А. С. Шапкин, В. А. Шапкин

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

Учебник

Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°»

А. С. Шапкин, В. А. Шапкин

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

Учебник

6-е издание

Допущено Министерством образования и науки Российской Федерации в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 061800 "Математические методы в экономике"

Москва
2016

УДК 519.87:330.4(075.8)
ББК 65.05
Ш23

Рецензенты:
кафедра математических методов в экономике Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова (доктор экономических наук, профессор *Н. П. Тихомиров*) и доктор экономических наук, профессор *Б. А. Лагоша*

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим объединением по образованию в области математических методов в экономике Московского государственного университета экономики, статистики и информатики (МЭСИ).

Шапкин А. С.
Ш23 Математические методы и модели исследования операций: Учебник / А. С. Шапкин, В. А. Шапкин. — 6-е изд. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2016. — 400 с.

ISBN 978-5-394-02610-2

В учебнике изложены экономико-математические методы и модели для решения прикладных задач управления экономическими процессами. Рассмотрены некоторые вопросы применения ЭВМ для принятия управленческих решений.

Для студентов, аспирантов, преподавателей экономических вузов, а также лиц, занимающихся практической деятельностью в экономической области.

ISBN 978-5-394-02610-2

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел II
ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Особенностью развития современного общества является сложный характер рыночной экономики, характеризуемый изменением и быстрой сменяемостью условий экономической деятельности, предъявлением высоких требований к методам планирования и хозяйственной деятельности. В этих условиях использование серьезных методов анализа в экономических исследованиях приобретает первостепенное значение. Математическое моделирование экономических ситуаций на базе современной вычислительной техники позволяет автоматизировать сбор и обработку первичной информации, выделить основные параметры, влияющие на деятельность фирмы, рассчитать различные варианты деятельности (проектирования) фирмы, определить наиболее целесообразные мероприятия, обеспечивающие необходимую эффективность производства или предпринимательства, и на основе этих данных принять решение о выборе оптимальной стратегии по управлению деятельностью фирмы (формы бизнеса).

Учебник написан в соответствии с требованиями Государственных общеобразовательных стандартов на основе примерной программы дисциплины "Математика", утвержденной в 2000 г. Главным управлением образовательных программ и стандартов высшего и среднего профессионального образования Министерства образования Российской Федерации, разделы "Методы оптимизации" и "Исследование операций". Оно соответствует программе дисциплины "Математические методы и модели исследования операций" для спец. 061800 "Математические методы в экономике", а также программе дисциплины "Математика" разделы "Экономико-математические методы", "Экономико-математические модели" и "Математические методы в экономике” для спец. 060600 “Мировая экономика”, 351300 “Коммерция”, 061100 “Менеджмент”, 060800 “Экономика и управление на предприятии” и раздел “Линейная алгебра для спец. 061000 “Государственное и муниципальное управление”, 0602000 “Экономика труда”, 060100 “Экономическая теория” и др.

Учебник содержит четыре раздела.

В разделе 1 (гл. 1—2) “Основы линейного программирования” рассмотрены модели линейного программирования. В главе 1 “Экономико-математические методы и модели” раскрываются основные понятия моделирования систем и процессов, рассматриваются особенности применения методов математического моделирования в экономике, приводится классификация экономико-математических методов. В п. 1.3 рассматриваются постановка задачи линейного программирования и геометрическое решение задач линейного программирования.

Глава 2 “Симплексный метод” посвящена описанию симплексного метода, который относится к числу наиболее распространенных вычислительных методов, реализующих идею последовательного улучшения решения. Этот метод может быть применен при решении любой задачи линейного программирования, т. е. является универсальным. Выводятся и рассматриваются обыкновенные жордановы исключения и на их основе обращается матрица и решаются системы линейных уравнений; вводятся модифицированные жордановы исключения. Решается широкий круг оптимизационных задач на нахождение максимума или минимума линейной целевой функции. В п. 2.9 рассмотрены методы решения задач линейной алгебры и линейного программирования на ЭВМ с помощью программ Excel и Mathcad 2000.

Раздел 2 (гл. 3—7) “Экономико-математические модели задач линейного программирования” посвящен классу экстремальных задач, определяемых линейным функционалом на множестве, задаваемом линейными ограничениями. В главе 3 “Элементы теории двойственности” показано, что рассмотрение пар двойственных задач является эффективным средством исследования проблем линейного программирования и построения различных методов и играет большую роль при экономическом анализе результатов вычисления.

В главе 4 “Транспортная задача” рассмотрена задача оптимального плана перевозок груза из пунктов изготовления в пункты потребления, причем, рассматривается как закрытая, так и открытая модель задачи. Приводится метод решения транспортной задачи с помощью вычислительной техники.

Глава 5 “Целочисленное программирование” посвящена решению экономических задач, в которых переменные величины означают количество единиц неделимой продукции.

В главе 6 “Основы планирования межотраслевого баланса” рассмотрена проблема применения балансового метода в экономических исследованиях, описана схема межотраслевого баланса, приведен порядок расчета основных параметров модели. Изложен метод расчета параметров балансовой модели на ЭВМ.

В главе 7 “Элементы теории игр в задачах моделирования экономических операций” изучаются экономические задачи, в которых достаточно часто решения приходится принимать в условиях неопределенности, то есть в таких условиях, когда или процесс выполнения операции является неопределенным, или нам сознательно противодействует противник, или нет ясных и четких целей (задач) операции. Показан метод сведения матричной игры к задаче линейного программирования.

Раздел 3 (гл. 8—10) “Модели нелинейного программирования” посвящен решению экономических задач, в которых либо целевая функция, либо ограничения, либо то и другое нелинейны. В главе 8 “Классические методы нелинейного программирования” рассмотрен процесс нахождения решения задачи нелинейного программирования с использованием ее геометрической интерпретации и с помощью метода множителей Лагранжа.

В главе 9 “Понятие о выпуклом программировании” изучаются задачи, в которых целевая функция является выпуклой функцией, рассматривается градиентный метод решения подобных задач.

В главе 10 “Динамическое программирование” рассматривается решение таких задач, как задача распределения средств между предприятиями и задача о замене оборудования с помощью математического аппарата, позволяющего осуществлять оптимальное планирование многошаговых управляемых процессов и процессов, зависящих от времени.

Раздел 4 (гл. 11—13) “Прикладные модели исследования операций и экономических процессов” посвящен рассмотрению ряда прикладных задач менеджмента, маркетинга и других областей управления в экономике. В главе 11 “Модели сетевого планирования и управления” рассмотрены задачи планирования разнообразных по своему содержанию работ, процесс выполнения которых нельзя отразить в формальных зависимостях. Приводятся методы определения критических путей, резервов времени, оптимизации сетевых графиков.

В главе 12 “Экономико-математические методы в микроэкономике” рассматриваются модели спроса и предложения, устанавливается влияние факторов рыночного равновесия, эластичности спроса и предложения и налогообложения на производственную деятельность фирм, изучаются соотношения между суммарными, средними и предельными величинами в экономике. Даются методы исследования перечисленных в этой главе моделей на ЭВМ с помощью Mathcad 2000.

Глава 13 “Моделирование систем массового обслуживания” посвящена области прикладной математики, занимающейся анализом процессов в системах производства, обслуживания, управления и др. Рассмотренные задачи носят оптимизационный характер и включают экономический аспект по определению такого варианта системы, при котором будет обеспечен минимум суммарных затрат от ожидания обслуживания, потерь времени и ресурсов на обслуживание и от простоев каналов обслуживания. Эти параметры определяются с помощью ЭВМ.

Главы 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 и 12 написаны А. С. Шапкиным, а главы 7, 11 и 13 — Н. П. Мазаевой.

Раздел I
ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Глава 1
ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

1.1. Математическое моделирование экономических систем

1.1.1. Модели и моделирование

Модель — один из важнейших инструментов научного познания, условный образ объекта исследования (или управления). Модель "конструируется субъектом исследования (или управления) так, чтобы отобразить характеристики объекта (свойства, взаимосвязи, структурные и функциональные параметры и т. п.), существенные для цели исследования. Поэтому вопрос о качестве такого отображения — адекватности модели объекту — правомерно решать лишь относительно определенной цели. Практическое значение модель может иметь при условии, что ее анализ более доступен субъекту исследования в соответствии с имеющимися у него средствами, чем непосредственное изучение объекта.

Конструирование модели на основе предварительного изучения объекта и выделения его существенных характеристик, экспериментальный и теоретический анализ модели, сопоставление результатов с данными об объекте, корректировка модели и т. д. составляют содержание метода моделирования.

Таким образом, процесс моделирования включает три элемента: 1) субъект (исследователь), 2) объект исследования, 3) модель, опосредствующую отношения познающего субъекта и познаваемого объекта. Сущность процесса моделирования схематически может быть представлена рис. 1.1.

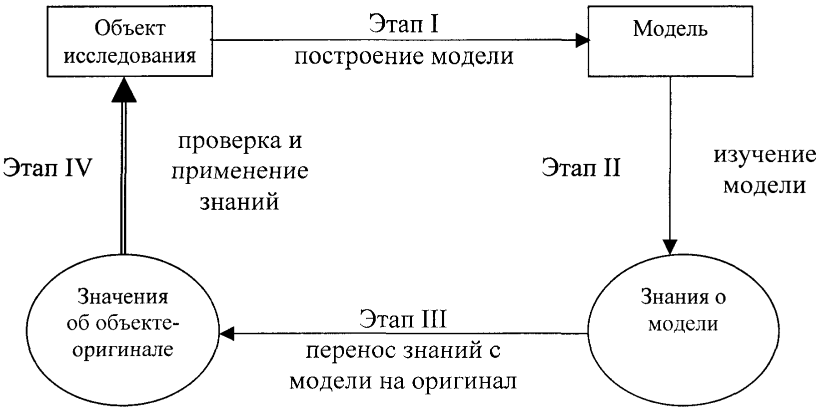


Рис. 1.1

Предпосылкой относительно большей доступности модели для анализа в сравнении с объектом является то, что моделирование, как правило, приводит к упрощенному образу объекта. Однако, в каждом отдельном исследовании необходимо хорошо понимать, на чем основана уверенность в возможности перенесения полученных в исследовании результатов с модели на объект.

Итак, модели выбираются таким образом, чтобы они были значительно проще для исследования, чем интересующие нас объекты. Более того, некоторые объекты вообще не удается исследовать активно. Невозможно, например, на экономике страны ставить эксперимент, имеющий чисто познавательное значение. Однако, поскольку в модели воспроизводятся лишь некоторые наиболее важные в данном исследовании стороны исходного объекта, моделирование позволяет выявить существенные факторы, ответственные за те или иные свойства изучаемых объектов.

Рассмотрим основные типы моделей. Модели можно классифицировать на основе различных характеристик: по характеру моделируемых объектов, по сферам приложения, по глубине моделирования и т. д. Мы остановимся на классификации по характеру моделей (по средствам моделирования), так как нас интересует роль математических моделей (ММ) в исследовании экономических систем. По этому признаку методы моделирования делятся на две большие группы: материальное (предметное) моделирование и идеальное моделирование.

Материальным называется исследование, в котором исследование ведется на основе модели, воспроизводящей основные геометрические, физические, динамические и функциональные характеристики изучаемого объекта. Например, физическое моделирование: берется модель самолета и исследуется в аэродинамической трубе, при этом снимаются характеристики изучаемых (продуваемых) моделей и на основе теории подобия эти характеристики переносятся на настоящий летательный аппарат.

В экономических исследованиях применяется идеальное моделирование, основывающееся не на материальной аналогии моделируемого объекта модели, а на аналогии идеальной, мыслимой. Идеальное моделирование можно разбить на два подкласса: знаковое (числовое) моделирование и интуитивное моделирование.

При знаковом (формализованном) моделировании моделями служат знаковые образования какого-либо вида: схемы, чертежи, графики, формулы и т. д., причем, знаковые образования и их элементы всегда задаются вместе с ними. Важнейшим видом знакового моделирования является математическое моделирование, осуществляемое средствами языка математики и логики.

При интуитивном моделировании не используют четко фиксированных знаковых систем; оно протекает, как принято говорить, “на модельном уровне”. Такое моделирование часто встречается в тех областях науки, где познавательный процесс находится еще на начальной стадии.

Исследования на основе идеальных (в том числе и ММ) моделей носят теоретический характер, т. е. отличаются от эксперимента, являющегося частичным случаем практической деятельности человека. Исследование идеальных моделей — одна из основных задач теоретического мышления.

Роль идеального моделирования особенно велика в экономических исследованиях, поскольку возможности проведения натурного эксперимента с материальными моделями в них ограничены.

1.1.2. Особенности применения метода математического моделирования в экономике

Большинство объектов, изучаемых экономической наукой, может быть охарактеризовано понятием сложная система.

Сложность системы определяется количеством входящих в нее элементов, связями между этими элементами, а также взаимоотношениями между системой и средой. Экономика страны обладает всеми признаками очень сложных систем. Она объединяет огромное число элементов, отличается многообразием внутренних связей и связей с другими системами (природная среда, экономика других стран и т. д.).

Сложность экономики иногда рассматривается как обоснование невозможности ее моделирования, изучения средствами математики. Но такая точка зрения в принципе неверна. Моделировать можно объект любой природы и любой сложности. И как раз сложные объекты представляют наибольший интерес для моделирования, именно здесь моделирование может дать результаты, которые нельзя получить другими способами исследования.

Основополагающим для практического применения математического моделирования в экономике является наполнение разработанных моделей конкретной и качественной информацией. Точность и полнота первичной информации, реальные возможности ее сбора и обработки во многом определяют выбор типов прикладных моделей.

Исходная информация имеет существенно различный характер и происхождение и может быть разделена на две категории: о прошлом развитии и современном состоянии объектов (экономические наблюдения и их обработка) и о будущем развитии объектов, включающую данные об ожидаемых изменениях их внутренних параметров и внешних условий (прогнозы).

Методы экономических наблюдений и использование результатов этих наблюдений разрабатываются экономической статистикой. Так как в экономике многие процессы являются массовыми, то моделирование должно опираться на массовые наблюдения. Экономические процессы являются динамическими вследствие изменчивости их параметров и структурных отношений. Поэтому такие экономические процессы следует постоянно держать под наблюдением, необходимо иметь устойчивый поток новых данных.

Познание количественных отношений экономических процессов и явлений опирается на экономические измерения. Точность измерений в значительной степени предопределяет и точность конечных результатов количественного анализа посредством моделирования.

Экономические процессы, сохраняя характер массовых процессов, обязательно включают случайные (стохастические) компоненты. Непредвидимые случайности могут быть вызваны природными явлениями, изменениями в международной обстановке, научно-техническими открытиями, различными субъективными факторами. Таким образом, экономические закономерности имеют стохастический характер.

Для методологии планирования важное значение имеет понятие неопределенности экономического развития. В исследованиях по экономическому прогнозированию и планированию различают два типа неопределенности: “истинную”, обусловленную свойствами экономических процессов, и “информационную”, связанную с неполнотой и неточностью имеющейся информации об этих процессах.

Сложность экономических процессов и явлений и другие отмеченные выше особенности экономических систем затрудняют не только построение математических моделей, но и проверку их адекватности, истинности получаемых результатов.

В экономике и других общественных науках тезис “практика — критерий истины” в большей степени применим к простым дескриптивным моделям, используемым для пассивного описания и объяснения действительности.

Следует отметить, что создание конструктивной комплексной методики адекватности моделей, учитывающей как объективные особенности моделируемых объектов, так и особенности их познания, по-прежнему является одной из наиболее актуальных задач экономико-математических исследований.

1.2. Классификация экономико-математических моделей

1.2.1. Общая классификация экономико-математических моделей (ЭММо)

По целевому назначению ЭММо делятся на теоретико-аналитические, используемые в исследованиях общих свойств и закономерностей экономических процессов, и прикладные, применяемые в решении конкретных экономических задач (модели экономического анализа, прогнозирования, управления).

В соответствии с общей классификацией математических моделей они подразделяются на функциональные и структурные, а также включают промежуточные формы (структурно-функциональные). В исследованиях на народнохозяйственном уровне чаще применяются структурные модели, так как здесь большое значение имеют взаимосвязи подсистем. Типичными структурными моделями являются модели межотраслевых связей. Функциональные модели широко применяются в экономическом регулировании, когда на поведение объекта ("выход") воздействуют путем изменения "входа". Примером может служить модель поведения потребителей в условиях товарно-денежных отношений.

Различают модели дескриптивные и нормативные. Дескриптивные модели отвечают на вопрос: как это происходит? или как это вероятнее всего может дальше развиваться?, т. е. они только объясняют наблюдаемые факты или дают вероятностный прогноз. Нормативные модели — это модели управляемых и регулируемых экономических процессов, используемые для преобразования экономической действительности. Они отвечают на вопрос: как это должно быть?, т. е. предполагают целенаправленную деятельность. Типичным примером нормативных моделей являются модели оптимального планирования, формализующие тем или иным способом цели экономического развития, возможности и средства их достижения.

По характеру отражения причинно-следственных связей различают модели жестко детерминистские и модели, учитывающие случайность и неопределенность. Необходимо различать неопределенность, описываемую вероятностными законами, и неопределенность, для описания которой законы теории вероятностей неприменимы.

По способам отражения фактора времени экономико-математические модели делятся на статистические и динамические.

Модели экономических процессов чрезвычайно разнообразны по форме математических зависимостей. Особенно важно выделить класс линейных моделей, наиболее удобных для анализа и вычислений и получивших вследствие этого большое распространение. Различия между линейными и нелинейными моделями существенны не только с математической точки зрения, но и в теоретико-экономическом отношении, поскольку многие зависимости в экономике носят принципиально нелинейный характер: эффективность использования ресурсов при увеличении производства, изменение спроса и потребления населения при росте доходов и т. п.

По соотношению экзогенных (т. е. имеющих происхождение извне, они задаются заранее) и эндогенных (т. е. определяемых в расчетах) переменных, включаемых в модели, они могут разделяться на открытые и закрытые.

Для моделей народнохозяйственного уровня важно деление на агрегированные (макромодель) и детализированные (микромодель).

В зависимости от того включают ли народнохозяйственные модели пространственные (территориальные) факторы и условия или не включают, различают модели пространственные и точечные.

Таким образом, общая классификация ЭММо включает более десяти основных признаков. С развитием экономико-математических исследований проблема классификации применяемых моделей усложняется.

1.2.2. Этапы экономико-математического моделирования

Отображение изучаемой системы как совокупности определяемых ее элементов, существенных с точки зрения поставленной цели и взаимосвязей между ними гоморфно (подобно) данной системе. Результатом этой работы является создание образа системы или какого-либо процесса. Этому образу строго соответствует построенная модель. В этом случае мы говорим об адекватности (изоморфизме) образа системы и ее модели. Порядок построения модели представлен в табл. 1.1.

После построения ЭММо проводится экономико-математический анализ модели с целью выявления ее особенностей и выбора:

1) теории, в рамках которой может быть получено решение задачи;

2) группы или класса методов данной теории, наиболее пригодных для решения сформулированной задачи;

3) конкретного численного метода, который является наиболее целесообразным и эффективным для решения задачи на базе сформулированной ЭММо с учетом ее размерности и имеющейся вычислительной техники.

Таблица 1.1

Схема построения модели

Входная информация	**Название этапа**	**Выходная информация**
1.1. Экономическая теория 1.2. Результаты реальных явлений 1.3. Выводы, которые делает наука об организации и планировании производства на предприятиях	1. Постановка задачи	1.1. Перечень величин, подлежащих определению и дающих объективную и исчерпывающую характеристику состояния объекта управления. 1.2. Условия, которые должны учитываться при определении значений величин, указанных выше. 1.3. Параметры, связывающие названные характеристики и условия. 1.4. Если задача оптимизационная, то должен быть словесно сформулирован четкий критерий или набор критериев оптимальности.
2.1. Информация, полученная на выходе первого этапа	2. Формализованное описание.	2.1. Показатели, выражающие характеристики объекта управления, искомые величины, параметры процесса, факторы и условия, регламентирующие процесс производства. 2.2. Информация количественного характера, являющаяся исходной для формирования модели. 2.3. Зависимости моделируемого процесса, выраженные математическими символами в неявном виде.
3.1. Информация, полученная в результате реализации второго этапа	3. Формализация в общем виде.	3.1. Зависимостям придается явный вид, например $ax > b$. 3.2. Рассматриваются вопросы снижения размерности задачи и упрощения формализованной записи.

Окончание табл. 1.1

4.1. Информация из третьего этапа	4. Численное представление.	4.1. Символы заменяются на конретные числовые данные, например $5x_1 + 2x_2 > 14$.
4.2. Конкретные данные моделируемого объекта или процесса		4.2. Проводится предварительная обработка данных для ввода в модель (агрегирование информации, определение законов распределения случайных величин, определение функциональных зависимостей динамических рядов показателей).

Если подходящий экономико-математический метод (ЭММе) не выбран, необходимо упростить ЭММо. Для этого следует, задавшись трудновычисляемыми величинами или зависимостями, начать процесс построения ЭММо с первого этапа.

Соответствие модели поставленной цели предопределяет выбор и включение в модель только основных, определяющих реальную экономическую систему элементов и установление между ними взаимозависимостей и взаимосвязей, обеспечивающих достижение поставленной цели и (или) оказывающих влияние на этот процесс.

Обеспечение необходимой надежности модели призвано гарантировать безопасность работы с ней, достоверность получаемых результатов, разумный интервал рассогласования результатов моделирования с реальными показателями действующей экономической системой.

1.2.3. Сущность экономико-математических методов

Особенностью решения задач планирования является необходимость учета при их решении множества переменных величин, характеризующих постоянно изменяющиеся производственные условия. Число сочетаний этих величин может быть достаточно большим, тогда возможно и существование значительного числа вариантов плановых задач. И тем не менее необходимо получить оптимальное или близкое к нему решение задачи. Поэтому требуются специальные методы, позволяющие в приемлемые сроки с достаточной степенью обоснованности с учетом особенностей конкретного производства выйти на искомое решение.

В процессе решения экономических задач приходится формализовать зависимость между отдельными элементами экономической системы, применять математический аппарат, общие кибернетические закономерности и принципы, т. е. использовать ЭММе.

По характеру используемого математического аппарата можно выделить методы классической и прикладной математики.

Методы классической математики включают математический анализ (дифференциальное и вариационное исчисление) и теорию вероятностей. Эти методы целесообразно использовать при расчете параметров календарно-плановых нормативов — определение размеров партий деталей, длительности производственного цикла, величины заделов, а также при решении задач оперативного регулирования хода производства и т. д.

Группа методов прикладной математики обширна по номенклатуре. Методы рассматриваемой группы можно классифицировать следующим образом: оптимального, линейного программирования, математической статистики, комбинаторные, теорий расписаний, игр, массового обслуживания, управления запасами, экспертных оценок.

Оптимальное программирование — это комплекс специальных методов, обеспечивающих в условиях множества возможных решений выбор такого, которое является наилучшим (оптимальным) по заданному критерию при определенных ограничительных условиях. В их числе: линейное, нелинейное, динамическое, стохастическое, выпуклое, квадратичное, параметрическое, блочное, целочисленное (дискретное) программирование и др. В математике решаемые на оптимум задачи называются экстремальными, в них требуется отыскать максимум или минимум некоторой целевой функции.

Линейное программирование используется при решении задач в том случае, когда целевая функция и ограничительные условия выражены линейными зависимостями. Отыскиваемые при этом неизвестные переменные обеспечивают экстремум целевой функции.

Если в системе равенств или неравенств (ограничений) содержатся случайные элементы, но зависимости между переменными — линейные, то такая задача решается методами стохастического программирования.

Если при нахождении неизвестных переменных необходимо, чтобы одна из них или несколько принимали только целочисленные значения, то в этом случае при решении поставленной задачи необходимо использовать методы целочисленного программирования.

Методы нелинейного программирования используются тогда, когда зависимости между переменными носят нелинейный характер. Задачи, решаемые методами нелинейного программирования, достаточно сложны, так как нет универсального метода их реализации.

Выпуклое программирование представляет собой совокупность специальных методов решения нелинейных экстремальных задач, у которых выпуклы либо целевые функции, либо ограничительные условия.

Квадратичное программирование — это совокупность методов решения особого класса экстремальных задач, в которых ограничительные условия линейны, а целевая функция является многочленом второй степени.

Указанные группы методов нелинейного программирования используются при решении, например, задачи расчета показателей роста производительности труда с учетом различных факторов, изменения издержек производства при росте объема производства и т. п.

Методы динамического программирования могут применяться для решения таких оптимизационных задач, в которых необходимо рассматривать процесс производства или управления в пространстве или во времени, т. е. в развитии. При этом процедура вычислений реализуется по своеобразной схеме: весь процесс поиска оптимального решения представляется в виде определенной последовательности шагов, для каждого из которых находится оптимальное решение, причем, оптимальность определяется влиянием на последующие шаги. В основу использования методов динамического программирования положен принцип оптимальности, сформулированный американским математиком Р.Беллманом. Сам процесс поиска решения на базе рассматриваемых методов является многошаговым. При этом одна задача со множеством переменных заменяется многими задачами с небольшим (даже одной) числом переменных, что ощутимо снижает объем вычислений. Ограничительные условия применения указанных методов следующие: итоговый оптимум является суммой оптимальных решений каждого из выделенных шагов, а состояние системы в рассматриваемый момент времени определяет выбор оптимального решения, причем, на выбор этого решения не оказывают влияния состояния системы в предшествующие моменты. Этими методами могут решаться задачи выбора момента времени замены оборудования при условии получения за период эксплуатации наибольшей прибыли, распределения различных видов ресурсов по производствам и т. д.

В моделях реальных экономических систем коэффициенты целевой функции или ограничительные условия могут являться не постоянными величинами, а изменяться от различных факторов в течение периода времени, для которого решается экстремальная задача: формирование производственной программы для предприятия, на котором ведется реконструкция, определение величины дополнительных капитальных вложений в условиях замены технологических процессов обработки изделий и т. д. Для реализации такого рода задач эффективно использовать методы параметрического программирования.

Модели, содержащие большое число показателей, очень сложны в реализации, поэтому в тех случаях, когда это возможно, их преобразуют в несколько моделей меньшей размерности, тем самым разлагают задачу. Полученные локальные задачи решаются совместно по специальным правилам. Методы, позволяющие решать задачи в рассмотренном порядке, относятся к методам блочного программирования.

Методы математической статистики используются для нахождения и раскрытия свойственных большим совокупностям однородных объектов закономерностей. При этом изучается не каждый элемент совокупности, а определенная выборка. Полученные характеристики такой выборки могут использоваться для сравнительной оценки элементов различных совокупностей или их характеристик, а также для установления связей между отдельными величинами и программирования на этой основе развития системы в будущем. Математическая статистика включает: корреляционный, регрессионный, дисперсионный, факторный анализ и др. Эти методы используются при расчете параметров нормативов, в анализе производственно-хозяйственной деятельности предприятий, при решении задач управления запасами, массового обслуживания.

Для решения таких задач, которые не могут быть реализованы классическими методами математического программирования, используются комбинаторные методы, например ветвей и границ. Сюда близко подходят эвристические методы, основанные на опыте, интуиции исполнителя.

Такие задачи как закрепление деталей за оборудованием во времени, сбалансированность работы конвейера и др. составляют группу задач календарного планирования производства. При их решении кроме соответствующего критерия качества расписания, необходимо выполнить требование соблюдения определенных технологических условий. Эти задачи решаются методами теории расписаний, дающими оптимальное (дискретное и динамическое программирование) или приближенное решение (эвристическое или случайного поиска).

Когда приходится принимать решение в условиях неопределенности, причем, такое решение должно обеспечивать наибольший эффект или наименьшие потери, целесообразно пользоваться методами теории игр.

Важное значение имеет проблема оптимальной регламентации производства продукции различного вида, заготовок, степени их готовности на разных стадиях изготовления, ибо оптимизируемые запасы (готовая продукция) в конечном итоге определяют затраты на производство и хранение. Разработкой методов решения этих задач занимается теория управления запасами.

1.3. Постановка задачи линейного программирования

1.3.1. Линейное программирование как метод оптимального планирования

Линейное программирование (ЛП) изучает важную для практики задачу отыскания экстремума линейной функции при наличии ограничений в виде линейных неравенств или уравнений.

Сущность этих задач заключается в том, чтобы из множества возможных вариантов исследуемого экономического процесса выбрать по какому-либо признаку наилучший, или, как его называют, оптимальный вариант.

В этом методе обязателен специальный показатель выгодности плана, который называют показателем или критерием оптимальности плана. Часто это прибыль, доход, валовый продукт, производительность, эффективность. В таких случаях выгодно, чтобы показатель оптимальности был для выбранного варианта плана максимальным. Если показателем оптимальности плана служат издержки, себестоимость, капиталовложения или трудоемкость, то необходимо планировать так, чтобы показатель оптимальности для выбранного плана был минимальным.

Таким образом, ясно, что цель, которую мы ставим перед собой заключается в максимизации или минимизации некоторого количества средств (денег, сырья, оборудования, продуктов питания и т. д.), которое математически выражается в виде линейной формы некоторого числа переменных.

Множество возможных вариантов, из которых выбирается оптимальный план, всегда ограничено (ресурсами сырья, наличием рабочей силы, количеством оборудования и т. п.). Поэтому каждый из рассматриваемых вариантов должен быть допустимым планом, удовлетворяющим имеющимся ограничениям. Показатель оптимальности плана является некоторой функцией Z = f(x) плана X. Поэтому задача отыскания оптимального плана сводится к математической задаче нахождения экстремума этой функции.

Решение экстремальных экономических задач можно разбить на три этапа: 1. построение экономико-математической модели; 2. нахождение оптимального решения одним из математических методов; 3. практическое внедрение в народное хозяйство.

Построение экономико-математической модели состоит в создании упрощенной экономической модели, в которой в схематической форме отражена сущность изучаемого процесса. При этом особое внимание должно быть уделено отражению в модели всех существенных особенностей задачи и учету всех ограничивающих условий, которые могут повлиять на результат. Затем определяют цель решения, выбирают критерий оптимальности и дают математическую формулировку задачи.

1.3.2. Общая задача линейного программирования

Общую задачу ЛП можно сформулировать следующим образом. Найти такие значения x_1, x_2,..., x_n, которые удовлетворяют системе ограничений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k, \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \dots + a_{k+1n}x_n \le b_{k+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \quad (1.1)$$

условиям неотрицательности

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,n}) \tag{1.2}$$

и для которых линейная функция (целевая функция)

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{1.3}$$

достигает экстремума (максимума или минимума).

Вектор $\overline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координаты которого удовлетворяют системе (1.1) и (1.2) называют планом или допустимым решением задачи линейного программирования.

Совокупность всевозможных допустимых решений (планов) задачи называют областью допустимых решений задачи.

План $\overline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется опорным, если векторы $\overline{A_j}$ $(j = \overline{1,n})$

$$\overline{A_1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \overline{A_2} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \ldots \quad \overline{A_n} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix},$$

составленные из коэффициентов при положительных неизвестных x_j, являются линейно-независимыми.

Опорный план будет невырожденным, если он содержит m положительных компонент, в противном случае опорный план называется вырожденным.

Оптимальным планом или оптимальным решением задачи линейного программирования называется план, доставляющий наибольшее (наименьшее) значение линейной функции (1.3).

1.3.3. Основная задача линейного программирования

Эта задача формулируется следующим образом. Дана линейная форма (целевая функция)

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{1.4}$$

и задана система m n линейных неравенств (ограничений)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \qquad (1.5)$$

причем, $x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,n}).$ (1.6)

Нужно найти максимальное (минимальное) значение функции (1.4) при выполнении условий (1.5) и (1.6).

1.4. Геометрическая интерпретация задач линейного программирования

В отдельных случаях задачи линейного программирования удается решить с помощью наиболее простого и наглядного геометрического метода. Однако, это возможно тогда, когда число неизвестных в ограничениях и целевой функции не больше трех.

Геометрический метод позволяет наглядно описать область допустимых решений, критерий оптимальности (целевую функцию) и процесс получения оптимального решения путем последовательного приближения по допустимым вариантам.

Система линейных ограничений задачи линейного программирования (1.5) задает в пространстве многогранное множество, и поскольку целевая функция $Z = c_1x_2 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ является линейной, то она не имеет максимума (или минимума) внутри множества (так как $\frac{\partial Z}{\partial x_j} = c_j$ не все нули). Значит экстремум Z достигается на границе области допустимых решений, то есть в одной из вершин многогранного множества. Поэтому задачу линейного программирования можно было бы решить сравниванием значений целевой функции Z во всех вершинах множества допустимых решений, но нахождение всех вершин это очень трудоемкая задача. Для решения задач линейного программирования разработаны специальные методы, позволяющие перебирать не все вершины, а некоторые из них, увеличивающие значение Z. Одним из таких методов является симплекс-метод.

Если задача зависит от двух переменных x_1 и x_2, то ее можно решить графически. А именно, по системе ограничений $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i$, $(i = \overline{1,m})$ строится многоугольник допустимых решений как область пересечения прямых, задаваемых неравенствами. Напомним теперь, что линии, на которых значение Z постоянно ($Z = \mathrm{const}$ или $c_1x_1 + c_2x_2 = \mathrm{const}$), называются линиями уровня, и что направление возрастания Z определяется вектором $\bar{n} = \mathrm{grad}\, Z = (c_1, c_2)$. Таким образом, для нахождения вершины, доставляющей максимальное значение функции Z, надо построить какую-нибудь линию уровня, например, $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$. Затем, передвигая ее параллельно самой себе в направлении вектора $\bar{n}$, в первой встречаемой вершине многоугольника решений получим min Z, а в последней пересекаемой линией уровня вершине — max Z.

Сказанное иллюстрируется рис. 1.2. Здесь многоугольник допустимых решений — это четырехугольник АВСД. Если вектор $\bar{n}$ направлен как показано на рис. 1.1, то min Z достигается в вершине А, а max Z — в вершине С.

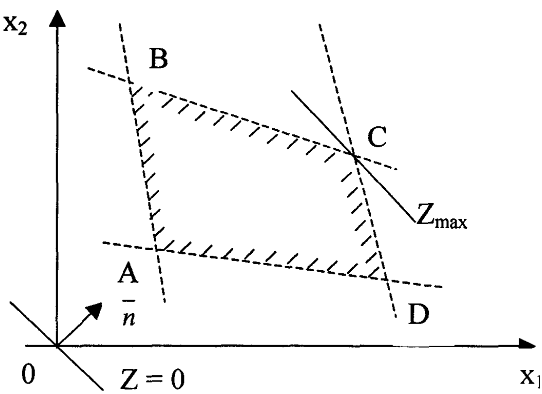


Рис. 1.2

Для примера рассмотрим целевую функцию $Z = 3x_1 + 9x_2$.

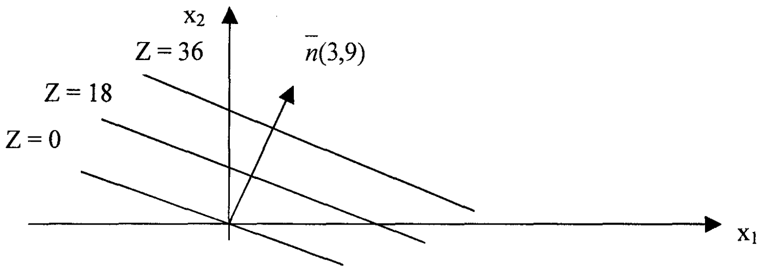


Рис. 1.3

Во всех точках каждой из этих прямых (рис. 1.3) целевая функция равна одному и тому же значению. Поэтому эти прямые называют линиями уровня целевой функции.

Вектор $\bar{n}$ (3,9) перпендикулярен ко всем этим прямым и показывает направление наибольшего возрастания целевой функции.

Из всех линий уровня, проходящих через многоугольник допустимых решений и имеющих с ним общие точки, выделяют две крайние линии с минимальным и максимальным значением целевой функции. Эти линии уровня называются опорными.

Пример 1. Найти графически оптимальное решение системы неравенств

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 + 3x_2 \geq 3, \\ x_1 - x_2 \geq -1, \\ 3x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \end{cases}$$

максимизирующее функцию $Z = x_1 + 2x_2$,
минимизирующее функцию $Z = x_1 + 2x_2$.

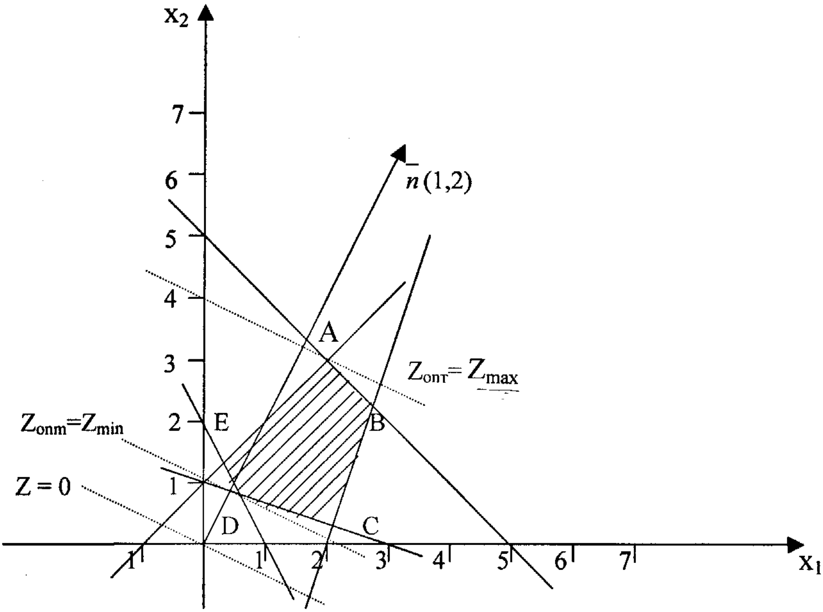


Рис. 1.4

Строим многоугольник допустимых решений АВСДЕ (рис. 1.4), вектор $\bar{n}(1,2)$ и линию уровня $x_1 + 2x_2 = 0$, которую перемещаем в направлении $\bar{n}$. Линия уровня встретит многоугольник решений в точке Д и в ней $Z = Z_{min}$, а последней (крайней) точкой, через которую пройдет линия уровня, будет точка А и $Z(A) = Z_{max}$. Найдем координаты точек Д и А из решения систем уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = -1 \\ x_1 + x_2 = 5. \end{cases}$$

Отсюда Д(0,6;0,8) и А(2,3), а $Z_{min} = 0{,}6 + 2\cdot 0{,}8 = 2{,}2$ и $Z_{max} = 2 + 2\cdot 3 = 8$.

Отсюда можно сделать вывод, что если область допустимых решений есть выпуклый многоугольник, то max или min линейной функции Z достигаются по крайней мере в одной из вершин этого многоугольника.

Может представиться случай, когда экстремальное значение Z достигается в двух вершинах, тогда такое же экстремальное значение достигается в любой точке, лежащей на отрезке, соединяющим эти две вершины.

Область допустимых решений систем неравенств вида (1.5) может быть (для двух переменных) пустой, одной точкой, выпуклым многоугольником или неограниченной выпуклой многоугольной областью.

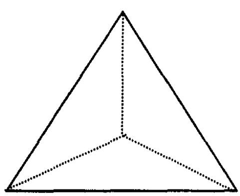
Множество всех планов задачи линейного программирования выпукло. Имеет место следующая теорема.

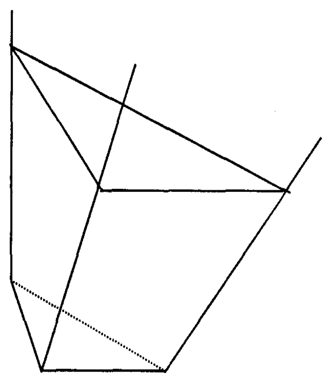
Линейная функция задачи ЛП достигает своего экстремального значения в угловой точке многоугольника (многогранника) решений.

Если в системе неравенств число неизвестных равно трем, то каждое неравенство геометрически представляет полупространство трехмерного пространства, граничная плоскость которого

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i.$$

Эти полупространства, пересекаясь, образуют общую часть, называемую многогранником решений.





Итак, если линейная функция задачи линейного программирования ограничена на многограннике решений, то:

1. существует такая угловая точка многогранника (многоугольника) решений, в которой линейная функция задачи линейного программирования достигает своего оптимума,

2. каждый опорный план соответствует угловой точке многогранника решений.

Поэтому для решения задачи линейного программирования необходимо исследовать только угловые точки многогранника решений, т. е. только опорные планы.

Глава 2
СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД

2.1. Обыкновенные жордановы исключения

Рассмотрим систему из m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.1}$$

Запишем эту систему в виде таблицы

$$\begin{array}{r|ccccc|} & x_1 & & x_j & \ldots & x_n \\ \hline b_1 = & a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_i = & a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_m = & a_{m1} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \\ \hline \end{array}\ .$$

Шагом обыкновенного жорданова исключения (ОЖИ), произведенным над данной таблицей с разрешающим элементом $a_{ij} \neq 0$ с i-й разрешающей строкой и j-м разрешающим столбцом, назовем операцию решения уравнения

$$b_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n$$

относительно x_j, подстановки этого решения в исходную систему и записи вновь полученной системы в виде новой таблицы.

Нетрудно проверить, что новая таблица будет иметь вид

$$\begin{array}{r|ccccc|}
 & x_1 & x_2 & \ldots\ b_i & \ldots & x_n \\
\hline
b_1 = & b_{11} & b_{12} & \ldots\ a_{1j} & \ldots & b_{1n} \\
b_2 = & b_{21} & b_{22} & \ldots\ a_{2j} & \ldots & b_{2n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
x_j = & -a_{i1} & -a_{i2} & \ldots\ \boxed{1} & \ldots & -a_{in} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
b_m = & b_{m1} & b_{m2} & \ldots\ a_{mj} & \ldots & b_{mn} \\
\hline
\end{array} \quad : a_{ij},$$

где $$b_{rs} = a_{rs}a_{ij} - a_{rj}a_{is} \ (i \neq r,\ j \neq s), \tag{2.2}$$

причем, все элементы таблицы нужно разделить на a_{ij}.

Действительно:

$$x_j = \frac{b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{ij-1}x_{j-1} - a_{ij+1}x_{j+1} - \ldots - a_{in}x_n}{a_{ij}} \quad \text{и}$$

$$b_r = a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rj}x_j + \ldots + a_{rn}x_n = a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots +$$

$$+ a_{rj}\frac{b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{ij-1}x_{j-1} - a_{ij+1}x_{j+1} - \ldots - a_{in}x_n}{a_{ij}} + \ldots + a_{rn}x_n =$$

$$= \frac{a_{r1}a_{ij} - a_{rj}a_{i1}}{a_{ij}}x_1 + \frac{a_{r2}a_{ij} - a_{rj}a_{i2}}{a_{ij}}x_2 + \ldots + \frac{a_{rj}}{a_{ij}}b_i + \ldots + \frac{a_{rn}a_{ij} - a_{rj}a_{in}}{a_{ij}}x_n.$$

Таким образом, один шаг жорданова исключения (ШЖИ) переводит исходную таблицу в новую по схеме, состоящей из следующих пяти правил:

1. разрешающий элемент заменяется единицей,
2. остальные элементы разрешающего столбца (j-го) остаются без изменения,

3. остальные элементы разрешающей строки (i-й) меняют лишь свои знаки,

4. остальные элементы b_{rs} вычисляются по формуле

$$b_{rs} = a_{rs}a_{ij} - a_{rj}a_{is},$$

5. все элементы новой таблицы делятся на разрешающий элемент a_{ij}.

Пример 1. Для таблицы

$$\begin{array}{r|ccc|}
 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline
y_1 = & 1 & -2 & 3 \\
y_2 = & -1 & 1 & \boxed{2} \\
y_3 = & 2 & -1 & -1 \\ \hline
\end{array}\ ,$$

один шаг жорданова исключения с разрешающими 2-й строкой и 3-м столбцом приводит к таблице

$$\begin{array}{r|ccc|}
 & x_1 & x_2 & y_2 \\ \hline
y_1 = & 5 & -7 & 3 \\
x_3 = & 1 & -1 & 1 \\
y_3 = & 3 & -1 & -1 \\ \hline
\end{array}\ : 2.$$

Жордановы исключения позволяют от случайно взятой декартовой системы координатных плоскостей перейти к новой системе, в которой координатами точек являются их уклонения от более интересной для той или другой задачи системы плоскостей.

2.2. Применение жордановых исключений в линейной алгебре

2.2.1. Теорема Стейница

Приложение жордановых исключений в линейной алгебре опирается на следующую теорему.

Теорема Стейница.

Если все линейные формы системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

линейно независимы (так что $m \leq n$), то, производя точно m соответствующих шагов жордановых исключений, можно превратить все m зависимых переменных $b_1, \ldots, b_m$ в независимые, т. е. можно их все перебросить наверх таблицы.

2.2.2. Обращение матриц

Пусть в исходной системе уравнений $m = n$ и матрица $A = \| a_{ij} \|$ этой системы не вырождена, так что все линейные формы системы уравнений линейно независимы.

Производим над таблицей

$$\begin{array}{r|ccc|} & x_1 & \ldots & x_n \\ \hline b_1 = & a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & & \ldots\ldots\ldots & \\ b_n = & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \\ \hline \end{array}$$

последовательно n жордановых исключений для превращения всех зависимых переменных $b_1, \ldots, b_n$ в независимые. Окончательная таблица примет вид

$$\begin{array}{r|ccc|} & b_1 & \ldots & b_n \\ \hline x_1 = & c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ x_2 = & c_{21} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & & \ldots\ldots\ldots & \\ x_n = & c_{n1} & \ldots & c_{nn} \\ \hline \end{array}$$

и матрица этой таблицы, обозначаемая A^{-1}, является обратной для матрицы А.

Пример 2. Пусть дана невырожденная матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 3 & -2 & 4 \\ 5 & 7 & -11 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим таблицу

$$\begin{array}{r|ccc|} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline b_1 = & \boxed{2} & 3 & -5 \\ b_2 = & 3 & -2 & 4 \\ b_3 = & 5 & 7 & -11 \\ \hline \end{array}$$

Сделав один шаг жордановых исключений с разрешающими первой строкой и первым столбцом, получим таблицу

$$\begin{array}{r|ccc|l} & b_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline x_1 = & 1 & -3 & 5 & \\ b_2 = & 3 & \boxed{-13} & 23 & :2 \\ b_3 = & 5 & -1 & 3 & \\ \hline \end{array} \qquad \text{или} \qquad \begin{array}{r|ccc|} & b_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 = & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ b_2 = & \frac{3}{2} & \boxed{-\frac{13}{2}} & \frac{23}{2} \\ b_3 = & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \hline \end{array}$$

Теперь делаем еще один шаг жордановых исключений с разрешающим элементом $\left(-\frac{13}{2}\right)$

$$\begin{array}{r|ccc|l} & b_1 & b_2 & x_3 & \\ \hline x_1 = & -1 & -\frac{3}{2} & 1 & \\ x_2 = & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{23}{2} & :\left(-\frac{13}{2}\right) \\ b_3 = & -\frac{31}{2} & -\frac{1}{2} & -4 & \\ \hline \end{array} \qquad \text{или} \qquad \begin{array}{r|ccc|} & b_1 & b_2 & x_3 \\ \hline x_1 = & \frac{2}{13} & \frac{3}{13} & -\frac{2}{13} \\ x_2 = & \frac{3}{13} & -\frac{2}{13} & \frac{23}{13} \\ b_3 = & \frac{31}{13} & \frac{1}{13} & \boxed{\frac{8}{13}} \\ \hline \end{array}$$

Наконец, поменяв ролями x_3 и b_3, получим таблицу

$$\begin{array}{r} \\ x_1 = \\ x_2 = \\ x_3 = \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{ccc} \frac{6}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{2}{13} \\ -\frac{53}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{23}{13} \\ -\frac{31}{13} & -\frac{1}{13} & 1 \end{array}} \end{array} : \left(\frac{8}{13}\right) \quad \text{и окончательно} \quad \begin{array}{r} \\ x_1 = \\ x_2 = \\ x_3 = \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{ccc} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{53}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{23}{8} \\ -\frac{31}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{13}{8} \end{array}} \end{array}.$$

На этом вычисления заканчиваются и обратной будет матрица

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{53}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{23}{8} \\ -\frac{31}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{13}{8} \end{pmatrix}.$$

2.2.3. Решение системы n линейных уравнений с n неизвестными

Если система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{2.3}$$

имеет невырожденную матрицу $\| a_{ij} \|$, то можно указать разные варианты применения жордановых исключений.

Первый способ.

Запишем систему в виде

$$\begin{array}{r} \\ b_1 = \\ \ldots \\ b_n = \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & \ldots\ x_n \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & \ldots\ a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ a_{nn} \end{array}} \end{array}.$$

Проделав последовательно n шагов жордановых исключений, получим

$$\begin{array}{c|c|l} & b_1 \ \dots \ b_n & \\ \hline x_1 = & & \\ \dots & A^{-1} & \\ x_n = & & , \end{array}$$

а затем систему решаем матричным способом

$$\overline{X} = A^{-1} B .$$

Второй способ.

Запишем систему в виде

$$\begin{array}{c|ccc|c|l} & x_1 & x_2 \ \dots & x_n & 1 & \\ \hline 0 = & a_{11} & a_{12} \ \dots & a_{1n} & -b_1 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 = & a_{n1} & a_{n2} \ \dots & a_{nn} & -b_n & . \end{array}$$

Проделав последовательно n шагов жордановых исключений с разрешающими столбцами, отличными от столбца свободных членов, и, вычеркивая после каждого шага столбец коэффициентов под переброшенным наверх таблицы нулем, т. е. разрешающий столбец, получим окончательное решение в виде

$$\begin{array}{c|c|l} & 1 & \\ \hline x_1 = & a_1 & \\ \dots & \dots & \\ x_n = & a_n & . \end{array}$$

Пример 3. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 16, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 36, \\ 5x_1 + 7x_2 - 11x_3 = 44. \end{cases}$$

Запишем ее в виде

$$\begin{array}{r|ccc|c|}
 & x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline
0 = & \boxed{2} & 3 & -5 & -16 \\
0 = & 3 & -2 & 4 & -36 \\
0 = & 5 & 7 & -11 & -44 \\ \hline
\end{array}\;.$$

Следует отметить, что лучше за разрешающие элементы брать 1.

Сделав один шаг жорданова исключения с разрешающим элементом $a_{11} = 2$ и вычеркнув разрешающий (1-й столбец), получим таблицу

$$\begin{array}{r|cc|c|}
 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline
x_1 = & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & +8 \\
0 = & \boxed{-\frac{13}{2}} & \frac{23}{2} & -12 \\
0 = & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -4 \\ \hline
\end{array}\;.$$

Следующий шаг сделаем с разрешающим элементом $\boxed{-\frac{13}{2}}$.

Получим

$$\begin{array}{r|c|c|}
 & x_3 & 1 \\ \hline
x_1 = & -\frac{2}{13} & \frac{140}{13} \\
x_2 = & \frac{23}{13} & -\frac{24}{13} \\
0 = & \boxed{\frac{8}{13}} & -\frac{40}{13} \\ \hline
\end{array}\;.$$

Третий шаг произведем с разрешающим элементом $\boxed{\frac{8}{13}}$, что дает окончательно

$$\begin{array}{r} \\ x_1 = \\ x_2 = \\ x_3 = \end{array}\begin{array}{c} 1 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{10} \\ \multicolumn{1}{|c|}{7} \\ \multicolumn{1}{|c|}{5} \\ \hline \end{array}.$$

2.2.4. Метод Гаусса

Этот метод отличается от предыдущего лишь тем, что после каждого ШЖИ вычеркивают не только разрешающий столбец, но и разрешающую строку, выписывая отдельно выражение для соответствующего x_i.

Пример 4. Решаем систему.

$$\begin{array}{r|cccc|c|} & x_1 & x_2 & x_3 & & 1 \\ \hline 0 = & \boxed{2} & 3 & -5 & & -16 \\ 0 = & 3 & -2 & 4 & & -36 \\ 0 = & 5 & 7 & -11 & & -44 \\ \hline \end{array}.$$

Сделав один ШЖИ с разрешающим элементом $\boxed{2}$ и вычеркивая первую строку и первый столбец, получим таблицу

$$\begin{array}{r|cc|c|} & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 0 = & \boxed{-\frac{13}{2}} & \frac{23}{2} & -12 \\ 0 = & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -4 \\ \hline \end{array}$$

и уравнение $x_1 = -\frac{3}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3 + 8.$

Следующий шаг делаем с разрешающим элементом $\boxed{-\frac{13}{2}}$ и, вычеркивая разрешающие строку и столбец, получим таблицу

$$\begin{array}{rcc} & x_3 & 1 \\ 0 = & \boxed{\frac{8}{13}} & \boxed{-\frac{40}{13}} \end{array}$$

и выражение для x_2 $\quad x_2 = \frac{23}{13}x_3 - \frac{24}{13}.$

Из последней таблицы

$$0 = \frac{8}{13}x_3 - \frac{40}{13}; \qquad x_3 = 5 \quad \text{и далее}$$

$$x_2 = \frac{23}{13}\cdot\ 5 - \frac{24}{13} = 7$$

$$x_1 = -\frac{3}{2}\cdot\ 7 + \frac{5}{2}\cdot\ 5 + 8 = 10.$$

2.2.5. Общая система линейных уравнений

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - b_1 = 0 \equiv y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n - b_m = 0 \equiv y_m, \end{cases}$$

причем, может быть $m \le n$ и $m \ge n$.

Пример 5. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 4 = 0 = y_1 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 + 5 = 0 = y_2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 1 = 0 = y_3 \\ 5x_1 - x_2 + 6x_3 - 3 = 0 = y_4 \end{cases}$$

Запишем эту систему в виде таблицы и подвергнем ее трем ШЖИ.

	x_1	x_2	x_3	1
$y_1 =$	2	1	4	–4
$y_2 =$	$\boxed{1}$	–3	–1	5
$y_3 =$	3	–2	2	1
$y_4 =$	5	–1	6	–3

	y_2	x_2	x_3	1
$y_1 =$	2	$\boxed{7}$	6	–14
$x_1 =$	1	3	1	–5
$y_3 =$	3	7	5	–14
$y_4 =$	5	14	11	–28

	y_2	y_1	x_3	1
$x_2 =$	$-\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{6}{7}$	2
$x_1 =$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	$-\frac{11}{7}$	1
$y_3 =$	1	1	$\boxed{-1}$	0
$y_4 =$	1	2	–1	0

	y_2	y_1	y_3	1
$x_2 =$	$-\frac{8}{7}$	$-\frac{5}{7}$	$\frac{6}{7}$	2
$x_1 =$	$-\frac{10}{7}$	$-\frac{8}{7}$	$\frac{11}{7}$	1
$x_3 =$	1	1	–1	0
$y_4 =$	0	1	1	0

Система имеет единственное решение

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0.$$

Из последней строки $y_4 = y_1 + y_3$, так что 4-е уравнение есть линейная комбинация 1-го и 3-го уравнений системы.

2.3. Модифицированные жордановы исключения

Если исходную систему уравнений

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \text{ где } i = \overline{1,m},$$

записать в виде $-a_{i1}(-x_1) - a_{i2}(-x_2) - \ldots - a_{in}(-x_n) = b_i$

и составить таблицу

$$\begin{array}{r|ccc|l} & -x_1 & -x_2 \ \ldots & -x_n & \\ \hline b_1 = & -a_{11} & -a_{12} \ldots & -a_{1n} & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ b_m = & -a_{m1} & -a_{m2} \ldots & -a_{mn} & , \\ \hline \end{array}$$

то в этих случаях вместо ОЖИ пользуются МЖИ.

Один шаг МЖИ с разрешающим элементом $\boxed{-a_{rs}}$, означает переход к новой таблице

$$\begin{array}{r|ccccc|l} & -x_1 & \ldots & -y_r & \ldots & -x_n & \\ \hline b_1 = & b_{11} & \ldots & a_{1s} & \ldots & b_{1n} & \\ \ldots & \ldots & & \ldots & & \ldots & \\ x_s = & -a_{r1} & \ldots & 1 & \ldots & -a_{rn} & : (-a_{rs}) \ , \\ \ldots & \ldots & & \ldots & & \ldots & \\ b_m = & b_{m1} & \ldots & a_{ms} & \ldots & b_{mn} & \\ \hline \end{array}$$

которая получается по правилам 1 — 5 ОЖИ с тем лишь изменением, что правила 2 и 3 меняются ролями:

2) остальные элементы разрешающей строки остаются без изменения,

3) остальные элементы разрешающего столбца меняют лишь свои знаки.

Пример 6. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 16 = b_1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 36 = b_2, \\ 5x_1 + 7x_2 - 11x_3 = 44 = b_3. \end{cases}$$

Запишем ее в виде таблицы

$$
\begin{array}{r|ccc|}
 & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\
\hline
b_1 = & -2 & -3 & 5 \\
b_2 = & -3 & \boxed{2} & -4 \\
b_3 = & -5 & -7 & 11 \\
\hline
\end{array}
$$

и произведем один шаг МЖИ с разрешающим элементом $\boxed{2}$

$$
\begin{array}{r|ccc|l}
 & -x_1 & -b_2 & -x_3 & \\
\hline
b_1 = & -13 & 3 & -2 & \\
x_2 = & -3 & 1 & -4 & :2\,. \\
b_3 = & -31 & 7 & -6 & \\
\hline
\end{array}
$$

2.4. Экстремумы линейной функции

Пусть рассматривается общая задача линейного программирования (1.1) — (1.3.).

В основе ниже рассматриваемых вычислительных методов ЛП лежит следующая фундаментальная теорема.

Теорема. Если задача линейного программирования имеет оптимальное решение (в ограниченной области всегда, а в неограниченной области в зависимости от ограниченности функции Z), то оно совпадает по крайней мере с одним из опорных решений системы ограничительных уравнений.

Согласно этой теореме вместо исследования бесконечного множества допустимых решений с целью нахождения среди них искомого оптимального решения, необходимо исследовать лишь конечное число опорных решений.

Данная теорема утверждает, что существует по крайней мере одно опорное оптимальное решение, однако, в задачах могут встретиться несколько опорных оптимальных решений (альтернативный оптимум).

Следовательно, принципиальная схема решения задач линейного программирования следующая:

1. с помощью ЖИ найдем все опорные решения системы (1.1),

2. вычислим для каждого из них значение функции Z, определяемое соотношением (1.3),

3. выберем из них экстремальное Z.

Следует отметить, что может оказаться очень большое число опорных решений, поэтому нужно производить упорядоченный перебор опорных решений, добиваясь на каждом шаге монотонного изменения функции Z.

Такая идея последовательного улучшения решения и заложена в основном вычислительном методе решения задач линейного программирования, получившим название симплексного метода.

2.5. Симплексный метод на основе полных таблиц

2.5.1. Постановка задачи об определении оптимального ассортимента продукции

Предприятие может производить два вида изделий A и B, располагая для их изготовления ограниченными ресурсами материала чугуна и стали соответственно в количествах 350 и 392 кг и оборудования в количестве 408 станко-часов. Данные, представленные в виде табл. 2.1, характеризуют

Таблица 2.1

Виды ресурсов	Объем ресурсов	Затраты на одно изделие	
		A	B
Чугун	350	14	5
Сталь	392	14	8
Оборудование	408	6	12
Прибыль в руб.		10	5

затраты каждого из перечисленных трех видов ресурсов на изготовление одного изделия А и В.

Требуется определить сколько изделий А и В должно производить предприятие, чтобы достичь наибольшей прибыли.

Введем искомые неизвестные x_1 и x_2, обозначающие число изделий А и В, которые должно производить предприятие.

Тогда математически задачу можно сформулировать следующим образом.

Среди множества неотрицательных решений системы неравенств

$$\begin{cases} 14x_1 + 5x_2 \leq 350, \\ 14x_1 + 8x_2 \leq 392, \\ 6x_1 + 12x_2 \leq 408, \end{cases} \quad (2.4)$$

найти такое решение, для которого функция

$$Z = 10x_1 + 5x_2 \quad (2.5)$$

достигает наибольшего значения.

2.5.2. Геометрическое решение задачи

Прежде всего построим область допустимых решений, соответствующую системе неравенств (2.4) (рис. 2.1).

Для этого, заменив каждое из неравенств равенством

$$14x_1 + 5x_2 = 350, \text{ (1–я прямая)},$$

$$14x_1 + 8x_2 = 392, \text{ (2–я прямая)},$$

$$6x_1 + 12x_2 = 408, \text{ (3–я прямая)},$$

строим граничную линию. Учитывая, что $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$, получаем заштрихованную часть плоскости, образующую многоугольник решений ОАВСК (рис. 2.1).

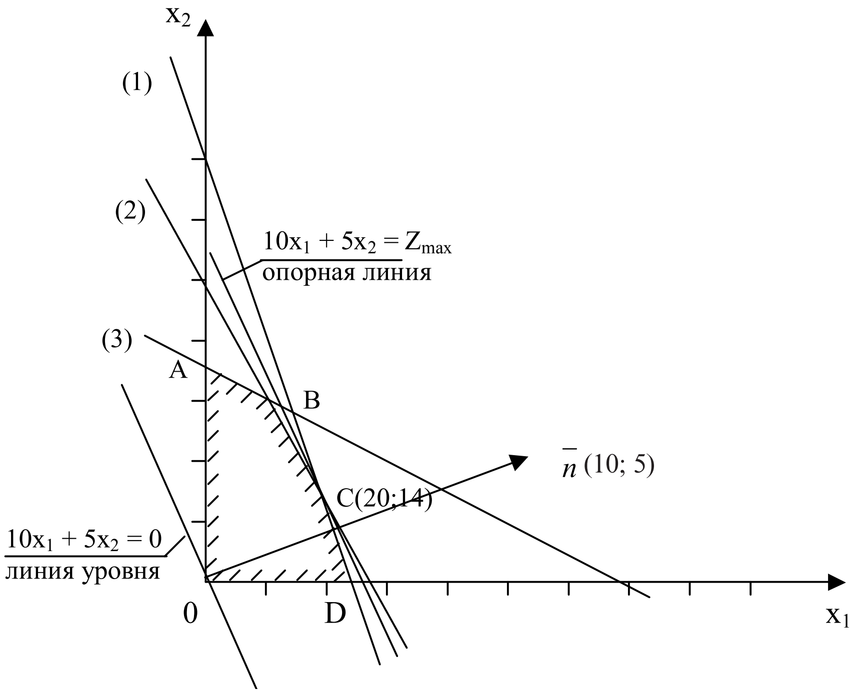


Рис. 2.1

Затем строим линию уровня $10x_1 + 5x_2 = 0$ и вектор (10;5), которые взаимно перпендикулярны. Нетрудно показать, что вектор дает направление наибольшего возрастания линейной функции.

Действительно

$$Z_0 = 10x_{10} + 5x_{20} = 10 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0,$$

$$Z_A = 10x_{1A} + 5x_{2A} = 10 \cdot 0 + 5 \cdot 34 = 170,$$

$$Z_К = 10x_{1К} + 5x_{2К} = 10 \cdot 25 + 5 \cdot 0 = 250 \text{ и т. д.}$$

Из всех линий уровня выбираем две, из которых одна проходит через точку 0 и дает min значение функции Z, а другая проходит через точку C и функция Z для нее принимает max значение. Эти линии уровня называются опорными.

Точка C образована первой и второй прямыми. Следовательно, решая систему уравнений

$$\begin{cases} 14x_1 + 5x_2 = 350, \\ 14x_1 + 8x_2 = 392, \end{cases}$$

найдем координаты точки C

$$x_1 = 20,\ x_2 = 14,$$

при этом $Z_{max} = 10 \times 20 + 5 \times 14 = 270$ руб.

Таким образом, max прибыль в 270 руб. будет получена, если предприятие произведет 20 изделий вида A и 14 изделий вида B.

2.5.3. Отыскание максимума линейной функции

В основе симплексного метода решения задач линейного программирования лежит с некоторыми дополнениями разобранный ранее метод последовательных исключений, представляющий собой совокупность удобных вычислительных алгоритмов, построенных на последовательном применении тождественных (симплексных) преобразований системы уравнений.

Добавляя к левой части неравенств (2.4) некоторую неотрицательную величину $y_i \geq 0$ $(i = 1, 2, 3)$, (2.6)
называемую выравнивающей или базисной переменной, превратим их в уравнения:

$$\left.\begin{array}{rlllll} \boxed{14\,x_1 + 5x_2 + y_1} & & & & = 350, \\ 14\,x_1 + 8x_2 & + y_2 & & & = 392, \\ 6\,x_1 + 12x_2 & & + y_3 & & = 408, \\ -10\,x_1 - 5x_2 & & & + Z & = 0. \end{array}\right\} \quad (2.7)$$

При этом можно показать, что каждому решению системы неравенств (2.4) соответствует единственное решение системы уравнений (2.7) и неравенств (2.6) и наоборот.

Каждая из переменных y_1, y_2, y_3 входит только в одно уравнение и зависит от переменных x_1 и x_2, которые мы называем свободными.

Системе (2.7) соответствует исходное допустимое базисное решение $x_1 = x_2 = 0$; $y_1 = 350$; $y_2 = 392$; $y_3 = 408$ и $Z = 0$.

Выполняем первое тождественное преобразование системы уравнений (2.7). Выбираем разрешающий столбец, соответствующий наименьшему отрицательному элементу в Z строке, ибо теоретически установлено, что при этом можно ожидать при прочих равных условиях большего увеличения функции Z. Правую часть уравнений делим на элементы разрешающего столбца и выбираем наименьшее положительное отношение, соответствующее разрешающей строке (уравнению). На пересечении выделенных столбца и строки стоит разрешающее число.

Первое уравнение делим на разрешающее число и выписываем получившееся уравнение. Умножая это уравнение на 14, 6 и —10 и вычитая соответственно из 2-го, 3-го и 4-го уравнений системы (2.7), придем к следующей системе (2.8):

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + \boxed{\frac{5}{14}}\, x_2 + \frac{1}{4} y_1 = 25, \\ \boxed{3}\, x_2 - y_1 + y_2 = 42, \\ \boxed{\frac{138}{14}}\, x_2 - \frac{6}{14} y_1 + y_3 = 258, \\ \boxed{-\frac{20}{14}}\, x_2 + \frac{10}{14} y_1 + Z = 250. \end{array}\right\} \qquad (2.8)$$

Подобное тождественное преобразование, при котором выбор разрешающего числа производится по указанному правилу, будем называть симплексным преобразованием.

Таким образом, симплексное преобразование выполняется по следующему правилу:

1. Выбирается разрешающий столбец, соответствующий наименьшему отрицательному элементу в Z — строке.

2. Выбирается разрешающая строка, которая соответствует наименьшему положительному из отношений элементов правой части уравнений на соответствующие элементы разрешающего столбца. На пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки стоит разрешающее число.

3. Элементы разрешающей строки делятся на разрешающее число.

4. Вычисляются элементы всех остальных строк по формуле:

$$\begin{matrix}\text{Новые} \\ \text{эл-ты}\end{matrix} = \begin{matrix}\text{Старые} \\ \text{эл-ты}\end{matrix} - \frac{\begin{matrix}\text{соответствующее} \\ \text{число в разре-} \\ \text{шающей строке}\end{matrix} \times \begin{matrix}\text{соответствующее} \\ \text{число в разре-} \\ \text{шающем столбце}\end{matrix}}{\text{разрешающее число}}.$$

Из системы (2.8) находим второе допустимое базисное решение $x_2 = y_1 = 0$; $x_1 = 25$; $y_2 = 42$; $y_3 = 258$, которому соответствует новое увеличенное значение функции $Z = 250$.

Таким образом, процесс последовательных симплексных преобразований является процессом последовательного улучшения решения. При этом:

1. Если в Z — строке найдется хотя бы один отрицательный элемент и

а) в разрешающем столбце найдется хотя бы один положительный элемент, то можно улучшить решение;

б) если же разрешающий столбец не содержит положительных элементов, то функция Z неограниченно возрастает.

2. Если все элементы в Z — строке неотрицательны, то достигнуто оптимальное решение.

Это и есть достаточные условия существования оптимального плана решения.

В системе (2.8) коэффициент при x_2 в Z — строке отрицательный, поэтому второй столбец будет разрешающим. Находим, что вторая строка будет разрешающей. Далее производим симплексное преобразование системы (2.8) согласном указанному правилу:

$$\left.\begin{aligned}
x_1 + \frac{8}{42} y_1 - \frac{5}{42} y_2 \quad &= 20, \\
x_2 - \frac{1}{3} y_1 + \frac{1}{3} y_2 \quad &= 14, \\
\frac{20}{7} y_1 - \frac{23}{7} y_2 + y_3 \quad &= 120, \\
\frac{10}{42} y_1 + \frac{20}{42} y_2 + Z \quad &= 270.
\end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

Так как в Z — строке все элементы неотрицательны, то данный план является оптимальным. При этом $y_1 = y_2 = 0$; $x_1 = 20$; $x_2 = 14$ и $Z_{max} = 270$.

Выполнение симплексных преобразований связано с кропотливыми и часто довольно громоздкими вычислениями. Эти вычисления можно в значительной степени упростить, используя для решения задач так называемые симплексные таблицы.

Каждое симплексное преобразование системы сводится к переходу от одной симплексной таблицы к другой.

Соответственно исходной системе уравнений (2.7) составляем первую симплекс-таблицу (табл. 2.2.).

Таблица 2.2

		x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Контр. столбец
y_1	350	$\boxed{14}$	5	1	0	0	370
y_2	392	14	8	0	1	0	415
y_3	408	6	12	0	0	1	427
Z	0	–10	–5	0	0	0	–15

Первый столбец — это столбец базисных переменных, во втором столбце стоят свободные коэффициенты правой части уравнений (2.7), в первой строке располагаются все переменные, последний столбец — это контрольный столбец и коэффициенты в нем равны сумме всех коэффициентов по строке.

Из табл. 2.2 имеем первое допустимое решение системы (2.7) $x_1 = x_2 = 0$, $y_1 = 350$, $y_2 = 392$, $y_3 = 408$, $Z = 0$, которое соответствует вершине О (0,0)многоугольника допустимых решений ОАВСК (рис. 2.1).

Переход ко второй симплекс-таблице (табл. 2.3) выполняется согласно указанному в этом пункте правилу для симплексных преобразований систем уравнений, при этом разрешающая переменная x_1 идет в базис вместо разрешающей переменной y_1. Получаем табл. 2.3.

Таблица 2.3

		x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Контр. столбец
x_1	25	1	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{14}$	0	0	$26\frac{6}{14}$
y_2	42	0	$\boxed{3}$	–1	1	0	45
y_3	258	0	$9\frac{12}{14}$	$-\frac{6}{14}$	0	1	$268\frac{6}{14}$
Z	250	0	$-\frac{20}{14}$	$\frac{10}{14}$	0	0	$249\frac{4}{14}$

После заполнения табл. 2.3 следует проверить правильность ее заполнения, для чего суммируем коэффициент по строкам и эта сумма должна быть равна коэффициентам, стоящим в соответствующих клетках контрольного столбца. Из табл. 2.3 второе допустимое решение будет $x_1 = 25$, $x_2 = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 42$, $y_3 = 258$ и $Z = 250$.

Нетрудно видеть, что эта таблица соответствует системе (2.8), а опорное решение $x_1 = 25$, $x_2 = 0$ соответствует вершине К(25,0) многоугольника решений.

Так как в Z — строке имеется отрицательный элемент, то улучшаем решение, для чего составляем симплексную табл. 2.4.

Таблица 2.4

		x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Контр. столбец
x_1	20	1	0	$\frac{4}{21}$	$-\frac{5}{42}$	0	$21\frac{1}{14}$
x_2	14	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	15
y_3	120	0	0	$\frac{20}{7}$	$-\frac{23}{7}$	1	$120\frac{4}{7}$
Z	270	0	0	$\frac{5}{21}$	$\frac{10}{21}$	0	$270\frac{5}{7}$

* Примечание. Для простоты вычислений следует помнить, что в новой таблице на месте элементов разрешающего столбца (кроме разрешающего элемента) стоят нули. Если в разрешающей строке стоят нули, то в новую таблицу соответствующие столбцы переносятся без изменения.

Так как в Z — строке нет отрицательных элементов, то данное решение будет оптимальным.

Табл. 2.4 соответствует системе уравнений (2.9) и оптимальному решению $x_1 = 20$, $x_2 = 14$ и $Z_{max} = 270$ и вершине С (20,14) многоугольника допустимых решений ОАВСК.

Подобные удлиненные таблицы, содержащие в первой строке все переменные, благодаря наличию контрольного столбца позволяют контролировать правильность заполнения таблиц и избежать арифметических ошибок.

Остановимся на простейших истолкованиях симплексного метода.

Алгебраический смысл симплексного метода состоит в том, что, совершая тождественные алгебраические преобразования, мы переходим от одного допустимого решения системы алгебраических уравнений к другому улучшенному, достигая оптимального решения задачи.

С геометрической точки зрения тождественные преобразования по симплексному методу представляют собой последовательные движения от одной вершины выпуклого многоугольника решений к соседней, от нее к следующей и так к оптимальной вершине по сторонам этого многоугольника.

Экономическая сущность симплексного метода заключается в том, что он является методом последовательного улучшения решений. Этот метод дает возможность, выбрав отправной — опорный план действий, постепенно передвигаться вперед и в конечном итоге достичь оптимальный план, если, конечно, таковой существует.

2.6. Симплексный метод на основе укороченных таблиц

Рассмотрим систему уравнений (2.7) и запишем ее в виде табл. 2.5.

Таблица 2.5

БП \ СП	1	x_1	x_2
y_1	350	$\boxed{14}$	5
y_2	392	14	8
y_3	408	6	12
Z	0	–10	–5

Таблица 2.6

БП \ СП	1	y_1	x_2
x_1	25	$\frac{1}{14}$	$\frac{5}{14}$
y_2	42	–1	$\boxed{3}$
y_3	258	$-\frac{6}{14}$	$\frac{138}{14}$
Z	250	$\frac{10}{14}$	$-\frac{20}{14}$

В первый столбец записываем базисные переменные (БП), а в первую строку — свободные переменные (СП). Выбор разрешающего столбца и разрешающей строки остаются как и в п. 1.5.3. Далее переход к новой табл. 2.6 совершаем по правилу: 1) меняем местами СП и БП, 2) на месте разрешающего элемента стоит величина ему обратная, 3) элементы разрешающей строки делим на разрешающее число, 4) элементы разрешающего столбца делим на разрешающее число и меняем знак, 5) остальные элементы находятся как и в п. 2.5.3 правило 4 (правило прямоугольников для ОЖИ). Получаем табл. 2.6. Улучшаем этот опорный план, производя симплексное преобразование с разрешающим элементом $\boxed{3}$ (табл. 2.7).

Таблица 2.7

БП \ СП	1	y_1	y_2
x_1	20	$\frac{4}{21}$	$-\frac{5}{42}$
x_2	14	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
y_3	120	$\frac{20}{7}$	$-\frac{23}{7}$
Z	270	$\frac{5}{21}$	$\frac{10}{21}$

Получили оптимальный план $Z_{max} = 270$ при $x_1 = 20$, $x_2 = 14$, а ресурсы оборудования оказались в избытке в количестве 120 станко-часов.

2.7. Симплексный метод на основе модифицированных жордановых исключений

2.7.1. Симплексный метод для отыскания опорного решения основной задачи линейного программирования

Задача задана в виде (1.4) — (1.5):
дана линейная форма

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_0 \qquad (2.10)$$

и задана система m   n линейных неравенств (ограничений)

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i,\ (i = \overline{1,m}), \qquad (2.11)$$

которую перепишем в виде

$$y_i = -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n + b_i = \sum_{j=1}^{n}(-a_{ij}x_i) + b_i \ge 0. \qquad (2.12)$$

Найти max (min) формы (2.10) при выполнении условий (2.11). Запишем задачу (2.10), (2.12) в виде табл. 2.8.

Если среди ограничений (2.11) встречаются лишь ограничения на знак переменной, т. е. вида $x_j \ge 0$ или $x_j \le 0$, то в табл. 2.8 их не включаем, причем, ограничения $x_j \le 0$ переводим заменой в ограничения вида $x_j = -x_j \ge 0$.

Переменные, на знаки которых не наложены никакие ограничения, называются свободными, переменные на знаки которых наложены ограничения, называются несвободными.

Для тех критериев оптимальности плана, которые излагаются, необходимо, чтобы все переменные были ограниченными, поэтому в тех задачах, где имеются свободные переменные, их надо исключить.

Таблица 2.8

БП \ П	$-x_1$	$-x_2$	…	$-x_n$	1
$y_1 =$	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
$y_2 =$	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…
$y_m =$	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
$Z =$	$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_n$	c_0

Пусть для определенности все x_j, $(j = \overline{1,n})$ свободны и ранг матрицы $\|a_{ij}\|$ равен n. Тогда с помощью n последовательных

Таблица 2.9

П / БП	$-y_1$	$-y_2$	…	$-y_n$	1
$x_1 =$	α_{11}	α_{12}	…	α_{1n}	β_1
…	…	…	…	…	…
$x_n =$	α_{n1}	α_{n2}	…	α_{nn}	β_n
$y_{n+1} =$	$\alpha_{n+1,1}$	$\alpha_{n+1,2}$	…	$\alpha_{n+1,n}$	β_{n+1}
…	…	…	…	…	…
$y_m =$	α_{m1}	α_{m2}	…	α_{mn}	β_m
$Z =$	γ_1	γ_2	…	γ_n	γ_0

ШМЖИ можно все x_j перенести из верхней строки табл. 2.8 в ее левый столбец и на их место поставить соответствующие y_i. С точностью до нумерации получим табл. 2.9.

Выражения для замененных x_j выписываем отдельно, так как они понадобятся после получения решения, чтобы выразить его в старых координатах:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\alpha_{11}y_1 - \alpha_{12}y_2 - \ldots - \alpha_{1n}y_n + \beta_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= -\alpha_{n1}y_1 - \alpha_{n2}y_2 - \ldots - \alpha_{nn}y_n + \beta_n \end{aligned} \tag{2.13}$$

и оставим табл. 2.9 в виде табл. 2.10.

Так как по условию (2.12) $y_i \geq 0$, $(i = \overline{1,m})$, т. е. нет свободных переменных, то пришли к задаче:

дана линейная форма

$$Z = -\gamma_1 y_1 - \gamma_2 y_2 - \ldots - \gamma_n y_n + \gamma_0 \text{ и} \tag{2.14}$$

система неравенств

$$y_i = -\alpha_{i1}y_1 - \alpha_{i2}y_2 - \ldots - \alpha_{in}y_n + \beta_i, \ (i = \overline{n+1,m}) \tag{2.15}$$

Таблица 2.10

П / БП	$-y_1$	…	$-y_s$	…	$-y_n$	1
$y_{n+1}=$	$\alpha_{n+1,1}$	…	$\alpha_{n+1,s}$	…	$\alpha_{n+1,n}$	β_{n+1}
…	…	…	…	…	…	…
$y_r=$	α_{r1}	…	α_{rs}	…	α_{rn}	β_r
…	…	…	…	…	…	…
$y_m=$	α_{m1}	…	α_{ms}	…	α_{mn}	β_m
$Z=$	γ_1	…	γ_s	…	γ_n	γ_0

причем, $y_i \geq 0$, ($i = \overline{1,m}$). Из всех неотрицательных решений системы (2.15) найти такое, которое максимизирует (минимизирует) функцию (2.14).

Еще раз отметим, что исключаются только свободные переменные.

Обычно в задачах экономики с самого начала известно, что $x_j \geq 0$ (это план производства, раскроя материала, перевозок и т. д.).

Итак, будем считать, что в постановке задачи все x_j і 0, так что имеем задачу линейного программирования:

Найти max (min) линейной формы

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_0 \tag{2.16}$$

при линейных ограничениях

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} -a_{ij}(-x_j) + b_i \geq 0, \ (i = \overline{1,m}), \tag{2.17}$$

где

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,n}). \tag{2.18}$$

Если все свободные члены $b_i \geq 0$, ($i = \overline{1,m}$), то задачу (2.16) — (2.18) записываем в виде табл. 2.8. Полагая все $x_j = 0$, получим $y_i = b_i \geq 0$, т. е. имеем опорное решение и дальше переходим к отысканию оптимального решения с помощью симплексного метода.

Рассмотрим теперь правило выбора разрешающего элемента при отыскании опорного решения, когда некоторые свободные члены отрицательны.

Пусть хотя бы одно $b_i < 0$, тогда значения $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ не дают решения системы (2.15). Так, например, если $b_r < 0$, также и $y_r < 0$, а должно быть $y_r \quad 0$.

Геометрически это означает, что начало координат не принадлежит многограннику допустимых решений.

С помощью симплексного метода осуществляем переход от точки O(0,0,...,0) к такой соседней, которую отделяет от многогранника допустимых решений меньшее число плоскостей, т. е. для которой в соответствующей таблице содержится меньшее число отрицательных свободных членов.

Для этого производим ШМЖИ, выбирая разрешающий элемент по правилу:

1. выбираем строку с наименьшим отрицательным свободным членом в 1-столбце. Пусть, например, $b_r < 0$. Если среди коэффициентов этой строки нет отрицательных, то система (2.15) несовместна;

2. если же среди коэффициентов рассматриваемой строки есть отрицательные, то берем какой-нибудь из них, например, $a_{rs} < 0$ и столбец, содержащий этот коэффициент, берем в качестве разрешающего;

3. делим свободные члены на соответствующие коэффициенты разрешающего столбца и наименьшее положительное отношение $(\min({}^{b_i}\!/\!_{a_{is}} \geq 0))$ будет соответствовать разрешающей строке. Пусть это будет при $i = k$, т. е. k-я строка является разрешающей, а элемент a_{ks} — разрешающим.

В случае, когда $\min({}^{b_i}\!/\!_{a_{is}} \geq 0) = {}^{b_k}\!/\!_{a_{ks}} = 0$, то берем a_{ks} разрешающим лишь при $a_{ks} \quad 0$, иначе произойдет зацикливание, т. е. вернемся к уже рассмотренному плану. Если в этом случае, кроме $a_{rs} < 0$, есть $a_{rj} < 0$, причем $a_{kj} \leq 0$, то лучше в качестве разрешающего брать не s-й, а j-й столбец, т. е. k-я строка уже не будет разрешающей.

При этом нетрудно убедиться, что совершая теперь ШМЖИ с выбранным разрешающим элементом a_{ks}, мы не увеличиваем число отрицательных свободных членов, т. е. каждый $b_i \geq 0$ преобразуется в новый $b_i' \geq 0$.

Если в результате симплексного преобразования новый свободный член нашей r-й строки останется еще отрицательным, то продолжаем работать с r-й строкой, производя ШМЖИ по указанному правилу до тех пор пока не установим несовместимость системы (2.15) (все коэффициенты строки станут неотрицательными), либо не избавимся от отрицательности ее свободного члена.

Так поступаем со всеми строками, в которых свободные члены отрицательные.

После конечного числа ШМЖИ либо установим несовместность системы (2.15), либо получим опорное решение (таблица не содержит отрицательных свободных членов), приравняв нулю все y, оказавшиеся наверху таблицы.

Заметим, что если в k-й строке $b_k = 0$, а все коэффициенты этой строки неотрицательны, то можно вычеркнуть эту строку из таблицы и все столбцы, содержащие эти положительные коэффициенты. Действительно, это означает, что k-е уравнение удовлетворяется лишь при равенстве нулю неизвестных над положительными коэффициентами.

2.7.2. Симплексный метод для смешанной системы ограничений

Рассмотрим общую задачу линейного программирования (1.1) — (1.3), когда система ограничений задана в виде смешанной системы, состоящей из уравнений и неравенств, а переменные частично свободны, частично несвободны.

Задача формулируется следующим образом.

Среди решений системы

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i, \ (i = \overline{1,r}), \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k, \ (k = \overline{r+1,m}), \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \ \ldots, \ x_s \ge 0, \ (s \le n), \end{cases} \tag{2.19}$$

найти такое, которое максимизирует (минимизирует) линейную форму

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n. \tag{2.20}$$

В этом случае ограничения — неравенства записываем в виде

$$y_i = -(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n) + b_i \ge 0, \ (i = \overline{1,r}), \tag{2.21}$$

а ограничения — уравнения берем в виде О — уравнений

$$O = -(a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n) + b_k. \ (k = \overline{r+1,m}). \tag{2.22}$$

Составляется таблица, из которой затем исключаются свободные переменные.

Будем считать, что наверх таблицы вместо исключенных x_{s+1}, x_{s+2}, ..., x_n переброшены y_1, y_2, ..., y_{n-s}, $(n-s \le r)$. Если наверх таблицы вместо какого-нибудь x_j перейдет нуль из левого столбца, то расположенный под ним столбец коэффициентов вычеркивается.

После этого исключаются О-строки по правилу:

1. разрешающим столбцом берется столбец, содержащий положительный коэффициент из k-й О-строки,

2. свободные коэффициенты делим на соответствующие элементы разрешающего столбца и наименьшее положительное отношение соответствует разрешающей строке,

3. делаем ШМЖИ с выбранным разрешающим элементом.

После ШМЖИ столбец под перенесенным наверх нулем вычеркивается.

Так переносим все О — строки и затем приступаем к отысканию опорного и оптимального решения, либо показываем, что система (2.19) несовместна.

Если после этих операций в 1-столбце имеется отрицательный свободный член, то опорное решение находим как описано в предыдущем параграфе.

2.7.3. Постановка задачи об оптимальном планировании производства

Для изготовления двух видов изделий I и II используются три вида сырья.

На производство единицы изделия I требуется затратить сырья первого вида 13 кг, сырья второго вида — 32 кг, сырья третьего вида — 58 кг.

На производство единицы изделия II требуется затратить сырья первого вида 24 кг, сырья второго вида — 32 кг и сырья третьего вида — 29 кг.

Производство обеспечено сырьем первого вида в количестве 312 кг, сырьем второго вида — 480 кг, сырьем третьего вида — 696 кг.

Прибыль от реализации единицы готового изделия I составляет 4 усл. ед., а изделия II — 3 усл. ед.

Требуется составить план производства изделий I и II, обеспечивающий максимальную прибыль от их реализации, если заранее планируется изготовление не менее 10 единиц изделий I и II.

Решение. Рассмотрим математическую модель задачи. Если за x_1 взять количество изделий I, планируемых к выпуску, а за x_2 — количество изделий II, то получим задачу линейного программирования.

При ограничениях

$$\begin{cases} 13x_1 + 24x_2 \le 312, \\ 32x_1 + 32x_2 \le 480, \\ 58x_1 + 29x_2 \text{ J } 696, \\ x_1 + x_2 \ge 10, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases} \qquad (2.23)$$

найти максимум линейной функции

$$Z = 4x_1 + 3x_2. \qquad (2.24)$$

Для решения задачи симплекс — методом приведем систему ограничений (2.23) к форме равенств с помощью неотрицательных дополнительных переменных y_i $(i = 1, 2, 3, 4)$:

$$\begin{cases} 13x_1 + 24x_2 + y_1 = 312, \\ x_1 + x_2 + y_2 = 15, \\ 2x_1 + x_2 + y_3 = 24, \\ -x_1 - x_2 + y_4 = -10 \\ -4x_1 - 3x_2 + Z = 0, \end{cases} \qquad (2.25)$$

при этом $x_j \ge 0$ $(j = 1, 2)$; $y_i \ge 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Записываем систему с помощью укороченных таблиц (табл. 2.11).

Так как в I — столбце есть отрицательный элемент, то его нужно сделать положительным. Выбираем y_4 — строку с отрицательным свободным членом "−10".

В этой же строке есть отрицательные элементы, выбираем какой-нибудь из них, например, "−1" в x_1 — столбце. И x_1 — столбец принимаем в качестве разрешающего столбца.

Таблица 2.11

	x_1	x_2	1
y_1	13	24	= 312
y_2	1	1	= 15
y_3	2	1	= 24
y_4	$\boxed{-1}$	–1	= –10
Z	–4	–3	= 0

Таблица 2.12

	y_4	x_2	1
y_1	13	11	= 182
y_2	1	0	= 5
y_3	$\boxed{2}$	–1	= 4
x_1	–1	1	= 10
Z	–4	1	= 40

Делим свободные члены на соответствующие элементы разрешающего столбца, получаем {24, 15, 12, 10} и наименьшее положительное отношение будет соответствовать разрешающей строке, следовательно, y_4 — строка является разрешающей, а элемент $\boxed{-1}$ разрешающим элементом. Совершая ШМЖИ с разрешающим элементом $\boxed{-1}$ по правилам, данным в этом параграфе, получим симплекс — таблицу 2.12, при этом переменные x_1 и y_4 меняются местами. Из таблицы видно, что свободные коэффициенты в I — столбце не отрицательны, следовательно, получено опорное решение: $x_1 = 10$, $x_2 = 0$, $y_1 = 182$, $y_2 = 5$, $y_3 = 4$, $y_4 = 0$, $Z = 40$.

Это решение не является оптимальным, так как в Z — строке имеется отрицательный коэффициент. Улучшаем план, совершая ШМЖИ с разрешающим элементом $\boxed{2}$, получаем табл. 2.13.

Решение, получаемое из табл. 2.13, также не является оптимальным, так как в Z — строке имеется отрицательный коэффициент. Определяя из табл. 2.13 разрешающий элемент $\boxed{\frac{1}{2}}$ и совершая ШМЖИ, приходим к табл. 2.14, в которой все коэффициенты в Z — строке неотрицательны, а,

Таблица 2.13

	y_3	x_2	1
y_1	$-\frac{13}{2}$	$\frac{35}{2}$	= 156
y_2	$-\frac{1}{2}$	$\boxed{\frac{1}{2}}$	= 3
y_4	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	= 2
x_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	= 12
Z	2	–1	= 48

Таблица 2.14

	y_3	y_2	1
y_1	11	–35	= 51
x_2	–1	2	= 6
y_4	0	1	= 5
x_1	1	–1	= 9
Z	1	2	= 54

следовательно, max Z уже достигнут и ему соответствует решение $x_1 = 9$, $x_2 = 6$, при этом $Z_{max} = 54$ (усл. ед.).

Ответ: максимальная прибыль Z = 54 (усл. ед.) достигается при изготовлении 9 единиц изделий I и 6 единиц изделий II.

2.7.4. Задача на освобождение от свободных переменных

Максимизировать линейную функцию

$$Z = -3x_1 + 6x_2 \tag{2.26}$$

при выполнении ограничений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq -1, \\ 2x_1 + x_2 \geq 4, \\ -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 - 4x_2 \geq -13, \\ 4x_1 - x_2 \leq 23. \end{cases} \tag{2.27}$$

Преобразуем неравенства к основной форме, добавляя или вычитая к левой части неравенств базисные переменные (несвободные)

$$y_i \geq 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, 5, \tag{2.28}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - y_1 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - y_2 = 4, \\ -x_1 + x_2 + y_3 = 1, \\ x_1 - 4x_2 - y_4 = -13, \\ 4x_1 - x_2 + y_5 = 23 \end{cases}$$

и записываем систему в виде

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 1, \\ y_2 = 2x_1 + x_2 - 4, \\ -y_3 = x_1 - x_2 + 1, \\ y_4 = x_1 - 4x_2 + 13, \\ y_5 = -4x_1 + x_2 + 23, \\ Z = -3x_1 + 6x_2. \end{cases} \tag{2.29}$$

Переходим к табл. 2.15. Свободные переменные x_1 и x_2 переносим в левый столбец. Исключив переменную x_1 с помощью ШМЖИ с разрешающим элементом $\boxed{-1}$, получим табл. 2.16.

Таблица 2.15

	$-x_1$	$-x_2$	1
y_1	$\boxed{-1}$	–2	1
y_2	–2	–1	–4
y_3	–1	1	1
y_4	–1	4	13
y_5	4	–1	23
Z	3	–6	0

Таблица 2.16

	$-y_1$	$-x_2$	1
y_2	–2	$\boxed{3}$	–6
y_3	–1	3	0
y_4	–1	6	12
y_5	4	–9	27
Z	3	–12	3

и выписываем отдельно выражение для исключенного x_1

$$x_1 = y_1 - 2x_2 - 1. \tag{2.30}$$

Исключаем теперь x_2, делая ШМЖИ с разрешающим элементом $\boxed{3}$. Получаем табл. 2.17 и уравнение (2.31).

Таблица 2.17

	$-y_1$	$-y_2$	1
y_3	$\boxed{1}$	–1	6
y_4	3	–2	24
y_5	–2	3	9
Z	–5	4	–21

Таблица 2.18

	$-y_3$	$-y_2$	1
y_1	1	–1	6
y_4	–3	$\boxed{1}$	6
y_5	2	1	21
Z	5	–1	9

$$x_2 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 - 2. \tag{2.31}$$

Все переменные ограничены. Так как все переменные положительны, то, полагая $y_1 = y_2 = 0$, имеем опорное решение $y_3 = 6$, $y_4 = 24$, $y_5 = 9$. Так как план табл. 2.17 не оптимальный, то совершаем ШМЖИ с разрешающим элементом $\boxed{1}$. Получаем табл. 2.18. Вновь полученный план также не оптимальный, поэтому, совершив ШМЖИ с разрешающим элементом $\boxed{1}$, получаем табл. 2.19.

Таблица 2.19

	$-y_3$	$-y_4$	1
y_1	–2	1	12
y_2	–3	1	6
y_5	5	–1	15
Z	2	1	15

Так как в Z — строке и I — столбце нет отрицательных элементов, то получим оптимальный план $y_3 = y_4 = 0$, $y_1 = 12$, $y_2 = 6$, $y_5 = 15$. Подставляя эти значения в (2.31) и (2.30), найдем, что $Z_{max} = 15$ достигается при $x_1 = 3$ и $x_2 = 4$.

2.7.5. Задача максимизации линейной функции при наличии отрицательных свободных коэффициентов

Найти максимум линейной функции

$$Z = x_1 + x_2 \tag{2.32}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \ge 5, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6, \\ x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{2.33}$$

Запишем систему в виде

$$\begin{cases} y_1 = -x_1 + x_2 + 3 \ge 0, \\ y_2 = x_1 + x_2 - 5 \ge 0, \\ y_3 = -2x_1 + 3x_2 + 6 \ge 0, \\ y_4 = -x_2 + 6 \ge 0. \end{cases} \tag{2.34}$$

Составляем табл. 2.20. В I — столбце имеется отрицательный элемент "−5", его надо убрать, чтобы на этом месте был положительный элемент.

Таблица 2.20

	$-x_1$	$-x_2$	1
y_1	1	–1	3
y_2	–1	–1	–5
y_3	2	–3	6
y_4	0	1	6
Z	–1	–1	0

Таблица 2.21

	$-y_1$	$-x_2$	1
x_1	1	–1	3
y_2	1	–2	–2
y_3	–2	–1	0
y_4	0	1	6
Z	1	-2	3

Совершаем ШМЖИ с разрешающим элементом $\boxed{1}$. Получаем табл. 2.21, продолжаем работать со 2-ой строкой, так как отрицательный элемент не пропал. Совершаем ШМЖИ с разрешающим элементом $\boxed{-2}$, получаем табл. 2.22.

Таблица 2.22

	$-y_1$	$-y_2$	1
x_1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	4
x_2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
y_3	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
y_4	$\frac{1}{2}$	$\boxed{\frac{1}{2}}$	5
Z	0	–1	5

Таблица 2.23

	$-y_1$	$-y_4$	1
x_1	1	1	9
x_2	0	1	6
y_3	–2	1	6
y_2	1	2	10
Z	1	2	15

Все свободные переменные положительные, находим опорное решение, полагая $y_1 = y_2 = 0$, $x_1 = 4$, $x_2 = 1$, $y_3 = 1$, $y_4 = 5$. Так как план не оптимальный, то совершаем ШМЖИ с разрешающим элементом $\boxed{\frac{1}{2}}$, получаем табл. 2.23, из которой имеем оптимальное решение $x_1 = 9$, $x_2 = 6$ и $Z_{max} = 15$.

2.8. Задача минимизации линейной функции

2.8.1. Сведение задачи минимизации к задаче максимизации линейной функции

До сих пор мы рассматривали решение симплекс-методом задачи отыскания максимума линейной функции

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n.$$

Однако, во многих экономических задачах требуется найти минимум этой линейной функции. Для этого достаточно положить

$$W = -Z = -c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n \tag{2.35}$$

и решать задачу максимизации полученной функции W при соответствующих ограничениях. Ибо ясно, что

$$\min Z = -\max W. \tag{2.36}$$

Пример 7. Минимизировать линейную функцию

$$Z = -2x_1 + 5x_2$$

при выполнении ограничений

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 14, \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30, \\ 3x_1 + 8x_2 \geq 24, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Геометрическое решение задачи приведено на рис. 2.2 и ему отвечает оптимальное решение в точке C $\left(\frac{48}{11}; \frac{15}{11}\right)$ и при этом $Z_{min} = -\frac{21}{11}$.

Вводя выравнивающие переменные $y_i \geq 0$ и функцию $W = -Z = 2x_1 - 5x_2 \to \max$, задачу запишем в виде

$$\begin{cases} y_1 = 7x_1 + 2x_2 - 14, \\ y_2 = -5x_1 - 6x_2 + 30, \\ y_3 = 3x_1 + 8x_2 - 24, \\ W = 2x_1 - 5x_2. \end{cases}$$

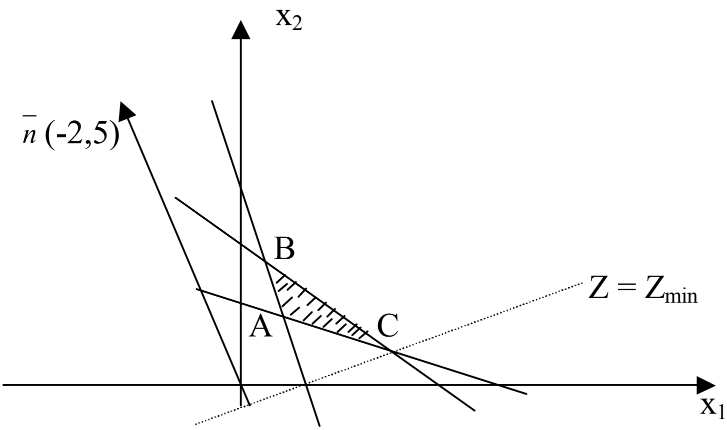


Рис. 2.2

Записываем эту систему в виде табл. 2.24.

Таблица 2.24

	$-x_1$	$-x_2$	1
y_1	–7	–2	–14
y_2	5	6	30
y_3	–3	$\boxed{-8}$	–24
W	–2	5	0

Таблица 2.25

	$-x_1$	$-y_3$	1
y_1	$\boxed{-\frac{50}{8}}$	$-\frac{2}{8}$	–8
y_2	$\frac{22}{8}$	$\frac{6}{8}$	12
x_2	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$	3
W	$-\frac{31}{8}$	$\frac{5}{8}$	–15

Так как имеются отрицательные свободные члены, то от них избавляемся. Выбираем наименьший отрицательный член в y_3 — строке и в этой строке берем отрицательный элемент “−8”, который соответствует разрешающему столбцу. Свободные члены делим на соответствующие элементы разрешающего столбца и выбираем наименьшее положительное отношение, тогда y_3 — строка разрешающая. Производя ШМЖИ с разрешающим элементом $\boxed{-8}$, получаем табл. 2.25.

Избавляемся от отрицательного свободного члена в y_1 — строке, совершая ШМЖИ с разрешающим элементом $\boxed{-\frac{50}{8}}$, получаем табл. 2.26.

Так как все свободные члены в I — столбце неотрицательные, то выбираем разрешающий элемент как в МЖИ для задачи на max.

Совершаем ШМЖИ с разрешающим элементом $\boxed{\frac{22}{50}}$, получаем табл. 2.27

Таблица 2.26

	$-y_1$	$-y_3$	1
x_1	$-\frac{8}{50}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{64}{50}$
y_2	$\boxed{\frac{22}{50}}$	$\frac{32}{50}$	$\frac{424}{50}$
x_2	$\frac{3}{50}$	$-\frac{7}{50}$	$\frac{126}{50}$
W	$-\frac{31}{50}$	$\frac{39}{50}$	$-\frac{502}{50}$

Таблица 2.27

	$-y_2$	$-y_3$	1
x_1	$\frac{4}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{48}{11}$
y_1	$\frac{25}{11}$	$\frac{16}{11}$	$\frac{212}{11}$
x_2	$-\frac{3}{22}$	$-\frac{5}{22}$	$\frac{15}{11}$
W	$\frac{31}{22}$	$\frac{37}{22}$	$\frac{21}{11}$

Так как в W — строке и в I — столбце нет отрицательных элементов, то получили оптимальное решение $x_1 = \frac{48}{11}$, . $x_2 = \frac{15}{11}$, $W_{max} = \frac{21}{11}$ или $Z_{min} = -W_{max} = -\frac{21}{11}$.

2.8.2. Постановка задачи о составлении оптимального рациона кормления животных

Фирма выпускает корм для животных и фасует их в пакеты. Каждый пакет содержит два вида корма и предназначен для откорма одного животного в течение дня. При откорме каждое животное должно получать не менее 9 ед. вещества B_1, не менее 8 ед. вещества B_2 и не менее 12 ед. вещества B_3. Содержание количества единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма и стоимость 1 кг корма приведены в табл. 2.28.

Таблица 2.28

Питательные вещества	**Количество единиц питательных веществ в 1 кг корма**	
	корм 1	**корм 2**
B_1	3	1
B_2	1	2
B_3	1	6
Стоимость корма	4	6

Необходимо составить дневной рацион нужной питательности, причем, затраты на него должны быть минимальными.

Решение. Обозначим через x_1 и x_2 соответственно количество кг корма 1 и 2 в дневном рационе.

Тогда задачу можно сформулировать следующим образом. Найти минимальное значение линейной функции $Z = 4x_1 + 6x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задачу минимизации линейной функции решаем непосредственно с помощью МЖИ.

Вводя выравнивающие переменные $y_i \geq 0$, записываем систему уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = -3(-x_1) - (-x_2) - 9, \\ y_2 = -(-x_1) - 2(-x_2) - 8, \\ y_3 = -(-x_1) - 6(-x_2) - 12, \\ Z = -4(-x_1) - 6(-x_2). \end{cases}$$

Записываем систему в виде табл. 2.29.

Таблица 2.29

	$-x_1$	$-x_2$	1
y_1	–3	–1	–9
y_2	–1	–2	–8
y_3	–1	$\boxed{-6}$	–12
Z	–4	–6	0

Таблица 2.30

	$-x_1$	$-y_3$	1
y_1	$\boxed{-\frac{17}{6}}$	$-\frac{1}{6}$	–7
y_2	$-\frac{4}{6}$	$-\frac{2}{6}$	–4
x_2	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	2
Z	–3	–1	12

В I —столбце избавляемся от отрицательных членов. Учитывая правило выбора разрешающего элемента, данное в п. 2.7.1, выбираем разрешающим элементом $\boxed{-6}$ и совершаем ШМЖИ. Получаем табл. 2.30. Далее, производя ШМЖИ с разрешающим элементом $\boxed{-\frac{17}{6}}$, получаем табл. 2.31. Далее производим ШМЖИ с разрешающим элементом $\boxed{-\frac{5}{17}}$ и получаем табл. 2.32.

Таблица 2.31

	$-y_1$	$-y_3$	1
x_1	$-\frac{6}{17}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{42}{17}$
y_2	$-\frac{4}{17}$	$\boxed{-\frac{5}{17}}$	$-\frac{40}{17}$
x_2	$\frac{1}{17}$	$-\frac{3}{17}$	$\frac{27}{17}$
Z	$-\frac{18}{17}$	$-\frac{14}{17}$	$\frac{330}{17}$

Таблица 2.32

	$-y_1$	$-y_2$	1
x_1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	2
y_3	$\frac{4}{5}$	$-\frac{17}{5}$	8
x_2	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	3
Z	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{14}{5}$	26

Так как в I — столбце табл. 2.32 нет отрицательных элементов, а в Z — строке под переменными нет положительных элементов, то получили оптимальное решение.

В пакете должно содержаться 2 кг корма 1 и 3 кг корма 2 и при этом затраты будут минимальными и равными $Z_{min} = 26$.

2.8.3. Минимизация линейной функции с помощью укороченных таблиц и ОЖИ

Пример 8. Минимизировать линейную функцию

$$Z = -3x_1 + 6x_2$$

при выполнении ограничений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 1 \geq 0, \\ 2x_1 - x_2 + 1 \geq 0, \\ x_1 - x_2 + 1 \geq 0, \\ -4x_1 + x_2 + 23 \geq 0. \end{cases}$$

Запишем задачу в виде

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 1 \geq 0, \\ y_2 = 2x_1 - x_2 + 1 \geq 0, \\ y_3 = x_1 - x_2 + 1 \geq 0, \\ y_4 = -4x_1 + x_2 + 23 \geq 0 \\ Z = -3x_1 + 6x_2. \end{cases}$$

Запишем систему в виде табл. 2.33.

Таблица 2.33

	x_1	x_2	1
y_1	$\boxed{1}$	2	1
y_2	2	–1	1
y_3	1	–1	1
y_4	–4	1	23
Z	–3	6	0

Таблица 2.34

	y_1	x_2	1
y_2	2	–5	–1
y_3	1	–3	0
y_4	–4	$\boxed{9}$	27
Z	–3	12	3

Так как переменные x_1 и x_2 являются свободными, то перекидываем их в левый столбец. Совершаем шаг ОЖИ с разрешающим элементом $\boxed{1}$. Напомним, что на месте разрешающего элемента стоит величина ему обратная, элементы разрешающей строки делятся на разрешающее число со знаком минус, элементы разрешающего столбца делятся на разрешающее число, а остальные элементы находятся по правилу прямоугольника. Получим табл. 2.34 и отдельно выпишем уравнение для x_1:

$$x_1 = y_1 - 2x_2 - 1. \tag{2.37}$$

Перекидываем x_2 в левый столбец для чего совершаем шаг ОЖИ с разрешающим элементом $\boxed{9}$. Получаем табл. 2.35 и уравнение:

$$x_2 = \frac{4}{9}y_1 + \frac{1}{9}y_4 - 3. \tag{2.38}$$

Таблица 2.35

	y_1	y_4	1
y_2	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{5}{9}$	14
y_3	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	9
Z	$\frac{7}{3}$	$\frac{4}{3}$	–33

Так как в I — столбце и Z — строке под переменными нет отрицательных элементов, то получим оптимальный план $y_2 = 14$, $y_3 = 9$, $Z_{min} = -33$. Из (2.38) и (2.37) находим, что $x_1 = 5$, $x_2 = -3$.

2.9. Решение задач линейной алгебры и линейного программирования на ЭВМ

2.9.1. Обращение матриц

Найти матрицу обратную к заданной

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Открываем окно Excel. Выделяем область на рабочем листе, куда будет выделен результат вычислений.

В диапазон ячеек B1:Д3 введена матрица А. Для нахождения обратной матрицы выделим диапазон ячеек F1:H3 и введем в него формулу

МОБР(B1:Д3)

Для этого установите курсор в строке формул и закончите ввод не как обычно, нажатием клавиши <Enter , а нажатием клавиш <Ctrl + <Shift + <Enter . Таким образом, вы сообщите программе, что необходимо выполнить операцию над массивом. При этом Excel заключит форму в строке формул в фигурные скобки (рис. 2.3). При работе с массивами формула действует на все ячейки диапазона. Нельзя изменять отдельные ячейки в операндах формулы.

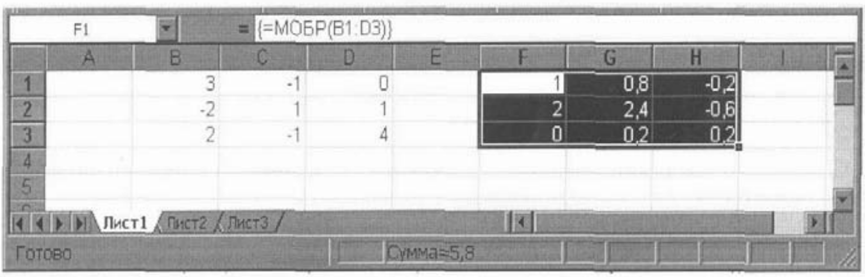


Рис. 2.3. Обращение матрицы

Обратная матрица имеет вид

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}8 & -0{,}2 \\ 2 & 2{,}4 & -0{,}6 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

2.9.2. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы

Решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

Запишем матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Открываем окно Excel. С учетом занятых букв при работе с матрицами перед вводом формулы выделяем область на рабочем листе, куда будет выведен результат вычислений.

В диапазоны ячеек C1:F4 введена матрица A коэффициентов системы, а свободные члены — матрица B введены в ячейки H1:H4.

Для решения системы уравнений выделим диапазон ячеек J1:J4 и введем в него формулу

= МУМНОЖ(МОБР(C1:F4);H1:H4)

В ячейках J1:J4 появятся ответы: $x_1 = 3$, $x_2 = -4$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$ (рис. 2.4).

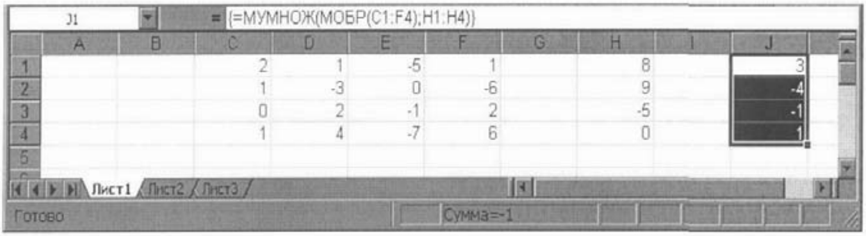


Рис. 2.4. Решение системы линейных уравнений с помощью обратной матрицы

2.9.3. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = -3, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = -5. \end{cases}$$

Работаем в Excel. Открываем окно Excel. В диапазоны ячеек A1:K4 и E1:E4 введены матрица коэффициентов системы и столбец свободных членов.

Содержимое ячеек A1:E1 скопировано в ячейки A6:E6, A11:E11 и A16:E16. В диапазон ячеек A7:E7 введена формула

{ = A2:E2−$A$1:$E$1*(A2/$A$1)},

обращающая в нуль коэффициент при x_1 во втором уравнении системы. Выделим диапазон A7:E7 и протащим маркер заполнения этого диапазона так, чтобы заполнить диапазон A7:E9. Это обратит в нуль коэффициент при x_1 в третьем и четвертом уравнениях системы. Скопируем значения из диапазона ячеек A7:E7 в диапазоны A12:E12 и A17:E17. Для копирования значений без формул воспользуемся командой **Правка**, **Специальная вставка** (Edit, Special Paste) и в открывшемся диалоговом окне **Специальная вставка** (Special Paste) в группе **Вставить** (Paste) установим переключатель в положение **Значения** (Value).

В диапазон ячеек A13:E13 вводим формулу

$$\{ = \text{A8:E8}-\text{\$A\$7:\$E\$7}*(\text{B8}/\text{\$B\$7})\}.$$

Выделим диапазон A13:E13 и протащим маркер заполнения этого диапазона так, чтобы заполнить диапазон A13:E14. Это обратит в нуль коэффициенты при x_2 в третьем и четвертом уравнениях системы. Копируем значения из диапазона ячеек A12:E12 в диапазон A18:E18. В диапазон ячеек A19:E19 вводим формулу

$$\{ = \text{A14:E14}-\text{\$A\$13:\$E\$13}*(\text{C14}/\text{\$C\$13})\},$$

которая обращает в нуль коэффициент при x_3 в четвертом уравнении системы.

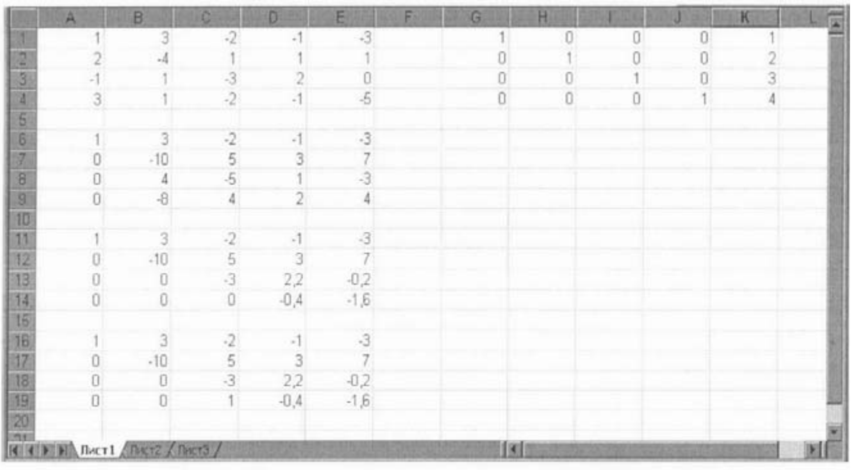
Прямая прогонка метода Гаусса завершена. Обратная прогонка заключается в вводе в диапазоны G4:K4, G3:K3, G2:K2 и G1:K1 соответственно следующих формул

{ = F19:E19/K19}

{ = (A18:E18–G4:K4*K18)/C18}

{ = (A17:E17–G4:K4*K17–G3:K3*C17)/B17}

{ = (A16:E16–G4:K4*K16–G3:K3*C16–G2:K2*B16)/A16}



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	1	3	-2	-1	-3		1	0	0	0	1	
2	2	-4	1	1	1		0	1	0	0	2	
3	-1	1	-3	2	0		0	0	1	0	3	
4	3	1	-2	-1	-5		0	0	0	1	4	
5												
6	1	3	-2	-1	-3							
7	0	-10	5	3	7							
8	0	4	-5	1	-3							
9	0	-8	4	2	4							
10												
11	1	3	-2	-1	-3							
12	0	-10	5	3	7							
13	0	0	-3	2,2	-0,2							
14	0	0	0	-0,4	-1,6							
15												
16	1	3	-2	-1	-3							
17	0	-10	5	3	7							
18	0	0	-3	2,2	-0,2							
19	0	0	1	-0,4	-1,6							
20												

Рис. 2.5. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса

В диапазоне ячеек K1:K4 получено решение системы $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$ (рис. 2.5).

2.9.4. Решение задачи линейного программирования

Рассмотрим задачу сформулированную в п. 2.5.1.

Найти максимум целевой функции

$$Z = f(x, y) = 10x + 5y$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 14x + 5y \le 350, \\ 7x + 4y \le 196, \\ x + 2y \le 68, \\ x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$$

Рассмотрим геометрическое решение задачи с применением программы MATHCAK 2000.

1. Установите режим автоматических вычислений.

2. Запишите в виде $y = kx + b$ уравнения прямых, ограничивающих область допустимых значений переменных.

Для того чтобы ввести и разрешить относительно y ограничение $14x + 5y \le 350$, введите левую часть неравенства, нажмите кнопку Ctrl и нажмите одновременно кнопку =, удерживая предыдущую до тех пор пока выскочит жирный знак =; пометьте выделяющей рамкой переменную y, щелкните в меню Symbolic (Символы) по строке Solve (Вычислить) — результат вычислений будет выведен в рабочем документе справа от уравнения; введите имя функции (в рассматриваемом примере y1(x)) и присвойте ей полученное выражение. Таким образом, определено уравнение одной из прямых, ограничивающих область допустимых значений.

Аналогично введите остальные ограничения. Введите уравнение $10x + 5y = C$ линии уровня (опорная прямая) целевой функции. Действуйте так же, как и при вводе ограничений, но перед тем как разрешить уравнение относительно y, присвойте какое-нибудь значение константе C.

3. Изобразите на графике соответствующие прямые и определите область допустимых решений системы.

4. Изменяя значения константы C, например C = = 100,150,200,250,..., наблюдайте за движением опорной прямой и сформулируйте вывод о разрешимости задачи.

5. Если задача имеет единственное решение, найдите вершину, в которой $Z = Z_{max}$. В нашем примере максимум целевой функции достигается в точке пересечения прямых $14x + 5y = 350$ и $7x + 14y = 196$. Найдите координаты точки, используя функцию Find.

6. Вычислите значение целевой функции в найденной точке.

7. Сформулируйте и запишите в рабочем документе выводы.

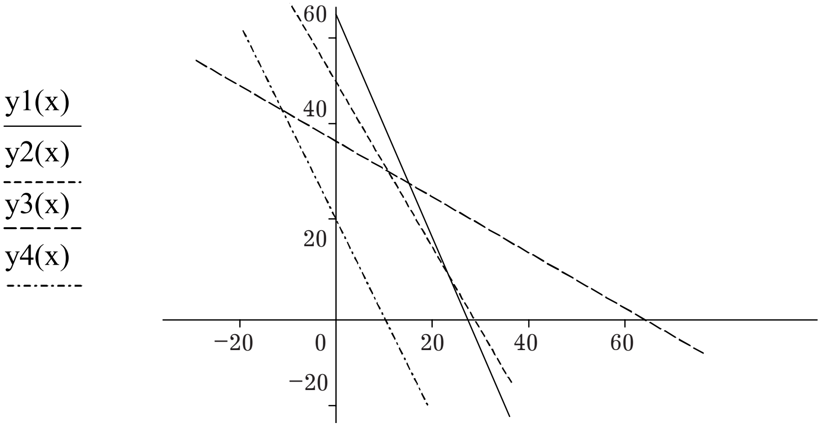
Фрагмент рабочего документа Mathcad с решением задачи приведен ниже.

$14x + 5y = 350, \qquad \frac{-14}{5}x + 70 \qquad y1(x) := \frac{-14}{5}x + 70$

$7x + 4y = 196, \qquad \frac{-7}{4}x + 49 \qquad y2(x) := \frac{-7}{4}x + 49$

$x + 2y = 68, \qquad \frac{-1}{2}x + 34 \qquad y3(x) := \frac{-1}{2}x + 34$

$10x + 5y = c \qquad -2x + \frac{1}{5}c \qquad c := 100 \qquad y4(x) := -2x + \frac{1}{5}c$



Данным

$$14x + 5y = 350$$

$$7x + 4y = 196$$

Найти $(x,\ y) \rightarrow \begin{pmatrix} 20 \\ 14 \end{pmatrix}$

$f(x,\ y) := 10x + 5y$

$fmin := f(20,14)$

$fmin = 270$

Аналитическое решение этой же задачи в Mathcad значительно проще.

1. Установите режим автоматических вычислений.

2. Запишите задачу. Произвольным x и y присвойте произвольные (допустимые) значения, чтобы программа могла начать счет.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad.

$$z(x,\ y) := 10x + 5y$$

$$x := 1 \quad y := 1$$

Данным

$$14x + 5y \quad 350$$

$$7x + 4y \le 196$$

$$x + 2y \le 68$$

M: = Максимизировать (z, x,y) $M = \begin{pmatrix} 20 \\ 14 \end{pmatrix}$ $z(M_0, M_1) = 270$

Приводим решение этой задачи с использованием программы Microsoft Excel.

Отведем ячейки A3 и B3 под значения переменных x и y (рис. 2.6).

Рис. 2.6. Диапазоны, отведенные под переменные, целевую функцию и ограничения

В ячейку C4 введем функцию цели

$$= 10*A3 + 5*B3$$

в ячейки A7:A9 введем левые части ограничений

$$= 14*A3 + 5*B3$$

$$= 7*A3 + 4*B3$$

$$= A3 + 2*B3$$

а в ячейки B7:B9 — правые части ограничений.

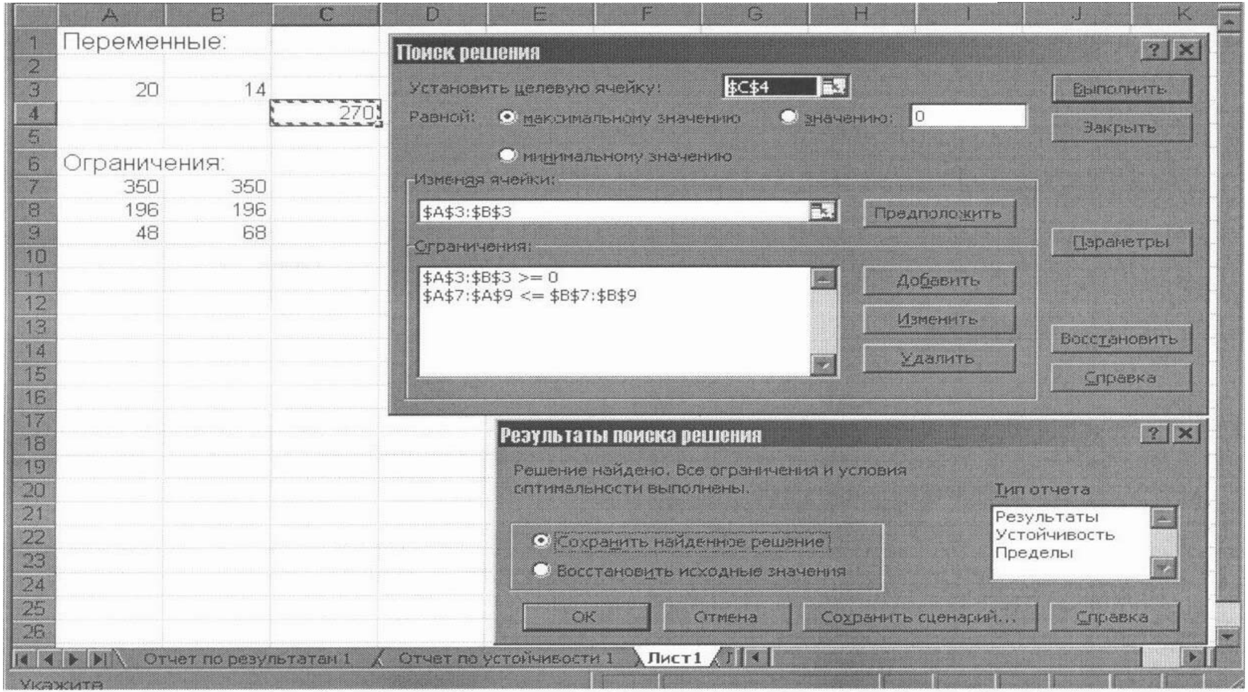


Рис. 2.7. Результаты поиска решения и результаты расчета

После этого выберем команду **Сервис, Поиск решения** (Tools, Solver) и заполним открывшееся диалоговое окно **Поиск решения** (Solver), как показано на рис. 2.6. После нажатия кнопки **Выполнить** (Solve) открывается окно **Результаты поиска решения** (Solver Results), которое сообщает, что решение найдено (рис. 2.7). Результаты решения задачи представлены в левом верхнем углу рис. 2.7. Диалоговое окно **Поиск решения**, диалоговое окно **Результаты поиска решения** и результаты расчета с помощью средства поиска решений совмещены на одном рис. 2.7.

Раздел II
ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Глава 3
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ДВОЙСТВЕННОСТИ

3.1. Прямая и двойственная задачи линейного программирования

Основное содержание планово-экономической работы на предприятии составляет решение задачи достижения наилучшего экономического эффекта при ограниченных ресурсах. Математически она часто сводится к задаче линейного программирования и может быть решена известными методами, причем с планом выпуска продукции оказывается тесно связанной система так называемых двойственных оценок применяемых ресурсов.

Пусть на некотором предприятии решено использовать отходы основного производства. Для этого намечается наладить выпуск изделий широкого потребления. Известно, что обеспечен сбыт любого количества продукции, но количество исходных материалов ограничено и, кроме того, ставится цель достичь наибольшей прибыльности производства. Предположим, что предприятие располагает двумя видами сырья (отходы основного производства) в количествах 12 и 5 единиц соответственно, и намечается выпуск двух видов изделий. Затраты различных видов сырья на производство единицы продукции первого вида составляют 2 и 1 единицы, расход тех же видов сырья на производство единицы продукции второго вида — 3 и 1 единицы соответственно. Ожидаемая прибыль от реализации единицы продукции первого вида — 3 у.е., второго вида — 4 у.е. Чтобы составить план производства (x_1; x_2), обеспечивающий предприятию наибольшую возможность прибыли от реализации двух видов изделий ширпотреба, следует решить задачу линейного программирования. Максимизировать прибыль:

$$Z = 3x_1 + 4x_2,$$

при ограничениях по ресурсам

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \le 5, \end{cases}$$

и естественных условиях

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Предположим теперь, что при изучении вопроса об использовании отходов основного производства на предприятии выявилась другая возможность — прямая реализация отходов на сторону. При этом покупатель считает необходимым рассмотреть различные варианты цен на сырье, ибо речь идет об отходах производства. Обозначим через y_1 предполагаемую цену единицы сырья первого вида, через y_2 — цену единицы сырья второго вида. Общая стоимость сырья составит:

$$T = 12y_1 + 5y_2.$$

Покупатель требует, чтобы эта сумма была минимизирована. Прямая реализация отходов целесообразна только в том случае, когда выручка от продажи материалов, расходуемых на изготовление единицы каждого изделия, не меньше, чем прибыль от продажи готового изделия:

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \ge 3, \\ 3y_1 + y_2 \ge 4, \end{cases}$$

причем цены не могут быть отрицательными

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0.$$

Мы получаем новую задачу линейного программирования, называемую двойственной первой задаче. Ее надо решить так, чтобы указать цены различных видов сырья, позволяющие соблюсти как интересы покупателя, так и продавца. Здесь имеется в виду относительная стоимость сырья с точки зрения доходов, получаемых предприятием при переработке этого сырья в готовую продукцию.

Связь между двумя рассмотренными задачами линейного программирования очевидна: имея одну задачу, формально можно построить другую задачу. Обобщим результаты.

Рассмотрим задачу линейного программирования с ограничениями — неравенствами.

Найти решение $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющее системе неравенств

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \end{array}\right\} \quad (3.1)$$

и условиям неотрицательности

$$x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,n}), \quad (3.2)$$

для которого линейная функция

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \quad (3.3)$$

достигает max.

Построим другую задачу.

Найти решение $\bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_m)$, удовлетворяющее системе неравенств

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \ge c_n \end{array}\right\} \quad (3.1')$$

и условиям неотрицательности

$$y_i \geq 0, \ (i = \overline{1,m}), \tag{3.2′}$$

для которого функция

$$T = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \tag{3.3′}$$

достигает min.

Задача (3.1) называется двойственной к задаче (3.1′). Можно также сказать, что и задача (3.1′) является двойственной к задаче(3.1). Ясно, что задача двойственная к двойственной, является прямой. Поэтому эти задачи называются взаимно двойственными или симметричными двойственными задачами.

Тесная связь между задачами двойственной пары позволяет получить решение любой из них, решая как прямую, так и сопряженную задачу.

Совместное рассмотрение таких пар двойственных задач оказывается эффективным средством при теоретическом исследовании проблем линейного программирования и построения различных вычислительных методов, а также при проведении качественных исследований в задачах линейного программирования. Вообще знание двойственной процедуры позволяет осуществлять решение более гибко, приноравливаясь к конкретным особенностям конкретных задач.

3.2. Основные теоремы двойственности

Теорема. Для любых допустимых решений $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ прямой и двойственной задач линейного программирования справедливо неравенство:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \,, \tag{3.4}$$

которое часто называется основным неравенством теории двойственности.

Экономическое содержание этого неравенства состоит в том, что для любого допустимого плана производства $x^\circ = (x_1^o, x_2^o, \ldots, x_n^o)$ и любого допустимого вектора оценок ресурсов $y^\circ = (y_1^o, y_2^o, \ldots, y_m^o)$ общая стоимость всего произведенного продукта не больше суммарной оценки ресурсов.

Многочисленные приложения теории двойственности опираются на следующую теорему, устанавливающую соотношения между значениями целевых функций двойственных задач.

Теорема о минимаксе (необходимый признак оптимальности допустимого решения). Если одна из двойственных задач имеет оптимальное решение, то другая также имеет оптимальное решение, причем, для любых оптимальных решений, выполняется равенство:

$$Z(\bar{x}) = T(\bar{y}); \; Z_{max} = T_{min}. \tag{3.5}$$

Если же одна из двойственных задач не разрешима из-за $Z_{max} \to \infty$(или $T_{min}) \to \infty$, то другая задача не имеет допустимых решений.

Данная теорема является первой основной теоремой двойственности.

В терминах оценок теорема может быть сформулирована следующим образом: если задача определения оптимального плана, максимизирующего выпуск продукции, разрешима, то разрешима и задача определения минимальных оценок ресурсов, причем цена, продукта, полученного реализацией оптимального плана, совпадает с суммарной оценкой ресурсов.

Теорема (достаточный признак существования оптимального решения). Если $\bar{x}$ и $\bar{y}$ допустимые решения пары двойственных задач, для которых выполняется равенство $Z_{max} = T_{min}$, то $\bar{x}$ есть оптимальное решение прямой задачи, а $\bar{y}$ — двойственной.

Экономически это означает, что план производства и вектор оценок ресурсов являются оптимальными тогда и только тогда, когда цена произведенной продукции и суммарная оценка ресурсов совпадают. Можно сказать, что оценки выступают как инструмент балансирования затрат и результатов.

Теорема. Для того, чтобы решение $\bar{x}^{\circ} = (x_1^o,\ x_2^o,\ \ldots,\ x_n^o)$ систем условий пары двойственных задач являлись оптимальными решениями этих задач, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$x_j^o \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^o - c_j\right) = 0, \quad j = \overline{1,n}\ , \tag{3.6}$$

$$y_i^o \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^o - b_i\right) = 0, \quad i = \overline{1,m}\ , \tag{3.7}$$

т. е. если для оптимального решения одной из задач какое-либо неравенство удовлетворяется как строгое неравенство, то соответствующая ему компонента оптимального решения двойственной задачи должна равняться нулю и наоборот. Иными словами,

если $x_j^o \quad 0$ для некоторого j, то $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^o \ = c_j$ (3.6′)

и если $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^o \quad c_j$, то $x_j^o = 0$; (3.6″)

или же если $y_i^o \quad 0$ для некоторого i, то $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^o = b_i$, (3.7′)

и если $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^o < b_i$, то $y_i^o = 0$. (3.7″)

Это есть вторая основная теорема двойственности.

Рассмотрим ее экономическое содержание. Из соотношений (3.7′) и (3.7″) следует, что оценки оптимального плана выступают как мера дефицитности ресурсов. Дефицитный ресурс, полностью используемый по оптимальному плану производства, имеет положительную оценку, а недефицитный ресурс, не полностью используемый, имеет нулевую оценку. Из соотношений (3.6′) и (3.6″) следует, что оценки оптимального плана выступают как инструмент определения эффективности отдельных технологических способов. Некоторый данный способ производства используется только в том случае, когда при его реализации оценка затраченных ресурсов и цена полученной продукции совпадают.

Рассмотрим задачу, сформированную в 3.1.

Прямая задача	Двойственная задача
$\left.\begin{array}{l} 2x_1+3x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{array}\right\} \quad (a)$	$\left.\begin{array}{l} 2y_1 + y_2 \ge 3, \\ 3y_1 + y_2 \ge 4, \\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0. \end{array}\right\} \quad (a')$
$Z = 3x_1+4x_2 \quad (\max).$	$T = 12y_1+5y_2 \quad (\min).$

Геометрическое решение (рис. 3.1).

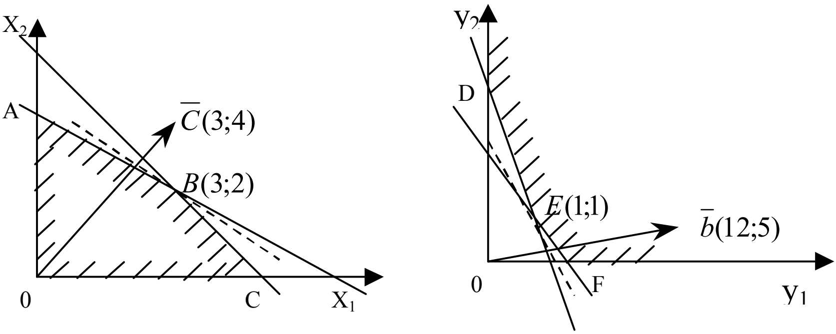


Рис. 3.1

Из геометрического решения следует, что

$$\bar{x}_{\text{опт}} = (3;2), \qquad \bar{y}_{\text{опт}} = (1;1),$$

$$Z_{\max} = Z(\bar{x}_{\text{опт}}) = 17. \qquad T_{\min} = T(\bar{y}_{\text{опт}}) = 17.$$

Приведем задачи (3.1) — (3.3) и (3.1′) — (3.3′) к канонической форме, для чего введем в неравенства (а) и (а′) соответственно балансовые (выравнивающие) переменные $x_3 \ge 0$, $x_4 \ge 0$ и $y_3 \ge 0$, $y_4 \ge 0$. Поскольку в неравенстве (a') балансовые переменные вводятся со знаком “–“ и не могут поэтому служить в качестве исходных базисных переменных, умножим полученные из (a') уравнения на “–1“.

Все члены с переменными в целевых функциях перенесем в левые части.

Тогда задачи (a) и (a') в канонической форме запишутся в виде:

$$\left.\begin{aligned}&2x_1+3x_2+x_3=12,\\&x_1+x_2+x_4=5,\\&-3x_1-4x_2+Z=0.\end{aligned}\right\}\ (b) \qquad \left.\begin{aligned}&2(-y_1)+(-y_2)+y_3=-3,\\&3(-y_1)+(-y_2)+y_4=-4,\\&12(-y_1)+5(-y_2)+T=0.\end{aligned}\right\}\ (b')$$

Исходные таблицы (3.1) — (3.1′):

Таблица 3.1

С.П. / Б.П.	x_1	x_2	1
x_3	2	$\boxed{3}$	=12
x_4	1	1	=5
Z	–3	–4	=0

Таблица 3.1′

С.П. / Б.П.	$-y_1$	$-y_2$	1
y_3	2	1	=–3
y_4	$\boxed{3}$	1	=–4
T	12	5	=0

Расширенные матрицы систем взаимно транспонированные.

Транспонировав вторую таблицу и совместив ее с первой, получим совместную таблицу.

Таблица 3.1″

<table>
<tr><td colspan="2">Б.П.</td><td>y_3</td><td>y_4</td><td rowspan="2">T</td></tr>
<tr><td>С.П.</td><td>С.П. / Б.П.</td><td>x_1</td><td>x_2</td></tr>
<tr><td>$-y_1$</td><td>x_3</td><td>2</td><td>$\boxed{3}$</td><td>12</td></tr>
<tr><td>$-y_2$</td><td>x_4</td><td>1</td><td>1</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="2">Z</td><td>–3</td><td>–4</td><td>0</td></tr>
</table>

Рассмотрим правило выбора разрешающего элемента и алгоритм симплексного преобразования.

Решение задачи максимизации (свободные члены положительные):

1. Столбец с наименьшим отрицательным элементом в z-строке назовем разрешающим.

2. Свободные члены делим на соответствующие элементы разрешающего столбца, и наименьшее положительное отношение будет соответствовать разрешающей строке.

Решение задачи минимизации (свободные члены отрицательные):

1. Строку с наименьшим отрицательным элементом в 1-столбце назовем разрешающей.

2. Элементы Т-строки делим на соответствующие элементы разрешающей строки, и наименьшее положительное отношение будет соответствовать разрешающему столбцу.

На пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца стоит разрешающий элемент. Совершаем симплексное преобразование с выбранным разрешающим элементом по следующему правилу.

1. На месте разрешающего элемента стоит величина ему обратная.

2. Новые элементы, соответствующие разрешающей строке, равны старым элементам разрешающей строки, деленным на разрешающее число.

3. Новые элементы, соответствующие разрешающему столбцу, равны старым элементам разрешающего столбца, взятым с обратным знаком и деленным на разрешающее число.

4. Новые элементы, соответствующие разрешающей строке, равны старым элементам разрешающей строки, взятым с обратным знаком и деленным на разрешающее число.

5. Новые элементы, соответствующие разрешающему столбцу, равны старым элементам разрешающего столбца, деленным на разрешающее число.

6.

$$\begin{matrix}\text{Остальные}\\ \text{новые}\\ \text{элементы}\end{matrix} = \begin{matrix}\text{Старые}\\ \text{элементы}\end{matrix} - \frac{\begin{matrix}\text{Соответств.}\\ \text{число в разреш.}\\ \text{строке}\end{matrix} \times \begin{matrix}\text{Соответств}\\ \text{число в разреш.}\\ \text{столбце}\end{matrix}}{\text{Разрешающее число}}$$

7. Полученный план будет оптимальный, если в z-строке не будет отрицательных элементов.

8. Полученный план будет оптимальный, если в 1-столбце не будет отрицательных элементов.

Выполняя симплекс-преобразование с разрешающим элементом “3”, получим следующие планы (табл. 3.2, 3.2′, 3.2″).

Таблица 3.2

Б.П. \ С.П.	x_1	x_3	1
x_2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	4
x_4	$\boxed{\frac{1}{3}}$	$-\frac{1}{3}$	1
Z	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	16

Таблица 3.2′

Б.П. \ С.П.	$-y_4$	$-y_2$	1
y_3	$\frac{2}{3}$	$\boxed{\frac{1}{3}}$	$-\frac{1}{3}$
y_1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
T	4	1	16

Таблица 3.2″

<table>
<tr><td rowspan="2">С.П. \ Б.П.</td><td>Б.П. \ С.П.</td><td>y_3</td><td>y_1</td><td rowspan="2">T</td></tr>
<tr><td></td><td>x_1</td><td>x_3</td></tr>
<tr><td>$-y_4$</td><td>x_2</td><td>$\frac{2}{3}$</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>4</td></tr>
<tr><td>$-y_2$</td><td>x_4</td><td>$\boxed{\frac{1}{3}}$</td><td>$-\frac{1}{3}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Z</td><td>$-\frac{1}{3}$</td><td>$\frac{4}{3}$</td><td>16</td></tr>
</table>

Совершая симплекс-преобразование с разрешающим элементом "$\frac{1}{3}$", получим новый план решения (табл. 3.3, 3.3′, 3.3″).

Таблица 3.3

Б.П. \ С.П.	x_4	x_3	1
x_2	–2	1	2
x_1	3	–1	3
Z	1	1	17

Таблица 3.3′

Б.П. \ С.П.	$-y_4$	$-y_3$	1
y_2	–2	3	1
y_1	1	–1	1
T	2	3	17

Таблица 3.3″

	Б.П.	y_2	y_1	T
С.П.	Б.П. \ С.П.	x_4	x_3	
$-y_4$	x_2	–2	1	2
$-y_3$	x_1	3	–1	3
Z		1	1	17

Отсюда следует оптимальное решение:

$$\bar{x}_{опт} = (3;2);\quad \bar{y}_{опт} = (1;1);\quad Z_{max} = Z(\bar{x}_{опт}) = T_{min} = T(\bar{y}_{опт}) = 17.$$

Переход от таблицы 3.1 к таблице 3.2 для прямой задачи соответствует геометрически движению от вершины 0 (0, 0) к вершине A (0; 4). Для двойственной задачи этот переход соответствует движению от точки 0 (0; 0) к точке (; 0), которые не являются вершинами области допустимых решений, т. е. мы приближаемся к оптимальному значению минимизируемой функции со стороны меньших значений этой функции. При этом мы переходим от одного недопустимого решения двойственной задачи к другому, пока не достигнем некоторого ее допустимого решения. Это решение и будет оптимальным.

3.3. Двойственный симплексный метод

Если требуется решить некоторую задачу линейного программирования, то мы можем для нее составить двойственную и решить с помощью симплексного метода. В результате, согласно первой теореме двойственности, будет получено и решение исходной задачи. Но на практике часто двойственную задачу не формулируют, а непосредственно решают исходную задачу, получая оптимальный план решения, а затем, опираясь на вторую теорему двойственности, строят оптимальный план решения двойственной задачи.

Рассмотрим этот метод на конкретном примере.

Прямая задача

$$\left.\begin{array}{r} -3x_1+2x_2 \le 1, \\ x_1+2x_2 \le 14, \\ 2x_1+x_2 \le 13, \\ 3x_1 - x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{array}\right\}$$

Двойственная задача

$$\left.\begin{array}{l} -3y_1+y_2+2y_3+3y_4 \ge 1, \\ 2y_1+2y_2+y_3 - y_4 \ge 1, \\ y_i \ge 0,\ (I = 1,2,3,4). \end{array}\right\}$$

$$T = y_1+14y_2+13y_3+12y_4 \ (\min).$$

Приведем прямую и двойственную задачи к каноническому виду:

$$\left.\begin{array}{r} -3x_1+2x_2+x_3 = 1, \\ x_1+2x_2+x_4 = 14, \\ 2x_1+x_2+x_5 = 13, \\ 3x_1 - x_2+x_6 = 12, \\ -x_1 - x_2 +Z = 0. \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -3(-y_1)+(-y_2)+2(-y_3)+3(-y_4)+y_5 = -1, \\ 2(-y_1)+2(-y_2)+(-y_3) - (-y_4)+y_6 = -1, \\ (-y_1)+14(-y_2)+13(-y_3)+12(-y_4)+T = 0. \end{array}\right\}$$

Совершая три шага симплексных преобразований, получим оптимальное решение двойственной задачи (табл. 3.4 — табл. 3.7).

Таблица 3.4

С.П. / Б.П.	$-y_1$	$-y_2$	$-y_3$	$-y_4$	1
y_5	–3	1	2	$\boxed{3}$	–1
y_6	2	2	1	–1	–1
T	1	14	13	12	0

Таблица 3.5

С.П. / Б.П.	$-y_1$	$-y_2$	$-y_3$	$-y_5$	1
y_4	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
y_6	1	$\frac{7}{3}$	$\boxed{\frac{5}{3}}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$
T	13	10	5	4	4

Таблица 3.6

С.П. / Б.П.	$-y_1$	$-y_2$	$-y_6$	$-y_5$	1
y_4	$\frac{7}{5}$	$\boxed{\frac{3}{5}}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$
y_3	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{7}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$
T	10	3	3	5	8

Таблица 3.7

Б.П. \ С.П.	$-y_1$	$-y_4$	$-y_6$	$-y_5$	1
y_2	$-\frac{7}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
y_3	$\frac{8}{3}$	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
T	3	5	5	4	9

Так как в 1-столбце и в Т-строке все элементы неотрицательны, то получили оптимальный план.

Известно, что, если одна из переменных является базисной (Б.П.) (свободной (С.П.)) для одной задачи, то соответствующая ей другая переменная является свободной (базисной) в двойственной задаче.

Устанавливаем соответствие переменных:

$$\begin{array}{cccccc} \multicolumn{4}{c}{\text{С.П.}} & \multicolumn{2}{c}{\text{Б.П.}} \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_1 & x_2 \\ \multicolumn{4}{c}{\text{Б.П.}} & \multicolumn{2}{c}{\text{С.П.}} \end{array}$$

Транспонируя табл. 3.7 и вводя соответствующие переменные x_j вместо переменных ($\pm\ y_i$), получим оптимальный план решения прямой задачи (табл. 3.8).

Откуда $\bar{x}_{опт} = (4;\ 5;\ 3;\ 0;\ 0;\ 5)$, $Z_{max} = 9$.

Примененный метод называется двойственным симплексным методом. Рассмотрим его преимущества.

Двойственный симплексный метод позволяет решать задачи линейного программирования, системы ограничений которых при положительном базисе содержат свободные чле-

Таблица 3.8

С.П. / Б.П.	x_4	x_5	1
x_3	$-\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	3
x_6	$\frac{5}{3}$	$-\frac{7}{3}$	5
x_2	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	5
x_1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	4
Z	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	9

ны любого знака. Этот метод позволяет уменьшить количество преобразований системы ограничений, а также размеры симплексной таблицы.

Рассмотрим следующий пример.

Найти min значение функции $T = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3$ при ограничениях:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 \geq 7, \\ x_j \geq 0 \ (j = 1,2,3). \end{array}\right\}$$

Исходная система уравнений имеет вид:

$$\left\{\begin{array}{l} (-x_1) + (-x_2) - 2(-x_3) + x_4 = -4, \\ 3(-x_1) + (-x_2) - 4(-x_3) + x_5 = -7, \\ 3(-x_1) + 2(-x_2) - 4(-x_3) + T = 0. \end{array}\right.$$

Ей соответствует следующая симплексная таблица (табл. 3.9).

Таблица 3.9

С.П. / Б.П.	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
x_4	1	$\boxed{1}$	–2	–4
x_5	3	1	–4	–7
T	3	2	–4	0

Сделаем два шага симплексных преобразований с разрешающими элементами $\boxed{1}$ (табл. 3.9) и $\boxed{2}$ (табл. 3.10).

Таблица 3.10

С.П. / Б.П.	$-x_1$	$-x_4$	$-x_3$	1
x_2	–1	1	2	4
x_5	$\boxed{2}$	1	–2	–3
T	1	2	0	8

Таблица 3.11

С.П. / Б.П.	$-x_5$	$-x_4$	$-x_3$	1
x_2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{5}{2}$
x_1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
T	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{19}{2}$

Отсюда, $\bar{x}_{опт} = \left(\frac{3}{2};\ \frac{5}{2};\ 0\right)$ и $T_{min} = \frac{19}{2}$.

Устанавливаем соответствие переменных:

	С.П.		Б.П.	
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
y_3	y_4	y_5	y_1	y_2
	Б.П.		С.П.	

Следовательно, $\bar{y}_{опт} = \left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$, $Z_{max} = \frac{19}{2}$.

Двойственный симплексный метод является более удобным и в том случае, когда в прямой задаче множество переменных, но два или три уравнения.

Прямая задача

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1,\\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2,\\ &x_j \ge 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\}$$

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n\,(\max).$$

Двойственная задача

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \ge c_1,\\ &a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \ge c_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 \ge c_n,\\ &y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0. \end{aligned}\right\}$$

$$T = b_1y_1 + b_2y_2\ (\min).$$

Эта задача решается значительно проще (так же как и с тремя уравнениями). Во-первых, построив n-многоугольник, получим оптимальное решение геометрическим методом, во-вторых, введя новые базисные переменные, можно быстро решить двойственную задачу, а, имея симплексную таблицу оптимального решения двойственной задачи, нетрудно определить решение прямой задачи.

Рассмотрим следующий пример.

Прямая задача

$$\left.\begin{aligned} &2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 \le 1,\\ &4x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 + 2x_6 \le 1,\\ &x_j \ge 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, 6). \end{aligned}\right\}$$

$$Z = x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_5 - x_6 \text{ (max)}.$$

Двойственная задача

$$\left.\begin{aligned} &2y_1 + 4y_2 \ge 1,\\ &2y_1 + 3y_2 \ge 3,\\ &y_1 - y_2 \ge 2,\\ &y_1 - 2y_2 \ge 0,\\ &2y_1 - y_2 \ge -3,\\ &y_1 + 2y_2 \ge -1,\\ &y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0. \end{aligned}\right\}$$

$$T = y_1 + y_2 \text{ (min)}.$$

Рассмотрим геометрическое решение двойственной задачи (рис.3.2).

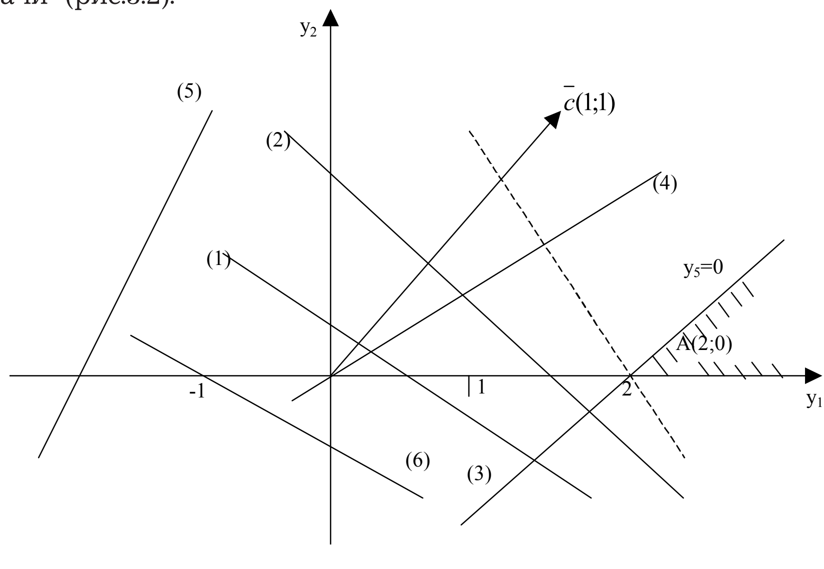


Рис. 3.2

Оптимальная вершина A (2; 0), соответствующая оптимальному решению $\overline{y}_{опт} = (2; 0)$ и $T_{min} = 2$, образована пересечением прямых $y_2 = 0$ и $y_1 - y_2 = 2$.

Двойственную задачу запишем в виде системы уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} 2y_1 + 4y_2 - y_3 = 1, \\ 2y_1 + 3y_2 - y_4 = 3, \\ y_1 - y_2 - y_5 = 2, \\ y_1 - 2y_2 - y_6 = 0, \\ 2y_1 - y_2 - y_7 = -3, \\ y_1 + 2y_2 - y_8 = -1, \\ -y_1 - y_2 + T = 0. \end{array}\right\}$$

Так как в точке A $y_2 = 0$ и $y_5 = 0$, то эти переменные делаем свободными, а остальные — базисными (вспомогательными). Тогда система уравнений запишется в виде:

$$\left.\begin{array}{l} (-y_2) + (-y_5) + y_1 = 2, \\ 6(-y_2) + 2(-y_5) + y_3 = 3, \\ 5(-y_2) + 2(-y_5) + y_4 = 1, \\ -(-y_2) + (-y_5) + y_6 = 2, \\ (-y_2) + 2(-y_5) + y_7 = 7, \\ 3(-y_2) + (-y_5) + y_8 = 3, \\ 2(-y_2) + (-y_5) + T = 2. \end{array}\right\}$$

Строим симплексную табл. 3.12.

Отсюда $\overline{y}_{опт} = (2;\ 0;\ 3;\ 1;\ 0;\ 2;\ 7;\ 3)$ и $T_{min} = 2$, тогда существует оптимальное решение и для прямой задачи.

Таблица 3.12

С.П. / Б.П.	$-y_2$	$-y_5$	1
y_1	1	1	2
y_3	6	2	3
y_4	5	2	1
y_6	–1	1	2
y_7	1	2	7
y_8	3	1	3
T	2	1	2

Устанавливаем соответствие переменных:

С.П.			Б.П.			
y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
x_7	x_8	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Б.П.				С.П.		

Транспонируя табл. 3.12, получаем оптимальный план решения прямой задачи (табл. 3.13).

Таблица 3.13

С.П. / Б.П.	x_7	x_1	x_2	x_4	x_5	x_6	1
x_8	1	6	5	–1	1	3	2
x_3	1	2	2	1	2	1	1
Z	2	3	1	2	7	3	2

Отсюда $\overline{x}_{опт} = (0;\ 0;\ 1;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 2)$ и $Z_{max} = 2$.

С помощью двойственного симплексного метода можно задачу линейного программирования решать приближенно.

Одну и ту же задачу можно решать обычным и двойственным симплексным методом и все время сравнивать в процессе решения функционалы Z и T. Когда разница между функционалами окажется небольшой, можно прекратить решение, зная, насколько имеющийся в этот момент план отклоняется от оптимума.

Действительно, пусть решается прямая (на max) и двойственная (на min) задачи. Тогда известно, что $Z(\bar{x}) \le T(\bar{y})$, но $Z(\bar{x}) \le Z_{max}$ и $T(\bar{y}) \ge T_{min}$. Так как $Z_{max} = T_{min}$, то $Z(\bar{x}) \le$ $\le Z_{max} \le T(\bar{y})$, или $0 \le Z_{max} - Z(\bar{x}) \le T(\bar{y}) - Z(\bar{x})$, и если $T(\bar{y}) \approx Z(\bar{x})$, то $Z_{max} \approx Z(\bar{x})$, откуда $\bar{x} \approx \bar{x}_{опт}$, т. е., если расхождение между $Z(\bar{x})$ и $T(\bar{y})$ незначительно, то найденное допустимое решение следует принять в качестве приближенного выражения для искомого оптимального решения.

Иногда таким путем удается значительно сократить число необходимых операций (симплексных преобразований).

3.4. Экономическая интерпретация двойственных задач

Теория двойственности линейного программирования представляет значительный интерес в отношении совершенствования методов планирования и управления как народным хозяйством, так и его отдельными звеньями.

Любую деятельность в народном хозяйстве можно рассматривать как процесс затраты определенных ресурсов и выпуска некоторой продукции. Процесс этот может происходить в различных формах, выполняться с применением различных ресурсов. Ресурсы, как правило, ограничены, причем, эффективность применения ресурсов в различных процессах не одинакова. Поэтому возникает необходимость применения аппарата математического программирования для решения различных задач оптимального планирования и организации производства. Теория двойственности линейного программирования устанавливает связь между оптимальным распределением ресурсов и некоторой системой оценок на ресурсы, соответствующие плану.

Рассмотрим задачу планирования работы некоторого предприятия, производящего n видов изделий. Производство этих изделий требует различных видов сырья, которое на данном предприятии ограничено. В зависимости от количества произведенных каждого из n видов изделий будет затрачиваться различное количество сырья и различная суммарная выручка от реализации выпущенной продукции.

Составим математическую модель задачи. Обозначим через a_{ij} расход i-го вида сырья на производство единицы j-го вида изделия ($i = \overline{1,m}$), ($j = \overline{1,n}$), b_i — запасы i-го вида сырья; c_j — выручка от реализации единицы j-го вида изделия; x_j — количество изделий j-го вида, произведенного предприятием; $(x_1, x_2,..., x_n)$ — искомый план производства, изделий.

Ограничения по запасам сырья записываются в виде:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{array}\right\} \quad (3.8)$$

причем по смыслу задачи

$$x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,n}). \quad (3.9)$$

Следует найти такой вектор $\overline{x} = (x_1, x_2,..., x_n)$, чтобы суммарная выручка от реализации произведенной продукции (прибыль)

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \quad (3.10)$$

была максимальной.

Мы пришли к задаче линейного программирования. Пусть требуется оценить каждый из применяемых видов сырья. Искомые оценки будут относительными и должны изменяться с изменением объемов сырья, так как одно и то же сырье для разных предприятий представляет различную ценность. Относительность оценок связана также с тем, что они измеряются в единицах ценности выпускаемой продукции.

Пусть y_i цена (оценка) единицы i-го вида сырья. Стоимость сырья, затрачиваемого на производство единицы конечного продукта (изделия) j-го вида, равна

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \ldots + a_{mj}y_m.$$

Это сырье i-го вида еще перерабатывается, поэтому его продают, т. е. рассмотренная стоимость сырья (оценка) должна быть не меньше цены c_j, полученной от реализации. Это приводит к системе уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geq c_n, \end{array}\right\} \qquad (3.8')$$

причем, оценки естественно считать неотрицательными числами

$$y_i \geq 0, \ (i = \overline{1,m}). \qquad (3.9')$$

С другой стороны, общая стоимость всех запасов сырья равна:

$$T = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \qquad (3.10')$$

и она, естественно, должна быть минимальной.

Получили задачу линейного программирования.

Таким образом, задача определения оценок ресурсов (запасов сырья) является двойственной задаче составления плана использования различных способов выпуска изделий.

В симплексном методе (прямая задача) задается исходный план производства. Анализ плана позволяет установить его оптимальность при данных ограниченных ресурсах сырья, обеспечивающего max товарной продукции, или указать пути его улучшения.

Будем считать, что правые части уравнений системы (3.8) прямой задачи подвергаются некоторым изменениям. Тогда максимальное значение функции цели Z также будет изменяться. Тесная связь между решениями пары двойственных задач состоит еще и в том, что характер изменения величины Z_{max} можно определить с помощью компонент оптимального решения двойственной задачи.

Теорема (об оценках влияния ресурсов на выпуск продукции). Значения переменных y_i в оптимальном решении двойственной задачи представляют собой оценки влияния свободных членов уравнений системы (3.8) на величину максимума целевой функция (3.10) исходной задачи, т. е.

$$\frac{\partial Z_{max}}{\partial b_i} = y_i \; . \tag{3.11}$$

Поэтому двойственный симплексный метод называют также методом уточнения оценок.

Рассмотрим экономическое содержание теоремы об оценках влияния b_i на Z_{max}. Двойственная оценка устанавливает количественную зависимость между различными элементами задачи и дает количественную характеристику возможных изменений как условий задачи, так и имевшихся ресурсов с точки зрения принятого критерия оптимальности. Оценки оптимального плана выступают как мера влияния объемов ресурсов на величину максимума выпуска продукции. Двойственная оценка демонстрирует, насколько изменится значение функционала в соответствующей экстремальной задаче при приращении данного ресурса на единицу. Это значение двойственной оценки не распространяется на всю совокупность ресурсов, а относится лишь к тем его количествам, которые находятся около предела его использования, являются предельным значением.

Следует отметить, что здесь имеются в виду достаточно малые приращения ресурсов, так как изменение величин b_i в некоторый момент вызовет изменение базисного набора неизвестных исходной задачи, что повлечет изменение оценок

y_i. Оценки позволяют выявить направления мероприятий по расшифровке “узких” мест, обеспечивающих получение наибольшего экономического эффекта.

Для выяснения экономической интрепретации двойственных задач рассмотрим конкретный пример.

Найти оптимальный план выпуска четырех видов продуктов, при изготовлении которых используются три вида сырьевых ресурсов А, Б и В из условия получения *max* товарной продукции (прибыли).

Математическая формулировка прямой задачи будет следующая: пусть требуется максимизировать функцию

$$Z = 14x_1 + 10x_2 + 14x_3 + 11x_4 \tag{a}$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned} &4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 35, \\ &x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 30, \\ &3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 40, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geq 0, \ (j = 1,2,3,4). \tag{b}$$

Строим двойственную задачу.

Пусть оценка (цена) единицы сырья А, Б и В соответственно будет y_1, y_2 и y_3, тогда двойственная задача имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} &4y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 14, \\ &2y_1 + y_2 + y_3 \geq 10, \\ &2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 14, \\ &y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 11, \\ &y_i \geq 0, \ (i = 1,2,3). \end{aligned}\right\} \tag{b′}$$

$$T = 35y_1 + 30y_2 + 40y_3. \tag{a′}$$

Отсюда следует найти оценки (цены) y_1, y_2, y_3 единицы сырья А, Б, В, которые удовлетворяли бы неравенствам и для которых функция T достигала бы min.

Видно, что в двойственном методе исходным пунктом анализа является заданная система предварительных оценок производственных факторов. Попытки построения плана производства, соответствующего системе предварительных оценок, приводят к последовательному их уточнению. Системе оценок производственных факторов (плану цен) соответствует оптимальный план производства.

Как видим, сущность и экономическая интерпретация двойственного метода дают основание называть его методом последовательного уточнения оценок. В итоге же двойственная задача заключается в определении оценок единицы каждого из ресурсов из условия минимума их суммарной стоимости.

Выбрав в качестве базисных переменных прямой задачи (*a*) — (b) переменные x_2, x_3, x_7, придем к следующей системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &3x_1 - 2x_4 + x_5 - x_6 + x_2 = 5, \\ &-x_1 + \frac{5}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 + x_6 + x_3 = \frac{25}{2}, \\ &2x_1 - 2x_4 - x_6 + x_7 = 10, \\ &2x_1 + 4x_4 + 3x_5 + 4x_6 + Z = 225, \end{aligned}\right\}$$

которую можно записать в виде следующей симплексной табл. 3.14.

Отсюда, $\bar{x}_{опт} = (0;\ 5;\ \frac{25}{2};\ 0;\ 0;\ 0;\ 10)$ и $Z_{max} = 225$.

При этом оптимальном плане ресурсы сырья А и Б используются полностью ($x_5 = x_6 = 0$), а ресурсы сырья В остаются в количестве $x_7 = 10$ ед.

Таблица 3.14

С.П. / Б.П.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	1
x_2	3	1	0	–2	1	–1	0	5
x_3	–1	0	1	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{25}{2}$
x_7	2	0	0	–2	0	–1	1	10
Z	2	0	0	4	3	4	0	225

Устанавливаем соответствие переменных прямой и двойственной задач:

	С.П.				Б.П.	
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
y_4	y_5	y_6	y_7	y_1	y_2	y_3
	Б.П.				С.П.	

Транспонируя таблицу оптимального решения прямой задачи и заменяя x_j ($j = 1, 2, \ldots, 7$) соответствующими ($\pm\ y_i$) ($i = 1, 2, \ldots, 7$), получим оптимальный план решения двойственной задачи (табл. 3.15).

Заметим, что ресурсы сырья А и Б, используемого в оптимальном плане полностью без резерва, получили положительные оценки 3 и 4, а ресурсы сырья В, используемого не полностью, т. е. имеющегося в избытке, получили нулевую оценку: $y_3 = 0$. Первые две оценки показывают, что увеличение ресурсов сырья А или Б на единицу приведет к увеличению Z_{max} соответственно на 3 или 4 единицы, а оценка $y_3 = 0$ показывает, что увеличение ресурсов сырья В на одну единицу не повлияет на величину Z_{max}, ибо это сырье и так в избытке.

Таблица 3.15

С.П. / Б.П.	$-y_5$	$-y_6$	$-y_3$	1
y_4	3	–1	2	2
y_5	1	0	0	0
y_6	0	1	0	0
y_7	–2	$\frac{5}{2}$	–2	4
y_1	1	$-\frac{1}{2}$	0	3
y_2	–1	1	–1	4
y_3	0	0	1	0
T	5	$\frac{25}{2}$	10	225

Как мы видим, нулевая двойственная оценка показывает, что данный ресурс находится в избыточном количестве и мы о нем не заботимся. Нулевые двойственные оценки могут быть лишь на те ресурсы, которых не хватает, которые существенно ограничены.

Глава 4
ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Это задача о наиболее экономном плане перевозок однородного или взаимозаменяемого продукта из пунктов производства (станций отправления) в пункты потребления (станции назначения).

Транспортная задача является важнейшей частной моделью линейного программирования, имеющей обширные практические приложения не только к проблемам транспорта. Особо важное значение она имеет в деле рационализации поставок важнейших видов промышленной и сельскохозяйственной продукции, а также оптимального планирования грузопотоков и работы различных видов транспорта.

4.1. Постановка задачи и ее математическая модель

Некоторый однородный продукт производится в m пунктах производства $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Задан объем производства a_i пункта $A_i (i = \overline{1,m})$. Произведенный продукт должен быть перевезен в n пунктов потребления $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Известен спрос b_j пункта B_j $(j = \overline{1,n})$. Заданы также транспортные издержки C_{ij}, связанные с перевозкой единицы продукта из пункта A_i в пункт B_j. Требуется составить план перевозок, обеспечивающий при минимальных транспортных расходах (издержках) удовлетворения спроса всех пунктов потребления за счет продукта, произведенного во всех пунктах производства.

Обозначим через x_{ij} количество единиц груза, запланированных к перевозке от i-го поставщика к j-му потребителю.

Тогда условие задачи можно записать в виде табл. 4.1, которую в дальнейшем будем называть матрицей планирования.

Таблица 4.1

Поставщики	Потребители					Запасы
	B_1	…	B_j	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
…	…	…	…	…	…	…
A_i	c_{i1} x_{i1}	…	c_{ij} x_{ij}	…	c_{in} x_{in}	a_i
…	…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	…	b_j	…	b_n	$\sum a_i$ / $\sum b_j$

Тогда математическая формулировка транспортной задачи сводится к минимизации линейной формы

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij} \tag{4.1}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1,m}, \tag{4.2}$$

(ограничения по запасам),

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1,n}, \tag{4.3}$$

(ограничения по потребностям),

$$x_{ij} \geq 0. \tag{4.4}$$

Различают задачи с закрытой моделью, когда $\sum a_i = \sum b_j$ и открытой моделью, когда $\sum a_i \neq \sum b_j$, т. е. баланс между запасами и потребностями отсутствует.

Необходимым и достаточным условием разрешимости транспортной задачи является равенство суммарных запасов суммарным потребностям, т. е. $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Если $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводят фиктивный (n + 1)-й пункт назначения с потребностью $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ и полагают $c_{i,n+1} = 0$, $i = \overline{1,m}$.

Если $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводят фиктивный (m + 1)-й пункт отправления с запасами груза $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ и принимают $c_{m+1,j} = 0$, $j = \overline{1,n}$.

Математическая модель транспортной задачи относится к задачам линейного программирования и может быть решена симплексным методом. Однако, ввиду исключительной практической важности этой задачи и специфики ограничений (4.2) — (4.4): ограничения заданы в виде уравнений; каждая неизвестная входит лишь в два уравнения; коэффициенты при неизвестных — единицы, для ее решения созданы специальные алгоритмы. Самым распространенным методом решения транспортной задачи является метод потенциалов.

Решение транспортной задачи разбивается на два этапа:

1. Определение начального допустимого базисного решения (первого опорного плана) — первоначальное распределение поставок.

2. Построение последовательных итераций (шагов), улучшающих опорные планы (каждый новый план не должен увеличивать суммарные затраты).

После выполнения первого этапа шаги второго этапа проводятся до тех пор, пока не будет найдено оптимальное распределение поставок.

4.2. Построение первоначального опорного плана

Рассмотрим два метода построения первого опорного плана.

План составляется последовательным заполнением по одной клетке в таблице перевозок так, что каждый раз либо полностью удовлетворяется потребность одного из потребителей, либо полностью вывозится груз от некоторого поставщика. В теории доказывается, что базисное решение системы ограничений (из $m + n$ уравнений с mn переменными) в условиях транспортной задачи имеет $m + n — 1$ базисных переменных (ее ранг равен $m + n — 1$), поэтому, совершив $m + n — 1$ указанных шагов, получим первый опорный план. Различие двух методов отыскания первого опорного плана состоит в различии способов выбора последовательности заполнения клеток.

Диагональный метод или метод северо-западного угла. При этом методе на каждом шаге построения первого опорного плана заполняется верхняя левая клетка ("северо-западный угол") оставшейся части таблицы. При таком методе заполнение таблицы начинается с клетки переменного x_{11} и заканчивается в клетке неизвестного x_{mn}, т. е. идет как бы по диагонали таблицы перевозок.

Метод наименьшей стоимости. Исходное опорное решение, построенное диагональным методом, как правило, оказывается весьма далеким от оптимального, так как при его определении совершенно игнорируются величины затрат c_{ij}. Поэтому требуются в дальнейших расчетах много итераций для достижения оптимального плана. Число итераций можно сократить, если исходный план строить по более рациональному правилу "минимального элемента". Сущность его состоит в том, что на каждом шаге заполняется клетка с наименьшей величиной c_{ij}. Если такая клетка не единственная, то лучше заполнять ту, по вертикали или горизонтали которой встречаются большие c_{ij}, а в принципе заполняется любая из них.

Пусть это будет клетка (i, j). Запишем в эту клетку $x_{ij} = \min(a_i, b_j)$. Если $a_i < b_j$, то запасы поставщика A_i исчерпаны, а потребность B_j стала $b'_j = b_j - a_i$. Поэтому, не принимая более во внимание i-ю строку, снова ищем клетку с наименьшей стоимостью перевозок и заполняем ее с учетом изменившихся потребностей. Для случая a_i b_j из рассмотрения исключается j-й столбец, а запасы A_i полагаются равными $a'_i = a_i - b_j$. Продолжаем этот процесс до тех пор, пока все запасы не будут исчерпаны, а все потребности — удовлетворены. Необходимо отметить, что при наличии в таблице клеток с одинаковыми тарифами, планы, полученные с помощью этого метода, могут быть разными, однако они, несомненно, ближе к оптимальному, чем план, составленный по методу северо-западного угла.

Прежде, чем перейти к анализу оптимальности планов и способам их улучшения, выясним, каким требованиям должны удовлетворять составляемые планы. Для этого вернемся к системе ограничений (4.2) — (4.4). Очевидно, что первая группа уравнений требует, чтобы сумма элементов плана по i-й строке равнялась a_i, $i = \overline{1,m}$; а вторая группа — чтобы сумма элементов по j-му столбцу была равна b_j, $j = \overline{1,n}$. Условие закрытости модели транспортной задачи означает, что среди m + n уравнений системы ограничений независимых только m + n — 1, поэтому в любом базисном решении этой системы должно быть m + n — 1 базисных переменных. Поскольку свободные переменные в таком решении равны нулю, то в транспортной таблице им будут соответствовать пустые клети.

Клетки таблицы, в которых записаны отличные от нуля перевозки, называются базисными, а остальные (пустые) — свободными.

В теории доказано, что базисное решение системы ограничений (4.2) — (4.4) в условиях транспортной задачи должно иметь $m + n - 1$ базисных переменных.

План называется вырожденным, если количество базисных клеток в нем меньше, чем $m + n - 1$.

Если на каком-то этапе решения получился вырожденный план, то его необходимо пополнить, проставив в недостающем числе клеток 0 и, тем самым, объявив их базисными. Поскольку этим дополнительным клеткам будут отвечать нулевые перевозки, то общий баланс и суммарная стоимость перевозок плана при этом не изменится. Однако проводить пополнение плана, выбирая клетки произвольно, нельзя. Приведем условия, которым должен соответствовать пополненный план.

Циклом в транспортной таблице называется несколько клеток, соединенных замкнутой ломаной линией так, чтобы две соседние вершины ломаной были расположены либо в одной строке, либо в одном столбце. Ломаная может иметь точки самопересечения, но не в клетках цикла.

План называется ациклическим, если его базисные клетки не содержат циклов.

Доказано, что оптимальные планы являются ациклическими, поэтому и первоначальный план также должен удовлетворять этому требованию. Заметим, что планы, полученные с помощью методов северо-западного угла и наименьшей стоимости, ациклические. Однако, если план оказался вырожденным, то при его пополнении требование ацикличности необходимо учитывать.

4.3. Оптимальность базисного решения. Метод потенциалов

Получив первый опорный план, следует проверить его оптимальность и, если требуется, перейти к новому опорному плану с лучшим значением целевой функции Z. Для этого применяют метод потенциалов. Каждому поставщику A_i и каждому потребителю B_j сопоставляют, соответственно, величины U_i и V_j — потенциалы этих пунктов.

Для того, чтобы некоторый опорный план $X^* = \| x_{ij}^* \|$ транспортной задачи был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы ему соответствовала система из (m + n) чисел U_i^*, V_j^*, удовлетворяющих условиям:

$$C_{ij} - (U_i + V_j) = 0 \quad \text{для } x_{ij} \geq 0 \tag{4.5}$$

(для занятых клеток) и

$$\Delta C_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j) \geq 0,\ (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}) \tag{4.6}$$

(для свободных клеток).

Числа U_i^*, V_j^* называются потенциалами соответственно производителей и потребителей, вся их система — потенциальной, а условия (4.5) — (4.6) — условиями потенциальности системы $\{U_i^*, V_j^*\}$; каждое в отдельности неравенство (равенство) называется условием потенциальности для соответствующей клетки (i, j).

Поскольку число неизвестных потенциалов $(m + n)$ всегда на единицу больше числа уравнений (числа заполненных клеток) $N = m + n - 1$, то выбираем строку, где есть занятая клетка и для этой строки назначаем потенциал равным нулю, например $U_1 = 0$, и легко находим последовательно из уравнений (4.5) значения остальных потенциалов.

Если же число заполненных клеток $N < m + n - 1$, то вводим дополнительно необходимое количество занятых клеток с нулевыми перевозками $x_{ij} = 0$, которые нужны для определения потенциалов из уравнений (4.5).

Затем для всех свободных клеток из соотношений (4.6) определяем величину ΔC_{ij} и, если все $\Delta C_{ij} \geq 0$, то получим оптимальный план перевозок, если же встречаем отрицательные ΔC_{ij}, то план не оптимален и его надо улучшать.

4.4. Улучшение плана перевозок

Среди пустых клеток с отрицательными значениями ΔC_{ij} выбираем ту, у которой ΔC_{ij} наименьшая. Эта пустая клетка рекомендуется к заполнению, в результате которого одна из заполненных клеток станет пустой. Процедура перепланировки соответствует взаимной перемене роли двух переменных в симплексном методе. Например, в табл. 4.1 клеткой, рекомендуемой к заполнению служит пустая клетка (1,2), следовательно, переменная x_{12} из не основных (нулевых) переходит в основные (положительные). Остается определить, какая из основных переменных должна стать не основной.

Для свободной клетки строим замкнутую ломанную линию (цикл), состоящую из горизонтальных и вертикальных отрезков прямых. Одна из вершин находится в свободной клетке, а остальные в занятых клетках, число вершин всегда четное. Свободной вершине придаем знак плюс, знаки остальных вершин чередуются. На каждой стороне этой ломанной линии — контура могут находиться две заполненные вершины, кроме того одна вершина лежит в заполняемой пустой клетке.

Наиболее часто контур имеет вид прямоугольника, но возможны фигуры другого типа (рис. 4.1).

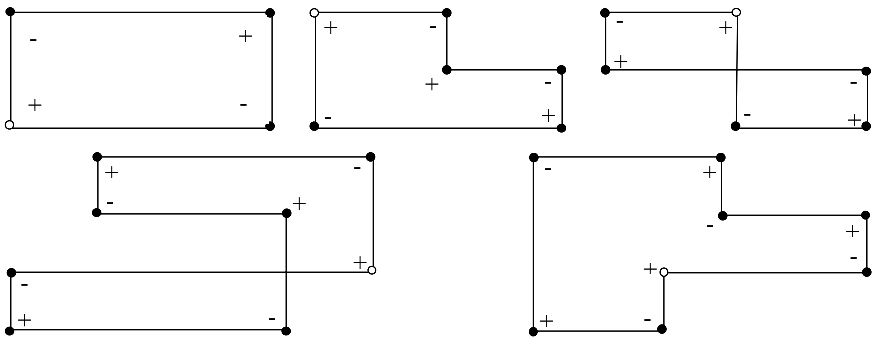


Рис. 4.1

Перепланировке подвергаются только клетки контура, а величина перевозок во всех остальных заполненных клетках таблицы не изменяется. В отрицательных вершинах контура выбираем наименьшее число и это число прибавляем к положительным вершинам и отнимаем от отрицательных вершин. Выбранная отрицательная вершина станет свободной, число занятых вершин не изменится, баланс перевозок старого и нового контура останется без изменения.

Далее строим новую таблицу перевозок и проверяем оптимальность плана. Если план оптимальный, то получим оптимальное решение транспортной задачи, если нет, то план улучшаем. Через какое-то число последовательных шагов улучшения планов перевозок будет получен оптимальный план.

4.5. Задача определения оптимального плана перевозок

На три базы A_1, A_2, A_3 поступил однородный груз в количестве 200, 205, 225 тонн. Полученный груз требуется перевезти в пять пунктов B_1, B_2, ..., B_5, потребности которых составляют 190, 130, 80, 100 и 130 тонн. Расстояние C_{ij} в едкм. (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, ..., 5) между пунктами отправления и пунктами назначения приведены в табл. 4.2. Следует спланировать перевозки однородного груза так, чтобы общие затраты всех перевозок в тонно-километрах были бы минимальными.

Так как $\sum a_i = 200 + 205 + 225 = 630$, $\sum b_j = 190 + 130 + 80 + 100 + 130 = 630$, т. е. $\sum a_i = \sum b_j$, то имеем закрытую модель транспортной задачи.

Таблица 4.2

b_j / a_i	$b_1 = 190$	$b_2 = 130$	$b_3 = 80$	$b_4 = 100$	$b_5 = 130$
$a_1 = 200$	5	7	4	9	5
$a_2 = 205$	7	4	3	4	7
$a_3 = 225$	9	10	6	8	7

Составляем исходное опорное решение по правилу минимальной стоимости. В клетке (2, 3) наименьшая стоимость $C_{23} = 3$ и туда отправляем весь необходимый груз 80 т. Далее наименьшая стоимость $C_{24} = C_{22} = 4$ и в клетку (2, 4) направляем все 100 т необходимого груза, а в клетку (2, 2) — оставшиеся на базе A_2 25 т. Теперь наименьшая стоимость $C_{11} = C_{15} = 5$ и в клетку (1, 1) направляем 190 т необходимого груза, а в клетку (1, 5) — 10 т оставшегося на базе A_1 груза. Затем направляем 120 т груза в клетку (3, 5) и 105 т в клетку (3, 2). Правильность заполнения таблицы проверяем суммируя грузы в заполненных клетках по строкам и столбцам. Получим опорное решение (табл. 4.3).

Таблица 4.3

U_i \ V_j	$V_1 = 5$	$V_2 = 8$	$V_3 = 7$	$V_4 = 8$	$V_5 = 5$	
$U_1 = 0$	5 190	7 $\boxed{-1}$	4 $\boxed{-3}$	9 $\boxed{1}$	5 10	200
$U_2 = -4$	7 $\boxed{6}$	4 25	3 80	4 100	7 $\boxed{6}$	205
$U_3 = 2$	9 $\boxed{2}$	10 105	6 $\boxed{-3}$	8 $\boxed{-2}$	7 120	225
	190	130	80	100	130	a_i \ b_j

Всего должно быть заполненных клеток N = m + n − 1 = = 3 + 5 − 1 = 7, у нас также заполнено семь клеток.

Проверяем оптимальность полученного плана перевозок методом потенциалов.

Поставщику ставим в соответствие потенциалы U_i (i = 1, 2, 3), а потребителю — V_j (j = 1, 2, ..., 5) и определяем их. Назначаем $U_1 = 0$, а все остальные потенциалы находим из условия, что для занятых клеток должны выполняться условия (4.5):

$$C_{15} - (U_1 + V_5) = 0,\ 5 - (0 + V_5) = 0,\ V_5 = 5;$$

$$C_{35} - (U_3 + V_5) = 0,\ 7 - (U_3 + 5) = 0,\ U_3 = 2;$$

$$C_{32} - (U_3 + V_2) = 0,\ 10 - (2 + V_2) = 0,\ V_2 = 8;$$

$$C_{22} - (U_2 + V_2) = 0,\ 4 - (U_2 + 8) = 0,\ U_2 = -4;$$

$$C_{23} - (U_2 + V_3) = 0,\ 3 - (-4 + V_3) = 0,\ V_3 = 7;$$

$$C_{24} - (U_2 + V_4) = 0,\ 4 - (-4 + V_4) = 0,\ V_4 = 8;$$

$$C_{11} - (U_1 + V_1) = 0,\ 5 - (0 + V_1) = 0,\ V_1 = 5.$$

Для всех свободных клеток находим ΔC_{ij} из соотношения (4.6) и записываем в табл. 4.3 в прямоугольники $\boxed{}$.

$$\Delta C_{12} = C_{12} - (U_1 + V_2) = 7 - (0 + 8) = -1;$$

$$\Delta C_{13} = C_{13} - (U_1 + V_3) = 4 - (0 + 7) = -3;$$

$$\Delta C_{14} = C_{14} - (U_1 + V_4) = 9 - (0 + 8) = 1;$$

$$\Delta C_{21} = C_{21} - (U_2 + V_1) = 7 - (-4 + 5) = 6;$$

$$\Delta C_{25} = C_{25} - (U_2 + V_5) = 7 - (-4 + 5) = 6;$$

$$\Delta C_{31} = C_{31} - (U_3 + V_1) = 9 - (2 + 5) = 2;$$

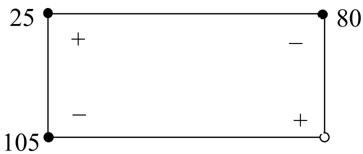
$$\Delta C_{33} = C_{33} - (U_3 + V_3) = 6 - (2 + 7) = -3;$$

$$\Delta C_{34} = C_{34} - (U_3 + V_4) = 8 - (2 + 8) = -2.$$

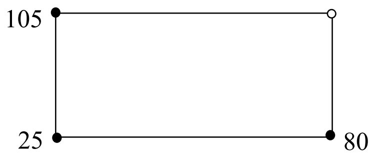
Так как имеются $\Delta C_{ij} < 0$, то согласно п. 4.3 план табл. 4.3 не является оптимальным и его нужно улучшить соответственно п. 4.4.

Для свободной клетки (3, 3) с наименьшим отрицательным $C_{33} = -3$ строим контур (пунктирный прямоугольник) и улучшаем соответствующий ему план перевозок.

Старый контур



Новый контур



Среди отрицательных вершин выбираем наименьшее значение 80 и прибавляем его к положительным вершинам и отнимаем от отрицательных вершин. Получили новый контур перевозок опять с одной свободной вершиной и не нарушенным балансом перевозок.

Далее строим новый план перевозок (табл. 4.4).

Проверяем его оптимальность, находя потенциалы U_i, V_j и ΔC_{ij}. Так как $\Delta C_{34} = -2 < 0$, то для клетки (3, 4) строим улучшенный контур.

Таблица 4.4

V_j / U_i	$V_1 = 5$	$V_2 = 8$	$V_3 = 4$	$V_4 = 8$	$V_5 = 5$	
$U_1 = 0$	190 (5)	$\boxed{-1}$ (7)	$\boxed{0}$ (4)	$\boxed{1}$ (9)	10 (5)	200
$U_2 = -4$	$\boxed{6}$ (7)	105 (4)	$\boxed{3}$ (3)	100 (4)	$\boxed{6}$ (7)	205
$U_3 = 2$	$\boxed{2}$ (9)	25 (10)	80 (6)	$\boxed{-2}$ (8)	120 (7)	225
	190	130	80	100	130	b_j / a_i

Старый контур

Новый контур

Строим улучшенный план перевозок (табл. 4.5).

Таблица 4.5

V_j / U_i	$V_1 = 5$	$V_2 = 6$	$V_3 = 4$	$V_4 = 6$	$V_5 = 5$	
$U_1 = 0$	190 (5)	$\boxed{1}$ (7)	$\boxed{0}$ (4)	$\boxed{3}$ (9)	10 (5)	200
$U_2 = -2$	$\boxed{4}$ (7)	130 (4)	$\boxed{1}$ (3)	75 (4)	$\boxed{4}$ (7)	205
$U_3 = 2$	$\boxed{2}$ (9)	$\boxed{2}$ (10)	80 (6)	25 (8)	120 (7)	225
	190	130	80	100	130	b_j / a_i

Так как все $\Delta C_{ij} \geq 0$, то получен оптимальный план перевозок.

$$X = (x_{11} = 190, \quad x_{12} = 0, \quad x_{13} = 0, \quad x_{14} = 0, \quad x_{15} = 10,$$
$$x_{21} = 0, \quad x_{22} = 130, \quad x_{23} = 0, \quad x_{24} = 75, \quad x_{25} = 0,$$
$$x_{31} = 0, \quad x_{32} = 0, \quad x_{33} = 80, \quad x_{34} = 25, \quad x_{35} = 120).$$

Транспортные расходы при этом будут минимальными:

$$Z_{\min} = 5 \cdot 190 + 5 \cdot 10 + 4 \cdot 130 + 4 \cdot 75 + 6 \cdot 80 + 8 \cdot 25 + 7 \cdot 120 =$$
$$= 3340 \text{ тонно–км.}$$

4.6. Открытая модель транспортной задачи

Для открытой модели может быть два случая:

а) суммарные запасы превышают суммарные потребности $\sum a_i \quad \sum b_j$;

б) суммарные потребности превышают суммарные запасы $\sum b_j . \quad \sum a_i$.

Формулироваться данная задача будет следующим образом.

Найти min значение линейной функции

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} \text{ при ограничениях}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} < a_i, & (i = \overline{1,m}), \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, & (j = \overline{1,n}). \end{cases} \qquad \text{(случай } a\text{)} \qquad (4.7)$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, & (i = \overline{1,m}), \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} < b_j, & (j = \overline{1,n}). \end{cases} \qquad \text{(случай b)} \qquad (4.8)$$

$$x_{ij} \geq 0. \qquad (4.9)$$

Открытая модель решается приведением к закрытой.

В случае (*а*) вводится фиктивный потребитель B_{n+1}, потребности которого $b_{n+1} = \sum a_i - \sum b_j$.

В случае (б) вводится фиктивный поставщик A_{m+1}, запасы которого $a_{m+1} = \sum b_j - \sum a_i$.

Стоимости перевозок в обеих случаях полагаются равными нулю.

При равных стоимостях перевозки единицы груза от поставщиков к фиктивному потребителю затраты на перевозку груза реальным потребителям минимальны, а фиктивному потребителю будет направлен груз от наименее выгодных поставщиков.

Составить оптимальный план перевозок.

Имеем матрицу планирования (табл. 4.6).

Таблица 4.6

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1	6	8	12	16	100
A_2	16	10	8	6	15	400
A_3	4	1	9	11	13	100
A_4	3	2	7	7	15	100
	50	100	150	200	250	$b_j \backslash a_i$

$$\sum a_i = 700; \quad \sum b_j = 750.$$

Вводим фиктивного поставщика $A_{m+1} = A_5$, объем запасов которого $a_{m+1} = a_5 = 50$. При составлении опорного плана методом min стоимости необходимо наименьшую стоимость выбирать только среди стоимостей реальных поставщиков и потребителей, а запасы фиктивного поставщика распределять в последнюю очередь.

Таблица 4.7

$U_i \backslash V_j$	$V_1 = 1$	$V_2 = 3$	$V_3 = 8$	$V_4 = 6$	$V_5 = 15$	
$U_1 = 0$	50 / 1	$\boxed{3}$ / 6	50 / 8	$\boxed{6}$ / 12	$\boxed{1}$ / 16	100
$U_2 = 0$	$\boxed{15}$ / 16	$\boxed{7}$ / 10	$\boxed{0}$ / 8	200 / 6	200 / 15	400
$U_3 = -2$	$\boxed{5}$ / 4	100 / 1	$\boxed{3}$ / 9	$\boxed{7}$ / 11	0 / 13	100
$U_4 = -1$	$\boxed{3}$ / 3	0 / 2	100 / 7	$\boxed{2}$ / 7	$\boxed{1}$ / 15	100
$U_5 = -15$	$\boxed{14}$ / 0	$\boxed{12}$ / 0	$\boxed{7}$ / 0	$\boxed{9}$ / 0	50 / 0	50
	50	100	150	200	250	$b_j \backslash a_i$

Число заполненных клеток 7, а должно быть m + n − −1 = 5 + 5 — 1 = 9, тогда в клетки (4, 2) и (3, 5) ставим нули.

Находим U_i, V_j и ΔC_{ij} и записываем их в табл. 4.7 в $\boxed{}$. Так как все $\Delta C_{ij} \geq 0$, то получили оптимальный план перевозок (табл. 4.7).

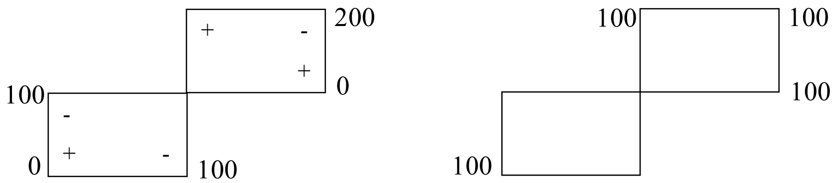
$$X_{опт} = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 200 & 200 \\ 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем суммарную стоимость перевозок по оптимальному плану:

$$Z_{min} = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{5} C_{ij}\, x_{ij} = 50 \cdot 1 + 50 \cdot 8 + 200 \cdot 6 + 200 \cdot 15 + 100 \cdot 1 + 100 \cdot 7 = 5450.$$

Анализируя этот план, можно сделать следующие выводы. Потребитель B_5 получает 50 ед. груза от фиктивного поставщика, следовательно, его потребности будут неудовлетворены на это же количество единиц.

Оптимальный план не является единственным, так как для клетки A_2B_3 сумма потенциалов равна стоимости перевозок и в нее по циклу можно переместить 100 ед. груза. При перераспределении система потенциалов не изменится и стоимость перевозок останется прежней.



$Z_{\text{ст.пл.}} = 3000 + 700 + 100 = 3800.$ $Z_{\text{нов.пл.}} = 800 + 1500 + 1300 + 200 = 3800.$

4.7. Понятие о распределительной задаче

Распределительная задача представляет собой специальную задачу линейного программирования транспортного типа, имеющую многочисленные приложения к задачам планирования, управления и проектирования.

Формальная запись распределительной задачи такая же, как и (4.1) — (4.4). Вместо равенств могут фигурировать и неравенства.

К распределительным задачам сведены следующие задачи: распределения изделий между предприятиями, распределения самолетов между воздушными линиями, рационального использования машинно-транспортного парка, распределения башенных кранов между строительными площадками, планирования работы речного флота, распределения посевной площади между сельскохозяйственными структурами и многие другие задачи.

Рассмотрим постановку задачи о распределении производства изделий на различных станках так, чтобы минимизировать суммарные затраты при выполнении планового задания.

Имеется m различных станков, на которых может изготавливаться любое из n изделий. Задана матрица $C = \| C_{ij} \|$ затрат, где C_{ij} — затраты в руб. (издержки) на единицу j—го изделия при производстве его на i-м станке, и матрица производительности $\lambda = \|\lambda_{ij}\|$, где λ_{ij} — производительность в $\frac{\text{шт}}{\text{час}}$ i-го станка при производстве j-го изделия. Кроме того известны мощности станков $a_1, a_2, \ldots, a_m$ в станко-часах (или вектор ресурсов $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$) и плановое задание по выпуску изделий $b_1, b_2, \ldots, b_n$ единиц (или ассортиментный вектор $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$).

Для составления математической модели задачи введем $n' = m \times n$ неотрицательных переменных x_{ij}, обозначающих время, в течение которого i-й станок занят изготовлением j-го изделия.

Эти переменные должны удовлетворять ограничительным условиям по ресурсам

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \ i = \overline{1,m}, \qquad (4.10)$$

по потребностям

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} x_{ij} \ge b_j, \ j = \overline{1,n}, \qquad (4.11)$$

и условиям неотрицательности

$$x_{ij} \ge 0, \ i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}. \qquad (4.12)$$

Неравенства (4.10) выражают естественное требование, чтобы суммарное время, затраченное i-м станком, не превышало ресурсов времени на данном станке. Неравенства (4.11) выражают условие, что всего должно быть изготовлено j-х изделий не меньше планового задания b_j (так как величина $\lambda_{ij}x_{ij}$ определяет количество j-х изделий, изготовляемых i-м станком).

Затраты, связанные с производством j-х изделий на i-м станке в количестве $\lambda_{ij}x_{ij}$, составляют $C_{ij}\lambda_{ij}x_{ij}$, откуда суммарные затраты на выполнение всего планового задания будут

$$Z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} C_{ij}\lambda_{ij}x_{ij}. \quad (4.13)$$

Найти такие значения $n' = mn$ переменных x_{ij}, которые удовлетворяли бы условиям (4.10) — (4.12) и для которых функция (4.13) достигла бы минимального значения.

Рассмотрим конкретную задачу (табл. 4.8).

Таблица 4.8

a_i \ b_j	1000	800	600	280	Индекс α_i
50	$C=5$, $\lambda=10$	$C=8$, $\lambda=16$	$C=4$, $\lambda=12$	$C=10$, $\lambda=14$	1
80	$C=8$, $\lambda=15$	$C=7$, $\lambda=24$	$C=9$, $\lambda=18$	$C=6$, $\lambda=21$	$\frac{3}{2}$
220	$C=3$, $\lambda=5$	$C=10$, $\lambda=8$	$C=8$, $\lambda=0$	$C=5$, $\lambda=7$	$\frac{1}{2}$

В клетках в правом верхнем углу — C_{ij}, в левом нижнем углу — λ_{ij}.

Рассмотрим случай решения, когда распределительная задача приводится к транспортной.

Если даже такое приведение точно невыполнимо, то можно воспользоваться приближенными приемами.

Производительности любых двух станков у нас пропорциональны. Выбираем базовый станок — первый. Составляем отношения производительности 2-го станка к 1-му, 3-го станка к 1-му.

$$\alpha_1 = \frac{10}{10} = \frac{16}{16} = \frac{12}{12} = \frac{14}{14} = 1;\ \alpha_2 = \frac{15}{10} = \frac{24}{16} = \frac{18}{12} = \frac{21}{14} =$$

$$= \frac{3}{2};\ \alpha_3 = \frac{5}{10} = \frac{8}{16} = \frac{\text{не берем}}{12} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2},$$

т. е. имеем $\lambda'_{ij} = \alpha_i \lambda_{1j}$ $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$.

Это соотношение позволяет выразить все данные задачи в единых единицах измерения. Выберем в качестве такой единицы час работы базового станка и назовем его стандартным часом.

Мощность i-го станка составляет a_i часов, но, так как его производительность в α_i раз больше производительности базового станка, то приведенная к стандартным часам его мощность составит

$$a_i\alpha_i = a'_i \text{ стандартных часов, так } a'_2 = 80 \cdot \frac{3}{2} = 120 \cdot \frac{1}{2},$$

$$a'_3 = 220 \cdot \frac{1}{2} = 110.$$

Время затрачиваемое по плану i-м станком на производство j-го изделия, обозначалось через x_{ij}. Следовательно, в стандартных часах это время составит $x_{ij}\ \alpha_i = x'_{ij}$ стандартных часов.

Плановое задание по j-му изделию составляло b_j. Если бы это изделие изготовлялось на базовом станке, то для его производства необходимо было бы $\frac{b_j}{\lambda_{1j}} = b'_j$ стандартных часов, так $b'_1 = \frac{1000}{10} = 100$, $b'_2 = \frac{800}{16} = 50$, $b'_3 = \frac{600}{12} = 50$, $b'_4 = \frac{280}{14} = 20$.

Затраты при производстве единицы j-го изделия на i-м станке равны C_{ij}. Следовательно, те же затраты в расчете на один стандартный час составят $C'_{ij} = C_{ij} \cdot \lambda_{1j}$, так как 1-ый станок является базовым.

Так $C'_{11} = 5 \cdot 10 = 50$, $C'_{21} = 8 \cdot 10 = 80$, $C'_{31} = 3 \cdot 10 = 30$.

Переходим к новой табл. 4.9.

Таблица 4.9

a'_i \ b'_j	100	50	50	20
50	50	128	48	140
120	80	112	108	84
110	30	160	M=0	70

Так как $\sum a'_i = 280$ $\sum b'_j = 220$, то имеется избыток мощности в 60 стандартных часов. И чтобы была закрытая модель, вводим балансовый столбец, для которого полагаем $b'_5 = 60$ и $C'_{15} = 0$. Невозможность изготовления 3-го изделия на 3-м станке учитывается блокированием соответствующей клетки (M = 0).

Получили таблицу транспортной задачи с ресурсами a'_i, потребностями b'_j и затратами C'_{ij} (табл. 4.10).

Таблица 4.10

b'_j \ a'_i	100	50	50	20	60	
50	$\boxed{6}$ 50	$\boxed{16}$ 128	50 48	$\boxed{56}$ 140	0 0	$U_1 = 0$
120	$\boxed{36}$ 80	50 112	$\boxed{60}$ 108	10 84	60 0	$U_2 = 0$
110	100 30	$\boxed{62}$ 160	$\boxed{M-34}$ $M = 0$	10 70	$\boxed{14}$ 0	$U_3 = -14$
	$V_1 = 44$	$V_2 = 112$	$V_3 = 48$	$V_4 = 84$	$V_5 = 0$	U_i \ V_j

Исходный опорный план строим по методу минимальной стоимости. Заполненных клеток 6, а должно быть $m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$, добавляем в удобную клетку (1, 5) ноль.

Так как для свободных клеток все $C_{ij} - U_i - V_j$ 0, то имеем оптимальный план (М–34 — считаем положительной величиной).

Переходя от стандартных часов к реальным часам работы каждого станка с помощью зависимости

$$x_{ij} = \frac{X'_{ij}}{f¿},$$

получим оптимальное решение.

$$\bar{x}_{опт} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & \frac{100}{3} & 0 & \frac{20}{3} \\ 200 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

Согласно этому решению избыток мощности остается на 2-м станке в количестве 40 часов его работы.

При этом суммарные затраты составят (из табл. 4.10):

$$Z_{min} = 48 \cdot 50 + 112 \cdot 50 + 84 \cdot 10 + 30 \cdot 100 + 70 \cdot 10 = 12540.$$

4.8. Решение транспортной задачи на ЭВМ

Рассмотрим транспортную задачу, матрица планирования которой имеет вид, представленный в табл. 4.11.

Таблица 4.11

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	5	8	3	10	4	40
A_2	10	7	9	6	5	120
A_3	7	3	6	4	12	60
A_4	6	3	11	5	4	40
	80	50	60	20	50	a'_i \ b'_j

Решение задачи с использованием программы Exel. Вызываем программу Microsoft Exel. Для решения транспортной задачи (табл. 4.11) с помощью средства поиска решений введем данные, как показано на рис. 4.2.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	5	8	3	10	4			
2	10	7	9	6	5			
3	7	3	6	4	12			
4	6	3	11	5	4			
5								
6						0	40	
7						0	120	
8						0	60	
9						0	40	
10	0	0	0	0	0	0		
11	80	50	60	20	50			

Транспортная задача

Рис. 4.2. Исходные данные транспортной задачи

В ячейки A1 : E4 введем стоимость перевозок. Ячейки A6 : E9 отведены под значения объемов перевозок, пока неизвестных, но здесь появится оптимальный план перевозок в ячейки G6 : G9 введены объемы производства, а в ячейки A11 : E11 введена потребность (спрос) в продукции в пунктах потребления.

В ячейку F10 вводится целевая функция

= СУММПРОИЗВ (A1 : E4; A6 : E9)

В ячейки A10 : E10 вводятся формулы

= СУММ (A6 : A9)
= СУММ (B6 : B9)
= СУММ (C6 : C9)
= СУММ (К6 : К9)
= СУММ (E6 : E9)

определяющие объем продукции, ввозимой в пункты потребления.

В ячейки F6 : F9 введены формулы

= СУММ (A6 : E6)

= СУММ (A7 : E7)

= СУММ (A8 : E8)

= СУММ (A9 : E9)

характеризующие объем производства.

Далее выбираем команду **Сервис**, **Поиск решения** (Tools; Solver) и заполняем открывшееся диалоговое окно **Поиск решения** (Solver), как показано на рис. 4.3.

В диалоговом окне **Параметры поиска решения** (Solver kptions) установить флажок **Линейная модель** (Assume Linear Model). После нажатия кнопки **Выполнить** (Solver) средство поиска решений находит оптимальный план поставок продукции и соответствующие ему транспортные расходы (рис. 4.4).

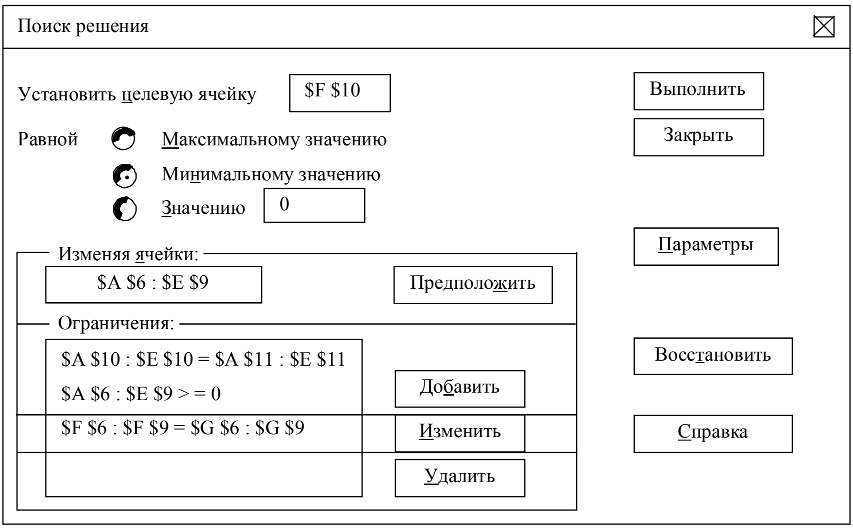


Рис. 4.3. Диалоговое окно **Поиск решения** для транспортной задачи

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	5	8	3	10	4			
2	10	7	9	6	5			
3	7	3	6	4	12			
4	6	3	11	5	4			
5								
6	0	0	40	0	0	40	40	
7	30	0	20	20	50	120	120	
8	10	50	0	0	0	60	60	
9	40	0	0	0	0	40	40	
10	80	50	60	20	50	1430		
11	80	50	60	20	50			

Транспортная задача

Рис. 4.4. Оптимальное решение транспортной задачи

Решение задачи в Mathcad.

Порядок выполнения задания.

1. Вызовите Mathcad и установите режим автоматического выполнения вычислений.

2. Определите и введите матрицу С (матрицу стоимости перевозок).

3. Определите и введите матрицу неизвестных перевозок (поставок). Неизвестные обозначим через x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19}, x_{20}. Эту матрицу копируем в буфер обмена и, когда нужно, вставляем из буфера обмена.

4. Запишите функцию (линейную форму) стоимости перевозок $Z(x_1,x_2,\ldots, x_{20})$.

5. Для матрицы неизвестных задайте начальное значение, чтобы начать счет (например, все элементы матрицы равны единице).

6. Составьте пять ограничений по потребностям: пишите знак Σ, матрицу берите из буфера обмена равно ограничению по < 1 столбцу, < 2 столбцу и т.д. Составьте четыре ограничения по запасам.

7. Запишите условие того, что члены матрицы неизвестных не могут быть отрицательными.

8. Запишите условие поиска минимума функции Z.

9. Для удобства записи оптимальный план поставок продукции находите в виде транспортной матрицы M^T.

Фрагмент рабочего документа Mathcad с решением задачи приведен ниже.

кRIGIN := 1

$$C := \begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 & 10 & 4 \\ 10 & 7 & 9 & 6 & 5 \\ 7 & 3 & 6 & 4 & 12 \\ 6 & 3 & 11 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{16} & x_{17} & x_{18} & x_{19} & x_{20} \end{pmatrix}$$

$$Z(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10},x_{11},x_{12},x_{13},x_{14},x_{15},x_{16},x_{17},x_{18},x_{19},x_{20}) :=$$

$$= \mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{16} & x_{17} & x_{18} & x_{19} & x_{20} \end{pmatrix} \cdot C^T\right]$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{16} & x_{17} & x_{18} & x_{19} & x_{20} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Given

$$\sum \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{16} & x_{17} & x_{18} & x_{19} & x_{20} \end{pmatrix}^{\langle 1 \rangle} = 80 \qquad \sum \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{16} & x_{17} & x_{18} & x_{19} & x_{20} \end{pmatrix}^{\langle 2 \rangle} = 50$$

$$\sum \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{16} & x_{17} & x_{18} & x_{19} & x_{20} \end{pmatrix}^{\langle 3 \rangle} = 60 \qquad \sum \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{16} & x_{17} & x_{18} & x_{19} & x_{20} \end{pmatrix}^{\langle 4 \rangle} = 20$$

$$\sum \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{16} & x_{17} & x_{18} & x_{19} & x_{20} \end{pmatrix}^{\langle 5 \rangle} = 5 \qquad \sum \left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{16} & x_{17} & x_{18} & x_{19} & x_{20} \end{pmatrix}^{T} \right)^{\langle 1 \rangle} = 40$$

$$\sum \left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{16} & x_{17} & x_{18} & x_{19} & x_{20} \end{pmatrix}^{T} \right)^{\langle 2 \rangle} = 120 \qquad \sum \left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{16} & x_{17} & x_{18} & x_{19} & x_{20} \end{pmatrix}^{T} \right)^{\langle 3 \rangle} = 60$$

$$\sum \left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{16} & x_{17} & x_{18} & x_{19} & x_{20} \end{pmatrix}^{T} \right)^{\langle 4 \rangle} = 40 \qquad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{16} & x_{17} & x_{18} & x_{19} & x_{20} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 00000 \\ 00000 \\ 00000 \\ 00000 \end{pmatrix}$$

M :=Minimize(z,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10},x_{11},x_{12},x_{13},x_{14},x_{15},x_{16},x_{17},x_{18},x_{19},x_{20}).

M^T=

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0	0	40	0	0	30	0	20	20	50	10	50	0	0	0	40	0	0	0	0

Глава 5
ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

5.1. Постановка задачи

Более целесообразно целочисленное программирование было бы назвать дискретным программированием. Это есть часть математического программирования, занимающаяся исследованием экстремальных задач на целочисленных решетках и конечных множествах. В терминах дискретного программирования формализуются многие важные задачи экономики, управления, планирования, проектирования, а также ряд других задач, например: размещение и специализация предприятий; оптимизация комплекса технических средств доставки грузов; важные сельскохозяйственные задачи и т. д.

Рассмотрим задачу математического программирования, в которой требуется, чтобы все переменные принимали целые неотрицательные значения.

Максимизировать линейную функцию

$$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \tag{5.1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = \overline{1,m}; \tag{5.2}$$

$$x_j = 0, \text{ или } 1, \text{ или } 2, \text{ или } 3, \ldots;\ j = \overline{1,n}; \tag{5.3}$$

причем a_{ij}, b_i предполагаются целыми числами.

Симплекс-метод приводит непосредственно к целочисленному решению лишь для немногих задач. В общем же случае требуются специальные методы, заключающиеся в подборе дополнительных линейных ограничений к системе ограничений (5.2), обеспечивающих целочисленность решения.

Один из таких методов, приводящий к целочисленному решению за конечное число шагов, предложен Р.Е. Гомори.

Предположим, что задача линейного программирования имеет многоугольник (многогранник) допустимых решений.

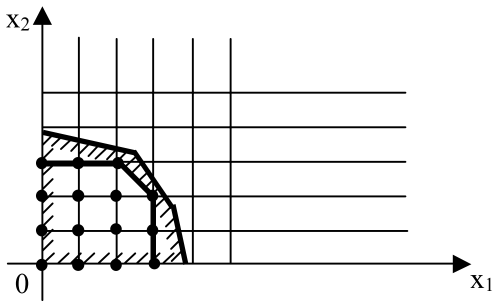


Рис. 5.1

Если наложить требование целочисленности, то допустимое множество решений вырождается в систему точек и уже в общем случае не является выпуклым. Если добавить новые ограничения, связывающие внешние целочисленные точки, а затем в качестве многоугольника (многогранника) решений использовать все выпуклое множество, то получим новую задачу линейного программирования со следующими свойствами:

а) новый многоугольник решений содержит все целые точки, заключавшиеся в первоначальном многоугольнике (многограннике) решений; любая угловая его точка является целой;

б) так как линейная функция достигает оптимума в угловой точке многоугольника (многогранника) решений, то построением такого многоугольника и обеспечивается целочисленность оптимального решения.

Решение поставленной задачи ведем симплексным методом без учета требования целочисленности. Если оптимальный план целочисленный, то вычисления заканчивают; если же в оптимальном решении такой задачи хотя бы одна компонента не будет целым числом, то вводятся дополнительные ограничения и процесс решения продолжается.

Предположим, что, максимизируя (5.1) при условиях (5.2) и (5.3) без учета требования целочисленности переменных, мы пришли к оптимальному решению с предпочитаемым эквивалентом системы ограничений (5.2) вида:

$$x_i + \sum_{j=1}^{n} e_{ij}\, x_j = f_i,\ i = \overline{1,m}\ . \tag{a}$$

Пусть правые части f_i некоторых уравнений оказались дробными. Выберем одну из них, например f_1. Каждый коэффициент e_{1j} при неизвестной в соответствующем уравнении системы и свободный член f_1 представим в виде суммы целой части и правильной неотрицательной дроби

$$\left.\begin{aligned} e_{1j} &= N_{1j} + \gamma_{1j}, &\quad 0 \le \gamma_{1j} < 1,\ j = \overline{1,n}, \\ f_1 &= N_1 + \gamma_1, &\quad 0 \le \gamma_1 < 1, \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

помня, что целой частью любого числа называется наибольшее целое число, не превосходящее данного числа. Тогда соответствующее уравнение системы можно записать:

$$x_1 + (N_{1,m+1} + \gamma_{1,m+1})\, x_{m+1} + \ldots + (N_{1n} + \gamma_{1n})\, x_k = N_1 + \gamma_1,$$

или

$$x_1 + N_{1,m+1}\, x_{m+1} + \ldots + N_{1n}\, x_k - N_1 = \gamma_1 - (\gamma_{1,m+1}\, x_{m+1} + \\ + \ldots + \gamma_{1n}\, x_k), \tag{b}$$

где $k = n + m$.

Левая часть этого равенства должна быть числом целым, так как мы требуем, чтобы все переменные принимали целые неотрицательные значения. Поэтому и правая часть должна быть целым числом и, очевидно, это число не больше, чем γ_1. Но γ_1 есть правильная неотрицательная дробь и, следовательно, правая часть не может превышать нуля:

$$\gamma_1 - (\gamma_{1,m+1} x_{m+1} + \ldots + \gamma_{1n} x_n) \leq 0, \tag{c}$$

откуда

$$\gamma_{1,m+1} x_{m+1} + \ldots + \gamma_{1n} x_n \geq \gamma_1. \tag{d}$$

Вычитая из левой части новую неотрицательную неизвестную x_{n+1}, заменим неравенство (d) уравнением:

$$\gamma_{1,m+1} x_{m+1} + \ldots + \gamma_{1n} x_k - x_{k+1} = \gamma_1, \text{ или}$$

$$-\gamma_{1,m+1} x_{m+1} - \ldots - \gamma_{1n} x_k + x_{k+1} = -\gamma_1, \tag{5.5}$$

где $\gamma_{1,m+1}, \gamma_{1,m+2},\ldots$ коэффициенты, стоящие в первой строке оптимальной, но нецелочисленной таблицы, и под неизвестными $x_{m+1}, x_{m+2},\ldots$.

Это и есть дополнительное ограничение, которое следует ввести. Новая задача с (m + 1) уравнениями (5.2) и (5.5) является задачей дискретного программирования, так как "$-x_{n+1}$" совпадает с правой частью равенства (b). На данном этапе значение x_{n+1} равно "$-\gamma_1$", т. е. отрицательно и дробно. Мы добавляем к последней симплексной таблице еще одну строку, соответствующую уравнению (5.5). При этом относительные оценочные коэффициенты не изменяются, т. е. условие оптимальности сохраняется.

Возобновляя процесс преобразования симплексных таблиц, применим двойственный метод и переведем неизвестную x_{n+1} из базисных в свободную. Возможно, что после этого получится базисное неотрицательное решение с целочисленными компонентами и задача решена. Если нет, то составляем следующее дополнительное ограничение, учитывающее целочисленность. Процесс присоединения дополнительных ограничений повторяют до тех пор, пока либо будет найден целочисленный оптимальный план, либо будет доказано, что задача не имеет целочисленных планов.

Если имеются несколько дробных f_i, то дополнительное ограничение (5.5) составляют для max γ_i. Это ускоряет процесс получения оптимального целочисленного решения.

5.2. Задача определения оптимального плана производства

Рассмотрим следующую задачу определения оптимального производственного плана.

Пусть предприятие для производства трех размерных наименований изделий использует три вида ресурсов в количестве 10, 11 и 13 ед. Затраты каждого из перечисленных трех видов ресурсов на изготовление одного изделия 1-го, 2-го или 3-го видов и прибыль от реализации одного изделия каждого из видов отражены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Объем ресурсов	Затраты на одно изделие		
	1-го вида	2-го вида	3-го вида
10	3	2	0
11	1	4	0
13	3	3	1
Прибыль в усл. ед.	4	5	1

Предполагая, что предприятие может выпускать изделия разных наименований в любых соотношениях, найти план производства, обеспечивающий максимальную рентабельность.

Если обозначить через x_1, x_2 и x_3 ед. количество изделий, которые должно выпускать предприятие для обеспечения максимальной рентабельности, то имеем задачу целочисленного программирования.

Максимизировать линейную функцию

$$Z = 4x_1 + 5x_2 + x_3 \qquad (e)$$

при ограничениях

$$\left.\begin{aligned}
&3x_1 + 2x_2 \le 10,\\
&x_1 + 4x_2 \le 11,\\
&3x_1 + 3x_2 + x_3 \le 13,\\
&x_j \ge 0 \ (j = 1,2,3),\\
&x_j \text{ − целые числа.}
\end{aligned}\right\} \qquad (f)$$

Соответственно соотношениям (e) и (f) записываем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&3x_1 + 2x_2 + x_4 = 10,\\
&x_1 + 4x_2 + x_5 = 11,\\
&3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_6 = 13,\\
&-4x_1 - 5x_2 - x_3 + Z = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (g)$$

Строим симплексную табл. 5.2. Произведя три шага симплексных преобразований, получаем табл. 5.3 — 5.5.

Табл. 5.5 дает оптимальное, но нецелочисленное решение $\overline{x} = (\frac{18}{10}; \frac{23}{10}; \frac{7}{10}; 0; 0; 0)$ и $Z(\overline{x}) = \frac{194}{10}$.

Для отыскания целочисленного решения нужно ввести дополнительное ограничение (5.5).

Из соотношений (5.4):

$$f_1 = \frac{18}{10} = 1 + \frac{8}{10};\ f_2 = \frac{23}{10} = 2 + \frac{3}{10};\ f_3 = \frac{7}{10} = 0 + \frac{7}{10},\ \text{т. е.}$$

$\gamma_1 = \frac{8}{10}$; $\gamma_2 = \frac{3}{10}$; $\gamma_3 = \frac{7}{10}$. Так как $\max \gamma_i = \max(\frac{18}{10}; \frac{3}{10}; \frac{7}{10};)$, тогда дополнительное ограничение (5.5) строим для x_1-строки табл. 5.5.

Таблица 5.2

С.П. / Б.П.	x_1	x_2	x_3	1
x_4	3	2	0	10
x_5	1	$\boxed{4}$	0	11
x_6	3	3	1	13
Z	–4	–5	–1	0

Таблица 5.3

С.П. / Б.П.	x_1	x_5	x_3	1
x_4	$\boxed{\frac{10}{4}}$	$-\frac{2}{4}$	0	$\frac{18}{4}$
x_2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{11}{4}$
x_6	$\frac{9}{4}$	$-\frac{3}{4}$	1	$\frac{19}{4}$
Z	$-\frac{11}{4}$	$\frac{5}{4}$	–1	$\frac{55}{4}$

Находим

$e_{11} = \frac{4}{10} = 0 + \frac{4}{10}$; $e_{12} = -\frac{2}{10} = -1 + \frac{8}{10}$; $e_{13} = 0 = 0 + 0$; т.е. $\gamma_{11} = \frac{4}{10}$; $\gamma_{12} = \frac{8}{10}$; $\gamma_{13} = 0$. Тогда $\gamma_{11} = \gamma_{14}$, $\gamma_{12} = \gamma_{15}$, $\gamma_{13} = \gamma_{16}$ и дополнительное ограничение имеет вид:

$$-\gamma_{14}x_4 - \gamma_{15}x_5 - \gamma_{16}x_6 + x_7 = -\gamma_1, \text{ или}$$

$$-\frac{4}{10}x_4 - \frac{8}{10}x_5 - 0x_6 + x_7 = -\frac{8}{10}. \qquad \text{(h)}$$

 Вводя уравнение (h) как новую строку в табл. 5.5, полу-

Таблица 5.4

С.П. / Б.П.	x_4	x_5	x_2	1
x_1	$\frac{4}{10}$	$-\frac{2}{10}$	0	$\frac{18}{10}$
x_2	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{23}{10}$
x_6	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$\boxed{1}$	$\frac{7}{10}$
Z	$\frac{11}{10}$	$\frac{7}{10}$	–1	$\frac{187}{10}$

Таблица 5.5

С.П. / Б.П.	x_4	x_5	x_6	1
x_1	$\frac{4}{10}$	$-\frac{2}{10}$	0	$\frac{18}{10}$
x_2	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{23}{10}$
x_3	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{3}{10}$	1	$\frac{7}{10}$
Z	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$	1	$\frac{194}{10}$

чим табл. 5.6 и, совершая симплексное преобразование с разрешающим элементом “$-\frac{8}{10}$”„ (освобождаемся от отрицательного элемента в 1-стоблце), придем к табл. 5.7.

Таблица 5.6

С.П. / Б.П.	x_4	x_5	x_6	1
x_1	$\frac{4}{10}$	$-\frac{2}{10}$	0	$\frac{18}{10}$
x_2	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{23}{10}$
x_3	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{3}{10}$	1	$\frac{7}{10}$
x_7	$-\frac{4}{10}$	$\boxed{\frac{8}{10}}$	0	$-\frac{8}{10}$
Z	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$	1	$\frac{194}{10}$

Таблица 5.7

С.П. / Б.П.	x_4	x_7	x_6	1
x_1	$\frac{4}{8}$	$-\frac{2}{8}$	0	2
x_2	$-\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	2
x_3	$-\frac{6}{8}$	$-\frac{3}{8}$	1	1
x_5	$\frac{1}{2}$	$-\frac{10}{8}$	0	1
Z	0	$\frac{1}{2}$	1	19

Из табл. 5.7 получаем оптимальное целочисленное решение $\overline{x}_{опт} = (2;\ 2;\ 1;\ 0;\ 1;\ 0;\ 0)$ и $Z_{max} = 19$.

Следовательно, максимальная прибыль в 19 усл. ед. будет достигнута при производстве двух ед. изделий 1-го вида, двух ед. изделий 2-го вида и одной ед. изделий 3-го вида.

Глава 6
ОСНОВЫ ПЛАНИРОВАНИЯ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

Важнейшая задача дальнейшего совершенствования планирования — улучшение сбалансированности производства, причем производства именно той продукции, которая нужна для развития производства и удовлетворения растущего спроса населения. Для этого используется ряд экономико — математических моделей, в том числе межотраслевые балансы.

Центральная идея межотраслевого баланса заключается в том, что каждая отрасль в нем рассматривается и как производитель и как потребитель. Модель межотраслевого баланса — одна из самых простых экономико — математических моделей. Она представляет собой единую взаимоувязанную систему информации о взаимных поставках продукции между всеми отраслями производства, а также об объеме и отраслевой структуре основных производственных фондов, об обеспеченности народного хозяйства ресурсами труда и т. д.

Такая модель позволяет рассчитать сбалансированный план на основе точного учета всех межотраслевых связей и рассмотреть при этом множество возможных вариантов.

В основе исследований балансовых моделей лежат балансовые таблицы, содержащие данные о производстве и потреблении продукции различных отраслей или предприятий. Такие балансы затрат выпуска продукции отражают сложные взаимосвязи между различными отраслями производства, характеризуют общественно необходимые затраты в процессе производства (производственное потребление), распределение общественного продукта, всесторонний оборот материальных ценностей и т. д.

В результате балансовых исследований могут быть изучены межотраслевые и межрайонные связи, рассчитаны полные затраты труда, капиталовложений, энергии и т. д. на производство единицы общественного продукта, исследован подробно оборот материальных ценностей в данном хозяйстве.

Характерные черты и особенности этого метода описываются с помощью матричных моделей баланса. Из математических методов здесь главным образом используется аппарат линейной алгебры.

6.1. Модель межотраслевого баланса

Рассмотрим пример предельно упрощенной системы, состоящей из двух производственных отраслей. Пусть исполнение баланса за предшествующий период характеризуется данными, приведенными в табл. 6.1.

Продукция каждой отрасли частично идет на внешнее потребление (конечный продукт), а частично используется в качестве сырья, полуфабрикатов или других средств производства в других отраслях, в том числе и в данной. Эту часть продукции называют производственным потреблением. Поэтому каждая из рассматриваемых отраслей выступает и как производитель продукции (1-й столбец таблицы) и как ее потребитель (1-я строка таблицы).

Приведенную таблицу конкретного примера можно записать и в общем виде (табл. 6.2).

Обозначим через x_i валовый выпуск продукции i-й отрасли за планируемый период и через y_i — конечный продукт, идущий на внешнее для рассматриваемой системы потребление (средства производства других экономических систем, потребление населения, образование запасов и т. д.). Таким образом, разность $x_i - y_i$ составляет часть продукции i-й отрасли, предназначенную для внутрипроизводственного потребления. Предполагаем, что баланс составляется в стоимо-

Таблица 6.1

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">№ отраслей (k)
№ отраслей (i)</th><th colspan="2">Потребление</th><th rowspan="2">Итого затрат $\sum X_{ik}$</th><th rowspan="2">Конечный продукт y_i</th><th rowspan="2">Валовый выпуск X_i</th></tr>
<tr><th>1</th><th>2</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Производство</td><td>1</td><td>0,2
100</td><td>0,4
160</td><td>260</td><td>240</td><td>500</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0,55
275</td><td>0,1
40</td><td>315</td><td>85</td><td>400</td></tr>
<tr><td colspan="2">Итого затрат в k-ю отрасль</td><td>375</td><td>200</td><td>575
575</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Таблица 6.2

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">№ отраслей (k)
№ отраслей (i)</th><th colspan="2">Потребление</th><th rowspan="2">Итого затрат $\sum_i x_{ik}$</th><th rowspan="2">Конечный продукт y_i</th><th rowspan="2">Валовый выпуск x_i</th></tr>
<tr><th>1</th><th>2</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Производство</td><td>1</td><td>a_{11}
x_{11}</td><td>a_{12}
x_{12}</td><td>$\sum x_{1k}$</td><td>y_1</td><td>x_1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>a_{21}
x_{21}</td><td>a_{22}
x_{22}</td><td>$\sum x_{2k}$</td><td>y_2</td><td>x_2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Итого произведены затраты</td><td>$\sum x_{i1}$</td><td>$\sum x_{i2}$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

стном разрезе. Обозначим через x_{ik} часть продукции i-й отрасли, которая потребляется k-й отраслью, для обеспечения валового выпуска ее продукции в размере x_i.

В общем виде имеем принципиальную схему межотраслевого баланса (табл. 6.2) для двух отраслей.

Очевидно, величины, расположенные в строках, связаны следующими балансовыми равенствами

$$\left.\begin{aligned} x_1 - (x_{11} + x_{12}) &= y_1 \\ x_2 - (x_{21} + x_{22}) &= y_2 . \end{aligned}\right\} \qquad (6.1)$$

Одна из задач балансовых исследований заключается в том, чтобы на базе данных об исполнении баланса за предшествующий период определить исходные данные на планируемый период.

Итого произведены затраты

Рассчитываем по данным таблицы коэффициенты прямых затрат. Это отношение количества продукции i-й отрасли, поступающей в k-ю отрасль для обеспечения выпуска ее продукции в размере x_k, т. е.

$$a_{ik} = \frac{x_{ik}}{x_k} \qquad (i,\ k = \overline{1,n}), \qquad (6.2)$$

откуда

$$x_{ik} = a_{ik} \cdot x_k, \qquad (6.3)$$

т. е. затраты i-й отрасли в k-ю отрасль пропорциональны ее валовому выпуску или, другими словами, зависят линейно от валового выпуска x_i.

Выписанные соотношения называют условием линейности прямых затрат.

Рассчитываем

$$a_{11} = \frac{100}{500} = 0{,}2;\ a_{12} = \frac{160}{400} = 0{,}4;\ a_{21} = \frac{275}{500} = 0{,}55;\ a_{22} = \frac{40}{400} = 0{,}1$$

и записываем в табл. 6.1 в углах соответствующих клеток.

Найденные коэффициенты образуют матрицу прямых затрат

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}55 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Все элементы a_{ik} этой матрицы неотрицательны. Это записывают в виде матричного неравенства $A \geq 0$ и называют такую матрицу неотрицательной.

Заданием матрицы A определяются все внутренние взаимосвязи между производством и потреблением, характеризуемые исходной табл. 6.1.

Теперь можно записать линейную балансовую модель, соответствующую данным табл. 6.1, если подставить значения $x_{ik} = a_{ik} \cdot x_k$ в балансовые равенства

$$\left.\begin{aligned} x_1 - (0{,}2x_1 + 0{,}4x_2) = y_1 \\ x_2 - (0{,}55x_1 + 0{,}1x_2) = y_2 \end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

или в матричной форме

$$(E - A)\ X = Y, \tag{6.5}$$

где

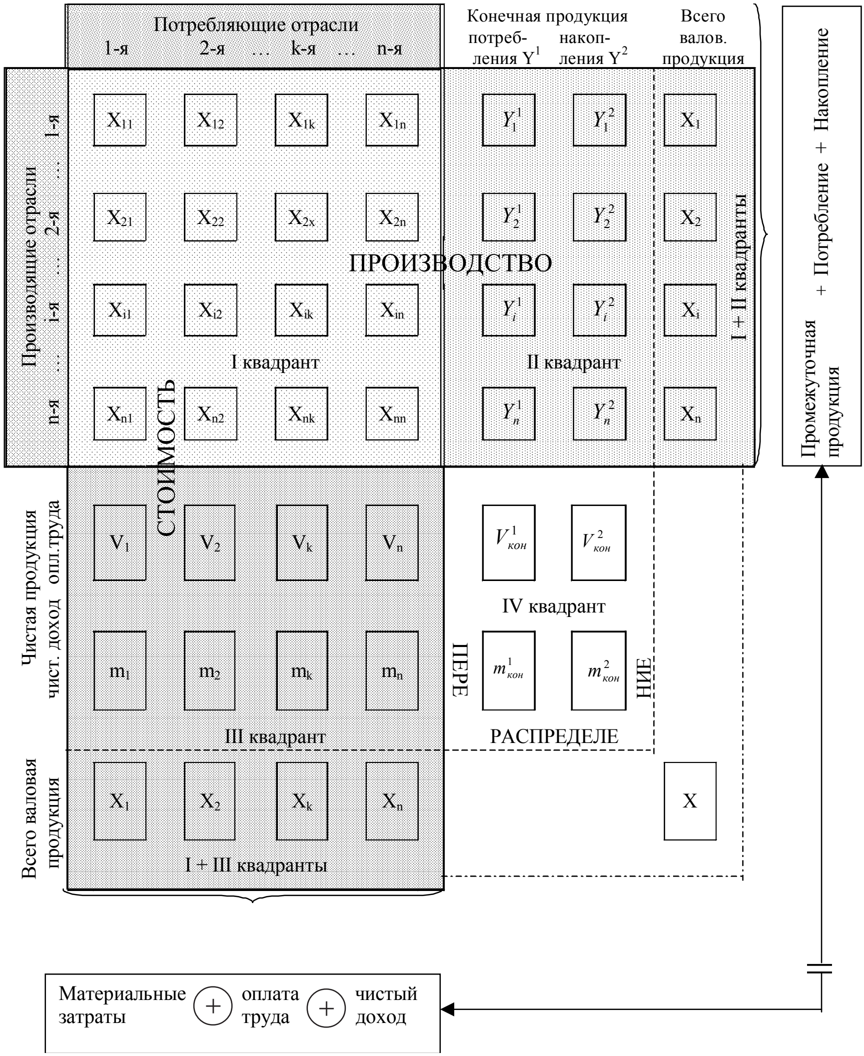
$$E = \begin{pmatrix} 1\,0 \\ 0\,1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0{,}2\ 0{,}4 \\ 0{,}55\ 0{,}1 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Эта система двух уравнений может быть использована для определения x_1 и x_2 при заданных значениях y_1 и y_2, для исследования влияния на валовый выпуск любых изменений в ассортименте конечного продукта, для определения матрицы коэффициентов полных затрат, элементы которой служат важными показателями для планирования развития отраслей и т. д.

6.2. Общая модель межотраслевого баланса продукции

Рассмотренная табл. 6.2 есть не что иное, как одна из основных экономических моделей (данная в сокращенном виде), широко известных в нашей стране и за рубежом: ме-

Таблица 6.3


Потребляющие отрасли
1-я 2-я … k-я … n-я
Конечная продукция
потреб-ления Y^1
накоп-ления Y^2
Всего валов. продукция
Производящие отрасли
1-я … 2-я … i-я … n-я
X_{11} X_{12} X_{1k} X_{1n}
X_{21} X_{22} X_{2x} X_{2n}
X_{i1} X_{i2} X_{ik} X_{in}
X_{n1} X_{n2} X_{nk} X_{nn}
Y_1^1 Y_1^2 X_1
Y_2^1 Y_2^2 X_2
Y_i^1 Y_i^2 X_i
Y_n^1 Y_n^2 X_n
ПРОИЗВОДСТВО
I квадрант
II квадрант
I + II квадранты
СТОИМОСТЬ
Чистая продукция
чист. доход опл.труда
V_1 V_2 V_k V_n
m_1 m_2 m_k m_n
III квадрант
$V^1_{кон}$ $V^2_{кон}$
IV квадрант
$m^1_{кон}$ $m^2_{кон}$
ПЕРЕ
НИЕ
РАСПРЕДЕЛЕ
Всего валовая продукция
X_1 X_2 X_k X_n
I + III квадранты
X
Промежуточная продукция + Потребление + Накопление
Материальные затраты + оплата труда + чистый доход

жотраслевой баланс производства и распределения продукции в народном хозяйстве (МОБ).

В общем виде МОБ состоит из четырех основных частей — квадрантов (табл. 6.3).

I квадрант содержит показатели материальных затрат на производство продукции. По строкам и столбцам отрасли располагаются в одинаковом порядке. Величина x_{ik} представляет собой стоимость средств производства, произведенных в i-й отрасли и потребленных в качестве материальных затрат в k-й потребляющей отрасли. Можно сказать, что сумма всех элементов квадратной матрицы n-го порядка, стоящей в первом квадранте, равняется годовому фонду возмещения затрат средств производства в материальной сфере.

Во II квадранте показана конечная продукция, используемая на непроизводственное потребление, накопление и экспорт. Тогда этот квадрант можно рассматривать как распределение национального дохода на фонд накопления и фонд потребления по отраслям производства и потребления.

В III квадранте характеризуется национальный доход, но со стороны его стоимостного состава чистой продукции (оплата труда, прибыль, налог с оборота и др.).

В IV квадранте отражается перераспределение чистой продукции. В результате перераспределения первоначально созданного национального дохода образуются конечные доходы населения, предприятий, государства. Если все показатели МОБ записаны в денежном выражении, то по столбцам баланса они представляют формирование стоимости валовой продукции, а по строкам — распределение той же продукции в народном хозяйстве. Поэтому показатели строк и столбцов равны.

Валовая продукция отраслей представлена в табл. 6.3 в виде столбца, расположенного справа от второго квадрата и в виде строки, расположенной под третьим квадрантом. Эти столбец и строка играют важную роль как для проверки правильности самого баланса (заполнения квадрантов), так и для разработки экономико-математической модели межотраслевого баланса.

В целом межотраслевой баланс в рамках общей модели объединяет балансы отраслей материального производства, баланс совокупного общественного продукта, балансы национального дохода, баланс доходов и расходов населения.

Исходя из формулы (6.2), разделим показатели любого столбца МОБ на итог этого столбца (или соответствующей строке), то есть на валовую продукцию. Получим затраты на единицу этой продукции a_{ik} ($i, k = \overline{1,n}$), которые образуют матрицу прямых затрат А:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1k} \ldots a_{1n} \\ \ldots \ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{i1}\ a_{i2} \ldots a_{ik} \ldots a_{in} \\ \ldots \ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{nk} \ldots a_{nn} \end{pmatrix} \geq 0. \qquad (6.6)$$

Стоимостной баланс наряду с уравнениями

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} + y_i \ (i = \overline{1,n}), \qquad (6.7)$$

каждое из которых представляет распределение продукции данной отрасли по всем отраслям, допускает построение уравнений в форме потребления продукции

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} x_{ik} + V_k + m_k \ (k = \overline{1,n}), \qquad (6.8)$$

где $\sum_{i=1}^{n} x_{ik}$ — материальные затраты k-й потребляющей отрасли,

$V_k + m_k$ — ее чистая продукция (V_k — сумма оплаты труда, m_k — чистый доход).

Подставляя в уравнения (6.7) соотношения (6.3), после преобразований получим

$$x_i - \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = y_i \ (i = \overline{1,n}). \qquad (6.9)$$

Систему уравнений МОБ (6.9) запишем в матричной форме

$$(E - A)\,X = Y, \tag{6.10}$$

где E — единичная матрица,

A — матрица прямых затрат (6.6),

X и Y — столбцовые матрицы.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Система уравнений (6.9), или в матричной форме (6.10) называется экономико-математической моделью межотраслевого баланса (моделью Леонтьева).

Модель межотраслевого баланса (6.10) позволяет решить следующие задачи:

1) определить объем конечной продукции отраслей $y_1, y_2, \ldots, y_n$ по заданным объемам валовой продукции $x_1, x_2, \ldots, x_n$;

2) по заданной матрице коэффициентов прямых затрат A определить матрицу коэффициентов полных затрат $P = (E - A)^{-1}$, элементы которой служат важными показателями для планирования развития отраслей;

3) определить объемы валовой продукции отраслей $x_1, x_2, \ldots, x_n$ по заданным объемам конечной продукции $y_1, y_2, \ldots, y_n$;

4) по n заданным объемам конечной или валовой продукции отраслей $x_1, y_2, x_3, y_4, \ldots, x_n$ определить оставшиеся n объемов.

6.3. Понятие о косвенных затратах

Прямые затраты играют в составлении баланса исключительно важную роль. Они служат важной экономической характеристикой, без знания которой планирование народного хозяйства не представлялось бы возможным.

Матрица прямых затрат по существу определяет структуру экономики. Если нам известны прямые затраты и конечный продукт каждой отрасли хозяйства, то мы можем вычислить объем валовой продукции.

Чтобы выпустить автомобиль в Тольятти, нужно обеспечить электроэнергией не только сам завод, но и прокатные станы Магнитогорского комбината, и шинный завод в Ярославле, и много других. Поэтому, если прямо на один автомобиль затрачивается 1,4 тысячи квт-часов электроэнергии, то на всех промежуточных стадиях — еще 2 тысячи квт-часов (косвенные затраты электроэнергии), а всего 3,4 тысячи квт-часов. Чтобы произвести 1 тонну штапельного волокна из лавсана, требуется около пятидесяти тысяч рублей капитальных вложений непосредственно для завода химических волокон, а в сопряженных отраслях — еще около восьмидесяти тысяч рублей. Чтобы произвести на 10000 рублей мясных изделий, капиталовложения в мясную промышленность должны составить 900 рублей, а в других сопряженных отраслях — 18000 рублей, т. е. в 20 раз больше.

Таким образом, прямые затраты не отражают в полной мере сложных количественных взаимосвязей, наблюдающихся в народном хозяйстве. Они, в частности, не отражают обратных связей, имеющих далеко не маловажное значение.

Как возникают косвенные затраты? На изготовление трактора в виде прямых затрат расходуется чугун, сталь и т. д. Но для производства стали также нужен чугун. Таким образом, кроме прямых затрат чугуна, имеются и косвенные затраты чугуна, связанные с производством трактора. В эти косвенные затраты входит и чугун, необходимый для создания того количества чугуна, которое составляет прямые затраты. Эти косвенные затраты могут иногда существенно превышать прямые затраты.

6.4. Полные внутрипроизводственные затраты

Система уравнений межотраслевого баланса в матричной форме была представлена в виде

$$(E - A)\,X = Y. \qquad (6.10)$$

Пусть матрица $P = (E — A)^{—1}$, (6.11)
где $P = (P_{ik})$, тогда уравнение (6.10) запишется

$$(E - A)^{-1} (E - A) X = (E - A)^{-1} Y, \text{ т. к. } (E - A)^{-1} (E -$$

$$- A) = E \text{ и } EX = X, \text{ то } X = (E - A)^{-1} Y, \text{ или } X = PY.$$

То есть объемы производства отраслей X_i определяются как

$$X = PY \qquad (6.12)$$

по заданным величинам конечного продукта потребления Y и матрице P.

Матрицу P называют матрицей коэффициентов полных затрат.

Элементы матрицы P включают не только затраты i-й продукции, необходимой для создания одной единицы k-й продукции, но и те затраты, которые необходимы для создания в каждой отрасли одной единицы конечного продукта.

Значит, полные затраты P_{ik} включают как прямые a_{ik}, так и косвенные ($P_{ik} —- a_{ik}$) затраты. Очевидно, что всегда $P_{ik} \geq a_{ik}$

Матрица коэффициентов полных затрат является суммой сходящегося матричного ряда

$$P = (E - A)^{-1} = E + A + A^2 + A^3 + \ldots + A^m + \ldots \qquad (6.13)$$

Матрицы A^2, A^3, ..., A^m, ... называются матрицами коэффициентов косвенных затрат 2-го, 3-го и т. д. порядков и коэффициенты полных затрат получаются в виде суммы коэффициентов прямых затрат и косвенных затрат.

Валовый выпуск k-й отрасли x_k определяется как

$$X_k = P_{k1}y_1 + P_{k2}y_2 + P_{k3}y_3 + \ldots = P_k Y \; (k = \overline{1,n}). \qquad (6.14)$$

Для нашего конкретного примера имеем

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,55 & 0,1 \end{pmatrix}, \; E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,55 & 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,4 \\ -0,55 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

Находим обратную матрицу

$$P = (E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}4 \\ -0{,}55 & 0{,}9 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}8 & 0{,}8 \\ 1{,}1 & 1{,}6 \end{pmatrix},$$

которая и является матрицей коэффициентов полных затрат.

Коэффициентом P_{ik} полных затрат называется сумма прямых затрат и косвенных затрат продукции i-й отрасли для производства единицы продукции k-й отрасли через все промежуточные продукты на всех предшествующих стадиях производства.

Из зависимости (6.13) имеем

$$P = E + A + C, \tag{6.15}$$

где C есть матрица коэффициентов косвенных затрат.

Тогда $C = P - A - E$ (6.16)

и для нашего примера

$$C = \begin{pmatrix} 1{,}8 & 0{,}8 \\ 1{,}1 & 1{,}6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}55 & 0{,}1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}55 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Сравниваем ее с матрицей косвенных затрат, вычисленной через матрицы A^2, A^3, ...

Матрица 2-го порядка

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}55 & 0{,}1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}55 & 0{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}26 & 0{,}12 \\ 0{,}165 & 0{,}23 \end{pmatrix}.$$

Матрица 3-го порядка

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0{,}26 & 0{,}12 \\ 0{,}165 & 0{,}23 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}55 & 0{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}118 & 0{,}116 \\ 0{,}160 & 0{,}089 \end{pmatrix}.$$

Матрица 4-го порядка

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0{,}118 & 0{,}116 \\ 0{,}160 & 0{,}089 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}55 & 0{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}087 & 0{,}059 \\ 0{,}081 & 0{,}073 \end{pmatrix} \text{ и т. д.}$$

Можно подсчитать

$$C = A^2 + A^3 + A^4 \approx \begin{pmatrix} 0{,}465 & 0{,}295 \\ 0{,}406 & 0{,}392 \end{pmatrix},$$

то есть процесс вычисления матрицы косвенных затрат через матрицы A^2, A^3, ... является сходящимся.

Пусть в текущем году понадобится изготовить 480 единиц продукции 1-й и 170 единиц продукции 2-й отраслей. Тогда необходимый валовый выпуск $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ определится из уравнения

$$X = PY = \begin{pmatrix} 1{,}8 & 0{,}8 \\ 1{,}1 & 1{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 480 \\ 170 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 800 \end{pmatrix},$$

т. е. $x_1 = 1000$, $x_2 = 800$.

Пусть далее необходимо будет определить изменение плана ΔX, которое потребуется при увеличении конечного выпуска изделий 1-й отрасли на 10 единиц и 2-й отрасли на 30 единиц, тогда

$$\Delta X = P\Delta Y = \begin{pmatrix} 1{,}8 & 0{,}8 \\ 1{,}1 & 1{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ 59 \end{pmatrix},$$

т. е. потребуется увеличить валовой выпуск 1-й отрасли на $\Delta x_1 = 42$ единицы и 2-й отрасли на $\Delta x_2 = 59$ единиц.

Как было отмечено, вычисление коэффициентов полных затрат требует обращения матрицы и эта операция тем сложнее, чем больше размерность матрицы. Для решения матрицы 7×7 хорошему математику — вычислителю потребуется не меньше дня. А для обращения матрицы 200×200 вручную, десяти математикам потребуется более 20 лет. Отсюда следует, что без современных электронно-вычислительных машин МОБ остался бы только теорией. Таким образом, теоретическая подготовленность, возросшие требования планирования и мощные вычислительные средства воплотили в жизнь МОБ.

Рассмотрим пример составления межотраслевого баланса производства и распределения продукции для трехотраслевой экономической системы, заданной матрицей коэффициентов прямых затрат A и вектором конечной продукции Y:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}25 & 0{,}2 \\ 0{,}15 & 0{,}12 & 0{,}03 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}08 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 56 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Найти коэффициенты полных затрат; плановые объемы валовой продукции $X = (x_1, x_2, x_3)$; величину межотраслевых потоков, т. е. значения x_{ik} ($i = 1,2,3$; $k = 1,2,3$); матрицу косвенных затрат; по заданному вектору увеличения косвенного выпуска продукции ΔY определить изменение плана ΔX.

Находим матрицу (E — A):

$$K = E - A =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}25 & 0{,}2 \\ 0{,}15 & 0{,}12 & 0{,}03 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}08 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & -0{,}25 & -0{,}2 \\ -0{,}15 & 0{,}88 & -0{,}03 \\ -0{,}1 & -0{,}05 & 0{,}92 \end{pmatrix}$$

Для определения матрицы полных затрат (6.11) обращаем матрицу K.

Первый способ нахождения $K^{-1} = (E - A)^{-1}$. Вычисляем определитель

$$|K| = \begin{vmatrix} 0{,}7 & -0{,}25 & -0{,}2 \\ -0{,}15 & 0{,}88 & -0{,}03 \\ -0{,}1 & -0{,}05 & 0{,}92 \end{vmatrix} = 0{,}511.$$

Так как $|K| \neq 0$, то существует матрица $К^{-1}$ = Р обратная заданной матрице К.

Находим алгебраические дополнения для элементов матрицы К:

$$К_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0{,}88 & -0{,}03 \\ -0{,}05 & 0{,}92 \end{vmatrix} = 0{,}808; \quad К_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -0{,}15 & -0{,}03 \\ -0{,}1 & 0{,}92 \end{vmatrix} = 0{,}141;$$

$$К_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -0{,}15 & 0{,}88 \\ -0{,}1 & -0{,}05 \end{vmatrix} = 0{,}096; \quad К_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -0{,}25 & -0{,}2 \\ -0{,}05 & 0{,}92 \end{vmatrix} = 0{,}24;$$

$$К_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0{,}7 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}92 \end{vmatrix} = 0{,}624; \quad К_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0{,}7 & -0{,}25 \\ -0{,}1 & -0{,}05 \end{vmatrix} = 0{,}06;$$

$$К_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -0{,}25 & -0{,}2 \\ 0{,}88 & -0{,}03 \end{vmatrix} = 0{,}184; \quad К_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0{,}7 & -0{,}2 \\ -0{,}15 & -0{,}03 \end{vmatrix} = 0{,}051;$$

$$К_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 0{,}7 & -0{,}25 \\ -0{,}15 & 0{,}88 \end{vmatrix} = 0{,}579.$$

Из алгебраических дополнений составляем транспонированную матрицу и, деля ее на $|К|$, получаем обратную матрицу $К^{-1}$:

$$Р = К^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}808 & 0{,}24 & 0{,}184 \\ 0{,}141 & 0{,}624 & 0{,}051 \\ 0{,}096 & 0{,}06 & 0{,}579 \end{pmatrix} : 0{,}511 = \begin{pmatrix} 1{,}580 & 0{,}469 & 0{,}359 \\ 0{,}276 & 1{,}220 & 0{,}100 \\ 0{,}187 & 0{,}117 & 1{,}131 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим другой способ нахождения обратной матрицы $К^{-1}$ с помощью жордановых исключений. Составляем табл. 6.4.

Таблица 6.4

	x_1	x_2	x_3
$b_1 =$	0,7	–0,25	–0,2
$b_2 =$	–0,15	0,88	–0,03
$b_3 =$	–0,1	-0,05	0,92

Совершаем последовательно три шага жордановых исключений, меняя местами b_i и x_k, получаем табл. 6.5 — 6.7.

Таблица 6.5

	b_1	x_2	x_3
$x_1 =$	$\frac{10}{7}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{2}{7}$
$b_2 =$	$-\frac{3}{14}$	$\frac{1157}{1400}$	$-\frac{51}{700}$
$b_3 =$	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{35}$	$\frac{156}{175}$

Таблица 6.6

	b_1	b_2	x_3
$x_1=$	$\frac{8800}{5785}$	$\frac{2500}{5785}$	$\frac{1835}{5785}$
$x_2=$	$\frac{1500}{5785}$	$\frac{7000}{5785}$	$\frac{510}{5785}$
$b_3 =$	$-\frac{955}{5785}$	$-\frac{600}{5785}$	$\frac{51132}{57850}$

Таблица 6.7

	b_1	b_2	b_3
$x_1=$	$\frac{40405}{25566}$	$\frac{2000}{4261}$	$\frac{18350}{51132}$
$x_2=$	$\frac{1175}{4261}$	$\frac{5200}{4261}$	$\frac{5100}{51132}$
$x_3=$	$\frac{9550}{51132}$	$\frac{6000}{51132}$	$\frac{57850}{51132}$

Внутри табл. 6.7 стоит обратная матрица K^{-1}. Округляя до третьего знака после запятой, имеем:

$$P = K^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}580 & 0{,}469 & 0{,}359 \\ 0{,}276 & 1{,}220 & 0{,}100 \\ 0{,}187 & 0{,}117 & 1{,}131 \end{pmatrix}.$$

Находим объем производства отраслей (валовая продукция):

$$X = PY = \begin{pmatrix} 1{,}580 & 0{,}469 & 0{,}359 \\ 0{,}276 & 1{,}220 & 0{,}100 \\ 0{,}187 & 0{,}117 & 1{,}131 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 56 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 102{,}197 \\ 41{,}047 \\ 26{,}383 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, плановые объемы валовой продукции трех отраслей, необходимые для обеспечения заданного уровня конечной продукции равны:

$$x_1 = 102{,}2;\ x_2 = 41{,}0;\ x_3 = 26{,}4.$$

Для составления баланса рассчитываем межотраслевые потоки средств производства по формуле (6.3):

$x_{11} = 0{,}3 \cdot 102{,}2 = 30{,}7$; $x_{21} = 0{,}15 \cdot 102{,}2 = 15{,}3$; $x_{31} = 0{,}1 \cdot 102{,}2 = 10{,}2$;

$x_{12} = 0{,}25 \cdot 41{,}0 = 10{,}2$; $x_{22} = 0{,}12 \cdot 41{,}0 = 4{,}9$; $x_{32} = 0{,}05 \cdot 41{,}0 = 2{,}1$;

$x_{13} = 0{,}2 \cdot 26{,}4 = 5{,}3$; $x_{23} = 0{,}03 \cdot 26{,}4 = 0{,}8$; $x_{33} = 0{,}08 \cdot 26{,}4 = 2{,}1$.

Результаты вычислений представим в форме межотраслевого баланса (табл. 6.8). Величина чистой продукции определяется здесь как разница между валовой продукцией отрасли и суммой межотраслевых потоков в каждом столбце.

На основе заданных матриц Y и A по уровню конечного продукта и коэффициентов прямых затрат получен полностью сбалансированный план общего производства продукции и ее распределения как между отраслями в качестве средств производства, так и для конечного использования.

Таблица 6.8

Потребляющие отрасли / Производящие отрасли	1	2	3	Конечная продукция	Валовая продукция
1	30,7	10,2	5,3	56	102,2
2	15,3	4,9	0,8	20	41,0
3	10,2	2,1	2,1	12	26,4
Чистая продукция	46,0	23,8	18,2	—	—
Валовая продукция	102,2	41,0	26,4	—	169,6

Матрицу косвенных затрат найдем по формуле (6.16):

$$C=\begin{pmatrix}1{,}580 & 0{,}469 & 0{,}359\\ 0{,}276 & 1{,}220 & 0{,}100\\ 0{,}187 & 0{,}117 & 1{,}131\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}25 & 0{,}2\\ 0{,}15 & 0{,}12 & 0{,}03\\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}08\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0{,}280 & 0{,}219 & 0{,}159\\ 0{,}126 & 0{,}100 & 0{,}070\\ 0{,}087 & 0{,}067 & 0{,}051\end{pmatrix}.$$

Определяем изменение плана ΔX, которое потребуется при увеличении конечного выпуска продукции 1-й отрасли на 20, 2-й — на 10 и 3-й — на 5 (единиц).

$$\Delta X = P\,\Delta Y = \begin{pmatrix} 1{,}580 & 0{,}469 & 0{,}359 \\ 0{,}276 & 1{,}220 & 0{,}100 \\ 0{,}187 & 0{,}117 & 1{,}131 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38{,}085 \\ 18{,}220 \\ 10{,}565 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, потребуется увеличить валовый выпуск 1-й отрасли на $\Delta x_1 = 38{,}1$, 2-й отрасли на $\Delta x_2 = 18{,}2$ и 3-й отрасли на 10,6 (единиц).

6.5. Оптимизация межотраслевого баланса

Поскольку главной задачей экономики является улучшение производства, экономия человеческого труда, то возникла задача оптимизации модели народного хозяйства, построенной на основе МОБ.

Возможность оптимизации МОБ появляется, если коэффициенты прямых затрат отражают затраты не средние по отрасли, а для каждого способа и технологии производства. В таких моделях МОБ представлено отдельно производство мартеновской, конверторной стали, а также электростали; синтетических и хлопчатобумажных тканей и т. д. В результате должен быть найден оптимальный вариант с минимальными затратами на производство данного объема продукции.

Что значит составить оптимальный МОБ? Если для вычисления полных затрат и уровней цен надо решить сотни уравнений и выполнить миллионы вычислительных операций, то расчет оптимального МОБ — это миллионы уравнений и многие миллиарды вычислительных операций. В настоящее время еще нет математических методов и электронных машин, чтобы решать такие задачи “в лоб”. Еще нет в полном объеме и необходимых для этого данных. Теперь можно лишь говорить об отдельных важных блоках, для которых такие данные имеются или могут быть подготовлены в недалеком будущем.

Вот почему необходимо создание системы моделей для блочной оптимизации МОБ. Это должна быть гибкая система, в которую могли бы по мере их готовности включаться все новые и новые оптимальные блоки.

Так как все производства прямо или косвенно связаны друг с другом, то оптимизация каждого блока всякий раз вызывает необходимость полного пересчета МОБ на ЭВМ. Работа большая, но результат несравненно больший — ведь за каждым процентом повышения эффективности общественного производства таятся миллиарды сэкономленных рублей.

Оптимизацию межотраслевого баланса покажем на примере сведения балансовых задач к задачам линейного программирования.

Пусть $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — ассортиментный вектор производства n отраслей, а $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — вектор — конечный продукт, характеризующий то, что должно остаться к концу производственного цикла после внутрипроизводственного потребления, и $A = \|a_{ik}\|$— матрица затрат, где a_{ik} — количество единиц продукта i-й отрасли, идущее в качестве внутрипроизводственного потребления в k-ю отрасль на производство единицы k-го продукта.

Тогда величины $\overline{x}$, $\overline{y}$ и A связаны матричным уравнением (6.10)

$$(E - A)\,\overline{X} = \overline{Y}.$$

Если матрица невырожденная, то решение уравнения (6.10) имеет вид $\overline{X} = (E - A)^{-1}\,\overline{Y}$.

Допустим, что конечный продукт $\overline{y}$ задан не точно, а ограничен снизу, т. е. $\overline{y} \geq \overline{b}$.

Тогда система уравнений (6.10) заменится неравенствами

$$(E - A)\overline{x} \geq \overline{b}. \tag{6.17}$$

Очевидно $\overline{x} \geq 0$. Если при этом задан вектор $\overline{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ оценки данного плана, где c_k — оценка единицы продукта k-й отрасли, то можно сформировать следующую задачу линейного программирования:

выбрать ассортиментный вектор $\overline{x} \geq 0$, удовлетворяющий системе неравенств

$$(E - A)\overline{x} \geq \overline{b}, \tag{6.18}$$

для которого линейная функция

$$Z = \bar{c}\,\bar{x} = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k \tag{6.19}$$

достигает минимума.

В качестве примера рассмотрим трехотраслевую линейную балансовую модель, характеризующуюся структурной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Необходимо обеспечить производство конечного продукта, удовлетворяющее следующему ограничению сверху $\bar{y} \le \bar{b}$ = (180, 130, 220). Производственные мощности 1-й и 2-й отраслей ограничивают их валовый выпуск: $x_1 \le 400$, $x_2 \le 300$. Валовый выпуск 3-й отрасли (x_3) практически неограничен.

Определить оптимальный валовый выпуск продукции, т. е. вектор $\bar{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3)$, при котором линейная функция $Z = x_1 + x_2 + x_3$ достигает максимума.

Модель данной задачи имеет вид

$$\left.\begin{array}{l} (E - A)\bar{x} \ge \bar{b}, \\ x_1 \le 400,\ x_2 \le 300, \\ Z = x_1 + x_2 + x_3. \quad (\max) \end{array}\right\}$$

или

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}4\ x_1 - 0{,}1x_2 \le 180, \\ -0{,}1x_1 + x_2 - 0{,}05\ x_3 \le 130, \\ -0{,}2x_1 + 0{,}8\ x_3 \le 220, \\ \quad x_1 \le 400, \\ \quad x_2 \le 300, \\ Z = x_1 + x_2 + x_3. \quad (\max) \end{array}\right\}$$

Соответствующая система уравнений в конечном виде имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
&0{,}4\ x_1 - 0{,}1x_2 + x_4 = 180,\\
&-0{,}1x_1 + x_2 - 0{,}05\ x_3 + x_5 = 130,\\
&-0{,}2x_1 + 0{,}8\ x_3 + x_6 = 220,\\
&\quad x_1 + x_7 = 400,\\
&\quad x_2 + x_8 = 300,\\
&-x_1 - x_2 - x_3 + Z = 0.
\end{aligned}\right\}$$

После трех шагов жорданова исключения получаем оптимальный план (табл.6.9).

Таблица 6.9

Б.П. \ П.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	1
x_4	0	0	0	1	0,1	–0,006	–0,39	0	35
x_2	0	1	0	0	1	0,06	0,11	0	189
x_3	0	0	1	0	0	1,25	0,25	0	375
x_1	1	0	0	0	0	0	1	0	400
x_8	0	0	0	0	–1	0,06	–0,11	1	111
Z	0	0	0	0	1	1,3	1,36	0	964

Оптимальный план выпуска продукции по каждой отрасли $x_1 = 400$, $x_2 = 189$, $x_3 = 375$. При этом по второму и третьему продукту спрос удовлетворяется на пределе ($x_5 = x_6 = 0$), а спрос на первый продукт не удовлетворяется на величину $x_4 = 35$ (т. е. $y_1 = 180 — 35 = 145$). Предельная производственная мощность первой отрасли используется полностью ($x_7 = 0$), а мощность второй отрасли имеет резерв $x_8 = 111$. При этом оптимальном плане достигается максимум валовой продукции $Z_{max} = 964$ единицы.

Оценка 1,3 свободной переменной x_6 показывает, что увеличение этой переменной на единицу увеличивает валовую продукцию Z_{max} на 1,3 единиц.

6.6. Программа составления межотраслевого баланса на ЭВМ

Рассмотрим порядок составления межотраслевого баланса производства и распределения продукции для экономической системы, заданной матрицей коэффициентов прямых затрат A и вектором конечной продукции Y.

1. Вызываем MATHCAK 2000.

2. Устанавливаем режим автоматических вычислений и режим отображения результатов символьных вычислений по горизонтали.

3. Присваиваем переменной кRIGIN значение, равное единице.

4. Набираем матрицу коэффициентов прямых затрат и матрицу выпуска конечной продукции.

5. Набираем

$K: = \text{identity}\ (3) - A \qquad X{:}=K^{-1}\times Y \qquad X =$

ЭВМ выдает столбцовую матрицу плановых объемов валовой продукции.

6. Набираем

$$\Pi: = \text{augment}\ (x_0 \times A^{<0}, x_1 \times A^{<1}, x_2 \times A^{<2}) \qquad \Pi =$$

компьютер выдает матрицу межотраслевых потоков средств производства.

7. Набираем

$$O: = X^{T} - (1\ 1\ 1) \times \Pi \qquad O =$$

получаем чистую продукцию (общие доходы).

8. Набираем

$$AEinv: = K^{-1} \qquad AEinv = P =$$

ЭВМ выдает матрицу коэффициентов полных затрат.

9. Набираем (столбцовую матрицу ΔY вектора увеличения конечного выпуска продукции)

$$\Delta Y: = \qquad \Delta X: = AEinv \times \Delta Y \qquad \Delta X =$$

компьютер выдает изменение плана ΔX.

В качестве примера рассматривается экономическая трех секторная система, приведения в пункте 6.4.

Фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями приведен ниже.

krigin: = 1

$$A: = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}25 & 0{,}2 \\ 0{,}15 & 0{,}12 & 0{,}03 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}08 \end{pmatrix} \quad Y: = \begin{pmatrix} 56 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$K: = \text{identity}(3) - A \qquad X: = K^{-1} \times Y \qquad X = \begin{pmatrix} 102{,}197 \\ 41{,}047 \\ 26{,}383 \end{pmatrix}$$

$$\Pi: = \text{augment}(x_0 \times A^{<0}, x_1 \times A^{<1}, x_2 \times A^{<2})$$

$$\Pi = \begin{pmatrix} 30{,}659 & 10{,}262 & 5{,}277 \\ 15{,}33 & 4{,}926 & 0{,}791 \\ 10{,}22 & 2{,}052 & 2{,}111 \end{pmatrix}$$

$$O: = X^T - (1\ 1\ 1) \times \Pi \qquad O = \begin{pmatrix} 45{,}989 & 23{,}807 & 18{,}204 \end{pmatrix}$$

$$AEinv := K^{-1} \qquad AEinv = P = \begin{pmatrix} 1{,}58 & 0{,}469 & 0{,}359 \\ 0{,}276 & 1{,}22 & 0{,}1 \\ 0{,}187 & 0{,}117 & 1{,}131 \end{pmatrix}$$

$$\Delta Y := \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \Delta X := AEinv \times \Delta Y \qquad \Delta X = \begin{pmatrix} 38{,}085 \\ 18{,}22 \\ 10{,}565 \end{pmatrix}.$$

Отчетные межотраслевые балансы являются средством анализа структуры экономики и исходной базой составления плановых межотраслевых балансов. Отчетные межотраслевые балансы разрабатываются на основе данных о структуре затрат на производство, получаемых от предприятий в результате специального единовременного обследования.

Разработка плановых межотраслевых балансов направлена в первую очередь на совершенствование балансового метода планирования, точное количественное выражение сложных взаимосвязей процесса общественного воспроизводства, расчет сбалансированных вариантов структуры народного хозяйства на основе широкого использования электронной вычислительной техники.

Глава 7
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР В ЗАДАЧАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИТУАЦИЙ

Достаточно часто решения приходится принимать в условиях неопределенности, то есть а таких условиях, когда или процесс выполнения операции является неопределенным, или нам сознательно противодействует противник, или нет ясных и четких целей операции.

Наличие неопределенностей значительно усложняет процесс выбора эффективных (оптимальных) решений и может привести к непредсказуемым результатам. На практике, при проведении экономического анализа, во многих случаях пытаются не замечать указанное "зло", вызванное фактором неопределенности и действуют (принимают решение) на основе детерминированных моделей. Иначе говоря, предполагается, что факторы, влияющие на принимаемые решения, известны точно. К сожалению, действительность часто не соответствует таким представлениям. Поэтому политика выбора эффективных решений без учета неконтролируемых факторов во многих случаях приводит к значительным потерям экономического, социального и иного содержания.

Рассматривая неопределенность, которая является наиболее характерной причиной риска в экономической деятельности, необходимо отметить, что выделение и изучение ее применительно к процессу экономической, управленческой, финансовой и других видов деятельности является крайне необходимым, поскольку при этом отображается практическая ситуация, когда нет возможности осуществлять перечисленные виды деятельности в условиях, которые не могут быть однозначно определены.

В целом ряде экономических задач приходится анализировать ситуации, в которых необходимо принимать решения в условиях неопределенности, то есть, например, возникают ситуации, в которых сталкиваются интересы двух или более конкурирующих сторон, каждая из которых преследует свою цель, причем, результат любого мероприятия каждой из сторон зависит от того какие действия предпримет противник. Это особенно характерно в условиях рыночной экономики. Такие ситуации называют конфликтными. Научно обоснованные методы решения задач с конфликтными ситуациями дает теория игр.

Теория игр — это теория математических моделей принятия оптимальных решений в условиях неопределенности, противоположных интересов различных сторон, конфликта. Матричные игры могут служить математическими моделями многих простейших конфликтных ситуаций из области экономики. В частности, теория игр применяется в вопросах борьбы фирм за рынки, в явлениях олигополии, в планировании рекламных компаний, при формировании цен на конкурентных рынках, в биржевой игре, в анализе коалиционного поведения и т. д. С позиций теории игр можно рассматривать вопросы централизации и децентрализации управления производством, оптимальное планирование по нескольким показателям, планирование в условиях неопределенности, порождаемой, например, техническим прогрессом, преодоление ведомственных противоречий и другие вопросы.

7.1. Предмет теории игр. Основные понятия

Как уже отмечалось, теория игр — это теория математических моделей принятия оптимальных решений в условиях конфликта или неопределенности. При этом конфликт не обязательно должен быть антагонистическим, в качестве конфликта можно рассматривать любое разногласие.

Рассмотрим следующий экономический пример. Пусть требуется принять решение о выпуске на рынок некоторого товара. Может случиться, что объем спроса на этот товар известен точно; может быть, что известно лишь статистическое распределение возможных значений спроса; наконец, может оказаться, что известны лишь границы, в которых заключен спрос, но никаких даже вероятностных соображений о его предстоящих значениях нет. Последний случай квалифицируется как неопределенность. Такая неопределенность может возникнуть, когда спрос (например, на сезонные товары) зависит от метеорологических условий (конфликт с природой) или в условиях рынка от деятельности конкурента, уже удовлетворившего неизвестную часть спроса. Приведенные примеры при определенных условиях могут быть приведены к игре.

Всякая теоретико-игровая модель должна отражать, кто и как конфликтует, а также, кто и в какой форме заинтересован в том или ином исходе конфликта.

Действующие в конфликте стороны будем называть игроками, а решения, которые способны принимать игроки, — стратегиями.

Содержание математической теории игр состоит, во-первых, в установлении принципов оптимального поведения игроков в играх, во-вторых, в доказательстве существования ситуаций, которые складываются в результате применения этих принципов, и, в-третьих, в разработке методов фактического нахождения таких ситуаций.

Для игр с одной коалицией действия множество всех ситуаций можно принять за множество стратегий этой единственной коалиции действия и далее о стратегиях не упоминать. Поэтому такие игры называются нестратегическими, важным классом которых являются игры с природой, применяемые для анализа экономических ситуаций, оценки эффективности принимаемых решений и выбора наиболее предпочтительных альтернатив, в которых риск связан с совокупностью неопределенных факторов окружающей среды, именуемых “природа”. Поэтому термин “природа” характеризует некоторую объективную действительность, которую не следует понимать буквально, хотя вполне могут встретиться ситуации в которых игроком действительно может выступить природа (например, обстоятельства, связанные с погодными условиями или с природными стихийными силами).

В отличие от нестратегических игр, все остальные игры с двумя или более коалициями действия называются стратегическими. В практических ситуациях часто появляется необходимость согласования действий компаний, объединений, министерств и других участников проектов в случаях, когда их интересы не совпадают. В подобных ситуациях теория стратегических игр позволяет найти оптимальное решение для поведения всех участников проекта, обязанных согласовывать свои действия при столкновении интересов.

Здесь будем рассматривать так называемые матричные игры. Под матричной игрой $m \times n$ понимается такая игра двух игроков, при которой каждый игрок имеет конечное число возможных ходов — чистых стратегий. При этом выигрыш одного игрока и проигрыш другого при применении ими определенных чистых стратегий выражается числом. Перечисленные условия позволяют записать стратегии в матрицу

$$H = \left\| a_{ij} \right\|, \ i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n},$$

где a_{ij} — равен выигрышу первого игрока (будем обозначать его A) и проигрышу второго (игрока B) при применении ими i-й и j-й чистых стратегий соответственно.

Задачей теории игр является определение оптимальных стратегий игроков. В матричной игре оптимальной для игрока A называется стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает максимально возможный средний выигрыш, а для игрока B под оптимальной понимается стратегия, обеспечивающая ему минимальный средний проигрыш. При этом предполагается, что противник является по меньшей мере таким же разумным и делает все для того, чтобы помешать нам добиться своей цели.

7.2. Нижняя и верхняя цены игры. Принцип “минимакса”

Итак. рассмотрим матричную игру $m\times n$ с платежной матрицей

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (7.1)$$

где i-я строка соответствует A_i-й стратегии игрока A;

j-й столбец соответствует B_j-й стратегии игрока B.

Пусть игрок A выбирает некоторую стратегию A_i, тогда в наихудшем случае (например, если выбор станет известен игроку B) он получит выигрыш равный $\min\limits_j a_{ij}$. Предвидя эту возможность, игрок A должен выбрать такую стратегию, чтобы максимизировать свой минимальный в каждой стратегии выигрыш α. Таким образом, $\alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$. Величина α называется нижней ценой игры (α — это гарантированный выигрыш игрока A).

Очевидно, α находится в одной из строк матрицы H, пусть в i_0, тогда стратегия A_{i_0} называется максиминной.

Итак, если игрок A будет придерживаться максиминной стратегии, то ему при любом поведении игрока B гарантирован выигрыш, во всяком случае не меньший α.

С другой стороны, противник — игрок B, заинтересован в том, чтобы обратить выигрыш игрока A в минимум, поэтому он должен пересмотреть каждую свою стратегию с точки зрения максимального выигрыша игроком A при этой стратегии. Другими словами. при выборе некоторой стратегии B_j он должен исходить из максимального проигрыша в этой стратегии, равного $\max\limits_i a_{ij}$, и найти такую стратегия, при которой этот проигрыш будет наименьшим, то есть не более чем $\beta = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$.

Величина β называется верхней ценой игры, а соответствующая ему стратегия B_{i_0} — минимаксной.

Принцип осторожности, диктующий игрокам выбор стратегий максиминной или минимаксной соответственно, в теории игр именуют принципом "минимакса", а сами стратегии максиминные и минимаксные — общим термином "минимаксные стратегии".

Рассмотрим примеры нахождения α и β.

Пример 1. Пусть игра задана матрицей

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 10 & 4 & 3 & 10 \\ -2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Определить нижнюю и верхнюю цены игры.

Выпишем для каждой строки справа от матрицы $\max\limits_i a_{ij}$, а снизу $\min\limits_j a_{ij}$ каждого столбца. Тогда получим:

$$\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 10 & 4 & 3 & 10 \\ -2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ -2 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 10 & 4 & 3 & 10 \end{array} & \end{array}$$

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \max\{1,3,-2\} = 3,$$

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = \min\{10,4,3,10\} = 3.$$

В этом примере нижняя и верхняя цены игры совпадают: $\alpha=\beta=V=3$

Пример 2. Платежная матрица имеет вид:

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Найти α и β.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} \alpha = \max\{-1,2,-2,1\} = 2, \\ \beta = \min\{5,4,5\} = 4 \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} 5 & 4 & 5 \end{matrix}$$

Здесь $\alpha = 2$, $\beta = 4$.

7.3. Вполне определенные игры

Вполне определенная игра является наиболее простым случаем матричной игры. Вполне определенной игрой или игрой с седловой точкой называется игра, у которой совпадают нижняя и верхняя цены игры, то есть выполняется равенство:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = \beta. \tag{7.2}$$

При этом $V = \alpha = \beta$ называется ценой игры, элемент $a_{i_0 j_0}$ соответвующий равенству, называют седловой точкой.

Простота решения игры с седловой точкой заключается в том, что оптимальные стратегии обоих игроков находятся сразу. Для игрока А это стратегия A_{i_0} для игрока В – B_{i_0}. Причем, такое решение обладает свойством устойчивости в том смысле, что если один из игроков применяет свою оптимальную стратегию, то любое отклонение другого игрока от оптимальной стратегии может оказаться не выгодным для него.

Действительно, пусть игрок А выбрал оптимальную стратегию соответствующую $\alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = a_{i_0 j}$, то есть игрок А обеспечивает себе выигрыш, равный одному из элементов i_0 строки, причем, элемент в j_0 столбце наименьший среди них ($a_{i_0 j} \geq a_{i_0 j_0}$, $j \neq j_0$). И если игрок В выберет j-ю стратегию отличную от j_0, то он проиграет сумму, равную ($a_{i_0 j} — a_{i_0 j_0}$), а игрок А соответственно выиграет ее. Аналогичные рассуждения показывают невыгодность стратегии, отличной от оптимальной, для игрока А, когда В придерживается своей оптимальной стратегии.

Решением игры в примере I п.2 является выбор стратегий A_2 игроком А и B_3 игроком В, при этом цена игры V = 3.

7.4. Игры, не содержащие седловой точки. Смешанные стратегии

Среди конечных игр, имеющих практическое значение, сравнительно редко встречаются игры с седловой точкой. Более типичным является случай, когда нижняя и верхняя цены игры не совпадают ($\alpha \neq \beta$), причем, нетрудно показать, что тогда $\alpha < \beta$.

Действительно, пусть $\alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = a_{ks}$, это означает, что в к-й строке элемент наименьший, то есть при нахождении $\bar{a}_i = \max\limits_j a_{ij}$ в их число попадут значения не меньшие a_{ks}, так как даже в этой строке элементы в других столбцах больше или равны a_{ks}. Значит и

$$\min_i \left\{ \max_j a_{ij} \right\} = \min_i \bar{a}_i \geq a_{ks}.$$

Откуда следует, что $\beta \geq \alpha$, но мы рассматриваем случай $\beta \neq \alpha$, значит $\beta > \alpha$. Итак, в играх, не имеющих седловой точки, нижняя цена игры α всегда меньше верхней β.

Установленный факт означает, что если игра одноходовая, то есть партнеры играют один раз, выбирая по одной чистой стратегии, то в расчете на разумно играющего противника они должны придерживаться принципа минимакса, это гарантирует выигрыш $V \geq \alpha$ игроку А и проигрыш $V \leq \beta$ игроку В. Следовательно, при применении минимаксных стратегий величина платежа V ограничена неравенством

$$\alpha \leq V \leq \beta.$$

Если же игра повторяется неоднократно, то постоянное применение минимаксных стратегий становится неразумным. Например, если игрок B будет уверен в том, что на следующем ходу A применит прежнюю стратегию, то он несомненно выберет стратегию, отвечающую наименьшему элементу в этой строке, а не прежнюю.

Таким образом, мы пришли к выводу, что при неоднократном повторении игры обоим игрокам следует менять свои стратегии. Тогда возникает вопрос: а каким образом их менять, чтобы в среднем выигрыш одного и проигрыш другого был аналогично одноходовой игре, ограничиваясь снизу и сверху соответственно?

Для ответа на этот вопрос введем вероятность (относительную частоту) x_i применения игроком A i-й стратегии, и y_j — вероятность применения j-й стратегии игроком B. Совокупности этих вероятностей определяют векторы $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, где $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ и $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, где $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$.

Эти векторы или наборы вероятностей выбора чистых стратегий называются смешанными стратегиями игроков.

В частности, решение игры с седловой точкой дается векторами $\bar{x}$ и $\bar{y}$, среди компонент которых $x_{i_0} = 1$, $x_i = 0$ $(i \neq i_0)$ и $y_{j_0} = 1$, $y_j = 0$ $(j \neq j_0)$.

Для получения ограничений на средний выигрыш или проигрыш рассмотрим математическое ожидание выигрыша первого игрока

$$M(X;Y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i y_j . \qquad (7.3)$$

Если второй игрок B выбрал некоторую смешанную стратегию Y', то первому игроку, естественно, считать лучшей ту смешанную стратегию $\bar{X}$, при которой достигается max M $(X;Y')$:

$$M(\bar{X};Y') = \max M(X;Y').$$

Аналогично, при выборе первым игроком некоторой стратегии X' второму игроку следует выбирать стратегию $\overline{Y}$ такую, что

$$M(X';\overline{Y}) = \min M(X';Y).$$

Ясно, что $\overline{X}$ зависит от Y' и $\overline{Y}$ зависит от X'. Перед каждым игроком, таким образом, возникает задача выбора оптимальной стратегии, под которой для игрока А понимается смешанная стратегия X^*, которая максимизирует математическое ожидание его выигрыша, для игрока В — стратегия Y^*, минимизирующая математическое ожидание его проигрыша.

Основная теорема теории игр (доказана фон Нейманом в 1928 году) утверждает:

Каждая матричная игра с нулевой суммой имеет, по крайней мере, одно решение, возможно, в области смешанных стратегий, то есть существуют стратегии X^* и $У^*$, оптимальные для обоих игроков, причем,

$$\max \min M(X;Y) = \min \max M(X;Y) = M(X^*;Y^*).$$

Число $V = M(X^*;Y^*)$ называют ценой игры.

Примечание. Нулевая сумма означает, что выигрыш одного игрока равен проигрышу другого.

Из основной теоремы следует, что каждая конечная игра имеет цену и она лежит между нижней и верхней ценами игры

$$\alpha \leq V \leq \beta. \tag{7.4.}$$

И, если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то выигрыш (проигрыш) его остается неизменным независимо от тактики другого игрока, если, конечно, последний не выходит за пределы своих "полезных" стратегий, иначе выигрыш (проигрыш) возрастает.

Это означает выполнение неравенств $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}x_i^* \geq V \ \ (j=\overline{1,n})$, $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}y_j^* \leq V, \ \ (i=\overline{1,m})$.

Примечание. Эти неравенства будут необходимы при сведении матричной игры к задаче линейного программирования.

7.5. Элементарные методы решения матричных игр 2×2, 2×n, m×2

Игра 2×2.

Наиболее простой матричной игрой является игра 2×2, в которой игроки имеют по две чистых стратегии.

Пусть матрица такой игры

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Если седловой точки нет, то решением игры являются смешанные стратегии $X^* = \{x_1;\ x_2\}$ и $Y^* = \{y_1;\ y_2\}$.

Согласно основной теореме теории игр, применение оптимальной стратегии X^* игроком A обеспечивает получение выигрыша V при любых стратегиях игрока B. Сказанное приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = V & \text{при стратегии } B_1 \text{ игрока B}, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = V & \text{при стратегии } B_2 \text{ игрока B}. \end{cases}$$

Кроме того, $x_1 + x_2 = 1$.

Решение этих уравнений дает:

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}},\ x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}},$$

$$V = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \tag{7.5}$$

Аналогично, применение оптимальной стратегии $Y^* = \{y_1; y_2\}$ обеспечивает проигрыш V игроку B при любых стратегиях A, что приводит к системе

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = V, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = V, \\ y_1 + y_2 = 1. \end{cases}$$

Ее решение дается формулами

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \; y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \quad (7.6)$$

Пример 3. Во многих учебниках приводится пример игры в “орла и решку”, суть которой состоит в следующем. Каждый из двух партнеров, не зная хода другого, кладет свою монету орлом или решкой вверх и при совпадении наименований второй игрок (B) платит первому (A) единицу, а при несовпадении первый платит второму I. Очевидно, платежная матрица такой игры будет:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Седловой точки нет, тогда, согласно формул (7.5) и (7.6), оптимальными стратегиями будут

$$X^* = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}, \; Y^* = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}, \text{ цена игры } V = 0.$$

Примечание. Отметим, что матрица этой игры симметрична и на первый взгляд может показаться, что симметричность матрицы ведет к справедливой (безобидной) игре для обоих игроков. На самом деле симметричность не гарантирует справедливости, напротив, кососимметричные матрицы (когда $H^T = -H$) соответствуют совершенно справедливой игре, то есть при оптимальных стратегиях, как это легко установить, цена игры V = 0.

Пример 4. Цех-заготовитель поставляет в сборочный цех детали двух видов *a* и b. По договору между цехами оговорены ежедневно два срока поставок этих деталей, причем, при поставке в первый срок деталей вида "*a*" сборочный цех платит заготовительному премию 50 руб., при поставке же изделий "*a*" во второй срок выплачивается премия 20 руб. При поставке же изделий вида "b" в первый срок премия составляет 30 руб., а во второй — 40 руб. Определить оптимальные стратегии поставок и получения деталей.

Решение. Принимая цех-заготовитель за игрока A, а сборочный — за игрока B, составим матрицу игры.

	I срок	II срок
Детали "*a*"	50	20
Детали "b"	30	40

$$\text{Значит } H = \begin{pmatrix} 50 & 20 \\ 30 & 40 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \max\{20;30\} = 30,$$

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = \min\{50;40\} = 40,$$

$\alpha < \beta$, следовательно, седловой точки нет. Для нахождения оптимальных стратегий применим формулы (7.5) и (7.6):

$$x_1 = \frac{40-30}{50+40-20-30} = \frac{1}{4}; \qquad x_2 = \frac{50-20}{50+40-20-30} = \frac{3}{4};$$

$$y_1 = \frac{40-20}{40} = \frac{1}{2}; \qquad y_2 = \frac{50-30}{40} = \frac{1}{2};$$

$$V = \frac{50\cdot 40 - 20\cdot 30}{40} = 35 \text{ (руб.)}.$$

Таким образом, цех-заготовитель поставляет детали вида a и b с вероятностями $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{3}{4}$, при этом гарантированная премия 35 рублей, а сборочный цех получает эти детали в сроки I и II с вероятностями $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{1}{2}$ и выплачивает 35 рублей премии заготовительному цеху ежедневно. Полученные вероятности и определяют оптимальные стратегии

$$X^* = \left\{\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right\}, \; Y^* = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}.$$

Примечание. Игры 2х2 допускают простое графическое толкование и решение, следующее из него. Действительно, пусть игра задана матрицей $H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. На оси абсцисс отложим отрезок 0К, равный 1,и условимся считать, что левый конец отрезка $x = 0$ соответствует стратегии A_1, а правый $x = 1$ — стратегии A_2, тогда промежуточная точка N с координатой x соответствует некоторой смешанной стратегии первого игрока, причем, $x_1 = 1 - x$, $x_2 = x$, так как при $x = 0$ имеем $x_1 = 1$ и $x_2 = 0$ и при $x = 1$ имеем $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.

Вводя ось 0у, можно построить прямую, отвечающую стратегии второго игрока, ее уравнение $y = a_{11}(1 - x) + a_{21}x$ (при каждом x, y дает значения выигрыша игрока A, когда B применяет стратегию B_1). Отметим, что для построения B_1 достаточно провести из концов отрезка 0К прямые, перпендикулярные ему, на левой прямой отложить a_{11}, на правой — a_{21} и, соединив их, получим прямую B_1B_1, отвечающую стратегии B_1 (рис. 7.1). Затем аналогично строим стратегию B_2 (ее уравнение $y = a_{12}(1 - x) + a_{22}x$). Заметим, что при каждом x точки на прямых B_1B_1 и B_2B_2 отвечают выигрышам первого игрока при применении вторым игроком стратегий B_2 и B_1

соответственно. Откуда следует, что ломаная B_2KB_1 (рис. 7.2) отвечает нижней границе выигрыша игрока А, а значит в точке ее максимума, то есть в точке К, получается максимум нижней границы выигрыша, то есть цена игры V=KN и точка N отвечает оптимальной стратегии игрока А : $X^* = \{x_1; x_2\}$ ($x_1 = 1 - x$, $x_2 = x$).

Для нахождения оптимальной стратегии игрока В, исходя из графика, можно воспользоваться формулами:

$$y_1 = \frac{LB_2}{LB_2 + LB_1}; \; y_2 = \frac{LB_1}{LB_2 + LB_1}. \qquad (7.7)$$

В справедливости формул (7.7) легко убедиться, подставив значения LB_2 и LB_1, $LB_2 = V - a_{22}$, $LB_1 = a_{21} - V$ и значение $V = \dfrac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$, тогда получим формулы, совпадающие с (7.6).

Аналогично, меняя ролями x и y, можно построить решение для игрока А.

Рис. 7.2 иллюстрирует решение последнего примера.

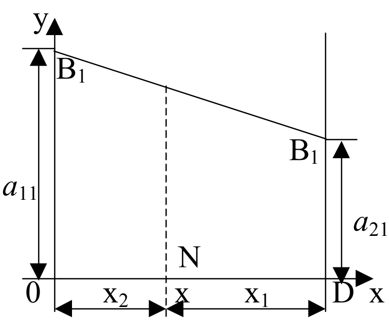


Рис. 7.1.

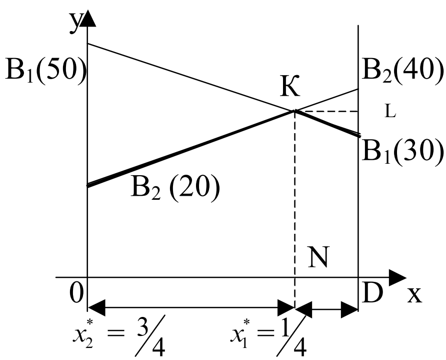


Рис.7.2.

Решение игр 2×n.

Пусть игра задана матрицей

$$H = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 & 6 \\ 9 & 6 & 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Строим прямые, соответствующие стратегиям игрока B (рис. 7.3).

Ломаная B_1KMB_3 соответствует нижней границе выигрыша, точка K на ней дает решение игры: $V = KN = \frac{48}{7}$, $x_1 = NK = \frac{3}{7}$, $x_2 = 0N = \frac{4}{7}$.

В данном случае оптимальная стратегия противника получается применением смеси двух полезных стратегий B_1 и B_2, пересекающихся в точке K. Стратегия B_4 является заведомо невыгодной, а стратегия B_3 — невыгодной при оптимальных стратегиях.

$$y_1 = \frac{LB_2}{LB_1 + LB_2} = \frac{2}{7}, \quad y_2 = \frac{LB_1}{LB_1 + LB_2} = \frac{5}{7}.$$

Рис. 7.3 иллюстрирует решение данного примера

Решение игр m×2.

Аналогично может быть решена игра с матрицей mx2, только в этом случае строим верхнюю границу выигрыша и на ней, определяем минимум.

Пусть игра задана матрицей

$$H = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 10 & 7 \\ 7 & 9 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Решение задачи находим для игрока B (рис. 7.4).

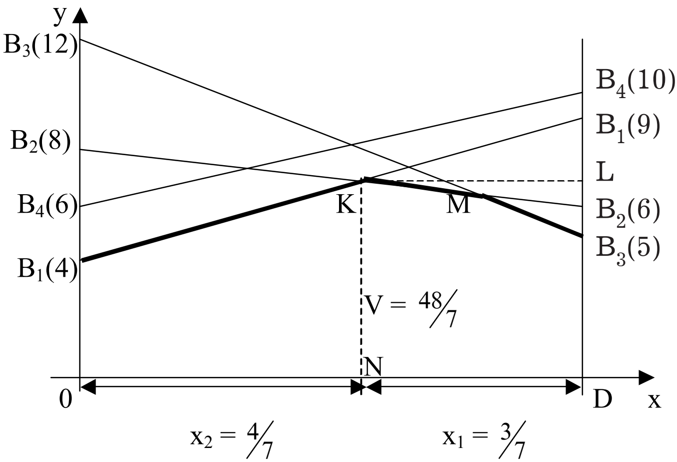


Рис. 7.3

Ломаная A_1PKMA_4 изображает верхнюю границу выигрыша игрока А, на ней ищется точка К с минимальной ординатой, которая и есть цена игры V= KN = $\frac{41}{5}$, y_1 = NK = $\frac{2}{5}$, y_2 = N0 = $\frac{3}{5}$.

Оптимальными стратегиями для игрока А являются вторая и третья. При этом

$$x_2 = \frac{LA_3}{LA_2 + LA_3} = \frac{2}{5},\ x_3 = \frac{LA_2}{LA_2 + LA_3} = \frac{3}{5}.$$

Матрица оптимальных стратегий имеет вид $\begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$. Тогда решение игры можно найти и по формулам (7.5) и (7.6).

Следовательно, решение игры таково:

$$X^* = \left\{0; \frac{2}{5}; \frac{3}{5}; 0\right\},\ Y^* = \left\{\frac{2}{5}; \frac{3}{5}\right\},\ V = \frac{41}{5}.$$

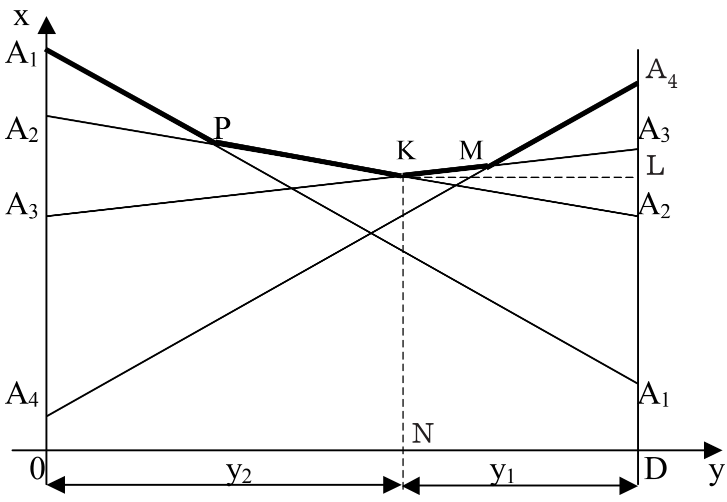


Рис. 7.4

7.6. Решение матричных игр m×n

При решении произвольной конечной игры размера mxn рекомендуется придерживаться следующей схемы:

1. Исключить из платежной матрицы заведомо невыгодные стратегии по сравнению с другими стратегиями. Такими стратегиями для игрока А (игрока В) являются те, которым соответствуют строки (столбцы) с элементами заведомо меньшими (большими) по сравнению с элементами других строк (столбцов).

2. Определить верхнюю и нижнюю цены игры и проверить, имеет ли игра седловую точку. Если седловая точка есть, то соответствующие ей стратегии игроков будут оптимальными, а цена игры совпадает с верхней (нижней) ценой.

3. Если седловая точка отсутствует, то решение следует искать в смешанных стратегиях. Для игр размера mxn рекомендуется симплексный метод, а для игр размером 2x2, 2xn, mx2 следует руководствовать выводами предыдущего пункта.

Пример 5. Магазин может завести в различных пропорциях товары четырех типов (A_1, A_2, A_3, A_4). Их реализация и прибыль магазина зависят от вида товара и состояния спроса.

Предполагается, что спрос может иметь пять состояний (B_1, B_2, B_3, B_4, B_5) и не прогнозируется. Определить оптимальные пропорции в закупке товаров из условия максимизации средней гарантированной прибыли при следующей матрице прибыли (табл. 7.1).

Таблица 7.1

Тип товара	Спрос				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	200	400	600	400	700
A_2	300	400	600	500	800
A_3	400	500	600	500	800
A_4	700	300	500	200	100

Будем рассматривать возникшую ситуацию как игровую. Сторона A стремится увеличить прибыль, а потому для нее стратегия A_1 заведомо невыгодна по сравнению со стратегией A_2. Точно также стратегия A_2 уступает стратегии A_3, и исходные данные упрощаются (табл. 7.2).

Для игрока B естественным является выбор стратегии с большим спросом. Поэтому стратегия B_4 менее выгодна, чем стратегия B_2, в свою очередь, стратегия B_2 невыгодна по сравнению со стратегией B_3. Следовательно, имеет смысл анали-

Таблица 7.2

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_3	400	500	600	500	800
A_4	700	300	500	200	100

Таблица 7.3

A \ B	B_1	B_3	B_5
A_3	400	600	800
A_4	700	500	100

зировать игру 2×3, заданную табл. 7.3. Решение этой матрицы дает оптимальную стратегию завоза товаров $(0{,}0,\frac{3}{5},\frac{2}{5})$, т.е. нужно завезти $\frac{3}{5}$ товара третьего типа и $\frac{2}{5}$ товара четвертого типа, а товары первого и второго типов не завозить, при этом средняя гарантированная прибыль (цена игры) V = 520.

Пример 6. Предполагается оснастить цех новой технологической линией. Промышленность выпускает три типа линий. На каждой из линий можно изготовлять пять различных видов изделий. Учитывая расход сырья, трудоемкость, спрос и др., составлена матрица предполагаемой прибыли

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 3 & 14 & 5 \\ 8 & 9 & 5 & 6 & 7 \\ 10 & 8 & 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Нужно выбрать тип технологической линии, при которой прибыль будет наибольшей.

Находим нижнюю и верхнюю цену игры

$$\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 2 & 10 & 3 & 14 & 5 \\ 8 & 9 & 5 & 6 & 7 \\ 10 & 8 & 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 10 & 10 & 5 & 14 & 12 \end{matrix} & \end{array} \qquad \begin{matrix} \alpha = \max\{2,5,4\} = 5, \\ \\ \beta = \min\{10,10,5,14,12\} = 5. \end{matrix}$$

Так как $\alpha = \beta = 5$, то игра имеет седловую точку и задача разрешима в чистых стратегиях. Выбирая второй тип технологической линии, будет достигнута наибольшая прибыль, не меньшая пяти.

Теперь рассмотрим сведение матричной игры к двойственной задаче линейного программирования. Предполагаем, что матрица H не содержит седловой точки, поэтому решение игры представлено в смешанных стратегиях.

Соотношениям отыскания α и β можно поставить в соответствие эквивалентные им задачи

$$\max \{\alpha : M(x;y) \geq \alpha\},$$

$$\min \{\beta : M(x;y) \leq \beta\}. \quad (7.8)$$

Здесь $M(X;Y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i y_j$ есть математическое ожидание выигрыша первого игрока.

Тогда для любой чистой стратегии y(j) игрока B

$$y(j) = (y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ \ldots,\ y_{j-1} = 0,\ y_j = 1,\ y_{j+1} = 0,\ \ldots,\ y_n = 0)$$

можно записать

$$M(x;y(j)) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i , \quad (7.9)$$

а для любой чистой стратегии x(i) игрока A

$$x(i) = (x_1 = 0,\ \ldots,\ x_{i-1} = 0,\ x_i = 1,\ x_{i+1} = 0,\ \ldots,\ x_m = 0)$$

можно записать $M(x(i);y) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j$. (7.10)

Следовательно, задачи (7.8) — (7.10) допускают следующую запись в форме задач линейного программирования

$$\max \{\alpha : M(x;y(j)) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq \alpha,\ j = \overline{1,n};$$

$$x_i \geq 0,\ \ i = \overline{1,m};\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\}, \quad (7.11)$$

$$\min \{\beta : M(x(i);y) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq \beta,\ i = \overline{1,m},$$

$$y_j \geq 0,\ \ j = \overline{1,n};\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1\}. \quad (7.12)$$

Нетрудно видеть, что задачи (7.11) и (7.12) взаимнодвойственные, а поэтому их оптимальные значения должны совпадать, т.е. $\alpha_{опт} = \beta_{опт} = V$, где V − цена игры (требуемое значение эффективности).

Для задачи (7.11) положим $t_i = {x_i}/{V}$ и $T = {1}/{V}$, (7.13)

а для задачи (7.12) положим $U_j = {y_j}/{V}$ и $Z = {1}/{V}$. (7.14)

Тогда, отыскание оптимальной смешанной стратегии $x_{опт}$ игрока А приводит к необходимости решения следующей задачи линейного программирования:
минимизировать линейную функцию

$$T = t_1 + t_2 + ... + t_m \qquad (7.15)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} t_i \geq 1, \quad j = \overline{1,n}; \quad t_i \geq 0, \quad i = \overline{1,m}, \qquad (7.16)$$

а отыскание оптимальной смешанной стратегии $y_{опт}$ игрока В привело к необходимости решения следующей задачи линейного программирования:
максимизировать линейную функцию

$$Z = u_1 + u_2 + ... + u_n \qquad (7.17)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j \leq 1, \; i = \overline{1,m}; \; u_j \geq 0, \; j = \overline{1,n}. \qquad (7.18)$$

Исходя из основной теоремы теории двойственности, задачи (7.15) — (7.18) имеют конечное решение и $T_{min} = Z_{max}$.

Применяя изложенный математический аппарат двойственной задачи линейного программирования, рассмотрим пример выбора оптимального ассортимента и объема продукции швейного предприятия.

Рассмотрим работу швейного предприятия, выпускающего детские костюмы, платья и плащи, сбыт которых зависит от состояния погоды, при этом реализация продукции происходит через фирменные магазины.

По данным наблюдений за предшествующие одиннадцать лет предприятие в течении апреля — мая в условиях теплой погоды может реализовать 600 костюмов, 2000 платьев и 300 плащей, в условиях прохладной погоды — 1000 костюмов, 500 платьев и 800 плащей и в условиях обычной погоды 800 костюмов, 1100 платьев и 600 плащей. Затраты на единицу продукции в течение указанных месяцев составили для костюмов 30 ден. ед., для платьев 10 ден. ед. и для плащей 15 ден. ед., а цена реализации равна соответственно 50 ден. ед., 20 ден. ед. и 28 ден. ед.

Задача заключается в максимизации средней величины прибыли от реализации выпущенной продукции с учетом неопределенности погоды в рассматриваемые месяцы.

Подобная задача рассматривается как игра с природой. Ее отличительная особенность состоит в том, что в ней сознательно действует только один из участников (предприятие), называемый игроком 1. Игрок 2 (природа) сознательно против игрока 1 не действует, а выступает как не имеющий конкретной цели и случайным образом выбирающий очередные ходы партнер по игре.

Первоочередной задачей является построение платежной матрицы.

Предприятие располагает тремя чистыми стратегиями: стратегия P_1 с расчетом на теплую погоду, стратегия P_2 с расчетом на прохладную погоду и стратегия P_3 с расчетом на обычную погоду.

Природа, рассматриваемая как второй игрок, также располагает тремя стратегиями: обычная погода (стратегия $П_1$), прохладная погода (стратегия $П_2$) и теплая погода (стратегия $П_3$).

Если предприятие выберет стратегию P_1, то в случае обычной погоды (стратегия природы $П_1$) доход составит

$$(50 - 30)\ 600 + (20 - 10)\ 1100 + (28 - 15)\ 300 - (20 -$$

$$-10)\ (2000 - 1000) = 17900 \text{ ден. ед.},$$

в случае прохладной погоды (стратегия природы $П_2$) доход будет равен

$$20 \cdot 600 + 10 \cdot 500 + 13 \cdot 300 - 10(2000 - 500) = 5900 \text{ ден.ед.},$$

и в случае теплой погоды (стратегия природы $П_3$) имеем доход, равный

$$20 \cdot 600 + 10 \cdot 2000 + 13 \cdot 300 = 35900 \text{ ден.ед.}$$

Если предприятие выберет стратегию $Р_2$, то реализация продукции в условиях обычной погоды дает доход

$$20 \cdot 800 + 10 \cdot 500 + 13 \cdot 600 - 20(1000 - 800) - 13(800 - 600) = 22000 \text{ ден.ед.},$$

в условиях прохладной погоды доход будет

$$20 \cdot 1000 + 10 \cdot 500 + 13 \cdot 800 = 35400 \text{ ден.ед.},$$

а в условиях теплой погоды имеем доход

$$20 \cdot 600 + 10 \cdot 500 + 13 \cdot 300 - 20(1000 - 600) - 13(800 - 300) = 6400 \text{ ден.ед.}$$

Если предприятие выберет стратегию $Р_3$, то в случае обычной погоды доход будет равен

$$20 \cdot 800 + 10 \cdot 1100 + 13 \cdot 600 = 34800 \text{ ден.ед.},$$

при прохладной погоде имеем доход, равный

$$20 \cdot 800 + 10 \cdot 500 + 13 \cdot 600 - 10(1100 - 500) = 22800 \text{ ден.ед.},$$

и в случае теплой погоды доход составит

$$20 \cdot 600 + 10 \cdot 1100 + 13 \cdot 300 - 20(800 - 600) - 13(600 - 300) = 16000 \text{ ден.ед.}$$

Результаты вычислений сведены в табл. 7.4.

Платежная матрица рассматриваемой производственной ситуации имеет вид

$$E = \begin{bmatrix} 17900 & 5900 & 35900 \\ 22000 & 35400 & 6400 \\ 34800 & 22800 & 16000 \end{bmatrix}. \qquad (7.19)$$

Таблица 7.4

Платежная матрица

Стратегия предприятия \ Стратегия природы	Обычная П1	Прохладная П2	Теплая П3
Теплая – Р1	17900	5900	35900
Прохладная – Р2	22000	35400	6400
Обычная – Р3	34800	22800	16000

Платит, естественно, не природа, а некая третья сторона (или совокупность сторон, влияющих на принятие решений игроком 1 и объединенных в понятие “природа”). В данной ситуации платит само предприятие, получая меньшую или большую прибыль.

Для матрицы (7.19), исходя из общей постановки (7.15) – (7.18), имеем следующую пару двойственных задач:
для определения оптимальной стратегии игрока Р нужно решить задачу линейного программирования: найти минимум функции

$$T = t_1 + t_2 + t_3 \tag{7.20}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 17900t_1 + 22000t_2 + 34800t_3 \geq 1, \\ 5900t_1 + 35400t_2 + 22800t_3 \geq 1, \\ 35900t_1 + 6400t_2 + 16000t_3 \geq 1, \\ t_i \geq 0, \ i = 1,2,3. \end{cases} \tag{7.21}$$

Оптимальную стратегию игрока П определим, решив задачу линейного программирования: найти максимум функции

$$Z = u_1 + u_2 + u_3 \tag{7.22}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 17900u_1 + 5900u_2 + 35900u_3 \le 1, \\ 22000u_1 + 35400u_2 + 6400u_3 \le 1, \\ 34800u_1 + 22800u_2 + 16000u_3 \le 1, \\ u_j \ge 0, \ j = 1,2,3. \end{cases} \qquad (7.23)$$

Решаем более простую обратную задачу (7.22) – (7.23). Вводя положительные базисные переменные (б.п.) u_4, u_5, u_6, систему неравенств (7.23) записываем в виде системы уравнений

$$\begin{cases} 17900u_1 + 5900u_2 + 35900u_3 + u_4 = 1, \\ 22000u_1 + 35400u_2 + 6400u_3 + u_5 = 1, \\ 34800u_1 + 22800u_2 + 16000u_3 + u_6 = 1, \\ -u_1 - u_2 - u_3 + z = 0. \end{cases} \qquad (7.24)$$

Систему (7.24) записываем в виде табл. 7.5.

Таблица 7.5

С.П. / Б.П.	U_1	U_2	U_3	1
U_4	17900	5900	35900	1
U_5	22000	35400	6400	1
U_6	$\boxed{34800}$	22800	16000	1
Z	–1	–1	–1	0

Совершив три шага жордановых исключений, получаем табл. 7.6.

Так как в табл. 7.6 все элементы в z — строке и 1 — столбце неотрицательны, то получаем оптимальное решение.

Таблица 7.6

Б.П. \ С.П.	U_6	U_5	U_4	1
U_3	$-\dfrac{17587661581}{679081024890800}$	$\dfrac{14703}{1410461980}$	$\dfrac{45973049029}{509289611738400}$	$\dfrac{43237368013}{2037243074672400}$
U_2	$-\dfrac{489549}{14104619800}$	$\dfrac{2094351}{42313859400}$	$\dfrac{35148}{5289232245}$	$\dfrac{113361}{5289232425}$
U_1	$\dfrac{123406727061}{1772401474964988}$	$-\dfrac{524987}{14104619800}$	$-\dfrac{44031632299}{2037158446953600}$	$\dfrac{32266536049}{8076781399859952}$

Переходим к решению прямой задачи. Установим соответствие переменных двойственных задач:

С.П.			Б.П.		
u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
t_4	t_5	t_6	t_1	t_2	t_3

Транспортируем табл. 7.6, знаки перед всеми элементами, кроме элементов z — строки, меняем на обратные, переменные t_j заменяем на соответствующие переменные u_i, получаем табл. 7.7.

Таблица 7.7

С.П. / Б.П.	t_6	t_5	t_4	1
t_3	$0{,}259\cdot 10^{-4}$	$0{,}347\cdot 10^{-4}$	$-0{,}697\cdot 10^{-4}$	$0{,}028\cdot 10^{-4}$
t_2	$-0{,}104\cdot 10^{-4}$	$-0{,}495\cdot 10^{-4}$	$0{,}372\cdot 10^{-4}$	$0{,}227\cdot 10^{-4}$
t_1	$-0{,}903\cdot 10^{-4}$	$-0{,}066\cdot 10^{-4}$	$0{,}216\cdot 10^{-4}$	$0{,}225\cdot 10^{-4}$
T	$-0{,}217\cdot 10^{-4}$	$-0{,}221\cdot 10^{-4}$	$-0{,}041\cdot 10^{-4}$	$0{,}480\cdot 10^{-4}$

Из табл. 7.7 получаем оптимальное решение. Так как $T = \dfrac{1}{V} = 0{,}48\cdot 10^{-4}$, то цена игры V = 20833. Из $t_1 = \dfrac{x_1}{V} = 0{,}225\cdot 10^{-4}$ получаем $x_1 = 0{,}469$. Аналогично получим $x_2 = 0{,}472$ и $x_3 = 0{,}059$.

Это означает, что стратегию P_1 нужно применять с вероятностью 0,469, стратегию P_2 — с вероятностью 0,472 и стратегию P_3 — с вероятностью 0,059.

Формируем оптимальный план производства:

(600 кост. + 2000 плат. + 300 плащ.) 0,469 + (1000 кост.+ + 500 плат. + 800 плащ.) 0,472 + (800 кост. + 1100 плат.+ + 600 плащ.) 0,059 = 801 кост. + 1239 плат. + 554 плащ.

Таким образом, предприятие при производстве 801 костюма, 1239 платьев и 554 плащей получит наибольшую прибыль, которая в среднем составит 20833 ден.ед.

Для приведенной формулировки производственной задачи получили однозначный ответ.

Недостатком данного метода является достаточно большой объем вычислительных операций даже для матрицы с размерностью 3 х 3. Однако, существуют стандартные программы применения симплексного метода на ЭВМ и это снимает подобное неудобство.

7.7. Сведение задачи линейного программирования к матричной игре

Имеет место и обратное: всякую задачу линейного программирования, точнее пару двойственных задач, можно свести к матричной игре. т.е. указать такую матрицу выигрыша, что решение соответствующей ей игры будет эквивалентно решению данной пары двойственных задач линейного программирования.

Отметим, что задача (7.11) имеет и непосредственный экономический смысл: к ней сводится оптимизация плана выпуска продукций в заданном ассортименте.

Пусть имеется m режимов работы некоторого оборудования с фондом полезного времени T(T 0) для выпуска n продуктов; за I час работы в режиме $(i = \overline{1,m})$ выпускается q_{ij} продукта $j(j = \overline{1,n})$. Требуется максимизировать выпуск продукции в заданном ассортименте, причем, один ассортиментный набор содержит Q_j продукта j (Q_j 0).

Решение. Обозначая через R искомое количество ассортиментных наборов и через x_i $(i = \overline{1,n})$ затраты времени на работу в режиме i, получаем задачу.

Найти вектор $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_m)$ и число R, удовлетворяющие условиям

$$x_i \geq 0, \ (i = \overline{1,m}), \tag{7.25}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = T, \tag{7.26}$$

$$\sum_{i=1}^{m} q_{ij} x_i \geq Q_j R, \ (j = \overline{1,n}), \tag{7.27}$$

$$R \to \max. \tag{7.28}$$

Полагая $t_i = \dfrac{x_i}{T}$, $a_{ij} = \dfrac{q_{ij}}{Q_j}$, $\dfrac{R}{T} = V$, сведем задачу (7.25) – (7.28) к виду (7.11):

$$\max \ \{V: \sum_{i=1}^{m} a_{ij} t_i \geq V, \ (j = \overline{1,n}),$$

$$t_i \geq 0, \ (i = \overline{1,m}), \sum_{i=1}^{m} t_i = 1\}. \tag{7.29}$$

Следовательно, матрица выигрышей имеет вид $H = \|a_{ij}\|$. К задачам (7.11) и (7.12), а, следовательно, (7.15) — (7.16) и (7.17) — (7.18), сводятся некоторые варианты задачи минимизации времени выполнения заданной программы выпуска.

Приложение теории игр в принципе возможно во всех областях человеческой деятельности, где наблюдаются конфликты или же принятие решений происходит в условиях неопределенности. Практическое же составление теоретико-игровых моделей часто затруднительно, так как выявление предпочтений между ситуациями не всегда имеет объективные основания и связано с общей проблемой измерений величин в экономике, психологии и т.д. Вместе с тем, качественные выводы, даваемые теорией игр, на основе использования приближенных или даже условных данных могут принести большую пользу.

Раздел 3
МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Глава 8
КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

8.1. Общая постановка задачи

Если в линейном программировании обязательным является условие, согласно которому целевая функция и все ограничения должны быть представлены только линейными зависимостями, то в задачах нелинейного программирования это условие снимается. В задачи нелинейного программирования могут входить зависимости любого вида. Поэтому в общем виде задача нелинейного программирования (НП) состоит в определении максимального (минимального) значения функции

$$Z = f\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

при условии, что ее переменные удовлетворяют соотношениям

$$g_i\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i,\ i = \overline{1,k}, \tag{8.1}$$

$$g_i\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i,\ i = \overline{k+1,m}. \tag{8.2}$$

При этом предполагается, что известны функции n переменных f и g_i, а b_i − заданные числа. Обычно на некоторые переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ накладывается условие неотрицательности. Кроме того, ограничением может служить условие целочисленности решения для ряда переменных.

Класс задач нелинейного программирования шире класса задач линейного программирования. Например, производственные затраты в большинстве случаев не пропорциональны объему выпуска, а зависят от него нелинейно, доход от реализации продуктов производства оказывается нелинейной функцией цен и т.д. Критериями в задачах оптимального планирования часто служат максимум прибыли, минимум себестоимости, минимум капитальных затрат; в качестве переменных величин выступают объемы выпуска различных видов продукции; в число ограничений входят производственные функции, характеризующие связь между выпуском продукции и затратами трудовых и материальных ресурсов, объем которых лимитирован.

8.2. Графическое решение задач нелинейного программирования

Существующие методы НП применимы лишь при известных предположениях о характере ограничений и целевой функции задачи.

Система ограничений (8.2) определяет область допустимых решений. В отличии от задачи ЛП она не всегда является выпуклой. Даже если область допустимых решений является выпуклой, то в ряде задач целевая функция может иметь несколько локальных экстремумов. С помощью большинства же вычислительных методов можно найти точку локального оптимума, но нельзя установить, является ли она точкой глобального (абсолютного) оптимума или нет.

На рис. 8.1 показана выпуклая область (круг, шар, куб) для нее отрезок АВ$\in$ К, а точка Р является точкой абсолютного минимума. Для невыпуклой области отрезок АВК целиком. Точки М и N являются точками минимума, но для области К точка N точкой абсолютного минимума не является. Поэтому будем говорить, что в точке М достигается глобальный минимум, а в точке N достигается локальный минимум.

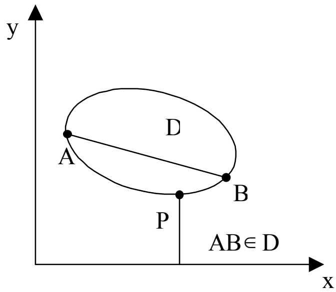


Рис. 8.1. Выпуклые множества

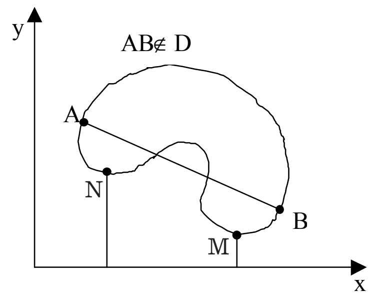


Рис. 8.2. Невыпуклые множества

В задачах НП точка экстремума может лежать в вершине многогранника, на ребре (грани) или внутри области. Если задача содержит нелинейные ограничения, то область допустимых решений не является выпуклой и кроме глобального оптимума могут существовать точки локального оптимума. Для того чтобы при решении задач НП имелась уверенность, что полученный оптимальный план отвечает именно глобальному оптимуму, достаточно, чтобы область допустимых решений была выпуклой, а целевая функция – вогнутой (для задач на max) или выпуклой (для задач на min). Экономические задачи очень часто отвечают этим условиям.

Процесс нахождения решения ЗНП (8.1) и (8.2) с использованием ее геометрической интерпретации включает следующие этапы:

1. находят область допустимых решений задачи, определяемую соотношениями (8.2) (если она пуста, то задача не имеет решения);

2. строят гиперповерхность $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = h$ (гиперповерхность – обобщение понятия поверхности n-го порядка, так гиперповерхность 2-го порядка – гиперплоскость);

3. определяют гиперповерхность наивысшего (наинизшего) уровня или устанавливают неразрешимость задачи из-за неограниченности функции (8.1) сверху (снизу) на множестве допустимых решений;

4. находят точку области допустимых решений, через которую проходит гиперповерхность наивысшего (наинизшего) уровня, и определяют в ней значение функции (8.1).

Пример 1. Найти минимальное и максимальное значения функции

$$Z = x_2 - x_1^2 + 6x_1 \ + \ 6x_1$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 24, \\ x_1 + 2x_2 \le 15, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 24, \\ x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Находим область допустимых решений − многоугольник OABC (рис. 8.3).

Строим линию уровня

$$Z = x_2 - x_1^2 + 6x_1 = h,$$

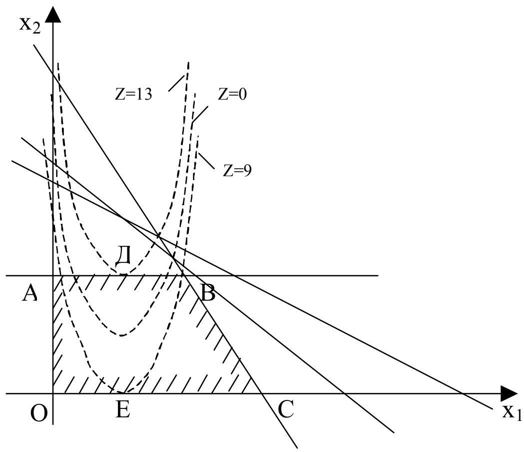


Рис. 8.3

где h – некоторая постоянная и исследуем ее поведение при различных значениях n. Преобразуем линию уровня $(x_1-3)^2 = x_2 - h$.

При каждом значении h получаем параболу, которая тем выше отдалена от оси OX, чем больше значение h   0.

Значит функция Z принимает оптимальные значения в точке касания одной из парабол с границей многоугольника OABC.

Минимальное значение в точке E: $\begin{cases} x_2 - x_1^2 + 6x_1 = 9, \\ x_2 = 0. \end{cases}$

Решая эту систему, найдем, что $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, т.е $Z_{min} = 9$ в точке E(3;0).

Максимальное значение в точке K: $\begin{cases} x_2 \; x_1^2 + 6x_1 = 13, \\ x_2 = 4. \end{cases}$

Отсюда $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, и $Z_{max} = 13$ в точке Д(3; 4).

Точки, соответствующие оптимальным значениям функции Z не являются вершинами многоугольника допустимых решений. Поэтому процедура перебора вершин, которая использовалась при решении ЗЛП, неприменима для решения данной задачи.

Пример 2. Найти максимальное и минимальное значение функции

$$Z = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 10x_2 + 26$$

при условиях $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq -4, \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 20, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$

Областью допустимых решений системы неравенств является многоугольник OABC (рис. 8.4).

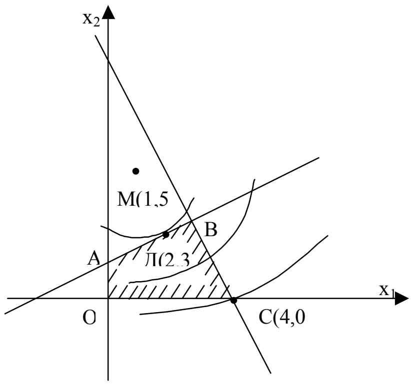


Рис. 8.4

Полагая значения целевой функции равным некоторому числу h, получаем линии уровня, а именно окружности

$$(x_1-1)^2+(x_2-5)^2=h$$

с центром M(1,5) и радиусом $\sqrt{h}$. С увеличением (уменьшением) числа h значения функции Z соответственно увеличиваются (уменьшаются).

Проводя из точки M окружности разных радиусов, видим, что минимальное значение целевая функция принимает в точке К, в которой окружность касается области решений.

Для определения координат этой точки воспользуемся равенством угловых коэффициентов прямой $x_1 - 2x_2 = -4$ и касательной к окружности в точке Д. Из уравнения прямой $x_2 = \frac{x_1}{2} + 4$ следует, что ее угловой коэффициент равен $\frac{1}{2}$. Для нахождения углового коэффициента касательной берем уравнение окружности $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 5)^2 = h$ и, рассматривая x_2 как неявную функцию переменной x_1, дифференцируем уравнение окружности $2(x_1 - 1)+2(x_2 - 5)x_2' = 0$, отсюда

$$x_2^1 = \frac{(1-x_1)}{(x_2-5)}.$$

Приравнивая найденную производную числу $\frac{1}{2}$, получаем одно из уравнений для определения координат точки Д. Присоединяя к нему уравнение прямой, на которой лежит точка Д, имеем систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 7 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 4 = 0. \end{cases}$$

Откуда $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, т.е. Д (2,3).

Таким образом, $Z_{min} = 2^2+3^2 - 2\cdot 2 - 10\cdot 3+26=5$.

Из рис. 8.4 видно, что максимальное значение функции Z будет в точке C(4,0) и при этом $Z_{max} = 34$.

8.3. Метод множителей Лагранжа

Пусть задана задача математического программирования: максимизировать (минимизировать) функцию

$$Z = f\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \tag{8.3}$$

при ограничениях

$$g_i\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = b_i,\ i = \overline{1,m}. \tag{8.4}$$

Ограничения в задаче заданы уравнениями, поэтому для ее решения можно воспользоваться классическим методом отыскания условного экстремума функций нескольких переменных. При этом полагаем, что функции $f\ (x_1,\ \ldots,\ x_n)$ и $g_i\ (x_1,\ \ldots,\ x_n)$ непрерывны вместе со своими первыми частными производными.

Вводим набор переменных $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_m$, называемых множителями Лагранжа и составляем функцию Лагранжа:

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m) =$$

$$= f\ (x_1,x_2,\ldots,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\,[b_i - g_i\ (x_1,x_2,\ldots,x_n)]. \tag{8.5}$$

Определяем частные производные $\frac{\partial F}{\partial x_j}$, $(j = \overline{1,n})$, $\frac{\partial F}{\partial \lambda_i}$, $(i = \overline{1,m})$ и рассматриваем систему (n + m) уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \; (j = \overline{1,n}), \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i \; (x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \; (i = \overline{1,m}), \end{cases} \qquad (8.6)$$

с(n+m) неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

Всякое решение системы (8.6) определяет точку x = $= (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, в которой может иметь место экстремум функции f $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Следовательно, решив систему (8.6), получают все точки, в которых функция (8.3) может иметь экстремальные значения. При этом неизвестен способ определения точек глобального минимума или максимума. Дальнейшее исследование найденных точек проводят также, как и в случае безусловного экстремума, т.е. если для функции (8.3) существуют вторые частные производные и они непрерывны, то можно вывести достаточное условие существования локального экстремума функции в точке, являющейся решением системы (8.6). Однако практическое значение этого условия невелико.

Метод множителей Лагранжа имеет ограниченное применение, так как система (8.6), как правило, имеет несколько решений.

Пример 3. Найти точки экстремума функции $Z = x_1^2 + x_2^2$ при условии $x_1 + x_2 = 5$.

Решение. Составим функцию Лагранжа

$$F(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda \; (5 - x_1 - x_2).$$

Найдем ее частные производные по x_1, x_2, l, приравняв их нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 5 = 0. \end{cases}$$

Решение системы $x_1 = x_2 = \dfrac{5}{2}$. Таким образом, в точке К $(\dfrac{5}{2}; \dfrac{5}{2})$ данная функция может иметь условный экстремум. Найдем $\dfrac{\partial Z}{\partial x_1} = 2x_1; \dfrac{\partial Z}{\partial x_2} = 2x_2; \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x_1^2} = 2; \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x_1 \partial x_2} = 0; \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x_2^2} = 2$. Далее $A = (\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x_1})_к = 2;$ $;B = (\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x_1 \partial x_2})_к = 0;$ $C = (\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x_2^2})_к = 2.$

Так как $B^2 - AC = -2 \cdot 2 = -4 < 0$ и $A = 2 \quad 0$, $C = 2 \quad 0$, то в точке К имеем условный минимум, причем $Z_{min} = \dfrac{25}{2}$.

Пример 4. Обработка статистических данных показала, что производственная функция, связывающая выпуск готовой продукции предприятия с численностью рабочих x_1 и производственными фондами x_2, имеет вид $Z = 3x_1 \cdot x_2$. Общие затраты предприятия на заработную плату и оборудование определяются соотношением $2x_1 + x_2 = 60$.

Нужно определить затраты предприятия на покупку оборудования и расходы на заработную плату, при которых выпуск продукции будет максимальным.

Для решения задачи составляем функцию Лагранжа:

$$F(x_1, x_2, \lambda) = 3x_1x_2 + \lambda(2x_1 + x_2 - 60).$$

Находим частные производные этой функции по x_1, x_2, λ и, исходя из необходимого условия экстремума функции Лагранжа, приравниваем их к нулю.

Получим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 3x_2 + 2\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 3x_1 + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 2x_1 + x_2 - 60 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $x_1 = -\dfrac{\lambda}{3}$, $x_2 = -\dfrac{2\lambda}{3}$ и тогда $-\dfrac{2\lambda}{3} - \dfrac{2\lambda}{3} - 60 = 0$. Находим, что $\lambda = -45$. Получаем $x_1 = 15$, $x_2 = 30$.

Теперь необходимо убедиться, что в точке (15; 30) функция F достигает max. Для этого рассмотрим окрестность точки (15; 30) и составим приращение функции

$$\Delta F = F(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \lambda + \Delta\lambda) - F(x_1, x_2, \lambda) = (3\ (15 + \Delta x_1)\ (30 + \Delta x_2) + +(-45+\Delta\lambda)\ (2\ (15+ \Delta x_1) + (30+ \Delta x_2) - 60)) - (3{\cdot}15{\cdot}45+(-45)\ (2{\cdot}15+30 - 60)) = 3{\cdot}\Delta x_1 {\cdot}\Delta x_2 + \Delta\lambda\ (2{\cdot}\Delta x_1 + \Delta x_2).$$

Так как по условию $2(x_1+\Delta x_1)+(x_2+\Delta x_2) = 60$, или $2(15+\Delta x_1)+(30+\Delta x_2) = 60$, то $2{\cdot}\Delta x_1+ \Delta x_2 = 0$, или $\Delta x_2 =-2{\cdot}\Delta x_1$. Подставим это соотношение в ΔF:

$$\Delta F = 3{\cdot}\lambda x_1{\cdot}\ (-2{\cdot}\lambda x_1) + \Delta\lambda(2{\cdot}\Delta x_1 - 2{\cdot}\Delta x_1) =-6\ (\Delta x_1)^2 < 0$$

при любом Δx_2.

Это доказывает, что в точке $x_1 = 15$; $x_2 = 30$ функция Лагранжа достигает max, равного $F_{max} = 2250$.

Пример 5. На двух предприятиях отрасли необходимо изготовить 200 изделий некоторой продукции. Затраты, связанные с производством x_1 изделий на первом предприятии, равны $4x_1^2$ руб., а затраты, обусловленные изготовлением x_2 изделий на втором предприятии, составляют $(6x_2^2 + 20x_2)$ руб. Определить сколько изделий на каждом из предприятий следует произвести, чтобы общие затраты, обусловленные изготовлением необходимой продукции, были минимальными.

Если через x_1 и x_2 обозначить количество изделий, которые нужно произвести на первом и втором предприятии, то общие затраты равны:

$$Z = 4x_1^2 + 6x_2^2 + 20x_2$$

и при этом должно выполняться равенство $x_1 + x_2 = 200$.

Составляем функцию Лагранжа:

$$F(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1^2 + 6x_2^2 + 20x_2 + \lambda(x_1 + x_2 - 200).$$

Записываем необходимое условие существования экстремума этой функции:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 8x_1 + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 12x_2 + 20 + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 200 = 0. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений имеем $x_1 = -\dfrac{\lambda}{8}$, $x_2 = -\dfrac{(\lambda + 20)}{12}$.

Подставляем эти соотношения в третье уравнение системы, получаем $-\dfrac{\lambda}{8} - \dfrac{\lambda + 20}{12} - 200 = 0$, отсюда $\lambda = -968$. Следовательно, $x_1 = 121$ и $x_2 = 79$.

Покажем, что при $x_1 = 121$, $x_2 = 79$ функция F, а, следовательно, и Z принимает минимальное значение. Составляем приращение функции F:

$$\Delta F = F(x_1 + \Delta x_1,\ x_2 + \Delta x_2,\ \lambda + \Delta\lambda) - F(x_1, x_2, \lambda) = (4(x_1 + \Delta x_1)^2 + 6(x_2 + \Delta x_2)^2 + +20(x_2 + \Delta x_2) + (\lambda + \Delta\lambda)\ ((x_1 + \Delta x_1) + (x_2 + \Delta x_2) - 200)) - (4x_1^2 + 6x_2^2 + 20x_2 + \lambda(x_1 + x_2 - 200)) =$$
$$= 4\Delta x_1^2 + 6\Delta x_2^2 + \Delta\lambda\ (\Delta x_1 + \Delta x_2).$$

Так как по условию $(x_1+\Delta x_1)+(x_2+\Delta x_2)=200$, или $121+\Delta x_1+79+\Delta x_2=200$,

Так как по условию $(x_1+\lambda x_1)+(x_2+\Delta x_2)=200$, или $121+\Delta x_1+79+\lambda x_2=200$, то $\Delta x_1 + \Delta x_2 = 0$, или $\Delta x_2 = \Delta x_1$. Это соотношение подставляем в ΔF:

$\Delta F = 4\Delta x_1^2 + 6(-\Delta x_1)^2 + \Delta\lambda(\Delta x_1 - \Delta x_1) = 10\Delta x_1^2\ \ 0$ при любом Δx_2. Следовательно, в точке $x_1 = 121$, $x_2 = 79$ имеем min, равный Z_{min}=97590 руб.

Такой же результат можно получить, если исследование на условный экстремум функции Z свести к исследованию на безусловный экстремум функции Z после преобразований.

Из уравнения связи $x_1 + x_2 = 200$, найдем, что $x_2 = 200 - x_1$ и подставим это соотношение в функцию Z:

$$Z = 4x_1^2 + 6(200 - x_1)^2 + 20(200 - x_1).$$

Получим функцию Z одной переменной x_1:

$$Z = 10x_1^2 - 2420\cdot x_1 + 244\ 000.$$

По необходимому признаку существования экстремума функции:

$$Z' = 20x_1 - 2420 = 0,\ \text{откуда}\ x_1 = 121.$$

Так как производная Z' при переходе через точку $x_1 = 121$ меняет знак с минуса на плюс, то в этой точке функция Z имеет минимум Z_{min}=97590 руб. и $x_2 = 200 - 121 = 79$.

Таким образом, при производстве 121 изделия на первом предприятии и 79 изделий на втором предприятии затраты будут минимальными.

Метод множителей Лагранжа можно применять и в том случае, когда условия связи представляют собой неравенства. Так, если требуется найти экстремум функции $Z = f(x)$ при условии $g(x) \le b$, то сначала следует найти точки безусловного экстремума функции $Z = f(x)$ из уравнений $\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$ $(j = \overline{1,n})$, затем среди этих точек отобрать те, координаты которых удовлетворяют условию связи $g(x) < b$, и, наконец, определить точки, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_j} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_j} = 0, \ j = \overline{1,n}, \\ g(x) = b. \end{cases} \tag{8.7}$$

Точки, найденные в результате решения этой системы, вместе с точками, определенными на первом этапе и удовлетворяющими условию $g(x) < b$, подлежат дальнейшему исследованию, как и при нахождении безусловного экстремума.

Пример 6. Найти минимальное и максимальное значение функции

$$Z = x_1^2 + x_2^2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 13, & \text{(a)} \\ x_1 + x_2 \ge 2, & \text{(b)} \\ x_1 \ge 0, & \text{(c)} \\ x_2 \ge 0. & \text{(d)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial x_1} = 2x_1, \\ \dfrac{\partial Z}{\partial x_2} = 2x_2. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 = 0, \\ 2x_2 = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Точка (0; 0) не рассматривается, так как она не удовлетворяет условию (b).

Для системы (8.7) и условия (a):

$$\begin{cases} 2x_1 - 2\lambda = 0, \\ 2x_2 - 3\lambda = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 = 13. \end{cases} \qquad \lambda = 2,\ x_1 = 2,\ x_2 = 3.$$

Условие (b): $$\begin{cases} 2x_1 - \lambda = 0, \\ 2x_2 - \lambda = 0, \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases} \qquad \lambda = 2,\ x_1 = 1,\ x_2 = 1.$$

Условие (c): $$\begin{cases} 2x_1 - \lambda = 0, \\ 2x_2 = 0, \\ x_1 = 0. \end{cases}$$ $x_1 = x_2 = 0$ не удовлетворяет (b).

Условие (d): $$\begin{cases} 2x_1 = 0, \\ 2x_2 - \lambda = 0, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$ $x_1 = x_2 = 0$ не удовлетворяет (b).

Точки условного экстремума A(2; 3) и B(1; 1).

Так как $\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x_1^2} = 2$; $\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$; $\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x_2^2} = 2$, то A = 2, B = 0, C = 2 и $B^2 - AC < 0$, т.е. для функции $Z = x_1^2 + x_2^2$ экстремум существует, но указать глобальный экстремум нет возможности.

$$Z_A = 2^2 + 3^2 = 13, \qquad Z_B = 1^2 + 1^2 = 2,$$

т.е. $Z_{min} = 2$ и $Z_{max} = 13$ − это условные экстремумы, что подтверждает и геометрическое решение (рис. 8.5).

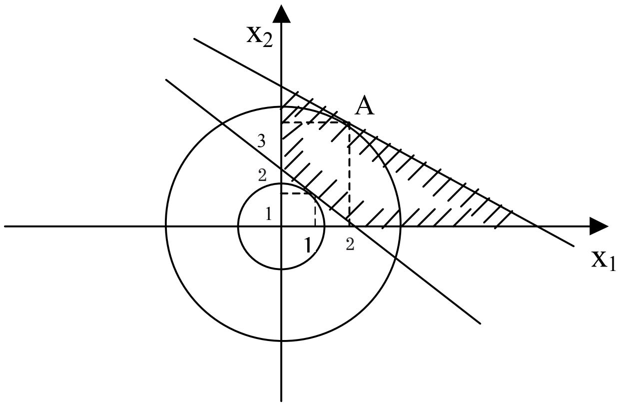


Рис. 8.5

Глава 9
ЭЛЕМЕНТЫ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Выпуклое программирование рассматривает задачи минимизации нелинейной, но гладкой выпуклой функции (первые производные функции непрерывны) при ограничениях, заданных нелинейными неравенствами, определяющими выпуклое множество пространства переменных.

9.1. Формулировка задачи

Нужно отыскать вектор

$$\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n), \tag{9.1}$$

который удовлетворяет условиям

$$\Psi_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0, \ (i = \overline{1,n}) \tag{9.2}$$

и для которого функция

$$Z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{9.3}$$

принимает экстремальное значение.

Векторы, удовлетворяющие условию (9.2), называются допустимыми, а искомые векторы — оптимальными.

В задачах выпуклого программирования для оптимальности допустимого вектора достаточно, чтобы он был наилучшим среди близких к нему допустимых векторов.

Задача в форме (9.1) — (9.3) называется канонической формой общей задачи выпуклого программирования.

9.2. Графическое решение

Найти экстремальные значения функции

$$Z = 3x_1 + x_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \Psi_1(x) = \Psi_1(x_1, x_2) = -x_1 \cdot x_2 + 2 \le 0, \\ \Psi_2(x) = \Psi_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 16 \le 0, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Строим область допустимых решений данной задачи:

а) $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$ — первая четверть;

б) $x_1^2 + x_2^2 = 16$ — окружность с центром в начале координат и радиусом равным четырем. Область решений неравенства $x_1^2 + x_2^2 \le 16$ состоит из точек, лежащих внутри этой окружности и на ней самой;

в) $-x_1 \cdot x_2 + 2 = 0$ или $x_2 = \dfrac{2}{x_1}$ — обратная пропорциональная зависимость. Область решений неравенства $-x_1 \cdot x_2 + 2 \le 0$ — полуплоскость, лежащая над правой ветвью кривой и ниже левой ветви.

Таким образом, с учетом совокупности этих условий, областью допустимых решений данной задачи является замкнутая выпуклая область ВСДА (рис. 9.1).

Соответственно функции $Z = 3x_1 + x_2$ проводим вектор $\bar{n}(3,1)$, показывающий направление скорейшего возрастания функции Z. Строим, линию уровня $3x_1 + x_2 = h$ и перемещает ее в направлении $\bar{n}$. В точке $A(x_1^A, x_2^A)$ функция Z принимает минимальное значение, а в точке $C(x_1^C, x_2^C)$ – максимальное значение.

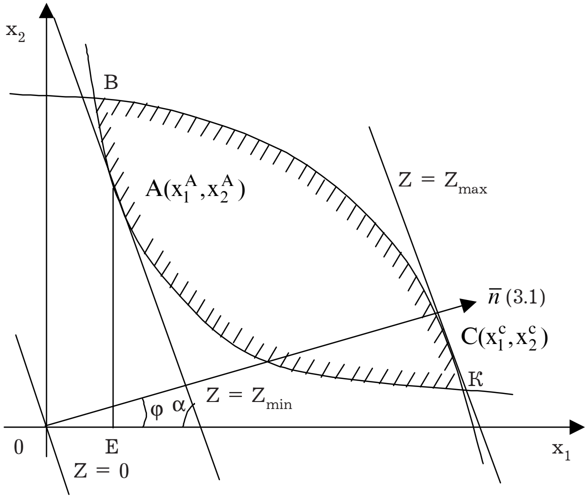


Рис. 9.1

Находим минимальное значение функции Z, для чего определяем координаты точки А. С одной стороны, линия уровня и касательная к кривой из уравнения $3x_1 + x_2 = h$ имеют угловой коэффициент $K = -3$, с другой стороны, производная от функции $x_2 = \frac{2}{x_1}$ равна $x_2' = -\frac{2}{x_1^2}$, а в точке А эта производная равна $(x_2^A)' = -\frac{2}{(x_1^A)^2}$ и равна значению -3. Из соотношения $-\frac{2}{(x_1^A)^2} = -3$ находим, что $x_2^A = \frac{\sqrt{2}6}{3}$, следовательно, $x_2^A = \frac{2}{x_1^A} = \sqrt{6}$ и при этом $Z_{min} = \frac{3\sqrt{6}}{3} + \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$.

Существующие методы позволяют решать узкий класс задач, ограничения которых имеют вид (9.2).

Одним из таких методов является метод множителей Лагранжа.

Рассмотрим его на предыдущем примере.

Вводим дополнительные неотрицательные переменные x_3 и x_4:

$$\begin{cases} Z = 3x_1 + x_2. \\ -x_1x_2 + 2 + x_3 = 0, x_1^2 \\ x_1^2 + x_2^2 - 16 + x_4 = 0, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Составляем функцию Лагранжа

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4,\lambda_1,\lambda_2) = (3x_1 + x_2) + \lambda_1(-x_1 \cdot x_{2+}$$

$$+ 2 + x_3) + \lambda_2(x_1^2 + x_2^2 - 16 + x_4).$$

Дифференцируя ее по переменным x_1, x_2, λ_1 и λ_2 и приравнивая частные производные нулю, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_1x_2 - 2\lambda_2x_1 = 3, \\ \lambda_1x_1 - 2\lambda_2x_2 = 1, \\ -x_1\,x_2 + 2 = -x_3, \\ x_1^2 + x_2^2 - 16 = -x_4. \end{cases} \qquad \text{(a)}$$

Далее поступают следующим образом (в случае неотрицательных решений).

Полагают $x_3 = 0$, решают систему и находят соответствующие этому решению наименьшее (наибольшее) Z. Затем полагают $x_4 = 0$, находят все решения системы и значения Z наименьшее (наибольшее).

После полагают $x_3 = x_4 = 0$, находят все решения системы и значения Z наименьшее (наибольшее).

Абсолютный экстремум определяют, сравнивая между собой все полученные значения Z.

Проведем решение, полагая $x_3 = 0$.

Из 3-го и 4-го уравнений системы имеем уравнение:

$$x_2^4 - (16 - x_4)x_2^2 + 4 = 0,$$

решение которого будет:

$$x_2 = \sqrt{\frac{16 - x_4 \pm \sqrt{(16 - x_4)^2 - 16}}{2}},$$

и из 3-го уравнения при $x_3 = 0$ имеем, что $x_1 = \dfrac{2}{x_2}$.

Из 1-го и 2-го уравнений системы находим:

$$\lambda_1 = \frac{3x_2 - x_1}{x_2^2 - x_1^2}, \quad \lambda_2 = \frac{3x_1 - x_2}{2(x_2^2 - x_1^2)}.$$

Подставляя найденные соотношения в функцию Z, получим

$$Z = \frac{6 + x_2^2}{x_2} \text{ или } Z = \frac{28 - x_4 \pm \sqrt{(16 - x_4)^2 - 16}}{\sqrt{2(16 - x_4 \pm \sqrt{(16 - x_4)^2 - 16})}}.$$

Имеем функцию Z одной переменной x_4. Находим производную этой функции:

$$Z' = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1 \pm \frac{16 - x_4}{\sqrt{(16 - x_4)^2 - 16}}\right)\frac{4 - x_4 \pm \sqrt{(16 - x_4)^2 - 16}}{\sqrt{\left(16 - x_4 \pm \sqrt{(16 - x_4)^2 - 16}\right)^3}}.$$

Приравнивая эту производную к нулю, найдем стационарную точку $x_4 = \dfrac{28}{3}$. Достаточный признак существования экстремума функции показывает, что в этой точке функция Z имеет наименьшее значение. Находим, что $x_1 = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ и $x_2 = \sqrt{6}$ и в этой точке $Z = 2\sqrt{6}$.

В системе (а) полагаем $x_4 = 0$, получаем:

$$\begin{cases} -x_1 \cdot x_2 + 2 = -x_3, \\ x_1^2 + x_2^2 = 16. \end{cases}$$

Отсюда имеем уравнение:

$$x_2^4 - 16x_2^2 + (2+x_3)^2 = 0,$$

решение которого имеет вид:

$$x_2 = \sqrt{8 \pm \sqrt{64-(2+x_3)^2}}\text{, а } x_1 = \frac{2+x_3}{\sqrt{8 \pm \sqrt{64-(2+x_3)^2}}}.$$

Подставляя найденные x_1 и x_2 в функцию Z, получаем функцию одной переменной x_3:

$$Z = \frac{6+3x_3}{\sqrt{8 \pm \sqrt{64-(2+x_3)^2}}} + \sqrt{8 \pm \sqrt{64-(2+x_3)^2}}.$$

Находим производную:

$$Z' = \frac{(46-x_3)\sqrt{64-(2+x_3)^2} \mp 3(2+x_3)^2 \mp 8(2+x_3) \pm 384}{\sqrt{\left(8 \pm \sqrt{64-(2+x_3)^2}\right)^3}},$$

приравниваем ее к нулю, определяем стационарную точку и получаем, что в точке $x_3 = \frac{14}{5}$ функция Z принимает максимальное значение, равное $Z = 4\sqrt{10}$, а $x_1 = \frac{6\sqrt{10}}{5}$ и $x_2 = \frac{2\sqrt{10}}{5}$.

Теперь в системе (a) полагаем $x_3 = x_4 = 0$. Из системы:

$$\begin{cases} -x_1 \cdot x_2 + 2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - 16 = 0, \end{cases}$$

получаем, что в точке B значение $Z_B = 5{,}48$, а в точке K значение $Z_Д = 12{,}41$.

Таким образом $Z_{min} = 2\sqrt{6}$ в точке A($\frac{\sqrt{6}}{3}$;), а $Z_{max} = 4\sqrt{10}$ в точке C($\frac{6\sqrt{10}}{5}$; $\frac{2\sqrt{10}}{5}$).

Существуют и другие эффективные методы решения задач выпуклого программирования.

Глава 10
ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

10.1. Постановка задачи

Задачи динамического программирования являются многоэтапными. Поэтому термин “динамическое программирование” не столько определяет особый тип задач, сколько характеризует методы нахождения решения отдельных классов задач математического программирования, которые могут также относиться к задачам, линейного программирования.

В общем случае задача динамического программирования формулируется следующим образом. Пусть данная физическая система S находится в некотором начальном состоянии S_o и является управляемой. Благодаря осуществлению некоторого управления $u \in U$ указанная система переходит из начального состояния S_o в конечное состояние $S_{кон.}$. При этом качество каждого из реализуемых управлений $u \in U$ характеризуется соответствующим значением функции $W(u)$. Задача состоит в том, чтобы из множества возможных управлений $u \in U$ найти такое $u^* \in U$, при котором функция $W(u)$ принимает экстремальное значение $W(u^*)$.

Экономическую интерпретацию общей задачи динамического программирования рассмотрим на следующих примерах.

Задача I. Для осуществления своей эффективной деятельности производственные объединения и предприятия должны периодически проводить замену используемого ими оборудования. При этой замене учитываются производительность используемого оборудования, затраты, связанные с содержанием и ремонтом, стоимость приобретаемого и заменяемого оборудования. Предположим, что к началу текущей пятилетки на предприятии установлено новое оборудование. Зависимость производительности этого оборудования от времени его использования предприятием, а также зависимость затрат на содержание и ремонт оборудования при различном времени его использования приведены в табл. 10.1.

Таблица 10.1

	Время t, в течение которого используется оборудование, лет					
	0	1	2	3	4	5
Годовой выпуск продукции R(t) в стоимостном выражении, тыс. руб.	80	75	65	60	60	55
Ежегодные затраты Z(t), связанные с содержанием и ремонтом оборудования, тыс.руб.	20	25	30	35	45	55

Зная, что затраты, связанные с приобретением и установкой нового оборудования, идентичного с установленным, составляют 40 тыс. руб., а заменяемое оборудование списывается, составить такой план замены оборудования в течение пятилетки, при котором общая прибыль за данный период времени максимальна.

Эту задачу можно рассматривать как задачу динамического программирования, в которой в качестве системы S выступает оборудование. Состояния этой системы определяются фактическим временем использования оборудования (его возрастом) τ, т.е. описываются единственным параметром . В качестве управлений выступают решения о замене и сохранении оборудования, применяемые в начале каждого года. Обозначим через С решение о сохранении оборудования, а через З — решение о замене оборудования. Тогда задача состоит в нахождении такой стратегии управления, определяемой решениями, применяемыми к началу каждого года, при которой общая прибыль предприятия за пятилетку является максимальной.

Общая прибыль предприятия за пятилетку составляется из ежегодной прибыли предприятия за каждой год пятилетки, т.е. если u_1, u_2, ..., u_5 — управления, применяемые в начале каждого года, $W(\tau_i;u_i)$ — прибыль предприятия за i-ый год пятилетки, то

$$W(u) = \sum_{i=1}^{5} W_i(\tau_i;u_i),$$

где $u = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$, τ_i — возраст оборудования в начале i-го года пятилетки,

$$W_i(\tau_i;u_i) = \begin{cases} R(\tau_i) - Z(\tau_i) & \text{при } u_i = C, \\ R(0) - Z(0) - 40 & \text{при } u_i = З. \end{cases}$$

Например,если $u = (C, З, C, C, C)$, то

$$W(u) = W_1(C,0) + W_2(З,0) + W_3(C, 1) + W_4(C, 2) +$$
$$+ W_5(C, 3) = (R(0) - Z(0)) + (R(0) - Z(0) - 40) + (R(1) -$$
$$- Z(1)) + (R(2) - Z(2)) + (R(3) - Z(3)) = 60 + 20 + 50 + 35 +$$
$$+ 25 = 190 \text{ тыс.руб.}$$

Задача 2. Для увеличения объемов выпуска пользующейся повышенным спросом продукции, изготовляемой предприятиями, выделены капиталовложения в объеме А тыс.руб. Использование i-ым предприятием ($i = \overline{1,n}$) x_i тыс. руб. из указанных средств обеспечивает прирост выпуска продукции, определяемой значением функции $f_i(x_i)$. Требуется найти распределение капиталовложений между предприятиями, обеспечивающее максимальное увеличение выпуска продукции.

Эту задачу можно рассматривать как многоэтапную, если исследовать эффективность вложения средств на одном предприятии, на двух предприятиях и т.д., наконец, на n предприятиях. Таким образом, получим n этапов, на каждом из которых состояние системы (в качестве которой выступают предприятия) описывается объемом средств, подлежащих освоению k предприятиями ($k = \overline{1,n}$). Решения об объемах капиталовложений $x_к$, выделяемых k-му предприятию, и являются управлениями. Задача состоит в выборе таких управлений, при которых функция

$$W(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$$

принимает наибольшее значение.

10.2. Алгоритм решения задач методом динамического программирования

Введем некоторые обозначения и сделаем необходимые для дальнейшего предположения.

Будем считать, что состояние рассматриваемой системы S на k-ом шаге ($k = \overline{1,n}$) определяется совокупностью чисел $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_m^{(k)})$, которые получены в результате реализации управления u_k, обеспечивающего переход системы S из состояния $x^{(k-1)}$ в состояние $x^{(k)}$.

Будем предполагать, что состояние $x^{(k)}$, в которое перешла система S, зависит от данного состояния $x^{(k-1)}$ и выбранного управления U_k и не зависит от того, каким образом система S перешла в состояние $x^{(k-1)}$.

Далее, будем считать, что если в результате реализации k-го шага обеспечен определенный доход, также зависящий от исходного состояния системы $x^{(k-1)}$ и выбранного управления U_k, равный $W_k(x^{(k-1)};u_k)$, то общий доход за n шагов составляет

$$W(u) = \sum_{k=1}^{n} W_k\,(x^{(k-1)};\ u_k),$$

где $u = (u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n)$.

Таким образом, сформированы два условия, которым должна удовлетворять рассматриваемая задача динамического программирования. Первое условие обычно называют условием отсутствия последействия, а второе — условием аддитивности целевой функции задачи.

Задача состоит в нахождении оптимальной стратегии управления, т.е. такой совокупности управлений $u^* = (u_1^*, \ldots, u_n^*)$, в результате реализации которых система S за n шагов переходит из начального состояния $x^{(o)}$ в конечное $x^{(n)}$ и при этом функция дохода W(u) принимает наибольшее значение.

Принцип оптимальности Беллмана. Каково бы ни было состояние системы перед очередным шагом, надо выбрать управление на этом шаге так, чтобы доход на данном шаге плюс оптимальный доход на всех последующих шагах был максимальный.

Из принципа оптимальности следует, что оптимальную стратегию управления можно получить, если сначала найти оптимальную стратегию управления на n-ом шаге, затем на двух последних шагах, затем на трех последних шагах и т.д., вплоть до первого шага. Таким образом, решение рассматриваемой задачи динамического программирования целесообразно начинать с определения оптимального решения на последнем, n-ом шаге. Для того, чтобы найти это решение, очевидно, нужно сделать различные предположения о том, как мог окончиться предпоследний шаг, и с учетом этого выбрать управление u_n^o, обеспечивающее максимальное значение функции дохода $W_n(x^{(n-1)};u_n)$,. Такое управление, выбранное при определенных предположениях о том, как окончился предыдущий шаг, называется условно оптимальным управлением. Следовательно, принцип оптимальности требует находить на каждом шаге условно оптимальное управление для любого из возможных исходов предшествующего шага.

Чтобы построить алгоритм решения задач, дадим математическую формулировку принципа оптимальности. Для этого введем некоторые дополнительные обозначения. Обозначим через $F_o(x^{(o)})$ максимальный доход, получаемый за n шагов при переходе системы S из начального состояния $x^{(o)}$ в конечное состояние $x^{(n)}$ при реализации опти-мальной стратегии управления $u^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$, а через $F_k(x^{(k)})$ — максимальный доход, получаемый при переходе из любого состояния $x^{(k)}$ в конечное состояние $x^{(n)}$ при оптимальной стратегии управления на оставшихся (n-k) шагах. Тогда

$$F_o(x^{(o)}) = \max_{u=(u_1,\dots,u_n)} [W_1(x^{(o)},u_1) + \dots + W_n(x^{(n)}, u_n)], \qquad (10.1)$$

$$F_k(x^{(k)}) = \max_{u_{k+1}} [W_{k+1}(x^{(k)},u_{k+1}) + F_{k+1}(x^{(k+1)})] \qquad (10.2)$$

при $k = \overline{o,n-1}$.

Выражение (10.2) представляет собой математическую запись принципа оптимальности Беллмана и носит название основного функционального уравнения Беллмана. Используя уравнение (10.2) находится решение рассматриваемой задачи динамического программирования. Рассмотрим этот процесс более подробно.

Полагая $k = n - 1$ в уравнении Беллмана (10.2), получим следующее функциональное уравнение:

$$F_{n-1}(x^{(n-1)}) = \max_{u_n} [W_n(x^{(n-1)},u_n) + F_n(x^{(n)})]. \qquad (10.3)$$

В уравнении (10.3) $F_n(x^{(n)})$ можно считать известным. Используя теперь уравнение (10.3) и рассматривая всевозможные допустимые состояния системы S на (n-1)-ом шаге $x_1^{(n-1)}$, $x_2^{(n-1)}$, …, $x_i^{(n-1)}$, … находим условные оптимальные решения

$$u_n^o(x_1^{(n-1)}),\ u_n^o(x_2^{(n-1)}),\ \dots,\ u_n^o(x_i^{(n-1)}),\ \dots$$

и соответствующие значения функции (10.3)

$$F_{n-1}^o(x_1^{(n-1)}),\ F_{n-1}^o(x_2^{(n-1)}),\ \dots,\ F_{n-1}^o(x_i^{(n-1)}),\ \dots$$

Таким образом, на n-ом шаге находим условно оптимальное управление при любом допустимом состоянии системы S после (n-1)-го шага, т.е. в каком бы состоянии система не оказалась после (n-1)-го шага, нам уже известно, какое следует принять решение на n-ом шаге.

Перейдем теперь к рассмотрению функционального уравнения при k=n-2:

$$F_{n-2}(x^{(n-2)}) = \max_{u_{n-1}}[W_{n-1}(x^{(n-2)},u_{n-1})+ F_{n-1}(x^{(n-1)})]. \quad (10.4)$$

Решая функциональное уравнение (10.4) при различных состояниях на (n-2)-ом шаге, получим условно оптимальные управления $u^{o}_{n-1}(x^{(n-2)}_{i})$, i=1,2,... . Каждое из этих управлений совместно с уже выбранным управлением на последнем шаге обеспечивает максимальное значение дохода на двух последних шагах.

Последовательно осуществляя описанный выше итерационный процесс, дойдем, наконец, до первого шага. На этом шаге известно, в каком состоянии может находиться система. Поэтому уже не требуется делать предположений о допустимых состояниях системы, а остается лишь только выбрать управление, которое является наилучшим с учетом условно оптимальных управлений, уже принятых на всех последующих шагах.

Чтобы найти оптимальную стратегию управления, т.е. определить искомое решение задачи, нужно теперь пройти всю последовательность шагов, только на этот раз от начала к концу. А именно: на первом шаге в качестве оптимального управления u^{*}_{1} возьмем найденное условно оптимальное управление u^{o}_{1}. На втором шаге найдем состояние x^{*}_{1}, в которое переводит систему управление u^{*}_{1}. Это состояние определяет найденное условно оптимальное управление u^{o}_{2}, которое теперь будем считать оптимальным. Зная u^{*}_{2}, находим x^{*}_{2}, а значит, определяем u^{*}_{3} и т.д. В результате этого находим решение задачи, т.е. максимально возможный доход и оптимальную стратегию управления, включающую оптимальные управления на отдельных шагах.

Из изложенного видно, что этот процесс является довольно громоздким. Однако использование ЭВМ позволяет находить на основе метода динамического программирования решение и более сложных практических задач.

Используя метод динамического программирования, найдем решение для двух частных задач.

10.3. Решение задач

Решение задачи I.

Состояние системы к началу k-го года определяется фактическим временем использования оборудования (его возрастом) $\tau^{(k)}$. В качестве управлений, как уже говорилось в 10.1, выступают решения о замене (u_1 = З) и сохранении (u_2 = С) оборудования. Отметим также, что задача обладает свойствами аддитивности и отсутствия последействия. Решая задачу методом динамического программирования, на первом этапе при движении от начала 5-го года пятилетки к началу 1-го года для каждого допустимого состояния оборудования найдем условное оптимальное управление, а на втором этапе при движении от начала 1-го года пятилетки к началу 5-го года из условных оптимальных решений для каждого года составим оптимальный план замены оборудования на пятилетку.

Так как (см. 10.1) прибыль предприятия за k-ый год пятилетки (k=1,...,5) составит

$$W_k(\tau^{(k)} u_k) = \begin{cases} R(\tau^{(k)}) - Z(\tau^{(k)}) & \text{при } u_k = \text{С}, \\ R(0) - Z(0) - 40 & \text{при } u_k = \text{З}, \end{cases}$$

то уравнение Беллмана имеет вида.

$$F_k(\tau^{(k)}) = \max_{u_k} [W_k(\tau^{(k)}, u_k) + F_{k+1}(\tau^{(k+1)})] =$$

$$= \max \begin{cases} R(\tau^{(k)}) - Z(\tau^{(k)}) + F_{k+1}(\tau^{(k+1)}) & \text{при } u_k = \text{С}, \\ R(0) - Z(0) - 40 + F_{k+1}(1) & \text{при } u_k = \text{З}. \end{cases} \qquad (10.5)$$

Используя уравнение Беллмана, определим условно оптимальные решения для последнего (5-го) года пятилетки, в связи с чем находим множество допустимых состояний оборудования к началу данного года. Так как к началу пятилетки имеется новое оборудование ($\tau^{(1)} =$ о), то возраст оборудования к началу 5-го года может составлять 1, 2, 3 и 4 года. Поэтому допустимые состояния системы на данный период времени таковы $\tau_1^{(5)} = 1$, $\tau_2^{(5)} = 2$, $\tau_3^{(5)} = 3$, $\tau_4^{(5)} = 4$.

Для каждого из этих состояний найдем условно оптимальное решение и соответствующее значение функции $F_5(\tau^{(5)})$.

Из (10.5) и соотношения $F_6(\tau^{(6)}) =$ о (так как рассматривается последний год расчетного периода) следует

$$F_5(\tau^{(5)}) = \max \begin{cases} R(\tau^{(5)}) - Z(\tau^{(5)}), \\ R(0) - Z(0) - 40. \end{cases}$$

Подставляя в полученную формулу вместо $\tau^{(5)}$ его значения и учитывая данные таблицы 10.1, находим

$$F_5(1) = \max \begin{Bmatrix} R(1) - Z(1) \\ R(0) - Z(0) - 40 \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 75 - 25 \\ 80 - 20 - 40 \end{Bmatrix} = 50$$

при U = C;

$$F_5(2) = \max \begin{Bmatrix} R(2) - Z(2) \\ R(0) - Z(0) - 40 \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 65 - 30 \\ 80 - 20 - 40 \end{Bmatrix} = 35$$

при U = C;

$$F_5(3) = \max \begin{Bmatrix} R(3) - Z(3) \\ R(0) - Z(0) - 40 \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 60 - 35 \\ 80 - 20 - 40 \end{Bmatrix} = 25$$

при U = C;

$$F_5(4) = \max \begin{Bmatrix} R(4) - Z(4) \\ R(0) - Z(0) - 40 \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 60 - 45 \\ 80 - 20 - 40 \end{Bmatrix} = 20$$

при U = З.

Полученные результаты вычислений сведем в табл. 10.2.

Таблица 10.2

Возраст оборудования, $\tau^{(5)}$ лет	Значения функции дохода F5, тыс. руб.	Условно оптимальное решение
1	50	С
2	35	С
3	25	С
4	20	З

Рассмотрим теперь возможные состояния оборудования к началу 4-го года пятилетки. Очевидно, допустимыми состояниями являются $\tau_1^{(4)} = 1$, $\tau_2^{(4)} = 2$, $\tau_3^{(4)} = 3$. Для каждого из них определяем условно оптимальное решение и соответствующее значение функции $F_4(\tau^{(4)})$. Для этого используем уравнение (10.5) и данные табл. 10.1 и табл. 10.2. Имеем:

$$F_4(1) = \max \left\{ \begin{matrix} R(1) - Z(1) + F_5(2) \\ R(0) - Z(0) - 40 + F_5(1) \end{matrix} \right\} = \max \left\{ \begin{matrix} 75 - 25 + 35 \\ 80 - 20 - 40 + 50 \end{matrix} \right\} = 85$$

при U = C;

$$F_4(2) = \max \left\{ \begin{matrix} R(2) - Z(2) + F_5(3) \\ R(0) - Z(0) - 40 + F_5(1) \end{matrix} \right\} = \max \left\{ \begin{matrix} 65 - 30 + 25 \\ 80 - 20 - 40 + 50 \end{matrix} \right\} = 70$$

при U = C;

$$F_4(3) = \max \left\{ \begin{matrix} R(3) - Z(3) + F_5(4) \\ R(0) - Z(0) - 40 + F_5(1) \end{matrix} \right\} = \max \left\{ \begin{matrix} 60 - 35 + 20 \\ 80 - 20 - 40 + 50 \end{matrix} \right\} = 70$$

Полученные результаты вычислений сведем в табл. 10.3.

Таблица 10.3

Возраст оборудования, $\tau^{(4)}$ лет	Значения функции дохода F4, тыс. руб.	Условно оптимальное решение
1	85	С
2	70	С
3	70	З

Определим теперь условно оптимальное решение для каждого из допустимых состояний оборудования к началу 3-го года пятилетки. Очевидно, такими состояниями являются $\tau_1^{(3)} = 1$ и $\tau_2^{(3)} = 2$. В соответствии с уравнением (10.5) имеем:

$$F_3(\tau_1^{(3)}) = \max \left\{ \begin{array}{l} R(1) - Z(1) + F_4(2) \\ R(0) - Z(0) - 40 + F_4(1) \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} 75 - 25 + 70 \\ 80 - 20 - 40 + 85 \end{array} \right\} = 120$$

при U = C;

$$F_3(\tau_2^{(3)}) = \max \left\{ \begin{array}{l} R(2) - Z(2) + F_4(3) \\ R(0) - Z(0) - 40 + F_4(1) \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} 65 - 30 + 70 \\ 80 - 20 - 40 + 85 \end{array} \right\} = 105$$

Полученные результаты вычислений сведем в табл. 10.4.

Таблица 10.4

Возраст оборудования, $\tau^{(3)}$ лет	Значения функции дохода F3, тыс. руб.	Условно оптимальное решение
1	120	С
2	105	З

Наконец, к началу 2-го года пятилетки возраст оборудования может быть равен только лишь одному году. Поэтому

$$F_2(1) = \max \begin{Bmatrix} R(1) - Z(1) + F_3(2) \\ R(0) - Z(0) - 40 + F_3(1) \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 75 - 25 + 105 \\ 80 - 20 - 40 + 120 \end{Bmatrix} = 155$$

при U = З.

Так как к началу пятилетки установлено новое оборудование ($\tau_1^{(1)}=0$), то

$$F_1(0) = R(0) - Z(0) + F_2(1) = 80-20+155 = 215.$$

Просматривая полученные результаты в обратном порядке» получим: для 1-го года пятилетки решение единственно — следует сохранить оборудование. Значит, возраст оборудования к началу 2-го года пятилетки равен одному году. Тогда оптимальным решением для 2-го года пятилетки является решение о сохранении оборудования. Реализация такого решения приводит к тому, что возраст оборудования к началу 3-го года пятилетки становится равным двум годам. При таком возрасте (см. табл. 10.4) оборудование следует заменить. После замены оборудования его возраст к началу 4-го года пятилетки составит один год. Как видно из табл. 10.3, при таком возрасте оборудования его менять не следует. Поэтому возраст оборудования к началу 5-го года пятилетки составит два года, а значит согласно табл. 10.2 оборудование менять нецелесообразно.

Итак, получается следующий оптимальный план замены оборудования (табл. 10.5).

Таблица 10.5

	Годы пятилетки				
	1	2	3	4	5
Оптимальное решение	Сохранить оборудование	Сохранить оборудование	Произвести замену оборудования	Сохранить оборудование	Сохранить оборудование

Максимальная прибыль предприятия равна 215 тыс.руб.

Общая схема возможных состояний системы и управлений за пятилетку с указанием дохода за каждый год пятилетки приведена на рис.10.1.

Решение задачи 2. Решим задачу при A = 700 тыс. руб., n = 3 (число предприятий). Значения функций f_i приведены в табл. 10.6.

Таблица 10.6

Объем капиталовложений X_i, тыс.руб	Прирост выпуска продукции $f_i(x_i)$ в зависимости от объема капиталовложений, тыс.руб.		
	Предприятие 1	Предприятие 2	Предприятие 3
0	0	0	0
100	30	50	40
200	50	80	50
300	90	90	110
400	110	150	120
500	170	190	180
600	180	210	220
700	210	220	240

Задача состоит в определении таких капиталовложений x_1^*, x_2^*, x_3^*, которые максимизируют прирост выпуска продукции, т.е. функции $W=\sum_{i=1}^{3} f_i(x_i)$, и удовлетворяют условию $\sum_{i=1}^{3} x_i^* = A$.

Для решения задачи составим уравнения Беллмана:

$$F_3(X^{(3)}) = f_3(x_3),\ x_3 = X^{(3)},$$

где $X^{(3)}$ — допустимое состояние на 3-ем шаге, т.е. остаточный объем капиталовложений на 3-ем предприятии;

$$F_2(X^{(2)}) = \max_{0 \le x_2 \le X^{(2)}} (f_2(x_2) + F_3(X^{(3)})),$$

где $X^{(2)}$ -допустимое состояние на 2-ом шаге, т.е. остаточный объем капиталовложений на 2-ом предприятии, $X^{(3)} = X^{(2)} — x_2$;

$$F_1(X^{(1)}) = \max_{0 \le x_1 \le X^{(1)}} (f_1(x_1) + F_2(X^{(2)})),$$

где $X^{(1)}$ — допустимое состояние на 1-ом шаге, т.е. остаточный объем капиталовложений на 1-ом предприятии, $X^{(2)} = X^{(1)} - x_1$, $X^{(1)} = A$.

Таким образом, значения функции F_3 находятся из табл. 10.6 по значениям функции f_3.

Допустимые состояния на 2-ом шаге могут быть:

$$x_o^{(2)}=0;\quad x_1^{(2)}=100;\quad x_2^{(2)}=200;\quad x_3^{(2)}=300;\quad x_4^{(2)}=400;\quad x_5^{(2)}=500;$$

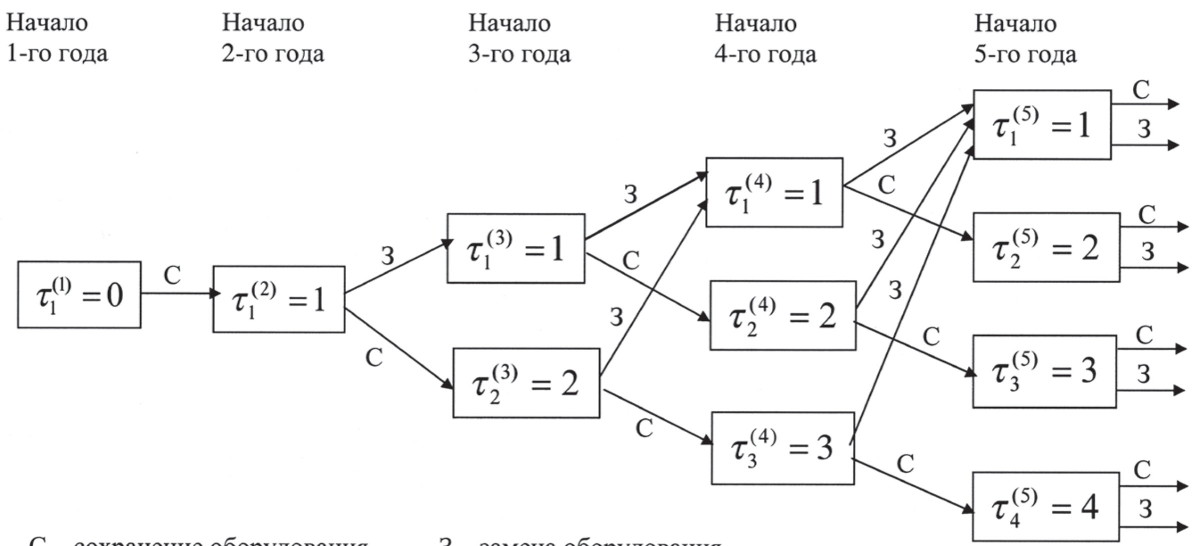
$$x_6^{(2)}=600;\quad x_7^{(2)}=700.$$

Тогда

$$F_2(0) = f_2(0) + F_3(0);$$

$$F_2(100) = \max_{0 \le x_2 \le 100} (f_2(x_2) + f_3(100 - x_2)) = \max \begin{Bmatrix} f_2(100) + f_3(0) \\ f_2(0) + f_3(100) \end{Bmatrix} =$$

$$= \max \begin{Bmatrix} \boxed{50+0} \\ 0+40 \end{Bmatrix} = 50 \qquad \text{при} \qquad x_2 = 100,\ x_3 = 0;$$



С – сохранение оборудования, З – замена оборудования.

Рис. 10.1. Общая схема возможных состояний системы и управлений за пятилетку

$$F_2(200) = \max_{0 \le x_2 \le 200} (f_2(x_2) + f_3(200 - x_2)) = \max \left\{ \begin{array}{l} f_2(200) + f_3(0) \\ f_2(100) + f_3(100) \\ f_2(0) + f_3(200) \end{array} \right\} =$$

$$= \max \left\{ \begin{array}{l} 80 + 0 \\ \boxed{50 + 40} \\ 0 + 50 \end{array} \right\} = 90 \qquad \text{при} \qquad x_2 = 100,\ x_3 = 100;$$

$$F_2(300) = \max_{0 \le x_2 \le 300} (f_2(x_2) + f_3(300 - x_2)) = \max \left\{ \begin{array}{l} f_2(300) + f_3(0) \\ f_2(200) + f_3(100) \\ f_2(100) + f_3(200) \\ f_2(0) + f_3(300) \end{array} \right\} =$$

$$= \max \left\{ \begin{array}{l} 90 + 0 \\ \boxed{80 + 40} \\ 50 + 50 \\ 0 + 110 \end{array} \right\} = 120 \qquad \text{при} \qquad x_2 = 200,\ x_3 = 100;$$

$$F_2(400) = \max_{0 \le x_2 \le 400} (f_2(x_2) + f_3(400 - x_2)) = \max \left\{ \begin{array}{l} f_2(400) + f_3(0) \\ f_2(300) + f_3(100) \\ f_2(200) + f_3(200) \\ f_2(100) + f_3(300) \\ f_2(0) + f_3(400) \end{array} \right\} =$$

$$= \max \left\{ \begin{array}{l} 150 + 0 \\ 90 + 40 \\ 80 + 50 \\ \boxed{50 + 110} \\ 0 + 120 \end{array} \right\} = 160 \qquad \text{при} \qquad x_2 = 100,\ x_3 = 300;$$

$$F_2(500) = \max_{0 \le x_2 \le 500} (f_2(x_2) + f_3(500-x_2)) = \max \begin{Bmatrix} f_2(500) + f_3(0) \\ f_2(400) + f_3(100) \\ f_2(300) + f_3(200) \\ f_2(200) + f_3(300) \\ f_2(100) + f_3(400) \\ f_2(0) + f_3(500) \end{Bmatrix} =$$

$$= \max \begin{Bmatrix} \boxed{190 + 0} \\ \boxed{150 + 40} \\ 90 + 50 \\ \boxed{80 + 110} \\ 50 + 120 \\ 0 + 180 \end{Bmatrix} = 190$$

при $x_2 = 500,\ x_3 = 0$,

или $x_2 = 400,\ x_3 = 100$,

или $x_2 = 200,\ x_3 = 300$;

$$F_2(600) = \max_{0 \le x_2 \le 600} (f_2(x_2) + f_3(600-x_2)) = \max \begin{Bmatrix} f_2(600) + f_3(0) \\ f_2(500) + f_3(100) \\ f_2(400) + f_3(200) \\ f_2(300) + f_3(300) \\ f_2(200) + f_3(400) \\ f_2(100) + f_3(500) \\ f_2(0) + f_3(600) \end{Bmatrix} =$$

$$= \max \begin{Bmatrix} 210 + 0 \\ \boxed{190 + 40} \\ 150 + 50 \\ 90 + 110 \\ 80 + 120 \\ \boxed{50 + 180} \\ 0 + 220 \end{Bmatrix} = 230$$

при $x_2 = 500,\ x_3 = 100$

или $x_2 = 100,\ x_3 = 500$;

$$F_2(700) = \max_{0 \le x_2 \le 700} (f_2(x_2) + f_3(700 - x_2)) = \max \begin{Bmatrix} f_2(700) + f_3(0) \\ f_2(600) + f_3(100) \\ f_2(500) + f_3(200) \\ f_2(400) + f_3(300) \\ f_2(300) + f_3(400) \\ f_2(200) + f_3(500) \\ f_2(100) + f_3(600) \\ f_2(0) + f_3(700) \end{Bmatrix} =$$

$$= \max \begin{Bmatrix} 220 + 0 \\ 210 + 40 \\ 190 + 50 \\ 150 + 110 \\ 90 + 120 \\ 80 + 180 \\ \boxed{50 + 220} \\ 0 + 240 \end{Bmatrix} = 270 \qquad \text{при} \quad x_2 = 100,\ x_3 = 600;$$

Допустимое состояние на 1-ом шаге может быть только $x^{(1)} = 700$.

Тогда

$$F_1(700) = \max_{0 \le x_1 \le 700} (f_1(x_1) + F_2(700 - x_1)) =$$

$$= \max \begin{Bmatrix} f_1(700) + F_2(0) \\ f_1(600) + F_2(100) \\ f_1(500) + F_2(200) \\ f_1(400) + F_2(300) \\ f_1(300) + F_2(400) \\ f_1(200) + F_2(500) \\ f_1(100) + F_2(600) \\ f_1(0) + F_2(700) \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 210 + 0 \\ 180 + 50 \\ 170 + 90 \\ 110 + 120 \\ 90 + 160 \\ 50 + 190 \\ 30 + 230 \\ 0 + 270 \end{Bmatrix} = 270$$

при $x_1 = 0$, $x_2 = 100$, $x_3 = 600$.

Таким образом, max W = 270 и оптимальное распределение капиталовложений следующее: $x_1^* = 0$; $x_2^* = 100$; $x_3^* = 600$.

Раздел IV
ПРИКЛАДНЫЕ МОДЕЛИ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Глава 11
МОДЕЛИ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ

11.1. Области применения сетевого планирования и управления

Решение хозяйственных задач связано с осуществлением ряда работ (действий, мероприятий, операций), одни из которых можно выполнять одновременно, параллельно, а другие — только в определенной последовательности. Например, чтобы начать производство нового изделия, необходимо прежде всего разработать его конструкцию, технологию производства, а затем осуществлять четыре вида параллельных работ:

1) проектировать, заказывать, получать и монтировать необходимое оборудование;

2) планировать размещение оборудования, рассчитывать требуемые площади и строить помещения;

3) заключать договора с другими предприятиями о поставках необходимых материалов, сырья и комплектующих деталей;

4) набирать и готовить кадры будущих работников.

В современных условиях необходимо разработать и использовать сравнительно простые и эффективные методы руководства комплексными разработками, вооружить руководителя совершенным инструментом, позволяющим в любых, даже самых сложных ситуациях, быстро принимать наиболее правильные решения.

Поиски более эффективных способов планирования сложных процессов привели к созданию принципиально новых методов сетевого планирования и управления (СПУ). Они применимы в тех случаях, когда конечная цель достигается путем выполнения ряда взаимосвязанных и взаимозависимых работ, входящих в единый комплекс той или иной разработки.

Эффект, достигаемый за счет СПУ, обусловлен в первую очередь внесением строгих логических элементов в формирование плана, позволивших привлечь для анализа и синтеза планов современный математический аппарат и средства вычислительной техники.

В силу универсальности СПУ этот аппарат используется для формирования планов строительной индустрии во всех видах строительства, в индивидуальном и мелкосерийном производстве, в научно-исследовательских, опытно-конструкторских и проектных организациях, в производстве кинофильмов и при разработке народнохозяйственных планов, в горнодобывающей промышленности и геологоразведочных работах.

Весьма широким является диапазон применения СПУ: от задач, лично решаемых руководителем любого уровня, до создания на основе сетевых методов постоянно действующих автоматических систем управления (АСУ) крупного масштаба.

11.2. Назначение, характеристика и структура систем СПУ

Системы сетевого планирования и управления (СПУ), являющиеся разновидностью автоматизированных систем управления, предназначены для управления деятельностью, направленной на достижение определенной цели.

Объектом управления в системах СПУ является коллектив, располагающий определенными ресурсами и выполняющий комплекс работ, призванный обеспечить достижение намеченной цели. Метод СПУ позволяет в любых, даже самых сложных ситуациях, быстро принимать наиболее правильные решения, выявить резервы времени и средств на одних участках работы и перебросить их на другие, более напряженные.

Важной особенностью систем СПУ является системный подход к вопросам организации управления, согласно которому коллективы исполнителей, принимающие участие в проекте и объединенные общностью поставленной перед ними задачи, несмотря на их различную ведомственную подчиненность, рассматриваются как звенья единой сложной организационной системы.

Для отображения процесса выполнения проекта и управления им в системах СПУ используется сетевая модель.

Системы СПУ можно характеризовать следующими признаками, определяющими структуру, основные принципы построения и функционирования СПУ, объемы информации, методы и технические средства ее сбора, передачи, переработки и отображения:

а) уровень руководства, использующий данную систему СПУ;

б) количество сетей, описывающих проект;

в) объем сетевой модели;

г) число конечных целей проекта;

д) ограничения по ресурсам;

е) планируемые и контролируемые параметры проекта.

Структура систем СПУ обусловлена необходимостью выполнения основных процессов управления: получения информации о состоянии проекта, преобразования информации, формирования команд управления, передачи и исполнения команд управления.

11.3. Сетевой график. Критический путь

Важнейшей основой метода СПУ является сетевой график.

Сетевой график представляет собой графическое изображение последовательности выполнения комплексной разработки, показывающее взаимосвязь и взаимозависимость отдельных этапов, выполнение которых обеспечивает достижение конечной цели разработки.

Достоинство сетевых графиков заключается в их наглядности и сравнительной простоте исполнения. Сетевые графики позволяют:

а) выявлять важнейшие работы, от своевременного выполнения которых зависит соблюдение сроков окончания всей разработки;

б) наглядно представлять ход разработки в целом, взаимосвязь и взаимозависимость отдельных этапов разработки;

в) определять общую потребность в рабочей силе и материаль-ных ресурсах для выполнения плана;

г) выявлять резервы времени и материальные ресурсы с целью наиболее эффективного выполнения плана;

д) совершенствовать методы планирования и устанавливать строгий ритм в работе;

е) использовать вычислительную технику для расчета показателей сетевых графиков.

Приведенный перечень преимуществ применения методов сетевого планирования и управления не является исчерпывающим, однако дает возможность оценить его огромное мобилизующее значение как эффективного средства улучшения организации труда и управления производством.

Таким образом, методы СПУ, обеспечивая руководителя необходимой информацией о ходе выполнения разработки, дают ему возможность принимать решения, направленные на достижение максимального эффекта при минимальных затратах времени и ресурсов, поэтому применение методов СПУ близко подходит к возможности разработки оптимальных планов.

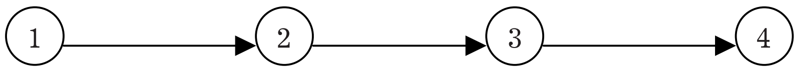
Рассмотрим теперь основные термины, применяемые при пользовании сетевыми графиками.

Работа характеризует конкретный этап трудового процесса по выполнению определенной операции комплексной разработки. Этот термин означает, что для осуществления работы требуются затраты рабочей силы, материальных ресурсов и времени.

Событие является фактом окончания всех предшествующих данному событию работ, либо началом работ, следующих непосредственно за данным событием. Для совершения события не требуется никаких затрат, а само событие не имеет продолжительности.

При составлении сетевого графика необходимо обеспечить логическую последовательность наступления событий, которая определяется взаимосвязью и последовательностью выполнения соответствующих работ. На сетевом графике события обозначаются кружками, в которые в определенной последовательности вписываются цифры.

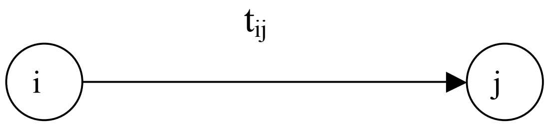
Приведем следующий простейший график:



Из графика следует, что событие 3 не может наступить, пока не совершится событие 2 и т.д. При этом событие 2 называется последующим по отношению к событию 1, так же как событие 4 является последующим по отношению к событию 3. Событие 3 — предшествующее по отношению к событию 4. В указанных определениях имеется в виду, что события следуют одно за другим и между ними нет промежуточных событий. Одно событие может иметь и несколько предшествующих, либо последующих событий. Например, на графике (рис. 11.1) событие 6 имеет два предшествующих события (4 и 5).

Если наступлению данного события не предшествует какая-либо работа, то это событие называется исходным (на рис. 11.1 это событие 1). Событие, не имеющее последующих работ, называется завершающим, т.е. наступлением завершающего события достигается конечная цель данной разработки (на рис. 11.1 это событие 11).

Операция — это сама работа или действие. Она обозначается:



Это означает, что начальное событие i происходит раньше конечного события j , а длительность операции (i — j); которая обозначается стрелкой, будет равна t_{ij}.

Фиктивной называется работа, не требующая затрат рабочего времени и ресурсов на ее выполнение. Она характеризует зависимость выполнения данной работы от выполнения какой-то другой. Длительность этой работы t_{ij}. = 0 (на рис. 11.1 это работа 7—9).

Продолжительность выполнения работы измеряется в единицах времени: часах, днях, неделях и т.д.

Любая последовательность работ в сети, в которой конечное событие каждой работы последовательности совпадает с начальным событием следующей за ней работы, называется путем.

Следует различать два вида пути:

1) полным путем называется непрерывная последовательность выполнения работ от исходного до завершающего события;

2) критическим путем называется путь от исходного до завершающего события, который характеризуется наибольшей продолжительностью выполнения работ, находящихся на этом пути.

Первичный сетевой график составляется на основе исходных (первичных) данных, представленных ответственными исполнителями этапов комплексной работы до его оптимизации.

Рассмотрим детальнее сетевой график некоторого комплекса работ, который необходимо выполнить, чтобы организовать производство нового вида изделия (рис. 11.1).

В практическом применении сетевых графиков может быть различное количество событий и работ, характеризующих те или иные виды разработок. При этом, если количество событий не превышает 300, графики обсчитывают с помощью простейших микрокалькуляторов. При числе же событий свыше 300, и в особенности 500—1000 и более, параметры сети рассматриваются при помощи ЭВМ.

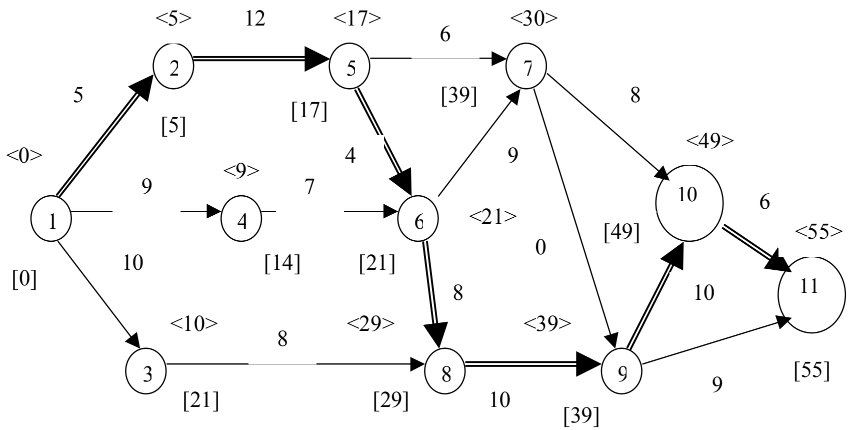


Рис. 11.1

Определяем продолжительности полных путей, для чего составляем табл.11.1.

Отсюда видно, что продолжительность критического пути, т.е. пути, имеющего наибольшую продолжительность, равна $T_{кр} = 55$ (дней). Это означает, что, при прочих равных условиях, раньше, чем через 55 (дней) данная работа не закончится. Следовательно, продолжительность критического пути представляет собой наиболее ранний срок завершения всей работы от исходного до завершающего события.

В сети может быть несколько критических путей.

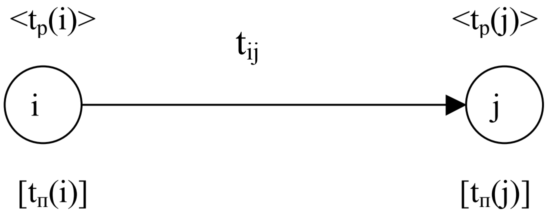
Таблица 11.1

Вид полного пути	Продолжительность пути Т	
1-2-5-7-10-11	5+12+6+8+6	=37
1-2-5-7-9-10-11	5+12+6+0+10+6	=39
1-2-5-7-9-11	5+12+6+0+9	=32
1-2-5-6-7-10-11	5+12+4+9+8+6	=44
1-2-5-6-7-9-10-11	5+12+4+9+0+10+6	=46
1-2-5-6-7-9-11	5+12+4+9+0+9	=39
1-2-5-6-8-9-10-11	5+12+4+8+10+10+6	=55
1-2-5-6-8-9-11	5+12+4+8+10+9	=48
1-3-8-9-10-11	9+7+9+8+6	=39
1-3-8-9-11	9+7+9+0+10+6	=41
1-4-6-7-10-11	9+7+9+0+9	=34
1-4-6-7-9-10-11	9+7+8+10+10+6	=50
1-4-6-7-9-11	9+7+8+10+9	=43
1-4-6-8-9-10-11	10+8+10+10+6	=44
1-4-6-8-9-11	10+8+10+9	=37

11.4. Временные параметры сетей. Резервы времени

Основными временными параметрами сетей являются ранние и поздние сроки наступления событий. Зная их, можно вычислить остальные параметры сети — сроки начала и окончания работ и резервы времени событий и работ.

Рассмотрим работу (i — j):



Ранний возможный срок <$t_р(i)$ наступления события j есть наименьший возможный срок окончания данной работы:

$$t_р(j) = \max_i \, [t_р(i) + t_{ij}], \tag{11.1}$$

т.е. раннее возможное событие j равно раннему возможному предшествующему событию i, сложенному с длительностью работы (i — j).

Когда для события j имеется несколько ранних возможных, то берется наибольшее.

Очевидно, максимальное значение раннего окончания работы будет характеризовать продолжительность критического пути ($T_{кр}$).

Поздним допустимым сроком наступления события называется максимально допустимый срок наступления этого события, не требующий увеличения времени на осуществление всего проекта.

$$t_п(i) = \max_i \, [t_п(j) - t_{ij}]. \tag{11.2}$$

Позднее допустимое равняется разности позднего окончания события j и продолжительности последующих работ.

Если для события i будет несколько поздних допустимых, то берется наименьшее.

Работы, у которых <$t_р(j)$ и [$t_п(i)$] совпадают, называются критическими работами, лежащими на критическом пути. Это есть второй способ определения критического пути.

Как уже отмечалось, продолжительность критического пути больше продолжительности любого другого пути сетевого графика.

Разность между продолжительностью критического пути $T_{кр}$ и продолжительностью пути L − T(L) называется резервом времени пути L.

$$R(L) = T_{кр} - T(L). \tag{11.3}$$

Резерв времени R(L) показывает, на сколько могут в сумме быть увеличены продолжительности работ, принадлежащих пути L, без влияния на срок проекта.

Различают четыре резерва времени:

1. Полный резерв ПР= $R_п(i;j) = t_п(j) - t_р(i) - t_{ij}$, (11.4)

2. Свободный резерв СР= $R_с(i;j) = t_р(j) - t_р(i) - t_{ij}$, (11.5)

3. Независимый резерв НР= $R_н(i;j) = t_р(j) - t_п(i) - t_{ij}$, (11.6)

4. Гарантийный резерв ГР= $R_г(i;j) = t_п(j) - t_п(i) - t_{ij}$ю (11.7)

Полный резерв времени — это количество времени, на которое можно перенести начало работ или увеличить продолжительность без изменения общего срока проекта.

Из этого определения следует, что полный резерв времени по отдельным работам позволяет маневрировать ресурсами с тем, чтобы наилучшим образом выполнить всю разработку. Полный резерв времени является зависимым резервом, т.е. его применение может привести к изменению резервов по другим работам. Поэтому при использовании полного резерва времени обычно пересчитывают параметры сетевого графика для определения нового распределения резервов.

Свободный резерв времени — это количество времени, на которое можно перенести начало работ или увеличить их продолжительность без изменения раннего начала последующих работ, этот резерв может быть использован непосредственно исполнителем той или иной работы, и это не повлечет за собой изменения условий производства последующих работ. Полный же резерв времени может быть использован только с разрешения центра, так как его использование изменяет ранние сроки начала последующих работ.

Всегда ПР $\geq$ СР.

На критическом пути все резервы времени равны нулю.

Это свойство может служить третьим определением критического пути.

Независимый резерв времени означает запас времени, который имеет исполнитель, когда предшествующие работы заканчиваются в неудобные для него сроки, а он заканчивает свою работу в ранний срок, не расходуя резервов следующих за ним работ.

Гарантийный резерв означает для исполнителя работы резерв времени, который он имеет, когда исполнители предшествующих работ заканчивают их в неудобные для него поздние допустимые сроки, но и он сдает свою работу в поздний срок.

Если $R_с(i;j)$ и $R_н(i;j)$ имеют отрицательные значения, то эти резервы заменяются нулем.

Существуют различные формы расчета параметров сети: табличный и графический. Наиболее удобной является табличная форма.

Для рассмотренного примера сетевого графика (рис. 11.1) в табл. 11.2 приведены ранние и поздние сроки окончания и начала работ и резервы времени.

При анализе графика прежде всего обращают внимание на критические работы, от которых в решающей степени зависит своевременное и качественное выполнение всей разработки. Следует также обращать внимание на наличие резервов времени по отдельным работам. Например, по работе (5, 7) свободный резерв составляет 7 дней. Это означает, что продолжительность выполнения данной работы при необходимости можно “растянуть” в пределах семи дней, либо начать эту работу позже.

Нахождение величины резервов нельзя рассматривать, однако, как оценку времени простоя исполнителей. На выполнение работ сетевого графика при правильном планировании выделяются ресурсы (в человеко-часах, машино-часах и т. д.), равные суммарной трудоемкости всех предусмотренных работ.

Оценка резервов времени позволяет более рационально распределить трудовые и материальные ресурсы по работам графика. Большинство работ обладает закономерностью: уве-

Таблица 11.2

Работа (i—j)	Продолжительность работы t_{ij}	Начало работы		Конец работы		Резервы времени				Работы, лежащие на критическом пути
		ранний срок ‹$t_р(i)$›	поздний срок [$t_п(i)$]	ранний срок ‹$t_р(j)$›	поздний срок [$t_п(j)$]	ПР	СР	НР	ГР	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
(1, 2)	5	0	0	5	5	0	0	0	0	1—2
(1, 3)	10	0	0	10	21	11	0	0	11	
(1, 4)	9	0	0	9	14	5	0	0	5	
(2, 5)	12	5	5	17	17	0	0	0	0	2—5
(3, 8)	8	10	21	29	29	11	11	0	0	
(4, 6)	7	9	14	21	21	5	5	0	0	
(5, 6)	4	17	17	21	21	0	0	0	0	5—6
(5, 7)	6	17	17	30	39	16	7	7	16	
(6, 7)	9	21	21	30	39	9	0	0	9	
(6, 8)	8	21	21	29	29	0	0	0	0	6—8
(7, 9)	0	30	39	39	39	9	9	0	0	
(7, 10)	8	30	39	49	49	11	11	2	2	
(8, 9)	10	29	29	39	39	0	0	0	0	8—9
(9,10)	10	39	39	49	49	0	0	0	0	9—10

личивая число исполнителей, удается уменьшить длительность выполнения работы. Эта закономерность может иметь разные формы, но чаще других встречается гиперболическая зависимость $t=a+\frac{в}{x}$ длительности работы t от количества работников x. На рис. 11.2 гиперболическая зависимость $t=1+\frac{15}{x}$ показывает, что одну и ту же работу один человек делает

16 месяцев, три человека — 6 месяцев, пять человек — 4 месяца, а пятнадцать человек — 2 месяца.

Перебрасывая людей и технику с ненапряженных работ на напряженные работы критического пути, можно сократить сроки выполнения всего комплекса работ.

Одним из важнейших преимуществ применения сетевых графиков является возможность их оптимизации по различным признакам: по времени (сокращение $T_{кр}$), по людским ресурсам, по материальным ресурсам, по стоимости и технико-экономическим показателям, а также по различным сочетаниям этих признаков.

Так, например, оптимизация сетевого графика по времени предполагает, прежде всего, нахождение возможности сокращения продолжительности критического пути. Это может быть достигнуто различными путями.

Из сетевого графика видно, что сокращение общей продолжительности выполнения разработки возможно только за счет сокращения продолжительности выполнения работ, лежащих на критическом пути.

Действительно, можно, например, сократить продолжительность выполнения работ 5—7 или 1—3 на 5 (дней), однако такое сокращение не приведет к уменьшению продол-

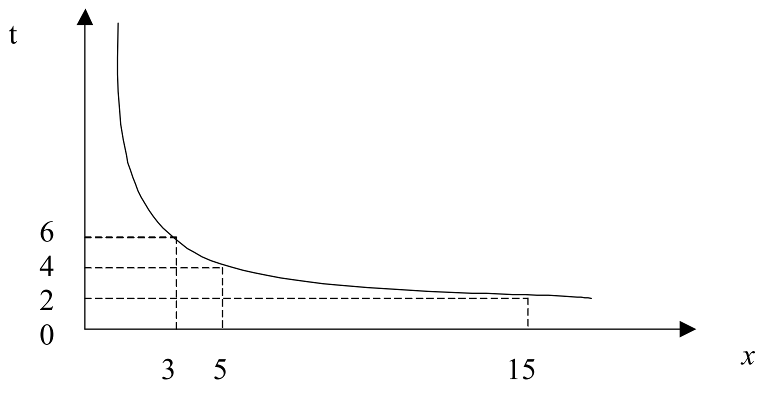


Рис. 11.2

жительности критического пути. Сократить продолжительность критического пути можно за счет сокращения продолжительности выполнения определенной критической работы (например, за счет привлечения более квалифицированных специалистов, применения средств механизации и автоматизации вычислительных работ, если таковые проводятся в большом объеме и др.), или путем расчленения какой-либо критической работы на части и параллельного их выполнения (допустим, за счет привлечения дополнительных работников, изменения взаимосвязи и последовательности выполнения работ, т.е. изменения топологии графика). Например, в качестве самостоятельного этапа работы необходимо произвести расчет технико-экономической эффективности внедрения новой техники при составлении перспективного или текущего плана. Эта работа может быть выполнена каждым отраслевым отделом (службой) управления, а не полностью планово-финансовым отделом. Этот отдел может обобщить все расчеты и подготовить сводный материал.

Например, оказалось возможным работу 8—9 расчленить на две части и какой-то период выполнять их параллельно. Пусть это мероприятие приведет к сокращению продолжительности выполнения работы 8—9 на 4 дня (с 10 до 6 дней). Тогда на сетевом графике появляется дополнительная работа 8—9 и одна фиктивная связь 8—8„. При этом продолжительность работы 8—9 может быть и более четырех дней, однако продолжительность ее выполнения не должна привести к изменению продолжительности директивного срока выполнения всей работы.

На рис. 11.3 показан скорректированный сетевой график, в который внесены соответствующие изменения. Поскольку изменена продолжительность отдельных работ и введены новые работы, необходимо пересчитать все параметры сетевого графика.

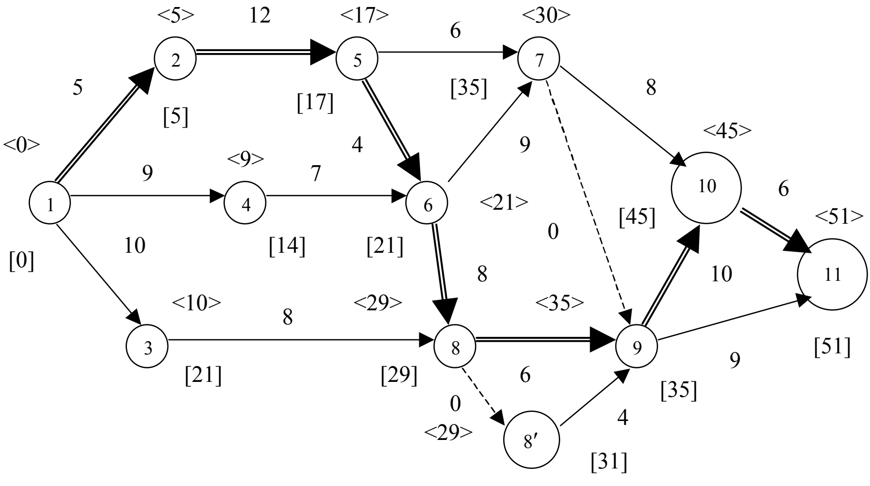


Рис. 11.3

На основе вычисления продолжительности полных путей получим следующий критический путь: 1—2—5—6—8—9—10—11 и при этом $T_{кр}$ = 51 (дню).

Одним из важнейших преимуществ сетевых графиков является возможность просто и наглядно выявить возможность оптимизации графика по людским ресурсам. Обычно оптимизация по людским ресурсам осуществляется после составления сетевых графиков и определения всех параметров. При этом имеется в виду, что найденная продолжительность критического пути является минимальной, т.е. сетевой график берется оптимизированным по времени.

Рассмотрим пример составления проекта сводного плана по управлению, используя следующие данные в табл. 11.3.

На рис. 11.4 представлен сетевой график составления проекта сводного плана.

Критический путь будет 1—2—3—(4—6)—6—12—18—19—20—21—22 и продолжительность критического пути $T_{кр}$=74 дня.

Далее при необходимости можно выполнить оптимизацию графика с целью выявления возможности сокращения общей продолжительности выполнения всей разработки.

Таблица 11.3

Работа	Наименование работ	Длительность, дни
1	2	3
(1, 2)	Подготовка приказа начальника управления к	
	составлению плана	2
(2, 3)	Совещание экономистов подчиненных предприятий	
	связи по составлению плана	1
(3, 4)	Составление проекта производственно-финансового	
	плана предприятиями связи и представление его в	
	районные управления связи	25
(3, 5)	То же, в предприятия связи областного центра	20
(3, 6)	То же, эксплуатационно-технические узлы связи	25
(6, 7)	Проверка и корректировка проектов плана по объему	
	продукции, доходам, развитию, капитальному ремонту в	
	почтовом отделе	10
(6, 8)	То же, в отделе связи	10
(6, 9)	То же, в дирекции радиотрансляционных сетей	10
(6, 10)	То же, в отделе распространения печати	10
(6, 11)	То же, в отделе кадров	8
(6, 12)	То же, в планово-финансовом отделе	12
(7, 13)	Составление сводного плана управления и	
	объяснительной записки по почтовой связи	10
(8, 14)	То же, по электросвязи	10
(9, 15)	То же, по системам телевизионной связи и	10
(10, 16)	радиофикации	8
(11, 17)	То же, по распространению печати	8
(12, 18)	То же, по подготовке кадров	
	Составление сводного плана управления по труду,	15
(18, 19)	расходам и др.	
	Обобщение планов, подготовка сводного	10
(19, 20)	производственно-финансового плана управления	3
(20, 21)	Составление сводной объяснительной записки к плану	
	Обсуждение проекта производственно-финансового	4
(21, 22)	плана у руководства управления и корректировка плана	
	Оформление проекта плана и направления его в	2
	министерство связи	

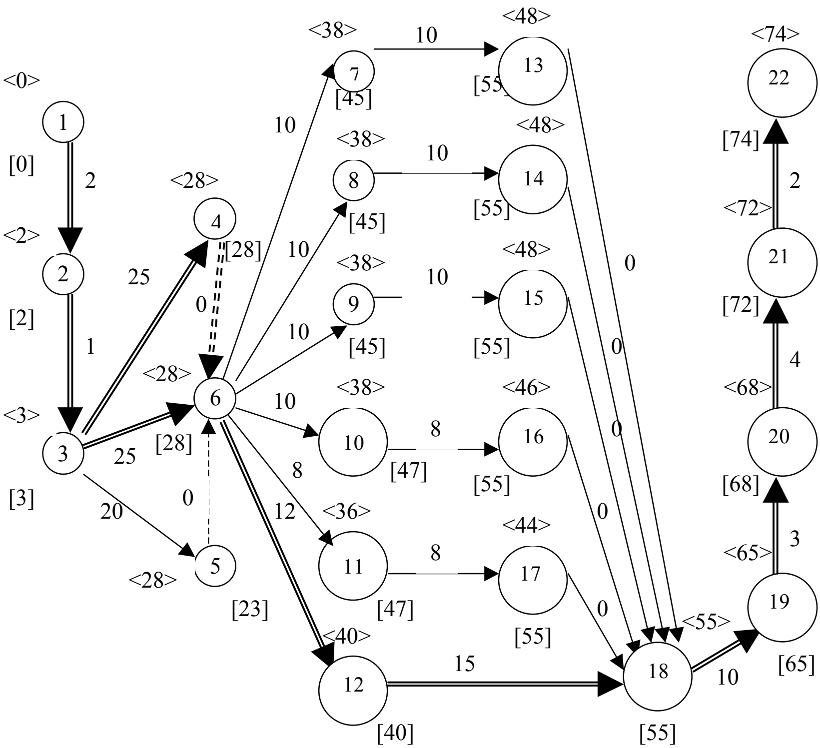


Рис. 11.4

11.5. Временные параметры вероятностных сетей

Встречаются системы, которые характеризуются тем, что время выполнения отдельной операции, равно как и время, идущее на осуществление всего проекта, представляют собой случайные величины. В этом случае наиболее важными временными параметрами вероятностных сетей являются параметры законов распределения сроков наступления всех событий сети; срок наступления завершающего события при этом совпадает с продолжительностью всего проекта.

Для определения параметров вероятностных сетей можно использовать аналитические методы, статистическое моделирование и методы усреднения.

Рассмотрим метод усреднения, который широко применяется при анализе вероятностных сетей. Суть этого метода состоит в использовании для вычисления вероятностных характеристик сети оценок математического ожидания и дисперсии работ.

Исходными данными для метода усреднения являются вероятностные оценки продолжительности каждой работы.

В сетевом планировании рассматриваются три временные оценки продолжительности работ:

1. Оптимистическая — это минимальное время (t_{min}), в течение которого может быть выполнена данная работа в предположении наиболее благоприятного стечения обстоятельств.

2. Пессимистическая — это максимально возможное время (t_{max}) выполнения данной работы в предположении наиболее неблагоприятного стечения обстоятельств.

3. Наиболее вероятная оценка продолжительности ($t_{н.в.}$) — это время выполнения данной работы при наиболее часто встречающихся условиях выполнения работ.

Продолжительность работ на основании вероятностных оценок усредняется и вероятностная сеть рассматривается как детерминированная. В этом случае в качестве детерминированных оценок продолжительности работ используются их ожидаемые (средние) значения — $t_{ож}$.

Для каждой работы оценивается также дисперсия $\sigma^2(t)$, т.е среднее значение квадрата отклонения продолжительности работы от ее ожидаемого значения.

Ожидаемое значение продолжительности работы $t_{ож}$ и ее дисперсию $\sigma^2(t)$ можно оценивать по формулам:

при двух оценках продолжительности работы

$$t_{ож} = \frac{3t_{min} + 2t_{max}}{5}, \tag{11.8}$$

$$\sigma^2(t) = \left(\frac{t_{max} - t_{min}}{5}\right)^2, \tag{11.9}$$

при трех оценках продолжительности работы

$$t_{ож} = \frac{t_{min} + 4t_{нв} + t_{max}}{6}, \qquad (11.10)$$

$$\sigma^2(t) = \left(\frac{t_{max} - t_{min}}{6}\right)^2. \qquad (11.11)$$

Значения параметров t_{min}, t_{max}, $t_{н.в.}$ определяются исполнителем работ или соответствующим экспертом. Выбор этих значений зависит от ряда обстоятельств, некоторые из которых подчас не поддаются анализу. В итоге эти величины выступают как случайные.

Ряд основных параметров вероятностных сетей — ранние и поздние сроки наступления событий и выполнения работ, резервы времени событий и работ — определяются так же, как соответствующие параметры детерминированных сетей. Необходимо лишь помнить, что в этом случае параметры являются некоторыми усредненными величинами.

Дополнительно к параметрам, определяемым для детерминированных сетей, при анализе вероятностных сетей вычисляют также оценки дисперсии сроков наступления событий, служащие мерой их возможного разброса, а также вероятности наступления события в плановые (директивные) сроки.

Оценка дисперсии $\sigma^2[t_р(j)]$ раннего срока наступления события j принимается равной сумме оценок дисперсий работ наибольшего по продолжительности пути, предшествующего событию j и определенного по ожидаемым значениям продолжительности работ.

Если таких путей несколько, то оценка дисперсии равна максимальному значению из оценок дисперсий этих путей.

В качестве приближенного закона распределения срока наступления завершающего события принимается нормальное распределение со значением $T_{ож}$ и дисперсией $\sigma^2(t)$ срока наступления этого события. В соответствии с этим вероятность $P\{T<T_Д\}$ того, что продолжительность выполнения проекта не превысит заданного срока $T_Д$, вычисляется по формуле:

$$P\{T<T_Д\}= \ 2:\left(\frac{T_Д - T_{ож}}{\sigma(T)}\right), \qquad (11.12)$$

где значение функции $\phi(x)$ берется из таблиц нормального распределения.

11.6. Сетевое планирование в условиях неопределенности

Чаще всего продолжительность выполнения работы сетевого графика является неопределенной, в математическом понимании – случайной величиной. Если известен закон распределения случайной величины, то нетрудно найти две ее важнейшие характеристики: среднее значение (МОЖ) и дисперсию. Однако, как правило, для сетевого планирования уверенно судить о законе распределения не удается. Поэтому выработана следующая методика.

Рассмотрим сетевой график следующего вида (рис. 11.5).

Временные характеристики сетевого графика даны в табл. 11.4.

Получили, что $T_{кр}$=29 (1—2—5—6—7), а его дисперсия $\sigma^2_{кр}$=9,34=1,78+4+1,78+1,78.

Процесс определения резервов времени работ не отличается от соответствующего расчета в детерминированном случае. Их значения смотри в таблице раздела “Резервы времени” (мы рассматриваем часть сетевого графика от основного, ограничившись семью событиями, где 8 заменено на 7).

В качестве приближенного закона распределения срока наступления завершающего события принимается нормаль-

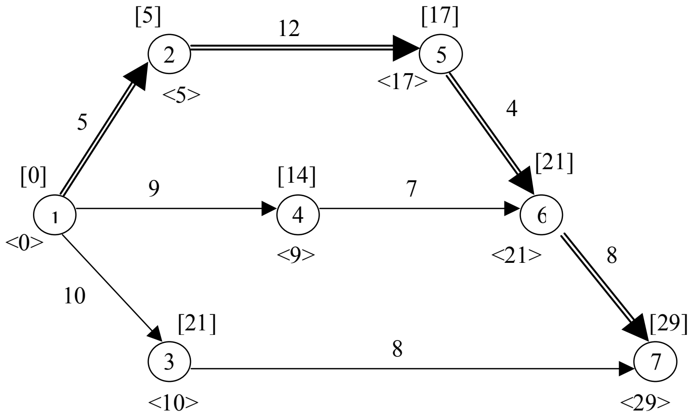


Рис. 11.5

Таблица 11.5

Работы (i—j)	Оценки времени выполнения				Дисперсия среднего времени σ^2_{ij}
	t_{min}	t_{max}	$t_{н.в.}$	$t_{ож}$	
(1, 2)	3	11	4	5	1,78
(1, 3)	6	18	9	10	4
(1, 4)	5	21	7	9	7,11
(2, 5)	8	20	11	12	4
(3, 7)	5	15	7	8	2,78
(4, 6)	4	14	6	7	2,78
(5, 6)	2	10	3	4	1,78
(6, 7)	6	14	7	8	1,78

ное распределение со значением $T_{ож}=T_{кр}$ и дисперсий $\sigma^2_{кр}(t)=$ $=\sigma^2(t)$ срока наступления этого события. В соответствии с этим вероятность $P\{T<T_Д)$ того, что продолжительность выполнения проекта не превысит заданного срока $T_Д$, вычисляется по формуле (11.12).

Для нашего случая $T_{ож}=T_{кр}=29$ с дисперсией $\sigma^2(t)=$ $=\sigma^2_{кр}=3{,}06^2$.

Тогда, если установленный срок $T_Д=31$, то вероятность выполнения комплекса работ за этот срок равна:

$$P\{T<31\} = 2{:}\Phi\left(\frac{31-29}{3{,}06}\right) = 2{\cdot}0{,}2433=0{,}4866.$$

Это означает, что имеется 48 шансов из 100, что работы будут завершены за 31 день или раньше.

Вероятность же выполнения комплекса работ за заданный срок, равный $T_Д=35$ дням, будет:

$$P\{T<35\} = 2{:}\Phi\left(\frac{31-29}{3{,}06}\right) = 2{\cdot}0{,}475=0{,}95.$$

Следует осторожно относиться к вычисленному среднему сроку завершения проекта $T_{ож}=T_{кр}$, т.к. при большой дисперсии $\sigma^2_{кр}$ вероятны весьма значительные отклонения от этого срока, ибо дисперсия срока наступления конечного события — это накопленная дисперсия всех работ критического пути, так что практически ее величина не может быть незначительной.

11.7. Оптимизация сетевых моделей

Ранее мы отмечали, что в случае необходимости общий срок выполнения проекта может быть уменьшен за счет сокращения продолжительности работ критического пути, и, что, с другой стороны, длительность некритических работ, имеющих резервы времени, может быть увеличена без ущерба для общего срока выполнения разработки. Очевидно, что сокращение или увеличение продолжительности работ связано, как правило, с возрастанием или уменьшением затрат на эти работы. Существование различных вариантов сетевого графика с разным уровнем затрат позволяет поставить вопрос, какой из вариантов сетевого графика при данной общей длительности проекта осуществляется с наименьшими затратами. При иной постановке задачи отыскивается вариант ускорения комплекса работ, требующий минимального увеличения затрат. В обоих случаях отыскивается оптимальный сетевой график.

Рассмотрим следующую задачу сетевого планирования: по каждой работе имеются следующие данные: нормальная продолжительность работы и соответствующая ей величина затрат, срочная (экстренная) длительность работы и отвечающие ей затраты, стоимость ускорения работы в расчете на единицу времени. Последняя величина в интервале между срочной и нормальной продолжительностями работ предполагается постоянной, т.е. ускорение работы и рост затрат связанны линейной зависимостью.

Предположим, что для работ графика, изображенного на рис. 11.6 и рис. 11.7, указанные данные известны и они сведены в табл. 11.5.

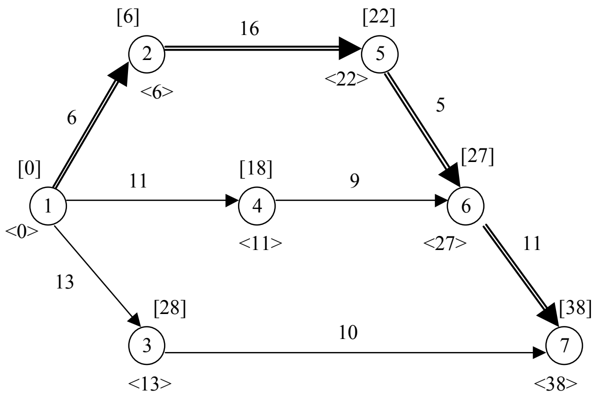


Рис. 11.6

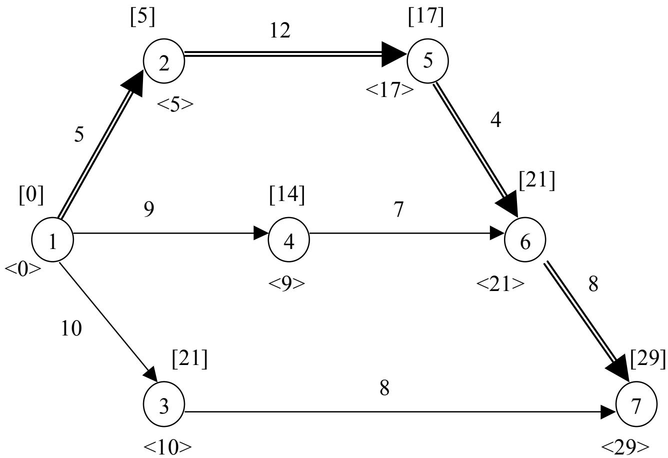


Рис. 11.7

Таблица 11.5

Исходные данные сетевого графика

Работы (i —j)	Нормальный вариант		Срочный вариант		Прирост затрат, руб. на 1 день ускорения работ
	время, дни	затраты, руб.	время, дни	затраты, руб.	
1—2	6	500	5	550	50
1—3	13	800	10	920	40
1—4	11	700	9	720	10
2—5	16	1000	12	1240	60
3—7	10	600	8	660	30
4—6	9	520	7	570	25
5—6	5	400	4	435	35
6—7	11	840	8	975	45
Итого	—	5360	—	6070	—

Ясно, что нормальной продолжительности работы соответствуют минимальные затраты на ее выполнение, поэтому увеличение длительности работы сверх нормального срока ведет к повышению затрат, что лишено смысла. Сокращение продолжительности работы по сравнению со срочным вариантом считается из-за разных причин невозможным. Таким образом, на графике определенная работа может иметь любую протяженность в промежутке между нормальной длительностью с минимальной величиной затрат и срочной длительностью с наиболее высокими затратами.

На рис. 11.6 имеем нормальную продолжительность всех работ, при этом $T^{н}_{кр}=38$ дней и общая стоимость 5360 руб., а на рис. 11.7 все работы выполняются в срочном порядке, при этом $T^{с}_{кр}=29$ дней и общая стоимость работ 6070 руб.

Исследуем вначале первый вариант с точки зрения возможности сокращения срока завершения всего комплекса работ, для чего будем сокращать продолжительность работ критического пути.

Из 4-х критических работ (рис. 11.6) выбираем (5—6) (с наименьшим приростом затрат). При срочном варианте эта работа длится 4 дня, а при нормальном — 5 дней. Тогда работу сокращаем на один день и критический путь сократится до 37 дней, удорожание проекта составит 35 руб. Дальнейшее уменьшение общего срока работы осуществляем за счет работы (6—7) (наименьший прирост затрат из оставшихся критических работ). Работу сокращаем на 3 дня, критический путь сократится до 34 дней, а удорожание составит 135 руб. Далее сокращаем работу (1—2) на 1 день, $\text{Т}_{\text{кр}}$ сократится до 33 дней, а удорожание составит 50 руб. Теперь сокращаем работу (2—5) на 4 дня, получаем критический путь по срочному варианту в 29 дней, а удорожание составит 240 руб.

При сокращении критического пути нормального варианта сетевого графика может возникнуть такая ситуация, что возникнут два или более критических путей. Поэтому после каждого этапа нужно измененный критический путь сравнивать как со старыми, так и с новыми (измененными вследствие сокращения) продолжительностями полных путей. Да-

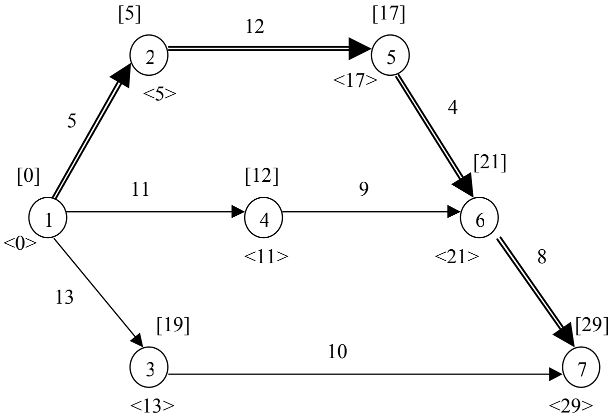


Рис. 11.8

лее, если образуются два или более критических путей, то на последующем этапе нужно сокращать одновременно все критические пути на один и тот же срок, но по одной работе на каждом критическом пути: на измененном (старом) критическом пути — в порядке очередности, а на новых критических путях — работы с наименьшим приростом затрат.

Окончательный вариант сетевого графика показан на рис. 11.8. Затраты при этом варианте составляют 5820 руб. — на 250 руб. меньше, чем при срочном варианте.

Полученный вариант является оптимальным в том смысле, что уменьшение срока на каждом этапе достигается с минимально необходимым приращением затрат.

Для любого директивного срока выполнения проекта в промежутке от 29 до 38 дней можно, очевидно, указать подобный вариант графика.

Построив оптимальный график (рис. 11.8), исходя из срочного варианта выполнения работ ($T_{кр}$=29), можно, рассчитав резервы времени, сократить расходы.

Для сетевого графика рис. 11.8 найдем резервы времени (см. табл. 11.6).

Так как свободный резерв времени может быть использован непосредственно исполнителем, то работу (3—7) можно

Таблица 11.6

Работа (i—j)	Продолжительность работы	Начало работы		Конец работы		Резервы времени				Работы, лежащие на критическом пути
		ранний срок $\langle t_р(i)\rangle$	поздний срок $[t_п(i)]$	ранний срок $\langle t_р(j)\rangle$	поздний срок $[t_п(j)]$	ПР	СР	НР	ГР	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
(1, 2)	5	0	0	5	5	0	0	0	0	1—2
(1, 3)	13	0	0	13	19	6	0	0	6	
(1, 4)	11	0	0	11	12	1	0	0	1	
(2, 5)	12	5	5	17	17	0	0	0	0	2—5
(3, 7)	10	13	19	29	29	6	6	0	0	
(4, 6)	9	11	12	21	21	1	1	0	0	
(5, 6)	4	17	17	21	21	0	0	0	0	5—6
(6, 7)	8	21	21	29	29	0	0	0	0	6—7

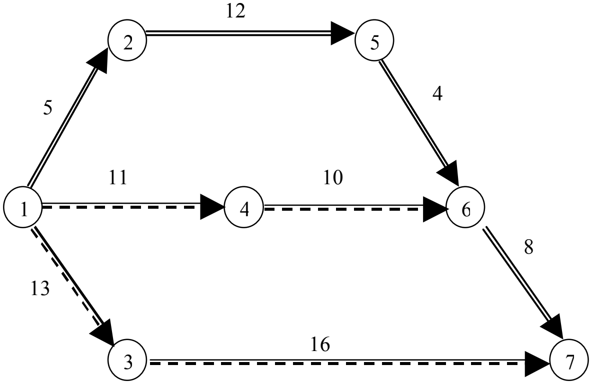


Рис. 11.9

увеличить на 6 дней, уменьшив при этом затраты на 180 руб. и работу (4—6) можно увеличить на 1 день, уменьшив затраты на 25 руб. Остальные резервы времени могут быть использованы только с разрешения центра. Окончательно получаем сетевой график (рис. 11.9). Затраты при этом составляют 5615 руб. — на 455 руб. меньше, чем при срочном варианте.

По сравнению с традиционными системами организационного управления, сетевые системы обладают гораздо более четкими алгоритмами функционирования как в режиме исходного планирования, так и в режиме оперативного управления. Особенно важным, с точки зрения совершенствования организационного управления в условиях радикальных изменений структуры управления народным хозяйством (переход к двух- и трехзвенной структуре) и требований, выдвигаемых научно-технической революцией, является создание межотраслевых (междуведомственных) и, так называемых, многосетевых систем СПУ. Многосетевые системы СПУ предназначены для управления основной производственной деятельностью организации, исходя из рационального использования ресурсов, которыми располагает организация. Системы такого рода разрабатываются главным образом для строительных организаций. При создании производственных и промышленных объединений многосетевые системы могут сыграть важную роль как средство координации различных звеньев объединения.

Сетевую модель не обязательно задавать в виде чертежа. Она может быть однозначно определена различными матрицами, таблицами и системами неравенств. Эти возможности широко используются при анализе и оптимизации сетей на ЭВМ, а также при "сшивании" фрагментов сети в единую сеть комплекса.

По специальным программам на ЭВМ производится расчет следующих параметров:

1. Ожидаемые сроки завершения проекта.

2. Состав (перечень) работ критической зоны (критические и подкритические пути), сроки их начала и окончания.

3. Ранние и поздние сроки начала и окончания остальных работ с указанием имеющихся у них резервов времени.

Глава 12
ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В МИКРОЭКОНОМИКЕ

12.1. Моделирование спроса и предложения

12.1.1. Спрос и предложение

Одним их основных принципов рыночной экономики является принцип сопоставления спроса и предложения.

На любом рынке количество покупаемых товаров и услуг всегда зависит от потребности и услуг. Естественно, что потребность должна быть подкреплена покупательной способностью, означающей наличие у покупателей необходимой для совершения покупки суммой денег. Объем товаров, который потребители хотят купить, называется количеством товара, на которое предъявлен спрос, и оно определяется в рамках конкретного промежутка времени и для определенного числа покупателей.

Спрос — это ряд цен и ряд количеств (или величин), которые покупатели будут хотеть купить при каждой из этих цен.

Основные факторы, определяющие количество товара, на которое предъявляется спрос, следующие: цена товара или услуги; доходы потребителей; вкусы покупателей; цены на товары — заменители; общее число покупателей данного товара или услуги; инфляционные ожидания.

Спрос К изображается в виде графика $P = f(K)$ (кривая спроса), показывающего по каким ценам в течение выбранного промежутка времени покупатели хотели бы приобрести различные количества товара.

Теперь обратимся к предложению. Объем товара, который его производители желают и способны приобрести и продать на рынке по каждой конкретной цене из существующих цен в течение определенного времени, называется количеством предложенного товара.

На объем предложенного на рынке товара воздействует не только цена, но и такие факторы как:

— издержки производства. При введении более совершенной технологии снижаются издержки, выпускается больше продукции и увеличивается предложение. Снижение цен на ресурсы также ведет к расширению количества предложенного товара;

— увеличение количества товаропроизводителей повышает количество предназначаемого товара;

— использование достижений научно-технического прогресса позволяет эффективно организовать производство и меньше затратить на единицу продукции, т. е. увеличить предложение;

— повышение налогов увеличивает издержки и сокращает предложение, а субсидии и дотации приводят к расширению производства;

— цены на товары — заменители могут изменить предложение.

Предложение S также изображается в виде графика $P = f(S)$ (кривая предложения), показывающего какую цену надо заплатить за единицу предложенного блага для каждого количества товара или услуги, чтобы данное количество товара или услуги было произведено, т. е. предложено на рынок.

Экономическая модель спроса и предложения направлена на то, чтобы объяснить соотношение цены и количества товаров, обмениваемых на рынке за определенный период. Рыночное равновесие в этой модели существует тогда, когда нет тенденции к изменению рыночной цены или количества продаваемых товаров. В условиях инфляции также существует рыночное равновесие, лишь с тем отличием, что точка равновесия периодически меняет свои координаты. В рыночной системе хозяйствования формируется сбалансированность и стабильность, которые являются одним из важнейших условий достижения большей определенности, что можно рассматривать как внешний фактор ограничения коммерческого риска.

Являясь новым для российской экономики, фактор рыночного равновесия заслуживает пристального внимания при рассмотрении его связи с риском.

Рассмотрим общую постановку задачи. На рис. 12.1 представлены функции спроса К и предложения S в зависимости от цены P и объема продаж Q. Здесь P_0 — равновесная цена, Q_0 — равновесный объем продаж, при котором спрос и предложение соответствуют друг другу. Точка А представляет собой точку равновесия, а цена P_0 называется равновесной. Как продавцу, так и покупателю нецелесообразно отступать от точки равновесия. Поэтому определение состояния рыночного равновесия представляет собой задачу, которая имеет важное значение для продавца и покупателя товара. Функция спроса зависит от ряда факторов $y_1, y_2, \ldots, y_m$, т. е. $К=f(y_1, y_2, \ldots, y_m)$. В качестве указанных факторов выступают: количе-

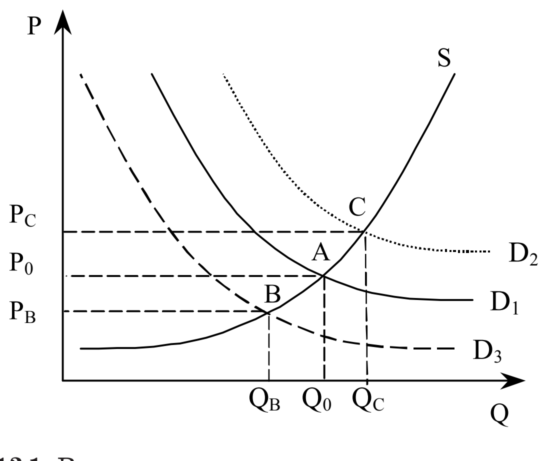


Рис.12.1. Влияние кривых спроса на равновесную цену

ство покупателей, цены на подобные товары, потребительские вкусы, уровень доходов потребителей и т. п. Изменение каждого из этих факторов приводит к смещению функции спроса (кривые $К_1$, $К_2$, $К_3$).

Видно, что смещение функции спроса приводит (при заданной функции предложения) к изменению равновесной цены и объема продаж, а это ведет к изменению валового дохода (выручки) – P_iQ_i, $i = \overline{1,n}$.

Естественно, что при выходе на рынок и продавец и покупатель стремятся изучить данный рынок и определить функцию спроса на предлагаемый товар, и, соответственно, рыночную цену. В силу того, что функция спроса подвержена изменениям в результате воздействия на нее факторов y_1, $y_2,...,y_m$, то во многих случаях невозможно определить точно, каким образом и на какую величину произойдет изменение таких факторов, как количество покупателей, цены на подобные товары, потребительские вкусы и т. п.. Функции спроса $К_1$, $К_2,...,К_m$, зависящие от перечисленных факторов, являются неконтролируемыми, т.е. приходится принимать решение в условиях неопределенного спроса (коммерческого риска) на товары (услуги). Контролируемые (управляемые) факторы обозначим через $x = \{x_j\}$, $j = \overline{1,n}$. В качестве x_j могут быть: объемы продаж, издержки производства, транспортные расходы, другие факторы. Валовый доход будет зависеть от контролируемых и неконтролируемых факторов, т. е. $TR = TR(X, К)$. Имея дискретное множество указанных факторов, можно построить матрицу валового дохода $\|TR(X,К)\|$, анализ которой позволяет получить оптимальное решение.

12.1.2. Влияние факторов рыночного равновесия на изменение спроса и предложения

В результате изучения рынка сбыта некоторого товара, после соответствующей статистической обработки полученных данных, были построены кривые спроса и предложения этого товара в виде

$$D = \frac{-p+8}{p+2}\ ,\ S = P + 0{,}5, \tag{12.1}$$

которые изображены на рис. 12.2 в одних и тех же осях координат, чтобы использовать их в анализе для определения равновесных цен, объемов товара и их влияния на уровень коммерческого риска. Для большей наглядности и удобства рассуждений значения К и S откладываем по оси абсцисс, а цену P — по оси ординат.

Ясно, что оптимальный вариант — равенство величин спроса и предложения, а они равны в точке A пересечения кривых. Из уравнения $\frac{-p+8}{p+2} = p + 0{,}5$ находим равновесную цену P_0 = 1,42 ден. ед. Только при этой цене объем спроса равен объему предложения. Любой отход от цены равновесия приводит в действие силы, обусловленные законами рынка, чтобы вернуть его в прежнее равновесное состояние, кото-

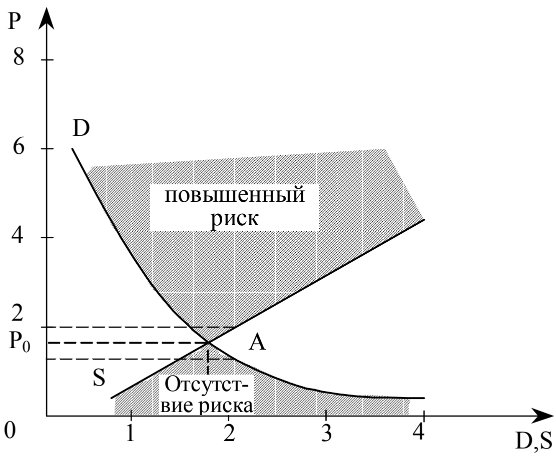


Рис. 12.2. Анализ взаимосвязи рыночного равновесия и коммерческого риска

рое и является фактором уменьшения неопределенности окружающей среды и фактором ограничения риска в точке равновесия.

При цене товара $P<P_0$, например при P=1 ден.ед., объем спроса будет превышать объем предложения ($Q_К$ Q_s) и имеет место дефицит товара, равный разнице между количеством товара, которое покупатели хотят приобрести при данной цене, и количеством товара, которое продавцы хотят продать. Возникает избыточный спрос, который свидетельствует о наибольшей вероятности реализации товара и, следовательно, минимизации риска при данной цене с запасом гарантированной возможности ее увеличения до равновесного уровня без соответствующего уменьшения вероятности реализации товара.

Если же цена товара P P_0, например P=2 ден. ед., то объем спроса не достигнет уровня предложения, т.е. $Q_К<Q_s$. И тогда разница между объемом спроса и объемом предложения является избыточным предложением при данной цене. Так S(2) = 2,5, а K(2) = 1,5 и разница S(2) — K(2) = 2,5 − 1,5 = 1 показывает, что при цене P = 2 ден. ед. образуется избыточное предложение, равное 1 ден. ед., и оно может стать причиной увеличения товарных запасов, что само по себе увеличивает расходы и уровень риска. Поэтому, до тех пор пока не устранится излишнее предложение, производитель (поставщик) вынужден снижать цены. От этого объем спроса увеличивается, а объем предложения падает, достигая точки равновесия.

Часть плоскости, лежащая между линиями спроса и предложения ниже точки рыночного равновесия (рис. 12.2), является зоной отсутствия риска от повышения цены и выше точки рыночного равновесия — зоной повышенного риска.

Математически зоны отсутствия и повышенного риска описываются соответственно следующими системами неравенств

$$\begin{cases} p - s + 0{,}5 < 0, \\ D - \dfrac{-p+8}{p+2} < 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} p - s + 0{,}5 > 0, \\ D - \dfrac{-p+8}{p+2} > 0. \end{cases}$$

В зоне отсутствия риска риск реализации товара хотя и минимален, но с увеличением цены прибыль производителя будет выше пока на товар находится покупатель, поэтому оптимальным риск и будет в точке рыночного равновесия. Это связано с тем, что конкурирующие покупатели, будучи не в состоянии получить потребное им количество товара по данной цене, начинают предлагать более высокие цены до тех пор, пока цена не достигнет своего равновесного уровня, поэтому обусловленное дефицитом снижение риска в условиях рыночных отношений непродолжительно.

При увеличении спроса, например, из-за повышения дохода потребителей, равновесная точка переходит по кривой S вверх. Рыночная цена равновесия повышается, увеличивается зона отсутствия риска и уменьшается зона повышенного риска. Падение спроса на товар увеличивает уровень коммерческого риска и уменьшает объем предложений, низкая равновесная цена требует более эффективной работы компании, ибо повышается вероятность низкорентабельной работы или их банкротства.

Понижение предложения товара приводит к уменьшению риска, связанного с его реализацией, и к увеличению его цены. Понижение цены на товар вызовет повышение объема спроса, что увеличивает зону повышенного риска.

12.1.3. Моделирование процесса достижения равновесия

Цена равновесия P_0 может быть интерпретирована как “справедливая цена обмена”, которая устанавливается в результате многочисленных парных сделок между продавцами и покупателями. Это состояние равновесия замечательно тем, что в нем полностью удовлетворен спрос, а также отсутствует излишнее производство товара, т.е. нет перепроизводства продукта и нерационального расходования производственных ресурсов. Таким образом, с производственной точки зрения состояние равновесия соответствует наибольшей экономии ресурсов. В связи с этим состояние равновесия является приемлемым и подходящим для обеих групп участников рыночного обмена — производителей и потребителей и поэтому может выступать как конечная цель процесса регулирования при помощи цен.

Как правило, в конкурентной экономике без сговора (коалиции) достижение равновесия есть стихийный процесс, основанный на том, что при любой цене, превышающей равновесную, количество товара, которое стремятся предложить продавцы (производители), будет превосходить то количество, на которое покупатели (потребители) намерены предъявить спрос; возникает давление на цену в сторону ее понижения, причем, деятельность некоторых продавцов, желающих избавиться от товара, будет направлена против существующего (слишком высокого) уровня цены. Подобным же образом можно показать, что цена, находящаяся ниже уровня равновесия, испытывает давление в сторону повышения.

Процесс приближения к нормальному равновесию во времени можно представить при помощи последовательности малых дискретных шагов, используя представления о функциях спроса и предложения, которые сами могут изменяться в ходе рыночного процесса вследствие изменения условий производства и потребления.

Модель процесса достижения равновесия использует его дискретное представление с помощью так называемых “торговых” дней (шагов) с номерами: t, $t+1$, $t+2$,... Пусть в торговый день t задано предложение S_t и оно определяет цену P_t как решение уравнения $S(P_t) = S_t$.

Эта цена характеризует объем спроса $К_t = К(P_t)$, а предложение на следующий торговый день прямо ориентируется на спрос предыдущего дня $S_{t+1} = К_t$. (12.2)

Проиллюстрируем процесс достижения равновесия на кривых (12.1). Основное соотношение (12.2)

$$P_{t+1} + 0{,}5 = \frac{-P_t + 8}{P_t + 2}.$$

Отсюда цена в каждый следующий рыночный день определяется через цену в предыдущий день по формуле

$$P_{t+1} = \frac{-1{,}5P_t + 7}{P_t + 2}.$$

Предположим, что начальная цена $P_t = 1$, и сведем результаты расчета в табл. 12.1.

Таблица 12.1

Сходимость цены к равновесной по времени

P	D	S	E = D – S
1	2,33	1,5	0,83
1,83	1,61	2,33	–0,72
1,11	2,22	1,61	0,61
1,72	1,69	2,22	–0,53
1,19	2,13	1,69	0,44
1,63	1,76	2,13	–0,37
1,26	2,06	1,76	0,30
1,57	1,80	2,06	–0,26
1,30	2,03	1,80	0,23
1,53	1,83	2,03	–0,20
1,33	2,00	1,83	0,17
1,50	1,86	2,00	–0,14
1,36	1,98	1,86	0,12
1,48	1,87	1,98	–0,11
1,37	1,97	1,87	0,10
1,47	1,88	1,97	–0,09
1,38	1,96	1,88	0,08
1,46	1,89	1,96	–0,07
1,39	1,95	1,89	0,06
1,45	1,90	1,95	–0,05
1,40	1,94	1,90	0,04
1,44	1,91	1,94	–0,03
1,41	1,93	1,91	0,02
1,43	1,92	1,93	–0,01
1,42	1,92	1,92	0,00

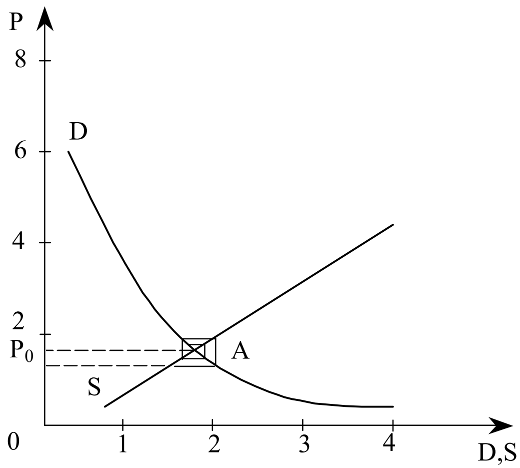


Рис. 12.3. Паутинообразная модель

Таким образом видно, что по прошествии 25 “рыночных дней” процесс установления цены сходится к состоянию равновесной цены $P_0 = 1{,}92$. Этот процесс изображен на рис. 12.3.

Геометрическая иллюстрация этого процесса приближения к равновесию напоминает паутину и поэтому сама модель часто называется паутинообразной. Сходимость указанного рыночного процесса будет гарантирована, если выполнено условие

$$S'(P) \qquad |К'(P)|,$$

что соответствует более сильной реакции производителей по сравнению с потребителями.

12.1.4. Влияние изменения спроса на уровень коммерческого риска

При изучении вопроса о том, как условия, которые изменяют либо спрос, либо предложение, воздействуют на равновесные рыночные цены и количество товаров, можно воспользоваться сравнительным статистическим анализом спроса и предложения. При решении задач минимизации риска применение этого метода дает возможность создания экономических моделей для объяснения предшествующих и предсказания будущих событий. Маркетинговые исследования являются лучшей информационной базой для этого анализа.

На рис. 12.4 изображено для какого-то момента времени рыночное равновесие, соответствующее точке А. В следующий момент времени произошло увеличение дохода потребителей. Функцию спроса тогда можно записать как $К = \dfrac{p+12}{p+2}$ (кривая $К_2$ на рис. 12.4). Равновесная цена для этого момента определяется из уравнения $\dfrac{p+12}{p+2} = p+0{,}5$ и равна $P_2 = 2{,}65$ ден. ед. и при этом $d_2 = К(2{,}65) = 3{,}15$ ден. ед.

Зоны отсутствия и повышенного риска будут описываться соответственно следующими системами неравенств

$$\begin{cases} p - s + 0{,}5 < 0, \\ D - \dfrac{p+12}{p+2} < 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} p - s + 0{,}5 > 0, \\ D - \dfrac{p+12}{p+2} > 0. \end{cases}$$

При увеличении спроса равновесная точка А(1,92; 1,42) перешла в равновесную точку В(3,15; 2,65).

Повышение спроса на товар на $\Delta К = \dfrac{p+12}{p+2} - \dfrac{-p+8}{p+2} =$ $= 2$ ден. ед. приводит к смещению линии спроса К из положения $К_1$ в положение $К_2$. Влияние увеличения спроса выражается в повышении рыночной цены равновесия на $\Delta P = P_2 - P_1 = = 2{,}65 - 1{,}42 = = 1{,}23$ ден. ед., что в свою очередь сокращает риск предприятий оказаться нерентабельными, так как уровень расходов, приходящихся на единицу товара, при этом не увеличивается. В связи с этим, что хорошо видно на рис. 12.4, зона отсутствия риска от роста цены с перемещением рыночного равновесия из точки А в точку В увеличивается, а зона повышенного риска сокращается.

Аналогично, падение спроса при прочих равных условиях уменьшает равновесную цену, увеличивает уровень ком-

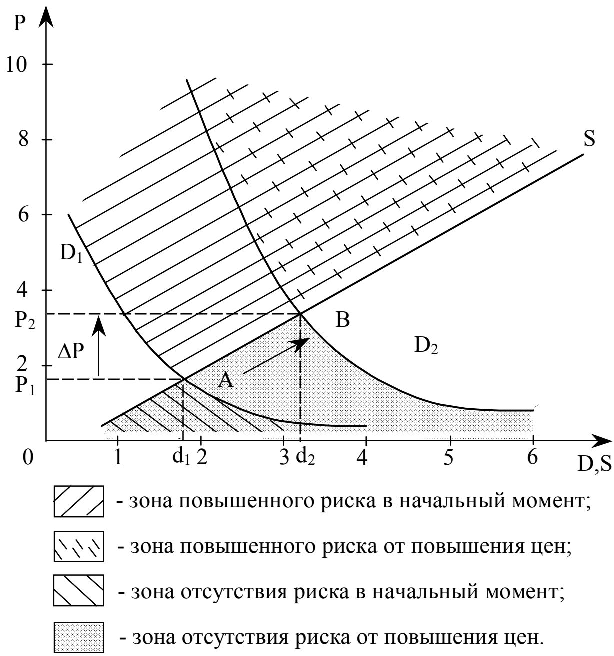


Рис.12.4. Влияние повышения спроса на уровень коммерческого риска

мерческого риска и уменьшает объем предложений. Если сравнить такое положение равновесия с положением равновесия в точке А, то оно является более рискованным, так как низкая равновесная цена требует более эффективной работы компаний, ибо повышается вероятность низкорентабельной работы или банкротства предприятий, если величина издержек недостаточно низка для возможности их покрытия уменьшенным от падения спроса объемом выручки.

12.1.5. Влияние изменения предложения на уровень коммерческого риска

При изменении предложения S рыночное равновесие и связанный с ним риск также будут изменяться.

На рис. 12.5 равновесной точке B(3,15; 2,65) отвечает начальное сложившееся равновесие на рынке между спросом и предложением. В какой-то другой момент времени происходит открытие новых рынков сбыта на продажу данного товара по более высокой цене, чем на прежнем рынке. Это уменьшит предложение товаров на старом рынке. Кривая предложения будет описываться уравнением s = p−1,5, т.е. уменьшится предложение товаров на прежнем рын-ке, это вызовет переход к новой равновесной точке C(2,63; 4,13), и равновесная цена повысится на $\Delta P = P_3 - P_2 = 4{,}13 - 2{,}65 = 1{,}48$ ден. ед., а спрос упадет на $\Delta S = S_2 - S_3 = 3{,}15 - 2{,}63 = =0{,}52$ ден. ед.

Понижение предложения товара приводит к уменьшению риска, связанного с его реализацией, и к увеличению его цены. Покупатели отвечают на рост цены уменьшением объема спроса. Рынок на новую более высокую цену равновесия отвечает уменьшением спроса на товар в соответствие с

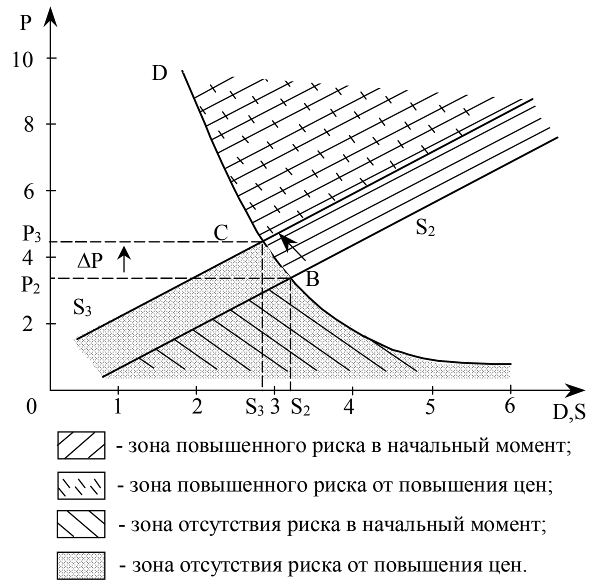


Рис.12.5. Влияние уменьшения предложения на уровень коммерческого риска

готовностью покупателя платить. Несмотря на то, что при более высокой цене покупатели вынуждены приобретать меньше товара, фактор падения предложения все же оказывает влияние, ограничивающее коммерческий риск, поскольку равновесие спроса и предложения при более высокой цене дает больше гарантий на увеличение прибыли компаниям, участвующим на рынке.

Повышение предложения товара приводит к противоположному результату. Если цена равновесия не уменьшится в ответ на рост предложения, то будет избыток товара на рынке, а это увеличивает коммерческий риск. Понижение цены на товар вызовет повышение объема спроса, что увеличивает зону повышенного риска. Следовательно, достигая рыночного равновесия при меньшей цене, хотя и большем спросе, обусловленном снижением цены, обстоятельства формируют условия большего риска.

12.1.6. Построение зависимостей спроса от предложения

Кривые спроса и предложения К = К(Р) и S = S(P) запишем в виде К = f(S′).

Из К = $\frac{-p+8}{p+2}$ и $S = p + 0{,}5$ имеем К = $\frac{-S+8{,}5}{S+1{,}5}$, это кривая 1 на рис. 12.6.

Кривая 2 из уравнений К = $\frac{p+12}{p+2}$ и S = p + 0,5 определяется как К = $\frac{S+11{,}5}{S+1{,}5}$.

Из уравнений К = $\frac{p+12}{p+2}$ и S = p − 1,5 и находим уравнение кривой 3 К = $\frac{S+13{,}5}{S+3{,}5}$.

Уравнение кривой 4 $К = \dfrac{-S+6{,}5}{S+3{,}5}$ найдено из уравнений $К = \dfrac{-p+8}{p+2}$ и $S = p - 1{,}5$.

Проведем биссектрису первого координатного угла, которая пересекает кривые в точках, соответствующим равновесным ценам. Выше биссектрисы К S, что отвечает зоне отсутствия риска. Ниже биссектрисы $К < S$ – это зона повышенного риска. Таким образом, зоне повышенного риска отвечает неравенство $f(S) - S < 0$, а зоне отсутствия соответствует неравенство $f(S) - S$ 0.

Полученные результаты можно использовать для разработки методов внерыночного регулирования, основанных на субсидиях и дотациях. В некоторых случаях существование равновесия не является само собой разумеющимся и его реализация требует дополнительных усилий:

1) ситуация в которой производитель несет большие издержки в процессе производства и поэтому не может начать поставлять продукцию по цене ниже обусловленной границы рентабельности ($P_р$). Однако, эта цена оказывается весьма высокой для потребителей и спрос при ценах $P \geq P_р$ оказывается меньше объемов производства, при которых оно рентабельно.

В этой обстановке равновесия в узком смысле не существует, но есть равновесие в широком смысле при $P \geq P_р$ (предложение больше спроса). Положение может быть исправлено путем дотирования производителя, после чего кривая предложения (S_2) перемещается в положение (S_3) (рис. 12.5) и может быть достигнута точка равновесия;

2) случай дефицита, когда производство товара невелико и слабо реагирует на повышение цены, т. е. почти или полностью неэластично, а потребители готовы приобрести большое количество товара практически по любой цене.

Нетрудно видеть, что в области разумных цен нет равновесия ни в узком, ни в широком смысле, напротив, имеет

Рис. 12.6. Зависимости спроса от предложения

место дефицит товара. Равновесие может быть достигнуто либо путем резкого подъема производства, либо посредством резкого ограничения доходов потребителей, например денежной реформы.

12.2. Влияние эластичности спроса и предложения и налогообложения на коммерческую деятельность

12.2.1. Эластичность функции

В экономике даже самые малые приращения величин – товаров, денег и т.д. – конечны, поэтому экономический анализ удобнее вести на основе показателя, устанавливающего зависимость между относительными, процентными изменениями параметров. Введем один из таких показателей – эластичность. Коэффициент эластичности показывает относительное изменение исследуемого экономического показателя под действием единичного относительного изменения экономического фактора, от которого он зависит, при неизменных остальных влияющих на него факторах.

Так, если известна функциональная зависимость $y = f(x)$, то одним из показателей реагирования одной переменной y на изменение другой x служит производная

$$Y'_x = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta X} = Y_x \ ,$$

характеризующая скорость изменения функции с изменением аргумента x. Однако в экономике этот показатель неудобен тем, что он зависит от выбора единиц измерения. Например, если мы рассмотрим функцию спроса на бензин (Q) от его цены (P), то получим, что значение производной при каждой цене P (измеряемой в рублях)

$$Q'_p = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta P} = Q_x$$

зависит от того, измеряется ли спрос на бензин в литрах или в тоннах. В первом случае производная измеряется в $^{л}/$руб., во втором – в $^{т}/$руб., соответственно ее значение при одном и том же значении цены будет различным в зависимости от единиц измерения величины спроса. Поэтому для измерения чувствительности изменения функции к изменению аргумента в экономике изучают связь не абсолютных изменений переменных x и y (Δx и Δy), а их относительных или процентных изменений, вводя понятие эластичности.

Эластичностью $E_x(y)$ функции $y = f(x)$ называется предел отношения относительного приращения функции y к относительному приращению переменной x при $\Delta x \to 0$:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta X \to 0} \left(\frac{\Delta Y}{Y} : \frac{\Delta X}{X}\right) = \frac{X}{Y} \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta X},$$

$$E_x(y) = \frac{X}{Y} \cdot \frac{dY}{dX} = \frac{X}{Y} \cdot f'(x) = f'(x) : \frac{y}{x} = \frac{f'(x)}{f(x)} : \frac{1}{X} =$$

$$= \frac{d\ln f(x)}{d\ln x} = \frac{Mf}{Af} \ , \qquad (12.3)$$

где Mf — маржинальное значение функции f в точке x, Af — среднее значение функции в точке x. Эту эластичность называют также предельной или точечной эластичностью.

Эластичность функции показывает приближенно, на сколько процентов изменится функция y = f(x) при изменении независимой переменной x на 1%.

Исследуя зависимость экономических показателей относительно других аргументов (доходов, цен, покупательных и товарных фондов, запасов и т.д.), мы можем получить корреляционную зависимость двух показателей y = f(x), принимающую различные формы: линейную и нелинейную. Рассчитанная по формуле (12.3) эластичность изменения экономических показателей служит важной характеристикой сложившихся закономерностей. Для функций, наиболее часто встречающихся в экономико-математических исследованиях, в табл.12.2 приведены коэффициенты эластичности.

Для степенной функции $y = ax^b$ при любых значениях аргумента будет постоянной мгновенная эластичность $E_x(y) = b$.

Таблица 12.2

Функция	Уравнение	Производная	Коэффициент эластичности
Линейная	$y = a + bx$	$y' = b$	$E_x(y) = \dfrac{bx}{a+bx} = \dfrac{1}{1+\dfrac{a}{bx}}$
Парабола	$y = a + bx + cx^2$	$y' = b + 2cx$	$E_x(y) = \dfrac{x(b+2cx)}{a+bx+cx^2}$
Гипербола	$y' = a + \dfrac{b}{x}$	$y' = -\dfrac{b}{x^2}$	$E_x(y) = -\dfrac{1}{1+\dfrac{ax}{b}}$
Показательная	$y = a\,b^x$	$y' = ab^x \ln b$	$E_x(y) = x \ln b$
Степенная	$y = a\,x^b$	$y' = abx^{b-1}$	$E_x(y) = b$

Параметр b удобно определить как процент прироста функции при увеличении аргумента на один процент. Эта формулировка показывает, что широкое применение в экономике понятия “эластичность” вызвано распространенностью в хозяйственной практике процентного (относительного) способа оценки изменений показателей и сравнения этих изменений. Например, для прямой $y = bx$ эластичность равна 1, для параболы $y = cx^2$ эластичность равна 2, а для параболы $y = a\sqrt{x}$ эластичность равна 0,5 и т. д., т.е. эти функции прирастают соответственно на 1,2 и 0,5%, когда аргумент прирастает на 1%.

12.2.2. Эластичность спроса по цене

В анализе и прогнозах ценовой политики применяется понятие эластичность спроса по цене. Пусть К = К(Р) − функция спроса от цены товара Р. Тогда

$$E_p(D) = \left(\frac{dD}{D}\right) : \left(\frac{dP}{P}\right) = \frac{dD}{dP} \cdot \frac{P}{D} \tag{12.4}$$

есть эластичность спроса по цене, показывающая относительное изменение (выраженное в процентах) величины спроса на какое-либо благо при изменении цены этого блага на один процент и характеризующая чувствительность потребителей к изменению цен на продукцию.

Различают три вида спроса в зависимости от величины $|E_p(К)|$:

а) если $|E_p(К)|$ 1 (E_p(К)< −1), то спрос считается эластичным;

б) если $|E_p(К)|=1$ (E_p(К)= −1), то спрос нейтрален;

в) если $|E_p(К)|<1$ (E_p(К) −1), то спрос неэластичен (совершенно неэластичен при нулевой эластичности спроса).

Пусть функция спроса описывается формулой

$$К(P) = К_0 \ \exp(-kP^2), \tag{12.5}$$

где $К_0$ и К известные величины. По формуле (12.1) находим

$$E_p(D) = \frac{D_0 \cdot \exp(-kP^2) \cdot (-2kP) \cdot P}{D_0 \exp(-kp^2)} = -2kP^2 .$$

Для того чтобы спрос был эластичным, необходимо, чтобы выполнялось неравенство $-2kP^2 < -1$ или $2kP^2$ 1, откуда P $1/\sqrt{2k}$.

Товары (блага) могут отличаться друг от друга степенью их замещаемости другими товарами. Если у потребителя появляется больше возможностей заменить потребление данного блага другим, то эластичность спроса на это благо выше. Также товары могут отличаться количеством разнородных благ, присущих данному товару, т. е. степенью агрегированности. Понятию транспортное средство присуще низкая агрегированность, выше агрегированность для понятия легковых автомобилей и еще выше для гоночных автомобилей определенной марки. Ясно, что для товара с высокой замещаемостью эластичность высокая и рост цен на него заставит потребителя покупать этот товар меньше и больше товаров заменителей. Когда нет товаров заменителей, у спроса появится тенденция быть неэластичным от цены.

Чем выше степень агрегированности блага, тем меньше у него возможности заменить потребление данного блага потреблением других благ и тем ниже эластичность спроса на это благо. При возрастании цены на такие товары темпы снижения спроса меньше роста цены, в итоге общие расходы потребителя на товар растут. Рассмотрим эту ситуацию с точки зрения продавца товара. Когда спрос неэластичен, рост цены ведет лишь к небольшому снижению требуемого количества и, таким образом, общая выручка продавца уменьшается. Но в дальнейшем рост цены ведет к крупному снижению размера спроса и общая выручка снижается.

Правильная оценка степени эластичности товара, способность оценки его агрегированности, чувство риска характерны для следующей рыночной ситуации.

Рынок импортного пива являлся мало замещаемым, а его агрегированность являлась высокой и, следовательно, эластичность спроса низкой. Казалось, что возрастание цены на него, будет всегда приводить к росту выручки. После 17 августа 1998г. курс доллара вырос почти в 4 раза, в результате цена импортного пива поднялась до заоблачных высот, спрос на него упал настолько, что один из поставщиков немецкого пива, завезшего в начале июля Holsten на $5 млн., не знает, что с ним делать — продавать себе в убыток или ждать лучших времен. Степень агрегированности импортного пива стала низкой: ведь есть альтернатива импортному пиву – пиво отечественное, т.е. замещаемость стала высокой. Эластичность спроса на него возросла, а снижать цены нельзя, так как рентабельность низкая. Но такая ситуация произошла из-за непредвидения кризисных явлений.

Другой пример, связанный с точностью определения агрегированности блага, показывает важность правильного учета эластичности при проведении ценовой политики. Известно, что эластичность водки относительно низкая и увеличение акцизов на нее должно привести к увеличению поступлений в бюджет, что и было сделано в декабре 1993 г., тогда ставки акцизов подняли до 90%. Однако, это привело к резкому сокращению доходов в бюджет. Причиной этого послужило неправильное определение степени агрегированности водки, которая должна была бы включать в себя водку импортную, из стран ближнего зарубежья (СНГ) и нелегально произведенную. Именно эта водка заняла преимущественное место в торговой сети. Спустя несколько месяцев ставки акцизов на отечественную водку снизили до 85% и одновременно повысили ставки акцизов до 250% на импортную водку.

Важную роль в анализе изменения спроса при небольших изменениях дохода играют коэффициенты эластичности. Известно, что каждые 20—30 лет доход страны увеличивается в два раза, соответственно изменяется потребление, а значит, и производство товаров. Установлено, что в развитых странах по мере увеличения доходов возрастают потребности в услугах, а в развивающихся странах – в товарах длительного пользования. Отсюда очевидно, что доход воздействует на спрос и появляется необходимость для определения этой зависимости с помощью такого показателя, как эластичность спроса по доходу. Как мы видели эластичность спроса по цене всегда отрицательна. Особенность же эластичности спроса по доходу состоит в том, что коэффициент эластичности меняет знак в зависимости от вида товаров. Принято выделять четыре группы товаров в зависимости от коэффициента эластичности $E_J(Q)$ спроса на них от дохода J: малоценные товары — товары низкого качества, недиетические продукты питания — цельное молоко, сливочное масло, свинина и т.д., крахмалосодержащие продукты и др. ($E_i(Q)<0$); товары с малой эластичностью – основные продукты питания, кофе, птица, сыр, говядина и т. п. ($0<E_i(Q)<1$); товары со средней эластичностью — икра, ценные рыбы, сигареты, бензин, одежда, ткань, обувь и т. п. ($E_i(Q)$ близки к единице); товары с высокой эластичностью — товары длительного пользования, предметы роскоши и т. п. ($E_i(Q)$ 0). По мере увеличения дохода спрос перемещается с товаров первой и второй групп на товары третьей и четвертой групп, при этом потребление товаров первой группы по абсолютным размерам сокращается.

Процесс формирования рыночных цен на товары включает ряд этапов: постановку задач ценообразования, определение спроса, оценку издержек, проведение анализа цен и товаров конкурентов, выбор метода установления цен, определение окончательной цены и правил ее будущих изменений, учет мер государственного регулирования цен.

При постановке задач ценообразования фирма четко должна знать: чего она желает добиться с помощью политики цен на свои товары. И здесь возможны различные варианты:

— фирму интересует увеличение объемов продаж, завоевание репутации и захват как можно большей доли рынка. Тогда следует обратиться к модели ценовой конкуренции: установление первоначально пониженных цен на продукцию.

Такая цена порождает большой потребительский спрос, что позволяет резко увеличить объемы производства данного товара. Это ведет к снижению издержек, новый товар становится рентабельным и в сочетании с большими объемами его сбыта компания имеет значительную прибыль;

— но цель может быть и иной — получение наибольшей прибыли в кратчайшие сроки. Тогда нужно устанавливать цены с высокой долей прибыли в них, если состояние рынка и качество товара позволяет надеяться на сбыт даже при такой цене. Это может быть эффективно применено к так называемым престижным товарам, адресованным людям, которые обладание подобными товарами считают необходимым для утверждения своего социального статуса;

— широкое распространение получила политика ценообразования, рассчитанная на обеспечение стабильности ассортимента выпускаемых товаров.

Перейдем к рассмотрению и анализу функций покупательского спроса цен на товары фирмы, т. е. нужно оценить эластичность спроса на товары от цен, по которым фирма хочет их продать. Речь идет о том, сколько товаров можно будет продать при различных уровнях цен. Нужно уметь определить зависимость возможного объема предполагаемых продаж от уровня цен.

Важнейшими инструментами маркетинговых исследований являются кривые спроса и предложения товара.

Анализ определения спроса на новый товар позволил установить, что функция спроса имеет вид $К = (-P+8)/(P+2)$, а функция предложения — $S = P+0{,}5$, где К и S — количество товара соответственно покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени, Р — цена товара.

График функции Р(К) , представленный на рис. 12.7, показывает, какое количество товаров может быть продано на рынке при том или ином уровне цен на них. Площадь заштрихованных прямоугольников — выручка от реализации при разных уровнях цен. Для данного вида кривой найдем при какой цене выручка будет максимальной. Для этого рассмот-

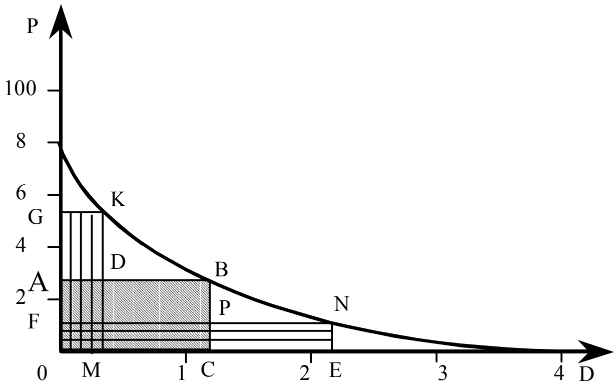


Рис. 12.7. Кривая эластичности спроса от цен

рим прямоугольник кАВС, для которого ВС = Р(К) и АВ = К и площадь есть функция от К: S(К) = АВ·ВС = Р(К)·К=

$$=\left(\frac{10}{D+1}-2\right)D=\frac{10D}{D+1}-2D=10-2D-\frac{10}{D+1}.$$

Находим производную $S'(К) = \dfrac{-2(D^2+2D-4)}{(D+1)^2}$ и из условия $S'(К) = 0$ определяем стационарную точку $К_0 = \sqrt{5} - 1$. Достаточный признак существования экстремума функции S(К) показывает, что в этой точке функция принимает максимальное значение. При этом $S_{max} = 12 - 4\sqrt{5}$, а $P = 2(\sqrt{5} - 1)$. Таким образом, максимальный объем реализации равный $S_{max} \approx 3{,}056$ ден. ед. достигается при цене $P_0 \approx 2{,}48$ ден. ед. Отметим, что не всегда хорош и максимальный объем реализации, если он достигнут при самой низкой цене, не обеспечивающей достаточной доли прибыли в выручке от продаж (например, при цене F, при которой выручка от реализации равна площади прямоугольника кFNE).

Данный график эластичности спроса от цен показывает, на сколько сокращается количество проданных товаров при росте цен на них и на сколько оно может возрасти при определенном снижении цен.

Для заданной функции спроса, исходя из формулы (12.4), имеем

$$E_p(D) = \frac{10P}{(P-8)(P+2)}$$

и при изменении P от 0 до 8 эластичность уменьшается от 0 до $-\infty$, принимая значение, равное -1, при $p = 2{,}48$.

Эластичность спроса от повышения цены представляет собой отрицательную величину. Видим, что, когда цена товара повышается, то значение эластичности по модулю увеличивается, а это означает рост риска для повышающего цену на свой товар предпринимателя, так как вероятность покупки товара снижается с возрастанием отрицательного значения эластичности. Однако, если руководство фирмы видит, что с повышением цены значение эластичности спроса по модулю невысоко, т.е. находится в пределах норм, установленных им в зависимости от конкретных обстоятельств, то оно может прийти к экономически обоснованному выводу, что данное увеличение уровня коммерческого риска, связанное с повышением цен на собственный товар до определенного предела величины эластичности, незначительно и им следует пренебречь с целью достижения ожидаемого результата.

Эластичность спроса по цене тем выше, чем выше удельный вес расходов на данное благо в доходе потребителя. Например, спрос потребителя на спички, практически не изменится, даже если их цена возрастет в несколько раз, что свидетельствует о его низкой эластичности. Если на данный товар расходуется лишь незначительная часть потребительского бюджета, то покупателю нет нужды менять свои привычки и пристрастия при изменении цены. Одна и та же сумма расхода на покупку при большом доходе составляет малую долю бюджета, а при низком доходе – значительную. Поэтому эластичность спроса на один и тот же товар у потребителей с высоким уровнем доходов меньше, чем у потребителей с низким уровнем доходов.

Эластичность спроса ниже всего на товары, являющиеся, с точки зрения потребителя, самыми необходимыми. Особенно низка эластичность спроса на товары, потребление которых не может быть отложено. Покупатель при этом становится более сговорчивым. Обычно считают, что спрос на предметы роскоши более эластичен, чем спрос на предметы первой необходимости. Но это не совсем правильно, поскольку решающим фактором здесь является именно субъективная необходимость в данном благе, которая на отдельные предметы роскоши в силу моды, традиций или других причин может быть достаточно высокой и приводить к низкой эластичности спроса на него. Таков, например, спрос на цветы 8 марта или 1 сентября. В будни же спрос весьма эластичен. Можно сказать, что эластичность спроса по цене тем выше, чем ниже субъективная необходимость в данном благе.

При анализе спроса и предложения важно выделять продолжительность периода времени, другими словами учитывать, рассматривается ли кратковременный или долговременный период времени. Для многих товаров спрос более эластичен от цены для длительного, а не короткого промежутка времени. Одна из причин заключается в том, что людям требуется время, чтобы изменить свои потребительские привычки. Например, если цена кофе резко возрастет, требуемое количество его будет снижаться только постепенно, так как потребители будут пить меньше кофе не сразу. Другая причина заключается в том, что спрос на один товар может быть связан с запасом другого товара у потребителей, который изменяется медленнее. Например, спрос на бензин значительно эластичнее для длительного промежутка времени. Резкое повышение цены на бензин сокращает потребляемое количество в короткий промежуток времени за счет меньшего числа поездок, но оно оказывает огромное влияние на спрос на автомобили, вынуждая потребителя приобретать малолитражные и экономичные автомобили. Но замена старых автомобилей новыми требует значительного времени, количество требуемого бензина снижается тоже медленно.

Таким образом, эластичность спроса по цене обычно тем выше, чем больше промежуток времени. При этом следует

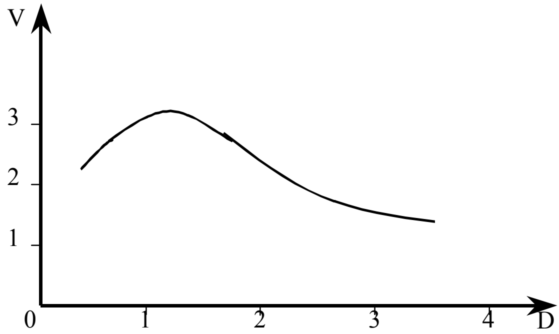


Рис. 12.8. Кривая валового дохода реализации товара

также учитывать такие моменты как формирование запаса и время износа блага, оказывающие существенное влияние на решения потребителей и действующие иногда в сторону понижения эластичности с течением времени, особенно для товаров длительного пользования, а также товаров первой необходимости в периоды резкого повышения цен. Так в преддверии резкого повышения цен домашние хозяйства в России делают запасы круп, макаронных изделий, консервов и других товаров, что приводит к резкому сокращению спроса на эти товары после подорожания и, следовательно, к большой краткосрочной эластичности спроса. С течением времени запасы, естественно, истощаются и эластичность спроса на эти товары уменьшается.

Для любого предпринимателя полезной является кривая валового дохода фирмы, если понимать под последним выручку от реализации товаров. Эта кривая (рис. 12.8) показывает, как при данном состоянии рынка будет изменяться выручка фирмы (V = PK) по мере роста объемов производства товаров. На начальном этапе новый товар будет хорошо продаваться при исходном или даже более высоком уровне цены и доходы фирмы будут расти. Затем может начаться насыщение спроса или появляться конкурирующие товары. Возникают остатки нереализованных товаров, что ведет к необходимости снижения цен, следствием чего является уменьшение общей суммы выручки даже при росте количества товаров, изготовленных с момента освоения их производства. Следовательно, с помощью кривой рис. 12.8 можно реально оценить последствия различных вариантов перспективной коммерческой деятельности.

Перейдем к следующему этапу рыночного ценообразования — оценки издержек. Этот анализ, обязательный для любого предпринимателя, крайне редко практикуется у нас. Анализ и планирование себестоимости необходим из-за возникновения таких ситуаций, когда рост цен наталкивается на барьер спроса из-за государственных антиинфляционных мероприятий, отсутствия денег у многих россиян, доступа товаров иностранных фирм по низким ценам.

На рис. 12.9 нанесены кривые спроса и предложения товара. Кривая предложения S = P + 0,5 показывает, что, чем выше складывающаяся на рынке цена товара, тем в больших объемах производитель готов выпускать этот товар.

Совмещая две кривые — эластичности от цен спроса и предложения, получим график, приведенный на рис. 12.9, отражающий поведение покупателей и продавцов на рынке. Ясно, что оптимальный вариант — равенство величин спроса и предложения, а они равны в точке А пересечения кривых.

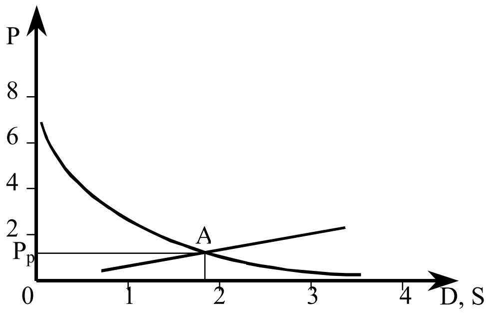


Рис. 12.9. Формирование рыночной равновесной цены

Из уравнения (−P + 8)/(P + 2) = P + 0,5 находим равновесную цену $P_p \approx 1{,}42$ ед.руб. Равновесная цена рационализирует спрос покупателя, передавая ему информацию о том, на какой объем потребления данного товара он может рассчитывать ($К_p \approx 1{,}92$ ед. штук товара); подсказывает производителю, какое количество товара ему следует изготовить и доставить на рынок; и несет в себе всю информацию, необходимую производителям и потребителям: изменение равновесной цены является для них сигналом к увеличению (уменьшению) производства (потребления), стимулом к поиску новых технологий.

Найдем эластичность по спросу и предложению по формуле (12.4)

$$E_p(D) = \frac{10P}{-(P+2)(-P+8)};\ E_p(S) = \frac{2P}{2P+1}. \qquad (12.6)$$

Для равновесной цены P = 1,42 имеем $E_{p=2}(К) = -0{,}63$; $E_{p=2}(S) = -0{,}74$. Так как полученные значения эластичностей по абсолютной величине меньше 1, то и спрос и предложение данного товара при равновесной (рыночной) цене неэластичны относительно цены. Это означает, что изменение цены не приведет к резкому изменению спроса и предложения. Так при увеличении цены P на 1% спрос уменьшится на 0,63%. При увеличении, например, цены P на 5% от равновесной спрос уменьшится на $5{\cdot}0{,}63 = 3{,}15\%$, следовательно, доход возрастет на ($1{,}05{\cdot}0{,}9685{\cdot}100\% = 1{,}7\%$) 1,7%.

Используя график рис. 12.9, можно смоделировать разные варианты коммерческой стратегии фирмы. Если продавать товар по более низкой цене, то кривая эластичности предложения пойдет более полого и при пересечении кривой эластичности спроса получим возросшее количество реализованной продукции К. В этом случае реально потерять в прибыли с каждой единицы товара, но зато выиграть в общей ее массе.

Если же фирма стремится получить максимальную прибыль с каждой единицы товара, то она будет стремиться к завышению цен. В этом случае кривая эластичности предложения от цен будет более крутой, а точка ее пересечения с кривой эластичности спроса от цен даст меньшее количество проданных товаров.

Выбор одной из этих коммерческих стратегий – дело фирмы. Тем более, что возможна и еще одна стратегия: можно пойти на более умеренную долю прибыли в цене, реально получая больший доход или захватывая большую долю рынка.

Устанавливая цену на товар, фирма выбирает один из многих методов ценообразования: анализ безубыточности и обеспечение целевой прибыли; установление цены на основе ощущаемой покупателями ценности товара, на основе уровня текущих цен и при этом учитывает, что цена будет благоприятно воспринята дистрибьюторами и дилерами, собственным торговым персоналом фирмы, конкурентами, поставщиками и государственными органами.

12.2.3. Влияние фактора налогообложения в рыночном равновесии на уровень коммерческого риска

На изменение рыночного равновесия и связанную с ним величину риска влияет фактор налогообложения, который следует отнести к категории неуправляемых внешних факторов.

Эластичность можно применять и к анализу ценовых последствий налоговых изменений. С одной стороны, высокие налоговые ставки ведут к тому, что работать много и хорошо зарабатывать становится невыгодно, а, с другой стороны, низкие налоговые ставки сокращают доходы госбюджета. Для решения этой проблемы необходимо определить оптимальные размеры налогового обложения населения, что является чрезвычайно сложной задачей, поскольку налоги изменяются в зависимости от политического и экономического положения в стране.

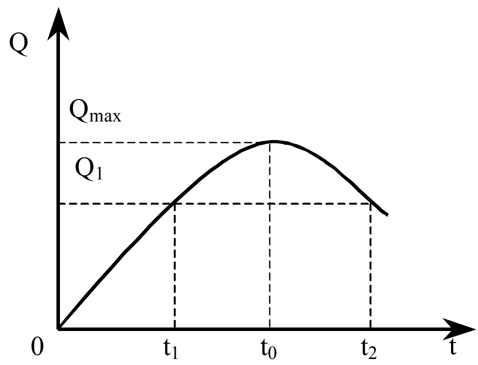


Рис. 12.10. Кривая Лаффера

Изображенная на рис.12.10 кривая Лаффера, полученная американским ученым Лаффером, показывает, что налоговые поступления достигают максимальной величины Q_{max} при налоговых ставках t_0 гораздо ниже 100%. Одни и те же налоговые поступления Q_1могут быть получены как при высоких налоговых ставках t_2, так и при значительно меньших t_1. Эти исследования, проведенные под руководством проф. Лаффера, легли в основу налоговой реформы в США в 80-е годы.

Рассмотрим как влияют налоговые изменения на спрос и предложения. Чаще всего изменение размеров налогов вызывает изменение в спросе. Пусть на некоторый товар установилось равновесие: спрос на товар составляет 12 тыс. штук в месяц по цене 40 руб. за штуку. Предположим, что ввели налог на добавленную стоимость, или прибыль, или доход, фактически равнозначный изъятию 50% от цены реализации каждой единицы товара. В этом случае введение налога приводит к параллельному сдвигу кривой предложения на величину налоговой ставки, т.е. продавец должен был бы поднять цену до 60 руб. за штуку, но тогда спрос упадет настолько, что выручка от реализации сойдет на нет. Более или менее приемлемой ценой оказывается цена в 46 руб. за штуку. При такой цене устанавливается новое равновесие со спросом 10 тыс. штук. Когда спрос эластичен, т.е. нельзя резко поднять цены из-за опасения резкого падения выручки, то ос-

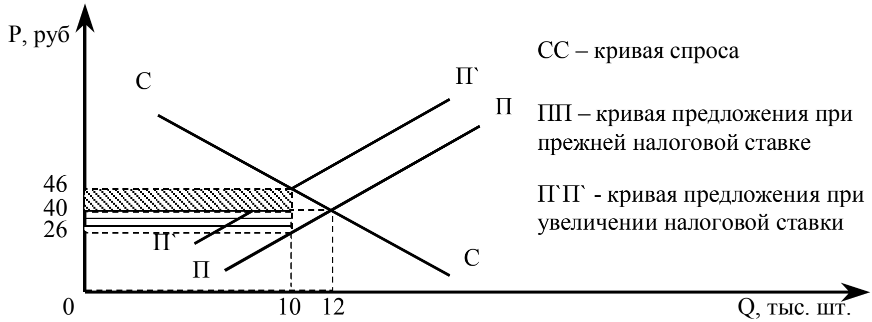


Рис. 12.11. Ценовые последствия налоговых изменений

новную тяжесть повышения налога несет производитель. Для нашего случая на продавца ложится 0,7 налога, а на покупателя —0,3. Если же налог уменьшается, то предпринимателю выгоднее снижать цену, ибо это вызовет увеличение спроса и выручка возрастет. Но если спрос неэластичен, то предприниматель может: 1) снизить цены, что станет хорошей рекламой и увеличит спрос; 2) оставить цены прежними, что наиболее приемлемо, так как снижение налога равносильно увеличению выручки; 3) повысить цены, что при тщательном анализе может дать наибольшую выручку, но переборщив, можно потерять и спрос и создать плохую рекламу.

Рассмотрим задачу в общем виде. Предположим, что налог взимается с производителя и будем считать, что налог с

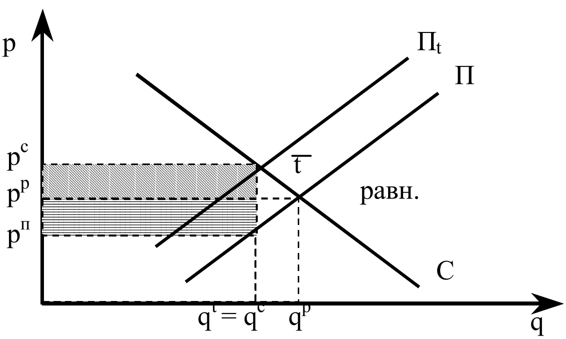


Рис. 12.12

единицы продукции t постоянен и не зависит от величины выпуска. Введение налога приводит к параллельному сдвигу кривой предложения П в положение $П_t$ на некоторую величину $\bar{t} \le t$, где t — величина налоговой ставки. Таким образом равновесная точка (q^p, p^p) после введения налога перешла в точку $\bar{t}\,(q^c, p^c)$ (рис. 12.12). Из этого рисунка видно, что рыночная цена товара повысилась с p^p до p^c и повышение $(p^c - p^p)$ ложится на покупателей. Так как разность $(p^c - p^п)$ идет в бюджет из-за повышения налога, то расход $(p^p - p^п)$ ложится на производителя. Объем продаж уменьшился с q^p до $q^c = q^t$. Суммарная величина налоговых поступлений в бюджет S определяется как произведение налоговой ставки t на объем продаж q^t : $T = t \cdot q^t$. (12.7)

Это же выражение определяет и величину налоговых отчислений в бюджет, часть которых

$$T_c = q^t\,(p^c - p^p) \tag{12.8}$$

несет покупатель (потребитель), а другую часть

$$T_П = q^t\,(p^p - p^П) \tag{12.9}$$

несет производитель.

Сумма этих частей равна налоговым поступлениям в бюджет

$$T_c + T_п = T = q^t\,(p^c - p^п). \tag{12.10}$$

Запишем выражения эластичностей спроса и предложения для дискретного случая

$$E_c = \left(\frac{q^t - q^p}{q^p}\right) : \left(\frac{p^c - p^p}{p^p}\right),\ E_c = \left(\frac{q^t - q^p}{q^p}\right) : \left(\frac{p^П - p^p}{p^p}\right). \tag{12.11}$$

Разделив выражение (12.8) на (12.9) и выражения (12.11) одно на другое, получим двойное равенство

$$\frac{T_c}{T_П} = \frac{p^c - p^p}{p^p - p^П} = -\frac{E_П}{E_c}. \tag{12.12}$$

Из этого соотношения видно, что большее налоговое бремя падает на экономического агента с меньшей эластичностью, у которого меньше возможностей для ухода от налогового бремени. Из первого соотношения (12.11) видно, что если $E_c = 0$, т. е. $q^t = q^p$, то все налоговое бремя ляжет на покупателей, так как независимо от величины налога потребители не изменяют объема покупок. Если товар характеризуется совершенной эластичностью, то в проигрыше оказываются производители, так как потребители уходят от налога, снижая величину спроса и переходя к потреблению товаров – субститутов.

Для рассмотренного выше примера имели $p^c = 46$, $p^p = 40$, $p^п = 26$, $q^t=12$. По формуле (12.11) эластичность спроса $E_c = -10/9$, а эластичность предложения $E_п = 10/21$. Большей эластичности соответствует меньшая часть налога на покупателя – 0,3.

Таким образом, увеличение налоговой ставки, эквивалентное увеличению цены облагаемого налогом товара, может привести как к увеличению налоговых поступлений в бюджет, так и к их уменьшению в зависимости от эластичности.

12.3. Соотношения между суммарными, средними и предельными величинами в экономике

В экономике широко используются средние величины: средняя стоимость продукции, средняя производительность труда и т.д. В равной степени средние величины важны и при коммерческой деятельности: средний доход, средний объем продаж и т.д. Но при планировании развития производства, да и любой предпринимательской деятельности, возникает, например, задача: требуется узнать, на какую величину вырастет результат, если будут увеличены затраты, и, наоборот, насколько уменьшится результат, если затраты сократятся. Оперируя средними величинами ответ на такой вопрос получить нельзя. Здесь речь идет о приростах переменных величин. В подобных задачах нужно найти предел отношения приращений рассматриваемых величин или, как говорят, предельный эффект.

Пусть Q — количество произведенной продукции, C(Q) — соответствующие данному выпуску издержки. Пусть ΔQ — прирост продукции, тогда ΔC — приращение издержек производства. Под суммарной величиной мы будем понимать любую функцию независимой переменной, например, C(Q). Как правило, в экономике под суммарными понимаются абсолютные величины, но, вообще говоря, формальное понятие суммарной величины является относительным, т.е. любая величина может рассматриваться как суммарная по отношению к другим своим предельным и средним величинам. В экономике в роли суммарных величин выступают: доход (выручка) или издержки как функции объема выпуска (R(Q) или C(Q)), объем выпуска как функция от количества переменного ресурса, например труда (Q(L)), полезность как функция количества потребляемого блага U(x) и другие экономические показатели.

Предельные (маржинальные) издержки обозначаются MC и представляют собой приращение ΔC в результате увеличения выпуска продукции на одну единицу ΔQ

$$MC = \frac{\Delta C}{\Delta Q} = \frac{C(Q + \Delta Q) - C(Q)}{\Delta Q}. \qquad (12.13)$$

В предположении о непрерывной зависимости ΔC от ΔQ естественно напрашивается замена разностного отношения в выражении (12.13) его пределом

$$MC = \lim_{\Delta Q \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta Q} = C'(Q). \qquad (12.14)$$

Обычно в приложениях с использованием аппарата математики под предельными издержками понимают именно величину (12.14).

Используя приближенное равенство $\Delta C \approx dC$, которое тем точнее, чем меньше ΔQ, получим $MC \cdot \Delta Q = \Delta C \approx dC = C'(q) \cdot \Delta Q$, откуда MC C′(Q), т. е. определения (12.13) и (12.14) в пределе действительно совпадают. Производная C′(Q) = MC

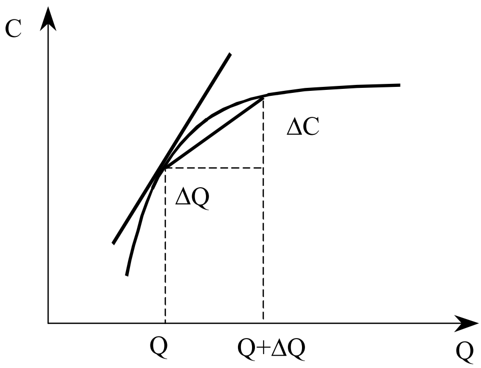


Рис. 12.13

характеризует приближенно дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции. Экономический смысл формулы (12.14) таков: предельные издержки приближенно равны изменению полных издержек при изменении выпуска на единицу.

Приблизительность вызвана тем, что при таком определении касательная к графику C = C(Q) заменяется хордой (рис. 12.13). Отметим, что прилагательное "предельный" в экономике характеризует не сами величины, а эффект их изменения. Предельные издержки зависят от уровня производства (количества выпускаемой продукции) Q и определяются не постоянными производственными затратами, а лишь переменными (на сырье, топливо и т. п.).

Предельные величины характеризуют не состояние (как суммарная C(Q) или средняя величина), а процесс, изменение экономического объекта. Таким образом, производная выступает как скорость изменения некоторого экономического объекта (процесса) по времени или относительно другого исследуемого фактора. Следует учесть, однако, что экономика не всегда позволяет использовать предельные величины в силу неделимости многих объектов экономических расчетов и прерывности (дискретности) экономических показателей во времени (например, годовых, квартальных, месячных и т.д.).

Средние издержки определяются как отношение суммарных издержек к количеству произведенной продукции: $AC(Q) = C(Q)/Q$. (12.15)

Примерами средних величин в экономике могут служить: среднедушевой объем потребления, средняя фондоотдача, средний доход (выручка), средний продукт труда и т. д.

Пусть суммарные издержки, свойственные увеличению объема выпуска продукции фирмой, определяются как $C(Q) = 1500Q - 2Q^2+0{,}002Q^3$. Тогда дополнительные издержки, связанные с увеличением выпуска от Q до $(Q+\Delta Q)$, составят $\Delta C = C(Q+\Delta Q) - C(Q)$, что приближенно равно $C'(Q) = MC = 1500 - 4Q + 0{,}006Q^2$. Результаты расчетов представлены в табл. 12.3.

Из четырех последних столбцов табл. 12.3 видно, что с ростом ΔQ ($\Delta Q = 1$, $\Delta Q = 10$ и $\Delta Q = 30$) растет погрешность в вычислениях предельных издержек по формулам (12.13) и (12.14). Эта наибольшая погрешность при $\Delta Q=1$ составляет порядка 0,1%, при $\Delta Q=10$ — порядка 1% и при $\Delta Q=30$ —

Таблица 12.3

Q	C(Q)	AC(Q)	MC = C′ (Q)	MC = ΔC/1 = ΔC	MC = ΔC/10	MC = = ΔC/30
100	132 000	1320	1160	1158,6	1146,2	1119,8
200	236 000	1180	940	939,2	932,2	917,8
300	324 000	1080	840	839,8	838,2	835,8
400	408 000	1020	860	860,4	864,2	873,8
500	500 000	1000	1000	1001,0	1010,2	1031,8
600	612 000	1020	1260	1261,6	1276,2	1309,8
700	756 000	1080	1640	1642,2	1668,2	1707,8
800	944 000	1180	2140	2142,8	2168,2	2225,8
900	1 188 000	1320	2760	2763,4	2794,2	2863,8
1000	1 500 000	1500	3500	3504,0	3540,2	3621,8

порядка 4%. Отсюда видно, что при малых ΔQ зависимость $MC = \Delta C/\Delta Q \quad C'(Q)$ при достаточно малых ΔQ является достаточно точной для экономических расчетов.

Рассмотрим соотношения между графиками средних и предельных издержек (рис. 12.14), построенными по данным табл. 12.3.

Прежде всего установим аналитические соотношения между рассматриваемыми величинами. Если дана суммарная величина $C(Q)$, то средняя величина определяется формулой (12.15), а предельная величина — формулой (12.14). Если известны средние издержки (средняя величина) $AC(Q)$, то суммарные издержки из соотношения (12.15) будут $C(Q)=Q{\cdot}AC(Q)$, а предельные издержки $MC(Q) = C'(Q) = AC(Q) + Q{\cdot}AC'(Q)$. Это соотношение имеет простую интерпретацию: в точке экстремума функции $AC(Q)$ ее производная $AC'(Q) = 0$ и, следовательно, предельная величина совпадает со средней в точке экстремума последней, т. е. $MC(Q) = AC(Q)$. Из расположения кривых видно, что график предельной величины $MC(Q)$ лежит выше графика средней величины $AC(Q)$ в области возрастания последнего, ниже — в области убывания и проходит через точку экстремума графика средней величины.

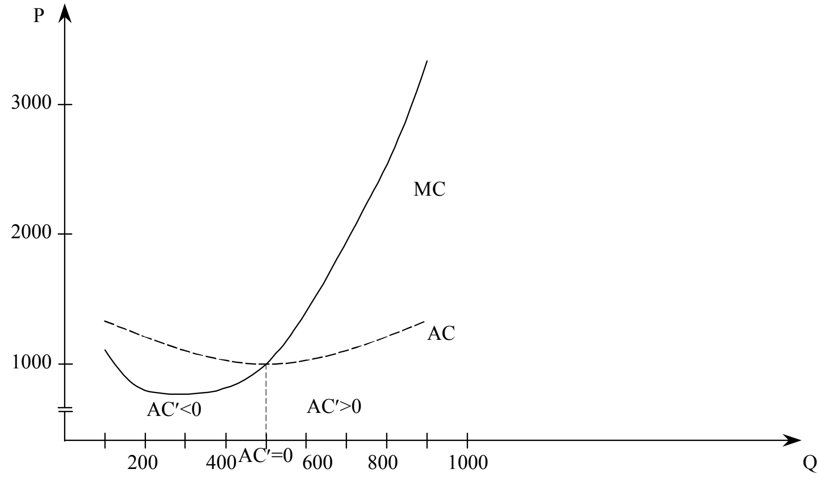


Рис. 12.14

Как видно из данных табл. 12.3 суммарные издержки растут вместе с выпуском продукции. Скорость, с которой эти издержки (МС) увеличиваются, зависит от природы производственного процесса, и, в частности, от того в какой степени производство подвержено действию закона убывающей отдачи по отношению к переменным факторам. Предельные издержки дополнительного выпуска продукции высоки вначале, когда небольшое увеличение использования факторов вызывает незначительный рост выпуска продукции (например, на большом предприятии с массой оборудования). Однако, по мере того как использование факторов производства увеличивается и становится более эффективным, предельные издержки значительно снижаются. Наконец, предельные издержки вновь начинают расти при относительно большом объеме выпуска продукции, благодаря действию закона убывающей отдачи.

Как предельные, так и средние издержки тесно связаны с продуктивностью факторов и издержками производства. Предельный и средний продукты говорят нам о фактической связи между затратами и результатами производства, они решающим образом сказываются на выборе фирмой объема производства. Знание краткосрочных издержек особенно важно для фирм, действующих в условиях заметных колебаний спроса. Если фирма в настоящее время осуществляет выпуск продукции в объеме, при котором предельные издержки резко возрастают, неопределенность относительно увеличения спроса в будущем может заставить фирму внести изменения в производственный процесс и, вероятно, побудить к дополнительным затратам сегодня, чтобы избежать более высоких издержек в будущем.

Наличие неопределенности приводит к ситуации риска, когда наступление событий вероятно и может быть определено, т.е. в этом случае объективно существует возможность оценить вероятность событий, предположительно возникающих в результате совместной деятельности партнеров по производству, контрдействий конкурентов или противника, влияния природной среды на развитие экономики, внедрения научно-технических достижений и т.п.

12.4. Функция полезности

Основным понятием теории потребления является функция полезности.

Поведение индивидуальных потребителей зависит от того, как удовлетворяются их потребности, какую полезность приносит тот или иной товар.

Полезностью называют удовлетворение, которое получают от потребления товара или услуги. Различают общую и предельную полезность. Общая полезность − это удовлетворение, которое получают от потребления определенного набора единиц товара или услуг.

Если говорить о цели производителей и предпринимателей, то ясно, что это получение максимальной прибыли. Но говорить о мотивации поведения потребителей сложнее. Если предположить, что потребители стремятся максимально увеличить свои личные доходы, то это в действительности не так. Люди не стремятся работать семь дней в неделю по двадцать четыре часа в сутки, а находят разумный компромисс между работой, отдыхом и досугом. Аналогично потребители делают покупки, выбирая из ряда различных товаров и руководствуясь ценой, качеством и другими факторами.

Под предельной полезностью будем понимать полезность, равную приращению, увеличению общей полезности в результате приобретения дополнительной единицы данного товара или услуги.

Учитывая структуру цен, доходов и собственные предпочтения, потребитель приобретает определенные количества благ, и математическая модель такого его поведения называется моделью потребительского выбора.

Не нарушая общности, сохраняя возможности графической интерпретации и все принципиальные свойства общей модели, рассмотрим модель с двумя благами.

Пусть имеется два вида товара и потребитель приобретает первый товар в количестве x_1, а второй — в количестве x_2. Полезность тогда представляет некоторую функцию от x_1 и x_2, которую запишем как $U = U(x_1, x_2)$.

Значение $U(x_1, x_2)$ на потребительском наборе (x_1, x_2) равно потребительской оценке индивидуума для этого набора. Так, если U(2,6) = 30, а U(5,3) = 40, то это означает, что с точки зрения потребителя лучше приобрести пять единиц первого товара и три единицы второго товара, чем две единицы первого товара и шесть единиц второго товара.

Потребительскую оценку $U(x_1, x_2)$ набора (x_1, x_2) принято называть уровнем (или степенью) удовлетворения потребностей индивидуума, если он приобретает или потребляет данный набор (x_1, x_2).

Частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = U^1_{x_1} \text{ и } \frac{\partial u}{\partial x_2} = U^1_{x_2} \quad (12.16)$$

называются предельными полезностями. Чувствительность набора (x_1, x_2) к незначительному изменению x_1 при фиксированном x_2 называется предельной полезностью x_1 и обозначается $U^1_{x_1}$. Аналогично предельная полезность x_2 определяется как $U^1_{x_2}$.

Линия, соединяющая потребительские наборы (x_1, x_2), имеющие один и тот же уровень удовлетворения потребностей индивидуума, называется линией безразличия. Линия безразличия есть не что иное, как линия уровня функции полезности. Множество линий безразличия называется картой линий безразличия.

В результате исследований установлено, что функция полезности некоторого блага имеет вид

$$U = U(x_1, x_2) = X_1^{\frac{1}{2}} \cdot X_2^{\frac{1}{4}}. \quad (12.17)$$

Ее частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = U^1_{x_1} = \frac{1}{2} X_1^{\frac{1}{2}} \cdot X_2^{\frac{1}{4}}; \frac{\partial u}{\partial x_2} = U^1_{x_2} = \frac{1}{4} X_1^{\frac{1}{2}} \cdot X_2^{\frac{1}{4}}; \quad (12.18)$$

На рис. 12.15 показан фрагмент карты линий безразличия. Видно, что линии безразличия, соответствующие разным уровням удовлетворения потребностей, не касаются и не пересекаются. Чем правее лежит линия безразличия, тем большему уровню удовлетворения потребностей она соответствует. Линия безразличия убывает (является нисходящей) и строго выпукла к началу координат.

Дифференциал функции полезности запишем как

$$du\ (x_1,\ x_2) = U^1_{x_1}\, dX_1 + U^1_{x_2}\, dX_2$$

и, если двигаться вдоль линии безразличия, то приращение функции $U(x_1, x_2)$ равно нулю, и, следовательно, можно считать равной нулю и его главную линейную часть.

Из $du(x_1, x_2) = 0$ следует, что

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{U^1_{x_1}}{U^1_{x_2}}. \qquad (12.19)$$

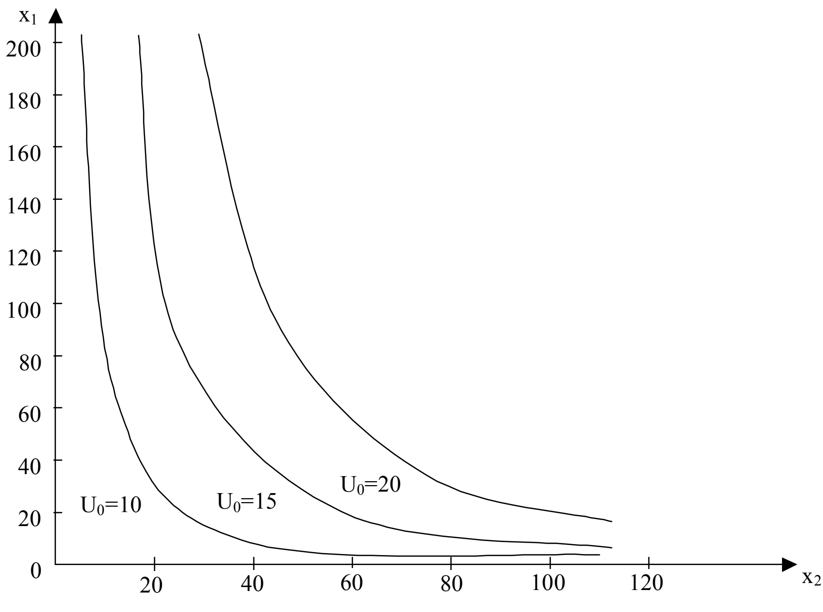


Рис. 12.15. Линии безразличия

Рассмотрим фиксированную линию безразличия (рис. 12.16). Для данного случая Δx_1 0, а $\Delta x_2 < 0$. Тогда говорят, что Δx_1 единиц первого товара замещается на $(-\Delta x_2)$ единиц второго товара.

Из рис. 12.16 имеем приближенное равенство

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\mathrm{tg}\alpha \approx -\mathrm{tg}\alpha = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}. \tag{12.20}$$

Из (12.19) и (12.20) получаем приближенное равенство

$$-\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{U^1_{x_1}}{U^1_{x_2}}. \tag{12.21}$$

Дробь $\left(-{\Delta x_2}/{\Delta x_1}\right)$ называется нормой замены первого продукта вторым на потребительском наборе (x_1, x_2), а предельной нормой замещения x_1 на x_2 в точке $A(x_1, x_2)$ называется предел отношения , когда точка B стремится к A, т.е. , оставаясь на одной с A линии уровня.

Из (12.21) следует, что предельная норма замещения одного товара другим равна отношению их предельных полезностей.

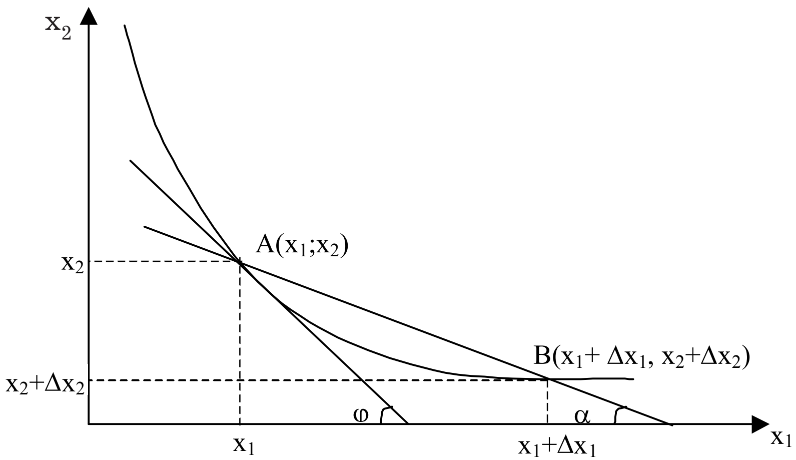


Рис. 12.16

Обозначая предельную норму замещения символом $MRS_{x_1x_2}$, имеем

$$MRS_{x_1x_2} = \frac{U^1_{x_1}}{U^1_{x_2}}. \qquad (12.22)$$

Так для функции (12.17)

$$MRS_{x_1x_2} = \frac{\frac{1}{2}x_1^{-\frac{1}{2}} \cdot x_2^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}x_1^{\frac{1}{2}} \cdot x_2^{-\frac{3}{4}}} = \frac{2x_2}{x_1}.$$

Рассмотрим блага A(400,100) и B(404,98).

Находим предельные полезности в точке A

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \cdot 400^{\frac{1}{2}} \cdot 100^{\frac{1}{4}} = 0{,}079; \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{1}{4} \cdot 400^{\frac{1}{2}} \cdot 100^{\frac{3}{4}} = 1{,}158.$$

и в точке B

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \cdot 400^{-\frac{1}{2}} \cdot 98^{\frac{1}{4}} = 0{,}078; \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{1}{4} \cdot 400^{\frac{1}{2}} \cdot 98^{\frac{3}{4}} = 0{,}161.$$

Приращения независимых переменных

$$\Delta x_1 = 404 - 400 = 4, \ \Delta x_2 = 98 - 100 = -2.$$

Приращение функции полезности приближенно записывается как

$$\Delta U(x_1, x_2) \approx \frac{\partial u}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \Delta x_2 \qquad (12.23)$$

и это выражение тем точнее, чем меньше Δx_1 и Δx_2.

Получаем

$$\Delta U \approx 0{,}079 \cdot 4 + 0{,}158 \cdot (-2) = 0.$$

Вычислим теперь предельные нормы замещения в точке А и в точке В

$$MRS_{x_1x_2}(400{,}100) = \frac{2\cdot 100}{400} = 0{,}5; \; MRS_{x_1x_2}(404{,}98) =$$

$$= \frac{2\cdot 98}{400} = 0{,}48.$$

Поскольку переменные x_1 и x_2 представляют собой количество приобретаемого товара, то и предельные полезности положительны, но производные от предельных полезностей отрицательны, а это, в свою очередь, означает, что сами предельные полезности являются убывающими функциями по соответствующим переменным. Отсюда следует закон убывания предельной полезности: предельная полезность каждого продукта уменьшается, если объем его потребления растет. В жизни этот закон очевиден: если приобретается очередной автомобиль, то это доставляет меньше удовольствия, чем покупка первой машины.

Далее рассмотрим задачу потребительского выбора, заключающуюся в выборе такого потребительского набора $(x_1^0; x_2^0)$, который максимизирует его функцию полезности при заданном бюджетном ограничении.

Если P_1 и P_2 — рыночные цены одной единицы первого и второго продуктов соответственно, а J — доход индивидуума, который он готов потратить на приобретение первого и второго продукта, то бюджетное ограничение означает, что расходы на продукты не могут превышать денежного дохода, т. е. $p_1x_1 + p_2x_2 \le J$, где x_1 и x_2 количество продукта первого и второго вида, которое должен приобрести покупатель.

Отсюда задача потребительского выбора формулируется следующим образом:

Найти такие $x_1 \ge 0$ и $x_2 \ge 0$, для которых удовлетворяется неравенство

$$p_1x_1 + p_2x_2 \le J, \tag{12.24}$$

а функция полезности $U(x_1,x_2)$ достигает max.

Рассмотрим конкретную задачу

$$U(x_1,x_2)=x_1^{\frac{1}{2}}\cdot x_2^{\frac{1}{4}}, (\max)$$

$$10x_1 + 5x_2 \le 60,$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \qquad (12.25)$$

Определяем из бюджетного ограничения x_2

$$x_2 = 12 - 2x_1$$

и подставляем его в функцию полезности

$$U(x_1)=x_1^{\frac{1}{2}}\cdot(12-2x_1)^{\frac{1}{4}},$$

которая становится функцией одной переменной. Находим, что max этой функции будет при $x_1 = 3$, тогда $x_2 = 6$. Следовательно, при покупке трех единиц первого продукта и шести единиц второго продукта функция полезности принимает максимальное значение, равное $U_{max}(3,6)=3^{\frac{1}{2}}\cdot 6^{\frac{1}{4}}=2{,}71.$

12.5. Исследование микроэкономических моделей на ЭВМ

12.5.1. Функции спроса и предложения

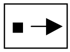
Исследование функциональных зависимостей спроса и предложения K = K(P) и S = S(P) позволяет оценивать, предсказывать изменение рассматриваемых величин. Чем ближе анализируемая модель к реальности, тем она сложнее и тем более точными могут оказаться прогнозы и оценки. Как отмечалось в 12.1.2., определение равновесной цены позволяет выявить (рис. 12.2) зоны отсутствия риска, лежащие ниже этой точки, и зоны повышенного риска.

Порядок анализа этих функций следующий.

1. Вызываем Mathcad. Установите режим автоматических вычислений.

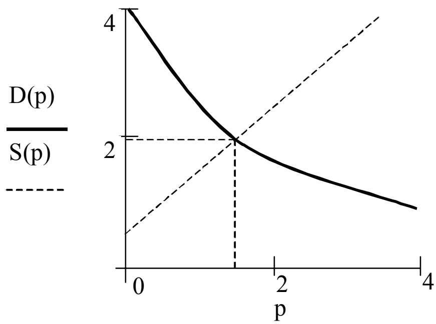
2. Определите функцию спроса К(Р) и функцию предложения S(P) как функцию переменной цены Р.

3. Постройте на одном графике эти функции. Для нахождения равновесной цены графически щелкните по строке **Trace** пункта **Graph** меню **Format** и установите стрелками или мышью маркер на пересечение линий.

4. Найдите символьное значение Р, при котором достигается равновесная цена. Для этого введите ключевое слово **Given**, затем разность функций спроса и предложения, символьный знак равенства (<Ctrl + <=) и приравняйте левую часть нулю. Введите функцию **Find** (Р), выделите ее, щелкните в панели  по кнопке  и по рабочему документу вне выделяющей рамки. Вычислите равновесную цену как функцию вычисленного значения Р.

В приведенном ниже документе показано графическое и символическое вычисление равновесной цены.

$$К(P) := \frac{-p+8}{p+2} \qquad S(P) := p + 0{,}5$$



Данным

$$\frac{-p+8}{p+2} - (p + 0{,}5) = 0$$

Найти (р) $\rightarrow$(−4.9221443851123800950 1.4221443851123800950)

$К_0 := К(1.42)$

$К_0 = 1.924$

12.5.2. Расчет максимальной прибыли

Экономическое содержание прибыли неоднозначно.

Экономическая прибыль или чистая прибыль π — это разность между доходом (выручкой предприятия от реализации продукции) R и полными издержками (явными и вмененными в форме заработной платы, ренты и ссудного процента) C:

$$\pi = R - C. \qquad (12.26)$$

Полный доход от реализации товара в количестве Q по цене P определяется как

$$R = Q \cdot P(Q), \qquad (12.27)$$

где $P = P(Q)$ можно рассматривать как соответствующую функцию спроса.

Полные (общие) издержки C подразделяются на постоянные C_f, которые не зависят от объема выпускаемой продукции Q и переменные C_v, изменяющиеся с изменением объема производства, т.е.

$$C = C_f + C_v \cdot Q. \qquad (12.28)$$

Постоянные издержки включают денежные затраты производителя (фирмы) на такие ресурсы, количество которых он не может изменить при производстве данного продукта в краткосрочном периоде. Размеры их не зависят от количества производимой продукции и существуют даже при нулевом объеме производства и должны быть оплачены, даже если фирма ничего не производит. К ним относятся денежные затраты на эксплуатацию производственных зданий, оборудования, машин, а также на арендную плату, процент по кредиту и административно-управленческие расходы.

Переменные издержки включают денежные затраты на сырье, топливо, материалы, заработную плату рабочим. Размер их зависит от количества производимой продукции: чем больше произведено продукции, тем больше сумма переменных издержек и наоборот. Как правило, в начале производства переменные издержки довольно высоки, затем их уровень несколько стабилизируется за счет экономии на массовом производстве. По истечении некоторого времени они опять начинают расти, так как вступает в действие закон убывающей производительности затрат.

Ниже приведено графическое решение задачи о максимальной прибыли для функции $P(Q) = 20Q - 2Q^2$ и для $C_f = 50$, $C_v = 1{,}2$.

После этого приведено символьное вычисление точек, определяющих границы прибыльного объема производства, и точки максимальной прибыли.

Порядок выполнения рассматриваемого примера.

1. Вызываем Mathcad и устанавливаем режим автоматических вычислений.

2. Определите функцию полного дохода как функцию объема проданного товара.

3. Определите функцию издержек как функцию объема проданного товара.

4. Постройте на графике рассматриваемые функции.

5. Найдите графически максимальную прибыль и границы доходного производства.

Для того чтобы найти геометрически выпуск продукции Q, при котором достигается максимум прибыли, изобразите на одном графике кривую полного дохода и линию издержек. Максимум прибыли достигается в точке, где расстояние между кривыми максимально. В приведенном документе координаты точки максимальной прибыли определены с помощью функции **Trace** пункта **Graph** меню **Format** и равны $Q_{max} = 6{,}63$, а $p_i(Q_{max}) = 238{,}3$.

6. Найдите аналитически границы прибыльного производства.

7. Найдите производную функции прибыли и точку максимальной прибыли.

8. Вычислите максимальную прибыль.

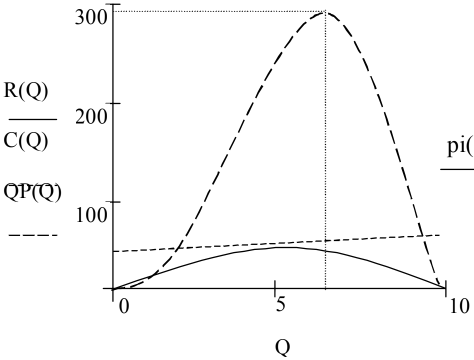
Фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий вычисления для $P(Q) = 20Q - 2Q^2$ и $C(Q) = 50 + 1{,}2 \cdot Q$ приведен ниже.

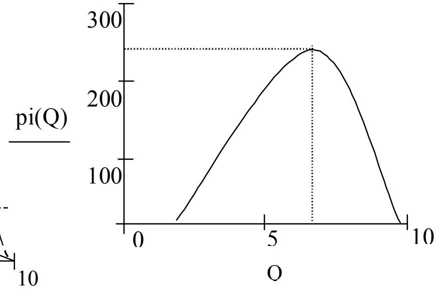
$$Cf := 50 \quad Cv := 1.2$$

$$P(Q) := -2Q^2 + 20Q$$

$$C(Q) := Cf + Cv \cdot Q$$

$$Pi(Q) := Q \cdot P(Q) - C(Q)$$





Данным

$$pi(Q) = 0$$

Найти(Q) → (−1.4515690223173993131 1.7809314824009253201 9.6706375399164739930)

$$Q1 := 1.7809314824009253201 \quad Q2 := 9.6706375399164739930$$

Данным

$$\frac{d}{dQ} pi(Q) = 0$$

Найти(Q)→(3.0136228843334675525Ц10^{-2} 6.6365304378233319911) Qmax := 6.6365304378233319911

$$Pi(Qmax) = 238.314$$

12.5.3. Средние и предельные показатели

В п. 12.3 были рассмотрены такие показатели как суммарные, предельные, средние и другие величины, которые широко используются в экономическом анализе.

Пусть суммарные издержки определяются как $C(Q) = 1500Q - 2Q^2 + 0{,}002Q^3$. Нужно найти средние и предельные издержки.

Порядок выполнения примера.

1. Вызываем Mathcad и установите режим автоматических вычислений.

2. Определите заданную экономическую функцию C(Q), определите средние издержки AC(Q) и предельные издержки MC(Q).

3. Постройте графики AC(Q) и MC(Q). При малых ΔQ они совпали.

Фрагмент рабочего документа Mathcad приведен ниже.

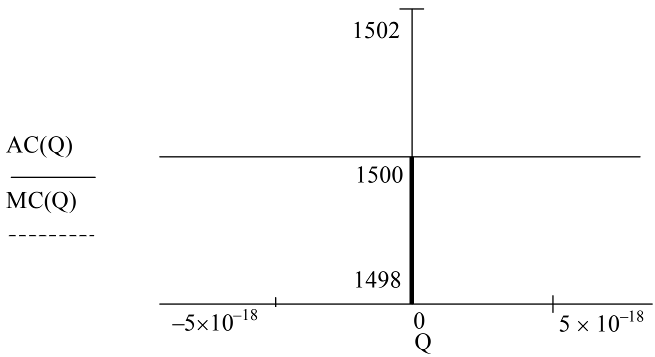
$$C(Q) := 1500Q - 2Q^2 + 0{,}002Q^3$$

$$AC(Q) := \frac{C(Q)}{Q}$$

$$AC(Q) \rightarrow \frac{\left(1500 \cdot Q - 2 \cdot Q^2 + 2 \cdot 10^{-3} \cdot Q^3\right)}{Q}$$

$$MC(Q) := \frac{d}{dQ} C(Q)$$

$$MC(Q) \rightarrow 1500 - 4 \cdot Q + 6 \cdot 10^{-3} \cdot Q^2$$



12.5.4. Эластичность экономических функций

Известна функция спроса К(р) = $\frac{-p+8}{p+2}$. Эластичность спроса по цене определяется формулой (12.4).

Рассмотрим вычисление эластичности и построение ее графика.

Порядок выполнения вычислений.

1. Вызываем Mathcad и установите режим автоматических вычислений.

2. Определите функцию спроса К = К(Р).

3. Определите эластичность спроса по цене.

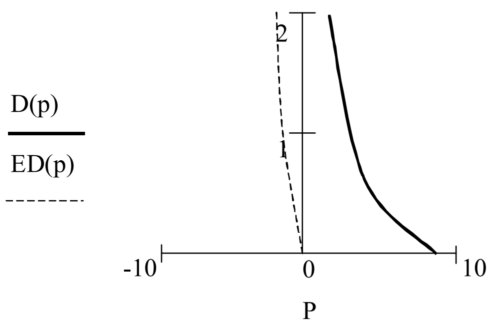
4. Найдите эластичность спроса по цене и постройте ее график.

Фрагмент рабочего документа Mathcad приведен ниже.

$$К(p) := \frac{-p+8}{p+2}$$

$$ЕК(p) := \frac{p}{D(p)}\frac{d}{dp}D(p)$$

$$ЕК(p) \rightarrow \frac{p}{(-p+8)}(p+2)\left[\frac{-1}{(p+2)} - \frac{(-p+8)}{(p+2)^2}\right]$$



Ниже приведены вычисления предельного дохода и эластичности спроса по цене, графики эластичности, предельного дохода и график дохода для функции спроса $P(Q) = 6Q - Q^2$.

Порядок выполнения вычислений.

1. Вызываем Mathcad и установите режим автоматических вычислений.

2. Определите функцию спроса $P = P(Q)$.

3. Найдите эластичность спроса по цене $EP(Q)$.

4. Определите функцию суммарного дохода $R(Q)$.

5. Найдите предельный доход $MR(Q) = RP(Q) = {dR(Q)}/{dQ}$.

6. Постройте графики эластичности и предельного дохода.

7. Постройте графики суммарного дохода $R(Q)$.

8. Найдите на графике точку, в которой $EP(Q) = -1$.

9. Найдите символьно точку Q, в которой $EP(Q) = -1$

10. Вычислите аналитически соответствующее значение цены.

Фрагмент рабочего документа Mathcad приведен ниже.

$$P(Q) := -Q^2 + 6Q$$

$$EP(Q) := \frac{Q}{P(Q)} \frac{d}{dQ} P(Q)$$

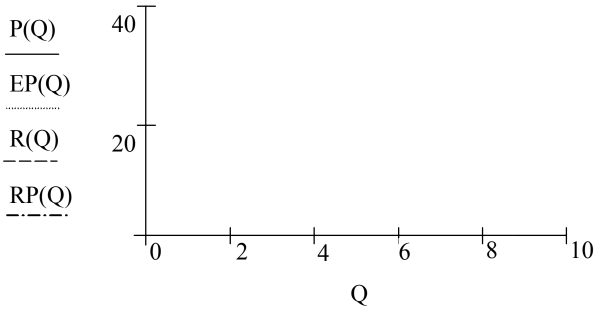
$$EP(Q) \rightarrow \frac{Q}{(-Q^2 + 6Q)} \; (-2Q + 6)$$

$$R(Q) := Q \cdot P(Q)$$

$$R(Q) \rightarrow Q(-Q^2 + 6Q)$$

$$RP(Q) := \frac{d}{dQ} R(Q)$$

$$RP(Q) \rightarrow -Q^2 + 6Q + Q(-2Q + 6)$$



Данным

$EP(Q) = -1$

Найти $(Q) \rightarrow 4$

$Q := 4$

$P(Q) = 8$

Глава 13
МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

При изучении явлений природы, процессов техники, экономики или транспортных систем приходится часто встречаться с таким положением, когда описание этих явлений или процессов производится с помощью случайных величин, которые изменяются во времени.

Теория массового обслуживания это прикладная область теории случайных процессов. Предметом исследования теории массового обслуживания являются вероятностные модели реальных систем обслуживания, в которых в случайные (или не в случайные) моменты времени возникают заявки на обслуживание и имеются устройства для обслуживания этих заявок.

Задачи организации массового обслуживания возникают во многих областях практической деятельности. В частности, предприятия бытового обслуживания и общественного питания, торговля и заготовительные предприятия, поликлиники и телефонные станции, билетные кассы могут служить типичными примерами систем массового обслуживания, которые удовлетворяют потребности населения в услугах определенного вида.

13.1. Введение

В практической деятельности людей постоянно создаются такие положения, когда возникает массовый спрос на обслуживание какого-либо специального вида, причем, обслуживающая организация, располагая лишь ограниченным числом обслуживающих единиц, не всегда способна немедленно удовлетворить все поступающие заявки. Образовывается очередь. Возникает типичная для систем массового обслуживания задача установить с возможной точностью взаимную зависимость между числом обслуживающих единиц и качеством обслуживания. Качество обслуживания, естественно, измеряется различными показателями, Такими показателями могут служить либо процент заявок, получающих отказ, либо среднее время ожидания начала обслуживания (средняя длина очереди). Увеличение числа обслуживающих единиц, разумеется, повышает качество и эффективность работы системы массового обслуживания, однако, также и ясно, что чрезмерный рост этого числа сопряжен с излишним расходом сил и материальных средств. Таким образом, в теорию массового обслуживания вводится оптимизация, имеющая своей основной чертой математическую формализацию процесса.

Система массового обслуживания полностью описывается заданием: входящего потока, дисциплины очереди, порядка обслуживания.

Входящий поток описывает порядок прибытия клиентов и поступления их в систему. Число клиентов может быть ограниченным или неограниченным, и они могут прибывать поодиночке или группами. Если на обслуживание поступает каждый прибывающий клиент, то будем иметь систему с ожиданием (очередью). Однако возможно, что система не примет клиента, когда она полностью занята; в таком случае имеем систему с потерями (отказом, ожиданием). Качество работы таких систем характеризует процент отказов в обслуживании или доля потерь вследствие отказов. Клиент также может покинуть систему и в том случае, если в момент прибытия он встречает слишком длинную очередь, такое поведение называется неприсоединением к очереди. Наконец, клиент может оказаться вынужденным покинуть систему, если в системе не оказывается места для ожидания. Таким образом, часто встречаются системы смешанного типа — с очередью и отказом и показателями эффективности их работы служат как средняя длина очереди, так и процент отказов.

Дисциплина очереди определяет порядок образования очереди, характер поведения клиентов в процессе ожидания. Простейшей дисциплиной является “первым прибыл — первым обслужен”, согласно которой клиенты обслуживаются в порядке их прибытия. При обратном порядке обслуживания имеем дисциплину “прибыл последним — обслужен первым”. Возможны и некоторые другие дисциплины очереди.

Механизм обслуживания описывает характер распределения клиентов по обслуживающим устройствам. В общем случае имеется $n \geq 1$ обслуживающих устройств. Если имеется конечное число обслуживающих устройств, то они назначаются клиентам в определенном порядке. В частности, дисциплина очереди “первым был — первым обслужен” означает, что из n обслуживающих устройств, которое освобождается первым, обслуживает клиента, находящегося в начале очереди. В системах с групповым обслуживанием клиенты обслуживаются партиями, а не поодиночке.

Схематически систему массового обслуживания можно изобразить в виде (рис. 13.1).

Любой объект, поступающий на обслуживание, называют требованием (заявкой, вызовом, клиентом и т. д.). Персонал или технические средства, выполняющие обслуживание, называют каналами обслуживания (приборами, линиями, или обслуживающими единицами).

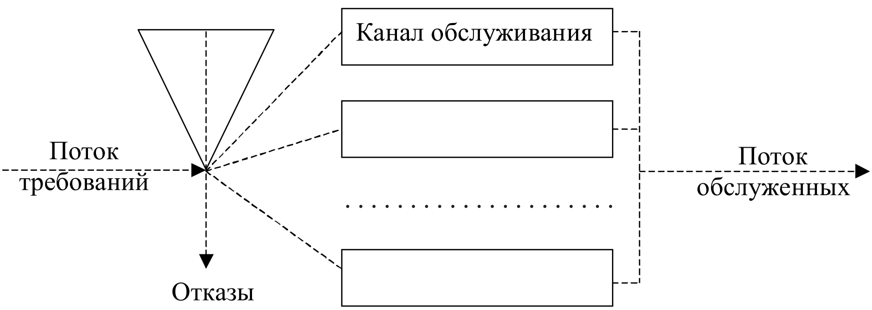


Рис. 13.1

Для примера рассмотрим систему массового обслуживания с ожиданием (рис. 13.2) в которой имеется три источника, две очереди и пять приборов.

Можно представить себе, что на входе имеется несколько источников, которые характеризуются различными законами распределения вероятностей. Например, вообразим, что клиентуру пункта приема белья в стирку при фабрике-прачечной составляют рабочие трех предприятий и что среднее число рабочих, приходящих в минуту, изменяется в зависимости от того, с какого предприятия приходят рабочие. На практике в этом случае все источники заменяются одним общим источником, для которого закон распределения вероятностей вычисляется или определяется путем измерений.

Возможно существование нескольких очередей, например, если поступающие требования занимают место в самой очереди, или в системе допускается несколько преимуществ. С другой стороны, в каждой очереди порядок расположения требований может управляться различными правилами. Наиболее простое правило, когда требования располагаются в порядке поступления, в этом случае мы будем очередь называть упорядоченной. Вообще говоря, совокупность отношений порядка, или преимущества, которые вводятся для оче-

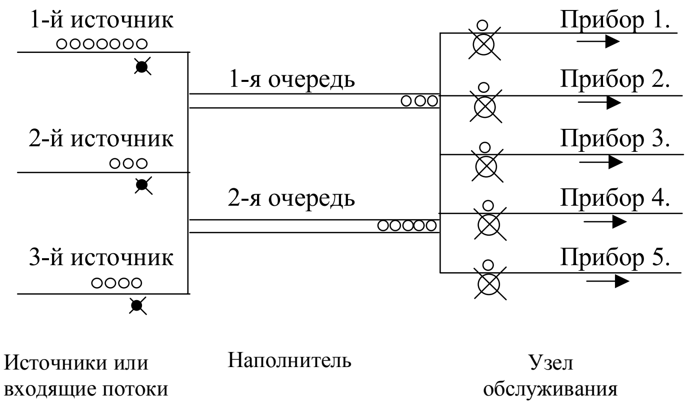


Рис. 13.2

реди, называется дисциплиной ожидания. В рассматриваемом примере всегда может предполагаться существование двух очередей, одна из которых предназначается для определенных первоочередников, число которых невелико.

Перед приборами (каналами), обеспечивающими обслуживание в течение времени, которое может быть различным для каждого требования или каждого прибора, стоит одна или несколько очередей. Должно быть определено, каким образом каждое требование выбирает прибор, которым оно будет обслужено, совокупность соответствующих правил составляет дисциплину обслуживания.

Производственные процессы на предприятиях чрезвычайно сложны и многообразны. Это приводит к тому, что в рамках известных теорий линейного и нелинейного программирования, статистического моделирования, сетевого планирования их описать с достаточной степенью достоверности не всегда представляется возможным. В таких ситуациях, когда известные математические модели и методы оказываются слишком упрощенными и не могут адекватно отразить экономическую и производственную реальность, на помощь приходит метод имитационного моделирования.

Имитационная модель представляет собой формализованное описание производственной системы через ее элементы и зависимости между ними, порядок расчета показателей, характеризующих эти элементы и зависимости, представленное в виде алгоритма, реализуемого на ЭВМ с помощью специальных программ.

Имитационное моделирование включает следующие этапы реализации: формулировка цели, разработка концепции построения модели, построение модели в виде схемы или алгоритма расчетов, составление методики обработки результатов имитационных экспериментов, разработка программного обеспечения проведения имитационных экспериментов на ЭВМ, проведение расчетов, анализ и обобщение результатов моделирования.

Используя имитационное моделирование, можно строить модели анализируемых объектов любой сложности, большой размерности. Имитационную модель можно также использовать для всестороннего анализа деятельности предприятия или его отдельных подразделений, применять как для анализа, так и для планирования работы отдельных звеньев производственного процесса и производства в целом.

В качестве примера построим имитационную модель парикмахерской (рис. 13.3).

Входной поток клиентов (заявок) характеризуется законом распределения моментов появления заявок (табл. 13.1).

Таблица 13.1

Часы работы парикмахерской	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Число клиентов	12	10	7	13	15	19	14	17	21	16	13	11

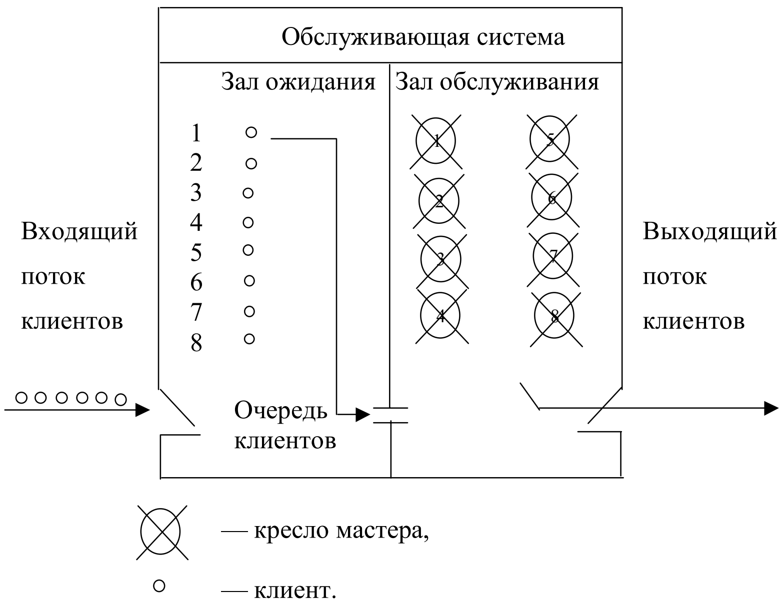


Рис. 13.3

Из таблицы видно, сколько клиентов пришло в первый, второй и т. д. часы работы парикмахерской. Всего данная парикмахерская работает 12 часов. Предположим, что среднее время обслуживания заявки $\overline{T}_{об.}=20$ мин. Число мастеров (каналов обслуживания) — 8 человек.

Заявки (клиенты) обслуживаются по очереди.

Требуется определить: среднюю длину очереди в разные часы работы парикмахерской, среднее время ожидания клиента в очереди, оптимальное число мастеров в каждый час работы при условии, что время ожидания в очереди не более 10 мин., среднее время простоя мастеров и т. д.

Из-за сложности рассматриваемой системы массового обслуживания ее аналитическое решение невозможно. Для практического решения данной задачи необходимо упростить модель. Схема такой модели приведена на рис. 13.4.

Модель построена из специальных блоков, называемых агрегатами. Каждый агрегат выполняет определенные функции. Так агрегат A_0 предназначен для распределения заявок (клиентов), пришедших в систему (парикмахерскую), между каналами обслуживания (мастерами) A_1-A_8, а также для ими-

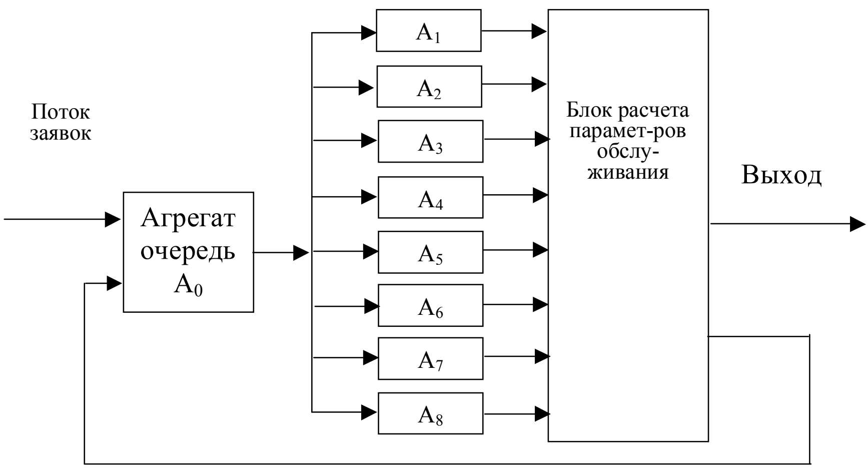


Рис. 13.4

тации очереди клиентов. Заявка из очереди попадает в первый освободившийся канал обслуживания, где находится в течении времени обслуживания $\overline{T}_{об.}$=20 мин.

Все агрегаты модели описываются при помощи задания входов, выходов и состояний. Например, агрегат очередь A_0 в качестве первого входа имеет поток входных данных, причем, вход принимает значение 0, если в рассматриваемый момент времени в систему не поступила новая заявка, и I, если заявка поступила. Второй вход принимает значение I, если освобождается какой-либо канал обслуживания (мастер). В противном случае второй вход равен 0. Состояние агрегата A_0 отображается в виде трех компонент — X, Y, Z, где X — число заявок, находящихся в очереди, Y — номер канала, освободившегося первым, Z — суммарное время нахождения всех заявок в очереди за определенный час работы системы. Состояние агрегата A_0 меняется в зависимости от входных данных, а именно: меняется величина очереди, если пришла новая заявка или заявка из очереди поступила на обслуживание; меняются номера каналов Y и время Z. Все возможные изменения состояния описываются и закладываются в модель. Выход агрегата A_0 соответствует 1, если в данный момент заявка из очереди пошла на обслуживание, и 0, если это не происходит. Аналогично описываются и другие агрегаты.

По известным в определенные моменты времени значениям состояний и выходов агрегатов системы рассчитываются все требуемые параметры обслуживания.

После построения модели начинается ее исследование. Исследование заключается в том, что осуществляется серия имитаций (прихода и обслуживания заявок) и вычисляются показатели обслуживающей системы. Показатели будут изменяться, если изменится поток заявок, среднее время обслуживания $\overline{T}_{об.}$, число рабочих каналов (кресел). Изменяя все эти характеристики, можно определить необходимое число рабочих каналов (кресел) для различной интенсивности потока клиентов при заданном среднем времени ожидания в очереди.

Оценкой параметров системы обслуживания и принятием решения об оптимальном типе предприятия (системы обслуживания) занимаются эксперты. Эксперты задают исходные данные, меняют структуру модели, задают вопросы ЭВМ при помощи специальных языков моделирования.

Рассматриваемый процесс обслуживания клиентов в парикмахерской является динамическим (изменяющимся со временем), так как предполагается, что состояние агрегата A_0 поменяется с течением времени в связи с изменением параметра X (потока заявок). Задача значительно упрощается, если предположить, что среднее число клиентов, приходящих в парикмахерскую в единицу времени, остается постоянным.

Рассмотренная экономико-математическая модель парикмахерской называется имитационной моделью. Имитационные модели такого типа можно построить для прачечных, ателье химической чистки одежды, мастерских по ремонту обуви и одежды и др.

Для системы массового обслуживания (СМО) основным фактором, обуславливающим протекающие в ней процессы, является поток заявок. Поэтому математическое описание любой системы массового обслуживания начинается с описания потока заявок.

13.2. Распределение входящего потока и распределение времени обслуживания

13.2.1. Входящий поток требований

Рассматриваемые системы массового обслуживания определяются следующими допущениями: 1) входящий поток (модель прибытия клиентов) является стационарным по времени; 2) дисциплина очереди — "первым прибыл — первый обслужен"; 3) порядок обслуживания — число обслуживающих устройств равно n; время в течение которого какой-либо клиент находится на обслуживании, называется длительностью обслуживания ($T_{об}$) и является случайной величиной. Допущения относительно порядка обслуживания означают, что с точки зрения потребности в обслуживании все клиенты одинаковы; что обслуживающее устройство не прекращает и не меняет темпа обслуживания в какой-либо момент времени и что на его работу ни в коей мере не влияет длина очереди.

Пусть $M[T] = \overline{T}$ обозначает среднюю длительность промежутков времени между последовательными моментами прибытия клиентов, а $M[T_{об.}] = \overline{T}_{об.}$ — среднюю длительность обслуживания. Примем так же, что $0 < \overline{T} < \infty$ и $0 < \overline{T} < \infty$. Для системы с одним обслуживающим устройством (однолинейной системы) отношение средней длительности обслуживания к средней длительности промежутка времени между последовательными моментами прибытия клиентов

$$\rho = \frac{\overline{T}_{об.}}{\overline{T}} \; (0 < \rho < \infty) \tag{13.1}$$

называется загрузкой и выражается в эрлангах, эта величина является безразмерной. Применив к последовательности $\{T_r\}$ известный результат теории восстановления, находим, что при $t \to \infty$ математическое ожидание числа клиентов, прибывающих за единицу времени, составляет

$$M \approx \frac{1}{\overline{T}} \tag{13.2}$$

поэтому можно сказать, что загрузка ρ равна математическому ожиданию числа клиентов, прибывающих за среднее время обслуживания. Это оправдывает определение показателя загруженности системы. Величина ρ является важным показателем при анализе систем массового обслуживания. Для n — канальной системы обслуживания ($n < \infty$) загрузка системы определяется как

$$\rho = \frac{\overline{T}_{об.}}{\overline{T}} . \tag{13.3}$$

Некоторые важные проблемы, возникающие при анализе систем массового обслуживания, касаются следующих параметров:

1. Длина очереди. Пусть $Q(t)$ — число клиентов, находящихся в системе в момент времени t. Если $n < \infty$, то в $Q(t)$ будут входить как обслуживаемые, так и ожидающие в очереди клиенты. Назовем $Q(t)$ длиной очереди. Если $n = \infty$, то $Q(t)$ — число занятых обслуживающих устройств.

2. Длительность ожидания. Время, проведенное клиентом в очереди до начала обслуживания, называется длительностью ожидания. Общее время пребывания клиента в системе равно длительности ожидания плюс длительность обслуживания.

3. Интервал занятости. Допустим, что первоначально обслуживающее устройство свободно, тогда прибывающий клиент будет обслуживаться немедленно. За время его обслуживания могут прибыть еще несколько клиентов, которые поступят на обслуживание в порядке очереди. Этот процесс будет продолжаться, таким образом, до тех пор пока в системе не останется клиентов, и обслуживающее устройство снова станет свободным. Когда это произойдет, мы говорим, что только что закончился интервал занятости. Свободным интервалом называется такой интервал времени, когда в системе нет клиентов. Интервал занятости и следующий за ним свободный интервал образуют вместе цикл занятости, а весь процесс представляет собой последовательность таких циклов.

Предположим, что изучаемый поток обладает следующими тремя свойствами:

1. Стационарностью, которое означает, что математическое ожидание числа требований, поступающих в систему в единицу времени, не меняется во времени, т. е. вероятность поступления в систему определенного количества требований в течении заданного промежутка времени Δt зависит от его величины и не зависит от начала его отсчета.

2. Отсутствием последействия. Это свойство означает, что требования поступают в систему независимо друг от друга.

Например, поток клиентов, входящих в ателье химчистки одежды, можно считать потоком без последействия потому, что причины, обусловившие приход отдельного клиента именно в тот, а не в другой момент, как правило, не связаны с аналогичными причинами для других клиентов.

3. Ординарностью. Это условие выражает собой практическую невозможность появления двух или большего числа событий за очень малый промежуток времени, т. е. требования приходят поодиночке. Поток клиентов, входящих в парикмахерскую может считаться практически ординарным.

Поток событий, удовлетворяющий этим трем условиям, называется простейшим.

Непосредственная проверка наличия трех перечисленных условий нередко трудно выполнима, поэтому очень важно найти иные условия, которые позволили бы из иных оснований делать вывод о том, что поток событий окажется простейшим или близким к нему. Такое условие состоит в следующем.

Предположим, что интересующий нас поток является суммой очень большого числа независимых между собой стационарных потоков, каждый из которых лишь мало влияет на сумму. Суммарный поток при дополнительном ограничении арифметического характера, гарантирующем ординарность суммарного потока, оказывается близким к простейшему.

Так из того, что поток грузовых судов, прибывающих в данный морской порт, составлен из большого числа потоков, отправляемых из различных других портов, следует, что поток судов также должен быть близок к простейшему.

Простейший поток играет в теории массового обслуживания особенно важную роль. Во-первых, простейшие и близкие к простейшим потоки заявок часто встречаются на практике. Во-вторых, даже при потоке заявок, отличающемся от простейшего, часто можно получить удовлетворительные по точности результаты, заменив поток любой структуры простейшим с той же плотностью.

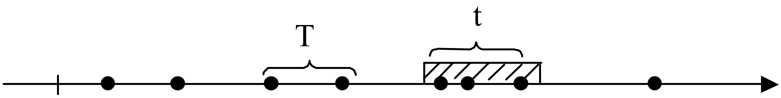


Рис. 13.5

Рассмотрим на оси 0t простейший поток событий (рис. 13.5) как неограниченную последовательность случайных точек.

Выделим произвольный участок времени длиной t. Как известно, при условиях 1, 2 и 3 число точек, попадающих на участок t, распределено по закону Пуассона с математическим ожиданием

$$a = \lambda t, \tag{13.4}$$

где λ — плотность (интенсивность) потока (среднее число требований, приходящееся на единицу времени). Вероятность того, что за время t произойдет ровно n событий, равна

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}. \tag{13.5}$$

В частности, вероятность того, что участок окажется пустым (не произойдет ни одного события), будет

$$P_o(t) = e^{-\lambda t}. \tag{13.6}$$

Величина $a = \lambda t$ представляет собой среднее число требований, поступивших к моменту времени t.

Из (13.6) следует, что плотность распределения промежутков времени между требованиями определяется как

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \ (t \quad 0), \tag{13.7}$$

Распределение (13.7) называется показательным (экспоненциальным). Для него математическое ожидание $M = {}^{1}\!/_{\lambda}$, а среднее квадратическое отклонение $\sigma = {}^{1}\!/_{\lambda}$.

13.2.2. Распределение времени обслуживания

Кроме характеристик входного потока заявок, режим работы системы зависит еще от характеристик производительности самой системы: числа каналов и быстродействия каждого канала. Одной из важнейших величин, связанных с системой, является время обслуживания одной заявки $T_{об}$. Эта величина может быть как случайной, так и не случайной. Очевидно, более общим является случайное время обслуживания.

В потоке требований интервал времени между соседними поступающими требованиями — величина случайная, однако, средний интервал предполагается заданным и равным $\overline{T}$. Например, клиенты поочередно подходят к приемщику обуви в моменты времени 9.00, 9.03, 9.08, 9.12, 9.18, 9.23, 9.29, 9.39, 9.45, 9.53, 10.00, интервал между поступлениями равен 3, 5, 4, 6, 5, 6, 10, 6, 8, 7 минут, а среднее значение = 6 мин.

По формуле (13.2) найдем, что интенсивность поступления требований, отражающая среднее число требований, поступающих в систему обслуживания за единицу времени, будет равна $\lambda = {}^{1}\!/_{6}\ {}^{1}\!/_{мин.} = {}^{60}\!/_{6}\ {}^{1}\!/_{ч} = {}^{1}\!/_{360}\ {}^{1}\!/_{сек}$. Следовательно, за одну секунду на обслуживание в среднем прибывает ${}^{1}\!/_{360}$ требования, за одну минуту — ${}^{1}\!/_{6}$ требования, за один час — десять требований.

Взаимосвязанные показатели λ и являются важнейшими характеристиками потока. Величина определяет разряженный или плотный поток поступает на обслуживание, а величина λ выражает скорость поступления требований на обслуживание — число входящих единиц в единицу времени.

Закон распределения интервала между соседними требованиями при одном к том же среднем значении $\overline{T}$ может быть различным — нормальным, равномерным, экспоненциальным (рис. 13.6.1).

Рассмотрим три примера интервалов (в мин.) между очередными поступлениями требований: 3, 1, 3, 5, 4, 2, 3, 2, 4, 3 — очередными подходами клиентов к приемщику обуви на ремонт (рис.13.6.2); 2, 3, 4, 5, 1, 4, 5, 2, 1, 3 — очередными подходами покупателей к кассе (рис. 13.6.3); 1, 3, 1, 1, 3, 1, 5, 8, 3, 1 — очередными подходами клиентов к приемщику одежды в химчистку (рис. 13.6.4).

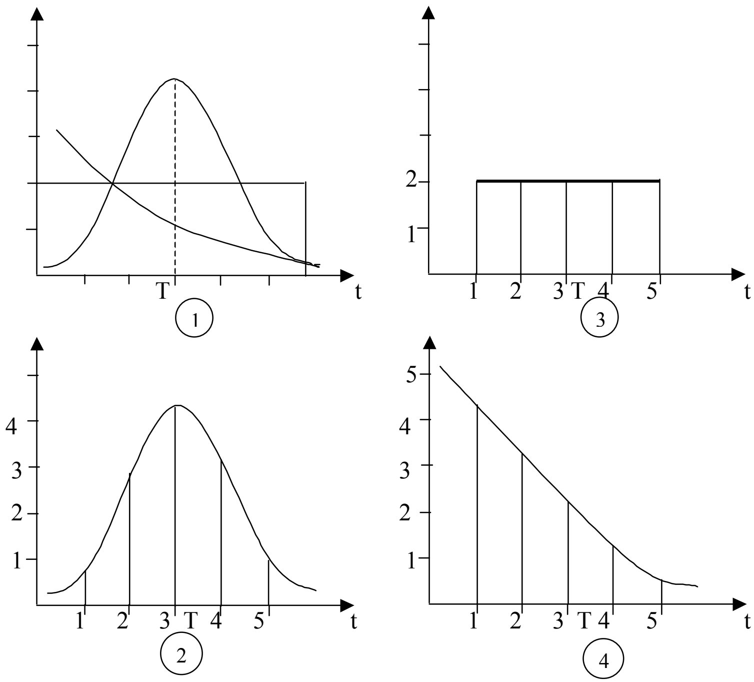


Рис. 13.6

Средний интервал между поступающими требованиями во всех трех случаях одинаков: $\overline{T}$ = 3 мин., но форма распределения величины интервала различная (рис. 13.6), соответствующая нормальному, равномерному и экспоненциальному распределениям. Эти различия отражаются величиной среднеквадратического отклонения длины интервалов: для первого примера $\sigma = \sqrt{1,2} \approx 1,1$; для второго примера $\sigma = \sqrt{1,4} \approx 1,55$ и для третьего примера $\sigma = \sqrt{8,4} \approx 2,9$.

Возможен случай, когда интервал времени между соседними требованиями потока постоянный и равен Т. Такой поток неслучайного закономерного поступления требований называется регулярным и у этого потока $\sigma = 0$

Любая система обслуживания состоит из ряда каналов или единиц обслуживания (обслуживающий персонал, приборы, механизмы и т. д.). Все обслуживающие каналы обычно предполагаются одинаковыми. Каждый из каналов затрачивает на обслуживание очередного требования некоторое случайное время, но среднее время обслуживания у всех каналов одинаково и равно $\overline{T}_{об.}$. Например, чистильщик обуви затратил на обслуживание каждого из десяти первых клиентов различное время: 3, 1, 3, 5, 4, 2, 3, 2, 4, 3 мин. (рис. 13.6.2), но среднее значение времени обслуживания равно $\overline{T}_{об.} = 3$ мин. Величина

$$\mu = \frac{1}{\overline{T}_{об.}} \tag{13.8}$$

называется интенсивностью обслуживания. Она характеризует скорость работы канала обслуживания и отражает среднее число требований, обслуживаемых каналом за единицу времени.

Так в нашем случае $\mu = 1/3\ 1/мин. = 60/3\ 1/ч = 1/180\ 1/сек$, это означает, что за одну секунду канал обслуживает в среднем $1/180$ требования, за одну минуту — $1/3$ требования и за один час — двадцать требований.

Встречаются примеры обслуживания с неслучайным постоянным временем $T_{об}$ (автоматы выдачи газированной воды, соков, газет, разменные и билетные автоматы на транспорте и т. д).

Пусть случайная величина $T_{об}$ имеет функцию распределения

$$G(t) = P(T_{об} < t). \tag{13.9}$$

Для практики особый интерес представляет случай, когда для величины $T_{об}$ функция распределения имеет вид

$$G(t) = 1 - e^{-\mu t} \ (t \quad 0), \tag{13.10}$$

и, следовательно, случайная величина $T_{об}$ имеет показательное распределение

$$g(t) = \mu e^{-\mu t} \ (t \quad 0). \tag{13.11}$$

Параметр μ называется интенсивностью обслуживания и это есть величина, обратная среднему времени обслуживания одного требования

$$\mu = \frac{1}{M\left[\overline{T}_{об.}\right]}. \tag{13.12}$$

Особая роль, которую играет в теории массового обслуживания показательный закон распределения величин $T_{об}$, связана со свойством этого закона, которое применительно к рассматриваемому случаю можно сформулировать так: если в какой-то момент t_0 происходит обслуживание заявки, то закон распределения оставшегося времени обслуживания не зависит от того, сколько времени обслуживание уже продолжалось.

На первый взгляд допущение о том, что время обслуживания распределено по показательному закону, представляется довольно искусственным. Однако, существуют условия, в которых время обслуживания действительно распределяется по закону, близкому к показательному.

Это, прежде всего, все задачи, в которых обслуживание сводится к ряду “попыток”, каждая из которых приводит к необходимому результату с какой-то вероятностью. К такому типу часто можно отнести обслуживание по устранению неисправностей технических устройств, когда поиски неисправной детали или узла осуществляются рядом проверок или тестов. К такому же типу можно отнести задачи, где “обслуживание” заключается в обнаружении какого-либо объекта радиолокатором, если объект с какой-то вероятностью может быть обнаружен при каждом цикле обзора. Показательным законом хорошо описываются и те случаи, когда плотность распределения времени обслуживания по тем или иным причинам убывает при возрастании аргумента t. Это бывает, когда основная масса заявок обслуживается очень быстро, а значительные задержки в обслуживании наблюдаются редко.

Разумеется показательный закон не является универсальным законом распределения времени обслуживания. Однако, благодаря тому, что пропускная способность и другие характеристики СМО сравнительно мало зависят от вида закона распределения времени обслуживания, а зависят главным образом от его среднего значения $m_{t_{об.}}] = M[T_{об.}]$, в теории массового обслуживания чаще всего пользуются допущением, что время обслуживания распределено по показательное закону. Эта гипотеза позволяет сильно упростить математический аппарат, применяемый для решения задач массового обслуживания, и, в ряде случаев, получить простые аналитические формулы для характеристики пропускной способности системы.

13.2.3. Модели СМО производственных предприятий

При изучении производственного процесса, улучшение характеристик которого является целью исследования, прежде всего следует убедиться в том, что процесс действительно зависит от того, насколько хорошо функционирует некоторая СМО.

Если такая зависимость установлена и в процессе изучения конкретной ситуации была выделена СМО, т. е. указан источник требований, поступающих на обслуживание, физическая природа требований, определены каналы обслуживания, то задача рационализации производственного процесса сводится к задаче улучшения тем или иным способом характеристик систем массового обслуживания.

Если тип СМО определен, то для дальнейшего исследования необходимо выбрать характеристики обслуживания, наиболее существенные в рамках рассматриваемой задачи. Эти характеристики являются показателями качества функционирования СМО, и в то же время от их значения зависит эффективность производственного процесса, течение которого определяется качеством функционирования систем массового обслуживания.

В табл. 13.2. приведены наиболее часто встречающиеся в производственной практике типы СМО и те характеристики обслуживания, которые могут быть использованы в том или ином конкретном случае.

Наиболее трудоемкой и важной частью всех подготовительных работ, которые предшествуют построению математической модели функционирования систем массового обслуживания, является статистическое исследование входящего потока требований и операций обслуживания. Это исследование производится путем проведения специального статистического эксперимента, организуемого в условиях производства для сбора статистической информации о ходе производственных процессов.

В процессе изучения производственного процесса должны фиксироваться длительности различных операций, в том числе операций обслуживания и длительности интервалов времени между поступлениями требований в систему обслуживания, количество требований, одновременно поступающих на обслуживание и т. д. В результате исследования должны быть определены функции распределения длительности интервалов времени между поступлениями требований, функции распределения длительности операций обслуживания, средние значения этих случайных величин, сделаны выводы о принадлежности входящего потока требований к тому или иному типу входящих потоков, изучаемых в теории массового обслуживания.

Следует отметить, что ряд выводов о статистической природе изучаемых явлений может быть сделан из априорных соображений на основе предельных теорем, рассматриваемых в теории вероятностей и теории массового обслуживания, или на основе анализа существа тех физических процессов, которые лежат в основе этих явлений. Так, например, если наблюдаемые потоки требований представляют собой суммы большого числа независимых потоков малой интенсивности, каждый из которых является ординарным и стационарным, то этот поток хорошо согласуется с течением простейшего потока.

Таблица 13.2

Тип системы массового обслуживания	Характеристики обслуживания
С потерями (отказами).	Вероятность потери требования (отказа); среднее число требований, потерянных за определенный промежуток времени; распределение числа занятых каналов; среднее число загруженных каналов обслуживания.
С ожиданием.	Среднее время ожидания начала обслуживания; дисперсия времени ожидания начала обслуживания; средняя длина очереди и распределение длины очереди; загрузка обслуживающих приборов.
С ограниченной очередью.	Среднее время ожидания начала обслуживания; вероятность потери требования; среднее число требований, потерянных за определенный промежуток времени; среднее число занятых каналов обслуживания.
С ограничениями на длительность ожидания.	Среднее число потерь за определенный промежуток времени; среднее время ожидания начала обслуживания; вероятность потери требования.
С ограничениями на длительность пребывания требований в системе.	Среднее время ожидания начала обслуживания; среднее число требований, потерянных за определенный промежуток времени; среднее число не до конца обслуженных требований; вероятность полного обслуживания требования; вероятность частичного обслуживания требования.

Рассмотрим пример практического исследования входящего потока обслуживания.

В телетресте изучалась задача определения оптимального числа обслуживающего персонала, выдающих рабочим и мастерам детали для ремонта радио-, телеаппаратуры из склада запасных деталей.

Исследование начинается с определения статистических характеристик прибытия рабочих (клиентов) и времени, затрачиваемого служащими на их обслуживание.

Изучение входящего потока производится следующим образом. Каждые 10 мин. (в течение ста последовательных десятиминутных интервалов) отмечается число рабочих, пришедших на склад за получением необходимых деталей. Подсчитывается частота, соответствующая этим наблюденным числам. Этот результат заносится в графы 1 и 2 табл. 13.3. Среднее значение данной совокупности чисел равно $\overline{\lambda} = \dfrac{\sum mS_H}{S_H} = 16$. Тогда теоретические значения частот, соответствующие распределению Пуассона, определяются по формуле

$$S_T = P_n(t)\sum S_H = \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}\sum S_H = \frac{16^n}{n!}e^{-16}\cdot 100.$$

Эти частоты занесены в графу 3. Чтобы сделать вывод относительно того, будет ли принятый пуассоновский процесс с достаточной точностью описывать исследуемую совокупность, находим выражение для хи − квадрата

$$x^2_{\text{набл}} = \sum\frac{(S_H - S_T)^2}{S_T} = 11{,}91.$$

Из таблиц находим, что при числе степеней свободы, которое для пуассоновского распределения равно k = s − 2 = = 21 − 2 = 19 (s = 21 − число групп) и уровне значимости 0,05, значение $x^2_{кр}$ = 30,1. Так как $x^2_{\text{набл}} < x^2_{\text{кр}}$, то можно считать, что входящий поток требований (экспериментальное распределение) распределен по закону Пуассона. Следовательно, $\lambda = \frac{\bar{\lambda}}{10\text{ мин}} = 1{,}6$ требований в мин.

Для измерения длительности обслуживания поступают иначе, используя электросчетчик. Счетчик включают в начале обслуживания и в конце. Таким путем регистрируется продолжительность тысячи обслуживаний. Затем подсчитываются частоты, соответствующие 0, 15, 30, 45, 60, ... сек. Они приводятся в столбцах 4 и 5 табл. 13.4.

На основании столбцов 4 и 5 составляем интервальное распределение продолжительности обслуживания в виде таблицы 13.5.

Находим $\bar{t}^* = \frac{\sum t_i^* n_i}{\sum n_i} = 66{,}7\text{ сек.} = 1{,}11\text{ мин.}$ Принимаем $\bar{t}^* = T_{об} = 1{,}11$ мин. Следовательно, $\mu = \frac{1}{T_{об.}} = 0{,}9$ интервалов обслуживаний в мин.

В столбец 6 табл. 13.4 занесем кумулятивные частоты, соответствующие показательному закону (1000 $e^{-0{,}9t}$). В данном случае критерий хu — квадрат дает $x^2_{набл} = 30{,}1$, при уровне значимости 0,05 и числе степеней свободы, равном 19. Так как $x^2_{набл} < x^2_{кр}$, то гипотеза о показательном законе времени обслуживания справедлива.

В последний столбец табл. 13.5 заносим для сравнения частоты, соответствующие показательному закону $n^* = 202\ e^{-0{,}9t}$.

13.3. Система массового обслуживания с отказами

13.3.1. Основные зависимости

В рассматриваемых СМО будем исходить из следующих предположений: 1) поток требований на обслуживание является простейшим; 2) длительность обслуживания случайна и

Таблица 13.3

1	2	3
Число требований за десятиминутный промежуток времени n	Наблюденная частота S_H	Частота по закону Пуассона S_T
5	1	0,1
6	0	0,2
7	1	0,6
8	2	1,2
9	1	2,1
10	3	3,4
11	5	4,9
12	6	6,6
13	9	8,1
14	10	9,3
15	11	9,9
16	12	9,9
17	8	9,3
18	9	8,3
19	7	6,9
20	5	5,5
21	4	4,2
22	3	3,1
23	1	2,1
24	1	1,4
25	1	0,9

Таблица 13.4

4	5	6
Интервалы времени в сек.	Кумулятивное значение наблюденной частоты	Кумулятивная частота по показательному закону
0	1000	1000
15	813	798
30	652	637
45	512	508
60	408	406
75	330	324
90	261	259
105	210	207
120	163	165
135	125	131
150	95	105
165	79	84
180	62	67
195	51	53
210	44	42
225	35	34
240	26	27
255	21	21
270	17	17
285	13	14
300	10	11

Таблица 13.5

Граница интервалов времени в сек.		Середина интервала в сек.	Наблюденная частота	Частота по показательному закону
t_i	t_{i+1}	t_i^*	n_i	n_i^*
0	15	7,5	187	202
15	30	22,5	161	162
30	45	37,5	140	129
45	60	52,5	104	104
60	75	67,5	78	82
75	90	82,5	69	67
90	105	97,5	51	53
105	120	112,5	47	42
120	135	127,5	38	33
135	150	142,5	30	27
150	165	157,5	16	22
165	180	172,5	17	17
180	195	187,5	11	14
195	210	202,5	7	11
210	225	217,5	9	10
225	240	232,5	9	6
240	255	247,5	5	5
255	270	262,5	4	4
270	285	277,5	4	3
285	300	292,5	3	3
300	315	307,5	10	2

вероятность того, что на обслуживание придется затратить время, не меньшее чем t, равна $e^{-\mu t}$, где μ 0 — постоянная; 3) каждое требование обслуживается одним прибором, каждый прибор обслуживает только одно требование в момент, когда он занят. И для СМО с отказами требование, поступившее на обслуживание в момент, когда все каналы заняты, получает отказ и покидает систему необслуженным, очередь в таких системах не образуется.

Обозначим $P_k(t)$ вероятность того, что в момент t в очереди находится k требований. В сформулированных нами предположениях эти вероятности могут быть найдены при любом k, k = 0, 1, 2, ... Однако, точные формулы очень громоздки и на практике предпочитают пользоваться не ими, а теми, которые получаются из них для установившегося режима работы. Это так называемые формулы Эрланга, они дают предельный закон распределения числа занятых каналов в зависимости от характеристик потока заявок и производительности системы обслуживания [23]:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0, \ (0 \le k \le n). \tag{13.13}$$

Здесь P_0 — доля времени простоя n — канальной СМО, равная

$$P_0 = (1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \ldots + \frac{\alpha^n}{n!})^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} \right)^{-1}, \tag{13.14}$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu} \tag{13.15}$$

есть приведенная плотность потока заявок (параметр загрузки), или это есть не что иное как среднее число заявок, приходящееся на среднее время обслуживания одной заявки.

Исследования показывают, что формулы Эрланга (13.13) остаются справедливыми и при любом законе распределения времени обслуживания, лишь бы входной поток был простейшим.

Формулами Эрланга с известным приближением можно пользоваться и в случае, когда поток заявок отличается от простейшего, например, является стационарным потоком с ограниченным последействием. Наконец, можно заметить, что этими формулами можно приближенно пользоваться и в случае, когда СМО допускает ожидание заявки в очереди, но при этом срок ожидания мал по сравнению со средним временем обслуживания одной заявки.

Если в формулах (13.13) обозначить

$$P(k;\ \alpha) = \frac{\alpha^k}{k!} \text{ и } R(n;\ \alpha) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}, \tag{13.16}$$

где $P(k;\ \alpha)$ и $R(n;\ \alpha)$ — табличные функции распределения Пуассона, то

$$P_k = \frac{P(k;\alpha)}{R(n;\alpha)}. \tag{13.17}$$

Полагая в формуле (13.13) $k = n$, получим вероятность отказа (вероятность того, что поступившая заявка найдет все каналы занятыми)

$$P_{\text{отк}} = P_n = \frac{\alpha^n}{n!} P_0 = \frac{P(n;\alpha)}{R(n;\alpha)}. \tag{13.18}$$

Среднее число занятых каналов

$$\bar{k} = \alpha \frac{R(n-1;\alpha)}{R(n;\alpha)} = \alpha\ (1 - P_n). \tag{13.19}$$

Вероятность обслуживания заявки (относительная пропускная способность системы)

$$q = P_{\text{обс}} = \frac{\bar{k}}{\alpha} = \frac{R(n-1;\alpha)}{R(n;\alpha)} = 1 - P_n. \tag{13.20}$$

Абсолютная пропускная способность

$$A = \lambda\, q = \lambda(1 - P_n). \tag{13.21}$$

Интенсивность выходящего потока обслуживания заявок

$$q = A = \lambda(1 - P_n). \qquad (13.22)$$

Вероятность того, что канал (любой) занят

$$P_{\text{з.k.}} = \frac{\bar{k}}{\alpha}. \qquad (13.23)$$

Вероятность того, что система полностью загружена

$$P_{\text{п.з.}} = P_{\text{отк}} = P_n = \frac{P(n;\alpha)}{R(n;\alpha)} = 1 - P_{\text{обс}} = 1 - \frac{\bar{k}}{\alpha}. \qquad (13.24)$$

Среднее время занятости канала

$$\bar{t}_{\text{n.k.}} = \frac{1}{\mu}. \qquad (13.25)$$

Среднее время простоя канала

$$\bar{t}_{\text{n.k.}} = \bar{t}_{\text{з.k.}} \frac{1 - P_{\text{з.k.}}}{P_{\text{з.k.}}}. \qquad (13.26)$$

Среднее время полной загрузки системы

$$\bar{t}_{\text{з.с.}} = \frac{1}{n\mu}. \qquad (13.27)$$

Среднее время неполной загрузки системы

$$\bar{t}_{\text{н.с.}} = \bar{t}_{\text{з.с.}} \frac{1 - P_{\text{н.з.}}}{P_{\text{н.з.}}}. \qquad (13.28)$$

Среднее время простоя системы

$$\bar{t}_{\text{n.c}} = \frac{1}{\lambda}. \qquad (13.29)$$

Среднее время пребывания заявки в системе

$$\bar{t} = \frac{\bar{k}}{\lambda}. \qquad (13.30)$$

13.3.2. Решение задач

Пример 1. Станция наведения истребителей имеет 3 канала. Каждый канал может одновременно наводить один истребитель на одну цель. Среднее время наведения 2 мин. Поток целей простейший с плотностью $\lambda = 1{,}5$ (самолетов в мин.). Станцию можно считать системой с отказами, так как цель, по которой наведение не началось в момент, когда она вошла в зону действия истребителей, вообще остается не атакованной. Найти среднюю долю целей, проходящих через зону действия не обстрелянными.

Решение. Имеем $\mu = \frac{1}{2} = 0{,}5\frac{1}{\text{мин.}}$; $\lambda = 1{,}5\frac{1}{\text{мин.}}$; $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = 3.$

По формуле (13.18)

$$P_{\text{отк}} = P_3 = \frac{3^3}{3!}\left(1+\frac{3}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}\right)^{-1} = 0{,}346.$$

Заметим, что в данном примере плотность потока целей выбрана такой, что при их регулярном следовании одна за другой через определенные интервалы времени и при точно фиксированном времени наведения $T_{\text{об}} = 2$ мин. номинальная пропускная способность системы достаточна для того, чтобы обстрелять все без исключения цели. Снижение пропускной способности происходит из-за наличия случайных сгущений и разрежений в потоке целей, которые нельзя предвидеть заранее.

Пример 2. Гарантийная мастерская по ремонту холодильников принимает заказы на ремонт по одному телефону. Среднее число поступающих в течение часа заказов — 20, а среднее время оформления заказа — 4 мин. Определить показатели СМО. Как они изменяются, если подключить второй телефон?

Решение. Интенсивность поступления потока заказов $\lambda = 20\frac{1}{\text{час.}} = \frac{1}{3}\frac{1}{\text{мин.}}$, тогда среднее время между двумя очередными заказами равно $\overline{T} = \bar{t}_{\text{п.с}} = \frac{1}{\lambda} = 3$ мин. Среднее время обслуживания $T_{об} = 4$ мин, тогда интенсивность обслуживания $\mu = \frac{1}{T_{об.}} = \frac{1}{4}\frac{1}{мин.}$. Параметр загрузки канала $\alpha = \frac{4}{3}$, число каналов $n = 1$.

Следовательно, доля отказов по формуле (13.18)

$$P_{отк} = P_1 = \frac{1}{1+\alpha} = \frac{4}{7}.$$

Это означает, что в $3/7$ случаев (примерно в 57%) невозможно сделать заказ, так как телефон оказывается занятым.

Вместе с тем по формуле (13.14)

$$P_0 = \frac{1}{1+\alpha} = \frac{3}{7},$$

а это означает, что $3/7$ времени (примерно 43% времени) стол заказов бездействует и лишь $4/7$ времени стол заказов занят оформлением заказов.

Подключается второй телефон ($n = 2$).

Рассчитываем долю отказов

$$P_{отк} = P_2 = \frac{\alpha^2}{2!}\left(1+\frac{\alpha}{1!}+\frac{\alpha^2}{2!}\right)^{-1} = \frac{1}{2!}\left(\frac{4}{3}\right)^2\left(1+\frac{4}{3}+\frac{1}{2!}\left(\frac{4}{3}\right)^2\right)^{-1} =$$
$$= \frac{8}{29} \approx 0{,}28.$$

Следовательно, оба телефона оказываются занятыми и заказ сделать невозможно в 28% случаев.

Доля времени простоя двухканальной системы равна

$$P_0 = \left(1+\frac{\alpha}{1!}+\frac{\alpha^2}{2!}\right)^{-1} = \left(1+\frac{4}{3}+\frac{1}{2!}\left(\frac{4}{3}\right)^2\right)^{-1} = \frac{9}{29} \approx 0{,}31,$$

а это означает, что стол заказов бездействует 31% времени.

Среднее число занятых каналов по формуле (13.19) равно

$$\overline{k} = \alpha \frac{R(n-1;\alpha)}{R(n;\alpha)} = \frac{4}{3} \frac{R\left(1, \frac{4}{3}\right)}{R\left(2, \frac{4}{3}\right)} = \frac{28}{29},$$

отсюда видно, что лишь один из двух приемщиков занят оформлением заказов, а второй бездействует.

Пример 3. На диспетчерском пункте телетреста дежурят n приемщиков заявок на ремонт теле-, радиоаппаратуры. Заявки поступают с интенсивностью λ, а принимаются и оформляются по телефону с производительностью μ. Обслуживание одной заявки приносит прибыль c_1, создание одного канала обслуживания требует среднего расхода c_2, эксплуатация одного канала в единицу времени требует среднего расхода c_3. Определить при каких соотношениях стоимостей c_1, c_2 и c_3 система будет рентабельна и через какое время t она начнет приносить прибыль.

Решение. За время t эксплуатации системы она принесет прибыль $c_1\lambda_0 t$, где $\lambda_0 = \lambda\ P_{обс} = \lambda \frac{R(n-1;\alpha)}{R(n;\alpha)}$ — абсолютная пропускная способность системы. За это время будет израсходована в среднем стоимость $(c_2 n + c_3 nt)$.

Прибыль такая система начнет приносить через время t, определяемое условием $c_1\lambda_0 t = c_2 n + c_3 nt$, откуда $t = \frac{c_2 n}{c_1\lambda_0 - c_3 n}$.

Условие рентабельности системы, очевидно, следующее $c_1\lambda_0 - c_3 n \quad 0$, или $c_1\lambda_0 \quad c_3 n$.

Преобразуем это выражение к виду

$$\frac{c_1}{c_3} > \frac{n}{\lambda_0} = \frac{n}{\lambda} \frac{R(n;\alpha)}{R(n-1;\alpha)}.$$

Таким образом, для фиксированных значений λ, μ, c_1, c_3 существует область значений числа каналов n, в которой система рентабельна. Максимальное число каналов n_{max} определяется из условия

$$\frac{c_1}{c_3} = \frac{n_{max}}{\lambda} \frac{R(n_{max};\alpha)}{R(n_{max} - 1;\alpha)}.$$

Область рентабельных значений числа каналов n определяется из выражения $1 \le n \le n_{max}$, при условии выполнения неравенства

$$\frac{c_1}{c_3} > \frac{n}{\lambda} \frac{R(n;\alpha)}{R(n-1;\alpha)}.$$

Заметим, что область рентабельных значений числа каналов для некоторых значений параметров λ и μ и стоимостей c_1 и c_3 вообще может не существовать. Так, например, при ${c_1}/{c_3} = 1$, $\lambda = \mu = 1$ не существует такого целого положительного числа n, для которого выполняется условие $1 \quad n$ $\frac{R(n;1)}{R(n-1;1)}$, так как минимальное значение правой части будет иметь место при $n = 1$, это минимальное значение равно $1\frac{R(1,1)}{R(0,1)} = 2$. При увеличении n отношение ${R(n;1)}/{R(n-1;1)}$ монотонно уменьшается, имея свой предел, равный 1, а выражение ${nR(n;1)}/{R(n-1;1)}$ монотонно возрастает, оставаясь все время больше 1.

Следовательно, при проектировании СМО можно подсчитать, будет ли такая система рентабельна и через какое время t она начнет приносить прибыль. Прибыль c_1 принесенная такой системой к моменту $t_1 \quad t$ (при условии, что система рентабельна), определяется из выражения

$$c = c_1\lambda_0(t_1 - t) - c_3\ (t_1 - t)\ n = (t_1 - t)(c_1\lambda_0 - c_3 n).$$

Так при $\lambda = \frac{1}{5} \frac{1}{\text{мин.}} = 12\frac{1}{\text{час.}}$, $\alpha = 6$, $n = 4$, $c_1 = 40$ руб.,

$c_2 = 9000$ руб., $c_3 = 20$ руб. в час абсолютная пропускная способность системы будет равна

$$\lambda_0 = \lambda \frac{R(n-1;\alpha)}{R(n;\alpha)} = \lambda \frac{R(3,6)}{R(4,6)} = 12 \frac{1+6+\frac{6^2}{2!}+\frac{6^3}{3!}}{1+6+\frac{6^2}{2!}+\frac{6^3}{3!}+\frac{6^4}{4!}} =$$

$$= 12 \frac{61}{115} = 6{,}36 \ \frac{1}{\text{час.}}.$$

Прибыль такая система будет давать через

$$t = \frac{c_2 n}{c_1 \lambda_0 - c_3 n} = \frac{9000 \cdot 4}{40 \cdot 6{,}36 - 20 \cdot 4} = 206{,}4 \text{ час.}$$

Прибыль, даваемая системой через 400 час., будет равна

$$c = (400 - 206{,}4)(40 \cdot 6{,}36 - 20\ 4) = 33764 \text{ руб.}$$

Пример 4. Средний интервал между поступающими в прокатный пункт заявками и запросами на наличие определенных предметов составляет 5 мин. Принимают заявки два работника, каждый с интенсивностью 12 заявок в час. С какой интенсивностью должен работать один работник, выполняя работу двух, чтобы доля потерянных требований осталась на прежнем уровне? На сколько требуется повысить интенсивность обслуживания двум работникам, чтобы доля потерянных заявок была менее 10%?

Решение. Находим долю потерянных требований для двух работников. Известно $\overline{T} = t_{\text{п.с.}} = 5$ мин., тогда $\lambda = \frac{1}{T} = 0{,}2 \frac{1}{\text{мин.}}$ и $\mu = 12$ заявок в час $= \frac{1}{5} \frac{1}{\text{мин.}}$. Следовательно, $\pm = \frac{\lambda}{\mu} = 1$. По формуле (13.18)

$$P_{\text{отк}} = P_2 = \frac{\frac{1^2}{2!}}{1+1+\frac{1^2}{2!}} = \frac{1}{5}.$$

Для одного работника с $\lambda = \frac{1}{5}$ Р $P_1 = \frac{1}{5}$ и неизвестным j имеем $P_1 = \frac{\alpha}{1+\alpha} = \frac{1}{5}$, отсюда $\alpha = \frac{1}{4}$ и $\mu = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{4}{5}\ \frac{1}{\text{мин.}}$.

Следовательно, один работник, выполняя работу двух, должен трудиться с интенсивностью 48 заявок в час, чтобы доля потерянных требований осталась на прежнем уровне.

Найдем интенсивность μ, чтобы доля потерянных заказов была меньше 10%. По формуле (13.18)

$$P_2 = \frac{\frac{\alpha^2}{2!}}{1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2!}} < \frac{1}{10}$$

отсюда $9\alpha^2 - 2\alpha - 2 < 0$ и $\alpha \le 0{,}59$. Принимаем $\alpha = 0{,}59$, тогда $\mu = \frac{\lambda}{\alpha} = 21$.

Следовательно, каждому из двух работников требуется повысить интенсивность на 9 заказов в час, чтобы доля потерянных заказов была менее 10%.

13.4 Системы массового обслуживания с ожиданием

13.4.1. Постановка задачи

До сих пор рассматривались системы массового обслуживания с отказами; характерной особенностью таких систем было то, что любая поступившая заявка либо немедленно принималась к обслуживанию, либо немедленно получала отказ и покидала систему.

В этом параграфе, будут рассмотрены системы массового обслуживания с ожиданием, в которых заявка, заставшая все каналы занятыми, не получает немедленного отказа, а может стать в очередь и ожидать освобождения канала, который может ее обслужить. Системы с ожиданием бывают "чистого" или "смешанного" типа. В чистой системе с ожиданием число мест в очереди и время ожидания в ней ничем не ограничены: каждая заявка рано или поздно будет обслужена. Для такой системы понятие "отказ" не имеет смысла.

В системе с ожиданием смешанного типа возможны как отказы, так и ожидание заявки в очереди. Отказы (отсутствие обслуживания) могут быть связаны или с ограниченным числом мест в очереди, или с ограниченным временем ожидания, которым располагает заявка.

При рассмотрении СМО с ожиданием необходимо учитывать систему правил, регламентирующих порядок образования и обслуживания очереди (так называемую "дисциплину очереди"). Необходимо указать, является ли очередь общей, или образуется к каждому каналу отдельно, каков порядок вызовов заявок из очереди и т. д.

Будем называть порядок вызовов заявок из очереди естественным, если заявки обслуживают по принципу "кто раньше стал в очередь, тот и раньше обслуживается". Поведение заявок в очереди также входит в понятие "дисциплины очереди". Будем рассматривать "терпеливые" заявки, т. е. такие заявки в очереди могут терпеливо ждать начала обслуживания.

На вход n — канальной системы массового обслуживания поступает простейший поток заявок с плотностью λ. Время обслуживания одной заявки $T_{об}$ — показательное, т. е. плотность простейшего потока обслуживания каждого канала $\mu = \dfrac{1}{m_{t_{об.}}} = \dfrac{1}{M[T_{об.}]}$. Если вновь поступившая заявка застает свободным хотя бы один канал, она принимается на обслуживание и обслуживается до конца (заявки "терпеливые"). Если заявка застает все каналы занятыми, она становится в очередь и ожидает обслуживания. Время ожидания ограничено некоторым сроком $T_{ож}$, если до истечения этого срока заявка не будет принята к обслуживанию, то она покидает очередь и остается не обслуженной. Дисциплина очереди естественная, каждая заявка может обслуживаться только одним каналом (взаимопомощи между каналами нет).

Срок ожидания $T_{ож}$ будем считать случайным и распределенным по показательному закону

$$h(t) = \upsilon e^{-\upsilon t} \ (t \quad 0),$$

где параметр υ — величина, обратная среднему сроку ожидания

$$\upsilon = \frac{1}{m_{t_{ож}}},\ m_{t_{ож}} = M[T_{ож}].$$

Параметр υ можно интерпретировать как плотность “потока уходов” заявки, стоящей в очереди.

Очевидно, при $\mu \to \infty$ система смешанного типа превращается в чистую систему с отказами, а при $\upsilon \to 0$ она превращается в чистую систему с ожиданием.

Следует отметить, что при показательном законе распределения срока ожидания пропускная способность системы не зависит от того, обслуживаются ли заявки в порядке очереди или в случайном порядке: для каждой заявки закон распределения оставшегося времени ожидания не зависит от того, сколько времени заявка уже стояла в очереди.

13.4.2. Основные характеристики работы СМО

При выводе дифференциальных уравнений для вероятностей состояния системы к первым n дифференциальным уравнениям, ничем не отличающихся от уравнений Эрланга, добавляются еще s дифференциальных уравнений вероятностей состояний [23]. Получается система $(n + s)$, где $s \geq 0$, дифференциальных уравнений, которая является естественным обобщением уравнений Эрланга на случай системы смешанного типа с ограниченным временем ожидания. Рассматривая установившийся режим обслуживания ($t \to \infty$), предполагают все вероятности P_k $(k = 0,1,2,\ldots,n,\ldots)$ постоянными, а, следовательно и производные от них равными нулю. В результате приходим к системе алгебраических уравнений относительно вероятностей P_k, решая которую, получаем основные характеристики работы СМО.

Принимаем

$$P(\delta,\gamma) = \frac{\gamma^{\delta}}{\alpha!},\ R(j + \delta;\gamma) = \sum_{s=0}^{j=\infty} \frac{\gamma^{s+\delta}}{(s+\delta)!}, \tag{13.31}$$

где $\gamma = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\lambda}{\nu},\ \delta = \frac{n}{\beta} = \frac{n\mu}{\nu},\ \beta = \frac{\nu}{\mu},\ \nu = \frac{1}{m_{t_{ож}}}.$ (13.32)

Если $\times$ дробное, то берется целочисленное значение этой дроби $[\times]$.

Вероятность того, что все обслуживающие каналы свободны

$$P_0 = \left(R(n,\alpha) + P(n,\alpha) \frac{R(j+\delta,\gamma) - P(\delta,\gamma)}{P(\delta,\gamma)} \right)^{-1}. \tag{13.33}$$

Вероятность того, что занято ровно k обслуживающих каналов при условии, что общее число требований, находящихся на обслуживании, не превосходит числа обслуживающих каналов

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0,\ (1 \le k \le n). \tag{13.34}$$

Вероятность того, что в момент времени t все n каналов будут заняты и ровно s заявок будут стоять в очереди

$$P_{n+s} = \frac{\alpha^n}{n!} P_0 \frac{P(s+\delta,\gamma)}{P(\delta,\gamma)}. \tag{13.35}$$

Среднее число заявок, находящихся в очереди (длина очереди)

$$L = P(n,\alpha)\ P_0 \times$$

$$\times \left(\frac{R(j+\delta,\gamma) - P(\delta,\gamma)}{P(\delta,\gamma)} (\gamma - \delta) + \gamma \left(1 - \frac{P(j+\delta,\gamma)}{P(\delta,\gamma)} \right) \right). \tag{13.36}$$

Вероятность P_H того, что заявка покинет систему необслуженной, есть отношение среднего числа заявок, уходящих из очереди в единицу времени, к среднему числу заявок, поступающих в единицу времени

$$P_н = \frac{\beta}{\alpha}\ L \qquad (13.37)$$

Пропускная способность системы характеризуется вероятностью того, что заявка, попавшая в систему, будет обслужена

$$q = 1 - P_н. \qquad (13.38)$$

Среднее число занятых каналов

$$\bar{k} = \left(\alpha R(n;\alpha) + nP(n;\alpha)\frac{R(j+\delta,\gamma) - P(\delta,\gamma)}{P(\delta,\gamma)}\right)P_0 . \qquad (13.39)$$

Вероятность обслуживания заявки

$$P_{обс} = \frac{\mu\bar{k}}{\lambda}. \qquad (13.40)$$

Вероятность того, что канал занят

$$P_{з.k.} = \frac{\bar{k}}{n}. \qquad (13.41)$$

Вероятность того, что система полностью загружена

$$P_{п.з.} = P_{отк} = \sum_{s=0}^{\infty} P_{n+s} = \frac{P_n}{P(\delta,\gamma)}(R(j + \delta,\gamma) - P(\delta,- 1,\gamma)). \qquad (13.42)$$

Среднее время неполной загрузки системы

$$\bar{t}_{н.с.} = \frac{1}{n\mu}\ \frac{R(n-1;\alpha)}{P(n;\alpha)}. \qquad (13.43)$$

Среднее время полной загрузки системы

$$\bar{t}_{з.с.} = \bar{t}_{н.з.}\ \frac{P_{п.з.}}{1 - P_{п.з.}}. \qquad (13.44)$$

Среднее время занятости канала

$$\bar{t}_{з.k.} = \frac{1}{\mu} + P_{н.о.}\ \bar{t}_{н.о.}, \qquad (13.45)$$

где $P_{н.о.}$ – вероятность наличия очереди в системе

$$P_{н.о.} = P_n \frac{R(j+\delta,\gamma) - P(\delta,\gamma)}{P(\delta,\gamma)}, \qquad (13.46)$$

где $\bar{t}_{н.о.}$ — среднее время наличия очереди

$$\bar{t}_{н.о.} = \frac{l}{\lambda} \frac{R(j+\delta,\gamma) - P(\delta,\gamma)}{P(\delta,\gamma)}. \qquad (13.47)$$

Среднее время простоя канала

$$\bar{t}_{n.k.} = \bar{t}_{з.k.} \frac{P_{з.k.}}{1 - P_{з.k.}}. \qquad (13.48)$$

Среднее время ожидания заявки в очереди

$$\bar{t}_{оч} = \frac{L}{\lambda}. \qquad (13.49)$$

Среднее время пребывания заявки в системе

$$\bar{t} = \frac{\bar{l}}{\lambda} = \frac{\bar{k} + L}{\lambda}. \qquad (13.50)$$

13.4.3. Решение задач

Пример 5. Сотрудники предприятия, имеющие перерыв с 12 до 14 часов равномерно по отделам пользуются в этот перерыв услугами соседней прачечной, причем в очереди каждый из них может стоять в среднем не более 20 мин. Среднее число заходящих в течение часа клиентов — 30, а среднее время оформления заказа 3 мин. Определить показатели системы массового обслуживания и как они изменятся, если будет две приемщицы.

Решение. Известно $\lambda = 30\frac{1}{\text{час.}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\text{мин.}}$, $T_{ож} = 20$ мин., $T_{об} = 3$ мин. Тогда $\mu = \frac{1}{3}\frac{1}{\text{мин.}}$, $\upsilon = \frac{1}{20}\frac{1}{\text{мин.}}$, $\alpha = \frac{3}{2}$, $\beta = \frac{3}{20}$, $\gamma = 10$.

Рассматриваем одноканальную (n = 1) СМО, для которой $\delta = \frac{n}{\beta} = \frac{20}{3}$. Принимаем $\delta = \left[\frac{20}{3}\right] = 6$.

Рассчитываем

$P(n,\alpha) = P(1,\frac{3}{2}) = ;\ P(\delta,\gamma) = P(6,10) = 1388,9;$

$P(\delta - 1,\gamma) = P(5,10) = 2755,7;\ R(n,\alpha) = R(1,\frac{3}{2}) = \frac{5}{2};$

$R(n - 1,\alpha) = R(0,\frac{3}{2}) = 1;$

$$R(j + \delta,\gamma) = R(j + 6,10) = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{10^{s+6}}{(1+6)!} = \sum_{s=0}^{17}\frac{10^{s+6}}{(1+6)!} = 20552.$$

Рассчитываем параметры системы.

Вероятность простоя системы $P_o = 0,043$.

Вероятность занятости приемщицы $P_1 = 0,065$.

Вероятность того, что клиент покинет систему необслуженным $P_н = 0,421$.

Вероятность того, что клиент будет обслужен $P_{обс} = 0,579$.

Число заявок, находящихся в очереди (длина очереди) $L = 4,21$.

Среднее число занятых каналов $\bar{k} = 0,957$.

Вероятность того, что канал занят $P_{з.к.} = 0,957$.

Вероятность того, что система полностью загружена $P_{п.з.} = 0,923$.

Среднее время неполной загрузки системы $\bar{t}_{н.з.} = 2$ мин.

Среднее время полной загрузки системы $\bar{t}_{з.с.} = 24$ мин.

Вероятность наличия очереди в системе $P_{н.о.} = 0,896$.

Среднее время наличия очереди $\bar{t}_{н.о.} = 27,6$ мин.

Среднее время ожидания в очереди $\bar{t}_{оч} = 8,4$ мин.

Среднее время пребывания в системе $\bar{t} = 10{,}33$ мин.

Рассматриваем двухканальную (n = 2) СМО (заказы принимают две приемщицы). Для этой системы $\delta = \left[\frac{40}{3}\right] = 13$

Рассчитываем

$$P(n,\alpha) = P(2,\frac{3}{2}) = \frac{9}{8};\ P(\delta - 1,\gamma) = P(12,10) = 2087{,}6;$$

$$P(\delta,\gamma) = P(13,10) = 1606;\ R(n,\alpha) = R(2,\frac{3}{2}) = \frac{29}{8};$$

$$R(n - 1,\alpha) = R(1,\frac{3}{2}) = \frac{5}{2};$$

$$R(j + \delta,\gamma) = R(j + 13,10) = \sum_{s=0}^{12}\frac{10^{s+13}}{(s+13)!} = 4595.5.$$

Рассчитываем параметры системы.

$P_o = 0{,}175$;	$L = 0{,}87$;	$\bar{t}_{з.с.} = 1{,}48$ мин.;
$P_1 = 0{,}262$;	$\bar{k} = 1{,}388$;	$P_{н.о.} = 0{,}367$;
$P_2 = 0{,}197$;	$P_{з.к.} = 0{,}694$;	$\bar{t}_{н.о.} = 3{,}72$ мин.;
$P_н = 0{,}087$;	$P_{п.з.} = 0{,}308$;	$\bar{t}_{оч} = 1{,}74$ мин.;
$P_{обс} = 0{,}913$;	$\bar{t}_{н.з.} = 3{,}33$ мин.;	$\bar{t} = 6{,}25$ мин.

Отсюда видно, что введение второго рабочего места в пункте приема белья в стирку сказывается благоприятным образом на обслуживании клиентов. Так возрастает вероятность того, что клиент будет обслужен, уменьшается вероятность наличия очереди, уменьшаются время ожидания в очереди и пребывания в системе. Вместе с тем увеличивается вероятность простоя системы, уменьшается вероятность того, что система полностью занята, увеличивается среднее время неполной загрузки системы, уменьшается среднее время полной загрузки системы. Поэтому для введения второго рабочего места следует провести экономические обоснования.

13.5. Система массового обслуживания с очередью

13.5.1. Вывод основных расчетных зависимостей

Задача, которая рассматривается в этом параграфе, является типичной для очень многих практически важных ситуаций. Опишем ее сначала в чисто прикладном плане, в каком она часто возникает перед работниками службы быта, магазинов, складов, заводов, проектировщиками телефонных сетей.

Для удовлетворения некоторых потребностей населения организовано соответствующее предприятие — парикмахерская, телефонная станция, больница и т. д. Требования на обслуживание поступают в случайные моменты времени и длительность их обслуживания также случайна. Спрашивается, как будут удовлетворены потребности клиентов, если оборудованы n мест обслуживания?

Высказанные условия хорошо отражают практическую ситуацию. Действительно, нет возможности указать, в какие моменты прибудут клиенты в парикмахерскую или на завод теле-, радиоаппаратуры. А хорошо известно, что нередко приходится ожидать очереди для получения необходимого обслуживания, но иногда его удается получить без всякого ожидания.

Естественно, что как клиентов, так и руководителей предприятия интересуют в первую очередь такие характеристики качества обслуживания, как длина очереди на получение обслуживания, средняя длительность ожидания клиентом начала обслуживания, загруженность обслуживающих устройств, если нам известен средний темп поступления заявок на обслуживание и средний темп обслуживания.

При решении возникшей перед нами задачи будем исходить из следующих предположений:

1) заявка, заставшая все каналы занятыми, становится в очередь, причем, время ожидания заявки в очереди ничем не ограничено;

2) остальные допущения оставим как и в пункте 13.4.1.

В такой системе заявки вообще не уходят из очереди, и поэтому $P_н = 0$: каждая заявка рано или поздно дождется обслуживания. Однако в чистой системе с ожиданием ($\beta \to 0$) не всегда имеется предельный станционарный режим при $t \to \infty$. Можно доказать, что такой режим существует только при

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu} < n, \tag{13.51}$$

т. е. когда среднее число заявок, приходящееся на время обслуживания одной заявки, не выходит за пределы возможностей n — канальной системы. Если же $\alpha \geq n$, то число заявок, стоящих в очереди, будет с течением времени неограниченно расти.

Предположим, что $\alpha < n$, и найдем предельные вероятности $P_к$ $(0 \leq k \leq n)$ для чистой системы с ожиданием. Для этого положим в формуле (13.33) $\beta \to 0$. Получим

$$P_o = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum\limits_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha^s}{n^s}},$$

или, суммируя прогрессию, найдем долю времени простоя системы

$$P_o = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)} \right)^{-1}. \tag{13.52}$$

Отсюда, пользуясь формулами (13.34) и (13.35), получаем

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_o, \ (0 \leq k \leq n) \tag{13.53}$$

и аналогично для $k = n + s$ $(s \geq 0)$

$$P_{n+s} = \frac{\alpha^{n+s}}{n!\cdot n^s}\ P_o. \qquad (13.54)$$

Среднее число заявок (средняя длина очереди), находящихся в очереди, определяется из формулы (13.36) при $\beta \to 0$

$$L = m_s = \frac{\alpha^{n+1}}{n\cdot n!(1-\frac{\alpha}{n})^2}\ P_o. \qquad (13.55)$$

В системах с очередью среднее число каналов, занятых обслуживанием, определяется как

$$\overline{k} = \alpha. \qquad (13.56)$$

Действительно, в формуле (13.39) полагаем $\beta = 0$

$$\overline{k} = \frac{\alpha R(n;\alpha) + nP(n;\alpha)\sum\limits_{s=1}^{\infty}\frac{\alpha^s}{n^s}}{R(n;\alpha) + P(n;\alpha)\sum\limits_{s=1}^{\infty}\frac{\alpha^s}{n^s}},$$

суммируя прогрессию $\sum\limits_{s=1}^{\infty}\frac{\alpha^s}{n^s} = \frac{\alpha}{(n-\alpha)}$, получаем

$$\overline{k} = \frac{\alpha[R(n;\alpha) - P(n;\alpha)] + P(n;\alpha)\frac{n\alpha}{n-\alpha}}{R(n;\alpha) + P(n;\alpha)\frac{\alpha}{n-\alpha}} =$$

$$= \frac{\alpha R(n;\alpha) + P(n;\alpha)\frac{\alpha^2}{n-\alpha}}{R(n;\alpha) + P(n;\alpha)\frac{\alpha}{n-\alpha}},$$

откуда и следует, что $\overline{k} = \alpha$.

Вероятность того, что обслуживанием в системе заняты все n каналов, состоит из двух частей: вероятности $\frac{\alpha^n}{n!}P_o$ того, что в системе полностью загруженной, нет очереди, и вероятности $\frac{\alpha^{n+1}}{(n-\alpha)n!}P_o$ того, что в системе полностью загруженной, есть очередь. Тогда

$$P_{\text{п.з.}} = \frac{\alpha^n}{n!}P_o + \frac{\alpha^{n+1}}{(n-\alpha)n!}P_o. \qquad (13.57)$$

При $\alpha \geq n$ вероятность $P_o = 0$. (13.58)

Иными словами, при $\alpha \geq n$ в установившемся процессе обслуживания застать в системе любое конечное число требований мы можем лишь с вероятностью нуль, т. е. с вероятностью единица в такой системе будет бесконечно много требований и образуется бесконечная очередь. Это означает следующее: во всех случаях, когда $\alpha \geq n$, очередь на обслуживание неограниченно возрастает со временем.

Этот вывод имеет очень большое практическое значение, поскольку нередко при расчете количества необходимых средств обслуживания принимают ложную предпосылку, что нужно исходить из "идеальной" производительности системы, равной отношению произведения числа обслуживающих приборов на длительность их использования в течение заданного срока к средней длительности одной операции обслуживания. Такой подсчет, как вытекает из сформулированного нами результата, в силу неравномерности поступления требований на обслуживание приводит к планированию очередей, а тем самым и к потерям времени, средств и потенциальных потребностей.

13.5.2.Основные расчетные формулы

Вероятности состояний

$$P_k = P(k,\alpha)\ P_o,\ (0 \leq k \leq n), \qquad (13.59)$$

$$P_{n+s} = P(n,\alpha)\left(\frac{\alpha}{n}\right)^s P_o, \ (s \geq 0). \tag{13.60}$$

Вероятность простоя системы (доля времени простоя системы)

$$P_o = \left(R(n;\alpha) + P(n;\alpha)\frac{\alpha}{n-\alpha}\right)^{-1}. \tag{13.61}$$

Среднее число заявок, находящихся в очереди

$$L = m_s = \frac{P(n;\alpha)\alpha n}{(n-\alpha)^2} P_o. \tag{13.62}$$

Среднее число занятых каналов

$$\bar{k} = \alpha. \tag{13.63}$$

Вероятность обслуживания заявки

$$P_{обс} = \frac{\mu\bar{\kappa}}{\lambda} = 1. \tag{13.64}$$

Вероятность того, что канал занят

$$P_{з.k.} = \frac{\bar{k}}{n}. \tag{13.65}$$

Вероятность того, что система полностью загружена

$$P_{п.з.} = \sum_{s=0}^{\infty} P_{n+s} = P_n \frac{n}{n-\alpha} = \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)} P_o. \tag{13.66}$$

Среднее время неполной загрузки системы

$$\bar{t}_{н.з.} = \frac{1}{n\mu}\frac{R(n-1;\alpha)}{P(n;\alpha)}. \tag{13.67}$$

Среднее время полной загрузки системы

$$\bar{t}_{з.с.} = \bar{t}_{н.з.} \frac{P_{п.з.}}{1-P_{п.з.}}. \tag{13.68}$$

Среднее время занятости канала

$$\bar{t}_{з.k.} = \frac{1}{\mu} + P_{н.о.}\ \bar{t}_{н.о.}, \tag{13.69}$$

где $P_{н.о.}$ – вероятность наличия очереди в системе

$$P_{н.о.} = \sum_{s=0}^{\infty} P_{n+s} = P_n \frac{\alpha}{n-\alpha} = \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)} P_o, \tag{13.70}$$

где $\bar{t}_{н.о.}$ — среднее время наличия очереди

$$\bar{t}_{н.о.} = \frac{1}{\mu(n-\alpha)}. \tag{13.71}$$

Среднее время простоя канала

$$\bar{t}_{н.k.} = \bar{t}_{з.k.} \frac{P_{n.з.}}{1-P_{n.з.}}. \tag{13.72}$$

Среднее время ожидания заявки в очереди

$$\bar{t}_{оч} = \frac{L}{\lambda}. \tag{13.73}$$

Среднее время пребывания заявки в системе

$$\bar{t} = \frac{\bar{l}}{\lambda} = \frac{\bar{k}+L}{\lambda} = \frac{\alpha+L}{\lambda}. \tag{13.74}$$

13.5.3. Решение задач

Пример 6. Рассмотреть зависимость длины очереди от параметра загрузки в одноканальной и двухканальной системах обслуживания.

Решение. Из формулы (13.62) для одноканальной системы

$$L_1 = \frac{\alpha^2}{1-\alpha},$$

а для двухканальной системы

$$L_2 = \frac{\alpha^3}{4-\alpha}.$$

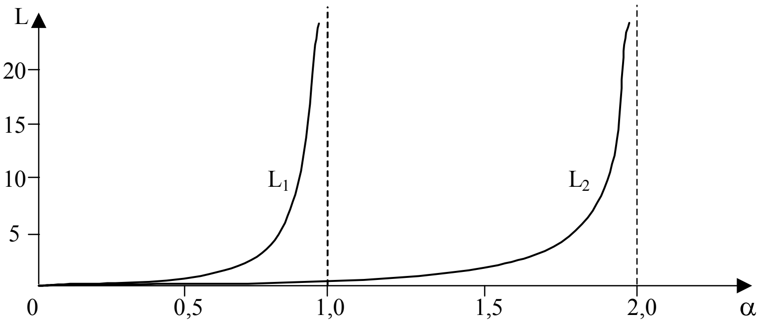


Рис. 13.7

На рис. 13.7 дана нелинейная зависимость длины очереди от параметра загрузки α.

Из графиков видно, что длина очереди очень быстро возрастает в случаях, когда скорость обслуживания близка к скорости поступления требований.

Поэтому нельзя считать правильной обычную практику планирования пропускных способностей СМО из расчета равных интенсивностей поступления и обслуживания. Скорость обслуживания следует планировать с определенной избыточностью по отношению к скорости поступления требований, иначе неизбежно будут возникать большие очереди.

Пример 7. На элеваторе имеется три специализированных места для разгрузки автомашин с зерном. Каждая автомашина разгружается в среднем за 30 мин. К элеватору подъезжают в среднем четыре машины в час. Определить показатели системы.

Решение. Считаем, что на вход трехканальной системы с неограниченным временем ожидания поступает простейший поток заявок с параметрами $\lambda = 4\dfrac{1}{\text{час.}} = 15\ \dfrac{1}{\text{мин.}}$, $T_{об} = 30$ мин., $n = 3$. Тогда $\mu = \dfrac{1}{30}\dfrac{1}{\text{мин.}}$, $\alpha = \dfrac{\lambda}{\mu} = 2$. Так как $\alpha < n$, то существует установившийся режим обслуживания. Определяем показатели системы.

Вероятность простоя $P_o = 0{,}111$.

Вероятность состояний $P_1 = 0{,}065$, $P_2 = 0{,}222$, $P_3 = 0{,}148$.

Среднее число заявок, находящихся в очереди $L = 0{,}89$.

Среднее число занятых каналов $\bar{k} = \alpha = 2$.

Вероятность обслуживания заявок $P_{обс} = 1$.

Вероятность того, что канал занят $P_{з.к.} = 0{,}67$.

Вероятность того, что система полностью загружена $P_{п.з.} = 0{,}444$.

Вероятность наличия очереди в системе $P_{н.о.} = 0{,}296$.

Среднее время неполной загрузки системы $\bar{t}_{н.з.} = 37{,}5$ мин.

Среднее время полной загрузки системы $\bar{t}_{з.с.} = 29{,}95$ мин.

Среднее время занятости канала $\bar{t}_{з.н.} = 38{,}88$ мин.

Среднее время наличия очереди $\bar{t}_{н.о.} = 30$ мин.

Среднее время простоя канала $\bar{t}_{n.k.} = 19{,}15$ мин.

Среднее время ожидания заявки в очереди $\bar{t}_{оч} = 13{,}35$ мин.

Среднее время пребывания заявки в системе $\bar{t} = 43{,}35$ мин.

Пример 8. Продолжим рассмотрение задачи сформулированной в пункте 13.2.3. Находим, $\alpha = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{1{,}6}{0{,}9} = 1{,}78$.

В качестве критерия оптимальности используем суммарную стоимость времени, потерянного рабочими, стоящими в очереди, и служащими в ожидании прибытия клиентов, которую нужно минимизировать.

Теперь предположим, что почасовая заработная плата служащего составляет 15 руб., а рабочего 30 руб.

За промежуток времени T общая стоимость времени, потерянного рабочими и служащими равна

$$S(n) = [30\ L + 15\ (n - a)]\ T,$$

где L – число рабочих, стоящих в очереди и n – число служащих.

Примем в качестве функции стоимости величину

$$\bar{S} = \frac{S(n)}{T} = 30L + 15(n - a),$$

это полная стоимость ожидания в единицу времени.

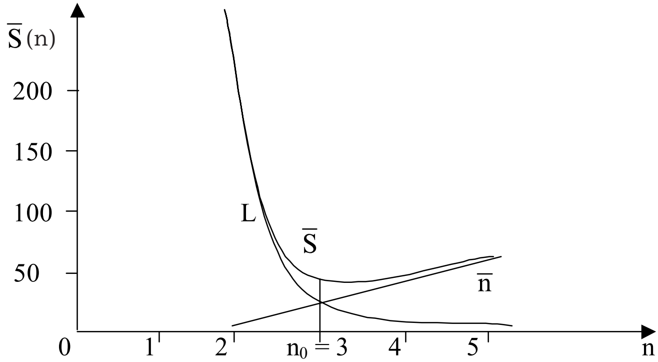


Рис. 13.8

На рис. 13.8 показаны функции L(n), $\overline{n}$ = (n − 1,78) и $\overline{S}$(n) в виде непрерывных кривых, чтобы представить их зависимость от числа служащих (аргумента) n. L(n) — убывающая функция, $\overline{n}$(n) — возрастающая функция и $\overline{S}$(n) имеет только один минимум.

Положив T = 8 час и используя формулу (13.61) и (13.62), получим функцию стоимости в зависимости от числа n служащих

$$S(n) = 15 \times$$

$$\times\left(\frac{2\times 1{,}78^{n+1}}{(n-1)!\,(n-1{,}78)^2\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1{,}78^k}{k!}+\frac{1{,}78^{n+1}}{n!\,(n-1{,}78)}\right)}+(n-1{,}78)\right)8.$$

Сделав ряд приближений получим

S(2) = 15 (14,25 + 0,22) 8 = 1736,40 руб.;

S(3) = 15 (0,36 + 1,22) 8 = 189,60 руб.;

$$S(4) = 15\ (0{,}05 + 2{,}22)\ 8 = 266{,}40 \text{ руб.};$$

$$S(5) = 15\ (0{,}01 + 3{,}22)\ 8 = 387{,}60 \text{ руб.}$$

Итак, оптимальное значение числа служащих равно трем.

Пример 9. Рассмотрим анализ работы диспетчерского пункта в различных условиях загруженности каналов обслуживания.

Исследование системы массового обслуживания помимо определения различных параметров и переменных, выраженных через характеристики входящего потока требований и процесса обслуживания, часто приводит к разработке экономико-математической модели, содержащей целевую функцию и ограничения. Такая модель позволяет применить к ней различные методы количественного анализа (классические методы определения экстремальных значений функции, линейное, нелинейное и динамическое программирование) и найти оптимальный режим функционирования системы обслуживания.

Качество функционирования системы характеризуется не только такими показателями, как среднее время ожидания требований или простоя каналов обслуживания, не только набором средних и вероятностных состояний системы, но и значением целевой функции.

Рассмотрим следующий пример работы производственного подразделения, представляющего собой систему массового обслуживания с очередью и двумя каналами связи.

В транспортном отделе к двум диспетчерам подходят водители автомашин для получения задания и оформления путевого листа. Наблюдения показали, что в определенном интервале времени система функционирует в стационарном режиме. Основные параметры системы определяются следующими условиями: каждые 10 минут в диспетчерскую заходит в среднем 2,2 человека, а оформление документов занимает в среднем 5 минут. Тогда в расчете на десятиминутный интервал получим $\lambda = 2{,}2$, $\mu = 2$, $n = 2$.

Решение. Так как , $\alpha = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{2{,}2}{2} = 1{,}1 < n = 2$, то очередь не будет постоянно возрастать.

По формуле (13.61)

$$P_o = \left(R(2;1{,}1) + P(2;1{,}1)\frac{1{,}1}{2-1{,}1} \right)^{-1} = \left(1 + 1{,}1 + \frac{1{,}1^2}{2} + \frac{1{,}1^2}{2} \times \frac{1{,}1}{0{,}9} \right)^{-1} =$$

$$= 0{,}29,$$

то есть почти в 30 случаях из 100 два диспетчера будут свободны от работы по оформлению путевых листов.

Вероятность того, что вновь прибывший водитель должен ждать до тех пор, пока диспетчер освободится, определяется по формуле (13.66)

$$P_{\text{п.з.}} = \frac{1{,}1^2 \times 2}{2!(2-1{,}1)}\ 0{,}29 = 0{,}39,$$

то есть почти в 40 случаях из 100 вновь прибывший водитель сталкивается с тем, что диспетчеры заняты оформлением листов и в ряде случаев уже образовалась очередь к ним. Наконец, определим вероятность того, что в системе будет находиться k водителей. Исходя из зависимости (13.59), получим

$$P_1 = 0{,}319;\ P_2 = 0{,}175;\ P_3 = 0{,}096.$$

Так вероятность того, что в системе будут находиться три водителя составляет менее 10%.

Средний размер очереди определяется по (13.62) и равен 0,48, иначе говоря, в среднем в очереди находятся менее одного водителя.

Так как среднее число занятых каналов $\bar{k} = \alpha = 1{,}1$, то в системе будут находиться $\bar{k}_c = 1{,}1 + 0{,}48 = 1{,}58$, т. е. менее двух водителей.

Время ожидания определяется формулой (13.73) и равно $\bar{t}_{\text{оч}} = 0{,}22$ единиц времени или 2,2 мин., а среднее время пребывания в системе по формуле (13.74) равно $\bar{t} = 0{,}72$ ед. времени или 7,2 мин.

Таким образом, система явно не перегружена: потери времени водителей на ожидание весьма незначительны. В тоже время можно отметить, что диспетчеры слабо загружены: каждый диспетчер непосредственно оформлением путевых листов занят в среднем лишь 55% своего времени. В самом деле, среднее число незанятых каналов определяется как $\bar{S} = n - \alpha = 2 - 1{,}1 = 0{,}9$.

Что произойдет, если режим функционирования рассмотренной системы несколько изменить, повысив загрузку диспетчеров? Допустим, принято решение о том, что диспетчерская будет обслуживать еще одну автоколонну, причем, есть несколько автоколонн, среди которых можно выбрать только одну. Каждая автоколонна характеризуется своим параметром потока требований (λ_1, λ_2, ...). Какова должна быть интенсивность нагрузки, чтобы средняя загрузка диспетчеров (доля времени, когда они заняты) повысилась до 70%?

В этом случае $\alpha = n - \bar{S}_н$ и так как средняя загрузка диспетчеров должна быть повышена до 70%, то $\bar{S}_н = 0{,}7\ \bar{S} = 0{,}7 \times 0{,}9 \approx 0{,}6$. Тогда $\alpha = 2 - 0{,}6 = 1{,}4$ и нужно выбрать такую автоколонну, дополнительное обслуживание которой повысит параметр λ до значения $1{,}4 \times 2 = 2{,}8$.

Теперь СМО характеризуется параметрами $\lambda = 2{,}8$, $\mu = 2$, $\alpha = 1{,}4$, $n = 2$. Ее характеристики равны $P_o = 0{,}176$, $L = 1{,}35$, $\bar{k}_c = 2{,}75$, $\bar{t}_{оч} = 4{,}8$ мин.

Все данные расчетов сведем в табл. 13.6.

Дадим анализ таблицы 13.6. Если в качестве переменных факторов, определяющих работу СМО, выступают среднее число требований в очереди и среднее число простаивающих каналов обслуживания, то наиболее благоприятна 2-ая СМО одноканальная (второй столбец), где $S = \dfrac{\lambda}{\mu} = 0{,}497$ и $S = 1$, однако в ней больше доля простоя системы.

В ряде систем существенное влияние на размер потерь могут оказывать простои канала обслуживания, превышающие некоторую постоянную величину.

В других системах экономические потери от ожидания обслуживания существенно возрастают по мере увеличения длительности ожидания или сказываются лишь после того,

Таблица 13.6

	λ = 2,2 мин. μ = 2 мин α = 1,1 n = 2	Из условия, что длина очереди та же, но α = 0,5 n = 1	λ = 2,8 мин. μ = 2 мин α = 1,4 n = 2	λ = 2,2 мин. μ = 1,5 мин α = 1,46 n = 2
Доля времени простоя системы P_o	0,29	0,503	0,176	0,16
Вероятность того, что канал будет занят $P_{п.з.}$	0,39	0,503	0,24	0,63
Среднее число незанятых каналов ($n-\bar{k}$)	0,9	0,503	0,9	0,54
Длина очереди L	0,48	0,48	1,35	0,92
Среднее число клиентов в очереди $\bar{k}_c$	1,58	0,987	2,75	2,38
Время ожидания в системе $\bar{t}_{оч}$	2,2 мин.	2,24 мин. (λ = 1,1) 2,2 мин. (λ = 2,2)	4,8 мин.	4,2 мин.
Среднее время пребывания в системе $\bar{t}$	7,2 мин.	6,74 мин. (λ = 1,1) 4,5 мин. (λ = 2,2)	9,8 мин.	10,9 мин.

как ожидание превысит некоторый предел (СМО в третьем столбце).

Существуют системы в которых трудно, а подчас невозможно измерить потери одной из сторон. Один из наиболее характерных примеров — потери времени населением. Однако, если в системах такого рода потери можно оценить, то при включении их и одновременно потерь от простоя канала обслуживания в целевую функцию оценки деятельности СМО в целом придется столкнуться с целым рядом трудностей.

В связи с этим в целевую функцию, по-видимому, надо ввести веса, учитывающие качественные различия слагаемых целевой функции.

Можно пойти и другим путем, а именно: свести к минимуму потери одной стороны, соблюдая при этом ограничивающее условие, наложенное на потери другой.

Возможна и обратная постановка задачи − минимизировать простои канала обслуживания при условии, что требования будут терять на ожидание в среднем не более некоторого интервала времени. Иными словами, при такой постановке задачи минимизируются потери одной из сторон, участвующей в процессе массового обслуживания, при одновременном соблюдении некоторых требований относительно качества функционирования системы.

13.6. Система смешанного типа с ограничением по длине очереди

13.6.1. Основные расчетные формулы

В этом параграфе рассмотрим систему массового обслуживания смешанного типа с ограниченным числом мест m в очереди. Так, посетитель предприятия общественного питания может рассчитывать лишь на определенное число мест. Очевидно, при $m = 0$ получим как частный случай ранее рассмотренную систему с отказами, а при $m \to \infty$ чистую систему с ожиданием (с очередью),

Предположим, что заявка, заставшая все каналы занятыми, становится в очередь, только если в ней находится менее m заявок, если же число заявок в очереди равно m (больше m оно быть не может), то последняя прибывшая заявка в очередь не становится и покидает систему необслуженной. Остальные допущения — о простейшем потоке заявок и о показательном распределении времени обслуживания — оставим прежними, как и в пункте 13.4.1.

Вероятность того, что занято ровно k каналов, а очереди нет

$$P_k = P(k,\alpha)\ P_o,\ (0 \le k \le n), \tag{13.75}$$

Вероятность простоя системы

$$P_o = \left(R(n;\alpha) + P(n;\alpha)\sum_{s=1}^{m}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^s\right)^{-1}, \tag{13.76}$$

причем

$$\sum_{s=1}^{m}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^s = \frac{\alpha}{n}\frac{1-\left(\frac{\alpha}{n}\right)^m}{1-\frac{\alpha}{n}},\left(\frac{\alpha}{n} \ne 1\right) \text{ и}$$

$$\sum_{s=1}^{m}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^s = m, \quad \left(\frac{\alpha}{n} = 1\right). \tag{13.77}$$

Вероятность того, что все каналы заняты и в очереди имеется s заявок

$$P_{n+s} = P(n,\alpha)\left(\frac{\alpha}{n}\right)^s P_o = P_n\left(\frac{\alpha}{n}\right)^s,\ (1 \le s \le m), \tag{13.78}$$

при $\alpha = n$ получим

$$P_к = \frac{P(k,n)}{R(n,n) + mP(n,n)},\ P_{n+s} = P_n. \tag{13.79}$$

Вероятность того, что заявка покинет систему необслуженной

$$P_{n+m} = P_n\left(\frac{\alpha}{n}\right)^m. \tag{13.80}$$

Вероятность обслуживания равна

$$P_{обс} = 1 - \left(\frac{\alpha}{n}\right)^{m} P_{n}. \qquad (13.81)$$

Среднее число заявок, находящихся в очереди (длина очереди)

$$L = m_{s} = P(n,a) \sum_{s=1}^{m} s\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{s} P_{o} = P_{n} \sum_{s=1}^{m} s\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{s}, \qquad (13.82)$$

упрощая

$$L = m_{s} = P_{n} \frac{\alpha}{n} \frac{1-\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{m}\left(m\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)+1\right)}{\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{2}}, \left(\frac{\alpha}{n}=1\right), \qquad (13.83)$$

$$L = m_{s} = P_{n} \frac{m(m+1)}{2}, \qquad \left(\frac{\alpha}{n}=1\right), \qquad (13.84)$$

Среднее число занятых каналов

$$\bar{k} = P_{обс}\, \alpha = \alpha \left[1-\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{m} P_{n}\right]. \qquad (13.85)$$

Среднее время нахождения заявки в очереди

$$\bar{t}_{оч} = \frac{L}{\lambda}. \qquad (13.86)$$

Среднее время пребывания заявки в системе

$$\bar{t} = \frac{\bar{k}+L}{\lambda}. \qquad (13.87)$$

Вероятность того, что канал занят

$$P_{з.k.} = \frac{\bar{k}}{n}. \qquad (13.88)$$

Вероятность того, что система полностью загружена, равна вероятности того, что в системе заняты все каналы

$$P_{п.з.} = P_n \frac{1-\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{m+1}}{1-\frac{\alpha}{n}}. \qquad (13.89)$$

Среднее время неполной загрузки системы

$$\bar{t}_{н.з.} = \frac{1}{n\mu} \frac{R(n-1;\alpha)}{P(n;\alpha)}. \qquad (13.90)$$

Среднее время полной загрузки системы

$$\bar{t}_{з.с.} = \bar{t}_{н.з.} \frac{P_{п.з.}}{1-P_{п.з.}}. \qquad (13.91)$$

Среднее время наличия очереди

$$\bar{t}_{н.о.} = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\lambda} \frac{\alpha}{n} \frac{1-\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{m}}{1-\frac{\alpha}{n}}. \qquad (13.92)$$

Вероятность наличия очереди

$$P_{н.о.} = P_n \frac{\alpha}{n} \frac{1-\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{m}}{1-\frac{\alpha}{n}}. \qquad (13.93)$$

Среднее время занятости канала

$$\bar{t}_{з.k.} = \frac{1}{\mu} + P_{н.о.} \; \bar{t}_{н.о.}, \qquad (13.94)$$

Среднее время простоя канала

$$\bar{t}_{п.k.} = \bar{t}_{з.k.} \frac{1-P_{з.k.}}{P_{з.k.}}. \qquad (13.95)$$

13.6.2. Решение задач

Пример 10. На станцию текущего ремонта автомашин поступает простейший поток заявок с плотностью λ =0,5 (машин в час). Имеется одно помещение для ремонта. Во дворе станции могут одновременно находиться, ожидая очереди, не более трех машин. Среднее время ремонта одной машины $m_{t_{об}} = \frac{1}{\mu} = 2$ (часа). Определить: а) пропускную способность системы; б) среднее время простоя станции; в) определить, насколько изменятся эти характеристики, если оборудовать второе помещение для ремонта.

Решение. Имеем: $\lambda = 0{,}5$; $\mu = 0{,}5$; $\alpha = 1$; $m = 3$.

Вероятность того, что заявка покинет систему необслуженной, равна по формуле (13.80)

$$P_н = P_{1+3} = \frac{1}{(1+1)+1(1+1+1)} = 0{,}2.$$

Относительная пропускная способность системы

$$P_{обс} = q = 1 - P_н = 0{,}8.$$

Абсолютная пропускная способность $Q = \lambda q = 0{,}4$ машины в час.

Средняя доля времени, которое система будет простаивать, $P_о = \frac{1}{5} 0{,}2$.

Среднее число заявок, находящихся в очереди $L = 0{,}3$.

Среднее число занятых каналов $\overline{k} = 0{,}8$.

Среднее время нахождения заявки в очереди $\bar{t}_{оч} = 0{,}6$ час.

Среднее время нахождения заявки в системе $\bar{t} = 2{,}2$ час.

Вероятность того, что канал занят $P_{з.к.} = 0{,}8$.

Среднее время неполной загрузки системы $\bar{t}_{н.з.} = 2$ час.

Оборудуем второе помещение для ремонта ($n = 2$).

$$P_н = P_{2+3} = \frac{\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3}{(1+1+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)} = \frac{1}{47} = 0{,}021.$$

Так как $q = 1 - P_н = 0{,}979$, то удовлетворяться будут 98% заявок.

$Q = \lambda\ q = 0{,}49$ машин в час.

Относительное время простоя

$$P_о = \left((1+1+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)\right)^{-1} = \frac{16}{47} = 0{,}34,$$

т. е. оборудование будет простаивать 34% всего времени.

Таким образом, при введении второго помещения для ремонта автомобилей увеличивается пропускная способность станции, однако, одновременно увеличивается простой оборудования.

Пример 11. На продуктовую базу в течение рабочего дня, длящегося 12 час., пребывает в среднем 24 автомашины с продуктами. На разгрузке находятся две бригады грузчиков. Среднее время разгрузки одного автомобиля составляет 1,5 часа. Дать оценку работы СМО. Как нужно изменить число бригад или увеличить число автомашин в очереди, чтобы разгружались 95% автомашин из числа прибывших на базу, если на территории базы у дебаркадера могут находиться в очереди в ожидании разгрузки не более 4 автомашин?

Решение. Имеет двухканальную СМО, $(n = 2)$ с ограниченным числом мест в очереди $m = 2$, $\lambda = \frac{24}{12} = 2\ \frac{\text{авт.}}{\text{час.}}$,

$\mu = \frac{2}{3}\frac{\text{авт.}}{\text{час.}}$, $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = 3$, $\frac{\alpha}{n} = 1{,}5$.

Вероятность простоя системы, т. е. вероятность того, что обе бригады не загружены из — за отсутствия автомашин, по формуле (13.76) равна

$$P_o = \left(1+3+\frac{3}{2}^2\right)+\frac{3}{2}^2\times\frac{3}{2}\times\frac{1-1{,}5^4}{1-1{,}5} = 0{,}0158.$$

Вероятность того, что под разгрузкой две, а в очереди четыре автомашины, находится по формуле (13.78)

$$P_{отк} = P_{2+4} = \frac{3}{2}^2\times 0{,}0158\times\left(\frac{3}{2}\right)^4 = 0{,}36.$$

Вероятность обслуживания находим по формуле (13.81)

$$P_{обс} = 1 - P_{отк} = 1 - 0{,}36 = 0{,}64.$$

Абсолютная пропускная способность равна

$$A = \lambda P_{обс} = 2 \cdot 0{,}64 = 1{,}28 \ \frac{\text{авт.}}{\text{час.}}.$$

Среднее число обслуживаемых автомашин определяем по формуле (13.85)

$$\bar{k} = P_{обс}\,\alpha = 0{,}64 \cdot 3 = 1{,}92 \ \frac{\text{авт.}}{\text{час.}}.$$

Среднее число автомашин в очереди определяется формулой (13.82)

$$L = m_s = \frac{3}{2}^2\times 0{,}0158\times\frac{3}{2}\times\frac{1-(1{,}5)^4(4(1-1{,}5)+1}{(1-1{,}5)^2} = 2{,}5 \text{ авт.}$$

Анализ этих характеристик показывает, что доля отказов, равная 36%, достаточно большая; обе бригады заняты практически полностью, так как коэффициент занятости каждой бригады равен $k_{зан} = \frac{\bar{k}}{n} = \frac{1{,}92}{2} = 0{,}96$ и близок к единице;

относительная пропускная способность мала, так как всего 64% из числа прибывших автомашин будут обслужены; средняя длина очереди равна 2,5 автомашины, это говорит о том, что база не справляется с выполнением обслуживания автомашин. Следовательно, нужно увеличить число бригад грузчиков или увеличить число машин в очереди.

Если при n = 2 увеличить очередь до m = 7, то $P_{обс} = 0{,}66$, при m = 10 имеем $P_{обс} = 0{,}67$, т. е. простое увеличение очереди почти не улучшает обслуживание, тем более эта очередь где-то должна отстаивать.

Увеличиваем число бригад. При n = 3, находим, что $P_{обс} = 0{,}856$, а при n = 4 имеем $P_{обс} = 0{,}958$, а эта величина уже превосходит заданную вероятность обслуживания 0,95.

Следовательно, для достижения заданной вероятности обслуживания прибывающих на разгрузку автомобилей нужно ввести четыре бригады грузчиков.

Возникает задача о выборе оптимальной СМО, так как необходимо рассчитать затраты на создание новых рабочих мест, учесть время простоя бригады и т. д.

13.7. Расчет параметров СМО на ЭВМ

Работаем с программой Mathcad 2000.

Рассмотрим СМО с отказами и берем пример 1 п. 13.3.2. Расчет ведем с использованием формул (13.13) — (13.30).

Отметим, что поставить черточку над буквой нельзя, поэтому вместо $\bar{k}$ пишем k и так же не ставим черточки над средним временем t. У нас русский вариант программы. Индексы писать буквами нельзя, поэтому пишем их в строчку. Так в место $P_{обс}$ следует писать Робс и вместо $P_{з.к.}$ − Рзк.

Порядок решения задачи следующий.

1. Щелкните мышью по свободному месту в рабочем документе и введите с клавиатуры символы μ, λ, α, n.

2. Введите формулу $P_0 := \left(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{6}\right)^{-1}$.

3. Вычислите P_0 = и т. д. со всеми формулами.

Фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий вычисления параметров СМО с отказами для $\mu = 0{,}5$, $\lambda = 1{,}5$, $\alpha = 3$, $n = 3$, приведен ниже.

$\mu := 0{,}5 \qquad \lambda := 1{,}5 \qquad \alpha := 3 \qquad n := 3$

$P_0 := \left(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{6}\right)^{-1}$ $\qquad P_0 = 0{,}077$

$P_3 := \frac{\alpha^n P_0}{6}$ $\qquad P_3 = 0{,}346$

$К := \alpha\,(1 - P_3)$ $\qquad К = 1{,}962$

$Робс := 1 - P_3$ $\qquad Робс = 0{,}654$

$A := \lambda\ Робс$ $\qquad A = 0{,}981$

$Рзк := \frac{К}{n}$ $\qquad Рзк = 0{,}654$

$tзк := \frac{1}{\mu}$ $\qquad tзк = 2$

$tпк := tзк\ \frac{1 - Рзк}{Рпк}$ $\qquad tпк = 1{,}059$

$tзс := \frac{1}{n\mu}$ $\qquad tзс = 0{,}667$

$Рпз := P_3$ $\qquad Рпз = 0{,}346$

$tнз := \frac{1 - Рпз}{Рпз}$ $\qquad tзс\ tнз = 1{,}259$

$tпс := \frac{1}{\lambda}$ $\qquad tпс = 0{,}667$

$t := \frac{К}{\lambda}$ $\qquad t = 1{,}308.$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Акулич И. Л.* Математическое программирование в примерах и задачах: Учебное пособие. — М.: Высшая школа, 1986.

2. *Банди Б.* Основы линейного программирования. — М.: Радио и связь, 1989.

3. *Беллман Р., Дрейфус С.* Прикладные задачи динамического программирования. — М.: Наука, 1964.

4. *Вентцель Е. С.* Исследование операций. Задачи, принципы, методология. — М.: Наука, 1980.

5. *Вильямс Н. Н.* Параметрическое программирование в экономике. — М.: Статистика, 1976.

6. *Гарнаев А.* Использование MS Excel и VBA в экономике и финансах. — СПб.: БХВ — Санкт-Петербург, 2000.

7. *Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания. — М.: Наука, 1966.

8. *Данциг Дж.* Линейное программирование, его обобщения и приложения. — М.: Прогресс, 1966.

9. *Дегтярев Ю. И.* Исследование операций. — М.: Высшая школа, 1986.

10. *Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н.* Математические методы в экономике: Учебник. — М.: ДИС, 1998.

11. *Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И.* Линейное и выпуклое программирование. — М.: Наука, 1967.

12. *Иванилов Ю. П. , Лотов А. В.* Математические модели в экономике. — М.: Наука, 1979.

13. Исследование операций в экономике / Под ред. проф. *Н. Ш. Кремера*. — М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997.

14. *Калихман И. Л.* Линейная алгебра и программирование. — М.: Высшая школа, 1967.

15. *Калихман И. Л.* Сборник задач по математическому программированию. — М.: Высшая школа, 1975.

16. *Карпелевич Ф. И., Садовский Л. Е.* Элементы линейной алгебры и линейного программирования. — М.: Наука, 1967.

17. *Корбут А. А, Финкельштейн Ю. Ю.* Дискретное программирование. — М.: Наука, 1969.

18. *Кузнецов Ю. Н., Кузубов В. И., Волощенко А. Б.* Математическое программирование. — М.: Высшая школа, 1990.

19. *Лабскер Л. Г., Бабешко Л. О.* Теория массового обслуживания в экономической сфере. — М.: ЮНИТИ, 1998.

20. *Лотов А. В.* Введение в экономико-математическое моделирование: Учебное пособие. — М.: Наука, 1984.

21. Математическое программирование / Под ред. Н. Ш. Кремера. — М.: Финстатинформ, 1995.

22. Матричные игры / Под ред. Н. И. Воробьева. — М.: Физматгиз, 1961.

23. *Овчаров Л. А.* Прикладные задачи теории массового обслуживания. — М.: Машиностроение, 1969.

24. *Плис А. И., Сливина Н. А.* Mathcad 2000. Математический практикум для экономистов и инженеров: Учебное пособие. — М.: Финансы и статистика, 2000.

25. *Шапкин А. С.* Факторы, определяющие выбор эффективных решений в условиях риска и неопределенности. Научное издание. — М.: Изд-во ГАСБУ, 1999.

26. *Шапкин А. С.* Экономические и финансовые риски. Оценка, управление, портфель инвестиций: Монография. — М.: Издательско-торговая корпорация “Дашков и К°”, 2003.

Главный редактор — *А. Е. Илларионова*
Художник — *М. А. Хавторин*
Корректор — *Л. М. Волкова*
Верстка — *Н. П. Якушина*

Ответственный за выпуск — *Л. М. Волкова*

Учебное издание

Шапкин Александр Сергеевич,
Шапкин Виктор Александрович

Математические методы
и модели исследования операций

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.007399.06.09 от 26.06.2009 г.

Подписано в печать 20.08.2015. Формат 60×90 1/16.
Бумага офсетная № 1. Печ. л. 25,0.
Тираж 200 экз.

Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°»
129347, Москва, Ярославское шоссе, д. 142, к. 732
Тел.: 8 (495) 668-12-30, 8 (499) 183-93-23
E-mail: sales@dashkov.ru — отдел продаж;
office@dashkov.ru — офис; http://www.dashkov.ru

9785394026102