilar yordamida ifodalash ham mumkin:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b \quad (i=1,\ m); \qquad (9.18)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=1,\ n); \qquad (9.19)$$

$$Z_{min}=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (9.20)$$

Chiziqli programmalashtirish masalalarini quyida keltirilgan ta'rif ko'rinishlarida ham ifodalash mumkin.

1-ta'rif. Berilgan (9.9) — (9.11) masalaning *mumkin bo'lgan yechimi* yoki *rejasi* deb, uning (9.6) — (9.7) shartlarini qanoatlantiruvchi $X=(x_1, ...x_p)$ vektorlarga aytiladi.

2-ta'rif. Agar (9.12) yoyilmadagi musbat x_i, koeffitsientli $A_i(i=1, t)$ vektorlar o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmasa, $X=(x_1, x_2, ..., x_p)$ reja *tayanch reja* deyiladi.

3-ta'rif. $X=(x_1, x_2, ..., x_p)$ tayanch rejadagi musbat komponentlar soni t ga teng bo'lsa, bu reja *aynimagan tayanch reja*, aks holda *aynigan tayanch reja* deyiladi.

4-ta'rif. Chiziqli funksiya (9. 11) ga eng kichik yoki eng katta qiymat beruvchi $X=(x_1, ..., x_p)$ kanonik reja masalaning optimal rejasi yoki optimal yechimi deyiladi.

9.4-§. Tengsizlikni tenglamaga aylantirish

p ta noma'lumli

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n \leq b \qquad (9.21)$$

chiziqli tengsizlik berilgan bo'lsin. Bu tengsizlikni tenglamaga aylantirish uchun uning kichik tomoniga manfiy bo'lmagan noma'lum

$$x_{n+1} \geq 0 \qquad (9.22)$$

ni qo'shamiz. Natijada n+1 ta noma'lumli chiziqli tenglama hosil bo'ladi:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_p x_p + x_{p+1} = b. \qquad (9.23)$$

Berilgan (9.21) tengsizlikni tenglamaga aylantirish uchun qo'shilgan $x_{p+1} \geq 0$ noma'lum qo'shimcha o'z g a r u v ch i deb ataladi.

Shunday yo'l bilan chiziqli programmalashtirish masalasining chegaralovchi shartlaridagi tengsizliklarni tenglamaga aylantirish mumkin. Bunda shunga e'tibor berish kerakki, tizimdagi turli tengsizliklarni tenglamaga aylantirish uchun qo'shiladigan qo'shimcha o'zgaruvchilar bir-biridan farqli bo'lishi kerak.

Masalan, chiziqli programmalashtirish masalasining matematik modeli

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{1n} x_n \leq b_1; \\ a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2n} x_n \leq b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ; \\ A_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + ... + a_{mn} x_n \leq b_m, \end{cases} \qquad (9.24)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, n); \qquad (9.25)$$

$$Z_{\min} = c_1 x_1 + ... + c_n x_n \qquad (9.26)$$

ko'rinishda bo'lsa, bu masaladagi tengsizliklarni kichik tomoniga $x_{p+1} \geq 0$, $x_{n+2} \geq 0$, ..., $x_{p+l} \geq 0$ qo'shimcha o'zgaruvchilar qo'shish yordamida tenglamaga aylantirish mumkin. Bu o'zgaruvchilar $2_{\min}$

ga 0 koeffitsient bilan kiritiladi. Natijada berilgan (9.24) — (9.26) masala quyidagi ko'rinishga keltiriladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_{n+1} = b_1; \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + .x_{m+n} = b_m, \end{cases} \quad (9{,}27)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots,\ x_n \geq 0,\ x_{n+1} \geq 0, \ldots,\ x_{m+1} \geq 0, \quad (9.28)$$

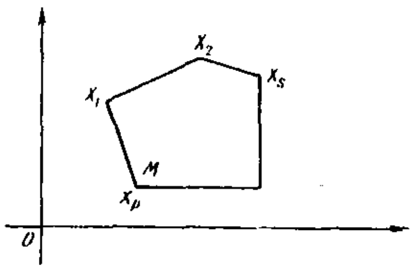
$$Z_{min}\ c_1x_2 + \ldots + c_nx_n + 0(x_{n+1} + \ldots + x_{n+m}). \quad (9.29)$$

9.5-§. Chiziqli programmalashtirish masalasi yechimlarining xususiyatlari

Chiziqli programmalashtirish masalasining rejalari va chiziqli funksiyaning bir qancha xususiyatlari bor. Quyida bularning xususiyatlariga doir bo'lgan teoremalarni (isbotsiz) va ulardan kelib chiqadigan ba'zi xulosalarni keltiramiz.

1-teorema. Chiziqli programmalashtirish masalasining rejalari qavariq to'plamni tashkil etadi.

2-teorema. Chiziqli programmalashtirish masalasining chiziqli funksiyasi o'zining optimal qiymatiga shu masalaning rejalaridan tashkil topgan qavariq to'plamning chetki nuqtasida erishadi. Agar chiziqli funksiya *M* qavariq to'plamning birdan ortiq, chetki nuqtasida optimal qiymatga erishsa, u shu nuqtalarning qavariq kombinatsiyasidan iborat bo'lgan ixtiyoriy nuqtada ham o'zining optimal qiymatiga erishadi (20-rasm).



20-rasm

3-teorema. Agar K ta o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan A_1, A_2 ..., A_k vektorlar berilgan bo'lib, ular uchun

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_k x_K = A_0$$

tenglik barcha $x_i \geq 0$ larda o'rinli bo'lsa, $x=(x_1, x_2, \ldots, x_K, 0, \ldots, 0)$ *vektor M qavariq to'plamning chetki nuqtasi bo'ladi.*

Yuqorida tanishgan teoremalardan quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin.

1-xulosa. Chiziqli programmalashtirish masalasi tayanch rejalaridan tashkil topgan to'plam M qavariq, to'plamning chetki nuqtalar to'plamiga mos keladi va aksincha, har bir tayanch reja K to'plamining biror chetki nuqtasiga mos keladi.

2-xulosa. Chiziqli programmalashtirish masalasining optimal yechimini M to'plamning chetki nuqtalari orasidan qidirish kerak.

Chiziqli programmalashtirish masalasini yechish usullari M to'plamning chetki nuqtalari ichida optimal nuqtani qidirishga asoslangan. Bu usullardan biri simpleks usuldir. Simpleks usul asoslarining algoritm tarhi bilan tanishishdan oldin chiziqli programmalashtirish masalasining geometrik interpretatsiyasi bilan tanishaylik.

9.6-§. Chiziqli programmalashtirish masalasining geometrik talqini

Bizga chiziqli

$$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \qquad (9.30)$$

funksiyaning quyidagi chiziqli

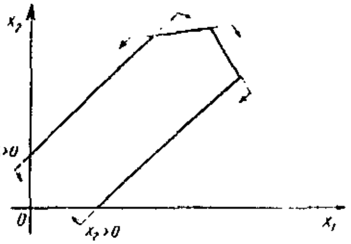
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad (i = 1, m); \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, n) \end{cases} \qquad (9.31)$$

cheklanish shartlarini qanoatlantiradigan minimumini topish talab qilingan bo'lsin. Tengsizliklar tizimi (9.31)ni qanoatlantiradigan ixtiyoriy $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sonlar to'plami uning yechimlari deyiladi., Agar (9.31) tizim hech bo'lmasa bitta yechimga ega bo'lsa tizim birgalikda deyiladi. Aks holda esa, tizim birgalikda emas deyiladi.

Bundan keyin biz (9.31) tengsizliklar tizimini birgalikda deb faraz qilamiz. $p=2$ bo'lganda (9.31) dan quyidagi tizimni hosil qilamiz:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i; \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \qquad (9.32)$$

Bu tengsizliklarning har biri $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2=b_i$ to'g'ri chiziq bilan, yechimlarning manfiy bo'lmaslik shartlari $x_j=0$, $j=1,2$ esa $x_j=0$ to'g'ri chiziq bilan chegaralangan yarim tekisliklar bo'ladi. (9.32) tengsizliklar tizimi birgalikda bo'lganligi uchun hech bo'lmaganda bitta yechimga ega bo'ladi, ya'ni chegaraviy to'g'ri chiziqlar bir-biri bilan kesishib, o'rinli yechimlar to'plamini hosil qiladi. Demak, $p=2$ bo'lganda o'rinli yechimlar to'plami ko'pburchakning nuqtalaridan iborat bo'ladi. Masalan, $m=4$ bo'lganda o'rinli yechimlar to'plami 21-rasmda ko'rsatilgan ko'pburchakdan iborat bo'ladi. Agar (9.31) da $p=3$ bo'lsa, bu tengsizliklarning har biriga geometrik nuqtai nazardan qaraganda ularning har biri



21- rasm

$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3=b_i$ tekisliklar bilan, yechimlarning manfiy bo'lmaslik shartlari —— $x_j \geq 0$ lar esa, $x_j=0$ tekisliklar bilan chegaralangan uch o'lchovli yarim fazolardan iborat bo'ladi.

Ikkinchi tomondan, (9.31) tizim birgalikda bo'lganligi sababli bu yarim fazolar kesishib, biror bir ko'pyoqlik hosil qiladi. Ko'pyoqlik esa o'rinli yechimlar to'plamini beradi, ya'ni uni qanoatlantiradi va nihoyat, (9.31) da $n>3$ bo'lsa, bu tengsizliklarning har biri gipertekisliklar bilan, yechimlarning manfiy

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+...+a_{in}x_n=b_i$$

bo'lmaslik shartlari esa $x_i=0$ gipertekisliklar bilan chegaralangan yarim fazolardan iborat bo'ladi. Bu yarim fazolar kesishib o'rinli yechimlar to'plami bo'lgan birorta ko'pyoqlikni hosil qiladi.

Bu mulohazalar chiziqli programmalashtirish masalalarini geometrik nuqtai nazardan quyidagicha izohlashga imkon beradi: *o'rinli yechimlar to'plami bo'lgan ko'pyoqlikning shunday nuqtasining* koordinatalarini topiladiki, bu nuqtada maqsad funksiyasi (9.30) o'zining eng kichik qiymatiga erishadi.

9.7-§. Chiziqli programmalashtirish masalasini grafik usulda yechish

Chiziqli programmalashtirish masalasini grafik usulda *yechish* uni geometrik tasvirlashga asoslangan. Ikki o'lchovli fazoda (tekislikda) berilgan chiziqli programmalashtirish masalalarini yechish uchun grafik usulni qo'llash mumkin. $n\geq3$ o'lchovli fazoda berilgan masalalarni grafik usul bilan yechish noqulay, chunki bu holda yechimlardan tashkil topgan qavariq ko'pburchakni yasash qiyinlashadi.

Ikki o'lchovli fazoda berilgan quyidagi chiziqli programmalashtirish masalasini ko'raylik:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m, \end{cases} \qquad (9.33)$$

$$x_1\geq0, \quad x_2\geq0, \qquad (9.34)$$

$$z_{min}\ c_1x_2+c_2x_2. \qquad (9.35)$$

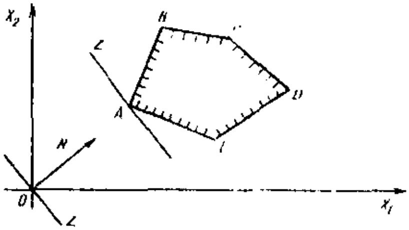
Faraz qilaylik, (9.33) tizim (9.34) shartli qanoatlantiruvchi yechimlarga ega hamda ulardan tashkil topgan to'plam chekli bo'lsin. (9.33) va (9.34) tengsizliklarning har biri $a_{ij}x_i+a_{12}x_2=b_i$, $x_1=0$; $x_2=0$ chiziqlar bilan chegaralangan yarim tekisliklarni ifodalaydi. Chiziqli funksiya ham ma'lum bir o'zgarmas qiymatda to'g'ri chiziqni ifodalaydi.

$$c_1x_2+c_2x_2=\text{const}$$

Yechimlardan tashkil topgan qavariq to'plamni hosil qilish uchun to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan ko'pburchakni yasaymiz.

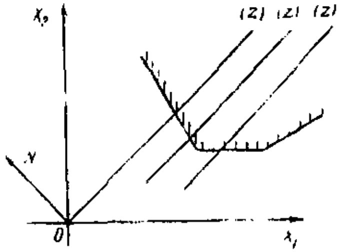
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 = b_m, \\ \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0; \end{cases}$$

Faraz qilaylik bu ko'pburchak *AVSDE* bo'lsin (22-rasm).

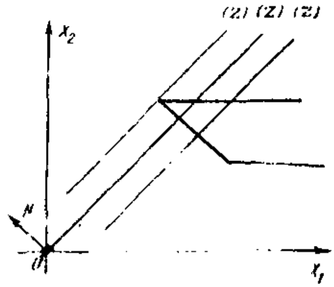


22-rasm

Chiziqli funksiyani ixtiyoriy o'zgarmas S_0 songa teng deb olaylik. Natijada $c_1 x_1 + c_2 x_2 =$ sonst$= S_0$ to'g'ri chiziq hosil bo'ladi. Bu to'g'ri chiziqni N $(c_1; c_2)$ vektor yo'nalishida yoki unga teskari yo'nalishda o'ziga parallel ravishda surib borib qavariq ko'pburchakning chiziqli funksiyasiga eng kichik qiymat beruvchi chetki nuqtasini aniqlaymiz. 23-rasmdan ko'rinib turibdiki, chiziqli funksiya o'zining minimal qiymatiga qavariq ko'pburchakning A nuqtasida erishadi. A $(x_1;\ x_2)$ nuqtaning koordinatasi masalaning chiziqli funksiyasiga minimal qiymat



23-rasm



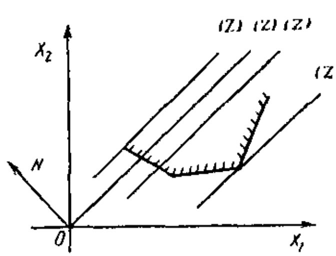
24-rasm

beruvchi optimal yechimi bo'ladi. Uning koordinatalari *AV* va *AE* to'g'ri chiziqlarni ifodalovchi tenglamalar tizimini yechish orqali aniqlanadi.

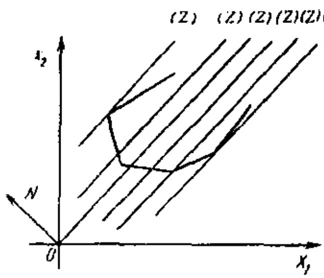
Agar *yechimlardan tashkil topgan qavariq ko'pburchak* chegaralanmagan bo'lsa ikki holdan, biri yuz berishi mumkin:

1 - h o l. $c_1 x_1+c_2 x_2$ =sonst to'g'ri chiziq *N* vektor bo'yicha yoki unga qarama-qarshi, yo'nalishda siljib borib har doim qavariq ko'pburchakni kesib o'tadi. Ammo na minimal, na maksimal qiymatga erishmaydi. Bu holda chiziqli funksiya quyidan va yuqoridan chegaralanmagan bo'ladi (23-rasm).

2 - h o l. *S\X1-^s_2X2 = sonst to'g'ri chiziq vektor bo'yicha siljib borib* qavariq, Ko'pburchakning birorta chetki nuqtasida o'zining minimum yoki maksimum qiymatiga erishadi. Bu holda chiziqli funksiya yuqoridan chegaralangan, quyidan esa chegaralanmagan (24-rasm) yoki quyidan chegaralangan yuqoridan esa chegaralanmagan bo'lishi mumkin (25-rasm). Ba'zi chiziqli funksiyalar ham quyidan ham yuqoridan chegaralangan bo'lishi mumkin.



25-rasm.



26-rasm.

Misol.

$$\begin{cases} 5x_1+4x_2 \le 20; \\ 4x_1+5x_2 \le 20; \quad z_{min} = 2x_1-5x_2. \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Masalani grafik usulda yeching (26-rasm)

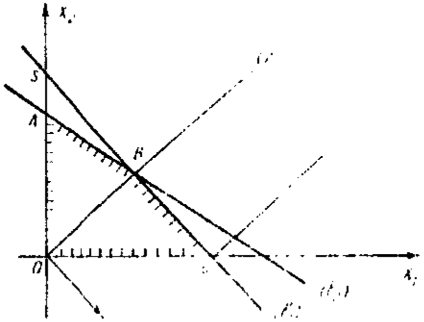
Y e ch i sh. Yechimlardan tashkil topgan qavariq ko'pburchakni yasash uchun koordinatalar tizimida

$$5x_1+4x_2=20 \ (l_1); \quad 4x_1+5x_2=20 \ (l_2)$$

chiziqlarni yasaymiz (27-rasm) Berilgan tengsizliklarni qanoatlantiruvchi yechim shtrixlangan *OAVS* ko'pburchakni tashkil qiladi endi koordinatlar boshidan N=(2,-5) vektorni yasaymiz va unga tik bo'lgan to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziq

$$2x_1+5x_2=\text{const}$$

tenglama orqali ifodalanadi. Uni vektor yo'nalishida o'ziga parallel ravishda siljitib boramiz. Natijada chiziqli funksiyaga maksimum qiymat beruvchi c=(4,0) nuqtani topamiz. Bu nuqtaning koordinatlari x_1=4, x_2=0 masalaning optimal yechimi bo'ladi va z_{max}=8 bo'ladi.



27-rasm

9.8-§. Simpleks usul

Yuqorida ko'rganimizdek, chiziqli programmalashtirish masalasining optimal rejasini uning barcha rejalarida tashkil topgan qavariq to'plamning chetki nuqtalari orasidan izlash kerak. Bunday nuqtalar soni yoki boshqacha aytganda masaladagi tayanch rejalar soni *p* dan *t* tadan tuzilgan S_n^m guruhlash orqali aniqlanadi. Masaladagi noma'lumlar soni *(p)* va tenglamalar soni (*m*) katta bo'lganda barcha tayanch rejalarning optimalligini tekshirib chiqish ancha qiyin bo'ladi. Shuning uchun tayanch rejalarni tartib bilan tekshirib chiqib, ular ichidan optimal rejani aniqlab beruvchi echish tarhi(sxemasi)ni berish talab qilinadi.

Chiziqli programmalashtirish masalasini yechishning bunday tarhlaridan biri simpleks usuldir. Bu usul boshlang'ich tayanch rejadan chekli sondagi iteratsiyadan keyin optimal rejani hosil qilish yo'lini ko'rsatadi va bunda har bir navbatdagi iteratsiya oldingisiga nisbatan optimal rejaga yaqinroq rejani beradi. Yechish jarayoni optimal yechim topilguncha yoki masalaning chiziqli funksiyasi chekli minimumga ega emasligi aniqlanguncha davom ettiriladi.

1. Masalaning tayanch rejalarini tuzish

Chiziqli programmalashtirish masalasi berilgan bo'lsin va masalada t ta o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan birlik vektorlar mavjud deb faraz qilamiz. Bu vektorlar A_1, A_2, ... A_t bo'lsin. U holda masala quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{cases} x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b; \\ x_2 + a_{2m+}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{9.36}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_m \geq 0,\ x_{m+1} \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0 \tag{9.37}$$

$$z_{min} = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n. \tag{9.38}$$

(9.36) tizimni vektor ko'rinishda yozamiz:

$$A_1X_1 + A_2X_2 + \ldots + A_tX_t + A_{t+l}X_{t+1} + A_pX_p = A_0, \tag{9.38}$$

bu yerda

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, A_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}, A_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1,m+1} \\ a_{2,m+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ M_{m,m+1} \end{pmatrix}, \ldots,$$

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{pmatrix}, A_{m+1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}.$$

$A_1, A_2, ..., A_l$ vektorlar p o'lchovli fazoda o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan birlik vektorlardan iborat bo'lib, bu fazoning bazisini tashkil qiladi. (9.36) da $x_1, x_2, ... x_l$ o'zgaruvchilarni bazis o'zgaruvchilar, $x_{l+1}, x_{l+2}, ..., x_p$ o'zgaruvchilarni esa bazis bo'lmagan o'zgaruvchilar deb qabul qilib, bazis bo'lmagan o'zgaruvchilarni nolga tenglaymiz, bazis o'zgaruvchilarni esa mos ravishda (9.36) tizimning ozod hadlariga tenglaymiz. Natijada

$$X_0=(x_1=b_1, x_2=b_2, ..., x_l=b_l, x_{m+1}=0, ..., x_p = 0) \quad (9.39)$$

boshlang'ich rejani hosil qilamiz. Bu rejaga quyidagi

$$A_1X_1+A_2X_2 + ...+A_lX_l = A_0 \quad (9.40)$$

yoyilma mos keladi. Bu yoyilmadagi $A_1, A_2, ..., A_m$ vektorlar o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan vektorlar bo'lmaganligi sababli, topilgan boshlang'ich (9.39) reja tayanch reja bo'ladi.

Endi boshlang'ich rejadan foydalanib yangi tayanch rejani topish mumkinligini ko'rsatamiz. $A_1, A_2, ..., A_m$ vektorlar p o'lchovli fazoning bazisini tashkil qiladi. Shu sababdan $A_1, A_2, ..., A_p$ vektorlarning ixtiyoriysini L; bazis vektor orqali quyidagicha ifodalash mumkin:

$$A_i=X_{1i}A_1+X_{2i}A_2+...+X_{li}A_l. \quad (9.41)$$

Faraz qilaylik, birorta vektor, masalan A_{m+1} -vektorning yoyilmasidagi koeffitsientlardan kamida bittasi (masalan, $x_{i,\ l+1}$) noldan farqli bo'lsin:

$$A_{m+1}=X_{,m+1}A_1+X_{2,m+2}A_2+...+X_{m,m+1}Am. \quad (9.42)$$

Ixtiyoriy $\theta>0$ son olib (9.42) tenglikning ikkala tomonini bu songa ko'paytiramiz va (9.40) ifodada hadma-had ayiramiz, natijada quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$(X_1-\theta X_{1,m+1})A_1+(X_2-\theta X_{2,m+1})A_2+...+$$
$$+(X_m-\theta X_{m,m+1})A_m+\theta A_{m+1}=A_0. \quad (9.43)$$

Agar $X_1-\theta X_{1,m+1}\geq 0,\ X_2-\theta X_{2,m+1}\geq 0, ...,$
$X_m-\theta X_{m,m+1}\geq 0$ bo'lsa,

$$X_1=(X_1-\theta X_{1,m+1}, X_2-\theta X_{2,m+1}, ..., X_m-\theta X_{m,m+1}, 0, 0, ..., 0$$

vektor reja bo'ladi, $\theta>0$ bo'lganligi sababli, X_1 rejaning komponentalari manfiy bo'lmaydi, shuning uchun; $x_{2,m+1}>0$ bo'lgan komponentalarni *ko'ramiz. Demak shunday $\theta>0$ ni topishimiz kerakki,* $x_{1,+1}>0$ bo'lgan; x_i-θ_{im+1} bo'ladi. Bundan

$$0 \le \theta \le \frac{X_i}{X_{i,m+1}}.$$

X_1 reja ixtiyoriy

$$0 < \theta < \min_{x_{i,m+1}>0} \frac{X_i}{X_{i,m+1}}.$$

tengsizlikni *qanoatlantiruvchi θ uchun reja bo'ladi; Lekin tayanch reja* o'z ichiga $t+1$ ta komponentga olmaydi, shuning uchun x_1 rejadagi kamida bir komponentni nolga aylantirish kerak. Faraz qilaylik,

$$\theta=\theta_0= \min_{x_{i,m+1}>0} \frac{X_i}{X_{i,m+1}} = \frac{X_k}{X_{k,m+1}}$$

bo'lsin. Bu holda X_1 rejani k - kompopentasi X_k-$\theta X_{k,m+1}=0$ bo'ladi. θ ning qiymatini (9.43) ga qo'yib quyidagi yoyilmani xosil qilamiz:

$$X'_2A_2+X'_3A_3+\ldots+X'_tA_t+X'_{t+1}A_{t+1}=A_0.$$

Bu yoyilmaga yangi tayanch reja

$$X'_1=(0;\ X'_2\ X'_3;\ldots,\ X'_tX'_{t+1};\ 0;\ldots,\ 0)$$

mos keladi; bu erda $X'_i=X_i$-$\theta_0X_{i,m+1}$ (i=2,3,..., m), $X'_{m+1}=\theta_0$. Bundan keyingi tayanch rejani hosil qilish u bazisga kirmagan ixtiyoriy vektorning bazis vektor orqali yoyilmasini aniqlash hamda shunday 0o>0 sonni topish kerakki, uning yordamida yangi vektor bazisga kirsin va eski bazis vektorlardan birortasi bazisdan chiqsin. Shunday qilib, yangi tayanch rejalarni hosil qilish jarayoni bazisga kiritiladigan va bazisdan chiqariladigan vektorni tanlashdan iboratdir.

Misol. Berilgan masalaning tayanch rejasini tuzing va yangi *tayanch rejaga o'ting:*

$$\begin{cases} x_1+2x_4-3x_5-2x_6=5; \\ x_2+3x_4-2x_5-4x_6=6; \\ x_3+4x_4-x_5-2x_6=3, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j=1,6), \ z_{min}=x_1-x_2-x_3+x_4-2x_5+x_6.$$

Y e ch i sh. Tizimni vektor ko'rinishda yozamiz:

$$A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3+A_4x_4+A_5x_5+A_6x_6=A_0,$$

bu erda A_1, A_2, A_3 — bazis vektorlar, x_1, x_2, x_3 — bazis o'zgaruvchilar, x_4, x_5, x_6— bazis bo'lmagan o'zgaruvchilar. Bazis bo'lmagan o'zgaruvchilarga nol qiymatlar berib, boshlang'ich

$$x_0=(x_1=5; \ x_2=6; \ x_3=3; \ x_4=0; \ x_5=0; \ x_6=0)$$

rejani topamiz. Bu rejaga

$$5A_1+6A_2+3A_3=A_0 \qquad (9.44)$$

yoyilma mos keladi. Yangi tayanch rejaga o'tish uchun bazisga kirmagan vektordan bittasini bazisga kirmagan vektorlardan bittasi bilan almashtiramiz. Masalan, A_4 vektor bilan almashtiramiz va uning bazis vektorlar bilan yoyilmasini topamiz:

$$2A_1+3A_2+4A_3=A_4 \qquad (9.45)$$

Bu yoyilmaning ikki tomonini $\theta>0$ ga ko'paytirib, (9.44) ifodadan hadma-had ayiramiz:

$$(5-2\theta)\ A_1+(6-3\theta)\ A_2+(3-4\theta)\ A_3+\theta A_4=A_0. \qquad (9.46)$$

Bazisdan chiqariladigan vektorni aniqlash uchun $\theta_0=\min\left(\frac{5}{2}, \frac{6}{3}\right)=\frac{6}{3}=2$ ni topamiz. $\theta=2$ qiymatni (9.46) ga qo'yib, A_2 vektorni bazisdan chiqaramiz va quyidagi yoyilmaga ega bo'lamiz:

$$A_1+11A_3+2A_4=A_0.$$

Bu yoyilmaga

$$X_1=(x_1=1;\ x_2=0;\ x_3=11;\ x_n=2;\ x_5=0;\ x_6=0)$$

reja mos keladi. Endi A_4 ning o'rniga A_5 ni bazisga kiritamiz. Bu vektorning bazis vektorlar bo'yicha yoyilmasi:

$$-3A_1-2A_2-A_3=A_5.$$

(9.47) ifodaning ikki tomonini $\theta>0$ songa ko'paytirib, natijani (9.44) dan ayirib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$(5-3\theta)\ A_1+(6-2\theta)\ A_2+(3+\theta)\ A_3+\theta A_5=A_0.$$

Bu yoyilmadan ko'rinadiki, birorta ham vektorni bazisdan chiqarib bo'lmaydi. Bu yoyilmaga mos keluvchi

$$X_2=(5+3\theta;\ 6+2\theta;\ 3+\theta;\ 0;\ \theta;\ 0)$$

reja tayanch reja bo'lmaydi, sababi $\theta>0$ shart bajarilmaydi va 4 ta musbat komponentani o'z ichiga oladi.

2. Optimallik sharti. Optimal rejani topish

Quyidagi

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \tag{9.48}$$

$$x_j\geq 0,\ (j=1,n), \tag{9.49}$$

$$z_{\min}=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \tag{9.50}$$

chiziqli programmalashtirish masalasining rejalari mavjud va har bir tayanch reja xosmas deb faraz qilamiz. Masalaning

$$X=(x_1=b_1;\ x_2=b;\ \ldots,\ x_m=b_m;\ x_{m+1}=0,\ \ldots,\ x_n=0)$$

tayanch rejaga mos keluvchi o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan A_1, $A_2 \ldots A_m$ vektorlar tizimi ma'lum bo'lsin. U holda

$$A_1X_1+A_2X_2+\ldots+A_mX_m=A_0 \qquad (9.51)$$

va

$$S_1X_1+S_2X_2+\ldots+S_mX_m=Z_0 \qquad (9.52)$$

Bu erda Z_0 – chiziqli funksiyaning X tayanch rejadagi qiymati, $X_i>0$; C_i – chiziqli funksiyaning koeffitsientlari: A_1, A_2, ..., A_m vektorlar o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan vektorlar bo'lganligi sababli ixtiyoriy bazis bo'lmagan A_i vektorning bu vektorlar orqali faqat bitta yoyilmasini topish mumkin:

$$X_{1i}A_1+X_{2i}A_2+\ldots+X_{mi}A_m=A_i. \qquad (9.53)$$

Bu vektorga chiziqli funksiyaning

$$S_1X_{1i}+C_2X_{2i}+\ldots+C_nX_{ni}=Z_i. \qquad (9.54)$$

qiymati mos keladi. A_i vektorga mos keluvchi chiziqli funksiyaning koeffitsientini S_i bilan belgilaymiz. U holda quyidagi teoremalar o'rinli bo'ladi.

1-teorema. *Agar X_0 tayanch rejada tayinlangan j uchun Z_i-C_i>0 tengsizlik o'rinli bo'lsa, X_0 reja optimal reja bo'lmaydi va shunday X reja topish mumkin bo'ladiki, uning uchun $Z(X)<Z(X_0)$ tengsizlik o'rinli buladi.*

Isbot. (9.53) va (9.22) ifodalarni $\theta>0$ ga ko'paytirib, mos ravishda (9.51) va (9.52) ifodalardan ayiramiz. Natijada quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$(X_1\text{-}\theta X_{1i})A_1+(X_2\text{-}\theta X_{2i})A_2+\ldots+(X_m\text{-}\theta X_{mi})A_m+\theta A_i=A_0;$$

$$(X_1\text{-}\theta X_{1i})C_1+(X_2\text{-}\theta X_{2i})C_2+\ldots+(X_m\text{-}\theta X_{mi})C_m+$$
$$+\theta C_i=Z(X_0)\text{-}\theta(Z_i\text{-}C_i). \qquad (9.56)$$

Agar (9.55) dagi A_1, A_2, ..., A_m vektorlar oldidagi koeffitsientlar manfiy bo'lmasa, ga mos keluvchi yangi rejaga ega bo'lamiz. Ma'lumki X_1, X_2, ..., X_m noma'lumlar musbat hamda $\theta>0$ uchun (9.55) dagi A_1, A_2, ..., A_m, A_i vektorlarning har biri oldidagi koeffitsientlarining manfiy bo'lmasligiga erishish mumkin.

Teoremaning shartiga ko'ra,

$$Z_i\text{-}\ C_i>0,$$

shuning uchun

$$Z(X)=Z=Z_0-\theta(Z_i-C_i)<Z_0=Z(X_0).$$

Teorema isbot qilindi.

2-teorema. Agar $X=(X_1, \ldots, X_m)$ *tayanch reja uchun* $Z_i - C_i \leq 0$ *o'rinli bo'lsa, bu reja optimal reja bo'ladi.*

Bu teoremaning isboti 1-teoremaning isboti kabi bo'ladi.

Bu teoremadan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

1-natija. $Z_i - C_i \leq 0$ tengsizlik chiziqli programmalashtirish masalasining minimal qiymatining rejasini tuzish uchun optimallik sharti bo'ladi. $Z_i - C_i$ ayirma esa rejaning bahosi deyiladi.

Shunday qilib, masalaning minimal qiymatining optimal rejasini tuzish uchun $Z_i - C_i$ ayirmaning musbat bo'lmasligi yetarli va zarurdir.

2-natija. $Z_i - C_i \geq 0$ tengsizlik chiziqli programmalashtirish masalasining maksimum qiymatining rejasini tuzish uchun optimallik sharti bo'ladi. Shunday qilib, masalaning maksimum qiymatining optimal rejasini tuzish uchun $Z_j - C_j$ ayirmaning manfiy bo'lmasligi yetarli va zarurdir.

3. Simpleks usul algoritmi

Yuqoridagi 1- va 2- teoremalarga asosan, berilgan boshlang'ich rejadan boshlab tayanch rejalar ketma-ketligini hosil qilib borib, bu *jarayonni optimal yechim topilguncha davom ettirish mumkin.*

Faraz qilaylik,

$$X=(X_1, X_2, .., X_t)$$

masalaning boshlang'nch tayanch rejasi, A_1, A_2, ..., A_t shu rejaga mos keluvchi o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan vektorlar tizimi bo'lsin. Bu vektorlardan tashkil topgan $(A_1, A_2, \ldots, A_t)$ matritsani V bilan belgilaymiz. U holda $VX = A_0$. Bundan

$$X=V^{1} \cdot A_0.$$

Umumiy ko'rinishda

$$X_i=V^{1} \cdot A_i.$$

kelib chiqadi. Bu yerda

$$X=(X_1, X_2, \ldots, X_t),\ X_i=(X_{1i}, X_{2i}, \ldots, X_{ti})$$

vektor ustunlar.

Simpleks jarayonni boshlashdan oldin masalaning vektorlarini quyidagicha guruhlaymiz:

$$(A_0 \mid A_1, A_2, \ldots, A_m \mid A_{m+1}, \ldots, A_n)$$

yoki

$$(A_0 \mid V \mid A_{m+1}, \ldots, A_n) \tag{9.57}$$

Elementlari ayrim qismlardan iborat bo'lgan (9.57) matritsani V ga ko'paytiramiz va quyidagiga ega bo'lamiz:

$$(V^1 A_0 \mid V^1 V \mid V^1 A_{m+1}, \ldots, V^1 A_n)$$

yoki

$$(X \mid J_m \mid X_{m+1}, \ldots, X_n)$$

So'ngra har bir j=1,n uchun Z_j - C_j ni hisoblaymiz. Agar barcha j lar uchun Z_j - $C_j \geq 0$ bo'lsa, 2-teoremaga asosan topilgan tayanch reja optimal reja bo'ladi. Agar Z_j - C_j ayirma ba'zan j lar uchun musbat bo'lsa, 1-teoremaga asosan topilgan tayanch reja optimal reja bo'lmaydi va bu rejani optimal rejaga yaqin bo'lgan boshqa reja bilan almashtirish kerak bo'ladi.

Berilgan masalada dastlabki A_1, A_2, ..., A_t vektorlar t o'lchovli vektor fazodagi bazisni tashkil qilsin, ya'ni $V=(A_1, L_2, \ldots A_t)=J_t$ bo'lsin, bu erda J_t matritsa t o'lchovli birlik matritsa. Bu holda V^{-1} V = J_t bo'lganligi sababli

$$X=A_0 \text{ va } X_i=A_i \text{ bo'ladi.}$$

Masalaning berilganlarini 9.2-jadvalga joylashtiramiz (chiziqli tizimi $AX=V$ ko'rinishda berilgan masala uchun x_i=b, x_{ij}=a_{ij} deb qabul qilamiz).

Z_i ifoda X vektor-ustunning S vektor-ustunga skalyar ko'paytmasidan iborat, ya'ni

$$Z_0=\sum_{i=1}^{n} C_i \cdot X_i,$$

$$Z_j=\sum_{i=1}^{m} C_i \cdot X_{ij}.$$

9.2-jadval

Hisoblash birinchi iteratsiyasi

i	Bazis vektor	C	A_0 (reja)	S_1	S_2	...	S_m	S_{m+1}	...	S_n
				A_1	A_2	...	A_m	A_{m+1}	...	A_n
1	A_1	C_1	b_1	1	0	...	0	$A_{1,\,m+1}$	...	X_{1n}
2	A_2	C_2	b_2	0	1	...	0	$A_{2,\,m+1}$	...	X_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
m	A_m	C_m	b_m	0	0	...	1	$X_{m,m+1}$	...	X_{mn}
$m+1$	$Z_j - C_j$	$Z_j - C_j$	Z_0	$Z_1 - C_1$	$Z_2 - C_2$	...	$Z_m - C_m$	$Z_{m+1} - C_{m+1}$	...	$Z_n - C_n$

Z_0 va Z_j - C_j larni jadvalning $t+1$ — qatoridagi tegishli ustunlarga joylashtiramiz. Bazis vektorlar uchun har doim $Z_j=C_j=0$ bo'ladi.

Agar $Z_j - C_j \leq 0$ bo'lsa,

$$X=(X_1=b_1;\ X_2 = b_2;\ ...,\ X_l = b_l)$$

optimal reja bo'ladi. Bu rejadagi chiziqli funksiyaning qiymati Z_0 ga teng.

Endi kamida bitta j uchun Z_j — S_j<0 bo'lsin deb faraz qilaylik. Bu holda topilgan tayanch rejani optimal rejaga yaqinroq reja bilan almashtirish kerak, buning uchun

$$\max_{Zj-Cj>0} (Z_j - S_j) = Z_k - S_k = \Delta_k$$

shartni qanoatlantiruvchi A_i vektorni bazisga kiritib, bazisdan

$$\min_{Xik>0} \frac{X_i}{X_{ik}} = \frac{X_i}{X_{ik}} = \theta$$

shartni qanoatlantiruvchi A_i vektorni chiqarish kerak bo'ladi.

Yangi reja uchun A_1, $A_2,...,A_{i-1}$, $A_{i+1},...,A_l,A_k$ vektorlar bazis vektorlar bo'ladi. Yangi tayanch rejani hosil qilish va uning optimal reja ekanligini tekshirish uchun A_0 va A_j vektorlarning bazis vektorlar orqali yoyilmasini hosil qilish kerak.

Dastlabki bazis vektorlaridan tuzilgan matritsa birlik matritsadan iborat edi, ya'ni

$$(A_1,\ A_2,\ ...,\ A_m=J).$$

Shuning uchun

$$A_0=X_1A_1+X_2A_2+...+X_iA_i+...X_mA_m; \qquad (9.58)$$

$$A_k=X_{1k}A_1+X_{2k}A_2+...+X_{ik}A_i+...X_{mk}A_m; \qquad (9.59)$$

$$A_j=X_{1j}A_1+X_{2j}A_2+...+X_{ij}A_i+...X_{mj}A_m; \qquad (9.60)$$

(9.59) dan

$$A_i = \frac{1}{X_{ik}}(A_k - X_{1k}A_1 - X_{2k}A - ... - X_{dk}A_m). \qquad (9.61)$$

A_i ning bu qiymatini (9.58) ga qo'yamiz, natijada quyidagiga ega bo'lamiz:

$$A_0=X_1A_1+X_2A_2+\ldots+$$

$$+\left[\frac{Xj}{Xik}(Ak-_1 kA-X_{2k}A_2-\ldots-X_{mk}A_m)\right]+\ldots+X_mA_m$$

yoki

$$A_0=\left(X_1-\frac{X_j}{X_{ik}}X_{1k}\right)A_1+\ldots+\frac{X_j}{X_{ik}}A_k+\ldots+\left(X_m-\frac{X_j}{X_{ik}}\right)A_m.$$

Shunday qilib, $X_1=(X'_1, X'_2, \ldots, X'_l)$ yangi tayanch reja quyidagi formulalar orqali hisoblanadi;

$$\begin{cases} X'_i=X_i-\dfrac{X_j}{X_{jk}}X_{ik} \quad (i\neq 1); \\ X'_k=\dfrac{X_{ij}}{X_{jk}}. \end{cases} \tag{9.62}$$

Xuddi shuningdek, (9.61) ni (9.60) ga qo'yib A_i vektorning yangi bazis vektorlar bo'yicha yoyilmasini hosil qilamiz:

$$A_j=X'_{1j}A_1+X'_{2j}A_2+\ldots+X'_{kj}A_1+\ldots+X'_{mj}A_m,$$

bu yerda

$$\begin{cases} X'_{ij}=X_{ij}-\dfrac{X_{ij}}{X_{jk}}X_{ik}; \\ X'_{kj}=\dfrac{X_{ij}}{X_{jk}}. \end{cases} \tag{9.63}$$

(9.62) va (9.63) ni birlashtirib, j=0,1, 2,...,h lar uchun yangi tayanch rejani va A_j vektorlarning yangi bazis vektorlar bo'yicha yoyilmasining formulasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} X'_{ij} = X_{ij} - \dfrac{X_{ij}}{X_{jk}} X_{ik}; \\ X'_{ij} = \dfrac{X_{ij}}{X_{jk}}. \end{cases} \qquad (9.64)$$

Bu formula Jordan — Gaussning to'la ajratish formulasidir $j=k$ da

$$X'_{ik} = X_{ik} - \frac{X_{ik}}{X_{jk}} X_{ik} = 0;$$

$$X'_{jk} = \frac{X_{jk}}{X_{jk}} = 1.$$

Yangi bazisga kiritilayotgan vektorning X_{ik} ga (bundan keyin bu elementni aniqlovchi element deb ataymiz) mos keluvchi elementi 1 ga teng bo'lib, qolgan elementlari 0 ga teng bo'ladi.

Yangi reja uchun

$$Z_i\text{-}C_i=C_1X'_{1i}+C_2X'_{2i}+\ldots+C_mX'_{mi}\text{-}Cj$$

bo'lganligi sababli (9.63) dan foydalanib quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$Z'_0\text{-}C_j=Z_j\text{-}C_j\text{-}\frac{X_{ij}}{X_{ik}}(Z_k - C_k). \qquad (9.65)$$

Xuddi shuningdek, $X'i$ ning qiymatini (9.62) dan

$$Z_i\text{-}C_i=C_1X'_{1i}+\ldots+C_kX'_k+\ldots+C_mX'_m$$

ifodaga qo'yib

$$Z'_0 = Z_0 - \frac{X_{ij}}{X_{ik}}(Z_k - C_k). \qquad (9.66)$$

ni topamiz.

Yuqoridagilardan xulosa qilib aytganda, simpleks jadval ustida tartib bilan quyidagi ishlarni bajarish kerak:

1. Har bir j uchun Z_j—S_j=Δ_j lar tekshiriladi. Agar barcha j lar uchun $\Delta_j \leq 0$ bo'lsa, topilgan reja optimal reja bo'ladi.

2. Agar birorta j uchun Z_j—S_j>0 bo'lsa, bazisga kiritiladigan vektor tanlanadi. Bazisga

$$\max_{\Delta j>0} \Delta_j = \Delta_k$$

shartni qanoatlantiruvchi A_k vektor kiritiladi.

3. Bazisdan chiqarilishi kerak bo'lgan vektor aniqlanadi. Bazisdan

$$\min_{X_{ik}>0}\left(\frac{X_j}{X_{ik}}\right)=\frac{X_j}{X_{ik}}$$

ga mos keluvchi A_i vektor chiqariladi. Agar A_k vektorga mos keluvchi barcha $X_{ik} \leq 0$ bo'lsa, chiziqli funksiya quyidan chegaralanmagan bo'ladi;

4. Aniqlovchi element $X_{ik}>0$ tanlangandan so'ng simpleks jadval (9.63) formula orqali almashtiriladi.

Shunday yo'l bilan har bir iteratsiyada yangi tayanch reja topiladi. 1- va 2-teoremaga asosan simpleks usul yo optimal rejani beradi yoki masaladagi chiziqli funksiyaning chekli minimumga *ega emasligini aniqlaydi.*

Misol

$$\begin{aligned} &x_1+x_4-2x_5=1; \\ &x_2+2x_4-x_5=2; \\ &x_3+3x_4-x_5=3; \end{aligned} \qquad (9.67)$$

$$x_j \geq 0 \ (j\overline{15}), \qquad (9.68)$$

$$Z_{\min}=x_4-x_5. \qquad (9.69)$$

Yechish. Masalada o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan

$$A_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad A_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad A_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

vektorlar berilgan. Ularni bazis vektorlar deb qabul qilamiz. Bu bazis vektorlarga $X_0=(x_1=1;\ x_2=2;\ x_3=3;\ x_4=0;\ x_5=0)$ reja mos keladi.

Bu rejada chiziqli funksiyaning qiymati $Z_0=0$ bo'ladi.

Simpleks jadval tuzamiz:

9.3-jadval

i	Bazis vektor	S	A_0 (reja)	$S_1=0$	$S_2=0$	$S_3=0$	$S_4=0$	$S_5=-1$
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_1	0	1	1	0	0	1	−2
2	A_2	0	2	0	1	0	−2	1
3	A_3	0	3	0	0	1	3	1
$m+1$	z_i-C_i		0	0	0	0	−1	−1

Jadvalning $(m+1)$ qatoriga Z_0 va Z_i-S_i larning qiymatlarini yozamiz.

$$\max_{Z_i-C_i>0}(Z_j-C_j)=Z_5-C_5=1$$

bo'lganligi sababli bazisga vektorni kiritamiz va

$$\min_{x_{i5}}\frac{x_i}{x_{i2}}=\left(\frac{2}{1},\frac{3}{1}\right)=\frac{2}{1}=2$$

bo'lganligi sababli bazisdan A_2 vektorni chiqaramiz. Shunday qilib, $X_{25}=1$ aniqlovchi element bo'ladi. Simpleks 9.3-jadvalni (9.63), (9.65) va (9.66) formulalar yordamida almashtiramiz, natijada quyidagi yangi 9.4-jadvalga ega bo'lamiz:

9.4-jadval

i	Bazis vektor	S	A_0 (reja)	$S_1=0$	$S_2=0$	$S_3=0$	$S_4=0$	$S_5=-1$
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_1	0	5	1	2	0	-3	0
2	A_5	-1	2	0	1	0	-2	1
3	A_3	0	1	0	-1	1	5	0
$m+1$	Z_j-C_j		-2	0	-1	0	-1	0

yangi simpleks jadvalda

$$\max(Z'_j-C_j)=Z'_4-C_4=1>0$$

bo'lganligi sababli bazisga A_4 vektorni kiritamiz.

$$\min_{X_{35}>0}\left(\frac{X_3}{X_{35}}\right)=\frac{1}{5}$$

bo'lganligi sababli bazisga A_3 vektorni chiqaramiz. Natijada quyidagi yangi 9.5-jadvalga ega bo'lamiz:

9.5-jadval

i	Bazis vektor	*S*	A_0 (reja)	0	0	0	1	–1
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_1	0	28/5	1	7/5	3/5	0	0
2	A_5	-1	12/5	0	3/5	2/5	0	1
3	A_4	0	1/5	0	1/5	1/5	1	0
m+1	Z_j-C_j		–11/5	0	-4/5	–1/5	0	0

9.5-jadvalning (m+1) qatorida birorta ham musbat element qolmadi. Demak, topilgan $X=\left(X1=\frac{28}{5};X_2=0;\right.$

$\left.X_3=0;\ X_4=\frac{1}{5};\ X_5=\frac{12}{5}\right)$yyechim optimal bo'lib, unga mos kelgan

Z ning minimumi – 11/5 ga teng, ya'ni

$$Z_{min}=-\frac{11}{5}.$$

Mashqlar

1. Ma'lum bir jonivorni har kuni ovqatlantirish uchun miqdori 9 birlikdan kam bo'lmagan T_1 to'yimli modda, miqdori 8 birlikdan kam bo'lmagan T_2 *to'yimli modda va miqdori 12 birlikdan kam bo'lmagan Tt,* to'yimli modda kerak bo'lsin. Bu to'yimli moddalardan ikki xil, ya'ni O_1 va O_2 ozuqa tayyorlash kerak bo'lsa va har bir ozuqadagi to'yimli moddalarning miqdori hamda har bir ozuqa birligining narxlari 9.6-jadvaldagidek berilgan bo'lsa, qo'yilgan masalaning matematik modeli tuzilsin. Masalaning yechimlarini grafik va simpleks usulda toping.

To'yimli moddalar	To'yimli moddalar miqdori	Har bir kg ozuqadagi to'yimli modda birligining miqdori	
		O_1	O_2
T1	9	3	1
T2	8	1	2
T3	12	1	6
1 kg ozuqaning narxi (so'mlarda)		4	6

2. Quyidagi chiziqli programmalashtirish masalalarini grafik usulda yeching:

a) $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 1; \\ x_1 + 2x_2 \le 1; \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$
$Z_{max} = x_1 - x_2.$

б) $$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1; \\ 5x_1 + x_2 \le 1 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$
$Z_{max} = x_1 + x_2.$

в) $$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 12; \\ x_1 - x_2 \le 8, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$
$Z_{max} = x_1 - 2x_2.$

г) $$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \ge 14; \\ -x_1 + 2x_2 \ge 2; \\ 7x_1 + 10x_2 \le 28, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$
$Z_{max} = 3x_1 - 2x_2.$

3. Quyidagi chiziqli programmalashtirish masalalari simpleks usul bilan yechilsin.

a) $$Z_{min} = x_1 + 6x_2 - 7x_3 + x_4 + 5x_5;$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - 13x_3 - 2x_4 + x_5 = 20; \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 8, \end{cases}$$

$x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,5})$.

б) $z_{\min} = 2x_1 + 3x_2 + 5/2x_3;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 6; \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 16; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 12, \end{cases}$$

$x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,3})$.

в) $z_{\min} = -x_1 + x_2;$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ \quad x_1 - 2x_2 + x_4 = 2; \end{cases}$$

$x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,4})$.

9.9-§. Naqliyot masalasi

Naqliyot (transport, ulov) masalasi chiziqli programmalashtirish masalalari ichida nazariy va amaliy jihatdan eng yaxshi o'zlashtirilgan masalalardan biri bo'lib, undan sanoat va qishloq xo'jalik mahsulotlarini tashishni optimal rejalashtirish ishlarida muvaffaqiyatli ravishda foydalanilmoqda.

Naqliyot masalasi maxsus chiziqli programmalashtirish masalalari sinfiga tegishli bo'lib, uning chegaralovchi shartlaridagi koeffitsientlardan tuzilgan (a_{ch}) matritsaning elementlari 0 va 1 raqamlaridan iborat bo'ladi va har bir ustunda faqat ikkita element 0 dan farqli, qolganlari esa 0 ga teng bo'ladi.

Naqliyot masalasining matematik modeli va uning iqtisodiy ma'nosi bilan tanishaylik.

Naqliyot masalasining matematik modeli va iqtisodiy ma'nosi

Faraz qilaylik, m ta $A_1, A_2, \ldots, A_t$ punktlarda bir xil mahsulot ishlab chiqarilsin. Ma'lum bir davr ichida har bir A_i, punktda ishlab chiqarilgan mahsulotning miqdori a_i, ga teng bo'lsin. Ishlab chiqarilgan mahsulotlar $B_1, B_2, \ldots, B_n$ punktlarda iste'mol qilinsin hamda har bir V_j, punktning shu davr ichida mahsulotga bo'lgan talabi $b(j=\overline{1,n})$ ga teng bo'lsin. A_1, $A_2,...,A_t$ punktlarda ishlab chiqarilgan mahsulotlarning umumiy miqdori B_1, $B_2,...,B_n$ punktlarning mahsulotga bo'lgan talablarining umumiy miqdoriga teng, ya'ni

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{m} b_i$$

deb faraz qilamiz. Har bir ishlab chiqarish punkti A_i dan har bir iste'mol qiluvchi punktga mahsulot tashish imkoniyati bo'lsin va B_j gacha birlik mahsulotni olib borish uchun sarf qilinadigan xarajat C_{ij} pul birligiga teng bo'lsin.

X_{ij} bilan rejalashtirilgan davr ichida A_i punktdan B_j punktga olib boriladigan mahsulotning umumiy miqdorini belgilaymiz. Naqliyot masalasining berilgan parametrlarini 9.7-jadvalga joylashtiramiz.

9.7-jadval

Ishlab chiqarish punktlari	Ishlab chiqarilgan mahsulot	Iste'mol punktlari			
		B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}
A_2	a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}
A_1	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}
A_m	a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}
Mahsulotga bo'lgan talab		b_1	b_2	...	b_n

Har bir iste'mol qiluvchi punktni har bir ishlab chiqarish punktiga shunday biriktirish kerakki:

1) har bir ishlab chiqarish punktidagi mahsulotlar to'liq, taqsimlansin;

2) har bir iste'mol qiluvchi punktning talabi to'liq qanoatlantirilsin;

3) sarf qilingan naqliyot xarajatlarining jami minimal bo'lsin.

Masalaning 1-shartini quyidagi tenglamalar tizimi orqali ifodalash mumkin:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1; \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m; \end{cases} \tag{9.70}$$

Masalaning 2-sharti esa quyidagi tenglamalar tizimi ko'rinishida ifodalanadi:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1; \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n. \end{cases} \tag{9.71}$$

Masalaning iqtisodiy ma'nosiga ko'ra, noma'lumlar manfiy bo'lmasligi kerak:

$$xij \geq 0 \quad (i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}). \tag{9.72}$$

Masalaning 3-sharti quyidagi chiziqli funksiya orqali ifodalanadi:

$$Z_{\min} = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{tn}x_{tp}. \tag{9.73}$$

(9.70) — (9.73) shartlar birgalikda naqliyot masalasining matematik modeli deb ataladi.

Naqliyot masalasining matematik modelini yig'indi ko'rinishda ham ifodalash mumkin:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i; \tag{9.74}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = b_i; \qquad (9.75)$$

$$x_{ij} \geq 0, \qquad (9.76)$$

$$z\min = \sum_{i=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_{ij}. \qquad (9.77)$$

9.10-§. Naqliyot masalasining xususiyatlari

Biz yuqorida naqliyot masalasi matematik modelining (9.70) – (9.77) ko'rinishda yozilishini ko'rdik. Masaladagi har bir a_i, b_j, va c_{ij} lar manfiy bo'lmagan sonlardir. Agar bu masalada

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = A \qquad (9.78)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, ya'ni ishlab chiqarilgan mahsulotlar yig'indisi unga bo'lgan talablar yig'indisiga teng bo'lsa, u holda bu masalani *yopiq modelli naqliyot masalasi* deb ataymiz.

1-teorema. *Har qanday yopiq modelli naqliyot masalasi yechimga ega.*

Isboti. Shartga ko'ra

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = A > 0.$$

U holda $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{A}$ berilgan masalaning rejasi bo'ladi. Haqiqatdan ham

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{A} \geq 0, \text{ chunki } a_i \geq 0,\ b_i \geq 0,\ A>0;$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{A} = \frac{a_i}{A} \sum_{j=1}^{n} b_j = a_i;$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_i}{A} = \frac{b_i}{A} \sum_{i=1}^{m} a_j = b_j.$$

Demak, $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{A}$ naqliyot masalasining hamma shartlarini qanoatlantiradi. Shuning uchun bu miqdor masalasining rejasi bo'ladi.

2-teorema. *Agar masaladagi barcha a_i va b_j lar butun sonlardan iborat bo'lsa, naqliyot masalasining yechimi butun sondan iborat bo'ladi.*

Teoremaning isbotini naqliyot masalasining boshlang'ich tayanch rejalarini topish usullarida ko'rish mumkin.

3-teorema. *Ixtiyoriy naqliyot masalasining optimal rejasi mavjuddir.*

Isboti. 1-teoremaga asosan masalaning kamida bitta rejasi mavjuddir. (9.74), (9.75) *shartlardagi koeffitsientlar va barcha a_i, b_j,* lar musbat butun sonlar bo'lganligi sababli x_{ij} yuqoridan chegaralangan bo'ladi va uning qiymati mos a_i va b_j larning qiymatidan oshmaydi.

Shunday qilib, naqliyot masalasi rejalaridan tashkil topgan to'plam bo'sh to'plam bo'lmaydi, u chegaralangan to'plam bo'ladi. Demak, naqliyot masalasi optimal rejaga ega.

9.11-§. Naqliyot masalasining boshlang'ich tayanch rejasini topish usullari

Boshqa chiziqli programmalashtirish masalalari kabi naqliyot masalasini yechish jarayoni ham boshlang'ich tayanch rejani topishdan boshlanadi. Naqliyot *masalasining boshlang'ich tayanch* rejasini topish usullari ko'p bo'lib, quyida biz «Shimoli-g'arbiy burchak» usuli va «ustundagi minimal element» usuli bilan tanishamiz.

A. «Shimoli-g'arbiy burchak» usuli.

Faraz qilaylik, naqliyot masalasiniig shartlari quyidagi 9.8-jadvalga joylashtirilgan bo'lsin.

9.8-jadval

a_i \ b_j	b_1	b_2	...	b_n
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}

...	...	...	...	...
a_m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	...	x_{mn} c_{mn}

«Shimoli-g'arbiy burchak» usulining g'oyasi quyidagilardan iborat:

Eng avval shimoli-g'arbda joylashgan x_{11} noma'lumning qiymatini aniqlaymiz:

$x_{11}=tin(a_1, b_1)$. Agar $a_1 \le b_1$ bo'lsa, $x_{11}=a_1$ va $x_{1j}=0$ agar $b_1=a$ bo'lsa, $x_{11}=b_1$ va $x_{ij}=0$ bo'ladi.

Faraz qilaylik, birinchi hol bajarilsin. Bu holda 1-qadamdan so'ng masalaning yechimlaridan tashkil topgan matritsa quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

1- q a d a m.

$$\begin{array}{cccc|c} x_{11}=a_1 & 0 & 0 & \dots 0 & 0 \\ x_{21}=a_1 & x_{22} & x_{23} & \dots x_{2n} & a_2 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \dots x_{mn} & a_m \\ \hline x_1-a_1 & b_2 & b_3 & \dots b_n & \end{array} \qquad (9.79)$$

Endi ikkinchi qatordagi birinchi elementning qiymatini topamiz:
Agar $a_2<b_1—a_1$ bo'lsa, $x_{21}=b_1 — a_1$ va $x_{i1}=0$.
Agar $a_2<b_1—a_1$ bo'lsa, $x_{21}=a_2$ va $l:_{2j}=0$.

Faraz qilaylik, matritsa uchun ham 1-hol bajarilsin, u holda 2-qadam

$$\begin{array}{cccc|c} x_{11}=a_1 & 0 & 0 & \dots 0 & x_{11}=a_1 \\ x_{21}=b_1-a_1 & x_{22} & x_{23} & \dots x_{2n} & a_2-b_1+a_1 \\ 0 & x_{32} & x_{33} & \dots x_{3n} & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & x_{m2} & x_{m3} & \dots x_{mn} & a_m \\ \hline 0 & b_2 & B_3 & \dots b_n & \end{array}$$

Xuddi shunday yo'l bilan davom etib, har bir qadamda ma'lum bir x_{ij} ning qiymati topiladi. x_{ij}=min (a_i, b_j) va a_i, yoki b_j nolga aylantiriladi. Bu jarayon barcha a_i va bj lar; nolga aylanguncha takrorlanadi. Ma'lumki, har bir x_{ij} ning qiymati a_i va b_j larning turli kombinatsiyalarini ayirish yoki qo'shish yordamida topiladi. *Shuning uchun a_i va b_j lar butun* bo'lganda topilgan tayanch reja butun sonli bo'ladi. Bundan tashqari, yuqoridagi 2-teoremaga asosan tayanch rejadagi noldan farqli x_{ij} noma'lumlarning soni $n+t$—1 dan oshmaydi.

Misol. Quyidagi naqliyot masalasining boshlang'ich rejasini toping:

9.9-jadval

a_i \ b_j	3	6	2	1
4	2	5	9	5
2	8	3	5	8
3	7	3	1	4
3	5	9	7	2

Y e ch i sh. 1-qadam. x_{11}=min (4,3)=3.
Shuning uchun b_1=0 va a\=*4* — 3=1 ga o'zgaradi.

2-qadam. x_{12}=*min* (1,6)=1
Bunda a_1=0 va b_2=6—1=5 ga o'zgaradi, $x_{13}=x_{14}$=0.

3-qadam. x_{22}=*min* (2,5)=2.
Bunda a_2=0 va b_2=5—2=3 ga o'zgaradi, hamda $x_{23}= x_{24}$=0 bo'ladi.

4-qadam. x_{32}=min (3,3) =3.
Bunda $a_3=b_2$=0 bo'ladi hamda $x_{33}= x_{34}$=0, b_{42}=0.

5-qadam. x_{43}=0, a_4=3—2=1 ga o'zgaradi.

6-qadam. x_{44}=min (1,1)=1
Bunda $a_4=b_4$=0 bo'ladi va masalani yechish jarayoni tugaydi.

Topilgan reja quyidagi 9.10-jadval ko'rinishida bo'ladi.

9.10-jadval

a_i \ b_j	3	6	2	1
4	2 3	5 1	9	5

2	8	3 2	5	8
3	7	3 3	1	4
3	5	9	7 2	2 1

B. Minimal xarajatlar usuli.

Naqliyot masalasining yechimini topish uchun kerak bo'ladigan iteratsiyalar soni boshlang'ich tayanch rejani tanlashga bog'liqdir. Yuqoridagi «Shimoli-g'arbiy burchak» usuli naqliyot masalasining tayanch rejasini ixtiyoriy ravishda, naqliyot xarajatlarini nazarga olmagan holda aniqlaydi. Bunday usul yordamida topilgan reja ko'pincha tayanch optimal rejadan yiroq bo'lgani sababli optimal yechimni topish uchun juda ko'p iteratsiyalarni bajarishga to'g'ri keladi. Minimal xarajatlar usulining g'oyasi esa quyidagilardan iborat:

1. Naqliyot masalasi xarajatlaridan tashkil topgan matritsa belgilab olinadi, ya'ni

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ C_{m1} & C_{m2} & \dots & C_{mn} \end{pmatrix}$$

Bu matritsaning minimal elementini topib belgilaymiz:

$$\min_{i,j} Cij = C_{i_1 j_1}$$

U holda x_{i1j1} quyidagicha aniqlanadi:

$$x_{i1j1} = \min (x_{i1} a_{j1}).$$

Bu yerda ikki hol bo'lishi mumkin:

1) $a_{j1} \leq b_{i1}$,
2) $a_{j1} > b_{i1}$,

Birinchi holda i_1 – qatorning barcha x_{i_1j} elementlari x_{i_1j}=0 bo'ladi, *bunday holda i_i - qator o'chiriladi deb aytamiz.*

Ikkinchi holda esa j_1 - ustunning barcha x_{i,j_1}, elementlari $x_{ij1}=0$ bo'ladi, bu holda j_1 - ustun o'chiriladi deb aytamiz.

3. *Faraz qilaylik, S' matritsa S matritsaning* i_1 qatorini (1-hol) yoki j_1 - ustunini (2-hol) o'chirish natijasida hosil bo'lgan matritsa bo'lsin. Yangi matritsa uchun bo'lsin.

$$a_i^{(1)} = \begin{cases} a_i; \\ a_i - x_{i_1j_1}, \end{cases} \qquad b_j^{(1)} = \begin{cases} b_j; \\ b_j - x_{i_1j_1}. \end{cases}$$

Ma'lumki, *S'* matritsadagi ustun va qatorlar uchun *S* matritsanikidan bittaga kam bo'ladi. Ikkinchi qadamda yuqoridagi *S* matritsa uchun bajarilgan ishlar *S'* va $a_i^{(1)}$, $b_j^{(1)}$ matritsa miqdorlar *uchun bajariladi.* Natijada rejalardan tashkil topgan $X=(x_{ij})$ matritsaning yana bir qatori yoki ustuni o'chiriladi. Bu jarayon *S* matritsaning hamma qator va ustunlari o'chirilguncha, ya'ni *X* *matritsaning hamma qator va ustunlari to'ldirilguncha takrorlanadi.*

Misol. Berilgan naqliyot masalasining tayanch rejasini minimal xarajatlar usulidan foydalanib toping.

9.11-jadval

b_j / a_i	5	9	9	7
11	7	8 3	5 1	3 7
11	2 5	4 6	5	9
8	6	3	1 8	2 1

Y e ch i sh. 1. $\min\limits_{i,j} C_{ij} = C_{33} = 1;$

x_{33}-min (a_3, b_3)=min (8,9)=8.

Bu holda x_{3j}=0 (j≠3) bo'ladi. Boshqacha aytganda, *3-qator o'chiriladi va yangi S' matritsa* hosil bo'ladi. Bu matritsa

$$a_3^{(1)}=8-8=0$$
$$b_3^{(1)}=9-8=1$$

bo'lib, S' matritsa quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$C' = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

3. S' matritsadagi elementlari ichidan eng kichigini topamiz

$$\min_{i,j} C_{ij} = C_{21} = 2.$$

U holda

$$x_{21}=\min (a_2,\ b_1)=\min (11,5)=5.$$

Demak, $x_{21}= b_1=5$. Shuning uchun $x_i=0$ bo'ladi, ya'ni 1-ustun o'chiriladi. Natijada

$$C'' = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

matritsa hosil bo'ladi. Bu matritsa uchun

$$b_1^{(1)}=5\text{-}5=0,$$
$$a_2^{(1)}=11\text{-}5=6.$$

4. S'' matritsaning eng kichik elementi

$$\min_{i,j} C_{ij} = C_{14} = 3$$

Shuning uchun $x_{14}= \min (a_1,\ b_1)=\min (11,7)=7$.

Bu yerda 4-ustun o'chiriladi va $a_1^{(1)}a_1—x_{14}=11—7=4$ bo'ladi. Natijada yangi

$$C''' = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

matritsa hosil bo'ladi

5. S''' matritsaning elementlari orasida eng kichigi topiladi:

$$\min C'''_{ij} = C_{22} = 4.$$

Bu holda

$$x_{22} = \min(a_2^{(1)}, b_2) = \min(6,9) = 6.$$

Natijada 2-qator o'chiriladi hamda b_2 ning qiymati

$$b_2^{(1)} = b_2 - x_{22} = 9 - 6 = 3$$

ga o'zgaradi va yangi S^{IV} matritsa-qator hosil bo'ladi:

$$S^{IV} = (8,5).$$

Shunday yo'l bilan 5-qatorda $x_{13}=1$ topilib, 3-ustun o'chiriladi. Hosil bo'lgan x *matritsa quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:*

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 7 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Bu matritsa berilgan naqliyot masalasining tayanch rejasidir.

9.12-§. Naqliyot masalasining optimal yechimini topishning *potensial usuli*

Potensial usul naqliyot masalasini yechish uchun qo'llanilgan birinchi universal usul bo'lib, u 1949 yilda rus olimlari L. V. Kantorovich va M. K Gavurin tomonlaridan yaratilgan. Bu usulning asosiy g'oyasi naqliyot *masalasiga moslashtirilgan simpleks usul bo'lib, birinchi marta chiziqli* programmalashtirish masalalarini yechish usullariga bog'liq bo'lmagan holda tasvirlangan.

Potensial usulda yechimni izlash boshlang'ich tayanch rejadan boshlanib, optimal yechimga yaqinroq bo'lgan yangi tayanch rejalarga *o'tib boriladi va chekli sondagi iteratsiyadan so'ng masalaning optimal* yechimi topiladi. Har bir iteratsiyada topilgan tayanch reja optimal reja ekanini tekshirish uchun har bir ishlab chiqaruvchi (A_i) va iste'mol qiluvchi (V_j) punktga uning potensiali deb ataluvchi miqdorlar U_i, va V_j, mos qo'yiladi. Bu potensiallar shunday tanlanadiki, bunda o'zaro bog'langan A_i *va V_j punktlarga mos keluvchi potensiallar yig'indisi S_{ij} ga (A_i* dan *V_j ga* birlik mahsulotni tashish uchun sarf qilinadigan naqliyot xarajatiga) teng bo'lishi kerak.

Teorema. *Agar $X=(X\ U_{ij})$ reja naqliyot masalasining optimal rejasi bo'lsa, u holda unga*

$$U_i + V_j = C_{ij} \quad (X_{ij}>0); \qquad (9.80)$$

$$U_i + V_j \leq C_{ij} \quad (X_{ij}=0); \qquad (9.81)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi n+t ta U_i va V_j potensiallar mos keladi.

I s b o t. Faraz qilaylik, $X=(X_{ij})$ reja uchun (9.80), (9.81) shartlar o'rinli bo'lsin. U holda ixtiyoriy $X'=(X'_{ij})$ reja uchun

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij} \geq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(U_i+V_j)X_{ij} = \sum_{i=1}^{m} U_i \sum_{j=1}^{n} X_{ij} +$$

$$+\sum_{j=1}^{n} V_j \sum_{i=1}^{m} X'_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i U_i + \sum_{j=1}^{n} b_j V_j = \sum_{i=1}^{m} U_i \sum_{j=1}^{n} X_{ij} +$$

$$= \sum_{j=1}^{n} V_j \sum_{i=1}^{m} X_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(U_i+V_j)X_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij}.$$

Demak, X rejadagi Y chiziqli funksiyaning qiymati uning ixtiyoriy X' rejadagi qiymatidan kichik bo'layapti. Shu sababli X reja optimal reja bo'ladi.

Shunday qilib, potensiallar usulining algoritmi quyidagidan iborat.

1. Yuqorida ko'rilgan usullarning biridan foydalanib boshlang'ich reja topiladi.

2.Topilgan rejaning optimal ekanligini tekshirish uchun potensial tizim tuziladi. Buning uchun (9.79) formuladan foydalanib har bir to'ldirilgan katakcha uchun (9.80) ko'rinishda potensial tenglamalar tuziladi. Ma'lumki, naqliyot masalasining rejadagi 0 dan farqli bo'lgan o'zgaruvchilari soni $p+t$—1 ta. Demak, potensial tenglamalar tizimi $p+t$ ta, noma'lumlar esa $n+t+1$ ta. Bu tizimda noma'lumlar soni tenglamalar sonidan ortiq bo'lganligi sababli potensiallarning son qiymatini topish uchun ulardan ixtiyoriy bittasiga ixtiyoriy qiymat (soddalik uchun nol qiymat) berib, qolganlarini birin-ketin topish mumkin

Faraz qilaylik, U_i ma'lum bo'lsin, u holda (9.80) dan V_j topiladi:

$$V_i = C_{ij} - U_i$$

Agar V_i ma'lum bo'lsa, u holda U_i quyidagicha topiladi:

$$U_i = C_{ij} - V_i$$

Barcha potensiallarning son qiymatini aniqlab bo'lgach, hamma bo'sh katakchalar uchun

$$\Delta_{ij} = U_i + C_{ij} - V_i \qquad (9.82)$$

hisoblanadi. Agar barcha i va j lar uchun $\Delta_{ij}=0$ o'rinli bo'lsa, topilgan boshlang'ich reja optimal reja bo'ladi.

2. Agar i va j larniig kamida bitta qiymati uchun $\Delta_{ij}=0$ bo'lsa, boshlang'ich tayanch reja almashtiriladi. Buning uchun

$$\max_{\Delta_{ij}>0} \Delta_{ij} = \Delta_{iK}$$

shartni qanoatlantiruvchi (g/() katakcha to'ldiriladi (X_{ik} noma'lum bazisga kiritiladi) $X_{(L}=0$ deb faraz qilib (IK, katakchaga 6 kiritiladi. So'ngra (IK) katakchadan boshlab soat mili bo'ylab harakat qilib to'ldirilgan katakchalarga tartib bilan (—) va (+) ishoralar qo'yib boriladi. Natijada yopiq K kontur hosil bo'ladi:

$$K = K^{1} \cup K^{+1}$$

bu yerda K^-, K^+—(=) va (+) ishorali katakchalarni o'z ichiga oluvchi yarim konturlar. Quyidagi formula bilan θ ning son qiymati topiladi:

$$\theta = \min_{X_{ij} \in K} X_{ij} = X_{pq}. \qquad (9.83)$$

4. Yangi tayanch reja hisoblanadi:

$$\begin{aligned}
&X'_{iK} = 0; \\
&X'_{pq} = 0; \\
&X'_{ij} = X'_{ij} && \text{agar } X'_{ij} \in K; \\
&X'_{ij} = X'_{ij} + \theta && \text{agar } X'_{ij} \in K^+; \\
&X'_{ij} = X'_{ij} + \theta && \text{agar } X'_{ij} \in K;
\end{aligned}$$

Yangi tayanch rejadagi to'ldirilgan katakchalar soni $p+t-1$ ta bo'lganligi sababli (983) shartni qanoatlantiruvchi katakchalar birdan ortiq bo'lsa, ulardan bittasini bo'sh katakchaga aylantirib, qolgan katakchalardagi taqsimotni 0 ga teng deb qabul qilinadi. Topilgan yangi reja uchun yana takror potensiallar tizimi topiladi va yangi rejaning optimal bo'lishlik sharti tekshiriladi. Agar yangi tayanch reja optimal bo'lmasa, u holda yana qaytadan 3-, 4- bandlarda bajarilgan ishlar takrorlanadi. Takrorlanish jarayoni optimal reja topilguncha, ya'ni barcha bo'sh katakchalar uchun $\Delta_{ij}=U_i+V_j - C_i$ shart bajarilguncha takrorlanadi.

Misol. Berilgan naqliyot masalasini potensial usuli bilan yeching.

9.12-jadval

a_i / b_j	200	200	100	100	250	U_i
100	10 100-θ	7 $\boxed{8}$	4 $\boxed{9}$	1 $\boxed{11}$	4 $\boxed{5}$	0
250	2 100+θ	7 150-θ	10 $\boxed{-5}$	6 $\boxed{-2}$	11 $\boxed{-12}$	-8
200	8 $\boxed{-8}$	5 50+θ	3 100	2 50-θ	2 $\boxed{-3}$	-10
300	11 $\boxed{3}$	8 $\boxed{11}$	12 $\boxed{5}$	16 50	13 250	4
V_j	10	15	13	12	9	

Yechish. 1. Boshlang'ich tayanch rejani «Shimoli-g'arbiy burchak» usuli bilan topamiz.

2. Har bir to'ldirilgan katakchalar uchun potensial tenglamalar tuzib, quyidagi tizimni hosil qilamiz:

$$\begin{array}{ll} U_1+V_1=10, & U_3+V_3=3, \\ U_2+V_1=2, & U_3+V_4=2, \\ U_2+V_2=7, & U_4+V_4=16, \\ U_3+V_2=5, & U_4+V_5=15, \end{array}$$

Bu tizimdagi noma'lumlar soni tenglamalar sonidan bitta ko'p. Shuning uchun ixtiyoriy bir potensialni (masalan U_i ni) 0 ga teng deb qabul qilib, qolganlarini birin-ketin topish mumkin.

U=(0, -8, -10, 4);
V=(10, 15, 13, 12, 9)

3. Har bir bo‘sh katakcha uchun

$$\Delta_{ij}=U_i+V_j-C_{ij}$$

ni hisoblab uni bo‘sh katakchaning pastki o‘ng burchagiga yozamiz.

$$\max_{\Delta X_{ij}>0}\Delta_{ij}=\Delta_{14}=\Delta_{24}=11$$

bo‘lganligi sababli (1,4) katakchaga (yoki (4,2) katakchaga) E sonni kiritamiz va (1,1), (2,1), (2,2), (3,2), (3,4) katakchalarni o‘z ichiga oluvchi yopiq Q konturni tuzamiz:

$$K=K^{-1}\cup K^{+},$$

bu yerda (1,1), (2,2), (3,4) $\in K^{+}$ va (2,1), (3,2) $\in K^{-}$

4. θ ning son qiymatini topamiz:

$$\theta=\max_{X_{ij}\in K^{-}}X_{ij}=X_{34}=50.$$

Yangi tayanch rejani aniqlaymiz va ularni 9.13-jadvalga joylashtiramiz:

9.13-jadval

a_i/b_j	200	200	100	100	250	U_i
100	10 50-θ	7 8	4 9	1 50+θ	4 -6	0
250	2 50+θ	7 100-θ	10 -10	6 -13	11 -21	-8
200	8 -8	5 100	3 100	2 -11	2 -14	-10
300	11 14	8 0 22	12	16 50-θ	13 250	15
V_j	10	15	13	1	-2	θ=50

Yuqoridagi usul bilan potensiallar tizimini tuzib va uni yechib,

$$U=(0,\ -8,\ -10,\ 15);$$
$$V=(10,\ 15,\ 13,\ 1,\ -2);$$

ekanini topamiz. Barcha bo'sh katakchalar uchun $\Delta_{ij}=U_i+C_{ij}-V_j$ ni hisoblaymiz.

9.13-jadvaldan ko'rinadiki,

$$\max_{\Delta X_{ij}>0} \Delta_{ij}=\Delta_{42}=22.$$

Shu sababli (4,2) katakchaga 9 ni kiritib, Jadvalda ko'rsatilgan yopiq K konturni tuzamiz va

$$\theta=\min_{X_{ij}\in K} X_{ij}=X_{44}=50$$

ekanligini topamiz. So'ngra (9.82) formula orqali yangi tayanch rejani topib 9 14-jadvalga joylashtiramiz va yuqoridagi amallarni takrorlaymiz

9.14-jadval

a_i/b_j	200	200	100	100	250	U_i
100	10 0-θ	7 8	4 9	1 100	4 θ -16	0
250	2 200+θ	7 50+θ	10 -5	6 -13	11 1	-8
200	8 -8	5 100	3 100	2 -11	2 8	-10
300	11	8 50+θ	12	16	13 250-θ	-7
V_j	10	15	13	1	20	θ=0

9.15-jadval

a_i / b_j	200	200	100	100	250	U_i
100	10 $\boxed{-16}$	7 $\boxed{-3}$	4 $\boxed{-7}$	1 100	4 0	0
250	2 200	7 50	10 $\boxed{-5}$	6 $\boxed{3}$	11 $\boxed{1}$	-8
200	8 $\boxed{-8}$	5 100-θ	3 100	2 $\boxed{5}$	2 θ $\boxed{8}$	6
300	11 $\boxed{-8}$	8 50+θ	12 $\boxed{-6}$	16 $\boxed{-6}$	13 250-θ	9
V_j	-6	-1	-3	1	4	θ=100

9.16-jadval

a_i / b_j	200	200	100	100	250	U_i
100	10 $\boxed{-16}$	7 $\boxed{-8}$	4 $\boxed{1}$	1 100-θ	4 0+θ	0
250	2 200	7 50-θ	10 $\boxed{3}$	6 θ $\boxed{3}$	11 $\boxed{1}$	-8
200	8 $\boxed{-16}$	5 $\boxed{-8}$	3 100	2 $\boxed{-3}$	2 100	-2
300	11 $\boxed{-8}$	8 150+θ	12 12	16 $\boxed{-6}$	13 150-θ	9
V_j	-6	-1	5	1	4	θ=50

9.17-jadval

a_i / b_j	200	200	100	100	250	U_i
100	10 $\boxed{-13}$	7 $\boxed{-8}$	4 $\boxed{1}$	1 50	4 50	0
250	2 200	7 $\boxed{-11}$	10 $\boxed{0}$	6 50	11 $\boxed{-2}$	5
200	8 $\boxed{-13}$	5 $\boxed{-8}$	3 100-θ	2 $\boxed{-3}$	2 100+θ	-2

300	11 $\boxed{-5}$	8 200	12 θ $\boxed{2}$	16 $\boxed{-6}$	13 100-θ	9
V_j	-3	-1	5	1	4	θ=100

9.18-jadval

a_i/ b_j	200	200	100	100	250	U_i
100	10 $\boxed{-15}$	7 $\boxed{-5}$	4 θ $\boxed{1}$	1 50	4 50-θ	0
250	2 200	7 $\boxed{-1}$	10 $\boxed{0}$	6 50	11 $\boxed{-2}$	5
200	8 $\boxed{-11}$	5 $\boxed{-8}$	3 0-θ	2 $\boxed{-3}$	2 200+θ	-2
300	11 $\boxed{-7}$	8 200	12 100	16 $\boxed{-8}$	13 $\boxed{-2}$	7
V_j	-3	-1	5	1	4	θ=0

9.19-jadval

a_i/ b_j	200	200	100	100	250	U_i
100	10 $\boxed{-13}$	7 $\boxed{-7}$	4 0	1 50	4 50	0
250	2 200	7 $\boxed{-2}$	10 $\boxed{-1}$	6 50	11 $\boxed{-2}$	5
200	8 $\boxed{-11}$	5 $\boxed{-7}$	3 $\boxed{-1}$	2 $\boxed{-3}$	2 200	-2
300	11 $\boxed{-6}$	8 200	12 100	16 $\boxed{-7}$	13 $\boxed{-1}$	8
V_j	-3	0	4	1	4	

9.19-jadvalda keltirilgan reja optimal reja bo'ladi, chunki barcha bo'sh katakchalar uchun

$$\Delta_{ij}=(U_i+V_j-C_{ij})\leq 0.$$

Shunday qilib, sakkizinchi siklda quyidagi optimal yechimga ega bo'lamiz:

$X_{14}=50$, $X_{15}=50$.
$X_{21}=200$, $X_{24}=50$,
$X_{35}=200$, $X_{42}=200$, $X_{43}=100$.

$$Z\min=50+4\cdot 50+2\cdot 200+6\cdot 50+2\cdot 200+8\cdot 200+12\cdot 100=4150.$$

Mashqlar

1. A_1 va A_1 stansiyalarga mos ravishda 30 va 40 komplektdan mebel kelib tushdi. A_1 vokzaldan B_1, B_2 va B_3 magazinlarga 1 komplektdan mebelni yetkazib berish uchun sarflanadigan naqliyot xarajati mos ravishda 2 so'm, 3 so'm va 4 so'mni, A_2 vokzaldan esa mos ravishda 2 so'm, 5 so'm va 3 so'mni tashkil qilsin. B_1, B_2 B_3 magazinlarga mos ravishda 15, 25 va 30 komplektdan mebelni yetkazib berishda sarf qilinadi. Jami naqliyot xarajati eng kam bo'ladigan optimal yechim topilsin.

2. Quyidagi naqliyot masalasining optimal yechimini *potensial usuli bilan yeching:*

$a_1=70$; $b_1=30$;
$a_2=90$; $b_2=95$;
$a_3=50$; $b_3=25$;
$b_4=60$;

$$C=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 & 4 \\ 6 & 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

X BOB

VARIATSION HISOB HAQIDA BOShLANG'ICH MA'LUMOTLAR

10.1-§. *Operatorlar va funksionallar haqida tushuncha*

Bizga oliy matematika kursidan ma'lumki, to'plamlar orasidagi munosabat asosan akslantirish orqali aniqlanadi. Biror X to'plamni ikkinchi Y to'plamga akslantirish uchun X ning har bir elementini Y to'plamning biror elementiga mos keltirish kerak. Masalan, $u=x^2$ funksiya D haqiqiy sonlar to'plamidagi x elementga manfiy bo'lmagan haqiqiy sonlar to'plami D_+ dagi y elementni mos qo'yadi, ya'ni D to'plamni D_+ to'plamga aks ettiradi. Umuman har qanday funksiya sonlarning ma'lum bir to'plamini boshqa bir sonlar to'plamiga aks ettiradi.

Ammo, bu aks ettirishlarni amalga oshirish uchun biror qoida yoki qonun berilishi kerak. Masalan, $u=x^2$ funksiyadagi qoida berilgan sonni kvadratga ko'tarishdan. $Y=\sqrt{x}$ funksiyada esa ildizdan chiqarishdan iboratdir. Shu qoidalarga ko'ra to'plamlarni aks ettira turib, biz muayyan amalni bajaramiz. Bu holda to'plamlar orasidagi aks ettirish jarayonini shartli ravishda $u=Ax$ ($X\in X$, $u\in Y$) ko'rinishda yozish mumkin.

1-ta'rif. Ixtiyoriy X va Y to'plamlar uchun akslantirish qoidasi A operator deb ataladi. Agar X to'plamning har bir x elementiga aniq A qoida asosida Y to'plamning bittagina u elementi mos keltirilgan bo'lsa, X to'plamda A operator berilgan deyiladi. X to'plam A operatorning *aniqlash sohasi*, x esa A operatorning argumenti deyiladi.

Demak, biror operator berildi deyish uchun shu operator yordamida bajarilishi kerak bo'lgan amallar aniq va to'la ta'riflanishi shart. Masalan, quyidagi

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1m}x_m=y_1; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2m}x_m=y_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nm}x_m=y_m; \end{array} \qquad (10.1)$$

algebraik tenglamalar tizimi yordamida to'lchovli $X=(x_1, x_2,...,x_l)$ vektor p o'lchovli $Y=(u_1, u_2,...,u_p)$ vektorga mos keltiriladi, ya'ni R_l vektorlar fazosi R_p vektorlar fazosiga aks ettiriladi.

Agar

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ldots\ a_{1m} \\ a_{21}\ a_{22}\ldots\ a_{2m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ldots\ a_{nm} \end{pmatrix} \qquad (10.2)$$

matritsa kiritilsa, (10.1) ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$y+Ax. \qquad (10.3)$$

Ko'rilayotgan A operator ma'noga ega bo'lishi uchun (10.3) dan (10.1) ga o'tish qoidasi berilgan bo'lishi shart. Bu qoida matritsani vektorga ko'paytirish amali deb ataluvchi ushbu

$$Y_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \quad (i = 1, n)$$

formula bilan aniqlanadi.

Ma'lumki, differensial tenglamalar funksional to'plamlarni bir-biriga aks ettiradi. Masalan,

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2p(t)\frac{dx(t)}{dt} + q(t)x(t) = y(t) \qquad (10.4)$$

tenglamada operatorni

$$A = \frac{d^2}{dt^2} + 2p\frac{d}{dt} + q$$

ifoda yordamida kiritsak, (10.4) quyidagi ko'rinishga keladi

$$Ax = u. \qquad (10.5)$$

Demak, $u = Ax$ operator berilishi uchun:

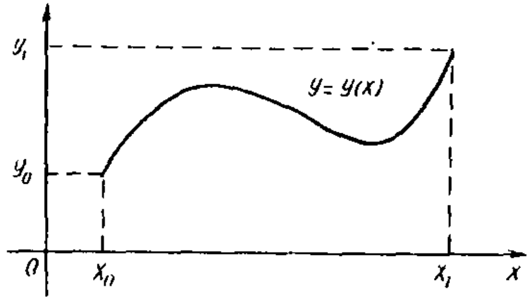
1) ikkita X va Y to'plam;

2) A operatorning aniq ma'nosi berilishi kerak. Operator orqali muhandislar amaliyotida uchraydigan deyarli hamma tenglamalarni yagona usul bilan ifodalash mumkin. Bu esa har xil masalalarni umumiy nuqtai nazardan qarab, ularni tekshirish imkonini beradi.

2-ta'rif. *Agar operatorning qiymatlari sohasi Y haqiqiy sonlardan* iborat, ya'ni Y—R bo'lsa, bunday operator *funksional* deb ataladi.

Masalan, X vektorlar to'plami bo'lsin. X dan biror p vektorni belgilab olib, funksional sifatida $Ax = (x, p)$ skalyar ko'paytmani olish mumkin. Shunga o'xshash, funksional sifatida berilgan ikkita A (x_0; u_0) va $V(x_1\ u_1)$ nuqtalarni birlashtiruvchi tekislikdagi yoki fazodagi egri chiziqli yoyning uzunligi l ni ham olish mumkin (28-rasm).

Oliy matematikadan ma'lumki, agar egri chiziq, tenglamasi $u=u(x)$ *ma'lum bo'lsa, u holda yoyning uzunligi quyidagi* formula (fuiksional) yordamida topiladi:



28-rasm

$$I(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx. \qquad (10.6)$$

Ixtiyoriy sirtning 5 yuzasi ham funksional hisoblanadi. Agar sirt tenglamasi $z=z(x, u)$ bo'lsa, u holda yuza S (funksional) quyidagicha topiladi:

$$S(z(x,y)) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\, dxdy, \qquad (10.7)$$

bu yerda, O — sirtning XOU tekisligiga proyeksiyasi. Mexanikadagi inersiya momenti, statik momentlar, bir jinsli egri chiziq va sirtlarning og'irlik markazlari ham funksionallar hisoblanadi.

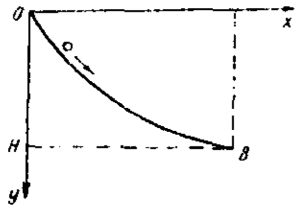
Keltirilgan misollar asosida quyidagi natijaga kelish mumkin: *funksional* deb, shunday o'zgaruvchi miqdorlarga aytiladiki, ularning qiymatlari bir yoki bir necha funksiyalarni tanlash orqali aniqlanadi. Funksionallar operatorlarning xususiy hollaridir. Ma'lumki, $u=f(x)$ berilishi bilan songa son mos keltirilar edi. Demak, funksiya bilan funksionalni farqlay bilish kerak.

10.2-§. Variatsion hisobning uch masalasi

Variatsion hisobning paydo bo'lishiga (XVII asr) va jadal sur'at bilan rivojlanishiga quyidagi uchta masala asosiy turtki bo'lgan.

1. Braxistoxrona haqidagi masala

Bu masala I. Bernulli tomonidan qo'yilgan eng tez dumalash chizig'i — braxistoxrona to'g'risidagi masaladir. Masala quyidagicha qo'yiladi: vertikal tekislikda bitta tik to'g'ri chiziqda yotmagan ikkita *O* va *B* nuqtalar berilgan bo'lib, qattiq jism o'zining og'irlik kuchi ta'sirida *O* dan *B* ga eng qisqa vaqt ichida dumalaydigan yo'l topilsin (29-rasm). *O* va *B* nuqtalarni tutashtiruvchi eng qisqa yo'l to'g'ri chiziq bo'lsa-da, harakatlanayotgan jism faqat o'z og'irlik kuchi ta'sirida dumalayotgan bo'lganligi sababli bu masalaning yechimi to'g'ri chiziq bo'lmaydi.



29- rasm

Qo'yilgan masala

$$L(y,x)) = \int_0^b \frac{\sqrt{1+(y'(x))^2}}{\sqrt{2qy(x)}}dx \qquad (10.8)$$

funksionalga minimum qiymat beruvchi $u=u(x)$ funksiyani topish masalasiga keltiriladi.

Braxistoxrona to'g'risidagi masalaning yechimi I. Bernulli, G. Leybnis, Ya. Bernulli, I. Nyuton va G. Lopital tomonidan berilgan bo'lib, bu *chiziq siklonda ekanligi aniqlangan.*

2. Geodezik chiziq haqidagi masala

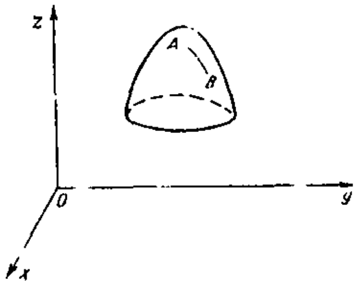
Biror $u(x,u,z)=0$ sirtning berilgan ikkita nuqtasini birlashtiruvchi chiziqlar ichida eng kichik uzunlikka ega bo'lgani topilsin. Bunday eng qisqa chiziq geodezik chiziq deyiladi.

Bu

$$L(y,x),z(x)) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+(y^1(x))^2+(z^1(x))^2 dx} \qquad (10.9)$$

funksionalga minimum qiymat beruvchi funksiyalarni topishga keltiriladi. Bu shartli ekstremum masalasi bo'lib, *u(x)* va *g(x)* funksiyalar

$$\varphi(x)\ y(x);\ z(x))=0 \qquad (10.10)$$



30-rasm

shartni qanoatlantirishi zarurdir (30-rasm). Bu masalani Ya. Bernulli yechgan

3. Izoperimetrik masala

Eng katta *S* yuzani chegaralovchi, uzunligi *l* ga teng bo'lgan berk chiziq topilsin

Bu masala ham funksionalning ekstremumini topishga keltiriladi. Bu yerda o'ziga xos bo'lgan qo'shimcha shart — egri chiziq uzunligining o'zgarmas bo'lishlik sharti yuklatiladi, ya'ni:

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x(t))^2+(y(t))^2 dt}. \qquad (10.11)$$

funksional o'zgarmas qiymatini saqlaydi. Bunday turdagi masalalarni yechish usuli L.Eyler tomonidan ishlab chiqilgan.

Variatsion hisobning eng sodda masalasi, ushbu

$$F(u) = \int_a^b \Phi(x.u.u')dx \qquad (10.12)$$

funksional eng kichik qiymat beruvchi va

$$u(a)=A; \quad u(b)=B \qquad (10\ 13)$$

shartlarni qanoatlantiradigan *i(x)* funksiyani topishdan iborat. Bu yerda F - o'z argumentlariga nisbatan uzluksiz va differensiallanuvchi funksiyadir. Shunday qilib, variatsion hisob funksionallarning maksimal va minimal (ekstremal) qiymatlarini topish usullarini o'rganadi Mexanika va fizikaning ko'pgina qonunlari qaralayotgan jarayonlarda masala funksionallarning o'z maksimumi yoki minimumiga erishish kerakligi tasdiqiga keltiriladi. Qonunlarning bunday *tarzda bayon etilishi mexanika va fizikaning variasion tamoyili* (prinsipi) nomi bilan yuritiladi.

10.3-§. Funksiya va funksional orasidagi o'xshashlik

Variatsion masalalarni yechish usullari, ya'ni funksionallarni maksimum va minimumga tekshirish bilan funksiyalarni maksimum va minimumga tekshirishning yaqin o'xshashligi bor. Shuning uchun funksiya va funksionallarga oid ba'zi ma'lumotlarni solishtirib chiqaylik:

1. *Funksiya. Agar z o'zgaruvchi x o'zgaruvchining funksiyasi* bo'lsa, u holda quyidagicha belgilanadi:

$$z=f(x)$$

2. Bu bog'lanish orqali x ning olishi mumkin bo'lgan qiymatlar sohasiga tegishli har bir son uchun mos x soni topiladi, ya'ni funksiya orqali songa son mos ketiriladi.

Funksional. O'zgaruvchi miqdor *V, u(x)* funksiyaga bog'liq bo'lgan funksional deyiladi va

$$V=V[(y(x)]$$

orqali belgilanadi, ya'ni birorta to'plamga tegishli bo'lgan har bir *u(x)* funksiyaga unga mos V qiymat to'g'ri kelsa, demak funksional orqali *funksiyaga son mos keltiriladi.*

2. Argument orttirmasi. (*) funksiya argumenti x ning orttirmasi deb, bu o'zgaruvchining ikkita qiymati orasidagi ayirmaga aytiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\Delta x = x - x_1.$$

$V[(x)]$ funksional argumenti $u(x)$ ning orttirmasi yoki variatsiyasi deb ikkita funksiya orasidagi ayirmaga aytiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\delta u = u(x) - y_1(x).$$

Bu yerda $u(x)$ birorta funksiyalar to'plamiga tegishli va ixtiyoriy o'zgara oladi deb faraz qilinadi.

3. $f(x)$ funksiyaning uzluksizligi. $f(x)$ funksiya uzluksiz deyiladi, agar argument x ning kichik o'zgarishiga $f(x)$ funksiyasining kichik o'zgarishi mos kelsa.

$V[y(x)]$ funksionalning uzluksizligi. $V[y(x)]$ funksional uzluksiz deyiladi, agar $u(x)$ ning kichik o'zgarishiga $V[y(x)]$ funksionalning kichik o'zgarishi mos kelsa. Bu erda funksionalning argumenti bo'lgan $u(x)$ funksiyaning kichik o'zgarishini oydinlashtiraylik. $u(x)$ funksiyaning kichik o'zgarishi $u=u(x)$ va $u=u\backslash(x)$ egri chiziqlar bir-biriga yaqin yoki kam farq qiladi degan fikr bilan bir xildir.

1-ta'rif. Agar barcha x lar uchun $|u(x) - y_1(x)| \le \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $u=u(x)$ va $u=u\backslash(x)$ egri chiziqlar *nolinchi tartibli yaqinlikka ega* deyiladi. Bu yerda $\varepsilon>0$ ixtiyoriy kichik son.

2-ta'rif. Agar barcha x lar uchun

$$|u(x) - u_1(x)| \le \varepsilon \text{ va } |u'(x) - u'_1(x)| \le e$$

shartlar bajarilsa. $u = u(x)$ va $u = u_1(x)$ egri chiziqlar birinchi *tartibli yaqinlikka ega* deyiladi.

Demak 1-tartibli yaqinlikka ega bo'lish uchun ordinatalar bir-biriga yaqin bo'lishidan tashqari yaqinlik nuqtalaridan o'tkazilgan urinmalar yo'nalishi ham bir bo'lishi, ya'ni yaqin bo'lishi kerak.

4. Funktsiya differensiali $f(x)$ funktsiyaning differensiali quyidagiga teng:

$$df = \frac{d}{dx}[f(x + a \cdot \Delta x)]\,\Big|_{a=0}$$

Funksionalning variatsiyasi. $V[y(x)]$ funksionalning variatsiyasi quyidagiga teng:

$$\delta V = \frac{d}{dx}[V(y(x + a\delta y)]\,\Big|_{a=0}.$$

10.4-§. Variatsion hisobning oddiy masalasi. Eyler tenglamasi

Ta'rif. Agar $V\ [y(x)]$ funksionalning $u=u_0(x)$ egri chiziqqa yaqin chiziqdagi qiymati 1/|g/p(A:)] dan katta bo'lmasa, ya'ni

$$\Delta V = V[y(x)] - V[y_0(x)] \leq 0$$

yoki

$$V[y(x)] \leq V[y_0(x)]$$

bo'lsa, mazkur funksional $u=u_0(x)$ egri chiziqda maksimumga *erishadi deyiladi,*

Agar $\Delta V \geq 0$ shart bajarilsa, $V\ [y(x)]$ funksional minimumga erishadi deyiladi. Funksionalning ekstremumga ega bo'lishiniig zaruriy shartlarini isbotsiz keltiramiz.

1-teorema. *Agar $V[y(x)]$ funktsional y—$u_a(x)$ egri chiziqda maksimumga yoki minimumga erishsa, u holda $u=u_0(x)$ da funktsionalning variatsiyasi nolga teng bo'ladi:* $\delta V=0$

10.2-§ da keltirilgan *variatsion hisobning oddiy masalasini* ko'raylik.

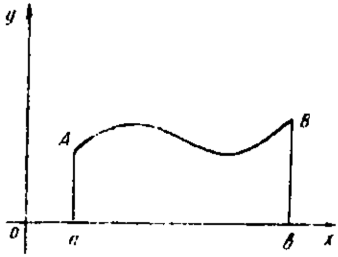
$$V[y(x)] = \int^{b} F(x, y, y')dx \qquad (10.14)$$

funksionalni ekstremumga tekshiramiz $F(x, u, u')$ funksiya barcha argumentlari bo'yicha uzluksiz birinchi va ikkinchi tartibli xususiy hosilalarga ega deb faraz qilamiz. Uzluksiz hosilalarga ega bo'lgan va quyidagi

$$u(a)=A;\ u(b)=V \qquad (10.15)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi barcha funksional ichidan shundayi topilsinki, (10.14) funksional ekstremumga ega bo'lsin. Ya'ni masala variatsion hisobning oddiy masalasi $R\backslash(a;A)$ va $R_2(b;V)$ nuqtalarni birlashtiruvchi chiziqlar (funksiyalar) ichidan (1014) funksionalning ekstremumini qidirishdan iborat (31-rasm).

2-teorema. *(10.14) funksionalning birinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lgan (10.15) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi u(x) funksiyada ekstremumga ega bo'lishining zaruriy sharti bu funksiyaning Eyler tenglamasi*



31- rasm

$$F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0 \qquad (10.16)$$

yoki

$$u'(x) \cdot F_{u'u'} + y'(x) \cdot F_{uu'} + F_{xu'} - F_u = 0 \qquad (10.17)$$

ni qanoatlantirishdan iboratdir.

Misol.. Quyidagi

$$V[y(x)] = \int_1^2 (y'^2 - 2xy)dx, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = -1$$

funksional qanday egri chiziqdan ekstremumga ega bo'lishi mumkin?

Yechish.

$$F(x, y, y') = y'^2 - 2xy \text{ va}$$
$$F_{u'} = 2u'; \quad F_{u'u'} = 2; \quad F_u = -2x$$
$$F_{uu'} = 0; \quad F_x = -2; \quad F_{xu'} = 0$$

bo'lgani uchun Eyler tenglamasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$2u' - (-2x) = 0$$

yoki

$$u' + x = 0$$

Bu tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$u' = -x$,

$$\int y''dx = -\int xdx.$$

$$y' = -\frac{x^2}{2} + C_1$$

$$\int y'dx = -\frac{1}{2}\int x^2 dx + C_1 \int dx$$

$$y = -\frac{1}{6} \cdot x_3 + C_1 \cdot x + C_2$$

C_1 va C_2 o'zgarmaslarni $u(1)=0$ va $u(2)=-1$ chegaraviy shartlardan topamiz:

$$\begin{cases} y(1) = -\frac{1}{6} + C_1 + C_2 = 0, \\ y(2) = -\frac{1}{6} \cdot 8 + 2C_1 + C_2 = -1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{1}{6}, \\ 2C_1 + C_2 = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

$$C_1 = \frac{1}{6};\ C_2 = 0.$$

Demak, berilgan funksional

$$y(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{x}{6} = \frac{x}{6}(1 - x^2)$$

egri chiziqda ekstremumga ega bo'ladi Shuni eslatib o'tish kerakki, Eyler tenglamasi ikkinchi tartibli differensial tenglama bo'lib, har doim ham integrallash oson bo'lavermaydi.

10.5-§. Eyler tenglamasining xususiy hollari

Eyler tenglamasining quyidagi soddalashtirilgan ko'rinishlarini ko'rib chiqaylik.

1. F funksiya y' ga bog'liq emas, bu holda $F=F(x;u)$ bo'ladi va Eyler tenglamasi (10.17)

$$F'_y(x,u)=0 \qquad (10.18)$$

ko'rinishga keladi (chunki $F_{u'}=0$). Bu holda (10.15) chegaraviy shartlar bajarilmasligi mumkin. Shuning uchun qaralayotgan variatsion masalaning yechimi mavjud bo'lmasligi mumkin.

2. F funksiya $u'(x)$ ga chiziqli bog'liq, ya'ni

$$F(x, u, u')=M(x, u)+N(x, u) \cdot u' \qquad (10.19)$$

Eyler tenglamasi (10.17) quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dy}=0. \qquad (10.20)$$

Umuman aytganda, (10.20) tenglik bilan berilgan egri chiziq chegaraviy shartlarni qanoatlantirmaydi, demak, variatsion masala bu holda yechimga ega emas.

Misol.

$$V|y(x)|=\int_0^1 (y^2+x^2\cdot y')dx,$$

$$y(0)=0;\ y(1)=P$$

funksionalning ekstremallari topilsin.

Y e ch i sh. $F = u^2+x^2 \cdot u'$ bo'lgani sababli Eyler tenglamasi (10.17) $u-x=0$ bo'ladi.

$u(0)=0$ chegaraviy shart bajariladi. Ikkinchi chegaraviy shart esa faqat $P=1$ dagina bajariladi. $R\neq 1$, da esa berilgan chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi ekstremallar mavjud emas.

3. F funksiya faqat u' ga bog'liq, ya'ni

$$F=F(u') \qquad (10.21)$$

bo'lsin. Bu holda Eyler tenglamasi (10.17) quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$y'-F_{yy}=0. \quad (10.22)$$

Bu yerdan $u''(x)=0$ yoki $u = S_1x+S_2$ — ikkita S_1 va S_2 parametrlarga ega bo'lgan to'g'ri chiziqlar oilasini topamiz. Demak, bu holda ekstremallar to'g'ri chiziqlardan iborat bo'ladi.

4. F funksiya faqat x va u' ga bog'liq, ya'ni

$$F = F(x, u') \quad (10.23)$$

bo'lsin. Bu holda Eyler tenglamasi (10.17)

$$\frac{d}{dx} Fy'(x, y') = 0 \quad (10.24)$$

ko'rinishda bo'lada. Bu yerdan

$$Fy'(x, u')=C_1$$

ni hosil qilamiz.

5. F funksiya faqat u va u' ga bog'liq, ya'ni

$$F = F(y, y') \quad (10.25)$$

bo'lsin. Bu holda Eyler tenglamasi (10.17) quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$F_y-Fy'y' \cdot y'- F_{yy'} \cdot y''=0 \quad (10.26)$$

chunki $F_{xy'}= 0$ bo'ladi.

(10.26) tenglamani integrallash uchun avval har ikkala tomonini u' ga ko'paytiramiz, u holda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$y'\text{-}F_U\text{-}(y')^2 \cdot F_{yy'}\text{-}y^1 \cdot y'' \cdot F_{yy'}=0 \quad (10.27)$$

yoki

$$\frac{d}{dx}(F - y' \cdot Fy') = 0. \quad (10.28)$$

Haqiqatan

$$\frac{d}{dx}(F - y' \cdot F_{y'}) = F_y y' + F_{y'} \cdot y'' - y'' \cdot F_{y'} -$$
$$- F_{yy'}(y')^2 - F_{y'y'} \cdot y' \cdot y'' = y' \cdot (F_y - F_{yy'} \cdot y' -$$
$$- F_{y'y'} \cdot y'') \qquad (10.29)$$

(1028) tenglikdan Eyler tenglamasining birinchi integralini topamiz:

$$F - y' \cdot F'y = C_1 \qquad (10.30)$$

Misol.

$$V[y(x)] = \int_0^{2\pi} (y^2 - y^2)dx$$

funksionalning $y(0)=1$, $y(2\pi)=1$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi ekstremallari topilsin

Yechish : $F = y^2 — y^2$ ekanligini va

$$F_{y'}=2u'; \; F_{y'y'}=2; \; F_y=-2u; \; F_{yy'}=0; \; F_x=0; \; F_{xu'}=0$$

larni e'tiborga olib, Eyler tenglamasini topamiz:

$$y''+y=0.$$

Bu tenglamaning xarakteristik tenglamasi $k^2+1=0$ bo'lgani uchun $r_1=—i$, $r_2=i$ larni topamiz.

Demak, hosil bo'lgan Eyler tenglamasi quyidagi umumiy yechimga ega:

$$y(x)=C_1 \cdot \cos x+C_2 \cdot \sin x.$$

Chegaraviy shartlardan foydalanib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$y(x)=\cos x+C_2 \cdot \sin x,$$

bu yerda C_2 — ixtiyoriy o'zgarmas son.

Shunday qilib, bu holda berilgan variatsion masala cheksiz ko'p yechimga ega ekan.

Mashqlar

Quyidagi variatsion masalalarning yechimlari topilsin:

1. $V[y(x)] = \int\limits_{-1}^{0} (12xy - y'^2)\, dx,\ y(-1) = 1,\ y(0) = 0.$

2. $V[y(x)] = \int\limits_{-1}^{0} (y'^2 + 2yy' + y^2)\, dx,\ y(1) = 1,\ y(2) = 0.$

3. $V[y(x)] = \int\limits_{0}^{1} \sqrt{y(1 + y'^2)} \cdot dx,\ y(0) = \frac{1}{\sqrt{2}},\ y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

4. $V[y(x)] = \int\limits_{0}^{1} (yy'^2 \cdot dx,\ y(0) = 1;\ y(1) = \sqrt[3]{4}.$

5. $V[y(x)] = \int\limits_{0}^{\pi} (4y \cos x + y'^2 - y^2)\, dx,\ y(0) = 0;\ y(\pi) = 0.$

6. $V[y(x)] = \int\limits_{0}^{1} (y'^2 - y^2 - y) \cdot e^{2x}\, dx,\ y(0) = 0;\ y(1) = e^{-1}.$

7. $V[y(x)] = \int\limits_{0}^{1} (y'^2 - 2\sqrt{y})\, dx,\ y(-1) = -1;\ y(1) = 1.$

ILOVA

$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ va $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$ qiymatlar jadvali

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
0,00	0,3989	0,0000				49	3538	1879
01	3989	0040	25	3867	0987			
02	3989	0080	26	3857	1026	0,50	0,3521	0,1915
03	3988	0120	27	3847	1064	51	3503	1950
04	3986	0160	28	3836	1103	52	3485	1985
			29	3825	1141	53	3467	2019
05	3984	0199				54	3448	2054
06	3982	0239	0,30	0,3814	0,1179			
07	3980	0279	31	3802	1217	55	3429	2088
08	3977	0319	32	3790	1255	56	3410	2123
09	3973	0359	33	3778	1293	57	3391	2157
			34	3765	1331	58	3372	2190
0,10	0,3970	0,0398				59	3352	2224
11	3965	0438	35	3752	1368			
12	3961	0478	36	3739	1406	0,60	0,3332	0,2257
13	3956	0517	37	3725	1443	61	3312	2291
14	3951	0557	38	3712	1480	62	3292	2324
			39	3697	1517	63	3271	2357
15	3945	0596				64	3251	2389
16	3939	0636	0,40	0,3683	0,1554			
17	3932	0675	41	3668	1591	65	3230	2422
18	3925	0714	42	3653	1628	66	3209	2454
19	3918	0753	43	3637	1664	67	3187	2486
			44	3621	1700	68	3168	2517
0,20	0,3910	0,0793				69	3144	2549
21	3902	0832	45	3605	1736			
22	3894	0871	46	3589	1772	0,70	0,3123	0,2580
23	3885	0910	47	3572	1808	71	3101	2611
24	3876	0948	48	3555	1844	72	3079	2642

x	φ(x)	Φ(x)	x	φ(x)	Φ(x)	x	φ(x)	Φ(x)
73	3056	2673				36	1582	4131
74	3034	2703	05	2299	3531	37	1561	4147
			06	2275	3554	38	1539	4162
75	3011	2734	07	2251	3577	39	1518	4177
76	2989	2764	08	2227	3599			
77	2966	2794	09	2203	3621	1,40	0,1497	0,4192
78	2943	2823				41	1476	4207
79	2920	2852	1,10	0,2179	0,3643	42	1456	4222
			11	2155	3665	43	1435	4236
0,80	0,2897	0,2881	12	2131	3686	44	1415	4251
81	2874	2910	13	2107	3708			
82	2850	2939	14	2083	3729	45	1394	4265
83	2827	2967				46	1374	4279
84	2803	2995	15	2059	3749	47	1354	4279
			16	2036	3770	48	1334	4306
85	2780	3023	17	2012	3790	49	1315	4319
86	2756	3051	18	1989	3810			
87	2732	3078	19	1965	3830	1,50	0,1295	0,4332
88	2709	3106				51	1276	4345
89	2685	3133	0,20	0,1942	0,3849	52	1257	4357
			21	1919	3869	53	1238	4370
0,90	0,2661	0,3159	22	1895	3888	54	1219	4382
91	2637	3186	23	1872	3907			
92	2613	3212	24	1849	3925	55	1200	4394
93	2689	3238				56	1182	4406
94	2565	3264	25	1826	3944	57	1163	4418
			26	1804	3962	58	1145	4429
95	2541	3289	27	1781	3980	59	1127	4441
96	2516	3315	28	1758	3997			
97	2492	3340	29	1736	4015	1,60	0,1109	0,4452
98	2468	3365				61	1092	4463
99	2444	3389	1,30	0,1714	0,4032	62	1074	4474
			31	1691	4049	62	1057	4484
1,00	0,2420	0,3413	32	1669	4066	64	1040	4495
01	2396	3438	33	1647	4082			
02	2371	3461	34	1626	4099	65	1023	4505
03	2347	3485				66	1006	4515
04	2323	3508	35	1604	4115	67	0989	4525

x	φ(x)	Φ(x)	x	φ(x)	Φ(x)	x	φ(x)	Φ(x)
68	0973	4535				62	0129	4956
69	0957	4545	20,0	0,0540	0,4772	64	0122	4959
			02	0519	4783	66	0116	4961
1,70	0,0940	0,4554	04	0498	4793	68	0110	4963
71	0925	4564	06	0478	4803			
72	0909	4573	08	0459	4812	70	0104	4965
73	0898	4582				72	0099	4967
74	0878	4591	10	0440	4821	74	0093	4969
			12	0422	4830	76	0088	4971
75	0863	4599	14	0404	4838	78	0084	4973
76	0848	4608	16	0387	4846			
77	0833	4616	18	0371	4854	2,80	0,0079	0,4974
78	0818	4625				82	0075	4976
79	0804	4633	2,20	0,0355	0,4861	84	0071	4977
			22	0339	4868	86	0067	4979
1,80	0,0790	0,4641	24	0325	4875	88	0063	4980
81	0775	4649	26	0310	4881			
82	0761	4656	28	0297	4887	90	0,0060	0,4981
83	0748	4664				92	0056	4982
84	0734	4671	30	0283	4893	94	0053	4984
			32	0270	4898	96	0050	4985
85	0721	4678	34	0258	4904	98	0047	4986
86	0707	4686	36	0246	4909			
87	0694	4693	38	0235	4913	3,00	0,00443	0,49865
88	0681	4699				3,10	00327	49903
89	0669	4706	2,40	0,0224	0,4918	3,20	00238	49931
			42	0213	4922	3,30	00172	49952
1,90	0,0656	0,4713	44	0203	4927	3,40	00123	49996
91	0644	4719	46	0194	4931			
92	0632	4726	48	0184	4934	3,50	00087	49977
93	0620	4732				3,60	00061	49984
94	0608	4738	50	0175	4938	3,70	00042	49989
			52	0167	4941	3,80	00029	49993
95	0596	4744	54	0158	4945	3,90	00020	49995
96	0584	4750	56	0151	4948			
97	0573	4756	58	0143	4951	4,00	0,0001338	0,499998
98	0562	4761				4,50	0000160	499997
99	0551	4767	2,60	0,0136	0,4953	5,00	0000015	49999998

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Abduqodirov A.A., Fozilov F.N., Umurzoqov T.N. Hisoblash matematikasi programmalash. Toshkent, «O'qituvchi», 1989.

2. Isroilov M. Hisoblash metodlari. Toshkent, «O'qituvchi», 1988.

3. Demidovich B.P., Maron I.A. Основы вычыслительной математики. М., «Наука», 1970.

4. Samarskiy A.A. Введение в числительные методы. М., «Наука», 1987.

5. Kopchenova N.V., Maron I.A. Вычислительная математика примерах и задачах. М., «Наука», 1972.

6. Tixonov A.N., Kostamarov D.P. Amaliy matematikadan kirish leksiyalari. Toshkent, «O'qituvchi», 1987.

7. Qobulov V.Q. Funksional analiz va hisoblash matematikasi. Toshkent, «O'qituvchi», 1976.

8. Elsgols L.E. *Дифференциальные уравнения и вариационные исчисления.* М., «Наука», 1969.

9. Sraf L.Ya. Вариационные исчисления и интегральные уравнения. М., «Наука», 1970.

10. *Baxvalov N.S. Численные методы.* М., «Наука» 1975.

11. Iskandarov R., Nazarov R. Algebra va sonlar nazariyasi. Toshkent, «O'qituvchi», 1977, 1-qism.

12. Guter R.S., Ovchinskiy B.V. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. М., «Наука», 1970.

13. Vinogradov Yu. S. Математическая статистика и ее примерение в текстильной и швейной промышленности. М., «Легкая индустрия», 1970.

14. Vinogradov Yu.S. Сборник задач по премерению математической статистики и теории вероятностей в текстильной и швейной промышленности. М., «Легкая индустрия» 1968.

15. Gmurman V.E. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. Toshkent, «O'qituvchi», 1987.

16. Gmurman V.E. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. «Высшая школа», Москва., 1970.

17. Markovich E.S. Курс высшей математики с элементами теории вероятностей и математическая статистика. М., «Статистика», 1970.

18. Badalov F. B. Optimallash nazariyasi va matematik programmalashtirish. Toshkent, «O'qituvchi», 1989.

19. Qobulov V.K. Optimal planlashtirish masalalari. Toshkent, «Fan», 1975.

20. Kuznesov Yu.N., Kubuzov B.I., Voloshenko A.B. Математическое программирование. М., «Высшая школа», 1980 g.

21. Safoeva Q., Beknazarova N., Operatsiyalarni tekshirishning matematik usullari. T., «O'qituvchi», 1984, 1-qism.

22. Sirojiddinov S.H., Mamatov M.M. Ehtimollar va matematik statistika. T., «O'qituvchi», 1980.

23. Zeldovich Ya.B., Mishkis A.D. Элементы прикладной математики. 2003 г. Изд. 4-е Издательство – Лань.

24. M. Isroilov. Hisoblash matematikasi. Toshkent, «O'qituvchi», 2003 y.

25. Xolmatov T.X., Tayloqov N.I. Amaliy matematika, dasturlash va kompyuterning dasturiy ta'minoti. Toshkent, «Mehnat», 2000 y.

26. S.A. Ayvazyan., V.S. Mxitaryan. Теория вероятностей и прикладная статистика. М. ЮНИТИ-ДИАНА.

27. Muzaffarov X.A., Baklushin M.B., Abduraimov M.G. Математическое моделирование. Ташкент. «Университет» 2002 г.

28. Fayazov Q.S. Hisoblash matematikasi, matematik fizika va analizning nokorrekt masalalarini yechish usullari. Toshkent, «Universitet», 2003 y.

29. N.L. Krasnov., L.I. Makarenko., E.V. Shikip., V. I. Zalyanin. Вся высшая математика. Т.5. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теори игр. Москва, Эдиториал УРСС, 2002 г.

MUNDARIJA

V bob. Integrallarni taqribiy hisoblash

VI bob. Oddiy differensial tenglamalarni taqribiy yechish usullari

VII bob. Ehtimolliklar nazariyasi 84

VIII bob. Matematik statistika unsurlari

Sh. Sh. ShOHAMIDOV

AMALIY MATEMATIKA UNSURLARI

Muharrir *M. Mirkomilov*
Texnik muharrir *A. Moydinov*
Musahhih *M. Tojioyeva*

Bosishga ruxsat etildi 28.08.04 y. Bichimi 60x841/16. «Ariel» harfida terildi. Bosma tabog'I 13,25. Nashriyot hisob tabog'I 12,58. Adadi 1500. 75-buyurtma.

«Fan va texnologiya» nashriyoti. 15-04. Toshkent sh., Olmazor ko'chasi 171 uy.

"Fan va texnologiyalar markazining" bosmaxonasida chop etildi. Toshkent sh., Olmazor ko'chasi 171 uy.