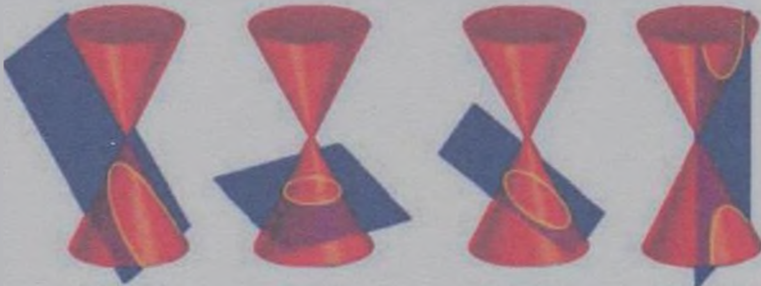
B.A.ABDURAXMONOV
SH.R.XURRAMOV

OLIY MATEMATIKA

1



O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

B.A.ABDURAXMONOV, SH.R.XURRAMOV

OLIY MATEMATIKA

1-jild

TOSHKENT - 2018

Ushbu o'quv qo'llanma farmatsevtika ta'lim muassasalarining "Oliy matematika" kursi dasturi asosida yozilgan va bakalavrlar Davlat ta'lim standartlari talablariga mos keladi.

O'quv qo'llanma ikki jilddan iborat. Uning birinchi jildi oliy matematikaning chiziqli algebra va analitik geometriya elementlari, matematik analiz asoslari bo'limlarini o'z ichiga oladi. O'quv qo'llanmaning har bir bo'limi zamonaviy xorijiy adabiyotlar va o'qitish texnologiyalari tahlili asosida yozilgan. Bo'limlarning har biri mavzusining oxirida ko'p sondagi mustaqil yechish uchun mashqlar keltirilgan.

Mualliflar:

B.A.Abduraxmonov, Sh. R. Xurramov

Oliy matematika. Farmatsevtika ta'lim muassasalarining talabalari uchun o'quv qo'llanma. I-jild / Abduraxmonov B.A., Xurramov Sh. R. – T: , 2018, 244b.

Taqrizchilar:

A.A.Raximov – fizika-matematika fanlari doktori, Toshkent avtomobil yo'llarini loyihalash qurish va ekspuluatatsiyasi instituti professori;

X.Sh.Ilhomov – texnika fanlari nomzodi, Toshkent farmatsevtika instituti dotsenti.

O'quv qo'llanma Toshkent farmatsevtika institutining ilmiy Kengashi tomonidan chop etishga tavsiya qilingan (5-bayonnoma, 26.12.17).

SO‘Z BOSHI

Matematika barcha tabiiy bilimlar asosidir: «Har qanday fanda qancha matematika bo‘lsa, shuncha haqiqat bo‘ladi» (Immanuil Kant). Bo‘lajak mutaxassisni, jumladan farmatsevtni tayyorlashda ham matematik ta’lim muhim ahamiyatga ega. Matematik ta’limning asosi farmatsevtlar uchun o‘qitiladigan “Oliy matematika” kursi hisoblanadi.

Ushbu o‘quv qo‘llanma farmatsevtika ta’lim muassasalarining “Oliy matematika” kursi dasturi asosida yozilgan va bakalavrlar Davlat ta’lim standartlari talablariga mos keladi.

O‘quv qo‘llanma ikki jilddan iborat. Uning birinchi jildi oliy matematikaning chiziqli algebra va analitik geometriya elementlari, matematik analiz asoslari bo‘limlarini o‘z ichiga oladi. Bu bo‘limlar zamonaviy xorijiy adabiyotlar va o‘qitish texnologiyalari tahlili asosida yaratilgan bo‘lib, har bir mavzuni yozishda bir qancha xorijiy adabiyotlardan foydalanilgan, tegishli bilimlar talabalar tomonidan mustaqil o‘zlashtirilishiga, ularda ko‘nikma va malakalarning shakllantirilishiga hamda ijodiy qobiliyatlarni rivojlantirishga yo‘naltirigan.

Darslik lotin alifbosida yozilgan. Darslikning har bir mavzusi ko‘p sondagi misol va masalalar yechimlarida tushuntirilgan, har bir bo‘limi esa ularni o‘zlashtirishni mustahkamlashga yo‘naltirilgan mashqlar bilan to‘ldirilgan. Ayrim misol va masalalarni matematik paketlar yordamida yechish usullari keltirilgan.

Darslik haqidagi tanqidiy fikr va mulohazalarini bildirgan barcha kitobxonlarga mualliflar oldindan o‘z tashakkurini bildiradi.

Mualliflar

I. CHIZIQLI ALGEBRA VA ANALITIK GEOMETRIYA ELEMENTLARI

1.1. DETERMINANTLAR

1.1.1. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar [1]

Determinant tushunchasidan dastlab chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda foydalanilgan bo'lib, keyinchalik determinantlar matematikaning bir qancha masalalarini yechishga, jumladan vektorlar algebrasida, analitik geometriyada, keng tatbiq etildi.

1-ta'rif. $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ ifodaga *ikkinchi tartibli determinant* deyiladi va u

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

deb yoziladi.

Demak,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1.1}$$

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ lar determinantning elementlari deb ataladi. Bunda a_{ij} determinantning i-satr va j- ustunda joylashgan elementini ifodalaydi.

a_{11}, a_{22} elementlar joylashgan diagonalga determinantning bosh diagonali, a_{21}, a_{12} elementlar joylashgan diagonalga determinantning yordamchi diagonali deyiladi.

Shunday qilib, ikkinchi tartibli determinant bosh diagonal elementlari ko'paytmasidan yordamchi diagonal elementlari ko'paytmasini ayrilganiga teng:

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

1-misol. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$ determinantni hisoblang.

Yechish. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 4 - 1\cdot 5 = 8-5 = 3.$

---

1. Erving Kreyszig, Herbert Kreyszig, Edward Normuton. Advanced engineering Mathematics New York, Copyrigth, 2011

2-ta'rif. $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$ ifodaga *uchinchi tartibli determinant* deyiladi va u

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

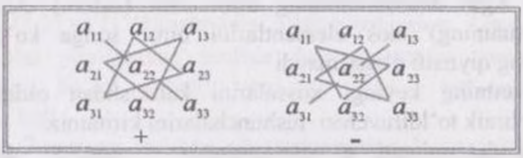
deb yoziladi.

Demak, $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \qquad (1.2)$$

Uchinchi tartibli determinant uchun satr, ustun, bosh diagonal, yordamchi diagonal tushunchalari ikkinchi tartibli determinantdagi kabi kiritiladi.

(1.2) ifoda etarlicha sodda tuzilishga ega. Bunda har bir qo'shiluvchi determinantning har bir satri va har bir ustunidan faqat bittadan olingan elementlar ko'paytmasidan iborat va tayin ishoraga ega. Qo'shiluvchilardan qaysi birini "musbat" ishora bilan va qaysi birini "manfiy" ishora bilan olinishini yodda saqlash uchun quyidagi «*Uchburchak qoidasi*» deb ataluvchi qoidadan foydalaniladi:



2-misol. 1. $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ determinantni hisoblang.

Yechish.

$$\begin{matrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{matrix} \Rightarrow -8+1+27=20, \qquad \begin{matrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{matrix} \Rightarrow 6-6+6=6,$$

$\Delta=20-6=14.$

1.1.2. Determinantning xossalari

Determinantlar uchun quyidagi xossalar o'rinli bo'ladi. Ularning isboti (1.1) (yoki (1.2)) formula bilan oson amalga oshiriladi. Usbotlarni mustaqil bajarish tavsiya qilinadi.

1-xossa. Transponirlash (barcha satrlarni mos ustunlar bilan almashtirish) natijasida determinantning qiymati o'zgarmaydi.

2-xossa. Determinant ikkita satrining (ustunining) o'rinlari almashtirilsa, uning qiymati qarama-qarshi ishoraga o'zgaradi. Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3-xossa. Agar determinant ikkita bir xil satrga (ustunga) ega bo'lsa, u nolga teng bo'ladi.

4-xossa. Determinantning biror satri (ustuni) elementlari λ songa ko'paytirilsa, determinant shu songa ko'payadi va aksincha determinant biror satr (ustun) elementlarining umumiy ko'paytuvchisini determinant belgisidan tashqatiga chiqarish mumkin. Masalan,

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

5-xossa. Agar determinant biror satrining (ustunining) barcha elementlari nolga teng bo'lsa, u nolga teng bo'ladi.

6-xossa. Agar determinantning ikki satri (ustuni) proporsional bo'lsa, u nolga teng bo'ladi.

7-xossa. Agar determinantning biror satri (ustuni) elementlariga boshqa satrining (ustunining) mos elementlarini biror songa ko'paytirib qo'shilsa, determinantning qiymati o'zgarmaydi.

Determinantning keyingi xossalarini keltirishdan oldin determinantning minori va algebraik to'ldiruvchisi tushunchalarini kiritamiz.

n-tartibli determinant a_{ij} *elementining minori* deb, shu element joylashgan satr va ustunni o'chirishdan hosil bo'lgan $(n-1)$-tartibli determinantga aytiladi va M_{ij} bilan belgilanadi.

Determinant a_{ij} *elementining* A_{ij} *algebraik to'ldiruvchisi* deb,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

songa aytiladi.

Masalan, $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ determinantning $a_{21} = 2$ elementining minori va algebraik to'ldiruvchisi quyidagicha topiladi:

$$\begin{vmatrix} \cancel{1} & 3 & 2 \\ \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ \cancel{3} & 2 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -10, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = 10.$$

8-xossa. Determinantnig qiymati uning biror satri (ustuni) elementlari bilan bu elementlarga mos algebraik to'ldiruvchilar ko'paytmalarining yig'indisiga teng.

9-xossa. Determinant biror satri (ustuni) elementlari bilan boshqa satri (ustuni) mos elementlari algebraik to'ldiruvchilari ko'paytmalarining yig'indisi nolga teng bo'ladi.

1.1.3. n-tartibli determinantni hisoblash

n ta satr va n ta ustundan tashkil topgan ushbu

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determinantga *n-tartibli determinant* deyiladi.

n-tartibli determinant avval xossalar bilan soddalashtirilishi va keyin 8-xossaga ko'ra quyidagi formulalardan biri bilan (biror satr yoki ustun bo'yicha yoyib) hisoblanishi mumkin:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.3}$$

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}, \quad j = \overline{1,n}. \tag{1.4}$$

Determinantni (1.3) va (1.4) formulalar bilan hisoblashga *Laplas yoyilmalari usuli* deyiladi[1]. Laplas yoyilmalari usulida determinantning qaysi bir satrida (ustunida) nollar ko'p bo'lsa, u holda yoyishni shu satr (ustun) bo'yicha bajarish qulay bo'ladi.

Determinantga 7-xossani qo'llab, determinantning biror satrida (ustunida) bitta elementdan boshqa elementlarni nollarga keltirish mumkin. Bunda determinantning qiymati shu satrdagi (ustundagi) noldan farqli element bilan uning algebraik to'ldiruvchisining ko'paytmasidan iborat bo'ladi. Shunday qilib, n-tartibli determinant bitta $(n-1)$-tartibli determinantga keltirib, hisoblanadi. Determinantni hisoblashning bu usuliga determinantning *tartibini pasaytirish usuli* deyiladi.

3-misol.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

determinantni tartibini pasaytirish usuli bilan hisoblang.

Yechish. Bunda: 1) Ikkita elementi nolga teng bo'lgan uchinchi ustunni tanlaymiz va uning ikkinchi satrida joylashgan elementidan boshqa barcha elementlarini nolga aylantiramiz. Buning uchun ikkinchi satr elementlarini 3 ga ko'paytirib, uchunchi satrning mos elementlariga qo'shamiz va hosil bo'lgan determinantni uchinchi ustun elementlari bo'yicha yoyamiz:

ıgan uchinchi tartibli determinantda birinchi ustunning uchinchi yuqorida joylashgan elementlarini nolga aylantiramiz. Buning chi satrni (-2) ga ko'paytirib, birinchi satrga qo'shamiz, keyin $-10)$ ga ko'paytirib, ikkinchi satrga qo'shamiz, hosil bo'lgan inchi ustun elementlari bo'yicha yoyamiz va hosil bo'lgan terminantni hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 8 \\ 0 & -4 & 25 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 8 \\ -4 & 25 \end{vmatrix} = -75 + 32 = -43.$$

1.1.4. Mashqlar

ıartibli determinantlarni hisoblang:

3) $\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} \sin 35^0 & \sin 65^0 \\ \cos 35^0 & \cos 65^0 \end{vmatrix}$

6) $\begin{vmatrix} tg\alpha & ctg\alpha \\ \sin^2\alpha & \cos^2\alpha \end{vmatrix}$.

nalarni va tengsizliklarni yeching:

2) $\begin{vmatrix} x^2 & 2 \\ 1 & x \end{vmatrix} + x = 0$;

4) $\begin{vmatrix} x & x \\ 4 & x \end{vmatrix} + 3 > 0$.

ınantning ko'rsatilgan minor va algebraik to'ldiruvchisini hisoblang:

M_{23} va A_{31};

2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, M_{22} va A_{14}.

hi tartibli determinantlarni uchburchak qoidasi bilan hisoblang:

2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$;

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} b & b & 1 \\ 1 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\beta & 0 \\ \cos\alpha & \cos\beta & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 1 & ctga & -tga \\ tga & 0 & tga \\ tga & ctga & 0 \end{vmatrix}$

1.1.5. To'rtinchi tartibli determinantlarni tartibini pasaytirish usuli bilan hisoblang.

1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

1.2. MATRITSALAR

1.2.1. Matritsa va uning turlari [2]

Matritsa tushunchasi *1850 yilda James Joseph Sylvester* tomonidan kiritilgan.

Matritsalar sonlar, algebraik belgilar va matematik funksiyalarning katta massivlarini yagona ob'ekt sifatida qarash va bunday massivlarni o'z ichiga olgan masalalarni qisqa ko'rinishda yozish va yechish imkonini beradi.

Matritsa – bu elementlar (sonlar, algebraik belgilar, matematik funksiyalar) massivining satr hamda ustunlarda berilgan va kichik qavslarga olingan to'g'ri burchakli jadvalidir.

Matritsaning o'lchami uning satrlari soni va ustunlari soni bilan aniqlanadi. Matritsaning o'lchamini ifodalash uchun $m\times n$ belgi ishlatiladi. Bu belgi matritsaning m ta satr va n ta ustundan tashkil topganini bildiradi.

Matritsa lotin alifbosining bosh harflaridan biri bilan belgilanadi.

Masalan, $B=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ – 2×3 o'lchamli matritsa.

A matritsaning i-satr va j-ustunda joylashgan elementi a_{ij} bilan belgilanadi.

$A=(a_{ij})$, $(i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n})$ yozuv A matritsa a_{ij} elementlardan tashkil topganini bildiradi:

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$1\times n$ o'lchamli matritsaga *satr matritsa* yoki *satr-vektor* deyiladi. $m\times 1$ o'lchamli matritsaga *ustun matritsa* yoki *ustun-vektor* deyiladi.

$n\times n$ o'lchamli maritsaga n *- tartibli kvadrat matritsa* deyiladi.

Kvadrat matritsaning chap yuqori burchagidan o'ng quyi burchagiga yo'nalgan $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ elementlaridan tuzilgan diagonaliga uning *bosh diagonali*, o'nq yuqori burchagidan chap quyi burchagiga yo'nalgan $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \ldots, a_{n1}$ elementlardan tuzilgan diagonaliga uning *yordamchi diagonali* deyiladi.

Bosh diagonalda joylashmagan barcha elementlari nolga teng bo'lgan

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsaga *diagonal matritsa* deyiladi.

Barcha elementlari birga teng bo'lgan diagonal matritsaga *birlik matritsa* deyiladi va I (yoki E) harfi bilan belgilanadi.

Barcha elementlari nolga teng bo'lgan ixtiyoriy o'lchamdagi matritsaga *nol matritsa* deyiladi va O harfi bilan belgilanadi.

A matritsada barcha satrlarni mos ustunlar bilan almashtirish natijasida hosil qilingan A^T matritsaga A matritsaning *transponirlangan matritsasi* deyiladi: $(a_{ij})^T=(a_{ji})$.

Agar $A=A^T$ bo'lsa, A matritsa *simmetrik matritsa* deb ataladi.

1.2.2. Matritsalar ustida arifmetik amallar

Bir xil o'lchamli $A=(a_{ij})$ va $B=(b_{ij})$ matritsalarning barcha mos elementlari teng, ya'ni $a_{ij}=b_{ij}$ bo'lsa, bu matritsalarga *teng matritsalar* deyiladi va $A=B$ deb yoziladi.

1- ta'rif. $A=(a_{ij})$ *matritsaning* λ *songa ko'paytmasi* deb, elementlari $c_{ij}=\lambda a_{ij}$ kabi aniqlanadigan $C=\lambda A$ matritsaga aytiladi.

$$\boxed{C=\lambda A \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij}=\lambda a_{ij}}$$

1-misol. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ bo'lsin. $3A$ ni toping.

Yechish.

$$3A=3\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot(-1) & 3\cdot 0 \\ 3\cdot 3 & 3\cdot 4 & 3\cdot(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 9 & 12 & -3 \end{pmatrix}.$$

Matritsalarni qo'shish va ayirish amallari *bir xil o'lchamli matritsalar*

2. David C. Lay. Linear algebra and its applications. Opyrigth, 2012

uchun kiritiladi. Bunda yig'indi matritsa qo'shiluvchi matritsalar bilan bir xil o'lchamga ega bo'ladi.

2-ta'rif. $A=(a_{ij})$ va $B=(b_{ij})$ *matritsalarning yig'indisi* deb, elementlari $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ kabi aniqlanadigan $C=A+B$ matritsaga aytiladi.

$$\boxed{C=A+B \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}.}$$

2-misol. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}$ bo'lsin. $A+B$ ni toping.

Yechish.

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2 & -1+3 & 4+2\\ 3+1 & 0+0 & 1+(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 6\\ 4 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$-A=(-1)\cdot A$ matritsa A *matritsaga qarama-qarshi matritsa* deb ataladi.

3-ta'rif. $A=(a_{ij})$ va $B=(b_{ij})$ *matritsalarning ayirmasi* deb, $C=A-B=A+(-B)$ matritsaga aytiladi. Bunda C matritsaning elementlari $c_{ij}=a_{ij}+(-b_{ij})=a_{ij}-b_{ij}$ kabi topiladi.

$$\boxed{C=A-B \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}.}$$

3-misol. $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 2\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$ bo'lsin. $A-B$ ni toping.

Yechish.

$$A-B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 2\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-1 & -3-3 & 2-2\\ 2-2 & -1-1 & 4-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -6 & 0\\ 0 & -2 & 5\end{pmatrix}$$

***Matritsalar ustida chiziqli amallar quyidagi xossalarga ega*[2].**

1°. $A+B=B+A$; 2°. $(A+B)+C=A+(B+C)$;

3°. $A+O=A$; 4°. $A+(-A)=O$;

5°. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$; 6°. $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$;

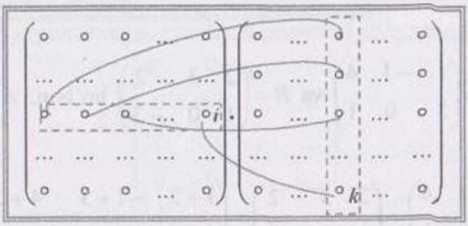
7°. $\mu(\lambda A)=\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$; 8°. $1\cdot A=A$;

Ikki matritsani ko'paytirish amali *moslashtirilgan matritsalar* uchun kiritiladi. A matritsaning ustunlari soni B matritsaning satrlari soniga teng bo'lsa, A va B *matritsalar moslashtirilgan* deyiladi.

4-ta'rif. $m \times p$ o'lchamli $A=(a_{ij})$ *matritsaning* $p \times n$ o'lchamli $B=(b_{jk})$ *matritsaga ko'paytmasi* AB deb, c_{ik} elementi

$$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\ldots+a_{ip}b_{pk}=\sum_{r=1}^{p}a_{ir}b_{rk},\ i=1,\ldots,m,\ k=1,\ldots,n$$

(qo'shiluvchlari quyidagi sxemada keltirilgan) kabi aniqlanadigan $m \times n$ o'lchamli $C=(c_{ik})$ matritsaga aytiladi.



4-misol. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ bo'lsin. AB ni toping.

Yechish.

$$AB=\begin{pmatrix} 2\cdot3+1\cdot(-1) & 2\cdot2+1\cdot0 & 2\cdot4+1\cdot3 \\ -3\cdot3+4\cdot(-1) & -3\cdot2+4\cdot0 & -3\cdot4+4\cdot3 \\ 0\cdot3+2\cdot(-1) & 0\cdot2+2\cdot0 & 0\cdot4+2\cdot3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 11 \\ -13 & -6 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Matritsalarni ko'paytirish amali ushbu xossalarga bo'ysunadi :

1°. $A(B+C)=AB+AC$;
2°. $A(B+C)=AB+AC$;
3°. $A(BC)=(AB)C$;
4°. $(\lambda A)(\mu B)=(\lambda\mu)(AB)$;
5°. $A(\lambda B)=(\lambda A)B=\lambda(AB)$;
6°. $AI=IA=A$;
7°. $AO=OA=O$;

5-misol. Farmatsevtika korxonasi uch xil xom ashyodan foydalanib besh турдаги dori ishlab chiqaradi. Korxonaning xom ashyo sarfi, bir birlik xom ashyoning narxi va ishlab chiqarish rejasi mos ravishda A, B va C matritsalar orqali berilgan:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix},\quad B=(10\ 25\ 30),\quad C=\begin{pmatrix} 90 \\ 110 \\ 140 \\ 180 \\ 200 \end{pmatrix}$$

Korxonaning umumiy xarajatini toping.

Yechish. Ishlab chiqiladigan bir birlik dori uchun ketadigan xarajat B va A matrisalar ko'paytmasiga teng:

$$D = BA = (10 \quad 25 \quad 30)\cdot\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (175 \quad 100 \quad 260 \quad 215 \quad 255).$$

Umumiy xarajat C va D matrisalar ko'paytmasiga teng:

$$X = DC = (175 \quad 100 \quad 260 \quad 215 \quad 255)\cdot\begin{pmatrix} 90 \\ 110 \\ 140 \\ 180 \\ 200 \end{pmatrix} = 152850.$$

1.2.3. Teskari matritsa

Agar A va A^{-1} kvadrat matritsalar uchun $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ tenglik bajarilsa, A^{-1} matritsa A matritsaga *teskari matritsa* deyiladi [2].

A kvadrat matrisaning determinanti $\det A$ bilan belgilanadi. Masalan, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ matritsaning determinanti $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ kabi aniqlanadi.

Agar $\det A = 0$ bo'lsa, A matritsaga *xos* yoki *maxsus matritsa* deyiladi. Agar $\det A \neq 0$ bo'lsa, A matritsa *xosmas* yoki *maxsusmas matritsa* deb ataladi.

Agar A matritsada avval elementlarni mos algebraik to'ldiruvchilar bilan almashtirilsa va keyin transponirlansa, hosil bo'lgan matritsa A matritsaga *biriktirilgan matritsa* deyiladi va $\mathrm{adj}A$ bilan belgilanadi:

$$\mathrm{adj}A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

1- teorema. Har qanday xosmas A matritsa uchun teskari matritsa mavjud va yagona bo'ladi [2].

A matritsaga teskari matritsa

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\mathrm{adj}A$$

formula bilan topiladi [2].

5-misol. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ matritsaga teskari matritsani toping.

Yechish. Berilgan matritsaning determinantini hisoblaymiz:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2.$$

$\det A \neq 0$ va A matritsa uchun teskari matritsa mavjud.

Matritsa elementlarining algebraik to'ldiruvchilarini tuzamiz:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} 2 = 2, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} 1 = -1,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} 4 = -4, \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} 3 = 3.$$

A matritsaga biriktirilgan matritsani topamiz:

$$adjA = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Shunday qilib,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

1.2.4. Mashqlar

1.2.1. $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ matritsani $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ va $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ matritsalarning chiziqli kombinatsiyalari ko'rinishida ifodalang.

1.2.2. $A = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ matritsani $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ va $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ matritsalarning chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida ifodalang.

1.2.3. $m\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ bo'lsa, m va n ni toping.

1.2.4. A, B matritsalar va m, n sonlar berilgan. $mA + nB$ matritsani toping:

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $m = 2$, $n = -1$;

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $m = -2$, $n = 3$;

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 6 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$, $m = -4$, $n = 3$;

4) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 6 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $m = 3$, $n = -2$.

1.2.5. $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ bo'lsa, x va y ni toping.

1.2.6. A va B matritsalar berilgan. AB matritsani toping:

1) $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$; 4) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

1.2.7. A, B va C matritsalar berilgan. ABC matritsani toping:

1) $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$.

1.2.8. Berilgan matritsalarning teskari matritsasini toping:

1) $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 4 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

1.2.9. Berilgan matritsalardan qaysi birlari o'zaro teskari matritsalar bo'ladi?

1) $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ va $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ va $\begin{pmatrix}2 & -5\\ -1 & 3\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$ va $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$ va $\begin{pmatrix}7 & 2 & -6\\ -3 & -1 & 3\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$.

1.3. CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASI

1.3.1. Asosiy tushunchalar

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish masalasi chiziqli algebraning asosiy masalalaridan biri hisoblanadi.

Ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3.1}$$

sistemaga *n noma'lumli m ta chiqziqli tenglamalar sistemasi* deyiladi.

Bu yerda $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ haqiqiy sonlarga *sistemaning koeffitsiyentlari*, $x_1, x_2, \dots, x_n$ *noma'lumlar*, $b_1, b_2, \dots, b_m$ haqiqiy sonlarga *ozod hadlar* deyiladi.

(3.1) sistema koeffitsiyentlaridan tuzilgan

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

matritsaga (3.1) sistemaning *matritsasi* (*asosiy matritsasi*) deyiladi.

Bu matritsaga ozod hadlardan tuzilgan ustunni qo'shish orqali hosil qilingan

$$C=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \tag{3.3}$$

matritsaga (3.1) *sistemaning kengaytirilgan matritsasi* deyiladi.

(3.1) sistemani

$$AX=B \tag{3.4}$$

matritsa ko'rinishida yozish mumkin, bu yerda

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

Haqiqatdan ham

$$AX=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}=B.$$

(3.1) sistema tenglamalarini ayniyatga aylantiradigan noma'lumlarning tartiblangan $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ qiymatlariga (3.1) *sistemaning yechimi* deyiladi.

Kamida bitta yechimga ega sistemaga *birgalikda bo'lgan sistema*, bitta ham yechimga ega bo'lmagan sistemaga *birgalikda bo'lmagan sistema* deyiladi.

Birgalikda bo'lgan va yagona yechimga ega sistemaga *aniq sistema*, cheksiz ko'p yechimga ega sistemaga *aniqmas sistema* deyiladi. Aniqmas sistemaning har bir yechimi *sistemaning xususiy yechimi* deb ataladi. Barcha xususiy yechimlar to'plami *sistemaning umumiy yechimi* deyiladi.

Yechimlari to'plami bir xil bo'lgan, ya'ni birinchisining har bir yechimi ikkinchisining yechimi bo'ladigan, va aksincha, ikkinchisining har bir yechimi birinchisining yechimi bo'ladigan ikkita sistemaga *ekvivalent* (*teng kuchli*) *sistemalar* deyiladi.

Ushbu almashtirishlar *sistemada elementar almashtirishlar* deb yuritiladi:

- sistema istalgan ikkita tenglamasining o'rinlarini almashtirish;
- sistemaning istalgan tenglamasini noldan farqli songa ko'paytirish (bo'lish);

- sistemaning istalgan tenglamasiga noldan farqli songa ko'paytirilgan boshqa tenglamasini qo'shish.

Elementar almashtirishlar natijasida ekvivalent sistemalar hosil bo'ladi.

Ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{3.6}$$

n noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasining

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

matritsasi kvadrat matritsa bo'ladi.

A matritsaning

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{3.8}$$

determinantiga (3.6) *sistemaning determinanti* deyiladi.

Agar $\det A \neq 0$ bo'lsa, (3.6) sistemaga *xosmas sistema* deyiladi.

Agar $\det A = 0$ bo'lsa, (3.6) sistemaga *xos sistema* deyiladi.

1.3.2. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli

n noma'lumli m ta chiqziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3.1}$$

(3.1) sistemani Gauss usuli bilan yechish ikki bosqichda amalga oshiriladi. Birinchi bosqichda sistema pog'onasimon ko'rinishga keltiriladi.

Pog'onasimon sistema deyilganida

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{kk}x_k + \ldots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

ko'rinishdagi sistema tushuniladi, bu yerda $k \le n$, $a_{ii} \ne 0$, $i = \overline{1,k}$.

Ikkinchi bosqichda noma'lumlar pog'onasimon sistemadan ketma-ket topiladi.

1-bosqich. Sistemada quyidagi almashtirishlarni bajaramiz: birinchi tenglamaning chap va o'ng tomonini $a_{11} \ne 0$ ga (agar $a_{11} = 0$ bo'lsa, u holda bu tenglama sistemaning x_1 noma'lum oldidagi koeffitsiyenti nolga teng bo'lmagan tenglamasi bilan almashtiriladi) bo'lamiz. Keyin hosil qilingan tenglamani $(-a_{i1})$ ga ko'paytirib, i - tenglamaga qo'shamiz. Bunda sistema tenglamalarining ikkinchisidan boshlab x_1 qatnashgan hadlar yo'qatiladi va (3.1) sistema quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \qquad a_{m2}^{(1)}x_2 + a_{m3}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}, \end{cases}$$

bu yerda $a_{ij}^{(1)}$, $b_i^{(1)}$ $(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$ – sistemaning birinchi almashtirishlardan keyin hosil qilingan koeffitsiyentlari va ozod hadlari.

1-izoh. Sistemada x_1 noma'lum oldidagi koeffitsiyenti birga teng bo'lgan tenglama bor bo'lsa, bu tenglamani birinchi o'rinda yozish orqali hisoblashlar osonlashtirilishi mumkin.

Shu kabi $a_{22}^{(1)} \ne 0$ deb, sistemaning uchinchi tenglamasidan boshlab x_2 noma'lumni yo'qotamiz va bu jarayonni mumkin bo'lguniga qadar davom ettiramiz.

2-bosqich. Pog'onasimon sistemani yechamiz. Pog'onasimon sistemada k tenglamalar soni n noma'lumlar soniga teng yoki no'malumlar sonidan kichik bo'lishi mumkin. Shu sababli bu sistema yagona yoki cheksiz ko'p ychimga ega bo'lishi mumkin. Agar sistema uchburchak ko'rinishga kelsa, ya'ni $k = n$ bo'lsa, sistema yagona yechimga ega bo'ladi. Agar sistema trapetsiya ko'rinishga kelsa, ya'ni $k < n$ bo'lsa, sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

1-misol. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - x_3 = -2, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -11, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 8 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching.

Yechish. 1-bosqich. Sistemada quyidagi almashtirishlarni bajaramiz:

- birinchi va uchinchi tenglamalarning o'rinlarini almashtiramiz;
- (-3) ga ko'paytirilgan birinchi tenglamani ikkinchi tenglamaga va (-2) ga ko'paytirilgan birinchi tenglamani uchinchi tenglamaga hadma-had qo'shamiz;
- ikkinchi va uchinchi tenglama hadlarini mos ravishda 7 ga va (-9) ga bo'lamiz.

2-bosqich. x_3 ning uchinchi tenglamadagi qiymatini birinchi va ikkinchi tenglamalarga qo'yamiz, ikkinchi tenglamadan x_2 ni topamiz va uning qiymatini birinchi tenglamaga qo'yib, x_1 ni topamiz. Sistemaning yechimlarini x_1, x_2, x_3 ketma-ketlikda yozamiz.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - x_3 = -2, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -11, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 8, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -11, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 8, \\ 7x_2 - 14x_3 = -35, \\ -9x_3 = -18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 8, \\ x_2 - 2x_3 = -5, \\ x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 = 2, \\ x_2 - 2\cdot 2 = -5, \\ x_1 - 2x_2 + 4\cdot 2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 2, \\ x_2 = -1, \\ x_1 - 2\cdot(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Gauss usulining 1-bosqichini sistemaning o'zida emas, balki uning kengaytirilgan matritsasida bajarish qulaylikka ega. Masalan, yuqoridagi sistemaning 1-bosqichi quyidagicha bajariladi:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & -11 \\ 1 & -2 & 4 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_1 \to r_3 \\ \\ r_3 \to r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & -2 & -11 \\ 2 & -4 & -1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ r_2 \to r_2 + (-3)r_1 \\ r_3 \to r_3 + (-2)r_1 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 8 \\ 0 & 7 & -14 & -35 \\ 0 & 0 & -9 & -18 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ r_2 \to r_2 : 7 \\ r_3 \to r_3 : (-9) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

1.3.3. Xosmas tenglamalar sistemasini yechish[3]

n ta noma'lumli va n ta chiziqli tenglamadan iborat (3.6) xosmas chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin.

Xosmas chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning ikkita usulini qaraymiz.

Matritsalar usuli

Bu usul (3.6) sistemaning ushbu

$$AX = B \tag{3.9}$$

matritsa ko'rinishini yechishga asoslanadi.

A matritsa xosmas bo'lgani uchun A^{-1} mavjud bo'ladi.

---

3 A K Lal, S. Pati. Lekture Notes on Linear Algebra. Februare 10, 2015. https://www.Conrschero.com>...>MATH 211.

(3.9) tenglikning har ikkala qismini chapdan A^{-1} ga ko'paytiramiz:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B, \quad EX = A^{-1}B.$$

yoki

$$X = A^{-1}B. \tag{3.10}$$

(3.10) tenglamaga *chiziqli tenglamalar sistemasini matritsalar usuli bilan yechish formulasi* deyiladi.

2-misol. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini matritsalar usuli bilan yeching.

Yechish. Sistemaning determinantini hisoblaymiz:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 + 2 - 1 + 4 - 1 = 5 \neq 0.$$

Demak, sistema – xosmas.

Determinant elementlarining algebraik to'ldiruvchilarini aniqlaymiz:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

U holda

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Sistemaning yechimini (3.10) formula bilan topamiz:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5+18-8 \\ -15+6+4 \\ 5-12+12 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 15 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Demak, $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

Determinantlar usuli yoki Kramer formulalari

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishniung bu usuli determinantlar nazariyasiga asoslanadi.

Agar (3.6) sistema xosmas bo'lsa, u holda sistema yagona yechimga ega bo'ladi va bu yechim quyidagi formulalar bilan topiladi [3]:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, \quad x_n = \frac{Dx_n}{D}, \tag{3.11}$$

bu yerda $D_1, D_2, \ldots, D_n$ determinantlar $D = \det A$ determinantdan mos noma'lum oldidagi koeffitsiyentlarni ozod hadlar bilan almashtirish orqali hosil qilinadi.

(3.11) formulalarga *Kramer formulalari* deyiladi.

3-misol. Farmatsevtik korxona uch turdagi A, B va C dori maxsulotlarini ishlab chiqarish uchun uch turdagi hom ashyodan foydalanadi: I, II va III. Har bir turdagi mahsulotdan bir birlik ishlab chiqarish uchun sarflanadigan turli xom ashyolar miqdori (normalari) va korxona ishlatishi mumkin bo'lgan har bir turdagi xom ashyolarning umumiy miqdori keltirilgan:

Xom ashyo turi	Bitta maxsulot uchun sarflanadigan xom ashyo normasi			Xom ashyoning umumiy miqdori
	A	B	C	
I	2	1	1	45
II	1	1	2	45
III	1	0	1	15

Korxonaning har bir turdagi dori mahsulotidan qancha miqdorda ishlab chiqarishini toping.

Yechish: Jadval asosida tenglamalar sistemasini tuzamiz.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 45, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 40, \\ x_1 \qquad + x_3 = 15, \end{cases}$$

bu yerda x_1, x_2, x_3 – mos ravishda A, B, C turdagi dori mahsuloti miqdori.

D va D_i, $i = 1,2,3$ determinantlarni hisoblaymiz:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \qquad D_1 = \begin{vmatrix} 45 & 1 & 1 \\ 40 & 1 & 2 \\ 15 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 20,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 45 & 1 \\ 1 & 40 & 2 \\ 1 & 15 & 1 \end{vmatrix} = 40, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 45 \\ 1 & 1 & 40 \\ 1 & 0 & 15 \end{vmatrix} = 10.$$

Kramer formulalari bilan topamiz:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{20}{2} = 10, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{40}{2} = 20, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{10}{2} = 5.$$

1.3.4. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi[3]

Ozod hadlari nolga teng bo'lgan ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (3.12)$$

sistemaga *bir jinsli tenglamalar sistemasi* deyiladi.

(3.12) sistema hamma vaqt birgalikda va nolga teng bo'lgan (trivial) $x_1 = x_2 = \ldots, = x_n = 0$ yechimga ega.

Bir jinsli tenglamalar sistemasi qanday shartlar bajarilganida nolga teng bo'lmagan yechimga ega bo'ladi? Bu savolga quyidagi teorema javob beradi.

1-teorema n noma'lumli n ta chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi nolga teng bo'lmagan yechimga ega bo'lishi uchun sistema matrisasining determinanti nolga teng bo'lishi, ya'ni $\det A = 0$ bo'lishi zarur va etarli.

4-misol $\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ bir jinsli tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Sistema determinantini hisoblaymiz:

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 2 - 3 - 2 - 1 + 6 = -3 \neq 0.$$

Demak, sistema sistema trivial yechimga ega: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

5-misol $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$ bir jinsli tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Sistema matritsasini pog'onasimon ko'rinishga keltiramiz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & -5 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ r_2 \to r_2 + (-2)r_1 \\ r_3 \to r_3 + (-5)r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ r_3 \to r_3 + (-1)r_2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(A) = 2,\ n = 4,\ r < n$. Demak, sistema cheksiz ko'p yechimga ega.

Ularni topamiz:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_4 = x_2 + x_3, \\ x_4 = 3x_3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - 2x_3, \\ x_4 = 3x_3. \end{cases}$$

$x_2 = k_1$, $x_3 = k_2$ (k_1, k_2 – ixtiyoriy sonlar) deb, sistemaning umumiy yechimini topamiz:

$$x_1 = k_1 - 2k_2,\ x_2 = k_1,\ x_3 = k_2,\ x_4 = 3k_2.$$

1.3.5. Chiziqli tenglamalar sistemasinini matematik paketlarda yechish [4]

Kompyuterli matematika sistemalari (KMS) yoki matematik paketlar matematikaning turli masalalalani yechishda keng qo'llaniladi. Hozirgi vaqtda matematik paketlarning turli variantlari yaratilgan: *Maple*, *MathCAD*, *MatLAB*, *Mathematica*, *Direve*.

Chiziqli tenglamalar sistemasini bu paketlardan birinchisida, ya'ni *Maple* matematik paketida yechishni qisqa bayon qilamiz. Batafsil bayon maxsus kurslarda beriladi.

$AX = B$ tenglamalar sistemasi *Maple* paketida ikki usuldan biri bilan yechilishi mumkin.

1-usul: solve ***buyrug'i bilan***.

Bu buyruq bilan (4.1) ko'rinishda berilgan chiziqli tenglamalar sistemasi yechiladi.

6-misol. $\begin{cases} 2x + 6y + 5z = 0, \\ 2x + 5y + 6z = -4, \\ 5x + 7y + 8z = -7 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish.

```
> with(LinearAlgebra) :
> eq := {2·x + 6·y + 5·z = 0, 2·x + 5·y + 6·z = -4, 5·x + 7·y + 8·z = -7};
```

$$eq := \{2x + 5y + 6z = -4, 2x + 6y + 5z = 0, 5x + 7y + 8z = -7\}$$

```
> solve(eq, {x, y, z});
```

$$\{x = -1, y = 2, z = -2\}$$

2-usul: linsolve(A,b) ***buyrug'i bilan***.

Bu buyruq bilan linalg paketidan $AX = B$ tenglamaning yechimi topiladi. Bunda buyruqning argumenti: A -matritsa; b - vektor.

7-misol. $\begin{cases} 2x + 7y + 13z = 0, \\ 3x + 14y + 12z = 18, \\ 5x + 25y + 16z = 39 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan, Kramer formulalari bilan, matritsalar usuli bilan yeching.

4 David J.Jeffey. Robert M.Corbess. Linear Algebra in Maple. www.apmaths.uwo.ca/~djeffrey/Offprints/C5106_C072.

Yechish. 1) Sistemani Gauss usuli bilan yechamiz:

> $with(LinearAlgebra)$:

> $A := \langle\langle 2, 3, 5\rangle|\langle 7, 14, 25\rangle|\langle 13, 12, 16\rangle\rangle;$

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 3 & 14 & 12 \\ 5 & 25 & 16 \end{bmatrix}$$

> $b := \langle 0, 18, 39\rangle;$

$$b := \begin{bmatrix} 0 \\ 18 \\ 39 \end{bmatrix}$$

> $GaussianElimination(A);$

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{15}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

> $GaussianElimination(A, 'method' = 'FractionFree');$

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 0 & 7 & -15 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

> $ReducedRowEchelonForm(\langle A|b\rangle);$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Demak, $x := -4 \quad y := 3 \quad z := -1$

2) Sistemani Kramer formulalari bilan yechamiz:

> $with(Student[LinearAlgebra])$:

> $d := \langle\langle 2, 3, 5\rangle|\langle 7, 14, 25\rangle|\langle 13, 12, 16\rangle\rangle;$

$$d := \begin{bmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 3 & 14 & 12 \\ 5 & 25 & 16 \end{bmatrix}$$

> $d := Determinant(d);$

$$d := -3$$

> $dx1 := \langle\langle 0, 18, 39\rangle|\langle 7, 14, 25\rangle|\langle 13, 12, 16\rangle\rangle;$

$$dx1 := \begin{bmatrix} 0 & 7 & 13 \\ 18 & 14 & 12 \\ 39 & 25 & 16 \end{bmatrix}$$

> $dl := Determinant(dx1);$

$$dl := 12$$

> $dx2 := \langle\langle 2, 3, 5\rangle|\langle 0, 18, 39\rangle|\langle 13, 12, 16\rangle\rangle;$

$$dx2 := \begin{vmatrix} 2 & 0 & 13 \\ 3 & 18 & 12 \\ 5 & 39 & 16 \end{vmatrix}$$

> $d2 := Determinant(dx2);$

$$d2 := -9$$

> $dx3 := \langle\langle 2, 3, 5\rangle|\langle 7, 14, 25\rangle|\langle 0, 18, 39\rangle\rangle;$

$$dx3 := \begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 3 & 14 & 18 \\ 5 & 25 & 39 \end{vmatrix}$$

> $d3 := Determinant(dx3);$

$$d3 := 3$$

> $x := \frac{d1}{d}; y := \frac{d2}{d}; z := \frac{d3}{d};$

$$x := -4 \quad y := 3 \quad z := -1$$

3) Sistemani matritsalar usuli bilan yechamiz:

> $with(Student[LinearAlgebra]):$
> $A := \langle\langle 2, 3, 5\rangle|\langle 7, 14, 25\rangle|\langle 13, 12, 16\rangle\rangle;$

$$A := \begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 3 & 14 & 12 \\ 5 & 25 & 16 \end{vmatrix}$$

> $A^{-1};$

$$\begin{vmatrix} \frac{76}{3} & -71 & \frac{98}{3} \\ -4 & 11 & -5 \\ -\frac{5}{3} & 5 & -\frac{7}{3} \end{vmatrix}$$

> $B := \langle\langle 0, 18, 39\rangle\rangle;$

$$B := \begin{vmatrix} 0 \\ 18 \\ 39 \end{vmatrix}$$

> $X := A^{-1} B;$

$$X := \begin{vmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{vmatrix}$$

A matritsaning yadrosi deb shunday vektorlar to'plami x ga aytiladiki, A matritsaning bu vektorlar to'plamiga ko'paytmasi nolga teng, ya'ni $Ax = 0$ bo'ladi. Bunda A matritsaning yadrosini topish bir jinsli tenglamalar sistemasi yechimlarini topishga ekvivalent bo'ladi. A matritsaning yadrosini kernel (A) buyrug'i bilan topish mumkin.

8-misol. $\begin{cases} x + y = 0, \\ 2y - z = 0, \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish.

> $with(linalg)$:

> $A := array([[1,1,0],[0,2,-1],[1,3,-1]])$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

> $kernel(A)$;

$$\{[-1 \ 1 \ 2]\}$$

1.3.6. Mashqlar

1.3.1. Tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching:

1) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 16, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 12. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$

1.3.2. Tenglamalar sistemasini matritsalar usuli bilan yeching:

1) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -3, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 3, \\ 2x_2 + 7x_3 = 11, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 9. \end{cases}$

1.3.3. Tenglamalar sistemasini Kramer formulalari bilan yeching:

1) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1, \\ 3x_1 + 7x_2 = 2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 4, \\ 4x_1 - 5x_2 = 10. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -5. \end{cases}$

1.3.4. Bir jinsli tenglamalar sistemasini yeching:

1) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+2x_3=0, \\ 3x_1-x_2+3x_3=0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_1-x_2+4x_3=0, \\ 5x_1+3x_2+2x_3=0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x_1+x_2+2x_3=0, \\ x_1+2x_2-3x_3=0, \\ 5x_1+5x_2-4x_3=0. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=0, \\ 3x_1-2x_2+3x_3=0, \\ 4x_1+3x_2+5x_3=0. \end{cases}$

1.3.5. Farmatsevtik korxona uch turdagi A, B va C dori maxsulotlarini ishlab chiqarish uchun uch turdagi hom ashyodan foydalanadi: I, II va III. Har bir turdagi mahsulotdan bir birlik ishlab chiqarish uchun sarflanadigan turli xom ashyolar miqdori (normalari) va korxona ishlatishi mumkin bo'lgan har bir turdagi xom ashyolarning umumiy miqdori keltirilgan

Xom ashyo turi	Bitta maxsulot uchun sarflanadigan xom ashyo normasi			Xom ashyoning umumiy miqdori
	A	B	C	
I	1	2	1	9
II	2	1	2	12
III	3	1	1	9

1.3.6. Tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan, Kramer formulalari bilan va matritsalar usuli bilan Maple matematik paketida yeching:

1) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=-4, \\ 2x_1-3x_2+2x_3=3, \\ 5x_1+8x_2-x_3=-2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0, \\ 3x_1-5x_2+3x_3=11, \\ 2x_1+7x_2-x_3=-3. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=4, \\ 2x_1+x_2+x_3=0, \\ 3x_1-x_2+2x_3=-3. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x_1+x_2-3x_3=3, \\ 2x_2+7x_3=11, \\ 3x_1+4x_2-5x_3=9 \end{cases}$

1.4. VEKTORLAR

1.4.1. Vektorlar. Vektorlar ustida chiziqli amallar[5]

Vektor nisbatan yangi matematik tushuncha hisoblanadi. «Vektor» terminining o'zi *1845 yilda Vilyam Rouen Gamilton* tomonidan kiritilgan.

Vektor tushunchasiga son qiymati va yo'nalishi bilan xarakterlanuvchi obyektlar bilan ish ko'rilganida duch kelinadi. Bunday obyektlarga kuch, tezlik, tezlanish kabi fizik kattaliklar misol bo'ladi.

Tayin uzunlikka va yo'nalishga ega bo'lgan kesma *vektor* deb ataladi.

Vektor $\overline{AB}$ yoki $\bar{a}$ kabi belgilanadi. Bunda A nuqtaga vektorning boshi deyilsa, B nuqtaga uning oxiri deyiladi.

5 Jr. Thomas. Calculus. Copyright, 2005

$\overrightarrow{BA}$ vektor $\overrightarrow{AB}$ vektorga *qarama-qarshi vektor* hisoblanadi. $\vec{a}$ vektorga qarama-qarshi vektor ($-\vec{a}$) bilan belgulanadi.

Boshi va oxiri orasidagi masofaga *vektorning uzunligi* yoki *moduli* deyiladi. Vektorning moduli $|\overrightarrow{AB}|$ yoki $|\vec{a}|$ ko'rinishda belgilanadi.

Boshi va oxiri ustma-ust tushadigan vektor *nol vektor* deb ataladi va $\vec{0}$ bilan belgilanadi. Bunda $|\vec{0}|=0$ bo'ladi. Nol vektor yo'nalishga ega bo'lmaydi.

Uzunligi birga teng vektorga *birlik vektor* deyiladi va ko'p hollarda $\bar{e}$ orqali belgilanadi.

$\vec{a}$ vektor bilan bir xil yo'nalgan birlik vektorga *$\vec{a}$ vektorning orti* deyiladi va $\vec{a}^{\circ}$ bilan belgilanadi.

1-ta'rif. Bir to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotuvchi vektorlar *kollinear vektorlar* deb ataladi.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning kollinearligi $\vec{a}\|\vec{b}$ deb yoziladi. Kollinear vektorlar bir tomonga yo'nalgan (yo'nalishdosh, ular $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ kabi belgilanadi) yoki qarama-qarshi tomonlarga yo'nalgan (ular $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ kabi belgilanadi) bo'lishi mumkin. Hol vektor har qanday vektorga kollinear hisoblanadi.

2-ta'rif. Bir tekislikda yoki parallel teksliklarda yotuvchi vektorlar *komplanar vektorlar* deb ataladi.

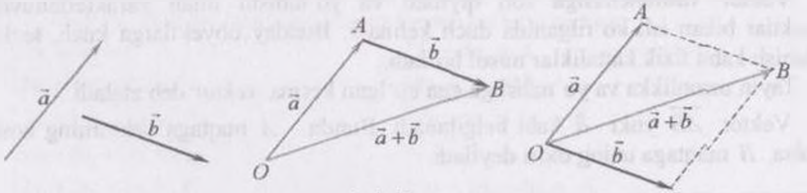
3-ta'rif. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear, yo'nalishdosh va uzunliklari teng bo'lsa, ularga *teng vektorlar* deyiladi va $\vec{a}=\vec{b}$ kabi yoziladi.

Vektorlar tengligining bu ta'rifi *erkli vektorlar* deb ataluvchi vektorlarni xarakterlaydi. Bu ta'rifga asosan erkli vektorni fazoning ixtiyoriy nuqtasiga parallel ko'chirish mumkin bo'ladi.

Vektorlarni qo'shish, ayirish va vektorni songa ko'paytirish amallari *vektorlar ustida chiziqli amallar* hisoblanadi.

Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektor berilgan bo'lsin. Istalgan O nuqta olib, bu nuqtaga $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ vektorni parallel ko'chiramiz. A nuqtaga $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ vektorni qo'yamiz. Bunda birinchi vektorning boshlni ikkinchi vektorning oxiri bilan tutashtiruvchi $\overrightarrow{OB}$ vektorga *$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig'indisi* deyiladi, ya'ni $\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}$ (1-shakl). Vektorlarni qo'shishning bu usuli *uchburchak qoidasi* deb ataladi.

Ikkita vektorni *parallelogramm qoidasi* bilan ham qo'shish mumkin. Buning uchun O nuqtaga $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ va $\overrightarrow{OC}=\vec{b}$ vektorlarni qo'yamiz va ulardan parallelogramm yasaymiz. Bunda parallelogrammning O uchidan o'tkazilgan $\overrightarrow{OB}$ diagonal $\vec{a}+\vec{b}$ vektorni beradi (1-shakl).



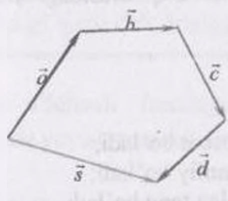
1-shakl

Bir nechta vektorning yig'indisini topish uchun bu vektorlarga teng vektorlardan ko'pburchak (siniq chiziq) hosil qilinadi. Bunda boshi birinchi vektorining boshida, oxiri esa oxirgi vektorining oxirida bo'lgan vektor ko'pburchak barcha vektorlarining yig'inndisiga teng bo'ladi. Bir necha vektorni bunday qo'shish usuliga *ko'pburchak qoidasi* deyiladi. 2-shaklda to'trta $\vec a, \vec b, \vec c, \vec d$ vektorlarning yig'indisi $\vec s$ vektor tasvirlangan.

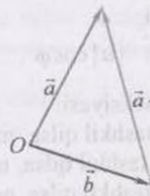
$\vec a$ va $\vec b$ *vektorlarning ayirmasi* deb, $\vec a$ vektor bilan $\vec b$ vektorga qarama-qarshi bo'lgan $(-\vec b)$ vektor yig'indisiga aytiladi, ya'ni $\vec a - \vec b = \vec a + (-\vec b)$.

$\vec a - \vec b$ ayirmani topish uchun $\vec a$ va $\vec b$ vektorni umumiy O nuqtaga qo'yamiz. Bunda $\vec b$ vektor oxiridan $\vec a$ vektor oxiriga yo'nalgan vektor $\vec a - \vec b$ vektorni beradi (3-shakl).

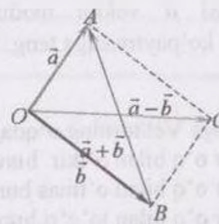
$\overrightarrow{OA} = \vec a$ va $\overrightarrow{OB} = \vec b$ vektorlarga qurilgan $OACB$ parallelogrammning diagonal vektorlari bu vektorlarning yig'indisinidan va ayirmasidan iborat bo'ladi (4-shakl).



2-shakl



3-shakl



4-shakl

$\vec a$ *vektorning* $\lambda \neq 0$ *songa ko'paytmasi* deb, $\vec a$ vektorga kollinear, uzunligi $|\lambda| \cdot |\vec a|$ ga teng va yo'nalishi $\lambda > 0$ bo'lganda $\vec a$ vektor yo'nalishi bilan bir xil, $\lambda < 0$ bo'lganda $\vec a$ vektor yo'nalishiga qarama-qarshi bo'lgan $\lambda \vec a$ vektorga aytiladi.

1.4.2. Vektorning o'qdagi proyeksiyasi [5]

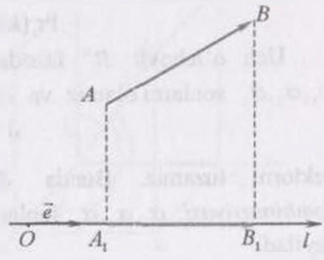
Sanoq boshini aniqlovchi nuqtasi va birlik vektori berilgan to'g'ri chiziqqa *o'q* deyiladi.

$\vec e$ birlik vektor va O nuqta l o'qni bir qiymatli aniqlaydi.

M nuqtadan l o'qqa tushurilgan AA_1 perpendikularning A_1 asosiga *A nuqtaning l o'qdagi proeksiyasi* deyiladi (5-shakl).

$\overrightarrow{AB}$ $(\overrightarrow{AB} \neq 0)$ ixtiyoriy vektor bo'lsin. A_1 va B_1 bilan mos ravishda $\overrightarrow{AB}$ vektor boshi va oxirining l o'qdagi proyeksiyalarini belgilaymiz.

$\overrightarrow{A_1B_1}$ vektorga $\overrightarrow{AB}$ *vektorning l o'qdagi tashkil etuvchisi* deyiladi.



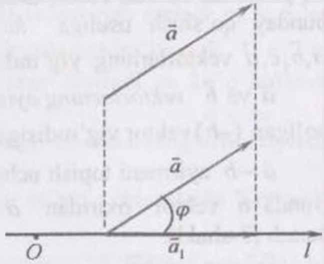
5-shakl

ɔo‘lsa musbat ishora bilan, aks holda manfiy ishora olinadi (5-shakl).
k,

$$\Pr_l \overline{AB} = \pm |\overline{A_1B_1}|.$$

ıf $\bar{a}$ vektor bilan uning l o‘qdagi uvchisi $\bar{a}_1$ vektor orasidagi kka *$\bar{a}$ vektor bilan l o‘q orasidagi ıkki $\bar{a}$ va $\bar{a}_1$ vektor orasidagi* :yiladi.

ınki, $0 \le \varphi \le \pi$ (6-shakl).



6-shakl

ning o‘qdagi proyeksiyasining ılarini isbotsiz keltiramiz.

a. $\bar{a}$ vektorning l o‘qdagi i $\bar{a}$ vektor modulining bu vektor bilan o‘q orasidagi φ burchak :o‘paytmasiga teng, ya’ni

$$\Pr_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos\varphi.$$

ja Vektorning o‘qdagi proeksiyasi:
o‘q bilan o‘tkir burchak tashkil qilsa, musbat bo‘ladi;
o‘q bilan o‘tmas burchak tashkil qilsa, manfiy bo‘ladi;
o‘q bilan to‘g‘ri burchak tashkil qilsa, nolga teng bo‘ladi.
ı. Teng vektorlarning bitta o‘qdagi proeksiyalari teng bo‘ladi.
ı Bir nechta vektor yig‘indisining berilgan o‘qdagi proeksiyasi g shu o‘qdagi proeksiyalari yig‘indisiga teng, masalan,

$$\Pr_l(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \Pr_l \vec{a} + \Pr_l \vec{b} + \Pr_l \vec{c}.$$

ı. Vektor skalyar songa ko‘paytirilsa, uning o‘qdagi proeksiyasi ham ‘payadi, ya’ni

$$\Pr_l(\lambda \vec{a}) = \lambda \cdot \Pr_l \vec{a}.$$

ı. Vektorlar chiziqli kombinatsiyasining o‘qdagi proeksiyasi bu dagi proeksiyasilarining mos chiziqli kombinatsiyasiga teng, masalan,

$$\Pr_l(k\vec{a} + n\vec{b}) = k \Pr_l \vec{a} + n \Pr_l \vec{b}.$$

lchovli R^3 fazoda $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ vektorlar berilgan bo‘lsin. Ixtiyoriy ılarni olamiz va $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ vektorlardan

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3$$

:amiz. Bunda $\vec{a}$ vektorga $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ *vektorlarning chiziqli si*, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sonlarga bu chiziqli kombinatsiyaning koeffitsiyentlari

Agar $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ vektorlar uchun kamida bittasi nolga teng tenglik bajarilsa, $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ vektorlar sistemasiga *chiziqli bog'liq vektorlar* deyiladi.

7-ta'rif. Agar (4.1) tenglik faqat $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$ bo'lganda o'rinli bo'lsa, $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ vektorlar sistemasiga *chiziqli erkli vektorlar* deyiladi.

Tekislikdagi bazis deb, istalgan ikkita chiziqli erkli $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ vektorlarga aytiladi.

Tekislikdagi istalgan $\vec{a}$ vektorni $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ bazis bo'yicha yagona ko'rinishda yoyish mumkin, ya'ni

$$\vec{a}=\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2. \tag{4.2}$$

(1.2) tenglikka $\vec{a}$ vektorning $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ bazis bo'yicha yoyilmasi, α_1,α_2 sonlarga $\vec{a}$ vektorning $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ bazisdagi *affin koordinatalari* deyiladi va $\vec{a}=\{\alpha_1;\alpha_2\}$ deb yoziladi.

Fazodagi bazis deb, istalgan uchta chiziqli erkli $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ vektorlarga aytiladi.

Uch o'lchovli fazodagi istalgan $\vec{a}$ vektorni $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ bazis bo'yicha yagona ko'rinishda yoyish mumkin, ya'ni

$$\vec{a}=\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+\alpha_3\vec{e}_3. \tag{4.3}$$

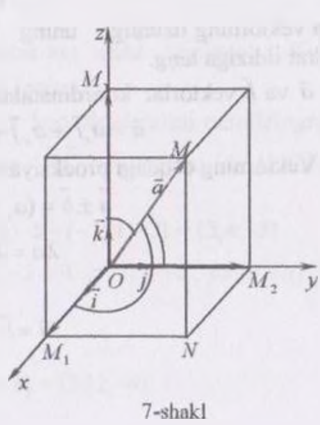
Bunda $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ sonlar $\vec{a}$ vektorning $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ bazisdagi *affin koordinatalari* bo'ladi, ya'ni $\vec{a}=\{\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3\}$.

Fazodagi bazis sifatida o'zaro perpendikular bo'lgan $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ birlik vektorlarni olaylik. Bunday bazis *ortonormallashgan bazis* deyiladi. Bunda $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ vektorlar bazis ortlari deb ataladi.

Koordinatalar boshidan mos ravishda $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ bazis ortlari yo'nalishida o'tkazilgan Ox,Oy,Oz o'qlarga koordinata o'qlari deyiladi. Ox,Oy,Oz o'qlardan tashkil topgan $Oxyz$ koordinatalar sistemaga to'g'ri burchakli (yoki dekart) koordinatalar sistemasi deyiladi.

Fazoda ixtiyoriy $\vec{a}$ vektorni olib, uning boshini koordinatalar boshiga keltiramiz, ya'ni $\vec{a}=\overline{OM}$ vektorni hosil qilamiz (7-shakl).

$\vec{a}$ vektorning koordinata oq'laridagi proeksiyalarini topamiz. Buning uchun $\overline{OM}$ vektorning oxiridan koordinata tekisliklariga parallel tekisliklar



7-shakl

o'tkazamiz va ularning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini mos ravishda M_1, M_2, M_3 orqali belgilaymiz. Bu tekisliklar koordinata tekisliklari bilan birgalikda diagonallaridan biri $\overrightarrow{OM}$ vektor bo'lgan to'g'ri burchakli parallelepipedni hosil qiladi.

Bunda

$$\Pr_x \vec{a} = |\overrightarrow{OM_1}|,\ \Pr_y \vec{a} = |\overrightarrow{OM_2}|,\ \Pr_z \vec{a} = |\overrightarrow{OM_3}|.$$

Bir nechta vektorlarni qo'shish qoidasiga ko'ra

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1N} + \overrightarrow{NM}.$$

Yoki $\overrightarrow{M_1N} = \overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OM_3}$ ni hisobga olsak,

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}. \tag{4.4}$$

Shunindek,

$$\overrightarrow{OM_1} = |\overrightarrow{OM_1}| \cdot \vec{i},\ \overrightarrow{OM_2} = |\overrightarrow{OM_2}| \cdot \vec{j},\ \overrightarrow{OM_3} = |\overrightarrow{OM_3}| \cdot \vec{k}. \tag{4.5}$$

$\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ vektorning koordinata o'qlaridagi proeksiyalarini mos ravishda a_x, a_y va a_z orqali belgilaymiz, ya'ni $|\overrightarrow{OM_1}| = a_x$, $|\overrightarrow{OM_2}| = a_y$, $|\overrightarrow{OM_3}| = a_z$.

U holda (4.4) va (4.5) tengliklardan topamiz:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}. \tag{4.6}$$

(1.6) tenglik $\vec{a}$ vektorning $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bazis bo'yicha yoyilmasi deb yuritiladi. a_x, a_y, a_z sonlarga $\vec{a}$ vektorning *dekart koordinatalari* (yoki oddiygina *koordinatalari*) deyiladi va $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ kabi yoziladi.

$\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ vektor berilgan bo'lsin. To'g'ri burchakli parallelopipedning diagonali haqidagi teoremani qo'llaymiz:

$$|\overrightarrow{OM}|^2 = |\overrightarrow{OM_1}|^2 + |\overrightarrow{OM_2}|^2 + |\overrightarrow{OM_3}|^2.$$

Bundan

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \tag{4.7}$$

ya'ni vektorning uzunligi uning koordinatalari kvadratlarining yig'indisining kvadrat ildiziga teng.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar koordinatalari bilan berilgan bo'lsin:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},\quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}.$$

Vektorning o'qdagi proeksiyasining xossalariga ko'ra:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}, \tag{4.8}$$

$$\lambda\vec{a} = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k}, \tag{4.9}$$

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = b_x, \\ a_y = b_y, \\ a_z = b_z. \end{cases} \tag{4.10}$$

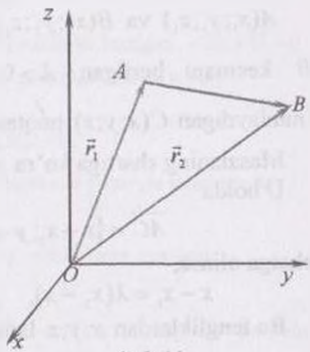
Shunday qilib,

1) vektorlar qo'shilganida (ayrilganida) ularning mos koordinatalari qo'shiladi (ayriladi);

2) vektor songa ko'paytirilganida uning barcha koordinatalari shu songa ko'payadi;

3) teng vektorlarning mos koordinatalari teng bo'ladi va aksincha.

Koordinatlar boshiga qo'yilgan va oxiri M nuqta bo'lgan $\bar{r} = \overline{OM}$ vektorga M nuqtaning *radius vektori* deyiladi. $M(x;y;z)$ nuqta radius vektorining koordinatalari $r = \{x;y;z\}$ bo'ladi.



8-shakl

Boshi $A(x_1;y_1;z_1)$ nuqtada va oxiri $B(x_2;y_2;z_2)$ nuqtada bo'lgan $\overline{AB}$ vektorni qaraymiz. A va B nuqtalarning radius vektorlarini mos ravishda $r_1 = \{(x_1;y_1;z_1\}$ va $r_2 = \{x_2;y_2;z_2\}$ bo'ladi.

8-shaklga ko'ra $\overline{AB} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$. Bundan (4.8) tenglikka asosan

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k}$$

yoki

$$\overline{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}. \tag{4.11}$$

Shunday qilib, vektorning koordinatalari uning oxiri va boshining mos koordinatalari ayirmasiga teng.

(4.11) tenglikdan $\overline{AB}$ vektorning modulini topamiz:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{4.12}$$

$\overline{AB}$ vektorning uzunligi A va B nuqtalar orasidagi masofani aniqlaydi. Shu sababli (4.12) tenglikka *ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasi* deyiladi.

1-misol. Parallelogrammning uchta ketma-ket uchi berilgan: $A(-1;3;1)$, $B(-2;-5;3)$, $C(0;-1;1)$. BD diagonal uzunligini toping.

Yechish. Parallelogramm D uchning $x;y;z$ koordinatalarini parallelogramm uchun $\overline{AD} = \overline{BC}$ ekanidan aniqlaymiz. $\overline{AD}$ va $\overline{BC}$ vektorlarni (4.11) formula ko'rinishida yozamiz:

$$\overline{AD} = \{x+1; y-3; z-1\}, \quad \overline{BC} = \{0-(-2); -1-(-5); 1-3\} = \{2;4;-2\}.$$

U holda $\overline{AD} = \overline{BC}$ tenlikdan $x+1=2$, $y-3=4$, $z-1=-2$, ya'ni $D(1;7;-1)$ bo'lishi kelib chiqadi.

$\overline{BD}$ vektorning koordinatalarini topamiz:

$$\overline{BD} = \{1-(-2); 7-(-5); -1-3\} = \{3;12;-4\}.$$

U holda

$$|\overline{BD}|=\sqrt{3^2+12^2+(-4)^2}=\sqrt{6+144+16}=13.$$

$A(x_1;y_1;z_1)$ va $B(x_2;y_2;z_2)$ nuqtalarni tutashtiruvchi kesma berilgan bo'lsin. AB kecmani berilgan $\lambda>0$ nisbatda bo'luvchi, y'ani $\frac{AC}{CB}=\lambda$ tenglikni ta'minlaydigan $C(x;y;z)$ nuqtani topish masalasini yechamiz.

Masalaning shartiga ko'ra $\overline{AC}$ va $\overline{CB}$ vektorlar kollinear, ya'ni $\overline{AC}=\lambda\overline{CB}$.

U holda

$$\overline{AC}=\{x-x_1;y-y_1;z-z_1\},\ \overline{CB}=\{x_2-x;y_2-y;z_2-z\}$$

inobatga olinsa,

$$x-x_1=\lambda(x_2-x),\quad y-y_1=\lambda(y_2-y),\quad z-z_1=\lambda(z_2-z).$$

Bu tengliklardan x,y,z larni topamiz:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \tag{4.13}$$

(1.13) formulaga *kesmani berilgan λ nisbatda bo'lish formulasi* deyiladi.

(1.13) tengliklardan $\lambda=1$ da kesma o'rtasining koordinatalarini topish formulalarini kelib chiqadi:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}. \tag{4.14}$$

2-misol. $A(2;5)$ va $B(4;9)$ nuqtalarni tutashtiruvchi AB kesmani $AC:CB=1:3$ nisbatda bo'luvchi C nuqtaning koordinatalarini toping.

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra $\lambda=\frac{1}{3}$. $C(x;y)$ nuqtani (4.13) formulalar bilan topamiz:

$$x=\frac{2+\frac{1}{3}\cdot 4}{1+\frac{1}{3}}=\frac{5}{2},\quad y=\frac{5+\frac{1}{3}\cdot 9}{1+\frac{1}{3}}=6,\ \text{yoki}\ C\left(\frac{5}{2};6\right).$$

1.4.3. Mashqlar

1.4.1. Agar $|\bar{a}+\bar{b}|=|\bar{a}-\bar{b}|$ bo'lsa, $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar qanday shartni qanoatlantiradi?

1.4.2. $|\bar{a}|=13$, $|\bar{b}|=19$ va $|\bar{a}+\bar{b}|=24$ bo'lsa, $|\bar{a}-\bar{b}|$ ni hisoblang.

1.4.3. Oxy tekislikda $A(4;1)$, $B(2;3)$, $(0;5)$ nuqtalar berilgan. $\bar{a}=\overline{OA}$ vektorning $\bar{b}=\overline{OB}$ va $\bar{c}=\overline{OC}$ vektorlar bo'yicha chiziqli kombinatsiyasini toping.

1.4.4. Tekislikda uchta $\bar{a}=\{3;-2\}$, $\bar{b}=\{-2;1\}$ va $\bar{c}=\{7;-4\}$ vektorlar berilgan. Har bir vektorning qolgan ikki vektor bo'yicha chiziqli kombinatsiyasini toping.

1.4.5. $\vec{a}=\{-1;5;-2\}$ va $\vec{b}=\{2;-1;3\}$ vektor berilgan $3\vec{a}-2\vec{b}$ va $-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$ vektorlarning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini toping.

1.4.6. $\vec{a}=\{1;-1;2\}$, $\vec{b}=\{-2;-3;1\}$ va $\vec{c}=\{0;-3;-2\}$ vektorlar berilgan $-2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$ va $3\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}$ vektorlarning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini toping.

1.4.7. Nuqtalar orasidagi masofani toping:
1) $A(3;1)$ va $B(-3;9)$; 2) $A(5;3)$ va $B(2;-1)$.

1.4.8. Ikkita qo'shni uchlari $A(-1;4)$ va $B(3;-7)$ nuqtalarda yotuvchi kvadratning yuzini toping.

1.4.9. Tomonlari $\vec{a}=\{-1;0;7\}$ va $\vec{b}=\{5;-4;-5\}$ vektorlarga qurilgan parallelogramm diagonallarining uzunliklarini toping.

1.4.10. $\overline{AB}=\{2;6;4\}$ va $\overline{AC}=\{4;2;-2\}$ bo'lsa, ABC uchburchakning CP medianasi uzunligini toping.

1.4.11. Agar $\vec{a}=\{2;-1;1\}$ vektorning boshi $A(3;-2;-4)$ bo'lsa, uning oxirining koordinatalarini toping.

1.4.12. Agar $\vec{a}=\{2;4;-1\}$ vektorning oxiri $B(-1;3;-4)$ bo'lsa, uning boshining koordinatalarini toping.

1.4.13. A va B nuqtalar berilgan. $\overline{AB}$ vektorning uzunligini toping:
1) $A(-4;-9;6)$, $B(8;6;-10)$; 2) $A(6;-1;9)$, $B(2;-4;-3)$.

1.4.14. $A(2;-1;0)$, $B(1;-1;2)$, $C(0;5;3)$ nuqtalar berilgan. $\vec{a}=\overline{AB}-\overline{CB}$ vektorning uzunligini toping.

1.4.15. $M_1(-1;-2)$ va $M_2(3;4)$ nuqtalar berilgan. M_1M_2 to'g'ri chiziqda yotuvchi va M_2 nuqtaga nisbatan M_1 nuqtaga 3 marta yaqin bo'lgan $M(x,y)$ nuqtani toping.

1.4.16. Uchlari $A(2;4)$ va $B(8;7)$ nuqtalarda joylashgan AB kesmani $2:3$ nisbatda bo'luvchi nuqta koordinatasini toping.

1.4.17. Uchlari $A(4;1;-3)$, $B(1;4;-2)$, $C(1;10;-8)$ nuqtalarda bo'lgan ABC uchburchakning AD medianasi uzunligini toping.

1.1.18. Parallelogramning uchta ketma-ket uchlarining koordinatalari berilgan: $A(-1;1), B(1;6), C(5;2)$. To'rtinchi D uchning koordinatalarini toping.

1.5. VEKTORLARNI KO'PAYTIRISH

1.5.1. Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi[5]

1-ta'rif. *Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorning skalyar ko'paytmasi* deb bu vektorlar uzunliklari bilan ular orasidagi burchak kosinusi ko'paytmasiga teng songa aytiladi va u $\vec{a}\vec{b}$ (yoki $\vec{a}\cdot\vec{b}$ yoki $(\vec{a},\vec{b})$) kabi belgilanadi, ya'ni

$$\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi, \tag{5.1}$$

bu yerda $\varphi-\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak (bunda vektorlarning boshi bir nuqtaga qo'yiladi).

Skalyar ko'paytma quyidagi xossalarga ega.

1-xossa. Ko'paytuvchilarning o'rin almashtirish xossasi:

$$\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{a}.$$

Isboti. $\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})=|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cos(\vec{b}\,\hat{,}\,\vec{a})=\vec{b}\vec{a}.$

2-xossa. Skalyar ko'paytuvchiga nisbatan guruhlash xossasi:

$$(\lambda\vec{a})\vec{b}=\lambda(\vec{a}\vec{b}).$$

3-xossa. Qo'shishga nisbatan taqsimot xossasi:

$$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}.$$

4-xossa. Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar perpendikular bo'lsa, u holda ularning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'ladi. Shunindek, teskari tasdiq o'rinli: agar $\vec{a}\vec{b}=0$ $(|\vec{a}|\neq 0, |\vec{b}|\neq 0)$ bo'lsa, u holda $\vec{a}\perp\vec{b}$ bo'ladi.

Xususan: $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{i}=\vec{k}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=0.$

5-xossa. Vektorning skalyar kvadrati uning uzunligi kvadratiga teng, ya'ni $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$. Xususan: $\vec{i}^2=\vec{j}^2=\vec{k}^2=1.$

1-misol. $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=6$, $\varphi=(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})=\dfrac{\pi}{3}$ bo'lsin. $(3\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}+4\vec{b})$ ko'paytmani toping.

Yechish. Avval 3-xossadan foydalanib qavslarni ochamiz va keyin skalyar ko'paytmaning ta'rifi va xossalaridan foydalanib, topamiz:

$$(3\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}+4\vec{b})=3\vec{a}\cdot2\vec{a}-\vec{b}\cdot2\vec{a}+3\vec{a}\cdot4\vec{b}-\vec{b}\cdot4\vec{b}=6\vec{a}^2+10\vec{a}\vec{b}-4\vec{b}^2=$$

$$=6|\vec{a}|^2+10|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}-4|\vec{b}|^2=$$

$$=6\cdot4^2+10\cdot4\cdot6\cdot\frac{1}{2}-4\cdot6^2=96+120-144=72.$$

Ikkita $\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$ va $\vec{b}=\{b_x;b_y;b_z\}$ vektor berilgan bo'lsin.

U holda bu vektorlarni $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ birlik vektorlar orqali ifodalab, skalyar ko'paytmaning xossalarini va $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ vektorlarning skalyar ko'paytmalarini hisobga olib, topamiz:

$$\vec{a}\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=a_xb_x\vec{i}\vec{i}+a_xb_y\vec{i}\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\vec{k}+$$

$$+a_yb_x\vec{j}\vec{i}+a_yb_y\vec{j}\vec{j}+a_yb_z\vec{j}\vec{k}+a_zb_x\vec{k}\vec{i}+a_zb_y\vec{k}\vec{j}+a_zb_z\vec{k}\vec{k}=$$

$$=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

Demak,

$$\vec{a}\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z, \tag{5.2}$$

ya'ni koordinatalari bilan berilgan ikki vektorning skalyar ko'paytmasi ularning mos koordinatalari ko'paytmalarining yig'indisiga teng.

2-misol. $\vec{a}=\{4;-2;3\}$, $\vec{b}=\{2;1;-3\}$ bo'lsin. $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ko'paytmani toping.

Yechish. (2.2) formulaga ko'ra

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\cdot 2+(-2)\cdot 1+3\cdot(-3)=-3.$$

$\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$ va $\vec{b}=\{b_x;b_y;b_z\}$ vektorlar orasidagi φ burchak kosinusini (5.1) va (2.2) tengliklardan topamiz:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \tag{5.3}$$

yoki

$$\cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \tag{5.4}$$

$\vec{a}\perp\vec{b}$ bo'lsin. U holda $\cos\varphi=0$ bo'lgani uchun (5.4) tenglikdan

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0 \tag{5.5}$$

kelib chiqadi.

$\overline{MN}$ vektor bilan φ burchak tashkil etuvchi $\vec{F}$ kuch ta'sirida moddiy nuqta M nuqtadan N nuqtaga to'g'ri chiziq bo'ylab ko'chayotgan bo'lsin (9-shakl).

Fizika kursidan ma'lumki $\vec{F}$ kuchning $\overline{MN}=\vec{S}$ ko'chishdagi bajargan ishi

$$A=|F|\cdot|S|\cdot\cos\varphi \quad \text{yoki} \quad A=\vec{F}\vec{S} \tag{5.6}$$

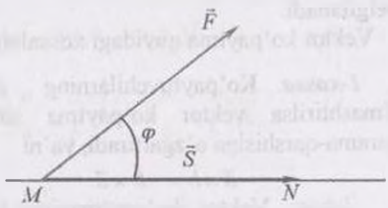
formula bilan aniqlanadi.

Demak, moddiy nuqtaning to'g'ri chiziqli harakatida o'zgarmas kuchning bajargan ishi kuch vektori va ko'chish vektorining skalyar ko'paytmasiga teng. Bu jumla *skalyar ko'paytmaning mexanik ma'nosini* anglatadi.

3-misol. Moddiy nuqta $A(1;-2;2)$ nuqtadan $B(5;-5;-3)$ nuqtaga $\vec{F}=\{2;-1;-3\}$ kuch ta'sirida to'g'ri chiziq bo'ylab ko'chgan. Quyidagilarni toping:

1) $\vec{F}$ kuchning bajargan ishini;

2) $\vec{F}$ kuchning ko'chish yo'nalishi bilan tashkil qilgan burchagini.



9-shakl

Yechish. Avval moddiy nuqta ko'chish vektorini, uning va $\vec{F}$ kuchning uzunligini topamiz:

$$\vec{S}=\overline{AB}=\{4;-3;-5\},$$

$$|\vec{S}|=\sqrt{16+9+25}=5\sqrt{2},$$

$$|\vec{F}|=\sqrt{4+1+9}=\sqrt{14}.$$

U holda:

1) $A=\vec{F}\vec{S}=2\cdot 4+(-1)\cdot(-3)+(-3)\cdot(-5)=26$ (*ish b.*);

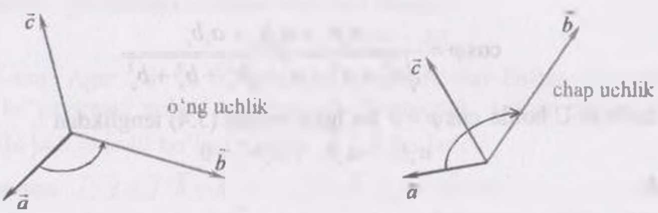
2) $\cos\varphi=\dfrac{\vec{F}\vec{S}}{|\vec{F}|\cdot|\vec{S}|}=\dfrac{26}{5\sqrt{2}\cdot\sqrt{14}}=\dfrac{13\sqrt{7}}{35}$, $\varphi=\arccos\dfrac{13\sqrt{7}}{35}$.

1.5.2. Ikki vektorning vektor ko‘paytmasi [5]

Agar uchta vektordan qaysi biri birinchi, qaysi biri ikkinchi va qaysi biri uchinchi ekani ko‘rsatilgan bo‘lsa, bu vektorlarga tartiblangan uchlik deyiladi.

Tartiblangan uchlikda vektorlar joylashish tartibida yoziladi.

Agar komplanar bo‘lmagan vektorlar tartiblangan uchligining uchinchi vektori uchidan qaralganda birinchi vektordan ikkinchi vektorga qisqa burilish soat strelkasi yo‘nalishiga teskari bo‘lsa, bunday uchlikka *o‘ng uchlik*, agar soat strelkasi yo‘nalishida bo‘lsa *chap uchlik* deyiladi (10-shakl).



10-shakl

2-ta’rif. $\vec{a}$ *vektorning* $\vec{b}$ *vektorga vektor ko‘paytmasi deb* quyidagi shartlar bilan aniqlanadigan $\vec{c}$ vektorga aytiladi (11-shakl):

1) $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga perpendikulyar, ya’ni $\vec{c} \perp \vec{a}$ va $\vec{c} \perp \vec{b}$;

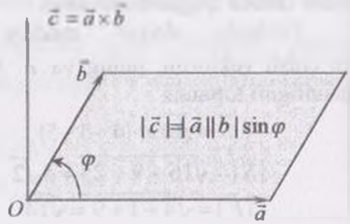
2) $\vec{c}$ vektorning uzunligi son jihatidan tomonlari $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan iborat bo‘lgan parallelogrammning yuziga teng, ya’ni $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$,

bu yerda $\varphi = (\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$;

3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar o‘ng uchlik tashkil qiladi.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko‘paytmasi $\vec{a} \times \vec{b}$ yoki $[\vec{a}, \vec{b}]$ kabi belgilanadi.

Vektor ko‘paytma quyidagi xossalarga ega.



11-shakl

1-xossa. Ko‘paytuvchilarning o‘rinlari almashtirilsa vektor ko‘paytma ishorasini qarama-qarshisiga o‘zgartiradi, ya’ni

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

Isboti. Vektor ko‘paytmaning ta’rifiga ko‘ra $\vec{a} \times \vec{b}$ va $\vec{b} \times \vec{a}$ vektorlar bir xil uzunlikka ega (parallelogrammning yuzi o‘zgarmaydi), kollinear, ammo qarama-qarshi yo‘nalgan, chunki $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ vektorlar ham $\vec{b}, \vec{a}, \vec{b} \times \vec{a}$ vektorlar ham o‘ng uchlik tashkil qiladi. Demak, $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

2-xossa. Skalyar ko‘paytuvchiga nisbatan guruhlash xossasi:

$$(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}).$$

3-xossa. Qo'shishga nisbatan taqsimot xossasi:

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}.$$

4-xossa. Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lsa, u holda ularning vektor ko'paytmasi nolga teng bo'ladi. Shunindek, teskari tasdiq o'rinli: agar $\vec{a}\times\vec{b}=0$ $(|\vec{a}|\neq 0, |\vec{b}|\neq 0)$ bo'lsa, u holda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'ladi.

4-misol. $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ vektorlarning vektor ko'paytmalarini toping.

Yechish. Bunda vektor ko'paytmaning ta'rifigadan quyidagi tengliklar bevosita kelib chiqadi:

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}.$$

Haqiqatan ham, masalan, $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ tenglik o'rinli, chunki:

1) $\vec{k}\perp\vec{i},\ \vec{k}\perp\vec{j}$;

2) $|\vec{k}|=|\vec{i}||\vec{j}|\sin 90^{\circ}=1$;

3) $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ vektorlar o'ng uchlik tashkil qiladi.

Shuningdek, 1- xossaga ko'ra

$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}.$$

Vektor ko'paytmaning 4- xossasidan topamiz:

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0.$$

Ikkita $\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$ va $\vec{b}=\{b_x;b_y;b_z\}$ vektor berilgan bo'lsin.

U holda, $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ vektorlarning vektor ko'paytmalari formulalaridan foydalansak,

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=a_xb_x(\vec{i}\times\vec{i})+a_xb_y(\vec{i}\times\vec{j})+a_xb_z(\vec{i}\times\vec{k})+$$

$$+a_yb_x(\vec{j}\times\vec{i})+a_yb_y(\vec{j}\times\vec{j})+a_yb_z(\vec{j}\times\vec{k})+a_zb_x(\vec{k}\times\vec{i})+a_zb_y(\vec{k}\times\vec{j})+a_zb_z(\vec{k}\times\vec{k})=$$

$$=a_xb_y\vec{k}-a_xb_z\vec{j}-a_yb_x\vec{k}+a_yb_z\vec{i}+a_zb_x\vec{j}-a_zb_y\vec{i}=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\vec{j}+$$

$$+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k},$$

ya'ni

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k} \qquad (5.7)$$

bo'ladi. Oxirgi tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (5.8)$$

$$\begin{vmatrix} \vec j & \vec k \\ -1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -4\vec i + 0\vec j - 6\vec k - 0\vec k - 4\vec i - 12\vec j = -8\vec i - 12\vec j - 6\vec k.$$

$$\vec a \times \vec b = -8\vec i - 12\vec j - 6\vec k.$$

'paytmaning 4- xossasiga ko'ra $\vec a$ va $\vec b$ vektorlar kollinear bo'lsa

$$\times \vec b = (a_y b_z - a_z b_y)\vec i - (a_x b_z - a_z b_x)\vec j + (a_x b_y - a_y b_x)\vec k = 0$$

$$a_y b_z - a_z b_y = 0, \quad a_x b_z - a_z b_x = 0, \quad a_x b_y - a_y b_x = 0$$

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}, \qquad (5.9)$$

r vektorlarning koordinatalari proporsional bo'ladi va aksincha ordinatalarga ega vektorlar kollinear bo'ladi.

paytmaning ta'rifiga ko'ra $|\vec a \times \vec b| = |\vec a| \cdot |\vec b| \sin\varphi$, ya'ni

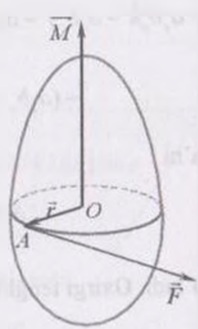
$$S_{par} = |\vec a \times \vec b|.$$

$$S_{par} = |\vec a \times \vec b|, \quad S_{uchb} = \frac{1}{2}|\vec a \times \vec b|. \qquad (5.10)$$

mahkamlangan qattiq jism A nuqtasiga kuch ta'sirida O nuqta atrofida aylanma gan bo'lsin (12-shakl).

sidan ma'lumki $\vec F$ kuchning O nuqtaga enti deb O nuqtadan o'tuvchi va quyidagi tlantiruvchi $\overline{M}$ vektorga aytiladi:

va $\overline{M} \perp \vec F$, bu yerda $\vec r = \overline{OA} - A$ nuqtaning



12-shakl

$\cdot|\vec F|\sin\varphi$, bu yerda $\varphi = (\widehat{\vec r, \vec F})$;

vektorlar o'ng uchlik tashkil qiladi.

lib,

$$\overline{M} = \vec r \times \vec F,$$

ıas nuqtaga nisbatan kuch momenti kuch qo'yilgan nuqta radius

6-misol. m, n ning qanday qiymatlarida $\vec{a}=\{-2;3;n\}$ va $\vec{b}=\{m;-6;2\}$ vektorlar kollinear bo'ladi?

Yechish. Ikki vektorning kollinearlik shartiga ko'ra

$$\frac{-2}{m}=\frac{3}{-6}=\frac{n}{2}.$$

Bundan $m=4$, $n=-1$.

1.5.3. Uchta vektorning aralash ko'paytmasi

3-ta'rif. *Uchta $\vec{a},\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorning aralash ko'paytmasi* deb $\vec{a}\times\vec{b}$ vektorni $\vec{c}$ vektorga skalyar ko'paytmasiga teng songa aytiladi va $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ kabi belgilanadi.

Uchta komplanar bo'lmagan $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlar berilgan bo'lsin. Bu vektorlarga parallelepiped quramiz va $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{d}$ vektorni yasaymiz (13-shakl).

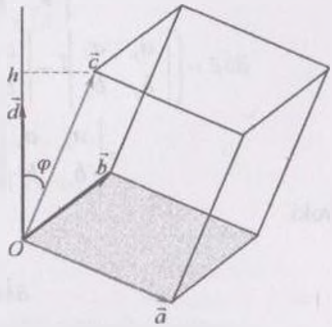
Vektor ko'paytmaning ta'rifiga ko'ra

$$\vec{d}\perp\vec{a},\ \ \vec{d}\perp\vec{b},\ |\vec{d}|=S_{par},$$

bu yerda S_{par} – parallelepiped asosining yuzi.

Ta'rifga ko'ra $\vec{d}\cdot\vec{c}=|\vec{d}|\cdot|\vec{c}|\cos\varphi$, bu yerda $\varphi-\vec{c}$ va $\vec{d}$ vektorlar orasidagi burchak.

13-shaklda $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlar o'ng uchlik tashkil qiladi va $\varphi<\frac{\pi}{2}$, ya'ni $\cos\varphi>0$.



13-shakl

U holda $|\vec{c}|\cos\varphi=h$ va $\vec{d}\cdot\vec{c}=S_{par}\cdot h=V$. Ikkinchi tomondan $\vec{d}\cdot\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Demak, $V=\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Agar $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlar chap uchlik tashkil qilsa $\varphi>\frac{\pi}{2}$ va $\cos\varphi<0$ bo'ladi. U holda $|\vec{c}|\cos\varphi=-h$, $V=-\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Shunday qilib, komplanar bo'lmagan uchta vektorning aralash ko'paytmasining moduli qirralari bu vektorlarning uzunliklaridan iborat bo'lgan parallelepiped hajmiga teng:

$$V=|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|. \tag{5.11}$$

Bu jumla *aralash ko'paytmaning geometrik ma'nosini* anglatadi.

Aralash ko'paytma quyidagi xossalarga ega.

1-xossa. Amallarining o'rinlari almashtirilsa aralash ko'paytma o'zgarmaydi, ya'ni

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}).$$

2-xossa. Ko'paytuvchilarning o'rinlari doiraviy almashtirilsa aralash ko'paytma o'zgarmaydi, ya'ni

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}.$$

3-xossa. Ikkita qo'shni ko'paytuvchining o'rinlari almashtirilsa aralash ko'paytma qarama-qarshisiga almashadi. Masalan, $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c}$.

4-xossa. Agar nolga teng bo'lmagan $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlar komplanar bo'lsa, u holda ularning aralash ko'paytmasi nolga teng bo'ladi. Shunindek, teskari tasdiq o'rinli: agar $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$ $(|\vec{a}|\neq 0,|\vec{b}|\neq 0,|\vec{c}|\neq 0)$ bo'lsa, u holda $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlar komplanar bo'ladi.

Uchta $\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x;b_y;b_z\}$ va $\vec{c}=\{c_x;c_y;c_z\}$ vektor berilgan bo'lsin. U holda

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k},$$

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}\right)\cdot(c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k})=$$

$$=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}c_x-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}c_y+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}c_z$$

yoki

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{5.12}$$

Aralash ko'paytmaning 4-xossasiga ko'ra nolga teng bo'lmagan $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlar komplanar bo'lsa, u holda $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$ yoki

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0. \tag{5.13}$$

Aralash ko'paytmaning geometrik ma'nosiga ko'ra $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlarga qurilgan parallelopiped hajmini $V_{par}=|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$ bilan va piramida hajmini $V_{pir}=\frac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$ bilan topish mumkin.

Shunday qilib,

$$V_{par}=\mathrm{mod}\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},\qquad V_{pir}=\frac{1}{6}\,\mathrm{mod}\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{5.14}$$

7-misol. Uchlari $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$ nuqtalarda bo'lgan piramidaning D uchidan tushirilgan h balandligi uzunligini toping.

Yechish. Avval piramida qirralarini ifodalovchi vektorlarni topamiz:

$$\overrightarrow{AB}=\{2;-2;-3\},\ \overrightarrow{AC}=\{4;0;6\},\ \overrightarrow{AD}=\{-7;-7;7\}.$$

Piramida hajmini hisoblaymiz:

$$V=\frac{1}{6}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix}=\frac{1}{6}|84+84+84+56|=\frac{154}{3}.$$

ABC yoq yuzini hisoblaymiz:

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(-12)^2+24^2+8^2}=14.$$

Piramida uchun $V=\frac{1}{3}hS$. Bundan

$$h=\frac{3V}{S}=\frac{3\cdot\frac{154}{3}}{14}=\frac{154}{14}=11\ (u.b.).$$

1.5.4. Mashqlar

1.5.1. Tomonlari birga teng bo'lgan teng tomonli ABC uchburchak berilgan. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$ ifodaning qiymatini toping.

1.5.2. $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ birlik vektorlar uchun $\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3=0$ bo'lsa, $\vec{e}_1\vec{e}_2+\vec{e}_2\vec{e}_3+\vec{e}_3\vec{e}_1$ ni toping.

1.5.3. Agar $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=4$, $\varphi=(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})=\frac{2\pi}{3}$ bo'lsin. Toping:

1) $(a+\vec{b})^2$; 2) $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$.

1.5.4. $\vec{a}=\{1;-2;2\}$ va $\vec{b}=\{2;4;-4\}$ vektorlar berilgan. Toping:

1) $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$; 2) $(\vec{a}-\vec{b})^2$.

1.5.5. Berilgan vektorlar m ning qanday qiymatlarida perpendikular bo'ladi?

1) $\vec{a}=\{1;-2m;0\}$, $\vec{b}=\{4;2;3m\}$; 2) $\vec{a}=\{m;-5;2\}$, $\vec{b}=\{m-2;m;m+3\}$.

1.5.6. $A(1;2;-3)$ nuqtani $B(5;6;-1)$ nuqtaga to'g'ri chiziq bo'ylab ko'chirishda $\vec{F}=\{2;-1;3\}$ kuchning bajargan ishini toping.

1.5.7. Agar $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=6$, $\varphi=(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})=\frac{5\pi}{6}$ bo'lsa, quyidagilarni toping

1) $|\vec{a}\times\vec{b}|$; 2) $|(2\vec{a}-3\vec{b})\times(\vec{a}+4\vec{b})|$.

$-2;1\}$, $\vec{b}=\{8;4;1\}$; 2) $\vec{a}=\{3;5;-8\}$, $\vec{b}=\{6;3;-2\}$

. Tomonlari $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}$ va $\vec{b}=-\vec{j}+2\vec{k}$ vektorlardan iborat bo'lgan
ımning diagonallari orasidagi burchakni toping.

. Uchlari $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$ bo'lgan ABC uchburchak berilgan
ıg.

. $\vec{a}=\{-1;3;\alpha\}$ va $\vec{b}=\{\beta;-6;-3\}$ vektorlar α va β ning qanday qiymatlarida
'ladi?

. α ning qanday qiymatlarida $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlar komplanar bo'ladi?

$\alpha\}$, $\vec{b}=\{0;1;0\}$, $\vec{c}=\{3;0;1\}$; 2) $\vec{a}=\{\alpha;3;1\}$, $\vec{b}=\{5;-1;2\}$, $\vec{c}=\{-1;5;4\}$.

. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlarga qurilgan parallelepiped hajmini toping:

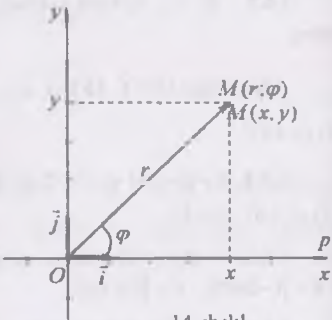
$2;1\}$, $\vec{b}=\{3;2;1\}$, $\vec{c}=\{-1;0;1\}$; 2) $\vec{a}=\{1;3;3\}$, $\vec{b}=\{-1;2;0\}$, $\vec{c}=\{1;2;-3\}$.

1.6. TEKISLIKDAGI TO'G'RI CHIZIQ

1.6.1. Tekislikda koordinatalar sistemalari

itik geometriyaning asosi koordinatalar usuli bo'lib, uni XYII asrda ıatematigi Rene Dekart kiritgan. Koordinatalar usuli nuqtaning o'rnini alar sistemasi hosil qiluvchi o'qlarga nisbatan aniqlashga asoslanadi. sistemalardan biri to'g'ri burchakli (dekart) koordinatalar sistemasi di.

ımiy boshlang'ich O nuqtaga va bir htab birligiga ega bo'lgan o'zaro ulyar Ox va Oy o'qlar tekislikda ɔordinatalar sistemasini hosil qiladi). Bu sistemaning Ox o'qi *abssissalar* Oy o'qi *ordinatalar o'qi* va ular *koordinata o'qlari* deb ataladi. Ox va Oy o'qlarning ortlari bilan belgilanadi ($|\vec{i}|=|\vec{j}|=1$, $\vec{i}\perp\vec{j}$), ıtaga *koordinatalar boshi* deyiladi, Oy o'qlar joylashgan tekislik *a tekisligi* deb ataladi va Oxy bilan belgilanadi.



14-shakl

koordinata tekisligining ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. $\overline{OM}$ vektorga ıing *radius vektori* deyiladi.

koordinatalari $M(x,y)$ kabi belgilanadi, bunda x soni *M nuqtaning abssissasi*, y soni *M nuqtaning ordinatasi* deb ataladi.

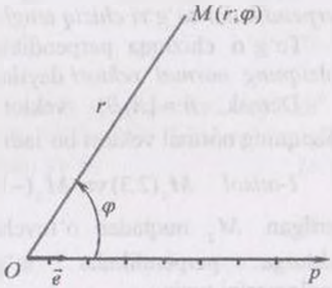
Ikkita x va y koordinatalar tekislikdagi nuqtaning o'rnini to'liq aniqlaydi, ya'ni x va y sonlarning har bir juftligiga tekislikning yagona M nuqtasi mos keladi, va aksincha.

Tekislikda sanoq boshiga, musbat yo'nalishga va masshtab birligiga ega bo'lgan Op nur *qutb o'qi*, uning O sanoq boshi *qutb* deb ataladi (15-shakl).

M tekislikning qutb bilan ustma-ust tushmaydigan ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Bunda M nuqtaning holati ikkita son, O qutbdan M nuqtagacha bo'lgan r masofa va Op qutb o'qi bilan $\overline{OM}$ yo'nalgan kesma orasidagi φ burchak bilan aniqlanadi (Op nurdan boshlab burchak yo'nalishi soat strelkasi yo'alishiga teskari tanlanadi).

r va φ sonlariga M nuqtaning *qutb koordinatalari* deyiladi va $M(r;\varphi)$ deb yoziladi. Bunda r masofa *qutb radiusi*, φ burchak *qutb burchagi* deb ataladi.

Tekislikning barcha nuqtalarini aniqlash uchun r va φ kattaliklarni $0 \le r < +\infty$, $-\pi < \varphi \le \pi$ chegaralarda olish yetarli bo'ladi. Bunda tekislikning har bir nuqtasiga yagona r va φ sonlar jufti mos keladi, va aksincha, har bir $(r;\varphi)$ sonlar juftiga tekislikdagi yagona nuqta mos keladi.



15-shakl

Nuqtaning qutb va to'g'ri burchakli koordinatalari orasidagi bog'lanishni topamiz. Bunda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasining koordinatalari boshini qutb bilan va abssissalar o'qini qutb o'qi bilan ustma-ust tushadigan qilib tanlaymiz (14-shakl).

M nuqta x va y to'g'ri burchakli koordinatalarga, r va φ qutb koordinatalarga ega bo'lsin.

14-shakldan topamiz:

$$x = r\cos\varphi, \ \ y = r\sin\varphi. \tag{6.1}$$

Bu tengliklar nuqtaning to'g'ri burchakli koordinatalarini uning qutb koordinatalari bilan bog'laydi.

(6.1) tengliklardan nuqtaning qutb koordinatalari bilan uning to'g'ri burchakli koordinatalari o'rtasida quyidagi bog'lanish hosil qilinadi:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \ tg\varphi = \frac{y}{x}. \tag{6.2}$$

Bunda φ burchakning qiymati nuqtaning joylashgan choragiga (x, y larning ishoralari asosida) qarab, $-\pi < \varphi \le \pi$ oraliqda tanlanadi.

1-misol. $M(-1;-\sqrt{3})$ nuqtaning qutb koordinatalarini toping.

Yechish. Nuqtaning qutb koordinatalarini (61.2) formulalar bilan aniqlaymiz:

$$r=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2, \qquad tg\varphi=\frac{-\sqrt{3}}{-1}=\sqrt{3}.$$

M nuqtan III chorakda yotadi.

U holda $\varphi=\frac{\pi}{3}-\pi=-\frac{2\pi}{3}$ bo'ladi. Demak, $M\left(2;-\frac{2\pi}{3}\right)$.

1.6.2. Tekislikdagi to'g'ri chiziq

To'g'ri chiziqning tekislikdagi o'rni turli parametrlar bilan bir qiymatli aniqlanishi mumkin. Berilgan parametrlariga ko'ra to'g'ri chiziqning turli tenglamalari keltirib chiqariladi. Ulardan ayrimlari bilan tanishamiz.

I. To'g'ri chiziqda yotuvchi $M_0(x_0;y_0)$ nuqta va to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lgan $\vec{n}=\{A;B\}$ vektor berilgan.

l to'g'ri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqtani olamiz va $\overline{M_0M}=\{x-x_0;y-y_0\}$ vektorni yasaymiz (16-shakl).

Bunda $\vec{n}\perp\overline{M_0M}$ bo'ladi. Ikki vektorning perpendikulyarlik shartiga asosan to'g'ri chiziq tenglamasini topamiz:

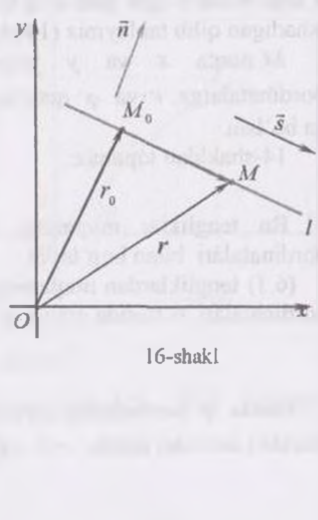
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \tag{6.3}$$

(6.3) tenglamaga *berilgan nuqtadan o'tuvchi va berilgan vektorga perpendikular to'g'ri chiziq tenglamasi* deyiladi[6].

To'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lgan har qanday vektorga *to'g'ri chiziqning normal vektori* deyiladi.

Demak, $\vec{n}=\{A;B\}$ vektor (6.3) tenglama bilan aniqlanuvchi to'g'ri chiziqning normal vektori bo'ladi.

1-misol. $M_1(2;3)$ va $M_2(-1;0)$ nuqtalar berilgan. M_2 nuqtadan o'tuvchi va $\overline{M_1M_2}$ vektorga perpendikular to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.



16-shakl

Yechish. Avvav $\overline{M_1M_2}$ vektorini topamiz:

$$\overline{M_1M_2}=\{-1-2;0-3\}=\{-3;-3\}.$$

Bundan $A=-3,\ B=-3$.

Izlanayotgan to'g'ri chiziq tenglamasini (6.3) formula bilan tuzamiz:

$$-3(x-(-1))-3(y-0)=0$$

yoki

$$x+y+1=0.$$

6. Izu Vaisman. Analytical Geometry. Coryright, 1997

II. To'g'ri chiziqda yotuvchi $M_0(x_0;y_0)$ nuqta va to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan $\vec{s}=\{p;q\}$ vektor berilgan.

l to'g'ri chiziqda yotuvchi $M_0(x_0;y_0)$ va $M(x;y)$ nuqtalardan $\overline{M_0M}=\{x-x_0;y-y_0\}$ vektorni yasaymiz (3-shakl).

Bunda $\vec{s}$ va $\overline{M_0M}$ vektorlar kollinear bo'ladi. Ikki vektorning kollinearlik shartidan quyidagini topamiz:

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}. \tag{6.4}$$

(6.4) tenglamaga *berilgan nuqtadan o'tuvchi va berilgan vektorga parallel to'g'ri chiziq tenglamasi* deyiladi.

Shunindek, bu tenglama *to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi* deb ataladi.

To'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan (yoki to'g'ri chiziqda yotuvchi) nolga teng bo'lmagan har qanday vektorga to'g'ri chiziqning *yo'naltiruvchi vektori* deyiladi.

Demak, $\vec{s}=\{p;q\}$ vektor (6.4) tenglama bilan aniqlanuvchi to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori bo'ladi.

1-izoh. (6.4) tenglamadan to'g'ri chiziqning keltirilgam II shartni qanoatlantiruvchi boshqa tenglamalarini hosil qilish mumkin.

1. (6.4) tenglamada

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=t,\quad t\in(-\infty;+\infty)$$

belgilash kiritamiz. Bundan

$$x=x_0+tp,\quad y=y_0+tq \tag{6.5}$$

tenglamalar kelib chiqadi, bu yerda t – parametr.

(6.5) tenglamalarga *to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalari* deyiladi.

2. Ma'lumki, tekislikdagi chiziqning ikkita parametrik (skalyar) tenglamalarini bitta vektor tenglama bilan berish mumkin, ya'ni (6.5) tenglamalarni

$$\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{s} \tag{6.6}$$

ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda $\vec{r}=\{x;y\}$, $\vec{r}_0=\{x_0;y_0\}$ – mos ravishda $M(x;y)$, $M_0(x_0;y_0)$ nuqtalarning radius vektorlari; $\vec{s}=\{p;q\}$ – to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori (16-shakl).

(6.6) tenglamaga *to'g'ri chiziqning vektor tenglamasi* deyiladi.

III. To'g'ri chiziqda yotuvchi ikkita $M_1(x_1;y_1)$ va $M_2(x_2;y_2)$ nuqta berilgan.

l to'g'ri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqtani olib, $\overline{M_1M}=\{x-x_1;y-y_1\}$ va $\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1;y_2-y_1\}$ vektorlarni yasaymiz. Bunda $\overline{M_1M}$ va $\overline{M_1M_2}$ vektorlar kollinear bo'ladi. Shu sababli

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \tag{6.7}$$

(6.7) tenglamaga *berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi* deyiladi.

IY. To'g'ri chiziqning Ox va Oy o'qlaridan ajratgan kesmalari a va b berilgan.

l to'g'ri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqtani olamiz (17-shakl).

ΔCBM va ΔOBA o'xshash. U holda uchburchaklarning o'xshashlik alomatiga ko'ra

$$\frac{CB}{OB}=\frac{CM}{OA}\Rightarrow \quad \frac{OB-OC}{OB}=\frac{OD}{OA}\Rightarrow \quad \frac{OC}{OB}+\frac{OD}{OA}=1.$$

Bundan $OC=x$, $OB=a$, $OD=y$, $OA=b$ o'rniga qo'yish bajarib, topamiz:

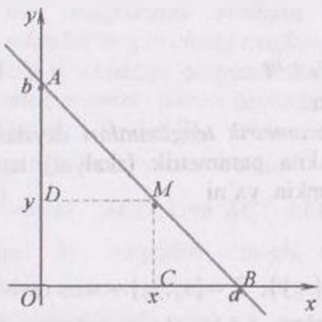
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{6.8}$$

(1.6) tenglamaga *to'gri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi* deyiladi[6].

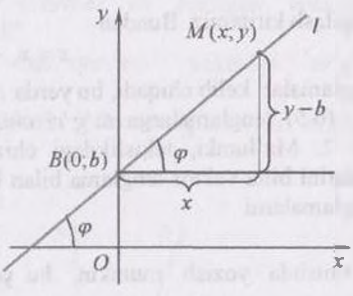
Y. To'g'ri chiziqning og'ish burchagi φ va Oy o'qidan ajratgan kesmasi b berilgan.

Ox o'qning musbat yo'nalishdan berilgan to'g'ri chiziqqa soat strelkasiga teskari yo'nalishda hisoblangan φ burchakka *to'g'ri chiziqning og'ish burchagi* deyiladi.

Og'ish burchagining tangensi, ya'ni $k=tg\varphi$ son *to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti* deb ataladi.



17-shakl



18-shakl

l to'g'ri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqtani olamiz va burchak tangensi ta'rifidan foydalanamiz (18-shakl):

$$\frac{y-b}{x}=tg\varphi\ , \qquad y=tg\varphi x+b\,.$$

Bundan

$$y=kx+b\,. \tag{6.9}$$

Bu tenglamaga *to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi* deyiladi.

Keltirib chiqarilgan (6.3)-(6.9) tenglamalar asosida ushbu xulosa kelib chiqadi:

> x, y o'zgaruvchilarning har qanday birinchi darajali tenglamasi tekislikdagi biror to'g'ri chiziqni ifodalaydi va aksincha, tekislikdagi har qanday to'g'ri chiziq x, y o'zgaruvchilarning biror birinchi darajali tenglamasi bilan aniqlanadi".

Demak, tekislikdagi har bir l to'g'ri chiziq tenglamasini

$$Ax + By + C = 0 \qquad (6.10)$$

ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda C – ozod had; $A^2 + B^2 \neq 0$; $\vec{n} = \{A; B\}$ – to'g'ri chiziqning normal vektori.

(6.10) tenglamaga *to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi* deyiladi.

(6.10) tenglamada:

1) $A = 0$ bo'lsa, tenglama $By + C = 0$ ko'rinishga keladi. Bunda to'g'ri chiziqning normal vektori Ox o'qqa perpendikular bo'ladi. Shu sababli to'g'ri chiziq Ox o'qqa parallel, Oy o'qqa perpendikular bo'ladi. Shu kabi $B = 0$ da kelib chiqadigan $Ax + C = 0$ to'g'ri chiziq Oy o'qqa parallel, Ox o'qqa perpendikular bo'ladi;

2) $C = 0$ bo'lsa, tenglama $Ax + By = 0$ ko'rinishni oladi. Bu tenglamani $O(0;0)$ nuqtaning koordinatalari qanoatlantiradi. Demak, to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tadi;

3) $A = 0$ va $C = 0$ bo'lsa, tenglamadan $y = 0$ kelib chiqadi. Bu to'g'ri chiziq Ox o'qda yotadi. Shu kabi $B = 0$ va $C = 0$ da hosil bo'ladigan $x = 0$ to'g'ri chiziq Oy o'qda yotadi.

2- misol. a ning qanday qiymatlarida $(a^2 + 4a)x + (a - 5)y - 2a + 4 = 0$ to'g'ri chiziq: 1) Ox o'qqa parallel bo'ladi; 2) Ox o'qqa perpendikular bo'ladi; 3) koordinatalar boshidan o'tadi.

Yechish. Misolning shartiga ko'ra: $A = a^2 + 4a$, $B = a - 5$, $C = -2a + 4$.

U holda: 1) $a^2 + 4a = 0$ yoki $a = -4$, $a = 0$ da $A = 0$ bo'ladi. Shu sababli berilgan to'g'ri chiziq Ox o'qqa parallel bo'ladi.

2) $a - 5 = 0$ yoki $a = 5$ da $B = 0$ va berilgan to'g'ri chiziq Ox o'qqa perpendikular bo'ladi.

3) $-2a + 4 = 0$ yoki $a = 2$ da $C = 0$ bo'ladi. Demak, $a = 2$ da to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tadi.

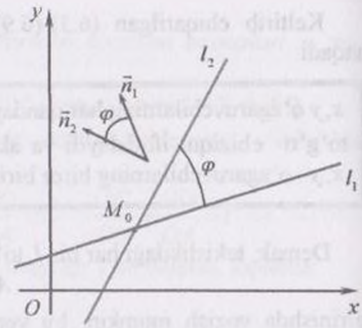
1.6.3. Tekislikda ikki to'g'ri chiziqning o'zaro joylashishi

Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak

Tekislikdagi ikki l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak φ bo'lsin.

Bu burchak to‘g‘ri chiziq tenglamalarining berilishiga ko‘ra turli formulalar bilan aniqlanishi mumkin.

To‘g‘ri chiziqlar umumiy tenglamalari $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ bilan berilgan bo‘lsin. Bunda to‘g‘ri chiziqlarning $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1\}$, $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2\}$ normal vektorlari orasidagi burchak to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakka teng, ya’ni $\varphi = (\widehat{l_1, l_2}) = (\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2})$ bo‘ladi (19-shakl).



19-shakl

Ikki vektor orasidagi burchak kosinusi formulasidan topamiz:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (6.11)$$

3-misol. $4x + y + 1 = 0$ va $5x - 3y - 7 = 0$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

Yechish. Masalaning shartiga ko‘ra $A_1 = 4$, $B_1 = 1$, $A_2 = 5$, $B_2 = -3$.

U holda

$$\cos\varphi = \frac{4 \cdot 5 + 1 \cdot (-3)}{\sqrt{4^2 + 1^2}\sqrt{5^2 + (-3)^2}} = \frac{17}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{34}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Bundan $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Ikki to‘g‘ri chiziqning perpendikularlik sharti

Tekislikdagi ikki to‘g‘ri chiziqning perpendikularlik shartlarini ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchakni topish formulalaridan keltirib chiqaramiz.

$l_1 \perp l_2$ bo‘lsin. U holda $\cos\varphi = 0$ va (6.11) tenglikdan topamiz[9]

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \qquad (6.12)$$

Ikki to‘g‘ri chiziqning parallellik sharti

l_1 va l_2 to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘lsin. U holda ularning normal vektorlari $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1\}$ va $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2\}$ kollinear bo‘ladi. Ikki vektorning kollinearlik shartidan ikki to‘g‘ri chiziqning parallellik shartini topamiz[6]:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \qquad (6.13)$$

Ikki to‘g‘ri chiziqning kesishishi

To‘g‘ri chiziqlar umumiy tenglamalari

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ va } A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

bilan berilgan bo‘lsin va $M_0(x_0; y_0)$ nuqtada kesishsin (19-shakl).

U holda $M_0(x_0;y_0)$ nuqtaning koordinatalari har ikkala tenglamani qanoatlantiradi. Shu sababli ikki to'g'ri chiziqning kesishish nuqtasi koordinatalari

$$\begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0, \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0 \end{cases} \tag{6.14}$$

sistemadan topiladi.

Ikki to'g'ri chiziqning ustma-ust tushishi

l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlar umumiy tenglamalari

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

bilan berilgan bo'lsin va ustma-ust tushsin.

Bunda:

- birinchidan $l_1 \parallel l_2$ bo'ladi va $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \lambda$ tengliklardan $A_1 - \lambda A_2 = 0$, $B_1 - \lambda B_2 = 0$ kelib chiqadi;

- ikkinchidan l_1 to'g'ri chiziqning har bir nuqtasi, jumladan $M_0(x_0;y_0)$ nuqtasi, l_2 to'g'ri chiziqda ham yotadi, ya'ni

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0, \quad A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0$$

bo'ladi.

Bu tengliklarning ikkinchisini λ ga ko'paytiramiz va birinchidan ayiramiz:

$$(A_1 - \lambda A_2)x_0 + (B_1 - \lambda B_2) + (C'_1 - \lambda C'_2) = 0.$$

Bundan $C'_1 = \lambda C'_2$ kelib chiqadi.

Demak, to'g'ri chiziqlarning ustma-ust tushush sharti

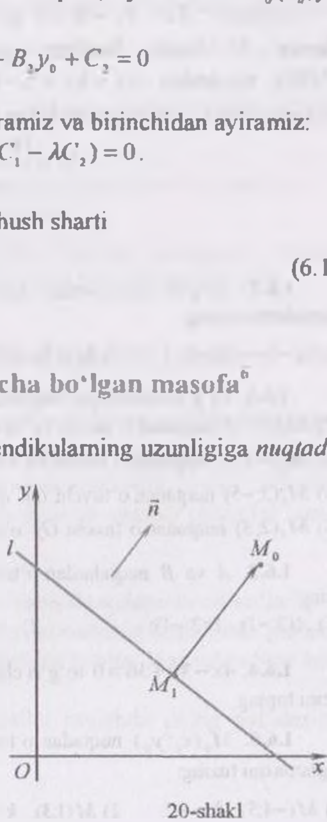
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{6.15}$$

tengliklar bilan ifodalanadi.

1.6.4. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa[6]

Nuqtadan to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikularning uzunligiga *nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa* deyiladi.

$M_0(x_0;y_0)$ nuqta va $Ax + By + C = 0$ tenglama bilan l to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin. M_0 nuqtadan l to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikularning asosini $M_1(x_1;y_1)$ bilan belgilaymiz (20-shakl).



20-shakl

U holda $\overline{M_1M_0} = \{x_0 - x_1; y_0 - y_1\}$ va $M_1(x_1;y_1)$ nuqta l to'g'ri chiziqda yotgani sababli $Ax_1 + By_1 + C = 0$, ya'ni $C = -Ax_1 - By_1$ bo'ladi.

$\bar{n} = \{A;B\}$ vektorning l to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lishi ma'lum. Shu sababli M_0 nuqtadan l to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani vektorning o'qdagi proeksiyasining xossalaridan foydalanib topamiz:

$$d=\left|\Pr_{\vec{n}}\overline{M_1M_0}\right|=\frac{\left|\overline{M_1M_0}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}=\frac{|(x_0-x_1)A+(y_0-y_1)B|}{\sqrt{A^2+B^2}}=$$

$$=\frac{|Ax_0+By_0-Ax_1-By_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Shunday qilib, *nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa*

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (6.16)$$

formula bilan topiladi.

4-misol. $3x+4y-4=0$ va $6x+8y+5=0$ parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani toping.

Yechish. $3x+4y-4=0$ to'g'ri chiziqda ixtiyoriy, masalan $M(0;1)$nuqtani olamiz. U holda berilgan parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi d masofa $M(0;1)$ nuqtadan $6x+8y+5=0$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofaga teng bo'ladi. Uni (1.14) formula bilan hisoblaymiz:

$$d=\frac{|6\cdot 0+8\cdot 1+5|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{13}{10}(u.b).$$

1.6.5. Mashqlar

1.6.1. To'g'ri chiziqlarning burchak koeffitsiyentini va koordinata o'qlarida ajratgan kesmalarini toping:

1) $5x-3y-15=0$; 2) $2x=5y+3$; 3) $\frac{y-2}{2}=\frac{x+3}{4}$; 4) $\frac{x}{4}-\frac{y}{3}=\frac{1}{2}$.

1.6.2. To'g'ri chiziqning tenglamasini tuzing:

1) $M_1(3;-1)$ nuqtadan o'tuvchi va $\vec{n}=\{-2;5\}$ normal vektorga ega bo'lgan;

2) $M_2(-4;3)$ nuqtadan o'tuvchi va $\vec{s}=\{1;-2\}$ yo'naltiruvchi vektorlarga ega bo'lgan.

3) $M_3(3;-5)$ nuqtadan o'tuvchi Ox o'qqa perpendikular bo'lgan;

4) $M_4(2;3)$ nuqtadan o'tuvchi Oy o'qda $b=-4$ ga teng kesma ajratuvchi.

1.6.3. A va B nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasini tuzing:

1) $A(2;-1)$, $B(3;-4)$; 2) $A(3;5)$, $B(-1;2)$.

1.6.4. $4x-3y+36=0$ to'g'ri chiziq va koordinata o'qlari tashkil qilgan uchburchakning yuzini toping.

1.6.5. $M_0(x_0;y_0)$ nuqtadan o'tuvchi va burchak koeffitsiyenti k ga teng to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing:

1) $M(-4;5)$, $k=-2$; 2) $M(1;3)$, $k=-1$; 3) $M(1;2)$, $k=1$; 4) $M(3;25)$, $k=\frac{4}{3}$.

1.6.6. To'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtalarini toping:

1) $y=5x-3$, $2x-3y+4=0$; 2) $4y=3x-10$, $4x+3y-5=0$.

1.6.7. To'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping:

1) $x+1=3y-3$, $x-3y+6=0$; 2) $5x-5=y+3$, $\frac{x-2}{4}=\frac{y-2}{-6}$

1.6.8. m va n ning qanday qiymatlarida $mx+6y+n=0$ va $6x+my+4=0$ to'g'ri chiziqlar: 1) parallel bo'ladi; 2) ustma-ust tushadi ?

1.6.9. m ning qanday qiymatlarida to'g'ri chiziqlar: 1) parallel bo'ladi; 2) perpendikular bo'ladi? 1) $mx+2y+5=0$, $3x+4y-5=0$; 2) $3x+5y+2=0$, $2x+my+3=0$.

1.6.10. $A(-1;1)$ nuqtadan o'tuvchi va $3x-y-4=0$ to'g'ri chiziqqa perpendikular to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

1.6.11. $A(-2;6)$ nuqtadan o'tuvchi va $5x-3y-4=0$ to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

1.6.12. $A(2;5)$ nuqtadan $6x+8y-5=0$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani toping.

1.6.13. $A(-3;-4)$ nuqtadan $12x-5y-10=0$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani toping.

1.6.14. $A(-2;1), B(2;-3), C(6;4)$ bo'lsa, ABC uchburchakda BD balandlik tenglamasini tuzing.

1.6.15. $A(-3;0), B(4;3), C(2;-1)$ bo'lsa, ABC uchburchakda AD mediana tenglamasini tuzing.

1.6.16. Bir uchi $A(3;4)$ nuqtada bo'lgan va bir tomoni $2x+5y+3=0$ to'g'ri tenglama bilan berilgan to'g'ri chiziqda yotgan kvadratning yuzini toping.

1.6.17. Romb ikki tomonining va diagonallaridan birining tenglamalari berilgan: $x+2y-4=0$, $x+2y-10=0$, $x-y+2=0$. Romb uchlarining koordinatalarini toping.

1.7. IKKINCHI TARTIBLI CHIZIQLAR

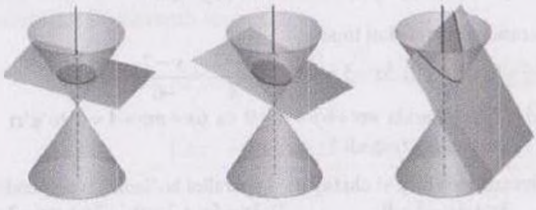
Oxy koordinatalar sistemasida x, y o'zgaruvchilarning ikkinchi darajali tenglamasi bilan aniqlanuvchi chiziq tekislikdagi *ikkinchi tartibli chiziq* deyiladi. Har qanday ikkinchi tartibli chiziqni doiraviy konusning tekislik bilan kesishish chizig'i sifatida hosil qilish mumkin. Shu sababli ikkinchi tartibli chiziqlar *konus kesimlar* deb ham ataladi.

Agar konus tekislik bilan kesilganida (21-shakl)[1]:

- tekislik konus o'qiga perpendikular bo'lsa, kesimda *aylana* hosil bo'ladi;
- tekislik konus o'qiga perpendikular bo'lmay, konusning faqat bitta pallasini kessa va uning yasovchilaridan birortasiga parallel bo'lmasa, kesimda *ellips* hosil bo'ladi;
- tekislik konus yasovchilaridan biriga parallel ravishda uning pallalaridan birini kessa, kesimda *parabola* hosil bo'ladi;

[1]. Additional Topics in Analytic Geometry. http://salkhateeb.kau.edu.sa/.../20section-chapter5-6

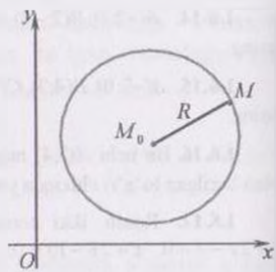
- tekislik konusning ikkala pallasini kessa, kesimda *giperbola* hosil bo'ladi.



21-shakl

1.7.1. Aylana

1-ta'rif. Tekislikda markaz deb ataluvchi berilgan nuqtadan teng uzoqlikda yotuvchi nuqtalarning geometrik o'rniga *aylana* deyiladi.



22-shakl

Ushbu

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \qquad (7.1)$$

tenglamaga *aylananing kanonik tenglamasi* deyiladi. Bunda $M_0(x_0;y_0)$ nuqta *aylana markazi*, R masofa *aylana radiusi* deb ataladi.

$x_0=0$, $y_0=0$ da (2.1) tenglamadan topamiz:

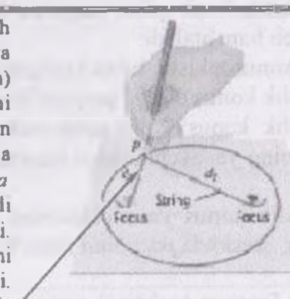
$$x^2+y^2=R^2. \qquad (7.2)$$

(7.2) tenglama markazi koordintalar boshidan o'tuvchi va radiusi R ga teng aylanani aniqlaydi.

1.7.2. Ellips

2-ta'rif. Tekislikda fokuslar deb ataluvchi berilgan ikki nuqtagacha bo'lgan masofalarning yig'indisi o'zgarmas kattalikka teng bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rniga *ellips* deyladi.

Ta'rif asosida ellipsni quyidagicha chizish mumkin[11]. Bir bo'lak karton qog'ozi olinadi va unga ikkita tugmali mix (knopka) mahkamlanadi. Ular ellipsning fokuslarini ifodalaydi. Ikkita mix orasidagi masofadan uzunroq ip olinadi va uning uchlari mixlarga mustahkamlanadi. Bu ip o'z-garmas $2a$ kattalikni ifodalaydi. Keyin qalam olinadi va uning uchi bilan ip tarang tortiladi. Qalamning uchi kartonga tekkiziladi va ipni tarang saqlagan holda qalam harakatlantiriladi. Natijada qalamning uchi ellipsni chizadi.



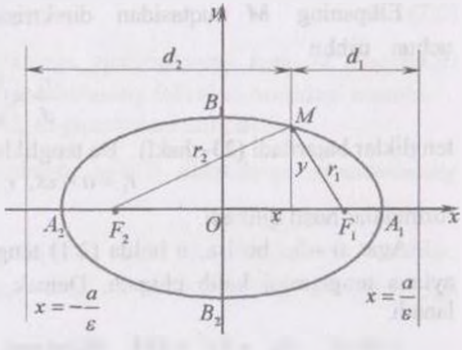
F_1 va F_2 ellipsning fokuslari, M ellipsning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. $F_1F_2 = 2c$, $F_1M = r_1$, $F_2M = r_2$ belgilashlar kiritamiz.

Ellipsning ta'rifiga ko'ra $F_1M + F_2M = 2a$, ya'ni

$$r_1 + r_2 = 2a, \tag{7.3}$$

bu yerda a – o'zgarmas son bo'lib, $a > c$.

Oxy koordinatalar sistemasini Ox o'q fokuslardan, Oy o'q F_1F_2 kesmaning o'rtasidan o'tadigan qilib tanlaymiz (23-shakl).



23-shakl

U holda $F_2(-c;0)$ va $F_1(c;0)$ bo'ladi. M nuqtaning koordinatalari x va y bo'lsin deylik, ya'ni $M(x;y)$.

Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga ko'ra

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

r_1 va r_2 ning bu ifodalarini (2.4) tenglikka qo'yib, almashtirishlar bajaramiz:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a,$$

$$(x-c)^2 + y^2 = (2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2,$$

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2xc + c^2 + y^2,$$

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + xc,$$

$$a^2x^2 + 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2xc + x^2c^2,$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

$b^2 = a^2 - c^2$ (chunki $a > c$) belgilash kiritib, topamiz:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{7.4}$$

(7.4) tenglamaga *ellipsning kanonik tenglamasi* deyiladi.

(7.4) tenglama 23-shaklda keltirilgan ellipsni aniqlaydi.

Ellipsda $O(0;0)$ nuqtaga markaz, $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ nuqtalarga uchlar, A_1A_2, B_1B_2 kesmalarning $2a$, $2b$ uzunliklariga mos ravishda katta va kichik o'qlar, a, b sonlarga mos ravishda katta va kichik yarim o'qlar, F_1M, F_2M kesmalarning r_1, r_2 uzunliklariga fokal radiuslar deyiladi.

$\varepsilon = \frac{c}{a}$ kattalikka *ellipsning ekstsentritsiteti* deyiladi. Bunda $0 < \varepsilon < 1$.

$\varepsilon \to 1$ da b kichiklashib, ellips Oy o'qiga parallel ravishda Ox o'qqa tomon siqilib boradi, aksincha $\varepsilon \to 0$ da ellips aylanaga yaqinlashib boradi.

sining M nuqtasidan direktrisalargacha bo'lgan d_1 va d_2 masofalar
shbu

$$\frac{r_1}{d_1}=\frac{r_2}{d_2}=\varepsilon$$

bajariladi (23-shakl). Bu tengliklardan ellipsning fokal radiuslari uchun

$$r_1=a-\varepsilon x,\ r_2=a+\varepsilon x$$

ır hosil qilinadi.

$a=b$ bo'lsa, u holda (2.1) tenglamadan $x^2+y^2=a^2$ tenglama, ya'ni nglamasi kelib chiqadi. Demak, aylana ellipsning xususiy holi hisob-

sol. $4x^2+9y^2=144$ ellipsning o'qlari uzunliklarini, fokuslarining alarini toping.

ish. Ellipsning tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiramiz:

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1.$$

dan $a^2=36,\ b^2=16$. Demak, $a=6,\ b=4,\ 2a=12,\ 2b=8$.

qilib, ellips o'qlarining uzunliklari mos ravishda 12 va 8 ga teng.

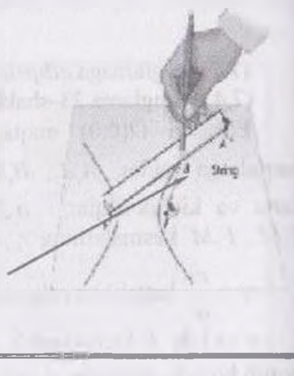
b ni bilgan holda c ni aniqlaymiz: $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{36-16}=2\sqrt{5}$.

dan fokuslarning koordinatalarini va ekssentrisitetni topamiz:

$$F_{21}(2\sqrt{5};0),\ F_2(-2\sqrt{5};0).$$

1.7.3. Giperbola[7]

'rif. Tekislikda fokuslar deb ataluvchi berilgan ikki nuqtagacha bo'lgan ayirmasining moduli o'zgarmas kattalikka teng bo'lgan nuqtalarning o'rniga *giperbola* deyiladi.



ısosida giperbolani quyidagicha chizish mumkin[7]. lak karton qog'ozi olinadi va unga ikkita tugmali mahkamlanadi. Ular giperbolaning fokuslarini ydi. O'lchov chizg'ichi olinadi va uning bir uchi erkin aylanadigan qilib biriktiriladi. Chizg'ich idan kaltaroq ip olinadi va uning bir uchi ikkinchi , ikkinchi uchi chizg'ichning A nuqtasiga kamlanadi. Keyin qalam olinadi va uning uchi ni chizg'ichning B nuqtasiga tortiladi. Qalamning artonga tekkiziladi va ipni tarang saqlagan holda harakatlantiriladi. Natijada qalamning uchi laning bir tarmog'ini chizadi.

ɔlaning ikkinchi tarmog'ini chizish uchun chizg'ich ning holati o'zgartiriladi.

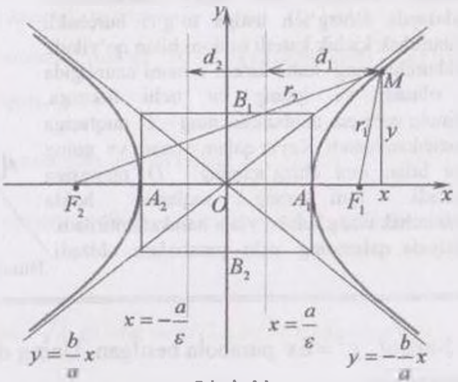
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (7.5)$$

tenglama bilan ifodalanadi. Bu tenglamaga *giperbolaning kanonik tenglamasi* deyiladi. Bu yerda $b^2=c^2-a^2$, $2c$ – giperbolaning fokuslari orasidagi masofa.

(7.5) tenglama 24-shaklda keltirilgan giperbolani aniqlaydi.

$y=\pm\frac{b}{a}x$ tenglama bilan aniqlanuvchi to'g'ri chiziqlarga *giperbolaning asimptotalari* deyiladi.

Giperbolada $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ nuqtalarga uchlar, A_1A_2 kesmaning $2a$ uzunligiga haqiqiy o'q, B_1B_2 kesmaning $2b$ uzunligiga mavhum o'q, a, b sonlarga mos ravishda haqiqiy va mavhum yarim o'qlar, F_1M, F_2M esmalarning r_1, r_2 uzunliklariga fokal radiuslar deyiladi.



24-shakl

$\varepsilon=\frac{c}{a}$ kattalikka *giperbolaning ekssentrisiteti* deyiladi. Bunda $\varepsilon>1$.

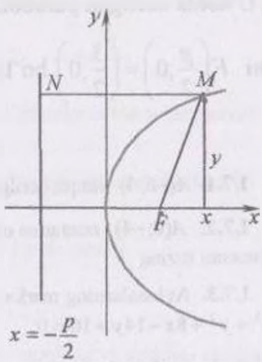
Ekstsentrisitet birga qanchalik yaqin bo'lsa giperbola haqiqiy o'qi tomon siqilib boradi, aksincha ε kattalashgan sayin giperbolaning tarmoqlari kengayib boradi.

$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ to'g'qri chiziqlar giperbola*ning direktrisalari* deb ataladi.

Yarim o'qlari teng bo'lgan giperbolaga *teng tomonli giperbola* deyiladi.

1.7.4. Parabola[7]

4-ta'rif. Tekislikda fokus deb ataluvchi berilgan nuqtadan va direktrisa deb ataluvchi berilgan to'g'ri chiziqdan teng uzoqlikda yotuvchi nuqtalarning geometrik o'rniga *parabola* deyiladi.



25-shakl

Parabolaning fokusidan direktrisasigacha bo'lgan masofaga *parabolaning parametri* deyiladi.

Parabola dekart kooordinatalar sistemasida

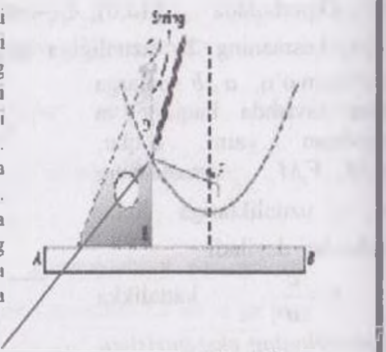
$$y^2 = 2px \tag{7.6}$$

tenglama bilan ifodalanadi. Bu tenglamaga *parabolaning kanonik tenglamasi* deyiladi.

(7.6) tenglama 25-shaklda keltirilgan giperbolani aniqlaydi. Bunda $O(0;0)$ nuqta parabolaning *uchi*, Ox o'q parabolaning *o'qi* deb ataladi.

Parabolaning *ekstsentrisiteti* $\varepsilon = \dfrac{NM}{MF} = 1$ ga teng bo'ladi, *direktrisasi* $x = -\dfrac{p}{2}$ tenglama bilan aniqlanadi.

Ta'rif asosida parabolani quyidagicha chizish mumkin[7]. Bir bo'lak karton qog'ozi olinadi, unga tugmali mix va o'lchash chizg'ichi mahkamlanadi. Bunda mix parabolaning fokusini, chizgich esa uning direktrisasini ifodalaydi. Chizg'ich ustiga to'g'ri burchakli uchburchak kichik katetli tomoni bilan qo'yiladi. Uchburchakning katta katetli tomoni uzunligida ip olinadi va ipning bir uchi fokusga, ikkinchi uchi esa uchburchakning C nuqtasiga mustahkamlanadi. Keyin qalam olinadi va uning uchi bilan ipni chizg'ichning D nuqtasiga tortiladi. Ipni tarang saqlagan holda uchburchak chizg'ich bo'ylab harakatlantiriladi. Natijada qalamning uchi parabolani chizadi.



Bunda hamma vaqt $DE = DF$ bo'ladi

2-misol. $y^2 = 6x$ parabola berilgan. Uning direktrisasi tenglamasini tuzing va fokusini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani parabolaning kanonik tenglamasi (7.6) bilan taqqoslab, ko'ramizki, $2p = 6$ yoki $p = 3$.

U holda berilgan parabola uchun direktrisasi tenglamasi $x = -\dfrac{p}{2} = -\dfrac{3}{2}$ va fokusi $F\left(\dfrac{p}{2};0\right) = \left(\dfrac{3}{2};0\right)$ bo'ladi.

1.7.5. Mashqlar

1.7.1. $A(-6;4)$ nuqta berilgan. Diametri OA kesma bo'lgan aylana tenglamasini tuzing.

1.7.2. $A(0;-4)$ nuqtadan o'tuvchi va Ox o'qiga koordinatalar boshida urinuvchi aylana tenglamasini tuzing.

1.7.3. Aylanalarning markazi va radiusini toping:

1) $x^2 + y^2 + 8x - 14y + 16 = 0$;
2) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$;
3) $x^2 + y^2 - x + 2y - 1 = 0$;
4) $x^2 + y^2 + 3x - 7y - \dfrac{3}{2} = 0$.

1.7.4. Aylananing tenglamasini tuzing: 1) markazi $M_1(-1;3)$ nuqtada joylashgan va radiusi $R=6$ ga teng bo'lgan. 2) markazi $M_2(-3;5)$ nuqtada joylashgan va $A(4;4)$ nuqtadan o'tgan. 3) diametrlaridan birining uchlari $B(-1;3)$ va $C(-3;5)$ nuqtalarda bo'lgan.

1.7.5. Yarim o'qlari $a=5$, $b=3$ bo'lgan ellips tenglamasini tuzing. Fokuslarini aniqlang va shaklini chizing.

1.7.6. $x^2+y^2=25$ aylana barcha nuqtalarining ordinatalari 5 marta kichraytirilgan. Hosil bo'lgan egri chiziq tenglamasini tuzing va turini aniqlang.

1.7.7. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{36}=1$ ellips va $M(x;3)$ nuqta berilgan. Nuqta ellipsda yotgan bo'lsa, uning abssissasini toping.

1.7.8. Fokuslari Oy o'qda $O(0;0)$ nuqtaga nisbatan simmetrik joylashgan va quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi ellipsning kanonik tenglamasini tuzing: 1) kichik o'qi 12 ga va ekssentrisiteti $\frac{4}{5}$ ga teng. 2) fokuslari orasidagi masofa 10 ga va ekssentrisiteti $\frac{5}{7}$ ga teng. 3) $M_1(6;0)$ va $M_2(0;9)$ nuqtalardan o'tgan.

1.7.9. $\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{81}=1$ ellipsning fokuslari fokuslarini toping.

1.7.10. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$ ellipsga tomonlari ellips o'qlariga parallel qilib kvadrat ichki chizilgan.
Kvadratning yuzini toping.

1.7.11. Giperbolaning ekstsentrisiteti $\sqrt{2}$ ga teng va $M(2a;a\sqrt{3})$ nuqtadan o'tadi. Giperbolani teglamasini tuzing.

1.7.12. Giperbolani fokuslari $F_1(\sqrt{5};0)$ va $F_2(-\sqrt{5};0)$ nuqtalarda joylashgan. Agar giperbola $A(2;0)$ nuqtadan otsa, uning asimptotalari tenglamasini tuzing.

1.7.13. Giperbolaning nuqtalaridan biri va asimptotalarining tenglamalari berilgan. Giperbolaning kanonik tenglamasini tuzing:

1) $M(6;2)$, $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$; 2) $M(4;2)$, $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$

1.7.14. $M(2;-6)$ nuqtadan o'tuvchi va asimptotalari koordinatalar boshida keshishuvchi teng tomonli giperbola tenglamasini tuzing.

1.7.15. 1) $(0;0)$ va $(1;-3)$ nuqtalardan o'tuvchi va Ox o'qqa nisbatan simmetrik bo'lgan parabola tenglamasini tuzing.

1.7.16. Berilgan fokusi va direktrisasi tenglamasiga ko'ra parabolaning kanonik tenglamasini tuzing:

1) $F(-3;4)$, $x-5=0$; 2) $F(5;3)$, $y+2=0$.

1.7.17. Berilgan tenglamasiga ko'ra egri chiziqning turini aniqlang va shaklini chizing:

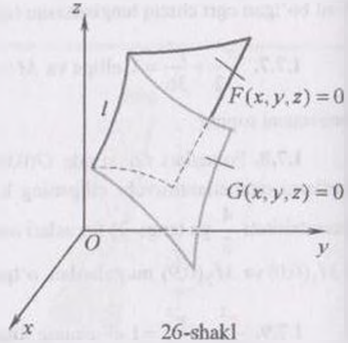
1) $9x^2+25y^2-225=0$; 2) $16x^2-9y^2-144=0$;

3) $6x-y^2=0$; 4) $xy=4$.

1.8.1. Fazoda sirt va chiziq[7]

umumiy boshlang'ich O nuqtaga va bir xil masshtab birligiga ega bo'lgan
erpendikulyar Ox, Oy va Oz o'qlar
o'g'ri burchakli $Oxyz$ koordinatalar
sini hosil qiladi.

yz koordinatalar sistemasida uchta
z sonlari fazodagi har qanday
ining o'rnini to'liq aniqlaydi. Bunda
$(x;y;z)$ kabi belgilanadi, x ga
ining *abssissasi*, y ga M nuqtaning
si, z ga M nuqtaning *applikatasi*



26-shakl

ordinatalari uch noma'lumli
$)=0$ tenglamani qanoatlantiruvchi
azoning barcha $M(x;y;z)$ nuqtalari
ga *fazoda* shu tenglama bilan aniqlanuvchi *sirt* deyiladi.

odagi chiziqni ikki sirtning kesishish chizig'i yoki ikki sirt umumiy
ining gometrik o'rni deb qarash mumkin (26-shakl).

rdinatalari

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

lar sistemasini qanoatlantiruvchi $Oxyz$ fazoning barcha $M(x;y;z)$
to'plamiga *fazodagi* shu tenglamalar sistemasi bilan aniqlanuvchi *chiziq*

ida tekislik va to'g'ri chiziqqa oid ayrim tushunchalar bilan tanishamiz.

1.8.2. Tekislik

islikka doir masalalar, jumladan tekislik tenglamalarini keltirib chiqarish,
slikning fazoda o'zaro joylashishini ifodalash, nuqtadan tekislikkacha
masofani topish masalalari tekislikdagi to'g'ri chiziqqa doir shu kabi
r singari yechiladi. Shu sababli biz tekislik tenglamalarining ko'rinishi va
hini, ikki tekislikning fazoda o'zaro joylashishini formulalarini va
tekislikkacha bo'lgan masofani topish formulasini isbotsiz keltirish bilan
anamiz.

o'zgaruvchilarning har qanday birinchi darajali tenglamasi fazodagi
tekislikni ifodalaydi va aksincha, fazodagi har qanday tekislik x, y, z
ruvchilarning biror birinchi darajali tenglamasi bilan aniqlanadi[7].

Tekislikning fazodagi o'rni turli parametrlar bilan (masalan, tekislikning koordinata o'qlarida ajratgan kesmalari bilan) bir qiymatli aniqlanishi mumkin. Shu sababli parametrlariga ko'ta tekislikning turli tenglamalari keltirib chiqariladi:

1. *Berilgan nuqtadan o'tuvchi va berilgan vektorga perpendikular tekislik tenglamasi*

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0; \qquad (8.1)$$

3. *Berilgan uchta nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi*

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0; \qquad (8.2)$$

4. *Tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasi*

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1; \qquad (8.3)$$

5. *Tekislikning umumiy tenglamasi va uning xususiy xollari*

$$Ax+By+Cz+D=0,\ A^2+B^2+C^2\neq 0. \qquad (8.4)$$

1) $By+Cz+D=0$, $Ax+Cz+D=0$, $Ax+By+D=0-$ mos ravishda Ox o'qqa, Oy o'qqa, Oz o'qqa parallel tekislik tenglamasi;

2) $Ax+By+Cz=0-$koordinatalar boshidan o'tuvchi tekislik tenglamasi;

3) $By+Cz=0$, $Ax+By=0$, $Ax+Cz=0-$ mos ravishda Ox o'qdan, Oy o'qdan, Oz o'qdan o'tgan tekislik tenglamasi;

4) $Cz+D=0$, $By+D=0$, $Ax+D=0-$ mos ravishda Oxy tekislikka, Oxz tekislikka, Oyz tekislikka parallel tekislik tenglamasi;

5) $z=0$, $x=0$, $y=0-$ mos ravishda Oxy, Oyz, Oxz tekislik tenglamasi.

1-misol. $M_0(3;4;5)$ nuqtadan o'tuvchi va normal vektori $\vec{n}=\{-1;-3;2\}$ bo'lgan tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra $x_0=3, y_0=4, z_0=5$, $A=-1, B=-3, C=2$.

U holda (8.1) tenglamadan topamiz:

$$(-1)\cdot(x-3)+(-3)\cdot(y-4)+2\cdot(z-5)=0$$

yoki

$$x+3y-2z-5=0.$$

2-misol. Ox, Oy va Oz o'qlarda mos ravishda 2, (−4) va 6 ga teng kesmalar ajratuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra: $a=2$; $b=-4$; $c=6$.

Tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasidan topamiz:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{(-4)}+\frac{z}{6}=1,\ 6x-3y+2z-12=0.$$

Fazoda ikki tekislikning o'zaro joylashishi

Tekisliklar $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ tenglamalar bilan berilgan bo'lsin.

Fazodagi ikki tekislikning o'zaro joylashishini ifodalovchi formulalar:

1. *Ikki tekislik orasidagi burchak*

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}; \tag{8.5}$$

2. *Ikki tekislikning perpendikularlik sharti*

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0; \tag{8.6}$$

3. *Ikki tekislikning parallellik sharti*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}; \tag{8.7}$$

4. *Ikki tekislikning ustma-ust tushishi*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}. \tag{8.8}$$

3-misol. $x + y + z - 1 = 0$, $x - 2y + 3z - 1 = 0$ tekisliklar orasidagi burchakni toping.

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra: $\vec{n}_1 = \{1;1;1\}$, $\vec{n}_2 = \{1;-2;3\}$.

U holda $\cos\varphi = \dfrac{|1\cdot 1 + 1(-2) + 1\cdot 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}\cdot\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{42}}$.

Bundan $\varphi = \arccos\left(\dfrac{2}{\sqrt{42}}\right) \approx 72°$.

Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa

Nuqtadan tekislikka tushirilgan perpendikularning uzunligiga *nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa* deyiladi.

$M_0(x_0;y_0;z_0)$ nuqtadan $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislikkacha bo'lgan masofa

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{8.9}$$

formula bilan topiladi.

4-misol $M_0(5;4;-1)$ nuqtadan $M_1(3;0;3)$, $M_2(0;4;0)$ va $M_3(0;4;-3)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislikkacha bo'lgan masofani toping.

Yechish. Avval berilgan uchta nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzamiz:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z-3 \\ 0-3 & 4 & 0-3 \\ 0-3 & 4 & -3-3 \end{vmatrix} = 0.$$

Bundan

$$-12\cdot(x-3)-9\cdot y+0\cdot(z-3)=0$$

yoki

$$4x+3y-12=0.$$

$M_0(5;4;-1)$ nuqtadan $4x+3y-12=0$ tekislikkacha bo'lgan masofani topamiz:

$$d=\frac{|4\cdot5+3\cdot4-12|}{\sqrt{4^2+3^2+0^2}}=4(b).$$

1.8.3. Fazoda to'g'ri chiziq

Fazodagi to'g'ri chiziq tenglamalari va fazodagi ikki to'g'ri chiziqning o'zaro joylashishini hamda fazodagi to'g'ri chiziq bilan tekislikning o'zaro joylashishini ifodalovchi formulalar tekislikdagi to'g'ri chiziqning shu kabi tenglama va formulalari singari hosil qilinadi. Shu sababli ularni isbotsiz keltiramiz:

1. *To'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi*

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r};\qquad(8.10)$$

2. *To'g'ri chiziqning umumiy tenglamalari*

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2Z+D_2=0;\end{cases}\qquad(8.11)$$

3. *To'g'ri chiziqning parametrik tenglamalari*

$$x=x_0+pt,\ y=y_0+qt,\ z=z_0+rt;\qquad(8.12)$$

5. *Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi*

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1};\qquad(8.13)$$

6. *Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak*

$$\cos\varphi=\frac{\bar{s}_1\bar{s}_2}{|\bar{s}_1||\bar{s}_2|}=\frac{p_1p_2+q_1q_2+r_1r_2}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}};\qquad(8.14)$$

7. Ikki to'g'ri chiziqning perpendikularlik sharti

$$p_1p_2+q_1q_2+r_1r_2=0;\qquad(8.15)$$

8. Ikki to'g'ri chiziqning parallellik sharti

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{q_1}{q_2}=\frac{r_1}{r_2};\qquad(8.16)$$

9. To'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak

$$\sin\varphi=\frac{|Ap+Bq+Cz|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{p^2+q^2+r^2}};\qquad(8.17)$$

13. To‘g‘ri chiziq bilan tekislikning perpendikularlik sharti

$$\frac{A}{p}=\frac{B}{q}=\frac{C}{r}; \qquad (8.18)$$

14. To‘g‘ri chiziq bilan tekislikning paralellik sharti

$$Ap+Bq+Cr=0. \qquad (8.19)$$

1-misol. $x=3t-2$, $y=0$, $z=-t+3$ va $x=2t-1$, $y=0$, $z=t-3$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi o‘tmas burchakni toping.

Yechish. To‘g‘ri chiziqlar tenglamalarini kanonik shaklga keltiramiz:

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y}{0}=\frac{z-3}{-1}, \quad \frac{x+1}{2}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{1}.$$

U holda (3.6) formuladan topamiz:

$$\cos\varphi=\frac{3\cdot 2+0\cdot 0+(-1)\cdot 1}{\sqrt{3^2+0^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+0^2+1^2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

O‘tmas burchak uchun $\cos\varphi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ bo‘ladi. Bundan $\varphi=135^0$.

2-misol. $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-5}{-2}$ to‘g‘ri chiziq bilan $2x-y-z+9=0$ tekislik orasidagi o‘tkir burchakni toping.

Yechish. Izlanayotgan burchakni (8.17) formula bilan topamiz:

$$\sin\varphi=\frac{|2\cdot 1+(-1)\cdot 1+(-1)\cdot(-2)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{1}{2}.$$

Bundan $\varphi=35^\circ$.

3-misol. m ning qanday qiymatida $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{m}=\frac{z+3}{m+1}$ to‘g‘ri chiziq va $3x+y-3z-1=0$ tekislik parallel bo‘ladi?

Yechish. m ning izlanayotgan qiymatini to‘g‘ri chiziq va tekislikning parallellik shartigan topamiz: $3\cdot 3+1\cdot m+(-3)\cdot(m+1)=0$. Bundan $m=3$.

1.8.4. Mashqlar

1.8.1. Tekislik tenglamalarini tuzing:

1) $M_0(2;-2;1)$ nuqtadan va Ox o‘qdan o‘tuvchi;

2) $M_0(-1;2;3)$ nuqtadan o‘tuvchi va Oy o‘qqa perpendikular;

3) $M_0(3;4;-2)$ nuqtadan o‘tuvchi va Oxy tekislikka parallel.

4) $M_1(-3;2;1)$, $M_2(3;0;4)$ nuqtalardan o‘tuvchi va Oy o‘qqa parallel;

5) koordinatalar boshidan va $M_1(-1;3;2)$, $M_2(2;4;-3)$ nuqtalardan o‘tuvchi

1.8.2. Oz o'qqa parallel. Ox va Oy o'qlardan 3 va 4 kesmalar ajratuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

1.8.3. $M(2;-3;1)$ nuqtadan o'tuvchi va koordinata o'qlaridan teng kesmalar ajratuvchi tekislik tenglamasini tuazing.

1.8.4. Berilgan uchta nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing:

1) $M_1(2;1;-1)$, $M_2(3;1;0)$, $M_3(-1;2;-1)$; 2) $M_1(1;-2;3)$, $M_2(4;1;3)$, $M_3(1;2;-1)$.

1.8.5. $M(2;-2;3)$ nuqtadan $\overline{OM}$ ga perpendikulyar o'tuvchi tekislik tenglamasi tuzing.

1.8.6. $5x-3y-2z-30=0$ tekislik koordinata o'qlarida qanday kesmalar ajratadi?

1.8.7. $M_1(2;-1;3)$, $M_2(-1;3;2)$ nuqtalardan o'tuvchi va Ox, Oz o'qlarida teng musbat kesmalar ajratuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

1.8.8. $M_1(1;1;1)$, $M_2(0;2;1)$ nuqtalardan o'tuvchi va $\bar{a}=\{2;0;1\}$ vektorga parallel tekislik tenglamasini tuzing.

1.8.9. Tekisliklar orasidagi burchakni toping:

1) $2x-3y+z-8=0$ va $3x-6z+5=0$; 2) $x+2y-3z-4=0$ va $2x+3y-z+4=0$.

1.8.10. $M(2;1;3)$ nuqtadan o'tuvchi va $2x-3y+z+5=0$ tekislikka parallel tekislik topilsin.

1.8.11. $M(1;-2;4)$ nuqtadan o'tuvchi, $x-2y+5z-2=0$ va hamda $2x+3y-z+4=0$ tekisliklarga perpendikulyar tekislikning tenglamasini tuzing.

1.8.12. m va n ning qanday qiymatlarida tekisliklar parallel bo'ladi:

1) $3x-5y-nz-2=0$, $mx+2y-3z+11=0$;
2) $nx-6y-6z+4=0$, $2x+my+3z-8=0$.

1.8.13. m ning qanday qiymatlarida tekisliklar perpendikular bo'ladi

1) $4x-7y+2z-3=0$, $-3x+2y+mz+5=0$;
2) $x-my+z=0$, $2x+3y+mz-4=0$.

1.8.14. $M(4;3;1)$ nuqtaning $3x-4y+12z+14=0$ tekislikkacha bo'lgan masofani toping.

1.8.15. $M(3;0;1)$ nuqtaning $2x+9y-6z+33=0$ tekislikdan chetlashishini toping.

1.8.16. $A(2;-3;0)$ va $B(-1;2;3)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

1.8.17. Berilgan to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasini tuzing: 1) $M_1(1;1;-2)$ nuqtadan o'tuvchi va $\bar{s}=\{2;3;-1\}$ vektorga parallel; 2) $M_2(2;-3;-1)$ nuqtadan o'tuvchi va Oy o'qqa parallel; 3) $M_3(2;-1;-2)$ nuqtadan o'tuvchi va $6x+2y-4z-5=0$ tekislikka perpendikular.

1.8.18. $M_0(2;-3;5)$ nuqtadan o'tuvchi berilgan to'g'ri chiziqlarga parallel to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing:

1) $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{3}$; 2) $x=3+2t, y=-1+3t, z=1-t$;

1.8.19. $x=-2+3t, y=0, z=3-t$ va $x=-1+2t, y=0, z=-3+t$ to'g'ri chiziqlar orasidagi o'tkir burchakni toping.

ng.

1.8.21. $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{m}=\frac{z+3}{m+1}$ to'g'ri chiziq va $3x+y-3z-1=0$ tekislik parallel. m ni

ng.

1.8.22. $M(1;-1;-1)$ nuqtadan o'tuvchi va berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikular slik tenglamasini tuzing:

$\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z+2}{4}$; 2) $\frac{x+3}{4}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-5}{-2}$.

II. MATEMATIK ANALIZ ASOSLARI

2.1. HAQIQIY SONLAR

2.1.1. To'plam[8]

To'plam matematikaning boshlang'ich (ta'riflanmaydigan) va muhim tushunchalaridan biri hisoblanadi. To'plam deganda tayin xossaga ega bo'lgan ixtiyoriy tabiatli obyektlar majmuasi tushuniladi. Masalan, guruhdagi talabalar to'plami, butun sonlar to'plami, berilgan nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar to'plami.

To'plamni tashkil etuvchi obyektlarga to'plamning *elementlari* deyiladi. To'plam odatda lotin alfavitining bosh harflari bilan, uning elementlari esa shu alfavitning kichik harflari bilan belgilanadi.

A to'plamning a,b,c,d elementlardan tashkil topganligi $A=\{a,b,c,d\}$ kabi yoziladi. Bazan to'plam sonlar, belgilar, so'zlar yoki formulalar yordamida beriladi.

a elementning A to'plamga tegishli ekanligi $a\in A$ deb yoziladi. b elementning A to'plamga tegishli emasligi $b\,\overline{\in}\,A$ (yoki $b\notin A$) kabi belgilanadi. Masalan, $A=\{2,4,6,8\}$ to'plam uchun $4\in A$ va $5\,\overline{\in}\,A$.

A to'plam chekli sondagi elementlardan tashkil topgan bo'lsa, A to'plamga *chekli to'plam*, aks holda *cheksiz to'plam* deyiladi. Masalan, $A=\{x:6<x<20,x\in N\}$ chekli to'plam, $B=\{x:x>15,x\in N\}$ cheksiz to'plam bo'ladi.

Bitta ham elementga ega bo'lmagan to'plam *bo'sh to'plam* deb ataladi va $\emptyset$ kabi belgilanadi. Masalan, $A=\{x:x^2+1=0,x\in R\}$ bo'sh to'plam, chunki $x^2+1=0$ tenglama haqiqiy sonlar to'plami R da yechimga ega emas.

Agar A to'plamning har bir elementi B to'plamning ham elementi bo'lsa A to'plamga B *to'plamning qismi* (*qismiy to'plami*) deyiladi va $A\subset B$ (yoki $B\supset A$) kabi belgilanadi. Masalan, $A=\{2,3,4\}$ va $B=\{1,2,3,4,5\}$ bo'lsa $A\subset B$ bo'ladi.

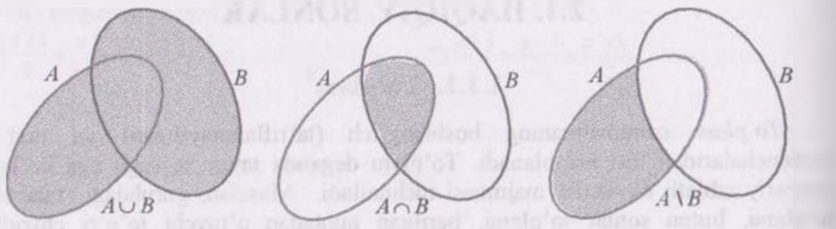
Agar $A\subset B$ va $B\subset A$ bo'lsa A va B to'plamlarga *teng to'plamlar* deyiladi va $A=B$ kabi yoziladi. Demak, $A=B$ tenglik A va B to'plamlarning bir xil elementlardan tashkil topganini bildiradi.

A va B to'plamlarning har ikkalasiga tegishli bo'lgan element bu to'plamlarning *umumiy elementi* deyiladi.

8 Claudio Canuto, Anita Tabacco. Mathematical Analysis I. Sprinder-Verlag Italia. Milan 2008

1-ta'rif. A va B *to'plamlarning birlashmasi* (yoki *yig'indisi*) deb ularning kamida bittasiga tegishli bo'lgan elementlardan tashkil topgan to'plamga aytiladi va $A \cup B$ (yoki $A + B$) kabi belgilanadi. Demak, $A \cup B = \{x : x \in A \ yoki \ x \in B\}$.

2-ta'rif. A va B *to'plamlarning kesishmasi* (yoki *ko'paytmasi*) deb ularning barcha umumiy elementlaridan tashkil topgan to'plamga aytiladi va $A \cap B$ (yoki $A \cdot B$) kabi belgilanadi. Demak, $A \cap B = \{x : x \in A \ va \ x \in B\}$.



1-shakl

3-ta'rif. A to'plamdan B *to'plamning ayirmasi* deb A to'plamning B to'plamga kirmagan elementlaridan tashkil topgan to'plamga aytiladi va $A \backslash B$ kabi belgilanadi. Demak, $A \backslash B = \{x : x \in A \ va \ x \overline{\in} B\}$.

Masalan, $A = \{1,3,5,7\}$ va $B = \{2,5,7,9\}$ to'plamlar uchun $A \cup B = \{1,2,3,5,7,9\}$, $A \cap B = \{5,7\}$, $A \backslash B = \{1,3\}$, $B \backslash A = \{2,9\}$ bo'ladi.

1-3 ta'riflarning chizmadagi ifodasi 1-shaklda keltirilgan. Bunda $A \cap B$, $A \cup B$, $A \backslash B$ shtrixlarda ko'rsatilgan.

2.1.2. Sonli to'plamlar[8]

Haqiqiy sonlar va ularning asosiy xossalari

Elementlari sonlardan iborat bo'lgan to'plam *sonli to'plam* deyiladi.

Son matematik analizning asosiy tushunchalaridan biri bo'lib, uzoq tarixiy rivojlanish yo'liga ega. Narsalarni, buyumlarni sanash zaruriyati tufayli natural sonlar paydo bo'lgan. Natural sonlar to'plamiga ularga qarama-qarshi sonlarni va nol sonini qo'shish bilan butun sonlar to'plami hosil qilingan. Matematikaning taraqqiyoti ratsional sonlarning va keyinchalik irratsional sonlarning kiritilishini taqozo etgan. Ratsional sonlar to'plami va irratsional sonlar to'plami haqiqiy sonlar to'plami deb atalgan.

Shunday qilib, $N \subset Z \subset Q \subset R$ sonli to'plamlar hosil qilingan, bu yerda $N = \{1,2,3,...,n,...\}$ – barcha natural sonlar to'plami; $Z = \{0,\pm1,\pm2,...,\pm n,...\}$ – barcha butun sonlar to'plami; $Q = \left\{\frac{p}{q}, p \in Z, q \in N\right\}$ – barcha ratsional sonlar to'plami; R – barcha haqiqiy sonlar to'plami.

Har qanday ratsional son yoki chekli o'nli kasr bilan yoki cheksiz davriy o'nli kasr bilan ifodalanadi. Masalan, $\frac{3}{2} = 1{,}5 = (1{,}500...)$, $\frac{1}{3} = 0{,}333...$ – ratsional sonlar.

Ratsional bo'lmagan haqiqiy sonlarga irratsional sonlar deyiladi. Irratsional son cheksiz davriy bo'lmagan o'nli kasr bilan ifodalanadi.
Masalan, $\sqrt{2} = 1{,}4142356\,...$, $\pi = 3{,}1415926\,...$ – irratsional sonlar.

Shunday qilib, *haqiqiy sonlar* to'plamini barcha cheksiz o'nli kasrlar to'plami deyish va $R = \{x:\ x = a,\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\}$ kabi yozish mumkin, bu yerda $a \in Z, \alpha_i \in \{0,1,2,...9\}, i = 1,2,....$

Son o'qi. Sonlarning sodda to'plamlari

Haqiqiy sonlarning uzluksizligi xossasi asosida barcha haqiqiy sonlar to'plami bilan to'g'ri chiziq nuqtalari to'plami orasida bir qiymatli moslik o'rnatiladi.

Buning uchun biror to'g'ri chiziqda (u gorizontal yo'nalgan bo'lsin (2-shakl)) musbat yo'nalishni, O hisob boshini va masshtab birligini tanlaymiz. Musbat x sonini ifodalash uchun bu to'g'ri chiziqda O hisob boshidan o'ng tomonda tanlangan masshtab birligida berilgan x songa teng masofada yotuvchi M nuqtani olamiz; manfiy x sonini ifodalash uchun esa bu to'g'ri chiziqda O hisob boshidan chap tomonda $|x|$ (bu son haqida keyingi bandda tushuncha beriladi) songa teng masofada yotuvchi M nuqtani olamiz; $x = 0$ soniga O hisob boshi mos keladi.

2-shakl

Barcha nuqtalari uchun barcha haqiqiy sonlar to'plami bilan ko'rsatilgan bir qiymatli moslik o'rnatilgan to'g'ri chiziqqa *son o'qi* (yoki *sonli to'g'ri chiziq*) deyiladi.

Shunday qilib, har bir haqiqiy songa son o'qining yagona M nuqtasi mos qo'yiladi va aksincha, bu son o'qining har bir M nuqtasiga yagona x haqiqiy son mos keladi. Bunda haqiqiy son va son o'qining nuqtasi bitta x belgi bilan ifodalanadi. Shu sababli «x son» so'zi o'rniga ko'p hollarda «x nuqta» so'zi ishlatiladi.

Son o'qi haqiqiy sonlarning joylashishi to'g'risida ko'rgazmali ma'lumot beradi. $x_1 < x_2$ tengsizlik x_1 nuqta x_2 nuqtaga nisbatan chapda yotishini anglatadi, $x_1 < x_2 < x_3$ tengsilik x_2 nuqta x_1 va x_3 nuqtalar orasida yotishini bildiradi.

$a \in R, b \in R, a < b$ bo'lsin. Haqiqiy sonlar to'plamining quyidagi qism to'plamlariga *oraliqlar* (*intervallar*) deyiladi:

$[a;b] = \{x : a \le x \le b\}$ – kesma (yopiq oraliq, sigment);

$(a;b) = \{x : a < x < b\}$ – interval (ochiq oraliq);

$[a;b) = \{x : a \le x < b\}, (a;b] = \{x : a < x \le b\}$ – yarim ochiq intervallar;

$(-\infty;b] = \{x : x \le b\}$, $(-\infty;b) = \{x : x < b\}$, $[a;+\infty) = \{x : x \ge a\}$,

$(a;+\infty) = \{x : x > a\}$, $(-\infty;+\infty) = \{x : -\infty < x < +\infty\}$ – cheksiz intervallar.

Bunda a va b sonlar mos ravishda bu oraliqlarning chap va o'ng chegaralarini aniqlaydi, $-\infty$ va $+\infty$ belgilar son o'qi nuqtalarining O nuqtadan chapga va o'ngga qarab cheksiz uzoqlashishini simvolik tasvirlaydi.

$x_0 (x_0 \in R)$ nuqtani o'z ichiga olgan har qanday $(a;b)$ intervalga x_0 *nuqtaning atrofi* deyiladi. Xususan, $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ interval x_0 *nuqtaning* ε *atrofi* deb ataladi. Bunda x_0 soniga bu atrofning markazi, $\varepsilon (\varepsilon > 0)$ soniga bu atrofning radiusi deyiladi.

Agar $x_0 \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ bo'lsa, u holda $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ yoki $|x - x_0| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bu tengsizlikning bajarilishi x nuqta x_0 nuqtaning ε atrofiga tushishini bildiradi.

Haqiqiy sonning absolut qiymati

4-ta'rif. x $(x \in R)$ sonining *absolut qiymati* (yoki *moduli*) deb $x \geq 0$ bo'lganida x sonining o'ziga, $x < 0$ bo'lganida $(-x)$ soniga aytiladi.

x sonining absolut qiymati $|x|$ belgi bilan belgilanadi. Demak, ta'rifga ko'ra

$$|x| = \begin{cases} x, & agar\ x \geq 0, \\ -x, & agar\ x < 0. \end{cases}$$

Sonning absolut qiymati quyidagi xossalarga ega:

1°. $x \in R$ da $|x| \geq 0$, $|-x| = |x|$, $-|x| \leq x \leq |x|$;

2°. $a > 0$ da $|x| \leq a$ tengsizlik $-a \leq x \leq a$ tengsizlikka ekvivalent bo'ladi;

3°. $x \in R, y \in R$ da

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \quad |x - y| \geq |x| - |y|, \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, (y \neq 0).$$

Bu xossalarning isboti bevosita sonning absolut qiymati ta'rifidan kelib chiqadi.

2.1.3. Mashqlar

2.1.1. A va B to'plamlar berilgan. $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ to'plamlarni toping.

1) $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{4,5,6\}$; 2) $A = \{1,3,4,8\}$, $B = \{1,2,4,5,7,8,9\}$;

3) $A = \{x \in R : x^2 + x - 20 = 0\}$, $B = \{x \in R : x^2 - x + 12 = 0\}$.

2.1.2. A – musbat juft sonlar to'plami va B – musbat toq sonlar to'plami bo'lsa, $A \cap B$ va $A \cup B$ to'plamlarni toping.

2.1.3. A – barcha 2 ga bo'linadigan sonlar to'plami va B – barcha 5 ga bo'linadigan sonlar to'plami bo'lsa, $A \cap B$ to'plamni toping.

2.1.4. $\lg 5$ irratsional ekanini ko'rsating.

2.1.5. $\sqrt{2} - \sqrt{5} < \sqrt{3} - 2$ ekanini ko'rsating.

2.1.6. Berilgan to'plam elementlarini toping.

1) $A=\{x\in N: x^2-3x-4\le 0\}$; 2) $A=\left\{x\in N:\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x}<2\right\}$.

2.1.7. Berilgan tenglama va tengsizliklarni yeching.

1) $|3x-4|=\frac{1}{2}$; 2) $|-x^2+2x-3|=1$;

3) $x^2+2\sqrt{(x+3)^2}-10\le 0$; 4) $\sqrt{(x+1)^2}\le -x-1$.

2.2. KOMPLEKS SONLAR

2.2.1. Kompleks son tushunchasi va tasviri [9]

Kompleks son tushunchasi

Kompleks son tushunchasiga odatda $x^2+1=0$ tenglamani qarash orqali kelinadi. Bu tenglamani qanoatlantiruvchi haqiqiy son mavjud emasligi ravshan. Bu tenglamaning (shu kabi bir qancha tenglamalarning) yechimlari kompleks sonlar bo'lar ekan.

1-ta'rif. $z=x+iy$ ifodaga *kompleks son* deyiladi, bu yerda x, y – haqiqiy sonlar. Bunda: i mavhum birlik deb ataladi, bu yerda $i^2=-1$; x va y sonlarga mos ravishda z kompleks sonning *haqiqiy* va *mavhum qismlari* deyilib, $x=\text{Re}\,z$, $y=\text{Im}\,z$ kabi belgilanadi.

Agar $z=x+iy$ ifodada $y=0$ bo'lsa, $z=x$ *haqiqiy son*, agar $x=0$ bo'lsa, $z=iy$ *sof mavhum son* hosil bo'ladi.

Faqat $x=y=0$ bo'lganida $z=x+iy$ kompleks son nolga teng bo'ladi. Kompleks sonlar uchun «katta» va «kichik» tushunchalari kiritilmaydi. Mavhum qismlarining ishorasi bilan farq qiluvchi $z=x+iy$ va $\bar{z}=x-iy$ sonlariga *qo'shma kompleks sonlar* deyiladi.

Haqiqiy va mavhum qismlarining ishorasi bilan farq qiluvchi $z_1=x+iy$ va $z_2=-x-iy$ sonlariga *qarama-qarshi kompleks sonlar* deyiladi.

Kompleks sonlarning geometrik tasviri [9]

Har bir $z=x+iy$ kompleks sonni Oxy koordinatalar tekisligining $M(x;y)$ nuqtasi bilan ifodalash mumkin (bu yerda $x=\text{Re}\,z$, $y=\text{Im}\,z$) va aksincha, koordinatalar tekisligining har bir $M(x;y)$ nuqtasini $z=x+iy$ kompleks sonning geometrik tasviri deb qarash mumkin (3-shakl).

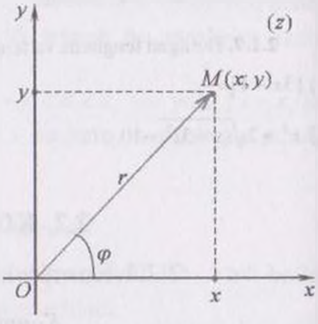
Oxy tekislikka *kompleks tekislik* deyiladi va (z) kabi belgilanadi. Bunda, $z=x$ haqiqiy sonlar *haqiqiy o'q* deb ataluvchi Ox o'qning nuqtalari bilan aniqlanadi; $z=iy$ mavhum sonlar *mavhum o'q* deb ataluvchi Oy o'qning nuqtalari bilan aniqlanadi.

9. Complex Numbers - Stewart Calculus www.stewartcalculus.com/data /.../ess_at_12_cn_stu

Shuningdek, $z = x + iy$ kompleks sonni $M(x;y)$ nuqtaning radius vektori $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ orqali ifodalash mumkin (3-shakl).

Bunda: $\vec{r}$ vektorning uzunligiga *kompleks sonning moduli* deyiladi va $|z|$ yoki r bilan belgilanadi; $\vec{r}$ vektorning Ox o'qning musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagiga *kompleks sonning argumenti* deyiladi va $Argz$ bilan belgilanadi.

$z = 0$ kompleks sonning argumenti aniqlanmagan. $z \neq 0$ kompleks sonning argumenti ko'p qiymatli bo'lib, $2\pi k$ ($k = 0, -1, 1, -2, 2, ...$) qo'shiluvchigacha aniqlikda topiladi:



3-shakl

$$Argz = \arg z + 2\pi k, k \in z,$$

bu yerda $\arg z$ – *argumentning* $(-\pi;\pi]$ oraliqda yotuvchi *bosh qiymati*, ya'ni $-\pi < \arg z \leq \pi$ (ayrim hollarda argumentning bosh qiymati sifatida $[0;2\pi)$ oraliqqa tegishli qiymat olinadi).

2.2.2. Kompleks sonlarning yozilish shakllari

Ushbu

$$z = x + iy$$

ifodaga *kompleks sonning algebraik shakli* deyiladi.

Kompleks sonning r moduli va $\varphi = Argz$ argumentini $z = x + iy$ kompleks sonni ifodalovchi $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ vektorning qutb koordinatalari deb qarash mumkin. Bunda $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ bo'ladi (3-shakl).

U holda $z = x + iy$ kompleks sonni $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$ yoki

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu ifodaga *kompleks sonning trigonometrik shakli* deyiladi.

Bunda $r = |z|$ modul quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

φ argument esa

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}, \quad tg\varphi = \frac{y}{x}$$

formulalardan topiladi.

$$\varphi = Argz = \arg z + 2\pi k, k \in z$$

ekanidan

$$\cos\varphi = \cos(\arg z + 2\pi k) = \cos(\arg z), \quad \sin\varphi = \sin(\arg z)$$

kelib chiqadi.

Shu sababli kompleks sonning algebraik shaklidan trigonometrik shakliga o'tishda kompleks son argumentining bosh qiymatini aniqlash etarli bo'ladi. $-\pi < \arg z \le \pi$ bo'lgani ucun $tg\varphi = \frac{y}{x}$ tenglikdan topamiz:

$$\arg z = \begin{cases} arctg\frac{y}{x}, \ I, IV \text{ choraklarning ichki nuqtalarida,} \\ arctg\frac{y}{x} + \pi, \ II \text{ chorakning ichki nuqtalarida,} \\ arctg\frac{y}{x} - \pi, \ III \text{ chorakning ichki nuqtalarida} \end{cases}$$

Eyler formulasi deb ataluvchi $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$ ifoda yordamida $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ tenglikdan $z = re^{i\varphi}$ ifoda keltirib chiqariladi.

Ushbu $z = re^{i\varphi}$ ifodaga $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *kompleks sonning ko'rsatkichli* (*yoki eksponensial*) *shakli* deyiladi, bu yerda $r = |z|$ – kompleks sonning moduli; $\varphi = Argz$ – kompleks sonning argumenti.

1-misol. $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ kompleks sonmi turli (algebraik, trigonometrik va ko'rsatkichli) shakllarda yozing.

Yechish. Bunda $x_1 = 1 > 0$ va $y_1 = \sqrt{3} > 0$.
U holda

$$r_1 = |z_1| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2, \ \varphi_1 = \arg z_1 = arctg\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}.$$

Bundan

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$ (Eyler formulasi) tenlikni qo'llab, topamiz:

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{\frac{\pi}{3}i}.$$

Demak,

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{\frac{\pi}{3}i}.$$

2.2.3. Kompleks sonlar ustida amallar [9]

Kompleks sonlarni qo'shish

Agar $z_1 = x_1 + iy_1$ va $z_2 = x_2 + iy_2$ bo'lsa, u holda

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \tag{2.1}$$

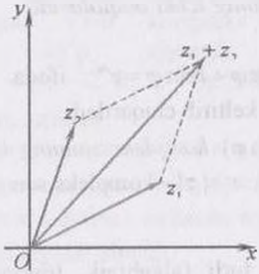
bo'ladi (4-shakl).

z_1 va z_2 ***kompleks sonlarning ayirmasi*** deb, z_2 ga qo'shilganida z_1 ni hosil qiluvchi z kompleks soniga aytiladi va $z = z_1 - z_2$ tarzda yoziladi.

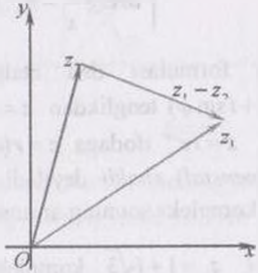
Agar $z_1 = x_1 + iy_1$ va $z_2 = x_2 + iy_2$ bo'lsa, ta'rifga ko'ra

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \tag{2.2}$$

bo'ladi (5-shakl).



4-shakl



5-shakl

Kompleks sonlarni ko'paytirish

Agar $z_1 = x_1 + iy_1$ va $z_2 = x_2 + iy_2$ bo'lsa, u holda

$$z = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2). \tag{2.3}$$

bo'ladi.

2-misol. $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = -3 + i$ bo'lsa, $z_1 + z_2$, $2z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$ larni hisoblang.

Yechish. $z_1 + z_2 = (1 + 3i) + (-3 + i) = -2 + 4i$;

$$2z_1 - z_2 = (2 + 6i) - (-3 + i) = 5 + 5i;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (1 + 3i) \cdot (-3 + i) = (-3 - 3) + i(1 - 9) = -6 - 8i.$$

Trigonometrik shaklda berilgan

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

kompleks sonlarni ko'paytiramiz:

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1 \sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

ya'ni

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \tag{2.4}$$

Demak, kompleks sonlar ko'paytirilganda ularning modullari ko'paytiriladi va argumentlari qo'shiladi.

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \quad (2.5)$$

bo'ladi.

(2.5) formulaga *Muavr formulasi* deyiladi.

3- misol. $z = \sqrt{3} + i$ bo'lsa, z^6 ni hisoblang.

Yechish. Avval kompleks sonni trigonometrik shaklga keltiramiz.

$x = \sqrt{3}$, $y = 1$ bo'lgani uchun $r = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$, $\arg z = arctg\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$.

Bundan

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Muavr formulasiga ko'ra:

$$z^6 = 2^6\left(\cos\frac{\pi}{6}\cdot 6 + i\sin\frac{\pi}{6}\cdot 6\right) = 64(\cos\pi + i\sin\pi) = -64.$$

Kompleks sonlarni bo'lish

Kompleks sonlarni bo'lish amali ko'paytirishga teskari amal sifatida aniqlanadi.

z_1 va $z_2 \neq 0$ *kompleks sonlarning bo'linmasi* deb, z_2 ga ko'paytirilganida z_1 ni hosil qiluvchi z kompleks soniga aytiladi va $z = \dfrac{z_1}{z_2}$ kabi yoziladi.

$z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$ va $z = x + iy$ bo'lsin.

U holda $(x_2 + iy_2)(x + iy) = x_1 + iy_1$ tenglikdan

$$\begin{cases} xx_2 - yy_2 = x_1, \\ xy_2 + yx_2 = y_1 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi kelib chiqadi.

Sistemadan x va y ni topamiz:

$$x = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Shunday qilib,

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \quad (2.6)$$

Amalda ikki kompleks sonning bo'linmasi uning surat va maxrajini maxrajning qo'shmasiga ko'paytirish orqali topiladi (maxraj mavhumlikdan qutqariladi).

4- misol. $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 3 + i$ bo'lsa, $\dfrac{z_1}{z_2}$ ni toping.

Yechish. $\frac{z_1}{z_2}$ kasrning surat va maxrajini $\overline{z_2}$ ga ko'paytirib, topamiz:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+2i}{3+i}=\frac{(1+2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{3+6i-i+2}{9+1}=\frac{5+5i}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i.$$

Trigonometrik shaklda berilgan $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ kompleks sonini $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ kompleks soniga bo'lamiz:

$$\frac{z_1}{Z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)\cdot(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$

Demak,

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).\qquad(2.7)$$

Shunday qilib, bir kompleks sonni ikkinchisiga bo'lganda ularning mo'dullari bo'linadi va argumentlari ayriladi.

Kompleks sonlardan ildiz chiqarish

Kompleks sondan n-darajali ildiz chiqarish amali n-natural darajaga oshirish amaliga teskari amal sifatida aniqlanadi.

z kompleks sonining n-darajali ildizi deb, $w^n=z$ tenglikni qanoatlantiruvchi w kompleks soniga aytiladi.

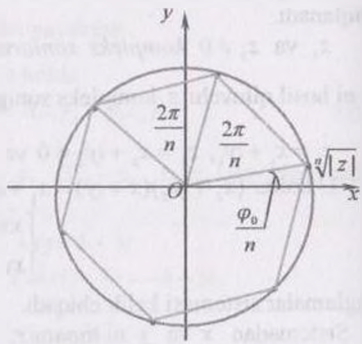
$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $w=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ bo'lsin. Ildizning ta'rifi va Muavr formulasidan foydalanib topamiz:

$$z=w^n=\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=$$
$$=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Bundan

$\rho^n=r$, $n\theta=\varphi+2\pi k$, $k=0,\ -1,\ 1,\ -2,\ 2,...$

yoki $\theta=\frac{\varphi+2\pi k}{n}$, $\rho=\sqrt[n]{r}$ kelib chiqadi.



6-shakl

U holda $w=\sqrt[n]{z}$ tenglik quyidagi ko'rinishga keladi:

$$w_k=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\ k=0,\ 1,\ ...,\ n-1.\qquad(2.8)$$

Sinus va kosinus funksiyalarning davriyligi sababli z kompleks sonining n-darajali ildizlari soni n ga teng bo'ladi va ular k ning n ta $k=0,\ 1,\ ...,\ n-1$ qiymatlarida aniqlanadi. Ildizlarning moduli r haqiqiy sonining n-darajali algebraik ildizidan iborat bo'ladi, argumentlari esa bir-biridan $\frac{2\pi}{n}$ ga karrali songa farq qiladi. Bunda barcha ildizlar kompleks tekisligida markazi $z = 0$ nuqtada bo'lgan va radiusi $\sqrt[n]{|z|}$ ga teng aylanaga ichki chizilgan n burchakli muntazam ko'pburchakning uchlarini tasvirlaydi (6-shakl).

5-misol. $\sqrt[4]{-1}$ ning barcha ildizlarini toping.

Yechish. Ildiz ostidagi ifodani trigonometrik shaklda yozamiz:

$$-1 = \cos\pi + i\sin\pi .$$

Bundan

$$\sqrt[4]{-1} = \cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{4}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

k ga 0, 1, 3 va 4 qiymatlar berib, topamiz:

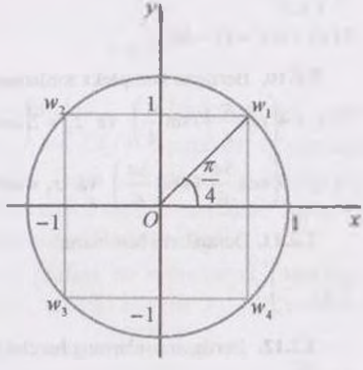
$$w_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i),$$

$$w_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i),$$

$$w_2 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - i),$$

$$w_3 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i).$$

Bu ildizlar (z) kompleks tekisligida birlik aylanaga ichki chizilgan muntazam to'rtburchakning (kvadratning) uchlarida yotadi (7-shakl).



7-shakl

2.2.4. Mashqlar

2.2.1. x, y ning qanday haqiqiy qiymatlarida $z_1 = x - 3yi - y - \frac{2x}{i}$ va $z_2 = 2x + i^2 - 3xi - yi^3$ kompleks sonlar qo'shma bo'ladi?

2.2.2. x, y ning qanday haqiqiy qiymatlarida $z_1 = y + 2i^3 + 3 - 2xi$ va $z_2 = 3x + 8i + \frac{2y}{i} + 2i^2$ kompleks sonlar teng bo'ladi?

2.2.3. x, y ning qanday haqiqiy qiymatlarida $z_1 = 3x - 2yi + 5i^3 - 1$ va $z_2 = 3y - i^3 + \frac{8x}{i} + 2i^2$ kompleks sonlar qarama-qarshi bo'ladi?

2.2.4. x, y ning qanday haqiqiy qiymatlarida $z_1 = 5x + \frac{3y}{i^2} + 3yi + i^3$ va $z_2 = 3y(1 + i) + \frac{5x}{i} - i^4$ kompleks sonlar nolga teng bo'ladi?

2.2.5. (z) tekislikda berilgan tenglamalarni yeching:

1) $z^2+6z+25=0$; 2) $2z^2+iz+1=0$;

3) $iz^2-2z+3i=0$; 4) $z^2-6iz-5=0$.

2.2.6. Berilgan kompleks sonlarni trigonometrik shaklda yozing:

1) $z=-2+2\sqrt{3}i$; 2) $z=\sqrt{3}-i$.

2.2.7. Berilgan kompleks sonlarni algebraik shaklda yozing:

3) $z=\sqrt{3}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; 4) $z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

2.2.8. Kompleks sonlarning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va bo'linmasini toping:

1) $z_1=-5+3i$ va $z_2=2-4i$; 2) $z_1=-3-4i$ va $z_2=2+3i$.

2.2.9. Hisoblang:

1) $\frac{2-3i}{1+2i}$; 2) $\frac{1+3i}{-2+i}\cdot(-2i)+1$;

3) $(2+3i)^2-(2-3i)^2$; 4) $(6+11i)(7+3i)$.

2.2.10. Berilgan kompleks sonlarning ko'paytmasi va bo'linmasini toping:

1) $z_1=4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ va $z_2=2\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$;

2) $z_1=6\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ va $z_2=\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

2.2.11. Darajalarni hisoblang:

1) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^4$; 2) $(2-2i)^3$.

2.2.12. Berilgan sonlarning barcha ildizlarini toping:

1) $\sqrt[3]{1}$ 2) $\sqrt[3]{-i}$;

3) $\sqrt[4]{1}$; 4) $\sqrt[3]{1+i}$.

2.3. BIR O'ZGARUVCHINING FUNKSIYASI

2.3.1. Funksiya[8]

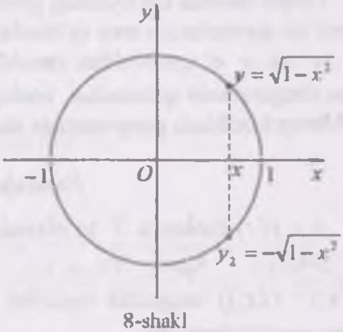
Ikki to'plan elmentlari orasidagi bog'lanishni o'rnatishga asoslangan funksiya tushunchasi matematik analiz kursida o'rganilsada, nafaqat bu kursning, balki butun matematikaning asosiy tushunchalaridan biri hisoblanadi.

Funksiya tushunchasi

Haqiqiy sonlarning X va Y to'plamlari berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Agar X to'plamning har bir x soniga biror f qoidaga ko'ra Y to'plamning bitta y soni mos qo'yilgan bo'lsa, X to'plamda *funksiya* berilgan deyiladi va $f:x\to y$ yoki $y=f(x)$ kabi belgilanadi.

Bunda f funksiya X to'plamni Y to'plamga akslantiradi deb aytiladi. X to'plam *f funksiyaning aniqlanish sohasi* deb ataladi va $D(f)$ bilan belgilanadi, $y \in Y$ to'plam *f funksiyaning qiymatlar sohasi* deb ataladi va $E(f)$ bilan belgilanadi.



8-shakl

Bunda x *funksiyaning argumenti* yoki *erkli o'zgaruvchi*, y *funksiya* yoki x ga *bog'liq o'zgaruvchi* deb ataladi.

$y=f(x)$ funksiyaning $x=x_0(x_0 \in X)$ nuqtadagi xususiy qiymati $f(x_0)=y_0$ yoki $y|_{x=x_0}=y_0$ kabi belgilanadi.

Masalan, $f(x)=3x^2-2$ bo'lsa, $f(0)=-2$, $f(1)=1$.

$y=f(x)$ funksiyaning grafigi deb Oxy koordinatalar tekisligining abssissasi x argumentning qiymatlaridan va ordinatasi y funksiyaning mos qiymatlaridan tashkil topgan barcha $(x;f(x))$, $x \in D(f)$ nuqtalari to'plamiga aytiladi. Funksiyaning grafigi tutash chiziqdan (egri chiziqdan yoki to'g'ri chiziqdan) iborat bo'lishi yoki ayrim nuqtalardan tashkil topishi mumkin, masalan, $y=n!$, $n \in N$ funksiyaning grafigi 1,2,6,.... nuqtalardan iborat bo'ladi

Har qanday chiziq ham biror funksiyaning grafigi bo'lavermaydi, masalan, $x^2+y^2=1$ aylana funksiyaning grafigi bo'lmaydi, chunki har bir $x \in (-1;1)$ uchun y ning bitta emas balki ikkita qiymati mos keladi: $y_1=\sqrt{1-x^2}$ va $y_2=-\sqrt{1-x^2}$ (8-shakl). Bunda funksiya ta'rifining bir qiymatlilik sharti buziladi. Ammo aylananing quyi yarim tekislikdagi bo'lagi $y=-\sqrt{1-x^2}$ funksiyaning, yuqori yarim tekislikdagi bo'lagi esa $y=\sqrt{1-x^2}$ funksiyaning grafigi bo'ladi.

Funksiyaning berilish usullari

Funksiyaning berilishi, ya'ni x ning har bir qiymatiga y ning yagona qiymatini topish turli usulda berilgan bo'lishi mumkin. Amalda funksiya berilishining analitik, jadval va grafik usullari ko'p qo'llaniladi.

*Analitik usul*da x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish bir yoki bir nechta formula orqali beriladi. Masalan, $y=x^3, y=\sin 2x, y=\begin{cases} x-5, & agar\ x<3, \\ x^2+2, & agar\ x \geq 3. \end{cases}$

Funksiya $y=f(x)$ ko'rinishda yozilganda, ayrim hollarda funksiyaning aniqlanish sohasi ko'rsatilmaydi. Bunda, funksiyaning aniqlanish sohasi x ning $f(x)$ funksiya ma'noga ega bo'ladigan barcha qiymatlari to'plamidan iborat deb qaraladi.

*Jadval usul*ida x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish jadval orqali

Amalda jadval orqali funksiyani kuzatish natijalari yoki uning tajribada olingan qiymatlari beriladi.

*Grafik usuli*da fuksiyaning grafigi beriladi. Bunda funksiyaning argumentning u yoki bu qiymatlariga mos qiymatlari bevosita shu grafikdan topiladi.

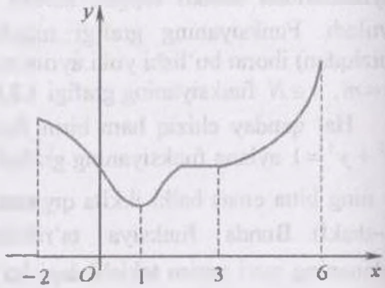
x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish yuqorida keltirilgan uch usul bilan chegaralanib qolmasdan, boshqa shakllarda berilishi ham mumkin. Masalan, EHMning hisoblash programmasi shaklida, tavsiflardangina iborat holda.

Funksiyaning monotonligi

$y = f(x)$ funksiya X to'plamda aniqlangan va $I=(a;b)\subset X$ bo'lsin.

2-ta'rif. Agar $\forall x_1, x_2 \in I$ uchun $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$) tengsizlik bajarilsa, $y = f(x)$ funksiyaga I intervalda *o'suvchi* (*kamayuvchi*) deyiladi.

3-ta'rif. Agar $\forall x_1, x_2 \in I$ uchun $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) \le f(x_2)$ ($f(x_1) \ge f(x_2)$) tengsizlik bajarilsa, $y = f(x)$ funksiyaga I intervalda *kamaymaydigan* (o'*smaydigan*) deyiladi. Masalan, grafigi 9-shaklda berilgan funksiya (–2;1) intervalda kamayuvchi, (1;6) intervalda kamaymaydigan, (3;6) intervalda o'suvchi.



9-shakl

Barcha bunday funksiyalar *I intervalda monoton funksiya* nomi bilan umumlashtiriladi. Bunda o'suvchi va kamayuvchi funksiyalarga *I intervalda qat'iy monoton* funksiyalar deyiladi.

Funksiya monoton bo'lgan intervallar *monotonlik intervallari* deb ataladi.

Funksiyaning juft va toqligi

$y = f(x)$ funksiya X to'plamda aniqlangan bo'lsin.

Agar $\forall x \in X$ uchun $-x \in X$ va $f(-x) = f(x)$ bo'lsa $f(x)$ funksiyaga *juft funksiya* deyiladi. Masalan, $y = x^2$, $y = \cos x$, $y = \sqrt{1+x^2}$ –juft funksiyalar.

Juft funksiyaning grafigi ordinata o'qiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

Agar $\forall x \in X$ uchun $-x \in X$ va $f(-x) = -f(x)$ bo'lsa $f(x)$ funksiyaga *toq funksiya* deyiladi. Masalan, $y = x^3$, $y = \sin x$ –toq funksiyalar.

Toq funksiyaning grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

Juft ham toq ham bo'lmagan funksiya umumiy ko'rinishdagi funksiya deb ataladi. Masalan, $y = x - 2$, $y = \sqrt{x}$ – umumiy ko'rinishdagi funksiyalar.

$$f(x)+g(x),\ f(x)-g(x),\ f(x)\cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)},(g(x)\neq 0)$$

funksiyalar ham juft bo'ladi.

$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar toq funksiyalar bo'lsa,

$$f(x)+g(x),\ f(x)-g(x)$$

funksiyalar toq bo'ladi.

$$f(x)\cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)},(g(x)\neq 0)$$

funksiyalar esa juft bo'ladi.

1-misol. $f(x)=\ln(2x+\sqrt{1+4x^2})$ funksiyaning toq ekanini ko'rsating.

Yechish. Toq funksiya uchun $f(-x)=-f(x)$ yoki $f(x)+f(-x)=0$ bo'ladi. Tekshirib ko'ramiz:

$$f(x)+f(-x)=\ln(2x+\sqrt{1+4x^2})+\ln(-2x+\sqrt{1+4x^2})=$$
$$=\ln(1+4x^2-4x^2)=\ln 1=0.$$

Bu munosabatdan $x\in D(f)$ bo'lsa, $-x\in D(f)$ bo'lishligi kelib chiqadi. Demak, funksiya toq.

Funksiyaning chegaralanganligi

$y=f(x)$ funksiya X to'plamda aniqlangan bo'lsin.

4-ta'rif. Agar shunday o'zgarmas M soni topilsa va $\forall x\in X$ uchun $f(x)\le M$ tengsizlik bajarilsa $f(x)$ fuksiya X to'plamda *yuqoridan chegaralangan* deyiladi.

5-ta'rif. Agar shunday o'zgarmas m soni topilsa va $\forall x\in X$ uchun $f(x)\ge m$ tengsizlik bajarilsa $f(x)$ fuksiya X to'plamda *quyidan chegaralangan* deyiladi.

6-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya ham quyidan ham yuqoridan chegaralangan bo'lsa, y'ani shunday o'zgarmas m va M sonlari topilsa va $\forall x\in X$ uchun $m\le f(x)\le M$ tengsizlik bajarilsa $f(x)$ funksiya X to'plamda *chegaralangan* deyiladi.

Masalan, $y=1-x^4$ funksiya yuqoridan $M=1$ soni bilan chegaralangan, $y=2+x^2$ funksiya quyidan $m=2$ soni bilan chegaralangan, $y=\sin x$ funksiya qu'yidan $m=-1$ soni bilan va yuqoridan $M=1$ soni bilan chegaralangan.

Funksiyaning davriyligi

$y=f(x)$ funksiya X to'plamda aniqlangan bo'lsin.

7-ta'rif. Agar shunday o'zgarmas $T\ (T\neq 0)$ son topilsa va $\forall x\in X$ uchun $x+T\in X,\ x-T\in X,\ f(x\pm T)=f(x)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiyaga *davriy funksiya* davri deyiladi.

Masalan, $y = \sin x$ funksiyaning davri 2π, tgx funksiyaning davri π.

2-misol. $f(x) = 4\sin 3x + 3\cos 3x$ funksiyaning eng katta qiymatini va davrini toping.

Yechish. $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(x - \varphi)\left(\varphi = \arg tg\dfrac{b}{a}\right)$ formulaga ko'ra

$$f(x) = \sqrt{3^2 + 4^2}\cos(3x - \varphi) = 5\cos(3x - \varphi), \ \varphi = \arg tg\frac{4}{3}.$$

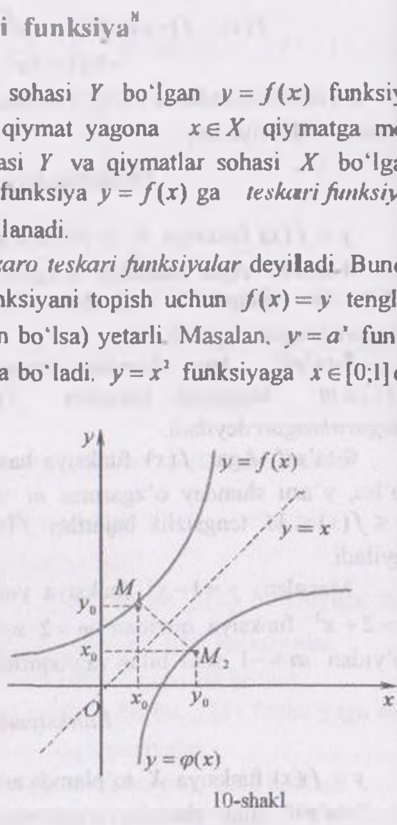
Bu funksiyaning eng katta qiymati $f\left(\dfrac{2k\pi + \varphi}{3}\right) = 5$.

$A\cos(ax \pm \varphi)$ funksiyaning davri $T_0 = \dfrac{2\pi}{a}$ bo'ladi. Bundan $T_0 = \dfrac{2\pi}{3}$.

2.3.2. Teskari funksiya[N]

Aniqlanish sohasi X va qiymatlar sohasi Y bo'lgan $y = f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. Agar bunda har bir $y \in Y$ qiymat yagona $x \in X$ qiymatga mos qo'yilgan bo'lsa, u holda aniqlanish sohasi Y va qiymatlar sohasi X bo'lgan $x = \varphi(y)$ funksiya aniqlangan bo'ladi. Bu funksiya $y = f(x)$ ga *teskari funksiya* deb ataladi va $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$ kabi belgilanadi.

$y = f(x)$ va $x = \varphi(y)$ funksiyalar *o'zaro teskari funksiyalar* deyiladi. Bunda $y = f(x)$ funksiyaga teskari $x = \varphi(y)$ funksiyani topish uchun $f(x) = y$ tenglamani x ga nisbatan yechish (agar mumkin bo'lsa) yetarli. Masalan, $y = a^x$ funksiyaga teskari funksiya $x = \log_a y$ funksiya bo'ladi. $y = x^2$ funksiyaga $x \in [0;1]$ da $x = \sqrt{y}$ teskari funksiya mavjud, $x \in [-1;1]$ da esa mavjud emas, chunki bunda y ning har bir qiymatiga x ning ikkita qiymati, masalan, $y = 1$ ga $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ mos keladi.



10-shakl

Teskari funksiya ta'rifiga ko'ra $y = f(x)$ funksiya X va Y to'plamlar o'rtasida bir qiymatli moslik o'rnatsagina $y = f(x)$ funksiya teskari funksiyaga ega bo'ladi. Bunda *har qanday qat'iy monoton funksiya teskari funksiyaga ega bo'ladi* deyish mumkin bo'ladi. Bunda agar funksiya o'ssa (kamaysa), u holda unga teskari funksiya ham o'sadi (kamayadi).

ifodalanadi, ya'ni ularning grafigi ustma-ust tushadi. Odatdagidek argument (erkli o'zgaruvchi) x bilan va funksiya (bog'liq o'zgaruvchi) y bilan belgilansa, $y=f(x)$ funksiyaga teskari funksiya $y=\varphi(x)$ deb yoziladi. Bu $y=f(x)$ egri chiziqning $M_1(x_0;y_0)$ nuqtasi $y=\varphi(x)$ egri chiziqning $M_2(y_0;x_0)$ nuqtasi bo'lishini bildiradi. Bu nuqtalar $y=x$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo'ladi (10-shakl). Shu sababli *o'zaro teskari* $y=f(x)$ *va* $y=\varphi(x)$ *funksiyalarning grafiklari I va III choraklar koordinata burchaklarining bissektrisalariga nisbatan cimmetrik* bo'ladi.

2.3.3. Murakkab funksiya[8]

X to'plamda qiymatlar sohasi Z bo'lgan $z=\varphi(x)$ funksiya aniqlangan bo'lsin. Agar Z to'plamda $y=f(z)$ funksiya aniqlangan bo'lsa, u holda X to'plamda $y=f(\varphi(x))$ *murakkab funksiya* (yoki $z=\varphi(x)$ va $y=f(z)$ funksiyalarning superpozitsiyasi) aniqlangan deyiladi.

$z=\varphi(x)$ o'zgaruvchi *murakkab funksiyaning oraliq argumenti* deb ataladi. Murakkab funksiyaning oraliq argumentlari bir nechta bo'lishi ham mumkin.

Masalan, $y=\cos 5x$ murakkab funksiya, chunki u $y=f(z)=\cos z$ va $z=\varphi(x)=5x$ funksiyalarning superpozitsiysidan iborat.

2.3.4. Elementar funksiyalar[8]

Quyida keltirilgan funksiyalarga *asosiy elementar funksiyalar* deyiladi.

1. ***O'zgarmas funksiya*** $y=C\ (C\in R)$.

O'zgarmas funksiya: $D(f)=(-\infty;+\infty)$, $E(f)=\{C\}$ chegaralangan, juft, davri ixtiyoriy T.

O'zgarmas funksiyaning grafigi abssissalar o'qiga parallel to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi.

2. ***Darajali funksiya*** $y=x^\alpha$, $\alpha\in R, \alpha\neq 0$.

Hamma darajali funksiyaning grafiklari (1;1) nuqtadan o'tadi.

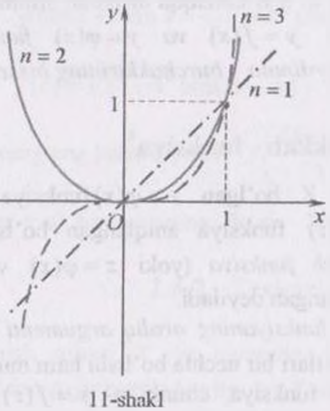
1) $\alpha=n$, $n-$butun musbat son. Bunda funksiyaning grafigi koordinatalar boshida abssissalar o'qiga urunadi ($n\geq 2$ da); n juft son bo'lganda ordinatalar o'qiga nisbatan simmetrik, n toq son bo'lganda esa koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi (11-shakl). $n=1$ da *I va III* choraklar koordinata burchaklari bissektrisalarining grafigini ifodalaydi (11-shakl).

2) $\alpha=-n$, $n-$butun musbat son. Bunda funksiyaning grafigi n juft son bo'lganda ordinatalar o'qiga nisbatan simmetrik, n toq son bo'lganda esa koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi (12-shakl). $n=1$ da teskari proporsional bog'lanish grafigini ifodalaydi (12-shakl).

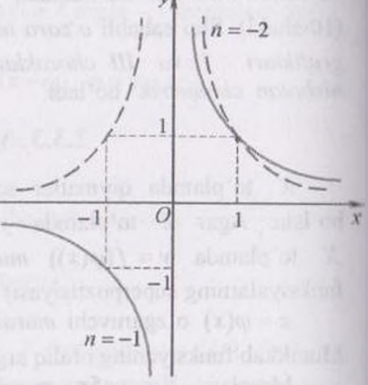
3) $\alpha=r$, $r=\dfrac{m}{n}$, m va $n-$o'zaro tub butun sonlar. Bunda n juft son bo'lganda $D(f)=[0;+\infty)$, n toq son bo'lganda $D(f)=(-\infty;+\infty)$. Funksiyaning

grafigi n toq va m juft son bo'lganda ordinatalar o'qiga nisbatan simmetrik (13-shakl), n va m toq sonlar bo'lgnida koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi (14-shakl). $r<1$ da grafik koordinatalar boshida ordinatalar o'qiga urunadi (13, 14-shakl), $r>1$ da grafik koordinatalar boshida abssissalar o'qiga urunadi (15-shakl).

4

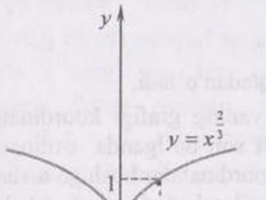


11-shakl

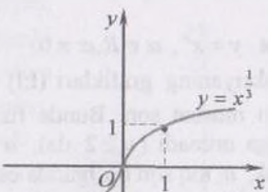


12-shakl

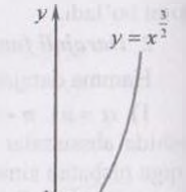
4) $\alpha = q$, $q = \dfrac{m}{n} < 0$, m va n – o'zaro tub butun sonlar, $n \neq -1$. Bunda n juft son bo'lganda $D(f) = (0;+\infty)$ (16-shakl), n toq son bo'lganda $D(f) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$. Funksiyaning grafigi n toq va m juft son bo'lganda ordinatalar o'qiga nisbatan simmetrik, n va m toq sonlar bo'lganda esa koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi (17-shakl).



13-shakl



14-shakl



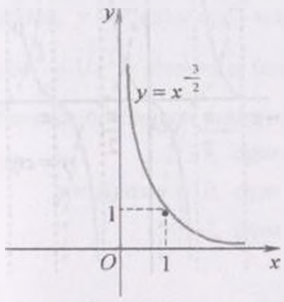
15-shakl

3. ***Ko'rsatkichli funksiya*** $y = a^x$, $a \in R, a > 0, a \neq 1$.

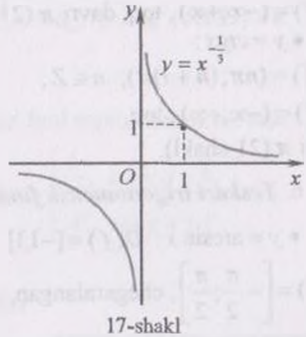
Ko'rsatkichli funksiyada $D(f) = (-\infty;+\infty)$, $E(f) = (0;+\infty)$. Bu funksiya $a > 1$ bo'lsa, R da monoton o'suvchi, $0 < a < 1$ bo'lsa, R da monoton kamayuvchi.

Ko'rsatkichli funksiyaning grafiklari (0;1) nuqtadan o'tadi.

Ko'rsatkichli funksiyalar grafiklari 18-shaklda keltirilgan.



16-shakl



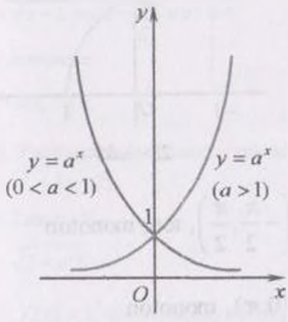
17-shakl

4. *Logaifmik funksiya* $y=\log_a x$, $a\in R$, $a>0$, $a\neq 1$.

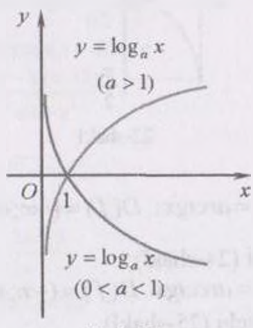
Logarifmik funksiyada $D(f)=(0;+\infty)$ va $E(f)=(-\infty;+\infty)$. $a>1$ bo'lsa, $D(f)$da monoton o'suvchi, $0<a<1$ bo'lsa, $D(f)$da monoton kamayuvchi; $y=a^x$ ga teskari funksiya.

Logarifmik funksiyalarning grafigi (1;0) nuqtadan o'tadi.

Logarifmik funksiyalarning grafigi 19-shaklda keltirilgan.



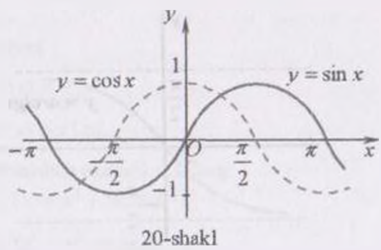
18-shakl



19-shakl

5. *Trigonometrik funksiyalar*.

- $y=\sin x$: $D(f)=(-\infty;+\infty)$, $E(f)=[-1;1]$, chegaralangan, toq, davri 2π (20-shakl).
- $y=\cos x$: $D(f)=(-\infty;+\infty)$, $E(f)=[-1;1]$, chegaralangan, juft, davri 2π (20-shakl).



20-shakl

• $y = tgx$:

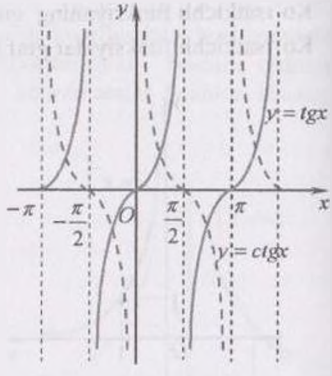
$D(f) = \left((2n-1)\frac{\pi}{2};(2n+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $n \in Z$,

$E(f) = (-\infty;+\infty)$, toq, davri π (21-shakl);

• $y = ctgx$:

$D(f) = (n\pi;(n+1)\pi)$, $n \in Z$,

$E(f) = (-\infty;+\infty)$, toq,
davri π (21-shakl).



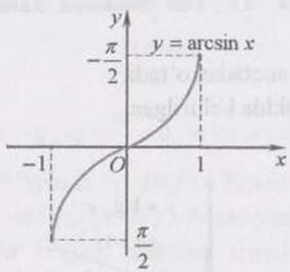
21-shakl

6. ***Teskari trigonometrik funksiyalar***:

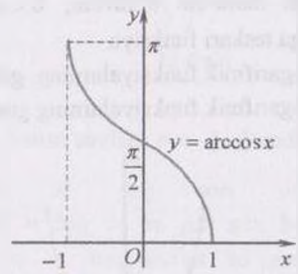
• $y = \arcsin x$: $D(f) = [-1;1]$,

$E(f) = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, chegaralangan, toq,
monoton o'suvchi (22-shakl);

• $y = \arccos x$: $E(f) = [-1;1]$, $E(f) = [0;\pi]$, chegaralangan, monoton kamayuvchi(23-shakl);



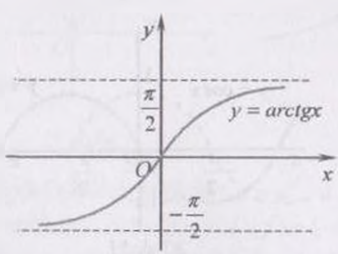
22-shakl



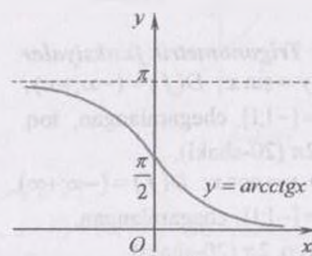
23-shakl

• $y = arctgx$: $D(f) = (-\infty;+\infty)$, $E(f) = \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, toq, monoton o'suvchi (24-shakl);

• $y = arcctgx$: $D(f) = (-\infty;+\infty)$, $E(f) = (0;\pi)$, monoton kamayuvchi (25-shakl).



24-shakl



25-shakl

Asosiy elementar funksiyalardan chekli sondagi arifmetik amallar (qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish) va superpozitsiyalash yordamida hosil qilingan bitta formula bilan berilgan funksiyaga *elementar funksiya* deyiladi.

Masalan, $y = P_m(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m$, $y = \lg^2(\sin 2x) + e^{2x}$, $y = \arccos\frac{1}{x} + \sqrt[3]{x^2}$ – elementar funksiyalar.

Elementar bo'lmagan funksiyalarga quyidagi funksiyalar misol bo'ladi:

$$y = signx = \begin{cases} 1, & agar\ x > 0, \\ 0, & agar\ x = 0, \\ -1, & agar\ x < 0, \end{cases} \qquad y = \begin{cases} \frac{1}{x^3}, & agar\ x > 0, \\ x^3, & agar\ x \le 0, \end{cases}$$

2.3.5. Mashqlar

2.3.1. Funksiyaning aniqlanish sohasini toping:

1) $f(x) = \frac{1+x^2}{x^3+8}$; 2) $f(x) = \frac{1+x}{x^2+5x+6}$;

3) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$; 4) $f(x) = 1 - \lg x$;

5) $f(x) = \frac{\sqrt{5-2x}}{3+\sqrt{2x-3}}$; 6) $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$;

7) $f(x) = \sqrt{x-7} + \sqrt{10-x}$; 8) $f(x) = \sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}$;

9) $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{2-x} + \sqrt{x^2+4}$; 10) $f(x) = \sqrt{x^3-8} + \frac{3}{\sqrt[3]{2-x}}$;

11) $f(x) = x\arcsin x$; 12) $f(x) = \arccos(x-2)$;

13) $f(x) = \log_3 \lg x$; 14) $f(x) = \frac{x - \ln(x+3)}{\sqrt{8-x^3}}$.

2.3.2. Funksiyaning qiymatlar sohasini toping:

1) $f(x) = x^2 + 4x + 2$; 2) $f(x) = \sqrt{7-x} + 2$;

3) $f(x) = 2\sin x - 5$; 4) $f(x) = 2^{x^2} - 1$;

5) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$; 6) $f(x) = \frac{2x-3}{|2x-3|}$.

2.3.3. $f(x) = x^2 \sin x$ funksiya berilgan. Quyidagilarni toping:

1) $f(0)$; 2) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$; 3) $f(\pi)$; 4) $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

2.3.4. Funksiyaning monotonlik oraliqlarini toping:

1) $f(x) = x^2 - 5x + 6$; 2) $f(x) = \frac{1}{x}$;

3) $f(x) = -|x|$; 4) $f(x) = x|x|$.

2.3.5. Funksiyaning juft, toq yoki umumiy ko'rinishda ekanini aniqlang:

1) $f(x) = x^3 - 3x - x^5$; 2) $f(x) = x^4 + 5x^2 + 1$;

3) $f(x) = \frac{tg 2x}{x}$; 4) $f(x) = x^2 + \cos 2x$.

9) $f(x)=x^2(x+\sin x)$; 10) $f(x)=\left(\frac{\ldots}{2}\right)$ [illegible]

2.3.6. Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini toping:

1) $f(x)=4\sin x^2$; 3) $f(x)=\sin x+\cos x$;

3) $f(x)=1-2\cos^2 x$; 4) $f(x)=|\cos 2x|$.

2.3.7. Funksiyaning monoton, qat'iy monoton yoki chegaralangan ekanini aniqlang:

1) $f(x)=\sin^2 x$; 2) $f(x)=\sqrt{3x-4}$.

2.3.8. Funksiyaning davrini toping:

1) $f(x)=-2\cos\frac{x}{3}$; 2) $f(x)=tgx-\cos\frac{x}{2}$.

2.3.9. Funksiyaga teskari funksiyani toping:

1) $y=2\sin 3x$; 2) $y=4+\log_3 x$.

2.3.10. $f(g(x))$ murakkab funksiyani toping:

1) $f(x)=3x+1,\ g(x)=x^3$; 2) $f(x)=\sin x,\ g(x)=|x|$;

3) $f(x)=\frac{x+1}{x},\ g(x)=\frac{1}{4-x}$; 4) $f(x)=2^{3x},\ g(x)=\log_2 x$.

2.4. FUNKSIYANING LIMITI

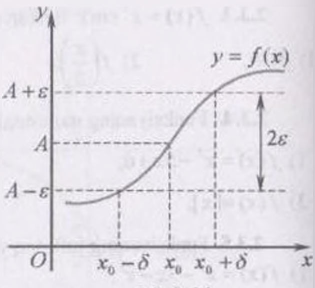
2.4.1. Funksiyaning limiti

Funksiya limitining ta'rifi [H]

$f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin.

1- ta'rif. Agar $\forall\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son topilsa va x ning $0<|x-x_0|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x\in X,\ x\neq x_0$ qiymatlarida $|f(x)-A|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, A soniga $f(x)$ funksiyaning x_0 *nuqtadagi* yoki $x\to x_0$ *dagi limiti* deyiladi va bu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ deb yoziladi.

Funksiyaning nuqtadagi limiti ta'rifini *geometrik nuqtai-nazardan* shunday talqin qilish mumkin: agar A soni $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti bo'lsa, A nuqtaning istalgan ε atrofi uchun x_0 nuqtaning shunday δ atrofi topiladi va δ atrofdagi barcha $x\ (x\neq x_0)$ nuqtalarda $f(x)$ funksiyaning mos qiymatlari A nuqtaning ε atrofiga yotadi. Boshqacha aytganda $f(x)$ funksiyaning δ atrofdagi grafigi $y=A-\varepsilon$ va $y=A+\varepsilon$ to'g'ri chiziqlar bilan



26-shakl

1- misol. $\lim_{x\to 1}(3x-2)=1$ ekanini ko'rsating.

Yechish. $\forall\varepsilon>0$ son olamiz. Shunday $\delta>0$ sonni ko'rsatishimiz kerakki, $|x-1|<\delta$ bo'lganida $|f(x)-1|<\varepsilon$ bo'lsin, bu yerda $f(x)=3x-2$; $|f(x)-1|=|(3x-2)-1|=|3x-3|=|3(x-1)|=3|x-1|$ bo'lgani uchun $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$ deb olsak, $|x-1|<\delta$ bo'lganda $|f(x)-1|<\varepsilon$ bo'ladi.

Demak, $\lim_{x\to 1}(3x-2)=1$.

Xususan, $\varepsilon=1$ da $\delta=\frac{1}{3}$, $\varepsilon=\frac{1}{2}$ da $\delta=\frac{1}{6}$. Shunday qilib, δ son ε songa bog'liq bo'ladi. Shu sababli keyingi ta'riflarda $\delta=\delta(\varepsilon)$ deb olamiz.

Izoh. Funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti ta'rifida x_0 nuqtaning o'zi qaralmaydi. Shunday qilib, funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymati funksiyaning bu nuqtdagi limitiga ta'sir qilmaydi. Bundan tashqari funksiya x_0 nuqtada aniqlanmagan bo'lishi ham mumkin. Shu sababli x_0 nuqtaning atrofida ($x\neq x_0$ bo'lganda) teng bo'lgan (($x=x_0$ da har xil qiymatga ega bo'lgan yoki ulardan bittasi yoki har ikkalasi aniqlanmagan) ikkita funksiya $x\to x_0$ da bitta limitga ega bo'lishi yoki ularning har ikkalasi limitga ega bo'lmasligi mumkin.

2- misol. $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ bo'lsa, $\lim_{x\to 0}f(x)$ limitni toping.

Yechish. $g(x)=x^2$, $-\infty<x<+\infty$ funksiya $x=0$ dan tashqari barcha nuqtalarda $f(x)$ funksiya bilan ustma-ust tushadi va $\lim_{x\to 0}g(x)=0$ bo'ladi. Shu sababli $\lim_{x\to 0}f(x)=0$.

2-ta'rif. Agar $\forall\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ son topilsa va x ning $x_0<x<x_0+\delta$ ($x_0-\delta<x<x_0$) tehgsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $|f(x)-A|<\varepsilon$ tehgsizlik bajarilsa, A soniga $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi *o'ng (chap) limiti* deyiladi va $\lim_{x\to x_0+0}f(x)=A$ yoki $f(x+0)=A$ ($\lim_{x\to x_0-0}f(x)=A$ yoki $f(x-0)=A$) kabi belgilanadi.

$f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi o'ng va chap limitlari *bir tomonlama limitlar* deb ataladi. Agar $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi o'ng va chap limitlari mavjud va bir-biriga teng, ya'ni $f(x_0+0)=f(x_0-0)=A$ bo'lsa, x_0 nuqtada $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud va $\lim_{x\to x_0}f(x)=A$ bo'ladi.

$y=f(x)$ funksiya $(-\infty;+\infty)$ intervalda aniqlangan bo'lsin.

3- ta'rif. Agar $\forall\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ son topilsa va x ning $x>\delta$ ($x<-\delta$) tehgsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida

$|f(x)-A|<\varepsilon$ tehgsizlik bajarilsa, A soniga $f(x)$ funksiyaning $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ dagi limiti deyiladi va $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ $(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A)$ kabi belgilanadi.

Funksiyaning cheksizlikdagi limiti ta'rifini *geometrik nuqtai-nazardan* bunday talqin qilish mumkin: agar $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ $(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A)$ bo'lsa, $\forall\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ son topiladiki, $x\in(\delta;+\infty)$ $(x\in(-\infty;-\delta))$ larda $f(x)$ funksiyaning qiymatlari A nuqtaning ε atrofiga yotadi.

Limitlar haqidagi teoremalar[8]

Funksiyaning limiti haqidagi teoremalar bilan tanishamiz va ularning ayrimlarini isbotlaymiz. Bu teoremalarda qaralayotgan funksiyalar $x\to x_0$ da limitga ega deb hisoblaymiz.

1-teorema. Funksiya $x\to x_0$ da yagona limitga ega bo'ladi.

2-teorema. Ikkita funksiya algebraik yig'indisining limiti bu funksiyalar limitlarining algebraik yig'indisiga teng, ya'ni

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0} g(x)$$

Isboti. Ihtiyoriy $\{x_n\}$ kema-ketlik olamiz.

Bu ketma-ketlik uchun $x_n\to x_0$, $x_n\neq x_0$, $x_n\in D(f)\cap D(g)$ bo'lsin.

U holda

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim_{n\to\infty}((f(x_n)\pm g(x_n))=$$

$$=\lim_{n\to\infty} f(x_n)\pm\lim_{n\to\infty} g(x_n)=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0} g(x)$$

Demak,

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0} g(x).$$

3-teorema. Ikkita funksiya ko'paytmasining limiti bu funksiyalar limitlarining ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x).$$

1-natija. O'zgarmas funksiyaning limiti uning o'ziga teng, ya'ni

$$\lim_{x\to x_0} C=C.$$

2-natija. O'zgarmas ko'paytuvchini limit belgisidan tashqarida chiqazish mumkin, ya'ni

$$\lim_{x\to x_0}(k\cdot f(x))=k\cdot\lim_{x\to x_0} f(x),\ k\in R.$$

3-natija. Funksiyaning musbat ko'rsatkichli darajasining limiti bu funksiya limitining shu tartibli darajasiga teng, ya'ni

$$\lim_{x\to x_0}(f(x))^p=(\lim_{x\to x_0} f(x))^p,\ p>0.$$

4-teorema. Ikki funksiya bo'linmasining limiti bu funksiyalar limitlarining nisbatiga teng, ya'ni

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}, \quad \lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0.$$

5-teorema. Agar x_0 nuqtaning biror atrofidagi barcha x uchun $f(x)\le g(x)$ tengsizlik bajarilsa, u holda $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ bo'ladi.

6-teorema. Agar x_0 nuqtaning biror atrofidagi barcha x uchun $f(x)\le \varphi(x)\le g(x)$ tengsizlik bajarilsa va $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A$ bo'ladi.

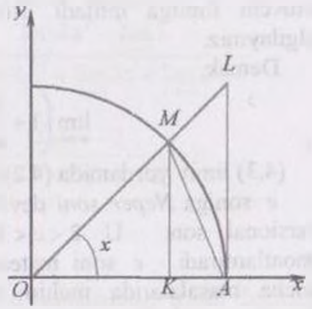
Yuqorida keltirilgan teoremalar $x\to\pm\infty$ da ham o'rinli bo'ladi.

Ajoyib limitlar[8]

Birinchi ajoyib limit:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{4.1}$$

Isboti. $0<x<\frac{\pi}{2}$ bo'lsin. Radiusi $R=1$ ga teng bo'lgan aylananing radian o'lchovi x ga teng bo'lgan markaziy burchagiga mos yoyini qaraymiz (27-shakl).



27-shakl

Shakldan quyidagilarga ega bo'lamiz:

ΔMOA yuzi $<$ MOA sektor yuzi $<$ ΔLOA yuzi;

ΔMOA yuzi: $S_1=\frac{1}{2}OA\cdot MK=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin x=\frac{1}{2}\sin x$;

MOA sektor yuzi: $S_2=\frac{1}{2}OA\cdot \breve{MA}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot x=\frac{1}{2}x$;

ΔLOA yuzi: $S_3=\frac{1}{2}OA\cdot LA=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot tgx=\frac{1}{2}tgx$.

Bundan $\sin x<x<tgx$ kelib chiqadi. Tengsizlikni $\sin x>0$ ga bo'lamiz:

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x} \quad \text{yoki} \quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

Endi $x<0$ bo'lsin.

$\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{\sin x}{x}$, $\cos(-x)=\cos x$ ekanidan $x<0$ da ham $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$.

$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$, $\lim\limits_{x\to 0} 1=1$ bo'lgani uchun oxirgi tenglikdan 6-teoremaga ko'ra

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

3-misol. $\lim\limits_{x\to0}\frac{tgx}{x}$ limitni toping.

Yechish. $tgx=\frac{\sin x}{\cos x}$ va $\lim\limits_{x\to0}\cos x=1$ larni hisobga olib topamiz:

$$\lim_{x\to0}\frac{tgx}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1\cdot1=1.$$

Ikkinchi ajoyib limit :

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \tag{4.2}$$

Bu limitning isbotini keltirmasdan, uni izohlash chun $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, n\in N$ ifodaning n natural son o'sishidagi jadvalini keltiramiz. Jadvaldan ko'rinadiki, n o'sishi bilan $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ o'sib boradi va ikki bilan uch orasida yotuvchi limitga intiladi. Bu limitni e harfi bilan belgilaymiz.

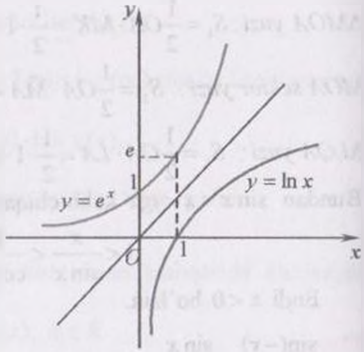
n	e_n
0	1.0000000000000
1	2.0000000000000
2	2.5000000000000
3	2.6666666666667
4	2.7083333333333
5	2.7166666666667
6	2.7180555555556
7	2.7182539682540
8	2.7182787698413
9	2.7182815255732
10	2.7182818011464

Demak,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e. \tag{4.3}$$

(4.3) limit yordamida (4.2) limitni isbotlash mumkin.

e soniga *Neper soni* deyiladi. e soni irrasional son. U $2<e<3$ tengsizlikni qanoatlantiradi. e soni matematikaning bir qancha masalalarida muhim rol o'ynaydi. e soni, masalan, $y=\ln x$ natural logarifmik funksiyaning asosi bo'ladi. Shuningdek, $y=\ln x$ funksiyaga teskari $y=e^x$ funksiya matematik analizda muhim amaliy ahamiyatga ega. Bu funksiya *eksponensial funksiya* deyiladi. Natural logorifmik va eksponensial funksiyalarning grafiklari 28-shaklda keltirilgan. Qonuniyatlari eksponensial funksiya bilan ifodalanuvchi jarayonlarga misollar keltiramiz.



28-shakl

Tabletkadagi *dori moddasining erish qonuni*

$$c=c_0e^{-kt}$$

eksponensial funksiya bilan ifodalanadi, bu yerda $c-t$ vaqt oralig'ida erimay qolgan modda miqdori; c_0 – moddanng boshlang'ich miqdori; k – eruvchanlik doimiyligi.

Birinchi tartibli kimyoviy reaksiya qonuni

$$m = m_0 e^{-kt}$$

eksponensial funksiya bilan ifodalanadi, bu yerda m_0 – reaksiyada qatnashuvchi moddaning boshlang'ich miqdori; k – reaksiya doimiysi; t – vaqt.

4-misol. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^x$ limitni toping.

Yechish. $x = 4t$ deymiz.

$x \to \infty$ da $t \to \infty$.

U holda

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^x = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{4t} = \left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^4 = e^4.$$

Funksiyaning limitlarini topishga oid misollar

3-misol. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2-1}{4x^2+5x+2}$ limitni toping.

Yechish. Limitlar haqidagi teoremalardan foydalanib, topamiz:

$$\lim_{x\to-1}\frac{2x^2-1}{4x^2+5x+2} = \frac{\lim\limits_{x\to-1}(2x^2-1)}{\lim\limits_{x\to-1}(4x^2+5x+2)} = \frac{\lim\limits_{x\to-1}2x^2-\lim\limits_{x\to-1}1}{\lim\limits_{x\to-1}4x^2+\lim\limits_{x\to-1}5x+\lim\limits_{x\to-1}2} =$$

$$= \frac{2\lim\limits_{x\to-1}x^2-1}{4\lim\limits_{x\to-1}x^2+5\lim\limits_{x\to-1}x+2} = \frac{2(\lim\limits_{x\to-1}x)^2-1}{4(\lim\limits_{x\to-1}x)^2+5\lim\limits_{x\to-1}x+2} = \frac{2(-1)^2-1}{4(-1)^2+5(-1)+2} = 1.$$

4-misol. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-25}$ limitni toping.

Yechish. Bu limit uchun ikki funkksiya bo'linmasining limiti haqidagi teoremani qo'llab bo'lmaydi, chunki $x \to 5$ da kasrning maxraji nolga teng bo'ladi. Bundan tashqari suratning limiti ham nolga teng. Bunday hollarda $\dfrac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslik berilgan deyiladi. Bu aniqmaslikni ochish uchun kasrning surati va maxrajini ko'paytuvchilarga ajratamiz va kasrni $x-5 \neq 0$ ($x \to 5$, lekin $x \neq 5$) ga bo'lib, topamiz:

$$\lim_{x\to5}\frac{(x-5)(x-3)}{(x-5)(x+5)} = \lim_{x\to5}\frac{x-3}{x+5} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

5-misol. $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{\sqrt{x-3}-2}{x-7}$ limitni toping.

Yechish. $x \to 7$ da $\dfrac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslik berilgan. Kasrning surat va maxrajini $\sqrt{x-3}+2$ ko'paytirib, topamiz:

$$\lim_{x\to 7}\frac{(\sqrt{x-3}-2)(\sqrt{x-3}+2)}{(x-7)(\sqrt{x-3}+2)}=\lim_{x\to 7}\frac{x-3-4}{(x-7)(\sqrt{x-3}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{x-7}{(x-7)(\sqrt{x-3}+2)}=\lim_{x\to 7}\frac{1}{\sqrt{x-3}+2}=\frac{1}{\sqrt{7-3}+2}=\frac{1}{4}.$$

6- misol. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ limitni toping.

Yechish. $t^6=x$ almashtirish bajaramiz. Bunda $x\to 1$ da $t\to 1$. U holda

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t^3-1}{t^2-1}=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t+1)}=\lim_{t\to 1}\frac{t^2+t+1}{t+1}=\frac{3}{2}.$$

7- misol. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{27}{x^3-27}\right)$ limitni toping.

Yechish. $x\to 3$ da $\infty-\infty$ ko'rinishdagi aniqmaslik kelib chiqadi. U holda

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{27}{x^3-27}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x-18}{x^3-27}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+6)}{(x-3)(x^2+3x+9)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+6}{x^2+3x+9}=\frac{1}{3}.$$

8- misol. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+1}{x^3+4x^2-x}$ limitni toping.

Yechish. Bu misolda $x\to\infty$ da $\dfrac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmaslik hosil bo'ladi. Kasrning surat va maxrajini x yuqori darajasiga, ya'ni x^3 ga bo'lib, topamiz:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+1}{x^3+4x^2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{2+0+0}{1+0-0}=2.$$

9- misol. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin 5x}$ limitni toping.

Yechish. $x\to 0$ da $\dfrac{0}{0}$ korinishdagi aniqmaslik berilgan.

Almashtirishlar bajaramiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{5}}{\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}.$$

$x \to 0$ da $5x \to 0$ va 1 – ajoyib limitga ko'ra $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=1$. Demak,

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 5x}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{1}=\frac{3}{5}.$$

10- misol. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+4}\right)^{1-4x}$ limitni toping.

Yechish. $x\to\infty$ da 1^{∞} ko'rinishdagi aniqmaslik berilgan.

Kasrning butun qismini ajratib, almashtirishlar bajaramiz:

$$\left(1+\frac{1}{2x+4}\right)^{1-4x}=\left(\left(1+\frac{1}{2x+4}\right)^{2x+4}\right)^{\frac{1-4x}{2x+4}}$$

$x\to\infty$ da $2x+4\to\infty$ bo'lgani sababli 2-ajoyib limitga ko'ra

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x+4}\right)^{2x+4}=e.$$

U holda

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-4x}{2x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-4}{2+\frac{4}{x}}=\frac{0-4}{2+0}=-2 \text{ ekanidan } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+4}\right)^{1-4x}=e^{-2}=\frac{1}{e^{2}}.$$

2.4.2. Cheksiz kichik funksiyalar[10]

Ta'riflar va asosiy teoremalar

4-ta'rif. Agar $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ bo'lsa, $f(x)$ funksiyaga $x\to x_0$ *da cheksiz kichik funksiya* deyiladi.

Funksiyaning limiti ta'rifiga ko'ra $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ tenglik quyidagicha talqin qilinadi: $\forall\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ son topiladi va x ning $0<|x-x_0|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarda $|f(x)|<\varepsilon$ tengsizlik bajariladi.

$x\to x_0+0$, $x\to x_0-0$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$ da cheksiz kichik funksiya shu kabi ta'riflanadi.

Cheksiz kichik funksiyalar ko'pincha cheksiz kichik kattaliklar yoki cheksiz kichik deb ataladi va odatda grek alfavitining α,β kabi harflari bilan belgilanadi.

Cheksiz kichk funksiyalarga $x\to 0$ da $\alpha=x^3$, $x\to 3$ da $\beta=x-3$, $x\to k\pi, k\in Z$ da $\gamma=\sin x$ funksiyalar misol bo'ladi.

5-ta'rif. Agar $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ bo'lsa, $f(x)$ funksiyaga $x\to x_0$ *da cheksiz katta funksiya* deyiladi.

10 J.Stewart. Calculus. Broks/Cole. Cengage Learing.2012

Bunda $f(x)$ funksiya faqat musbat qiymatlar qabul qilsa, $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ deb, faqat manfiy qiymatlar qabul qilsa, $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ deb yoziladi.

Masalan, $x\to 1$ da $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ cheksiz katta funksiya bo'ladi.

Cheksiz kichik funksiyalar uchun o'rinli bo'ladigan teoremalar bilan tanishamiz.

7-teorema. $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ bo'lishi uchun $x\to x_0$ da $\alpha(x)=f(x)-A$ funksiya cheksiz kichik bo'lishi zarur va etarli.

Quyidagi teoremalar $x\to x_0$ da deb qaraladi.

8-teorema. Chekli sondagi cheksiz kichik funksiyalarning algebraik yig'indisi cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

9-teorema. Cheksiz kichik funksiyaning chegaralangan funksiyaga ko'paytmasi cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

4-natija. Chekli sondagi cheksiz kichik funksiyalarning ko'paytmasi cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

5-natija. Cheksiz kichik funksiyaning chekli o'zgarmas songa ko'paytmasi cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

10-teorema. Cheksiz kichik funksiyaning nolga teng bo'lmagan limitga ega funksiyaga bo'linmasi cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

Yuqorida keltirilgan teoremalar $x\to\infty$, $x\to x_0-0$, $x\to x_0+0$ da ham o'rinli bo'ladi.

11-teorema. Agar $x\to x_0$ da $\alpha(x)$ funksiya cheksiz kichik bo'lsa, u holda $x\to x_0$ da $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ funksiya cheksiz katta bo'ladi va aksincha.

Cheksiz kichik funksiyalarni taqqoslash

Ma'lumki, cheksiz kichik funksiyalarning yig'indisi, ayirmasi va ko'paytmasi cheksiz kichik funksiyalar bo'ladi. Bu tasdiqni cheksiz kichik funksiyalarning bo'linmasi uchun takidlab bo'lmaydi, chunki bitta cheksiz kichik funksiyaning boshqa cheksiz kichik funksiyaga nisbati har xil natijaga olib kelishi, ya'ni chekli son bo'lishi, cheksiz katta bo'lishi, cheksiz kichik bo'lishi yoki limitga ega bo'lmasligi mumkin.

Cheksiz kichik funksiyalar bir-biri bilan nisbati yordamida taqqoslanadi.

$\alpha(x)$ va $\beta(x)$ funksiyaar $x\to x_0$ da cheksiz kichik funksiyalar bo'lsin.

1. Agar $\lim_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A\neq 0$ (*A – chekli son*) bo'lsa, $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ *bir xil tartibli cheksiz kichik funksiyalar* deyiladi.

2. Agar $\lim_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$ bo'lsa, $\alpha(x)$ funksiya $\beta(x)$ funksiyaga nisbatan *yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya* deyiladi va bu $\alpha=o(\beta)$ kabi belgilanadi.

3. Agar $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$ bo'lsa, $\alpha(x)$ funksiya $\beta(x)$ funksiyaga nisbatan *quyi tartibli cheksiz kichik funksiya* deyiladi.

4. Agar $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ mavjud bo'lmasa, $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ funksiyalarga *taqqoslanmaydigan cheksiz kichik funksiyalar* deyiladi.

Misollar keltiramiz:

1) $x\to 0$ da $\sin 3x$ va $\sin x$ funksiyalar bir xil tartibli cheksiz kichik funksiyalar, chunki $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{3\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=\frac{3}{1}=3$;

2) $x\to 0$ da $2x^3$ funksiya $5x$ funksiyaga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya, chunki $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^3}{5x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2}{5}=0$;

3) $x\to 0$ da $\sin x$ funksiya x^2 funksiyaga nisbatan quyi tartibli cheksiz kichik funksiyalar, chunki $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{x}=1\cdot\frac{1}{0}=\infty$;

4) $x\sin\frac{1}{x}$ va x funksiyalar $x\to 0$ da taqqoslanmaydigan cheksiz kichik funksiyalar, chunki $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ limit mavjud emas.

Ekvivalent cheksiz kichik funksiyalar

Bir xil tartibli cheksiz kichik funksiyalar orasida ekvivalent cheksiz kichik funksiyalar muhim ahamiyatga ega.

$\alpha(x)$ va $\beta(x)$ funksiyaar $x\to x_0$ da cheksiz kichik funksiyalar bo'lsin.

6-ta'rif. Agar $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$ bo'lsa, u holda $x\to x_0$ da $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ *ekvivalent cheksiz kichik funksiyalar* deyiladi va $\alpha(x)\sim\beta(x)$ kabi belgilanadi.

Masalan, $x\to 0$ da $\sin x$ va x funksiyalar ekvivalent cheksiz kichik funksiyalar, chunki $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

12-teorema. Agar ikkita cheksiz kichik funksiya nisbatida cheksiz kichik funksiyalarning har ikkalasini yoki ulardan bittasini ekvivalent cheksiz kichik funksiya bilan almashtirilsa, u holda bu nisbatning limiti o'zgarmaydi.

Isboti. $x\to x_0$ da $\alpha\sim\alpha'$ va $\beta\sim\beta'$ bo'lsin. U holda

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha'}{\alpha'}\cdot\frac{\beta'}{\beta'}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\alpha'}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\beta'}{\beta}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha'}{\beta'}=1\cdot 1\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha'}{\beta'}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha'}{\beta'},$$

ya'ni

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha'}{\beta'}.$$

11-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+7x^2+4x^5}{2\sin x}$ limitni toping.

Yechish. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+7x^2+4x^5}{2\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$, chunki $x\to 0$ da $\sin x\sim x$ va $3x+7x^2+4x^{54}\sim 3x$.

$\dfrac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochishda ekvivalent cheksiz kichik funksiyalarni almashtirish prinsipidan va ekvivalent cheksiz kichik funksiyalarning xossalaridan foydalanish mumkin.

Limitlarni hisoblashda quyidagi ekvivalentliklar qo'llaniladi[10]:

1. $x\to 0$ da $\sin x\sim x$;
2. $x\to 0$ da $tgx\sim x$;
3. $x\to 0$ da $\arcsin x\sim x$;
4. $x\to 0$ da $arctgx\sim x$;
5. $x\to 0$ da $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$;
6. $x\to 0$ da $e^x-1\sim x$;
7. $x\to 0$ da $a^x-1\sim x\ln a$;
8. $x\to 0$ da $\ln(1+x)\sim x$;
9. $x\to 0$ da $\log_a(1+x)\sim x\cdot\log_a e$;
10. $x\to 0$ da $(1+x)^m-1\sim mx$.

12- misol. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-7^x}{\sin 4x-arctg3x}$ limitni toping.

Yechish. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-7^x}{\sin 4x-arctg3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2^{3x}-1)-(7^x-1)}{\sin 4x-arctg3x}$

$x\to 0$ da $2^{3x}-1\sim 3x\ln 2$, $7^x-1\sim x\ln 7$, $\sin 4x\sim 4x$ va $arctg3x\sim 3x$ ekvivalentliklardan foydalanamiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^{3x}-7^x}{\sin 4x-arctg3x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\ln 2-x\ln 7}{4x-3x}=\frac{3\ln 2-\ln 7}{1}=\ln\frac{8}{7}.$$

2.4.3. Mashqlar

2.4.1. $f(x)$ funksiyaning $x=x_0$ nuqtalardagi chap va o'ng limitlarini toping:

1) $f(x)=\begin{cases} x, & x<2,\\ x^2-4, & x\ge 2,\end{cases}$ $x_0=2$;

2) $f(x)=\dfrac{2(1-x)-|1-x|}{4(1-x)+|1-x|}$, $x_0=1$.

2.4.2. Limitlarni toping:

1) $\lim\limits_{x\to -1}(2x^2+3x-1)$;

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3^x-9}{3^x+9}$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$; 4) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{2x^2-11x+5}$;

5) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$; 6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2-x}-1}{\sqrt{5-x}-2}$;

7) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3-\sqrt{x+7}}{x-2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2}}{x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8-x}-2}{x}$; 10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$;

11) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^4-3x+2}{x^2-3x^4}$; 12) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^5-4}{x^3+3x-x^5}$;

13) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+2x}{x^4-2x^2+3}$; 14) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^5-2x^2}{2x^3+x-4}$;

15) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\sqrt{4x^2-1}-2x^2$; 16) $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{x^2-4}+x$;

17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x}{x}$; 18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$;

19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos 2x}-1}{x^2}$; 20) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

21) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)tgx$; 22) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$;

23) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$; 24) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$;

25) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-ctgx\right)$; 26) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1}{x-\pi}\cos\dfrac{x}{2}$;

27) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)ctg\,\pi x$; 28) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$;

29) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sin(x+1)}{x^2+x}$; 30) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{x}$;

31) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$; 32) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$;

33) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{3x-2}$; 34) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{2}}$;

35) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x-2}{x+3}\right)^{x+4}$; 36) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2x+3}{x+2}\right)^{4x}$;

37) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^x-e^2}{x-2}$; 38) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$;

39) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$; 40) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{1+ctg^2 x}$;

41) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{x}{2(1-x)}}$; 42) $\lim\limits_{x\to 2}(3-x)^{\frac{2x-3}{2-x}}$.

43) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$; 44) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{x+1}{x-1}$.

bo'ladi. Glyukozaning qondagi turg'un holatini $\left(\lim\limits_{t\to+\infty} c(t) \text{ ni}\right)$ aniqlang.

2.4.4. Bakteriya boshlang'ich holatdan t soat vaqtgacha $p(t)=\dfrac{1000e^t}{1+0{,}1(e^t-1)}$ qonun bilan ko'payadi. Bakteriyanin turg'un ko'payish miqdorini aniqlang.

2.4.5. Quyidagilarni isbotlang:

1) $x\to 0$ da $\alpha(x)=tg2x$ va $\beta(x)=3x+x^3$ funksiyalar bir xil tartibli;

2) $x\to 1$ da $\alpha(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ va $\beta(x)=\sqrt{x}-1$ funksiyalar ekvivalent;

2.4.6. Limitlarni ekvivalent cheksiz kichik funksiyalardan foydalanib toping:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\ln(1+3x)}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2+2x^3+3x^4}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg3x}{\sin x-4x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-1}{2x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{tg5(x-2)}{x^2+x-6}$;

6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{arctg(x-1)}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-1}{tg2x}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\pi x}-1}{x+2x^2}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{1-\cos x}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{3x^2}$;

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}-e^{x\sqrt{x}}}$;

12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{x}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\ln(1+2x)}$;

14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-5^x}{\sin 2x}$;

15) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{3tg4x}$;

16) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln(2+\cos x)}{\sin x}$;

17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3+3x^4}$;

18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(\cos 3x)}{\sin x}$;

19) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^{\cos x}-1}{\cos x}$;

20) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot(e^{1/x^2}-1)$.

2.5. FUNKSIYANING UZLUKSIZLIGI

2.5.1. Funksiya uzluksizligining ta'rifi[8]

$f(x)$ funksiya x_0 nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan bo'lsin.

1-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada chekli limitga ega bo'lib, bu limit funksiyaning shu nuqtadagi qiymatiga teng, y'ani

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \tag{5.1}$$

bo'lsa, $f(x)$ *funksiya* x_0 *nuqtada uzluksiz* deyiladi.

1) $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada va uning atrofida aniqlangan;

2) $f(x)$ funksiya $x \to x_0$ da limitga ega;

3) funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti uning shu nuqtadagi qiymatiga teng.

2.5.2. Uzluksiz funksiyalarning xossalari[8]

Nuqtada uzluksiz funksiyalarning xossalari

1-teorema (*uzluksiz funksiyalar ustida arifmetik amallar*). $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ va $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0) \neq 0)$ funksiyalar ham x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Bu teorema chekli sondagi funksiyalarning algebraik yig'indisi va ko'paytmasi uchun ham o'rinli bo'ladi.

2-teorema. (*murakkab funksiyaning uzluksizligi*). $z = \varphi(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz, $y = f(z)$ funksiya esa $z_0 = \varphi(x_0)$ nuqtada uzluksiz bo'lsin. U holda $y = f(\varphi(x))$ murakkab funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

2-teorema yordamida (5.1) tenglikni quyidagicha umumlashtirish mumkin.

Agar $z = \varphi(x)$ funksiya x_0 nuqtada A limitga ega bo'lib, $y = f(z)$ funksiya $z = A$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $y = f(\varphi(x))$ murakkab funksiya uchun

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = f(\lim_{x \to x_0} \varphi(x)) \tag{5.2}$$

bo'ladi.

Bu tenglik *uzluksiz funksiya belgisi ostida limitga o'tish qoidasi*ni ifodalaydi va funksiyaning limitini topishda foydalaniladi.

1-misol. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x}$ $(a > 0, a \neq 1)$ limitni toping.

Yechish. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \cdot \log_a(1+x) = \lim\limits_{x \to 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

$\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$ funksiya $y = \log_a z$ va $z = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ funksiyalarning murakkab funksiyasi. $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ va $y = \log_a z$ funksiya $z = e$ nuqtada uzluksiz. U holda (5.2) tenglikka ko'ra

$$\lim_{x \to 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a\left(\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \log_a e.$$

Xususan, $a = 1$ da $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

3-teorema. Elementar funksiyalar o'zining aniqlanish sohasidagi barcha nuqtalarda uzluksiz bo'ladi.

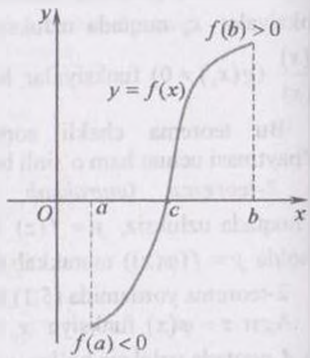
Kesmada uzluksiz funksiyalarning xossalari

Agar $f(x)$ funksiya $(a;b)$ nitervalning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, u holda u $(a;b)$ *intervalda uzluksiz* deyiladi.

Agar $f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda uzluksiz bo'lib, a nuqtada o'ngdan uzluksiz va b nuqtada chapdan uzluksiz bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiyaga $[a;b]$ *kesmada uzluksiz* deyiladi.

Kesmada uzluksiz funksiyalar bir qancha muhim xossalarga ega. Bu xossalarni teoremalar orqali ifodalaymiz. Bunda teoremalarning isbotini keltirmasdan, faqat geometrik talqinini ko'rsatish bilan kifoyalanamiz.

4-teorema (*Bolsano-Koshining birinchi teoremasi*). $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz va kesmaning oxirlarida turli ishorali qiymatlar qabul qilnsin. U holda shunday $c\in(a;b)$ nuqta topiladiki, bu nuqtada $f(c)=0$ bo'ladi.



29-shakl

Teoremaning geometrik talqini: uzluksiz funksiyaning grafigi Ox o'qning bir tomonidan ikkinchi tomoniga o'tganida Ox o'qni kesadi (29-shakl).

5-teorema (*Bolsano-Koshining ikkinchi teoremasi*). $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz va $f(a)=A$, $f(b)=B$, $C-A$ va B orasidagi ixtiyoriy son bo'lsin. U holda shunday $c\in[a;b]$ nuqta topiladiki, $f(c)=C$ bo'ladi.

Teoremaning geometrik talqini: uzluksiz funksiya bir qiymatdan ikkinchi qiymatga o'tganida barcha oraliq qiymatlarni qabul qiladi (30-shakl).

6-teorema (*Veyershtrassning birinchi teoremasi*). Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda u bu kesmada chegaralangan bo'ladi.

31-shaklda keltirilgan $y=f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzliuksiz. Bunda $\forall x\in[a;b]$ uchun $m\le f(x)\le M$.

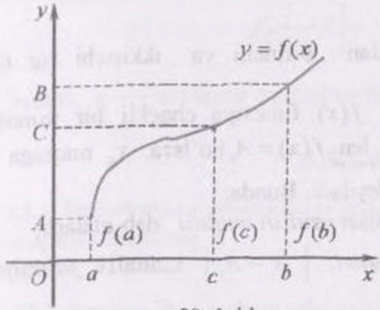
1-izoh. Teorema $[a;b]$ kesma $(a;b)$ interval bilan almashtirilganida o'rinli bo'lmasligi mumkin. Masalan, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ funksiya $(0;1)$ intervalda uzluksiz, lekin chegaralanmagan, chunki $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{x}=+\infty$.

7-teorema (*Veyershtrassning ikkinchi teoremasi*). Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda u shu kesmada o'zining eng kichik va eng katta qiymatlariga erishadi.

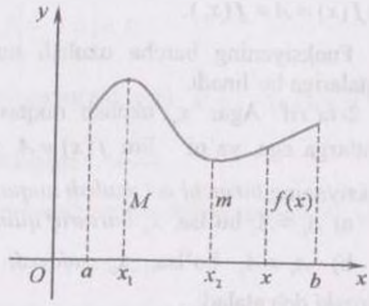
31-shaklda keltirilgan $y=f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzliuksiz. Bunda u x_1 nuqtada o'zining eng katta M qiymatini va x_2 nuqtada o'zining eng kichik

m qiymatini qabul qiladi.

2-izoh. Bu teorema $(a;b)$ interval uchun o'rinli bo'lmasligi mumkin. Masalan, $f(x) = x$ funksiya $(0;1)$ intervalda uzluksiz, lekin o'zining eng kichik va eng katta qiymatlariga erishmaydi.



30-shakl



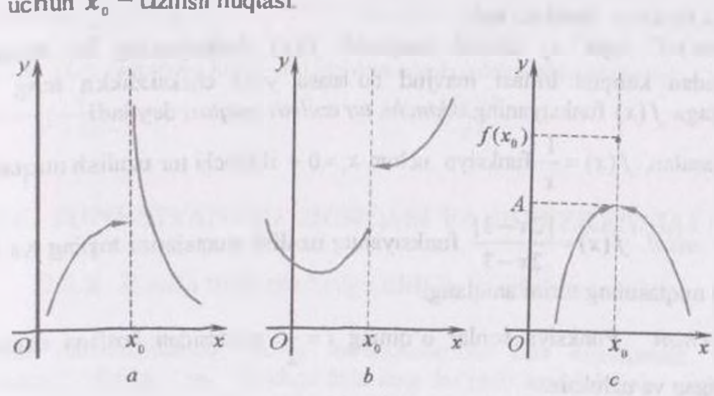
31-shakl

8-teorema (*teskari funksiyaning uzluksizligi haqidagi teorema*). Agar $y = f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz va qat'iy monoton bo'lib, $[c;d]$ uning qiymatlar sohasi bo'lsa, u holda berilgan funksiyaga teskari $y = \varphi(x)$ funksiya $[c;d]$ kesmada uzluksiz va qat'iy monoton bo'ladi.

2.5.3. Funksiyaning uzulish nuqtalari

Agar $f(x)$ funksiya uchun x_0 nuqtada funksiya uzluksizligi 1-ta'rifining hech bo'lmaganda bitta sharti bajarilmasa, *funksiya x_0 nuqtada uzulishga ega* deyiladi. Bunda x_0 nuqta $f(x)$ *funksiyaning uzulish nuqtasi* deb ataladi.

32-shaklda grafiklar bilan berilgan funksiylarni qaraymiz. Bu funksiyalarning har biri uchun x_0 – uzilish nuqtasi.



32-shakl

Birinchi holda (32,a-shakl) ta'rifning 1-sharti bajarilmaydi, chunki funksiya x_0 nuqtada aniqlanmagan.

Ikkinchi holda (32,b-shakl) ta'rifning 2-sharti buzulgan, chunki $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ limit mavjud emas.

Uchinchi holda (32,c-shakl) ta'rifning 3-sharti bajarilmaydi, chunki $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$.

Funksiyaning barcha uzulish nuqtalari birinchi va ikkinchi tur uzilish nuqtalariga bo'linadi.

2-ta'rif. Agar x_0 uzulish nuqtasida $f(x)$ funksiya chekli bir tomonlama limitlarga ega, ya'ni $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A_1$ va $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A_2$ bo'lsa, x_0 nuqtaga $f(x)$ funksiyaning *birinchi tur uzulish nuqtasi* deyiladi. Bunda:

a) $A_1 = A_2$ bo'lsa, x_0 *bartaraf qilinadigan uzulish nuqtasi* deb ataladi;

b) $A_1 \neq A_2$ bo'lsa, x_0 *sakrash nuqtasi*, $|A_1 - A_2|$ kattalik *funksiyaning sakrashi* deb ataladi.

Masalan: $g(x) = \begin{cases} 2x-1, & -1 \le x < 1, \\ 4-2x, & 1 \le x \le 3 \end{cases}$ funksiya uchun $x_0 = 1$ – sakrash nuqtasi, bunda funksiyaning sakrashi $|1-2| = 1$ ga teng;

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

funksiya uchun $x_0 = 0$ – bartaraf qilinadigan uzulish nuqtasi, bunda $\varphi(x) = 2$ o'rniga $\varphi(x) = 1$ deb olinsa uzulish bartaraf qilinadi, ya'ni

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

uzluksiz funksiya hosil bo'ladi.

3-ta'rif. Agar x_0 uzulish nuqtasida $f(x)$ funksiyaning bir tomonlama limitlaridan kamida bittasi mavjud bo'lmasa yoki cheksizlikka teng bo'lsa, x_0 nuqtaga $f(x)$ funksiyaning *ikkinchi tur uzulish nuqtasi* deyiladi.

Masalan, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ funksiya uchun $x_0 = 0$ – ikkinchi tur uzulish nuqtasi.

2- misol. $f(x) = \dfrac{|2x-3|}{2x-3}$ funksiyaning uzulish nuqtalarini toping va har bir uzulish nuqtasining turini aniqlang.

Yechish. Funksiya sonlar o'qining $x = \dfrac{3}{2}$ nuqtasidan boshqa nuqtalarida aniqlangan va uzluksiz.

Bunda

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x<\dfrac{3}{2},\\ 1, & x>\dfrac{3}{2}.\end{cases}$$

U holda

$$f\left(\frac{3}{2}-0\right)=-1,\ f\left(\frac{3}{2}+0\right)=1.$$

Demak, $x=\dfrac{3}{2}$ sakrash nuqtasi va funksiyaning sakrashi $\mu=|1-(-1)|=2$.

2.5.4. Mashqlar

2.5.1. Funksiyaning uzluksizligi ta'rifidan foydalanib berilgan funksiyalarning $\forall x_0\in R$ da uzluksiz ekanini isbotlang:

1) $f(x)=3x^2-7$; 2) $f(x)=x^3+7x-6$.

2.5.2. Berilgan funksiyalarni uzluksizlikka tekshiring va grafigini chizing:

1) $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$; 2) $f(x)=x^2+\dfrac{|x+1|}{x+1}$;

3) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\neq 2,\\ 3, & x=2;\end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases}3x-1, & x<0,\\ \dfrac{1}{x-1}, & x\geq 0;\end{cases}$

5) $f(x)=2^{\frac{x}{x^2-4}}$; 6) $f(x)=\dfrac{3}{1+2^{1/x}}$;

9) $f(x)=\dfrac{|x-3|}{x^2-2x-3}$; 10) $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{(x-1)\sin x}$.

2.5.3. $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi uzulish turini aniqlang:

1) $f(x)=\dfrac{3x+4}{x-3},\ x_0=3$; 2) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3},\ x_0=-3$;

3) $f(x)=arctg\dfrac{5}{2x-1},\ x_0=\dfrac{1}{2}$; 4) $f(x)=\dfrac{3}{4^{x-3}-1},\ x_0=3$.

2.5.4. $f(x)$ funksiyani $[0;2],[-3;1],[4;5]$ kesmalarda uzluksizlikka tekshiring:

1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x-3}$; 2) $f(x)=\ln\dfrac{x-4}{x+5}$.

2.6. FUNKSIYANING HOSILASI VA DIFFERENSIALI

2.6.1. Hosila tushunchasiga olib keluvchi masalalar

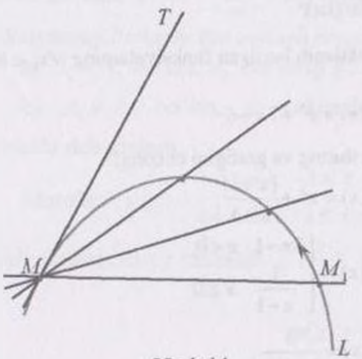
Hosila matematikaning asosiy tushunchalaridan biri hisoblanadi. Hosila matematika, fizika va boshqa fanlarning ko'plab masalalarini yechishda, xususan har xil jarayonlarning tezliklarini o'rganishda keng qo'llaniladi.

Egri chiziqqa o'tkazilgan urinma

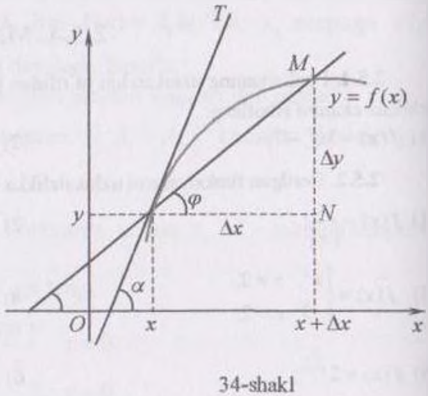
Avval egri chiziqqa o'tkazilgan urunmaning umumiy ta'rifini beramiz. Uzluksiz L egri chiziqda M va M_1 nuqtalarni olamiz (33-shakl).

M va M_1 nuqtalar orqali o'tuvchi MM_1 to'g'ri chiziqqa *kesuvchi* deyiladi. M_1 nuqta L egri chiziq bo'ylab siljib, M nuqtaga yaqinlashsin. U holda MM_1 kesuvchi M nuqta atrofida buriladi va qandaydir MT limit holatiga intiladi.

Berilgan L egri chiziqqa berilgan M nuqtada o'tkazilgan urinma deb, MM_1 kesuvchining M_1 nuqta L egri chiziq bo'ylab siljib, M nuqtaga yaqinlashgandagi MT limit holatiga (agar mavjud bo'lsa) aytiladi.



33-shakl



34-shakl

Endi $M(x;y)$ nuqtada vertikal bo'lmagan urinmaga ega bo'lgan $y = f(x)$ uzluksiz funksiya grafiini qaraymiz va uning $k = tg\alpha$ burchak koeffitsiyentini topamiz, bu yerda α – urinmaning Ox o'q bilan tashkil qilgan burchagi. Buning uchun M nuqta va grafikning $x + \Delta x$ abssissali M_1 nuqtasi orqali kesuvchi o'tkazamiz (34-shakl). Kesuvchining Ox o'q bilan tashkil qilgan burchagini φ bilan belgilaymiz.

34-shakldan topamiz:

$$tg\varphi = \frac{M_1N}{MN} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

$\Delta x \to 0$ da funksiyaning uzluksizligiga asosan Δy ham nolga intiladi. Shu sababli $\Delta x \to 0$ da M_1 nuqta egri chiziq bo'ylab siljib, M nuqtaga yaqinlashadi. Bunda MM_1 kesuvchi M nuqta atrofida buriladi va MT urinmaga yaqinlashib boradi, ya'ni $\varphi \to \alpha$. Bundan $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi = \alpha$ yoki $\lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\varphi = tg\alpha$.

Shuning uchun urinmaning burchak koeffitsiyenti

$$k = tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (6.1)$$

To'g'ri chiziqli harakat tezligi

M moddiy nuqta (biror jism) qandaydir to'g'ri chiziq bo'ylab harakat qilayotgan bo'lsin. Vaqtning har bir t qiymatiga boshlang'ich M_0 holatdan M holatgacha bo'lgan muayyan $s = M_0M$ masofa mos keladi. Bu masofa t vaqtga bog'liq, ya'ni s masofa vaqtning funksiyasi bo'ladi: $s = s(t)$.

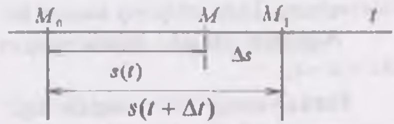
$s(t)$ funksiyaga *nuqtaning harakat qonuni* deyiladi.

Nuqtaning t vaqtdagi harakat tezligini aniqlash masalasini qaraymiz.

Agar biror t vaqtda nuqta M holatda bo'lsa, u holda $t + \Delta t$ (Δt – vaqtning orttirmasi) vaqtda nuqta M_1 holatga o'tadi, bu yerda $M_0M_1 = s + \Delta s$ (Δs – masofaning orttirmasi). Demak, M nuqtaning Δt vaqt oralig'idagi ko'chishi $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$ ga teng bo'ladi (35-shakl).

$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ nisbat *nuqtaning* Δt *vaqt oralig'idagi o'rtacha tezligini* ifodalaydi:

$$v_{o'r} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$



35-shakl

Bunda o'rtacha tezlik Δt qiymatga bog'liq bo'ladi: Δt qancha kichik bo'lsa, o'rtacha tezlik nuqtaning berilgan t vaqtdagi tezligini shuncha aniq ifodalaydi.

Harakat o'rtacha tezligining Δt vaqt oralig'i nolga intilgandagi limitiga *nuqtaning berilgan vaqtdagi harakat tezligi* (yoki *oniy tezligi*) deyiladi. Bu t ondagi tezlikni $v(t)$ bilan belgilaymiz.

U holda

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \text{yoki} \quad v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}. \tag{6.2}$$

Shunday qilib, nuqtaning berilgan t vaqtdagi harakat tezligini aniqlash uchun (6.2) limitni hisoblash kerak bo'ladi.

Kimyoviy reaksiyaga kirishish tezligi

$m = m(t)$ funksiya bilan vaqtning t onida reaksiyaga kirishuvchi kimyoviy modda miqdori aniqlanayotgan bo'lsin. Bunda t vaqtning Δt orttirmasiga m kattalikning Δm orttirmasi mos keladi va $\dfrac{\Delta m}{\Delta t}$ nisbat Δt vaqt oralig'ida kimyoviy reaksiyaning o'rtacha tezligini ifodalaydi. Bu nisbatning Δt nolga intilganidagi limiti, ya'ni

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} \quad \text{yoki} \quad v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{m(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta t} \tag{6.3}$$

kimyoviy moddaning t *ondagi reaksiyaga kirishish tezligini* aniqlaydi.

Tabiatning turli sohalariga tegishli ko'plab masalalari (6.1) - 6.3) ko'rinishdagi limitlarni topishga olib keladi. Masalan, agar $p = p(t)$ vaqtning t onida tabletkadagi dori moddasining miqdori bo'lsa, u holda *dori moddasining t ondagi erishi tezligi*

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta p}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p(t+\Delta t)-p(t)}{\Delta t} \qquad (6.4)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Ko'rilgan masalalar fizik ma'nosininig turliligiga qaramasdan, (6.1) - (6.4) limitlar bir xil ko'rinishga ega: ularda funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatining argument orttirmasi nolga intilgandagi limitini topish talab qilinadi.

2.6.2. Hosilaning ta'rifi, geometrik va mexanik ma'nolari[8]

Hosilaning ta'rifi

$y=f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda aniqlangan bo'lsin. x va x_0 bu intervalning ikkita ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin.

Argumrnt bu ikki qiymatining ayirmasiga *argumentning orttirmasi* deyiladi: $\Delta x=x-x_0$.

Funksiyaning bu nuqtalardagi qiymatlarining ayirmasiga *funksiyaning orttirmasi* deyiladi: $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

1-ta'rif. Agar $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ limit mavjud va chekli bo'lsa, bu limitga $f(x)$ *funksiyaning* x_0 *nuqtadagi hosilasi* deyiladi va u $f'(x_0)$ (yoki $y'(x_0)$ yoki $y'|_{x=x_0}$) kabi belgilanadi.

Shunday qilib,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (6.5)$$

Agar x_0 ning biror qiymatida $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty$ $\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty\right)$ bo'lsa, u holda funksiya x_0 nuqtada musbat ishorali (manfiy ishorali) cheksiz hosilaga ega deyiladi. Shu sababli 1-ta'rif bilan aniqlanadigan hosila chekli hosila deb yuritiladi.

1-misol. $f(x)=x^3$ funksiyaning $x=x_0$ nuqtadagi hosilasini toping.

Yechish. x_0 nuqtada x argumentga Δx orttirma beramiz va funksiyaning mos orttirmasini topamiz:

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^3-x_0^3=$$

$$=(x_0+\Delta x-x_0)(x_0^2+2x_0\Delta x+\Delta x^2+x_0^2+x_0\Delta x+x_0^2)=\Delta x(3x_0^2+3x_0\Delta x+\Delta x^2).$$

Orttirmalar nisbatini tuzamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=3x_0^2+3x_0\Delta x+\Delta x^2.$$

Bu nisbatning $\Delta x \to 0$ dagi limitini topamiz:

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3x_0^2 + 3x_0 \Delta x + \Delta x^2) = 3x_0^2.$$

2-ta'rif. $y = f(x)$ *funksiyaning* x_0 *nuqtadagi o'ng* (*chap*) *hosilasi* deb $f'_+(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ $\left(f'_-(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$ limitga aytiladi.

Funksiya hosilasining yuqorida keltirilgan ta'riflaridan ushbu tasdiqlar kelib chiqadi: agar funksiya x_0 nuqtada hosilaga ega bo'lsa, funksiya shu nuqtada bir-biriga teng bo'lgan o'ng va chap hosilalarga ega bo'lib, $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$ bo'ladi; agar funksiya x_0 nuqtada o'ng va chap hosilalarga ega bo'lib, $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ bo'lsa, funksiya shu nuqtada hosilaga ega va $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$ bo'ladi.

2-misol. $f(x) = |x - 3|$ funksiyaning $x_0 = 3$ nuqtadagi o'ng va chap hosilalarini toping.

Yechish. Berilgan funksiyaning $x_0 = 3$ nuqtadagi orttirmasini topamiz:

$$\Delta y = f(3 + \Delta x) - f(3) = |3 + \Delta x - 3| - |3 - 3| = |\Delta x|.$$

U holda

$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1, \quad \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Bu misolda $f'_+(0) \neq f'_-(0)$. Shu sababli $f(x) = |x - 3|$ funksiya uchun $\Delta x \to 0$ da $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ nisbatning limiti mavjud emas va $f(x) = |x - 3|$ funksiya $x_0 = 3$ nuqtada hosilaga ega bo'lmaydi.

Funksiyaning hosilasini topish amaliga *funksiyani differensiallash* deyiladi.

Hosilaning geometrik va mexanik ma'nolari

Egri chiziqqa o'tkazilgan urinma haqidagi masalada urinmaning burchak koeffitsiyenti uchun ushbu

$$k = tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

tenglik hosil qilingan edi.

Bu tenglikni $f'(x) = tg\alpha = k$ ko'inishda yozamiz, ya'ni $f'(x)$ hosila $y = f(x)$ funksiya grafigiga $M(x, f(x))$ nuqtada o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyentiga teng. Bu jumla hosilaning *geometrik ma'nosini* ifodalaydi.

To'g'ri chiziqli harakat haqidagi masalada ushbu

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

limit hosil qilingan edi.

Bu limitni $v(t)=s'(t)$ ko'rinishda yozamiz, ya'ni moddiy nuqta harakat qonunidan t vaqt bo'yicha olingan hosila nuqtaning t ondagi to'g'ri chiziqli harakati tezligiga teng. Bu jumla *hosilaning mexanik ma'nosini* ifodalaydi.

Umulashtirgan holda, agar $y=f(x)$ funksiya biror fizik jarayonni ifodalasa, u holda y' hosila bu jarayon tezligini ifodalaydi deyish mumkin. Bu jumla *hosilaning fizik ma'nosini* anglatadi.

3- misol. Tabletkadagi dori moddasining erish qonuni $c(t)=c_0e^{-kt}$ funksiya bilan ifodalanadi, bu yerda $c(t)-$ t vaqt oralig'ida erimay qolgan modda miqdori, c_0- moddanng boshlang'ich miqdori; $k-$eruvchanlik doimiyligi. Dorining erish tezligini toping va uni $c(t)$ ning funksiyasi ko'rinishida ifodalang.

Yechish. Hosilaning fizik ma'nosiga ko'ra

$$v(t)=c'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{c_0e^{-k(t+\Delta t)}-c_0e^{-kt}}{\Delta t}=c_0e^{-kt}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{e^{-k\Delta t}-1}{\Delta t}=$$

$$=(\Delta t\to 0 \ da \ e^{-k\Delta t}-1\sim -k\Delta t)=c_0e^{-kt}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{-k\Delta t}{\Delta t}=-kc_0e^{-kt}.$$

Bundan $c(t)=c_0e^{-kt}$ ni hisobga olib, topamiz:

$$v(t)=-kc_0e^{-kt}=-kc(t).$$

Funksiya grafigiga o'tkazilgan urinma va normal tenglamalari

$y=f(x)$ funksiya grafigiga $M(x_0;y_0)$(bu yerda $y_0=f(x_0)$) nuqtada o'tkazilgan urinma tenglamasini hosilaning geometrik ma'nosidan keltirib chiqaramiz. Urinma $M_0(x_0;y_0)$ nuqtadan o'tadi. Shu sababli uning tenglamasini

$$y-y_0=k(x-x_0)$$

ko'rinishda izlaymiz.

Hosilaning geometrik ma'nosiga ko'ra

$$k_{ur}=f'(x_0).$$

Bundan

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0) \tag{6.6}$$

urinma tenglamasi kelib chiqadi.

Egri chiziqqa o'tkazilgan normal deb, urinish nuqtasida urinmaga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqqa aytiladi.

Egri chiziqqa $M_0(x_0;y_0)$ nuqtada o'tkazilgan normal shu nuqtada o'tkazilgan urinmaga perpendikulyar bo'lgani sababli

$$k_{norm}=-\frac{1}{k_{ur}}=-\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Bundan, agar $f'(x_0)\neq 0$ bo'lsa

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \tag{6.7}$$

normal tenglamasi kelib chiqadi.

2.6.3. Funksiyaning differensiallanuvchiligi[8]

3-ta'rif Agar $y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi Δx orttirmaga mos orttirmasini

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \qquad (6.8)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa, $f(x)$ *funksiya* x_0 *nuqtada differensiallanuvchi* deyiladi, bu yerda $A - \Delta x$ ga bog'liq bo'lmagan son, $\alpha(\Delta x) - \Delta x \to 0$ da cheksiz cheksiz kichik funksiya, ya'ni $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Funksiyaning nuqtada differensiallanuvchanligi bilan shu nuqtadagi hosilasi orasidagi bog'lanishni aniqlaymiz.

1-teorema. $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi uchun u shu nuqtada hosilaga ega bo'lishi zarur va etarli.

Isboti. Zarurligi. $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. U holda ta'rifga ko'ra

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x).$$

Bundan

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A = f'(x_0),$$

ya'ni $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada hosilaga ega.

Etarliligi. $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada hosilaga ega bo'lsin. U holda $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. $A = f'(x_0)$ belgilash kiritamiz, bunda $\alpha(\Delta x) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} - A$ funksiya $\Delta x \to 0$ da cheksiz kichik bo'ladi.

Bundan

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

ya'ni funksiyaning x_0 nuqtada differentsiallanuvchi bo'lishi kelib chiqadi.

2-teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differentsiallanuvchi bo'lsa, u holda u shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Isboti. $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Ta'rifga ko'ra $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$. Bundan $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x) = 0$, ya'ni funksiya x_0 nuqtada uzluksiz.

Teoremaning teskarisi hamma vaqt ham o'rinli bo'lmaydi, ya'ni funksiyaning biror nuqtada uzluksiz bo'lishidan uning shu nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi hamma vaqt ham kelib chiqmaydi. Masalan, $y = |x-3|$ funksiya $x = 3$ nuqtada uzluksiz bo'lsa ham u shu nuqtada hosilaga ega emas (2-misol), ya'ni differensiallanuvchi emas.

Agar $y = f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalning ($[a;b]$ kesmaning) har bir nuqtasida hosilaga ega bo'lsa, u shu *intervalda (kesmada) differensiallanuvchi* deyiladi.

2.6.4. Funksiyaning differensiali[8]

Differensial tushunchasi

$y=f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda aniqlangan bo'lib, $x_0 \in (a;b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. U holda $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$ bo'ladi.

3-ta'rif. $y=f(x)$ funksiya orttirmasining Δx ga nisbatan chiziqli bo'lgan bosh qismi $f'(x_0)\Delta x$ ga $y=f(x)$ *funksiyaning* x_0 *nuqtadagi differensiali* deyiladi va dy (yoki $df(x)$) bilan belgilanadi:

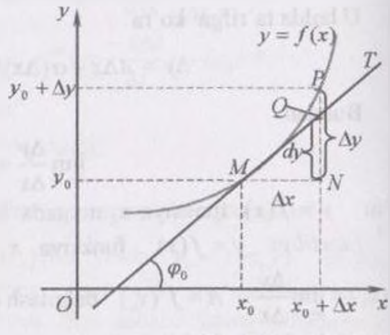
$$dy = f'(x_0)\Delta x. \tag{6.8}$$

Erkli o'zgaruvchi x ning, ya'ni $y=x$ funksiyaning differensialini topamiz $y'=x'=1$ bo'lgani uchun (1.8) formuladan $dy=dx=\Delta x$ kelib chiqadi, ya'ni erkli o'zgaruvchining differensiali uning orttirmasiga teng: $dx=\Delta x$.

Shu sababli (6.8) tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$dy = f'(x_0)dx. \tag{6.9}$$

boshqacha aytganda, *funksiyaning differensiali funksiya hosilasini bilan erkli o'zgaruvchi differensialining ko'paytmasiga teng.*



36- shakl

(6.9) tenglikdan $f'(x_0)=\dfrac{dy}{dx}$ bo'ladi, ya'ni funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi funksiyaning shu nuqtadagi differensialining argument differensialiga nisbatiga teng.

Differensialning geometrik ma'nosi

Differensialning geometrik ma'nosini aniqlaymiz. Bunig uchun $y=f(x)$ funksiya grafigiga $M_0(x_0; f(x_0))$ nuqtada MT urinma o'tkazamiz va bu urinmaning $x_0+\Delta x$ nuqtadagi ordinatasini qaraymiz (36-shakl).

MNQ uchburchakdan $NQ = tg\varphi_0 \Delta x = dy$ ekanligi kelib chiqadi.

Urinmaning geometrik ma'nosiga ko'ra $tg\varphi_0 = f'(x_0)$.

Bundan $NQ = f'(x_0)\Delta x = dy$.

Demak, $y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi differensiali funksiya grafigiga $M_0(x_0; f(x_0))$ nuqtada o'tkazilgan urinmaning orttirmasiga teng. Bu jumla *differensialning geometrik ma'nosini* ifodalaydi.

Differensialning taqribiy hisoblashlarga tatbiqi

Ko'pchilik masalalarni yechishda $y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi funksiyaning shu nuqtadagi differensialiga taqriban almashtiriladi, ya'ni $\Delta y \approx dy$ deb olinadi. Buni $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ ko'rinishda yozish mumkin.

Bunday almashtirish yordamida biror A miqdorning taqribiy qiymati quyidagi tartibda hisoblanadi:

1°. A ni x nuqtada biror $f(x)$ funksiya qiymatiga tenglashtiriladi: $A = f(x)$;

2°. x_0 nuqta x ga yaqin va $f(x_0)$ ni hisoblash qulay qilib tanlanadi;

3°. $f(x_0)$ hisoblanadi;

4°. $f'(x_0)$ hisoblanadi;

5°. x_0, $f(x_0)$, $f'(x_0)$ qiymatlar $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ formulaga qo'yiladi.

4-misol. $2{,}008^3$ ning taqribiy qiymatini toping .

Yechish.

1.° $A = 2{,}008^3$, $f(x) = x^3$ deymiz, u holda $f(x) = A$ va $x = 2{,}008$;

2°. $x_0 = 2$ deb olamiz;

3°. $f(x_0) = 2^3 = 8$;

4°. $f'(x) = 3x^2$, $f'(x_0) = 12$;

5°. $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = 8 + 12 \cdot 0{,}08 = 8{,}096$.

2.6.5. Yig'indi, ayirma, ko'paytma va bo'linmani differensiallash

Funksiyaning hosilasi ta'rifidan foydalanib ikki funksiya yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va bo'linmasini differensiallash qoidalarini keltirib chiqaramiz.

1-teorema. Agar $u = u(x)$ va $v = v(x)$ funksiyalar x nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiyalarning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va bo'linmasi (bo'linmasi $v(x) \neq 0$ shart bajarilganda) ham x nuqtada differensiallanuvchi va quyidagi formulalar o'rinli bo'ladi[8]:

$$1.\ (u \pm v)' = u' \pm v'\ ; \qquad 2.\ (u \cdot v)' = u'v + v'u; \qquad 3.\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2},\ (v \neq 0).$$

Isboti. 1. Funksiyaning hosilasi va limitlar haqidagi teoremalardan foydalanib topamiz:

$$(u \pm v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x + \Delta x) \pm v(x + \Delta x)) - (u(x) \pm v(x))}{\Delta x} =$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\pm\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'\pm v'.$$

2. Formulani isbotlashda 2.6.3. banddagi 2-teoremadan foydalanamiz: x nuqtada differensiallanuvchi $u=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiyalar shu nuqtada uzluksiz bo'ladi. Shu sababli $\Delta x\to 0$ da $\Delta u\to 0$ va $\Delta v\to 0$.

$$(u\cdot v)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(u(x)+\Delta u)\cdot(v(x)+\Delta v)-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot\Delta v+v(x)\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(v(x)\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+u(x)\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}+\Delta v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=v(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+u(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'\cdot v+u\cdot v'+0\cdot u'=u'v+v'u.$$

3. $$\left(\frac{u}{v}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x)\cdot v(x)+v(x)\cdot\Delta u-u(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot\Delta v}{\Delta x\cdot\big(v(x)+\Delta v\big)\cdot v(x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{\Delta x\cdot(v^2+v\cdot\Delta v)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\cdot\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2+v\cdot\Delta v}=\frac{v\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2+v\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v}=\frac{u'v-v'u}{v^2}.$$

2.6.6. Teskari funksiyani differensiallash

$y=f(x)$ funksiya teskari funksiya mavjudligi haqidagi teoremaning shartlarini qanoatlantirsin va $x=\varphi(y)$ teskari funksiyaga ega bo'lsin.

2-teorema. Agar $y=f(x)$ funksiya x nuqtada $f'(x)\neq 0$ hosilaga ega bo'lsa, u holda $x=\varphi(y)$ funksiya mos $y=f(x)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi va

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)},\ \text{ya'ni}\ x'_y=\frac{1}{y'_x}.$$

Isboti. $x=\varphi(y)$ funksiyaning argumenti y ga $\Delta y\neq 0$ orttirma beramiz. U holda $y=f(x)$ funksiyaning qat'iy monotonlidan $x=\varphi(y)$ funksiya $\Delta x\neq 0$

orttirma oladi. Shu sababli $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$ kabi yozish mumkin.

$x = \varphi(y)$ teskari funksiya y nuqtada uzluksiz bo'lgani uchun $\Delta y \to 0$ da $\Delta x \to 0$ bo'ladi: $\Delta x \to 0$ da oxirgi tenglikning o'ng qismi $\frac{1}{f'(x)}$ ($f'(x) \neq 0$) ga, chap qismi $\varphi'(y)$ hosilaga teng bo'ladi.

Demak,

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Shunday qilib, *teskari funksiyaning hosilasi berilgan funksiya hosilasining teskari qiymatiga teng.*

2.6.7. Murakkab funksiyani differensiallash[8]

$y = f(u)$ va $u = \varphi(x)$ bo'lsin. U holda $y = f(\varphi(x))$ funksiya erkli argumenti x dan va oraliq argumenti u dan iborat murakkab funksiya bo'ladi.

3-teorema. Agar $u = \varphi(x)$ funksiya x nuqtada $\varphi'(x)$ hosilaga va $y = f(u)$ funksiya mos $u = \varphi(x)$ nuqtada $f'(u)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda $f(\varphi(x))$ murakkab funksiya x nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi va

$$y'(x) = f'(u)\varphi'(x).$$

Isboti. $y = f(u)$ funksiya u nuqtada differensiallanuvchi bo'lgani uchun $\Delta y = f'(u)\Delta u + \alpha(\Delta u)\Delta u$ bo'ladi. Bundan $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}$.

$u = \varphi(x)$ funksiya x nuqtada hosilaga ega. Shu sababli $u = \varphi(x)$ funksiya x nuqtada uzluksiz va $\Delta x \to 0$ da $\Delta u \to 0$.

U holda

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0}\alpha(\Delta u) \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Bundan $y'(x) = f'(u) \cdot \varphi'(x) + 0 \cdot \varphi'(x)$

yoki

$$y'(x) = f'(u) \cdot \varphi'(x).$$

Shunday qilib, *murakkab funksiyaning hosilasi berilgan funksiyaning oraliq argument bo'yicha hosilasi bilan oraliq argumentning erkli argument bo'yicha hosilasining ko'paytmasiga teng.*

Bu qoida oraliq argumentlar bir nechta bo'lganda ham o'z kuchida qoladi. Masalan, $y = f(u)$, $u = g(v)$, $v = h(x)$ bo'lsa, $y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$ bo'ladi.

$y = f(u)$ va $u = \varphi(x)$ differensiallanuvchi va $y = f(\varphi(x))$ murakkab funksiyani hosil qiluvchi funksiyalar bo'lsin.

Murakkab funksiyaning hosilasi haqidagi teoremaga ko'ra $y'_x = y'_u u'_x$ bo'ladi.

Bu tenglikning har ikkala tomonini dx ga ko'paytiramiz:

$$y'_x dx = y'_u u'_x dx.$$

Endi $y'_x dx = dy$ va $u'_x dx = du$ ekanini hisobga olsak,

$$dy = y'_u du.$$

$dy = y'_x dx$ va $dy = y'_u du$ formulalarni solishtirish ko'rsatadiki, $y = f(x)$ funksiyaning differensiali argument erkli o'zgaruvchi yoki biror argumentning funksiyasi bo'lishidan qat'iy nazar bir xil formula bilan topiladi.

Differensialning bu xossasiga *differensialning invariantlik xossasi* deyiladi.

2.6.8. Asosiy elementar funksiyalarning hosilalari[II]

Asosiy elementar funksiyalarning hosilalarini topishda ekvivalent cheksiz kichik funksiyalardan, teskari va murakkab funksiyalarni differensiallash formulalaridan hamda yig'indi, ayirma, ko'paytma va bo'linmani differensiallash qoidalaridan foydalanamiz.

1. ***O'zgarmas funksiya***: $y = C\,(C \in R)$.

O'zgarmas funksiya $x \in R$ da o'zining qiymatini saqlagani uchun ixtiyoriy nuqtada uning orttirmasi nolga teng bo'ladi. Shu sababli

$$(C)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

2. ***Darajali funksiya***: $y = x^\alpha$, bunda $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$.

Bu funksiya uchun $x > 0$ da $\Delta y = (x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha = x^\alpha\left(\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1\right)$

bo'ladi. Bundan

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = x^\alpha \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{\Delta x}.$$

Endi $\Delta x \to 0$ da $\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1 \sim \alpha \dfrac{\Delta x}{x}$ ekanligini hisobga olsak,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = x^\alpha \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{\Delta x} = x^\alpha \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \Delta x}{\Delta x \cdot x} = x^\alpha \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$$

bo'ladi. Demak,

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Xususan, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

3. ***Korsatkichli funksiya***: $y = a^x$, bunda $a \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Bu funksiyaning orttirmasi $\Delta y = a^{x + \Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$ bo'lgani uchun

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ bo'ladi. Bundan $\Delta x \to 0$ da $a^{\Delta x} - 1 \sim \Delta x \ln a$ ekanini hisobga olsak,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \ln a}{\Delta x} = a^x \ln a$$

bo'ladi. Demak,

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Xususan, $(e^x)' = e^x$.

4. *Logorifmik funksiya*. $y = \log_a x$, bunda $a \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$.

$y = \log_a x$ funksiya $x = a^y$ funksiyaga teskari funksiya. Bunda oldingi banddagi formulaga ko'ra $x'(y) = a^y \ln a$.

U holda

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Demak,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Xususan, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

5. *Trigonometrik funksiyalar*. 1°. $y = \sin x$ funksiyaning orttirmasi

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}.$$

Bu tenglikdan $\Delta x \to 0$ da $\sin\frac{\Delta x}{2} \sim \frac{\Delta x}{2}$ ni hisobga olib, topamiz:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos(x + 0) = \cos x.$$

Demak,

$$(\sin x)' = \cos x.$$

2°. $y = \cos x$ funksiyaning hosilasini murakkab funksiyaning hosilasi formulasidan foydalanib topamiz:

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\sin x.$$

Demak,

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

3°. $y=tgx$ funksiyaning hosilasini bo'linmaning hosilasi formulasidan foydalanib topamiz:

$$(tgx)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Demak,

$$(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

4°. $y=ctgx$ funksiyaning hosilasini topishda murakkab funksiyaning hosilasi formulasidan foydalanamiz:

$$(ctgx)'=\left(tg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)'=\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\cdot(-1)=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Demak,

$$(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

6. *Teskari trigonometrik funksiyalar.*

1°. $y=\arcsin x$ funksiya $x=\sin y$ funksiyaga teskari.

Bunda $x'(y)=\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$.

U holda

$$y'(x)==\frac{1}{x'(y)}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Demak,

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2°. $y=\arccos x$ funksiyaning hosilasini $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$ formuladan foydalanib topamiz:

$$(\arccos x)'=\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x\right)'=-(\arcsin x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Demak,

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3°. $y=arctgx$ funksiyaning hosilasini teskari funksiyaning hosilasi formulasidan foydalanib topamiz:

$$(arctgx)'=\frac{1}{(tgy)'}=\cos^2 y=\frac{1}{1+tg^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

Demak,

$$(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}.$$

4°. $arctgx$ va $arcctgx$ funksiyalar $arctgx + arcctgx = \frac{\pi}{2}$ bog'lanishga ega. Bundan

$$(arcctgx)' = \left(\frac{\pi}{2} - arcctgx\right)' = -(arctgx)' = -\frac{1}{1+x^2},$$

$$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

2.6.9. Differensiallash qoidalari va hosilalar jadvali

Keltirib chiqarilgan differensiallash qoidalarini va asosiy elementar funksiyalarning hosilalari formulalarini jadval ko'rinishida yozamiz.

Amalda ko'pincha murakkab funksiyalarning hosilalarini topishga to'g'ri keladi. Shu sababli quyida keltiriladigan formulalarda "x" argument "u" oraliq argumentga almashtiriladi.

Differensiallash qoidalari:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$, $u = u(x)$, $v = v(x)$ – differensiallanuvchi funksiyalar;
2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, xususan $(Cu)' = Cu'$, C – o'zgarmas son;
3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, xususan $\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2}$;
4. $y'_x = \frac{1}{x'_y}$, agar $y = f(x)$ va $x = \varphi(y)$;
5. $y'_x = y'_u u'_x$, agar $y = f(u)$ va $u = \varphi(x)$.

Asosiy elementar funksiyalarning hosilalar jadvali:

1. $(C)' = 0$; 2. $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$;
3. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$, xususan $(e^u)' = e^u \cdot u'$;
4. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$, xususan $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$;
5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$; 6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;
7. $(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$; 8. $(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;
9. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$; 10. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
11. $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$; 12. $(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

Keltirilgan diferensiallash qoidalari va asosiy elementar funksiyalarning hosilalar jadvali bir o'zgaruvchi funksiyasi differensial hisobining asosini tashkil qiladi. Ularni bilgan holda har qanday elementar funksiyaning hosilasini topish mumkin. Bunda yana elementar funksiya hosil bo'ladi.

5-misol. $f(x) = 5^x + \arcsin x + x\ln x$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. Hosilani topishda differensiallashning 1,2 qoidalari va 3,4,9 formulalaridan foydalanildi.

$$f'(x) = (5^x + \arcsin x + x\ln x)' = (5^x)' + (\arcsin x)' + (x\ln x)' = 5^x \ln 5 +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + x'\ln x + x(\ln x)' = 5^x \ln 5 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \ln x + x \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= 5^x \ln 5 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \ln x + 1.$$

2.6.10. Yuqori tartibli hosilalar va differensiallar

Yuqori tartibli hosilalar

$f(x)$ funksiya biror $(a;b)$ intervalda aniqlangan bo'lib, shu intervalda differensiyallanuvchi bo'lsin. U holda $f'(x)$ hosila $x \in (a,b)$ ning funksiyasi bo'ladi. Shu sababli bu funksiya uchun hosilaning mavjudligi va uni hisoblash masalalarsini qarash mumkin.

$f'(x)$ ga *birinchi tartibli hosila* deyiladi. $f(x)$ funksiyaning $f'(x)$ hosilasidan olingan hosilaga *ikkinchi tartibli hosila* deyiladi. Ikkinchi tartibli hosila mavjud bo'lsa, bu hosiladan olingan hosila *uchinchi tartibli hosila* deyiladi va hokazo. Bunday hosilalar ikkinchi tartiblidan boshlab *yuqori tartibli hosila* deyiladi va $y'', y''', y^{(4)}, \ldots, y^{(n)}, \ldots$ (yoki $f''(x), f'''(x), f^{IV}(x), \ldots, f^{(n)}(x), \ldots$ yoki $\left(\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}, \ldots\right)$) kabi belgilanadi.

6-misol. $y = x^3 \ln x$ bo'lsa, $y^{(4)}(3)$ ni toping.

Yechish. $y' = (x^3)'\ln x + x^3(\ln x)' = 3x^2 \ln x + x^3 \frac{1}{x} = x^2(3\ln x + 1);$

$$y'' = (x^2(3\ln x + 1))' = (x^2)'(3\ln x + 1) + x^2(3\ln x + 1)' =$$

$$= 2x(3\ln x + 1) + x^2 \cdot \frac{3}{x} = x(6\ln x + 5);$$

$$y''' = (x(6\ln x + 5))' = x'(6\ln x + 5) + x(6\ln x + 5)' = 6\ln x + 5 + x \cdot \frac{6}{x} = 6\ln x + 11;$$

$$y^{(4)} = (6\ln x + 11)' = \frac{6}{x}. \quad \text{Bundan} \quad y^{(4)}(3) = \frac{6}{3} = 2.$$

Ikkinchi tartibli hosilaning mexanik ma'nosi

M moddiy nuqta $s = s(t)$ qonun bilan to'g'ri chiziqli harakat qilsin. U holda $s_t'(t)$ moddiy nuqtaning t vaqtdagi tezligini ifodalaydi: $s_t'(t) = v(t)$.

Nuqtaning t vaqtdagi tezligi $v(t)$, $t + \Delta t$ vaqtdagi tezligi $v(t) + \Delta v$ bo'lsin, ya'ni Δt vaqt oralig'ida nuqtaning tezligi Δv ga o'zgarsin.

$\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ nisbat *to'g'ri chiziqli harakatda nuqtaning Δt vaqt oralig'idagi o'rtacha tezlanishini* ifodalaydi. Bu nisbatning $\Delta t \to 0$ dagi limiti M nuqtaning berilgan t vaqtdagi tezlanishi deyiladi va u $a(t)$ bilan belgilanadi: $\lim\limits_{\Delta t \to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta t} = a(t)$, ya'ni $v'(t) = a(t)$. Shu sababli

$$a(t) = s_t''(t).$$

Demak, moddiy nuqta harakat qonunidan t vaqt bo'yicha olingan ikkinchi tartibli hosila to'g'ri chiziqli harakatda nuqtaning t vaqtdagi tezlanishiga teng. Bu tasdiq *ikkinchi tartibli hosilaning mexanik ma'nosini* ifodalaydi.

Yuqori tartibli differensiallar

Biror $(a;b)$ intervalda differensiyallanuvchi $y = f(x)$ funksiyaning $dy = y'(x)dx$ differensiyali *birinchi tartibli differensial* deyiladi. U holda

$$d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)' dx = f''(x)dx \cdot dx$$

differensialga *ikkinchi tartibli differensial* deyiladi va

$$d^2y = f''(x)dx^2$$

kabi yoziladi, bu yerda dx^2 bilan $(dx)^2$ belgilanadi.

Ikkinchi tartibli differensialdan olingan differensial *uchinchi tartibli differensial* deyiladi va hokazo. *n-tartibli differensial* deb $(n-1)$-tartibli differensialdan olingan differensialga aytiladi va $d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$ kabi yoziladi.

Bundan $y^{(n)}(x) = \dfrac{d^n y}{dx^n}$, ya'ni $y = f(x)$ funksiyaning n-tartibli hosilasi funksiya n-tartibli differensialning argument differensialining n-darajasiga nisbatiga teng bo'lishi kelib chiqadi.

7- misol. $y = x^4 + 3x - 1$ bo'lsa, d^3y ni toping.

Yechish. $y' = 4x^3 + 3$, $y'' = 12x^2$, $y''' = 24x$. Bundan

$$d^3y = y'''(x)dx^3 = 24xdx^3.$$

2.6.11. Mashqlar

2.6.1. Hosila ta'rifidan foydalanib funksiyalarning hosilasini toping:

1) $f(x) = \sqrt{3x-1}$; 2) $f(x) = \ln 2x$;

3) $f(x) = e^{-3x}$, $x_0 = 0$; 4) $f(x) = \ln(1-4x)$, $x_0 = 0$.

2.6.2. Berilgan funksiyalarning $f'_-(x_0)$ va $f'_+(x_0)$ hosilalarini toping:

1) $f(x)=|3x-2|,\ x_0=\dfrac{2}{3};$ 2) $y=\begin{cases} x \ agar \ x\le 2 \ bo'lsa, \\ -x^2+3x \ agar \ x<2 \ bo'lsa, x_0=2. \end{cases}$

2.6.3. Moddiyl nuqta Ox o'qi bo'ylab $x=\dfrac{t^3}{3}-2t^2+3t$ qonun bilan harakatlanmoqda. Qaysi nuqtalarda nuqtaning harakat yo'nalishi o'zgaradi?

2.6.4. Moddiy nuqta $s=s(t)$ qonun bilan to'g'ri chiziqli harakat qilmoqda. Qaysi vaqtda material nuqtaning tezlanishi $a(m/c^2)$ ga teng bo'ladi?

1) $s(t)=2t^3-\dfrac{5}{2}t^2+3t+1(m),\ a=19;$ 2) $s(t)=t^3+\dfrac{3}{2}t^2-4t+3(m),\ a=9.$

2.6.5. O'tkazgich orqali o'tuvchi tok miqdori $t=0$ vaqtdan boshlab $q=3t^2-1$ qonun bilan aniqlanadi. Ikkinchi sekund oxiridagi tok kuchini aniqlang.

2.6.6. Kimyoviy reaksiyada modda miqdori $Q(t)=m(1+ae^{-bt})$ qonun bilan o'zgaradi. Kimyoviy reaksiya tezligini $Q(t)$ ning funksiyasi sifatida aniqlang.

2.6.7. Bakteriya kun davomida $p(t)=10^6+10^4t-10^3t^2$ qonun bilan ko'payadi. Bakteriyaning ko'payish tezligini aniqlang.

2.6.8. Ko'p qon yo'qotganligi sababli bemor qonidagi temir miqdori 210 *mg*. kamaygan. Qon tiklanishining yetishmovchiligi t sutka davomida $p(t)=210e^{-\frac{t}{7}}$ qonun bilan kamayadi. Bemor qonidagi temir miqdorining vaqt bo'yicha tiklanish tezligini toping. Bu tezlikning boshlang'ich (qon quyilishi) vaqtidagi va 7 cutkadan keyingi qiymatini hisoblang.

2.6.9. Differensiallash qoidalari va formulalaridan foydalanib berilgan funksiyalarning hosilasini toping:

1) $y=3x^4-\dfrac{1}{3}x^3+\ln 2;$ 2) $y=\dfrac{1}{6}x^6+3x^4-2x;$

3) $y=\dfrac{2}{\sqrt{x}}+3\sqrt[3]{x}-\dfrac{6}{\sqrt[3]{x^2}};$ 4) $y=\sqrt{x}-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{3x^3};$

5) $y=(x-5)^4(x+3)^5;$ 6) $y=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3}{x^3};$

7) $y=\sqrt[3]{(4x+3)^2};$ 8) $y=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+3}};$

9) $y=\dfrac{2^x+3^x}{2^x-3^x};$ 10) $y=\dfrac{\ln x+e^x}{\ln x-e^x};$

11) $y=\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x};$ 12) $y=\dfrac{1+tgx}{1-tgx};$

13) $y=tgx-ctgx;$ 14) $y=\dfrac{x\sin x-\cos x}{x\cos x+\sin x};$

15) $y=\log_x e;$ 16) $y=4\sin^2 x-3\lg x+4\cos^2 x;$

17) $y=\sqrt{4-3x^2};$ 18) $y=\arcsin\sqrt{x};$

19) $y=\cos^4 x-\sin^4 x;$ 20) $y=\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{x-3}{x+3};$

21) $y=e^{x\ln x};$ 22) $y=e^{-x}(\sin x+\cos x);$

2.6.10. Berilgan $x=\varphi(y)$ funksiyalar uchun y' hosilani toping:

1) $x=\dfrac{1-y}{1+y}$; 2) $x=e^{-y}$; 3) $x=2\sin y$; 4) $x=3\,ctg\,y$.

2.6.11. Quyidagi sonlarni differensial yordamida taqriban hisoblang:

1) $\sqrt[3]{33}$; 2) $\ln 1{,}007$; 3) $\cos 61^\circ$; 4) $\sqrt[5]{1{,}03}$.

2.6.12. Quyidagi funksiyalarning berilgan nuqtadagi taqribiy qiymatini differensial yordamida hisoblang:

1) $y=\sqrt{x^2-7x+10},\ \ x=0{,}98$; 2) $y=\sqrt[4]{2x-\sin\dfrac{\pi x}{2}},\ \ x=1{,}02$.

2.6.13. Berilgan funksiyalarning birinchi tartibli differensialini toping:

1) $y=x(\ln x-1)$; 2) $y=\dfrac{\ln x}{x}$; 3) $y=\cos^2 2x$; 4) $y=\ln^3\cos x$.

2.6.14. Berilgan funksiyalarning ikkinci tartibli hosilalarini toping:

1) $y=\sin x^3$; 2) $y=\cos\dfrac{1}{x}$; 3) $y=e^{tgx}$; 4) $y=\ln^3 x+\ln x^3$.

2.6.15. Berilgan hosilalar uchun y^{IV} ni toping:

1) $y=x^3\ln x$; 2) $y=\dfrac{1}{1-x}$; 3) $y=e^{3x-1}$; 4) $y=xe^x$.

2.6.16. Berilgan egri chiziqqa $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada o'tkazilgan urinma va normal tenglamalarini tuzing:

1) $y=\dfrac{x^3}{3},\ M_0\left(-1,-\dfrac{1}{3}\right)$; 2) $y=\sin x,\ M_0(\pi,0)$.

2.7. DIFFERENSIAL HISOBNING ASOSIY TEOREMALARI

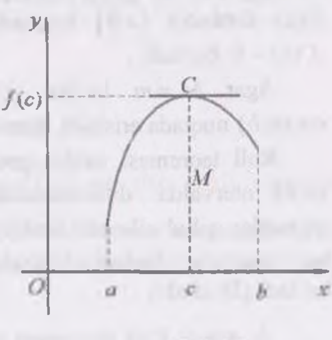
2.7.1. Ferma teoremasi[*]

Differensiallanuvchi funksiyalarning nazariy va amaliy ahamiyatga ega bo'lgan teoremalari bilan tanishamiz.

1-teorema (*Ferma teoremasi*). $f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda aniqlangan bo'lib, bu intervalning biror c nuqtasida o'zining eng katta (eng kichik) qiymatiga ega bo'lsin. Agar funksiya c nuqtada chekli hosilaga ega bo'lsa, u holda

$$f'(c)=0$$

bo'ladi.



37-shakl

Isboti. Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya $c\in(a;b)$ nuqtada o'zining eng katta qiymatiga ega bo'lsin. U holda $\forall x\in(a;b)$ uchun $f(x)\le f(c)$, ya'ni $f(x)-f(c)\le 0$ bo'ladi.

$y=f(x)$ funksiya c nuqtada hosilaga ega. Shu sababli bu nuqtada funksiyaning o'ng va chap hosilalari mavjud va

$$f'_{+}(c)=\lim_{x\to c+0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\le 0\ (x>c), \qquad (7.1)$$

$$f'_{-}(c)=\lim_{x\to c-0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\ge 0\ (x<c), \qquad (7.2)$$

$$f'_{+}(c)=f'_{-}(c)=f'(c) \qquad (7.3)$$

bo'ladi.

(7.1), (7.2) va (7.3) munosabatlardan $f'(c)=0$ bo'lishi kelib chiqadi.

Funksiya c nuqtada eng kichik qiymatga ega bo'lgan hol uchun teorema shu kabi isbotlanadi.

Ferma teoremasining geometrik talqini quyidagicha bo'ladi: $y=f(x)$ funksiya c nuqtada eng katta (eng kichik) qiymatga erishsa va $f'(c)$ hosila mavjud bo'lsa, $f(x)$ funksiya grafigiga $M(c;f(c))$ nuqtada o'tkazilgan urinma Ox o'qqa parallel bo'ladi (37-shakl).

$[a;b]$ kesma uchun Ferma teoremasi hamma vaqt ham o'rinli bo'lmaydi. Masalan, $f(x)=x$ funksiya $[0;1]$ kesmada o'zining eng katta ($x=1$ da) va eng kichik ($x=0$ da) qiymatiga erishadi. Bu nuqtalarda hoisla $f'(x)=1\ne 0$.

2.7.2. Roll teoremasi[8]

2-teorema (*Roll teoremasi*). $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan, uzluksiz va $f(a)=f(b)$ bo'lsin. Agar funksiya $(a;b)$ intervalda differensiallanuvchi bo'lsa, u holda shunday $c\in(a;b)$ nuqta topiladiki,

$$f'(c)=0$$

bo'ladi.

Isboti. Shartga ko'ra $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz. U holda Veershtrassning 2-teoremasiga ko'ra funksiya shu kesmada o'zining eng katta qiymati M ga va eng kichik qiymati m ga erishadi. Bunda $M=m$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada o'zgarmas va shu sababli $\forall x\in(a;b)$ uchun $f'(x)=0$ bo'ladi.

Agar $M\ne m$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya M va m qiymatlardan biriga biror $c\in(a;b)$ nuqtada erishadi. Bunda Ferma teoremasiga asosan $f'(c)=0$ bo'ladi.

Roll teoremasi ushbu geometrik talqinga ega: $[a;b]$ kesmada uzluksiz, $(a;b)$ ntervalda differensiallanuvchi va kesmaning chetki nuqtalarida teng qiymatlar qabul qiluvchi funksiya grafigida shunday $(c;f(c))$ nuqta topiladi va bu nuqtada funksiya grafigiga o'tkazilgan urinma Ox o'qiga parallel bo'ladi (38-shakl).

1- misol. Roll teoremasi o'rinli bo'lishini tekshiring: 1) $f(x)=x^2-3x-4$ funksiya uchun $[0;3]$ kesmada; 2) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-1$ funksiya uchun $[-1;1]$ kesmada.

Yechish. 1) $f(x)=x^2-3x-4$ funksiya $[0;3]$ kesmada uzluksiz, differensiallanuvchi va uning chetki nuqtalarida bir xil qiymatga ega: $f(0)=f(3)=-4$. Shu sababli, bu funksiya uchun Roll teoremasi o'rinli bo'ladi. x ning $f'(x)=0$ bo'lgan qiymatini topamiz: $f'(x)=4x-3=0$. Bundan $x=\frac{3}{4}$.

2) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-1$ funksiya $[-1;1]$ kesmada uzluksiz, $f(-1)=f(1)=0$, $f'(x)=\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Bu hosila $x=0\in(-1;1)$ nuqtada mavjud emas. Demak, bu funksiya uchun Roll teoremasi o'rinli bo'lmaydi.

2.7.3. Lagranj teoremasi[8]

3-teorema (*Lagranj teoremasi*). $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. Agar funksiya $(a;b)$ intervalda chekli hosilaga ega bo'lsa, u holda shunday $c\in(a;b)$ nuqta topiladiki,

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{7.4}$$

bo'ladi.

Isboti. Teoremani isbotlash uchun yordamchi

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$$

funksiyadan foydalanamiz. Shartga ko'ra $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan, uzluksiz va $(a;b)$ intervalda hosilaga ega bo'lgani uchun $F(x)$ funksiya ham $[a;b]$ kesmada aniqlangan, uzluksiz va $(a;b)$ intervalda hosilaga ega bo'ladi. Bunda

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\quad F(a)=F(b)=0. \tag{7.5}$$

Demak, $F(x)$ funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. U holda biror $c\in(a;b)$ nuqta uchun $F'(c)=0$, $f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$ bo'ladi. Bundan $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Teoremaning geometrik talqinini beramiz.

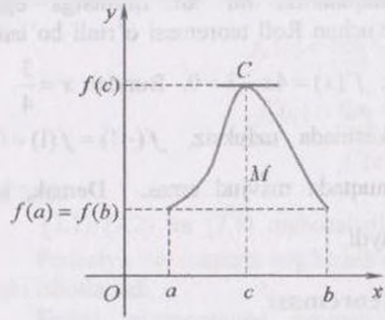
$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ qiymat funksiya grafigining $A(a;f(a))$ va $B(b;f(b))$ nuqtalari orqali o'tivchi kesuvchining burchak koeffitsiyentini aniqlaydi. Teoremaga ko'ra shunday $c\in(a;b)$ topiladiki, $C(c;f(c))$ nuqtada funksiya grafigiga o'tkazilgan urinma AB kesuvchiga parallel bo'ladi (39-shakl).

(7.4) tenglikdan

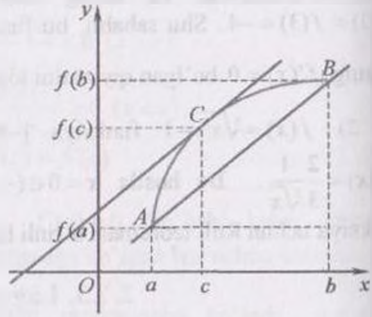
$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \tag{7.6}$$

kelib chiqadi.

Bu formulaga *Lagranj formulasi* yoki *chekli ayirmalar formulasi* deyiladi.



38-shakl



39-shakl

Agar $a = x$, $b = x + \Delta x$ desak, Lagranj formulasini

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(c)\Delta x \tag{7.7}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

$c \in (a;b)$ bo'lgani uchun $c = a + \theta(b-a)$, $0 < \theta < 1$, deyish mumkin.

U holda (7.7) tenglik

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x+\theta\Delta x)\Delta x$$

ko'rinishni oladi.

Langranj teoremasi yordamida $\Delta y \approx dy$ taqribiy tenglikning aniqligini baholash mumkin. Buning uchun $f(x)$ funksiya ikkinchi tartibli uzluksiz $f''(x)$ hosilaga ega bo'lsin deb, topamiz:

$$\Delta y - dy = (f(x+\Delta x) - f(x)) - f'(x)dx = f'(c)\Delta x - f'(x)\Delta x =$$
$$= (f'(c) - f'(x))\Delta x = f''(c_1)(c-x)\Delta x, \text{ bu yerda } c_1 \in (c;x).$$

Demak, $\Delta y - dy = f''(c_1)(c-x)\Delta x$. $M = \max\limits_{[x;x+\Delta x]} |f''(x)|$ bo'lsin.

$|c - x| < \Delta x$ va $f''(c_1) \le M$ tengsizliklarni hisobga olib, topamiz:

$$|\Delta y - dy| \le M\,|\Delta x|^2.$$

Lagranj teoremasidan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

1-natija. Agar biror intervalda funksiyaning hosilasi nolga teng bo'lsa, funksiya shu intervalda o'zgarmas bo'ladi.

2-natija. Agar biror intervalda ikkita funksiya teng hosilalarga ega bo'lsa, funksiyalar bir-biridan o'zgarmas qo'shiluvchiga farq qiladi.

2- misol. $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$, $x \in [-1;1]$ ekanini isbotlang.

Yechish. $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ deb olsak, $(-1;1)$ oraliqda

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

U holda 1-natijaga ko'ra $f(x)=C$, ya'ni $\arcsin x+\arccos x=C$. C ning qiymatini topish uchun x ga $(-1;1)$ intervaldagi qiymatlardan birini, masalan, $x=0$ ni qo'yamiz: $\arcsin 0+\arccos 0=C$ yoki $\frac{\pi}{2}=C$. Bundan

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

2.7.4. Koshi teoremasi[8]

4-teorema (*Koshi teoremasi*). $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a;b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. Agar funksiyalar $(a;b)$ intervalda differensiallanuvchi va $\forall x\in(a;b)$ uchun $g'(x)\neq 0$ bo'lsa, u holda shunday $c\in(a;b)$ nuqta topiladi va

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{7.8}$$

bo'ladi.

Isboti. Teoremaning $g'(x)\neq 0$ shartiga ko'ra (7.8) tenglik ma'noga ega bo'lishi uchun $g(b)\neq g(a)$ bo'lishi kerak. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalardan ushbu

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot(g(x)-g(a))$$

funksiyani tuzamiz. Bu funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan, uzluksiz va $(a;b)$ intervalda hosilaga ega. Bundan tashqari

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(x)$$

va $F(a)=F(b)=0$ bo'ladi.

Demak, $F(x)$ funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi va biror $c\in(a;b)$ nuqta uchun $F'(c)=0$, ya'ni

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c)=0$$

bo'ladi. Bundan

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

2.7.5. Lopital teoremasi[8]

5-teorema $\left(\frac{0}{0}\right.$ *ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochishning Lopital qoidasi*$\left.\right)$.

x_0 nuqtaning biror atrofida $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalkar uzluksiz, differensiallanuvchi va $g'(x)\neq 0$ bo'lsin. Agar $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ va $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$

va $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=k$ (chekli yoki cheksiz) limit mavjud bo'lsa, u holda

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{7.9}$$

bo'ladi.

Isboti. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun x_0 nuqtaning biror atrofida yotuvchi $[x_0;x]$ kesmada Koshi teoremasini qo'llaymiz.

Bunda $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ va $f(x_0)=g(x_0)=0$ hisobga olinsa,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{7.10}$$

hosil bo'ladi, bu yerda c nuqta x va x_0 nuqtalar orasida yotuvchi biror son.

$x\to x_0$ da c ham x_0 ga intiladi. (7.10) tenglikda limitga o'tamiz:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\to x_0}\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=k$ ekanidan $\lim\limits_{c\to x_0}\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=k$. Shu sababli $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Izohlar: 1. 1-teorema $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalkar $x=x_0$ da aniqlanmagan, ammo $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ va $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$ bo'lganda ham o'rinli bo'ladi. Bunda $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ va $g(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$ deb olish etarli.

2. 1-teorema $x\to\infty$ da ham o'rinli bo'ladi. Haqiqatdan ham $x=\dfrac{1}{z}$ deb, topamiz:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{z\to0}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{z\to0}\frac{\left(f\left(\frac{1}{z}\right)\right)'}{\left(g\left(\frac{1}{z}\right)\right)'}=\lim_{z\to0}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

3. $f'(x)$ va $g'(x)$ funksiyalar 1-teoremaning shartlarini qanoatlantirsa, teorema takror qo'llanishi mumkin:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

3- misol. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$ limitni toping.

Yechish. $f(x)=x^2-1+\ln x$, $g(x)=e^x-e$ funksiyalar $x=1$ nuqta atrofida aniqlangan. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} g(x)=0$, ya'ni $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslik berilgan. U holda 1-teoremaga ko'ra

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x}=\frac{3}{e}.$$

Demak,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\frac{3}{e}.$$

$\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochish haqidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

6-teorema $\left(\frac{\infty}{\infty}\right.$ *ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochishning Lopital qoidasi*$\left.\right)$. x_0 nuqtaning biror atrofida $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalkar uzluksiz, differensiallanuvchi va $g'(x)\neq 0$ bo'lsin. Agar $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$ bo'lib, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ limit mavjud bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ bo'ladi.

4- misol. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$ limitni toping.

Yechish. $$\lim_{x\to a}\frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{x-a}}{\frac{e^x}{e^x-e^a}}=\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{e^x(x-a)}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{e^x}{e^x(x-a)+e^x}=\lim_{x\to a}\frac{1}{1+(x-a)}=\frac{1}{1+(a-a)}=\frac{1}{1+0}=1.$$

$\frac{0}{0}$ va $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmasliklarga asosiy aniqmasliklar deyiladi.

$0\cdot\infty$ yoki $\infty-\infty$ ko'rinishdagi aniqmasliklar algebraik almashtirishlar yordamida asosiy aniqmasliklarga keltiriladi.

0^0, ∞^0 yoki 1^∞ ko'rinishdagi aniqmasliklar $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$ formula yordamida $0\cdot\infty$ aniqmaslikka keltiriladi.

5- misol. $\lim\limits_{x\to 0} x^3\ln x$ limitni toping.

Yechish. $$\lim_{x\to 0}x^3\ln x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-3\frac{1}{x^4}}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}x^3=0.$$

6- misol. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-ctgx\right)$ limitni toping.

Yechish. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-ctgx\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sin x+x\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0.$$

7- misol. $\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}$ limitni toping.

Yechish. $\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}=(0^0)=\lim\limits_{x\to 0}e^{\ln x^{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\sin x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}}=$

$$=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\cos x}{\sin^2 x}}}=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}}=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\left(tgx\cdot\frac{\sin x}{x}\right)}=e^0=1.$$

2.7.6. Teylor teoremasi[8]

7-teorema (*Teylor teoremasi*). $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lib, bu atrofda $(n+1)$-tartibligacha hosilalarga ega va $f^{(n+1)}(x)$ hosila x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsin. U holda

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{7.11}$$

bo'ladi, bunda $c=x_0+\theta(x-x_0)$, $0<\theta<1$.

(7.11) tenglikka *Teylor formulasi* deyiladi.

Isboti. Avval

$$\varphi(x,x_0)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

$$R_{n+1}(x)=f(x)-\varphi(x,x_0)$$

belgilashlar kiritamiz. Bunda biror c son uchun $R_{n+1}(x)=\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ bo'lishi ko'rsatilsa teorema isbot bo'ladi.

Endi x_0 nuqtaning atrofida x ($x>x_0$ bo'lsin) nuqtani tanlaymiz va $[x_0;x]$ kesmada

$$F(t)=f(x)-\varphi(x,t)-\frac{(x-t)^{n+1}R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}},\ t\in[x_0;x]$$

yordamchi funksiyani tanlaymiz.

$F(t)$ funksiya $[x_0;x]$ kesmada usluksiz va differensiallanuvchi va

$$F'(t)=-f'(t)+\frac{f'(t)}{1!}-\frac{f''(t)}{1!}(x-t)+\frac{f''(t)}{2!}2(x-t)-\frac{f'''(t)}{3!}(x-t)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(x-t)^{n-1}-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+\frac{(n+1)(x-t)^n R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=$$

$$=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+\frac{(n+1)(x-t)^n R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}}. \qquad (7.12)$$

$t=x_0$ da $F(x_0)=f(x)-\varphi(x,x_0)-R_{n+1}(x)=R_{n+1}(x)-R_{n+1}(x)=0$ va $t=x$ da

$$F(x)=f(x)-f(x)-\frac{f'(x)}{1!}(x-x)-\ldots-\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-x)^n-\frac{(x-x)^{n+1}R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=0.$$

Demak, $F(t)$ funksiya $[x_0;x]$ kesmada Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. U holda shunday c $(x_0<c<x)$ nuqta topiladiki, $F'(c)=0$ bo'ladi

(7.12) tenglikka ko'ra $\quad -\dfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-c)^n+\dfrac{(n+1)(x-c)^n R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=0.$

Bundan

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

$$\varphi(x,x_0)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

ko'phadga n-tartibli *Teylor ko'phadi*, $R_{n+1}(x)=\dfrac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ ga Teylor formulasining *Lagranj ko'rinishdagi qoldiq hadi* deyiladi.

$n=0$ da Teylor formulasidan $f(x)=f(x_0)+f'(c)(x-x_0)$ yoki $f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0)$ tenglik, ya'ni Lagranj formulasi kelib chiqadi. Demak, Lagranj formulasi Teylor formulasining hususiy holi bo'ladi.

$x_0=0$ da Teylor formulasining xususiy hollaridan yana biri

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots+=\frac{f^{(n+1)}(cx)}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0<c<1$$

hosil bo'ladi. Bu formulaga *Maklorei formulasi* deyiladi.

Ayrim funksiyalarning Makloren formulasiga yoyilmasini keltiramiz:

1. $e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+\dfrac{e^{cx}}{(n+1)!}x^{n+1},\quad x\in R$;

2. $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+(-1)^n\sin cx\dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!},\quad x\in R;$

3. $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+(-1)^{n+1}\cos cx\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad x\in R;$

$$4.\ (1+x)^m = 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^2+$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)!}(1+cx)^{m-n+1}x^{n+1},\ x\in(-1;1);$$

Xususan, $n=m$ da

$$(1+x)^n = 1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-(n-2))}{(n-1)!}x^{n-1}+x^n.$$

Formulalardan ba'zilarining isbotini keltiramiz.

1. $f(x)=e^x$ bo'lsin.

U holda

$$f(x)=f'(x)=f''(x)=\ldots=f^{(n+1)}(x)=e^x,$$
$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(n+1)}(0)=1.$$

Makloren formulasi quyidagi ko'rinishga keladi:

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}. \qquad (7.13)$$

2. $f(x)=\sin x$ bo'lsin.

U holda

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),\quad f^{(n)}(0)=\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0, & n\ \textit{juft bo'lsa},\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & n\ \textit{toq bo'lsa}.\end{cases}$$

Bundan

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+(-1)^n\sin cx\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

4. $f(x)=(1+x)^m$ bo'lsin.

U holda

$$f^{(n)}(x)=m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n+1},$$
$$f^{(n)}(0)=m(m-1)\ldots(m-n+1).$$

Bundan

$$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^2+$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)!}(1+cx)^{m-n+1}x^{n+1},\ x\in(-1;1).$$

Teylor formulasi funksiyalar qiymatlari va limitlarini berilgan aniqlikda hisoblash imkonini beradi. Masalan, $f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtadagi qiymatini xatoligi ε dan katta bo'lmagan aniqlikda hisoblash uchun Teylor ko'phadini shunday k darajasigacha olinadiki, bunda k son $|R_n(a)|<\varepsilon$ tengsizlikni qanoatilaniradigan n larning eng kichigi qilib tanlanadi.

8- misol. e sonini 0,001 aniqlikda hisoblang.

Yechish. $f(x)=e^x$ funksiyani qaraymiz. Shartga ko'ra $x=a=1$, $\varepsilon=0{,}001$.

(7.13) formulaga binoan n ning $R_n(1)=\dfrac{e^c}{(n+1)!}<\varepsilon=0{,}001$ shartni qanoatlantiruvchi eng kichik qiymati $n=6$, bunda $0<c<1$.

Demak,

$$e\approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{6!}=$$

$$=2+0{,}5+0{,}16667+0{,}04167+0{,}00833+0{,}00139=2{,}718.$$

2.7.7. Mashqlar

2.7.1. Funksiya uchun berilgan kesmada Roll teoremasi o'rinli bo'lishini tekshiring. Agar o'rinli bo'lsa, teoremadagi c ning tegishli qiymatini toping:

1) $f(x)=4x-x^3+5,\ [0;2]$;
2) $f(x)=2-\sqrt[5]{x^2},\ [-1;1]$.

2.7.2. Funksiya uchun berilgan kesma uchun Lagranj formulasidagi c ning tegishli qiymatini toping:

1) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x+1,\ [0;1]$;
2) $f(x)=x^2-6x+1,\ [0;1]$.

2.7.3. Loopital qoidasidan foydalanib limitlarni toping:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin \pi x}{\ln x}$;
2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$;
3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3}{e^x}$;
4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3^x}{x^3}$;
5) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\log_3 x}{3^x}$;
6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos(3x^2-x)}{\sin 2x^2}$;
7) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\operatorname{tg}\dfrac{3}{x}$;
8) $\lim\limits_{x\to 0}(1-e^{3x})\operatorname{ctg}x$.
9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$
10) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$;
11) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-0}(\pi-2x)^{\cos x}$;
12) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 3x)^{\frac{2}{x^2}}$;
13) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;
14) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+3x)^{\frac{1}{x}}$.

2.7.4. Ko'phadni $(x-x_0)$ ning darajasi bo'yicha yoying:

1) $P(x)=x^3+5x^2-3x+1,\ x_0=-2$;
2) $P(x)=x^4-2x^3+5x-6,\ x_0=2$

2.7.5. Berilganlarni 0,001 aniqlikda hisoblang:

1) $\sin 36^0$;
2) $\cos 32^0$;
3) $\sqrt[3]{e}$;
4) $\lg 10{,}09$.

2.8. FUNKSIYAILARNI HOSILALAR YORDAMIDA TEKSHIRISH

2.8.1. Funksiyaning monotonlik shartlari[10]

1-teorema (*funksiya monoton bo'lishining zaruriy sharti*). Agar $(a;b)$ intervalda differensiallanuvchi $f(x)$ funksiya shu intervalda o'suvchi (kamayuvchi) bo'lsa, u holda $\forall x \in (a;b)$ da

$$f'(x) \geq 0 \ \ (f'(x) \leq 0)$$

bo'ladi.

Isboti. $f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda o'suvchi bo'lsin. $(a;b)$ intervalning ixtiyoriy x va $x+\Delta x$ nuqtalarini olamiz. U holda $\Delta x > 0$ bo'lsa, $f(x+\Delta x) > f(x)$ va $\Delta x < 0$ bo'lsa, $f(x+\Delta x) < f(x)$ bo'ladi. Ikkala holda ham

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0.$$

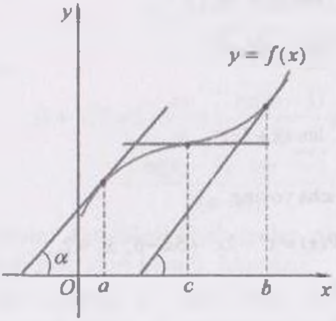
Teoremaning shartiga ko'ra $f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda differensiallanuvchi. Shu sababli

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

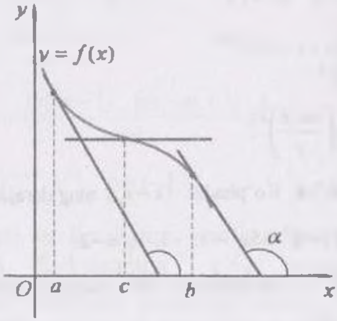
$f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda kamayuvchi bo'lganda teorema shu kabi isbotlanadi.

Bu teorema ushbu geometrik talqinga ega: biror intervalda differensiallanuvchi bo'lgan o'suvchi (kamayuvchi) funksiya grafigiga o'tkazilgan urinmalar Ox o'qning musbat yo'nalishi bilan o'tkir (o'tmas) burchak tashkil qiladi yoki ayrim nuqtalarda Ox o'qiga parallel bo'ladi (40-shakl) ((41-shakl)).

2-teorema (*funksiya monoton bo'lishining etarli sharti*). Agar $(a;b)$ intervalda differensiallanuvchi $f(x)$ funksiya uchun $\forall x \in (a;b)$ da $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) bo'lsa, $f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda o'sadi (kamayadi).



40-shakl



41-shakl

Isboti. $(a;b)$ intervalda $f'(x)>0$ bo'lsin. $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$, $x_1 < x_2$ nuqtalarni olamiz.

$f(x)$ funksiya uchun $[x_1, x_2]$ kesmada Lagranj teoremasining shratlari bajariladi. Shu sababli Lagranj formulasiga binoan biror $c \in (x_1, x_2)$ da $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$ bo'ladi.

Teoremaning shartiga ko'ra $\forall x \in (a,b)$ da $f'(x)>0$, shu jumladan $c \in (x_1, x_2)$ da $f'(c)>0$. $x_2-x_1>0$ va shuning uchun $f'(c)(x_2-x_1)>0$. Bundan $f(x_2)-f(x_1)>0$ yoki $f(x_2)>f(x_1)$. Shunday qilib, $f(x)$ funksiya $\forall x \in (a;b)$ da o'sadi.

$f'(x)<0$ bo'lganda teorema shu kabi isbotlanadi.

Eslatmalar. 1. Funksiya o'suvchi va kamayuvchi bo'lgan intervallarga funksiyaning monotonlik intervallari deyiladi.

2. $(a;b)$ intervalda o'suvchi (kamayuvchi) va $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo'gan $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.

1- misol. $f(x)=x^3-12x+5$ funksiyaning monotonlik intervallarini toping.

Yechish. $D(f)=R$, $f'(x)=3x^2-12=3(x^2-4)$. U holda: $f'(x)>0$ dan $x^2-4>0$ yoki $|x|>2$; $f'(x)<0$ dan $x^2-4<0$ yoki $|x|<2$.

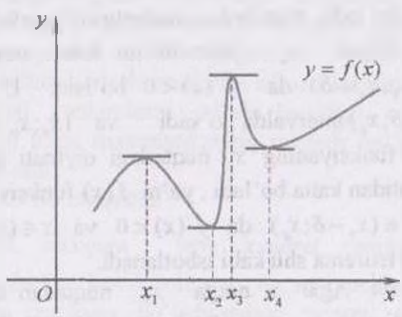
Demak, $f(x)$ funksiya $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$ intervalda o'sadi, $(-2;2)$ intervalda kamayadi.

2.8.2. Funksiyaning ekstremumlari[10]

1- ta'rif. Agar x_0 nuqtaning shundav δ atrofi topilsa va bu atrofning barcha $x \neq x_0$ nuqtalarida $f(x)<f(x_0)$ ($f(x)>f(x_0)$) tengsizlik bajarilsa, x_0 nuqtaga $f(x)$ funksiyaning *qat'iy lokal maksimum* (*qat'iy lokal minimum*) nuqtasi deyiladi.

Funksiyaning maksimum va minimum nuqtalariga *ekstremum* nuqtalar deyiladi. Funksiyaning ekstremum nuqtadagi qiymati *funksiyaning ekstremumi* deb ataladi.

Ekstremum tushunchasi funksiya aniqlanish sohasining biror atrofi bilan bog'liq. Shu sababli funksiya ekstremumga aniqlanish sohasining faqat ichki nuqtalarida erishadi. Shu bilan birga funksiya o'zining aniqlanish sohasida bir nechta minimumga yoki maksimumga erishishi va bunda maksimumlardan ayrimlari qandaydir minimumdan kichik bo'lishi mumkin (42-shakl).



42-shakl

3-teorema (*ekstremum mavjud bo'lishining zaruriy sharti*). Agar x_0 nuqtada differensiallanuvchi $f(x)$ funksiya shu nuqtada ekstremumga ega bo'lsa, u holda $f'(x_0)=0$ bo'ladi.

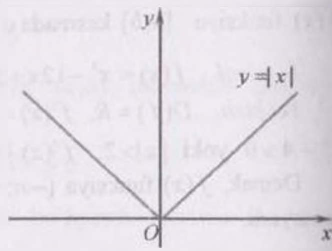
Isboti. x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'lsin. U holda shunday $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ interval topiladi va bu intervalda $f(x)$ funksiya o'zining eng katta yoki eng kichik qiymatiga ega bo'ladi. U holda Ferma teoremasiga ko'ra

$$f'(x_0)=0$$

bo'ladi.

Bu teorema quyidagicha geometrik talqinga ega. Agar x nuqta $f(x)$ funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'lsa (masalan, 42-shaklda x_1 nuqta), funksiya grafigiga shu nuqtada urinma o'tkazish mumkin va bu urinma Ox o'qiga parallel bo'ladi.

Izohlar. 1. $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lib, differensiallanuvchi bo'lmaganida ham ekstremumga ega bo'lishi mumkin. Masalan, uzluksiz $y=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada hosilaga ega emas, ammo $x=0$ minimum nuqta (43-shakl).



43-shakl

Shunday qilib, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishsa, bu nuqtada $f'(x)$ hosila nolga teng yoki mavjud bo'lmaydi.

$f'(x)$ hosilasi nolga teng bo'lgan yoki mavjud bo'lmagan nuqtaga *birinchi tur kritik nuqta* deyiladi.

2. Hamma birinchi tur kritik nuqta ham ekstremum nuqta bo'lavermaydi. Masalan, $f(x)=x^3$ funksiya uchun $x=0$ da $f'(x)=3x^2=0$. Demak, $x=0$ birinchi tur kritik nuqta, ammo u ekstremum nuqta emas (44-shakl).

4-teorema (*ekstremum mavjud bo'lishining etarli sharti*). Agar $f(x)$ funksiya x_0 birinchi tur kritik nuqtaning biror δ atrofida differensiallanuvchi bo'lib, x nuqta x_0 nuqtadan chapdan o'ngga o'tganida $f'(x)$ hosila ishorasini musbatdan manfiyga o'zgartirsa x_0 nuqta maksimum nuqta bo'ladi; manfiydan musbatga o'zgartirsa x_0 nuqta minimum nuqta bo'ladi.

Isboti. x_0 - birinchi tur kritik nuqta, $x\in(x_0-\delta;x_0)$ da $f'(x)>0$ va $x\in(x_0,x_0+\delta)$ da $f'(x)<0$ bo'lsin. U holda 1-teoremaga ko'ra funksiya $(x_0-\delta;x_0)$ intervalda o'sadi va $(x_0;x_0+\delta)$ intervalda kamayadi. Demak, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymati uning $\forall x\in(x_0-\delta;x_0+\delta)$ nuqtadagi qiymatidan katta bo'ladi, ya'ni $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga erishadi.

$x\in(x_0-\delta;x_0)$ da $f'(x)<0$ va $x\in(x_0,x_0+\delta)$ da $f'(x)>0$ bo'lgan hol uchun teorema shu kabi isbotlanadi.

Izoh. Agar x nuqta x_0 nuqtadan chapdan o'ngga o'tganida ishorasini o'zgartirmasa x_0 nuqtada ekstremum mavjud bo'lmaydi.

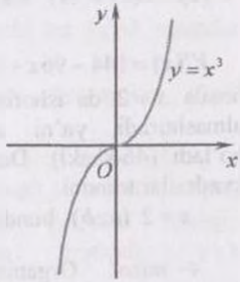
Funksiyani ekstremumga tekshirish – bu funksiyaning barcha ekstremumlarini topish demakdir. Ekstremum mavjud bo'lishining zaruriy va yetarli shartlaridan funksiyani ekstremumga tekshirishning quyidagi qoidasi kelib chiqadi:

1°. $y = f(x)$ funksiyaning birinchi tur kritik nuqtalari topiladi;

2°. bu nuqtalardan funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli bo'lganlari tanlanadi;

3°. tanlangan nuqtadan chapdan o'ngga o'tishda $f'(x)$ hosilanig ishorasi tekshiriladi;

4°. 4- teoremaga asosan funksilaning ekstremum nuqtalari (agar ular bor bo'lsa) aniqlanadi va funksiyaning bu nuqtalardagi qiymatlari hisoblanadi.

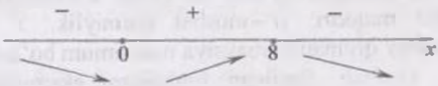


44-shakl

2- misol. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \dfrac{x}{3}$ funksiyaning ekstremumlarini toping.

Yechish. Ravshanki, $D(f) = R$, $f'(x) = \dfrac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}$.

Hosila $x_1 = 0$ nuqtada mavjud emas va $x_2 = 8$ nuqtada nolga teng. Bu kritik nuqtalar berilgan funksiyaning aniqlanish sohasini uchta $(-\infty;0)$, $(0;8)$, $(8;+\infty)$ intervallarga ajratadi. Hosilaning har bir birinchi tur kritik nuqtadan chapdan o'ngga o'tishdagi ishoralarini chizmada belgilaymiz (45-shakl). Bunda strelkalar funksiyaning tegishli intervalda o'suvchi yoki kamayuvchi ekanligini bildiradi.



45-shakl

Demak, $x_1 = 0$ – minimum nuqta, $y_{min} = f(0) = 0$ va $x_2 = 8$ – maksimum nuqta, $y_{max} = f(8) = \dfrac{4}{3}$.

Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatini topish matematika, fizika, kimyo, iqtisodiyot va boshqa fanlarning ko'plab masalalarini yechishda keng qo'llaniladi. Masalan: minimal xarajat sarflab yukni tashish haqidagi transport masalasi, maksimal daromad olish maqsadida ishlab chiqarishni tashkil etish masalasi, eng katta va eng kichik qiymatlarni izlash usullarini takomillashtirish va rivojlantirishga olib keluvchi optimal yechimlarni izlash haqidagi boshqa masalalar. Bunday masalalarni yechish bilan matematikaning maxsus bo'limi – chiziqli programmalashtiriish shug'ullanadi.

Biz soddaroq masalalardan birini ko'rib chiqamiz.

3- misol. Tomoni 12 uzunlik birligiga teng kvadrat tunukaning burchaklaridan bir xil o'lchamli kvadratlar kesilb olingan va usti ochiq quti yasalgan (46-shakl). Qutining sig'imi eng katta bo'lishi uchun tomoni necha uzunlik birligiga teng kvadratlar kesilishi kerak?

Yechish. Kesib olinadigan kvadratlarning tomoni x bo'lsin. U holda qutining asosi $12-2x$ va balandligi x ga teng bo'ladi (46-shakl).

Qutining hajmini topamiz:

$V(x)=x(12-2x)^2=144x-48x^2+4x^3$, $x\in[0;6]$ Bu funksiyaning maksimumini aniqlaymiz.

$V'(x)=144-96x+12x^2=12(2-x)(6-x)$

hosila $x=2$ da ishorasini musbatdan manfiyga almashtiradi, ya'ni $x=2$ maksimum nuqta bo'ladi (46-shakl). Demak, kesilb olinadigan kvadratlar tomoni

$x=2$ $(uz.b)$, bunda $V(2)=128$ $(kub.b)$.

4- misol. Organizmning doriga reaksiyasi qon bosimining ko'tarilishida, tana haroratining oshishida, pulsning o'zgarishida va boshqa fiziologik ko'rsatkichlarda kuzatilishi mumkin. Reaksiyaning ko'rsatkichi belgilangan dori miqdoriga bog'liq va $y=x^2(a-x)$ qonun bilan o'zgarayotgan bo'lsin, bu yerda $x-$belgilangan dori miqdori; $a-$musbat doimiylik. x ning qanday qiymatida reaksiya maksimum bo'ladi.

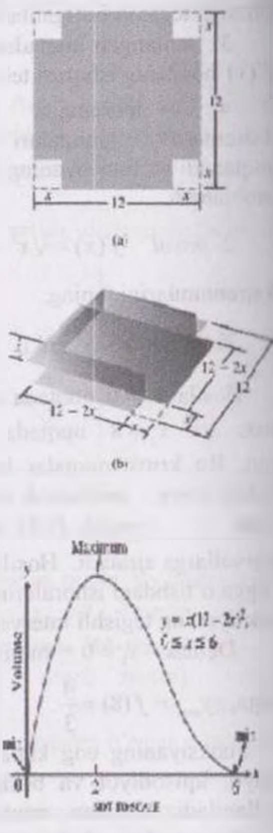
Yechish. Berilgan funksiyani ekstremumga tekshiramiz:

1°. $y'=2ax-3x^2$, $x_1=0$, $x_2=\dfrac{2}{3}a$;

2°. Dori miqdori nolga teng emas. Shu sababli, kritik nuqta $-x=\dfrac{2}{3}a$;

3°. Hosila $x=\dfrac{2}{3}a$ da ishorasini musbatdan manfiyga almashtiradi, ya'ni $x=\dfrac{2}{3}a$ maksimum nuqta bo'ladi.

Demak, belgilangan dorining maksimum reaksiya beradigan miqdori $x=\dfrac{2}{3}a$.



46-shakl

2.8.3. Kesmada uzluksiz funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari[10]

$y=f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo'lsin. U holda Veershtrassning ikkinchi teoremasiga ko'ra funksiya bu kesmada o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga erishadi. Bu qiymatlarga funksiya yoki ekstremum nuqtalarda yoki $[a;b]$ kesmaning chetki nuqtalarida erishadi.

Bundan $[a;b]$ kesmada uzluksiz $y=f(x)$ funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini topishning quyidagi qoidasi kelib chiqadi:

1°. $y=f(x)$ funksiyaning $(a;b)$ intervaldagi birinchi tur kritik nuqtalari topiladi;

2°. funksiyaning topilgan kritik nuqtalardagi va $[a;b]$ kesmaning chetki nuqtalaridagi qiymatlari hisoblanadi;

3°. hisoblangan qiymatlar orasidan eng kattasi va eng kichigi tanlanadi.

Izohlar: 1. Agar $y=f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada faqat bitta kritik nuqtaga ega bo'lib, u maksimum (minimum) nuqta bo'lsa, bu nuqtada funksiya o'zining eng katta (eng kichik) qiymatiga erishadi, ya'ni $\max\limits_{x\in[a;b]} f(x)=f(x_0)$ ($\min\limits_{x\in[a;b]} f(x)=f(x_0)$) bo'ladi.

2. Agar $y=f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada kritik nuqtaga ega bo'lmasa, bu funksiyaning kesmada monoton o'sishini yoki monoton kamayishini bildiradi. Bunda $y=f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlariga kesmaning chetki nuqtalarida erishadi.

5- misol. $y=x^3-3x$ funksiyaning $[0,2]$ kesmada eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

Yechish. 1°. $f'(x)=3x^2-3=0$ dan $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_2\in[0,2]$;

2°. $f(1)=-2$, $f(0)=0$, $f(2)=2$;

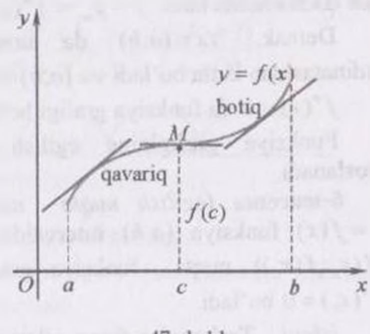
3°. $\max\limits_{x\in[0,2]} f(x)=f(2)=2$; $\min\limits_{x\in[0,2]} f(x)=f(1)=-2$.

2.8.4. Funksiya grafigining botiqligi, qavariqligi va egilish nuqtalari[10]

$y=f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda differensiallanuvchi bo'lsin. U holda $y=f(x)$ funksiya grafigining $\forall M(x;f(x))$, $x\in(a,b)$ nuqtada urinmasi mavjud bo'ladi.

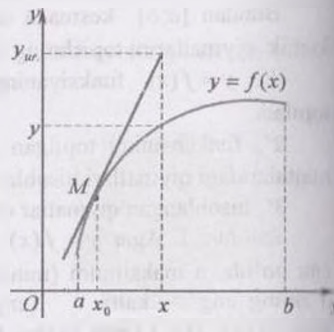
2-ta'rif. Agar $(a;b)$ intervalda $y=f(x)$ funksiyaning grafigi unga intervalning ixtiyoriy nuqtasida o'tkazilgan urinmadan yuqorida (pastda) yotsa, *funksiya grafigi* $(a;b)$ *intervalda botiq* (*qavariq*) deyiladi.

Funksiya grafigining botiq qismini qavariq qismidan ajratuvchi $M(c;f(c))$ nuqta *funksiya grafigining egilish nuqtasi* deb ataladi (47-shakl).



47-shakl

5-teorema. Agar $y=f(x)$ funksiya (a,b) intervalda ikkinchi tartibli hosilaga ega va $\forall x\in(a;b)$ da $f''(x)<0$ ($f''(x)>0$) bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiya grafigi $(a;b)$ intervalda qavariq (botiq) bo'ladi.



48-shakl

Isboti. $\forall x\in(a;b)$ da $f''(x)<0$ bo'lsin. Funksiya grafigida $x_0\in(a;b)$ abssissali ixtiyoriy M nuqta olamiz (48-shakl). Funksiyaning grafigi bu urinmadan pastda yotishini ko'rsatamiz. Buning uchun $x\in(a;b)$ nuqtada $y=f(x)$ egri chiziqning y ordinatasi bilan urinmaning y_{ur} ordinatasini solishtiramiz.

Urinma tenglamasi

$$y_{ur}=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

bo'lgani uchun

$$y-y_{ur}=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0).$$

Lagranj teoremasiga ko'ra $f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0)$, bu yerda c nuqta x_0 bilan x ning orasida yotadi.

Shu sababli

$$y-y_{ur}=f'(c)(x-x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$$

yoki

$$y-y_{ur}=(f'(c)-f'(x_0))(x-x_0).$$

$f'(c)-f'(x_0)$ ayirmaga Lagranj teoremasini takror qo'llaymiz:
$f'(c)-f'(x_0)=f''(c_1)(x-x_0)$, bu yerda c_1 nuqta c bilan x_0 ning orasida yotadi.

Demak, $y-y_{ur}=f''(c_1)(c-x_0)(x-x_0)$. Bu tengsizlikni tekshiramiz:

1) agar $x>x_0$ bo'lsa, u holda $x-x_0>0$, $c-x_0>0$ bo'ladi va $f''(c_1)<0$;

2) agar $x<x_0$ bo'lsa, u holda $x-x_0<0$, $c-x_0<0$ bo'ladi va $f''(c_1)<0$.

Har ikkala holda ham $y-y_{ur}=f''(c_1)(c-x_0)(x-x_0)<0$, ya'ni $y<y_{ur}$.

Demak, $\forall x\in(a;b)$ da urinmaning ordinatasi funksiya grafigining ordinatasidan katta bo'ladi va $(a;b)$ intervalda funksiya grafigi qavariq.

$f''(x)>0$ da funksiya grafigi botiq bo'lishi shu kabi isbotlanadi.

Funksiya grafigining egilish nuqtasini topish quyidagi teoremalarga asoslanadi.

6-teorema (*egilish nuqta mavjud bo'lishining zaruriy sharti*). Agar $y=f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda uzluksiz ikkinchi tartibli hosilaga ega va $M(x_0;f(x_0))$ nuqta funksiya grafigining egilish nuqtasi bo'lsa, u holda $f''(x_0)=0$ bo'ladi.

Isboti. Teskarisini faraz qilamiz: $f''(x_0)\neq 0$, aniqlik uchun $f''(x_0)>0$;

x_0 nuqtaning biror atrofida $f''(x)>0$ bo'lsin. U holda 5-teoremaga ko'ra funksiya grafigi bu atrofda botiq bo'ladi. Bu x_0 nuqta egilish nuqtaning abssissasi bo'ladi mulohazasiga zid. Demak, qilingan faraz noto'g'ri va $f''(x)=0$.

$f''(x)=0$ bo'ladigan nuqtalarning barchasi ham funksiya grafigining egilish nuqtasi bo'lavermaydi. Masalan, $f(x)=x^4$ funksiya grafigining $M(0;0)$ nuqtasi egilish nuqta emas, ammo $x=0$ da $f''(x)=12x^2=0$.

Demak, $f''(x_0)=0$ shart egilish nuqta mavjud bo'lishining zaruriy sharti bo'ladi.

7-teorema (*egilish nuqta mavjud bo'lishining etarli sharti*) $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror δ atrofida ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lsin. Agar δ atrofning x_0 nuqtadan chap va o'ng qismlarida $f''(x)$ hosila har xil ishoraga ega bo'lsa, u holda $M(x_0;f(x_0))$ nuqta funksiya grafigining egilish nuqtasi bo'ladi.

Isboti. $x\in(x_0-\delta;x_0)$ da $f''(x)>0$ va $x\in(x_0,x_0+\delta)$ da $f''(x)<0$ bo'lsin. U holda 5-teoremaga ko'ra x_0 nuqtadan chapda funksiya grafigi botiq va o'ngda qavariq bo'ladi. Demak, $M(x_0;f(x_0))$ nuqta funksiya grafigining egilish nuqtasi bo'ladi.

$x\in(x_0-\delta;x_0)$ da $f''(x)<0$ va $x\in(x_0,x_0+\delta)$ da $f''(x)>0$ bo'lgan hol uchun teorema shu kabi isbotlanadi.

Izoh. $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror δ atrofida ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lib, uning $f''(x_0)$ hosilasi mavjud bo'lmaganida ham egilish nuqtaga ega bo'lishi mumkin. Shu sababli egilish nuqtalarni ikkinchi tartibli hosila nolga teng bo'lgan yoki uzilishga ega bo'lgan nuqtalar izlash kerak bo'ladi.

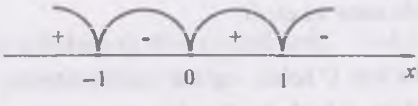
$f''(x)$ hosilasi nolga teng bo'lgan yoki mavjud bo'lmagan nuqtaga *ikkinchi tur kritik nuqta* deyiladi.

5-misol. $y=\dfrac{x}{1-x^2}$ funksiya grafigini botiq va qavariqlikka tekshiring.

Yechish. $D(f)=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;\infty)$.

$$y'=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2},\quad y''=\left(\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}\right)'=\frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}.$$

Ikkinchi tartibli hosila $x_1=0$ nuqtada nolga teng va $x_1=-1$, $x_2=1$ nuqtalarda mavjud emas.



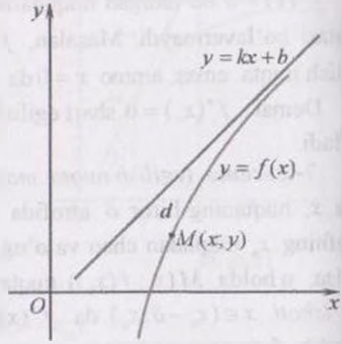
$f''(x)$ hosilaning ishorasini oraliqlar usuli bilan tekshiramiz:

Demak, funksiyaning grafigi $(-1;0)$ va $(1;\infty)$ intervallarda qavariq, $(-\infty;-1)$ va $(0;1)$ intervallarda botiq bo'ladi.

$O(0;0)$ nuqta funksiya grafigining egilish nuqtasi bo'ladi.

2.8.5. Funksiya grafigining asimptotalari[10]

Egri chiziqning asimptotasi deb shunday to'g'ri chiziqqa aytiladiki, egri chiziqda yotuvchi M nuqta egri chiziq bo'ylab harakat qilib koordinata boshidan cheksiz uzoqlashgani sari M nuqtadan bu to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa nolga intiladi (49-shakl).



49-shakl

Uch turdagi, ya'ni vertikal, gorizontal va og'ma asimptotalar mavjud.

Agar $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ yoki $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$ limitlardan hech bo'lmaganda bittasi cheksiz ($+\infty$ yoki $-\infty$) bo'lsa, $x = x_0$ to'g'ri chiziq $y = f(x)$ funksiya grafigining asimptotasi bo'ladi. Bunday asimptota *vertikal asimptota* deb ataladi.

Masalan, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ funksiya grafigi uchun $x = 0$ to'g'ri chiziq vertikal asimptota, chunki $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = +\infty$ va $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = -\infty$.

Shunday qilib, vertikal asimptotalarni izlash uchun x ning unga yaqin qiymatlarida $f(x)$ funksiya modul bo'yicha cheksiz o'sadigan x_0 qiymatini topish kerak. Odatda bu x_0 ikkinchi tur uzilish nuqtasi bo'ladi.

Agar shunday k va b sonlari mavjud bo'lib, $x \to \infty$ ($x \to -\infty$) da $f(x)$ funksiya

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \quad \lim_{x \to \pm\infty} \alpha(x) = 0$$

ko'rinishda ifodalansa $y = kx + b$ to'g'ri chiziq $y = f(x)$ funksiya grafigining asimptotasi bo'ladi. Bunday asimptota *og'ma asimptota* deb ataladi.

8-teorema. $y = f(x)$ funksiya grafigi $y = kx + b$ og'ma asimptotaga ega bo'lishi uchun

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = b$$

bo'lishi zarur va etarli.

Isboti. Zarurligi. $y = f(x)$ funksiya grafigi $y = kx + b$ og'ma asimptotaga ega bo'lsin. U holda og'ma asiimptotaning ta'rifiga ko'ra $y = kx + b + \alpha(x)$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \alpha(x) = 0$ bo'ladi. Bundan

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \right) = k, \quad \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} (b - \alpha(x)) = b$$

kelib chiqadi.

Etarliligi. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=b$ bo'lsin.

U holda $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=b$ dan $f(x)-kx=b+\alpha(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x)=0$ kelib chiqadi. Demak, $f(x)=kx+b+\alpha(x)$ bo'ladi. Bu esa $y=kx+b$ to'g'ri chiziq $f(x)$ funksiya grafigining asimptotasi ekanini bildiradi.

Agar $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)$ limitlardan hech bo'lmaganda bittasi mavjud bo'lmasa yoki cheksiz bo'lsa, $f(x)$ funksiya grafigi og'ma asimptotaga ega bo'lmaydi.

Agar $k=0$ bo'lsa, $b=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ bo'ladi. Bunda $y=b$ to'g'ri chiziqqa $f(x)$ funksiya *grafigining gorizontal asimptotasi* deyiladi.

Izoh. $y=f(x)$ funksiya grafigining asimptotalari $x\to+\infty$ da va $x\to-\infty$ da har xil bo'lishi mumkin. Shu sababli $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)$ limitlarni aniqlashda $x\to+\infty$ va $x\to-\infty$ hollarini alohida qarash lozim.

5- misol. $y=\dfrac{x^2-3}{x}$ funksiya grafigining asimptotalarini toping.

Yechish. $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x^2-3}{x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{x^2-3}{x}=+\infty$.

Demak, $x=0$ to'g'ri chiziq vertikal asimptota.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3}{x^2}=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3}{x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3}{x}=0,$$

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3}{x^2}=1,$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-3}{x}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3}{x}=0$$

Bundan $y=kx+b=x$.

Demak, $y=x$ to'g'ri chiziq og'ma asimptota.

2.8.6. Funksiyani tekshirish va grafigini chizishning umumiy sxemasi[10]

Funksiyani tekshirish va grafigini chizish ma'lum tartibda (sxema asosida) bajariladi. Shunday sxemalardan birini keltiramiz.

1°. Funksiyaning aniqlanish sohasini topish.

2°. Funksiya grafigining koordinata o'qlari bilan kesishadigan nuqtalarini (agar ular mavjud bo'lsa) aniqlash.

3°. Funksiyaning ishorasi o'zgarmaydigan oraliqlarni ($f(x)>0$ yoki $f(x)<0$ bo'ladigan oraliqlarni) aniqlash.

4°. Funksiyaning juft-toqligini tekshirish.

5°. Funksiya grafigining asimptotalarini topish.

6°. Funksiyaning monotonlik oraliqlarini aniqlash va ekstremumlarini topish.

7°. Funksiyaning qavariqlik va botiqlik oraliqlarini hamda egilish nuqtalarini aniqlash.

8°. 1° – 7° bandlardagi tekshirishlar asosida funksiyaning grafigi chizish.

Funksiya grafigini chizish uchun keltirilgan sxemaning hamma bandlari albatta bajarilishi shart emas. Soddaroq hollarda keltirilgan bandlardan ayrimlarini, masalan 1°,2°,6°ni bajarish etarli bo'ladi. Agar funksiya grafigi juda tushunarli bo'lmasa 1° – 7° bandlardan keyin funksiyaning davriyligini tekshirish, funksiyaning bir nechta qo'shmcha nuqtalarini topish va funksiyaning boshqa xususiyatlarini aniqlash bo'yicha qo'shmcha tekshirishlar o'tkajish mumkin.

7-misol. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ funksiyani tekshiring va grafigini chzing.

Yechish. 1°. Funksiyaning aniqlanish sohasi:

$$D(f)=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty).$$

2°. $x=0$ da $y=-1$ bo'ladi. Funksiya Oy o'qini $(0;-1)$ nuqtada kesadi. $y\neq 0$ bo'lgani uchun funksiya Ox o'qini kesmaydi.

3°. Funksiya $(-\infty;-1)$ va $(1;+\infty)$ intervallarda musbat ishorali va $(-1;1)$ intervalda manfiy ishorali.

4°. Funksiya uchun $x\in D(f)$ da $f(-x)=f(x)$ bo'ladi. Demak, u juft.

5°. $\lim\limits_{x\to-1-0}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=+\infty,\quad \lim\limits_{x\to-1+0}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=-\infty,\quad \lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=-\infty,\quad \lim\limits_{x\to1+0}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=+\infty.$

Demak, $x=-1$ va $x=1$ to'g'ri chiziqlar vertikal asimptotalar bo'ladi.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x(x^2-1)}=0\,(x\to+\infty \text{ da ham } x\to-\infty \text{ da ham } k=0),$$

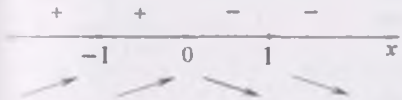
$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}-0\cdot x\right)=1.$$

Demak, $y=1$ to'g'ri chiziq $x\to+\infty$ da ham $x\to-\infty$ da ham gorizontal asimptota bo'ladi.

6°. Funksiyaning monotonlik oraliqlarini aniqlaymiz va ekstremumlarini topamiz

$$y'=\frac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}=-\frac{4x}{(x^2-1)^2}.$$

Birinchi tartibli hosila $x=-1$ va $x=1$ da mavjud emas va $x=0$ da nolga teng. Bu nuqtalar berilgan funksiyaning aniqlanish sohasini to'rtta $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;1)$, $(1;+\infty)$ intervallarga ajratadi. Hosilaning bu intervallardagi va har bir birinchi tur kritik nuqtadan chapdan o'ngga o'tishdagi ishoralarini chizmada belgilaymiz:



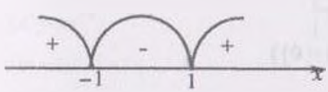
Demak, funksiya $(-\infty;-1)$ va $(-1;0)$ intervallarda o'sadi. $(0;1)$ va $(1,+\infty)$ intervallarda kamayadi. $x=0$ maksimum nuqta. $y_{max}=f(0)=-1$.

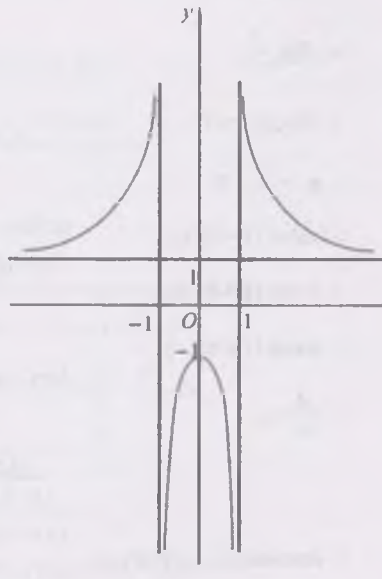
7°. Funksiyaning qavariqlik va botiqlik oraliqlarini hamda egilish nuqtalarini aniqlaymiz.

$$y''=\left(-\frac{4x}{(x^2-1)^2}\right)'=\frac{4(1+3x^2)}{(x^2-1)^3}.$$

Ikkinchi tartibli hosila $x_1=-1$ va $x_2=1$ nuqtalarda mavjud emas.

y'' hosilaning $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$, $(1;+\infty)$ intervallardagi ishoralarini tekshiramiz:





50-shakl

Demak, funksiyaning grafigi $(-1;1)$ intervalda qavariq, $(-\infty;-1)$ va $(1;+\infty)$ intervallarda botiq bo'ladi. Funksiya grafigining egilish nuqtasi yo'q.

8°. 1° − 7° bandlar asosida funksiya grafigini chizamiz (50-shakl).

8- misol. $y=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$ funksiyani tekshiring va grafigini chzing.

Yechish. Misolni *Maple* paketida bajaramiz.

> $with(plots)$:

> $restart$:

> $readlib(extrema)$:

> $f:=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$:

> $\lim\limits_{x\to -1^+} f$;

$$-\infty$$

> $\lim\limits_{x\to -1^-} f$;

$$-\infty$$

> $\lim_{x\to\infty} f$;

$$\infty$$

> $\lim_{x\to-\infty} f$;

$$-\infty$$

> $\lim_{x\to\infty} \frac{f}{x}$;

$$1$$

> $\lim_{x\to\infty} (f-x)$;

$$-2$$

> $g := x-2$;

$$g := x-2$$

> $solve(\{f=0\},x)$;

$$\{x=0\},\ \{x=0\},\ \{x=0\}$$

> $solve(\{f>0\},x)$;

$$\{0<x\}$$

> $solve(\{f<0\},x)$;

$$\{x<-1\},\ \{-1<x, x<0\}$$

> $\frac{d}{dx} f$;

$$\frac{3x^2}{(x+1)^2}-\frac{2x^3}{(x+1)^3}$$

$$\{x=-3\},\ \{x=0\},\ \{x=0\}$$

> $extrema(f, \{\ \}, \{x\}, 's'); s;$

$$\left\{0, -\frac{27}{4}\right\}$$

$$\{\{x=-3\}, \{x=0\}\}$$

> $solve\left(\left\{\frac{d}{dx} f>0\right\},x\right)$;

$$\{x<-3\},\ \{-1<x, x<0\},\ \{0<x\}$$

> $solve\left(\left\{\frac{d}{dx} f<0\right\},x\right)$;

$$\{-3<x, x<-1\}$$

> $\frac{d^2}{dx^2} f$;

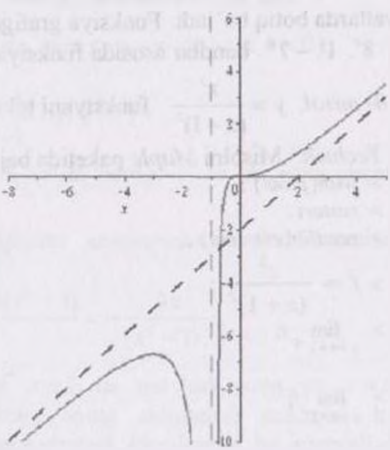
$$\frac{6x}{(x+1)^2}-\frac{12x^2}{(x+1)^3}+\frac{6x^3}{(x+1)^4}$$

```
> simplify(  );
```

$$\frac{6x}{(x+1)^4}$$

> $solve\left(\left\{\frac{d^2}{dx^2} f=0\right\},x\right)$;

$$\{x=0\}$$



> $solve\left(\left\{\frac{d^2}{dx^2} f > 0\right\}, x\right);$

$$\{0 < x\}$$

> $solve\left(\left\{\frac{d^2}{dx^2} f < 0\right\}, x\right);$

$$\{x < -1\}, \{-1 < x, x < 0\}$$

>

```
plot([f(x), g(x), [-1, t, t=-10..10]], x=-8..5, -10..6, color
    = [red, blue, green], linestyle = [1, 6, 6], thickness = 2, discont
    = true, grid = [50, 50]);
```

2.8.7. Mashqlar

2.8.1. Funksiyalarning monotonlik intervallarini va ekstremumlarini toping:

1) $f(x)=3x-x^3;$ 2) $f(x)=4x+\frac{4}{x}+3;$

3) $f(x)=x^3-9x^2+15x;$ 4) $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x;$

5) $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x};$ 4) $f(x)=\frac{x^3}{6}-x^2;$

5) $f(x)=\frac{x^2}{1-x};$ 6) $f(x)=\frac{x}{1+x^2};$

7) $f(x)=x^4-8x^2+2;$ 8) $f(x)=1+x^2-\frac{x^4}{2};$

9) $f(x)=xe^{-x};$ 10) $f(x)=x^2e^x;$

11) $f(x)=\ln(x^2+1);$ 12) $f(x)=\frac{x}{\ln x}.$

2.8.2. Funksiyalarning berilgan kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping:

1) $f(x)=x^3-3x,\ [0;2];$ 2) $f(x)=x^3+3x^2-9x-10,\ [-4;0];$

3) $f(x)=\frac{1}{x^2-1},\ \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right];$ 4) $f(x)=x^3\ln x,\ [1;e].$

2.8.3. Jism $S=21t+3t^2-t^3$ qonun bilan harakatlanmoqda. Jismning eng katta tezligini toping.

2.8.4. Uzunligi l ga teng simdan to'g'ri to'rtburchak yasalgan. To'g'ri to'rtburchakning yuzasi eng katta bo'lishi uchun uning o'lchamlari qanday bo'lishi kerak?

2.8.5. Suyuqlik hajmi bilan harorati orasidagi bog'lanish $V=1+a(t-4)^2$ formula bilan ifodalanadi. Qanday haroratda suyuqlik hajmi eng kichik bo'ladi?

2.8.6. Bakteriyalarni ko'paytirish muhitiga 1000 dona zamburug' kiritilgan. Zamburug'lar soni $y=1000\left(1+\frac{t}{100+t^2}\right)$ qonun bo'yicha ko'payadi. Zamburug'larning maksimal sonini toping.

2.8.7. Organik birikmani xlorlashni matematik modellashtirishda xlorlangan maxsulot konsentratsiyasi y va xlorlanmagan xom ashyo konsentratsiyasii x o'rtasida $y = \frac{x}{1-k}\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{k-1} - 1\right)$ funksional bog'lanish o'rnatilgan. Funksional bog'lanishning maksimumini toping.

2.8.8. Yasovchisi l ga teng konus shaklidagi idish yasash kerak. Idishning hajmi eng katta bo'lishi uchun uning balandligi qanday bo'lishi kerak?

2.8.9. Organizmning ikkita dori preparatiga reaksiyasi mos ravishda $f_1(t) = te^{-t}$ va $f_2(t) = t^2e^{-t}$ funksiyalar bilan aniqlanadi. Organizmning har ikkala preparatning maksimal reaksiyasini toping va ularni solishtiring.

2.8.10. Funksiyalar grafigining botiqlik- qavariqlik intervallarini va egilish nuqtalarini toping.

1) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x$; 2) $f(x) = (x-5)^5 + 4x - 13$;

3) $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$; 4) $f(x) = 3x^2 + 3x^3 - 1$;

5) $f(x) = x - \frac{2}{x}$; 6) $f(x) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x$;

2.8.11. Funksiyalar grafigining asimptotalarini toping.

1) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2}$; 2) $f(x) = \frac{1 + x^2}{x}$;

3) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$; 4) $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$.

2.8.12 Funksiyalarni tekshiring va grafigini chizing.

1) $f(x) = x - x^3$; 2) $f(x) = x^3 - 3x + 2$;

3) $f(x) = x + \frac{1}{x}$; 4) $f(x) = x - \frac{1}{x}$;

2.9. ANIQMAS INTEGRAL

2.9.1. Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral[8]

Berilgan funksiyaning hosilasini topish differensial hisobning asosiy masalalaridan biri hisoblanadi. Matematik analiz masalalarining turliligi, uning geometriya, mexanika, fizika va texnikadagi keng miqyosdagi tatbiqi berilgan $f(x)$ funksiya uchun hosilasi shu funksiyaga teng bo'lgan $F(x)$ funksiyani topishga olib keladi.

Funksiyaning berilgan hosilasiga ko'ra uning o'zini topish masalasi integral hisobning asosiy masalalaridan biri hisoblanadi.

$y = f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda aniqlangan bo'lsin.

1-ta'rif. Agar $(a;b)$ intervalda differensiallanuvchi $F(x)$ funksiyanig hosilasi berilgan $f(x)$ funksiyaga teng, ya'ni

$$F'(x) = f(x) \quad (\text{ yoki } dF(x) = f(x)dx),\ x \in (a;b)$$

bo'lsa, $F(x)$ funksiyaga $(a;b)$ intervalda $f(x)$ funksiyaning *boshlang'ich funksiyasi* deyiladi.

Lemma. Agar $F(x)$ va $\Phi(x)$ funksiyalar $(a;b)$ intervalda $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyalari bo'lsa, u holda $F(x)$ va $\Phi(x)$ bir- biridan o'zgarmas songa farq qiladi.

Isboti. $F(x)$ va $\Phi(x)$ funksiyalar $(a;b)$ intervalda $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyalari bo'lsin: $F'(x) = f(x)$, $\Phi'(x) = f(x)$.

U holda istalgan $x \in (a;b)$ da

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

bo'ladi. Bundan $\Phi(x) - F(x) = C$ yoki $\Phi(x) = F(x) + C$ kelib chiqadi, bu yerda C – ixtiyoriy o'zgarmas son.

Shunday qilib, $f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda biror $F(x)$ boshlang'ich funksiyaga ega bo'lsa, uning qolgan barcha boshlang'ich funksiyalari $\{F(x) + C \mid C \in R\}$ to'plamni tashkil qiladi.

2-ta'rif. $f(x)$ funksiyaning $(a;b)$ intervaldagi boshlang'ich funksiyalari to'plamiga $f(x)$ funksiyaning *aniqmas integrali* deyiladi va $\int f(x)dx$ kabi belgilanadi.

Shunday qilib, ta'rifga ko'ra

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{9.1}$$

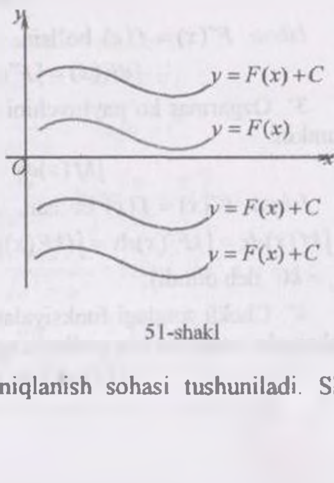
bu yerda $f(x)$ –*integral ostidagi funksiya*, $f(x)dx$ –*integral ostidagi ifoda*; x –*integrallash o'zgaruvchisi*, $\int$ –*integrallash belgisi* deb ataladi.

Aniqmas integralni topish, ya'ni berilgan funksiyaning boshlang'ich funksiyalari to'plamini aniqlash masalasi *funksiyani integrallash* deyiladi.

Demak, funksiyani integrallash amali funksiyani differensiallashga teskari amal bo'ladi.

Berilgan $f(x)$ funksiya qachon boshlang'ich funksiyaga ega bo'ladi degan savolga quyidagi teorema javob beradi (teoremani isbotsiz keltiramiz).

1-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda u bu kesmada uzluksiz bo'lgan boshlang'ich funksiyaga ega bo'ladi.



51-shakl

Ko'p hollarda $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladigan $(a;b)$ interval ko'rsatilmaydi. Bunday holda $(a;b)$ interval sifatida $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi tushuniladi. Shu ma'noga ega deb hisoblaymiz. Masalan, $f(x)=\frac{1}{x}$ funksiya $(-\infty;0)$ va $(0;\infty)$ intervalda uzluksiz. Shu sababli uning aniqmas integrali deb

$$\int\frac{dx}{x}=\begin{cases}\ln x+C, & x>0,\\ \ln(-x)+C, & x<0\end{cases}=\ln|x|+C\ \ (x\neq 0)$$

funksiya tushuniladi.

Boshlang'ich funksiyaning grafigi *integral egri chiziq* deb ataladi.

Aniqmas integral *geometrik jihatdan* ixtiyoriy C o'zgarmasga bog'liq bo'lgan barcha integral egri chiziqlar to'plamini ifodalaydi. Agar $F(x)$ funksiyaning grafigi integral egri chiziq bo'lsa, boshqa integral egri chiziqlar uni Oy o'qi bo'yicha parallel ko'chirish yordamida hosil qilinadi (51-shakl).

2.9.2. Aniqmas integralning xossalari[8]

Aniqmas integral quyidagi xossalarga ega.

1°. Aniqmas integralning hosilasi (differensiali) integral ostidagi funksiyaga (ifodaga) teng:

$$(\int f(x)dx)'=f(x). \quad (d\int f(x)dx=f(x)dx).$$

Isboti. $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi, ya'ni $F'(x)=f(x)$ bo'lsin. U holda

$$(\int f(x)dx)'=(F(x)+C)'=F'(x)+0=f(x).$$

$$(d\int f(x)dx=d(F(x)+C)=dF(x)+dC=F'(x)dx=f(x)dx.)$$

Bu xossa *integral amali to'g'ri bajarilganligini differensiallash orqali tekshirish* imkonini beradi.

Masalan. $\int(3x^2+5)dx=x^3+5x+C$ to'g'ri, chunki $(x^3+5x+C)'=3x^2+5$.

2°. Funksiya differentsialining aniqmas integrali shu funksiya bilan o'zgarmas sonning yig'indisiga teng:

$$\int dF(x)=F(x)+C.$$

Isboti. $F'(x)=f(x)$ bo'lsin. U holda

$$\int dF(x)=\int F'(x)dx=\int f(x)dx=F(x)+C.$$

3°. Ozgarmas ko'paytuvchini aniqmas integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx,\ \ k=const, k\neq 0.$$

Isboti. $F'(x)=f(x)$ bo'lsin. Bundan

$$\int kf(x)dx=\int kF'(x)dx=\int(kF(x))'dx=k(F(x)+C)=kF(x)+C_1=k\int f(x)dx$$

($C_1=kC$ deb olindi).

4°. Chekli sondagi funksiyalar algebraik yig'indisining aniqmas integrali shu funksiyalar aniqmas integrallarining algebraik yig'indisiga teng:

$$\int(f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$$

Isboti. $F'(x)=f(x)$, $G'(x)=g(x)$ bo'lsin. U holda

$$\int(f(x)\pm g(x))dx=\int(F'(x)\pm G'(x))dx=\int(F(x)\pm G(x))'dx=\int d(F(x)\pm G(x))=$$
$$=F(x)\pm G(x)+C=(F(x)+C_1)\pm(G(x)+C_2)=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx,\ C_1\pm C_2=C.$$

5°. Agar $\int f(x)dx=F(x)+C$ bo'lsa, u holda x ning istalgan differensiallanuvchi funksiyasi $u=u(x)$ uchun $\int f(u)du=F(u)+C$ bo'ladi.

Isboti. x erkli o'zgaruvchi, $f(x)$ uzluksiz funksiya, $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsin. U holda $\int f(x)dx=F(x)+C$ bo'ladi.

$u=\varphi(x)$ bo'lsin, bu yerda $\varphi(x)-$ uzluksiz hosilaga ega bo'lgan funksiya. Birinchi differensialning invariantlik xossasiga ko'ra $dF(u)=F'(u)du=f(u)du$ bo'ladi. Bundan

$$\int f(u)du=\int d(F(u))=F(u)+C.$$

2.9.3. Asosiy integrallar jadvali

Integrallash amali differensiallash amaliga teskari amal bo'lgani uchun asosiy integrallar jadvalini differensial hisobning mos formulalarini (differensiallar jadvalini) qo'llash va aniqmas integralning xossalaridan foydalanish orqali hosil qilish mumkin.

Masalan, $d(\sin u)=\cos u du$ ekanidan $\int\cos u du=\int d(\sin u)=\sin u+C$.

Quyida keltiriladigan integrallar *asosiy integrallar jadvali* deyiladi.

Asosiy integrallar jadvali

1. $\int u^{\alpha}du=\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ (\alpha\neq-1)$;	2. $\int\dfrac{du}{u}=\ln\lvert u\rvert=C$;
3. $\int a^{u}du=\dfrac{a^{u}}{\ln a}+C,\ (0<a\neq1)$;	4. $\int e^{u}du=e^{u}+C$;
5. $\int\sin u du=-\cos u+C$;	6. $\int\cos u du=\sin u+C$;
7. $\int tgu du=-\ln\lvert\cos u\rvert=C$;	8. $\int ctgu du=\ln\lvert\sin u\rvert=C$;
9. $\int\dfrac{du}{\cos^2 u}=tgu+C$;	10. $\int\dfrac{du}{\sin^2 u}=-ctgu+C$;
11. $\int\dfrac{du}{\sin u}=\ln\left\lvert tg\dfrac{u}{2}\right\rvert+C$;	12. $\int\dfrac{du}{\cos u}=\ln\left\lvert tg\left(\dfrac{u}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert+C$;
13. $\int\dfrac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\dfrac{u}{a}+C$;	14. $\int\dfrac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}}=\ln\left\lvert u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right\rvert+C$.
15. $\int\dfrac{du}{a^2+u^2}=\dfrac{1}{a}arctg\dfrac{u}{a}+C$;	16. $\int\dfrac{du}{u^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{u-a}{u+a}\right\rvert+C$;

Asosiy integrallar jadvalida integrallash o'zgaruvchisi u erkli o'zgaruvchi yoki erkli o'zgaruvchining funksiyasi (5- xossaga ko'ra) bo'lishi mumkin.

Jadvalda keltirilgan formulalarning to'g'riligiga uning o'ng tomonini differensiallash va bu differensialning formula chap tomonidagi integral ostidagi ifodaga teng bo'lishini tekshirish orqali ishonch hosil qilish mumkin.

Bu integrallardan birining, masalan 13- formulaning to'g'riligini ko'rsatamiz:

$$d\left(\arcsin\frac{u}{a}+C\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{a}\right)^2}}\cdot\frac{1}{a}du=\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}.$$

2.9.4. Integrallash usullari[8]

Bevosita integrallash usuli

Integral ostidafi funksiyada (yoki ifodada) almashtirishlar bajarish va aniqmas integralning xossalarini qo'llash orqali berilgan integralni bir yoki bir nechta jadval integraliga kelnitib integrallash usuliga *bevosita integrallash usuli* deyiladi.

Misollar:

$$1)\ \int\left(5\sin x-\frac{2}{x^2+1}+x^3\right)dx=5\int\sin xdx-2\int\frac{dx}{x^2+1}+\int x^3dx=$$

$$=-5\cos x-2arctgx+\frac{x^4}{4}+C;$$

$$2)\ \int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx=$$

$$=\int\frac{dx}{\sin^2 x}-\int\frac{dx}{\cos^2 x}=-ctgx-tgx+C=-\frac{2}{\sin 2x}+C;$$

$$3)\ \int\frac{x^4}{1+x^2}dx=-\int\frac{1-x^4-1}{1+x^2}dx=-\int(1-x^2)dx+\int\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=-\int dx+\int x^2dx+\int\frac{dx}{1+x^2}=-x+\frac{x^3}{3}+arctgx+C.$$

Berilgan integralni jadval integrallariga keltirishda differensialning quyidagi almashtirishlari («differensial amali ostiga kiritish» jarayoni) qo'llaniladi:

$$du=d(u+a),\ a-\text{son},\ du=\frac{1}{a}d(au);\ \ udu=\frac{1}{2}d(u^2);\ \ \cos udu=d(\sin u);$$

$$\sin udu=-d(\cos u);\ \ \frac{1}{u}du=d(\ln u);\ \ \frac{1}{\cos^2 u}du=d(tgu).$$

Umuman olganda, $f'(u)du=d(f(u))$. Bu formuladan integrallarni topishda ko'p foydalaniladi.

Misollar:

$$1)\ \int\frac{dx}{16+9x^2}=\frac{1}{3}\int\frac{d(3x)}{16+(3x)^2}==\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}arctg\frac{3x}{4}+C=\frac{1}{12}arctg\frac{3x}{4}+C;$$

2) $\int \frac{\cos x+\sin x}{\sin x-\cos x}dx=\int \frac{d(\sin x-\cos x)}{\sin x-\cos x}=\ln|\sin x-\cos x|+C.$

O'rniga qo'yish (o'zgaruvchini almashtirish) usuli

Ko'p hollarda integraldagi o'zgaruvchini almashtirish uni bevosita integrallashga olib keladi. Integrallashning bu usuli *o'rniga qo'yish* (*o'zgaruvchini almashtirish*) *usuli* deb yuritiladi. Bu usul quyidagi teoremaga asoslanadi.

2-teorema. Biror T oraliqda aniqlangan va differensiallanuvchi $x=\varphi(t)$ funksiyaning qiymatlar sohasi X oraliqdan iborat bo'lib, X da $f(x)$ funksiya aniqlangan va uzluksiz, y'ani T oraliqda $f(\varphi(t))$ murakkab funksiya aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. U holda

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \tag{9.2}$$

bo'ladi.

Isboti. X oraliqda $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning boshlang'ichi bo'lsin. U holda $F(\varphi(t))$ murakkab funksiya T oraliqda aniqlangan, differensiallanuvchi hamda

$$F_t'(\varphi(t))=F_x'(\varphi(t))\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

bo'ladi.

Bundan

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\int F_t'(\varphi(t))dt=F(\varphi(t))+C=(F(x)+C)\Big|_{x=\varphi(t)}=\int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)}$$

hisobga olinsa,

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

(1.2) formula *aniqmas integralda o'zgaruvchini almashtirish* formulasi deb yuritiladi.

Ayrim hollarda $t=\varphi(x)$ o'rniga qo'yish bajarishga to'g'ri keladi. U holda $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(t)dt$ bo'ladi. Demak, (9.2) formula o'ngdan chapga qo'llanishi ham mumkin.

1-misol. $\int x\sqrt{x-3}dx$ integralni toping.

Yechish. $\sqrt{x-3}=t$ almashtirish bajaramiz.

U holda $x=t^2+3,\ dx=2tdt.$ Shu sababli

$$\int x\sqrt{x-3}dx=\int (t^2+3)\,t\cdot 2tdt=2\int (t^4+3t^2)dt=$$

$$=2\int t^4dt+6\int t^2dt=2\cdot\frac{t^5}{5}+6\cdot\frac{t^3}{3}+C=\frac{2}{5}\sqrt{(x-3)^5}+2\sqrt{(x-3)^3}+C.$$

2- misol. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx$ integralni toping.

Yechish. $1+\ln x=t^2$ bo'lsin. Bundan $\ln x=t^2-1,\ \ \frac{dx}{x}=2tdt.$

U holda (9.2) formulaga ko'ra

$$\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx=\int\frac{t\cdot 2tdt}{t^2-1}=2\int\frac{t^2dt}{t^2-1}=2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=2\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)+C=$$

$$=2t+\ln\left|\frac{(t-1)^2}{t^2-1}\right|+C=2\sqrt{1+\ln x}+\ln\left|\frac{(\sqrt{1+\ln x})^2}{1+\ln x-1}\right|+C=$$

$$=2\sqrt{1+\ln x}+2\ln\left|\sqrt{1+\ln x}-1\right|-\ln|\ln x|+C.$$

3- misol. $\int\sqrt{1+\cos^2 x}\sin 2xdx$ integralni toping.

Yechish. $1+\cos^2 x=t^2$ deymiz.

Bundan $-2\cos x\sin xdx=2tdt$ yoki $\sin 2xdx=-2tdt$.

U holda

$$\int\sqrt{1+\cos^2 x}\sin 2xdx=\int t(-2t)dt=-2\cdot\frac{t^3}{3}+C=-\frac{2}{3}\sqrt{(1+\cos^2 x)^3}+C.$$

Izoh. Ayrim hollarda integrallashning o'zgaruvchini almashtirish usuli takroran qo'llaniladi, ja'ni bunda bajarilgan o'rniga qo'yishdan so'ng shunday integral hosil bo'ladiki, bu integralni boshqa o'rniga qo'yish orqali soddalashtirish yoki jadval integraliga keltirish mumkiin bo'ladi.

Bo'laklab integrallash usuli

Bo'laklab integrallash usuli ikki funktsiya ko'paytmasining differentsiali formulasiga asoslanadi.

3-teorema. $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar qandaydir X oraliqda aniqlangan va differentsiallanuvchi bo'lib, $u'(x)v(x)$ funksiya bu oraliqda boshlang'ich funksiyaga ega, y'ani $\int u'(x)v(x)dx$ integral mavjud bo'lsin. U holda X oraliqda $u(x)v'(x)$ funksiya boshlang'ich funksiyaga ega va

$$\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)dx \qquad (9.3)$$

bo'ladi.

Isboti. $(u(x)v(x))'=u'(x)v(x)+v'(x)u(x)$ tenglikdan

$$u(x)v'(x)=(u(x)v(x))'-v(x)u'(x).$$

$(u(x)v(x))'$ va $u'(x)v(x)$ funksiyalar X intervalda boshlang'ich funksiyaga ega bo'lgani uchun $v'(x)u(x)$ ham X intervalda boshlang'ich funksiyaga ega bo'ladi. Oxirgi tenglikning chap va o'ng tomoniini integrallasak, (9.3) formula kelib chiqadi.

(9.3) formulaga *aniqmas integralni bo'laklab integrallash* formulasi deyiladi.

Ma'lumki, $v'(x)dx=dv$, $u'(x)dx=du$. Demak, (9.3) formulani

$$\int udv=uv-\int vdu \qquad (9.4)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Bo'laklab integrallash usulining mohiyati berilgan integralda integral ostidagi $f(x)dx$ ifodani udv ko'paytma shaklida tasvirlash va (9.4) formulani qo'llagan holda berilgan $\int udv$ integralni oson integrallanadigan $\int vdu$ integral bilan almashtirib topishdan iborat.

Bo'laklab integrallash orqali topiladigan integrallarning asosan uchta guruhini ajratish mumkin:

1) $\int P(x)arctgxdx$, $\int P(x)arcctgxdx$, $\int P(x)\ln xdx$, $\int P(x)\arcsin xdx$, $\int P(x)\arccos xdx$ (bu yerda $P(x)-$ ko'phad) ko'rinishdagi 1-guruh integrallar. Bunda $dv = P(x)dx$ deb, qolgan ko'paytuvchilar esa u bilan belgilanadi;

2) $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)\sin kxdx$, $\int P(x)\cos kxdx$ ko'rinishdagi 2-guruh integrallar. Bunda $u = P(x)$ deb, qolgan ko'paytuvchilar dv deb olinadi;

3) $\int e^{kx}\sin kxdx$, $\int e^{kx}\cos kxdx$ ko'rinishdagi 3-guruh integrallar bo'laklab integrallash formulasini takroran qo'llash orqali topiladi.

4- misol. $\int arctgxdx$ integralni toping.

Yechish. $$\int arctgxdx = \left| \begin{matrix} u = arctgx, \ du = \dfrac{dx}{1+x^2}, \\ dv = dx, \ v = x \end{matrix} \right| = xarctgx - \int \frac{x}{1+x^2}dx =$$

$$= xarctgx - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}dx = xarctgx - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + C.$$

5- misol. $\int xe^x dx$ integralni toping.

Yechish.

$$\int xe^x dx = \left| \begin{matrix} u = x, \ du = dx \\ dv = e^x dx, \ v = e^x \end{matrix} \right| = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

6- misol. $I = \int \sin xe^{2x}dx$ integralni toping.

Yechish.

$$I = \int \sin xe^{2x}dx = \left| \begin{matrix} u = e^{2x}, \ du = 2e^{2x}dx \\ dv = \sin xdx, \ v = -\cos x \end{matrix} \right| = -e^{2x}\cos x + 2\int e^{2x}\cos xdx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = e^{2x}, \ du = 2e^{2x}dx \\ dv = \cos xdx, \ v = \sin x \end{matrix} \right| = -e^{2x}\cos x + 2({}^{2x}\sin x - 2\int e^{2x}\sin xdx) =$$

$$= e^{2x}(2\sin x - \cos x) - 4I.$$

Bundan

$$I = \frac{1}{5}e^{2x}(2\sin x - \cos x) + C.$$

2.9.5. Mashqlar

2.9.1.. Berilgan integrallarni aniqmas integralning xossalari va integrallar jadvalini qo'llab toping:

1) $\int (3x+\sqrt[3]{x})dx$, 2) $\int (1+4x)(1-3x)dx$;

3) $\int \frac{dx}{9-x^2}dx$; 4) $\int \frac{dx}{25+4x^2}$;

5) $\int ctg^2 x dx$, 6) $\int tg^2 x dx$,

7) $\int \frac{\sqrt[3]{x}-x^2e^x-x}{x^3}dx$, 8) $\int \left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{x^2}\right)dx$;

9) $\int \frac{2\cdot e^x-3\cdot e^{3x}}{e^x}dx$, 10) $\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$;

11) $\int \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$; 12) $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$;

13) $\int \left(\frac{1}{x}-\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{1}{e^x}\right)dx$; 14) $\int \left(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$.

2.9.2. Berilgan integrallarni differensial ostiga kiritish usuli bilan toping

1) $\int \frac{dx}{1-x}$; 2) $\int (x+5)^3 dx$;

3) $\int \sqrt{1-2x}dx$, 4) $\int (x^2-4)^3 x dx$;

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2-x)^2}}$; 6) $\int \frac{xdx}{(1-x^2)^3}$;

7) $\int \frac{tgx}{\cos^2 x}dx$; 8) $\int tgx dx$;

9) $\int e^{\sin x}\cos x dx$, 10) $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$;

11) $\int \frac{\ln(x+5)}{x+5}dx$; 12) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$;

13) $\int \frac{arctgx}{1+x^2}dx$; 14) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$;

2.9.3. Berilgan integrallarni o'rniga qo'yish usuli bilan toping:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}}dx$, 2) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+4}}$;

3) $\int x(x^2+7)^4 dx$, 4) $\int x^2\sqrt{x^3+3}dx$;

5) $\int e^{-x^3}x^2dx$, 6) $\int e^{x-x^2}(1-2x)dx$;

7) $\int \sqrt{16-x^2}dx$; 8) $\int \sqrt{1-4x^2}dx$;

9) $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx$; 10) $\int \frac{\cos 2xdx}{1+\sin 2x}$;

11) $\int \frac{e^x-1}{e^x+1}dx$; 12) $\int \frac{4x-5}{x^2+4}dx$.

2.9.5. Integrallarni bo'laklab integrallash usuli bilan toping:

1) $\int x\ln x dx$;	2) $\int xe^x dx$;
3) $\int x\sin x dx$;	4) $\int x\cos x dx$;
5) $\int x arctg x dx$;	2) $\int \arcsin x dx$;
7) $\int x3^x dx$;	8) $\int \ln x dx$;
9) $\int x^2 e^x dx$;	10) $\int \frac{\ln x dx}{x^2}$;
11) $\int e^x \cos x dx$;	12) $\int e^x \sin x dx$.

2.9.6. Hashoratlarning ko'payish tezligi $v = t + t^2$ (t – kunlarda ifodalanadi) formula bilan ifodalanadi. $t = 0$ da hahoratlar soni 10000 ga teng bo'lsa, ko'payish sonini toping: 1) 1 kun o'tgach; 5 kun o'tgach; 3) 10 kun o'tgach.

2.9.7. Tabletkadagi dori moddasining erish tezligi $v = -c_0 kFe^{-kFt}$ qonun bilan o'zgaradi, bu yerda $c_0 - t = 0$ dori moddasining konsentratsiyasi; k – erish o'zgarmasi; F – eriyotgan moddaning hajm birligidagi sirti yuzasi. Agar $t = 0$ da $c = c_s - c_0$ bo'lsa, dori moddasining erish tenglamasini tuzing.

2.10. RATSIONAL FUNKSIYALARNI VA AYRIM TRIGONOMETRIK IFODALARNI INTEGRALLASH

2.10.1. Ratsional kasrlarni sodda kasrlarga yoyish[11]

Ikkita $Q_m(x)$ va $P_n(x)$ ko'phadning nisbatiga

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_m}{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n}$$

ratsional (*ratsional kasr*) *funksiya* deyiladi.

$m < n$ bo'lganda ratsional kasr *to'g'ri kasr*, $m \geq n$ bo'lganda *noto'g'ri kasr* deyiladi.

Noto'g'ri kasrda uning $Q_m(x)$ suratini $P_n(x)$ maxrajiga odatdagidek bo'lish yo'li bilan kasrdan butun qismi $q(x)$ ajratiladi, ya'ni

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{P_n(x)}$$

tenglik hosil qilinadi, bu yerda $q(x)$ – butun qism deb ataluvchi ko'phad, $\frac{r(x)}{P_n(x)}$ – to'g'ri kasr, chunki $r(x)$ qoldiqning darajasi $P_n(x)$ ning darajasidan kichik.

11. Section 4-5. Partial Fractions www.mhhe.com/.../barnettcat7/.../barnett07cat/ch04/.../bar68...

1- misol. $R(x)=\dfrac{3x^4-2x^3+1}{x^2+2x+2}$ ratsional kasrdan butun qismini ajrating.

Yechish. Ko'phadlarni bo'lish qoidasi bo'yicha kasrning suratini maxrajiga bo'lamiz:

$$\begin{array}{r|l} 3x^4-2x^3+1 & x^2+2x+2 \\ \cline{2-2} -\;3x^4+6x^3+6x^2 & 3x^2-8x+10 \\ \cline{1-1} -8x^3-6x^2+1 & \\ -\;-8x^3-16x^2-16x & \\ \cline{1-1} 10x^2+16x+1 & \\ -\;10x^2+20x+20 & \\ \cline{1-1} -4x-19 & \end{array}$$

Demak, $R(x)=3x^2-8x+10+\dfrac{-4x-19}{x^2+2x+2}$.

2.10.2. Sodda kasrlarni integrallash[8]

Quyidagi to'g'ri kasrlarga *sodda (elementar) kasrlar* deyiladi:

I. $\dfrac{A}{x-\alpha}$;

II. $\dfrac{A}{(x-\alpha)^k}$, $(k\ge 2,\ k\in N)$;

III. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, $(p^2-4q<0)$, bu yerda $A,\ M,\ N,\ \alpha,\ p,\ q$-haqiqiy sonlar

1°. I va II turdagi sodda kasrlar jadval integrallari orqali topiladi:

$$\int\frac{Adx}{x-\alpha}=A\int\frac{d(x-\alpha)}{x-\alpha}=A\ln|x-\alpha|+C; \tag{10.1}$$

$$\int\frac{Adx}{(x-\alpha)^k}=A\int(x-\alpha)^{-k}d(x-\alpha)=$$

$$=A\frac{(x-\alpha)^{-k+1}}{-k+1}+C=\frac{A}{(1-k)(x-\alpha)^{k-1}}+C. \tag{10.2}$$

2°. III turdagi sodda kasrni qaraymiz. $\int\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$ integralining suratida kasrning maxrajidan olingan hosila $(x^2+px+q)'=2x+p$ ni ajratamiz va natijani integrallaymiz:

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\int\frac{\frac{M}{2}(2x+p)+N-\frac{Mp}{2}}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{M}{2}J_1+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)J_2.$$

Tenglikning oxirgi qismidagi integrallardan birinchisi $J_1=\ln|x^2+px+q|$. Ikkinchi integral maxrajida to'liq kvadrat ajratamiz va integralni quyidagicha hisoblaymiz:

$$J_2=\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}=\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}},$$

bunda $4q-p^2>0$, chunki $D<0$.

Natijada quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\ln|x^2+px+q|+\frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C. \qquad (10.3)$$

2- misol. $I=\int\frac{5x+11}{x^2+6x+13}dx$ integralni toping.

Yechish. $I=\int\frac{\frac{5}{2}(2x+6)+11-\frac{5}{2}\cdot 6}{x^2+6x+13}dx=\frac{5}{2}\int\frac{(2x+6)dx}{x^2+6x+13}-4\int\frac{dx}{x^2+6x+13}=$

$$=\frac{5}{2}\ln|x^2+6x+13|-4J.$$

Bu yerda

$$J=\int\frac{dx}{(x+3)^2+4}=\int\frac{d(x+3)}{(x+3)^2+2^2}=\frac{1}{2}arctg\frac{x+3}{2}.$$

Bundan

$$\int\frac{5x+11}{x^2+6x+13}dx=\frac{5}{2}\ln|x^2+6x+13|-2arctg\frac{x+3}{2}+C.$$

Trigonometrik funksiyalarni integrallash usullaridan ayrimlari bilan tanishamiz. Faqat trigonometrik funksiyalar ustida ratsional amallar (qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish) bajarilgan ifoda berilgan bo'lsin. Bunday ifodani barcha trigonometrik funksiyalarni $\sin x$ va $\cos x$ funksiyalar orqali ratsional ravishda ifodalash va $R(\sin x, \cos x)$ ko'rinishga keltirish mumkin.

2.10.3. $\int R(\sin x,\cos x)dx$ ko'rinishidagi integrallar

$\int R(\sin x, \cos x)dx$ ko'rinishidagi integralni $tg\frac{x}{2}=t$ almashtirish orqali hamma vaqt t o'zgaruvchili ratsional funksiyaning integraliga almashtirish, ya'ni *ratsionallashtirish* mumkin. Shu sababli bu almashtirish ***universal trigonometrik almashtirish*** deyiladi.

Haqiqatan ham $\int R(\sin x,\cos x)dx$ ifodadan

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ x=arctgt,\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

tarzdagi oʻrniga qoʻyishlar yordamida t oʻzgaruvchili

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int R_1(t)dt$$

ratsional funksiya kelib chiqadi.

3- misol. $I=\int\frac{dx}{3\sin x+2\cos x+3}$ integralni toping.

Yechish. $tg\frac{x}{2}=t$ deymiz. U holda

$$I=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3\cdot\frac{2t}{1+t^2}+2\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+3}=2\int\frac{dt}{t^2+6t+5}=2\int\frac{dt}{(t+1)(t+5)}=$$

$$=\int\left(\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t+5}\right)dt=A\ln|t+1|+B\ln|t+5|+C.$$

Noʻmalum koeffitsiyentlarni aniqlaymiz: $A=\frac{1}{2},\ B=-\frac{1}{2}$.

Demak,

$$I=\frac{1}{2}(\ln|t+1|-\ln|t+5|)+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t+5}\right|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+1}{tg\frac{x}{2}+5}\right|+C.$$

Universal trigonometrik oʻrniga qoʻyish natijasida amalda koʻpincha ancha murakkab ratsional funksiyalar hosil boʻlishi mumkin. Bunday hollarda yuqorida keltirilgan integralni topishda quyidagi sodda almashtirishlardan foydalangan maʼqul:

a) agar $R(\sin x,\cos x)$ ifoda $\sin x$ ga nisbatan toq, yaʼni $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ boʻlsa, u holda $\cos x=t$ oʻrniga qoʻyish bu funksiyani ratsionallashtiradi;

b) agar $R(\sin x,\cos x)$ ifoda $\cos x$ ga nisbatan toq, yaʼni $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ boʻlsa, u holda $\sin x=t$ oʻrniga qoʻyish orqali bu funksiya ratsionallashtiriladi;

c) agar $R(\sin x,\cos x)$ ifoda $\sin x$ va $\cos x$ larga nisbatan juft, yaʼni $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$ boʻlsa, u holda $tgx=t$ oʻrniga qoʻyish bu funksiyani ratsionallashtiradi.

Bunda quyidagi almashtirishlardan foydalaniladi:

$$\sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+t^2},$$

$$x = arctgt, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

4- misol. $I = \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x - 4\sin x + 5}$ integralni toping.

Yechish. Integral ostidagi funksiya $\cos x$ ga nisbatan toq funksiya. Shu sababli $\sin x = t$ deb olamiz.

U holda $\cos x dx = dt$ va

$$I = \int \frac{dt}{t^2 - 4t + 5} = \int \frac{d(t-2)}{(t-2)^2 + 1} = arctg(t-2) + C = arctg(\sin x - 2) + C.$$

5- misol. $I = \int \frac{dx}{1 - 2\sin^2 x}$ integralni toping.

Yechish. Integral ostidagi funksiya $\sin x$ ga nisbatan juft funksiya. Shu sababli $tgx = t$ o'rniga qo'yishdan foydalanamiz.

U holda

$$I = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1 - \frac{2t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{tgx+1}{tgx-1}\right| + C.$$

2.10.4. $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$ ko'rinishidagi integrallar[H]

Bu ko'rinishdagi integrallarni hisoblashda

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x),$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x),$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)$$

trigonometrik formulalardan foydalaniladi.

6- misol. $\int \cos 3x \cdot \cos 5x dx$ integralni toping.

Yechish. $\int \cos 3x \cdot \cos 5x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 8x + \cos 2x) dx =$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\sin 8x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C = \frac{1}{16}(\sin 8x + 4\sin 2x) + C.$$

2.10.5. Mashqlar

2.10.1. Berilgan integrallarni toping:

1) $\int \frac{x^2}{x+1}dx;$ 2) $\int \frac{3x+1}{3x-1}dx;$

3) $\int \frac{x^2+1}{x-1}dx;$ 4) $\int \frac{x^3}{x-2}dx;$

5) $\int \frac{1}{(2x+3)^3}dx;$ 6) $\int \frac{1}{(4x-3)^4}dx;$

7) $\int \frac{dx}{1+x+x^2};$ 8) $\int \frac{dx}{x^2-5x+4};$

9) $\int \frac{3x+5}{x^2+2x+2}dx;$ 10) $\int \frac{dx}{x^2-4x+4};$

11) $\int \frac{4x+2}{2x^2-2x+1}dx;$ 12) $\int \frac{dx}{1+x+x^2};$

13) $\int \frac{dx}{5+4\sin x};$ 14) $\int \frac{dx}{5-3\cos x};$

15) $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x};$ 16) $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x};$

17) $\int \sin x\cos 3x dx;$; 18) $\int \cos 2x\cos 4x dx.$.

2.11. ANIQ INTEGRAL

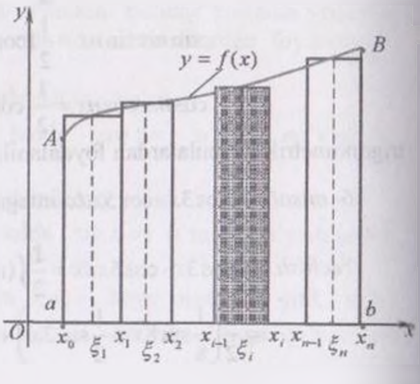
2.11.1. Aniq integral tushunchasiga olib keluvchi masalalar

Aniq integral tabiat va texnikaning bir qancha masalalarini yechishda, xususan har xil geometrik va fizik kattaliklami hisoblashda keng qo'llaniladi.

Egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi haqidagi masalasi

Tekislikda Oxy to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan va $[a;b]$ kesmada uzluksiz va manfiy bo'lmafan $y=f(x)$ funksiya aniqlangan bo'lsin.

Yuqoridan $y=f(x)$ funksiya grafigi bilan, quyidan Ox o'qi bilan, yon tomonlaridan $x=a$ va $x=b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan figuraga *egri chiziqli trapetsiya* deyiladi (52-shaklda bu figura $-aABb$).



52-shakl

$aABb$ egri chiziqli trapetsiya ning S yuzasiga ta'rif beramiz. $[a;b]$ kesmani n ta kichik kesmalarga bo'lamiz: bo'linishsh nuqtalarining abssissalarini $a = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_{n-1} < x_n = b$ bilan belgilaymiz. $\{x_i\} = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ bo'linish nuqtalari to'plamini $[a;b]$ kesmaning bo'linishi deymiz. x_i bo'linish nuqtalari orqali Oy o'qqa parallel $x = x_i$ to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziqlar $aABb$ trapetsiyani asoslari $[x_{i-1};x_i]$ bo'lgan n ta bo'lakka bo'ladi. $aABb$ trapetsiyaning S yuzasi n ta tasma yuzalarining yig'indisiga teng bo'ladi. n yetarlicha katta va barcha $[x_{i-1};x_i]$ kesmalar kichik bo'lganida har bir n ta tasmaning yuzasini husoblash oson bo'lgan mos to'g'ri to'trburchakning yuzasi bilan almashtirish mumkin bo'ladi. Har bir $[x_{i-1};x_i]$ kesmada biror ξ_i nuqtani tanlaymiz, $f(x)$ funksiyaning bu nuqtadagi qiymati $f(\xi_i)$ ni hisoblaymiz va uni to'g'ri to'rtburchakning balandligi deb qabul qilamiz. $[x_{i-1};x_i]$ kesma kichik bo'lganida $f(x)$ uzluksiz funksiya bu kesmada kichik o'zgarishga ega bo'ladi. Shu sababli bu kesmalarda funksiyani va taqriban $f(\xi_i)$ga teng deyish mumkin. Bitta tasmaning yuzasi $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ ga teng bo'lganidan $aABb$ egri chiziqli trapetsiyaning S ga yuzasi taqriban S_n teng bo'ladi:

$$S \approx S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1} \tag{11.1}$$

(11.1) taqribiy qiymat $d = \max_i \Delta x_i \ (i = \overline{1,n})$ kattalik qancha kichik bo'lsa shuncha aniq bo'ladi. d kattalikka $\{x_i\}$ bo'linishning diametri deyiladi. Bunda $n \to \infty$ da $d \to 0$.

Shunday qilib, *egri chiziqli trapetsiyning S yuzasi* deb, S_n to'g'ri to'rtburchaklar yuzasining bo'linish diametri nolga intilgandagi limitiga aytiladi, ya'ni

$$S = \lim_{d\to 0} S_n = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{11.2}$$

Demak, egri chiziqli trapetsiyaning yuzasini hisoblash masalasi (11.2) ko'rinishdagi limitni hisoblashga keltiriladi.

Bosib o'tilgan yo'l masalasi

Agar moddiy nuqtaning harakat qonuni $s = f(t)$ (bunda $t-$ vaqt, $s-$ bosib o'tilgan yo'l) tenglama bilan berilgan bo'lsa $f(t)$ funksiyaning $f'(t)$ hosilasi moddiy nuqtaning berilgan vaqtdagi harakat tezligi $v(t)$ ga teng, ya'ni $v(t) = f'(t)$ bo'ladi. Fizikada quyidagi masalani yechishga to'g'ri keladi. Moddiy nuqta to'g'ri chiziq bo'ylab v tezlik bilan harakat qilayotgan va v tezlik t vaqtning uzluksiz funksiyasi bo'lsin deymiz. Moddiy nuqta vaqtning $t = a$ dan $t = b$ gacha bo'lgan biror $[a;b]$ oralig'ida bosib o'tgan yo'l s ni topamiz. $[a;b]$ kesmani $a = t_0 < t_1 < ... < t_{i-1} < t_i < ... < t_{n-1} < t_n = b$ nuqtalar bilan vaqtning n ta yetarlicha kichik oraliqlariga bo'lamiz. Vaqtning kichik $[t_{i-1};t_i]$ oralig'ida $v(t)$ tezlik «deyarli» o'zgarmaydi. Uni bu vaqt oralig'ida o'zgarmas va taqriban

$v(\xi_i)$ $(\xi_i \in [t_{i-1};t_i])$ ga teng deyish mumkin. Bunda harakat $[t_{i-1};t_i]$ kesmada yassi bo'ladi. U holda bosib o'tilgan yo'l bu vaqt oralig'ida $v(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$ ga, $[a;b]$ vaqt oralig'ida $s \approx s_n = \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ ga teng bo'ladi. Bu taqribiy qiymat $d = \max_i \Delta t_i$ $(i = \overline{1,n})$ kattalik qancha kichik bo'lsa, shuncha aniq bo'ladi.

Shunday qilib, s *bosib o'tilgan yo'l* deb, s_n yig'indining $d \to 0$ dagi limitiga aytiladi, ya'ni

$$s = \lim_{d \to 0} s_n = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i. \tag{11.3}$$

Demak, bosib o'tilgan yo'lni hisoblash masalasi (11.3) ko'rinishdagi limitni hisoblashga keltiriladi.

Qaralgan har ikki masalada biror ko'rinishdagi yig'indining limitini topishga olib keluvchi bir xil usul qo'llanildi. Tabiat va texnikaning bir qancha masalalari yuqoridagi kabi yig'indining limitini topishga keltiriladi.

Reaksiyaga kirishuvchi modda miqdori haqida masala

Kimyoviy reaksiyada qatnashuvchi qandaydir moddaning kimyoviy aylanish tezligi $v = v(t)$ bo'lsin. t_0 dan t gacha vaqt oralig'ida reaksiyaga kirishuvchi modda miqdori m ni topaylik. Buning uchun oldingi masalani yechish jarayonini ketma-ket amalga oshiramiz. Natijada

$$m = \lim_{d \to 0} v_n = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i \tag{11.4}$$

limitni hisoblash masalasiga kelamiz.

2.11.2. Integral yig'indi va aniq integral[8]

$y = f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan bo'lsin.

$[a;b]$ kesmani ixtiyoriy ravishda $a = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_{n-1} < x_n = b$ nuqtalar bilan n ta qismga bo'lamiz, bunda $\{x_i\}$ ga $[a;b]$ kesmaning *bo'linishi*, $d = \max_{1 \le i \le n}(x_i - x_{i-1})$, $(i = \overline{1,n})$ kattalikka *bo'linish diametri* deymiz.

Har bir $[x_{i-1};x_i]$ kesmada ixtiyoriy ξ_i nuqtani tanlaymiz. Bunday nuqtalarni *belgilangan nuqtalar* deb ataymiz. Funksiyaning $f(\xi_i)$ qiymatni mos $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ uzunlikka ko'paytirib, bu ko'paytmalardan

$$w_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{11.5}$$

yig'indini tuzamiz. (11.5) yig'indiga $f(x)$ funksiya uchun $[a;b]$ kesmaning $\{x_i\}$ bo'linishidagi *integral yig'indi* deyiladi.

w_n yig'indining $d \to 0$ dagi limiti tuzunchasini kiritamiz.

1-ta'rif. Agar $\forall$ $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilsa va $|I - w_n| < \varepsilon$ tengsizlik $[a;b]$ kesmaning diametri $d < \delta$ bo'lgan istalgan $\{x_i\}$

bo'linishida ξ_i belgilangan nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmagan holda bajarilsa, I soniga w_n integral yig'indining limiti deyiladi va u $I = \lim_{d \to 0} w_n$ deb yoziladi.

2-ta'rif. Agar (11.5) integral yig'indi $d \to 0$ da chekli limitga ega bo'lsa, u holda bu limitga $[a;b]$ kesmada $f(x)$ funksiyadan olingan *aniq* (bir karrali) *integral* deyiladi va $\int_a^b f(x)dx$ kabi belgilanadi.

Shunday qilib, ta'rifga ko'ra

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{11.6}$$

bu yerda $f(x)$ –integral ostidagi funksiya, x – integrallash o'zgaruvchisi, a, b – integralning quyi va yuqori chegarasi, $[a;b]$ – integrallash sohasi (kesmasi) deyiladi.

$[a;b]$ kesmada $\int_a^b f(x)dx$ anig integral mavjud bo'lsa, $y = f(x)$ funksiya shu kesmada *integrallanuvchi* deyiladi.

Keltirilgan ta'riflarda $a < b$ bo'lsin deb faraz qilindi. Aniq integral tushunchasini $a = b$ va $a > b$ bo'lgan hollar uchun umumlashtiramiz.

$a > b$ bo'lganida 2-ta'rifga ko'ra

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \tag{11.7}$$

bo'ladi.

2-ta'rifga ko'ra $a = b$ bo'lganida ((11.6) ga qarang).

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \tag{11.8}$$

bo'ladi.

(11.4) integral yig'indi berilgan funksiyaning argumenti qanday harf bilan belgilanishiga bog'liq bo'lmagani sababli, uning limiti va shuningdek aniq integral integrallash o'zgaruvchisining belgilanishiga bog'liq bo'lmaydi:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz.$$

Aniq integral mavjud bo'lishi haqidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

1-teorema (*Koshi teoremasi*). Agar $y = f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzlukziz bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx$ aniq integral mavjud bo'ladi.

Funksiyaning uzluksiz bo'lishi uning integrallanuvchi bo'lishining yetarli sharti bo'ladi. Boshqacha aytganda $[a;b]$ kesmada uzilishga ega bo'lgan, ammo bu kesmada integrallanuvchi funksiyalar mavjud bo'lishi ham mumkin.

2-teorema. $[a;b]$ kesmada chekli sondagi birinchi tur uzilish nuqtalariga ega bo'lgan funksiya bu kesmada integrallanuvchi bo'ladi.

2.11.3. Aniq integralning geometrik va mexanik ma'nolari

Egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi masalasiga qaytamiz. (11.2) tenglikning o'ng tomoni integral yig'indidan iborat. U holda (11.6) formuladan *aniq integralning geometrik ma'nosi* kelib chiqadi: agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada integrallanuvchi va manfiy bo'lmasa, u holda $[a;b]$ kesmada $f(x)$ funksiyadan olingan aniq integral $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$ va $x=b$ chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzasiga teng.

1- misol. $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$ integralni uning geometrik ma'nosiga tayanib hisoblang.

Yechish. Bunda x ning -3 dan 3 gacha o'zgarishida tenglamasi $y=\sqrt{9-x^2}$ bo'lgan chiziq $x^2+y^2=9$ aylananing Ox o'qidan yuqorida joylashgan bo'lagidan iborat bo'ladi. Shu sababli $x=-3$, $x=3$, $y=0$ va $y=\sqrt{9-x^2}$ chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya $x^2+y^2=9$ doiraning yarmidan tashkil topadi. Uning yuzi $S=\dfrac{9\pi}{2}$ ga teng. Demak,

$$\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx=\frac{9\pi}{2}.$$

Endi bosib o'tilgan yo'l masalasiga o'tamiz. (11.3) tenglikning o'ng tomoni integral yig'indidan iborat bo'lgani uchun (11.5) formuladan ushbu xulosaga kelamiz: agar $v(t)$ funksiya $[a;b]$ kesmada integrallanuvchi va manfiy bo'lmasa, u holda $v(t)$ tezlikdan $[a;b]$ vaqt oralig'ida olingan aniq integral moddiy nuqtaning $t=a$ dan $t=b$ gacha vaqt oralig'ida bosib o'tgan yo'liga teng. Bu jumla *aniq integralning mexanik ma'nosini* anglatadi.

2.11.4. Aniq integralning xossalari[11]

1°. Agar integral ostidagi funksiya birga teng bo'lsa, u holda

$$\int_a^b dx=b-a$$

bo'ladi.

Isboti. Aniq integralning ta'rifiga ko'ra

$$\int_a^b dx=\lim_{d\to0}\sum_{i=1}^{n}1\cdot\Delta x_i=\lim_{d\to0}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=\lim_{d\to0}(b-a)=b-a.$$

2°. Ozgarmas ko'paytuvchini aniq integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya'ni

$$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx,\ k=const.$$

Isboti. $\int_a^b kf(x)dx=\lim_{d\to0}\sum_{i=1}^{n}kf(\xi_i)\Delta x_i=k\lim_{d\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=k\int_a^b f(x)dx$

3°. Chekli sondagi funktsiyalar algebraik yig'indisining aniq integrali qo'shiluvchilar aniq integrallarining algebraik yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int_a^b (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx.$$

Isboti. $\int_a^b (f(x) \pm \varphi(x))dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i) \pm \varphi(\xi_i))\Delta x_i =$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx.$$

4°. Agar $[a;b]$ kesma bir necha qismga bo'lingan bo'lsa, u holda $[a;b]$ kesma bo'yicha olingan aniq integral har bir qism bo'yicha olingan aniq integrallar yig'indisiga teng bo'ladi. Masalan,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad c \in [a;b].$$

Isboti. $a < c < b$ bo'lsin deylik. Integral yig'indi $[a;b]$ kesmani bo'lish usuliga bog'liq emas. Shu sababli c ni $[a;b]$ kesmani bo'lish nuqtasi qilib olamiz. Masalan, agar $c = x_m$ deb olsak, u holda w_n ni ikki yig'indiga ajratish mumkin:

$$w_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Bunda $d \to 0$ da limitga o'tamiz:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

a, b, c nuqtalarning boshqacha joylashishida ham xossa shu kabi isbotlanadi.

Masalan, $a < b < c$ bo'lsa, $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$ bo'ladi.

Bundan

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$$

yoki integrallash chegaralarining almashtirilishi xossaga ko'ra ((11.7) ga qarang)

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

5°. Agar $[a;b]$ kesmada funksiya o'z ishorasini o'zgartirmasa, u holda funksiya aniq integralining ishorasi funksiya ishorasi bilan bir xil bo'ladi, ya'ni:

$[a;b]$ da $f(x) \geq 0$ bo'lganda, $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ bo'ladi;

$[a;b]$ da $f(x) \leq 0$ bo'lganda, $\int_a^b f(x)dx \leq 0$ bo'ladi.

Isboti. $f(x) \geq 0$ funksiya uchun integral yig'indi $w_n \geq 0$ bo'ladi, chunki $f(\xi_m) \geq 0$ va $\Delta x_i > 0$. Bundan $\int_a^b f(x)dx \geq 0$. Shu kabi $\Delta x_i > 0$, $f(x) \leq 0$

ekanidan $w_{\tau} \le 0$ va $\int\limits_a^b f(x)dx \le 0$ kelib chiqadi.

6°. Agar $[a;b]$ kesmada $f(x) \ge \varphi(x)$ bo'lsa, u holda

$$\int\limits_a^b f(x)dx \ge \int\limits_a^b \varphi(x)dx$$

bo'ladi.

Isboti. $f(x) \ge \varphi(x)$ dan $f(x) - \varphi(x) \ge 0$ bo'ladi. U holda 5-xossaga ko'ra $\int\limits_a^b (f(x) - \varphi(x))dx \ge 0$ yoki 3- xossaga ko'ra $\int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_a^b \varphi(x)dx \ge 0$.

Bundan

$$\int\limits_a^b f(x)dx \ge \int\limits_a^b \varphi(x)dx.$$

7°. Agar m va M sonlar $f(x)$ funksiyaning $[a;b]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlarii bo'lsa, u holda

$$m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

bo'ladi.

Isboti. Shartga kora $m \le f(x) \le M$.

U holda 6-xossaga ko'ra

$$\int\limits_a^b mdx \le \int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b Mdx.$$

Bunda

$$\int\limits_a^b mdx = m\int\limits_a^b dx = m(b-a), \qquad \int\limits_a^b Mdx = M\int\limits_a^b dx = M(b-a).$$

U holda

$$m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Bu xossa aniq integralni *baholash haqidagi teorema* deb yuritiladi.

8°. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda shunday $c \in [a;b]$ nuqta topiladiki,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \qquad (11.9)$$

bo'ladi.

Isboti. 7- xossaga ko'ra

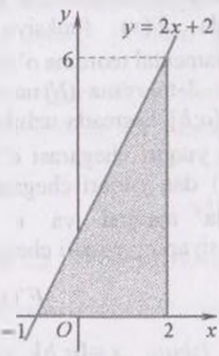
$$m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Bundan

$$m \le \frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a} \le M.$$

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \mu$$ deymiz. U holda $m \le \mu \le M$ bo'lgani uchun Bolsano-Koshining ikkinchi teoremasiga ko'ra biror $c \in [a;b]$ nuqta uchun $f(c) = \mu$ bo'ladi. Shu sababli $\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(c)$ yoki $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

8- xossa *o'rta qiymat haqidagi teorema* deb ataladi. (11.9) formulaga *o'rta qiymat formulasi*, $f(c)$ ga $f(x)$ *funktsiyaning* $[a;b]$ *kesmadagi o'rtacha qiymati* deyiladi.



53-shakl

O'rta qiymat haqidagi teorema quyidagi geometrik talqinga ega: agar $f(x) > 0$ bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx$ integral qiymati balandligi $f(c)$ ga va asosi $(b-a)$ ga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchakning yuzasiga teng bo'ladi.

2- misol. $y = 2x + 2$ funksiyaning $[-1;2]$ kesmadagi o'rtacha qiymatini toping.

Yechish. O'rta qiymat haqidagi teoremadan topamiz:

$$f_{o'r} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Aniq integralning geometrik ma'nosiga ko'ra $\int_{-1}^{2}(2x+2)dx$ integralning qiymati 53-shaklda keltirilgan uchburchakning yuzasiga teng, ya'ni

$$S = \frac{1}{2}\cdot(2+1)\cdot 6 = 9.$$

Bundan

$$f_{o'r} = \frac{1}{2-(-1)}\cdot 9 = 3.$$

2.11.5. Yuqori chegarasi o'zgaruvchi aniq integral

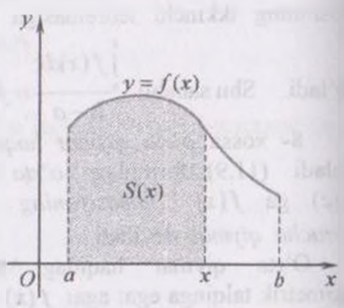
$y = f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. U holda u ixtiyoriy $[a;x]$ $(a \le x \le b)$ kesmada integrallanuvchi bo'ladi, ya'ni istalgan $x \in [a;b]$ uchun

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad (11.10)$$

integral mavjud bo'ladi.

Agar ixtiyoriy $t \in [a;b]$da $f(t) > 0$ bo'lsa, u holda $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ integral asosi $[a;x]$ kesmadan iborat bo'lgan egri chiziqli trapetsiyaning o'zgaruvci yuzasi $S(x)$ ni ifodalaydi (54-shakl).

$[a;b]$ kesmada (11.10) tenglik bilan aniqlangan $F(x)$ funksiyaga *yuqori chegarasi o'zgaruvchi aniq integral* deyiladi.



54-shakl

$F(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz va differensiallanuvchi bo'ladi. Shunindek, bunda $F(x)$ funksiya uchun quyidagi fundamental teorema o'rinli bo'ladi.

3-teorema (*Nyuton-Leybnis teoremasi*). $[a;b]$ kesmada uzluksiz $f(x)$ funksiyaning yuqori chegarasi o'zgaruvchi integrali $F(x)$ dan yuqori chegara bo'yicha olingan hosila mavjud va u integral ostidagi funksiyaning yuqori chegaradagi qiymatiga teng bo'ladi, ya'ni

$$F'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x), \quad x \in [a;b]. \qquad (11.11)$$

Isboti. $x \in [a;b]$ va $x + \Delta x \in [a;b]$ bo'lsin. U holda aniq integralning 4- xossasini qo'llab, topamiz:

$$F(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Bundan (11.1) tenglik va o'rta qiymat haqidagi teoremaga ko'ra

$$\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)\Delta x, \text{ bu yerda } c \in [x, x+\Delta x].$$

$F(x)$ funksiyaning hosilasini aniqlaymiz:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c).$$

$\Delta x \to 0$ da $x + \Delta x \to x$ va $c \to x$, chunki $c \in [x, x+\Delta x]$.

U holda $f(x)$ funksiyaning uzluksizligidan

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x)$$

bo'ladi.

Nyuton-Leybnis teoremasi matematik analizning asosiy teoremalaridan biri hisoblanadi. Bu teorema differensial bilan aniq integral tushunchalari orasidagi munosabatni ochib beradi.

Bu teoremadan $[a;b]$ kesmada uzluksiz har qanday $f(x)$ funksiya shu kesmada boshlang'ich funksiyaga ega bo'ladi va uning boshlang'ich funksiyalaridan biri yuqori chegarasi o'zgaruvchi $F(x)$ integral bo'ladi degan xulosa kelib chiqadi.

$f(x)$ funksiyaning boshqa bir boshlang'ich funksiyasi $F(x)$ funksiyadan o'zgarmas C songa farq qilgani uchun aniqmas va aniq integrallar orasidagi ushbu bog'lanish kelib chiqadi:

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C,\ x \in [a;b]. \qquad (11.12)$$

2.11.6. Nyuton-Leybnis formulasi[8]

Aniq integralni integral yig'indining limiti sifatida hisoblash hatto oddiy funksiyalar uchun ham ancha qiyinchiliklar tug'diradi. Shu sababli aniq integralni hisoblashning (11.12) formulaga asoslangan, amaliy jihatdan qulay bo'lgan hamda keng qo'llaniladigan usuli bilan tanishamiz.

4-teorema (*integral hisobning asosiy teoremasi*). Agar $F(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (11.13)$$

Isboti. $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyalaridan biri bo'lsin. U holda 3-teoremaga asosan $\int_a^x f(t)dt$ funksiya ham $f(x)$ funksiyaning $[a;b]$ kesmadagi boshlang'ich funksiyasi bo'ladi. Boshlang'ich funksiyalar o'zgarmas C songa farq qilganidan

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C.$$

Bu tenglikka $x = a$ ni qo'yamiz va chegaralari teng bo'lgan aniq integralning xossasini qo'llaymiz:

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C = 0.$$

Bundan $C = -F(a)$. U holda istalgan $x \in [a;b]$ uchun

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

bo'ladi.

Oxirgi tenglikda $x = b$ deymiz va t o'zgaruvchini x bilan almashtiramiz. Natijada (11.13) formula kelib chiqadi.

(11.13) formulaga *Nyuton-Leybnis formulasi* deyiladi.

$F(b) - F(a)$ ayirmani shartli ravishda $F(x)\big|_a^b$ deb yozish kelishilgan.

Bu kelishuv natijasida Nuyton-Leybnis formulasi

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b \qquad (11.14)$$

ko'inishda ifodalanadi.

3- misol. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ integralni hisoblang.

Yechish. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\Big|_0^3 = \ln\left|3+\sqrt{10}\right| - \ln 1 = \ln\left|3+\sqrt{10}\right|.$

4- misol. $\int\limits_1^4 \frac{dx}{x^2-2x+10}$ integralni hisoblang.

Yechish.

$$\int\limits_1^4 \frac{dx}{x^2-2x+10} = \int\limits_1^4 \frac{dx}{(x-1)^2+3^2} = \frac{1}{3}arctg\frac{x-1}{3}\Big|_1^4 = \frac{1}{3}(arctg1 - arctg0) = \frac{\pi}{12}.$$

2.11.7. Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish

5-teorema. $y=f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo'lsin. Agar 1) $x=\varphi(t)$ funksiya $[\alpha;\beta]$ kesmada differensiallanuvchi va $\varphi'(t)$ funksiya $[\alpha;\beta]$ kesmada uzluksiz; 2) $x=\varphi(t)$ funksiyaning qiymatlar sohasi $[a;b]$ kesmadan iborat; 3) $\varphi(\alpha)=a$ va $\varphi(\beta)=b$ bo'lsa, u holda

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (11.15)$$

bo'ladi.

Isboti. Nyuton-Leybnis formulasiga ko'ra

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

bu yerda $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning $[a;b]$ kesmadagi boshlang'ich funksiyalaridan biri. $\Phi(t)=F(\varphi(t))$ murakkab funksiyani qaraymiz.

Murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga asosan

$$\Phi'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Demak, $\Phi(t)$ funksiya $[\alpha;\beta]$ kesmada $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ uzluksiz funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi. Nyuton-Leybnis formulasi bilan topamiz:

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

(11.15) formula *aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish* formulasi deb yuritiladi. Aniq integralni hisoblashning bu usulida *aniq integralda o'rniga qo'yish* usuli deyiladi.

Izoh. Aniq integralni (11.15) formula bilan hisoblashda dastlabki eski o'zgaruvchiga qaytish shart emas, chunki integrallash chegarasi o'rniga qo'yishga mos tarzda o'zgaradi.

5- misol. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $x=2\sin t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{3}$ belgilash kiritamiz. Bu o'zgaruvchini almashtirish 3-teoremaning barcha shartlarini qanoatlantiradi: birinchidan $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ funksiya $[0;\sqrt{3}]$ kesmada uzluksiz, ikkinchidan $x=2\sin t$

funksiya $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ kesmada differensiallanuvchi va $x'=2\cos t$ bu kesmada uzluksiz, uchinchidan t o'zgaruvchi 0 dan $\frac{\pi}{3}$ gacha o'zgarganda $x=2\sin t$ funksiya 0 dan $\sqrt{3}$ gacha o'sadi va bunda $\varphi(0)=0$ va $\varphi\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$. Bunda $dx=2\cos t dt$.

(11.15) formuladan topamiz:

$$\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}dx=4\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 t dt=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2t)dt=2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

6-misol. $\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $t=\sqrt{1+x^2}$ o'rniga qo'yish bajaramiz. U holda

$$x=\sqrt{t^2-1},\ dx=\frac{tdt}{\sqrt{t^2-1}},\ x=0 \text{ da } t=1,\ x= \text{ da } t=\sqrt{2}.$$

$[1;\sqrt{2}]$ kesmada $\sqrt{t^2-1}$ funksiya monoton o'sadi, demak o'rniga qo'yich to'g'ri bajarilgan. Bundan

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx=\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{t^2-1}\cdot t\cdot\frac{tdt}{\sqrt{t^2-1}}=\int_1^{\sqrt{2}}t^2dt=\frac{t^3}{3}\Bigg|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}.$$

Izoh. (11.15) formulani qo'llashda teoremada sanab o'tilgan shartlarning bajarilishini tekshirish lozim. Agar bu shartlar buzilsa keltirilgan formula bo'yicha o'zgaruvchini almashtirish xato natijaga olib kelishi mumkin.

2.11.8. Aniq integralni bo'laklab integrallash

6-teorema. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar $u'(x)$ va $v'(x)$ hosilalari bilan $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu \qquad (11.16)$$

bo'ladi.

Isboti. Teoremaning shartiga ko'ra $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar hosilaga ega.

U holda ko'paytmani differensiallash qoidasiga binoan

$$(u(x)v(x))'=u(x)v'(x)+v(x)u'(x).$$

Bundan $u(x)v(x)$ funksiya $u(x)v'(x)+v(x)u'(x)$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'lishi kelib chiqadi. $u(x)v'(x)+v(x)u'(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo'lgani uchun u bu kesmada integrallanuvchi bo'ladi.

U holda aniq integralning 3- xossasiga va Nyuton-Leybnis formulasiga ko'ra

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx+\int_a^b v(x)u'(x)dx=u(x)v(x)\Big|_a^b.$$

Bundan, $u'(x)dx = du(x)$ va $v'(x)dx = dv(x)$ bo'lgani uchun,

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du .$$

(11.16) formula *aniq integralni bo'laklab integrallash formulasi* deb ataladi.

7- misol. $\int_0^1 xe^{-x}dx$ integralni hisoblang.

Yechish.

$$\int_0^1 xe^{-x}dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \ dv = e^{-x}dx \\ du = dx, \ v = -e^{-x} \end{array} \right| = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx =$$

$$= -\frac{1}{e} - e^{-x}\Big|_0^1 = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

2.11.9. Mashqlar

2.11.1. Integrallarni aniq integralning geometrik ma'nosiga tayanib hisoblang:

1) $\int_0^4 \sqrt{16 - x^2}dx$; 2) $\int_0^2 (3 + x)dx$.

2.11.2. Funksiyalarning berilgan kesmalardagi o'rtacha qiymatini toping:

1) $y = \sqrt{4 - x^2}$, $[-2;2]$; 2) $y = |x|$, $[-1;1]$;

2.11.3. Berilgan integrallarni hisoblang:

1) $\int_{-1}^{2} (x^2 + 2x + 1)dx$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx$,

3) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$, 4) $\int_1^e \frac{dx}{x}$;

5) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x dx$, 6) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$;

7) $\int_0^1 x\sqrt{1 + x^2}dx$; 8) $\int_0^1 (2x^3 + 1)x^2 dx$;

9) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{1 + \cos x}$; 10) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x dx$;

11) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{3 + 4x^2}$; 12) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1}dx$;

13) $\int_0^{\pi} x \sin\frac{x}{2}dx$; 14) $\int_1^{\sqrt{e}} x \ln x dx$;

2.12. XOSMAS INTEGRALLAR

Aniq integral qaralganida $\int_a^b f(x)dx$ integral mavjud bo'lishi uchun ikkita shartning bajarilishi talab qilingan edi: 1) integrallash chegarasi chekli $[a;b]$ kesmadan iborat bo'lishi; 2) integral ostidagi funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan va chegaralangan bo'lishi.

Aniq integral uchun keltirilgan shartlardan biri bajarilmaganda u *xosmas integral* deb ataladi: 1) faqat birinchi shart bajarilmasa, cheksiz chegarali xosmas integral (yoki I tur xosmas integral) deyiladi; 2) faqat ikkinchi shart bajarilmasa, uzilishga ega bo'lgan funksiyaning xosmas integrali (yoki II tur xosmas integral) deyiladi.

2.12.1. Cheksiz chegarali xosmas integrallar (I tur xosmas integrallar)[8]

1-ta'rif. $f(x)$ funksiya $[a;+\infty)$ oraliqda uzluksiz bo'lsin. Agar $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ limit mavjud va chekli bo'lsa, bu limitga *yuqori chegarasi cheksiz xosmas integral* deyiladi va $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ kabi belgilanadi:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx. \tag{12.1}$$

Bu holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integralga *yaqinlashuvchi integral* deyiladi.

Agar $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ limit mavjud bo'lmasa yoki cheksiz bo'lsa, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integralga *uzoqlashuvchi integral* deyiladi.

Quyi chegarasi cheksiz va har ikkala chegarasi cheksiz xosmas integrallar shu kabi ta'riflanadi:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx, \tag{12.2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx, \tag{12.3}$$

bu yerda $c-$ sonlar o'qining biror fiksirlangan nuqtasi. Bunda (7.3) tenglikning chap tomonidagi xosmas integral, o'ng tomondagi har ikkala xosmas integral yaqinlashgandagina yaqinlashadi.

1- misol. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}\,(\alpha > 0)$ integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. $\alpha \neq 1$ bo'lsin.

U holda

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{b\to+\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\bigg|_1^b=\frac{1}{1-\alpha}(\lim_{b\to+\infty}b^{1-\alpha}-1).$$

Bunda: 1) $\alpha<1$ bo'lganda, $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}(\lim_{b\to+\infty}b^{1-\alpha}-1)=+\infty,$

2) $\alpha>1$ bo'lganda, $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}(\lim_{b\to+\infty}b^{1-\alpha}-1)=\frac{1}{1-\alpha},$

3) $\alpha=1$ bo'lganda, $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\ln x\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\ln b=+\infty.$

Demak, $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ xosmas integral $\alpha>1$ da yaqinlashadi va $0<\alpha\le1$ da uzoqlashadi.

2- misol. $\int_{-\infty}^{0}x\cos xdx$ integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. $\int_{-\infty}^{0}x\cos xdx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 x\cos xdx=\lim_{a\to-\infty}\left(x\sin x\Big|_a^0-\int_a^0\sin xdx\right)=$

$=\lim_{a\to-\infty}(-a\sin a+\cos x\Big|_a^0=\lim_{a\to-\infty}(-a\sin a-\cos a+1).$

Bu limit mavjud emas. Shu sababli $\int_{-\infty}^{0}x\cos xdx$ integral uzoqlashadi.

2.12.2. Uzilishga ega bo'lgan funksiyalarning xosmas integrallari (II tur xosmas integrallar)[8]

2-ta'rif. $f(x)$ funksiya $[a;b)$ oraliqda aniqlangan va uzluksiz bo'lib, $x=b$ da cheksiz uzilishga ega bo'lsin. Agar $\lim_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$ limit mavjud va chekli bo'lsa, bu limitga *uzilishga ega bo'lgan funksiyaning xosmas integrali* deyiladi va $\int_a^b f(x)dx$ kabi belgilanadi:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx. \tag{12.4}$$

Shu kabi: 1) $f(x)$ funksiya x ning a ga o'ngdan yaqinlashishida uzilishga ega bo'lsa,

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx; \tag{12.5}$$

bo'ladi;

2) agar $f(x)$ funksiya $c\in[a;b]$ da uzilishga ega bo'lsa,

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int_a^{c-\varepsilon}f(x)dx+\lim_{\varepsilon\to0}\int_{c+\varepsilon}^{b}f(x)dx \tag{12.6}$$

bo'ladi.

II tur xosmas integrallar uchun yaqinlashish (uzoqlashish) tushunchalari I tur integrallardagi kabi kiritiladi.

4- misol. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$ integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. $x=0$ da integral ostidagi funksiya uzilishga ega. U holda (11.6) tenglikka ko'ra

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}+\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{+\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}=$$

$$=-3\lim_{\varepsilon\to 0}x^{-\frac{1}{3}}\Big|_{-1}^{-\varepsilon}-3\lim_{\varepsilon\to 0}x^{-\frac{1}{3}}\Big|_{+\varepsilon}^{1}=$$

$$=3\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-\frac{1}{3}}-1-1+3\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-\frac{1}{3}}=6\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-\frac{1}{3}}-1\right)=+\infty.$$

Demak, xosmas integral uzoqlashadi. Berilgan integralga Nyuton-Leybnits formulasi formal qo'llanilishi xato natijaga olib keladi:

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}=-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\Bigg|_{-1}^{1}=-6.$$

2.12.3. Mashqlar

2.12.3. Berilgan integrallarni hisoblang yoki uzoqlashuvchi ekanini aniqlang:

1) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$; 2) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^4}$;

3) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$; 4) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x}$;

5) $\int\limits_{-\infty}^{0}e^{x}dx$; 6) $\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-kx}kdx$;

7) $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{\ln x dx}{x}$; 8) $\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}dx$;

9) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 10) $\int\limits_{1}^{e}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

11) $\int\limits_{-1}^{8}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$; 12) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$;

13) $\int\limits_{a}^{b}\frac{dx}{b-x}$; 14) $\int\limits_{a}^{b}\frac{dx}{x-a}$.

2.13. ANIQ INTEGRALNING TATBIQLARI

2.13.1. Tekis shakl yuzasini hisoblash[8]

Yuzani dekart koordinatalarida hisoblash

Aniq integralning geometrik ma'nosiga asosan abssissalar o'qidan yuqorida yotgan, ya'ni yuqoridan $y = f(x)$ $(f(x) \geq 0)$ funksiya grafigi bilan, quyidan Ox o'q bilan, yon tomonlaridan $x = a$ va $x = b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi

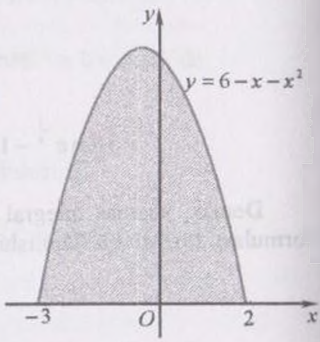
$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad (13.1)$$

integtegralga teng bo'ladi.

Shu kabi, abssissalar o'qidan pastda yotgan, ya'ni quyidan $y = f(x)$ $(f(x) \leq 0)$ funksiya grafigi bilan, yuqoridan Ox o'q bilan, yon tomonlaridan $x = a$ va $x = b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi

$$S = -\int_a^b f(x)dx \qquad (13.2)$$

integtegralga teng bo'ladi.



55-shakl

1-misol. Ox o'q va $y = 6 - x - x^2$ parabola bilan chegaralangan tekis shakl yuzasini toping.

Yechish. Parabolaning Ox o'q bilan kesishish nuqtasini topamiz (55-shakl):

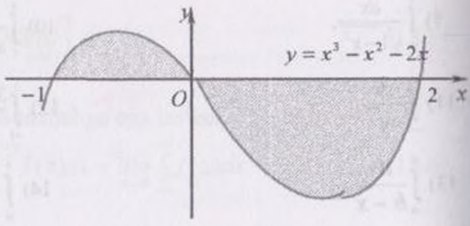
$$y = 0 = 6 - x - x^2 = (3 + x)(2 - x), \; x_1 = -3, \; x_2 = 2.$$

Yassi shakl yuzasini (13.1) formula bilan topamiz:

$$s = \int_{-3}^{2} (6 - x - x^2)dx = \left(6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{2} =$$

$$= \left(12 - 2 - \frac{8}{3}\right) - \left(-18 - \frac{9}{2} + 27\right) = 20\frac{5}{6}.$$

Yuzani hisoblashga oid murakkabroq masalalar yuzaning additivlik xossasiga asoslangan holda yechiladi. Bunda tekis shakl kesishmaydigan qismlarga ajratiladi va aniq integralning 4-xossasiga ko'ra tekis shaklning yuzasi qismlar yuzalarining yig'indisiga teng bo'ladi.



56-shakl

2- misol. $y = x^3 - x^2 - 2x$ va $y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan tekis shakl yuzasini hisoblang (56- shakl).

Yechish Berilgan tekis shaklni yuzalari S_1 va S_2 bo'lgan kesishmaydigan qismlarga ajratamiz. U holda yuzaning additivlik xossasiga asosan berilgan tekis shaklning yuzasi qismlar yuzalarining yig'indisiga teng bo'ladi.

Demak,

$$S = S_1 + S_2 = \int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - 2x)dx - \int_{0}^{2}(x^3 - x^2 - 2x)dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_{-1}^{0} - \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_{0}^{2} = -\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right) + \left(4 - \frac{8}{3} - 4\right) = \frac{37}{12}.$$

Agar egri chiziqli trapetsiya yuqoridan $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ parametrik tenglamalar bilan berilgan funksiya grafigi bilan chegaralangan va $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(b)$ bo'lsa (13.1) formulada $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$ ko'rinishdagi o'rniga qo'yish orqali o'zgaruvchi almashtiriladi.

U holda

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt \tag{13.3}$$

bo'ladi, bu yerda, $a = \varphi(\alpha)$ va $b = \varphi(\beta)$.

3- misol. Radiusi R ga teng doira yuzasini hisoblang.

Yechish. Koordinatalar boshini doiraning markaziga joylashtiramiz. Bu doiraning aylanasi $x = R\cos t$, $y = R\sin t$ parametrik tenglamalar bilan aniqlanadi va doira koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik bo'ladi. Shu sababli uning birinchi chorakdagi yuzasini hisoblaymiz (bunda x o'zgaruvchi 0 dan R gacha o'zgarganda t parametr $\frac{\pi}{2}$ dan 0 gacha o'zgaradi) va natijani to'rtga ko'paytiramiz.

U holda (13.3) formulaga ko'ra:

$$S = 4S_1 = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} R\sin t(-R\sin t)dt = 4R^2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt =$$

$$= 2R^2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1 - \cos 2t)dt = 2R^2\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \pi R^2.$$

Yuzani qutb koordinatalarida hisoblash

Qutb koordinatalar (r – qutb radiusi, φ – qutb burchagi) sistemasida berilgan $r = r(\varphi)$ funksiya $\varphi \in [\alpha; \beta]$ kesmada uzluksiz bo'lsin.

$r = r(\varphi)$ funksiya grafigi hamda O qutbdan chiqqan $\varphi = \alpha$ va $\varphi = \beta$ nurlar bilan chegaralangan tekis shaklga *egri chiziqli sektor* deyiladi.

AOB egri chiziqli sektor yuzasini quyidagi tartibda hisoblaymiz.

1°. Qutbdan chiqqan φ va α burchaklarga mos nurlar bilan chegaralangan egri chiziqli sektor yuzi φ burchakning $S = S(\varphi)$ funksiyasi bo'lsin, bu yerda $\alpha \le \varphi \le \beta$ ($\varphi = \alpha$ bo'lganda $S(\alpha) = 0$, $\varphi = \beta$ bo'lganda $S(\beta) = S$).

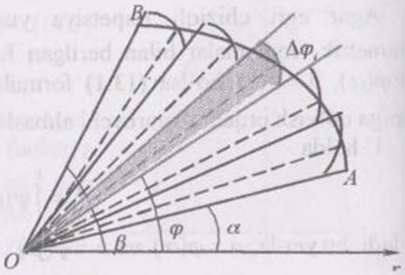
2°. Joriy φ qutb burchak $\Delta\varphi = d\varphi$ orttirma olganida ΔS yuza OAB «elementar egri chuiiqli sektor» yuziga teng orttirma oladi.

Bunda dS differensial ΔS orttirmaning $d\varphi \to 0$ dagi orttirmasining bosh qismini ifodalaydi va radiusi r ga, markaziy burchagi $d\varphi$ ga teng bo'lgan OAC doiraviy sektor yuziga teng bo'ladi (57-shakl). Shu sababli

$$dS = \frac{1}{2}r^2 d\varphi.$$

3°. Oxirgi ifodani $\varphi = \alpha$ dan $\varphi = \beta$ gacha integrallab izlanayotgan yuzani topamiz:

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi. \qquad (12.6)$$



57-shakl.

4- misol. $r = 2\cos 3\varphi$ egri chiziq bilan chegaralangan figuraning yuzasini hisoblang.

Yechish. $r = 2\cos 3\varphi$ egri chiziq bilan chegaralangan figuraga uch yaproqli gul deyiladi (1-ilovaga qarang). Uningning oltidan bir qismi yuzasini hisoblaymiz:

$$\frac{1}{6}S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} 4\cos^2 3\varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 6\varphi)d\varphi = \left(\varphi + \frac{\sin 6\varphi}{6}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}.$$

Bundan $S = \pi$.

Agar egri chiziqli sektor $r_1 = r_1(\varphi)$ va $r_2 = r_2(\varphi)$ ($\varphi \in [\alpha;\beta]$ da $r_2(\varphi) > r_1(\varphi)$) funksiyalar grafiklari bilan chegaralangan bo'lsa,

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi))d\varphi \qquad (13.4)$$

bo'ladi.

2.13.2. Egri chiziq yoyi uzunligini hisoblash

AB egri chiziq $y = f(x) \ge 0$ funksiyaning grafigi, bunda $x \in [a;b]$, $y = f(x)$ funksiya va $y' = f'(x)$ hosila bu kesmada uluksiz bo'lsin.

AB egri chiziq uzunligi l ni quyidagi tartibda topamiz.

1°. $[a;b]$ kesmada ixtiyoriy x nuqtani tanlaymiz va o'zgaruvchi $[a;x]$ kesmani qaraymiz. $(x, f(x))$ nuqta M bo'lsin.

$\overset{\smile}{AM}$ yoy uzunligi l_{AM} x ning funksiyasi bo'ladi: $l = l(x)$ ($l(a) = 0$ va $l(b) = l$).

2°. x ning kichik $\Delta x = dx$ kattalikka o‘zgarishida dl differensialni topamiz: $dl = l'(x)dx$. $\overset{\frown}{MN}$ yoyni uni tortib turuvchi vatar bilan almashtiramiz (58-shakl) va $l'(x)$ ni topamiz:

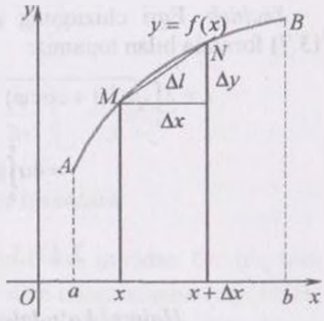
$$l'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta l}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta x} = = \lim_{\Delta x \to 0}\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{1 + (y'_x)^2}.$$

Demak, $dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2}\,dx$.

3°. dl ni a dan b gacha integrallaymiz:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2}\,dx, \qquad (13.5)$$

(13.5) tenglikka *yoy differensialining* to‘g‘ri burchakli koordinatalardagi formulasi deyiladi.



58-shakl

5- nmisol. $y = \frac{3}{8}x\sqrt[3]{x} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2}$ egri chiziq yoyining Ox o‘q bilan kesishish nuqtalari orasidagi uzunligini hisoblang.

Yechish. $y = 0$ deb egri chiziqning Ox oq bilan kesishish nuqtalarini aniqlaymiz: $x_1 = 0$, $x_2 = 2\sqrt{2}$.

Hosilani topamiz:

$$y' = \frac{3}{8}\cdot\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\left(x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}\right).$$

Yoy uzunligini hisoblaymiz:

$$l = \int_0^{2\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\sqrt{2}}\sqrt{\left(x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\sqrt{2}}\left(x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right)\Bigg|_0^{2\sqrt{2}} = 3.$$

Agar egri chiziq $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, parametrik tenglamalar bilan berilgan bo‘lsa, (13.5) formulada $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$ o‘rniga qo‘yish orqali o‘zgaruvchi almashtiriladi.

Bunda

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt \qquad (13.6)$$

kelib chiqadi, bu yerda $a = \varphi(\alpha)$ va $b = \varphi(\beta)$.

Egri chiziq qutb koordinatalar sistemasida $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, tenglama bilan berilgan bo‘lsin, bunda $r(\varphi)$, $r'(\varphi)$ funksiyalar $[\alpha;\beta]$ kesmada uzluksiz va A, B nuqtalarga qutb koordinatalarida α, β burchaklar mos keladi.

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ekanligidan

$$x'(\varphi) = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi, \quad y'(\varphi) = r'(\varphi)\sin\varphi - r(\varphi)\cos\varphi.$$

(13.5) formulaga $x'(\varphi)$ va $y'(\varphi)$ hosilalarni qo'yamiz va almashtirishlar bajarib, topamiz:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\,d\varphi . \qquad (13.7)$$

6- misol. $r = a(1+\cos\varphi)$, $a > 0$, kardioida uzunligini toping.

Yechish. Egri chiziqning simmetrikligini (1-ilovaga qarng) hisobga olib, (13.7) formula bilan topamiz:

$$l = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2(-\sin\varphi)^2}\,d\varphi = 4a\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}\,d\varphi =$$

$$= 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a.$$

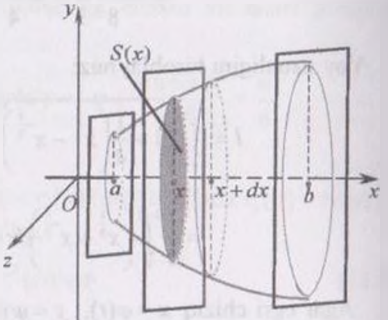
2.13.3. Hajmlarni hisoblash[8]

Hajmni ko'ndalang kesim yuzasi bo'yicha hisoblash

Hajmi hisoblanishi lozim bo'lgan qandaydir jism (12-shakl) uchun uning istalgan ko'ndalang kesim yuzasi S ma'lum bo'lsin. Bu yuza ko'ndalang kesim joylashishiga bog'liq bo'ladi: $S = S(x)$, $x \in [a;b]$, bu yerda $S(x)-$ $[a;b]$ kesmada uzluksiz funksiya.

Izlanayotgan hajmni II sxema asosida topamiz.

1°. Istalgan $x \in [a;b]$ nuqta orqali Ox o'qqa perpendikular tekislik o'tkazamiz. Jismning bu tekislik bilan kesimi yuzasini $S(x)$ bilan va jismning bu tekislikdan chapda yotgan bo'lagining hajmini $V(x)$ bilan belgilaymiz (63-shakl). Bunda V kattalik x ning funksiyasi bo'ladi: $V = V(x)$ ($V(a) = 0$ va $V(b) = V$).



59-shakl

2°. $V(x)$ funksiyaning dV differensialini topamiz. Bu differensial Ox o'q bilan x va $x+\Delta x$ nuqtalarda kesishuvchi parallel tekisliklar orasidagi «elementar qatlam» dan iborat bo'ladi. Bu differensialni asosi $S(x)$ga va balandligi dx ga teng silindr bilan taqriban almashtirish mumkin. Demak, $dV = S(x)dx$.

3°. dV ni a dan b gacha integrallab, izlanayotgan hajmni topamiz:

$$V = \int_a^b S(x)dx. \qquad (13.8)$$

7- misol. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoidning hajmini hisoblang.

Yechish. Ellipsoidning Ox o'qqa perpendikulyar va koordinatalar boshidan x $(-a\le x\le a)$ masofada o'tuvchi tekislik bilan kesamiz. Kesimda yarim o'qlari $b(x)=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ va $c(x)=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ bo'lgan ellips hosil bo'ladi. Uning yuzasi

$$S(x)=\pi b(x)c(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

U holda

$$V=\int_{-a}^{a}\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Aylanish jismlarining hajmini hisoblash

Yuqoridan $y=f(x)$ uzluksiz funksiya grafigi bilan, quyidan Ox o'q bilan, yon tomonlaridan $x=a$ va $x=b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning Ox o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jism hajmini hisoblaymiz. Bu jismning ixtiyoriy ko'ndalang kesimi doiradan iborat. Shu sababli jismning $X=x$ tekislik bilan kesimining yuzasi $S(x)=\pi y^2$ bo'ladi.

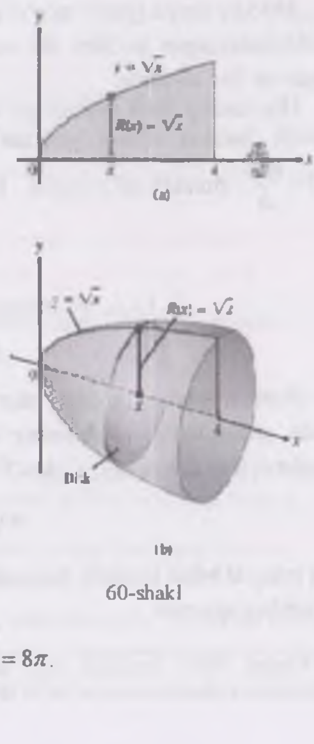
U holda (13.8) formulaga ko'ra

$$V=\pi\int_a^b y^2dx. \qquad (13.9)$$

Shu kabi yuqoridan $y=f(x)$ uzluksiz funksiya grafigi bilan, quyidan Ox o'q bilan, yon tomonlaridan $x=a$ va $x=b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyani Oy o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jismning hajmi quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$V=2\pi\int_a^b yxdx. \qquad (13.10)$$

8- misol. $y=\sqrt{x},\ y=0,\ x=0,\ x=4$ chiziqlar bilan chegaralangan tekis shaklning Ox o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jism (60-shakl) hajmini toping.



60-shakl

Yechish. Hajmni (13.9) formula bilan topamiz:

$$S=\pi\int_0^4 xdx=\pi\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^4=8\pi.$$

2.13.4. Kuchning bajargan ishini hisoblash

Moddiy nuqta o'zgaruvchan $\vec{F}$ kuch tasirida Ox o'qi bo'ylab harakatlanayotgan bo'lsin va bunda kuchning yo'nalishi harakat yo'nalishi bilan bir xil bo'lsin. U holda $\vec{F}$ kuchning moddiy nuqtani Ox o'qi bo'ylab $x=a$ nuqtadan $x=b$ $(a<b)$ nuqtaga ko'chirishda bajargan ishi quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$A=\int_a^b F(x)dx, \qquad (13.11)$$

bu yerda $F(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz.

9- misol. Agar prujina 12 H kuch ostida 4 sm ga cho'zilsa, uni 22 sm cho'zish uchun qancha ish bajarish kerak?

Yechish. Guk qonuniga ko'ra prujinani cho'zuvchi kuch prujinaning cho'zilishiga proportsional bo'ladi, ya'ni $F=kx$. Misolning shartiga ko'ra: $F(0{,}04\ m)=12\ H$ yoki $12=0{,}04k$. Bundan $k=300$. U holda

$$A=\int_0^{0{,}22} 300x dx=150x^2\Big|_0^{0{,}22}=7{,}26\ (J).$$

2.13.5. Jismning bosib o'tgan yo'li

Moddiy nuqta (jism) to'g'ri chiziq bo'ylab o'zgaruvchan $v=v(t)$ tezlik bilan harakatlanayotgan bo'lsin. Bu nuqtaning t_1 dan t_2 gacha vaqt oralig'ida bosib o'tgan yo'lini topamiz.

Hosilaning fizik ma'nosiga ko'ra nuqtaning bir tomonga harakatida «to'g'ri chiziqli harakat tezligi yo'ldan vaqt bo'yicha olingan hosilaga teng», ya'ni $v(t)=\frac{dS}{dt}$. Bundan $dS=v(t)dt$. Bu tenglikni t_1 dan t_2 gacha integrallaymiz:

$$S=\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt. \qquad (13.12)$$

2.13.6. Populyatsiya miqdorining o'sishi[12]

Populatsiya miqdori

Populatsiyadagi miqdori vaqt bo'yica o'zgaradi, ya'ni $N=N(t)$ bo'ladi. Agar bunda populatsiya miqdorining o'sish tezligi $v(t)$ berilgan bo'lsa, u holda populatsiya miqdorining t_0 dan T gacha vaqt oralig'ida o'sishi

$$N(T)-N(t_0)=\int_{t_0}^{T} v(t)dt \qquad (13.13)$$

aniq integral bilan topiladi, bu yerda $N(T), N(t_0)$ – populatsiya miqdorining T va t_0 vaqtdagi qiymati.

12. Баврин И.И. Краткий курс высшей математики для химико-биологических и медицинских специальностей. М.Ж ФИЗМАТЛИТ, 2003 –328 с.

2.13.7. Mashqlar

2.13.1. Berilgan chiziqlar bilan chegaralangan figuralar yuzalarini hisoblang:

1) $y=9-x^2$, $y=0$; 2) $y=-x$, $y=2x-x^2$;

3) $y=x^2-5x+6$ $y=0$; 4) $y=\sqrt{2x+1}$, $y=0$;

5) $y=x^2$, $y=x$; 6) $y=x^3$, $y=x$;

7) $y=x^2+1$, $y=1$, $x=4$; 8) $y^2=x^3, x=0$, $x=4$;

9) $4y=x^2$, $y^2=4x$; 10) $y=\sqrt{x}$, $y=2$, $x=9$;

11) $x=4\cos t$, $y=3\sin t$, $0\le t\le 2\pi$;

12) $x=3(t-\sin t)$, $y=3(1-\cos t)$ (sikloida bitta arkasi)

13) $r=3\sin 2\varphi$. 14) $r=2+3\cos\varphi$;

2.13.2. Berilgan egri chiziqlarning argumentning ko'rsatilgan oralig'iga mos yoylari uzunliklarini toping:

1) $y^2=x^3$, $x=0$ dan $x=4$ gacha; 2) $y=\ln\sin x$, $x=\dfrac{\pi}{3}$ dan $x=\dfrac{2\pi}{3}$ gacha;

3) $x=t^2$, $y=\dfrac{t^3}{3}-t$, koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalari orasidagi;

4) $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$ (sikloida bitta arkasi);

5) $r=\sqrt{2}e^{\varphi}$, $\varphi=0$ dan $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ gacha, 6) $r=4\cos^2\dfrac{\varphi}{2}$, $\varphi=0$ dan $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ gacha.

2.13.3. R radiusli shar hajmini hisoblang.

2.13.4. Asosining yuzi S ga va balandligi H ga teng piramida hajmini toping

2.13.5. Asosining radiusi R ga va balandligi H ga teng konus hajmini toping

2.13.6. Berilgan chiziqlar bilan chegaralangan figuraning Ox o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jism hajmini hisoblang:

1) $x^2=4-y$, $y=0$; 3) $y=\sin x$, $y=0$, $o\le x\le\pi$;

3) $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$, bitta arkasi, 4) $x=t^2$, $y=t^3$, $x=0$, $y=1$;

2.13.7. Prujinani 4 *sm.* ga cho'zish uchun 24 J ish bajariladi. 150 J ish bajarilsa, prujinana qanday uzunlikka cho'ziladi?

2.13.8. Agar prujinani 1 *sm* ga siqish uchun 1 kG kuch sarf qilinsa, prujinaning 8 *sm* ga siqishda sarf bo'ladigan F kuch bajargan ishni toping.

2.13.9. Jismning to'g'ri chiziqli harakat tezligi $v=2t+3t^2$ (m/s) formula bilan ifodalanadi. Jismning harakat boshlanishidan 5 *s.* davomida bosib o'tgan yo'lini toping

2.13.10. Nuqtaning harakat tezligi $v=18t-6t^2\,(m/s)$ ga teng. Nuqtaning harakat boshlanishidan harakat to'xtaguncha bosib o'tgan yo'lini toping

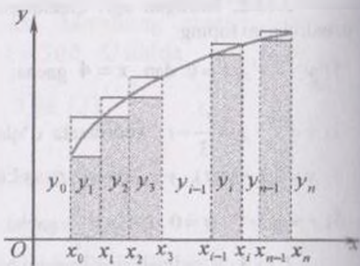
2.13.11. Jism biror muhitda $s=t^2$ qonun bilan harakatlanmoqda. Muhitning qarshiligi harakat tezligi kvadratiga proporsionaln Qatsilik kuchining jismni $s=0$ dan $s=a$ gacha ko'chirishda bajargan ishini toping.

2.13.12. Organizmning dori preparatining muayyan miqdoriga reaksiyasi t vaqtda $f(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$ formula bilan aniqlanadi. Bu miqdorga yig'indi reaksiyani toping.

2.14. ANIQ INTEGRALNI TAQRIBIY HISOBLASH[10]

Ma'lumki, agar $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmada boshlang'ich funksiyasi $F(x)$ mavjud bo'lsa, $f(x)$ funksiyaning aniq integrali Nyuton-Leybhis formulasi bilan topiladi. Elementar funksilarda olinmaydigan integrallar amalda taqribiy hisoblash usullari bilan topiladi. Bunday usullardan aniq integralning integral yig'indining limiti haqidagi ta'rifiga va geometrik ma'nosiga asoslangan usullarni ko'rib chiqamiz.

2.14.1. To'g'ri to'rtburchaklar formulasi



61-shakl

$[a;b]$ kesmada uzluksiz $y=f(x)$ funksiya uchun $\int_a^b f(x)dx$ integralni hisoblash talab qilingan bo'lsin. Aniqlik uchun barcha $x\in[a,b]$da $f(x)$ funksiya musbat va monoton o'suvchi deb faraz qilamiz.

$[a;b]$ kesmani

$a=x_0<x_1<...<x_{i-1}<x_i<...<x_{n-1}<x_n=b$ nuqtalar bilan uzunliklari $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$ bo'lgan n ta teng kesmalarga ajratamiz. Funksiyaning $x_0,\ x_1,...,x_i,...,x_n$ nuqtalardagi qiymatlarini $y_0,\ y_1,...,y_i,...,y_n$ bilan belgilab,

$$y_0=f(x_0),\ y_1=f(x_1),...,y_i=f(x_i),...,y_n=f(x_n)$$

larni hisoblaymiz va quyidagi integral yig'indilarni tuzamiz:

$$y_0\Delta x+y_1\Delta x+...+y_i\Delta x+...+y_{n-1}\Delta x=\sum_{i=0}^{n-1}y_i\Delta x,$$

$$y_1\Delta x+y_2\Delta x+...+y_i\Delta x+...+y_n\Delta x=\sum_{i=1}^{n}y_i\Delta x.$$

U holda 61-shaklga ko'ra

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+...+y_i+...+y_{n-1})=\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}y_i, \qquad (14.1)$$

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}(y_1+y_2+...+y_i+...+y_n)=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i. \qquad (14.2)$$

(14.1) va (14.2) formulalar aniq integralni taqribiy hisoblashning *to'g'ri to'rtburchaklar formulalari* deyiladi.

61-shakldan ko'rinadiki, agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada musbat va o'suvchi bo'lsa, (14.1) formula berilgan integralning qiymatini kami bilan, (14.2) formula esa ortig'i bilan beradi.

Agar $[a;b]$ kesmada $f'(x)$ chekli hosila mavjud bo'lsa, to'g'ri to'rtburchaklar formulalarining absolut xatoliklari $|\delta_n| \le \frac{M_1(b-a)^2}{2n}$ tengsizlik bilan baholanadi, bu yerda $M_1 = \max_{a\le x\le b}|f'(x)|$.

2.14.2. Trapetsiyalar formulasi

$[a;b]$ kesmani bo'lishlar sonini avvalgidek qoldiramiz, lekin Δx xususiy intervalga mos keladigan $y=f(x)$ funksiyaning har bir yoyini bu yoyning chetki nuqtalarini tutashtiruvchi AA_1, $A_1A_2, ..., A_{i-1}A_i, .., A_{n-1}A_n$ vatarlar bilan almashtiramiz. Bunda berilgan egri chiziqli trapetsiya n ta to'g'ri chiziqli trapetsiya bilan almashtiriladi (62-shakl).

Bu to'g'ri chiziqli trapetsiyalar har birining yuzi $\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\Delta x_i$ $(i=\overline{1,n})$ ga teng. Bu yuzalarning barchasini qo'shib, *trapetsiyalar formulasi*ni hosil qilamiz:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n}\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\Delta x_i = \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+...+y_{n-1}\right). \qquad (14.3)$$

Bu formulaning xatoligi $|\delta_n| \le \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$ tengsizlik bilan baholanadi, bu yerda $M_2 = \max_{a\le x\le b}|f''(x)|$.

2.14.3. Simpson formulasi (parabolalar usuli)

$[a;b]$ kesmani

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{2i-2} < x_{2i-1} < x_{2i} < ... < x_{2m-2} < x_{2m-1} < x_{2m} = b$$

nuqtalar bilan uzunliklari $h=\frac{b-a}{2m}$ bo'lgan $n=2m$ ta teng kesmalarga ajratamiz va har bir ketma-ket kelgan M_{2m-2}, M_{2m-1}, M_{2m} nuqtalar orqali parabolalar o'tkazamiz. Egri chiziqli $aM_0M_{2m}b$ trapetsiyaning yuzini parabolalarning M_{2i-2}, M_{2i-1} va M_{2i} $(i=\overline{1,m})$ nuqtalarini tutashtiruvchi yoylari bilan chegaralangan $2m$ ta parabolik trapetsiyalar yuzalarining yig'indisi bilan almashtiramiz.

M_{2m-2}, M_{2m-1}, M_{2m} nuqtalar orqali o'tkazilgan parabola tenglamasini $y=Ax^2+Bx+C$ ko'rinishda izlaymiz. A, B, C koeffitsiyentlarni parabolaning berilgan uchta nuqtadan o'tishi shartidan topamiz. Hisoblashlar qulay bo'lishi uchun koordinatalar boshini o'qlarning yo'nalishini o'zgartirmasdan $[x_{2i-2}; x_{2i}]$ kesmaning o'rtasiga joylashtiramiz (63-shakl).

Parabolaning $(-h; y_{2i-2})$, $(0; y_{2i-1})$, $(h; y_{2i})$ nuqtalardan o'tishi shartidan

$y_{2i-2} = Ah^2 - Bh + C$, $y_{2i-1} = C$, $y_{2i} = Ah^2 + Bh + C$ kelib chiqadi.

Bundan

$$A = \frac{1}{2h^2}(y_{2i-2} - 2y_{2i-1} + y_{2i}),\ B = \frac{1}{2h}(y_{2i} - y_{2i-2}),\ C = y_{2i-1}.$$

Endi $2i$ – parabolik trapetsiya yuzini aniq integral orqali hisoblaymiz:

$$S_{2i} = \int_{-h}^{h}(Ax^2 + Bx + C)dx = \left(A\frac{x^3}{3} + B\frac{x^2}{2} + Cx\right)\Bigg|_{-h}^{h} = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C).$$

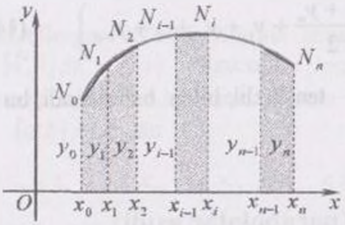
Formulaga A, B, C koeffitsiyentlarning qiymatlarini qo'yib, topamiz:

$$S_{2i} = \frac{b-a}{6m}(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}),\ i = \overline{1,n}.$$

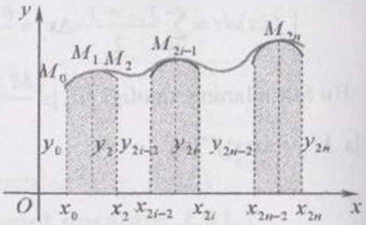
Parabolik trapetsiyalarning yuzlarini qo'shib, izlanayotgan integralning taqribiy qiymatini beruvchi formulani hosil qilamiz:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m}\big(y_0 + y_{2m} + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2})\big). \quad (14.4)$$

(14.4) formulaga *Simpson formulasi* (yoki *parabolalar formulasi*) deyiladi.



62-shakl



63-shakl

(14.4) formulaning xatoligi

$$|\delta_n| \leq \frac{M_4(b-a)^5}{2880n^4}$$

tengsizlik bilan baholanadi, bu yerda $M_4 = \max_{a \le x \le b}\left|f^{IV}(x)\right|$.

1-misol. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ integralni taqribiy hisoblash usullari bilan ($n = 10$ da) aniqlang.

Yechish. Quyidagi jadvalni tuzamiz:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y	1	0,9901	0,9615	0,9174	0,8621	0,8	0,7353	0,6711	0,6098	0,5526	0,5

1) (14.1) va (14.2) formulalar yordamida to'g'ri to'rtburchaklar usuli bilan topamiz:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0,1(1+0,9901+0,9615+0,9174+0,8621+0,8+0,7353+0,6711+$$
$$+0,6098+0.5525)=0,1\cdot 8,0998=0,80998 \ (ortig'i\ bilan),$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0,1(0,9901+0,9615+0,9174+0,8621+0,8+0,7353+0,6711+$$
$$+0,6098+0,5525+0,5)=0,1\cdot 7,5998=0,75998 \ (kami\ bilan).$$

2) Trapetsiyalar formulasi bilan hisoblaymiz:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0,1\left(\frac{1+0,5}{2}+0,9901+0,9615+0,9174+0,8621+0,8+0,7353+\right.$$
$$+0,6711+0,6098+0,5525=0.1\cdot 7,8498=0.78498.$$

3) Simpson fopmulasi bilan hisoblaymiz:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = (1+0,5+4(0,9901+0,9174+0,8+0,6711+0,5525)+$$
$$+290,9615+0,8621+0,7353+0,6098))=0,78539$$

Berilgan integralnini aniq qiymatini topamiz:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} = 0,787571.$$

Taqribiy hisoblashlarning nisbiy va absolyut xatoliklarini aniqlaymiz:

To'g'ri to'rtburchaklar (kami bilan)		To'g'ri to'rtburchaklar (ortig'i bilan)		Trapetsiyalar		Parabolalar	
3,3%	0.026	3,1%	0.024	0,09%	0.0003	0,04%	0,0003

Berilgan integralning *Maple* paketida yechimini beramiz.

1) To'g'ri to'rtburchaklar usuli bo'yicha:

> $restant$:

> $with(Student[Calculus1])$:

> $RiemannSum\left(\frac{1}{(1+x^2)}, x=0..1, method=left\right)$

$$\frac{1579799420518583}{1950414208136225}$$

> $evalf(\%)$;

$$0.8099814972$$

> $RiemannSum\left(\frac{1}{(1+x^2)}, x=0..1, method=right\right)$;

$$\frac{5929114840447087}{7801656832544900}$$

> $evalf(\%)$;

$$0.7599814972$$

2) Trapetsiyalar usuli bo'yicha:

$>with(Student[Calculus1]):$

$> ApproximateInt\left(\frac{1}{(1+x^2)}, x=0..1, method = trapezoid\right);$

$$\frac{1224831252252141 9}{156033136650898 00}$$

$> evalf(\%);$

$$0.7849814972$$

3) Simpson formulasi bo'yicha:

$> with(Student[Calculus1]):$

$> ApproximateInt\left(\frac{1}{(1+x^2)}, x=0..1, method = simpson\right);$

$$\frac{59885853158383117749014845366768 36463}{76249036426504635203016941416552 83000}$$

$> evalf(\%);$

$$0.7853981632$$

2.14.4. Mashqlar

2.14.1. $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ aniq integralni 0,001 aniqlikda taqribiy hisoblang: 1) to'g'ri to'rtburchaklar usullari bilan; 2) trapetsiyalar usuli bilan; 3) Simpson formulasi bilan.

2.15. BIR NECHA O'ZGARUVCHINING FUNKSIYASI

2.15.1. Funksiya tushunchasi

Ikki o'zgaruvchining funksiyasi

R^2 fazoda D va E to'plamlar berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Agar D to'plamning har bir (x,y) haqiqiy sonlar juftiga biror qonun yoki qoida bilan E to'plamdagi yagona haqiqiy z soni mos qo'yilgan bo'lsa, D to'plamda *ikki o'zgaruvchining funksiyasi* aniqlangan deyiladi va $z = f(x;y)$ yoki $z = z(x,y)$ kabi belgilanadi.

Ikki o'zgaruvchining funksiyasi $z = f(x,y)$ yoki $z = z(x,y)$ kabi belgilanadi. Bunda *x va y ga argumentlar* (yoki *erkli o'zgaruvchilar*), *z ga ikki x va y o'zgaruvchining funksiyasi* (yoki *bog'liq o'zgaruvchi*) deb ataladi.

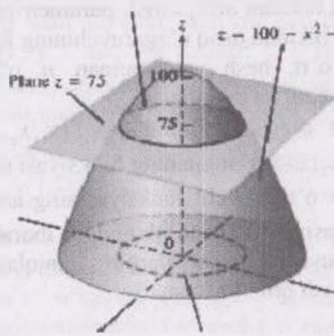
D to'plamga $f(x,y)$ funksiyaning *aniqlanish sohasi*, E to'plamga uning *qiymatlar sohasi* (yoki *o'zgarish sohasi*) deyiladi.

Geometrik nuqtai-nazardan to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasida haqiqiy sonlarning har bir (x,y) juftiga Oxy tekislikning yagona $P(x;y)$ nuqtasi mos keladi. Shu sababli ikki o'zgaruvchining funksiyasini $P(x;y)$ nuqtaning funksiyasi deb qarash va $z = f(x,y)$ yozuvni $f(P)$ kabi yozish mumkin.

Bu holda ikki o'zgaruvchi funksiyasining aniqlanish sohasi Oxy tekislik nuqtalarining biror to'plamidan yoki butun tekislik nuqtalaridan iborat bo'ladi.

$z = f(x,y)$ funksiya jadval, grafik va analitik usullarda berilishi mumkin.

Ikki o'zgaruvchi funksiyasining $z = f(x,y)$ funksiyaning geometrik tasviri uch o'lchovli fazodagi sirtdan iborat bo'ladi. Masalan, 64-shaklda $z = 100 - x^2 - y^2$ funksiyaning grafigi tasvirlangan.



64-shakl

Ikki o'zgaruvchining funksiyasi oshkor ko'rinishda $z = f(x,y)$ formula bilan yoki oshkormas ko'rinishda $F(x,y,z) = 0$ tenglik bilan berilishi mumkin. Funksiya oskormas ko'rinishda berilganida $F(x,y,z) = 0$ tenglikdagi har bir (x,y) sonlar juftiga yagona z sonning mos qo'yilishi talab qilinadi.

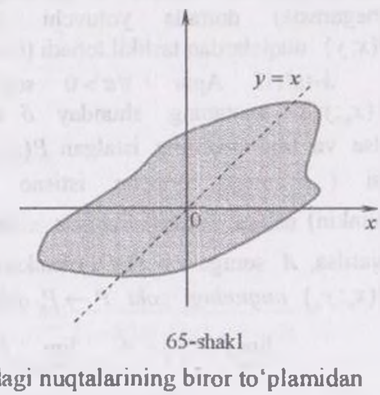
1-misol. $z = \dfrac{x^2 - 2y}{x - y}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechish. Funksiya $y = x$ shartda aniqlanmagan. Demak, $y \neq x$. Geometrik nuqtai-nazardan $y \neq x$ shart funksiyaning aniqlanish sohasi ikkita yarim tekislikdan tashkil topishini bildiradi. Bunda birinchi yarim tekislik $y = x$ to'g'ri chiziqdan yuqorida, ikkinchisi esa bu to'g'ri chiziqdan pastda yotadi (65-shakl).

Ikkidan ortiq o'zgaruvchining funksiyasi

R^3 fazoda D va E to'plamlar berilgan bo'lsin.

2-ta'rif. Agar D to'plamning har bir (x,y,z) haqiqiy sonlar uchligiga biror qonun yoki qoida bilan E to'plamdagi yagona haqiqiy u soni mos qo'yilgan bo'lsa, D to'plamda *uch o'zgaruvchining funksiyasi* aniqlangan deyiladi va $u = f(x,y,z)$ yoki $u = u(x,y,z)$ kabi belgilanadi.



65-shakl

Uch o'zgaruvchining funksiyasini $P(x;y;z)$ nuqtaning funksiyasi deb qarash va $u = f(x,y,z)$ yozuvni $f(P)$ kabi yozish mumkin. Bu holda uch o'zgaruvchi funksiyasining aniqlanish sohasi $Oxyz$ fazodagi nuqtalarining biror to'plamidan yoki butun fazo nuqtalaridan iborat bo'ladi.

2-misol. $u = \ln(4x - 3y + 6z - 12)$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping

Yechish. Funksiya $4x - 3y + 6z - 12 > 0$ yoki $4x - 3y + 6z > 12$ shartda haqiqiy qiymatlar qabul qiladi. Demak, funksiyaning aniqlanish sohasi $Oxyz$ koordinatalar fazosining $4x - 3y + 6z - 12 = 0$ tekislikdan yuqorida yotgan nuqtalari to'plamidan iborat.

Uch o'zgaruvchining funksiyasi jadval va analitik usullarda berilishi mumkin Bunda ikkidan ortiq kirish parametriga ega jadval foydalanishga noqulay bo'lgani uchun ikkidan ortiq o'zgaruvchining funksiyasi asosan analitik usulda beriladi.

To'rt, besh va umuman n o'zgaruvchining funksiyasi yuqoridagi kabi ta'riflanadi va belgilanadi.

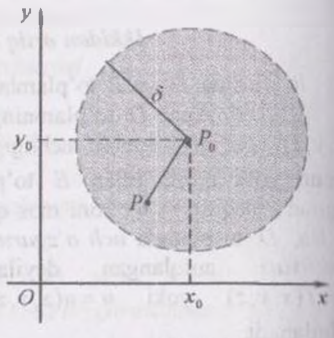
n o'zgaruvchining $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyasi ko'pincha R^n fazodagi $P(x_1; x_2; ...; x_n)$ nuqtaning funksiyasi sifatida qaraladi va $y = f(P)$ deb yoziladi.

n o'zgaruvchi funksiyasining aniqlanish sohasi $(x_1, x_2, ..., x_n)$ haqiqiy sonlar sistemasining D to'plamidan iborat bo'ladi. Bunda to'rtta va undan ortiq o'zgaruvchi funksiyalarning aniqlanish sohasini ko'rgazmali (chizmalarda) namoyish qilib bo'lmaydi.

2.15.2. Funksiyaning limiti

Ikki (va ikkidan ortq) o'zgaruvchi funksiyasining limiti va uzluksiligi bir o'zgaruvchi funksiyasidagi kabi ta'riflanadi. Bu ta'riflar nuqtaning δ atrofi tushunchasiga asoslanadi.

$P_0(x_0; y_0)$ *nuqtaning δ atrofi* deb $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ (yoki $\rho(P, P_0) < \delta$) tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $P(x; y)$ tekislik nuqtalari to'plamiga aytiladi. Bu to'plam markazi $P_0(x_0; y_0)$ nuqtada bo'lgan va radiusi δ ga teng ochiq (chegarasiz) doirada yotuvchi barcha $P(x; y)$ nuqtalardan tashkil topadi (66-shakl).



66-shakl

3-ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun $P_0(x_0; y_0)$ nuqtaning shunday δ atrofi topilsa va bu atrofning istalgan $P(x; y)$ nuqtasi (P_0 nuqta bundan istisno bo'lishi mumkin) uchun $|f(P) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, A soniga $z = f(x, y)$ funksiyaning $P_0(x_0; y_0)$ *nuqtadagi yoki $P \to P_0$ dagi limiti* deyiladi va

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A, \quad \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = A \text{ yoki } \lim_{P \to P_0} f(P) = A$$

kabi belgilanadi.

Bir o'zgaruvchi uchun $x \to x_0$ intilish ikki yo'nalishda bo'ladi: chapdan va o'ngdan. Bunda $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$ va $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$ limitlar mavjud va teng bo'lganida $\lim_{x \to x_0} f(x)$ limit mavjud bo'ladi va aksincha, $\lim_{x \to x_0} f(x)$ limit mavjud bo'lganida har ikkala bir tomonlama limit mavjud va teng bo'ladi.

Ikki o'zgaruvchining $z = f(x, y)$ funksiyasi uchun $P(x; y)$ nuqta $P_0(x_0; y_0)$ nuqtaga to'g'ri chiziq bo'ylab cheksiz ko'p yo'nalishlarda yaqinlashishi mumkin: ham chapdan, ham o'ngdan, ham yuqoridan, ham quyidan, ham ma'lum burchak ostida. Bundan tashqari $P(x; y)$ nuqta $P_0(x_0; y_0)$ nuqtaga nafaqat to'g'ri chiziq bo'ylab, balki murakkabroq trayektoriya bo'ylab ham yaqinlashishi mumkin.

Ta'rifga ko'ra, agar $\lim_{P \to P_0} f(P) = A$ limit mavjud bo'lsa, u holda bu limit $P(x; y)$ nuqtaning $P_0(x_0; y_0)$ nuqtaga intilish yo'liga bog'liq bo'lmaydi, ya'ni $\lim_{P \to P_0} f(P) = A$ bo'lsa, u holda $P(x; y)$ nuqta $P_0(x_0; y_0)$ nuqtaga ixtiyoriy yo'nalish va istalgan trayektoriya bo'ylab yaqinlashganda ham bu limit A ga teng bo'ladi.

Ikki (va ikkidan ortiq) o'zgaruvchi funksiyasi limitining ta'rifi bir o'zgaruvchi funksiyasi limitining ta'rifiga so'zma-so'z o'xshash bo'lgani sababli bir o'zgaruvchi funksiyasining limiti haqidagi teoremalar bir necha o'zgaruvchi funksiyasining limiti uchun ham o'rinli bo'ladi.

3-misol. $\lim_{(x,y) \to (2,-1)} \dfrac{x + 2y^2}{x^2 + 3xy}$ limitni toping.

Yechish. $\lim_{(x,y) \to (2,-1)} x = 2$ va $\lim_{(x,y) \to (2,-1)} y = -1$.

Endi limitlar haqidagi teoremalarni qo'llab topamiz:

$$\lim_{(x,y) \to (2,-1)} \frac{x + 2y^2}{x^2 + 3xy} = \frac{\lim\limits_{(x,y) \to (2,-1)} (x + 2y^2)}{\lim\limits_{(x,y) \to (2,-1)} (x^2 + 3xy)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{(x,y) \to (2,-1)} x + 2 \lim\limits_{(x,y) \to (2,-1)} y^2}{\lim\limits_{(x,y) \to (2,-1)} x^2 + 3 \lim\limits_{(x,y) \to (2,-1)} xy} = \frac{2 + 2 \cdot (-1)^2}{2^2 + 3 \cdot 2 \cdot (-1)} = -2.$$

4-misol. $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{\sqrt{xy + 9} - 3}{x - y}$ limitni toping.

Yechish. (0;0) nuqtaga $y = kx$ to'g'ri chiziq bo'ylab yaqinlashamiz.
U holda

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\sqrt{xy + 9} - 3}{x - y} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{kx^2 + 9} - 3}{(1 - k)x} = \lim_{x \to 0} \frac{kx^2}{(1 - k)x(\sqrt{kx^2 + 9} + 3)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{kx}{(1 - k)(\sqrt{kx^2 + 9} + 3)} = \frac{0}{6(1 - k)} = 0.$$

5-misol. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{2x^2-y^2}$ limitni toping.

Yechish. Limitni topishda $y = kx$ deymiz:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{2x^2-y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{xkx}{2x^2-k^2x^2} = \frac{k}{2-k^2}.$$

Bu limitning qiymati $y = kx$ to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentiga bog'liq: $k = 1$ da (nuqta $y = x$ to'g'ri chiziq bo'ylab harakatlanganda) limit 1 ga teng; $k = 2$ da (nuqta $y = 2x$ to'g'ri chiziq bo'ylab harakatlanganda) limit (-1) ga teng va hokazo. Shunday qilib, $P(x;y)$ nuqtaga koordinatalar boshiga turli yo'nalishlar bo'yicha yaqinlashganda funksiya turli limitlarga ega bo'ladi.

Demak, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{2x^2-y^2}$ limit mavjud emas.

2.15.3. Funksiyaning uzluksizligi

$z = f(P)$ funksiya $P_0(x_0;y_0)$ nuqtaning biror atrofda aniqlangan bo'lsin.

$z = f(P)$ funksiyaning $P_0(x_0;y_0)$ nuqtadagi uzluksizligi quyidagi ta'riflar bilan beriladi.

1. Agar $f(P)$ funksiya P_0 nuqtada chekli limitga ega bo'lsa va bu limit funksiyaning shu nuqtadagi qiymatiga teng, y'ani $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = f(P_0)$ bo'lsa, u holda $f(P)$ funksiya $P_0(x_0,y_0)$ *nuqtada uzluksiz* deyiladi.

$\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = f(P_0)$ tenglik uchta shartning bajarilishini anglatadi:

1) $f(P)$ funksiya P_0 nuqtada va uning atrofida aniqlangan;

2) $f(P)$ funksiya $P \to P_0$ da limitga ega;

3) funksiyaning P_0 nuqtadagi limiti uning bu nuqtadagi qiymatiga teng.

2. Agar $\forall\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilsa va $\rho(P,P_0) < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha nuqtalarda $|f(P) - f(P_0)| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $f(P)$ funksiya $P_0(x_0;y_0)$ *nuqtada uzluksiz* deyiladi.

3. $z = f(P)$ funksiyaning P_0 nuqtadagi Δz to'liq orttirmasi $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ da cheksiz kichik funksiya bo'lsa, u holda $f(P)$ funksiya $P_0(x_0,y_0)$ *nuqtada uzluksiz* deyiladi, bu yerda $\Delta z = f(P) - f(P_0)$, $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$.

Funksiyaning nuqtadagi uzlukizligini tekshirishda keltirilgan ta'riflarning biridan foydalanish mumkin.

Ikki (va ikkidan ortiq) o'zgaruvchi funksiyasining uzluksizligi ta'riflari bir o'zgaruvchi funksiyasi uzluksizligining ta'riflariga o'xshash bo'lgani sababli bir o'zgaruvchi funksiyasi uzluksizligining xossalari haqidagi teoremalar bir necha o'zgaruvchi funksiyasining uzluksizligi uchun ham o'rinli bo'ladi.

2.15.4. Funksiyaning xususiy hosilalari

$D \subset R^2$ sohada $z = f(x,y)$ funksiya aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. Bu sohaning $P_0(x_0;y_0)$, $P_1(x_0+\Delta x;y_0)$, $P_2(x_0;y_0+\Delta y)$, $P_3(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)$ nuqtalarini olamiz va funksiyaning bu nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz, bu yerda Δx, Δy – argumentlarning orttirmalari.

$z = f(x,y)$ funksiyaning $P_0(x_0;y_0)$ nuqtadagi *to'liq orttirmasi*

$$\Delta z = f(P_3) - f(P) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) \tag{15.1}$$

formula bilan topiladi, shu nuqtadagi *xususiy orttirmalari* (mos ravishda *x va y o'zgaruvchilar bo'yicha*) esa

$$\Delta_x z = f(P_1) - f(P) = f(x_0+\Delta x. y_0) - f(x_0, y_0); \tag{15.2}$$

$$\Delta_y z = f(P_2) - f(P) = f(x_0. y_0+\Delta y) - f(x_0. y_0) \tag{15.3}$$

formulalar bilan aniqlanadi.

6-misol. $z = xy$ funksiyaning orttirmalarini toping.

Yechish. $\Delta_x z = (x+\Delta x)y - xy = y\Delta x$; $\Delta_y z = x(y+\Delta y) - xy = x\Delta y$;

$$\Delta z = (x+\Delta x)\cdot(y+\Delta y) - xy - x^2 + y^2 = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y = \Delta_x z + \Delta_y z + \Delta x\Delta y.$$

Misoldan ko'rinadiki, $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

4-ta'rif. Bir necha o'zgaruvchi funksiyasining *biror nuqtadagi o'zgaruvchilardan biri bo'yicha xususiy hosilasi* deb, funksiya mos orttirmasining shu o'zgaruvchi orttirmasiga nisbatining bu orttirma nolga intilganidagi limitiga aytiladi.

Ta'rifga ko'ra $z = f(x,y)$ funksiyaning $P_0(x_0;y_0)$ *nuqtadagi x o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilasi*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \tag{15.4}$$

formula bilan topiladi.

$z = f(x,y)$ funksiyaning $P_0(x_0;y_0)$ nuqtadagi x o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilasi ushbu belgilardan biri bilan ham ifodalanadi:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{P_0}, \quad z'_x(x_0,y_0), \quad f'_x(x_0,y_0).$$

$z = f(x,y)$ funksiyaning $P_0(x_0;y_0)$ *nuqtadagi y o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilasi*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \tag{15.5}$$

formula bilan topiladi. Suningdek, u

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{P_0}, \quad z'_y(x_0,y_0), \quad f'_y(x_0,y_0).$$

belgilardan biri bilan ham ifodalanadi.

Shunday qilib, bir necha o'zgaruvchi funksiyasining biror o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilasi shu o'zgaruvchi funksiyasining, qolgan o'zgaruvchilari o'zgarmas deb hisoblangandagi hosilasi kabi topiladi. Shu sababli bir o'zgaruvchi funksiyasining hosilalari uchun mavjud barcha differensiallash formulalari va qoidalari bir necha o'zgaruvchi funksiyasining xususiy hosilalari uchun ham o'rinli bo'ladi. Bunda biror o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilaning qoida va formulalarini qo'llashda qolgan o'zgaruvchilarning o'zgarmas deb hisoblanishini yodda tutish lozim.

7-misol. $z=\frac{x}{y^3}+\frac{y^2}{x^2}-\frac{2}{xy}$ funksiyaning birinchi tartibli xususiy hosilalarini toping

Yechish. y ni o'zgarmas deb, $\frac{\partial z}{\partial x}$ xususiy hosilani topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y^3}(x)'+y^2\left(\frac{1}{x^2}\right)'-\frac{2}{y}\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{y^3}-\frac{2y^2}{x^3}+\frac{2}{yx^2}.$$

x ni o'zgarmas hisoblab, $\frac{\partial z}{\partial y}$ xususiy hosilani topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x\left(\frac{1}{y^3}\right)'+\frac{1}{x^2}(y^2)'-\frac{2}{x}\left(\frac{1}{y}\right)'=-\frac{3x}{y^4}+\frac{2y}{x^2}+\frac{2}{xy^2}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=xz-3y^2,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=xy+1.$$

2.13.5. Funksiyaning differensiallanuvchanligi

$z=f(P)$ funksiya $P(x,y)$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin.

5-ta'rif. Agar $z=f(x,y)$ funksiyaning $P(x,y)$ nuqtadagi to'liq orttirmasini

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y \qquad (15.6)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa, $z=f(x,y)$ *funksiyaga* $P(x,y)$ *nuqtada differensiallanuvchi* deyiladi, bu yerda A,B – $\Delta x,\Delta y$ ga bog'liq bo'lmagan sonlar, $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ da $\alpha\to 0$, $\beta\to 0$.

1-teorema. Agar $z=f(x,y)$ funksiya $P(x,y)$ nuqtada diffrensiallanuvchi bo'lsa, u holda u shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Isboti. $z=f(x,y)$ funksiya $P(x,y)$ nuqtada differensiyallanuvchi bo'lsin. Ta'rifga ko'ra $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y$. Bundan $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ da $\Delta z\to 0$ kelib chiqadi. Demak, funksiya $P(x;y)$ nuqtada uzluksiz.

2-teorema (*funksiya differensiallanuvchi bo'lishining zaruriy sharti*). Agar $z=f(x,y)$ funksiya $P(x,y)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda u shu nuqtada

$$f'_x(x,y)=A \text{ va } f'_y(x,y)=B$$

xususiy hosilalarga ega bo'ladi.

Isboti. $z = f(x,y)$ funksiya $P(x;y)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. 1-teoremaga ko'ra $z = f(x,y)$ funksiya $P(x;y)$ nuqtada uzluksiz.
Shuningdek,

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y.$$

Bu tenglikda $\Delta x \neq 0$, $\Delta y = 0$ deb, topamiz:

$$\Delta_x z = A\Delta x + \alpha\Delta x.$$

Bundan $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = A$. Ikkinchi tomondan $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = f'_x(x,y)$.

Demak,

$$f'_x(x,y) = A.$$

$P(x,y)$ nuqtada $f'_y(x,y) = B$ bo'lishi shu kabi isbotlanadi.

3-teorema (*funksiya differensiallanuvchi bo'lishining yetarli sharti*). Agar $z = f(x,y)$ funksiya $P(x;y)$ nuqtaning biror atrofida uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lsa, u holda u $P(x;y)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi.

2.15.6. Funksiyaning to'liq differensiali

$z = f(x,y)$ funksiya $P(x;y)$ nuqtada diferrensiallanuvchi bo'lsin.

6-ta'rif. Δz to'liq orttirmaning Δx, Δy larga nisbatan chiziqli bo'lgan bosh qismi $A\Delta x + B\Delta y$ ga $z = f(x,y)$ funksiyaning $P(x;y)$ *nuqtadagi to'liq differensiali* deyiladi va dz bilan belgilanadi.

Demak, ta'rifga ko'ra $dz = A\Delta x + B\Delta y$ yoki 2-teoremaga asosan

$$dz = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y.$$

Shunday qilib, funksiyaning to'liq differensiali uning xususiy hosilalarining mos argumentlar orttirmasiga ko'paytmasining yig'indisiga teng.

Funksiyaning to'liq differensialni argumentlar uchun orttirmalar va diferrensiallar tengligini ($\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$ ni) hisobga olib, quyidagicha yozish mumkin:

$$dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy. \tag{15.7}$$

Ko'pchilik masalalarni yechishda $z = f(x,y)$ funksiyaning $P_0(x_0;y_0)$ nuqtadagi to'liq orttirmasi funksiyaning shu nuqtadagi to'liq differensialiga taqriban tenglashtiriladi, ya'ni $\Delta y \approx dy$ deb olinadi.

Buni

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y$$

yoki

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y \tag{15.8}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

(15.8) taqribiy tenglikka $z = f(x,y)$ funksiyani $P_0(x_0;y_0)$ nuqta atrofida *chiziqlashtirish* deyiladi. Chiziqlashtirish yordamida biror A miqdorning taqribiy qiymati quyidagi tartibda hisoblanadi:

1°. A ni biror $f(x,y)$ funksiyaning $P(x;y)$ nuqtadagi qiymatiga tenglashtiriladi: $A = f(x,y)$;

2°. $P_0(x_0;y_0)$ nuqta $P(x;y)$ nuqtaga yaqin va $f(x_0,y_0)$ ni hisoblash qulay qilib tanlanadi;

3°. $f(x_0,y_0)$ hisoblanadi;

4°. $f'_x(x_0,y_0)$, $f'_y(x_0,y_0)$ lar hisoblanadi;

5°. x, y, x_0, y_0, $f(x_0,y_0)$, $f'_x(x_0,y_0)$, $f'_y(x_0,y_0)$ qiymatlar (15.8) formulaga qo'yiladi.

2.15.7. Murakkab funksiyani differensiallash

Bitta erkli o'zgaruvchi bo'lgan hol

Biror D sohada ikki o'zgaruvchining $z = f(x,y)$ funksiyasi berilgan va bunda funksiyaning argumentlari t erkli o'zgaruvchining funksiyalari bo'lsin: $x = x(t)$, $y = y(t)$. U holda $z = f(x(t),y(t))$ t o'zgaruvchining murakkab funksiyasi bo'ladi.

4-teorema. Agar $z = f(x,y)$ funksiya $P(x,y)\in D$ nuqtada differensiallanuvchi, $x = x(t)$, $y = y(t)$ funksiyalar esa t bo'yicha hosilaga ega bo'lsa, u holda $z = f(x(t),y(t))$ murakkab funksiya t bo'yicha hosilaga ega bo'ladi va bu hosila

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{15.9}$$

formula bilan aniqlanadi.

$z = f(x,y)$, bu yerda $y = y(x)$ bo'lsin. Bunda $z = f(x, f(x))$ – bitta x erkli o'zgaruvchining murakkab funksiyasi bo'ladi.

U holda (15.9) formula bilan topamiz:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} \tag{15.10}$$

(15.10) formulaga x *bo'yicha to'liq differensial formulasi* deyiladi.

8-misol. $z = \ln(x^2 + y)$, bu yerda $y = \sin 2x - x^2$ funksiyaning x bo'yicha to'liq differensialini toping.

Yechish. (15.10) formuladan topamiz:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2+y} + \frac{1}{x^2+y}(2\cos 2x - 2x) = \frac{2\cos 2x}{x^2+y}.$$

$y = y(x)$ni o'rniga qo'yamiz:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2\cos 2x}{x^2 + \sin 2x - x^2} = 2ctg 2x.$$

Bir nechta erkli o'zgaruvchi bo'lgan hol

Biror D sohada ikki o'zgaruvchining $z = f(x,y)$ funksiyasi berilgan va bunda funksiyaning argumentlari ikkita u va v erkli o'zgaruvchilarning funksiyalari bo'lsin: $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$. U holda $z = f(x(u,v), y(u,v))$ ikkita u va v o'zgaruvchilarning murakkab funksiyasi bo'ladi.

5-teorema. Agar $z = f(x,y)$, $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ funksiyalar o'z argumentlarining differensiallanuvchi funksiyalari bo'lsa, u holda $z = f(x(u,v), y(u,v))$ murakkab funksiyai x va y bo'yicha xususiy hosilalarga ega bo'ladi va bu hosilalar

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \tag{15.11}$$

formulalar bilan aniqlanadi.

9-misol. $z = \arcsin\frac{x}{y}$, $x = u\sin v$, $y = u tgv$ funksiyalar berilgan. $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$, larni toping.

Yechish. Funksiyalarning xususiy hosilalarini topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}},$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \sin v, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = tgv, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = u\cos v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{u}{\cos^2 v}.$$

U holda

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}\cdot\sin v - \frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}}\cdot tgv = \frac{tgv(y\cos v - x)}{y\sqrt{y^2 - x^2}} =$$

$$= \frac{tgv(utgv\cos v - u\sin v)}{utgv\sqrt{(utgv)^2 - (u\sin v)^2}} = 0.$$

Shu kabi

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}\cdot u\cos v - \frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}}\cdot\frac{u}{\cos^2 v} =$$

$$= \frac{u(y\cos^3 v - x)}{\cos^2 v\cdot y\sqrt{y^2 - x^2}} = \frac{u(utgv\cos^3 v - u\sin v)}{\cos^2 v\cdot utgv\sqrt{(utgv)^2 - (u\sin v)^2}} = -1.$$

2.15.8. Oshkormas funksiyani differensiallash

Agar x ning X to'plamidagi har bir qiymatiga x bilan birgalikda $F(x,y) = 0$ tenglamani qanoatlantiruvchi yagona y qiymat mos qo'yilsa, X to'plamda $F(x,y) = 0$ tenglama bilan $y = f(x)$ *oshkormas funksiya* aniqlangan deyiladi.

Masalan, $3^y - 2x^2 - 1 = 0$ tenglama butun sonlar o'qida x ga nisbatan y funksiyani oshkormas aniqlaydi, chunki x va y ning bu tenglamani qanoatlantiradigan qiymatlar juftliklari mavjud ((0;0), (2;2) va hokazo).

$y = f(x)$ oshkormas funksiyani aniqlavchi ikki o'zgaruvchining $F(x, y) = 0$ tenglamasi berilgan bo'lsin. Tenglamada y ning o'rniga $f(x)$ funksiyani qo'yamiz va $F(x, f(x)) = 0$ ayniyatni hosil qilamiz.

Aynan nolga teng funksiyaning hosilasi nolga teng bo'lganidan

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Bundan

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}. \qquad (15.12)$$

$F(x, y, z) = 0$ tenglama $z = f(x, y)$ oshkormas funksiyani aniqlasin. Bunda $z = f(x, y)$ funksiyaning x va y o'zgaruvchilar bo'yicha xususiy hosilalari

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} \qquad (15.13)$$

tengliklar bilan aniqlanadi.

2.15.9. Yuqori tartibli xususiy hosilalar va differensiallar

$P(x; y)$ nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan $z = f(x, y)$ funksiya shu atrofda $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$ xususiy hosilalarga ega bo'lsin. Ular *birinchi tartibli xususiy hosilalar* deyiladi.

Bu hosilalar x va y o'zgaruvchilarning funksiyalarini ifodalashi va ular xususiy hosilalarga ega bo'lishi mumkin. Agar bu hosilalar mavjud bo'lsa, ularga *ikkinchi tartibli xususiy hosilalar* deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = f''_{x^2}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{xy} = f''_{xy}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{yx} = f''_{yx}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = f''_{y^2}(x, y).$$

Uchinchi, to'rtinchi va umuman, n-tartibli xususiy hosilalar shu kabi aniqlanadi.

$f''_{xy}(x,y)$ va $f''_{yx}(x,y)$ hosilalarga *ikkinchi tartibli aralash xususiy hosilalar* deyiladi. Quyida ikkinchi tartibli aralash xususiy hosilalar haqidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

6-teorema. Agar $z = f(x,y)$ funksiyaning ikkinchi tartibli aralash xususiy hosilalari $P(x;y)$ nuqtaning biror atrofida mavjud va shu nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda ular shu nuqtada teng bo'ladi: $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$.

$z = f(x,y)$ funksiyaning $P(x;y)$ nuqtadagi to'liq differensiali $dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy$ ga *birinchi tartibli to'liq differensial* deyiladi.

$z = f(x,y)$ funksiya $P(x;y)$ nuqtada ikkinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lsin. U holda *ikkinchi tartibli to'liq differensial* $d^2z = d(dz)$ kabi aniqlanadi. Uni topamiz:

$$d(dz) = d(f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy) =$$
$$= (f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy)'_x dx + (f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy)'_y dy =$$
$$= (f''_{x^2}(x,y)dx + f''_{xy}(x,y)dy)'_x dx + (f''_{yx}(x,y)dx + f''_{y^2}(x,y)dy)'_x dy.$$

Bundan

$$d^2z = f''_{x^2}(x,y)dx^2 + 2f''_{xy}(x,y)dydx + f_{y^2}dy^2, \tag{15.14}$$

bu yerda $dx^2 = (dx)^2$, $dy^2 = (dy)^2$.

Uchinchi tartibli to'liq differensial shu kabi ta'riflanadi va topiladi:

$$d^3z = f'''_{x^3}(x,y)dx^3 + 3f'''_{x^2y}(x,y)dx^2dy + 3f'''_{y^2x}(x,y)dxdy^2 + f'''_{y^3}(x,y)dy^3. \tag{15.15}$$

n-tartibli to'liq differensial uchun

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n \cdot z,\ n \in N$$

formula matematik induksiya usuli bilan isbotlanadi. Bunda $z = f(x,y)$ funksiyaning x va y o'zgaruvchilari erkli bo'lishi talab qilinadi.

10-misol. $z = arctg\dfrac{x}{y}$ funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalarini toping.

Yechish. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{y} = \dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\dfrac{x}{y^2}\right) = -\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

Ikkinchi tartibli hususiy hosilalarni topamiz:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x dy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2+y^2-2y\cdot y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

2.13.10. Ikki o'zgaruvchi funksiyasining ekstremumlari

$z = f(x, y)$ funksiya biror D sohada aniqlangan va $P_0(x_0; y_0) \in D$ bo'lsin.

7-ta'rif. Agar $P_0(x_0; y_0)$ nuqtaning shundav δ atrofi topilsa va bu atrofning barcha $P_0(x_0; y_0) \neq P(x; y)$ nuqtalarida $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ $(f(x, y) > f(x_0, y_0))$ tengsizlik bajarilsa, $P_0(x_0; y_0)$ nuqtaga $f(x, y)$ funksiyaning *maksimum* (*minimum*) nuqtasi deyiladi.

Funksiyaning maksimum va minimum nuqtalariga *ekstremum* nuqtalar deyiladi. Funksiyaning ekstremum nuqtadagi qiymati *funksiyaning ekstremumi* deb ataladi.

7-teorema (*ekstremum mavjud bo'lishining zaruriy sharti*). Agar $z = f(x, y)$ funksiya $P_0(x_0; y_0)$ nuqtada ekstremumga ega bo'lsa, u holda $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$ bo'ladi.

Isboti. O'zgaruvchilardan birini fksrlaymiz. Masalan, $y = y_0$ deymiz. U holda bir o'zgaruvchining $f(x, y_0)$ funksiyasiga ega bo'lamiz. Bu funksiya $x = x_0$ da ekstremumga erishadi. Bir o'zgaruvchi funksiyasining ekstremumi nazariyasiga ko'ra $f'_x(x_0, y_0) = 0$ bo'ladi.

$f'_y(x_0, y_0) = 0$ bo'lishi shu kabi isbotlanadi.

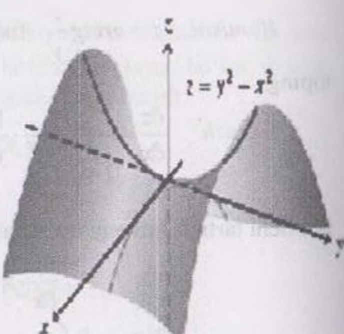
Xususiy hosilalar nolga teng bo'ladigan nuqtalarga *statsionar nuqtalar* deyiladi.

$P_0(x_0, y_0)$ nuqta $z = f(x, y)$ funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'lsin. U holda $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$ bo'ladi. Bu hosilalarni $z = f(x, y)$ tenglama bilan berilgan sirtga $P_0(x_0; y_0)$ nuqtada o'tkazilgan urinma tekislikning

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

tenglamasiga qo'ysak, $z - z_0 = 0$ yoki $z = z_0$ kelib chiqadi.

Bundan 1- teoremaning geometrik talqini kelib chiqadi. Agar $P_0(x_0, y_0)$ nuqta $z = f(x, y)$ funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'lsa, funksiya grafigiga shu nuqtada o'tkazilgan urinma tekislik Oxy tekislikka parallel bo'ladi.



67-shakl

Izohlar. 1. $f(x, y)$ funksiya $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada ekstremumga era bo'lsa, bu nuqtada xususiy hosilalar nolga teng bo'ladi yoki ulardan hech bo'lmaganda bittasi mavjud bo'lmaydi.

Xususiy hosilalar nolga teng bo'ladigan yoki ulardan hech bo'lmaganda bittasi mavjud bo'lmaydigan nuqtalarga *kritik nuqtalar* deyiladi.

2. Hamma kritik nuqta ham ekstremum nuqta bo'lavermaydi. Masalan, $z = y^2 - x^2$ funksiya uchun $O(0;0)$ nuqta kritik nuqta bo'ladi, chunki bu nuqtada ar ikkala $z'_x = 2y$, $z'_y = -2x$ xususiy hosila nolga teng va $f(0,0) = 0$. Bunda $O(0;0)$ nuqtaning atrofida $f(x,y) > f(0,0)$ bo'ladigan nuqtalar ham (Oy o'qi) $f(x,y) < f(0,0)$ bo'ladigan nuqtalar ham (Ox o'qi) mavjud bo'ladi. Shu sababli $O(0,0)$ nuqta ekstremum nuqta bo'lmaydi (67-shakl).

Bunday $O(0;0)$ nuqtaga *minimaks* nuqta deyiladi.

8-teorema (*ekstremum mavjud bo'lishining yetarli sharti*). $z = f(x,y)$ funksiya $P_0(x_0;y_0)$ statsionar nuqtaning biror atrofida ikkinchi tartibligacha uzluksiz hususiy hosilalarlarga ega, bunda $f''_{x^2}(x_0,y_0) = A$, $f''_{xy}(x_0,y_0) = B$, $f''_{y^2}(x_0,y_0) = C$ bo'lsin. U holda:

1) agar $\Delta = AC - B^2 > 0$ bo'lsa, $z = f(x,y)$ funksiya $P_0(x_0;y_0)$ nuqtada ekstremumga erishadi: $A < 0$ (yoki $C < 0$) da maksimumga; $A > 0$ (yoki $C > 0$) da minimumga;

2) agar $\Delta = AC - B^2 < 0$ bo'lsa, $P_0(x_0;y_0)$nuqtada ekstremum mavjud bo'lmaydi;

3) agar $\Delta = AC - B^2 = 0$ bo'lsa, $P_0(x_0;y_0)$ nuqtada ekstremum mavjud bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin (bu holda qo'shimcha tekshirishlar o'tkaziladi).

Ekstremum mavjud bo'lishining zaruriy va yetarli shartlaridan $z = f(x,y)$ funksiyani ekstremumga tekshirishning quyidagi *tartibi* kelib chiqadi:

1°. $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ xususiy hosilalar topiladi;

2°. Statsionar nuqtalar aniqlanadi;

3°. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ xususiy hosilalar topiladi;

4°. $A = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $C = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $B = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ xususiy hosilalarning statsionar nuqtalardagi qiymatlari hisoblanadi;

5°. Har bir statsionar nuqtada $\Delta = AC - B^2$ ning qiymati hisoblanadi va 2- teorema asosida xulosa chiqariladi.

11-misol. $z = 3x^2y - x^3 - y^4$ funksiyani ekstremumga tekshiring.

Yechish.

1°. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 6xy - 3x^2$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - 4y^3$.

2°. $\begin{cases} 3x(2y - x) = 0, \\ 3x^2 - 4y^3 = 0 \end{cases}$

sistemani yechib, statsionar nuqtalarni topamiz: $P_1(6;3)$, $P_2(0;0)$.

3°. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6y-6x,\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6x,\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-12y^2.$

4°. 1) $P_1(6;3)$ nuqtada $A_1=-18,\ B_1=36,\ C_1=-108;$
2) $P_2(0;0)$ nuqtada $A_2=0,\ B_2=0,\ C_2=0.$

5°. 1) $\Delta_1=A_1C_1-B_1^2=648>0,\ A_1<0.$

Demak, $P_1(6;3)$ nuqta maksimum nuqta va $z_{max}=3\cdot 36\cdot 3-6^3-3^4=27;$

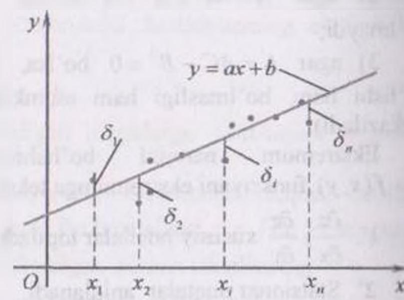
2) $\Delta_2=A_2C_2-B_2^2=0.$

Qo'shimcha tekshirish bajaramiz: z funksiya $P_2(0;0)$ nuqtada nolga teng, $x=0,\ y\neq 0$ da manfiy $(z=-y^4<0)$; $x<0,\ y=0$ da musbat $(z=-x^3>0)$. Demak, $P_2(0;0)$ nuqtada ekstremum mavjud emas.

2.15.11. Eng kichik kvadratlar usuli

Bir necha o'zgaruvchi funksiyasini ekstremumga tekshirishning amaliy tatbiqlaridan biri eng kichik kvadratlar usuli hisoblanadi. Bu usulning mohiyati $y=f(x)$ emperik fopmula bilan topilgan $f(x_i)$ nazariy qiymatlarning tajriba natijasida olingan mos y_i qiymatlardan chetlashishi kvadratlarining yig'indisini minimallashtirishdan yoki boshqacha aytganda

$$S=\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2=\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-y_i)^2$$



68-shakl

qiymatning minimal bo'lishini ta'minlashdan iborat.

Eng kichik kvadratlar usulini chiziqli funksiya misolida qarab chiqamiz. Tajriba natijasida x argumentning n ta qiymatiga y funksiyaning mos n ta qiymati olingan, ya'ni Oxy tekislikda n ta nuqtaning $(x_1;y_1),(x_2;y_2),...,(x_n;y_n)$ sistemasi berilgan bo'lsin (68-shakl).

Emperik formula sifatida

$$y=ax+b$$

funksiyani olaylik.

U holda shunday to'g'ri chiziqni topish kerak bo'ladiki, bu to'g'ri chiziq nuqtalarining berilgan nuqtalar sistemasidan kvadratik chetlashishi

$$S(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2$$

minimal bo'lishi lozim.

Bu masalani yechish uchun $S(a,b)$ funksiyaning kritik nuqtalarini topamiz va ularni minimumga tekshiramiz.

Ikki a va b o'zgaruvchi funksiyasi ekstremumining zaruriy shartini yozamiz:

$$\begin{cases} S'_a(a,b) = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)x_i = 0, \\ S'_b(a,b) = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i) = 0. \end{cases}$$

Bundan a va b noma'lumli

$$\begin{cases} a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \qquad (15.16)$$

tenglamalar sistemasi kelib chiqadi.

(15.16) sistemaning diterminanti

$$D = n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 > 0.$$

Shu sababli (15.16) sistema yagona (a,b) yechimga ega bo'ladi.

Ikki a va b o'zgaruvchi funksiyasi ekstremumining zaruriy shartini yozamiz:

$$S''_{aa} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = A, \quad S''_{ab} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i = B, \quad S''_{bb} = 2n = C$$

yoki

$$\Delta = AC - B^2 = 4n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = 4D > 0.$$

Demak, $S(a,b)$ funksiya (a,b) kritik nuqtada minimumga ega bo'ladi.

Agar emperik formula sifatida

$$y = ax^2 + bx + c$$

parabolik funksiya olinsa, kvadratik chetlashish funksiyasi quyidagi ko'rinishda beriladi:

$$S(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2.$$

Bu funksiya uchun ekstremumning zaruriy shartindan a,b va c noma'lumlarning

$$\begin{cases} a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i, \\ a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + c \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + c \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \qquad (15.17.)$$

sistemasi kelib chiqadi.

(15.17) sistemaning (a,b,c) yechmida $S(a,b,c)$ funksiya minimumga erishadi.

Agar emperik formula sifatida logarifmik funksiya olinsa, bu funksiya belgilashlar yordamida chizqli yoki parabolik funksiyaga keltiriladi.

Agar emperik formula sifatida darajali yoki ko'rsatkichli funksiya olinsa, bu funksiya avval logarifmlanadi va keyin belgilashlar yordamida chizqli yoki parabolik funksiyaga keltiriladi.

12-misol. x argument va $y = f(x)$ funksiyaning tajriba natijasida olingan qiymatlari jadvalda berilgan:

x	110	132	154	176	198	230	242
y	40	43,2	52,8	67,2	64	78,4	96

x va y o'zgaruvchilar orasidagi chiziqli bog'lanishning emperik funksiyasini eng kichik kvadratlar usuli bilan toping.

Yechish. Emperik formulani $y = ax + b$ ko'rinishda izlaymiz.

Bu funksiyaning a va b parametrlarini

$$\begin{cases} a \cdot \sum_{i=1}^{7} x_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{7} x_i = \sum_{i=1}^{7} x_i y_i, \\ a \cdot \sum_{i=1}^{7} x_i + 7n = \sum_{i=1}^{7} y_i \end{cases}$$

tenglamalar sistemasidan topamiz.

Qulaylik uchun hisoblarni jadvalda bajaramiz:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	110	40	12100	4400
2	132	43,2	17424	5702,4
3	154	52,8	23716	8131,2
4	176	67,2	30976	11827,2
5	198	64	39204	11672
6	220	78,4	48400	17248
7	242	96	58564	23232
$\sum$	1232	441,6	230384	83212,8

Jadval asosida

$$\begin{cases} 230384a + 1232b = 83212{,}8, \\ 1232a + \quad 7b = 441{,}6 \end{cases}$$

sistemani tuzamiz.

Uni Kramer formulalari bilan yechamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 230384 & 1232 \\ 1232 & 7 \end{vmatrix} = 94864,$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 83212{,}8 & 1232 \\ 441{,}6 & 7 \end{vmatrix} = 0{,}405, \quad \Delta_b = \begin{vmatrix} 83212{,}8 & 1232 \\ 441{,}6 & 7 \end{vmatrix} = -8{,}229.$$

Demak, izlanayotgan funksiya

$$y = 0{,}405x - 8{,}229.$$

2.15.12. Mashqlar

2.15.1. Funksiyalarning aniqlanish sohasini toping:

1) $z=\arcsin\dfrac{y-1}{x}$; 2) $z=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}}$;

3) $z=\dfrac{x-6}{x^2+y^2-9}$; 4) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

5) $z=\ln(x^2-y^2-25)$; 6) $z=\ln x\ln y$;

7) $z=\arccos(x+y)$; 8) $z=\ln(x^2+y^2-9)+\sqrt{16-x^2-y^2}$;

9) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}$; 10) $z=\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$.

2.15.2. Limitlarni toping:

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\dfrac{9xy}{2-\sqrt{4-3xy}}$; 2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2y}}{x+y^2}$;

3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; 4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$.

2.15.3. Funksiyalarning birinchi tartibli xususiy hosilalarini toping:

1) $z=x^4-4x^2y^3+y^4$; 2) $z=x^3-4xy^3+3y$;

3) $z=y\sqrt{x}+\dfrac{x}{y}$; 4) $z=\dfrac{xy}{x-y}$;

5) $z=xy+\dfrac{y}{x}$; 6) $z=\dfrac{1}{xy}+\dfrac{y}{x^2}$;

7) $z=e^{-\frac{2}{x}}$; 8) $z=\sin(5x^2+xy)$;

9) $z=\ln\sqrt{x+2y}$; 10) $z=\ln(x^2+e^{-y})$;

2.15.4. Funksiyalarning to'liq differensialini toping:

1) $z=x^{y^2}$; 2) $z=\sin x+\ln(x+y)$.

1) $z=x^2+3xy$; ; 2) $z=e^{2x}\sin 3x$..

2.15.5. Funksiyalarning berilgan nuqtalardagi taqribiy qiymatini hisoblang:

1) $z=\sqrt{3x^2+6y}$, $M_0(0{,}97;0{,}98)$; 2) $z=\sqrt{x^2+y^3}$, $M_0(1{,}03;1{,}98)$.

2.15.6. $z=\dfrac{x}{y}$, $x=e^{2t}-1$, $y=e^{2t}+1$ funksiya berilgan. $\dfrac{dz}{dt}$ ni toping.

2.15.7. $z=x^2+xy+y^2$, $x=\sin t$, $y=e^t$ funksiya berilgan. $\dfrac{dz}{dt}$ ni toping.

2.15.8. $z=\sin\dfrac{x}{y}$, $y=\ln x$ funksiya berilgan. $\dfrac{dz}{dx}$ ni toping.

2.15.9. $z=\ln(x^2+y^2)$, $y=e^x$ funksiya berilgan. $\dfrac{dz}{dx}$ ni toping.

2.15.10. $z=xy^3+yx^3$, $x=u+v$, $y=u-v$ funksiya berilgan $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ va $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ ni toping.

2.15.11. $z=\frac{x}{y}$, $x=e^{u}-2e^{v}$, $y=2e^{u}+e^{v}$ funksiya berilgan. $\frac{\partial z}{\partial u}$ va $\frac{\partial z}{\partial v}$ ni toping.

2.15.12. Oshkormas ko'rinishda berilgan $y(x)$ funksiylarning birinchi tartibli hosilasini toping:

1) $xy-\ln y-a=0$; 2) $x+y-e^{\frac{z}{x}}=0$;

3) $xy-\sin(xy)=0$; 4) $x^2y-e^{y-x}=0$.

2.15.13. Oshkormas ko'rinishda berilgan $z(x,y)$ funksiylarning birinchi tartibli xususiy hosilalarini toping:

1) $x^2+y^2+z^2-6xyz=0$; 2) $5x^2y^3+2xz^3-y^2z=0$;

3) $\cos(x+z)+x+yz=0$; 4) $y\ln(x+z)-e^{xyz}=0$.

2.15.14. Funksiyalarning ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni toping:

1) $z=x^2+xy$; 2) $z=x\operatorname{arctg}y$.

2.15.15. Funksiyalarni ekstremumga tekshiring:

1) $z=x^3+y^2-3x+2y$; 2) $z=x^3+y^3-3xy$;

3) $z=x^4+y^4-4xy$; 4) $z=xy(1-x-y)$.

2.15.16. Sig'imi V ga teng bo'lgan to'g'ri burchakli usti ochiq hovuz eng kichik to'la sirtga ega bo'lsa, uning o'lchamlarini toping.

2.15.17. Kimyoviy reaksiyada x,y,z konsentratsiyali uchta modda qatnashmoqda Reaksiya tezligi istalgan vaqtda $V=kxy^2z$ qonun bilan ifodalanadi. Reaksiyaning o'tish tezligi maksimal bo'lishi uchun konsentratsiyalar qanday miqdorda olinishi kerak?

2.15.18. x argument va $y=f(x)$ funksiyaning tajriba natijasida olingan qiymatlari jadvalda berilgan. x va y o'zgaruvchilar orasidagi chiziqli bog'lanishning empirik funksiyasini eng kichik kvadratlar usuli bilan toping:

1)

x	-1	0	1	2	3	4
y	0	2	3	3,5	3	4,5

2)

x	0,5	1,0	2,0	2,5	3	3,5
y	0,62	1,64	3,7	5,02	6,04	6,78

16. ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

Differensial tenglama – bu noma'lum funksiyaning hosilasini o'z ichiga olgan tenglamalardir. Defferensial tenglamalar nazariyasining asosiy masalasi – bunday tenglamalarni yechimlari bo'lgan funksiyalarni o'rganishdir.

2.16.1. Birinchi tartibli differensial tenglamalar [5]

1-ta'rif. Erkli o'zgaruvchi, no'malum funksiya va uning hosilalarini (differensiallarini) bog'lovchi tenglamaga *differensial tenglama* deyiladi.

Differensial tenglamaga kiruvchi hosilalarning (differensiallarning) eng yuqori tartibi differensial tenglamaning *tartibi* deyiladi.

Birinchi tartibli oddiy differensial tenglama umumiy ko'rinishda

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (16.1)$$

kabi yoziladi, bu yerda x – erkli o'zgaruvchi, y – noma'lum funksiya, y' – noma'lum funksiyaning hosilasi, F – ikki o'lchamli R^2 sohada ikki o'zgaruvchili funksiya.

Xususan, (16.1) tenglamada x va y oshkor ishtirok etmasligi mumkin.

Agar (16.1) tenglamani y' ga nisbatan yechish mumkin bo'lsa, u

$$y' = f(x, y) \qquad (16.2)$$

ko'rinishda ifodalanadi, bu erda f – berilgan funksiya.

Bu tenglamadan differensiallar ishtirok etuvchi simmetrik shakl deb ataluvchi

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

tenglamaga o'tish mumkin.

(16.1) differensial tenglamaning *yechimi* (*integrali*) deb, tenglamaga qo'yilganida uni ayniyatga aylantiradigan differensiallanuvchi $y = \varphi(x)$ funksiyaga aytiladi.

Masalan, $y' + ky = 0$ tenglamaning yechimi $y = Ce^{-kx}$ (bu yerda C – ixtiyoriy o'zgarmas) funksiya bo'ladi. Haqiqatdan ham, y ning bu qiymatini tenglamaga qo'ysak, ayniyatga ega bo'lamiz:

$$(Ce^{-kx})' + kCe^{-kx} = C(-ke^{-kx}) + kCe^{-kx} = 0.$$

Demak, (16.1) differensial tenglamani bitta funksiya emas, balki funksiyalarning butun bir to'plami qanoatlantiradi. Bu funksiyalardan birini boshlang'ich shart deb ataluvchi $y|_{x=x_0} = y_0$ ($x = x_0$ bo'lganda $y = y_0$ bo'ladi) shart bilan ajratish mumkin.

(16.2) differensial tenglamaning *umumiy yechimi* deb, quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $y = \varphi(x, C)$ (C – ixtiyoriy o'zgarmas) funksiyaga aytiladi:

a) u ixtiyoriy o'zgarmasning istalgan qiymatida (16.2) differensial tenglamani qanoatlantiradi;

b) boshlang'ich $y|_{x=x_0} = y_0$ shart har qanday bo'lganida ham ixtiyoriy o'zgarmasning shunday $\overline{C}$ qiymati topiladiki, $y = \varphi(x, \overline{C})$ yechim boshlang'ich shartni qanoatlantiradi, ya'ni $y_0 = \varphi(x_0, \overline{C})$ bo'ladi.

(16.2) differensial tenglamaning umumiy yechimidan ixtiyoriy o'zgarmasning tayin qiymatida hosil bo'ladigan har qanday yechimga *xususiy yechim* deyiladi.

Differensial tenglamaning berilgan $y|_{x=x_0} = y_0$ (yoki $y(x_0) = y_0$) boshlang'ich shart bo'yicha xususiy yechimini topish masalasi *Koshi masalasi* deyiladi.

Bunda boshlang'ich shartning berilishi izlanayotgan xususiy yechimga mos integral egri chiziq o'tadigan $P_0(x_0; y_0)$ nuqtaning berilishini bildiradi. Shunday qilib, Koshi masalasini yechish, bu integral egri chiziqlar oilasidan berilgan nuqtadan o'tadiganini tanlab olish demakdir. Bu jumla *Koshi masalasining geometrik ma'nosini* ifodalaydi.

O'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar[5]

Ushbu

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \qquad (16.3)$$

ko'rinishdagi tenglamaga *o'zgaruvchilari ajralgan* differensial tenglama deyiladi.

Uning o'ziga xos tomoni shundaki, tenglamada dx oldida faqat x ga bog'liq ko'paytuvchi va dy oldida faqat y ga bog'liq ko'paytuvchi turadi.

Tenglamaning umumiy yechimini uni hadma-had integrallash orqali topamiz

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C.$$

Ushbu

$$M_1(x)\cdot N_1(y)dx + M_2(x)\cdot N_2(y)dy = 0, \qquad (16.4)$$

$$y' = f_1(x)f_2(y) \qquad (16.5)$$

tenglamalarga *o'zgaruvchilari ajraladigan* differensial tenglamalar deyiladi.

(16.4) tenglamani $N_1(y)\cdot M_2(x) \neq 0$ ifodaga hadma-had bo'lamiz va uni o'zgaruvchilari ajralgan tenglamaga keltiramiz:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0.$$

Bu tenglamaning integrali (16.4) tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

(16.4) tenglamani $N_1(y)\cdot M_2(x) \neq 0$ ifodaga hadma-had bo'lishda ayrim yechimlar tushib qolishi mumkin. Shu sababli bunda $N_1(y)\cdot M_2(x) = 0$ tenglama alohida yechilishi va bu yechimlar orasidan maxsus yechimlar ajratilishi kerak.

1-misol. Differensial tenglamani yeching:

$$(1+x^2)y' + (1+y^2) = 0, \quad y(0) = 1.$$

Yechish. $y' = \dfrac{dy}{dx}$ o'rniga qo'yish bajaramiz va tenglamaning chap va o'ng tomonini dx ga ko'paytiramiz:

$$(1+x^2)dy + (1+y^2)dx = 0.$$

Tenglamani $(1+x^2)(1+y^2) \neq 0$ ga bo'lamiz:

$$\frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2} = 0.$$

Tenglamani integrallaymiz:

$$arctgx + arctgy = C.$$

Bundan

$$tg(arctgx + arctgy) = tgC, \quad \frac{x+y}{1-xy} = C_1, \text{ bu yerda } C_1 = tgC$$

yoki

$$y = \frac{C_1 - x}{1 + C_1 x}.$$

(16.5) tenglamada $y' = \frac{dy}{dx}$ o'rniga qo'yish orqali

$$dy = f_1(x) \cdot f_2(y)dy, \quad \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$$

tenglamani hosil qilamiz. Bundan

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C.$$

Bir jinsli differensial tenglamalar [5]

Agar $f(x,y)$ funksiyada x va y o'zgaruvchilar mos ravishda tx va ty ga almashtirilganida (bu yerda t – ixtiyoriy parametr) $f(tx,ty) = f(x,y)$ tenglik bajarilsa, $f(x,y)$ funksiyaga *bir jinsli funksiya* deyiladi.

Masalan, $f(x,y) = \frac{x^2 + 2xy}{3xy - y^2}$ – bir jinsli funksiya, chunki

$$f(tx,ty) = \frac{t^2x^2 + 2tx \cdot ty}{3tx \cdot ty - t^2y^2} = \frac{x^2 + 2xy}{3xy - y^2} = f(x,y).$$

Agar $y' = f(x,y)$ differensial tenglamada $f(x,y)$ bir jinsli funksiya bo'lsa, bu tenglamaga *bir jinsli* differensial tenglama deyiladi.

Bir jinsli funksiyani

$$f(x,y) = f(tx,ty) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

kabi ifodalash mumkin. Shu sababli bir jinsli differensial tenglamani

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (16.6)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

(16.6) tenglama $\frac{y}{x} = u$ (bu yerda $u = u(x)$ –no'malum funksiya) o'rniga qo'yish orqali o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltiriladi.

$$\frac{y}{x} = u \text{ dan}, \quad y = ux \text{ va } y' = u'x + u.$$

y va y'ning qiymatlarini (1.6) tenglamaga qo'yamiz:

$$u'x + u = \varphi(u), \quad \frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Bundan

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Integrallashdan keyin u ning o'rniga $\frac{y}{x}$ nisbatni qo'yamiz va (1.6) tenglamaning umumiy integralini topamiz.

2-misol. $y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Tenglama bir jinsli. Shu sababli $y = ux$, $y' = u'x + x$ o'rniga qo'yish bajaramiz. U holda berilgan tenglama

$$u'x + u = u\ln u, \quad u'x = u(\ln u - 1)$$

ko'rinishga keladi.

O'zgaruvchilarni ajratamiz:

$$\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}.$$

Tenglamani integrallaymiz:

$$\int\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|\ln u - 1| = \ln|x| + \ln C, \quad \ln u - 1 = xC, \quad u = e^{Cx+1}.$$

$u = \frac{y}{x}$ ekanini inobatga olib, topamiz:

$$y = xe^{Cx+1}.$$

Chiziqli differensial tenglamalar[5]

No'malum funksiya va uning hosilasiga nisbatan chiziqli bo'lgan

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{16.7}$$

tenglamaga *chiziqli differensial tenglama* deyiladi, bu yerda $P(x)$, $Q(x)$ – x ning ma'lum uzluksiz funksiyalari (yoki o'zgarmaslar).

Chiziqli bir jinsli bo'lmagan tenglamani qaraymiz. Uning yechimini x ning ikkita funksiyasi ko'paytmasi ko'rinishida izlaymiz:

$$y = u(x)\cdot v(x). \tag{16.8}$$

Bu funksiyalardan bittasini ixtiyoriy tanlash mumkin, ikkinchisi esa (16.7) tenglamadan topiladi.

(16.8) ning har ikkala tomonini differensiallaymiz:

$$y' = u'v + v'u.$$

y va y' ni (16.7) tenglamaga qo'yamiz:

$$u'v + u(v' + P(x)v)u = Q(x). \tag{16.9}$$

v funksyani

$$v' + P(x)v = 0 \tag{16.10}$$

shartni qanoatlantiradigan qilib tanlaymiz.

U holda (16.9) tenglikdan

$$u'v = Q(x) \tag{16.11}$$

tenglama kelib chiqadi.

(16.10) tenglamadan v ni topamiz:

$$v' + P(x)v = 0, \quad \frac{dv}{v} = -P(x)dx.$$

Bundan

$$\ln v = -P(x)dx + \ln C, \quad v = Ce^{-\int P(x)dx}.$$

(16.10) tenglamaning noldan farqli biror yechimini topish yetarli bo'lgani uchun $C = 1$, ya'ni

$$v = e^{-\int P(x)dx} \qquad (16.12)$$

deb olamiz.

v ning topilgan bu qiymatini (16.10) tenglamaga qo'yamiz va hosil bo'lgan tenglamani yechamiz:

$$u'e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \text{ yoki } du = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

Bundan

$$u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C. \qquad (16.13)$$

(16.12) va (16.13) formulalar v va u ko'paytuvchilarning x orqali ifodalarini beradi. Bu ifodalarni (16.8) tenglikka qo'yib, (16.7) tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right). \qquad (16.14)$$

3-misol. $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{x}{1+x^2}$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglama chiziqli: $P(x) = -\dfrac{1}{x}$, $Q(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

$y = uv$, $y' = u'v + v'u$ o'rniga qo'yish bajaramiz:

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Bu tenglamadan

$$\begin{cases} v' - \dfrac{v}{x} = 0, \\ u'v = \dfrac{x}{1+x^2} \end{cases}$$

sistema kelib chiqadi.

Sistemaning birinchi tenglamasini integrallaymiz:

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}, \quad \int\frac{dv}{v} = \int\frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = \ln|x| + \ln C, \quad C = 1 \text{ da } \quad v = x.$$

v ni sistemaning ikkinchi tenglamasiga qo'yamiz:

$$u'x = \frac{x}{1+x^2}, \qquad u' = \frac{1}{1+x^2}$$

Bundan

$$u = arctgx + C.$$

Demak, tenglamaning umumiy yechimi

$$y = x(C + arctgx).$$

2.16.2. Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar [5]

Tartibini pasaytirish mumkin bo'lgan differensial tenglamalar

Ikkinchi tartibli differensial tenglamalarni yechish usullaridan biri *tartibini pasaytirish usuli* hisoblanadi. Bu usulda berilgan differensial tenglama o'zgaruvchini almashtirish (alohida o'rniga qo'yish) orqali tartibi past bo'lgan tenglamaga keltiriladi va yechiladi. Tartibini pasaytirish usuli bilan yechiladigan tenglamalarning ayrim turlarini ko'rib chiqamiz.

$y''=f(x)$ ko'rinishdagi tenglama

Bu tenglama ikki marta bevosita integrallash orqali yechiladi:

$$y''=f(x),$$

$$y'=\int f(x)dx+C_1,$$

$$y=\int\left(\int f(x)dx\right)dx+C_1x+C_2$$

4-misol. $y''=x$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Tenglamaning o'ng tomoni faqat x ga bog'liq. Shu sababli differensial tenglamaning chap va o'ng tomonlarini ketma-ket ikki marta bevosita integrallaymiz:

$$y'=\int xdx+C_1=\frac{x^2}{2}+C_1,$$

$$y=\int\left(\frac{x^2}{2}+C\right)dx=\frac{x^3}{+}+C_1x-+C_2.$$

$F(x,y',y'')=0$ ko'rinishdagi tenglama

Bu ko'rinishdagi tenglamada berilgan funksiya qatnashmaydi. Bu tenglama $y'=p(x)$ o'rniga qo'yish orqali birinchi tartibli differenzial tenglamaga keltiriladi

$$F(x,p,p')=0.$$

Agar bu tenglamaning yechimi $p=\varphi(x,C_1)$ bo'lsa, u holda izlanayotgan yechim $y'=p(x)$ tenglamani yechish orqali topiladi, ya'ni:

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(x,C_1),\quad dy=\varphi(x,C_1)dx,\quad \int dy=\int\varphi(x,C_1)dx.$$

Bundan

$$y=\int\varphi(x,C_1)dx+C_2.$$

5-misol. $xy''-y'=0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Tenglamada y qatnashmaydi. Shu sababli $y'=p,\quad y''=p'$ almashtirishlar bajaramiz.

U holda

$$p' - \frac{1}{x}p = 0$$

birinchi tartibli chiziqli bir jinsli tenglama kelib chiqadi.

Bu tenglamani yechamiz:

$$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}, \quad \ln|p| = \ln|x| + \ln C_1, \quad p = C_1 x.$$

Bundan

$$y' = C_1 x.$$

Oxirgi tenglamani integrallab, berilgan tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$y = \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2.$$

$F(y, y', y'') = 0$ ko'rinishdagi tenglama

Bu ko'rinishdagi tenglamada erkli o'zgaruvchi oshkor qatnashmaydi. Bu tenglamada $y' = p(y)$ o'rniga qo'yish orqali yangi noma'lum funksiya $p(y)$ va yangi erkli o'zgaruvchi y kiritiladi. Bunda y'' hosilar p funksiyaning y bo'yicha hosilasi bilan almashtiriladi:

$$y' = \frac{dy}{dx} = p, \quad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}.$$

Natijada y o'zgaruvchining birinchi tartibli $F(y, p, p') = 0$ differenzial tenglamasi kelib chiqadi.

Agar bu tenglamaning yechimi $p = \varphi(y, C_1)$ bo'lsa, u holda izlanayotgan yechim $y' = p(y)$ tenglamani yechish orqali topiladi, ya'ni:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1), \quad \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx, \quad \int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = \int dx.$$

Bundan

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

6-misol. $yy'' - 2(y')^2 = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Tenglamada x oshkor qatnashmaydi.

Shu sababli $y' = p(y)$, $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$ almashtirish bajaramiz.

U holda berilgan tenglamadan

$$p\left(\frac{dp}{dy} - 2p\right) = 0$$

tenglik kelib chiqadi.

Bu tenglikni p ga bo'lamiz (bunda $p=0$ yoki $y=C$ yechim tushib qoladi):

$$\frac{dp}{dy}-2p=0.$$

Bu tenglamada o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama. Uni yechamiz:

$$\frac{dp}{dy}-2p=0, \quad \frac{dp}{p}-2dy=0, \quad \frac{dp}{p}=2dy, \quad \int\frac{dp}{p}=\int 2dy,$$

$$\ln p=2\ln y+\ln C_1, \quad p=C_1y^2.$$

Bundan

$$\frac{dy}{dx}=C_1y^2, \quad \frac{dy}{y^2}=C_1dx,$$

$$\int\frac{dy}{y^2}=C_1x-C_2, \quad -\frac{1}{y}=C_1x-C_2$$

yoki

$$y=\frac{1}{C_2-C_1x}.$$

Ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli o'zgarmas koeffitsiyentli differensial tenglamalar[5]

Ushbu

$$y''+py'+qy=0 \tag{16.15}$$

tenglamaga *ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli o'zgarmas koeffitsiyentli differensial tenglama* deyiladi, bu yerda p, q – o'zgarmas haqiqiy sonlar.

(16.15) tenglamaning xususiy yechimlarini $y=e^{kx}$ (k – o'zgarmas son) ko'rinishda izlaymiz.

Bu funksiyani ikki marta differensiallaymiz

($y'=ke^{kx}$, $y''=k^2e^{kx}$) va y, y', y'' larni (16.15) tenglamaga qo'yamiz:

$$k^2e^{kx}+pke^{kx}+qe^{kx}=0, \quad e^{kx}(k^2+pk+q)=0.$$

Bu tenglamaning har ikkala tomonini $e^{kx}\neq 0$ ko'paytuvchiga bo'lamiz:

$$k^2+pk+q=0. \tag{16.16}$$

(16.16) algebraik tenglamaga (16.15) differensial tenglamaning *xarakteristik tenglamasi* deyiladi.

Xarakteristik tenglama

$$k_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}, \quad k_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

ildizlarga ega bo'ladi.

Agar k soni (16.16) xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lsa, e^{kx} funksiya (16.15) differensial tenglamaning yechimi bo'ladi. Xarakteristik tenglamani yechishning mumkin bo'ladigan uchta holini qarab chiqamiz.

1. *Xarakteristik tenglamaning ildizlari haqiqiy va har xil:* $k_1\neq k_2$. Bu holda $y_1=e^{k_1x}$ va $y_2=e^{k_2x}$ funksiyalar (16.15) tenglamaning xususiy yechimlari bo'ladi va uning umumiy yechimi

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}. \qquad (16.17)$$

ko'rinishda bo'ladi.

2. *Xarakteristik tenglamaning ildizlari haqiqiy va teng:* $k_1 = k_2 = k = -\frac{p}{2}(p = -2k)$. Bu holda $y_1 = e^{kx}$ va $y_2 = xe^{kx}$ funksiyalar (16.15) tenglamaning xususiy yechimlari bo'ladi va uning umumiy yechimi

$$y = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx} = e^{kx}(C_1 + C_2x) \qquad (16.18)$$

ko'rinishda bo'ladi.

3. *Xarakteristik tenglamaning ildizlari kompleks-qo'shma:* $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$, bu yerda $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$. Bu holda $y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x}$ va $y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x}$ funksiyalar (16.15) tenglamaning xususiy yechimlari bo'ladi va uning umumiy yechimi

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x) \qquad (16.19)$$

ko'rinishda bo'ladi.

7-misol. Differensial tenglamaning umumiy yechimini toping:

1) $y'' + 3y' + 2y = 0$; 2) $y'' - 6y' + 9y = 0$; 3) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Yechish. 1) Ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli o'zgarmas koeffitsiyentli differensial tenglama berilgan. Uning xarakteristik tenglamasini tuzamiz:

$$k^2 + 3k + 2 = 0.$$

Bu tenglama haqiqiy va har xil ildizlarga ega: $k_1 = -1$, $k_2 = -2$.

U holda uning umumiy yechimi

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}.$$

2) Tenglamaning xarakteristik tenglamasini tuzamiz:

$$k^2 - 6k + 9 = 0.$$

Bu tenglama ikkita bir xil haqiqiy ildizga ega: $k_1 = k_2 = k = 3$.

Demak, tenglamaning umumiy yechimi

$$y = e^{3x}(C_1 + C_2x).$$

3) $k^2 + 2k + 5 = 0$ xarakteristik tenglama $k_1 = -1 + 2i$ va $k_2 = -1 - 2i$ ildizlarga ega. Bundan $\alpha = -1$ va $\beta = 2$.

U holda tenglamaning umumiy yechimi

$$y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x).$$

2.16.3. Differensial tenglamalarning tatbiqiy masalalari

Differensial tenglamalar fizika, kimyo, farmatsevtika, biologiya meditsina va boshqa tabiiy fanlarning amaliy masalalarini yechishda muhim rol o'ynaydi. Biz differensial tenglamalarning tabiiy fanlardagi ayrim tatbiqiy masalalarini, ya'ni hodisa va jarayonlarning o'zgaruvchi kattaliklari o'rtasidagi bog'lanishlarni o'rnatishga doir bir nechta masalalarini ko'rib chiqamiz.

Moddiy nuqtaning harakat qonuni[13]

Massasi m ga teng moddiy nuqta v tezlikning kvadratiga proporsional bo'lgan muhit qarshilik kuchi ta'sirida harakatini sekinlatmoqda. Moddiy nuqta harakat qonunini topamiz.

Erkli o'zgaruvchi sifatida moddiy nuqtaning sekinlashish boshlanishidan hisoblanuvchi t vaqtni olamiz. Bunda $t=0$ da $v=v_0$, $s=0$ bo'ladi, v_0 – moddiy nuqtaning boshlang'ich tezligi.

Moddiy nuqtaning harakat qonunini $s(t)$ ni topish uchun Nuytonning ikkinchi qonunidan foydalanamiz: $m\cdot a=F$, bu yerda $a=s''$ – harakatlanuvchi jism tezlanishi, F – jismga harakat jarayonida ta'sir qiluvchi kuchlar yig'indisi.

Bu masalada $F=-kv^2=-ks'^2$, bu yerda $k>0$ – proporsionallik koeffitsiyenti (minus ishora harakatning sikinlashishini bildiradi).

Shunday qilib, moddiy nuqtaning harakat qonuni

$$ms''+ks'^2=0$$

tenglama bilan aniqlanadi. Bu tenglama erkli o'zgaruvchi $s(t)$ oshkor qatnashmaydigan ikkinchi tartibli differensial tenglama. Bu tenglamada $v=s'(t)$ o'rniga qo'yish bajaramiz:

$$mv'+kv^2=0.$$

O'zgaruvchilari ajraladigan tenglama kelib chiqdi.
Uni yechamiz:

$$m\frac{dv}{dt}+kv^2=0,\quad -\frac{dv}{v^2}=\frac{k}{m}dt,\qquad \int-\frac{dv}{v^2}=\int\frac{k}{m}dt,\qquad \frac{1}{v}=\frac{k}{m}t+C_1$$

yoki

$$v=\frac{1}{\frac{k}{m}t+C_1}.$$

C_1 o'zgarmasni $t=0$ da $v=v_0$ shartdan topamiz: $C_1=\frac{1}{v_0}$.

U holda

$$v=\frac{1}{\frac{k}{m}t+\frac{1}{v_0}}$$

yoki

$$\frac{ds}{dt}=\frac{1}{\frac{k}{m}t+\frac{1}{v_0}}$$

tenglama kelib chiqadi.

13. Xurramov Sh.R. Oliy matematika. Misollar. Nazorat topshiriqlari. 2-qism. T.: Fan va texnologiyalar. 2015.–300 b.

Bundan

$$s=\frac{m}{k}\ln\left(\frac{k}{m}t+\frac{1}{v_0}\right)+C_2.$$

C_2 o'zgarmasni $t=0$ da $s=0$ shartdan topamiz: $C_2=-\frac{m}{k_0}\ln\frac{1}{v_0}$.

Demak, material nuqtaning harakat qonuni

$$s=\frac{m}{k}\ln\left(\frac{kv}{m}t+\frac{1}{v_0}\right)$$

Jismning erkin tushishi qonuni[14]

O'zgarmas g tezlanishga ega jismning erkin tushishi qonunini aniqlaymiz. Bunda $t=0$ da $v=0$, $h=0$ bo'lsin deymiz. Tezlanish bosib o'tilgan yo'lning ikkinchi tartibli hosilasiga teng:

$$\frac{d^2h}{dt^2}=g.$$

Biz erkli o'zgaruvchi oshkor qatnashmaydigan ikkinchi tartibli differensial tenglamaga ega bo'ldik. $\frac{dh}{dt}=v$ belgilash kiritamiz, u holda

$$\frac{d^2h}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dh}{dt}\right)=\frac{dv}{dt}=g,\quad dv=gdt,\quad \int dv=\int gdt,\quad v=gt+C_1.$$

Oxirgi tenglamadan $t=0$ da $v=0$ deb, topamiz: $C_1=0$.

Bundan $v=gt$ yoki $\frac{dh}{dt}=gt$.

O'zgaruvchilarni ajratib, integrallaymiz:

$$dh=gtdt,\quad \int dh=\int gtdt,\quad h=\frac{gt^2}{2}+C_2.$$

Oxirgi tenglamadan $t=0$ da $h=0$ deb, topamiz: $C_2=0$.

Demak, jismning erkin tushishi qonuni

$$h=\frac{gt^2}{2}$$

Eritma konsentratsiyasining o'zgarishi qonuni[15]

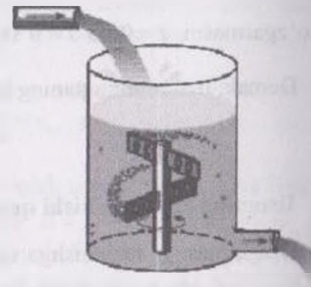
Boshlang'ich vaqtda Q_0 kg. tuz bilan to'yintirilgan P litr suv solingan bakka bir litri $\frac{1}{4}$ kg. tuz bilan to'yintirilgan suv v $litr/\min$ tezlik bilan haydalmoqda va yaxshi aralashtirilgan eritma shu tezlik bilan bakdan so'rilmoqda (69-shakl). Bakdagi tuz miqdori o'zgarish qonunini topamiz.

14. Лобоцкая Н.Л Высшая математика. Мн.: Выш.шк., 1987 –319 с.
15. W.E.Boyce, R.C.DiPrima. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. Copyright.2001

Tuzning bakdagi boshlang'ich miqdori $Q\big|_{t=0} = Q_0$ ga teng bo'lsin.

Tuz bakka yopishmasin va bakda yemirilmasin. U holda tuz miqdorining bakdagi o'zgarish tezligi uning kirish (haydalgan) va chiqish (so'rilgan) tezliklari ayirmasiga teng bo'ladi:

$$\frac{dQ}{dt} = v_k - v_{ch},$$



69-shakl

bu yerda v_k, v_{ch} – tuzning kirish va chiqish tezliklari.

Tuzning bakka kirish tezligi $v_k = \frac{v}{4}$ $kg/\min$. To'yintirilgan suvning bakka kirish tezligi aralashtirilgan eritmaning bakdan chiqish tezlgiga teng bo'lgani sababli bakdagi suv miqdori P o'zgarmaydi. Tuz bakda yaxshi aralashtirilganligi uchun erinmaning miqdori butun bakda bir xil. U holda tuzning bakdan chiqish tezligi $v_{ch} = \frac{Q \cdot v}{P}$ $kg/\min$ bo'ladi.

Demak, bakdagi tuz miqdorining o'zgarish qonuni

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{v}{4} - \frac{Q \cdot v}{P},$$

yoki

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{v(4Q - P)}{4P}.$$

Bu tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama.
Uni yechamiz:

$$\frac{dQ}{4Q - P} = -\frac{v}{4P}dt, \quad \int \frac{dQ}{4Q - P} = -\int \frac{v}{4P}dt, \quad \frac{1}{4}\ln(4Q - P) = -\frac{v}{4P}t + \ln C$$

yoki

$$Q = \frac{P}{4} + \frac{C}{4}e^{-\frac{v}{4P}t}.$$

Tenglamadan $Q\big|_{t=0} = Q_0$ boshlang'ich sharni hisobga olib, topamiz: $C = 4Q_0 - P$.

Demak, eritma konsentratsiyasining o'zgarishi qonuni

$$Q = \frac{P}{4} + \frac{4Q_0 - P}{4}e^{-\frac{v}{4P}t}.$$

Jismning sovishi qonuni[1]

*Nuyton qonuni*ga ko'ra jismning sovushi tezligi jism va atrof-muhit haroratlarining ayirmasiga proporsional bo'ladi. Jism T_0 haroratgacha qizitilgan bo'lsin. Atrof-muhit harorati o'zgarmas va T_1, $T_1 < T_0$ bo'lsin deymiz. t vaqtda jism harorati T ga teng. Haroratning o'zgarish tezligi $T - T_1$ ayirmaga proporsional, ya'ni

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_1),$$

bu yerda k – proporsionallik koeffitsiyenti va u jismning fizik xossalariga va geometrik shakliga bog'liq bo'ladi.

Bu tenglamada minus ishorasi t vaqtning o'sishi bilan T jism haroratining kamayishini bildiradi. Bunda kamayuvchi funksiyaning hosilasi manfiy bo'lgani uchun, tezlik musbat kattalik bo'ladi. Tenglamani o'zgaruvchilarni ajratamiz va uni integrallaymiz:

$$\frac{dT}{T - T_1} = -kdt, \quad \int \frac{dT}{T - T_1} = \int -kdt, \quad \ln(T - T)_1 = -kt + \ln C \quad T - T_1 = Ce^{-kt}$$

yoki

$$T = T_1 + Ce^{-kt}.$$

Tenglamaga $t = 0$ da $T = T_0$ boshlang'ich shartni qo'yib, topamiz: $C = T_0 - T_1$.

$$T = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-kt}.$$

Bu tenglama vaqt o'tishi bilan jismning sovishi qonunini ifodalaydi.

Kimyoviy reaksiya qonunlari[14]

Kimyoviy reaksiyaga kirishuvchi moddalar soni reaksiya qonunining tartibini belgilaydi: bitta modda birinchi tartibli reaksiyani, ikkita modda tartibli reaksiyani, uchta modda uchinchi tartibli reaksiyani.

Birinchi tartibli reaaksiyaning tezligi

$$v = \frac{dc}{dt} = -kc$$

tenglama bilan ifodalanadi, bu yerda bu yerda c – reaksiyaga kirishuvchi modda konsentratsiyasi; t – vaqt; k – reaksiya tezligi o'zgarmasi.

Bu tenglamada minus ishorasi t vaqtning o'sishi bilan reaksiya konsentratsiyasining kamayishini bildiradi. Bunda kamayuvchi funksiyaning hosilasi manfiy bo'lgani uchun, tezlik musbat kattalik bo'ladi. Tenglamani o'zgaruvchilarni ajratamiz va uni integrallaymiz:

$$\frac{dc}{c} = -kdt, \quad \int \frac{dc}{c} = -\int kdt, \quad \ln c = -kt + \ln C$$

yoki

$$c = Ce^{-kt}.$$

Tenglamadan $t = 0$ da $c = c_0$ deb, topamiz: $C = c_0$.

Demak, *birinchi tartibli kimyoviy reaksiya* qonuni

$$c = c_0 e^{-kt}.$$

Ikkinchi tartibli reaaksiyaning tezligi

$$\frac{dc}{dt} = -kc_1c_2$$

tenglama bilan ifodalanadi, bu yerda bu yerda c_1, c_2 – reaksiyaga kirishuvchi moddalar konsentratsiyalari.

Bunda, agar $c_1 = c_2 = c$ bo'lsa,

$$\frac{dc}{dt} = -kc^2$$

o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama kelib chiqadi. Uning yechimi

$$c = \frac{1}{C + kt}$$

yoki $t = 0$ da $c = c_0$ boshlang'ich shartni hisobga olsak,

$$c = \frac{c_0}{1 + c_0 kt}$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu tenglama *ikkinchi tartibli kimyoviy reaksiya* qonunini ifodalaydi.

Uchinchi tartibli reaaksiyaning tezligi

$$\frac{dc}{dt} = -kc_1 c_2 c_3$$

tenglama bilan yoki $c_1 = c_2 = c_3 = c$ bo'lganda

$$\frac{dc}{dt} = -kc^3, \; c|_{t=0} = c_0$$

o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamaning Koshi masalasi bilan ifodalanadi.

Bu masalaning

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{1 + c_0^2 kt}}$$

yechimi *uchunchi tartibli kimyoviy reaksiya* qonunini ifodalaydi.

Biologiya, farmatsiya va meditsinaning amaliy masalalari

Vaqt o'tishi bilan bakteryalarning ko'payishi qonuni[14]

Bakteriyalarning ko'payishi ularning soniga proporsional bo'ladi.

Agar $x -$ berilgan vaqtdagi bakteriyalar soni bo'lsa, bakteriyalarning ko'payishi tezligi

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

tenglama bilan ifodalanadi, bu yerda $k -$proporsionallik koeffitsiyenti.

Tenglamada o'zgaruvchilarni ajratamiz va integrallaymiz:

$$\frac{dx}{x} = kdt, \quad \int \frac{dx}{x} = \int kdt, \quad \ln x = kt + \ln C$$

yoki

$$x = Ce^{kt}.$$

Bunda $t = 0$ da $x = x_0$ deb, topamiz: $C = x_0$.

Demak, vaqt o'tishi bilan bakteryalarning ko'payishi qonuni

$$x = x_0 e^{kt}.$$

Mavsumiy ko'payish modeli[12]

Mavsumiy ko'payishning sodda moduli sifatida

$$\frac{dx}{dt} = rx(t)\cos t$$

differensial tenglamani olish mumkin, bu yerda $r - r > 0$, o'zgarmas.

$x(t)$ populatsiyaning tezligi vaqt bo'yicha o'zgaradi: goh musbat va goh manfiy bo'ladi, natijada populatsiya goh o'sadi va goh kamayadi. Bu ozuqaning etkazilishi kabi mavsumiy faktor bilan aniqlanadi.

Berilgan tenglamani

$$\frac{dx}{x} = r\cos t dt$$

ko'rinishda yozib olamiz va yechamiz:

$$x = Ce^{\int r\cos t dt} = Ce^{r\sin t}.$$

Bunda $t = 0$ da $x = x_0$ deb, topamiz: $C = x_0$.

Demak, mavsumiy ko'payish modeli

$$x = x_0 e^{r\sin t}.$$

Tabletkadagi dori moddasining erishi qonuni[14]

Tabletkadagi dori moddasining erish tezligi tabletkadagi dori miqdoriga proporsional bo'ladi:

$$\frac{dm}{dt} = -km,$$

bu yerda m – tabletkadagi dori miqdori; k – proporsionallik koeffitsiyenti. Bu tenglamaning yechimi, ya'ni tabletkadi dori moddasining erishi qonuni birinchi tartibli kimyoviy reaksiyadagi kabi

$$m = m_0 e^{-kt}$$

formula bilan ifodalanadi.

Glukozaning qonga so'rilishi qonuni[12]

Glukozaning qon tomirlariga ta'siri muhim davo muolajasi hisoblanadi. Bu jarayonni o'rganish uchun t vaqtda bemor qonidagi glukoza miqdori $\tau = \tau(t)$ ni aniqlaymiz. Glukoza qonga o'zgarmas tezlik bilan quyiladi deymiz. Shu bilan bir vaqtda glukoza yoyiladi va qon tomirlaridan mavjud glukoza miqdoriga proporsial tezlik bilan chetlashadi.

c_1 – glukozaning qon tomirlari sistemasidan chetlashishi tezligi; $\tau(0)$ – bemor qonidagi glukozaning boshlang'ich miqdori bo'lsin.

U holda

$$\frac{d\tau}{dt} = c - c_1$$

tenglama kelib chiqadi.

Masalaning shartiga ko' $c_1 = k\tau(t)$, bu yerda $r - r > 0$, prporsionallik koeffitsiyenti. Shunday qilib,

$$\frac{d\tau}{dt} + kt = c$$

tenglama hosil bo'ladi. Bu birinchi tartibli chiziqli differnsial tenglama.

Tenglama yechimini (16.14) formula bilan topamiz:

$$\tau = e^{-\int P(t)dt}\left(\int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt + C\right) = e^{-\int kdt}\left(\int ce^{\int kdt}dt + C\right) =$$

$$= e^{-kt}\left(\int ce^{kt}dt + C\right) = e^{-kt}\left(\frac{c}{k}e^{kt} + C\right) = Ce^{-kt} + \frac{c}{k}.$$

Bunda $t = 0$ da $\tau = \tau(0)$ deb, topamiz: $C = \tau(0) - \frac{c}{k}$.

Demak, glukoza bilan ichki oziqlanish qonuni

$$\tau(t) = \frac{c}{k} + \left(\tau(0) - \frac{c}{k}\right)e^{-kt}.$$

Vaqtning oshishi bilan $\tau = \tau(t)$ kattalik $\frac{c}{k}$ limitga yaqinlashadi. Bu limit glukozaning qondagi muvozanat miqdori bo'ladi.

Epidemiyalar nazariyasida differensial tenglamalar[12,14]

O'rganilayotgan kasallik uzoq muddatli xarakterga ega bo'lgan shartda epidemiyalar nazariyasida differensial tenglamalar qanday tuzilishini va yechilishini ko'rib chiqamiz. Bunda infeksiyaning o'tishi jarayoni kasallikning kechishiga qaraganda etarlicha tez ro'y beradi. Bizni birinchi jaroyon–infeksiyaning o'tishi jarayoni qiziqtiradi. Bunda kasalga chalingan bemorlar koloniyadan tashqariga chiqmaydi va infeksiyani kasalga chalinmagan bemorlar bilan uchrashganida yuqtiradi deb faraz qilamiz.

a, b – mos ravishda boshlang'ich $t = 0$ vaqtda kasalga chalingan va kasalga chalinmagan bemorlar soni, $x = x(t) - t$ vaqtda kasalga chalinmagan bemorlar soni, $y = y(t)$ – kasalga chalingan bemorlar soni bo'lsin. Bitta avlodning hayoti davridadan kichik vaqt oralig'idagi istalgan t vaqtda

$$x + y = a + b \tag{19.20}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Infeksiya kasalga chalinmagan bemorlarga kasalga chalihgan bemorlar bilan uchrashganida yuqishi sababli, kasalga chalinmagan bemorlar soni vaqt o'tishi bilan kasallangan va kasallanmagan bemorlar o'zaro uchrashishi soniga, yani xy ko'paytmaga proporsional ravishda kamayadi. Shu sababli, kasalga chalinmagan bemorlar sonining kamayish tezligi

$$\frac{dx}{dt} = -\beta \cdot xy \tag{19.21}$$

tenglik bilan ifodalanadi, bu yerda β – proporsionallik koeffitsiyenti.

(19.21) tenglamaga y ning (19.20) tenglamadagi ifodasini qo'yamiz:

$$\frac{dx}{dt} = -\beta \cdot x(a+b-x).$$

Bu tenglamada o'zgaruvchilarni ajratib, topamiz:

$$\frac{dx}{x(a+b-x)} = -\beta \cdot dt, \qquad \frac{(a+b-x)+x}{x(a+b-x)}dx = -\beta \cdot (a+b)dt.$$

Bundan

$$\frac{dx}{x} + \frac{dx}{a+b-x}dx = -\beta \cdot (a+b)dt, \qquad \int\frac{dx}{x} + \int\frac{dx}{a+b-x} = \int -\beta \cdot (a+b)dt$$

yoki

$$\ln x - \ln(a+b-x) = -\beta \cdot (a+b)t + \ln C, \qquad \ln\frac{x}{a+b-x} = -\beta \cdot (a+b)t + \ln C.$$

Bundan

$$\frac{x}{a+b-x} = Ce^{-\beta(a+b)t}.$$

Tenglamaga $t=0$ da $y=b$ boshlang'ich shartni qo'yib, topamiz: $C = \frac{b}{a}$.

Demak, vaqtning o'tishi bilan kasalga chalinmagan bemorlar sonining vaqt o'tishi bilan kamayish qonuni

$$x = \frac{b(a+b)}{b+ae^{\beta(a+b)t}}$$

formula bilan ifodalanadi.

2.16.4. Mashqlar

2.16.1. O'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalarni yeching:

1) $xdx + ydy = 0$;
2) $2xdx - (3y^2+1)dy = 0$;
3) $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$;
4) $ye^{2x}dx - (1+e^2x3)dy = 0$;
5) $\frac{xdx}{x+1} + \frac{dy}{y} = 0$;
6) $ctgxdx + \frac{dy}{y} = 0$,
7) $\sin x\cos ydx + \cos x\sin ydy = 0$;
8) $\sqrt{y}dx + \frac{1}{\sin x}dy = 0$,
9) $y' = e^{x+y}$;
10) $y' = tgx \cdot tgy$;
11) $\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$.
12) $(1+y^2)xdx - (1+x^2)ydy = 0$;
13) $(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0$, $y(1) = 1$;
14) $ye^{2x}dx - (1+e^{2x})dy = 0$, $y(0) = \sqrt{2}$.

2.16.2. Bir jinsli differensial tenglamalarni yeching:

1) $(x+2y)dx - xdy = 0$;
2) $(x+y)dx + (x-y)dy = 0$;
3) $y(x+y)dx - x(2x+y)dy = 0$;
4) $xdy - ydx = xdx$,
5) $xydx + (y^2 - x^2)dy = 0$;
6) $(x^2+xy+y^2)dx - x^2dy = 0$;
7) $xy' - y = xtg\frac{y}{x}$;
8) $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$.

2.16.3. Chiziqli differensial tenglamalarni yeching:

1) $y' + 2y = e^{-x}$; 2) $y' - ytgx = ctgx$;

3) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$; 4) $xy' - 2y = 3$;

5) $xy' - 2y = 2x^4$; 6) $y' + \frac{y}{x} = 2\ln x + 1$;

7) $xy' + y - e^x = 0$, $y(2) = 3$; 8) $y' + ytgx = \frac{1}{\cos x}$, $y(0) = 0$.

2.16.4. Ikkinchi tartibli differensial tenglamalarni yeching:

1) $y'' = \sin x$; 2) $y'' = \cos 2x$;

3) $y'' = e^{3x}$; 4) $y'' = xe^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

5) $2xy'y'' = (y')^2 + 1$; 6) $x\ln x y'' - y' = 0$;

7) $xy'' - y' = 0$; 8) $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 0$;

9) $yy'' - (y')^2 = 0$; 10) $y'' + 2y(y')^3 = 0$;

11) $y''tgy = 2(y')^2$; 12) $(2y + 3)y'' - 2(y')^2 = 0$.

2.16.5. Differensial tenglamaning umumiy yechimini toping:

1) $y'' - y' - 6y = 0$; 2) $y'' - 2y' - 2y = 0$;

3) $y'' - 4y' + 4y = 0$; 4) $9y'' + 6y' + y = 0$;

5) $y'' - y' + 12y = 0$; 6) $y'' - 9y' - 10y = 0$;

7) $y'' - 4y' + 20y = 0$; 8) $y'' + 20y' + 19y = 0$;

9) $y'' + 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -6$; 10) $y'' - 8y' + 16y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

2.16.6. Massasi m ga teng o'q qarshilik kuchi o'q tezligining kvadratiga proporsional bo'lgan devorni teshib o'tmoqda. O'q harakat qonunining tenglamasini tuzing.

2.16.7. Dvigateli o'chirilgandan keyin qayiq harakatini suvning qayiq tezligiga proporsional qarshilik kuchi ta'sirida sekinlatmoqda. Qayiq harakat qonunining tenglamasini tuzing.

2.16.8. Tezlik, bosib o'tilgan yo'l va vaqt $v\cos t + s\sin t = 1$ tenglama bilan bog'langan. Agar $t = 0$ da $s = 2$ bo'lsa, harakat qonunini toping.

2.16.9. Jismning to'g'ri chiziqli harakat tezligi $v = 4t - \frac{6}{t^2}$, m/c. Jismning uchinchi sekunddagi bosib o'tgan yo'lini toping.

2.16.10. Jismning to'g'ri chiziqli harakat tezligi $v = 4t - \frac{6}{t^2}$, m/c. Jismning uchinchi sekunddagi bosib o'tgan yo'lini toping.

2.16.11. Jismning tezligi bosib o'tilgan yo'lga proporsional. Jism birinchi 10 sekundda 100 m. va 15 sekundda 200 m. yo'l bosadi. Jismning t sekundda bosib o'tgan yo'li nimaga teng?

2.16.12. To'g'ri chiziqli harakat tezlanishi vaqtning kvadratiga proporsional. Agar $t = 0$ da $v = 0$, $s = 1$ va $t = 1$ da $s = 2$ bo'lsa, $s = s(t)$ ni toping.

2.16.13. Jismning havoda sovishi tezligi jism va havo haroratlari ayirmasiga proporsional. Agar havo harorati $20°C$ ga teng va jism harorati 20 minut davomida $100°C$ dan $60°C$ ga tushgan bo'lsa, qancha vaqtdan keyin uning harorato $30°C$ ga tushadi?

2.16.14. Tuzning erishi tezligi to'yintirilgan y_0 eritma bilan x haqiqiy aralashmaning ayirmasiga proporsional. Agar $t=0$ da $x=x_0$ bo'lsa, tuzning erishi qonunini toping.

2.16.15. Fermentativ katalitik reaksiya tezligi $\frac{dx}{dt}=\frac{k(a-x)}{1+k(a-x)}$ formula bilan topiladi, bu yerda x – mahsulotning t vaqtdagi konsentratsiyasi; a – reagentning boshlang'ich konsentratsiyasi. Mahsulot konsentratsiyasining vaqt bo'yicha o'zgarish qonunni toping.

2.16.16. Tabletkadagi 0,5 g. streptotsidning erishi o'zgarmasi 0,05 min^{-1} ga teng. Agar tabletkalarning erishi tezligi tabletkadagi dori miqdoriga proporsional bo'lsa, 30 minut davomida qancha dori moddasi erishini (% da) hisoblang.

2.17.17. Dori preparatini o'zgarmas v tezlik bilan uzluksiz kiritilishida dorining qonda o'zgarishi $\frac{dm}{dt}=v-km$ tenglama bilan ifodalanadi, bu yerda k – ozgarmas doimiylik. Agar $t=0$ da $m=m_0$ bo'lsa, qondagi dori preparati miqdorining vaqt bo'yicha o'zgarish qonunini toping.

2.17. QATORLAR

Cheksiz qator – bu matematik analizning amaliy jihatdan qulay vositalaridan biridir. Hozirgi vaqtda qatorlar nazariyasi taqribiy hisoblashlarning asosi hisoblanadi. Bu nazariya yordamida ba'zi funksiyalar va integrallarning qiymatlari jadvali tuzilgan.

2.17.1. Sonli qatorlar[5]

Asosiy tushunchalar

1-ta'rif. $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ sonli ketma-ketlikdan hosil qililngan

$$a_1+a_2+a_3+...+a_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}a_n \tag{17.1}$$

ifodaga *sonli qator* (*qator*) deyiladi. deyiladi. Bunda $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ qatorning hadlari, a_n qatorning umumiy hadi deb ataladi.

(17.1) qator birinchi n ta hadlarining yig'indisi

$$S_n=a_1+a_2+a_3+...+a_n=\sum_{i=1}^{n}a_i \tag{17.2}$$

(17.1) qatorning *n - qismiy yig'indisi* deb ataladi.

Qismiy yig'indilar ketma-ketligi $\{S_n\}$ ni qaraymiz:

$$S_1=a_1,\ S_2=a_1+a_2,\ ...,\ S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i, ...$$

$\{S_n\}$ ketma-ketlik yo chekli limitga intilishi yoki limitga ega bo'lmasligi mumkin.

Agar $S=\lim_{n\to\infty}S_n$ chekli limit mavjud bo'lsa, (17.1) qatorga *yaqinlashuvchi* *qator* deyiladi. Bunda S limitga qatorning *yig'indisi* deyiladi va u

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

kabi yoziladi.

Agar $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ limit mavjud bo'lmasa yoki $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ bo'lsa, (17.1) qatorga *uzoqlashuvchi* qator deyiladi.

1-misol $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ qatorni (geometrik progressiyani) yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Elementar matematika kursidan ma'lumki, $S_n = a\dfrac{1-q^n}{1-q}$, $q \neq 1$.

Bunda: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a}{1-q} \cdot (1-q^n) = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q}, & |q|<1, \\ \infty, & |q|>1; \end{cases}$

2) $q = 1$ da $S_n = a + a + \ldots + a = na$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} na = +\infty$;

3) $q = -1$ da $S_n = a - a + a - a + \ldots$. Bunda n juft bo'lganda $S_n = 0$ va n toq bo'lganda $S_n = a$, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ limit mavjud emas.

Demak, geometrik progressiya: $|q|<1$ da yaqinlashadi va uning yi'indisi $S = \dfrac{a}{1-q}$; $|q| \geq 1$ da uzoqlashadi.

Sonli qatorlarning xossalari

Sonli qatorlar quyidagi xossalarga ega (ularni isbotsiz keltiramiz).

1-xossa. Agar $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi S bo'lsa,

$$\lambda a_1 + \lambda a_2 + \lambda a_3 + \ldots + \lambda a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$$

qator ham yaqinlashadi va uning yig'indisi $\lambda \cdot S$ bo'ladi, bu yerda λ – ixtiyoriy son.

2-xossa. Agar $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ va $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorlar yaqinlashuvchi va ularning yig'indilari mos ravishda S_1 va S_2 bo'lsa,

$$(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + (a_3 \pm b_3) + \ldots + (a_n \pm b_n) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$$

qator ham yaqinlashadi va uning yig'indisi $S_1 \pm S_2$ ga teng bo'ladi.

3-xossa. Agar

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsa, bu qatordan chekli sondagi birinchi k ta hadni tashlab yuborish natijasida hosil bo'lgan

$$a_{k+1}+...+a_n+...=\sum_{n=k+1}^{\infty}a_n$$

qator ham yaqinlashadi va aksincha.

Qator yaqinlashishining zaruriy alomati[5]

Sonli qator yaqinlashishining eng umumiy alomatini ifodalovchi teorema bilan tanishamiz.

1-teorema (*qator yaqinlashishining zaruriy alomati*). Agar $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ bo'ladi.

2-misol. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Berilgan qator uchun $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=0.$

Qatorning umumiy hadida almashtirishlar bajaramiz:

$$a_n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln n.$$

Bundan

$$S_n=\ln 2-\ln 1+\ln 3-\ln 2+\ln 4-\ln 3+...+\ln(n+1)-\ln n=\ln(n+1),$$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\ln(n+1)=+\infty$. Demak, qator uzoqlashadi.

1-natija (*qator uzoqlashishining yetarli alomati*). Agar $n\to\infty$ da qatorning umumiy hadi nolga intilmasa, u holda qator uzoqlashadi.

Musbat hadli qatorlarning yaqinlashish alomatlari

Qator yaqinlashishining zaruriy alomati, umuman aytganda, berilgan qatorning yaqinlashishi yoki uzoqlashishi haqida aniq fikr aytish imkonini bermaydi. Qatorning yaqinlashishi yoki uzoqlashishini ko'p hollarda *etarli alomatlar* orqali aniqlash mumkin bo'ladi.

Qator yaqinlashishining yetarli alomatlarini avval *musbat hadli qatorlar*, ya'ni barcha hadlari musbat bo'lgan qatorlar uchun ko'rib chiqamiz.

Musbat hadli qatorning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligi ko'pincha uni yaqinlashuvchi yoki uoqlashuvchi ekani ma'lum bo'lgan boshqa ("*etalon*") qator bilan taqqoslash yo'li bilan aniqlanadi. Bunday taqqoslashlar quyidagi teoremalarga asoslanadi (ularning isbotini keltirmaymiz).

2-teorema (*taqqoslash alomati*).

$$a_1+a_2+a_3+...+a_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\ , \tag{17.3}$$

$$b_1+b_2+b_3+...+b_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}b_n \tag{17.4}$$

musbat hadli qatorlar berilgan va n ning biror N ($N>1$) nomeridan boshlab $a_n \le b_n$ tengsizlik bajarilsin. U holda (17.4) qatorning yaqinlashuvchi bo'lishidan (17.3) qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi kelib chiqadi va (17.3) qatorning uzoqlashuvchi bo'lishidan (17.4) qatorning uzoqlashuvchi bo'lishi kelib chiqadi.

3-misol. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+\sqrt{n}}$ qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Taqqoslash qator sifatida $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ yaqinlashuvchi qatorni (geometrik progressiyani) olamiz. Berilgan qatorning hadlari uchun $\frac{1}{3^n+\sqrt{n}}<\frac{1}{3^n}$, $n=1,2,\ldots$ tengsizlik bajariladi.

U holda 1-teoremaga ko'ra berilgan qator yaqinlashadi.

3-teorema (*taqqoslashning limit alomati*). Agar musbat hadli (17.3) va (17.4) qatorlar uchun $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$ $(0\le A<\infty)$ bo'lsa, u holda har ikkala qator bir vaqtda yaqinlashadi yoki bir vaqtda uzoqlashadi.

4-teorema (*Dalamber alomati*). (17.3) qator uchun $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$ chekli yoki cheksiz limit mavjud bo'lsin. U holda $l<1$ da qator yaqinlashadi va $l>1$ da qator uzoqlashadi.

4-misol. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$ qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Berilgan qatorda $a_n=\frac{n^3}{2^n}$, $a_{n+1}=\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}$.

Bundan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3=\frac{1}{2}<1.$$

Demak, Dalamber alomatiga ko'ra qator yaqinlashadi.

5-teorema (*Koshining ildiz alomati*). (17.3) qator uchun $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$ chekli yoki cheksiz limit mavjud bo'lsin. U holda $l<1$ da qator yaqinlashadi va $l>1$ da qator uzoqlashadi.

5-misol. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Berilgan qator uchun

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{2}>1.$$

Demak, Koshi alomatiga ko'ra qator uzoqlashadi.

6-teorema (*Koshining integral alomati*). (17.3) qatorning hadlari $[1;+\infty)$ oraliqda aniqlangan musbat, monoton kamayuvchi $f(x)$ funksiyaning $x=1,2,...,n,...$ dagi qiymatlaridan iborat, ya'ni $a_1=f(1)$, $a_2=f(2),...,a_n=f(n),...$ bo'lsin. U holda:

1) agar $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ xosmos integral yaqinlashsa, (17.3) qator ham yaqinlashadi;

2) $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ xosmos integral uzoqlashsa, (17.3) qator ham uzoqlashadi.

6-misol. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, $(\alpha>0)$ qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ $(\alpha>0)$ qatorga *umumlashgan garmonik qator* deyiladi.

Bu qatorga mos $[1;+\infty)$ oraliqda aniqlangan, uzluksiz, monoton kamayuvchi $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$ funksiyani olamiz.

U holda agar $\alpha\neq1$ da

$$\int_1^{\infty} f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{b\to\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\bigg|_1^b=\frac{1}{1-\alpha}(\lim_{b\to\infty}b^{1-\alpha}-1).$$

Bu integral $\alpha>1$ da yaqinlashadi va $\alpha<1$ da uzoqlashadi.

Demak, Koshining integral alomatiga ko'ra umumlashgan garmonik qator $\alpha>1$ da yaqinlashadi va $0<\alpha<1$ da uzoqlashadi.

$\alpha=1$ bo'lganda bu qatordan uzoqlashuvchi garmonik qator kelib chiqadi.

Demak, umumlashgan garmonik qator $\alpha>1$ da yaqinlashadi va $0<\alpha\le1$ da uzoqlashadi.

Ishora almashinuvchi qatorlar. Leybnits alomati

Har bir musbat hadidan keyin manfiy had kelgan va har bir manfiy hadidan keyin musbat had kelgan qatorga *ishora almashinuvchi* qator deyiladi.

Ishora almashinuvchi qatorni

$$a_1-a_2+a_3+...+(-1)^{n+1}a_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n,\ (a_n>0). \qquad (17.5)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

(17.5) qator uchun quyidagi ishora almashinuvchi qator yaqinlashishining yetarli alomati o'rinli.

7-teorema (*Leybnits alomati*). Agar:

1) (17.5) qator hadlari absolut qiymatlaridan tashkil topgan ketma-ketlik monoton kamaysa: $a_1>a_2>a_3>...$;

2) qatorning umumiy hadi nolga intilsa: $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, u holda (17.5) qator yaqinlashadi.

7-misol. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(n+1)^2}$ qatorni yaqinlashishga tekshiring:

Yechish. Berilgan qatorlar uchun Leybnits alomati shartlarining bajarilishini tekshiramiz.

1) $a_n=\frac{1}{n(n+1)^2}$ qator uchun: 1) $\frac{1}{1\cdot 2^2}>\frac{1}{2\cdot 3^2}>\frac{1}{3\cdot 4^2}>\dots>\frac{1}{n(n+1)^2}>\dots,$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}=0.$

Bunda Leybnits alomatining har ikkala sharti bajariladi.

Demak, qator yaqinlashadi.

Absolut va shartli yaqinlashish

Ham musbat va ham manfiy hadlardan tashkil topgan

$$a_1+a_2+a_3+\dots+a_n+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n \qquad (17.6)$$

qatorga *o'zgaruvchi ishorali* (*ixtiyoriy hadli*) *qator* deyiladi.

Agar (17.6) qator hadlarining absolut qiymatlaridan tashkil topgan

$$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\dots+|a_n|+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \qquad (17.7)$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsa, (17.6) qatorga *absolut yaqinlashuvchi qator* deyiladi.

Agar (17.6) qator yaqinlashuvchi va (17.7) qator uzoqlashuvchi bo'lsa, (17.6) qatorga *shartli yaqinlashuvchi* qator deyiladi.

8-teorema (*o'zgaruvchi ishorali qator yaqinlashishining yetarlilik alomati*) Agar (17.7) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda (17.6) qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

8-misol. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{(\ln 10)^n}$ qatorni shartli yoki absolut yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Qator o'zgaruvchi ishorali. α ning har qanday qiymatida $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos n\alpha}{(\ln 10)^n}=0$ bo'lgani uchun qator yaqinlashishi mumkin. Bu qator hadlarining absolut qiymatlaridan tashkil topgan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n\alpha|}{(\ln 10)^n}$ qatorni qaraymiz. Bu qatorning hadlari $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln 10)^n}$ qatorning mos hadlaridan katta bo'lmaydi. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln 10)^n}$ qator Koshining ildiz alomatiga ko'ra yaqinlashadi: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln 10)^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln 10}<1.$

U holda $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n\alpha|}{(\ln 10)^n}$ qator yaqinlashadi. Demak, 8-teoramaga ko'ra berilgan qator absolut yaqinlashadi.

2.17.2. Funksional qatorlar[5]

Asosiy tushunchalar

$X \in R$ to'plamda $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$ funksiyalar aniqlangan bo'lsin. Bu funksiyalardan tuzilgan ketma-ketlik X to'plamda berilgan *funksional ketma-ketlik* deyiladi va $\{u_n(x)\}$ bilan belgilanadi.

2-ta'rif. $X \in R$ to'plamda berilgan $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik hadlaridan tashkil topgan

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \qquad (17.8)$$

ifodaga *funksional qator* deyiladi. Bunda $u_1(x), u_2(x) \ldots u_n(x), \ldots$ funksiyalar *qatorning hadlari*, $u_n(x)$ funksiya *qatorning umumiy hadi* deb ataladi.

X to'plamga (17.8) *qatorning aniqlanish sohasi* deyiladi.

Masalan: $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ qatorning aniqlanish sohasi – butun sonlar o'qi; $\sum_{n=0}^{\infty} \arcsin^n x$ qatorning aniqlanish sohasi $-[-1;1]$ kesma.

(17.8) qatorda x ning o'rniga biror $x_0 \in X$ qiymat qo'yilsa

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \ldots + u_n(x_0) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) \qquad (17.9)$$

sonli qator hosil bo'ladi.

(17.9) sonli qator yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo'lishi mumkin.

Agar (17.9) sonli qator yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo'lsa, (17.8) funksional qatorga x_0 *nuqtada yaqinlashuvchi* (*uzoqlashuvchi*) deyiladi. Bunda x_0 nuqta (17.8) qatorning *yaqinlashish* (*uzoqlashish*) *nuqtasi* deb ataladi.

(17.8) funksional qatorning barcha yaqinlashish nuqtalaridan tashkil topgan X_0 to'plamga (17.8) funksional qatorning *yaqinlashish sohasi* deyiladi.

$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$ yig'indiga (17.8) funksional qatorning *n-qismiy yig'indisi* deyiladi.

Agar (17.1) qator yaqinlashsa va uning yig'indisi $S(x)$ bo'lsa,

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x)$$

ayirmaga (17.1) funksional qatorning *n-qoldig'i* deyiladi.

Fiksirlangan $\forall x \in X$ da (17.8) qator sonli qatorga aylangani uchun uni tekshirishda sonli qatorlarning barcha yaqinlashish alomatlaridan foydalanish mumkin.

9-misol. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}(x-1)^{2n}$ funksional qatorning yaqinlashish sohasini toping.

Yechish. Bu qator uchun Dalamber alomatini qo'llaymiz:

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^{n+1}(x-1)^{2(n+1)}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n(x-1)^{2n}} \right| = 2(x-1)^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

$\forall x \in R$ da $\varphi(x) = 0 < 1$. Demak, berilgan qator butun sonlar o'qida yaqinlashadi.

Darajali qatorlarlarning yaqinlashishi

Matematika va uning tatbiqida hadlari darajali funksiyalardan tashkil topgan

$$a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \qquad (17.10)$$

funksional qator muhim ahamiyatga ega.

(17.10) qatorga *darajali qator*, $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ o'zgarmas sonlarga *darajali qatorning koeffitsiyentlari*, x_0 songa *darajali qatorning markazi* deyiladi.

Xususan, $x_0 = 0$ da

$$a_0 + a_1x + ... + a_nx^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \qquad (17.11)$$

darajali qator hosil bo'ladi. Bu qatorda a_nx^n had $(n+1)$ o'rinda turgan bo'lsada qulaylik uchun uni n-had deb qaraladi.

Darajali qatorning yaqinlashish sohasi haqida quyidagi teorema asosida xulosa chiqariladi.

9-teorema (*Abel teoremasi*). Agar (17.11) darajali qator $x = x_1 \neq 0$ nuqtada yaqinlashsa, u holda u x ning $|x| < |x_1|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha nuqtalarida absolut yaqinlashadi.

2-natija. Agar (17.11) darajali qator $x = x_1$ nuqtada uzoqlashsa, u holda u x ning $|x| > |x_1|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha nuqtalarida uzoqlashadi.

$(-|x_1|; |x_1|)$ intervalga *darajali qatorning yaqinlashish intervali (sohasi)* deyiladi. $|x_1| = R$ deb, yaqinlashish intervalini $(-R; R)$ ko'rinishda yozish mumkin. $R \geq 0$ soniga *darajali qatorning yaqinlashish radiusi* deyiladi.

(17.11) qatorning yaqinlashish radiysi Dalamber alomatiga ko'ra

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad (17.12)$$

formula bilan topiladi.

Yuqoridagi singari Koshining ildiz alomatini yordamida (17.12) qatorning yaqinlashish radiysini topishning yana bir formulasini keltirib chiqaramiz:

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}. \qquad (17.13)$$

10-misol. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ darajali qatorlarning yaqinlashish sohasini toping:

Yechish. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ qatorda $a_n = \frac{1}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!(n+1)}$.

Qatorning yaqinlashish radiusini (17.12) formula bilan topamiz:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!(n+1)}{n!}\right| = \infty.$$

Demak, qator $x \in (-\infty, +\infty)$ da yaqinlashadi.

Funksiyalarni darajali qatorga yoyish

Agar $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ funksional qator $\forall x \in X$ da yaqinlashuvchi, $S(x)$ yig'indiga ega va $S(x) = f(x)$ bo'lsa, $f(x)$ *funksiya* X *to'plamda qatorga yoyilgan* deyiladi va $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ deb yoziladi.

$f(x)$ funksiya $(x_0 - R; x_0 + R)$ oraliqda darajali qatorga yoyilgan bo'lsin:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n (x - x_0)^n + \ldots \qquad (17.14)$$

10-teorema. $f(x)$ funksiya $(x_0 - R; x_0 + R)$ oraliqda (17.14) darajali qatorga yoyilgan bo'lsa, u holda bu yoyilma yagona bo'ladi, ya'ni (17.14) qator yig'indisining koeffitsiyentlari jagona tarzda aniqlanadi.

Isboti. $f(x)$ funksiya $(x_0 - R; x_0 + R)$ oraliqda (17.14) darajali qatorga yoyilgan bo'lsin. Bu qatorni n marta hadma-had differensiallaymiz:

$$f^{(n)}(x) = n! a_n + (n+1)n \ldots 2 \cdot a_{n+1}(x - x_0) + \ldots .$$

$x = x_0$ da topamiz:

$$f^{(n)}(x_0) = n! a_n .$$

Bundan

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad f^{(0)}(x_0) = f(x_0), \ 0! = 1. \qquad (17.15)$$

Demak, (17.14) darajali qatorning a_n $(n = 0,1,2,\ldots)$ koeffitsiyentlari jagona tarzda (17.15) formulalar bilan aniqlanadi.

Shunday qilib, x_0 nuqtada cheksiz differensiyallanuvchi $f(x)$ funksiya uchun

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots \qquad (17.16)$$

darajali qatorni tuzish mumkin.

(17.16) qatorga $f(x)$ *funksiyaning* x_0 *nuqtadagi Teylor qatori* deyiladi.

$a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ koeffitsiyentlar $f(x)$ *funksiyaning* x_0 *nuqtadagi Teylor koeffitsiyentlari* deb ataladi.

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \qquad (17.17)$$

ifodaga n*-darajali Teylor ko'phadi* deyiladi.

$$R_n(x) = f(x) - S(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \qquad (17.18)$$

ifoda *Teylor qatorining* n*-qoldiq hadi* deb ataladi.

Qoldiq hadining

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \text{ bunda } c \in (x_0; x) \qquad (17.19)$$

ko'rinishiga *Teylor qatorining Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadi* deyiladi.

(17.16) va (17.19) ifodalardan $f(x)$ funksiyaning $(x_0 - R; x_0 + R)$ oraliqda Teylor qatoriga yoyilmasi

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad c \in (x_0; x) \qquad (17.20)$$

kelib chiqadi. Bu yoyilmaga *Teylor formulasi* deyiladi.

(17.20) formuladan $x_0 = 0$ da $f(x)$ funksiyaning $(-R; R)$ oraliqda Makloren qatoriga yoyilmasi

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad c \in (x_0; x) \qquad (17.21)$$

kelib chiqadi. Bu yoyilmaga *Makloren formulasi* deyiladi.

$f(x)$ funksiya Makloren qatoriga quyidagi tartibda yoyiladi:

1°. funksiyaning $f'(x),\ f''(x), \ldots, f^{(n)}(x), \ldots$ hosilalari topiladi;

2°. hosilalarning x_0 nuqtagi qiymatlari hisoblanadi;

3°. funksiyaning Makloren qatori tuziladi va uning yaqinlashish intervali aniqlanadi;

4°. Makloren qatorining $n \to \infty$ da $R_n(x)$ qoldiq hadi nolga intiladigan $(-R; R)$ intervali topiladi. Agar bunday interval mavjud bo'lsa, bu intervalda $f(x)$ funksiya va Makloren qatorining yig'indisi ustma-ust tushadi.

Asosiy elementar funksiyalarning Makloren qatoriga yoyilmalarini keltiramiz:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \ x \in (-\infty; \infty); \qquad (17.22)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, x \in (-\infty; \infty); \qquad (17.23)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \ x \in (-\infty; \infty); \qquad (17.24)$$

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)}{n!}x^n =$$

$$= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)}{n!}x^n + \ldots, \ x \in (-1; 1); \qquad (17.25)$$

Qatorlarning taqribiy hisoblashlarga tadbiqi

Funksiyalar qiymatini taqribiy hisoblash

Qatorlar yordamida trigonometrik ifodaarning, logarifmik sonlarning, ildizlarning va boshqa funksiyalarning qiymatlarini taqribiy hisoblash mumkin.

Umuman olganda, $f(x)$ funksiyaning biror $x = x_0$ nuqtadagi qiymatini berilgan aniqlikda hisoblash talab qilingan bo'lib, bunda $f(x)$ funksiya $(-R; R)$ oraliqda darajali qatorga yoyilgan va $x_0 \in (-R; R)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi aniq qiymati Teylor qatori bilan, taqribiy qiymati esa bu qatorning n-qismiy yig'indisi bilan hisoblanishi mumkin, ya'ni

$f(x_0) \approx S_n(x_0)$. Bu taqribiy tenglikning aniqligi n ning ortishi bilan ortib boradi. Uning absolut xatoligi $|R_n(x_0)| = |f(x_0) - S_n(x_0)|$ ga teng bo'ladi.

$f(x_0)$ qiymat $\varepsilon > 0$ aniqlikda hisoblanishi talab qilinganida $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi taqribiy qiymati sifatida qatorning $|R(x)| < \varepsilon$ shartni qanoatlantiruvchii n- qismiy yig'indisni olinadi. Bunda qator musbat hadli bo'lsa, uning qoldig'i $R_n < \int_n^\infty f(x)dx$ tengsizlik bilan, ishora almashinuvchi bo'lsa, uning qoldig'i $|R_n| < |a_{n+1}|$ tengsizlik bilan baholanadi. Bundan tashqari qatorning qoldig'i $|R_n(x_0)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x_0 - c)^{n+1}\right| < \varepsilon$ tengsizlik bilan baholanishi mumkin.

11- misol. e sonini $\varepsilon = 0{,}001$ aniqlikda hisoblang.

Yechish. e^x funksiyaning Makloren qatoriga yoyilmasidan foydalanamiz:

$$x = 1 \text{ da } e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots .$$

Bunda $R_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!}$, $c \in (0;1)$ yoki $e^c < e^1 < 3$ dan $R_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}$ kelib chiqadi. $n = 6$ da $R_6(1) = \frac{3}{7!} = 0{,}00069 < 0{,}001$. Shu sababli

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \approx 2{,}718$$

Aniq integrallarni taqribiy hisoblash

Darajali qatorlar boshlang'ich funksiyasi elementar funksiyalar orqali chekli ko'rinishda ifodalanmaydigan aniqmas yoki aniq integrallarni hisoblashda qo'llaniladi.

$\int_a^b f(x)dx$ integralni $\varepsilon > 0$ aniqlikda hisoblash talab qilingan bo'lsin. Integral ostidagi funksiyani $[a;b]$ kesmani o'z ichiga olgan $(-R;R)$ oraliqda darajali qatorga yoyish mumkin bo'lsa, berilgan integralni hisoblash uchun bu qatorni hadma- had integrallash xossasidan foydalanish mumkin. Bunda integrallash aniqligi funksiya qiymatini taqribiy hisoblashdagi kabi baholanadi.

12-misol. $\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ integralni 0,0001 aniqlikda hisoblang.

Yechish. $\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x} = \int_0^{0,1} \frac{1}{x}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]dx =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^{0,1} \frac{x^n}{n+1}dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\Bigg|_0^{0,1} = \frac{1}{10} - \frac{1}{2^2 \cdot 100} + \frac{1}{3^2 \cdot 1000} \approx 0{,}0076$$

2.17.3. Mashqlar

2.17.1. Qatorlarni yaqinlashishga tekshiring. Yaqinlashuvchi qatorning yig'indisini toping:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+5)(2n+7)}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2+21n+10}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+4n-3}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+5^n}{15^n}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-3}}$.

2.17.2. Musbat hadli qatorlarni yaqinlashishga tekshiring:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+2}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}tg\left(\frac{\pi}{4n}\right)$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2-5}{n^4+4n}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{e^n}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{2n-2}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{1}{3^n}\right)^{2n}$;

11) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-1}{4n}\right)^{n^2}$; 12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$;

13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}$; 14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+n^2}$;

15) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$; 16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

2.17.3. Ishora almashinuvchi qatorlarni yaqinlashishga tekshiring:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{6n-5}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n}{n^2}$.

2.17.4. Qatorlarni shartli yoki absolut yaqinlashishga tekshiring:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{(\ln 3)^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n-1)\pi}{n^2+5}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln n}$.

2.17.5. Darajali qatorning yaqinlashish sohasini toping:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n(n+1)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{5^n}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n (n^2+1)}$.

2.17.6. Funksiyalarni x ning darajalari bo'yicha qatorga yoying:

2) $f(x) = e^{-x^2}$; 2) $f(x) = x^2 e^{-x}$;

3) $f(x) = \sin x^2$; 4) $f(x) = \cos^2 x$.

2.17.7. Darajali qatorlar yordamida 0,0001 aniqlikda hisoblang:

1) $\ln 1{,}1$; 2) $\sin 12^\circ$;

3) $\sqrt{e}$; 4) $\sqrt[3]{520}$.

2.17.8. Darajali qatorlar yordamida integrallarni toping:

1) $\int \frac{\sin x dx}{x}$; 2) $\int \frac{e^x dx}{x}$;

2.17.9. Integrallarni 0,0001 aniqlikda hisoblang:

1) $\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x} dx$; 2) $\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx$.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Erving Kreyszig, Herbert Kreyszig, Edward Normuton. Advanced engineering Mathematics. New York, Copyrigth, 2011.

2. David C. Lay. Linear algebra and its applications. Opyrigth, 2012

3. A.K.Lal, S. Pati. Lekture Notes on Linear Algebra. Februare 10, 2015. hhtps://www.Conrsehero.com>…>MATH 211.

4. David J.Jeffey, Robert M.Corbess. Linear Algebra in Maple www.apmaths.uwo.ca/~ deffrey/Offprintc/C5106_C072.

5. Jr. Thomas. Calculus. Copyright, 2005

6. Izu Vaisman. Analytical Geometry. Coryright, 1997

7. Additional Topics in Analytic Geometry. http://salkhateeb.kau.edu.sa/.../20section-chapter5-6

8. Claudio Canuto, Anita Tabacco. Mathematical Analysis I. Sprinder-Verlag Italia, Milan 2008

9. Complex Numbers - Stewart Calculus www.stewartcalculus.com/data /.../ess_at_12_cn_stu.

10. J.Stewart. Calculus, Broks/Cole, Cengage Learing,2012.

11. Section 4-5. Partial Fractions.www.mhhe.com/.../barnettcat7/...

12. Баврин И.И. Краткий курс высшей математики для-химико-биологических и медицинских специальностей. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.–328 с.

13. Xurramov Sh.R. Oliy matematika.Misollar.Nazorat topshiriqlari. 2-qism, T.: Fan va texnologiyalar, 2015.–300 b.

14. W.E.Boyce, R.C.DiPrima. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. Copyright,2001.

15. Лобоцкая Н.Л. Высшая математика. Мн.: Выш.шк., 1987.–319 с.

16. Бобров А.Н., Радославова Т.В. Задачи по высшей математике для биологов. М.: МГУ, 2013.–111с.

17. Колесов В.В. Элементарные введение в высшую математику. Ростов н/Д: Феникс, 2013.–476с.

18. Павлушков И.В. Основы высшей математики и математической статистики. М.: ГЕОТАР-Медиа, 2008.–424с.

19. Зайцев И.А. Высшая математика. М.: Высш.шк., 1998.–409 с.

20. Баврин И.И. Курс высшей математики. М.: Гуманит.издат центр ВЛАДОС, 2004.–506 с.

21. Xurramov Sh.R. Oliy matematika.Misollar.Nazorat topshiriqlari. 1-qism, T.: Fan va texnologiyalar, 2015.–408 b.

22. Soatov Yo.U. Oliy matematika. 1- jild, T.: O'qituvchi, 1992. –428 б.

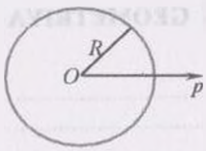
23. Soatov Yo.U. Oliy matematika. 2- jild, T.: O'qituvchi, 1994.–414 б.

24. Soatov Yo.U. Oliy matematika. 3- jild, T.: O'zbekiston, 1996.–638 б

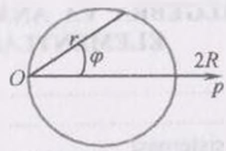
ILOVA

Ayrim chiziqlarning grafiklari va tenglamalari

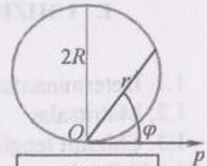
1-ilova



$r = R$

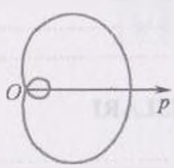


$r = 2R\cos\varphi$



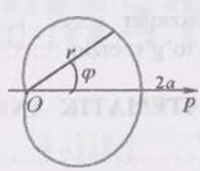
$r = 2R\sin\varphi$

R radiusli aylana



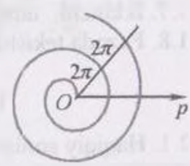
$r = b + a\cos\varphi \ (a > b)$

Paskal chig'anog'i



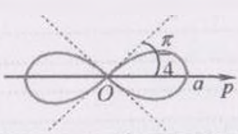
$r = a(1+\cos\varphi) \ (a > 0)$

Kardioida



$r = a\varphi \ (a > 0)$

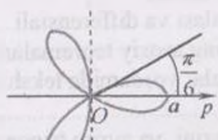
Arximed spirali



$r = a\sqrt{\cos 2\varphi} \ \ (a > 0)$

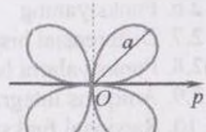
$\left(x^2 + y^2\right)^2 - a^2\left(x^2 - y^2\right) = 0$

Bernulli limniskatasi



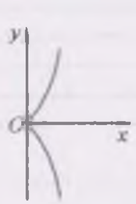
$r = a\cos 3\varphi \ (a > 0)$

Uch yaproqli gul



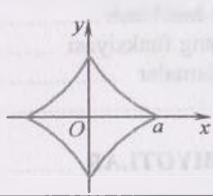
$r = a\sin 2\varphi \ (a > 0)$

To'rt yaproqli gul



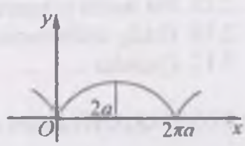
$y^2 = x^3 \ \ yoki \ \begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3 \end{cases}$

Yarimkubik parabola



$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \ \ yoki \ \begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$

Astroida



$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \ \ a > 0 \end{cases}$

Sikloida

MUNDARIJA

B.A.ABDURAXMONOV, SH.R.XURRAMOV

OLIY MATEMATIKA

1-jild

Muharrir LAYLO ZAMONOVA
Badiiy muharrir FOTIMA ZAMONOVA
Texnik muharrir O.MUXTOROV
Musahhih BILOLBEK JUMAYEV

Bosishga ruxsat 19.12.2017 da berildi.
Bichimi 84x108 $^{1}/_{16}$. Ofset qog'ozi.
Ofset bosma usulida bosildi. «Times New Roman» garniturasi.
15,25 bosma taboq. Adadi 100 nusxa.
"O'quv-ta'lim metodika" DUK
bosmaxonasida chop etildi. Toshkent shahri,
Chilonzor tumani, Furqat ko'chasi, 174-uy.