Э. АБУТАЛИЕВ
С. АЛИМУХАМЕДОВ
А. АЪЗАМОВ
К. БЕКБОЕВ

ИНЖЕНЕРЛИК ИКТИСОДИЙ ХИСОБЛАШЛАРДА СОНЛИ УСУЛЛАР

Э. Б. АБУТАЛИЕВ, С. АЛИМУҲАМЕДОВ,
А. АЪЗАМОВ, К. БЕКБОЕВ

ИНЖЕНЕРЛИК-ИҚТИСОДИЙ ҲИСОБЛАШЛАРДА СОНЛИ УСУЛЛАР

Олий техника ўқув юртлари
студентлари учун ўқув қўлланма

ТОШКЕНТ — „ЎҚИТУВЧИ“ — 1982

Тақризчилар: *Аҳмедов Т. Д.,* физика-математика фанлари кандидати,
А. У. Умирбеков, физика-математика фанлари кандидати

Қўлланма амалий математика элементларини, сонли анализ ва оптималлаштириш усулларини баён қилишга бағишланган бўлиб, олий техника ўқув юртларида инженер-иқтисодчилик мутахассислиги бўйича таълим олаётган студентларга мўлжалланган.

Китобдан ўз ишларида амалий математика методларини татбиқ этадиган мутахассислар ҳам фойдаланишлари мумкин.

$А\frac{20203-115}{353\ (04)-81}$ инф. письмо — 82 170 203 0000

СЎЗ БОШИ

Фан ва техника ютуқлари амалиётнинг бевосита мулки бўлиб қолаётган ҳозирги шароитда фаннинг янги соҳаларига, жумладан, инженерлар фойдаланадиган воситаларга қизиқиш кун сайин ортиб бормоқда. КПСС XXVI съезди ва партиямиз Марказий Комитетининг кейинги Пленумлари ва СССР Министрлар Советининг қарорларида илмий-техника тараққиёти ютуқларини халқ хўжалигига татбиқ қилиш ижтимоий-иқтисодий ривожланиш билан узвий боғлиқ эканлиги уқтириб ўтилган

Шу сабабли ҳам халқ хўжалигининг турли-туман муҳим масалаларини электрон-ҳисоблаш машиналарида ечишда татбиқ этиладиган амалий математика усулларининг роли кундан-кунга ортиб бормоқда.

Олий ўқув юртларининг инженер-иқтисодчи мутахассисликларига мўлжалланган янги ўқув плани ва программаларида асосий предметлар қаторида сонли усуллар ва амалий математика усулларига кенг ўрин берилган бўлиб, бу программаларда бўлажак мутахассисларга замонавий математик усуллар ва электрон-ҳисоблаш машиналари (ЭҲМ) ҳақида кенг маълумот бериш талаб этилади, чунки ҳозирги кунда фан-техника ва ижтимоий тараққиётнинг доимо олдинги сафида меҳнат қилаётган инженер-иқтисодчиларнинг олдида турган мураккаб ва муҳим масалаларни замонавий сонли усуллар, амалий математика усуллари ва тезкор ЭҲМ да программалаш усулларини мукаммал ўзлаштирмасдан туриб муваффақиятли ҳал қилиш мумкин эмас.

Сонли усуллар ва амалий математиканинг қатор соҳалари бўйича кўпгина чуқур мазмунли илмий китоблар, дарслик ва ўқув қўлланмалар бўлажак мутахассислар хизматидадир. Лекин уларнинг кўпчилиги чуқур математик йўналишда ёзилган бўлиб, уларни ўрганиш студентлардан махсус математик тайёргарлик бўлишини талаб қилади. Бундан ташқари, сонли усуллар ва амалий математика усулларининг ўзига хос жиҳатлари тушунарли баён этилган китоб ва дарсликларнинг ўзбек тилида етарли эмаслиги студентлар олдида анча қийинчилик туғдирмоқда.

Бўлажак инженер-иқтисодчиларнинг замонавий математика усулларини ўрганишларида энг муҳим нарса шуки, улар бу усулларни ўзлаштирибгина қолмасдан, балки шу усулларни халқ хўжалигининг турли масалаларини ҳал қилишда ўринли татбиқ қила билишлари ва уларнинг жамият социал-иқтисодий тараққиёти учун амалий аҳамиятини англай билишлари зарур.

Республикамиз олий техника ўқув юртларида авторларнинг кўп йиллар давомида олиб борган илмий-педагогик фаолиятлари, амалий математика ва сонли анализ усулларидан фойдаланиш ва дарс бериш тажрибалари фаолиятларида сонли анализ ва амалий математика усулларидан кенг фойдаланиладиган инженер-иқтисодчи мутахассислиги бўйича таълим олаётган студентларга мўлжалланган ушбу қўлланмани ёзишга имкон яратди.

Мазкур қўлланма олий ўқув юртларида инженер-иқтисодчи мутахассислиги бўйича кадрлар тайёрлашда янги ўқув плани ва программаларини ўзлаштиришда студентлар дуч келадиган қийинчиликларни бартараф этиш йўлидаги интилишлардан иборат.

Қўлланма уч қисмдан иборат бўлиб, унинг биринчи қисмини Э. Б. Абуталиев ва К. Бекбоев, иккинчи қисмини Э. Б. Абуталиев ва С. Алимуҳамедов, учинчи қисмини Э. Б. Абуталиев ва А. Аъзамов ёзган. Қўлланманинг биринчи қисмида амалий математика элементлари, иккинчи қисмида сонли анализ методлари, учинчи қисмида оптималлаштириш усуллари баён қилинган.

Қўлланмани ёзиш жараёнида доимий эътибори, берган қимматли кўрсатма ва маслаҳатлари учун академик В. Қ. Қобуловга чин қалбимиздан миннатдорлик изҳор этамиз.

Авторлар

I қисм

I боб

ТЎПЛАМЛАР НАЗАРИЯСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ ВА МАТРИЦАЛАР

1- §. Тўпламлар назарияси элементлари

Бу қўлланманинг айрим қисмларида тўпламлар назариясининг баъзи тушунчаларидан фойдаланилади. Шунинг учун қуйида шу тушунчалар ҳақида қисқача маълумот берамиз.

Тўплам тушунчаси бошланғич тушунча бўлиб, унга таъриф берилмайди. Тўплам тушунчаси математик анализнинг асосий тушунчаларидан биридир. Тўплам тайин предметларнинг маълум мажмуи (тўдаси) дан иборатдир. Масалан, бирор институтда ўқиётган студентлар тўплами, барча жуфт сонлар тўплами ва ҳ. к. Келтирилган бу мисоллардан кўринадики, тўплам чекли ёки чексиз сондаги предметлардан тузилиши мумкин. Тўпламни ташкил этувчи предметлар шу тўпламнинг *элементлари* дейилади.

Одатда, тўпламлар латин алфавитининг бош ҳарфлари $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$ билан, уларнинг элементлари эса латин алфавитининг кичик ҳарфлари $a, b, c, \ldots, x, y, z$ билан белгиланади. Агар бирор x элемент M тўпламга тегишли бўлса, у ҳолда уни $x \in M$ каби ёзилади. Агар бирор y элемент M тўпламга тегишли бўлмаса, у ҳолда уни $y \notin M$ каби ёзилади. Агар M тўплам a, b, c, d элементлардан тузилган бўлса, уни $M = \{a, b, c, d\}$ каби ёзилади.

Иккита M ва N тўплам берилган бўлсин. M тўпламнинг барча элементлари N тўпламга тегишли бўлсин. У ҳолда M тўплам N тўпламнинг *қисм тўплами* дейилади ва $M \subset N$ каби ёзилади. Масалан, барча натурал сонлар тўплами барча бутун сонлар тўпламининг қисм тўпламидир.

Битта ҳам элементга эга бўлмаган тўплам *бўш тўплам* деб аталади ва $\varnothing$ орқали белгиланади. Масалан, $x^2 + 9 = 0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизлари тўплами бўш тўпламдир, чунки бу тенглама ҳақиқий илдизларга эга эмас.

Берилган иккита M_1 ва M_2 тўпламнинг *кесишмаси* деб, уларнинг умумий элементларидан тузилган M -тўпламга айтилади ва $M_1 \cap M_2 = M$ каби ёзилади. Масалан, $M_1 = \{a, b, c, d\}$ ва $M_2 = \{a, b, k, e, n\}$ бўлса, у ҳолда уларнинг кесишмаси $M_1 \cap M_2 = \{a, b\}$ бўлади.

Чекли сондаги $M_1, M_2, \ldots, M_n$ тўпламларнинг кесишмаси деб, уларнинг умумий элементларидан тузилган M тўпламга айтилади ва қуйидагича ёзилади:

$$M = M_1 \cap M_2 \cap \ \ldots \ \cap M_n \text{ ёки } M = \bigcap_{i=1}^{n} M_i.$$

Агар берилган тўпламлар ҳеч қандай умумий элементга эга бўлмаса, бу тўпламларнинг кесишмаси бўш тўплам бўлади. Агар M_1 3 дан катта сонлар тўплами ва M_2 2 дан кичик сонлар тўплами бўлса, уларнинг кесишмаси $M_1 \cap M_2 = \varnothing$ тўпламдан иборат бўлади.

Иккита M_1 ва M_2 тўпламнинг *бирлашмаси* деб, бу тўпламларнинг ҳеч бўлмаганда биттасига тегишли элементлардан тузилган M тўпламга айтилади ва $M_1 \cup M_2 = M$ каби белгиланади. Масалан, $M_1 = \{a, b, c, e\}$, $M_2 = \{b, г, c, e\}$ бўлса, у ҳолда уларнинг бирлашмаси. $M = M_1 \cup M_2 = \{a, b, c, г, e)$ тўпламдан иборат бўлади.

Чекли сондаги $M_1, M_2, \ldots, M_n$ тўпламларнинг бирлашмаси деб, бу тўпламларнинг ҳеч бўлмаганда биттасига тегишли бўлган элементлардан тузилган M тўпламга айтилади ва қуйидагича ёзилади:

$$M = M_1 \cup M_2 \cup \ \ldots \ \cup M_n \text{ ёки } M = \bigcup_{i=1}^{n} M_i.$$

Масалан, барча бутун сонлар тўплами барча жуфт сонлар тўплами билан барча тоқ сонлар тўпламининг бирлашмаси бўлади.

Агар $1 < x < 3$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x сонлар тўплами M_1 ва $2 < y < 6$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча сонлар тўплами M_2 берилган бўлса, уларнинг $M_1 \cup M_2$ бирлашмаси $1 < z < 6$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча z сонлар тўпламидан иборат бўлади.

2- §. *n* ўлчовли чизиқли фазо

$x, y, z, \ldots$ элементлар тўплами R учун

а) ҳар қандай иккита x ва y элементга уларнинг $x + y$ йиғиндисига тенг z элемент мос қўйилса;

б) ҳар бир x элемент ва бирор сонлар майдонидан олинган ҳар бир λ сонга уларнинг кўпайтмасидан иборат λx элемент мос қўйилса, у ҳолда R тўплам *чизиқли фазо* дейилади.

Бу амаллар қуйидаги шартларни (аксиомаларни) қаноатлантириши зарур:

I. 1°. $x+y=y+x$ (коммутативлик).

2°. $(x+y)+z=x+(y+z)$ (ассоциативлик).

3°. Ҳар қандай x элемент учун, шундай 0 элемент мавжудки, $x+0=x$ тенглик ўринли бўлади. Бундай элемент *ноль элемент* дейилади.

4°. Ҳар қандай x элемент учун шундай $-x$ элемент мавжудки, $x+(-x)=0$ муносабат ўринли бўлади.

II. 1°. $1\cdot x=x$.

2°. $\alpha\cdot(\beta x)=\alpha\cdot\beta\cdot(x)$, α ва β — ихтиёрий сонлар.

III. 1°. $(\alpha+\beta)\cdot x=\alpha\cdot x+\beta\cdot x$.

2°. $\alpha\cdot(x+y)=\alpha\cdot x+\alpha\cdot y$.

Масалан, даражаси n натурал сондан катта бўлмаган барча кўпҳадлар тўплами кўпҳадларни одатдагидек қўшиш ва уларни сонга кўпайтириш амалларига нисбатан чизиқли фазо бўлади.

Чизиқли фазо элементларини *векторлар* деб атаймиз.

Келгусида чизиқли боғлиқ векторлар ва чизиқли боғлиқ бўлмаган векторлар тушунчаси муҳим аҳамиятга эга бўлади. R чизиқли вектор фазо берилган бўлсин. $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \ldots, \vec{u}$ векторлар учун камида бири нолдан фарқли $(\alpha+\beta+\ldots+\delta\neq 0)$ шундай $\alpha, \beta, \ldots, \delta$ сонлар мавжуд бўлиб,

$$\alpha\cdot\vec{x}+\beta\cdot\vec{y}+\gamma\cdot\vec{z}+\ldots+\delta\cdot\vec{u}=0 \qquad (1.1)$$

муносабат ўринли бўлса, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \ldots, \vec{u}$ *ўзаро чизиқли боғлиқ векторлар* дейилади. Агар $\alpha\cdot\vec{x}+\beta\cdot\vec{y}+\lambda\cdot\vec{z}+\ldots+\delta\cdot\vec{u}=0$ муносабат фақат $\alpha=\beta=\lambda=\ldots=\delta=0$ бўлгандагина мумкин бўлса, у ҳолда $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \ldots, \vec{u}$ *ўзаро чизиқли боғлиқ бўлмаган векторлар* дейилади.

Айтайлик, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \ldots, \vec{u}$ ўзаро чизиқли боғлиқ векторлар бўлсин, яъни (1.1) муносабат ўринли бўлиб, коэффициентлардан камида бири, масалан, α нолдан фарқли бўлсин. У ҳолда

$$\alpha\cdot\vec{x}=-\beta\cdot\vec{y}-\gamma\cdot\vec{z}-\ \ldots\ -\delta\cdot\vec{u}.$$

Бундан

$$\vec{x}=-\frac{\beta}{\alpha}\cdot\vec{y}-\frac{\gamma}{\alpha}\cdot\vec{z}-\ \ldots\ -\frac{\delta}{\alpha}\cdot\vec{u}$$

ёки

$$\vec{x}=\lambda\cdot\vec{y}+\mu\cdot\vec{z}+\ \ldots\ +\eta\cdot\vec{u}, \tag{1.2}$$

бунда

$$\lambda=-\frac{\beta}{\alpha},\ \mu=-\frac{\gamma}{\alpha},\ \ldots,\ \eta=-\frac{\delta}{\alpha}.$$

Агар $\vec{x}$ вектор $\vec{y}$, $\vec{z}$, ..., $\vec{u}$ векторлар орқали (1.2) кўринишда ифодаланса, у ҳолда $\vec{x}$ векторни $\vec{y}$, $\vec{z}$, ..., $\vec{u}$ векторларнинг *чизиқли комбинацияси* дейилади.

Шундай қилиб, агар $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, ..., $\vec{u}$ ўзаро чизиқли боғлиқ векторлар бўлса, у ҳолда улардан камида биттаси қолган векторларнинг чизиқли комбинацияси бўлади.

Бир тўғри чизиқда жойлашган ҳар қандай иккита вектор ўзаро пропорционал, яъни ўзаро чизиқли боғлиқ бўлади. Текисликда иккита чизиқли боғлиқ бўлмаган векторларни топиш мумкин, аммо ҳар қандай учта вектор ўзаро чизиқли боғлиқ бўлади. Агар R уч ўлчовли фазодаги векторлар тўпламидан иборат бўлса, у ҳолда R тўпламда ўзаро чизиқли боғлиқ бўлмаган учта вектор топиш мумкин, аммо ҳар қандай тўртта вектор ўзаро чизиқли боғлиқ бўлади.

Шундай қилиб, тўғри чизиқдаги, текисликдаги ва уч ўлчовли фазодаги ўзаро чизиқли боғлиқ бўлмаган векторлар максимал сони тўғри чизиқ, текислик ва уч ўлчовли фазонинг ўлчовлари сони билан бир хил бўлишини кўрдик. Шунинг учун қуйидагича умумлаштириш табиийдир:

агар R чизиқли фазода n та чизиқли боғлиқ бўлмаган вектор мавжуд бўлиб ва бундан кўп сондаги чизиқли боғлиқ бўлмаган векторлар мавжуд бўлмаса, у ҳолда R чизиқли фазони *n ўлчовли чизиқли фазо* дейилади.

Агар R фазода ихтиёрий сондаги ўзаро чизиқли боғлиқ бўлмаган векторларни топиш мумкин бўлса, у ҳолда R *чексиз ўлчовли фазо* дейилади.

3- §. n ўлчовли фазода базис ва координаталар

n ўлчовли R фазода ўзаро чизиқли боғлиқ бўлмаган n та $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ векторлар тўплами шу фазода *базис* дейилади. Масалан, уч ўлчовли R фазода битта текисликда ётмаган ихтиёрий учта вектор базисни ташкил этади.

Теорема. *n ўлчовли R фазода олинган ҳар қандай $\vec{x}$ векторни фақат ягона усул билан шу фазо базис векторларининг чизиқли комбинацияси орқали ифодалаш мумкин.*

Исбот. Айтайлик, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ векторлар R фазонинг базисини ташкил этсин. Улар билан биргаликда R дан олинган $\vec{x}$ векторни ҳам қараймиз. У ҳолда $\vec{x}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ векторлар сони $n+1$ та бўлади. Шунинг учун n ўлчовли фазо таърифига кўра улар ўзаро чизиқли боғлиқ векторлар бўлади, яъни

$$\alpha_0 \vec{x} + \alpha_1 \cdot \vec{e}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \vec{e}_n = 0, \qquad (1.3)$$

бунда α_i коэффициентларнинг камида бири нолдан фарқли. Бу ерда $\alpha_0 \neq 0$ эканлиги равшан, чунки акс ҳолда (1.3) тенгликдан $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ векторларнинг ўзаро чизиқли боғлиқ бўлиши келиб чиқар эди. Демак, (1.3) дан

$$\vec{x} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\vec{e}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_0}\vec{e}_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_0}\vec{e}_n \qquad (1.4)$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, R фазода олинган ихтиёрий $\vec{x}$ векторни $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ векторларнинг чизиқли комбинацияси орқали ифодалаш мумкинлигини исбот қилдик. Энди ҳосил қилинган (1.4) ёйилманинг ягоналигини исботлаймиз.

Бунинг учун

$$\vec{x} = \xi_1 \cdot \vec{e}_1 + \xi_2 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + \xi_n \cdot \vec{e}_n$$

ва

$$\vec{x} = \xi_1' \cdot \vec{e}_1 + \xi_2' \cdot \vec{e}_2 + \dots + \xi_n' \cdot \vec{e}_n$$

кўринишдаги икки хил ёйилма мавжуд деб фараз қиламиз. Бу ёйилмаларни ҳадлаб айириб ушбуни ҳосил қиламиз:

$$0 = (\xi_1 - \xi_1')\vec{e}_1 + (\xi_2 - \xi_2')\vec{e}_2 + \dots + (\xi_n - \xi_n')\vec{e}_n.$$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ ўзаро чизиқли боғлиқ бўлмаган векторлар бўлгани сабабли, охирги тенглик бажарилиши учун

$$\xi_1 - \xi_1' = 0, \qquad \xi_2 - \xi_2' = 0, \ \dots, \ \xi_n - \xi_n' = 0,$$

яъни

$$\xi_1 = \xi_1', \qquad \xi_2 = \xi_2', \ \dots, \ \xi_n = \xi_n'$$

бўлиши зарур.

Шундай қилиб, (1.4) ёйилманинг ягоналиги ҳам исботланди.

Таъриф. Агар $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ векторлар n ўлчовли фазонинг базисини ташкил этиб,

$$\vec{x} = \xi_1 \cdot \vec{e}_1 + \xi_2 \cdot \vec{e}_2 + \dots + \xi_n \cdot \vec{e}_n \qquad (1.5)$$

бўлса, у ҳолда $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ сонлар $\vec{x}$ векторнинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ базисли фазодаги *координаталари* дейилади.

n ўлчовли фазода (1.5) тенглик билан берилган векторни

$$\vec{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \qquad (1.5')$$

кўринишда ҳам ифодалаш мумкин.

Демак, n ўлчовли фазодаги ихтиёрий $\vec{e}$ вектор n та тартибланган сонлар системаси $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ билан аниқланади.

Барча координаталари ноль бўлган вектор *ноль вектор* ($\vec{0}$ вектор) деб аталади: $\vec{0} = (0, 0, 0, \dots, 0)$.

Агар $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ базисда $\vec{x}$ векторнинг координаталари $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ ва $\vec{y}$ векторнинг координаталари $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ бўлсин, яъни

$$\vec{x} = \xi_1 \cdot \vec{e}_2 + \xi_2 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + \xi_n \cdot \vec{e}_n,$$
$$\vec{y} = \eta_1 \cdot \vec{e}_1 + \eta_2 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + \eta_n \cdot \vec{e}_n.$$

1. Агар n ўлчовли $\vec{x}$ ва $\vec{y}$ векторларнинг мос координаталари ўзаро тенг, яъни

$$\xi_1 = \eta_1, \quad \xi_2 = \eta_2, \ \ldots, \ \xi_n = \eta_n \tag{1.6}$$

бўлса, бу векторлар *тенг* дейилади.

2. $\vec{x}$ ва $\vec{y}$ векторларнинг *йиғиндиси* деб, ушбу

$$\vec{x} + \vec{y} = (\xi_1 + \eta_1) \cdot \vec{e}_1 + (\xi_2 + \eta_2) \cdot \vec{e}_2 + \ldots + (\xi_n + \eta_n) \cdot \vec{e}_n \tag{1.7}$$

векторга айтилади.

3. $\vec{x}$ векторнинг λ сонга *кўпайтмаси* деб, ушбу

$$\lambda \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \xi_1 \cdot \vec{e}_1 + \lambda \cdot \xi_2 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + \lambda \cdot \xi_n \cdot \vec{e}_n \tag{1.8}$$

векторга айтилади.

Шуни айтиш керакки, векторларни кўпайтириш амали n ўловли фазода қаралмайди.

4- §. Қавариқ тўпламлар

Нуқталар тўпламини қарайлик.

Таъриф. *Қавариқ тўплам* деб шу тўпламга тегишли ҳар қандай икки нуқтани туташтирувчи кесмани ўз ичига бутунлай олувчи тўпламга айтилади.

Масалан, ҳар қандай учбурчак қавариқ тўпламдир.

Маълумки, ҳар қандай тўғри чизиқ текисликни иккита ярим текисликка ажратади. Ярим текисликнинг ўз чегараси билан бирлашмаси *ёпиқ ярим текислик* дейилади. Ёпиқ ярим текисликлар кесишмаси қавариқ тўплам бўлишини исбот қилиш мумкин.

Ҳар бир ёпиқ ярим текислик қуйидаги чизиқли тенгсизлик билан аниқланади:

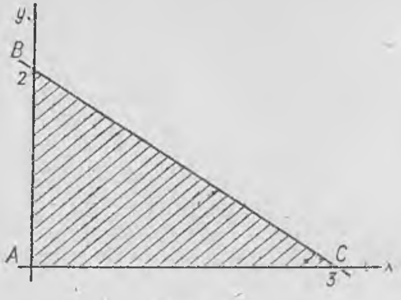
$$ax + by \leqslant c. \tag{1.9}$$

Координаталари $\leqslant$ ($<$ типидаги эмас) типидаги чизиқли тёнгсизликлар системасини қаноатлантирувчи нуқталар *кўпбурчакли қавариқ тўплам* ташкил этади. Тенгсизликнинг иккала қисмини (-1) га кўпайтириб ($\leqslant$) ишорани ($\geqslant$) ишора билан алмаштириш мумкин.

Шундай қилиб, чизиқли тенгсизликлар системасининг ечимлари кўпбурчакли қавариқ тўплам бўлади. Масалан,

$$\left.\begin{aligned} x &\geqslant 0,\\ y &\geqslant 0,\\ 2x+3y &\leqslant 6. \end{aligned}\right\} \qquad (1.10)$$

тенгсизликлар системасининг ечимлари тўплами *ABC* учбурчак (1.1-расм) кўринишида бўлади.



1.1-расм.

Ҳақиқатан ҳам, $x \geqslant 0$ тенгсизлик ечимнинг қийматлари соҳаси ўнг ярим текисликда эканлигини, $y \geqslant 0$ тенгсизлик эса ечимнинг қийматлари соҳаси юқори ярим текисликда эканини кўрсатади. Шунинг учун $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ тенгсизликлар биргаликда ечимнинг қийматлари соҳаси биринчи квадрант бўлишини кўрсатади. Ниҳоят, $2x+3y \leqslant 6$ тенгсизлик қаралаётган система ечимининг мумкин бўлган қийматлари соҳаси *ABC* учбурчак бўлишини кўрсатади.

Шуни ҳам айтиш керакки, системанинг айрим тенгсизликлари шу система билан аниқланган қавариқ тўпламга таъсир қилмаслиги мумкин. Масалан, (1.10) системани $x \geqslant -2$ тенгсизлик билан тўлдирсак. системанинг ечимлари соҳаси ўзгармайди, чунки $x \geqslant 0$ тенгсизлик $x \geqslant -2$ тенгсизликни ҳам ўз ичига олади.

Агар система таркибидаги тенгсизликлар биргаликда бўлмаса, бундай системанинг ечимлари тўплами бўш тўплам бўлади. Масалан,

$$\left.\begin{aligned} x &\geqslant 2,\\ x &\leqslant 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.11)$$

системанинг ечимлари тўплами бўш тўпламдир.

Қавариқ тўплам тушунчасини кўп ўлчовли фазода ҳам татбиқ қилиш мумкин. Бу тушунча n ўлчовли фазода қавариқ тўпламни тасвир этади. n ўлчовли фазода *гипертекислик* деб, координаталари ушбу

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + a_{10} = 0 \qquad (1.12)$$

тенгликни қаноатлантирувчи нуқталар тўпламига айтилади, бу ерда a_{1i} $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ — ихтиёрий ўзгармас ҳақиқий сонлардир.

Энди иккита гипертекисликни қараймиз:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + a_{10} = 0, \qquad (1.13)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + a_{20} = 0. \qquad (1.14)$$

Координаталари айни вақтда (1.13) тенгликни ҳам, (1.14) тенгликни ҳам қаноатлантирувчи нуқталар тўплами берилган гипертекисликларнинг *кесишмаси* дейилади ва у

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + a_{10} = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + a_{20} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.15)$$

тенгламалар системасининг ечимини ифодалайди.

Агар бу гипертекисликлар ҳеч қандай умумий нуқтага эга бўлмаса, улар *кесишмайди* дейилади. Бу ҳолда (1.15) система биргаликда бўлмайди.

Берилган ҳар қандай

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + a_{10} = 0 \qquad (1.12)$$

гипертекислик n ўлчовли фазони иккита ярим фазога ажратади, бунда ярим фазонинг бирида координаталари

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + a_{10} \geqslant 0, \qquad (1.16)$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар жойлашган бўлса, иккинчисида координаталари

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + a_{10} < 0 \qquad (1.17)$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар жойлашган бўлади.

Шундай қилиб,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + a_{10} \geqslant 0 \qquad (1.16)$$

чизиқли тенгсизликнинг ечимлари соҳаси ярим фазодан иборат бўлади.

Шунга ўхшаш ушбу

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + a_{10} \geqslant 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + a_{20} \geqslant 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + a_{m0} \geqslant 0, \end{aligned}\right| \qquad (1.18)$$

чизиқли тенгсизликлар системасининг ечимлари соҳаси координаталари (1.18) системанинг ҳар бир тенгсизлигини қаноатлантирувчи нуқталар тўпламидан иборат бўлади.

5- §. Матрицалар ва детерминантлар

Ушбу

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{Vmatrix}. \qquad (1.19)$$

кўринишдаги тўғри бурчакли жадвал *матрица* дейилади.

Матрица қисқача

$$A = \|a_{ij}\|, \quad (i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n)$$

кўринишда белгиланади.

Юқорида ёзилган (1.19) матрица m та сатр ва n та устундан иборат. Бунда, умуман айтганда, $m \neq n$. Агар сатрлар сони устунлари сонига тенг, яъни $m = n$ бўлса, у ҳолда матрица *n-тартибли квадрат матрица* дейилади.

Квадрат матрицаларда унинг юқори чап бурчагидан пастки ўнг бурчагига, яъни a_{11} элементдан a_{nn} элементга йўналган бош диагонали катта аҳамиятга эга. Бош диагонал элементларининг йиғиндиси матрицанинг *изи* дейилади.

Матрицанинг баъзи хусусий кўринишларини кўриб чиқамиз.

1. Битта сатрдан иборат матрицани *сатр-матрица* дейилади ва

$$X = \|x_1 \, x_2 \, \dots \, x_n\|$$

кўринишда белгиланади.

2. Битта устундан иборат матрица *устун-матрица* дейилади

ва

$$Y = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{Vmatrix} \qquad (1.20)$$

кўринишда белгиланади.

3. Барча элементлари нолга тенг матрица *ноль-матрица* деб аталади.

4. Бош диагоналдан пастда (юқорида) жойлашган барча элементлари 0 га тенг бўлган квадрат матрица *учбурчак матрица* дейилади:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0. & 0 & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 \; 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{Vmatrix} \qquad (1.21)$$

Шуни айтиш керакки, кўпгина матрицаларни учбурчакли матрицага келтириш мумкин.

5. Бош диагоналидан бошқа жойдаги элементлариноллардан иборат бўлган квадрат матрица *диагонал матрица* дейилади.

6. Агар диагонал матрицанинг бош диагоналларидаги барча элементлари бирлардан иборат бўлса, бундай матрица *бирлик матрица* дейилади:

$$E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}. \qquad (1.22)$$

Ҳар бир квадрат матрица ўзининг детерминантига эга.

Қуйидаги матрица берилган бўлсин:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}. \qquad (1.23)$$

Бу матрицанинг *детирминанти* деб, $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ айирмага тенг сонга айтилади ва қуйидагича белгиланади:

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \qquad (1.24)$$

Детерминантнинг тартиби унга мос матрица тартибига тенг бўлади. (1.23) матрицанинг тартиби 2 га тенг бўлгани учун унинг (1.24) детерминанти ҳам иккинчи тартиблидир.

Энди қуйидаги учинчи тартибли матрицани қараймиз:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}. \qquad (1.25)$$

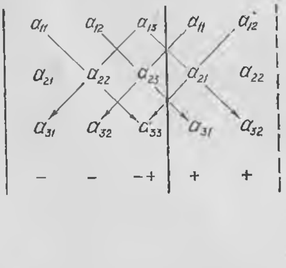
Бу (1.25) матрицанинг *детерминанти* деб, унинг элементларидан тубандаги маълум тартибда тузилган олтита кўпайтма ҳадларнинг алгебраик йиғиндисига тенг сонга айтилади ва қуйидагича белгиланади:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (1.26)$$

Юқоридаги (1.26) детерминант *учинчи тартибли детерминант* дейилади.

Учинчи тартибли детерминантни ҳисоблаш формуласи анча мураккаб бўлгани учун уни эсда сақлаш шарт эмас. Амалда учинчи тартибли детерминантни унинг дастлабки иккита устунини қуйидаги схема бўйича давом эттириб ёзиш ва ҳисоблаш мумкин:



$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} -$$
$$- a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}.$$

Масалан, ушбу

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

детерминантни қуйидагича ҳисобланади:

$$\left|\begin{matrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{matrix}\right| =$$

$$= 2\cdot 2\cdot 5 + 3\cdot 3\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 4 - 3\cdot 2\cdot 2 - 2\cdot 3\cdot 4 - 3\cdot 1\cdot 5 =$$
$$= 20 + 18 + 12 - 12 - 24 - 15 = -1.$$

Ушбу

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix} \right\| \qquad (1.27)$$

n-тартибли квадрат матрицанинг детерминанти

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1.28)$$

кўринишдаги n-тартибли детерминант бўлади.

Юқори тартибли детерминантлар анча мураккаб усуллар билан ҳисобланади.

Лекин баъзи хусусий кўринишдаги матрицалар учун детерминантни ҳисоблашнинг содда усулларини кўрсатиш мумкин.

Масалан, учбурчакли матрицанинг детерминанти бош диагонал элементлари кўпайтмасига тенг, яъни

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \dots a_{nn}. \qquad (1.27')$$

Диагонал матрица учбурчакли матрицанинг хусусий ҳоли бўлгани учун унинг детерминанти ҳам (1. 27′) формула билан ҳисобланади.

Шунинг учун (1. 27′) формулага асосан ноль матрицанинг детерминанти 0 га тенг, бирлик матрицанинг детерминанти 1 га тенг бўлади.

Детерминантларнинг қуйидаги иккита хоссасини эсда сақлаш фойдали.

1. Бирор сатри ёки устуни фақат ноллардан иборат бўлган детерминант 0 га тенг.

2. Иккита бир хил сатрга ёки иккита бир хил устунга эга бўлган детерминант 0 га тенг.

Детерминанти 0 га тенг бўлган матрица *махсус матрица* дейилади.

Детерминанти нолга тенг бўлмаган матрица *махсусмас матрица* дейилади.

Масалан, ноль матрица махсус матрица, бирлик матрица эса махсусмас матрицадир.

Шуни ҳам айтиш керакки, махсус матрицадан детерминанти 0 га тенг бўлмаган махсусмас матрицани (қисм матрицани) ажратиш мумкин. Бунинг учун берилган A махсус матрицанинг бир неча сатр ёки устунларини чизиб ташлагандан кейин шу матрицанинг қолган элементларининг ўрнини ўзгартирмасдан детерминант тузилади. Ҳосил бўлган бу детерминант A матрицанинг *минори* дейилади.

A матрицанинг *ранги* деб унинг нолдан фарқли минорларининг энг юқори тартибига айтилади.

Мисол. Ушбу

$$\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

матрицанинг ранги 2 га тенг эканини текшириш осон.

6- §. Матрицалар устида амаллар

Матрицалар устида қўшиш, айириш, кўпайтириш, бўлиш, логарифмлаш, илдиз чиқариш, дифференциаллаш ва интеграллаш амалларини бажариш мумкин. Лекин бу амалларнинг баъзиларини бажариш жуда мураккаб ишдир. Шунинг учун биз уларнинг энг соддаларини ўрганиш билан чегараланамиз. Қолган амалларни бажариш қоидалари билан махсус адабиётдан танишиш мумкин.

Дастлаб икки матрицанинг тенглик шартларини аниқлаймиз. Иккита $A = \|a_{ij}\|$ ва $B = \|b_{rs}\|$ матрицалар ўзаро тенг бўлиши учун уларнинг:

а) сатрлари ва устунлари сони тенг бўлиши керак, яъни

$$i = r, \qquad j = s;$$

б) мос элементлари ўзаро тенг бўлиши керак, яъни

$$a_{11} = b_{11}, \qquad a_{12} = b_{12}, \ \dots , \qquad a_{ij} = b_{ij}.$$

Берилган иккита матрицанинг сатрлари ва устунларининг сони тенг бўлиши уларни қўшиш ва айириш учун зарурий шарт ҳисобланади.

1. Матрицаларни қўшиш. Матрицаларни қўшиш учун уларнинг мос элементларини қўшиш зарур, яъни

$$\|a_{ij}\| + \|b_{ij}\| = \|a_{ij} + b_{ij}\| \ (i = 1,2, \ \dots , m; j = 1, 2, \ \dots , n) \tag{1.29}$$

Мисол.

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{Vmatrix}.$$

2. Матрицаларни айириш. Матрицаларни айириш учун уларнинг мос элементларини айириш зарур, яъни

$$\|a_{ij}\| - \|b_{ij}\| = \|a_{ij} - b_{ij}\|, \ (i, = 1, 2, \ \dots , m; j = 1,2, \dots , n). \tag{1.30}$$

3. Матрицани сонга кўпайтириш. Матрицани бирор λ сонга кўпайтириш учун унинг ҳар бир элементини шу λ сонга кўпайтириш зарур, яъни

$$\lambda \cdot \|a_{ij}\| = \|\lambda \cdot a_{ij}\| = \begin{Vmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \dots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \dots & \lambda \cdot a_{2n} \\ . & . . . & . . . . & . \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \dots & \lambda \cdot a_{mn} \end{Vmatrix}. \tag{1.31}$$

4. Матрицани сонга бўлиш. Матрицани бирор нолга тенг бўлмаган λ сонга бўлиш учун унинг ҳар бир ҳадини $\frac{1}{\lambda}$ сонга кўпайтириш керак, яъни

$$\|a_{ij}\| : \lambda = \frac{1}{\lambda}\cdot\|a_{ij}\| = \left\|\frac{a_{ij}}{\lambda}\right\|. \tag{1.32}$$

5. Матрицани кўпайтириш. Икки матрицани кўпайтириш мумкин бўлиши учун кўпаювчи матрицанинг устунлари сони кўпайтувчи матрицанинг сатрлари сонига тенг бўлиши керак.

Агар кўпаювчи B матрица m та сатрга ва n та устунга, кўпайтувчи A матрица n та сатрга ва s та устунга эга бўлса, B ва A матрицаларни кўпайтириш қоидаси қуйидагича бўлади:

$$\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ns} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{Vmatrix} \tag{1.33}$$

Бунда B матрицанинг A матрица билан кўпайтмасидан иборат бўлган C матрицанинг c_{ij} элементи B матрицанинг i-сатри элементлари билан A матрицанинг j-устунининг мос элементлари кўпайтмасининг йиғиндисига тенг, яъни

$$c_{ij} = a_{1j}\, b_{i1} + a_{2j}\, b_{i2} + \dots + b_{in}\, a_{nj} = \sum_{n=1}^{n} b_{in}\, a_{nj}, \tag{1.34}$$

$$i = 1, 2, \dots, m; \qquad j = 1, 2, \dots, s$$

Мисол. Ушбу матрицалар берилган:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{Vmatrix}.$$

$A\cdot B$ ва $B\cdot A$ кўпайтмаларни топинг.

Ечиш. (1.33) ва (1.34) формулаларга биноан

$$A\cdot B=\left\|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{matrix}\right\|=$$

$$=\left\|\begin{matrix}1\cdot0+0\cdot2+0\cdot0 & 1\cdot1+0\cdot1+0\cdot3 & 1\cdot1+0\cdot0+0\cdot1\\ 0\cdot0+2\cdot2+1\cdot0 & 0\cdot1+2\cdot1+1\cdot3 & 0\cdot1+2\cdot0+1\cdot1\\ 3\cdot0+0\cdot2+1\cdot0 & 3\cdot1+0\cdot1+1\cdot3 & 3\cdot1+0\cdot0+1\cdot1\end{matrix}\right\|=$$

$$=\left\|\begin{matrix}0 & 1 & 1\\ 4 & 5 & 1\\ 0 & 6 & 4\end{matrix}\right\|.$$

$$B\cdot A=\left\|\begin{matrix}0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{matrix}\right\|=$$

$$=\left\|\begin{matrix}0\cdot1+1\cdot0+1\cdot3 & 0\cdot0+1\cdot2+1\cdot0 & 0\cdot0+1\cdot1+1\cdot1\\ 2\cdot1+1\cdot0+0\cdot3 & 2\cdot0+1\cdot2+0\cdot0 & 2\cdot0+1\cdot1+0\cdot1\\ 0\cdot1+3\cdot0+1\cdot3 & 0\cdot0+3\cdot2+1\cdot0 & 0\cdot0+3\cdot1+1\cdot1\end{matrix}\right\|=$$

$$=\left\|\begin{matrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 6 & 4\end{matrix}\right\|.$$

Биз қуйидаги натижага келдик. Матрицаларни кўпайтиришда ўрин алмаштириш қонуни ўринли эмас, яъни умуман $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Агар $A\cdot B=C$ бўлса, C кўпайтма матрицанинг сатрлари сони кўпаювчи A матрица сатрлари сонига, устунлари сони эса кўпайтувчи B матрица устунлари сонига тенг бўлади. Шунинг учун бир хил тартибли иккита квадрат матрицанинг кўпайтмаси яна ўша тартибли квадрат матрица бўлади.

Квадрат матрицалар кўпайтмасининг детерминанти кўпайтувчи матрицалар детерминантларининг кўпайтмасига тенг, яъни $A\cdot B=C$ бўлса,

$$\det C=\det A\cdot\det B$$

бўлади.

Ихтиёрий тартибли квадрат матрицанинг мос E бирлик матрица билан кўпайтмаси дастлабки матрицага тенг эканлигини кўриш осон, яъни

$$A\cdot E=A \qquad (1.35)$$

ёки

$$E\cdot A = A. \tag{1.36}$$

Ҳар бир матрицанинг ноль матрица билан кўпайтмаси ноль матрица бўлади.

6. Матрицаларни транспонирлаш. Агар A^* матрицанинг устунлари A матрицанинг сатрларидан иборат бўлса, у ҳолда A^* матрица A матрицага нисбатан *транспонирланган матрица* дейилади.

Мисол. Ушбу

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \tag{1.37}$$

матрица берилган бўлсин. Транспонирланган матрица қуйидагича бўлади:

$$A^* = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}. \tag{1.38}$$

Транспонирлаш натижасида матрица детерминантининг катталиги ўзгармайди.

7. Тескари матрица. Махсусмас матрица берилган бўлсин.

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}, \quad \Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.39}$$

Берилган A махсусмас матрицага тескари A^{-1} матрица ушбу

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{Vmatrix} \tag{1.40}$$

кўринишда бўлади. Бунда A_{ij} лар $\Delta = \det A$ детерминант a_{ij} элементининг алгебраик тўлдирувчиси бўлиб, у шу элемент минори билан $(-1)^{i+j}$ нинг кўпайтмасига тенгдир.

Матрицаларни кўпайтириш ва детерминантларни улар элементлари алгебраик тўлдирувчилари бўйича ёйиш қоидасига мувофиқ:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E \tag{1.41}$$

эканлигини кўрсатиш қийин эмас.

7- §. Чизиқли тенгламалар системасини матрицалар ёрдамида ечиш

Ушбу

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m \end{array}\right| \tag{1.42}$$

n номаълумли m та чизиқли тенглама системаси берилган бўлсин. Агар m ва n катта сонлар бўлса, (1.42) системани ечиш анча меҳнат талаб қилади. Матрицалар усулидан фойдаланиш (1.42) системани ечишни енгиллаштиради. Энг аввал берилган системанинг биргаликда эканлигини, яъни системанинг барча тенгликлари бирданига бажарилишини билиш керак. Масалан,

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 = 3, \\ 4x_1 + 2x_2 = 2 \end{array}\right\} \tag{1.43}$$

системанинг биргаликда эмас эканлигини кўриш осон; чунки иккинчи тенгламани ҳадлаб 2 га бўлсак, $2x_1 + x_2 = 1$ тенглама ҳосил бўлади. Бу тенглама биринчи тенгламага зид. Демак, (1.43) система биргаликда эмас.

Лекин катта сондаги тенгламалар системасининг биргаликда эканлигини текшириш осон эмас.

Чизиқли тенгламалар системасининг биргаликда эканлигини матрицалар ёрдамида текширишни қараймиз. Бунинг учун (1.42) системанинг коэффициентларидан ушбу

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix} \tag{1.44}$$

матрицани ва унга мос ушбу „кенгайтирилган“ матрицани тузамиз:

$$\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{matrix}\right\| \tag{1.45}$$

Кронекер — Капелли теоремасига асосан қуйидагилар ўринлидир: агар (1.45) кенгайтирилган матрицанинг ранги (1.44) асосий матрица рангига тенг бўлса, у ҳолда (1.42) чизиқли тенгламалар системаси биргаликда бўлади. Агар (1.45) кенгайтирилган матрицанинг ранги (1.44) асосий матрица рангидан катта бўлса, у ҳолда (1.42) чизиқли тенгламалар системаси биргаликда бўлмайди.

Шундай қилиб, чизиқли тенгламалар системасининг биргаликда эканлигини билиш учун иккита матрицанинг рангларини ҳисоблаб солиштириш зарур.

Энди ушбу

$$\left.\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{matrix}\right\} \tag{1.46}$$

n номаълумли n та чизиқли тенглама системасини матрицалар ёрдамида ечиш усулини кўрсатамиз. Бунинг учун қуйидаги учта матрицани қараймиз:

$$A = \left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix}\right\|, \tag{1.47}$$

$$X = \left\|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{matrix}\right\|, \tag{1.48}$$

$$B = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{Vmatrix}. \tag{1.49}$$

У ҳолда матрицаларни кўпайтириш қоидасидан фойдаланиб, (1.46) системани матрица шаклида қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{Vmatrix} \tag{1.50}$$

(1. 50) тенгликни қисқача қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$A \cdot X = B. \tag{1. 51}$$

Агар A матрицанинг детерминанти $\det A \neq 0$ бўлса, (1. 50) тенгликнинг чап ва ўнг томонини чапдан A матрицага тескари бўлган A^{-1} матрицага кўпайтириб,

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \tag{1.52}$$

ни ҳосил қиламиз. Аммо

$$A^{-1} \cdot A = E, \qquad E \cdot X = X$$

бўлгани учун (1. 52) тенгликдан

$$X = A^{-1} \cdot B. \tag{1.53}$$

келиб чиқади. Агар (1.53) тенгликни ёйиқ шаклда ёзсак,

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \frac{A_{3n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{Vmatrix} \tag{1. 54}$$

ва матрицаларни кўпайтириш қоидасидан фойдалансак,

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{Vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{Vmatrix} A_{11}\, b_1 + A_{21}\, b_2 + A_{31}\, b_3 + \ldots + A_{n1}\, b_n \\ A_{12}\, b_1 + A_{22}\, b_2 + A_{32}\, b_3 + \ldots + A_{n2}\, b_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{1n}\, b_1 + A_{2n}\, b_2 + A_{3n}\, b_3 + \ldots + A_{nn}\, b_n \end{Vmatrix} \qquad (1.55)$$

ни ҳосил қиламиз. Сўнгра (1.55) тенгликнинг ўнг ва чап томонидаги матрицаларнинг мос элементларини тенглаштириб, (1.46) системанинг ечимини қуйидагича аниқлаймиз:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\Delta}\,(A_{11}\, b_1 + A_{21}\, b_2 + A_{31}\, b_3 + \ldots + A_{n1}\, b_n), \\ x_2 &= \frac{1}{\Delta}\,(A_{12}\, b_1 + A_{22}\, b_2 + A_{32}\, b_3 + \ldots + A_{n2}\, b_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \frac{1}{\Delta}\,(A_{1n}\, b_1 + A_{2n}\, b_2 + A_{3n}\, b_3 + \ldots + A_{nn}\, b_n), \end{aligned}\right\} \qquad (1.56)$$

бу ерда $\Delta = \det A$, A_{ij} лар $\det A$ детерминант a_{ij} элементининг алгебраик тўлдирувчисидир.

Мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_2 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \qquad (1.57)$$

тенгламалар системасини матрицалар усули билан ечинг.

Ечиш. Система матрицасининг детерминантини топамиз:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Демак, системанинг A матрицасига тескари A^{-1} матрица мавжуд. Шу тескари A^{-1} матрицани топамиз:

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{Vmatrix}.$$

Системанинг ечимини (1.54) дан фойдаланиб, матрица шаклида ёзамиз:

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} -2\cdot 0 - 1\cdot 1 - 12 \\ -1\cdot 0 - 0\cdot 1 - 12 \\ 5\cdot 0 + (-1)\cdot 1 + (-3)\cdot 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{Vmatrix}.$$

Кейинги тенгликнинг чап томонида номаълум x_1, x_2, x_3 лардан иборат устун матрица, ўнг томонида эса 3,2, — 7 сонлардан тузилган устун матрица турибди. Уларнинг мос элементларини тенглаштириб ушбуни ҳосил қиламиз:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -7.$$

II боб

МАТЕМАТИК ПРОГРАММАЛАШТИРИШ УСУЛЛАРИ

1- §. Математик программалаштиришнинг умумий масаласи

Математик программалаштириш қўйилган масаланинг оптимал (қаралаётган шароитда энг қулай) ечимини аниқлаш учун энг „кучли“ воситадир. Математик программалаштиришнинг барча масалалари экстремал характерга эгадир.

Математик программалаштиришнинг умумий масаласи $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ўзгарувчиларга қўйилган шартлар (чеклашлар) системасига кўра F мақсад функциясининг экстремумига (яъни максимум ва минимумга) эришишни аниқлашдан иборатдир. F мақсад функцияси масалани ечишнинг асосий мақсадини ифодалайди. Мақсад функцияси сифатида, масалан, қурилишнинг баҳосини, қурилишга сарфланадиган вақтни ва ҳ. к. олиш мумкин. Мақсад функцияси экстремумга ўзгарувчиларнинг аниқ қийматларида эришиши мумкин.

Ўзгарувчиларга қўйилган чеклашлар қаралаётган масалани ечиш шартларини ифодалайди. Одатда, бу чеклашлар ўзгарувчилар орқали тенгламалар ёки тенгсизликлар системалари билан берилади. Бу чеклаш шартлари системасининг ҳар қандай $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ ($x_i^0 \geqslant 0$, $i = 1, 2, \dots, n$) манфий бўлмаган ечими унинг *мумкин бўлган ечими* дейилади.

Чеклаш шартлари системасининг F мақсад функциясини минимумлаштирувчи манфий бўлмаган (мумкин бўлган) ечими унинг *оптимал ечими* дейилади.

Масалада қўйилган чеклаш шартларини қаноатлантирувчи ўзгарувчиларнинг мақсад функцияси изланган экстремумга эришадиган бу тўплами масаланинг оптимал ечимини аниқлайди.

Математик программалаштиришни ЭҲМ учун программалаштириш билан чалкаштирмаслик керак. Бу ерда „программалаштириш" тушунчаси ЭҲМ да машина программасини тайёрлаш эмас, балки ресурсларни (ўзгарувчиларни) мақсадга мувофиқ тақсимлашни англатади.

2- §. Математик программалаштириш турлари

Мақсад функциясининг кўриниши ва ўзгарувчиларга қўйиладиган чеклаш шартлари системасига кўра математик программалаштириш асосан олти турга ажралади: чизиқли, чизиқли бўлмаган, дискрет, бутун сонли, стохастик, динамик программалаштиришлар. Программалаштиришнинг бу турларининг ҳар бирини алоҳида қараб чиқамиз.

1. Чизиқли программалаштириш. Агар мақсад функцияси ва ўзгарувчиларга қўйилган шартлар чизиқли (масалан, ax_1, $ax_1 + b_1$, $ax_1 + b \cdot x_2$) кўринишда бўлса, у ҳолда программалаштириш *чизиқли программалаштириш* дейилади.

Программалаштиришнинг бу тури энг содда ва энг кўп ўрганилган бўлиб, шу сабабли у амалда кенг қўлланилади.

2. Чизиқли бўлмаган программалаштириш. Агар мақсад функцияси ва ўзгарувчиларга қўйилган шартлар чизиқли бўлмаган (масалан, ax_1^2, $a\sqrt{x_1}$, $\frac{a}{x_1}$, ax_1x_2) кўринишда бўлса, у ҳолда программалаштириш *чизиқли бўлмаган программалаштириш* дейилади.

Программалаштиришнинг бу тури чизиқли программалаштиришга нисбатан мураккаброқ, шу сабабли амалда чизиқли бўлмаган масалаларни ҳар хил усуллар билан соддалаштириш, чизиқлимас функцияларни қаторларга ёйиш ва ҳ. к. билан чизиқли масалага келтиришга ҳаракат қилинади. Буни мақсад функциясини тузишда ва айниқса ўзгарувчиларга чеклаш шартларини қўйишда ҳисобга олиш зарур.

3. Дискрет программалаштириш. Агар ўзгарувчилар ҳар қандай узлуксиз қиймат қабул қилмасдан, баъзи дискрет (узлукли) қийматларнигина қабул қилса, у ҳолда бундай математик программалаштириш *дискрет программалаштириш* дейилади. Одатда ўзгарувчиларга қўйиладиган бундай шартлар техника-иқтисодий шартлар билан боғлиқ бўлади.

Дискрет программалаштириш чизиқли программалаштиришга нисбатан мураккаброқ. Шунинг учун масалани чизиқли программалаштириш орқали (дискретлик шартларини ҳисобга олмасдан) ечилади, бунда олинган натижани талаб қилинган дискрет қийматларга яқинлаштирилади.

4. Бутун сонли программалаштириш. Бутун сонли программалаштиришда ўзгарувчилар фақат бутун сон қийматларни қабул қиладиган бўлиб, у дискрет программалаштиришнинг хусусий ҳолидир. Амалда тез-тез учрайдиган бу ҳол жуда катта аҳамиятга эга. Ҳақиқатан ҳам, кўпгина маҳсулот турлари фақат бутун сонлар билан ифодалангандагина маънога эга бўлади (автомобиллар, бинолар, пассажирлар ва ҳ. к.).

Бутун сонли программалаштириш масалалари ҳам шунга мос чизиқли программалаштириш масалалари асосида ечилади.

5. Стохастик программалаштириш. Агар ўзгарувчилар ва уларга қўйилган шартлар эҳтимолли миқдорлар бўлса, у ҳолда бундай математик программалаштириш *стохастик программалаштириш* дейилади. Маълумки, бундай масалаларни ечишда мақсад функцияси сифатида бирор миқдорнинг математик кутилиши олинади.

Стохастик программалаштириш математик программалаштиришнинг энг янги турларидан ҳисобланади, шу сабабли бу метод билан масалаларни ечиш ҳали унча ривожланмаган. Аммо кишилар фаолиятида эҳтимоллик масалаларининг аҳамияти жуда катта бўлгани учун бу йўналишнинг тез ривожланишини кутиш мумкин. Ҳозирги вақтда бу масалаларни (миқдорнинг математик кутилиши асосида) чизиқли программалаштириш масаласига келтириш энг самарадор метод ҳисобланади.

6. Динамик программалаштириш. Агар ўзгарувчилар вақт ўзгариши билан ўзгарса ва олдинги босқичдаги натижа ундан кейинги босқич натижасига таъсир кўрсатса (масалан, бу йилги ишлаб чиқариш натижаси келгуси йил ишлаб чиқариш натижасига таъсир кўрсатса), бу ҳолда математик программалаштириш *динамик программалаштириш* дейилади.

Бу турдаги масалалар экономикада кўп учрайди. Масалаларни ечиш методи масаланинг қўйилишига кўп жиҳатдан боғлиқ бўлади: бирор ўзгарувчига қўйиладиган чеклаш шартлари натижаси бошқа ўзгарувчига қўйиладиган шартлар системасига киради.

Юқорида айтилганидек, математик программалаштиришнинг кўпгина масалалари уларни чизиқли кўринишга келтирилиб ечилади. Шунинг учун чизиқли программалаштириш математик программлаштиришларда асосий ўрин эгаллайди.

3- §. Чизиқли программалаштиришда масаланинг қўйилиши

Чизиқли программалаштириш масалаларида мақсад функцияси

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n \qquad (2.1)$$

чизиқли ифода кўринишида, ўзгарувчиларга қўйиладиган шартлар системаси ушбу

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leqslant b_2, \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \leqslant b_n \end{array}\right| \qquad (2.2)$$

чизиқли тенгсизликлар системаси кўринишида бўлади. (2. 2) системанинг ҳар бир x_1, x_2, . . . , x_n ечими шу системадаги барча тенгсизликларни қаноатлантирувчи n та сон тўпламидан иборат. Бу тўпламни n ўлчовли вектор фазонинг нуқтаси ёки вектори деб қараш мумкин.

Чизиқли программалаштиришнинг асосий мақсади (масаласи) (2. 2) система ечимлари тўпламидан (2.1) чизиқли ифодани максимумлаштирадиган (минимумлаштирадиган) ечимни танлаб олишдан иборат.

Маълумки, (2. 2) чизиқли тенгсизликлар системасининг ечимлари тўплами n ўлчовли фазода қавариқ кўпёқ бўлади. Бу кўпёқ чизиқли программалаштириш масаласининг мумкин бўлган ечимлари соҳасини ташкил этади. Барча ечимлар ичида энг оптималини, яъни (2.1) чизиқли ифодани максимумлаштирадиганини (минимумлаштирадиганини) танлаб олиш зарур. Бу масалани мумкин бўлган ечимлар соҳасининг барча нуқталарини бирма-бир қараб чиқиш йўли билан ечиш амалда мумкин эмас.

Оптимал ечимни танлашни қуйидаги теорема анчагина осонлаштиради: *чизиқли программалаштириш масаласининг мақсад функцияси ўзининг экстремал қийматига мумкин бўлган ечимлар соҳасининг фақат учларида эришади.*

Шундай қилиб, чизиқли программалаштириш масаласининг оптимал ечимини топиш учун унинг барча мумкин бўлган ечимларини топиш шарт бўлмасдан, балки фақат мумкин бўлган ечимлар кўпёғининг учларини қараб чиқиш етарлидир.

Лекин m ва n сонларнинг етарлича катта қийматларида мумкин бўлган ечимлар кўпёғи учларини қараб чиқиш амалда анча қийин иш бўлади. Бу мақсадда махсус ҳисоблаш методларидан фойдаланилади.

Шуни ҳам айтиш керакки, (2. 2) чизиқли тенгсизликлар системасини чизиқли тенгламалар системасига келтириш мумкин. Чизиқли тенгсизликлар системасига нисбатан чизиқли тенгламалар системасини ечиш осон бўлгани учун чизиқли программалаштириш масалаларини ечишда қўшимча янги номаълумлар киритиш орқали (2.2) система ўрнига унга мос бўлган ушбу

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + x_{n+n} = b_n \end{array}\right\} \quad (2.3)$$

чизиқли тенгламалар системаси қаралади.

Бу ерда $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+n}$ янги номаълумлар сони берилган масаладаги чеклаш шартлари системасидаги тенгсизликлар сонига тенг бўлади.

Шундай қилиб, чизиқли тенгсизликлар системасини ечиш масаласи чизиқли тенгламалар системасини ечишга келтирилиши мумкин. Чизиқли тенгламалар системасини ечишнинг энг қулай усули матрица усулидир.

4- §. Чизиқли программалаштиришнинг айрим масалалари

Чизиқли программалаштириш усули билан ҳал қилинадиган масалалар халқ хўжалигининг турли соҳаларида кундан-кунга кўпайиб бормоқда. Бу параграфда чизиқли программалаштиришнинг характерли масалаларидан айримларини қараймиз.

1. Хомашёлардан оқилона фойдаланиш ҳақидаги масала. Масалан, тўрт хил s_1, s_2, s_3, s_4 хомашёдан фойдаланиб, икки хил $П_1$ ва $П_2$ маҳсулот тайёрлаш талаб қилинсин. Бунда ҳар қайси хомашё миқдори чекланган бўлиб, мос равишда b_1, b_2, b_3, b_4 шартли бирликдаги катталикларни ташкил этади. Тайёрланадиган ҳар қайси маҳсулотнинг бир бирлигини тайёрлаш учун зарур бўлган ҳар қайси турдаги хомашё миқдори маълум ва у 1- жадвалда берилган. Бу ерда a_{ij} $(i = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\quad j = 1,\ 2)$ $П_j$ турдаги маҳсулотни тайёрлаш учун зарур бўлган s_i турдаги хомашё миқдоридир.

1- жадвал

Хомашё тури	Хомашё запаси	Маҳсулот турлари	
		$П_1$	$П_2$
s_1	b_1	a_{11}	a_{12}
s_2	b_2	a_{21}	a_{22}
s_3	b_3	a_{31}	a_{32}
s_4	b_4	a_{41}	a_{42}
Даромад		C_1	C_2

2- жадвал

Хомашё тури	Хомашё запаси	Маҳсулот турлари	
s_1	19	2	3
s_2	13	2	1
s_3	15	0	3
s_4	18	3	0
Даромад		7	5

$П_1$ ва $П_2$ турдаги маҳсулотларни ишлаб чиқариш плани шундай тузилсинки, бунда корхона ишлаб чиқарилган барча маҳсулотни реализация қилишдан энг кўп даромад олсин.

Қўйилган масаланинг математик ифодаланишини аниқ сонли мисолда қараймиз (2- жадвалга қаранг).

Корхона $П_1$ турдаги маҳсулотдан x_1 бирлик, $П_2$ турдаги маҳсулотдан эса x_2 бирлик миқдорда ишлаб чиқарсин деб фараз қилайлик. Бунинг учун $2x_1 + 3x_2$ бирлик миқдорида s_1 хомашёдан керак бўлади (2- жадвалга асосан). Аммо, s_1 хомашё миқдори ҳаммаси бўлиб 19 бирликни ташкил этгани учун ушбу

$$2x_1 + 3x_2 \leqslant 19$$

тенгсизлик бажарилиши зарур. Бу ерда тенгсизлик (тенглик эмас) ишораси қўшилишига сабаб шуки, корхона s_1 хомашё запасининг ҳаммасини тўла сарфламасданоқ энг кўп (максимал) даромадга эришиши мумкин.

Шунга ўхшаш мулоҳазаларни мос равишда s_2, s_3, s_4 турдаги хомашёларга нисбатан юритиб, қуйидаги

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leqslant 13, \\ 3x_2 &\leqslant 15, \\ 3x_1 &\leqslant 18 \end{aligned}$$

тенгсизликларни ҳосил қиламиз. Бу шартларнинг барчаси бажарилганда корхона оладиган F даромад

$$F = 7x_1 + 5x_2$$

кўринишда ифодаланади.

Шундай қилиб, қўйилган масалани математика нуқтаи-назаридан қуйидагича ифодалаш мумкин. Ушбу

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leqslant 19, \\ 2x_1 + x_2 &\leqslant 13, \\ 3x_2 &\leqslant 15, \\ 3x_1 &\leqslant 18 \end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

тўртта чизиқли тенгсизлик системаси ва

$$F = 7x_1 + 5x_2 \qquad (2.5)$$

чизиқли ифода берилган, (2.4) системанинг барча манфий бўлмаган ечимлари орасидан шундайлари танлаб олинсинки, бунда F чизиқли ифода ўзининг энг катта қийматига эришсин (максималлашсин).

2. Асбоб-ускуналар қувватларидан фойдаланиш ҳақидаги масала.

Айтайлик, T вақтда корхона Π_1 турдаги маҳсулотдан N_1 бирлик миқдорда ва Π_2 турдаги маҳсулотдан N_2 бирлик миқдорда ишлаб чиқарсин. Ҳар қайси турдаги маҳсулот ҳар хил қувватли иккита A ва B машиналарда ишлаб чиқарилиши мумкин. Бу қувватлар 3- жадвалда берилган. Бу ерда a_1 вақт бирлигида A машина ишлаб чиқарадиган Π_1 турдаги маҳсулот миқдоридир. 3- жадвалда берилган a_2, b_1, b_2 миқдорлар ҳам шунга ўхшаш маънога эга.

Ҳар қайси маҳсулотни у ёки бу машинада ишлаб чиқиш харажати ҳар хил бўлиб, у 4- жадвалда берилган. Бу жадвалдаги α_1 Π_1 турдаги маҳсулотни тайёрлашдаги A машинанинг бир бирлик иш вақти баҳосидир. Жадвалдаги α_2, β_1, β_2 миқдорлар ҳам шунга ўхшаш маънога эга.

3- жадвал

	Π_1	Π_2
A	a_1	a_2
B	b_1	b_2

4- жадвал

	Π_1	Π_2
A	α_1	α_2
B	β_1	β_2

5- жадвал

	Π_1	Π_2
A	x_1	x_2
B	x_3	x_4

Машиналарнинг шундай оптимал иш плани тузилсинки, яъни A ва B машиналарнинг ҳар қайсисида Π_1 ва Π_2 турдаги маҳсулотларнинг ҳар бирини тайёрлаш учун қанчадан вақт сарфланиши керакки, бунда тайёрланган барча маҳсулот корхонага энг арзон (минимал харажатли) тушсин ва топширилган план талаб қилинган миқдорда (кўрсатилган миқдорда) бажарилсин.

Қуйилган масалани математика тилида ифодалаймиз. Бунинг учун 5- жадвални тузамиз, бунда x_1 A машинанинг Π_1 турдаги маҳсулотни тайёрлашга сарфлаган вақти, x_2 эса A машинанинг Π_2 турдаги маҳсулотни тайёрлашга сарфлаган вақти ва ҳ. к.

A ва B машиналар бир вақтнинг ўзида ишлаганлари сабабли талаб қилинган планнинг вақт бўйича бажарилиши учун

$$x_1 + x_2 \leqslant T,$$
$$x_3 + x_4 \leqslant T.$$

Бу ерда $x_1 + x_2$ A машинанинг умумий иш вақти ва $x_3 + x_4$ B машинанинг умумий иш вақтидир.

Юқоридаги шартларда тенгсизлик ишораси шунинг учун ҳам кераккн, корхона талаб қилинган планни муддатидан анча илгари бажариши ҳам мумкин.

A машина $П_1$ турдаги маҳсулотни тайёрлашга x_1 бирлик вақт сарфлаган бўлсин. Ҳар бир бирлик вақтда A машина $П_1$ турдаги маҳсулотдан a_1 бирлик миқдорда маҳсулот тайёрлагани учун A машина ҳаммаси бўлиб $a_1 x_1$ бирлик $П_1$ турдаги маҳсулот тайёрлаган. Шунга ўхшаш, B машина $b_1 x_3$ бирлик $П_1$ турдаги маҳсулот тайёрлаган. Шу сабабли план бажарилиши учун

$$a_1 x_1 + b_1 x_3 = N_1$$

тенглик ўринли бўлиши зарур.

Худди шу каби $П_2$ турдаги маҳсулотни ишлаб чиқариш плани бажарилиши учун

$$a_2 x_2 + b_2 x_4 = N_2$$

тенглик ўринли бўлиши зарур.

Масаланинг шартига кўра (4- жадвалга асосан) барча маҳсулотни тайёрлаш учун сарфланган умумий ҳаражат

$$F = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \beta_1 x_3 + \beta_2 x_4$$

кўринишда чизиқли ифодаланади.

Натижада қуйидаги математик масалага келамиз: ушбу

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leqslant T, \\ x_3 + x_4 &\leqslant T, \\ a_1 x_1 + b_1 x_3 &= N_1, \\ a_2 x_2 + b_2 x_4 &= N_2 \end{aligned}\right\} \qquad (2.6)$$

иккита чизиқли тенгсизлик ва иккита чизиқли тенгликлар системаси ҳамда

$$F = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \beta_1 x_3 + \beta_2 x_4 \qquad (2.7)$$

чизиқли ифода берилган. (2. 6) системанинг барча манфий бўлмаган ечимлари орасида шундай ечим топилсинки, бунда F чизиқли ифода ўзининг энг кичик қийматига эришсин (минималлашсин).

Қаралаётган бу масаланинг яна битта муҳим вариантини эслатиб ўтамиз. A ва B машиналар планда кўрсатилган T вақтнинг бошидан охиригача ишласин деб талаб қиламиз. У ҳолда юқоридаги

$$x_1 + x_2 \leqslant T,$$
$$x_3 + x_4 \leqslant T$$

тенгсизликлар

$$x_1 + x_2 = T,$$
$$x_3 + x_4 = T$$

тенгликлар билан алмашади. Аммо бу ҳолда

$$a_1x_1 + b_1x_3 = N_1,$$
$$a_2x_2 + b_2x_4 = N_2$$

тенгликлар умуман айтганда, ушбу

$$a_1x_1 + b_1x_3 \geqslant N_1,$$
$$a_2x_2 + b_2x_4 \geqslant N_2$$

тенгсизликларга айланиши мумкин, чунки машиналар T вақтнинг бошидан охиригача ишлаб, топширилган планни бажарибгина қолмасдан, балки уни ошиғи билан бажариши ҳам мумкин. Бунда харажатни минималлаш талаби зиддиятга учрамайди.

3. Транспорт масаласи. Иккита A_1 ва A_2 жўнатиш пунктларида a_1 ва a_2 бирлик миқдордаги бир жинсли юклар тўпланган. Бу юкларни B_1, B_2, B_3 қабул қилиш пунктларига мос равишда b_1, b_2, b_3 бирлик миқдорларда ташиш зарур. Ҳар бир бирлик юкни A_i жўнатиш пунктидан B_j қабул қилиш пунктига ташиш харажати c_{ij} маълум (берилган) деб ҳисоблаймиз. Барча берилганларни 6- жадвалда жойлаштириш қулай бўлади.

6- жадвал

Қабул қилиш пунктлари Жўнатиш пунктлари	B_1	B_2	B_3	Юклар запаси
A_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	a_2
Юкларга бўлган талаб (эҳтиёж)	b_1	b_2	b_3	$\Sigma a_i = \Sigma b_i$

7- жадвал

Қабул қилиш пунктлари Жўнатиш пунктлари	B_1	B_2	B_3	Юк запаслари
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	a_1
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	a_2
Талаблар	b_1	b_2	b_3	

Маълумки, жўнатиш пунктларидаги юкларнинг умумий запаси барча қабул қилиш пунктларидаги шу юкларга бўлган ялпи талабга (эҳтиёжга) тенг бўлади, яъни

$$a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + b_3. \tag{2.8}$$

Юк ташишнинг шундай плани тузилсинки, бунда ялпи харажат энг кам (минимал) бўлсин.

A_i жўнатиш пунктидан B_j қабул қилиш пунктига жўнатилиши зарур бўлган юк миқдорини x_{ij} деб белгилаймиз. У ҳолда A_1 ва A_2 жўнатиш пунктларидан B_1 қабул қилиш пунктига жўнатилиши зарур бўлган юк миқдори

$$x_{11} + x_{21}$$

каби аниқланади. Аммо B_1 қабул қилиш пунктидаги бу юкка бўлган эҳтиёж b_1 га тенг бўлгани учун

$$x_{11} + x_{21} = b_1$$

тенглик бажарилиши зарур. Худди шу каби мулоҳазалар натижасида

$$x_{12} + x_{22} = b_2,$$
$$x_{13} + x_{23} = b_3$$

тенгликларни ҳам ҳосил қилиш мумкин.

Иккинчи томондан, A_1 жўнатиш пунктидан жўнатилган юкларнинг умумий миқдори

$$x_{11} + x_{12} + x_{13}$$

йиғинди билан ифодаланади. Аммо A_1 жўнатиш пунктидаги юк запаси a_1 га тенг бўлгани учун

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=a_1$$

тенглик бажарилиши зарур. Худди шу каби

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=a_2$$

тенгликни ҳам ҳосил қиламиз.

Масаланинг шартидан юк ташишнинг умумий харажати

$$F=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+c_{13}x_{13}+c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+c_{23}x_{23}=$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1} c_{ij}x_{ij}=\sum_{i,\,j} c_{ij}x_{ij}$$

кўринишда чизиқли ифодаланади.

Юқорида ҳосил қилинган муносабатларни 7-жадвалда ихчамгина ифодалаш мумкин.

Шундай қилиб, юк ташиш (транспорт) масаласининг математик ифодаси қуйидагичадир: ушбу

$$\left.\begin{aligned} x_{11}+x_{21}&=b_1,\\ x_{12}+x_{22}&=b_2,\\ x_{13}+x_{23}&=b_3,\\ x_{11}+x_{12}+x_{13}&=a_1,\\ x_{21}+x_{22}+x_{21}&=a_2,\end{aligned}\right\}\qquad(2.9)$$

олти номаълумли бешта чизиқли алгебраик тенгламалар системаси ва

$$a_1+a_2=b_1+b_2+b_3$$

тенглик ҳамда

$$F=\sum_{i,\,j} c_{ij}\,x_{ij}$$

чизиқли ифода берилган.

(2.9) системанинг барча манфий бўлмаган ечимлари орасидан шундай ечим топилсинки, бунда F чизиқли ифода ўзининг энг кичик (минимал) қийматига эришсин.

Бу масаланинг жуда катта амалий аҳамияти ўз-ўзидан кўриниб турибди. Транспорт масалаларини ечиш методидан фойдаланиб, кадрларни ишга тайинлаш, материалларни корхоналар орасида тақсимлаш ва ҳ.к. масалаларни ҳам ечиш мумкин.

4. **Парҳез масаласи** (киши ёки ҳайвонни энг яхши овқатлантириш планини аниқлаш).

Бу масалада мақсад функцияси сифатида рацион баҳоси олинади. Ўзгарувчилар сифатида эса рациондаги у ёки бу маҳсулотнинг миқдори қаралади. Ўзгарувчиларга қўйиладиган шартлар ҳар бир маҳсулотнинг калориялилиги, витаминларга бойлиги, уларнинг баҳоси ва ҳ. к. билан аниқланади. Масала кам харажат қилган ҳолда овқатга бўлган талабни тўла қондиришдан иборатдир.

Бу масалани конкрет мисолда қараймиз. Айтайлик, одам ўзининг соғлиғини ва иш қобилиятини сақлаш учун ҳар суткада маълум миқдорда ҳар хил тўйимли озуқа моддалар, масалан, оқсиллар, ёғлар, углеводлар, сув ва витаминлар истеъмол қилиши зарур. Бу A типдаги озуқа моддаларнинг миқдорлари ҳар хил. Соддалик учун икки типдаги озуқа моддалар билан иш кўрамиз ва 8-жадвални тузамиз. Бу жадвалдаги a_{11} сон A_1 турдаги озуқадаги ёғлар запасини кўрсатади. Бошқа a_{ij} сонларнинг маънолари ҳам шу каби аниқланади.

Бир бирлик A_i турдаги озуқа модданинг баҳоси c бўлсин. Овқатланишни шундай ташкил этиш керакки, бунда у энг арзон баҳоли бўлиб, организм B_i ($i = 1.$ 2, . . . 5) турдаги озуқа моддани суткалик нормадан кам бўлмаган миқдорда истеъмол қилсин.

Айтайлик, киши A_1 ва A_2 турдаги озуқалардан мос равишда x_1 ва x_2 миқдорда истеъмол қилсин. Бу ҳолда икки турли озуқалардаги ёғларнинг умумий запаси

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2$$

8- жадвал

Озуқа моддалар	Норма	Озуқа турлари	
		A_1	A_2
B_1 — ёғлар	b_1	a_{11}	a_{12}
B_2 — оқсиллар	b_2	a_{21}	a_{22}
B_3 — углеводлар	b_3	a_{31}	a_{32}
B_4 — сув	b_4	a_{41}	a_{42}
B_5 — витаминлар	b_5	a_{51}	a_{52}
Баҳоси		C_1	C_2

кўринишда ифодаланиб, b_1 минимал нормадан кам бўлмаслиги зарур, яъни

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geqslant b_1.$$

Бу турдаги тенгсизлик ишораси шунинг учун ҳам қўйилганки, қаралаётган овқатланиш системасида истеъмол қилинган ёғлар нормадан кўп бўлиши мумкин. Шу каби мулоҳазалар асосида қуйидаги тўртта чизиқли тенгсизликни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\geqslant b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 &\geqslant b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 &\geqslant b_4, \\ a_{51}x_1 + a_{52}x_2 &\geqslant b_5. \end{aligned}$$

Бу системада овқатланишнинг умумий баҳоси

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

чизиқли ифода билан берилади.

Шундай қилиб, қаралаётган масала математика тилида қуйидагича берилади. Ушбу x_1 ва x_2 номаълумли

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \geqslant b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, 5) \qquad (2.10)$$

бешта чизиқли тенгсизлик системаси ва

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

чизиқли ифода берилган. (2.10) тенгсизликлар системасининг барча манфий бўлмаган ечимлари орасидан шундай ечим танлаб олинсинки, F чизиқли ифода энг кичик (минимал) қийматга эришсин.

5. Асбоб-ускуналардан фойдаланиш ҳақидаги масала. Ишлаб чиқаришга номенклатура бўйича план берилган бўлиб, унда $П_1$ турли маҳсулотдан 50 бирлик, $П_2$ турли маҳсулотдан 30 бирлик, $П_3$ турли маҳсулотдан эса 45 бирлик тайёрлаш талаб қилинади. Ҳар қайси турдаги маҳсулотлар унумдорлиги 9-жадвалда кўрсатилган иккита A_1 ва A_2 машинада тайёрланади. Жадвалдаги сонлар ҳар қайси машинага у ёки бу турдаги бир бирлик маҳсулотни тайёрлаш учун зарур бўлган вақтни кўрсатади.

A_i машинада тайёрланган $П_j$ турдаги маҳсулот миқдорини x_{ij} деб белгилаймиз.

Асбоб-ускуналардан энг оптимал фойдаланиш планини тузиш, яъни энг минимал вақтда амалга ошириладиган планни тузиш талаб қилинади.

Қулайлик учун x_{ij} миқдорларни 10- жадвалда тасвирлаймиз. У ҳолда номенклатура бўйича планнинг бажарилиш шарти:

9- жадвал

	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	4	10	10
A_2	6	8	20

10- жадвал

Маҳсулот турлари / Машиналар	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}
Номенклатура бўйича план	50	30	45

$$x_{11} + x_{21} = 50,$$
$$x_{12} + x_{22} = 30,$$
$$x_{13} + x_{23} = 445$$

тенгликлар билан ифодаланади.

Берилган унумдорлик бўйича 9- жадвалга асосан A машинада $П_1$ турдаги маҳсулотни x_{11} миқдорда тайёрлаш учун $4x_{11}$ бирлик вақт зарур бўлади. Шу машинада $П_2$ турли x_{12} бирлик миқдордаги маҳсулотни ва $П_3$ турли x_{13} бирлик миқдордаги маҳсулотни тайёрлаш учун мос равишда $10\,x_{12}$ ва $10\,x_{13}$ бирлик вақт зарур бўлади. Шу сабабли A_1 машинанинг сарфлаган умумий иш вақти

$$t_1 = 4x_{11} + 10\,x_{12} - 10\,x_{13}$$

тенглик билан ифодаланади.

Шунга ўхшаш, A_2 машинанинг сарфлаган умумий иш вақти

$$t_2 = 6x_{21} + 8x_{22} + 20x_{23}$$

ифода билан аниқланади.

Лекин A_1 ва A_2 машиналар бир вақтнинг ўзида ишлаганлари сабабли топширилган планнинг бажарилиш вақти T юқоридаги t_1 ва t_2 иш вақтларининг энг каттасига тенг бўлади, яъни

$$T = \max(t_1; t_2).$$

Шундай қилиб, қаралаётган масала математика тилида қуйидагича ифодаланади: ушбу

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{21} &= 50, \\ x_{12} + x_{22} &= 30, \\ x_{13} + x_{23} &= 45 \end{aligned}\right\} \qquad (2.11)$$

чизиқли алгебраик тенгламалар системаси ва иккита

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= 4x_{11} + 10x_{12} + 10x_{13}, \\ t_2 &= 6x_{21} + 8x_{22} + 20x_{23} \end{aligned}\right\} \qquad (2.12)$$

чизиқли ифодалар берилган.

(2. 11) системанинг барча манфий бўлмаган ечимлари орасидан шундай ечим топилсинки, бунда

$$T = \max(t_1; t_2)$$

миқдор энг кичик (минимал) қийматга эришсин. (Бу *минимакс масалалари* деб аталмиш масалалардан биттасидир.)

Албатта, юқорида қаралган масалалар чизиқли программалаштиришнинг амалиётда учрайдиган барча масалаларини ўз ичига ола олмаслиги табиийдир. Аммо улар амалиётнинг талайгина масалалари ҳақида маълум даражада умумий тасаввур бера олади. Юқорида келтирилган масалалар ташқи жиҳатдан (айниқса, мазмун жиҳатидан) бир-бирига ҳеч ўхшамаса ҳам, уларнинг математик ифодалари бир-бирига жуда ўхшашлигини кўриш қийин эмас. Шунинг учун уларнинг ҳаммаси ҳам маълум усуллар ёрдамида чизиқли программалашнинг асосий масаласи деб аталувчи қуйидаги масалага келтирилиши мумкин:

ушбу

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right| \qquad (2.13)$$

n та $x_1, x_2, \ldots . x_n$ номаълумли m та чизиқли алгебраик тенгламалар системаси ва шу номаълумларга нисбатан ёзилган

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c_0$$

чизиқли ифода берилган.

Берилган (2.13) системанинг манфий бўлмаган барча ечимлари орасидан шундай ечим танлансинки, бунда F чизиқли ифода ўзининг энг кичик қийматига эришсин (минималлашсин).

Бу масалаларни ечиш методлари ушбу қўлланманинг III қисмида кўрсатилади.

III боб

ГРАФЛАР НАЗАРИЯСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

1- §. Граф ва унинг элементлари

Граф деб учлар (тугунлар) ва *қирралар* (ёйлар)дан иборат текис геометрик шаклга айтилади.

Графнинг учларини нуқталар билан (доирачалар, квадратчалар), қирраларини эса тўғри чизиқ (баъзан эгри чизиқ) билан белгиланади (1.2-расм).

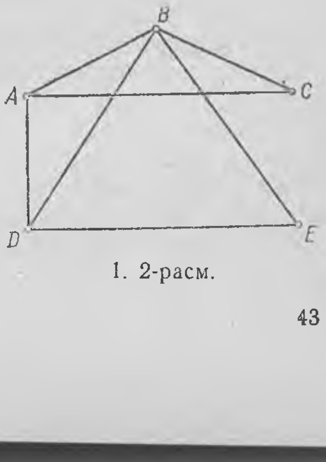
Графнинг A ва B учлари орасидаги *масофа* деб бу учларни туташтирувчи энг қисқа узунликка эга бўлган AB ёйнинг узунлигига айтилади ва қуйидагича белгиланади:

$$d(A,B) = \min S(A, B). \qquad (3.1)$$

C нуқтадан графнинг ихтиёрий X учигача бўлган максимал масофа

$$r(C) = \max d(C, X) \qquad (3.2)$$

кўринишда белгиланади.



1. 2-расм.

Агар қаралаётган граф учун шундай C_0 нуқта мавжуд бўлсаки бунда

$$r(C_0) = \min r(C) \tag{3.3}$$

муносабат ўринли бўлса, C_0 нуқта графнинг *маркази* дейилади. Бу ҳолда

$$r_0 = r(C_0) \tag{3.4}$$

катталик графнинг *радиуси* дейилади.

Графнинг маркази ва радиуси тушунчалари маиший хизмат кўрсатиш корхоналарини жойлаштириш ишини планлаштиришда жуда катта аҳамиятга эга.

Графнинг A учидан чиқувчи қирралар сони шу учнинг *даражаси* дейилади ва $\rho(A)$ деб белгиланади. Масалан, 1.2- расмда кўрсатилган графнинг A учининг даражаси $\rho(A) = 3$. Унинг бошқа учларининг даражасини санаш қийин эмас.

Графнинг учлари уларнинг даражаларига кўра икки хилга ажратилади: тоқ (даражалари тоқ сонлар) ва жуфт (даражалари жуфт сонлар) учлар. Масалан, 1.2-расмда кўрсатилган графнинг A ва D учлари тоқ B, C, E учлари эса жуфтдир.

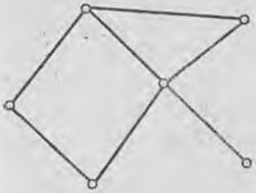
Граф қирраларининг жами сонини аниқлаш анча қийин. Лекин графнинг қирралари сонини унинг учларининг даражалари орқали ифодалаш мумкин. Графнинг қирралари сони унинг барча учларининг даражалари йиғиндисининг ярмига тенг, яъни

$$n = \frac{1}{2}\left[\rho(A) + \rho(B) + \ldots + \rho(E)\right] \tag{3.5}$$

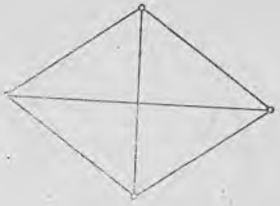
бўлиши графлар назариясида исботланган. Масалан, 1.2-расмда кўрсатилган граф учун

$$n = \frac{1}{2}(3 + 4 + 2 + 3 + 2) = \frac{1}{2} \cdot 14 = 7.$$

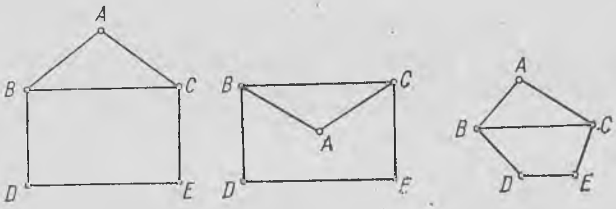
Шуни айтиш керакки, графнинг қирралари ўзаро кесишиши мумкин, бунда кесишиш нуқталари графнинг учлари бўлиши шарт эмас. Агар графнинг қирралари фақат унинг учларидагина кесишса, бундай граф *текис граф* (1. 3-расм) дейилади. Текис графлар планлаштириш ишларида катта аҳамиятга эга, масалан, кўчаларни қирралар, майдон ёки чорраҳаларни учлар деб қаралса, ҳар бир шаҳар (район) планини текис граф деб қараш мумкин ва ҳоказо.


1.3-расм.


1.4-расм.


1.5-расм.

Энди графларнинг баъзи хусусий кўринишларини қараймиз. Фақат қиррасиз учлардан ташкил топган граф *ноль граф* дейилади (1.4-расм). Ҳар бир икки учи қирра орқали туташган граф *тўла граф* дейилади (1.5-расм). Учларининг сони тенг, қирралари эса фақат мос учларни туташтирадиган графлар *изоморф графлар* дейилади. Изоморф графларнинг қирралар сони ҳам бир хил бўлади. Аммо уларнинг катталиклари ва шакллари жуда хилма-хил бўлиши мумкин (1.6-расм). Графлар назариясида изоморф графлар ўзаро тенг деб қаралади. Шундай қилиб, мураккаб системаларни анализ қилишда графларнинг изоморфлик хоссаси бирор графни унга изоморф бўлган бошқа граф билан алмаштиришга имкон беради.



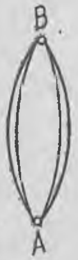
1.6-расм.

Графлар изоморфлиги таърифидан фойдаланиб, ноль граф ва тўла граф ўзаро изоморф бўла олмаслигини кўриш осон.

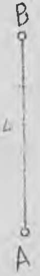
Изоморфлик хоссасига мувофиқ, текис графга изоморф граф ҳам текис граф бўлади.

Энди қирраларнинг карралиги тушунчасини қараймиз. Агар графнинг иккита учи бир неча қирралар билан туташтирилган бўлса, у ҳолда граф *каррали қиррага* эга дейилади (1.7-расм). Каррали қирраларни устига карралик кўрсаткичи ёзилган битта қирра билан алмаштириш мумкин. Масалан, 1.8-расмда кўрсатилган граф қиррасининг карралиги 4 га тенг.

Карралик тушунчасидан ҳар хил ўтказиш қобилиятига эга бўлган транспорт йўллари ёки электр тармоқлари системасини графларда ифодалашда фойдаланиш қулайдир.



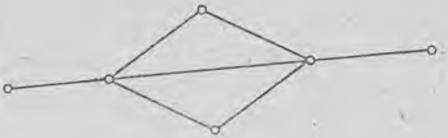
1.7-расм.



1.8-расм.

2- §. Графлар назарияси методлари

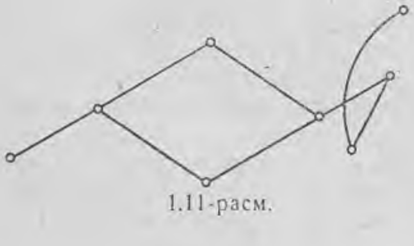
Агар графнинг *A* ва *B* учлари қирраларнинг бирор кетма-кетлиги орқали туташтирилган бўлса, улар *боғланган учлар* дейилади. Агар бу кетма-кетлик бир хил қирралардангина иборат бўлмаса, бу граф *занжир* дейилади.



1. 9-расм.

Агар занжирнинг барча учлари ҳам ҳар хил бўлса, бундай граф *элементар занжир* дейилади (1.10-расм). Агар занжир ёпиқ, яъни унинг бошланғич нуқтаси ва охирги нуқтаси биргина учда жойлашган бўлса, уни *цикл* деб аталади. Барча учлари ҳар хил бўлган цикл

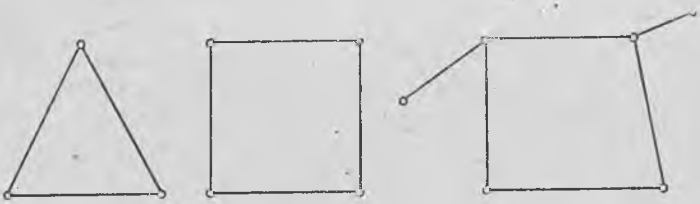
1.10-расм.



1.11-расм.

элементар цикл дейилади. Масалан, 1.2- расмдаги графда қирраларнинг $ABDAC$ кетма-кетлиги занжирни, ABC кетма-кетлиги элементар занжирни, $ABDEBCA$ кетма-кетлик циклни $ADBCA$ кетма-кетлик элементар циклни ифодалайди.

Ҳар бир жуфт учларини бирор занжир билан туташтириш мумкин бўлган графни боғланган граф дейилади. Масалан, 1.11-расмда боғланган, 1.12-расмда эса боғланмаган граф тасвирланган.



1.12-расм.

Биз бундан кейин фақат боғланган графларни қараймиз. Чунки боғланмаган графларнинг элементлари боғланган графлардан иборатдир.

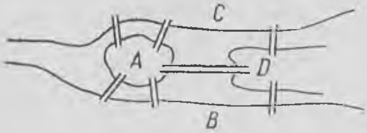
Графлар назариясида *Эйлер графлари* деб аталувчи графлар катта аҳамиятга эгадир.

Таркибида графнинг ҳар бир қирраси фақат бир мартадангина қатнашадиган циклга эга бўлган граф *Эйлер графи* дейилади. Бошқача айтганда, Эйлер графини айланиб чиқиш учун графнинг ҳар бир қирраси орқали фақат бир марта ўтиш керак. Шунинг учун Эйлер графини қаламни қоғоздан олмасдан ва биргина чизиқни икки марта ўтказмасдан чизиш мумкин. Бундай шаклларни ясаш қизиқарли математиканинг алоҳида бир қисмини ташкил этади. Циклнинг ўзи Эйлер чизиғидир. Л. Эйлер қуйидаги муҳим теоремани исботлаган: *барча учларнинг даражалари жуфт бўлган боғланган граф Эйлер чизиғи бўлади.*

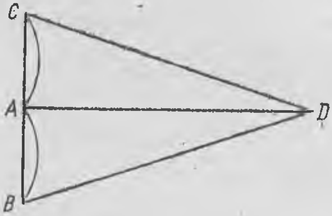
Эйлернинг бу теоремаси ҳар хил амалий масалаларнинг Эйлер графларини аниқлашни жуда ҳам енгиллаштиради.

Эйлер теоремасининг татбиқини «Кенигсберг кўприклари ҳақидаги масала» мисолида қараймиз. Бу масаланинг мазмуни қуйидагидан иборат:

1.13-расмда Ќенигсберг (ҳозирги Қалининград) шаҳри марказининг плани тасвирланган: шаҳарнинг тўрт A, B, C ва D қисмлари ўзаро еттита кўприк системаси билан туташтирилган. Шаҳарнинг ихтиёрий нуқтасидан (масалан, уйдан) чиқиб, барча кўприкларни бир мартадангина ўтиб, бошланғич нуқтага (яъни уйга) қайтиб келиш мумкинми?



1.13-расм.



1.14-расм.

Ҳар хил маршрутларни кўриб чиқиб мақсадга тез етиш мумкин эмаслигига ишонч ҳосил қилиш мумкин. Бу масала ўзига математиклар диққатини кўп йиллар жалб қилгани бежиз эмас. Лекин бу масала графлар назарияси ёрдамида жуда ҳам осон ечилар экан.

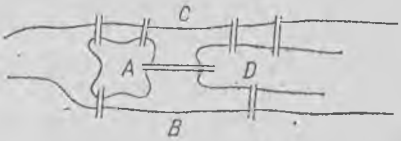
Кенигсберг планига мос граф 1.14-расмда тасвирланган. Бу масалани ечиш учун бу графнинг Эйлер графи бўлишини кўрсатиш керак. Бунинг учун граф учларининг даражаларини ҳисоблаймиз:

$$\rho(A) = 5, \ \rho(B) = 3, \ \rho(C) = 3, \ \rho(D) = 3.$$

Барча учларнинг даражалари тоқ сон экан. Демак, граф Эйлер чизиғи бўла олмайди. Шундай қилиб, «Кенигсберг кўприклари ҳақидаги масала»даги саволга «мумкин эмас» деб жавоб берамиз. Бундай жавобни графнинг биринчи учи даражасини ҳисоблагандан сўнг қолган учлар даражаларини ҳисобламасдан ҳам бериш мумкин эди.

Эйлер теоремаси ёрдамида анча мураккаб саволларга ҳам жавоб бериш мумкин. Масалан, юқоридаги масала ечимга эга бўлиши учун кўприкларнинг ўринларини қандай ўзгартириш керак? Бунинг учун кўприклар жойини шундай ўзгартириш керакки, ҳосил бўлган граф учларининг даражалари жуфт сон бўлсин. Масалан, бу

1.15-расм.

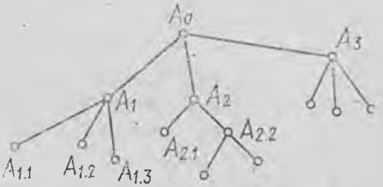


1.16-расм.

граф 1.15-расмда ёки жойнинг натурал плани 1.16-расмда кўрсатилгандек бўлсин.

Графнинг ҳар бир учидан бир мартагина ўтиб, унинг барча учларини айланиб чиқувчи. Гамильтон чизиғи кўп жиҳатдан Эйлер графига ўхшашдир.

Дарахт-графлар. Таркибида цикллар бўлмаган боғланган граф *дарахт-граф* дейилади (1.17-расм). Бу таърифдан қуйидаги натижалар келиб чиқади: биринчидан, дарахт-графда каррали қирралар бўлмайди (чунки каррали қирралар цикл ташкил этади), иккинчидан дарахт-графнинг ҳар бир жуфт учини боғловчи ягона занжир мавжуд.



1.17-расм.

Дарахт-графнинг бошланғич A_0 учини *илдизи* дейилади. Шуни айтиш керакки, дарахт-графнинг ихтиёрий учи унинг илдизи бўла олади. Дарахт-граф элементлари сонини ҳисоблаш учун қуйидаги теорема хизмат қилади.

Учлари n та бўлган дарахт графнинг n—1 та қирраси бўлади.

Дарахт графлар транспорт системалари билан боғлиқ масалаларни ечишда жуда қулай восита бўлиб хизмат қилади. Шу жумладан, у йўллар (магистраллар) қуриш масаласида муҳим аҳамиятга эгадир. Айтайлик, аҳоли яшайдиган n та пункт (масалан, шаҳар)ни ўзаро асфальт йўллар ёки темир йўллар билан туташтириш керак бўлсин. Ихтиёрий A ва B шаҳарларни туташтирувчи йўлни қуриш ҳаражати маълум бўлсин. Масала шундан иборатки, мумкин бўлган барча йўл тармоқларидан энг арзони қурилсин. Худди шунга ўхшаш масалалар электр узатиш тармоқларини, сув ва газ билан таъминлаш системаларини ва телефонлаштириш системаларини қуришда ҳам қаралиши мумкин ва ҳоказо.

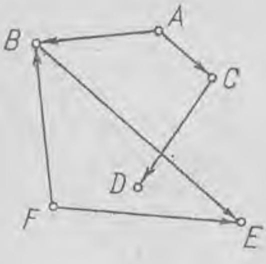
Энди қўйилган масалани ечамиз: қуриладиган тармоқлар графи дарахт-граф бўлиши керак. Демак, n та шаҳарни туташтириш учун n—1 та йўл қуриш зарур. Дарахт-ечимни ясашда энг содда тежамкорлик қоидасидан фойдаланамиз. Бунинг учун ҳар қадамда дарахтнинг мумкин бўлган қирраларидан энг арзонини қуриш зарур. Шундай қилиб, дастлаб энг кам ҳаражат билан қуриладиган йўл билан икки шаҳарни туташтирилади, сўнгра унга навбатдаги мумкин бўлган қирралардан энг арзон қуриладигани давом эттирилади ва иш шу каби давом эттирилаверади. Шундай ясалган дарахт-граф *энг тежамли* дейилади. Тежамли граф орқали топилган ечим мумкин бўлган ечимларнинг ичида энг арзони эканлигини исботлаш мумкин.

3- §. Йўналиши кўрсатилган графлар

Ҳар бир қиррасининг йўналиши кўрсатилган граф *йўналиши кўрсатилган* (ориентирланган) *граф* дейилади (1.18-расм).

Йўналиши кўрсатилган графлар транспорт системаларини, шу жумладан, бир томонлама ҳаракатли кўча тармоқларини анализ қилишда фойдаланилади.

Йўналиши кўрсатилган графларнинг муҳим татбиқларидан бири тармоқли планлаштириш ва бошқариш методларидан иборат.



1.118 -расм.

IV боб

ЭҲТИМОЛЛАР НАЗАРИЯСИ ВА МАТЕМАТИК СТАТИСТИКАНИНГ АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАРИ

1-§. Эҳтимоллар назариясининг асосий тушунчалари

Эҳтимоллар назарияси тасодифий ҳодисаларни ўрганади. Баъзи бир шартлар бажарилганда рўй бериши ёки рўй бермаслиги мумкин бўлган ҳодиса *тасодифий ҳодиса* деб аталади. Масалан, юқорига отилган танга ерга тушганда гербнинг келиб чиқиши тасодифий ҳодисадир.

Тасодифий ҳодисалар ўзининг рўй бериши эҳтимоли билан характерланади. Биз қуйида эҳтимоллари бевосита ҳисобланадиган тасодифий ҳодисалар анализи билан шуғулланамиз.

Агар қаралаётган тажрибада тасодифий ҳодисаларнинг ҳеч қандай иккитасининг биргаликда рўй бериши мумкин бўлмаса, бундай ҳодисалар *биргаликда эмас (биргаликда бўлмаган) ҳодисалар* дейилади. Масалан, юқорига бир мартагина отилган танга ерга тушганда бир вақтнинг ўзида унинг герб томони ва герб бўлмаган томони келиб чиқиши мумкин эмас. Демак, бу ҳодисалар биргаликда эмас.

Ҳар бир тажрибада тасодифий ҳодисалардан исталган бирининг рўй бериши мумкин бўлиб, бу ҳодиса билан биргаликда бўлмаган бирор бошқа ҳодисанинг рўй бериши мумкин бўлмасин, бу ҳолда тасодифий ҳодисалар *тўлиқ группани ташкил қилади* дейилади.

Биз тенг имкониятли биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг тўлиқ группасини қараймиз. Бундай ҳодисаларни ҳоллар (ёки имконлар) деб атаймиз. Бундай группанинг ҳодисаси (ҳоли), агар унинг рўй бериши натижасида A ҳодисанинг рўй бериши келиб чиқадиган бўлса, A ҳодисанинг рўй беришига қулайлик яратувчи (туғдирувчи) ҳодиса (ҳол) деб аталади. Масалан, яшикда 3 та кўк ва 5 та қизил шар бор. Яшикдан биттадан қизил шар олиш ҳодисасини A ҳодиса деб қараймиз. У ҳолда биттадан шар олиш ҳоллари жами 8 та, аммо A ҳодисанинг рўй беришига қулайлик яратувчи имконлар 5 та, чунки яшикда 5 та қизил шар бор эди.

A ҳодисанинг *p эҳтимоли* деб A ҳодиса рўй беришига қулайлик туғдирувчи ҳоллар (имконлар) сони m нинг тенг имкониятли, биргаликда бўлмаган ҳодисалар тўлиқ группасини ташкил этувчи барча мумкин бўлган ҳоллар сони n га нисбатини айтилади ва символик равишда қуйидагича ёзилади:

$$P(A) = p = \frac{m}{n}. \qquad (4.1)$$

Кўриниб турибдики, ҳодисанинг p эҳтимоли манфий бўлмаган сондир, яъни $p \geqslant 0$. (4.1) тенгликда $m \leqslant n$ бўлгани учун A ҳодисанинг эҳтимоли ҳар доим $p \leqslant 1$ тенгсизликни қаноатлантиради.

Шундай қилиб, эҳтимолнинг таърифидан унинг ушбу

$$0 \leqslant p \leqslant 1 \qquad (4.2)$$

муносабатни қаноатлантириши келиб чиқади.

Агар бирор ҳодисага тенг имкониятли бирорта биргаликда эмас ҳодисаларнинг тўлиқ группасини ташкил этувчи барча ҳоллар қулайлик туғдирса, бундай ҳодиса *муқаррар ҳодиса* деб аталади ва унинг рўй бериши эҳтимоли бирга тенг бўлади. Агар тенг имкониятли, биргаликда эмас ҳодисаларнинг тўлиқ группасини ташкил этувчи барча n ҳолнинг ҳеч бири A ҳодисага қулайлик туғдирмаса, бундай ҳодиса *рўй бериши мумкин бўлмаган ҳодиса* дейилади. Унинг эҳтимоли нолга тенг бўлади.

Агар иккита ҳодиса биргаликда бўлмаса ва тўлиқ группани ташкил қилса, улар *қарама-қарши тасодифий ҳодисалар* дейилади. Бирор A ҳодисага қарама-қарши ҳодисани $\overline{A}$ орқали белгиланади. Масалан, юқорига отилган танга ерга тушганда унинг герб томони ва герб бўлмаган томонининг тушиш ҳодисалари ўзаро қарама-қарши ҳодисалардир. Ўзаро қарама-қарши ҳодисаларнинг эҳтимоллари ушбу

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) \qquad (4.3)$$

формула билан аниқланади.

n та биргаликда бўлмаган ва тўлиқ группа ташкил этувчи ҳодисалар эҳтимолларининг йиғиндиси бирга тенг бўлади, яъни

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1. \qquad (4.4)$$

Энди эҳтимоллар устида баъзи амалларни қараймиз.

Иккита A_1 ва A_2 ҳодисанинг йиғиндиси деб, бу ҳодисалардан камида биттасининг рўй беришидан иборат. $A_1 + A_2$ ҳодисага айтилади.

Эҳтимолларни қўшиш теоремаси: *агар $A_1 A_2 \ldots A_n$ ҳодисалар биргаликда бўлмаса, у ҳолда улар йиғиндисининг эҳтимоли шу ҳодисаларнинг рўй бериш эҳтимоллари йиғиндисига тенг бўлади, яъни*

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + + P(A_n) \qquad (4.5)$$

Бу тенгламани қисқача бундай ёзиш ҳам мумкин:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i). \qquad (4.5)$$

Агар A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли B ҳодисанинг рўй беришига ёки рўй бермаслигига боғлиқ бўлмаса, у ҳолда A ҳодиса B ҳодисага *боғлиқ эмас* (боғлиқ бўлмаган) дейилади. Масалан, яшикда бир неча кўк ва қизил шарлар бор. Яшикдан ихтиёрий олинган битта шарнинг қизил бўлишини A ҳодиса, кўк шар бўлишини B ҳодиса десак, у ҳолда A ҳодиса ва B ҳодисалар ўзаро боғлиқ бўлмаган ҳодисалар бўлади.

Эҳтимолларни кўпайтириш теоремаси: *Ўзаро боғлиқ бўлмаган* $A_1, A_2, \ldots A_n$ *ҳодисаларнинг биргаликда рўй бериш эҳтимоли шу ҳодисаларнинг рўй бериши эҳтимоллари кўпайтмасига тенг, яъни*

$$P(A_1 , A_2 \ldots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2) \ , \ldots \ P(A_n). \qquad (4.6)$$

Бу (4.6) дан кўринадики, $P(A_i) \leqslant 1$ бўлгани учун боғлиқ бўлмаган ҳодисаларнинг биргаликда рўй бериш эҳтимоли уларнинг сони n ортиши билан кескин камаяди. Масалан, ҳар бирининг рўй бериш эҳтимоли 0,8 га тенг 10 та ўзаро боғлиқ бўлмаган ҳодисанинг биргаликда рўй бериш эҳтимоли эҳтимолларни кўпайтириш теоремасига асосан

$$P=\underbrace{0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8 \ \ldots \ 0{,}8}_{10\ \text{та}}=0{,}1$$

бўлади.

Тасодифий ҳодисаларнинг бу хоссасини амалий фаолиятда эътиборга олиш зарур.

Эҳтимоллар назариясида тасодифий ҳодисаларнинг шартли эҳтимоли катта аҳамиятга эга.

A ҳодисанинг B ҳодиса рўй беради деган шартда рўй бериш эҳтимолини $P(A/B)$ билан белгилаймиз ва B шартида A ҳодисанинг *шартли эҳтимоли* деб атаймиз.

Мисол. Яшикда 3 та кўк ва 5 та қизил шар бор. Яшикдан битта шар олинади (биринчи олиш), ундан кейин яна битта шар олинади (иккинчи олиш), B ҳодиса биринчи олишда қизил шарнинг келиб чиқиши, A ҳодиса эса иккинчи олишда қизил шарнинг келиб чиқиши бўлсин.

Агар B ҳодиса рўй берган бўлса, яъни биринчи олишда қизил шар келиб чиққан бўлса, A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли

$$P(A/B) = \frac{4}{7}$$

бўлади.

Агар B ҳодиса рўй бермаса, яъни биринчи олишда кўк шар чиққан бўлса, A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли

$$P(A/\overline{B}) = \frac{5}{7}$$

бўлади.

Ўзаро биргаликда бўлмаган A ва B ҳодисалар учун $P(A/B) = 0$, ўзаро боглиқ бўлмаган ҳодисалар учун эса $P(A/B) = P(A)$ тенглик ўринли бўлади.

Тасодифий ўзгарувчи миқдорлар.

Агар ўзгарувчи X миқдорнинг ҳар бир x_k қийматига x_k қийматни қабул қилишининг маълум $P_k(x_k)$ эҳтимоли мос келса, у ҳолда X ўзгарувчи миқдор дискрет тасодифий миқдор дейилади, бунда

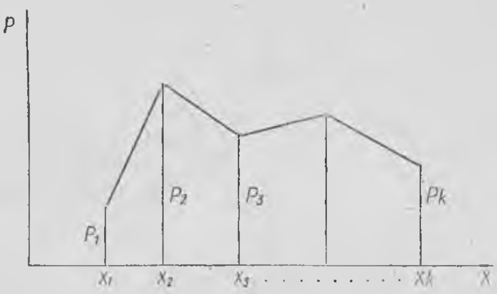
$$\sum_{k=1}^{n} P_k(x_k) = P_1(x_1) + P_2(x_2) + \ldots + P_n(x_n) = 1.$$

$P_k(x_k)$ эҳтимолнинг x_k билан функционал боғланиши дискрет тасодифий миқдорнинг *эҳтимоллари тақсимот қонуни* дейилади.

Тақсимот қонуни жадвал усулида берилиши мумкин:

Тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари	x_1	x_2	...	x_k	...
Бу қийматларнинг эҳтимоллари	p_1	p_2	...	p_k	...

Тақсимот қонуни эҳтимоллар тақсимоти кўпбурчаги кўринишида график усул билан ҳам берилиши мумкин (1.19- расм).



1. 19-расм.

Тақсимот қонуни аналитик усулда ҳам берилиши мумкин:

$$p_k = f(X_k),\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots .$$

Дискрет тасодифий миқдорнинг *математик кутилиши* (ўрта қиймати) деб тасодифий миқдорнинг барча мумкин бўлган қийматлари билан бу қийматлар эҳтимоллари кўпайтмаларининг йиғиндисига айтилади ва

$$M[X] = x_1 p_2 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$$

ёки, қисқача,

$$M[X] = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k \tag{4.7}$$

кўринишда ёзилади.

Математик кутилишни тасодифий миқдор эҳтимоллари тақсимотининг *маркази* дейилади.

Математик кутилиш учун қуйидаги иккита теорема ўринлидир:

1. *Тасодифий миқдорлар йиғиндисининг математик кутилиши уларнинг ҳар бирининг математик кутилишлари йиғиндисига тенг бўлади:*

$$M[X_1 + X_2 + \ldots + X_n] = M[X_1] + M[X_2] + \ldots + M[X_n]. \tag{4.8}$$

2. *Ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар кўпайтмасининг математик кутилиши уларнинг математик кутилишлари кўпайтмасига тенг бўлади:*

$$M[X_1 \cdot X_2 \ldots X_n] = M[X_1] \cdot M[X_2] \ldots M[X_n]. \tag{4.9}$$

X тасодифий миқдорнинг *дисперсияси* деб тасодифий миқдор билан унинг ўрта қиймати (математик кутилиши) орасидаги айирма квадратининг ўрта қийматига (математик кутилишига) айтилади:

$$D[X] = M[(X - M(X)^2] = \sum_{k=1}^{n} (x_k - M[X])^2 p_k. \quad (4.9')$$

Дисперсия тасодифий миқдор квадрати ўлчамида бўлади. Баъзан тасодифий миқдор қийматларининг тарқоқлик характеристикаси учун ўлчами тасодифий миқдор ўлчами билан бир хил бўлган миқдордан фойдаланиш қулай бўлади. Бундай миқдор *тасодифий миқдорнинг ўрта квадратик четланиши* дейилади ва

$$\sigma[X] = \sqrt{D(X)}$$

ёки ёйиқ кўринишида

$$\sigma[X] = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - M[X])^2 \cdot p_k} \quad (4.10)$$

тенглик билан ифодаланади.

Шуни айтиш керакки, ўзгармас миқдорнинг дисперсияси нолга тенг бўлади.

Мисол. X тасодифий миқдор қуйидаги жадвалда берилган тақсимот қонуни билан берилган.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

а) Шу тасодифий миқдорнинг а) математик кутилиши, б) дисперсиясини, в) ўрта квадратик четланишини аниқлансин.

Ечиш.

а) $M[X] = 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}08 + 4 \cdot 0{,}02 = 1{,}32$,

б) Қаралаётган тасодифий миқдорнинг дисперсияси қуйидагича аниқланади:

$$D[X] = \sum_{k=1}^{5} (x_k - M[X])^2 \cdot p_k = (-1{,}32)^2 \cdot 0{,}2 + (-0{,}32)^2 \times$$

$$\times 0{,}4 + (0{,}68)^2 \cdot 0{,}3 + (1{,}68)^2 \cdot 0{,}08 + (2{,}68)^2 \cdot 0{,}02 = 0{,}8976$$

в) Ўрта квадратик четланиш қуйидагича аниқланади:

$$\sigma(X) = \sqrt{D[X]} = \sqrt{0{,}8976} = 0{,}9474.$$

Амалда ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар йиғиндиси дисперсияси ҳақидаги теорема муҳим аҳамиятга эга: *ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар йиғиндисининг дисперсияси уларнинг дисперсиялари йиғиндисига тенг бўлади.*

2- §. Тақсимот функцияси ёки тақсимот қонунлари

Агар

$$\lim_{\Delta x \to \infty} \frac{P(x < \overline{x} < x + \Delta x)}{\Delta x} = f(x) \qquad (4.11)$$

тенгликни қаноатлантирувчи $y = f(x)$ функция мавжуд бўлса, у ҳолда бундай $f(x)$ функция X тасодифий миқдорнинг эҳтимоллари тақсимотининг *зичлиги* дейилади.

Бирор X $(-\infty < x < \infty)$ тасодифий миқдорнинг тақсимот зичлиги $f(x)$ бўлсин, у ҳолда

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx \qquad (4.12)$$

функция *эҳтимоллар тақсимоти функцияси* ёки *тақсимотнинг интеграл қонуни* дейилади.

Дискрет тасодифий микдор учун тақсимот функцияси унинг X дан кичик бўлган x_k қийматлари эҳтимолларининг йиғиндисига тенг:

$$F(x) = \sum_{x_k < x} p_k. \qquad (4.13)$$

Тасодифий миқдорлар тақсимот қонунлари орасида энг муҳимлари қуйидагилардир:

1. Тақсимотнинг биномиал қонуни. Бунда X тасодифий миқдор эҳтимоллари

$$p_r = C_n^r p^r (1 - p)^{n-r} \qquad (4.14)$$

бўлган 0, 1, ,2 . . . , r бутун қийматлар қабул қилади, бу ерда

$$C_n^r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!},$$ n — бутун мусбат сон.

Биномиал тақсимот функцияси

$$P_r = \sum_{k=0}^{r} C_n^r p^k (1-p)^{n-k} \qquad (4.15)$$

кўринишда бўлади.

2. **Тақсимотнинг Пуассон қонуни.** Бунда тасодифий миқдор эҳтимоллари

$$p_r = \frac{a^r}{r!} e^{-a} \qquad (4.16)$$

бўлган $r = 0, 1, 2, \ldots$ бутун қийматларни қабул қилади, бу ерда a мусбат параметрдир.

Пуассон тақсимоти функцияси

$$P = \sum_{k=0}^{r} \frac{a^k}{k!} e^{-a} \qquad (4.17)$$

кўринишда бўлади.

Шуни айтиш керакки, тақсимотнинг биномиал ва Пуассон қонунларида тасодифий миқдор фақат дискрет (узлукли) қийматларни қабул қилади.

3. **Тақсимотнинг нормал (Гаусс) қонуни.** Кўп тасодифий миқдорлар, масалан, бирор марказдан ўқнинг тушиш нуқтасининг узоқлиги бўйича четланиши ёки кўп механизмларда деталларнинг ейилиш катталиги ва ҳоказолар

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad (4.18)$$

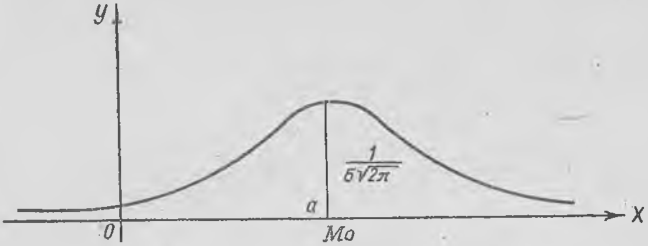
формула билан ифодаланувчи эҳтимоллар тақсимоти зичлигига эга бўлади.

Бу ҳолда тасодифий миқдор *нормал (Гаусс) тақсимот қонунига бўйсунади* деб айтилади (1.20- расм).

Ҳар хил тасодифий миқдорлар орасидаги боғланишни аниқлаш жуда катта амалий аҳамиятга эгадир.

Процессларнинг боғланганлигини (корреляциясини) корреляция коэффициенти τ аниқлайди. X ва Y дискрет тасодифий миқдорлар орасидаги боғланишни уларнинг *корреляция (боғланиш) коэффициенти* деб аталувчи ва ушбу

$$\tau_{xy} = \frac{M[(X - M[X])(Y - M[Y])]}{\sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)}} \qquad (4.19)$$



1. 20-расм.

формула билан ҳисобланувчи катталик характерлайди, бу ерда p_{ij} $(i = 1,2, \ldots, n;\ j = 1,2, \ldots, m)$ $x = x_i$, $y = y_j$ тенгликларнинг бир вақтда бажарилиш эҳтимолидир.

(4.19) формулани қуйидагича ёйиб ёзиш мумкин:

$$\tau_{xy} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}(x_i - M[X])(y_j - M[Y])\,p_{ij}}{\sqrt{D[X]}\cdot\sqrt{D[Y]}}. \qquad (4.20)$$

Корреляция коэффициенти учун ушбу

$$0 \leqslant |\tau| \leqslant 1 \qquad (4.21)$$

тенгсизликни исботлаш мумкин.

Корреляция коэффициенти τ X ва Y тасодифий миқдорларнинг ўзаро боғланганлигини статистик характерлайди. Агар $\tau = 0$ бўлса, ўзгарувчилар ўзаро боғланмаган бўлади. Эҳтимоллар назариясининг энг кучли методларидан бири — корреляцион анализ ана шунга асослангандир.

3- §. Математик статистиканинг асосий тушунчалари

Эҳтимоллар назарияси реал процессларни (жараёнларни) статистик анализ қилиш билан шуғулланувчи математик статистика методларига асос бўлади.

Математик статистикада тасодифий ҳодиса эҳтимоли ролини ҳодиса рўй бериш сони n_i нинг кузатишларнинг умумий сони N га нисбати билан аниқланувчи

$$n = \frac{n_i}{N} \qquad (4.22)$$

нисбий частоти бажаради.

Тасодифий ҳодисаларни анализ қилиш учун математик статистикада қуйидаги характеристикадан фойдалананилади:

1. Ўрта арифметик қиймат:

$$S = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{\sum_{i=1} n_i} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots n_k n_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_\kappa}. \tag{4.23}$$

Қулайлик учун тасодифий миқдорлар дисперсиясини частоталар орқали ёзиш мумкин:

$$D = \sigma^2 [X] = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - S_x)^2}{\sum_{i=1}^{n} n_i} =$$

$$= \frac{n_1 (x_1 - S_x)^2 + n_2 (x_1 - S_x)^2 \dots + n_k (x_k - S_x)^2}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}.$$

Лекин шуни ҳам эътиборга олиш керакки, тасодифий миқдорларнинг ўрта арифметик қиймати уларнинг реал тақсимот картинасини жуда бузиб кўрсатади. Масалан, 6 та 12 қаватли, 4 та 6 қаватли ва 2 та 2 қаватли биноларни қуришда қаватларнинг ўртача қиймати

$$S_a = \frac{6 \cdot 12 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 2}{6 + 4 + 2} - 8$$

бўлиб, у ҳақиқатни очиқдан-очиқ бузиб кўрсатади.

Шунинг учун математик статистикада ўрта арифметик қиймат билан бир қаторда тасодифий миқдорнинг бошқа характеристикалари ҳам қўлланилади.

2. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг медианаси (Ме) деб, унинг ўзгариш интервалидаги ўрта нуқтадаги қийматига айтилади.

3. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг модаси (Мо) деб, унинг тақсимот қонуни эгри чизиғининг максимал ординатага эга бўлган нуқтасининг абсциссасига айтилади (1.20-расм).

Лекин медиана ва мода тушунчалари ҳам тасодифий миқдор ўзгаришини мустақил характерлай олмайди. Шунинг учун юқорида кўрсатилган учта характеристикани бирданига қўлланиб, қаралаётган процесс ҳақида тўлароқ тасаввурга эга бўлиш мумкин.

Статистик кузатишлар (ўлчашлар) натижаларини ифодалаш учун ўлчашлар натижасида ҳосил бўладиган статистик материалларни иккита сатрдан иборат қилиб биринчи сатрга ўлчаш номерлари i ни, иккинчи сатрга эса ўлчанадиган X миқдорнинг ҳосил қилинган x_i қийматлари ёзилади:

i	1	2	3	4	.	.	.	i	.	.	.	n
x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	.	.	.	x_i	.	.	.	x_n

Бундай жадвал *оддий статистик қатор* деб аталади. Ўлчашлар сони n жуда катта бўлганда бундай жадвалга жойлаштирилган статистик материални кўздан кечириш қийин ва, демак, уни таҳлил қилиш қийинлашади. Шунинг учун ҳосил қилинган оддий статистик қаторни группаларга ажратилади. Бу иш қуйидагича олиб борилади. X миқдорнинг ҳосил қилинган қийматлари бутун интервалини ўзаро тенг (a_0, a_1),(a_1, a_2), . . . , (a_{k-1}, a_k) кичик интервалларга ажратамиз ва x миқдорнинг (a_{k-1}, a_k) интервалларга тўғри келадиган (тушадиган) m_k қийматлари сонини ҳисоблаб чиқамиз. Ушбу

$$\frac{m_k}{n} = p_k^*$$

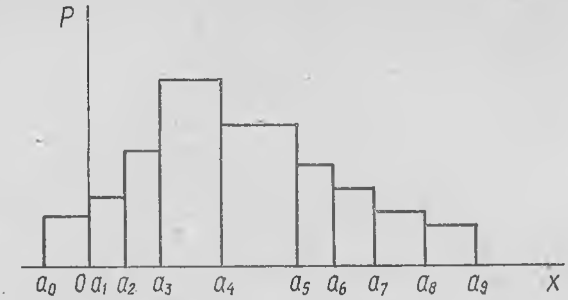
сон (a_{k-1}, a_k) интервалга мос бўлган нисбий частотадир, бунда

$$\sum_{k=1}^{k} p_k^* = 1$$

экани равшан.

Шундай ишлаб чиқиш натижаларига асосан учта сатрдан иборат бўлган жадвал тузамиз. Биринчи сатрда a_k нинг ўсиб бориш тартиби бўйича интервалларни, иккинчи сатрда уларга мос бўлган m_k сонларни, учинчи сатрда p_k частоталарни кўрсатамиз.

Группаларга ажратишни геометрик тарзда ҳам тасвирлаш мумкин. Бунинг учун Ox ўқда $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k$ нуқталарни белгилаймиз. Сўнгра $[a_{k-1}, a_k]$ кесмани асос қилиб, юзи p_k^* га тенг бўлган тўғри тўртбурчак



1. 21-расм.

ясаймиз. Ҳосил қилинган шакл *гистограмма* деб аталади (1.21- расм).

Гистограммаларга асосланиб, тақрибий равишда статистик тақсимот функция тузилади.

Математик статистикада тасодифий танлаш тушунчаси муҳим аҳамиятга эга.

Тасодифий танлашнинг ҳажми (узунлиги) унинг таркибидаги n та элемент сони билан аниқланади.

Энди статистик миқдорнинг ишончлилиги масаласини қараймиз. Статистик миқдорнинг *ишончлилиги* деб унинг қаралаётган ўзгарувчининг реал қийматига мос келиши тушунилади. Буни катта сонлар қонуни асосида текширилади. Катта сонлар қонунига асосан, статистик натижаларнинг реал кузатишлар (ўлчашлар) натижасидан кичик четлашиши эҳтимоли кузатишлар сони N ортиб бориши билан бирга (100%)га асимптотик яқинлашади.

Шундай қилиб, кузатишлар сони N ни етарлича катта қилиб танлаш йўли билан статистик соннинг ишончлилигини 100% га исталганча яқинлаштириш мумкин. N соннинг кўзланган ишончлиликка эришиши учун зарур бўлган қийматини номограмма ёрдамида аниқлаш мумкин.

3- §. Математик статистика методлари

1. Гипотезаларни статистик синаш методи. Тасодифий анализлар асосида ҳар хил статистик гипотезалар тузиш мумкин (масалан, транспорт ҳаракатининг интенсивлиги ҳақида ва ҳоказо). Айтилган гипо-

тезаларнинг ҳақиқатга тўғри келишини синаш учун қаралаётган гипотезанинг эксперимент натижалари билан мос келишини баҳолайдиган муқаррарлик критерийларидан фойдаланилади. Кенг тарқалган муқаррарлик критерийларидан қуйидагиларни кўрсатиш мумкин:

а) Пирсон критерийси;

б) Стъюдент критерийси;

в) Фишер-Снедекор критерийси.

Бу кўрсатилган критерийларнинг барчаси учун олинган экспериментал статистик натижаларга асосан гипотезани қабул қилиш ёки йўққа чиқаришни кўрсатувчи қийматлар жадваллари тузилган.

2. Эксперимент натижаларини статистик ишлаб чиқариш методи. Ҳар хил эксперимент натижалари одатда айрим қийматлар (нуқталар) тўпламидан иборат бўлади. Булардан хулоса чиқариш учун бу нуқталарни битта чизиқ билан туташтириш керак, бунда ўлчаш пайтида баъзи четлашишлар бўлганини эътиборга олиш зарур. Бу чизиқ *регрессия* чизиғи дейилади.

Регрессия чизиғини энг кичик квадратлар методи ёрдамида аниқланади.

3. Корреляцион анализ методи энг кенг тарқалган статистик метод ҳисобланади. У айниқса айрим тенденциянинг (масалан, шаҳарларда автомобиль транспорти қатновининг ортиб бориши, аҳолининг уй-жойга бўлган талабининг ўсиши ва ҳоказо) ривожланишини олдиндан айтишда кўп ишлатилади.

Ҳар хил процессларни тавсифловчи икки тасодифий миқдор орасидаги корреляция маълум бўлса, улардан бирининг (ўрганилганининг) ривожланиш тенденциясини маълум тузатишлар билан иккинчисига (ўрганилмаганига) татбиқ қилиш мумкин.

Масалан, аҳоли сонининг ўсиши жуда яхши ўрганилган. Бу билан жипс боғланган иқтисодий кўрсаткичлар нисбатан оз ўрганилгандир. Шунинг учун иқтисодий процесслар ва аҳолининг ўсишини ифодаловчи тасодифий миқдорлар орасидаги корреляцион боғланишни ўрганиш (аниқлаш) иқтисодий кўрсаткичлар бўйича муҳим натижалар олишга имкон беради.

4. Оммавий хизмат назарияси (навбатлар назарияси) элементлари.

Оммавий хизмат назарияси статистик методларнинг муҳим татбиқларидан ҳисобланади. Амалиётнинг барча соҳаларида у ёки бу турдаги хизмат қилишга навбат туғилади. Навбат икки хил контрагентдан иборат: клиент (хизмат қилишга талаб) ва хизмат қилувчи прибор.

Хизмат қилувчи приборнинг сонига қараб системаларни бир-биридан фарқ қилинади:

а) битта каналли (битта хизмат қилувчи прибор билан);

б) кўп каналли (бир неча хизмат қилувчи прибор билан).

Навбат учта асосий параметрлар билан характерланади:

а) келувчи оқим (талаблар) билан;

б) хизмат қилиш механизми билан;

в) хизмат қилиш интизоми билан.

Талабларнинг келувчи оқими қуйидаги элементларни кўрсатиш билан берилади:

а) талаблар келиб тушишининг ўртача интенсивлиги;

б) улар келиб тушишининг статистик модели.

Оқимнинг интенсивлиги (зичлиги) деб вақт бирлигида келиб тушган талабларнинг ўртача сонига айтилади.

Талаблар келиб тушишининг моделига ва интенсивлигига қараб келувчи оқим қуйидаги типларга ажралади:

а) регуляр оқим (талаблар ўзгармас $d = \frac{1}{a}$ интенсивликда биттадан келиб тушади);

Бундай оқимга лентали конвейер ёки ҳар қандай ўзгармайдиган графикли система оқими мисол бўла олади;

б) Энг содда оқим (бунда талаблар бир-бирига боғлиқ бўлмасдан тасодифий равишда биттадан келиб тушади);

в) Дискрет оқим (бунда талаблар вақтнинг дискрет моментларида келиб тушади);

г) Стационар бўлмаган оқим (бунда талаблар интенсивлиги вақт ўтиши билан ўзгаради);

д) Узлуксиз оқим (бунда талаблар узлуксиз келиб тушади). Масалан, омборга келиб қуйиладиган суюқлик ёки газлар оқими узлуксиз бўлади.

Хизмат қилиш механизми уч хил асосий факторлар билан берилади:

1. Хизмат қилишга сарфланадиган вақт (яъни битта талабга хизмат қилиш учун зарур бўлган вақт оралиғи).

2. Системанинг ўтказиш қобилияти (яъни бир вақтнинг ўзида бараварига хизмат қилиш мумкин бўлган талабларнинг максимал сони).

3. Хизмат қилиш интизоми (навбат танлаш интизоми деб ҳам аталади) икки хил категорияга бўлинади: приоритетсиз ва приоритетли хизмат қилиш.

Приоритетсиз хизмат қилиш талабларининг келиб тушиш тартибида бажарилади.

Приоритетли системалар анча қизиқарлидир.

Приоритет деб навбатсиз хизмат қилишга устун ҳуқуққа эга бўлишга айтилади. Шунинг учун приоритетли системада бирмунча юқорироқ приоритетли талабларга олдин хизмат қилинади.

Навбатли системанинг аниқланадиган учта асосий характеристикасини қараймиз: хизмат қилишни кутиш вақтининг ўртача қиймати ва тақсимланиш даври; вақтнинг ихтиёрий моментида системадаги талаблар сонининг тақсимланиши ва ўртача қиймати; хизмат қилувчи прибор бандлигининг тақсимланиш даври ва ўртача қиймати.

Системада талаб кўпайгани сари бу учта характеристиканинг ҳар бири ўсиш тенденциясига эгадир.

Навбатлар назарияси транспорт системаларини планлаштиришда катта аҳамиятга эга. Навбатли системаларни текшириш учун математик статистика методларидан фойдаланилади. Улар билан махсус адабиётдан танишиш мумкин.

II қисм

СОНЛИ АНАЛИЗ МЕТОДЛАРИ

I боб

ТЕНГЛАМАЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ

1- §. Умумий мулоҳазалар

Маълумки, ҳамма тенгламаларни ҳам аниқ ечиб бўлавермайди. Бу, биринчи навбатда, трансцендент тенгламаларга, яъни номаълум трансцендент функциянинг аргументи бўлган тенгламаларга тааллуқлидир. Шунингдек, бешинчи ва юқори даражали ҳар қандай алгебраик тенгламанинг радикалларда ечилмаслиги исботланган. Бироқ тенгламаларни аниқ ечиш кўпинча шарт бўлмайди. Тенгламаларнинг илдизларини керакли аниқликда топа олсак ва бунда йўл қўйилиши мумкин бўлган хатоликнинг чегарасини кўрсата олсак, тенгламаларнинг илдизларини топиш масаласи амалда ҳал этилган бўлади.

Тенгламаларни тақрибий ечиш тўғрисида сўз юритганда, биз тенгламаларнинг ҳақиқий илдизларини излашни назарда тутамиз.

Тенгламаларни тақрибий ечишда қўлланиладиган кўпгина усуллар аслида илдизни аниқлаштириш усули бўлиб, бу усулларни қўлланиш учун илдизнинг тақрибий қийматини аввалдан билиш керак бўлади. Илдизнинг қийматини тақрибий билиш учун график усуллар хизмат қилади. Қуйида шу график усуллар тўғрисида маълумот берамиз. Қаралаётган тенглама қуйидаги кўринишда бўлсин:

$$f(x) = 0. \qquad (1.1)$$

Декарт координаталар системасида $y=f(x)$ функциянинг графигини схематик чизамиз. Ҳосил қилинган эгри чизиқнинг Ox ўқ билан кесишиш нуқталарининг абсциссалари (1.1) тенгламанинг ҳақиқий илдизларини беради.

Схематик график чизиб, сўнгра тенгламанинг илдизлари ётадиган оралиқлар аниқлангач, илдизларнинг қийматини аниқлаштиришга киришамиз. Бунинг учун топилган оралиқларда графикни каттароқ масштабда чизиб, функциянинг қийматини аниқроқ ҳисоблаб чиқамиз. Равшанки, бунда графикни абсциссалар ўқи билан кесишиш нуқталарини аниқроқ топамиз.

Илдизни график усулда излашни бошқа усул билан ҳам амалга ошириш мумкин.

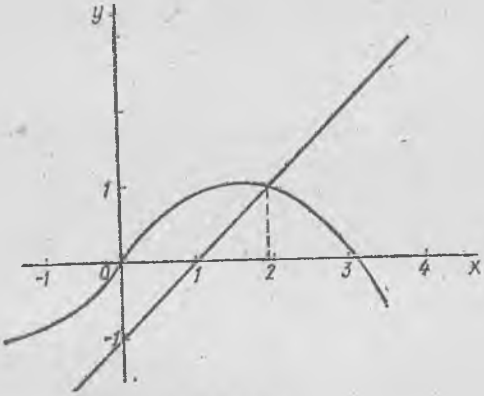
Фараз қилайлик, (1.1) тенгламани

$$f_1(x)=f_2(x) \tag{1.2}$$

кўринишда ёзиш мумкин бўлсин. Бу ҳолда $y=f_1(x)$ ва $y=f_2(x)$ функцияларнинг графикларини чизамиз. Бу эгри чизиқлар кесишиш нуқталарининг абсциссалари тенгламанинг илдизлари бўлади.

1- мисол. $x-\sin x-1=0$ тенгламанинг илдизини тақрибан топамиз. Бу тенгламани $x-1=\sin x$ кўринишда ёзамиз. $y=\sin x$ ва $y=x-1$ функцияларнинг графикларини, яъни синусоида ва тўғри чизиқнинг графигини ясаймиз (2.1- расм). Ясалган графикларнинг кесишиш нуқтаси $x\approx 1{,}9$ бўлиб, тенгламанинг илдизи учун тақрибан шу сонни олиш мумкин.

Энди илдизнинг қийматини аниқлаштиришнинг аналитик усулларини қарайлик. Аввало, бу усулларда илдизнинг $[a, b]$ кесмада эканлиги маълум деб олинади. Бу кесмани танлаш узлуксиз функцияларнинг хоссаларига асосланган. Аниқроқ қилиб айтганда, агар $f(x)$ функция ёпиқ $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлиб, кесманинг



2. 1-расм.

охирларида турли ишорали, яъни $f(a)\cdot f(b) < 0$ бўлса, у ҳолда a дан b гача бўлган кесмада $f(x)=0$ тенгламанинг камида битта илдизи бўлади. $[a, b]$ кесмада фақат битта илдиз бор деб ҳисоблаймиз, яъни кесмани етарли кичик қилиб оламиз. Бундай $[a, b]$ кесма *илдизни яккалаш интервали* дейилади.

Илдизни яккалаш интервалини кичрайтиришни жуда содда усул билан амалга ошириш мумкин. Илдизни яккалаш интервалидан битта c нуқта танлаб оламиз (одатда c нуқта учун функциянинг қийматини ҳисоблашни қулайроқ қилиш мақсадида интервалнинг ўртасини ёки интервалнинг ўртасига яқинроқ нуқтани олинади) ва бу нуқтада функциянинг қийматини ҳисоблаймиз. Бу ҳолда илдизни яккалаш интервали иккига ажралади:

$$[a, f(c)] \text{ ва } [f(c), b].$$

Юқоридаги кесмалардан қайси бирининг охирларида $f(x)$ функция турли ишорали бўлса, шунисини илдизни янги яккалаш интервали учун қабул қиламиз.

Шу усул билан илдизни яккалаш интервалини исталганча кичрайтириш мумкин, яъни $f(x)=0$ тенгламанинг исталганча аниқликдаги илдизини топиш мумкин. Бир вақтнинг ўзида тақрибий ечимнинг аниқлик даражасини баҳолаган ҳам бўламиз, чунки илдиз охирги яккалаш интервалининг охирлари орасида бўлади. Бироқ бу усул содда бўлишига қарамасдан, илдиз яккалаш интервалини кетма-кет кичрайтириб бориш ҳар доим қўллайверилмайди, чунки бу усул кўп ҳисоблашларни тақозо қилади.

Илдизни аниқлаштиришнинг бошқа усулини кўрайлик. Бу усулларни қўлланишда $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада қуйидаги шартларни қаноатлантиради деб фараз қиламиз:

1) $f(x)$ функция ҳамда унинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалари узлуксиз;

2) $f(x)$ функция кесманинг охирларида турли ишорали:

$$f(a)\cdot f(b) < 0;$$

3) биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалар ишора сақлайди.

Бу шартлар $[a, b]$ кесмада $f(x)$ функциянинг битта ва фақат битта илдизи борлигини таъминлайди. Ҳақиқатан ҳам, 1) ва 2) шартлар $[a, b]$ кесмада камида битта илдиз бўлишини таъминласа, 3) шарт $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада монотон бўлишини, демак, бу интервалда фақат битта илдиз мавжуд бўлишини кўрсатади.

Шуни ҳам айтиш керакки, биз фақат мусбат илдизларни излаш билан чекланишимиз мумкин. Манфий илдизларни излаш масаласи эса x ўрнига $-x$ ни қўйиш орқали мусбат илдизларни топишга келтирилиши мумкин,

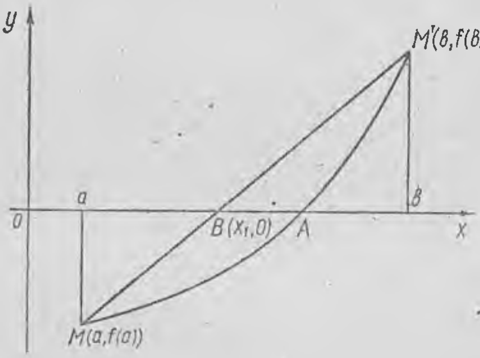
Бундан буён биз $[a, b]$ кесмада юқорида санаб ўтилган 1) — 3) шартларни бажарувчи $f(x)$ функцияни назарда тутамиз.

2- §. Ватарлар усули ва уринмалар усули

Тенгламаларни тақрибий ечишнинг кўпроқ тарқалган усуллари ватарлар усули ва уринмалар усулидир.

Ватарлар усулининг ғояси қуйидагига асосланган: $y=f(x)$ функция етарли кичик $[a, b]$ кесмада, маълум бир тақрибийлик билан, чизиқли ўзгаради деб қаралади. У ҳолда $y=f(x)$ функциянинг $[a, b]$ кесмадаги графигини тўғри чизиқ — ватар деб олиш мумкин. Илдизнинг тақрибий қиймати учун шу ватарнинг Ox ўқ билан кесишган нуқтасини олиш мумкин.

Бу усулнинг маъносини ойдинлаштириш учун 2.2- расмга мурожаат қиламиз (2.2- расм) $[a, b]$ кесмада $y=f(x)$ функциянинг графигини ясаймиз. Тенгламанинг



2. 2-расм

ҳақиқий илдизи $y = f(x)$ эгри чизиқ билан абсциссалар ўқининг кесишиш нуқтаси A нуқтанинг абсциссаси бўлади. MM' эгри чизиқни MM' ватар билан алмаштириб, илдизнинг тақрибий қиймати учун ватарнинг абсциссалар ўқи билан кесишган нуқтаси B нинг абсциссасини оламиз. $M(a, f(a))$ ва $M'(b, f(b))$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини ёзамиз:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}. \tag{1.3}$$

B нуқтанинг абсциссаси $f(x) = 0$ тенгламанинг тақрибий илдизи бўлиб, тўғри чизиқнинг тенгламасида $y = 0$ дейилса, келиб чиқади. У ҳолда қуйидагига эга бўламиз:

$$x_1 = a - \frac{(b - a) f(a)}{f(b) - f(a)} \tag{1.4}$$

ёки

$$x_1 = \frac{a f(b) - b f(a)}{f(b) - f(a)}. \tag{1.5}$$

Қаралаётган тўғри чизиқнинг тенгламасини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{y - f(b)}{f(a) - f(b)} = \frac{x - b}{a - b}.$$

Бу ерда $y = 0$ деймиз, унда қуйидаги формулага эга бўламиз:

$$x_1 = b - \frac{f(b)(b - a)}{f(b) - f(a)}. \tag{1.6}$$

Кўриниб турибдики, (1.4) ва (1.6) ифодалар айнан бир хилдир. Биз улардан қайси бири қулайроқ бўлса, ўшанисидан фойдаланаверамиз.

Ҳосил қилинган x_1 ни илдизни ватарлар усулида аниқлаш учун яна ишлатиш мумкин, бунда $[a, x_1]$ ва $[x_1, b]$ кесмалардан биттаси танлаб олинади. Кесмани танлаш учун улардан қайси бирининг охирларида $f(x_1)$ функция ишора алмаштирса, шунисини олиш керак бўлади.

1- мисол. Ватарлар усулида $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0$ тенгламанинг мусбат илдизи топилсин.

Дастлаб функциянинг турли нуқталардаги ишорасини аниқлаймиз. Ҳисоблаш натижаларини биринчи жадвалда ҳисобларнинг олиб борилиш тартибида келтирамиз.

1- жадвал

x	0	1	2	1,5	1,8	1,9
$f(x)$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$

Жадвалдан кўринадики, функция $[1,2]$ кесмада ишорасини алмаштирар экан, бироқ бу кесма анча катта. Кесмани янада торайтириш $[1,8;\ 1,9]$ натижага олиб келади. Бу кесмада $f(x)$ функция учун 1- § даги 1) — — 3) шартлар бажарилади ва шу сабабли ватарлар усулини татбиқ қиламиз. Функциянинг қийматини ҳисоблаш қуйидаги натижани беради:

$$f(1{,}8) = 1{,}8^3 - 2\cdot(1{,}8)^2 + 3\cdot 1{,}8 - 5 = 5{,}832 - 2\cdot 3{,}24 + 3\cdot 1{,}8 - 5 = 5{,}832 - 6{,}48 + 5{,}4 - 5 = -0{,}248;$$

$$f(1{,}9) = 1{,}9^3 - 2\cdot(1{,}9)^2 + 3\cdot 1{,}9 - 5 = 6{,}859 - 2\cdot 3{,}61 + 3\cdot 1{,}9 - 5 = 6{,}859 - 7{,}22 + 5{,}7 - 5 = 0{,}339.$$

(1.6) формулага асосан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x_1^{(1)} = 1{,}9 - \frac{(1{,}9 - 1{,}8)}{0{,}839 + 0{,}248} = 1{,}843.$$

$x = 1{,}843$ бўлганда функциянинг қийматини ҳисоблаб, $f(1{,}843) = 0{,}00427 < 0$ эканлигини аниқлаймиз. Бундан илдизнинг $(1{,}843;\ 1{,}9)$ кесмада эканлиги келиб чиқади. Шу кесмага яна ватарлар усулини қўлланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x_1^{(2)} = 1{,}9 - \frac{(0{,}057 - 0{,}339)}{0{,}339 + 0{,}00427} = 1{,}8437.$$

Функция қийматини ҳисоблаш қуйидаги натижани беради:

$$f(1{,}8437) = 1{,}9437^3 \quad 2\cdot 1{,}8437^2 + 3\cdot 1{,}8437 - 5 = 6{,}2660 - 6{,}7984 + 5{,}5301 - 5 = -0{,}0023 < 0;$$

$$f(1{,}8438) = 1{,}8438^3 - 2\cdot 1{,}8438^2 + 3\cdot 1{,}8438 - 5 = 6{,}2682 - 2\cdot 3{,}3996 + 3\cdot 1{,}8438 - 5 = 0{,}0002 > 0.$$

Илдизни $x = 1{,}84375$ деб олсак, йўл қўйиладиган хатолик 0,0005 дан кичик эканлигини кўрамиз.

Ватарлар усулини ўрганишни давом эттиришни келгуси параграфгача тўхтатиб, уринмалар усулининг элементар баёнига киришамиз. Уринмалар усулини *Ньютон усули* деб ҳам юритилади.

$f(x)=0$ тенглама берилган бўлсин. $[a,b]$ кесмадан бирор c нуқта оламиз ва бу нуқтада функция графигига уринма ўтказамиз. Уринма $(c,f(c))$ нуқтадан ўтганлиги учун унинг тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$y-f(c)=f'(c)(x-c).$$

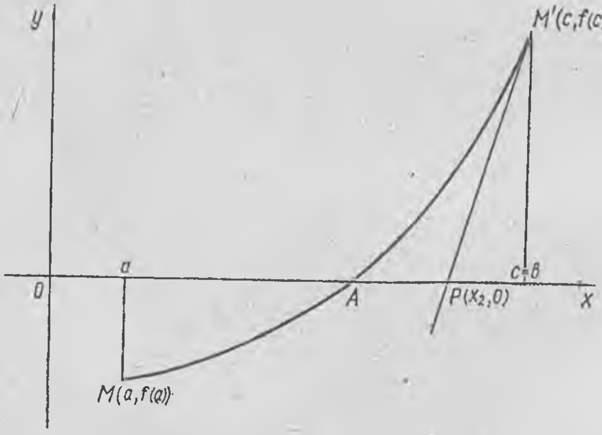
$f(x)=0$ тенгламанинг тақрибий илдизи учун уринманинг Ox ўқ билан кесишган нуқтасининг абсциссасини оламиз. Уни топиш учун тенгламада $y=0$ деймиз ва тегишли абсциссани ҳисоблаймиз:

$$x_2=c-\frac{f(c)}{f'(c)} \tag{1.7}$$

(2.3- расмга қаранг, у ерда $c=b$ деб олинган).

Энди c нуқтани танлаш масаласи қолди. 2.3- расмда $c=b$ деб олинган. Бу ҳолда кўриш қийин эмаски $f'(c)>0$ ва $f''(c)>0$ бўлади, чунки эгри чизиқ ботиқ. Одатда $c=a$ ёки $c=b$ деб олинади, бунда функциянинг биринчи тартибли ҳосиласининг ишораси ва функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласининг ишораси бир хил бўлиши шарт, яъни c нуқтани шундай танлаш шартки,

$$f'(c)f''(c)>0$$



2. 3-расм.

бўлсин. Бу ҳолда $f(x) = 0$ тенгламанинг уринмалар усули билан изланаётган тақрибий илдизи $[a, b]$ кесмада бўлишини, яъни

$$a < x_2 < b$$

бўлишини қуйида исбот қиламиз.

Илдизни аниқроқ топиш учун худди ватарлар усулидагидек, $[a, x_2]$ ёки $[x_2, b]$ кесмалардан бирини танлаймиз ва яна уринмалар усулини татбиқ қиламиз.

2- мисол. 1- мисолдаги тенгламани олайлик:

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0.$$

Бу ерда $f'(x) = 3x^2 - 4x + 3 > 0$ ва $f''(x) = 6x - 4 > 0$, чунки биз $[1,8;\ 1,9]$ кесмани танладик. Агар $c = a$ деб олсак, у ҳолда $f(c) f''(c) < 0$ бўлади, чунки $f(1,8) < 0$. Агар $c = b$ деб олсак, $f(c) f''(c) > 0$ бўлади, демак, уринмани $c = b$ нуқтадан ўтказиш керак экан. (5) формулага асосан қуйидагини топамиз:

$$x_2^{(1)} = 1,9 - \frac{0,339}{6,23} = 1,846;$$

$f(1,846) = 1,846^3 - 2 \cdot 1,846^2 + 3 \cdot 1,846 - 5 = 6,2912 - 2 \cdot 3,408 + 3 \cdot 1,846 - 5 = 0,0132$ бўлгани учун $[1,8;\ 1,846]$ кесмада уринмалар усулини қўлланиш мумкин. Бунда $c = 1,846$ деб олиш керак. Яна (1.7) формулага асосан қуйидагини топамиз:

$$x_2^{(2)} = 1,846 - \frac{0,0132}{5,8391} = 1,8438.$$

1- мисолда кўрганимиздек, бу ерда хатолик 0,0001 дан катта эмас.

3- §. Итерация усули

Кўп ҳолларда тенгламани ечишда итерация (қайтариш) усули жуда қулай ҳисобланади. Бу усулни қўлланиш учун берилган тенгламани

$$x = \varphi(x) \tag{1.8}$$

кўринишда ёзиб олиш керак. Айтайлик, бирор усулда илдизни яккалаш интервали $[a, b]$ топилган бўлсин. x_0 учун шу кесманинг ихтиёрий нуқтасини оламиз (нолинчи яқинлашиш). Навбатдаги яқинлашишга ўтиш учун (1.8) ифоданинг ўнг томонида x_1 ўрнига x_0 ни қўямиз:

$$x_1 = \varphi(x_0).$$

Навбатдаги яқинлашиш қуйидагича давом этади:

$$\begin{aligned} x_2 &= \varphi(x_1), \\ x_3 &= \varphi(x_2), \\ &\cdots\cdots \\ x_n &= \varphi(x_{n-1}). \end{aligned}$$

Агар $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ кетма-кетлик $\overline{x}$ лимитга эга бўлса, яъни $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$ бўлса, $\overline{x}$ тенгламанинг илдизи бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $\varphi(x)$ ни узлуксиз функция деб қуйидагига эга бўламиз:

$$\overline{x} = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_{n-1}) = \varphi\left(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}\right) = \varphi(\overline{x}).$$

Демак, $\overline{x}$ тенгламанинг илдизи экан. Шу сабабли $\overline{x}_n$ лардан бирортасини тенгламанинг тақрибий илдизи деб қабул қилиш мумкин. Бироқ x_1 $x_2, \ldots, x_n, \ldots$ кетма-кетлик лимитга эга бўлмаслиги мумкин, бу ҳолда итерация усули мақсадга олиб келмайди. Қандай шарт бажарилганда итерация усули яқинлашувчи бўлишини билиш катта аҳамиятга эгадир. Бу ҳақда қуйидаги теорема ўринлидир.

Теорема. *Агар $[a, b]$ кесма $x = \varphi(x)$ тенгламанинг илдизини яккалаш интервали бўлиб, бу интервалнинг барча нуқталарида $\varphi'(x)$ ҳосила*

$$|\varphi'(x)| \leqslant M < 1 \tag{1.9}$$

тенгсизликни қаноатлантирса ва бунда $a \leqslant \varphi(x) \leqslant b$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда нолинчи яқинлашиш учун интервалнинг исталган нуқтаси олинганда ҳам итерация процесси яқинлашади.

Исбот. $x = \varphi(x)$ тенглама учун илдизни яккалаш интервали $[a, b]$ бўлсин. Фараз қилайлик, $\varphi(x)$ дифференциалланувчи ва унинг ҳосиласи теореманинг шартини қаноатлантирсин. $[a, b]$ кесмадан олинган ихтиёрий нуқта x_0 ва $x_1 = \varphi(x_0)$ бўлсин. Агар тенгламанинг аниқ илдизи $\overline{x}$ бўлса, Лагранж теоремасига кўра қуйидагини ёзамиз:

$$\overline{x} - x_1 = \varphi(\overline{x}) - \varphi(x_0) = (\overline{x} - x_0)\,\varphi'(\xi_0).$$

Бу ерда ξ нуқта $\bar{x}$ ва x_0 нуқталар орасида бўлади, яъни албатта $[a, b]$ кесмада бўлади. (1.9) тенгсизликка асосан қуйидагини ёзамиз:

$$|\bar{x} - x_1| = |\bar{x} - x_0||\varphi'(\xi_0)| \leqslant M|\bar{x} - x_0|.$$

Иккинчи яқинлашиш $x_2 = \varphi(x_1)$ учун (теореманинг шартига кўра x_2 $[a, b]$ кесмада бўлади) қуйидагига эга бўламиз:

$$\bar{x} - x_2 = \varphi(\bar{x}) - \varphi(x_1) = (\bar{x} - x_1)\varphi'(\xi_1).$$

Бу ерда ҳам ξ_1 $[a, b]$ кесмада бўлади. Аввалги тенгсизликка асосан кўрсатилган жараённи такрорлаб,

$$|\bar{x} - x_n| \leqslant |\bar{x} - x_0| M^n \tag{1.10}$$

эканлигини топамиз. $M < 1$ бўлгани учун $M^n \to 0$ ва, демак, $\lim\limits_{n \to \infty} (\bar{x} - x_n) = 0$, яъни $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \bar{x}$. Шундай қилиб, итерация процесси яқинлашувчи бўлиши учун қаралаётган кесмада $|\varphi'(x)| < 1$ бўлиши етарли. Бу ҳолда (1.10) тенгсизлик хатоликни баҳолаш имконини беради. $|x - x_0| < b - a$ бўлгани учун

$$|\bar{x} - x_n| < (b - a) M^n. \tag{1.11}$$

1- мисол. Итерация усули билан $4x - 5 \ln x = 5$ тенгламани ечамиз.

Тенгламани $\ln x = \frac{4x - 5}{5}$ кўринишда ёзиб оламиз. Нолинчи яқинлашиш учун $y = \ln x$ логарифмик эгри чизиқ ва $y = \frac{4}{5}x - 1$ тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтасининг абсциссасини оламиз (чизмани мустақил чизишни ўқувчига тавсия қиламиз). Илди нинг иккита тақрибий қийматини топамиз. Улар $x_0 = +2{,}28$ ва $x_0 = 0{,}57$. Бу сонларни нолинчи яқинлашиш учун қабул қиламиз. Катта илдизни топиш учун тенгламани

$$x = 1{,}25\ (1 + \ln x)$$

кўринишда ёзиб оламиз. Бу ерда $\varphi(x) = 1{,}25\,(1 + \ln x)$ бўлиб, функция катта илдиз атрофида мусбат ва бирдан кичик бўлгани учун итерация усули яқинлашувчи бўлади. Ҳисобларни қуйидаги жадвалда ёзамиз:

1- жадвал

№	x	$1+\ln x$	$1{,}25\,(1+\ln x)$
1	2,28	1,82418	2,28022
2	2,280022	1,82427	2,28034
3	2,28034	1,82432	2,28040
4	2,28040	1,82437	2,28044
5	2,28044	1,82435	2,28046
6	2,28046	1,82437	2,28046

Вергулдан кейинги олти хонагача аниқликда илдизни топиш учун олти „қадам“ ҳисоблаш керак бўлади. Яқинлашишнинг бундай тезлиги етарли деб ҳисоблаш мумкин. Бундай тез яқинлашишнинг сабаби шундаки, биринчидан, илдиз атрофида функциянинг ҳосиласи етарли кичик (0,55 га яқин) иккинчидан, нолинчи яқинлашиш қулай танланган. Кичик илдизни $x = 1{,}25\,(1+\ln x)$ ифода ёрдамида изланганда итерация процесси узоқлашади, чунки $\varphi'(x) = \frac{1{,}25}{x}$. Ҳосила $x = 0{,}57$ атрофида 2,2 га яқин бўлади. Шу сабабли дастлабки тенгламани $x = e^{0{,}8\,x-1}$ кўринишида ёзиб олиш керак. У ҳолда $\varphi(x) = e^{0{,}8\,x-1}$ ва $\varphi'(x) = 0{,}8\,e^{0{,}8\,x-1}$. Бу ерда ҳосила мусбат ва бирдан кичик (0,46 га яқин), демак, итерация процесси яқинлашади. 2- жадвалда келтирилган ҳисоблаш натижаларидан кўринадики, вергулдан кейин беш хонагача аниқликда илдизни ҳисоблаш учун 11 та қадам талаб қилинди. Бундай тезликни ҳам етарли деб ҳисоблаш мумкин. Бу ерда процесс, ҳосила кичик бўлса ҳам, аввалги ҳолдагидан секинроқ яқинлашади. Бунинг сабаби нолинчи яқинлашишнинг аввалги ҳолдагига нисбатан ноқулайроқ эканлигидадир. Биринчи ҳолда нолинчи яқинлашиш илдиздан 0,00046 га фарқ қилса, иккинчи ҳолда 0,01958 га фарқ қилади.

$f(x) = 0$ тенгламани итерация процесси яқинлашадиган қилиб $x = \varphi(x)$ кўринишда ёзиб олиш учун кўпинча қуйидагича йўл тутилади: $f(x) = 0$ ва $\lambda f(x) = 0$ тенгламалар тенг кучли тенгламалар бўлгани учун

$$\lambda f(x) + x = x \tag{1.12}$$

деб олиш мумкин. Шундай қилиб, (1.12) тенглама (1.8) тенглама кўринишига келади:

$$x = \varphi(x).$$

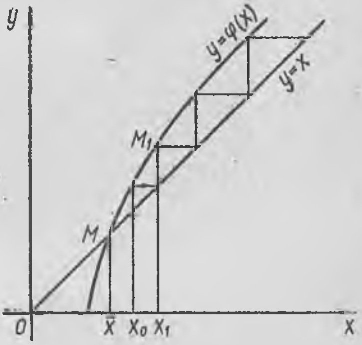
2- жадвал

№	x	$0,8\,x$	$0,8x-1$	$c0,8x-1$
1	0,57	0,456	— 0,544	0,58042
2	0,58042	0,46433	— 0,53567	0,58527
3	0,58527	0,46822	— 0,53178	0,58863
4	0,58863	0,47090	— 0,52910	0,58913
5	0,58913	0,47130	— 0,52870	0,58935
6	0,58935	0,47148	— 0,52852	0,58947
7	0,58947	0,47158	— 0,52842	0,58953
8	0,58953	0,47162	— 0,52838	0,58956
9	0,58956	0,47165	— 0,52835	0,58957
10	0,58957	0,47166	— 0,52834	0,58958
11	0,53958	0,47166	— 0,52834	0,58958

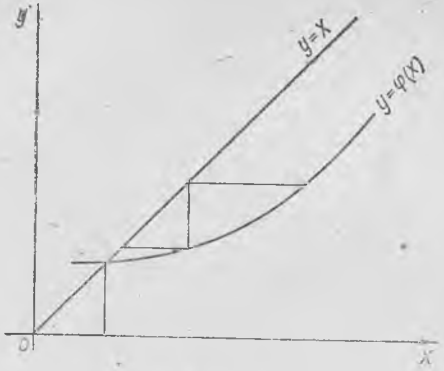
λ параметр ихтиёрийлигидан фойдаланиб, уни

$$\varphi'(x) = \lambda f'(x) + 1$$

бўладиган қилиб танлаш керак. Шу ҳолда итерация процесси яқинлашувчи бўлади. Итерация процессининг геометрик маъноси қизиқарлидир. $y = \varphi(x)$ ва $y = x$ функцияларнинг графикларини чизамиз (2.4- расм). Тенгламанинг илдизи $y = \varphi(x)$ эгри чизиқ билан координаталар бурчаги биссектрисасининг кесишиш нуқтасининг абсциссаси бўлади. Агар x_0 — нолинчи яқинлашишнинг абсциссаси бўлса, у ҳолда $x_1 = \varphi(x_0)$ эгри чизиқнинг мос нуқтасининг ординатаси ёки, бошқача айтганда, M_1 нуқтанинг абсциссаси бўлади. Шунга ўхшаш навбатдаги яқинлашишлар ҳам топилади. Бу ерда $|\varphi'(x)| < 1$ тенгсизликнинг ролини ҳам кўриш мумкин. 2.5- расм



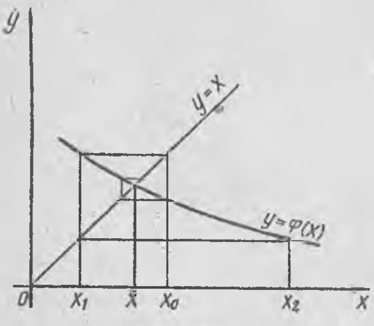
2. 4-расм.



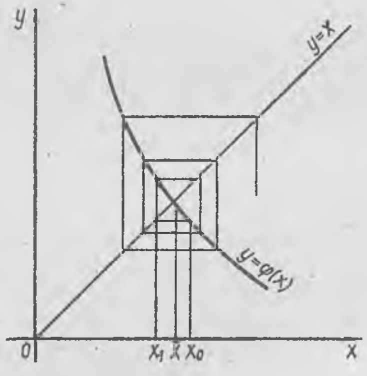
2. 5-расм.

$0 < \varphi'(x) < 1$ бўлган ҳолни тасвирлайди, бу ерда эгри чизиқ биссектрисани чапдан ўнгга кесиб ўтганда ўнг томонда эгри чизиқ биссектрисадан пастда бўлади. Бу ҳолда итерация процесси яқинлашади; агар $x_0 > \overline{x}$ бўлса, итерация процесси монотон камаяди, агар $x_0 < \overline{x}$ бўлса, итерация процесси монотон ўсади.

2.4- расмда $\varphi'(x)\ 1$ бўлган ҳол тасвирланган. Бу ерда эгри чизиқ биссектрисани чапдан ўнгга кесиб ўтганда пастдан юқорига ўтади. 2.6 ва 2.7- расмларда $\varphi'(x) < 0$ бўлган ҳоллар тасвирланган. Агар бу ҳолда



2.6-расм.



2.7-расм.

$|\varphi'(x) < 1$ (2.6- расм) бўлса, итерация процесси яқинлашади, лекин яқинлашишлар илдизнинг аниқ қиймати атрофида тебранади. Агар бу ҳолда $|\varphi'(x)| > 1$ (2.7- расм) бўлса, итерация процесси узоқлашади.

4- §. Тенгламалар системаси учун уринмалар усули

Тенгламаларни ечишнинг юқорида кўрилган усуллари бир нечта номаълумли тенгламалар системалари учун ҳам ишлаб чиқилиши мумкин. Тенгламалар системаси

$$\left.\begin{aligned} f(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.13)$$

кўринишда бўлсин. Фараз қилайлик, бу система ечимларининг бошланғич яқинлашишлари x_0 ва y_0 маълум бўлсин. Бу қийматларга тегишли тузатмалар излаймиз. Тузатмаларни мос равишда x ва y дейлик. Унда (1.13) системанинг аниқ ечими $x = x_0 + h$, $y = y_0 + k$ бўлар эди. Шундай қилиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\left.\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) = 0, \\ \varphi(x_0 + h, y_0 + k) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.14)$$

f ва φ функцияларни h ва k нинг даражалари бўйича Тейлор қаторига ёямиз:

$$\left.\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + h\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + k\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 + 0_1(h,k), \\ \varphi_0(x_0+h, y_0+k) = \varphi(x_0, y_0) + h\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 + k\left(\frac{\partial y}{\partial y}\right)_0 + 0_2(h_1 k). \end{aligned}\right| (1.15)$$

Бу ерда $(\ )_0$ белгилаш ҳосиланинг (x_0, y_0) нуқталарда олинаётганини, 0_1 (h, k) ва 0_2 (h, k) белгилашлар эса h ва k га нисбатан юкори тартибли кичик миқдорлар борлигини кўрсатади. (1.15) да h ва k га нисбатан юқори тартибли кичик миқдорларни ташлаб юбориб, h ва k нинг тақрибий қийматини топиш учун ушбу (4) тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\left.\begin{aligned} f(x_0, y_0) + h_1\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + k_1\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 0, \\ \varphi(x_0, y_0) + h_1\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 + k_1\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.16)$$

(1.16) системани ечиб, тузатмалар учун қуйидагиларни топамиз:

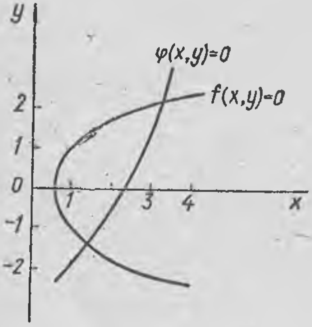
$$h_1 = \frac{\begin{vmatrix} -f(x_0, y_0) & \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \\ -\varphi(x_0, y_0) & \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 \end{vmatrix}}, \quad k = \frac{\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 & -f(x_0, y_0) \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 & -\varphi(x_0, y_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 \end{vmatrix}}. \qquad (1.17)$$

Шу сабабли x_0 ва y_0 га қараганда аниқроқ

$$x_1 = x_0 + h_1, \quad y_1 = y_0 + k_1$$

қийматларни ҳосил қиламиз. x_1 ва y_1 ларни юқоридаги усулда яна яқинлаштириш мумкин. Бу усул *уринмалар усули* ёки *Ньютон усули* дейилади.

1- мисол. $\left.\begin{aligned} x + 3\lg x - y^2 = 0, \\ 2x^2 - xy - 5x + 1 = 0 \end{aligned}\right\}$



2. 8-расм.

тенгламалар системасининг ҳақиқий ечимини топамиз: $f(x, y) = x + 3\lg x - y^2 = 0$ ва $\varphi(x,y) = 2x^2 - xy - 5x + 1 = 0$ эгри чизиқларни чизамиз ва бу эгри чизиқлар кесишган нуқталарни топамиз (2.8-расм). Бундай нуқталар $(+1{,}4; -1{,}4)$ ва $(3{,}4; 2{,}2)$ бўлади. Бу нуқталардан иккинчисини оламиз ва илдизлар учун тузатмаларни Ньютон усули билан топамиз: $x_0 = 3{,}4$ $y_0 = 2{,}2$ ва

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \frac{3}{x \ln 10}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 4x - y - 5, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -x$$

бўлади. Қаралаётган нуқтада функцияларнинг ва унинг ҳосилаларининг қийматларини ҳисоблаймиз:

$$f(3,4;\ 2,2) = 0,1545, \qquad \varphi(3,4;2,2) = -0,3600,$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = 1,383, \qquad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 = 6,400,$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = -4,400, \qquad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 = -3,4.$$

Шундай қилиб, (1.16) система бу ҳолда қуйидаги кўринишда булади:

$$\begin{aligned} 0,1545 + 1,383\,h_1 - 4,4k_1 &= 0, \\ -0,36 + 6,4\,h_1 - 3,4\,k_1 &= 0. \end{aligned}$$

(1.17) формула бўйича бу системанинг ечимини топамиз:

$$h_1 = \frac{\begin{vmatrix} -0,1545 & -4,4 \\ -0,36 & -3,4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1,383 & -4,4 \\ 0,4 & -3,4 \end{vmatrix}} = 0,083, \quad k_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1,383 & -0,1545 \\ 6,4 & -0,36 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1,383 & -4,4 \\ 6,4 & -3,4 \end{vmatrix}} = 0,63.$$

Илдизлар учун биринчи яқинлашиш қуйидагича бўлади:

$$\begin{aligned} x_1 &= 3,4 + 0,089 = 3,489, \\ y_1 &= 2,2 + 0,063 = 2,263. \end{aligned}$$

Олинган илдизларни дастлабки деб ҳисоблаб, яна битта қадам қўйиш мумкин:

$$f(3,489;\ 2,263) = -0,0041, \qquad \varphi = (3,489;\ \ 2,263) = 0,0056,$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 = 1,3734, \qquad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_1 = 6,6930,$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right) = -4,526, \qquad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_1 = -3,489.$$

Топилган қийматларни (1.17) га қўйиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$h_2 = -0,0016, \quad k_2 = 0,0014.$$

Бу ердан

$$\begin{aligned} x_2 &= 3,489 - 0,0016 = 3,4874, \\ y_2 &= 2,263 - 0,0014 = 2,2616. \end{aligned}$$

Яна юқоридаги ишларни бир марта такрорласак, 0,0001 дан кичик тузатма оламиз.

5- §. Тенгламалар системаси учун итерациялар усули

Ушбу

$$\left.\begin{aligned} f(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.17)$$

тенгламалар системаси берилган бўлсин ва x_0, y_0 лар илдизлар учун биринчи яқинлашишлар бўлсин. Системани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\left.\begin{aligned} x = F(x, y), \\ y = \Phi(x, y). \end{aligned}\right\} \qquad (1.18)$$

(1.18) тенгламаларнинг ўнг томонида x ва y ўрнига x_0 ва y_0 ни қўямиз ва биринчи яқинлашишни топамиз:

$$x_1 = F(x_0, y_0),$$
$$y_1 = \Phi(x_0, y_0).$$

Шунга ўхшаш, иккинчи яқинлашиш топилади:

$$x_2 = F(x_1, y_1).$$
$$y_2 = \Phi(x_1, y_1),$$

ва умуман,

$$x_n = F(x_{n-1}, y_{n-1}),$$
$$y_n = \Phi(x_{n-1}, y_{n-1}).$$

Кўрсатиш мумкинки, агар $F(x, y)$ ва $\Phi(x, y)$ функциялар узлуксиз бўлиб, $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ва $y_1, y_2, \ldots y_n, \ldots$ кетма-кетликлар яқинлашса, у ҳолда шу кетма-кетликларнинг лимитлари берилган системанинг ечими бўлади.

Энди итерация процесси яқинлашувчи бўладиган шартни кўрамиз.

Теорема. $\overline{x}$ ва $\overline{y}$ (1.18) *система ечимларининг аниқ қиймати ва* $a < \overline{x} < b, c < \overline{y} < d$ *бўлсин ҳамда* $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$ *тўғри тўртбурчакда системанинг бошқа ечимлари бўлмасин. У ҳолда агар бу тўғри тўртбурчакда қуйидаги*

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| \leqslant p_1, \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \leqslant q_1, \left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right| \leqslant p_2, \left|\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right| \leqslant q_2,$$

$$p_1 + p_2 \leqslant M < 1 \text{ ва } q_1 + q_2 \leqslant M < 1$$

тенгсизликлар бажарилса, итерация процесси нолинчи яқинлашиш учун тўғри тўртбурчакнинг исталган нуқтаси олинганда ҳам яқинлашади.

Исбот. $\bar{x} = F(\bar{x}, \bar{y})$ ва $\bar{y} = \Phi(\bar{x}, \bar{y})$ бўлгани сабабли икки ўзгарувчили функциялар учун Лагранж формуласига асосан қуйидагига эга бўламиз:

$$\bar{x} - x_1 = F(\bar{x}, \bar{y}) - F(x_0, y) - \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_P (\bar{x} - x_0) +$$
$$+ \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_P (\bar{y} - y_0),$$

$$\bar{y} - y_1 = \Phi(\bar{x}, \bar{y}) - \Phi(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_Q (\bar{x} - x_0) +$$
$$+ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_Q (\bar{y} - y_0),$$

бу ерда P ва Q лар $(\bar{x}, \bar{y})$ ва (x_0, y_0) нуқталардан ўтказилган кесмадаги нуқталар бўлиб, улар ўз-ўзидан $a < x < b$, $c < y < d$ тўғри тўртбурчак ичида бўлади. Теореманинг шартига асосан $\bar{x} - x_1$ ва $\bar{y} - y_1$ ларни баҳолаймиз:

$$|\bar{x} - x_1| \leqslant |\bar{x} - x_0| p_1 + |\bar{y}_0 - y_0| q_1,$$
$$|\bar{y} - y_1| \leqslant |\bar{x} - x_0| p_2 + |\bar{y} - y_0| q_2.$$

Бу икки тенгсизликни ҳадлаб қўшамиз:

$$|\bar{x} - x_1| + |\bar{y} - y_1| \leqslant M\{|\bar{x} - x_0| + |\bar{y} - y_0|\}.$$

Шунга ўхшаш мулоҳаза юритиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$|\bar{x} - x_2| + |\bar{y} - y_2| \leqslant M\{|\bar{x} - x_1| + |\bar{y} - y_1|\} \leqslant$$
$$\leqslant M^2\{|\bar{x} - x_0| + |\bar{y} - y_0|\};$$

ва, умуман, n-яқинлашиш учун қуйидаги тенгсизлик келиб чиқади:

$$|\bar{x} - x_n| + |\bar{y} - y_n| \leqslant M^n\{|\bar{x} - x_0| + |\bar{y} - y_0|\}. \quad (1.19)$$

$M < 1$ бўлгани учун етарли катта n олиб, тенгсизликнинг ўнг томонини исталганча кичик қилиш мумкин, яъни қўшилувчилар $\bar{x} - x_n$ ва $\bar{y} - y_n$ нинг ҳар бири нолга интилади, демак, итерация процесси яқинлашади.

(1.19) тенгсизликдан хатоликни баҳолашда фойдаланиш мумкин:

$$|\bar{x} - x_0| < b - a \text{ ва } |\bar{y} - y_0| < d - c,$$

у ҳолда

$$|\bar{x} - x_n| + |\bar{y} - y_n| < M^n (b - a + d - c).$$

Мисол. Аввалги мисолдаги тенгламалар системасини итерация усулида ечамиз:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y) &= x + 3\lg x - y^2 = 0, \\ \varphi(x, y) &= 2x^2 - xy - 5x + 1 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Аввало системани (1.18) кўринишга келтирамиз. Буни турли усуллар билан бажариш мумкин. Агар системани

$$x = y^2 - 3\lg x,$$
$$y = 2x + \frac{1}{x} - 5$$

кўринишда ёзсак, у ҳолда $F(x, y) = y^2 - 3\lg x$ ва $\Phi(x, y) = 2x + \frac{1}{x} - 5$ бўлади. Бу ердан ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{3\lg e}{x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2 - \frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0.$$

$x_0 = 3{,}4$, $y_0 = 2{,}2$ нуқта атрофида қуйидаги тенгсизликлар ўринлидир:

$$\left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| > 1, \quad \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| > 4.$$

Бундан кўринадики, системани юқоридаги кўринишда олсак, итерация процесси узоқлашар экан.

Иккинчи тенгламадан x ни, биринчи тенгламадан y ни топамиз:

$$x = \sqrt{\frac{x(5 - y) - 1}{2}}; \qquad F(x, y) = \sqrt{\frac{x(5 + y) - 1}{2}},$$

$$y = \sqrt{x + 3\lg x}; \qquad \Phi(x, y) = \sqrt{x + 3\lg x},$$

бу ерда:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{5 + y}{2\sqrt{x(5 + y) - 1}}; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x}{2\sqrt{x(5 + y) - 1}},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1 + \frac{3\lg e}{x}}{2\sqrt{x + 3\lg x}}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0.$$

Илдизни яккалаш соҳаси учун $3 < x < 4$, $2 < y < 2{,}5$ ни олиш мумкин. Бу тўғри тўртбурчакда қуйидаги тенгсизликлар ўринли бўлади:

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| < 0{,}60, \quad \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| < 0{,}32, \quad \left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right| < 0{,}34.$$

Демак, итерация процесси яқинлашади, лекин ҳосилалар йиғиндиси анча катта бўлгани учун яқинлашиш тезлиги кам бўлади. $x_0 = 3{,}4$; $y_0 = 2{,}2$ билан ҳисоблар қуйидаги натижаларни беради;

$$x_1 = \sqrt{\frac{3{,}4\,(2{,}2+5)-1}{2}} = 3{,}426,$$

$$y_1 = \sqrt{3{,}425 + \lg 3{,}426} = 2{,}243;$$

$$\begin{aligned} x_2 &= 3{,}451, & y_2 &= 2{,}2505; \\ x_3 &= 3{,}466, & y_3 &= 2{,}255; \\ x_4 &= 3{,}475, & y_4 &= 2{,}258; \\ x_5 &= 3{,}480, & y_5 &= 2{,}259; \\ x_6 &= 3{,}483, & y_6 &= 2{,}260. \end{aligned}$$

6- §. Алгебраик тенглама бўлган ҳол

Илгариги параграфларда кўрилган тенгламаларни ечиш усулларини барча тенгламалар учун ҳам татбиқ қилиш мумкин. Шу билан бирга алгебраик тенгламалар учун махсус усулларни кўрсатиш мумкин. Бу усуллар $f(x) = 0$ алгебраик тенгламанинг илдизларини ажратишга ва уларнинг тақрибий қийматларини топишга ёрдам беради. (1.1) тенглама n-даражали алгебраик тенглама бўлсин:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0. \qquad (1.20)$$

Даставвал биз бу тенгламанинг барча ҳақиқий ва комплекс илдизларининг чегарасини кўрсатамиз. Бу чегаралар қуйидаги теорема орқали топилади.

Теорема. $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|$ *сонлардан энг каттаси* A *бўлсин. Агар*

$$|x| \geqslant 1 + \frac{A}{|a_0|} \qquad (1.21)$$

бўлса у ҳолда

$$|a_0 x^n| > |a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n| \qquad (1.22)$$

бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, (1.21) дан қуйидагини топамиз:

$$|x|-1 \geqslant \frac{A}{|a_0|}$$

ёки

$$|a_0| \geqslant A\frac{1}{|x|-1},$$

бундан

$$|a_0x^n| \geqslant A\frac{|x|^n}{|x|-1}. \tag{1.23}$$

Иккинчи томондан

$$|a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n| \leqslant |a_1||x|^{n-1}+ \\ +|a_2||x|^{n-2}+\ldots+|a_{n-1}||x|+|a_n| \leqslant A(|x|^{n-1}+ \\ +|x|^{n-2}+\ldots+|x|+1) = A\frac{|x|^n-1}{|x|-1}.$$

(1.21) дан $|x|>1$ келиб чиқади. Шу сабабли

$$\frac{|x|^n-1}{|x|-1} < \frac{|x|^n}{|x|-1} \tag{1.24}$$

ва

$$|a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n| < A\frac{|x|^n}{|x|-1}.$$

(1.23) ва (1.24) тенгсизликларни солиштириш исбот қилиниши лозим бўлган (1.22) тенгсизликка олиб келади.

Агар x (1.20) тенгламанинг илдизи бўлса, у ҳолда қуйидаги тенглик ўринли бўлиши керак:

$$|a_0x^n| = |a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n|.$$

Шунинг учун x нинг (1.21) ни қаноатлантирувчи қийматлари (1.22) муносабатга кўра (1.20) алгебраик тенгламанинг илдизлари бўлмайди. Демак, (1.20) алгебраик тенгламанинг илдизлари

$$|x| < 1+\frac{A}{|a_0|} \tag{1.25}$$

тенгсизликни қаноатлантиради. $N=1+\frac{A}{|a_0|}$ сон алгебраик тенглама илдизлари модулларининг энг юқори чегараси бўлади.

Агар гап тенгламанинг фақат ҳақиқий илдизлари устида борса, илдизларнинг чегараси учун (1.25) га нисбатан аниқроқ чегаралар топиш мумкин.

Аввал айтиб ўтилганидек, тенгламанинг фақат мусбат илдизлари билан чегараланиб қолиш кифоя, чунки $f(x)=0$ тенгламанинг манфий илдизларини топиш учун $f(-x)=0$ тенгламанинг мусбат илдизларини топиш кифоя.

Айтайлик, $a_0>0$ бўлсин. Ҳамма коэффициентлар мусбат бўлганда тенглама мусбат илдизга эга бўлмас эди, чунки ихтиёрий $x>0$ учун $f(x)>0$ бўлар эди. Тенгламанинг мусбат илдизи бор бўлиши учун коэффициентлар орасида манфийлари ҳам бўлиши керак. a_k $(k\geqslant 1)$ биринчи манфий коэффициент бўлсин. Манфий коэффициентлардан абсолют қиймат жиҳатдан энг каттасини B билан белгилайлик. У ҳолда (1.20) тенгламанинг мусбат илдизларининг чегараси бўлиб,

$$1+\sqrt[k]{\frac{B}{a_0}} \tag{1.26}$$

сон хизмат қилади.

(1.20) тенгламанинг мусбат ечимларининг қуйи чегарасини топиш учун x ни $\frac{1}{x}$ га алмаштирамиз. Унда ушбу янги тенглама ҳосил бўлади:

$$\frac{a_0}{x^n}+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{x}+a_n=\frac{1}{x^n}(a_0+a_1x+\ldots+$$
$$+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n)=0.$$

Бу тенгламанинг илдизлари аввалги тенглама илдизларининг тескарисидир (доимо $a_n\neq 0$ деб ҳисоблаш мумкин, чунки берилган тенглама $x=0$ ечимга эга эмас).

Агар

$$a_0+a_1x+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n=0 \tag{1.27}$$

тенгламанинг мусбат илдизларининг юқори чегараси k бўлса, $\frac{1}{k}$ шу тенгламанинг мусбат илдизларининг энг қуйи чегараси бўлади.

Шуни унутмаслик керакки, кўпҳаднинг мусбат илдизларининг чегараларини кўрсатиш шундай илдизлар бор деган гап эмас.

$f(x)$ кўпҳаднинг қийматларини Горнер схемаси бўйича ҳисоблаш мумкин. $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+$ $+a_{n-1}x+a_n$ кўпҳадни $(x-\alpha)$ иккиҳадга бўлиб, $f(x)=$ $=(x-\alpha)\varphi(x)+r$ ни ҳосил қиламиз. Бу ерда $x-\alpha$ бўлинма ва $r=f(\alpha)$ қолдиқ бўлиб, у, x га боғлиқ эмас.

$$\varphi(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-2} x + b_{n-1} \text{ ва}$$
$$r = f(\alpha) = b_n$$

десак,

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x a_n \equiv (x - \alpha)(b_0 x^{n-1} + $$
$$+ b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-2} x + b_{n-1}) + b_n.$$

Ўнг томондаги қавсни очиб, ўнг ва чап томондаги x нинг бир хил коэффициентларини тенглаштирсак, b_1, $b_2, \ldots, b_n$ коэффициентларни аниқлаш учун ушбу алгебраик тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0, \\ b_1 &= b_0 \alpha + a_1, \\ b_2 &= b_1 \alpha + a_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ b_n &= b_{n-1} \alpha + a_n. \end{aligned}$$

Ҳисоблашларни қуйидаги схемада ёзилади:

$$\begin{array}{c|c} - & a_0\, a_1\, a_2\, \ldots\, a_n \\ \hline \alpha & b_0\, b_1\, b_2\, \ldots\, b_n \end{array}$$

Қуйи қатордаги сонлар кетма-кет чапдан ўнгга қараб ҳисобланади: ҳар бир b_k коэффициент ўзининг устидаги коэффициент a_{k-1} билан ундан олдинги коэффициент b_{k-1} ва α нинг кўпайтмасининг йиғиндисига тенг. $f(x)$ нинг $x = \alpha$ бўлгандаги қиймати $f(\alpha) = b_n$ бўлади.

1- мисол. $x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 + 7x - 3 = 0$ алгебраик тенгламани қараймиз. Бу ерда $a_0 = 1$, $A = 8$ бўлиб, (1.25) тенгсизликнинг ўнг томони $1 + \frac{8}{1} = 9$ бўлгани учун бу тенгламанинг илдизлари абсолют қиймати бўйича 9 дан катта бўлмайди. Тенгламанинг биринчи манфий коэффициенти $\lambda_2 = -5$, $k = 2$, $B = 7$ бўлгани учун (1.26) га асосан илдизларнинг энг юқори чегараси $1 + \sqrt{\frac{7}{1}} = 3{,}63$ бўлади. Илдизларнинг қуйи чегарасини топиш учун (1.27) тенгламани тузамиз:

$$-3x^5 - 7x^4 + 8x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Энг катта даражанинг коэффициенти мусбат бўлиши керак. Шунинг учун охирги тенгламанинг иккала томонини -1 га кўпайтирамиз:

$$3x^5 + 7x^4 - 8x^3 + 5x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Бу тенгламада $a_0 = 3$, $k = 2$, $B = 8$. Шу сабабли мусбат илдизларнинг юқори чегараси $1 + \sqrt{\frac{8}{3}} = 2{,}64$. Энди дастлабки тенглама мусбат илдизларининг қуйи чегараси $\frac{1}{2{,}64} = 0{,}38$ бўлади. Шундай қилиб, агар тенгламанинг мусбат илдизлари мавжуд бўлса, бу илдизлар $0{,}38 < x < 3{,}63$ тенгсизликни қаноатлантирадиган бўлади.

Манфий илдизларнинг чегараларини топиш учун тенгламада x ни $-x$ га алмаштирамиз. У ҳолда қуйидаги тенглама келиб чиқади:

$$-x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 7x - 3 = 0$$

ёки

$$x^5 - 2x^4 - 5x^3 - 8x^2 - 7x + 3 = 0.$$

Бу ерда $a_0 = 1$, $k = 1$, $B = 8$ бўлгани учун мусбат илдизларнинг юқори чегараси $1 + \frac{8}{3} = 3{,}67$ га тенг, қуйи чегараси эса $\frac{1}{3{,}67} = 0{,}26$ бўлади. Шундай қилиб, дастлабки тенглама манфий илдизларининг чегараси $-9 < x < -0{,}26$ бўлади.

Тенгламанинг мусбат илдизини топамиз. $f(0) = -3$, $f(1) = -4$, $f(2) = 39$ бўлгани учун илдиз $(1, 2)$ ораликда ётади. x нинг аниқроқ қиймати учун Горнер схемасидан фойдаланамиз. $x = 1{,}4$ бўлсин. У ҳолда

	1	2	-5	8	-7	-3
1,4	1	$1 \cdot 1{,}4 + 2 = 3{,}4$	$3{,}4 \cdot 1{,}4 - 5 = -0{,}24$	$-0{,}24 \cdot 1{,}4 + 8 = 7{,}66$	$7{,}66 \cdot 1{,}4 - 7 = 3{,}72$	$3{,}72 \cdot 1{,}4 - 3 = 2{,}21$

$f(1{,}4) = 2{,}21 > 0$. Яна $x = 1{,}3$ учун ҳисоблашларни бажарамиз:

	1	2	-5	8	-7	-3
1,3	1	3,3	$-0{,}71$	7,09	2,22	$-0{,}11$

$f(1{,}3) = -0{,}11$. Шундай қилиб, тенгламанинг илдизи $(1{,}3;\ 1{,}4)$ оралиқда ётади. Илдизни янада аниқлаштиришни илгари кўрилган, масалан, уринма, ватарлар ёки итерация усуллари билан амалга ошириш мумкин.

I боб

ИНТЕРПОЛЯЦИЯЛАШ

1- §. Интерполяциялаш ҳақида тушунча

Функцияларни интерполяциялаш жадвал тузишга нисбатан тескари масаладир. Функция қийматларининг жадвали тузилганда функциянинг аналитик ифодаси бўйича унинг қийматлари топилади, интерполяциялашда эса, аксинча, функциянинг жадвалдаги қийматлари бўйича унинг аналитик ифодаси тузилади.

Айтайлик, $y = f(x)$ функциянинг фақат жадвалдаги қийматлари берилган бўлсин, яъни аргумент x_0, x_1, . . . , x_n бўлганда функциянинг қийматлари y_0, y_1, . . . , y_n маълум бўлсин:

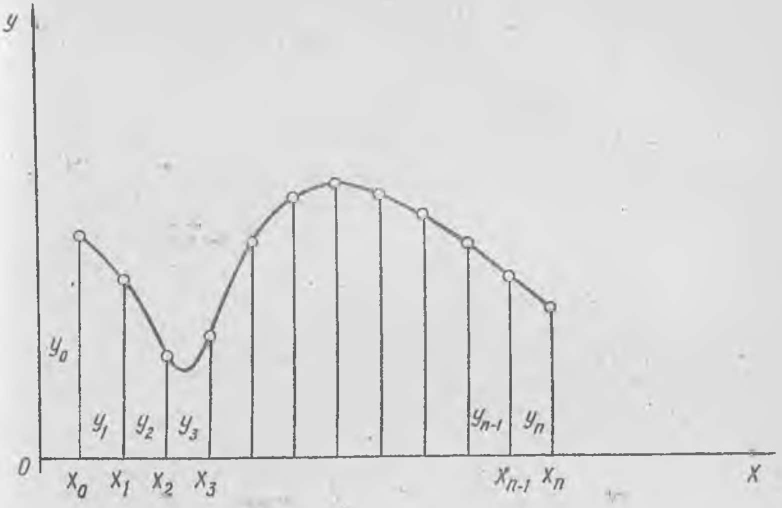
$$\begin{aligned} f(x_0) &= y_0, \\ f(x_1) &= y_1, \\ &\ldots\ldots \\ f(x_n) &= y_n. \end{aligned}$$

Функциянинг маълум қийматларига кўра унинг аналитик ифодасини топиш масаласи, геометрик нуқтаи назардан, (x_0, y_0), (x_1, y_1), . . . , (x_n, y_n) нуқталар берилганда, бу нуқталар орқали ўтувчи эгри чизиқни топишни билдиради (2.9- расм). Берилган нуқталардан чексиз кўп эгри чизиқлар ўтказиш мумкинлиги ўқувчига равшан бўлиши керак. Шундай қилиб, $f(x)$ функциянинг қийматларига кўра унинг аналитик ифодасини топиш масаласи жуда кўп ечимларга эгадир, яъни бундай функцияларни чексиз кўп тузиш мумкин.

Берилган нуқталарда берилган қийматларни қабул қилувчи исталган функцияни $F(x)$ билан белгилаймиз. Юқорида айтиб ўтилганидек, $F(x)$ функциялар исталганча кўп бўлиши мумкин.

Фараз қилайлик, $F(x)$ функция ихтиёрий бўлмай, баъзи шартларни қаноатлантириши керак бўлсин, унда бу функцияни топиш анчагина аниқ масалага айланиб қолади. Кўпинча, $F(x)$ функция даражаси изланаётган функциянинг берилган қийматлари сонидан битта кам бўлган кўпҳад бўлиши талаб қилинади.

Шундай қилиб, биз қуйидаги кўринишдаги масалага келдик. $f(x)$ нинг x_0, x_1, . . . , x_n ва $y = y_0$, y_1, . . . ,



2.9-расм.

y_n қийматлари учун шундай $y = F(x)$ кўпҳад топиш керакки, бу кўпҳад n-даражали бўлсин ва қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

$$\left.\begin{array}{c} F(x_0) = y_0, \\ F(x_1) = y_1, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ F(x_n) = y_n. \end{array}\right\}$$

Бошқача айтганда, бу ерда, берилган нуқталарда берилган қийматларни қабул қилувчи кўпҳадни топиш масаласи қўйилган экан. Бундай масала *интерполяциялаш* дейилади, нуқталарни интерполяциянинг *тугунлари* дейилади.

Юқоридаги шартларни қаноатлантирувчи $F(x)$ функцияни *интерполяцион кўпҳад* дейилиб, бу кўпҳадни тузиш учун ишлатиладиган формулалар *интерполяцион формулалар* дейилади.

Интерполяцион формулаларни қўлланишнинг асосий маъноси шундаки, фақат жадвалдаги қийматлари маълум бўлган $y = f(x)$ функцияни унинг *тақрибий аналитик ифодаси* деб қараладиган кўпҳадга алмаштирилади. Бунда, табиий равишда $f(x)$ ва $F(x)$ га алмаштиришнинг қандай даражада аниқ бажарилганлиги ва хатони баҳолаш каби масалалар келиб чиқади. Бу масалаларни келгусида баён қиламиз.

$f(x)$ функцияни унинг интерполяцион кўпҳади билан алмаштириш, аввало, функциянинг оралиқ қийматларини топиш учун зарур бўлади. Лекин интерполяцион кўпҳаднинг қўлланиши фақат шу билан чегараланиб қолмайди. Бундай алмаштириш $f(x)$ функциянинг аналитик ифодаси маълум бўлган ҳолларда ҳам, агар у аналитик ифода жуда мураккаб бўлиб, $f(x)$ функция устида турли математик амаллар бажарилиши (масалан, $f(x)$ функцияни интеграллаш) лозим бўлганда ишлатилади. $f(x)$ функциянинг қийматлари тажриба натижасида олинган бўлиб, функциянинг оралиқ қийматларини топиш қийин ёки мумкин бўлмай қолганда, функциянинг аналитик кўриниши эса номаълум бўлганда интерполяцион кўпҳаддан фойдаланилади.

Интерполяцион кўпҳадлар функция қийматларининг жадвалини тузишда ишлатилади. Хусусан, функциянинг айрим қийматлари бевосита (кўпинча, даражали қаторлар орқали) ҳисобланади ва бошқа қийматлари интерполяцион кўпҳад орқали ҳисобланади, натижада маълум бир жадваллар ҳосил қилинади.

Бу маълумотлардан биз ушбу бобда кенг фойдаланамиз. Мисоллар келтирилганда аналитик кўриниши маълум бўлган функциянинг етарли катта қадам билан олинган аргумент қийматлари учун жадвал тузамиз. Интерполяцион кўпҳад ёрдамида олинган бу қийматлар ўша функциянинг мукаммалроқ жадвалдаги қийматлари билан солиштирилади.

2- §. Параболик интерполяциялаш

Лагранжнинг интерполяцион формуласи. Юқорида айтиб ўтилганидек, параболик интерполяциялаш масаласи қуйидагича қўйилади: x_0, x_1, x_2, ..., x_n нуқталарда $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$ қийматлари маълум бўлган $f(x)$ функцияни қараймиз. n- даражали $y=F(x)$ кўпҳадни топиш талаб қилинади. Бу кўпҳад учун $F(x_i)=f(x_i)$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$ бўлиши керак.

$F(x)$ ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$F(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n. \qquad (2.1)$$

Юқорида ёзилган шартдан фойдаланиб, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ларни топиш учун $n+1$ номаълумли $(n+1)$ та тенгламага эга бўламиз:

$$\left.\begin{aligned} &a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = y, \\ &a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = y_1, \\ &a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_n x_2^n = y_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = y_n. \end{aligned}\right\} \quad (2.2)$$

Агар $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ларнинг ҳеч бир иккитаси ўзаро тенг бўлмаса, (2.2) система якка ечимга эга бўлишлиги ва бу ечимларни, яъни a_i ларни топишни ва, шундай қилиб, қўйилган масаланинг ечими $F(x)$ ни топишни келгусида кўрсатамиз..

Аммо бу масалани умумий ҳолда ечишдан олдин, бир мисол кўрайлик.

1- мисол. Айтайлик, $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, y_0 = 1, y_1 = 1, y_2 = 3$ лар маълум бўлсин. Иккинчи даражали шундай $F(x)$ кўпҳад топамизки, бу кўпҳад учун $F(0) = 1$, $F(1) = 1$, $F(2) = 3$ бўлсин.

$F(x)$ функцияни қуйидаги кўринишда оламиз:

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

Коэффициентларни топиш учун тенгламалар системасини тузамиз:

$$\begin{aligned} &a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 = 1, \\ &a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 = 1, \\ &a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 = 3, a_0 = 1. \end{aligned}$$

Бундан

$$\begin{aligned} &a_0 + a_1 + a_2 = 1, \\ &a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 3. \end{aligned}$$

Бу тенгламаларни ечиб, $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_2 = 1$ ни топамиз. Интерполяцион кўпҳад қуйидагича бўлади: $F(x) = 1 - x + x^2$. Бу функция қўйилган шартларни қаноатлантиришини кўриш қийин эмас.

Энди интерполяциялашнинг умумий масаласини ҳал қилишга киришамиз. (2.2) тенгламалар системасини ечиш ўрнига, қўйилган шартларни қаноатлантирадиган $F(x)$ функцияни бевосита топамиз:

Энг аввал $x=x_0$ нуқтада $y_0=1$ бўлиб, $x=x_1, x=x_2, \dots, x=x_n$ нуқталарда $y_1=y_2=\dots=y_n=0$ бўладиган, кўпҳад учун ифода топамиз. Бундай кўпҳад қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}.$$

Ҳақиқатан ҳам, $x=x_1, x=x_2, \dots, x=x_n$ лар кўпҳаднинг илдизи бўлиб, $x=x_0$ бўлганда махраж ва сурат тенг бўлиб қолади.

Энди $x=x_0$ нуқтада y_0 бўладиган $y=F_0(x)$ кўпҳадни тузамиз. Бу кўпҳад $x=x_i$ $(i=1, 2 \dots n)$ да нолга айланадиган бўлсин. Аввалги ифодани назарда тутиб $F_0(x)$ учун қуйидаги ифодани ёзамиз:

$$F_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}y_0.$$

Бунда дастлабки ифодаларни тузгач, $x=x_i$ нуқталарда $F(x_i)=y_i$ бўладиган $F(x)$ кўпҳадни тузамиз. Бунинг учун маълум бир $j\,(0\leqslant j\leqslant n)$ берилганда $x=x_j$ нуқтада $F_j(x_j)=y_j$ бўлиб, қолган барча $x=x_i$

$$(i=0,1,2,\dots,j-1,\ j+1,\dots n)$$

нуқталарда $F_j(x_i)=y_i=0$ бўладиган $F_j(x)$ функцияни тузамиз. Бу қуйидаги кўпҳаддир:

$$F_j(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)}y_j,$$

Энди изланаётган кўпҳад қуйидаги йиғиндидан тузилади:

$$F(x)=\sum_{j=0}^{n}F_j(x).$$

Чунки бу кўпҳадда ҳар бир x_j нуқтада қўшилувчилардан биттаси берилган y_j га тенг бўлиб, бошқа қўшилувчиларнинг ҳаммаси нолга айланиб кетади. $F_j(x)$ ўрнига тегишли ифодани қўйиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$F(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)}y_j \tag{2.3}$$

ёки кенгроқ ёзилса,

$$F(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots (x_0 - x_n)} y_0 + \\ \ldots + \frac{(x - x_0)(x - x_2) \ldots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \ldots (x_1 - x_n)} y_1 + \ldots \\ \ldots + \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \ldots (x_n - x_{n-1})} y_n. \qquad (2.4)$$

Ҳосил қилинган (2.3) формула *Лагранжнинг интерполяцион кўпҳади* дейилади.

Лагранжнинг интерполяцион кўпҳади қўйилган масаланинг ягона ечими эканлигини кўрсатамиз. Айтайлик, яна битта n-даражали $R(x)$ кўпҳад мавжуд бўлсинки, бу кўпҳад ҳам қўйилган шартларни қаноатлантирсин. Унда $F(x) - R(x)$ айирма n дан катта бўлмаган даражали бўлиб, $x = x_i (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ нуқталарда илдизга, яъни $n + 1$ илдизга эга бўлиб қолади. Бундан айирманинг айнан нолга тенглиги келиб чиқади, чунки n-даражали кўпҳад $n + 1$ та илдизга эга бўлиши мумкин эмас.

Шундай қилиб, исталган иккитаси тенг бўлмаган ҳар қандай $y_0, y_1 \ldots, y_n, x_0, x_1, \ldots, x_n$ сонлар берилганда ҳам шундай n-даражали $F(x)$ кўпҳад топиш мумкинки, бу кўпҳад $F(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, 2. \ldots, n)$ шартни қаноатлантиради.

2- мисол. $n = 1$ дейлик. Равшанки, бу ҳолда иккита интерполяцион нуқтага эга бўламиз. Унда иккита нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасига эга бўламиз. Бу нуқталарнинг абсциссаларини a ва b десак, изланаётган кўпҳад учун қуйидагини оламиз:

$$F(x) = \frac{x - b}{a - b} y_0 + \frac{x - a}{b - a} y_1.$$

3- мисол. $n = 2$ дейлик. Бу ҳолда уч нуқта орқали ўтувчи парабола ҳосил бўлади. $x_0 = a, x_1 = b, x_2 = c$ десак, изланилаётган кўпҳад қуйидаги кўринишда бўлади:

$$F(x) = \frac{(x - b)(x - c)}{(a - b)(a - c)} y_0 + \frac{(x - a)(x - c)}{(b - a)(b - c)} y_1 + \frac{(x - a)(x - b)}{(c - a)(c - b)} y_2.$$

3- §. Аргументнинг тенг узоқлашган қийматлари. Чекли айирмалар

Ҳозиргача аргументнинг берилган қийматларига нисбатан ҳеч қандай шарт қўйилмади. Улар исталган сонлар бўлиши мумкин. Бунга қўшимча равишда, аргументнинг қаралаётган қийматлари тенг узоқлашган, яъни арифметик прогрессия ташкил этади деб фараз этамиз.

Бундай фараз қийматлари одатда ўзгармас қадамли жадвал кўринишида берилган функцияларни интерполяциялашда бўлади, бу ерда $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, . . .

Арифметик прогрессиянинг айирмаси h ни *жадвал қадами* деб аталади. Бу ҳолда интерполяцион формулаларни тузиш анча соддалашади.

Бу масалага ўтишдан олдин чекли айирмалар тушунчаси билан танишиб чиқамиз. $f(x)$ функциянинг қийматлари $x_0, x_1 = x_0 + h, \ldots, x_n = x_0 + nh$ (интерполяция тугунлари) нуқталарда берилган бўлсин. Функция қийматларининг айирмаларини топамиз:

$$y_1 - y_0 = f(x_0 + h) - f(x_0) = \Delta y_0 = \Delta f(x_0),$$
$$y_2 - y_1 = f(x_0 + 2h) - f(x_0 + h) = \Delta y_1 = \Delta f(x_0 + h),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n - y_{n-1} = f(x_0 + nh) - f(x_0 + (n-1)h) = \Delta y_{n-1} = \Delta f(x_0 + (n-1)h).$$

Бу қийматларни функциянинг *биринчи айирмалари* ёки *биринчи тартибли айирмалари* дейилади. Булар бўйича қуйидаги иккинчи тартибли айирмалар ёки иккинчи айирмалар

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 \cdot \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1; \ \ldots;$$
$$\Delta^2 y_m = \Delta y_{m+1} - \Delta y_m$$

ни, ва, умуман исталган k- тартибли айирмалар ёки $(k-1)$- айирмаларни тузишимиз мумкин:

$$\Delta^k y_m = \Delta^{k-1} y_{m+1} - \Delta^{k-1} y_m. \tag{2.5}$$

Бу кетма-кет айирмаларни одатда жадвал кўринишида ифодаланади. Кетма-кет айирмалар жадвалларнинг икки шакли ишлатилади. 1- жадвалда айирмалар ҳар бир устунда тегишли камаювчи ва айрилувчи қийматларнинг орасида ёзилади; бу жадвал *диагонал жадвал* дейилади. 2- жадвалда эса айирмалар камаювчи билан бир сатрда ёзилади; бу ҳолда жадвални *горизонтал жадвал* дейилади.

Функцияларнинг айирмалари одатда унча катта бўлмагани учун уларни олдиндаги нолларни ёзмасдан, сўнгги қийматли рақам бирликларида ёзиш қабул қилинган.

1- жадвал

x	y	Айирмалар		
		биринчи	иккинчи	учинчи
x_0	y_0			
$x_1 = x_0 + h$	y_1	Δy_0		
$x_2 = x_0 + 2h$	y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_0$	
$x_3 = x_0 + 3h$	y_3	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$
$x_4 = x_0 + 4h$	y_4	Δy_3	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_1$
$x_5 = x_0 + 5h$	y_5	Δy_4	$\Delta^2 y_3$	$\Delta^3 y_2$
. . . . . .	.	. .	. .	. .

2- жадвал

x	y	Айирмалар		
		биринчи	иккинчи	учинчи
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
$x_1 = x_0 + h$	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$
$x_2 = x_0 + 2h$	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$
$x_3 = x_1 + 3h$	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$	$\Delta^3 y_3$
$x_4 = x_1 + 4h$	y_4	Δy_4	$\Delta^2 y_4$	. .
. . . . . .	.	. .	. . .	. .

(2.5) тенглик турли тартибли айирмаларни кетма-кет аниқлашга имкон беради. Чекли айирмаларни бевосита функциянинг қийматлари бўйича ифодалашга имкон берадиган муносабатларни аниқлаймиз. Ҳақиқатан, $\Delta y_0 = y_1 - y_0$ ва $\Delta y_1 = y_2 - y_1$ бўлганлиги учун

$$\Delta^2 y_0 = (y_2 - y_1) - y_1 + y_0$$

бўлгани учун $\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$,
демак, $\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$.
Худди шунга ўхшаш,

$$\Delta^4 y_0 = y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0.$$

Исталган k учун ушбу формулани исботлаш қийин эмас:

$$\Delta^k y_0 = y_k - ky_{k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{k-2} - \ldots + (-1)^{k-1} k y_1 + (-1)^k y_0. \qquad (2.6)$$

Бу формула $\Delta^k y_m$ айирма учун ҳам ўринли; буни кўрсатиш учун функциянинг ҳамма қийматлари индексларига m сонни қўшиб чиқиш кифоя.

(2.6) формулани ёдда сақлаб қолиш осон, бунинг учун унинг ифодаси биномнинг Ньютон формуласи бўйича ёйилмасини эслатишига эътибор бериш керак. Бунда фақат y^k даражалар ўрнига ўшандай индексли y ни ёзиш керак. Масалан, y^k ўрнига y_k ни, y^{k-1} ўрнига y_{k-1} ни ёзиш керак ва ҳ. к, охирги қўшилувчида 1- y^0 ўрнига y_0 ни ёзамиз.

Кўпинча, функциянинг қийматларини чекли айирмалар орқали ифодалашга имкон берадиган бошқа формулалар ҳам ўринли бўлади. Ҳақиқатан, $\Delta y_0 = y_1 - y_0$ дан $y_1 = y_0 + \Delta y_0$ келиб чиқади.

Шунга ўхшаш,

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = (y_0 + \Delta y_0) + \Delta y_1.$$

лекин $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$ ва бундан $\Delta y_1 = \Delta^2 y_0 + \Delta y_0$ бўлгани учун

$$y_2 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0$$

эканлиги келиб чиқади.

Юқоридаги каби, бу ҳисоблашларни исталган y_k учун ўтказиш мумкин, бунда қуйидаги натижа келиб чиқади:

$$y_k = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \ldots + \Delta^k y_0. \qquad (2.7)$$

Ҳосил қилинган формула y_k қийматини ва k-тартибгача бўлган айирмаларни ифодалашга имкон беради. k албатта бутун сон бўлади. (2.7) формулани қуйидагича символик ёзиш қулайдир:

$$y_k = (1 + \Delta)^k y_0 \qquad (2.8)$$

Бу ерда $(1+\Delta)^k$ қавс Ньютон формуласи бўйича очилади, ҳосил қилинган $\Delta^2 y_0$ кўпайтмалар эса тегишли тартибли айирмаларни билдиради.

Чекли айирмаларнинг баъзи энг оддий хоссаларини қайд этиб ўтамиз.

1°. Агар C ўзгармас бўлса, у ҳолда $\Delta C = 0$.

2°. $\Delta [Cf(x)] = C\Delta f(x)$.

3°. $\Delta [f_1(x) + f_2(x)] = \Delta f_1(x) + \Delta f_2(x)$.

Санаб ўтилган ҳоссалар етарлича равшан. Бундан ташқари, бутун n учун $f(x) = x^n$ функциянинг айирмалари учун ифода керак бўлади.

4°. $\Delta (x^n) = nh\, x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} h^2 x^{n-2} \ldots + nh^{n-1} x + h^n$.

Бу тенгликни исботлаш учун

$$\Delta (x^n) = (x+h)^n - x^n$$

ни ёзиш ва Ньютон биноми формуласидан фойдаланиш кифоя.

Бу хоссалардан фойдаланиб, кўпҳаднинг кетма-кет айирмалари учун ифодаларни ҳосил қилиш осон. Ҳақиқатан, агар

$$y = f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \qquad (2.9)$$

бўлса, у ҳолда 3° ва 2° хоссаларга асосан

$$\Delta y = a_0 \Delta (x^n) + a_1 \Delta (x^{n-1}) + \ldots + a_{n-1} \Delta (x),$$

демак, 4° ни қўлланиш натижасида қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\Delta y = a_0 [nh\, x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} h^2 x^{n-2} + \ldots + nh^{n-1} x + h^n] + \\ + a_1 \left[(n-1) h x^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2!} h^2 x^{n-3} + \ldots \right] + \\ + \ldots + a_{n-1} h,$$

ёки узил-кесил,

$$\Delta y = a_0 nh\, x^{n-1} + \left[a_0 \frac{h(n-1)}{2!} h^2 + a_1 (n-1) h\right] x^{n-2} + \\ + \ldots + a_{n-1} h. \qquad (2.10)$$

Шундай қилиб, бош ҳади $a_0 x^n$ бўлган n-даражали кўпҳаднинг биринчи айирмаси бош ҳади $a_0 nhx^{n-1}$ бўлган $(n-1)$-даражали кўпҳаддир.

Исталган тартибли кўпҳаднинг кетма-кет айирмаларини шунга ўхшаш йўл билан ҳисоблаб, ушбу даъвонинг тўғрилигига ишонч ҳосил қиламиз:

Агар $f(x)$ бош ҳади $a_0 x^n$ бўлган n-даражали кўпҳад бўлса, у ҳолда исталган $m < n$ учун $\Delta^m f(x)$ айирма x нинг бош ҳади $n(n-1)\ldots(n-m+1)\times\times a_0 h^m x^{n-m}$ бўлган $(n-m)$-даражали кўпҳади бўлади ва $\Delta^n f(x) = n!\, a \cdot h^n$, сўнгра $m > n$ бўлганда $\Delta^m f(x)$ нолга айнан тенг.

Бу хулоса h ўзгармас, яъни x нинг қийматлари арифметик прогрессия ташкил этган ҳолдагина тўғрилигини таъкидлаб ўтамиз.

Тескари теорема ҳам тўғри бўлиб, биз уни исботсиз келтирамиз: *исталган x аргументда функциянинг тенг узоқлашган қийматлари учун тузилган n-айирмалар ўзгармас бўлса, у ҳолда функция n-даражали кўпҳаддан иборат.*

Бу даъво практикада кенг қўлланилишини биз кейинроқ кўрамиз; у функциянинг оралиқ қийматларини топишга (агар жадвал қадами ўзгармас бўлса) имкон беради. Бундай кўпҳадларни тузиш усуллари навбатдаги параграфда кўрсатилади.

1-мисол. $f(x) = x^2 - 3x + 2$ кўпҳаднинг қийматлари жадвалини қараймиз (3-жадвал). Қабул қилинган келишувга асосан айирмаларни олдиндаги нолларни ёзмасдан, сўнгги қийматдор рақам бирликларида ёзамиз. Юқорида исботланган теоремага мувофиқ равишда иккинчи айирмалар ўзгармасдир, учинчи айирмалар эса нолга тенг.

3-жадвал

x	y			
		Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1,0	0	—16	8	
1,2	— 0,16	—8	8	0
1,4	— 0,24	0	8	0
1,6	— 0,24	8	8	0
1,8	— 0,16	16	8	0
2,0	0,00	24	8	0
2,2	0,24	32	8	0
2,4	0,56	40	8	0
2,6	0,96	48		
2,8	1,44			

2-мисол. Қийматлари 4-жадвалда берилган функцияни қараймиз ва унинг айирмаларини тузамиз.

Кўриб турибмизки, учинчи айирмалар амалда ўзгармас, демак, тўртинчи айирмаларни нолга тенг деб ҳисоблаш мумкин.

Шу сабабли қаралаётган оралиқда функция тақрибан учинчи тартибли кўпҳад каби ўзгаради.

Бироқ шуни назарда тутиш керакки, кўпҳадлар учун чекли айирмалар ҳақидаги теорема функциянинг аниқ айирмаларига доирдир. Агар яхлитлашга йўл қўйиладиган бўлса, амалда ўзгармас айирмаларнинг тартиби функциянинг қийматларини ҳисоблаш аниқлигига ҳам; жадвал қадамига ҳам жуда боғлиқ бўлиб, буни навбатдаги мисолларда кўрамиз.

3- мисол. Ушбу тўртинчи даражали кўпҳадни қарайлик:

4- жадвал

x	y	Айирмалар		
		Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0,30	1,0313			
		—330		
0,35	0,9983		—38	
		—368		
0,40	0,9615		—32	6
		—400		
0,45	0,9215		—27	5
		—427		
				4
0,50	0,8788		—23	
		—450		7
0,55	0,8338		—16	
		—466		5
0,60	0,7872		—11	
		—477		6
0,65	0,7385		—5	
		—482		
0,70	0,6913			

5- жадвал

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
4,0	0,150000				
		810972			
4,1	0,960972		53448		
		864420		2292	
4,2	1,825392		55740		48
		920160		2340	
4,3	2,745552		58080		48
		978240		2388	
4,4	3,723792		60468		48
		1038708		2436	
4,5	4,762500		62904		48
		1101612		2484	
4,6	5,864112		65388		48
		11667000		2532	
4,7	7,031112		67920		48
		1234920		2580	
4,8	8,266032		70500		48
		1305420		2628	
4,9	9,571452		73228		
		13785418			
4,10	10,950000				

$$y = 0{,}02\,x^4 + 0{,}05\,x^3 + 0{,}04\,x^2 + 0{,}01\,x - 8{,}85.$$

5- жадвалдан кўриниб турибдики, тўртинчи тартибли айирмалар теореманинг даъвосига тўла мувофиқ келади.

Агар шу кўпҳаднинг қийматларини тўртинчи ўнлик рақамгача аниқликда қараладиган бўлса ва ўша $h=0{,}1$ қадамни сақланадиган бўлса, учинчи айирмаларни амалда ўзгармас деб ҳисоблаш мумкинлиги 6- жадвалдан кўриниб турибди. Бундан ташқари, 7- жадвалда ўша кўпҳаднинг қийматлари юзларгача аниқликда келтирилган бўлиб, бу ҳолда энди иккинчи айирмалар амалда ўзгармас эканлигини кўриб турибмиз.

6- жадвал

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
4,0	0,1500			
		8110		
4,1	0,9610		534	
		8644		24
4,2	1,8254		558	
		9202		22
4,3	9,7456		580	
		9782		25
4,4	3,7238		605	
		10387		24
4,5	4,7625		629	
		11016		25
4,6	5,8641		654	
		11670		25
4,7	7,0311		679	
		12349		26
4,8	8,2660		705	
		13054		27
4,9	9,5714		732	
		13786		
5,0	10,9500			

7- жадвал

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
4,00	0,15		
		81	
4,1	0,96		5
		86	
4,2	1,82		7
		93	
4,3	2,75		6
		97	
4	3,72		9
		106	
4,5	4,76		4
		110	
4,6	5,86		7
		117	
4,7	7,03		7
		124	
4,8	8,27		6
		130	
4,9	9,57		8
		138	
5,0	10,95		

Юқорида айтилган изоҳга таяниб, бундай айтишимиз мумкин: агар биз 6 ва 7- жадваллар тўртинчи даражали кўпҳаднинг қийматларини беришини билмаганимизда эди, у ҳолда оралиқ қийматларни биринчи ҳолда учинчи даражали кўпҳадлар ёрдамида, иккинчи ҳолда эса иккинчи даражали кўпҳадлар ёрдамида излаган бўлар эдик.

Бу қуйидагини билдиради: функциянинг қийматлари қанча кам аниқликда берилган бўлса, шунча соддароқ интерполяцион формулалар танланиши лозим.

Яна шуни ҳам кўзда тутиш керакки, яхлитлаш хатолари юқори тартибли айирмаларга анча таъсир қилади. 6 ва 7-жадваллардаги айирмаларни 5-жадвалдаги айирмалар билан таққослаш буни яққол кўрсатиб беради.

Жадвал қадамининг айирмаларга таъсирини аниқлаш учун ўша кўпҳад қийматларининг $h=0,01$ қадамли жадвалини қараймиз. 8-жадвалдан кўринадики, бундай қадамда иккинчи айирмалар ҳатто беш рақамли жадвал учун ҳам амалда ўзгармас бўлади.

8-жадвал

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
4,00	0,15000		
		7876	
4,01	0,22876		51
		7927	
4,02	0,30803		51
		7928	
4,03	0,37781		53
		8031	
4,04	0,46812		52
		8083	
4,05	0,54895		52
		8135	
4,06	0,63030		

Агар функция қаралаётган оралиқда аналитик хусусиятларга эга бўлмаса, у ҳолда одатда унинг айирмалари текис ўзгаради. Шу сабабли айирмаларнинг текис ўзгаришининг бузилиши қатор ҳолларда функциянинг жадвал билан берилган қийматлари айирмаларининг айримларидаги хатоликларни пайқашга имкон беради.

Функциянинг қийматларидан бири хатоликка эга бўлсин. Бу хатонинг функция айирмаларига қандай таъсир қилишини 9-жадвалдан кўриш мумкин.

9-жадвалда функциянинг қийматларидан бирида, масалан n-қийматда ε хатоликка йўл қўйилганда, айирмаларда хатоликларнинг ўзгариши кўрсатилган.

9-жадвалдан кўриниб турганидек, айирманинг тартиби қанча катта бўлса, хатолик шунча кўп бўлади.

Агар қаралаётган жадвалдаги иккинчи айирмалар ажратилган оралиқдан бошқа ҳамма ерда амалда ўзгармас бўлса, у ҳолда $\Delta^2 y_{n-1}$ иккинчи айирманинг тузатилган қиймати сифатида 9-жадвалда ёзилган учта иккинчи айирманинг ўртача арифметик қиймати олинади,

9- жадвал

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
. . . .	. . . .	. . . .	. . . . . .	. . . .
x_{n-2}	y_{n-2}	Δy_{n-2}		$\Delta^3 y_n + \varepsilon$
x_{n-1}	y_{n-1}	$\Delta y_{3-1} + \varepsilon$	$\Delta^2 y_{n-2} + \varepsilon$	$\Delta^3 y_{n-2} - 3\varepsilon$
x_n	$y_n \pm \varepsilon$	$\Delta y_n - \varepsilon$	$\Delta^2 y_{n-1} - 2\varepsilon$	$\Delta^3 y_{n-1} + 3\varepsilon$
x_{n+1}	y_{n+1}	Δy_{n+1}	$\Delta^2 y_n + \varepsilon$	$\Delta^3 y_n - \varepsilon$
x_{n+2}	y_{n+2}			

чунки бу учта айирманинг йиғиндиси энди хатога эга бўлмайди. Шундай қилиб, қуйидагича оламиз:

$$\overline{\Delta^2 y_{n-1}} = \frac{1}{3}\left[(\Delta^2 y_{n-2} + \varepsilon) + (\Delta^2 y_{n-1} - 2\varepsilon) + (\Delta^2 y_n + \varepsilon)\right] =$$

$$= \frac{\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^2 y_{n-1} + \Delta^3 y_n}{3}, \qquad (2.11)$$

бу ерда $\Delta^2 y_{n-1}$ — иккинчи айирманинг тузатилган қиймати.

Иккинчи айирманинг тузатилган қийматини билган ҳолда тузатилаётган иккинчи айирма билан бир горизонтал сатрда жойлашган y_n қийматнинг хатосини осон топиш мумкин:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\Delta^2 y_{n-1} - \overline{\Delta^2 y_{n-1}}\right). \qquad (2.12)$$

Хато функция ва барча айирмалар каби сўнгги хонанинг бутун бирликларида ифодаланади.

Функциянинг хато қийматини тузатилгандан сўнг, барча айирмаларни қайтадан ҳисоблаш лозим. Фақат шуни назарда тутиш керакки, бу йўл билан жадвалда бир-биридан узоқда жойлашган хатоларгина аниқланиши мумкин. Бундан ташқари, функция қаралаётган оралиқда шундай хусусиятларга эга бўлиши мумкинки (масалан, яққол ифодаланган максимум), натижада унинг айирмалари текис ўзгармайди.

4- мисол. Функция жадвал билан берилган бўлиб (10- жадвал), унда иккинчи айирмаларни аргументнинг 0,25, 0,30, 0,35 қийматларига мос оралиқдан ташқарида амалда ўзгармас деб ҳисоблаш мумкин. Унинг $x=0{,}30$ га мос қиймати хатога эга деб ҳисоблаш табиий.

10- жадвал

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
0,00	0,2928341		
		15632	
0,05	0,2943973		33
		15665	
0,10	0,2959638		34
		15699	
0,15	0,29775337		34
		15733	
0,20	0,2991070		33
		15766	
0,25	0,3006836		48
		15814	
0,30	0,3022650		9
		15823	
0,35	0,3038473		48
		15871	
0,40	0,3054344		35
		15906	
0,45	0,3070250		35
		15941	
0,50	0,30866191		

11- жадвал

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
0,20	0,2991070		
		15766	
0,25	0,3006836		35
		15701	
0,30	0,3022637		35
		15836	
0,35	0,3038473		35
		15871	
0,40	0,3054344		

Иккинчи айирманинг тузатилган қийматини (2.11) формула бўйича еттинчи рақам бирликларида топамиз:

$$\overline{\Delta^2 y} = \frac{48 + 9 + 48}{3} = 35,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(9 - 35) = -13.$$

Хато (2.12) формула бўйича еттинчи рақам бирлигида топилади. Шундай қилиб, $x = 0{,}30$ да функциянинг тузатилган қиймати жадвалда кўрсатилган 0,3022650 ўрнига $y = 0{,}3022637$ бўлиши лозим. Иккинчи айирмаларни қайта ҳисоблаб (11- жадвал), янги ҳосил қилинган жадвалда иккинчи айирмалар амалда ҳамма ерда ўзгармас эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

Қараб чиқилган усул функциянинг айрим хатоларини учинчи айирма ўзгармас бўлган ҳолда ҳам тузатишга имкон беради.

Пировардида чекли айирмалар билан функциянинг ҳосилалари орасидаги боғланишни кўрсатиб ўтамиз. Ҳосиланинг таърифига асосан:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta f(x)}{h}.$$

Бу ерда h етарли кичик бўлса,

$$f'(x) \approx \frac{\Delta f(x)}{h}$$

бўлади. Буни ихчамроқ шаклда

$$y' \approx \frac{\Delta y}{h} \tag{2.13}$$

каби ёзилади.

Энди қуйидагини топамиз:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta^2 y}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} .$$

$f(x)$ функцияни иккинчи тартибли узлуксиз ҳосилага эга деб фараз қилиб, икки марта Лопитал қоидасини қўлланамиз (x ўзгармас, h ўзгарувчи деб олинади). У ҳолда

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+2h)\cdot 2 - 2f'(x+h)}{2h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2f''(x+2h) - f''(x+h)}{1} = f''(x),$$

яъни $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\Delta^2 y}{h^2} = f''(x)$. Бу ерда h етарли кичик бўлганда юқоридагидек мулоҳазалар юритиб, $y = f(x)$ функциянинг n-тартибли ҳосиласи учун $y = f(x)$ функция n-тартибли ҳосилага эга деб фараз қилиб қуйидаги формулани ҳосил қиламиз.

$$y^{(n)} \approx \frac{\Delta^n y}{h^n} . \tag{2.14}$$

(2.13) ва (2.14) формулалар ҳосилаларни тақрибий ҳисоблашда қўлланиши мумкин. Лекин уларнинг аниқлик даражаси жуда кам ва шу сабабли амалда анча мукаммал усуллардан фойдаланилади.

4- §. Ньютоннинг интерполяцион формуласи

Биз қуйида ўрганмоқчи бўлган Ньютоннинг интерполяцион формуласи Лагранж формуласи сингари умумий интерполяцион масалани ечишга бағишланади. Ньютоннинг интерполяцион формуласини келтириб чиқаришда аргументнинг тенг оралиқлардаги қийматларини эътиборда тутишимизни айтиб ўтамиз.

Айтайлик, $y = f(x)$ функциянинг қийматлари аргументнинг x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h_1$ . . . , $x_n = x_0 + nh$ қийматлари учун берилган бўлсин. Функциянинг бу нуқталардаги қийматларини мос равишда $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, . . . , $y_n = f(x_n)$ деб белгилаймиз.

2- § да кўрсатилганидек, $F(x_0)=f(x_0), F(x_1)=f(x_1), \ldots, F(x_n)=f(x_n)$ шартни қаноатлантирадиган ягона n-даражали $F(x)$ кўпҳад мавжуд бўлади. Ҳозир бу кўпҳадни излашнинг ва ёзишнинг бошқа усулини кўрмоқчимиз, пировардида бу кўпҳад Лагранж формуласи билан ҳосил қилинган кўпҳад билан бир хил бўлади.

Изланаётган кўпҳадни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$F(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+a_3(x-x_0)\times$$
$$\times(x-x_1)(x-x_2)+a_4(x-x_0)(x-x_1)(x-x_{n-1}). \quad (2.15)$$

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ коэффициентларни топамиз. (2.15) ифодада x ўрнига x_0 қўйиб, қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$F(x_0)=a_0.$$

Лекин $F(x_0)=y_0$ бўлгани учун $a_0=y_0$ бўлади. (2.15) ифодада x ўрнига x_1 қўйиб, қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$F(x_1)=a_0+a_1(x_1-x_0).$$

Бу тенгламада $F(x_1)=y_1$, $a_0=y_0$, $x-x_0=h$ эканлигини ҳисобга олсак, a_1 га нисбатан қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$y_1=y_0+a_1 h.$$

Бундан a_1 ни топамиз:

$$a_1=\frac{y_1-y_0}{h}.$$

Маълумки, $y_1-y_0=\Delta y_0$. Демак, a_1 учун қуйидаги формулани ёзишимиз ўринли:

$$a_1=\frac{\Delta y_0}{h}.$$

Энди a_2 коэффициентни топамиз. (2.15) ифодада x ўрнига x_2 қўйсак,

$$F(x_2)=a_0+a_1(x_2-x_0)+a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)$$

келиб чиқади. Бу ифодада $F(x_2)=y_2$, $a_0=y_0$, $a_1=\frac{\Delta y_0}{h}$ эканлигини эътиборга олиб, a_2 га нисбатан қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$y_2=y_0+\frac{\Delta y_0}{h}\cdot 2h+a_2\cdot 2h\cdot h.$$

Бундан

$$y_2 - 2\Delta y_0 - y_0 = 2!\, a_2 h^2.$$

Охирги тенгламанинг чап томони $\Delta^2 y_0$ га тенглигини кўрсатамиз:

$$y_2 - 2\Delta y_0 - y_0 = y_2 - 2(y_1 - y_0) - y_0 = y_2 - 2y_1 + 2y_0 - \\ - y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0 = \Delta^2 y_0.$$

Шу сабабли

$$\Delta^2 y_0 = 2!\, h^2 a_2$$

бўлади. Демак,

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y}{2!\, h^2}.$$

Юқоридаги усулда мулоҳазаларни давом эттириб,

$$a_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{3!\, h^3},\ a_4 = \frac{\Delta^4 y_0}{4!\, h^4},\ \ldots,\ a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k!\, h^k}$$

эканлигини исботлаш мумкин. Коэффициентлар учун топилган ифодаларни (2.15) формулага қўямиз:

$$F(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\, h^2}\ (x + x_0)\ (x - x_1) + \ldots + \\ + \frac{\Delta^n y_0}{n!\, h^n}\ (x - x_0)(x - x_1)\ \ldots\ (x - x_{n-1}). \qquad (2.16)$$

(2.16) формула Ньютоннинг *1-интерполяцион формуласи* дейилади.

Энди Ньютон ва Лагранж формулалари орасидаги фарқ равшан кўриниб турибди. Лагранж формуласи (2.4) да ҳар бир қўшилувчи n- даражали кўпҳад ва бу қўшилувчилар тенг ҳуқуқлидир. Шу сабабли биз аввалдан (яъни ҳисоблашларни бажаргунча) бу ҳадлардан бирортасини эътиборга олмаслигимиз мумкин эмас. Ньютон формуласида қўшилувчилар даражалари ортиб борувчи кўпҳадларни ташкил этиб, улардаги коэффициентлар кетма-кет келадиган айирмаларнинг факториалларга нисбатидан иборатдир.

3- § да кўрганимиздек, кетма-кет келувчи айирмалар етарлича тез камаяди. Шу сабабли Ньютон формуласида коэффициентлари ҳисобга олинмайдиган даражада кичик бўлган ҳадларни ташлаб юбориш имкониятига эга бўламиз. Бунинг натижасида содда интерполяцион формула ёрдамида функциянинг оралиқдаги қийматларини аниқ ҳисоблаш мумкин.

Ньютон формуласи (2.16) ни амалда қўлланиш учун уни бир оз бошқача кўринишда ёзилади. Бундай кўринишдаги формулани ҳосил қилиш учун янги белгилашлар киритамиз.

$$\frac{x-x_0}{h}=t \text{ ёки } x=x_0+th.$$

(2.16) формуладаги кўпайтувчилар t орқали қуйидагича белгиланади:

$$\frac{x-x_n}{h}=\frac{x-x_0-h}{h}=t-1, \frac{x-x_y}{h}=t-2,$$

$$\frac{x-x_n-1}{n}=\frac{x-x_0-(n-1)h}{h}=t-n+1.$$

Бу ифодаларни (2.16) формулага қўйиб, қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$F(x_0+th)=y_0+\frac{t}{1!}\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0+$$
$$+\frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0+\ldots+\frac{t(t-1)\ldots(t-h+1)}{n!}\Delta^n y_0. \tag{2.17}$$

(2.17) формула Ньютоннинг 1-интерполяцион формуласининг охирги кўринишидир. Қуйида кўрсатиладиган сабабга кўра бу формулани *Ньютоннинг олдинга интерполяцион формуласи* дейилади.

(2.17) формулада t ни бутун сон деб, k $(k \leqslant h)$ олинса, формуланинг ўнг томони $k+1$ та қўшилувчидан иборат бўлади. Бу қўшилувчилардан охиргилари қуйидагича бўлади:

$$\frac{k(k-1)\ldots(k-k+1)}{k!}\Delta^k y_0+\Delta^k y_0.$$

Кейинги қўшилувчилар нолга айланади, чунки уларнинг коэффициентлари $(k-k)$ кўпайтувчига эга бўлади. $F(x_0+hk)$ учун формула ҳам худди шу (2.17) формула кўринишида бўлиб, демак, y_k ва y_0 лар ва кетма-кет айирмалар билан йфодаланади. Демак,

$$F(x_0+nk)=y_k.$$

Охирги тенглик Ньютон формуласини келтириб чиқариш йўлидан ҳам маълумдир.

Агар t бутун сон бўлмаса (бу эса энг қизиқарли ҳол ҳисобланади.) (2.17) формула $F(x)$ функциянинг қийматларини аргументнинг дастлабки жадвалда бўлмаган қиймати учун, яъни бирорта x_k га тенг бўлмаган x учун ифодалайди. (2.17) формулани символик кўринишда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$F(x_0 + th) = (1 + \Delta)^t y_0. \qquad (2.18)$$

Бу ерда $(1+\Delta)^t$ ни биномиал қаторга ёйиш, унинг Δ^n қатнашган ҳаддан кейинги ҳадларини ташлаб юбориш, Δ^r билан y нинг кўпайтмаси ўрнига $\Delta^r y_0$ қўйиш керак.

(2.17) формуладан $f(x)$ функциянинг қийматларини аргументнинг x_0 ва x_1 орасидаги қийматларида топиш учун $t < 1$ бўлиши керак. $x_1 < x < x_2$ интервалга ўтганда юқоридаги формулани қўлланиш мақсадга мувофиқ эмас, чунки бунда $t > 1$ бўлиб қолади. Бу ҳолда $f(x)$ учун интерполяциялашнинг навбатдаги нуқтасини олиш керак.

Энди Ньютоннинг интерполяцион формуласини қўлланишга оид мисол келтирамиз.

1- мисол. 1- жадвалда берилган етти хонали логарифмлар жадвалидан фойдаланиб, 1000 дан 1010 гача бўлган ҳамма бутун сонларнинг логарифмлари ҳисоблансин.

1- жадвал

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1000	3,0000000	43214	— 426	8
1010	3,0043214	42788	— 418	9
1020	3,0086002	42370	— 409	8
1030	3,0128372	41961	— 401	
1040	3,0170333	41560		
1050	3,0211893			

Жадвалдан кўринадики, функциянинг учинчи айирмалари ўзгармас деб қаралиши мумкин.

$x = 1000$, $y_0 = 3,0000000$, $\Delta y_0 = 0,0043214$, $\Delta^2 y_0 = - 0,0000426$, $\Delta^3 y_0 = 0,0000008$ деб оламиз. Энди t нинг қийматини аниқлаш қолди. $th = 10$ бўлгани сабабли $x = 1001$ учун $t_1 = 0,1$, $x_2 = 1002$ учун $t_2 = 0,2$ ва ҳ.к. бўлади. y нинг изланаётган қийматларини топиш учун бажарилиши лозим бўлган ҳисоблаш натижаларини 2-жадвалга жойлаштириш қулайдир. Бунда оралиқ қийматлар битта эҳтиёт каср хона билан олинади.

2- жадвал

t	x	$t\Delta y_0$	$\Delta^2 y_0 \frac{t(t-1)}{2}$	$\frac{t(t-1)(t-2)}{6} \Delta^3 y$	y
0,	1000	0	0	0	3,0000000
0,1	1001	43214	192	2	3,0004341
0,2	1002	86428	341	4	3,0008677
0,3	1003	129642	447	5	3,0013009
0,4	1004	172856	511	5	3,0017337
0,5	1005	216070	532	5	3,0021661
0,6	1006	259284	511	4	3,0025980
0,7	1007	302498	447	2	3,0030295
0,8	1008	445712	341	1	3,0034605
0,9	1009	388926	192		3,0038912
0,10	1010	432140	0	0	3,0043214

Олинган қийматларни етти хонали жадваллардан текшириб, уларнинг охирги каср хонасигача тўғри эканлигига ишонишимиз мумкин.

1010 дан 1020 гача бўлган интервалда тегишли қийматлар жадвалини тузиш учун $x_0 = 1010$ деймиз. Унда $y_0 = 3{,}0043214$, $\Delta y_0 = 0{,}00442788$, $\Delta^2 y_0 = 0{,}0000418$, $\Lambda^3 y_0 = 0{,}00000009$ бўлади ва юқоридагидек ишларни бажарамиз.

Бу мисолдан кўринадики, (2.17) интерполяцион формулада горизонтал айирмалар жадвалидан битта горизонтал қатордаги қийматлар ишлатилади. Агар диагонал айирмалар жадвалидан фойдаланилса, унда (2.17) формулада диагонал бўйича пастга кетувчи айирмалар ишлатилади. Шу сабабли, бу формулани жадвалнинг бошланишида қўлланиш қулайроқ. Чунки бу ерда етарли сон миқдорда айирмалар бор.

Аксинча, бу формула жадвалнинг охирида ярамайди, чунки у ерда айирмалар жуда кам. Юқоридаги мисолда $x = 1030$ десак, фақат биринчи ва иккинчи айирмалар, $x = 1040$ десак, фақат биринчи айирма мавжуд бўлади.

Шундай қилиб, Ньютоннинг биринчи интерполяцион формуласидан функциянинг аргументнинг тегишли бошланғич қийматларидан каттароқ қийматлари учун ҳисоблашда фойдаланиш қулайдир, шу сабабли бу формула *олдинга интерполяциялаш формуласи* деб юритилади.

Жадвалнинг охирида интерполяциялаш учун бошқа формула қўлланилади. Ҳозир шу формулани келтириб чиқарамиз. Интерполяцион кўпҳадни қуйидаги кўринишда ёзайлик:

$$F(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots + \\ + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1}) \ldots (x - x_1). \qquad (2.19)$$

Аввал бўлганидек, $a_0, a_1 \ldots , a_n$ коэффициентлар $y_n = f(x_n) = F(x_n)$ шартдан топилади. (2.19) формулада $x = x_n$ деймиз. У ҳолда $a_0 = y_n$ келиб чиқади. Шунингдек, (2.19) формулада $x = x_{n-1}$ десак,

$$y_{n-1} = y_n + a_1(x_{n-1} - x_n)$$

эканлиги келиб чиқади. Бундан эса $x_{n-1} - x_n = -h$ бўлгани учун

$$a_1 = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \frac{\Delta y_{n-1}}{h}.$$

(2.19) формулада $x = x_{n-2}$ деймиз ва $a_0, a_1, \ldots$ лар ўрнига тегишли қийматларини қўямиз. У ҳолда қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$a_2 = \frac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}.$$

Юқоридаги ўхшаш ҳисобларни бажариб, коэффициентлар учун қуйидаги умумий формулани оламиз:

$$a_k = \frac{\Delta^k y_{n-k}}{k!\,h^k} \quad (k = 1,2, \ldots , h).$$

(2.19) формулага коэффициентлар учун топилган ифодаларни қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$F(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1 \cdot h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!\,h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \\ + \ldots + \frac{\Delta h y_0}{n!\,h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \ldots (x - x_1). \qquad (2.20)$$

Бу формула *Ньютоннинг иккинчи интерполяцион формуласи* дейилади. Бу формуланинг шаклини бир оз ўзгартирамиз. Янги белгилаш киритамиз:

$$\frac{x - x_n}{h} = t \text{ ёки } x = x_n + th.$$

(2.20) формуладаги кўпайтувчиларни t орқали ифодалаймиз:

$$\frac{x - x_{n-1}}{h} = \frac{x - (x_n - h)}{h} = t + 1,$$

$$\frac{x - x_{n-2}}{h} = \frac{x - (x_n - 2h)}{h} = t + 2,$$

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{x - (x_n - (x_n - (n-1)\,h)}{h} = t + h - 1.$$

Охирги ифодаларни (2.20) формулага қўйиб, қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$F(x) = F(x_n + th) = y_n + t\,\Delta\,y_{n-1} + \frac{t\,(t+1)}{2!}\,\Delta^2\,y_{n-2} +$$

$$+ \ldots + \frac{t\,(t+1)\,\ldots\,(t+h-1)}{h!}\,\Delta^n y_0. \qquad (2.21)$$

(2.21) формула *Ньютоннинг иккинчи интерполяцион формуласи* ёки *Ньютоннинг орқага интерполяциялаш формуласи* деб юритилади.

(2.21) формулани қўлланишга оид мисол келтирамиз.

2- мисол. 1- мисолда берилган 1- жадвалдан фойдаланиб, lg 1,044 топилсин.

$$x_3 = 1050;\ y_3 = 3{,}0211893;\ \Delta y_2 = 0{,}0041560;$$
$$\Delta^2 y_1 = 0{,}0000401;$$

$\Delta^3 y_0 = 0{,}0000008$; $x = 1044$; $t = -0{,}6$ ларни (2.21) формулага қўямиз:

$$F(1044) = 3{,}0211893 + (-0{,}6)\,0{,}0041560 +$$
$$+ \frac{(-0{,}6)(-0{,}6+1)}{2!}\,0{,}0000401 +$$
$$+ \frac{(-0{,}6)\,(-0{,}6+1)\,(-0{,}6+2)}{6}\,0{,}0000008.$$

Ҳисоблашларни бажариб,

$$F(1044) = 3{,}0187005$$

ни ҳосил қиламиз. Логарифмларнинг еттихонали жадваллари бўйича текшириш каср хоналарининг ҳаммаси тўғри эканлигини кўрсатади.

5- §. Сонли дифференциаллаш

Энди сонли дифференциаллаш ҳақидаги масалага ўтамиз. Бундай дифференциаллаш масаласига биз практикада кўпинча дуч келамиз: функциянинг жадвал қийматларини (масалан, экспериментал маълумотлар) билган ҳолда ҳосилларни топишга тўғри келади.

1- § да баён қилинган мулоҳазалар бу ҳолда қандай йўл тутишни кўрсатиб беради. Ҳақиқатан, интерполяцион кўпҳад қаралаётган оралиқда берилган функция билан етарли даража аниқликда устма-уст тушса, функциянинг ўзи эса ўша оралиқда анча силлиқ бўлиб, текис ўзгарса, у ҳолда интерполяцион кўпҳаднинг ҳосиласи ҳам талаб қилинаётган ҳосиладан кам фарқ қилади, деб ҳисоблаш мумкин.

Бунда функция интерполяция тугунлари орасида кўп сондаги экстремумларга эга бўлмаслиги учун бу тугунлар орасидаги масофа етарлича кичик, деб тахмин қилиш лозим бўлади. Акс ҳолда функция билан интерполяцион кўпҳаднинг қийматлари орасидаги фарқ кичик бўлса-да, уларнинг ҳосилалари орасида ҳеч бир умумийлик (ўхшашлик) бўлмаслиги мумкин.

Агар қаралаётган функция интерполяция тугунлари орасида текис (силлиқ) ўзгарса, у ҳолда жадвал кўринишида берилган функциянинг ҳосиласини топиш учун уни интерполяцион кўпҳад билан алмаштириш керак.

Шу сабабли сонли дифференциаллаш учун Лагранж интерполяцион формуласини қўлланиш ҳеч қандай қўшимча тушунтиришни талаб этмайди. Ньютон формуласини қўлланиш учун бир кичик изоҳ бериш лозим. 4- § даги (2.17) ва (2.21) интерполяцион формулаларда эркли ўзгарувчи ролини x билан $x = x_0 + th$ муносабат орқали боғланган t ўзгарувчи ўйнайди, $f(x)$ функция $F(x_0 + th)$ функция билан алмаштирилгани туфайли бу функциянинг ҳосиласи мураккаб функцияни дифференциаллаш қоидаси бўйича олинади:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dx}{dt},$$

буни қуйидагича қайта ёзиш мумкин:

$$\frac{dF}{dt} = f'(x)\frac{dx}{dt},$$

сўнгра $\frac{dx}{dt} = h$ бўлгани учун

$$f'(x) = \frac{1}{h} \times \frac{dF}{dt}. \tag{2.22}$$

Шундай қилиб, жадвал билан берилган функциянинг ҳосиласини топиш учун унинг Ньютон интерполяцион формуласини t бўйича дифференциаллаш ва натижани жадвал қадамига бўлиш лозим.

Ньютон формуласи бўйича сонли дифференциаллашга доир мисол келтирамиз. Бунинг учун аналитик ифодаси маълум бўлган функцияни қараймиз ва уни жадвал билан бериб, ҳосиласини интерполяцион формула ёрдамида топамиз. Шундай қилсак, ҳосиланинг топилган қийматини унинг аналитик усулда топилган ҳақиқий қиймати билан таққослаш мумкин бўлади.

Мисол. $y = f(x) = e^x$ функция $h = 0,1$ қадамли тўртхонали жадвал кўринишида берилган бўлсин (1- жадвал). f' (1,06) ни ҳисобланг.

Ҳосиланинг қийматини жадвал охиридаги x учун топиш талаб қилинаётганлиги сабабли, Ньютоннинг орқага интерполяциялаш формуласи (2.21) ни қўллаймиз: $x_n = 1,1$, $y_n = 3,0042$, $\Delta y_{n-1} = 0,2859$, $\Delta^3 y_{n-3} = 0,0026$, $\Delta^2 y_{n-2} = 0,0272$ деб оламиз. У ҳолда

$$F(1 + th) = 3,0042 + t \cdot 0,2859 + \frac{t(t+1)}{2} 0,0272 + \frac{t(t+1)(t^3+2)}{6} 0,0026.$$

(2.22) формулани қўлланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$f'(x) = \frac{1}{h}\frac{dF}{dt} = \frac{1}{h}\left[0,2859 + \frac{2t+1}{2} 0,0272 + \frac{3t^2+6t+2}{2} 0,0026\right].$$

Сўнгра $h = 0,1$ ва $t = -0,4$ бўлгани учун

$$f'(1,06) = 10\left[0,2859 + \frac{-0,4 \cdot 2 + 1}{2} 0,0272 + \frac{3 \cdot 0,16 - 6 \cdot 0,4 + 2}{6} 0,0026\right] = 2,8865.$$

Берилган функция $y = e^x$ дир, шунинг учун ҳосиланинг $x = 1,06$ даги ҳақиқий (аниқ қиймати) 9,8864 га тенг, демак, хато тўртинчи белгининг (рақам) бирлигига тенг, яъни у яхлитлаш хатоси бўлиши ҳам мумкин.

Албатта, бошқа ҳолларда Ньютон интерполяцион формуласи ёрдамида дифференциаллашдаги хатолар катта бўлиши мумкин. Бу ҳолларда янада аниқроқ натижалар 4- § да тавсифланган марказий айирмали интерполяцион формулалардан фойдаланиш билан ҳосил қилинади. Уларни қўлланиш Ньютон формулаларини қўлланишдан ҳеч бир фарқ қилмайди.

1- жадвал

x	$y = f(x)$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0,6	1,8221			
		1917		
0,7	2,0138		200	
		2117		24
0,8	2,2255		224	
		2341		22
0,9	2,4595		246	
		2587		26
1,0	2,7183		272	
		2859		28
1,1	3,0042		300	
		3159		
1,2	3,3201			

Аргументнинг жадвалда бўлган қийматлари учун ҳосилаларни яна ҳам осонроқ топиш мумкин. Уларни интерполяцион формулалардан фойдаланмасдан, ҳосилаларни бевосита чекли айирмалар орқали ифодалаб топиш мумкин.

Керакли формулаларни келтириб чиқариш функциянинг чекли айирмалар орқали ифодасини ва даражали қатор ёрдамидаги ифодасини таққослашга асосланади. Функцияни чекли айирмалар орқали тасвирини, масалан, Ньютоннинг олдинга интерполяция формуласи билан берилади:

$$y = y_0 + \frac{t}{1}\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y_0 + \\ + \frac{t(t-1)(t-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 y_0 + \dots \qquad (2.23)$$

Ўша функциянинг ўзини Маклорен формуласи бўйича ифодаланишини ёзайлик:

$$F(t) = F(0) + \frac{t}{1}F'(0) + \frac{t^2}{2!}F''(0) + \frac{t^3}{3!}F'''(0) + \dots (2.24)$$

(2.23) тенгликнинг ҳадларини t даражаларининг ортиб бориши бўйича жойлаштирамиз:

$$y = y_0 + \frac{t}{1}\left[\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{7} + \dots\right] + \\ + \frac{t^2}{1\cdot 2}\left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \dots\right] + \dots$$

Ҳосил қилинган ифодани (2.24) тенглик билан таққослаб, t нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентлар бўйича қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$F'(0) = \Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \dots,$$

$$F''(0) = \Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \; \dots ,$$

$$F'''(0) = \Delta^3 y_0 - \frac{3}{2}\Delta^4 y_0 + \dots ,$$

$$F^{\mathrm{IV}}(0) = \Delta^4 y_0 \; . . \; ,$$

. . . .

(2.22) формулага асосан $f'(x) = y' = \frac{1}{n} F'(t)$ га эгамиз, шунга ўхшаш

$$y'' = \frac{1}{h^2} F''(t), \; y''' = \frac{1}{h^3} F'''(t), \; \dots$$

$y = f(x)$ функция ҳосилаларининг $x = x_0$ даги қийматларини мос равишда y'_0, y'', . . . орқали белгилаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y'_0 = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \; \dots \right],$$

$$y''_0 = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \; \dots \right],$$

$$y'''_0 = \frac{1}{h^3}\left[\Delta^3 y_0 - \frac{3}{2}\Delta^4 y_0 + \; \dots \right],$$

$$y^{\mathrm{IV}} = \frac{1}{h^4}\left[\Delta^4 y - \; \dots \right].$$

. . . .

Бу формулалар тақрибий дифференциаллаш формулаларидир.

III боб

ТАҚРИБИЙ ИНТЕГРАЛЛАШ

1- §. Механик квадратуралар

Аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун формулалар анча кўп қўлланилади. Гап шундаки, кўпчилик элементар функциялар учун чекли бошланғич функциялар мавжуд эмас, шу сабабли аниқ интегрални Ньютон—Лейбниц формуласи ёрдамида ҳисоблаш мумкин бўлмайди. Шунингдек, шундай ҳоллар ҳам учраб турадики, чекли‘ кўринишда топиб бўладиган интеграллар мавжуд бўлса-да, уларнинг ифодалари анча мураккаб бўлади, ана шу ҳолларда тақрибий интеграллаш формулаларига мурожаат этишга тўғри келади. Тақрибий ҳисоблаш формулалари айниқса жадвал билан бериладиган функцияларни ўз ичига оладиган масалаларни ҳал этишда муҳимдир.

Турли тақрибий ҳисоблаш формулаларини ҳосил қилишнинг энг қулай усули қаторлар ва интерполяцион формулаларни қўлланишдир.

$y = f(x)$ функция $[a, b]$ интервалда узлуксиз бўлиб $\int_a^b f(x)\,dx$ интегрални ҳисоблаш талаб этилаётган бўлсин. $[a, b]$ интервални $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ бўладиган қилиб $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} = h\ (1 \leqslant i \leqslant n)$ қадам ёрдамида тенг бўлакларга бўламиз. $y_i = f(x_i)$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$ лар $f(x)$ функциянинг бўлиниш нуқталаридаги қийматлари бўлсин. 4- § даги Ньютоннинг (2.17) интерполяцион формуласидан фойдаланамиз, унда $x = x_0 + ht$ у ҳолда $dx = hdt$, интеграллаш чегаралари $a = x_0$, $b = x_0 + nh$ бўлиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_0+nh} F(x_0 + th)\ hdt = h\int_0^h (y_0 + t\Delta y_0 + \\ + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots)\,dt.$$

Интеграллаш натижасида қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} ydx = h\left[hy_0 + \frac{h^2}{2}\Delta y_0 + \left(\frac{h^3}{3} - \frac{h^2}{2}\right)\frac{\Delta^2 y_0}{2!} + \right. \\ \left. + \left(\frac{h^4}{4} - h^3 + h^2\right)\frac{\Delta^3 y_0}{3!} + \ldots\right]. \tag{3.1}$$

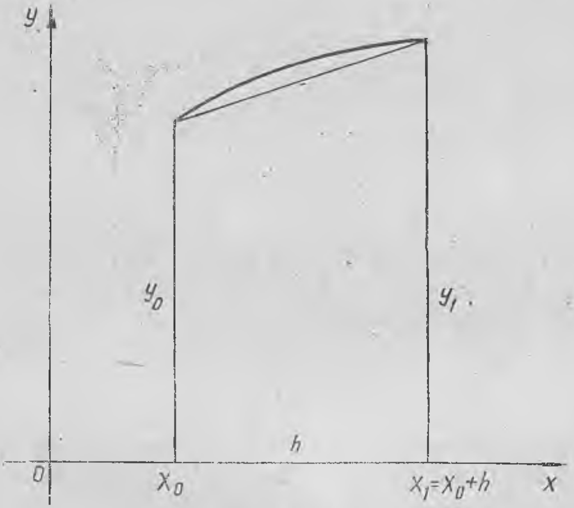
(3.1) формуладан бир қатор сонли интеграллаш формулаларини („механик квадратуралар формулалари“) ҳосил қилиш мумкин, бунинг учун оралиқни турли сондаги бўлакларга бўлиш ва турли даражали интерполяцион формулалардан фойдаланиш лозим.

(3.1) формулада $n = 1$ деймиз. Бу ҳолда биринчи тартиблидан юқори тартибли айирмалар бўлмайди, чунки биз фақат иккита x_0 ва x_0+h нуқтага эга бўламиз. У ҳолда

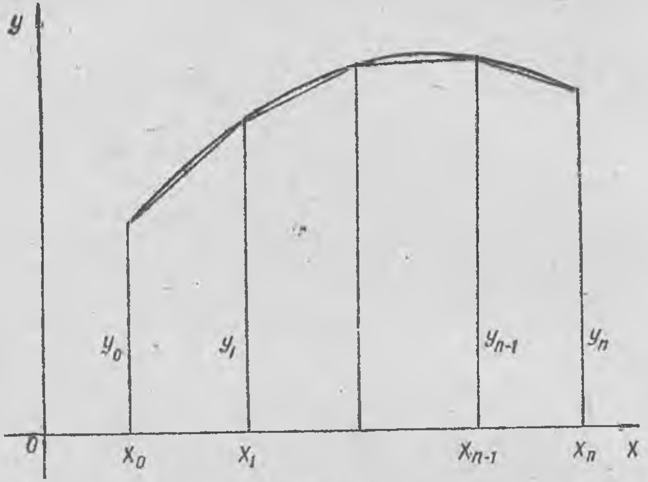
$$\int\limits_{x_0}^{x_0+h} ydx \approx h\left[y_0+\frac{1}{2}\Delta y_0\right]=h\left(y_0+\frac{y_1-y_0}{2}\right)=h\frac{y_1+y_0}{2}. \quad (3.2)$$

Геометрик нуқтаи назардан бу натижа мутлақо равшан. Ҳақиқатан, $n=1$ дейиш билан биз функцияни биринчи тартибли интерполяцион кўпҳад билан алмаштирамиз, яъни эгри чизиқни ватар билан алмаштирамиз (2.10- расм.) Бундан интеграл одатдаги тўғри чизиқли трапеция юзи билан алмаштирилади. Бунда $f(x)$ чизиқли функция бўлса, у ҳолда формула аниқ бўлади.

(3.2) формула катта оралиқлар учун анча қўполдир, албатта. Лекин уни аниқлаштириш учун n сонни катта қилиб олиш ва бунда юқори тартибли интерполяцион формуладан фойдаланишга зарурат йўқ. Бунда бошқача йўл тутиш фойдали: $[a, b]$ интервални n та бўлакка бўлиб, бу оралиқларнинг ҳар бири учун алоҳида формулани қўлланиш, яъни бутун $[a, b]$ интервалда битта n-даражали интерполяцион формулани қўлланмасдан, балки айрим оралиқларнинг ҳар бирида турли биринчи даражали интерполяцион формулаларни қўлланиш ло-



2.10-расм.



2.11-расм.

зим. Бунда эгри чизиқ синиқ чизиқ (2.11- расм) билан алмаштирилади.

(3.2) формулани (x_{i-1}, x_i) оралиқларга қўлланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{array}{l} \int_{x_1}^{x_2} ydx = h\frac{y_1 - y_2}{2}, \\ \cdot \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \int_{x_{n-1}}^{x_n} ydx = h\frac{y_{n-1} + y_n}{2}. \end{array}\right\} \qquad (3.3)$$

(3.3) формулаларнинг ҳаммасини (3.2) формула билан қўшиб, интеграл учун тақрибий ифода берадиган умумий формулага келамиз:

$$\int_a^b ydx \approx h\left[\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right]. \qquad (3.4)$$

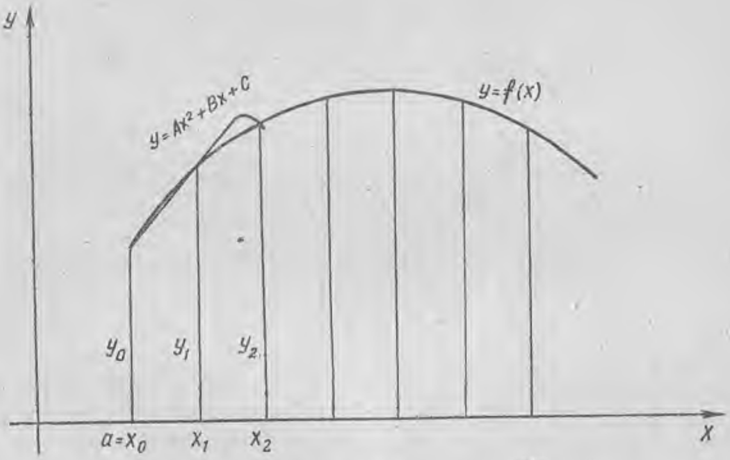
Бу содда формула h етарлича кичик, яъни бўлиниш нуқталари сони n катта бўлганда, анча яхши натижа беради. (3.4) формула *трапециялар формуласи* номи билан юритилади, бу ном унинг геометрик маъноси билан тушунтирилади.

Энди, анча кенг тарқалган ва кўп ишлатиладиган бошқа формулага ўтамиз. (3.1) да $n=2$ деймиз, яъни иккинчидан юқори тартибли барча айирмаларни ташлаб юборамиз. У ҳолда

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+2h} y dx = h\left[2y_0 + 2\Delta y_0 + \left(\frac{8}{3} - 2\right)\frac{1}{2}\Delta^2 y_0\right] = h\left[2y_0 + 2y_1 - \right.$$
$$\left. - 2y_0 + \frac{1}{3}\left(y_2 - 2y_1 + y_0\right)\right] = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2). \quad (3.5)$$

Ҳосил қилинган формуланинг геометрик маъносини ойдинлаштириш қийин эмас: $y=f(x)$ функция $[x_0, x_0+ 2h]$ интеграллаш оралиғида эгри чизиқнинг x_0, x_0+h, x_0+2h абсциссали нуқталаридан ўтадиган иккинчи даражали $y=Ax^2+Bx+C$ парабола билан алмаштирилади (2.12- расм). Албатта, агар $f(x)$ иккинчи даражали кўпҳаддан иборат бўлса, (3.5) формула аниқ натижа беради. Бироқ бу формула $f(x)$ учинчи тартибли кўпҳад бўлган ҳолда ҳам аниқ қиймат бериши юқорида кўрсатилади.

(3.5) формуладан, юқоридаги каби, интегрални бутун $[a, b]$ интервалда тақрибий ҳисоблаш учун формулани ҳосил қилиш мумкин. Бунинг учун $[a, b]$ интервални $2n$ та бўлакка бўламиз ва оралиқларнинг ҳар бир жуфти учун (3.5) формулани қўлланамиз:



2.12-расм.

$$\left.\begin{aligned}
&\int\limits_{x_0}^{x_2} ydx \approx \frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2),\\
&\int\limits_{x_2}^{x_4} ydx \approx \frac{h}{3}(y_2+4y_3+y_4),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\int\limits_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} ydx \approx \frac{h}{3}(y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n}).
\end{aligned}\right\}\qquad(3.6)$$

Барча (3.6) формулаларни жамлаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int\limits_a^b ydx \approx \frac{h}{3}\,[y_0+y_{2n}+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1})+2(y_2+ \\ +y_4+\ldots+y_{2n-2})].\qquad(3.7)$$

(3.7) формула *Симпсон формуласи* ёки *параболалар формуласи* дейилади.

Агар ҳисоблашлар арифмометр ёки ҳисоблаш машиналари ёрдамида бажариладиган бўлса, у ҳолда Симпсон формуласини бошқача, ординаталарни группаламасдан ёзиш мумкин:

$$\int\limits_a^b ydx \approx \frac{h}{3}\,[y_0+4y_1+2y_2+\ldots+2y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n}].\qquad(3.8)$$

1- жадвал

x	x^2	$1+x^2$	$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$
0,00	0,00	1,00	1,0000000
0,1	0,01	1,01	0,9900990
0,2	0,04	1,04	0,9615385
0,3	0,09	1,09	0,9174312
0,4	0,16	1,16	0,8620690
0,5	0,25	1,25	0,8000000
0,6	0,36	1,36	0,7352941
0,7	0,49	1,49	0,6711409
0,8	0,64	1,64	0,6097561
0,9	0,81	1,81	0,5524862
1,0	1,0	2,0	0,5000000

Бўлиниш оралиқлари сони бир хил бўлганда Симпсон формуласи трапециялар формуласига қараганда яхшироқ натижалар беради. Шу сабабли бу формула кўпроқ ҳисоблашни талаб қилса-да, ундан фойдаланилади. Айниқса, функциянинг қийматларини кўп сондаги нуқталарда ҳосил қилиш имкони бўлмаган ҳолларда трапециялар формуласидан кўра Симпсон формуласини афзал кўриш лозим.

Механик квадратуралар формулаларининг аниқлиги ҳақидаги масалани 2- § да кўриб чиқамиз, бу ерда эса формулаларнинг қўлланилишига доир мисол кўрамиз. Бунда биз ҳосил қилинган натижаларнинг аниқлигини осон баҳолай олиш мақсадида аниқ қиймати яхши маълум бўлган интегрални оламиз:

Мисол. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ интегрални $0 \leqslant x \leqslant 1$ оралиқни 10 бўлакка бўлиб, трапециялар усули ва параболалар усулида ҳисоблаймиз. Бу ерда $h = 0,1$. Функциянинг қийматларини топамиз:

Трапециялар формуласи бўйича:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0,1 \left[\frac{1,00000 + 0,500000}{2} + 0,9900990 + \right.$$
$$\left. + 0,5524862\right] = 0,7849815.$$

Симпсон формуласи бўйича

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{0,1}{3}\Big[1,00000000 + 0,5000000 + 4\,(0,9900990 +$$
$$+.0,9174312 + \ldots + 0,5524862) + 2\,(0,9615385 + \ldots +$$
$$+ 0,6097561)] = 0,7854648\Big].$$

$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_6^1 = \frac{\pi}{4}$ бўлгани учун биз бу интегрални тақрибий ҳисоблаш билан $\frac{\pi}{4}$ сонининг тақрибий қийматини топамиз деб ҳисоблаш мумкин.

$\frac{\pi}{4}$ учун ҳақиқий қиймат 0,78539816 ... бўлгани учун трапециялар формуласидан фойдаланишдаги нисбий хатолик 0,0403 ни, параболалар методидан фойдаланилгандаги нисбий хатолик эса 0,0085 ни ташкил этади.

2- §. Механик квадратуралар формулаларининг аниқлиги ҳақида

Энди механик квадратуралар формулаларининг аниқлигини баҳолаш масаласига ўтамиз. Аввал 1- § даги

(3.4) трапециялар формуласининг аниқлигини баҳолаймиз.

Юқорида, (3.2) формулани келтириб чиқаришда кўрсатиб ўтилганидек, у $f(x)$ функцияни $[x_0; x_1]$ интервалда биринчи даражали интерполяцион кўпҳад билан алмаштириш натижасида ҳосил бўлади. Уни $F_1(x)$ орқали белгилаймиз.

1- § даги (3.3) умумий интерполяцион формуланинг қолдиқ ҳади учун қуйидагини ёзамиз:

$$f(x) = F_1(x) + \frac{f''(\varepsilon)}{2}(x - x_0)(x - x_1). \qquad (3.9)$$

(3.9) тенгликни $[x_0; x_1]$ интервалда интеграллаб ва $F_1(x)$ чизиқли функция эканлигини ҳисобга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = h\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} f''(\varepsilon)(x - x_0)(x - x_1)\,dx.$$

Шундай қилиб, 1- § даги (3.2) тақрибий тенгликнинг хатоси ушбу қолдиқ ҳадга тенг:

$$r = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} f''(\xi)(x - x_0)(x - x_1)\,dx. \qquad (3.10)$$

$(x - x_0)(x - x_1)$ кўпайтма $(x_0; x_1)$ оралиқда ўзгармас ишора сақлайди. $f''(x)$ иккинчи ҳосилани узлуксиз деб фараз қилиб, аниқ интеграл учун ўртача қиймат ҳақидаги умумлаштирилган теоремани (3.10) интегралга қўллансак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$r = \frac{1}{2}f''(\xi_1)\int_{x_0}^{x_1}(x - x_0)(x - x_1)\,dx = \frac{-h^3}{12}f''(\xi_1),$$

бу ерда ξ_1 (x_0, x_1) интервалда ётади.

Шундай қилиб, (3.10) тенгликнинг қолдиқ ҳади

$$r = -\frac{h^3}{12}f''(\xi_1) \qquad (3.11)$$

кўринишга эга бўлади.

Бундай ифодаларни ҳамма (x_{i-1}, x_i) оралиқлар учун жамлаб, умумий R хато учун

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)}{n}$$

ифодани ҳосил қиламиз.

Иккинчи ҳосиланинг айрим нуқталаридаги қийматларининг ўртача арифметик қийматини η_n орқали белгилаймиз.

Иккинчи ҳосила шартга кўра узлуксиз, шунинг учун η_n ни иккинчи ҳосиланинг $[a, b]$ интервалдаги ўртача қийматига тенг деб ҳисоблаш мумкин, буни бундай ёзамиз:

$$\eta_n = f''(\xi).$$

У ҳолда

$$\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) = n f''(\xi).$$

$h = \frac{b-a}{n}$ бўлгани учун (3.4) трапециялар формуласининг қолдиқ ҳади учун узил-кесил қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$R = \frac{(b-a)^3}{12 n^2} f''(\xi). \tag{3.12}$$

(3.12) қолдиқ ҳаднинг ифодасидан кўриниб турибдики, трапециялар формуласи $f(x)$ чизиқли бўлган ҳолда аниқ қиймат беради, чунки бу ҳолда

$$f''(x) \equiv 0 \text{ ва } f''(\xi) = 0.$$

(3.7) Симпсон формуласининг аниқлигининг баҳоси ҳам шу йўл билан ҳосил қилиниши мумкин, бироқ бу йўл анча узоқ ҳисоблашларни талаб этади. Шу сабабли биз қолдиқ ҳаднинг ифодасини бошқача келтириб чиқариш йўлини кўрсатамиз, бу йўл, бир томондан, мураккаб ҳисоблашларни талаб этмайди, иккинчи томондан, аниқликни баҳолашнинг бошқача усулларини кўрсатишга имкон беради.

$[x-h, x+h]$ интервалда тўртинчи тартибли узлуксиз ҳосилага эга бўлган $f(x)$ функцияни қараймиз, унинг бошланғич функциясини $F(x)$ орқали белгилаймиз. Ньютон — Лейбниц формуласига кўра

$$\int_{x-h}^{x+h} f(x)\,dx = F(x+R) - F(x-h).$$

Иккинчи томондан, (3.5) формула

$$\int_{x-h}^{x+h} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x-h) + f(x+h) + 4f(x)\right]$$

ни беради. Ушбу

$$\varphi(h) = F(x+h) - F(x-h) - \frac{h}{3}[f(x+h) + f(x-h) + \\ + 4f(x)] \qquad (3.13)$$

ёрдамчи функцияни қараб, x ни фиксирланган, h ни ўзгарувчи деб ҳисоблаймиз. Равшанки, $\varphi(0) = 0$ эканлигини ҳисобга олиб, (3.13) функциянинг h бўйича ҳосилаларини топамиз:

$$[F'(x) = f(x).$$

$$\varphi'(h) = f(x+h) + f(x-h) - \frac{1}{3}\Big[f(x+h) + f(x-h) + \\ + 4f(x)\Big] - \frac{h}{3}\Big[f'(x+h) - f'(x-h)\Big],$$

$$\varphi''(h) = f'(x+h) - f'(x-h) - \frac{2}{3}\Big[f'(x+h) - f'(x - \\ - h)\Big] - \frac{h}{3}\Big[f''(x+h) + f''(x-h)\Big]$$

$$\varphi'''(h) = f''(x+h) + f''(x-h) - [f''(x+h) + f''(x-h)] - \\ - \frac{h}{3}\Big[f''(x+h) - f''(x-h)\Big].$$

Биринчи ва иккинчи ҳосилаларда $h = 0$ деб,

$$\varphi'(0) = 0, \quad \varphi''(0) = 0$$

ни ҳосил қиламиз.

Учинчи ҳосиланинг ифодаси, ўхшаш ҳадларни ихчамлангандан сўнг,

$$\varphi'''(h) = \frac{h}{3}\Big[f'''(x+h) - f'''(x-h)\Big]$$

кўринишни олади. Лагранж формуласига кўра

$$\varphi'''(h) = -\frac{2}{3}h^2 f^{IV}(\xi_1), \; x-h < \xi_1 < x+h.$$

Фиксирланган x да ξ_1 оралиқ нуқта h катталикка боғлиқ бўлади, албатта. Энди бу $\varphi''(0) = 0$ эканини ҳисобга олиб, охирги тенгликни интеграллаймиз:

$$\int_0^h \varphi'''(h)\,dh = \varphi''(h) = -\frac{2}{3}\int_0^h h^2 f^{IV}(\xi_1)\,dh.$$

Ўнг томондаги интегралдаги $f^{IV}(\xi_1)$ катталик h нинг бирор функциясидир, чунки унга h аргумент боғлиқдир. Бу мураккаб функциянинг ξ_1 га узлуксиз боғлиқлигининг исботига тўхталиб ўтирмасдан, интегралга ўртача қиймат ҳақидаги умумлашган теоремани қўллаймиз:

$$\int_0^h h^2 f^{IV}(\xi_1)\,dh = f^{IV}(\xi_2)\int_0^h h^2\,dh = \frac{h^{3}_{\cancel{2}}}{3} f^{IV}(\xi_2),$$

бу ерда ξ_2 олдинги ξ_1 каби $(0,h)$ интервалдаги оралиқ нуқта бўлиб, h га боғлиқ. Шундай қилиб,

$$\varphi''(h) = -\frac{2}{3}\int_0^h f^{IV}(\xi_1)\,dh = -\frac{2h^3}{9} f^{IV}(\xi_2).$$

Шунга ўхшаш мулоҳаза юритиб, қуйидагиларни топамиз:

$$\varphi'(h) = -\frac{h^4}{18} f^{IV}(\xi_3),\ \varphi(h) = -\frac{h^5}{90} f^{IV}(\xi),$$

бу ерда ξ_3 ва ξ—$(0, h)$ интервалдаги янги оралиқ нуқталар. Шундай қилиб, (3.5) формуланинг хатолиги бундай ифодаланади:

$$\varphi(h) = -f^{IV}(\xi)\,\frac{h}{90}. \qquad (3.14)$$

(3.7) Симпсон формуласининг қолдиқ ҳадини ҳосил қилиш учун (3.14) тенгликларни n жуфт оралиқ учун жамлаб чиқиш зарур. (3.12) формула учун келтирилган мулоҳазаларни такрорлаб,

$$R = -n\,\frac{h^5}{90} f^{IV}(\eta)$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда η — янги оралиқ нуқта, $h = \frac{b-a}{2h}$ бўлгани учун сўнгги формулани бундай ёзиш мумкин:

$$R = \frac{(b-a)}{180\,(2n)^4} f^{IV}(\eta). \qquad (3.15)$$

(3.15) тенгликдан кўриниб турибдики, интегрални тақрибий ҳисоблаш учун (3.7) параболалар формуласи $f(x)$ учинчи даражали ёки ундан паст даражали кўпҳад бўлганда аниқ қиймат беради, чунки бу ҳолда

$$f^{IV}(x) \equiv 0\cdot$$

(3.12) ва (3.15) баҳолардан фойдаланиш мураккаб бўлгани туфайли уларнинг амалий аҳамияти унча катта эмаслигини қайд этиб ўтамиз. Шу сабабли механик квадратуралардан фойдаланишда бошқача усулларга мурожаат этилади.

Жумладан, функциянинг Симпсон формуласида ишлатиладиган қадам билан тузилган жадвалида иккинчи ёки учинчи тартибли айирмаларнинг доимийлиги Симпсон формуласини қўлланиб бўлишлигининг муҳим критерийсидир. Ҳақиқатан, бу нарса функциянинг иккинчи ёки учинчи даражали кўпҳадлар билан яхши тасвирланишини кўрсатади, бундай кўпҳадлар учун эса Симпсон формуласи аниқ натижа беради. Кўпинча, трапециялар ёки параболалар формуласидан фойдаланишда қуйидаги усулдан фойдаланилади: кесмани n бўлакка (n жуфт) ва $2n$ бўлакка бўлиб, интеграл параболалар формуласи бўйича ҳисобланади. Агар бунда ҳосил бўладиган қийматларни I_n ва I_{2n} орқали белгиласак, у ҳолда I_n ва I_{2n} нин дастлабки хоналарининг бир хил бўлиши ҳосил қилинган қийматларнинг аниқлиги ҳақида хулоса чиқариш имконини беради.

3-§. Қаторлар ёрдамида интеграллаш

Интегралларни қаторлар ёрдамида ҳисоблаш ўқувчига математик анализ курсининг тегишли бўлимидан маълум. Шу сабабли биз бир неча мисол кўриш билан чекланамиз ва бунда ишнинг ҳисоблаш жиҳатига алоҳида, эътибор берамиз.

1- мисол. $\int_0^x e^{-u^2} du$ аниқмас интегралнинг даражали қаторга ёйилмасини топамиз.

Маълумки,

$$e^{-u^2} = 1 - \frac{u^2}{1!} + \frac{u^4}{2!} - \frac{u^6}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{u^{2n}}{n!} + \dots$$

У ҳолда

$$\int_0^x e^{-u^2} du = x - \frac{x^3}{3\cdot 1!} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2_n+1)\, n!} + \dots$$

Ҳосил қилинган қатор бутун тўғри чизиқда яқинлашади.

2- мисол. $\int\limits_0^1 e^{-x^2} dx$ интегрални 0,0001 гача аниқликда ҳисобланг.

$x = 1$ қийматни юқорида ҳосил қилинган қаторга қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$I_1 = \int\limits_0^1 e^{-x^2} dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} - $$

$$- \frac{1}{75600} + \dots$$

Топилган сонли қатор алмашинувчи ишорали бўлиб у тез яқинлашади.

Лейбниц теоремасига асосан, бундай қаторнинг йиғиндисини унинг қисмий йиғиндиси билан алмаштиришдан ҳосил бўладиган хатони абсолют қиймати ташлаб юборилган ҳадлардан биринчисининг абсолют қийматидан катта бўлмайди. Шу сабабли қаторнинг биринчи еттита ҳади билан чекланиш мумкин, чунки саккизинчи ҳад:

$$\left| -\frac{1}{75600} \right| < 0{,}0001$$

Бу еттита ҳаднинг йиғиндисини ҳисоблаб, $I_1 = 0{,}7468$ ни ҳосил қиламиз; бунда оралиқ ҳисоблашни битта қўшимча рақам билан олиб бориш лозим.

3- мисол. $\mathrm{si}\,x = \int\limits_0^x \frac{\sin u}{u} du$ интеграл синуснинг даражали қаторга ёйилмасини топинг ва si 2 ни ҳисобланг.

$\sin u$ нинг ёйилмасини ҳисобга олиб, бундай ёзиш мумкин:

$$\frac{\sin u}{u} = 1 - \frac{u^2}{3!} + \frac{u^4}{5!} - \frac{u^6}{7!} + \dots + (-1)^1 \frac{u^{2n}}{(2n+1)!} - \dots$$

Бу ердан:

$$\mathrm{si}\,x = \int\limits_0^x \frac{\sin u}{u} du = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots + \dots$$

$$+ (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1) \cdot (2n-1)!} + \dots$$

Бунга $x = 2$ ни қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\operatorname{si} 2 = 2 - \frac{2^3}{3 \cdot 3!} + \frac{2^5}{5 \cdot 5!} - \frac{2^9}{7 \cdot 7!} + \frac{2^9}{9 \cdot 9!} - \frac{2^{11}}{11 \cdot 11!} + \ldots$$

Ҳосил қилинган қатор, аввалги мисолдаги каби, алмашинувчи ишорали, шунинг учун ёзилган ҳадларнинг охиргисини ташлаб юбориш билан биз унинг абсолют қийматидан кичик, яъни 0,0000005 дан ортиқ бўлмаган хатога йўл қўямиз, демак, бешта рақамга кафолат бериш мумкин. Шундай қилиб,

$$\operatorname{si} 2 = 1{,}60543$$

4- мисол. Тегишли интегрални қаторга қўйиб, $\arcsin 0{,}2$ ни ҳисобланг.

Маълумки,

$$\arcsin 0{,}2 = \int_0^{0,2} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \int_0^{0,2} (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Ньютон биноми формуласидан фойдаланиб. қуйидагини топамиз:

$$\operatorname{ars} \sin 0{,}2 = \int_0^{0,2} \left(1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 + \right.$$

$$\left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^8 + \ldots \right) dx = 0{,}2 + \frac{1 + 0{,}2^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 0{,}2^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} +$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{0{,}2}{7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{0{,}29}{9} + \ldots$$

Бу қаторнинг йиғиндисини ҳисоблаймиз, бунда, масалан, биринчи учта ҳад билан чекланамиз ва ҳосил бўладиган хатони аниқлаймиз.

Ҳосил қилинган қатор ўзгармас ишорали, шунинг учун унинг йиғидисини (хатосини) олдинги мисоллардан бошқачароқ баҳоланади.

Қатор йиғиндисининг хатоси:

$$R = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{0{,}2^7}{7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{0{,}2^9}{9} + \ldots$$

Бундан барча ҳадлардаги биринчи кўпайтувчиларни (улар бирдан кичик) ташлаб юбориб ва барча махражларни 7 га тенг деб олиб, биз бу билан қаторнинг барча ҳадларини орттирамиз. Шунинг учун

$$R < \frac{0{,}2^7}{7} + \frac{0{,}2^9}{7} + \ldots = \frac{1}{7} \left(0{,}2^7 + 0{,}2^9 + \ldots\right) = \frac{1}{7} \frac{0{,}2^7}{1 - 0{,}2},$$

демак, бешта рақамга кафолат бериш мумкин. Шундай қилиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\arcsin 0{,}2 = 0{,}20136.$$

IV боб

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ИНТЕГРАЛЛАШ

1- §. Умумий изоҳлар.

Биринчи тартибли дифференциал тенгламаларни ечиш методлари асосан бу тенгламаларни ўзгарувчилари ажраладиган тенгламаларга келтириб, кейин интеграллашга асосланган. Бундай тенгламаларни *квадратураларда ечиладиган тенгламалар* дейилади. Иккинчи тартибли тенгламани одатда биринчи тартибли тенгламага келтиришга ҳаракат қилинади, бунда ҳосил бўлган тенглама квадратураларда ечилса, у ҳолда дастлабки тенгламанинг ечимини ҳам интеграллар ёрдамида ёзиш мумкин.

Агар бунда учрайдиган интеграллар элементар функциялар орқали ифодаланмаса, у ҳолда уларни олдинги бобдаги методлардан фойдаланиб тақрибий топиш мумкин. Бироқ дифференциал тенгламаларни ўрганишда айтиб ўтилганидек, квадратураларда ечиладиган тенгламалар типлари сони кўп эмас.

Физика ва техника масалаларини ҳал этишда кўплаб учрайдиган хилма-хил турдаги тенгламалар уларнинг тақрибий ечимининг кўп сонли методларини ишлаб чиқилишига олиб келди. Бу методлар ечимни қайси шаклда беришига қараб уларни уч катта группага бўлиш мумкин.

Маълумки, математик анализда функциянинг берилишининг уч асосий усули: аналитик ифода билан, график ва жадвал ёрдамида берилиши қаралади. Бунга мувофиқ равишда биз тақрибий ечимнинг аналитик ифодасини берадиган тақрибий интеграллаш методларини аналитик методлар деб аташимиз мумкин. Интеграл эгри чизиқларни, яъни дифференциал тенглама ечимининг графигини тақрибий ясаш методларини *график методлар* деб атаймиз. Ниҳоят, сонли интеграллаш методлари жумласига шундай методларни киритамизки, уларни қўллаш натижасида биз тақрибий ечимни жадвал шаклида ҳосил қиламиз.

2-§. Сонли интеграллаш методлари. Эйлер методи

Дифференциал тенгламаларни сонли интеграллаш методлари одатда бошқа методлардан кўра кўпроқ ишлатилади. Тенгламаларни қаторлар ёрдамида аниқмас коэффициентлар усули билан ҳам, кетма-кет дифференциаллаш усули билан ҳам интеграллашда кўп сонли ҳадларни олиш керак бўлиб қолиши мумкин. Аниқликни баҳолаш, айниқса, умумий ҳаднинг ифодасини топиб бўлмаган ҳолларда кўпинча жуда қийин бўлади. Бундан ташқари, математиканинг амалий татбиқларида изланаётган ечимни берадиган формула эмас, балки аргументнинг тайин қийматларида ечимнинг қийматларини билиш талаб қилиниб, ана шуларни ҳисоблаш лозим бўлади.

Сонли методларни баён этишни Эйлер методидан бошлаймиз. Бу метод нисбатан қўпол бўлиб, анчагина тахминий ҳисоблашлар учун қўлланилиши мумкин. Бироқ унинг асосидаги ғоялар аслида сонли методларнинг кенг синфига асос бўлади. Шу сабабли уни батафсил кўриб чиқиш фойдали.

Ушбу

$$y' = f(x, y) \tag{4.1}$$

биринчи тартибли дифференциал тенглама

$$x = x_0, \ y = y_0 \tag{4.2}$$

бошланғич шарт билан берилган бўлсин. h сонни шундай танлаб оламизки, (бу ерда $x_1 = x_0 + h$) (x_0, x_1) интервалдаги барча x лар учун y функциянинг қийматлари y_0 дан оз фарқ қилсин (функция узлуксиз). У ҳолда y нинг кўрсатилган интервалда ўзгаришини бундай ёзиш мумкин:

$$y = y_0 + (x - x_0)\, y_0' = y_0 + (x - x_0)\, f'(x_0, y_0),$$

бу ерда $y_0' = f'(x_0, y_0)$ берилган $x = x_0$ нуқтада y' ҳосиланинг қиймати. Бошқача айтганда, бу оралиқда эгри чизиқ тўғри чизиқ (эгри чизиққа оралиқнинг бошида ўтказилган уринма) билан алмаштирилади.

Оралиқнинг охири $x_1 = x_0 + h$ учун

$$y\Big|_{x = x_1} = y_0 + hy_0' + 2h$$

ни ҳосил қиламиз. Худди шунга ўхшаш, $x = x_2 = x_0 + 2h$ учун қуйидагини ёзиш мумкин: $y_2 = y_1 + hy_1'$; бу ерда

$$y_1' = f(x_1, y_1).$$

Функциянинг навбатдаги қийматларини шу қонун бўйича туза бориб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y_{k+1} = y_k + hy_k',$$

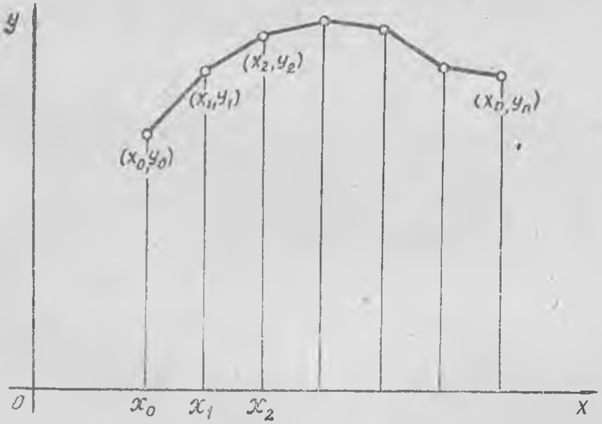
бу ерда $y''_{k+1} = f''(x_k, y_k)$. Маълум белгилашлардан фойдаланиб, Эйлер методининг бу схемасини ушбу формулалар билан тасвирлаш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} \Delta y_k &= hy_k', \\ y_{k+1} &= y_k + \Delta y_k. \end{aligned}\right\} \qquad (4.3)$$

Шундай қилиб, бу ерда гап изланаётган функциянинг айирмаларини кетма-кет ҳисоблаш устида бормоқда.

Эйлер методининг геометрик маъносини кўриш осон. Бунда интеграл эгри чизиқ синиқ чизиқ билан алмаштирилиб, бу синиқ чизиқнинг бўғинлари ўзгармас горизонтал проекцияга эга. Биринчи бўғин интеграл эгри чизиққа (x_0, y_0) нуқтада уринади (2.13- расм).

Ҳосил қилинган формулалар бошқача мулоҳазалардан ҳам ҳосил қилиниши мумкин бўлиб, биз улардан ке-



2. 13-расм.

йинчалик ҳам фойдаланамиз. (4.1) тенгламадан бундай ёзиш мумкин:

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x))\,dx. \qquad (4.4)$$

1- жадвал

№	1	2	3	4	5	6
№	x_i	y_i	$2x_i y_i$	$\Delta y_i = h \cdot 2x_i y_i$	$e^{x^2_i}$.	$h=0,5$ бўлганда y_i
0	0	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00
1	0,1	1,00	0,20	0,02	1,01	1,00
2	0,2	1,02	0,41	0,04	1,04	1,03
3	0,3	1,06	0,64	0,06	1,09	1,08
4	0,4	1,12	0,90	0,09	1,17	1,15
5	0,5	1,21	1,21	0,12	1,28	1,25
6	0,6	1,34	1,60	0,16	1,43	1,38
7	0,7	1,50	2,09	0,20	1,63	1,55
8	0,8	1,70	2,71	0,27	1,89	1,78
9	0,9	1,97	3,54	0,35	2,25	2,08
10	1	2,32			2,72	2,49

Агар (4.4) интегралда $f(x, y(x))$ функцияни ўзгармас ва (x_k, y_k) нуқтадаги қийматига тенг деб қабул қилинса, у ҳолда интеграл $hf(x_k, y_k)$ га тенг бўлади, демак, (4.4) формула (4.3) формулага айланади.

1- мисол. Бошланғич шарти $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ бўлган $y' = 2xy$ тенгламани (0,1) оралиқда Эйлер методи билан интеграллаймиз, $h = 0,1$ деб қабул қиламиз.

Ҳисоблаш схемаси ва натижалари 1- жадвалда берилган. Бошланғич маълумотлар бўйича (1) ва (2) устунлардаги биринчи сатр тўлдирилган. Сўнгра

$$y_0' = 2x_0 y_0$$

тенгламадан (4) устуннинг биринчи сатри учун y' ҳисобланади ва (3) устун учун биринчи ва иккинчи сатрлар орасидаги

$$\Delta y_0 = hy_0'$$

қиймат ҳисобланади. Энди (2) устундаги иккинчи сатрни тўлдириш мумкин:

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0,$$

сўнгра (4) устундаги иккинчи сатрни тўлдириш мумкин ва ҳ. к.

(5) устунда аниқ ечим $y = e^{x^2}$ нинг қийматлари икки рақамгача аниқликда келтирилган.

Натижаларни солиштириш шуни кўрсатадики, $x = 1$ да аниқ ечим $y = 2{,}72$, шу билан бир вақтда Эйлер усули билан ҳисобланган қиймат $y = 2{,}32$. Нисбий хато 14% атрофида, яъни анча катта. Яқинлашишни яхшилаш учун h ни кичрайтириш, яъни интервални бўлиш нуқталари сонини орттириш лозим.

(6) устунда Эйлер методида $h = 0{,}05$ қадам билан ҳисоблаш натижалари келтирилган. Бу ерда $x = 1$ да нисбий хато 7% ни ташкил этади, яъни олдингидан икки марта кичик; $x = 0{,}5$ учун эса хато 1,5% дан сал ортиқ, яъни натижани қониқарли деб ҳисоблаш мумкин·

3- §. Адамс — Крилов методи

Эйлер методи ёки унинг аниқлаштирилган тури берадиган ечимнинг аниқлиги кўпинча талаб қилинадиган аниқликни таъминлай олмайди. Қадамнинг анча камайтирилиши аниқликни орттирса-да, лекин анча катта ҳажмли ҳисоблашларни талаб этади. Адамс — Крилов методи қадам бир хил бўлганда Эйлер методи ва унинг аниқлаштирилган турига қараганда кўпроқ аниқ натижалар беради, мазкур параграфда шу методни кўриб чиқамиз.

Дифференциал тенгламаларни интеграллаш методи бу ерда ҳам Эйлер методидаги каби ечимнинг биринчи айирмалари Δy_n ларни кетма-кет ҳисоблашга келтирилади, лекин бунда айирмалар аниқроқ ҳисобланади.

Яна

$$y' = f(x, y) \tag{4.1}$$

биринчи тартибли дифференциал тенгламани

$$x = x_0, \qquad y = y_0 \tag{4.2}$$

бошланғич шарти билан қараймиз. h интеграллаш қадамини қараймиз ва қиймати

$$\eta_n = y_n' h = f(x_n, y_n) h \tag{4.5}$$

муносабат билан аниқланадиган янги η_n миқдорни киритамиз. Δy айирмаларни баҳолаш масаласи икки босқичга бўлинади; миқдорнинг дастлабки қийматларини ва айирмаларини аниқлаш ҳамда кейинги айирмаларни топилган миқдор бўйича аниқлаш (жадвални давом эттириш). Бу босқичларнинг иккинчисини кўриб чиқамиз.

Тенгламани интеграллаб, биз n- сатригача тўлдирилган 1- жадвални тузган бўлайлик.

Энди ўз олдимизга бу жадвални яна бир сатр давом эттиришни, яъни Δy_n ни, кейин эса y'_{n+1} ни маълум η_n, $\Delta\eta_{n-1}$ қийматлар бўйича ифодалашни мақсад қилиб қўйайлик, ҳозирча бу жадвал n номергача қандай тўлдирилгани масаласига тегмаймиз. Биз ҳозир аниқламоқчи бўлган формула Адамс — Крилов усулида энг асосийдир. Агар учинчи айирмаларни қўлланиш билан чекланадиган бўлсак, бу формула қуйидаги кўринишни олади:

$$\Delta y_n = \eta_n + \frac{1}{2}\Delta^{1}\eta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3\eta_{n-3}. \quad (4.6)$$

Бу формулани функция билан унинг ҳосиласи орасидаги ушбу маълум муносабатга асосланиб келтириб чиқарамиз:

$$y_{n+1} - y_n = \int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x)\,dx.$$

(6)

Буни бундай ёзиш мумкин:

$$\Delta y_n = \int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} hy'(x)\frac{dx}{h}\,. \quad (4.7)$$

Бу ерда $hy'(x)$ функцияни унинг олдинги нуқталарида $\eta(x)$ нинг қийматлари бўйича тузилган интерполяцион кўпҳадига тенг деб ҳисоблаб, интегрални бундай ҳисоблаш мумкин:

$$\Delta y_n = \int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} \eta(x)\frac{dx}{h}\,. \quad (4.8)$$

Агар $hy'(x)$ миқдор амалда ўзгармас бўлган учинчи тартибли айирмаларга эга деб ҳисобланадиган бўлса, у ҳолда $\eta(x)$ интерполяцион кўпҳадни учинчи даражали деб ҳисоблаш мумкин.

Ньютоннинг иккинчи интерполяцион формуласини қўлланиб, $\eta(x)$ функция учун $[x_{n-3}; x_n]$ кесмада интерполяцион кўпҳад тузамиз, x_{n-3} нинг интерполяция тугунлари сифатида x_{n-2}; x_{n-1}; x_n ни оламиз.

(4.5) белгилашдан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз;

$$\eta(x) = \eta(x_n + th) = \eta_n + t\Delta\eta_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2}\Delta^2\eta_{n-2} +$$

$$+ \frac{(t+1)(t+2)}{6}\Delta^3\eta_{n-3}, \qquad (4.9)$$

бу ерда

$$t = \frac{x - x_n}{h}.$$

(4.8) формулани ўзгарувчиларни қуйидагича $x = x_n + th, dx = hdt$ алмаштириш ёрдамида бундай алмаштириш мумкин:

$$\Delta y_n = \int_0^1 \eta(x_n + th)\,dt.$$

Сўнгра бу ерда $\eta(x_n + th)$ учун (4.9) ифодадан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\Delta y_n = \int_0^1 \Big[\eta_n + t\Delta\eta_{n-1} + \frac{t(t+1)^2}{2}\Delta^2\eta_{n-2} +$$

$$+ \frac{t(t+1)(t+2)}{6}\Delta^3\eta_{n-3}\Big]dt$$

ёки узил-кесил

$$\Delta y_n = \eta_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3\eta_{n-3},$$

бу эса талаб қилинаётган (4.6) формулани беради.

Ҳосил қилинган Δy_n қийматни жадвалда бор бўлган y_n қийматга кўшиб функциянинг навбатдаги қийматини ҳосил қиламиз. Маълум x_{n+1} ва y_{n+1} қийматлар бўйича

$$\eta_{n+1} = y'_{n+1}h = f(x_{n+1}, y_{n+1})h$$

ни ҳисоблаш мумкин. Бу η миқдорнинг кейинги номерли айирмаларини топиш имконини беради. Шундай қилиб, Адамс — Крилов формуласи 1- жадвални бир қадамга ва, демак, исталган сондаги қадамга давом эттириш имконини беради.

III қисм

ОПЕРАЦИЯЛАРНИ ТЕКШИРИШ ВА ОПТИМАЛЛАШТИРИШ УСУЛЛАРИ

I боб

ИНЖЕНЕРЛИК-ИҚТИСОДИЙ МАСАЛАЛАРИ

1- §. Математика ва инженерлик-иқтисодий масалалари

Математиканинг биринчи принципиал хусусияти унинг бирор хулосани келтириб чиқаришда қоидадан ҳеч қандай четламаслигидан (изчиллигидан) иборат.

Математиканинг иккинчи принципиал ўзгачалиги у ёки бу хулосани келтириб чиқаришда унга аксиоматик ёндашишидан иборат. Бунда дастлаб аксиомалар системаси берилиб, сўнгра уларга асосланиб янги математик қоида ва хулосалар яратилади.

Математиканинг учинчи принципиал хусусияти шундаки, у тушунчаларнинг реал маъносидан қатъи назар, улар билан ишлаш имконига эгадир.

Энди одатдаги математик мулоҳаза юритишни қарайлик. Дастлаб, юқорида айтганимиздек, аксиомалар системаси киритилади. Сўнгра бу аксиомалар системасидан фойдаланиб ва логик қоидаларни татбиқ этиш билан, янги-янги тушунчалар ҳосил қилинади. Бу ерда энг муҳими шуки, эришилган янги тушунчалар асосида янги билим олишдир. Математика учун энг муҳими эса унинг тузилишидаги ички қарама-қаршиликлар бўлмаслигидир. Шундай қилиб, объектларнинг реал хоссаларидан абстрактланиб, логик қоидалар асосида, улар устида математик алмаштиришлар натижасида янги-янги хосса ва муносабатларни ҳосил қилиш мумкин. Бу эса кейинроқ эмпирик равишда тасдиқланиши мумкин.

Ҳар қандай айтилган математик фикр ва мулоҳазалар текшириб кўрилиши мумкин. Масалан, ўтказилган кузатишларни математик нуқтаи назардан таҳлил қилиш натижасида Г. Мендель насл юритувчи генлар мавжудлиги ҳақидаги хулосага келди. Бир гуруҳ биолог олимлар экспериментал натижаларни математик нуқтаи-назардан таҳлил қилиш натижасида Менделнинг хулосасини «йўққа» чиқардилар. Лекин тезда атоқли математик олим, академик А. Н. Колмогоров бу олимларнинг хулосалари нотўғри эканлигини ажойиб тарзда исботлаб берди. Бунда барча камчилик математик аппаратдан ўз ўрнида яхши фойдалана олмасликдан келиб чиққан эди. Шундай қилиб, математика Мендель ва унинг тарафдорларининг сўзсиз ҳақ эканликларини объектив исботлаб берди.

Сўнгги йилларда фаннинг турли усулларидан фойдаланилаётган билимлар соҳасида жуда катта ютуқларга эришилмоқда. Фанларнинг «ўзаро тўқнашиш» процесси рўй бермоқда: нисбийлик назарияси (физика+математика), генетика (биология+химия+математика), кибернетика (биология+механика+математика) ва бошқалар.

«Соф математика»ни бошқа фанлардан сунъий ажратиб қўювчилар янглишадилар. Барча фанлар ўзаро жипс боғлангандир. Ҳозирги вақтда интеграция процесси интенсив давом этмоқда.

2-§. Иқтисодий-математик тадқиқотлар

Маълумки, иқтисодий-математик тадқиқотлар айниқса кейинги йилларда ривожлана бошлади. Иқтисодий масалаларни математик усуллар ёрдамида текширишга бағишланган биринчи асар XIX асрнинг бошларида босилиб чиққан эди. Бунда, шу вақтдан бошлаб иқтисодий-математик тадқиқотлар кенг ривожлана бошлади, деган сўз келиб чиқмайди. Кўпгина олимлар бу янги йўналишга шубҳа билан қарадилар, фақат баъзи ташаббускорларгина бу янги йўналишнинг порлоқ келажагига ишондилар.

Халқ хўжалигининг сонли модели жаҳонда биринчи марта француз олими Ф. Кене томонидан XVIII асрда ишлаб чиқилди. У тарихга «Иқтисодий жадвал» номи билан кирди. Шу жадвал асосида автор ишлаб чиқаришни, товар алмаштириш ва тақсимлашнинг чексиз кўп индивидуал фактларини халқ хўжалиги нуқтаи назаридан умумлаштиришга муваффақ бўлди.

К. Маркс иқтисодий масалаларда математик усулларнинг аҳамиятини биринчилар қаторида чуқур тушунди ва ундан ўзининг машҳур «Капитал» асарида амалий равишда фойдаланди. У ижтимоий такрор ишлаб чиқариш қонунларининг математик усулда шундай ифодаладики, бу ишлаб чиқариш, истеъмол қилиш ва жамғариш элементлари орасидаги мураккаб муносабатларни кўргазмали равишда баён қилишга имкон берди. Ҳосил қилинган муносабатлар асосида Қ. Маркс капиталистик жамиятда оддий ва кенгайтирилган такрор ишлаб чиқаришнинг сонли параметрларини аниқлади.

Қ. Маркснинг такрор ишлаб чиқариш схемасини В. И. Ленин тўлдирди ва ривожлантирди. У халқ хўжалиги ривожланишининг янги томонларини сонли муносабатлар ёрдамида сифат жиҳатдан очиб берди.

Ҳозирги кунгача кўпгина олимлар математикани ижодий ривожлантириш асосида иқтисодда бўлаётган процессларни чуқур ўрганишда катта аҳамиятга эга бўлган жуда кўп амалий натижаларга эришмоқдалар.

Иқтисодий-математик тадқиқотлар ривожланишининг ажойиб саҳифаларидан бири академик А. В. Қанторович номи билан боғланган. У математиканинг ҳозирги кунда иқтисодий масалаларини ечишда кенг қўлланиладиган бутун бир соҳаси — чизиқли программалаштиришнинг асосчиси бўлди.

Ўттизинчи йиллар охирида Ленинграддаги фанера ишлаб чиқарувчи трест Ленинград давлат университетининг математика ва механика институтига қуйидаги масалани ҳал этишни таклиф қилди: фанера листини минимал чиқинди чиқадиган қилиб қандай кесиш мумкин? Бу муаммони ҳал қилишни А. В. Қанторовичдан илтимос қилишди. Бу масалани фақат математика ёрдами билан ечиш мумкин эди. Лекин олимнинг проблемани минимумлаштириш масаласи сифатида ҳал қилиш учун уринишларидан сўнг, бу ҳолда математик анализнинг традицион усулидан фойдаланиш мумкин эмаслиги маълум бўлди. Бу эса қўйилган проблеманинг ҳал этиб бўлмаслигини эмас, балки уни ечиш учун баъзи амалий татбиқ қилинадиган усулларни ишлаб чиқиш зарурлигини кўрсатар эди. Бу усуллар Л. В. Қанторович томонидан ишлаб чиқилди. Унинг усули традицион математик анализда фойдаланиладиган Лагранж кўпайтувчисини ўзгартиришдан (модификациялаштиришдан) иборат эди.

Л. В. Қанторович бу масалани еча туриб, планлаштиришнинг талайгина проблемалари худди шу формада ифодаланиши мумкин эканлигини, шунинг учун ҳам бу проблемаларни шунга ўхшаш усуллар билан ҳал эта олиш мумкин эканлигини кўрсатиб берди.

1941 йилда АҚШда Ф. Л. Хичкокс биринчи бўлиб транспорт масаласи деб аталувчи масалани ечди. Чизиқли программалаштиришнинг кўпгина масалаларини ечиш имконини берувчи симплекс усулнинг Ж. Б. Данчиг томонидан ривожлантирилиши катта аҳамиятга эга бўлди.

Кейинги йилларда Совет иқтисодий-математика фани планлаштиришдаги оддий ҳисоблашдан то тармоқли ривожланишнинг оптимал планини тузишгача бўлган катта йўлни босиб ўтди. Бу соҳада иқтисодчи-математик академикларимиздан В. С. Немчинов, В. В. Новожилов, Н. П. Федоренко ва А. Г. Аганбегян мамлакатимизда ва чет элларда кенг танилгандир.

Республикамиз олимлари ҳам академик В. Қ. Қобулов раҳбарлигида бу фаннинг ривожланишига ва унинг халқ хўжалигига кенг татбиқ этилишига катта ҳисса қўшмоқдалар.

Нима учун иқтисодий масалаларда математикалаштириш процесси тез суръатлар билан ривожланмоқда деган савол туғилиши табиийдир. Бу саволга қисқача қуйидагича жавоб бериш мумкин. Иқтисодий системалар жуда мураккаб системалар қаторига киради. Шунинг учун уларни аниқ усуллардан фойдаланмасдан туриб анализ қилиш мумкин эмас. Бундан ташқари, иқтисодий масалаларда кўпинча сонли параметрлар билан иш кўрилади, бу эса математик усуллардан, фойдаланишга қулайлик яратади.

Мураккаб иқтисодий системаларни тадқиқот қилиш, анализ қилиш аппарати математика фанидир. Бундай системалар ўзгаришининг оптимал ва унинг яқин траекторияларини топишда ажойиб математик усуллар мавжуддир. Бу усуллар ёрдамида турли хил масалаларни ҳал қилиш мумкин: юкларни энг яхши усуллар билан ташиш, маҳсулотни энг рационал йўл билан ишлаб чиқаришдан тортиб, бутун тармоқлар ривожланишининг оптимал планини тузишгача бўлган масалаларни ечиш мумкин.

Электрон ҳисоблаш машиналари (ЭҲМ) нинг пайдо бўлиши иқтисодий-математик тадқиқот ривожланишига янада кенгроқ имкониятлар яратди.

Ҳозирги кунда бир қанча амалий-иқтисодий масалалар математика ёрдамида ечилади. Бунда келтирилган фойда ўнлаб миллион сўмларни ташкил этади. Бу тадқиқотлар йўналишининг асосий ўзгачалиги шундаки, бунда эксперимент реал ҳаётда эмас, балки қоғозда бажарилади. Қоғозда ечимнинг юзлаб, минглаб вариантларини қараб чиқилади ва математик усуллар ёрдамида улардан энг яхшиси танланади. Бундан кейингина у амалга татбиқ этилади.

Иқтисодий объектларни текширишнинг бу ўзгачаликлари ечишнинг янги усулларини излаб топишни талаб қилади. Бу ерда фақат математикагина иқтисоднинг ривожланишига таъсир кўрсатиб қолмай, балки ўз навбатида иқтисод ҳам математиканинг ривожланишига имкон яратади.

Аммо ҳозирги кунда бу соҳада айрим моментлар мавжуд, чунончи ҳозирча иқтисоднинг эҳтиёжлари математиканинг имкониятларидан ортиқроқдир.

Иқтисодий амалиёт математиканинг янги тармоқлари — чизиқли программалаштириш, ўйинлар назарияси, оммавий хизмат назарияси ва ҳоказоларни вужудга келтирди. Математика асосида иқтисодий процессларни текширишнинг балансли, тармоқли ва бошқа махсус усуллари ривожланди.

3-§. Иқтисодий-математик моделлар

Иқтисодий-математик усуллардан фойдаланиб, иқтисодий-математик моделларни ишлаб чиқиш ва уларни реализация қилиш ўзаро боғлиқдир.

Моделларни ясаш кишилар фаолиятида жуда катта роль ўйнайди. Умуман айтганда, модель ва моделлаштириш жуда кенг тушунчалардир. Масалан, ҳар қандай билишнинг ўзи моделлаштиришдир, чунки бунда берилган объект бош мияга нерв клеткалари комплекси ёрдамида идеал кўринишда аксланади, яъни биз объектнинг модели билан иш кўрамиз.

Модель берилган системанинг аксланишидан иборат бўла туриб, лекин моделлар ёрдамида берилган системанинг энг муҳим белгиларини такрор ишлаб чиқиш мумкин. Моделларда реал ёки абстракт объект ва процесслар, шу билан бир қаторда улар орасидаги боғланишлар ва уларнинг хоссалари аксланиши мумкин.

Моделлар графиклар, расмлар, формулалар, макетлар, турли хил механик, электрик ва бошқа қурилмалар кўринишида бўлиши мумкин.

Моделлаштириш бевосита кузатилиши мумкин бўлмаган объект ёки процессларни ўрганишда айниқса катта аҳамиятга эгадир.

Моделлаштиришлар макетларга қараб бир-биридан фарқ қилади: физик, информацион, математик моделлаштириш ва ҳ. к. Самолётнинг аэродинамик хоссалари унинг оригиналидан бир неча марта кичрайтирилган макети ёрдамида текширилади.

Шу қаторда бошқа соҳалардан ҳам турли мисоллар келтириш мумкин. Моделлаштириш спецификаси шундан иборатки, бунда бош масала, ҳаддан ташқари мураккаблаштириш ёки ҳаддан ташқари соддалаштиришга йўл қўймасликдир. Бунинг учун текширилаётган процесс ёки ҳодиса моделини ҳар томонлама чуқур анализ қилиб кўриш зарур. Шундагина кутилган амалий натижаларга эффектив ва тез вақтда эришиш мумкин.

Яна бир мисол тариқасида қуйидагини кўрайлик.

1951—1953 йилларда Калифорния университетида профессор О. Смит раҳбарлигида капитализм иқтисодий системасининг электрон модели тузилган эди. Бу қурилмада капиталлар ҳаракати электр токи воситасида такрор ишлаб чиқилди, товарлар сотишнинг кечикиб қолиши — трансформаторлар ёрдамида такрор ишлаб чиқарилди ва ҳоказо. Бу модель асосида бундай иқтисодий система унча турғун бўлмаган система эканлиги аниқланди (ўзгариш даври 10 йил атрофида). Шундай қилиб, электрон моделда ўтказилган экспериментлар ёрдамида К. Маркс ва Ф. Энгельснинг капиталистик ишлаб чиқаришнинг цикллилиги (такрорланиши) ҳақида хулосалари ёрқин тасдиқланди. Бу эса капиталистик ишлаб чиқаришда иқтисодий кризисларнинг сўзсиз бўлишини кўрсатади.

Иқтисодий-математик методлардан фойдаланиб конкрет иқтисодий процессни анализ қилишда қуйидаги бешта этапни шартли равишда қаралади: 1) масаланинг қўйилиши; 2) масаланинг математик моделини ишлаб чиқиб ва унга асосланиб, изланган ечимни топиш; 3) моделнинг реал ҳақиқатга яқинлигини, шу билан бирга олинган ечим сифатини текшириш; 4) модель ва ечим реал ҳақиқатга етарли даражада мос келмаса, уни тузатиш; 5) олинган ечимни амалга ошириш.

Биринчи этап энг масъулиятли этапдир. Чунки олинадиган охирги натижа масаланинг тўғри қўйилишига, тадқиқотчининг процесс моҳиятини чуқур тушунишига ва унинг характерли хусусиятларини ажрата билишига кўп жиҳатдан боғлиқдир.

Шуни айтиш керакки, иқтисодий-математик модель ёрдамида олинган ечимдан ҳамма вақт тезгина амалиётда фойдаланилавермайди. Унинг реал ҳақиқатга мос келишини текшириб, чуқур анализ қилиш оқибатида бирор қарорга келингандан сўнггина, ҳаётга татбиқ этилади.

Иқтисодий-математик моделлардан фақат конкрет натижаларни, бирор кўрсаткичнинг аниқ қийматини топишдагина фойдаланилмасдан, балки улардан иқтисодий процесслар ёки ҳодисаларнинг хусусий ёки умумий қонуниятларини аниқлашда ҳам фойдаланилади, яъни улар бу ҳолда реал ҳақиқатни анализ қилиш инструменти бўлиб ҳисобланади.

II боб

ОПЕРАЦИЯЛАРНИ ТЕКШИРИШ ВА ОПТИМАЛЛАШТИРИШ МИСОЛЛАРИ

1- §. Чизиқли программалаштиришнинг иқтисодий математик модели

Чизиқли моделлар, жумладан, чизиқли программалаштириш модели жуда кенг тарқалган. Чизиқли программалаштиришнинг ихтиёрий масаласининг бошқа масалалардан асосий фарқи шундаки, унда қаралаётган миқдорлар орасидаги муносабатлар чизиқли ифодаланади.

Чизиқли программалаштириш масалаларининг ўзига хос асосий хусусиятлари чизиқли мақсад функцияси, фойдаланиладиган ресурслар — ўзгарувчи миқдорларга қўйиладиган чизиқли шартлардан иборат.

Мақсад функцияси берилган системанинг оптимал вариантини танлаш учун тузилган маълум оптималлик критерийси асосида аниқланади.

Ўзгарувчи миқдорларга қўйилган шартлар берилган системанинг ривожланиш чегарасини, имкониятини ифодалайди.

Ўзгарувчи миқдорлар эса чизиқли программалаштириш масаласидаги изланувчи номаълум миқдорлардир.

Чизиқли программалаштириш масалаларини ечишнинг бир неча ўхшаш ҳолларни кўриб чиқайлик.

1. **Ишлаб чиқариш қувватидан рационал фойдаланиш** ҳақидаги масала. Айтайлик, корхона икки хил маҳсулот тайёрлашда тўрт хил группа ишлаб чиқариш жиҳозларидан кетма-кет фойдаланиши керак. Қорхонага А маҳсулотнинг бир комплектини тайёрлашида 2 минг сўм, В маҳсулотнинг бир комплектини тайёрлашида 3 минг сўм фойда келади. Икки хил маҳсулот комплектларини тайёрлаш учун сарфланадиган ҳар қандай группа жиҳознинг ишлаш вақти фонди (кунлар ҳисобида) ва меҳнати (бу ҳам кунлар ҳисобида) 1- жадвалда ифодаланган. Шу шартлар бажарилганда корхонага энг кўп фойда келтирадиган планни ишлаб чиқиш зарур.

1- жадвал

Ишлаб чиқариш жиҳозлари группалари	Бир комплект маҳсулотни тайёрлаш вақт нормаси		Вақт фонди
	А	Б	
I	3	3	15
II	2	6	18
III	4	0	16
IV	1	2	8

Ишлаб чиқаришнинг мумкин бўлган вариантларини (яъни мумкин бўлган планларни) x_1 ва x_2 деб белгилаймиз, бунда x_1 — A маҳсулот комплектлари сони, x_2 — B маҳсулот комплектлари сонидир.

Бу ўзгарувчи миқдорларга қўйилган шартларни 1- жадвалга асосан қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 &\leqslant 15, \\ 2x_1 + 6x_2 &\leqslant 18, \\ 4x_1 \qquad &\leqslant 16, \\ x_1 + 2x_2 &\leqslant 8. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Бу тенгсизликлар орқали ихтиёрий группа жиҳознинг барча маҳсулотларга ишлов беришининг умумий вақти унинг ишлаш вақти фондидан ошмаслиги шарти математик шаклда ёзилган. Масалан, биринчи тенгсизликда I группа жиҳозларига қўйилган шартлар ифодаланган, иккинчи тенгсизликда эса II группа жиҳозлари учун шартлар ифодаланган ва ҳ. к.

Маҳсулот комплектларининг сони манфий бўлмаслиги табиий. Бу шартлар эса бундай ифодаланади:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\geqslant 0, \\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

Юқорида айтганимиздек, бу ерда оптималлик критерийси корхона оладиган фойдадан иборат. Шу сабабли, масаланинг шартига кўра оптималлик критерийсини қуйидаги

$$z = 2x_1 + 3x_2 \qquad (2.3)$$

кўринишдаги мақсад функцияси орқали ифодалаш мумкин.

Юқоридаги барча (2.1), (2.2) шартлар бажарилганда (2.3) ифодани максимумлаштириш зарур.

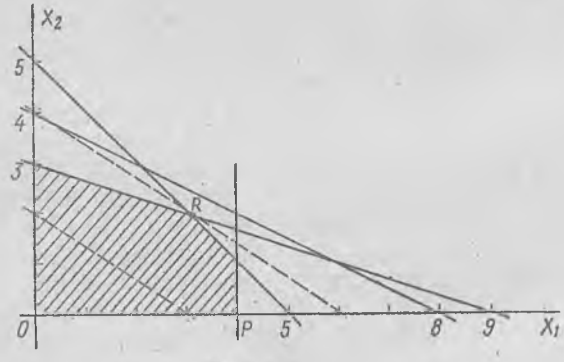
Масала тўла равишда қуйидагича ифодаланади:

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 &\leqslant 15; \\ 2x_1 + 6x_2 &\leqslant 18; \\ 4x_1 \qquad &\leqslant 16; \\ x_1 + 2x_2 &\leqslant \ \ 8; \\ x_1 \geqslant 0; x_2 &\geqslant \ \ 0; \end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

$$z = 2x_1 + 3x_2 \to \max;$$

Шундай қилиб, бутун масала тўла изчиллик билан еттита математик ифода ёрдамида ёзилди. (2.4) ифода жиҳозлардан рационал фойдаланишнинг иқтисодий-математик моделидан иборатдир. Бу моделнинг геометрик интерпретацияси 3.1- расмда кўрсатилган.

Олтита тенгсизлик системаси мумкин бўлган ечимлар соҳасини (штрихланган) тасвирлайди, яъни бу кўпбурчакка тегишли ихтиёрий нуқтанинг координаталари барча тенгсизликларни қаноатлантиради. Оптимал ечимни излаш $z = 2x_1 + 3x_2$ мақсад функциясини ифодаловчи



3.1-расм.

тўғри чизиқни мос йўналишда ўз-ўзига параллел ҳаракатлантирилиб бажарилади. Оптимал ечим мақсад функциясини ифодаловчи шу тўғри чизиқда ётувчи ва кўпбурчак координаталар бошидан энг узоқлашган нуқтасида жойлашган бўлади. Бизнинг мисолда бу R нуқта бўлиб, унинг координаталари оптимал планни аниқлайди:

$$x_1 = 3,$$
$$x_2 = 2.$$

Демак, шу x_1 ва x_2 қийматларни (2.4) даги z нинг ифодасига қўйсак, z нинг ҳам қийматини топамиз;

$$z = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12 \text{ минг сўм.}$$

Оптимал ечим мақсад функциясини ифодаловчи тўғри чизиқ билан кўпбурчакнинг бирор томонининг устма-уст тушган жойида ҳам бўлиши мумкин. Бу ҳолда оптимал ечим битта эмас, балки чексиз кўп бўлади.

Юқорида ечилган масалада бундай ҳол бўлиши учун ҳар қандай маҳсулотнинг бир комплектидан корхона бир хил фойда кўриши керак. Бу ҳолда мақсад функциясини ифодаловчи тўғри чизиқ мумкин бўлган ечимлар соҳасининг томони билан устма-уст тушган бўлар эди.

Учта номаълумли тенгсизликлар системаси уч ўлчовли фазода мумкин бўлган ечимлар кўпбурчагини аниқлайди, уч ўзгарувчининг мақсад функцияси эса ўзаро параллел текисликлар оиласини аниқлайди.

Бу текисликларни мос йўналишда ўз-ўзига параллел ҳаракатлантириб, оптимал ечим координаталарини (учта) топамиз.

Биз кўрдикки, чизиқли программалаштириш масалаларини ечишда энг муҳими оптимал ечимни излашда мақсад функциясини қайси йўналишда ҳаракатлантиришни билишдир, яъни бу процессда ҳар бир қадамдаги ечим ундан олдинги қадамдаги ечимдан яхшироқ, ҳеч бўлмаганда ундан ёмон бўлмаслиги керак. Ҳисоблаш амаллари учун яна шундай бошланғич шартларни ҳам топиш керакки, энг кам сондаги қадамдан сўнг оптимал ечимга эришиш мумкин бўлсин. Бундан ташқари, ҳисоблашни тамомлаш критерийси, яъни оптимал ечим ҳам топилган бўлиши керак.

Чизиқли программалаштириш масалаларини ечишнинг бир неча методлари мавжуд. Улардан энг яхши ишлаб чиқилгани мос чизиқли тенгламаларни алмаштиришга асосланган симплекс методдир.

2. Транспорт масаласи. Жуда кўп ҳолларда маълум юкларни ташиш планини шундай аниқлаш керак бўладики, бунда юкларни кўрсатилган жойга етказиш учун транспорт харажатларини кам сарф қилган ҳолда истеъмолчилар талабини қондириш мумкин бўлсин. Агар юк ташиш нархи масофага нисбатан чизиқли ўзгарса, у ҳолда бу масалани (агар мақсад функцияси ҳам чизиқли бўлса) чизиқли программалаштириш методларидан фойдаланиб ечиш мумкин.

Айтайлик, учта ғишт заводи (уларни А, Б, В деб белгилаймиз) ўз маҳсулоти билан тўртта қурилишни (уларни «а», «б», «в», «г» деб белгилаймиз) таъминлайдиган бўлсин. Бунда ғишт ташиш учун ҳаммаси бўлиб 123 та автомашинадан фойдаланиш мумкин. Бу машиналарнинг ҳаммаси бир хил юк кўтариш қобилиятига эга. А завод 30 та машинага, Б завод 40 та машинага, В завод эса 53 та машинага ғишт юклайди. Қурилишларнинг ғиштга бўлган эҳтиёжи қуйидагича: «а» қурилишга 22 машина, «б» қурилишга 35 машина, «в» қурилишга 25 машина, «г» қурилишга эса 41 машина ғишт етказиш зарур. Фараз қилайлик, 1 км йўлга сарфланадиган харажат 10 тийин бўлсин. Турли истеъмолчи ва таъминловчи орасидаги масофа (км. ҳисобида) турлича (2- а, б жадвал).

2- *а* жадвал

Заводлар Қурилишлар	А	Б	В
а	23	12	22
б	27	17	28
в	16	20	12
г	18	51	32

2-*б* жадвал

Заводлар Қурилишлар-	А	Б	В	є
а	$x_{Аа}$	$x_{Ба}$	$x_{Ва}$	22
б	$x_{Аб}$	$x_{Бб}$	$x_{Вб}$	35
в	$x_{Ав}$	$x_{Бв}$	$x_{Вв}$	25
г	$x_{Аг}$	$x_{Бг}$	$x_{Вг}$	41
Σ	30	40	53	123

Шундай қилиб, масала ва унинг шартларини жуда содда жадвалда аниқ ва ихчам ҳолда ифодаладик. Энди шу масалани математика тилида ифодалаймиз (бунда, масалан, $x_{Ав}$ изланган миқдор A заводдан „в" қурилишга келтириладиган ғиштни ортилган машиналар сони). У ҳолда биринчи тенглама қуйидагича бўлади:

$$x_{Аа}+x_{Ба}+x_{Ва}=22, \tag{2.5}$$

яъни „а" қурилишнинг ғиштга бўлган эҳтиёжи (у 22 машинага тенг) тўла қондирилиши зарур. Худди шундай шартлар қолган учта қурилиш („б", „в", „г") учун ҳам бажарилиши зарур:

$$\begin{gathered}x_{Аб}+x_{Бб}+x_{Вб}=35;\\ x_{Аб}+x_{Бв}+x_{Вв}=25;\\ x_{Аг}+x_{Бг}+x_{Вг}=41.\end{gathered} \tag{2.6}$$

Масаланинг асосий шартларидан бири шундаки, ҳар бир заводдан ҳамма ғишт олиб кетилиши зарур. Бу шартни қуйидагича ифодалаймиз

$$\begin{gathered}x_{Аа}+x_{Аб}+x_{Ав}+x_{Аг}=30,\\ x_{Ба}+x_{Бб}+x_{Бв}+x_{Бг}=40,\\ x_{Ва}+x_{Вб}+x_{Вв}+x_{Вг}=53,\end{gathered} \tag{2.7}$$

яъни ҳар қайси заводдан мос қурилишга ташиладиган ғиштлар ортилган машиналар сони заводларда бор имкониятларга тенг.

Бизга 1 км йўлга сарфланадиган харажат (10 тийин) маълум бўлгани учун, мақсад функциясини қуйидагича тузишимиз мумкин:

$$\begin{gathered}\underset{\text{А заводдан ғишт ташиш харажати}}{23x_{Аа}+27x_{Аб}+16x_{Ав}+18x_{Аг}+}\\ \underset{\text{Б заводдан ғишт ташиш харажати}}{+\,12x_{Ба}+17x_{Бб}+20x_{Бв}+51x_{Бг}+}\\ \underset{\text{В заводдан ғишт ташиш харажати}}{+\,22x_{Ва}+28x_{Вб}+12x_{Вв}+32x_{Вг}}=c\to\min,\end{gathered} \tag{2.8}$$

Бу ерда изланган миқдорлар манфий бўлмаслиги керак. Бу масаланинг оптимал ечими маълум усуллар ёрдамида топилиши мумкин. Барча ғиштларни энг кам харажат билан ташишга эришиш учун А заводнинг ҳамма ғиштларини фақат г қурилишга жўнатиш зарур

$$(\text{яъни } x_{\text{Аа}}=0,\ x_{\text{Аб}}=0,\ x_{\text{Ав}}=0,\ x_{\text{Аг}}=30).$$

Б завод ғиштларининг 5 машинасини „а“ қурилишга, қолганларини эса „б“ қурилишга (яъни $x_{\text{Ба}}=5$, $x_{\text{Бб}}=35$, $x_{\text{Бз}}=0, x_{\text{Бг}}=0$),

В заводдан 17 машина ғиштни „а“ қурилишга, 25 машина ғиштни „в“ қурилишга, 11 машина ғиштни „г“ қурилишга (яъни $x_{\text{Ва}}=17, x_{\text{Вб}}=0, x_{\text{Вв}}=25, x_{\text{Вг}}=11$) жўнатиш зарур. Энг кам (минимал) юк ташиш харажати 2221 сўмни ташкил этади ва ғиштга бўлган эҳтиёжлар қондирилади.

3. Рационал парҳез ҳақида масала. Чизиқли программалаштириш методлари ёрдамида парҳез ҳақидаги масалани ҳам ечиш мумкин. Бунда овқатланиш рационига қайси маҳсулотдан қанча миқдорда қўшиш ва қандай қилиб кам харажат қилган ҳолда овқатга бўлган талабни тўлиқ қондириш масаласи қўйилади.

Буни соддалаштирилган мисолда қараймиз. Айтайлик, молларни овқатлантириш учун уч хил озуқа моддадан фойдаланиш имконияти бор бўлсин. Ҳар қайси турдаги озуқа моддалар таркибида ҳар хил миқдорда тўйимлиликдаги моддалар борлиги маълум (бу ерда компонентлар сони тўртта). Берилган озуқа моддалардан тўйимлилиги ва нархи билан фарқ қилувчи ҳар хил аралашмалар тайёрлаш мумкин.

3- жадвал

	Оғирлик бирлиги			Планлаштирилган даврдаги танланган минерал миқдори
	1 озуқа	2 озуқа	3 озуқа	
1- модда	2	3	7	1250
2- модда	1	1	0	250
3- модда	1	3	0	0,00
4- модда	0,6	0,25	1	235,5
Оғирлик бирлигига сарфланган харажат (тийин ҳисобида).	41	35	96	
Озуқанинг оғирлик миқдоридаги бирлиги.	x_1	x_2	x_3	

Масаладаги барча информацияни 3- жадвалда ифодалаймиз. Масаланинг бундай ёзилиши уни чизиқли программалаштириш масаласи кўринишида ифодалаш имконини беради.

Планлаштирилган даврда молларни овқатлантиришнинг энг кам харажатини аниқлаш, яъни ушбу

$$41\,x_1 + 35\,x_2 + 96\,x_3 = c \to \min$$

мақсад функциясини қуйидаги

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 &\geqslant 1250, \\ x_1 + \ \ x_2 \qquad\quad &\geqslant \ \ 250, \\ 5x_1 + 3x_2 \qquad\quad &\geqslant \ \ 900, \\ 0{,}6x_1 + 0{,}25x_2 \quad &\geqslant 235{,}5 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ &x_3 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

шартлар бажарилганда минимумлаштириш зарур. Масалани ечиб, барча шартлар бажарилиши учун биринчи озуқадан 200, иккинчи озуқадан 50, учинчи озуқадан эса 100 оғирлик бирлик олиниши кераклигини топамиз. Бунда сарфланадиган харажат 195 сўм 50 тийин бўлади.

Бу типдаги моделларнинг татбиқ қилиниш диапазони жуда ҳам кенгдир.

Биз юқорида чизиқли программалаштиришнинг асосий ўхшаш масалаларини қарадик. Лекин шуни айтиш керакки, бу масалаларни ечишда, моделларни тузишда қаралаётган муносабатларнинг чизиқли бўлиш шартидан фойдаланилди. Натижада реал ҳақиқатнинг баъзи тақрибий ифодаларига эришилди. Агар бу методлардан тўғри фойдаланилмаса, ҳақиқатга умуман тўғри келмайдиган натижа ҳосил қилиниши ҳам мумкин.

2- §. Динамик программалаштириш

Кўпинча шундай вазиятлар ҳам учрайдики, масаланинг ечимини тўғридан-тўғри ҳосил қилиб бўлмайди. Бунда ечимга маълум вақт интервалида қадамма-қадам яқинлашилади. Бундай ҳолларда динамик программалаштириш аппарати ёрдам беради.

Бу соҳадаги ўхшаш масалалардан бири капитал маблағ сарфлашни тақсимлаш масаласидир. Айтайлик, сарфланадиган бирор x миқдордаги маблағни иккита саноат тармоғи орасида тақсимлаш керак бўлсин. Биринчи тармоққа сарфланадиган y миқдордаги маблағ йилига $g(y) = 0{,}8\,y$ фойда келтиради. Иккинчи тармоққа сарфланган $x-y$ миқдордаги маблағ йилига $h(x-y)=0,5(x-y)$ фойда келтиради. Йил охирига бориб, биринчи тармоққа сарфланган маблағ $a(y)=0,3(y)$ ни ташкил этади, иккинчи тармоқ учун бу миқдор $b(x-y)=0,6(x-y)$ ни ташкил этади.

Ҳар йил ўтгандан сўнг қолган капитал маблағ тармоқлар орасида қайтадан тақсимланади.

Ҳар қайси этапда капитал маблағни тармоқлар орасида тақсимлашни шундай аниқлаш керакки, бунда уч йилда келадиган умумий фойда энг катта (максимал) бўлсин.

Динамик программалаштириш масалаларини ечиш қуйидаги оптималлик принципидан фойдаланишга асосланади: агар ечимларнинг бирор кетма-кетлиги оптимал бўлса, у ҳолда шу кетма-кетликка тегишли айрим кейинги ечимлар ундан олдинги ечимларга нисбатан оптимал бўлади. Шу принципга асосан масалани охирги этапдан бошлаб ечилади. Сўнгра ундан кейинги этап ечимига ўтилади, бунда олдинги ечимларга зид келадиганларини олиб ташланади.

Шундай қилиб, биз дастлаб учинчи йилда сарфланган маблағ миқдори y_2 ни, сўнгра иккинчи йилда сарфланган маблағ миқдори y_1 ни ва биринчи йилда сарфланган маблағ миқдори y ни топишимиз керак.

Ечишнинг бу усулини қисқача қуйидагича ифодалаш мумкин: агар битта натижага эришишнинг иккита йўли бўлса, у ҳолда улардан қайси бири узун бўлса, ўша йўлни танланади.

Оптималлик принципига асосан дастлабки икки этапдаги y ва y_1 ечимлар қандай бўлишидан қатъи назар ва шунинг натижасида учинчи этап бошланишидаги маблағ миқдори қандай бўлишидан қатъи назар биз бу x_2 маблағдан энг яхши усулда фойдаланиб, охирги йилда энг кўп фойда олишимиз зарур, яъни

$$f_1(x_2)=\max_{0<y_2<x_2}\{g(y_2)+b(-y_2+x_2)\} \qquad (2.10)$$

ёки

$$f_1(x_2)=\max_{0\leqslant y\leqslant x_2}\{0,8y_2+0,5(x_2-y_2)\}=\max_{0\leqslant y\leqslant x_2}\{0,5x_2+0,3y_2\}. \qquad (2.11$$

Қавс ичидаги ифода ўзининг энг катта қийматига $y_2=x_2$ бўлганда эришади.

Демак, охирги этапда барча маблағ биринчи тармоққа йўналтирилган бўлиши керак. Бунда

$$f_1(x_2) = 0{,}8\,x_2 \tag{2.12}$$

фойда оламиз.

Энди y_1 ни аниқлаймиз. Бунинг учун икки қадамли процесс — охирги ва ундан олдинги этапни қараймиз. Оптималлик принципига кўра биз бу процесс бошланишидаги мавжуд x_1 маблағдан энг яхши усулда фойдаланишимиз зарур, бунда илгариги этапдаги ечим натижаси бизни қизиқтирмайди.

Охирги икки йилдаги максимал умумий фойда қуйидагича бўлади:

$$f_2(x_1) = \max_{0 \leqslant y_1 \leqslant x_1} \{g(y_1) + h(x_1 - y_1) + f_1[a(y_1) + \\ + b(x_1 - y_1]\}. \tag{2.13}$$

Бу ерда $g(y_1) + h(x_1 - y_1)$ иккинчи этапдаги фойда, $f_1[a(y_1) + b(x_1 - y_1)]$ охирги этапдаги энг максимал фойдадир.

y_1-ни 0 ва x_1 орасида шундай танлаш керакки, катта қавс ичидаги ифода максимал қийматга эришсин. f_1 нинг юқорида топилганлигини эътиборга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$f_2(x_1) = \max_{0 \leqslant y_1 \leqslant x_1} \{0{,}8\,y_1 + 0{,}5(x_1 - y_1) + f_1[0{,}3\,y_1 + \\ + 0{,}6(x_1 - y]\} = \max_{0 \leqslant y_1 \leqslant x_1} \{0{,}5\,x_1 + 0{,}3\,y_1 + 0{,}8\,[0{,}6\,x_1 - \\ - 0{,}3\,y_1]\} = \max_{0 \leqslant y_1 \leqslant x_1} \{0{,}98\,x_1 + 0{,}06\,y_1\}. \tag{2.14}$$

Бундан

$$f_2(x_1) = 1{,}04\,x_1 \text{ ва } y_1 = x_1$$

ларни топамиз.

Демак, иккинчи этапда ҳам барча капитал маблағ биринчи тармоққа юборилиши керак экан.

Худди шундай мулоҳазалар юритиб, биринчи этап учун қуйидагини топамиз:

$$f_3(x) = \max_{0 \leqslant y \leqslant x} \{g(y) + h(x - y) + f_2[a(y) + b(x - y)]\} = \\ = \max_{0 \leqslant y \leqslant x} \{0{,}8\,y + 0{,}5(x - y) + 1{,}04\,[0{,}3\,y + 0{,}6(x - y)]\} = \\ = \max_{0 \leqslant y \leqslant x} \{1{,}124\,x + 0{,}012\,y\}. \tag{2.15}$$

Бу ифода $y=0$ бўлганда максимумга эришади. Демак, барча этаплар учун энг катта умумий фойда $f_8(x) = 1{,}124x$ дан иборат бўлади.

Биринчи этапда барча маблағни иккинчи тармоққа йўналтириш зарур, яъни $y=0$.

Демак, бу масалада оптимал стратегия

$$y=0,\ y_1=x_1,\ y_2=x_2$$

дан иборатдир.

Биринчи этапда барча маблағни биринчи тармоққа йўналтириб,

$$h(x)=0{,}5\,x$$

фойда оламиз, бунда иккинчи йил бошланишига қолган капитал маблағ

$$b(x)=0{,}6\,x$$

дан иборат бўлади.

Иккинчи этапда қолган даромад

$$g(0{,}6x)=0{,}8\cdot 0{,}6\,x=0{,}48\,x$$

дан иборатдир. Бундан кейинги қолган маблағ қолдиғи

$$g(0{,}18\,x)=0{,}8\cdot 0{,}18\,x=0{,}144\,x$$

бўлади. Учинчи этапда олинган даромад қуйидагича бўлади:

$$a(0{,}6\,x)=0{,}3\cdot 0{,}6\,x=0{,}18\,x.$$

Шундай қилиб, умумий даромад 0,124 x га тенг.

3- §. Тармоқли планлаштириш ва бошқариш

Тармоқли усул бир қатор муҳим иқтисодий масалаларни ечишнинг ўзига хос инструментидир. Биз тармоқли усулларнинг қандай қўлланилишини ва бунда қандай асосий тушунчалар ишлатилишини мисолларда қараймиз.

Тармоқли моделни — ишлаб чиқишдан олдин қаралаётган иш комплексини бир неча элементар операцияга ажратилади. Ҳар қайси операция мос равишда бирор миқдорий характеристикани (ишлаш вақти, нархи ва ҳоказо) ифодалайди.

Тармоқли моделни ишлаб чиқишдан олдин барча зарурий информациялар кўрсатилган жадвал тузилади.

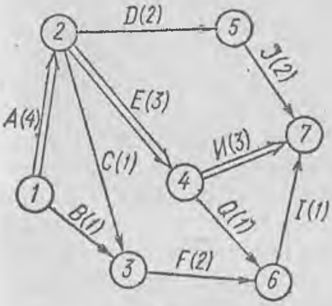
Айтайлик, бирор иш комплексини бажариш учун ўнта операция бажариш керак бўлсин (масалан, бинони қуриш процесси бир неча айрим-айрим операциялар кўринишида ифодаланиши мумкин: пойдеворни кўтариш, бинонинг деворини ишлаш, канализация тармоқларини ётқизиш, сувоқ қилиш, бўяш ва ҳ. к.) Бу информацияларни 4- жадвалда ифодалаймиз.

4- жадвал

Операция	Давомлилик	Олдинги ҳодиса номери	Кейинги ҳодиса номери
A	4	1	2
B	1	1	3
C	1	2	3
D	2	2	5
E	3	2	4
F	2	3	6
Q	1	4	6
И	3	4	7
I	1	6	7
J	2	5	7

Бу информациялар жадвали асосида ишни бажарилишининг тармоқли графигини ясаймиз (3.2- расм).

Расмда кўрсатилган стрелкалар мос операцияларни, қавс ичидаги рақамлар уларнинг бажарилиши учун сарфланадиган вақтни, доирачалар ҳодисаларни ифодалайди (шу нуқталарда операциялар бошланади ёки тамом бўлади).



3. 2-расм.

Бошланғич (1) ва охирги (7) ҳодисалардан бошқа барча ҳодисалар ўзидан олдинги ва кейинги операцияга эгадир. Агар барча олдинги операциялардан бирортаси бажарилмаса, ҳеч қандай кейинги операция бошланмайди. Масалан *A* ва *E* операциялар бажарилмасдан, *И* операцияни бошлаш мумкин эмас.

Расмдаги стрелкалар ҳодисаларнинг рўй бериш кетма-кетлигини кўрсатади. *Йўл* деб кейингисининг боши ундан олдингисининг охири бўладиган операция ва ҳодисалар кетма-кетлигига айтилади. Бизнинг мисолдан кўринадики, бошланғич ва охирги ҳодисалар орасида бешта йўл мавжуд:

I	1	2	5	7	
II	1	3	6	7	
III	1	2	3	6	7
IV	1	2	4	7	
V	1	2	4	6	7

Бу йўлларнинг ҳар бири ўзининг бажарилиши учун сарфланадиган вақти (давом этиши) билан характерланади масалан, III йўлнинг давом этиши 8 вақт бирлигини (4+1+2+1) ташкил этади.

Тармоқли анализнинг ядросини ташкил этувчи асосий тушунчаларидан бири критик йўл тушунчасидир. Бу энг кўп давом этадиган йўлдир. Бизнинг мисолда критик йўл IV йўл бўлиб, у расмда икки чизиқли стрелкалар билан тасвирланган.

Охирги ҳодиса рўй бериши учун ундан олдинги барча ҳодисалар бажарилиши шарт бўлгани сабабли критик йўлнинг давом этиш вақти деб охирги ҳодисанинг энг ўрта рўй бериши вақтига айтилади. Шу сабабли, критик йўл таркибига кирувчи ҳар бир операциянинг кечикиб бажарилиши бутун иш комплексининг бажарилиш муддатининг узайишига олиб келади. Шунинг учун ҳам, ҳар қандай тармоқли моделда критик йўлни излаш операцияси жуда муҳимдир. Критик йўлни аниқлаш бутун лойиҳанинг етакчи звеносини аниқлаб олишга имкон беради, шу сабабли ҳам критик йўл таркибига кирувчи операцияларга энг катта аҳамият берилиши зарур.

Критик йўлни топиш учун тармоқли графикнинг бир неча муҳим параметрларини ҳисобланади. Жумладан, 6 ҳодисанинг энг эртароқ рўй бериш вақти топилади. Кўриниб турибдики, 6 ҳодиса рўй бериши учун операцияларнинг қуйидаги учта кетма-кетлиги бажарилиши зарур:

а) A E Q;
б) B Ғ;
в) A C Ғ.

Бу йўлларнинг ҳар бирининг давом этиш вақтини аниқлаймиз:

а) 4+3+1=8;
б) 1+2=3;
в) 4+1+2=7

Шундай қилиб, 6 ҳодиса иш бошлангандан сўнг 8 вақт бирлиги ўтмасдан илгари бошланмайди. Бу эса унинг энг эрта рўй бериш вақтидир.

Ҳодисанинг энг кеч бошланиши вақти ҳам шунга ўхшаш аниқланади, аммо бунда ҳисоблаш ишини энг сўнгги ҳодисадан бошланади.

Масалан, 6 ҳодисанинг энг кечроқ рўй бериш вақти 9 га тенгдир, буни топиш учун бундан кейинги ҳодиса (бу ҳолда кейинги ҳодиса 7 ҳодиса бўлиб, унинг энг эртароқ рўй бериш вақти 10 га тенг) давом этиш вақти 1 ни айирилади.

Ҳодисанинг энг кеч ва энг эрта рўй бериш муддатларининг (вақтларининг) айирмаси унинг резерв вақтини ташкил этади. Критик йўл таркибига кирувчи ҳодисаларнинг энг кеч ва энг ўрта рўй бериш моментлари бир хил вақтга тўғри келади.

4-§. Бутун сонли программалаштириш

Экономикада ечимлари фақат бутун сонлар билан ифодаланадиган масалалар кўп учрайди. Бу типдаги оптималлаштириш масалаларини *бутун сонли программалаштириш масалалари* дейилади.

Моделлаштиришда бутун сонли программалаштиришга асосланган математик аппаратдан фойдаланиладиган талайгина вазиятларни кўрсатиш мумкин. Масалан, кўп ҳолларда асбоб-ускуна (жиҳоз)лардан энг рационал (унумли) фойдаланиш муаммоси учрайди. Бу ерда ўзгарувчи миқдорлар деб маълум планлаштирилган давр ичида ишлаши лозим бўлган жиҳозлар сони олинади. Бу сонларнинг бутун сонлар бўлиши ўз-ўзидан кўриниб турибди.

Операцияларни бажариш учун ўзгармас харажатлар сарфланадиган ҳолларда учрайдиган қуйидаги масалани ҳам қараймиз. Масалан, агар ўзгарувчи миқдор металлургия заводидаги домна печларининг бир соатдаги иш унумдорлигини ифодаласа, у ҳолда домна печларини пуфлаш ва қиздириш харажатлари ўзгармас бўлади, бу харажатлар ўзгарувчи миқдорларга боғлиқ бўлмайди. Шу типдаги ўзгармасларни ҳисобга олиш методлари мавжуд. Бу методлар бутун сонли программалаштиришга асослангандир.

Баъзи ишлаб чиқариш планларини ишлаб чиқишда маҳсулот партиясининг оптимал ўлчовини (размерини) аниқлаш муаммоси туғилади.

Бунда қаралаётган партия ёки умуман тайёрланмаслиги керак, ёки унинг ўлчами маълум минимал чегарага тенг ёки ундан ошмаслиги керак. Ана шундай «ёки-ёки» типидаги шартлар билан берилган масалаларни ечишда бутун сонли программалаштиришдан фойдаланилади.

Энг кўп тарқалган ҳоллардан бири саволга «ҳа» ёки «йўқ» деб жавоб бериладиган ҳолдир. Масалан, биз корхонани қуриш («ҳа», $x=1$), қурмаслик («йўқ», $x=0$), жиҳозларни сотиш ёки сотмаслик ва ҳ. к. масалаларни ҳал қилишда бу типдаги ҳолларга дуч келамиз.

Айниқса, капитал маблагни тақсимлаш ишларини ҳал қилишда бу турдаги масалаларни ечишга тўғри келади.

Ҳаётнинг кўпгина масалаларини ечишда календарь планлар (ёки жадваллар) тузилади (бунда, ҳамма вақт ҳам оптималлаштириш методларидан фойдаланилавермайди): станокларда деталларга ишлов беришнинг рационал (энг қулай) маршрутини аниқлаш, автотранспорт ишларини диспетчерлаш (ташкил этиш), олдиндан мўлжалланган ремонт ишларини ташкил этиш ва ҳоказо. Бу масалаларни ҳал қилишда ҳам бутун сонли программалаштиришдан фойдаланилади. Аммо бунда изланаётган миқдорларга кўпгина шартлар қўйиладики, бу эса масалани ечишни анча қийинлаштиради.

Лекин, шуни айтиш керакки, бу моделларнинг ҳаммаси ҳам асосан назарий жиҳатдангина аҳамиятга эгадир. Уларга махсус адабиётда катта аҳамият берилмоқда, аммо уларнинг амалий натижалари ҳали кам. Чунки бу типдаги масалаларни ҳал этишда кўпгина ҳисоблаш қийинчиликлари мавжуд ва уларни ечиш учун қулай усуллар йўқ. Шундай қилиб, иқтисодий масалаларни ҳал қилишда катта аҳамиятга эга бўлган бутун сонли программалаштириш масалаларини ечишнинг қулай усуллари топилади деган умиддамиз.

5-§. Чизиқли бўлмаган программалаштириш

Чизиқли программалаштиришни жуда теп-текис йўл билан таққослаш мумкин. Аммо, маълумки, ҳаётда бундай йўллар бўлмайди. Уларнинг кўпчилиги ўнқир-чўнқир, паст-баландликга эгадир. Шунинг учун ҳам кўп ҳолларда ишлаб чиқариш харажати ва даромади ишлаб чиқариш ҳажмига пропорционал равишда ўзгармайди. Биз бу ерда чизиқли бўлмаган боғланишлар, муносабатлар билан иш кўрамиз. Бу чизиқли бўлмаган муносабатларни моделлаштириш учун чизиқли программалаштириш методлари ярамайди. Шунинг учун ҳам реал ҳаётда учрайдиган муносабатларни тўғрироқ, тўлароқ акс эттирувчи усулларни ишлаб чиқиш эҳтиёжи туғилди.

Бу типдаги усуллар қаторига чизиқли бўлмаган программалаштириш усуллари киради.

Чизиқли бўлмаган программалаштириш моделлари шартли равишда учта синфга ажратилади: чизиқли бўлмаган мақсад функцияли масалалар, чизиқли бўлмаган шартлар билан берилган масалалар, чизиқли бўлмаган мақсад функцияли ва чизиқлимас шартлар билан берилган масалалар.

Бутун сонли программалаштириш масалаларини ечишдаги каби чизиқли бўлмаган масалаларни ечишда ҳам кўпгина ҳисоблаш қийинчиликларига дуч келамиз. Ҳозирги вақтда чизиқли бўлмаган программалаштириш масалаларини ечиш методлари интенсив равишда изланмоқда ва бу типдаги баъзи масалаларни ечиш учун жуда яхши методлар ишлаб чиқилган. Аммо бу методларни бошқа чизиқли бўлмаган масалаларни ечишга татбиқ қилиб бўлмайди.

6-§. Эҳтимолий моделлар

Иқтисодий процессларнинг эҳтимолий моделларини тузиш иқтисодий-математик усулларни такомиллаштириш, уларни чуқурлаштириш, моделлар билан тасвирланган объект ёки процесслар орасидаги мослик даражасини орттириш йўлидаги янги қадамдан иборатдир.

Эҳтимолий моделлар реал дунёдаги ўзаро боғланиш ва муносабатларни энг катта муқаррарлик билан ифодалашга имкон беради. Юқорида қаралган барча усуллар ҳаётда учрайдиган вазиятларнинг тасодифий томонларини ҳисобга олишга имкон бермайди. Шунинг учун ҳам ҳозирги вақтда у ёки бу эҳтимолий модел ва усуллардан фойдаланмайдиган соҳани кўрсатиш қийин. Бу усул ва моделлар жуда кенг тарқалган бўлиб, кундан-кунга оммавийлашиб бормоқда. Чунки улар ҳақиқатга жуда яқинлаштирилган ва реал процессларни юқори даражада аниқроқ ифодалайди .

Барча аниқланган моделларда қаралаётган ҳамма параметрлар аниқ қийматларга эга ёки уларнинг ўзгариш чегаралари кўрсатилади, яъни улар аниқ топилади. Бу ерда барча муносабатлар ҳам аниқ тайинланади (фиксирланади).

Бундай моделларни ишлаб чиқишда қаралаётган факторлар доираси ҳамма вақт чегараланган бўлади. Моделларни ишлаб чиқишда олимлар олдида икки хил танлаш проблемаси учрайди: ёки кўпроқ сондаги параметрларни қараш керак, бунда моделлар жуда мураккаблашиб кетади: ёки кам сондаги параметрлар киргизиш натижасида моделларни соддалаштириш керак, бунда модель ҳақиқатни реал ифодаламайди.

Стохастик моделларда анализ қилинаётган ҳодисалар ва уларнинг параметрлари эҳтимоллар орқали ифодаланади. Модель таркибига кирувчи ҳар бир миқдорнинг аниқ бир қийматигина берилмайди ёки унинг ўзгариш чегараларигина кўрсатилмайди, балки унинг қийматларининг тақсимланиш қонунлари ва бу тақсимот қонунининг характеристикалари (математик кутилиши, дисперсияси ва ҳ. к. берилади). Бу турдаги масалаларнинг ечимлари ҳам эҳтимолли характеристикаларда ифодаланади, масалан, изланган x миқдор берилган шартларга кўра y қийматга эга бўлиш эҳтимоли p га тенг бўлади. Бу ерда информацияларнинг ноаниқлиги ва унинг тўлиқсизлиги ҳамда ҳар хил бузиб кўрсатиш таъсирлари ва ҳоказолар ҳисобга олинади. Шу йўсинда ҳақиқатнинг турли хил чегараларини ҳисобга олиш проблемаси ҳал қилинади.

Эҳтимоллар назарияси тасодифий ҳодисалар билан иш кўрса ҳам у жуда кучли математик аппарат ва инструментга эга бўлган энг аниқ математик фанлардандир.

Ҳозирги вақтда эҳтимоллар назарияси асосида бир неча математик фанлар ривожланмоқда. Улардан энг асосийси — оммавий хизмат кўрсатиш назариясидир.

Реал вазиятни кўз олдимизга келтирайлик: хизмат қилишни кутувчи кишилар навбати мавжуд. Оммавий хизмат назариясида уларни *клиентлар* (ёки *заявкалар*) деб аталади. Булар телефон станциясининг абонентлари ёки ремонтни кутувчи станоклар ва ҳ. к. бўлиши мумкин.

Хизмат бир неча хизмат кўрсатиш воситалари (масалан, ремонтчилар) ёрдамида олиб борилади. Агар бир неча операция бир вақтнинг ўзида бажарилса, у ҳолда ҳар хил хизмат *каналлари* ҳақида айтилади. Кутувчи клиентлар *навбатлар* деб аталади, масалан, ишлов беришга келиб тушадиган деталлар навбат ташкил этади.

Оммавий хизмат масалаларида албатта хизмат қилиш процессига мос равишда навбат тартиби ўрнатилади. *Бу навбат тартиби* дейилади. Хизмат қилиш воситаларининг ўтказиш қобилияти ёки хизмат қилиш тезлиги ҳам аниқланиши керак.

Оммавий хизмат назарияси аппарати ёрдамида ифодаланувчи системалар клиентларнинг кутиш вақти ёки хизмат қилиш воситаларининг бекорга туриш (простой) вақти билан характерланади.

Умумий ҳолда бундай масалаларни ҳал қилишда сарфланадиган харажатларни, масалан, қўшимча сартарошлар сақлашга, ёки клиентларнинг навбатда бекорга туриб қолишига, ёки телефон станцияларида қўшимча хизмат қилиш каналларини ишга туширишга сарфланадиган харажатларни минимумлаштириш талаб қилинади.

Кўриниб турибдики, бундай масалалар анча мураккаб бўлиб, улар ноаниқ вазиятлардаги ҳисоблар ва ҳар хил тасодифий факторларни ҳисобга олиш билан боғлиқдир. Ҳозирги вақтда бу типдаги масалаларни ечишнинг талайгина усуллари мавжуд ва кишилар фаолиятининг турли соҳасида кўплаб конкрет натижалар олинмоқда.

Масалан, бундай масала ечилган. У ҳозирги кунда классик масалалардан ҳисобланади. Портда кема устидаги рудани тушириб олиш учун восита ва кема тўхтайдиган жой танлаш зарур.

Бунда кемадан юк тушириш мумкинлигининг асосий шартларидан бири сувнинг маълум баландликка қалқиб кўтарилиши ва кема тўхтайдиган жойда бўш ўринлар бўлиши керак. Агар бу шартлар бажарилса, кемадан юкни тушириш мумкин бўлади ва бу процессни бажариш унумдорлиги юк тушириш воситаларининг турига ва кеманинг типига боғлиқ бўлади. Юк туширилиб бўлгандан сўнг, кема сувнинг ўша баландлигида кема тўхтайдиган жойдан қайтиб кетади. Унинг ўрнига навбатдаги кема келиб тўхтайди.

Қиммат баҳоли юк тушириш воситаларининг сони ва кеманинг бекорга туриб қолиш харажатлари орасидаги оптимал боғланишни (муносабатни) топиш муҳимдир. Бу масалада юк тушириш воситаларидан биттасидангина фойдаланилса, у ҳолда кеманинг бекорга туриш харажати жуда ҳам катта бўлади. Бу харажатни минимумга келтириш учун юк тушириш воситаларининг сонини ошириш керак. Бу ҳолда юк тушириш воситаларини сотиб олиш ва уларни ишга тушириш харажатлари кескин ортиб кетади. Шундай қилиб, бу масалада юк тушириш воситаларининг сони ва кеманинг бекорга туриш харажатлари орасидаги «олтин ўрта»ни топиш керак.

Бу масала оммавий хизмат назарияси усуллари ёрдамида ечилган. Бунда олинган жавоб аниқ бўлмай, реал ҳаётдаги системага ўз таъсирларини кўрсатувчи кўплаб тасодифий факторларни ҳисобга олувчи эҳтимолий ечимдир.

Бу соҳадаги билимнинг пайдо бўлишига ва ривожланишига телефон станцияларида абонентларга хизмат қилишнинг баъзи проблемаларини ҳал қилиш эҳтиёжлари туртки бўлди. Маълумки, телефон станцияларига чақириқ тасодифий тартибда келади. Агар бўш линия бўлса, абонентга шу ондаёқ хизмат қилинади. Агар бўш линия бўлмаса, ё абонент линиянинг бўшаш вақтини кутади (яъни навбатга туради), ёки буюртмадан (заказдан) умуман бош тортади. Бу иккита вазият энг кўп ўрганилган ва кенг тарқалган вазиятлардандир: улардан биринчиси *кутиладиган система* дейилади; иккинчиси эса *абонент буюртмадан бош тортадиган системадир.* Биринчи ҳолда бизни абонентнинг ўртача кутиш вақти ва навбатнинг ўртача узунлиги қизиқтиради, иккинчи ҳолда эса буюртмани абонент рад қилиш эҳтимоли қизиқтиради. Бу ҳисоблашлар асосида телефон тармоқларининг рационал параметрларини аниқлаш мумкин, масалан, хизмат қилувчи линиянинг рационал сони (бунда кутиш вақти ҳам, линиянинг бекор туриш вақти ҳам кам бўлиши лозимдир).

Оммавий хизмат назарияси ёрдамида савдо корхонасида сотувчилар ва кассирларнинг рационал сонини аниқлаш мумкин. Ортиқча сотувчи ва кассирларни магазинда хизмат қилиши қўшимча харажат қилишни талаб қилади, лекин харидорларнинг узоқ вақт навбат кутишини хоҳламасдан, магазиндан кетиб қолиши ҳам савдо корхонасига катта зиён келтиради, шунинг учун сотувчи ва кассирларнинг сони ҳамда магазиндаги навбат катталиги орасидаги муносабатни оптималлаштириш проблемаси мавжуддир.

Оммавий хизмат назариясида анчагина мураккаб ҳоллар ҳам қаралади, масалан, хизмат қилиш асбобларининг ишдан чиқиб қолиш эҳтимоли ёки хизмат қилишда буюртмаларнинг муҳимлигини (муҳим буюртмалар системага навбатсиз қабул қилинади) ҳисобга олиш ҳоллари.

Оммавий хизмат назарияси методлари ёрдамида станокларнинг бекорга туриш вақти ва хизмат қилувчи аппаратларни ишлатиш харажатлари орасидаги муносабатларни оптималлаштириш масалалари ечилади.

Оммавий хизмат назарияси моделлари ёрдамида тўқимачилик саноатидаги, айниқса ғалтакларга ип ўраш, йигириш ва газлама тўқиш цехларидаги процесслар етарли даражада аниқ ифодаланади.

III боб

МАТЕМАТИК ПРОГРАММАЛАШТИРИШ

1-§. Умумий тушунчалар

Математик программалаштиришнинг предмети кўп ўлчовли экстремал масалаларни ҳал этишдан иборат. Қараладиган ўзгарувчилар баъзи функционал ифодаларни ташкил этиб, улар минимумлаштирилиши ёки максимумлаштирилиши керак. Бу ифодаларни одатда *мақсад функцияси* ёки *сифат кўрсаткичи* деб аталади.

Қаралаётган ўзгарувчилар қўшимча тенгсизлик ёки тенгликларни қаноатлантириши керак, улар *чеклаш шартлари* деб аталади. Умумий ҳолда мақсад функцияси ҳам, чеклаш шартлари ҳам барча ўзгарувчиларга ёки баъзи ўзгарувчиларга нисбатан чизиқлимас функция бўлади. Чеклаш шартлари бўлмаган максимумлаштириш (минимумлаштириш) масалаларини *чеклаш шартларисиз масала* дейилади.

Қаралаётган ўзгарувчиларнинг масаладаги барча шартларни қаноатлантирувчи ҳар қандай қийматлар тўплами *мумкин бўлган ечим* ёки *план* деб аталади.

Мақсад функциясини максимумлаштирадиган ёки минимумлаштирадиган мумкин бўлган ечим математик программалаштириш масаласининг оптимал ечими (ёки оптимал плани) бўлади.

2-§. Математик программалаштириш масаласининг қўйилиши

Айтайлик, қаралаётган математик программалаштириш масаласи таркибида n та x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ўзгарувчи қатнашсин. Бу n та ўзгарувчи n ўлчовли x

ўзгарувчи векторни ифодалайди. $f(\vec{x})$ орқали n та x_i ўзгарувчиларга нисбатан мақсад функциясини белгилаймиз. $f(\vec{x})$ — скаляр умумий ҳолда барча ёки баъзи x_i ($i=1, 2, \ldots, n$) ўзгарувчиларга нисбатан чизиқлимас функциядир.

Чеклаш шартларини тенгсизликлар орқали

$$g_i(\vec{x}) \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, q \tag{3.1}$$

шаклда ёзиш мумкин, бу ерда $g_i(\vec{x})$ ($i=1, 2, \ldots, q$) барча ёки баъзи x_i ($i=1, 2, \ldots, n$) ўзгарувчиларга нисбатан чизиқлимас скаляр функциялардир. $g_i(\vec{x})$ функцияларни $g(\vec{x})$ вектор функциянинг компонентлари деб қараш мумкин, у ҳолда (3.1) ифдани

$$\vec{g}(\vec{x}) \geqslant 0 \tag{3. 2}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Шунга ўхшаш, тенглик кўринишда берилган шартларни скаляр шаклда

$$h_i(\vec{x})=0, \ i=1, 2, \ldots, p, \tag{3.3}$$

ёки вектор шаклда

$$\vec{h}(\vec{x})=0 \tag{3. 4}$$

ёзиш мумкин, бунда $h_i(\vec{x})$ ($i=1, 2, \ldots, p$) барча ёки баъзи x_i ($i=1, 2, \ldots, n$) ўзгарувчиларга нисбатан чизиқлимас скаляр функциялардир. (3. 2) формулада 0 вектор q ўлчовли ноль векторни, (3. 4) формулада эса p ўлчовли ноль векторни ифодалайди.

Энди математик программалаштириш масаласини қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} g(\vec{x}) &\geqslant 0, \\ h(\vec{x}) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3. 5}$$

шартлар бажарилганда $f(\vec{x})$ функцияни минимумлаштириш (ёки максимумлаштириш) зарур ёки қисқача

$$\min\{f(\vec{x}) \mid g_i(\vec{x}) \geqslant 0, \ i=1, \ldots, q; \ h_j(\vec{x})=0, \ j=1, 2, \ldots, p\} \tag{3. 6}$$

Шуни айтиш керакки, экстремумни аниқлаш ўрнига биз минимумлаштиришни қараш билан чекланганимизда ҳам, масала ўз умумийлигини йўқотмасди. Айтайлик, масалан, $f_1(\vec{x})$ функцияни максимумлаштириш керак бўлсин. Бу $f(\vec{x}) = -f_1(\vec{x})$ функцияни минимумлаштириш билан эквивалентдир. Масаланинг умумийлиги (3. 1) формула билан берилган шартларга нисбатан ҳам сақланади. Айтайлик, масалан, $g_{1i}(\vec{x}) \leqslant 0$ шартлар берилган бўлсин, у ҳолда $g_i = -g_{1i}(\vec{x})$ тенг билан аниқланувчи янги функциялар тўпламидан фойдалансак, яна (3. 6) шаклдаги шартларни ҳосил қиламиз.

3-§. Математик программалаштиришга доир мисол

Математик программалаштириш масаласини кўргазмали ифодалаш учун тўртта тенгсизлик ва битта тенглама орқали берилган шартларни қаноатлантирувчи икки ўлчовли қуйидаги масалани қараймиз:

ушбу

$$0{,}8 - x_1 \geqslant 0, \tag{3.7}$$

$$0{,}8 - x_2 \geqslant 0, \tag{3.8}$$

$$x_1 \geqslant 0, \tag{3.9}$$

$$x_2 \geqslant 0, \tag{3.10}$$

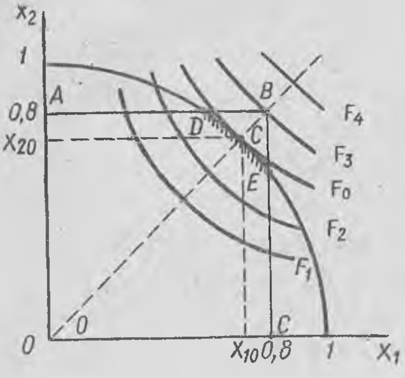
$$x_1^2 + x_2^2 - 1 \geqslant 0 \tag{3.11}$$

шартларни қаноатлантирувчи

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 \tag{3.12}$$

функцияни максимумлаштириш зарур.

Бу масалани $x_1 - x_2$ текисликда график (3. 3- расм) ёрдамида энг яхши тушунтириш мумкин. Бунда (3. 9), (3. 10) формулалар мумкин бўлган ечимлар соҳаси биринчи квадрантда жойлашганлигини кўрсатади. (3. 7) ва (3. 8) формулалар эса бу соҳа $ABCO$ квадрат ичида жойлашганлигини кўрсатади. (3. 11) тенглик эса мумкин бўлган ечимлар соҳаси маркази координата бошида бўлган бирлик айлана устида ётишини кўрсатади. Шундай қилиб, мумкин бўлган ечимлар соҳаси (3. 11) тенглама билан аниқланувчи бирлик айлананинг DE ёпиқ ёйидан иборатдир.



3.3- расм.

F_1, F_2, F_3, F_4 эгри чизиқларнинг ҳар бири $f(x_1, x_2)$ функциянинг ўзгармас қийматларини геометрик ўрнидан иборатдир, бунда $F_1 < F_2 < F_3 < F_4$ бўлади. Бу эгри чизиқларнинг OB тўғри чизиққа нисбатан симметрик ва $x_2 = \frac{F_i}{x_1}$ тенглама билан аниқланувчи гиперболалардан иборат эканлигини кўриш осон. Бу эгри чизиқлардан DE ёйга унинг G нуқтасида уринадиганини F_0 деб белгилаймиз (бунда G нуқта DE ёй билан OB тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтаси ҳамдир). У ҳолда $f(x_1, x_2)$ функция ўзининг максимал қиймати $f(x_{10}, x_{20})$ га G нуқтада эришади. Бунда бу максимал қиймат $f(x_{10}, x_{20}) \cong F_0$ тенглик билан ҳисобланади ва (3.7) — (3.11) формулалар билан берилган барча шартлар бажарилади.

Шундай қилиб, қаралаётган масаланинг оптимал ечими қуйидагича бўлади:

$$x_{10} = x_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707.$$

Мақсад функциясининг оптимал қиймати:

$$F_0 = x_{10} \cdot x_{20} = 0,5.$$

4-§. Математик программалаштириш масалаларининг турлари

Биз (3.6) кўринишдаги математик программалаштириш масаласини қараймиз. Агар бу ифодада $f(\vec{x})$, $g_i(\vec{x})$ ($i = 1, 2, \ldots, q$) ва $h_j(\vec{x})$ ($j = 1, 2, \ldots, p$) функциялар x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) ўзгарувчиларга нисбатан чизиқли бўлса, у ҳолда (3.6) масалани *чизиқли программалаштириш масаласи* дейилади. Шуни айтиш керакки, чизиқли программалаштириш масалаларида фақат чеклаш шартларигина эмас, шу билан бирга мақсад функцияси ҳам x_i ўзгарувчиларнинг чизиқли функцияси бўлади.

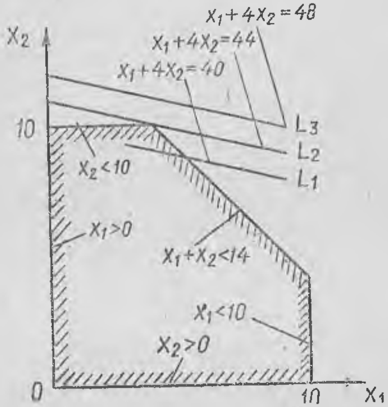
Чизиқли программалаш масаласида мақсад функцияси

$$f(\overrightarrow{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i = (\overrightarrow{c})^T (\overrightarrow{x}) \qquad (3.\ 13)$$

кўринишда берилиши мумкин, бунда $(\overrightarrow{c})^T$ —транспонирланган n ўлчовли ўзгармас $(\overrightarrow{c})$ вектор.

Умумий ҳолда чеклаш шартларини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$A\,(\overrightarrow{x}) = \left\{ \begin{matrix} \geqslant \\ = \\ \leqslant \end{matrix} \right\} b, \qquad (3.14)$$



3. 4- расм.

бунда b — m-ўлчовли ўзгармас вектор, m— чеклаш шартларининг умумий сони ва A—$m \times n$-ўлчовли ўзгармас матрица.

Одатда чеклаш шартларига ўзгарувчиларнинг ишораларини кўрсатувчи шартлар ҳам киради, масалан, $x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$. Бу шартлар A матрица таркибига кирмайди ва алоҳида ёзилади.

Мисол сифатида қуйидаги чизиқли программалаштириш масаласини қарайлик (3. 4- расм):

$$\left.\begin{matrix} x_1 \leqslant 10, \\ x_2 \leqslant 10, \end{matrix}\right\} (3.\ 15), \qquad \left.\begin{matrix} x_1 + x_2 \leqslant 14, \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{matrix}\right\} (3.\ 16)$$

шартлар бажарилганда

$$f\ (x_1,\ x_2) = x_1 + 4x_2 \qquad (3.\ 17)$$

функцияни максимумлаштиринг.

Бу масалани бошқача қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\max \{\overrightarrow{(c)}^T \overrightarrow{(x)} \mid A\overrightarrow{(x)} \leqslant b; \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0\}, \qquad (3.18)$$

бунда

$$\overrightarrow{(c)}^T = [1\ 4], \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Қаралаётган (3. 15) ва (3. 16) шартлардан кўринадики, мумкин бўлган ечимлар соҳаси 3. 4- расмда кўрсатилган $ABCDO$ кўпбурчак ичида ётади. Бунда L_1, L_2 ва L_3 ўсиш тартибида жойлашган тўғри чизиқлар (3. 17) мақсад функциясининг ўзгармас қийматларига мос келади. Ўз-ўзидан равшанки, мумкин бўлган ечимлар соҳаси билан камида битта умумий (B) нуқтага эга бўлган $\overrightarrow{(c)}^T \overrightarrow{(x)} = 44$ тенглама билан аникланувчи L_2 тўғри чизиқ (3. 17) мақсад функциясининг максимал қийматига мос келади. Бошқача айтганда, B нуқта оптимал нуқта бўлади. Демак, бу масаланинг оптимал ечими

$$x_{10} = 4,$$
$$x_{20} = 10$$

бўлади.

Агар математик программалаштириш масаласининг мақсад функцияси квадратик бўлиб, унинг барча чеклаш шартлари чизиқли бўлса ҳам, у ҳолда биз квадратик программалаштириш масаласига эга бўламиз. Умумий ҳолда квадратик программалаштириш масаласининг мақсад функцияси қуйидаги кўринишда ифодаланиши мумкин:

$$\overrightarrow{f(x)} = \overrightarrow{(c)}^T \overrightarrow{(x)} + \overrightarrow{(x)}^T D \overrightarrow{(x)}, \qquad (3.19)$$

бунда D $n \times n$- ўлчовли симметрик ўзгармас матрицадир. Квадратик программалаштириш масаласининг чизиқли чеклаш шартлари чизиқли программалаштириш шартлари каби ёзилади. Квадратик программалаштириш масаласининг мақсад функцияси скаляр формада қуйидагича ёзилиши мумкин:

$$f\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{i,\ j=1} x_i d_{ij} x_j, \qquad (3.20)$$

бунда d_{ij} орқали D матрицанинг элементлари белгиланган. $x_i\ x_j = x_j\ x_i$ бўлгани учун (3. 20) тенгликка асосан матрицани симметрик матрица деб қараш мумкин.

Агар (3. 11) шартни чиқариб ташланса, 3-§ да қаралган масала квадратик программалаштириш масаласига мисол бўла олади. Аммо, у ҳолда мумкин бўлган ечимлар соҳаси $ABCO$ квадрат 3. 1-расм билан чегараланади ва B нуқта ($x_{10} = x_{20} = 0{,}8$) оптимал нуқта бўлади.

Мақсад функциясининг оптимал қиймати қуйидагига тенг бўлади:

$$f\ (x_{10},\ x_{20}) = x_{10}x_{20} = (0{,}8)^2 = 0{,}64.$$

Математик программалаштириш масаласининг энг умумий ҳоли чизиқли бўлмаган программалаштириш масаласидир. Бу турдаги масалалар туркумига кирувчи масала камида битта чизиқли бўлмаган чеклаш шартига ва чизиқли бўлмаган мақсад функциясига эга бўлади. Равшанки, квадратик программалаштириш чизиқли бўлмаган программалаштиришнинг хусусий ҳоли бўлади. Лекин унинг барча шартлари чизиқли бўлгани учун уни бошқа синфга киритилади. Бунинг асосий сабаби масалани ечишда ҳисоблаш методларидан фойдаланишда яққол кўринади. Юқорида, 3- § да қаралган мисол чизиқли бўлмаган программалаштириш масаласига мисол бўла олади.

Чизиқли программалаштиришнинг баъзи татбиқларида ўзгарувчилар фақат дискрет бутун сонли қийматлар қабул қилади. Бу турдаги масалалар *бутун сонли чизиқли программалаштириш* дейилади.

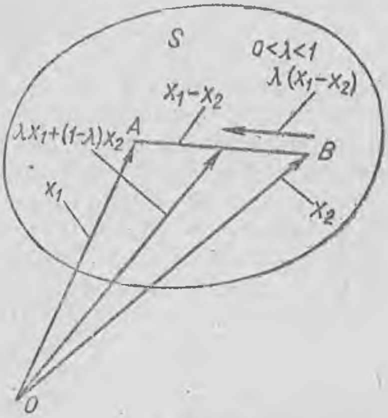
Кўпгина масалаларда баъзи ўзгарувчиларгина бутун сонли қийматлар қабул қилиши, қолганлари эса узлуксиз ўзгариши мумкин. Бу турдаги масалаларни *аралаш бутун сонли программалаштириш* дейилади.

Шундай масалалар ҳам мавжудки, уларнинг чеклаш шартларидаги ва мақсад функцияларидаги коэффициентларидан иборат параметрлар тасодифий ўзгарувчилар бўлади. Уларни *стохастик программалаштириш* масалалари дейилади.

5-§. Қавариқлик

Қавариқлик математик программалаштиришда фойдаланиладиган энг муҳим математик тушунчалардан биридир. Математик программалаштиришнинг баъзи асосий усулларини баён қилишдан олдин қавариқлик ҳақидаги масалани қараймиз ва бир неча асосий таърифларни келтирамиз. Математик программалаштиришнинг ҳар бир масаласи фазонинг масаладаги барча шартларини қаноатлантирувчи нуқталаридан иборат мумкин бўлган ечимлар соҳасига эга. Бу соҳа тўғрироғи масаланинг мумкин бўлган ечимларини ифодаловчи нуқталар тўпламидан иборат. Математик программалаштириш масалалари учун айниқса қавариқ тўпламлар муҳимдир.

Агар бирор тўпламнинг ихтиёрий иккита нуқтасини туташтирувчи кесма ҳам шу тўпламга тегишли бўлса, бундай тўплам *қавариқ тўплам* дейилади.



3. 5- расм.

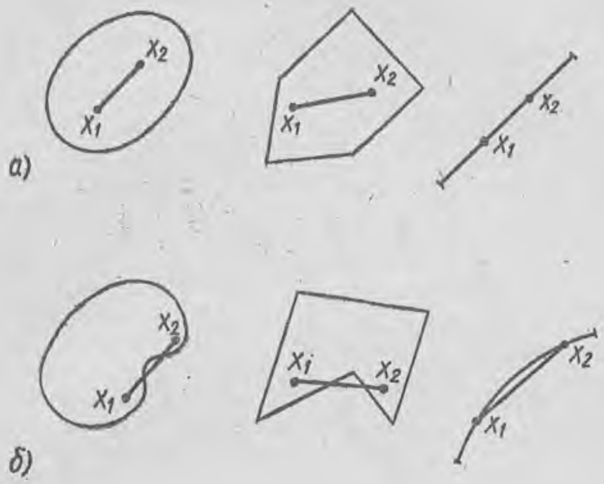
Бирор нуқталар тўплами S (3. 5- расм) ва унга тегишли ихтиёрий иккита A ва B нуқтани қараймиз, бунда $A \in S$, $B \in S$. A ва B нуқталар мос равишда $\overrightarrow{(x_1)}$ ва $\overrightarrow{(x_2)}$ векторларнинг охиридир. Ушбу $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ҳар қандай сон учун 3. 5- расмда кўрсатилганидек $\lambda(\overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_2})$ вектор $\overrightarrow{(x_1)} - \overrightarrow{(x_2)}$ векторга коллинеар бўлади. AB кесмага тегишли P нуқта $\lambda\overrightarrow{(x_1)} + (1 - \lambda)\overrightarrow{(x_2)}$ вектор билан аниқланади.

Энди қавариқ тўпламни қуйидагича таърифлаш мумкин: агар нуқталар тўплами S нинг ҳар қандай иккита нуқтаси $\overrightarrow{(x_1)}$, $\overrightarrow{(x_2)} \in S$ учун

$$[\lambda\overrightarrow{(x_1)} + (1 - \lambda)\overrightarrow{(x_2)}] \in S, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

муносабат ўринли бўлса, у ҳолда S тўплам *қавариқ тўплам* дейилади.

Қавариқ тўпламларга бир неча мисоллар 3. 6- *а* расм-

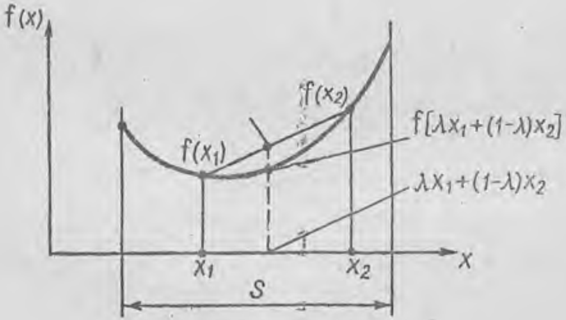


3. 6- расм.

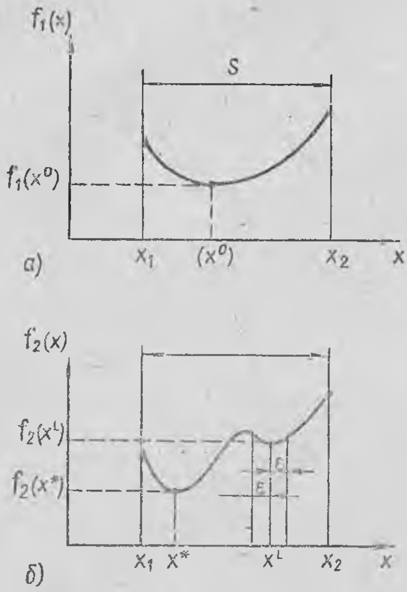
да келтирилган, 3.6-*б* расмда бир неча қавариқ бўлмаган тўпламлар тасвирланган.

Юқоридагига ўхшаш, қавариқ функция тушунчасини таърифлаш мумкин. Агар ихтиёрий иккита $(\overrightarrow{x_1}), (\overrightarrow{x_2}) \in S$ нуқталар учун ва $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ муносабатни қаноатлантирувчи барча λ скаляр учун (3.7- расм) қуйидаги

$$f[\lambda(\overrightarrow{x_1}) + (1-\lambda)(\overrightarrow{x_2})] \leqslant \lambda f(\overrightarrow{x_1}) + (1-\lambda) f(\overrightarrow{x_2}) \qquad (3.21)$$



3. 7- расм.



3. 8- расм.

муносабат ўринли бўлса, у ҳолда $f(\vec{x})$ функция S қавариқ тўпламда *қавариқ функция* дейилади. Агар (3.21) муносабат қатъий тенгсизлик (яъни $0 < \lambda < 1$) учун ўринли бўлса, у ҳолда $f(\vec{x})$ функция *қатъий қавариқ функция* дейилади. Агар тенгсизлик ишорасини унга қарама-қарши ишора билан алмаштирсак, у ҳолда $f(\vec{x})$ функция ботиқ бўлади. Қавариқ функцияларнинг энг муҳим хоссаларидан бири қуйидагилардан иборат.

Биз 3.8-*а* расм ва 3.8-*б* расмда тасвирланган $f_1(\vec{x})$ ва $f_2(\vec{x})$ функцияларни қараймиз, бунда $f_1(\vec{x})$ қаварик, $f_2(\vec{x})$ қавариқ бўлмаган функциядир. Бу иккала функцияни $\{S \mid (\vec{x}_1) \leqslant (\vec{x}) \leqslant (\vec{x}_2)\}$ соҳада қараймиз.

$f_1(\vec{x})$ функция $(\vec{x}^0) \in S$ нуқтада $f_1(\vec{x}^0)$ минимумга эга, чунки барча $x \in S$ нуқталар учун $f_1(\vec{x}_1^0) \leqslant f_1(\vec{x})$ тенгсизлик ўринлидир. Бошқача сўз билан айтганда, $f_1(\vec{x})$ қавариқ функция S соҳада глобал минимумга эга бўлади.

Шунга ўхшаш, $f_2(\vec{x})$ қавариқ бўлмаган функция $(\vec{x}^*) \in S$ нуқтада глобал минимумга эга, чунки барча $x \in S$ нуқталар учун

$$f_2(\vec{x}^*) \leqslant f_2(\vec{x})$$

муносабат ўринлидир. Иккинчи томондан, $\overrightarrow{(x^L)} \in S$ нуқтада ушбу шарт бажарилади:.

$$f_2\,\overrightarrow{(x^L)} \leqslant f_2\,\overrightarrow{(x^L} \pm \varepsilon), \ \varepsilon > 0, \overrightarrow{(x^L} \pm \varepsilon) \in S,$$

бунда ε — чексиз кичик мусбат сон. $\overrightarrow{(x^L)}$ нуқта *локал минимум* нуқта дейилади. Қавариқ функция фақат глобал минимумга эга бўлади, қавариқ бўлмаган функция эса ихтиёрий сондаги локал минимумларга эга бўлиши мумкин. Функцияларнинг бу хоссаси кўпгина минимумлаштириш масалаларини ечишда муҳим аҳамиятга эга.

6-§. Кун-Таккер теоремаси

Кун-Таккер теоремаси математик программалаштиришнинг энг асосий теоремаларидан биридир. У кўпгина ҳисоблаш алгоритмларига асос бўлади.

Айтайлик, математик программалаштириш масаласи қуйидагича ифодаланган бўлсин:

$$\left.\begin{aligned} &g_j(\vec{x}) \leqslant 0, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m, \\ &x_i \geqslant 0, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

шартлар бажарилганда $f(\vec{x})$ функция минимумлаштирилсин, бунда

$g_j\overrightarrow{(x)}$ $(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ лар n та $\overrightarrow{(x)}^T = [x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n]$ ўзгарувчиларнинг қавариқ функцияларидир.

Одатда *Лагранж кўпайтувчилари* деб аталувчи ва $\overrightarrow{(u)}$ векторни ташкил этувчи $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_m$ ўзгарувчилар тўпламини киритамиз. Янги функция—Лагранж функцияси $L\,(\vec{x},\ \vec{u})$ қуйидагича аниқланади:

$$L\,(\vec{x},\ \vec{u}) = f\,(\vec{x}) + \sum_{j=1}^{m} u_j\, g_j\,(\vec{x}), \tag{3.23}$$

Энди Кун-Таккер теоремасини ифодалаш мумкин.

Фараз қилайлик, Слейтер шарти бажарилсин, яъни шундай x^* нуқта топилсинки, унинг учун

$$x_i^* \geqslant 0, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n; \quad g_j\overrightarrow{(x)}^* < 0, \ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$$

шартлар бажарилсин (агар $g_j\ (\vec{x})$ чизиқли бўлса, бу шарт ташлаб юборилиши мумкин). Агар $(\vec{u})^0$ мавжуд бўлса ҳамда $x_i \geqslant 0$ ва $u_j \geqslant 0$ шартлар учун қуйидаги муносабатлар ўринли бўлса,

$$\left.\begin{aligned} x_i^0 \geqslant 0, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\\ u_j^0 \geqslant 0, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m,\\ L\ (\vec{x}^0,\ \vec{u}) \leqslant L\,(\vec{x}^0,\ \vec{u}^0) \leqslant L\,(\vec{x},\ \vec{u}^0). \end{aligned}\right| \qquad (3.24)$$

$(\vec{x})^0$ вектор (3.22) оптималлаштириш масаласининг ечими бўлади.

Бошқа сўз билан айтганда, $(\vec{x}^0,\ \vec{u}^0)$ оптимал нуқта қуйидаги хоссага эга: $(\vec{u})$ фиксирланган бўлса, $L\,(\vec{x},\ \vec{u}^0)$ ушбу $x_i \geqslant 0$ $(i = 1,\ \ldots,\ n)$ соҳанинг $(\vec{x}) = (\vec{x})^0$ нуқтасида глобал минимумга эга. $(\vec{x})^0$ фиксирланган бўлса, $L\ (\vec{x}^0,\ \vec{u})$ функция $u_j \geqslant 0$ $(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ соҳанинг $(\vec{u}) = (\vec{u})^0$ нуқтасида глобал максимумга эга бўлади. Бу хоссага эга бўлган $(\vec{x}^0,\ \vec{u}^0)$ экстремал нуқта *эгар нуқта* дейилади. Шунинг учун ҳам Кун-Таккер теоремасини баъзан *эгар нуқта ҳақидаги теорема* деб ҳам аталади.

Бу теоремани тасдиқловчи қуйидаги эвристик мулоҳазаларни келтириш мумкин. Агар (3. 23) ва (3. 24) га қўйсак, барча $x_i \geqslant 0\,(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ ва $u_j \geqslant 0$ $(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ учун

$$f(\vec{x}^0) + \sum_{j=1}^{m} u_j\, g_j\, (\vec{x}^0) \leqslant f(\vec{x}^0) + \sum_{j=1}^{m} (u_j^0\, g_j(\vec{x}^0) \leqslant f(\vec{x}) + \\ + \sum_{j-1}^{m} u_j^0\, g_j\, (\vec{x}). \qquad (3.25)$$

(3. 25) формуладаги чап тенгсизликдан

$$\sum_{j=1}^{m} u_j\, g_j\, (\vec{x}^0) \leqslant \sum_{j=1}^{m} u_j^0\, g_j\, (\vec{x}^0) \qquad (3.26)$$

тенгсизлик ҳосил бўлади.

Барча $u_j \geqslant 0$ учун (3.26) тенгсизлик ўринли бўлганлиги сабабли

$$g_j(\vec{x}^0) \leqslant 0 \tag{3.27}$$

ва

$$\sum_{j=1}^{m} u_j^0 g_j(\vec{x}) \leqslant 0 \tag{3.28}$$

ларни ҳосил қиламиз.

(3.27) тенгсизликдан кўринадики, $\overrightarrow{(x)}^0$ оптимал нуқта мумкин бўлган нуқтадир. Агар (3.28) тенгсизликни эътиборга олсак, (3.25) формуланинг ўнг томонидаги тенгсизликни барча $x_i \geqslant 0$ учун қуйидагича ёзиш мумкин:

$$f(\vec{x}^0) \leqslant f(\vec{x}) + \sum_{j=1}^{m} u_j^0 g_j(\vec{x}). \tag{3.29}$$

Лекин шартга кўра $u_j \geqslant 0$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ ва $g_j(\vec{x}) \leqslant 0$ бўлгани сабабли барча $x_i \geqslant 0 \, (i = 1, 2, \ldots, n)$ ва $g_j(\vec{x}) \leqslant 0 \, (j = 1, \ldots, m)$ лар учун (3.29) дан

$$f(\overrightarrow{x^0}) \leqslant f(\overrightarrow{x}). \tag{3.30}$$

Бу эса $f(\vec{x}^0)$ ҳақиқатан ҳам $f(\vec{x})$ нинг мумкин бўлган соҳасидаги минимуми бўлади, $(\vec{x})^0$ эса (3.27) масаланинг ечими бўлади. Кун—Таккер теоремасининг батафсил исботини махсус адабиётдан топиш мумкин.

Дифференциалланувчи функциялар учун Кун—Таккер теоремасини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i}\bigg|_{\overrightarrow{(x)}^0, \overrightarrow{(u)}^0} &\geqslant 0, \\ x_i^0 \frac{\partial L}{\partial x_i}\bigg|_{\overrightarrow{(x)}^0, \overrightarrow{(u)}^0} &= 0, \\ x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, \ldots, n&. \end{aligned}\right\} \tag{3.31}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u_j}\bigg|_{(\vec{x}^0), \overrightarrow{(u)}^0} &\leqslant 0, \\ u_j^0 \frac{\partial L}{\partial u_j}\bigg|_{\overrightarrow{(x)}^0, \overrightarrow{(u)}^0} &= 0, \\ x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, \ldots, m&. \end{aligned}\right\} \tag{3.32}$$

7-§. Иккилик тушунчаси

Иккилик тушунчаси математик программалаштиришда муҳим аҳамиятга эга.

Минимумлаштириш масаласининг бошқачароқ ифодаланишини қараймиз:

$$(P) = \min\{f(\vec{x}) \mid g_j(\vec{x}) \leqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m\}. \tag{3.33}$$

Бу масалани тўғри (P) масала дейилади. Бу масала билан боғлиқ максимумлаштириш масаласини унга нисбатан иккилик масаласи (Д) ёки *қўшма масала* дейилади. Иккилик масаласи қуйидагича ифодаланади:

$$(\text{Д}) = \max\left\{L(\vec{x}, \vec{u}) \,\middle|\, \frac{\partial L(\vec{x}, \vec{u})}{\partial x_i} = 0, \quad i=1, 2, \ldots, n;\right.$$

$$\left. u_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m\right\}, \tag{3.34}$$

бунда $L(\vec{x}, \vec{u})$ — (3.23) формула билан аниқланувчи Лагранж функцияси.

Иккилик тушунчаси тўғри масала ва иккилик масаласи ечимлари орасидаги айрим муносабатларни аниқлайди. Қуйидаги теорема бу икки масаладаги мақсад функцияси $f(\vec{x})$ ва $L(\vec{x}, \vec{u})$ лар орасидаги боғланишни аниқлайди.

Теорема. *Агар* $f(\vec{x})$ *ва* $g_j(\vec{x})$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ *функциялар дифференциалланувчи қавариқ функциялар бўлиб,* $(\vec{y})$ *эса* (3.33) *тўғри масаланинг ихтиёрий мумкин бўлган нуқтаси бўлса ва агар* $(\vec{x}^f, \vec{u}^f)$ (3.34) *иккилик масаласининг ихтиёрий мумкин бўлган нуқтасини ифодаласа, у ҳолда*

$$f(\vec{y}) \geqslant L(\vec{x}^f, \vec{u}^f) \tag{3.35}$$

тенгсизлик бажарилади.

Исбот. Шартга кўра $(\vec{y})$ тўғри масаланинг мумкин бўлган нуқтаси бўлганлиги учун $g_j(\vec{y}) \leqslant 0, j=1, 2, \ldots, m,$ ва шу сабабли

$$f(\vec{y}) \geqslant f(\vec{y}) + \sum_{j=1}^{m} u_j^f g_j(\vec{y}). \tag{3.36}$$

f ва барча g_j функциялар қавариқ бўлганлиги сабабли дифференциалланувчи қавариқ функция таърифидан иборат қуйидаги ифодани ёзиш мумкин:

$$f(\vec{y}) \geqslant f(\vec{x}^f) + (\vec{y} - \vec{x}^f)^T \nabla f(\vec{x}^f), \qquad (3.37)$$

$$g_j(\vec{y}) \geqslant g_j(\vec{x}^f) + (\vec{y} - \vec{x}^f)^T \nabla g_j(\vec{x}^f), \quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ m. \qquad (3.38)$$

(3.37) ва (3.38) ни (3.36) га қўйиб,

$$f(\vec{y}) + \sum_{j=1}^{m} u_j^f g_j(\vec{y}) \geqslant f(\vec{x}^f) + \sum_{j=1}^{m} u_j^f g_j(\vec{x}^f) +$$
$$+ (\vec{y} - \vec{x}^f)^T [\nabla f(\vec{x}^f) + \sum_{j=1}^{m} u_j^f \nabla g_j(\vec{x}^f) \qquad (3.39)$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Аммо $(\vec{x}^f, \vec{u}^f)$ нуқта (Д) иккилик масаласининг мумкин бўлган нуқтаси бўлганлиги учун

$$\nabla L(\vec{x}^f, \vec{u}^f) = \nabla f(\vec{x}^f) + \sum_{j=1}^{m} u_j^f \nabla g_j(\vec{x}^f) = 0 \qquad (3.40)$$

бўлади. Агар (3.36) ва (3.39) тенгсизликларни эътиборга олсак, (3.40) тенгликдан

$$f(\vec{y}) \geqslant L(\vec{x}^f, \vec{u}^f) \qquad (3.41)$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Ана шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Юқорида исботланган теореманинг амалий аҳамияти шундан иборатки, агар (Р) тўғри масалани ечувчи алгоритмлар (Д) иккилик масаласининг мумкин бўлган нуқталарини ишлаб чиқадиган бўлса, у ҳолда бу $f(\vec{y})$ нинг оптимал қийматини пастдан чегаралаш (баҳолаш) имконини беради.

Келгуси теоремани ифодалашдан олдин Кун-Таккернинг биринчи тартибли регулярлик шарти тушунчасини аниқлаш зарур.

Таъриф. $(\vec{x}^f)$ тўғри масаланинг мумкин бўлган нуқтаси бўлсин, $g_j(x^f)$ функциялар эса дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда $g_j(\vec{x}^f)$ нуқтадаги чеклаш шартлари биринчи тартибли регулярлик шартларини қаноатлантириши учун ушбу

$$(\vec{z})^T \nabla g_j(\vec{x}^f) \leqslant 0 \quad \forall j \in \{j \mid g_j(\vec{x}^f) = 0\} \qquad (3.42)$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий $\overrightarrow{(z)}$ ноль бўлмаган вектор $\overrightarrow{(x)}^f$ нуқтадан чиқувчи ва мумкин бўлган соҳага тегишли бирор текис ёйга уринма бўлиши зарур. Бу шарт бажарилиши учун юқорида эслатиб ўтилган Слейтер шарти бажарилиши керак.

Теорема. *Агар чеклаш шартлари асосий* (P) *масаланинг ечими бўлган* $\overrightarrow{(x)}^0$ *нуқтада биринчи тартибли регулярлик шартларини қаноатлантирса, у ҳолда (Д) иккилик масаласининг ечими мавжуд бўлиб, асосий масаланинг мумкин бўлган* $\overrightarrow{(x)}$ *нуқтасининг* L *функциясининг максимал қиймати* f *функциянинг минимал қийматига тенг бўлади* (теореманинг тўла исботини махсус адабиётдан топиш мумкин).

Бу теорема катта амалий аҳамиятга эга.

Математик программалаштириш масалаларини ечишда жуда катта қийинчиликларга дуч келиш мумкин. Аммо унга нисбатан иккилик масаласи анча осон ечилиши мумкин. Юқоридаги теорема маълум шартлар бажарилганда тўғри масала ва унга нисбатан иккилик масала мақсад функцияларининг оптимал қийматлари бир хил бўлишини тасдиқлайди. Шундай қилиб, дастлаб иккилик масаласини ечиш ва сўнгра ҳосил қилинган информациялардан фойдаланиб, тўғри масалани ечиш бирмунча қулайлиқлар туғдиради.

Хусусий ҳолда, чизиқли программалаштириш масаласи учун иккилик тушунчасини ифодалаймиз. Қуйидаги тўғри чизиқли программалаштириш масаласини қараймиз:

$$\max \{ \overrightarrow{(c)}^T \mid A\overrightarrow{(x)} \leqslant \vec{b};\ x_i \geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n\}, \qquad (3.43)$$

бунда ўзгарувчиларнинг барчаси (3.13) ва (3.14) формулаларда келтирилган ўзгарувчилардир.

Бу масалага нисбатан иккилик масаласи қуйидагича ифодаланиши мумкин:

$$\min \{ \overrightarrow{(b)}^T \overrightarrow{(u)} \mid A^T \overrightarrow{(u)} \geqslant \overrightarrow{(c)};\ u_j \geqslant 0,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ m\}. \qquad (3.44)$$

Қуйидаги теорема катта аҳамиятга эга.

Теорема. *Агар* $\overrightarrow{(x)}$ (3.43) *тўғри масаланинг ихтиёрий мумкин бўлган ечими бўлса ва* $\overrightarrow{(u)}$ (3.44) *ик-*

килик масаласининг ихтиёрий ечими бўлса, у ҳолда

$$(\vec{c})^T (\vec{x}) \leqslant (\vec{b})^T (\vec{u}). \qquad (3.45)$$

Исбот. Шартга кўра $(\vec{x})$ тўғри масаланинг мумкин бўлган ечими бўлганлиги учун

$$(A(\vec{x}))_i \leqslant b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad (3.46)$$

ва иккилик масаласининг ихтиёрий мумкин бўлган ечими учун $u_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ бўлганлиги сабабли

$$u_i (A(\vec{x}))_i \leqslant u_i b_i \qquad (3.47)$$

тенгсизлик бажарилади. У ҳолда (3.47) ни i бўйича қўшсак,

$$\sum_{i=1}^{m} u_i (A(\vec{x}))_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} u_i b_i \qquad (3.48)$$

ёки

$$(\vec{u})^T A(\vec{x}) \leqslant (\vec{b})^T (\vec{u}). \qquad (3.49)$$

Шунга ўхшаш, $x_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ бўлгани учун (3.44) дан

$$(\vec{u})^T A(\vec{x}) \geqslant (\vec{c})^T (\vec{x}) \qquad (3.50)$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. Агар (3.49) ва (3.50) ни солиштирсак,

$$(\vec{c})^T (\vec{x}) \leqslant (\vec{b})^T (\vec{u})$$

эканлигинн ҳосил қиламиз. Шуни исботлаш керак эди.

Теорема. $(\vec{x})^f$ *тўғри масаланинг шундай мумкин бўлган ечими бўлсинки,*

$$(\vec{c})^T (\vec{x})^f = (\vec{b})^T (\vec{u})^f \qquad (3.51)$$

тенглик бажарилсин, у ҳолда $(\vec{x})^f$ (3.43) *тўғри масаланинг оптимал ечими бўлади,* $(\vec{u})^f$ *эса* (3.44) *иккилик масаласининг оптимал ечими бўлади.*

Исбот. (3.45) ва (3.51) дан ҳар қандай мумкин бўлган $(\vec{x})$ учун

$$(\vec{c})^T (\vec{x}) \leqslant (\vec{b})^T (\vec{u})^f = (\vec{c})^T (\vec{x})^f \qquad (3.52)$$

эканлиги келиб чиқади. Лекин тўғри масала максимумлаштириш масаласи бўлгани учун $\vec{x}$ оптимал ечим бўлади. Худди шу каби ҳар қандай мумкин бўлган $\overrightarrow{(u)}$ учун

$$\overrightarrow{(b)}^{T}\ \overrightarrow{(u)}^{f} = \overrightarrow{(c)}^{T}\,\overrightarrow{(x)}^{f} \leqslant \overrightarrow{(b)}^{T}\,\overrightarrow{(u)} \qquad (3.53)$$

бўлгани сабабли ва иккилик масаласи—бу минимумлаштириш масаласи бўлгани сабабли $\overrightarrow{(u)}_{f}$ унинг оптимал ечими бўлади.

Теорема. *Агар* (3.43), (3.44) *масалалардан бири оптимал ечимга эга бўлса, у ҳолда иккинчиси ҳам оптимал ечимга эга бўлади.*

Бу теореманинг тўлиқ исботини махсус адабиётдан кўриш мумкин.

IV боб

МАТЕМАТИК ПРОГРАММАЛАШТИРИШ МАСАЛАЛАРИНИ СОНЛИ ЕЧИШ УСУЛЛАРИ

1-§. Чизиқли программалаштириш

Чизиқли программалаштириш методлари оптимал бошқаришнинг кўпгина масалаларини ечишда, жумладан, дискрет системаларга тааллуқли масалаларни ечишда кенг қўлланилмоқда. Бу параграфда биз чизиқли программалаштириш масаласини каноник формага келтириб қайта ифодалаймиз, чунки масалани бундай формада ифодалаш симплекс усул алгоритмини татбиқ қилишда қулайлик туғдиради.

Чизиқли программалаштириш масаласи қуйидагича ифодаланиши мумкин:

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N} c_i\, x_i = (\vec{c})^{T}\,(\vec{x}) \qquad (4.1)$$

мақсад функцияси берилган. $x_i \geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N$ ўзгарувчиларнинг қуйидаги чизиқли тенгсизликлар ва тенгликлар кўринишидаги шартларни қаноатлантирувчи қийматларни топиш керак:

$$\sum_{r=1}^{N} a_{ir} x_r \leqslant b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, p, \tag{4.2}$$

$$\sum_{r=1}^{N} a_{jr} x_r = b_j \quad j = p+1, \ldots, p+q, \tag{4.3}$$

$$\sum_{r=1}^{N} a_{kr} x_r \geqslant b_k, \quad k = p+q+1, \ldots, m. \tag{4.4}$$

Шундай қилиб, q та шарт (4.3) тенгликлар орқали ҳамда $m-q$ та шарт (4.2) ва (4.4) тенгсизликлар орқали берилган.

Умумий ҳолда тенгсизликларга қараганда тенгликлар билан иш кўриш осон бўлгани учун (4.2) ва (4.4) тенгсизликларни қўшимча ўзгарувчилар киритиш орқали тенгликларга алмаштирамиз. (4.2) кўринишдаги шартлар учун $x_{si} \geqslant 0$ қўшимча ўзгарувчилар қуйидагича киритилади:

$$\sum_{r=1}^{N} a_{ir} x_r + x_{si} = b_i, \quad i = 1, \ldots, p. \tag{4.5}$$

(4.4) кўринишдаги шартлар учун $x_{sj} \geqslant 0$ қўшимча ўзгарувчилар қуйидагича киритилади:

$$\sum_{r=1}^{N} a_{jr} x_r - x_{sj} = b_j, \quad j = p+q+1, \ldots, m. \tag{4.6}$$

Шуни ҳам айтиш керакки, мақсад функцияси таркибига қўшимча ўзгарувчилар кирмайди ва улар оптимал ечимга таъсир қилмайди. Шундай қилиб, қўшимча ўзгарувчилар, асосан, масаланинг шартларини

$$A(\vec{x}) = (\vec{b}) \tag{4.7}$$

кўринишга келтириш учун фойдаланилади, бунда $(\vec{x}) \geqslant 0$ $n = (N + m - q)$ ўлчовли вектор бўлиб, у ўз ичига барча асосий ва қўшимча ўзгарувчиларни олади, $(\vec{b})-m$ ўлчовли ўзгармас вектор ва A $m-n$ ўлчовли ўзгармас матрица. Шундай қилиб, (4.7) тенглик n номаълумли m та чизиқли тенгламани ифодалайди. Бунда $n < m$ деб фараз қилинади, яъни номаълумларнинг умумий сони тенгламалар кўринишидаги шартлар сонидан катта. Агар $m < n$ бўлса, у ҳолда тенгламалар сони номаълумлар сонидан кўп бўлади, бунда баъзи тенгламалар бошқаларига боғлиқ бўлади, шу сабабли уларни йўқотиш мумкин. Агар $m = n$ бўлиб, A махсус бўлмаган матрица бўлса, у ҳолда ягона ечимга эга бўлган одатдаги чизиқли алгебраик тенгламалар системаси ҳосил бўлади.

Энди чизиқли программалаш масаласи каноник формада қуйидагича ифодаланади:

$$\max \text{ (ёки } \min) \; \{(\vec{c})^T (\vec{x}) \,|\, A(\vec{x}) = (\vec{b}); \; x_i \geqslant 0, \; i = 1, 2, \ldots, n\}, \tag{4.8}$$

бунда

$$(\vec{c})^T = [c_1, \; c_2, \; \ldots, \; c_N, \; 0, \; \ldots, \; 0]$$

n ўлчовли сатр вектор ва N асосий ўзгарувчилар сонидир, Данциг томонидан таклиф этилган симплекс-алгоритм чизиқли программалаштириш масалаларини сонли ечишнинг самарали алгоритмлардан бири ҳисобланади. Ҳозирги вақтда симплекс усулнинг бир неча варианти мавжуд. Бу параграфда бу усулнинг асосий мазмунигина баён этилади.

(4.7) шартларни скаляр формада ёзиб қуйидаги n номаълумли m та чизиқли тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m, \end{array}\right\} \tag{4.9}$$

бунда $n > m$ ва a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n)$ коэффициентлар A матрицанинг ўзгармас элементлари бўлсин деб фараз қиламиз. III бобда кўрсатилганидек, $x_j \geqslant 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ компонентлари барча (4.9) шартларни қаноатлантирувчи ҳар қандай $\vec{x}$ вектор масаланинг мумкин бўлган ечимини ифодалайди. Симплекс усулда мумкин бўлган базис ечим деб аталувчи мумкин бўлган ечимнинг жуда муҳим махсус формаси мавжуддир.

Айтайлик, (4.9) кўринишдаги n номаълумли m та чизиқли тенгламалар системаси берилган бўлсин. Тенгламаларнинг коэффициентларидан тузилган A матрицанинг ранги m бўлсин. Агар m та шартлардаги ўзгарувчилар коэффициентларидан тузилган матрица махсус бўлмаса, у ҳолда бундай m та ўзгарувчи тўплами *базис* деб аталади. Бу m та ўзгарувчи *базис ўзгарувчи-*

лар дейилади, қолган ўзгарувчилар *базис бўлмаган ўзгарувчилар* дейилади. Агар барча базис бўлмаган ўзгарувчиларни нолга тенгласак ва масалани базис ўзгарувчиларга нисбатан ечсак, у ҳолда берилган базисга кўра базис ечимини ҳосил қиламиз.

Агар $\overrightarrow{(x)}$ базис ечим мумкин бўлган ечим бўлса, яъни

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \tag{4.10}$$

у ҳолда уни *мумкин бўлган базис ечим* деб аталади.

Энди, (4.9) формула билан аниқланувчи геометрик структурани қараймиз, m та тенгламанинг ҳар бири n ўлчовли фазода гипертекисликни аниқлайди. Маълумки, гипертекислик қавариқ тўпламдир. Айтайлик, масалан, $\vec{x}_1$ ва $\vec{x}_2$ нуқталар бирор i-гипертекисликда ётсин. У ҳолда

$$\overrightarrow{(a_i)}^T\ \overrightarrow{(x_1)} = b_i \tag{4.11}$$

ва

$$\overrightarrow{(a_i)}^T \cdot \overrightarrow{(x_2)} = b_i \tag{4.12}$$

$\vec{x}_1$ ва $\vec{x}_2$ нуқталарни туташтирувчи тўғри чизиқ кесмасида жойлашган ихтиёрий нуқта ҳам ўша гипертекисликда ётади, чунки

$$\overrightarrow{(a_i)}^T\ \overrightarrow{(x)} = a_i^T\,[\lambda\,\overrightarrow{(x_2)} + (1-\lambda)\ \overrightarrow{(x_1)}] = \lambda b_i + (1-\lambda)\ b_i = b_i. \tag{4.13}$$

Гипертекислик билан чекланган очиқ ёки ёпиқ ярим фазо ҳам қавариқ тўплам бўлади.

$x_i \geqslant 0$ тенгсизлик билан аниқланувчи ёпиқ ярим фазо ҳам қавариқдир. Қавариқ тўпламлар кесишмаси қавариқ бўлгани учун (4.8) масаланинг мумкин бўлган ечимлари тўплами қавариқ бўлади деб тасдиқлай оламиз.

Қавариқ тўпламларнинг четки (ёки экстремал) нуқталари тушунчасини киритамиз.

Таъриф. $\vec{x}$ нуқта қавариқ тўпламнинг четки (экстремал) нуқтаси бўлиши учун шу тўпламга тегишли бўлган ва ушбу $\overrightarrow{(x)} = \lambda\,\overrightarrow{(x_2)} + (1-\lambda)\ \overrightarrow{(x_1)}$ муносабатни қаноатлантирувчи $\overrightarrow{(x_1)}$, $\overrightarrow{(x_2)}$, $\overrightarrow{(x_1)} \neq \overrightarrow{(x_2)}$ нуқталар мавжуд бўлмаслиги керак, бунда $0 < \lambda < 1$.

Шундай қилиб, четки нуқта берилган тўпламга тегишли ихтиёрий икки нуқтани туташтирувчи кесмада ётиши мумкин эмас. Четки нуқта қавариқ тўпламн нг бирор „бурчагидаги нуқта“ си бўлади. Масалан, 32-расмда тасвирланган қавариқ тўплам ($ABCDO$ кўпбурчак) нинг четки нуқталари A, B, C, D ва O нуқталар бўлади.

3.2-расмдан кўринадики, агар оптимал ечим ягона бўлса, у ҳолда у доим четки нуқта бўлади. Фараз қилайлик, L_1 мумкин бўлган ечимни ифодаласин. У ҳолда L_1 ни BC бўйлаб соҳанинг B четки нуқтасига етгунча силжитиш мумкин. L_1 ни четки нуқтадан нариги томонга силжитсак, ечим мумкин бўлган ечим бўлмай қолади. Демак, B шундай нуқтаки, бу нуқтада мақсад функцияси шу нуқтада барча шартларни қаноатлантирувчи максимал қийматга эришади.

1-теорема. (4.9) *тенгламалар системасининг ҳар бир мумкин бўлган базис ечими* (4.9), (4.10) *қавариқ тўпламнинг четки* (*экстремал*) *нуқтаси бўлади ва, аксинча,* (4.9), (4.10) *қавариқ тўпламнинг ҳар бир четки* (*экстремал*) *нуқтаси мумкин бўлган базис ечим бўлади.*

Симплекс-алгоритм қуйидаги қадамларни аниқлайди:

1) (4.9) тенгликдан шартларни қаноатлантирувчи ихтиёрий мумкин бўлган базис ечимни топиш;

2) Биринчи мумкин бўлган базис ечимдан қўшни мумкин бўлган базис ечимга шундай йўналишда ўтиш керакки, бунда мақсад функциясининг қиймати ортиб борсин;

3) Бир мумкин бўлган базис ечимдан бошқасига ўтишни мақсад функциясини энг катта қийматига эришгунча давом эттказиш керак. n номаълумли m тенгламалар ($n>m$) системасида базис ечимларнинг умумий сони n дан m тадан бирлашмалар сонига тенг:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}. \qquad (4.14)$$

Мумкин бўлган базис ечимлар сони (бошқача айтганда, чегаравий шартлар билан аниқланувчи кўпбурчакнинг четки нуқталар сони) бу миқдордан ошмайди. Юқорида кўрсатилганидек, четки нуқталар чизиқли программалаштиришнинг оптимал ечимига номзодлар (кандидатлар) бўлади. Симплекс-алгоритмнинг итерацияси бир четки нуқтадан бошқасига мақсад функцияси қийматининг ортиб бориш йўналишида ўтишдан иборатдир. Лекин мумкин бўлган қадамларнинг умумий сони юқоридан чеклангани учун оптимал ечимга чекли сондаги қадамлардан сўнг эришиш мумкин.

Энди қуйидаги чизиқли программалаштириш масаласини қараймиз:

$$\max\Big\{ f(\vec{x})=\sum_{i=1}^{N} c_i\, x_i \,\Big|\, \sum_{i=1}^{N} a_j\, x_i \leqslant b_j;$$
$$b_j \geqslant 0,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\quad x_i \geqslant 0,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ N\Big\}. \tag{4.15}$$

m та $x_{N+1}, \ldots, x_{N+m}$ қўшимча ўзгарувчиларни киритиб, тенгсизликлар шаклидаги шартларни қуйидагича ёзамиз:

$$\sum_{i=1}^{N} a_{ji}\, x_i + x_{N+j} = b_j, \tag{4.16}$$
$$x_{N+j} \geqslant 0,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ m$$

ёки матрица шаклида

$$A(\vec{x})=(\vec{b}), \tag{4.17}$$

бунда A $m\times n$ ўлчовли матрица, $n=N+m$:

$$A=\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccccc|cccccc} a_{11} & . & . & . & a_{1N} & 1 & 0 & . & . & . & 0\\ a_{21} & . & . & . & a_{2N} & 0 & 1 & . & . & . & 0\\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .\\ a_{m1} & . & . & . & a_{mN} & 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{array}\right)\\ N\ \text{та}\qquad\qquad\qquad m\ \text{та}\end{array} \tag{4.18}$$

ва

$$(\vec{x})=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ x_N\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ x_{N+1}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ x_{N+m} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right| \text{асосий ўзгарувчилар}\\ \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right| \text{қўшимча ўзгарувчилар} \end{array} \tag{4.19}$$

(4. 16) дан кўринадики,

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_N = 0 \tag{4.20}$$

$$x_{N+j} = b_j, \ j = 1, \ 2, \ \ldots, \ m \tag{4.21}$$

ечим мумкин бўлган базис ечим бўлади. Шунинг учун чизиқли программалаштириш масаласини ечишни ундан бошлаш мумкин.

Базис ўзгарувчилар учун (4.16) га асосан

$$x_{N+j} = b_j - \sum_{i=1}^{N} a_{ji} x_i \geqslant 0, \quad j = 1, \ 2, \ \ldots, \ m \tag{4.22}$$

мақсад функциясининг $(\vec{c})$ вектори x_{N+j} $(j=1, \ 2, \ \ldots, \ m)$ ўзгарувчиларга мос нолни ҳадлар билан тўлдирилади. Ҳосил бўлган янги $(\vec{c})$ вектор қуйидагига тенг:

$$(\vec{c})^T = [c_1, \ c_2, \ \ldots, \ c_N, \ c_{N+1}, \ \ldots, \ c_{N+m}], \tag{4.23}$$

бунда

$$c_{N+1} = c_{N+2} = \ldots = c_{N+m} = 0. \tag{4.24}$$

Мақсад функциясининг (4.20) ва (4.21) мумкин бўлган базис ечимига мос қиймати

$$f_0(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{m} c_{N+j} x_{N+j} = \sum_{j=1}^{m} c_{N+j} b_j = 0 \tag{4.25}$$

га тенг бўлади. Агар (4.24) ва (4.25) ларни эътиборга олсак, мақсад функциясини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N} c_i x_i = f_0(\vec{x}) + \sum_{i=1}^{N} \left(c_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ji} c_{N+j} \right) x_i \tag{4.26}$$

ёки

$$f(\vec{x}) - f_0(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N} z_i x_i, \tag{4.27}$$

бунда

$$z_i = c_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ji} c_{N+j} = c_i. \tag{4.28}$$

Шуни айтиш керакки, (4.27) тенглик мақсад функцияси билан унинг мумкин бўлган базис ечимига мос қиймати орасидаги айирмани ифодалайди.

1- жадвал симплекс усулнинг бошланғич жадвалидан иборат.

1- жадвал

		Базис бўлмаган ўзгарувчилар			Базис ўзгарувчилар			
Базис ўзгарувчилар		b	x_1	$x_2 \dots x_N$	x_{N+1}	x_{N+2}	$\dots$	x_{N+m}
	x_{N+1}	a_{10}	a_{11}	$a_{12} \dots a_{1N}$	1	0	. . .	0
	x_{N+2}	a_{20}	a_{21}	$a_{22} \dots a_{2N}$	0	1	. . .	0
	. . .	. . .	. . .	. . . . . .	. . .	. . .	. . .	. . .
	. . .	. . .	. . .	. . . . . .	. . .	. . .	. . .	. . .
	. . .	. . .	. . .	. . . . . .	. . .	. . .	. . .	. . .
	x_{N+m}	a_{m0}	a_{m1}	$a_{m2} \dots a_{mN}$	0	0	.	1
	$f(\vec{x})$	$f_0(\vec{x})$	z_1	$z_2 \dots z_N$	0	0	. . .	0

Жадвалда қуйидаги белгилашлардан фойдаланилган.

$$b_j = a_{j0}, \ j = 1, \ \dots, \ m. \qquad (4.29)$$

Шуни эслатиш керакки, мумкин бўлган базис ечимда дастлабки N та $x_1, x_2, \dots, x_N$ (базис бўлмаган) ўзгарувчиларнинг қийматлари нолга тенг. x_{N+1}, x_{N+2}, $\dots$, x_{N+m} базис ўзгарувчиларнинг қийматлари эса мос равишда $b_1, b_2, \dots, b_m$ ларга тенг бўлади.

Айтайлик, энди қуйидагича тузатиш киритилган бўлсин: базис бўлмаган x_i $(i = 1,2, \dots, N)$ ўзгарувчилардан биттасининг қиймати ноль ўрнига бирга тенг деб олинди, қолган базис бўлмаган ўзгарувчиларнинг қийматлари аввалгидек нолга тенг. Нолга тенг бўлмаган базис ўзгарувчилар шундай ўзгарадики, ечим мумкин бўлганча қолади, яъни барча шартлар илгаригидек қаноатлантирилади. У ҳолда (4.27) дан

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) = z_i, \ i = 1, \ \dots, \ N \qquad (4.30)$$

эканлиги келиб чиқади. Шундай қилиб, агар юқоридаги тузатиш киритилган бўлса, z_i миқдор $f(\vec{x})$ мақсад функциясининг унинг мумкин бўлган базис ечимига мос қийматига нисбатан ўзгаришдан иборатдир.

Агар z_i мусбат бўлса, $f(\vec{x})$ нинг қиймати киритилган тузатишлар натижасида ортади. Биз максимумлаштириш масаласини қараётганимиз учун бу киритилган тузатишлар ечимни яхшилайди ва уни оптимал ечимга яқинлаштиради. Агар z_i манфий бўлса, у ҳолда $f(x)$ ўзгариш натижасида камаяди. Бунга асосланиб қуйидаги синаш жадвалини бажариш мумкин.

Барча z_i $(i = 1, \ldots, N)$ ларни текшириб кўрамиз. Агар бир ёки бир неча z_i мусбат бўлса, бу топилган ечим ҳали оптимал ечим бўла олмаслигини ва юқорида бажарилган алмаштиришлар орқали ечимни яхшилаш мумкинлигини англатади. Агар барча z_i манфий бўлса, у ҳолда оптимал ечимга эришилган бўлади, чунки кейин яхшилаш имконияти йўқ. Агар z_i нинг баъзилари нолга тенг бўлса, у ҳолда ўзаро эквивалент бўлган бир неча оптимал ечимлар мавжуд.

Агар z_i дан мусбатлари биттадан ортиқ бўлса, у ҳолда уларга мос x_i нинг қайсинисини алмаштириш масаласи туғилади. Бунда асосий факторлардан бири $|z_i|$ абсолют қийматлардан иборат. У қанча катта бўлса, мақсад функциясининг қиймати шунча тез ортади. Шунинг учун

$$\max|z_i|,\ z_i > 0 \tag{4.31}$$

ни танлашга интилиш керак.

Фараз қилайлик, алмаштириш учун танланган базис бўлмаган ўзгарувчи x_l бўлсин. Қуйидаги масала шундан иборатки, базис ўзгарувчилар орасида қайсини олиб, базис бўлмаган ўзгарувчилар орасидаги x_l нинг ўрнига қўйиш керак. Бунда ҳосил бўлган янги ечим мумкин бўлган ечим бўлишига ишонч ҳосил қилиш бош масаладир.

Алмаштиришда аввалгидек, $x_i = 0$, $i \neq l$, $i = 1, 2, \ldots, N$. У ҳолда (4.22) дан

$$x_{N+j} = b_j - a_{jl}x_l,\ j = 1, 2, \ldots, m. \tag{4.32}$$

x_l ортиб боришида $a_{jl} > 0$ ларга мос келувчи x_{N+j} лар камаяди ва x_l ўзининг мумкин бўлган максимал қийматига x_{N+j} лардан дастлабкиси 0 га айланганда эришади.

Агар барча j учун

$$a_{jl} \leqslant 0 \tag{4.33}$$

бўлса, у ҳолда x_j ни чексиз орттириш мумкин ва бу ҳолда

$$f(\vec{x}) = f_0(\vec{x}) + z_l x_l \tag{4.34}$$

ва $z_l > 0$ бўлгани учун $f(\vec{x})$ ҳам чексиз ортади. Шундай қилиб, агар (4.33) шарт бажарилса, у ҳолда чизиқли программалаштириш масаласи ечимга эга эмас (мақсад функцияси чекланмаган). Шу сабабли барча j учун

$$a_{jl} > 0 \tag{4.35}$$

деб фараз қиламиз. Юқорида айтганимиздек x_l нинг максимал қиймати $f(\vec{x})$ нинг ҳам максимал қиймати. x_{N+j} лардан дастлабки 0 га айланганида эришилади. Ўша ўзгарувчи базисдан чиқарилади. Унинг z номери (4.32) ва (4.35) ларга кўра

$$\frac{b_r}{a_{rl}} = \min\left\{\frac{b_j}{a_{jl}}, a_{jl} < 0\right\} \tag{4.36}$$

кўринишда аниқланади.

Симплекс жадвалнинг r- қатор билан l- устунининг кесишган жойида турувчи a_{rl} элемент унинг *етакчи* (ёки *ҳал қилувчи*) *элементи* деб аталади. Бунда базисдан чиқариладиган ўзгарувчига мос келувчи r- қатор *етакчи* деб аталади, янги базис ўзгарувчига мос бўлган l- устун эса *етакчи устун* деб аталади.

Сўнгра, янги базис ўзгарувчилар (4.16) тенгламалардан (4.22) тенгламаларга ўхшаса, базис бўлмаган ўзгарувчилар орқали ифодаланиши керак. Бу тенгламалардаги a'_{jl} коэффициентлар янги симплекс жадвални ифодалайди. a'_{jl} коэффициентларнинг a_{jl} лар орқали қуйидагича ҳисобланишини кўриш қийин эмас:

$$a'_{ji} = a_{ji} - a_{ri}\frac{a_{jl}}{a_{rl}}, \quad i \neq l, \tag{4.37}$$

$$b'_j = a'_{j0} = a_{j0} - a_{r0}\frac{a_{jl}}{a_{rl}}, j \neq r, \tag{4.38}$$

$$a'_{jl} = -\frac{a_{jl}}{a_{rl}}, \ j \neq r \tag{4.39}$$

$$a'_{jl}=\frac{1}{a_{jl}}, \tag{4.40}$$

$$b'_r=a'_{r0}=\frac{a_{ro}}{a_{rl}}. \tag{4.41}$$

Худди шу каби z_i миқдор ҳам ҳисобланади:

$$z'_i=z_i-z_l\frac{a_{ri}}{a_{rl}}, \qquad i\neq l, \qquad z'_l=-\frac{z_l}{a_{rl}} \tag{4.42}$$

Янги мумкин бўлган базис ечим

$$x_i=0,\ i\neq l,\ i=1,2,\ \dots,N, \tag{4.43}$$

$$x_{N+r}=0, \tag{4.44}$$

$$x_{N+j}=b_j-a_{jl}\frac{b_r}{a_{rl}}, \qquad j\neq r,\ j=1,\ \dots,\ m, \tag{4.45}$$

$$x_{N+r}=\frac{b_r}{a_{rl}}. \tag{4.46}$$

2- жадвал янги симплекс жадвалини ифодалайди. Бу жадвал асосида яна юқоридагидек алмаштиришлар бажарилади. Бундай процесс оптимал ечим топилгунча давом эттирилади.

2- жадвал

		x_1	x_2	$\dots$	x_l	$\dots$	x_N	x_{N+1}	$\dots$	x_{N+l}	$\dots$	x_{N+m}
x_{N+1}	a'_{10}	a'_{11}	a'_{12}		0		a'_{1N}	1		a'_{1l}		0
x_{N+2}	a'_{20}	a'_{21}	a'_{22}		0		a'_{2N}	0		a'_{2l}		0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_{N+r}	a'_{ro}	a'_{r1}	a'_{r2}		1		a'_{rN}	0		a'_{rl}		0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_{N+m}	a'_{m0}	a'_{m1}	a'_{m_2}		0		a'_{mN}	0		a'_{ml}		1
$z=f(x)$	$f'_0(x)$	z'_1	z'_2		0		z'_N	0		z'_l		0

Намуна сифатида тўлиқ ечилган ушбу содда мисолни келтирамиз.

Мисол. 3.2- расмда график усулда ечилган мисолни қараймиз. Энди бу мисолни юқорида баён этилган симплекс жадвал ёрдамида ечамиз. Масала қуйидагича берилган:

$$\max\{x_1+4x_2 \mid x_1 \leqslant 10,\ \ x_2 \leqslant 10,\ \ x_1+x_2 \leqslant 14,\ x_1 x_2 \geqslant 0\} \qquad (4.47)$$

Қўшимча ўзгарувчилар киритиш орқали дастлабки учта тенгсизликни

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= 14,\\ x_1 \qquad +x_4 &= 10,\\ x_2 \qquad +x_5 &= 10 \end{aligned} \qquad (4.48)$$

кўринишда ёзамиз. Қаралаётган ҳол учун

$$(\vec{i})^T = [1,4],\ (\vec{b}) = \begin{bmatrix} 14\\ 10\\ 10 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1\ 1\ 1\ 0\ 0\\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \end{pmatrix}.$$

Бошланғич базис ўзгарувчилар x_3, x_4, x_5 лардан иборат. Бошланғич жадвал эса қуйидагича бўлади (3- жадвал).

3-жадвал

Базис ўзгарувчилар→

		x_1	x_2
x_3	14	1	1
x_4	10	1	0
x_5	10	0	$\boxed{1}$
$f(\vec{x})$	$f_0(\vec{x})=0$	$z_1=1$	$z_2=4$

Базис бўлмаган ←ўзгарувчилар

←етакчи элемент

Жадвалнинг базис ўзгарувчиларга мос бўлган устунлари бирлик матрицани ташкил этгани учун уни ҳар гал қайта ишлаб чиқишнинг ҳожати йўқ.

$c_3=c_4=c_5=0$ бўлгани учун $f_0(\vec{x}) = \sum_{j=3}^{5} c_j x_j = 0.$

(4.28) дан фойдаланиб,

$$\begin{aligned} z_1 &= c_1 = 1 > 0,\\ z_2 &= c_2 = 4 > 0 \end{aligned}$$

ларни ҳисоблаймиз. Бу ерда $|z_2| = 4 > |z_1| = 1$ бўлгани сабабли базисга киритиш учун x_2 ни танлаймиз. У ҳолда

$$\frac{b_1}{a_{12}} = 14 > \frac{b}{b_{32}} = 10.$$

Шундай қилиб, етакчи қатор сифатида учинчи қатор танланди, яъни базисдан x_5 чиқариб ташланди, $a_{32} = 1$ эса етакчи элемент бўлади. Юқоридаги (4.37)—(4.42) формулаларга асосан янги 4-жадвал ҳисобланади:

4-жадвал

Базис бўлмаган ←ўзгарувчилар

Базис ўзгарувчилар→

		x_1	x_5
x_3	4	$\boxed{1}$	0
x_4	10	1	0
x_2	10	0	1
$f(\vec{x})$	40	1	—4

Энди фақат $z_1 = 1 > 0$ бўлгани учун биринчи устун етакчи устун бўлади ва x_1 базисга киритилади. Бунда

$$\frac{b'_1}{a'_{11}} = 4 < \frac{b'_2}{a'_{21}} = 10$$

бўлгани учун базисдан чиқаришга x_3 танланади.

Навбатдаги жадвал эса қуйидагича бўлади (5-жадвал).

5-жадвал

		x_3	x_5
x_1	4	1	0
x_4	6	0	0
x_2	10	0	1
$f_0(\vec{x})$	44	—1	—4

Бу жадвалда z_1, z_2 лар манфий бўлгани учун оптимал ечимга эришилади:

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 10, \quad z_{\text{opt}} = 44.$$

Бу ечим 3.9-расмда олинган ечимга тўғри келади.

2-§. Квадратик программалаштириш

Квадратик программалаштириш масаласи умумий кўринишда III бобнинг (3.19) ва (3.20) формулалари билан ифодаланган эди. Биз бу ерда уни батафсилроқ таърифлаймиз. Умумийликни чекламасдан, фақат минимумлаштириш масаласини қараш мумкин. Бу масалада мақсад функцияси

$$f(\vec{x}) = (\vec{c})^T (\vec{x}) + \vec{x})^T D(\vec{x}) \tag{4.49}$$

бўлади, бунда $\vec{x})$ — n ўлчовли ўзгарувчи вектор, $(\vec{c})$— n ўлчовли ўзгармас вектор, D $n \times n$ ўлчовли ўзгармас матрица.

Масаланинг чизиқли шартларини 1-§ нинг бошида баён этилганлар асосида қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$A(\vec{x}) = (\vec{b}), \quad x_i \geqslant 0, i = 1, 2, \ldots , n, \tag{4.50}$$

бунда $(\vec{b})$ — m ўлчовли ўзгармас вектор, A эса $m \times n$ ўлчовли ўзгармас матрица. (4.50) тенгламани қуйидаги кўринишда ҳам ёзиш мумкин:

$$g(\vec{x}) = A(\vec{x}) - (\vec{b}) = 0. \tag{4.51}$$

Квадратик программалаштириш масаласини қисқача қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\min \{(\vec{c})^T (\vec{x}) + (\vec{x})^T D (\vec{x}) \mid g (\vec{x}) = 0; x_i \geqslant 0, i = 1,2,\ldots,n\}. \tag{4.52}$$

Бу масалани ечиш учун Кун-Таккер теоремасини татбиқ этиш керак. Кун-Таккер теоремасининг асосий талабларидан бири барча шартларни қаноатлантирувчи мақсад функциясининг қавариқ бўлишидан иборатдир. $(\vec{c})^T$ $(\vec{x})$ ва $g(\vec{x})$ ларнинг чизиқли эканлиги ва, демак, қавариқ эканлиги (4.51) ва (4.52) тенгликлардан кўриниб турибди. Шу сабабли $(\vec{x})^T D (\vec{x})$ квадратик форманинг қавариқ бўлиши учун D матрицанинг қайси шартларни қаноатлантиришини текшириш керак. Бу саволга жавобни қуйидаги 2-теорема беради.

2-теорема. *Мусбат ярим аниқланган* $(\vec{x})^T D (\vec{x})$ *квадратик форма қавариқ функция бўлади.*

Шундай қилиб, агар ихтиёрий $(\vec{x})$ учун

$$(\vec{x})^T D (\vec{x}) \geqslant 0 \tag{4.53}$$

бўлса, у ҳолда ихтиёрий иккита $(\vec{x}_1)$ ва $(\vec{x}_2)$ нуқталар учун

$$[\lambda (\vec{x}_2) + (1 - \lambda) \ (\vec{x}_1)]^T D [\lambda (\vec{x}_2) + (1 - \lambda) \ (\vec{x}_1)] \leqslant$$

$$\leqslant \lambda (\vec{x}_2)^T D (\vec{x}_2) + (1 - \lambda) \ (\vec{x}_1)^T D (\vec{x}_1) \tag{4.54}$$

муносабат бажарилишини кўрсатиш керак, бунда $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Исбот. (4.54) тенгсизликнинг чап томонини

$$[(\vec{x}_1)+\lambda(\vec{x}_2-\vec{x}_1)]^T D[(\vec{x}_1)+\lambda(\vec{x}_2-\vec{x}_1)] = (\vec{x}_1)^T D(\vec{x}_1) +$$
$$+ 2\lambda(\vec{x}_2-\vec{x}_1)^T D(\vec{x}_2) + \lambda^2 (\vec{x}_2-\vec{x}_1)^T D(\vec{x}_2-\vec{x}_1) \quad (4.55)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Мусбат ярим аниқланганлик тахминига асосан (4.55) тенгликнинг ҳар бир қисми манфий эмас ва $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ $(\lambda \geqslant \lambda^2)$ бўлгани учун

$$\lambda(\vec{x}_2-\vec{x}_1)^T D(\vec{x}_2-\vec{x}_1) \geqslant \lambda^2(\vec{x}_2-\vec{x}_1)^T D(\vec{x}_2-\vec{x}_1) \quad (4.56)$$

бўлади.

Агар (4.56) ни (4.55) орқали ифодаласак, уни

$$[\vec{x}_1+\lambda(\vec{x}_2-\vec{x}_1)]^T D[\vec{x}_1+\lambda(\vec{x}_2-\vec{x}_1)] \leqslant (\vec{x}_1)^T D x_1 +$$
$$+ 2\lambda(\vec{x}_2-\vec{x}_1)^T D(\vec{x}_1) + \lambda(\vec{x}_2-\vec{x}_1)^T D(\vec{x}_2-\vec{x}_1) =$$
$$(\vec{x}_1)^T D(\vec{x}_1) + \lambda(\vec{x}_2-\vec{x}_1)^T D(\vec{x}_1) + \lambda(\vec{x}_2-\vec{x}_1)^T D(\vec{x}_2) =$$
$$= \lambda(\vec{x}_2)^{\mathrm{T}} \cdot D(x_2) + (1-\lambda)(\vec{x}_1)^T D(\vec{x}_1) \quad (4.57)$$

шаклда ёзиш мумкин.

(4.57) формула (4.54) билан бир хил. Шуни исбот қилиш талаб қилинган эди.

Энди биз квадратик программалаштириш масаласини ечишнинг қисқача ҳисоблаш алгоритмини қараймиз. (4.23) га ўхшаш (4.52) да таърифланган квадратик программалаштириш масаласининг Лагранж функциясини ёзамиз:

$$L(\vec{x},\vec{u}) = (\vec{c})^T(\vec{x}) + (\vec{x})^T D(\vec{x}) + (\vec{u})^T g(\vec{x}) \quad (4.58)$$

ёки скаляр формада (4.20) га асосан

$$L(\vec{x},\vec{u}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i d_{ij} x_j + \sum_{i=1}^{m} u_j g_j(\vec{x}). \quad (4.59)$$

$g_j(\vec{x})$ даги барча шартлар тенгликлардан иборат бўлгани учун берилган минимумлаштириш масаласига Лагранж кўпайтувчиси методига ўхшаш методни қўллаш мумкин, бу ерда u_j асосий роль ўйнайди. Ҳақиқатан ҳам, Кун — Таккернинг (4.32) шарти

$$\left.\frac{\partial L}{\partial u_j}\right|_{(\vec{x})^\circ\,(\vec{u})^\circ} = 0, \; j = 1,2, \; \ldots \; ,m \quad (4.60)$$

кўринишни олади.

Лекин, (4.31) шартнинг сақланиши ўз-ўзидан маълум, чунки бу ерда $x_l \geqslant 0$ шарт мавжуд.

(4.31) даги биринчи тенгсизликни (4.58) га татбиқ этиб ва (4.52) ни эътиборга олиб

$$\frac{\partial L}{\partial (\vec{x})} = (\vec{c}) + 2D(\vec{x}) + A^T(\vec{u}) \geqslant 0 \qquad (4.61)$$

ни ҳосил қиламиз.

(4.58) ва (4.60) ни татбиқ этиб, берилган чеклаш шартларини (4.50) кўринишида ҳосил қиламиз.

Энди

$$v_l = \frac{\partial L}{\partial (\vec{x})} \qquad (4.62)$$

ёки

$$v_i = \frac{\partial L}{\partial x_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (4.63)$$

янги қўшимча ўзгарувчиларни киритамиз.

(4.50), (4.61), (4.63) ва (4.31) лардан фойдаланиб, (4.52) квадратик программалаштириш масаласини унга тенг кучли бўлган қуйидаги масала кўринишида ёзиш мумкин. Ушбу

$$A(\vec{x}) = (\vec{b}), \qquad (4.64)$$

$$2D(\vec{x}) - (\vec{v}) + A^T(\vec{u}) = -(\vec{c}), \qquad (4.65)$$

$$(\vec{x})^T(\vec{v}) = 0,$$

$$x_i \geqslant 0, \ v_l \geqslant 0, \ i = 1, 2, \ldots, n \qquad (4.66)$$

шартларни қаноатлантирувчи $(\vec{x})^0$ вектор топилсин.

Кун — Таккер теоремасидан ва олдинги қаралганлардан (4.64) — (4.66) тенгламаларнинг ечими бўла оладиган $\vec{x}$ вектор (4.52) квадратик программалаштириш масаласининг ҳам оптимал ечими бўлиши келиб чиқади.

Шуни айтиш керакки, (4.64) ва (4.65) лар $(\vec{x})$, $(\vec{v})$, $(\vec{u})$ ўзгарувчиларга нисбатан чизиқлидир ва шу сабабли уларни қуйидагича матрица шаклида ёзиш мумкин:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 2D & -I_n A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{v} \\ \vec{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{b} \\ \vec{c} \end{pmatrix}, \tag{4.67}$$

бунда A $m \times n$ ўлчовли матрица, $2D$ $n \times n$ ўлчовли матрица, I_n $n \times n$ ўлчовли манфий ишорали бирлик матрица. Шунинг учун (4.67) тенгликнинг чап томонидаги биринчи кўпайтувчи матрицанинг ўлчови $(m+n) \times (m+2n)$ бўлади. Шундай қилиб, $m+2n$ номаълумли $m+n$ та тенгламага эга бўламиз. Лекин $x_i v_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

барча $x_i \geqslant 0$ $(v_i \geqslant 0)$ бўлгани учун $2n$ та $(\vec{x})$, $(\vec{v})$ ўзгарувчилардан фақат n тасигина нолдан фарқли бўлади. Бу эса (4.67) даги $n+m$ та тенглама фақат $n+m$ та ноль бўлмайдиган ўзгарувчиларга эга бўлишини англатади. Демак, (4.67) тенгламаларнинг топилиши керак бўлган ягона ечими базис ечим бўлади. (4.67) тенгламаларнинг базис ечимларини идентификациялаштириш учун чизиқли программалаштиришнинг симплекс усулини бевосита татбиқ қилиш мумкин. Бу эса Вулф алгоритмининг асосий ғоясини ташкил этади.

Бу алгоритмдан бошқа Френе ва Вулф алгоритми ҳам яна ўша (4.67) ва (4.65) тенгламалардан бошланади. Бу алгоритмнинг Вулф алгоритмидан фарқи шундаки, бу ерда дастлаб (4.66) шарт эътиборга олинмайди. (4.67) тенгламаларнинг мумкин бўлган ечимини (4.66) шартларга тенг кучли бўлган ушбу

$$x_i v_i = 0, \quad i = 1,2, \ldots, n, \tag{4.68}$$

шартларни эътиборга олмасдан ҳосил қилишга ҳаракат қилинади. Агар ҳеч бўлмаганда битта бўлса ҳам битта мумкин бўлган ечим олинмаса, у ҳолда процесс тўхтатилади. Лекин шундай бўлса ҳам (4.67) тенгламалар (4.68) тенгламани қаноатлантириши шарт эмас, агар мумкин бўлган ечимга эга бўлса, у ҳолда дастлабки берилган (4.52) квадратик программалаштириш масаласи чекли оптимал ечимига эга бўлади. (4.67) тенгламанинг мумкин бўлган ечимини ҳосил қилингандан сўнг симплекс усул алгоритмдан фойдаланиб (4.68) шартлар бажарилгунча, яъни оптимал мумкин бўлган базис ечимдан бошқасига ўтишни давом эттираверади.

3- §. Чизиқли бўлмаган программалаштириш

Қамида битта чизиқли бўлмаган шартга эга бўлган математик программалаштириш масаласи чизиқли бўлмаган программалаштириш масаласи бўлади. Иккинчи томондан, барча шартлари чизиқли бўлиб, аммо мақсад функцияси чизиқли бўлмаса, бу ҳолда ҳам чизиқли бўлмаган программалаштириш масаласига эга бўламиз.

Квадратик программалаштириш масаласи чизиқли бўлмаган программалаштириш масаласининг хусусий ҳоли бўлиши табиийдир. Лекин, олдинги параграфда кўрганимиздек, квадратик программалаштириш масаласига Кун — Таккер теоремасини татбиқ этиш уни чизиқли программалаштириш масаласига келтиришга, натижада симплекс усулни татбиқ этишга имкон беради. Шу сабабли одатда квадратик программалаштириш масаласини алоҳида синфга ажратилади.

Чизиқли бўлмаган программалаштириш масаласини сонли усул билан ечишда анчагина катта қийинчиликларга дуч келинади.

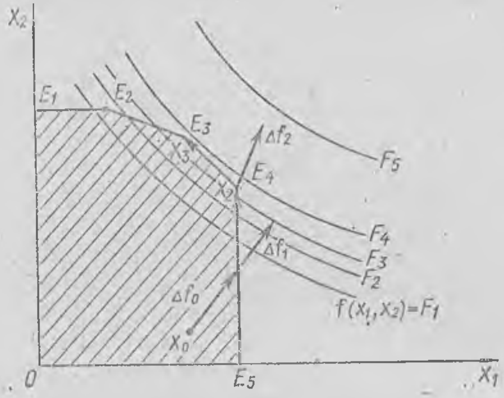
Чизиқли ёки квадратик программалаштириш масалаларидан чизиқли бўлмаган программалаштириш масалаларининг фарқи шундаки, чизиқли бўлмаган программалаштиришнинг ҳар қандай масаласини ечиш учун ҳисоблаш алгоритми мавжуд эмас, фақат бир неча ҳар хил алгоритмларгина ишлаб чиқилган.

Дастлаб, чизиқли чеклаш шартлари ва чизиқли бўлмаган мақсад функцияси берилган ҳолни қараймиз.

Ушбу масала берилган:

$$max\{f(\vec{x})\,|\,A\ (\vec{x}) \leqslant (\vec{b});\ x_i \geqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, n\}, \quad (6.9)$$

бунда $(\vec{x})n$ ўлчовли ўзгарувчи вектор,
$A\ m \times n$ ўлчовли ўзгармас матрица,
$(\vec{b})$ m ўлчовли ўзгармас вектор,
$f(\vec{x})$ чизиқли бўлмаган ботиқ мақсад функцияси. Намуна учун 3.9- расмда икки ўлчовли масала ($n = 2$) келтирилган. Расмда штрихланган соҳа мумкин бўлган соҳани ифодалайди, яъни барча шартларни қаноатлантирувчи $(\vec{x}) = (x_1, x_2)$ нуқталар тўпламини аниқлайди.



3. 9-расм.

F_0 дан F_5 гача эгри чизиқларнинг ҳар бири $f(x_1, x_2)$ мақсад функцияси ўзгармас қиймат қабул қиладиган нуқталарнинг геометрик ўринларидан иборатдир. Эгри чизиқларнинг номерлари мақсад функцияси қийматларининг ортиб боришига тўғри келади, яъни $F_0 < F_1 < < F_2 < F_3 < F_4 < F_5$; 0, E_1, E_2, . . . , E_5 нуқталар мумкин бўлган соҳанинг четки нуқталари бўлади. 3. 9- расмдан кўринадики, мақсад функцияси

$$f_{max}\ (\vec{x}) = F_4$$

максимал қийматга эришадиган ва барча чекли шартларини қаноатлантирадиган E_3 четки нуқта масаланинг оптимал ечимини ифодалайди. $f(\vec{x})$ мақсад функциясининг чизиқли бўлмаганлигини эътиборга олиб, ҳисоблаш алгоритми ёрдамида E_3 оптимал нуқтага қандай эришиш мумкин?

Одатда ҳисоблашни мумкин бўлган соҳанинг $(\vec{x}_0)$ нуқтасидан бошланади. Бу ерда максимумлаштириш масаласини қаралаётган йўналишда бажариш зарур, айниқса $f(\vec{x})$ функциянинг имкони борича тез ўсадиган йўналишда ҳисоблашни бажариш мақсадга мувофиқдир. Маълумки, $f(\vec{x})$ функциянинг градиенти

$$\nabla f(\vec{x}) = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ \ldots \ , \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| \qquad (4.70)$$

йўналиши берилган функция қийматининг энг тез йўналиши билан бир хил бўлган вектордан иборатдир. Шунинг учун ҳаракат траекторияси $(\vec{x}_0)$ бошланғич нуқтадан градиент йўналишида чиқиши керак. Лекин $f(\vec{x})$ чизиқли бўлмаганлиги сабабли траектория бўйлаб градиент йўналиши ўзгаради.

Шунинг учун ҳаракат йўналишини вақти-вақти билан текшириб бориш зарур. Градиентлар методининг муҳим масалаларидан бири ҳар бир қаралаётган нуқтага эришиш учун зарур бўлган қадамларнинг оптимал сонини аниқлашдан иборат.

Градиентлар усулини татбиқ этишда керак бўладиган қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$(\vec{x}_i)$ — мумкин бўлган соҳанинг i- қадамдан сўнг эришиладиган нуқтаси;

$\nabla f(\vec{x})_i$ — функциянинг градиенти, бунда

$$[\Delta f_i] = [\nabla f(\vec{x}_i)] = [\nabla f(\vec{x})]_{(\vec{x}) = (\vec{x}_i)};$$

$(\vec{r}_i)$ — $(\vec{x}_i)$ нуқтадан чиқувчи қадам йўналишидаги бирлик вектор, шунинг учун

$$(\vec{r}_i)^T (\vec{r})_i = 1; \qquad (4.71)$$

d_i — $(\vec{x}_i)$ нуқтадан $(\vec{r}_i)$ йўналишидаги қадам узунлигига тенг бўлган скаляр миқдор.

Юқорида киритилган белгилашлардан фойдаланиб, қуйидагини ёзиш мумкин:

$$(\vec{x}_{i+1}) = (\vec{x}_i) + d_i (\vec{r}_i). \qquad (4.72)$$

$(\vec{r}_i)$ янги векторнинг йўналиши ∇f_i градиент орқали қуйидагича ифодаланади:

$$(\vec{r}_i) = H_i \Delta f_i, \qquad (4.73)$$

бунда H_i $n\times n$ ўлчовли матрица бўлиб, *йўналтирувчи матрица* ёки *матрица* деб аталади.

Ҳар хил градиентлар методларининг бири бошқалардан H_i матрица билан фарқ қилади. Масалан, агар

$$H_i=\frac{I_n}{|\nabla f_i|} \tag{4.74}$$

бўлса, келгуси $(i+1)$ қадам йўналиши $(\vec{x}_i)$ нуқтадаги ∇f_i градиент йўналиши билан коллинеар бўлади, бу ерда d_i n — ўлчовли бирлик матрицадир. Бу ҳолда d_i қадамнинг катталиги мақсад функциясининг келгуси нуқтадаги $f(\vec{x}_{i+1})$ қиймати максимал бўладиган қилиб танланиши керак. Бу усулни одатда *энг тез кўтариш усули* деб аталади. (4.72) — (4.74) формулалардан фойдаланиб,

$$(x\vec{f}_{i+1})=f(\vec{x}_i+d_i\nabla f_i) \tag{4.75}$$

ни ҳосил қиламиз.

(4.75) функция максимумининг зарурий шарти қуйидагича:

$$\frac{df(\vec{x}_{i+1})}{d(d_i)}=\nabla^T f_i\nabla f_{i+1}=0. \tag{4.76}$$

Охирги (4.76) тенгликдан кўринадики, энг тез кўтариш усулида иккита қўшни нуқталардаги градиентлар ўзаро ортогонал бўлиши керак. Бу эса оптимал ечимга ҳар бир нуқтада тўғри бурчакли бурилишларга эга бўлган зинапоясимон йўл билан эришиш мумкинлигини кўрсатади.

Энг тез кўтариш усули муайян (шубҳасиз) экстремумли масалаларни ечишда қўлланилади. Қуйида биз унинг маълум чеклаш шартлари билан берилган масалаларга қўллаш учун яроқли мумкин бўлган йўналишлар усулини қараймиз. Бу мумкин бўлган йўналишлар усули Зойтендейк томонидан ишлаб чиқилган.

Биз (4.69) кўринишда ифодаланган масалани кўрамиз.

Чеклаш шартларининг $m\times n$ ўлчовли A матрицасини вектор қаторларга ажратамиз:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix}. \tag{4.77}$$

У ҳолда чеклаш шартларини қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$(\vec{a}_j)^T (\vec{x}) \leqslant b_j, \ j = 1, \ldots, m. \tag{4.78}$$

$(\vec{x}_i)$ нуқтадан келгуси $(\vec{x}_{i+1})$ нуқтага ўтиш масаласини қараймиз, бунда $(\vec{x}_i)$ ва $(\vec{x}_{i+1})$ лар ўзаро қуйидагича боғлангандир:

$$(\vec{x}_{i+1}) = (\vec{x}_i) + d_i (\vec{r}_i). \tag{4.79}$$

Етарлича кичик d_i лар учун $(\vec{x}_{i+1})$ га эришиш мумкин, яъни

$$(\vec{a}_j)^T (\vec{x}_{i+1}) \leqslant b_j. \tag{4.80}$$

$(\vec{x}_i)$ нуқтага эришишнинг мумкин бўлиш эҳтимолига асосан (4.80) ифода ушбу

$$(\vec{a}_j)^T \cdot (\vec{r}_i) \leqslant 0, \ j \in J \tag{4.81}$$

тенгсизликка тенг кучли эканлиги келиб чиқади, бунда J

$$(\vec{a}_j)^T (\vec{r}_i) = b_j. \tag{4.82}$$

тенглик бажариладиган барча j индекслар тўпламидир.

Юқоридаги (4.81) ва (4.82) шартларни қаноатлантирувчи $\vec{r}_i$ векторнинг йўналиши *мумкин бўлган йўналиш дейилади*. Бунда $(\vec{x}_i)$ дан $(\vec{x}_{i+1})$ га ўтиш $f(\vec{x})$ мақсад функцияси қийматининг ўсиш йўналишида бўлиши керак. Бошқача айтганда, қуйидаги

$$(\vec{r}_i)^T \ \nabla f_i > 0 \tag{4.83}$$

тенгсизлик қаноатлантирилиши керак.

Зойтендейк $(\vec{x}_i)$ нуқтадан итерация қилишнинг мумкин бўлган йўналишларини излашнинг бир неча усулларини таклиф этган. Улар билан унинг китобидан батафсил танишиш мумкин.

V боб

ОММАВИЙ ХИЗМАТ НАЗАРИЯСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

1- §. Оммавий хизмат назариясининг моҳияти

Оммавий хизмат назариясида талабларга хизмат кўрсатадиган ташкилотлар *оммавий хизмат системалари* деб аталади. Ҳар бир оммавий хизмат системаси бирор миқдордаги хизмат кўрсатувчи бирликлардан иборат. Хизмат кўрсатувчи бирликлар турли механик қурилмалар, приборлар, аппаратлар, алоқа линиялари ва, шунингдек, турли операцияларни бажарадиган кишилар бўлиши мумкин. Ҳар қандай хизмат кўрсатувчи система чекли сондаги хизмат кўрсатувчи бирликларга эга бўлади. Шу сабабли ҳам улар келган ҳамма талабларни (заявкаларни) дарҳол бажара олмайди.

Юқорида санаб ўтилган хизмат кўрсатиш системаларининг ҳар бирининг муваффақиятли ишлаётганлигини баҳолаш учун асосан икки кўрсаткич хизмат қилади. Бу, биринчидан, ишнинг сифати, яъни қанчалик яхши хизмат кўрсатилаётганлиги, иккинчидан, хизмат кўрсатишнинг ташкил этилишидир.

Системанинг хизмат кўрсатиш сифати ва унинг ўтказа олиш қуввати (қобилияти) барча ҳолларда ҳам хизмат кўрсатиш бирликлари сонига ва уларнинг унумдорлигига боғлиқлиги равшандир.

Бироқ хизмат кўрсатувчи ходимлар сонини ёки хизмат кўрсатувчи аппаратлар сонини ҳаддан ташқари кўпайтириб юбориш куч ва маблағларнинг беҳуда (ўринсиз) сарфланиши билан боғлиқдир.

Шу билан бирга, айтиш керакки, келадиган талабларнинг сони тасодифий миқдор бўлиб, мавжуд аппаратлар сони эса доимийдир (ўзгармасдир). Талаблар оқимининг ўзгариб туриши анча катта бўлиши мумкин. Талабларни бажариш вақти ҳам ўзгармас катталик бўлмасдан, балки аппаратларнинг унумдорлигига ҳам, талабнинг характерига ҳам боғлиқдир, яъни у тасодифий миқдордир. Хизмат кўрсатувчи аппаратлар сони эса ўзгармасдир.

Оммавий хизмат назариясининг асосий масаласи хизмат кўрсатувчи бирликлар сони, айрим хизмат кўрсатувчи бирликнинг унумдорлиги, келаётган талабларнинг характери ва хизмат кўрсатиш сифати (муваффақиятли-лиги) орасидаги ўзаро боғлиқликни очиб беришдан иборат.

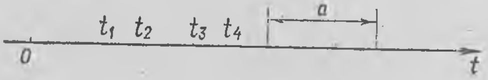
Бундан буён биз барча аппаратлари тенг кучли (бир хил қийматли, кучли) бўлган системанигина қараймиз. Ҳар бир янги келган талаб бўш аппаратларнинг исталган бири томонидан бажарилиши мумкин. Бундай хизмат кўрсатиш системалари *тартибсиз системалар* деб аталади.

2- §. Келадиган талаблар оқими

Келадиган талаблар оқими дейилганда хизмат кўрсатиш системасига вақтнинг бирор моментларида биринкетин келадиган талаблар кетма-кетлигини тушунилади.

График нуқтаи назардан, талаблар оқимини Ot сон ўқида тасвирлаш мумкин бўлиб, унда талабларнинг хизмат кўрсатиш системасига келиш моментлари нуқталар билан белгиланади (3.10-расм).

Ҳар қандай бир жинсли талаблар оқими тайин хоссаларга эга бўлади.



3.10-расм.

Агар вақтнинг тайин $(t, t+a)$ оралиғида системага k та талаб келиш эҳтимоли узунлиги a Ot ўқнинг исталган қисмида ётган барча оралиқлар учун бир хил бўлса, бундай талаблар оқими *стационар* дейилади. Бу эҳтимол фақат талаблар сонига ва вақт оралиғининг узунлигига боғлиқ бўлади. Бундан буён биз бу эҳтимолни $v_k(t)$ орқали белгилаймиз. Стационар оқимда вақт бирлиги ичида келадиган талабларнинг ўртача сони ўзгармас катталик бўлиши лозим.

Стационар процессда берилган вақт оралиғи ичида у ёки бу сондаги талаблар келиш эҳтимоли талаблар сонининг математик кутилиши ва тақсимот қонунидан келиб чиқадиган бошқа эҳтимоллик характеристикалари ўзгармас бўлади. Бу нарса вақт бирлиги ичида амалда ҳар доим бир хил сонда талаблар келишини англатмайди. Оқим амалда вақтнинг тайин участкасидагина стационар бўлади.

Агар процесснинг бирор вақт оралиғида ўтиши (кечиши) процесснинг исталган бошқа вақт оралиғида ўтишига боғлиқ бўлмаса ва бу оралиқлар бир-бирини қопламаса, у ҳолда бу оқимни *сўнг таъсирсиз оқим* дейилади.

Агар вақтнинг бир хил моментида икки ва ундан ортиқ талабларнинг биргаликда келиш эҳтимоли эътиборга олмаса ҳам бўладиган даражада кичик бўлса, яъни вақтнинг ҳар бир моментида фақат битта талаб келиши мумкин бўлса:

$$t \to 0 \text{ да } \frac{\psi(t)}{t} \to 0$$

бўлади, у ҳолда ҳодисалар оқими *кейин келмайдиган ординар оқим* дейилади.

Юқорида санаб ўтилган учала хоссага эга бўлган оқим *энг содда оқим* дейилади. Шундай қилиб, бир жинсли ҳодисаларнинг энг содда оқими деб, ҳар қандай стационар, ординар, сўнг таъсирсиз оқимга айтилади. Энг содда оқимлар практикада кўплаб учрайди. Шу сабабли уларга оммавий хизмат назариясида катта эътибор берилади, чунки амалий масалаларни ҳал этишда энг содда оқимлардан фарқ қиладиган оқимларни энг содда оқимлар билан алмаштириш (тасвирлаш) мумкин бўлади.

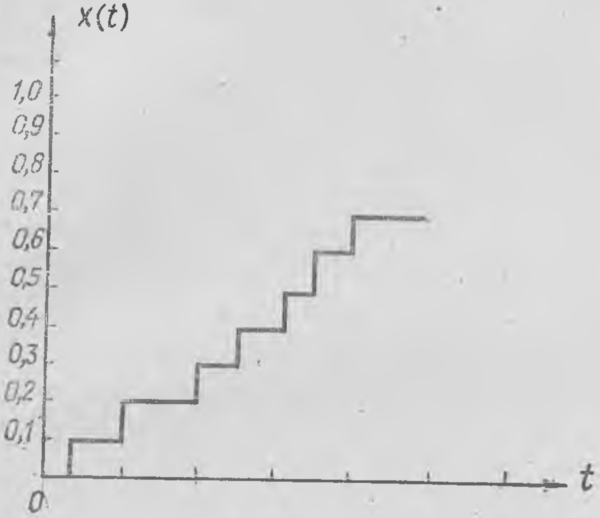
Энг содда оқимнинг асосий характеристикаси вақтнинг бирор оралиғи ичида талабларнинг тақсимот қонунидир. Бунда вақт оралиғи тасодифий миқдор деб қаралади.

3- §. Стационар оқим

Оқимнинг миқдорий характеристикасини топиш мақсадида бирор $X(t)$ функцияни киритамиз: у Ot вақт оралиғида хизмат кўрсатиш системасига келган талабларни аниқласин. Бу функция t нинг ҳар бир ўрнатилган (тайин) қийматида тасодифий миқдор бўлади.

Системага келадиган талаблар сони фақат бутун, мусбат, камаймайдиган сон бўлиши мумкин. Демак, $X(t)$ функция фақат бутун мусбат қийматларни қабул қилиши мумкин ва у вақт ўтиши билан камаймайди. $X(t)$ функция графикда ҳар доим поғонавий чизиқ кўринишида тасвирланади (3.11-расм).

Агар Ot оралиқда (t_0, t_1), (t_1, t_2), . . . , (t_{n-1}, t_n) вақт ичида мос равишда k_1, k_2, . . . , k_n сондаги талаблар



3. 11-расм.

келиш эҳтимоллари маълум бўлса, у ҳолда талаблар оқими

$$F(t_1, t_2, \ldots, t_n, k_1, k_2, \ldots, k_n) =$$
$$= P\{X(t_1) = k_1, X(t_2) = k_2, \ldots, X(t_n) = k_n\}$$

функция билан тўла аниқланган бўлади. Бу функция вақтнинг $0t$ оралиғида роса k та талаб келиш эҳтимолини аниқлайди, бу ерда $t \to 0$ да $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Бироқ $F(t)$ функцияни топиш анча мушкул. Оқим стационарлик хоссасига эга бўлганда эса масала анча соддалашади. Бу ҳолда $X(t_1), X(t_2), \ldots$ тасодифий миқдорларнинг тақсимот қонуни қаралаётган оралиқ қаерда жойлашганидан қатъи назар, оралиқнинг фақат узунлиги (t_1, t_2) га боғлиқ бўлади (3.11- расмга қаранг), яъни

$$P\{X(t) = k\} = P\{X(t+a) - X(a) = k\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Стационар оқимларда хизмат кўрсатиш системаларига келадиган талаблар ўртача сонининг эҳтимоли ўзгармасдир. Демак, Ot оралиқда системага роса k та талаб келиш эҳтимоли системага ўша k та талабнинг

$(a, t+a)$ оралиқда келиш эҳтимолига тенг, бу ерда a — вақтнинг исталган оралиғи.

Шундай қилиб, стационар оқим t нинг турли моментларида (унинг бутун давомида) бир хил тақсимотга эга.

Сўнгтаъсирсиз оқимларда вақтнинг $(a, a+t)$ оралиғида роса k та талаб келиш эҳтимоли $v_k(t)$ системага a моментдан аввал қолган талаблар сонига боғлиқ эмас. Бу ерда $(a, a+t)$ оралиқ ичида k та талаб келишининг шартли эҳтимоли бу ҳодисанинг шартсиз эҳтимолига тенг бўлади.

Сўнгтаъсирсиз стационар оқим

$$v_k(t), \; k = 0, \, 1, \, 2, \, \ldots, \, n$$

функциялар системаси орқали тўла аниқланади. Бунинг учун

$$v_k(t) = P\{X(t) = k\}, \; k = 0, \, 1, \, 2, \, \ldots, \, n$$

ни кўрсатиш кифоя.

Айтайлик, вақтнинг (t_1, t_2), (t_2, t_3), $\ldots$, (t_{n-1}, t_n) оралиқларида системага мос равишда k_1, k_2, $\ldots$, k_n та талаб келсин. Демак, $t_2 - t_1$ вақт ичида $k_2 - k_1$ та талаб, $t_3 - t_2$ вақт ичида $k_3 - k_2$ та талаб келган ва ҳоказо. Шунинг учун $X(t_i) = k_i$ нинг эҳтимоли

$$X(t_i) - X(t_{i-1}) = k_i - k_{i-1}, \; i = 1, \, 2, \, \ldots, \, n$$

нинг эҳтимолига тенг бўлади, яъни

$$P\{X(t_1) = k_1, X(t_2) = k_2, \, \ldots, X(t_n) = k_n\} =$$
$$= P\{X(t_1) - X(t_0)\} = k_1 - k_0, X(t_2) - X(t_1) =$$
$$= k_2 - k_1, \, \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1}) = k_n - k_{n-1}\}.$$

Вақтнинг $t_i - t_{i-1}$ оралиқлари ўзаро кесишмаганлиги учун системага $k_2 - k_1$, $k_3 - k_2$ та ва ҳоказо талаблар келишидан иборат ҳодисалар боғлиқ эмас. Бу ердан, эҳтимолларни кўпайтириш теоремасини қўлланиб, сўнгтаъсирсиз оқим учун қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P\{X(t_i) = k_i, \; 1 \leqslant i \leqslant n\} = \prod_{i=1}^{n} P\{X(t_{i-1}) = k_i - k_{i-1}\}.$$

Стационар оқимда

$$P\{X(t_i) - X(t_{i-1}) = k_i - k_{i-1}\} =$$
$$= v_{k_i - k_{i-1}}(t_i - t_{i-1}), \; 1 \leqslant i \leqslant k$$

бўлгани учун

$$P\{X(t_i) = k_i;\ 1 \leqslant i \leqslant n\} = \prod_{i=1}^{n} v_{k_i - k_{i-1}}(t_i - t_{i-1}),$$

ёки $k_i - k_{i-1}$ ни s_i орқали белгилаб,

$$\prod_{i=1}^{n} v_{s_i}(t_i - t_{i-1})$$

га эга бўламиз, бу ерда $P\{X(t_i) - X(t_{i-1}) = k_i - k_{i-1}\}$ ифода $t_i - t_{i-1}$ вақт ичида роса $k_i - k_{i-1}$ та талаб келиш эҳтимолини англатади, ана шуни исботлаш талаб этилган эди.

4- §. Энг содда оқим

Энг содда оқимни тасвирлаш учун $v_k(t)$ нинг ифодасини топиш керак. $v_k(t)$ хизмат кўрсатиш системасига $(a, a+t)$ оралиқ ичида k та талаб келиш эҳтимоли, бу ерда k исталган бутун мусбат қийматлар қабул қилиши мумкин: $k = 0, 1, 2, \ldots n$, яъни t вақт (у тасодифий миқдор сифатида қаралади) ичида келадиган талаблар сонининг тақсимот қонунини топиш лозим.

$v_k(t)$ функцияни аниқлашнинг бир неча усуллари мавжуд. Айтайлик, система вақтнинг бирор $t = 0$ моментидан бошлаб ишлай бошласин. Система $0t$ вақт орасида k_1 та талаб, $(t, t+\tau)$ оралиқда эса k_2 та талаб келган бўлсин, бу ерда $k_1 + k_2 = k$.

Вақтнинг $(0, t+\tau)$ оралиғида системага k та талаб келиш эҳтимолини аниқлаймиз. Бу ҳодиса $k+1$ та турли биргаликда бўлмаган

1- жадвал

Вақт оралиғи	Вақт оралиғида тушган талаблар сони										
$(0, t)$	k_1	k	$k-1$	$k-2$	$k-3$	. . .	3	2	1	0
$(t, t+\tau)$	k_2	0	1	2	3	. . .	$k-3$	$k-2$	$k-1$	k

$k+1$

усулларнинг бири орқали амалга ошиши мумкин (1- жадвалга қаранг.)

Демак, агар системага $0\,t$ вақт ичида k та талаб келган бўлса, у ҳолда $(t, t+\tau)$ вақт ичида битта ҳам талаб келмайди: $k_2 = k - k_1$. Агар $0\,t$ оралиқда $k-1$ та талаб келган бўлса, у ҳолда $(t, t-\tau)$ вақт ичида $k_2 = k - k_1 = 2$ та, яъни 2 та талаб келади ва ҳоказо.

$$k_1 = k,\ k_2 = 0,\ k = k - 1,\ k_2 = 1,\ k_1 = k - 2, k_2 = 2.$$

Демак, системага $(0, t + \Delta\tau)$ оралиқ ичида k та талаб келишининг барча мумкин бўлган ҳоллари системанинг $k+1$ та ҳолати билан белгиланади.

Сўнгтаъсирсиз процессларда вақтнинг ҳар қандай берилган моменти учун санаб ўтилган эҳтимолий характеристикалар илгари келган талаб сонига боғлиқ эмас. Сўнгтаъсирнинг йўқлиги хоссаси юқорида кўрсатилган $k+1$ та ҳодисанинг эҳтимолларини ҳисоблашда эҳтимолларни кўпайтириш теоремасидан фойдаланишга имкон беради.

Масалан, мазкур хизмат кўрсатиш системасига вақтнинг $0\,t$ оралиғида аниқ k та талаб келиш, $(t, t+\tau)$ оралиқда эса битта ҳам талаб келмаслик эҳтимоли $v_k(t)\ v_0(\tau)$ га тенг. Системага $0\,t$ оралиқда аниқ $k-1$ та талаб келиш $(t, t+\tau)$ оралиққа эса битта талаб келиш эҳтимоли $v_{k-1}\ (t)\ v\ (\tau)$ га тенг ва ҳ.к. Вақтнинг $0\,t$ ва $(t, t+\tau)$ оралиқларида системанинг барча мумкин бўлган $k+1$ та ҳолати жуфт-жуфти билан биргаликда эмас, ҳодисаларнинг ҳар қандай жуфти бир вақтда рўй бера олмайди.

k та ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли $v_k(t, t+\tau)$ ни аниқлаш учун эҳтимолларни қўшиш теоремасини қўллаймиз. Бу эҳтимол қуйидагига тенг:

$$\begin{aligned} v_k(t+\tau) &= \sum_{i=0}^{k} v_i(t)\cdot v_{k-1}(\tau)\,[v_k(t+\tau)] = \\ &= v_k(t)\cdot v_0(\tau) + v_{k-1}(t)\cdot v_1(\tau) + \ldots, + \\ &\quad v_{k-2}(t)\cdot v_2(\tau) + \ldots, + v_0(t)\cdot v_k(\tau). \end{aligned} \tag{5.1}$$

(5.1) тенгламада сўнгги икки ҳаддан бошқа барча ҳадлар τ га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдорлардир; демак, бу ҳадларнинг йиғиндиси ҳам ўша тартибли чексиз кичик миқдор бўлади, шунинг учун талаблар келишининг барча эҳтимоллари бирдан ортиқ бўла олмайди, яъни

$$0 \leqslant v_i(t) \leqslant 1,$$

$$\sum_{i=0}^{k-2} v_i(t)\cdot v_{k-1}(\tau) \leqslant \sum_{i=0}^{k-2} v_{k-1}(\tau) = \sum_{i=2}^{k} v_i(\tau),$$

Бундан ташқари, йиғинди ҳадлар сони чексиз ортганда камаймайди:

$$\sum_{i=2}^{k} v_i(\tau) \leqslant \sum_{i=2}^{\infty} v_i(\tau).$$

Энди $\sum\limits_{i=2}^{\infty} v_i(\tau)$ йиғинди τ га нисбатан чексиз кичик миқдор эканлигини кўрсатамиз. Хизмат кўрсатиш системаси бир вақтда ҳолатларнинг фақат бирида бўлиши мумкинлиги (иккита ҳодисанинг бир вақтда рўй бериши ўзаро истисно этилади) сабабли $\sum\limits_{i=0}^{\infty} v_i(\tau) = 1$, бу ердан

$$\sum_{i=2}^{\infty} v_i(\tau) = 1 - v_0(\tau) - v_1(\tau)$$

бўлиши келиб чиқади.

Ўнг томондаги эҳтимоллар йиғиндиси $v_0(\tau) + v_1(\tau)$ нинг биринчи ҳади t вақт ичида системага битта ҳам талаб келмаслик эҳтимолидан иборат, иккинчи ҳади эса роса битта талаб келиши эҳтимолидан иборат. Шундай қилиб, $\tau \to 0$ вақт ичида системага камида иккита талаб келиш эҳтимоли $1 - [v_0(\tau) - v_1(\tau)]$ га нисбатан чексиз кичик миқдордир:

$$\sum_{i=2}^{\infty} v_i(\tau) = 1 - [v_0(\tau) + v_1(\tau)] = 0(\tau).$$

Системага τ вақт ичида келадиган талаблар сонининг математик кутилиши $\theta\lambda\tau$ бўлган Пуассон қонуни бўйича тақсимланган, бу ерда λ — вақт бирлигида келадиган талаблар сони. Шунинг учун $\tau \to 0$ да

$$v_0(\tau) = e^{-\lambda\tau} = 1 - \lambda\tau + 0(\tau),$$

яъни системага τ вақт ичида битта ҳам талаб келмаслик эҳтимолидир. τ вақт ичида k та талаб келиш эҳтимоли эса

$$v_k(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!}\cdot e^{-\lambda\tau}$$

га тенг.

Демак,(5. 1) тенгламанинг йиғиндиси ушбу кўринишни олади:

$$v_k(t+\tau) = v_k(t)\cdot v_0(\tau) + v_{k-1}(t)\cdot v_1(\tau) + 0(\tau) =$$
$$= v_k(t)(1-\lambda\tau) + v_{k-1}(t)\lambda\tau + 0(\tau) =$$
$$= v_k(t) - v_k(t)\lambda\tau + v_{k-1}(t)\lambda\tau + 0(\tau), \qquad (5.2)$$

бу ерда ушбу айирмани ҳосил қиламиз:

$$v_k(t+\tau) - v_k(t) = \lambda[v_{k-1}(t) - v_k(t)]\tau + 0(\tau).$$

Сўнгги тенгликнинг иккала қисмини $\tau = \Delta t$ орттирмага бўлиб,

$$\frac{v_k(t+\tau) - v_k(t)}{\tau} = \frac{\lambda[v_{k-1}(t) - v_k(t)]\tau}{\tau} + \frac{0(\tau)}{\tau} \qquad (5.3)$$

ни ҳосил қиламиз. $v_k(t)$ функция барча $t > 0$ да дифференциалланувчи, $\tau \to 0$ да

$$\frac{dv_k(t)}{dt} = \lambda v_{k-1}(t) - \lambda v_k(t), \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \qquad (5.4)$$

Натижада $v_k(t)$ ни аниқлайдиган чизиқли дифференциал тенгламалар системасини ҳосил қилдик.

Ҳосил қилинган системани алмаштирамиз:

$$\frac{v_k(t+\Delta t) - v_k(t)}{\Delta t} = -\lambda v_k(t) + \lambda v_{k-1}(t) + \frac{0(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\Delta t \to 0 \text{ да } \frac{dv_k(t)}{dt} = -\lambda v_k(t) + \lambda v_{k-1}(t), \quad k = 1, 2, 3, \ \ldots \qquad (5.5)$$

(агар лимит мавжуд бўлса). Шундай қилиб, $v_k(t)$ ни аниқлаш учун чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламаларнинг чексиз реккурент системасини ҳосил қилдик. Бу системага $v_0(t)$ нинг қийматини аниқлаш учун яна битта тенгламани тузиб, қўшиш керак.

Сўнг таъсирнинг йўқлиги хоссаси ва эҳтимолларни кўпайтириш теоремасидан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$v_0(t+\Delta t) = v_0(t)\, v_0(\Delta t),$$

лекин

$$v_0(t+\Delta t) = v_0(t)\,[1 - \lambda\Delta t + 0(\Delta t)]$$

ёки

$$v_0(t+\Delta t) - v_0(t) = -\lambda v_0(\Delta t) + v_0(t)\cdot 0(\Delta t).$$

Тенгламанинг иккала қисмини Δt га бўлиб ва лимитга ўтиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{dv_0(t)}{dt} = -\lambda v_0 \frac{\Delta t}{\Delta t},$$

бу ердан

$$\frac{dv_0(t)}{v_0(t)} = -\lambda \cdot dt, \text{ лекин } \int \frac{dv_0(t)}{v_0(t)} = \ln v_0 + C.$$

Демак,

$$\ln v_0(t) = -\lambda t + \ln C \text{ ёки } v_0(t) = C e^{-\lambda t}. \qquad (5.6)$$

Интеграллаш ўзгармаси C ни v_0 $(0) = 1$ бошланғич шартдан (нолга тенг вақт оралиғида талаблар йўқлигининг эҳтимоли бирга тенг) топамиз: $C = 1$ ва

$$v_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Бу $(0t)$ вақт ичида системага битта ҳам талаб келмаслик эҳтимолидир. Вақт оралиғининг ортиши билан у тез камаяди. Унинг камайиш тезлиги λ қанча катта бўлса, шунча кўп бўлади. λ катталик *оқим параметри* дейилади.

Энди

$$\frac{dv_k(t)}{dt} = -\lambda v_k(t) + \lambda v_{k-1}$$

тенгламани бошқача кўринишда ифодалаймиз, бу ерда $k = 1, 2, \ldots$ Агар

$$\begin{aligned} &v_k(t) = e^{-\lambda t} \cdot u_k(t), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n, \\ &v_0(t) = e^{-\lambda t}, \\ &u_0(t) = 1 \end{aligned} \qquad (5.8)$$

бўлсин. $v_k(t)$ функцияни дифференциаллаб,

$$\frac{dv_k(t)}{dt} = e^{-\lambda t}\left[\frac{du_k(t)}{dt} - \lambda u_k(t)\right]$$

ни ҳосил қиламиз, бунга $v_k(t)$ нинг ифодасини (5.8) тенгламадан қўйиб,

$$\frac{du_k(t)}{dt} = \lambda u_{k-1}(t), \; k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (5.9)$$

ни ҳосил қиламиз. $v_k(t)$ функциянинг таърифидан

$$v_0(0)=1,\ \ v_1(0)=0, \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)=1 \qquad (5.10)$$

келиб чиқади. Демак,

$$v_0(t)+v_1(t)+\sum_{k=2}^{\infty} v_k(t)=1$$

$$\text{бундан } t=0 \text{ да } \sum_{k=2}^{\infty} v_k(0)=0.$$

Бу тенглик йиғиндининг ҳар бир ҳади нолга тенг бўлган ҳолдагина (чунки эҳтимоллар манфий эмас) ўринли бўлиши мумкин.

(5.10) тенгламадан $u_0(0)=1$ ва $u_k(0)=0$ бўлиши келиб чиқади, шунинг учун

$$\frac{du_1(t)}{dt}=\lambda u_{k-1}(t)=\lambda.$$

Бу ифодани интеграллаб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$u_1(t)=\int_0^t \lambda\,dt=\lambda t+c_1, \text{ лекин } u_2(0)=0=c_1,$$

демак,

$$u_1(t)=\lambda t.$$

Шунга ўхшаш, (5.10) тенгламани $k=2,\ 3,\ \ldots$ да интеграллаб қуйидагини топамиз:

$$u_2(t)=\frac{(\lambda t)^2}{1\cdot 2}, \qquad u_3(t)=\frac{(\lambda t)^3}{1\cdot 2\cdot 3},$$

$$u_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

демак,

$$v_k(t)=e^{-\lambda t}\cdot u_k(t)=e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^k}{k!},\ \ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots .$$

Шундай қилиб, энг содда оқимда талаблар сони вақтнинг $(0t)$ оралиғида λt параметрли Пуассон қонуни бўйича тақсимланган. Бу ерда оқим параметри λ вақт бирлиги ичида келадиган талаблар сонининг математик кутилишига тенг:

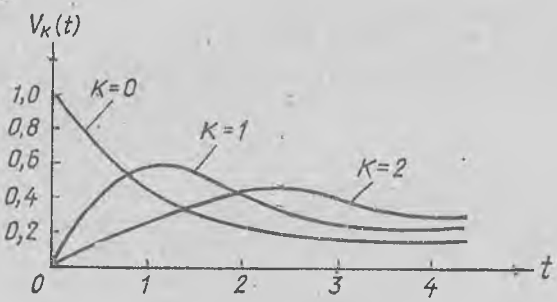
$$M_t\,[k[\,=\sum_{k=1}^{\infty} kv_k(t)=\sum_{k=1}^{\infty} k\,\frac{(\lambda\, t)^k}{k!}\,e^{-\lambda t}=$$

$$=\lambda\, t\, e^{-\lambda t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda t.$$

Бу формулада t исталган мусбат сон бўлиши мумкин: $t=1$ бўлганда эса

$$M_t\,[k]=\lambda.$$

Графикда (3.12- расм) талабнинг энг содда оқимида роса k та талабнинг келиш эҳтимоллари ифодаланган.



3. 12-расм.

5- §. Стационар бўлмаган Пуассон оқими

Системага вақт бирлиги ичида келадиган талаблар ўртача сонининг вақт оралиғига нисбатининг бу оралиқ нолга интилгандаги лимити оқимнинг *оний зичлиги* дейилади:

$$\lambda(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{\varphi(t+\tau)-\varphi(t)}{\tau}=\varphi'(t).$$

бу ерда $\varphi(t)$ — қаралаётган $(0t)$ вақт ичидаги талаблар сонининг математик кутилиши. Ўзгарувчи зичликли, ординар, сўнгтаъсирсиз оқим *стационар бўлмаган Пуассон оқими* дейилади. Бундай оқимлар учун вақтнинг узунлиги τ бўлган оралиғида k та талаб олиш эҳтимоли Пуассон қонуни бўйича аниқланади:

$$v_k(\tau,\,t_0)=\frac{a^k}{k!}e^{-a},$$

бу ерда a қаралаётган $(t_0, t_0 + \tau)$ вақт ичидаги талабларнинг математик кутилиши бўлиб, у қуйидагига тенг:

$$a = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t)\, dt.$$

Бу ҳолда математик кутилиш фақат вақт оралиғининг узунлигигагина боғлиқ бўлиб қолмасдан, балки t_0 бошланғич моментга ҳам боғлиқдир (унинг $0t$ вақт ўқидаги вазиятига ва $\lambda(t)$ функциянинг кўринишига боғлиқ).

6- §. Чекланган таъсирли оқим (Пальма оқими)

Кетма-кет келадиган талаблар орасидаги вақт моментлари z_1, z_2, z_3, . . . ўзаро боглиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар бўладиган оқим *чекланган таъсирли оқим* дейилади.

Бу тасодифий миқдор — талабларнинг келиш моментлари ҳар доим манфий бўлмаган қийматларга эгалигини таъкидлаб ўтамиз. Оқимнинг бошланғич моментини t_0 орқали, i - талабнинг келиш моментларини t_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ орқали, айирмаларни

$$z_i = t_i - t_{i-1},\ t_{i-1} \leqslant t_i$$

орқали белгилаймиз. Демак, $z_1 = t_1 - t_0 = t_1$, $z_2 = t_2 - - t_1, \ldots$.

Агар талабларнинг келиш моментлари (ёки қўшни талаблар орасидаги вақт оралиқлари) маълум бўлса, мазкур оқим тўла аниқланган бўлади. Бунинг учун $z_k = F_k(x)$ $k = 1, 2, 3, \ldots$ миқдорларнинг тақсимот қонунларини билиш зарур.

$F_k(x)$ ни $P\{z_k < x\}$ орқали белгилаймиз (энг оддий оқимга нисбатан, бу ерда фақат битта ўзгармас λ миқдорни билиш камлик қилади). Қаралаётган бир жинсли стационар оқим энг содда оқимнинг умумлашмасидир. У Пальма функцияси $\varphi_0(t)$ нинг берилиши билан тўлиқ аниқланади.

$\varphi_0(t)$ ни топиш учун $H_k(\tau - t)$ орқали ушбу қўш ҳодисани белгилаймиз: τ вақт оралиқларида биттадан кам бўлмаган талаблар келади; $\omega(t)$ оралиқда эса кўпи билан t та талаб келади. У ҳолда $\frac{H_k(\tau, t)}{\omega(\tau)}$ нисбат олдинги t ораликда камида битта талаб келган деган шартда τ вақт ичида талаблар йўқлигининг шартли эҳтимолини ифодалайди: $\tau \to 0$ да лимитга ўтилганда (агар у мавжуд бўлса) бу нисбат Пальма функциясига тенг бўлади:

$$\varphi_0(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{H_0(\tau, t)}{\omega(\tau)}.$$

Бу функция бошланғич моментда камида битта талаб келган деган шартда t вақт ичида битта ҳам талаб келмаслик эҳтимолига тенг.

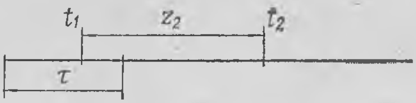
Пальма типидаги оқим учун $F_k(x)$ тасодифий миқдорларнинг z_k тақсимот функцияларини $\varphi_0(t)$ Пальма функцияси орқали ифодалаш мумкин.

Бу тақсимот функциялар қуйидаги кўринишга эга:

$$F_1(x) = \lambda \int_0^x \varphi(u)\,du, \quad F_k(x) = 1 - \varphi_0(x), \quad k \geqslant 2,$$

бу ерда λ — оқим параметри. Бу ҳолда λ параметр энг содда оқимдаги каби $\varphi_0(t)$ Пальма функцияси орқали топилади:

$$\lambda \int_0^\infty \varphi(u)\,du = F_1(\infty) = 1.$$



3. 13-расм.

$0t$ кесмада (3.13- расм) битта талаб келган, $t\tau - t_1 + t$ кесмада эса битта ҳам талаб келмаган.

$\varphi_0(t)$ сифатида e^{-bt} функцияни оламиз, бу ерда $b > 0$ (бу функция $\varphi_0(t)$ га тенг бўлиши мумкин, чунки $0 \leqslant t \leqslant \infty; e^{-bt} \leqslant 1$ ва монотон камаяди). $F_1(x)$ учун ифодада $\varphi_0(t)$ ўрнига e^{-bt} функцияни қўйиб,

$$F_1(t) = \lambda \int_0^t e^{-bu}\,du = \lambda \left[-\frac{1}{b} e^{-bu} \right]_0^t = \frac{\lambda}{b} \left[1 - e^{-bt} \right]$$

ни ҳосил қиламиз. Бу ерда λ параметр

$$\lambda \int_0^\infty \varphi_0(u)\,du = 1$$

тенгламадан аниқланади. Демак,

$$\lambda = \frac{1}{\int\limits_0^\infty \varphi_0(u)\,du}$$

ёки

$$\lambda\left[-\frac{1}{b}e^{-bu}\right]_0^\infty = 1,$$

бу ердан

$$\frac{\lambda}{b} = 1 \text{ ва } \lambda = b.$$

Шунинг учун

$$F_1(t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

бироқ

$$F_k(t) = 1 - \varphi_0(t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

яъни исталган $k \geqslant 2$ да функциянинг тақсимот қонуни $F(t)$ функциянинг тақсимот қонуни билан устма-уст тушади, $\varphi_0(t) = e^{-\lambda t}$ да эса сўнг таъсирли стационар ординар оқим энг содда оқимга айланади.

7- §. Хизмат кўрсатиш вақти

Хизмат кўрсатиш вақти хизмат кўрсатиш системаси ишини характерлайдиган энг муҳим кўрсаткичлардан биридир. Аппаратнинг битта буюртмани бажариш вақти системанинг ўтказа олиш қобилиятини белгилайди.

Одатда системага турли талаблар келади, масалан, магазинда харидорлар турли маҳсулотларни турлича миқдорда харид қиладилар. Бундан ташқари, турли сотувчиларнинг хизмат кўрсатиш муддати (вақти) турлича бўлади (у сотувчининг толиққанлигига, чаққонлигига, кайфиятига ва ш.ў. боғлиқ бўлади). Шунинг учун хизмат кўрсатиш вақти бир буюртмадан иккинчи буюртмага ўтишда ўзгариб туради.

Хизмат кўрсатадиган механизмлар (автоматлар) ҳам уларнинг маркасига эскирганлиги ва шунга ўхшашларга боғлиқ бўладиган турли эксплуатация сифатларига эга бўлади. Шу муносабат билан хизмат кўрсатиш вақти γ

тасодифий миқдор бўлади. Шу сабабли у қуйидагича тақсимот қонуни билан ифодаланиши мумкин:

$$F(t) = P\{\gamma < t\},\ \text{бу ерда}\ t \geqslant 0.$$

Бу функция хизмат кўрсатиш вақти γ нинг бирор олдиндан берилган вақт қиймати t дан кичик бўлиш эҳтимолини аниқлайди. У қуйидаги хоссаларга эга: функция доимо мусбат, монотон ўсувчи бўлиши ҳамда бирдан ортиқ бўлмаслиги керак.

Мисол. Хизмат кўрсатиш системасининг ишини ўрганишдан сўнг хизмат кўрсатиш вақтининг тақсимот функцияси қуйидаги кўринишда эканлиги аниқланди: $F(t) = 1 - e^{-2t}$ (t — минут ҳисобида). Бунинг қиймати $0 \leqslant t \leqslant \infty$ да манфий бўлиши мумкин эмас, бу шарт бажарилади:

$$0 \leqslant 1 - e^{-2\lambda} < 1,\quad t > 0\ \text{да}.$$

Олинган функциянннг ҳссиласи мусбат:

$$F'(t) = (1 - e^{-2t})' = 2e^{-2t},$$

бу ердан $F(t)$ нинг ўсувчи функция эканлиги келиб чиқади.

Тақсимот функциясини билган ҳолда, масалан, хизмат кўрсатиш вақтининг 2 мин.дан ортиқ бўлмаслик эҳтимолини топиш мумкин. Функцияда $F(t)$ нинг ўрнига $t = 2$ мин. ни қўйиб, изланаётган эҳтимолни ҳосил қиламиз:

$$F(2) = 1 - e^{-2\cdot 2} = 1 - \frac{1}{54{,}5} \approx 0{,}985.$$

Битта талабни бажаришнинг ўртача вақтини топамиз. У математик кутилишга тенг:

$$M[\gamma] = \int_0^\infty t\,dF(t) = 2\int_0^\infty te^{-2t}\,dt = -te^{-2t}\Big|_0^\infty + 2\int_0^\infty e^{-2t}dt =$$

$$= -\left[te^{-2t} + 2e^{-2t}\right]_0^\infty \approx 1\ \text{мин}.$$

Бу хизмат кўрсатиш вақтида навбатдаги талабнинг бажариб бўлиниш эҳтимоли $F(1) = 1 - e^{-2} \approx 0{,}86$ га тенг, яъни бу олинган тақсимотда 100 та талабдан ўртача 86 таси 2 мин дан ортиқ бўлмаган вақт ичида бажарилади.

Ёки айтайлик, тақсимот функцияси $F(t) = 1 - \frac{1}{(t+10)^2}$ кўринишда бўлсин. Хизмат кўрсатиш вақти $t > 0$. Бу шарт бажарилади, чунки $t > 0$ бўлганда

$$0 \leqslant 1 - \frac{1}{(t+10)^2} < 2.$$

Танланган функциянинг ҳосиласи мусбат:

$$F'(t) = \frac{2}{(t+10)^3} > 0.$$

Демак, $F(t)$ монотон ўсувчи функция.

Тақсимот функциясини билган ҳолда хизмат кўрсатиш вақти 2 мин.дан ортиқ бўлмаслик эҳтимолини топишимиз мумкин. $F(t)$ функцияда t ўрнига 2 мин. ни қўйиб, изланаётган эҳтимолни ҳосил қиламиз:

$$F(2) = 1 - \frac{1}{(2+10)^2} \approx 0{,}99.$$

Битта талаб бажарилишининг ўртача вақтини топамиз, у математик кутилишга тенг:

$$M[\gamma] = \int_0^\infty t\,d\,F(t) = \int_0^\infty \frac{2\,dt}{(t+10)^3} = -2\left[\frac{1}{1+10} + \frac{1}{2\cdot 100}\right] \approx$$

$$\approx 0{,}1 \text{ мин.}$$

Бу вақт ичида навбатдаги талабни бажариб бўлиниш эҳтимоли:

$$F(0{,}1) = 1 - \frac{1}{(0{,}1+10)^2} \approx 0{,}99;$$

бу тақсимот турида 100 талабнинг ўртача 99 таси 1 мин. дан ортиқ бўлмаган вақт ичида бажарилади.

$F(t)$ тақсимот функциянинг конкрет кўринишини аниқлаш учун системадаги хизмат кўрсатиш аппаратларининг ҳар бирининг ишини узоқ ўрганиш лозим, чунки битта системанинг ўзида турли аппаратларнинг хизмат кўрсатиш вақти турлича тақсимот функцияларига эга бўлиши мумкин.

Биз ҳисоблашларни соддалаштириш мақсадида бундан буён хизмат кўрсатиш вақти умумий тақсимот қонунига бўйсунадиган аппаратлардан иборат системаларнигина қараймиз: юқорида келтирилган мисолдан кўринадики, тасодифий миқдор бўлган хизмат кўрсатиш вақтининг тақсимот функцияларини билиш катта аҳамиятга эга. $F(t)$ тақсимот функцияни билиш бир қатор муҳим саволларга жавоб бериш имконини беради.

Реал хизмат кўрсатиш вақтининг тақсимот қонунлари турли бўлган оқимлар учраши мумкин. Бироқ хизмат кўрсатиш вақти ихтиёрий бўлган оммавий хизмат масалаларини ечиш усуллари анча мураккаб ва оммавий хизмат назарияси масалаларини ҳал этишнинг янги усулларини ишлаб чиқишни тақозо этади.

Кейинги вақтда хизмат кўрсатиш вақти ихтиёрий бўлган оммавий хизмат масалаларини ҳал этиш усуллари муваффақият билан ишлаб чиқилмоқда. Бунда Монте-Карло усулидан (статистик моделлаш) фойдаланиладики, у хизмат кўрсатиш вақтининг тақсимот қонуни ихтиёрий бўлган оммавий хизмат масалаларини ҳал этишга имкон беради.

Бироқ хизмат кўрсатиш вақтининг тақсимот қонуни ихтиёрий бўлган оммавий хизмат масалаларини ҳал этиш амалда анча қийин бўлиб, кўпчилик ҳолларда электрон-рақамли ҳисоблаш машиналарини татбиқ этишни тақозо этади.

8- §. Хизмат кўрсатиш вақтининг кўрсаткичли тақсимот қонуни

Оммавий хизмат назариясида хизмат кўрсатиш вақтининг кўрсаткичли тақсимот қонуни катта аҳамиятга эга бўлиб, у ушбу кўринишга эга:

$$F(t) = 1 - e^{-\gamma t}.$$

Бу ерда γ хизмат кўрсатиш вақтининг математик кутилишига (хизмат кўрсатишнинг ўртача вақти) тескари катталикдир, чунки

$$M[\gamma] = \int_0^\infty t\,dF(t) = \left[-te^{-\gamma t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\gamma t}\,dt =$$

$$= 0 - \frac{1}{\gamma}\left[e^{-\gamma t}\right]_0^\infty = \frac{1}{\gamma}.$$

Практикада хизмат кўрсатиш вақтининг тақсимот қонунлари бошқача бўлган оқимлар ҳам учрайди. Бироқ хизмат кўрсатиш вақти ихтиёрий бўлган оммавий хизмат масалаларини ҳал этиш анча мураккабдир.

Кўрсаткичли қонун бундай хоссага эга: агар вақтнинг бирор t_0 моментида буюртма бажарилаётган бўлса, у ҳолда қолган хизмат кўрсатиш вақтининг тақсимот қонуни хизмат кўрсатиш қанча вақтдан буён давом этаётганлигига боғлиқ эмас. Бу қуйидаги мулоҳазалардан келиб чиқади: $f_a(t)$ хизмат кўрсатиш t вақт давомида давом этаётган ва яна t дан кам бўлмаган вақт давом этишининг эҳтимоли бўлсин, у ҳолда

$$f_0(t) = 1 - F(t) = e^{-\gamma t}$$

ва

$$f_0(a + t) = e^{-\gamma(a+t)}.$$

Бу ерда $f_0(t) = 1 - F(t)$ — хизмат кўрсатиш вақти γ нинг t дан кичик бўлмаслик эҳтимоли. Энди $F(t) = P(\gamma < t)$ бўлгани учун

$$f_0(t) = 1 - P(\gamma < t) = 1 - F(t).$$

Шунинг билан эҳтимолларни кўпайтириш теоремасига кўра

$$f_0(a + t) = f_0(a) f_a(t), \text{ лекин } f(a + t) = e^{-\gamma(a+t)},$$

бу ерда $f_0(a)$ — хизмат кўрсатиш вақтининг a дан кичик бўлмаслик эҳтимоли;

$f_a(t)$ — хизмат кўрсатиш вақтининг t дан кичик бўлмаслик эҳтимоли, бироқ бу вақт $a + t$ оралиғида давом этганлиги шарти билан.

$$f_0(a) f_a(t) = e^{-\gamma(a+t)},$$

демак,

$$f_a(t) = \frac{1}{f_0(a)} e^{-\gamma(a+t)} = e^{\gamma a} \cdot e^{-\gamma(a+t)} = e^{-\gamma t}.$$

Шу сабабли қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$f_a(t) = e^{-\gamma t} = f_0(t).$$

Бу ҳолда шартли эҳтимол $f_0(t)$ эҳтимол билан устма-уст тушади, демак, хизмат кўрсатиш вақтининг тақсимот қонуни мазкур буюртмани бажариш давом этаётган оралиқ узунлигига боғлиқ эмас.

9- §. Қайтариладиган оммавий хизмат системалари

Оммавий хизмат системаларини икки ғруппага бўлиш мумкин: а) қайтариладиган системалар; б) кутиладиган системалар. Биринчи группада барча хизмат кўрсатиш аппаратлари банд бўлган моментда келган талабга хизмат кўрсатилмайди ва у системадан қайтиб кетади. Иккинчи группада барча аппаратлар банд бўлганда келган талаблар системадан қайтиб кетмасдан, балки навбатга турадилар ва хизмат кўрсата бошланишини кутадилар.

$(n+1)$ та аппаратдан иборат қайтариладиган оммавий хизмат системасини қараймиз. Бундай система $(n+1)$ та ҳолатда бўлиши мумкин.

Қайтариладиган оммавий хизмат системаларининг характеристикаси сифатида вақтнинг исталган t моменти учун система ҳолатининг эҳтимоли $P_k(t)$ ни қараймиз. Бунда ҳар бир аппарат бир вақтда фақат битта талабни бажаради (ижро этади) ва агар аппаратлардан қайсидир бири бўшаса, у дарҳол навбатдаги талабни (у агар бўлса) бажаришга киришади деб фараз қилинади.

Айтайлик, битта талабни бажариш вақти γ параметрли кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган бўлсин. У ҳолда хизмат кўрсатиш вақтининг t дан кам давом этиш эҳтимоли қуйидагича бўлади:

$$P\{\gamma < t\} = F(t) = 1 - e^{-\gamma t}$$

Фараз қилайлик, битта талабнинг бажарилиш вақти λ параметрли кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган бўлсин. У ҳолда хизмат кўрсатиш вақтининг t дан кам давом этиш эҳтимоли қуйидагича бўлади:

$$v_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} .$$

Қайтариладиган системаларни баҳолашнинг асосий кўрсаткичлари ҳамма аппаратлар банд бўлганда хизмат кўрсатмаслик эҳтимоли ва банд аппаратларнинг ўртача сонидир. Бу кўрсаткичларнинг биринчиси хизмат кўрсатишнинг тўлалигини, иккинчиси эса хизмат кўрсатиш системасини кўрсатади.

Вақтнинг бошланғич моментида k та аппарат, $t - N(t_i) = i$ моментида k та аппарат банд бўлсин, бу ерда $N(t)$ — тасодифий миқдор. У вақтнинг бошланғич t_0 моментида банд бўлган k та аппаратдан баъзиларининг бўшаш моментлари янги талабларнинг келиш моментлари, шунингдек, бу янги талабларни бажаришнинг тугалланиш моментлари билан аниқланади. Шу сабабли бу процесснинг t_0 дан кейинги ўтиши олдин нима бўлганлигига боғлиқ эмас. Бундай процесслар *Марков процесслари* деб аталади.

Вақтнинг t моментида роса k та аппаратнинг банд бўлганлик эҳтимоли $P_k(t) = P\{N(t) = k\}, 0 \leqslant k \leqslant n$ га тенг, агар дастлаб i та аппарат банд бўлган бўлса, у ҳолда бирор t вақт оралиғидан сўнг k та аппарат банд бўлишининг шартли эҳтимоли бўлсин, у ҳолда

$$P_k(t_1 + t_2) = \sum_{i=0}^{n} P_i(t_1) P_{i,k}(t_2). \qquad (5.12)$$

Бу тенглик қуйидагини белгилайди: агар t_1 моментда системада $P_i(t_1)$ $(t = 1,\ 2\ \ldots)$ эҳтимол билан k та аппарат банд бўлган бўлса, t_2 оралиқдан кейин эса системанинг k та аппарат банд бўладиган ҳолатга ўтишининг шартли эҳтимоли $P_{ik}(t_2)$ $(i = 0, 1, 2\ \ldots)$ бўлса, у ҳолда $t_1 + t_2$ моментда k та аппаратнинг банд бўлиш тўла эҳтимоли кўпайтмаларнинг барча мумкин бўлган k лар бўйича йиғиндисига тенг:

$$\sum_{i=0}^{n} P_i(t_1) \cdot P_{ik}(t_2). \qquad (5.13)$$

Жумладан, $k = 1$ бўлганда

$$P_0(t + \tau) = P_0(t) \cdot P_{00}(\tau) + P_1(t) P_{10}(\tau),$$

бу эса аппаратнинг бўш бўлиш эҳтимолидир.

τ вақт ичида аппаратнинг бўш бўлиш эҳтимоли $P_{00}(\tau)$ га тенг. Бу эҳтимол, равшанки, вақт ичида системага битта ҳам талаб келмаслик эҳтимолига тенг ёки $P_{00}(\tau) = 1 - \lambda\tau + 0(\tau)$ нинг қийматини $P_{00}(\tau)$ тенгламага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P_0(t + \tau) = P_0(t)\,[1 - \lambda\tau + 0(\tau)] + P_1(t) P_{10}(\tau).$$

Лекин вақтнинг бошланғич моментида аппаратнинг бўш бўлиш эҳтимоли P_1 $(t) = 0$, шунинг учун

$$P_0(t + \tau) = P_0(t)\,[1 - \lambda\tau + 0(\tau)].$$

Бу тенгликни бундай ўзгартирамиз:

$$P_0(t + \tau) - P_0(t) = -\lambda P_0(t)\tau + P_0(t)\,0(\tau),$$

сўнгра тенгликнинг иккала қисмини τ га бўламиз ва $\tau \to 0$ да лимитга ўтамиз:

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{P_0(t+\tau) - P_0(t)}{\tau} = \frac{d\,P_0(t)}{dt} = -\lambda\,P_0(t)$$

ёки

$$\frac{d\,P_0(t)}{dt} = -\lambda\,P_0(t).$$

Бу тенгликни интеграллагандан сўнг $\ln P_0(t)$ нинг қийматини топамиз:

$$\ln P_0(t) = -\lambda t + \ln C,$$

ва демак, $P_0(t) = Ce^{-\lambda t}$. И интеграллаш ўзгармасини $P_0(0) = 1$ бошланғич шартдан топамиз: $C = 1$, яъни $P_0(t) = e^{-\lambda t}$. Бу қуйидагини англатади: агар аппарат бошланғич моментда бўш бўлган бўлса, у ҳолда унинг t вақт моментида ҳам бўш бўлиш эҳтимоли $P_0(t) = e^{-\lambda t}$ га тенг. $P_0(t)$ учун ҳосил қилинган ифодадан кўриниб турибдики, бу катталикнинг қиймати λ параметр ортиши билан камаяди.

Изланаётган $P_k(t)$ эҳтимолни аниқлаш учун тўла эҳтимол формуласи

$$P_k(t_1 + t_2) = \sum_{i=0}^{n} P_i(t_1)\,P_{ik}(t_2)$$

дан фойдаланамиз ва унда $t_1 = t$, $t_2 = \tau$ деб қабул қиламиз; у ҳолда тенглама ушбу кўринишни олади:

$$P_k(t+\tau) = P_k(t_1 + t_2) = P_0(t)\,P_{0k}(\tau) + P_1(t) \cdot P_{1k}(\tau)\,\tau +$$
$$+ \ldots + P_n(t)\,P_{nk}(\tau) = \sum_{i=0}^{n} P_i(t)\,P_{ik}(\tau)\text{-}$$

Бу тенгламада $P_{ik}(\tau)$ системанинг τ вақт ичида i та аппарат банд бўлган ҳолатдан k та аппарат банд бўлган ҳолатга ўтишининг шартли эҳтимолидир. $P_{00}(\tau)$ эҳтимолларни ҳисоблаш учун $k = 0$ деб қабул қиламиз. Бу ерда $P_{00}(\tau)$, агар вақтнинг бошланғич моментида система бўш бўлган бўлса, у ҳолда τ вақт ичида битта ҳам талаб келмаслик эҳтимолидир. Бу ҳолда системадан барча аппаратларнинг банд бўлмаслик эҳтимоли

$$1 - W(\tau) = 1 - \lambda\tau + 0(\tau)$$

га тенг, бу ерда $W(\tau)$ — қаралаётган τ вақт ичида системага камида битта талаб келиш эҳтимолидир. Қарама-қарши ҳодиса — бу вақт ичида талаблар бўлмаслик эҳтимоли $1 - W(\tau)$ га тенг.

Бироқ τ вақт ичида системага битта талаб келган ва системадан чиқиб кетган бўлиши мумкин. Бунинг эҳтимоли $F(\tau) = 1 - e^{-\gamma\tau}$ бўлади. $e^{-\gamma\tau}$ катталикнинг $\gamma\tau$ кўрсаткичнинг даражалари бўйича ёзамиз:

$$F_\tau = 1 - 1 + \frac{\gamma\tau}{1!} - \frac{(\gamma\tau)^2}{2!} + \frac{(\gamma\tau)^3}{3!} - \ldots = \gamma\tau + 0(\tau).$$

Бу ердан йиғиндининг биринчи учта ҳадидан бошқа ҳадлари $\tau \to 0$ да τ га қараганда юқори тартибли чексиз кичик микдорлардир, қатор ўзгарувчан ишорали бўлгани учун унинг йиғиндиси абсолют қиймати бўйича биринчи ҳад $\frac{(\gamma\tau)^2}{2}$ дан катта бўлмайди.

Агар талаб вақтнинг τ оралиғининг бошида келмаган бўлса, у ҳолда унга хизмат кўрсатиш эҳтимоли яна ҳам кичик булади. τ вақт ичида системага битта буюртма келиш эҳтимоли $W(\tau) = \lambda\tau + O(\tau)$, τ вақт ичида буюртма келган ва уни бажарилган бўлиш эҳтимоли эса иккита эҳтимол кўпайтмасига тенг: $F(\tau)\, W(\tau)$. Бу кўпайтма қуйидагига тенг:

$$F(\tau)\, W(\tau) = [\gamma\tau + O(\tau)] \cdot [\lambda\tau + O(\tau)] = \lambda\gamma\tau^2 + O(\tau),$$

кўриниб турибдики, бу катталик τ га нисбатан чексиз кичик миқдордир.

Системага τ вақт ичида икки ва ундан ортиқ талаб келиш эҳтимоли эса яна ҳам кичик — чексиз кичик миқдор бўлади. Эҳтимолларни қўшиш теоремасига кўра

$$P_{00}(\tau) = 1 - \lambda\tau + 0(\tau) = 1 - W(\tau),$$

чунки доимо $\sum\limits_{i=0}^{n} P_{ki}(\tau) = 1$. Бу тенглик қуйидагини англатади: агар бирор моментда системада k та аппарат банд бўлса, у ҳолда i вақтдан сўнг система ё ўша ҳолатда қолади, ёки бирор бошқа ҳолатга ўтади.

$P_{kk}(\tau)$ эҳтимолни топамиз. Сўнгги тенгликдан қуйидаги келиб чиқади:

$$P_{kk}(\tau) = 1 - P_{k0}(\tau) - P_{k1}(\tau) - \ldots - P_{kk-1}(\tau) - \\ - P_{k,\,k+1}(\tau) - P_{kn}(\tau).$$

Бу йиғиндининг $P_{kk-1}(\tau)$ ва $P_{k,k+1}(\tau)$ дан бошқа барча ҳадлари τ га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдорлардир.

τ вақт ичида системадан иккитадан ортиқ талабнома чиқиб кетиш эҳтимоли ҳам τ га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдордир. Бу эҳтимол $i - k \geqslant 2$ бўлганда

$$F(\tau) = 1 - e^{-\gamma\tau} = -\gamma\tau + 0(\tau)$$

ёки

$$[F(\tau)]^{i-k} = [-\gamma\tau + 0(\tau)]^2 = 0(\tau).$$

Шунинг учун

$$P_{ki}(\tau) = 0(\tau) \text{ ва } P_{kk}(\tau) = 1 - P_{kk+1}\tau + 0(\tau).(\quad 5.14)$$

Энди τ вақт ичида k та аппаратдан камида биттасининг бўшаш эҳтимолини топамиз. Хизмат кўрсатиш вақтининг τ дан ортиқ давом этиш эҳтимоли $F(\tau) = 1 - e^{-\gamma\tau}$ га тенг, тескари эҳтимол эса

$$1 - F(\tau) = 1 - 1 + e^{-\gamma\tau} = e^{-\gamma\tau}.$$

Эҳтимолларни кўпайтириш теоремасидан фойдаланиб, вақтнинг τ моментида банд бўлган k та аппаратнинг биттаси ҳам бўшамаслик эҳтимолини топамиз. Битта аппаратнинг банд бўлиш эҳтимоли, маълумки, $e^{-\gamma\tau}$ га тенг, k та аппаратнинг банд бўлиш эҳтимоли эса

$$(e^{-\gamma\tau})^k = e^{-k\gamma\tau}$$

га тенг: Бу ердан k та аппаратдан камида биттасининг бўшаш эҳтимоли қуйидагига тенг:

$$1 - e^{-k\gamma\tau} = \gamma k\tau + 0(\tau),$$

Юқорида кўрсатилганидек, $\gamma k\tau$ нинг даражалари бўйича ёйишдан сўнг, τ вақт ичида икки ва ундан ортиқ аппаратнинг бўшаш эҳтимоли

$$P_{k,k-1}(\tau) = \gamma k\tau + 0(\tau)$$

га тенг, бу ерда $0 \leqslant k \leqslant 2$. $P_{k,k+1}(\tau)$ — системага янги талаб келиш эҳтимоли. Бу эҳтимол

$$P_{k,k+1}(\tau) = \lambda\tau + 0(\tau) \qquad (5.15)$$

га тенг, бу ерда $0 < k < n - 1$.

$P_{k,\,k-1}(\tau)$ ва $P_{k,\,k+1}(\tau)$ лар учун ифодаларни (5.14) тенгламага келтириб қўйиб,

$$P_{kk}(\tau) = 1 - \lambda\tau + \gamma k\tau + 0(\tau)$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда $0 < k < n - 1$.

Системада жами n та аппарат бўлиб, уларнинг ҳаммаси банд бўлгани учун унинг бу ҳолатдан $n + 1$ та аппарат банд бўладиган ҳолатга ўтиши мумкин эмас, яъни бу ҳодисанинг эҳтимоли нолга тенг. Шунинг учун

$$P_{nn}(\tau) = 1 - \gamma n\tau + 0(\tau).$$

Системанинг бир ҳолатдан бошқасига ўтиш эҳтимолларини аниқлаш натижаларини умумлаштирамиз:

$$\left.\begin{aligned}
&P_{00}(\tau) = 1 - \lambda\tau + 0(\tau), \\
&P_{kk}(\tau) = 1 - \lambda\tau - \gamma k\tau + 0(\tau), \qquad 1 \leqslant k < n - 1, \\
&P_{nn}(\tau) = 1 - \gamma n\tau + 0(\tau), \\
&P_{ik}(\tau) = 0(\tau), \qquad i - k \geqslant 2, \\
&P_{k,\,k-1}(\tau) = \gamma k\tau + 0(\tau), \\
&P_{k,\,k+1}(\tau) = \lambda\tau + 0(\tau).
\end{aligned}\right\} \quad (5.16)$$

Бу қийматларни $k = 0, 1 \leqslant k \leqslant n - 1$, $k = n$ бўлганда (5.13) формулага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned}
P_0(t + \tau) &= P_0(t)(1 - \lambda\tau) + P_1(t)\gamma\tau + 0(\tau), \\
P_k(t + \tau) &= P_{k-1}(t)\lambda\tau + P_k(t)(1 - \lambda\tau - \gamma k\tau) + \\
&+ P_{k+1}(t)(k + 1)\gamma\tau + 0(\tau)
\end{aligned}$$

(бу ерда $P_{k+1}(t)\cdot(k + 1)\tau = 0$ чунки системанинг n ҳолатдан $n + 1$ ҳолатга ўтиши мумкин эмас).

$$P_n(t + \tau) = P_{n-1}(t)\lambda\tau + P_n(t)(1 - \gamma n\tau) + 0(\tau). \quad (5.17)$$

Бу системанинг тегишли тенгламаларида $P_0(t)$, $P_k(t)$ ва $P_n(t)$ ҳадларни ўнгдан чапга ўтказиб ва тенгламаларнинг иккала қисмини τ га бўлиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\frac{P_0(t + \tau) - P_0(t)}{\tau} = -\lambda P_0(t) + \gamma P_1(t) + \frac{0(\tau)}{\tau},$$

$$\begin{aligned}
\frac{P_k(t + \tau) - P_k(t)}{\tau} &= \lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + \gamma k) P_k(t) + \\
&+ \gamma(k + 1) P_{k+1}(t) + \frac{0(\tau)}{\tau},
\end{aligned}$$

$$\frac{P_n(t+\tau)-P_n(t)}{\tau}=\lambda P_{n-1}(t)-\gamma\cdot n P_n(t)+\frac{0(\tau)}{\tau},$$
$$1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

$\tau \to 0$ да лимитга ўтиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt}=-\lambda P_0(t)+\gamma P_1(t), \\ \dfrac{dP_k(t)}{dt}=\lambda P_{k-1}(t)-(\lambda+\gamma k)P_k(t)+\gamma(k+1)P_{k+1}(t), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \\ \dfrac{dP_n(t)}{dt}=\lambda P_{n-1}(t)-\gamma n P_n(t). \end{cases} \tag{5.18}$$

Бу ҳосил қилинган $n+1$ та $P_0(t)$, $P_1(t)$, ..., $P_n(t)$ номаълум функцияли бир жинсли дифференциал тенгламалар системаси *Эрланг системаси* деб аталади. Эҳтимоллар $k=0, 1, 2, \ldots n$ бўлганда α ва γ параметрларнинг функциялари сифатида аниқланади. Бунда изланаётган эҳтимолларни ўзгармас кўпайтувчи

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(t)=1 \tag{5.19}$$

шартдан аниқланади.

Бу системани ечиш мумкин бўлса-да, лекин у анча машаққатли. Агар бу системанинг чап томонларининг $t \to \infty$ даги лимит қийматларидан, яъни (Марков теоремасига кўра)

$$\frac{dP_k(t)}{dt} \to 0; \qquad t \to \infty \text{ ва } 0 \leqslant k \leqslant n$$

дан фойдаланилса, масала осонроқ ечилади. Бунинг натижасида (5.18) система ушбу кўринишни олади:

$$\left.\begin{aligned} -\lambda P_0+\gamma P_1=0, \\ \lambda P_{k-1}-(\lambda+\gamma k)P_k+\gamma(k+1)P_{k+1}=0; \quad 1=k \leqslant n-1, \\ \lambda P_{n-1}-\gamma n P_n=0. \end{aligned}\right\} \tag{5.20}$$

(5.18) системанинг ўнг томонлари нолга тенгланган, чунки $t \to \infty$ да (5.20) системанинг чап томонлари фақат ноллар бўлиши мумкин. Акс ҳолда $P_k(t)$ да $t \to \infty$ лар чексиз ортган бўлар эди, бунинг эса маъноси бўлмас эди.

Бу чизиқли алгебраик тенгламалар системаси $\sum_{k=0}^{n} P_n =$ $= 1$ шарт билан биргаликда $k = 0, 1, 2, \ldots$ бўлганда P_k эҳтимолларни топишга имкон беради.

Бунинг учун $\lambda P_{k-1} - \gamma k P_k$ ни $z_k (1 \leqslant k \leqslant n)$ орқали белгилаймиз, у ҳолда $z_1 = \lambda P_0 - \gamma P_1$ ва системанинг биринчи тенгламасига асосан $z_1 = 0$.

Бу тенгламанинг бу системасидан қуйидагига эга бўламиз:

$$z_k - z_{k+1} = 0,$$

чунки

$$\lambda P_{k-1} - \gamma k P_k - [\lambda P_k - \gamma (k+1) P_{k+1}] = 0$$

ва $z_n = 0;\ 1 \leqslant k \leqslant n - 1$
$k = 1$ бўлганда

$$z_1 = 0;\ z_2 = 0 \text{ ва ҳоказо.}$$

$$z_1 = z_2 = z_3 = \ \ldots \ = z_n = 0.$$

Шунинг учун, бу ердан

$\lambda P_{k-1} = \gamma_k P_k$ ва $k = 1, 2, \ldots, n$ бўлса, $P_k = \frac{\lambda P_{k-1}}{\gamma k}$.

Демак,

$$\left.\begin{aligned} & P_1 = \frac{\lambda}{\gamma} P_0; \\ & P_2 = \frac{\lambda}{2\gamma} P_1 = \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^2 \frac{1}{1 \cdot 2} P_0; \\ & P_3 = \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^3 \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} P_0, \ \ldots, \ P_k = \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^k \frac{P_0}{k!}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.21)$$

P_0 нинг қийматини (5.19) тенгламадан топамиз: $t \to \infty$, $\sum_{m=0}^{n} P_m = 1$ да лекин

$$P_m = \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^m \frac{P_0}{m!}.$$

Бу ердан

$$P_0 \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^m = 1; \qquad P_0 = \frac{1}{\sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^m}. \qquad (5.22)$$

(5.21) ва (5.22) формулалардан келадиган талабнинг қайтарилиб юбориш эҳтимолини топиш мумкин.

Агар системанинг барча аппаратлари банд бўлса, талаб қабул қилинмайди, яъни $k = n$ ва

$$P_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{n}\right)^n \frac{1}{n!}}{\sum\limits_{m=0}^{n} \frac{1}{m!}\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^m}. \tag{5.23}$$

Банд аппаратлар сонининг математик кутилиши қуйидагига тенг:

$$M = \sum_{k=1}^{n} k P_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^k P_0 \tag{5.24}$$

Бу формулалар хизмат кўрсатиш вақти ихтиёрий қонун бўйича тақсимланган ҳолда ҳам ўринлидир.

1- мисол. Бензин (ёнилғи) қуйиш пунктида тўртта қурилма ишлайди. Агар барча қурилмалар банд бўлса, у ҳолда ёнилғи олмоқчи бўлган навбатдаги машина, кутиб ўтирмасдан, кейинги пунктга томон жўнаб кетади. Ёнилғи олмоқчи бўлган машиналарнинг бир соатдаги ўртача сони 20 та, 1 машинага хизмат кўрсатиш ўртача вақти эса 6 мин га тенг бўлсин. Вақтнинг бирор оралиғида машинанинг ёнилғи олмоқчи бўлиш эҳтимоли шу катталикларга боғлиқ. Серқатнов трассада бу эҳтимол t га боғлиқ, трасса қанча серқатнов бўлса, бу боғланиш шунча кам бўлади. Шунинг учун оқимни стационар деб ҳисоблаш мумкин.

Бунда $(t + \Delta t)$ вақт ичида k та янги машина келиш эҳтимоли жуда кичик ва t гача қанча машина келганлигига боғлиқ эмас, шунинг учун оқим сўнгтаъсирнинг йўқлиги хоссасига эга деб ҳисоблаш мумкин. Бундан ташқари, хизмат кўрсатиш бутун сутка давомида деярли бир текис бўлади деб ҳисоблаш мумкин. Шунинг учун вақтнинг кичик Δt оралиғида камида иккита машинанинг хизмат кўрсатиш учун мурожаат қилиш эҳтимоли кичикдир. Бу эса ҳодисанинг ординар деб ҳисоблаш имконини беради. Юқорида келтирилган мулоҳазаларга кўра талаблар оқимини энг содда оқим деб фараз қилиш мумкин.

Бундай оқимни тўла характерлаш учун битта ўзгармас катталикни—вақт бирлиги ичида келадиган талаблар сонининг математик кутилишини билиш кифоя. Масала шартига кўра $\lambda = 20$. Хизмат кўрсатишнинг давомийлиги турлича. Хизмат кўрсатиш вақти кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган деб фараз қиламиз. Хизмат кўрсатишнинг ўртача вақти 6 мин бўлгани учун, 1 соатни вақт бирлиги сифатида қараб, кўрсаткичли қонуннинг параметрини аниқлаймиз:

$$\gamma = \frac{1}{\frac{1}{10}} = 10,$$

чунки 6 мин $=$ 0,1 соат.

(5.23) формуладан навбатдаги машина келган моментда барча қурилмалар бандлиги ва у йўлида давом этишга мажбур бўлиш эҳтимолини топамиз:

$$P_4 = \frac{\left(\frac{20}{10}\right)^4 \cdot \frac{1}{4!}}{\sum\limits_{m=0}^{4} \frac{1}{m!}\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^m} = \frac{2^4}{4!\left(1+2+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}\right)} = \frac{16}{24} \cdot \frac{1}{7} \approx 0{,}09.$$

Демак, ёнилғи олиш учун келадиган ҳар 100 машинадан ўртача 90 тасига хизмат кўрсатилиб, 10 тасига эса хизмат кўрсатилмайди.

Пунктнинг ўртача бандлиги қанча? Банд қурилмалар сонининг математик кутилиши:

$$M = \sum_{k=0}^{n} kP_n.$$

P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 катталикларни ҳисоблаймиз:

$$\frac{P_k}{P_0} = \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^k = \frac{2^k}{k!}, \quad \lambda = 20, \quad \gamma = 10, \quad P_0 = \frac{1}{7} = 0{,}143;$$

$$7P_0 = 1.$$

Демак, математик кутилиш $M = 1{,}87$; яъни ўртача 1,87 та қурилма банд бўлади ёки уларнинг ҳар бири иш кунининг 1,87:4 $=$ 0,47 қисмида банд бўлади.

10- §. Аппаратларнинг сони чекланган системаларда хизмат кўрсатилиши

Аппаратлар сони катта бўлганда системанинг ҳолатини аниқлаш, хусусан t моментда роса k та аппаратнинг банд бўлиш эҳтимолини аниқлаш муҳимдир.

Бу эҳтимол вақтнинг бошланғич моментида барча аппаратлар бўш бўлганлиги шартида

$$P_k(t) = \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^k (1-e^{-\lambda\tau})^k \cdot e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})}$$

га тенг, бунда $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Бошланғич моментда барча аппаратлар бўш бўлганлиги шартида t моментда банд бўлган аппаратлар ўртача сони

$$M = \frac{\lambda}{\gamma}(1 - e^{-\lambda t}).$$

Ўтаётган процессда k та аппаратнинг банд бўлиш эҳтимоли бошланғич ҳолатдан қатъи назар

$$P_0 = e^{-\frac{\lambda}{\gamma}}$$

га тенг.

Кутиладиган системалар. Системада аппаратлар сони чекланган бўлиб, у n га тенг.

Ҳар бир аппарат бир вақтда битта талабни бажаради. Янги келган буюртмани бўш аппаратларнинг исталган бири бажаради. Агар барча аппаратлар банд бўлса, у ҳолда янги келган буюртма хизмат кўрсатиш системасида қолади ва навбатга туриб, хизмат кўрсатилишини кутади.

Битта талабга хизмат кўрсатилиш вақти γ ушбу кўрсаткичли тақсимот қонунига бўйсунадиган тасодифий миқдордир:

$$P(\gamma < t) = 1 - e^{-\gamma t}.$$

Системада m тадан (m — чекли сон) ортиқ талаб бўлмаслиги лозим.

Оқим характеристикаси:

1. $\lambda\tau + 0(\tau)$, агар t моментда олдин талаб келмаган бўлса, у ҳолда $(t, t+\tau)$ вақт ичида талаб келиш эҳтимоли. Бу ерда $\lambda > 0$. У илгари келган m талаблар сонига боғлиқ эмас.

2. Талаблар келиш моментлари эркли ҳодисалардир (вақтнинг талаблар келиш орасидаги оралиқлари кесишмайди). Қаралаётган системанинг иш сифати қуйидагилар билан аниқланади:

а) навбатнинг ўртача узунлигининг хизмат кўрсатиш системасида бир вақтда бўлган талабларнинг энг катта сонига нисбати. Бу нисбат хизмат кўрсатилаётган *объектнинг бекор туриш коэффициенти* дейилади;

б) бўш аппаратлар ўртача сонининг аппаратлар жами сонига нисбати. Бу нисбат хизмат кўрсатувчи аппаратнинг *бекор туриш коэффициенти* дейилади (яъни системанинг иш коэффициенти навбатда турган талабнинг вақтдан йўқотиши ва системанинг ишлатилиш тиғизлиги билан аниқланади).

$P_k(t)$ орқали t моментда системада роса k та талаб борлик эҳтимолини белгилаймиз:

$k < n$ бўлганда барча k та талаб бажарилади ва навбат кутиш йўқ. Бу ҳолда система қайтариладиган системалар билан бир хил шароитда бўлади. Шунинг учун $P_k(t)$ эҳтимолларни аниқлайдиган дифференциал тенгламалар системасининг биринчи n та тенгламаси (5.21) ва (5.22) системаларнинг тегишли тенгламаларидан ҳеч бир фарқ қилмайди. Лекин системанинг сўнгги тенгламаси янги тенглама билан алмаштирилиши лозим, чунки бу ҳолда система a_n ҳолатдан a_{n+1} ҳолатга ўтиши мумкин ($k = n + 1$ бўлганда барча аппаратлар банд ва битта буюртма навбатда турибди).

Олдинги бўлимда қўлланилган мулоҳазаларни қўлланиб, ушбу чизиқли тенгламалар системасини топамиз:

$$\begin{aligned} &0 = -\lambda_m P_0 + \gamma P_1, \\ &0 = (m-k+1)\lambda P_{k-1} - [(m-k)\lambda + k\gamma] P_k + \\ &\quad + (k+1)\gamma P_{k+1};\ 0 \leqslant k \leqslant n, \\ &0 = (m-k+1)\lambda P_{k-1} - [(m-k)\lambda + n\gamma] P_k + n\gamma P_{k+1};] \\ &\quad n \leqslant k \leqslant m. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Бундан $0 = \lambda P_{m-1} - n\gamma P_m$ шартда P_k нинг қийматини аниқлаймиз, бунинг учун бундай белгилаймиз:

$$\begin{aligned} &(m-k)\lambda P_k - (k+1)\lambda P_{k+1} = z_k; \qquad 0 \leqslant k \leqslant n. \\ &(m-k)\lambda P_k - n\gamma P_{k+1} = z_k; \qquad n \leqslant k \leqslant m. \end{aligned}$$

(5.25) системада эски ўзгарувчиларни янгилари билан алмаштириб, қуйидагига эга бўламиз:

$z_0 = 0,\ z_k - z_{k-1} = 0,$ агар $0 \leqslant k \leqslant n$ бўлса;

$z_k = 0,$ агар $0 \leqslant k \leqslant m - 1$ бўлса

Бу ўзгаришлар $k = 0, 1, 2, \ldots$ учун тегишли ифодаларни P_k лар орқали бундай ифодалашга имкон беради:

$$P_{k+1} = \frac{(m-k)\lambda}{(k+1)\gamma} P_k; \qquad 0 \leqslant k < n \text{ ва } P_{k+1} = \frac{(m-k)\lambda}{n\gamma} P_k;$$

$$n \leqslant k \leqslant m.$$

$$P_1 = m\frac{\lambda}{\gamma} P_0, \qquad P_2 = \frac{m-1}{1\cdot 2}\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right) P_1 = \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^2 P_0 \text{ ва}$$

ҳоказо.

Демак,

$$P_k = \frac{m!}{k!\,(m-k)!}\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^k P_0; \qquad 1 \leqslant k \leqslant n \text{ бўлса;}$$

$$P_{n+1} = \frac{m-n}{n\gamma} P_n = \frac{m!}{n\cdot n!\,[m-(n+1)]!}\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{n+1} P_0;$$

$$n \leqslant k \leqslant m.$$

$$P_{n+2} = \frac{[m-(n-1)]}{n\gamma}\,\gamma\, P_{n+1} = \frac{m!}{n^2\, n!\,[m-(n+2)]!}\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{n+2} P_0.$$

Шундай қилиб,

$$P_k = \frac{m!}{n^{k-n}\, n!\,(m-k)}\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^k P_0; \qquad n \leqslant k \leqslant m. \quad (5.26)$$

Аппаратлар сони талаблар сонидан кичик бўлганда навбат пайдо бўлади:

$$P_k = \frac{m!}{k!\,(m-k)!}\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^k P_0; \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Бу ҳолда системага кирган талаблар сони хизмат қилаётган аппаратлар сонидан ошмайди.

$\sum\limits_{k=0}^{m} P_k = 1$ шартдан $P_0 = 1 - \sum\limits_{k=1}^{m} P_k$ ни аниқлаймиз ёки

$$P_0\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{m!}{k!\,(m-k)!}\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^k + \sum_{k=n+1}^{m}\frac{m!}{n^{k-n}\, n!\,(m-k)!}\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^k\right] = 1.$$

Бу барча аппаратларнинг бўш бўлиш эҳтимолидир.

1. Хизмат кўрсатилишини кутаётган талабларнинг ўртача сони навбат узунлигининг математик кутилишига тенг:

$$M_1 = \sum_{k=n+1}^{m}\frac{(k-n)\,m!}{n^{k-n}\, n!\,(m-k)!}\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^k P_0$$

$$\text{ёки} \quad M = \sum_{k=n+1}^{m}(k-n) P_k.$$

Бу ердан хизмат кўрсатилаётган объектнинг бекор туриш коэффициентини топамиз:

$$\frac{M_1}{m} = \frac{1}{m} \sum_{k=n+1}^{m} (k-n) P_k.$$

2. Системада бор бўлган талабларнинг ўртача сони кутаётган ва хизмат кўрсатилаётган талабларнинг математик кутилишига тенг:

$$M_2 = \sum_{k=1}^{m} k P_k = \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{m!}{(k-1)!\,(m-k)!} \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^k + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=n+1}^{m} \frac{km!}{n^{k-n} n!\,(m-k)!} \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^k \right] P_0.$$

3. Хизмат кўрсатиш аппаратларининг ўртача сони бўш аппаратларнинг математик кутилишига тенг:

$$M_3 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) P_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-k)m!}{k!\,(m-k)!} \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^k P_0.$$

Бу ердан хизмат кўрсатиш аппаратининг бекор туриш коэффициенти:

$$\frac{M_3}{m} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) P_k = \sum_{k=0}^{n-1} P_k - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k P_k.$$

4. Хизмат кўрсатилишини кутаётган талаблар сонининг берилган N сондан ортиқ бўлиш эҳтимоли қуйидагига тенг:

$$P_{k>N} = \sum_{k=N+1}^{m} P_k = 1 - \sum_{k=0}^{N} P_k.$$

Мисол. Ишчи m та қурилмадан иборат автоматлар группасига хизмат кўрсатади. Автоматлар нормал ишлаётганда ишчининг аралашиши талаб этилмайди. Қурилма ўртача 7 соат ишлаганда бир марта тўхтайди. Қурилманинг вақт ўтиши билан тўхталмаслик эҳтимоли камайиб боради. Бу эҳтимол $e^{-\lambda t}$ га тенг бўлсин. Демак, автоматнинг тўхтагунча ишлаш вақтининг t дан кичик бўлиш эҳтимоли $P(\gamma < t) = 1 - e^{-\lambda t}$ га тенг бўлади.

Илгари айтилган эдики, агар γ тасодифий миқдор $P(\gamma \quad t) = 1 - e^{-\gamma t}$ қонунга бўйсунадиган бўлса, у ҳолда $\frac{1}{\gamma}$ тасодифий миқдорнинг математик кутилишидир.

Қаралаётган мисолда қурилманинг тўхташлари орасидаги вақт шу қонунга бўйсунади, демак, $\frac{1}{\gamma}$ автоматларнинг тўхташлари орасидаги ўртача вақтдир. Бу вақт шартга кўра 7 соатга тенг. Сўнгра ишчининг битта қурилмани тузатишига ўртача 30 мин вақт кетади ва хизмат кўрсатиш вақти γ параметрли кўрсаткичли қонунга бўйсунади деб фараз қиламиз. У ҳолда $\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{14}$, яъни $\gamma = 14$.

Қуйидагиларни аниқлаймиз: а) хизмат кўрсатишни кутадиган қурилмаларнинг ўртача сони; б) автоматнинг бекор туриш коэффициенти; в) агар ишчи 10 та қурилмага қараса, унинг бекор туриш коэффициенти.

Бу ерда $n = 1$, чунки 10 та қурилмага битта ишчи қарайди. Жами талаблар сони 10 дан — қурилмалар сонидан ортиқ бўла олмайди. Қаралаётган система 11 та турли ҳолатда бўлиши мумкин.

1. Барча қурилмалар ишламоқда.

2. Битта қурилма ишламаётибди ва унга ишчи қарамоқда, тўққизта қурилма эса ишламоқда.

3. Иккита қурилма тўхтаб турибди, улардан биттаси ремонт қилинмоқда, иккинчиси эса ремонтни кутмоқда, қолган саккизта қурилма ишламоқда ва, ниҳоят, барча қурилмалар тўхтаб турибди, улардан бири ремонт қилинмоқда, тўққизтаси эса ремонтни кутмоқда.

(5.26) формуладан фойдаланиб, ишчининг битта қурилмага қараётганлиги эҳтимолини топамиз:

$$P_1 = \frac{10!}{1!\,(10-1)!}\left(\frac{1}{14}\right)^1 P_0 = \frac{10\cdot 9^1}{9}\cdot\frac{1}{14}P_0 = \frac{10}{14}P_0 \approx 0{,}715\,P_0$$

Ишчининг битта қурилмага қараётганлиги, қолган $k-1$ та қурилманинг эса тўхтаб турганлигининг

$$P_k = \frac{10!}{(10-k)!}\left(\frac{1}{14}\right)^k P_0;\ 2 \leqslant k \leqslant 10.$$

формула бўйича ҳисобланган эҳтимоллари 6- жадвалда келтирилган.

6- жадвал

k	Ремонт кутувчи қурилмалар сони	$\frac{P_k}{P_0}$	P_k	$(k-1)\,P_k$	kP_k
0	0	1,0000	0,3780	0	0
1	0	0,7150	0,2700	0	0,2700
2	1	0,4610	0,1740	0,1740	0,3480
3	2	0,2630	0,0990	0,1980	0,2970
4	3	0,1315	0,0497	0,1481	0,1788
5	4	0,0566	0,0214	0,0856	0,1070
6	5	0,0203	0,0077	0,0385	0,0462
7	6	0,0058	0,0022	0,0132	0,0156
8	7	0,0014	0,0005	0,0035	0,0040
9	8	0,0002	0,0001	0,0008	0,0009
10	9	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000

Сўнгги формуладан

$$\frac{P_k}{P_0} = \frac{10!}{(10-k)!}\left(\frac{1}{14}\right)^k$$

эканлиги келиб чиқади. $\sum_{k=0}^{n} P_k = 1$ бўлгани учун учинчи устуннинг йиғиндиси $\frac{1}{P_0}$ 2,6549 га тенг. Бу ердан $P_0 = \frac{1}{2{,}6549} \approx 0{,}3780.$

6- жадвалдан кўринадики,

а) ишчи иш кунининг ўртача 0,6 қисмида банд бўлади, чунки барча қурилмаларнинг ишлаб туриш эҳтимоли $0{,}378 \approx 0{,}4$ га тенг;

б) ремонтни кутаётган қурилмалар сонининг математик кутилиши $M_1 = \sum_{k=2}^{10} (k-1)\,P_k = 0{,}6617$ тенг (бешинчи устуннинг йиғиндиси). Демак, ўнта қурилмадан ўртача 0,71 таси ремонтни кутиб туради;

в) ремонтни кутаётган ва ремонт қилинаётган қурилмалар сонининг математик кутилиши қуйидагига тенг:

$$M_2 = \sum_{k=1}^{10} kP_k = 1{,}2675$$

(олтинчи устун йиғиндиси), яъни ўртача 1,3 қурилма маҳсулот бермайди;

г) бекор туриш коэффициенти қуйидагига тенг:

$$\frac{M_1}{10} = \frac{0{,}6617}{10} = 0{,}06617,$$

яъни ҳар бир қурилма иш кунининг тахминан 0,07 қисмида ремонтни кутиб бекор туради.

Энди меҳнатни ташкил этиш қурилмаларнинг унумдорлигига қандай таъсир этишини аниқлайлик.. Энди бир ишчи эмас, балки 3 ишчидан иборат бригада 10 та эмас, балки 30 та қурилмага қарасин. Масаланинг қолган барча шартлари ўзгаришсиз қолади. Энди бир вақтда 30 та қурилмага қаралади. Олдинги масаладаги қаралган параметрларни аниқлаймиз (7- жадвал).

7- жадвал

k	Танланган қурилмалар сони	Ремонт кутувчи қурилмалар сони	Бўш ишчилар сони	P_k/P_0	P_k	$(k-3)\ P_k$	P_k^k
0	0	0	3	1,0000	0,1170	—	
1	1	0	2	2,1444	0,2540	—	
2	2	0	1	2,2100	0,2690	—	
3	3	0	0	1,4700	0,1785	—	
4	3	1	0	0,9100	0,1063	0,1063	0,4252
5	3	2	0	0,5580	0,0656	0,1312	0,6560
6	3	3	0	0,1870	0,0217	0,0651	0,3906
7	3	4	0	0,0534	0,0063	0,0252	0,1764
8	3	5	0	0,0146	0,0017	0,0054	0,0432
9	3	6	0	0,0038	0,0004	0,0024	0,0216
10	3	7	0	0,0009	0,0001	0,0007	0,0070
11	3	8	0	0,0003	0,0000		
12	3	9	0	0,0001	0,0000		
13	3	10	0	0,000			
14	3	11	0	0,000			
15	3	12	0	0,000			
16	3	13	0	0,000			
				8,5525	1,0116	0,0063	1,7200

$$P_0 = 1\,; \sum_{k=0}^{30} P_k = 1:8{,}5523 \approx 0{,}117.$$

Бу жадвалда 6- жадвалдаги каби аввал P_k/P_0 нисбат аниқланади. $k > 10$ бўлганда (бешинчи устун) P_k қийматлар кичик, шу сабабли улар тушириб қолдирилган.

Бу ерда ремонтни кутаётган қурилмалар сонининг математик кутилиши қуйидагига тенг:

$$M_1 = \sum_{k=0}^{30} (k-3) P_k = 0{,}3363.$$

Қурилманинг бекор туриш коэффициенти:

$$\frac{M_1}{30} = 0{,}01122.$$

Бундан кўринадики, ҳар бир қурилма иш кунининг 0,6112 қисмида бекор туради.

Меҳнатни турлича ташкил этилганда 30 та қурилмага хизмат кўрсатиш натижаларини таққослайлик.

1. Ремонтни кутаётган қурилмалар сонининг математик кутилиши биринчи ҳолда $M_1 = 0{,}6615$, иккинчи ҳолда $M_2 = 0{,}3363$. Қурилмаларнинг бекор туриш коэффициенти мос равишда 0,0662 ва 0,0112.

2. Бекор турган қурилмалар сонининг математик кутилиши:

$$M_2 = \sum_{k=1}^{30} kP_k = 17{,}2.$$

30 та қурилмадан тахминан 1,2 та қурилма бекор туради.

Биринчи масалада 10 та қурилмадан тахминан 1,3 қурилма бекор туради. Битта қурилма иш вақтининг ўртача биринчи ҳолда $\frac{1267}{10} = 0{,}13$ қисмида, иккинчи ҳолда $\frac{172}{30} = 0{,}06$ қисмида бекор туради.

Талаблар сони чекланмаган системалар: энди талаблар сони n чекланмаган оқимни қараймиз. Бу ҳолда агар $\frac{\lambda}{\gamma} \leqslant n$ шарт бажарилса, навбат чексиз ортмайди, бу ерда, илгаригидек, λ вақт бирлиги ичида келадиган талабларнинг ўртача сони $\frac{1}{\gamma}$ битта талабни бажарилиш ўртача вақти.

Бу ҳолда P_k эҳтимолларни аниқлаш учун дифференциал тенгламаларнинг сони чекланмаган бўлади.

Бу ерда ҳам, олдинги масалалардаги каби лимит қийматларни топилади ва алгебраик тенгламалар системасидан эҳтимолларни аниқлаш учун қуйидаги ифода келиб чиқади:

$$P_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^k P_0, \tag{5.27}$$

бу ерда $1 \leqslant k \leqslant n$

$$P_k = \left(\frac{\lambda}{n\gamma}\right)^{k-n} P_n = \left(\frac{\lambda}{n\gamma}\right) P_{n-1} = \frac{1}{n!\, n^{k-n}}\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^k P_0. \tag{5.28}$$

P_0 ушбу

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1 \tag{5.29}$$

шартдан аниқланади:

$$P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^k + \frac{\gamma}{(n\gamma - \lambda)\,(n-1)!\,(\lambda/\gamma)^n}}. \tag{5.30}$$

Агар $\frac{\lambda}{n\gamma} \geqslant 1$ бўлса, у ҳолда (5.30) нинг махражида турган қаторнинг йиғиндиси чексиз ортади. Бу эса қуйидагини англатади: хизмат кўрсатиш системасидаги навбат чексиз ортади, бу эса системанинг келаётган талаблар оқимига хизмат кўрсата олмаслигидан дарак беради. Қатор яқинлашиши учун

$$\frac{\lambda}{n\gamma} < n \text{ ёки } \frac{\lambda}{\gamma} < 1 \tag{5.31}$$

бўлиши зарур. Бу тенгсизликнинг бажарилиши системанинг муваффақиятли ишлаши учун зарурдир.

(5.31) шартни ҳисобга олиб, барча аппаратларнинг банд бўлиш эҳтимолини топамиз ($k \geqslant n$):

$$\Pi = \sum_{k=n}^{\infty} P_k = \frac{n^n}{n!} P_0 \sum \left(\frac{\lambda}{n\gamma}\right)^n = \frac{\gamma P_0}{(n-1)!\,(n\gamma - \lambda)}\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^n, \tag{5.32}$$

демак,

$$P_k = \left(1 - \frac{\lambda}{n\gamma}\right) \cdot \Pi$$

β орқали хизмат кўрсатила бошланишини кутиш вақтининг тақсимот қонунини белгилаймиз: ўтаётган процессда хизмат кўрсатила бошланишини кутиш давомийлигининг эҳтимолини топамиз. Бунинг учун шартли ва тўла $P(\beta > t)$ эҳтимолларни аниқлаймиз, бу ерда $P(\beta > t)$ — хизмат кўрсатилишини кутиш вақтининг ихтиёрий t вақтдан ортиқ бўлиш эҳтимоли.

Агар $g_s(t)$ орқали t вақт ичида роса $k \geqslant n$ талабни бажарилиш эҳтимолини белгиласак, у ҳолда шартли эҳтимолни қўшиш теоремасини қўлланиб қуйидагича топиш мумкин:

$$P_k(\beta > t) = \sum_{s=0}^{k-n} g_s(t).$$

$S = 0$ да $g_0(t)$ системага t вақт ичида битта ҳам талаб келмаслик ва битта ҳам аппарат хизмат кўрсатишни тугалламаслик эҳтимолини англатади:

$$g_0(t) = e^{-\gamma n t}.$$

Кўпайтириш теоремасини қўлланиб, кўрсатилган вақтда битта ҳам аппарат хизмат кўрсатишни тугалламаслик эҳтимолини топамиз:

$$[g_0(t)]^n = e^{-n\gamma t} \qquad (5.33)$$

(5.30) ва (5.33) формулалардан $\lambda = n\gamma$ да қуйидагини топамиз:

$$g_s(t) = \frac{(\gamma\, nt)^s}{S!}\, e^{-\gamma n t},$$

бу эса t вақт ичида системадан роса n та талабнинг кетиш эҳтимолидир. Навбат энди $k - n$ та талабга сурилади ва, демак,

$$P_k(\beta > t) = \sum_{s=0}^{k-n} g_s(t) = \sum_{s=0}^{k-n} \frac{(\gamma\, n\, t)^s}{s!}\, e^{-\gamma n t}.$$

Бу ифодани қийматларни қўйиб, ўзгартирилгандан кейин ушбу кўринишга келтириш мумкин:

$$P(\beta > t) = \Pi e^{-(k\gamma - \lambda)t}; \qquad t \geqslant 0. \qquad (5.34)$$

У ҳолда хизмат кўрсатиш вақтининг t_1 дан ортиқ бўлмаслик эҳтимоли қуйидагига тенг бўлади:

$$t_1 = P(\beta \leqslant t) = 1 - \Pi e^{-(n\gamma - \lambda)\, t}.$$

Хизмат кўрсатила бошланишини кутиш вақти β нинг тақсимот қонунини билган ҳолда хизмат кўрсатила бошланишини кутишнинг ўртача вақтини топилади (n та парат бўлганда):

$$T_n = M(\beta) = -\int_0^\infty t\,d\,P(\beta > t) = \Pi\int_0^\infty t(n\gamma-\lambda)\,e^{-(n\gamma-\lambda)t}\,dt.$$

Интеграллашдан сўнг хизмат кўрсатиш белгиланишини кутиш вақтини топиш учун ифода ҳосил қиламиз:

$$T_n = \frac{\Pi}{n\gamma-\lambda}. \qquad (5.35)$$

Олдинги масалалардаги каби, навбат узунлигининг математик кутилиши M_1, системада бўлган талабларнинг ўртача сони M_2, бўш аппаратларнинг ўртача сони M_3 ни топилади,

$$M_1 = \sum_{k=n}^{\infty}(k-n)\frac{P_0}{n!\,n^{-n}}\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^k = P_n\sum_{k=0}^{\infty}k\left(\frac{\lambda}{n\gamma}\right)^k,$$

чунки $P_n = \frac{P_0}{n!}\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^n$.

Йиғинди белгиси остида турган ифодани $\frac{\lambda}{n\gamma}$ нинг даражалари бўйича ёйиш ва тегишли ўзгартиришлардан сўнг бошқача ифодани ҳосил қилиш мумкин:

$$M_1 = P_n\frac{\lambda}{n\gamma\left((1-\frac{\lambda}{n\gamma}\right)^2};$$

$$M_2 = M_1 + P_0\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^k + \frac{nP_n}{1-\frac{\lambda}{n\gamma}};$$

$$M_3 = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n-k}{k!}\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^k P_0.$$

АДАБИЁТ

1. В. Қ. Қобулов. Оптимал планлаштириш масалалари. «ФАН», Т., 1975.

2. В. Қ. Қобулов. Функционал анализ ва ҳисоблаш математикаси. «Ўқитувчи», Т., 1976.

3. Т. А. Саримсоқов. Ҳақиқий ўзгарувчининг функциялари назарияси. «Ўқитувчи», Т., 1968.

4. О. Абдуллаев, Т. Аҳмедов, М. Зиёхўжаев. Ҳисоблаш техникасининг инженерлик ва иқтисодий ҳисоблашларда ишлатилиши. «Ўқитувчи», Т., 1976.

5. О. Абдуллаев, М. Зиёхўжаев. Халқ хўжалигида математик методлар. «Фан», Т., 1972.

6. Б. Л. Демидович, И. А. Марон. Основы вычислительной математики. Физматгиз, М., 1963.

7. Б. Л. Демидович, И. А. Марон, Э, З. Шувалова Численные методы анализа. Физматгиз, М., 1963.

8. Р. С. Гутер, Б. В. Овчинский. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. Физматгиз, М., 1962.

9. Э. Д. Буд. Численные методы. Физматгиз, М., 1959.

10. М. Д. Сальвадори. Численные методы в технике. ИЛ, М., 1955.

11. Дж. Скарбаро. Численные методы математического анализа. ГТТИ, М., 1934.

12. А. С. Солодовников. Введение в линейную алгебру и линейное программирование. «Просвещение», М., 1966.

13. О. В. Мантуров ва бошқалар. Математика терминлари изоҳли луғати. «Ўқитувчи», Т., 1974.

14. А. Табак, Б. Қуо. Оптимальное управление и математическое программирование (перевод с английского), «Наука», М., 1975.

15. Л. Н. Авдотьин. Применение вычислительной техники и моделирования в архитектурном проектировании. «Стройиздат», М., 1978

16. Ф. И. Карпелевич,. Л. Е. Садовский. Элементы линейной алгебры и линейного программирования. «Наука», М., 1965 г.

17. М. И. Баканов и др. Математические методы анализа в торговле. «Экономика», М., 1967

18. Н. С. Пискунов. Дифференциал ва интеграл ҳисоб. II том. «Ўқитувчи», Т., 1974.

19. Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. Физматгиз, М., 1961.

20. Е. С. Вентцель. Теория вероятностей, «Наука», М., 1964

21. В. Е. Гмурман. «Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика», «Уқитувчи», Т., 1977

22. В. И. Романовский. «Математик статистиканинг тажрибада қўлланилиши», «Фан», Т., 1950

МУНДАРИЖА

Сўз боши . . . .

I ҚИСМ

I боб. **Тўпламлар назарияси элементлари ва матрицалар**

1-§. Тўпламлар назарияси элементлари 5
2-§. *n* ўлчовли чизиқли фазо 6
3-§. *n* ўлчовли фазода базис ва координаталар . . 9
4-§. Қавариқ тўпламлар 11
5-§. Матрицалар ва детерминантлар 14
6-§. Матрицалар устида амаллар 18
7-§. Чизиқли тенгламалар системасини матрицалар ёрдамида ечиш 23

II боб. **Математик программалаштириш усуллари**

1-§. Математик программалаштиришнинг умумий масаласи 27
2-§. Математик программалаштириш турлари . 28
3-§. Чизиқли программалаштиришда масаланинг қўйилиши 30
4-§. Чизиқли программалаштиришнинг айрим масалалари 32

III боб. **Графлар назарияси элементлари**

1-§. Граф ва унинг элементлари 43
2-§. Графлар назарияси методлари 46
3-§. Йўналиши кўрсатилган графлар 50

IV боб. **Эҳтимоллар назарияси ва математик статистиканинг асосий тушунчалари**

1-§. Эҳтимоллар назариясининг асосий тушунчалари. 50
2-§. Тақсимот функцияси ва тақсимот қонунлари . 57
3-§. Математик статистиканинг асосий тушунчалари. 59
4-§. Математик статистика методлари 62

II ҚИСМ

СОНЛИ АНАЛИЗ МЕТОДЛАРИ

I боб. **Тенгламаларни тақрибий ечиш**

1-§. Умумий мулоҳазалар . : 66
2-§. Ватарлар ва уринмалар усули 69
3-§. Итерация усули 73
4-§. Тенгламалар системаси учун уринмалар усули 79
5-§. Тенгламалар системаси учун итерациялар усули 82
6-§. Алгебраик тенглама бўлган ҳол 85

II боб. **Интерполяциялаш**

1-§. Интерполяциялаш ҳақида тушунча 90
2-§. Параболик интерполяциялаш 92
3-§. Аргументнинг тенг узоқликдаги қийматлари. Чекли айирмалар 96
4-§. Нъютоннинг интерполяцион формуласи . . . 106
5-§. Сонли дифференциаллаш 113

III боб. **Тақрибий интеграллаш**

1-§. Механик квадратуралар 117
2-§. Механик квадратуралар формулаларининг аниқлиги ҳақида 123
3-§. Қаторлар ёрдамида интеграллаш 128

IV боб. **Дифференциал тенгламаларни тақрибий интеграллаш**

1-§. Умумий изоҳлар 131
2-§. Сонли интеграллаш методлари. Эйлер методи . 132
3-§. Адамс-Крилов методи 135

III ҚИСМ

I боб. **Инженерлик-иқтисодий масалалари**

1-§. Математика ва инженерлик-иқтисодий масалалари 138
2-§. Иқтисодий-математик тадқиқотлар 139
3-§. Иқтисодий-математик моделлар 142

II боб. **Операцияларни текшириш ва оптималлаштириш мисоллари**

1-§. Чизиқли программалаштиришнинг иқтисодий математик модели 144
2-§. Динамик программалаштириш 151
3-§. Тармоқли планлаштириш ва бошқариш . . . 154
4-§. Бутун сонли программалаштириш 157
5-§. Чизиқли бўлмаган программалаштириш . . . 158
6-§. Эҳтимолий моделлар 159

III боб. **Математик программалаштириш**

1-§. Умумий тушунчалар 163
2-§. Математик программалаштириш масаласининг қўйилиши 163

3-§. Математик программалаштиришга доир мисол 165
4-§. Математик программалаштириш масалаларининг турлари 166
5-§. Қавариқлик 169
6-§. Кун-Таккер теоремаси 173
7-§. Иккилик тушунчаси 176

IV боб. Математик программалаштириш масалаларини сонли ечиш усуллари

1-§. Чизиқли программалаштириш 180
2-§. Квадратик программалаштириш 192
3-§. Чизиқли бўлмаган программалаштириш . . . 197

V боб. Оммавий хизмат назарияси элементлари

1-§. Оммавий хизмат назариясининг моҳияти . . 202
2-§. Келадиган талаблар оқими 203
3-§. Стационар оқим 204
4-§. Энг содда оқим 207
5-§. Ностационар Пуассон оқими 213
6-§. Чекланган таъсирли оқим (Пальма оқими) . . 214
7-§. Хизмат кўрсатиш вақти 216
8-§. Хизмат кўрсатиш вақтининг кўрсаткичли тақсимот қонуни 219
9-§. Қайтариладиган оммавий хизмат системалари 221
10-§. Аппаратларнинг сони чекланган системаларда хизмат кўрсатилиши 230
Адабиёт 242

На узбекском языке

АБУТАЛИЕВ ЭРКИН БАСИРОВИЧ
АЛИМУХАМЕДОВ САТТАР
АЪЗАМОВ АНВАР
БЕКБАЕВ КАЛИКУЛ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ИНЖЕНЕРНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЁТАХ

Учебное пособие для студентов втузов

Ташкент — „Ўқитувчи“ — 1982