О.С.Гаврилів

КРАТНІ АБСТРАКТНІ ВІНЕРІВСЬКІ ТА ФЕЙНМАНІВСЬКІ ІНТЕГРАЛИ

УДК 517.37
ISBN 978-966-8460-95-1

О.С.Гаврилів

КРАТНІ АБСТРАКТНІ ВІНЕРІВСЬКІ ТА ФЕЙНМАНІВСЬКІ ІНТЕГРАЛИ

Товариство ім. Стефана Банаха
Львів - 2012

ЗМІСТ

РОЗДІЛ 1

Попередні відомості

Під випадковою величиною X класично розуміють вектор (X_i, P_i), $i \in N$, де X_i – дійсне число, $X_i < X_{i+1}$; P_i – відповідна до X_i ймовірність, N – множина індексів.

При множині N індексів нескінченній можливими є існування дискретних чи неперервних випадкових величин.

Множина A називається нечіткою до противаги множині B, якщо індикаторна функція χ_A множини A має вигляд

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & x \notin A \\ p, & x \in A, p < 1 \end{cases} \tag{1.1}$$

при індикаторній функції χ_B множини B вигляду

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 0, & x \notin B \\ 1, & x \in B. \end{cases} \tag{1.2}$$

Аналітичною множиною називається підмножина повного сепарабельного метричного простору, яка є неперервним образом простору ірраціональних чисел.

Поняття аналітичної множини запроваджено Н.Н. Лузіним і пізніше узагальнено на випадок метричних і топологічних просторів.

Аналітичною множиною в довільному топологічному просторі X називається підмножина цього простору, яка є образом замкнутої підмножини простору ірраціональних чисел при півнеперервному згори багатозначному відображенні з бікомпактними образами точок і замкнутим графіком. Бікомпактний простір є топологічний простір, в кожному відкритому покритті якого є топологічний простір, в кожному відкритому покритті якого міститься скінченне підпокриття цього ж простору. Бікомпактне відображення є відображення одного простору в інший, при якому прообраз кожної точки є бікомпакт.

Число $x \in Z$ називається частковим власним значенням лінійного оператора A, що діє із банахового простору X_1 в банахів простір X_2, якщо рівняння $Ax = \lambda fx$ має ненульові розв'язки, де f є ізоморфізм деяких підпросторів $\Phi_1 \subset X_1$, $\Phi_2 \subset X_2$, $f\Phi_1 = \Phi_2$.

Ермітово-білінійною формою є еквівалентність (ізоморфізм) ермітових просторів (в просторах з ермітовою метрикою).

Абстрактним вінерівським простором називається трійка (i, H, B), де H є дійсний сепарабельний гільбертів простір; B є дійсний сепарабельний банахів простір, сформований як поповнення H по деякій вимірній нормі, i – відображення включення H в B. Півнорма $\|\cdot\|$ на H називається вимірною, якщо $\forall \varepsilon > 0$ існує проектор P_0 такий, що

$$\mu\{\|Px\| > \varepsilon\} < \varepsilon \quad \forall p: P \perp P_0. \tag{1.3}$$

Тут μ – гаусівська міра на H.

Абстрактною вінерівською мірою p_t з дисперсією t називається єдине σ-адитивне продовження на борелівське поле в B продовженої на циліндричні множини в B гаусівської міри μ_t в гільбертовому H.

Інтеграл по мірі p_t в B називаємо абстрактним вінерівським інтегралом. Він є функціоналом.

Інтегралом в сенсі Бохнера по мірі p_t є інтеграл від функції зі значеннями в банаховому просторі. Він вважається сильним інтегралом по скалярній мірі.

Функція $f(x)$, $x \in E$, зі значеннями в банаховому B_0 називається інтегровною по Бохнеру, якщо вона є сильно вимірною і для кожної апроксимуючої послідовності $\{f_n(x)\}$ простих функцій

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a} \|f(x) - f_n(x)\|_{B_0} p_t(dx) = 0. \tag{1.4}$$

Тоді інтегралом Бохнера по множині $b \subset B$ називається

$$\int_b f(x) p_t(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_b \chi_b(x) f_n(x) p_t(dx), \tag{1.5}$$

де $\chi_b(x)$ – індикаторна функція множини b, а границя розуміється в сенсі сильної збіжності в банаховому просторі B_0. Ця границя існує і не залежить від вибору апроксимуючої послідовності простих функцій.

Слабким розподілом на топологічному векторному просторі L називається клас еквівалентності лінійних відображень F топологічного спряженого простору L^* в множину випадкових величин, заданих на деякому ймовірностному просторі (залежному від

F). Два таких розподіли F_1 і F_2 еквівалентні, якщо для довільного скінченного набору $y_1, y_2, ..., y_k$ із $L^{\bullet}$ випадкові вектори $F_1(y_1), F_1(y_2), ..., F_1(y_k)$ і $F_2(y_1), F_2(y_2), ..., F_2(y_k)$ мають однаковий розподіл.

Поняття слабкого розподілу еквівалентне поняттю циліндричної міри, тобто – якщо відображенню F відповідає міра ν, то

$$prob\{(F(y_1), F(y_2), ..., F(y_k)) \in E\} = \nu\{x : (y_1(x), y_2(x), ..., y_k(x)) \in E\}. \quad (1.6)$$

Якщо виходити з нормального розподілу, запровадженого Сігалом, то слабкий розподіл, відповідний гаусівській циліндричній мірі μ_t з дисперсією t, називається нормальним розподілом в гільбертовому просторі H з параметром t і позначається n_t.

Для кожного $h \in H$ випадкова величина $n_t(h)$ має нормальний розподіл із середнім значенням 0 і дисперсією $t|h|^2$.

Абстрактний фейманівський інтеграл запроваджується наступним чином:

Хай $\Phi \subset H \subset \Phi'$ – трійка дійсних сепарабельних гільбертових просторів, пов'язаних щільними вкладеннями Гільберта-Шмідта; $\overline{S}$, $\overline{S}'$ – простори основних функцій і узагальнених мір на Φ; $A : \Phi \to \Phi$ – лінійний неперервний оператор, $A > 0$; $\langle AD, D\rangle : \overline{S} \to \overline{S}'$ – відповідний диференціальний оператор; δ – позитивна нормована міра в Φ, зосереджена в точці 0. В просторі $\overline{S}'$ розглянемо наступну задачу Коші для рівняння Шредінгера:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - i\langle AD, D\rangle\right]\nu(t) = 0, \ \nu(0) = \delta. \quad (1.7)$$

Ця задача має єдиний розв'язок $\nu_t = \nu(t)$.

Функціонал $\nu_t : \overline{S} \to C : f \to (\nu_t, f)$ називається фейнманівським інтегралом в просторі $\overline{S}$.

В іншому поданні абстрактний фейнманівський інтеграл визначаємо наступним чином:

Хай B – симетричний, позитивний $(\langle Bx, x\rangle > 0, \ x \neq 0)$ з щільною областю визначення D_B оператор в гільбертовому просторі

X. Розглянемо залежну від уявного параметра (iy) функцію $\chi(y,\theta)=\exp\left\{-\frac{iy}{2}\langle B\theta,\theta\rangle\right\}$, $(\theta\in D_B)$. Всередині правої півплощини $(\operatorname{Re} Z>0)$ вона абсолютно інтегровна по θ по будь-якому скінченновимірному підпростору $PX=X_p\subset D_B$. За цих обставин $\chi(y,\theta)$ визначає в X квазіміру μ_{iB}, для якої вона служить характеристичним функціоналом.

Для кожної функції вигляду $f(x)=\int\limits_X e^{i(x,\theta)}\nu(d\theta)$, де ν є уявна міра $(\|\nu\|<\infty)$, існує інтеграл

$$\int\limits_X f(x)\mu_{iB}(dx)=\lim_{P\to I}\int\limits_X f(Px)\mu_{iB}^{(P)}(dx)=\int\limits_X e^{-\frac{iy}{2}\langle B\theta,\theta\rangle}\nu(d\theta) \quad (1.8)$$

і називається фейнманівським інтегралом. Тут I – тотожній оператор.

Двократний абстрактний інтеграл по гаусівській мірі в комплексному просторі можна розуміти як інтеграл по комплексній гаусівській квазімірі, який означується наступним чином:

Нехай B – симетричний, позитивний $(\langle Bx,x\rangle>0,\ x\neq 0)$ зі щільною областю визначення D_B оператор в гільбертовому просторі X. Розглянемо залежну від комплексного параметру z функцію $\chi(z,\theta)=\exp\left\{-\frac{z}{2}\langle B\theta,\theta\rangle\right\}$, $(\theta\in D_B, \operatorname{Re} z\geq 0)$. Всередині правої півплощини вона абсолютно інтегровна по θ по довільному скінченновимірному підпростору $PX=X_p\subset D_B$. За цих умов функція $\chi(z,\theta)$ визначає в X квазіміру μ_{zB}, для якої вона служить характеристичним функціоналом.

Вважаємо B обмеженим – $D_B=X$.

Для кожної функції вигляду $f(x)=\int\limits_X e^{i(x,\theta)}\nu(d\theta)$, де ν – комплексна міра $(\|\nu\|<\infty)$, існує інтеграл по комплексній гаусівській квазімірі

$$\int_X f(x)\mu_{zB}(dx) = \lim_{P\to I} \int_X f(Px)\mu_{zB}^{(P)}(dx) = \int_X e^{-\frac{z}{2}(B\theta,\theta)} \nu(d\theta), \ \mathrm{Re}\, z > 0 \,. \quad (1.9)$$

Якщо X – дійсний локально випуклий топологічний простір R, елементами якого є функції, в тому числі і вектор-функції, і в X задано σ-адитивну гаусівську міру μ; відомими є вирази для похідних Радона-Никодима $p_1(x,a) = \frac{d\mu_a}{d\mu}(X)$ при зсуві на елемент $a \in X$, $X \to y = x + a$ і $p_2(x,Tx) = \frac{d\mu_T}{d\mu}(X)$ при лінійному перетворенні $X \to y = TX$, де $T: X \to X$ є лінійний оператор на X такий, для якого існує обернений оператор T^{-1} і $T^{-1}: X \to X$, причому фіксований елемент $a \in X$ і оператор T задовольняють всім умовам, при яких водночас $p_1(x,a)$ і $p_2(x,Tx)$ мають смисл, – то для операторного рівняння

$$Tx = z\,, \quad (1.10)$$

де $x \in X$ є невідомий елемент простору X, $z \in X$ – заданий, T – лінійний обмежений оператор в X і існують вирази $p_1(Tu,-z)$ і $p_2(u,Tu)$ $(u \in X)$ розв'язок рівняння (1.21) подається у вигляді континуального інтеграла

$$x = \int_X u p_1(Tu,-z) p_2(u,Tu) \mu(du)\,. \quad (1.11)$$

РОЗДІЛ 2

Абстрактний вінерівський інтеграл по співмножнику добутку гаусівських мір в комплексному просторі

2.1. Комплексний банахів простір і абстрактний вінерівський інтеграл

Розглядатимемо абстрактний інтеграл по гаусівській мірі в комплексному просторі з елементами $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$, $i^2 = -1$, де $\operatorname{Re} z$ є елементом абстрактного вінерівського простору $(i_{\mathrm{Re}}, H_{\mathrm{Re}}, B_{\mathrm{Re}})$ з H_{Re} – дійсним сепарабельним гільбертовим простором, B_{Re} – поповненням дійсного сепарабельного гільбертового простору H_{Re} по деякій вимірній нормі в дійсний сепарабельний банахів простір, i_{Re} – відношенням включення H_{Re} в B_{Re} себто $i_{\mathrm{Re}}^{*} b \in H$ для $b \in B_{\mathrm{Re}}^{*}$ при B_{Re}^{*} – спряженому просторі до B_{Re}, i_{Re}^{*} – спряженому відображенню до i_{Re}, $H_{\mathrm{Re}}^{*} = H_{\mathrm{Re}}$.

Даний комплексний простір розуміємо добутком просторів абстрактного вінерівського та абстрактного фейнманівського.

Для дійсного сепарабельного гільбертового простору H_{Re} скалярний добуток $\forall x, y \in H_{\mathrm{Re}}$ позначаємо $\langle x, y \rangle_{\mathrm{Re}}$, норму елемента $x \in H_{\mathrm{Re}}$ – породжену скалярним добутком $\langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathrm{Re}}$ – позначаємо $\|x\|_{\mathrm{Re}} = \sqrt{\langle x, x \rangle_{\mathrm{Re}}}$.

Частково впорядковану множину скінченновимірних ортогональних проекторів P_{Re} в дійсному сепарабельному гільбертовому просторі H_{Re} позначатимемо Φ_{Re}, причому визначаючою властивістю для скінченної впорядкованості Φ_{Re} розумітимемо

$$\left(P_{\mathrm{Re}}(H) \subset Q_{\mathrm{Re}}(H)\right) \Rightarrow \left(P_{\mathrm{Re}} < Q_{\mathrm{Re}}\right),\ P_{\mathrm{Re}} \in \Phi_{\mathrm{Re}},\ Q_{\mathrm{Re}} \in \Phi_{\mathrm{Re}}.$$

Поле P_{Re} всіх циліндричних множин E_{Re} в дійсному сепарабельному гільбертовому просторі H_{Re} визначаємо циліндричними множинами вигляду

$$E_{\mathrm{Re}} = \{x \in H_{\mathrm{Re}};\ P_{\mathrm{Re}} x \in F_{\mathrm{Re}}\},$$

де F_{Re} є борелівська підмножина в $P_{\mathrm{Re}}\ H_{\mathrm{Re}}$.

Циліндричною функцією $f(\cdot)$ на дійсному сепарабельному гільбертовому просторі H_{Re} називаємо функцію вигляду

$$f(x)=\varphi(P_{\mathrm{Re}}x),\ P_{\mathrm{Re}}\in\Phi_{\mathrm{Re}},\ x\in H_{\mathrm{Re}},$$

де $\varphi(\cdot)$ – борелівська функція, визначена на $P_{\mathrm{Re}}\ H_{\mathrm{Re}}$.

Розглядатимемо випадкову величину $\widetilde{f}(\omega)$, зв'язану з циліндричною функцією $f(x)=\varphi(P_{\mathrm{Re}}x)$, $x\in H_{\mathrm{Re}}$, визначену рівністю

$$\widetilde{f}(\omega)=\varphi\left(n\left(e_{j_1}\right)(\omega), n\left(e_{j_2}\right)(\omega),\dots,n\left(e_{j_s}\right)(\omega)\right),\ \omega\in\Omega \qquad (2.1)$$

де $e_{j_1},e_{j_2},\dots,e_{j_s}$ – орти, на які проектує ортопроектор P_{Re}, Ω – класичний ймовірностний простір.

Кожна циліндрична міра μ_l, як функція множини, автоматично є циліндричною функцією – і для неї можна означити випадкову величину $\widetilde{\mu}_l$, пов'язану з мірою μ_l варіантом (2.1).

Для таких випадкових величин використовуємо збіжність по ймовірності, тобто виходимо з того, що послідовність $\{\widetilde{\mu}_{l_n}(\omega)\}$ збігається по ймовірності до $\widetilde{\mu}_l(\omega)$, якщо $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0$:

$$m\left\{\omega;\left|\widetilde{\mu}_{l_n}(\omega)-\widetilde{\mu}_l(\omega)\right|>\varepsilon\right\}<\varepsilon \text{ для } n\geq n_0.$$

Виходячи з включення

$$B^{*}_{\mathrm{Re}}\subset \mathrm{H}^{*}_{\mathrm{Re}}=\mathrm{H}_{\mathrm{Re}}\subset B_{\mathrm{Re}}$$

для абстрактного вінерівського простору $(i_{\mathrm{Re}},\mathrm{H}_{\mathrm{Re}},B_{\mathrm{Re}})$ критерієм належності елемента $x\in\mathrm{H}_{\mathrm{Re}}$ до B^{*}_{Re} будемо вважати

$$B^{*}_{\mathrm{Re}}=\left\{x\in\mathrm{H}_{\mathrm{Re}};\ \sup_{\substack{y\in\mathrm{H}_{\mathrm{Re}}\\ y\neq0}}\frac{\left|\langle x,y\rangle_{\mathrm{Re}}\right|}{\|y\|_{\mathrm{Re}}}<\infty\right\}.$$

Кожна циліндрична функція, побудована на основі циліндричної міри μ_l, автоматично є функцією слабкого розподілу – і функцією випадкової величини $\widetilde{\mu}_l$ побудованої на базі (2.1).

Нехай

$$\mu_{t_{\mathrm{Re}}}(E_{\mathrm{Re}})=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t_{\mathrm{Re}}}}\right)^n\int_{F_{\mathrm{Re}}}\exp\left\{-\frac{|x|^2}{2t_{\mathrm{Re}}}\right\}dx,\quad t_{\mathrm{Re}}>0 -$$

гаусівська (циліндрична) міра на H_{Re} з параметром t_{Re}.

Під абстрактною вінерівською мірою $p_{t_{\mathrm{Re}}}$ розгляданого продовження σ-адитивної функції $\mu_{t_{\mathrm{Re}}}$ – породженої гаусівською циліндричною мірою $\mu_{t_{\mathrm{Re}}}$ на H_{Re} – на сім'ї всіх циліндричних множин в B_{Re} розуміємо продовження $\mu_{t_{\mathrm{Re}}}$ на борелівське поле в банаховому сепарабельному дійсному просторі B_{Re}.

Інтеграл по мірі $p_{t_{\mathrm{Re}}}$ будемо розуміти в сенсі Бохнера.

$\forall x\in B_{\mathrm{Re}}$ запровадимо .....

$$p_{t_{\mathrm{Re}}}(x,\,E_{\mathrm{Re}})=p_{t_{\mathrm{Re}}}(E_{\mathrm{Re}}+x),\quad E_{\mathrm{Re}}\subset\mathcal{B}_{B_{\mathrm{Re}}},$$

де $\mathcal{B}_{B_{\mathrm{Re}}}$ – сім'я всіх борелівських множин в банаховому сепарабельному дійсному просторі B_{Re}.

Розглянемо $y=I_{\mathrm{Re}}x+h$, I_{Re} – тотожній оператор в B_{Re}.

Теорема. Для всякого $h\in H_{\mathrm{Re}}$ міра $p_{t_{\mathrm{Re}}}(h,\cdot)$ є еквівалентна мірі $p_{t_{\mathrm{Re}}}$, і для всякої $p_{t_{\mathrm{Re}}}$ – інтегровної в сенсі Бохнера функції $f(y)$ зі значеннями в банаховому просторі B, можна записати

$$\int_{B_{\mathrm{Re}}}f(y)\,p_{t_{\mathrm{Re}}}(dy)=$$

$$=\int_{B_{\mathrm{Re}}}\exp\left\{-\frac{1}{2t_{\mathrm{Re}}}|h|^2_{H_{\mathrm{Re}}}-\frac{1}{t_{\mathrm{Re}}}\langle h,\,x\rangle_{H_{\mathrm{Re}}}\right\}\Bigg|_{f(x+h)}p_{t_{\mathrm{Re}}}(dx)\qquad(2.2)$$

Доведення. Будемо розглядати $\langle h,\cdot\rangle_{\mathrm{Re}}$ як випадкову величину на банаховому сепарабельному дійсному просторі B_{Re} оскільки для всякого $h\in H_{\mathrm{Re}}$ функціонал $\langle h,\cdot\rangle_{H_{\mathrm{Re}}}$ визначено майже скрізь в B_{Re} відносно міри $p_{t_{\mathrm{Re}}}$, і він має нормальний розподіл з нульовим середнім і дисперсією $\left(t_{\mathrm{Re}} \cdot \|h\|^2_{H_{\mathrm{Re}}}\right)$ в ймовірностному просторі $\left(B_{\mathrm{Re}},\, p_{t_{\mathrm{Re}}}\right)$.

Врахуємо випадок обмеженої неперервної дійснозначної комплекснозначної функції $f(y)$ на дійсному сепарабельному банаховому просторі B_{Re}. Формула (2.2) є цілком справедливою.

Нехай $g = f|_{H_{\mathrm{Re}}}$.

Але звідси теорема має місце для $|f(y)|$ де $f(y) \in B_0$ довільному банаховому, і (2.2) переписується у вигляді

$$\int_{B_{\mathrm{Re}}} \|f(y)\|_{B_0} \, p_{t_{\mathrm{Re}}}(dy) = \\ = \int_{B_{\mathrm{Re}}} \exp\left\{ -\frac{1}{2t_{\mathrm{Re}}} \|h\|^2_{H_{\mathrm{Re}}} - \frac{1}{t_{\mathrm{Re}}} (h, x)_{H_{\mathrm{Re}}} \right\} \|f(x+h)\|_{B_0} \, p_{t_{\mathrm{Re}}}(dx), \tag{2.3}$$

де $\|\cdot\|_{B_0}$ – норма в банаховому сепарабельному просторі B_0.

Тоді, оскільки для $p_{t_{\mathrm{Re}}}$ – інтегровності функції $f(y)$ зі значеннями в банаховому просторі B_0 необхідно і досить сильної вимірності $f(y)$ і $p_{t_{\mathrm{Re}}}$ – інтегровності $\|f(y)\|_{B_0}$, то теорему доведено.

Формула (2.2) наочно ілюструє неінварінтність абстрактної вінерівської міри відносно зсуву.

2.2. Обертовність відображень в R^n

Лема. Нехай T – диференційовне відображення вигляду $T = I + K$, діюче в R^n, де I – тотожній оператор, $\dim K\left(R^n\right) = m$, $m \le n$; K – сюр'єктивне відображення; існує $K^{-1} : R^m \to R^n$, $\|K'\| \le 1$. Тоді $\dim K^{-1}\left(R^m\right) = m$.

Тут K' - похідна Фреше.

Доведення. Якщо u – неперервне лінійне обертовне відображення банахового простору E в банахів простір F; v – лінійне неперервне відображення банахового простору E в банахів простір F, що задовільняє нерівність

$$\|v\| \le \|u^{-1}\|^{-1},$$

то лінійне неперервне відображення $(u+v)$ банахового простору E в банахів простір F також є обертовним відображенням. Отже, для T – неперервно диференційовного відображення деякої відкритої множини $u \subset E$ в F, де E і F – скінченновимірні, обертовність $T'(a)$, $a \in u$ означає, що E і F є одніеї розмірності і якобіан T в т. a у вибраній системі координат є відмінним від нуля. Звідси одержимо $\dim K^{-1}(R^m) = m$ і що якобіан $T = (I+K): R^m \to R^m$ відмінний від нуля.

Лему доведено.

Наслідок. Нехай T – обмежений лінійний оператор в банаховому сепарабельному дійсному просторі B_{Re}. $T = I + K$, I – тотожній оператор в банаховому сепарабельному дійсному просторі B_{Re}. Якщо $K(B) \subset \mathrm{H}_{\mathrm{Re}}$ і $T_{|\mathrm{H}_{\mathrm{Re}}} = I + K_{|\mathrm{H}_{\mathrm{Re}}}$ – обертовний оператор в H_{Re}, то оператор $T : B_{\mathrm{Re}} \to B_{\mathrm{Re}}$ також є обертовним.

Доведення. Неперервне лінійне відображення є диференційовним по Фреше. Фреше-похідна від неперервно лінійного оператора є сам цей оператор,

$$T^{-1} = I - \left(T_{|\mathrm{H}_{\mathrm{Re}}}\right)^{-1} K .$$

Наслідок доведено.

Нехай T_{Re} лінійне відображення банахового сепарабельного дійсного простору B_{Re} в себе, профіксоване наслідком.

Позначимо $p_{I_{\mathrm{Re}}} \circ T_{\mathrm{Re}}$ борелівську міру $p_{I_{\mathrm{Re}}} \circ T_{\mathrm{Re}}(E_{\mathrm{Re}}) = p_{I_{\mathrm{Re}}}(T_{\mathrm{Re}}(E_{\mathrm{Re}}))$, $E_{\mathrm{Re}} \in \mathcal{B}(B_{\mathrm{Re}})$, $\mathcal{B}(B_{\mathrm{Re}})$ – борелівське поле в B_{Re}.

2.3. Інтегрування частинами

Інтегрування частинами в $(i_{\mathrm{Re}}, \mathrm{H}_{\mathrm{Re}}, B_{\mathrm{Re}})$ здійснюємо згідно алгоритму

$$\int\limits_{B_{\mathrm{Re}}} \varphi(f(x), Dg(x)(h))\, p_{t_{\mathrm{Re}}}(dx) =$$
$$\int\limits_{B_{\mathrm{Re}}} \left\{ \frac{1}{t_{\mathrm{Re}}} \langle h, x\rangle_{\mathrm{Re}}\, \varphi(f(x), g(x)) - \varphi(Df(x)(h), g(x)) \right\} p_{t_{\mathrm{Re}}}(dx), \tag{2.4}$$

за умов

(а) $\int\limits_{B_{\mathrm{Re}}} \left(\|f(x)\|_F\right)^2 \left(\|g(x)\|_G\right)^2 p_{t_{\mathrm{Re}}}(dx) < \infty$;

(б) існують постійні $r > 0$, $M < \infty$ такі, що

$\int\limits_{B_{\mathrm{Re}}} \|f(x)\|_F \cdot \|g(x)\|_G\, p_{t_{\mathrm{Re}}}(h, dx) < M$ для всіх $|h| < r$;

в) функція

$$\sup_{|h|<r}\left(\|Df(x+h)\|_{H_{\mathrm{Re}},F} \cdot \|g(x+h)\|_G + \|f(x+h)\|_F \cdot \|Dg(x+h)\|_{H_{\mathrm{Re}},G}\right)$$

є $p_{t_{\mathrm{Re}}}$ – інтегровною, де $h \in H_{\mathrm{Re}}$; $\|\cdot\|_{H_{\mathrm{Re}},F}$ – норма в просторі лінійних операторів, що діють із H_{Re} в простір F; $f(\cdot)$ і $g(\cdot)$ є $C^1_{H_{\mathrm{Re}}}$ – функціями, визначеними на B_{Re} зі значеннями в гільбертових дійсних просторах F і G відповідно при розумінні під $C^1_{H_{\mathrm{Re}}}$ функцій $u(x)$ зі значеннями в x, для яких $u'(x)$ існує для кожної відкритої множини $U(x \in U)$ і відображення $x \to u'(x)$ множини U в $L(H_{\mathrm{Re}}, x)$ є неперервним; $\varphi(\cdot,\cdot)$ – білінійне відображення із $F \times G$ в довільний інший гільбертів дійсний простір K; $D(\cdot)$ – похідна Фреше по підпростору H_{Re}; $p_{t_{\mathrm{Re}}}(h, dx)$ визначається рівністю

$$\int\limits_{B_{\mathrm{Re}}} f(x+y+h)\, p_t(dy) = \int\limits_{B_{\mathrm{Re}}} f(x+y)\, p_{t_{\mathrm{Re}}}(h, dy).$$

В випадку $\varphi(u, y)$ – симетричного білінійного відображення при належності $Dg(x)(h) \in L(B_{\mathrm{Re}}, G)$, $Dg(x)(h) \in L(B_{\mathrm{Re}}, F)$, де $L(B_{\mathrm{Re}}, F)$, $L(B_{\mathrm{Re}}, G)$ – простори лінійних операторів, що діють відповідно $B_{\mathrm{Re}} \to F$, $B_{\mathrm{Re}} \to G$ – розглянемо взаємнооднозначні відображення $\Psi_1 : Dg(x)(H_{\mathrm{Re}}) \to F$, $\Psi_2 : Dg(x)(H_{\mathrm{Re}}) \to G$.

За таких обставин єдино можливо є розглядати симетричні білінійні форми $\varphi(f(x), Dg(x)(h))$ і $\varphi(Df(x)(h), g(x))$ як функціонуючі кожна в єдиному просторі – якщо ми розглянемо ізоморфізми $\aleph_1$ (диктований відображенням Ψ_1) з вужчої з областей $Dg(x)(H_{\mathrm{Re}})$ та F в H_{Re}, та $\aleph_2$ (диктований відображенням Ψ_2) з вужчої з областей $Dg(x)(H_{\mathrm{Re}})$ та G в H_{Re}.

Теорема. Білінійне симетричне відображення $\varphi(u, y)$ цілком визначає в абстрактному вінерівському просторі $(i_{\mathrm{Re}}, H_{\mathrm{Re}}, B_{\mathrm{Re}})$ формулу інтегрування частинами (2.4) для кожної достатньо малої відкритої підмножини $U \subset H_{\mathrm{Re}} \subset B_{\mathrm{Re}}$ при інтегровних $C^1_{H_{\mathrm{Re}}}$ функціях $f(x)$, $g(x)$, якщо результат дії ізоморфізмів $\aleph_1$ і $\aleph_2$ є множина U. При цьому для $\varphi(u, y)$, $u \in F$, $y \in G$ виконується

$$\varphi(u, y) = \aleph_1^{-1}\aleph_2^{-1}(\aleph_1 u, \aleph_2 y). \qquad (2.5)$$

Доведення. Виходячи з вищевикладеного, на основі правил дії операторів, формула (2.5) є очевидною. Область U є необхідно відкритою для можливості існування похідної Фреше. За вимоги

$$U_0 = \min\{\Psi_1 Dg(x)(H_{\mathrm{Re}}), F\} = \min\{\Psi_2 Dg(x)(H_{\mathrm{Re}}), G\}$$

для одержання повноти доведення теореми полишається вимагати $U \subset U_0$, і при використанні формули інтегрування частинами (2.4) цілком певно користуватися ізоморфізмом скалярного добутку в H_{Re}.

Теорему доведено.

Таким чином показано, що скалярний добуток в ізоморфізмі, застосованому до дійсних гільбертових просторів F і G, належно визначає формулу інтегрування частинами в абстрактному вінерівському пострі $(i_{\mathrm{Re}}, H_{\mathrm{Re}}, B_{\mathrm{Re}})$.

Розглянемо в якості білінійної форми $\varphi(u, y)$ антисиметричне білінійне відображення.

При розгляді $Dg(x) \in L(B_{\mathrm{Re}}, G)$, $Df(x) \in L(B_{\mathrm{Re}}, F)$ аналогічно попередньому запроваджуємо відображення $\Psi_1 : Dg(x)(H_{\mathrm{Re}}) \to F$, $\Psi_1 : Dg(x)(H_{\mathrm{Re}}) \to F$. За цих обставин розглядаємо антисиметричні білінійні форми $\varphi(f(x), Dg(x)(h))$ і $\varphi(Df(x)(h), g(x))$, тобто маємо можливість розглянути ізоморфізми $\aleph_1$ з вужчої з областей $Dg(x)(H_{\mathrm{Re}})$ та F в H_{Re}, $\aleph_2$ з вужчої з областей $Df(x)(H_{\mathrm{Re}})$ та G в H_{Re}.

Теорема. Білінійне антисиметричне відображення $\varphi(u, y)$ цілком визначає в абстрактному вінерівському просторі $(i_{\mathrm{Re}}, H_{\mathrm{Re}}, B_{\mathrm{Re}})$ формулу інтегрування частинами (2.4) для кожної достатньо малої підмножини $U \subset H_{\mathrm{Re}} \subset B_{\mathrm{Re}}$ при інтегровних $C^1_{H_{\mathrm{Re}}}$ функціях $f(x)$, $g(x)$, якщо результат дії ізоморфізмів $\aleph_1$ і $\aleph_2$ є множина U, а під антисиметричним білінійним відображенням розуміємо зовнішній добуток. При цьому для $\varphi(u, y)$, $u \in F$, $y \in G$ виконується

$$\varphi(u, y) = \aleph_1^{-1}\aleph_2^{-1}\left(\left(\aleph_1 u, \aleph_2 y\right)\right), \tag{2.6}$$

де $((\cdot, \cdot))$ є зовнішній добуток.

Доведення. Виходимо з того, що для гільбертових просторів – зокрема для дійсного сепарабельного гільбертового простору H_{Re} – спряжений простір співпадає з вихідним.

Виходимо з алгебри Грассмана, звідки формулювання теореми є очевидним. Для двох елементів $u \in F$, $y \in G$ вираз $\aleph_1^{-1}\aleph_2^{-1}\left(\left(\aleph_1 u, \aleph_2 y\right)\right)$ записується як

$$\aleph_1^{-1}\aleph_2^{-1}\left(\left(\aleph_1 u, \aleph_2 y\right)\right) = \prod_s \left(1 - \lambda_s\left(I - \left(\left(\aleph_1 u, \aleph_2 y\right)\right)\right)\right),$$

де I є тотожне відображення, λ_s – власні числа перетворення $\left(I - \left(\left(\aleph_1 u, \aleph_2 y\right)\right)\right)$.

Теорему доведено.

2.4. Варіації множин в абстрактному вінерівському просторі

Виходимо з варіацій множини в локально компактному просторі, оскільки кожен скінченновимірний простір є локально компактним і ми послугуємо ортогональними проекторами $P_n \in \Phi$ в скінченновимірні простори в теорії абстрактних вінерівських просторів.

Підходимо до варіацій в абстрактному вінерівському просторі $(i_{\mathrm{Re}}, H_{\mathrm{Re}}, B_{\mathrm{Re}})$ з постави підрозділу 2.1.

Розглянемо ортопроектори $P_n \in \Phi$, що при базисі $\{e_n\}$ в H_{Re} проектують H_{Re} на $P_n H_{\mathrm{Re}}$, $P_n x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$, $n < \dim H_{\mathrm{Re}}$, $x_k \in R^1$, $k = \overline{1, \infty}$.

Природньо, $P_n H_{\mathrm{Re}}$ є ізоморфним координатному простору R^n.

Нехай I_n – n-вимірний замкнутий куб із $P_n H_{\mathrm{Re}}$, $|x_k| \le \rho > 0$; τ_k^l – k-вимірна гіперплощина, натягнута на якісь k із ортів $\{e_s\}$, $s = \overline{1, n}$, $l = 1, 2, \ldots, C_n^k$.

Нехай $\beta_{n-k}^l(q)$ – $(n-k)$-вимірна гіперплощина із $P_n H_{\mathrm{Re}}$, що містить точку $q \in \tau_k^l$; гіперплощина $\beta_{n-k}^l(q)$ – ортогональна до τ_k^l.

Розглянемо E – довільну замкнуту підмножину $P_n H_{\mathrm{Re}}$, $E \subset P_n H_{\mathrm{Re}}$, причому $v_0^{I_n}\left(E \cap \beta_{n-k}^l(q)\right)$ – число компонент множини $E \cap \beta_{n-k}^l(q)$, що лежать всередині куба I_n і не мають спільних точок з границею куба I_n.

Теорема. Для кожної замкнутої множини $E \subset B_{\mathrm{Re}}$ величина $v_0^{I_\infty}\left(E \cap \beta_{\infty-k}^l(q)\right)$ як функція точки $q \in \tau_k^\infty$ є вимірною $p_{I_{\mathrm{Re}}}^k$ по Лебегу, де абстрактний вінерівський інтеграл розуміємо як інтеграл від функціонала, а I_∞ – нескінченновимірний куб в H_{Re}, $\beta_{\infty-k}^l(q)$ – гіперплощина в H_{Re}, не натягнута на ті k – ортів e_s, $s = \overline{1, k}$ – на які натягнуто гіперплощину τ_k^∞.

Доведення. Інтеграл від функціонала надає можливість самого себе розуміти як неявно заданий функціонал, тобто здійснювати і кратне інтегрування.

Виходимо з обмеженості і неперервності $v_0^{I_\infty}\left(E \cap \beta_{\infty-k}^l(q)\right)$, і нехай $g = v_0^{I_\infty}\left(E \cap \beta_{\infty-k}^l(q)\right)$ є звуження $v_0^\infty\left(E \cap \beta_{\infty-k}^l(q)\right)$ на гільбертів простір H_{Re}. Звідси випливає, що випадкова величина $\tilde{g}$ має зміст і

$$\tilde{g} = v_0^{I_\infty}\left(E \cap \beta_{\infty-k}^l(q)\right)$$

майже скрізь відносно $p_{t_{\mathrm{Re}}}$.

Звідси ми можемо вибрати таку послідовність ортогональних проекторів $\{P_n\}$ із частково впорядкованої множини Φ всіх ортопроекторів в H_{Re}, сильно збіжну до тотожнього відображення, що $\widetilde{g}(P_n \cdot)$ збігається до $v_0^{l_\infty}\left(E \cap \beta_{\infty-k}^{l}(q)\right)$ майже скрізь відносно $p_{t_{\mathrm{Re}}}$. Цим маємо

$$v_0^{l_\infty}\left(E \cap \beta_{\infty-k}^{l}(q)\right) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{g}(P_n x)(q) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} v_0^{l_n}\left(E \cap \beta_{n-k}^{l}(q)\right)\Big|_{P_n H} = \lim_{n\to\infty} v_0^{l_n}\left(E \cap \beta_{n-k}^{l}(q)\right).$$

Маємо збіжність виразів функцій по ймовірності. За необхідності переходимо до такої підпослідовності ортопроекторів P_n, що попередня збіжність буде збіжністю майже скрізь щодо $p_{t_{\mathrm{Re}}}$. Теорему доведено.

2.5. Нормальні розподіли Сігала

Для дійсного сепарабельного гільбертового простору H_{Re} розглядаємо $n_{\mathrm{Re}}(\cdot)$ – лінійне відображення, $\forall h \in H_{\mathrm{Re}}$ вигляду

$$n_{\mathrm{Re}}(h) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle h, e_k \rangle_{H_{\mathrm{Re}}} n_{\mathrm{Re}}(e_k), \tag{2.7}$$

де $n_{\mathrm{Re}}(e_k) = \xi_{mk}(\omega)$ є нормальний розподіл – запроваджений Сігалом, $\{e_k\}$ – орти в H_{Re}.

Оскільки послідовність $\{\xi_{mk}(\omega)\}$ являє собою послідовність незалежних гаусівських випадкових величин, кожна з яких має нормальний розподіл з нульовим середнім і одиничною дисперсією, то ряд (2.7) збігається в просторі $L^2(\Omega, m)$ до єдиної випадкової величини $n_{\mathrm{Re}}(\cdot)$.

Слабкий розподіл, визначуваний відображенням $n_{\mathrm{Re}}(\cdot)$, називаємо нормальним розподілом в H_{Re} з параметром 1.

На основі кожного базису $\{e_k\}$ в H_{Re}, за необхідності, можна сформувати базис типу $\{e_k + e_m\}$, $k = \overline{1, \infty}$, m – фіксоване з щільностями розподілу

$$f(e_k + e_m) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{e_k}(t-u) f_{e_m}(u) du , \qquad (2.8)$$

де

$$f_{e_k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} , \; k = \overline{1, \infty} ;$$

$f_{e_k}(t)$ – щільність розподілу орта e_k .

А також інші базиси – додаючи різні e_m для застереження незалежності одержуваних випадкових величин $n(\cdot)$

2.6. Питання власних значень

Розглянемо $P_n(\cdot)$ – ортогональний n-вимірний проектор в H_{Re} , $\{P_n\} \in \Phi_{\mathrm{Re}}$ – частково впорядковану множину ортогональних проекторів в H_{Re}; лінійний оператор A_{Re} в B_{Re} з природнім звуженням на H_{Re}.

Природньо, $\lambda \in R^1$ є дійсним власним числом лінійного оператора A_{Re}, якщо $A_{\mathrm{Re}} x = \lambda x$ для якогось $x \in B_{\mathrm{Re}}$, а x є власним вектором лінійного оператора A_{Re}, відповідного власному значенню λ.

Розглянемо власні значення λ_n і власні вектори x_n лінійного оператора A_{Re} в $P_n H_{\mathrm{Re}}$, тобто виходитимемо з класичних означень власного значення і власного вектора лінійного оператора в n-вимірному просторі $P_n H_{\mathrm{Re}}$, себто

$$A_{\mathrm{Re}} P_n x_n = \lambda_n P_n x_x .$$

Теорема. Для обмеженого лінійного оператора $A_{\mathrm{Re}} : B_{\mathrm{Re}} \to B_{\mathrm{Re}}$ власні числа і власні вектори знаходяться в результаті розширення гільбертового простору H_{Re} до банахового простору B_{Re} в результаті процедури побудови абстрактного вінерівського простору $(i_{\mathrm{Re}}, H_{\mathrm{Re}}, B_{\mathrm{Re}})$ піля граничних переходів

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda \;, \; \lim x_n = x \in H_{\mathrm{Re}} ,$$

причому розглядана збіжність здійснюється в режимі сильної збіжності.

Доведення. Збіжність $\{\lambda_n\}$ як дійсночислової послідовності з λ при $n \to \infty$ по будь-якій підпослідовнсоті дає еквівалентний ефект.

Розглянемо збіжність $\{A_{\mathrm{Re}} P_n x_n\}$ при $n \to \infty$, причому враховуємо передуючу збіжність $P_n \to I_{\mathrm{Re}}$, де I_{Re} – тотожній оператор в H_{Re}, паралельно з розглядом збіжності $\{P_n x_n\}$.

Для обмеженого лінійного оператора A_{Re} і направленості $\{A_{\mathrm{Re}} P_n\}^{\sim}$ випадковий елемент $\widetilde{A}_{\mathrm{Re}}$ має смисл, і $\widetilde{A}_{\mathrm{Re}} = A_{\mathrm{Re}}$ майже скрізь відносно $p_{I_{\mathrm{Re}}}$. Отже, можна вибрати таку підпослідовність $\{P_n\} \in \Phi_{\mathrm{Re}}$ сильно збіжну до тотожнього відображення, що $\{\widetilde{A}_{\mathrm{Re}} P_n(\cdot)\}$ збігається до A_{Re} майже скрізь відносно $p_{I_{\mathrm{Re}}}$.

Оскільки кожен проектор P_n можна продовжити по поперервності до проектора P_n^* в банаховому сепарабельному просторі B_{Re}, то одержано потрійний перехід $(\lambda_n P_n x_n)$.

РОЗДІЛ 3

Двократний абстрактний інтеграл по гаусівській мірі в комплексному просторі

3.1. Абстрактний фейнманівський інтеграл з позиції гаусівського в комплексному просторі

Роглянемо простір, де H_{Im} є уявний сепарабельний гільбертів простір з фейнманівською нормою $|\cdot|_{\mathrm{Im}} = \langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathrm{Im}} \leq 0$ при скалярному добутку в (iH) стандартного дійсного вигляду, позначуваному $\left(-\langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathrm{Im}}\right)$.

Нехай Φ_{Im} – частково впорядкована множина скінченновимірних ортогональних проекторів P_{Im} в гільбертовому H_{Im}, де для проекторів P_{Im}, Q_{Im} запис $P_{\mathrm{Im}} < Q_{\mathrm{Im}}$ означає, що $P_{\mathrm{Im}}(H_{\mathrm{Im}}) \subset Q_{\mathrm{Im}}(H_{\mathrm{Im}})$.

Поле $\mathfrak{R}_{\mathrm{Im}}$ всіх циліндричних множин в H_{Im} визначаємо множинами вигляду

$$E_{\mathrm{Im}} = \{x \in H_{\mathrm{Im}};\, P_{\mathrm{Im}} x \in F_{\mathrm{Im}}\},$$

де $P_{\mathrm{Im}} \in \Phi_{\mathrm{Im}}$, F_{Im} – борелівська підмножина в $P_{\mathrm{Im}} H_{\mathrm{Im}}$.

Циліндричною функцією $f(\cdot)$ на уявному сепарабельному гільбертовому просторі H_{Im} називаємо функцію вигляду

$$f(x) = \varphi(P_{\mathrm{Im}} x), \quad P_{\mathrm{Im}} \in \Phi_{\mathrm{Im}}, \quad x \in H_{\mathrm{Im}},$$

де $\varphi(\cdot)$ – борелівська функція, визначена на $P_{\mathrm{Im}} H_{\mathrm{Im}}$.

Розглядатимемо випадкову величину $\overline{f}(\omega)$, пов'язану з циліндричною функцією $f(x) = \varphi(P_{\mathrm{Im}} x)$, $x \in H_{\mathrm{Im}}$, визначену рівністю

$$\overline{f}(\omega) = \varphi\left(n(e_{j_1})(\omega), n(e_{j_2})(\omega), \dots, n(e_{j_s})(\omega)\right), \quad \omega \in \Omega \qquad (3.1)$$

де $e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_s}$ – орти, на які проектує проектор P_{Im}.

Кожна циліндрична міра μ_t^{*}, як функція множини, автоматично є циліндричною функцією, і для неї можна означити випадкову величину $\overline{\mu}_t^{*}$, пов'язану з мірою μ_t.

Для таких випадкових величин використовуємо збіжність по ймовірності, тобто виходимо з того, що послідовність $\{\tilde{\mu}^*_{t_n}(\omega)\}$ збігається по ймовірності до $\tilde{\mu}^*_t(\omega)$, коли $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists n_0 : m\left\{\omega; \left|\tilde{\mu}^*_{t_n}(\omega) - \tilde{\mu}^*_t(\omega)\right| > \varepsilon\right\} < \varepsilon \text{ для } n \geq n_0 .$$

Хоч для уявних чисел є впорядкованість в межах порядку, задаваного напрямком осі Im, використовуватимемо як загальноприйнятий термін для $\tilde{\mu}^*_t(\omega)$, $\tilde{\mu}^*_{t_n}(\omega)$ замість «випадкова величина» – «випадковий елемент».

Виходячи з визначення,

$$B^*_{\mathrm{Im}} \subset H^*_{\mathrm{Im}} \equiv H_{\mathrm{Im}} \subset B_{\mathrm{Im}}$$

для абстрактного вінерівського простору $(i_{\mathrm{Im}}, H_{\mathrm{Im}}, B_{\mathrm{Im}})$ критерієм належності елемента $x \in H_{\mathrm{Im}}$ до B^*_{Im} будемо вважати

$$B^*_{\mathrm{Im}} = \left\{x \in H_{\mathrm{Im}};\ \sup_{\substack{y \in H_{\mathrm{Im}} \\ y \neq 0}} \frac{\left|\langle x, y\rangle_{\mathrm{Im}}\right|}{\|y\|_{\mathrm{Im}}}\right\} < \infty .$$

Кожна циліндрична функція, побудована на основі циліндричної міри μ^*_t, автоматично є функцією слабкого розподілу – і функцією випадкової величини $\tilde{\mu}^*_t$.

Під гаусівською (циліндричною) мірою μ^*_t на H_{Im} розуміємо

$$\mu_{t_{\mathrm{Im}}}(E_{\mathrm{Im}}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t_{\mathrm{Im}}}}\right)^n \int_{F_{\mathrm{Im}}} \exp\left\{-\frac{|x|^2}{2t_{\mathrm{Im}}}\right\} dx ,$$

де $t_{\mathrm{Im}} > 0$ – параметр, і при $t_{\mathrm{Im}} = t_{\mathrm{Re}}$, $F_{\mathrm{Im}} = i \cdot F_{\mathrm{Re}}$, $E_{\mathrm{Im}} = i \cdot E_{\mathrm{Re}}$ маємо $\mu_{t_{\mathrm{Im}}}(F_{\mathrm{Im}}) = i\mu_{t_{\mathrm{Re}}}(E_{\mathrm{Re}})$.

Під абстрактною феймanівською мірою $p_{t_{\mathrm{Im}}}$ розглядаємо продовження σ-адитивної функції $\tilde{\mu}^*$ – породженої гаусівською циліндричною мірою $\mu_{t_{\mathrm{Im}}}$ на H_{Im} – на сім'ї всіх циліндричних множин в B_{Im} розуміємо продовження $\bar{\mu}_{t_{\mathrm{Im}}}$ на борелівське поле в банаховому сепарабельному уявному просторі B_{Im}.

Інтеграл по мірі $p_{t_{\mathrm{Im}}}$ будемо розглядати в сенсі Бохнера.

Інтеграли по мірі $p_{t_{\mathrm{Im}}}$ в $\left(i_{\mathrm{Im}}, H_{\mathrm{Im}}, B_{\mathrm{Im}}\right)$ називатимемо абстрактними Фейманівськими інтегралами в широкому смислі.

$\forall x \in B_{\mathrm{Im}}$ запровадимо позначення

$$p_{t_{\mathrm{Im}}}\left(x,\, E_{\mathrm{Im}}\right) = p_{t_{\mathrm{Im}}}\left(E_{\mathrm{Im}} + x\right),\; E_{\mathrm{Im}} \in \mathrm{B}_{B_{\mathrm{Im}}},$$

де $\mathrm{B}_{B_{\mathrm{Im}}}$ – сім'я всіх борелівських множин в банаховому сепарабельному уявному просторі B_{Im}.

Розглянемо $y = I_{\mathrm{Im}}x + h$, I_{Im} – тотожній оператор в B_{Im}.

Теорема. Для всякого $h \in H_{\mathrm{Im}}$ міра $P_{t_{\mathrm{Im}}}(h,\cdot)$ є еквівалентною мірі $p_{t_{\mathrm{Im}}}$, і для всякої $p_{t_{\mathrm{Im}}}$ – інтегровної в сенсі Бохнера функції $f(y)$ зі значеннями в банаховому просторі B_0 можна записати

$$\int\limits_{B_{\mathrm{Im}}} f(y) p_{t_{\mathrm{Im}}}(dy) =$$

$$= \int\limits_{B_{\mathrm{Im}}} \exp\left\{ -\frac{1}{2t_{\mathrm{Im}}} \|h\|^2_{H_{\mathrm{Im}}} + \frac{1}{t_{\mathrm{Im}}} \langle h, x \rangle_{I_{\mathrm{Im}}} \right\} f(x+h)\, p_{t_{\mathrm{Im}}}(dx), \tag{3.2}$$

де

$$\langle h, x \rangle_{\mathrm{Im}} = -\left\langle hi^{-1}, xi^{-1} \right\rangle_{\mathrm{Re}}, \tag{3.3}$$

якщо можливим є ототожнення H_{Re} та $\left(i^{-1} \cdot H_{\mathrm{Im}}\right)$.

Нехай T_{Im} – лінійне відображення банахового сепарабельного уявного простору B_{Im} в себе, яке випливає з підстав наслідку.

Позначимо $p_{t_{\mathrm{Im}}} \circ T_{\mathrm{Im}}$ борелівську міру $p_{t_{\mathrm{Im}}} \circ T_{\mathrm{Im}}\left(E_{\mathrm{Im}}\right) = p_{t_{\mathrm{Im}}}\left(T_{\mathrm{Im}}\left(E_{\mathrm{Im}}\right)\right)$, $E_{\mathrm{Im}} \in \mathcal{B}\left(B_{\mathrm{Im}}\right)$.

Теорема. Нехай $T_{\mathrm{Im}} = I_{\mathrm{Im}} + K_{\mathrm{Im}}$ – лінійне відображення уявного сепарабельного банахового простору B_{Im} на себе, і виконуються умови при функціонуванні абстрактного фейманівського простору $\left(i_{\mathrm{Im}}, H_{\mathrm{Im}}, B_{\mathrm{Im}}\right)$:

(а) $K_{\mathrm{Im}}(B_{\mathrm{Im}}) \subset H_{\mathrm{Im}}$;

(б) відображення T_{Im} є обертовним в розумінні T_{Im} як лінійного відображення уявного гільбертового простору H_{Im} в себе;

(в) $K_{\mathrm{Im}} \in L_1(H_{\mathrm{Im}})$, де $L_1(H_{\mathrm{Im}})$ – простір ядерних операторів в H_{Im}.

Тоді міри $p_{t_{\mathrm{Im}}} \circ T_{\mathrm{Im}}$ і $p_{t_{\mathrm{Im}}}$ еквівалентні, і

$$\int_{B_{\mathrm{Im}}} f(y) p_{t_{\mathrm{Im}}}(dy) = \int_{B_{\mathrm{Im}}} f(T_{\mathrm{Im}} x) \exp\left\{ -\frac{1}{t_{\mathrm{Im}}} \left(K_{\mathrm{Im}} x, x \right)_{B_{\mathrm{Im}}} + \left| K_{\mathrm{Im}} x \right|^2_{H_{\mathrm{Im}}} \right\} \times$$

$$\times \left| \prod_s (1 + \lambda_s) \right| p_{t_{\mathrm{Im}}}(dx)$$

для довільної $p_{t_{\mathrm{Im}}}(dx)$ – інтегровної в сенсі Бохнера функції $f(y)$ зі значеннями в банаховому просторі B_0.

Тут λ_s – власні числа оператора K_{Im}, $(\cdot,\cdot)_{B_{\mathrm{Im}}}$ – канонічна білінійна форма, що призводить B_{Im} та B^*_{Im} спряжений до двоїстості, для якої при $x \in B_{\mathrm{Re}}$, $(ix) \in B_{\mathrm{Im}}$ виконується

$$\left((ix), (ix)^* \right)_{B_{\mathrm{Im}}} = -\left(x, x^* \right) \qquad (3.4)$$

де x^* є елемент B^*_{Re}, спряжений до x.

Нехай $T_{\mathrm{Im}} = I_{\mathrm{Im}} + K_{\mathrm{Im}}$ – нелінійне відображення B_{Im} в себе, де I_{Im} – тотожнє відображення, $\forall x \in B_{\mathrm{Im}}$ $K_{\mathrm{Im}} x \in H_{\mathrm{Im}}$, K'_{Im} – похідна Фреше,

$$\det T_{\mathrm{Im}} = \det(I_{\mathrm{Im}} + K_{\mathrm{Im}}) = \prod_s (1 + \lambda_s),$$

λ_s – власні числа лінійного оператора K'_{Im}.

Теорема. Припустимо, що для оператора T_{Im} виконуються умови:

(а) $K_{\mathrm{Im}}(B_{\mathrm{Im}}) \subset H_{\mathrm{Im}}$;

(б) Для оператора K_{Im} в H_{Im} існує обернене відображення K^{-1}_{Im};

(в) Існує $K'_{\text{Im}} \in L_1(H_{\text{Im}})$.

Тоді міри $p_{t_{\text{Im}}} \circ T_{\text{Im}}$ і $p_{t_{\text{Im}}}$ є еквівалентними, і для довільної обмеженої $p_{t_{\text{Im}}}$ – інтегровної в сенсі Бохнера функції $f(v)$ зі значеннями в банаховому просторі B_0

$$\int\limits_{B_{\text{Im}}} f(y) p_{t_{\text{Im}}}(dy) =$$

$$= \int\limits_{B_{\text{Im}}} f(T_{\text{Im}} x) \exp\left\{\frac{1}{2t_{\text{Im}}}\left[2(K_{\text{Im}} x, x)_{B_{\text{Im}}} + \langle K_{\text{Im}} x, K_{\text{Im}} x\rangle_{H_{\text{Im}}}\right]\right\} \left|\det T_{\text{Im}}\right| p_{t_{\text{Im}}}(dx),$$

де $(\cdot,\cdot)_{\text{Im}}$ – білінійна форма, що призводить B_{Im} і B^*_{Im} до двоїстості.

Доведення. Звуження на H_{Im} операторів, заданих в B_{Im}, позначаємо тими ж буквами латинського алфавіту.

До обертовності оператора K_{Im} підходимо в баченні леми 8.

Розглянемо спершу випадок обмеженої неперервної дійснозначної функції $f(y)$ на банаховому уявному сепарабельному просторі B_{Im}.

Нехай $g(\cdot)$ – звуження $f(\cdot)$ на H_{Im}, $g(\cdot) = f(\cdot) \circ i_{\text{Im}}$, Φ – частково впорядкована множина скінченновимірних ортогональних проекторів p в H_{Im}.

Тоді, направленість $(g \circ P)^{\sim}$ випадкових елементів збігається з ймовірністю до випадкового елементу $\overline{g}$, коли $P \to I_{\text{Im}}$ сильно по направленій множині Φ, $\overline{g} = f$ майже скрізь відносно міри $p_{t_{\text{Im}}}$.

Отже, ми можемо вибрати таку послідовність проекторів $\{Q_n\} \subset \Phi$, сильно збіжну до тотожнього відображення в H_{Im}, що $\overline{g}(Q_n \cdot)$ збігається до $f(\cdot)$ майже скрізь відносно $p_{t_{\text{Im}}}$.

Тоді

$$\begin{aligned} \int\limits_{B_{\text{Im}}} f(y) p_{t_{\text{Im}}}(dy) &= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{B_{\text{Im}}} \overline{g}(Q_n x)(i_{\text{Im}} y) p_{t_{\text{Im}}}(dy) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{H_{\text{Im}}} g(Q_n y) \mu_{t_{\text{Im}}}(dy) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{Q_n H_{\text{Im}}} g_0(Q_n y) dQ_n y, \end{aligned} \tag{3.5}$$

де

$$g_0(Q_n y) = g(Q_n y)(2\pi t_{1m})^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-(2t_{1m})^{-1}|Q_n y|^2_{H_{1m}}\right], \; n = \dim Q_n H_{1m}.$$

Застосовуємо перетворення T_{1m} до останнього виразу в (3.5), який стосується скінченновимірних просторів. Одержуємо

$$\int\limits_{Q_n H_{1m}} g_0(Q_n T_{1m} x) dQ_n(T_{1m} x),$$

звідси випливає необхідність віднайдення $dQ_n(T_{1m} x)$

Оскільки $Q_n T_{1m} H_{1m} \subset H_{1m}$ в межах значеної часткової впорядкованості, позначаючи $P_n H_{1m} = T_{1m}^{-1} Q_n T_{1m} H_{1m}$ на підставі леми 8 маємо

$$\dim P_n H_{1m} = \dim Q_n T_{1m} H_{1m} = n.$$

В силу ізоморфності просторів $Q_n H_{1m}$ і R^n, $P_n H_{1m}$ і R^n, застосовуючи формули перетворень кратного інтегралу в R^n від функції з векторними значеннями неперервної і з компактним носієм, враховуючи, – що похідна Фреше від лінійного оператора є цей самий оператор, – маємо (оскільки кожний скінченновимірний простір є локально компактним простором)

$$\int\limits_{Q_n H_{1m}} g_0(Q_n T_{1m} x) d\, Q_n T_{1m} x = \aleph_Q^* \int\limits_{R^1} g_0(\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_n) \left|\det F_{1m}\right| d\epsilon_1\, d\epsilon_2 ... d\epsilon_n =$$

$$= \int\limits_{G_n H_{1m}} g(T_{1m} P_n x) \exp\left\{(2t_{1m})^{-1}\left[2\langle P_n x, K_{1m} P_n x\rangle_{B_{1m}} + \langle K_{1m} P_n x, K_{1m} P_n x\rangle_{H_{1m}}\right]\right\} \times$$

$$\times \left|\prod_s (1 + \lambda_s)\right| \mu_{t_{1m}}(dG_n x),$$

λ_s – власні числа оператора $K'_{1m} \circ G_n$,

$$G_n H_{1m} = P_n H_{1m} \cap Q_n H_{1m}.$$

Констатуємо – що для подальшого доведення інтегровності нашої функції з векторними значеннями за Лебегом в абстрактному фейнманівському просторі (t_{1m}, H_{1m}, B_{1m}) з абстрактною фейнманівською мірою $p_{t_{1m}}$ необхідно і досить існування апроксимуючої послідовності для нашої функції, що забезпечує сильну їй вимірність і інтегровність норми.

Очевидно, що із сильного прямування $Q_n \to I_{\text{lm}}$ при $n \to \infty$ в H_{lm} випливає $P_n \to I_{\text{lm}}$, і

$$\int\limits_{B_{\text{lm}}} g(G_n u)(i_{\text{lm}} y)dy = \int\limits_{B_{\text{lm}}} \Big(g(T_{\text{lm}} G_n u) \exp\Big\{ (2t_{\text{lm}})^{-1} \Big[2(G_n u, K_{\text{lm}} G_n u)_{B_{\text{lm}}} +$$

$$+ \langle K_{\text{lm}} G_n u, K_{\text{lm}} G_n u \rangle_{H_{\text{lm}}} \Big] \Big\} \Big) (i_{\text{lm}} x) \left| \prod_s \left(1 + \lambda_s^{n} \right) \right| P_{t_{\text{lm}}}(dx). \tag{3.6}$$

Збіжність $\prod_s \left(1 + \lambda_s^{n}\right)$ при $n \to \infty$ забезпечується ядерністю лінійного оператора K'_{lm} в H_{lm}, і

$$\prod_s \left(1 + \lambda_s^{n}\right) \to \prod_s \left(1 + \lambda_s\right) \text{ при } n \to \infty,$$

де λ_s – власні числа оператора K'_{lm}.

Остання збіжність зумовлює умову

$$\left\| K'_{\text{lm}} \circ G_n \right\| < 1,$$

де $\|\cdot\|$ – операторна норма $G_n H_{\text{lm}}$.

В силу позитивності і обмеженості підінтегрального виразу в правій частині (4.7), зумовленого умовою теореми, спрямовуючи $Q_n \to I_{\text{lm}}$ сильно, отримаємо, що

$$g(T_{\text{lm}} \circ G_n \cdot) \exp\Big\{ (2t_{\text{lm}})^{-1} \Big[2\langle G_n \cdot, K_{\text{lm}} G_n \cdot \rangle_{B_{\text{lm}}} \Big] + \langle K_{\text{lm}} G_n \cdot, K_{\text{lm}} G_n \cdot \rangle_{H_{\text{lm}}} \Big\} \times$$

$$\times \left| \prod_s \left(1 + \lambda_s^{n}\right) \right| \to f(T_{\text{lm}} \cdot) \exp\Big\{ (2t_{\text{lm}})^{-1} \Big[2(\cdot, K_{\text{lm}} \cdot)_{B_{\text{lm}}} + \langle K_{\text{lm}} \cdot, K_{\text{lm}} \cdot \rangle_{H_{\text{lm}}} \Big] \Big\} \times$$

$$\times \left| \prod_s \left(1 + \lambda_s\right) \right|$$

за ймовірністю.

Звідси, при необхідності, перейдемо до такої послідовності ортопроекторів $\{G_n\}$, що розглянута збіжність в B_{lm} буде збіжністю майже скрізь щодо $p_{t_{\text{lm}}}$.

Для $p_{t_{\mathrm{Im}}}$ – інтегровної функції $f(y)$ зі значеннями в банаховому просторі B_0 необхідно і досить сильної вимірності функції $f(y)$ і $p_{t_{\mathrm{Im}}}$ – інтегровності її норми.

Звідси, розглядаємо замість дійснозначної функції $f(y)$ функцію $\|f(\cdot)\|_{B_0}$. Тоді маємо

$$\int_{B_{\mathrm{Im}}} \|f(y)\|_{B_0} p_{t_{\mathrm{Im}}}(dy) = \int_{B_{\mathrm{Im}}} \|f(T_{\mathrm{Im}}x)\|_{B_0} \exp\left\{-(2t_{\mathrm{Im}})^{-1}\left[2(K_{\mathrm{Im}}x, x)_{B_{\mathrm{Im}}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \langle K_{\mathrm{Im}}x, K_{\mathrm{Im}}x\rangle_{H_{\mathrm{Im}}}\right]\right\} \left|\prod_s (1+\lambda_s)\right| p_{t_{\mathrm{Im}}}(dx),$$

де $\|\cdot\|_{B_0}$ – норма в банаховому просторі B_0.

Цим теорему доведено.

3.2. Питання власних значень

В абстрактному фейнманівському просторі $(i_{\mathrm{Im}}, H_{\mathrm{Im}}, B_{\mathrm{Im}})$ з абстрактною фейнманівською мірою $p_{t_{\mathrm{Im}}}$ розглянемо ортогональний n-вимірний проектор $P_n(\cdot)$ для H_{Im}, $\{P_n\} \in \Phi_{\mathrm{Im}}$ частково впорядкованій множині ортогональних проекторів в H_{Im}; A_{Im} – лінійний оператор в H_{Im}.

Природньо, $\lambda \in (iR^1)$ є власним уявним числом лінійного оператора A_{Im}, якщо $A_{\mathrm{Im}}x = \lambda x$ для якого $x \in H_{\mathrm{Im}}$, а x є власним вектором лінійного оператора A_{Im}, відповідним власному значенню λ.

Розглянемо власні значення λ_n і власні вектори x_n лінійного оператора A_{Im} в просторі $P_n H_{\mathrm{Im}}$, тобто виходитимемо з класичних означень власного вектора і власного значення лінійного оператора в n-вимірному просторі, себто

$$A_{\mathrm{Im}} P_n x = \lambda_n P_n x.$$

Теорема. Для обмеженого лінійного оператора $A_{\mathrm{Im}} : B_{\mathrm{Im}} \to B_{\mathrm{Im}}$ власні числа і власні вектори знаходяться в результаті розширення гільбертового уявного простору H_{Im} до банахового B_{Im} в результаті процедури побудови абстрактного фейнманівського простору $(i_{\text{Im}}, H_{\text{Im}}, B_{\text{Im}})$ після граничних переходів

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x \in H_{\text{Im}},$$

причому збіжність ми розглядаємо в сутності сильної збіжності.

Доведення. Збіжність $\{\lambda_n\}$ як уявночислової послідовності до λ при $n \to \infty$ по будь-якій підпослідовності дає еквівалентний ефект.

Розглянемо збіжність $\{A_{\text{Im}} P_n x_n\}$ при $n \to \infty$, причому враховуємо передуючу збіжність $P_n \to I_{\text{Im}}$, де I_{Im} – тотожній оператор в гільбертовому H_{Im}, паралельно з розглядом збіжності $\{P_n x_n\}$.

Для обмеженого лінійного оператора A_{Im} і направленості $\{A_{\text{Im}} P_n\}$ випадковий елемент $\tilde{A}_{\text{Im}}$ має смисл, і $\tilde{A}_{\text{Im}} = A_{\text{Im}}$ майже скрізь відносно $p_{t_{\text{Im}}}$. Отже, можна вибрати таку підпослідовність $\{P_n\} \in \Phi_{\text{Im}}$, сильно збіжну до тотожнього відображення, що $\{\tilde{A}_{\text{Im}} P_{ln}(\cdot)\}$ збігається до A_{Im} майже скрізь відносно $p_{t_{\text{Im}}}$.

Оскільки кожен проектор P_n можна продовжити по неперервності до проектора P_n^* в банаховому сепарабельному просторі B_{Im}, то одержано потрібний перехід для $\{P_n x\}$.

3.3. Двократний абстрактний вінерівський інтеграл і його розвинення в однократний абстрактний інтеграл по гаусівській мірі в комплексному просторі

Розглянемо двократний абстрактний вінерівський інтеграл у вигляді

$$\int_{B_{(2)}} f(y)\, p_{\bar{t}}(dy), \tag{3.7}$$

де $B_{(2)} = B_{\text{Re}} \times B_{\text{Im}}$, B_{Re} – дійсний сепарабельний банахів простір, B_{Im} – уявний сепарабельний банахів простір; $y \in B_{(2)}$; $P_{\bar{t}}(U_1 \times U_2) = p_{t_{\text{Re}}}(U_1) \cdot p_{t_{\text{Im}}}(U_2)$ – абстрактна вінерівська міра в $B_{(2)}$, вектор параметрів $\bar{t} = (t_{\text{Re}}, t_{\text{Im}})$.

Абстрактний вінерівський інтеграл (3.7) розглядаємо в абстрактному вінерівському просторі $\left(i_{(2)}, H_{(2)}, B_{(2)}\right)$, де $i_{(2)}$ є відношення включення $H_{(2)} \subset B_{(2)}$, H_{Re} – дійсний сепарабельний гільбертів простір, H_{Im} – уявний сепарабельний гільбертів простір, $H_{(2)} = H_{\mathrm{Re}} \times H_{\mathrm{Im}}$, – причому $p_{t_{\mathrm{Re}}}\left(U_1\right)$ – абстрактна вінерівська міра в абстрактному вінерівському просторі $\left(i_{\mathrm{Re}}, H_{\mathrm{Re}}, B_{\mathrm{Re}}\right)$, $p_{t_{\mathrm{Im}}}\left(U_2\right)$ – абстрактна фейнманівська міра в абстрактному фейнманівському просторі $\left(i_{\mathrm{Im}}, H_{\mathrm{Im}}, B_{\mathrm{Im}}\right)$.

Інтеграл (3.7) розуміємо в сенсі Бохнера.

Цим самим інтеграл (3.7) ми розглядаємо як однократний абстрактний інтеграл по гаусівській мірі $P_{\bar{t}}$ в комплексному просторі.

Тут міру $P_{\bar{t}}$ розуміємо як розвиток в межах структури абстрактного вінерівського простору $\left(i_{(2)}, H_{(2)}, B_{(2)}\right)$ гаусівської циліндричної міри $\mu_{\bar{t}}$ в комплексному гільбертовому просторі $H_{(2)}$, яку беремо в вигляді

$$\mu_{\bar{t}}\left(E_{(2)}\right) = \mu_{t_{\mathrm{Re}}}\left(E_{\mathrm{Re}}\right) \cdot \mu_{t_{\mathrm{Im}}}\left(E_{\mathrm{Im}}\right) =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n_{\mathrm{Re}}+n_{\mathrm{Im}}}{2}} t_{\mathrm{Re}}^{-\frac{n_{\mathrm{Re}}}{2}} t_{\mathrm{Im}}^{-\frac{n_{\mathrm{Im}}}{2}} \int\limits_{F_{(2)}} \exp\left\{-\frac{\left|x_{1\cdot}\right|^2}{2t_{\mathrm{Re}}} - \frac{\left|x_{2\cdot}\right|^2}{2t_{\mathrm{Im}}}\right\} dx\,, \tag{3.8}$$

де $E_{(2)} \subset H_{(2)}$, $E_{\mathrm{Re}} \subset H_{\mathrm{Re}}$, $E_{\mathrm{Im}} \subset H_{\mathrm{Im}}$; $n_{\mathrm{Re}} = \dim P_{n_{\mathrm{Re}}} H_{\mathrm{Re}}$, $n_{\mathrm{Im}} = \dim P_{n_{\mathrm{Im}}} H_{\mathrm{Im}}$; $x_{1\cdot} \in H_{\mathrm{Re}}$, $x_{2\cdot} \in H_{\mathrm{Im}}$; E_{Re}, E_{Im} – циліндричні множини відповідно в дійсному H_{Re}, уявному H_{Im}; $F_{(2)}$ – борелівська підмножина в $P_{\bar{n}} H_{(2)}$, $\bar{n} = \left(n_{\mathrm{Re}}, n_{\mathrm{Im}}\right)$.

Розглянемо лінійні перетворення зсуву в абстрактному інтегралі по гаусівській мірі в комплексному просторі.

Покладемо

$$p_{\bar{t}}\left(x, U_{(2)}\right) = p_{\bar{t}}\left(U_{(2)} + x\right),$$

$$x \in B_{(2)},\ U_{(2)} \subset B_{(2)},\ U_{(2)} = U_{\mathrm{Re}} \times U_{\mathrm{Im}},\ U_{\mathrm{Re}} \subset B_{\mathrm{Re}},\ U_{\mathrm{Im}} \subset B_{\mathrm{Im}}.$$

Теорема. Якщо $h \in H_{(2)}$, то при перетворенні

$$y = Ix + h$$

міри $p_1^-(h\cdot)$ і p_1^- еквівалентні, і

$$\int\limits_{B_{(2)}} f(y)p_1^-(dy) = \int\limits_{B_{(2)}} f(x+h)\exp\left\{-\left[(2t_{\mathrm{Re}})^{-1}|h_{1\cdot}|^2_{H_{\mathrm{Re}}} - (2t_{\mathrm{Im}})^{-1}|h_{2\cdot}|^2_{H_{\mathrm{Im}}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + t_{\mathrm{Re}}^{-1}(h_{1\cdot}, x_{1\cdot})_{B_{\mathrm{Re}}} - t_{\mathrm{Im}}^{-1}(h_{2\cdot}, x_{2\cdot})_{B_{\mathrm{Im}}}\right]\right\} p_1^-(dx).$$

Тут $h = (h_{1\cdot}, h_{2\cdot})$, оператор I є тотожнім оператором $B_{(2)}$.

Розглянемо лінійні перетворення загального вигляду в абстрактних інтегралах по гаусівській мірі в комплексному просторі.

Виходимо із структури тотожнього відображення в $B_{(2)}$ вигляду

$$I = \begin{pmatrix} I_{\mathrm{Re}} & 0 \\ 0 & I_{\mathrm{Im}} \end{pmatrix},$$

де I_{Re} – тотожнє відображення в B_{Re}, I_{Im} – тотожнє відображення в B_{Im}.

Нехай лінійний оператор $K : B_{(2)} \to H_{(2)}$ має структуру

$$K = \begin{pmatrix} K_{\mathrm{Re}} & K_{\mathrm{Re\,Im}} \\ K_{\mathrm{Im\,Re}} & K_{\mathrm{Im}} \end{pmatrix},$$

де $K_{\mathrm{Re}} : B_{\mathrm{Re}} \to H_{\mathrm{Re}}$, $K_{\mathrm{Re\,Im}} : B_{\mathrm{Re}} \to H_{\mathrm{Im}}$, $K_{\mathrm{Im\,Re}} : B_{\mathrm{Im}} \to H_{\mathrm{Re}}$, $K_{\mathrm{Im}} : B_{\mathrm{Im}} \to H_{\mathrm{Im}}$.

Розглянемо $T = I + K$, $T : B_{(2)} \to B_{(2)}$,

$$\det T = \prod_s (1 + \lambda_s),$$

де λ_s – власні числа оператора K.

Зазначимо

$$p_1^- \circ T(u) = p_1^-(T(u)).$$

Теорема. Нехай T – лінійне відображення $B_{(2)}$ в себе і виконуються умови

(а) $K(B_{(2)}) \subset H_{(2)}$;

(б) Для оператора T існує обернене лінійне відображення $H_{(2)}$ в себе;

(в) $K \in L_1(H_{(2)})$.

Тоді міри $p_{\bar{l}} \circ T$ і $p_{\bar{l}}$ є еквівалентними, і

$$\int\limits_{B_{(2)}} f(y) p_{\bar{l}}(dy) = \int\limits_{B_{(2)}} f(Tx) \exp\Big\{-(2t_{\mathrm{Re}})^{-1}\Big[2(K_{\mathrm{Re}}x_{1\cdot}, x_{1\cdot})_{B_{\mathrm{Re}}} +$$

$$+\langle K_{\mathrm{Re}}x_{1\cdot}, K_{\mathrm{Re}}x_{1\cdot}\rangle_{H_{\mathrm{Re}}}\Big] + (2t_{\mathrm{Im}})^{-1}\Big[2(K_{\mathrm{Im}}x_{2\cdot}, x_{2\cdot})_{B_{\mathrm{Im}}} +$$

$$+\langle K_{\mathrm{Im}}x_{2\cdot}, K_{\mathrm{Im}}x_{2\cdot}\rangle_{H_{\mathrm{Im}}}\Big]\Big\} \left|\det T\right| p_{\bar{l}}(dx).$$

Нехай $T = I + K$ є нелінійне відображення $B_{(2)}$ в себе,

$$K_{\mathrm{Re}}(x_{1\cdot}, x_{2\cdot}) \in H_{\mathrm{Re}}, \quad K_{\mathrm{Im}}(x_{1\cdot}, x_{2\cdot}) \in H_{\mathrm{Im}};$$

$\dfrac{\delta K_{\mathrm{Re}}}{\delta x_{1\cdot}}, \dfrac{\delta K_{\mathrm{Re}}}{\delta x_{2\cdot}}, \dfrac{\delta K_{\mathrm{Im}}}{\delta x_{1\cdot}}, \dfrac{\delta K_{\mathrm{Im}}}{\delta x_{2\cdot}}$ – часткові похідні Фреше;

$$\det T = \det(I + K) = \prod_{s}(1 + \lambda_s),$$

де λ_s – власні числа оператора K',

$$Kx = \begin{pmatrix} K_{\mathrm{Re}}(x_{1\cdot}, x_{2\cdot}) \\ K_{\mathrm{Im}}(x_{1\cdot}, x_{2\cdot}) \end{pmatrix}, \quad K' = \begin{pmatrix} \dfrac{\delta K_{\mathrm{Re}}}{\delta x_{1\cdot}} & \dfrac{\delta K_{\mathrm{Re}}}{\delta x_{2\cdot}} \\ \dfrac{\delta K_{\mathrm{Im}}}{\delta x_{1\cdot}} & \dfrac{\delta K_{\mathrm{Im}}}{\delta x_{2\cdot}} \end{pmatrix}.$$

Теорема. Припустимо, що для T виконуються умови

(а) $K(B_{(2)}) \subset H_{(2)}$;

(б) Для K в $H_{(2)}$ існує обернене відображення K^{-1};

(в) існує $K' \in L_1(H_{(2)})$.

Тоді міри $p_{\bar{l}} \circ T$ і $p_{\bar{l}}$ є еквівалентними, і для довільної обмеженої $p_{\bar{l}}$ – інтегровної в сенсі Бохнера функції $f(y)$ зі значеннями в дійсному банаховому просторі

$$\int\limits_{B_{(2)}} f(y) p_{\bar{l}}(dy) = \int\limits_{B_{(2)}} f(Tx) \exp\Big\{-\frac{1}{2} t_{\mathrm{Re}}^{-1}\Big[2(K_{\mathrm{Re}}(x_{1\cdot}, x_{2\cdot}), x_{1\cdot})_{B_{\mathrm{Re}}} +$$

$$+\langle K_{\mathrm{Re}}(x_{1\cdot}, x_{2\cdot}), K_{\mathrm{Re}}(x_{1\cdot}, x_{2\cdot})\rangle_{H_{\mathrm{Re}}}\Big] + \frac{1}{2} t_{\mathrm{Im}}^{-1}\Big[2(K_{\mathrm{Im}}(x_{1\cdot}, x_{2\cdot}), x_{2\cdot})_{B_{\mathrm{Im}}} +$$

$$+\left\langle K_{\mathrm{Im}}(x_{1\cdot},x_{2\cdot}),\,K_{\mathrm{Im}}(x_{1\cdot},x_{2\cdot})\right\rangle_{H_{\mathrm{Im}}}\Big]\Big\}\,|\det T|\;p_{\bar t}(dx).$$

3.4. Теорема Фубіні

Лема. Для абстрактного інтегралу по гаусівській мірі в комплексному просторі виконується теорема Фубіні про зміну порядку інтегрування за умови сильного інтегрування підінтегральної функції.

Доведення. Розглянемо сильний абстрактний інтеграл, $\int\limits_{B_{(2)}} f(x)p_{\bar t}(dx)$, себто вимагаємо

$$\left\| \int\limits_{B_{(2)}} f(x)p_{\bar t}(dx) \right\|_{B_0} < \infty ,$$

де $f(x)\in B_0$ банаховому $\forall f(x)$, інтегровної по Бохнеру,

$$\int\limits_{B_{(2)}} f(x)p_{\bar t}(dx) = \lim_{\bar n\to\infty} \int\limits_{P_{\bar n}H_{(2)}} g(P_{\bar n}x)\mu_{\bar t}(dP_{\bar n}x).$$

Тут $g = f|_{H_{(2)}}$ – звуження $f(x)$ на $H_{(2)}$, $P_{\bar n}$ – послідовність ортопроекторів $(P_{n_{\mathrm{Re}}}, P_{n_{\mathrm{Im}}})$, сильно збіжна до тотожнього оператора в $H_{(2)}$.

Формулою питання про заміну порядку інтегрування в абстрактних інтегралах по гаусівській мірі в комплексному просторі зводиться до вирішення питання про зміну порядку інтегрування в кратних інтегралах Бохнера від векторнозначних функцій в скінченновимірних локально компактних просторах.

Врахування узгодженості ймовірностних мір, формуючих $\mu_{\bar t}$, завершує доведення леми.

3.5. Інтеграл Фур'є-Вінера-Гросса

Якщо розглянути вираз

$$\varphi(y) = S \int\limits_{B_{(2)}} f(x_{1\cdot})e^{(x_{1\cdot}-y,\,x_{2\cdot})_{B_{\mathrm{Im}}}}\, p_{t_{\mathrm{Re}}}(dx_{1\cdot})p_{t_{\mathrm{Im}}}(-idx_{2\cdot}).$$

Вираз являє собою інтеграл Фур'є-Вінера-Гросса, де $\varphi(y)\equiv f(y)$ і виконуються умови (а) $S = \left(\int\limits_{B_{\mathrm{Re}}} \exp\left[-\frac{t_{\mathrm{Im}}}{2} |x_{1\cdot} - y|^2_{H_{\mathrm{Im}}} \right] p_{t_{\mathrm{Re}}}(dx_{1\cdot}) \right)^{-1}$;

(б) $B_{\mathrm{Re}} \equiv (-i) H_{\mathrm{Im}}$;

(в) $f(x_{1\cdot}), x_{1\cdot} \in B_{\mathrm{Re}}$ $p_{\vec{t}}$ – інтегровна, $f(x_{1\cdot}) \in B_0$ банаховому, $x_{2\cdot} \in B_{\mathrm{Im}}$, $\vec{t} = (t_{\mathrm{Re}}, t_{\mathrm{Im}})$;

(г) $y \in H_{\mathrm{Re}}$, тобто має місце звуження інтегралом Фур'є-Вінера-Гросса області визначення трансформованої функції порівняно з $f(x_{1\cdot})$ з B_{Re} до H_{Re} оберненим перетворенням;

(д) $\left\| \int\limits_{B_{\mathrm{Im}}} f(x) P_{t_{\mathrm{Im}}}(-dx_{2\cdot}) \right\|_{B_0} < \infty$;

(е) Існує таке $\delta > 0$, що

$$\int\limits_{\|z_{1\cdot}\|_{B_{\mathrm{Re}}} \le \delta} \|f(z_{1\cdot} + y) - f(y)\|_{B_0} \cdot \|z_{1\cdot}\|^{-1}_{B_{\mathrm{Re}}} \cdot p_{t_{\mathrm{Re}}}(dz_{1\cdot}) < \infty .$$

Природньо, $(i_{\mathrm{Re}}, H_{\mathrm{Re}}, B_{\mathrm{Re}})$ – абстрактний вінерівський простір; $(i_{\mathrm{Im}}, H_{\mathrm{Im}}, B_{\mathrm{Im}})$ – абстрактний фейнманівський простір, побудований виходячи з банахового простору $B_{\mathrm{Re}} \equiv (-i) H_{\mathrm{Im}}$ згідно з класичними процедурами; $p_{\vec{t}}(dx) = p_{t_{\mathrm{Re}}}(dx_{1\cdot}) p_{t_{\mathrm{Im}}}(-idx_{2\cdot})$.

Наслідок. Обернене перетворення Фур'є-Вінера-Гросса в комплексному просторі для дійснозначної $p_{\vec{t}}$ – інтегровної функції має вигляд

$$f(x) = S \int\limits_{B_{\mathrm{Im}}} f(y) e^{-i(x, y)_{B_{\mathrm{Im}}}} p_{t_{\mathrm{Im}}}(dy),$$

де $x \in H_{\mathrm{Re}}$.

Узагальнена дельта-функція в абстрактному просторі $(i_{\mathrm{Re}}, H_{\mathrm{Re}}, B_{\mathrm{Re}}) \times (i_{\mathrm{Im}}, H_{\mathrm{Im}}, B_{\mathrm{Im}})$ має вигляд

$$\delta_{x_{1|}}(x-X)=\left(\int\limits_{B_{\mathrm{Re}}}\exp\left[-\frac{1}{2}t_{\mathrm{Im}}|x_{1\cdot}-x_{1|\cdot}|^{2}_{H_{\mathrm{Im}}}\right]p_{t_{\mathrm{Re}}}(dx_{1\cdot})\right)^{-1}\times$$

$$\times\int\limits_{B_{\mathrm{Im}}}\exp\left[-i(X,y)_{B_{\mathrm{Im}}}+i(x,y)_{B_{\mathrm{Im}}}\right]p_{t_{\mathrm{Im}}}(dy),$$

де $x\in H_{\mathrm{Re}}\subset B_{\mathrm{Re}}$, $x_{1\cdot}\in B_{\mathrm{Re}}$, $x_{1|\cdot}\in B_{\mathrm{Re}}$, $B_{\mathrm{Re}}=(-iH_{\mathrm{Im}})$, $(i_{\mathrm{Re}},H_{\mathrm{Re}},B_{\mathrm{Re}})$ – абстрактний вінерівський простір з абстрактною вінерівською мірою $p_{t_{\mathrm{Re}}}$, $(i_{\mathrm{Im}},H_{\mathrm{Im}},B_{\mathrm{Im}})$ – абстрактний фейнманівський простір з абстрактною фейнманівською мірою $p_{t_{\mathrm{Im}}}$, $X\in B_{\mathrm{Re}}$.

Узагальнена дельта-функція Донскера для броунівського процесу в абстрактному вінерівському просторі $(i_{\mathrm{Re}},H_{\mathrm{Re}},B_{\mathrm{Re}})$ є

$$\delta_{t,\xi}(W)=\left(\int\limits_{B_{\mathrm{Re}}}\exp\left[-\frac{1}{2}t_{\mathrm{Im}}(x_{1\cdot}-\xi,x_{1\cdot}-\xi)_{B_{\mathrm{Im}}}\right]p_{t_{\mathrm{Re}}}(dx_{1\cdot})\right)^{-1}\times$$

$$\times\int\limits_{B_{\mathrm{Im}}}\exp\left[i(W(t)-\xi,y_{\cdot})_{B_{\mathrm{Im}}}\right]p_{t_{\mathrm{Im}}}(dy_{\cdot}).$$

$$W(t):\Omega\to B_{\mathrm{Re}},$$

Ω – простор неперервних функцій ω на $[0,\infty[$ зі значеннями в B_{Re}, $\omega(0)=0$, $\xi\in B_{\mathrm{Re}}$.

Формули одержуються застосуванням оберненого перетворення Фур'є-Вінера-Гросса.

Узагальнені броунівські функціонали, в абстрактному вінерівському просторі майже скрізь збігаються з дельта-функцією Донскера для відповідних абстрактних вінерівських просторів.

3.6. Комплексний варіант нормальних розподілів Сігала

Розглянемо декартів добуток $(i_{\mathrm{Re}},H_{\mathrm{Re}},B_{\mathrm{Re}})\times(i_{\mathrm{Im}},H_{\mathrm{Im}},B_{\mathrm{Im}})$, де скалярний добуток в $H_{\mathrm{Re}}\times H_{\mathrm{Im}}$ означено формулою

$$\langle x,y\rangle_{H_{(2)}}=\langle x_{1\cdot},y_{1\cdot}\rangle_{H_{\mathrm{Re}}}+\langle x_{2\cdot},y_{2\cdot}\rangle_{H_{\mathrm{Im}}}.$$

Теорема. В декартовому добутку $H_{\mathrm{Re}}\times H_{\mathrm{Im}}$ випадковий вектор

$$n_{\vec{t}}(h)=\left(n_{t_{\mathrm{Re}}}(h_{1\cdot}),n_{t_{\mathrm{Im}}}(h_{2\cdot})\right)$$

має двовимірний нормальний розподіл із середнім значенням 0 та вектором дисперсій

$$\left(t_{\mathrm{Re}}\cdot|h_{1\cdot}|^2_{H_{\mathrm{Re}}},t_{\mathrm{Im}}\cdot|h_{2\cdot}|^2_{H_{\mathrm{Im}}}\right),$$

$$h_{1\cdot}\in H_{\mathrm{Re}},\ h_{2\cdot}\in H_{\mathrm{Im}}.$$

Доведення. Розглянемо борелівську міру

$$\mu_{\bar{t}},_{(e_{11},e_{21},\ldots,e_{n_{\mathrm{Re}}1},e_{12},e_{22},\ldots,e_{n_{\mathrm{Im}}2})}\ \text{в}\ R^N,\ N=n_{\mathrm{Re}}+n_{\mathrm{Im}}$$

де

$$\mu_{\bar{t}},_{(e_{11},e_{21},\ldots,e_{n_{\mathrm{Re}}1},e_{12},e_{22},\ldots,e_{n_{\mathrm{Im}}2})}\left(F_{(2)}\right)=$$
$$=\mu_{t_{\mathrm{Re}}};_{(e_{11},e_{21},\ldots,e_{n_{\mathrm{Re}}1})}\left(F_{\mathrm{Re}}\right)\cdot\mu_{t_{\mathrm{Im}}};_{(e_{12},e_{22},\ldots,e_{n_{\mathrm{Im}}2})}\left(F_{\mathrm{Im}}\right).$$

$$\mu_{t_{\mathrm{Re}}};_{(e_{11},e_{21},\ldots,e_{n_{\mathrm{Re}}1})}\left(F_{\mathrm{Re}}\right)=$$

$$=\mu_{t_{\mathrm{Re}}}\left\{x_{1\cdot}\in H_{\mathrm{Re}};\left(\langle x_{1\cdot},e_{11}\rangle_{H_{\mathrm{Re}}},\langle x_{1\cdot},e_{21}\rangle_{H_{\mathrm{Re}}},\ldots,\langle x_{1\cdot},e_{n_{\mathrm{Re}}1}\rangle_{H_{\mathrm{Re}}}\right)\in F_{\mathrm{Re}}\right\},$$

$$\mu_{t_{\mathrm{Im}}};_{(e_{12},e_{22},\ldots,e_{n_{\mathrm{Im}}2})}\left(F_{\mathrm{Im}}\right)=$$

$$=\mu_{t_{\mathrm{Im}}}\left\{x_{2\cdot}\in H_{\mathrm{Im}};\left(\langle x_{2\cdot},e_{12}\rangle_{H_{\mathrm{Im}}},\langle x_{2\cdot},e_{22}\rangle_{H_{\mathrm{Im}}},\ldots,\langle x_{2\cdot},e_{n_{\mathrm{Im}}2}\rangle_{H_{\mathrm{Im}}}\right)\in F_{\mathrm{Im}}\right\},$$

$$\mu_{t_{\mathrm{Re}}}\left(F_{\mathrm{Re}}\right)=\left(2\pi t_{\mathrm{Re}}\right)^{-\frac{n_{\mathrm{Re}}}{2}}\int\limits_{F_{\mathrm{Re}}}\exp\left[-\left(2t_{\mathrm{Re}}\right)^{-1}|x_{1\cdot}|^2_{H_{\mathrm{Re}}}\right]dx_{1\cdot},$$

$$\mu_{t_{\mathrm{Im}}}\left(F_{\mathrm{Im}}\right)=\left(2\pi t_{\mathrm{Im}}\right)^{-\frac{n_{\mathrm{Im}}}{2}}\int\limits_{F_{\mathrm{Im}}}\exp\left[-\left(2t_{\mathrm{Im}}\right)^{-1}|x_{2\cdot}|^2_{H_{\mathrm{Im}}}\right]dx_{2\cdot},$$

F_{Re} – борелівська підмножина в $P_{n_{\mathrm{Re}}}H_{\mathrm{Re}}$, F_{Im} – борелівська підмножина в $P_{n_{\mathrm{Im}}}H_{\mathrm{Im}}$; $P_{n_{\mathrm{Re}}}$, $P_{n_{\mathrm{Im}}}$ – скінченновимірні ортогональні проектори відповідно в H_{Re}, H_{Im}.

Сім'ї $\left\{\mu_{t_{\mathrm{Re}}};_{(e_{11},e_{21},\ldots,e_{n_{\mathrm{Re}}1})}\right\}$, $\left\{\mu_{t_{\mathrm{Im}}};_{(e_{12},e_{22},\ldots,e_{n_{\mathrm{Im}}2})}\right\}$ є узгодженими сім'ями ймовірностних мір, існують ймовірностні простори $(\Omega_{\mathrm{Re}},m_{\mathrm{Re}})$, $(\Omega_{\mathrm{Im}},m_{\mathrm{Im}})$ і випадкові величини відповідно $\xi_{11},\xi_{21},\ldots,\xi_{n_{\mathrm{Re}}1}$, $\xi_{12},\xi_{22},\ldots,\xi_{n_{\mathrm{Im}}2}$ такі, що

$$m_{\mathrm{Re}}\{\omega;(\xi_{11}(\omega),\xi_{21}(\omega),\dots,\xi_{n_{\mathrm{Re}}1}(\omega))\in F_{\mathrm{Re}}\}=\mu_{t_{\mathrm{Re}};(e_{11},e_{21},\dots,e_{n_{\mathrm{Re}}1})}(F_{\mathrm{Re}})=$$

$$=\mu_{t_{\mathrm{Re}}}\left\{x_{1\cdot}\in H_{\mathrm{Re}}:\left(\langle x_{1\cdot},e_{11}\rangle_{H_{\mathrm{Re}}},\langle x_{1\cdot},e_{22}\rangle_{H_{\mathrm{Re}}},\dots,\langle x_{1\cdot},e_{n_{\mathrm{Re}}1}\rangle_{H_{\mathrm{Re}}}\right)\in F_{\mathrm{Re}}\right\},$$

$$m_{\mathrm{Im}}\{\omega;(\xi_{12}(\omega),\xi_{22}(\omega),\dots,\xi_{n_{\mathrm{Im}}2}(\omega))\in F_{\mathrm{Im}}\}=\mu_{t_{\mathrm{Im}e};(e_{12},e_{22},\dots,e_{n_{\mathrm{Im}}2})}(F_{\mathrm{Im}})=$$

$$=\mu_{t_{\mathrm{Im}}}\left\{x_{2\cdot}\in H_{\mathrm{Im}};\left(\langle x_{2\cdot},e_{12}\rangle_{H_{\mathrm{Im}}},\langle x_{2\cdot},e_{22}\rangle_{H_{\mathrm{Im}}},\dots,\langle x_{2\cdot},e_{n_{\mathrm{Im}}2}\rangle_{H_{\mathrm{Im}}}\right)\in F_{\mathrm{Im}}\right\},$$

є взаємно незалежними в рамках кожної сім'ї гаусівськими випадковими величинами з нульовим середнім випадкового розподілу ξ_{k1}, $k=\overline{1,n_{\mathrm{Re}}}$; ξ_{k2}, $k=\overline{1,n_{\mathrm{Im}}}$ та дисперсіями t_{Re}, t_{Im}.

З одного боку

$$\sum_{k=1}^{\infty}\langle h_{1\cdot},e_{k1}\rangle_{H_{\mathrm{Re}}}n(e_{k1}),\ \sum_{k=1}^{\infty}\langle h_{2\cdot},e_{k2}\rangle_{H_{\mathrm{Im}}}n(e_{k2})$$

збігаються відповідно в $L^2(\Omega_{\mathrm{Re}},m_{\mathrm{Re}})$, $L^2(\Omega_{\mathrm{Im}},m_{\mathrm{Im}})$ до єдиних границь $n_{t_{\mathrm{Re}}}(h_{1\cdot})$, $n_{t_{\mathrm{Im}}}(h_{2\cdot})$; з другого боку, в силу теореми Тулча, границі $n_{t_{\mathrm{Re}}}(h_{1\cdot})$, $n_{t_{\mathrm{Im}}}(h_{2\cdot})$ є випадковою величиною і випадковим елементом відносно ймовірностних просторів $(\Omega_{\mathrm{Re}},m_{\mathrm{Re}})$, $(\Omega_{\mathrm{Im}},m_{\mathrm{Im}})$, причому випадкова величина $n_{t_{\mathrm{Re}}}(h_{1\cdot})$ має нормальний розподіл з нульовим середнім і дисперсією $\left(t_{\mathrm{Re}}|h_{1\cdot}|^2_{H_{\mathrm{Re}}}\right)$, випадковий елемент $n_{t_{\mathrm{Im}}}(h_{2\cdot})$ має нормальний розподіл з нульовим середнім і дисперсією $\left(t_{\mathrm{Im}}|h_{2\cdot}|^2_{H_{\mathrm{Im}}}\right)$.

Оскільки $n_{t_{\mathrm{Re}}}(h_{1\cdot})$ є пов'язаним з абстрактною вінерівською мірою $p_{t_{\mathrm{Re}}}$, $n_{t_{\mathrm{Im}}}(h_{2\cdot})$ є пов'язаним з абстрактною фейнманівською мірою $p_{t_{\mathrm{Im}}}$, міри $p_{t_{\mathrm{Re}}}$ та $p_{t_{\mathrm{Im}}}$ є зчисленноадитивними мірами на борелівських множинах в B_{Re} та B_{Im} відповідно, тензорний добуток мір дає міру, а міри $\mu_{t_{\mathrm{Re}};(e_{11},e_{21},\dots,e_{n_{\mathrm{Re}}1})}$, $\mu_{t_{\mathrm{Im}};(e_{12},e_{22},\dots,e_{n_{\mathrm{Im}}2})}$ являють собою у власному добутку їх узгоджену сім'ю мір, то вагою теореми Колмогорова існує ймовірностний простір (Ω,m) такий, що

$$m\{\omega;(n_{t_{\mathrm{Re}}}(h_{1\cdot}),n_{t_{\mathrm{Im}}}(h_{2\cdot}))\in(F_{\mathrm{Re}}\times F_{\mathrm{Im}})\}=\mu_{\bar{t}\cdot(e_{11},e_{21},\dots,e_{n_{\mathrm{Re}}1},e_{12},e_{22},\dots,e_{n_{\mathrm{Im}}2})}(F_{(2)})=$$

$$=\mu_{\bar{t}}\Big\{x\in(H_{\mathrm{Re}}\times H_{\mathrm{Im}});\Big(\langle x_{1\cdot},e_{11}\rangle_{H_{\mathrm{Re}}},\langle x_{1\cdot},e_{21}\rangle_{H_{\mathrm{Re}}},\dots,\langle x_{1\cdot},e_{n_{\mathrm{Re}}1}\rangle_{H_{\mathrm{Re}}},$$

$$\langle x_{2\cdot},e_{12}\rangle_{H_{\mathrm{Im}}},\langle x_{2\cdot},e_{22}\rangle_{H_{\mathrm{Im}}},\dots,\langle x_{2\cdot},e_{n_{\mathrm{Im}}2}\rangle_{H_{\mathrm{Im}}}\Big)\in F_{(2)}\Big\},$$

і модуль

$$|n_{\bar{t}}(h)|=\sqrt{n_{t_{\mathrm{Re}}}^2(h_{1\cdot})+n_{t_{\mathrm{Im}}}^2(h_{2\cdot})}$$

є випадковою величиною відносно (Ω,m). Тоді $n_{\bar{t}}(h)$ характеризується деяким характеристичним функціоналом $\varphi_{n_{\bar{t}}(h)}$, і можемо обчислити цей характеристичний функціонал, як математичне сподівання $E_m(e^{i(\cdot)})$. Враховуючи (4.66), (4.69), одержуємо

$$\varphi_{n_{\bar{t}}(h)}=E_m\Bigg(\exp\Bigg[i\Big\langle h_{1\cdot},\sum_{k=1}^{\infty}(\cdot,e_{k1})_{B_{\mathrm{Re}}}n_{t_{\mathrm{Re}}}(e_{k1})\Big\rangle_{H_{\mathrm{Re}}}+$$

$$+i\Big\langle h_{2\cdot},\sum_{k=1}^{\infty}(\cdot,e_{k2})_{B_{\mathrm{Im}}}n_{t_{\mathrm{Im}}}(e_{k2})\Big\rangle_{H_{\mathrm{Im}}}\Bigg]\Bigg)=$$

$$=E_m\Bigg(\exp\Bigg[i\sum_{k=1}^{\infty}\langle h_{1\cdot},e_{k1}\rangle_{H_{\mathrm{Re}}}n_{t_{\mathrm{Re}}}(e_{k1})+i\sum_{k=1}^{\infty}\langle h_{2\cdot},e_{k2}\rangle_{H_{\mathrm{Im}}}n_{t_{\mathrm{Im}}}(e_{k2})\Bigg]\Bigg).$$

Математичне сподівання $\varphi_{n_{\bar{t}}(h)}$ шукаємо по ймовірностній мірі $p_{\bar{t}}$, відповідній мірі m. З одного боку, враховуємо, що по координатна збіжність щодо $p_{t_{\mathrm{Re}}}$ і $p_{t_{\mathrm{Im}}}$ в скінченновимірних просторах $B_{(2)}$ є еквівалентною збіжності щодо $p_{\bar{t}}$. З другого боку, вимірність модуля $|n_{\bar{t}}(h)|$ $\forall h$ із врахуванням попереднього означає, що направленість $\|P_N\cdot\|^{\sim}$ збігається по ймовірності на Ω, коли проектори P_N, $N=(n_{\mathrm{Re}},n_{\mathrm{Im}})$ прямують до тотожнього оператора I сильно по направленій частково випадкованій множині τ

скінченновимірних ортопроекторів P_n в $H_{(2)}$, $P_N = \left(P_{n_{\mathrm{Re}}}, P_{n_{\mathrm{Im}}}\right)$. Це означає, що можна вибрати таку підпослідовність проекторів в $\{P_N\}$, що розглянута збіжність $n_{\bar{t}}(h)$ буде збіжністю майже скрізь в $B_{(2)}$ щодо міри $p_{\bar{t}}$, яка є продовженням циліндричної міри $\mu_{\bar{t}}$ в $H_{(2)}$ на борелівське поле в $B_{(2)}$, $H_{(2)} \subset B_{(2)}$, тобто розглянута збіжність буде збіжністю скрізь в $H_{(2)}$ на борелівських множинах в $H_{(2)}$, які є одночасно борелівськими множинами в $B_{(2)}$, що нам і потрібно. В силу узгодженості сімей мір $\mu_{t_{\mathrm{Re}};\left(e_{11}, e_{21}, \ldots, e_{n_{\mathrm{Re}}1}\right)}$, $\mu_{t_{\mathrm{Im}};\left(e_{12}, e_{22}, \ldots, e_{n_{\mathrm{Im}}2}\right)}$, $\mu_{\bar{t};\left(e_{11}, e_{21}, \ldots, e_{n_{\mathrm{Re}}1}, e_{12}, e_{22}, \ldots, e_{n_{\mathrm{Im}}2}\right)}$ з урахуванням попереднього

$$\varphi_{n_{\bar{t}}}(h) = \lim_{n_{\mathrm{Re}} \to \infty}\left(\int_{R^{n_{\mathrm{Re}}}} \exp\left[i\sum_{k=1}^{n_{\mathrm{Re}}} \langle h_1, e_{k1}\rangle_{H_{\mathrm{Re}}} n_{t_{\mathrm{Re}}}(e_{k1})\right] du_{11} du_{21} \ldots du_{n_{\mathrm{Re}}1}\right) \times$$

$$\times \lim_{n_{\mathrm{Im}} \to \infty}\left(\int_{R^{n_{\mathrm{Im}}}} \exp\left[i\sum_{k=1}^{n_{\mathrm{Im}}} \langle h_2, e_{k2}\rangle_{H_{\mathrm{Im}}} n_{t_{\mathrm{Im}}}(e_{k2})\right] du_{12} du_{22} \ldots du_{n_{\mathrm{Im}}2}\right).$$

Враховуємо структуру розподілів $n_{t_{\mathrm{Re}}}(h_1)$, $n_{t_{\mathrm{Im}}}(h_2)$ і одержуємо

$$\varphi_{n_{\bar{t}}}(h) = \lim_{n_{\mathrm{Re}} \to \infty}\left(\int_{R^{n_{\mathrm{Re}}}} \exp\left[i\sum_{k=1}^{n_{\mathrm{Re}}} \langle h_1, e_{k1}\rangle_{H_{\mathrm{Re}}} u_{k1}\right] (2\pi t_{\mathrm{Re}})^{-\frac{n_{\mathrm{Re}}}{2}} \times\right.$$

$$\left.\times \exp\left[-\sum_{k=1}^{n_{\mathrm{Re}}} \frac{u_{k1}^2}{2t_{\mathrm{Re}}}\right] du_{11} du_{21} \ldots du_{n_{\mathrm{Re}}1}\right) \lim_{n_{\mathrm{Im}} \to \infty}\left(\int_{R^{n_{\mathrm{Im}}}} \exp\left[i\sum_{k=1}^{n_{\mathrm{Im}}} \langle h_2, e_{k2}\rangle_{H_{\mathrm{Im}}} u_{k2}\right] \times\right.$$

$$\left.\times (2\pi t_{\mathrm{Im}})^{-\frac{n_{\mathrm{Im}}}{2}} \exp\left[-\sum_{k=1}^{n_{\mathrm{Im}}} \frac{u_{k2}^2}{2t_{\mathrm{Im}}}\right] du_{12} du_{22} \ldots du_{n_{\mathrm{Im}}2}\right) =$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{2} t_{\mathrm{Re}} |h_1|_{H_{\mathrm{Re}}}^2 - \frac{1}{2} t_{\mathrm{Im}} |h_2|_{H_{\mathrm{Im}}}^2\right].$$

Теорему доведено.

3.7. Відповідність підмножини ймовірностного простору комплексному сепарабельному гільбертовому простору

Наслідок. Існує взаємно однозначна відповідність між комплексним сепарабельним гільбертовим простором $H_{(2)}$ і випадковими векторами $n_{\bar{i}}(h)$, $h \in H_{(2)}$.

Доведення. Розглянемо, спершу, випадок гільбертових просторів H_{Re}, H_{Im} і відповідних розподілів $n_{t_{\mathrm{Re}}}(h_{1\cdot})$, $n_{t_{\mathrm{Im}}}(h_{2\cdot})$, $h_{1\cdot} \in H_{\mathrm{Re}}$, $h_{2\cdot} \in H_{\mathrm{Im}}$.

Єдиність відповідності кожному $h_{1\cdot}$ та $h_{2\cdot}$ розподілів $n_{t_{\mathrm{Re}}}(h_{1\cdot})$ та $n_{t_{\mathrm{Im}}}(h_{2\cdot})$ очевидна.

Гільбертовому простору H_{Re} ставиться у відповідність деякий ймовірностний простір $(\Omega_{\mathrm{Re}}, m_{\mathrm{Re}})$ тим, що кожному орту $e_{k1} \in \{e_{k1}\}$ у відповідність ставиться нормальна випадкова величина $n_{t_{\mathrm{Re}}}(e_{k1})$, $k = \overline{1,\infty}$. Тоді ж тотожнє відображення простору B^{*}_{Re}, спряженого до B_{Re}, розглядуване як скрізь щільно визначене відображення спряженого простору $H^{*}_{\mathrm{Re}} = H_{\mathrm{Re}}$ в множину випадкових величин на ймовірностному просторі $\left(B_{\mathrm{Re}}, p_{t_{\mathrm{Re}}}\right)$ продовжується до зображення нормального розподілу $n_{t_{\mathrm{Re}}}$.

Аналогічно для уявного гільбертового простору H_{Im} ставиться у відповідність деякий ймовірностний простір $\left(\Omega_{\mathrm{Im}}, p_{t_{\mathrm{Im}}}\right)$.

Таким чином, в рамках означеного попередньо, діючи відображенням $n_{t_{\mathrm{Re}}}(\cdot)$ на $h_{1\cdot} \in H_{\mathrm{Re}}$, $n_{t_{\mathrm{Im}}}(\cdot)$ на $h_{2\cdot} \in H_{\mathrm{Im}}$, отримуємо

$$n_{t_{\mathrm{Re}}}(\cdot): h_{1\cdot} = \sum_{k=1}^{\infty} \langle h_{1\cdot}, e_{k1} \rangle_{H_{\mathrm{Re}}} e_{k1} \to n_{t_{\mathrm{Re}}}(h_{1\cdot}) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle h_{1\cdot}, e_{k1} \rangle_{H_{\mathrm{Re}}} n_{t_{\mathrm{Re}}}(e_{k1}),$$

$$n_{t_{\mathrm{Im}}}(\cdot): h_{2\cdot} = \sum_{k=1}^{\infty} \langle h_{2\cdot}, e_{k2} \rangle_{H_{\mathrm{Im}}} e_{k2} \to n_{t_{\mathrm{Im}}}(h_{2\cdot}) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle h_{2\cdot}, e_{k2} \rangle_{H_{\mathrm{Im}}} n_{t_{\mathrm{Im}}}(e_{k2}).$$

У виразах $n_{t_{\mathrm{Re}}}(e_{k1})$, $n_{t_{\mathrm{Im}}}(e_{k2})$ – гаусівські випадкові величини, однозначно визначені параметрами – математичним сподіванням та дисперсією, тобто взаємна однозначність легко забезпечується підбором цих параметрів співвідносно кожному e_{k1}, e_{k2}. Випадкові величини $n_{t_{\text{Re}}}(e_{k1})$ є взаємно незалежними випадковими величинами, як і випадкові елементи $n_{t_{\text{Im}}}(e_{k2})$. Отже, існують і обернені відображення $n_{t_{\text{Re}}}^{-1}(\cdot)$, $n_{t_{\text{Im}}}^{-1}(\cdot)$ із підлеглих відповідних ймовірностних просторів $(\Omega_{\text{Re}}, m_{\text{Re}})$, $(\Omega_{\text{Im}}, m_{\text{Im}})$ в відповідні простори $\left(B_{\text{Re}}, p_{t_{\text{Re}}}\right)$, $\left(B_{\text{Im}}, p_{t_{\text{Im}}}\right)$.

$$n_{t_{\text{Re}}}^{-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\langle h_{1\cdot}, e_{k1}\rangle_{H_{\text{Re}}} n_{t_{\text{Re}}}(e_{k1})\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\langle h_{1\cdot}, e_{k1}\rangle_{H_{\text{Re}}} e_{k1} = h_{1\cdot},$$

$$n_{t_{\text{Im}}}^{-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\langle h_{2\cdot}, e_{k2}\rangle_{H_{\text{Im}}} n_{t_{\text{Im}}}(e_{k2})\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\langle h_{2\cdot}, e_{k2}\rangle_{H_{\text{Im}}} e_{k2} = h_{2\cdot}.$$

Узгодженість сім'ї мір $p_{\bar{t}}$, належність $\{e_{k1}\}$, $k=\overline{1,\infty}$ та $\{e_{k2}\}$, $k=\overline{1,\infty}$ одному базису в $H_{(2)}$, структура міри $p_{\bar{t}}$ та структура декартового добутку $(i_{\text{Re}}, H_{\text{Re}}, B_{\text{Re}}) \times (i_{\text{Im}}, H_{\text{Im}}, B_{\text{Im}})$ надають можливість для випадку $\left(B_{(2)}, p_{\bar{t}}\right)$ доведення завершити по індукції, тобто $n_{\bar{t}}(h)$, $h \in H_{(2)}$ вважати надалі лінійним взаємно однозначним відображенням $H_{(2)}$ в ймовірностний простір (Ω, m).

Щодо норми, породженої скалярним добутком в $H_{(2)}$, гільбертів простір $H_{(2)}$ є повним. Отже, виникає можливість говорити про деякий аспект повноти лінійної оболонки незалежних випадкових величин $n(e_{k1})$, $k=\overline{1,\infty}$; $n(e_{k2})$, $k=\overline{1,\infty}$ в ймовірностному просторі (Ω, m) та про розклад по незалежних гаусівських випадкових величинах в (Ω, m).

Наслідок. Ймовірностні простори $(\Omega_{\text{Re}}, m_{\text{Re}})$, $(\Omega_{\text{Im}}, m_{\text{Im}})$, (Ω, m) містять гільбертові простори, причому $(\Omega_{\text{Re}}, m_{\text{Re}})$ містить дійсний гільбертів простір, $(\Omega_{\text{Im}}, m_{\text{Im}})$ містить уявний гільбертів простір, (Ω, m) містить комплексний гільбертів простір.

Доведення. Доводитимемо, спершу, для $(\Omega_{\text{Re}}, m_{\text{Re}})$. Розглянемо лінійну оболонку $n(e_{k1})$ виключно як із взаємно однозначного відображення. Якщо в лінійній оболонці $n_{t_{\text{Re}}}(e_{k1})$, беручи базисом $n_{t_{\text{Re}}}(e_{k1})$, – скалярний добуток запровадити формулою

$$\left\langle\left\langle n_{t_{\text{Re}}}(x_{1\cdot}), n_{t_{\text{Re}}}(y_{1\cdot})\right\rangle\right\rangle_{\text{Re}} = \langle x_{1\cdot}, y_{1\cdot}\rangle_{H_{\text{Re}}},$$

причому під скалярним добутком $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle_{\text{Re}}$ двох елементів цієї оболонки розуміти приведене математичне сподівання

$$t_{\text{Re}}^{-1}E_{m_{\text{Re}}}\left(n_{t_{\text{Re}}}(x_{1\cdot})\cdot n_{t_{\text{Re}}}(y_{1\cdot})\right)$$

добутку випадкових величини $n_{t_{\text{Re}}}(x_{1\cdot})$, $n_{t_{\text{Re}}}(y_{1\cdot})$, то лінійна оболонка $n(e_{k1})$ перетворюється в гільбертів простір.

Перевірка факту, що

$$t_{\text{Re}}^{-1}E_{m_{\text{Re}}}\left(n_{t_{\text{Re}}}(e_{k1})\cdot n_{t_{\text{Im}}}(y_{r1})\right)=\begin{cases}1, & k=r\\ 0, & k\neq r\end{cases}$$

легко здійснювана в силу попереднього, як і з'ясування виконанності аксіом гільбертового простору.

Цілком аналогічно доведення будується для $(\Omega_{\text{Im}}, m_{\text{Im}})$.

Взаємна незалежність випадкових величин $n_{t_{\text{Re}}}(e_{k1})$, та – аналогічно – взаємна незалежність випадкових величин $n_{t_{\text{Im}}}(e_{k2})$ і відповідне нормування $n_{t_{\text{Re}}}(e_{k1})$, $n_{t_{\text{Im}}}(e_{k2})$ надають можливість $n_{t_{\text{Re}}}(e_{k1})$, $n_{t_{\text{Im}}}(e_{k2})$ вважати кожні конкретно ортонормованими.

Сепарабельність просторів H_{Re}, H_{Im} подиктовує можливість розуміти лінійні оболонки $n_{t_{\text{Re}}}(e_{k1})$, $n_{t_{\text{Im}}}(e_{k2})$ квазісепарабельними в розумінні сепарабельності, привнесеної ізометрією з гільбертовим сепарабельним простором.

Дана квазісепарабельність є одним із аспектів оцінки існування та структури зчисленної скрізь щільної множини в Ω_{Re}, Ω_{Im}, оскільки нормальні розподіли $n_{t_{\text{Re}}}(e_{k1})$, $n_{t_{\text{Im}}}(e_{k2})$ обіймають дуже важливі функції в силу центральної граничної теореми.

Доведення для випадків $(\Omega_{\mathrm{Re}}, m_{\mathrm{Re}})$, $(\Omega_{\mathrm{Im}}, m_{\mathrm{Im}})$ є завершеним. Для випадку (Ω, m) впроваджуємо скалярний добуток і відповідну норму у лінійній оболонці $\left(n_{t_{\mathrm{Re}}}(x_{1\cdot}), n_{t_{\mathrm{Im}}}(x_{2\cdot})\right)$ згідно формул

$$\left\langle\left\langle n_{\bar{t}}(x), n_{\bar{t}}(y)\right\rangle\right\rangle = \left\langle\left\langle n_{t_{\mathrm{Re}}}(x_{1\cdot}), n_{t_{\mathrm{Re}}}(y_{1\cdot})\right\rangle\right\rangle_{\mathrm{Re}} + \left\langle\left\langle n_{t_{\mathrm{Im}}}(x_{2\cdot}), n_{t_{\mathrm{Im}}}(y_{2\cdot})\right\rangle\right\rangle_{\mathrm{Im}} =$$

$$= t_{\mathrm{Re}}^{-1} E_{m_{\mathrm{Re}}}\left(n_{t_{\mathrm{Re}}}(x_{1\cdot}) \cdot n_{t_{\mathrm{Re}}}(y_{1\cdot})\right) + t_{\mathrm{Im}}^{-1} E_{m_{\mathrm{Im}}}\left(n_{t_{\mathrm{Im}}}(x_{2\cdot}) \cdot n_{t_{\mathrm{Im}}}(y_{2\cdot})\right),$$

$$\left|n_{\bar{t}}(x)\right|^2 = \left\langle\left\langle n_{t_{\mathrm{Re}}}(x_{1\cdot}), n_{t_{\mathrm{Re}}}(x_{1\cdot})\right\rangle\right\rangle_{\mathrm{Re}} + \left\langle\left\langle n_{t_{\mathrm{Im}}}(x_{2\cdot}), n_{t_{\mathrm{Im}}}(x_{2\cdot})\right\rangle\right\rangle_{\mathrm{Im}}.$$

Таким чином, побудовано ізометрію між комплексним сепарабельним гільбертовим простором $H_{(2)}$ та лінійною оболонкою $\left(n_{t_{\mathrm{Re}}}(e_{k1}), n_{t_{\mathrm{Im}}}(e_{k2})\right)$, $k = \overline{1, \infty}$.

3.8. Питання власних чисел

Для побудови власних чисел і власних векторів лінійного оператора A в $H_{(2)}$ і $B_{(2)}$ розглянемо $\lambda = \lambda_{\mathrm{Re}} + i\lambda_{\mathrm{Im}}$ – комплексне власне число лінійного оператора A, означене рівністю

$$Ax = \lambda x\ ,$$

де $x = x_{1\cdot} + x_{2\cdot}$, причому відповідний власному числу λ елемент x є власним вектором оператора A, $\lambda \in \left(R^1 + iR^1\right)$.

Для звуження лінійного оператора A на $P_{\bar{n}}\ H_{(2)}$ розглянемо власні числа λ_n і відповідні власні вектори x_n, цебто

$$A\,P_{\bar{n}}\,x_n = \lambda_n\,P_{\bar{n}}\,x_n\ .$$

Теорема. Для обмеженого лінійного оператора $A : B_{(2)} \to B_{(2)}$ власні числа і власні вектори знаходяться в результаті розширення комплексного гільбертового сепарабельного простору $H_{(2)}$ до комплексного банахового сепарабельного простору $B_{(2)}$ в результаті процедури побудови абстрактного вінерівського простору $\left(i_{(2)}, H_{(2)}, B_{(2)}\right)$ після граничних переходів

$$\lim_{\bar{n}\to\infty} \lambda_{\bar{n}} = \lambda, \quad \lim_{\bar{n}\to\infty} x_{\bar{n}} = x \in H_{(2)} \subset B_{(2)}\ .$$

При цьому збіжність ми розглядаємо в сенсі сильної збіжності.

Доведення. Збіжність $\{\lambda_{\bar{n}}\}$ як комплексної числової послідовності до λ при $\bar{n} \to \infty$ та $P_{\bar{n}} \to I$ тотожнього в $H_{(2)}$ по будь-якій підпослідовності дає еквівалентний ефект.

Розглянемо збіжність $\{A P_{\bar{n}} x_{\bar{n}}\}$ при $\bar{n} \to \infty$ і $P_{\bar{n}} \to I$, причому враховуємо передуючу збіжність $P_{\bar{n}} \to I$ паралельно з розглядом збіжності $\{P_{\bar{n}} x_{\bar{n}}\}$.

Для обмеженого лінійного оператора A і направленості $\{AP_{\bar{n}}\}$ випадковий елемент $\widetilde{A}$ має смисл, і $\widetilde{A} = A$ майже скрізь відносно $p_{\bar{I}}$.

Отже, можна вибрати таку підпослідовність $\{P_{\bar{n}}\} \in F$, сильно збіжну до тотожнього відображення, що $\{AP_{\bar{n}}(\cdot)\}$ збігається до A майже скрізь відносно $p_{\bar{I}}$.

Оскільки кожен проектор $P_{\bar{n}}$ можна продовжити по неперервності з $H_{(2)}$ до проектора $P_{\bar{I}}^{*}$ в банаховому комплексному просторі $B_{(2)}$, то одержимо потрібний граничний перехід.

РОЗДІЛ 4

Абстрактний інтеграл по гаусівській мірі в комплексному просторі з нескінченно кратними дійсною та уявною частинами

4.1. Абстрактний інтеграл по гаусівській мірі з нескінченнократною дійсною частиною та однократною уявною частиною

Абстрактним інтегралом по гаусівській мірі в комплексному просторі з нескінченнократною дійсною частиною та однократною уявною частиною будемо називати

$$\int\limits_{B_{(2),\infty}} f(y)\, p_{\bar{t}}(dy), \tag{4.1}$$

де $B_{(2),\infty} = B_{\mathrm{Re},\infty} \times B_{\mathrm{Im}}$, $B_{\mathrm{Re},\infty}$ – дійсний сепарабельний банахів простір, B_{Im} – уявний сепарабельний банахів простір; $p_{\bar{t}}(U_1 \times U_2) = p_{\bar{t}_{\mathrm{Re},\infty}}(U_1) \cdot p_{t_{\mathrm{Im}}}(U_2)$ – абстрактна вінерівська міра в $B_{(2),\infty}$, $U_1 \subset B_{\mathrm{Re},\infty}$, $U_2 \subset B_{\mathrm{Im}}$, $p_{\bar{t}_{\mathrm{Re},\infty}}(U_1)$ – нескінченнократна абстрактна вінерівська міра в $B_{\mathrm{Re},\infty}$, яким розуміємо елемент $\left(i_{\mathrm{Re},\infty}, H_{\mathrm{Re},\infty}, B_{\mathrm{Re},\infty}\right)$ нескінченного добутку абстрактних вінерівських просторів, і

$$p_{\bar{t}_{\mathrm{Re},\infty}}(u_1) = \lim_{l\to\infty} \prod_{j=1}^{l} p_{t_j}\left(u_{1j}\right), \tag{4.2}$$

$U_1 = U_{11} \times U_{21} \times \ldots \times U_{l1} \times \ldots$, $U_{l1} \in B_{\mathrm{Re},l}$ – банаховому сепарабельному дійсному простору з абстрактною вінерівською мірою p_{t_l} при $\bar{t}_{\mathrm{Re},\infty} = (t_1, t_2, \ldots, t_l, \ldots)$, $t_l > 0$; $\bar{t} = \left(\bar{t}_{\mathrm{Re},\infty}, t_{\mathrm{Im}}\right)$.

Абстрактний вінерівський інтеграл (4.1) розглядаємо в абстрактному вінерівському просторі $\left(i_{(2),\infty}, H_{(2),\infty}, B_{(2),\infty}\right)$, де $i_{(2),\infty}$ є відношення включення $H_{(2),\infty} \subset B_{(2),\infty}$; $H_{\mathrm{Re},\infty}$ – дійсний сепарабельний гільбертів простір, H_{Im} – уявний сепарабельний гільбертів простір, $H_{(2),\infty} = H_{\mathrm{Re},\infty} \times H_{\mathrm{Im}}$, $p_{t_{\mathrm{Im}}}(u_2)$ – абстрактна фейнманівська міра в абстрактному фейнманівському просторі $\left(i_{\mathrm{Im}}, H_{\mathrm{Im}}, B_{\mathrm{Im}}\right)$.

Інтеграл (4.1) розуміємо в сенсі Бохнера.

Цим самим інтеграл (4.1) ми розглядаємо як абстрактний інтеграл по мірі $p_{\bar{t}}$ в комплексному просторі.

Тут міру $p_{\bar{t}}$ розуміємо як розвиток в межах структури абстрактного вінерівського простору $\left(i_{(2),\infty}, H_{(2),\infty}, B_{(2),\infty}\right)$ гаусівської циліндричної міри в комплексному гільбертовому просторі $H_{(2)}$, яку беремо в вигляді

$$\mu_{\bar{t}}\left(E_{(2)}\right) = \mu_{\bar{t}_{\mathrm{Re},\infty}}\left(E_{\mathrm{Re},\infty}\right)\cdot\mu_{t_{\mathrm{Im}}}\left(E_{\mathrm{Im}}\right) =$$

$$= \left(2\pi t_{\mathrm{Im}}\right)^{-\frac{n_{\mathrm{Im}}}{2}}\prod_{j=1}^{\infty} t_j^{-\frac{n_j}{2}}\int\limits_{F_j}\exp\left\{-\frac{n_j}{2}\ln 2\pi - \frac{\left|x_j\right|^2_{P_{n_j}H_j}}{2t_j}\right\}dx_j \times$$

$$\times\int\limits_{F_{\mathrm{Im}}}\exp\left\{-\frac{\left|x_{\mathrm{Im}}\right|^2_{P_{n_{\mathrm{Im}}}H_{\mathrm{Im}}}}{2t_{\mathrm{Im}}}\right\}dx_{\mathrm{Im}},$$

де $E_{(2)} = \left(E_{\mathrm{Re},\infty}\times E_{\mathrm{Im}}\right)\subset H_{(2),\infty}$; $E_{\mathrm{Re},\infty}\subset H_{\mathrm{Re},\infty}$; $E_{\mathrm{Im}}\subset H_{\mathrm{Im}}$, $n_{\mathrm{Im}} = \dim P_{n_{\mathrm{Im}}}H_{\mathrm{Im}}$; $n_j = \dim P_{n_j}H_j$, $H_{\mathrm{Re},\infty} = H_1\times H_2\times\ldots\times H_j\times\ldots$; $E_{\mathrm{Re},\infty}$, E_{Im} – циліндричні множини відповідно в дійсному $H_{\mathrm{Re},\infty}$, уявному H_{Im}; F_j, F_{Im} – борелівські підмножини у відповідно $P_{n_j}H_j$, $P_{n_{\mathrm{Im}}}H_{\mathrm{Im}}$, $j=\overline{1,\infty}$; P_{n_j}, $P_{n_{\mathrm{Im}}}$ – ортопроектори відповідно в H_j та H_{Im}.

Розглянемо лінійні перетворення зсуву в абстрактному інтегралі по гаусівській мірі в комплексному просторі з нескінченнократною дійсною частиною та однократною уявною частиною.

Покладемо

$$p_{\bar{t}}\left(x, U_{(2)}\right) = p_{\bar{t}}\left(U_{(2)} + x\right),$$

де $x\in B_{(2),\infty}$, $U_{(2)}\subset B_{(2),\infty}$, $U_{(2)} = U_1\times U_2$, $U_1\subset B_{\mathrm{Re},\infty}$, $U_2\subset B_{\mathrm{Im}}$.

Теорема. Якщо $h\in H_{(2),\infty}$, то при перетворенні $y = Ix + h$ міри $p_{\bar{t}}(h,\cdot)$ і $p_{\bar{t}}$ еквівалентні, і

$$\int\limits_{B_{(2),\infty}} f(y)p_{\bar{l}}(dy) = \int\limits_{B_{(2),\infty}} f(x+h)\exp\Bigg\{-\bigg[-(2t_{\mathrm{Im}})^{-1}|h_{2\cdot}|^2_{H_{\mathrm{Im}}} - t_{\mathrm{Im}}^{-1}(h_{2\cdot}, x_{2\cdot})_{B_{\mathrm{Im}}} +$$

$$+\sum_{l=1}^{\infty}(2t_l)^{-1}|(h_{1\cdot})_l|^2_{H_l} + \sum_{l=1}^{\infty}t_l^{-1}((h_{1\cdot})_l, (x_{1\cdot})_l)_{B_l}\bigg]\Bigg\} p_{\bar{l}}(dx).$$

Тут $h = (h_{1\cdot}, h_{2\cdot})$, оператор I є тотожнім оператором $B_{(2),\infty}$.

Виходимо із структури тотожнього відображення в $B_{(2),\infty}$ вигляду

$$I = \begin{pmatrix} I_{\mathrm{Re},\infty} & 0 \\ 0 & I_{\mathrm{Im}} \end{pmatrix},$$

де $I_{\mathrm{Re},\infty}$ – тотожнє відображення в $B_{\mathrm{Re},\infty}$, I_{Im} – тотожнє відображення в B_{Im}.

Нехай лінійний оператор $K: B_{(2),\infty} \to H_{(2),\infty}$ має структуру

$$K = \begin{pmatrix} K_{\mathrm{Re}} & K_{\mathrm{Im,Re}} \\ K_{\mathrm{Im,Re}} & K_{\mathrm{Im}} \end{pmatrix},$$

де $K_{\mathrm{Re}}: B_{\mathrm{Re},\infty} \to H_{\mathrm{Re}}$, $K_{\mathrm{Re,Im}}: B_{\mathrm{Re},\infty} \to H_{\mathrm{Im}}$, $K_{\mathrm{Im,Re}}: B_{\mathrm{Im}} \to H_{\mathrm{Re},\infty}$, $K_{\mathrm{Im}}: B_{\mathrm{Im}} \to H_{\mathrm{Im}}$.

Розглянемо

$$T = I + K, \ T: B_{(2),\infty} \to B_{(2),\infty}, \ \det T = \prod_s (1+\lambda_s),$$

де λ_s – власні числа оператора K.

Позначимо

$$p_{\bar{l}} \circ T(U) = p_{\bar{l}}(T(U)).$$

Теорема. Нехай T – лінійне відображення $B_{(2),\infty}$ в себе, і виконуються умови:

(а) $K(B_{(2),\infty}) \subset H_{(2),\infty}$;

(б) Для оператора T існує обернене лінійне відображення $H_{(2),\infty}$ в себе;

(в) $K \in \mathcal{L}_1(H_{(2),\infty})$.

Тоді міри $p_{\bar{l}} \circ T(u)$ і $p_{\bar{l}}$ є еквівалентними, і

$$\int\limits_{B_{(2),\infty}} f(y)p_l^{\sim}(dy) = \int\limits_{B_{(2),\infty}} f(Tx)\exp\Big\{-(2t_{\mathrm{Im}})^{-1}\Big[\langle K_{\mathrm{Im}}x_{2\cdot}, K_{\mathrm{Im}}x_{2\cdot}\rangle_{H_{\mathrm{Im}}} +$$

$$+2(K_{\mathrm{Im}}x_{2\cdot}, x_{2\cdot})_{B_{\mathrm{Im}}}\Big] - \sum_{l=1}^{\infty}(2t_l)^{-1}\Bigg[\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\langle K_{lj}x_{1j\cdot}, K_{lm}x_{1m\cdot}\rangle_{H_l} +$$

$$+2\sum_{j=1}^{\infty}(K_{lj}x_{1j\cdot}, x_{1l\cdot})_{B_l}\Bigg]\Bigg\}\left|\det T\right| p_l^{\sim}(dx),$$

де

$$K_{\mathrm{Re}} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1l} & \dots \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2l} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{l_1} & K_{l_2} & \dots & K_{l_l} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Нехай $T = I + K$ є нелінійне відображення $B_{(2),\infty}$ в себе, $K_{\mathrm{Re}}(x_{1\cdot\cdot}, x_{2\cdot}) \in H_{\mathrm{Re},\infty}$, $K_{\mathrm{Im}}(x_{1\cdot\cdot}, x_{2\cdot}) \in H_{\mathrm{Im}}$; $\frac{\delta K_{\mathrm{Re}}}{\delta x_{1\cdot\cdot}}$, $\frac{\delta K_{\mathrm{Re}}}{\delta x_{2\cdot}}$, $\frac{\delta K_{\mathrm{Im}}}{\delta x_{1\cdot\cdot}}$, $\frac{\delta K_{\mathrm{Im}}}{\delta x_{2\cdot}}$ – часткові похідні Фреше;

$$\det T = \det(I + K) = \prod_s (1 + \lambda_s),$$

де λ_s – власні числа оператора K',

$$Kx = \begin{pmatrix} K_{\mathrm{Re}}(x_{1\cdot\cdot}, x_{2\cdot}) \\ K_{\mathrm{Im}}(x_{1\cdot\cdot}, x_{2\cdot}) \end{pmatrix}, \quad K' = \begin{pmatrix} \frac{\delta K_{\mathrm{Re}}}{\delta x_{1\cdot\cdot}} & \frac{\delta K_{\mathrm{Re}}}{\delta x_{2\cdot}} \\ \frac{\delta K_{\mathrm{Im}}}{\delta x_{1\cdot\cdot}} & \frac{\delta K_{\mathrm{Im}}}{\delta x_{2\cdot}} \end{pmatrix}.$$

Теорема. Припустимо, що для T виконуються умови:

(а) $K(B_{(2),\infty}) \subset H_{(2),\infty}$;

(б) Для K в $H_{(2),\infty}$ існує обернене відображення K^{-1};

(в) Існує $K' \in L_1(H_{(2),\infty})$.

Тоді міри $p_{\bar{l}} \circ T$ і $p_{\bar{l}}$ є еквівалентними, і для довільної обмеженої $p_{\bar{l}}$-інтегровної в сенсі Бохнера функції $f(y)$ зі значеннями в дійсному банаховому просторі

$$\int\limits_{B_{(2),\infty}} f(y)\,p_{\bar{l}}(dy) = \int\limits_{B_{(2),\infty}} f(Tx)\exp\left\{\frac{1}{2}t_{\mathrm{Im}}^{-1}\left[2\left(K_{\mathrm{Im}}(x_{1\cdot\cdot},x_{2\cdot}),x_{2\cdot}\right)_{B_{\mathrm{Im}}} + \right.\right.$$

$$\left. + \left\langle K_{\mathrm{Im}}(x_{1\cdot\cdot},x_{2\cdot}),K_{\mathrm{Im}}(x_{1\cdot\cdot},x_{2\cdot})\right\rangle_{H_{\mathrm{Im}}}\right] - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} t_n^{-1} \times$$

$$\left.\times\left[2\left(K_n(x_{1\cdot},x_{2\cdot},\dots,x_{l\cdot},\dots),x_{n\cdot}\right)_{B_n} + \left|K_n(x_{1\cdot},x_{2\cdot},\dots,x_{l\cdot},\dots)\right|_{H_n}^2\right]\right\}\left|\det T\right| p_{\bar{l}}(dx).$$

Тут $(\cdot,\cdot)_{B_n}$ – канонічна білінійна форма, що призводить B_n і B_n^* до двоїстості; $B_{\mathrm{Re},\infty} = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n \times \dots$, $x_{1\cdot\cdot} = (x_{1\cdot},x_{2\cdot},\dots,x_{l\cdot},\dots)$.

Лема. Для абстрактного інтегралу по гаусівській мірі в комплексному просторі з нескінченнократною дійсною частиною та однократною уявною частиною виконується теорема Фубіні про зміну порядку інтегрування за умови сильної інтегровності підінтегральної функції.

Доведення. Розглянемо сильний абстрактний інтеграл $\int\limits_{B_{(2),\infty}} f(x)p_{\bar{l}}(dx)$, тобто вимагаємо

$$\int\limits_{B_{(2),\infty}} \left\|f(x)\right\|_{B_0} p_{\bar{l}}(dx) < \infty,$$

де $f(x) \in B_0$ в банаховому $\forall f(x)$, інтегровної по Бохнеру по мірі $p_{\bar{l}}$.

$$\int\limits_{B_{(2),\infty}} f(x)p_{\bar{l}}(dx) = \lim_{\bar{n}\to\infty} \int\limits_{P_{\bar{n}}H_{(2),\infty}} g(P_{\bar{n}}x)\mu_{\bar{l}}(dP_{\bar{n}}x).$$

Тут $g = f\big|_{H_{(2),\infty}}$ – звуження $f(x)$ на $H_{(2),\infty}$, $P_{\bar{n}}$ – послідовність ортопроекторів $\left(P_{n_{\mathrm{Re}}},P_{n_{\mathrm{Im}}}\right)$, сильно збіжна до тотожнього оператора в $H_{(2),\infty}$.

Формулою питання про заміну порядку інтегрування в абстрактних інтегралах по гаусівській мірі в комплексному просторі з нескінченнократною дійсною частиною та однократною уявною частиною зводиться до вирішення питання про зміну порядку інтегрування в кратних інтегралах Бохнера від векторнозначних функцій в скінченновимірних локально компактних просторах.

Врахування узгодженості ймовірностних мір, формуючих μ_l, завершує доведення леми.

4.2. Абстрактний інтеграл по гаусівській мірі в комплексному просторі з однократною дійсною частиною та нескінченнократною уявною частиною

Абстрактним інтегралом по гаусівській мірі в комплексному просторі з однократною дійсною частиною та нескінченнократною уявною частиною будемо називати

$$\int\limits_{B_{(2),i\infty}} f(y)\, p_{\bar{i}}(dy),$$

де $B_{(2),i\infty} = B_{\mathrm{Re}} \times B_{\mathrm{Im},\infty}$, B_{Re} – дійсний сепарабельний банахів простір, $B_{\mathrm{Im},\infty}$ – уявний сепарабельний банахів простір; $p_{\bar{i}}(U_1 \times U_2) = p_{i_{\mathrm{Re}}}(U_1) \cdot p_{\bar{i}_{\mathrm{Im},\infty}}(U_2)$ – абстрактна вінерівська міра в $B_{(2),i\infty}$, $U_1 \subset B_{\mathrm{Re}}$, $U_2 \subset B_{\mathrm{Im},\infty}$, $p_{i_{\mathrm{Re}}}$ – абстрактна вінерівська міра в B_{Re}, $p_{\bar{i}_{\mathrm{Im},\infty}}$ – абстрактна фейнманівська міра в $B_{\mathrm{Im},\infty}$, яким розуміємо елемент $\left(i_{(2),i\infty}, H_{(2),i\infty}, B_{(2),i\infty}\right)$ нескінченного добутку абстрактних фейнманівських просторів, і

$$p_{\bar{i}_{\mathrm{Im},\infty}}(U_2) = \lim_{l\to\infty} \prod_{j=1}^{l} p_{i_{\mathrm{Im},j}}(U_{2j}),$$

$U_2 = U_{21} \times U_{22} \times \ldots \times U_{2l} \times \ldots$, $U_{2l} \subset B_{\mathrm{Im},l}$ – банаховому сепарабельному простору з абстрактною фейнманівською мірою $p_{i_{\mathrm{Im},l}}$; $p_{i_{\mathrm{Re}}}$ – абстрактна вінерівська міра B_{Re}.

Абстрактний вінерівський інтеграл (5.32) розглядаємо в абстрактному вінерівському просторі $\left(i_{(2),i\infty}, H_{(2),i\infty}, B_{(2),i\infty}\right)$, де $i_{(2),i\infty}$ є відношення включення $H_{(2),i\infty} \subset B_{(2),i\infty}$; H_{Re} – дійсний сепарабельний гільбертів простір, $H_{\mathrm{Im},\infty}$ – уявний сепарабельний гільбертів простір; $H_{(2),i\infty} = H_{\mathrm{Re}} \times H_{\mathrm{Im},\infty}$, $H_{\mathrm{Im},\infty} = H_{\mathrm{Im},1} \times H_{\mathrm{Im},2} \times \ldots$ – гільбертові уявні простори.

Інтеграл розуміємо в сенсі Бохнера.

Згідно вищесказаного інтеграл ми розглядаємо як абстрактний інтеграл по мірі $p_{\bar{i}}$ в комплексному просторі.

Тут міру $p_{\bar{i}}$ розуміємо як розвиток в межах структури абстрактного вінерівського простору $\left(i_{(2),i\infty}, H_{(2),i\infty}, B_{(2),i\infty}\right)$ гаусівської циліндричної міри в комплексному гільбертовому просторі $H_{(2),i\infty}$, яку беремо в вигляді

$$\mu_{\bar{i}}\left(E_{(2)}\right) = \mu_{i_{\mathrm{Re}}}\left(E_{\mathrm{Re}}\right) \cdot \mu_{\bar{i}_{\mathrm{Im},\infty}}\left(E_{\mathrm{Im}}\right) =$$

$$= \left(2\pi t_{\mathrm{Re}}\right)^{-\frac{n_{\mathrm{Re}}}{2}} \prod_{j=1}^{\infty} t_{\mathrm{Im},j}^{-\frac{n_j}{2}} \int\limits_{F_j} \exp\left\{-\frac{n_j}{2}\ln 2\pi + \frac{\left|x_{\mathrm{Im},j}\right|^2_{P_{n_j}H_j}}{2t_{\mathrm{Im},j}}\right\} dx_{\mathrm{Im},j} \times$$

$$\times \int\limits_{F_{\mathrm{Re}}} \exp\left\{-\frac{\left|x_{\mathrm{Re}}\right|^2_{P_{n_{\mathrm{Re}}}H_{\mathrm{Re}}}}{2t_{\mathrm{Re}}}\right\} dx_{\mathrm{Re}},$$

де $E_{(2)} = E_{\mathrm{Re}} \times E_{\mathrm{Im},\infty} \subset H_{(2),i\infty}$; $E_{\mathrm{Re}} \subset H_{\mathrm{Re}} \subset B_{\mathrm{Re}}$; $E_{\mathrm{Im},\infty} \subset H_{\mathrm{Im},\infty}$, $n_{\mathrm{Re}} = \dim P_{n_{\mathrm{Re}}} H_{\mathrm{Re}}$; $n_j = \dim P_{n_j} H_{\mathrm{Im},j}$; E_{Re}, E_{Im} – циліндричні множини відповідно в дійсному H_{Re}, уявному $H_{\mathrm{Im},\infty}$; F_j, F_{Re} – борелівські підмножини відповідно в $P_{n_j} H_{\mathrm{Im},j}$ та $P_{n_{\mathrm{Re}}} H_{\mathrm{Re}}$, $j = \overline{1,\infty}$; P_{n_j}, $P_{n_{\mathrm{Re}}}$ – ортопроектори відповідно в $H_{\mathrm{Im},j}$ та H_{Re}, $\left|x_{\mathrm{Im},j}\right|^2 < 0$.

Розглянемо лінійні перетворення зсуву в абстрактному інтегралі по гаусівській мірі в комплексному просторі з однократною дійсною частиною та нескінченнократною уявною частиною.

Покладемо

$$p_{\bar{i}}\left(x, U_{(2)}\right) = p_{\bar{i}}\left(U_{(2)} + x\right),$$

де $x \in B_{(2),i\infty}$, $U_{(2)} \subset B_{(2),i\infty}$, $U_{(2)} = U_1 \times U_2$, $U_1 \subset B_{\mathrm{Re}}$, $U_2 \subset B_{\mathrm{Im},\infty}$.

Теорема. Якщо $h \in H_{(2),i\infty}$, то при перетворенні $y = Ix + h$ міри $p_{\bar{t}}(h,\cdot)$ і $p_{\bar{t}}$ еквівалентні, і

$$\int\limits_{B_{(2),i\infty}} f(y)p_{\bar{t}}(dy) = \int\limits_{B_{(2),i\infty}} f(x+h)\exp\left\{-\left[(2t_{\mathrm{Re}})^{-1}\|h_{1\cdot}\|^2_{H_{\mathrm{Re}}} + t^{-1}_{\mathrm{Re}}(h_{1\cdot}, x_{1\cdot})_{B_{\mathrm{Re}}} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{l=1}^{\infty}(2t_{\mathrm{Im},l})^{-1}|(h_{2\cdot})_l|^2_{H_{\mathrm{Im},l}} - \sum_{l=1}^{\infty} t^{-1}_{\mathrm{Im},l}((h_{2\cdot})_l, (x_{2\cdot})_l)_{B_{\mathrm{Im},l}}\right]\right\} p_{\bar{t}}(dx).$$

Тут $h = (h_{1\cdot}, h_{2\cdot})$, оператор I є тотожнім оператором $B_{(2),i\infty}$, $B_{\mathrm{Im},\infty} = B_{\mathrm{Im},1} \times B_{\mathrm{Im},2} \times \ldots B_{\mathrm{Im},n} \times \ldots$.

Виходимо із структури тотожнього відображення в $B_{(2),i\infty}$ вигляду

$$I = \begin{pmatrix} I_{\mathrm{Re}} & 0 \\ 0 & I_{\mathrm{Im},\infty} \end{pmatrix},$$

де I_{Re} – тотожнє відображення в B_{Re}, $I_{\mathrm{Im},\infty}$ – тотожнє відображення в $B_{\mathrm{Im},\infty}$.

Нехай лінійний оператор $K : B_{(2),i\infty} \to H_{(2),i\infty}$ має структуру

$$K = \begin{pmatrix} K_{\mathrm{Re}} & K_{\mathrm{Re},\mathrm{Im}} \\ K_{\mathrm{Im},\mathrm{Re}} & K_{\mathrm{Im}} \end{pmatrix},$$

де $K_{\mathrm{Re}} : B_{\mathrm{Re}} \to H_{\mathrm{Re}}$, $K_{\mathrm{Re},\mathrm{Im}} : B_{\mathrm{Re}} \to H_{\mathrm{Im}}$, $K_{\mathrm{Im},\mathrm{Re}} : B_{\mathrm{Im},\infty} \to H_{\mathrm{Re}}$, $K_{\mathrm{Im}} : B_{\mathrm{Im},\infty} \to H_{\mathrm{Im},\infty}$.

Розглянемо $T = I + K$, $T : B_{(2),i\infty} \to B_{(2),i\infty}$, $\det T = \prod\limits_{s}(1+\lambda_s)$, де λ_s – власні числа оператора K.

Позначимо

$$p_{\bar{t}} \circ T(U) = p_{\bar{t}}(T(U)).$$

Теорема. Нехай T – лінійне відображення $B_{(2),i\infty}$ в себе, і виконуються умови:

(a) $K(B_{(2),i\infty}) \subset H_{(2),i\infty}$;

(б) Для оператора T існує обернене лінійне відображення $H_{(2),l\infty}$ в себе;

(в) $K \in \mathcal{L}_1\left(H_{(2),l\infty}\right)$.

Тоді міри $p_{\bar{l}} \circ T$ і $p_{\bar{l}}$ є еквівалентними, і

$$\int\limits_{B_{(2),l\infty}} f(y) p_{\bar{l}}(dy) = \int\limits_{B_{(2),l\infty}} f(Tx) \exp\Bigg\{ -\left(2t_{\mathrm{Re}}\right)^{-1}\Big[\left\langle K_{\mathrm{Re}} x_{1\cdot}, K_{\mathrm{Re}} x_{1\cdot}\right\rangle_{H_{\mathrm{Re}}} +$$

$$+ 2\left(K_{\mathrm{Re}} x_{1\cdot}, x_{1\cdot}\right)_{B_{\mathrm{Re}}}\Big] + \sum_{l=1}^{\infty}\left(2t_{\mathrm{Im},l}\right)^{-1}\Bigg[\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left\langle K_{\mathrm{Im},lj} x_{2j\cdot}, K_{\mathrm{Im},lm} x_{2m\cdot}\right\rangle_{H_{\mathrm{Im},l}} +$$

$$+ 2\sum_{j=1}^{\infty}\left(K_{\mathrm{Im},lj} x_{2j\cdot}, x_{2l\cdot}\right)_{B_{\mathrm{Im},l}}\Bigg]\Bigg\} \left|\det T\right| p_{\bar{l}}(dx),$$

де

$$K_{\mathrm{Im}} = \begin{pmatrix} K_{\mathrm{Im},11} & K_{\mathrm{Im},12} & \dots & K_{\mathrm{Im},1l} & \dots \\ K_{\mathrm{Im},21} & K_{\mathrm{Im},22} & \dots & K_{\mathrm{Im},2l} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{\mathrm{Im},l_1} & K_{\mathrm{Im},l_2} & \dots & K_{\mathrm{Im},l_l} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Нехай $T = I + K$ є нелінійне відображення $B_{(2),l\infty}$ в себе, $K_{\mathrm{Re}}(x_{1\cdot}, x_{2\cdot\cdot}) \in H_{\mathrm{Re}}$, $K_{\mathrm{Im}}(x_{1\cdot}, x_{2\cdot\cdot}) \in H_{\mathrm{Im},\infty}$; $\dfrac{\delta K_{\mathrm{Re}}}{\delta x_{1\cdot}}$, $\dfrac{\delta K_{\mathrm{Re}}}{\delta x_{2\cdot\cdot}}$, $\dfrac{\delta K_{\mathrm{Im}}}{\delta x_{1\cdot}}$, $\dfrac{\delta K_{\mathrm{Im}}}{\delta x_{2\cdot\cdot}}$ – часткові похідні Фреше;

$$\det T = \det(I + K) = \prod_{s}\left(1 + \lambda_s\right),$$

де λ_s – власні числа оператора K',

$$Kx = \begin{pmatrix} K_{\mathrm{Re}}(x_{1\cdot}, x_{2\cdot\cdot}) \\ K_{\mathrm{Im}}(x_{1\cdot}, x_{2\cdot\cdot}) \end{pmatrix}, \quad K' = \begin{pmatrix} \dfrac{\delta K_{\mathrm{Re}}}{\delta x_{1\cdot}} & \dfrac{\delta K_{\mathrm{Re}}}{\delta x_{2\cdot\cdot}} \\ \dfrac{\delta K_{\mathrm{Im}}}{\delta x_{1\cdot}} & \dfrac{\delta K_{\mathrm{Im}}}{\delta x_{2\cdot\cdot}} \end{pmatrix}.$$

Теорема. Припустимо, що для T виконуються умови:

(а) $K\left(B_{(2),l\infty}\right) \subset H_{(2),l\infty}$;

(б) Для K в $H_{(2),l\infty}$ існує обернене відображення K^{-1};

(в) Існує $K' \in L_1\left(H_{(2),l\infty}\right)$.

Тоді міри $p_{\bar{l}} \circ T$ і $p_{\bar{l}}$ є еквівалентними, і для довільної обмеженої $p_{\bar{l}}$-інтегровної в сенсі Бохнера функції $f(y)$ зі значеннями в дійсному банаховому просторі

$$\int\limits_{B_{(2),l\infty}} f(y) p_{\bar{l}}(dy) = \int\limits_{B_{(2),l\infty}} f(Tx) \exp\left\{-\frac{1}{2} t_{\mathrm{Re}}^{-1}\left[2\left(K_{\mathrm{Re}}(x_{1\cdot}, x_{2\cdot}), x_{1\cdot}\right)_{B_{\mathrm{Re}}} + \right.\right.$$

$$\left. + \left(K_{\mathrm{Re}}(x_{1\cdot}, x_{2\cdot}), K_{\mathrm{Re}}(x_{1\cdot}, x_{2\cdot})\right)_{H_{\mathrm{Re}}}\right] + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} t_{\mathrm{Im},n}^{-1} \times$$

$$\times\left.\left[2\left(K_{n\cdot}(x_{1\cdot}, x_{2\cdot}, \ldots, x_{l\cdot}, \ldots), x_{n\cdot}\right)_{B_{\mathrm{Im},n}} + \left|K_{n\cdot}(x_{1\cdot}, x_{2\cdot}, \ldots, x_{l\cdot}, \ldots)\right|_{H_{\mathrm{Im},n}}^2\right]\right\} \left|\det T\right| p_{\bar{l}}(dx).$$

Тут $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{B_{\mathrm{Im},n}}$ – канонічна білінійна форма, що призводить $B_{\mathrm{Im},n}$ і $B_{\mathrm{Im},n}^{*}$ до двоїстості; $B_{\mathrm{Im}\,\infty} = B_{\mathrm{Im},1} \times B_{\mathrm{Im},2} \times \ldots \times B_{\mathrm{Im},n} \times \ldots$, $x_{2\cdot} = (x_{21\cdot}, x_{22\cdot}, \ldots, x_{2l\cdot}, \ldots)$.

Лема. Для абстрактного інтегралу по гаусівській мірі в комплексному просторі з однократною дійсною частиною та нескінченнократною уявною частиною виконується теорема Фубіні про зміну порядку інтегрування за умови сильної інтегровності підінтегральної функції.

Доведення. Розглянемо сильний абстрактний інтеграл $\int\limits_{B_{(2),l\infty}} f(x) p_{\bar{l}}(dx)$, тобто вимагаємо

$$\int\limits_{B_{(2),l\infty}} \left\|f(x)\right\|_{B_0} p_{\bar{l}}(dx) < \infty,$$

де $f(x) \in B_0$ в банаховому $\forall f(x)$, інтегровної по Бохнеру по мірі $p_{\bar{l}}$,

$$\int\limits_{B_{(2),l\infty}} f(x) p_{\bar{l}}(dx) = \lim_{\bar{n}\to\infty} \int\limits_{P_{\bar{n}} H_{(2),l\infty}} g(P_{\bar{n}} x) \mu_{\bar{l}}(dP_{\bar{n}} x).$$

Тут $g = f|_{H_{(2),i\infty}}$ – звуження $f(x)$ на $H_{(2),i\infty}$, $P_{\bar{n}}$ – послідовність ортопроекторів $(P_{n_{\mathrm{Re}}}, P_{\bar{n}_{\mathrm{Im}}})$, сильно збіжна до тотожнього оператора в $H_{(2),i\infty}$.

Попередніми викладками питання про заміну порядку інтегрування в абстрактних інтегралах по гаусівській мірі в комплексному просторі з однократною дійсною частиною та нескінченнократною уявною частиною зводиться до вирішення питання про зміну порядку інтегрування в кратних інтегралах Бохнера від векторнозначних функцій в скінченнократних локально компактних просторах.

Врахування узгодженості ймовірностних мір, формуючих $\mu_{\bar{i}}$, завершує доведення леми.

4.3. Абстрактний інтеграл по гаусівській мірі в комплексному просторі з нескінченнократними дійсною та уявною частинами

Абстрактним інтегралом по гаусівській мірі в комплексному просторі з нескінченнократними дійсною та уявною частинами будемо називати

$$\int_{B_{(2),\infty,i\infty}} f(x)\, p_{\bar{t}}(dx),$$

де $B_{(2),\infty,i\infty} = B_{\mathrm{Re},\infty} \times B_{\mathrm{Im},\infty}$, $B_{\mathrm{Re},\infty}$ – дійсний сепарабельний банахів простір в сенсі підрозділу 4.1, $B_{\mathrm{Im},\infty}$ – уявний сепарабельний банахів простір в сенсі підрозділу 4.2; $p_{\bar{t}}(U_1 \times U_2) = p_{\bar{t}_{\mathrm{Re},\infty}}(U_1) \cdot p_{\bar{t}_{\mathrm{Im},\infty}}(U_2)$ – абстрактна вінерівська міра в $B_{(2),\infty,i\infty}$, $U_1 \in B_{\mathrm{Re},\infty}$, $U_2 \in B_{\mathrm{Im},\infty}$, $p_{\bar{t}_{\mathrm{Re},\infty}}$ – абстрактна вінерівська міра в $B_{\mathrm{Re},\infty}$, $p_{\bar{t}_{\mathrm{Im},\infty}}$ – абстрактна фейнманівська міра в $B_{\mathrm{Im},\infty}$, якими розуміємо елементи $(i_{(2),\infty}, H_{(2),\infty}, B_{(2),\infty})$ та $(i_{(2),i\infty}, H_{(2),i\infty}, B_{(2),i\infty})$ нескінченних добутків абстрактних вінерівських просторів та абстрактних фейнманівських просторів відповідно.

$$p_{l_{\mathrm{Re},\infty}}(U_1)=\lim_{l\to\infty}\prod_{j=1}^{l}p_{l_{\mathrm{Re},j}}(u_{1j}),$$

$$p_{l_{\mathrm{Im},\infty}}(U_2)=\lim_{l\to\infty}\prod_{j=1}^{l}p_{l_{\mathrm{Im},j}}(u_{2j}),$$

$U_1=U_{11}\times U_{12}\times\ldots\times U_{1j}\times\ldots$, $U_2=U_{21}\times U_{22}\times\ldots\times U_{2j}\times\ldots$, $U_{1l}\in B_{\mathrm{Re}\,l}$ – банаховому дійсному сепарабельному простору з абстрактною вінерівською мірою $p_{l_{\mathrm{Re}\,l}}$, $U_{2l}\in B_{\mathrm{Im},l}$ – банаховому уявному сепарабельному простору з абстрактною фейнманівською мірою $p_{l_{\mathrm{Im},l}}$.

Абстрактний вінерівський інтеграл розглядаємо в абстрактному вінерівському просторі $\left(i_{(2),\infty,i\infty},H_{(2),\infty,i\infty},B_{(2),\infty,i\infty}\right)$, де $i_{(2),\infty,i\infty}$ є відношення включення $H_{(2),\infty,i\infty}\subset B_{(2),\infty,i\infty}$; $H_{(2),\infty,i\infty}=H_{\mathrm{Re}\,\infty}\times H_{\mathrm{Im}\,\infty}$ – сепарабельний простір при $H_{\mathrm{Re},\infty}$ дійсному сепарабельному гільбертовому простору та $H_{\mathrm{Im}\,\infty}$ уявному сепарабельному гільбертовому простору; $H_{\mathrm{Re}\,\infty}=H_1\times H_2\times\ldots\times H_l\times\ldots$, H_l – дійсні сепарабельні гільбертові простори; $H_{\mathrm{Im},\infty}=H_{\mathrm{Im},1}\times H_{\mathrm{Im},2}\times\ldots H_{\mathrm{Im},l}\times\ldots$, $H_{\mathrm{Im},l}$ – уявний сепарабельний гільбертів простір.

Інтеграл розуміємо в сенсі Бохнера.

Згідно вищесказаного інтеграл ми розглядаємо як абстрактний інтеграл по мірі $p_{\bar{l}}$ в комплексному просторі.

Тут міру $p_{\bar{l}}$ розуміємо як розвиток в межах структури абстрактного вінерівського простору $\left(i_{(2),\infty,i\infty},H_{(2),\infty,i\infty},B_{(2),\infty,i\infty}\right)$ гаусівської циліндричної міри в комплексному гільбертовому просторі $H_{(2),\infty,i\infty}$, яку беремо в вигляді

$$\mu_{\bar{t}}\left(E_{(2)}\right)=\mu_{\bar{t}_{\mathrm{Re},\infty}}\left(E_{\mathrm{Re}}\right)\cdot\mu_{\bar{t}_{\mathrm{Im},\infty}}\left(E_{\mathrm{Im}}\right)=$$

$$=\prod_{j=1}^{\infty} t_{\mathrm{Re},j}^{-\frac{n_{\mathrm{Re},j}}{2}} \prod_{l=1}^{\infty} t_{\mathrm{Im},l}^{-\frac{n_{\mathrm{Im},l}}{2}} \int_{F_{\mathrm{Re},j}} \exp\left\{-\frac{n_{\mathrm{Re},j}}{2}\ln 2\pi-\frac{\left|x_{\mathrm{Re},j}\right|^2_{P_{n_{\mathrm{Re}}}H_{\mathrm{Re},j}}}{2t_{\mathrm{Re},j}}\right\} dx_{\mathrm{Re},j}\times$$

$$\times\int_{F_{\mathrm{Im},l}} \exp\left\{-\frac{n_{\mathrm{Im},l}}{2}\ln 2\pi+\frac{\left|x_{\mathrm{Im},l}\right|^2_{P_{n_{\mathrm{Im}}}H_{\mathrm{Im},l}}}{2t_{\mathrm{Im},l}}\right\} d\,x_{\mathrm{Im},l},$$

де $E_{(2)}=\left(E_{\mathrm{Re},\infty}\times E_{\mathrm{Im},\infty}\right)\subset H_{(2)\infty,i\infty}$; $E_{\mathrm{Re}\,\infty}\subset H_{\mathrm{Re},\infty}\subset B_{\mathrm{Re},\infty}$, $E_{\mathrm{Im},\infty}\subset H_{\mathrm{Im},\infty}\subset B_{\mathrm{Im},\infty}$; $n_{\mathrm{Re},j}=\dim P_{n_{\mathrm{Re},j}}H_j$; $n_{\mathrm{Im},l}=\dim P_{n_{\mathrm{Im},l}}H_{\mathrm{Im},l}$; E_{Re}, E_{Im} – циліндричні множини відповідно в дійсному $H_{\mathrm{Re}\,\infty}$, уявному $H_{\mathrm{Im},\infty}$; $F_{\mathrm{Re}\,j}$, $F_{\mathrm{Im}\,l}$ – борелівські підмножини відповідно в $P_{n_{\mathrm{Re},j}}H_j$ та $P_{n_{\mathrm{Im},l}}H_{\mathrm{Im},l}$, $j=\overline{1,\infty}$, $l=\overline{1,\infty}$; $P_{n_{\mathrm{Re},j}}$, $P_{n_{\mathrm{Im},l}}$ – ортопроектори відповідно в H_j та $H_{\mathrm{Im}\,l}$.

Покладемо

$$p_{\bar{t}}\left(x,U_{(2)}\right)=p_{\bar{t}}\left(U_{(2)}+x\right),$$

де $x\in B_{(2),\infty,i\infty}$, $U_{(2)}\subset B_{(2),\infty,i\infty}$, $U_{(2)}=U_1\times U_2$, $U_1\subset B_{\mathrm{Re}\,\infty}$, $U_1\subset B_{\mathrm{Im},\infty}$.

Теорема. Якщо $h\in H_{(2),\infty,i\infty}$, то при перетворенні $y=Ix+h$ міри $p_{\bar{t}}(h,\cdot)$ і $p_{\bar{t}}$ еквівалентні, і

$$\int_{B_{(2),\infty,i\infty}} f(y)p_{\bar{t}}(dy)=\int_{B_{(2),\infty,i\infty}} f(x+h)\exp\left\{-\left[\sum_{l=1}^{\infty}(2t_l)^{-1}\left|(h_{1\cdot})_l\right|^2_{H_l}+\sum_{l=1}^{\infty}t_l^{-1}\left(\left(h_{1\cdot}\right)_l,\left(x_{1\cdot}\right)_l\right)_{B_l}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{l=1}^{\infty}\left(2t_{\mathrm{Im},l}\right)^{-1}\left|\left(h_{2\cdot}\right)_l\right|^2_{H_{\mathrm{Im},l}}-\sum_{l=1}^{\infty}t_{\mathrm{Im},l}^{-1}\left(\left(h_{2\cdot}\right)_l,\left(x_{2\cdot}\right)_l\right)_{B_{\mathrm{Im},l}}\right]\right\}p_{\bar{t}}(dx).$$

Тут $h=\left(h_{1\cdot},h_{2\cdot}\right)$, оператор I є тотожнім оператором $B_{(2),\infty,i\infty}$, $B_{\mathrm{Re},\infty}=B_{\mathrm{Re},1}\times B_{\mathrm{Re},2}\times\ldots B_{\mathrm{Re},l}\times\ldots$, $B_{\mathrm{Im},\infty}=B_{\mathrm{Im},1}\times B_{\mathrm{Im},2}\times\ldots B_{\mathrm{Im},l}\times\ldots$.

Виходимо із структури тотожнього відображення в $B_{(2),\infty,i\infty}$ вигляду

$$I=\begin{pmatrix} I_{\mathrm{Re},\infty} & 0 \\ 0 & I_{\mathrm{Im},\infty} \end{pmatrix},$$

де $I_{\mathrm{Re},\infty}$ – тотожнє відображення в $B_{\mathrm{Re}\,\infty}$, $I_{\mathrm{Im},\infty}$ – тотожнє відображення в $B_{\mathrm{Im},\infty}$.

Нехай лінійний оператор $K: B_{(2),\infty,i\infty}\to H_{(2),\infty,i\infty}$ має структуру

$$K=\begin{pmatrix} K_{\mathrm{Re}} & K_{\mathrm{Re,Im}} \\ K_{\mathrm{Im,Re}} & K_{\mathrm{Im}} \end{pmatrix},$$

де $K_{\mathrm{Re}}: B_{\mathrm{Re},\infty}\to H_{\mathrm{Re},\infty}$, $K_{\mathrm{Re,Im}}: B_{\mathrm{Re},\infty}\to H_{\mathrm{Im},\infty}$, $K_{\mathrm{Im,Re}}: B_{\mathrm{Im},\infty}\to H_{\mathrm{Re},\infty}$, $K_{\mathrm{Im}}: B_{\mathrm{Im},\infty}\to H_{\mathrm{Im},\infty}$.

Розглянемо $T=I+K$, $T: B_{(2),\infty,i\infty}\to B_{(2),\infty,i\infty}$, $\det T=\prod_s(1+\lambda_s)$, де λ_s – власні числа оператора K.

Позначимо

$$p_{\bar{t}}\circ T(U)=p_{\bar{t}}(T(U)).$$

Теорема. Нехай T – лінійне відображення $B_{(2),\infty,i\infty}$ в себе, і виконуються умови:

(а) $K(B_{(2),\infty,i\infty})\subset H_{(2),\infty,i\infty}$;

(б) Для оператора T існує обернене лінійне відображення $H_{(2),\infty,i\infty}$ в себе;

(в) $K\in \mathcal{L}_1(H_{(2),\infty,i\infty})$.

Тоді міри $p_{\bar{t}}\circ T$ і $p_{\bar{t}}$ є еквівалентними, і

$$\int\limits_{B_{(2),\infty,i\infty}} f(y)p_{\bar{t}}(dy)=\int\limits_{B_{(2),\infty,i\infty}} f(Tx)\exp\left\{-\sum_{l=1}^{\infty}(2t_l)^{-1}\left[\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left\langle K_{lj}x_{1j},K_{lm}x_{1m}\right\rangle_{H_l}+\right.\right.$$

$$\left.+2\sum_{j=1}^{\infty}\left(K_{lj}x_{1j},x_{1l}\right)_{B_l}\right]+\sum_{l=1}^{\infty}(2t_{\mathrm{Im},l})^{-1}\left[\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left\langle K_{\mathrm{Im},lj}x_{2j},K_{\mathrm{Im},lm}x_{2m}\right\rangle_{H_{\mathrm{Im},l}}+\right.$$

$$+2\sum_{j=1}^{\infty}\left(K_{\mathrm{Im},lj}x_{2j\cdot},x_{2l\cdot}\right)_{B_{\mathrm{Im},l}}\Bigg]\Bigg\}|\det T|\,p_{\bar{l}}(dx),$$

де K_{Re} описано **(5.10)**, K_{Im} описано **(5.38)**.

Нехай $T=I+K$ є нелінійне відображення $B_{(2),\infty,i\infty}$ в себе, $K_{\mathrm{Re}}(x_{1\cdot\cdot},x_{2\cdot\cdot})\in H_{\mathrm{Re},\infty}$, $K_{\mathrm{Im}}(x_{1\cdot\cdot},x_{2\cdot\cdot})\in H_{\mathrm{Im},\infty}$; $\dfrac{\delta K_{\mathrm{Re}}}{\delta x_{1\cdot}}$, $\dfrac{\delta K_{\mathrm{Re}}}{\delta x_{2\cdot\cdot}}$, $\dfrac{\delta K_{\mathrm{Im}}}{\delta x_{1\cdot\cdot}}$, $\dfrac{\delta K_{\mathrm{Im}}}{\delta x_{2\cdot}}$ – часткові похідні Фреше;

$$\det T=\det(I+K)=\prod_{s}(1+\lambda_s),$$

де λ_s – власні числа оператора K,

$$Kx=\begin{pmatrix}K_{\mathrm{Re}}(x_{1\cdot\cdot},x_{2\cdot\cdot})\\ K_{\mathrm{Im}}(x_{1\cdot\cdot},x_{2\cdot\cdot})\end{pmatrix},\quad K'=\begin{pmatrix}\dfrac{\delta K_{\mathrm{Re}}}{\delta x_{1\cdot\cdot}} & \dfrac{\delta K_{\mathrm{Re}}}{\delta x_{2\cdot\cdot}}\\ \dfrac{\delta K_{\mathrm{Im}}}{\delta x_{1\cdot}} & \dfrac{\delta K_{\mathrm{Im}}}{\delta x_{2\cdot\cdot}}\end{pmatrix}.$$

Теорема. Припустимо, що для T виконуються умови:
(а) $K\left(B_{(2),\infty,i\infty}\right)\subset H_{(2),\infty,i\infty}$;

(б) Для K в $H_{(2),\infty,i\infty}$ існує обернене відображення K^{-1};

(в) Існує $K'\in\mathcal{L}_1\left(H_{(2),\infty,i\infty}\right)$.

Тоді міри $p_{\bar{l}}\circ T$ і $p_{\bar{l}}$ є еквівалентними, і для довільної обмеженої $p_{\bar{l}}$-інтегровної в сенсі Бохнера функції $f(y)$ зі значеннями в дійсному банаховому просторі

$$\int\limits_{B_{(2),\infty,i\infty}}f(y)\,p_{\bar{l}}(dy)=\int\limits_{B_{(2),\infty,i\infty}}f(Tx)\exp\Bigg\{-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}t_n^{-1}\Big[2\left(K_{n\cdot}(x_{1\cdot},x_{2\cdot},\dots,x_{l\cdot},\dots),x_{n\cdot}\right)_{B_n}+$$

$$+\left|K_{n\cdot}(x_{1\cdot},x_{2\cdot},\dots,x_{l\cdot},\dots)\right|_{H_n}^2\Big]+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}t_{\mathrm{Im},n}^{-1}\times\Big[2\left(K_{n\cdot}(x_{1\cdot},x_{2\cdot},\dots,x_{l\cdot},\dots),x_{n\cdot}\right)_{B_{\mathrm{Im},n}}+$$

$$+\left|K_{n\cdot}(x_{1\cdot},x_{2\cdot},\dots,x_{l\cdot},\dots)\right|_{H_{\mathrm{Im},n}}^2\Big]\Bigg\}|\det T|\,p_{\bar{l}}(dx).$$

Лема. **Для абстрактного інтегралу по гаусівській мірі в комплексному просторі з нескінченнократними дійсною та уявною частинами виконується теорема Фубіні про зміну порядку інтегрування за умови сильної інтегровності підінтегральної функції.**

ЛІТЕРАТУРА

1. Albeverio S., Hoegh-Krohn R. Mathematical theory of Feynman path integrals. // Lecture Notes in Math., 523. – Berlin, 1976.

2. Gross L. Abstract Wiener spaces // Proc. 5th. Berkeley Sym. Math. Stat. Prob. – 1965. – Vol. 2. – P. 31–42.

3. Gross L. Measurable functions on Hilbert space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – Vol. 105. – P. 372–390.

4. Gross L. Potential theory on Hilbert space // J. Func. Anal. – 1967. – Vol. 1. – P. 123–181.

5. Ito K. Wiener integral and Feynman integral // Proc. 4th Berkeley Symp. Mah. Statist. and Probalility. – 1960. – N 2, Berkeley – Los Angeles, Univ. California Press, 1961. P 227–238.

6. Kallianpur G. Abstract Wiener processes and their reproducing kernel Hilbert spaces // Z. Wahrscheinlickeitstheorie. – 1971. – N 17. – P. 113–123.

7. Kuo H.H. Donskers delta function as a generalized Brownian functional and its application // Lect. Notes Contr. and Inf. Sci. – 1983. – Vol. 49. – P. 167–178.

8. Ostrom T.G. The solution of linear integral equations by means of Wiener integrals // Bull. Amer. Math. Soc. – 1949. – Vol. 55, N 4. – P. 343–354.

9. Ramer R. On nonlinear transformations of Gaussion measures // J. Func. Anal. – 1974. – Vol. 15, N 2. – P. 166–187.

10. Segal I.E. Tensor algebras over Hilbert spaces // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – Vol. 81. – P. 106–134.

11. Wiener N. The average value of an analytic functional // Proc. Nat. Acad. Sci. – 1921. – Vol. 7, N 9. – P. 253–260.

12. Wiener N. The average value of an analytic functional and the Brownian movement // Proc. Nat. Acad. Sci. – 1921. – Vol. 7, N 10. – P. 294–298.

13. Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщённых функций. Секвенциальный подход: Пер. с польск. – М.: Мир, 1976. – 312 с.

14. Березанский Ю.М. Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных. – К.: Наук. думка, 1978. – 360 с.

15. Березанский Ю.М., Кондратьев Ю.Г. Спектральные методы в бесконечномерном анализе. – К.: Наук. думка, 1988. – 679 с.

16. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 352 с.

17. Булдыгин В.В. Сходимость случайных элементов в топологических пространствах. – К.: Наук. думка, 1980. – 239 с.

18. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры, интегрирование мер: Пер. с франц. – М.: Наука, 1967. – 396 с.

19. Вахания Н.Н., Тариеладзе В.И., Чобанян С.А. Вероятностные распределения в банаховых пространствах. – М.: Наука, 1985. – 368 с.

20. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. – М.: Наука, 1969. – 328 с.

21. Витушкин А.Г. О многомерных вариациях. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 220 с.

22. Владимиров В.С. Обобщённые функции в математической физике. – М.: Наука, 1976. – 280 с.

23. Гихман И.И., Скороход А.В. О плотностях вероятностных мер в функциональных пространствах // Успехи мат. наук. – 1966. – 21, вып. 6(132). – С. 83–152.

24. Го Х.–С. Гауссовские меры в банаховых пространствах: Пер. с англ. – М.: Мир, 1979. – 176 с.

25. Далецкий Ю.Л. О представимости решений операторных уравнений в виде континуальных интегралов // Докл. АН СССР. – 1960. – 134, № 5. – С. 1013–1016.

26. Далецкий Ю.Л., Фомин С.В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. – М.: Наука, 1983. – 384 с.

27. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: Наука, 1974. – 544 с.

28. Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. – М.: Наука, 1973. – 224 с.

29. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 741 с.

30. Келли Дж. Л. Общая топология: Пер. с англ. – М.: Наука, 1981. – 432 с.

31. Ковальчик И.М., Янович Л.А. Обобщенный винеровский интеграл и некоторые его приложения. – Минск: Наука и техника, 1989. – 222 с.

32. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. – М.: ОНТИ, 1936. – 311 с.

33. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981. – 544 с.

34. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984. – 720 с.

35. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Наука, 1985. – 640 с.

36. Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику: Пер. с франц. – М.: Наука, 1975. – 480 с.

37. Кофман А. Введение в теорию нечётких множеств: Пер. с франц. – М.: Наука, 1982. – 492 с.

38. Курош Л.Г. Лекции по общей алгебре. – М.: Наука, 1973. – 400 с.

39. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.

40. Ленг С. Алгебра: Пер. с англ. – М.: Мир, 1968. – 564 с.

41. Лифшиц И.М., Гредескул С.А., Пастур Л.А. Введение в теорию неупорядоченных систем. – М.: Наука, 1982. – 360 с.

42. Лоэв М. Теория вероятностей: Пер. с англ. – М.: ИЛ, 1962. – 719 с.

43. Натансон И.П. Теория функций вещественного переменного. – М.: Наука, 1974. – 480 с.

44. Невё Ж. Математические основы теории вероятностей: Пер. с франц. – М.: Мир, 1969. – 309 с.

45. Пелчинский А., Фигель Т. О методе Энфло построения банаховых пространств без свойств аппроксимации // Успехи мат. наук. – 1973. – 28, № 6. – С. 95–108.

46. Пугачёв В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Наука, 1979. – 496 с.

47. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу: Пер. с франц. – М.: Мир, 1979. – 587 с.

48. Рудавський Ю.К., Понеділок Г.В. Функціональні інтеграли та їх застосування. – Львів: Видавн. НУ «Львівська політехніка», 2002. – 312 с.

49. Рудин У. Основы математического анализа: Пер. с англ. – М.: Мир, 1976. – 320 с.

50. Сакс С. Теория интеграла: Пер. с англ. – М.: Ил, 1949. – 494 с.

51. Скороход А.В. Интегрирование в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1975. – 232 с.

52. Толстов Г.П. Мера и интеграл. – М.: Наука, 1976. – 392 с.

53. Угланов А.В. Об одной конструкции фейнмановского интеграла // ДАН СССР. – 1978. – 243, № 6. – С. 1406–1409.

54. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. – М.: Мир, 1968. – 382 с.

55. Фомин С.В. О включении интеграла по мере Винера в общую теорию интеграла Лебега // Науч. докл. высш. школы физ.–мат. науки. – 1958. – № 2. – С. 83–85.

56. Функциональный анализ (Под редакцией С.Г. Крейна). – М.: Наука, 1972. – 544 с.

57. Хеннекен П.Л., Тортра А. Теория вероятностей и некоторые её приложения: Пер. с франц. – М.: Наука, 1974. – 472 с.

58. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы: Пер. с англ. – М.: ИЛ, 1962. – 829 с.

59. Ченцов Н.Н. Винеровские случайные поля от нескольких параметров // Докл. АН СССР. – 1956. – 106, № 4. – С. 607–609.

60. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. – М.: Наука, 1969. – 576 с.

61. Шварц Л. Анализ. В 2-х т.: Пер. с франц. – М.: Мир, 1972. – Т.1. – 824 с.

62. Шилов Г.Е. Математический анализ. В 2-х т. – М.: Наука, 1969. – Т.1. – 528 с.

63. Шилов Г.Е. Математический анализ. КЛП. – М.: Наука, 1969. – 432 с.

64. Шилов Г.Е., Фан Дык Тинь. Интеграл, мера и производная на линейных пространствах. – М.: Наука, 1967. – 192 с.

65. Янович Л.А. Приближённое вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам. – Мн.: Наука и техника, 1976. – 384 с.

66. Гаврилів О.С. Основні випадкові розподіли на площині в R^3. – Львів: ФОП Сорока С.В., 2007. – 68 с.

67. Гаврилів О.С. Постава щодо нечітких та випадкових визначників. – Львів: ФОП Сорока С.В. – 2007. – 40 с.

68. Гаврилів О.С., Козак П.П. Абстрактний вінерівський інтеграл в безмежному добутку просторів // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1985. – № 7. – С. 9–11.

69. Гаврилів О.С., Козак П.П. Кратний абстрактний вінерівський інтеграл і його властивості // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1985. – № 2. – С. 3–6.

70. Гаврилів О.С., Мудрицький В.В. До інтегралу Рімана-Стілтьєса в ЛКП // Метода математики. – 2006. – № 3. – С. 3–5.

71. Гаврилів О.С., Остапович Б.С. До питання слабких розподілів на гільбертовому просторі // Вісник "Прикладна математика". – Львів. – 2000. – № 407. – С. 118–121.

72. Гаврылив О.С. Операторные уравнения в банаховом пространстве // Киев, 1987. – 33 с. Рус. – Деп. в УкрНИИНТИ 27.10.87, № 3208 – Ук87.

73. Гаврилів О.С. Зображення розв'язку системи операторних рівнянь в банаховому просторі в вигляді кратного абстрактного вінерівського інтеграла // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1986. – № 8. – С. 3–5.

74. Гаврилів О.С. Інтеграл Рімана в локально-компактному просторі // Вісник "Прикладна математика". – Львів. – 1996. – № 229. – С. 25–26.

75. Гаврилів О.С. Нелінійні перетворення кратних абстрактних вінерівських інтегралів // Вісник "Прикладна математика". – Львів. – 2000. – № 407. – С. 32–37.

76. Гаврилів О.С. До варіації множини в локально компактному просторі // Гріш і математика. – 2008. – № 5. – С. 3–7.

Підписано до друку 02.03.2012
Формат 60x84/16. Папір офсетний. Цифровий друк.
Гарнітура Times.
Фіз. друк. арк. 4,25 Умов. друк. арк. 3,96

Видавець:
Приватний підприємець Сорока Тарас Богданович
79026, м. Львів, вул. Володимира Великого, 2
Свідоцтво державного реєстру: серія ЛВ №17
soroka@soroka.lviv.ua

Надруковано
ТзОВ «Графік Стар»
www.soroka.lviv.ua