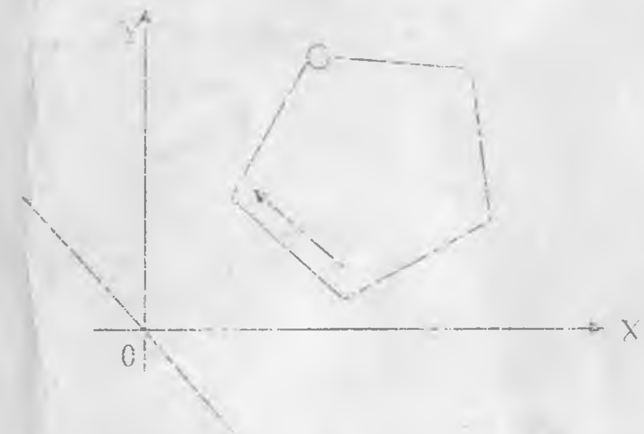
O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

TOSHKENT DAVLAT IQTISODIYOT UNIVERSITETI


ABDULLAYEV O.M., MAXMUDOV N.M.,
ISMOILOV A.A., ISHNAZAROV A.I.


# IQTISODIY-MATEMATIK USULLAR





TOSHKENT-2006

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

TOSHKENT DAVLAT IQTISODIYOT UNIVERSITETI

O.M.ABDULLAYEV, N.M.MAHMUDOV,
A.A.ISMOILOV, A.I.ISHNAZAROV

# IQTISODIY MATEMATIK USULLAR

(O‘quv qo‘llanma)

Toshkent 2006

O.M.Abdullayev, N.M.Mahmudov, A.A.Ismoilov, A.I.Ishnazarov. Iqtisodiy-matematik usullar. O'quv qo'llanma. –T.. TDIU nashr., 2006 y – 172 b.

Qo'llanmada iqtisodiy-matematik modellashtirish usullari yordamida ekstremal masalalarni yechish, optimal dasturlash, iqtisodiy-statistik usullar va tarmoqli modellar berilgan bo'lib, ular misollar yordamida keng yoritilgan. Qo'llanma bakalavrlar, magistrlar, aspirantlar, o'qituvchilar hamda o'z faoliyatida iqtisodiy-matematik usullarni qo'llovchi mutaxassislarga mo'ljallangan.

Mas'ul muharrir: akad. S.S.G'ulomov

Taqrizchilar: i.f.d., prof. B.Begalov, i.f.d., dots. O.Sultonxo'jayev

# MUNDARIJA

# KIRISH

Mamlakatimizda olib borilayotgan tub iqtisodiy islohotlar ta'lim sohasida ham ma'lum o'zgarishlarni talab etmoqda. Bugungi kunga kelib O'zbekiston Respublikasining «Ta'lim to'g'risida» gi Qonuni va O'zbekiston Respublikasining «Kadrlar tayyorlash milliy dasturi» Qonunidan kelib chiqqan holda yangi avlod darsliklari va o'quv qo'llanmalari yaratilmoqda. Bu esa respublikamiz ta'lim tizimida jahon andozalariga mos ravishda ta'lim berishni talab qiladi.

Bozor munosabatlari sharoitida noaniqlik va tavakkalchilik elementlarining mavjudligi, mahsulot ishlab chiqarishda foydalaniladigan resurslarning chegaralanganligi, barcha iqtisodiy sub'ektlardan ishlab chiqarish jarayonlarini tashkil etishda samarali qarorlar qabul qilishni talab qiladi. Bozor sharoitlarining dinamik o'zgaruvchanligini hisobga olib, bugungi kunda kadrlar tayyorlashni shunday darajaga chiqarish lozimki, natijada olgan bilimlari asosida ishlab chiqarish jarayonlarini boshqarishda ilmiy asoslangan qarorlar qabul qila oladigan mutaxassislar bo'lib yetishishlari lozim. Buning uchun talabalarda iqtisodiyot asoslari, matematika va tabiiy bilimlar, zamonaviy axborot texnologiyalari bo'yicha yetarli darajada ko'nikma va malakalar bo'lishi kerak. Matematikaning iqtisodiy jarayonlarni o'rganish va tahlil qilishda qo'llanilishi, yuqorida keltirib o'tilgan iqtisodiy barqarorsizliklarni keltirib chiqarish omillarini o'rganish va oldini olishda, ishlab chiqarishdagi «tor joylarni» aniqlashda har tomonlama amaliy yordam beradi.

«Iqtisodiy matematik usullar» kursi talabalarning iqtisodiy bilimlarini matematik apparat va axborot texnologiyalari asosida yanada chuqurlashtirish, iqtisodiy qonuniyatlarni yetarlicha tushunib olishlariga, turli xil iqtisodiy hodisa va jarayonlar matematik modellarini tuzishga ko'maklashadi. Talabalar ushbu kursni o'rganish davomida iqtisodiy jarayonlarning murakkab ekanligini, ushbu jarayonlar tahlilida matematik usullar va modellarning an'anaviy usullardan afzalliklarini o'rganib oladilar. Hozirgi kunda respublikamizda O'zbekiston Respublikasining «Kadrlar tayyorlash milliy dasturi» Qonunini amalga oshirish maqsadida optimallash nazariyasi va matematik dasturlashning bir qator bo'limlari bo'yicha ko'pgina ilmiy adabiyotlar, darslik va o'quv qo'llanmalari chop etilmoqda. Ko'pgina matematikaga oid qo'llanmalar chuqur matematik yo'nalishda yozilgan bo'lib, ularni o'rganish uchun talabalar maxsus matematik tayyorgarlikka ega bo'lishlari kerak.

Ushbu qo'llanmada mikroiqtisodiyotning asosi bo'lgan ishlab chiqarish va iste'mol nazariyalari matematik modellar bilan to'ldirilgan hamda ushbu modellarni yechishning turli xil usullari yoritib o'tilgan.

Matematik funksiyalar yordamida korxonalarda foyda, daromad, xarajatlarni aniqlash, talab va taklifni o'rganishdagi elastiklik funksiyalari tahlillar asosida keltirilgan. Iqtisodiy jarayonlarning o'zgaruvchanligini hisobga olgan holda dinamik va statik modellardan keng foydalanilgan.

Qo'llanmada taqsimlash masalalarini tadqiq qilishda chiziqli dasturlash usullariga alohida e'tibor berilgan. Ayniqsa, korxonalarda chegaralangan resurslardan foydalanib, maksimal foyda olish, turli xil yuklar va mahsulotlarni tashishda transport masalalari har tomonlama chuqur nazariy hamda matematik modellar yordamida yoritib berilgan.

Qo'llanmadagi keltirilgan mavzularni talabalar tomonidan chuqur va puxta o'zlashtirishlari uchun deyarli har bir mavzuda misol va masalalar izohlar bilan yechib ko'rsatilgan, mavzularning oxirida talabalar mustaqil yechishlari uchun qo'shimcha misol va masalalar, takrorlash uchun savollar keltirilgan.

Bundan tashqari mualliflar tomonidan qo'llanmada turli xil iqtisodiy funksiyalarni tuzishda, chiziqli dasturlash masalalari, korrelyatsion-regression tahlil masalarini yechishda Excel dasturidan foydalanish bo'yicha ko'rsatmalar ham keltirib o'tilgan. Bu esa talabalarning iqtisodiy jarayonlarni o'rganishda zamonaviy axborot texnologiyalari bo'yicha bilimlarini oshirish bilan birga iqtisodiy masalalarning yechimlarini tahlil qilishda katta yordam beradi.

O'quv qo'llanmaning bunday uslubda tuzilishi, o'ylaymizki, ushbu kursni mustaqil o'rganuvchilar uchun juda katta yordam beradi.

# 1-BOB. OPTIMALLASHNING ELEMENTAR MATEMATIK USULLARI

## 1.1. Funksiya va uning hosilasi

Iqtisodiy matematik usullar turli xil ko'rinishdagi funksiyalar orqali iqtisodiy jarayon va hodisalarni o'rganuvchi matematik bo'limlarning umumiy nomi bo'lib, oliy va o'rta maxsus o'quv yurtlarida fan sifatida o'rganiladi. Ushbu fanning asosini iqtisodiy nazariya, algebra, geometriya va boshqa fanlar tashkil etadi. Algebraning fan sifatida shakllanishi ko'pchilik mamlakatlarning so'nggi ikki ming yillar davomidagi ishlari yakunidir. IX asrning birinchi yarmida yashagan o'rta osiyolik olim Muhammad Muso al–Xorazmiy birinchi bo'lib algebraning to'la mazmunini aniqlab bergan. Uning «Al-jabr val-muqobala» asarida bu fanga «Algebra» deb nom beriladi. IX-XII asrlarda turli algebraik tenglamalarni yechish usullarini Abu Rayhon Beruniy va Umar Hayyomlar berganlar. XVI asrga kelib, algebraning kelib chiqishi tufayli funksiya tushunchasi paydo bo'ldi. Fransuz faylasufi va matematigi Rene Dekart (1596-1650 yy.) algebra va geometriya fanlarining bir-biri bilan uzviy bog'liq ekanligini va o'zgaruvchi miqdorning o'rni haqidagi mulohazalarni olg'a surgan. XVII asrga kelib, elementar matematikadan iborat bo'lgan bo'limlar shu davr taraqqiyotining o'sib borayotgan talab va ehtiyojlariga to'la javob bera olmay qoldi. Natijada, XVII asrdan boshlab, matematikaning taraqqiyotida yangi davr – o'zgaruvchi miqdorlarni o'rganish davri boshlandi. Bu davrga kelib, Dekart va boshqa matematiklarning ishlariga funksiya tushunchasi kiritila boshlandi. XVII asrning oxirida mashhur nemis matematigi G. Leybnis (1646-1716 yy.) va uning shogirdlari o'z asarlarida «funksiya» iborasini qo'llay boshladilar, lekin ularni geometrik tushunchalarga taalluqli holda olib bordilar. Iogann Bernulli (1667-1727 yy.) funksiya ta'rifini «O'zgaruvchi miqdor va o'zgarmaslardan turli usullar bilan hosil qilingan miqdorga o'zgaruvchining funksiyasi deyiladi», deb keltiradi. Bernullining bu ta'rifi faqat Leybnis ishlariga emas, balki mashhur ingliz matematigi va fizigi Isaak Nyutonning (1643-1727 yy.) ishlariga ham asoslangan edi.

Geometriya bo'yicha rus olimi N.I. Lobachevskiy (1792-1856 yy.) turli matematiklarning funksiya haqidagi mulohazalarini yakunlab, quyidagi ta'rifni keltiradi: «agar "$x$" miqdorning har bir qiymatiga "$y$" miqdorning ma'lum bir qiymati mos kelsa, u holda "$y$" miqdor o'zgaruvchi "$x$" miqdorning funksiyasi deb ataladi.

XIX asrning ikkinchi yarmida funksiyaning ma'lum ta'riflari ko'pchilik matematiklarga uncha umumiy emasligi sezildi. Natijada funksiyaning umumiy ta'rifi yuzaga keldi. Bu ta'rifni to'plamlar nazariyasining asoschilari G. Kantor (1845-1918 yy.) va R. Dedekindlar (1831-1916 yy.) berishdi: "$X$" va "$Y$" ikki to'plam berilgan bo'lsin. Agar "$X$" to'plamning har bir "$x$" elementiga va "$Y$" to'plamning ma'lum "$y$" elementi mos qo'yilgan bo'lsa, u holda "$X$" ni "$Y$" ga akslantirish berilgan deyiladi. Bu "$y$" element "$x$" ning "$f$" akslantirishdagi aksi deyiladi va $f(x)$ bilan belgilanadi. Agar "$X$" va "$Y$" lar haqiqiy sonlardan iborat bo'lsa, u holda haqiqiy argumentli *funksiya* berilgan deyiladi.

Iqtisodiy matematikda asosan elementlari haqiqiy sonlardan tashkil topgan to'plamlarni akslantirishlar o'rganiladi. Bunday akslantirish ***funksiya*** deb ataladi.

Funksiya tushunchasi matematikaning asosiy tushunchalaridan biri bo'lib, quyidagicha ta'riflanadi: elementlari haqiqiy sonlardan iborat "$X$" va "$Y$" to'plamlar berilgan bo'lib, "$X$" to'plamdagi har bir "$x$" haqiqiy songa biror $f$ qonun yoki qoidaga binoan "$Y$" to'plamdagi aniq bitta "$y$" haqiqiy son mos qo'yilgan bo'lsa, u holda "$X$" to'plamda $f$ - funksiya berilgan deyiladi va $y = f(x)$ ko'rinishida yoziladi. Bu yerda "$X$" to'plamni $f$ – funksiyaning berilishi yoki *aniqlanish sohasi*, "$Y$" to'plamni uning *o'zgarish sohasi* yoki *qiymatlar to'plami* deyiladi. Matematikada qo'llanilayotgan ifodalarga ko'ra, "$x$" – *erkli o'zgaruvchi* yoki *argument*, "$y$" esa *erksiz o'zgaruvchi* yoki *funksiya* deb ataladi. Demak, funksiya berilgan bo'lishi uchun uning aniqlanish sohasi "$X$" va undagi har bir "$x$" soniga mos keluvchi "$y$" sonini topish qonuni yoki qoidasi berilgan bo'lishi kerak.

Agar "$X$" va "$Y$" sonlar to'plamini ifodalovchi moslik qonuni bilan birgalikda funksiyaning aniqlanish sohasi ham ko'rsatilgan bo'lsa, u holda funksiya berilgan, deb ataladi. Aniqlanish sohasi va qiymatlar to'plami haqiqiy sonlardan iborat. Haqiqiy o'zgaruvchili funksiyalarni berilish usullariga quyidagilar kiradi: ***analitik***, ***jadval*** va ***grafik*** usullari.

***Analitik usul.*** Funksiya bilan argument orasidagi moslik ko'pincha biror matematik ifoda orqali beriladi. Matematik ifodada "$x$" argument va sonlar ustida qaysi amallarni qanday tartibda bajarilishi ko'rsatilgan bo'lib, bu amallarni bajarish natijasida funksiyaning mos qiymatlarini hosil qilish mumkin. Bu holda $y = f(x)$ funksiya analitik usulda berilgan, deb ataladi. Agar $y = f(x)$ funksiya analitik usulda berilgan bo'lib, "$y$" ga nisbatan yechilgan bo'lsa, tenglikning o'ng tomonidagi ifoda *funksiyaning analitik ifodasi* deyiladi.

Odatda, funksiya analitik usulda berilgan bo‘lsa, uning aniqlanish sohasi alohida ko‘rsatilgan bo‘lishi mumkin. Bunday hollarda funksiyaning aniqlanish sohasi sifatida "$x$" ning shunday haqiqiy qiymatlari to‘plami tushuniladiki, ular uchun analitik ifoda sonli ma’nosini yo‘qotmasdan, faqat haqiqiy qiymatlarga ega bo‘ladi. Analitik usulda berilgan funksiyaning aniqlanish sohasini *funksiyaning mavjudlik sohasi*, deb ham yuritiladi. Ba’zi hollarda analitik usulda berilgan funksiyalarning mavjudlik sohasi berilgan bo‘ladi. Bunda funksiya qiymatini aniqlash uchun mavjudlik sohasiga e’tibor berish kerak bo‘ladi.

***Jadval usuli.*** Ba’zi hollarda o‘zgaruvchi "$x$" argumentning qiymatlariga mos keladigan funksiya qiymatlari javdal ko‘rinishida beriladi. Iqtisodiy jarayonlarni o‘rganishda kuzatishlar natijasida to‘plangan ma’lumotlar ko‘pincha jadval ko‘rinishida keltiriladi. Bu usuldan funksiyaning qiymatini analitik usul bilan topish murakkab bo‘lganda, funksiyaning analitik usulda berib bo‘lmaganda va funksiyaning aniqlanish sohasi cheksiz to‘plam bo‘lganida, uning barcha qiymatlarini ko‘rsatib bo‘lmaydi. Natijada funksiya qiymatlari va argumentlarini jadval ko‘rinishida keltirish qulaydir.

***Grafik usul.*** $y=f(x)$ funksiya $E$ sohasida berilgan bo‘lsin. Unda $x0y$ koordinatalar tekisligidagi abssissasi $x\in E$, ordinatasi $f(x)$ lardan iborat bo‘lgan nuqtalar to‘plami shu *funksiyaning grafigi* deb ataladi. Funksiyaning aniqlanish sohasi $E$ ning tuzilishiga qarab, biror chiziq yoki ba’zi bir nuqtalar to‘plami bo‘lishi mumkin. Koordinatalar tekisligida nuqtalar to‘plami berilsa, uni *grafik usulda* berilgan funksiya deb ataladi. Grafikdagi nuqtaning abssissalar o‘qidagi proyeksiyasi argument qiymatiga, ordinatalar o‘qidagi proyeksiyasi esa funksiya qiymatiga mos keladi. Funksiyani grafik usulida berilishi uning xususiyatlarini yaqqol ko‘rishga imkon beradi.

Agar berilgan $y=f(x)$ funksiya argumenti "$x$" ni yangi "$t$" argumentning $x=\varphi(t)$ funksiyasi bilan almashtirilsa, *murakkab funksiya* hosil bo‘ladi. Aniqrog‘i, agarda $u=\varphi(x)$ funksiya $E$ sohada va $y=f(u)$ funksiya $D(\varphi)$ sohada aniqlangan bo‘lsa, u holda $y=f(\varphi(x))$ funksiyani $E$ sohada aniqlangan murakkab funksiya yoki $f$ va $\varphi$ ning kompozitsiyasi deb ataladi.

Berilgan $y=f(x)$ funksiya $E_x$ to‘plamda aniqlangan bo‘lsin. Funksiyaning o‘zgarish sohasi $E_y$ esa $E_x$ to‘plamning obrazi bo‘ladi: $E_x$ dagi har bir "$x$" ga $E_y$ ning ma’lum bir "$y$" elementi mos keladi. Shu bilan birga $E_y$ dan olingan har qanday "$y$" element $E_x$ dan olingan bir yoki bir nechta originalga ega bo‘lishi mumkin. Boshqacha aytganda, $y=f(x)$ funksiyaning har bir $y\in E_y$ qiymatiga $E_x$ dan faqat bitta "$x$" qiymat to‘g‘ri kelsa, $f$ munosabat $E_y$ dan $x=f^{-1}(y)$ teskari funksiyani aniqlaydi deb ataladi. Shunday qilib, har bir to‘g‘ri funksiyaga teskari bo‘lgan funksiya mavjud bo‘lishi mumkin. O‘zaro teskari $y=f(x)$ va $x=f^{-1}(y)$ funksiyalar $E_x$ va $E_y$ to‘plamlarning elementlarini o‘zaro mos juftlarga birlashtiradi.

Matematik tahlilning asosiy masalalaridan biri, funksiyaning o‘zgarish holatini o‘rganishdan iborat. Ma’lum xarakterga ega bo‘lgan funksiyalar sinfi - monoton funksiyalardir.

Agar funksiyaning aniqlanish sohasidan olingan ixtiyoriy $x_1$ va $x_2$ argument qiymatlari uchun $x_1<x_2$ tengsizlikdan $f(x_1)<f(x_2)$ tengsizlik kelib chiqsa, u holda $f(x)$ funksiya o‘zining aniqlanish sohasida *o‘suvchi* deb ataladi. Demak, argumentning katta qiymatlariga funksiyaning katta qiymatlari mos kelsa, funksiya o‘suvchi bo‘ladi.

Agar funksiyaning aniqlanish sohasidan olingan ixtiyoriy $x_1$ va $x_2$ argument qiymatlari uchun $x_1>x_2$ tengsizlikdan $f(x_1)\le f(x_2)$, $[f(x_1)\ge f(x_2)]$ tengsizlik kelib chiqsa, funksiya o‘zining aniqlanish sohasida *kamaymaydigan* (o‘smaydigan) deb ataladi.

O‘suvchi, kamayuvchi, kamaymaydigan, o‘smaydigan funksiyalar umumiy bir sinfni tashkil etadi va *monoton funksiyalar* deb ataladi.

$y=f(x)$ funksiyaning limiti deb, $b=\lim\limits_{x\to a}f(x)$ ga aytiladi. Bunda $f(x)$ funksiya $E$ to‘plamda aniqlangan bo‘lib, "$a$" nuqtaning ixtiyoriy atrofida $E$ to‘plamning nuqtalari mavjud bo‘ladi. U holda funksiyaning $E$ to‘plami bo‘yicha "$a$" nuqtadagi limiti "$b$" ni quyidagicha belgilanadi:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x)=b.$$

Funksiyaning nuqtadagi uzluksizligi ta’rifi quyidagicha ifodalanadi: agar $\lim\limits_{x\to x_0,\, x\in E} f(x)=f(x_0)$ bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya $E$ to‘plamning $x_0$ nuqtada uzluksiz bo‘lishi uchun quyidagi uch shart bajarilishi kerak:

1) $f(x)$ funksiya $x_0$ nuqtada aniqlangan;

2) $x_0$ nuqtada $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud;

3) funksiyaning $x_0$ nuqtadagi qiymati $f(x_0)$ bilan uning shu nuqtadagi limiti teng.

Bu holda $x_0$ nuqta *funksiyaning uzluksizlik nuqtasi* deyiladi. Aks holda $f(x)$ funksiya $x_0$ nuqtada uzilishga ega va $x_0$ uning uzilish nuqtasi deyiladi.

Agar $f(x)$ funksiya $E$ to‘plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $E$ to'plamda uzluksiz deb ataladı. Xususiy holda $(a, b)$ ning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiya $(a, b)$ da uzluksiz deyiladi.

Berilgan funksiya $y = f(x)$ $x_0$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan va $x_0 + \Delta x$ shu atrofning nuqtasi bo'lsin va $\Delta x \to 0$ da $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ nisbatning limiti mavjud bo'lsa, u limit $f$ funksiyaning $x_0$ nuqtadagi *hosilasi* deyiladi va $f'(x)$, yoki $y'$, yoki $\frac{\partial y}{\partial x}$ orqali belgilanadi.

Iqtisodiy izlanishlarda mahsulot ishlab chiqarish va xarajatlar o'rtasidagi bog'lanishlarni o'rganishda *ishlab chiqarish funksiyalaridan* keng foydalaniladi. Ishlab chiqarish funksiyasini differensiallash bilan bog'liq bo'lgan differensial tavsiflari chekli mahsulot va chekli xarajatlar tushunchasi bilan bog'liqdir. Shu bilan birga elastiklik tushunchasi, omillar almashinishining chekli normasi ham aniqlanadi. bunday masalalarni hal qilishda funksiya hosilasidan keng foydalaniladi.

Elementar funksiyalar hosilalarini ko'rib chiqamiz.

***Ko'rsatkichli funksiya.*** $y = e^x$, $y' = e^x$ funksiyalar berilgan bo'lsin. Umumiy holda $y = a^u$, $u = u(x)$ bo'lgan hol uchun ko'rib chiqamiz. Bu funksiyani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$y = e^{u \ln a}.$$

Bundan murakkab funksiya hosilasini hisoblash qoidasiga asosan,

$$y' = \left(e^{u \ln a}\right)' = e^{u \ln a}(u \ln a)' = a^u \ln a \cdot u'.$$

bo'ladi.

Demak, ko'rsatkichli funksiya hosilasi

$$\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$$

formula bilan ifodalanadi.

***Logarifmik funksiya.*** $y = \log_a x$, $x = a^y$ funksiyaga nisbatan teskari funksiya bo'lgani uchun, teskari funksiyani differensiallash qoidasiga ko'ra,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x},$$

bo'ladi. Ya'ni

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}.$$

Funksiya murakkab bo'lgan holda

$$\left(\log_a u\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{u'}{u}.$$

***Darajali funksiya.*** $y = x^{\alpha}$, bunda $\alpha$ - istalgan haqiqiy son.

$$y = x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}; \quad y' = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = x^{\alpha} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1},$$

$$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Funksiya murakkab bo'lganda:

$$\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha u^{\alpha - 1} \cdot u'.$$

Trigonometrik funksiyalar:

$$y = \sin x; \quad y' = (\sin x)' = \cos x$$

$$y = \cos x; \quad y' = (\cos x)' = -\sin x$$

$$y = tgx; \quad y' = (tgx)' = ces^{2} x$$

$$y = ctgx; \quad y' = (ctgx)' = -\csc^{2} x$$

Funksiyalar murakkab bo'lgan holda,

$$y = \sin u; \quad y' = (\sin u)' = \cos u \cdot u'$$

$$y = \cos u; \quad y' = (\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

$$y = tgu; \quad y' = (tgx)' = \frac{u'}{\cos^{2} u}$$

$$y = ctgu; \quad y' = (ctgu)' = -\frac{u'}{\sin^{2} u}$$

Teskari trigonometrik funksiyalardan $y = \arcsin x$ funksiyasini ko'rib chiqamiz. Bu funksiya $x = \sin y$ ga nisbatan teskari funksiya, shuning uchun

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^{2} y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^{2}}},$$

ya'ni $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^{2}}}$.

Funksiya murakkab bo'lsa

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^{2}}}.$$

Xuddi shuningdek, qolgan teskari funksiyalar uchun quyidagi formulalar keltirib chiqariladi:

$$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1 - u^{2}}}, \quad (arctgu)' = \frac{u'}{1 + u^{2}}, \quad (arcctgu)' = -\frac{u'}{1 + u^{2}}.$$

Elementar funksiyalar hosilalari quyidagi 1-jadvalda keltirilgan.

1-jadval.

Elementar funksiyalar hosilalari

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|---|---|
| $C$ (o'zgarmas son) | $0$ | $\sin x$ | $\cos x$ |
| $x$ | $1$ | $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $tgx$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ |
| $x^{\alpha}$ | $\alpha \cdot x^{\alpha-1}$ | $ctgx$ | $-\frac{1}{\sin^2 x}$ |
| $a^x$ | $a^x \ln a$ | $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $\arccos x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\log_a \lvert x \rvert$ | $\frac{1}{x \ln a}$ | $arctgx$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |
| $\ln(x)$ | $\frac{1}{x}$ | $arcctgx$ | $-\frac{1}{1+x^2}$ |

***Hosilaning geometrik va fizik ma'nolari.*** Geometriyada $f'(x)$ hosila $y=f(x)$ funksiya grafigining abssissasi $x_0$ bo'lgan nuqtasiga o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsienti

$$k = tg\varphi = f'(x_0)$$

dan iborat.

Hosilaning fizik ma'nosi $S$ bosib o'tilgan yo'ldan ($t=t_0$ da) $t$ vaqt bo'yicha olingan hosila $t_0$ paytidagi $v(t_0)=\frac{\partial S}{\partial t}$ tezlikni bildiradi.

***Funksiya ekstremumining mavjudligini yetarli sharti.*** Agar $f(M)$ funksiyaning ekstremum nuqtasida bu funksiyaning barcha xususiy hosilalari mavjud bo'lsa, bu ekstremum nuqta $f(M)$ funksiyaning statsionar nuqtasi hisoblanadi, ya'ni

$$\frac{\partial f(M)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Funksiya hosilasini topish amali *differensiallash* deb ataladi. Fizika nuqtai nazaridan, differensiallash - o'zgaruvchi miqdorning o'zgarish tezligini topishdir.

Funksiya hosilasining geometrik talqini - funksiya hosilasining tayin bir nuqtadagi qiymati funksiya grafigiga shu nuqtada o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientidir.

Funksiyaning ekstremum nuqtalari (lotincha «extremum» - «chetki» so'zidan hosil bo'ladi), xususan maksimum va minimum nuqta-larni (lotincha «maximum» va «minimum» - «eng katta» va «eng kıchik») bildiradi.

Ekstremum ta'rifi quyidagicha ifodalanadi: agar $x_0$ nuqtani o'z ichiga olgan va funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli bo'lgan shunday interval mavjud bo'lib, bu intervalning barcha $x$ nuqtalari uchun $f(x)< f(x_0)$ shart bajarilsa, $f(x)$ funksiya $x_0$ nuqtada maksimumga ega deyiladi. Mos ravishda, agar biror intervalning barcha nuqtalari uchun $f(x)> f(x_0)$ shart bajarilsa, $f(x)$ funksiya $x_0$ nuqtada minimumga ega bo'ladi.

Differensial hisobda funksiyaning ekstremum masalasini tekshirish hosila yordamida juda samarali va yetarlicha sodda ravishda amalga oshiriladi. Differensial hisoblashning asosiy teoremalaridan biri - Ferma teoremasi bo'lib, u differensiallanuvchi funksiya ekstremumiga ega bo'lishining zaruriy shartini belgilab beradi: $f(x)$ funksiya $x_0$ nuqtada ekstremumga ega bo'lsin; agar bu nuqtada $f'(x_0)$ hosila mavjud bo'lsa, u nolga teng bo'ladi; ya'ni $f'(x_0)=0$.

***Ferma teoremasining geometrik ma'nosi.*** Ekstremum nuqtasida funksiya grafigiga o'tkazilgan urinma gorizontal bo'lishini bildiradi. Bu teorema birinchilardan bo'lib, ekstremumga oid qator masalalarni hal etgan fransuz matematigi L.Ferma nomi bilan ataladi.

Differensiallanuvchi funksiya ekstremumga ega bo'lishining yetarli sharti - hosila ishorasining almashinishidir. Agar hosila $x_0$ nuqtada ishorasini minusdan plyusga o'zgartirsa, ya'ni funksiyaning kamayishi o'sishi bilan almashsa, u holda $x_0$ nuqta minimum nuqtasi bo'ladi. Aksincha, agar hosila ishorasini plyusdan minusga almashtirsa, ya'ni funksiya o'sishdan kamayishga o'tsa, $x_0$ nuqta maksimum nuqtasi bo'ladi.

Funksiyaning hosilasi nolga teng bo'ladigan nuqta *statsionar nuqta* deyiladi. Agar differensiallanuvchi funksiyaning ekstremum masalasi tekshirilayotgan bo'lsa, uning barcha statsionar nuqtalarini topish, so'ng bu nuqtalarning chap va o'ng tomonlarida hosila ishorasini tekshirish kerak.

Funksiyaning maksimum va minimum nuqtalariga oid masalalar fizika, mexanıka, matematika fanlarining turli izlanishlarida nihoyatda muhim ahamiyatga ega. Bu matematikada differensial hisoblash sohasini yaratilishiga turtki bo'lgan masalalar edi. Differensial hisob esa hosila yordamida ekstremumga doir masalalarni yechishning kuchli umumiy bo'lgan usulini yaratib berdi.

Hozırgi kunda funksiyalardan iqtisodiy jarayonlarni ifodalashda ham keng foydalanilmoqda. Matematika usullarini iqtisodiy jarayonlarni modellashtirishga kirib kelishi, mahsulot ishlab chiqarish funksiyalarini tuzish va uni turli sharoitlarda iqtisodiy tahlil qilish imkoniyatini beradi. Korxonada umumiy ishlab chiqarish hajmini, foydalanilayotgan turli omillar ta'siri ostida o'zgarishini tekshirish uchun tuzilgan funksiya grafigi nuqtalarini koordinata uchi bilan birlashtiruvchi to'g'ri chiziqni abssissa o'qi bilan hosil qilgan burchagi tangensi, o'zgaruvchi omillarning o'rtacha samaradorligini, shu funksiya grafigiga o'tkazilgan urinmani abssissa o'qi bilan hosil qilgan burchagi tangensi o'zgaruvchi omilning chegaraviy samaradorligini ifodalaydi.

***Funksiya hosilasi va elastikligidan iqtisodiy masalalarni yechish va tahlil qilishda foydalanish.*** Korxona va firmalar faoliyatini iqtisodiy tahlil qilishda hosila tushunchasi bilan bog'liq iqtisodiy ko'rsatkichlar quyidagilar:

1. Korxona va firmalarning umumiy daromadi

$$TR = P \cdot Q,$$

mahsulot narxini $(P)$ ishlab chiqarilgan mahsulot hajmiga $(Q)$ ko'paytirib topiladi.

O'rtacha daromad $AR$ – bu sotilgan bir birlik mahsulotga to'g'ri keladigan daromad:

$$AR = \frac{TR}{Q} = \frac{P \cdot Q}{Q} = P,$$

ya'ni o'rtacha daromad $AR$ mahsulotning narxiga teng.

Chekli daromad $MR$ – ishlab chiqarilayotgan qo'shimcha bir birlik mahsulotni sotishdan olinadigan qo'shimcha daromaddir (ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi juda oz o'zgarganda daromadni o'zgarish tezligini bildiradi):

$$MR = \lim_{\Delta Q \to 0} \frac{\Delta TR}{\Delta Q} = (TR)'_Q = \frac{d(TR)}{dQ},$$

ya'ni chekli daromad to'la daromad funksiyasidan mahsulot hajmi $Q$ bo'yicha olingan hosilaga teng.

Agar bozor sof raqobatga asoslangan bo'lsa, narx mahsulot ishlab chiqarish hajmiga bog'liq bo'lmaydi. Bu holda

$$MR = (TR)'_Q = (PQ)'_Q = P.$$

Agar narx ishlab chiqarish hajmi $Q$ ga bog'liq funksiya hisoblansa, daromad ko'paytma sifatida differensiallanadi:

$$MR = (PQ)'_Q = P'_Q Q + P = \frac{dP}{dQ} \cdot Q + P.$$

2. Korxona va firmalar ishlab chiqarishining to'liq xarajatlari $(TC)$ odatda to'liq o'zgarmas xarajatlar $(TFC)$ va to'liq o'zgaruvchan xarajat-

larga $(TVC)$ bo'linadi:

$$TC = TFC + TVC(Q).$$

Ishlab chiqarish hajmi o'zgarishi bilan to'liq o'zgarmas xarajatlar $(TFC)$ o'zgarmaydi. To'liq o'zgaruvchan xarajatlar $(TVC)$ ishlab chiqarish hajmi $(Q)$ ga bog'liq.

O'rtacha xarajatlar $(AC)$ – ishlab chiqarilgan bir birlik mahsulotga to'g'ri keluvchi xarajatlardir va u quyidagicha hisoblanadi:

$$AC = \frac{TC}{Q}.$$

Chekli xarajatlar $(MC)$ – qo'shimcha bir birlik mahsulot ishlab chiqarish uchun bo'lgan qo'shimcha xarajatlardir:

$$MC = \lim_{\Delta Q \to 0} \frac{\Delta TC}{\Delta Q} = (TC)'_Q = \frac{d(TC)}{dQ}.$$

Chekli xarajatlar $(MC)$ ishlab chiqarilgan mahsulotlarning to'liq xarajatlaridan mahsulot hajmi $(Q)$ bo'yicha olingan hosilaga teng.

3. Foyda funksiyasi uchun ham yuqorida keltirilgan tushunchalar mavjud.

O'rtacha foyda ko'rsatkichi quyidagiga teng:

$$A\pi = \frac{\pi}{Q}.$$

Chekli foyda esa quyidagicha topiladi:

$$M\pi = \lim_{\Delta Q \to 0} \frac{\Delta \pi}{\Delta Q} = (\pi)'_Q = \frac{d\pi}{dQ}.$$

4. Iste'molchining iste'mol qilishga chekli moyilligi $(MPC)$, iste'mol $(C)$ dan daromad $(Y)$ bo'yicha olingan hosilaga teng:

$$MPC = \frac{dC}{dY}.$$

Iste'mol qilishga chekli moyillik bildirish $(MPC)$ daromadning katta bo'lmagan ortishida, iste'mol qanday ortib borishini ko'rsatadi.

Jamg'arma qilishga chekli moyillik bildirish $(MPS)$, daromadni katta bo'lmagan ortishida jamg'arma qanday ortib borishini ko'rsatadi:

$$MPS = \frac{dS}{dY}.$$

Iste'molchining daromadi iste'mol va jamg'armaga taqsimlangani uchun quyidagi ifoda yoziladi:

$$Y = C + S.$$

Bu tenglamaning o'ng va chap tomonlarini differensiallab. quyidagi hosil qilinadi:

$$(Y)'_Y = (C)'_Y + (S)'_Y,$$

ya'ni

$$1 = MPC + MPS.$$

Bundan shu kelib chiqadiki, iste'mol qilishga chekli moyillik bildirish va jamg'arma qilishga chekli moyillik bildirish yig'indisi birga teng.

5. Korxona va firmalarda ishlab chiqarilayotgan mahsulot hajmini ($Q$) ishlab chiqarishda band bo'lgan ishchilar soni ($L$) bo'yicha funksiya sifatida qaralsa, u holda o'rtacha mehnat unumdorligini quyidagi formula orqali topish mumkin:

$$\bar{l} = \frac{Q}{L}.$$

Chekli mehnat unumdorligi esa quyidagiga teng:

$$l_{\text{chekli}} = (Q)'_L = \frac{dQ}{dL}.$$

Shunday qilib, barcha hollarda chekli ko'rsatkichlar haqida so'z borganida, doimo bog'liq o'zgaruvchidan bog'liq bo'lmagan o'zgaruvchi bo'yicha hosilani hisoblash kerak. Bu esa o'zgaruvchi ko'rsatkichning chekli xarakteristikasi bog'liq o'zgaruvchining oniy qiymatini o'zgarish tezligini ko'rsatadi.

6. Iqtisodiy jarayonlarni tahlil qilishda bir-biri bilan bog'liq ikki miqdorni nisbiy tezligining o'zgarishini baholashda elastiklik tushunchasidan foydalaniladi.

Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. Elastiklik $E_x(y)$ deb, $y = f(x)$ funksiyaning nisbiy o'zgarishini argumentning nisbiy o'zgarishi $\delta x$ ga nisbatiga aytiladi. Funksiyaning nisbiy o'zgarishi

$$\delta y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{f(x_1)} = \frac{\Delta y}{y}$$

bo'lgani va argumentning nisbiy o'zgarishi

$$\delta x = \frac{x_2 - x_1}{x_1} = \frac{\Delta x}{x_1},$$

teng bo'lgani uchun elastiklik quyidagiga teng bo'ladi:

$$E_x(y) = \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\Delta y / y_1}{\Delta x / x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x_1}{y_1},$$

bu yerda, $x_1$ va $y_1$ - $y = f(x)$ egri chizig'ining elastikligini aniqlovchi abssissa va ordinata nuqtalari.

Elastiklik ko'rsatkichi turli xil qiymatlarning foizdagi munosabatlarini ko'rsatadi. Xususan, mahsulotga bo'lgan talabning narx bo'yicha elastikligi quyidagiga teng:

$$E_p(Q_p)=\frac{dQ}{dP}\cdot\frac{P}{Q},$$

bu yerda, $\frac{dQ}{dP}$ – talab funksiyasini narx bo'yicha hosilasi;

$P$ – tovarning narxi;

$Q$ – tovar miqdori.

Talab funksiyasi kamayib boruvchi funksiya bo'lgani uchun, uning hosilasi manfiydir, shuning uchun talabni narx bo'yicha elastikligi manfiy ishoraga ega bo'ladi. Ko'pincha talabni narx bo'yicha elastikligini baholashda ishoraga qaralmaydi. Talab elastik deb ataladi, agarda $|E|>1$ bo'lsa; birlik elastiklilik deb ataladi, agarda $|E|=1$ bo'lsa va talab noelastik deb ataladi, agarda $|E|<1$ bo'lsa.

Noelastik talab shuni bildiradiki, narxning kichik foizdagi ortishi, talabni yanada kichik foizdagi kamayishiga olib keladi, yoki narxning foizdagi kichik pasayishi talabni yanada ozroq foizdagi ortishiga olib keladi $(\delta x>\delta y)$.

Elastik talab shuni bildiradiki, tovarning narxini oz miqdordagi o'zgarishi, talabni yetarli darajada katta foiz nisbatida o'zgarishiga mos keladi $(\delta x<\delta y)$. Birlik elastiklik holatida tovar narxini ma'lum bir foizda o'zgarishi, talab miqdorini ham shu foizda o'zgarishiga olib keladi $(\delta x=\delta y)$.

Shu bilan birga iqtisodiy tahlilda kesishishgan elastiklik tushunchasi ham mavjud bo'lib, uning yordamida bir tovarning narxini foizdagi o'zgarishi boshqa bir tovarga bo'lgan talabning foizdagi o'zgarishiga ta'siri baholanadi.

Elastiklik tushunchasidan iqtisodiy jarayonlarni o'rganishda foydalanishning yana bir yo'nalishi - talabni daromad bo'yicha elastikligi bo'lib, uning yordamida talabni iste'molchining daromadini o'zgarishiga ta'sirchanligi baholanadi. Shuning uchun tovarga bo'lgan talabning daromad bo'yicha juda yuqori musbat elastikligi bunday mahsulot ishlab chiqaruvchi tarmoqning kelajagi porloqligidan darak beradi. Agar daromad bo'yicha elastiklik koeffitsienti birdan kichik bo'lsa, bunday mahsulot ishlab chiqaruvchi tarmoqning rivojlanishi ko'pgina muammolarga bog'liq bo'ladi.

Korxonalar, firmalar va tadbirkorlik faoliyatini tahlil qilishda elastiklikdan keng foydalanish mumkin. Tushumning tovar narxi bo'yicha elastikligi umumiy daromadni narx bilan qanday bog'langanligini baholashga yordam beradi. Tushumning tovar narxi bo'yicha elastikligi quyidagiga teng bo'ladi:

$$E_P(R)=\frac{d(R)}{dP}\cdot\frac{P}{R}=\frac{d(P\cdot Q)}{dP}\cdot\frac{P}{P\cdot Q}=\left(Q+P\cdot Q_P'\right)\cdot\frac{1}{Q}=1+\frac{P}{Q}\cdot Q_P'=1+E_P(Q).$$

Talabning narx bo'yicha elastikligini manfiy ekanligini hisobga olib, quyidagıni yozish mumkin:

$$E_p(R)=1-|E_p(Q)|.$$

Agar mahsulotga bo'lgan talab elastik bo'lsa $(|E(Q)|>1)$, unda $E_p(E)<0$ bo'ladi va $\frac{\delta R}{\delta P}<0$. Bu shuni bildiradiki, narxni ortishi bilan $(\delta P>0)$ umumiy tushum kamayib boradi $(\delta R<0)$.

Agar tovarga bo'lgan talab noelastik bo'lsa $(|E(Q)|<1)$, unda $E_p(E)>0$ bo'ladi va $\frac{\delta R}{\delta P}>0$. Bu tovarning narxini ortishi umumiy daromadning ham ortishiga olib kelishini bildiradi.

**1-misol**. Firma qandaydir mahsulot ishlab chiqaradi va uning umumiy xarajatlari funksiyasi quyidagi tenglama orqali berilgan:

$$TC(x)=x\left(\frac{x^2}{10}+200\right)$$

Umumiy tushum funksiyasi quyidagi tenglama orqali ifodalanadi:

$$R(x)=(2200-3x)\cdot\frac{x}{2},$$

bundan $x$ – firmaning har haftada ishlab chiqarayotgan mahsulot hajmi, ming dona.

Quyidagilar topilsin:

- firmaning haftada 10000 birlik mahsulot ishlab chiqarish hajmiga to'g'ri keluvchi to'liq va chekli xarajatlarini;
- agar chekli xarajatlar 320 ga teng bo'lsa, ishlab chiqarish hajmi va chekli xarajatlarni;
- firmaning chekli daromadlar funksiyasini;
- firma haftada 10000 birlik mahsulot ishlab chiqarganda, uning to'liq tushum va chekli tushumini;
- agar chekli tushum 1040 ga teng bo'lsa, haftalik ishlab chiqarish hajmi va haftalik tushumni;
- foyda funksiyasi va chekli foydani;
- chekli foyda 0 ga teng bo'lgandagi ishlab chiqarish hajmini; bu hajmga to'g'ri keluvchi foyda miqdorini;
- avvalgi bandda aniqlangan ishlab chiqarish hajmiga to'g'ri keluvchi chekli tushum va chekli xarajatlarni.

**Yechish**. Firmaning xarajatlar funksiyasi

$$TC(x)=\frac{x^3}{10}+200x$$

va tushum funksiyasi

$$R(x)=(2200-3x)\cdot\frac{x}{2}=1100x-\frac{3x^2}{2}$$

berilgan.

1) Haftalik ishlab chiqarish hajmi 10000 birlik $x=10$ ga mos keladi. Firmaning $x=10$ ga mos keluvchi to‘liq xarajatlari quyidagiga teng bo‘ladi:

$$TC(10)=\frac{10^3}{10}+200\cdot 10=100+2000=2100\,.$$

To‘liq xarajatlar funksiyasi $TC(x)$ dan $x$ bo‘yicha birinchi hosilani hisoblab, chekli xarajatlar funksiyasi topiladi:

$$(TC)'_x=MC=\frac{3x^2}{10}+200$$

va chekli xarajatlar qiymatini $x=10$ ga teng bo‘lgan hol uchun aniqlanadi:

$$MC(10)=\frac{3\cdot 10^2}{10}+200=30+200=230\,.$$

2) Masalaning bu qismi chekli xarajatlar funksiyasi va uning hajmi berilgan hamda ishlab chiqarish hajmi va to‘liq xarajatlar miqdorini topish kerak. Buning uchun $MC=320$ ga teng deb olinadi va undan quyidagi ifoda hosil qilinadi:

$$\frac{3x^2}{10}+200=320 \quad\Rightarrow\quad \frac{3x^2}{10}=120 \quad\Rightarrow\quad x^2=400,$$

bundan $x=\pm 20$.

Shunday qilib, chekli xarajatlar 320 ga teng bo‘lishini ta’minlash uchun, firma haftada 20000 birlik mahsulot ishlab chiqarishi zarur bo‘ladi (yechimdagi manfiy qiymat olinmaydi). Bunda to‘liq xarajatlar qiymati

$$TC(20)=\frac{20^3}{10}+200\cdot 20=4800$$

ni tashkil qiladi.

3) Chekli tushum umumiy tushumdan ishlab chiqarish hajmi bo‘yicha olingan hosilaga teng, shuning uchun:

$$MR=\frac{dR}{dx}=\frac{d\left(1100x-3x^2/2\right)}{dx}=1100-3x\,.$$

4) Ishlab chiqarish hajmi 10000 ga teng bo‘lganida, umumiy tushum quyidagiga teng bo‘ladi:

$$R(10)=1100\cdot 10-\frac{3\cdot 10^2}{2}=11000-\frac{300}{2}=10850\,,$$

$$MR(10)=1100-3\cdot 10=1070\,.$$

5) Firmaning chekli tushumi ma'lum (1040) va unga mos keluvchi ishlab chiqarish hajmi va umumiy tushum miqdorini topish zarur. Buning uchun chekli tushum funksiyasini 1040 ga tenglashtirib, ishlab chiqarish hajmi aniqlanadi:

$$1100-3x=1040 \quad \Rightarrow \quad x=20\,.$$

Shunday qilib, firmaning haftalik ishlab chiqarish hajmi 20000 birlik mahsulot $MR=1040$ tenglikni ta'minlaydi. Bunday ishlab chiqarish hajmida umumiy tushum miqdori quyidagini tashkil qiladi:

$$R(20)=\left(1100x-\frac{3x^2}{2}\right)=1100\ 20-\frac{3\cdot 20^2}{2}=21400\,.$$

6) Firmaning foyda funksiyasi umumiy tushumdan umumiy xarajatlar ayirmasi orqali topiladi:

$$\pi=R-TC\,.$$

Bu ifodaga berilgan tushum va xarajatlar funksiyasini qo'yib quyidagini hosil qilamiz:

$$\pi(x)=\left(1100x-\frac{3}{2}x^2\right)-\left(\frac{x^3}{10}+200x\right)=-\frac{x^3}{10}-\frac{3x^2}{2}+900x\,.$$

Chekli foyda – foyda funksiyasidan ishlab chiqarish hajmi bo'yicha olingan hosilaga teng:

$$M\pi=\frac{d\pi}{dx}=-\frac{3x^2}{10}-3x+900\,.$$

7) Chekli foyda funksiyasini nolga tenglashtirib yechamiz:

$$M\pi=0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{3x^2}{10}-3x+900=0\,.$$

Hosil bo'lgan kvadrat tenglamani yechib, $x_1=50$ va $x_2=-60$ hosil qilinadi (yechimdagi manfiy ildiz qaralmaydi). Shunday qilib, firmaning chekli foydasi nolga teng bo'lishi uchun 50000 ming dona mahsulot ishlab chiqarilishi kerak.

8) Firmaning ishlab chiqarish hajmi 50000 dona mahsulotga teng bo'lgan hol uchun chekli tushum va chekli xarajatlarni hisoblab topamiz:

$$MR(50)=1100-3\cdot 50=950\,,$$

va

$$MTC(50)=3\cdot\frac{50^2}{10}+200=950\,.$$

Firmaning chekli foydasi nolga teng bo'lgan nuqtada chekli tushumni chekli xarajatlarga tengligi tasodifiy emas. Haqiqatan $\pi=R-TC$. Bu tenglikni o'ng va chap tomonlarini ishlab chiqarish hajmi $x$ bo'yicha differensiallab quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{d\pi}{dx}=\frac{dR}{dx}-\frac{d(TC)}{dx}.$$

Shart bo'yicha

$$M\pi=\frac{d\pi}{dx}=0.$$

Shunday qilib,

$$0=\frac{dR}{dx}-\frac{d(TC)}{dx}.$$

Ammo,

$$\frac{dR}{dx}=MR \text{ va } \frac{d(TC)}{dx}=MC.$$

U holda $0=MR-MC \quad \Rightarrow \quad MR=MC$.

Shunday qilib, chekli foyda nolga teng bo'lgan nuqtada $MR=MC$ ga teng bo'ladi.

**2-misol.** Korxona mahsulotiga bo'lgan talab funksiyasi quyidagi ko'rinishda berilgan:

$$12\cdot Q+7\cdot P=216.$$

Talab funksiyasining narx $P=20$ ga teng bo'lganida narxga nisbatan elastikligini topish talab qilinadi.

**Yechish.** Ushbu misolda talab funksiyasi noaniq ifodalangan. Funksiya elastikligini

$$E_P(Q)=\frac{dQ}{dP}\cdot\frac{P}{Q}$$

formula bo'yicha aniqlash uchun talab funksiyasini $\frac{dQ}{dP}$ hosilasini topish lozim. Buning uchun $Q$ ni $P$ dan aniq bog'lanishini keltirish zarur.

$$Q=\frac{216-7\cdot P}{12}=18-\frac{7\cdot P}{12}.$$

Bundan $\frac{dQ}{dP}=-\frac{7}{12}$ teng va elastiklik quyidagiga teng bo'ladi:

$$E_P(Q)=\frac{dQ}{dP}\cdot\frac{P}{Q}=-\frac{7\cdot 12P}{12\cdot(126-7P)}=-\frac{7P}{216-7P}=\frac{7P}{7P-216}.$$

Aniqlangan ifodaga $P=20$ qiymatni qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$E=\frac{7\cdot 20}{7\cdot 20-216}=-1{,}842.$$

Shunday qilib, korxona mahsulotiga bo'lgan talabning narx bo'yicha elastikligi $E=-1{,}842$ ga teng, ya'ni mahsulot narxining bir foizga ortishi, korxona mahsulotiga bo'lgan talabni 1,842% ga kamayishiga olib kelar ekan.

## Mustaqil yechish uchun misollar

**1-misol**. Korxonaning umumiy xarajatlari tenglamasi quyidagi ko'rinishda berilgan:

$$TC(Q) = 1000 + 15 \cdot Q^{\frac{2}{3}}.$$

Quyidagilar aniqlansin:

a) korxonaning chekli xarajatlar funksiyasi;

b) korxonaning 100-mahsulotini ishlab chiqarish bilan bog'liq qo'shimcha xarajatlar.

**2-misol**. O'yinchoqlar ishlab chiqaruvchi firmaning xarajatlar

$$TC(Q) = \frac{50Q^2 - 300Q}{Q+2}$$

va tushum funksiyasi

$$TR(Q) = \frac{100Q^2 + 300Q}{Q+1}$$

berilgan.

Ushbu funksiyalar asosida:

a) foyda funksiyasi;

b) chekli xarajatlar funksiyasi;

v) chekli daromad funksiyasi;

g) chekli foyda funksiyasi aniqlansin.

**3-misol**. Qandaydir mahsulotga bo'lgan talab funksiyasi berilgan:

$$Q = -P^2 + 10P + 1200,$$

bu yerda: $Q$ – xarid qilinayotgan tovar miqdori;

$P$ – tovar narxi.

Quyidagilar aniqlanishi lozim:

a) $P = 10$ bo'lgan hol uchun talabning narx bo'yicha elastikligini;

b) narxni 9 birlikdan 10 birlikka ortishida talabni foizdagi kamayishini.

**4-misol**. Bolalar velosipedini ishlab chiqaruvchi firmaning to'liq xarajatlar funksiyasi quyidagi ko'rinishda berilgan:

$$TC = 2Q^3 - 3Q^2 - 12Q.$$

Berilgan funksiya asosida quyidagilar aniqlansin:

a) chekli xarajatlar funksiyasi;

b) o'rtacha xarajatlar funksiyasi;

v) ishlab chiqarish hajmi $Q$ ning qanday qiymatida o'rtacha xarajatlarning $(AC)$ qiyalıgi nolga teng bo'ladi. Ishlab chiqarishning bu qiymati $MC = AC$ teng bo'lgan holdagi qiymati bilan taqqoslang.

**5-misol.** Quyidagi talab funksiyalari uchun talabni narx bo'yicha elastikligini aniqlang:

a) $Q = 25000 - 8P - 2P^2$;

b) $Q = \frac{64}{P^6}$;

v) $Q = \frac{5P}{(1-3P)^2}$.

**6-misol.** Firma mahsulotiga talab va taklif funksiyalari quyidagi tenglamalar orqali berilgan:

$$Q_D = 3 - 0{,}1 \cdot P,$$

$$Q_S = 1 + 0{,}05 \cdot P.$$

Faraz qilaylik, sotiladigan har bir mahsulotga $t$ miqdorda soliq solish ko'zda tutilmoqda. Shularni hisobga olib, quyidagilarni baholang:

a) soliq miqdori $t$ ni bozordagi yangi muvozanat holatiga ta'sirini;

b) soliqdan tushadigan foydani soliqni ortishiga sezgirligini. Soliq miqdori $t$ ni qanday darajada oshirish mumkin? (Soliqdan foyda $T = t \cdot Q$) ni tashkil etadi).

**7-misol.** Kir yuvish mashinalarini ishlab chiqaruvchi firmaning foyda funksiyasi berilgan:

$$\pi = -150 + 120Q - 0{,}2Q^2,$$

bu yerda: $Q$ – firmaning bir haftada ishlab chiqaradigan mahsulotlari hajmi bo'lib, korxonadagi ishchilar soni - $L$ ga bog'liq. Bu bog'lanish quyidagi ishlab chiqarish funksiyasi orqali berilgan:

$$Q = 8L^{\frac{1}{2}}.$$

Odatda firma 500 ishchi kuchidan foydalanadi.

Ushbu ma'lumotlardan foydalanib, firmada ishchilar sonini ortishi kerakmi yoki yo'qmi ekanligini aniqlang.

**8-misol.** Firma mikrokalkulyator ishlab chiqaradi va raqobatlashgan bozorda harakat qiladi. Umumiy xarajatlar funksiyasi quyidagicha:

$$TC = 60 + Q^2,$$

bu yerda, $Q$ – ishlab chiqarish hajmi.

Chekli xarajatlar $MC = 2 \cdot Q$ va o'zgarmas xarajatlar $FC = 60$ ga teng.

Ushbu ma'lumotlar asosida quyidagilar aniqlansin:

a) mikrokalkulyator narxi 80 so'm bo'lsa, firma foydani maksimallashtirish uchun qancha mikrokalkulyator ishlab chiqarishi kerak?

b) olingan foyda miqdori qancha bo'ladi?

## Tayanch iboralar

Algebra, geometriya, elementar matematika, funksiya, argument, o'zgaruvchi va o'zgarmas miqdorlar, haqiqiy sonlar, to'plam, akslantirish, aniqlanish sohasi, o'zgarish sohasi, qiymatlar to'plami, erkli o'zgaruvchi, erksiz o'zgaruvchi, funksiyalarni berilish usullari: analitik usul, jadval usuli, grafik usul, murakkab funksiya, monoton funksiya, funksiyaning uzluksizlik nuqtasi, limit, hosila, differensiallash, ishlab chiqarish funksiyasi, hosilaning geometrik va fizik ma'nosi, ekstremum, Ferma teoremasi, statsionar nuqta.

## Takrorlash uchun savollar

1. Funksiya deb nimaga aytiladi?
2. Funksiyaning aniqlanish sohasi deb nimaga aytiladi?
3. Erkli o'zgaruvchi va erksiz o'zgaruvchilar deb nimaga aytiladi?
4. Funksiyalar qanday usullar yordamida beriladi?
5. O'suvchi va kamayuvchi funksiyalarga ta'rif bering.
6. Funksiyaning limitini tushuntirib bering.
7. Hosila deb nimaga aytiladi?
8. Hosilaning geometrik va fizik ma'nolarini tushuntiring.
9. Differensiallash deganda nimani tushunasiz?
10. Elastiklik deb nimaga aytiladi?

## 1.2. Boshlang'ich funksiya va integral

Integral hisob – matematik tahlilning integrallar, ularning xossalari, hisoblash usullari va tatbiq etishni o'rganadigan bo'limidir. U differensial hisob bilan birgalikda matematik tahlil ish qurolining asosini tashkil etadi.

Integral hisob tabiatshunoslik va matematika fanlarining juda ko'plab masala va muammolarini o'rganish natijasida paydo bo'ldi. Bulardan eng muhimlari - harakatning ma'lum, ammo o'zgaruvchi tezligiga ko'ra berilgan vaqt oralig'ida o'tilgan yo'lni aniqlashga doir fizika masalasi va geometrik figuralarning yuzalari va hajmlarini hisoblashga oid masalalardir. Hozirgi kunda aniq integral yordamida texnika va iqtisodiyotning turli masalalarini yechish mumkin.

Integral hisobning markaziy tushunchasi integral bo'lib, bu tushuncha mos ravishda aniq va aniqmas integral tushunchalariga olib keluvchi ikkita turli talqinga egadir.

Differensial hisoblash funksiyalarni differensiallash amali orqali bajariladi. Integral hisoblash differensial hisoblashga teskari matematik amal bo'lib, *integrallash* yoki aniqrog'i aniqmas integrallash deb ataladi. Shunday qilib, differensiallash hisobı berilgan $f(x)$ funksiyaga ko'ra uning hosilasi $f'(x)$ ni topishdan iborat bo'lsa, integrallash hisobi funksiya hosilasiga ko'ra funksiyaning o'zini tiklash masalasidir.

**Ta'rif**. Agar berilgan oraliqdagi barcha $x$ lar uchun $F'(x)=f(x)$ tenglik bajarilsa, u holda $F$ funksiya shu oraliqda $f$ funksiyaning *boshlang'ich funksiyasi* deyiladi.

Integrallash masalasi berilgan funksiya uchun uning barcha boshlang'ich funksiyalarini topishdan iborat. Bu masalani yechishda funksiyaning o'zgarmaslik alomati muhim ahamiyatga ega. Agar biror oraliqda $F'(x)=0$ bo'lsa, u holda $F$ funksiya shu oraliqda o'zgarmasdir.

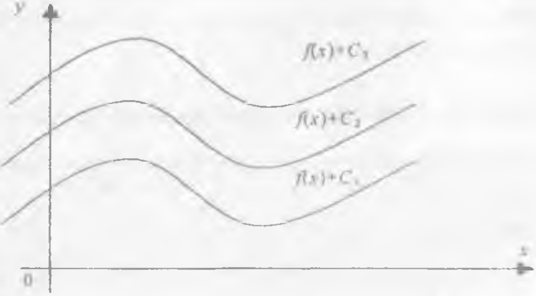
Boshlang'ich funksiyaning asosiy xossalari: $f(x)$ funksiya uchun $I$ oraliqdagi boshlang'ich funksiyaning umumiy ko'rinishi $F(x)+C$ dan iborat, bunda $C$ - ixtiyoriy o'zgarmas, $F(x)$ esa $f(x)$ funksiya uchun $I$ oraliqdagi boshlang'ich funksiyalardan biri.

Boshlang'ich funksiyaning qisqa ifodalangan ikki xossasini o'z ichiga olgan bu tasdiq quyidagicha tushuniladi:

1) $F(x)+C$ ifodada $C$ o'rniga har qanday son qo'yilganida ham $f(x)$ funksiya uchun $I$ oraliqqa tegishli boshlang'ich funksiya hosil bo'ladi;

2) $f(x)$ funksiya uchun $I$ oraliqda har qanday $\Phi(x)$ boshlang'ich funksiyani olinganda ham shunday $C$ sonini tanlash mumkinki, $I$ oraliqqa tegishli barcha $x$ lar uchun $\Phi(x)=F(x)+C$ tenglik bajariladi.

Boshlang'ich funksiyalarining asosiy xossasiga geometrik ma'no berish mumkin: $f$ funksiya istalgan ikkita boshlang'ich funksiyasining grafiklari bir-biridan $0y$ o'qi bo'ylab parallel ko'chirish natijasida hosil bo'ladi. Buni quyidagi 1-chizmada ko'rish mumkin.




1-chizma. Boshlang'ich funksiyalarining asosiy xossasi

Boshlang'ich funksıyalarni topishnıng uch qoıdasi quyidagicha ta'riflanadi va ular differensiallashtirishnıng tegishli qoidalariga o'xshaydi.

1. Agar $F$ funksiya $f$ uchun boshlang'ich funksiya, $G$ esa $g$ uchun boshlang'ich funksiya bo'lsa, u holda $F+G$ yig'indi $f+g$ uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi, ya'ni

$$(F+G)' = F' + G' = f + g .$$

2. Agar $F$ funksiya $f$ uchun boshlang'ich funksiya, $k$ esa o'zgarmas bo'lsa, $kF$ funksiya $kf$ uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi. Haqiqatan ham o'zgarmas ko'paytuvchining hosila belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, shu sababli

$$(kF)' = kF' = kf .$$

3. Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ uchun boshlang'ich funksiya, $k$ va $b$ o'zgarmaslar (bunda $k \neq 0$) bo'lsa, $\frac{1}{k}F(kx+b)$ funksiya $f(kx+b)$ uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi. Haqiqatan, murakkab funksiyaning hosilasini hisoblash qoidasiga ko'ra, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}F'(kx+b)\cdot k = f(kx+b).$$

Bu qoidalardan foydalanib amalda turli misollar yechiladi.

Berilgan funksiyaning boshlang'ichini topish bitta konkret funksiyani emas, balki funksiyalarning butun bir majmuasini beradi, shuning uchun *aniqmas integral* deb nomlanadi. Bunda aniqmas integral $\int f(x)dx$ orqali belgilanadi, $\int$ - integral belgisi, $f(x)dx$ - integral ostidagi ifoda, $f(x)$ - integral ostidagi funksiya deb ataladi.

Keltirilgan ta'rifga ko'ra $\int f(x)dx = F(x)+C$, bunda $F(x)$ funksiya, $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyalaridan biri, $C$ - ixtiyoriy o'zgarmas.

Integrallash jarayonini ixchamlashtirishda asosiy integrallar jadvali va ba'zi bir usullardan foydalaniladi. Asosiy elementar funksiyalarni differensiallash jadvalidan foydalanıb, quyidagi asosiy integrallar jadvalini keltiramiz (2-jadval).

2-jadval.

Elementar funksiyalarni differensiallash jadvali

| Funksiya | R (o'zgar-mas) | $x^n$ $\begin{pmatrix} n \in Z \\ n \neq -1 \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{\sqrt{x}}$ | $\sin x$ | $\cos x$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ | $\frac{1}{\sin^2 x}$ | $a^x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Boshlang'ich funksiyaning umumiy ko'rinishi | $Rx+C$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$ | $2\sqrt{x}+C$ | $-\cos x+C$ | $\sin x+C$ | $tg+C$ | $-ctgx+C$ | $\frac{a^x}{\ln a}+C$ |

Aniq integral tushunchasi, asosan egri chiziqli figuralarning yuzasini hisoblash muammosini hal qilish bilan bog'liq.

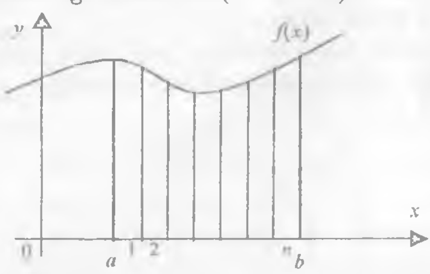
Masalan, $0x$ o'qning $[a,b]$ kesmasida ishorasini o'zgartirmaydigan $f$ uzluksiz funksiya berilgan bo'lsin. Shu funksiyaning grafigi $[a,b]$ kesma va $x=a$ hamda $x=b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan figura *egri chiziqli trapetsiya* deyiladi va uning chizmasi quyidagi 2-chizmada keltirilgan.


2-chizma. Egri chiziqli trapetsiyaning yuzasini hisoblash

Egri chiziqli trapetsiyaning yuzasini hisoblashda quyidagi teoremadan foydalaniladi.

**Teorema.** $f$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va nomanfiy bo'lsin. $S$ tegishli egri chiziqli trapetsiyaning yuzi bo'lsin. Agar $F$ funksiya $[a,b]$ kesmada $f$ uchun boshlang'ich funksiya bo'lsa, u holda $S=F(b)-F(a)$ o'rinlidir.

Egri chiziqli trapetsiya yuzini hisoblash masalasining boshqa yo'li ham mavjud. Masalani soddalashtirish maqsadida $f$ funksiyani $[a,b]$ kesmada nomanfiy va uzluksiz deb hisoblansin. $[a,b]$ kesma bir xil uzunlikdagi $n$ ta kesmalarga bo'linsin (3-chizma).




3-chizma. Egri chiziqli trapetsiya yuzasini hisoblashni sodda usuli

Natijada egri chiziqli trapetsiyaning yuzi uni tashkil qiluvchi $n$ ta to'rtburchaklar yig'indisi yuzalariga teng deb olinadi va uni $\int\limits^{b} f(x)dx$ bilan belgilanadi. Agarda $n\to\infty$ egri chiziqli trapetsiyaning yuzi

$S=\int_a^b f(x)dx$ teng bo'ladi. Shunday qilib, agar $[a,b]$ kesmada $f(\geq 0)$ bo'lsa, u holda tegishli egri chiziqli trapetsiyaning yuzi quyidagi

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

formula bilan ifodalanadi.

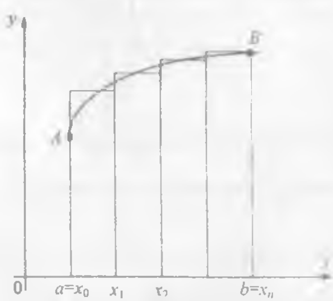
Egri chiziqli trapetsiya yuzini topishda foydalanilgan $S=F(b)-F(a)$ va $S=\int_a^b f(x)dx$ formulalarni taqqoslab, ularning tengligidan quyidagi natija kelib chiqadi: agar $F$ funksiya $[a,b]$ kesmada $f$ uchun boshlang'ich funksiya bo'lsa, u holda quyidagi ifoda o'rinlidir:

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

Bu formula Nyuton-Leybnis formulasi hisoblanadi va $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan har qanday $f$ funksiya uchun to'g'ridir. Nyuton-Leybnis formulasining chap qismida limit tushunchasi bilan bog'liq integral, o'ng qismida esa integral osti funksiyasi $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi $F(x)$ ni integrallash oralig'ining $b$ va $a$ uchlaridagi qiymatlari ayirmasi turibdi. Shunday qilib, Nyuton-Leybnis formulasi integral bilan boshlang'ich funksiya o'rtasidagi bog'lanishni ifodalaydi. Demak, bu formula yordamida boshlang'ich funksiyani topib, integralni hisoblash yoki integralni topib, boshlang'ich orttirmasini olish mumkin. Nyuton-Leybnis formulasini qo'llashning bu ikkala yo'nalishi turli masalalarni yechishda muhim o'rin tutadi.

Integral hisob harakatning berilgan tezligi bo'yicha o'tilgan yo'lni, geometrik figuralarning yuzasi va hajmlarini hisoblashga doir masalalarni yechish imkonini beradi.

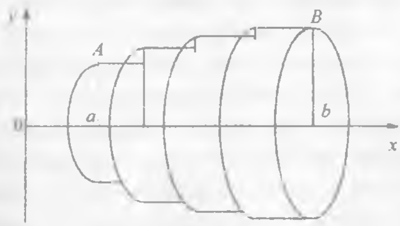
Buni quyidagi tasvirlangan (4-chizma) egri chiziqli trapetsiya *aABb* figurasi yuzasini topishda ko'rish mumkin.




4-chizma. Egri chiziqli trapetsiya yuzasini hisoblash

Trapetsiyaning yuqori $AB$ tomoni $[a,b]$ kesmada berilgan $y=f(x)$ funksiyaning grafigidan iborat. Quyidagi $a=x_0<x_1<...<x_n=b$ nuqtalar yordamida $[a,b]$ kesma kichik $[x_{i-1}, x_i]$ va kesmachalarga ajratiladi va ularning har birida biror $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ nuqta belgilanadi. Hosil bo'lgan $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachaga mos egri chiziqli trapetsiya yuzasini taqriban asosi $[x_{i-1}, x_i]$ va balandligi $f(\xi_i)$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchakning $f(\xi_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)\Delta x_i$ yuzasi bilan almashtiriladi. Bu holda 3-chizmada tasvirlangan $aABb$ egri chiziqli trapetsiya yuzasining taqribiy qiymatini integral yig'indisi $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ ni beradi, izlanayotgan $S$ yuzaning aniq qiymati esa shunday yig'indilarning bo'linish kesmachalari $[x_{i-1}, x_i]$ dan eng kattasining uzunligi nolga intilgandagi limiti sifatida olinadi. Shuning uchun $S=\int_a^b f(x)dx$ munosabat o'rinli hisoblanadi.

Geometrik figuralarning hajmlarini ham integrallar yordamida hisoblash mumkin. Buning uchun quyida tasvirlangan $aABb$ egri chiziqli trapetsiyani $0x$ o'qi atrofida aylantirilsa, aylanma jism hosil bo'ladi (5-chizma).

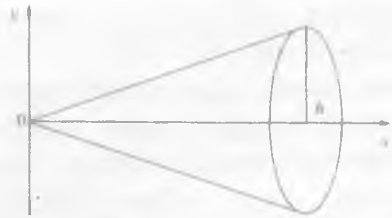



5-chizma. Geometrik figuraning hajmlarini integral yordamida hisoblash

Uni taxminan mos to'g'ri to'rtburchaklarning aylanishidan hosil bo'lgan yupqa silindrlardan tuzilgan geometrik jism deb hisoblash mumkin. Yuqoridagi belgilashlarni saqlagan holda, bu silindrlardan har birining hajmini asos yuzasi $\pi\cdot f^2(r_i)$ ning $\Delta x_i$ balandlikka ko'paytmasi ko'rinishida yozish mumkin, ya'ni $\pi\cdot f^2(r_i)\cdot\Delta x_i$.

Quyidagi $\pi\cdot f^2(r_1)\cdot\Delta x_1+\pi\cdot f^2(r_2)\cdot\Delta x_2+...+\pi\cdot f^2(r_n)\cdot\Delta x_n$ yig'indi qaralayotgan aylanma jism $V$ hajmining taxminiy qiymatini beradi. Geometrik figuraning $V$ hajmini aniq qiymati shunday yig'indilarning $\Delta\to 0$ dagi limiti sifatida olinadi. Demak, $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$ deb yozish mumkin.

Xuddi shuningdek, quyida tasvirlangan konusning hajmini hisoblash uchun yuqorida keltirilgan $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$ formuladan foydalanish mumkin (6-chizma).



6-chizma. Konusning hajmini integral yordamida hisoblash

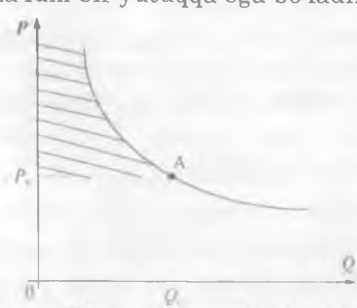
Buning uchun shartlarni quyidagicha o'zgartirish $a=0,\ b=h$ va $f(x)=kx$ yetarlidir, bu yerda $k$ – aylanayotgan to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti. Endi $f^2(x)=kx$ funksiyaning boshlang'ichini topib Nyuton-Leybnis formulasidan foydalanib, quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$V=\pi\int_0^h k^2x^2dx=\pi\left(\frac{1}{3}k^2h^2-\frac{1}{3}k^2 0^2\right)=\pi(kh)^2\frac{h}{3}=\frac{Sh}{3}.$$

Bu tenglikda $S=\pi(kh)^2$ – konus asosida yotgan doira yuzasi.

Shunday qilib, integral hisob yordamida geometrik figuralarning yuzalari va hajmlarini hisoblash mumkin.

Integral hisobni iqtisodiy jarayonlarda qo'llash keyingi davrda ancha oldinga siljidi. Bunday hisoblashga iqtisodiyot tomonidan talabning ortishi va hisoblash usullarini komputerlashtirish ham sababdir. Integral hisob usuli bilan yechiladigan iqtisodiy masalalardan biri – iste'molchining yutug'ini va ishlab chiqaruvchilarning yutug'ini hisoblab topishdir. Buning uchun talab va taklif egri chiziqlarini ko'rib chiqamiz. Bozorda tovarni bozor narxidan yuqori narxda ham xarid qilishga rozi bo'lgan iste'molchilar, tovarni bir muncha pastroq muvozanat narxda xarid qilib, ma'lum bir yutuqqa ega bo'ladilar (7-chizma).




7-chizma. Iste'molchi yutug'ini hisoblash

Muvozanat narxdan yuqori bo'lgan narxda tovarni xarid qilishga rozi bo'lgan barcha iste'molchilar tomonidan tejab qolingan pul miqdori, *iste'molchi yutug'i* deb ataladi. Yuqorida keltirilgan talab funksiya grafigıda iste'molchılar yutug'i muvozanat narx $P_eA$ to'g'rı chizig'idan yuqoridagi shtrixlangan yuzaga teng.

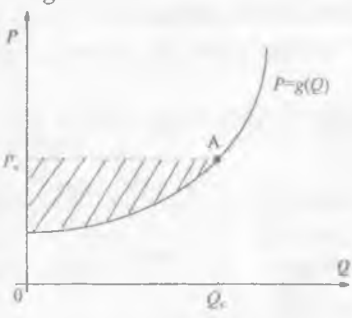
Umumiy holda talab funksiyasi tenglamasi $P = f(Q)$ ko'rinishda berilsa va $P = P_e$ tovarning muvozanat narxi bo'lsa, iste'molchilar yutug'i yuqoridan talab egri chizig'i bilan, pastdan $P = P_e$ to'g'ri chiziq bilan chegaralanadi, egri chiziqli trapetsiya yuzasi bilan ifodalanadi (7-chizmada bu yuza shtrixlangan). Shuning uchun iste'molchi yutug'ini quyidagi formula bo'yicha hisoblash mumkin. Iste'molchi yutug'i:

$$\text{Iste'molchi yutug'i} = \int_0^{Q_e} [f(Q) - P_e]dQ,$$

bu yerda: $P_e$ – muvozanat narx;

$Q_e$ – muvozanat narxga to'g'ri keluvchi tovar miqdori.

Xuddi shunday ishlab chiqaruvchining yutug'ini ham hisoblash mumkin. Ishlab chiqaruvchining yutug'i - bu tovarni muvozanat narxda sotganida oladigan qo'shimcha pul miqdoridir. Ishlab chiqaruvchining yutug'i quyidagi taklif funksiyasi grafigidagi (8-chizma) taklif chizig'i ustidagi va $P = P_e$ muvozanat narxni ifodalovchi to'g'ri chiziq ostidagi shtrixlangan yuzaga to'g'ri keladi.




8-chizma. Ishlab chiqaruvchining yutug'ini hisoblash

Ishlab chiqaruvchining yutug'i quyidagi formula bo'yicha hisoblanadi:

$$\text{Ishlab chiqaruvchi yutug'i} = \int_0^{Q_e} [P_e - g(Q)]dQ,$$

bu yerda: $g(Q)$ – taklif funksiyasi; $P_e$ – muvozanat narx; $Q_e$ – muvozanat narxga to'g'ri keluvchi tovar miqdori.

**1-misol**. Iste'molchi yutug'i va ishlab chiqaruvchi yutug'ini aniqlash talab qilinsin. Quyidagi talab va taklif funksıyalari berilgan bo'lsin:

talab funksiyasi: $P_D = -Q^2 - 60Q + 3000$, taklif funksiyasi: $P_s = Q^2 + 50Q$,

bu yerda, $Q$ – tovar miqdori, $P$ – tovar narxi, so'mda.

Talab qilinadi: muvozanatga olib keluvchi bozor narxi va iste'molchi yutug'i, ishlab chiqaruvchi yutug'i hisoblansin.

**Yechish**. Muvozanat narx va muvozanat tovar miqdorini topish uchun berilgan tenglamalar sistemasi yechiladi.

$$\begin{cases} P = -Q^2 - 60Q + 3000 \\ P = Q^2 + 50Q \end{cases}$$

Birinchi tenglamani ikkinchisidan ayirib, quyidagi hosil qilinadi:

$$2Q^2 + 110Q - 3000 = 0.$$

Hosil bo'lgan natijani ikkiga qisqartirib, quyidagi kvadrat tenglamaga ega bo'lamiz:

$$Q^2 + 55Q - 1500 = 0.$$

Kvadrat tenglamaning yechimlari: $Q_1 = 20;\ Q_1 = -75$.

Masala shartini $Q_1 = 20$ qanoatlantiradi, uni talab yoki taklif tenglamasiga qo'yib, tovarning muvozanat narxi aniqlanadi:

$$P = Q^2 + 50Q = 20^2 + 50 \cdot 20 = 1400 \text{ so'm.}$$

Shunday qilib, tovarning muvozanat narxi 1400 so'm, muvozanatga olib keluvchi miqdori $Q = 20$ dona.

Yuqoridagi ma'lumotlardan foydalanib, iste'molchi yutug'ini hisoblash mumkin:

$$\text{Iste'molchi yutug'i} = \int_0^{Q_e} [P_D(Q) - P_e]dQ = \int_0^{20} (-Q^2 - 60Q + 3000 - 1400)dQ =$$

$$= \int_0^{20} (-Q^2 - 60Q + 1600)dQ = \left[ -\frac{(Q^3)}{3} - \frac{60(Q^2)}{2} + 1600Q \right]_0^{20} =$$

$$= -\frac{20^3}{3} - 30 \cdot 20^2 + 1600 \cdot 20 - 0 = \frac{8000}{3} - 12000 + 32000 \approx 17333.3$$

Iste'molchi yutug'i 17333,3 so'mga teng.

Endi ishlab chiqaruvchi yutug'ini hisoblaymiz.

$$\text{Ishlab chiqaruvchi yutug'i} = \int_0^{Q_e} [P_e - P_S(Q)]dQ = \int_0^{20} (1400 - Q^2 - 50Q)dQ =$$

$$= \left| 1400Q - \frac{Q^3}{3} - \frac{50Q^2}{2} \right|_0^{20} = 1400 \cdot 20 - \frac{20^3}{3} - 25 \cdot 20^2 - 0 =$$

$$= 28000 - \frac{8000}{3} - 10000 \approx 15333.3 \text{ so'm.}$$

**2-misol**. Ishlab chiqaruvchi qandaydir bir mahsulotni ishlab chiqarishga monopol egalik qiladi. Monopolistning talab va xarajat funksiyalari quyidagicha berilgan:

Talab funksiyasi: $P = -Q^2 - 25Q + 2000 \quad 0 < Q < 33$.

Xarajat funksiyasi: $TC = 0{,}1Q^2 + 572Q + 250$,

bu yerda, $P$ – mahsulot narxi; $Q$ – har kuni ishlab chiqariladigan mahsulot hajmi.

Quyidagilar aniqlansin:

a) foydani maksimallovchi mahsulot narxi va miqdori;

b) foydani maksimallovchi narxdagi iste'molchilarning yutug'i.

**Yechish**.

a) Monopolist ishlab chiqaruvchi o'z mahsulotiga foydani maksimallovchi narxni belgilaydi. Shuning uchun avvalo foyda funksiyasi tuziladi va uning ekstremumi aniqlanadi. Talab funksiyasi berilgan bo'lib, uning yordamida

$$P = -Q^2 - 25Q + 2000$$

monopolistning umumiy tushum funksiyasi topiladi:

$$TR = P \cdot Q,$$

$$TR = \left(-Q^2 - 25Q + 2000\right)\cdot Q = -Q^3 - 25\cdot Q^2 + 2000\cdot Q.$$

Monopolistning foyda funksiyasini quyidagi ifoda ko'rinishida yozish mumkin:

$$\pi = TR - TC = -Q^3 - 25Q^2 + 2000\cdot Q - 0{,}1\cdot Q^2 - 572\cdot Q - 250.$$

Foyda funksiyasining ekstremum nuqtasini aniqlash uchun uni ishlab chiqarish hajmi - $Q$ bo'yicha differensiallaymiz:

$$\frac{d\pi}{dQ} = -3\cdot Q^2 - 50\cdot Q + 2000 - 0{,}2\cdot Q - 572.$$

Olingan hosilani nolga tenglashtirib, hosil bo'lgan kvadrat tenglamaning yechimi topiladi:

$$-3\cdot Q^2 - 50{,}2\cdot Q + 1428 = 0,$$

$$D = 50{,}2^2 - 4(-3) - 1428 \approx 140{,}2^2.$$

$$Q_1 = \frac{50{,}2 + 140{,}2}{-6} \approx -31{,}73,$$

$$Q_1 = \frac{50{,}2 - 140{,}2}{-6} \approx 15.$$

Topilgan musbat ildiz uchun ekstremumning ikkinchi sharti tekshiriladi:

$$\frac{d^2\pi}{dQ^2} = \left(-6Q - 50{,}2\right) = -6\cdot 15 - 50{,}2 \approx -140{,}2 < 0.$$

Natijaning manfiy ifodaligi funksiyaning bu nuqtada lokal maksimumga ega ekanligini ko'rsatadi. Bundan shu kelib chiqadiki, monopolist $Q = 15$ dona mahsulot ishlab chiqarganida maksimal foyda oladi. Monopolist ishlab chiqargan mahsulotiga qanday narxni belgilash kerakligini aniqlash uchun talab funksiyasiga aniqlangan $Q = 15$ ni qo'yib hisoblaymiz:

$$P(15) = -15^2 - 25 \cdot 15 + 2000 = 1400.$$

Shunday qilib, monopolist har kuni 15 dona mahsulot ishlab chiqaradi va uni 1400 so'mdan sotadi.

b) Iste'molchilarning yutug'i quyidagi formula orqali hisoblanadi:

Iste'molchi yutug'i= $\int_0^{15} [P_D(Q) - P_0] dQ = \int_0^{15} (-Q^2 - 25Q + 2000 - 1400) dQ =$

$$= \int_0^{15} (-Q^2 - 25Q + 600) dQ = -\frac{Q^3}{3} - \frac{25Q^2}{2} + 600Q \Big|_0^{15} \approx -\frac{15^3}{3} - 12{,}5 \cdot 15^2 + 600 \cdot 15 = 5062{,}5.$$

## Mustaqil yechish uchun misollar

**1-misol**. Qandaydir mahsulotga bo'lgan talab va taklif funksiyalari berilgan. Ulardan foydalanib, quyidagilar aniqlansin:

a) muvozanatga olib keluvchi narx – $P$ va ishlab chiqarish hajmi – $Q$;

b) iste'molchining yutug'i;

v) ishlab chiqaruvchining yutug'i.

1.1) $P_S = 4 \cdot Q_S$, $P_D = 16 - 2 \cdot Q_D$, $0 < Q < 8$.

1.2) $P_S = 5 + 0{,}5 \cdot Q_S$, $P_D = 21 - 1{,}5 \cdot Q_D$.

**2-misol**. Quyida monopolist mahsulotiga bo'lgan talab va xarajatlar funksiyasi berilgan. Quyidagilar aniqlansin:

a) foydani maksimallovchi narxi;

b) iste'molchilarning yutug'i.

1.1) $TC = 0{,}5 \cdot Q^2 + 200$; $P = 140 - 2 \cdot Q$; $0 < Q < 40$.

1.2) $TC = 2 \cdot Q^2 + 500$; $P = 300 - 4 \cdot Q$; $0 < Q < 75$.

1.3) $TC = 0{,}2 \cdot Q^2 + 210$; $P = 78 - 1{,}1 \cdot Q$; $0 < Q < 54$.

## Tayanch iboralar

Integral, boshlang'ich funksiya, aniq va aniqmas integral, hosila, differensial, egri chiziqli trapetsiyalarning yuzini hisoblash, Nyuton-Leybnis formulasi, limit, boshlang'ich orttirmasi, iste'molchi yutug'i, ishlab chiqaruvchi yutug'i.

## Takrorlash uchun savollar

1. Integralni qo'llanish sohalarini tushuntirib bering.
2. Differensiallash deb nimaga aytiladi?
3. Integrallash deb nimaga aytiladi?
4. Boshlang'ich funksiyani tushuntirib bering.

5. Boshlang'ich funksiyalarning asosiy xossasining geometrik ma'nosini tushuntirib bering.
6. Aniqmas integralni tushuntirib bering.
7. Nyuton-Leybnis formulasini qo'llash sohasini tushuntirib bering.
8. Integral hisobni iqtisodiy jarayonlarda qo'llashni tushuntirib bering.
9. Iste'molchi yutug'i.deb nimaga aytiladi?
10. Ishlab chiqaruvchining yutug'i deb nimaga aytiladi?

## 1.3. Ekstremal masalalar

Biror miqdorning eng katta va eng kichik qiymatini topish va bunday qiymatlar mavjud bo'lish shartlarini aniqlash talab qilinadigan masalalarni «*ekstremumga oid*» masalalar deb ataladi. Ular masalaning mohiyatidan kelib chiqqan holda «*maksimum*» yoki «*minimum*» (eng katta va eng kichik) qiymatni izlash masalasi deb ham ataladi. Bunday masalalarni texnika, tabiat, iqtisodiyot, biznes bilan shug'ullanuvchi kishilarning kundalik faoliyatida turli qarorlar qabul qilishni asoslashda doimo yechishga to'g'ri keladi.

Ekstremumga oid masalalarga misol qilib, dumaloq yog'och to'sindan qanday qilib to'g'ri to'rtburchak to'sin yo'nilsa, chiqindi eng kam bo'ladi; berilgan materiallardan yasalgan qutining hajmi eng katta bo'lishi uchun, uning tomonlari o'lchamlarini qanday tanlanishi kerak; ikki shaharni tutashtiruvchi yo'l eng qisqa bo'lishi uchun ko'prikni daryoning qaysi joyida qurish kerak va boshqa shunga o'xshash masalalarni ko'rsatish mumkin.

Bu masalalarni to'g'ri yechish kishilar faoliyatida katta amaliy ahamiyatga ega. Ular yordamida har qanday ishni tashkil etish va bajarishda muhim savolga rus matematigi P.L.Chebishev iborasi bilan aytganda «imkoni boricha ko'p foydaga erishish uchun mavjud vositalardan qanday foydalanish kerak?», degan muammoga to'g'ri javob topish mumkin. Ekstremum masalalari kishilar hayotida, kundalik faoliyatlarida doimo uchrab turadi. Shuning uchun ular matematiklarning chuqur e'tiborini jalb etib keladi va ular bu muammoni optimal hal qiladilar.

Eng sodda va ehtimol eng qadımiy geometrik ekstremum masalasi perimetri ma'lum to'g'ri to'rtburchaklar orasida qaysi biri eng katta yuzaga ega, degan muammoni yechishga qaratilgan. Uning yechimi qadimgi Yunoniston matematikasida ma'lum bo'lib, Evklid «Negizlar» ining VI-kitobida bayon qilingan. Ushbu kitobda bir xil parametrli to'g'ri to'rtburchak va kvadrat qaralsa, kvadratning yuzi kattaroq bo'lishi isbotlanadi. Uning isboti juda sodda, ularning yuzalarini solishtirishga asoslanadi.

Ko'rilgan masala izoperimetrik masalalar deb yuritiladigan geometrik masalalarning keng sinfiga mansub bo'lib, bu masalalarda perimetri teng figuralar orasida biror ekstremal xossaga ega bo'lgani izlanadi. Izoperimetrik masalalarni eramizdan avvalgi II-I asrda yashagan qadimgi yunon matematigi Zenodor o'rgangan va xususan quyidagi tasdiqlarning isboti unga taalluqli:

- perimetrlari ham, tomonlari soni ham teng barcha ko'pburchaklardan muntazam bo'lgani eng katta yuzaga ega;
- bir xil perimetrli ikki muntazam ko'pburchakdan burchaklar soni ko'p bo'lgani kattaroq yuzaga ega.

Izoperimetrik masalalar «Didona masalasi» nomi bilan ham birlashtiriladi. Bu nom Karfagen shahrining afsonaviy asoschisi va birinchi malikasi nomi bilan bog'liq. Rivoyatga ko'ra, o'z ona shahridan quvilgan Didona yo'ldoshlari bilan Afrikaning shimoliy qirg'og'iga kelib qoladi. U yangi manzilgoh qurish uchun mahalliy aholidan yer olmoqchi bo'ladi. Ular bunga rozilik berishadi va faqat ajratilgan yer maydoni bir ho'kiz terisi qamraydigan miqdordan ko'p bo'lmasin, deb shart qo'yishadi. Tadbirkor Didona terini ingichka qayishchalarga qiyib chiqadi, so'ng ularni yoyib bir ho'kiz terisi bilan qoplash mumkin bo'lgan yerga nisbatan ancha katta maydonni chegaralab oladi.

Matematik tahlilda ekstremumga oid turli masalalarni yechishga asoslangan umumiy usullar ishlab chiqilgan. Ekstremumga oid geometrik masalalarni algebraik masalalarga keltirib, matematik tahlil usullari bilan yechish mumkin. Matematik tahlil funksiya ekstremumini quyidagicha ta'riflaydi. Agar $x_0$ nuqtani o'z ichiga olgan va funksiyaning aniqlash sohasiga tegishli bo'lgan shunday interval mavjud bo'lib, bu intervalning barcha $x$ nuqtalari uchun $f(x)<f(x_0)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya $x_0$ nuqtada maksimumga ega deyiladi. Va aksincha, mos ravishda, agar biror intervalning barcha nuqtalari uchun $f(x)>f(x_0)$ shart bajarilsa, $f(x)$ funksiya $x_0$ nuqtada minimumga ega deyiladi.

Differensial hisobda funksiyaning ekstremum masalasini tekshirish hosila yordamida juda samarali va yetarlicha sodda ravishda amalga oshiriladi. Differensial hisoblashning asosiy teoremalaridan biri Ferma teoremasi bo'lib, u differensiallanuvchi funksiya ekstremumga ega bo'lishining zaruriy shartini beradi: $f(x)$ funksiya $x_0$ nuqtada ekstremumga ega bo'lsin; agar bu nuqtada $f'(x_0)$ funksiya hosilasi mavjud bo'lsa, u nolga teng bo'ladi, ya'ni $f'(x_0)=0$.

Ferma teoremasi geometrik tilda ekstremum nuqtasida funksiya grafigiga o'tkazilgan urinma gorizontal bo'lishini bildiradi. Differensial lanuvchi funksiya ekstremumga ega bo'lishining yetarli sharti – hosila ishorasining almashinishidir. Agar hosila $x_0$ nuqtada ishorasini minusdan plyusga o'zgartirsa, ya'ni funksiyaning kamayishi o'sishi bilan almashsa, u holda $x_0$ nuqta *minimum nuqtasi* bo'ladi. Aksincha, agar hosila ishorasini plyusdan minusga almashtirsa, ya'ni funksiya o'sishdan kamayishga o'tsa, $x_0$ nuqta *maksimum nuqtasi* bo'ladi. Funksiyaning hosilasi nolga teng bo'ladigan nuqta *statsionar nuqta* deyiladi. Agar differensiallanuvchi funksiyaning ekstremum masalasi tekshirilayotgan bo'lsa, uning barcha statsionar nuqtalarini topish mumkin, so'ng bu nuqtalarning chap va o'ng tomonlarida hosila ishorasini qarash kerak.

Endi kvadrat uchhadning eng katta va eng kichik qiymatlarini aniqlaymiz. Kvadrat uchhad $ax^2+bx+c$ formula bilan aniqlanadi. $a$, $b$ va $c$ kvadrat uchhadning koeffitsientlari deb ataladi. Odatda $a$ $(a \neq 0)$ni katta, $b$ ni ikkinchi va $c$ ni ozod had deb ataladi. Uning

$$y = ax^2 + bx + c$$

ko'rinishi *kvadratik funksiya* deb ataladi.

Kvadratik funksiya chiziqli funksiyalardan keyin eng sodda va muhim elementar funksiyadir. Ko'pgina iqtisodiy jarayonlar va bog'lanishlar kvadratik funksiya bilan ifodalanishi mumkin, masalan, firmaning faoliyati natijasida olinadigan daromad yoki foyda miqdori, turli xil xarajatlarning grafiklari.

Kvadrat uchhadning eng katta va eng kichik qiymatlarini aniqlash uchun yuqorida keltirilgan funksiyaning ekstremum nuqtalarini topish uchun uning statsionar nuqtalari tekshiriladi. Buning uchun kvadrat uchhadning hosilasi nolga teng deb olinadi. Statsionar nuqtalar orasidagi intervallarda hosila ishoralari o'zgarishiga e'tibor beriladi.

**Funksiya ekstremumining zaruriy sharti**. Agar $x_0$ nuqta $f$ funksiyaning ekstremumi bo'lsa va bu nuqtada $f'$ hosila mavjud bo'lsa, u nolga teng bo'ladi, $f'(x_0)=0$.

**Berilgan funksiyaning maksimum alomati**. Agar $f$ funksiya $x_0$ nuqtada uzluksiz bo'lib, $(a;\, x_0)$ intervalda $f'(x)>0$ va $(x_0;\, b)$ intervalda $f'(x)<0$ bo'lsa, u holda $x_0$ nuqta $f$ funksiyaning *maksimal nuqtasi* bo'ladi.

**Berilgan funksiyaning minimum alomati**. Agar $f$ funksiya $x_0$ nuqtada uzluksiz bo'lib, $(a;\, x_0)$ intervalda $f'(x)<0$ va $(x_0;\, b)$ intervalda $f'(x)>0$ bo'lsa, u holda $x_0$ nuqta $f$ funksiyaning *minimal nuqtasi* bo'ladi.

Ko'pgina iqtisodiy masalalarda ma'lum bir jarayonlarni yoki bog'lanishlarni ifodalovchi funksiyaning eng kichik va eng katta qiymatini topishga to'g'ri keladi. Qadimda ekstremumga oid ba'zi bir masalalarni yechishda o'rta arifmetik va o'rta geometrik haqidagi teoremalardan foydalanilgan. Bular quyidagi ikki teoremadir: 1) agar ikki musbat sonning yig'indisi o'zgarmas bo'lsa, ularning ko'paytmasi o'zining eng katta qiymatiga bu sonlar o'zaro teng bo'lganda erishadi; 2) agar ikkita musbat sonning ko'paytmasi o'zgarmas bo'lsa, ularning yig'indisi o'zining eng kichik qiymatiga bu sonlar o'zaro teng bo'lganida erishadi. Bu teoremalardan ko'pincha ekstremumga oid masalalar - eng kichik va eng katta qiymatlarni topishga oid masalalarni yechishda foydalaniladi.

Bu teoremalarni tatbiq qilib, quyidagi masalalarni to'g'ri hal qilish mumkin: perimetri berilgan barcha to'g'ri to'rtburchaklar ichida kvadrat eng katta yuzaga ega; yuzasi berilgan barcha to'g'ri to'rtburchaklar ichida eng kichik perimetrga ega bo'ladigani ham kvadratdir.

Ko'paytmaning maksimumi hamda yig'indining minimumi haqidagi ikki teoremalarning umumlashmasi o'rta arifmetik va o'rta geometrik miqdorlar asosidagi tengsizlikning natijasi bo'ladi: $n$ ta musbat sonning yig'indisi o'zgarmas bo'lsa, u holda bu sonlar ko'paytmasi o'zining eng katta qiymatiga shu sonlar o'zaro teng bo'lgandagina erishadi; $n$ ta musbat sonning ko'paytmasi o'zgarmas bo'lsa, bu sonlar yig'indisi o'zining eng kichik qiymatiga shu sonlar o'zaro teng bo'lgandagina erishadi.

Ekstremumga oid ko'pgina masalalar shu teoremalar asosida yechiladi. O'rta arifmetik va o'rta kvadratik miqdorlar faqat musbat sonlar uchun emas, balki ixtiyoriy sonlar uchun ham ma'noga ega. Shuning uchun bu teoremalar faqatgina algebra, geometriya va matematik tahlilda keng qo'llanibgina qolmay, shu bilan birga statistika, ehtimollar nazariyasida, o'lchash natijalarini ishlab chiqishda keng foydalaniladi.

Amaliyotda iqtisodiy masalalarni yechishda ma'lum bir mezonni maksimal yoki minimal qiymati qidiriladi. Bu mezonga to'g'ri keluvchi funksiya – *maqsad funksiya* deb ataladi. Maqsad funksiyasining ekstremal qiymati, odatda masalaning optimal yechimiga to'g'ri keladi. Maqsad funksiyalari chiziqli, chiziqsiz bo'lishi mumkin. Iqtisodiy masalaning maqsad mezoni bilan birga ma'lum bir shartlarni ifodalovchi *chegaraviy shartlar* ham mavjud bo'ladi. Bu shartlar iqtisodiy masalaning mavjud yechimlari doirasini belgilab beradi. Maqsad mezoni esa bu yechimlar ichidan ekstremum yechimni aniqlab beradi. Iqtisodiy masalalarning ko'pchiligida maqsad funksiyasi chiziqli ko'rinishga ega. Buning sababi - chiziqli funksiyalar har tomonlama o'rganilgan hamda iqtisodiy talqin qilinishi soddadir.

Iqtisodiy nazariyada asosiysi amaliy masalalar bo‘lib, iste’molchilarning bozordagi xatti-harakatlarini va firma faoliyatini optimallashtirish masalalari hisoblanadi. Iste’molchining bozordagi xatti-harakati modelida maqsad mezoni bo‘lib, uni xarid qiladigan noz-ne’matlardan ko‘radigan nafi maksimallashtiriladi. Bozorda sotilayotgan noz-ne’matlarga har bir iste’molchi turli xil afzalliklar bildiradi. Iste’molchining byudjet daromadi va befarqlik egri chiziqlari bu afzalliklarni ma’lum bir tartibga keltiradi. Masala shartlari doirasida iste’molchi o‘z afzalliklarini solishtirib, eng maksimal naf ko‘rishni ta’minlovchi tovarlar va xizmatlar turi hamda hajmini aniqlaydi.

Firma faoliyatini bozor sharoitida modellashtirish, tadbirkorni maksimal foyda olishga yo‘naltirilgan xatti-harakatlarini tashkil etishga qaratilgan. Bunda tadbirkor bozor talablarini o‘rgangan holda ishlab chiqarish imkoniyatlaridan to‘liq foydalanib, o‘z ishini tashkil etadi. Masalada maqsad mezoni bo‘lib, umumiy daromadni yoki umumiy foydani maksimallash, ba’zi hollarda esa umumiy xarajatlarni minimallashtirishni tanlashi mumkin.

Bozor iqtisodiyoti sharoitida, uning barcha ishtirokchilari o‘z faoliyatlarini maksimal foyda olishga yo‘naltiradi. Buning sababi, pulga har qanday tovar va xizmatlarni xarid qilish mumkinligidir. Muvaffaqiyatli faoliyat olib borayotgan tadbirkor daromadining bir qismini olib borayotgan faoliyatini kengaytirishga yo‘naltiradi, ya’ni biznesini kengaytiradi. Bunday masalalarda maqsad mezoni chiziqli funksiya ko‘rinishida beriladi. Masalan, firma $n$ xil mahsulot ishlab chiqarsin va bozorda sotsin. Bunda uning ishlab chiqarish imkoniyatlari firmadagi asbob-uskunalarning ishlash vaqti, mavjud xomashyo, materiallar zaxiralari va ishchilar soni bilan belgilanadi. Bu ekstremal masalaning matematik modelini quyidagicha yozish mumkin:

$$Z = \Phi_1 x_1 + \Phi_2 x_2 + \ldots + \Phi_n x_n \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le A_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le A_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le A_m \end{cases}$$

bu yerda: $j$ – firma ishlab chiqarayotgan mahsulot indeksi $(j=\overline{1,n})$;

$n$ – firma ishlab chiqarayotgan mahsulotlarning umumiy soni;

$\Phi_j$ – $j$-mahsulotdan olinadigan foyda miqdori;

$i$ – mahsulot ishlab chiqarish bilan bog‘liq resurslar indeksi $(i=\overline{1,m})$;

$a_{ij}$ – $j$-turdagi bir birlik mahsulotni ishlab chiqarish uchun $i$-turdagi resurs sarflari me’yori;

$A_i$ – firmada mavjud bo'lgan $i$-turdagi resurs hajmi;

$x_j$ – firmaning maksimal foyda olishini ta'minlovchi $j$-turdagi mahsulot miqdori.

Quyida funksiyaning ekstremumiga oid misollarni ko'rib chiqamiz.

**1-misol**. Firmaning mahsulotiga bo'lgan talab funksiyasi quyidagi tenglama orqali berilgan:

$$P + 2Q = 100.$$

Firmaning o'rtacha xarajatlari quyidagiga teng bo'lsin:

$$AC = Q^2 - 77Q + 1300 + \frac{7400}{Q},$$

bu yerda, $P$ – bir birlik mahsulot narxi; $Q$ – har kuni ishlab chiqarilgan va sotilgan mahsulot hajmi.

Quyidagilar aniqlansin:

a) tushumni maksimallovchi ishlab chiqarish hajmi;

b) chekli xarajatlarni minimallovchi ishlab chiqarish hajmi;

v) firmaning maksimal foyda olishini ta'minlovchi ishlab chiqarish hajmini va maksimal foyda miqdori;

g) maksimal foyda nuqtasida talabning narx bo'yicha elastikligi.

**Yechish**.

a) firmaning maksimal tushumini ta'minlovchi ishlab chiqarish hajmini topish uchun, eng avvalo tushum funksiyasini $(TR)$ tuzish zarur. Buning uchun talab funksiyasini

$$P = 100 - 2Q$$

ko'rinishida yozib olamiz.

Ushbu funksiyadan umumiy tushum funksiyasini quyidagicha aniqlash mumkin:

$$TR = P \cdot Q = (100 - 2Q) \cdot Q = 100Q - 2Q^2.$$

Bu funksiyaning kritik nuqtalarini topish uchun undan birinchi hosila olinadi va quyidagiga teng bo'ladi:

$$TR' = MR = 100 - 4Q.$$

Bu ifodani nolga tenglab, ekstremumni ta'minlovchi ishlab chiqarish hajmini aniqlaymiz:

$$100 - 4Q = 0 \Rightarrow Q = 25.$$

Shunday qilib, firma $Q = 25$ birlik miqdorda mahsulot ishlab chiqarganida, tushum funksiyasi ekstremumga ega bo'ladi. Bu nuqtadagi ekstremumning xarakterini aniqlash uchun funksiyaning shu nuqtadagi ikkinchi hosilasi baholanadi:

$$TR'' = MR' = (100 - 4Q)' = -4 < 0.$$

Funksiyaning ikkinchi hosilasi manfiy bo'lgani uchun, $Q=25$ ga teng bo'lgan nuqtada funksiya maksimumga ega bo'ladi.

Shunday qilib, firma $Q=25$ dona mahsulot ishlab chiqarganida, uning tushumi maksimal bo'ladi;

b) firmaning qanday ishlab chiqarish hajmida $Q$ chekli xarajatlar minimal bo'lishini aniqlash uchun ishlab chiqarishning quyidagi to'liq xarajatlar funksiyasi tuziladi:

$$TC = AC \cdot Q = \left(Q^2 - 77Q + 1300 + \frac{7400}{Q}\right) \cdot Q = Q^3 - 77Q^2 + 1300Q + 7400 .$$

To'liq xarajatlar funksiyasidan olingan birinchi hosila chekli xarajatlar funksiyasini ifodalaydi:

$$MC = (TC)' = (Q^3 - 77Q^2 + 1300Q + 7400) = 3Q^2 - 154Q + 1300 .$$

Chekli xarajatlar funksiyasi $MC$ ning ekstremumi $MC' = 0$ ga teng bo'lgan nuqtalardagina amalga oshadi. Shuning uchun chekli xarajatlar funksiyasidan hosila olinadi:

$$(MC)' = (3Q^2 - 154Q + 1300)' = 6Q - 154 ,$$

$$6Q - 154 = 0 \Rightarrow Q = \frac{154}{6} = 25{,}67 .$$

Funksiyaning $Q = 25{,}67$ nuqtasidagi ekstremumning xarakterini aniqlash uchun undan ikkinchi hosila olinib, natijaning ishorasiga qaraladi:

$$(MC)'' = (6Q - 154)' = 6 > 0 .$$

Hosila ishorasi musbat, bundan shu kelib chiqadiki, $Q = 25{,}67$ nuqtada firmaning chekli xarajatlari minimum qiymatiga ega bo'ladi;

c) firmaning maksimal foyda olishini ta'minlovchi ishlab chiqarish hajmi va olingan foyda miqdorini aniqlash uchun quyidagi ko'rinishdagi foyda funksiyasi tuziladi:

$$\pi = TR - TC = (100Q - 2Q^2) - (Q^3 - 77Q^2 + 1300Q + 7400) =$$

$$= 100Q - 2Q^2 - Q^3 + 77Q^2 - 1300Q - 7400 = -Q^3 + 75Q^2 - 1200Q - 7400 .$$

Foyda funksiyasidan birinchi hosila olinadi:

$$\pi' = (-Q^3 + 75Q^2 - 1200Q - 7400)' = -3Q^2 + 150Q - 1200 .$$

Funksiyaning ekstremal nuqtalarida $\pi' = 0$ ga teng bo'ladi, shuning uchun uni nolga tenglab yechiladi:

$$-3Q^2 + 150Q - 1200 = 0 .$$

Bu tenglamani soddalashtirib yechib chiqsak, quyidagi hosil bo'ladi:

$$Q^2 - 50Q + 400 = 0 ,$$

$$D = 2500 - 4 \cdot 400 = 900 = 30^2.$$

Bundan,

$$Q_1 = \frac{50+30}{2} = 40 \text{ va } Q_2 = \frac{50-30}{2} = 10$$

kelib chiqadi.

Shunday qilib, firmaning foyda funksiyasi birinchi hosila bo'yicha ikki kritik nuqtaga egadir: $Q_1 = 40$ va $Q_2 = 10$. Bu nuqtalarda ikkinchi hosila ishorasi baholanadi:

$$\pi'' = \left(-3Q^2 + 150Q - 1200\right)' = -6Q + 150;$$

$$\pi''(40) = -6 \cdot 40 + 150 = -90 < 0,$$

bu nuqtada funksiya maksimumga erishadi.

$$\pi''(10) = -6 \cdot 10 + 150 = 90 > 0,$$

bu nuqtada funksiya minimum qiymatga erishadi.

Firmaning foyda funksiyasi $Q = 40$ dona mahsulot ishlab chiqarganida maksimal bo'ladi. Foyda miqdori

$$\pi(40) = -40^3 + 75 \cdot 40^2 - 1200 \cdot 40 - 7400 = 600$$

ga teng bo'ladi.

Firmaning mahsulotiga bo'lgan talab funksiyasiga $Q = 40$ ifodani qo'yib, maksimal foydani ta'minlovchi mahsulot narxini hisoblab topiladi:

$$P = 100 - 2 \cdot 40 = 20.$$

Shunday qilib, mahsulot narxi $P = 20$ bo'lganda har kuni $Q = 40$ dona mahsulot ishlab chiqariladi va sotiladi, firmaning maksimal foydasi $\pi = 600$ ni tashkil etadi;

d) maksimal foyda nuqtasida talabning narx bo'yicha elastikligi quyidagi formula bo'yicha aniqlanadi:

$$E = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}.$$

Elastiklikni aniqlash uchun talab funksiyasini narx bo'yicha differensiallash zarur:

$$(P + 20)' = (100)' \Rightarrow 1 + \frac{2dQ}{dP} = 0,$$

bundan

$$\frac{dQ}{dP} = -\frac{1}{2}$$

hosil bo'ladi.

Endi aniqlangan ifodalarni elastiklik funksiyasiga qo'yib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$E = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{P}{Q} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{100-2Q}{Q}.$$

Masala shartida firmaning maksimal foyda nuqtasida talabni narx bo'yicha elastikligini aniqlash talab qilinadi ($Q = 40$), ya'ni

$$E(40) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{100-2 \cdot 40}{40} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} = -0,25.$$

Shunday qilib, maksimal foyda nuqtasida talabning narxga nisbatan elastikligi -0,25 ga teng ekan.

## Mustaqil yechish uchun misollar

**1-misol**. Zamonaviy komputerlar ishlab chiqaruvchi firmaning har oydagi o'zgarmas xarajatlari 65170 dollarni va har bir ishlab chiqarilgan komputer uchun o'zgaruvchi xarajatlari 526,5 dollarni tashkil etadi. Bozor talabini o'rganish shuni ko'rsatdiki, bunday turdagi komputerlar uchun talab funksiyasi

$$P = -0,005x^2 + 4x + 500$$

ga teng bo'ladi, bu yerda, $x$ - bir oyda ishlab chiqarilgan komputerlar soni.

Quyidagilarni aniqlash lozim:

a) firma maksimal foyda olish uchun necha dona komputer ishlab chiqarishi kerak?

b) bunday ishlab chiqarish hajmida komputerning bozordagi narxi qancha bo'lishi kerak?

v) firmaning har oydagi foydasi qancha bo'ladi?

**2-misol**. Elektron mahsulot ishlab chiqaruvchi firmaning mahsulotiga talab funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$3Q - 150 + 2P = 0.$$

Firmaning o'rtacha xarajatlari quyidagi tenglama yordamida berilgan:

$$AC = Q^2 - 76,5Q + \frac{2000}{Q} + 1275.$$

Ishlab chiqarishning quyidagi ko'rsatkichlarini ta'minlovchi hajmni aniqlash talab qilinadi:

1) tushumni maksimallovchi;

2) chekli xarajatlarni minimallovchi;

3) foydani optimallovchi.

Firmaning maksimal foydasini aniqlang. Foydani maksimallovchi nuqtada talab elastikligini baholang.

**3-misol**. Velosiped ishlab chiqaruvchi firma belgilangan o'zgarmas xarajatlari 1800 ga va quyidagi formula bilan ifodalangan o'zgaruvchi xarajatlarga ega:

$$TVC(Q) = 0{,}48x^2 - 58x\,.$$

Velosipedlarga bo'lgan talab funksiyasi

$$0{,}5x + P = 118{,}4$$

tenglama orqali aniqlanadi.

Quyidagilarni aniqlash talab etiladi:

a) o'rtacha xarajatlarni minimallashtiruvchi ishlab chiqarish hajmini hamda bu ishlab chiqarish hajmidagi o'rtacha va umumiy xarajatlarni;

b) umumiy tushumni maksimallovchi ishlab chiqarish hajmini va bu ishlab chiqarish hajmiga mos keluvchi narxni;

c) foydani maksimallovchi ishlab chiqarish hajmini va mahsulot narxini. Foyda miqdorini hisoblang;

d) ishlab chiqaruvchining olayotgan foydasiga velosipedga bo'lgan talabni 20 % pasayishi, uning narxi o'zgarmagan holda qanday ta'sir ko'rsatadi?

e) foydani mahsulot narxining o'zgarishiga sezgirligini.

## Tayanch iboralar

Ekstremum, maksimum va minimum qiymatlar, funksiya ekstremumi, funksiyaning aniqlanish sohasi, interval, differensial hisob, hosila, statsionar nuqta, kvadratik funksiya, maksimal nuqta, minimal nuqta, maqsad funksiya, chegaraviy shartlar, optimal yechim, chiziqli funksiya, elastiklik.

## Takrorlash uchun savollar

1. Ekstremal masalalar deb nimaga aytiladi?
2. Funksiyaning ekstremumini tushuntirib bering.
3. Ferma teoremasini izohlab bering.
4. Funksiyaning minimum va maksimum nuqtalarini tushuntirib bering.
5. Maqsad funksiyaning ma'nosini izohlab bering.
6. Chegaraviy shartlar deb nimaga aytiladi?
7. O'zgaruvchilarning manfiy bo'lmaslik shartining ma'nosinin tushuntirib bering.
8. Elastiklik deb nimaga aytiladi?

# 2-BOB. OPTIMAL DASTURLASH USULLARI

## 2.1. Matematik dasturlash

Bozor munosabatlariga o'tishda, noaniqlik va tavakkalchilik sharoitlarida, xalq xo'jaligini barqaror rivojlantirishda, ayniqsa, matematikaning iqtisodiyotga tatbiq etilishi yaxshi natijalarga olib keladi. Raqobat sharoitida korxona va firmalarni boshqarish va rejalashtirish jarayonida, iqtisodchi quyidagi xususiyatlarga ega bo'lgan masalalarga duch keladi:

- izlanayotgan miqdorlarga juda ko'p cheklanishlar qo'yiladi;
- masala cheksiz ko'p yechimga ega bo'lib, ulardan eng yaxshisini tanlab olish kerak bo'ladi.

Masalaning bunday qo'yilishi iqtisodchi yoki menejer uchun katta qiyinchiliklar tug'diradi. Yaqin vaqtlargacha bunday masalalarning ko'pchiligi empirik yo'l bilan, ya'ni cheklanishlarga bo'ysunuvchi izlanayotgan miqdorlar tanlab olish usuli bilan hal etilar edi. Yana ham aniqroq yechim olish uchun bir necha variant o'zaro solishtirib ko'rilar va eng yaxshisi tanlab olinar edi. Bu tanlangan yechim eng yaxshi degan so'z emas, albatta, chunki cheksiz ko'p yechimdan faqat bir nechasi olib tekshirilardi. Keyingi yillarda yaratilgan chiziqli dasturlash usuli va EHMlarida ushbu sinfga mansub masalalarning katta o'lchamlarini yechishga mo'ljallangan dasturlarning yaratilishi, qo'yilgan masalani birdan-bir to'g'ri hal etish imkonini yaratib berdi.

Dasturlash amaliy jihatdan mumkin bo'lgan dasturni (reja, jadval, taqsimot) aniqlashdan iborat, u ma'lum nuqtayi nazardan qabul qilingan mezonga asosan optimal bo'ladi. Matematik dasturlashga fan sifatida Nobel mukofotining laureati, akademik L.V.Kantorovich asos soldi.

Aniq iqtisodiy masalani yechish uchun masalani matematika tilida ifodalash (boshqacha qilib aytganda, iqtisodiy masala shartini matematik model bilan ifodalash) kerak bo'ladi. Bu jarayon ikki bosqichdan tashkil topadi:

1. Izlanayotgan maqsad, izlanayotgan miqdorlarning biror bog'lanish ko'rinishida beriladi (ishlab chiqarilgan mahsulotlarni sotishdan keladigan foyda, ishlab chiqarishga sarflanadigan moliyaviy resurslar, yuklarni tashishga ketadigan xarajatlar va boshqalar). Hosil bo'lgan ifoda maqsad funksiya yoki mazkur masalaning funksionali deyiladi.

2. Izlanayotgan miqdorlarga qo'yiladigan cheklanishlar (chegaraviy shartlar) miqdoriy ifodalanadi. Ular resurslarning miqdori, ma'lum talablarni qondirish zarurati, texnologiya sharoiti va boshqa

iqtisodiy hamda texnikaviy omillarning ishlatilishidan kelib chiqadi. odatda bunday chegaraviy shartlar tengsizliklar yoki tenglamalar orqali ifodalanadi. Matematik ko'rinishda ifodalangan bunday chegaraviy shartlar, mazkur masalaning *cheklanishlar sistemasi* deyiladi.

Agar maqsad funksiya musbat iqtisodiy omilni ifodalasa (masalan, foyda yoki daromad), maqsad funksiyaning maksimum qiymati izlanadi, xarajatlarni kamaytirish masalalarida esa maqsad funksiyaning minimumini izlash kerak bo'ladi.

Noma'lumlarning sonli qiymatlar to'plamini *masalaning rejasi* deyiladi. Cheklanishlar sistemasini qanoatlantiruvchi har qanday reja *mumkin bo'lgan reja* deyiladi. Maqsad funksiyaga maksimum (yoki minimum) qiymat bera oladigan mumkin bo'lgan reja, *optimal reja* deyiladi. Shunday qilib, matematik dasturlash masalani yechish mumkin bo'lgan barcha rejalar orasidan optimalini topish demakdir.

Agar maqsad funksiya hamda cheklanishlar sistemasiga kiradigan noma'lumlarga nisbatan chiziqli bo'lsa, u holda *chiziqli dasturlash* masalasi chiziqli deyiladi. Agar maqsad funksiya yoki cheklanishlar sistemasi chiziqsiz ifodalardan tashkil topsa, u holda *chiziqsiz dasturlash* masalasi deyiladi. Matematik dasturlash har ikki holni ham o'z ichiga oladi. Amaliyotda chiziqli dasturlash keng tarqalgan bo'lib, ushbu sinfga kiruvchi masalalarni yechishning usullari mukammal ishlab chiqilgan.

Chiziqli dasturlash masalasini umumiy holda quyidagicha bayon qilish mumkin. Bir necha o'zgaruvchining chiziqli funksiyasi bo'ladigan birorta miqdor (masalan, vaqt, narx) berilgan. O'zgaruvchilar o'z navbatida chiziqli tengsizliklar va tenglamalar ko'rinishidagi cheklanishlarga bo'ysunadi.

O'zgaruvchilarning shunday manfiy bo'lmagan qiymatlarini topish talab qilinadiki, natijada o'zgaruvchilarning chiziqli funksiyasi bo'lgan miqdor eng katta (eng kichik) qiymatga ega bo'lsin.

Ushbu aytilganlarning matematik ifodasi quyidagicha yoziladi: $n$ ta o'zgaruvchili $m$ ta chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

hamda shu o'zgaruvchilarning chiziqli funksiyasi

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n \to \max\ (\min) \qquad (2)$$

berilgan. (1) sistemadan shunday manfiy bo'lmagan yechimni topish kerakki, natijada (2) chiziqli funksiya eng katta (eng kichik) qiymatga ega bo'lsin. Bunday yechim *optimal yechim* deb ataladi.

(1) va (2) shartlarni quyidagi ko'rinishda ham yozish mumkin:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad \left(i = \overline{1, m}\right) \qquad (1')$$

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \max \quad (\min) \qquad (2')$$

bo'ladi. Bu yerda: (1') cheklanishlar sistemasini tashkil etadi, (2') esa maqsad funksiyadir.

**Chiziqli dasturlashga doir masalalar.**

*Ishlab chiqarishni rejalashtirish masalasi.* Faraz qilaylik, korxona $n$ xil mahsulot ishlab chiqarish qobiliyatiga ega (sanoat korxonasi uchun turli xil detallar, qishloq xo'jaligi korxonasi uchun ekinlar, chorvachilikning turli xil mahsulotlari va hokazo), shu bilan birga, ushbu mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun korxonada $m$ xildagi resurslar mavjud bo'lib (uskunalar vaqti, yer, ishchi kuchi, urug'lik, ozuqa, yoqilg'i va boshqalar), ularning zaxiralari ma'lum:

$$b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots, b_m.$$

Ishlab chiqariladigan har bir turdagi mahsulotdan olinadigan iqtisodiy foyda ham ma'lum bo'lib, ular

$$c_1, c_2, \ldots, c_j, \ldots, c_n.$$

Har bir turdagi mahsulotni ishlab chiqarish uchun zarur bo'lgan resurslarning sarflanish normalari ham ma'lum:

$$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{ij}, \ldots, b_{mn}.$$

Bu yerda $a_{11}$ - birinchi turdagi mahsulotning bir birligini ishlab chiqarish uchun birinchi turdagi resursdan qancha kerakligini ko'rsatadi. Umumiy holda $a_{ij}$ - $j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ turdagi mahsulotdan bir birlik ishlab chiqarish uchun $i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ turdagi resursdan qancha kerakligini ko'rsatadi. Bu ifodalar *texnologik koeffitsientlar* deb atalib, ularning soni $m \times n$ ga teng.

Ishlab chiqarishning shunday $x$ rejasini tuzish talab qilinadiki (ya'ni, mahsulotning har biridan $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n$ qanchadan ishlab chiqarishni topish), natijada eng ko'p umumiy foyda ta'minlansin.

Avvalo masalaning maqsad funksiyasini tuzish kerak. Buning uchun foydani izlanayotgan miqdorlar orqali ifodalaymiz. Birinchi turdagi bir birlik mahsulot $c_1$ birlik foyda beradi, reja bo'yicha birinchi turdagi mahsulotdan $x_1$ birlikda ishlab chiqarish lozim, natijada $c_1\, x_1$ miqdorda foyda olinadi. Xuddi shuningdek, ikkinchi turdagi mahsulot uchun $c_2\, x_2$ va hokazolarni yozish mumkin. Umumiy foyda

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_jx_j + ... + c_nx_n = \sum_{j=1} c_jx_j \to \max$$

ko'rinishda bo'lib, bu masalaning maqsad funksiyasini ifodalaydi.

Endi cheklanishlar sistemasini, ya'ni izlanayotgan $x$ rejaning komponentlari bo'lgan $x_j$ larni qanoatlantiradigan shartlarni yozamiz. Buning uchun mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun sarflanadigan har bir resursning miqdorini topamiz.

Birinchi turdagi mahsulotdan $x_1$ birlik miqdorda ishlab chiqarish uchun birinchi turdagi resursdan $a_{11}x_1$ birlik sarflanadi; ikkinchi turdagi mahsulotdan $x_2$ birlik miqdorda ishlab chiqarish uchun birinchi turdagi resursdan $a_{12}x_2$ birlik sarflanadi va hokazo.

Birinchi resursning umumiy sarfi

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n$$

bo'ladi (bu yerda $a$ ning birinchi indeksi o'zgarishsiz qolib, ikkinchi indeksi o'zgarib boradi).

Lekin mahsulotlar ishlab chiqarishga ketadigan umumiy sarflar, mavjud resurs zaxirasidan ortib ketmasligi lozim. Shuning uchun yuqoridagi ifoda birinchi resurs $b_1$ dan kichik yoki hech bo'lmaganda unga teng bo'lishi kerak, ya'ni

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n \le b_1,$$

shuningdek qolgan resurslar uchun ham chegaralovchi shartlarni quyidagicha yozish mumkin:

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j + ... + a_{2n}x_n \le b_2$$

$$..............................................................$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n \le b_i$$

$$..............................................................$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mj}x_j + ... + a_{mn}x_n \le b_m$$

Rejaning aniq bo'lishi uchun yuqorida keltirilgan shartlar bajarilishi lozim. Ammo izlanayotgan miqdorlarning iqtisodiy ma'nosi ularga yana qo'shimcha shartni yuklaydi, ya'ni ular manfiy sonlar bo'lishi mumkin emas. Shu bilan bir vaqtda $x_j$ o'zgaruvchilardan birortasi nolga teng bo'lib qolishi mumkin. Bu esa mahsulotning mazkur turini ishlab chiqarish iqtisodiy jihatdan foydali emasligini, ya'ni rentabel emasligini ko'rsatadi. Shunday qilib, hosil qilingan cheklanishlarga izlanayotgan o'zgaruvchilarning noldan kichik emaslik (nomanfiylik sharti) shartini qo'shib qo'yish lozim bo'ladi, ya'ni

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, ...,\ x_j \ge 0, ...,\ x_n \ge 0.$$

Bu ikki guruh cheklanishlar birgalikda masalaning cheklanishlar sistemasini (chegaraviy shartlar sistemasini) tashkil etadilar. Ularni qisqa qilib quyidagicha yozish mumkin:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \quad (i=1,\ 2,\dots\ m)$$
$$x_j \ge 0, \quad (j=1,\ 2,\dots,\ n)$$

Endi masalani quyidagicha ifodalash mumkin: $x$ rejaning shunday komponentlari topilsinki, ular barcha tengsizliklarni qanoatlantirib, $z$ funksionalga eng katta qiymat bersin. Cheklanishlar sistemasi hamda maqsad funksiya noma'lumlarga nisbatan chiziqli bo'lgani uchun chiziqli dasturlash masalasi hosil bo'ldi deya olamiz.

**Ozuqa ratsioni masalasi**. Ozuqa ratsioni masalasida, qishloq xo'jaligi chorvachilik korxonalarida $n$ xil ozuqa bo'lib, ulardan har biri $m$ turdagi to'yimli moddaga ega. Ma'lumki, birinchi ozuqaning bir birligi $a_{11}$ birinchi to'yimli moddaga, $a_{21}$ ikkinchi to'yimli moddaga va hokazoga ega; ikkinchi ozuqaning bir birligi $a_{12}$ birinchi moddaga, $a_{22}$ ikkinchi moddaga va hokazo. Umumiy holda $j$-nomerli bir birlik ozuqada $i$-nomerli $a_{ij}$ birlik modda bor (demak, koeffitsientning birinchi indeksi to'yimli moddaning nomeri, ikkinchisi esa ozuqaning nomerini bildiradi). Keltirilgan texnologik koeffitsientlar kimyoviy yoki boshqa tahlillar natijasida aniqlanadi.

Endi $b_i$ $(i=1,\ 2,\dots,\ m)$ orqali har bir to'yimli moddaning miqdorini belgilaymiz. $b_i$ chorva mollarining olishi lozim bo'lgan minimal miqdordagi $i$-nomerli to'yimli modda. $j$-nomerli ozuqaning narxini $c_j$ $(j=1,\ 2,\dots,\ n)$ orqali belgilaymiz. $c_j$ miqdorlar ma'lum hisoblanadi.

Ozuqa ratsionini tuzish masalasining maqsadi shuki, shunday $x$ ratsionni (chorva mollarini oziqlantirish rejasi) topish kerakki, u barcha chegaraviy shartlarni to'liq qanoatlantirsin va funksional eng kichik qiymatga ega bo'lsin.

Masalaning matematik modeli, ya'ni maqsad funksiya $z$, izlanayotgan miqdorlar - $x_j$ lar orqali quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \to \min$$

Cheklanishlar sistemasi esa,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n \ge b_2$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n \ge b_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n \ge b_i$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n \ge b_m$$

bo'lsin va

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \dots,\ x_j \ge 0, \dots,\ x_n \ge 0,$$

ya'ni noma'lum $x_{ij}$ larning shunday qiymatlarini topish kerakki, ular barcha cheklanishlar sistemasini qanoatlantirib, $z$ funksionalga eng kichik qiymat bersin.

**Transport masalasi**. Faraz qilaylik, ikkita $A_1$ va $A_2$ punktda mos ravishda $a_1$ va $a_2$ miqdorda bir xildagi yuklar mavjud. $A_1$ va $A_2$ punktlar jo'natish punktlari deyiladi.

Yuklarni $B_1$, $B_2$ va $B_3$ qabul qilish punktlariga mos ravishda $b_1, b_2, b_3$ miqdorda tashish lozim. Yuk zaxiralari bilan qabul qilish punktlariga yuboriladigan yuklar miqdori teng, ya'ni

$$a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + b_3 .$$

Har bir jo'natish punktidan qabul qilish punktiga bir birlik yukni tashish xarajatlari ma'lum bo'lsin. Bu xarajatlarni $c_{11}, c_{12}, ..., c_{ij}$ (boshqacha aytganda, $c_{ij}$ qiymatlar tashish tariflari deyiladi) orqali belgilaymiz. Bularning barchasini jadvalga kiritsak, tarif matritsasi yoki xarajatlar matritsasi jadvali hosil bo'ladi (1-jadval).

1-jadval

**Transport masalasining matriytsaviy modeli**

| Qabul qilish punktlari / Jo'natish punktlari | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | Yuk zaxiralari |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $c_{11}$ $x_{11}$ | $c_{12}$ $x_{12}$ | $c_{13}$ $x_{13}$ | $a_1$ |
| $A_2$ | $c_{21}$ $x_{21}$ | $c_{22}$ $x_{22}$ | $c_{23}$ $x_{23}$ | $a_2$ |
| Yukka bo'lgan ehtiyoj | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $\sum a_i = \sum b_j$ |

Har bir jo'natish punktidan har bir qabul qilish punktiga qancha birlik yuk jo'natish kerakligini aniqlovchi reja tuzish talab qilinadi. Hozirgi holda bu reja oltita sondan iborat bo'ladi:

$$x_{11},\ x_{12},\ x_{13},\ x_{21},\ x_{22},\ x_{23}.$$

Rejaning sonlari quyidagi shartlarni qanoatlantirishi kerak:

1) Qabul qilish punktlariga zarur bo'lgan miqdordagi yuklarni yetkazib berish bo'yicha:

$$x_{11} + x_{12} = b_1 ,$$

$$x_{12} + x_{22} = b_2 ,$$

$$x_{13} + x_{23} = b_3 .$$

2) Har bir jo'natish punktidagi barcha yuklarni tashish bo'yicha:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1 ,$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2 .$$

3) O'zgaruvchilarning manfiy bo'lmaslik sharti:

$$x_{11} \geq 0,\ x_{12} \geq 0,\ x_{13} \geq 0,\ x_{21} \geq 0,\ x_{22} \geq 0,\ x_{23} \geq 0.$$

Barcha shartlar birgalikda masalaning chegaraviy shartlarini tashkil etadi. Bu shartlarni qanoatlantiruvchi har qanday oltita son mumkin bo'lgan reja deb qaralishi mumkin.

Mumkin bo'lgan rejani oddiy tanlab olish usuli bilan topish qiyin emas. Lekin, tashish xarajatlari eng kam bo'lishi kerak degan mezonga amal qilishimiz lozim bo'ladi. Xarajatlarni eng kam bo'lishini ta'minlovchi reja optimal reja hisoblanadi.

Yuklarni tashish xarajatlarini $z$ orqali belgilaymiz va u masalaning maqsad funksiyasi bo'ladi:

$$Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} \to \min,$$

yoki

$$z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min.$$

Transport masalasi umumiy holda ($m$ ta jo'natish punkti, $n$ ta qabul qilish punkti) $m \times n$ ta noma'lumga ega bo'lib, chegaraviy shartlar va maqsad funksiyasini tuzish yo'llari avvalgidek qoladi. Natijada chiziqli dasturlash masalasi hosil bo'ladi.

Shunday qilib, biz ko'rgan masalalar iqtisodiy-matematik tekshirishlar asosida o'rganilayotgan iqtisodiy jarayonlarni matematik modellarini tuzish orqali, bu jarayonlarning miqdoriy qonuniyatlarini o'rganishdan iborat. Yuqorida keltirilgan matematik modellar real jarayonlarning abstrakt tasviri bo'lib, ushbu jarayonlarning qanchalik aniq ifodalanishi abstraktlashtirish darajasiga bog'liq.

Odatda iqtisodiy jarayonlar favqulodda xilma-xil bo'lib, ularda juda ko'p o'zaro aloqador bo'lgan omillar ishtirok etadilar. Modelda bu omillar qanchalik ko'p ishtirok etsa, iqtisodiy jarayon shuncha aniq ifodalanadi, lekin birorta ham model haqiqiy jarayonning barcha tomonlarini to'liq aks ettira olmaydi. Bundan tashqari, modelning keyingi tekshirishlar uchun qulay bo'lishi nazarda tutiladi. Nihoyat, tuzilgan matematik model matematik vositalar bilan tekshiriladigan (yechiladigan) mustaqil ob'ektga aylanadi. Shu narsani alohida qayd qilish zarurki, biror jarayon uchun tuzilgan model boshqa jarayonlarni ham aks ettirishi mumkin. Demak, matematik modellarning yana bir afzalligi, ularning «universalligidir».

**Qisqacha tarixiy ma'lumot**. Chiziqli algebra matematikaga mustaqil soha sifatida nemis matematigi Leybnis hamda shveytsariya matematigi G.Kramer tomonidan tartibli aniqlovchilar (determinantlar) tushunchasi kiritilgach, $n$ ta noma'lumli $n$ ta tenglamani yechishning umumiy formulasi berilgandan so'ng (XVIII asrda) maydonga kirib keldi.

XIX asr o'rtalarida ingliz matematiklari Keli va Silvestrlar o'z ilmiy tadqiqotlarida matritsa tushunchasini kiritib, matritsa hisobining asosini berdilar. Shu bilan bir vaqtda, noma'lumli tenglamalar sistemasini yechish hamda tekshirishning geometrik interpretatsiyasi kabi nihoyatda muhim masala rivojlanib, ikki, uch o'lchovli geometriyaning umumlashuviga, chiziqli o'lchovli fazo tushunchasiga olib keldi. Keyinchalik aniqlovchi «matritsalar», chiziqli fazolar, chiziqli almashtirishlar kabi tushunchalar chiziqli tenglamalar sistemasini bevosita yechish bilan bir vaqtda, matematikaning mustaqil ob'ektlariga aylandilar.

Chiziqli algebraning bu tushunchalari matematikaning turli sohalarida (differensial tenglamalar nazariyasi, sonlar nazariyasi, geometriya va boshqalar), shuningdek matematika usullaridan foydalanadigan boshqa fanlarda (nazariy va kvant mexanikasi, nazariy fizika, to'lqinlar nazariyasi va boshqalar) keng foydalanila boshladi. Chiziqli algebraning tushuncha va usullari iqtisodiy-matematik izlanishlarda katta ahamiyat kasb etadi.

Chiziqli algebrada nazariy takomillashish bilan birga hisoblash usuli ham rivojlanib bordi. Gap shundaki, hatto oddiy algebraik masalalarni ham yechish juda ko'p mehnat talab qiladigan hisoblar bilan ish ko'rishga olib keladi. Shuning uchun ham hisoblash qulay bo'lgan usullarni yaratish chiziqli algebra uchun muhimdir. Hisoblash usuliga bo'lgan ehtiyoj EHMlarning yaratilishi bilan o'sib bormoqda.

Yuk tashishning optimal rejasini tuzish masalasi, chiziqli dasturlash masalasi tariqasida birinchi marta sovet iqtisodchisi A.A.Tolstoy tomonidan (1930 y.) qo'yilgan.

1931 yilda vengriyalik matematik B.Egervari chiziqli dasturlashni xususiy hollaridan birining matematik qo'yilishi masalasini, keyinchalik «Tanlash muammosi» nomi bilan yuritila boshladi.

Bu masala amerikalik matematik G.U.Kun tomonidan rivojlantirilib, uning usuli venger usuli deb ataldi. Chiziqli dasturlash masalalarini tekshirishning tizimli rivojlanishi 1939 yilda sovet matematigi, Nobel mukofoti laureati, akademik L.V.Kantorovich va uning shogirdlari tomonidan boshlandi. L.V.Kantorovich chiziqli dasturlash masalasini yechishning umumiy usuli – hal qiluvchi ko'paytuvchilar usulini yaratdi, bu usul hozirgi vaqtda umumqabul qilingan simpleks usulidan ayrim detallari bilangina farq qiladi. Keyinchalik u N.K.Gavurin bilan birgalikda (1949 y.) transport masalasini yechishning potensiallar usulini yaratdi. Chiziqli dasturlashning matematik hamda tatbiqiy jihatlari matematik hamda iqtisodchi olimlar L.V.Kantorovich, V.S.Nemchinov, V.V.Novojilov, A.L.Lure, A.L.Brudno, G.Sh.Rubinshteyn, S.B.Yudin, B.G.Golshteyn, A.G.Aganbegyan va boshqalar tomonidan rivojlantirildi.

Akademik L.V.Kantorovich bilan deyarli bir vaqtda (hamda unga bog'liq bo'lmagan holda) chiziqli dasturlash usullari chet ellarda va birinchi navbatda amerikalik olimlar tomonidan rivojlantirildi. Amerika iqtisodiy adabiyotlarida transport masalasi 1941 yilda F.L.Xichkok tomonidan qo'yildi. Chiziqli dasturlash masalalarini yechishning asosiy usuli – simpleks usulini 1949 yilda Dj.Dansig yaratdi. Chiziqli va chiziqsiz dasturlashning bundan keyingi rivojlanishida Ford, Fulkerson, Kun, Lemke, Gass, Uarnes, Bil, Danskin, Radnerlar katta hissa qo'shdilar.

Respublikamiz iqtisodiyotda matematikani qo'llash bo'yicha V.Qobulov, M.Ermatov, A.Pirmuhamedov, N.Ziyadullayev, I.Ubaydullayev, S.G'ulomov, T.Shodiyev, O.Abdullayev, M.Ziyaxo'jayev va boshqa iqtisodchi olimlar ulkan ishlarni amalga oshirmoqdalar.

**Chiziqli dasturlash masalalarini yechishning simpleks usuli.** Simpleks usul keng tarqalgan hisoblash usullaridan bo'lib, bu usul masalaning yechimini ketma-ket yaxshilash g'oyasini amalga oshirishga asoslangan. Bu usulni chiziqli dasturlashning barcha masalalarini yechishda qo'llash mumkin bo'lganligi uchun ham uni universal usullardan biri deyiladi. Simpleks usuli bilan masalalarni qo'lda va EHMlar yordamida yechish mumkin. Simpleks usuli birinchi marta amerikalik olim Dj.Dansig tomonidan 1949 yilda taklif etilgan, keyinchalik 1956 yilda Dj.Dansig, Ford, Fulkerson va boshqalar tomonidan takomillashtirilgan.

Lekin 1939 yilda akademik L.V.Kantorovich tomonidan berilgan hal qiluvchi ko'paytuvchilar usuli simpleks usulidan ayrim detallari bilan farq qiladi. Usulning simpleks deb atalishi «simpleks» so'zidan olingan bo'lib, o'lchovli fazodagi $n+1$ ta uchga ega bo'lgan oddiy ko'pyoqlidir (uch o'lchovli fazodagi tetraedr misolida).

Simpleks

$$\sum_{k=1}^{n} x_i \le 1,$$

ko'rinishidagi tengsizliklarning yechimlar sohasidir.

**Simpleks usulining asoslari**. Quyidagi tengsizliklarni

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n \le a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n \le a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n \le a_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n \le a_m \end{cases} \quad (1)$$

qanoatlantiruvchi shunday

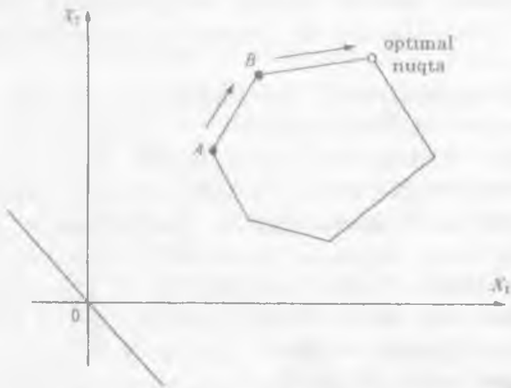
$$x_j \geq 0, \quad \left(j = \overline{1,n}\right) \qquad (2)$$

topilsinki, ular chiziqli funksional

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_jx_j + ... + c_nx_n \rightarrow \max \ (\min) \qquad (3)$$

ga maksimum (minimum) qiymat bersin.

Bu masalani yechishda bizga ma'lumki, (1) chegaraviy shartlar ko'p qirrali burchak - $\Omega$ ni tashkil qiladi (1-chizma).




1-chizma. Optimal nuqtani aniqlash

Ko'p qirrali burchakning $A$ uchini, keyin $B$ uchini topib, ketma-ket ravishda kerakli uchiga boramiz. Bu uchni *optimal uch* deb ataymiz.

(1), (3) ifodalarni yechish uchun simpleks usul qo'llaniladi. (3) funksionalning maksimumini (minimumini) quyidagicha aniqlash mumkin. (1) ni (-1) ga ko'paytirib, barcha ozod hadlarni chap tomonga o'tkazib, ularni $y_1$, $y_2$,..., $y_m$ lar bilan belgilab olamiz:

$$\begin{cases} y_1 = -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - ... - a_{1j}x_j - ... - a_{1n}x_n + a_1 \geq 0 \\ y_2 = -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - ... - a_{2j}x_j - ... - a_{2n}x_n + a_2 \geq 0 \\ ............................................................ \\ y_r = -a_{r1}x_1 - a_{r2}x_2 - ... - a_{rj}x_j - ... - a_{rn}x_n + a_2 \geq 0 \\ ............................................................ \\ y_m = -a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - ... - a_{mj}x_j - ... - a_{mn}x_n + a_m \geq 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Endi (3), (4) ifodalarni jadval orqali quyidagicha yozishimiz mumkin:

| | | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ | ... | $-x_j$ | ... | $-x_n$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | = | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | ... | $a_{1j}$ | ... | $a_{1n}$ | $a_1$ |
| $y_2$ | = | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | ... | $\boxed{a_{2j}}$ | ... | $a_{2n}$ | $a_2$ |
| ...... | | ...... | ...... | ...... | ...... | ...... | ...... | ...... | |
| $y_r$ | = | $a_{r1}$ | $a_{r2}$ | $a_{r3}$ | ... | $a_{rj}$ | ... | $a_{rn}$ | $a_r$ |
| ...... | | ...... | ...... | ...... | ...... | ...... | ...... | ...... | |
| $y_m$ | = | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | $a_{m3}$ | ... | $a_{mj}$ | ... | $a_{mn}$ | $a_n$ |
| z | = | $-c_1$ | $-c_2$ | $-c_3$ | ... | $-c_j$ | ... | $-c_n$ | 0 |

(5)

Chiziqli dasturlashning barcha shartlari jadvalda ifodalangan. $a_{11}$ koeffitsientni $(-x_1)$ ga, $a_{12}$ koeffitsientni $(-x_2)$ ga va hokazo, $a_{1n}$ koeffitsientni $(-x_n)$ ga ko'paytirib, birga qo'shsak, (4) va (3) ifodalarni olamiz.

(5) ifodani yechish uchun quyidagi qoidalarga asoslanamiz:

1) hal qiluvchi element tanlanib, birga almashtirilib, ramkaga olib quyiladi;

2) hal qiluvchi yo'l o'zgarishsiz qoldiriladi;

3) hal qiluvchi ustun o'z ishorasini o'zgartiradi;

4) jadvalning yangi elementi $b_{ij}$ $(i \neq r,\ j \neq s)$quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$b_{ij} = a_{ij}a_{rs} - a_{is}a_{rj};$$

5) hosil bo'lgan yangi jadval hal qiluvchi elementga bo'linadi. Hal qiluvchi elementga mos kelgan $x$ va $y$ lar o'z o'rinlarini almashtiradilar.

(5) jadvalni yechish uchun hal qiluvchi element $a_{rs}$ ni tanlab olib, 1 bilan almashtiramiz, $x_s$ bilan $y_r$ ni o'rnini almashtirib yozamiz:

| | | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ | ... | $-y_r$ | ... | $-x_n$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | = | $b_{11}$ | $b_{12}$ | $b_{13}$ | ... | $-a_{1j}$ | ... | $b_{1n}$ | $b_1$ |
| $x_s$ | = | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | ... | 1 | ... | $a_{2n}$ | $a_2$ |
| ...... | | ...... | ...... | ...... | ...... | ...... | ...... | ...... | ...... |
| $y_r$ | = | $b_{r1}$ | $b_{r2}$ | $b_{r3}$ | ... | $-a_{rj}$ | ... | $b_{rn}$ | $b_r$ |
| ...... | | ...... | ...... | ...... | ...... | ...... | ...... | ...... | ...... |
| $y_m$ | = | $b_{m1}$ | $b_{m2}$ | $b_{m3}$ | ... | $-a_{ms}$ | ... | $b_{mn}$ | $b_m$ |
| z | = | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ | ... | $-q_s$ | ... | $q_n$ | $Q$ |

$:a_{rs}$

(6)

Jadvallarda hosil bo'lgan koeffitsientlar $b_1, b_2, ..., b_m$, $b_{11}, b_{12}, ..., b_{mn}$ va $q_1, q_2, ..., q_n$ va $Q$ lar to'rtinchi qoida asosida aniqlanadi. Biz faqat bitta iteratsiya bajardik xolos, lekin turli masalalarda bunday iteratsiyalar juda ko'p bo'lishi mumkin. Simpleks usulida hal qiluvchi elementni hamma vaqt to'g'ridan-to'g'ri olinavermaydi. Hal qiluvchi element jadvaldagi ozod hadlarni $(b_1, b_2, ..., b_r, ..., b_m)$ hal qiluvchi ustunning koeffitsientlariga $(a_{1s}, a_{2s}, ..., a_{rs}, ..., a_{ms})$ bo'lgan nisbatning noldan farqli eng kichik musbat bo'lgan soni tanlab olinadi, ya'ni

$$\min\left\{\frac{a_1}{a_{1s}}, \frac{a_2}{a_{2s}}, \dots, \frac{a_r}{a_{rs}}, \dots, \frac{a_m}{a_{ms}}\right\} \ge 0 .$$

Bu yerda hal qiluvchi element $\frac{a_r}{a_{rs}}$ dir. Bu son boshqalarga nisbatan eng kichik musbat sondir.

Masala (jadval) yechilayotgan vaqtda uning avval tayanch yechimi aniqlanadi. Tayanch yechim masalaning optimal yechimi bor-yo'qligini oldindan aniqlab beradi. Agar masalaning tayanch yechimi bo'lsa, optimal yechimi ham mavjud, agarda tayanch yechim bo'lmasa, u holda masalaning optimal yechimi bo'lmaydi.

Echilayotgan masalaning tayanch yechimi jadvaldagi ozod hadlar ishorasiga qarab aniqlanadi. Ozod hadlarning koeffitsientlari ($Q$ koeffitsientdan tashqari) musbat bo'lsa, masalaning tayanch yechimi mavjud bo'ladi. Agar bir yoki bir necha hadlarning ishorasi manfiy bo'lsa, bir yoki bir necha iteratsiya amalga oshirilgach, masalaning optimal yechimi aniqlanadi.

Optimal yechim funksionalning maksimumini (minimumini) aniqlash asosan $Z$ funksiyaning koeffitsientlar ishorasiga bog'liq. Agar koeffitsientlarning hammasi musbat bo'lsa (agarda birorta manfiy koeffitsient mavjud bo'lib qolsa, u holda koeffitsientlari musbat bo'lguncha iteratsiya davom etadi), u holda chiziqli funksiyaning maksimum qiymati aniqlanadi. Jadvalning yuqorisida turgan noma'lumlarni nolga tenglashtirib, chiziqli funksiyaning maksimumini topamiz ($\max z = Q$).

Agar hamma koeffitsientlari manfiy bo'lsa, u holda bunday masalaning optimal yechimi bo'lmasdan, cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi. Turli masalalarda (2) shart berilishi yoki berilmasligi ham mumkin. Shart berilmasa, masalani yechish davomida bu noma'lumlar jadvaldan yo'qotiladi. Agar shart berilsa, yechish to'g'ridan-to'g'ri jadval tuzishdan boshlanadi.

**1-misol**.

$$z = -3x_1 + 6x_2$$

chiziqli funksiyaga (funksionalga) maksimum qiymat beruvchi

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 1 \ge 0 \\ y_2 = 2x_1 + x_2 - 4 \ge 0 \\ y_3 = x_1 - x_2 + 1 \ge 0 \\ y_4 = x_1 - 4x_2 + 13 \ge 0 \\ y_5 = -4x_1 + x_2 + 23 \ge 0 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

chegaraviy shartlarning mumkin bo'lgan yechimlar sohasida noma'lumlar topilsin.

Misolni yechish uchun jadval tuzamiz:

| | | $-x_1$ | $-x_2$ | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | = | $\boxed{-1}$ | -2 | 1 |
| $y_2$ | = | -2 | -1 | -4 |
| $y_3$ | = | -1 | 1 | 1 |
| $y_4$ | = | -1 | 4 | 13 |
| $y_5$ | = | 4 | -1 | 23 |
| z | = | 3 | -6 | 0 |

Bu misol uchun qo'shimcha chegaraviy shart berilgan emas. Shu sababli $x_1$ va $x_2$ noma'lumlarni jadvaldan yo'qotamiz. $x_1$ ni yo'qotish uchun ramkaga olingan -1 koeffitsientni hal qiluvchi element qilib olamiz:

| | | $-y_1$ | $-x_2$ | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | = | -1 | 2 | -1 |
| $y_2$ | = | -2 | 3 | -6 |
| $y_3$ | = | -1 | 3 | 0 |
| $y_4$ | = | -1 | 6 | 12 |
| $y_5$ | = | 4 | -9 | 27 |
| z | = | 3 | -12 | 3 |

$b_{ij} = a_{ij}a_{rs} - a_{is}a_{rj}$ dan foydalanib, yangi koeffitsientlarni aniqlaymiz:

$$(-1)\ -1 - (-2)(-2) = -3$$ 

-1·(-6) - (-2)·3 = 6 - 6 = 0

$$(-1)\cdot 1 - (-1)(-2) = -3$$
$$(-1)\cdot 4 - (-1)(-2) = -6$$
$$(-1)(-1) - 4(-2) = 9$$
$$(-1)(-4) - (2)\cdot 1 = 6$$
$$(-1)\cdot 1 - (-1)\cdot 1 = 0$$
$$(-1)\cdot 13 - (-1)\cdot 1 = -12$$
$$(-1)\cdot 23 - 4\cdot 1 = -27$$
$$1\cdot 0 - 3\cdot 1 = -3$$

Endi $x_1$ ni alohida olamiz

$$x_1 = y_1 - 2x_2 - 1.$$

Jadvalning qolgan qismi esa

| | | $-y_1$ | $-x_2$ | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $y_2$ | = | -2 | $\boxed{3}$ | -6 |
| $y_3$ | = | -1 | 3 | 0 |
| $y_4$ | = | -1 | 6 | 12 |
| $y_5$ | = | 4 | -9 | 27 |
| z | = | 3 | -12 | 3 |

Hosil bo'lgan jadvaldan ko'rinib turibdiki, hal qiluvchi ustun va yo'llar 2 va 3-qoidalar bo'yicha aniqlanadi. Qolgan elementlari 4-qoidaga muvofiq formula bo'yicha aniqlanadi. Jadval tuzishda aniqlangan sonlarni o'rnilariga mos ravishda qo'yib borib, 5-qoidaga asosan -1 ga bo'lib, oxirgi jadvalni hosil qilamiz.

Endi $x_2$ ni jadvaldan yo'qotamiz, buning uchun ramkaga olingan koeffitsientni hal qiluvchi element qilib olib, yangi jadval tuzamiz:

| | | $-y_1$ | $-y_2$ | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | = | -2/3 | 1/3 | -2 |
| $y_3$ | = | 1 | -1 | 6 |
| $y_4$ | = | 3 | -2 | 24 |
| $y_5$ | = | -2 | 3 | 9 |
| z | = | -5 | 4 | -21 |

$x_2$ ni alohida yozib olamiz:

$$x_2 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 - 2$$

Yuqoridagi qoidalarga amal qilib, yangi jadval hosil qilamiz:

| | | $-y_1$ | $-y_2$ | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $y_3$ | = | $\boxed{1}$ | -1 | 6 |
| $y_4$ | = | 3 | -2 | 24 |
| $y_5$ | = | -2 | 3 | 9 |
| z | = | -5 | 4 | -21 |

Bu jadvaldagi barcha ozod hadlari musbat, demak, olingan misolning tayanch yechimi mavjud, endi optimal yechimini aniqlaymiz.

Hal qiluvchi elementni tanlash uchun $z$ yo'lidagi koeffitsientlarni ko'rib chiqamiz. Bu yo'lda -5 koeffitsient mavjud. Shu koeffitsient turgan ustunni hal qiluvchi ustun deb olamiz. 1-qoidaga muvofiq

$$\min\left\{\frac{6}{1}, \frac{24}{3}, \frac{-9}{2}\right\} \geq 0.$$

Bu koeffitsientlar orasida $\frac{-9}{2}$ eng kichigi, ammo manfiy bo'lganligi sababli eng kichik musbat son $\frac{6}{1}$ ni olamiz.

$$\min\left\{\frac{6}{1}, \frac{24}{3}, \frac{-9}{2}\right\} = \frac{6}{1} = 6.$$

Shu sababli 1 ni hal qiluvchi element qilib olamiz:

| | | $-y_3$ | $-y_2$ | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | = | 1 | -1 | 6 |
| $y_4$ | = | -3 | $\boxed{1}$ | 6 |
| $y_5$ | = | 2 | 1 | 21 |
| z | = | 5 | -1 | 9 |

Demak, $z$ yo'lida manfiy ishorali koeffitsient yo'q, shuning uchun $y_3$ va $y_4$ larni nolga tenglashtirib $y_1, y_2, y_5, z$ larni aniqlaymiz. Ya'ni $y_3 = y_4 = 0$ bo'lganda, $\max z = 15$, $y_1 = 12$, $y_2 = 6$, $y_5 = 15$ bo'ladi. Bu ifodalarni $x_1$ va $x_2$ larga qo'yib, qiymatlarini topamiz:

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 3.$$

**2-misol.**

$$z = 5x_1 - x_2 + 3x_3$$

chiziqli funksiyaga maksimum qiymat beruvchi

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \le -1 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 5 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$$

chegaraviy shartlarning mumkin bo'lgan yechimlar sohasida noma'lumlar topilsin.

Chegaraviy shartlar sistemasini quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\begin{cases} y_1 = -x_1 - x_2 - x_3 + 2 \ge 0 \\ y_1 = -4x_1 - 2x_2 - x_3 + 3 \ge 0 \\ y_3 = -x_1 + x_2 - 2x_3 - 1 \ge 0 \\ y_4 = 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5 \ge 0 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

Masala uchun jadval tuzamiz:

| | | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | = | 1 | 1 | 1 | 2 |
| $y_2$ | = | 4 | 2 | 1 | 3 |
| $y_3$ | = | 1 | $\boxed{-1}$ | 2 | -1 |
| $y_4$ | = | -3 | 2 | -2 | 5 |
| z | = | -5 | 1 | -3 | 0 |

$x$ lar uchun manfiy bo'lmaslik shartiga asosan, tayanch yechimni topishga kirishamiz.

Ozod hadlari ichida -1 manfiy ifodali koeffitsient mavjud. Shu yo'lni hal qiluvchi yo'l deb olib, hal qiluvchi ustunni aniqlaymiz. Birinchi qoidaga asosan

$$\min\left\{\frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{-1}{-1},\ \frac{5}{2}\right\} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Hal qiluvchi element (-1) ni olib, yangi jadval tuzamiz:

| | | $-x_1$ | $-y_3$ | $-x_3$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | = | 2 | 1 | 3 | 1 |
| $y_2$ | = | $\boxed{6}$ | 2 | 5 | 1 |
| $x_2$ | = | -1 | -1 | -2 | 1 |
| $y_4$ | = | -1 | 2 | 2 | 3 |
| z | = | -4 | 1 | -1 | -1 |

Ozod hadlar musbat bo'lgani uchun, tayanch yechim mavjud. Optimal yechimini topish uchun $z$ yo'liga qaraymiz. $z$ yo'lida ikkita manfiy ishorali koeffitsient bor. Bular ichidan absolyut qiymati katta bo'lgan koeffitsientni tanlab olamiz.

Hal qiluvchi element

$$\min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{-1}, \frac{3}{-1}\right\} = \frac{1}{6}.$$

ni aniqlab yangi jadval tuzamiz:

| | | $-y_2$ | $-y_3$ | $-x_3$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | = | -1/3 | 1/3 | 4/3 | 2/3 |
| $x_1$ | = | 1/6 | 1/3 | 5/6 | 1/6 |
| $x_2$ | = | 1/6 | -2/3 | -7/6 | 7/6 |
| $y_4$ | = | 1/6 | 7/3 | 17/6 | 19/6 |
| z | = | 2/3 | 7/3 | 7/3 | -1/3 |

Ozod hadlari va $z$ yo'lidagi koeffitsientlar musbat. Demak $y_2 = y_3 = x_3 = 0$ bo'lganda $z$ ning maksimal qiymati $-1/3$ ga teng bo'ladi, ya'ni

$$\max z = -\frac{1}{3},$$

bunda

$$x_1 = \frac{1}{6}, \quad x_2 = \frac{7}{6}, \quad x_3 = 0.$$

**Chiziqli dasturlash usulini qishloq xo'jaligi ishlab chiqarishiga tatbiqi.** Qishloq xo'jaligi ishlab chiqarishidagi bir qator amaliy masalalarni yechish chiziqli dasturlash modellariga mos keladi. Xususan, ekin maydonlarini optimal taqsimlash, chorva mollarini oziqlantirishning ratsionini tuzish, qishloq xo'jaligi ishlab chiqarish korxonalarini ixtisoslashtirish, qishloq xo'jaligi mashinalarining ishlash grafigini tuzish, mineral o'g'itlarni optimal taqsimlash va boshqalar shular jumlasidandir. Quyida ularning ayrimlarining modellarini keltirib o'tamiz.

**Qishloq xo'jaligi korxonalarida ekin maydonlarini taqsimlash.** Qishloq xo'jaligi korxonalarida yil davomida ish kuchini bir tekis taqsimlash muhim omillardan biri hisoblanadi. Bu omil ko'pincha aholini ma'lum tumanga biriktirib qo'yishda hal qiluvchi rol o'ynaydi.

Faraz qilaylik, ekin maydonini $n$ xil ekin uchun taqsimlash kerak bo'lsin. Yilni $m$ davrga (bir-biriga teng bo'lishi shart emas) bo'lamiz. Masalan, may oyini uch davrga, butun qish faslini ham shuncha davrga bo'lish tabiiy, albatta.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz: $x_j$ – $j$-ekin uchun ajratilgan maydon; $b_i$ – $i$-davrda xo'jalikning mavjud ishchi kuchi; $d_i$ – $i$-davrda xo'jalikdagi ishlar bilan band bo'lgan ishlovchilarning soni; $a_{ij}$ – $i$-davrda $j$-ekinni yetishtirish bilan band ishlovchilar soni; $c_j$ – $j$-ekinni yetishtirishdan olinadigan daromad.

Xo'jalikning umumiy daromadi

$$L=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \qquad (1)$$

bo'lsin. Ekin maydonlarining eng qulay taqsimlash rejasi (1) maqsad funksiyaga maksimum qiymat beruvchi va quyidagi chegaraviy shartlar sistemasini qanoatlantiruvchi qiymatlar $(x_1, x_2,..., x_n)$ orqali aniqlanadi.

$$x_j \geq \frac{a_j}{\alpha_j}, \quad (j=1, 2,..., n) \qquad (2)$$

bunda: $a_j$ – $j$-tur ekin bo'yicha reja topshirig'i;

$\alpha_j$ – $j$-tur ekinning hosildorligi.

$$b_i - d_i \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad (i=1, 2,..., m) \qquad (3)$$

Ushbu shart yil davomida bir gektar yerni ishchi kuchi bilan bir tekis ta'minlash shartidir.

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \leq a,$$

$a$ – xo'jalikning umumiy ekin maydoni.

(2), (4) shartlarni qanoatlantirib, (1) maqsad funksiyaga maksimum qiymat beruvchi $x_j$ $(j=1, 2,..., n)$ parametrlarni aniqlovchi chiziqli dasturlash masalasiga ega bo'ldik.

Chorvachilikning imkoniyatlari asosan ozuqa bazasi bilan aniqlanadi. Keyingi mulohazalarimizda chorva mollarining har bir turi uchun iqtisodiy oziqlantirish ratsioni aniqlangan deb hisoblaymiz.

Agar $x_j$ orqali $j$-tur chorva molini $(j=1, 2,..., n)$; $p_j$ orqali har bir bosh moldan keladigan daromadni; $b_{kj}$ orqali $j$-tur molni $k$-sort ozuqa iste'mol qilishini va $b_k$ orqali $k$-sort ozuqa zaxirasini belgilasak, u holda

$$L=\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \to \max \qquad (1)$$

maqsad funksiyasiga maksimum qiymat beruvchi va quyidagi

$$\sum_{j=1}^{n} b_{kj} x_j \leq b_k, \quad (k=1, 2,..., s) \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0, \ (j=1, 2,..., n) \qquad (3)$$

tengsizliklar sistemasini qanoatlantiruvchi $x_1, x_2,..., x_n$ larni topish talab qilinadi.

**Ozuqa ekinlarini ekish tarkibi.** Ozuqa ekinlarini ekishning tarkibi chorvachilik mahsulotlariga bo'lgan talab oldindan belgilangan bo'lsa, ozuqa bazasini qanday rejalashtirish masalasi vujudga keladi, ya'ni ozuqa bazasi uchun ajratiladigan maydonni ozuqa ekinlari orasida shunday taqsimlash kerakki, natijada eng kam xarajatlar bilan chorvachilik xo'jaligi talablarini zarur bo'lgan ozuqa bilan to'liq ta'minlansin.

Masalaning matematik modelini tuzish uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz. $x_j$ – $j$-xil ozuqa ekiniga ajratilgan yer maydoni (ga); $\underline{d}_j$ – chorva mollarini boqishda zarur bo'lgan turli ratsionni ta'minlay oladigan $j$-xil ozuqa ekinining minimal ekish maydoni; $\bar{d}_j$ – ma'lum tabiiy sharoitlarga ko'ra $j$-xil ozuqa ekiniga ajratilgan maydonning maksimal miqdori; $a_{ij}$ – bir gektar ekin maydonidan $i$-moddali $j$ ozuqaning miqdori; $a_i$ – chorvachilikning barcha mahsulotlari bo'yicha reja topshirig'i bajarilishi uchun zarur bo'lgan $i$-moddaning zaruriy iste'mol miqdori; $b_{kj}$ – $j$-xil ozuqa ekini (1 ga) uchun ajratilgan maydondan foydalanish uchun $k$-xil ishlab chiqarish omilining sarflanish normasi; $b_k$ – $k$-xil ishlab chiqarish omili zaxirasi; $c_j$ – 1 gektar ekin maydonidan olinadigan $j$-xil ozuqaning tannarxi; $D$ – barcha ozuqa ekinlari uchun ajratilgan umumiy yer maydoni.

Ozuqa ekinlarining optimal tarkibini aniqlashda

$$L=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \qquad (1)$$

maqsad funksiyaga minimum qiymat beruvchi hamda

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge a_i, \quad (i=1, 2,..., m) \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{kj} x_j \le b_k, \quad (k=1, 2,..., s) \qquad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \le D, \qquad (4)$$

$$\underline{d}_j \le x_j \le \bar{d}_j \quad (j=1, 2,..., n) \qquad (5)$$

$$x_j \ge 0, \qquad (6)$$

chegaraviy shartlar sistemasini qanoatlantiruvchi $x_j$ $(j=1, 2,..., n)$ qiymatlarni topish talab etiladi. Modeldagi (2) shart ozuqa ishlab chiqarishni ta'minlaydi; (3) shart ratsiondagi har bir moddaning zaruriy miqdorda bo'lishini ko'rsatadi; (4) shart turli ishlab chiqarish omillar bo'yicha bo'lgan resurslarning chegaralanganligini aniqlaydi; (5) shart xo'jalikda ozuqa uchun ajratilgan maydonning eng kam va eng ko'p hajmini, (6) shart o'zgaruvchilarning nomanfiyligini ko'rsatadi.

**Chiziqli dasturlash usulini energetika sanoatiga tatbiqi.** Hozirgi vaqtda energiyaning turli manbalaridan foydalanuvchi bir qator elektr stansiyalari loyihalari ishlab chiqilib o'zlashtirilmoqda. Yoqilg'ining ko'plab turlari - ko'mir, gaz, neft va boshqa turlaridan foydalanuvchi stansiyalarning standart loyihalari mavjud.

Biror tumanni elektrlashtirish masalasida shu tumandagi mavjud energiya manbalarini hisobga olib, uning elektr energiyasiga bo'lgan talabini eng kam sarf qilish yo'li bilan stansiyalar tipini tanlash muhim masala hisoblanadi. Tuman energetika tizimini tashkil qiluvchi stansiyalarning, birinchidan, berilgan kafolatli quvvati ($A$), ikkinchidan, eng ko'p quvvat ($B$) va berilgan yillik energiya ishlab chiqarish darajasi ($C$) ni ta'minlash zarur. Shu bilan birga kapital qurilishga ketadigan xarajatlar berilgan ($D$) summadan oshmasligi kerak. $A, B, C, D$ miqdorlar tuman rivojlanishining istiqboldagi rejasi bilan aniqlanadi.

Faraz qilaylik, tumanning tabiiy sharoiti $n$ xil elektr stansiyasidan ixtiyoriysini qurish imkoniyatini beradi. $x_j$ orqali $j$-xil stansiyaning sonini belgilaymiz. Bundan tashqari quyidagi belgilashlarni kiritamiz: $a_j$ – bitta $j$-stansiya orqali olinadigan kafolatlangan energiya; $b_j$ – $j$-stansiyaning eng ko'p quvvati; $c_j$ – $j$-stansiyada ishlab chiqariladigan yillik elektr energiyasi; $d_j$ – $j$- stansiyani qurilishi bilan bog'liq xarajatlar; $f_j$ – $j$-stansiyada yil bo'yi olinadigan ekspluatatsiya xarajatlari.

Energetika tizimidagi barcha $j$-turdagi stansiyalarning $(x_j)$ ekspluatatsiya sarfining eng kam bo'lishini ta'minlovchi

$$L=\sum_{j=1}^{n} f_j x_j \to \min \qquad (1)$$

maqsad funksiyaga minimum qiymat beruvchi hamda

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \ge A, \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_j x_j \ge B, \qquad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ge C, \qquad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x_j \le D, \qquad (5)$$

$$x_j \ge 0, \quad (j=1, 2,..., n), \qquad (6)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi qiymatlar $x_j$ $(j=1, 2,..., n)$ orqali aniqlanadi.

**Chiziqli dasturlash usulining neft sanoatida qo'llanilishi.** Chiziqli dasturlash usuli neft konlarini loyihalashda hamda tahlil qilishda keng qo'llanilmoqda. Shuningdek, neftni qayta ishlash, xususan, neft mahsulotlari aralashmasidan talab qilingan texnik shartlarni qanoatlantiruvchi turli xildagi benzinlarni hosil qilishda chiziqli da turlash masalalari paydo bo'lmoqda.

Bunday masalalardan ayrimlarini ko'rib o'tamiz.

Neft konlarini aniqlash va undan foydalanishning samarali usu laridan biri – suv bostirish yo'li bo'lib, suvni haydash natijasida qud qda neftni fontanlash imkonini beradi. Lekin suv bostirish texnolog yasidan qat'iy nazar, shunday davr keladiki, haydalayotgan suv e spluatatsiya qilinayotgan quduq tomonga oqa boshlaydi. Keyinchali bu neftni qayta ishlash natijasida uni suvdan ajratish zarur bo'ladi Bunday holda neftning tannarxi oshadi.

Masalaning matematik modelini tuzish uchun zarur bo'lgan tu shunchalarni kiritamiz. Faraz qilaylik, $j$-quduqdagi yig'indi debi $x_j = x_j^{(c)} + x_j^{(H)}$ yig'indidan iborat bo'lsin. Bundagi $x_j^{(c)}$ – suv miqdori, $x_j^{(H)}$ neft miqdori. Suv bostirish koeffitsienti deb, $\alpha_j = \frac{x_j^{(c)}}{x_j}$ munosabatga a tamiz. Har bir skvajina o'zining suv bostirish koeffitsienti $\alpha_j$ bila xarakterlanib, bu miqdorlar oldindan berilgan, deb hisoblaymiz.

Quduqning normal ishlashi uchun: 1) har bir quduqning bosim $p_i$, to'yinish bosimi deb ataluvchi bosim, $p_i^*$ dan kam bo'lmasligi kera 2) quduqni fontanli qilish uchun dinamik bosim $q_i$, berilgan bosim dan yuqori bo'lishi lozim.

Plastning suv bosimi rejimida filtratsiyaning chiziqli qonuni bo'ysunuvchi suyuqlik harakatida $p_i$ va $q_i$ miqdorlar quduq debiti ning chiziqli funksiyasi bo'ladi.

$$p_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad q_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \qquad (1)$$

bunda: $n$ – quduqlar soni, $a_{ij}$ va $b_{ij}$ ekspluatatsiyaning aniq sharoi lariga bog'liq bo'lgan miqdorlari.

Suvdan holi bo'lgan neft

$$Q = \sum_{j=1}^{n} x_j^{(H)} = \sum_{j=1}^{n} \left(x_j - x_j^{(c)}\right) = \sum_{j=1}^{n} (1 - \alpha_j) x_j \qquad (2)$$

orqali aniqlanadi.

Suv bostirilgan sharoitdagı ekspluatatsiya xarajatini ikki qismg bo'lish mumkin. Birinchi qısm, topilgan neft debitga bog'liq emas. B jihozlash xarajatlari, ish haqi, kapital ta'mirlash va boshqa xarajat lardir. Birinchi turdagi xarajatlarni $S_1$ orqali belgilasak, u holda

$$S_1 = \sum_{j=1}^{n} S_{1j},$$

bu yerda $S_{1j}$ – quduq bo'yicha bo'ladigan birinchi xil xarajatlar.

Ikkinchi xil xarajatlar $(S_2)$ kondagi umumiy debitga hamda har bir quduqdagi suv va neft miqdoriga bog'liq:

$$S_2 = \sum_{j=1}^{n} S_{2j} = \sum_{j=1}^{n} \left(a_j x_j + b_j x_j^{(s)} + c_j x_j^{(n)}\right),$$

bu yerda: $a_j$ – $j$-quduqda plast bosimini ta'minlash uchun bo'ladigan xarajatlar; $b_j$ – $j$-quduqda ifloslangan suvni chiqarib tashlash uchun bo'ladigan xarajatlar; $c_j$ – $j$-quduqdan neftni olish hamda qayta ishlash uchun bo'ladigan xarajatlar. Ikkinchi guruh xarajatlari olinadigan 1 $m^3$ suyuqlik hisobiga beriladi.

Umumiy xarajat

$$S = S_1 + S_2 + \sum_{j=1}^{n} \left\{S_{1j} + \left[a_j + b_j a_j + c_j (1 - \alpha_j)\right] x_j\right\}$$

yoki

$$S = \sum_{j=1}^{n} \left(S_{1j} + r_j x_j\right),$$

bundan

$$r = a_j + b_j a_j + c_j (1 - \alpha_j).$$

1 $m^3$ neftning tannarxi quyidagiga teng:

$$M = \frac{S}{Q} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \left(S_{1j} + r_j x_j\right)}{\sum_{j=1}^{n} (1 - \alpha_j) x_j}. \tag{3}$$

Har bir skvajinaning debitini olish $(x_j \geq 0)$, neftning tannarxini (3) minimumga keltiruvchi va reja topshirig'ini bajarish sharti $(Q \geq Q^*)$ hamda texnologik shartning $(p_i \geq p_i^*,\ q_i \geq q_i^*)$ bajarilishi kasr-chiziqli dasturlash masalasiga olib keladi. Buni chiziqli dasturlash masalasiga keltirib yechish mumkin.

Ayrim hollarda eng kam xarajatlar yo'li bilan berilgan hajmda suvdan holi bo'lgan neftni olishni skvajinalarga optimal taqsimlash masalasi maqsadga muvofiq masala hisoblanadi. Bunda texnologik shartlarning bajarilishi kafolatlangan bo'lishi kerak. Ushbu masalaning matematik modeli

$$S_2 = S - S_1 = \sum_{j=1}^{n} r_j x_j \to \min \tag{4}$$

chiziqli funksiyaga minimum qiymat beruvchi hamda

$$\sum_{j=1}^{n} (1 - \alpha_j) x_j \geq Q^*, \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq p_i^*, \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j \geq q_i^*, \qquad (7)$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad (8)$$

tengsizliklar tizimini qanoatlantiruvchi $x_j$ qiymatlarni topishga olib keladi.

Agar neftni qayta ishlash hamda neft konini ekspluatatsiya qilish uchun ketadigan xarajatlar oldindan berilgan bo‘lsa, masalani boshqacha qo‘yish mumkin.

Quyidagi chiziqli funksiyaga

$$Q = \sum_{j=1}^{n} (1 - \alpha_j) x_j \qquad (9)$$

maksimum qiymat beruvchi hamda

$$\sum_{j=1}^{n} r_j x_j \leq S_2, \qquad (10)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq p_i^*, \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \qquad (11)$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j \geq q_i^*, \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \qquad (12)$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad (13)$$

chegaraviy shartlar tizimini qanoatlantiruvchi $x_j$ qiymatlarni topish talab qilinadi.

Chiziqli dasturlash usulining neft sanoatidagi tatbiqidan yana biri – neft mahsulotini qayta ishlash masalasidir. Berilgan texnik xarakteristikaga javob beradigan turli xil benzinlarni hosil qilish uchun neft mahsulotlarining optimal aralashtirish masalasi chiziqli dasturlash usulining maxsus masalalaridan hisoblanadi.

Neftni haydash korxonasiga har oyda $n$ xil xom neft ma’lum miqdorda ($a_j$ – $j$-sortdan keltiriladigan hajmi, tonna) keltiriladi. Korxona xom neftdan $m$ xil neft mahsuloti (suyuq yoqilg‘i va yog‘lash materiallari) tayyorlashi lozim. Ayrim neft mahsulotlari har qanday neftni qayta ishlashdan olinishi mumkin. Boshqalari esa faqat neftning ayrim xillarini haydash orqaligina olinishi mumkin. Neft sortlarining xarakteristikasi rentabelligi hamda chiqimdagi ashyo bo‘yicha berilgan bo‘lsin: $a_{ij}$ – $j$-sort neftning 1 tonnasidan $i$-turdagi mahsulot olish normasi; $c_j$ – $j$-sort neftning 1 tonnasini haydash bilan bog‘liq xarajatlar.

Faraz qilaylik, $i$-turdagi neft mahsulotini ishlab chiqarish rejada ko‘rsatilganga muvofiq $b_i$ tonna bo‘lsin. Eng kam mehnat sarf qilib, rejadagi assortimentni ta’minlash uchun har bir sort neftdan qancha miqdorda qayta ishlashni aniqlash maqsadida quyidagilarni amalga oshirish lozim. $x_j$ orqali $j$-sort xom neftni qayta ishlashdagi miqdorini belgilasak, u holda shunday $x_j$ larni topish kerakki, ular quyidagi

$$L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \qquad (14)$$

maqsad funksiyaga minimum qiymat berib,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \quad (i = 1,\ 2, \dots,\ m) \qquad (15)$$

$$0 \le x_j \le a_j, \quad (j = 1,\ 2, \dots,\ n) \qquad (16)$$

shartlarni qanoatlantirsin.

(14) maqsad funksiya neftni haydashga ketadigan umumiy xarajatlarning eng kam bo'lishini ta'minlaydi. (15) shart har bir neft mahsuloti bo'yicha reja topshirig'ining bajarilishini ta'minlasa, (16) shart har bir sort neft miqdorining chegaralanganligini ko'rsatadi.

**Sanoat materiallarini optimal qirqish masalasi.** Akademik L.V.Kantorovich tomonidan faner tresti masalasi chiziqli dasturlash usulining taraqqiy qilishida boshlang'ich masala bo'ldi. Faner tresti masalasini umumlashtirib, chiqindilarni kamaytirish masalasi yoki materiallarni optimal qirqish masalasi deb ataladi. Sanoat korxonalarida mahsulot ishlab chiqarishda ishlatiladigan materiallar turli xil o'lchamlarda, shakllarda bo'lishi mumkin. Ushbu masalaning maqsadi bo'lib, mahsulot ishlab chiqarishda ishlatiladigan sanoat materiallarini qirqishdagi chiqindilarni minimallashtirishdan yoki maksimal komplekt olishdan iborat. Korxonalarga yarim fabrikatlar faner, po'lat list, oyna listi shaklida olib kelinadi. Ushbu yarim fabrikatlardan mumkin qadar ko'proq detallar komplekti tayyorlash talab etiladi. Shu bilan birga quyidagi shartlar ham bajarilishi lozim. Hammasi bo'lib $n$ xil material mavjud, $i$-material $q_i$ birlikka ega. Komplekt esa $m$ xildagi turli detaldan tashkil topgan. Komplektga $k$-tipdagi detaldan $P_k$ ta kiradi. Har bir material birligi $s$ ta turli usul bilan qirqilishi mumkin. Faraz qilaylik, $i$-materialdan yarim fabrikat $j$-usul bilan qirqilganda $k$-tipdagi detaldan $a_{ikj}$ ta hosil bo'lsin. $x_{ij}$ orqali $i$-materialni $j$-usul bilan qirqqandagi miqdorini belgilaymiz. Bu usul bilan qirqqanda $n$-tip detal miqdori $a_{ikj} x_{ij}$ bo'ladi. Qirqishning barcha usullaridan hosil bo'ladigan $n$-tip detal miqdori (soni) $\sum_{j=1}^{s} a_{ikj} x_{ij}$ ga teng. Har bir turdagi materialdan qirqilgan $k$-tipdagi detalning umumiy soni

$$\sum_{j=1}^{s} a_{1kj} x_{1j} + \sum_{j=1}^{s} a_{2kj} x_{2j} + \dots + \sum_{j=1}^{s} a_{nkj} x_{nj} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{s} a_{ikj} x_{ij}$$

ga teng.

Har bir komplekt $k$-tipdagi detaldan $p_k$ ta ega, shuning uchun $k$-tipdagi detal bilan ta'minlangan komplekt soni

$$z_k = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{s} a_{ki} x_{ij}}{p_k}$$

ga teng. Komplekt barcha tip detallar bilan ta'minlangan bo'lishi kerak, ya'ni shunday $x_{ij}$ sonlarni topish kerakki, ular $z_k$ nisbatning minimumlariga maksimum qiymat bersin. Boshqacha aytganda

$$z_k \geq z, \quad (k = 1, 2, ..., m) \qquad (1)$$

shart bajarilganda $z$ ga maksimum qiymat berishni ta'minlash lozim.

Bundan tashqari

$$\sum_{j=1}^{s} x_{ij} = q_i, \quad (i = 1, 2, ..., n) \qquad (2)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i = 1, 2, ..., n), \; (j = 1, 2, ..., s) \qquad (3)$$

chegaraviy shartlar bajarilsin. Birinchi guruh shartlar $i$-material $q$ birlik hajmga ega ekanligini ko'rsatadi.

## Mustaqil yechish uchun misollar

**1-misol.** Quyidagi jadval ma'lumotlari berilgan.

| | Mahsulotlar | | | Resurslar hajmi |
|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | |
| Ishchi kuchi | 1,8 | 2,4 | 2,1 | 2500 |
| Xomashyo | 2,5 | 3,7 | 1,4 | 1700 |
| Uskuna | 3,6 | 2,8 | 3,0 | 1900 |
| Sotishdan olinadigan foyda | 400 | 300 | 500 | |

Ushbu ma'lumotlar asosida:

1. Masalaning iqtisodiy-matematik modeli tuzilsin.
2. Yoyilgan iqtisodiy-matematik modeli tuzilsin.
3. Chegaraviy shartlarga iqtisodiy ta'rif berilsin.
4. Masalani simpleks usuli bilan yeching.

Chiziqli dasturlash masalalarini yechishda EXCEL* dasturidan foydalanish samarali hisoblanadi. Chunki ushbu dastur yordamida ma'lumotlarni kiritish qulay, ko'p variantli yechimlarni olish imkoni mavjud. Yuqorida keltirilgan 1-misolni EXCEL dasturidan foydalanib yechish jarayonini ko'rib chiqamiz. Avvalo EXCEL dasturini ishga tu

* EXCEL dasturi ruscha bo'lganligi sababli, olingan natijalar original holda keltirilgan.

shiramiz. Masalani yechish uchun quyidagi bosqichlarni ketma-ketlikda amalga oshirib boramiz.

**1-bosqich**. $A_1$ yacheykasiga **O‘ZGARUVCHILAR** so‘zini kiritamiz.

**2-bosqich**. $A_2$ yacheykasiga A o‘zgaruvchini, $B_2$ yacheykasiga B o‘zgaruvchini, $C_2$ yacheykasiga C o‘zgaruvchini kiritamiz.

**3-bosqich**. $A_3$, $B_3$ va $C_3$ yacheykalarni hech qanday ma’lumot bilan to‘ldirmaymiz, chunki bu yacheykalarga masala yechilgandan so‘ng o‘zgaruvchilarning qiymatlari yoziladi.

**4-bosqich**. $A_4$ yacheykaga **MAQSAD FUNKSIYA** so‘zini kiritamiz. $D_4$ yacheykaga esa maqsad funksiyani quyidagicha yozamiz:

$$=400*A_3+300*B_3+500*C_3$$

**5-bosqich**. $A_6$ yacheykaga **CHEGARAVIY SHARTLAR** yozuvini kiritamiz.

**6-bosqich**. $A_7$ yacheykadan boshlab, $A_9$ yacheykalarga chegaraviy shartlarning quyidagi formulalarini kiritamiz:

$A_7$ yacheykaga $=1{,}8*A_3+2{,}4*B_3+2{,}1*C_3$

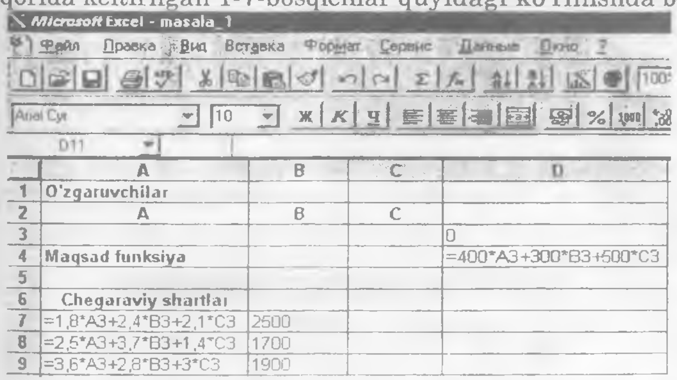
$A_8$ yacheykaga $=2{,}5*A_3+3{,}7*B_3+1{,}4*C_3$

$A_9$ yacheykaga $=3{,}6*A_3+2{,}8*B_3+3{,}0*C_3$

**7-bosqich**. Chegaraviy shartlardagi resurslar hajmini $B_7$ yacheykadan boshlab, $B_9$ yacheykalarga kiritamiz:

$B_7$ yacheykaga 2500
$B_8$ yacheykaga 1700
$B_9$ yacheykaga 1900

Yuqorida keltirilgan 1-7-bosqichlar quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:



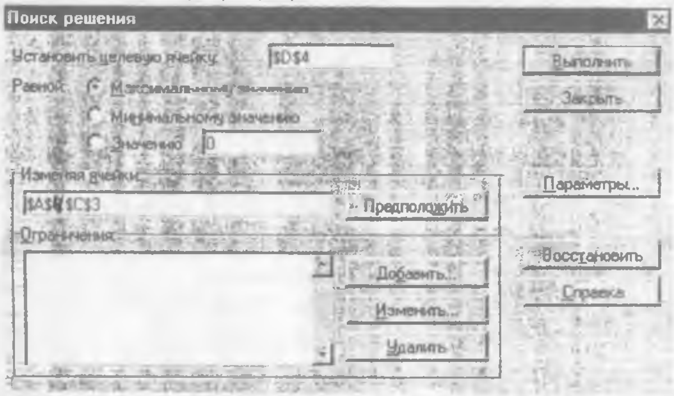

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | O'zgaruvchilar | | | |
| 2 | A | B | C | |
| 3 | | | | 0 |
| 4 | Maqsad funksiya | | | =400*A3+300*B3+500*C3 |
| 5 | | | | |
| 6 | Chegaraviy shartlar | | | |
| 7 | =1,8*A3+2,4*B3+2,1*C3 | 2500 | | |
| 8 | =2,5*A3+3,7*B3+1,4*C3 | 1700 | | |
| 9 | =3,6*A3+2,8*B3+3*C3 | 1900 | | |

**8-bosqich**. Kiritilgan masalanı komputerga yozib qo‘yamiz: **Файл - Сохранить как - masala_1**

**9-bosqich**. Masalani yechish. Buning uchun **Менюdan Серви** bo'limini tanlaymiz. Bu yerdan esa **Поиск решения...** qatorini tanlaymiz.

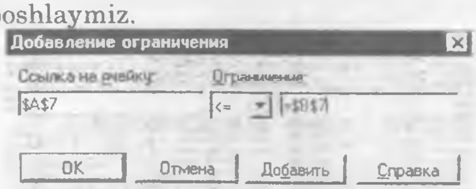
**10-bosqich**. **Поиск решения...** oynasida maqsad funksiya joylash-gan yacheykani o'rnatamiz **$D$4**. So'ngra masalaning maqsad funksi-yasi qaysi mezon bo'yicha yechilishini aniqlaymiz. Bizning masalamiz maqsad funksiyasi foydani maksimallashtirish bo'lgani uchun **Равной** **(Teng bo'lsin)** qatoriga **Максимальному значению (Maksimal qiy-mat)** bo'limini tanlaymiz.

**11-bosqich**. **Изменяя ячейки (Yacheykalarni o'zgartirib)** bo'limiga masalani yechish natijasida olingan qiymatlar qayerga joy-lashishini ko'rsatamiz. Buning uchun bo'sh turgan qatorga quyidagi in-tervalni kiritamiz: $A$4:$C$3



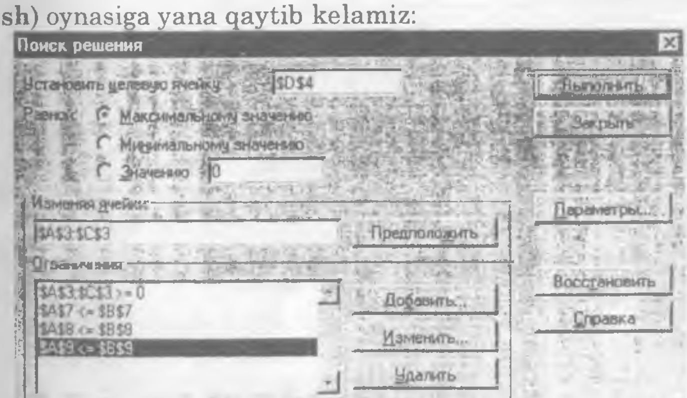

**12-bosqich**. Bu bosqichda chegaraviy shartlarni va ularning in-tervallarini, manfiy bo'lmaslik shartlarini kiritamiz.

**13-bosqich**. **Ограничения: (Chegaraviy shartlar)** bo'limidagi ochiq joyga quyidagi usulda chegaraviy shartlarni kiritib chiqamiz. Chegaraviy shartlarni kiritish uchun **Добавить... (Qo'shish)** knopkasini bosamiz. Natijada **Добавление ограничений (Chegaraviy shartlarni qo'shish)** oynasi paydo bo'ladi va ketma-ket ravishda chegaraviy shart-larni kiritishni boshlaymiz.

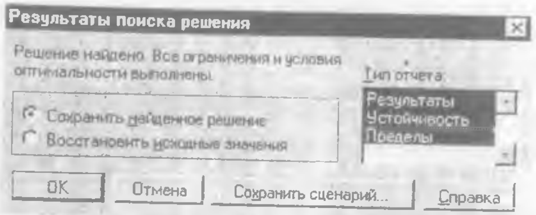



Ushbu chegaraviy shartni kiritib, **Добавить (Qo'shish)** knopkasini bosamiz. Bu jarayon barcha chegaraviy shartlar va noma'lumlarning manfiy bo'lmaslik shartini kiritishgacha davom ettiriladi. Barcha chegaraviy shartlar va noma'lumlarning manfiy bo'lmaslik shartini kiritib bo'lgach, **OK** knopkasi bosiladi.


**OK** knopkasi bosilgandan so'ng, **Поиск решения (Yechimni topish)** oynasiga yana qaytib kelamiz:




**14-bosqich**. Endi masalani yechish uchun **Выполнить (Bajarish)** knopkasini bosamiz. Ushbu knopkani bosganmizdan so'ng **Результаты поиска решения (Yechimni qidirish natijalari)** oynasi paydo bo'ladi. Bu oynada **Сохранить найденное решение (Topilgan yechimni saqlash)** qatorini belgilaymiz. Bundan tashqari **Тип отчёта (Hisobot turi)** qatoridagi **Результаты (Natijalar)**, **Устойчивость (Barqarorlik)**, **Пределы (Yuqori va pastki chegaralari)** qatorlarining barchasini belgilab chiqib, **OK** knopkasini bosamiz.




**15-bosqich**. Natijada alohida ishchi varaqlarda **Отчёт по результатам 1 (1 Natijalar bo'yicha hisobot)**, **Отчёт по устойчивости 1 (1 Barqarorlik bo'yicha hisobot)**, **Отчёт по пределам 1 (1 Chegaraviy shartlar bo'yicha hisobot)** paydo bo'ladi.

**Microsoft Excel 7.0a Отчет по результатам**
**Рабочий лист: [masala_1.xls]Лист2**
**Отчет создан: 25.12.03 18:21**

Целевая ячейка (Макс)

| Ячейка | Имя | Исходно | Результат |
|---|---|---|---|
| $D$4 | Maqsad funksiya | 0 | 316666,7 |

Изменяемые ячейки

| Ячейка | Имя | Исходно | Результат |
|---|---|---|---|
| $A$3 | A | 0 | -4E-15 |
| $B$3 | B | 0 | 1E-15 |
| $C$3 | C | 0 | 6E+02 |

Ограничения

| Ячейка | Имя | Значение | Формула | Состояние | Разница |
|---|---|---|---|---|---|
| $A$7 | Chegaraviy shartlar | 1330,00 | $A$7<=$B$7 | не связан. | 1170,0 |
| $A$8 | Chegaraviy shartlar | 886,67 | $A$8<=$B$8 | не связан. | 813,3 |
| $A$9 | Chegaraviy shartlar | 1900,00 | $A$9<=$B$9 | связанное | 0,0 |
| $A$3 | A | 0,00 | $A$3>=0 | связанное | 0,0 |
| $B$3 | B | 0,00 | $B$3>=0 | связанное | 0,0 |
| $C$3 | C | 633,33 | $C$3>=0 | не связан. | 633,3 |

**Microsoft Excel 7.0a Отчет по устойчивости**
**Рабочий лист: [masala_1.xls]Лист2**
**Отчет создан: 25.12.03 18:21**

Изменяемые ячейки

| Ячейка | Имя | Результ. значение | Нормир. градиент |
|---|---|---|---|
| $A$3 | A | -4,45824E-15 | -199,9999812 |
| $B$3 | B | 1,3739E-15 | -166,6666892 |
| $C$3 | C | 633,3333333 | 0 |

Ограничения

| Ячейка | Имя | Результ. значение | Лагранжа Множитель |
|---|---|---|---|
| $A$7 | Chegaraviy shartlar | 1330 | 0 |
| $A$8 | Chegaraviy shartlar | 886,6666667 | 0 |
| $A$9 | Chegaraviy shartlar | 1900 | 166,6666667 |

**Microsoft Excel 7.0a Отчет по пределам**
**Рабочий лист: [masala_1.xls]Лист2**
**Отчет создан: 25.12.03 18:21**

| Ячейка | Целевое имя | Значение |
|---|---|---|
| $D$4 | Maqsad funksiya | 316666,7 |

| Ячейка | Изменяемое имя | Значение | Нижний предел | Целевой результат | Верхний предел | Целевой результат |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$3 | A | -4,5E-15 | 0,0 | 316666,7 | 0,0 | 316666,7 |
| $B$3 | B | 1,4E-15 | 0,0 | 316666,7 | 0,0 | 316666,7 |
| $C$3 | C | 6,3E+02 | 0,0 | 0,0 | 633,3 | 316666,7 |

**16-bosqich**. Olingan natijalar tahlil qilinadi.

**2-misol**. Korxonada 3 xil resurslar va ularning quyidagi hajmlari mavjud:

1. Ishchi kuchi – 1500 kishi/soat. 2. Xomashyo – 1200 birlik. 3. Uskuna ish vaqti –1100 stanok/soat.

Ushbu resurslar asosida 3 xil: A, B, C xildagi mahsulot ishlab chiqariladi.

A mahsulot uchun ishchi kuchidan 3,7 kishi/soat, xomashyodan 2,4 birlik, uskunadan 2,6 stanok/soat xarajat qilinadi.

B mahsulot uchun ishchi kuchidan 3,1 kishi/soat, xomashyodan 3,4 birlik, uskunadan 1,7 stanok/soat xarajat qilinadi.

C mahsulot uchun ishchi kuchidan 1,8 kishi/soat, xomashyodan 2,2 birlik, uskunadan 2,0 stanok/soat xarajat qilinadi.

Bir birlik A mahsulotni sotishdan 4000 so'm, B mahsulotni sotishdan 7000 so'm, S mahsulotni sotishdan 5000 so'm foyda olish mumkin.

Korxona uchun A mahsulotdan 250 birlikdan kam bo'lmagan, B mahsulotdan 100 birlikdan kam bo'lmagan va 400 birlikdan ko'p bo'lmagan va S mahsulotdan 150 birlik ishlab chiqarish talab etiladi.

Berilgan ma'lumotlar asosida:

1. Masalaning iqtisodiy-matematik modeli tuzilsin.
2. Masalaning yoyilgan iqtisodiy-matematik modeli tuzilsin.
3. Chegaraviy shartlarga iqtisodiy ta'rif berilsin.
4. Masalani yechish usuli aniqlansin.

### Tayanch iboralar

Model, modellashtirish, maqsad, cheklanishlar, mumkin bo'lgan reja, optimal reja, optimal yechim, matematik dasturlash, chiziqli dasturlash, chiziqsiz dasturlash, chiziqli funksiya, tengsizlik va tenglamalar, resurslar, mahsulotlar, texnologik koeffitsientlar, foyda vektori xarajatlar matritsasi, simpleks usuli.

### Takrorlash uchun savollar

1. Matematik dasturlashning vazifalari nimalardan iborat?
2. Resurslarning va ishlab chiqarish imkoniyatlarining chegaralanganligi deganda nimani tushunasiz?
3. Mumkin bo'lgan reja qanday aniqlanadi?
4. Optimal reja bo'lishi uchun qanday shartlar bajarilishi kerak?
5. Chiziqli dasturlash deganda nimani tushunasiz?
6. Chiziqsiz dasturlashning chiziqli dasturdan farqli tomonini tushuntirib bering.
7. Optimal yechim qanday aniqlanadi?
8. Texnologik koeffitsientlar nimani bildiradi?
9. Ozuqa ratsionini tuzish masalasini tushuntirib bering.
10. Transport masalasi deganda nimani tushunasiz?
11. Chiziqli dasturlash masalalarini yechishning simpleks usulini tushuntirib bering.
12. Sanoatning turli sohalari va tarmoqlarida chiziqli dasturlash usulini qo'llashning imkoniyatlarini tushuntirib bering.

## 2.2. Chiziqli dasturlashda ikkilangan masala va optimal rejani baholash

Faraz qilaylik, ishlab chiqarishni tashkil etish uchun quyidagi ko'rsatkichlar ma'lum bo'lsin:

$i$ – ishlab chiqarish resurslari indeksi;

$j$ – ishlab chiqarilgan mahsulotlar indeksi;

$b_i$ – $i$-ishlab chiqarish resursining hajmi;

$c_j$ – $j$-turdagi bir birlik mahsulotni ishlab chiqarish bahosi;

$a_{ij}$ – $i$-ishlab chiqarish resursidan $j$-turdagi bir birlik mahsulotni ishlab chiqarish uchun talab qilinadigan xarajatlar me'yori.

Endi ishlab chiqarilishi lozim bo'lgan mahsulotlar miqdorini $x$ deb belgilaymiz. Bu ma'lumotlarga ko'ra quyidagi masalani tuzish mumkin. Shunday mahsulotlar ishlab chiqarish miqdorini ko'rsatuvchi $x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilar topilsinki, natijada

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max$$

bo'lib, quyidagi shartlar bajarilsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\ ........................................ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, ..., \quad x_n \ge 0$$

Yuqoridagi berilganlarga asosan bu masalaga qo'shma bo'lgan yangi masalani ham tuzish mumkin.

Har bir ishlab chiqarish resurslariga mos ravishda shunday $y_1, y_2, ..., y_m$ baholar (o'zgaruvchilar) aniqlansinki, resurslardan foydalanish minimal bo'lib, bir birlik mahsulot ishlab chiqarish uchun qilinadigan xarajatlar uning umumiy bahosidan oshib ketmasin.

Masalaning matematik modeli quyidagicha bo'ladi.

Shunday $y_1, y_2, ..., y_m$ o'zgaruvchilar topilsinki, natijada

$$F = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \to \min \qquad (25)$$

bo'lib, quyidagi shartlar bajarilsin:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_m \ge c_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_m \ge c_2 \\ ........................................ \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + ... + a_{mn}y_m \ge c_n \end{cases} \qquad (26)$$

$$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0, ..., \quad y_m \ge 0$$

Agar dastlabki masalani shartli ravishda *to'g'ri masala* desak, unga qo'shma bo'lgan keyingi masala *ikkilangan masala* deyiladi.

To'g'ri va ikkilangan masalalarni taqqoslasak, ular uchun ushbu umumiylikni ko'rish mumkin:

- to'g'ri masalada funksional maksimumga intilsa, ikkilangan masalada esa minimumga intiladi;
- to'g'ri masalaning hamma shartlari kichik yoki teng ($\le$), ikkilangan masalada esa katta yoki teng ($\ge$) belgi bilan ifodalanadi;
- to'g'ri masalada $n$ ta noma'lum va $m$ ta cheklashlar sistemasi mavjud bo'lsa, ikkilangan masalada $m$ ta noma'lum va $n$ ta cheklashlar bo'ladi;
- to'g'ri masalaning ozod hadlari ikkilangan masalada maqsad funksiyasining koeffitsientlari sifatida qatnashsa, ikkilangan masalaning ozod hadlari to'g'ri masalaning funksionalida koeffitsient bo'lib qatnashadi;
- ikkala masaladagi tengsizliklar koeffitsientlaridan tuzilgan mat-

ritsalar o'zaro transponirlangan bo'lib, birining satrlari ikkinchisining ustuni bo'ladi.

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix} \qquad A_1=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Ko'rinib turibdiki, bu ikkala masala o'zaro aloqada bo'lib, ular birgalikda chiziqli dasturlashning *juft simmetrik qo'shma masalalarini* hosil qilar ekan. Agar to'g'ri masalada mahsulot ishlab chqiarishning optimal rejasi aniqlansa, ikkilangan masala ishlab chiqarish resurslarining optimal baholari sistemasini ko'rsatadi.

Chiziqli dasturlashda ikkilangan masalaning asosiy teoremasi bo'lgan to'g'ri va ikkilangan masalaning ixtiyoriy yechimi mavjud bo'lsa, ular uchun optimal yechim ham mavjudligi va

$$\max\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \min\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

ekanligi isbot etilgan.

Qo'shma simmetrik masalalarning optimal rejalari faqat maqsad funksiyalari qiymatlarining tengligi bilangina bog'liq bo'lmay, ularda ushbu muhim munosabatlar ham mavjuddir:

- faqat optimal rejada to'liq ishtirok etgan resurslarning ikkilangan bahosi mavjud, qolganlariniki nolga tengdir;

- agar mahsulot optimal rejaga kiritilgan bo'lsa, uning bahosi bir birlik mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarflanadigan resurslar bilan baholanadi, aks holda shu mahsulotni ishlab chiqarish korxona uchun foyda keltirmaydi.

Chiziqli dasturlashning to'g'ri va ikkilangan masalalari bir-biriga bog'liq bo'lmagan holda simpleks usuli orqali yechilishi mumkin.

Yuqoridagilardan ko'rinib turibdiki, chiziqli dasturlashning to'g'ri masalasiga mos ravishda ikkilangan masalani tuzish va aksincha, ikkilangan masala berilgan bo'lsa, unga qo'shma bo'lgan to'g'ri masalani keltirib chiqarish mumkin ekan.

**Masala**. $x_1$ va $x_2$ o'zgaruvchilarning shunday qiymatlari aniqlansinki, unda

$$F=5x_1-x_2\to\max$$

bo'lib, quyidagi shartlar bajarilsin:

$$\begin{gathered} 2x_1-x_2\le 3 \\ 3x_1+2x_2\le 6 \\ -x_1-x_2\le -1 \\ x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0\,. \end{gathered}$$

Bu masalaga qo'shma bo'lgan ikkilangan masala quyidagicha bo'ladi:

$y_1$, $y_2$ va $y_3$ o'zgaruvchilarning shunday qiymatlari aniqlansinki, unda

$$F_1 = 3y_1 + 6y_2 - y_3 \to \min$$

bo'lib, quyidagi shartlar bajarilsin:

$$2y_1 + 3y_2 - y_3 \geq 5$$

$$-y_1 + 2y_2 - y_3 \geq -1$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0 .$$

Berilgan dastlabki va tuzilgan ikkilangan masalalarning tengsizliklari uchun ushbu munosabatlar o'rinli ekanligini ko'rish mumkin:

1) $2x_1 - x_2 \leq 3$ va $y_1 \geq 0$;
2) $3x_1 + 2x_2 \leq 6$ va $y_2 \geq 0$;
3) $-x_1 - x_2 \leq -1$ va $y_3 \geq 0$;
4) $x_1 \geq 0$ va $2y_1 + 3y_2 - y_3 \geq 5$;
5) $x_2 \geq 0$ va $-y_1 + 2y_2 - y_3 \geq -1$.

Juft simmetrik qo'shma masalalar uchun ayrim iqtisodiy mulohazalarni ko'rib chiqamiz. Masalan, xomashyodan foydalanish masalasi berilgan bo'lsin. Bu masalada ikki xil xomashyo zaxiralari bo'yicha uch xil mahsulot ishlab chiqarish rejasini shunday tashkil etish kerakki, natijada ishlab chiqarilgan mahsulotlarning sotilishidan keladigan foyda eng katta bo'lsin. Masalaning matematik ko'rinishi quyidagicha bo'ladi (1-sxema).

| I. To'g'ri masala | II. Ikkilangan masala |
|---|---|
| $x_1$, $x_2$, $x_3$ o'zgaruvchilarning shunday qiymatlari topilsinki, unda<br>$F = 12x_1 + 15x_2 + 19x_3 \to \max$<br>funksional maksimum qiymatga ega bo'lib, quyidagi shartlar bajarilsin:<br>$x_1 \geq 0$<br>$x_2 \geq 0$<br>$x_3 \geq 0$<br>$4x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 60$<br>$2x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 45$ | $y_1$ va $y_2$ o'zgaruvchilarning shunday qiymatlari topilsinki, unda<br>$F_1 = 60y_1 + 45y_2 \to \min$<br>funksional minimum qiymatga ega bo'lib, quyidagi shartlar bajarilsin:<br>$4y_1 + 2y_2 \geq 12$<br>$2y_1 + 6y_2 \geq 15$<br>$6y_1 + 4y_2 \geq 19$<br>$y_1 \geq 0$<br>$y_2 \geq 0$ |

1-sxema. To'g'ri va ikkilangan masalalarni to'zish shartlari

Ma'lumki, umumiy holda ifodalangan 1-sxemadagi I-masalaning ozod hadlari $b_1, b_2, ..., b_n$ resurslarni (ishlab chiqarish omillarini) ko'rsatib, optimal ishlab chiqarish rejasini aniqlaydi. Ikkilangan yoki qo‘shma bo‘lgan II-masala esa resurslarning optimal bahosini, ya’ni bir birlik bahosini (narxini) shunday aniqlash kerakki, mahsulot ishlab chiqarishga sarflangan resurslar qiymati eng kam bo‘lsin. Ko‘rinib turibdiki, resurslarning optimal bahosi nisbiy ma’noga ega ekan chunki resurslar ikkala masalada ikki xil ma’noga egadir.

Masalan, ikki xil mahsulot ishlab chiqarishning optimal rejasini uchta resurslar bo‘yicha topish talab etilsin. Bu masalaning maqsad funksiyasi

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max \qquad (27)$$

ko‘rinishida bo‘lib, quyidagi shartlar bajarilsin:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 \le 4 \end{cases} \qquad (28)$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 .$$

Ko‘rinib turibdiki, bu masalaga qushma bo‘lgan masala resurslarning optimal bahosini aniqlashdan iborat bo‘lib, maqsad funksiyasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$F_1 = 6y_1 + 8y_2 + 4y_3 \to \min \qquad (29)$$

va ushbu shartlarni qanoatlantiradi:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 \ge 2 \\ y_1 + 2y_2 \ge 3 \end{cases} \qquad (30)$$

$$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0, \quad y_3 \ge 0 .$$

Masalani simpleks usulida yechib, $y^* = (1,\ 1,\ 0)$ optimal yechimni topsak, $F(y^*) = 6 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 14$ bo‘ladi. Shuning uchun resurslarning optimal bahosi $y_1^* = 1$, $y_2^* = 1$ va $y_3^* = 0$ bo‘ladi. Bu masalada optimal yechim yagona bo‘lmasdan, yana $y^* = (0.5,\ 1.25,\ 0.25)$ ham optimal yechim bo‘ladi, chunki bu holda ham $F(y^*) = 6 \cdot 0.5 + 8 \cdot 1.25 + 4 \cdot 0.25 = 14$ bo‘lib, berilgan barcha shartlar bajariladi.

Demak, ikkilangan yoki qo‘shma masalalarda optimal yechim yagona bo‘lmasdan, bir nechta bo‘lishi mumkin ekan.

Yuqorida ko‘rib chiqilgan chiziqli dasturlash masalalarining berilgan va ikkilangan masalalarini chuqurroq tahlil etish mumkin, ya’ni iqtisodiy masalalarni modellashtirishning asosiy bosqichlari – uni matematik tahlil qilish hisoblanadi. Har qanday iqtisodiy jarayonni modellashtirish, ushbu jarayonni ma’lum bir darajada soddalashtirishlar bilan bog‘liq bo‘lib, bunda soddalashtirishlar foydalanilayotgan ma’lumotlar va olingan natijalarga o‘z ta’sirini o‘tkazadi. Shuning uchun iqtisodiy-matematik modellar yordamida aniqlangan yechimlardan to‘g‘ridan-to‘g‘ri foydalanish ko‘zlangan natijani bermasligi ham mumkin. Bundan shu narsa kelib chiqadiki, matematik usullar yordamida masalaning yechimini aniqlash jarayonini bir marta o'tkaziladigan jarayon deb qarash kerak emas.

Iqtisodiy masalalar yechimini iqtisodiy-matematik tahlil qilish asosan ikki yo'nalish bo'yicha olib boriladi:

- model bo'yicha turli xildagi variantlar hisob-kitobi, variantlarni solishtirish bilan;
- aniqlangan har bir yechimni ikkilangan baholar yordamida tahlil qilish yordamida.

Masalani turli variantlar bo'yicha tahlil qilish modelni o'zgarmagan tarkibida amalga oshirish mumkin (noma'lumlar tarkibi, ishlab chiqarish usullari, masalaning chegaraviy shartlari va optimallash maqsad funksiyasi o'zgarmaydi), ammo modeldagi ko'rsatkichlarning qiymatlarini o'zgartirish yoki model elementlarining o'zini o'zgartirish bilan maqsad mezonini o'zgartirish, resurslarga yangi chegaralovchi shartlarni qo'shish yoki ishlab chiqarish usullarini masala shartiga kiritish, variantlar to'plamini kengaytirish va hokazo.

Iqtisodiy-matematik tahlilning eng samarali vositalaridan biri optimal rejaning ikkilangan baholaridir. Bunday xildagi tahlil ikkilangan baholarni xususiyatlariga asoslanadi. Yuqorida ikkilangan baholarni umumiy matematik xususiyatlari har qanday iqtisodiy jarayonni optimallashtirish masalasi uchun keltirilgan. Ammo bu ikkilangan baholarning iqtisodiy talqini turli masalalar uchun turlicha bo'lishi mumkin.

Optimal rejadagi (dasturdagi) ikkilangan baholarning aniq iqtisodiy xususiyatlari quyidagilardan iborat:

1. Ishlab chiqarishda ishlatilayotgan resurs tanqisligini ifodalovchi o'lchov – baho sifatida.
2. Chegaraviy shartni masalaning maqsad mezoni, ya'ni funksionalga ta'sir ko'rsatuvchi o'lchov – baho sifatida.
3. Ba'zi bir ishlab chiqarish variantlarining samarasini aniqlashda baholash vositasi.
4. Ishlab chiqarish xarajatlari va natijalarining yig'indisini balanslashtirishni baholash vositasi.

Optimal rejadagi (dasturdagi) ikkilangan baholarning xususiyatlarini ketma-ket ravishda, batafsil ifodalaymiz.

*Birinchi xususiyati. Ishlab chiqarishda resurs tanqisligini ifodalovchi baho – o'lchov sifatida.* Ikkilangan baholar cheklangan ishlab chiqarish omillarini masalaning maqsad funksiyasida berilayotgan talablarga nisbatan tanqislik darajasini ifodalaydi. Miqdor jihatidan tanqislik darajasi ishlab chiqarish omillarining samarasini chekli baholarda maqsad funksiyasiga qo'shgan hissasi nuqtayi nazaridan ifodalaydi. Ishlab chiqarishni chegaralamagan, limitlanmagan barcha omillarning ikkilangan baholari nolga teng bo'ladi, ya'ni ikkilangan masalani ikkinchi teoremasidan kelib chiqadiki:

agar $y_i > 0$ bo'lsa, unda $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$ bo'ladi;

agar $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j < b_i$ bo'lsa, unda $y_i = 0$ $(i = 1, 2, ..., m)$ bo'ladi.

Optimal rejada (dasturda) to'liq foydalanilgan resurs tanqis resurs deb hisoblanadi. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$ va uning ikkilangan bahosi $y_i > 0$ musbat bo'ladi. To'liq foydalanilmagan resurslar tanqis bo'lmagan resurslar deb ataladi. Ular uchun $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j < b_i$ va ularning ikkilangan bahosi nolga teng bo'ladi $y_i = 0$.

Tanqis resursning ikkilangan bahosi $y_i$ qanchalik katta bo'lsa, bu resurs tanqisligi shunchalik yuqori hisoblanadi.

Ishbilarmon chiziqli dasturlash masalasini ikkilangan baholarini bu xususiyatlaridan amalda foydalanib, ishlab chiqarish firmalarining ish faoliyatini yaxshilashdagi «tor joylarni», ya'ni qaysi resurs ishlab chiqarishni chegaralab, «ushlab» turganini aniqlaydi va bu resursdan qo'shimcha topish imkoniyatlarini izlaydi.

*Ikkinchi xususiyati. Chegaraviy shartni masalaning maqsad mezoni, ya'ni funksionalga ta'sir ko'rsatuvchi o'lchov - baho sifatida.* Ishlab chiqarish bilan bog'liq bo'lgan u yoki bu resursning ikkilangan bahosini miqdori agarda shu resursning hajmini bir birlikka ortganida maqsad funksiyaning maksimal qiymati qanchaga ortishini ko'rsatadi. (Ikkilangan baholar to'g'risidagi teoremaga asosan $\Delta F(x) = y_i \cdot \Delta b_i$). Shu bilan birga ishlab chiqarishda to'liq foydalanilmagan resurslarni ikkilangan bahosini nolga tengligini ham tushuntirish mumkin, ya'ni bunday resurslarning zaxirasini ko'paytirish ishlab chiqarishning optimal rejasiga ta'sir ko'rsatmaydi, bu esa olinadigan foyda miqdorini ham o'zgartirmaydi.

Ammo shuni ham esda tutish kerak-ki, ikkilangan baholar ishlab chiqarish resurslari hajmini har qanday o'zgarishidagi samara baholashga emas, balki ma'lum bir kichik hajmdagi o'zgarishlariga to'g'ri keladi. Resurslar hajmi keskin o'zgarganida ikkilangan baholarning o'zi ham boshqacha bo'lishi mumkin.

Ikkinchi xususiyatni mohiyati shundaki, uning yordamida firmadagi «tor joylar» ni aniqlash va ularni oldini olish yo'nalishlarini belgilab beradi, eng katta iqtisodiy samarani ta'minlaydi va umumiy optimallik nuqtayi nazaridan ishlab chiqarilayotgan mahsulotlar tarkibini maqsadga muvofiq ravishda o'zgartirishni ta'minlaydi. Ammo optimal rejani ikkilangan baholarini bunday xususiyatlarida ularni chekli xarakterga ega ekanligi jiddiy o'rin egallaydi. Chegaraviy shartlarni funksionalga ta'sirini aniq o'lchovi bo'lib, chegaraviy shartlarni kichik miqdorga ortishlaridagi baholar hisoblanadi. Ma'lumki, ikkilangan baholar o'z qiymatlarini o'zgartirmaydilar, agarda optimal reja bazisiga kirgan vektorlar to'plami o'zgarmasa, ya'ni bunda bu vektorlarni intensivligi (noma'lumlar qiymati) rejada o'zgarishlari mumkin. Buni quyidagi matritsa ko'rinishidagi modelda ko'rib chiqish mumkin.

$$Z(x) = \overline{C} \cdot \overline{X} \to \max$$

$$A \cdot X \le B,$$

$$X \ge 0,$$

bu yerda: $\overline{X} = (x_1,\ x_2, ...,\ x_n)$ – noma'lumlar vektori;

$\overline{C} = (c_1,\ c_2, ...,\ c_n)$ – maqsad funksiyadagi noma'lumlar oldidagi koeffitsientlar vektori;

$B = (b_1,\ b_2, ...,\ b_n)$ – berilgan masalani chegaraviy shartlaridagi ozod hadlar vektori;

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A – chegaraviy shartlar sistemasidagi xarajatlar matritsasi koeffitsientlari.

Masalani kanonik ko'rinishga keltirish uchun unga $m$ – qo'shimcha noma'lumlar kiritiladi. Unda masalani ko'rinishi quyidagi holga keladi:

$$Z(x) = \overline{C} \cdot \overline{X} \to \max$$

$$A \cdot X = B,$$

$$X \ge 0,$$

bu yerda noma'lum o'zgaruvchilar vektori $X$ endi $n+m$ o'lchamli bo'ladi. Natijada $A$ matritsaning o'lchami ham o'zgaradi va $m(n+m)$ ga teng bo'ladi.

Endi optimal reja ma'lum bo'lsin. Noma'lum o'zgaruvchilar vektori $X$ ni ikkita vektorlarga ajratamiz: $X > 0$ va $X = 0$. Birinchisiga optimal yechim bazisiga kirgan noma'lumlarni, ya'ni optimal rejada nol qiymat qabul qilmaganlarini kiritamiz. Mos ravishda $A$ matritsani ham ikkita matritsaga ajratamiz: $A\ (m \times m)$ va $A\ (m \times n)$ o'lchamli. Bularni birinchisi $A$ matritsani shunday ustunlarini shakllantiradiki, ular optimal rejada nol bo'lmagan noma'lumlarga to'g'ri keladi. Uni quyidagicha yozish mumkin, $AX = B$. Ikkinchi matritsa $AX = 0$ bo'lgani uchun $AX = B$. Hosil bo'lgan tenglikni ikkala tomonini $A$ matritsaga teskari bo'lgan matritsaga ko'paytirib $A^{-1} \cdot A^{*} \cdot X^{*} = A^{-1} \cdot B$ $B$ ni hosil qilamiz. Birlik matritsa $A^{-1} \cdot A = E$ ekanligidan $X^* = A^{-1} \cdot B$ kelib chıqadi. Bu yerda $E$ birlik matritsa.

Endi $A^{-1} = D$ deb belgilab, $X^* = D \cdot B$ ko'rinishda ifodalash mumkin. Bu yerda $D$ matritsa resurslarni ishlab chiqarish miqdori $X$ ga ta'sirini ifodalaydi. Agarda ajratilgan resurslarga ozgina qo'shimcha $B$ berilsa, ya'ni $B$ vektor $B + \Delta B$ ga ortsa, ishlab chiqarish miqdori ham ma'lum bir qiymatga ortadi:

$$X + \Delta X = D(B + \Delta B) = D \cdot B + D \cdot \Delta B .$$

Endi $X = D \cdot B$ ekanligini hisobga olsak, yuqoridagi ifodani quyidagicha yozish mumkin:

$$\Delta X = D \cdot \Delta B .$$

Bu munosabat berilgan masaladagi chegaraviy shartlar o'zgarganida ishlab chiqarishdagi tarkibiy o'zgarishlar miqdorini aniqlaydi. Ikkilanganlikning ikkinchi teoremasidan nisbatan ko'rinib turibdiki, ikkilangan baholar (ikkilangan masalaning noma'lumlari) to'g'ri masalani optimal rejasi bilan juda yaqin bog'langandir. Berilgan masalani har qanday o'zgarishi, uni optimal rejasiga ta'sir o'tkazishi bilan $\Delta X = D \cdot \Delta B$ xuddi shunday ikkilangan baholar sistemasini ham o'zgartirishi mumkin. Shuning uchun ikkilangan baholardan foydalanib, iqtisodiy tahlil o'tkazish uchun ularni barqarorlik intervallarini aniqlash lozim.

Ikkilangan baholarning ikkinchi xususiyati shuni bildiradiki, $b_i$ miqdori qiymatining o'zgarishi maqsad funksiyani $Z(x)$ ning ortishi yoki kamayishiga olib keladi. Bunday o'zgarishlar $Y_i$ qiymati bilan aniqlanadi va o'rnatilishi mumkin, qachonki $b_i$ qiymat o'zgarganida, optimal rejaga mos keluvchi ikkilangan masalani o'zgaruvchilari qiymatlari $Y_i$ o'zgarmay qolganda. Shuning uchun chiziqli sistema tenglamalari va tengsizliklarining har bir ozod hadlarini o'zgarish intervallarida aniqlash zarur $AX = B$, ushbu holda ikkilangan masalaning optimal rejasi o'zgarmasin. Bu esa $X = D \cdot B$ vektor komponentlari orasida manfiy qiymatlar uchramagan holda yuz beradi. Shuni ham esda tutish kerakki, matritsa elementlari $A$ matritsaga teskari bo'lib, $X$-bazis vektor komponentlaridan tashkil topadi, qaysiki masalani optimal rejasini aniqlaydi va birinchi bazisni tashkil etuvchi vektorlar ustunidan olinadi.

Bularning natijasida alohida har bir chegaraviy shartni o'zgarishida ikkilangan baholarni pastki va yuqori barqarorlik chegarasining bahosi aniqlanadi. Chegaraning kamayishi (pastki chegara) shunday $X_k$ bilan aniqlanadi, ular uchun mos keluvchi $d_{ki} > 0$ $(k = 1, 2, ..., m)$ bo'ladi:

$$\Delta b_i^{(-)} = \min\{X_k / d_{ki}\}, \ d_{ki} > 0 \text{ bo'lganida.}$$

Chegaraning ortishi (yuqori chegara) shunday $X_k$ bılan aniqlanadiki, ular uchun $d_{ki} < 0$ $(k = 1, 2, ..., m)$ bo'ladi:

$$\Delta b_i^{(+)} = \left|\max\{X_k / d_{ki}\}\right|, \ d_{ki} > 0 \text{ bo'lganida.}$$

Qandaydir $i$-chegaraviy shartning bo'shashi shunga olib keladiki, ma'lum bir vaqtdan boshlab bazis rejaning tarkibini (vektorlar to'plamini) o'zgartirish mumkin bo'lib qoladi, ammo bu baho qiymatini tartibsiz ravishda kamayishiga olib keladi. Bu $i$-resurs tanqis bo'lmay qolishi va uning ikkilangan bahosi nolga aylanib qolmaguncha davom etib boradi.

*Uchinchi xususiyati. Ba'zi bir ishlab chiqarish variantlarining samarali ekanligini aniqlashda baholash vositasi.* Bu xususiyat ikkilanganlikning ikkinchi teoremasidan kelib chiqadi:

Agar

$$X_j > 0$$

bo'lsa, unda

$$\sum_i a_{ij} y_i = c_j, \quad (j = 1, 2, ..., n)$$

bo'ladi.

Agar

$$\sum_i a_{ij} y_i > c_j$$

bo'lsa, unda

$$X_j = 0, \ (j = 1, 2, ..., n)$$

bo'ladi.

Bunday munosabatlarga asosan optimal rejadagi qiymati musbat bo'lgan noma'lumlar $X_j > 0$ uchun ikkilangan masaladagi mos keluvchi bog'langan shartlar tenglikka aylanadi va nol qiymat qabul qilgan noma'lumlar $X_j = 0$ optimal rejaga kirmaganlar uchun ikkilangan masalada mos keluvchi bog'langan shartlar tengsizlikka aylanadi.

Masala shartiga qarab chegaraviy resurslarni ikkilangan masaladagi bahosi turlicha talqin qilinadi. Agarda berilgan masala olinadigan foydani maksimallashtirishga qaratilgan bo'lsa va chegaralangan resurs – uskuna bo'lsa, unda ikkilangan baho uskunaning ijara bahosini ifodalaydi. Bu ko'rsatkich $i$-turdagi uskunaning ishlash vaqti fondi cheklanganligini va ijobiy samara beruvchi barcha yo'nalishlarda undan foydalanish imkoniyati yo'qligini bildiradi. Shuning uchun uskunadan umumiy optimum nuqtai nazaridan eng yuqori samarani ta'minlovchi texnologik jarayonlarda foydalanishni masalaning yechimida aniqlanadi. Natijada uskunalar yetishmasligi sababli korxona bir xildagi texnologik jarayonlardan ma'lum bir foyda ololmay qoladi, boshqa birlarida – samarası pastroq resurslardan foydalanısh[ga] majbur bo'ladi.

Bunda ikkilangan baho $Y_i$ – $i$-turdagi uskunalarni ish vaqti tan[g]qisligi sababli olinmay qolingan foydaning chekli qiymatini ko'rsatad[i]. Ikkilanganlikning bu xususiyatiga qarab, masalani maksimum foy[da] olishini ta'minlovchi optimal rejasiga faqatgina shunday ishlab chiqa[rish] ish usullari (variantlari) kirishi mumkin, qachonki tanqis resurslar[ni] boshqa usulga jalb qilish natijasida olinmagan foyda olinadigan foyd[a] $C_j$ ni qoplasa. Olinmagan va olingan foyda ayirmasi ishlab chiqarish[-]ning xarakteristikasi bo'lib xizmat qiladi:

$$\Delta_j = \sum_{i} a_{ij} y_i - c_j,$$

bundan shu kelib chiqadiki, agar $\Delta_j > 0$ bo'lsa, ishlab chiqarish foydasiz, agar $\Delta_j < 0$ bo'lsa, ishlab chiqarish foydali.

Ikkilangan baholar yordamida masalani qaytadan yechmasdan yangi texnologik jarayonlarning samarasini, yangi mahsulotlarning rentabelliligini aniqlash mumkin.

*To'rtinchi xususiyati. Ishlab chiqarish xarajatlari va natijalari yig'indisini balanslashtirishni baholash vositasi.* Bu xususiyat ikkilan-ganlikning birinchi teoremasidan kelib chiqadi hamda to'g'ri va teskari masalalarni maqsad funksiyalarini bog'laydi $Z(x) = Q(y)$. Bu xususiyat-dan foydalanib butun iqtisodiy sistemaning xarajatlar va natijalarini tuzish va balanslashtirish mumkin. Keng ma'noda natijalar deganda iqtisodiy sistemaning umumiy maqsadiga qo'shiladigan hissa, xarajat-lar deganda, maqsadlarga erishishda qo'ldan boy berilgan imkoniyatlar tushuniladi.

Amalda tuzilayotgan har bir optimallashtirish masalasida opti-mal nuqtadagi xarajatlar va natijalar singari munosabatlar turli xil-dagi iqtisodiy ma'noga ega bo'ladi. Ishbilarmon uchun bu munosabat-larni teng bo'lishi barqaror faoliyat olib borishdan darak beradi.

Firmaning ishlab chiqarilayotgan mahsulotlardan maksimal foyda olish masalasida to'g'ri va ikkilangan masalalar funksionallarin-ing tengligi shuni bildiradiki, firma maksimal foyda olishga erishishi mumkin, faqatgina foydalanayotgan tanqis resurslaridan ololmay qol-gan foydani minimallashtirilgan holdagina.

Shu bilan birga chiziqli dasturlash masalalari ishbilarmonlar uchun qanday ish faoliyati olib borilganida iqtisodiy samaraning yuqori bo'lish yo'llarini ko'rsatib beradi.

## Mustaqil yechish uchun misollar

**1-misol**. Mebel ishlab chiqarish korxonasida 3 xil resurslar va ularning quyidagi hajmlari mavjud: 1. Ishchi kuchi – 4300 kishi/soat. 2. Xomashyo – 6200 birlik. 3. Uskuna vaqti –5500 stanok/soat.

Ushbu resurslar asosida 4 xil: A, B, C, D xildagi mahsulot ishlab chiqariladi.

*A* mahsulot uchun ishchi kuchidan 2,3 kishi/soat, xomashyodan 3,1 birlik, uskunadan 2,9 stanok/soat xarajat qilinadi. *B* mahsulot uchun ishchi kuchidan 1,3 kishi/soat, xomashyodan 1,8 birlik, uskunadan 1,8 stanok/soat xarajat qilinadi. *C* mahsulot uchun ishchi kuchidan 2,5 kishi/soat, xomashyodan 2,7 birlik, uskunadan 1,9 stanok/soat xarajat qilinadi. *D* mahsulot uchun ishchi kuchidan 1,3 kishi/soat, xomashyodan 2,7 birlik, uskunadan 1,2 stanok/soat xarajat qilinadi.

Bir birlik *A* mahsulotni sotishdan 1200 so'm, *B* mahsulotni sotishdan 2300 so'm, *C* mahsulotni sotishdan 1950 so'm, *D* mahsulotni sotishdan 2100 so'm foyda olish mumkin.

Korxona uchun *A* mahsulotdan 100 birlik, *B* mahsulotdan 100 birlikdan ko'p bo'lmagan, *C* mahsulotdan 250 birlik va *D* mahsulotdan 200 birlikdan kam bo'lmagan va 350 birlikdan ko'p bo'lmagan miqdorda ishlab chiqarish talab etiladi.

Masalaning berilishi asosida quyidagilar aniqlansin:
1. Masalaning iqtisodiy-matematik modeli.
2. Masalaning yoyilgan iqtisodiy-matematik modeli.
3. Berilgan masalaga ikkilangan masala.
4. Chegaraviy shartlarga iqtisodiy ta'rif.

**2-misol**. Jadval ma'lumotlari asosida quyidagilar aniqlansin:
1. Masalaning iqtisodiy-matematik modeli.
2. Yoyilgan iqtisodiy-matematik modeli.
3. Masalaga ikkilangan masala.
4. Chegaraviy shartlarga iqtisodiy ta'rif.

| | Mahsulotlar | | | | | Resurslar hajmi |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | D | E | |
| Ishchi kuchi | 1,6 | 2,1 | 2,4 | 2,8 | 1,0 | 2800 |
| Xomashyo | 2,5 | 1,7 | 0,4 | 0,7 | 2,1 | 3570 |
| Uskuna | 1,6 | 2,8 | 2,3 | 2,3 | 1,7 | 2900 |
| Bir birlik mahsulotdan olinadigan foyda | 80 | 70 | 90 | 60 | 40 | |

**3-misol**. Quyida ishlab chiqarish korxonasining ma'lumotlari keltirilgan.

$$C_j = \{3200;\ 3600;\ 4300;\ 4000\}; \quad a_{ij} = \begin{pmatrix} 0,11 & 0,13 & 0,18 & 0,23 \\ 0,23 & 0,18 & 0,25 & 0,31 \\ 0,33 & 0,37 & 0,42 & 0,34 \\ 0,25 & 0,27 & 0,31 & 0,21 \end{pmatrix}; \quad A_i = \begin{Bmatrix} 56500 \\ 54300 \\ 62100 \\ 58200 \end{Bmatrix}.$$

Ushbu ma'lumotlar asosida korxonaga maksimum foyda keltiruvchi:

1. Masalaning iqtisodiy-matematik modeli tuzilsin.
2. Yoyilgan iqtisodiy-matematik modeli tuzilsin.
3. Masalaga ikkilangan masala tuzilsin.
4. Chegaraviy shartlarga iqtisodiy ta'rif berilsin.
5. Masalani simpleks usuli yordamida yeching.

## Tayanch iboralar

Chiziqli dasturlash, resurslar va mahsulotlar indeksi, xarajatlar normasi, maqsad funksiya, chegaraviy shartlar, to'g'ri masala, ikkilangan masala, transponirlangan matritsa, simmetrik qo'shma masala, optimal baho, simpleks usuli, ikkilangan baho, tanqis resurslar, ikkilangan baholar xususiyatlari.

## Takrorlash uchun savollar

1. Berilgan yoki dastlabki masala deb nimaga aytiladi?
2. Ikkilangan masala deb nimaga aytiladi?
3. Dastlabki masalani ikkilangan masalaga aylantirish shartlarini tushuntirib bering.
4. Dastlabki va ikkilangan masalalarning umumiy tomonlari nimalardan iborat?
5. Simmetrik qo'shma masalalarni tushuntirib bering.
6. Ikkilangan baho deb nimaga aytiladi?
7. Mahsulotlar bo'yicha ikkilangan baholarning iqtisodiy ma'nosini tushuntirib bering.
8. Resurslar bo'yicha ikkilangan baholarning iqtisodiy ma'nosini tushuntirib bering.
9. Optimal rejadagi ikkilangan baholarning birinchi xususiyati nimadan iborat?
10. Optimal rejadagi ikkilangan baholarning ikkinchi xususiyati nimadan iborat?
11. Optimal rejadagi ikkilangan baholarning uchinchi xususiyati nimadan iborat?
12. Optimal rejadagi ikkilangan baholarning to'rtinchi xususiyatini tushuntirib bering.

## 2.3. Oziq-ovqat korxonasi texpromfinplanining matritsaviy modeli

Sanoat korxonasining texpromfinplani butun korxona hamda uning ayrim sexlari, xizmat ko'rsatish bo'limlari uchun rejadagi topshiriqlarni o'z ichiga olgan hujjat hisoblanadi. Texpromfinplanni ishlab chiqishdagi eng muhim talab – biznes-rejadagi topshiriqlarning korxona oldiga qo'ygan bozor talablari bilan, undagi resurslar hajmi hamda ishlab chiqarish quvvatlarining qat'iy bog'liqligini ta'minlash hisoblanadi.

Oziq-ovqat ishlab chiqaruvchi korxonalarda hozirgi kunda texpromfinplanni ishlab chiqish usullari, qoida bo'yicha qo'l mehnati usullaridan foydalanishga yo'naltirilgandir. Bunday yondashuvda rejalashtirish jarayonini amalga oshirishda qo'l mehnatini talab etuvchi murakkab hisob-kitoblarni amalga oshirishga to'g'ri keladi. Bu esa bir vaqtning o'zida eng samarali qaror qabul qilish maqsadida bir necha variantli texpromfinplan ishlab chiqish imkoniyatini inkor etadi. Bundan tashqari, rejalashtirishning an'anaviy usullaridan foydalanilganda, hisob-kitoblarda yo'l qo'yilgan arifmetik xatoliklarni yuzaga chiqarish va olib tashlash murakkab bo'ladi.

Oziq-ovqat ishlab chiqaruvchi korxonalarda texnik-iqtisodiy rivojlantirishni takomillashtirishning asosiy yo'li, bu jarayonlarda EHM va iqtisodiy-matematik usullar, shu jumladan, matritsaviy modellarni keng qo'llash hisoblanadi. Texpromfinplanning matritsaviy modeli EHMda hisob-kitoblarni avtomatlashtirish uchun shart-sharoitlar yaratadi, xo'jalik ishlab chiqarish faoliyatining qat'iy kelishilgan ko'rsatkichlariga asoslangan texpromfinplanni olishga imkon beradi, rejaning ishlab chiqish muddatlarini qisqartiradi va hisob-kitoblarning mehnat sig'imini kamaytiradi, texpromfinplanning bir necha alternativ variantlarini olish imkonini ta'minlaydi.

Tuzish tamoyillari bo'yicha texpromfinplan tarmoqlararo balans bilan ma'lum o'xshashliklarga ega. Matritsaviy texpromfinplan qiymat hamda natural ko'rsatkichlar asosida ishlab chiqilishi mumkin. Birinchi holda matritsaviy modelning barcha to'rtta kvadranti to'ldiriladi, ikkinchi holda esa, qoidaga ko'ra, birinchi, ikkinchi va uchinchi kvadrantlar to'ldiriladi. Matritsaviy texpromfinplanda birinchi kvadrantning qator va ustunlarida korxonaning asosiy va yordamchi bo'linmalari hamda ular tomonidan ishlab chiqarilayotgan mahsulotlar (yoyilgan yoki guruhli assortimentda) ko'rsatiladi.

Shunday qilib, masalan, meva-sabzavot mahsulotlarini ishlab chiqaruvchi konserva sanoati korxonalarida texpromfinplanning birinchi kvadrantida quyidagi konserva mahsulotlari guruhlarini ajratib ko'rsatish mumkin: mevali povidlo, jem, varene, kompotlar, tabiiy sharbatlar va boshqalar; tomatli-pyure, souslar, sharbat, pasta. Bolalar uchun konservalanadigan mahsulotlarni alohida ajratib ko'rsatish mumkin.

Texpromfinplanning birinchi kvadranti korxonadagi sex va bo'linmalar orasidagi ishlab chiqarish xo'jalik aloqalarini ifodalash uchun mo'ljallangan.

Ikkinchi kvadrantda korxona faoliyatining natijaviy ko'rsatkichlari ifodalanadi: iste'molchilarga sotish uchun mo'ljallangan tayyor mahsulotlar hajmi ($Y_j$) (qiymat yoki natural ko'rsatkichlarda) hamda korxona ichki oborotini hisobga olgan holda $X_j$ mahsulotini ishlab chiqarish (ya'ni, korxona sexlarida ishlab chiqilgan va korxonaning o'xshash bo'linmalarida keyinchalik foydalanish uchun mo'ljallangan yarim fabrikatlar). Texpromfinplanni natural shaklda ishlab chiqishda $X_j$ ko'rsatkichi, $j$-mahsulotni ishlab chiqarish bo'yicha reja topshirig'ini xarakterlaydi.

Uchinchi kvadrantda ishlab chiqarish dasturini bajarish uchun zarur bo'lgan xomashyolar va asosiy materiallar hajmlari hamda jonli va buyumlashgan mehnat resurslari (kategoriyalar bo'yicha ishlovchilar soni, uskuna va jihozlarning ish vaqti fondi) ifodalanadi.

To'rtinchi kvadrantda boshqa korxonalar va tashkilotlarga sotiladigan yoki o'z korxonasining noishlab chiqarish bo'linmalariga beriluvchi sotib olinadigan materiallar va yarim fabrikatlar hajmlari ifodalanadi.

Matritsaviy texpromfinplan modellarining hisob-kitoblari bir birlik tayyor mahsulotga sarflanadigan resurslarni xarakterlovchi norma va normativlarni aniqlashdan boshlanadi. Ushbu axborot tugallanish ko'rinishiga ega bo'lgan matritsaviy texpromfinplan shaklidagi matritsaga kiritiladi. Olingan jadvalni texpromfinplanning normativ modeli deb nomlash qabul qilingan. Agar matritsaviy texpromfinplanda uning barcha elementlari ishlab chiqarishning to'liq hajmi hisobida ko'rsatilgan bo'lsa, normativ modelda esa, bir birlik mahsulot hisobida ko'rsatiladi. Resurslardan foydalanish me'yorari o'z mohiyati bo'yicha tarmoqlararo balansdagi to'g'ri xarajatlar koeffitsientiga mos bo'lsa, unda texpromfinplanning asosiy ko'rsatkichlarini hisoblash quyida keltirilgan formulalar asosida amalga oshiriladi. Xususan, quyidagi matritsaviy bog'liqlikdan foydalanish qulaydir:

$$X = aX + Y,$$

bu yerda: $X$ – korxonaning ichki aylanmasini hisobga olishda ayrim turdagi mahsulotlarni ishlab chiqarishning qidirilayotgan hajmi; $a$

xarajatlar normativlari; $Y$ – ayrim mahsulotlarni ishlab chiqarish bo‘yicha bozor talablari.

Texpromfinplanning matritsaviy modelini tuzish tartibini konditer mahsulotlari ishlab chiqaruvchi korxonaning natural matritsaviy balans modelida ko‘rib chiqamiz. Natural shakldagi matritsaviy modelni ishlab chiqishda dastlabki axborot sifatida yuqori tashkilotlarning konditer mahsulotlarini guruh assortimentida, ishlab chiqarilayotgan mahsulotlarning retsepturasi, mahsulotlarning mehnat sarflari normalari va boshqa ba’zi ko‘rsatkichlardan foydalaniladi.

Faraz qilaylik, konditer fabrikasida shokolad mahsulotlari, konfetlar hamda karamel konfetlari ishlab chiqariladi. Xomashyo resurslari, yarim fabrikatlar, materiallar, yonilg‘i, energiya hamda mehnatning jonli va buyumlashgan sarflarini bir birlik mahsulotga ketadigan xarajatlarini xarakterlovchi natural ko‘rsatkichli normativ matritsali modelini tuzamiz (2-jadval).

2-jadval

Texpromfinplanning matritsaviy modeli

| I kvadrant | | | | | II kvadrant | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Mahsulotlar, yarim fabrikatlar, xomashyolar | Shokolad va shokolad mahsulotlari | Shokoladli yarim fabrikatlar | Karamel | Konfetlar | Tayyor mahsulot ishlab chiqarish, $(Y_i)$ | Korxona ichki oborotini hisobga olib, tayyor mahsulot ishlab chiqarish, t., $(X_j)$ |
| Shokolad va shokolad mahsulotlari | - | - | - | - | 2000 | $X_1$ |
| Shokoladli yarim fabrikatlar | - | - | 0,1 | 0,2 | - | $X_2$ |
| Karamel | - | - | - | 0,1 | 5000 | $X_3$ |
| Konfetlar | - | - | - | - | 3000 | $X_4$ |
| Shokoladli yarim fabrikatlar | - | - | 0,1 | 0,2 | | |
| Kakao doni | 0,7 | 0,8 | - | - | | |
| Shakar | 0,2 | 0,1 | 0,8 | 0,6 | | |
| Yong‘oqlar | 0,1 | - | 0,1 | 0,1 | | |
| Boshqa xomashyolar | 0,09 | 0,1 | 0,09 | 0,19 | | |
| Yordamchi materiallar | 0,01 | - | 0,01 | 0,01 | | |
| Elektr energiyasi sarfi, kVt.soat/ tonna | 15 | 10 | 30 | 25 | | |
| Mehnat sarflari, 1t. kishi-soat | 40 | 25 | 30 | 50 | | |
| Uskuna va jihozlarning ishlash vaqti, mashina soat/tonna | 3 | 2 | 2 | 4 | | |
| III kvadrant | | | | | IV kvadrant | |

I-kvadrantda korxona ichida foydalanishda zarur bo'lgan yarim fabrikatlar miqdori ko'rsatıladi (masalan, konfetlar va karamellarning korpusini bezash uchun shokolad eritmasi, ayrim navdagi konfetlarni ishlab chiqarish uchun karamellar va boshqalar). Yarim fabrikatlarning sarfi 1 tonna pirovard mahsulotga necha tonna sarflanishi bilan o'lchanadi.

II-kvadrantda guruhli assortimentda konditer mahsulotlarini ishlab chiqarish bo'yicha reja topshiriqlari ifodalanadi ($Y_i$ ustun). Bundan tashqari balansning ushbu qismida korxona ichki aylanmasini hisobga olingan $(X_i)$, qidirilayotgan tayyor mahsulot hajmlari uchun ustun ajratilgan. $X_i$ va $Y_i$ orasidagi farq, korxona ichki aylanmasiga yo'naltiriladigan yarim fabrikatlar ishlab chiqarish hajmiga miqdoran tengdir. I va II kvadrantga kiritilgan axborotlar $X_i$ o'zgaruvchini aniqlash uchun berilgan.

III-kvadrantda ishlab chiqariladigan 1 tonna mahsulot hisobiga sarflanadigan xomashyo, materiallar, elektr energiyasi (kVt.soat/t) hamda mahsulotlarning mehnat sarflari va uskuna, jihozlarning ishlash vaqtini ifodalovchi me'yorlar keltirilgan. III-kvadrantda keltirilgan axborotlar yordamida korxonaning xomashyo, materiallar va boshqa resurslar bilan ta'minlanish rejasini hisoblash mumkin.

Natural matritsaviy modelda IV-kvadrant to'ldirilmaydi.

Shuni aytish kerakki, texpromfinplanning matritsaviy modelini ishlab chiqishda dastlabki jadval o'zining tarkibiga guruhlashtirilgan emas, balki yoyilgan axborotni olishi kerak. Masalan, konditer mahsulotlarini ishlab chiqaruvchi korxonaning matritsaviy balansi I-kvadrantida nachinkali karamel, shokolad eritmali konfet, eritmasiz konfet, plitkali shokolad, nachinkali shokolad, poroshokdagi shokolad, kakao-poroshok va boshqalar uchun mustaqil qatorlar va ustunlar ajratish zarur. III-kvadrantda ayrim texnologik liniyalar va sexlar bo'yicha barcha turdagi xomashyo va materiallar, yonilg'i va elektr energiyasi hamda kategoriyalar bo'yicha mehnat sarflari me'yorlari va uskuna hamda jihozlarning ishlash vaqtini ko'rsatish zarur.

Faraz qilaylik, reja davrida konditer mahsulotlari ishlab chiqarish korxonasi shokolad va shokolad mahsulotlaridan 2000 t., karamellar 5000 t., va konfetdan 3000 t. ishlab chiqarishi lozim. Dastlabki axborotni quyidagi matritsalar ko'rinishida ifodalaymiz:

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 2000 \\ 0 \\ 5000 \\ 3000 \end{pmatrix}$$

Texpromfinplanning matritsaviy modeli quyidagi tenglamalar yordamida ifodalanishi mumkin:

$$X_1 = 0\cdot X_1 + 0\cdot X_2 + 0\cdot X_3 + 0\cdot X_4 + 2000$$
$$X_2 = 0\cdot X_1 + 0\cdot X_2 + 0{,}1\cdot X_3 + 0{,}2\cdot X_4 + 0$$
$$X_3 = 0\cdot X_1 + 0\cdot X_2 + 0\cdot X_3 + 0{,}1\cdot X_4 + 5000$$
$$X_4 = 0\cdot X_1 + 0\cdot X_2 + 0\cdot X_3 + 0\cdot X_4 + 3000.$$

Qidirilayotgan o'zgaruvchilarni tenglamaning chap tomoniga o'tkazib, olingan sistemani quyidagicha yozamiz:

$$X_1 = 2000;$$
$$X_2 - 0{,}1\cdot X_3 - 0{,}2\cdot X_4 = 0;$$
$$X_3 - 0{,}1\cdot X_4 = 5000;$$
$$X_4 = 3000.$$

$X_1 = 2000$ t, $X_2 = 1130$ t, $X_3 = 5300$ t, $X_4 = 3000$ t. ekanligi hisoblab topildi. Olingan ma'lumotlardan shuni ko'rish mumkinki, berilgan hajmlarda ($Y_1 = 2000$ t., $Y_2 = 0$ t., $Y_3 = 5000$ t., $Y_4 = 3000$ t.) tayyor mahsulotlarni ishlab chiqarishni ta'minlash uchun ushbu mahsulotlarni haqiqiy ishlab chiqarish mos ravishda $X_1 = 2000$ t, $X_2 = 1130$ t, $X_3 = 5300$ t, $X_4 = 3000$ t. ga teng bo'lishi kerak.

Ma'lumki, $X_i$ va $Y_i$ orasidagi farqqa teng ishlab chiqarilgan mahsulotning bir qismi yarim fabrikat sifatida korxona ichki oborotida foydalanishga yo'naltiriladi.

Konditer mahsulotlari ishlab chiqaruvchi korxonaning texpromfinplanining natural ko'rsatkichlardagi matritsaviy modeli quyidagi 2-jadvalda keltirilgan.

I-kvadrantda yarim fabrikatlarni yetkazib berishning sexlararo rejasi shakllangan.

Matritsaning II-kvadrantida sexlar bo'yicha shokolad mahsuloti ($X_1 = 2000$ t., $X_2 = 1130$ t.), karamel mahsuloti ($X_3 = 5300$ t.) va konfet mahsuloti ($X_4 = 3000$ t.) ishlab chiqarish rejalari ko'rsatilgan. Jadvalning ushbu qismida savdo tarmog'ida sotish uchun mo'ljallangan ($Y_1$, $Y_3$, $Y_4$) assortiment guruhidagi tayyor mahsulot hajmlari aks ettirilgan.

III-kvadrantda berilgan miqdorlarda mahsulot ishlab chiqarish uchun zarur bo'lgan moddiy resurslar hajmlari ko'rsatilgan. III- kvadrantning ustunlarini to'ldirish uchun ketma-ket har bir resursning sarflanish normasini, ushbu turdagi mahsulotni ishlab chiqarishga ($X_i$) ko'paytirish yetarlidir. Masalan, karamel ishlab chiqarish uchun 4240 tonna shakar ($0.8\cdot 5300$), yong'oqlardan 530 tonna ($0{,}1\cdot 5300$), boshqa turdagi xomashyolardan 477 tonna ($0{,}09\cdot 5300$) va boshqalar talab qilinadi.

3-jadval

Konditer mahsulotlari ishlab chiqaruvchi korxona texpromfinplanning matritsaviy modeli

| I kvadrant | | | | | | II kvadrant | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Mahsulotlar, yarım fabrikatlar, xomashyolar | Shokolad va shokolad mahsulotlari | Shokoladli yarim fabrikatlar | Karamel | Konfetlar | Umumiy xarajatlar | Tayyor mahsulot ishlab chiqarish, $(Y_i)$ | Korxona ichki oborotini hisobga olib, tayyor mahsulot ishlab chiqarish, t., $(X_i)$ |
| Shokolad va shokolad mahsulotlari | - | - | - | - | - | 2000 | 2000 |
| Shokoladli yarim fabrikatlar | - | - | 530 | 600 | 1130 | - | 1130 |
| Karamel | - | - | - | 300 | 300 | 5000 | 5300 |
| Konfetlar | - | - | - | - | - | 3000 | 3000 |
| Shokoladli yarim fabrikatlar | - | - | 530 | 600 | 1130 | | |
| Kakao doni | 1400 | 904 | - | - | 2304 | | |
| Shakar | 400 | 113 | 4240 | 1800 | 6553 | | |
| Yong'oqlar | 200 | - | 530 | 300 | 1030 | | |
| Boshqa xomashyolar | 180 | 113 | 477 | 570 | 1340 | | |
| Yordamchi materiallar | 20 | - | 53 | 30 | 103 | | |
| Elektr energiyasi sarfi, kVt.soat/ tonna | 30 | 11,3 | 159 | 75 | 275,3 | | |
| Mehnat sarflari, 1t. kishi-soat | 80 | 28,25 | 159 | 150 | 417,25 | | |
| Uskuna va jihozlarning ishlash vaqti, mashina soat/tonna | 6 | 2,26 | 10,6 | 12,0 | 30,86 | | |
| III kvadrant | | | | | | IV kvadrant | |

Matritsali texpromfinplanning III-kvadrantining oxirgi ikki qatori sexlar va butun korxona bo'yicha ishlab chiqarish quvvatlaridan foydalanish darajasini asoslash uchun hamda mehnat sarflari bo'yicha rejani ishlab chiqarish uchun xizmat qilishi mumkin.

Hisob-kitoblardan shuni ko'rish mumkinki, korxonaning natural ifodadagi matritsali texpromfinplani har bir sex va butun korxona bo'yicha korxona ichki aylanmasini hisobga olgan holda mahsulot ishlab chiqarishni aniqlash, ishlab chiqarishni xom ashyolar, asosiy va yordamchi materiallar, yoqilg'i-energetik resurslar bilan ta'minlashning moddiy-texnik rejasini ishlab chiqish, keyinchalik qayta ishlanishi uchun sexlardan sexlarga yuboriladigan yarim fabrikatlar hajmini hisoblash, ishlab chiqarilayotgan mahsulotning mehnat sig'imini aniqlash hamda sexlar va butun korxonadagi ishlab chiqarish quvvatlaridan foydalanish darajasini aniqlashga imkon beradi.

Texpromfinplanning natural modeli yordamida uning qiymat shaklidagi matritsali texpromfinplanini olish mumkin. Buning uchun natural modeldagi barcha ko'rsatkichlarni mos ravishda qiymat o'lchovlariga ko'paytirish zarur. Faqatgina III kvadrantning ayrim elementlari bundan mustasno. Bunda mahsulotning mehnat sig'imi ko'rsatkichlari o'rniga va ishlab chiqarish quvvatlaridan foydalanish ko'rsatkichlari o'rniga ishlovchilarning ish haqini xarakterlovchi, korxonaning ishlab chiqarish-xo'jalik faoliyatining natijalarini (foyda) xarakterlovchi ko'rsatkichlarni kiritish kerak.

Texpromfinplanning qiymatli matritsaviy modeli mahsulot ishlab chiqarishning qiymat shaklida, xomashyo, materiallar, energetik resurslar, korxonada ishlovchilar ish haqlari va korxonaning boshqa ko'rsatkichlarini baholashga imkon beradi.

## Tayanch iboralar

Texprofinplan, matritsaviy modellar, biznes-reja, operativ rejalashtirish, qaror qabul qilish, alternativ variant, tarmoqlararo balans, kvadrantlar, ishlab chiqarish xo'jalik aloqalari, natijaviy ko'rsatkichlar, jonli va buyumlashgan mehnat, xarajatlar normativlari.

## Takrorlash uchun savollar

1. Matritsaviy modellarning qo'llanish sohalarini tushuntirib bering.
2. Sanoat korxonasining texpromfinplani qanday hujjat hisoblanadi?
3. Sanoat korxonasining texpromfinplanini tuzish tamoyilini ifodalab bering.
4. Sanoat korxonasining texpromfinplani va tarmoqlararo balans orasida qanday o'xshashliklar mavjud?
5. Sanoat korxonasining texpromfinplani necha kvadrantdan iborat?
6. Mahsulot assortimenti deganda nimani tushunasiz?
7. Texpromfinplanning birinchi kvadrantini ifodalab bering.
8. Texpromfinplanning ikkinchi kvadrantini tushuntirib bering.
9. Korxona faoliyatining natijaviy ko'rsatkichlari nimalardan iborat?
10. Texpromfinplanning uchinchi kvadrantini tushuntirib bering.
11. Korxona resurslariga ta'rif bering.
12. Taqchil resurslar deb qanday resurslarga aytiladi?
13. Korxonaning ishlab chiqarish imkoniyatlari nimalarga bog'liq?
14. Texpromfinplanning to'rtinchi kvadrantini tushuntirib bering.
15. To'g'ri xarajatlar koeffitsientining iqtisodiy ma'nosini tushuntirib bering.

## 2.4. Aralashmalarni optimallash modellari

Aralashmalar to'g'risidagi masala shunday masalaki, unda ma'lum miqdoriy va sifat xarakteristikalariga ega bo'lgan, turli xil xomashyolardan tayyorlanishi lozim bo'lgan aralashmaning optimal tarkibini aniqlashdan iborat. Ushbu masala kimyo, metallurgiya va oziq-ovqat sanoatida keng qo'llaniladi.

Oziq-ovqat mahsulotlarini ishlab chiqarishda to'yimli elementlarning zarur miqdoriga ega bo'lgan pirovard mahsulotlarni olish maqsadida, turli xildagi xomashyolar va materiallar aralashtiriladi. Demak, konditer mahsulotlarini ishlab chiqarishda ma'lum aralashmalarni olish uchun shakar, melassa, un, kakao, yong'oqlar, yog', tuxum va boshqalarni aralashtiradilar; muzqaymoq ishlab chiqarishda esa – sut, shakar, yog' va boshqa komponentlarni aralashtiradilar va hokazo.

Aralashmalar masalasini qo'yish uchun quyidagi axborotlarga ega bo'lish zarur:

- aniqlanadigan aralashma tarkibiga kirishi mumkin bo'lgan turli xildagi xomashyo va materiallar ro'yxati;
- har bir turdagi xomashyoning sifat tavsiflari, ya'ni hisobga olinadigan to'yimli elementlarning tarkibi va boshqa tavsiflar;
- to'yimli moddalar tarkibi nuqtai nazaridan aniqlanadigan aralashmaga bo'lgan talablar va boshqa tavsiflar;
- har bir turdagi ishlatilayotgan xomashyo birligining qiymati;
- izlanayotgan aralashmada har bir turdagi xomashyoning nisbati yoki mumkin bo'lgan chegaralari;
- har bir turdagi xomashyoning mavjudligi.

**Masala.** Faraz qilaylik, korxona 30% dan kam bo'lmagan oqsilli, 20% dan ko'p bo'lmagan yoqqa ega bo'lgan va 40% uglevodga ega bo'lgan mahsulotni ishlab chiqarish uchun uch turdagi xomashyodan foydalanishi mumkin. Har bir turdagi xomashyoda to'yimli moddalar mavjudligi quyidagi 4-jadvalda keltirilgan.

4-jadval

To'yimli moddalarning tarkibi (foizlarda) va bir birlik xomashyoning narxi (so'm)

| To'yimli moddalar | Xomashyo turlari | | |
|---|---|---|---|
| | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ |
| Oqsillar | 30 | 10 | 55 |
| Yog'lar | 15 | 20 | 24 |
| Uglevodlar | 45 | 60 | 10 |
| Bir birlik xomashyo bahosi, so'm | 3 | 2 | 5 |

$x_1$, $x_2$ va $x_3$ orqali har bir xomashyodagi mahsulot tarkibiga kiritilishining mos ravishda qidirilayotgan ulushini belgilaymiz. Bunda masalani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin: $f(x)$ minimal bo'lishi uchun $x_1$, $x_2$ va $x_3$ ning qidirilayotgan qiymatlarini topish zarur.

$$F(x)=3x_1+2x_2+5x_3 \rightarrow \min$$

quyidagi shartlarga rioya qilish zarur:

- ishlab chiqarilayotgan mahsulotda 30% dan kam bo'lmagan oqsilning mavjudligi:

$$0{,}3x_1+0{,}1x_2+0{,}55x_3 \geq 0{,}3;$$

- ishlab chiqarilayotgan mahsulotda 20% dan ko'p bo'lmagan yog'larning mavjudligi:

$$0{,}15x_1+0{,}2x_2+0{,}24x_3 \leq 0{,}2;$$

- ishlab chiqarilayotgan mahsulotda 40% uglevodlarning mavjudligi:

$$0{,}45x_1+0{,}6x_2+0{,}1x_3=0{,}4;$$

- bir birlik mahsulotni olish:

$$x_1+x_2+x_3=1;$$

- o'zgaruvchilarning manfiy bo'lmaslik sharti:

$$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0,\ \ x_3 \geq 0.$$

Keltirilgan masala oddiy chiziqli dasturlash masalasi bo'lib, uning yechimi izlanayotgan mahsulotning bir birligini ishlab chiqarishda har bir turdagi xomashyoning qatnashishi ulushini hamda mahsulotni ishlab chiqarishning minimal qiymatini ta'minlashni aniqlaydi. Bunday masala simpleks usuli bilan simpleks jadvallarida yoki EHMda maxsus dasturlar orqali yechilishi mumkin.

Masalani yechish natijasida quyidagi yechim olindi:

$x_1=0{,}35$; $x_2=0{,}36$; va $x_3=0{,}29$, ya'ni 30% dan kam bo'lmagan oqsilga, 20% dan ko'p bo'lmagan yog'larga va 40% uglevodga ega bo'lgan bir birlik yangi mahsulot olish uchun, uning tarkibiga 0,35 birinchi turdagi xomashyo; 0,36 birlik ikkinchi turdagi xomashyo va 0,29 birlik uchinchi turdagi xomashyoni kiritish lozim. Bunda ko'rsatilgan nisbatdagi uch xil xomashyoni aralashtirish yo'li bilan olinadigan yangi mahsulotning bir birligining minimal tannarxi 3 so'm 22 tiyinni tashkil etadi.

Keltirilgan masalada qidirilayotgan yangi mahsulot 3 xil turdagi xomashyoni aralashtirish asosida ishlab chiqariladi. Amalda esa ko'plab istalgan turdagi xomashyo turlari aralashtirilishi mumkin va ularda faqatgina 3 turdagi to'yimli moddalari hisoblanmasdan, balki undan ham ko'p bo'lishi mumkin. Shuning uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$j$ – har xil turdagi xomashyolar indeksi $(j=1,\ 2,\dots,\ n)$;

$n$ – qidirilayotgan yangi mahsulot tarkibiga kirishi mumkin bo'lgan barcha turdagi xomashyolar miqdori;

$i$ – aniqlanayotgan aralashma va har bir turdagi xomashyoda hisobga olinadigan turli xil ingredientlar (to'yimli moddalar) indeksi $(i = 1,\ 2,\ldots,\ m)$;

$m$ – hisobga olinadigan turli xil turdagi ingredientlar soni;

$a_{ij}$ – $j$-turdagi xomashyoning bir biriligida $i$-ingredientning miqdori;

$b_i$ – qidirilayotgan mahsulotning bir birligida $i$-turdagi ingredientning talab qilingan miqdori;

$x_j$ – yangi mahsulotning bir birligi tarkibiga kiritiladigan $j$-turdagi xomashyoning qidirilayotgan miqdori;

$c_j$ – $j$-turdagi bir-birlik xomashyoning qiymati.

Qabul qilingan belgilashlarni hisobga olib, qidirilayotgan aralashmani (qidirilayotgan bir birlik yangi mahsulot hisobida) optimallashning matematik modelini yozamiz:

$\Pi = \{x_j\}$ aralashmaning optimal tarkibi topilsin, buning uchun

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

maqsad funksiya qiymati eng kichik bo'lsin va quyidagi shartlar bajarilsin:

1) Qidirilayotgan aralashmada talab qilinadigan ingredientlar mavjudligi:

a) minimal chegara bo'yicha

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i\ ;$$

b) maksimal chegara bo'yicha

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i\ ;$$

c) berilgan miqdorda

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad (i = 1,\ 2,\ldots,\ m).$$

2) Bir birlik aralashmani tuzish:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1.$$

3) O'zgaruvchilarning manfiy bo'lmaslik sharti:

$$x_j \ge 0, \qquad (j = 1,\ 2,\ldots,\ n).$$

Masalani keltirilgan model bo'yicha yechishda qidirilayotgan bir birlik aralashmada har bir turdagi xomashyoning ulushi topiladi.

Ko'pchilik hollarda mavjud turdagi xomashyolar bo'yicha chegaralar beriladi, ulardan talab qilingan hajmda yangi mahsulot (qidirilayotgan aralashma) ishlab chiqariladi. $\alpha_j$ orqali $j$-turdagi xomashyo hajmini, $A$ orqali esa pastki chegara bo'yicha chegaralarda beriladigan yangi mahsulotlarga bo'lgan ehtiyoj, $y$ orqali esa turli xil xomashyolar aralashmasidan ishlab chiqarilgan yangi mahsulotning qidirilayotgan hajmini, $x_j$ orqali esa, yangi mahsulot tarkibiga kiruvchi $j$-turdagi xomashyoning qidirilayotgan miqdorini belgilaymiz. Qabul qilingan belgilashlar va yangi shartlarni hisobga olgan holda optimallash masalasining matematik modelini quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$\Pi = \{x_j, y\}$ topilsin, buning uchun

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min .$$

Quyidagi shartlar bajarilsin:

1) Qidirilayotgan aralashmada turli xil ingredientlarning mavjudligi:

a) minimal chegara bo'yicha

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \cdot y \geq 0 ;$$

b) maksimal chegara bo'yicha

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \cdot y \leq 0 ;$$

c) berilgan miqdorda

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \cdot y = 0, \qquad (i = 1,\ 2, \ldots,\ m).$$

2) Yangi mahsulotni ishlab chiqarish balanslari:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j - y = 0 .$$

3) Har bir turdagi xomashyodan foydalanish bo'yicha chegaraviy shart:

$$x_j \leq d_j, \quad (j = 1,\ 2, \ldots,\ n).$$

4) Yangi mahsulotni ishlab chiqarish hajmi bo'yicha chegaraviy shart:

$$y \geq A .$$

5) O'zgaruvchilarning manfiy bo'lmaslik sharti:

$$x_j \geq 0, \quad y \geq 0, \qquad (j = 1,\ 2, \ldots,\ n).$$

Oxirgi modelni murakkablashtirish mumkin. Birinchidan, mavjud turdagi xomashyolardan bir vaqtning o'zida aralashtirilgandan keyin, bir emas, balki bir necha yangi mahsulotlar ishlab chiqarish mumkin.

## Tayanch iboralar

Ishlab chiqarishda aralashmalar, aralashmaning optimal tarkibi to'yimli elementlar, ingredientlar, pirovard mahsulot, chiziqli dasturlash masalasi, resurslar va mahsulotlar indeksi, me'yorlar, maqsad funksiya, chegaraviy shartlar, noma'lumlarning manfiy bo'lmaslik sharti, optimal reja, optimal yechim, optimal tarkib.

## Takrorlash uchun savollar

1. Aralashmalar to'g'risidagi masalaning iqtisodiy ma'nosi nimada?
2. Aralashmaning optimal tarkibi deganda nimani tushunasiz?
3. Aralashmalar masalasini qo'yishda qanday axborotlarga ega bo'lish zarur?
4. To'yimli moddalar deganda nimani tushunasiz?
5. Aralashmani (qidirilayotgan bir birlik yangi mahsulot hisobida) optimallashning matematik modelini tushuntirib bering.
6. Minimal va maksimal chegara deganda nimani tushunasiz?
7. Aralashmalar masalasini yechishning usullarini ta'riflab bering.

## 2.5. Jihozlarni optimal yuklash masalasi

Jihozlarni optimal yuklash masalasining umumiy ko'rinishini matematik ifodalash uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$m$ – mahsulotlar ishlab chiqarishda taqsimlanadigan uskunalar va jihozlar soni;

$n$ – taqsimlanishi lozim bo'lgan mahsulot turlari soni;

$a_i$ – $i$-uskuna yoki jihozning ish vaqti fondi;

$b_j$ – $j$-turdagi mahsulotga bo'lgan talab;

$\lambda_{ij}$ – bir birlik vaqtda $j$-turdagi mahsulotni $i$-uskuna yoki jihozda ishlab chiqarish samaradorligi;

$c_{ij}$ – $i$-uskuna yoki jihozda $j$-turdagi mahsulotning bir birligini ishlab chiqarishga sarflanadigan xarajatlar;

$x_{ij}$ – $j$-turdagi mahsulotning bir birligini ishlab chiqarishda $i$-uskuna yoki jihozning ishlash vaqti birligi, ya'ni qidirilayotgan noma'lumlar.

Masalaning chegaraviy shartlarini tengsizliklar sistemasi ko'rinishida ifodalaymiz. Ulardagi ozod hadlar har bir uskuna yoki jihozning ish vaqti fondini bildiradi. Shunday qilib, uskuna yoki jihozlarning bir yoki bir necha turdagi mahsulotlarni ishlab chiqarishga sarflanadigan jami vaqti, o'rnatilgan ish vaqti fondidan oshib ketmasligi kerak. Bu holda tengsizliklar tizimi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1j}+\ldots+x_{1n}\le a_1 \\ x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2j}+\ldots+x_{2n}\le a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mj}+\ldots+x_{mn}\le a_m \end{cases} \qquad (1)$$

yoki

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\le a_i, \quad (i=1,\ 2,\ldots,\ m). \qquad (2)$$

Har bir iste'molchining ehtiyojlari har bir uskuna yoki jihozning, har bir turdagi mahsulotni ishlab chiqarishdagi samaradorligini ($\lambda_{ij}$ koeffitsienti), uning mos ravishda ishlash vaqtiga ($x_{ij}$ noma'lum) ko'paytmasining yig'indisi orqali aniqlanadi:

$$\begin{cases} \lambda_{11}\cdot x_{11}+\lambda_{21}\cdot x_{21}+\ldots+\lambda_{i1}\cdot x_{i1}+\ldots+\lambda_{m1}\cdot x_{m1}=b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_{1j}\cdot x_{1j}+\lambda_{2j}\cdot x_{2j}+\ldots+\lambda_{ij}\cdot x_{ij}+\ldots+\lambda_{mj}\cdot x_{mj}=b_j \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_{1n}\cdot x_{1n}+\lambda_{2n}\cdot x_{2n}+\ldots+\lambda_{in}\cdot x_{in}+\ldots+\lambda_{mn}\cdot x_{mn}=b_n \end{cases} \qquad (3)$$

yoki

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}x_{ij}=b_j, \quad (j=1,\ 2,\ldots,\ n). \qquad (4)$$

Uskuna va jihozlarni yuklash, ishlab chiqarish xarajatlarining eng kam sarf-xarajatlarini ta'minlashi lozim, bu esa bir birlik mahsulot ishlab chiqarishga sarflanadigan ishlab chiqarish xarajatlarini ($c_{ij}$), ishlab chiqariladigan mahsulot miqdoriga ko'paytmasining yig'indisi $(\lambda_{ij}\cdot x_{ij})$ orqali aniqlanadi:

$$F=c_{11}\lambda_{11}x_{11}+c_{12}\lambda_{12}x_{12}+\ldots+c_{ij}\lambda_{ij}x_{ij}+\ldots+c_{mn}\lambda_{mn}x_{mn}\to\min \qquad (5)$$

yoki

$$F=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\lambda_{ij}x_{ij}\to\min. \qquad (6)$$

Noma'lum o'zgaruvchilarning manfiy bo'lmasligi zarur, ya'ni

$$x_{ij}\ge 0. \qquad (7)$$

Uskuna va jihozlarni optimal yuklash masalasi quyidagicha tuziladi: berilgan (1), (3), (7) chegaraviy shartlarni qanoatlantiradigan va (6) maqsad funksiyada ifodalangan ishlab chiqarish xarajatlarining yig'indisini minimallashtiruvchi $x_{ij}$ noma'lumlarning manfiy bo'lmagan qiymatlarini topish zarur.

**Mahsulotlarning optimal assortimenti masalasi modeli.** Sanoat ishlab chiqarish korxonalarida turli xil mahsulot ishlab chiqarishni hisobga olgan holda assortiment masalasini hal qilish asosiy masalalardan biri hisoblanadi.

Mahsulotning optimal assortimenti masalasining modelini tuzish uchun quyidagi shartlar qabul qilinadi. Korxona ma'lum miqdordagi ishlab chiqarish resurslariga (xomashyo va materiallar, ishchi kuchi uskunalar va jihozlar) ega. Ishlab chiqariladigan mahsulotning bir birligiga o'rnatilgan me'yorlar chegarasida resurslar sarflanadi. Mahsulot turlari bo'yicha foyda miqdori turlichadir.

Umumiy foydani maksimallashtiruvchi va mahsulot ishlab chiqarishga sarflanadigan umumiy xarajatlar berilgan hajmdagi resurslar miqdoridan oshib ketmaydigan mahsulotlar assortimentini topish talab qilinadi.

Mahsulotning optimal assortimenti masalasining umumiy ko'rinishini tuzish uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$m$ – mahsulot assortimentining bir birligini ishlab chiqarishga sarflanadigan resurslar soni;

$n$ – korxona tomonidan ishlab chiqarilayotgan mahsulotlar yoki assortiment guruhlarining soni;

$a_{ij}$ – $j$-turdagi mahsulotning bir birligini ishlab chiqarishda $i$-xil resurs sarflari;

$b_i$ – $i$-xil resursning mavjud hajmi;

$c_j$ – $j$-turdagi mahsulotning bir birligining foydalilik darajasi (yoki narxi);

$x_j$ – ishlab chiqarish rejasiga kiritiladigan $j$-turdagi mahsulot miqdorini bildiruvchi, qidirilayotgan noma'lum o'zgaruvchi.

Masalaning matritsaviy ko'rinishdagi axboroti 5-jadvalda keltirilgan.

5-jadval.

**Masalaning matritsaviy modeli**

| Resurs turlari | Mahsulotning bir birligiga resurslar sarfi | | | | | | Resurslarning berilgan hajmi |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\Pi_1(x_1)$ | $\Pi_2(x_2)$ | ... | $\Pi_j(x_j)$ | ... | $\Pi_n(x_n)$ | |
| $P_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | ... | $a_{1j}$ | ... | $a_{1n}$ | $b_1$ |
| $P_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | ... | $a_{2j}$ | ... | $a_{2n}$ | $b_2$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $P_i$ | $a_{i1}$ | $a_{i2}$ | ... | $a_{ij}$ | ... | $a_{in}$ | $b_i$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $P_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | ... | $a_{mj}$ | ... | $a_{mn}$ | $b_m$ |
| Mahsulot bir birligining foydalilik darajasi | $c_1$ | $c_2$ | ... | $c_j$ | ... | $c_n$ | |

Jadvaldagi ma'lumotlar quyidagilarni ifodalovchi matematik modelni tuzishga yordam beradi:

1) Resurslar bo'yicha chegaraviy shartlar:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{8}$$

2) Noma'lum o'zgaruvchilarning manfiy bo'lmaslik sharti:

$$x_j \geq 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{9}$$

3) Maqsad funksiya:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max. \tag{10}$$

Mahsulotlarning optimal assortimenti umumiy masalasining matematik ifodasi quyidagicha: jami foyda, mahsulot qiymati vahokazolarni ifodalovchi maqsad funksiyaning maksimal nomanfiy qiymatini aniqlash lozim.

### Tayanch iboralar

Korxonalarda ishlab chiqarish jihozlari, jihozning ishlab chiqarish samaradorligi, resurslar va mahsulotlar indekslari, xarajatlarni minimallashtirish, maqsad funksiya, tengsizliklar sistemasi, optimal reja, optimal yechim, assortiment masalasi.

### Takrorlash uchun savollar

1. Korxonalarda jihozlardan optimal foydalanish zarurligini tushuntirib bering.
2. Jihozning ish vaqti fondi deganda nimani tushunasiz?
3. Korxonadagi jihozlarning samaradorligini tushuntirib bering.
4. Uskuna va jihozlarni optimal yuklash masalasini tuzishni tushuntirib bering.
5. Assortiment masalasi deb nimaga aytiladi?
6. Assortiment masalasining matematik modelini tushuntirib bering.
7. Assortiment masalasida optimal yechim tahlilini tushuntiring.

## 2.6. Muzqaymoq aralashmasi retsepturasini hisoblash

Ishlab chiqarishda qo'llaniladigan muzqaymoq retsepturasini hisoblash usullarida faqat texnologik shartlar hisobga olinib, iqtisodiy chegaralar esa hisobga olinmaydi. Shuning uchun ham tanlangan retsept, ya'ni bir birlik mahsulotga sarflanadigan xomashyo turi va miqdori muzqaymoq aralashmasining tannarxiga bog'liq bo'ladi, bunga esa o'z navbatida ishlab chiqarilayotgan mahsulot tannarxi va muzqaymoq ishlab chiqaruvchi korxonaning rentabelligi bog'liq bo'ladi.

Muzqaymoq aralashmasi retsepturasini hisoblashning iqtisodiy-matematik usuli barcha texnologik shartlarni hisobga olgan holda eng past tannarxda muzqaymoq aralashmasini tuzib berishga yordam beradi. Ushbu usul sutli, plombirli, qaymoqli muzqaymoqlar aralashmasini tuzishda ham qo'llanilishi mumkin. Ushbu turlardagi muzqaymoqning retsepturasini hisoblash, quyidagi iqtisodiy-matematik modelga asoslangan chiziqli dasturlash masalasini yechishga olib keladi.

Eng past tannarxga ega bo'lgan muzqaymoq aralashmasini tuzish talab qilinadi

$$L(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

va quyidagi texnologik shartlar bajarilishi lozim:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i;$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \le N_j;$$

$$x_j \ge 0, \quad (j=1,\ 2,\dots,\ n),$$

bu yerda:

$x_j$ – aralashma tarkibiga kiruvchi $j$-mahsulot birligi miqdori;

$a_{ij}$ – $j$-mahsulot (xomashyo) bir birligida $i$-element miqdorini belgilovchi matrisaning koeffitsienti;

$c_j$ – $j$-mahsulot (xomashyo) bir birligining ulgurji bahosi;

$n$ – aralashmani tayyorlashda qo'llash uchun mumkin bo'lgan xomashyo turlarining dastlabki miqdori;

$N_j$ – aralashmaga $j$-turdagi mahsulotni (xomashyoni) kiritishning mumkin bo'lgan me'yori.

**Muzqaymoq ishlab chiqaruvchi korxonaning assortiment masalasi.** Assortiment masalasining mohiyati shundaki, bir birlik mahsulotni ishlab chiqarishga berilgan barcha turdagi resurslardan xarajatlarni minimal mezon yoki maksimal samara beruvchi ishlab chiqariladigan mahsulotning turi va miqdorini aniqlashdan iborat. Samaradorlik mezoni sifatida foydani maksimallashtirish, tannarxini minimallashtirish, tovar mahsulotini maksimallashtirish mezonlaridan foydalaniladi.

Muzqaymoq ishlab chiqaruvchi korxonada mahsulot ishlab chiqarish assortimentini rejalashtirish masalasini qo'yish uchun dastlabki shartlar bo'lib, xomashyolar zaxiralari, asosiy uskuna va jihozlarning ishlab chiqarish quvvatlari, ushbu korxonada barcha turdagi ishlab chiqariladigan muzqaymoqlarning retsepturasi, turli xil retseptlar bo'yicha har xil muzqaymoqlarning 1 tonnasini ishlab chiqarishdan olinadigan foyda xizmat qiladi.

Muzqaymoq ishlab chiqaruvchi korxona assortiment masalasi modelini chiziqli dasturlash masalasi ko'rinishida yozish mumkin. Korxonaning mahsulot ishlab chiqarishda maksimal foyda olishga intilishini quyidagi maqsad funksiya tenglamasi orqali ifodalash mumkin:

$$\max L(x)=\sum_{j=1}^{n} P_j x_j$$

quyidagi chegaraviy shartlar bajarilishi zarur:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le B_i;$$

$$t_k \le x_j \le T_k;$$

$$x_j \ge 0, \quad (j=1,\ 2,\dots,\ n),$$

bu yerda:

$x_j$ – $j$-retsept bo'yicha ishlab chiqariladigan muzqaymoq miqdori;

$n$ – barcha turdagi muzqaymoqlar bo'yicha retseptlarning umumiy soni;

$a_{ij}$ – $j$-retsept bo'yicha 1 tonna muzqaymoq ishlab chiqarishga $i$-turdagi resurs sarflari;

$t_k$ – aholi talabini qondirish uchun $k$-turdagi muzqaymoq ishlab chiqarishning minimal miqdori;

$T_k$ – $k$-turdagi muzqaymoq ishlab chiqarishning maksimal miqdori;

$B_i$ – $i$-turdagi xomashyo resurslari;

$P_j$ – $j$-retsept bo'yicha 1 tonna muzqaymoq ishlab chiqarishdan olinadigan foyda.

Chiziqli dasturlash masalasida ishlab chiqarish quvvatlari bo'yicha shartlarni yozishda, muzqaymoqni ishlab chiqarishning texnologik jarayonida «tor joylar» hisoblangan yetakchi jihozni tenglamaga kiritish zarur.

Muzqaymoq ishlab chiqaruvchi korxonaning assortiment masalasini yechish natijasida faqatgina berilgan mezon bo'yicha optimal assortiment aniqlanib qolmasdan, balki qanday usul bilan, qaysi retsept bilan muzqaymoq ishlab chiqarish kerak, degan savolga javob olish mumkin. Bunday imkoniyatga assortiment masalasi shartiga simpleks usuli bilan oldindan hisoblangan har bir turdagi muzqaymoq uchun retseptura to'plamini kiritish orqali erishiladi.

**Kolbasa ishlab chiqarish korxonasining assortiment masalasi.** Kolbasa ishlab chiqarish korxonasi assortimentini rejalashtirishning iqtisodiy-matematik modeli, muzqaymoq ishlab chiqarish korxonasi assortimenti masalasiga o'xshashdir.

Kolbasa ishlab chiqaruvchi korxona maksimal foyda olish uchun mavjud resurslar va yetakchi jihozlarning quvvati yordamida, kolbasaning ayrim turlariga aholi talabini hisobga olgan holda har xil turdagi kolbasadan qancha ishlab chiqarish kerakligini aniqlashi zarur.

Korxonaning mahsulot ishlab chiqarishdan maksimal foyda olishga intilishini ifodalovchi maqsad funksiya quyidagi tenglama orqali aniqlanadi:

$$L(x)=\sum_{j=1}^{n} P_j x_j \to \max$$

korxonadagi resurslar va jihozlar quvvati bo'yicha quyidagi chegaraviy shartlar bajarilishi kerak:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad \left(j=\overline{1,n}\right), \quad \left(i=\overline{1,m}\right);$$

$$t_k \le x_j \le T_k;$$

$$x_j \ge 0, \quad \left(j=1,\ 2,\ldots,\ n\right),$$

bu yerda:

$x_j$ – $j$-turdagi kolbasa ishlab chiqarish miqdori;

$n$ – korxona ishlab chiqaradigan kolbasa turlarining umumiy miqdori;

$a_{ij}$ – $j$-turdagi kolbasaning bir birligini ishlab chiqarish uchun $i$-turdagi xomashyo sarflari;

$b_i$ – $i$-turdagi xomashyo hajmi;

$P_j$ – $j$-turdagi kolbasaning bir birligini (1 tonna, 1 sentner) ishlab chiqarishdan olinadigan foyda;

$t_k$ – $k$-turdagi kolbasaning minimal ishlab chiqarish miqdori;

$T_k$ – $k$-turdagi kolbasaning maksimal ishlab chiqarish miqdori.

Modelga kolbasa mahsulotlarini ishlab chiqarish hajmi bo'yicha kiritilgan ikki tomonli chegaraviy shart, odatda aholining ushbu kolbasa mahsulotlari turiga bo'lgan talabini yoki ushbu mahsulotni ishlab chiqarish imkoniyatlarining chegaralanganligini ifodalaydi.

Assortiment masalasini istalgan vaqt oralig'i: kunlik, dekada, oylik, kvartal, yarim yillik, yillik davrlar bo'yicha yechish mumkin.

Masalani simpleks usuli bilan yechish, iqtisodiy-matematik modelga kiritilgan shartlarning bir-biriga qarama-qarshi bo'lmagan optimal rejasini olishga imkon beradi. Ammo rejalashtirish davrida ba'zi bir mahsulot turlari tannarxi, yetakchi jihozlarning quvvatlari o'zgarishi mumkin. Avvaldan hisoblangan assortiment rejasi optimal bo'lmay qoladi va uni tuzatish yoki qaytadan hisoblash zarur bo'ladi.

### Tayanch iboralar

Ishlab chiqarish jarayoni, retsept tushunchasi, retseptura masalasi, tannarx, texnologik shartlar, chiziqli dasturlash masalasi, xarajatlar matritsasi, aralashma tarkibi, samaradorlik mezoni, maksimal foyda, minimal xarajatlar, jihozlar quvvati, simpleks usuli.

### Takrorlash uchun savollar

1. Retseptura deganda nimani tushunasiz?
2. Muzqaymoq aralashmasi retsepturasini tayyorlashda maqsad mezoni sifatida nima olinadi?
3. Muzqaymoq aralashmasi retsepturasini tayyorlashning matematik modelini tushuntirib bering.
4. Assortiment masalasining mohiyatini tushuntirib bering.
5. Assortiment masalasida samaradorlik mezonini tushuntirib bering.
6. Assortiment masalasining matematik modelini ifodalang.
7. Assortiment masalasining iqtisodiy ma'nosini tushuntirib bering.

## 2.7. Chiziqli dasturlashning transport masalasi

Iqtisodiyotda iste'molchilarni ishlab chiqaruvchilar bilan optimal biriktirishning asosiy matematik modeli bo'lib, chiziqli dasturlashning transport masalasi hisoblanadi va umumiy holda quyidagicha ta'riflanadi: $m$ ta ishlab chiqarish punktlarida $A_1, A_2, ..., A_m$ miqdorda bir xildagi mahsulotlar ishlab chiqarish tashkil etilgan. Bu mahsulotlarni $n$ ta punktlarda joylashgan iste'molchilarga $B_1, B_2, ..., B_n$ miqdorda yetkazib berish kerak. Ishlab chiqaruvchilar va iste'molchilar o'rtasida mahsulotni tashish xarajatlari – $c_{ij}$ ma'lum deb qabul qilinadi va transport xarajatlari matritsasi $C = (c_{ij})$ ni tashkil qiladi

Masalaning maqsadi – iste'molchilarni ishlab chiqaruvchilarga shunday biriktirish rejasini tuzish kerakki, natijada $A_i$ ishlab chiqaruvchi punktlarda taklif qilinayotgan mahsulotlar $B_j$ iste'mol punktlaridagi iste'molchilar talablariga mos ravishda tashib ketilsin va bunda umumiy transport xarajatlari miqdori minimal bo'lsin. Masalaning iqtisodiy-matematik modelini ifodalash uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$i$ – mahsulot ishlab chiqarish punktlari indeksi;

$m$ – mahsulot ishlab chiqarish punktlarining umumiy soni;

$j$ – mahsulotni iste'mol qilish punktlari indeksi;

$n$ – mahsulot iste'mol qilish punktlarining umumiy soni;

$A_i$ – $i$-ishlab chiqarish punkti mahsulotining taklifi;

$B_j$ – $j$-iste'molchi punktning mahsulotga bo'lgan talabi;

$c_{ij}$ – bir birlik mahsulotni $i$-ishlab chiqarish punktidan $j$-iste'molchi punktiga tashish xarajatlari;

$x_{ij}$ – $i$-ishlab chiqarish punktidan $j$-iste'molchi punktiga tashish kerak bo'lgan mahsulot hajmi, qidirilayotgan noma'lumlar.

Transport masalasini ifodalashning eng qulay shakli uni jadval ko'rinishiga keltirishdir. Bunday jadvalda masalaning barcha shartlari qulay joylashtirilgan bo'lib, masala mohiyati yaqqol ko'rinadi.

Transport masalasining matritsaviy modeli quyidagi 6-jadvalda keltirilgan.

6-jadval.

Transport masalasining matritsaviy modeli

| $A_i$ \ $B_j$ | $B_1$ | $B_2$ | ... | $B_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $c_{11}$ $x_{11}$ | $c_{12}$ $x_{12}$ | ... | $c_{1n}$ $x_{1n}$ |
| $A_2$ | $c_{21}$ $x_{21}$ | $c_{22}$ $x_{22}$ | ... | $c_{2n}$ $x_{2n}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| $A_m$ | $c_{m1}$ $x_{m1}$ | $c_{m2}$ $x_{m2}$ | ... | $c_{mn}$ $x_{mn}$ |

Yuqorida keltirilgan belgilashlar asosida transport masalasining asosiy shartlarini iqtisodiy-matematik model ko'rinishida tuzib chiqamiz. Transport masalasining asosiy sharti, ishlab chiqarilayotgan mahsulotlar taklifi iste'molchilarning talablariga teng bo'lishi kerak, ya'ni transport masalasi ochiq yoki yopiq ekanligi tekshiriladi. Bunda turli holatlar bo'lishi mumkin: agar mahsulot ishlab chiqarish taklifi, iste'molchilarning mahsulotlarga bo'lgan talabiga teng bo'lsa, ya'ni

$$\sum_{i=1}^{m} A_i = \sum_{j=1}^{n} B_j$$

bo'lsa, transport masalasi yopiq hisoblanadi.

Agar mahsulot ishlab chiqaruvchilari taklifi iste'molchilarning mahsulotga bo'lgan talabiga teng bo'lmasa, bunday transport masalasi ochiq transport masalasi deyiladi:

$$\sum_{i=1}^{m} A_i \neq \sum_{j=1}^{n} B_j .$$

Ochiq transport masalasi ikki holda vujudga kelishi mumkin:

a) iste'molchilarning mahsulotlarga bo'lgan talabi, mahsulot ishlab chiqaruvchilar taklifidan ortiq bo'lgan holda

$$\sum_{i=1}^{m} A_i < \sum_{j=1}^{n} B_j ;$$

b) mahsulot ishlab chiqaruvchilarning taklifi iste'molchilarning talabidan ortiq bo'lgan holda

$$\sum_{i=1}^{m} A_i > \sum_{j=1}^{n} B_j .$$

Ochiq transport masalasini yechishni qulay holga keltirish maqsadida uni yopiq holga keltirib olinadi. Buning uchun a) holdagi shartlarga qo'shimcha «fiktiv» ishlab chiqaruvchilar qo'shiladi va uning taklifi

$$A_{i+1}^{fikt} = \sum_{j=1}^{n} B_j - \sum_{i=1}^{m} A_i$$

formula bo'yicha aniqlanadi.

Ochiq transport masalasining b) holida esa, transport masalasi shartiga qo'shimcha «fiktiv» iste'molchi qo'shiladi va uning talabi

$$B_{j+1}^{fikt} = \sum_{i=1}^{m} A_i - \sum_{j=1}^{n} B_j$$

formula bo'yicha aniqlanadi.

Transport masalasi jadvalida keltirilgan «fiktiv» ishlab chiqaruvchi yoki «fiktiv» iste'molchilarning mahsulot tashish bilan bog'liq xarajatlari nolga teng deb olinadi va shuning uchun umumiy transport xarajatlari miqdoriga ta'sir o'tkazmaydi. Bu xarajatlarning nolga teng deb olinishiga sabab shundaki, haqiqatdan ham «fiktiv» ishlab chiqaruvchi yoki «fiktiv» iste'molchi umuman transport masalasini yechish uchun qulay holga keltirishda ishtirok etadi, aslini olganda esa, ular umuman mavjud bo'lmaydi. Shuning uchun ularda mahsulot tashish xarajatlari nolga teng deb qabul qilinadi.

Yuqoridagi shartlarni hisobga olib, transport masalasining iqtisodiy-matematik modelini tuzamiz.

Ishlab chiqaruvchilardan iste'molchilarga mahsulotlarni tashish bilan bog'liq bo'lgan umumiy transport xarajatlari minimal bo'lishi lozim:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min . \qquad (1)$$

Barcha ishlab chiqarish punktlarida ishlab chiqilgan mahsulotlarning umumiy hajmi barcha iste'molchi punktlarni talablarining umumiy hajmiga teng bo'lishi lozim:

$$\sum_{i=1}^{m} A_i = \sum_{j=1}^{n} B_j . \qquad (2)$$

Har bir ishlab chiqarish punkti taklif qilayotgan mahsulotlarning barchasi iste'molchilar talablarini qondirish uchun tashib ketilishi kerak:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = A_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \qquad (3)$$

Har bir iste'mol punktlarining talablari ishlab chiqarish punktlari taklif qilayotgan mahsulotlar hisobiga qondirilishi kerak:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = B_j, \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \qquad (4)$$

Barcha tashilayotgan mahsulotlar hajmi manfiy bo'lmasligi kerak:

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad (5)$$

Keltirilgan transport masalasining matematik modelini yoyilgan holda ham yozish mumkin. Bunda yuqoridagi shartlar quyidagi ko'rinishda yoziladi.

Masalaning maqsad funksiyasi:

$$F = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \ldots + c_{2n}x_{2n} + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots + c_{mn}x_{mn} \rightarrow \min \qquad (1')$$

Barcha ishlab chiqarish punktlarida ishlab chiqarilgan mahsulotlarning umumiy hajmi, barcha iste'molchi punktlar talablarining umumiy hajmiga teng bo'lishi lozim:

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_m = B_1 + B_2 + \ldots + B_n. \qquad (2')$$

Har bir ishlab chiqaruvchi punktdagi barcha mahsulotlar, iste'molchi punktlar talabini qondirish uchun tashib ketilishi lozim:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = A_1 \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = A_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = A_m \end{cases} \qquad (3')$$

Har bir iste'molchi punktning mahsulotga bo'lgan talabi ishlab chiqaruvchi punktlar hisobidan qondirilsin:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = B_1 \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = B_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = B_n \end{cases} \qquad (4')$$

Ishlab chiqaruvchilardan iste'molchilarga tashiladigan yuklar hajmi, ya'ni barcha noma'lumlar manfiy bo'lmaslik sharti:

$$x_{11} \geq 0, \; x_{12} \geq 0, \ldots \; x_{mn} \geq 0.$$

Iqtisodiy masalalarni transport masalasi modeli yordamida ifodalash va yechishda olingan natijalarni ishlab chiqarish va marketing faoliyatini tashkil etish nuqtai nazaridan talqin qilishda, uning maqsad mezonini to'g'ri belgilash muhim ahamiyatga ega. Hozirgi vaqtda transport masalasi yordamida turli iqtisodiy muammolarni hal qilishda optimallik maqsad mezoni sifatida quyidagi ko'rsatkichlardan foydalanish mumkin:

- tonna-kilometrlarda hisoblangan transport ishlari hajmi (mezon – masofa, kilometrlarda);
- mahsulotni ortish, tushirish va tashish jarayonlarini o'z ichiga olish bilan bog'liq bo'lgan xarajatlar (mezon – umumiy xarajatlar tannarxi, so'mda);
- mahsulotni tashish bilan bog'liq bo'lgan tarif stavkalari (mezon – tarif bo'yicha yuklarni tashish qiymati, so'mda);
- mahsulotni yetkazib berish muddati (mezon – tashish bilan bog'liq bo'lgan vaqt birligi, soatda, bir kecha-kunduzda);
- keltirilgan xarajatlar (mezon – transport vositalarini qayta tiklash va mahsulotni tashish bilan bog'liq xarajatlar birgalikda, so'mda).

Yuqorida keltirilgan optimallik mezonlaridan qay birini tanlash, har bir aniq hollarda yechilayotgan iqtisodiy masalaning mohiyati, ko'zlanayotgan maqsadlar va unga transport vositalarining ta'siri qanday ekanligidan kelib chiqadi.

Iqtisodiyotning ko'pgina masalalari qandaydir noyob resurslarni optimal taqsimlash muammosi bilan bog'liq bo'lgani uchun, ularni transport masalasi ko'rinishiga keltirib hal qilish mumkin. Buning uchun ushbu masalalar turli yo'llar bilan soddalashtirilib, transport masalasi shartlariga to'g'ri keladigan holga keltiriladi. Misol sifatida resurslarni taqsimlash, yangi bozorlarga kirib borish, faoliyat sohasini kengaytirish, ishlab chiqarishni qayta qurish va yangi quvvatlarni loyihalashtirish masalalarini olish mumkin.

Iqtisodiy adabiyotlarda transport masalasini yechishning bir necha usullari keltirilgan. Chiziqli dasturlash masalasining maxsus turi bo'lgan transport masalasini simpleks usuli yordamida ham yechish mumkin. Ammo transport masalasidagi noma'lumlarning va chegaraviy shartlarning xususiyatlaridan foydalangan holda uni yechishning bir qator maxsus usullari yaratilgan. Bularga diagonallar, taqsimlash, potensiallar, differensial renta, vengercha va Brudno usullari kiradi. Transport masalasini yechishda eng ko'p qo'llaniladigan usul - potensiallar usuli bo'lib, uning algoritmi kompyuter dasturlariga kiritilgan.

Transport masalasini potensiallar usuli yordamida yechish algoritmini ko'rib chiqamiz. Potensiallar usulidan foydalanish uchun transport masalasining dastlabki rejasi ma'lum bo'lishi kerak. Ushbu reja keyinchalik potensiallar usuli yordamida optimallashtiriladi. Buning uchun har bir $i$ - qatorga ($i$ -ishlab chiqaruvchiga) $u_i$ potensial qiymati belgilanadi va u masalaning iqtisodiy mazmuniga ko'ra, ishlab chiqarish punktida mahsulotni yaratish bilan bog'liq narxga teng, deb talqin qilinadi. Xuddi shuningdek, har bir $j$-ustunga ($j$-iste'molchiga) $v_j$ potensiali aniqlanadi va uni iste'mol qilish punktidagi mahsulot narxi, deb qabul qilish mumkin. Bundan shu kelib chiqadiki, mahsulotni iste'mol qilish punktidagi narxi, uni ishlab chiqarish punktidagi narxiga, uni iste'molchilarga tashib borish transport xarajatlarini qo'shish bilan aniqlanadi, ya'ni

$$v_j = u_i + c_{ij}.$$

Potensiallar usuli algoritmining mazmuni quyidagilardan iborat: algoritmning birinchi bosqichida dastlabki taqsimlash rejasi tuzib olinadi. Buning uchun bir nechta usullar mavjud: shimoli-g'arbiy burchak usuli, eng kichik qiymatlar, Fogel approksimatsiyasi va boshqalar. Ikkinchi bosqichda, $v_j = u_i + c_{ij}$ tenglikdan foydalanib, qator va ustunlar potensiallari hisoblab chiqiladi. Uchinchi bosqichda, boshlang'ich reja - dastlabki taqsimotning optimalligi tekshiriladi va uni optimalligi isbotlanmasa, to'rtinchi bosqichga o'tiladi.

Transport masalasida taqsimlangan mahsulot rejasini optimallik belgisi bo'lib, to'ldirilmagan katakchalarning xarakteristikalarining

$$E_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$

barchasi musbat qiymat qabul qilishidadir. Buning uchun har bir to'ldirilmagan katakchalarni xarakteristikalarini hisoblab chiqamiz. To'ldirilmagan katakchalardan qaysi biri eng kichik manfiy qiymat olsa, o'sha katakchadan boshlab yukni qayta taqsimlash boshlanadi. Buning uchun (–) minus katakchalardagi yuk hajmlari orasidan eng kichigi tanlanadi va sikl bo'yicha shu hajmdagi yuk (+) katakchalarga qo'yiladi, hamda (–) katakchalardan ayiriladi. Natijada mahsulot tashishning yangi rejasi hosil bo'ladi. Hosil bo'lgan rejani optimallik mezoni bo'yicha tekshiriladi, qaytadan qator va ustunlar potensiallari hisoblanadi. Ularga asoslanib, bo'sh katakchalar xarakteristikalari aniqlanadi. Bu jarayon bo'sh katakchalarning xarakteristikasi musbat bo'lmagunicha davom ettiriladi. Olingan natijaning optimallik belgisi yuk tashilmagan bo'sh katakchalar xarakteristikalarining manfiyligidir.

Endi yuqorida keltirilgan nazariy mulohazalarni amalda qo'llash uchun transport masalasini potensiallar usuli bilan yechishga harakat qilamiz.

**Masala.** Oziq-ovqat mahsulotlarini ishlab chiqarish punktlari $A_1$, $A_2$, va $A_3$ dan iste'molchi $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$ va $B_5$ punktlarga eng kam xarajatlar sarf qilib, mahsulotlarni tashish rejasini tuzish talab qilinsin. Ishlab chiqaruvchilarning taklifi va iste'molchilarning talablari, ular orasida mahsulotlarni yetkazib berish bilan bog'liq xarajatlar quyidagi jadvalda keltirilgan.

| $A_i$ \ $B_j$ | $B_1=40$ | $B_2=40$ | $B_3=30$ | $B_4=60$ | $B_5=30$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1=80$ | 2 $x_{11}$ | 3 $x_{12}$ | 1 $x_{13}$ | 5 $x_{14}$ | 3 $x_{15}$ |
| $A_2=40$ | 8 $x_{21}$ | 5 $x_{22}$ | 4 $x_{23}$ | 2 $x_{24}$ | 9 $x_{25}$ |
| $A_3=80$ | 6 $x_{31}$ | 7 $x_{32}$ | 7 $x_{33}$ | 9 $x_{34}$ | 8 $x_{35}$ |

Masalaning iqtisodiy-matematik modelini tuzamiz:

Maqsad funksiyasi

$$F = 2x_{11} + 3x_{12} + x_{13} + 5x_{14} + 3x_{15} + 8x_{21} + 5x_{22} + 4x_{23} + 2x_{24} + 9x_{25} +$$
$$+ 6x_{31} + 7x_{32} + 7x_{33} + 9x_{34} + 8x_{35} \to \min$$

ya'ni, ishlab chiqaruvchilardan iste'molchilarga barcha yuklarni tashishga ketadigan xarajatlar minimal bo'lsin.

Ishlab chiqaruvchilarning mahsulotlar taklifi bo'yicha chegaraviy shartlar:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 80 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 40 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 80 \end{cases}$$

Iste'molchilarning mahsulotlarga bo'lgan talabi bo'yicha chegaraviy shartlar:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 40 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 40 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 30 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 60 \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = 30 \end{cases}$$

Masalaning ochiq yoki yopiqligini tekshiramiz:

$$\sum_{i=1}^{3} A_i = \sum_{j=1}^{5} B_j ,$$

$$\sum_{i=1}^{3} A_i = 80 + 40 + 80 = 200 ,$$

$$\sum_{j=1}^{5} B_j = 40 + 40 + 30 + 60 + 30 = 200 .$$

Ishlab chiqaruvchilarning mahsulot taklifi 200 birlikka teng, iste'molchilarning mahsulotga bo'lgan talabi ham 200 birlikka teng ekan. Demak, masala yopiq transport masalasi ekan.

O'zgaruvchilarning manfiy bo'lmaslik sharti:

$$x_{11},\ x_{12}, \ldots,\ x_{35} \ge 0 .$$

Masalani potensiallar usuli bilan yechish uchun, uni dastlabki taqsimlash rejasini «shimoli-g'arbiy burchagi» usuli bilan aniqlaymiz. Buning uchun jadvalning shimoli-g'arbiy burchagidan boshlab, ishlab chiqaruvchi taklifi va iste'molchilar talablarini solishtirib, imkoni bo-richa qondirilishiga harakat qilinadi.

| $A_i$ \ $B_j$ | $B_1$=40 | $B_2$=40 | $B_3$=30 | $B_4$=60 | $B_5$=30 | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$=80 | 2 / 40 | 3 / 40 | 1 / 0 | 5 | 3 + | 0 |
| $A_2$=40 | 8 | 5 | 4 / 30 | 2 / 10 | 9 | 3 |
| $A_3$=80 | 6 + | 7 | 7 | 9 / 50 | 8 / 30 | 10 |
| $v_j$ | 2 | 3 | 1 | -1 | -2 | |

Natijada dastlabki reja hosil bo'ladi. Topilgan rejani bajarish xarajatlari quyidagiga teng:

$$F_1 = 2\cdot 40 + 3\cdot 40 + 4\cdot 30 + 2\cdot 10 + 9\cdot 50 + 8\cdot 30 = 80 + 120 + 120 + 20 + 450 + 240 = 1030 .$$

Endi birinchi qatorga «0» potensialini berib, to'ldirilgan katakchalar orqali qolgan qatorlar va ustunlar potensiallarini $c_{ij} = v_j + u_i$ formula orqali aniqlaymiz.

Keyingi bosqichda topilgan reja optimalligini aniqlash uchun to'ldirilmagan katakchalarning xarakteristikalarini $E_{ij} = c_{ij} - (v_j + u_i)$ ifoda orqali hisoblab topamiz.

Endi to'ldirilmagan katakchalar xarakteristikalarini aniqlaymiz:

$E_{14} = 5 - (0 - 1) = 6$; $E_{15} = 3 - (0 - 2) = 5$;

$E_{21} = 8 - (3 + 2) = 3$; $E_{22} = 5 - (3 + 3) = -1$;

$E_{25} = 9 - (3 - 2) = 8$; $E_{31} = 7 - (10 + 3) = -6$;

$E_{33} = 7 - (10 + 1) = -4$.

Eng kichik manfiy katak $E_{31} = -6$. Uni belgilab, zarur yopiq siklni hosil qilamiz. Manfiy $\ominus$ kataklardagi sonlarni ko'rib chiqamiz: 40 va 30, ulardan kichigi $\Delta_{35} = 30$ ni tanlab olamiz va uni zanjir bo'yicha qo'shib va ayirib chiqamiz.

| $A_i$ \ $B_j$ | $B_1$=40 | $B_2$=40 | $B_3$=30 | $B_4$=60 | $B_5$=30 | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$=80 | 2 / 10 | 3 / 40 | 1 / 30 | 5 | 3 + / 0 | 0 |
| $A_2$=40 | 8 | 5 | 4 | 2 / 40 | 9 | -3 |
| $A_3$=80 | 6 / 30 | 7 + | 7 | 9 / 20 | 8 - / 30 | 4 |
| $v_j$ | 2 | 3 | 1 | 5 | 4 | |

Yangi hosil bo'lgan rejani tekshiramiz:

$$F_2 = 2\cdot 10 + 3\cdot 40 + 1\cdot 30 + 2\cdot 40 + 6\cdot 30 + 9\cdot 20 + 8\cdot 30 = 850 .$$

Endi qator va ustunlar potensiallari hisoblanadi. Ularga asoslanib, bo'sh katakchalar xarakteristikalarini $E_{ij} = c_{ij} - (v_j + u_i)$ formula orqali hisoblaymiz:

$E_{14} = 5 - (5 + 0) = 0$; $\quad E_{15} = 3 - (4 + 0) = -1$;

$E_{21} = 8 - (2 - 3) = 9$; $\quad E_{22} = 5 - (3 - 3) = 5$;

$E_{23} = 4 - (1 - 3) = 6$; $\quad E_{25} = 9 - (4 - 3) = 8$;

$E_{32} = 7 - (4 + 3) = 0$; $\quad E_{33} = 7 - (1 + 4) = 2$.

Eng kichik manfiy katakchali xarakteristika $E_{15} = -1$ ni belgilab, unga (+) ishora qo'yiladi, ya'ni shu katakchaga mos yuk taqsimlash kerak bo'ladi. Endi shu qator va ustunda ⊖ belgilash uchun kataklar topiladi va ularni punktir chiziq bilan birlashtirib, yopiq sikl hosil qilinadi. Sikl bo'yicha $\Delta = 10$ birlik yuk aylantiriladi. Natijada yangi reja hosil bo'ladi va uni keyingi jadvalda keltiriladi hamda masalaning maqsad funksiyasi hisoblanadi:

$$F_3 = 3 \cdot 40 + 1 \cdot 30 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 40 + 6 \cdot 40 + 9 \cdot 20 + 8 \cdot 20 = 840 .$$

| $B_j$ / $A_i$ | $B_1$=40 | $B_2$=40 | $B_3$=30 | $B_4$=60 | $B_5$=30 | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$=80 | 2 | 3 40 | 1 30 | 5 | 3 10 | 0 |
| $A_2$=40 | 8 | 5 | 4 | 2 40 | 9 | -2 |
| $A_3$=80 | 6 40 | 7 | 7 | 9 20 | 8 20 | 5 |
| $v_j$ | 1 | 3 | 1 | 4 | 3 | |

Hisoblashni davom ettirib, bu rejani optimal yoki optimal emasligi tekshiriladi. Buning uchun yana qator va ustunlar potensiallari hisoblanadi va bo'sh katakchalarning xarakteristikalari aniqlanadi:

$E_{11} = 2 - (1 + 0) = 1$; $\quad E_{14} = 5 - (4 + 0) = 1$;

$E_{21} = 8 - (1 - 2) = 9$; $\quad E_{22} = 5 - (3 - 2) = 4$;

$E_{23} = 4 - (1 - 2) = 5$; $\quad E_{25} = 9 - (3 - 2) = 8$;

$E_{32} = 7 - (3 + 5) = -1$; $\quad E_{33} = 7 - (1 + 5) = 1$.

Bo'sh katakchalar orasida eng kichik manfiy qiymat $E_{32} = -1$ va shu katakka yuk taqsimlanadi, ya'ni (+) ishora bilan belgilanadi. Ustun va qatorlarda mos ravishda ⊖ belgilarni qo'yib, yopiq zanjir - sikl hosil qilinadi va u bo'yicha $\Delta = 20$ birlik yuk aylantiriladi. Yana yangi reja hosil bo'ladi.

| $A_i$ \ $B_j$ | $B_1=40$ | $B_2=40$ | $B_3=30$ | $B_4=60$ | $B_5=30$ | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1=80$ | 2 | 3<br>20 | 1<br>30 | 5 | 3<br>30 | 0 |
| $A_2=40$ | 8 | 5 | 4 | 2<br>40 | 9 | -3 |
| $A_3=80$ | 6<br>40 | 7<br>20 | 7 | 9<br>20 | 8 | 4 |
| $v_j$ | 2 | 3 | 1 | 5 | 3 | |

Olingan natija asosida transport xarajatlari hisoblanadi:

$$F_4 = 3\cdot 20 + 1\cdot 30 + 3\cdot 30 + 2\cdot 40 + 6\cdot 40 + 7\cdot 20 + 9\cdot 20 = 820\,.$$

Endi rejaning optimalligini isbotlash uchun qator va ustunlar potensiallari hisoblanib, bo'sh katakchalar xarakteristikalari aniqlanadi. Agarda aniqlangan xarakteristikalar musbat qiymatlarga ega bo'lsa, topilgan reja optimal hisoblanadi:

$$E_{11} = 2-(2+0)=0\,; \qquad E_{14} = 5-(5+0)=0\,;$$
$$E_{21} = 8-(2-3)=9\,; \qquad E_{22} = 5-(3-3)=5\,;$$
$$E_{23} = 4-(1-3)=6\,; \qquad E_{25} = 9-(3-3)=9\,;$$
$$E_{33} = 7-(1+4)=2\,; \qquad E_{35} = 8-(4+3)=1\,.$$

Shunday qilib, transport masalasining optimal yechimi quyidagilar:

$$x_{12}=20\,;\ \ x_{13}=30\,;\ \ x_{15}=30\,;\ \ x_{24}=40\,;\ \ x_{31}=40\,;\ \ x_{32}=20\,;\ \ x_{34}=20\,.$$

Maqsad funksiyaning qiymati $F=820$ ni tashkil qiladi va bu ko'rsatkich boshqa yechimlar orasida eng kichigi bo'lib, optimal yechimning minimal xarajati hisoblanadi.

Transport masalasini yechishda dastlabki rejani hosil qilishning turli xil usullari mavjud: «shimoli-g'arbiy burchak» usuli, «qatorlar bo'yicha minimum», «ustunlar bo'yicha minimum», «matritsalar bo'yicha minimum» va boshqalar. Yuqorida keltirilgan masalani yechish jarayonida «shimoli-g'arbiy burchak» usulini ko'rib o'tdik. Qatorlar bo'yicha minimum, ustunlar bo'yicha minimum usullarida birinchi qatordagi minimal element belgilanadi va ikkinchi qator, uchinchi qator va hokazo qatorlardagi minimal elementlar belgilanib, dastlabki reja shu katakchalarga yuk taqsimlash orqali aniqlanadi. Ustunlar bo'yicha minimum usuli ham xuddi shunday topiladi. Agarda ham qator, ham ustun bo'yicha minimal elementlarni belgilab chiqilsa, matritsa bo'yicha minimumga erishilgan bo'ladi. Bu usullarda aniqlangan dastlabki reja potensiallar usuli yordamida optimallashtiriladi.

Transport masalasini yechish algoritmi har xil usul uchun o'ziga xos bo'lib, turli amallar yordamida yechiladi. Amaliyotda bunday masalalarni yechish komputerlar yordamida amalga oshiriladi. Qaysi usulda yechishdan qat'iy nazar, transport masalasi yagona optimal yechimga ega bo'ladi (ba'zi hollarda turlicha rejalar ham bir xildagi mezonga ega bo'lishi ham mumkin).

Chiziqli dasturlash usullari yordamida iqtisodiyotning ko'pgina masalalari transport masalasi ko'rinishiga keltirib yechiladi. Bunga asosan taqchil resurslarni taqsimlash, ishchilarni ish o'rinlariga belgilash va boshqa masalalarni keltirish mumkin.

**Taqsimot masalasi.** $q$ ta turli xil mahsulotlarni $p$ ta har xil jihozlarda tayyorlash mumkin bo'lsin. Bir birlik $k$-mahsulotni $i$-jihozda tayyorlash uchun ketadigan xarajatlar matritsasi $c=\|c_{ik}\|$ va mahsuldorlik matritsasi $\lambda=\|\lambda_{ik}\|$ berilgan. Bundagi $\lambda_{ik}$ – $k$-mahsulotni $i$-jihozda ishlangandagi mahsuldorlik, (dona/soat hisobida). Har bir jihozning quvvati $a_1, a_2,..., a_i,..., a_p$ stanok/soat (yoki resurs vektori $\vec{a}=(a_1, a_2,..., a_n)$) hamda mahsulotlarni tayyorlash reja topshirig'i $b_1, b_2,..., b_k,..., b_q$ (yoki assortiment vektori $\vec{b}=(b_1, b_2,..., b_n)$) berilgan.

Reja topshirig'ini bajarish uchun ketadigan sarf minimal bo'lishini ta'minlaydigan taqsimot, ya'ni mahsulotlarni jihozlar bo'yicha taqsimlash talab qilinadi.

Ushbu masalaning matematik modelini tuzish uchun $n=p\cdot q$ ta manfiy bo'lmagan o'zgaruvchilar $x_{ik}$ ni ($k$-mahsulotni $i$-jihozda tayyorlash uchun ketadigan vaqt) kiritamiz. Bu o'zgaruvchilar resurslar bo'yicha chegaralovchi shartlarni

$$\sum_{k=1}^{q} x_{ik} \le a_i, \quad (i=1, 2,..., p) \qquad (1)$$

hamda talab bo'yicha shartlarni

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_{ik} x_{ik} \ge b_k, \quad (k=1, 2,..., q) \qquad (2)$$

shuningdek, o'zgaruvchilarning manfiy bo'lmaslik shartini

$$x_{ik} \ge 0, \quad (i=1, 2,..., p; \quad k=1, 2,..., q) \qquad (3)$$

qanoatlantiradilar.

(1) tengsizlikni tabiiy talab, ya'ni $i$-uskunada $k$-mahsulotni tayyorlashga ketadigan barcha vaqt mazkur uskunadagi ish vaqti fondidan oshmasligi kerak deb tushunish mumkin. (2) tengsizlik $k$-mahsulot rejada ko'zda tutilganidan ($b_k$) kam bo'lmasligini ifodalaydi.

Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, (1) va (2) shartlar birgalikdagi shartlar (korxonaning mavjud ishlab chiqarish quvvatlari reja topshirig'ini bajarishga yetarli) yoki birgalikda bo'lmagan shartlar (ishlab chiqarish quvvatlari yetarli emas) bo'lishi mumkin.

$k$-mahsulotni $i$-uskunada $\lambda_{ik}x_{ik}$ miqdorda tayyorlash uchun ketadigan sarf $c_{ik}\lambda_{ik}x_{ik}$ bo'ladi. Shuning uchun rejani bajarish uchun ketadigan umumiy xarajat

$$\sum_{k=1}^{q}\sum_{i=1}^{p} c_{ik}\lambda_{ik}x_{ik} \to \min . \qquad (4)$$

Endi qo'yilgan masalani chiziqli dasturlash usuli yordamida ifodalasak, u quyidagicha bo'ladi.

Shunday $n = p\ q$ o'zgaruvchi $x_{ik}$ larning qiymati topilsinki, ular (1), (2), (3) shartlarni qanoatlantirib, (4) funksiyaga minimum qiymat bersin. Keltirilgan barcha ma'lumotlarni 7-jadval ko'rinishida yozish mumkin.

7-jadval

Masalaning matritsaviy modeli

| Topshiriq rejasi, $j$ / Resurslar, $i$ | $b_1$ | $b_2$ | ... | $b_k$ | ... | $b_q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $c_{11}$ $x_{11}$ $\lambda_{11}$ | $c_{12}$ $x_{12}$ $\lambda_{12}$ | ... | $c_{1k}$ $x_{1k}$ $\lambda_{1k}$ | ... | $c_{1q}$ $x_{1q}$ $\lambda_{1q}$ |
| $a_2$ | $c_{21}$ $x_{21}$ $\lambda_{21}$ | $c_{22}$ $x_{22}$ $\lambda_{22}$ | ... | $c_{2k}$ $x_{2k}$ $\lambda_{2k}$ | ... | $c_{2q}$ $x_{2q}$ $\lambda_{2q}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $a_i$ | $c_{i1}$ $x_{i1}$ $\lambda_{i1}$ | $c_{i2}$ $x_{i2}$ $\lambda_{i2}$ | ... | $c_{ik}$ $x_{ik}$ $\lambda_{ik}$ | ... | $c_{iq}$ $x_{iq}$ $\lambda_{iq}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $a_p$ | $c_{p1}$ $x_{p1}$ $\lambda_{p1}$ | $c_{p2}$ $x_{p2}$ $\lambda_{p2}$ | ... | $c_{pk}$ $x_{pk}$ $\lambda_{pk}$ | ... | $c_{pq}$ $x_{pq}$ $\lambda_{pq}$ |

Taqsimot masalasini yechadigan umumiy usul ham mavjud. Lekin biz transport masalasini yechadigan usulga o'xshash xususiy holni ko'rib chiqamiz.

Faraz qilaylik, ixtiyoriy ikkita uskunaning unumdorligi proporsional bo'lsin. Uskunalardan birini «asosiy» uskuna sifatida tanlab olib, ixtiyoriy $i$-uskuna unumdorligini shu «asosiy» uskuna unumdorligiga nisbatini olamiz:

$$\frac{\lambda_{i1}}{\lambda_{11}} = \frac{\lambda_{i2}}{\lambda_{12}} = \ldots = \frac{\lambda_{ik}}{\lambda_{1k}} = \ldots = \frac{\lambda_{iq}}{\lambda_{1q}} . \qquad (5)$$

Bu teng munosabatlarni $\alpha_i$ orqali belgilab, bu $\alpha_i$ sonini $i$-uskunaning indeksı («asosiy» ga nisbatan) deymiz. Indeks mazkur uskunani asosiyga nisbatan necha marta unumdorligini ko'rsatadi.

(5) tenglikdan

$$\lambda_{ik} = \alpha_i \lambda_{1k}, \quad (i = 1, 2, ..., p; \quad k = 1, 2, ..., q). \qquad (6)$$

(6) tenglik masalaning barcha ma'lumotlarini bir xil birlikda ifodalash imkonini beradi. Bunday birlik sifatida asosiy uskunaning bir soatlik ishi olinadi va uni *standart soat* deb ataladi.

$i$-uskunaning quvvati $a_i$ soatni tashkil etadi, lekin uning unumdorligi asosiy uskunanikidan $\alpha_i$ marta katta bo'lgani uchun, standart soatga keltirilgan quvvat

$$\alpha_i a_i = a_i' \text{ standart soat } (i = 1, 2, ..., p) \qquad (7)$$

$i$-uskunada $k$-mahsulotni ishlab chiqarish uchun ketgan vaqt $x_{ik}$ bo'lgani uchun, bu vaqt standart soatda

$$x_{ik}\alpha_i = y_{ik} \qquad (8)$$

teng bo'ladi.

Reja topshirig'i $k$-mahsulot bo'yicha $b_k$ edi. Agar bu mahsulot bazaviy uskunada tayyorlanganda edi, u holda

$$\frac{b_k}{\lambda_{1k}} = b_k' \text{ standart soat} \qquad (9)$$

sarf bo'lar edi va nihoyat, $k$-mahsulotni $i$-uskunada tayyorlash uchun ketgan xarajat $c_{ik}$ edi. Demak, o'sha sarf 1 standart/soatda $c_{ik}\lambda_{ik} = c_{ik}'$ bo'ladi. $a_i'$, $b_i'$, $c_{ik}'$ miqdorlarning standart soatga keltirilgan resurs, talab va xarajat deyiladi.

Ko'rsatilgan barcha miqdorlarni (1), (2) va (4) ifodalarga qo'yamiz. (1) sistemaning $i$ tengsizligini $\alpha_i$ ga ko'paytirib,

$$\alpha_i \sum_{k=1}^{q} x_{ik} \le a_i \alpha_i \qquad (10)$$

hosil qilamiz.

$\alpha_i$ ni summa belgisi ostiga kiritib, so'ng keltirilgan miqdorlar $y_{ik}$ va $a_i'$ larga o'tsak,

$$\sum_{k=1}^{q} y_{ik} \le a_i', \quad (i = 1, 2, ..., p) \qquad (11)$$

(6) hamda (8) shartlardan $\lambda_{ik} x_{ik} = \lambda_{1k}\alpha_i x_{ik} = \lambda_{1k} y_{ik}$ ni hosil qilamiz. Bu ifodani (2) tenglikka qo'yib, $\lambda_{1k}$ ga bo'lsak hamda (9) ni e'tiborga olganimizda

$$\sum_{i=1}^{p} y_{ik} \le b_i', \quad (k = 1, 2, ..., q). \qquad (12)$$

Manfiy bo'lmaslik sharti (3) shunga o'xshash shart

$$y_{ik} \geq 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, p; \quad k = 1, 2, \ldots, q) \tag{13}$$

bilan almashadi.

Nihoyat, maqsad funksiyada

$$c_{ik} \lambda_k x_{ik} = c_{ik} \alpha_i \beta_k \frac{y_{ik}}{\alpha_i} = c'_{ik} y_{ik}$$

bilan almashib,

$$Z = \sum_{k=1}^{q} \sum_{i=1}^{p} c_{ik} y_{ik} \to \min. \tag{14}$$

bo'ladi.

## Mustaqil yechish uchun misollar

**1-misol.** Tumanda 4 ta non mahsulotlari ishlab chiqarish korxonalari mavjud va ularning non mahsulotlarini ishlab chiqarish quvvatlari quyidagicha: $A_1$=35000 dona; $A_2$=25000 dona; $A_3$=15000 dona; $A_4$=25000 dona.

Ushbu non mahsulotlarini sotish bo'yicha tumanda 5 ta do'kon mavjud bo'lib, ularning non mahsulotlariga talabi quyidagicha: $B_1$=20000 dona; $B_2$=15000 dona; $B_3$=25000 dona; $B_4$=30000 dona; $B_5$=10000 dona.

Bir birlik non mahsulotini ishlab chiqaruvchilardan iste'molchilarga tashish xarajatlari quyidagi jadvalda keltirilgan:

| $A_i$ \ $B_j$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 4 | 2 | 1 | 5 | 2 |
| $A_2$ | 1 | 5 | 2 | 7 | 4 |
| $A_3$ | 2 | 1 | 3 | 5 | 6 |
| $A_4$ | 3 | 6 | 4 | 2 | 3 |

Berilgan ma'lumotlar asosida quyidagilar aniqlansin:

1. Masalaning iqtisodiy-matematik modeli.
2. Masala ochiq yoki yopiq ekanligi.
3. Masalaning yoyilgan iqtisodiy-matematik modeli.
4. Masalani potensiallar usuli yordamida yeching.
5. Tumanda barcha iste'molchilarning ehtiyojlari to'liq qondirilsin va transport xarajatlari eng kam bo'lsın.

**2-misol.** Quyida 6 ta fermer xo'jaliklaridan 4 ta konserva ishlab chiqaruvchi korxonalarga sabzavot mahsulotlarini tashish bo'yicha ma'lumotlar keltirilgan.

| $B_j$ / $A_i$ | $B_1=300$ | $B_2=200$ | $B_3=400$ | $B_4=100$ | $B_5=200$ | $B_6=200$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1=270$ | 1 | 5 | 4 | 6 | 2 | 3 |
| $A_2=330$ | 7 | 3 | 6 | 3 | 4 | 7 |
| $A_3=500$ | 5 | 4 | 2 | 4 | 6 | 3 |
| $A_4=200$ | 2 | 6 | 5 | 3 | 2 | 1 |

Berilgan ma'lumotlar asosida quyidagilar aniqlansin:

1. Masalaning iqtisodiy-matematik modeli.
2. Masala ochiq yoki yopiq ekanligi.
3. Masalaning yoyilgan iqtisodiy-matematik modeli.
4. Masalani potensiallar usuli yordamida yechib, eng kam xarajatlar ketadigan optimal reja.

**3-misol**. Transport masalasi to'g'risida ma'lumotlari keltirilgan:

$$A_i=\begin{pmatrix}200\\150\\50\\300\end{pmatrix}\ \left(i=\overline{1,4}\right);\quad B_j=\begin{pmatrix}100\\200\\150\\150\\200\end{pmatrix}\ \left(j=\overline{1,5}\right);\ t_{ij}=\begin{pmatrix}2&2&5&1&3\\3&4&1&5&6\\1&5&3&4&2\\1&2&1&4&5\end{pmatrix}$$

Ushbu ma'lumotlar asosida quyidagilarni aniqlang:

1. Masalaning iqtisodiy-matematik modeli.
2. Masala ochiq yoki yopiq ekanligini.
3. Masalaning yoyilgan iqtisodiy-matematik modelini.
4. Masalani potensiallar usuli yordamida yechib, eng kam xarajatlar ketadigan optimal reja.

## Tayanch iboralar

Ishlab chiqarilgan mahsulotlar va yuklarni taqsimlash, transport masalasi, ishlab chiqarish va iste'mol punktlari, transport xarajatlari, ishlab chiqaruvchilar va iste'molchilar indeksi, transport masalasining jadval ko'rinishi, transport masalasining kanonik ko'rinishidagi matematik modeli, maqsad funksiya, ishlab chiqaruvchilar va iste'molchilar bo'yicha chegaraviy shartlar, yoyilgan modeli, ochiq va yopiq model, «fiktiv» ishlab chiqaruvchi va iste'molchi, yuklarni taqsimlash usullari: «shimoliy-g'arb burchak» usuli, potensiallar usuli.

## Takrorlash uchun savollar

1. Transport masalasining iqtisodiy ma'nosini tushuntirib bering.
2. Transport masalasi maqsad funksiyasining iqtisodiy ma'nosi nimadan iborat?

3. Transport masalasi chegaraviy shartlarining iqtisodiy ma'nosini tushuntirib bering.
4. Yopiq va ochiq transport masalasini tushuntirib bering.
5. Ochiq transport masalasini yopiq holga keltirish uchun nima qilish kerak?
6. «Fiktiv» iste'molchi va «fiktiv» ishlab chiqaruvchi deganda nimani tushunasiz?
7. Transport masalasining maqsad mezoni sifatida qanday iqtisodiy ko'rsatkichlardan foydalanish mumkin?
8. Transport masalasini yechishning qanday usullarini bilasiz?
9. Transport masalasini yechishning potensiallar usulini tushuntirib bering.
10. Transport masalasini yechishning potensiallar usulini algoritmi qanday tartibda bajariladi?
11. Transport masalasini yechishda «shimoli-g'arbiy burchak» usuli nima maqsadda qo'llaniladi?
12. Taqsimot masalasi deb nimaga aytiladi?
13. Mahsuldorlik matritsasining iqtisodiy ma'nosini tushuntirib bering.
14. Uskunalar unumdorligini tushuntirib bering.
15. Standart soat qanday aniqlanadi?

# 3-BOB. IQTISODIY-STATISTIKA USULLARI

## 3.1. Iqtisodiy-statistik modellashtirish

Iqtisodiy jarayonlarni vaqt davomida o'zgarishini o'rganish muhim ahamiyatga ega. Chunki barcha iqtisodiy jarayonlar va hodisalar vaqt davomida o'zgaruvchan bo'ladi. Iqtisodiyotda barcha iqtisodiy jarayonlarni iqtisodiy-statistik modellar orqali o'rganish natijasida u yoki bu iqtisodiy ko'rsatkichning hozirgi holati va kelajakdagi o'zgarishini ilmiy asosda tahlil qilish va bashoratlash mumkin bo'ladi.

Iqtisodiy-statistik modellashtirish usuli – bozor iqtisodiyoti sub'ektlarining iqtisodiy faoliyati tahlili va rejalashtirishni takomillashtirishga qaratilgan tadbirlardan biridir.

Iqtisodiy-statistik modellashtirish iqtisodiy ko'rsatkichlar va ishlab chiqarish omillari o'rtasidagi aloqalar o'z mohiyatiga ko'ra stoxastik bo'lgan asosga tayanadi. Iqtisodiy sub'ektlar faoliyatini statistik modellashtirish zamon va makonda ularning rivojlanish jarayonini o'rganishda asosiy o'rin egallaydi. Bu modellar ishlab chiqarish tendensiyalari va qonuniyatlarini aniqlash uchun moslashgandir.

Hatto eng takomillashgan statistik model ham iqtisodiy hodisa va jarayonlarning butun aloqadorligini qamrab olishga qodir emas. Shunga ko'ra, iqtisodiy tahlil va iqtisodiy-statistik modellashtirishni qo'llashda har doim noaniqlik elementlari mavjud bo'ladi. Odatda, iqtisodiy-statistik modellashtirishni qo'llash samaradorligining asosiy shartlaridan biri uning aniq ko'rinish va jarayonga aynan mos kelishi hisoblanadi.

Iqtisodiy-statistik modellashtirishni noaniq bo'lmasligining sabablari quyidagi hollarda sodir bo'lishi mumkin:

1. Axborotli – axborotning xatoligi, uning ko'rsatkichlari, omillar va ob'ektlar majmuining noaniqligi.
2. Tarkibiy – aniqlanmagan xilma-xilliklarning mavjudligi.
3. Modelli – ko'rsatkich va faktlar o'rtasida bog'lanish shakllaridan noto'g'ri foydalanish.

Iqtisodiy-statistik kuzatuvlar olib borilganda, texnik-iqtisodiy ko'rsatkichlar ko'rinishidagi, materiallar oqimidagi axborotlarga duch kelamiz. Shu nuqtai nazardan, ishlab chiqarishga - kirish axborotini, chiqish axborotiga o'zgartirgich sifatida qaraladi.

Korxona faoliyatini o'zida mujassamlashtirgan barcha ko'rsatkichlarni quyidagi 3 ta guruhga bo'lish mumkin:

a) kiritiladigan ma'lumot – moddiy resurslar xarajatining ko'lami va tarkibi (xomashyo, asosiy fondlar, ishchi kuchi va boshqalar);

b) ishlab chiqarish jarayonida resurslardan foydalanish sharoiti (ishlab chiqarishning texnologik sharoiti, tabiiy sharoiti va boshqalar);

c) chiqish ma'lumotlari – ishlab chiqarish natijalari (tayyor mahsulot hajmi, uning tarkibi, sifati va boshqalar).

Bir tomondan chiqish ko'rsatkichlari bilan ikkinchi tomondan barcha qolganlari o'rtasida kiritiladigan ko'rsatkichlar ta'siri hamda chiqish ma'lumotlarida ishlab chiqarish ehtiyojlari sharoitini o'zida mujassamlashtirgan qandaydir qonuniy aloqa mavjud. Bunday aloqa modeliga ega bo'lgach, iqtisodiy xarakterdagi hisob-kitoblarni olib borish hamda chiqish ma'lumotlarini boshqarish mumkin.

**Iqtisodiy-statistik modellarning tasnifi.** Modellar vazifasidan amalda rejali-iqtisodiy foydalanish tushunchasi kompleks tushunchaga ega. U o'zida model tuzishning funksional maqsadini, mo'ljallangan korxonaning ma'muriy-xo'jalik saviyasini, undan foydalanishdagi vaqt oralig'ini o'zida mujassamlashtirgan bo'lishi lozim. Yuqoridagi tushuncha asosida model vazifasidan foydalanish modeldan aniq talablar xarakteristikasini talab etadi. Bunday xarakteristikalar sifatida quyidagilarni ko'rsatish mumkin:

a) modellashtirish uchun mo'ljallangan ko'rsatkichlar to'plami;

b) modellashtirish uchun tadqiqotlar ko'lami va ob'ekt rivojlanish darajasi;

v) iqtisodiy jarayonlar dinamikasining hisobot darajasi;

g) o'zgaruvchan modellarning xarakteri va to'plami;

d) modelning umumiylik darajasi.

Modellashtirilayotgan iqtisodiy ko'rsatkichlar turi bo'yicha resurslarni mahsulotga (ishlab chiqarish hajmi) aylantirgich intensiv oqimlari ko'rsatkichi modeli bilan turli umumiylik darajasi (materiallar xarajatining salmog'i, tannarx, rentabellik, mehnat xarajatlari va boshqalar) o'zgartirgich samaradorlik darajasi ko'rsatkichlari modeli o'rtasidagi farqni ajrata bilish kerak.

Birinchi xildagi ko'rsatkichlarni xohlagan darajadagi sanoat ob'ektlari uchun modellashtirish mumkin. Ishlab chiqarish samaradorligi ko'rsatkichidan esa odatda, quyi darajadagi sanoat ishlab chiqarish tizimi uchun shaxsiy ko'rsatkichlar modellashtiriladi. Mana shu tasnif qilingan alomatlarga ko'ra, bir ko'rsatkich modelidan ko'rsatkichlar vektori shakllanish jarayonini tavsiflanayotgan modelni farq qilish lozim.

Tadqiqotlar ko'lamiga ko'ra, ikki xildagi modellarni ko'rsatib o'tish mumkin:

1. Korxona ichi.

2. Korxonalararo tahlil va rejalashtirish modellari.

Birinchi turdagi modellar ayrim korxonalar doirasida foydalanish uchun mo'ljallangan. Ikkinchi turdagi modellar esa, bir guruhdagi sanoat ob'ektlari bo'yicha tahlil va qarorlar qabul qilish uchun mo'ljallangan. Bunday taqsimlanish qisman ob'ekt darajasini modellashtirish bilan mos keladi.

Iqtisodiy jarayonlar dinamikasini aks ettirish mohiyatiga ko'ra, statik va dinamik modellar mavjud.

Statik modellar o'zida vaqtning ayrim, qayd qilingan oralig'ini qamrab oladi. Dinamik model vaqtning izchil oraliq tizimi holatini aks ettiradi. O'zgaruvchan xarakterga ko'ra, boshlang'ich iqtisodiy ishlab chiqarish omillari yoki aralash omillarni o'z ichiga olgan modellarni ko'rsatish mumkin.

Ishlab chiqarishning boshlang'ich omillari deganda, keyinchalik taqsimlab bo'lmaydigan oddiy omillar, masalan, resurslar xarajati - jonli mehnat, vosita, mehnat qurollari tushuniladi. Modelning tuzilishiga qarab, ularni modelga turli o'lchov birligi (natural, qiymat) va turli aniqlik darajasi bilan kiritish mumkin. Bunday holda ularning boshlang'ich xarakteri saqlanadi.

Quyidagi modellar turi boshlang'ich va ishlab chiqarish omillarining turli kombinatsiyalarini beradi:

a) ishlab chiqarish natijalarining boshlang'ich resurslar xarajati darajasi va tarkibiga hamda ishlab chiqarish ehtiyojlari sharoitiga bog'liqligini xarakterlaydigan to'liq modellar;

b) ishlab chiqarish ehtiyojlari sharoiti ob'ektlari guruhi yoki vaqt bo'yicha barqaror hisoblangan paytlarda qo'llaniladigan «vazifalar - mahsulot ishlab chiqarish» modeli;

c) ishlab chiqarish texnik-iqtisodiy ko'rsatkichlar o'rtasidagi o'zaro va boshlang'ich ishlab chiqarish omillari bilan aloqalarini xarakterlovchi turli xil modellar.

Modellar o'zgaruvchanligiga ko'ra, umumiy va xususiy modellarga bo'linadi. Umumiy model o'lchanadigan alomatlarning barchasini hamda o'rganilayotgan ishlab chiqarish jarayonining bir tomonini, masalan, tabiiy sharoit belgilarini qisman o'z ichiga oladi. Alomatlarning barchasini o'z ichiga olgan model bilan xususiy (masalan, faqat tabiiy sharoit omillari) modelni taqqoslab, ishlab chiqarish tabiiy iqlim omillarining ta'siri qaysi vaqtda ko'proq, qaysi vaqtda kamroq bo'lishini aniqlash mumkin.

Umumiylik darajasi bo'yicha iqtisodiy ko'rsatkichlar avtonom sistemasidagi farqlarni ajrata bilish lozim. Birinchi xil modellar mustaqil foydalanish, ikkinchi xil modellar esa qandaydir tizimdagi modellarning organik tarkibiy qismi hisoblanadi. Bu esa o'z navbatida ularga ma'lum talablar kompleksini yuklaydi va ularni qo'llash xarakterini aniqlaydi.

Tasniflashning mana shu turiga modellarning bir sathli, pog'onali va ko'p sathli bo'linishi ham kiradi. Ayrim hollarda ishlab chiqarish boshlang'ich omillarining katta sonlarni hisobga olish va xususiy texnik-iqtisodiy ko'rsatkichlar orqali ularni samaradorlikning umumiy sintetik ko'rsatkichlariga ta'sirini tekshirish xususiyati bilan ikkinchi sxema ustun turadi.

Pog'onali, ko'p sathli modellar faqat turli darajadagi iqtisodiy aloqalarni aks ettirish uchun tuzilmay, balki turli davrlarga mansub bo'lgan iqtisodiy ko'rsatkichlarni modellashtirish yo'li bilan aniqlash uchun ham tuziladi.

Modellarni tuzilishi bo'yicha tasniflash jarayoni modellar yordamida ifodalash va boshlang'ich axborotdan foydalanish xarakteri alomati bo'yicha tasniflashdan iborat. Birinchi xil alomat (belgi) bo'yicha ikki xil statistik modellarni ko'rsatish mumkin. Ular prognozlarni tavsiflash va tushuntirish modellaridir.

Tavsiflash modellari – o'zgaruvchan o'zaro aloqalarni eng yaxshi tarzda tavsiflaydigan regressiyalarni tenglashtirish modeli hisoblanadi. Bunday hollarda modellar parametri mazmundor ma'noga ega bo'lmaydi. Mazkur parametrlar qiymatini belgilashda approksimatsiya, ya'ni tavsiflanayotgan o'zgaruvchan kirish bilan tavsiflanayotgan chiqish o'rtasidagi statistik muvofiqlik barqarorlik vazifalari hal etiladi.

Ko'pincha tavsiflash modellarini tuzish vaqtida iqtisodiy ko'rsatkichlarning aralash faktlaridan foydalaniladi. Bunday hollarda tadqiqotchilarni dalil sifatida tanlab olingan ko'rsatkichlar funksiyalarning o'zgarishiga sabab bo'lgan yoki bo'lmaganligi haqidagi statistik dalil qiziqtiradi. Tushuntirish – prognozlash modelining nomi, uning milliy iqtisodiyotda qanday rol tutishini aniq tushuntiradi. Ular belgilangan faktlar majmui, gipotezalar o'rtasidagi muvofiqlikni aniqlaydi. Bunday omillar – dalillarni taqqoslash asosida prognozlashtirilayotgan ko'rsatkich shakllanish mexanizmini o'rganish, ya'ni sanoat ob'ekti rivojlanishining harakatlantiruvchi kuchlarini aniqlash masalasi turadi.

Tushuntirish prognozlash modeli parametrlarini baholashda aynan tenglashtirish masalasi hal qilinadi. Masalaning mohiyati qandaydir to'g'ri keladigan statistik usullar yordamida chuqur ma'noli farazlar asosida tuzilgan tenglamalarning noma'lum parametrlarini qidirib topishdan iborat. Binobarin, identifikatsiya masalalarining approksimatsiya masalalaridan farqi shundaki, unda oldindan o'zgaruvchan bog'lanish tarkibi berilgan bo'ladi.

Ikkinchi alomat bo'yicha modellarni tasniflash, iqtisodiy ko'rsatkichlar variatsiyasi bo'yicha tasniflashga mos keladi. Quyidagi uch xil iqtisodiy variatsiyalar mavjud:

a) vaqtdagi ayrim ob'ektlar;

b) makonda ob'ektlar majmui;

c) vaqt va makonda ob'ektlarning to'plam ko'rsatkichlarining umumiy variatsiyasi.

Birinchi xil variatsiyani davrlar oralig'i izchilligida, iqtisodiy ko'rsatkichlar fazasida ma'lum ob'ekt holatining o'zgarishi sifatida tasavvur qilish mumkin. Iqtisodiy ko'rsatkichlardan birini modellashtirayotgan vaqtda, makon tekislikka aylanadi. Nuqtaning harakat trayektoriyasi esa dinamik qatorni tashkil etadi.

Variatsiyaning ikkinchi turi vaqt oralig'ida ma'lum vaziyatda belgilangan turli ob'ektlarga, ya'ni fazoda perpendikulyar vaqtdan qo'llashga mos keladigan nuqtalar joylashishiga o'xshash bo'ladi. Iqtisodiy ko'rsatkichlardan biri modellashtirilayotgan hollarda – bu taqsimot qatori hisoblanadi.

Variatsiyaning uchinchi umumiy turi oldingi ikki shaxsiy turlarning qo'shilgan variatsiyasi bo'lib, diskret tasodifiy jarayon sifatida talqin qilinishi mumkin.

Ko'rsatkich umumiy variatsiyalarining shakllanishini quyidagi ikki xil usul bilan ifodalash mumkin:

– majmuaga kiradigan ob'ektlar ko'rsatkichi vaqtli qatorlarning umumiyligi sifatida;

– majmuaga kiradigan ob'ektlar ko'rsatkichi taqsimot qatorlarining harakati sifatida.

Korxonalar ko'rsatkichlarini iqtisodiy modellashtirish jarayonida, odatda, dinamik qatorlar qisqa, ob'ektlar soni majmuida vaqtli qatorlar sonidan birmuncha ortiq bo'lganda tavsiflashning ikkinchi turi maqsadga muvofiq hisoblanadi.

Variatsiyaning yuqorida qayd etilgan turlariga muvofiq ravishda iqtisodiy ko'rsatkichlarning uchta statistik modellarini ko'rsatib o'tish mumkin:

1. *Xususiy dinamik model.* Ayrim korxonalarning xususiy dinamik modeli makonda iqtisodiy ko'rsatkichlar ma'lum nuqtasi vaqtli harakatini makonda mazkur ob'ektning ishlab chiqarish omillari bilan bog'laydi. Bunday model ko'pchilik hollarda korxona ichki tahlili, normallashtirish va boshqarish uchun qo'llaniladi.

2. *Xususiy fazoviy model.* Ob'ektlar majmui iqtisodiy ko'rsatkichlari xususiy fazoviy modeli korxonalar iqtisodiy ko'rsatkichlarining fazodagi turli holatini tushuntiradi. Odatda bu model korxonalar (sexlar) darajasi uchun tuziladi hamda yanada

yuqoriroq darajada (vazirlikda) analitik maqsadlar uchun foydalaniladi.

3. *Umumiy dinamik model.* Ob'ektlar majmui iqtisodiy ko'rsatkichlar nazariyasining umumiy dinamik modellari ixtiyoriy o'zgaruvchan iqtisodiy ko'rsatkichlarga ishlab chiqarish omillarining ta'sirini baholaydi. Mazkur modellardan o'rganilayotgan ob'ektlar guruhini tahlil va prognoz qilish hamda qarorlar qabul qilishda foydalaniladi.

Texnik-iqtisodiy ko'rsatkichlarni o'rganishda uch xil masala mavjud. Bu masalalarni yechishda statistik modellashtirish usullarini muvaffaqiyatli qo'llash mumkin.

– iqtisodiy jarayon tarkibini o'rganish;

– iqtisodiy hodisalar dinamikasini o'rganish;

– iqtisodiy hodisalar o'rtasidagi aloqa va bog'lanishlarni o'rganish.

Iqtisodiy jarayonlar tarkibini o'rganishda quyidagilarga e'tibor berish kerak:

a) tarkibni baholash va ularning qismlarini o'zaro taqqoslash;

b) bir xil turdagi turli tarkiblarni taqqoslash;

c) amaldagi tarkibni normallashtirilgan tarkib bilan taqqoslash va chetlanish sabablarini aniqlash;

d) mazkur tarkibning eng muvofiq ekanligini baholash;

e) makon va vaqtning konkret sharoiti uchun eng qulay tarkibni loyihalashtirish.

Hodisalar o'rtasidagi bog'lanishni ifoda etuvchi statistik modellarni tuzish vaqtida korrelyatsiya va regressiya tahlil usuliga katta e'tibor beriladi. Mazkur usullar turli statistik mezonlar yordamida o'rganilayotgan ko'rsatkichga har bir omilning ta'sir darajasini aniqlash va baholash imkonini beradi. Agar tuzilgan model real tizimni to'g'ri tavsiflasa, bu holda u bir tomondan modellashtirilayotgan ob'ekt ko'rsatkichlar miqdor xarakteristikasini, ular dinamikasining o'zgarishini aniqlaydi, ikkinchi tomondan, jarayonni maqsadga muvofiq boshqarish imkonini beradi. Agar o'rganilayotgan tizimning tavsiflanayotgan holatlar omili guruhidan boshqarish omillari ajratilsa, shu omillarga faol ta'sir etish jarayonini boshqarish va qo'yilgan maqsadga erishish bo'yicha asoslangan qarorlar qabul qilish imkonini beradi.

Texnik-iqtisodiy ko'rsatkichlarni modellashtirish masalasi faqat bog'lanish shakllarini va uning intensivligini aniqlash bilan chegaralanmay, balki mana shu bog'lanishlarni vujudga keltiradigan omillarning joylashishini ham taxmin qiladi. Bu masalaning yechilishi o'lchab bo'lmaydigan, ya'ni miqdoriy ifoda etib bo'lmaydigan hamda tarkib korrelyatsiya matritsalarini o'rganishga qaratilgan omillar

ta'sirini baholash bilan bog'liqdir. Bunda so'z omillar tahlili, uning ko'p o'lchovli statistik tahlil yo'nalishlaridan biri ekanligi ustida bormoqda. Ma'lumki, omillar tahlili tufayli umumiy kuzatilmaydigan omillarning mavjud alomatlari o'rtasidagi korrelyatsiya tushuntirish imkoni vujudga keladi.

Korrelyatsiya matritsalari tarkibini tahlil qilishda ikki usul, ya'ni K.Pirson tomonidan ishlab chiqilgan bosh komponentalar usuli va Ch.Spirmen tadqiqotlarida vujudga kelgan omillar tahlili usuli eng ko'p tarqalgan usul hisoblanadi.

Korrelyatsiya usuli yordamida quyidagi imkoniyatlar vujudga keladi:

a) alomatlar o'rtasidagi bog'lanishning analitik shakllarini topish;

b) bog'lanish zichligini, ya'ni o'rganilayotgan omillar variatsiyasi qay darajada natijali alomat variatsiyasi kelib chiqishiga ta'sir etishini aniqlash.

Korrelyatsiya tahlili usulini nazariy jihatdan qo'llash sabablari quyidagilardir:

a) kuzatish natijalari tasodifiy qiymatlarga ega bo'lib, normal taqsimot qonuni bilan majmuadan tanlab olingan;

b) ayrim kuzatishlar stoxastik ravishda mustaqil bo'lsa;

c) omilli alomat o'zgarishida shartli dispersiyaning o'zgarmasligi;

d) omilning ma'lum qiymatida natijali alomatni matematik kutilishiga nisbatan parametrlar chiziqli funksiya ko'rinishida namoyon bo'lishi mumkin.

Korrelyatsiya tahlilini to'g'ri qo'llashning muhim shartlaridan biri, o'rganilayotgan majmuaning bir tekisligidir.

Korrelyatsiya tahlilining asosini o'rtachalash usuli tashkil etib, o'rtacha qiymat faqat majmuaning bir jinsli doirasida ba'zi bir umumiy xususiyatlarni aks ettiradi. O'rganish ob'ekti sifatida majmuaning bir jinsliligi ishlab chiqarilayotgan mahsulot xarakteri, qo'llanilayotgan asbob-uskunalar turlari, texnologik jarayonning xarakteri va boshqalar bilan izohlanadi.

Har bir alomat bo'yicha majmuaning bir jinsliligi variatsiyalar koeffitsienti bo'yicha baholanishi mumkin. Variatsiya koeffitsientlari qiymatini normal taqsimlaganda, tengligi 33% bo'lsa, alomatlarning bir jinsliligi yoki bir jinsli emasligi o'rtasidagi chegara hisoblanadi.

Berilgan alomat ma'lumotlari byicha variatsiya koeffitsienti 33% dan oshmasa, majmua bir jinsli bo'ladi. Variatsiya koeffitsienti 33% dan otshib ketgan hollarda, majmuaga korrelyatsiya tahlilini qo'llash mumkin bo'lgan bir jinsli qismlarini ajratish lozim.

Korrelyatsiya modelini tuzish quyidagi bosqichlardan iborat:

1. Masalaning qo'yilishi va statistik ko'rsatkichlarini isbotlash.

2. Statistik ma'lumotlarni to'plash va ularni birlamchi qayta ishlash.

3. Juft bog'lanishlarni o'rganish.

4. Bog'lanish shakllarini tanlash va regressiya tenglamalari parametrlarini aniqlash.

5. Masalaning yechish natijalarini statistik baholash va modelning iqtisodiy ma'nosi.

Korrelyatsiya modeli tuzishning birinchi bosqichida tekshirish maqsadi shakllanadi, natijaviy va omilli alomatlar tanlanadi, boshlang'ich axborotni olish usuli haqidagi masala hal qilinadi va hokazolar.

Omilli alomatlar tanlash sabablari bilan aniqlanadi. Bu sabablarga hodisalar xususiyatini hisobga olish, model tuzishning maqsadi, boshlang'ich axborotning mavjudligi va boshqalar kiradi. Omillar orasida multikollinearlikning mavjudligi, ya'ni o'rganilayotgan ko'rsatkichni aniqlaydigan omilli alomatlar o'rtasida chiziqli bog'lanish mavjud ekanligini tekshirish muhim ahamiyat kasb etadi. Chunonchi, ikkita omil o'rtasida korrelyatsiya yuqori koeffitsientini ifodalaydigan chiziqli bog'lanish mavjud bo'lsa, u holda ikki axborotdan biri tanlab olinadi. Shuning uchun modelga omillardan biri kiritiladi.

Amalda omillarni ajratish ikki bosqichni tanlash yordamida amalga oshiriladi. Tanlashning birinchi bosqichida o'rganilayotgan hodisalar bilan mantiqiy bog'langan omillar tanlab olinadi. Ikkinchi bosqichda esa maxsus miqdoriy tahlil qilish yo'li bilan ana shu omillar orasidan modelga kiritish uchun asosiy omillar tanlab olinadi.

Ko'p omilli modellarni tuzishda o'rganilayotgan ko'rsatkichlar o'rtasidagi jiddiy bog'lanishlarni aniqlash hamda bog'lanishning eng qulay shakllarini ko'rsatish imkonini beradigan juft qonuniyatlar tahlili muhim bosqich hisoblanadi.

Juft korrelyatsiya koeffitsientlari ko'p parametrli modelning omil tanlash alomati hisoblanadi. Har doim, buni ko'pchilik olimlar qayd etishgan, natijaviy va omilli alomatlar o'rtasidagi yuqori koeffitsientli juft korrelyatsiyalar o'rganilayotgan ko'rsatkichga (mazkur omil) jiddiy ta'sir ko'rsatayotganligidan va shunga muvofiq ko'p omilli modelga kiritilishi lozimligidan dalolat beradi.

Omillarni uzil-kesil modelga kiritish maqsadida omilli alomatlar o'rtasidagi bog'lanishlarni miqdoriy baholash lozim. Omillar o'rtasida bog'lanish shaklini tanlashning uchta usuli mavjud:

– empirik usul;

– oldingi tadqiqotlar tajribasi usuli;

– mantiqiy tahlil usuli.

Analitik funksiya turini regressiyaning empirik grafigi bo'yicha aniqlash mumkin. Lekin mazkur grafik usulni faqat juft bog'lanish hollarida hamda kuzatishlar soni nisbatan ko'p bo'lganda muvaffaqiyatli qo'llash mumkin.

O'rganilayotgan iqtisodiy hodisalarning mantiqiy tahlili, bog'lanish shaklini asoslash va tanlashda asos bo'ladi. Shu bilan birga, o'rganilayotgan hodisani tavsiflash uchun eng qulay funksiyalar sinfini asoslash imkonini beradi. Bog'lanishli munosabat aniq shakllarini tanlash, iqtisodiy jarayon haqida boshlang'ich axborotning mavjudligiga bog'liq bo'ladi. Ayrim hollarda mantiqiy tahlil funksiyalar sinfini tanlash imkonini beradi. Bunday hollarda EHM yordamida, ma'lum funksiyalar saralanadi, model parametrlari aniqlanadi hamda natijalar bilan taqqoslanadi.

Mezon sifatida, odatda, ko'plikdagi korrelyatsiya koeffitsienti, Fisher mezoni va o'rta qiymatli approksimatsiya xatoligidan foydalaniladi.

Hisoblashlar ko'lamining ko'p bo'lishi, saralash algoritmining bo'lmasligi, bog'lanish shaklini tanlashda mazkur usuldan foydalanish, korrelyatsiya usulining samaradorligini kamaytiradi.

O'zaro bog'lanish xarakteriga qat'iy funksional ko'rinish berib bo'lmaydigan hollarda korrelyatsiya va regressiya tahlili usullaridan foydalaniladi. Bunday hollarda natijaviy va omilli alomatlar o'rtasidagi bog'lanish o'rtacha qiymat tendensiya ko'rinishida namoyon bo'ladi.

Korrelyatsiya koeffitsientlari bog'lanishni, regressiya tenglamasini va uning shaklini ifoda etadi. Regressiya tenglamalari parametrlari o'sish parametrlarini umumlashtirish yoki ma'lum tadqiqot natijasida o'sish ma'nosiga ega bo'ladi.

Normal taqsimot qonuni shaklida ifodalangan *katta sonlar qonuni* korrelyatsiya va regressiya tahlilning nazariy asosini tashkil etadi.

Tahlildagi mavjud omillar natijaviy va omilli alomatlar uchun bir vaqtda butun majmua bilan matritsa shaklda qayd qilinadi, shuningdek, ular miqdoriy ifoda etiladi. Korrelyatsiya va regressiya tahlili usuli doimiy ravishda rivojlanib bormoqda. Mazkur usul xususiy va ko'plikdagi bog'lanishlarni baholash, miqdor va sifat o'rtasidagi korrelyatsiya, chiziqli va chiziqsiz bog'lanishlar singari masalalarni qamrab olgan. Mana shu nazariya asosida zamonaviy ko'p o'lchamli statistik tahlil usuli, shu jumladan, ko'p o'lchamli omillar regressiya usuli singari, turli usullar rivojlanmoqda.

Analitik va sintetik xususiyat, amalda chegaralanmagan tanlamalar hajmi bo'yicha omillarning katta sonini hisobga olish, ma'lumotlarni standart holatda tasavvur qilish imkoniyatlari

korrelyatsiya va regressiya tahlili usulining muhim tomonlari hisoblanadi.

## Tayanch iboralar

Staxostik jarayonlar, ishlab chiqarish tendensiyalari, noaniqlik, tavakkalchilik, statistik kuzatuv, kiritiladigan va chiqish ma'lumotlari, iqtisodiy jarayonlar dinamikasi, statik va dinamik modellar, pog'onali va ko'p sathli modellar, regressiya, approksimatsiya, prognozlash, variatsiya, dinamik qator, xususiy dinamik model, xususiy fazoviy model, umumiy dinamik model, korrelyatsiya.

## Takrorlash uchun savollar

1. Iqtisodiy-statistik modellashtirishning zarurligi nimalardan iborat?
2. Iqtisodiy-statistik modellashtirishni noaniq bo'lmasligining sabablarini aytib bering.
3. Korxona faoliyatini o'zida mujassamlashtirgan barcha ko'rsatkichlarni necha guruhga bo'lish mumkin?
4. Modeldan aniq talablar xarakteristikasini tushuntirib bering.
5. Tadqiqotlar ko'lamiga qarab modellar necha xilga bo'linadi?
6. Statik va dinamik modellarga ta'rif bering.
7. Ishlab chiqarishning boshlang'ich omillariga nimalar kiradi?
8. Ishlab chiqarish kombinatsiyasi deb nimaga aytiladi?
9. Umumiy va xususiy modellarning farqli tomonlarini ifodalab bering.
10. Pog'onali va ko'p sathli modellarni tuzish shartlari qanday?
11. Tavsiflash modellarini tushuntirib bering.
12. Tushuntirish modellariga ta'rif bering.
13. Identifikatsiya nima?
14. Variatsiyani tushuntirib bering.
15. Dinamik qator deganda nimani tushunasiz?
16. Dinamik qatorlarni tekislash usullarini tushuntirib bering.
17. Korrelyatsiya modellarining qo'llanish sohasini tushuntirib bering.
18. Regressiya modellari deb nimaga aytiladi?
19. Korrelyatsiya modelni tuzih necha bosqichdan iborat?
20. Ko'p omilli modellarga misol keltiring.
21. Juft korrelyatsiya koeffitsienti qanday hisoblanadi?
22. Ko'plikdagi korrelyatsiya koeffitsienti nimani ifodalaydi?
23. Regressiya tenglamasidagi ozod had nimani bildiradi?
24. Regressiya koeffitsientlarining iqtisodiy ma'nosini tushuntirib bering.

## 3.2. Vaqtli qatorlar asosiy tendensiyasini aniqlash

Matematik statistikaning asosiy masalalaridan biri – o'rganilayotgan hodisalarning makonda o'zgarish va rivojlanish jarayonini tadqiq qilishda vaqtli qatorlarni tuzish va tahlil qilish yo'li bilan hal etiladi. Iqtisodiy hodisalarning makonda o'zgarishini ifodalayotgan sonlar ketma-ketligini kuzatish *vaqtli qator* deb ataladi.

Vaqtli qatorlar ko'rsatkichning barqaror o'zgarishlariga va xususiy tasodiflar o'zgarishiga ega bo'ladi. Vaqtli qatorlardagi xususiy tasodiflarni bartaraf etish va barqaror o'zgarishlarni aniqlash uchun ular u yoki bu usullar bilan taqqoslanadi. Taqqoslangan qatorlarni haqiqiy qatorlar bilan taqqoslash, ayrim korxonalarni, tarmoq va xalq xo'jaligini rivojlantirishning ba'zi muhim xususiyatlarini aniqlash imkonini beradi. Taqqoslangan va haqiqiy qiymat ko'rsatkichlarining farqi, taqqoslangan qatorlar joylashgan va kelajak rivojlanish ko'rsatkichlari qatorlari joylashishi mumkin bo'lgan chegaralarni aniqlash imkonini beradi.

Ko'pgina iqtisodiy tadqiqotlarda, ayniqsa vaqtli qatorlarni tahlil qilish jarayonida nihoyatda chegaralanib tanlash bo'yicha aniqliklarni qayta ishlashga to'g'ri keladi. Bunday sharoitda tajribalar guruhini ta'riflash uchun qilingan har qanday urinish, mutlaq rasmiy va sub'ektiv bo'ladi. Shuning uchun ko'pchilik hollarda hodisaning qandaydir bir tomonini ehtimol ta'riflash imkoniyatini aniqlash qiyin. Iqtisodiy vaqtli qator farq qiluvchi xususiyatlarini quyidagicha ko'rsatish mumkin:

a) berilgan sharoitda kuzatilayotgan jarayonni qayta kuzatish mumkin emas;

b) odatda kuzatilayotgan qatorlar, kuzatilayotgan tanlama hajmiga ko'ra juda chegaralangan bo'ladi.

Shuning natijasi o'laroq o'rganilayotgan hodisalarga ehtimollar nazariyasi bilan yondashishda hodisalar modelini statistik tajribalarda xayolan tasavvur etish, shuningdek, ba'zi bir ehtimollikni cheklab qo'yish lozim. Haqiqatdan ham statistik xulosalar baholashni tanlashga yoki ko'rib chiqilayotgan umumiy model doirasida oldindan o'rganilgan nazariy mezon xususiyatiga asoslangan bo'ladi. Kelajakning vaqtli qatorlari ishonchlilik darajasiga ko'ra hisobli (yaqin 20-30 yil uchun ishonchli), umumiy tasavvurlarga ko'ra taxminiy (100 yilgacha) va xayoliyga (100 yildan ko'p) bo'linadi. Sirg'anuvchi o'rtacha usul o'rtacha qiymatni aniqlash vaqtida tasodifiy chetlanishlarning o'sish holatiga asoslanadi. O'rtacha faktik qiymatlar qatorlari dinamikasi tekislanayotgan vaqtda sirg'anishning o'rtacha nuqta davrini ko'rsatadigan o'rtacha qiymatlar bilan almashinadi. Odatda o'rtacha sirg'anuvchi usulning ikki modifikatsiyasidan, ya'ni oddiy va vaznli tekislashdan foydalaniladi.

Oddiy tenglashtirish o'rtalikdagi $p$ uzunlikdagi vaqt uchun oddiy o'rta arifmetik hisoblashdan tuzilgan yangi qator tuzishga asoslanadi:

$$y_k = \frac{\sum_{t=k}^{p+k} y}{p} \quad (k = 1, 2, \dots, N - p + 1), \qquad (1)$$

bu yerda: $p$ - tenglashtirish davri uzunligi vaqtli qatorlar xarakteriga bog'liq bo'ladi;

$k$ - o'rtacha qiymatning tartib nomeri.

Vaznli tenglashtirish turli nuqtadagi qatorlar dinamikasi uchun vaznli o'rtacha qiymatlarni o'rtachalashtirishdan iborat.

Birinchi $2p+1$ qatorlar dinamikasini olib ko'raylik ($p$ odatda 1 yoki 2 ga teng). Tendensiyalar funksiyasi sifatida qandaydir:

$$y_t = \sum_{i=0}^{k} a_i t^i \qquad (2)$$

(2) to'la darajasini olaylik.

Uning parametrlari

$$a_0 \sum_{-p+1}^{p+1} t^i + a_1 \sum_{-p+1}^{p+1} t^{i+1} + \dots + a_k \sum_{-p+1}^{p+1} t^{i+k} = \sum_{-p+1}^{p+1} y_t t^i \qquad (3)$$

tenglamasi yordamida eng kichik kvadratlar usuli bilan aniqlanadi.

Ko'phad (polinom) o'rtacha darajasi $p+1$ nuqtasiga joylashgan. $a_0$ ga nisbatan tenglamani yechsak:

$$a_0 = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_{2p+1} y_{2p+1} \qquad (4)$$

hosil qilamiz. Bu yerdagi $b_i$ qiymati $p$ va $k$ mohiyatiga bog'liq bo'ladi. Hosil bo'lgan tenglama (4) birinchilardan $2p+1$ qatorlar dinamikasi qiymatining vaznli o'rtacha qiymat arifmetikasi hisoblanadi. Sirg'aluvchan o'rtacha qiymat usuli boshqa usullarga nisbatan qator afzalliklarga ega. Jumladan, sirg'aluvchan o'rtacha qiymat shunday tendensiya funksiyasini beradiki, u mohıyatiga ko'ra o'rganilayotgan qatorlar mohiyatiga yaqin turadi. Chunki, qatorning ayrim qismlari eng yaxshi tendensiya tanlab olinadi. O'rganilayotgan qatorlarga yangi daraja qo'shilishi mumkin. Tendensiyalarni aniqlash ko'p mehnat talab etishi singari xususiyatlar sirg'aluvchan o'rtacha qiymat usulining afzalliklari hisoblanadi. Lekin sirg'aluvchan o'rtacha usul sirg'anish davri oshirilishi bilan qatorning eng chetki davrlari haqidagi axborot yo'qolishi singari kamchiliklarga ham ega. Bunga vaqtli qatorlar tahlilining ba'zi usullarida yo'l qo'yib bo'lmaydi.

**Eng kichik kvadratlar usuli**. Eng kichik kvadratlar usulining mohiyati shundan iboratki. uning natijasida izlanayotgan tenglamalar tendensiyasining shunday parametrlari hosil bo'ladiki, bunday hollarda

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(t))^2 \rightarrow \min \tag{5}$$

funksiya minimumga aylanadi.

Iqtisodiy qatorlar dinamikasi tendensiyasini aniqlash vaqtida ko'pchilik hollarda turli darajadagi polinomlar:

$$\hat{y}(t) = \left[a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i t^i\right]^u \quad \begin{matrix}(i = -1, 0, 1, ..., k)\\(u = -1, 1)\end{matrix}$$

va eksponensional funksiyalar qo'llaniladi:

$$\hat{y}(t) = \left[e^{a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i t^i}\right]^u \quad \begin{matrix}(i = -1, 0, 1, ..., k)\\(u = -1, 1)\end{matrix} \tag{6}$$

Shuni qayd etib o'tish lozimki, funksiya shakli tenglashtirilayotgan qatorlar dinamikasi xarakteriga muvofiq, shuningdek, mantiqiy asoslangan bo'lishi lozim.

Polinomning eng yuqori darajalaridan foydalanish ko'pchilik hollarda o'rtacha kvadrat xatolarining kamayishiga olib keladi. Lekin bunday vaqtlarda tenglashtirish bajarilmay qoladi.

Tenglashtirish parametrlari (2) bevosita eng kichik kvadratlar usuli yordamida baholanadi. Eksponensional funksiya parametrlarini baholash uchun esa boshlang'ich qatorlar qiymatini logarifmlash lozim.

Normal tenglamalar sistemasi quyidagicha bo'ladi:

a) $k$ tartibli polinom uchun:

$$\begin{cases} na_0 + a_1\sum t + a_2\sum t^2 + ... + a_k\sum t^k = \sum y \\ a_0\sum t + a_1\sum t^2 + a_2\sum t^3 + ... + a_k\sum t^{k+1} = \sum yt \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0\sum t^k + a_1\sum t^{k+1} + a_2\sum t^{k+2} + ... + a_k\sum t^{2k} = \sum yt^k \end{cases} \tag{7}$$

b) eksponensional funksiya uchun:

$$\begin{cases} na_0 + a_1\sum t + a_2\sum t^2 + ... + a_k\sum t^k = \sum \ln y \\ a_0\sum t + a_1\sum t^2 + a_2\sum t^3 + ... + a_k\sum t^{k+1} = \sum t\ln y \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0\sum t^k + a_1\sum t^{k+1} + a_2\sum t^{k+2} + ... + a_k\sum t^{2k} = \sum t^k \ln y \end{cases} \tag{8}$$

Agar tendensiya ko'rsatkichli funksiyaga ega bo'lsa, ya'ni

$$y_t = a_0 a_1^t$$

bo'lsa, ushbu funksiyani logarifmlab, parametrlarini eng kichik kvadratlar usuli yordamida aniqlash mumkin. Ushbu funksiya uchun normal tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\begin{cases} n \ln a_0 + \ln a_1 \sum t = \sum \ln y \\ \ln a_0 \sum t + \ln a_1 \sum t^2 = \sum t \ln y \end{cases} \quad (9)$$

Ko'pincha boshlang'ich ma'lumotlar asosida qatorlar dinamikasining rivojlantirish tendensiyasini tavsiya etish uchun eng qulay funksiya qaysi biri ekanligini hal qilish masalasi murakkab bo'ladi. Bunday hollarda funksiya shakllarini aniqlashning quyidagi ikki xil usulidan foydalanish mumkin: o'rta kvadratik xatolar minimumi usuli bilan funksiya tanlash; dispersiya tahlili usulini qo'llash orqali funksiya tanlash.

1. Mantiqiy tahlil hamda tadqiqot tufayli qo'lga kiritilgan shaxsiy tajriba asosida qator turli xil funksiyalar tanlab olinadi va ularning parametrlari baholanadi. Shundan so'ng har bir funksiya uchun quyidagi formula asosida o'rta kvadratik xatolar aniqlanadi:

$$S = \sqrt{\frac{\sum \left( y_t - \hat{y}_t \right)^2}{n - k - 1}}, \quad (10)$$

bu yerda: $y_t$ – qatorlar dinamikasining qiymati;

$\hat{y}_t$ – qatorlar dinamikasi qiymatlarini tenglashtirish;

$k$ – funksiya parametrlari soni.

Mazkur usul faqat tenglama parametrlarining teng sonida qiyosiy natijalar beradi.

Ikkinchi usul dispersiyalarni taqqoslashdan iborat. O'rganilayotgan qatorlar dinamikasi umumiy variatsiyasini ikki qismga, ya'ni tendensiyalar tufayli sodir bo'ladigan variatsiyalar va tasodifiy variatsiyalar yoki $V = V_1 + V_2$ bo'lishi mumkin.

Umumiy variatsiya quyidagi formula bo'yicha aniqlanadi:

$$V = \sum_{t=1}^{n} (y_t - \bar{y})^2, \quad (11)$$

bu yerda, $\bar{y}$ - qatorlar dinamikasining o'rtacha darajasi.

Tasodifiy variatsiyalar quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$$V_2 = \sum_{t=1}^{n} \left( y_t - \hat{y}_t \right)^2. \quad (12)$$

Umumiy va tasodifiy variatsiyalarning farqi tendensiyalar variatsiyasi hisoblanadi:

$$V_1 = V - V_2 \quad (13)$$

Tegishli dispersiyalarni aniqlashda daraja erkinligi quyidagicha bo'ladi:

1. Tendensiyalar tufayli dispersiyalar uchun daraja erkinligi soni tekislash tenglamasi parametrlari sonidan bitta kam bo'ladi.

2. Qatorlar dinamikasi darajasi soni bilan tekislash tenglamasi parametrlari soni o'rtasidagi farq tasodifiy tendensiyalar uchun daraja erkinligi soniga teng bo'ladi.

3. Umumiy dispersiyalar uchun daraja erkinligi soni qatorlar dinamikasi darajasi sonidan bitta kam bo'ladi. Chiziqli funksiya uchun dispersiyalar quyidagicha hisoblanadi:

$$S^2 = \frac{V}{n-1}, \qquad (14)$$

$$S_1^2 = V_1, \qquad (15)$$

$$S_2^2 = \frac{V_2}{n-2}. \qquad (16)$$

Dispersiyalar aniqlangandan so'ng $F$ - mezonning empirik qiymati hisoblanadi:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}. \qquad (17)$$

Olingan qiymatni erkinlik va ehtimollik darajasiga muvofiq aniqlangan jadval qiymati bilan taqqoslanadi.

Agar $F > F_a$ ko'rinishidagi tengsizlik bajarilsa, u holda tahlil qilinayotgan tenglama ifodalanayotgan tendensiya uchun to'g'ri keladi. Bunday hollarda tahlil qilishni mantiqiy tushunchalarga mos keladigan oddiy tenglamalardan boshlab, asta-sekin kerakli daraja aniqlangunga qadar murakkabroq darajalarga o'tib borish lozim.

Trend aniqlangandan keyin boshlang'ich qatorlar dinamikasiga tegishli darajada trendning qiymati olinadi. Tahlil bundan keyin trenddan chetga chiqishi mumkin.

$$z(t) = y(t) - \hat{y}(t) \qquad (18)$$

$z(t)$ chetga chiqishi $\sigma^2$ arifmetik dispersiyali o'rtacha nolga teng bo'ladi.

Tenglama parametrlarini aniqlash zarur:

$$y(t) = a_0 + a_1 t\,,$$

$$\hat{y}'(t) = a_0' + a_1' t\,.$$

Normal tenglamalar sistemasi to'g'ri chiziqli tenglamalar uchun quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum t = \sum y \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 = \sum ty \end{cases}$$

*Masala*. O'zbekistonda kuzgi bug'doy yalpi hosildorligi qatorlar dinamikasi tendensiyalarini aniqlaylik. Ma'lumotlar statistik to'plamdan olingan.

| Kuzatuvlar | Yalpi hosil, ming t. $y_t$ | Hosildorlik, s/ga $y'_t$ | $t$ | $t^2$ | $y_t\, t$ | $y'_t\, t$ | $\hat{y}$ | $\hat{y}'$ | $(y_t-\hat{y})^2$ | $(y'_t-\bar{y}')^2$ | $(y_t-\bar{y})^2$ | $(y'_t-\hat{y}')^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 76,6 | 16,2 | -11 | 121 | -842,6 | -178,2 | 65,875 | 14,094 | 115,03 | 4,435 | 43,30 | 14,36 |
| 2 | 69,1 | 15,2 | -10 | 100 | -691,0 | -152,0 | 67,448 | 14,630 | 2,729 | 0,325 | 198,25 | 22,94 |
| 3 | 64,3 | 15,1 | -9 | 81 | -578,7 | -135,9 | 69,021 | 15,166 | 22,288 | 0,004 | 356,45 | 23,91 |
| 4 | 66,5 | 16,9 | -8 | 64 | -532,0 | -135,2 | 70,594 | 15,702 | 16,761 | 1,435 | 278,22 | 9,55 |
| 5 | 70,8 | 16,8 | -7 | 49 | -495,6 | -117,6 | 72,167 | 16,238 | 1,869 | 0,314 | 153,26 | 10,18 |
| 6 | 49,7 | 12,9 | -6 | 36 | -298,2 | -77,4 | 73,740 | 16,774 | 577,92 | 14,977 | 1120,91 | 50,27 |
| 7 | 74,4 | 13,8 | -5 | 25 | -372,0 | -69,0 | 75,313 | 17,310 | 0,836 | 12,250 | 77,09 | 38,32 |
| 8 | 59,7 | 16,1 | -4 | 16 | -238,8 | -64,4 | 76,886 | 17,846 | 295,359 | 3,240 | 551,30 | 16,18 |
| 9 | 100,5 | 20,4 | -3 | 9 | -301,5 | -61,2 | 78,459 | 18,382 | 485,057 | 3,610 | 299,98 | 0,17 |
| 10 | 77,4 | 17,8 | -2 | 4 | -154,8 | -35,6 | 79,718 | 18,918 | 5,373 | 1,210 | 32,99 | 3,80 |
| 11 | 93,4 | 18,3 | -1 | 1 | -93,4 | -18,3 | 81,605 | 19,454 | 139,122 | 1,323 | 104,45 | 2,86 |
| 12 | 79,9 | 18,9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 83,178 | 19,990 | 10,745 | 1,188 | 10,76 | 1,19 |
| 13 | 99,7 | 22,8 | 1 | 1 | 99,7 | 22,8 | 84,751 | 20,526 | 223,472 | 5,513 | 272,91 | 7,90 |
| 14 | 98,8 | 23,1 | 2 | 4 | 197,6 | 46,2 | 86,324 | 21,062 | 155,651 | 4,162 | 234.98 | 9,67 |
| 15 | 86,0 | 19,6 | 3 | 9 | 258,8 | 58,8 | 87,897 | 21,598 | 3,599 | 4,000 | 7,95 | 0.15 |
| 16 | 109,8 | 27,0 | 4 | 16 | 439,2 | 104,0 | 89,470 | 22,134 | 413,309 | 237,17 | 706,62 | 49,14 |
| 17 | 83,9 | 24,0 | 5 | 25 | 419,5 | 120,0 | 91,043 | 22,670 | 51,022 | 1,769 | 0,52 | 46,08 |
| 18 | 66,2 | 18,7 | 6 | 36 | 397,2 | 112,2 | 92,616 | 23,206 | 698,596 | 20,250 | 288,32 | 1,66 |
| 19 | 96,9 | 25,9 | 7 | 49 | 678,3 | 181,3 | 94,189 | 23,742 | 7,350 | 4,666 | 188,24 | 34,93 |
| 20 | 97,1 | 25,8 | 8 | 64 | 776,8 | 206,4 | 95,762 | 24,278 | 1,790 | 2,310 | 193,77 | 33,76 |
| 21 | 97,2 | 24,2 | 9 | 81 | 878,8 | 217,8 | 97,335 | 24,814 | 0,018 | 0,372 | 196,56 | 17,72 |
| 22 | 98,1 | 24,6 | 10 | 100 | 981,0 | 246,0 | 98,908 | 25,350 | 0,653 | 0,563 | 222,61 | 21,25 |
| 23 | 97,1 | 25,8 | 11 | 121 | 1068,1 | 283,8 | 100,481 | 25,885 | 11,431 | 0,008 | 193,77 | 33,76 |
| $\sum$ | **1913,1** | **459,9** | 0 | **1012** | **1501,8** | **542,1** | **1912,78** | **459,77** | **3240,02** | **111,28** | **5742,22** | 449,7 |
| o'rtachalar | **83,18** | **19,99** | | 4 | **69,21** | **23,56** | **83,16** | **19,99** | **140,87** | **4,838** | **249,66** | 13,35 |

Normal tenglamalar sistemasini yechib, izlangan parametrlarni aniqlasak,

$$a_0 = \frac{\sum y}{n} = 83{,}178; \qquad a'_0 = \frac{\sum y'}{n} = 19{,}99;$$

$$a_1 = \frac{\sum yt}{t^2} = 1{,}573; \qquad a'_1 = \frac{\sum y't}{t^2} = 0{,}536.$$

Kuzgi bug'doy yalpi yig'imi qatorlar dinamikasining chiziqli tendensiyasi

$$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t = 83{,}178 + 1{,}576 \cdot t$$

tenglamasi bilan ifodalanadi hamda kuzgi bug'doy hosildorligi, chiziqli tendensiyasi esa

$$\hat{y}'_t = a'_0 + a'_1 t = 19{,}99 + 0{,}536 \cdot t$$

tenglamasi ko'rinishida ifodalanadi.

Kuzgi bug'doy yalpi yig'imi qatorlari dinamikasi trendi sifatida chiziqli funksiyaning foydaliroq ekanligida to'xtab o'tamiz. Buning uchun (11), (12), (13), (14) formulalar bo'yicha dispersiyalarni aniqlaymiz.

$y_t$ yalpi mahsulot uchun:

$$S^2 = \frac{V}{n-1} = \frac{5650,8}{22} = 456,8; \qquad V = 5650,8;$$

$$S_1^2 = V_1 = 3268,7; \qquad V_2 = 2382,1;$$

$$S_2^2 = \frac{V_2}{n-2} = \frac{2382,1}{21} = 113,4; \qquad V_1 = V - V_2 = 3268,7;$$

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{3268,7}{113,4} = 28,8.$$

$y_t'$ hosıldorlik uchun:

$$S^2 = \frac{V}{n-1} = \frac{409,80}{22} = 18,6; \qquad V = 409,80;$$

$$S_1^2 = V_1 = 301,06; \qquad V_2 = 108,74;$$

$$S_2^2 = \frac{V_2}{n-2} = \frac{108,79}{21} = 5,18; \qquad V_1 = V - V_2 = 301,06;$$

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{301,06}{5,18} = 58,1.$$

$F = 58,1$ va $F_{0,99} = 8,40$ bo'lganidan 99% aniqlik bilan aytish mumkinki, kuzgi bug'doy hosildorligi qatorlar dinamikasi tendensiyasining rivojlanishini xarakterlash uchun ham chiziqli funksiyadan foydalanish mumkin.

$a_1$ va $a_1'$ parametrlari funksiyaning o'zgarish tezligini ifodalaydi. Binobarin, tekshirilayotgan davrda kuzgi bug'doy o'rish o'rtacha hisobda yiliga 1,573 ming tonnaga oshgan, kuzgi bug'doy hosildorligi esa yiliga gektar hisobiga 0,5 sentnerga oshgan.

## Mustaqil yechish uchun misollar

**1-misol**. Quyida oziq-ovqat sanoati korxonasi ma'lumotlari keltirilgan (shartli ma'lumotlar).

Ushbu ma'lumotlar asosida quyidagilar hisoblansin:

a) har bir ko'rsatkichning o'rtacha qiymatlari, o'rtacha kvadrat chetlanishi;

b) har bir ko'rsatkich bo'yicha grafik chizilsin;

c) sof foydani ishlovchilar soni, asosiy fondlar qiymati va reklama xarajatlaridan regressiya tenglamasi tuzilsin;

d) omillar orasidagi bog'lanish zichligi tahlil qilinsin;

e) olingan modellarni aniq jarayonga mosligi tekshirilsin;

f) dinamik qator avtokorrelyatsiyaga tekshirilsin;

g) olingan natijalar iqtisodiy tahlil qilinsin.

| Vaqt | Sof foyda, mln. so'm | Tushum, mln. so'm | Xarajatlar, mln. so'm | Ishlovchilar soni, kishi | Asosiy fondlar qiymati, mln. so'm | Reklama xarajatlari, mln. so'm |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2001. 01 | 5,8 | 10,8 | 16,6 | 121 | 18,7 | 0,23 |
| 2001. 02 | 5,9 | 11,6 | 17,5 | 123 | 19,3 | 0,25 |
| 2001. 03 | 6,2 | 12,3 | 18,5 | 130 | 19,7 | 0,30 |
| 2001. 04 | 6,9 | 13,4 | 20,3 | 129 | 20,1 | 0,32 |
| 2002. 01 | 6,4 | 12,1 | 18,5 | 136 | 20,3 | 0,30 |
| 2002. 02 | 6,8 | 13,0 | 19,8 | 142 | 20,5 | 0,29 |
| 2002. 03 | 7,2 | 15,4 | 22,6 | 135 | 19,8 | 0,31 |
| 2002. 04 | 7,7 | 15,4 | 23,1 | 130 | 19,3 | 0,34 |
| 2003. 01 | 7,7 | 15,5 | 23,2 | 134 | 21,0 | 0,41 |
| 2003. 02 | 8,4 | 17,2 | 25,6 | 137 | 22,3 | 0,39 |
| 2003. 03 | 8,9 | 18,3 | 27,2 | 143 | 24,7 | 0,42 |
| 2003. 04 | 9,6 | 19,9 | 29,5 | 144 | 24,9 | 0,45 |
| 2004. 01 | 9,7 | 20,1 | 29,8 | 140 | 25,1 | 0,43 |
| 2004. 02 | 10,3 | 20,3 | 30,6 | 145 | 26,9 | 0,49 |
| 2004. 03 | 10,9 | 21,0 | 31,9 | 146 | 30,1 | 0,51 |
| 2004. 04 | 11,4 | 21,1 | 32,5 | 148 | 30,3 | 0,55 |

## Tayanch iboralar

Vaqtli qatorlar, o'rtacha qiymatlar, sirg'anuvchi usul, vaqtli qatorlarni tekislash va vaznli tekislash, o'rta arifmetik, tendensiya, eng kichik kvadratlar usuli, polinom, normal tenglamalar sistemasi, dispersiya, dispersiya tahlili, o'rta kvadratik xato, variatsiya.

## Takrorlash uchun savollar

1. Vaqtli qatorlarga ta'rif bering.
2. Vaqtli qatorlarning farq qiluvchi xususiyatlarini ta'riflab bering.
3. Kelajakning vaqtli qatorlari ishonchlilik darajasiga ko'ra necha guruhga bo'linadi?
4. Sirg'anuvchi o'rtacha usulni tushuntirib bering.
5. Eng kichik kvadratlar usulini tushuntirib bering.
6. Normal tenglamalar sistemasi qanday tuziladi?
7. Funksiya shakllarini aniqlashning necha xil usuli mavjud?
8. Variatsiya deb nimaga aytiladi?
9. Dispersiyalarni aniqlashda daraja erkinligi qanday holatda bo'ladi?
10. $F$ - mezonning empirik qiymati qanday hisoblanadi?
11. Regressiya tenglamasi qaysi mezon yordamida aniqlanadi?
12. Chiziqli funksiya uchun dispersiyalar qanday hisoblanadi?
13. Fisherning F-mezoni nimani aniqlaydi?
14. Styudentning t-mezoni qachon qo'llaniladi?

## 3.3. Iqtisodiy jarayonlarni bashoratlashda korrelyatsiya va regressiya tahlili usullarini qo‘llash

Umumlashgan katta sonni tahlil qilish va aniq kuzatishda u yoki bu qonuniyatlarni aniqlash zarurligi ko‘pgina iqtisodiy tadqiqotlarning xarakterli xususiyati hisoblanadi. Real borliqda hech bir iqtisodiy zaruriyat bevosita sof holda namoyon bo‘lmaydi.

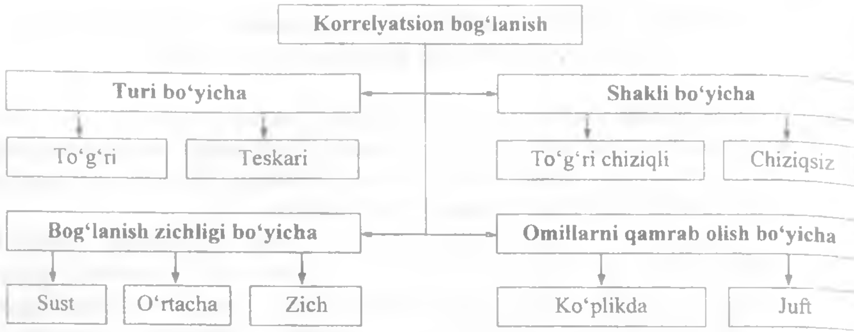
Bir qiymatni o‘zgartirish boshqasining o‘rtacha qiymati o‘zgarishiga olib keladigan hollarda bog‘lanishni o‘rganish katta qiziqish uyg‘otadi. Mana shunday bog‘lanishga *korrelyatsion bog‘lanısh* deyiladi. Korrelyatsiya tahlilining maqsadi, hodisalar o‘rtasidagi bog‘lanishning zichligini o‘rganishdir. Bog‘lanishlar o‘z mohiyatiga ko‘ra sodda va murakkab bo‘lishi mumkin. Ijtimoiy hodisalar, shu jumladan, iqtisodiy hodisalar odatda murakkab bog‘langan bo‘ladi.

Korrelyatsiya tahlili hodisalar o‘rtasidagi bog‘lanishni aniqlaydigan usullardan biri hisoblanadi. Lekin faqat korrelyatsiya tahlili bog‘lanishning zichligi haqida oddiy baho bera oladi. Bu holat iqtisodiy tadqiqotlarda korrelyatsiya tahlilini keng qo‘llash imkoniyatini beradi. Korrelyatsiya tahlili haqida gapirganda regressiya tahlilini unutmaslik kerak. Regressiya tahlili hodisalar o‘rtasidagi bog‘lanishning statistik tahlil usuli bo‘lib, bog‘lanish shakllarini tahlil qiladi. Regressiya tahlili natijalari regressiya tenglamalari va koeffitsientlarida sifat ifodasiga ega bo‘ladi.

Korrelyatsiya va regressiya tahlilning samaradorligi ko‘pgina ijtimoiy-iqtisodiy muammolarni hal qilishda muhim rol o‘ynaydi. Korrelyatsiya va regressiya tahlili qilishdan oldin o‘rganilayotgan hodisalar o‘rtasida bog‘lanish har tomonlama sinchiklab tahlil qilinishi lozim. Haqiqatan ham bog‘lanish mavjud bo‘lsa, korrelyatsiya va regressiya tahlili usulidan foydalanish hamda muhim ahamiyatga ega bo‘lgan natijalarni olish mumkin bo‘ladi.

Korrelyatsiya tahlilining birinchi vazifasi, korrelyatsiya bog‘lanish shakllarini, ya’ni regressiya funksiyasi ko‘rinishlarini (chiziqli, darajali, logarifmik va boshqalar) aniqlashdan iborat. Bog‘lanish shakllarini tanlash regressiya tahlili va tanlanayotgan funksiya haqidagi ma’lum gipotezalarni ishlab chiqish hamda tahlil qilishdan boshlanadi. Regressiyalarni tenglashtirish korrelyatsiya modellarining tarkibiy qismi bo‘lib, uni to‘g‘ri tanlay bilish, modellashtirishning eng mas’uliyatli bosqichi hisoblanadi.

Tahlil vaqtida garchi ba’zi bir tanlangan shakllarning to‘g‘riligini baholashning usullari ishlab chiqilgan bo‘lsa ham, bog‘lanish shaklini tanlay olish juda muhim hisoblanadi. Korrelyatsiya bog‘lanishlari tasnifi quyidagi 1-chizmada keltirilgan.



1-chizma. Korrelyatsiya bog'lanishlari tasnifi.

Iqtisodiy hodisalar o'rtasidagi bog'lanishlarning murakkabligi ko'pincha mavjud hodisalar butun kompleksini tahlili bilan qamrab olish mumkin bo'lmagan holatni keltirib chiqaradi. Regressiyalarni konkret tenglashtirish har doim ma'lum darajada abstraktlash asosida quriladi. Regressiya tenglamalarini qurish hodisalar o'rtasidagi bog'lanish konkret shaklini aniqlashda gipotetik tajribasi hisoblanadi.

**Oddiy korrelyatsiya va regressiya**. Ikki o'zgaruvchi o'rtasidagi korrelyatsiya *oddiy korrelyatsiya* deyiladi. Oddiy korrelyatsiya yo'li bilan tahlil qilishdan maqsad, ikki hodisa o'rtasidagi bog'lanishning mavjudligi va zichligini aniqlashdan iboratdir. Ikki o'zgaruvchi o'rtasidagi bog'lanish zichligining umumlashtirilgan bahosi *korrelyatsiya indeksi* hisoblanadi va u quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$R=\sqrt{\frac{\sigma_y-\sigma^2_{\hat{y}_x}}{\sigma^2_y}}=\sqrt{1-\frac{\sigma^2_{\hat{y}_x}}{\sigma^2_y}}, \qquad (1)$$

bu yerda: $\sigma^2_y$ – natija ko'rsatkich dispersiyasi;

$\sigma^2_{\hat{y}_x}$ – amaliy qiymat natijalari ko'rsatkichidan regressiya tenglamasi asosida nazariy hisoblangan ko'rsatkichdan chetlanish o'rtacha kvadrati.

Korrelyatsiya indeksi $0\le|R|\le1$ oralig'ida bo'ladi. Agar $R=1$ bo'lsa, omillar o'rtasida funksional bog'lanish mavjud bo'ladi. Agar $R=0$ bo'lsa, u holda o'rganilayotgan omillar o'zaro bog'lanmagan bo'ladi.

Bog'lanish zichligi baholanayotgan vaqtda quyidagi tasniflash qo'llaniladi:

$0{,}2$ gacha – kuchsiz bog'lanish;

$0{,}2\div0{,}4$ – o'rtacha zichlikdan kuchsizroq bog'lanish;

$0{,}4\div0{,}6$ – o'rtacha bog'lanish;

$0,6 \div 0,8$ – o'rtachadan zichroq bog'lanish;

$0,8 \div 0,99$ – zich bog'lanish.

Mazkur tasniflash shartli hisoblanadi. Korrelyatsiya indeksi juft bog'lanish har qanday shaklining bog'lanish zichligini baholash uchun to'g'ri keladi. Agar bog'lanish chiziqli bo'lsa, u holda bog'lanish zichligini baholashda korrelyatsiya koeffitsientidan foydalanish mumkin:

$$r = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}, \qquad (2)$$

bu yerda, $\sigma_x$ va $\sigma_y$ mos ravishda $x$ va $y$ o'zgaruvchilarning o'rtacha kvadratik chetlanishidir va ular quyidagi formulalar yordamida hisoblanadi:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}, \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n}}. \qquad (3)$$

Shuningdek, korrelyatsiya koeffitsientini hisoblashning quyidagi modifikatsiyalangan formulalaridan ham foydalanish mumkin:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y}, \qquad (4)$$

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} xy - \sum_{i=1}^{n} x \sum_{i=1}^{n} y}{\sqrt{\left[n\sum_{i=1}^{n} x^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x\right)^2\right] \cdot \left[n\sum_{i=1}^{n} y^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y\right)^2\right]}}. \qquad (5)$$

Korrelyatsiya koeffitsienti $-1 \le r \le 1$ oralig'idagi qiymatga ega bo'ladi.

Korrelyatsiya koeffitsientining manfiy qiymati hodisalar o'rtasida teskari bog'lanish mavjud ekanligidan dalolat beradi. Ayrim hollarda korrelyatsiyaning indeksi yoki koeffitsienti bilan bir qatorda, determinatsiya koeffitsienti $d = r^2$ deb ataluvchi ko'rsatkich ham aniqlanadi. Determinatsiya koeffitsienti natija ko'rsatkichi va variatsiyasining qaysi qismi omil ko'rsatkichlari variatsiyasi bilan bog'langanligini ko'rsatadi. Agar tahlil ta'sir qilayotgan omil qiymatining o'zgarishiga muvofiq hodisalar qiymati taxminan bir tekisda o'zgarishini ko'rsatsa, u holda to'g'ri chiziqli bog'lanish mavjudligini ko'rsatadi. Mabodo bu o'zgarish bir tekisda bo'lmasa, unda egri chiziqli bog'lanish bo'ladi.

Iqtisodiy tadqiqotlarda qo'llanilayotgan korrelyatsiya formulalari turli shaklga ega. Iqtisodiy qatorlar dinamikasi o'rtasidagi bog'lanishlar chizig'i shaklini aniqlayotganda, ko'pchilik hollarda quyidagi shakl-

lardan foydalaniladi:

Chiziqli — $y = a_0 + a_1 x$ (6)

Ikkinchi darajali parabola — $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ (7)

Uchinchi darajali parabola — $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ (8)

$n$-darajali parabola — $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ (9)

Ikkinchi darajali giperbola — $y = a_0 + \frac{a_1}{x}$ (10)

$b$ - Ikkinchi darajali giperbola — $y = a_0 + \frac{a_1}{x^b}$ (11)

Logarifmik — $\log y = a_0 + a_1 x$ (12)

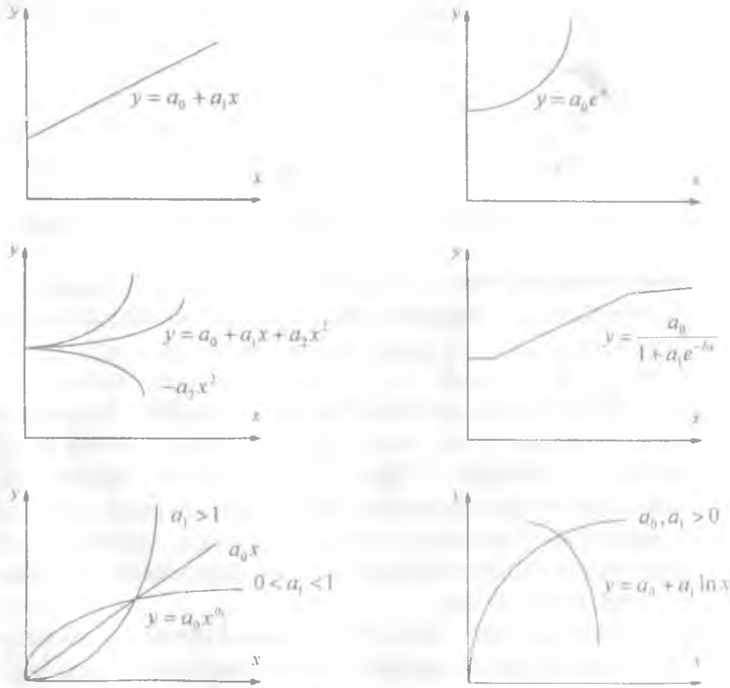
Yarim logarifmik — $y = a_0 + a_1 \ln x$ (13)

Ko'rsatkichli funksiya — $y = a_0 a_1^x$ (14)

Darajali funksiya — $y = a_0 x_1^{a_1}$ (15)

Logistik funksiya - $y = \frac{a_0}{1 + a_1 e^{-bx}}$ (16)

Funksiyalar parametri odatda eng kichik kvadratlar usuli bilan aniqlanadi. Normal tenglamalar sistemasi (7) sistemaga o'xshash bo'ladi, ba'zi bir funksiyalar grafigi 2-chizmada keltirilgan.




2-chizma. Korrelyatsion bog'lanishlar turlari

Logistik funksiyada $y$ qiymati oldin $x$ nıng tekis o'zgarishda tezlatilgan sur'atda ortib boradi.

Regressiya tenglamasining shaklini tanlashda quyidagilarga rioya qilish lozim:

1. Bog'lanishning umumiy shakli, bog'lanish tabiati va xarakteriga nisbatan professional tushuncha mos kelishi kerak.

2. Imkoni boricha interpretatsiya va amaliy qo'llashda oson bo'lgan tenglamalarning eng sodda shakllaridan foydalanish lozim. Boshlang'ich ma'lumotlarning grafik tasviri - tarqoq diagramma va regressiyalarning empirik chiziqlari regressiyalarni tenglama shakllarini tanlashda yordam ko'rsatadi.

**To'plamli korrelyatsiya va regressiya.** Jarayonlar qatorining bitta natijali ta'sirini to'plamli korrelyatsiya tahlili o'rganadi. To'plamli korrelyatsiya tahlilining shart-sharoiti xuddi korrelyatsion tahlil singari bo'ladi. Odatda to'plamli korrelyatsiya bevosita to'plamli regression tahlil bilan bevosita aloqada tahlil qilinadi. To'plamli regressiya tenglamasi oddiy masshtab, ya'ni regressiya tenglamalariga kiruvchi o'zgaruvchi bir maromdagi normal va normallashgan masshtabda yoki qiyoslash birligida ifodalangan o'zgaruvchilar shaklida tuzilishi mumkin.

Regressiya tenglamasi sifatida ko'pincha chiziqli:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \qquad (17)$$

va darajali funksiyalardan foydalaniladi:

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_n^{a_n} . \qquad (18)$$

Ushbu tenglama parametrlari odatda eng kichik kvadratlar usuli bilan aniqlanadi. Umumiy holda normal tenglamalar sistemasi quyidagicha ifodalanadi:

$$\begin{cases} na_0 + a_1\sum x_1 + a_2\sum x_2 + ... + a_n\sum x_n = \sum y \\ a_0\sum x_1 + a_1\sum x_1^2 + a_2\sum x_1x_2 + ... + a_n\sum x_1x_n = \sum x_1y \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0\sum x_n + a_1\sum x_1x_n + a_2\sum x_2x_n + ... + a_n\sum x_n^2 = \sum x_ny \end{cases} \qquad (19)$$

Model darajalari parametrlarini aniqlash uchun oldin (18) modelni logarifmik-chiziqli ko'rinishga qayta o'zgartirish lozim:

$$\ln y = \ln a_0 + a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2 + ... + a_n \ln x_n \qquad (20)$$

Shundan so'ng normal tenglamalar sistemasini tuzishda logarifmlardan foydalanamiz.

$$\begin{cases} n\ln a_0 + a_1\sum \ln x_1 + a_2\sum \ln x_2 + ... + a_n\sum \ln x_n = \sum \ln y \\ a_0\sum \ln x_1 + a_1\sum \ln x_1^2 + a_2\sum \ln x_1 \ln x_2 + ... + a_n\sum \ln x_1 \ln x_n = \sum \ln x_1 \ln y \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0\sum \ln x_n + a_1\sum \ln x_1 \ln x_n + a_2\sum \ln x_2 \ln x_n + ... + a_n\sum \ln x_n^2 = \sum \ln x_n \ln y \end{cases} \qquad (21)$$

Bog'lanishning zichligi korrelyatsiyalar indeksiga o'xshash bo'lib, to'plamli korrelyatsiya koeffitsienti yordamida baholanadi:

$$R_{yx_i} = \sqrt{1 - \frac{\sum\left(y - \hat{y}\right)^2}{\sum\left(y - \bar{y}\right)^2}}, \qquad (22)$$

bu yerda: $\hat{y}$ – regressiya tenglamasi yordamida aniqlangan natijaviy ko'rsatkichning nazariy qiymati; $\bar{y}$ – natijaviy ko'rsatkichning o'rtacha arifmetik qiymati.

To'plamli regressiyalar chizig'idan natijaviy ko'rsatkich qiymati qanchalik kam darajada chetlansa, ma'lum intervalda absolyut qiymat bo'yicha ahamiyatga ega bo'lgan korrelyatsiya koeffitsienti katta qiymatga ega bo'lishiga bog'liq bo'ladi. To'plamli korrelyatsiya koeffitsienti quyidagi oraliqda o'zgaradi: $0 \le |R| \le 1$.

Agar korrelyatsiya modeli faqat ikki omil ko'rsatkichlariga ega bo'lsa, u holda to'plamli korrelyatsiya koeffitsienti korrelyatsiyaning juft koeffitsientlaridan hosil qilish mumkin:

$$R_{yx_i} = \sqrt{\frac{r_{yx_1}^2 + r_{yx_2}^2 - 2r_{yx_1} \cdot r_{yx_2} \cdot r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2}}. \qquad (23)$$

G.Tintner to'plamli korrelyatsiya koeffitsientining ko'yidagi formulasini taklif etgan:

$$R_{yx_i} = \sqrt{\frac{a_1s_1 + a_2s_2 + a_3s_3 + \ldots + a_ns_n}{s_y}},$$

bu yerda: $s_j \; \left(j = \overline{1,n}\right)$ $s_j = \overline{yx_j} - \bar{y} \cdot \bar{x}$ formulasi bo'yicha aniqlanadigan kovariatsiya;

$s_y$ – natijaviy ko'rsatkich dispersiyasi;

$a_j \; \left(j = \overline{1,n}\right)$ – regressiya koeffitsienti.

Normallangan masshtabda umumiy ko'rinishda to'plamli regressiya tenglamasini quyidagicha tuzish mumkin:

$\beta_j \; \left(j = \overline{1,n}\right)$ parametrlari korrelyatsiyaning juft koeffitsienti yordamida aniqlanadi. Koeffitsientlarni aniqlash uchun $n$ ta tenglamalar sistemasini tuzamiz:

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 r_{x_2x_1} + \beta_3 r_{x_3x_1} + \ldots + \beta_n r_{x_nx_1} = r_{yx_1} \\ \beta_1 r_{x_1x_2} + \beta_2 + \beta_3 r_{x_3x_2} + \ldots + \beta_n r_{x_nx_2} = r_{yx_2} \\ \beta_1 r_{x_1x_3} + \beta_2 r_{x_2x_1} + \beta_3 + \ldots + \beta_n r_{x_nx_3} = r_{yx_3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_1 r_{x_1x_n} + \beta_2 r_{x_2x_n} + \beta_3 r_{x_3x_n} + \ldots + \beta_n = r_{yx_n} \end{cases} \qquad (24)$$

(24) tenglama ildizi izlangan regressiya koeffitsientlari hisoblanadi. Agar regressiya tenglamasi

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$$

ko'rinishida bo'lsa, $a_i \; (i = \overline{1,n})$ koeffitsienti quyidagi formula asosida aniqlanadi:

$$a_1 = \beta_1 \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_1}}, \quad a_2 = \beta_2 \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_2}}, ..., \quad a_n = \beta_n \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_n}}, \tag{25}$$

$a_0 = \bar{y} - a_1\bar{x}_1 - a_2\bar{x}_2 - ... - a_n\bar{x}_n$ o'rniga qo'yish orqali $a_0$ koeffitsienti topiladi.

U yoki bu juft omillar o'rtasidagi bog'lanish darajasining ishonchliligi, ishonchlilik koeffitsienti yordamida aniqlanadi:

$$\mu_{ij} = \frac{|r_{ij}|\sqrt{n}}{1 - r_{ij}^2}, \tag{26}$$

agar $\mu \geq 2{,}6$ bo'lsa, bog'lanish ishonchli deb ataladi.

To'plamli korrelyatsiya koeffitsientini quyidagi formula bo'yicha ham aniqlash mumkin:

$$R = \sqrt{\beta_1 r_{yx_1} + \beta_2 r_{yx_2} + ... + \beta_n r_{yx_n}}, \tag{27}$$

$\beta_j \; (j = \overline{1,n})$ regressiya koeffitsienti har bir omilning salmog'i, ta'sir darajasini, ya'ni $\frac{\beta_i}{\beta_j}$ munosabati $i$-omilning ta'siri necha marotaba $j$-omilning ta'siridan katta ekanligini ko'rsatadi.

To'plamli korrelyatsiya munosabatining o'rtacha kvadratik xatolari quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$\sigma_R = \frac{1 - R^2}{\sqrt{n - k - 1}}, \tag{28}$$

bu yerda: $n$ – kuzatuvlar soni;

$k$ – aniqlanayotgan bog'lanishning texnik-iqtisodiy parametrlari soni.

To'plamli korrelyatsiya koeffitsientining o'rtacha kvadratik xatolarga munosabati $t$ mezoni qiymati bilan aniqlanadi.

Omillarning xususiy elastiklik koeffitsientlarini aniqlashda quyidagi formuladan foydalanish mumkin:

$$Э_i = a_i \frac{\bar{x}_i}{\bar{y}}. \tag{29}$$

Xususiy elastiklik koeffitsienti boshqa argumentlar o'zgarmagan holda argumentni bir foizga o'zgartirish bilan funksiya necha foizga o'zgarishini ko'rsatadi.

Korrelyatsiya-regressiya tahlilining asosiy ko'rsatkichlari ma'lum bo'lgandan so'ng, bashorat qiluvchi ko'rsatkichlar aniqlanadi:

$$y = a_0 + b_0t; \quad x_1 = a_1 + b_1t; ....; \quad x_n = a_n + b_nt$$

$a_0$, $b_0$, $a_1$, $b_1$,..., $a_n$, $b_n$ koeffitsientlarni hisoblashda eng kichik kvadratlar usulidan foydalaniladi. Qiymat ma'lum bo'lganidan keyin,

lardan foydalaniladi:

Chiziqli — $y = a_0 + a_1 x$ (6)

Ikkinchi darajali parabola — $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ (7)

Uchinchi darajali parabola — $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ (8)

$n$-darajali parabola — $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ (9)

Ikkinchi darajali giperbola — $y = a_0 + \frac{a_1}{x}$ (10)

$b$ - Ikkinchi darajali giperbola — $y = a_0 + \frac{a_1}{x^b}$ (11)

Logarifmik — $\log y = a_0 + a_1 x$ (12)

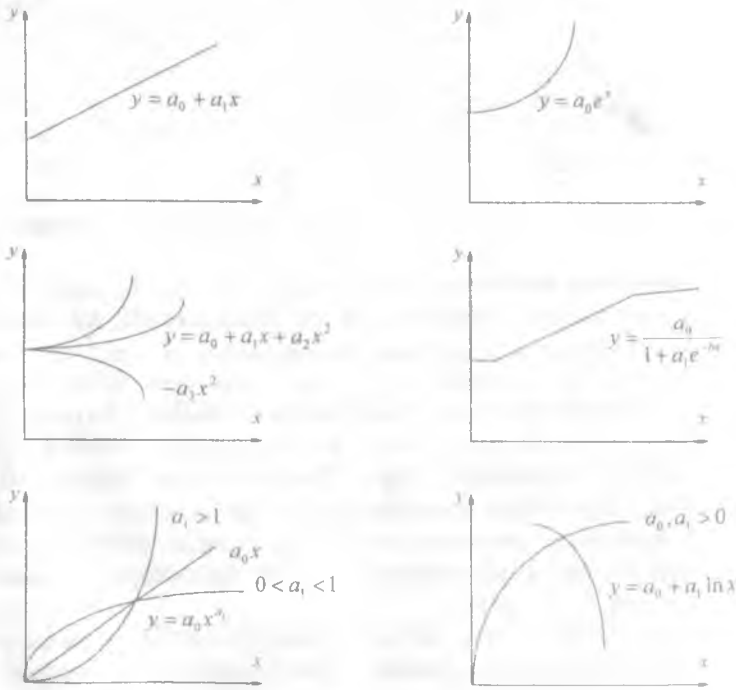
Yarim logarifmik — $y = a_0 + a_1 \ln x$ (13)

Ko'rsatkichli funksiya — $y = a_0 a_1^x$ (14)

Darajali funksiya — $y = a_0 x^{a_1}$ (15)

Logistik funksiya - $y = \frac{a_0}{1 + a_1 e^{-bx}}$ (16)

Funksiyalar parametri odatda eng kichik kvadratlar usuli bilan aniqlanadi. Normal tenglamalar sistemasi (7) sistemaga o'xshash bo'ladi, ba'zi bir funksiyalar grafigi 2-chizmada keltirilgan.




2-chizma. Korrelyatsion bog'lanishlar turlari

Logistik funksiyada $y$ qiymati oldin $x$ ning tekis o'zgarishda ...zlatilgan sur'atda ortib boradi.

Regressiya tenglamasining shaklini tanlashda quyidagilarga rioya qilish lozim:

1. Bog'lanishning umumiy shakli, bog'lanish tabiati va xarakteriga nisbatan professional tushuncha mos kelishi kerak.

2. Imkoni boricha interpretatsiya va amaliy qo'llashda oson bo'lgan tenglamalarning eng sodda shakllaridan foydalanish lozim. Boshlang'ich ma'lumotlarning grafik tasviri - tarqoq diagramma va regressiyalarning empirik chiziqlari regressiyalarni tenglama shakllarini tanlashda yordam ko'rsatadi.

**To'plamli korrelyatsiya va regressiya**. Jarayonlar qatorining bitta natijali ta'sirini to'plamli korrelyatsiya tahlili o'rganadi. To'plamli korrelyatsiya tahlilining shart-sharoiti xuddi korrelyatsion tahlil singari bo'ladi. Odatda to'plamli korrelyatsiya bevosita to'plamli regression tahlil bilan bevosita aloqada tahlil qilinadi. To'plamli regressiya tenglamasi oddiy masshtab, ya'ni regressiya tenglamalariga kiruvchi o'zgaruvchi bir maromdagi normal va normallashgan masshtabda yoki qiyoslash birligida ifodalangan o'zgaruvchilar shaklida tuzilishi mumkin.

Regressiya tenglamasi sifatida ko'pincha chiziqli:

$$\hat{y} = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \tag{17}$$

va darajali funksiyalardan foydalaniladi:

$$\hat{y} = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_n^{a_n} . \tag{18}$$

Ushbu tenglama parametrlari odatda eng kichik kvadratlar usuli bilan aniqlanadi. Umumiy holda normal tenglamalar sistemasi quyidagicha ifodalanadi:

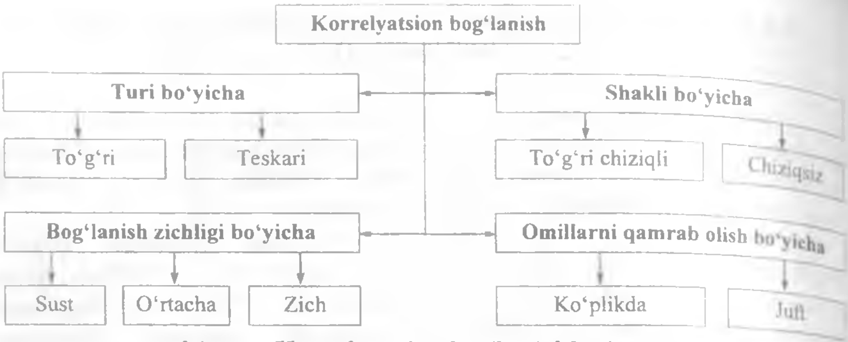
$$\begin{cases} na_0 + a_1\sum x_1 + a_2\sum x_2 + ... + a_n\sum x_n = \sum y \\ a_0\sum x_1 + a_1\sum x_1^2 + a_2\sum x_1x_2 + ... + a_n\sum x_1x_n = \sum x_1y \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0\sum x_n + a_1\sum x_1x_n + a_2\sum x_2x_n + ... + a_n\sum x_n^2 = \sum x_ny \end{cases} \tag{19}$$

Model darajalari parametrlarini aniqlash uchun oldin (18) modelni logarifmik-chiziqli ko'rinishga qayta o'zgartirish lozim:

$$\ln \hat{y} = \ln a_0 + a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2 + ... + a_n \ln x_n \tag{20}$$

Shundan so'ng normal tenglamalar sistemasini tuzishda logarifmlardan foydalanamiz.

$$\begin{cases} n\ln a_0 + a_1\sum \ln x_1 + a_2\sum \ln x_2 + ... + a_n\sum \ln x_n = \sum \ln y \\ a_0\sum \ln x_1 + a_1\sum \ln x_1^2 + a_2\sum \ln x_1 \ln x_2 + ... + a_n\sum \ln x_1 \ln x_n = \sum \ln x_1 \ln y \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0\sum \ln x_n + a_1\sum \ln x_1 \ln x_n + a_2\sum \ln x_2 \ln x_n + ... + a_n\sum \ln x_n^2 = \sum \ln x_n \ln y \end{cases} \tag{21}$$




1-chizma. Korrelyatsiya bog'lanishlari tasnifi.

Iqtisodiy hodisalar o'rtasidagi bog'lanishlarning murakkabligi ko'pincha mavjud hodisalar butun kompleksini tahlili bilan qamrab olish mumkin bo'lmagan holatni keltirib chiqaradi. Regressiyalarni konkret tenglashtirish har doim ma'lum darajada abstraktlash asosida quriladi. Regressiya tenglamalarini qurish hodisalar o'rtasidagi bog'lanish konkret shaklini aniqlashda gipotetik tajribasi hisoblanadi.

**Oddiy korrelyatsiya va regressiya**. Ikki o'zgaruvchi o'rtasidagi korrelyatsiya *oddiy korrelyatsiya* deyiladi. Oddiy korrelyatsiya yo'li bilan tahlil qilishdan maqsad, ikki hodisa o'rtasidagi bog'lanishning mavjudligi va zichligini aniqlashdan iboratdir. Ikki o'zgaruvchi o'rtasidagi bog'lanish zichligining umumlashtirilgan bahosi *korrelyatsiya indeksi* hisoblanadi va u quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$R=\sqrt{\frac{\sigma_y^2-\sigma_{\hat{y}_x}^2}{\sigma_y^2}}=\sqrt{1-\frac{\sigma_{\hat{y}_x}^2}{\sigma_y^2}}, \qquad (1)$$

bu yerda: $\sigma_y^2$ – natija ko'rsatkich dispersiyasi;

$\sigma_{\hat{y}_x}^2$ – amaliy qiymat natijalari ko'rsatkichidan regressiya tenglamasi asosida nazariy hisoblangan ko'rsatkichdan chetlanish o'rtacha kvadrati.

Korrelyatsiya indeksi $0\le|R|\le 1$ oralig'ida bo'ladi. Agar $R=1$ bo'lsa, omillar o'rtasida funksional bog'lanish mavjud bo'ladi. Agar $R=0$ bo'lsa, u holda o'rganilayotgan omillar o'zaro bog'lanmagan bo'ladi.

Bog'lanish zichligi baholanayotgan vaqtda quyidagi tasniflash qo'llaniladi:

$0{,}2$ gacha – kuchsiz bog'lanish;

$0{,}2\div 0{,}4$ – o'rtacha zichlikdan kuchsizroq bog'lanish;

$0{,}4\div 0{,}6$ – o'rtacha bog'lanish;

$0,6 \div 0,8$ – o'rtachadan zichroq bog'lanish;

$0,8 \div 0,99$ – zich bog'lanish.

Mazkur tasniflash shartli hisoblanadi. Korrelyatsiya indeksi juft bog'lanish har qanday shaklining bog'lanish zichligini baholash uchun to'g'ri keladi. Agar bog'lanish chiziqli bo'lsa, u holda bog'lanish zichligini baholashda korrelyatsiya koeffitsientidan foydalanish mumkin:

$$r = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}, \qquad (2)$$

bu yerda, $\sigma_x$ va $\sigma_y$ mos ravishda $x$ va $y$ o'zgaruvchilarning o'rtacha kvadratik chetlanishidir va ular quyidagi formulalar yordamida hisoblanadi:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}, \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n}}. \qquad (3)$$

Shuningdek, korrelyatsiya koeffitsientini hisoblashning quyidagi modifikatsiyalangan formulalaridan ham foydalanish mumkin:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y}, \qquad (4)$$

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} xy - \sum_{i=1}^{n} x \sum_{i=1}^{n} y}{\sqrt{\left[n\sum_{i=1}^{n} x^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x\right)^2\right] \cdot \left[n\sum_{i=1}^{n} y^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y\right)^2\right]}}. \qquad (5)$$

Korrelyatsiya koeffitsienti $-1 \le r \le 1$ oralig'idagi qiymatga ega bo'ladi.

Korrelyatsiya koeffitsientining manfiy qiymati hodisalar o'rtasida teskari bog'lanish mavjud ekanligidan dalolat beradi. Ayrim hollarda korrelyatsiyaning indeksi yoki koeffitsienti bilan bir qatorda, determinatsiya koeffitsienti $d = r^2$ deb ataluvchi ko'rsatkich ham aniqlanadi. Determinatsiya koeffitsienti natija ko'rsatkichi va variatsiyasining qaysi qismi omil ko'rsatkichlari variatsiyasi bilan bog'langanligini ko'rsatadi. Agar tahlil ta'sir qilayotgan omil qiymatining o'zgarishiga muvofiq hodisalar qiymati taxminan bir tekisda o'zgarishini ko'rsatsa, u holda to'g'ri chiziqli bog'lanish mavjudligini ko'rsatadi. Mabodo bu o'zgarish bir tekisda bo'lmasa, unda egri chiziqli bog'lanish bo'ladi.

Iqtisodiy tadqiqotlarda qo'llanilayotgan korrelyatsiya formulalari turli shaklga ega. Iqtisodiy qatorlar dinamikasi o'rtasidagi bog'lanishlar chizig'i shaklini aniqlayotganda, ko'pchilik hollarda quyidagi shakl-

| Vaqt | Sof foyda, mln. so'm | Tushum, mln. so'm | Xarajatlar, mln. so'm | Ishlovchilar soni, kishi | Asosiy fondlar qiymati, mln. so'm | Reklama xarajatlari, mln. so'm |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2001. 01 | 5,8 | 10,8 | 16,6 | 121 | 18,7 | 0,23 |
| 2001. 02 | 5,9 | 11,6 | 17,5 | 123 | 19,3 | 0,25 |
| 2001. 03 | 6,2 | 12,3 | 18,5 | 130 | 19,7 | 0,30 |
| 2001. 04 | 6,9 | 13,4 | 20,3 | 129 | 20,1 | 0,32 |
| 2002. 01 | 6,4 | 12,1 | 18,5 | 136 | 20,3 | 0,30 |
| 2002. 02 | 6,8 | 13,0 | 19,8 | 142 | 20,5 | 0,29 |
| 2002. 03 | 7,2 | 15,4 | 22,6 | 135 | 19,8 | 0,31 |
| 2002. 04 | 7,7 | 15,4 | 23,1 | 130 | 19,3 | 0,34 |
| 2003. 01 | 7,7 | 15,5 | 23,2 | 134 | 21,0 | 0,41 |
| 2003. 02 | 8,4 | 17,2 | 25,6 | 137 | 22,3 | 0,39 |
| 2003. 03 | 8,9 | 18,3 | 27,2 | 143 | 24,7 | 0,42 |
| 2003. 04 | 9,6 | 19,9 | 29,5 | 144 | 24,9 | 0,45 |
| 2004. 01 | 9,7 | 20,1 | 29,8 | 140 | 25,1 | 0,43 |
| 2004. 02 | 10,3 | 20,3 | 30,6 | 145 | 26,9 | 0,49 |
| 2004. 03 | 10,9 | 21,0 | 31,9 | 146 | 30,1 | 0,51 |
| 2004. 04 | 11,4 | 21,1 | 32,5 | 148 | 30,3 | 0,55 |

## Tayanch iboralar

Vaqtli qatorlar, o'rtacha qiymatlar, sirg'anuvchi usul, vaqtli qatorlarni tekislash va vaznli tekislash, o'rta arifmetik, tendensiya, eng kichik kvadratlar usuli, polinom, normal tenglamalar sistemasi, dispersiya, dispersiya tahlili, o'rta kvadratik xato, variatsiya.

## Takrorlash uchun savollar

1. Vaqtli qatorlarga ta'rif bering.
2. Vaqtli qatorlarning farq qiluvchi xususiyatlarini ta'riflab bering.
3. Kelajakning vaqtli qatorlari ishonchlilik darajasiga ko'ra necha guruhga bo'linadi?
4. Sirg'anuvchi o'rtacha usulni tushuntirib bering.
5. Eng kichik kvadratlar usulini tushuntirib bering.
6. Normal tenglamalar sistemasi qanday tuziladi?
7. Funksiya shakllarini aniqlashning necha xil usuli mavjud?
8. Variatsiya deb nimaga aytiladi?
9. Dispersiyalarni aniqlashda daraja erkinligi qanday holatda bo'ladi?
10. $F$ - mezonning empirik qiymati qanday hisoblanadi?
11. Regressiya tenglamasi qaysi mezon yordamida aniqlanadi?
12. Chiziqli funksiya uchun dispersiyalar qanday hisoblanadi?
13. Fisherning F-mezoni nimani aniqlaydi?
14. Styudentning t-mezoni qachon qo'llaniladi?

## 3.3. Iqtisodiy jarayonlarni bashoratlashda korrelyatsiya va regressiya tahlili usullarini qo'llash

Umumlashgan katta sonni tahlil qilish va aniq kuzatishda u yoki bu qonuniyatlarni aniqlash zarurligi ko'pgina iqtisodiy tadqiqotlarning xarakterli xususiyati hisoblanadi. Real borliqda hech bir iqtisodiy zaruriyat bevosita sof holda namoyon bo'lmaydi.

Bir qiymatni o'zgartirish boshqasining o'rtacha qiymati o'zgarishiga olib keladigan hollarda bog'lanishni o'rganish katta qiziqish uyg'otadi. Mana shunday bog'lanishga *korrelyatsion bog'lanish* deyiladi. Korrelyatsiya tahlilining maqsadi, hodisalar o'rtasidagi bog'lanishning zichligini o'rganishdir. Bog'lanishlar o'z mohiyatiga ko'ra sodda va murakkab bo'lishi mumkin. Ijtimoiy hodisalar, shu jumladan, iqtisodiy hodisalar odatda murakkab bog'langan bo'ladi.

Korrelyatsiya tahlili hodisalar o'rtasidagi bog'lanishni aniqlaydigan usullardan biri hisoblanadi. Lekin faqat korrelyatsiya tahlili bog'lanishning zichligi haqida oddiy baho bera oladi. Bu holat iqtisodiy tadqiqotlarda korrelyatsiya tahlilini keng qo'llash imkoniyatini beradi. Korrelyatsiya tahlili haqida gapirganda regressiya tahlilini unutmaslik kerak. Regressiya tahlili hodisalar o'rtasidagi bog'lanishning statistik tahlil usuli bo'lib, bog'lanish shakllarini tahlil qiladi. Regressiya tahlili natijalari regressiya tenglamalari va koeffitsientlarida sifat ifodasiga ega bo'ladi.

Korrelyatsiya va regressiya tahlilning samaradorligi ko'pgina ijtimoiy-iqtisodiy muammolarni hal qilishda muhim rol o'ynaydi. Korrelyatsiya va regressiya tahlili qilishdan oldin o'rganilayotgan hodisalar o'rtasida bog'lanish har tomonlama sinchiklab tahlil qilinishi lozim. Haqiqatan ham bog'lanish mavjud bo'lsa, korrelyatsiya va regressiya tahlili usulidan foydalanish hamda muhim ahamiyatga ega bo'lgan natijalarni olish mumkin bo'ladi.

Korrelyatsiya tahlilining birinchi vazifasi, korrelyatsiya bog'lanish shakllarini, ya'ni regressiya funksiyasi ko'rinishlarini (chiziqli, darajali, logarifmik va boshqalar) aniqlashdan iborat. Bog'lanish shakllarini tanlash regressiya tahlili va tanlanayotgan funksiya haqidagi ma'lum gipotezalarni ishlab chiqish hamda tahlil qilishdan boshlanadi. Regressiyalarni tenglashtirish korrelyatsiya modellarining tarkibiy qismi bo'lib, uni to'g'ri tanlay bilish, modellashtirishning eng mas'uliyatli bosqichi hisoblanadi.

Tahlil vaqtida garchi ba'zi bir tanlangan shakllarning to'g'riligini baholashning usullari ishlab chiqilgan bo'lsa ham, bog'lanish shaklini tanlay olish juda muhim hisoblanadi. Korrelyatsiya bog'lanishlari tasnifi quyidagi 1-chizmada keltirilgan.

| Kuzatuvlar | Yalpi hosil, ming t. $y_i$ | Hosildorlik, s/ga $y'_i$ | $t$ | $t^2$ | $y_i \cdot t$ | $y'_i \cdot t$ | $\hat{y}$ | $\hat{y}'$ | $\left(y_i-\hat{y}\right)^2$ | $(y'_i-\hat{y}'_i)^2$ | $(y_i-\bar{y})^2$ | $(y'_i-\bar{y}')^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 76,6 | 16,2 | -11 | 121 | -842,6 | -178,2 | 65,875 | 14,094 | 115,03 | 4,435 | 43,30 | [illegible] |
| 2 | 69,1 | 15,2 | -10 | 100 | -691,0 | -152,0 | 67,448 | 14,630 | 2,729 | 0,325 | 198,25 | [illegible] |
| 3 | 64,3 | 15,1 | -9 | 81 | -578,7 | -135,9 | 69,021 | 15,166 | 22,288 | 0,004 | 356,45 | [illegible] |
| 4 | 66,5 | 16,9 | -8 | 64 | -532,0 | -135,2 | 70,594 | 15,702 | 16,761 | 1,435 | 278,22 | [illegible] |
| 5 | 70,8 | 16,8 | -7 | 49 | -495,6 | -117,6 | 72,167 | 16,238 | 1,869 | 0,314 | 153,26 | [illegible] |
| 6 | 49,7 | 12,9 | -6 | 36 | -298,2 | -77,4 | 73,740 | 16,774 | 577,92 | 14,977 | 1120,91 | [illegible] |
| 7 | 74,4 | 13,8 | -5 | 25 | -372,0 | -69,0 | 75,313 | 17,310 | 0,836 | 12,250 | 77,09 | [illegible] |
| 8 | 59,7 | 16,1 | -4 | 16 | -238,8 | -64,4 | 76,886 | 17,846 | 295,359 | 3,240 | [illegible] | [illegible] |
| 9 | 100,5 | 20,4 | -3 | 9 | -301,5 | -61,2 | 78,459 | 18,382 | 485,057 | 3,610 | 299,98 | [illegible] |
| 10 | 77,4 | 17,8 | -2 | 4 | -154,8 | -35,6 | 79,718 | 18,918 | 5,373 | 1,210 | 32,99 | [illegible] |
| 11 | 93,4 | 18,3 | -1 | 1 | -93,4 | -18,3 | 81,605 | 19,454 | 139,122 | 1,323 | 104,45 | [illegible] |
| 12 | 79,9 | 18,9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 83,178 | 19,990 | 10,745 | 1,188 | 10,76 | [illegible] |
| 13 | 99,7 | 22,8 | 1 | 1 | 99,7 | 22,8 | 84,751 | 20,526 | 223,472 | 5,513 | 272,91 | 7,90 |
| 14 | 98,8 | 23,1 | 2 | 4 | 197,6 | 46,2 | 86,324 | 21,062 | 155,651 | 4,162 | 234,98 | 8,57 |
| 15 | 86,0 | 19,6 | 3 | 9 | 258,8 | 58,8 | 87,897 | 21,598 | 3,599 | 4,000 | 7,95 | 0,15 |
| 16 | 109,8 | 27,0 | 4 | 16 | 439,2 | 104,0 | 89,470 | 22,134 | 413,309 | 237,17 | 706,62 | 49,14 |
| 17 | 83,9 | 24,0 | 5 | 25 | 419,5 | 120,0 | 91,043 | 22,670 | 51,022 | 1,769 | 0.52 | 46,08 |
| 18 | 66,2 | 18,7 | 6 | 36 | 397,2 | 112,2 | 92,616 | 23,206 | 698,596 | 20,250 | 288,32 | 1,66 |
| 19 | 96,9 | 25,9 | 7 | 49 | 678,3 | 181,3 | 94,189 | 23,742 | 7,350 | 4,666 | 188,24 | 34,93 |
| 20 | 97,1 | 25,8 | 8 | 64 | 776,8 | 206,4 | 95,762 | 24,278 | 1,790 | 2,310 | 193,77 | 33,76 |
| 21 | 97,2 | 24,2 | 9 | 81 | 878,8 | 217,8 | 97,335 | 24,814 | 0,018 | 0,372 | 196,56 | 17,72 |
| 22 | 98,1 | 24,6 | 10 | 100 | 981,0 | 246,0 | 98,908 | 25,350 | 0,653 | 0,563 | 222,61 | 21,25 |
| 23 | 97,1 | 25,8 | 11 | 121 | 1068,1 | 283,8 | 100,481 | 25,885 | 11,431 | 0,008 | 193,77 | 33,76 |
| $\sum$ | **1913,1** | **459,9** | **0** | **1012** | **1501,8** | **542,1** | **1912,78** | **459,77** | **3240,02** | **111,28** | **5742,22** | **[illegible]** |
| o'rtachalar | **83,18** | **19,99** | | **4** | **69,21** | **23,56** | **83,16** | **19,99** | **140,87** | **4,838** | **249,66** | **13,35** |

Normal tenglamalar sistemasini yechib, izlangan parametrlarni aniqlasak,

$$a_0 = \frac{\sum y}{n} = 83{,}178\,; \qquad a'_0 = \frac{\sum y'}{n} = 19{,}99\,;$$

$$a_1 = \frac{\sum yt}{t^2} = 1{,}573\,; \qquad a'_1 = \frac{\sum y't}{t^2} = 0{,}536\,.$$

Kuzgi bug'doy yalpi yig'imi qatorlar dinamikasining chiziqli tendensiyasi

$$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t = 83{,}178 + 1{,}576 \cdot t$$

tenglamasi bilan ifodalanadi hamda kuzgi bug'doy hosildorligi, chiziqli tendensiyasi esa

$$y'_t = a'_0 + a'_1 t = 19{,}99 + 0{,}536 \cdot t$$

tenglamasi ko'rinishida ifodalanadi.

Kuzgi bug'doy yalpi yig'imi qatorlari dinamikasi trendi sifatida chiziqli funksiyaning foydaliroq ekanligida to'xtab o'tamiz. Buning uchun (11), (12), (13), (14) formulalar bo'yicha dispersiyalarni aniqlaymiz.

yalpi mahsulot uchun:

$$S^2 = \frac{V}{n-1} = \frac{5650{,}8}{22} = 456{,}8\,; \qquad V = 5650{,}8\,;$$

$$S_1^2 = V_1 = 3268{,}7\,; \qquad V_2 = 2382{,}1\,;$$

$$S_2^2 = \frac{V_2}{n-2} = \frac{2382{,}1}{21} = 113{,}4\,; \qquad V_1 = V - V_2 = 3268{,}7\,;$$

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{3268{,}7}{113{,}4} = 28{,}8\,.$$

hosıldorlik uchun:

$$S^2 = \frac{V}{n-1} = \frac{409{,}80}{22} = 18{,}6\,; \qquad V = 409{,}80\,;$$

$$S_1^2 = V_1 = 301{,}06\,; \qquad V_2 = 108{,}74\,;$$

$$S_2^2 = \frac{V_2}{n-2} = \frac{108{,}79}{21} = 5{,}18\,; \qquad V_1 = V - V_2 = 301{,}06\,;$$

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{301{,}06}{5{,}18} = 58{,}1\,.$$

$F = 58{,}1$ va $F_{0{,}99} = 8{,}40$ bo'lganidan 99% aniqlik bilan aytish mumkinki, kuzgi bug'doy hosildorligi qatorlar dinamikasi tendensiyasining rivojlanishini xarakterlash uchun ham chiziqli funksiyadan foydalanish mumkin.

$a_1$ va $a_1'$ parametrlari funksiyaning o'zgarish tezligini ifodalaydi. Binobarin, tekshirilayotgan davrda kuzgi bug'doy o'rish o'rtacha hisobda yiliga 1,573 ming tonnaga oshgan, kuzgi bug'doy hosildorligi esa yiliga gektar hisobiga 0,5 sentnerga oshgan.

## Mustaqil yechish uchun misollar

**1-misol**. Quyida oziq-ovqat sanoati korxonasi ma'lumotlari keltirilgan (shartli ma'lumotlar).

Ushbu ma'lumotlar asosida quyidagilar hisoblansin:

a) har bir ko'rsatkichning o'rtacha qiymatlari, o'rtacha kvadrat chetlanishi;

b) har bir ko'rsatkich bo'yicha grafik chizilsin;

c) sof foydani ishlovchilar soni, asosiy fondlar qiymati va reklama xarajatlaridan regressiya tenglamasi tuzilsin;

d) omillar orasidagi bog'lanish zichligi tahlil qilinsin;

e) olingan modellarni aniq jarayonga mosligi tekshirilsin;

f) dinamik qator avtokorrelyatsiyaga tekshirilsin;

g) olingan natijalar iqtisodiy tahlil qilinsin.

$$\begin{cases} n\ln a_0 + \ln a_1 \sum t = \sum \ln y \\ \ln a_0 \sum t + \ln a_1 \sum t^2 = \sum t \ln y \end{cases} \quad (9)$$

Ko'pincha boshlang'ich ma'lumotlar asosida qatorlar dinamikasining rivojlantirish tendensiyasini tavsiya etish uchun eng qulay funksiya qaysi biri ekanligini hal qilish masalasi murakkab bo'ladi. Bunday hollarda funksiya shakllarini aniqlashning quyidagi ikki xil usulidan foydalanish mumkin: o'rta kvadratik xatolar minimumi usuli bilan funksiya tanlash; dispersiya tahlili usulini qo'llash orqali funksiya tanlash.

1. Mantiqiy tahlil hamda tadqiqot tufayli qo'lga kiritilgan shaxsiy tajriba asosida qator turli xil funksiyalar tanlab olinadi va ularning parametrlari baholanadi. Shundan so'ng har bir funksiya uchun quyidagi formula asosida o'rta kvadratik xatolar aniqlanadi:

$$S = \sqrt{\frac{\sum\left(y_t - \hat{y}_t\right)^2}{n-k-1}}, \quad (10)$$

bu yerda: $y_t$ – qatorlar dinamikasining qiymati;

$\hat{y}_t$ – qatorlar dinamikasi qiymatlarini tenglashtirish;

$k$ – funksiya parametrlari soni.

Mazkur usul faqat tenglama parametrlarining teng sonida qiyosiy natijalar beradi.

Ikkinchi usul dispersiyalarni taqqoslashdan iborat. O'rganilayotgan qatorlar dinamikasi umumiy variatsiyasini ikki qismga, ya'ni tendensiyalar tufayli sodir bo'ladigan variatsiyalar va tasodifiy variatsiyalar yoki $V = V_1 + V_2$ bo'lishi mumkin.

Umumiy variatsiya quyidagi formula bo'yicha aniqlanadi:

$$V = \sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2, \quad (11)$$

bu yerda, $\bar{y}$ - qatorlar dinamikasining o'rtacha darajasi.

Tasodifiy variatsiyalar quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$$V_2 = \sum_{t=1}^{n}\left(y_t - \hat{y}_t\right)^2. \quad (12)$$

Umumiy va tasodifiy variatsiyalarning farqi tendensiyalar variatsiyasi hisoblanadi:

$$V_1 = V - V_2. \quad (13)$$

Tegishli dispersiyalarni aniqlashda daraja erkinligi quyidagicha bo'ladi:

1. Tendensiyalar tufayli dispersiyalar uchun daraja erkinligi soni tekislash tenglamasi parametrlari sonidan bitta kam bo'ladi.

2. Qatorlar dinamikasi darajasi soni bilan tekislash tenglamasi parametrlari soni o'rtasidagi farq tasodifiy tendensiyalar uchun daraja erkinligi soniga teng bo'ladi.

3. Umumiy dispersiyalar uchun daraja erkinligi soni qatorlar dinamikasi darajasi sonidan bitta kam bo'ladi. Chiziqli funksiya uchun dispersiyalar quyidagicha hisoblanadi:

$$S^2 = \frac{V}{n-1}, \tag{14}$$

$$S_1^2 = V_1, \tag{15}$$

$$S_2^2 = \frac{V_2}{n-2}. \tag{16}$$

Dispersiyalar aniqlangandan so'ng $F$ - mezonning empirik qiymati hisoblanadi:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}. \tag{17}$$

Olingan qiymatni erkinlik va ehtimollik darajasiga muvofiq aniqlangan jadval qiymati bilan taqqoslanadi.

Agar $F > F_\alpha$ ko'rinishidagi tengsizlik bajarilsa, u holda tahlil qilinayotgan tenglama ifodalanayotgan tendensiya uchun to'g'ri keladi. Bunday hollarda tahlil qilishni mantiqiy tushunchalarga mos keladigan oddiy tenglamalardan boshlab, asta-sekin kerakli daraja aniqlangunga qadar murakkabroq darajalarga o'tib borish lozim.

Trend aniqlangandan keyin boshlang'ich qatorlar dinamikasiga tegishli darajada trendning qiymati olinadi. Tahlil bundan keyin trenddan chetga chiqishi mumkin.

$$z(t) = y(t) - \hat{y}(t) \tag{18}$$

$z(t)$ chetga chiqishi $\sigma^2$ arifmetik dispersiyali o'rtacha nolga teng bo'ladi.

Tenglama parametrlarini aniqlash zarur:

$$\hat{y}(t) = a_0 + a_1 t,$$

$$\hat{y}'(t) = a_0' + a_1' t.$$

Normal tenglamalar sistemasi to'g'ri chiziqli tenglamalar uchun quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum t = \sum y \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 = \sum ty \end{cases}$$

*Masala*. O'zbekistonda kuzgi bug'doy yalpi hosildorligi qatorlar dinamikasi tendensiyalarini aniqlaylik. Ma'lumotlar statistik to'plamdan olingan.

o‘rtacha sirg‘anuvchi usulning ikki modifikatsiyasidan, ya’ni oddiy va vaznli tekislashdan foydalaniladi.

Oddiy tenglashtirish o‘rtalikdagi $p$ uzunlikdagi vaqt uchun oddiy o‘rta arifmetik hisoblashdan tuzilgan yangi qator tuzishga asoslanadi:

$$y_k = \frac{\sum_{i=k}^{p+k} y}{p} \quad (k = 1,\ 2, \ldots,\ N - p + 1), \qquad (1)$$

bu yerda: $p$ - tenglashtirish davri uzunligi vaqtli qatorlar xarakteriga bog‘liq bo‘ladi;

$k$ - o‘rtacha qiymatning tartib nomeri.

Vaznli tenglashtirish turli nuqtadagi qatorlar dinamikasi uchun vaznli o‘rtacha qiymatlarni o‘rtachalashtirishdan iborat.

Birinchi $2p+1$ qatorlar dinamikasini olib ko‘raylik ($p$ odatda 1 yoki 2 ga teng). Tendensiyalar funksiyasi sifatida qandaydir:

$$y_t = \sum_{i=0}^{k} a_i t^i \qquad (2)$$

(2) to‘la darajasini olaylik.

Uning parametrlari

$$a_0 \sum_{-p+1}^{p+1} t^i + a_1 \sum_{-p+1}^{p+1} t^{i+1} + \ldots + a_k \sum_{-p+1}^{p+1} t^{i+k} = \sum_{-p+1}^{p+1} y_t t^i \qquad (3)$$

tenglamasi yordamida eng kichik kvadratlar usuli bilan aniqlanadi.

Ko‘phad (polinom) o‘rtacha darajasi $p+1$ nuqtasiga joylashgan. $a_0$ ga nisbatan tenglamani yechsak:

$$a_0 = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_{2p+1} y_{2p+1} \qquad (4)$$

hosil qilamiz. Bu yerdagi $b_1$ qiymati $p$ va $k$ mohiyatiga bog‘liq bo‘ladi. Hosil bo‘lgan tenglama (4) birinchilardan $2p+1$ qatorlar dinamikasi qiymatining vaznli o‘rtacha qiymat arifmetikasi hisoblanadi. Sirg‘aluvchan o‘rtacha qiymat usuli boshqa usullarga nisbatan qator afzalliklarga ega. Jumladan, sirg‘aluvchan o‘rtacha qiymat shunday tendensiya funksiyasini beradiki, u mohiyatiga ko‘ra o‘rganilayotgan qatorlar mohiyatiga yaqin turadi. Chunki, qatorning ayrim qismlari eng yaxshi tendensiya tanlab olinadi. O‘rganilayotgan qatorlarga yangi daraja qo‘shilishi mumkin. Tendensiyalarni aniqlash ko‘p mehnat talab etishi singari xususiyatlar sirg‘aluvchan o‘rtacha qiymat usulining afzalliklari hisoblanadi. Lekin sirg‘aluvchan o‘rtacha usul sirg‘anish davri oshirilishi bilan qatorning eng chetki davrlari haqidagi axborot yo‘qolishi singari kamchiliklarga ham ega. Bunga vaqtli qatorlar tahlilining ba’zi usullarida yo‘l qo‘yib bo‘lmaydi.

**Eng kichik kvadratlar usuli**. Eng kichik kvadratlar usulining mohiyati shundan iboratki, uning natijasida izlanayotgan tenglamalar tendensiyasining shunday parametrlari hosil bo‘ladiki, bunday hollarda

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(t))^2 \to \min \qquad (5)$$

funksiya minimumga aylanadi.

Iqtisodiy qatorlar dinamikasi tendensiyasini aniqlash vaqtida ko'pchilik hollarda turli darajadagi polinomlar:

$$\hat{y}(t) = \left[a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i t^i\right]^u \quad \begin{matrix}(i = -1, 0, 1, \ldots, k)\\ (u = -1,\ 1)\end{matrix}$$

va eksponensional funksiyalar qo'llaniladi:

$$\hat{y}(t) = \left[e^{a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i t^i}\right]^u \quad \begin{matrix}(i = -1, 0, 1, \ldots, k)\\ (u = -1,\ 1)\end{matrix} \qquad (6)$$

Shuni qayd etib o'tish lozimki, funksiya shakli tenglashtirilayotgan qatorlar dinamikasi xarakteriga muvofiq, shuningdek, mantiqiy asoslangan bo'lishi lozim.

Polinomning eng yuqori darajalaridan foydalanish ko'pchilik hollarda o'rtacha kvadrat xatolarining kamayishiga olib keladi. Lekin bunday vaqtlarda tenglashtirish bajarilmay qoladi.

Tenglashtirish parametrlari (2) bevosita eng kichik kvadratlar usuli yordamida baholanadi. Eksponensional funksiya parametrlarini baholash uchun esa boshlang'ich qatorlar qiymatini logarifmlash lozim.

Normal tenglamalar sistemasi quyidagicha bo'ladi:

a) $k$ tartibli polinom uchun:

$$\begin{cases} na_0 + a_1\sum t + a_2\sum t^2 + \ldots + a_k\sum t^k = \sum y \\ a_0\sum t + a_1\sum t^2 + a_2\sum t^3 + \ldots + a_k\sum t^{k+1} = \sum yt \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0\sum t^k + a_1\sum t^{k+1} + a_2\sum t^{k+2} + \ldots + a_k\sum t^{2k} = \sum yt^k \end{cases} \qquad (7)$$

b) eksponensional funksiya uchun:

$$\begin{cases} na_0 + a_1\sum t + a_2\sum t^2 + \ldots + a_k\sum t^k = \sum \ln y \\ a_0\sum t + a_1\sum t^2 + a_2\sum t^3 + \ldots + a_k\sum t^{k+1} = \sum t\ln y \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0\sum t^k + a_1\sum t^{k+1} + a_2\sum t^{k+2} + \ldots + a_k\sum t^{2k} = \sum t^k \ln y \end{cases} \qquad (8)$$

Agar tendensiya ko'rsatkichli funksiyaga ega bo'lsa, ya'ni

$$y_t = a_0 a_1^t$$

bo'lsa, ushbu funksiyani logarifmlab, parametrlarini eng kichik kvadratlar usuli yordamida aniqlash mumkin. Ushbu funksiya uchun normal tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

korrelyatsiya va regressiya tahlili usulining muhim tomonlari hisoblanadi.

## Tayanch iboralar

Staxostik jarayonlar, ishlab chiqarish tendensiyalari, noaniqlik, tavakkalchilik, statistik kuzatuv, kiritiladigan va chiqish ma'lumotlari, iqtisodiy jarayonlar dinamikasi, statik va dinamik modellar, pog'onali va ko'p sathli modellar, regressiya, approksimatsiya, prognozlash, variatsiya, dinamik qator, xususiy dinamik model, xususiy fazoviy model, umumiy dinamik model, korrelyatsiya.

## Takrorlash uchun savollar

1. Iqtisodiy-statistik modellashtirishning zarurligi nimalardan iborat?
2. Iqtisodiy-statistik modellashtirishni noaniq bo'lmasligining sabablarini aytib bering.
3. Korxona faoliyatini o'zida mujassamlashtirgan barcha ko'rsatkichlarni necha guruhga bo'lish mumkin?
4. Modeldan aniq talablar xarakteristikasini tushuntirib bering.
5. Tadqiqotlar ko'lamiga qarab modellar necha xilga bo'linadi?
6. Statik va dinamik modellarga ta'rif bering.
7. Ishlab chiqarishning boshlang'ich omillariga nimalar kiradi?
8. Ishlab chiqarish kombinatsiyasi deb nimaga aytiladi?
9. Umumiy va xususiy modellarning farqli tomonlarini ifodalab bering.
10. Pog'onali va ko'p sathli modellarni tuzish shartlari qanday?
11. Tavsiflash modellarini tushuntirib bering.
12. Tushuntirish modellariga ta'rif bering.
13. Identifikatsiya nima?
14. Variatsiyani tushuntirib bering.
15. Dinamik qator deganda nimani tushunasiz?
16. Dinamik qatorlarni tekislash usullarini tushuntirib bering.
17. Korrelyatsiya modellarining qo'llanish sohasini tushuntirib bering.
18. Regressiya modellari deb nimaga aytiladi?
19. Korrelyatsiya modelni tuzih necha bosqichdan iborat?
20. Ko'p omilli modellarga misol keltiring.
21. Juft korrelyatsiya koeffitsienti qanday hisoblanadi?
22. Ko'plikdagi korrelyatsiya koeffitsienti nimani ifodalaydi?
23. Regressiya tenglamasidagi ozod had nimani bildiradi?
24. Regressiya koeffitsientlarining iqtisodiy ma'nosini tushuntirib bering.

## 3.2. Vaqtli qatorlar asosiy tendensiyasini aniqlash

Matematik statistikaning asosiy masalalaridan biri – o'rganilayotgan hodisalarning makonda o'zgarish va rivojlanish jarayonini tadqiq qilishda vaqtli qatorlarnı tuzish va tahlil qilish yo'li bilan hal etiladi. Iqtisodiy hodisalarning makonda o'zgarishini ifodalayotgan sonlar ketma-ketligini kuzatish *vaqtli qator* deb ataladi.

Vaqtli qatorlar ko'rsatkichning barqaror o'zgarishlariga va xususiy tasodiflar o'zgarishiga ega bo'ladi. Vaqtli qatorlardagi xususiy tasodiflarni bartaraf etish va barqaror o'zgarishlarni aniqlash uchun ular u yoki bu usullar bilan taqqoslanadi. Taqqoslangan qatorlarni haqiqiy qatorlar bilan taqqoslash, ayrim korxonalarni, tarmoq va xalq xo'jaligini rivojlantirishning ba'zi muhim xususiyatlarini aniqlash imkonini beradi. Taqqoslangan va haqiqiy qiymat ko'rsatkichlarining farqi, taqqoslangan qatorlar joylashgan va kelajak rivojlanish ko'rsatkichlari qatorlari joylashishi mumkin bo'lgan chegaralarni aniqlash imkonini beradi.

Ko'pgina iqtisodiy tadqiqotlarda, ayniqsa vaqtli qatorlarni tahlil qilish jarayonida nihoyatda chegaralanib tanlash bo'yicha aniqliklarni qayta ishlashga to'g'ri keladi. Bunday sharoitda tajribalar guruhini ta'riflash uchun qilingan har qanday urinish, mutlaq rasmiy va sub'ektiv bo'ladi. Shuning uchun ko'pchilik hollarda hodisaning qandaydir bir tomonini ehtimol ta'riflash imkoniyatini aniqlash qiyin. Iqtisodiy vaqtli qator farq qiluvchi xususiyatlarini quyidagicha ko'rsatish mumkin:

a) berilgan sharoitda kuzatilayotgan jarayonni qayta kuzatish mumkin emas;

b) odatda kuzatilayotgan qatorlar, kuzatilayotgan tanlama hajmiga ko'ra juda chegaralangan bo'ladi.

Shuning natijasi o'laroq o'rganilayotgan hodisalarga ehtimollar nazariyasi bilan yondashishda hodisalar modelini statistik tajribalarda xayolan tasavvur etish, shuningdek, ba'zi bir ehtimollikni cheklab qo'yish lozim. Haqiqatdan ham statistik xulosalar baholashni tanlashga yoki ko'rib chiqilayotgan umumiy model doirasıda oldindan o'rganilgan nazariy mezon xususiyatıga asoslangan bo'ladi. Kelajakning vaqtli qatorlari ishonchlilik darajasiga ko'ra hisobli (yaqin 20-30 yil uchun ishonchli), umumiy tasavvurlarga ko'ra taxminiy (100 yilgacha) va xayoliyga (100 yildan ko'p) bo'linadi. Sirg'anuvchi o'rtacha usul o'rtacha qiymatni aniqlash vaqtida tasodifiy chetlanishlarning o'sish holatiga asoslanadi. O'rtacha faktik qiymatlar qatorlari dinamikasi tekislanayotgan vaqtda sirg'anishning o'rtacha nuqta davrini ko'rsatadigan o'rtacha qiymatlar bilan almashinadi. Odatda

2. Statistik ma'lumotlarni to'plash va ularni birlamchi qayta ishlash.

3. Juft bog'lanishlarni o'rganish.

4. Bog'lanish shakllarini tanlash va regressiya tenglamalari parametrlarini aniqlash.

5. Masalaning yechish natijalarini statistik baholash va modelning iqtisodiy ma'nosi.

Korrelyatsiya modeli tuzishning birinchi bosqichida tekshirish maqsadi shakllanadi, natijaviy va omilli alomatlar tanlanadi, boshlang'ich axborotni olish usuli haqidagi masala hal qilinadi va hokazolar.

Omilli alomatlar tanlash sabablari bilan aniqlanadi. Bu sabablarga hodisalar xususiyatini hisobga olish, model tuzishning maqsadi, boshlang'ich axborotning mavjudligi va boshqalar kiradi. Omillar orasida multikollinearlikning mavjudligi, ya'ni o'rganilayotgan ko'rsatkichni aniqlaydigan omilli alomatlar o'rtasida chiziqli bog'lanish mavjud ekanligini tekshirish muhim ahamiyat kasb etadi. Chunonchi, ikkita omil o'rtasida korrelyatsiya yuqori koeffitsientini ifodalaydigan chiziqli bog'lanish mavjud bo'lsa, u holda ikki axborotdan biri tanlab olinadi. Shuning uchun modelga omillardan biri kiritiladi.

Amalda omillarni ajratish ikki bosqichni tanlash yordamida amalga oshiriladi. Tanlashning birinchi bosqichida o'rganilayotgan hodisalar bilan mantiqiy bog'langan omillar tanlab olinadi. Ikkinchi bosqichda esa maxsus miqdoriy tahlil qilish yo'li bilan ana shu omillar orasidan modelga kiritish uchun asosiy omillar tanlab olinadi.

Ko'p omilli modellarni tuzishda o'rganilayotgan ko'rsatkichlar o'rtasidagi jiddiy bog'lanishlarni aniqlash hamda bog'lanishning eng qulay shakllarini ko'rsatish imkonini beradigan juft qonuniyatlar tahlili muhim bosqich hisoblanadi.

Juft korrelyatsiya koeffitsientlari ko'p parametrli modelning omil tanlash alomati hisoblanadi. Har doim, buni ko'pchilik olimlar qayd etishgan, natijaviy va omilli alomatlar o'rtasidagi yuqori koeffitsientli juft korrelyatsiyalar o'rganilayotgan ko'rsatkichga (mazkur omil) jiddiy ta'sir ko'rsatayotganligidan va shunga muvofiq ko'p omilli modelga kiritilishi lozimligidan dalolat beradi.

Omillarni uzil-kesil modelga kiritish maqsadida omilli alomatlar o'rtasidagi bog'lanishlarni miqdoriy baholash lozim. Omillar o'rtasida bog'lanish shaklini tanlashning uchta usuli mavjud:

– empirik usul;

– oldingi tadqiqotlar tajribasi usuli;

– mantiqiy tahlil usuli.

Analitik funksiya turini regressiyaning empirik grafigi bo'yicha aniqlash mumkin. Lekin mazkur grafik usulni faqat juft bog'lanish hollarida hamda kuzatishlar soni nisbatan ko'p bo'lganda muvaffaqiyatli qo'llash mumkin.

O'rganilayotgan iqtisodiy hodisalarning mantiqiy tahlili, bog'lanish shaklini asoslash va tanlashda asos bo'ladi. Shu bilan birga, o'rganilayotgan hodisani tavsiflash uchun eng qulay funksiyalar sinfini asoslash imkonini beradi. Bog'lanishli munosabat aniq shakllarini tanlash, iqtisodiy jarayon haqida boshlang'ich axborotning mavjudligiga bog'liq bo'ladi. Ayrim hollarda mantiqiy tahlil funksiyalar sinfini tanlash imkonini beradi. Bunday hollarda EHM yordamida, ma'lum funksiyalar saralanadi, model parametrlari aniqlanadi hamda natijalar bilan taqqoslanadi.

Mezon sifatida, odatda, ko'plikdagi korrelyatsiya koeffitsienti, Fisher mezoni va o'rta qiymatli approksimatsiya xatoligidan foydalaniladi.

Hisoblashlar ko'lamining ko'p bo'lishi, saralash algoritmining bo'lmasligi, bog'lanish shaklini tanlashda mazkur usuldan foydalanish, korrelyatsiya usulining samaradorligini kamaytiradi.

O'zaro bog'lanish xarakteriga qat'iy funksional ko'rinish berib bo'lmaydigan hollarda korrelyatsiya va regressiya tahlili usullaridan foydalaniladi. Bunday hollarda natijaviy va omilli alomatlar o'rtasidagi bog'lanish o'rtacha qiymat tendensiya ko'rinishida namoyon bo'ladi.

Korrelyatsiya koeffitsientlari bog'lanishni, regressiya tenglamasini va uning shaklini ifoda etadi. Regressiya tenglamalari parametrlari o'sish parametrlarini umumlashtirish yoki ma'lum tadqiqot natijasida o'sish ma'nosiga ega bo'ladi.

Normal taqsimot qonuni shaklida ifodalangan *katta sonlar qonuni* korrelyatsiya va regressiya tahlilning nazariy asosini tashkil etadi.

Tahlildagi mavjud omillar natijaviy va omilli alomatlar uchun bir vaqtda butun majmua bilan matritsa shaklda qayd qilinadi, shuningdek, ular miqdoriy ifoda etiladi. Korrelyatsiya va regressiya tahlili usuli doimiy ravishda rivojlanib bormoqda. Mazkur usul xususiy va ko'plikdagi bog'lanishlarni baholash, miqdor va sifat o'rtasidagi korrelyatsiya, chiziqli va chiziqsiz bog'lanishlar singari masalalarni qamrab olgan. Mana shu nazariya asosida zamonaviy ko'p o'lchamli statistik tahlil usuli, shu jumladan, ko'p o'lchamli omillar regressiya usuli singari, turli usullar rivojlanmoqda.

Analitik va sintetik xususiyat, amalda chegaralanmagan tanlamalar hajmi bo'yicha omillarning katta sonini hisobga olish, ma'lumotlarni standart holatda tasavvur qilish imkoniyatlari

yuqoriroq darajada (vazirlikda) analitik maqsadlar uchun foydalaniladi.

3. *Umumiy dinamik model.* Ob'ektlar majmui iqtisodiy ko'rsatkichlar nazariyasining umumiy dinamik modellari ixtiyoriy o'zgaruvchan iqtisodiy ko'rsatkichlarga ishlab chiqarish omillarining ta'sirini baholaydi. Mazkur modellardan o'rganilayotgan ob'ektlar guruhini tahlil va prognoz qilish hamda qarorlar qabul qilishda foydalaniladi.

Texnik-iqtisodiy ko'rsatkichlarni o'rganishda uch xil masala mavjud. Bu masalalarni yechishda statistik modellashtirish usullarini muvaffaqiyatli qo'llash mumkin.

– iqtisodiy jarayon tarkibini o'rganish;

– iqtisodiy hodisalar dinamikasini o'rganish;

– iqtisodiy hodisalar o'rtasidagi aloqa va bog'lanishlarni o'rganish

Iqtisodiy jarayonlar tarkibini o'rganishda quyidagilarga e'tibor berish kerak:

a) tarkibni baholash va ularning qismlarini o'zaro taqqoslash;

b) bir xil turdagi turli tarkiblarni taqqoslash;

c) amaldagi tarkibni normallashtirilgan tarkib bilan taqqoslash va chetlanish sabablarini aniqlash;

d) mazkur tarkibning eng muvofiq ekanligini baholash;

e) makon va vaqtning konkret sharoiti uchun eng qulay tarkibni loyihalashtirish.

Hodisalar o'rtasidagi bog'lanishni ifoda etuvchi statistik modellarni tuzish vaqtida korrelyatsiya va regressiya tahlil usuliga katta e'tibor beriladi. Mazkur usullar turli statistik mezonlar yordamida o'rganilayotgan ko'rsatkichga har bir omilning ta'sir darajasini aniqlash va baholash imkonini beradi. Agar tuzilgan model real tizimni to'g'ri tavsiflasa, bu holda u bir tomondan modellashtirilayotgan ob'ekt ko'rsatkichlar miqdor xarakteristikasini, ular dinamikasining o'zgarishini aniqlaydi, ikkinchi tomondan, jarayonni maqsadga muvofiq boshqarish imkonini beradi. Agar o'rganilayotgan tizimning tavsiflanayotgan holatlar omili guruhidan boshqarish omillari ajratilsa, shu omillarga faol ta'sir etish jarayonini boshqarish va qo'yilgan maqsadga erishish bo'yicha asoslangan qarorlar qabul qilish imkonini beradi.

Texnik-iqtisodiy ko'rsatkichlarni modellashtirish masalasi faqat bog'lanish shakllarini va uning intensivligini aniqlash bilan chegaralanmay, balki mana shu bog'lanishlarni vujudga keltiradigan omillarning joylashishini ham taxmin qiladi. Bu masalaning yechilishi o'lchab bo'lmaydigan. ya'ni miqdoriy ifoda etib bo'lmaydigan hamda tarkib korrelyatsiya matritsalarini o'rganishga qaratilgan omillar

ta'sirini baholash bilan bog'liqdir. Bunda so'z omillar tahlili, uning ko'p o'lchovli statistik tahlil yo'nalishlaridan biri ekanligi ustida bormoqda. Ma'lumki, omillar tahlili tufayli umumiy kuzatilmaydigan omillarning mavjud alomatlari o'rtasidagi korrelyatsiya tushuntirish imkoni vujudga keladi.

Korrelyatsiya matritsalari tarkibini tahlil qilishda ikki usul, ya'ni K.Pirson tomonidan ishlab chiqilgan bosh komponentalar usuli va Ch.Spirmen tadqiqotlarida vujudga kelgan omillar tahlili usuli eng ko'p tarqalgan usul hisoblanadi.

Korrelyatsiya usuli yordamida quyidagi imkoniyatlar vujudga keladi:

a) alomatlar o'rtasidagi bog'lanishning analitik shakllarini topish;

b) bog'lanish zichligini, ya'ni o'rganilayotgan omillar variatsiyasi qay darajada natijali alomat variatsiyasi kelib chiqishiga ta'sir etishini aniqlash.

Korrelyatsiya tahlili usulini nazariy jihatdan qo'llash sabablari quyidagilardir:

a) kuzatish natijalari tasodifiy qiymatlarga ega bo'lib, normal taqsimot qonuni bilan majmuadan tanlab olingan;

b) ayrim kuzatishlar stoxastik ravishda mustaqil bo'lsa;

c) omilli alomat o'zgarishida shartli dispersiyaning o'zgarmasligi;

d) omilning ma'lum qiymatida natijali alomatni matematik kutilishiga nisbatan parametrlar chiziqli funksiya ko'rinishida namoyon bo'lishi mumkin.

Korrelyatsiya tahlilini to'g'ri qo'llashning muhim shartlaridan biri, o'rganilayotgan majmuaning bir tekisligidir.

Korrelyatsiya tahlilining asosini o'rtachalash usuli tashkil etib, o'rtacha qiymat faqat majmuaning bir jinsli doirasida ba'zi bir umumiy xususiyatlarni aks ettiradi. O'rganish ob'ekti sifatida majmuaning bir jinsliligi ishlab chiqarilayotgan mahsulot xarakteri, qo'llanilayotgan asbob-uskunalar turlari, texnologik jarayonning xarakteri va boshqalar bilan izohlanadi.

Har bir alomat bo'yicha majmuaning bir jinsliligi variatsiyalar koeffitsienti bo'yicha baholanishi mumkin. Variatsiya koeffitsientlari qiymatini normal taqsimlaganda, tengligi 33% bo'lsa, alomatlarning bir jinsliligi yoki bir jinsli emasligi o'rtasidagi chegara hisoblanadi.

Berilgan alomat ma'lumotlari byicha variatsiya koeffitsienti 33% dan oshmasa, majmua bir jinsli bo'ladi. Variatsiya koeffitsienti 33% dan otshib ketgan hollarda, majmuaga korrelyatsiya tahlilini qo'llash mumkin bo'lgan bir jinsli qismlarini ajratish lozim.

Korrelyatsiya modelini tuzish quyidagi bosqichlardan iborat:

1. Masalaning qo'yilishi va statistik ko'rsatkichlarini isbotlash.

ularga ma'lum talablar kompleksini yuklaydi va ularni qo'llash xarakterini aniqlaydi.

Tasniflashning mana shu turiga modellarning bir sathli, pog'onali va ko'p sathli bo'linishi ham kiradi. Ayrim hollarda ishlab chiqarish boshlang'ich omillarining katta sonlarni hisobga olish va xususiy texnik-iqtisodiy ko'rsatkichlar orqali ularni samaradorlikning umumiy sintetik ko'rsatkichlariga ta'sirini tekshirish xususiyati bilan ikkinchi sxema ustun turadi.

Pog'onali, ko'p sathli modellar faqat turli darajadagi iqtisodiy aloqalarni aks ettirish uchun tuzilmay, balki turli davrlarga mansub bo'lgan iqtisodiy ko'rsatkichlarni modellashtirish yo'li bilan aniqlash uchun ham tuziladi.

Modellarni tuzilishi bo'yicha tasniflash jarayoni modellar yordamida ifodalash va boshlang'ich axborotdan foydalanish xarakteri alomati bo'yicha tasniflashdan iborat. Birinchi xil alomat (belgi) bo'yicha ikki xil statistik modellarni ko'rsatish mumkin. Ular prognozlarni tavsiflash va tushuntirish modellaridir.

Tavsiflash modellari – o'zgaruvchan o'zaro aloqalarni eng yaxshi tarzda tavsiflaydigan regressiyalarni tenglashtirish modeli hisoblanadi. Bunday hollarda modellar parametri mazmundor ma'noga ega bo'lmaydi. Mazkur parametrlar qiymatini belgilashda approksimatsiya, ya'ni tavsiflanayotgan o'zgaruvchan kirish bilan tavsiflanayotgan chiqish o'rtasidagi statistik muvofiqlik barqarorlik vazifalari hal etiladi.

Ko'pincha tavsiflash modellarini tuzish vaqtida iqtisodiy ko'rsatkichlarning aralash faktlaridan foydalaniladi. Bunday hollarda tadqiqotchilarni dalil sifatida tanlab olingan ko'rsatkichlar funksiyalarning o'zgarishiga sabab bo'lgan yoki bo'lmaganligi haqidagi statistik dalil qiziqtiradi. Tushuntirish – prognozlash modelining nomi, uning milliy iqtisodiyotda qanday rol tutishini aniq tushuntiradi. Ular belgilangan faktlar majmui, gipotezalar o'rtasidagi muvofiqlikni aniqlaydi. Bunday omillar – dalillarni taqqoslash asosida prognozlashtirilayotgan ko'rsatkich shakllanish mexanizmini o'rganish, ya'ni sanoat ob'ekti rivojlanishining harakatlantiruvchi kuchlarini aniqlash masalasi turadi.

Tushuntirish prognozlash modeli parametrlarini baholashda aynan tenglashtirish masalasi hal qilinadi. Masalaning mohiyati qandaydir to'g'ri keladigan statistik usullar yordamida chuqur ma'noli farazlar asosida tuzilgan tenglamalarning noma'lum parametrlarini qidirib topishdan iborat. Binobarin, identifikatsiya masalalarining approksimatsiya masalalaridan farqi shundaki, unda oldindan o'zgaruvchan bog'lanish tarkibi berilgan bo'ladi.

Ikkinchi alomat bo'yicha modellarni tasniflash, iqtisodiy ko'rsatkichlar variatsiyasi bo'yicha tasniflashga mos keladi. Quyidagi uch xil iqtisodiy variatsiyalar mavjud:

a) vaqtdagi ayrim ob'ektlar;

b) makonda ob'ektlar majmui;

c) vaqt va makonda ob'ektlarning to'plam ko'rsatkichlarining umumiy variatsiyasi.

Birinchi xil variatsiyani davrlar oralig'i izchilligida, iqtisodiy ko'rsatkichlar fazasida ma'lum ob'ekt holatining o'zgarishi sifatida tasavvur qilish mumkin. Iqtisodiy ko'rsatkichlardan birini modellashtirayotgan vaqtda, makon tekislikka aylanadi. Nuqtaning harakat trayektoriyasi esa dinamik qatorni tashkil etadi.

Variatsiyaning ikkinchi turi vaqt oralig'ida ma'lum vaziyatda belgilangan turli ob'ektlarga, ya'ni fazoda perpendikulyar vaqtdan qo'llashga mos keladigan nuqtalar joylashishiga o'xshash bo'ladi. Iqtisodiy ko'rsatkichlardan biri modellashtirilayotgan hollarda – bu taqsimot qatori hisoblanadi.

Variatsiyaning uchinchi umumiy turi oldingi ikki shaxsiy turlarning qo'shilgan variatsiyasi bo'lib, diskret tasodifiy jarayon sifatida talqin qilinishi mumkin.

Ko'rsatkich umumiy variatsiyalarining shakllanishini quyidagi ikki xil usul bilan ifodalash mumkin:

– majmuaga kiradigan ob'ektlar ko'rsatkichi vaqtli qatorlarning umumiyligi sifatida;

– majmuaga kiradigan ob'ektlar ko'rsatkichi taqsimot qatorlarining harakati sifatida.

Korxonalar ko'rsatkichlarini iqtisodiy modellashtirish jarayonida, odatda, dinamik qatorlar qisqa, ob'ektlar soni majmuida vaqtli qatorlar sonidan birmuncha ortiq bo'lganda tavsiflashning ikkinchi turi maqsadga muvofiq hisoblanadi.

Variatsiyaning yuqorida qayd etilgan turlariga muvofiq ravishda iqtisodiy ko'rsatkichlarning uchta statistik modellarini ko'rsatib o'tish mumkin:

1. *Xususiy dinamik model.* Ayrim korxonalarning xususiy dinamik modeli makonda iqtisodiy ko'rsatkichlar ma'lum nuqtasi vaqtli harakatini makonda mazkur ob'ektning ishlab chiqarish omillari bilan bog'laydi. Bunday model ko'pchilik hollarda korxona ichki tahlili, normallashtirish va boshqarish uchun qo'llaniladi.

2. *Xususiy fazoviy model.* Ob'ektlar majmui iqtisodiy ko'rsatkichlari xususiy fazoviy modeli korxonalar iqtisodiy ko'rsatkichlarining fazodagi turli holatini tushuntiradi. Odatda bu model korxonalar (sexlar) darajasi uchun tuziladi hamda yanada

yuqoriroq darajada (vazirlikda) analitik maqsadlar uchun foydalaniladi.

3. *Umumiy dinamik model.* Ob'ektlar majmui iqtisodiy ko'rsatkichlar nazariyasining umumiy dinamik modellari ixtiyoriy o'zgaruvchan iqtisodiy ko'rsatkichlarga ishlab chiqarish omillarining ta'sirini baholaydi. Mazkur modellardan o'rganilayotgan ob'ektlar guruhini tahlil va prognoz qilish hamda qarorlar qabul qilishda foydalaniladi.

Texnik-iqtisodiy ko'rsatkichlarni o'rganishda uch xil masala mavjud. Bu masalalarni yechishda statistik modellashtirish usullarini muvaffaqiyatli qo'llash mumkin.

– iqtisodiy jarayon tarkibini o'rganish;

– iqtisodiy hodisalar dinamikasini o'rganish;

– iqtisodiy hodisalar o'rtasidagi aloqa va bog'lanishlarni o'rganish.

Iqtisodiy jarayonlar tarkibini o'rganishda quyidagilarga e'tibor berish kerak:

a) tarkibni baholash va ularning qismlarini o'zaro taqqoslash;

b) bir xil turdagi turli tarkiblarni taqqoslash;

c) amaldagi tarkibni normallashtirilgan tarkib bilan taqqoslash va chetlanish sabablarini aniqlash;

d) mazkur tarkibning eng muvofiq ekanligini baholash;

e) makon va vaqtning konkret sharoiti uchun eng qulay tarkibni loyihalashtirish.

Hodisalar o'rtasidagi bog'lanishni ifoda etuvchi statistik modellarni tuzish vaqtida korrelyatsiya va regressiya tahlil usuliga katta e'tibor beriladi. Mazkur usullar turli statistik mezonlar yordamida o'rganilayotgan ko'rsatkichga har bir omilning ta'sir darajasini aniqlash va baholash imkonini beradi. Agar tuzilgan model real tizimni to'g'ri tavsiflasa, bu holda u bir tomondan modellashtirilayotgan ob'ekt ko'rsatkichlar miqdor xarakteristikasini, ular dinamikasining o'zgarishini aniqlaydi, ikkinchi tomondan, jarayonni maqsadga muvofiq boshqarish imkonini beradi. Agar o'rganilayotgan tizimning tavsiflanayotgan holatlar omili guruhidan boshqarish omillari ajratilsa, shu omillarga faol ta'sir etish jarayonini boshqarish va qo'yilgan maqsadga erishish bo'yicha asoslangan qarorlar qabul qilish imkonini beradi.

Texnik-iqtisodiy ko'rsatkichlarni modellashtirish masalasi faqat bog'lanish shakllarini va uning intensivligini aniqlash bilan chegaralanmay, balki mana shu bog'lanishlarni vujudga keltiradigan omillarning joylashishini ham taxmin qiladi. Bu masalaning yechilishi o'lchab bo'lmaydigan, ya'ni miqdoriy ifoda etib bo'lmaydigan hamda tarkib korrelyatsiya matritsalarini o'rganishga qaratilgan omillar

ta'sirini baholash bilan bog'liqdir. Bunda so'z omillar tahlili, uning ko'p o'lchovli statistik tahlil yo'nalishlaridan biri ekanligi ustida bormoqda. Ma'lumki, omillar tahlili tufayli umumiy kuzatilmaydigan omillarning mavjud alomatlari o'rtasidagi korrelyatsiya tushuntirish imkoni vujudga keladi.

Korrelyatsiya matritsalari tarkibini tahlil qilishda ikki usul, ya'ni K.Pirson tomonidan ishlab chiqilgan bosh komponentalar usuli va Ch.Spirmen tadqiqotlarida vujudga kelgan omillar tahlili usuli eng ko'p tarqalgan usul hisoblanadi.

Korrelyatsiya usuli yordamida quyidagi imkoniyatlar vujudga keladi:

a) alomatlar o'rtasidagi bog'lanishning analitik shakllarini topish;

b) bog'lanish zichligini, ya'ni o'rganilayotgan omillar variatsiyasi qay darajada natijali alomat variatsiyasi kelib chiqishiga ta'sir etishini aniqlash.

Korrelyatsiya tahlili usulini nazariy jihatdan qo'llash sabablari quyidagilardir:

a) kuzatish natijalari tasodifiy qiymatlarga ega bo'lib, normal taqsimot qonuni bilan majmuadan tanlab olingan;

b) ayrim kuzatishlar stoxastik ravishda mustaqil bo'lsa;

c) omilli alomat o'zgarishida shartli dispersiyaning o'zgarmasligi;

d) omilning ma'lum qiymatida natijali alomatni matematik kutilishiga nisbatan parametrlar chiziqli funksiya ko'rinishida namoyon bo'lishi mumkin.

Korrelyatsiya tahlilini to'g'ri qo'llashning muhim shartlaridan biri, o'rganilayotgan majmuaning bir tekisligidir.

Korrelyatsiya tahlilining asosini o'rtachalash usuli tashkil etib, o'rtacha qiymat faqat majmuaning bir jinsli doirasida ba'zi bir umumiy xususiyatlarni aks ettiradi. O'rganish ob'ekti sifatida majmuaning bir jinsliligi ishlab chiqarilayotgan mahsulot xarakteri, qo'llanilayotgan asbob-uskunalar turlari, texnologik jarayonning xarakteri va boshqalar bilan izohlanadi.

Har bir alomat bo'yicha majmuaning bir jinsliligi variatsiyalar koeffitsienti bo'yicha baholanishi mumkin. Variatsiya koeffitsientlari qiymatini normal taqsimlaganda, tengligi 33% bo'lsa, alomatlarning bir jinsliligi yoki bir jinsli emasligi o'rtasidagi chegara hisoblanadi.

Berilgan alomat ma'lumotlari byicha variatsiya koeffitsienti 33% dan oshmasa, majmua bir jinsli bo'ladi. Variatsiya koeffitsienti 33% dan otshib ketgan hollarda, majmuaga korrelyatsiya tahlilini qo'llash mumkin bo'lgan bir jinsli qismlarini ajratish lozim.

Korrelyatsiya modelini tuzish quyidagi bosqichlardan iborat:

1. Masalaning qo'yilishi va statistik ko'rsatkichlarini isbotlash.

2. Statistik ma'lumotlarni to'plash va ularni birlamchi qayta ishlash.

3. Juft bog'lanishlarni o'rganish.

4. Bog'lanish shakllarini tanlash va regressiya tenglamalari parametrlarini aniqlash.

5. Masalaning yechish natijalarini statistik baholash va modelning iqtisodiy ma'nosi.

Korrelyatsiya modeli tuzishning birinchi bosqichida tekshirish maqsadi shakllanadi, natijaviy va omilli alomatlar tanlanadi, boshlang'ich axborotni olish usuli haqidagi masala hal qilinadi va hokazolar.

Omilli alomatlar tanlash sabablari bilan aniqlanadi. Bu sabablarga hodisalar xususiyatini hisobga olish, model tuzishning maqsadi, boshlang'ich axborotning mavjudligi va boshqalar kiradi. Omillar orasida multikollinearlikning mavjudligi, ya'ni o'rganilayotgan ko'rsatkichni aniqlaydigan omilli alomatlar o'rtasida chiziqli bog'lanish mavjud ekanligini tekshirish muhim ahamiyat kasb etadi. Chunonchi, ikkita omil o'rtasida korrelyatsiya yuqori koeffitsientini ifodalaydigan chiziqli bog'lanish mavjud bo'lsa, u holda ikki axborotdan biri tanlab olinadi. Shuning uchun modelga omillardan biri kiritiladi.

Amalda omillarni ajratish ikki bosqichni tanlash yordamida amalga oshiriladi. Tanlashning birinchi bosqichida o'rganilayotgan hodisalar bilan mantiqiy bog'langan omillar tanlab olinadi. Ikkinchi bosqichda esa maxsus miqdoriy tahlil qilish yo'li bilan ana shu omillar orasidan modelga kiritish uchun asosiy omillar tanlab olinadi.

Ko'p omilli modellarni tuzishda o'rganilayotgan ko'rsatkichlar o'rtasidagi jiddiy bog'lanishlarni aniqlash hamda bog'lanishning eng qulay shakllarini ko'rsatish imkonini beradigan juft qonuniyatlar tahlili muhim bosqich hisoblanadi.

Juft korrelyatsiya koeffitsientlari ko'p parametrli modelning omil tanlash alomati hisoblanadi. Har doim, buni ko'pchilik olimlar qayd etishgan, natijaviy va omilli alomatlar o'rtasidagi yuqori koeffitsientli juft korrelyatsiyalar o'rganilayotgan ko'rsatkichga (mazkur omil) jiddiy ta'sir ko'rsatayotganligidan va shunga muvofiq ko'p omilli modelga kiritilishi lozimligidan dalolat beradi.

Omillarni uzil-kesil modelga kiritish maqsadida omilli alomatlar o'rtasidagi bog'lanishlarni miqdoriy baholash lozim. Omillar o'rtasida bog'lanish shaklini tanlashning uchta usuli mavjud:

– empirik usul;

– oldingi tadqiqotlar tajribasi usuli;

– mantiqiy tahlil usuli.

Analitik funksiya turini regressiyaning empirik grafigi bo‘yicha aniqlash mumkin. Lekin mazkur grafik usulni faqat juft bog‘lanish hollarida hamda kuzatishlar soni nisbatan ko‘p bo‘lganda muvaffaqiyatli qo‘llash mumkin.

O‘rganilayotgan iqtisodiy hodisalarning mantiqiy tahlili, bog‘lanish shaklini asoslash va tanlashda asos bo‘ladi. Shu bilan birga, o‘rganilayotgan hodisani tavsiflash uchun eng qulay funksiyalar sinfini asoslash imkonini beradi. Bog‘lanishli munosabat aniq shakllarini tanlash, iqtisodiy jarayon haqida boshlang‘ich axborotning mavjudligiga bog‘liq bo‘ladi. Ayrim hollarda mantiqiy tahlil funksiyalar sinfini tanlash imkonini beradi. Bunday hollarda EHM yordamida, ma’lum funksiyalar saralanadi, model parametrlari aniqlanadi hamda natijalar bilan taqqoslanadi.

Mezon sifatida, odatda, ko‘plikdagi korrelyatsiya koeffitsienti, Fisher mezoni va o‘rta qiymatli approksimatsiya xatoligidan foydalaniladi.

Hisoblashlar ko‘lamining ko‘p bo‘lishi, saralash algoritmining bo‘lmasligi, bog‘lanish shaklini tanlashda mazkur usuldan foydalanish, korrelyatsiya usulining samaradorligini kamaytiradi.

O‘zaro bog‘lanish xarakteriga qat’iy funksional ko‘rinish berib bo‘lmaydigan hollarda korrelyatsiya va regressiya tahlili usullaridan foydalaniladi. Bunday hollarda natijaviy va omilli alomatlar o‘rtasidagi bog‘lanish o‘rtacha qiymat tendensiya ko‘rinishida namoyon bo‘ladi.

Korrelyatsiya koeffitsientlari bog‘lanishni, regressiya tenglamasini va uning shaklini ifoda etadi. Regressiya tenglamalari parametrlari o‘sish parametrlarini umumlashtirish yoki ma’lum tadqiqot natijasida o‘sish ma’nosiga ega bo‘ladi.

Normal taqsimot qonuni shaklida ifodalangan *katta sonlar qonuni* korrelyatsiya va regressiya tahlilning nazariy asosini tashkil etadi.

Tahlildagi mavjud omillar natijaviy va omilli alomatlar uchun bir vaqtda butun majmua bilan matritsa shaklda qayd qilinadi, shuningdek, ular miqdoriy ifoda etiladi. Korrelyatsiya va regressiya tahlili usuli doimiy ravishda rivojlanib bormoqda. Mazkur usul xususiy va ko‘plikdagi bog‘lanishlarni baholash, miqdor va sifat o‘rtasidagi korrelyatsiya, chiziqli va chiziqsiz bog‘lanishlar singari masalalarni qamrab olgan. Mana shu nazariya asosida zamonaviy ko‘p o‘lchamli statistik tahlil usuli, shu jumladan, ko‘p o‘lchamli omillar regressiya usuli singari, turli usullar rivojlanmoqda.

Analitik va sintetik xususiyat, amalda chegaralanmagan tanlamalar hajmi bo‘yicha omillarning katta sonini hisobga olish, ma’lumotlarni standart holatda tasavvur qilish imkoniyatlari

korrelyatsiya va regressiya tahlili usulining muhim tomonlari hisoblanadi.

## Tayanch iboralar

Staxostik jarayonlar, ishlab chiqarish tendensiyalari, noaniqlik, tavakkalchilik, statistik kuzatuv, kiritiladigan va chiqish ma'lumotlari, iqtisodiy jarayonlar dinamikasi, statik va dinamik modellar, pog'onali va ko'p sathli modellar, regressiya, approksimatsiya, prognozlash, variatsiya, dinamik qator, xususiy dinamik model, xususiy fazoviy model, umumiy dinamik model, korrelyatsiya.

## Takrorlash uchun savollar

1. Iqtisodiy-statistik modellashtirishning zarurligi nimalardan iborat?
2. Iqtisodiy-statistik modellashtirishni noaniq bo'lmasligining sabablarini aytib bering.
3. Korxona faoliyatini o'zida mujassamlashtirgan barcha ko'rsatkichlarni necha guruhga bo'lish mumkin?
4. Modeldan aniq talablar xarakteristikasini tushuntirib bering.
5. Tadqiqotlar ko'lamiga qarab modellar necha xilga bo'linadi?
6. Statik va dinamik modellarga ta'rif bering.
7. Ishlab chiqarishning boshlang'ich omillariga nimalar kiradi?
8. Ishlab chiqarish kombinatsiyasi deb nimaga aytiladi?
9. Umumiy va xususiy modellarning farqli tomonlarini ifodalab bering.
10. Pog'onali va ko'p sathli modellarni tuzish shartlari qanday?
11. Tavsiflash modellarini tushuntirib bering.
12. Tushuntirish modellariga ta'rif bering.
13. Identifikatsiya nima?
14. Variatsiyani tushuntirib bering.
15. Dinamik qator deganda nimani tushunasiz?
16. Dinamik qatorlarni tekislash usullarini tushuntirib bering.
17. Korrelyatsiya modellarining qo'llanish sohasini tushuntirib bering.
18. Regressiya modellari deb nimaga aytiladi?
19. Korrelyatsiya modelni tuzih necha bosqichdan iborat?
20. Ko'p omilli modellarga misol keltiring.
21. Juft korrelyatsiya koeffitsienti qanday hisoblanadi?
22. Ko'plikdagi korrelyatsiya koeffitsienti nimani ifodalaydi?
23. Regressiya tenglamasidagi ozod had nimani bildiradi?
24. Regressiya koeffitsientlarining iqtisodiy ma'nosini tushuntirib bering.

## 3.2. Vaqtli qatorlar asosiy tendensiyasini aniqlash

Matematik statistikaning asosiy masalalaridan biri – o'rganilayotgan hodisalarning makonda o'zgarish va rivojlanish jarayonini tadqiq qilishda vaqtli qatorlarni tuzish va tahlil qilish yo'li bilan hal etiladi. Iqtisodiy hodisalarning makonda o'zgarishini ifodalayotgan sonlar ketma-ketligini kuzatish *vaqtli qator* deb ataladi.

Vaqtli qatorlar ko'rsatkichning barqaror o'zgarishlariga va xususiy tasodiflar o'zgarishiga ega bo'ladi. Vaqtli qatorlardagi xususiy tasodiflarni bartaraf etish va barqaror o'zgarishlarni aniqlash uchun ular u yoki bu usullar bilan taqqoslanadi. Taqqoslangan qatorlarni haqiqiy qatorlar bilan taqqoslash, ayrim korxonalarni, tarmoq va xalq xo'jaligini rivojlantirishning ba'zi muhim xususiyatlarini aniqlash imkonini beradi. Taqqoslangan va haqiqiy qiymat ko'rsatkichlarining farqi, taqqoslangan qatorlar joylashgan va kelajak rivojlanish ko'rsatkichlari qatorlari joylashishi mumkin bo'lgan chegaralarni aniqlash imkonini beradi.

Ko'pgina iqtisodiy tadqiqotlarda, ayniqsa vaqtli qatorlarni tahlil qilish jarayonida nihoyatda chegaralanib tanlash bo'yicha aniqliklarni qayta ishlashga to'g'ri keladi. Bunday sharoitda tajribalar guruhini ta'riflash uchun qilingan har qanday urinish, mutlaq rasmiy va sub'ektiv bo'ladi. Shuning uchun ko'pchilik hollarda hodisaning qandaydir bir tomonini ehtimol ta'riflash imkoniyatini aniqlash qiyin. Iqtisodiy vaqtli qator farq qiluvchi xususiyatlarini quyidagicha ko'rsatish mumkin:

a) berilgan sharoitda kuzatilayotgan jarayonni qayta kuzatish mumkin emas;

b) odatda kuzatilayotgan qatorlar, kuzatilayotgan tanlama hajmiga ko'ra juda chegaralangan bo'ladi.

Shuning natijasi o'laroq o'rganilayotgan hodisalarga ehtimollar nazariyasi bilan yondashishda hodisalar modelini statistik tajribalarda xayolan tasavvur etish, shuningdek, ba'zi bir ehtimollikni cheklab qo'yish lozim. Haqiqatdan ham statistik xulosalar baholashni tanlashga yoki ko'rib chiqilayotgan umumiy model doirasida oldindan o'rganilgan nazariy mezon xususiyatiga asoslangan bo'ladi. Kelajakning vaqtli qatorlari ishonchlilik darajasiga ko'ra hisobli (yaqin 20-30 yil uchun ishonchli), umumiy tasavvurlarga ko'ra taxminiy (100 yilgacha) va xayoliyga (100 yildan ko'p) bo'linadi. Sirg'anuvchi o'rtacha usul o'rtacha qiymatni aniqlash vaqtida tasodifiy chetlanishlarning o'sish holatiga asoslanadi. O'rtacha faktik qiymatlar qatorlari dinamikasi tekislanayotgan vaqtda sirg'anishning o'rtacha nuqta davrini ko'rsatadigan o'rtacha qiymatlar bilan almashinadi. Odatda o'rtacha sirg'anuvchi usulning ikki modifikatsiyasidan, ya'ni oddiy va vaznli tekislashdan foydalaniladi.

Oddiy tenglashtirish o'rtalikdagi $p$ uzunlikdagi vaqt uchun oddiy o'rta arifmetik hisoblashdan tuzilgan yangi qator tuzishga asoslanadi:

$$y_k = \frac{\sum_{i=k}^{p+k} y}{p} \quad (k = 1,\ 2, \ldots,\ N - p + 1), \tag{1}$$

bu yerda: $p$ - tenglashtirish davri uzunligi vaqtli qatorlar xarakteriga bog'liq bo'ladi;

$k$ - o'rtacha qiymatning tartib nomeri.

Vaznli tenglashtirish turli nuqtadagi qatorlar dinamikasi uchun vaznli o'rtacha qiymatlarni o'rtachalashtirishdan iborat.

Birinchi $2p+1$ qatorlar dinamikasini olib ko'raylik ($p$ odatda 1 yoki 2 ga teng). Tendensiyalar funksiyasi sifatida qandaydir:

$$y_t = \sum_{i=0}^{k} a_i t^i \tag{2}$$

(2) to'la darajasini olaylik.

Uning parametrlari

$$a_0 \sum_{-p+1}^{p+1} t^i + a_1 \sum_{-p+1}^{p+1} t^{i+1} + \ldots + a_k \sum_{-p+1}^{p+1} t^{i+k} = \sum_{-p+1}^{p+1} y_t t^i \tag{3}$$

tenglamasi yordamida eng kichik kvadratlar usuli bilan aniqlanadi.

Ko'phad (polinom) o'rtacha darajasi $p+1$ nuqtasiga joylashgan. $a_0$ ga nisbatan tenglamani yechsak:

$$a_0 = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_{2p+1} y_{2p+1} \tag{4}$$

hosil qilamiz. Bu yerdagi $b_i$ qiymati $p$ va $k$ mohiyatiga bog'liq bo'ladi. Hosil bo'lgan tenglama (4) birinchilardan $2p+1$ qatorlar dinamikasi qiymatining vaznli o'rtacha qiymat arifmetikasi hisoblanadi. Sirg'aluvchan o'rtacha qiymat usuli boshqa usullarga nisbatan qator afzalliklarga ega. Jumladan, sirg'aluvchan o'rtacha qiymat shunday tendensiya funksiyasini beradiki, u mohiyatiga ko'ra o'rganilayotgan qatorlar mohiyatiga yaqin turadi. Chunki, qatorning ayrim qismlari eng yaxshi tendensiya tanlab olinadi. O'rganilayotgan qatorlarga yangi daraja qo'shilishi mumkin. Tendensiyalarni aniqlash ko'p mehnat talab etishi singari xususiyatlar sirg'aluvchan o'rtacha qiymat usulining afzalliklari hisoblanadi. Lekin sirg'aluvchan o'rtacha usul sirg'anish davri oshirilishi bilan qatorning eng chetki davrlari haqidagi axborot yo'qolishi singari kamchiliklarga ham ega. Bunga vaqtli qatorlar tahlilining ba'zi usullarida yo'l qo'yib bo'lmaydı.

**Eng kichik kvadratlar usuli**. Eng kichik kvadratlar usulining mohiyati shundan iboratki. uning natijasida izlanayotgan tenglamalar tendensiyasining shunday parametrlari hosil bo'ladiki, bunday hollarda

$$\sum_{t=1}^{n}(y_t - f(t))^2 \to \min \qquad (5)$$

funksiya minimumga aylanadi.

Iqtisodiy qatorlar dinamikasi tendensiyasini aniqlash vaqtida ko'pchilik hollarda turli darajadagi polinomlar:

$$\tilde{y}(t) = \left[a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i t^i\right]^u \quad \begin{matrix}(i = -1, 0, 1, ..., k) \\ (u = -1,\ 1)\end{matrix}$$

va eksponensional funksiyalar qo'llaniladi:

$$\tilde{y}(t) = \left[e^{a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i t^i}\right]^u \quad \begin{matrix}(i = -1, 0, 1, ..., k) \\ (u = -1,\ 1)\end{matrix} \qquad (6)$$

Shuni qayd etib o'tish lozimki, funksiya shakli tenglashtirilayotgan qatorlar dinamikasi xarakteriga muvofiq, shuningdek, mantiqiy asoslangan bo'lishi lozim.

Polinomning eng yuqori darajalaridan foydalanish ko'pchilik hollarda o'rtacha kvadrat xatolarining kamayishiga olib keladi. Lekin bunday vaqtlarda tenglashtirish bajarilmay qoladi.

Tenglashtirish parametrlari (2) bevosita eng kichik kvadratlar usuli yordamida baholanadi. Eksponensional funksiya parametrlarini baholash uchun esa boshlang'ich qatorlar qiymatini logarifmlash lozim.

Normal tenglamalar sistemasi quyidagicha bo'ladi:

a) $k$ tartibli polinom uchun:

$$\begin{cases} na_0 + a_1\sum t + a_2\sum t^2 + ... + a_k\sum t^k = \sum y \\ a_0\sum t + a_1\sum t^2 + a_2\sum t^3 + ... + a_k\sum t^{k+1} = \sum yt \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0\sum t^k + a_1\sum t^{k+1} + a_2\sum t^{k+2} + ... + a_k\sum t^{2k} = \sum yt^k \end{cases} \qquad (7)$$

b) eksponensional funksiya uchun:

$$\begin{cases} na_0 + a_1\sum t + a_2\sum t^2 + ... + a_k\sum t^k = \sum \ln y \\ a_0\sum t + a_1\sum t^2 + a_2\sum t^3 + ... + a_k\sum t^{k+1} = \sum t\ln y \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0\sum t^k + a_1\sum t^{k+1} + a_2\sum t^{k+2} + ... + a_k\sum t^{2k} = \sum t^k \ln y \end{cases} \qquad (8)$$

Agar tendensiya ko'rsatkichli funksiyaga ega bo'lsa, ya'ni

$$y_t = a_0 a_1^t$$

bo'lsa, ushbu funksiyani logarifmlab, parametrlarini eng kichik kvadratlar usuli yordamida aniqlash mumkin. Ushbu funksiya uchun normal tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\begin{cases} n\ln a_0 + \ln a_1 \sum t = \sum \ln y \\ \ln a_0 \sum t + \ln a_1 \sum t^2 = \sum t \ln y \end{cases} \qquad (9)$$

Ko'pincha boshlang'ich ma'lumotlar asosida qatorlar dinamikasining rivojlantirish tendensiyasini tavsiya etish uchun eng qulay funksiya qaysi biri ekanligini hal qilish masalasi murakkab bo'ladi. Bunday hollarda funksiya shakllarini aniqlashning quyidagi ikki xil usulidan foydalanish mumkin: o'rta kvadratik xatolar minimumi usuli bilan funksiya tanlash; dispersiya tahlili usulini qo'llash orqali funksiya tanlash.

1. Mantiqiy tahlil hamda tadqiqot tufayli qo'lga kiritilgan shaxsiy tajriba asosida qator turli xil funksiyalar tanlab olinadi va ularning parametrlari baholanadi. Shundan so'ng har bir funksiya uchun quyidagi formula asosida o'rta kvadratik xatolar aniqlanadi:

$$S = \sqrt{\frac{\sum \left( y_t - \hat{y}_t \right)^2}{n-k-1}}, \qquad (10)$$

bu yerda: $y_t$ – qatorlar dinamikasining qiymati;

$\hat{y}_t$ – qatorlar dinamikasi qiymatlarini tenglashtirish;

$k$ – funksiya parametrlari soni.

Mazkur usul faqat tenglama parametrlarining teng sonida qiyosiy natijalar beradi.

Ikkinchi usul dispersiyalarni taqqoslashdan iborat. O'rganilayotgan qatorlar dinamikasi umumiy variatsiyasini ikki qismga, ya'ni tendensiyalar tufayli sodir bo'ladigan variatsiyalar va tasodifiy variatsiyalar yoki $V = V_1 + V_2$ bo'lishi mumkin.

Umumiy variatsiya quyidagi formula bo'yicha aniqlanadi:

$$V = \sum_{t=1}^{n} (y_t - \bar{y})^2, \qquad (11)$$

bu yerda, $\bar{y}$ - qatorlar dinamikasining o'rtacha darajasi.

Tasodifiy variatsiyalar quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$$V_2 = \sum_{i=1}^{n} \left( y_i - \hat{y}_i \right)^2. \qquad (12)$$

Umumiy va tasodifiy variatsiyalarning farqi tendensiyalar variatsiyasi hisoblanadi:

$$V_1 = V - V_2. \qquad (13)$$

Tegishli dispersiyalarni aniqlashda daraja erkinligi quyidagicha bo'ladi:

1. Tendensiyalar tufayli dispersiyalar uchun daraja erkinligi soni tekislash tenglamasi parametrlari sonidan bitta kam bo'ladi.

2. Qatorlar dinamikasi darajasi soni bilan tekislash tenglamasi parametrlari soni o'rtasidagi farq tasodifiy tendensiyalar uchun daraja erkinligi soniga teng bo'ladi.

3. Umumiy dispersiyalar uchun daraja erkinligi soni qatorlar dinamikasi darajasi sonidan bitta kam bo'ladi. Chiziqli funksiya uchun dispersiyalar quyidagicha hisoblanadi:

$$S^2 = \frac{V}{n-1}, \qquad (14)$$

$$S_1^2 = V_1, \qquad (15)$$

$$S_2^2 = \frac{V_2}{n-2}. \qquad (16)$$

Dispersiyalar aniqlangandan so'ng $F$ - mezonning empirik qiymati hisoblanadi:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}. \qquad (17)$$

Olingan qiymatni erkinlik va ehtimollik darajasiga muvofiq aniqlangan jadval qiymati bilan taqqoslanadi.

Agar $F > F_a$ ko'rinishidagi tengsizlik bajarilsa, u holda tahlil qilinayotgan tenglama ifodalanayotgan tendensiya uchun to'g'ri keladi. Bunday hollarda tahlil qilishni mantiqiy tushunchalarga mos keladigan oddiy tenglamalardan boshlab, asta-sekin kerakli daraja aniqlangunga qadar murakkabroq darajalarga o'tib borish lozim.

Trend aniqlangandan keyin boshlang'ich qatorlar dinamikasiga tegishli darajada trendning qiymati olinadi. Tahlil bundan keyin trenddan chetga chiqishi mumkin.

$$z(t) = y(t) - \hat{y}(t) \qquad (18)$$

$z(t)$ chetga chiqishi $\sigma^2$ arifmetik dispersiyali o'rtacha nolga teng bo'ladi.

Tenglama parametrlarini aniqlash zarur:

$$\hat{y}(t) = a_0 + a_1 t,$$

$$\hat{y}'(t) = a_0' + a_1' t.$$

Normal tenglamalar sistemasi to'g'ri chiziqli tenglamalar uchun quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum t = \sum y \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 = \sum ty \end{cases}$$

*Masala.* O'zbekistonda kuzgi bug'doy yalpi hosildorligi qatorlar dinamikasi tendensiyalarini aniqlaylik. Ma'lumotlar statistik to'plamdan olingan.

| Kuzatuvlar | Yalpi hosil, ming t. $y_t$ | Hosildorlik, s/ga $y'_t$ | $t$ | $t^2$ | $y_t t$ | $y'_t t$ | $\hat{y}$ | $\hat{y}'$ | $(y_t-\hat{y})^2$ | $(y'_t-\hat{y}'_t)^2$ | $(y_t-\bar{y}_t)^2$ | $(y'_t-\bar{y}')^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 76,6 | 16,2 | -11 | 121 | -842,6 | -178,2 | 65,875 | 14,094 | 115,03 | 4,435 | 43,30 | 14,36 |
| 2 | 69,1 | 15,2 | -10 | 100 | -691,0 | -152,0 | 67,448 | 14,630 | 2,729 | 0,325 | 198,25 | 22,94 |
| 3 | 64,3 | 15,1 | -9 | 81 | -578,7 | -135,9 | 69,021 | 15,166 | 22,288 | 0,004 | 356,45 | 23,91 |
| 4 | 66,5 | 16,9 | -8 | 64 | -532,0 | -135,2 | 70,594 | 15,702 | 16,761 | 1,435 | 278,22 | 9,55 |
| 5 | 70,8 | 16,8 | -7 | 49 | -495,6 | -117,6 | 72,167 | 16,238 | 1,869 | 0,314 | 153,26 | 10,18 |
| 6 | 49,7 | 12,9 | -6 | 36 | -298,2 | -77,4 | 73,740 | 16,774 | 577,92 | 14,977 | 1120,91 | 50,27 |
| 7 | 74,4 | 13,8 | -5 | 25 | -372,0 | -69,0 | 75,313 | 17,310 | 0,836 | 12,250 | 77,09 | 38,32 |
| 8 | 59,7 | 16,1 | -4 | 16 | -238,8 | -64,4 | 76,886 | 17,846 | 295,359 | 3,240 | 551,30 | 15,18 |
| 9 | 100,5 | 20,4 | -3 | 9 | -301,5 | -61,2 | 78,459 | 18,382 | 485,057 | 3,610 | 299,98 | 0,17 |
| 10 | 77,4 | 17,8 | -2 | 4 | -154,8 | -35,6 | 79,718 | 18,918 | 5,373 | 1,210 | 32,99 | 4,80 |
| 11 | 93,4 | 18,3 | -1 | 1 | -93,4 | -18,3 | 81,605 | 19,454 | 139,122 | 1,323 | 104,45 | 2,86 |
| 12 | 79,9 | 18,9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 83,178 | 19,990 | 10,745 | 1,188 | 10,76 | 1,19 |
| 13 | 99,7 | 22,8 | 1 | 1 | 99,7 | 22,8 | 84,751 | 20,526 | 223,472 | 5,513 | 272,91 | 7,90 |
| 14 | 98,8 | 23,1 | 2 | 4 | 197,6 | 46,2 | 86,324 | 21,062 | 155,651 | 4,162 | 234,98 | 9,67 |
| 15 | 86,0 | 19,6 | 3 | 9 | 258,8 | 58,8 | 87,897 | 21,598 | 3,599 | 4,000 | 7,95 | 0,15 |
| 16 | 109,8 | 27,0 | 4 | 16 | 439,2 | 104,0 | 89,470 | 22,134 | 413,309 | 237,17 | 706,62 | 49,14 |
| 17 | 83,9 | 24,0 | 5 | 25 | 419,5 | 120,0 | 91,043 | 22,670 | 51,022 | 1,769 | 0,52 | 46,08 |
| 18 | 66,2 | 18,7 | 6 | 36 | 397,2 | 112,2 | 92,616 | 23,206 | 698,596 | 20,250 | 288,32 | 1,66 |
| 19 | 96,9 | 25,9 | 7 | 49 | 678,3 | 181,3 | 94,189 | 23,742 | 7,350 | 4,666 | 188,24 | 34,93 |
| 20 | 97,1 | 25,8 | 8 | 64 | 776,8 | 206,4 | 95,762 | 24,278 | 1,790 | 2,310 | 193,77 | 33,76 |
| 21 | 97,2 | 24,2 | 9 | 81 | 878,8 | 217,8 | 97,335 | 24,814 | 0,018 | 0,372 | 196,56 | 17,72 |
| 22 | 98,1 | 24,6 | 10 | 100 | 981,0 | 246,0 | 98,908 | 25,350 | 0,653 | 0,563 | 222,61 | 21,25 |
| 23 | 97,1 | 25,8 | 11 | 121 | 1068,1 | 283,8 | 100,481 | 25,885 | 11,431 | 0,008 | 193,77 | 33,76 |
| $\sum$ | **1913,1** | **459,9** | 0 | 1012 | **1501,8** | **542,1** | **1912,78** | **459,77** | **3240,02** | **111,28** | **5742,22** | **449,7** |
| o'rtachalar | **83,18** | **19,99** | | 4 | **69,21** | **23,56** | **83,16** | **19,99** | **140,87** | **4,838** | **249,66** | **13,35** |

Normal tenglamalar sistemasini yechib, izlangan parametrlarni aniqlasak,

$$a_0 = \frac{\sum y}{n} = 83{,}178\,; \qquad a'_0 = \frac{\sum y'}{n} = 19{,}99\,;$$

$$a_1 = \frac{\sum yt}{t^2} = 1{,}573\,; \qquad a'_1 = \frac{\sum y't}{t^2} = 0{,}536\,.$$

Kuzgi bug'doy yalpi yig'imi qatorlar dinamikasining chiziqli tendensiyasi

$$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t = 83{,}178 + 1{,}576 \cdot t$$

tenglamasi bilan ifodalanadi hamda kuzgi bug'doy hosildorligi, chiziqli tendensiyasi esa

$$\hat{y}'_t = a'_0 + a'_1 t = 19{,}99 + 0{,}536 \cdot t$$

tenglamasi ko'rinishida ifodalanadi.

Kuzgi bug'doy yalpi yig'imi qatorlari dinamikasi trendi sifatida chiziqli funksiyaning foydaliroq ekanligida to'xtab o'tamiz. Buning uchun (11), (12), (13), (14) formulalar bo'yicha dispersiyalarni aniqlaymiz.

$y_t$ yalpi mahsulot uchun:

$$S^2 = \frac{V}{n-1} = \frac{5650{,}8}{22} = 456{,}8\,; \qquad V = 5650{,}8\,;$$

$$S_1^2 = V_1 = 3268{,}7\,; \qquad V_2 = 2382{,}1\,;$$

$$S_2^2 = \frac{V_2}{n-2} = \frac{2382{,}1}{21} = 113{,}4\,; \qquad V_1 = V - V_2 = 3268{,}7\,;$$

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{3268{,}7}{113{,}4} = 28{,}8\,.$$

$y_t'$ hosildorlik uchun:

$$S^2 = \frac{V}{n-1} = \frac{409{,}80}{22} = 18{,}6\,; \qquad V = 409{,}80\,;$$

$$S_1^2 = V_1 = 301{,}06\,; \qquad V_2 = 108{,}74\,;$$

$$S_2^2 = \frac{V_2}{n-2} = \frac{108{,}79}{21} = 5{,}18\,; \qquad V_1 = V - V_2 = 301{,}06\,;$$

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{301{,}06}{5{,}18} = 58{,}1\,.$$

$F = 58{,}1$ va $F_{0{,}99} = 8{,}40$ bo'lganidan 99% aniqlik bilan aytish mumkinki, kuzgi bug'doy hosildorligi qatorlar dinamikasi tendensiyasining rivojlanishini xarakterlash uchun ham chiziqli funksiyadan foydalanish mumkin.

$a_1$ va $a_1'$ parametrlari funksiyaning o'zgarish tezligini ifodalaydi. Binobarin, tekshirilayotgan davrda kuzgi bug'doy o'rish o'rtacha hisobda yiliga 1,573 ming tonnaga oshgan, kuzgi bug'doy hosildorligi esa yiliga gektar hisobiga 0,5 sentnerga oshgan.

## Mustaqil yechish uchun misollar

**1-misol**. Quyida oziq-ovqat sanoati korxonasi ma'lumotlari keltirilgan (shartli ma'lumotlar).

Ushbu ma'lumotlar asosida quyidagilar hisoblansin:

a) har bir ko'rsatkichning o'rtacha qiymatlari, o'rtacha kvadrat chetlanishi;

b) har bir ko'rsatkich bo'yicha grafik chizilsin;

c) sof foydani ishlovchilar soni, asosiy fondlar qiymati va reklama xarajatlaridan regressiya tenglamasi tuzilsin;

d) omillar orasidagi bog'lanish zichligi tahlil qilinsin;

e) olingan modellarni aniq jarayonga mosligi tekshirilsin;

f) dinamik qator avtokorrelyatsiyaga tekshirilsin;

g) olingan natijalar iqtisodiy tahlil qilinsin.

| Vaqt | Sof foyda, mln. so'm | Tushum, mln. so'm | Xarajatlar, mln. so'm | Ishlovchilar soni, kishi | Asosiy fondlar qiymati, mln. so'm | Reklama xarajatlari, mln. so'm |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2001. 01 | 5,8 | 10,8 | 16,6 | 121 | 18,7 | 0,23 |
| 2001. 02 | 5,9 | 11,6 | 17,5 | 123 | 19,3 | 0,25 |
| 2001. 03 | 6,2 | 12,3 | 18,5 | 130 | 19,7 | 0,30 |
| 2001. 04 | 6,9 | 13,4 | 20,3 | 129 | 20,1 | 0,32 |
| 2002. 01 | 6,4 | 12,1 | 18,5 | 136 | 20,3 | 0,30 |
| 2002. 02 | 6,8 | 13,0 | 19,8 | 142 | 20,5 | 0,29 |
| 2002. 03 | 7,2 | 15,4 | 22,6 | 135 | 19,8 | 0,31 |
| 2002. 04 | 7,7 | 15,4 | 23,1 | 130 | 19,3 | 0,34 |
| 2003. 01 | 7,7 | 15,5 | 23,2 | 134 | 21,0 | 0,41 |
| 2003. 02 | 8,4 | 17,2 | 25,6 | 137 | 22,3 | 0,39 |
| 2003. 03 | 8,9 | 18,3 | 27,2 | 143 | 24,7 | 0,42 |
| 2003. 04 | 9,6 | 19,9 | 29,5 | 144 | 24,9 | 0,45 |
| 2004. 01 | 9,7 | 20,1 | 29,8 | 140 | 25,1 | 0,43 |
| 2004. 02 | 10,3 | 20,3 | 30,6 | 145 | 26,9 | 0,49 |
| 2004. 03 | 10,9 | 21,0 | 31,9 | 146 | 30,1 | 0,51 |
| 2004. 04 | 11,4 | 21,1 | 32,5 | 148 | 30,3 | 0,55 |

## Tayanch iboralar

Vaqtli qatorlar, o'rtacha qiymatlar, sirg'anuvchi usul, vaqtli qatorlarni tekislash va vaznli tekislash, o'rta arifmetik, tendensiya, eng kichik kvadratlar usuli, polinom, normal tenglamalar sistemasi, dispersiya, dispersiya tahlili, o'rta kvadratik xato, variatsiya.

## Takrorlash uchun savollar

1. Vaqtli qatorlarga ta'rif bering.
2. Vaqtli qatorlarning farq qiluvchi xususiyatlarini ta'riflab bering.
3. Kelajakning vaqtli qatorlari ishonchlilik darajasiga ko'ra necha guruhga bo'linadi?
4. Sirg'anuvchi o'rtacha usulni tushuntirib bering.
5. Eng kichik kvadratlar usulini tushuntirib bering.
6. Normal tenglamalar sistemasi qanday tuziladi?
7. Funksiya shakllarini aniqlashning necha xil usuli mavjud?
8. Variatsiya deb nimaga aytiladi?
9. Dispersiyalarni aniqlashda daraja erkinligi qanday holatda bo'ladi?
10. $F$ - mezonning empirik qiymati qanday hisoblanadi?
11. Regressiya tenglamasi qaysi mezon yordamida aniqlanadi?
12. Chiziqli funksiya uchun dispersiyalar qanday hisoblanadi?
13. Fisherning F-mezoni nimani aniqlaydi?
14. Styudentning t-mezoni qachon qo'llaniladi?

### 3.3. Iqtisodiy jarayonlarni bashoratlashda korrelyatsiya va regressiya tahlili usullarini qo'llash

Umumlashgan katta sonni tahlil qilish va aniq kuzatishda u yoki bu qonuniyatlarni aniqlash zarurligi ko'pgina iqtisodiy tadqiqotlarning xarakterli xususiyati hisoblanadi. Real borliqda hech bir iqtisodiy zaruriyat bevosita sof holda namoyon bo'lmaydi.

Bir qiymatni o'zgartirish boshqasining o'rtacha qiymati o'zgarishiga olib keladigan hollarda bog'lanishni o'rganish katta qiziqish uyg'otadi. Mana shunday bog'lanishga *korrelyatsion bog'lanish* deyiladi. Korrelyatsiya tahlilining maqsadi, hodisalar o'rtasidagi bog'lanishning zichligini o'rganishdir. Bog'lanishlar o'z mohiyatiga ko'ra sodda va murakkab bo'lishi mumkin. Ijtimoiy hodisalar, shu jumladan, iqtisodiy hodisalar odatda murakkab bog'langan bo'ladi.

Korrelyatsiya tahlili hodisalar o'rtasidagi bog'lanishni aniqlaydigan usullardan biri hisoblanadi. Lekin faqat korrelyatsiya tahlili bog'lanishning zichligi haqida oddiy baho bera oladi. Bu holat iqtisodiy tadqiqotlarda korrelyatsiya tahlilini keng qo'llash imkoniyatini beradi. Korrelyatsiya tahlili haqida gapirganda regressiya tahlilini unutmaslik kerak. Regressiya tahlili hodisalar o'rtasidagi bog'lanishning statistik tahlil usuli bo'lib, bog'lanish shakllarini tahlil qiladi. Regressiya tahlili natijalari regressiya tenglamalari va koeffitsientlarida sifat ifodasiga ega bo'ladi.

Korrelyatsiya va regressiya tahlilning samaradorligi ko'pgina ijtimoiy-iqtisodiy muammolarni hal qilishda muhim rol o'ynaydi. Korrelyatsiya va regressiya tahlili qilishdan oldin o'rganilayotgan hodisalar o'rtasida bog'lanish har tomonlama sinchiklab tahlil qilinishi lozim. Haqiqatan ham bog'lanish mavjud bo'lsa, korrelyatsiya va regressiya tahlili usulidan foydalanish hamda muhim ahamiyatga ega bo'lgan natijalarni olish mumkin bo'ladi.

Korrelyatsiya tahlilining birinchi vazifasi, korrelyatsiya bog'lanish shakllarini, ya'ni regressiya funksiyasi ko'rinishlarini (chiziqli, darajali, logarifmik va boshqalar) aniqlashdan iborat. Bog'lanish shakllarini tanlash regressiya tahlili va tanlanayotgan funksiya haqidagi ma'lum gipotezalarni ishlab chiqish hamda tahlil qilishdan boshlanadi. Regressiyalarni tenglashtirish korrelyatsiya modellarining tarkibiy qismi bo'lib, uni to'g'ri tanlay bilish, modellashtirishning eng mas'uliyatli bosqichi hisoblanadi.

Tahlil vaqtida garchi ba'zi bir tanlangan shakllarning to'g'riligini baholashning usullari ishlab chiqilgan bo'lsa ham, bog'lanish shaklini tanlay olish juda muhim hisoblanadi. Korrelyatsiya bog'lanishlari tasnifi quyidagi 1-chizmada keltirilgan.


1-chizma. Korrelyatsiya bog'lanishlari tasnifi.

Iqtisodiy hodisalar o'rtasidagi bog'lanishlarning murakkabligi ko'pincha mavjud hodisalar butun kompleksini tahlili bilan qamrab olish mumkin bo'lmagan holatni keltirib chiqaradi. Regressiyalarni konkret tenglashtirish har doim ma'lum darajada abstraktlash asosida quriladi. Regressiya tenglamalarini qurish hodisalar o'rtasidagi bog'lanish konkret shaklini aniqlashda gipotetik tajribasi hisoblanadi.

**Oddiy korrelyatsiya va regressiya**. Ikki o'zgaruvchi o'rtasidagi korrelyatsiya *oddiy korrelyatsiya* deyiladi. Oddiy korrelyatsiya yo'li bilan tahlil qilishdan maqsad, ikki hodisa o'rtasidagi bog'lanishning mavjudligi va zichligini aniqlashdan iboratdir. Ikki o'zgaruvchi o'rtasidagi bog'lanish zichligining umumlashtirilgan bahosi *korrelyatsiya indeksi* hisoblanadi va u quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$R=\sqrt{\frac{\sigma_y-\sigma^2_{y_x}}{\sigma^2_y}}=\sqrt{1-\frac{\sigma^2_{y_x}}{\sigma^2_y}}, \qquad (1)$$

bu yerda: $\sigma^2_y$ – natija ko'rsatkich dispersiyasi;

$\sigma^2_{y_x}$ – amaliy qiymat natijalari ko'rsatkichidan regressiya tenglamasi asosida nazariy hisoblangan ko'rsatkichdan chetlanish o'rtacha kvadrati.

Korrelyatsiya indeksi $0\le|R|\le 1$ oralig'ida bo'ladi. Agar $R=1$ bo'lsa, omillar o'rtasida funksional bog'lanish mavjud bo'ladi. Agar $R=0$ bo'lsa, u holda o'rganilayotgan omillar o'zaro bog'lanmagan bo'ladi.

Bog'lanish zichligi baholanayotgan vaqtda quyidagi tasniflash qo'llaniladi:

0,2 gacha – kuchsiz bog'lanish;

$0,2\div 0,4$ – o'rtacha zichlikdan kuchsizroq bog'lanish;

$0,4\div 0,6$ – o'rtacha bog'lanish;

$0,6 \div 0,8$ – o'rtachadan zichroq bog'lanish;

$0,8 \div 0,99$ – zich bog'lanish.

Mazkur tasniflash shartli hisoblanadi. Korrelyatsiya indeksi juft bog'lanish har qanday shaklining bog'lanish zichligini baholash uchun to'g'ri keladi. Agar bog'lanish chiziqli bo'lsa, u holda bog'lanish zichligini baholashda korrelyatsiya koeffitsientidan foydalanish mumkin:

$$r = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}, \qquad (2)$$

bu yerda, $\sigma_x$ va $\sigma_y$ mos ravishda $x$ va $y$ o'zgaruvchilarning o'rtacha kvadratik chetlanishidir va ular quyidagi formulalar yordamida hisoblanadi:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}, \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n}}. \qquad (3)$$

Shuningdek, korrelyatsiya koeffitsientini hisoblashning quyidagi modifikatsiyalangan formulalaridan ham foydalanish mumkin:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y}, \qquad (4)$$

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} xy - \sum_{i=1}^{n} x \sum_{i=1}^{n} y}{\sqrt{\left[n\sum_{i=1}^{n} x^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x\right)^2\right] \cdot \left[n\sum_{i=1}^{n} y^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y\right)^2\right]}}. \qquad (5)$$

Korrelyatsiya koeffitsienti $-1 \le r \le 1$ oralig'idagi qiymatga ega bo'ladi.

Korrelyatsiya koeffitsientining manfiy qiymati hodisalar o'rtasida teskari bog'lanish mavjud ekanligidan dalolat beradi. Ayrim hollarda korrelyatsiyaning indeksi yoki koeffitsienti bilan bir qatorda, determinatsiya koeffitsienti $d = r^2$ deb ataluvchi ko'rsatkich ham aniqlanadi. Determinatsiya koeffitsienti natija ko'rsatkichi va variatsiyasining qaysi qismi omil ko'rsatkichlari variatsiyasi bilan bog'langanligini ko'rsatadi. Agar tahlil ta'sir qilayotgan omil qiymatining o'zgarishiga muvofiq hodisalar qiymati taxminan bir tekisda o'zgarishini ko'rsatsa, u holda to'g'ri chiziqli bog'lanish mavjudligini ko'rsatadi. Mabodo bu o'zgarish bir tekisda bo'lmasa, unda egri chiziqli bog'lanish bo'ladi.

Iqtisodiy tadqiqotlarda qo'llanilayotgan korrelyatsiya formulalari turli shaklga ega. Iqtisodiy qatorlar dinamikasi o'rtasidagi bog'lanishlar chizig'i shaklini aniqlayotganda, ko'pchilik hollarda quyidagi shakl-

lardan foydalaniladi:

Chiziqli — $y = a_0 + a_1x$ (6)

Ikkinchi darajali parabola — $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ (7)

Uchinchi darajali parabola — $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ (8)

$n$-darajali parabola — $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ (9)

Ikkinchi darajali giperbola — $y = a_0 + \frac{a_1}{x}$ (10)

$b$ - Ikkinchi darajali giperbola — $y = a_0 + \frac{a_1}{x^b}$ (11)

Logarifmik — $\log y = a_0 + a_1x$ (12)

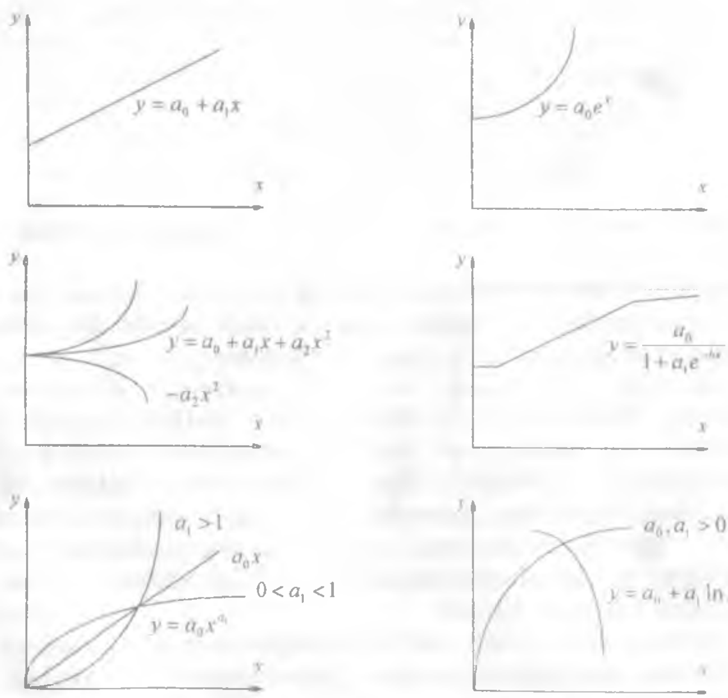
Yarim logarifmik — $y = a_0 + a_1 \ln x$ (13)

Ko'rsatkichli funksiya — $y = a_0a_1^x$ (14)

Darajali funksiya — $y = a_0x_1^{a_1}$ (15)

Logistik funksiya - $y = \frac{a_0}{1 + a_1e^{-bx}}$ (16)

Funksiyalar parametri odatda eng kichik kvadratlar usuli bilan aniqlanadi. Normal tenglamalar sistemasi (7) sistemaga o'xshash bo'ladi, ba'zi bir funksiyalar grafigi 2-chizmada keltirilgan.




2-chizma. Korrelyatsion bog'lanishlar turlari

Logistik funksiyada $y$ qiymati oldin $x$ ning tekis o'zgarishda tezlatilgan sur'atda ortib boradi.

Regressiya tenglamasining shaklini tanlashda quyidagilarga rioya qilish lozim:

1. Bog'lanishning umumiy shakli, bog'lanish tabiati va xarakteriga nisbatan professional tushuncha mos kelishi kerak.

2. Imkoni boricha interpretatsiya va amaliy qo'llashda oson bo'lgan tenglamalarning eng sodda shakllaridan foydalanish lozim. Boshlang'ich ma'lumotlarning grafik tasviri - tarqoq diagramma va regressiyalarning empirik chiziqlari regressiyalarni tenglama shakllarini tanlashda yordam ko'rsatadi.

**To'plamli korrelyatsiya va regressiya.** Jarayonlar qatorining bitta natijali ta'sirini to'plamli korrelyatsiya tahlili o'rganadi. To'plamli korrelyatsiya tahlilining shart-sharoiti xuddi korrelyatsion tahlil singari bo'ladi. Odatda to'plamli korrelyatsiya bevosita to'plamli regression tahlil bilan bevosita aloqada tahlil qilinadi. To'plamli regressiya tenglamasi oddiy masshtab, ya'ni regressiya tenglamalariga kiruvchi o'zgaruvchi bir maromdagi normal va normallashgan masshtabda yoki qiyoslash birligida ifodalangan o'zgaruvchilar shaklida tuzilishi mumkin.

Regressiya tenglamasi sifatida ko'pincha chiziqli:

$$\hat{y} = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \qquad (17)$$

va darajali funksiyalardan foydalaniladi:

$$\hat{y} = a_0x_1^{a_1}x_2^{a_2}...x_n^{a_n}. \qquad (18)$$

Ushbu tenglama parametrlari odatda eng kichik kvadratlar usuli bilan aniqlanadi. Umumiy holda normal tenglamalar sistemasi quyidagicha ifodalanadi:

$$\begin{cases} na_0 + a_1\sum x_1 + a_2\sum x_2 + ... + a_n\sum x_n = \sum y \\ a_0\sum x_1 + a_1\sum x_1^2 + a_2\sum x_1x_2 + ... + a_n\sum x_1x_n = \sum x_1y \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0\sum x_n + a_1\sum x_1x_n + a_2\sum x_2x_n + ... + a_n\sum x_n^2 = \sum x_ny \end{cases} \qquad (19)$$

Model darajalari parametrlarini aniqlash uchun oldin (18) modelni logarifmik-chiziqli ko'rinishga qayta o'zgartirish lozim:

$$\ln \hat{y} = \ln a_0 + a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2 + ... + a_n \ln x_n \qquad (20)$$

Shundan so'ng normal tenglamalar sistemasini tuzishda logarifmlardan foydalanamiz.

$$\begin{cases} n\ln a_0 + a_1\sum \ln x_1 + a_2\sum \ln x_2 + ... + a_n\sum \ln x_n = \sum \ln y \\ a_0\sum \ln x_1 + a_1\sum \ln x_1^2 + a_2\sum \ln x_1 \ln x_2 + ... + a_n\sum \ln x_1 \ln x_n = \sum \ln x_1 \ln y \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0\sum \ln x_n + a_1\sum \ln x_1 \ln x_n + a_2\sum \ln x_2 \ln x_n + ... + a_n\sum \ln x_n^2 = \sum \ln x_n \ln y \end{cases} \qquad (21)$$

Bog‘lanishning zichligi korrelyatsiyalar indeksiga o‘xshash bo‘lib, to‘plamli korrelyatsiya koeffitsienti yordamida baholanadi:

$$R_{yx_i}=\sqrt{1-\frac{\sum\left(y-\overset{*}{y}\right)^2}{\sum\left(y-\bar{y}\right)^2}}, \qquad (22)$$

bu yerda: $\overset{*}{y}$ – regressiya tenglamasi yordamida aniqlangan natijaviy ko‘rsatkichning nazariy qiymati; $\bar{y}$ – natijaviy ko‘rsatkichning o‘rtacha arifmetik qiymati.

To‘plamli regressiyalar chizig‘idan natijaviy ko‘rsatkich qiymati qanchalik kam darajada chetlansa, ma’lum intervalda absolyut qiymat bo‘yicha ahamiyatga ega bo‘lgan korrelyatsiya koeffitsienti katta qiymatga ega bo‘lishiga bog‘liq bo‘ladi. To‘plamli korrelyatsiya koeffitsienti quyidagi oraliqda o‘zgaradi: $0\le|R|\le 1$.

Agar korrelyatsiya modeli faqat ikki omil ko‘rsatkichlariga ega bo‘lsa, u holda to‘plamli korrelyatsiya koeffitsienti korrelyatsiyaning juft koeffitsientlaridan hosil qilish mumkin:

$$R_{yx_i}=\sqrt{\frac{r_{yx_1}^2+r_{yx_2}^2-2r_{yx_1}\cdot r_{yx_2}\cdot r_{x_1x_2}}{1-r_{x_1x_2}^2}}. \qquad (23)$$

G.Tintner to‘plamli korrelyatsiya koeffitsientining ko‘yidagi formulasini taklif etgan:

$$R_{yx_i}=\sqrt{\frac{a_1s_1+a_2s_2+a_3s_3+...+a_ns_n}{s_y}},$$

bu yerda: $s_j\ \left(j=\overline{1,n}\right)$ $s_j=\overline{yx_j}-\bar{y}\cdot\bar{x}$ formulasi bo‘yicha aniqlanadigan kovariatsiya;

$s_y$ – natijaviy ko‘rsatkich dispersiyasi;

$a_j\ \left(j=\overline{1,n}\right)$ – regressiya koeffitsienti.

Normallangan masshtabda umumiy ko‘rinishda to‘plamli regressiya tenglamasini quyidagicha tuzish mumkin:

$\beta_j\ \left(j=\overline{1,n}\right)$ parametrlari korrelyatsiyaning juft koeffitsienti yordamida aniqlanadi. Koeffitsientlarni aniqlash uchun $n$ ta tenglamalar sistemasini tuzamiz:

$$\begin{cases}\beta_1+\beta_2r_{x_2x_1}+\beta_3r_{x_3x_1}+...+\beta_nr_{x_nx_1}=r_{yx_1}\\ \beta_1r_{x_1x_2}+\beta_2+\beta_3r_{x_3x_2}+...+\beta_nr_{x_nx_2}=r_{yx_2}\\ \beta_1r_{x_1x_3}+\beta_2r_{x_2x_3}+\beta_3+...+\beta_nr_{x_nx_3}=r_{yx_3}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \beta_1r_{x_1x_n}+\beta_2r_{x_2x_n}+\beta_3r_{x_3x_n}+...+\beta_n=r_{yx_n}\end{cases} \qquad (24)$$

(24) tenglama ildizi izlangan regressiya koeffitsientlari hisoblanadi. Agar regressiya tenglamasi

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$$

ko'rinishida bo'lsa, $a_i \; \left(i = \overline{1,n}\right)$ koeffitsienti quyidagi formula asosida aniqlanadi:

$$a_1 = \beta_1 \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_1}}, \quad a_2 = \beta_2 \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_2}}, \ldots, \quad a_n = \beta_n \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_n}}, \qquad (25)$$

$a_0 = \overline{y} - a_1 \overline{x_1} - a_2 \overline{x_2} - \ldots - a_n \overline{x_n}$ o'rniga qo'yish orqali $a_0$ koeffitsienti topiladi.

U yoki bu juft omillar o'rtasidagi bog'lanish darajasining ishonchliligi, ishonchlilik koeffitsienti yordamida aniqlanadi:

$$\mu_{ij} = \frac{|r_{ij}|\sqrt{n}}{1 - r_{ij}^2}, \qquad (26)$$

agar $\mu \geq 2{,}6$ bo'lsa, bog'lanish ishonchli deb ataladi.

To'plamli korrelyatsiya koeffitsientini quyidagi formula bo'yicha ham aniqlash mumkin:

$$R = \sqrt{\beta_1 r_{yx_1} + \beta_2 r_{yx_2} + \ldots + \beta_n r_{yx_n}}, \qquad (27)$$

$\beta_j \; \left(j = \overline{1,n}\right)$ regressiya koeffitsienti har bir omilning salmog'i, ta'sir darajasini, ya'ni $\frac{\beta_i}{\beta_j}$ munosabati $i$-omilning ta'siri necha marotaba $j$-omilning ta'siridan katta ekanligini ko'rsatadi.

To'plamli korrelyatsiya munosabatining o'rtacha kvadratik xatolari quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$\sigma_R = \frac{1 - R^2}{\sqrt{n - k - 1}}, \qquad (28)$$

bu yerda: $n$ – kuzatuvlar soni;

$k$ – aniqlanayotgan bog'lanishning texnik-iqtisodiy parametrlari soni.

To'plamli korrelyatsiya koeffitsientining o'rtacha kvadratik xatolarga munosabati $t$ mezoni qiymati bilan aniqlanadi.

Omillarning xususiy elastiklik koeffitsientlarini aniqlashda quyidagi formuladan foydalanish mumkin:

$$Э_i = a_i \frac{\overline{x_i}}{\overline{y}}. \qquad (29)$$

Xususiy elastiklik koeffitsienti boshqa argumentlar o'zgarmagan holda argumentni bir foizga o'zgartirish bilan funksiya necha foizga o'zgarishini ko'rsatadı.

Korrelyatsiya-regressiya tahlilining asosiy ko'rsatkichlari ma'lum bo'lgandan so'ng, bashorat qiluvchi ko'rsatkichlar aniqlanadi:

$$y = a_0 + b_0 t; \quad x_1 = a_1 + b_1 t; \ldots; \quad x_n = a_n + b_n t$$

$a_0$, $b_0$, $a_1$, $b_1$,..., $a_n$, $b_n$ koeffitsientlarni hisoblashda eng kichik kvadratlar usulidan foydalaniladi. Qiymat ma'lum bo'lganidan keyin, tegishli boshlang‘ich qiymatlardan amaldagi o‘zgaruvchan qiymatlar chetlanishi hisoblab chiqiladi:

$$\varepsilon_{y_t} = y_t - \hat{y}_t; \quad \varepsilon_{x_{1t}} = x_{1t} - \hat{x}_{1t}; \ldots; \quad \varepsilon_{x_{nt}} = x_{nt} - \hat{x}_{nt}$$

va shundan so‘ng qiymatning regressiya tahliliga o‘tiladi, $\varepsilon_y, \varepsilon_{x_1}, \ldots, \varepsilon_{x_n}$.

Shunday qilib, bog‘langan va bog‘lanmagan o‘zgaruvchilardan bir vaqtda chiziqli tendensiyani chiqarish uchun $t$ vaqt fondiga to‘plamli regressiya tenglamasini kiritish lozim. Bunda tenglama quyidagicha ifodalanadi:

$$\hat{y} = a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i x_i + a_{k+1} t \,. \tag{30}$$

Agar hodisalar rivojlanish tendensiyasi chiziqsiz xarakterga ega bo‘lsa, bunday hollarda eng yuqori tartiblar farqi aniqlanadi yoki eng murakkab trend shakli chiqarib tashlanadi:

$$\varepsilon = \frac{1}{l} \sum_{t=1}^{n} \left| \frac{y_t - \hat{y}}{y_t} \right| \cdot 100\% \tag{31}$$

formulasida hisoblanadigan bashoratlashning o‘rtacha xatosi bashoratlashda muhim masala – hisob-kitoblar aniqligini oshirishda aniqlik mezoni bo‘lib xizmat qilishi mumkin. Bu yerda $y$ – bashoratlanayotgan vaqtli qatorlar darajasining vaqtli qatorlar amaldagi darajasi; $l$ – bashoratlanayotgan davr.

Davrning aniqligi bo‘lib, o‘tgan voqea va bashoratlanayotgan davrning davomiyoligiga bog‘liq bo‘ladi.

**Avtokorrelyatsiya tahlili**. Avtokorrelyatsiya – vaqtli qatorlarning keyingi va oldingi hadlari o‘rtasidagi korrelyatsion bog‘lanish hisoblanadi. Avtokorrelyatsiyaning mavjudligi qatorlar dinamikasi darajalarining o‘zaro bog‘liqligidan, keyingi hadlarning oldingi hadlarga kuchli darajada bog‘liqligidan dalolat beradi. Chunki korrelyatsiya tahlili usulini o‘zaro bog‘langan har bir qator darajasi statistik erkin, o‘rganilayotgan qatorlar dinamikasida avtokorrelyatsiya mavjudligini aniqlash lozim bo‘lgan hollarda tatbiq etish mumkin.

Avtokorrelyatsiya mavjudligini tekshirish jarayoni quyidagicha amalga oshiriladi. $r_a$ (hisoblangan) qiymati hisoblanadi:

$$r_a \text{ (hisoblangan)} = \frac{\sum z_i - z_{i+1}}{\sum z_i^2}, \tag{32}$$

bu yerda: $z_i = y - \hat{y}$ – qoldiq miqdor;

$z_{i+1}$ – vaqt bilan aralashgan qoldiq miqdor.

Agar hisoblar topilgan $r_a$ (hisoblangan) miqdor berilgan bir foizli xatolar ehtimolligi va erkinlik darajasi sonlari $n-k-1$ bo‘lganda $r$

(jadval) ($r_a$(jadval) < $r_a$(hisoblangan)) qiymatidan katta bo'lsa, avtokorrelyatsiya mavjud emas deyiladi. So'ngra ishonchlilik intervallari aniqlanadi. U koeffitsientlar variatsiyasi yordamida quyidagi formula asosida aniqlanadi:

$$V = \sqrt{\frac{\sum\left(\frac{y - \hat{y}}{y}\,100\right)^2}{n}} \qquad (33)$$

Shundan so'ng quyi intervali $y_t\left(1 - \frac{V_t}{100}\right)$, yuqori intervali bo'yicha $y_t\left(1 + \frac{V}{100}\right)$ ishonchlilik intervallari hisoblab chiqiladi.

Quyidagi holatlar korrelyatsiya tahlili usulini prognozlashda qo'llashda xatoliklarga olib kelishi mumkin:

a) bashoratlanayotgan hodisa ko'rsatkichlari dinamikasini aniqlashda muhim ahamiyatga ega bo'lgan omillar imkonini hisobga ola bilmaslik;

b) korrelyatsiya tenglamalari koeffitsientlari ularning qiymatini aniqlaydigan sharoitlar o'zgarishi bilan qiymatining o'zgaruvchanligi;

v) bir qiymat o'zgarishining bashorati boshqa bir qancha qiymatlar o'zgarish qiymati bilan almashtiriladi.

## Mustaqil yechish uchun misollar

**1-misol**. Quyidagi jadvalda Toshkent viloyati bo'yicha konserva mahsulotlarini ishlab chiqaruvchi korxonalarning 2003-yildagi iqtisodiy ko'rsatkichlari berilgan (shartli ma'lumotlar).

| Korxona nomeri | Mehnat unumdorligi, bitta ishchi uchun, so'm ($X_1$) | Fond qaytimi, bir birlik asosiy ishlab chiqarish fondi uchun, so'm ($X_2$) | Rentabellik darajasi, foiz, ($Y$) |
|---|---|---|---|
| 1 | 1250 | 1,24 | 20,1 |
| 2 | 3320 | 1,01 | 23,1 |
| 3 | 4550 | 2,01 | 25,6 |
| 4 | 2450 | 1,01 | 24,3 |
| 5 | 3110 | 1,05 | 25,1 |
| 6 | 3210 | 1,71 | 20,1 |
| 7 | 4401 | 2,11 | 19,1 |
| 8 | 5225 | 3,29 | 13,2 |
| 9 | 6222 | 1,12 | 15,1 |
| 10 | 7801 | 1,15 | 14,9 |

Viloyat rahbariyati ushbu korxonalarning rentabellik darajasini aniqlovchi matematik modelni yaratishga manfaatdor.

Jadval ma'lumotlari asosida konserva ishlab chiqaruvchi korxonalar uchun rentabellikni eng to'g'ri aniqlovchi model topilsin.

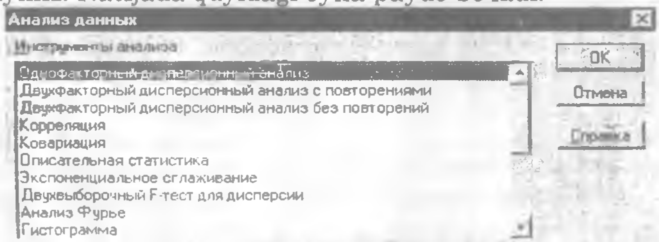
Bundan tashqari omillar orasida xususiy va juft korrelyatsiya koeffitsientlari hisoblansin. Natijaviy omil bilan xususiy korrelyatsiya koeffitsientlari hisoblansin. Barcha omillarning elastiklik koeffitsientlari hisoblansin. Ushbu maslani yechishda EXCEL* elektron jadvalidan foydalanamiz.

**1-bosqich**. Elektron jadvalga quyida keltirilgan chizmadagidek ma'lumotlarni kiritamiz.

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Korxona nomeri | Mehnat unumdorligi, bitta ishchi uchun, so'm | Fond qaytimi, bir birlik asosiy ishlab chiqarish fondi uchun, so'm | Rentabellik darajasi, foiz |
| 2 | | X1 | X2 | Y |
| 3 | 1 | 1250 | 1,24 | 20,1 |
| 4 | 2 | 3320 | 1,01 | 23,1 |
| 5 | 3 | 4550 | 2,01 | 25,6 |
| 6 | 4 | 2450 | 1,01 | 24,3 |
| 7 | 5 | 3110 | 1,05 | 25,1 |
| 8 | 6 | 3210 | 1,71 | 20,1 |
| 9 | 7 | 4401 | 2,11 | 19,1 |
| 10 | 8 | 5225 | 3,29 | 13,2 |
| 11 | 9 | 6222 | 1,12 | 15,1 |
| 12 | 10 | 7801 | 1,15 | 14,9 |

**2-bosqich**. Kiritilgan ma'lumotlarni diskka masala_1 nomi bilan yozib qo'yamiz. **Файл - Сохранить как - masala_1**.

**3-bosqich**. Omillar orasidagi korrelyatsiya koeffitsientlarini hisoblaymiz. Buning uchun **Меню** dagi **Сервис** bo'limini tanlaymiz. Bu yerdan esa **Анализ данных... (Ma'lumotlarni tahlil qilish)** qatorini tanlaymiz. Natijada quyidagi oyna paydo bo'ladi:




**4-bosqich**. Bu oynadan **Корреляция** qatorini tanlaymiz va paydo bo'lgan yangi **Корреляция** oynasidagi **Входной интервал (Kirish intervali)** qatoriga $B$2:$D$12 intervalini kiritamiz. Chunki bu intervalda barcha omillarning nomlari ($X_1$, $X_2$, $Y$) va ularning qiymatlari joylashgan.

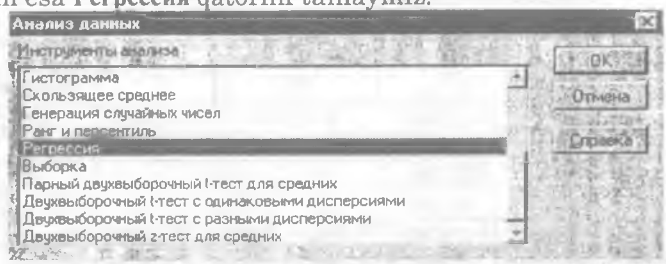
* EXCEL dasturi rus tilida bo'lganligini hisobga olib, keltirilgan barcha iboralarni ruschada qoldirdik

**5-bosqich**. Agar omillar joylashgan yacheykalar nomlarini kiritmasak, undan **Метки в первой строке (Birinchi qatorda belgilar)** qatori belgilanmaydi. Agarda omillar joylashgan qatorlar nomini kiritmoqchi bo'lsak, u holda **Метки в первой строке (Birinchi qatorda belgilar)** qatori belgilanadi.

**6-bosqich**. Masalaning yechimini olishda turli intervallarni berish mumkin. Biz hozircha masalaning yechimini yangi ishchi varaqda olmoqchimiz. Buning uchun **Новый рабочий лист (Yangi ishchi varaq)** qatorini belgilaymiz va **OK** knopkasini bosib, omillar orasidagi xususiy va juft korrelyatsiya koeffitsientlarining qiymatlarini yangi ishchi varaqda olamiz.

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | X1 | X2 | Y |
| 2 | X1 | 1 | | |
| 3 | X2 | 0,196011 | 1 | |
| 4 | Y | -0,64007 | -0,40963 | 1 |

**7-bosqich**. Regressiya tenglamasini olish uchun **Меню** dagi **Сервис** bo'limini tanlaymiz. Bu yerdan esa **Анализ данных... (Ma'lumotlarni tahlil qilish)** qatorini tanlaymiz. **Анализ данных** oynasidan esa **Регрессия** qatorini tanlaymiz.




**8-bosqich**. Natijada **Регрессия** nomli oyna paydo bo'ladi.

Bu oynadagi **Входной интервал Y** (**Y ning kirish interval**i) qatoriga Y ning nomi va qiymatlari joylashgan intervalni kiritamiz **$D$2:$D$12**. **Входной интервал X (X ning kirish intervali)** qatoriga barcha X lar nomlari va qiymatlari joylashgan intervalni kiritamiz **$B$2:$C$12**.

**Параметры вывода** (**Chiqish parametrlari**) bo'limidan masalaning yechimlarini chiqarish uchun **Новый рабочий лист** (**Yangi ishchi varaq**) qatorini tanlaymiz.

**Остатки** (**Qoldiqlar**) bo'limidan **Остатки** (**Qoldiqlar**) va **Стандартизированные остатки** (**Standartlashtirilgan qoldiqlar**) qatorini belgilaymiz va **OK** knopkasini bosamiz.

**9-bosqich**. Masalaning yechimi yangi ishchi varaqda joylashadi.

ВЫВОД ИТОГОВ

| *Регрессионная статистика* | |
|---|---|
| Множественный R | 0,702614273 |
| R-квадрат | 0,493666816 |
| Нормированный R-квадрат | 0,349000193 |
| Стандартная ошибка | 3,633533463 |
| Наблюдения | 10 |

ANOVA

| | *df* | *SS* | *MS* | *F* | Значимость F |
|---|---|---|---|---|---|
| Регрессия | 2 | 90,106042 | 45,053021 | 3,412444 | 0,092369 |
| Остаток | 7 | 92,417958 | 13,20256543 | | |
| Итого | 9 | 182,524 | | | |

| | Коэф-фициен-ты | Стан-дартная ошибка | t-статис-тика | P-Зна-чение | Нижние 95% | Верхние 95% | Нижние 95,0% | Верхние 95,0% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y-пе-ресече-ние | 28,597 | 3,565 | 8,0208 | 8,96E-05 | 20,166 | 37,028 | 20,166 | 37,028 |
| X1 | -0,00137 | 0,00064 | -2,1225 | 0,071455 | -0,0029 | 0,000156 | -0,0029 | 0,00015 |
| X2 | -1,813 | 1,6827 | -1,0775 | 0,316982 | -5,792 | 2,165946 | -5,792 | 2,165 |

ВЫВОД ОСТАТКА

| Наблюдение | Предсказанное Y | Остатки | Стандартные остатки |
|---|---|---|---|
| 1 | 24,637 | -4,537 | -1,249 |
| 2 | 22,218 | 0,882 | 0,243 |
| 3 | 18,720 | 6,880 | 1,894 |
| 4 | 23,410 | 0,890 | 0,245 |
| 5 | 22,433 | 2,667 | 0,734 |
| 6 | 21,099 | -0,999 | -0,275 |
| 7 | 18,742 | 0,358 | 0,098 |
| 8 | 15,474 | -2,274 | -0,626 |
| 9 | 18,043 | -2,943 | -0.810 |
| 10 | 15,825 | -0,925 | -0,255 |

**10-bosqich**. Yuqorida keltirilgan jadvallar asosida korrelyatsiya koeffitsientlari, regressiya tenglamalari barcha mezonlar yordamida tekshirilib chiqiladi.

**2-misol**. Korrelyatsiya-regressiya tahlili asosida O'zbekiston Respublikasi sanoat korxonalarida mehnat unumdorli ($Y$) va unga ta'sir etuvchi omillar ($X_1$, $X_2$) orasidagi bog'lanish aniqlansin va olingan modellar turli mezonlar (F-mezon, t-mezon, DW-mezon) asosida tekshirilsin (shartli ma'lumotlar).

| Yillar | Vaqt, $t$ | Mehnatning fond bilan qurollanganligi, $X_1$ | Mexanizatsiya darajasi, $X_2$ | Mehnat unumdorligi, $Y$ |
|---|---|---|---|---|
| 1980 | 1 | 5,28 | 75,84 | 8,32 |
| 1981 | 2 | 5,89 | 76,37 | 8,71 |
| 1982 | 3 | 6,23 | 77,96 | 9,03 |
| 1983 | 4 | 6,47 | 79,15 | 9,15 |
| 1984 | 5 | 7,12 | 81,26 | 9,85 |
| 1985 | 6 | 7,71 | 82,99 | 10,98 |
| 1986 | 7 | 8,48 | 84,68 | 12,46 |
| 1987 | 8 | 9,12 | 85,67 | 13,08 |
| 1988 | 9 | 9,76 | 86,36 | 11,92 |
| 1989 | 10 | 9,04 | 87,65 | 14,43 |
| 1990 | 11 | 7,26 | 88,82 | 12,47 |
| 1991 | 12 | 7,71 | 89,73 | 14,12 |
| 1992 | 13 | 7,36 | 92,32 | 13,51 |
| 1993 | 14 | 8,41 | 94,51 | 12,29 |
| 1994 | 15 | 8,18 | 94,79 | 12,34 |
| 1995 | 16 | 8,69 | 96,31 | 12,46 |
| 1996 | 17 | 8,84 | 97,47 | 11,93 |
| 1997 | 18 | 8,98 | 96,51 | 10,53 |
| 1998 | 19 | 9,14 | 94,23 | 8,08 |
| 1999 | 20 | 10,10 | 90,62 | 9,05 |
| 2000 | 21 | 11,15 | 90,45 | 9,66 |
| 2001 | 22 | 11,26 | 90,88 | 11,7 |
| 2002 | 23 | 10,12 | 91,12 | 11,6 |
| 2003 | 24 | 10,89 | 92,33 | 12,7 |
| 2004 | 25 | 11,23 | 92,60 | 13,6 |

**3-misol**. Quyida tekstil sanoatida paxta xomashyosidan tayyorlangan matoga bo'lgan talab, taklif va baho bo'yicha ma'lumotlar keltirilgan (shartli ma'lumotlar).

Ushbu ma'lumotlar asosida:

- talabning baho bo'yicha regressiya tenglamasi tuzilsin;
- taklifning baho bo'yicha regressiya tenglamasi tuzilsin;
- muvozanat baho, muvozanat ishlab chiqarish hajmi aniqlansin;

- talab va taklif bo'yicha regressiya tenglamasidagi parametrlarga iqtisodiy ta'rif berilsin.
- talabning baho bo'yicha elastiklik koeffitsienti hisoblansin.

| Baho, so'm (*P*) | 230 | 250 | 275 | 300 | 350 | 450 | 500 | 550 | 600 | 625 | 650 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Talab miqdori, metr ($Q_d$) | 8500 | 8300 | 8000 | 7400 | 7200 | 6500 | 6100 | 5000 | 4300 | 4100 | 4000 |
| Taklif miqdori, metr ($Q_s$) | 3500 | 3700 | 4400 | 5000 | 5800 | 6500 | 7200 | 8100 | 9000 | 9400 | 9700 |

## Tayanch iboralar

Bog'lanishlar, korrelyatsiya bog'lanishi, oddiy va murakkab bog'lanish, korrelyatsiya tahlili, regressiya tahlili, to'g'ri va teskari bog'lanish, korrelyatsiya koeffitsienti, korrelyatsiya indeksi, bog'lanish zichligi, juft bog'lanish, ko'plikdagi bog'lanish, eng kichik kvadratlar usuli, normal tenglamalar sistemasi, to'plamli korrelyatsiya koeffitsienti, regressiya tenglamasi, regressiya koeffitsienti, determinatsiya koeffitsienti, elastiklik koeffitsienti, bashoratlash xatosi, avtokorrelyatsiya, avtoregressiya, ishonchlilik intervali, variatsiya koeffitsienti, quyi va yuqori interval.

## Takrorlash uchun savollar

1. Iqtisodiy jarayonlarni bashoratlash deganda nimani tushunasiz?
2. Korrelyatsiya bog'lanishiga ta'rif bering.
3. Korrelyatsiya tahlilining mohiyati nimadan iborat?
4. Regressiya tahlilining mohiyatini tushuntirib bering.
5. Korrelyatsiya bog'lanishlari tasnifini yoritib bering.
6. Oddiy korrelyatsiyani tushuntirib bering.
7. Korrelyatsiya indeksi qachon qo'llaniladi?
8. Korrelyatsiya koeffitsienti nimani aniqlaydi?
9. Iqtisodiy hodisalar orasidagi bog'lanish zichligini tasniflab bering.
10. Chiziqli korrelyatsiya koeffitsienti qanday hisoblanadi?
11. Determinatsiya koeffitsientining ma'nosini tushuntirib bering.
12. Chiziqsiz funksiyalarga misol keltiring va qo'llanish sohalarini yoritib bering.
13. Regressiya tenglamasining shaklini tanlashda nimalarga e'tibor berish kerak?
14. To'plamli korrelyatsiya nima va u qanday hisoblanadi?
15. Chiziqsiz funksiyalarni chiziqli holga keltirishni tushuntirib bering.
16. G.Tintnerning to'plamli korrelyatsiya koeffitsientini hisoblash formulasini tushuntirib bering.
17. Elastiklik koeffitsienti nima va uning iqtisodiy ma'nosini tushuntirib bering.
18. Avtokorrelyatsiyaning ma'nosini tushuntirib bering.

## 3.4. Korrelyatsiya va regressiya tahlili natijalarining ishonchliligini tekshirish

Tahlil qilinayotgan qatorlar dinamikasi har doim anchagina uzunroq qatorlarning tanlamasi hisoblanadi. Shuning uchun korrelyatsiya tahlili natijalari ishonchliligini har tomonlama tekshirish lozim.

Korrelyatsiya va regressiya tahlili ishonchliligini tekshirish uchun Fisherning $z$-mezoni, Styudentning $t$-mezoni, va $F$-mezondan foydalaniladi.

**Fisherning $z$ mezoni**. Ingliz statisti Fisher korrelyatsiya va regressiya tahlillarining ishonchliligini tekshirish uchun logarifmik funksiyadan foydalanish usulini ishlab chiqdi:

$$z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right). \qquad (1)$$

$z$ taqsimot kichik tanlamada normal taqsimotga yaqin bo'ladi. F.Mills $n=12$ va $\rho=0{,}8$ da ($\rho$-bosh to'plamda korrelyatsiya koeffitsienti) $r$ va $z$ taqsimot grafigini o'tkazadi. $z$ ning o'rtacha kvadratik xatosi quyidagi formula bo'yicha aniqlanadi:

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}}. \qquad (2)$$

Ushbu formulada $\sigma_z$ o'rtacha kvadratik xato faqat taqsimot hajmiga, ya'ni $z$ taqsimoti bog'lanish zichligiga bog'liq bo'lmaydi. $r$ dan $z$ ga o'tish tegishli jadvallar bo'yicha amalga oshiriladi hamda korrelyatsion va regression tahlil natijalari ishonchliligini tekshirish uncha qiyin bo'lmaydi. Fisherning $z$ mezonidan boshqa maqsadlarda ham foydalanish mumkin. Masalan:

1. Korrelyatsiya koeffitsientlari bosh va tanlama farqini amalga oshirish hamda baholashda.
2. Korrelyatsiyaning ikkita tanlama koeffitsientining mavjud farqini baholash.
3. Agar tanlama bitta to'plamda o'tkazilgan bo'lsa, korrelyatsiyaning eng yaxshi koeffitsientini aniqlash uchun.

**Styudentning $t$ mezoni**. Mazkur mezon Styudent taxallusli ingliz matematigi Uilyam Gosset tomonidan ishlab chiqilgan.

Styudentning $t$ taqsimoti kichik tanlamalar uchun maxsus belgilangan. $t$ taqsimot taqsimlagichli suratga ega bo'lgan qiymat munosabatlarida, keyinchalik arifmetik o'rtacha qiymat taqsimlashda uchraydi

$$t = \frac{\bar{x}-m}{\sigma_x}\sqrt{\nu+1}. \qquad (3)$$

bu yerda: $m$ – bosh o'rtacha;

$\nu$ – erkinlik darajasi soni $(n-1)$;

$\bar{x}$, $\sigma_{\bar{x}}$ – tegishli tanlama to'plamning arifmetik o'rtacha qiymati va o'rtacha kvadratik chetlamasi.

Juft korrelyatsiya koeffitsientini tekshirish uchun $n-2$ erkinlik darajasini $t$ taqsimotga ega bo'lgan formula orqali qiymati aniqlanadi.

Agar $t_r > t$ bo'lsa, nolinchi gipotezani qo'llab bo'lmaydi va binobarin bosh to'plamda chiziqli korrelyatsiya mavjud. Uning ishonchli ta'rifi sifatida korrelyatsiyaning chiziqli koeffitsienti namoyon bo'ladi. Chiziqsiz bog'lanishda $R$ to'plam korrelyatsiyasining indeksi ishonchliligi ham xuddi shu usulda tekshiriladi. Bunday holda (4) formuladagi korrelyatsiya koeffitsienti korrelyatsiya indeksi $R$ bilan almashtiriladi. To'plam korrelyatsiya koeffitsienti $R$ kvadratik xatoga ega.

$$\sigma_R = \frac{1-R^2}{\sqrt{n-k-1}}, \qquad (5)$$

bu yerda $k$–regressiya koeffitsientlari soni.

Shunday qilib, $t$ mezonning empirik qiymati quyidagi formula bo'yicha aniqlanadi:

$$t_R = \frac{R\sqrt{n-k-1}}{1-R^2}, \qquad (6)$$

bu yerda: $n-k-1$ – erkinlik darajalari soni;

$t_R$ – jadvaldagi qiymati bilan solishtiriladi;

$n-2$ – erkin darajalari bilan $t$ taqsimotga ega bo'lgan

$$t_{a_i} = \frac{a_i}{\sigma_{a_i}}, \qquad (7)$$

qiymati asosida regressiya koeffitsientlarining ishonchligi tekshiriladi.

Oddiy chiziqli korrelyatsiya holatida $a_1$ regressiya koeffitsientining o'rtacha kvadratik xatosi quyidagi formula asosida aniqlanadi:

$$\sigma_{a_1} = \sqrt{\frac{\sum\left(y-\bar{y}_x\right)^2}{(n-2)\sum\left(x-\bar{x}\right)^2}}, \qquad (8)$$

$\sigma_{a_1}$ to'plamli korrelyatsiyada $a_i$ koeffitsienti quyidagicha aniqlanadi:

$$\sigma_{a_i} = \sqrt{\frac{\sum\left(y-\bar{y}_x\right)^2}{n-k-1}} \cdot C_{ii}, \qquad (9)$$

bu yerda $C_{ii}$ – normal tenglamalar sistemasi teskari matritsasining diagonal elementlari matritsasi.

***F*-mezon.** Bu mezon ingliz statisti R.Fisher tomonidan ishlab chiqilgan. To‘plamli korrelyatsiya koeffitsientlarining ishonchliligini tekshirish uchun quyidagi formuladan foydalanadi:

$$F = \frac{R^2(n-k)}{(1-R^2)(n-1)}, \qquad (10)$$

yoki

$$F = \frac{\sum(y-\bar{y})^2(n-k)}{(n-1)(y-\bar{y}_x)^2},$$

bu yerda: $n$ – kuzatuvlar soni;

$k$ – omillar soni.

Agar $F > F_a$ bo‘lsa, $k_1 = n-1$, $k_2 = n-k$ erkinlik darajasiga hamda $\alpha$ qiymatlar tenglamasiga ko‘ra, korrelyatsiya koeffitsientini ishonchli deb hisoblash mumkin.

Korrelyatsion va regression tahlilni qo‘llash vaqtida, omillarni tanlab olishda va ulardan modellarda foydalanishdagi asosiy qoidalar quyidagilardan iborat:

1. Omillarni o‘rganish bilan qamrab olinadigan ro‘yxat chegaralangan, omillar esa nazariy asoslangan bo‘lishi lozim.
2. Modelga kiritilgan barcha omillar miqdor o‘zgarishlarga ega bo‘lishi kerak.
3. Tadqiq qilinayotgan (o‘rganilayotgan) to‘plam sifatli bir jinsli bo‘lishi lozim.
4. Omillar o‘zaro funksional bog‘lanmasliklari shart.
5. Kelajakda omillar o‘zaro ta’sirini ekstrapolyatsiya qilish uchun modellardan foydalanilayotgan vaqtda xarakter jiddiy o‘zgarmasligi, statistik mustahkam va barqaror bo‘lishi lozim.
6. Regressiya tahlilida har bir omilning $(x)$ qiymatiga bir xil regressiyali natijaviy o‘zgaruvchi $(y)$ taqsimoti normal yoki yaqin darajada mos kelish lozim.
7. O‘rganilayotgan omillar tadqiq etilgan, natijaviy ko‘rsatkichli, mantiqan davriy bo‘lishi lozim.
8. Natijaviy ko‘rsatkichga jiddiy ta’sir ko‘rsatadigan faqat muhim omillar ta’sirini ko‘rib chiqish lozim.
9. Regressiya tenglamalariga kiritilgan omillar soni katta bo‘lmasligi lozim. Chunki omillar sonining katta bo‘lishi, asosiy omillardan chetga olib kelishi mumkin. Omillar soni kuzatishlar sonidan to‘rt marta kam bo‘lishi kerak.

10. Regressiya tenglamasining omillari turli xil xatolar ta'sirida buzilishga olib keladigan xatoliklar bo'lmasligi kerak. Omillar o'rtasida funksional yoki shunga yaqin bog'lanishlarning mavjudligi multikollenearlik borligini ko'rsatadi. Multikollenearlikning mavjudligi esa bu omillar natijaviy ko'rsatkichlarning bir tomonga ta'sir etishidan dalolat beradi. Multikollenear omillarni hisobga olganda regressiya o'rta kvadratik tenglamasi oshib boradi. Shuning uchun omillarda multikollenearlik mavjud bo'lganda mantiqiy mulohazalarga amal qilib, ulardan birini o'chirish lozim. Multikollenearlik mavjud bo'lganda, normal tenglamalar sistemasi matritsasi aynigan matritsaga aylanib qoladi. Bu esa ularni yechimining mavjud emasligiga olib keladi.

11. Kuzatuvlar sonini oshirish uchun ularning makonda takrorlanishidan foydalanish mumkin emas. Makonda hodisalarning o'zgarishi avtoregressiyani vujudga keltirishi mumkin. Avtoregressiya esa statistikadagi mavjud o'zgaruvchilar o'rtasidagi bog'lanishni ma'lum darajada buzadi. Shuning uchun ko'rsatkichlar dinamik qatorlarida regressiya bog'lanishni o'rganish statistikadagi bog'lanishni o'rganishdan tubdan farq qiladi.

12. Har bir omil bo'yicha taqsimot normal taqsimotga ega bo'lishi shart emas. Bu regressiya tahlilini natijaviy, alomatli qiymat va tasodifsiz qiymatli omillar o'rtasidagi bog'lanishni ifodalovchi sifatida ta'riflashdan kelib chiqadi.

13. Omillarni natural birlikda o'lchashda nisbiy qiymatlarga nisbatan ortiqroq ko'rish lozim. Nisbiy qiymatlar o'rtasidagi korrelyatsiya, regressiya tenglamasi parametrlari qiymati bog'lanish mazmunini buzishi mumkin.

Yuqorida qayd etib o'tilgan shartlarga rioya qilish, regression tahlil sifatini oshiradi hamda ishlab chiqilayotgan bashoratlarning yanada aniqroq bo'lishiga yordam beradi. Korrelyatsion va regression tahlil bir-biri bilan uzviy bog'langan. Regressiya tenglamalarini tuzishda bog'lanish omillarning natijaviy ko'rsatkich bilan zich bog'langanligidan foydalaniladi. Shuning bilan birga, omillar o'rtasidagi bog'lanish zichligini o'lchash aloqalar shakli qiymatiga asoslanadi va nihoyat, korrelyatsiya ko'rsatkichi regressiya tenglamasiga uning amaldagi qiymatini baholaydigan muhim qo'shimcha sifatida namoyon bo'ladi.

**Masala**. O'zbekiston Respublikasi sanoat korxonalarida iqtisodiy-texnik ko'rsatkichlarni korrelyatsion va regression usulni qo'llab bashorat qilish kerak bo'lsin. Statistik ma'lumotlar quyidagi jadvalda keltirilgan (shartli ma'lumotlar).

| Vaqt | Aylanma mablag'lar, ming so'm | Asosiy fondlar qiymati, ming so'm | Sanoat ishlab chiqarishidagi ishlovchilar soni, ming kishi | Investitsiyalar, ming so'm | Tovar mahsulot hajmi, ming so'm |
|---|---|---|---|---|---|
| $t$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $y$ |
| 1 | 62,5 | 99,2 | 30,3 | 16,2 | 209,5 |
| 2 | 65,6 | 105,5 | 33,3 | 18,5 | 320,5 |
| 3 | 72,1 | 120,5 | 34,2 | 20,2 | 420,5 |
| 4 | 73,1 | 132,5 | 35,1 | 22,3 | 510,9 |
| 5 | 75,2 | 135,6 | 35,9 | 25,5 | 620,2 |
| 6 | 76,3 | 150,2 | 36,7 | 27,6 | 720,5 |
| 7 | 50,4 | 170,5 | 38,8 | 29,3 | 832,5 |
| 8 | 90,5 | 190,2 | 39,2 | 31,2 | 941,5 |
| 9 | 100,2 | 200,9 | 40,1 | 41,2 | 1092,1 |
| 10 | 105,2 | 220,2 | 42,1 | 52,3 | 1193,2 |
| 11 | 106,3 | 230,1 | 45,1 | 65,3 | 1281,3 |
| 12 | 110,5 | 280,1 | 46,2 | 72,5 | 1391,9 |
| 13 | 112,5 | 310,2 | 48,2 | 81,1 | 1402,3 |
| 14 | 120,5 | 350,5 | 50,3 | 92,1 | 1502,5 |
| 15 | 115,5 | 402,5 | 52,2 | 101,2 | 1601,3 |
| 16 | 175,2 | 450,2 | 56,9 | 111,1 | 1381,4 |
| 17 | 189,5 | 501,2 | 62,5 | 120,2 | 1911,5 |
| 18 | 200,5 | 550,1 | 65,5 | 130,9 | 2210,1 |
| 19 | 230,5 | 580,2 | 70,5 | 140,2 | 2350,0 |
| 20 | 270,2 | 610,5 | 75,2 | 152,1 | 2089,9 |
| 21 | 281,5 | 615,1 | 80,1 | 160,1 | 2109,1 |

Ushbu masalani korrelyatsiya-regressiya tahlili usulini qo'llab komputerda yechsak, quyidagi natijalarni olamiz. Chiziqli tenglama determinatsiya koeffitsienti katta bo'lganligi uchun (0,9317), chiziqli shaklni tanlab olamiz.

1. Barcha bog'liq bo'lmagan o'zgaruvchilar ($x$) orasidagi korrelyatsiya koeffitsientlari quyidagicha:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1,0000 | 0,9582 | 0,9798 | 0,9498 |
| $x_2$ | 0,9582 | 1,0000 | 0,9877 | 0,9517 |
| $x_3$ | 0,9798 | 0,9877 | 1,0000 | 0,9929 |
| $x_4$ | 0,9498 | 0,9929 | 0,9839 | 1,0000 |

Bundan ko'rinib turibdiki, olingan to'rtta ko'rsatkichlar juda yaxshi bog'lanishga ega.

2. Korrelyatsiyaning to'plam koeffitsienti $R$ quyidagiga teng:

$$R = 0{,}9653\,.$$

3. Chiziqli regressiya tenglamasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$y = -555{,}828 - 6{,}5939x_1 + 1{,}7223x_2 + 37.5119x_3 + 4.1204x_4\,.$$

4. Omillar bo'yicha elastiklik koeffitsientlari esa

$$Э_{x_1} = -5{,}0815\,,\quad Э_{x_2} = 1{,}4498\,,\quad Э_{x_3} = 38{,}5508\,,\quad Э_{x_4} = 3{,}2122\,.$$

5. Fisherning hisoblangan $F$ mezoni qiymati

$$F_{hisob} = 54{,}6144.$$

Jadvaldagi qiymat bilan solishtirsak $F_{jadval} = 3{,}01$. Demak, $F_{hisob} > F_{jadval}$. Olingan to'g'ri chiziqli regressiya tenglamasi real jarayonga mos kelar ekan.

6. Endi olingan chiziqli modelga asosan, barcha omillarning yaqin kelajakdagi dinamikasini hisoblab chiqamiz. Buning uchun $x$ larning regressiya tenglamalarini quyidagicha aniqlaymiz:

$$x_1 = 17{,}07143 + 10{,}06623\ t;$$

$$x_2 = 4{,}74952 + 28{,}16338\ t;$$

$$x_3 = 23{,}55095 + 2{,}267662 \cdot t;$$

$$x_4 = -12{,}5800 + 7{,}685195\ t.$$

Bu tenglamalarni olingan chiziqli regressiya tenglamasiga qo'ysak,

$$y = 23{,}8299 + 112{,}9864 \cdot t,$$

tenglamani hosil qilamiz. Agarda $t$ ning o'rniga 22 ni qo'ysak, u holda 22-kuzatuv uchun tovar mahsulotining bashorat qiymatini hosil qilamiz ($y = 2622{,}5171$), keyin $t = 23$, $t = 24$, $t = 25$, $t = 26$ ni ketma-ket qo'yib, mos ravishda uning ushbu kuzatuvlar uchun qiymatlarini topamiz.

| Vaqt | Aylanma mablag'lar, ming so'm | Asosiy fondlar qiymati, ming so'm | Sanoat ishlab chiqarishidagi ishlovchilar soni, ming kishi | Investitsiyalar, ming so'm | Tovar mahsulot hajmi, ming so'm |
|---|---|---|---|---|---|
| $t$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $y$ |
| 22 | 203,725 | 614,845 | 73,440 | 156,494 | 2329,987 |
| 23 | 248,595 | 643,008 | 75,707 | 164,179 | 2428,849 |
| 24 | 258,661 | 671,172 | 77,975 | 171,865 | 2527,711 |
| 25 | 268,727 | 699,335 | 80,243 | 179,550 | 2626,572 |
| 26 | 278,793 | 727,498 | 82,510 | 187,235 | 2725,434 |
| 27 | 288,860 | 755,662 | 84,778 | 194,920 | 2824,295 |
| 28 | 298,926 | 783,825 | 87,045 | 202,605 | 2923,157 |
| 29 | 308,992 | 811,989 | 89,313 | 210,291 | 3022,019 |
| 30 | 319,058 | 840,152 | 91,581 | 217,976 | 3120,880 |

Jadvaldan ko'rinib turibdiki, 30-tartibdagi kuzatuvda tovar mahsuloti hajmi 3120,88 ming so'mga ortishini ko'ramiz. Shuni unutmaslik kerakki, bashoratlash vaqt bo'yicha hisoblanayotgan natija ko'rsatkichi vaqtga nisbatan monoton bo'lishi kerak. Aks holda olingan natija ko'rsatkichining kelgusidagi aniq holatini ko'rsata olmaydi. Agar funksiya monoton bo'lmasa, u holda vaqtli funksiyaning boshqa ko'rinishlaridan foydalaniladi, so'ngra bashorat qiymatlari topiladi.

## Mustaqil yechish uchun misollar

**1-misol**. Muzqaymoq ishlab chiqaruvchi «IMKON-PLUS» firmasining menejeri yong'oqli-shokoladli muzqaymoq markasini sotishni bashoratlash bo'yicha matematik modelini yaratishga harakat qilmoqda.

«IMKON-PLUS» firmasining ma'lumotlari quyidagi jadvalda keltirilgan.

| Vaqt | Sotish hajmi, mln. so'm, ($Y$) | Reklama xarajatlari, mln. so'm, ($X_1$) | Muzqaymoqning bir donasi bahosi, so'm, ($X_2$) | Raqobatchining bir dona muzqaymog'i bahosi, so'm, ($X_3$) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,26 | 0,40 | 150 | 170 |
| 2 | 1,37 | 0,48 | 148 | 173 |
| 3 | 1,48 | 0,38 | 152 | 168 |
| 4 | 1,91 | 0,87 | 155 | 162 |
| 5 | 2,74 | 0,82 | 155 | 160 |
| 6 | 3,70 | 0,97 | 160 | 180 |
| 7 | 4,32 | 1,47 | 181 | 202 |
| 8 | 4,45 | 1,87 | 130 | 158 |
| 9 | 3,67 | 1,98 | 158 | 182 |
| 10 | 3,67 | 1,06 | 169 | 168 |
| 11 | 3,21 | 0,86 | 163 | 170 |
| 12 | 3,07 | 0,65 | 161 | 183 |
| 13 | 3,31 | 1,26 | 154 | 164 |
| 14 | 3,45 | 0,65 | 157 | 162 |
| 15 | 3,64 | 0,58 | 160 | 177 |
| 16 | 6,84 | 0,57 | 151 | 162 |
| 17 | 3,90 | 0,51 | 155 | 160 |

Ushbu ma'lumotlar asosida muzqaymoq ishlab chiqaruvchi «IMKON-PLUS» firmasi uchun mahsulot sotishning modeli topilsin.

Olingan natijalarni barcha mezonlar bo'yicha tekshiring:

- Fisherning F-mezoni yordamida regressiya tenglamasini aniq jarayonga mosligini;
- Styudentning t-mezoni yordamida regressiya koeffitsientlarini ishonchliligini;
- Darbin-Uotson mezoni bo'yicha natijaviy ko'rsatkichda avtokorrelyatsiya mavjudligini;
- barcha omillarning elastiklik koeffitsientlarini;
- barcha turdagi korrelyatsiya koeffitsientlarini (juft, xususiy, ko'plikdagi);
- keyingi davrlarga (18, 19, 20) sotish hajmi bashorat qilinsin.

**2-misol**. Respublika paxta sanoati korxonalari rivojlanishining asosiy ko'rsatkichlarini bashoratlash (shartli ma'lumotlar)

| Yillar | VARIANTLAR | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $Y_1$ | $Y_2$ | $Y_3$ | $Y_4$ | $Y_5$ | $Y_6$ | $Y_7$ | $Y_8$ | $Y_9$ | $Y_{10}$ |
| 1995 | 112,5 | 118,4 | 95,4 | 107,4 | 100,4 | 111,3 | 135,4 | 113,3 | 101,1 | 114 4 |
| 1996 | 105,6 | 110,6 | 95,8 | 108,6 | 103,4 | 109,4 | 130,8 | 114,6 | 130,3 | 125,6 |
| 1997 | 113,0 | 120,3 | 96,4 | 101,4 | 105,6 | 112,5 | 136,4 | 110,5 | 124,5 | 127,4 |
| 1998 | 116,0 | 108,5 | 90,6 | 108,0 | 101,5 | 114,6 | 137,5 | 115,5 | 126,4 | 125,6 |
| 1999 | 108,3 | 111 2 | 99,5 | 112,3 | 120,4 | 115,4 | 138,4 | 116,6 | 127,4 | 128,4 |
| 2000 | 103,4 | 121,3 | 101,6 | 114,3 | 109,3 | 109,3 | 136,5 | 118,4 | 128,5 | 126,9 |
| 2001 | 110,0 | 124,6 | 103,4 | 104,5 | 113,6 | 106,5 | 138,7 | 113,5 | 126,4 | 129,5 |
| 2002 | 101,1 | 120,6 | 104,3 | 105,6 | 114,5 | 101,4 | 139,5 | 118,9 | 128,8 | 130,4 |
| 2003 | 118,3 | 114,5 | 105,8 | 111,3 | 121,3 | 112,4 | 139,9 | 119,0 | 129,5 | 131,9 |
| 2004 | 120,1 | 118,3 | 105,5 | 104,5 | 122,0 | 114,5 | 140,8 | 121,2 | 131,3 | 132,8 |

Bu yerda $Y$ – paxta sanoati korxonalarida (paxta tozalash korxonalarida) 1 ishchiga tovar mahsulotini ishlab chiqarish, ming so'mda. Bular asosida $y = f(t)$ umumiy ko'rinishga ega bo'lgan $y = b_0 + b_1 \cdot t$ ko'rinishidagi regressiya tenglamasi tuzilsin

**3-misol**. Sanoat ishlab chiqarishi bo'yicha mehnat unumdorligi sur'atlarini bashoratlash (shartli ma'lumotlar).

| Yil-lar | Vaqt, $t$ | Asosiy fondlar o'sish sur'ati, foiz, $X_1$ | Ishchilar malakasi o'sish sur'ati, foiz, $X_2$ | Fond bilan qurollangan-likning o'sish sur'ati, foiz, $X_3$ | Mehnat unumdorligi o'sish sur'atlari, foiz, $Y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1987 | 1 | 100,0 | 100,0 | 100,0 | 100,0 |
| 1988 | 2 | 112,1 | 113,2 | 108,8 | 105,3 |
| 1989 | 3 | 124,5 | 126,4 | 116,4 | 110,4 |
| 1990 | 4 | 136,6 | 139,9 | 124,3 | 116,3 |
| 1991 | 5 | 148,8 | 152,3 | 132,1 | 121,1 |
| 1992 | 6 | 161,4 | 163,4 | 138,7 | 126,5 |
| 1993 | 7 | 178,9 | 182,5 | 146,3 | 129,9 |
| 1994 | 8 | 195,7 | 201,7 | 154,5 | 132,8 |
| 1995 | 9 | 212,4 | 220,3 | 162,3 | 135,4 |
| 1996 | 10 | 229,6 | 239,9 | 170,8 | 137,2 |
| 1997 | 11 | 247,5 | 260,8 | 178,6 | 139,2 |
| 1998 | 12 | 269,5 | 290,1 | 188,3 | 141,4 |
| 1999 | 13 | 293,4 | 300,1 | 197,6 | 142,2 |
| 2000 | 14 | 297,2 | 310,8 | 205,4 | 143,8 |
| 2001 | 15 | 311,1 | 327,1 | 211,4 | 143,5 |
| 2002 | 16 | 326,9 | 344,3 | 219,6 | 155,3 |
| 2003 | 17 | 342,7 | 361,7 | 221,3 | 158,6 |
| 2004 | 18 | 358,5 | 378,6 | 225,1 | 162,3 |

Olingan natijalarni barcha mezonlar bo'yicha tekshiring:

- Fisherning F-mezoni yordamida regressiya tenglamasini real jarayonga mosligini;
- Styudentning t-mezoni yordamida regressiya koeffitsientlarini ishonchliligini;
- Darbin-Uotson mezoni bo'yicha natijaviy ko'rsatkichda avtokorrelyatsiya mavjudligini;
- barcha omillarning elastiklik koeffitsientlarini;
- barcha turdagi korrelyatsiya koeffitsientlarini (juft, xususiy, ko'plikdagi);
- 2010 yilgacha mehnat unumdorligi o'sish sur'atlari bashorat qilinsin.

## Tayanch iboralar

Qatorlar dinamikasi, ishonchlilik, korrelyatsiya va regressiya tahlil, Fisherning $z$ mezoni, normal taqsimot, Styudentning $t$ mezoni, erkinlik darajasi, to'plam korrelyatsiya koeffitsienti, regressiya koeffitsienti, o'rtacha kvadrat xato, $F$ mezon, kollenearlik, multikollenearlik, bashorat.

## Takrorlash uchun savollar

1. Korrelyatsiya va regressiya tahlili ishonchliligini tekshirish uchun qanday mezonlardan foydalaniladi?
2. Fisherning $z$ mezoni qachon qo'llaniladi?
3. Fisherning $z$ mezonidan yana boshqa qanday maqsadlarda ham foydalanish mumkin?
4. O'rtacha kvadratik xatoni qanday aniqlash mumkin?
5. Styudentning $t$ mezoni qaysi vaqtda qo'llaniladi?
6. Regressiya koeffitsienti nima va uning iqtisodiy ma'nosini tushuntirib bering.
7. Korrelyatsiya va regressiya tahlilida omillarni tanlab olishning asosiy qoidalariga ta'rif bering.
8. Multikollenearlik nima?
9. Avtoregressiyani tushuntirib bering.
10. Bashoratlashning iqtisodiy mohiyatini tushuntirib bering.
11. Darbin-Uotson mezonidan foydalanish shartlari nimadan iborat?
12. Darbin-Uotson mezoni koeffitsienti qaysi chegaralarda o'zgaradi?
13. Avtokorrelyatsiyani bartaraf etishning nech xil usullari bor?

## 3.5. Eksponensial tekislash usuli yordamida bashoratlash

Vaqtli qatorlarni ikkiga, ya'ni determinirlashgan va tasodifiy qismlarga ajratish mumkin:

$$y_t = f(t) + \xi_t,$$

bu yerda: $f(t)$ – determinirlashgan qism;

$\xi_t$ – tasodifiy qism.

Agar o'rganilayotgan vaqt oralig'ida trendni ta'riflayotgan tenglamalar koeffitsienti doimiylikdan qolgan bo'lsa, u holda bashoratlash modelini tuzish uchun eng kichik kvadratlar usulini qo'llash mumkin. Lekin ko'pincha shunday ham bo'lishi mumkinki, o'rganilayotgan davrda mazkur koeffitsientlar vaqt davomida o'zgarishi mumkin. Bunday sakrashlarni qisqa vaqtli qatorlar uchun payqash juda ham murakkab hisoblanadi.

Davrda vaqtli qatorlar darajasi $(n+l)$ ma'lum darajada ularning oldingi vaqt momentlarida $(n-i)$ erishgan qiymatiga bog'liq bo'lsa, xuddi mana shu vaqtli qator darajalariga ko'proq ahamiyat berish maqsadga muvofiq hisoblanadi. Shu vaqtning o'zida qolgan darajalarni tahlildan chiqarib yuborish mumkin emas. Chunki ular jarayon haqida ba'zi bir ma'lumotlarni beradi.

Mana shu ta'riflar eksponensial tekislash usulini tashkil etadi. Mazkur usulning mohiyati quyidagilardan iborat. Vaqtli qator sirg'anuvchi o'rta qiymat yordamida tekislanadi. Eksponensial taqsimlagichli vaznli sirg'anuvchi o'rta qiymat tekislash intervali oxirida jarayon mohiyatini ifoda etadi, ya'ni qatorlar oxirgi tenglamalarining o'rtacha xarakteristikasi hisoblanadi. Xuddi mana shu xususiyat bashoratlashda foydalaniladi.

Biz $y_t$ $\left(t=\overline{1,n}\right)$ vaqtli qatorga ega bo'lsak va ko'phad $p$-darajada ta'riflangan bo'lsa:

$$y_t = a_0 + a_1 t + \frac{a_2}{2!}t^2 + \ldots + \frac{a_p}{p!}t^p + \xi_t = \sum_i \frac{a_i}{i!}t^i + \xi_t. \qquad (1)$$

Ushbu $y_t$ qator omillar bo'yicha $y_t$ qator kuzatishlarini tortish yo'li bilan $(n+l)$ $\left(l=\overline{1,L}\right)$ ($l$ - bashoratlash davri) vaqt momentiga bashorat tuzish lozimki, eng kechki kuzatishlarga eng erta kuzatishlarga nisbatan ko'proq salmoq bersin. $t+l$, $t=n$ vaqt momentida qatorlar tenglamasini Teylor qatoriga yoyish yo'li bilan bashorat qilish mumkin:

$$y_{t+l}^{*} = y_t^{0} + l y_t^{(1)} + \frac{l^2}{2!}y_t^{(2)} + \ldots + \frac{l^k}{k!}y_t^{(k)} + \ldots + \frac{l^p}{p!}y_t^{(p)}, \qquad (2)$$

bu yerda: $y_t^{(k)}$ – $t$ vaqtdan olingan $k$-hosila.

R.Braun va Mayyerlar isbotlab bergan teoremaga muvofiq har qanday (2) tenglamadan olingan $k$-hosilasi $k=\overline{0,p}$ chiziqli kombinatsiyalar orqali eksponensial o'rta qiymatdan $p+1$ tartibgacha ifodalanishi mumkin. Bunday hollarda eksponensial tekislashning asosiy maqsadi (1) formuladagi tenglama koeffitsienti baholarini rekkurent tuzatishlarini hisoblashdir.

$y_t$ qator uchun birinchi tartibdagi eksponensial qiymatini quyidagicha deb olaylik:

$$S_t^{[1]}(y)=\alpha\sum_{i=0}^{n}(1-\alpha)^i y_{t-i}\,, \qquad (3)$$

bunda $\alpha$ - tekislash parametri $(0<\alpha<1)$.

$y_t$ qator uchun $k$-tartibli eksponensial o'rta qiymatini quyidagicha hisoblaymiz:

$$S_t^{[k]}(y)=\alpha\sum_{i=0}^{n}(1-\alpha)^i S_{t-i}^{[k-1]}(y). \qquad (4)$$

Eksponensial tekislangan qiymatni aniqlash uchun Braun quyidagi rekkurent formula chiqargan:

$$S_t^{[k]}(y)=\alpha S_t^{[k-1]}(y)+(1-\alpha)S_{t-1}^{[k]}(y). \qquad (5)$$

Yangi eksponensial o'rta qiymat oldingi qiymatga plyus yangi kuzatishlar o'rtasidagi farqdan $(\alpha)$ hissasiga teng. Oldin tekislangan qiymatlardan $t$ vaqt momenti uchun eksponensial o'rta qiymat hisoblashni ko'rsatish mumkin. Masalan, birinchi tartibli eksponensial o'rta qiymatni olaylik:

$$S_t^{[1]}(y)=\alpha y_t+(1-\alpha)S_{t-1}^{[1]}(y), \qquad (6)$$

u holda

$$S_t^{[1]}(y)=\alpha y_t+(1-\alpha)\left[\alpha y_{t-1}+(1-\alpha)S_{t-2}^{[1]}(y)\right]=\alpha y_t+\alpha(1-\alpha)y_{t-1}+(1-\alpha)^2\left[\alpha y_{t-2}+(1-\alpha)S_{t-3}^{[1]}(y)\right]=$$
$$=\alpha y_t+\alpha(1-\alpha)y_{t-1}+\alpha(1-\alpha)^2 y_{t-2}+\ldots+\alpha(1-\alpha)^2 y_{t-i}+\ldots+$$
$$+(1-\alpha)^t y_0=\alpha\sum_{i=0}^{t-1}(1-\alpha)^i y_{t-i}+(1-\alpha)^t y_0\,. \qquad (7)$$

(5) funksiya oldingi barcha kuzatishlarning chiziqli kombinatsiyasi hisoblanadi. Oldingi darajaning salmog'i geometrik progressiya bo'yicha kamayib boradi. Chunonchi, agar tekislash parametri $\alpha=0{,}3$ bo'lsa, u holda vaqt momenti uchun darajasining salmog'i 0,3 ga ega bo'ladi. Oldingi kuzatishlarning salmog'i, mos ravishda 0,21; 0,147; 0,1029 va hokazolarga teng bo'ladi.

Rekkurent (5) formula yordamida (2) yoyilmalardan olingan hosilalar quyidagi tenglamalar bo'yicha ifodalandi:

$$\begin{cases} S_t^{[1]}(y) = \alpha y_t + (1-\alpha)S_{t-1}^{[1]}(y) \\ S_t^{[2]}(y) = \alpha S_t^{[1]}(y) + (1-\alpha)S_{t-1}^{[2]}(y) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ S_t^{[k]}(y) = \alpha S_t^{[k-1]}(y) + (1-\alpha)S_{t-1}^{[k-1]}(y) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ S_t^{[n]}(y) = \alpha S_t^{[n-1]}(y) + (1-\alpha)S_{t-1}^{[n]}(y) \end{cases} \qquad (8)$$

Masalan, chiziqli model faqat oldingi ikkita hadga ega bo'lsin:

$$y = a_0 + a_1 l + \xi_t . \qquad (9)$$

Eksponensial o'rta qiymat orqali tenglamalar koeffitsientini (9) ifodalash uchun Braun-Mayyer teoremasi asosida $a_0$ va $a_1$ koeffitsientlar bahosini $S_t^{[1]}(y)$ va $S_t^{[2]}(y)$ eksponensial o'rta qiymat bilan bog'laydigan tenglamalar sistemasini hosil qilish lozim:

$$\begin{aligned} S_t^{[1]}(y) &= \hat{a}_0 + \frac{1-\alpha}{\alpha} \hat{a}_1 \\ S_t^{[2]}(y) &= \hat{a}_0 + \frac{2(1-\alpha)}{\alpha} \cdot \hat{a}_0 \end{aligned} \qquad (10)$$

$\hat{a}_0$ va $\hat{a}$ ga nisbatan (10) sistemani yechib,

$$\hat{a}_0 = 2S_t^{[1]}(y) - S_t^{[2]}(y),$$

$$\hat{a}_1 = \frac{1}{1-\alpha}\left[S_t^{[1]}(y) - S_t^{[2]}(y)\right]$$

larni hosil qilamiz.

(2) formula uchun bashorat quyidagi formula asosida hisoblanadi:

$$y_{t+1}^{*} = \hat{a}_0 + l\,\hat{a}_1 .$$

Bashoratlashdagi xato quyidagicha aniqlanadi:

$$\sigma_{y_{t+1}^*} = \sigma_{\xi_t} \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{(2-\alpha)^3} \cdot \left[1 + 4(1-\alpha) + 5(1-\alpha)^2 + 2\alpha(4-3\alpha)l + 2\alpha^2 l^2\right]}, \qquad (11)$$

bunda $\sigma_{\xi_t}$ - chiziqli trenddan chetlanish uchun hisoblangan kvadratik xato.

(5) formuladan ma'lum bo'lishicha, tekislash jarayonini o'tkazish uchun $S_{t-1}^{[k]}(y)$ boshlang'ich qiymatni berish lozim.

Odatda ma'lum iqtisodiy mulohazalardan, masalan, lag (vaqt bo'yicha kechikish) qiymatidan kelib chiqib, boshlang'ich sharoit beriladi. Bunday hollarda bashoratlash uchun barcha vaqtli qator emas, balki uning bir qismidan foydalaniladi. Bu esa bashoratlash uchun zarur bo'lgan axborotlar hajmini ma'lum darajada qisqartirish imkonini beradi.

Chiziqli modellar uchun boshlang'ich sharoit quyidagicha aniqlanadi:

$$S_0^{[1]}(y) = a_0 - \frac{1-\alpha}{\alpha} a_1$$
$$S_0^{[2]}(y) = a_0 - \frac{2(1-\alpha)}{\alpha} a_1 \qquad (12)$$

Braun $a_0$ va $a_1$ koeffitsientlar qiymatini ifodalash uchun eng kichik kvadratlar usuli bilan olingan trend darajasi koeffitsientini olishni tavsiya etadi.

Eksponensial tekislash usuli yordamida bashoratlanayotganda asosiy muammolardan biri $\alpha$ tekislash parametrining optimal qiymatini tanlash hisoblanadi. Ma'lumki, $\alpha$ ning turli qiymatida bashorat natijalari qiymatlari ham turlicha bo'ladi. Agar $\alpha$ qiymati birga yaqin bo'lsa, bu bashorat vaqtida asosan so'nggi kuzatuvlarni hisobga olishga, agar $\alpha$ qiymati nolga teng bo'lsa, u holda bashorat vaqtida deyarli barcha kuzatuvlar hisobga olinadi. Kuzatilayotgan vaqtdan $k$ – davrlariga qilgan barcha kuzatishlar $\alpha(1-\alpha)^k$ ga teng bo'ladi. Agar boshlang'ich sharoitlarni ishonchli deyishga asos bo'lsa. $(\alpha \sim 0)$ tekislash katta bo'lmagan qiymat parametridan foydalanish lozim.

Tekislash parametri kichik bo'lgan vaqtda $S_t(y)$ funksiyasi katta sonli oldingi tenglamalarning o'rtacha qiymati sifatida namoyon bo'ladi. Agar boshlang'ich sharoitning ishonchligiga asos bo'lmasa, u holda bashoratlashda asosan so'nggi kuzatuvlarni hisobga olishga olib keladigan $\alpha$ katta qiymatidan foydalanish lozim bo'ladi. Shuni ta'kidlab o'tish lozimki, $\alpha$ ning bir ozga o'zgarishi, bashorat natijalariga deyarli ta'sir ko'rsatmaydi.

$\alpha$ ning optimal qiymatini tanlashning aniq usuli ishlab chiqilmagan. Braun $\alpha$ qiymatini quyidagi formula asosida aniqlashni tavsiya etadi:

$$\alpha = \frac{2}{m+1}, \qquad (13)$$

bu yerda $m$ – tekislash intervaliga kiradigan kuzatishlar soni.

Mazkur formula asosida aniqlangan so'nggi $m$ ta kuzatishlar tekislash parametrida $C$ ning jamlangan qiymatini aniqlaymiz. $C$ quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$1-\alpha = \frac{m-1}{m+1},$$

u holda $C$ ning jamlangan qiymati quyidagiga teng:

$$C = \alpha \sum_{k=0}^{m-1} (1-\alpha)^k = 1-(1-\alpha)^m = 1-\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^m \approx 1-\frac{1}{e^2} = 0{,}865, \quad (m \geq 10). \qquad (14)$$

Bundan ko'rinib turibdiki, 87% ga yaqin $m \geq 10$ bo'lgandagi salmog'i so'nggi kuzatuvlarga to'g'ri kelar ekan.

Kvadratik model uchun quyidagi tenglama mavjud:

$$y_t = a_0 + a_1 t + \frac{1}{2} a_2 t^2 + \xi_t \,. \qquad (15)$$

Tenglamaning $a_0$, $a_1$ va $a_2$ koeffitsientlarni topish uchun uch noma'lum hadli, uch tenglamadan iborat sistemani yechish lozim.

$$\begin{cases} S_t^{[1]}(y) = \hat{a}_0 - \dfrac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \hat{a}_1 + \dfrac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{2\alpha^2} \cdot \hat{a}_2 \\ S_t^{[2]}(y) = \hat{a}_0 - \dfrac{2(1-\alpha)}{\alpha} \cdot \hat{a}_1 + \dfrac{(1-\alpha)(3-2\alpha)}{\alpha^2} \cdot \hat{a}_2 \\ S_t^{[3]}(y) = \hat{a}_0 - \dfrac{3(1-\alpha)}{\alpha} \cdot \hat{a}_1 + \dfrac{3(1-\alpha)(4-3\alpha)}{2\alpha^2} \cdot \hat{a}_2 \end{cases} \qquad (16)$$

bunda,

$$\begin{cases} \hat{a}_0 = 3\left[S_t^{[1]}(y) - S_t^{[2]}(y)\right] + S_t^{[3]}(y) \\ \hat{a}_1 = \dfrac{\alpha}{2(1-\alpha)^2}\left[(6-5\alpha)S_t^{[1]}(y) - 2[5-4\alpha]S_t^{[2]}(y) + (4-3\alpha)S_t^{[3]}(y)\right] \\ \hat{a}_2 = \dfrac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2}\left[S_t^{[1]}(y) - 2S_t^{[2]}(y) + S_t^{[3]}(y)\right] \end{cases} \qquad (17)$$

(15) model uchun bashoratlash quyidagi formula asosida tuziladi:

$$\hat{y}_{t+l} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 l + \frac{1}{2}\hat{a}_2 l^2 \,. \qquad (18)$$

Bashoratlashdagi xato quyidagi formula asosida hisoblab chiqiladi:

$$\sigma_{\hat{y}_{t+l}} \approx \sigma_{\xi} \cdot \sqrt{2\alpha + 3\alpha^2 + 3\alpha^3 l^2} \,.$$

Kvadratik model uchun boshlang'ich sharoit quyidagicha ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{cases} S_0^{[1]}(y) = a_0 - \dfrac{1-\alpha}{\alpha} \cdot a_1 + \dfrac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{2\alpha^2} \cdot a_2 \\ S_0^{[2]}(y) = a_0 - \dfrac{2(1-\alpha)}{\alpha} \cdot a_1 + \dfrac{(1-\alpha)(3-2\alpha)}{\alpha^2} \cdot a_2 \\ S_0^{[3]}(y) = a_0 - \dfrac{3(1-\alpha)}{\alpha} \cdot a_1 + \dfrac{3(1-\alpha)(4-3\alpha)}{2\alpha^2} \cdot a_2 \end{cases} \qquad (19)$$

**Masala**. Eksponensial tekislash usuli yordamida O'zbekiston Respublikasi sanoat korxonalaridagi iqtisodiy ko'rsatkichlarni bashorat qilish lozim. Ushbu ma'lumotlar quyidagi 1-jadvalda keltirilgan.

1-jadval

Masalaning dastlabki ma'lumotlari

| Vaqt | Milliy daromad, mlrd. so'm | Sanoatda bir yildagi ishchilarning o'rtacha soni, ming kishi | Ishlab chiqarish asosiy fondlari qiymati, mln. so'm | Sanoatdagi yalpi mahsulot, mln. so'm | Investitsiyalar, mln. so'm |
|---|---|---|---|---|---|
| $t$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ |
| 1 | 20,5 | 404,6 | 3020 | 7963,3 | 200,2 |
| 2 | 30,2 | 421,3 | 3181 | 8349,6 | 232,3 |
| 3 | 35,5 | 432,8 | 3895 | 9837,9 | 242,5 |
| 4 | 40,2 | 445,7 | 4317 | 10500,5 | 255,5 |
| 5 | 45,3 | 455,5 | 4767 | 10899,0 | 262,4 |
| 6 | 49,3 | 469,4 | 5362 | 12013,3 | 278,5 |
| 7 | 52,1 | 483,5 | 6095 | 13471,3 | 289,1 |
| 8 | 55,2 | 496,3 | 6486 | 14021,6 | 295,5 |
| 9 | 59,2 | 517,6 | 7292 | 15804,2 | 305,5 |
| 10 | 62,1 | 540,1 | 7936 | 16392,6 | 320,1 |
| 11 | 63,1 | 596,1 | 8623 | 17058,9 | 326,9 |
| 12 | 69,2 | 614,9 | 9331 | 18140,1 | 333,1 |
| 13 | 71,2 | 637,8 | 10096 | 19101,2 | 345,1 |
| 14 | 70,1 | 667,6 | 10930 | 20062,2 | 355,5 |
| 15 | 73,2 | 709,4 | 11823 | 20903,1 | 365,6 |
| 16 | 75,8 | 745,1 | 12792 | 22224,6 | 372,3 |
| 17 | 79,2 | 789,6 | 13624 | 24631,4 | 385,1 |
| 18 | 82,1 | 831,2 | 14340 | 27048,9 | 395,2 |

Ushbu ma'lumotlar asosida olingan modellarni ko'rib chiqamiz.

1. Milliy daromad uchun tuzilgan model quyidagi ko'rinishga ega:

$$y_1 = 81,87 + 2,65 \cdot t.$$

O'rtacha kvadratik xato 3,48 ga teng.

2. Sanoatda bir yildagi ishchilarning o'rtacha soni bo'yicha model:

$$y_2 = 827,91 + 37,56 \cdot t.$$

O'rtacha kvadratik xato 26,88 ga teng.

3. Ishlab chiqarish asosiy fondlari uchun model:

$$y_3 = 437,78 + 824,31 \cdot t.$$

O'rtacha kvadratik xato 729,91 ga teng.

4. Sanoatdagi yalpi mahsulot uchun model:

$$y_4 = 26575,73 + 1626,82 \cdot t.$$

O'rtacha kvadratik xato 1079,91 ga teng.

5. Investitsiyalar uchun model:

$$y_5 = 394,89 + 10,05 \cdot t.$$

O'rtacha kvadratik xato 11,10 ga teng.

8 yilga qilingan bashorat qiymatlari 2-6 jadvallarda berilgan.

2-jadval

Milliy daromadning bashorat qiymatlari

| Vaqt | Bashorat qiymatlari | Bashorat xatosi, % | Aniqlanish chegarasi | |
|---|---|---|---|---|
| | | | quyi | yuqori |
| 19 | 84,52 | 3,50 | 81,55 | 87,40 |
| 20 | 87,17 | 4,30 | 83,42 | 90,91 |
| 21 | 89,82 | 5,04 | 83,29 | 94,35 |
| 22 | 92,47 | 5,74 | 87,16 | 97,77 |
| 23 | 95,12 | 6,39 | 89,04 | 101,20 |
| 24 | 97,77 | 7,01 | 90,91 | 104,62 |
| 25 | 100,42 | 7,60 | 92,79 | 108,05 |
| 26 | 103,07 | 8,15 | 94,67 | 111,47 |

3-jadval

Sanoatda bir yildagi ishchilarning o'rtacha soni bashorat qiymatlari

| Vaqt | Bashorat qiymatlari | Bashorat xatosi, % | Aniqlanish chegarasi | |
|---|---|---|---|---|
| | | | quyi | yuqori |
| 19 | 865,47 | 2,64 | 842,59 | 888,34 |
| 20 | 903,02 | 3,20 | 874,08 | 931,96 |
| 21 | 940,58 | 3,72 | 905,12 | 975,55 |
| 22 | 978,14 | 4,19 | 937,17 | 1019,11 |
| 23 | 1015,70 | 4,62 | 968,74 | 1062,65 |
| 24 | 1053,25 | 5,03 | 1000,32 | 1106,19 |
| 25 | 1090,81 | 5,40 | 1031,90 | 1149,72 |
| 26 | 1128,37 | 5,75 | 1063,49 | 1193,28 |

4-jadval

Asosiy ishlab chiqarish fondlarining bashorat qiymatlari

| Vaqt | Bashorat qiymatlari | Bashorat xatosi, % | Aniqlanish chegarasi | |
|---|---|---|---|---|
| | | | quyi | yuqori |
| 19 | 15201,08 | 4,09 | 14580,08 | 15822,08 |
| 20 | 16025,39 | 4,90 | 15230,04 | 16811,14 |
| 21 | 16849,70 | 5,63 | 15900,02 | 17799,08 |
| 22 | 17674,05 | 6,29 | 16561,63 | 18786,38 |
| 23 | 18498,32 | 6,80 | 17223,33 | 19773,50 |
| 24 | 19322,63 | 7,44 | 17885,28 | 20759,96 |
| 25 | 20146,03 | 7,94 | 18547,41 | 21746,45 |
| 26 | 20971,24 | 8,40 | 19209,68 | 22732,80 |

5-jadval

Sanoatdagi yalpi mahsulotning bashorat qiymatlari

| Vaqt | Bashorat qiymatlari | Bashorat xatosi, % | Aniqlanish chegarasi | |
|---|---|---|---|---|
| | | | quyi | yuqori |
| 19 | 28202,55 | 3,26 | 27283,78 | 29121,32 |
| 20 | 29829,57 | 3,90 | 28666,84 | 30991,89 |
| 21 | 31456,19 | 4,47 | 30051,57 | 32860,80 |
| 22 | 33083,01 | 4,97 | 31437,24 | 34728,80 |
| 23 | 34700,83 | 5,43 | 32823,47 | 36596,18 |
| 24 | 36336,65 | 5,85 | 34210,09 | 38463,21 |
| 25 | 37963,47 | 6,23 | 35596,06 | 40329,97 |
| 26 | 39590,29 | 6.58 | 36984,04 | 47196,54 |

6-jadval

Investitsiyalarning bashorat qiymatlari

| Vaqt | Bashorat qiymatlari | Bashorat xatosi, % | Aniqlanish chegarasi | |
|---|---|---|---|---|
| | | | quyi | yuqori |
| 19 | 404,93 | 2,33 | 395,49 | 414,38 |
| 20 | 414,98 | 2,88 | 403,03 | 426,93 |
| 21 | 425,03 | 3,40 | 410,59 | 439,47 |
| 22 | 435,08 | 3,80 | 418,16 | 451,99 |
| 23 | 445,08 | 4,36 | 425,73 | 464,51 |

Iqtisodiy jarayonlarni bashoratlash uchun eksponensial tekislash usulini qo'llash imkoniyati haqidagi masalani yechishda quyidagi muhim masalalar ustida to'xtalib o'tamiz:

1. Katta sonlar kuzatishlaridan iborat vaqtli qatorlar tahlili uchun ishlab chiqilgan eksponensial tekislash usuli iqtisodiy vaqtli qatorlarni o'rganishda ko'pchilik hollarda ko'zda tutilgan natijalarni bermaydi. Bu shu bilan izohlanadiki, iqtisodiy vaqtli qatorlar juda ham qisqa (15-20 ta kuzatish) bo'ladi va tajribalarning ko'rsatishicha, izlanayotgan qiymat o'sish hamda ko'payish darajasi katta bo'lgan hollarda eksponensial tekislash usuli barcha o'zgarishlarni ifoda etishga «ulgura olmaydi».

2. Polinom tekislash koeffitsientlarini topish uchun rekkurent tartibdan (amaldan) foydalaniladi. Rekkurent amal kuzatishlarning oxirgi sonida masalani taqribiy hal qilish imkonini beradi. Kuzatishlar soni qanchalik ko'p bo'lsa, yaqinlashish shunchalik aniqroq bo'ladi.

3. Boshlang'ich sharoit tanlash muammosi tamoyil jihatdan usul xatolarini aniqlashga olib keladi. $\alpha$ tekislash parametrini eng qulay qiymatini tanlash masalasini hal qilish uchun masalaning aniq va ravshan qo'yilishini talab etadi.

## Tayanch iboralar

Vaqtli qatorlar, determinirlashgan va tasodifiy qism, trend, eksponensial tekislash, sirg'anuvchi o'rta qiymat, vaznli sirg'anuvchi o'rta qiymat, Teylor qatori, eksponensial o'rta qiymat, tekislash parametri, eng kichik kvadratlar usuli, bashoratlash.

## Takrorlash uchun savollar

1. Vaqtli qatorlar necha qismga ajratilishi mumkin?
2. Eksponensial tekislash usulining mohiyatini tushuntirib bering.
3. Eksponensial o'rta qiymat nima va u qanday hisoblanadi?
4. Bashoratlashdagi xatolar qanday aniqlanadi?
5. Tekislash parametri $\alpha$ ning optimal qiymati qanday aniqlanadi?

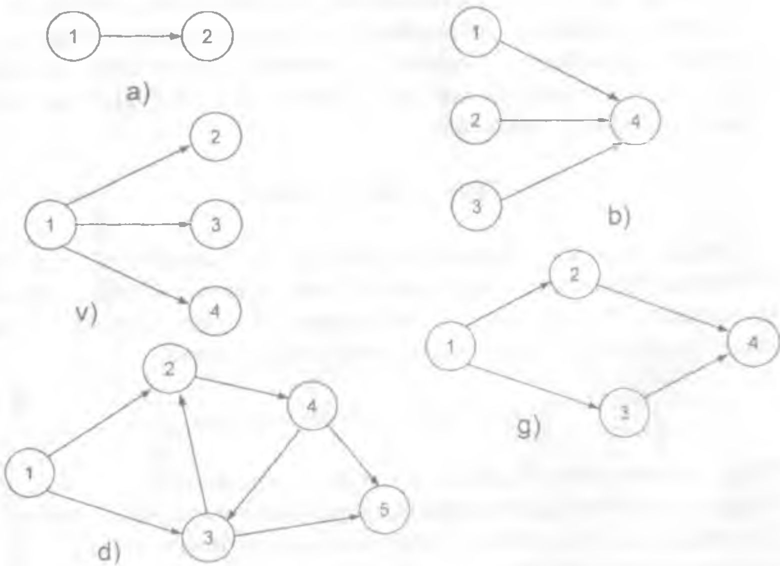
# 4-BOB. TARMOQLI MODELLAR

## 4.1. Tarmoqli modellarni qo'llashning zarurligi

Fan va texnikaning rivojlanishi natijasida iqtisodiyotning barcha tarmoqlarida rejalashtirish, boshqarish ishlarida matematik usullarni qo'llash bilan bir qatorda tezkor boshqarishning tarmoq modellaridan ham keng foydalanilmoqda.

Tarmoqli model asosan grafikni tashkil etib, ma'lum texnologik jarayonlar bo'ladigan jami ishlarning ketma-ket yoki parallel bajarilishini grafik ravishda ifodalashi mumkin. Masalan, rejalashtirish, murakkab kompleks ishlarni bajarish, inshootlar qurilishining hisob ishlarini bajarish kabi ishlar tarmoqli modellar yordamida amalga oshirilib, grafik shaklida ifodalanishi mumkin. Grafik shaklida ikki mantiqiy element – ish va hodisa tarmoqli modelni tashkil qiladi. Grafikda hodisalar aylana bilan, ishlar esa strelka bilan ifodalandi. Odatda hodisalar «uskunalar sozlanib bo'ldi», «dvigatel o'rnatildi» yoki «qurilayotgan inshoot bitdi» kabi iboralar bilan ifodalanadi. Tarmoqli grafikda «uskunani sozlash tugallanganicha yo'q», «qurilayotgan fundament hali bitmadi» kabi noaniq iboralar qo'llanilmaydi.

Quyidagi 1-chizmada tarmoqli grafikka oid masalalar keltirilgan.




1-chizma. Tarmoqli modellarning ko'rinishi

Tarmoqli grafikda quyidagi hollar ham mavjud bo'lishi mumkin. Ba'zi bir ishlar tugagandan keyin (masalan, texnologik elementlarni yig'ish) ishni boshqa ishga aloqasi bo'lgan holda davom ettirish mumkin. Birinchi hodisadan keyin ikkinchi va uchinchi hodisa boshlanadi, uchinchi hodisadan keyin to'rtinchi hodisa bajariladi. Lekin birinchi hodisadan keyin ikkinchi hodisa bajarilib, undan keyin to'rtinchi hodisaning bajarilishi uchun 2-3 ish punktir strelka bilan ifodalandi. Ishning bunday ko'rsatilishi, bu ishni bajarish uchun hech qanday resurs sarf bo'lmaydi, hatto vaqt ham sarf bo'lmasligini ko'rsatadi. Bunday ishni *soxta ish* deb yuritiladi. Bunday soxta ish 2-4 ni tashkil qiladi. Aytaylik, ba'zi bir agregatni yig'ish 1-chizmadagi (b) dagidek ko'rsatilgan bo'lsin. Agregat ikki uzeldan iborat, ya'ni 2-sonli uzel va 3-sonli uzel. Birinchi hodisa hamma ishning boshlanishini ko'rsatadi. Ikkinchi hodisa esa 2-sonli uzelni tamom bo'lishini, to'rtinchi hodisa 3-sonli uzelning tamom bo'lishini ko'rsatadi. Uchinchi hodisa esa agregatning boshlanishini ko'rsatadi. Aytaylik, 2-sonli uzel agregatni yig'ish sexining o'zida bajarilsin. 3-sonli uzel esa boshqa korxonalarda tayyorlanishi mumkin. U holda uchinchi va to'rtinchi hodisani birlashtiruvchi ish (3, 4) 3-sonli uzelni yig'ish sexiga yetkazib berish vazifasini bajaradi. Ikkinchi va to'rtinchi hodisani birlashtiruvchi ish (2, 4), 2-sonli uzel tayyor bo'lmaguncha agregatni yig'ish mumkin emasligini ko'rsatadi.

Demak, soxta ish hodisalar orasidagi mantiqiy bog'lanishni ifodalar ekan. Tarmoqli grafik asosan quyidagi uchta talabga javob berishi kerak:

1. Har qanday ikkita hodisa orasida faqat bitta ish bajarilishi lozim.

2. Tarmoqli grafikda hodisalarga boshqa birorta ish kirmasligi (dastlabki ishdan tashqari) kerak, shuningdek, hodisalardan boshqa birorta ish chiqmaydigan (tugallangan ishdan tashqari) bo'lishi kerak.

3. Tarmoqli grafikda *berk kontur* deb ataluvchi kontur bo'lmasligi, ya'ni bitta yo'l ikki marta bir xil hodisadan o'tmasligi kerak. Ba'zi bir texnologik jarayonlarni ketma-ket ishlashda yo'l qo'yilgan xato bo'lsa, tarmoqli grafik qo'llanilganda yo'l qo'yilgan xato aniqlanadi.

1-chizmaning d) ko'rinishidagi tarmoqli grafikni ko'rib o'taylik. Birinchi hodisadan keyin (1, 2) ish, ikkinchi va uchinchi hodisalardan keyin (1, 3) ish bajariladi, lekin to'rtinchi hodisa bajarilganda, (2, 4) bajarilib, undan keyin uchinchi hodisa (4, 3) ish boshlanib, yana ikkinchi hodisa beriladi. Bunda (2, 3) ish bajariladi. Grafikdan ko'rinib turibdiki 2, 4, 3 hodisalar yordamida berk kontur hosil bo'lgan. Bunday yo'l *sikl* deb ataladi.

Demak, 1-chızmaning d) ko'rinishidagi ko'rsatilgan grafikda berk kontur hosil bo'lganligi uchun ishlamaydi.

Tarmoqli grafikning (tarmoqli modelning) asosiy afzalliklari quyidagilardir:

1. Har bir ish orasidagi bog'lanish yaqqol ko'rinib turadi.

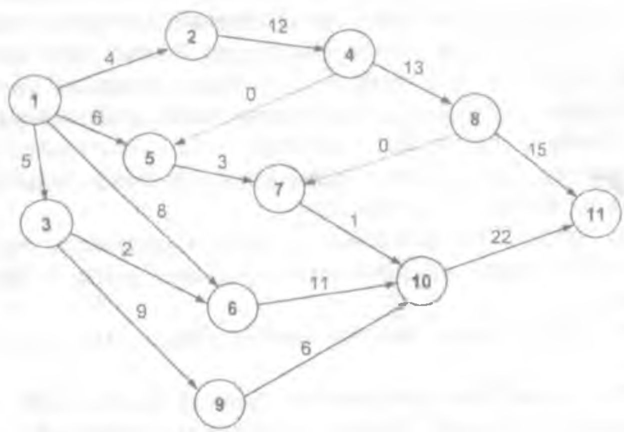
2. Eng kerakli uchastka ishlarini tezlashtirish kerak bo'lsa, yoki ba'zi bir ishlar qilinayotgan bo'lsa, rahbarlikning e'tiborini jalb qilish grafikda yaqqol ko'rinib turibdi.

3. Ishlarning qanday bajarilishi haqidagi ma'lumotlarni aniq aytib berish mumkin.

4. Barcha resurslarni tezkor ravishda ishlarning borishiga qarab taqsimlash mumkin.

5. Tarmoqli grafikning parametrlarini aniqlashda, ma'lumotlarni qayta hisoblashda EHMlarni qo'llash katta ahamiyatga ega.

Quyidagi 2-chizmada oddiy tarmoq grafigi ko'rsatilgan.




2-chizma. Oddiy tarmoq grafigi

2-chizmada boshlang'ich hodisa 1, oxirgisi 11 hodisa bilan tugallanadi. Har bir ish uchun qabul qilinadigan hodisa boshlang'ich va oxirgi hodisa bilan (strelka bo'yicha) ifodalanadi. Chizmadan ko'rinib turibdiki, bajariladigan ishlar ketma-ket, ayrim hollarda esa parallel bajarilishi va mantiqiy tahlil qilinishi mumkin. Aytaylik, (1, 4) ishning bajarilishı uchun avvalo (1, 2); (1, 10) ish bajarilishi uchun esa (1, 6), (1, 3), (3, 9) ishlar bajarilish shart. Oradagi hamma ishlar bajarilgandan keyingina (1, 11) ish bajariladi.

Tarmoqli grafik bo'yicha ketma-ket bajariladigan ishlarni *«yo'l»* bilan ifodalaymiz. To'liq yo'lni hosil qilish uchun ketma-ket bajariladigan ishlarning boshlang'ich va oxirgi hodisalari olinadi. Har bir bajariladigan ish bajariladigan vaqt bilan aniqlanadi. Ajratilgan vaqt strelkalarning tepasiga yozib qo‘yiladi. 2-chizmada ko‘rsatilgan modelda (1, 2) ish uchun 4 kun, (1, 5) ish uchun 6 kun, (1, 6) ish uchun 8 kun, (1, 3) ish uchun 5 kun, (3, 6) ish uchun 2 kun, (3, 9) ish uchun 9 kun, (9, 10) ish uchun 6 kun, (6, 10) ish uchun 11 kun, (5, 7) ish uchun 3 kun, (7, 10) ish uchun 1 kun, (4, 8) ish uchun 13 kun, (8, 11) ish uchun 15 kun, (10, 11) ish uchun 22 kun vaqt ajratilgan. Umuman olganda (1, 11) ish uchun 117 kun vaqt sarf bo‘ladi. Tarmoqli grafikda eng uzoq cho‘ziladigan yo‘lni *kritik yo‘l* deb yuritiladi. Oxirgi kritik yo‘lning bajarilishi uchun oldingi bosqichdagi ishlar bajarilishi kerak. Bajariladigan ishning eng qisqa kritik yo‘li aniqlanadi.

Kritik yo‘l bajariladigan ishga ketadigan vaqtni aniqlab beradi. Modeldagi eng uzun kritik yo‘l (1, 2), (2, 4), (4, 8), (8, 11) ishlarga 44 kunni tashkil qilib, modelda (4, 5) va (8, 7) ishlar punktir strelka bilan birlashtirilgan. Demak, bunday holda soxta ish bajariladi, ya’ni 5 hodisa 4 hodisa bajarilgandagina bajariladi, 7 hodisa esa 8 hodisa bajarilgandan keyin bajariladi. Umuman (4, 5) va (8, 7) bog‘lanish mantiqiy bog‘lanishni tashkil qiladi, (4, 5) va (8, 7) hodisalar uchun vaqt ham sarf bo‘lmaydi. Shu sababli ham punktir strelkalar ustiga 0 soni yozib qo‘yilgan.

Tarmoqli grafikdan ko‘rinib turibdiki, har bir ishni bajarish uchun aniq vaqt ajratilgan. Bu ishlar belgilangan vaqtda bajarilishi kerak. Bunday murakkab ishlarning bajarilishida rahbarlar tarmoqli grafik bo‘yicha ish qanday sur’atda bajarilayotganligini ko‘rib, boshqarib boradilar. Shuning uchun ham tarmoqli grafikdan turli sohalarda keng miqyosda foydalanilmoqda, ayniqsa, qurilish ishlarida, harbiy ishlarda tarmoqli grafikning ahamiyati katta.

Ilmiy tekshirishlarni koordinatsiyalash markazi ko‘rsatkichlarni baholashda (birorta ishni bajarish uchun sarf bo‘ladigan vaqt) quyidagi ikkita asosiy usulni taklif etgan.

Birinchisi, ikki marta baholash, ya’ni bajariladigan ishni ikki marta, vaqt bo‘yicha baholash: ishning minimal davom etishi $t_{min}$ («optimistik baholash» ham deb yuritiladi) va ishning maksimal ravishda davom etishi $t_{max}$ («pessimistik baholash»). Bu ikkala vaqt tarmoqli grafikda muhim rol o‘ynaydi. Tarmoqli grafikka oid hisob ishlarini davom ettirishda kutish vaqtini $t_{kutish}$ aniqlashga to‘g‘ri keladi. U quyidagicha aniqlanadi:

$$t_{kutish} = \frac{3t_{min} + 2t_{max}}{5}.$$

Ikkinchi usul, uch marta baholash, ya’ni $t_{min}$ va $t_{max}$ lardan tashqari uchinchi ishning normal borishi uchun $t_{ee}$ ni baholash kerak bo'ladi. Bu yerda $t_{ee}$ - ishning normal borishi uchun eng ehtimolli bo'lgan vaqt, uch marta baholash usuli kutish vaqti $t_{kutish}$ quyidagicha aniqlanadi:

$$t_{kutish} = \frac{t_{min} + t_{ee} + t_{max}}{6}.$$

Haqiqatda tarmoqli grafik yordamida bajariladigan ishlar tasodifiy ta'sirlar natijasida shu ishlarni bajarish uchun ketadigan aniq vaqt kutish vaqtidan biroz ortiq bo'lishi mumkin, lekin shunga qaramasdan, yuqorida aytib o'tgan usullar turli ishlarni bajarishda keng qo'llanilmoqda.

## 4.2. Tarmoqli rejalashtirish masalasining algoritmi

Bajariladigan ishlar oddiy bo'lsa, yuqorida ko'rib o'tgan grafik usuli yordamida rejalashtiriladi. Agarda bajariladigan kompleks ishlar murakkab bo'lsa (ayrim hollarda ishlar soni va mantiqiy aloqalar mingdan va undan ortiq bo'lishi mumkin), albatta EHM yordamida hal qilinishi uchun ishlarning aniq ketma-ketligi yoki algoritmi tuzib olinadi.

Tarmoqli grafikning algoritmini tuzish uchun quyidagi 1-jadvaldan foydalanamiz.

1-jadval

Tarmoq grafigini tuzish uchun ma'lumotlar

| № | $a_i$ ish | Qaysi ishga asoslanib bajariladi | $t_i$ vaqt |
|---|---|---|---|
| 1 | $a_1$ | - | $t_1$ |
| 2 | $a_2$ | - | $t_2$ |
| 3 | $a_3$ | - | $t_3$ |
| 4 | $a_4$ | $a_1,\ a_2$ | $t_4$ |
| 5 | $a_5$ | $a_1,\ a_3,\ a_4$ | $t_5$ |
| 6 | $a_6$ | $a_2,\ a_3$ | $t_6$ |
| 7 | $a_7$ | $a_4$ | $t_7$ |
| 8 | $a_8$ | $a_4,\ a_5$ | $t_8$ |
| 9 | $a_9$ | $a_4,\ a_5,\ a_6$ | $t_9$ |
| 10 | $a_{10}$ | $a_6,\ a_7,\ a_8,\ a_9$ | $t_{10}$ |

Bu jadvalda bajariladigan ishlar va bu ishlar qaysi ishlarga asoslanib bajarilishi hamda har bir ish uchun ketadigan vaqt aniq ko'rsatilgan.

1-jadvaldagi bajariladigan ishlar va ular orasidagi aloqalarning matematik formulasini yozib olamiz. Buning uchun belgilashlar kiritamiz.

$a_i$ ish bajarilishining minimal boshlanish vaqtini $\tau_i$ bilan, ishning minimal tugash vaqtini esa $T_i$ bilan belgilab olamiz. Har qanday ishning minimal tugash vaqti

$$T_i = \tau_i + t_i$$

formula bilan aniqlanadi. Bu yerda, $t_i$ - $a_i$ ishning bajarilishi uchun ketgan vaqt bo'yicha aniqlanadi.

Mana shu ifoda yordamida hamma kompleks ishlarda bo'ladigan mantiqiy aloqalarni formulalar bilan ifodalaymiz. Aytaylik, $a_i$ ish $a_j$, $a_l$, $a_k$ ishlarga asoslanib bajarilsin. U holda $a_i$ ish faqat $a_j$, $a_l$, $a_k$ bajariladi. Bu aloqani quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\tau_i = \max\{T_j,\ T_l,\ T_k\}.$$

Bu formulani har bir ish uchun ketma-ket ravishda tatbiq qilib, barcha ishlarning minimal tamom bo'lish vaqtini ($T$) aniqlaymiz.

1-jadvaldagi ishlar uchun $\tau_i$ va $T_i$ larni hisoblaymiz.

Birinchi, ikkinchi va uchinchi, ya'ni $a_1$, $a_2$, $a_3$ ishlar uchun:

$$\tau_1 = 0 \quad T_1 = t_1,$$
$$\tau_2 = 0 \quad T_2 = t_2,$$
$$\tau_3 = 0 \quad T_3 = t_3.$$

$a_4$ ish esa $a_1$, $a_2$ ishlarga asoslanib bajarilganligi uchun $\tau_4$ ni aniqlaymiz.

$$\tau_4 = \max\{T_1,\ T_2\}.$$

$a_4$ ishning tugash vaqti

$$T_4 = \tau_4 + t_4.$$

$a_5$ ish uchun

$$\tau_5 = \max\{T_1,\ T_3,\ T_4\}$$
$$T_5 = \tau_5 + t_5.$$

$a_6$ ish uchun

$$\tau_6 = \max\{T_2,\ T_3\}$$
$$T_6 = \tau_6 + t_6.$$

$a_7$ ish uchun

$$\tau_7 = \max\{T_4\} = T_4$$
$$T_7 = \tau_7 + t_7.$$

$a_8$ ish uchun

$$\tau_8 = \max\{T_4,\ T_5\}$$
$$T_8 = \tau_8 + t_8.$$

$a_9$ ish uchun

$$\tau_9 = \max\{T_4,\ T_5,\ T_6\}$$
$$T_9 = \tau_9 + t_9.$$

$a_{10}$ ish uchun

$$\tau_{10} = \max\{T_6,\ T_7,\ T_8,\ T_9\}$$

$$T_{10} = \tau_{10} + t_{10}.$$

Shunday qilib, har bir ishning boshlanish $(\tau_i)$ va tugash $(T_i)$ vaqtlarini aniqladik.

Butun kompleks ishlarning tugash vaqti hamma ishlarni tugash vaqtlarining maksimumiga teng bo'ladi:

$$T = \max\{T_1,\ T_2,\ T_3,\ T_4,\ T_5,\ T_6,\ T_7,\ T_8,\ T_9,\ T_{10}\}.$$

Kritik ish (kritik yo'l) $\tau_i$ va $T_i$ lar aniqlanib bo'lgandan keyin aniqlanadi. Kritik ish bitta bo'lmasdan, bir necha bo'lishi mumkin.

Yuqorida aytib o'tilgan algoritmni quyidagi konkret masala uchun tatbiq qilamiz.

**Masala**. 2-jadvalda har bir ish uchun aniq vaqt ajratilgan.

2-jadval

Masala shartlari

| № | $a_i$ ish | Qaysi ishga asoslanib bajariladi | $t_i$ vaqt |
|---|---|---|---|
| 1 | $a_1$ | - | 10 |
| 2 | $a_2$ | - | 9 |
| 3 | $a_3$ | - | 15 |
| 4 | $a_4$ | $a_1,\ a_2$ | 17 |
| 5 | $a_5$ | $a_1,\ a_3,\ a_4$ | 16 |
| 6 | $a_6$ | $a_2,\ a_3$ | 22 |
| 7 | $a_7$ | $a_4$ | 19 |
| 8 | $a_8$ | $a_4,\ a_5$ | 21 |
| 9 | $a_9$ | $a_4,\ a_5,\ a_6$ | 25 |
| 10 | $a_{10}$ | $a_6,\ a_7,\ a_8,\ a_9$ | 31 |

Jadvaldagi $a_1,\ a_2,...,\ a_{10}$ ishlar uchun $\tau_1,\ \tau_2,...,\ \tau_{10}$ va $T_1,\ T_2,...,\ T_{10}$ larni aniqlaymiz, ya'ni:

$$T_1 = 10;\ T_2 = 9;\ T_3 = 15;$$

$$\tau_1 = 0;\ \tau_2 = 0;\ \tau_3 = 0;$$

$$\tau_4 = \max\{T_1,\ T_2\} = \max\{10,\ 9\} = 10;$$

$$T_4 = \tau_4 + t_4 = 10 + 17 = 27;$$

$$\tau_5 = \max\{T_1,\ T_3,\ T_4\} = \max\{10,\ 15,\ 27\} = 27;$$

$$T_5 = \tau_5 + t_5 = 27 + 16 = 43;$$

$$\tau_6 = \max\{T_2,\ T_3\} = \max\{9,\ 15\} = 15;$$

$$T_6 = \tau_6 + t_6 = 15 + 22 = 37;$$

$$\tau_7 = \max\{T_4,\} = T_4 = 27;$$

$$T_7 = \tau_7 + t_7 = 27 + 19 = 46;$$

$$\tau_8 = \max\{T_4,\ T_5\} = \max\{27,\ 43\} = 43;$$

$$T_8 = \tau_8 + t_8 = 43 + 21 = 64;$$

$$\tau_9 = \max\{T_4,\ T_5,\ T_6\} = \max\{27.\ 43.\ 37\} = 43;$$

$$T_9 = \tau_9 + t_9 = 43 + 25 = 78;$$

$$\tau_{10} = \max\{T_6,\ T_7,\ T_8,\ T_9\} = \max\{37,\ 46,\ 64,\ 78\} = 78\ ;$$
$$T_{10} = \tau_{10} + t_{10} = 78 + 31 = 109\ .$$

Kompleks ishlarni bajarish uchun maksimal vaqt $T_{10} = 109$ ga teng, ya'ni

$$T = \max\{T_1,\ T_2,\ T_3,\ T_4,\ T_5,\ T_6,\ T_7,\ T_8,\ T_9,\ T_{10}\} =$$
$$= \max\{10,\ 9,\ 15,\ 27,\ 43,\ 37,\ 46,\ 64,\ 78,\ 109\} = 109\ .$$

Endi kritik ishni topamiz. $T_{10}$ maksimum qiymatga ega. Bunda $a_{10}$ ish kritik ish bo'ladi. $a_{10}$ ish $a_9$, $a_7$, $a_8$, $a_9$ ishlarga asoslanib bajarilganligi uchun $a_9$ kritik ish bo'ladi. Keyingi formulalarga o'tsak, $T_4$, $T_5$, $T_6$ lar orasida eng kattasi $T_5$ bo'lganligi uchun $a_5$ ish kritik bo'ladi. Keyingi formulalarga qarab kritik ishlarni aniqlaymiz.

Ko'rib chiqqan misolimizda $a_1$, $a_3$, $a_4$, $a_5$, $a_9$, $a_{10}$ lar kritik ish bo'ladi.

Umuman olganda, tarmoqli grafik modeliga asoslanib dasturlar tuzish asosida murakkab vazifalarni komputerlar yordamida yechish katta samara beradi.

## Tayanch iboralar

Tarmoqli model, ish hodisa, soxta ish, ochiq va berk kontur, sikl, yo'l, kritik yo'l, optimistik baholash, pessimistik baholash, kutish vaqti, ishning boshlanish va tugash vaqti, kritik ish.

## Takrorlash uchun savollar

1. Tarmoqli modellardan foydalanish sohalarini yoritib bering.
2. Tarmoqli modellarni tuzish nimaga asoslangan?
3. Tarmoqli modellarning asosini nima tashkil etadi?
4. Soxta ish deb nimaga aytiladi?
5. Tarmoqli modellarda berk kontur nima uchun ishlatiladi?
6. Tarmoqli modellarda sikl deb nimaga aytiladi?
7. Tarmoqli modellarning asosiy afzalliklarini tushuntirib bering.
8. Tarmoqli grafikda yo'l deb nimaga aytiladi?
9. Tarmoqli grafikda kritik yo'l deb nimaga aytiladi?
10. Tarmoqli grafikda «optimistik va pessimistik baholash» deb nimaga aytiladi?
11. Tarmoqli grafikka oid hisob ishlarini davom ettirishda kutish vaqtini aniqlash formulasini tushuntirib bering.
12. Kritik ish nechta bo'lishi mumkin?

## Foydalanilgan adabiyotlar


1. Абдуллаев О. Иктисодий процессларни моделлаштириш. –Т., 1989.
2. Абдуллаев А., Терехов Л., Махмудов Н., Ташматов З. Методы социально-экономического прогнозирования. –Т.: Ўзбекистон, 1992.
3. Абдуллаев О.М. и др. Моделирование и прогнозирование экономических процессов. –Т.: ТГЭУ, 2002.
4. Абдуллаев О.М. и др. Автоматизированные информационные технологии в решение экономических задач. –Т.: Фан ва технология, 2004.
5. Бабушкина А.М. Государственное регулирование национальной экономики. Учебное пособие. –М.: ФиС, 2004.
6. Босачева З.Н. Управление экономическим ростом. –М.: ЗАО Экономикс, 2004.
7. Бункина М.К., Семянов В.А. Макроэкономика. –М.: ИНФРА, 2000.
8. Войну Я.Ф. Корреляция рядов динамики. –М., 1977.
9. Владимирова А.Н. Прогнозирование и планирование в условиях рынка. –М., 2004.
10. Ғофуров М. Иқтисодий-математик усуллар ва моделлар. –Т.: АГНИ, 2001.
11. Гарнаев А. Использование MS Excel и VBA в экономике и финансах. –СПб.: БХВ Санкт-Петербург, 2000.
12. Гельман В.Я. Решение математических задач средствами Excel: Практикум. –СПб.: Питер, 2003.
13. Ғуломов С.С. ва бошқалар. Иқтисодий информатика. –Т.: Ўзбекистон, 1999.
14. Доугерти К. Введение в эконометрику. –М.: ЮНИТИ, 2001.
15. Дрейпер Н., Кинг Г. Прикладной регрессионный анализ. Т. 1, 2. –М., 1986.
16. Дубина А. И др. Excel для экономистов и менеджеров. Экономические расчеты и оптимизационное моделирование в среде Excel. –М., 2004.
17. Елесеева И.И. Эконометрика. –М., 2004.
18. Замков О.О. Эконометрические методы в макроэкономическом анализе. –М.: ДиС, 2001.
19. Кобелев Н.Б. Практика применения экономико-математических методов и моделей: Учебное пособие. –М.: ЗАО Финстатинформ, 2000.
20. Королев Ю.Г. Метод наименьших квадратов в социально-экономических исследованиях. –М.: ФиС, 1998.
21. Кремер Н.Ш. Эконометрика: Учебник. –М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002.
22. Каплан А.В. и др. Решение экономических задач на компьютере. –СПб.: Питер, 2004.
23. Лагоша Б.А. Оптимальное управление в экономике. Учебное пособие. –М.: МЭСИ, 2004.
24. Ловренов С.М. Excel: Сборник примеров и задач. –М.: ФиС, 2004.
25. Лугачев М.И. Методы социально-экономического прогнозирования. –М.: ТЕИС, 1999.
26. Льюис К.Д. Методы прогнозирования экономических показателей. –М.: ФиС, 1986.
27. Магнус Я.Р. и др. Эконометрика: начальный курс. –М., 1997.
28. Маленво Э. Статистические методы эконометрии. Вып. 1, 2. –М., 1976.
29. Морозов И.В. и др. Прогнозирование и планирование в условиях рынка. –М., 1999.
30. Мур Дж. У. Экономическое моделирование в Microsoft Excel. –М.: Издательский дом “Вильямс”, 2004.
31. Развитие отраслей специальной сферы в переходной экономике. /Под ред. Е.Н.Помонова. –М.: МГУ, ТЕИС. 2001.
32. Система экономико-математических моделей для анализа и прогнозирования уровня жизни. –М.: Наука, 1986.
33. Статистическое моделирование и прогнозирование. –М., 1990.
34. Стратегическое управление: регион, город, предприятие. Учебное пособие. /Под ред. Львова Д.С., Гранберг А.Г. –М.: ЗАО Экономика, 2004.
35. Тейл Г. Экономические прогнозы и принятие решений. –М.: 1971.
36. Теория прогнозирования и принятия решений: Учебное пособие. /Под ред. С.А.Саркисяна. –М.: Высшая школа, 1977.
37. Тихомиров Н.П., Попов В.А. Методы социально-экономического прогнозирования. –М.: Росвузнаука, 1993.
38. Тюрин Ю.Н. Статистический анализ данных на компьютере. /Под ред. В.Э.Фигурнова. –М.: ЮНИТИ, 2004.
39. Четыркин Е.М. Статистические методы прогнозирования. –М.: Статистика, 1977.
40. Шелобаев С.И. Математические методы и модели. –М.: ЮНИТИ, 2000.
41. Эддоус М., Стэнсфильд Р. Методы принятия решения. –М.: ЮНИТИ, 1997.