O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA TA'LIM VAZIRLIGI
MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI
O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

FAYZULLAEV B.A.

UMUMIY NISBIYLIK NAZARIYASI

TOSHKENT
"UNIVERSITET"
2010

Mazkur o'quv qo'llanma umumiy nisbiylik nazariyasiga bag'ishlangan bo'lib Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy Universiteti nazariy fizika kafedrasida ko'p yillar davomida o'qib kelingan ma'ruzalarga asoslangandir. Qo'llanmada asosiy e'tibor umumiy nisbiylik nazariyasining asosida yotadigan fizik prinsiplarni tushuntirish va talqin qilish, murakkab matematik apparatni shu fizik prinsiplarga bog'lash va ulardan keltirib chiqarishga qaratilgan. Qo'llanma magistrlar uchun mo'ljallangandir.

Taqrizchilar: prof. B.Ahmedov, dots. Karokov Z.
Mas'ul muharrir: prof. A.A.Abdumalikov

Mirzo Ulug'bek nomli O'zbekiston Milliy Universiteti fizika fakulteti o'quv metodik kengashining 2005 yil 2-dekabr qaroriga muvofiq nashrga tavsiya etilgan (2-sonli bayonnoma).

ISBN -978-9943-305-22-9

So'z boshi

Ushbu kitobda muallif tomonidan o'n yildan ziyodroq davr ichida Mirzo Ulug'bek nomli O'zbekiston Milliy Universitetining fizika fakulteti nazariy fizika kafedrasi talabalari uchun umumiy nisbiylik nazariyasi bo'yicha bergan ma'ruzalari yig'ilgan. Zamonaviy fizika fani ikkita fundamental nazariyalarga asoslangandir - nisbiylik nazariyasi va kvant mexanikasi. Zamonaviy tushunchalarimiz bo'yicha elementar zarrachalar, ular orasidagi o'zaro ta'sir kuchlari va, demak, butun borliq mana shu nazariyalarning bir-biriga moslashtirish jarayonida kelib chiqadi. Tabiiyki, bu nazariyalarga o'quv jarayonida katta ahamiyat beriladi.

Xususiy nisbiylik nazariyasi paydo bo'lgandan keyin bizning fazo va vaqt haqidagi tushunchalarimiz tubdan o'zgardi. Umumiy nisbiylik nazariyasi esa fazo-vaqt xossalarini shu fazodagi modda taqsimoti bilan bog'lab tortishish kuchining tabiatini tushuntirib berdi. Umumiy nisbiylik nazariyasini Yer sharoitida qo'llash imkoniyati yo'q, biz bu haqida kirishda gapiramiz, ammo, Koinotda kuzatilayotgan ko'pgina hodisalar (kosmologik qonuniyatlar, qora kavaklar, neytron yulduzlar va h.k.) faqatgina mana shu nazariya asosidagina talqin qilinishi mumkin.

Umumiy nisbiylik nazariyasi nazariy fizika bo'yicha ixtisoslashayotgan talabalar uchun maxsus kurs sifatida beriladi. Bu maxsus kursni tushunish uchun matematikaning bir muncha sohalarini bilish kerak, xususan, differensial tenglamalar, vektor algebra, chiziqli algebra, variatsion hisob asoslari va h.k. Tenzorlar nazariyasini bilish shart emas, bu nazariyaning kerakli qismlari ushbu kitobda yoritilgan.

Bir muammoga to'xtalib o'taylik. Odatda Lotin alifbosiga asoslangan Ovrupa tillarida biror shaxsning ismi-familiyasi o'zining tilida qanday yozilsa boshqa tillarda ham o'z shaklini o'zgartirmasdan yoziladi (masalan, fransuzcha nomlar ingliz tilida va teskari). Bu qoida xalqlar orasidagi o'zaro hurmatning bir ko'rinishidir. Ammo o'zbek talabalari olimlarning nomlarining ruscha talaffuziga o'rgangan. Shuning uchun ushbu kitobda ham olimlarning nomlarining ruscha talaffuzi ishlatildi. Talabalarimiz dunyo adabiyotini o'rgana boshlaganda shu nomlarning haqiqiy yozuviga duch kelib tushunmasdan adashib o'tirmasin degan maqsadda kitobimizda uchraydigan nomlarning uch hil yozivini keltiraylik:

Halqaro qoida boyicha	Rus tilada	Ushu kitobda
Einstein	Эйнштейн	Einshtein
Ricci	Риччи	Richchi
Riemann	Риман	Riman
Laplace	Лаплас	Laplas
Levi-Chivita	Леви-Чивита	Levi-Chivita
Hilbert	Гильберт	Gilbert
Walker	Уокер	Uoker
Friedman	Фридман	Fridman
Schwarzschild	Шварцшильд	Shvartshild
D'Alambert	Даламбер	Dalamber
Newton	Ньютон	Nyuton
Michelson	Майкельсон	Maykelson
LeVerrier	Леверье	Lever'ye
Christoffel	Кристоффель	Kristoffel
Minkowski	Минковский	Minkovskiy
Lagrange	Лагранж	Lagranj
Hubble	Хаббл	Xabbl
Hamilton	Гамильтон	Gamilton
Poisson	Пуассон	Puasson
Slipher	Слайфер	Slayfer
Jacobi	Якоби	Yakobi
Curie	Кюри	Kyuri

Halqaro qoida boyicha	Rus tilada	Ushu kitobda
Dirac	Дирак	Dirak
Planck	Планк	Plank
Bianchi	Бианки	Bianki
Coulomb	Кулон	Kulon

O'zbek tilida umumiy nisbiylik nazariyasi bo'yicha birinchi kitob kamchiliklardan xoli bo'lmasa kerak. Muallif umid qiladiki, o'quvchi kitobni o'rganish jaroyonida biror-bir kamchilikka duch kelsa quyidagi manzil bo'yicha o'z mulohazalarini muallifga yetkazadi: Toshkent, Talabalar Shaxarchasi, O'zMU, fizika fakulteti, nazariy fizika kafedrasi.

1

Kirish

1.1 Umumiy nisbiylik nazariyasi nima uchun kerak?

Yigirmanchi asrda yaratilgan eng buyuk nazariyalardan biri nisbiylik nazariyasidir. Nisbiylik nazariyasi bizning fazo va vaqt haqidagi tushunchalarimizni tubdan o′zgartirib yubordi. Shu o′zgarishlarning ichida eng ajoyiblaridan biri - bu tortishish kuchining yangi nazariyasi bo′lmish umumiy nisbiylik nazariyasining yaratilishidir. Bu nazariya tortishish kuchini fazo-vaqtning egrilanganligi orqali tushuntiradi.

Nima uchun tortishish qonunini bunday o′zgartirishga to′g′ri keldi? Nyutonning butun dynyo tortishish qonuni XX-asrning boshida ikkita muammoga ega edi. Birinchi muammo Merkuriy perigeliysining surunkali siljishi bilan bog′liq bo′lib u 1842 yilda fransuz matematigi Lever'ye tomonidan o′sha paytda hali noma'lum bo′lgan Neptun planetasini hisoblab topish paytida ochilgan edi. o′sha paytda faqat yettitagina planeta ma'lum edi va yig′ilgan ma'lumotlar bu planetalarning harakatiga yana qandaydir boshqa massiv jism o′z ta'sirini ko′rsatmoqda degan xulosaga olib kelgan edi. Bu degani, Quyosh sistemamizda yana bir katta planeta bor, uzoqda joylashganligi uchun uni kuchli teleskopsiz ko'rish mumkin emas va shu sababli u hali ochilmagan deganidir. Lever'ye mana shu tahminni tekshirish maqsadida ma'lum bo'lgan planetalarning harakatini Nyutonnnig butun dunyo tortishish qonuni asosida izchillik bilan o'rgandi va sakkizinchi planeta - Neptunning fazodagi holatini qalam uchida yuqori aniqlikda topib berdi. Bu Nyuton nazariyasining haqiqiy triumfi edi. Mazkur hisob davomida Lever'ye bitta "kichikkina" muammoga duch keldi. Hisoblar bo'yicha Merkuriy orbitasining perigeliy nuqtasi surunkali ravishda siljib borar ekan. Bu siljish bir asrda taxminan 6000 burchak sekundini tashkil qiladi. Buning deyarli hammasini boshqa planetalarning (asosan Yupiterning) ta'siri orqali tushuntirish mumkin, lekin shu siljishning 39″ (xozirgi ma'lumotlar bo'yicha 43″) ni hech qanday yo'l bilan tushuntirib bo'lmadi. Bu sohadagi ko'p urinishlar hech qanday natijaga olib kelmagan.

Ikkinchi sabab prinsipial sababdir. Nyuton qonunini

$$\mathbf{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\mathbf{r} \tag{1.1}$$

dan ko'rinib turibdiki, ikki jism orasidagi tortishish kuchi vaqtga bog'liq bo'lmagan holda oniy ravshda bir nuqtadan ikkinchisiga yetib borar ekan. Bu degani Nyuton qonuni nisbiylik prinsipiga ziddir. Nisbiylik prinsipi bo'yicha hech qanday signal yorug'lik tezligidan katta tezlik bilan tarqalishi mumkin emas. Mana shu ikkinchi sabab Einshteinni 1908 yilda nisbiylik prinsipiga asoslangan tortishish kuchi nazariyasini yaratishga kirishishga olib keldi. Einshteinning bu harakatlari 1915 yilda tortishish kuchining to'liq relativistik ko'rinishi bo'lgan umumiy nisbiylik nazariyasini yaratish bilan yakunlandi.

Nima uchun Nyuton nazariyasi nisbiylik prinsipiga bo'ysunmasdan turib Yerda ham, Quyosh sistemasida ham juda katta aniqlikda ishlaydi? Buning sababi ikkitadir. Birinchisi, Quyosh sistemasidagi jismlarning tezliklari juda kichikdir, ular $v/c \sim 10^{-4}$ dan oshmaydi, natijada, relativistik effektlar deyarli sezilarli emas. Ikkinchidan, keyingi boblarda ko'rsatamizki, fazo-vaqtning egrilanganligi φ/c^2 faktor bilan aniqlanadi, bu yerda φ - gravitatsion potensialdir. Yer atrofida $\varphi/c^2 \sim 10^{-10}$, Quyosh atrofida esa $\varphi/c^2 \sim 10^{-6}$ tartibga egadir. Ko'rinib turibdiki, nisbiylik nazariyasining ta'siri Quyosh sistemasida uncha sezilarli bo'la olmaydi. Ammo, Galaktikamizda va Koinotda shunday katta tezliklar, kuchli va o'ta kuchli tortishish maydonlari borki, ularda sodir bo'layotgan jarayonlar faqat umumiy nisbiylik nazariyasi asosidagina tushuntirilishi mumkin. Masalan, neytron yulduzlar (pulsarlar) va Qora kavaklar – kollapsarlar – ularning hossalari faqat umumiy nisbiylik nazariyasi asosidagina tushuntirilishi mumkin. Koinotning evolutsiyasi, undagi ro'y berayotgan o'ta tengi yo'q jarayonlar – umumiy nisbiylik nazariyasining hozirgi kundagi tatbiq qilinish sohasidir.

Umumiy nisbiylik nazariyasini tushunish uchun xususiy nisbiylik nazariyasini bilish kerak. O'quvchi xususiy nisbiylik nazariyasining asoslarini biladi deb faraz qilamiz. Keyingi paragrafda xususiy nisbiylik nazariyasining elementlari – interval, to'rt o'lchamli fazo-vaqt, to'rt tezlik, to'rt impuls (energiya-impuls) va h.k. tushunchalar kiritiladi. Bundan asosiy maqsad – kitobchada ishlatiladigan belgilashlarni kiritishdir.

Shuni aytishimiz kerakki, bu kitobchani yozganda adabiyotlardan (ayniqsa, Weinberg, Lightman-Press-Price-Teukolsky va Landau-Lifshitzlarning kitoblaridan) unumli foydalandik.

1.2 Xususiy nisbiylik nazariyasi elementlari. To'rt o'lchamli fazo-vaqt

Ushbu qismning maqsadi o'quvchiga xususiy nisbiylik nazariyasi asoslarini eslatib ketish. Xususan, to'rt o'lchamli fazo-vaqtning kiritilishini va u bilan bog'liq bo'lgan belgilashlarni *muhokama qilishdir*. Albatta, *xususiy nisbiylik nazariyasi* o'z-o'zidan olganda juda boy fan, yoritish uchun tanlab olingan tushunchalar shu sababdan olindiki ular umumiy nisbiylik nazariyasi qismida ko'p ishlatiladi.

Fizika fani eksperimental fan. Mexanika sohasidagi eksperimentlar Galileyni mexanika qonunlari sanoq sistemasiga bog'liq emas degan fikrga olib keldi. Buni biz hozir Galiley nisbiylik prinsipi deymiz.

Einshteinning nisbiylik prinsipi Galileynikidan shu bilan farq qiladiki, Einshtein bo'yicha inersial sanoq sistemalar tabiatning umuman hamma qonunlariga nisbatan teng huquqlidir.

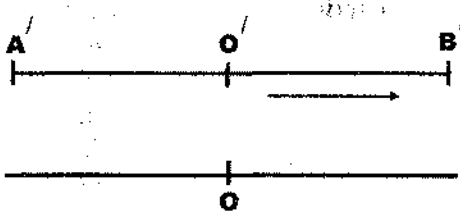
Tajriba shuni ko'rsatadiki, biror nuqtada ro'y bergan hodisa haqidagi signal ixtiyoriy boshqa nuqtaga qandaydir vaqtdan keyingina yetib boradi. Bu degani tabiatda ixtiyoriy tezlik bo'lishi mumkin emas, tezliklar chegaralangan, demak, qandaydir maksimal tezlik mavjud deganidir. Agar maksimal tezlik bo'lmaganda signal ixtiyoriy katta (demak, cheksiz ham) tezlik bilan harakat qilishi mumkin bo'lar edi. Maksimal tezlik albatta hamma inersial sanoq sistemalarida bir xil qiymatga ega bo'lishi kerak, aks holda bir sistemani ikkinchisidan ajratishimiz mumkin bo'lib qoladi.

XX-asrda o'tkazilgan ko'pdan-ko'p eksperimentlar yorig'lik nurining tezligi sanoq sistemasiga bog'liq emasligini ko'rsatdi. Bu eksperimentlar ichida Maykelson-Morli eksperimenti eng mashhuridir.

Shu faktlarni bir joyga yig'ib quyidagi ikki tasdiqqa kelamiz:

- Hamma inersial sanoq sistemalari teng huquqli;
- Yorug'lik tezligi hamma inersial sanoq sistemalarida bir xil qiymatga ega.

Mana shu ikki tasdiq ***Einshtein nisbiylik prinsipi*** deyiladi. Bu prinsipdan darhol ikki hodisaning birvaqtliligi nisbiy ekanligi (ya'ni, bir sistemadan ikkinchisiga o'tganimizda saqlanmasligi) kelib chiqadi. Buni Einshtein o'ylab topgan oddiy misolda ko'rishimiz mumkin.



Rasm 1.1: Birvaqtlilikning nisbiyligi

Rasm (1.1)-da ko'rsatilgandek laboratoriya sistemamiz oldidan poyezd o'tib ketayotgan bo'lsin. Poyezdning qoq o'rtasidagi O' nuqta laboratoriyadagi O ga mos kelganda shu nuqtada lampa yonsin. Shu lampadan chiqqan nur poyezdning bosh B va ohirgi A nuqtalariga (poyezd sistemasida ularni mos ravishda B' va A' deb belgilaymiz) yetib kelish vaqtlarini laboratoriya sistemasida t_A va t_B deb va xuddi shu hodisalar vaqtlarini poyezd sistemasida t'_A va t'_B deb belgilaylik. Poyezd sistemasida $A'O' = O'B'$ bo'lgani uchun $t'_A = t'_B$ bo'ladi, laboratoriya sistemasida esa $t_A < t_B$ bolishi kerak, chunki A nuqta nur manbayi tomon harakat qilayapti, demak, nur bu nuqtaga tezroq yetib borishi kerak. B nuqta esa nur manbayidan poyezd tezligi bilan uzoqlashayapti va yorug'lik nuri unga keyinroq yetib boradi. Ushbu oddiy misol vaqt tushunchasiga bo'lgan munosabatimizni tubdan o'zgartirib yuboradi. Agar Nyuton mexanikasida ***vaqt hech narsaga bog'liq bo'lmagan tarzda o'z-o'zidan oqadigan bir absolut substansiya*** sifatida ta'riflanadigan bo'lsa Einshteinning bu oddiy misoli vaqt tushunchasining sanoq sistemasiga bog'liqligini ko'rsatadi, uni (xuddi x, y, z ga o'xshagan) bir ***koordinata***ga aylantiradi. Ixtiyoriy hodisa haqida gapirganimizda uni aniqlash uchun shu hodisa ro'y bergan nuqtaning uchta koordinatasi (x, y, z) va vaqti t larni berishimiz kerak. Biror hodisaning ro'y bergan koordinatalari va vaqtini ikki sistemada solishtirmoqchi bo'laylik. Bir (shtrixlanmagan) sistemadan ikkinchisiga (shtrixlanganga) o'tganimizda Nyuton mexanikasida ham

$$(x, y, z) \to (x', y', z')$$

bo'ladi, ammo unda

$$t = t'$$

bo'lib qolar edi. Einshteinning nisbiylik prinsipi bo'yicha esa

$$(x, y, z, t) \to (x', y', z', t') \tag{1.2}$$

deb yozishimiz kerak. Ko'rinib turibdiki, biz tabiiy ravishda to'rt o'lchamli matematik fazoga o'tib qoldik. Bu fazoning (t, x, y, z) koordinatalik har bir nuqtasi qandaydir bir hodisaga mos keladi. Bunday to'rt o'lchamli matematik fazo ***Minkovskiy fazosi*** deyiladi. Fizikada u ***fazo-vaqt*** deyiladi. Odatda vaqt koordinatasi hamma vaqt yorug'lik tezligiga ko'paygan holda kirgani uchun vaqt koordinatasi sifatida $x^0 = ct$ olinadi. Ko'rinib turibdiki, x^0 ning o'lchamligi masofa o'lchamligiga teng.

Fizika fani hodisalar haqidagi fan bo'lgani uchun (1.2) ning natijasi sifatida fizika qonunlarini to'rt o'lchamli fazo-vaqt tilida ifoda qilishimiz maqsadga muvofiqdir.

Yana bir ta'kidlab o'taylik, to'rt o'lchamli fazo-vaqt matematik fazodir, undan foydalanish juda ko'p qulayliklarga olib keladi. Bizning hayotimiz esa uch o'lchamli fizik fazoda o'tadi.

Biron-bir nuqtada qimillamasdan turgan zarrani olaylik. Har bir vaqt momentida shu zarraga fazo-vaqtning bir nuqtasi to'g'ri keladi, uni odatda ***dunyoviy nuqta*** deyiladi. Vaqt o'tishi bilan zarraning vaqt koordinatasi osha boshlaydi va uning dunyoviy nuqtasi vaqt koordinatasiga parallel bo'lgan chiziq chiza boshlaydi. Agar zarramiz fazoda harakat qilsa uning mana shu ***dunyoviy chizig'i*** egri chiziqqa aylanadi.

Ixtiyoriy fazo haqida gapirganimizda shu fazodagi ikki nuqta orasidagi masofa tushunchasi muhim rol o'ynaydi. Biz o'rgangan uch o'lchamli fazoda Pithagor (Pifagor) teoremasi bo'yicha koordinatalari dx, dy, dz ga farq qilgan ikki nuqta orasidagi masofa kvadrati

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

ga teng. Agar koordinatlarni nomerlab chiqsak - $x = x^1$, $y = x^2$, $z = x^3$ - yuqoridagi qoida qulayroq ko'rinishga keladi:

$$dl^2 = \sum_{i=1}^{3}(dx^i)^2. \tag{1.3}$$

Masofaning asosiy hossasi - uning ortogonal chiziqli almashtirishga nisbatan o'zgarmasligi, ***invariant***ligidir. Ortogonal almashtirish koordinat sistemamizni biror bir burchakka aylantirishga mos keladi. Koordinat sistemasini aylantirsak ikki nuqta orasidagi masofa o'zgarmaydi, albatta.

Fazo-vaqtdagi koordinatalari (cdt, dx, dy, dz) ga farq qilgan ikki nuqta (ikki hodisa !) orasidagi masofa kvadrati

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{1.4}$$

formula orqali aniqlanadi. Masofaga kirgan differensiallar kvadratlarining bir qismi minus ishorasi bilan kirdi. Masofaning kvadrati shunday ta'riflanadigan fazolar ***psevdoyevklid*** fazolari deyiladi. Kiritilgan ds kattalik ikki cheksiz yaqin hodisalar orasidagi ***interval*** deyiladi. Bú formulaning kelib chiqishi quyidagicha. Uni

$$ds^2 = c^2dt^2 - dl^2 = c^2dt^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

ko'rinishga keltirib olaylik. Shu ikki nuqta orasidagi yorug'lik nurining tarqalishini ko'raylik. Ya'ni, birinchi hodisa – x, y, z nuqtadan t vaqtda yorig'lik nuri chiqdi va ikkinchi hodisa – shu nur $x+dx, y+dy, z+dz$ nuqtaga $t+dt$ vaqtda yetib keldi. Bu holda $v=c$ va $ds^2=0$ bo'ladi. Xuddi shu protsesni ixtiyoriy boshqa sanoq sistemasida olib qarasak, bari bir $ds'^2=0$ ekanligini ko'ramiz (yorug'lik tezligining o'zgarmasligi sababli). To'rt o'lchamli fazo-vaqtdagi (1.2)-almashtirish bir sanoq sistemasidan ikkinchisiga o'tishga mos keladi. To'rt o'lchamli koordinat sistemasi nuqtai-nazaridan bu almashtirish bir ortogonal sistemadan ikkinchisiga o'tishdir, ya'ni, ma'lum bir burchakka burishdir. Bu almashtirish ***Lorentz*** almashtirishi deyiladi (Lorentz almashtirishlarining aniq ta'rifini 77-betda muhokama qilamiz). Ko'rsatish mumkinki ([1], §2), intervalning bu almashtirishlarga nisbatan invariantlik xossasi

$$ds=ds'$$

nafaqat nolga teng bo'lgan intervallar uchun, balki ixtiyoriy intervallar uchun o'rinlidir.

Bizga to'rtta komponentalik kattalik berilgan bo'lsin: $A^\mu=(A^0, A^1, A^2, A^3)$. Agar shu kattalik bir sanoq sistemasidan ikkinchisiga o'tganda Lorentz almashtirishlari bo'yicha o'zgarsa bunday kattalik to'rt-vektor deyiladi.

Intervalning kvadratini ham (1.3)-ko'rinishga keltirib olmoqchi bo'lsak vektorlarning ikki xil sortini kiritishimiz kerak: x^μ va x_μ, bu yerda μ – to'rtta qiymatni qabul qiladi: $\mu=\{0,1,2,3\}$. x^μ sifatida (ct,x,y,z) larni olamiz. x_μ to'rt-vektor sifatida esa $(ct,-x,-y,-z)$ larni olamiz. Odatda yuqori indeksli vektorlarni ***kontravariant*** vektor, quyi indeksli vektorlarni esa ***kovariant*** vektor deyiladi. Demak, kiritishimiz bo'yicha

$$x_0=x^0, \quad x_1=-x^1, \quad x_2=-x^2, \quad x_3=-x^3.$$

Bu – ta'rif. To'rt-vektorlarning differensiallari ham shu qoidaga bo'ysunadi. Shunday ta'rif kiritsak (1.4)-formulani

$$ds^2=\sum_{\mu=0}^{3} dx_\mu dx^\mu$$

ko'rinishga keltirib olamiz. Yana bir muhim soddalashtirish kiritishimiz zarur. Keyingi formulalarda har-xil indekslar bo'yicha yig'indilar juda ko'p bo'ladi. Shuning uchun quyidagi kelishuv hayotimizni o'ta soddalashtirib berar edi: agar biror formulada bir indeks ikki marta uchrasa – bir marta kovariant, bir marta kontravariant holda – shu indeks bo'yicha yig'indi ko'zda tutiladi va yig'indi belgisi ishlatilmaydi (Einshtein qoidasi). Bunday indekslar ***soqov indekslar*** deyiladi. Shunda yuqoridagi formula

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu \tag{1.5}$$

ko'rinishni oladi. Bu ifoda masofaning kvadrati edi, xuddi shu yo'sinda ixtiyoriy to'rt-vektor A_μ ning kvadratini ham kiritishimiz mumkin:

$$A^2 = A_\mu A^\mu = A^\mu A_\mu = A_0 A^0 + A_1 A^1 + A_2 A^2 + A_3 A^3 =$$

$$= (A^0)^2 - \mathbf{A}^2.$$

Umuman, ixtiyoriy ikkita to'rt-vektorlar A^μ va B^μ uchun ularning skalyar ko'paytmasini

$$A_\mu B^\mu = A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3 = A_0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

orqali kiritishimiz mumkin. Agar metrik tenzor deb ataladigan va faqat diagonal komponentalari noldan farqli bo'lgan

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} 0, & \mu \neq \nu; \\ 1, & \mu = \nu = 0; \\ -1, & \mu = \nu = i, \quad i = 1, 2, 3, \end{cases}$$

kattalik kiritsak yuqorida kiritilgan skalyar ko'paytmalarni

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu; \quad A^2 = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu; \quad AB = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$$

ko'rinishda yozib olishimiz mumkin. Bu formulalarda ikkitadan soqov indeks bor.

Har bir formalizm shu formalizm qo'llanishi kerak bo'lgan hodisalarga adekvat, ya'ni, mos kelgan bo'lishi kerak. Kiritilgan qoidalar bir-muncha formal ko'rinishga ega, ammo nisbiylik nazariyasining ichki ma'nosiga mos keladi. Ular bundan keyingi ishimizni soddalashtirib beradi. Ayniqsa egrilangan fazolarga o'tganimizda to'rt o'lchamli formalizm o'z qulayligini ko'rsatadi.

Intervalning invariantligidan qanday natijalar kelib chiqishiga bir misol keltiraylik. Qo'zg'almasdan turgan kuzatuvchi oldidan uzunligi $\Delta l'$ bo'lgan bir poyezd katta o'zgarmas tezlik bilan o'tib ketayotgan bo'lsin. Poyezdning boshidagi soat qo'zg'olmas kuzatuvchining oldidan o'tib ketayotganda uning ko'rsatishi kuzatuvchi soatining ko'rsatishi bilan bir xil bo'lsin: $t = t'$. Kuzatuvchi vaqti bo'yicha Δt vaqt o'tgandan keyin poyezdning ohiridagi soat (bu soat poyezdning boshidagi soat bilan o'z sistemasida sinxronlashtirilgan[1] bo'lsin) kuzatuvchining oldidan o'tsin. Kuzatuvchi (laboratoriya) sistemasida bu ikkala hodisa bir nuqtada ro'y berdi, demak, ular orasidagi interval kvadrati

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2$$

ga teng. Poyezd sistemasida esa

$$\Delta s'^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta l'^2$$

bo'ladi. Intervalning invariantligidan

$$c^2 \Delta t^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta l'^2$$

ni olamiz. $\Delta l'^2 / \Delta t'^2 = v^2$ – poyezdning tezligi ekanligini hisobga olsak

$$\Delta t = \Delta t' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

[1] Bir sistemada qo'zg'almasdan turgan ikkita soatni sinxronlashtirish: ikkala soat orasidagi masofa Δl aniqlanadi, birinchi soat 12^{00} ga qo'yiladi, ikkinchi soat $12^{00} + \Delta l / c$ ga qo'yiladi, birinchi soat ishga tushirilishi bilan ikkinchi soatga yorug'lik signali yuboriladi va u ikkinchi soatga yetib borishi bilan ikkinchi soat ham ishga tushib ketadi.

munosabatni topamiz. Demak, bizning holimizda $\Delta t < \Delta t'$. Bunday munosabatlarga asoslanib, ba'zi bir hollarda hisobot sistemalarining birida vaqt tezroq, boshqasida sekinroq o'tadi degan xulosalarga kelinadi. Bu mutlaqo noto'g'ri xulosadir. Bunday xulosa hisobot sistemalarining teng huquqligi haqidagi asosiy postulatga ziddir. Agar poyezddagi bitta soat qo'zg'olmas sistemadagi ikkita soat bilan solishtirilsa unda poyezddagi vaqt sekinroq o'tayotgandek bo'lib chiqar edi, chunki, bu holda ikkala hodisa poyezd sistemasida bir nuqtada roy beradi va intervalning kvadrati poyezd sistemasida

$$\Delta s'^2 = c^2 \Delta t'^2$$

ga teng bo'ladi. Laboratoriya sistemasida bu ikki hodisa ikkita soat turgan va o'zaro masofasi Δl bo'lgan ikkita har xil nuqtada roy beradi. Demak,

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2.$$

Ikkala intervallarni bir - biriga yana tenglashtirsak

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

munosabatga kelamiz, bu yerda v - yana shu ikkala sistemalarning o'zaro tezligi. Demak, ikkita inersial sistemalardagi vaqtning o'tishini solishtirganimizda qaysi inersial sistemadagi bitta soat boshqa inersial sistemadagi bir nechta soatlar bilan solishtirilsa o'sha soat kamroq vaqtni ko'rsatadi.

Masshtablarni solishtirishda ham nisbiylik nazariyasi hodisalar haqidagi mulohazalar tilida bayon qilinishi kerakligini esdan chiqarmaslik kerak. Laboratoriya sistemasida turgan kuzatuvchiga nisbatan v tezlik bilan harakat qilayotgan tayoqchaning uzunligini o'lchamoqchi bo'lsamiz uning ikkala uchining koordinatlari (x_1, x_2) ni topishimiz kerak. Tayoqchaning laboratoriya sistemamizdagi uzunligi shu koordinatlarning ayirmasiga teng bo'ladi: $x_2 - x_1 = \Delta l$. Shu ikki hodisa –

tayoqchamizning birinchi va ikkinchi uchlarining koordinatalarini o'lchash – kuzatuvchi sistemasida bir vaqtda ro'y beradi (o'lchashning ma'nosi bo'yicha). Ammo, kuzatuvchiga nisbatan harakat qilayotgan tayoqcha sistemasi nuqtai nazaridan bu jarayon boshqacha ko'rinadi. Tayoqchaning ikkala uchidan kuzatuvchiga signal bir vaqtda yetib kelishi uchun uning kuzatuvchidan uzoqroq uchidan chiqqan signal yaqinroq uchidan chiqqan signaldan $\Delta t = l_0/c$ vaqt avvalroq chiqqan bo'lishi kerak, bu yerda l_0 – tayoqchaning o'z sistemasidagi uzunligi. Shu vaqt ichida v tezlik bilan harakat qilayotgan tayoqcha $v\,\Delta t = v\,l_0/c$ masofani bosib o'tgan bo'ladi.

Biror-bir sistemada ikkita hodisani olib qaraylik. Biri (x_1, y_1, z_1) nuqtada t_1 vaqtda ro'y bergan bo'lsin, ikkinchisi (x_2, y_2, z_2) nuqtada t_2 vaqtda ro'y bergan bo'lsin. Ikki hodisa orasidagi intervalning kvadrati

$$s_{12}^2 = c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2 = c^2t_{12}^2-l_{12}^2.$$

Intervalning kvadrati uch xil ishoraga ega bo'lishi mumkin.

$\mathbf{s_{12}^2 > 0}$. Bunday interval ***vaqtsimon*** interval deyiladi. Sababi, bir nuqtada ro'y bergan ikkita hodisani olib qarasak ular orasidagi interval $s_{12}^2 = c^2t_{12}^2 > 0$ bo'ladi, va u shu ikki hodisa orasidaga vaqtga proporsional bo'ladi: $t_{12} = s_{12}/c$. Shu ikki hodisa orasidagi intervalning ishorasi va son qiymati ixtiyoriy boshqa sistemalarda ham musbat bo'ladi. Bu degani qandaydir ikkita hodisa orasidagi interval vaqtsimon bo'lsa, shunday sistemani topishimiz mumkinki, unda ushbu ikki hodisa bir nuqtada roy bergan bo'ladi.

$\mathbf{s_{12}^2 < 0}$. Bunday interval ***fazosimon*** interval deyiladi. Sababi, ikkita har xil nuqtada bir vaqtda ro'y bergan hodisalar orasidagi interval $s_{12}^2 = -l_{12}^2 < 0$ bo'ladi, demak, bu holdagi intervalimizning son qiymati fazoviy masofaga teng ekan. Agar ikki hodisa orasidagi interval fazosimon bo'lsa shunday inersial sistemani topishimiz mumkinki unda mana shu ikki hodisa bir vaqtda ro'y bergan bo'ladi.

$s_{12}^2 = 0$. Bunday interval ***nursimon*** yoki ***izotrop*** interval deyiladi. Sababi, ikki hodisa orasidagi intervalning qiymati nolga teng bo'lishi uchun bu ikki hodisa orasidagi vaqt va masofa

$$\frac{l_{12}}{t_{12}} = \pm c$$

munosabat bilan bog'langan bo'lishi kerak. Birinchi hodisa ro'y berishi bilan undan chiqqan nur ikkinchi nuqtaga yetib borishi bilan u yerda ikkinchi hodisa ro'y berishi kerak.

Aniqki, faqat $s_{12}^2 \geq 0$ bo'lgandagina ikki hodisa sababiy bog'langan bo'lishi mumkin. Chunki faqat shunday hollardagina shu ikki hodisalar o'zaro biror signal bilan bog'langan bo'lishi mumkin (bu holda yorug'lik nurining t_{12} vaqt ichida bosib o'tadigan masofasi l_{12} dan kam bo'lmaydi, demak, nur bu hodisalarni bog'lashi mumkin).

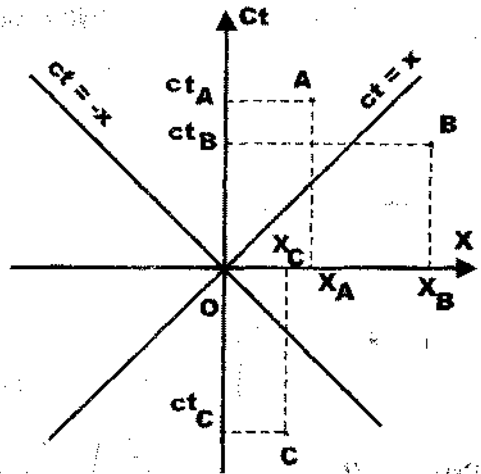
Birvaqtlilik tushunchasi nisbiy bo'lgani bilan o'tmish va kelajak tushunchalari absolutdir. Bunga ishonch hosil qilish uchun fazo-vaqt diagrammasini chizaylik. To'rt o'lchamli tasvirga qobil bo'lmaganimiz uchun (yorug'lik tezligiga ko'paytirilgan) vaqt ct va bitta fazoviy koordinata x bilan chegaralanib qolaylik. Bu 1.2-rasmda O – bir hodisa, A, B va C nuqtalar – boshqa hodisalar. Diagonal bo'yicha to'g'ri chiziqlar $ct = \pm x$ tenglamaga mos keladi. Ko'rinib turibdiki,

$$s_{OA}^2 = c^2 t_{OA}^2 - x_{OA}^2 > 0, \qquad s_{OC}^2 = c^2 t_{OC}^2 - x_{OC}^2 > 0$$

va

$$s_{OB}^2 = c^2 t_{OB}^2 - x_{OB}^2 < 0.$$

O va A hodisalar, xuddi shunday, O va C hodisalar sababiy bog'langan bo'lishi mumkin. O va B hodisalar esa – yo'q. O hodisa C hodisadan keyin ro'y bergan. A esa O dan keyin. Bu tartibni hech qanday yo'l bilan o'zgartirib bo'lmaydi. A hodisa O hodisadan avval ro'y bersin desak A ni O ga nisbatan quyi uchburchakka o'tkazishimiz kerak, bunda qandaydir bir



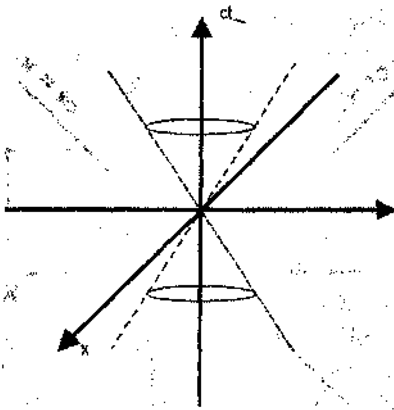
Rasm 1.2: Fazo-vaqt munosabatlari

nuqtada albatta yoki $s^2_{OA} < 0$, yoki $s^2_{OA} = 0$ bo'lib qoladi, bu esa intervalning invariantligiga ziddir. O va B nuqtalar sababiy bog'langan bo'lishi mumkin emas, ularning orasidagi interval fazosimondir. Yorug'lik nuri O nuqtadan chiqib x_B nuqtagacha yetib borguncha B hodisa roy' berib bo'lgan bo'ladi.

Agar to'rt o'lchamli fazo-vaqtga o'tsak

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

tenglama to'rt o'lchamli "konus"ni beradi (xuddi $z^2 - x^2 - y^2 = 0$ tenglama yuqori pallasi $z > 0$ yarim fazoda va quyi pallasi $z < 0$ yarim fazoda joylashgan uch o'lchamli konusni berganidek). Bunday konus ***yorug'lik konusi*** deyiladi. To'rt o'lchamli rasmni tasavvur qila olmaganimiz uchun uch o'lchamli $c^2t^2 - x^2 - y^2 = 0$ konusni (1.3)-rasmda ko'rsatdik. Unda O hodisaga nisbatan kelajak shu konusning yuqori pallasining ichida yotgan bo'ladi, o'tmish esa – quyi pallasining ichida. Umumiy nisbiylik nazariyasiga o'tganimizda ham



Rasm 1.3: (t, x, y) fazodagi yorug'lik konusi

kelajak va o'tmish konuslari tushunchalari ko'p ishlatiladi, faqat vaqt va fazo koordinatalari orasidagi munosabatning murakkablashishi sababli umumiy nazariyadagi konuslar ham har xil nuqtada har xil formaga ega bo'ladi.

Energiya va impuls nisbiylik nazariyasida bitta to'rt-vektorni tashkil qiladi:

$$p^{\mu} = \{p^0, p^1, p^2, p^3\} = \{p^0, \mathbf{p}\} = \{E/c, \mathbf{p}\}.$$

Bu to'rt vektorning kvadrati uchun

$$p^2 = p_{\mu} p^{\mu} = E^2/c^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2 \tag{1.6}$$

formulaga egamiz (([1], §9)). To'rt impuls bilan chambarchas bog'liq bo'lgan to'rt tezlikni ham kiritishimiz qulaydir:

$$u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{ds} = \left\{ \frac{dx^0}{ds}, \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right\}. \tag{1.7}$$

To'rt tezlik o'lchamsiz kattalikdir. Uning komponentalarini hisoblash uchun

$$ds = cdt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

dan foydalanaylik:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

Tezlik kichik bo'lganda

$$u^\mu \simeq \left\{ 1, \mathbf{v} \right\}.$$

Ko'rsatish qiyin emaski,

$$p_\mu = mcu_\mu. \tag{1.8}$$

Rostdan ham, (1.7)-dan

$$u^2 = u_\mu u^\mu = 1 \tag{1.9}$$

tenglikni olamiz ((1.5)-bilan solishtiring), buni (1.8)-ga qo'llasak (1.6)-formulaga yana kelamiz.

To'rt o'lchamli formalizm to'rt-hosilalarni kiritishni talab qiladi. Ularni quyidagicha ta'riflaymiz:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\} =$$

$$= \left\{ \frac{\partial}{c\,\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\} = \left\{ \frac{\partial}{c\,\partial t}, \nabla \right\}.$$

To'rt hosilaning kontravariant ko'rinishi umumiy qoidaga asosan:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \partial^\mu = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right\} =$$

$$= \left\{ \frac{\partial}{c\,\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right\} = \left\{ \frac{\partial}{c\,\partial t}, -\nabla \right\}.$$

Bu hosilalarning nima uchun ko- va kontravariantligi asosiy tekstda tushuntirilgan. To'lqin – Dalamber – operatori shu to'rt hosilaning kvadratidir:

$$\partial^2 = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{c^2\,\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x^3}\frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{\partial^2}{c^2\,\partial t^2} - \Delta,$$

bu yerda $\triangle = \nabla^2$ – Laplas operatori.

2

Asosiy g′oyalar

2.1 Ekvivalentlik prinsipi

Umumiy nisbiylik nazariyasining asosida ***lokal ekvivalentlik prinsipi*** yotadi. Bu prinsipni kiritish uchun quyidagi eksperimental faktlar va mulohazalar bilan tanishib chiqaylik.

Bu bobning boshida norelativistik tabiyatga ega bo′lgan tushunchalar - ***og′ir*** va ***inert*** massalarni kiritamiz. Energiya-impuls tenzori haqida gapirganimizda bu tushunchalarga yana qaytib kelamiz.

XVII- asrda Galiley har xil moddalardan qilingan va og′irligi har xil bo′lgan jismlarning yerga tushishini o′rganib quyidagi natijaga kelgan: hamma jismlar qanday material (yog′ochmi, temirmi va h.k)dan qilinganligi va og′irligidan qat`iy nazar Yerning tortishish maydonida ozod tushayotganida ***bir xil tezlanish*** bilan harakat qilar ekan.

Odatda bu tajriba og′ir va inert massalarning tengligi bilan bog′lanadi.

Nyutonnig ikkinchi qonuni bizga inert massaning ta'rifini beradi (uni bizga qulay bo'lgan formada yozib olaylik):

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m_{in}}. \tag{2.1}$$

Ya'ni, inert massa m_{in} jismning inertlik, tashqi kuchga qarshilik qilish qobiliyatini bildirar ekan: (2.1) dan ko'rinib turibdiki, m_{in} qancha katta bo'lsa berilgan tashqi kuch $\mathbf{F}$ ta'sirida olingan tezlanish shuncha kichik bo'ladi. Ikkinchi tomondan, butun dunyo tortishish qonunidan bilamizki, ikki jism orasidagi tortishish kuchi

$$\mathbf{F} = -G\frac{m_{o1}m_{o2}}{r^3}\mathbf{r} \tag{2.2}$$

ko'rinishga egadir. Bu yerda $G = 6.673 \cdot 10^{-8} cm^3/g \cdot sek^2$ - Nyuton doimiysi, m_{o1} va m_{o2} lar esa birinchi va ikkinchi jismlarning "og'ir" massasidir. Bu formulani Coulomb (Kulon) qonuni bilan solishtirsak ko'rinib turibdiki, m_{o1} va m_{o2} lar jismlarning ***gravitatsion zaryadlari*** ekan. Analogiyani kuchaytirish uchun (2.2)-formulani quyidagi ko'rinishda yozib olaylik:

$$\mathbf{F}_g = m_{o1}\mathbf{E}_{2g} = m_{o2}\mathbf{E}_{1g}.$$

Bu yerda $\mathbf{E}_{ig}$ - i-jism hosil qilgan gravitatsion maydon kuchlanganligi. Agar ikkinchi jismni Yer deb olsak, $m_{o2} = M$, va odatdagidek, Yer maydoni hosil qilgan kuchlanganlikni $\mathbf{g}$ harfi bilan belgilasak: $\mathbf{g} = -(GM/r^3)\mathbf{r}$ (uning son qiymati $g = 981 sm/sek$). Yer maydonida harakat qilayotgan jism uchun quyidagini yozishimiz mumkin:

$$\mathbf{F}_g = m_o\mathbf{g}. \tag{2.3}$$

(2.1)- va (2.3)-formulalarni solishtirsak jismning Yer maydonidagi tezlanishi uchun quyidagi formulani olamiz:

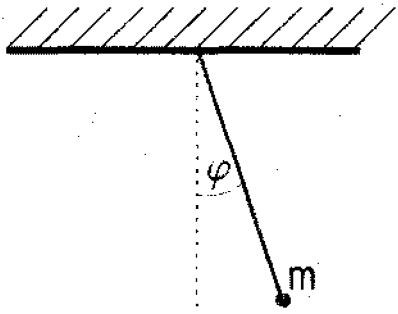
$$\mathbf{a} = \frac{m_o}{m_{in}}\mathbf{g}.$$

Bu yerda g Yerning massasi va radiusi orqali aniqlanadi, ya'ni, hamma jismlar uchun bir xildir. Demak, hamma jismlar uchun tezlanish a ning bir xilligi hamma jismlar uchun m_o/m_{in} nisbatning bir xilligini bildiradi. o'lchamlar sistemasini tanlab olish o'z ixtiyorimizda bo'lgani uchun ikkala massaning o'lchamligini shunday tanlab olishimiz mumkinki,

$$\frac{m_o}{m_{in}} = 1 \tag{2.4}$$

bo'ladi. Demak, og'irlik va inert massalar bir-biriga teng ekan, vaholangki, bu ikki tushunchalarning ta'riflari (2.1)-va (2.2)-orasida hech qanday o'xshashlik yoq'dir.

Bu fakt juda muhim bo'lgani uchun unga oid yana bir tajribani keltiraylik (Nyuton tajribasi). Kichik tebranishlar bajara-



Rasm 2.1: Nyuton tajribasiga oid

yotgan mayatnikni olaylik-(2.1)-rasmga qarang. Uning Lagranj funksiyasi

$$L = \frac{m_{in}v^2}{2} - m_o gl(1 - \cos\varphi) \simeq \frac{1}{2}m_{in}l^2\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}m_o gl\varphi^2$$

ko'rinishga egadir. Harakat tenglamasi:

$$\ddot{\varphi} + \frac{gm_o}{lm_{in}}\varphi = 0.$$

Bu tenglamaning yechimi

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

dan ko'rinib turibdiki, mayatnikning tebranish davri

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\frac{m_o}{m_{in}}}$$

ga tengdir. Tajribadan ma'lumki, ingichka uzun ipga bog'langan og'ir zarra (matematik mayatnik)ning tebranish davri uning materialiga bog'liq emas. Demak, biz ya'na (2.4)-formulaga kelamiz.

Galiley va Nyuton tajribalarining aniqligi $10^{-2} - 10^{-3}$ darajada edi. XIX asrning oxirida Vengriyalik Eötvös (Etvyosh) (2.4) munosabatning to'g'riligini 10^{-9} darajagacha aniqlikda tekshirishga muvaffaq bo'lgan.

Gravitatsion zaryad bo'lgan og'irlik va ixtiyoriy tashqi kuchga qarshilik qobiliyatining o'lchami bo'lgan inert massalarning tengligi tasodif emas balki tortishish maydonining asosiy xossasining namoyishi ekanligini Einshtein birinchi tushundi va bu tenglikni tabiiy ravishda tushuntiradigan quyidagi ***lokal ekvivalentlik prinsipi*** ni kiritdi: ***Ixtiyoriy gravitatsion maydon biron noinersial hisobot sistemasiga lokal ekvivalentdir.***

Darhaqiqat, noinersial hisobot sistemalarida hamma jismlar (hech qanday tashqi kuch bo'lmagan holda) bir xil tezlanish bilan harakat qiladi (masalan, avtobus yoki tramvay joyidan qo'zg'alganda yoki tormoz berganda, ma'lum burchak tezligi bilan aylanayotgan platformada va h.k.) Yana bir yorqin misol - Einshtein lifti. Agar liftda erkin tushyotgan bo'lsak biz hech qanday tortishish kuchini sezmaymiz, ya'ni, erkin tushayotgan lift bilan bog'liq bo'lgan noinersial sistemaga o'tsak tortishish kuchini yo'q qilgandek bo'lamiz. Demak, ***gravitatsion maydon va noinersial hisobot sistemalarining asosiy xossalari bir xil ekan.*** Ammo bu ekvivalentlik mahalliy, lokal ma'nogagina ega bo'lishi mumkin. Sababini tushunish uchun mashhur bo'lgan Einshtein lifti misolini ko'rib chiqaylik.

Lift (arqonining uzulishi natijasida, masalan) erkin tushayotgan bo'lsa uning ichidagi kuzatuvchi hech qanday tortishish kuchini sezmaydi. Ya'ni, tezlanish bilan harakat qilayotgan (noinersial) sistemaga o'tib tashqi gravitatsion maydonni go'yoki yo'q qildik. Ixtiyoriy jism (agar unga biron nogravitatsion kuch ta'sir qilayotgan bo'lmasa) liftning ichida o'zining to'g'ri chiziqli tekis harakat holatini saqlab qoladi. Lekin, boshida o'zaro qo'zg'almay turgan ikki jismni olsak va lift Yer maydonida ko'p vaqt harakat qilayotgan bo'lsa biz bu jismlar orasidagi masofaning kamayganini sezishimiz mumkin (shu ikki jismning Yer markaziga qarab harakat qilishi natijasida). Demak, ekvivalentlik prinsipi lokal harakterga ega ekan. Ya'ni, biz uni fazo-vaqtning yetarli darajada kichik bo'lgan sohasidagina qo'llashimiz mumkin ekan.

Ekvivalentlik prinsipidan fazo-vaqtning egrilanganligi kelib chiqadi. Buni ko'rish uchun o'z o'qi atrofida ma'lum burchak tezligi bilan aylanayotgan platformani olib qaraylik. Platformaning ustida turgan jismga markazdan qochiruvchi kuch ta'sir qiladi, agar platformaning ustida odam turgan bo'lsa va u biror jismga suyanib turgan bo'lsa, shu kuch odamni shu jismga xuddi yer maydoni Yerga tortib turgandek yopishtirib turadi. Platformaning tagida (yoki ustida) turgan (laboratoriya sistemasiga nisbatan) qo'zgolmas kuzatuvchi platformaning diametrini va perimetrini o'lchasin. Platformaning diametri qo'zg'olmas kuzatuvchi va platformadagi kuzatuvchilar nuqtai nazaridan bir xil qiymatga ega bo'ladi, uning perimetri esa qo'zg'olmas kuzatuvchi nuqtai nazaridan kichikroq bo'lib chiqadi (chunki birinchi holda diametr harakat yonalishiga perpendikular va ikkinchi holda esa paralleldir). Demak, gravitatsion maydon bo'lgan sistemada Evklid fazosining qonunlari o'rinli bo'la olmas ekan, ularda aylanma uzunligining diametrga nisbati π ga teng emas ekan.

Shu yerda Gauss taxmini deb ataluvchi bir mulohazaga nazar tashlaylik. Ixtiyoriy egrilangan fazoning bir nuqtasini va uning juda kichik bir atrofini olib qaraylik. Bu atrof yetarli darajada kichik bo'lsa undagi masofalarni Dekart koordinat sistemasidagi qonunlar bo'yicha, ya'ni. Pifagor teoremasi yordamida aniqlashimiz mumkin. Masalan, Yer yuzi sferani eslatadi, u egrilangan sirtdir, ammo, ixtiyoriy nuqtaning odam ko'zi etadigan atrofi yuqori darajadagi aniqlik bilan tekis sirt qonunlariga bo'ysunadi. Bu holda yetarli darajadagi kichik degan iboramiz radiusi bir necha yuz metrlik sohani bildiradi. Boshqa misollarga o'tsak, ularning har birida o'ziga mos sohalar haqida gap ketadi, albatta. Masalan, puflanadigan rezina sharini olsak uning sirtidagi ixtiyoriy nuqta atrofini tekis sirt elementi deb qarash uchun bu atrof 1-2 mm dan katta bo'lmasligi kerak. Gaussning taxmini bo'yicha bu holat hamma egrilangan fazolarga tegishlidir - ixtiyoriy egrilangan fazoning ixtiyoriy nuqtasi atrofidagi yetarli darajada kichik bo'lgan sohada (lokal) Dekart koordinat sistemasining qonunlari yuqori darajadagi aniqlik bilan bajariladi.

Bu mulohazani avvalgi misolga qo'llasak, Einshtein liftiga o'tib biz egrilangan to'rt o'lchamli fazo-vaqtning bir nuqtasi atrofida lokal inersial hisobot sistemasini kiritdik, xuddi Gauss bo'yicha nuqtaning kichik atrofida egrilikdan qutulganimizdek, gravitatsiyadan qutuldik.

Bu mulohazalardan ko'rinib turibdiki, ekvivalentlik prinsipini quyidagi formaga keltirishimiz mumkin:

Ixtiyoriy gravitatsion maydonda fazo-vaqtning har bir nuqtasining yetarli darajadagi kichik atrofida "lokal inersial koordinat sistema"sini tanlab olishimiz mumkinki, shu kichik atrofda tabiat qonunlari tezlanishsiz bo'lgan Dekart koordinat sistemasidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

Ko'pincha "Dekart sistemasi"ning o'rniga "Galiley sistemasi" deyiladi, shuni ko'zda tutish kerakki, tekis fazo-vaqt Minkowski fazosidir, u psevdoyevklid fazo, undagi "Dekart sistemasini" shartli ravishda Dekart sistemasi deyish mumkin.

2.2 Umumiy kovariantlik prinsipi

Mexanika va elektrodinamika qonunlarini ifodalashda odatda ***inersial*** hisobat sistemalaridan foydalaniladi. Buning sababi tabiat qonunlarining xuddi shu sistemalarda sodda ko'rinishga ega ekanligi, ya'ni, bu sistemelarning alohida ajratilgan roli bor ekanligidir.

Gravitatsiya bor joyda esa bu sistemalarning alohida roli yo'qoladi. Buni ko'rish uchun yana Einshteinning liftiga qaytaylik. Liftning ichida ozod tushayotgan jismlar uchun shu lift sistemasi inersial sistemadir - ixtiyoriy jism shu sistemada o'zining boshlang'ich tezligini saqlab harakat qiladi. Lekin Yerdagi kuzatuvchi nuqtai nazaridan bu sistema noinersial sistemadir, u tezlanish bilan harakat qilayapti. Demak, xususiy nisbiylik nazariyasidagi inersial va noinersial sistemalar orasida bo'lgan prinsipial farq yo'qolar ekan. Xususiy nisbiylik nazariyasidagi "hamma inersial sistemalar teng huquqlidir" degan aksiomaning o'rniga "hamma hisobat sistemalari teng huquqlidir" degan aksiomani kiritishimiz kerakdir.

Hisobat sistemalarining teng huquqligi harakat tenglamalarining shu sistemalarda bir xil ko'rinishga ega bo'lishi kerakligini bildiradi. Ya'ni, tenglamalar umumiy koordinat almashtirishlariga nisbatan ***kovariant*** (ko'rinishini o'zgartirmaydigan) bo'lishi kerak. Bundan kelib chiqadiki, gravitatsion maydon tenglamalari tenzor munosabat ko'rinishiga ega bo'lishi kerak [1].

Umumiy kovariantlik prinsipini quyidagi ko'rinishda ifodalash mumkin:

1. Tenglamalar umumiy koordinat almashtirishida o'z ko'rinishini o'zgartirmaydi;

2. Tortishish maydoni yo'q bo'lgan holda hamma formulalar

[1] Tenzor munosabatning ayni shu xossasi borligini 4-paragrafda ko'ramiz.

o′zining xususiy nisbiylik nazariyasidagi ko′rinishini oladi.

Umumiy kovariantlik prinsipi ekvivalentlik prinsipidan kelib chiqqan xulosa, uning natijasidir. Shuni ko′zda tutmasak uning katta ma'nosi yo′qdir.[2]

[2] Ixtiyoriy tenglamani kovariant ko′rinishda yozib olishimiz mumkin, buning chuqur ma'nosi yo′qdir.

3

Egrilangan fazolardagi tenzorlar nazariyasi

3.1 Tenzorlarning ta'rifi

Ekvivalentlik va umumiy kovariantlik prinsiplaridan kelib chiqqan xulosa shu bo'ldiki, bizga egri chiziqli sistemalarda tenzor munosabatlar kerak ekan. Shu nazariyani o'rganishga o'taylik.

Bizga to'rt o'lchamli fazoda biror x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) koordinat sistemasi berilgan bo'lsin. Yangi ixtiyoriy x'^μ sistemaga o'tish formulalarini ko'raylik:

$$x'^\mu = f^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \tag{3.1}$$

Ta'rif bo'yicha f^μ funksiyalar ixtiyoriy C^2 sinfiga[1] mansub bo'lgan funksiyalardir. Bu talabning ma'nosi 44-betda ochiladi. Differensiallar uchun munosabat

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \tag{3.2}$$

[1] n-nchi tartibli uzliksiz hosilalarga ega bo'lgan funksiyalar C^n sinfiga mansub bo'lgan funksiyalar deyiladi.

ko'rinishga ega bo'ladi (bu yerda o'ng tomondagi x'^μ lar (3.1) dagi f^μ larni bildiradi). Bu formulada ν indeks soqov indeksdir, u bo'yicha yig'indi ko'zda tutiladi:

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}dx^\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^0}dx^0 + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^3}dx^3.$$

Ta'rif : (3.1)-koordinat almashtirishida (3.2)-qonun bo'yicha o'zgaradigan to'rt komponentalik kattalik A^μ ***kontravariant vektor*** deyiladi:

$$A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}A^\nu.$$

Ta'rif : (3.1)-koordinat almashtirishida quyidagi qoida bo'yicha o'zgaradigan to'rt komponentalik kattalik

$$A'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}A_\nu$$

kovariant vektor deyiladi.

Kontravariant vektor deb kiritgan kattaliklarimiz koordinatalarning differensiallari kabi o'zgaradigan kattaliklar edi, kovariant vektorlarga misol qilib skalyar funksiyaning (to'rt)gradiyentini keltirishimiz mumkin. Skalyarning ta'rifini eslaylik:

$$\varphi'(x') = \varphi(x). \tag{3.3}$$

Demak, murakkab funksiya hosilasining ta'rifi bo'yicha

$$\frac{\partial\varphi'(x')}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu}.$$

Bundan keyin ko'pincha xususiy hosilalarni quyidagicha belgilaymiz:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu.$$

Ya'ni,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} = \partial_\mu\varphi.$$

Bu ta'riflarga ahamiyat bergan o'quvchi ko- va kontravariant vektorlarning indekslari mos ravishda quyi va yuqori indeks sifatida yozilishini eslab qolishi kerak.

Yuqori rangli tenzorlar ham shularga o'xshash kiritiladi. Masalan, ***ikkinchi rang kontravariant tenzori***:

$$A'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\rho}} A^{\lambda\rho};$$

ikkinchi rang kovariant tenzori:

$$A'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} A_{\lambda\rho}.$$

Agar tenzorning ham kontravariant, ham kovariant indekslari bo'lsa bunday tenzor ***aralash*** tenzor deyiladi. Masalan, ikkinchi rang aralash tenzori:

$$A'^{\nu}_{\mu} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\rho}} A^{\rho}_{\lambda}.$$

Umuman, n–ta indeksi bo'yicha kontravariant va m–ta indeksi bo'yicha kovariant bo'lgan tenzorning ta'rifi quyidagichadir:

$$A'^{\nu_1 \cdots \nu_n}_{\mu_1 \cdots \mu_m} = \frac{\partial x^{\lambda_1}}{\partial x'^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\lambda_m}}{\partial x'^{\mu_m}} \frac{\partial x'^{\nu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\nu_n}}{\partial x^{\rho_n}} A^{\rho_1 \cdots \rho_n}_{\lambda_1 \cdots \lambda_m}. \qquad (3.4)$$

Bu ta'riflardan ko'rinib turibdiki, n – rang tenzori n–ta vektorning ko'paytmasidek almashinadigan kattalik ekan. Skalyarning ta'rifi (3.3)-ni eslasak unga ***nolinchi rang tenzori*** sifatida qarashimiz kerakligini tushunamiz.

Ko'pincha p-ta indeksi bo'yicha kontravariant va k-ta indeksi bo'yicha kovariant tenzorni (p, k) tipdagi tenzor deyiladi. Masalan, kontravariant vektor $(1, 0)$ tipdagi tenzordir, ikkinchi rang kovariant tenzori esa $(0, 2)$ tipdagi tenzordir va h.k.

Shu yerda nima uchun umumiy kovariantlik prinsipi fizik qonunlar tenzor munosabat ko'rinishiga ega bo'lishi kerakligiga olib kelishini tushunishimiz mumkin. Faraz qilaylik, x-sistemada bizga quyidagi tenzor munosabat berilgan bo'lsin:

$$A_{\rho}^{\mu\nu} = B_{\rho}^{\mu\nu}.$$

Tenzor munosabatni bunday xususiy holda olishimizning hech qanday ahamiyati yo'q, A va B tenzorlarning o'rnida ixtiyoriy boshqa rangli tenzorlar bo'lishi mumkin, muhimi - chap va o'ng tomondagi indekslarning soni va variantligi bir xil bo'lishi kerak. (3.4)-ta'rifni qo'llab x'-sistemaga o'tganimizda munosabatimiz

$$A_{\rho}^{\prime\mu\nu} = B_{\rho}^{\prime\mu\nu}$$

ko'rinishga kelishini ko'rishimiz mumkin. Ya'ni, tenzor munosabat bir sistemadan ikkinchisiga o'tganda o'z ko'rinishini o'zgartirmaslik (kovariantlik) xossasiga ega ekan. Demak, umumiy kovariantlik prinsipiga mos kelish uchun fizika qonunlarini tenzor munosabat ko'rinishda ifodalashimiz kerak ekan.

Tenzorlar o'z indekslari bo'yicha simmetrik yoki antisimmetrik bo'lishlari mumkin. Masalan, $S_{\dots\mu\nu\dots} = S_{\dots\nu\mu\dots}$ - $(\mu\nu)$ indekslari bo'yicha simmetrik tenzordir, $A_{\dots\mu\nu\dots} = -A_{\dots\nu\mu\dots}$ esa $(\mu\nu)$ indekslari bo'yicha antisimmetrik tenzordir. Simmetriklik va antisimmetriklik xossalari faqatgina bir xil variantlik indekslarga nisbatangina ta'riflanishi mumkin. Misollar - elektromagnit maydon tenzori $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$ antisimmetrik tenzordir: $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$, inersiya tenzori $I_{ij} = \sum m(r^2\delta_{ij} - r_i r_j)$ esa simmetrik tenzordir $I_{ij} = I_{ji}$. Ixtiyoriy ikkinchi rang tenzorini (ko- yoki kontravariantligidan qat'iy nazar) simmetrik va antisimmetrik qismlarga parchalashimiz mumkin:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}) + \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}) = T_{\mu\nu}^{simm} + T_{\mu\nu}^{anti}.$$

Simmetrik va antisimmetrik tenzorlarning quyidagi ko'paytmasi nolga tengdir:

$$A^{\mu\nu}S_{\mu\nu} = -A^{\mu\nu}S_{\mu\nu} = 0. \tag{3.5}$$

Tenzor munosabatning to'g'ri bo'lishi uchun indekslarning balansi bajarilishi kerak - ya'ni, chap tomondagi ozod indekslarning soni o'ng tomondagi ozod indekslarning soniga teng bo'lishi kerak va ularning tipi (variantligi) bir biriga mos tushishi kerak. Aks holda koordinat almashtirishlari natijasida munosabatning chap va o'ng tomonlari har xil o'zgaradi va bir sistemada to'gri bo'lgan munosabat ikkinchi sistemada umuman o'rinli bo'lmaydi. Bunday munosabatning ma'nosi yo'qdir.

3.2 Tenzorlar algebrasi

Tenzorlarning ba'zi bir algebraik xossalari bilan tanishaylik. Bu xossalar ixtiyoriy rangli tenzorlar uchun o'rinlidir, lekin ishni yengillashtirish uchun biz hamma xossalarni ikkinchi va uchinchi rangli tenzorlar uchun isbot qilamiz.

1. ***Ikkita (p,k) tipdagi tenzorlarning chiziqli kombinatsiyasi ya'na shu tipdagi tenzorni beradi.***

Bu qoidaga misol sifatida ikkita ikkinchi rang aralash tenzorlarni olaylik: A^μ_ν va B^μ_ν. Quyidagi ifoda $T^\mu_\nu = aA^\mu_\nu + bB^\mu_\nu$ ikkinchi rang aralash tenzorligini isbot qilish qiyin emas (a va b lar konstantalardir):

$$T'^\mu_\nu = aA'^\mu_\nu + bB'^\mu_\nu = a\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu}A^\rho_\lambda + b\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu}B^\rho_\lambda =$$

$$= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu}T^\rho_\lambda.$$

2. ***Biri (p_1,k_1) tipdagi va ikkinchisi (p_2,k_2) tipdagi ikkita tenzorning ko'paytmasi (p_1+p_2,k_1+k_2) tipdagi tenzordir.***

Masalan, A^μ_ν va B_λ tenzorlar berilgan bo'lsa $T^\mu_{\nu\lambda} = A^\mu_\nu B_\lambda$ ifoda ham tenzor bo'ladi:

$$T'^\mu_{\nu\lambda} = A'^\mu_\nu B'_\lambda = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}A^\rho_\sigma\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\lambda}B_\tau = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\lambda}T^\rho_{\sigma\tau}.$$

3. ***Agar ixtiyoriy (p,k) tipdagi tenzorning bitta yuqori va bitta quyi indekslari bo'yicha yig'indisini olsak, tipi $(p-1,k-1)$ bo'lgan tenzorni olamiz.***

Avvalambor shu yig'indini ta'riflash uchun kerak bo'lgan kattalikni kiritaylik:

$$\delta^\mu_\nu = \begin{cases} 1, & \mu = \nu; \\ 0, & \mu \neq \nu. \end{cases}$$

Shu kattalik yordamida tenzorning ikki indeksi bo'yicha yig'indisini aniqlashimiz mumkin:

$$T^{\mu\nu\lambda}_\nu = T^{\mu0\lambda}_0 + T^{\mu1\lambda}_1 + T^{\mu2\lambda}_2 + T^{\mu3\lambda}_3 = \delta^\nu_\sigma T^{\mu\sigma\lambda}_\nu.$$

$T^{\mu\nu\lambda}_\sigma$ $(3,1)$ tipdagi tenzor edi, yig'indi olingandan keyin hosil bo'lgan $T^{\mu\nu\lambda}_\nu$ esa $(2,0)$ tipdagi tenzor bo'lishini ko'rish qiyin emas:

$$T'^{\mu\nu\lambda}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\tau}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\nu}T^{\sigma\tau\rho}_\delta =$$

$$= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho}\delta^\delta_\tau T^{\sigma\tau\rho}_\delta = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho}T^{\sigma\tau\rho}_\tau,$$

chunki

$$\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\tau}\frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial x^\delta}{\partial x^\tau} = \delta^\delta_\tau$$

(murakkab funksiyaning hosilasini hisoblash qoidasi bo'yicha).

4. ***Bo'linma qoidasi**: **agar ixtiyoriy** $B^{\alpha_1\cdots\alpha_p}_{\beta_1\cdots\beta_k}$ **tenzor uchun** $T^{\gamma_1\cdots\gamma_s}_{\sigma_1\cdots\sigma_l}B^{\alpha_1\cdots\alpha_p}_{\beta_1\cdots\beta_k}$ **ko'paytma ya'na tenzor bo'lsa** $T^{\gamma_1\cdots\gamma_s}_{\sigma_1\cdots\sigma_l}$ **kattalik ham tenzordir.***

Keltirilgan qoidada *ixtiyoriy* so'zi asosiy so'zdir. Bu qoidaning isbotini keltirib o'tirmaymiz.

Shu to'rt qoida tenzorlar algebrasining asosini tashkil etadi. Ulardan ko'rinib turibdiki, tenzorlar ustida bajarilgan qo'shish, ayirish, ko'paytirish va yigindi olish amallari bizni yana tenzorlar maydonida qoldiradi, ya'ni, tenzorlar to'plami ushbu operatsiyalarga nisbatan xossasiga egadir.

1-Mashq:
$A^{\mu}B_{\mu}$ yig'indi skalyar ekanligini isbot qiling.

2-Mashq:
Quyidagi munosabatga $A^{\mu}\delta^{\nu}_{\mu} = A^{\nu}$, A^{μ}–vektor, bo'linma qoidasini qo'llab δ^{μ}_{ν} ning ikkinchi rang tenzori ekanligini isbot qiling.

3-Mashq:
Kronekker deltasi δ^{μ}_{ν} umumkoordinat almashtirishlariga nisbatan invariant tenzor ekanligini isbot qiling: $\delta'^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$.

3.3 Metrik tenzor

Yana bir eslatib ketaylik, fazo haqida gapirganimizda to'rt o'lchamli fazo-vaqtni ko'zda tutamiz. Matematik nuqtai nazardan bu fazo gravitatsiya bo'lmagan holda tekis Minkowski (psevdoevklid) fazosiga o'tuvchi fazo sifatida qaralishi kerak.

Egrilangan fazoning ikki cheksiz yaqin nuqtalari orasidagi masofani (intervalni) ifodalovchi formulani topaylik. Buning uchun birinchi navbatda Gauss fikrini eslaymiz: egrilangan fazodagi ixtiyoriy nuqtaning yetarli darajadagi kichik atrofida mahalliy Dekart sistemasini kiritib, shu atrofda yotgan ikki nuqta orasidagi masofani quyidagi tekis fazo formulasi orqali topishimiz mumkin (ζ^{μ} - tekis dekart sistemasi koordinatlari):

$$ds^2 = g^{(0)}_{\mu\nu} d\zeta^{\mu}\zeta^{\nu} = (d\zeta^0)^2 - (d\vec{\zeta})^2.$$

Bu formulaga kirgan $g^{(0)}_{\mu\nu}$ kattalik Minkowski fazo-vagtining metrikasini ifodalovchi faqat diagonal komponentalarigina noldan farqli va $(+1, -1, -1, -1)$ qiymatlarni qabul qiladigan tenzordir. Uni ko'pincha matritsa sifatida tasavvur qilish qulaydir:

$$g^{(0)}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (3.6)$$

Tekis koordinatlardan egri chiziqli koordinatlarga o'tamiz :

$$\zeta \longrightarrow x, \quad d\zeta^\mu = \frac{\partial \zeta^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu,$$

bunda masofa formulasi quyidagi holga keladi:

$$ds^2 = g^{(0)}_{\mu\nu} \frac{\partial \zeta^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial \zeta^\nu}{\partial x^\sigma} dx^\rho dx^\sigma = g_{\rho\sigma} dx^\rho dx^\sigma. \tag{3.7}$$

Kiritilgan yangi kattalik $g_{\mu\nu}$ ikkinchi rang tenzori ekanligi uning ta'rifidan ko'rinib turibdi:

$$g_{\rho\sigma} = g^{(0)}_{\mu\nu} \frac{\partial \zeta^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial \zeta^\nu}{\partial x^\sigma}. \tag{3.8}$$

Buni boshqacha ham talqin qilishimiz mumkin: interval (masofa) skalyar kattalikdir, dx^μ - vektor, demak, bo'linma qoidasi bo'yicha $g_{\mu\nu}$ - ikkinchi rang kovariant tenzoridir. (3.7)-dan ko'rinib turibdiki, $g_{\mu\nu}$ simmetrik tenzor ekan : $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. Buni ko'rish uchun (3.5)-formulani eslash yetarlidir: agar $g_{\mu\nu}$ ning antisimmetrik qismi bo'lganda u (3.7)-formulada simmetrik bo'lgan tenzor $dx^\mu dx^\nu$ bilan yig'indi ko'paytma hosil qilib nolni berar edi.

Masofaning (3.7)-ta'rifida paydo bo'lgan $g_{\mu\nu}$ tenzor ***metrik tenzor*** deyiladi. Metrik tenzor kovariant bo'lgani uchun (3.8) uning asosiy xossasining xususiy holidir, umumiy holda uni

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} g_{\lambda\rho} \tag{3.9}$$

ko'rinishda yozib olamiz.

Ikki cheksiz yaqin nuqta orasidagi masofaning kvadrati (3.7)- invariant kvadratik forma orqali berilgan fazo ***Riman fazosi*** deyiladi. Riman fazosining hamma xossalari metrik tenzor $g_{\mu\nu}$ orqali ifodalanadi.

Haqiqatda nisbiylik nazariyasida ko'riladigan fazolar ***psevdoriman*** fazolaridir, ya'ni, masofaning kvadratiga kirgan differensiallar kvadratlarining bir qismi manfiy ishora bilan kirgan, buni (3.6)-formuladan bilishimiz mumkin.

Metrik tenzorga teskari bo'lgan tenzor quyidagi formula orqali ta'riflanadi:

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta^{\mu}_{\lambda}. \tag{3.10}$$

Ko'rinib turibdiki, u kontravariant tenzordir.

Metrik tenzor indekslarni ko'tarish va tushirish xossasiga ega. Ya'ni, biror $T^{\mu\nu}_{\lambda}$ ni $g_{\nu\sigma}$ ga ko'paytirib ν indeks bo'yicha yig'indi olsak yangi

$$T^{\mu\nu}_{\lambda} g_{\nu\sigma} = S^{\mu}_{\lambda\sigma}$$

tenzor olamiz. Ikkinchi tomondan,

$$R^{\mu\nu}_{\lambda} = g^{\nu\sigma} S^{\mu}_{\lambda\sigma} = T^{\mu\nu}_{\lambda}.$$

Demak, tenzorning biror indeksini metrik tenzor yordamida avval ko'tarsak (tushirsak), keyin tushirsak (ko'tarsak) hech nima o'zgarmas ekan. Shuning uchun indekslarni tushirish yoki ko'tarishda hosil bo'lgan tenzorlarni o'sha harf bilan belgilanaveradi: $A^{\mu} = g^{\mu\nu} A_{\nu}$, $A_{\mu} = g_{\mu\nu} A^{\nu}$ va h.k.

4-Mashq:

$A^2 = g_{\mu\nu} A^{\mu} A^{\nu}$ ning umumkoordinat almashtirishlariga nisbatan invariant ekanligini ko'rsating.

5-Mashq:

$AB = g_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu}$ ning umumkoordinat almashtirishlariga nisbatan invariant ekanligini ko'rsating.

3.4 Tenzor zichliklar

Ba'zi bir fizik kattaliklar ***tenzor zichliklar*** orqali ifodalanadi. Misol sifatida metrik tenzorning determinantini ko'raylik. Buning uchun (3.9)-formulani quyidagi ko'rinishda yozib olaylik:

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}} g_{\lambda\rho} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}}. \tag{3.11}$$

Determinant haqida gap ketayotgan ekan undekslarni matritsaning indekslari deb qaraymiz. Ayni shu maqsadda (3.9)-formula yuqoridagi ko'rinishga keltirildi. $g = \det(g_{\mu\nu})$ va $\det\left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\right) = \left\|\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\right\|$ deb belgilasak, (3.11)-dan

$$g' = \left\|\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\right\|^2 g \tag{3.12}$$

kelib chiqadi. Bunda biz ko'paytmalar determinanti determinantlar ko'paytmasiga tengligidan foydalandik. Analizni eslasak, $J = \left\|\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu}\right\|$ kattalik $x' \longrightarrow x$ almashtirishining yakobiani deyiladi. Demak, (3.12)- munosabatni

$$g' = J^{-2} g \tag{3.13}$$

ko'rinishda yozib olishimiz mumkin ekan. Koordinat almashtirishlarida J ning qandaydir darajasiga ko'paytirilib o'zgaradigan kattaliklar ***skalyar zichlik*** deyiladi. Buning sababini tushunish uchun hajm elementining o'zgarish formasini eslaylik:

$$d^4x' = \left\|\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu}\right\| d^4x = J d^4x.$$

Zichlikdan hajm bo'yicha olingan integral o'zgarmas kattalikdir (ko'rilayotgan xajm ichidagi modda miqdori hamma sistemalarda ham bir xildir), demak, zichlik $\rho' = J^{-1}\rho$ ko'rinishda o'zgarishi kerak:

$$\rho' d^4x' = \rho d^4x.$$

Kiritilgan tushunchani umumlashtirib, quyidagi qoida bo'yicha o'zgaradigan kattaliklarni kiritaylik:

$$D'^\nu_\mu = J^p \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho} D^\rho_\lambda. \tag{3.14}$$

Bunday kattalik ikkinchi rang p ***vaznli aralash tenzor zichligi*** deyiladi. Xuddi shunday ravishda ixtiyoriy rangli tenzor zichliklarini kiritishimiz mumkin. Demak, metrik tenzorning determinanti g minus ikki vaznli skalyar zichlik ekan. (3.14) formuladan ko'rinib turibdiki, $g^{p/2}D^{\mu}_{\nu}$ tenzor bo'ladi:

$$g'^{p/2}D'^{\nu}_{\mu} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\rho}}g^{p/2}D^{\rho}_{\lambda}. \tag{3.15}$$

Egrilangan to'rt o'lchamli fazoda integrallash elementi sifatida

$$d\Omega = \sqrt{-g}d^4x$$

ifoda olinadi. Sababini tushunish qiyin emas:

$$d\Omega' = \sqrt{-g'}d^4x' = \sqrt{-g}d^4x = d\Omega\,,$$

kiritgan hajm elementimiz invariantlik xossasiga egadir.

Tenzor hisobda alohida rol o'ynaydigan birlik antisimmetrik (psevdo)tenzorni kiritaylik. Tekis fa'zoda uning ta'rifi quyidagichadir:

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} = \begin{cases} 1, & (\mu,\nu,\lambda,\sigma)\ \ 0123\ \text{ga juft ravishda keltirilsa,} \\ 0, & \text{ixtiyoriy ikkita indeks bir} - \text{biriga teng bo'lsa,} \\ -1, & (\mu,\nu,\lambda,\sigma)\ \ 0123\ \text{ga toq ravishda keltirilsa.} \end{cases}$$

Bu tenzor hamma indekslari bo'yicha antisimmetrikdir:

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} = -\varepsilon^{\nu\mu\lambda\sigma} = -\varepsilon^{\mu\lambda\nu\sigma} = \varepsilon^{\nu\mu\sigma\lambda} = \ldots\text{va h.k.}$$

Ba'zi bir indekslari uchun uning qiymatlari:

$$\varepsilon^{0123} = 1,\ \varepsilon^{1023} = -1,\ \varepsilon^{1230} = -1,\ \varepsilon^{3021} = 1, \ldots\text{va h.k.}$$

Egrilangan fazoga o'tganimizda:

$$E^{\mu\nu\lambda\sigma} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\tau}}\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\beta}}\varepsilon^{\rho\tau\alpha\beta}$$

ni olamiz. $E^{\mu\nu\lambda\sigma}$ o'zining hamma indekslari bo'yicha antisimmetrik ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas. Bu formulaning o'ng tomonida turgan kattalik $\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}}$ matritsaning determinantidir. Bu determinantni tekis koordinatlardan egri koordinatlarga o'tayotganimizni hisobga olib, J_0 deb belgilab

$$E^{\mu\nu\lambda\sigma} = J_0 \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$$

formulaga kelamiz.

6-Mashq:

$$\det \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$$

ekanligini ko'rsating. Xuddi shu yo'sinda

$$\det \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} a_\mu b_\nu c_\lambda d_\rho$$

ekanligini ko'rsating.

Bu yerdagi J_0 ni topish uchun tekis (Galiley) sistemasida $g^{(0)} = -1$ bo'lishidan foydalanamiz. (3.8)-ning ikkala tomonining determinantini hisoblasak,

$$J_0 = \frac{1}{\sqrt{-g}}$$

ekanligini topamiz. Demak, oxirgi formulani quyidagi ko'rinishga keltirishimiz mumkin:

$$E^{\mu\nu\lambda\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}. \tag{3.16}$$

3.5 Kovariant hosila

Galiley koordinatlarida vektor A_μ ning differensiali vektor va hosilasi $\partial A_\mu/\partial x^\nu$ tenzordir. Quyidagi formulalardan ko'rinib turibdiki egrilangan koordinatlarda bunday emas:

$$dA'_\mu = d\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}A_\nu\right) = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}dA_\nu + \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x'^\mu \partial x'^\lambda}A_\nu dx'^\lambda;$$
$$\frac{\partial A'_\mu}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}A_\lambda. \tag{3.17}$$

Buning sababi differensial va hosilani hisoblash uchun vektorning ikki cheksiz yaqin nuqtalardagi qiymatlarini solishtirishimiz kerak, almashtirish koeffitsientlari $\dfrac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}$ esa nuqtaning funksiyalaridir va har xil nuqtalarda har xil o'zgaradi. Demak, biz har xil qoida bo'yicha o'zgaruvchi kattaliklarni ayiryapmiz, aniqki, natija tenzor bo'lishi mumkin emas. Mundan bir istisno - almashtirish chiziqli bo'lgan hol, unda yuqoridagi formulalardagi ikkinchi tartibli hosilali hadlar bo'lmaydi. Hosila olish natijasi tenzorning tabiatini o'zgartirmasin desak shunday yangi hosila tushunchasini kiritishimiz kerakki, u birinchidan, tenzorga ta'sir qilib tenzorni bersin va ikkinchidan, Galiley sistemasiga o'tganda oddiy hosilaga o'tsin. Galiley koordinatlarini yana o'sha ζ^μ deb va yangi hosilani $\dfrac{D}{Dx^\mu}$ deb belgilasak yuqorida keltirilgan ikki talabni quyidagicha yozib olishimiz mumkin:

1. $\dfrac{DA^\mu}{Dx^\nu}$ tenzor bo'lsin, ya'ni,

$$\frac{DA'^\mu}{Dx'^\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\frac{DA^\rho}{Dx^\sigma};$$

2. Galiley sistemasiga o'tganda

$$\frac{DA^\mu}{Dx^\nu} \longrightarrow \frac{\partial A^\mu}{\partial \zeta^\nu}$$

bo'lsin.

Yangi hosilani topish uchun shu ikki shart yetarlidir. Shu ikki shartni birlashtirib quyidagini yozishimiz mumkin (tushunishni yengillashtirish maqsadida vektorlarning argumentlari ko'rsatilgan):

$$\frac{DA^\mu(x)}{Dx^\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \zeta^\rho}\frac{\partial \zeta^\sigma}{\partial x^\nu}\frac{\partial A^\rho(\zeta)}{\partial \zeta^\sigma} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \zeta^\rho}\frac{\partial A^\rho(\zeta)}{\partial x^\nu} =$$

$$= \frac{\partial x^\mu}{\partial \zeta^\rho}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \zeta^\rho}{\partial x^\sigma}A^\sigma(x)\right) = \frac{\partial A^\mu(x)}{\partial x^\nu} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \zeta^\rho}\frac{\partial^2 \zeta^\rho}{\partial x^\nu \partial x^\sigma}A^\sigma(x). \tag{3.18}$$

31-betdagi almashtirish funksiyalarining C^2 sinfga mansub bo'lishi kerakligi haqidagi talab endi tushunarli bo'ldi. Agar

$$\Gamma^\mu_{\nu\sigma} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \zeta^\rho}\frac{\partial^2 \zeta^\rho}{\partial x^\nu \partial x^\sigma}$$

belgilash kiritsak yangi hosila quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\frac{DA^\mu(x)}{Dx^\nu} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma}A^\sigma.$$

Bunday hosila ***kovariant hosila*** deyiladi, quyidagi ifoda esa mos ravishda ***kovariant differensial*** deyiladi:

$$DA^\mu = dA^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\sigma}A^\sigma dx^\nu.$$

Koeffitsient $\Gamma^\mu_{\nu\sigma}$ larning nomi ***Kristoffel simvollari***dir. Kovariant hosilani belgilashning yana bir turi bor - oddiy (xususiy) hosilani vergul bilan belgilasak, kovariant hosilani nuqta-vergul bilan belgilaymiz:

$$A^\mu_{;\nu} = A^\mu_{,\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma}A^\sigma. \tag{3.19}$$

7-Mashq:

Kovariant vektorning kovariant hosilasi

$$A_{\mu\,;\,\nu} = A_{\mu\,,\,\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} A_{\sigma} \tag{3.20}$$

bo'lishini yuqoridagi metod bilan ko'rsating.

Kristoffel simvollari tenzor emasdir, ular tenzor bo'lsa, kovariant hosila tenzor bo'la olmas edi.

8-Mashq:

Kristoffel simvollari uchun

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = -\frac{\partial\zeta^{\alpha}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial\zeta^{\beta}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial\zeta^{\alpha}\partial\zeta^{\beta}}$$

tasavvurni keltirib chiqaring. Buning uchun

$$\frac{\partial\zeta^{\beta}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial\zeta^{\beta}} = \delta^{\rho}_{\lambda}$$

ayniyatdan foydalaning.

9-Mashq:

Kristoffel simvollarining almashinish qoidasi quyidagicha ekanligini ko'rsating:

$$\Gamma'^{\mu}_{\nu\sigma} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\sigma}}\Gamma^{\rho}_{\lambda\alpha} + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}\partial x'^{\sigma}}. \tag{3.21}$$

10-Mashq:

(3.17)- va (3.21)- formulalardan foydalanib vektorning kovariant hosilasi tenzor bo'lishini ko'rsating.

Kristoffel simvollarining tenzor emasligini quyidagi oddiy mulohazadan ko'rish mumkin: Galiley sistemasida $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = 0$ bo'lishi kerak, bir sistemada tenzorning hamma komponentalari nolga teng bo'lsa, boshqa ixtiyoriy sistemada ham xuddi shunday bo'ladi.

Nolinchi rang tenzori - skalyarning kovariant hosilasi oddiy hosilaga tengligini tekshirish qiyin emasdir:

$$\varphi_{;\mu} = \varphi_{,\mu}.$$

Ikkinchi rang tenzorlari uchun kovariant hosila quyidagi ko'rinishga egadir:

$$T^{\mu\nu}_{;\lambda} = \partial_\lambda T^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\lambda\sigma} T^{\sigma\nu} + \Gamma^\nu_{\sigma\lambda} T^{\mu\sigma};$$

$$T_{\mu\nu;\lambda} = \partial_\lambda T_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} T_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} T_{\mu\sigma};$$

$$T^\mu_{\nu;\lambda} = \partial_\lambda T^\mu_\nu + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} T^\sigma_\nu - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} T^\mu_\sigma.$$

Bu formulalarni keltirib chiqarish uchun (3.18)-formulani keltirib chiqarishda ishlatilgan mulohazalarni qaytarish yetarlidir. Buni o'quvchiga qoldiramiz. Yuqori rang tenzorlari uchun kovariant hosilani xuddi shu yo'l bilan topish qiyin emas.

11-Mashq:
Quyidagini isbot qiling:

$$\partial_\mu (A^\nu A_\nu) = A^\nu_{;\mu} A_\nu + A^\nu A_{\nu;\mu}.$$

Ikkita tenzorlarning kovariant hosilasi Leibnitz formulasiga bo'ysunadi:

$$\left(R^{(\mu)}_{(\nu)} S^{(\lambda)}_{(\sigma)}\right)_{;\tau} = R^{(\mu)}_{(\nu);\tau} S^{(\lambda)}_{(\sigma)} + R^{(\mu)}_{(\nu)} S^{(\lambda)}_{(\sigma);\tau}.$$

Bu yerda (μ) va h.k. - ixtiyoriy multiindeksdir.

Tenzor zichliklarning kovariant hosilasini ko'rib chiqaylik. Buning uchun agar $D^{\mu\dots}_{\nu\dots}$ kattalik p vaznli tenzor zichlik bo'lganda $g^{p/2} D^{\mu\dots}_{\nu\dots}$ kattalik tenzor bo'lishidan foydalanishimiz yetarlidir ((3.15)-ga qarang):

$$\{g^{p/2} D^{\mu\dots}_{\nu\dots}\}_{;\lambda} = \partial_\lambda \{g^{p/2} D^{\mu\dots}_{\nu\dots}\} + \Gamma^\mu_{\lambda\sigma} \{g^{p/2} D^{\sigma\dots}_{\nu\dots}\} + \dots$$

Demak,

$$D^{\mu...}_{\nu...;\lambda} = \partial_\lambda D^{\mu...}_{\nu..} + p\partial_\lambda \left(\ln\sqrt{-g}\right) D^{\mu...}_{\nu..} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\sigma} D^{\sigma...}_{\nu...} + ... \quad (3.22)$$

ekan. Bu yerda biz

$$g_{;\lambda} = 0 \quad (3.23)$$

ekanligidan foydalandik. (3.23)-formulaning isbotini keyingi paragrafda keltirilgan (3.43)- va (3.27)-formulalardan keltirib chiqarishimiz mumkin. Birinchidan, (3.43)-ni

$$g_{;\lambda} = gg^{\mu\nu} g_{\nu\mu;\lambda}$$

ko'rinishda yozib olamiz, bunga (3.27)-ni qo'llasak (3.23)-kelib chiqadi.

Yuqoridagi formulalarning bir-nechta xususiy hollarini ko'raylik. Masalan, p vaznli skalyar zichlik uchun

$$\rho_{;\lambda} = \partial_\lambda \rho + p\partial_\lambda \left(\ln\sqrt{-g}\right) \rho, \quad (3.24)$$

p vaznli kontravariant vektor zichlik uchun esa

$$D^{\mu}_{;\lambda} = \partial_\lambda D^\mu + p\partial_\lambda \left(\ln\sqrt{-g}\right) D^\mu + \Gamma^{\mu}_{\lambda\sigma} D^\sigma \quad (3.25)$$

formulalarni olamiz. Keyin ko'rsatamizki,

$$\partial_\lambda \left(\ln\sqrt{-g}\right) = \Gamma^{\mu}_{\lambda\mu} \quad (3.26)$$

bo'ladi ((3.44)-ga qarang). (3.22)-ni metrik tenzorning determinantiga qo'llasak determinantning (-2) vaznli skalyar zichlik ekanligini hisobga olganda yana (3.23)-formulaga kelamiz:

$$g_{;\lambda} = \partial_\lambda g - 2\partial_\lambda \left(\ln\sqrt{-g}\right) g = 0.$$

3.6 Kristoffel simvollari va metrik tenzor

Kristoffel simvollarining quyi indekslari bo'yicha simmetrikligini isbot qilaylik. Shu maqsadda $A_\mu = \partial_\mu \varphi$ vektorning to'rt o'lchamli rotorini topaylik:

$$A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu} = (\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu})A_\lambda.$$

Ikki tenzorning ayirmasi tenzordir. Uni hisoblash uchun Galiley sistemasiga o'taylik:

$$A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu} = (\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu)\varphi = 0.$$

Bir sistemada nolga teng bo'lgan tenzor boshqa sistemalarda ham nolga tengdir. Demak,

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}.$$

Metrik tenzor va Kristoffel simvollari orasidagi bog'lanishni topish uchun quyidagi ***metrik tenzorning kovariant o'zgarmasligi*** xossasidan foydalanamiz:

$$g_{\mu\nu;\lambda} = 0. \tag{3.27}$$

Bu formulani uch xil yo'l bilan keltirib chiqarishimiz mumkin:

1. Galiley sistemasiga o'tib tekshirishimiz mumkin: $g_{\mu\nu;\lambda} = g^{(0)}_{\mu\nu,\lambda} = 0$;
2. $A_{\mu;\nu} = (g_{\mu\lambda}A^\lambda)_{;\nu} = g_{\mu\lambda}A^\lambda_{;\nu}$ dan;
3. $$\partial_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda\left(g^{(0)}_{\rho\sigma}\frac{\partial\zeta^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial\zeta^\sigma}{\partial x^\nu}\right) = g_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\lambda} + g_{\alpha\mu}\Gamma^\alpha_{\lambda\nu} \tag{3.28}$$

   munosabatdan ham kelib chiqadiki

   $$g_{\mu\nu;\lambda} = g_{\mu\nu,\lambda} - g_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\lambda} - g_{\alpha\mu}\Gamma^\alpha_{\lambda\nu} = 0.$$

Kristoffel simvollarining metrik tenzor orqali oshkora ifodasini topish uchun (3.28) formulani uch marta indekslarini siklik o'zgartirib yozib chiqamiz:

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} = g_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\lambda} + g_{\alpha\mu}\Gamma^\alpha_{\lambda\nu};$$

$$\partial_\mu g_{\nu\lambda} = g_{\alpha\lambda}\Gamma^\alpha_{\nu\mu} + g_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\lambda};$$

$$\partial_\nu g_{\lambda\mu} = g_{\alpha\mu}\Gamma^\alpha_{\lambda\nu} + g_{\alpha\lambda}\Gamma^\alpha_{\nu\mu}.$$

Birinchisidan ikkinchi va uchinchilarini ayirsak (Γ ning simmetriyasidan foydalanib),

$$-2g_{\alpha\lambda}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu}$$

ga kelamiz. Demak,

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}\left(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}\right) \tag{3.29}$$

munosabat o'rinli ekan. Biz shu paytgacha shug'ullangan Kristoffel simvollari odatda ikkinchi tur Kristoffel simvollari deyiladi. Birinchi tur Kristoffel simvollari (ular kamdan-kam ishlatiladi) quyidagi ko'rinishga egadir:

$$\Gamma_{\alpha,\mu\nu} = g_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}\right).$$

12-Mashq:

Metrik tenzor diagonal bo'lgan hol uchun

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} g_{\mu\mu}, & \text{agar } \mu = \nu \text{ bo'lsa;} \\ 0, & \text{agar } \mu \neq \nu \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Kristoffel simvollari quyidagi ko'rinishga ega bo'lishini ko'rsating:

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = 0,\ (\mu \neq \nu \neq \lambda); \qquad \Gamma^\mu_{\nu\nu} = -\frac{1}{2g_{\mu\mu}}\partial_\mu g_{\nu\nu};$$

$$\Gamma^\mu_{\mu\nu} = \partial_\nu \ln(|g_{\mu\mu}|^{1/2}); \qquad \Gamma^\mu_{\mu\mu} = \partial_\mu \ln(|g_{\mu\mu}|^{1/2}).$$

Bu formulalarda takrorlanuvchi indekslar bo'yicha yig'indi yo'q.

13-Mashq:
Ikki o'lchamli sferani olaylik:

$$ds^2 = r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right). \tag{3.30}$$

Bu holda $x^1 = \theta$, $x^2 = \varphi$ va $g_{11} = g_{\theta\theta} = r^2$, $g_{22} = g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\theta$.

1. Metrik tenzorning determinantini toping;
2. $g^{\mu\nu}$ larni toping;
3. $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ larni toping.

14-Mashq:
Oldingi masalaning natijasidan foydalanib, sferaning ustida berilgan (ikki komponentalik) ixtiyoriy $\mathbf{A} = (A_\theta, A_\varphi)$ vektorning kovariant hosilasini toping.

3.7 Parallel ko'chirish

Biror fazoda vektorlar bilan ishlar ekanmiz ularni solishtirishga to'g'ri keladi. Buning uchun esa bir vektorni ikkinchi vektor turgan joyga "o'zgartirmasdan" ko'chirishimiz kerak. Tekis fazoda vektorni o'zgartirmasdan ko'chirish uning komponentalarini dekart sistemasiga nisbatan o'zgartirmasdan ko'chirishdir - ya'ni, uni o'ziga parallel qilib ko'chirishdir. Tekis fazoda bu tushuncha sodda va tushunarli bo'lib bizdan tafakkur kuchini ishlatishni talab qilmaydi.

Egrilangan fazolarda parallel ko'chirish tushunchasi yangi natijalarga olib keladi. Egrilangan fazoda parallel ko'chirishni quyidagicha ta'riflaylik:

Ta'rif: Vektorni biror trayektoriya bo'yicha parallel ko'chirish - bu shu trayektoriyaning har bir nuqtasi atrofida lokal Galiley sistemasini kiritish va shu sistemada vektorning komponentalarini o'zgartirmasdan ko'chirishdir.

Tushunarliki, vektorni bir nuqtadan ikkinchi nuqtaga har xil traektoriya bo'yicha ko'chirsak natija ham har xil bo'ladi - ikki xil trektoriyaning nuqtalari atrofida kiritilgan lokal Galiley sistemalari bir biriga nisbatan ixtiyoriy joylashgan bo'lishi mumkin.

Kiritilgan tushunchaning kovariant hosila bilan jips bog'langanligi ko'rinib turibdi - hosilani hisoblash uchun ikkita cheksiz yaqin joylashgan nuqtalardagi vektorlar $A_\mu(x)$ va $A_\mu(x + dx)$ ni solishtirishimiz kerak, buning uchun esa $A_\mu(x + dx)$ ni x nuqtaga "o'zgartirmasdan" ko'chirishimiz kerak va orttirmani dx ga bo'lishimiz kerak. Kovariant hosila tushunchasi shunga to'g'ri keladi, oddiy hosila esa $A_\mu(x)$ va $A_\mu(x + dx)$ larni to'g'ridan-to'g'ri solishtirishga to'g'ri keladi.

Trayektoriya nuqtalarini bir parametr bilan belgilaylik, masalan, τ. Ya'ni, trayektoriyaning boshi $\tau = 0$ va oxiri $\tau = 1$ bo'lsin. Haqiqatan τ ning o'zgarish intervali ixtiyoriy bo'lishi mumkin, $a \leq \tau \leq b$, biz uchun buning ahamiyati yo'q. Parametr τ xususiy vaqt bo'lishi, ya'ni, shu traektoriya bo'yicha harakat qilayotgan kuzatuvchining soati ko'rsatayotgan vaqt bo'lishi mumkin. Parallel ko'chirishning ta'rifi bo'yicha mahalliy Galiley sistemasida

$$\frac{dA^\mu}{d\tau} = 0 \tag{3.31}$$

bo'lishi kerak. Vektorning parametr bo'yicha hosilasi Galiley sistemasida vektordir. Demak, egrilangan sistemaga o'tganimizda

$$\frac{DA^\mu}{d\tau} = 0, \tag{3.32}$$

yoki,

$$\frac{DA^\mu}{d\tau} = \frac{dA^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\nu \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \tag{3.33}$$

ekan. Lokal inersial (Galiley) sistemaga o'tganimizda $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = 0$ bo'ladi va (3.32)-tenglama (3.31)-ga o'tadi. Demak, vektorni biror trayektoriya bo'yicha o'ziga parallel ko'chirganimizda uning shu traektoriya bo'yicha kovariant hosilasi nolga teng bo'ladi.

Olingan natijani fizik kattaliklarga qo'llashimiz mumkin. Shunday kattalik sifatida jismning tezligini olaylik: $u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{ds}$. Bunda biz parametr sifatida jismning xususiy vaqtini olamiz. To'rt tezlik u^{μ} ni A^{μ} ning o'rniga (3.33) ga qo'ysak va uni yana bir marta ds ga bo'lsak

$$\frac{d^2x^{\mu}}{ds^2} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\frac{dx^{\nu}}{ds}\frac{dx^{\lambda}}{ds} = 0 \qquad (3.34)$$

tenglikni olamiz. Bu tenglik jismning tezlanishi, tezligi va trayektoriyasini bog'laydi va shuning uchun, jismning ***harakat tenglamasini*** bildiradi. Biz ekvivalentlik prinsipini muhokama qilganimizda tortishish maydoni fazo-vaqtning egrilanishiga ekvivalent ekanligini gapirgan edik. Demak, (3.34)-tenglama gravitatsion maydonda harakat qilayotgan jismning tenglamasi ekan. Darhaqiqat, mahalliy Galiley sistemasiga o'tsak $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = 0$ va $\frac{du^{\mu}}{d\tau} = 0$ bo'ladi. To'rt o'lchamli fazo-vaqtdagi mahalliy Galiley sistemasi esa uch o'lchamli fazodagi mahalliy inercial sistemani bildirishi kerak edi - Einshtein liftini eslang - ya'ni, bu tenglama ekvivalentlik prinsipiga mos ekan.

15-Mashq:

(3.32)-tenglamani jismning impulsi $p^{\mu} = mu^{\mu}$ ga qo'llang. Nima uchun yana (3.34)-tenglama paydo bo'ladi? Tenglamaga massaning kirmaganini ekvivalentlik prinsipi bilan bog'lang.

16-Mashq:

(3.34)-tenglamani x_{μ} uchun keltirib chiqaring.

17-Mashq:
Tashqi gravitatsion maydonda jismga ta'sir qilayotgan kuchni toping.

18-Mashq:
Metrik tenzor x^1 koordinataga bog'liq bo'lmasin (ya'ni, x^1 koordinata siklik bo'lsin). Bu holda p_1 saqlanuvchi kattalik ekanini ko'rsating. Umuman, agar ixtiyoriy x^μ koordinata siklik bo'lsa unda unga mos kelgan impuls komponentasi p_μ – harakat integrali bo'ladi.

(3.34)-tenglamaga tortishish kuchidan farqli bo'lgan kuchlarni ham kiritishimiz mumkin. Masalan, elektromagnit kuchlarni -

$$m\frac{d^2x^\mu}{ds^2} = -m\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds} + eF^{\mu\nu}u_\nu.$$

Bu holda, albatta, tenglamada jismning massasi paydo bo'ladi.

3.8 Tashqi kuchsiz maydonda jismning harakati

Tajriba shuni ko'rsatadiki, Nyutonning butun dunyo tortishish qonuni kuchsiz, statik gravitatsion maydonlarda jismlarning kichik tezlikli harakatini yuqori aniqlikda ifodalaydi. Bu bizga kuchsiz maydon uchun avvalgi paragrafdagi harakat tenglamasi yordamida g_{00} va Nyuton gravitatsion potensiali φ orasidagi bog'lanishni topishga imkon beradi.

Farazimizga mos ravishda

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = \left(\frac{dx^0}{ds}, \frac{d\mathbf{x}}{ds}\right) \simeq \left(\frac{dx^0}{ds}, 0\right)$$

deb olamiz (chunki $v \ll c$ va, natijada,

$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} \simeq 0$). Harakat tenglamasi (3.34) darhol

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} \simeq -\Gamma^\mu_{00}\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2$$

ko'rinishni oladi. Maydonimizning vaqt bo'yicha o'zgarmasligini hisobga olsak,

$$\Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\partial_0 g_{0\nu} + \partial_0 g_{0\nu} - \partial_\nu g_{00}\right) = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\nu g_{00}$$

ga kelamiz. Maydon kuchsiz bo'lgani uchun

$$g_{\mu\nu} = g^{(0)}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

deb olishimiz mumkin. Ya'ni, biz fazo-vaqt metrikasini Minkowski metrikasidan kam farq qiladi deb oldik. Shularni hisobga olsak,

$$g^{\mu\nu}\partial_\nu g_{00} \simeq g^{(0)\mu\nu}\partial_\nu h_{00} = \partial^\mu h_{00}$$

va, natijada,

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{cdt}{ds}\right)^2\partial^\mu h_{00}$$

ekanligiga kelamiz. Komponentalar bo'yicha yozib chiqsak

$$\frac{d^2x^0}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{cdt}{ds}\right)^2\nabla h_{00}$$

tenglamalarga kelamiz. Bu sistemaning fazoviy qismini qayta yozaylik:

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\frac{1}{2}c^2\nabla h_{00}$$

va Nyutonning tortishish qonunini eslaylik:

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla\varphi, \quad \varphi = -\frac{GM}{r},$$

bu yerda M - maydon hosil qiluvchi jismning massasi. Oxirgi ikki formulani solishtirish $h_{00} = 2\varphi/c^2 + const$ ekanligini ko'rsatadi. Katta masofalarda egrilangan fazo Minkowski fazosiga o'tishi kerak bo'lgani uchun (jismdan uzoqda tortishish maydoni nolga intiladi) $const = 0$ bo'lishi kerak. Natijada quyidagi formulani olamiz:

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}. \tag{3.35}$$

Yer uchun $M_{\oplus} = 5.98 \cdot 10^{24} kg$, $R_{\oplus} = 6.37 \cdot 10^6 m$, Quyosh uchun $M_{\odot} = 1.99 \cdot 10^{30} kg$, $R_{\odot} = 6.96 \cdot 10^8 m$ larni hisobga olsak, Yer atrofida $|2\varphi/c^2| \sim 10^{-9}$ va Quyosh atrofida $|2\varphi/c^2| \sim 10^{-6}$, ya'ni, Quyosh sistemasida gravitatsion maydonlar juda kuchsiz ekanligiga ishonch hosil qilishimiz mumkin.

3.9 Geodezik chiziq tushunchasi

Fazodagi ikki nuqta orasidagi eng qisqa chiziq ***geodezik chiziq*** deyiladi. Evklid fazosida bu - to'g'ri chiziqdir. Egrilangan fazoda geodezik chiziq tenglamasini topaylik. Riemann fazosida a va b nuqtalar orasidagi masofani quyidagi integral orqali aniqlashimiz mumkin:

$$L = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}.$$

Variatsion prinsip bo'yicha minimal (ekstremal) uzunlikka ega bo'lgan trayektoriyani $\delta L = 0$ tenglikdan topamiz:

$$\delta L = \int_a^b \delta ds = \int_a^b \left(\frac{\delta g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}{2ds} + \frac{g_{\mu\nu} dx^\mu d\delta x^\nu}{ds} \right) =$$

$$= \int_a^b ds \delta x^\lambda \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - \frac{d}{ds} \left(g_{\lambda\mu} \frac{dx^\mu}{ds} \right) \right) =$$

$$= \int_a^b ds\delta x^\lambda \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu}\right)\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} - \right.$$

$$\left. - g_{\lambda\mu}\frac{d^2x^\mu}{ds^2}\right) = 0.$$

Bu yerda biz bo'laklab integrallaganimizda $g_{\lambda\mu}\frac{dx^\mu}{ds}\delta x^\nu\Big|_a^b = 0$ ekanligini hisobga oldik (traektoriya variatsiyalanganda uning boshi va oxiri o'zgarmaydi $\delta x^\mu(a) = \delta x^\mu(b) = 0$). Integral ostidagi ifodani nolga tenglashtirsak (δx^λ ixtiyoriy bo'lgani uchun) va Kristoffel simvollari uchun (3.29)-formulani eslasak, geodezik chiziq tenglamasi sifatida avvalgi paragraflarning birida olingan harakat tenglamasini olamiz:

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds} = 0. \qquad (3.36)$$

Demak, gravitatsion maydonda ozod harakat qilayotgan jismning trayektoriyasi Riemann egrilangan fazosi nuqtai nazaridan "eng qisqa" - geodezik chiziq ekan. Bu natija ko'pincha umumiy nisbiylik nazariyasi gravitatsion kuch tushunchasini yo'q qildi, uning o'rniga geodezik bo'yicha harakat tushunchasini kiritdi, deyishga asos bo'ldi.

Parallel ko'chirish, geodezik chiziq va kovariant hosila tushunchalari o'zaro uzviy bog'liq tushunchalardir. Buni ko'rish uchun A^μ vektorning ikkinchi u^μ vektor yo'nalishi bo'yicha kovariant hosilasini kiritaylik

$$u^\nu\frac{DA^\mu}{Dx^\nu}.$$

u^ν sifatida $u^\nu = \frac{dx^\nu}{d\tau}$ ni, ya'ni, $x^\nu(\tau)$ trayektoriyaga urinmani olaylik:

$$u^\nu\frac{DA^\mu}{Dx^\nu} = \frac{dA^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma}A^\sigma\frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{DA^\mu}{d\tau}.$$

Ko'rilayotgan trayektoriya sifatida geodezik chiziqni va A^μ vektor sifatida shu chiziqqa urinmani olaylik. Unda

$$u^\nu \frac{Du^\mu}{Dx^\nu} = \frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} u^\sigma \frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

bo'ladi. Demak, geodezik chiziq - urinmasi shu chiziq bo'yicha harakat qilganda o'ziga parallel ko'chiriladigan chiziq sifatida ham ta'riflanishi mumkin ekan.

3.10 Vaqt va masofani aniqlash

Umumiy nisbiylik nazariyasi umumiy kovariantlik prinsipiga bo'ysungani uchun x^0, x^1, x^2, x^3 belgilar ixtiyoriy koordinatalar bo'lib bevosita bizning soatimiz o'lchaydigan vaqt va metrik munosabatlarga bo'ysinadigan fazoviy koordinatalar ma'nosiga ega emas. Vaqt va fazoviy oraliqlarni ta'riflash ma'lum mulohazalarni yuritishni talab qiladi.

Xususiy vaqt tushunchasidan boshlaylik. Buning uchun bir nuqtada ro'y bergan va cheksiz kichik vaqt intervali bilan farq qilgan ikki hodisani olaylik. Bu ikki hodisa orasidagi interval kvadrati uchun bizning (ya'ni, shu nuqtadagi kuzatuvchining) soatimiz ko'rsatayotgan vaqt τ va koordinata vaqti x^0 orasidagi munosabat uchun

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{00}(dx^0)^2$$

ifodani darhol yozishimiz mumkin. Bu yerdan

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}dx^0 \tag{3.37}$$

ekanligini topamiz. Chekli vaqt intervali uchun esa

$$\tau = \frac{1}{c}\int \sqrt{g_{00}}dx^0$$

bo'ladi. Bu yerdan ko'rinib turibdiki, $g_{00} > 0$ bo'lishi kerak.

Egrilangan fazoda masofani aniqlash (o'zgaruvchan maydon bo'lganda esa masofa vaqtga bog'liq bo'ladi va masala yanada murakkablashadi) bir muncha murakkabroqdir. Buning uchun quyidagicha fikriy eksperiment o'tkazamiz. Bir-biriga cheksiz yaqin bo'lgan x^{μ} koordinatali A va $x^{\mu}+dx^{\mu}$ koordinatali B nuqtalar orasidagi yorug'lik tarqalishini ko'raylik. Nur $x^0+dx_1^0$ vaqt momentida B nuqtadan chiqsin, A nuqtada akslanib, B nuqtaga $x^0+dx_2^0$ vaqt momentida qaytib kelsin. B nuqtadan chiqish va qaytib kelish hodisalari orasidagi intervalning kvadrati uchun

$$ds^2 = g_{00}dx^0dx^0 + 2g_{0i}dx^0dx^i + g_{ij}dx^idx^j$$

ifodani yozishimiz mumkin. Yorug'lik nurining tarqalishi bilan bog'liq bo'lgan interval nolga teng bo'lishi kerak:

$$ds^2 = 0.$$

Bu tenglamaning yechimlari

$$dx_1^0 = \frac{1}{g_{00}}\left(-g_{0i}dx^i + \sqrt{(g_{0i}g_{0j} - g_{ij}g_{00})\,dx^idx^j}\right),$$

$$dx_2^0 = \frac{1}{g_{00}}\left(-g_{0i}dx^i - \sqrt{(g_{0i}g_{0j} - g_{ij}g_{00})\,dx^idx^j}\right)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Agar x^0 vaqt momentini signalning A nuqtaga kelishi bilan bog'lasak unda $x^0+dx_2^0$ vaqt momenti shu signalning B nuqtadan chiqishiga va $x^0+dx_1^0$ vaqt momenti esa uning B nuqtaga qaytib kelishiga to'g'ri keladi. Shu ikki vaqt momentlarining ayirmasi yorug'lik nurining cheksiz yaqin A va B nuqtalar orasidagi masofani ikki marta bosib o'tishga ketqazgan vaqtiga tengdir. Bu koordinataviy vaqt bo'lgani uchun uni (3.37)-bo'yicha $\sqrt{g_{00}}/c$ ga ko'paytirsak, B nuqtadagi kuzatuvchining xususiy vaqti kelib chiqadi, uni yana $c/2$ ga ko'paytirsak A va B nuqtalar orasidagi masofa kelib chiqadi.

Qisqacha hisobdan keyin shu masofaning kvadrati uchun

$$dl^2 = \left(-g_{ij} + \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}}\right) dx^i dx^j$$

ifodani olamiz. Odatda

$$\gamma_{ij} = -g_{ij} + \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} \tag{3.38}$$

belgilash kiritish orqali bu masofaning kvadrati egrilangan fazo uchun umumiy bo'lgan

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j \tag{3.39}$$

ko'rinishga keltiriladi. Bu ifoda bizning uch o'lchamli fazomizning egrilik xossalarini (3.38)-orqali to'rt o'lchamli fazo-vaqtning xossalari bilan bog'laydi. Umumiy holda (3.39)-dan kelib chiqadigan chiziqli element dl ni integrallab chekli masofani bir qiymatli kattalik sifatida topish mumkin emas - umumiy holda $g_{\mu\nu}$ lar vaqtning funksiyasidir, demak, bu chiziqli elementni har xil dunyoviy trayektoriya bo'yicha integrallaganimizda bu trayektoriyalarning nuqtalari vaqtga har xil bog'liqligi orqali har xil natija olgan bo'lar edik. Bir nechta jism ishtirok qilgan gravitatsion masala uchun bu tabiiy holdir, jismlar bir-biriga nisbatan harakatda bo'lishi kerak va ular hosil qilgan maydon statik (o'zgarmas) maydon bo'lmaydi, metrika vaqtga bogliq bo'ladi. O'zgarmas, ya'ni, vaqtga bog'liq bo'lmagan maydonlar uchungina $\int dl$ ning qiymati boshlang'ich va oxirgi nuqtalargagina bog'liq bo'ladi. Masalaning fizikasidan aniqki, faqatgina bitta jism yaratgan maydon o'zgarmas maydon bo'la oladi.

Gravitatsion maydon energiyasi muammosini muhokama qilganda bizga kerak bo'lgan ba'zi-bir tushunchalarni kiritaylik.

Uch o'lchamli fazoda γ_{ij} yordamida uch o'lchamli vektor va tenzorlarning indekslarini tushirish mumkin. Ko'tarish uchun kontravariant bo'lgan va

$$\gamma^{ij}\gamma_{jk} = \delta^i_j \tag{3.40}$$

ta'rifiga bo'ysunadigan tenzorni kiritaylik. Agar bu erga

$$\gamma^{ij} = -g^{ij} \tag{3.41}$$

ifodani qo'ysak, (3.40)-aynan bajarilishiga ishonch hosil qilishimiz mumkin.

3.11 Divergensiya va rotor. Stokes va Gauss teoremalari

Bundan keyin kerak bo'ladigan bir nechta matematik natijalarni keltirib chiqaraylik. Birinchidan $\Gamma^{\mu}_{\nu\mu}$ ni topaylik:

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}\right) = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \partial_\nu g_{\mu\lambda}.$$

Oxirgi tenglik formuladagi ikkinchi va uchinchi hadlarning qisqarishidan kelib chiqadi. Bizga quyidagi Yakobi formulasi kerak:

$$\det A = \exp(\mathrm{Tr} \ln A), \tag{3.42}$$

bu yerda A - ixtiyoriy $(n \times n)$ matritsadir, Tr - matritsa diagonal elementlarining yig'indisidir (izi).

19-Mashq:

Ko'rsatkichli funksiyaning quyidagi ta'rifidan foydalanib

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

va $A = \exp(B)$ deb olib, (3.42)-formulani isbot qiling.

Matritsaning funksiyasi $f(A)$ deganda odatdagidek $f(x)$ funksiyaning Taylor (Teylor) qatorida sonli argument x ning o'rniga matritsa A ni qo'yib chiqqanda hosil bo'ladigan qatorni tushunamiz. Masalan,

$$\exp(A) = 1 + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \cdots$$

(3.42)-formulani maqsadimizda qo'llash uchun metrik tenzor $g_{\mu\nu}$ ni matritsa sifatida va $g^{\mu\nu}$ ni esa unga teskari matritsa sifatida qaraymiz ((3.10)-ni eslang) va shu matritsalarni mos ravishda $\hat{g} = g_{\mu\nu}$ va $\hat{g}^{-1} = g^{\mu\nu}$ deb belgilaymiz. Unda (3.42)-da $A \to \hat{g}$ almashtirish bajarsak va bu formulaning ikki tomonidan hosila olsak,

$$\partial_\nu g = g \operatorname{Tr} \hat{g}^{-1} \partial_\nu \hat{g} = g \, g^{\mu\lambda} \partial_\nu g_{\lambda\mu} \tag{3.43}$$

ekanligini, va, demak,

$$\Gamma^\mu_{\nu\mu} = \frac{1}{2} \partial_\nu \ln g = \partial_\nu \ln \sqrt{-g} \tag{3.44}$$

ekanligini topamiz. Bu formuladan kovariant to'rt divergensiyani hisoblashda foydalanish mumkin:

$$\begin{aligned} A^\mu_{;\mu} &= \partial_\mu A^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\mu} A^\nu = \partial_\mu A^\mu + \partial_\nu \ln \sqrt{-g} A^\nu = \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left(\sqrt{-g} A^\mu \right). \end{aligned} \tag{3.45}$$

Endi Gauss teoremasiga o'tishimiz mumkin:

$$\int d\Omega A^\mu_{;\mu} = \int d^4x \sqrt{-g} A^\mu_{;\mu} = \oint dS_\mu \sqrt{-g} A^\mu.$$

Skalyarning kovariant gradiyenti oddiy gradiyentga tengligi va bu gradiyent to'rt-vektorligidan foydalanib D'Alambert tenglamasining egrilangan fazodagi formasini topishimiz mumkin:

$$\varphi^{;\mu}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left(\sqrt{-g} \partial^\mu \varphi \right). \tag{3.46}$$

Bu tenglama Beltrami tenglamasi deyiladi. Stokes (Stoks) teoremasiga o'taylik. Buning uchun uning uch o'lchamli tekis fazodagi formasini eslaylik:

$$\begin{aligned} \oint A_i dx^i &= \int d\mathbf{S} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} = \int dS_i \, \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k = \\ &= \frac{1}{2} \int \varepsilon_{ijk} \, dS_i \left(\partial_j A_k - \partial_k A_j \right). \end{aligned}$$

Bu yerda biz birlik antisimmetrik tenzor ε_{ijk} ning antisimmetriklik xossasidan foydalandik. Sirt elementi $d\mathbf{S} = (dS^1, dS^2, dS^3)$ ning komponentalari

$$dS^1 = dydz, \ dS^2 = dxdz, \ dS^3 = dxdy,$$

$df_{jk} = \varepsilon_{ijk} dS^i$ ni esa (j,k) tekislikda yotgan sirt elementi deb qarashimiz mumkin. Masalan, $df_{12} = dS^3 = dxdy$ va h.k. Shu mulohazalarga asoslanib, to'rt o'lchamli fazoda Stokes teoremasini quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\oint A_\mu dx^\mu = \frac{1}{2}\int df^{\mu\nu}\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right),$$

bu yerda $df^{\mu\nu}$ - $(\mu\nu)$ sirti ustida yotgan sirt elementini bildiradi.

3.12 Egrilik tenzori (Riman-Kristoffel tenzori)

Agar tekis fazoda biror vektorni yopiq kontur bo'yicha o'ziga parallel ko'chirib, yana o'sha nuqtaga olib kelsak, vektor o'zgarmaydi. Shu masalani egri fazoda ko'rib chiqaylik, aniqki, bu holda vektor o'zgarishi kerak. Ixtiyoriy chekli yopiq konturni yetarli darajada kichik yopiq konturlardan iborat deb qarashimiz mumkin. Bu kichik konturlar bo'yicha aylanganda ularning bir-biriga yondoshgan qismlari bo'yicha qarama-qarshi yo'nalish bo'yicha harakat qilamiz va ularning qo'shgan hissalari o'zaro qisqaradi.

Vektorni shu yetarli darajada kichik konturning atrofida parallel ko'chirib, boshlang'ich nuqtaga qaytaylik. Vektorni parallel ko'chirganimizda

$$DA_\mu = dA_\mu - \Gamma^\nu_{\mu\lambda} dx^\lambda A_\nu = 0$$

bo'lgani uchun konturimizni aylanganda vektorning to'liq o'zgarishi

$$\Delta A_\mu = \oint \Gamma^\nu_{\mu\lambda} dx^\lambda A_\nu$$

ga teng bo'ladi. Bu integralga Stokes teoremasini qo'llaymiz:

$$\Delta A_\mu = \frac{1}{2}\int df^{\nu\sigma}\left(\partial_\nu\left(\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}A_\lambda\right) - \partial_\sigma\left(\Gamma^\lambda_{\mu\nu}A_\lambda\right)\right).$$

Konturimiz kichik bo'lgani uchun, uning ustida aniq bo'lgan tenglik

$$\partial_\nu A_\mu = \Gamma^\lambda_{\mu\nu}A_\lambda$$

ni uning sirt nuqtalarida ham o'rinli deb qarashimiz mumkin (qo'shimcha hadlarning integralga qo'shgan hissasi ikkinchi tartibli kichik sondir). Shuni hisobga olib,

$$\Delta A_\mu = \frac{1}{2}\int df^{\nu\sigma}\Big\{\partial_\nu\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}A_\lambda - \partial_\sigma\Gamma^\lambda_{\mu\nu}A_\lambda + \left(\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\rho_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\sigma}\right)A_\rho\Big\} = \frac{1}{2}\Delta f^{\nu\sigma}R^\rho_{\mu\nu\sigma}A_\rho \tag{3.47}$$

formulaga kelamiz. Bu yerda kiritilgan yangi belgi $R^\rho_{\mu\sigma\nu}$ quyidagicha aniqlangan:

$$R^\rho_{\mu\nu\sigma} = \partial_\nu\Gamma^\rho_{\mu\sigma} - \partial_\sigma\Gamma^\rho_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\rho_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\sigma} \tag{3.48}$$

va u ***egrilik*** yoki ***Riman-Kristoffel tenzori*** deyiladi. Uning tenzorligi (3.47)-dan ko'rinib turibdi: (3.47)-ning chap tomoni ikki vektorning bir nuqtadagi farqi, demak, yana vektordir, o'ng tomonidagi $\Delta f^{\nu\sigma}$ va A_ρ lar ham tenzorlardir. Tenzorlarning bo'linma xossasiga ko'ra $R^\rho_{\mu\sigma\nu}$ ham tenzor bo'lishi kerak. U 4-rang (1,3) tipdagi tenzordir.

Kontravariant vektor uchun ham yopiq kontur bo'yicha parallel ko'chirish qoidasini keltirib chiqarish mumkin.

20-Mashq:

Quyidagi xossadan foydalanib, $\Delta(A^\mu B_\mu) = 0$ (nima uchun?) kontravariant vektor uchun

$$\Delta A^\mu = -\frac{1}{2}\Delta f^{\nu\sigma}R^\mu_{\lambda\nu\sigma}A^\lambda$$

ekanligini ko'rsating.

Riman-Kristoffel tenzori fazoning egrilanganlik xossalarini ifodalaydi. Buni quyidagi ko'rinishda aytishimiz mumkin: Riman-Kristoffel tenzorining nolga tengligi fazoning tekis bo'lishining zaruriy va yetarli shartidir. Rostdan ham, agar fazomiz tekis bo'lsa, uning hamma nuqtalarida $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$ bo'ladi va, demak,

$$R^{\mu}_{\lambda\nu\sigma} = 0 \tag{3.49}$$

bo'lishi kerak. Teskarisi: hamma nuqtalarda (3.49)-o'rinli bo'lsa, ixtiyoriy vektorni ixtiyoriy yopiq trayektoriya bo'yicha o'ziga parallel ko'chirganimizda u o'zgarmaydi, demak, bir nuqtada berilgan Galiley sistemasining o'qlarini o'ziga parallel ko'chirish yoli bilan butun fazoda global Galiley sistemasini o'rnatishimiz mumkin.

Egrilik tenzorini kiritishning yana bir yo'li bor. Ma'lumki, xususiy hosilalarning tartibini o'zgartirganimizda natija o'zgarmaydi. Kovariant hosilalarning o'rnini almashtirganimizda esa natija o'zgaradi:

$$A_{\mu;\nu;\lambda} - A_{\mu;\lambda;\nu} = R^{\sigma}_{\mu\lambda\nu} A_{\sigma}. \tag{3.50}$$

21-Mashq:
(3.50)-ni isbot qiling.

3.13 Egrilik tenzorining xossalari

Egrilik tenzorining xossalarini o'rganish uchun uning to'liq kovariant formasiga o'taylik:

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = g_{\mu\rho} R^{\rho}_{\nu\lambda\sigma}.$$

Bu formulada Γ larning hosilali qismlarini ochib chiqsak quyidagi ifodaga kelamiz:

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = \frac{1}{2}\left(\partial_\nu\partial_\lambda g_{\mu\sigma} + \partial_\mu\partial_\sigma g_{\nu\lambda} - \partial_\nu\partial_\sigma g_{\mu\lambda} - \partial_\mu\partial_\lambda g_{\nu\sigma}\right) +$$

$$+ g_{\alpha\rho}\left(\Gamma^\alpha_{\nu\lambda}\Gamma^\rho_{\mu\sigma} - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma}\Gamma^\rho_{\mu\lambda}\right). \tag{3.51}$$

Bu formuladan quyidagilarni darrov keltirib chiqarishimiz mumkin:

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = R_{\lambda\sigma\mu\nu}; \tag{3.52}$$

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = -R_{\nu\mu\lambda\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\lambda}; \tag{3.53}$$

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} + R_{\mu\lambda\sigma\nu} + R_{\mu\sigma\nu\lambda} = 0. \tag{3.54}$$

(3.52)- va (3.53)- xossalarni osongina tekshirish mumkin. (3.54)-xossa oz-moz mehnatni talab qiladi. To'rt o'lchamli fazoda to'rtinchi rang tenzorining $4^4 = 256$ ta komponentasi bo'ladi, yuqoridagi shartlar esa Riman-Kristoffel tenzorining mustaqil komponentalarinig soni bundan kamligini bildiradi - umumiy komponentalarning sonidan shartlarning sonini ayirsak, mustaqil komponentalarning soni kelib chiqadi. Shu shartlarning sonini topaylik. Birinchi shartdan boshlaymiz. $(\mu\nu)$ indeks 16 ta qiymatni qabul qiladi, demak, $R_{\mu\nu\lambda\sigma}$ ni simmetrik bo'lgan 16×16 ko'rinishlik $R_{(\mu\nu)(\lambda\sigma)}$ matrica deb qarashimiz mumkin ekan, y'ani, (3.52) - xossa (256-16)/2=120 ta shartni bildirar ekan. (3.53)-shartlarning soni $4 \times 16 + 4 \times 12 = 112$ ga tengdir. Oxirgi tenglik 4-ta mustaqil shartni o'z ichiga oladi (tekshirib ko'ring). Demak, egrilik tenzorining mustaqil komponentalarining soni 256-236=20 ta ekan.

Muhim rol o'ynaydigan ***Bianki ayniyatini*** keltirib chiqaraylik. Uni keltirib chiqarish uchun Galiley koordinat sistemasiga o'tamiz va egrilik tenzorini quyidagi ko'rinishda olamiz (mahalliy Galiley sistemasi kiritilgan nuqtada $\Gamma^\mu_{\nu\rho} = 0$, ammo, uning hosilasi nolga teng emas, chunki hosila hisoblash uchun funksiyaning nuqta atrofidagi qiymatlari ham kerak):

$$R^{\mu}_{\nu\sigma\rho} = \partial_\sigma \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} - \partial_\rho \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}.$$

Uning kovariant hosilasini hisoblaylik:

$$R^{\mu}_{\nu\sigma\rho;\lambda} = \partial_\lambda \partial_\sigma \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} - \partial_\lambda \partial_\rho \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}.$$

Bu ifodani $\sigma\rho\lambda$ indekslarni siklik ravishda o′rin almashtirib o′ziga qo′shib chiqsak, Bianki ayniyati deyiladigan

$$R^{\mu}_{\nu\sigma\rho;\lambda} + R^{\mu}_{\nu\rho\lambda;\sigma} + R^{\mu}_{\nu\lambda\sigma;\rho} = 0 \qquad (3.55)$$

formulani olamiz.

Egrilik tenzorini faqat bir yol bilangina soddalashtirish mumkin:

$$R_{\mu\nu} = g^{\lambda\sigma} R_{\lambda\mu\sigma\nu},$$

hosil bo′lgan ikkinchi rang tenzori ***Richchi tenzori*** deyiladi. Boshqa ixtiyoriy indekslar bo′yicha soddalashtirsak, yoki nol, yoki yana shuning o′zi kelib chiqadi:

$$g^{\lambda\sigma} R_{\mu\lambda\nu\sigma} = g^{\lambda\sigma} R_{\lambda\mu\sigma\nu} = -g^{\lambda\sigma} R_{\lambda\mu\nu\sigma} = -g^{\lambda\sigma} R_{\mu\lambda\sigma\nu} = R_{\mu\nu}.$$

Richchi tenzori simmetrik tenzordir:

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu},$$

bu (3.52)-xossadan kelib chiqadi. Richchi tenzorining Kristoffel simvollari orqali ko′rinishini topish oson:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\sigma \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} \Gamma^{\tau}_{\tau\rho} - \Gamma^{\rho}_{\mu\tau} \Gamma^{\tau}_{\rho\nu}. \qquad (3.56)$$

Richchi tenzorini ham o′z navbatida indekslari bo′yicha soddalashtirsak skalyar kattalikni olamiz:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}.$$

Bu kattalikning nomi - ***skalyar egrilik***. Richchi tenzori va skalyar egrilik yordamida katta ahamiyatga ega bo′lgan bir yangi tenzor tuzishimiz mumkin. Buning uchun Bianki ayniyati (3.55)-ni ikki indeksi bo'yicha soddalashtirib quyidagi ko'rinishga keltiraylik:

$$R^{\mu}_{\nu\mu\rho;\lambda} + R^{\mu}_{\nu\rho\lambda;\mu} + R^{\mu}_{\nu\lambda\mu;\rho} = 0,$$

yoki,

$$R_{\nu\rho;\lambda} + R^{\mu}_{\nu\rho\lambda;\mu} - R_{\nu\lambda;\rho} = 0.$$

Bu formulani $g^{\nu\lambda}$ ga ko'paytiramiz (ν va λ indekslar bo'yicha soddalashtiramiz):

$$R^{\nu}_{\rho;\nu} + R^{\mu}_{\rho;\mu} - R_{;\rho} = 0,$$

yoki,

$$\left(R^{\nu}_{\rho} - \frac{1}{2}\delta^{\nu}_{\rho}R\right)_{;\nu} = 0.$$

Bu yerda biz metrik tenzorning kovariant o'zgarmasligidan foydalandik. Topilgan ayniyat

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \tag{3.57}$$

formula bilan aniqlanadigan simmetrik bo'lgan ***Einshtein tenzori***ning kovariant to'rt divergensiyasi nolga tengligini bildiradi:

$$G^{\mu}_{\nu;\mu} = 0. \tag{3.58}$$

22-Mashq:

(3.30)-metrika uchun

1. $R_{\mu\nu\sigma\lambda}$;
2. $R_{\mu\nu}$;
3. R

larni hisoblang. Kristoffel simvollari o'sha mashqda aniqlangan.

3.14 Geodezik chiziqlarning og'ishi

Riman-Kristoffel tenzorining ma'nosini chuqurroq tushunish uchun quyidagi masalani ko'rib chiqaylik. Bizga $t = t_0$ vaqt momentida bir-biriga cheksiz yaqin turgan (orasidagi masofa δx^{μ}) va shu momentdan boshlab tashqi gravitatsion maydonda ozod tushayotgan ikki jism berilgan bo'lsin. Ekvivalentlik prinsipining lokal xarakterga ega ekanligini gapirganimizda, erkin tushayotgan ikki jism orasidagi masofa bora-bora o'zgaradi, degan edik. Shu o'zgarishning dinamikasi Riman-Kristoffel tenzori orqali aniqlanadi. Erkin tushayotgan jismlarning trayektoriyalari uchun tenglamalarni yozaylik:

$$\frac{d^2x^{\mu}}{ds^2} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}(x)\frac{dx^{\nu}}{ds}\frac{dx^{\lambda}}{ds} = 0,$$

$$\frac{d^2(x+\delta x)^{\mu}}{ds^2} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}(x+\delta x)\frac{d(x+\delta x)^{\nu}}{ds}\frac{d(x+\delta x)^{\lambda}}{ds} = 0.$$

Bu tenglamalarning ikkinchisidan birinchisini ayirsak, quyidagiga kelamiz:

$$\frac{d^2\delta x^{\mu}}{ds^2} + \partial_{\sigma}\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}(x)\delta x^{\sigma}\frac{dx^{\nu}}{ds}\frac{dx^{\lambda}}{ds} + 2\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}(x)\frac{dx^{\nu}}{ds}\frac{d\delta x^{\lambda}}{ds} = 0. \quad (3.59)$$

Tenglamani kovariant ko'rinishga keltirsak,

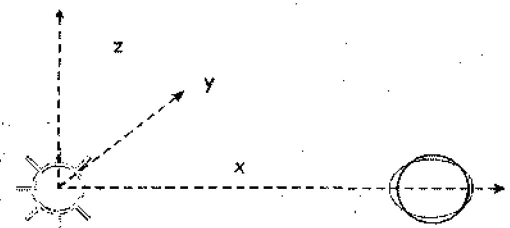
$$\frac{D^2\delta x^{\mu}}{ds^2} = R^{\mu}_{\nu\lambda\sigma}\frac{dx^{\nu}}{ds}\frac{dx^{\sigma}}{ds}\delta x^{\lambda} \quad (3.60)$$

ni olamiz.

23-Mashq:
(3.59)-dan (3.60)-ga o'tish uchun kerakli bo'lgan amallarni bajaring.

Ekvivalentlik prinsipining mahalliy (lokal) xarakterga ega ekanligi shu tenglamadan ko'rinib turibdi - Einshtein liftida ozod tushayotgan ikki jism orasida o'zaro tezlanish bari-bir bor ekan, lekin, fazo-vaqtning kichik masshtablarida bu tezlanish ham kichik bo'lar ekan.

Jismning tashqi tortishish maydonida geodezik bo'yicha harakat qilishi (erkin tushishi) boshqa hech qaysi jism bo'lmaganda shu bitta jism uchun tezlanish tushunchasini kirita olmasligimizni bildiradi. (3.60)-formuladan esa ko'rinib turibdiki, ikki jism uchun tashqi maydonda o'zaro tezlanish tushunchasini kiritishimiz mumkin. Mana shu tezlanish dengiz qirg'oqlarida bo'ladigan kechki va ertalabki suv ko'tarilishi va qaytishini tushuntiradi. Shu masalani ko'rib chiqaylik.



Rasm 3.1: Suv ko'tarilishi va qaytishiga oid

Masalani sodda holda yechamiz - Yer va Quyoshni olib qaraylik, Oyni hisobga olmaymiz. Yer sirtining ko'p qismi dengizlar bilan qoplangan. Quyoshning tortishish maydonida Yer o'zining ustidagi suv hisobiga (3.1)-rasmda ko'rsatilgan holga keladi. Albatta, bu rasmda ahvol bo'rttirilgan holda ko'rsatilgan. Quyosh chap tomonda ko'rsatilgan, Yer va Quyoshning markazlari orasidagi masofa R = 150 million kilometrga teng. Quyosh maydoni bo'lmaganda Yer markazi va uning ekvatoridagi nuqtalar orasidagi masofa Yer radiusi $r_{\oplus}$ ga teng bo'ladi. Suvning ekvatordagi zarrachalari ham Quyosh maydonida geodezik chiziqlar bo'yicha erkin harakat qilayapti, bu geodezik chiziqlarning oralig'i Quyoshgacha masofaga nisbatan juda kichikdir, Quyosh maydoni nuqtai nazaridan Yerdagi ixtiyoriy ikki suv zarrachasi uchun (3.60)-tenglama o'rinli bo'lishi kerak. Geodeziklarning og'ishi natijasida x o'qida joylashgan nuqta h balandlikka ko'tariladi (priliv), y-o'qida joylashgan nuqta h chuqurlikka tushadi (otliv). Shuni ko'rsataylik. Agar (3.60)-tenglamani Yer markazi va suvning bir zarrasiga qo'llasak (faqat fazoviy siljish uchun, $\delta x^\mu = (0, \delta x^1, \delta x^2, \delta x^3)$) va tezliklarning juda kichikligini ($u^\mu \simeq (1, 0, 0, 0)$) hisobga olsak,

$$\frac{D^2 \delta x^i}{ds^2} = R^i_{0j0} \delta x^j$$

tenglamani olamiz. Bu yerda δx^i sifatida Yerning markazi bilan ekvatordagi nuqtalarni birlashtiruvchi vektorlarni olamiz — bir gal x o'qi bo'yicha Quyoshga qarab yo'nalgan $\delta x^i_1 = (r_\oplus, 0, 0)$ (suv ko'tarilgan), bir gal esa y o'qi bo'yicha (Quyosh yo'nalishiga nisbatan 90^0 ga burilgan) yo'nalgan $\delta x^i_2 = (0, r_\oplus, 0)$ (suv pasaygan), bu yerdagi $r_\oplus$ - Yerning radiusi. Suv zarrasi muvozanat holatida turadi, demak, unga ta'sir qilayotgan kuchlarning yig'indisi nolga teng:

$$0 = g(r_\oplus + h) + r_\oplus R^1_{010}(\delta x_1), \quad 0 = g(r_\oplus - h) + r_\oplus R^2_{020}(\delta x_2).$$

Bu yerda $g(r_\oplus) = -GM_\oplus / r^2_\oplus$ - Yer tortishish maydonidagi tezlanish. Ikkinchi tenglamada $(r_\oplus - h)$ paydo bo'lishining sababi - u nuqtada suv o'zining eng past holatida turibdi. $r_\ominus$ ga nisbatan h juda kichik son, ikkala tenglamani h bo'yicha chiziqli aniqlikda qatorga yoyamiz va biridan ikkinchisini ayiramiz:

$$2g'(r_\oplus)h + r_\ominus(R^1_{010}(\delta x_1) - R^2_{020}(\delta x_2)) = 0.$$

Natijada suv ko'tarilaishi uchun

$$h = \frac{r_\oplus}{2g'(r_\ominus)}(R^2_{020}(\delta x_2) - R^1_{010}(\delta x_1))$$

ifodani olamiz. Egrilik tenzorini hisoblash qoldi. Quyosh sistemasidagi maydonlar statik va juda sust bo'lgani uchun (3.35)- va (3.48)- tenglamalarni eslab

$$R^i_{0j0} \simeq \partial^i \partial_j \varphi$$

ga kelamiz, bu yerda $\varphi = -GM/r$ - Nyuton potensiali. g' ni hisoblaganda massa sifatida Yerning massasi $M_{\oplus}$ ni va R^{i}_{0j0} ni hisoblaganda Quyosh massasi $M_{\odot}$ ni olamiz. Egrilik tenzorini hisoblaganda birinchi zarraning koordinatalari (Quyoshga nisbatan) $(R - r_{\oplus} - h, 0, 0)$ va ikkinchi zarraning koordinatalari $(R, r_{\oplus} - h, 0)$ ekanligini hisobga olamiz. Natijada suv ko'tarilish balandligi uchun quyidagini topamiz:

$$h = \frac{3}{4}\frac{r_{\oplus}^{4}}{R^{3}}\frac{M_{\odot}}{M_{\oplus}} \simeq 12.5 \text{ sm}.$$

Haqiqatan qirg'oq sohalarda suv ko'tarilishi va tushishining qiymatlari kattaroq bo'ladi, ammo, buning sabablari gidrodinamika qonunlari asosida tushuntiriladi.

4

Maydon tenglamalari

4.1 Moddaning energiya-impuls tenzori

Bu paragrafda tekis bo'lgan Minkowski fazosi va xususiy nisbiylik nazariyasi doirasidan chetga chiqmaymiz. Olingan formulalarni kerakli joyda egrilangan fazolarga umumlashtiramiz.

Biz boshida ikki xil massa tushunchasini kiritgan edik - inert va og'ir massa. Bunda biz haqiqatan relativizmgacha bo'lgan tushunchalardan foydalangan edik. Nisbiylik nazariyasiga o'tganimizdan keyin faqat bitta massa tushunchasidan foydalanishimiz mumkin, u ham bo'lsa kvadrati energiya-impulsning kvadratiga teng bo'lgan massadir:

$$p^2 = p^\mu p_\mu = (p^0)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2c^2, \qquad p^\mu = (p_0, \mathbf{p}), \qquad p^0 = \frac{E}{c}.$$

Bu yerda c - yorug'lik tezligi, m - jismning massasi, E - uning energiyasi. Tabiiy birliklar sistemasida $c = 1$ deb olinadi va yuqoridagi munosabat oddiy ko'rinish qabul qiladi:

$$p^2 = m^2. \tag{4.1}$$

Xususiy nisbiylik nazariyasi uchun standart bo'lgan

$$E = m\gamma, \quad \mathbf{p} = m\gamma\beta, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{\mathbf{v}}{c} \qquad (4.2)$$

formulalarni olib qarasak (4.1)-dagi massa ko'pincha tinchlik massasi deyilishini eslashimiz mumkin. Nisbiylik nazariyasida boshqa hech qanday massa yo'q, ko'pincha harakat massasi deyiladigan kattalik - $m\gamma$ - energiyaning o'zidir. Shuning uchun biz massa deganda (4.1)-formula orqali kiritilgan kattalikni tushunamiz.

Impuls va (o'zaro ta'sirda bo'lmagan qismlardan iborat sistema uchun) energiya - additiv kattaliklardir, y'ani, ozod jismlar sistemasining energiyasi va impulsi shu sistemaga kirgan jismlarning energiya va impulslarining yig'indilariga tengdir. Relativistik massa bunday xossaga ega emas. Buni sodda bir misolda - ikkita fotonlar sistemasida ko'rishimiz mumkin. Agar fotonlarning energiya-impulslarini (p_1^μ, p_2^μ) desak, energiya impulsning additivligidan to'liq impuls uchun $p = p_1 + p_2$ ni olamiz. Massasi nolga teng bo'lgan fotonlar uchun (4.1)-ga binoan $p_1^2 = p_2^2 = 0$. To'liq impulsning kvadrati sistemaning massasiga tengdir:

$$p^2 = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1^\mu p_{2\mu} = 2p_1^\mu p_{2\mu} =$$

$$= 2(p_1^0 p_2^0 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2) = 2p_1^0 p_2^0 (1 - \cos\theta) = m^2.$$

oxirgi tenglikka o'tishda biz massasi nolga teng bo'lgan zarracha uchun $p^2 = 0$ va, demak, $p^0 = |\mathbf{p}|$ ekanligidan foydalandik. Burchak θ - ikki fotonning yo'nalishlari orasidagi burchakdir. Ko'rinib turibdiki, sistemamizning massasi mana shu burchakning funksiyasidir. Masalan, $\theta = \pi$ bo'lganda $m^2 = 4p_1^0 p_2^0$ bo'ladi, $\theta = 0$ bo'lganda esa $m^2 = 0$ bo'ladi. Y'ani, fotonlar sistemasining massasi ularning orasidagi burchakga bog'liq ekan, sistemaning energiyasi esa ikkala fotonlarning energiyalarining yig'indisiga tengdir: $p^0 = p_1^0 + p_2^0$.

Shu misoldan ko'rinib turibdiki, ba'zi bir asarlarda uchraydigan "nisbiylik nazariyasi energiya va massaning ekvivalentligini isbot qildi" degan tasdiq to'g'ri emas ekan.

Nyuton zamonidan beri ma'lumki, tortishish maydonining manbasi massadir. Tenglamalarga massa o'zining zichligi orqali kiradi. Zichlik esa tenzor kattalik emas, biz uning o'zini umumiy nisbiylik nazariyasi tenglamalariga kirita olmaymiz. Ammo, energiya, impuls va massani o'z ichiga olgan va qo'zg'almas turgan jism uchun zichlikka proporsional bo'lgan kattalik - ***energiya-impuls tenzori*** bor. Mana shu kattalikka tortishish maydonining manbasi sifatida qarashimiz mumkin.

Umumiy munosabatlardan boshlaylik. Ma'lumki, tekis fazoda energiya-impuls tenzori quyidagi munosabat orqali kiritiladi:

$$T_{\mu\nu} = \sum_{\sigma=1}^{k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{\sigma}^{,\mu}} q_{\sigma,\nu} - g_{\mu\nu}\mathcal{L}, \tag{4.3}$$

bu yerda $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_\sigma, q_{\sigma,\mu})$ - sistema Lagranj funksiyasining zichligi, $q_\sigma, q_{\sigma,\mu}$ - umumlashgan koordinatalar va umumlashgan tezliklar, $\sigma = 1, ..., k$ - sistemaning erkinlik darajasi, vergul orqali esa xususiy hosila belgilangan. Bu ifoda klassik mexanikadan ma'lum bo'lgan energiya uchun ifodani umumlashtirish yo'li bilan olingan. Buni ko'rish uchun T_{00} ni topaylik:

$$T_{00} = \sum_{\sigma=1}^{k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{\sigma}^{,0}} q_{\sigma,0} - g_{00}\mathcal{L} = \sum_{\sigma=1}^{k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{\sigma}} \dot{q}_{\sigma} - \mathcal{L} = \mathcal{E}.$$

Bu yerda $\mathcal{E}$ - energiya zichligi. Bu degani, quyidagi integral sistemaning energiyasiga teng ekan:

$$\int T_{00} dx = E. \tag{4.4}$$

Energiya-impuls tenzori uchun ***saqlanish qonuni*** o'rinlidir:

$$\partial_\mu T_\nu^\mu = 0. \tag{4.5}$$

Buni isbot qilish uchun harakat tenglamasini ishlatishimiz kerak:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\sigma_{,\mu}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\sigma} = 0. \tag{4.6}$$

24-Mashq:
Ta'sir integrali

$$S = \int dt dV \mathcal{L}(q, q_{,\mu})$$

uchun eng qisqa ta'sir prinsipi $\delta S = 0$ (4.6)-tenglamaga olib kelishini ko'rsating. Bu yerda variatsiyalanuvchi kattalik - umumlashgan koordinatalar q^σ: $q^\sigma \to q^\sigma + \delta q^\sigma$.

25-Mashq:
(4.6)-dan foydalanib (4.5)-ni keltirib chiqaring.

(4.5)-rostdan ham saqlanish qonuni ekanligiga ishonch hosil qilaylik. Buning uchun unga Gauss teoremasini qo'llaymiz, integrallash 4-hajmi sifatida t_1 va t_2 vaqtlarga ($t_2 > t_1$) to'g'ri keluvchi gipersirtlar va fazoviy chegarasi cheksizlikda joylashgan sirt ichidagi hajmni olamiz. Fazoviy cheksizlikda modda zichligi nolga intilishini hisobga olsak:

$$0 = \int d^4x \partial_\mu T^\mu_\nu = \oint dS_\mu T^\mu_\nu = \int dS_0(t_2) T^0_\nu - \int dS_0(t_1) T^0_\nu =$$

$$= \int\limits_{t_2} dxdydz\, T^0_\nu - \int\limits_{t_1} dxdydz\, T^0_\nu \tag{4.7}$$

munosabatga kelamiz. Demak,

$$P_\nu = \int d^3x T^0_\nu$$

kattalik ixtiyoriy ikki t_1 va t_2 vaqt momentlarida bir xil qiymatga ega ekan, ya'ni, (4.5)-dan P_ν ning saqlanuvchanligi kelib chiqar ekan. (4.4)-ga qarasak $P_0 = E$ bo'lishini ko'ramiz, bu degani, P_μ - sistemamizning energiya-impuls 4-vektori deganidir. Demak, T_{0i} - impuls zichligi ekan. Shulardan foydalanib, $T_{\mu\nu}$ uchun umumiy ifodani topishimiz mumkin.

Quyidagicha mulohaza yurutaylik. Biz ko'rayotgan hajmdagi modda tinch turgan sistemaga o'taylik. Va shu tinchlik sistemasida energiya-impuls tenzorini $\tilde{T}$ deb belgilab, uning komponentalarini topaylik. Unda $\tilde{T}_{00} = \rho$ va $\tilde{T}_{0i} = 0$ bo'ladi. $\tilde{T}_{ij}$ larni aniqlash uchun

$$\partial_\mu \tilde{T}^\mu_j = \partial_0 \tilde{T}^0_j + \partial_i \tilde{T}^i_j = 0$$

tenglamani biror hajm bo'yicha integrallaylik:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \tilde{T}^0_j d^3x = \frac{d}{dt}P_j = -\int\limits_V d^3x\, \partial_i \tilde{T}^i_j = -\oint dS_i\, \tilde{T}^i_j.$$

Impulsdan vaqt bo'yicha hosila sistemaga ta'sir qilayotgan kuchga tengdir, demak, $\tilde{T}^i_j$ shu kuch zichligi j-komponentasining i-sirt orqali oqimi ekan. Shuning uchun $\tilde{T}^i_j$ kuchlanish, yoki, ***taranglik*** tenzori deyiladi. Kuch zichligining oqimi, ma'lumki, bosimdir. Bosim Paskal qonuni bo'yicha har tomonga bir xil ta'sir qiladi va o'zi ta'sir qilayotgan sirtga perpendikulyar bo'ladi: $dS_i \tilde{T}^i_j = p dS_j$, bu yerda p - bosim. Bu degani

$$\tilde{T}^i_j = p\delta^i_j.$$

Demak, harakatda bo'lmagan muhit energiya-impuls tenzorining komponentalari

$$\tilde{T}_{00} = \mathcal{E}, \quad \tilde{T}_{0i} = 0, \quad \tilde{T}^i_j = p\delta^i_j \tag{4.8}$$

ko'rinishga ega ekan. Harakatdagi sistemaga o'tish uchun Lorentz almashtirishlarini bajarishimiz kerak:

$$T_{\mu\nu} = \Lambda_\mu{}^\sigma \Lambda_\nu{}^\tau \tilde{T}_{\sigma\tau}. \tag{4.9}$$

Lorentz almashtirish matritsalari uchun ifodalar quyidagichadir:

$$\Lambda^i{}_0 = \beta_i\gamma = \Lambda^0_i, \quad \Lambda^0{}_0 = \gamma, \quad \Lambda^i{}_j = \delta^i_j - \beta_i\beta_j\frac{\gamma-1}{\beta^2}. \tag{4.10}$$

26-Mashq:

Lorentz matritsalari quyidagicha kiritiladi:

$$dx'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} dx^{\nu}. \tag{4.11}$$

a) Intervalning invariantligi

$$dx'^{\mu} dx'_{\mu} = dx^{\mu} dx_{\mu}$$

dan foydalanib

$$\Lambda^{\mu}{}_{\sigma} \Lambda_{\mu}{}^{\tau} = \delta^{\tau}_{\sigma} \tag{4.12}$$

ekanligini ko'rsating;

b) $d\mathbf{x} = 0$ hol uchun (ikkala hodisa ham laboratoriya sistemasida bir nuqtada ro'y berdi) (4.11)-formuladan foydalanib

$$\Lambda^{i}{}_{0} = \beta_i \Lambda^{0}{}_{0}$$

ni toping;

c) (4.12)-dan foydalanib Λ^0_0 ni toping;

d) topilganlardan foydalanib va $\Lambda_{ij} = a\delta_{ij} + b\beta_i\beta_j$ bo'lsin deb olib (nima uchun?) (4.10)-formulalarning oxirgisini toping.

Haqiqatan a uchun faqatgina $a^2 = 1$ tenglamanigina topishimiz mumkin. Biz $a = 1$ deb oldik.

(4.8)-, (4.9)- va (4.10)-formulalardan foydalanib, umumiy holda

$$T_{\mu\nu} = (p + \mathcal{E}) u_{\mu} u_{\nu} - p g_{\mu\nu} \tag{4.13}$$

bo'lishini ko'rsatish mumkin. Masalan,

$$T_{00} = \Lambda_0{}^{\sigma} \Lambda_0{}^{\tau} \tilde{T}_{\sigma\tau} = \Lambda_0{}^{0} \Lambda_0{}^{\tau} \tilde{T}_{0\tau} + \Lambda_0{}^{i} \Lambda_0{}^{\tau} \tilde{T}_{i\tau} =$$

$$= \Lambda_0{}^{0} \Lambda_0{}^{0} \tilde{T}_{00} + \Lambda_0{}^{0} \Lambda_0{}^{i} \tilde{T}_{0i} + \Lambda_0{}^{i} \Lambda_0{}^{0} \tilde{T}_{i0} + \Lambda_0{}^{i} \Lambda_0{}^{j} \tilde{T}_{ij} =$$

$$= \gamma^2 (\mathcal{E} + \beta^2 p).$$

Tekshirish qiyin emaski,

$$\beta^2 \gamma^2 = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} = -1 + \gamma^2$$

va

$$u_0^2 = \left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 = \gamma^2.$$

Shularni hisobga olsak, (4.13)-ifodaning 00 - komponentasining isbotiga kelgan bo'lamiz. Qolgan komponentalarini ham xuddi shunday tekshirib chiqish mumkin.

Keltirib chiqargan formulamiz uzliksiz muhitlar uchun o'rinli edi (Paskal qonuni va bosim tushunchlaridan foydalanganimiz uchun). Diskret (alohida zarralardan tashkil topgan) muhitga o'tsak, $p = 0$ deyishimiz kerak:

$$T_{\mu\nu} = \mathcal{E} u_\mu u_\nu = \rho u_\mu u_\nu \frac{ds}{dt}.$$

Oxirgi tenglikka o'tishda biz energiya va modda zichliklari orasidagi (4.2) ning birinchi qismidan kelib chiqadigan munosabatdan foydalandik.

(4.5)-formula tekis fazodagi saqlanish formulasini berar edi, egrilangan fazoga o'tsak umumiy qoida bo'yicha oddiy hosilani kovariant hosilaga almashtirishimiz kerak:

$$T^{\mu}_{\nu;\,\mu} = 0. \tag{4.14}$$

Ammo, bu ko'rinishga ega bo'lgan tenglama hech qanday saqlanish qonuni bildirmaydi, unga (4.7)-ga o'xshagan mulohazalarni qo'llab bo'lmaydi. Shunga qaramasdan, (4.14)-munosabat fundamental munosabatlar qatoriga kiradi, tortishish maydoni tenglamalarini keltirib chiqarganda, u muhim rol o'ynaydi.

Agar uzluksiz muhitlardan fundamental maydonlarga o'tsak ular uchun (4.3)-formula orqali aniqlangan tenzor simmetriklik xossasiga ega bo'lmasligi mumkin, vaholanki, keyingi paragrafda ko'rsatishimiz bo'yicha, gravitatsion maydonning manbayi sifatida faqat simmetrik tenzorni olishimiz mumkin. (4.3) formula orqali kiritilgan energiya-impuls tenzori ***kanonik*** tenzor deyiladi. U o'zining indekslari bo'yicha simmetrik emas, lekin uni simmetriklashtirish mumkin. Buning uchun unga maxsus tanlab olingan ikki oxirgi indeksi bo'yicha antisimmetrik bo'lgan uch indeksli kattalikning divergensiyasini kiritamiz:

$$\Theta_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \partial^{\lambda}\psi_{\mu\nu\lambda}, \quad \psi_{\mu\nu\lambda} = -\psi_{\mu\lambda\nu}.$$

Bu ikkala tenzor bir-biridan faqat to'liq divergensiyagagina farq qilgani uchun, ular bir xil integral kattaliklarga olib keladi. Saqlanish qonunlari va harakat tenglamalari bu yangi $\Theta_{\mu\nu}$ tenzorga o'tganimiz bilan o'zgarmaydi:

$$\partial^{\mu}\Theta_{\mu\nu} = \partial^{\mu}T_{\mu\nu} = 0.$$

Yangi tenzor uni kiritgan odamning nomi bilan Belinfante tenzori deyiladi. Masalan, elektromagnit maydonni olib qaraylik. Uning uchun

$$L = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \qquad F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}.$$

Kanonik o'zgaruvchi sifatida A_{μ} potensiallar qaraladi. Natijada kanonik energiya-impuls tenzori uchun

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} - \partial^{\lambda}A_{\mu}F_{\lambda\nu}$$

ifodani topamiz. U simmetrik emas. Agar unga

$$\partial^{\lambda}\left(A_{\mu}F_{\nu\lambda}\right)$$

ifodani qo'shsak simmetrik bo'lgan

$$\Theta_{\mu\nu} = \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} - F_{\mu\lambda}F_{\nu}^{\lambda}$$

ifodani olamiz. Xuddi shunday yo'l bilan boshqa maydonlar uchun ham simmetrik energiya-impuls tenzorini topishimiz mumkin.

4.2 Gravitatsion maydon tenglamalari

Gravitatsion maydon tenglamalarini bir necha yo'l bilan keltirib chiqarishimiz mumkin. Biz bu tenglamalarni Einshteinga o'xshab, fizik mulohazalardan keltirib chiqaramiz.

Avvalgi paragrafda aytganimizdek, tenglamaga massa zichligini maydon manbasi sifatida kirita olmaymiz, chunki u tenzor kattalik emas. Modda zichligi energiya-impuls tenzorining bir qismidir, shuning uchun gravitatsion maydonning manbasi sifatida shu tenzorni olishimiz kerak. Demak, gravitatsion maydon tenglamalari quyidagi ko'rinishga ega bo'lishi kerak:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu},$$

bu yerda $G_{\mu\nu}$ - hozircha noma'lum bo'lgan geometrik tenzor, κ - noma'lum koeffitsient (o'lchamlik nuqtai nazaridan chap va, o'ng tomonlarning o'lchamligini bir meyyorga keltirish uchun).

$G_{\mu\nu}$ - tenzoriga quyidagi talablarni qo'yishimiz kerak:

1. $G_{\mu\nu}$ Riman-Kristoffel va metrik tenzorlardangina tuzilgan bo'lishi mumkin;

2. $T_{\mu\nu}$ ga o'xshab $G_{\mu\nu}$ ham kovariant divergensiyasi nolga teng bo'lgan ikkinchi rang simmetrik tenzori bo'lishi kerak:

$$G^{\mu}_{\nu;\mu} = 0;$$

3. Metrikaning ikkinchi tartibli hosilalariga nisbatan chiziqli bo'lishi kerak;

4. Tekis fazoda nolga tenglashishi kerak.

Gravitatsiya tenzorini $G_{\mu\nu}$ ni topish uchun shu shartlar yetarlidir. Ularni ko'rib chiqaylik. Birinchi shart - tushunarli, fazoning egrilanganligi egrilik va metrik tenzorlar orqali ifodalanishi kerak. Ikkinchi shart - $T_{\mu\nu}$ ning xossalaridan kelib chiqadi - tenzor tenglikning chap va o'ng tomonlari tenzor sifatida bir xil umumiy xossalarga ega bo'lishi kerak. Uchinchi shart - fizika uchun umumiy talabdir - tenglamalarga ikkinchi tartibli hosiladan yuqorisi kirishi mumkin emas, ikkinchi tartibli hosilali had chiziqli holda kirishi kerak. Fizikada ma'lum bo'lgan hamma tenglamalar shu talabga bo'ysunadi. To'rtinchi shart - aslida ma'lum bir hollarda buziladi, buni biz kosmologik doimiy muammosini muhokama qilganda ko'rib chiqamiz.

Ma'lumki, $R_{\mu\nu\lambda\sigma}$, va demak, $R_{\mu\nu}$ va R larga metrikaning ikkinchi tartibli hosilasi chiziqli ravishda kiradi. Demak,

$$G_{\mu\nu} = aR_{\mu\nu} + bRg_{\mu\nu} + cg_{\mu\nu}$$

biz qo'ygan birinchi va uchinchi shartlarga bo'ysunar ekan. Ikkinchi shartni ishlataylik:

$$0 = G^{\mu}_{\nu;\mu} = a(R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}R\delta^{\mu}_{\nu})_{;\mu} + (b + \frac{1}{2}a)R_{;\nu} = (b + \frac{1}{2}a)R_{;\nu}. \quad (4.15)$$

Biz bu yerda metrik tenzorning kovariant o'zgarmasligini va (3.58)-ayniyatni hisobga oldik. (4.15)-dan kelib chiqadiki, $b = -\frac{1}{2}a$. Demak, birinchi uch shartdan keyin

$$G_{\mu\nu} = a\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right) + cg_{\mu\nu}$$

ifodaga kelamiz. To'rtinchi shart darhol $c = 0$ tenglikka olib keladi, chunki tekis fazoda $R_{\mu\nu}$ ham, R ham nolga aylanadi. Topilgan ifodaning yagonaligi shundan kelib chiqadiki, metrik tenzordan tuzilgan va yuqoridagi hamma talablarga bo'ysingan boshqa tenzor mavjud emas.

Biz topgan tenzor Bianki ayniyati bilan bog'liq bo'lgan (3.57) ifodaning o'zidir.

Demak, gravitatsion maydon tenglamalari quyidagi ko'rinishga ega ekan:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (4.16)$$

Bu tenglamalar ***Einshtein tenglamalari*** deyiladi, κ doimiy Einshtein doimiysi deyiladi. Ularni boshqa ko'rinishga ham keltirish mumkin. Buning uchun (4.16)-ning ikki tomonini $g^{\mu\nu}$ ga ko'paytiraylik va indekslar bo'yicha yig'indini olaylik. Agar $T = T^{\mu}_{\mu}$ deb belgilab topilgan $R = -\kappa T$ munosabatni yana (4.16)-ga olib borib qo'ysak

$$R_{\mu\nu} = \kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right) \qquad (4.17)$$

tenglamaga kelamiz. Bu tenglamadan biz bo'sh (moddasiz) fazo uchun Einshtein tenglamalarining ko'rinishi quyidagicha ekanini topamiz:

$$R_{\mu\nu} = 0.$$

Bu, lekin, fazo tekis degani emas, fazo tekis bo'lishi uchun bundan kuchliroq bo'lgan $R_{\mu\nu\lambda\sigma} = 0$ shart bajaririlishi kerakligini eslaylik.

(4.16)- va (4.17)-lardan ko'rinib turibdiki maydon tenglamalarining soni 16 ta, shularning ichida chiziqli mustaqillari 10 ta (ikkinchi rang simmetrik tenzorning xossalarini eslang). Noma'lum o'zgaruvchilarning soni ham 10 tadir: oltita $g_{\mu\nu}$ ($g_{\mu\nu}$ ning simmetrikligidan uning o'nta komponentasi mustaqilligi kelib chiqadi, umumiy koordinat almashtirishlari yana to'rtta shartni beradi - buni biz keyinroq muhokama qilamiz), uchta tezlik u_{μ} ($u^2 = 1$) va modda zichligi ε (yoki bosim p). Modda zichligi, tezligi va bosimining gravitatsion maydon tenglamasiga nima aloqasi bor, degan savol tug'ilishi mumkin. Gap shundaki,

$$T^{\mu}_{\nu\,;\,\mu} = 0$$

tenglama ((4.16)-da avtomatik ravishda hisobga olingan) moddaning harakat tenglamasini o'z ichiga oladi - energiya-impuls tenzori xossalarinig muhokamasini eslang. Shunday ekan, moddaning tezligi, bosimi (yoki zichligi)[1] (4.16)-tenglamalarning ichiga kirgan ekan.

[1] Termodinamikadan ma'lumki, moddaning holat tenglamasi unig zichligi, bosimi va temperaturasini o'zaro bog'laydi.

Bundan ko'rinib turibdiki, Einshtein tenglamalari Maxwell tenglamalaridan faqatgina o'zining nochiziqligi bilangina emas, balki boshqa tomondan ham tubdan farq qilar ekan: elektrodinamikada maydon tenglamalari va zaryadlarning harakat tenglamalari bir-biridan mustaqil ravishda beriladi (masalan, zaryadlarning harakatini ixtiyoriy ravishda berishimiz mumkin, shunga to'g'ri keladigan maydon konfiguratsiyasi maydon tenglamalaridan topiladi), gravitatsion maydon tenglamalari shu maydonni hosil qilgan moddaning harakat tenglamalarini o'z ichiga olar ekan.

Endi o'zgarmas κ ni topaylik. Buning uchun tezliklari kichik bo'lgan jismlar hosil qilgan statik, kuchsiz maydonni ko'rib chiqaylik. Shunday hol uchun

$$R_{00} \simeq -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu g_{00} \simeq \frac{1}{2} \Delta g_{00} = \frac{1}{c^2} \Delta \varphi \tag{4.18}$$

deb yozishimiz mumkin. Oxirgi tenglik (3.35)-dan kelib chiqadi, shu qatordagi birinchi taqribiy tenglikni hisoblab topishni o'quvchiga havola qilamiz. Ikkinchi tomondan

$$R_{00} = \kappa \left(T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T \right). \tag{4.19}$$

Ko'rib chiqilayotgan aniqlikda quyidagilarni yozishimiz mumkin:

$$T_{00} = (p+\varepsilon) u_0^2 - p g_{00} \simeq \varepsilon - 2p \simeq \rho c^2;$$

$$T = T^\mu_\mu = p + \varepsilon - 4p = \varepsilon - 3p \simeq \rho c^2.$$

Bu munosabatlarni keltirib chiqarishda biz o'quvchiga ma'lum bo'lgan bir necha narsalardan foydalandik: $u_0 = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \simeq 1$, g_{00} uchun (3.35)-ifodadan , termodinamikadan ma'lum bo'lgan tezlik kichik bo'lganda $\varepsilon \gg p$ bo'lishidan va katta tezliklar uchun $\varepsilon \simeq \rho$ dan (energiya zichligi modda zichligiga teng). Topilgan kattaliklarni (4.19)-ga olib borib qo'ysak, Nyuton potensiali uchun

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2}\kappa\rho c^4$$

tenglamani olamiz. Nyuton potensiali uchun

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho$$

bo'lishi kerakligini hisobga olsak,

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

tenglikni topamiz. Shuni hisobga olib, Einshtein tenglamalarini yana bir marta yozaylik:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}.$$

27-Mashq:

(3.51)-formuladan foydalanib berilgan shartlar uchun (4.18)-ifodaning birinchi qismini keltirib chiqaring.

4.3 Kosmologik doimiy

Einshtein tenglamalarini keltirib chiqarganimizdagi to'rtinchi shartdan voz kechsak tenglamalarning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi (noma'lum o'zgarmas c ni Λ deb belgilaylik):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}. \qquad (4.20)$$

Tenglamada paydo bo'lgan yangi had - $\Lambda g_{\mu\nu}$ - umumiy nisbiylik nazariyasining kosmologik qo'llanishlarida katta ahamiyatga ega bo'lgani uchun kosmologik had, yangi doimiy Λ esa ***kosmologik doimiy*** deyiladi.

Bu hadning ma'nosini quyidagicha tushunish mumkin. (4.20)-ning o'ng tomoninida modda yo'q deb faraz qilaylik: $T_{\mu\nu} = 0$ va $\Lambda/\kappa g_{\mu\nu}$ hadni moddasiz muhitning energiya-impuls tenzori deb qaraylik. Moddasiz fazo vakuum deyiladi. Demak, (4.20)-dan kelib chiqadiki, vakuum go'yoki $(\Lambda/\kappa)g_{\mu\nu}$ ga teng bo'lgan energiya-impuls tenzoriga ega ekan. Uni ixtiyoriy uzluksiz muhit uchun o'rinli bo'lgan formaga keltirsak,

$$\frac{\Lambda}{\kappa}g_{\mu\nu} = T^{vak}_{\mu\nu} = (\varepsilon_0 + p_0)u_\mu u_\nu - p_0 g_{\mu\nu},$$

vakuumning energiya zichligi va bosimini

$$\varepsilon_0 = -p_0, \quad p_0 = -\frac{\Lambda}{\kappa}$$

ko'rinishda aniqlagan bo'lamiz. Boshqacha so'z bilan aytganda, Λ-hadning qo'shilishi vakuumga $\varepsilon_0 = \rho_0 = \Lambda/\kappa$ energiya zichligini mos qo'yishga tengdir. Vakuumning zichligi, energiyasi va (manfiy) bosimi paydo bo'ldi. Bunday jiddiy o'zgartirish kiritishga qanday asosimiz bor? o'z paytida (1917 yilda) Einshtein mana shu Λ-hadni kiritganda quyidagicha mulohaza yuritgan.

XX-asrning boshlarida Koinot statik holatda deb hisoblangan. Yani, Koinotdagi galaktikalar va yulduzlar o'zgarmas, yoki deyarli o'zgarmas holatda turadi, degan fikr hukm surgan. Undan tashqari, Koinotning bir jinsliligi ham ma'lum bo'lgan. Yulduzlar va galaktikalar orasidagi masofalar juda katta bo'lgani uchun, Koinotdagi o'rtacha gravitatsion potensial kichik bo'ladi. Kichik statik potensial uchun Einshtein tenglamalari Nyuton tenglamalariga o'tishini bilamiz:

$$\Delta\varphi = \kappa\rho.$$

Lekin bu tenglamaning bir jinsli statik Koinotga to'g'ri keladigan $\rho = const$, $\varphi = const$ yechimi yo'q. Λ-hadni qo'shganimizdan keyin paydo bo'ladigan

$$\Delta\varphi + \Lambda\varphi = \kappa\rho$$

tenglamaning esa $\varphi = \kappa\rho/\Lambda$ yechimi bor.

Ammo, XX-asrning 20-yillarida galaktikalar bir-birlaridan katta tezliklar bilan qochayotganliklari topildi - Koinot statik emas, balki o'ta o'zgaruvchan sistema ekan. Bu fakt Λ-hadga ehtiyoj yo'qligiga olib kelgandek edi. Ammo, 60-70 -yillardagi elementar zarrachalar nazariyasining rivojlanishi vakuumning kvant xossalari va kosmologik doimiy orasida uzviy bog'lanish bor bo'lishi mumkinligiga olib keldi. Tajribadan ma'lum bo'lishicha, $\Lambda < 10^{-57} cm^{-2}$. Nima uchun noldan farqli bunday kichik son mavjud bo'lishi mumkinligi haligacha tushunarli emas. Oxirgi bir necha yil ichida Koinot xossalarini o'rganishda katta yutuqlarga erishildi, shu jumladan, kosmologik doimiy muammosi ham boshqa nuqtai nazardan yoritildi. Bu haqda kosmologiyaga bag'ishlangan paragrafda gaplashamiz.

4.4 Ikki va uch o'lchamli fazolarda gravitatsiyaning xossalari

Fazo-vaqtimiz to'rt o'lchamlidir, gravitatsiya nazariyasini qurayotganimizda shu faktni to'liq ishlatib keldik. Fazo-vaqtning o'lchamligi nima uchun aynan 4-ga tengligi odamzodni o'ta qiziqtiradigan masalalardan biridir. Bu masala zamonaviy supertorlar nazariyasida o'z yechimini topgan, bu yerda esa biz 2- va 3-o'lchamli fazo-vaqtlarda Einshtein gravitatsiya nazariyasining xossalari qanday bo'lishini ko'rib chiqaylik.

2 o'lchamli fazo-vaqtdan boshlaylik. Ikki o'lchamli fazoda ikkinchi rang antisimmetrik tenzorning eng umumiy ko'rinishi

$$A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu} = a\varepsilon_{\nu\nu}$$

bo'ladi. Bu munosabatni isbot qilish qiyin emas: antisimmetrik tenzorning faqat bitta komponentasigina noldan farqli bo'lishi mumkin - A_{12}, uni a deb belgilaymiz. $\varepsilon_{\nu\nu}$ birlik antisimmetrik tenzorni shu songa ko'paytirsak, ikki o'lchamli fazoda antisimmetrik tenzorning eng umumiy ko'rinishini topamiz.

Egrilik tenzoriga kelsak, uning ham faqat bitta komponentasi noldan farqli bo'lishi mumklin: R_{1212}. Demak, eng umumiy holda

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = K\varepsilon_{\mu\nu}\varepsilon_{\lambda\sigma}$$

deb yozishimiz mumkin ekan. Quyidagi munosabatni

$$\varepsilon_{\mu\nu}\varepsilon_{\lambda\sigma} = \frac{1}{g}\left(g_{\lambda\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\sigma\mu}g_{\lambda\nu}\right), \qquad g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2, \qquad (4.21)$$

tekshirish qiyin emas.

28-Mashq:

(4.21)-formulani isbot qiling. Buning uchun uni har bir komponentasi uchun tekshiring.

Shunday ekan, egrilik tenzori uchun quyidagi tasavvurni yozishimiz mumkin:

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = \frac{K}{g}\left(g_{\lambda\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\sigma\mu}g_{\lambda\nu}\right).$$

Bu ifodani avval $(\mu\lambda)$, keyin $(\nu\sigma)$ indekslari bo'yicha soddalashtirsak, $R_{\nu\sigma} = \frac{K}{g}g_{\nu\sigma}$ va $R = 2K/g$ formulalarni topamiz. Demak,

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

ekan, ya'ni, Einshtein tenzori aynan nolga tengdir. Agar endi Einshtein tenglamalarini yozsak,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu},$$

yoki ixtiyoriy moddaning energiya-impuls tenzori aynan nolga teng bo'lishi kerak, yoki modda gravitatsion maydonning manbayi bo'la olmaydi va u bilan o'zaro ta'sir qilmaydi, degan qiziq fikrga kelamiz. Bundan xulosa - ikki o'lchamli fazoda Einshtein ma'nosidagi gravitatsiya bo'lishi mumkin emas ekan.

Uch o'lchamli fazo-vaqtga o'taylik. Bu holda $R_{\mu\nu\lambda\sigma}$ va $R_{\mu\nu}$ larning mustaqil komponentalarining soni bir xil - 6 ga teng. $R_{\mu\nu}$ uchun bu sonni topish qiyin emas. $R_{\mu\nu\sigma\lambda}$ komponentalarining umumiy soni - $3^4 = 81$, birinchi juft va ikkinchi juft indekslarga nisbatan simmetriklik shartlari soni - $(81-9)/2 = 36$, har bir juftning ichidagi antisimmetriklik shartlarining soni $(3+3) \times (3+3) = 36$, va, nihoyat, oxirgi uchta indeksga nisbatan tsiklik almashtirish shartlarining soni 3 ga teng. Demak, $R_{\mu\nu\sigma\lambda}$ ning mustaqil komponentalarinig soni $81-36-36-3 = 6$ ekan. Richchi tenzori $R_{\mu\nu}$ egrilik tenzori $R_{\mu\nu\sigma\lambda}$ ni ikki indeksi bo'yicha soddalashtirish yo'li bilan olinar edi, ya'ni, ular bir biri bilan chiziqli bog'langan kattaliklardir. Shuni hisobga olib, egrilik tenzorini

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = A_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} - A_{\mu\sigma} g_{\nu\lambda} + A_{\nu\sigma} g_{\mu\lambda} - A_{\nu\lambda} g_{\mu\sigma}$$

ko'rinishda tasavvur qilamiz. Bu yerda $A_{\mu\nu}$ topilishi kerak bo'lgan qandaydir simmetrik tenzor, keltirilgan mulohazalar bo'yicha u $R_{\mu\nu}$ orqali ifoda qilinishi kerak. Yuqoridagi ifoda esa egrilik tenzorining simmetriya xossalariga mos keluvchi bir umumiy ifodadir. Uni birinchi va uchinchi indekslari bo'yicha soddalashtirsak,

$$R_{\nu\sigma} = A g_{\nu\sigma} + A_{\sigma\nu}$$

ni, yana bir soddalashtirsak,

$$R = 4A$$

ni olamiz, bu yerda $A = A^{\mu}_{\mu}$. Demak, $A_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{4} g_{\mu\nu}$ va, shunga yarasha,

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = R_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} - R_{\mu\sigma} g_{\nu\lambda} + R_{\nu\sigma} g_{\mu\lambda} - R_{\nu\lambda} g_{\mu\sigma} +$$

$$+ \frac{R}{2} \left(g_{\mu\sigma} g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} \right)$$

ekan. Ta'kidlash lozimki, bu ifoda faqat uch o'lchamli fazo uchun o'rinlidir. Einshtein tenglamalarining (4.17)-ko'rinishidan foydalanib, yuqoridagi ifodada Richchi tenzorlarini $T_{\mu\nu}$ larga almashtirib chiqsak,

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = \kappa\left(T_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} - T_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda} + T_{\nu\sigma}g_{\mu\lambda} - T_{\nu\lambda}g_{\mu\sigma}\right) -$$

$$-2\kappa T\left(g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma}\right)$$

tenglikni olamiz. Bu tenglikdan ***materiya yo'q joyda egrilik, demak, gravitatsiya yo'q*** degan ma'no kelib chiqadi. Uch o'lchamli fazo-vaqtda gravitatsiya bo'shliq orqali uzatilmas ekan. Demak, uch o'lchamli fazo-vaqtda Quyosh sistemasiga o'xshash sistemalarning bo'lishi mumkin emas ekan.

Bu mulohazalar dunyomizning to'rt o'lchamliligini tushuntirishga xizmat qilmaydi, ular faqat umumiy nisbiylik nazariyasi nuqtai nazaridan tortishish qonunlari fazo-vaqtning o'lchamliligiga kuchli ravishda bog'liq ekanligini ko'rsatadi.

4.5 Koordinatalarga qo'yiladigan shartlar

Umumiy nisbiylik nazariyasida umumiy kovariantlik prinsipidan kelib chiqadigan eng muhim xulosalardan biri - koordinatalar o'zinig bevosita fizik ma'nosini yo'qotishidir. Umumiy koordinat almashtirishi $x^{\mu} \to x'^{\mu} = f(x^0, x^1, x^2, x^3)$ bajarganimizda tenglamalarimiz o'zgarmaydi, vaholangki, yangi x'^{μ} lar eski x^{μ} larning ixtiyoriy kombinatsiyalaridan tuzilgan bo'lishi mumkin, bu esa x^{μ} harflarni umuniy holda bevosita metrik ma'noga ega bo'lgan kattaliklar sifatida qarash mumkinmasligini bildiradi. Lekin, konkret bir masalani yechganimizda konkret bir koordinat sistemasini tanlab olishimiz kerak.

Elektrodinamikani eslaylik. Elektromagnit maydon Lagranjiani

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu},$$

quyidagi to'rtta harakat tenglamalariga olib keladi:

$$\partial^2 A_\mu - \partial_\mu \partial_\nu A^\nu = 4\pi j_\mu. \tag{4.22}$$

Haqiqatan, bu tenglamalarning hammasi ham mustaqil emas. Buni ko'rish uchun unga chap tomondan divergensiya operatori bilan ta'sir qilamiz:

$$\partial^2 \partial_\mu A^\mu - \partial^2 \partial_\mu A^\nu = 0 = 4\pi \partial_\mu j^\mu. \tag{4.23}$$

Ya'ni, bu tenglamalarning ichida zaryadning saqlanish qonuniga olib keladigan bitta munosabat bor ekan. Buning sababi, potensiallarning bir qiymatli aniqlanmaganligidir. Potensiallar ustida ixtiyoriy (differensiallanuvchi) f funksiya yordamida gradiyent almashtirishi bajarsak,

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f$$

(4.22)-tenglamalarning chap tomoni o'zgarmaydi. Ya'ni, elektrodinamika gradiyent invariantlik xossasiga ega. Bu degani, to'rtta potensial A_μ larning bittasini topish uchun qo'shimcha bir shartdan foydalanishimiz kerak. Shunday shart sifatida

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{4.24}$$

ko'rinishga ega bo'lgan Lorentz shartini olishimiz mumkin. Bu holda (4.22)-tenglamalar sistemasi to'lqin tenglamasi ko'rinishini oladi:

$$\partial^2 A_\mu = 4\pi j_\mu.$$

Bu tenglamalardan ixtiyoriy uchtasini yechib, potensialning to'rtinchi komponentasini (4.24)-tenglamadan topish mumkin.

Gravitatsiyaga qaytib kelsak, ahvol shunga o'xshashdir. Einshtein tenglamalarinig kovariant divergensiyasini hisoblasak, shu tenglamalarga kirgan kattaliklar quyidagi to'rtta munosabatga bo'ysunishi kerakligini topamiz:

$$G^\mu_{\nu;\mu} = 0. \tag{4.25}$$

Bu - xuddi (4.23)-ga o'hshagan munosabatlardir. Xuddi elektrodinamika (bitta funksiya f ishtirok qilgan) gradiyent almashtirishlariga nisbatan kovariantlik xossasiga ega bo'lganidek, umumiy nisbiylik nazariyasi ham (to'rtta funksiya f^{μ} ishtirok qilgan) umumiy koordinat almashtirishlariga nisbatan kovariantlik xossasiga egadir. Demak, metrik tenzorning 10 ta mustaqil komponentalaridan to'rttasi qo'shimcha shartlarga bo'ysundirilishi kerak ekan, chunki (4.16)-tenglamalar to'rtta (4.25)-shart bilan bog'langan ekan. Shunday shartlarning ichida eng keng tarqalgani - ***garmoniklik shartidir***:

$$\Gamma^{\lambda} = g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0. \tag{4.26}$$

Uni ochib chiqaylik:

$$\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma}\left(\partial_{\nu}g_{\sigma\mu} + \partial_{\mu}g_{\sigma\nu} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}\right) = -\partial_{\sigma}g^{\lambda\sigma} - \partial^{\lambda}\ln\sqrt{-g} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\sigma}\left(g^{\lambda\sigma}\sqrt{-g}\right) = 0.$$

Demak, garmoniklik sharti

$$\partial_{\sigma}\left(g^{\lambda\sigma}\sqrt{-g}\right) = 0$$

ko'rinishga keltirilar ekan. Albatta, bu shart umumkovariantlikni buzadi (xuddi Lorentz sharti gradiyent invariantlikni buzganidek). Bu shartni hamma vaqt tanlab olishimiz mumkinmi? Yana bir bor elektrodinamika bilan taqqoslaylik. Agar vektor-potensial A_{μ} Lorentz shartiga bo'ysunmasa,

$$\partial_{\mu}A^{\mu} \neq 0$$

unda gradient almashtirishi yordamida shu shartga bo'ysunadigan yangi A'_{μ} potensialni kiritamiz:

$$A'_{\mu} = A_{\mu} + \partial_{\mu}f. \tag{4.27}$$

Shartimiz bo'yisha

$$\partial_\mu A'^\mu = 0 = \partial_\mu A^\mu + \partial^2 f.$$

Agar

$$\partial^2 f = -\partial_\mu A^\mu$$

tenglamaning yechimi mavjud bo'lsa, biz (4.27)-almashtirish orqali Lorentz shartiga bo'ysinuvshi potensial A'_μ ga o'ta olamiz. Klassik matematik fizika kursidan ma'lumki, bu tenglamaning yechimi mavjud, demak, Lorentz shartiga boysinuvchi vektor-potensialni hamma vaqt kirita olamiz.

Xuddi shu mulohazalarni garmoniklik shartiga qo'llaylik. Faraz qilaylik, $\Gamma^\lambda \neq 0$ bo'lsin. Yangi koordinatlarga o'taylik $x^\mu \to x'^\mu$ va

$$\Gamma'^\lambda = g'^{\mu\nu}\Gamma'^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha}\Gamma^\alpha - g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = 0$$

shartning bajarilishi uchun nima kerakligiga qaraylik. Buning uchun esa yana o'sha to'lqin tenglamasining yechimi mavjud bo'lsa, bo'ldi ekan:

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha}\Gamma^\alpha.$$

Demak, garmoniklik sharti ham hamma vaqt qo'yilishi mumkin ekan.

Garmoniklik nomi nima bilan bog'liq? Egrilangan fazodagi D'Alambert tenglamasi (3.46)-ni eslaylik. Agar (3.44)- va (3.45)-formulalarni eslasak, (3.46)-ni quyidagi ko'rinishga keltirishimiz mumkin:

$$\varphi^{;\mu}_{;\mu} = \partial^2\varphi + \Gamma^\mu \partial_\mu \varphi = 0.$$

$\Gamma^\mu = 0$ bo'lgan koordinatlarda

$$\partial^2 \varphi = 0$$

tenglamaga kelamiz. Bunday tenglamaning yechimi garmonik funksiya deyiladi.

5

Markaziy maydon

5.1 Shvartshild yechimi

Umumiy nisbiylik nazariyasida markaziy rollardan birini o'ynaydigan Shvartshild yechimini keltirib chiqaraylik. Bu yechim moddiy nuqta hosil qilgan gravitatsion maydonga to'g'ri keladi. Moddiy nuqta hosil qilgan maydon sferik simmetrik va statik bo'lishi kerak. Birinchi navbatda masalaning simmetriyalaridan foydalanib interval uchun eng umumiy sferik simmetrik ifodani yozib olamiz:

$$ds^2 = A(r)dt^2 - 2B(r)dt\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} - C(r)(\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r})^2 - D(r)d\mathbf{r}^2.$$

Biz buni yozganda markaziy maydon faqat markazgacha bo'lgan masofagagina bog'liq bo'lishi mumkin ekanligini, bu esa, differensial element faqat r, $d\mathbf{r}^2$, $\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}$ largagina bog'liq bo'lishi mumkinligini bildirishini hisobga oldik. Sferik koordinat sistemasida

$$d\mathbf{r}^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta^2 d\varphi^2),\ \ \mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = rdr$$

ekanligini hisobga olib, vaqt ustida

$$t = t' + T(r),\ \ \frac{dT}{dr} = \frac{B}{A}r \tag{5.1}$$

almashtirish bajarib dr^2 larning oldidagi hamma koeffitsientlarning yig'indisini $F(r)$ harfi bilan belgilasak (t' ning shtrixini olib tashlagandan keyin), quyidagi ifodaga kelamiz:

$$ds^2 = A(r)dt^2 - F(r)dr^2 - D(r)r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta^2 d\varphi^2). \quad (5.2)$$

Nima asosda (5.1)-almashtirish bajardik? Umumiy nisbiylik nazariyasi umumiy koordinat almashtirishlariga nisbatan kovariantdir, xususan, bizning holda sferik simmetriyani buzmaydigan ((5.1)-esa shunga to'g'ri keladi) ixtiyoriy almashtirish bajarishimiz mumkin. Almashtirishlarning yana biri - koeffitsient D ni birga teng deb olamiz, shunda (5.2)-ning oxirgi hadi $\theta = \pi/2$ tekislikda yoy elementi uzunligi uchun $dl = rd\varphi$ ni beradi. Bu r radiusli aylananing uzunligi $2\pi r$ ga tengligini ta'minlaydi. Yakuniy ifoda -

$$ds^2 = A(r)dt^2 - F(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

Demak, metrik tenzorning bizning masalamizdagi noldan farqli bo'lgan komponentalari:

$$g_{00} = g_{tt} = A(r), \; g_{11} = g_{rr} = -F(r),$$

$$g_{22} = g_{\theta\theta} = -r^2, \; g_{33} = g_{\varphi\varphi} = -r^2\sin^2\theta.$$

Metrikaning determinanti uchun esa

$$g = -A(r)F(r)r^4\sin^2\theta$$

ifodani olamiz. Shu formulalardan foydalanib metrikaning kontravariant ko'rinishini ham topish qiyin emas:

$$g^{00} = \frac{1}{A(r)}, \; g^{11} = -\frac{1}{F(r)}; \; g^{22} = -\frac{1}{r^2}, \; g^{33} = -\frac{1}{r^2\sin^2\theta}.$$

Kristoffel simvollarini topishga o'tishdan oldin qulaylik uchun

$$A(r) = e^{\nu(r)}, \quad F(r) = e^{\lambda(r)}$$

belgilash kiritaylik.

29-Mashq:

Kristoffel simvollari uchun quyidagi formulalarni keltirib chiqaring (12 - mashqning natijalaridan foydalaning):

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\lambda', \; \Gamma^1_{22} = \Gamma^3_{13} = -re^{-\lambda}, \; \Gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta e^{\nu}, \; \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}, \; \Gamma^0_{10} = \frac{1}{2}\nu',$$

$$\Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta, \; \Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}\nu' e^{\nu-\lambda}, \; \Gamma^3_{23} = \mathrm{ctg}\,\theta, \; \Gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta e^{-\lambda}. \tag{5.3}$$

Qolgan hamma $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ lar nolga teng (albatta, tepadagi simvollardan $\nu \leftrightarrow \lambda$ yo'l bilan olinganlaridan tashqari).

Bu mashqqa ko'rsatma sifatida ikkita simvolni hisoblaylik:

$$\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2}g^{2\lambda}\left(\partial_2 g_{2\lambda} + \partial_2 g_{\lambda 2} - \partial_\lambda g_{22}\right) = \frac{1}{2}g^{22}\partial_2 g_{22} =$$

$$= \frac{1}{2}(-\frac{1}{r^2})\frac{\partial}{\partial\theta}(-r^2) = 0;$$

$$\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}g^{1\lambda}\left(\partial_0 g_{0\lambda} + \partial_0 g_{\lambda 0} - \partial_\lambda g_{00}\right) = -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{00} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-e^{-\lambda}\right)\frac{\partial}{\partial r}e^{\nu} = \frac{1}{2}\nu' e^{\nu-\lambda}.$$

Kristoffel simvollarining qolganlari ham shu yo'l bilan hisoblanadi. Einshtein tenglamalariga o'tish uchun R^μ_ν larni hisoblashimiz kerak. Hisoblaylik:

$$R^0_0 = g^{0\mu}R_{\mu 0} = g^{00}R_{00} =$$

$$= g^{00}\left(\partial_\sigma\Gamma^\sigma_{00} - \partial_0\Gamma^\sigma_{0\sigma} + \Gamma^\rho_{00}\Gamma^\tau_{\tau\rho} - \Gamma^\rho_{0\tau}\Gamma^\tau_{\rho 0}\right).$$

Bu ifodaga kirgan har bir hadni ko'rib chiqaylik. Birinchi had nolga teng, chunki maydonimiz vaqtga bog'liq emas. Tepadagi

(5.3)-ro'yhatga qarasak, ikkinchi hadga kirgan 4-ta a'zodan bittasi, uchinchi hadga kirgan 16-ta a'zodan 2-tasi va to'rtinchi hadga kirgan 16-ta a'zodan esa 4-tasi noldan farqlidir:

$$\partial_\sigma \Gamma^\sigma_{00} = \partial_1 \Gamma^1_{00} = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2}\nu' e^{\nu-\lambda}\right);$$

$$\Gamma^\rho_{0\tau}\Gamma^\tau_{\rho 0} = 2\Gamma^1_{00}\Gamma^0_{10} = \frac{1}{2}\nu'^2 e^{\nu-\lambda};$$

$$\Gamma^\rho_{00}\Gamma^\tau_{\tau\rho} = \Gamma^\rho_{00}\partial_\rho \ln\left(r^2 e^{(\nu+\lambda)/2}\sin\theta\right) =$$

$$= \Gamma^1_{00}\partial_1 \ln\left(r^2 e^{(\nu+\lambda)/2}\sin\theta\right) = \frac{1}{2}\nu' e^{\nu-\lambda}\left(\frac{\nu'+\lambda'}{2} + \frac{2}{\lambda}\right).$$

Bulardan

$$R_{00} = e^{\nu-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'}{4}(\lambda'+\nu') + \frac{\lambda'}{r}\right)$$

kelib chiqadi. Buni g^{00} ga ko'paytirsak R^0_0 ni topamiz:

$$R^0_0 = e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'}{4}(\lambda'+\nu') + \frac{\nu'}{r}\right).$$

Boshqa R^μ_ν lar ham shunday hisoblanadi:

$$R^1_1 = e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'}{4}(\lambda'+\nu') - \frac{\lambda'}{r}\right);$$

$$R^2_2 = R^3_3 = e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}e^\lambda - \frac{\lambda'+\nu'}{2r}\right).$$

Richchi tenzorining faqat diagonal komponentalarigina noldan farqlidir. Einshtein tenzorini tuzib olishimiz kerak. Avval Richchi skalyarini hisoblaymiz:

$$R = R^\mu_\mu = e^{-\lambda}\left(\frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2}e^\lambda + \frac{2\nu'}{r} + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\lambda'}{2r}(4 - r\nu') + \nu''\right).$$

Einshtein tenzorini hisoblash uchun kerak bo'lgan hamma kattaliklarga egamiz. Einshtein tenzorining ham faqat diagonal elementlarigina noldan farqlidir. Ularni topish qiyin emas:

$$G_0^0 = R_0^0 - \frac{1}{2}R = e^{-\lambda}\left(-\frac{1}{r^2}\left(1-e^{\lambda}\right) + \frac{\lambda'}{r}\right);$$

$$G_1^1 = R_1^1 - \frac{1}{2}R = e^{-\lambda}\left(-\frac{1}{r^2}\left(1-e^{\lambda}\right) - \frac{\nu'}{r}\right);$$

$$G_2^2 = R_2^2 - \frac{1}{2}R = G_3^3 = e^{-\lambda}\left(-\frac{\nu''}{2} + \frac{\lambda'}{2r} - \frac{\nu'}{2r} - \frac{\nu'}{4}(\nu' + \lambda')\right). \tag{5.4}$$

Biz koordinata boshida turgan nuqtaviy jismning maydonini topmoqchimiz, bu degani, bosh nuqtadan tashqari fazoda $T_\nu^\mu = 0$. Demak, (5.4)-larni nolga tenglashtirishimiz kerak:

$$\begin{gathered}\frac{1}{r^2}\left(1-e^{\lambda}\right) - \frac{\lambda'}{r} = 0;\\ \frac{1}{r^2}\left(1-e^{\lambda}\right) + \frac{\nu'}{r} = 0;\\ \frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda'}{2r} + \frac{\nu'}{2r} + \frac{\nu'}{4}(\nu' - \lambda') = 0.\end{gathered} \tag{5.5}$$

30-Mashq:

(5.5)-ning uchinchisi birinchi ikkitasining natijasi ekanligini ko'rsating.

Mashqning natijasini hisobga olgan holda faqat birinchi ikki tenglamanigina yechishimiz kerak. (5.5)-ning ikkinchisidan birinchisini ayirsak

$$\nu' + \lambda' = 0$$

ni olamiz. Ya'ni,

$$\nu(r) = -\lambda(r) + const.$$

Cheksizlikda $e^{\nu} \rightarrow 0$ va $e^{\lambda} \rightarrow 0$ bo'lishi kerak, demak, $const = 0$ ekan. Metrikaning ikkita koeffitsienti orasidagi bog'lanishni topdik:

$$g_{00} = -g_{11}^{-1} = e^{\nu}.$$

(5.5) ning birinchisini

$$\frac{d}{dr}\left(re^{-\lambda}\right) = 1$$

ko'rinishga keltirib, yechimini darhol topishimiz mumkin:

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 + \frac{c_1}{r},$$

bu yerda c_1 - integrallash doimiysi. Uni topish uchun uzoq masofada maydon sust bo'lib, Nyuton ifodasiga o'tishi kerakligidan foydalanamiz. Bu holda g_{00} (3.35)-ko'rishishga ega bo'lishi kerak, buning uchun $c_1 = -2Gm/c^2$ bo'lishi kerak. Bu masofa o'lchamligiga ega bo'lgan kattalikni jismning ***gravitatsion (Shvartshild) radiusi*** deyiladi:

$$r_g = \frac{2Gm}{c^2}.$$

Bu juda kichik kattalikdir.[1] Demak,

$$e^{\nu} = e^{-\lambda} = 1 - \frac{2Gm}{c^2 r} = 1 - \frac{r_g}{r}$$

ekan, yoki,

$$\lambda = -\log\left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right), \tag{5.6}$$

va intervalning kvadrati uchun

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)c^2dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

[1] Quyosh uchun $r_g = 3\,km$, Yer uchun $r_g = 0.9\,cm$.

ifodani olamiz. Bu ifoda ***Shvartshild elementi*** deyiladi. Bu yechimning vaqtga tegishli qismi bilan bog'liq bo'lgan muammolar keyingi paragrafda ko'riladi. Hozir esa radial masofalarni muhokama qilaylik. Radial harakat uchun uzunlik elementi

$$dl^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2$$

ko'rinishga ega. Agar biror jism nuqtaviy massa hosil qilgan markaziy maydonda radius bo'yicha r_1 dan r_2 gacha harakat qilsa u uning o'zi bilan boq'liq bo'lgan sistemada

$$l_{12} = \int_{r_1}^{r_2} dr \frac{1}{\sqrt{1 - r_g/r}} > r_2 - r_1$$

masofani bosib o'tadi. Bu integral uchun aniq ifodani topish qiyin emas, o'rtadagi tengsizlik esa integral osti ifodaning birdan aniq kattaligidan kelib chiqadi. Biz bir necha marta umumiy nisbiylik nazariyasidagi koordinatlarning umumiy holda bevosita metrik ma'noga ega bo'lmasligi haqida gapirgan edik. Schwarzsxild yechimidagi r va t koordinatlar cheksiz uzoqdagi kuzatuvchi bilan bog'liq bo'lgan koordinatlardir. Buni oson ko'rish mumkin - $r \to \infty$ da Shvartshild elementi tekis Minkowski fazosidagi

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

elementga o'tadi. $r \to \infty$ da hech qanday maydon yo'q, demak, r va t - cheksiz uzoq kuzatuvchining xususiy koordinatlaridir. Koordinataviy va fizik kattaliklarning farqi katta bo'lishi mumkin. Masalan, radius bo'yicha harakat qilayotgan fotonni olib qaraylik. Uning koordinataviy (uzoq kuzatuvchining fikriga to'g'ri keladigan) tezligi

$$\frac{dr}{dt} = \pm c \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)$$

ga teng. Foton maydon hosil qilgan jismning Shvartshild radiusiga qancha yaqin kelsa, uning tezligi shuncha kamayib boradi, $r \to r_g$ da esa uning tezligi nolga teng bo'lib qoladi. Ammo, fizikaviy tezlik shu foton bilan bog'liq bo'lgan xususiy masofaning xususiy vaqtga nisbatiga tengdir:

$$\frac{dl}{d\tau} = \pm c.$$

Fotonnning fizikaviy tezligi hamma vaqt c gagina teng bo'lishi mumkin. Koordinataviy tezlik esa $r \to r_g$ da nolga intiladi: $dr/dt \to 0$.

Yana bir masalaga to'xtab o'taylik - fazoning chekli qismini ishg'ol qilgan massa bo'lganda λ va T_0^0 orasidagi bog'lanishni topaylik. Buning uchun (5.4)-dagi birinchi tenglamani to'liq ko'rinishda yozib olamiz:

$$e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2}\left(1-e^{\lambda}\right)-\frac{\lambda'}{r}\right) = -\frac{8\pi G}{c^4}T_0^0,$$

yoki,

$$e^{-\lambda}(1-r\lambda') = 1-\frac{8\pi G}{c^4}r^2T_0^0.$$

Demak,

$$\lambda = -\log\left(1-\frac{8\pi G}{c^4 r}\int T_0^0 r^2 dr\right).$$

Agar maydon manbasi radiusi a ga teng bo'lgan sferik jism bo'lsa, unda (5.6)-va yuqoridagi formulalarni solishtirib quyidagini olamiz:

$$m = \frac{4\pi}{c^2}\int_0^a T_0^0 r^2 dr. \qquad (5.7)$$

Bu formuladan muhim bir xulosaga kelishimiz mumkin. Agar gravitatsion maydon bo'lmaganda sferaning dr qatlamiga $4\pi r^2 dr$ hajm to'g'ri kelgan bo'lar edi. Ammo, tortishish maydonida yuqorida muhokama qilganimizdek qatlamning radial masshtabi $dl = dr/\sqrt{1 - r_g/r}$ ga teng, demak, shu qatlamga to'g'ri kelgan hajm $dV = 4\pi r^2 dl = 4\pi r^2 dr/\sqrt{1 - r_g/r}$ ga teng bo'ladi. Demak, oxirgi formulamizni

$$m = \frac{1}{c^2}\int_0^a T_0^0 \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}\, dV \qquad (5.8)$$

ko'rinishga keltirib olamiz. Ko'rinib turibdiki, jismning massasi uni tashkil qilgan qismlarning massalarining yig'indisidan kam ekan. Bunday tanqislik ***gravitatsion massa defekti*** deyiladi.

5.2 Qizil siljish

Gravitatsion maydonda bir nuqtada turgan bir jismni olaylik. Shu jism bilan bog'liq bo'lgan soat ko'rsatadigan vaqt (intervalning ma'nosiga ko'ra)

$$d\tau = \sqrt{g_{00}}dt = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}dt$$

ga tengdir. Koordinatlarga qo'yiladigan shartlarni muhokama qilganimizda x^μ lar hamma vaqt ham bevosita fizik ma'noga ega bo'lavermaydi degan edik. Shvartshild elementidagi vaqt t ni ***koordinataviy vaqt***, yoki, ***dunyoviy vaqt*** deyiladi, ya'ni, u matematik bir koordinatadir, kuzatuvchining soati ko'rsatadigan vaqt τ undan farq qiladi. t vaqtni cheksiz uzoq masofada turgan kuzatuvchining soati ko'rsatadi, shuning uchun u ba'zi-bir hollarda cheksiz uzoqdagi kuzatuvchining vaqti ham deyiladi. $g_{00} < 1$ bo'lgani uchun $d\tau < dt$ bo'ladi, ya'ni, gravitatsion maydonda vaqt sekinroq o'tadi. o'zgarmas (maydon vaqtga bog'liq bo'lmaga) gravitatsion maydonlarni olib qarasak,

$$\tau = \sqrt{g_{00}}t = t\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} \qquad (5.9)$$

deb yozishimiz mumkin. Kuchsiz maydonni olib qarasak,

$$\tau \simeq t\left(1 - \frac{r_g}{2r}\right)$$

bo'ladi. Maydon qancha kuchli bo'lsa (ixtiyoriy jism uchun $r > r_g$, r kichiklashsa, maydon kuchaya boradi) vaqt shuncha sekin o'ta boshlar ekan. Agar ikkita soatdan biri gravitatsion maydonda biror vaqt bo'lgan bo'lsa, va ikkinchisi bu maydonda bo'lmagan bo'lsa, birinchi soat solishtirilganda orqada qolgan bo'lib chiqadi.

Gravitatsion maydonda bir atom turgan bo'lsin. U o'zidan chiqargan nur chastotasining vaqt tempining o'zgarishi natijasida o'zgarishini ko'raylik. Agar atomning bir holatdan ikkinchisiga o'tish vaqti maydon bo'lmaganda Δt bo'lsa, maydonning ikki xil nuqtalari r_1 va r_2 da xuddi shu protsesga $\Delta\tau(r_1)$ va $\Delta\tau(r_2)$ xususiy vaqt ketadi. (5.9)-ga asosan

$$\frac{\Delta\tau(r_1)}{\Delta\tau(r_2)} = \frac{\sqrt{g_{00}(r_1)}}{\sqrt{g_{00}(r_2)}}$$

deb yozamiz. Chastotalarga o'tsak,

$$\omega(r_1)\sqrt{g_{00}(r_1)} = \omega(r_2)\sqrt{g_{00}(r_2)} \tag{5.10}$$

ga kelamiz. Xususan, $r_2 \to \infty$ bo'lsa,

$$\omega(r) = \frac{\omega_0}{\sqrt{g_{00}(r)}}$$

bo'ladi, bu yerda ω_0 - maydon bo'lmagan holdagi ($r \to \infty$) chastota, $\omega(r)$ - r nuqtadagi atomning chastotasi. $g_{00} < 1$ bo'lgani uchun $\omega(r) > \omega_0$ bo'ladi, ya'ni, uzoqda turgan kuzatuvchi uchun gravitatsion maydonda turgan atomdan chiqqan nurning chastotasi kamayib (nur qizil tomonga siljiydi) kelar ekan. Buni teskarisiga ham aylantirishimiz mumkin

- cheksizlikdagi atom nurining chastotasi gravitatsion maydondagi kuzatuvchi uchun kattaroq bo'lib ko'rinadi (nur fiolet tomonga siljiydi).

Maydon kuchsiz bo'lsa, potensiallarga o'tib (5.10)-ni quyidagicha yozib olishimiz mumkin:

$$\omega(r_1) \simeq \omega(r_2)\left(1 + \frac{\varphi(r_2) - \varphi(r_1)}{c^2}\right). \tag{5.11}$$

Atomning chiziqli spektri Quyoshdagi kuzatuvchi uchun ham Yerdagi kuzatuvchi uchun ham ularning har birining soatlari bo'yicha (chastotani aniqlash uchun vaqt birligi kerak) bir xil bo'ladi, Ammo, Quyoshdan kelgan nurning spektri (5.11) bo'yicha

$$\Delta\omega = \omega(r_2)\frac{\varphi(r_2) - \varphi(r_1)}{c^2}$$

ga siljigan bo'ladi. Gravitatsion potensial manfiy kattalik va $|\varphi(r_2)| > |\varphi(r_1)|$, shuning uchun

$$\Delta\omega < 0$$

bo'ladi, y'ani, Quyoshdan kelgan nur qizil tomonga siljigan bo'ladi. Buning ma'nosi oddiydir - kuchli maydonli nuqtada (Quyoshda) vaqt sekinroq o'tadi va bir tebranishga kuchsiz maydondagi (Yerdagi) kuzatuvchi nuqtai nazaridan ko'proq vaqt ketadi, nurning chastotasi kamayadi. Bu xodisa ***gravitatsion qizil siljish*** deyiladi.

5.3 Markaziy maydonda harakat

Markaziy maydondagi harakat masalasi nazariy fizikaning eng muhim masalalaridan biridir. Buning sababi - qo'limizda yetarli sonli saqlanuvchi kattaliklar bor, demak, masala aniq yechiladi. Aniq yechimlar hamma vaqt ko'rilayotgan nazariyani tajriba bilan solishtirish imkoniyatini beradi. Quyosh sistemasi umumiy nisbiylik nazariyasini tekshirish uchun qulay bo'lgan fizik sistemadir, planetalarning harakati yuqori aniqlikda markaziy maydondagi harakarga misol bo'la oladi.

Masalani Gamilton-Yakobi tenglamasi asosida ko'rib chiqamiz. Harakat tenglamasi - geodezik chiziqlar tenglamasi - ikkinchi tartibli tenglamalar sistemasi bo'lib, murakkab tuzilishga ega, birinchi tartibli bo'lgan Gamilton-Yakobi tenglamasi qulayroqdir.

Ta'sir integrali S uchun Gamilton-Yakobi tenglamasini yozaylik:

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial S}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial S}{\partial x^{\nu}}=m^2c^2. \tag{5.12}$$

Markaziy maydonda energiya $E = p_0 = -\partial S/\partial t$ va harakat miqdori momentining z-o'qiga proyeksiyasi $p_\varphi = \partial S/\partial\varphi = L$ saqlanadi.

31-Mashq:

(18)-mashq natijalaridan foydalanib u_0 saqlanuvchi kattalik (harakat integrali) ekanligini ko'rsating. Harakat integralini $E = mcu_0$ ko'rinishga keltiring.

32-Mashq:

Xuddi shu yo'l bilan $p_\varphi = L$ harakat integrali ekanligini ko'rsating.

Impuls momentining saqlanishi jism bir tekislikda harakat qiladi deganidir, bu tekislik sifatida $\theta = \pi/2$ tekislikni olamiz. Shunga yarasha $p_\theta = 0$ bo'ladi. Shularning hammasini hisobga olib va qulaylik uchun kovariant vektorlarga o'tib, (5.12)-tenglamani quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$g_{00}(g^{00})^2E^2 + g_{rr}(p^r)^2 + g_{\varphi\varphi}(g^{\varphi\varphi})^2L^2 = m^2c^2.$$

Bunda biz $p^0 = g^{00}p_0$ va $p^\varphi = g^{\varphi\varphi}p_\varphi$ larni hisobga oldik.

Ma'lum bir affin parametr τ mavjud deb,

$$p^r = \frac{dr}{d\tau} \quad \text{va} \quad p^\varphi = \frac{d\varphi}{d\tau}$$

deb yozib olamiz. Unda

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm\left(E^2 - \left(m^2c^2 + \frac{L^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\right)^{1/2}$$

va

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = -L/r^2$$

tenglamalarni olamiz. Bu tenglamalarning nisbati

$$\frac{d\varphi}{dr} = \mp\frac{L}{r^2}\left(E^2 - \left(m^2c^2 + \frac{L^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\right)^{-1/2}$$

ko'rinishni oladi. Qachon yuqori ishora qachon quyi ishora ishlatiladi? Jism finit harakat qilayotgan bo'lsa, $d\varphi/dr = 0$ nuqtalar jismning to'xtash nuqtalari bo'ladi (radius bo'yicha to'xtash, ya'ni, markazga eng yaqin va eng uzoq nuqtalar - perigeliy va apogeliy). "+" ishora r ortishi bilan φ ning ortishiga to'g'ri keladi, ya'ni, trayektoriyaning perigeliydan apogeliyga ketayotgan qismiga to'g'ri keladi. "-" ishora trayektoriyaning ikkinchi qismiga to'g'ri keladi. Yangi $u = r_g/r$ o'zgaruvchiga o'taylik. Oz-moz hisobdan keyin (tenglamamizni yana bor kvadratga oshirib) quyidagi tenglamani olamiz

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{r_g^2}{L^2}\left(E^2 - \left(m^2c^2 + \frac{L^2}{r_g^2}u^2\right)(1-u)\right).$$

Bu tenglamadan φ bo'yicha yana bir marta hosila olsak

$$u'' + u = \frac{3}{2}u^2 + \frac{r_g^2 m^2 c^2}{L^2} \tag{5.13}$$

tenglamaga kelamiz. Albatta, yuqoridagi tenglamalarning har birining o'z o'rni bor, oxirgi tenglamamiz perigeliyning surunkali siljishi va yulduz nurining Quyosh maydonida og'ishi masalalari uchun qulaydir. Agar (5.13)-tenglamada $u = r_g\bar{u}$ almashtirish bajarsak hozirgi ko'rilayotgan masala uchun u yanada qulayroq ko'rinishga keladi:

$$u'' + u = \frac{r_g m^2 c^2}{2L^2}\left(1 + 3\frac{L^2}{m^2 c^2}u^2\right). \tag{5.14}$$

Bu tenglamaga o'tganda biz $\bar{u}$-ning o'rniga yana u deb yozdik, demak, endi $u = 1/r$. Tenglamaning o'ng tomonidagi ikkinchi had relativistik qo'shimchadir, uni tashlab yuborsak va r_g-ning ta'rifini eslasak, Nyuton mexanikasidagi

$$u_0'' + u_0 = \frac{GMm^2}{L^2}$$

tenglamani olamiz. Bu tenglamaning yechimi

$$u_0 = \frac{1}{r_0} = \frac{GMm^2}{L^2}(1 + e\cos\varphi) \tag{5.15}$$

Nyuton mexanikasidagi Kepler masalasining yechimining o'zidir, bu yerda e-orbita ekstsentrisiteti, perigeliy esa $\varphi = 0$ nuqtaga mos keladi. (5.14) tenglamaning o'ng tomonidagi ikkinchi had esa

$$\frac{L^2}{m^2c^2}u^2 \sim \frac{v^2}{c^2}$$

kichik tezliklar uchun kichik relativistik tuzatma rolini o'ynaydigan haddir. Quyosh sistemasida planetalarning tezliklari rostdan ham kichikdir. Ammo, shunga qaramasdan, Merkuriy uchun bu had beradigan tuzatma tajribada kuzatiladi. Shuning uchun uni hisoblab topaylik. Quyosh sistemasida planetalar uchun $v^2/c^2 \sim 10^{-8}$ dan oshmagani uchun ushbu tuzatmaning faqat birinchi yaqinlashuvda hisoblashimiz yetarlidir. (5.14)-tenglamani quyidagi soddaroq ko'rinishga keltirib olaylik:

$$u'' + u = a\left(1 + \lambda u^2\right). \tag{5.16}$$

Bu ko'rinishda oxirgi hadning kichikligi haqidagi hozirgi aytilgan so'zlarni hisobga oladigan kichik parametr λ kiritdik. Endi yechimni

$$u = a\,(1 + e\cos\beta\varphi) + \lambda\left(\alpha_0 + \sum_{n=2}^{\infty}\alpha_n\cos n\beta\varphi\right) \qquad (5.17)$$

ko'rinishda izlaymiz. Nima uchun? Yangi kirirtilgan parametr β trayektoriyaning yo'piq ellips bo'lmasligini bildiradi. Qolgan hadlar esa yuqori garmonikalar bo'yicha qatordir. Bu ifodani (5.16)-ga oborib qo'ysak, quyidagini olamiz:

$$a + \lambda\alpha_0 + (1-\beta^2)ae\cos\beta\varphi - \lambda\sum_{n=2}^{\infty}\alpha_n n^2\beta^2\cos n\beta\varphi \approx$$

$$\approx a + a^3\lambda(1 + \frac{e^2}{2} + 2e\cos\beta\varphi + \frac{e^2}{2}\cos(2\beta\varphi)).$$

Chap va o'ng tomonini solishtirish natijasida uchta munosabat olamiz:

$$\alpha_0 = a^3(1 + \frac{e^2}{2}); \qquad 1 - \beta^2 = 2\lambda a^2; \qquad -3\alpha_2 = \frac{e^2}{2}a^3.$$

Topgan yechimimiz ikkita garmonika aniqligida topilgan yechimdir. Bizni faqat perigeliyning siljishi qiziqtirgani uchun bu munosabatlarning ikkinchisiga to'xtalaylik. λa^2 ning kichikligini hisobga olsak (Merkuriy uchun $\lambda a^2 \sim 4\cdot 10^{-5}$)

$$\beta \simeq 1 - a^2\lambda = 1 - \frac{3G^2M^2m^2}{c^2L^2}$$

ekanligini darhol topamiz. (5.15)-da $\varphi = 0$ va $\varphi = 2\pi$ nuqtalar eng kichik radiusga, perigeliyga to'g'ri kelar edi. Oxirgi formuladan kelib chiqadiki, (5.17)-dagi $\cos\beta\varphi$ ning argumenti 2π ga o'zgarishi uchun burchak φ to'liq 2π dan tashqari yana

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi G^2M^2m^2}{c^2L^2}$$

ga o′zgarishi kerak. Ya'ni, orbita perigeliysi siljib borar ekan. Ikkinchi garmonikaning xuddi shu tartibga ega bo′lgan hissasi o′zgarmas son bo′ladi va perigeliyning surunkali siljishiga aloqasi bo′lmaydi (buni ko′rish uchun to′liq yechimni λa^2 bo′yicha qatorga yoyib ko′ring).

Kirish qismida aytgan edik, bu effekt – perigeliyning surunkali siljishi – Merkuriy uchun 1846 yil topilgan edi. Merkuriy uchun nazariy va eksperimental sonlarning qiymati yuqori aniqlikda bir-biriga mos keladi. Boshqa planetalar uchun perigeliyning siljishi juda kichik sondir va kuzatishlar aniqligi bu sonni nazariy formula bilan solishtirishga imkon bermaydi.

5.4 Quyosh maydonida nurning og′ishi

Quyosh maydonida nurning og′ishi umumiy nisbiylik nazariyasining klassik effektlaridan biridir. Bu effektni sodda bir yo′lda tushunish mumkin. Tushunishning eng yaxshi yo′llaridan biri solishtirishdir. Shuning uchun xuddi shu effektni birinchi Nyuton butun dunyo tortishish qonuni doirasida qarab chiqamiz. Shunday qila olishimiz uchun fotonni E/c^2 massali zarracha deb qaraymiz. Albatta, bunda biz ikki xil bir-biriga oxirigacha to′g′ri kelmaydigan nazariyalarni birga ishlatayapmiz, ammo, Nyuton qonuni birinchi tartibda haqiqatga yaxshi yaqinlashuv ekanligini bilamiz, buning natijasidagi noaniqlik ikkinchi tartibli kichik son bo′ladi va uni hisobga olmaslik mumkin.

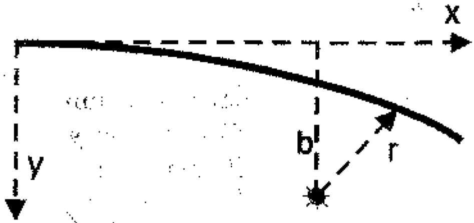
Cheksiz uzoqdan Quyoshning markaziga nisbatan b nishonlash masofali trayektoriya bo′yicha nur harakat qilayotgan bo′lsin. Nur impulsining trayektoriyaga nisbatan perpendikular komponentasini p_n va shu yo′nalishdagi birlik vektorni $\mathbf{n}$ deb belgilasak,

$$\frac{dp_n}{dt} = -GM\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^3}\frac{E}{c^2} \tag{5.18}$$

tenglamani olamiz. x-o'qini harakat yo'nalishi, y o'qini - unga perpendikular qilib tanlab olsak,

$$dt = \frac{dx}{c}, \; y = b$$

deb olishimiz mumkin ((5.1)-rasmga qarang). Haqiqatda bu



Rasm 5.1: Quyosh maydonida nurning og'ishi

munosabatlar nurning to'ppa-to'g'ri harakatiga mos keladi, (5.18) ning o'ng tomoni shunday ham kichik son bo'lgani uchun bu munosabatlardagi noaniqlik (5.18) ning o'ng tomonida yuqori tartibli kichik songa olib keladi va, shuning uchun, hisobga olinmaydi. Foton uchun $p = E/c$ ekanligini va $r^2 = x^2 + b^2$ ni inobatga olib og'ish burchagi α uchun

$$\alpha = \frac{\Delta p_n}{p} = -\frac{GMb}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{r^3} = -\frac{2GM}{bc^2} = -\frac{r_g}{b}$$

formulani topamiz.

Endi xuddi shu masalani umumiy nisbiylik nazariyasi doirasida ko'raylik. Bunda biz xuddi avvalgi paragrafdagidek yo'l tutamiz.

Massasiz zarracha (foton) uchun Gamilton-Yakobi tenglamasini yozaylik:

$$g^{\mu\nu}\partial_\mu S \partial_\nu S = 0,$$

bu yerda S - ta'sir integrali, $-\partial_\mu S = p_\mu$ - umumlashgan impuls. Ko'rinib turibdiki, avvalgi paragrafdagi hamma mulohazalarimizda jismning massasini nolga tenglashtirsak bo'ldi ekan. Shuni hisobga olib darrov natijaviy tenglamaga o'tamiz:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{3}{2}u^2.$$

Bu tenglama (5.13)-tenglamaning o'zi, faqat massali had yo'q.

Ixtiyoriy yulduz uchun $r_g/r \ll 1$. Shuni inobatga olib nishonga olish parametri b (maydon bo'lmagan holda zarraning markazdan o'tish masofasi) ni kiritib yechimni $r_g/b \ll 1$ parametr bo'yicha qatorga yoyib izlaymiz:

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + \dots, \qquad u_n \sim \left(\frac{r_g}{b}\right)^n.$$

Birinchi yaqinlashuv:

$$\frac{d^2u_1}{d\varphi^2} + u_1 = 0,$$

uning yechimi:

$$u_1 = \frac{r_g}{b}\sin\varphi.$$

Keyingi yaqinlashuv:

$$\frac{d^2u_2}{d\varphi^2} + u_2 = \frac{3r_g^2}{2b^2}\sin^2\varphi = \frac{3r_g^2}{4b^2}(1 - \cos 2\varphi).$$

Bu tenglamaning xususiy yechimi

$$u_2 = \frac{r_g^2}{4b^2}(3 + \cos 2\varphi).$$

Demak,

$$u \simeq \frac{r_g}{b}\sin\varphi + \frac{r_g^2}{4b^2}(3 + \cos 2\varphi).$$

Yorug'lik nuri $r = \infty$ dan kelib $r = \infty$ ga ketadi, ikkala holda ham $u = 0$ bo'lishi kerak. Bu ikkala shartga

$$\varphi_1 \simeq -\frac{r_g}{b}, \quad \varphi_2 \simeq \pi + \frac{r_g}{b}$$

burchaklar to'g'ri keladi. Agar gravitatsion maydon bo'lmaganda nur to'g'ri chiziq bo'yicha harakat qilgan va $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$ bo'lgan bo'lar edi. Bizning holimizda esa, nur yulduz maydonida boshlang'ich yonalishiga nisbatan

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - \pi = \frac{2r_g}{b}$$

burchakka og'ishi kerak ekan.

Ko'rinib turibdiki, bu son Nyuton nazariyasidagidan ikki marta ko'p. Agar b sifatida Quyosh radiusini olsak (eksperimentda Quyoshning oldidan o'tayotgan nurlarning og'ishi o'lchanadi) $\alpha = 1.75''$ (1.75 burchak sekundi) bo'ladi. 1919 yilda o'tkazilgan birinchi eksperimentdayoq og'ish burchagi $1.5 - 1.9$ burchak sekundi orasida yotishi aniqlangan edi. Hozirgi natijalar nazariy sondan deyarli farq qilmaydi.

Nurning Quyosh maydonida og'ishining sababi nimadi? Quyosh o'z atrofidagi fazoni egrilaydi, nur, har qanday jismdek, shu egrilangan fazoda geodezik chiziq bo'yicha harakat qiladi. Albatta, uning trayektoriyasi to'g'ri chiziq bo'lmaydi, u Quyoshga yaqinlashgan sari kuchliroq egrilangan fazoga kirib to'g'ri chiziqdan og'a boshlaydi.

5.5 Sferik jismning gravitatsion kollapsi

Tabiatda eng katta jismlar - yulduzlardir. Quyoshning massasi $M_\odot = 2 \cdot 10^{33} g$ ni tashkil qiladi, bu o'rtachagina bir yulduz, massasi quyoshning massasidan o'nlab va yuzlab marta katta bo'lgan yulduzlar ko'p. Yulduzlarning energiya manbayi

- ularning markaziy qismlarida boradigan termoyadro reaksiyalaridir, bu reaksiya natijasida yulduzning ichida juda katta energiya ajralib chiqadi, bu energiya katta bosim bilan yulduzning tashqi qismiga yo'naladi. Tinch yonib turgan yulduz mana shu bosim bilan o'zining gravitatsion maydoni orasidagi muvozanat hisobiga o'zgarmas holatda turadi. Ammo, vaqti kelib yoqilg'i tugaydi, shunda yulduz o'zi hosil qilgan gravitatsion maydon ta'sirida siqila boshlaydi. Statistik fizika metodlari bilan o'tkazilgan tadqiqotlar shuni ko'rsatadiki, yulduzning massasi ma'lum bir "kritik" massadan katta bo'lsa, u uchun holat tenglamalarining muvozanat holiga to'g'ri keladigan yechimi yo'qdir. Bu degani, siquvchi gravitatsion kuchga bas kela oladigan kuch yo'q, bunday yulduz uchun gravitatsion siqilish jarayoni to'xtashi mumkin emas degani. Bu kritik massani ***Chandrasekhar limiti*** deyiladi. Ushbu limit aylanmayotgan yulduz uchun $1.45 M_\odot$ ga teng, harakat miqdori momenti bu sonni taxminan ikki marta ko'paytiradi. Demak, yetarli darajada katta massaga ega bo'lgan jism to'xtamasdan siqilib borishi kerak va, shu jarayonda, massiv jism o'z gravitatsion (Shvartshild) radiusi r_g ning ichiga kirib ketadi. Bunday jarayon ***kollaps*** deyiladi, natijada hosil bo'lgan jism ***kollapsar*** deyiladi.

Nisbiylik nazariyasidan kelib chiqadigan eng chuqur va o'ta ajoyib tabiiy hodisalardan biri - gravitatsion kollaps hodisasini o'rganishga o'taylik. Biz o'z o'qi atrofida aylanmayapgan massasi M bo'lgan sferik jismni olib qaraylik. Uning gravitatsion radiusi $r_g = 2GM/c^2$ ga teng bo'ladi. Shvartshild elementini yana bir yozib olaylik:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right). \tag{5.19}$$

Shvartshild koordinatlari bir noqulay xususiyatga ega - ularda $r = r_g$ nuqta maxsus nuqtadek ko'rinadi, vaholanki, haqiqatan bunday emas. Buni ko'rish uchun maydonning invariantlarini hisoblab chiqaylik. Ulardan birinchisi $R^{\mu\nu\lambda\sigma}R_{\mu\nu\lambda\sigma} = M^2/r^6$. Metrik tenzorning determinanti - $g = -r^4\sin^2\theta$. Ko'rinib turibdiki, $r = 0$ nuqta haqiqiy maxsus nuqtadir, $r = 0$ da fazo-vaqtning ergiligi cheksiz bo'ladi, jismlarga ta'sir qilayotgan gravitatsion maydon ham cheksiz bo'ladi, $r = r_g$ nuqtaning maxsusligi esa sun'iydir, bu - Shvartshild koordinatlarininggina xossasidir, boshqa koordinatlarga o'tganimizda unga shu koordinatlarda mos keluvchi nuqtada hech qanday cheksizliklar bo'lmasligini ko'rishimiz mumkin. Rostdan ham, Shvartshild elementi uchun ko'pgina boshqa ifodalar ham bor, ularning har biri mos keluvchi masalalarda ishlatiladi. Biz ko'rib chiqayotgan masala uchun qulay bo'lgan koordinatlarga o'taylik. Masala - sferik jismning siqilishi, bunda jismning har bir elementi radius bo'yicha harakat qiladi, demak, shunday harakatga mos keluvchi koordinat sistemasini topishimiz kerak. Birinchi etapda

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)c^2dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}dr^2 = 0 \qquad (5.20)$$

dan boshlaylik. o'zining ma'nosi bo'yicha bu - radius bo'yicha harakat qilayotgan fotonga mos keladi. Bu tenglikning ikkita yechimi bor:

$$t \pm \int \frac{dr}{1 - r_g/r} = const.$$

Demak, Shvartshild metrikasida radius bo'yicha harakat qilayotgan foton uchun bu ifodalar o'zgarmas ekan. Xarakteristikalar metodini eslasak, bu ikki konstanta fotonning ikkita xarakteristikasini beradi, shu constantalarni yangi o'zgaruvchilar sifatida tanlab olsak fotonning harakatini o'rganish uchun qulay koordinatlarga o'tgan bo'lamiz. Lekin bizning jismimiz foton emas, ixtiyoriy massiv jism. Shuning uchun shu ifodani sag'al o'zgartirib, ikkita yangi koordinata kiritaylik

$$\tau = t + \int \frac{f(r)dr}{1 - r_g/r}; \qquad \rho = t + \int \frac{dr}{f(r)(1 - r_g/r)} \tag{5.21}$$

va bu yerda paydo bo'lgan $f(r)$ ni shunday tanlab olaylikki, metrikadagi $r = r_g$ maxsus nuqta yo'q bo'lsin. (5.21) dan

$$dr = \frac{1 - r_g/r}{f^2 - 1} f(d\tau - d\rho), \qquad dt = \frac{1}{1 - f^2}(d\tau - f^2 d\rho) \tag{5.22}$$

larni topib (5.19) ga olib borib qo'ysak

$$ds^2 = \frac{1 - r_g/r}{1 - f^2}(d\tau^2 - f^2 d\rho^2) - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

ifodaga kelamiz. (5.21)-da f funksiyani nima uchun bir marta suratga va bir marta maxrajga kiritganimiz ham tushunarli bo'ldi - xuddi shu yo'lda $f^2 - 1$ ifodaning paydo bo'lishiga erishishimiz mumkin. Ko'rinib turibdiki, $f = \sqrt{r_g/r}$ tanlov maqsadimizga muvofiqdir. Natijada ((5.22) ning birinchisidan

$$r = \left(\frac{3}{2}\sqrt{r_g}(\rho - \tau)\right)^{2/3} \tag{5.23}$$

ni topgandan keyin)

$$ds^2 = d\tau^2 - \frac{d\rho^2}{\left[\frac{3}{2r_g}(\rho - \tau)\right]^{2/3}} -$$

$$- \left(\frac{3}{2}\sqrt{r_g}(\rho - \tau)\right)^{4/3} \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

formulani topamiz. Bu ifodada Shvartshild radiusidagi maxsus nuqta yo'qdir. Shvartshild maxsus nuqtasiga bu o'zgaruvchilarda $\rho - \tau = \frac{2}{3} r_g$ chiziq to'g'ri keladi. Topilgan koordinatalar ***sinxron koordinatalar*** turiga tegishlidir.

33-Mashq:

$g_{00} = 1$, $g_{0i} = 0$ koordinatlar sinxron koordinatlar deyiladi. Bu koordinatlarda geodezik chiziqlar x^0 koordinatiga parallel bo'lgan chiziqlar ekanligini isbot qiling.

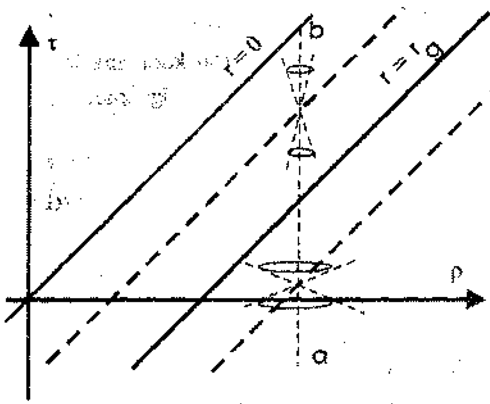
Shu mashqning natijasi Shvartshild maydonidagi radial harakat masalasining yechimini darhol beradi. Mashqdan kelib chiqadiki, $\rho = const$ chiziq (τ koordinatiga parallel bo'lgan) geodezik chiziq ekan, demak, Shvartshild maydonida harakat qilayotgan jism (5.2)-rasmda ko'rsatilgan vertikal (a, b) to'g'ri chiziq bo'yicha harakat qilishi kerak. (5.23)-dan kelib chiqadiki, radius haqiqiy son bo'lib qolishi uchun $\rho > \tau$ bo'lishi kerak, rasmdagi tanlov xuddi shu shartga mosdir. Aniqki, $\rho = \tau$ to'g'ri chiziq $r = 0$ nuqtaga to'g'ri keladi. Harakat yo'nalishi haqida nima deyish mumkin? τ yangi koordinataviy vaqt, u oshganda r kamayib boradi va $\tau \to \rho$ da $r \to 0$ bo'ladi ((5.23)-ga qarang).

Ikkita sohani ajratib qarashimiz kerak – $r > r_g$ va $r < r_g$. Bu ikki sohaning bir-biridan katta farq qilishini konus tenglamasi (yorug'lik nurining tarqalish tenglamasi) $ds^2 = 0$ ni radial harakatga ($\varphi =$ const, $\theta =$ const) qo'llash ko'rsatadi:

$$\frac{d\tau}{d\rho} = \pm\sqrt{\frac{r_g}{r}}.$$

$r > r_g$ sohada konusning engashishi $|d\tau/d\rho| < 1$, bu degani esa konusning bosh nuqtasidan o'tuvchi $r = const$ chizig'i to'liq ravishda shu konusning ichida qoladi ((5.2)-rasmga qarang).

Biz bilamizki, konusdan tashqarida yotgan nuqta konusning bosh nuqtasi bilan sababiy bog'langan bo'lishi mumkin emas (18-betga qarang). $r < r_g$ sohada $|d\tau/d\rho| > 1$ bo'lishi shuni bildiradiki, bu sohada ixtiyoriy $r = const$ ga to'g'ri keluvchi ikki nuqta orasidagi interval fazosimondir, demak, hech qanday jism shu $r = const$ nuqtada qo'zg'olmasdan tura olmaydi. Harakat yo'nalishi haqidagi yuqoridagi mulohazani eslasak, $r < r_g$ sohaga o'tgan jism albatta $r = 0$ nuqtaga



Rasm 5.2: $r-\rho$ koordinatlardagi radial harakat

tomon to'xtamasdan harakat qilishi kerak degan xulosaga kelamiz. $r < r_g$ sohada qo'zg'olmas jismlar bo'lishi mumkin emas. Ma'lum bir ma'noda bu sohada radial koordinata r vaqt koordinatasiga aylandi desak ham bo'ladi - xuddi vaqtni to'xtatib bo'lmagandek markazdan biror-bir $r = const$ masofada to'xtab turib bo'lmaydi, jism albatta $r = 0$ nuqta tomonga harakat qiladi. Demak, siqilish jarayonida $r = r_g$ radial nuqtagacha yetib borgan jism o'zining shu gravitatsion radiusining ichiga kirib ketar ekan. Bu sohada hatto yorug'lik nurlari ham $r = 0$ nuqtaga qarab harakat qiladi! Ya'ni, $r < r_g$ sohadan hatto yorug'lik nuri ham tashqariga chiqa olmaydi! Bu degani, $r < r_g$ sohaning ichida nima bo'layapganini hech qachon bilib bo'lmaydi. Natijada hosil bo'lgan obyektni odatda ***"qora kavak"*** deyiladi - bu obyekt nurni faqat yutishi mumkin, o'zidan esa hech qanday nur chiqarmaydi[2].

[2]Haqiqatda kvant nazariyasining qo'llanishi shuni ko'rsatadiki, qora kavaklar o'zidan kvant mexanikasida ma'lum bo'lgan "tunnel effekt" hisobiga spektri qora jism spektriga to'g'ri keladigan nurlanish chiqarishi kerak. Ammo, bu qora kavakning ichidan biror informasiya chiqdi degani emas, kuzatiladigan spektr ixtiyoriy (shu temperaturadagi, qora kavakning temperaturasi uning massasi orqali aniqlanadi) qora jism

Xuddi shu jarayonga uzoqda joylashgan kuzatuvchi nuqtai-nazaridan qaraylik. Uzoqda joylashgan kuzatuvchining vaqti va radial koordinatasi t va r koordinatalarga mos keladi. Faraz qilaylik, siqilish jarayonida jismning radiusi $r_0 > r_g$ nuqtagacha yetib borgan bo'lsin. Shu jismning ustidan (radial yo'nalishda) t_0 vaqtda yorug'lik nuri chiqqan bo'lsin. Uzoqdagi r nuqtaga joylashgan kuzatuvchi nuqtai nazaridan shu nur ungacha yetib kelishi uchun qancha vaqt ketadi? Bu jarayonga (5.20) tenglama to'g'ri keladi. Uni integrallasak,

$$t - t_0 = r - r_0 + r_g \ln \frac{r - r_g}{r_0 - r_g}$$

natijani olamiz. Ko'rinib turibdiki $r_0 \to r_g$ bo'lsa, $t \to \infty$ bo'lishi kerak. Ya'ni, uzoq kuzatuvchi nuqtai-nazaridan jism o'zining gravitatsion radiusigacha siqilishi uchun cheksiz uzoq vaqt kerak. Vaholanki, shu jismning ustida turgan kuzatuvchi nuqtai nazaridan bu jarayon chekli vaqtni oladi. Bunga ishonch hosil qilaylik. Xususiy vaqt (3.10)-paragrafda ko'rsatilganidek

$$\tau = \frac{1}{c} \int ds$$

integral orqali aniqlanar edi. Bizning holda R nuqtadan r_0 nuqtagacha harakat qilgan kuzatuvchi uchun

$$\tau = \frac{1}{c} \int_R^{r_0} dr \sqrt{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{cdt}{dr}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}}$$

bo'ladi. Integrallash o'zgaruvchisi bilan adashib ketmaslik uchun harakat boshlangan nuqtani R harfi bilan belgiladik. Harakar $t = 0$ vaqt momentida boshlansin va shu momentda jismimiz qo'zg'almasdan turgan bo'lsin (bu shartlar prinsipial bo'lmasa ham yechimni soddalashtirishga yordan beradi).

---

spektriga mos keladi.

Yuqoridagi integralni hisoblash uchun bir muncha mulohaza yuritishimiz kerak. Birinchidan, harakat integrallarini aniqlaylik. Ular

$$u^2 = (1 - r_g/r)(u^0)^2 - (1 - r_g/r)^{-1}(u^r)^2 = 1 \qquad (5.24)$$

((1.9) bilan solishtiring) va

$$p_0 = mcu_0 = E = const.$$

Birinchi formulani 21-betda keltirib chiqarganmiz. Ikkinchi formula esa (18) - mashqdan kelib chiqadi – Shvartshild metrikasi vaqtga bog′liq emas. $u_0 = g_{00}u^0$ va $u^r/u^0 = dr/cdt$ lardan foydalanib (5.24)-ni

$$(1 - r_g/r) - (1 - r_g/r)^{-1}\left(\frac{dr}{cdt}\right)^2 =$$

$$= (1 - r_g/r)^2(u_0)^{-2} = (1 - r_g/r)^2\frac{m^2c^4}{E^2}$$

ko′rinishga keltiramiz. Energiyani aniqlash uchun boshlang′ich shart sifatida R nuqtada $u^r = 0$ ekanligidan foydalanamiz. Bu bizga

$$(u^r)^2|_{r=R} = 0 = -(1 - r_g/R) + \frac{E^2}{m^2c^4},$$

va, demak,

$$E^2 = m^2c^4(1 - r_g/R)$$

ni beradi. Hamma topilgan munosabatlarni yig′ib integralimiz uchun

$$\tau = \frac{1}{c}\int_R^{r_0} dr\frac{1}{\sqrt{\frac{r_g}{r} - \frac{r_g}{R}}} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{R}{r_g}}\int_R^{r_0}\frac{\sqrt{r}dr}{\sqrt{R - r}}$$

formulaga kelamiz. Bu ifodada $r_0 \to r_g$ limitga o′tsak $\tau = 0$ momentda R radiusli jismning sirtida qo′zg′olmasdan turgan kuzatuvchining kollaps jarayonida Shvartshild radiusigacha yetib kelishi uchun shu kuzatuvchi soati bo'yicha ketgan vaqtni topamiz. Integralni hisoblash qiyin emas, lekin uni hisoblab o'tirmaymiz. Bittasi aniq – bu integral $r_0 \to r_g$ limitda chekliligicha qoladi.

Ajoyib natijaga keldik – kollaps jarayoni cheksiz uzoqdagi kuzatuvchi soati bo'yicha cheksiz vaqtni talab qiladi, kollapsarning sirtida joylashgan kuzatuvchining soati bo'yicha gravitatsion radiusgacha yetib borishga chekli vaqt talab qilinadi. Bu – nisbiylik nazariyasidagi vaqtning nisbiyligining o'ta ko'rinishdagi namoyishidir.

Vaqt haqida (5.9)-formula asosida ya'na bir narsani aytishimiz kerak. Agar biz r radiusli jismning ustida turgan bo'lsa,k bizning soatimiz cheksizdagi kuzatuvchining soatiga nisbatan

$$\sqrt{g_{00}} = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}$$

marta sekin yuradi. $r \to r_g$ holda esa cheksiz kuzatuvchining soati bo'yicha jism sirtidagi jarayonlar to'xtab qolishi kerak. Masalan, biror atom nurlanishi chastotasi borgan sari kamayib spektrning past chastotali qismiga o'tib ketadi. Bu hodisa kollapsarning "qora kavak" deyilishi qay darajada uning tabiatiga mos kelishini ko'rsatadi.

Shu yerda (3.60)-tenglamaga ham qaytib kelishimiz o'rinli bo'ladi. Paragrafning boshida keltirilgan formula bo'yicha $|R_{\mu\nu\lambda\rho}| \sim M/r^3$. gravitatsion radiusning ichida ixtiyoriy jismning har xil qismlariga (ularning o'zaro tezlanishlari mana shu (3.60)-tenglamada berilgan) ta'sir qilayotgan siquvchi kuch borgan sari oshib boradi va ixtiyoriy jism $r = 0$ nuqtaga yetib borishdan oldin majag'lanib ketishi kerak.

Shuni ham aytishimiz kerakki, agar (5.21)-da yangi vaqt τ-ni minus ishora bilan olsak hosil bo'lgan koordinatlarda geodezik chiziq $r = 0$ nuqtadan tashqariga qarab harakatga mos kelgan bo'lar edi. Bunday imkoniyat [3]-kitobda yoritilgan.

6

Kuchsiz maydon yaqinlashuvi

6.1 Chiziqli maydon

Shu paytgacha kuchsiz maydon yaqinlashuvidan bir necha xususiy hollarda foydalandik. Gravitatsion maydon kuchsiz bo'lgan holning umumiy nazariyasi ham bor - uni ko'rib chiqaylik. Bu nazariya bizga gravitatsion to'lqinlarni ko'rib chiqishga imkon beradi.

Metrikani ikki qismga bo'laylik:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu},$$

bu yerda $\eta_{\mu\nu} = (+,-,-,-)$ - tekis fazoning o'zgarmas metrikasi, $h_{\mu\nu}$ - metrikaning fazoning egriligini ifodalovchi qismi. Gravitatsiya kuchsiz bo'lishi uchun $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ bo'lishi kerak. Kontravariant metrika uchun bu shartdan foydalanib

$$g^{\mu\nu} \simeq \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$$

deb olishimiz mumkin. Bundan keyin hamma indekslar tekis metrika yordamida ko'tariladi va tushiriladi deb qaraymiz. Kristoffel simvollarini ham xuddi shu yaqinlashuvda hisoblaymiz:

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}\left(\partial_\lambda h_{\sigma\nu} + \partial_\nu h_{\sigma\lambda} - \partial_\sigma h_{\nu\lambda}\right) + O(h^2). \qquad (6.1)$$

Richchi tenzori uchun

$$R_{\mu\nu} = -\partial_\nu \Gamma^{\rho}_{\mu\rho} + \partial_\rho \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\rho\lambda}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\mu}\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} \simeq$$

$$\simeq \partial_\rho \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\rho}_{\mu\rho} + O(h^2)$$

ifodaga

$$\partial_\nu \Gamma^{\rho}_{\mu\rho} \simeq \frac{1}{2}\partial_\mu \partial_\nu h^{\lambda}_{\lambda}; \quad \partial_\rho \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} \simeq \frac{1}{2}\left(\partial^\sigma \partial_\mu h_{\sigma\nu} + \partial_\nu \partial^\sigma h_{\sigma\mu} - \partial^2 h_{\mu\nu}\right)$$

munosabatlarni olib borib qo'ysak

$$R_{\mu\nu} \simeq \frac{1}{2}\left(-\partial_\mu \partial_\nu h^{\lambda}_{\lambda} + \partial^\sigma \partial_\mu h_{\sigma\nu} + \partial_\nu \partial^\sigma h_{\sigma\mu} - \partial^2 h_{\mu\nu}\right),$$

va, demak, Einshtein tenzori uchun shu chiziqli yaqinlashuvda

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \simeq$$

$$\simeq \frac{1}{2}\left(-\partial_\mu \partial_\nu h^{\lambda}_{\lambda} + \partial^\sigma \partial_\mu h_{\sigma\nu} + \partial_\nu \partial^\sigma h_{\sigma\mu} - \partial^2 h_{\mu\nu}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\left(\partial^2 h^{\lambda}_{\lambda} - \partial^\lambda \partial^\sigma h_{\lambda\sigma}\right)$$

ifodani topamiz. Kuchsiz maydon uchun umumkoordinat almashtirishlarini

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x)$$

ko'rinishga keltirish kerak, bu yerdagi ε^μ va uning hosilalari $\partial_\nu \varepsilon^\mu$ ning tartibi $h^{\mu\nu}$ ning tartibi bilan bir xil bo'lishi kerak (aks holda koordinat almashtirishi kuchli maydonga olib kelishi mumkin). Yuqoridagi almashtirishga to'g'ri keladigan yangi metrikaga o'taylik:

$$g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} g^{\lambda\sigma} \simeq$$

$$\simeq \left(\delta^{\mu}_{\lambda} + \frac{\partial \varepsilon^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}\right)\left(\delta^{\nu}_{\sigma} + \frac{\partial \varepsilon^{\nu}}{\partial x^{\sigma}}\right)\left(\eta^{\lambda\sigma} - h^{\lambda\sigma}\right) \simeq$$

$$\simeq \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + \eta^{\mu\sigma}\frac{\partial \varepsilon^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} + \eta^{\lambda\nu}\frac{\partial \varepsilon^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \simeq \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + \partial^{\mu}\varepsilon^{\nu} + \partial^{\nu}\varepsilon^{\mu}.$$

Demak, umumkoordinat almashtirishlarida yangi kiritilgan kuchsiz gravitatsion maydon potensiali

$$h'^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \partial^{\mu}\varepsilon^{\nu} - \partial^{\nu}\varepsilon^{\mu} \qquad (6.2)$$

ko'rinishda almashinar ekan. Bu degani, agar $h^{\mu\nu}$ Einshtein tenglamalarining yechimi bo'lsa,, $h'^{\mu\nu}$ ham shu tenglamalarning yechimi bo'ladi. Elektrodinamikani yana bir marta eslaylik va (4.5)-paragrafdagi muhokamaga qaytib kelaylik. Elektromagnit potentsiallar ustida gradiyent almashtirish bajaraylik

$$A'_{\mu} = A_{\mu} + \partial_{\mu} f. \qquad (6.3)$$

Bilamizki, A'_{μ} va A_{μ} potensiallarning fizika nuqtai nazaridan hech qanday farqi yo'q. Bunday noaniqlikdan qutilish uchun potensiallarni qandaydir shartga bo'ysundirishimiz kerak, masalan, Lorentz shartiga:

$$\partial_{\mu} A^{\mu} = 0. \qquad (6.4)$$

Gravitatsiyada ham xuddi shunday yo'l tutamiz, bu galda (4.5)-paragrafda muhokama qilingan garmoniklik sharti (4.26)-ni qo'llaymiz :

$$g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0.$$

Bizning hol uchun bu ((6.1) ga qarang)

$$\partial^{\lambda} h^{\mu}_{\lambda} - \frac{1}{2}\partial^{\mu} h^{\lambda}_{\lambda} = 0 \qquad (6.5)$$

ko'rinishga keladi. Quyidagi kattalikdan foydalanish

$$\psi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{\lambda}_{\lambda}$$

ba'zi hollarda qulaylik tug'diradi. Masalan, (6.5)-shart

$$\partial_{\mu}\psi^{\mu}_{\nu} = 0 \tag{6.6}$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Richchi tenzori va Richchi skalyarlarini hisoblab

$$R_{\mu\nu} \simeq -\frac{1}{2}\partial^2 h_{\mu\nu}, \qquad R \simeq -\frac{1}{2}\partial^2 h^{\lambda}_{\lambda},$$

Einshtein tenglamalarini

$$\frac{1}{2}\partial^2 h_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\partial^2 h^{\lambda}_{\lambda} = -\kappa T_{\mu\nu} \tag{6.7}$$

holga olib kelamiz. Yuqorida kiritilgan $\psi_{\mu\nu}$ tilida bu tenglamalar sodda ko'rinishga keltiriladi:

$$\partial^2\psi_{\mu\nu} = -2\kappa T_{\mu\nu}.$$

(6.5)- va (6.6)-larga qarasak,

$$\partial^{\mu}T_{\mu\nu} = 0 \tag{6.8}$$

munosabat borligiga ishonch hosil qilamiz. Bu tenglama saqlanish qonunining o'zi, chiziqli yaqinlashuvda (4.14)-formula saqlanish qonuniga qaytib kelar ekan.

Yana bir bor elektrodinamikaga qaytaylik. Lorentz sharti (6.4)- potensiallarni bir qiymatli ravishda aniqlab bermaydi, (6.3)-almashtirishga qo'shimcha ravishda $\partial^2 f_1 = 0$ shartga bo'ysunadigan funksiya yordamida

$$A''_{\mu} = A'_{\mu} + \partial_{\mu}f_1$$

almashtirish bajarishimiz mumkin, bu holda Lorentz sharti buzilmaydi:

$$\partial_{\mu}A'^{\mu} = \partial_{\mu}A''^{\mu} = 0.$$

Xuddi shunday, $\partial^2 \varepsilon_1 = 0$ shartga bo'ysunuvchi ε_1 funksiya bilan (6.2)-bo'yicha yana bir almashtirish bajarsak (6.5)-shart o'zgarmaydi.

(6.7)-da $\mu\nu$ indeks bo'yicha yig'indi olib bu tenglamalarni

$$\partial^2 h_{\mu\nu} = -2\kappa T_{\mu\nu} + \kappa \eta_{\mu\nu} T = -\kappa S_{\mu\nu} \tag{6.9}$$

ko'rinishga keltirib olishimiz mumkin. Bu tenglamadan darhol ko'rinib turibdiki, ***gravitatsion maydonning tarqalish tezligi yorug'lik tezligi c ga tengdir*** - bu xulosaga kelishimiz uchun Dalamber operatorining xossalarini eslaylik (va unda yoru'glik tezligini qayta tiklaylik):

$$\partial^2 h_{\mu\nu} = (\partial_0^2 - \triangle) h_{\mu\nu} = \left(\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \triangle\right) h_{\mu\nu} = -\kappa S_{\mu\nu}. \tag{6.10}$$

Agar $h_{\mu\nu}$ faqat bitta fazoviy koordinataga (masalan, z-ga) bog'liq bo'lsa, (yassi to'lqin) unda yuqoridagi tenglama

$$\partial^2 h_{\mu\nu} = \left(\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) h_{\mu\nu} = 0$$

ko'rinishni oladi (o'ng tomonini nolga teng deb olaylik). Bu tenglamaning yechimi

$$f(z - ct) + g(z + ct) \tag{6.11}$$

ekanligini osongina tekshirish mumkin, bu yerda $f(z)$ va $g(z)$ – ikkita ixtiyoriy ikki marta uzliksiz differensiallanuvchi funksiyalar. Ko'rinib turibdiki, f va g funksiyalar z-o'qi bo'yicha c tezlik bilan o'ngga va chapga tarqalayotgan to'lqinlarni beradi.

Nuqtaviy maydon hosil qilgan maydondan boshlasak sistema hosil qilgan maydonini shu nuqtaviy maydonlarning superpozitsiyasi deb olishimiz mumkin. Nuqtaviy massa uchun (6.10)-tenglamaning yechimini, tabiiyki, sferik koordinatlarda qidiramiz. Sferik koordinatlarda (6.11)-ga o'xshash ikkita yechimni olamiz

$$f_1(t - r/c) \quad \text{va} \quad g_1(t + r/c).$$

Bu yechimlarning birinchisi kechikuvchi yechim deyiladi, ikkinchisi esa odatda ishlatilmaydi (cheklangan fazolarda chegaraviy va boshlang'ich shartlarnigina qo'yishda ishlatiladi, [1],§62-ga qarang).

Dalamber operatorining fundamental (kechikuvchi) yechimi

$$\frac{c\,\theta(t)}{2\pi}\delta(c^2t^2 - r^2)$$

ekanliginidan foydalanib (6.9)-tenglamaning kechikuvchi yechimini darhol topamiz:

$$h_{\mu\nu}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\kappa}{4\pi}\int d^3r' \frac{S_{\mu\nu}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \qquad (6.12)$$

Bu yechim elektrodinamikadagi kechikuvchi potensiallarga o'xshagan yechimdir.

34-Mashq:
Bizga

$$LG(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$$

differensial tenglama berilgan bo'lsin, bu yerda L–biror chiziqli differensial operator. Bu tenglamaning yechimi $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t')$ funksiya L operatorning ***fundamental yechimi*** yoki, ***Green*** (Grin) funksiyasi deyiladi. Agar bizga fundamental yechim ma'lum bo'lsa, unda

$$L\,u(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t)$$

differensial tenglamaning yechimini

$$u(\mathbf{r}, t) = u_0(\mathbf{r}, t) + \int d^3r'dt'\, G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')\, f(\mathbf{r}', t')$$

ko'rinishda olishimiz mumkin ekanligini ko'rsating. Bu yerda paydo bo'lgan yangi funksiya u_0 quyidagi bir jinsli tenglamaning yechimi:

$$Lu_0(\mathbf{r}, t) = 0.$$

35-Mashq:
Avvalgi mashq natijasidan va δ—funksiyaning

1. $\int dy f(y)\delta(x-y) = f(x);$

2. $\delta(ax) = \frac{1}{a}\delta(x);$

3. $\delta(c^2t^2 - r^2) = \frac{\delta(ct-r)+\delta(ct+r)}{2r}$

xossalaridan foydalanib (6.12)-ni keltirib chiqaring. Bunda

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

ekanligi muhim rol o'ynaydi.

Xuddi shu yo'sinda

$$\psi_{\mu\nu}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\kappa}{2\pi}\int d^3r' \frac{T_{\mu\nu}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \tag{6.13}$$

formulani ham yozib olishimiz mumkin. Bularning qaysi biri qulayroq – yechilyapgan konkret masalaga bog'liqdir.

6.2 Yuqori tartibli hadlar

Chiziqli yaqinlashuvga ikkinchi tartibli tuzatmalar kiritaylik. Yana

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu},$$

deb olamiz va keyingi formulalarda $h_{\mu\nu}$ bo'yicha ikkinchi tartibli hadlarni ham qoldiramiz. Kristoffel simvollaridan boshlaylik:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \simeq \frac{1}{2}(\eta^{\lambda\sigma} - h^{\lambda\sigma})\left(\partial_\mu h_{\sigma\nu} + \partial_\nu h_{\sigma\mu} - \partial_\sigma h_{\mu\nu}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\eta^{\lambda\sigma}\left(\partial_\mu h_{\sigma\nu} + \partial_\nu h_{\sigma\mu} - \partial_\sigma h_{\mu\nu}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}h^{\lambda\sigma}\left(\partial_\mu h_{\sigma\nu} + \partial_\nu h_{\sigma\mu} - \partial_\sigma h_{\mu\nu}\right) = \Gamma^{(1)\lambda}_{\mu\nu} + \Gamma^{(2)\lambda}_{\mu\nu}.$$

Simvolning yuqorisidagi indeks uning h bo'yicha tartibini ko'rsatadi.

Richchi tenzoriga o'taylik. Uni

$$R_{\mu\nu} = R^{(1)}_{\mu\nu} + R^{(2)}_{\mu\nu} + \cdots$$

ko'rinishqa tasavvur qilsak (h bo'yicha uchinchi va undan yuqori tartibli hadlar uch nuqta bilan belgilangan) qiyin bo'lmagan hisoblardan keyin

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial^\sigma\partial_\mu h_{\sigma\nu} + \partial_\nu\partial^\sigma h_{\sigma\mu} - \partial_\mu\partial_\nu h^\lambda_\lambda - \partial^2 h_{\mu\nu}\right)$$

va

$$R^{(2)}_{\mu\nu} = \partial_\sigma\Gamma^{(2)\sigma}_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^{(2)\sigma}_{\mu\sigma} + \Gamma^{(1)\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{(1)\sigma}_{\lambda\sigma} - \Gamma^{(1)\lambda}_{\mu\sigma}\Gamma^{(1)\sigma}_{\mu\lambda} =$$

$$= \tfrac{1}{2}h^{\lambda\sigma}\left(\partial_\mu\partial_\nu h_{\lambda\sigma} + \partial_\lambda\partial_\sigma h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\sigma h_{\lambda\nu} - \partial_\nu\partial_\sigma h_{\mu\lambda}\right) +$$

$$+\tfrac{1}{4}\left(\partial_\nu h^\lambda_\mu + \partial_\mu h^\lambda_\nu - \partial^\lambda h_{\nu\mu}\right)\left(\partial_\lambda h^\sigma_\sigma - 2\partial_\sigma h^\sigma_\lambda\right) -$$

$$-\tfrac{1}{4}\left(\partial_\mu h^\lambda_\rho + \partial_\rho h^\lambda_\mu - \partial^\lambda h_{\rho\mu}\right)\left(\partial_\nu h^\rho_\lambda + \partial_\lambda h^\rho_\nu - \partial^\rho h_{\lambda\nu}\right) +$$

$$+\tfrac{1}{2}\partial_\mu h^{\lambda\sigma}\partial_\nu h_{\lambda\sigma}$$

ifodalarni topamiz. Richchi skalarini ham topish qiyin emas:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \simeq (\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu})\left(R^{(1)}_{\mu\nu} + R^{(2)}_{\mu\nu} + \cdots\right) =$$

$$= R^{(1)} + R^{(2)} + \cdots,$$

bu yerda

$$R^{(1)} = \eta^{\mu\nu} R^{(1)}_{\mu\nu};$$

$$R^{(2)} = \eta^{\mu\nu} R^{(2)}_{\mu\nu} - h^{\mu\nu} R^{(1)}_{\mu\nu}.$$

Einshtein tenzorini ham topish qiyin emas:

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R =$$

$$= R^{(1)}_{\mu\nu} + R^{(2)}_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})\left(R^{(1)} + R^{(2)} + \cdots\right) + \cdots$$

$$= \underbrace{R^{(1)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} R^{(1)}}_{\text{birinchi tartib}} + \underbrace{R^{(2)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\left(\eta_{\mu\nu} R^{(2)} + h_{\mu\nu} R^{(1)}\right)}_{\text{ikkinchi tartib}} + \cdots$$

Einshtein tenglamalariga o'taylik. Tenglamalarning chap tomonida birinchi tartibli hadlarni qoldiramiz, ikkinchi tartibli hadlarni esa o'ng tomonga o'tkazamiz va yangi belgilash kiritamiz:

$$R^{(1)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} R^{(1)} = \kappa\left(T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}\right), \qquad (6.14)$$

bu yerda

$$t_{\mu\nu} = \frac{1}{\kappa}\left\{ - R^{(2)}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(\eta_{\mu\nu} R^{(2)} + h_{\mu\nu} R^{(1)}\right)\right\}. \qquad (6.15)$$

Gravitatsion maydonning manbayi sifatida

$$\tau_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}$$

tenzorni ko'rishimiz kerak, bu tenzorga nafaqat modda bilan bog'langan, balki gravitatsion maydonning o'zidan tuzilgan qism ham kirgan. Paydo bo'lgan $t_{\mu\nu}$ ni gravitatsion maydon energiya-impuls tenzori sifatida talqin qilishimiz mumkin. $\tau_{\mu\nu}$ esa odatda (modda–gravitatsion maydon) sistemamizning to'liq energiya-impuls tenzori sifatida talqin qilinadi. Haqiqatan, $\tau_{\mu\nu}$ umumiy koordinat almashtirishlariga nisbatan tenzor emas, buni shundan ham ko'rish mumkinki, uning ta'rifiga kovariant emas, balki oddiy hosilalar kirgan. Ammo, u biror nuqtada bajarilgan Lorentz almashtirishlariga nisbatan kovariantdir. Demak, hatto modda bo'lmaganda ham gravitatsion maydon o'z-o'zining manbasi bo'lib xizmat qilar ekan. Bu – gravitatsion maydonning nochiziqligining natijasidir, chiziqli bo'lgan klassik elektrodinamikada bunday hol uchramaydi, u yerda maydonning manbayi faqat zaryadlar bo'ladi. (6.14)-tenglamaning chap tomoni (6.7)-ning chap tomoni bilan bir xil bo'lgani uchun uning ham divergensiyasi nolga tengdir, demak,

$$\partial^{\mu} \tau_{\mu\nu} = 0. \tag{6.16}$$

Bu esa saqlanish qonunidir.

Yuqoridagilarni hisobga olib (6.13)- formulani

$$\psi_{\mu\nu}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\kappa}{2\pi} \int d^3 r' \frac{\tau_{\mu\nu}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \tag{6.17}$$

ko'rinishda olishimiz kerak. Bu formulaning ma'nosini qanday tushinishimiz kerak? Axir integral ostida shu integral orqali aniqlanishi kerak bo'lgan maydonlar $h_{\mu\nu}$ kirgan-ku, bu nima, integral tenglamami? Haqiqatan, bu tenglama iteratsion jarayonda kelib chiqdi, agar tenglamaning o'ng tomonida faqat moddaning energiya-impuls tenzorini hisobga olsak chap tomondagi olingan maydon $1/c^2$ tartibga ega bo'ladi. Gravitatsion maydonning ham energiya-impuls zichligi bor, bu degani uning o'zi ham gravitatsion maydon hosil qilishi kerak. Agarda o'ng tomonda $h_{\mu\nu}$ bo'yicha kvadratik hadlarni hisobga olsak (ular sifatida birinchi etapda topilgan gravitatsion maydonni ishlatib) unda chap tomondagi $h_{\mu\nu}$ da $1/c^4$ darajali hadlarni topgan bo'lamiz va h.k. Olingan tenglamani shu ma'noda tushunishimiz kerak.

Yana bir muhim moment: yuqoridagi jarayon bizga gravitatsion maydonning ma'lum ma'noda energiya-impuls tenzori deb tushunishimiz mumkin bo'lgan kattalikni berdi. U haqiqiy tenzor emas, ammo Lorentz-kovariant kattalik bo'lib, ba'zi bir masalalarda energiya-impuls tenzori sifatida ishlatiladi ((6.4)-paragrafni qarang).

6.3 Yassi to'lqinlar

To'lqin zonasida (manbadan uzoq masofada) to'lqin yassi to'lqinga o'tadi. Yassi gravitatsion to'lqin uchun

$$h_{\mu\nu}(x) = e_{\mu\nu}e^{ikx} + e^{*}_{\mu\nu}e^{-ikx}$$

ifodani yozib olaylik, bu yerda $kx = k_0x^0 + k_1x^1 + k_2x^2 + k_3x^3 = k_0x^0 - \mathbf{kr}$, $e_{\mu\nu}$- qutblanish tenzori. Bu ifoda

$$\partial^2 h_{\mu\nu} = 0, \qquad \partial^\lambda h^\mu_\lambda - \frac{1}{2}\partial^\mu h^\lambda_\lambda = 0$$

tenglamalarning yechimi bo'ladi, qachonki

$$k^2 = k_\mu k^\mu = 0, \qquad k_\mu e^\mu_\nu = \frac{1}{2}k_\nu e^\mu_\mu \qquad (6.18)$$

bajarilsa. $e_{\mu\nu}$ polyarizatsiya tenzori bo'lib, uning (umumiy holda) 10-ta mustaqil komponentasi bor. Yuqoridagi shartlarning ikkinchisi - 4-ta shart - shu komponentalarning $10 - 4 = 6$-tasini mustaqil sifatida qoldiradi, ularning faqat 2-tasigina fizik erkinlik daraja sifatida qaralishi mumkin.

Shuni isbot qilaylik. (6.2)-dagi $\varepsilon_\mu(x)$ sifatida yassi to'lqin

$$\varepsilon_\mu(x) = i\varepsilon_\mu e^{ikx} - i\varepsilon^*_\mu e^{-ikx}$$

ni olaylik, unda almashtirilgan

$$h'_{\mu\nu}(x) = e'_{\mu\nu}e^{ikx} + e^{*\prime}_{\mu\nu}e^{-ikx}$$

to'lqin polyarizatsiyasi uchun

$$e'_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} + k_\mu e_\nu + k_\nu e_\mu \qquad (6.19)$$

ifodani topamiz. Koordinat almashtirishiga nisbatan invariantlikning ma'nosi bo'yicha $e'_{\mu\nu}$ va $= e_{\mu\nu}$ polyarizatsiyalar bir xil fizikaga to'g'ri keladi. (6.18)-dan keyin 6-ta komponenta qolgan edi, 4-ta e_μ larni tanlab olish yo'li bilan mustaqil fizik erkinlik darajalarining sonini $6 - 4 = 2$ - taga tushiramiz. Shu ishni oxirigacha bajarib chiqaylik.

Yana elektrodinamikadan boshlaymiz. Elektrodinamikani eslasak, elektromagnit to'lqin

$$A_\mu = e_\mu e^{ikx} + e^*_\mu e^{-ikx}$$

ko'rinishga ega bo'lar edi va Lorentz kalibrovkasi $\partial^\mu A_\mu = 0$ da

$$k^2 = 0, \qquad k^\mu e_\mu = 0$$

shatrlarga bo'ysunar edi. e_μ ning to'rtta komponentasi bor, ammo, Lorentz sharti ulardan uchtasini qoldiradi. Ammo, Lorentz sharti A_μ potensiallarning sonini oxirigacha aniqlab bermaydi, potensiallar ustida

$$\partial^2 \Phi = 0$$

shartga bo'ysunadigan funksiya yordamida

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Phi, \qquad \Phi = i\varepsilon e^{ikx} - i\varepsilon^* e^{-ikx}$$

almashtirish bajarsak, Lorentz sharti buzilmasligini ko'ramiz:

$$\partial^\mu A_\mu = \partial^\mu A'_\mu = 0 \; !$$

Vaholanki,

$$A'_\mu = e'_\mu e^{ikx} + e'^*_\mu e^{-ikx}, \qquad e'_\mu = e_\mu - k_\mu \varepsilon.$$

ε ixtiyoriy parametr bo'lgani uchun Lorentz shartidan keyin qolgan uchta A_μ komponentalarining ichidan yana bittasini shu ε orqali yo'q qilishimiz mumkin. Natijada elektromagnit maydon potentsiallarining faqatgina ikkita erkinlik darajasi qoladi, ular Maxwell tenglamalarini yechish yoli bilan topiladi. Shuni bajaraylik (yassi to'lqin misolida).

To'lqin vektorini $k^\mu = (k^0, 0, 0, k^3)$ ko'rinishda olaylik, ya'ni, to'lqin tarqalish yo'nalishini z-o'qi bo'yicha olamiz. Bunda

$k^0 = k^3 = k, \quad k = |\mathbf{k}|$ bo'ladi, chunki $k^2 = (k^0)^2 - (k^3)^2 = 0$.

Demak, Lorentz shartidan

$$e_0 = e_3 \tag{6.20}$$

ekanligiga kelamiz. Undan tashqari,

$$e'_\mu = e_\mu - k_\mu \varepsilon \rightarrow e'_3 = e_3 + k\varepsilon.$$

Agar

$$\varepsilon = -\frac{e_3}{k}$$

deb tanlab olsak, $e'_3 = 0$, va, demak, $e'_3 = e'_0 = 0$ ga erishamiz. Bundan ko'rinib turibdiki, faqat e^1 va e^2 largina yo'q qilib bo'lmaydigan, ya'ni, fizik erkinlik darajalarni ifodalaydi.

Qolgan shu ikkita komponentaning fizik ma'nosini aniqlaylik. Buning uchun ular ustida maxsus Lorentz almashtirishini bajaramiz:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.21}$$

Ko'rinib turibdiki, bu (x, y) tekisligidagi θ burchakka burilish. Almashtirishni

$$\begin{pmatrix} e'^0 \\ e'^1 \\ e'^2 \\ e'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^0 \\ e^1 \\ e^2 \\ e^3 \end{pmatrix} \tag{6.22}$$

ko'rinishda yozib olamiz. Agar $e_\pm = e_1 \mp ie_2$ belgilash kiritsak (6.22) ni

$$e'_\pm = e^{\pm i\theta} e_\pm, \quad e'_3 = e_3$$

ko'rinishga keltirib olishimiz mumkin. Bundan ko'rinib turibdiki, e_+ – spiralligi +1 ga va e_- esa spiralligi −1 ga teng erkinlik darajalari ekan, spiralligi nolga teng bo'lgan e_3 ni esa yo'q qilib yuborishimiz mumkinligini ko'rsatdik.

Gravitatsion to'lqinlarga qaytib kelaylik. Yana yassi to'lqinimizning tarqalish yo'nalishi sifatida z– o'qini olaylik: $k^\mu = (k, 0, 0, k)$. Bu holda (6.18)-shart

$$k(e^0_\nu - e^3_\nu) = \frac{1}{2}k_\nu(e^0_0 + e^1_1 + e^2_2 + e^3_3)$$

ko'rinishni qabul qiladi. $k_1 = k_2 = 0$ dan

$$e^0_1 = e^3_1, \qquad e^0_2 = e^3_2, \quad \text{yoki,} \quad e_{01} = -e_{13}, \quad e_{20} = -e_{23} \tag{6.23}$$

ekanligini topamiz (indekslarni ko'tarish va tushirish tekis metrikada amalga oshirilishini eslatib ketaylik). (6.18)-ning qolgan ikkitasini yozib chiqaylik:

$$e^0_0 - e^3_0 = \frac{1}{2}(e^0_0 + e^1_1 + e^2_2 + e^3_3),$$

yoki,

$$e_{00} + e_{03} = \frac{1}{2}(e_{00} - e_{11} - e_{22} - e_{33}),$$

va

$$e^0_3 - e^3_3 = \frac{1}{2}(e^0_0 + e^1_1 + e^2_2 + e^3_3),$$

yoki,

$$e_{03} + e_{33} = -\frac{1}{2}(e_{00} - e_{11} - e_{22} - e_{33}).$$

Har bir qatordagi oxirgi munosabatlarni solishtirsak,

$$e_{03} = -\frac{1}{2}(e_{00} + e_{33}), \qquad e_{11} = -e_{22}$$

munosabatlarga kelamiz. Shu yerdagi va (6.23)-dagi munosabatlar $\varepsilon_{\mu\nu}$ ning komponentalari orasidagi to'rtta shartlarni beradi. Yana bir eslatib ketaylik, $h_{\mu\nu}$ ning simmetrikligidan uning 10-ta komponentasi mustaqil ekanligi kelib chiqadi, umumiy koordinat almashtirishlariga nisbatan invariantlik shu komponentalarning to'rttasini ixtiyoriy yo'l bilan tanlab olishimiz mumkinligiga olib keladi, ularni biz garmoniklik sharti yordamida aniqlaymiz. Olingan to'rtta munosabat

$$e_{01} = -e_{13}, \quad e_{20} = -e_{23}, \quad e_{03} = -\frac{1}{2}(e_{00} + e_{33}), \quad e_{11} = -e_{22}$$

garmoniklik shartiga mos keluvchi munosabatlardir ((6.20)-bilan solishtiring).

Ammo, garmoniklik sharti xuddi Lorentz shartidek $h_{\mu\nu}$ larni bir qiymatli aniqlab bera olmaydi, xuddi elektrodinamikadagidek yana bir marta (6.19) almashtirishini bajarishimiz mumkin, bizga bu

$$e'_{11} = e_{11}, \qquad e'_{12} = e_{12}, \qquad e'_{13} = e_{13} - k\varepsilon_1,$$

$$e'_{23} = e_{23} - k\varepsilon_2, \qquad e'_{33} = e_{33} - 2k\varepsilon_3, \quad e'_{00} = e_{00} + 2k\varepsilon_0$$

ni beradi. Ko'rinib turibdiki, faqatgina e_{11} va e_{12} (va $e_{22} = -e_{12}$) komponentalargina fizik ma'noga ega, qolgan komponentalar koordinat almashtirishlarida o'zgaradi va

$$\varepsilon_1 = \frac{e_{13}}{k}, \quad \varepsilon_2 = \frac{e_{23}}{k}, \quad \varepsilon_3 = \frac{e_{33}}{2k}, \quad \varepsilon_0 = -\frac{e_{00}}{2k}$$

parametrli almashtirish bajarib ularni nolga tenglashtirib olishimiz mumkin.

Demak, gravitatsion maydon to'lqinlari ham xuddi elektromagnit to'lqinlar kabi faqatgina ikkita fizik erkinlik darajasiga ega ekan. Ularning fizik ma'nosini ochish uchun ya'na R-matritsa (6.21) yordamida maxsus Lorentz almashtirishi bajaramiz:

$$e'_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu} R^{\sigma}_{\nu} e_{\lambda\sigma}.$$

Natijada quyidagi munosabatlarni olamiz:

$$e'_{\pm} = e'_{11} \mp ie'_{12} = e_{\pm}e^{\pm 2i\theta}, \qquad f'_{\pm} = e'_{31} \mp ie'_{32} = f_{\pm}e^{\pm i\theta},$$

$$e'_{00} = e_{00}, \qquad e'_{33} = e_{33}.$$

36-Mashq:
Yuqoridagi munosabatlarni keltirib chiqaring.

Biz gravitatsion to'lqinni spiralliklari ± 2, ± 1 va 0 bo'lgan qismlarga ajratdik. Yuqorida ko'rsatganimiz bo'yicha bevosita fizik ma'noga faqat spiralligi 2 bo'lgan $e'_{\pm} = e'_{11} \mp ie'_{12}$ komponentalargina ega, qolgan komponentalar mos keluvchi almashtirish yordamida nolga tenglashtirilishi mumkin.

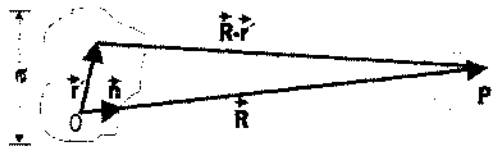
Fundamental qonunlar haqiqatan kvant tabiatga egadir, maydonning spirallik xossasi bundan istisno emas. Maydonni (elektromagnit va gravitatsion maydonlarni, shu jumladan) kvantlaganda ularga ma'lum bir ***spin*** kvant soni mos keladi, spirallik shu spinning harakat yo'nalishiga bo'lgan proyektsiyasini bildiradi. Gravitatsion maydon kvanti ***graviton***ning spini 2 ga teng bo'lib chiqadi, elektromagnit maydon kvanti ***foton***ning spini esa 1 ga teng. Agar zarrachaning spini S va massasi noldan farqli bo'lsa, uning spiralligi $(S, S-1, S-2, ..., -S)$ qiymatlarni qabul qilishi mumkin (kvant mexanikasi bo'yicha). Massasiz zarrachaning spiralligi faqat $(S, -S)$ qiymatlarnigina qabul qiladi. Shu mulohazani yuqoridagi formulalar bilan solishtirsa foton va gravitonning massalari nolga teng bo'lib chiqishi kerak. Darhaqiqat, elektromagnit va gravitatsion maydonlarning tarqalish tezligi yorug'lik tezligiga tengdir, bu esa faqat massasiz zarralar uchungina mumkindir.

6.4 Gravitatsion to'lqin nurlanishi

Nurlanish intensivligini topaylik. Nurlanish nazariyasida to'lqin zonasi tushunchasi ishlatiladi. Agar o'zidan nurlanish chiqarayotgan sistemaning o'lchamini a va nurning to'lqin uzunligini λ desak to'lqin zonasi deb sistemamizdan shunday R masofa uzoqligidagi zonaga aytiladiki, bunda

$$R \gg a \quad \text{va} \quad R \gg \lambda$$

shartlar bajarilsin. Bu holda to'lqinni yassi to'lqin sifatida qarashimiz mumkin. Kechikuvchi to'lqin uchun formulani



Rasm 6.1: a o'lchamli nurlanuvchi sistema va kuzatish nuqtasi P.

(ushbu masalada uning (6.17)-formasi qulayroqdir) yana bir yozib olaylik (Nyuton doimiysi orqali):

$$\psi_{\mu\nu}(\mathbf{R}, t) = -\frac{4G}{c^4}\int d^3r' \frac{\tau_{\mu\nu}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r}' - \mathbf{R}|/c)}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|}.$$

Yuqoridagi shartdan

$$|\mathbf{R} - \mathbf{r}'| \simeq R - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'$$

ekanligi kelib chiqadi, bu yerda $\mathbf{n}$ – koordinat boshidan kuzatuvchiga yo'nalgan birlik vektor. Sistemamizdagi zarralarning tezligi kichik bo'lsin. Bu degani, agar sistemadagi harakat davri T bo'lsa,

$$a/T \sim v \ll c, \quad \text{yoki,} \quad a \ll \lambda \tag{6.24}$$

bo'lishi kerak degani, chunki cT – to'lqin uzunligi λ ga teng. Bu shart bajarilganda to'lqin uchun

$$\psi_{\mu\nu}(\mathbf{R}, t) \simeq -\frac{4G}{c^4 R}\int d^3r\, \tau_{\mu\nu}(\mathbf{r}, t - R/c)$$

ifodaga kelamiz (integrallash o'zgaruvchisida shtrixni olib tashladik). Bu integralni hisoblash uchun (6.16)-saqlanish qonunidan foydalanamiz. Unga kirgan to'rtta tenglamani ochib yozib olaylik:

$$\partial^0 \tau_{00} + \partial^i \tau_{i0} = 0; \qquad \partial^0 \tau_{0j} + \partial^i \tau_{ij} = 0. \tag{6.25}$$

Tenglamaning ikkinchisini x^l ga ko'paytirib uch o'lchamli fazo bo'yicha integrallaymiz:

$$\partial^0 \int d^3r \, x^l \, \tau_{0j} = - \int d^3r \, x^l \, \partial^i \tau_{ij} =$$

$$= - \int d^3r \, \partial^i \left(\tau_{ij} x^l\right) + \int d^3r \, \tau_{ij} \partial^i x^l.$$

o'ng tomondagi integrallarning birinchisi Gauss teoremasi bo'yicha integrallash hajmini o'z ichiga olgan sirt bo'yicha integralga aylantirilsa nolga teng bo'lib ketadi, chunki uch o'lchamli fazomizning sirti cheksizlikda joylashgan, u yerda hech qanday modda yo'q va, demak, energiya-impuls tenzori nolga teng. Oxirgi integraldagi hosilani hisoblasak quyidagini olamiz ($\partial^i x^l = \partial x^l / \partial x_i = g^{il} \simeq \eta^{il} = -\delta^{il}$ ni hisobga olib):

$$\partial^0 \int d^3r \, x^l \, \tau_{0j} = - \int d^3r \, \tau_{lj}.$$

o'ng tomonimiz simmetrik bo'lgani uchun chap tomonni ham simmetrik ko'rinishga keltiramiz:

$$\frac{1}{2} \partial^0 \int d^3r \, \left(x^l \, \tau_{0j} + x^j \, \tau_{0l}\right) = - \int d^3r \, \tau_{lj}.$$

Endi (6.25)-ning birinchisini $x^l x^k$ ga ko'paytiramiz, uch o'lchamli fazo bo'yicha integrallaymiz va yana Gauss teoremasini hisobga olib

$$\partial^0 \int d^3r \, x^l x^k \, \tau_{00} = \int d^3r \, \left(\eta^{il} x^k + \eta^{ik} x^l\right) \tau_{i0} =$$

$$= - \int d^3r \, \left(\tau_{0l} x^k + \tau_{0k} x^l\right)$$

munosabatga kelamiz. Demak,

$$\int d^3r\, \tau_{lj} = \frac{1}{2}(\partial_0)^2 \int d^3r\, x^l x^j\, \tau_{00}$$

ekan. Natijada

$$\psi_{ij}(\mathbf{R}, t) = -\frac{2G}{c^6 R}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int d^3r x^i x^j\, \tau_{00}(\mathbf{r}, t - R/c)$$

formulani olamiz. Biz norelativistik yaqinlashuvda ishlayapmiz – (6.24)-ning birinchisiga qarang. Bu yaqinlashuvda $\tau_{00} \simeq \rho c^2$ (bu yaqinlashuvda T_{00} va τ_{00} larning deyarli farqi yo′q):

$$\psi_{ij}(\mathbf{R}, t) = -\frac{2G}{c^4 R}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int d^3r\, x^i x^j \rho(\mathbf{r}, t - R/c).$$

Nurlanish intensivligini topaylik. Buning uchun olingan yassi to′lqinimizning oqim zichligini topishimiz kerak. Bu maqsadda (6.2)-paragrafda keltirib chiqarilgan (6.15)-ifodadan foydalanamiz. Yassi to′lqinimiz $z-$ o′qi bo′yicha tarqalayotgan bo′lsin. Unda $c\,t^{03}$ shu yo′nalishdagi impuls zichligini berishi kerak. z-yo′nalishdagi yassi to′lqinimizning faqat $h_{11} = -h_{22}$ va h_{12}-komponentalari uning fizik erkinlik darajalarini tashkil qilar edi, qolgan komponentalar kalibrovka almashtirishi yordamida yo′q qilinishi mumkin edi. Shuning uchun t^{03} ga faqat shu komponentalar kiradi deb qaraymiz.[1] t^{03} ni hisoblash bir-muncha vaqtni talab qiladi, hisobning detallarini keltirib o′tirmaymiz va javobning o′zini keltiramiz:

$$t^{03} = \frac{c^2}{16\pi G}\left(\dot{h}_{12}^2 + \frac{1}{4}(\dot{h}_{11} - \dot{h}_{22})^2\right).$$

h-lardan ψ-larga o′taylik:

$$h_{12} = \psi_{12}, \qquad h_{11} - h_{22} = \psi_{11} - \psi_{22}.$$

[1] Haqiqatan, $t^{\mu\nu}$ ning kalibrovkaga nisbatan invariantligini va unga rostdan ham faqat yuqorida aytilgan komponentalargina hissa qo′shishini aniq ko′rsatish mumkin.

Massaning kvadrupol momenti tenzorini kiritib

$$D_{ij} = \int d^3r\,\rho\,(3x^ix^j - r^2\delta_{ij}),$$

impuls zichligi uchun

$$ct^{03} = \frac{G}{36\pi c^5R^2}\left\{\dddot{D}_{12}^2 + \frac{1}{4}(\dddot{D}_{11} - \dddot{D}_{22})^2\right\} \tag{6.26}$$

formulani olamiz. D-ning ustidagi uchta nuqta vaqt bo'yicha uchinchi tartibli hosilani bildiradi. Elektromagnit to'lqin nurlanishi dipol nurlanishdan boshlanar edi, gravitatsion nurlanish yuqori tartibga ega bo'lgan kvadrupol momentdan boshlanar ekan. Buning sababi ekvivalentlik prinsipida yotadi. Ma'lumki, zaryadning massaga nisbati sistemaga kiruvchi hamma zaryadlar uchun bir xil bo'lsa, dipol momenti inersiya markaziga proporsional bo'ladi. Nurlanish intensivligiga dipol momentining vaqt bo'yicha ikkinchi tartibli hosilasi kiradi, u esa sistemaning inersiya markazining tezlanishiga proporsionaldir – hech qanday yopiq sistemaning inersiya markazi tezlanish bilan harakat qila olmaydi. Ekvivalentlik prinsipi bo'yicha gravitatsion zaryadning (og'ir massaning) inert massaga nisbati hamma jismlar uchun birga teng. Demak, gravitatsion nurlanishda dipol had bo'lmaydi.

(6.26)-ifodani kovariant ko'rinishga keltirib olaylik. Buning uchun Einshtein metodi [4] bo'yicha z-o'qi bo'yicha yo'nalgan $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ birlik vektor kiritaylik. Kvadrupol moment tenzori va shu vektor yordamida D bo'yicha kvadratik bo'lgan quyidagi skalyar strukturalar tuzishimiz mumkin:

$$D_{ij}^2,\ (D_{ij}n_j)^2,\ (D_{ij}n_in_j)^2.$$

Bizga kerak bo'lgan kombinatsiya:

$$\dddot{D}_{12}^2 + \frac{1}{4}(\dddot{D}_{11} - \dddot{D}_{22})^2 = \frac{1}{4}(\dddot{D}_{ij}n_in_j)^2 + \frac{1}{2}\dddot{D}_{ij}^2 - (\dddot{D}_{ij}n_j)^2,$$

bunda biz

$$D_{11} + D_{22} + D_{33} = 0$$

dan foydalandik. Endi birlik vektor **n** ni ixtiyoriy deb qarashimiz mumkin. Hosil bo'lgan oqim zichligini $R^2 do$ ga ko'paytirsak $do = \sin\theta d\theta d\varphi$ fazoviy burchak ichiga nurlanayotgan energiya intensivligini topamiz:

$$dI = \frac{G}{36\pi c^5}\left\{\frac{1}{4}(\dddot{D}_{ij}n_i n_j)^2 + \frac{1}{2}\dddot{D}_{ij}^2 - (\dddot{D}_{ij}n_j)^2\right\}do.$$

dI/do – fazoviy burchak elementiga bir sekundda ketgan energiya, agar uni hamma yo'nalish bo'yicha o'rtalashtirsak, sistemamizning to'liq energiya yo'qotish tezligini topgan bo'lamiz. o'rtalashtirish standart bo'lgan

$$\overline{n_i n_j} = \frac{1}{3}\delta_{ij}, \quad \overline{n_i n_j n_k n_l} = \frac{1}{15}\left[\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right]$$

formulalar yordamida bajariladi va natijada energiya yo'qotish tezligi uchun

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{G}{45c^5}\dddot{D}_{ij}^2$$

formulani olamiz. Ko'rinib turibdiki, maxrajda yorug'lik tezligining beshinchi darajasi va suratda gravitatsion doimiy kirgani uchun gravitatsion nurlanish orqali energiya yo'qotish tezligi juda kichik kattalik bo'lib chiqadi.

Birinchi misol sifatida radial yo'nalishda tebranayotgan sferik jismning gravitatsion nurlanishini topaylik. Bunday jism uchun aynan ravishda $D_{ij} = 0$ bo'ladi, demak, u o'zidan gravitatsion nurlanish chiqarmaydi.

Uzunligi L, radiusi R va massasi M bo'lgan bir jinsli silindrni olaylik. U (6.2)-rasmda ko'rsatilgandek ω burchak tezlik bilan aylanayapgan bo'lsin.

Kvadrupol momentlarni hisoblab topaylik. Silindr qo'zg'olmasdan turgan sistema laboratoriya sistemasiga nisbatan ω burchak tezlik bilan harakat qilayapti. Silindr sistemasidagi koordinatlarni x'_i, $i = 1, 2, 3$ deb belgilasak laboratoriya va silindr sistemalari

$$x_i = R_{ij}x'_j, \qquad R_{ij} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

orqali bog'langan bo'ladi. x_i koordinatalar uch o'lchamli vekrotlardir, ular uchun yuqori va quyi indekslarning farqi yo'q. Ikki marta uchragan bir xil indeks bo'yicha yig'indi ko'zda tutiladi. Shunga yarasha kvadrupol momenti tenzori uchun

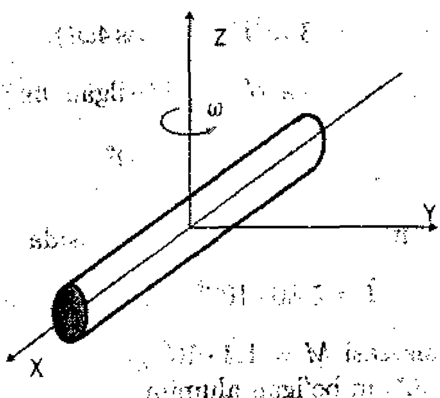
$$D_{ij} = R_{il}R_{jk}D'_{lk} \tag{6.27}$$

deb olamiz. Silindr sistemasida osongina hisoblar natijasida

$$D'_{22} = D'_{33} = -\frac{1}{2}D'_{11} = -\frac{1}{2}D, \quad D = \frac{M}{2}\left(\frac{L^2}{3} - R^2\right),$$

$$D'_{ij} = 0 \text{ agar } i \neq j$$

formulalarni olamiz. (6.27)-bo'yicha hisoblashga o'taylik:



Rasm 6.2: z-o'qi atrofida aylanayapgan silindr

$$D_{11} = R_{1j}R_{1k}D'_{jk} = R_{11}^2 D'_{11} + R_{12}^2 D'_{22} + R_{13}^2 D'_{33} =$$

$$= \frac{3}{4}(\cos(2\omega t) - 1)D;$$

$$D_{22} = R_{2j}R_{2k}D'_{jk} = R_{21}^2 D'_{11} + R_{22}^2 D'_{22} + R_{23}^2 D'_{33} =$$

$$= -\frac{3}{4}(\cos(2\omega t) - 1)D;$$

$$D_{33} = R_{2j}R_{2k}D'_{jk} = R_{31}^2 D'_{11} + R_{32}^2 D'_{22} + R_{33}^2 D'_{33} = -\frac{1}{2}D;$$

$$D_{12} = R_{1j}R_{2k}D'_{jk} = R_{11}R_{21}D'_{11} + R_{12}R_{22}D'_{22} =$$

$$= \frac{3}{4}\sin(2\omega t)D;$$

$$D_{13} = D_{23} = 0.$$

Bu hadlarning har biridan vaqt bo'yicha uchinchi tartibli hosila olib ularning kvadratlarini yig'ib chiqamiz:

$$(\dddot{D}_{ij})^2 = 32\omega^6 D^2 (3 - \cos 4\omega t).$$

Bir aylanish davri bo'yicha o'rtalashtirilgan nurlanish intensivligi:

$$-\overline{\frac{dE}{dt}} = \overline{I} = \frac{32G\omega^6 D^2}{15c^5}.$$

Uning son qiymatini topaylik. CGS sistemasida

$$\overline{I} = 5.86 \cdot 10^{-60} \omega^6 D^2.$$

Silindr sifatida massasi $M = 1.4 \cdot 10^6$ gram, uzunligi $L = 153$ cm, radiusi $R = 32$ cm bo'lgan aluminiy bo'lagini olaylik (Weber antennasi). Bu holda $D = 2.37 \cdot 10^9 \mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}$ bo'ladi. Agar chastotani 1000 Hertz deb olsak (bu juda katta aylanish tezligi) intensivlik uchun $3.3 \cdot 10^{-23}$ erg/davr sonni olamiz. Yuqorida aytganimizdek juda kichik sonni oldik. Uning qay darajada kichikligini ko'rish uchun uni silindrning kinetik energiyasi bilan solishtirishimiz kerak: $E_{kin} = \frac{1}{2} I_{33}\omega^2 = 6.18 \cdot 10^9 \omega^2 = 6.18 \cdot 10^{15}$ erg (bizning holimizda inersiya tenzorining (33)-komponentasi $I_{33} = M(R^2 + L^2/3)/4$ ga teng). Ko'rinib turibdiki $I/E_{kin} \sim 10^{-38}$.

Gravitatsion to'lqinlar hozirgacha tajribada kuzatilmagan, sababi – ularning o'ta sustligi. Yaqinda (2004 y.) AQSh da LIGO nomli gravitatsion to'lqinlarni kuzatishga mo'ljallangan lazer interferometri ishga tushirildi. Hisoblar bo'yicha bu asbob Galaktikamizning markazida roy berayotgan o'ta kuchli jarayonlar (kuzatishlar shuni ko'rsatadiki, Galaktikamiz markazida 2.5 million quyosh massasiga teng massali qora kavak (kollapsar, (5.5)-paragrafga qarang) bor, u o'zining o'ta kuchli tortishish maydoni bilan atrofdan juda katta bo'lgan massalarni har sekundda yutadi) natijasida hosil bo'layotgan gravitatsion to'lqinlarni tutishga qodir. Gravitatsion to'lqinlarning kuzatilishi umumiy nisbiylik nazariyasining katta yutuqlaridan biri bo'lgan bo'lar edi.

7

Umumiy nisbiylik nazariyasining Gamilton formasi

7.1 Umumlashgan Gamilton dinamikasi

Elektromagnit va gravitatsion maydonlar ***bog'lanishli sistemalar*** turiga kiradi. Bunday sistemalarda Gamilton formasiga o'tish uchun Dirak tomonidan birinchi bo'lib o'ylab topilgan ***umumlashgan Gamilton dinamikasi***dan foydalanishimiz kerak.

Oddiy Gamilton dinamikasining asoslarini eslatib ketaylik. Erkinlik darajasi N bo'lgan, q^i, $i = 1, ..., N$ umumlashgan koordinatalar va $\dot{q}_i$, $i = 1, ..., N$ umumlashgan tezliklarga ega bo'lgan va Lagranj funksiyasi $L(q, \dot{q})$ bo'lgan dinamik sistemani ko'raylik. Odatdagi yo'l bilan umumlashgan impulslarni aniqlaylik:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad i = 1, ..., N. \tag{7.1}$$

Bu munosabatni $\dot{q}$ larga nisbatan yechib topilgan $\dot{q} = \dot{q}(p, q)$

funksiyalarni

$$H = \sum p_i \dot{q}^i - L$$

formulaga olib borib qo'ysak, olingan funksiya $H(p,q)$ sistemamizning Gamilton funksiyasi bo'ladi.

Ammo, bunday sodda yo'l hamma vaqt ham o'rinli bo'lavermas ekan. Ba'zi-bir hollarda (7.1)- $\dot{q}$ ga nisbatan yechimga ega bo'lmasligi mumkin, to'g'rirog'i, mustaqil yechimlarning soni erkinlik darajasi N dan kichik bo'lishi mumkin. Boshqacha so'z bilan aytganda (7.1)-munosabatlarning ichida tezliklarni o'z ichiga olmaydiganlari ham bo'lishi mumkin. Shunday tengliklarning soni M ta bo'lsin. Demak, M ta umumlashgan koordinatlar uchun umumlashgan impulslarni mos qo'ya olmas ekanmiz. Ularning o'rniga p^i va q_i lar orasidagi M ta ***bog'lanishlarga*** ega bo'lamiz:

$$\phi_m(p,q) = 0, \ m = 1, ..., M < N. \tag{7.2}$$

Harakat tenglamalari

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i} \tag{7.3}$$

koordinata q^i larning faqatgina $N - M$ tasi uchungina harakat tenglamasi bo'ladi, chunki ularga faqat $N - M$ tagina $\ddot{q}^i$ lar kiradi. Koordinatalar va impulslarning variatsiyalari δq^i va δp_i ixtiyoriy bo'lmay (7.1)-bo'yicha

$$\sum_i \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial \varphi_l}{\partial p_i} \delta p_i \right) = 0 \tag{7.4}$$

shartga bo'ysunishi kerak. Bundan keyin kerak bo'lgan bir lemmaga to'xtalib o'taylik.

Lemma. Agar $\phi_m(p,q) = 0$ sirtga nisbatan urinma bo'lgan ixtiyoriy variatsiyalar uchun

$$\lambda_i \delta q^i + \gamma^i \delta p_i = 0$$

bo'lsa, unda shunday u^m lar topiladiki

$$\lambda_i = u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^i}; \qquad \gamma^i = u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i}$$

bo'ladi.

Isbot. $2N$ o'lchamli $\{p, q\}$ fazaviy fazoda (7.2)-shartlar $2N - M$ o'lchamli sirtni tashkil qiladi. Shunga yarasha $\delta p_i, \delta q^i$ lar ϕ_m ning har bir nuqtasida $2N - M$ o'lchamli urinma vektor fazoni tashkil qiladi. Mustaqil $\left\{\frac{\partial \phi_m}{\partial q^i}, \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i}\right\}$ gradiyentlarning soni farazimiz bo'yicha M ga teng. Lemma isbot qilindi.

Quyidagi variatsiyani hisoblaylik:

$$\delta(\sum_i p_i \dot{q}^i - L) =$$

$$= \sum_i \delta p_i \dot{q}^i + \sum_i p_i \delta \dot{q}^i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i =$$

$$= \sum_i \left(\delta p_i \dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i \right),$$

va uni Gamilton funksiyasining variatsiyasiga tenglashtiraylik:

$$\sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i + \frac{\partial H}{\partial q^i} \delta q^i \right) = \sum_i \left(\delta p_i \dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i \right). \tag{7.5}$$

Hosil bo'lgan munosabatni

$$\sum_i \delta p_i \left(\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) + \delta q^i \left(-\frac{\partial H}{\partial q^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} \right) = 0.$$

ko'rinishda yozib olaylik. Hozirgina isbot qilingan Lemma bo'yicha ((7.3)-larni ham ishlatsak)

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_m u_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i},$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} - \sum_m u_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^i}$$

tenglamalarga kelamiz. Bu tenglamalardan ko'rinib turibdiki, N ta $\dot{q}^i$ lar $N - M$ ta p_i lar va M ta yangi o'zgaruvchi u_l lar orqali aniqlanar ekan. Demak, umumlashgan Gamilton formalizmida $2N$ ta o'zgaruvchi - q^i, p_i va u_i lar bo'lar ekan. Bu tarzda kiritilgan u o'zgaruvchilar odatda ***Lagranj ko'paytuvchilari*** deyiladi. Puasson qavslarini eslasak:

$$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right)$$

olingan harakat tenglamalarini quyidagi umumiy ko'rinishda yozib olishimiz mumkin:

$$\dot{g} = \{H, g\} + \sum u_m \{\phi_m, g\}. \tag{7.6}$$

Agar

$$\{u_m \phi_m, g\} = u_m \{\phi_m, g\} + \{u_m, g\} \phi_m$$

munosabatda ikkinchi had bog'lanishlar sirtida nolga teng bo'lishini hisobga olsak (7.6)-ning o'ng tomonini

$$\{H, g\} + \sum u_m \{\phi_m, g\} = \{H + \sum u_m \phi_m, g\}$$

ko'rinishda yozib olishimiz mumkin bo'ladi. Ya'ni, umumiy holda vaqt bo'yicha siljitish generatori

$$H_T = H + \sum u_m \phi_m \tag{7.7}$$

bo'lar ekan. Bir narsaga e'tibor berishimiz kerak - $\phi_m = 0$ sirtga faqat hamma Puasson qavslarini hisoblab bo'lganimizdan keyingina o'tishimiz kerak. Bu shartni ifodalash uchun (7.2)-ni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz

$$\dot{\phi}_m \approx 0. \tag{7.8}$$

Bundan keyin (7.8)-tipidagi shartlarni, ya'ni, Puasson qavslari hisoblab bo'lingandan keyingina ishlatish mumkin bo'lgan shartlarni *sust* shartlar deymiz. Mavjud bo'lgan terminologiya bo'yicha (7.1)-ta'riflardan kelib chiqqan (7.2)-shartlar ***birlamchi shartlar*** deyiladi. Ushbu shartlar vaqt bo'yicha albatta o'zgarmas bo'lishi kerak. Ularning o'zgarmaslik sharti (7.6)-bo'yicha

$$\{H, \phi_l\} + \sum u_m \{\phi_m, \phi_l\} = 0$$

ko'rinishga ega. Bu tenglik uch xil variantga olib kelishi mumkin. Birinchidan $0 = 0$ varianti, bu qiziq emas. Ikkinchidan, Lagranj ko'paytuvchilari u_m uchun tenglamalar. Va, nihoyat, birlamchi deb atalgan (7.2) larga keltirilmaydigan yangi shartlar. Ularni

$$\chi_l = 0, \;\; l = 1, ..., L$$

deb belgilaylik. Bunday munosabatlar ***ikkilamchi shartlar*** deyiladi. Ikkilamchi shartlarning ham vaqt bo'yicha o'zgarmaslik sharti yana yangi shartlarga olib kelishi mumkin. Shu jarayonni oxirigacha davom ettirib, hamma mumkin bo'lgan shartlarni topamiz. Birlamchi va ikkilamchi shartlar bir-biridan prinsipial farq qilmaydi va shu boisdan ular bir nuqtai nazardan talqin qilinadi. Shu sababli ularning hammasini

$$\phi_m = 0, \;\; m = 1, ..., M' < N$$

ko'rinishda yozib olamiz.

Umumiy ko'rinishda

$$L = \sum_i p_i \dot{q}^i - \sum_a u^a \phi_a - H \tag{7.9}$$

c!eЬ yoг1Ъ окщдг, Ьи уегс!а р», д[1], г — 1,..., N - капошк о'2§атУсЫ1агсИг, $ц>_а$, о = 1, ...,m - Ъо^ашаЫаг уа u^a - Ьа§-гасу ко'рауЪиУсЪЛапсИг. А§аг Ъо§'1аш8Ыаг уа ОатШошап

$$\{ ^ ^ ь \} - E ^{c} а б ^ \quad \{4, Я\} = ^ \quad с \quad ^ \qquad (7.10)$$
$$a \qquad\qquad ь$$

зЬахНаща Ъо'узтза (с„ь уа с^ 1аг р уа д 1агшп§ 1х-Иуопу Шпк81уа1аг1(Иг) Ъипйау Ъо^ЧашзЫаг *ЫггпсЫ Ыг Ъос[1ап18к1аН* йеуПасИ. ((7.8)-Ьо'уюЬа Ъи1ахт

$$\{Фа,Фь\}**0, \quad \{ф_а,Н\}^0$$

ко'пшзЫа -Ьат УЪс1а ^^1^8Ыт^2 титкш.) (7.10)~з]2а111аг Ьо§'1ап18Ыаг уа СатШоп Ғипкзхуакп ога81(1а§1 Риаззоп дауз-1ап Ъо^ЧатбЫаг $Ф_m(р,я)$ = 0 81г1Ма по1§а ау1аш$Ыш ЫЫкасИ. 11титап, Ьсйуопу {хшкзауа $Ғ(р,$ д) исЬип

$$\{Ғ\backslash ф_m\}^0$$

Ьо'ка, Ъипску {ипкз1уа *ЫггпсКг Ыг ўипкзгуазг* йеуПасН. ШаЪа ЫппсЫ 1;иг Гипк81уа8тт§ Риаззоп даУ31 уапа ЫппсЫ 1иг 1ипкз1уаз1 Ъо'1асИ (18Ьо1; дШп§).

А§аг Ыгог $Ғ$ ^ипкауэлш^ ^апс^ау(^^^-Ьо§'1ап^8Ь ЪПап Риаз-вод даУ81 Ъо'^ашзЫаг зкШа по1§а 1;еп§ Ъо'кпаза, уа'ш, ЬесЬ Ъо'1та§;аг1с1а Ыгог т исЬип

$$\{Ғ,ф_{гп}\}^0$$

Ьо'18а Ъипску Гипкз1уа *гккгпсЫ Ыг* Гипкз1уа81 с1еуПасН. ЦзЬЪи ЫаззШка^уа^а тоз гау18пс1а Ьатта Ъо^ашзЫагишг ЫппсЫ уа 1кк1псЫ Ъиг Ъо§'1ат8Ыап§а Ъо'НпасН.

Ви ктШ§ап 1;изпипспа1аг аЪз1;гак1; йизпипсЫаг етаз, ЪаШ Ъеуозй.а Й21ка§а ^о"11аш8Ь|уа то'ЦаЦап^ап 1лязпипепа1аг екап-*]'щ\m* е1ек1;го(1шапйка пйзоЫа ко'пЬ сЫдауНк.

Е1ек1гота§ш1; таус1оп Ьа§гагу Гипкзхуаз! гкЫщк

Bu ta'rifdan kelib chiqadiki

$$F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = (-\partial_0 \mathbf{A} - \nabla A_0)_i = (\mathbf{E})_i, \quad F^{0i} = -(\mathbf{E})_i$$

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i = -\varepsilon_{ijk}(\mathbf{B})_k.$$

Shularni hisobga olib Lagranj funksiyasi zichligini

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}F_{0i}F^{0i} - \frac{1}{4}F_{ij}^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)$$

ko'rinishiga keltirib olishimiz mumkin (biz bunda birlik antisimmetrik tenzorning $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$ xossasidan foydalandik). Endi xuddi shu Lagranj funksiyasi zichligidan Gamilton funksiyasiga o'tamiz. Uning uchun umumlashgan koordinata A^μ ekanligini va, shunga yarasha, umumlashgan tezliklar $\partial_0 A^\mu = \dot{A}^\mu$ ekanligiini eslaymiz va umumlashgan impulslarni topamiz:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^i} = -F_{0i} = -(\mathbf{E})_i, \quad p_0 = 0.$$

A_0 umumlashgan koordinataga mos keluvchi umumlashgan impuls yo'q ekan, demak, A_0 dinamik o'zgaruvchi emas (uning uchun harakat tenglamasi yo'q). Bu - elektromagnit maydonning gradient invariantligining, Lagranj funktsiaysiga $\dot{A}_\mu$ lar faqat antisimmetrik $F_{\mu\nu}$ orqali kirganining natijasidir. Yuqoridagi hisobdan ko'rinib turibdiki

$$p_0 = 0$$

birlamchi bog'lanish ekan. Uni ϕ_1 harfi bilan belgilaylik: $\phi_1 = p_0$. Boshqa birlamchi shartlar yo'q. Ikkilamchi shartlarga o'tishdan oldin Gamilton funksiyasi zichligini topaylik:

$$\mathcal{H} = \sum p_i \dot{A}^i - \mathcal{L} = -\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{A}} - \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) =$$

$$= \mathbf{E} \cdot (-\dot{\mathbf{A}} - \nabla A_0) + \mathbf{E} \cdot \nabla A_0 - \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) =$$

$$= \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + \mathbf{E} \cdot \nabla A_0.$$

Oxirgi haddan to'liq divergensiyani ajratib tashlab yuborsak (Gamilton zichligidan intergal kattalikga - energiyaga - o'tganimizda to'liq divergensiya nolni beradi)

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) - A_0 \mathrm{div}\mathbf{E}$$

formulaga kelamiz. Umumlashgan impulslar va koordinatalarning qavslarini kiritaylik:

$$\{p_i, q_j\} = \delta_{ij} \to \{E^i(\mathbf{x}, t), A^j(\mathbf{y}, t)\} = -\delta_{ij}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

$$\{p_0(\mathbf{x}, t), A_0(\mathbf{y}, t)\} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

boshqa hamma qavslar nolga teng. Ikkilamchi shart

$$\{H, \phi_1\} + u^1\{\phi_1, \phi_1\} = 0$$

tenglikdan keltirib chiqariladi. Yuqoridagi Puasson qavslarini ishlatsak

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = 0$$

ikkilamchi shart bo'lishini topamiz. Uni $\phi_2 = \mathrm{div}\mathbf{E}$ deb belgilaymiz. Demak,

$$H_T = H + u_1\phi_1 = H + u_1 p_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) - A_0 \mathrm{div}\mathbf{E} + u_1 p_0$$

Dirakning terminologiyasi bo'yicha ***to'liq*** Gamiltonian bo'ladi.

$$H_E = H + u_1\phi_1 + u_2\phi_2 = H + u_1 p_0 + u_2 \mathrm{div}\mathbf{E} =$$

$$= \tfrac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + u_1 p_0 + (u_2 - A_0)\mathrm{div}\mathbf{E}$$

formula bilan aniqlanadigan kattalik esa Dirakning terminologiyasi bo'yicha ***umumlashgan***, yoki, ***kengaytirilgan*** Gamiltoniandir. Ushbu kattalik eng umumiy harakat tenglamalariga olib keluvchi kattalikdir. Endi u_1 ning talqiniga o'taylik. Agar A_0 bilan Gamiltonianning Puasson qavsini hisoblasak $\dot{A}_0 = u_1$ ekanligini, ya'ni, u_1 nofizik bo'lgan o'zgaruvchining o'zgarish tezligiga teng ekan. Uni nolga tenglashtirsak bo'ladi: $u_1 = 0$. Umumiy holda u_2 ni aniqlashning iloji yo'q, odatda uni ham nolga tenglashtirib hamma noaniqlik A_0 ga tashlanadi.

Harakat tenglamalarini yuqorida keltirilgan Puasson qavslari orqali hisoblab chiqaylik:

$$\dot{\mathbf{E}} = \int d^3y\{\mathcal{H}_T(\mathbf{y},t),\mathbf{E}\} = \frac{1}{2}\int d^3y\{\mathbf{B}^2(\mathbf{y},t),\mathbf{E}\} = \mathrm{rot}\mathbf{B},$$

$$\dot{\mathbf{A}} = \int d^3y\{\mathcal{H}_T(\mathbf{y},t),\mathbf{A}\} = -\mathbf{E} - \nabla A_0.$$

7.2 Gravitatsion maydon energiyasi

7.2.1 Ta'sir integrali va harakat tenglamalarining muhokamasi

Gravitatsion maydon energiyasi masalasi ko'p o'n yillar davomida umumiy nisbiylik nazariyasining eng og'ir masalalaridan biri bo'lib kelgan. Gap shundaki, ekvivalentlik prinsipi bo'yicha biz fazo-vaqtning ixtiyoriy nuqtasining atrofida lokal tekis fazo-vaqtga o'tishimiz mumkin, ya'ni, gravitatsion maydonni go'yoki yoq qilishimiz mumkin. Bu esa shu nuqta atrofidagi gravitatsion maydon energiyasi zichligining ham nolga aylanishiga olib keladi. Agar gravitatsion maydon energiya-impuls tenzorini kiritmoqchi bo'lsa,k uning hamma komponentalari shu sanoq sistemasida nolga aylanadi, bir sistemada hamma komponentalari nolga teng tenzor ixtiyoriy boshqa sistemada ham aynan nolga teng komponentalarga ega bo'ladi. Bu holdan qutilish uchun ko'pincha energiya-impuls ***psevdotenzori*** deyilgan va ma'lum darajada biz izlagan tenzor rolini o'ynaydigan kattalik kiritiladi (masalan, [1],[2],[3]-larni qarang). Ammo, bu muammoning boshqa yechimi ham bor va biz shu yechimni keltiramiz. Bu yechim umumlashgan Gamilton dinamikasi asosida olingan bo'lib, ozining bir muncha qiyinligi sababli faqatgina 1980-chi yillarning boshidagina ma'lum bir yakuniga keltirilgan [6]. Umumlashgan Gamilton dinamikasiga tegishli tushunchalar avvalgi paragrafda yoritilgan.

Gravitatsion maydon uchun ta'sir integrali

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}R = \int dt \int d^3r\sqrt{-g}R$$

ko'rinishga egadir. Bu ta'sir integralidan variatsion printsip orqali Einshtein tenglamalarini keltirib chiqarish mumkin (bu metod [1]- va [3]-larda mukammal ravishda yoritilgan). Haqiqatan, bu yerdagi integral ostidagi ifoda variatsion prinsipni qo'llash uchun uncha qulay emas - R ga $g_{\mu\nu}$ ning ikkinchi tartibli hosilalari kiradi va variatsion metodni qo'llashdan oldin integral ostidagi ifodani ikki qismga bo'lib Gauss teoremasidan foydalanib ikkinchi tartibli hosilali haddan qutilib olishimiz kerak.

Bu Lagranj funksiyasidan faqat to'liq divergensiyaga farq qiladigan va, demak, xuddi o'sha harakat tenglamalariga olib keladigan boshqa bir kattalik ham bor:

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}\mathcal{L} &= \sqrt{-g}g^{\nu\sigma}(\Gamma^\lambda_{\rho\lambda}\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \Gamma^\lambda_{\rho\sigma}\Gamma^\rho_{\nu\lambda})+ \\ &+\partial_\nu\left(\sqrt{-g}g^{\nu\sigma}\right)\Gamma^\rho_{\sigma\rho} - \partial_\lambda\left(\sqrt{-g}g^{\nu\sigma}\right)\Gamma^\lambda_{\nu\sigma}.\end{aligned} \tag{7.11}$$

37-Mashq:
(3.56)-dan foydalanib to'liq hosilalarni tashlab yuborish yo'li bilan

$$\sqrt{-g}R = \sqrt{-g}\mathcal{L} - \partial_\nu\left(\sqrt{-g}g^{\nu\sigma}\Gamma^\rho_{\sigma\rho}\right) + \partial_\lambda\left(\sqrt{-g}g^{\nu\sigma}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\right)$$

ekanligini ko'rsating.

Bu holda ta'sir integrali uchun

$$S' = \int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L} = \int dt \int d^3r\sqrt{-g}\mathcal{L}$$

ifodaga ega bo'lamiz. Gravitatsion maydonning kanonik Gamilton funksiyasini olish uchun mana shu ifoda qulaydir. Biz ushbu paragrafda ***birinchi tartibli*** yoki, ***Palatini*** formalizmi deb atalgan formalizmdan foydalanamiz. Uning mohiyati shundan iboratki, metrik tenzor $g_{\mu\nu}$ va Kristoffel simvollari $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ bu formalizmda mustaqil kanonik koordinatlar - dinamik o'zgaruvchilar deb olinadi. Hosil bo'lgan harakat tenglamalarining ichidagi bir qismi $g_{\mu\nu}$ va $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ orasidagi bog'lanishni beradi. Bu gaplarni yana (soddaroq bo'lgan) elektrodinamika misolida namoyish qilishimiz mumkin. Elektromagnit maydon Lagranj funksiyasi zichligini

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}F^{\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \qquad (7.12)$$

ko'rinishda olamiz va A_μ va $F_{\mu\nu}$ kattaliklarni mustaqil kanonik o'zgaruvchilar sifatida qaraymiz. $F_{\mu\nu}$ bo'yicha variatsiyalash natijasida hosil bo'lgan tenglama

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

mana shu $F_{\mu\nu}$ va A_μ orasidagi bog'lanishni o'rnatadigan tenglama sifatida qaralishi kerak. (7.11)-Lagranj funksiyasining zichligida ham, yuqorida aytganimizdek, xuddi (7.12) ga o'hshab metrik tenzor $g_{\mu\nu}$ va Kristoffel simvollari $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ larni mustaqil kanonik o'zgaruvchilar sifatida qaraymiz. Bu formalizmning birinchi tartibli formalizm deb atalishining sababi bu holda Lagranj funksiyasida faqat birinchi tartibli hosilalar ishtirok qilishidadir.

(7.11)-ni qulayroq ko'rinishga keltirish uchun metrik tenzorning o'rniga

$$h^{\mu\nu} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}$$

o'zgaruvchini kiritamiz. Yangi o'zgaruvchimiz ikkinchi rang tenzor zichlikdir. Bunda Lagranj funksiyamiz

$$\sqrt{-g}\mathcal{L} = h^{\nu\sigma}(\Gamma^{\lambda}_{\rho\lambda}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma}\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}) + \partial_\nu h^{\nu\sigma}\Gamma^{\rho}_{\sigma\rho} - \partial_\lambda h^{\nu\sigma}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}. \quad (7.13)$$

ko'rinishga keladi. Bu ifodaning $\sqrt{-g}R$ dan qanday ustunligi bor? Birinchidan, bu ifodada ikkinchi tartibli (vaqt bo'yicha) hosilalar yoq. Ikkinchidan, bu ifodaning asimptotikasi maqsadga muvofiqroq. Buni ko'rish uchun metrikaning asimptotikasidan boshlaymiz. Kuchsiz maydon va Nyuton yaqinlashuviga o'tganda ko'rdikki,

$$g_{\mu\nu} = g^{(0)}_{\mu\nu} + O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \to \infty, \tag{7.14}$$

bo'lishi kerak (bu yerda $g^{(0)}_{\mu\nu}$ - tekis Minkowski fazosining metrikasi). Ya'ni,

$$\partial_\sigma g_{\mu\nu} = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \to \infty \tag{7.15}$$

bo'lishi kerak. Bu shartlar eksperimental natijalarga mos kelib ixtiyoriy koordinat sistemasi shu shartlarga bo'ysunishi kerak. Umumiy nisbillik nazariyasi umumiy koordinat almashtirishlariga nisbatan invariant edi, demak, umumiy koordinat almashtirishlari shunday bo'lishi kerakki, uning natijasida hosil bo'lgan yangi koordinat sistemasida (7.14)- va (7.15)-shartlar bajarilishi kerak. Bunday fazoni ***asimptotik tekis*** fazo deymiz. Asimptotik tekislilik sharti obyektiv fizik ma'noga egadir. Bu shartning buzilishi ma'noga ega bo'lmagan natijalarga olib kelishi mumkin. Lagranj funksiyalari uchun yaqqol formulalarga nazar tashlasak va (7.14)-, (7.15)-larni hisobga olsak

$$\sqrt{-g}R \to O\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad r \to \infty,$$

$$\sqrt{-g}\mathcal{L} \to O\left(\frac{1}{r^4}\right), \quad r \to \infty$$

ekanligiga ishonch hosil qilishimiz mumkin. (7.13)-ning ustunligi mana shu mulohazalarga asoslangandir - ko'rinib turibdiki, S' yaxshi aniqlangan kattalik ekan.

(7.13)-uchun Euler-Lagranj tenglamalari

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h^{\nu\lambda}{}_{,\mu}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h^{\nu\lambda}} = 0, \quad \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Gamma^\sigma_{\nu\lambda,\mu}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Gamma^\sigma_{\nu\lambda}} = 0$$

quyidagi ko′rinishga ega bo′ladi:

$$\Gamma^\lambda_{\rho\lambda}\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \Gamma^\lambda_{\rho\sigma}\Gamma^\rho_{\nu\lambda} = \partial_\nu \Gamma^\rho_{\sigma\rho} - \partial_\rho \Gamma^\rho_{\nu\sigma}; \tag{7.16}$$

$$-\partial_\sigma h^{\nu\lambda} + \delta^\lambda_\sigma \partial_\mu h^{\mu\nu} + h^{\nu\lambda}\Gamma^\rho_{\sigma\rho} + h^{\rho\mu}\Gamma^\nu_{\rho\mu}\delta^\lambda_\sigma = h^{\nu\mu}\Gamma^\lambda_{\sigma\mu} + h^{\mu\lambda}\Gamma^\nu_{\mu\sigma}. \tag{7.17}$$

(7.16)-tenglama $R_{\nu\sigma} = 0$ shartning o′zidir. Rostdan ham, biz Lagranj funksiyamizda modda zichligini hisobga olmagan edik, demak, bo′sh fazodagi gravitatsion maydon tenglamalarini olishimiz ajab emas. Bunday yondashishda (7.17)-tenglamalarning ma'nosi shundan iborat bo′ladiki, ular $g_{\mu\nu}$ va $\Gamma^\mu_{\nu\sigma}$ lar orasidagi bog′lanishlarni beradi. Bu ifodaga diqqat bilan qarasak uni quyidagi ko′rinishga keltira olishimizni ko′ramiz:

$$\partial_\sigma h^{\nu\lambda} = h^{\nu\lambda}\Gamma^\rho_{\sigma\rho} - h^{\nu\mu}\Gamma^\lambda_{\sigma\mu} - h^{\mu\lambda}\Gamma^\nu_{\mu\sigma}. \tag{7.18}$$

Tenzor zichliklardan ($h^{\nu\lambda}$ - vazni minus birga teng bo'lgan tenzor zichlikdir) kovariant hosila olish qoidasi (3.22) bo′yicha bu tenglik bor-yo′g'i $h^{\nu\lambda}$ ning kovariant hosilasining nolga tengligini bildiradi:

$$\nabla_\sigma h^{\nu\lambda} = 0. \tag{7.19}$$

(7.18)-tenglamalarning ichida vaqt bo′yicha hosilani o′z ichiga olmaganlari ham bor. Ularni alohida yozib olaylik:

$$\partial_i h^{kj} - h^{kj}\Gamma^\rho_{i\rho} + h^{\mu k}\Gamma^j_{i\mu} + h^{\mu j}\Gamma^k_{\mu i} = 0; \tag{7.20}$$

$$\partial_i h^{00} + h^{00}\Gamma^0_{0i} + 2h^{0j}\Gamma^0_{ij} - h^{00}\Gamma^j_{ij} = 0; \tag{7.21}$$

$$\partial_i h^{0j} + h^{00}\Gamma^j_{i0} + h^{0k}\Gamma^j_{ik} + h^{kj}\Gamma^0_{ki} - h^{0j}\Gamma^k_{ik} = 0; \tag{7.22}$$

Elektrodinamikani eslasak,, undagi vaqt bo′yicha hosila kirmagan tenglamalar - div**E** $= 0$ va div**B** $= 0$ - bizga maydon bo′ysinishi kerak bo′lgan shartlarni berar edi. Yuqoridagi tenglamalar sistemasidan ham xuddi shu maqsadda - maydon bo'ysinishi kerak bo'lgan shartlarni topish maqsadida foydalanamiz.

7.2.2 Ba'zi-bir matematik ta'riflar

Gamilton dinamikasida vaqt o'zgaruvchisi alohida rol o'ynaydi, shunga yarasha, fazoviy koordinatalar ham alohida rol o'ynaydi. Fazoviy koordinatalarni shu maqsadda ajratib olamiz va ularga mos keladigan egrilik Kristoffel simvollarini kiritamiz. Buning uchun avvalam bor uch o'lchamli metrik tenzorni kiritishimiz kerak. Buning ikki xil yo'li bor, biri (3.10)-paragrafida (3.38)-,(3.39)-,(3.40)- formulalar orqali kiritilgan. Lekin bizga hozir boshqa bir yo'li qulayroqdir. Uch o'lchamli kovariant metrik tenzor to'rt o'lchamli kovariant metrik tenzorning fazoviy komponentalari bilan mos tushadi deymiz va kontravariant tenzorni

$$\gamma^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$$

munosabat orqali kiritamiz. Ko'rish qiyin emaski,

$$\gamma^{ij} = g^{ij} - \frac{g^{0i} g^{0j}}{g^{00}} \tag{7.23}$$

bo'ladi.

38-Mashq:

$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda$ formulaning ${}^0_0$, ${}^0_i$, ${}^i_0$ va ${}^i_j$ komponentalarini yozib chiqing; ${}^0_i$ tenglamadan g_{0j} ni topib ${}^i_j$ tenglamaga olib borib qo'ying va (7.23)-formulani oling.

Shuni hisobga olib uch o'lchamli fazodagi Kristoffel simvollarini

$$\gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} \gamma^{ik} \left(\partial_j g_{ik} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{jk} \right)$$

formula orqali kiritamiz. Oddiy hisoblardan keyin

$$\gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \frac{g^{0i}}{g^{00}}\Gamma^0_{jk}$$

munosabatni topishimiz mumkin. Buni bizga qulayroq bo'lgan ko'rinishga keltiraylik:

$$\Gamma^i_{jk} = \gamma^i_{jk} + \frac{h^{0i}}{h^{00}}\Gamma^0_{jk}. \tag{7.24}$$

Uch o'lchamli fazo uchun Richchi tensorini quyidagicha ifodalaymiz:

$$R^{(3)}_{ij} = \partial_l \gamma^l_{ij} - \partial_j \gamma^l_{li} + \gamma^l_{lk}\gamma^k_{ij} - \gamma^l_{ik}\gamma^k_{lj}. \tag{7.25}$$

Undan tashqari,

$$\gamma = \det(g_{ij}) \quad \text{va} \quad g = \det g_{\mu\nu} \tag{7.26}$$

belgilashlar kiritsak

$$g^{00} = \gamma/g \tag{7.27}$$

ekanligiga kelamiz. h^{00} va h^{0i} vazni -1 ga teng bo'lgan (uch o'lchamli) tenzor (skalar va vektor) zichliklar ekanligini hisobga olib va (3.24)-, (3.25)-, (3.26)- formulalarni eslab, ularning kovariant hosilalarini osongina topishimiz mumkin:

$$\nabla_i h^{00} = \partial_i h^{00} - \gamma^j_{ij} h^{00}, \quad \nabla_i h^{0k} = \partial_i h^{0k} + \gamma^k_{il} h^{0l} - \gamma^j_{ij} h^{0k}. \tag{7.28}$$

Bu formulalar va (7.21)-,(7.22)-yordamida biz quyidagi munosabatlarga kelamiz:

$$\Gamma^k_{i0} = -\frac{1}{h^{00}}\left(\nabla_i h^{0k} + h^{lk}\Gamma^0_{il}\right), \quad \Gamma^0_{i0} = -\frac{1}{h^{00}}\left(\nabla_i h^{00} + h^{j0}\Gamma^0_{ji}\right). \tag{7.29}$$

Ammo h^{0i}/h^{00} lar zichliklar emas balki 3-vectorlardir, shuning uchun

$$\left[\nabla_j, \nabla_k\right]\frac{h^{0l}}{h^{00}} = -R^{(3)}_{jl}\frac{h^{0l}}{h^{00}}. \tag{7.30}$$

munosabatga egamiz.

39-Mashq:
(3.50)-ni eslab (7.30)-ni isbot qiling.

Yangi kattaliklar kiritaylik:

$$q^{ik} = h^{0i}h^{0k} - h^{00}h^{ik}, \qquad \Pi_{ij} = \frac{1}{h^{00}}\Gamma^0_{ij}. \tag{7.31}$$

Kiritilgan kattaliklar gravitatsion maydonning ***umumlashgan koordinatalari*** va ***umumlashgan impulslari*** ro'lini o'ynar ekan.

7.2.3 Lagranj funksiyasini soddalashtirish

Bizning maqsadimiz Lagranj funksiyasini quyidagi ko'rinishga keltirish:

$$L = \int d^3r\sqrt{-g}\mathcal{L} = \int d^3r\left\{\Pi_{ij}\partial_0 q^{ij} - \sum_n \lambda_n\varphi^n - \mathcal{H}\right\}, \tag{7.32}$$

bu yerda λ_n - Lagranj ko'paytuvchilari va φ^n - bog'lanishlar. (7.13)-dagi uchinchi va to'rtinchi hadlardan boshlaylik. Ular quyidagicha ochiladi:

$$\partial_\nu h^{\nu\sigma}\Gamma^\rho_{\sigma\rho} - \partial_\lambda h^{\nu\sigma}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} = \partial_0 h^{00}\Gamma^j_{0j} - \partial_0 h^{0i}\Gamma^0_{0i} + \partial_0 h^{0i}\Gamma^j_{ij} +$$
$$+\partial_i h^{0i}\Gamma^0_{00} + \partial_i h^{0i}\Gamma^j_{0j} + \partial_i h^{ij}\Gamma^0_{0j} + +\partial_i h^{ij}\Gamma^l_{jl} - \partial_0 h^{ij}\Gamma^0_{ij} -$$
$$-\partial_i h^{00}\Gamma^i_{00} - 2\partial_i h^{0j}\Gamma^i_{0j} - \partial_i h^{jl}\Gamma^i_{jl}. \tag{7.33}$$

(7.13)-dagi birinchi va ikkinchi hadlar esa quyidagicha ochiladi:

$$h^{\nu\sigma}\left(\Gamma^\lambda_{\rho\lambda}\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \Gamma^\lambda_{\rho\sigma}\Gamma^\rho_{\nu\lambda}\right) = h^{00}\left(\Gamma^i_{0i}\Gamma^0_{00} + \Gamma^j_{ij}\Gamma^i_{00} - \Gamma^0_{i0}\Gamma^i_{00} - \right.$$

$$-\Gamma^j_{i0}\Gamma^i_{0j}\Big) + 2h^{0i}\left(\Gamma^j_{0j}\Gamma^0_{0i} + \Gamma^k_{jk}\Gamma^j_{0i} - \Gamma^j_{00}\Gamma^0_{ij} - \Gamma^k_{0j}\Gamma^j_{ik}\right) +$$

$$+h^{ij}\Big(\Gamma^0_{00}\Gamma^0_{ij} + \Gamma^l_{l0}\Gamma^0_{ij} + \Gamma^0_{l0}\Gamma^l_{ij} + \Gamma^k_{lk}\Gamma^l_{ij} -$$

$$-\Gamma^0_{0i}\Gamma^0_{j0} - \Gamma^l_{0i}\Gamma^0_{jl} - \Gamma^0_{li}\Gamma^l_{j0} - \Gamma^k_{li}\Gamma^l_{jk}\Big). \tag{7.34}$$

Agar (7.21)- and (7.22)- larni hisobga olasak

$$\Gamma^i_{00}\left(-\partial_i h^{00} + h^{00}\Gamma^j_{ij} - h^{00}\Gamma^0_{0i} - 2h^{0j}\Gamma^0_{ij}\right) +$$

$$+\Gamma^0_{00}\left(\partial_i h^{i0} + h^{00}\Gamma^i_{0i} + h^{ij}\Gamma^0_{ij}\right) = 0,$$

ekanligini topamiz, ya'ni, Γ^μ_{00} ko'rinishdagi hamma hadlar yo'q bo'lib ketadi. Umumlashgan Gamilton dinamikasi belgilashlari tilida

$$A^{00}_0 = \partial_i h^{i0} + h^{00}\Gamma^i_{0i} + h^{ij}\Gamma^0_{ij} = 0 \tag{7.35}$$

va

$$A^{00}_i = -\partial_i h^{00} + h^{00}\Gamma^j_{ij} - h^{00}\Gamma^0_{0i} - 2h^{0j}\Gamma^0_{ij} = 0 \tag{7.36}$$

kattaliklar birlamchi bog'lanishlar bo'lib xizmat qiladi, Γ^0_{00} va Γ^i_{00} lar esa mos keluvchi Lagranj ko'paytuvchilari rolini o'ynaydi.

Vaqt bo'yicha hosilali hadlarni yig'ib chiqib umumlashgan koordinatlarga o'tsak quyidagi ifodani olamiz:

$$\begin{aligned}\partial_0 h^{00}\Gamma^j_{0j} - \partial_0 h^{0i}\Gamma^0_{0i} + \partial_0 h^{0i}\Gamma^j_{ij} - \partial_0 h^{ij}\Gamma^0_{ij} = \\ = \Pi_{ij}\partial_0 q^{ij} + \partial_i \ln h^{00}\partial_0 h^{0i} - \partial_0 \ln h^{00}\partial_i h^{0i}.\end{aligned} \tag{7.37}$$

Yana bir marta (7.21)- va (7.22)-larni ishlatsak quyidagi soddalashtirishga erishamiz:

$$\partial_i h^{0i}\Gamma^j_{0j} - 2\partial_i h^{0j}\Gamma^i_{0j} - h^{00}\Gamma^j_{i0}\Gamma^i_{0j} + 2h^{0i}\Gamma^k_{jk}\Gamma^j_{0i} - 2h^{0i}\Gamma^k_{0j}\Gamma^j_{ik} +$$

$$+h^{ij}\Gamma^l_{l0}\Gamma^0_{ij} - h^{ij}\left(\Gamma^l_{0i}\Gamma^0_{jl} + \Gamma^0_{li}\Gamma^l_{j0}\right) = h^{00}\left(\Gamma^j_{i0}\Gamma^i_{0j} - \Gamma^i_{i0}\Gamma^j_{0j}\right). \tag{7.38}$$

(7.20)-ni ishlatib quyidagi soddalashtirishga kelamiz:

$$\Gamma^0_{0j}\left(\partial_i h^{ij} + 2h^{0j}\Gamma^i_{0i} + h^{il}\Gamma^j_{il} - h^{il}\Gamma^0_{0i}\right) = \Gamma^0_{0j}\left(h^{0j}\Gamma^i_{0i} - h^{0i}\Gamma^j_{0i}\right). \tag{7.39}$$

Mana shu soddalashtirishlardan keyin bizning (7.13)- Lagranj funksiyamiz quyidagi ko′rinishni oladi:

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}\mathcal{L} &= \Pi_{ij}\partial_0 q^{ij} + \partial_i \ln h^{00}\partial_0 h^{0i} - \partial_0 \ln h^{00}\partial_i h^{0i} + \\ &+h^{00}\left(\Gamma^j_{0i}\Gamma^i_{0j} - \Gamma^j_{j0}\Gamma^i_{i0}\right) + \partial_i h^{ij}\Gamma^l_{jl} - \partial_i h^{jl}\Gamma^i_{jl} + \\ &+h^{ij}\left(\Gamma^k_{lk}\Gamma^l_{ij} - \Gamma^k_{il}\Gamma^l_{jk}\right) + \Gamma^0_{0i}\left(h^{0i}\Gamma^j_{0j} - h^{0j}\Gamma^i_{0j}\right).\end{aligned} \tag{7.40}$$

Tekshirib ko′rish mumkinki

$$\begin{aligned}&\partial_i \ln h^{00}\partial_0 h^{0i} - \partial_0 \ln h^{00}\partial_i h^{0i} = \\ &= -\partial_i\left(h^{0i}\partial_0 \ln h^{00}\right) + \partial_0\left(h^{0i}\partial_i \ln h^{00}\right),\end{aligned} \tag{7.41}$$

bu esa shu ikki hadni tashlab yuborishimiz mumkinligini bildiradi - birinchi had to′liq divergentsiya, ikkinchi had qandaydir funksiyaning vaqt bo′yicha hosilasi. To′liq divergensiyalarni tashlab yuborish yo′li bilan (7.40)-ning ikkinchi qatoridagi hadlarni kerakli ko′rinishga keltirib olamiz:

$$\begin{aligned}&\partial_i h^{ij}\Gamma^l_{jl} - \partial_i h^{jl}\Gamma^i_{jl} = \\ &= h^{ij}\left(\partial_l\gamma^l_{ij} - \partial_i\gamma^l_{jl}\right) + h^{ij}\left(\partial_l(h^{0l}\Pi_{ij}) - \partial_i(h^{0l}\Pi_{jl})\right).\end{aligned} \tag{7.42}$$

(7.25)-, (7.24)-, (7.28)- va (7.31)- formulalarni ishlatib

$$\begin{aligned}&h^{ij}\left(\partial_l\gamma^l_{ij} - \partial_i\gamma^l_{jl} + \partial_l(h^{0l}\Pi_{ij}) - \partial_i(h^{0l}\Pi_{jl}) + \Gamma^k_{lk}\Gamma^l_{ij} - \Gamma^k_{il}\Gamma^l_{jk}\right) = \\ &= h^{ij}R^{(3)}_{ij} + h^{ij}h^{0k}h^{0l}\left(\Pi_{ij}\Pi_{kl} - \Pi_{il}\Pi_{kj}\right) + \\ &+h^{ij}\left(\nabla_l(h^{0l}\Pi_{ij}) - \nabla_i(h^{0l}\Pi_{lj})\right).\end{aligned} \tag{7.43}$$

munosabatga kelamiz. (7.40)-ning ikkinchi qatoridagi birinchi had va uchinchi qatoridagi ikkinchi haddan boshqa hamma hadlarni ko'rib chiqdik. Ular ustida bir-muncha ishlash natijasida quyidagilarni olamiz:

$$h^{00}\left(\Gamma^{j}_{0i}\Gamma^{i}_{0j}-\Gamma^{j}_{j0}\Gamma^{i}_{i0}\right)=$$

$$=h^{00}h^{ik}h^{jl}\left(\Pi_{ij}\Pi_{kl}-\Pi_{ik}\Pi_{lj}\right)+2h^{il}\Pi_{lj}\nabla_i h^{0j}- \tag{7.44}$$

$$-2h^{jk}\Pi_{kj}\nabla_i h^{0i}+\frac{1}{h^{00}}\left(\nabla_i h^{0j}\nabla_j h^{0i}-\nabla_i h^{0i}\nabla_j h^{0j}\right);$$

$$\Gamma^{0}_{0i}\left(h^{0i}\Gamma^{j}_{0j}-h^{0j}\Gamma^{i}_{0j}\right)=\Pi_{ij}\Pi_{kl}h^{0j}\left(h^{0i}h^{kl}-h^{il}h^{0k}\right)-$$

$$-\frac{\nabla_i h^{00}}{h^{00}}\left(\frac{h^{0j}}{h^{00}}\nabla_j h^{0i}-\frac{h^{0i}}{h^{00}}\nabla_j h^{0j}\right)+$$

$$+\frac{\nabla_i h^{00}}{h^{00}}\Pi_{kl}\left(h^{0i}h^{kl}-h^{il}h^{0k}\right)+\frac{h^{0l}}{h^{00}}\Pi_{li}\left(h^{0i}\nabla_j h^{0j}-h^{0j}\nabla_j h^{0i}\right). \tag{7.45}$$

Endi olingan hadlarni ularga Π-ning nechanchi darajasi kirganligiga qarab yig'a boshlaymiz. Birinchidan, Π-ning kvadrati kirgan hadlarni yig'amiz:

$$\Pi_{ij}\Pi_{kl}\left(h^{00}h^{ik}h^{jl}-h^{ij}h^{00}h^{kl}+h^{ij}h^{0k}h^{0l}-h^{il}h^{0k}h^{0j}+\right.$$

$$\left.+h^{0j}h^{0i}h^{kl}-h^{0j}h^{il}h^{0k}\right)=\frac{1}{h^{00}}\Pi_{ij}\Pi_{kl}\left(q^{ik}q^{jl}-q^{ij}q^{kl}\right)=$$

$$=-\frac{1}{h^{00}}q^{ij}q^{kl}\left(\Pi_{ij}\Pi_{kl}-\Pi_{ik}\Pi_{jl}\right). \tag{7.46}$$

Π bo'yicha chiziqli hadlarga kelaylik:

$$h^{ij}\left(\nabla_l(h^{0l}\Pi_{ij}) - \nabla_i(h^{0l}\Pi_{lj})\right) + \frac{\nabla_i h^{00}}{h^{00}}\Pi_{kl}\left(h^{0i}h^{kl} - h^{il}h^{0k}\right) +$$

$$+2h^{il}\Pi_{lj}\nabla_i h^{0j} - 2h^{jk}\Pi_{kj}\nabla_i h^{0i} + \frac{h^{0l}}{h^{00}}\Pi_{li}\left(h^{0i}\nabla_j h^{0j} -\right.$$

$$\left.-h^{0j}\nabla_j h^{0i}\right) = \nabla_l\left(\frac{q^{ij}\Pi_{ij}h^{0l}}{h^{00}}\right) - \nabla_i\left(\frac{q^{il}\Pi_{lj}h^{0j}}{h^{00}}\right) -$$

$$-\frac{h^{0l}}{h^{00}}\nabla_l\left(q^{ij}\Pi_{ij}\right) + \frac{h^{0j}}{h^{00}}\nabla_i\left(q^{il}\Pi_{lj}\right) + h^{ij}\Pi_{ij}\nabla_l h^{0l} -$$

$$-h^{il}\Pi_{lj}\nabla_i h^{0j} + h^{ij}\left(\nabla_l(h^{0l}\Pi_{ij}) - \nabla_i(h^{0l}\Pi_{lj})\right) =$$

$$= -2\frac{h^{0l}}{h^{00}}\nabla_l\left(q^{jk}\Pi_{jk}\right) + 2\frac{h^{0i}}{h^{00}}\nabla_j\left(q^{jk}\Pi_{ki}\right). \tag{7.47}$$

Quyidagi tenglik qavs ichidagi ifoda vazni (-1) bo'lgan vector zichlik ekanligining natijasidir:

$$\nabla_l\left(\frac{q^{ij}\Pi_{ij}h^{0l}}{h^{00}}\right) = \partial_l\left(\frac{q^{ij}\Pi_{ij}h^{0l}}{h^{00}}\right).$$

O'z navbatida, hosil bo'lgan to'liq divergensiyani tashlab yuborishimiz mumkin.

Π– kirmagan hadlarni yig'aylik:

$$\frac{1}{h^{00}}\left(\nabla_i h^{0j}\nabla_j h^{0i} - \nabla_i h^{0i}\nabla_j h^{0j}\right) -$$

$$-\frac{\nabla_i h^{00}}{h^{00}}\left(\frac{h^{0j}}{h^{00}}\nabla_j h^{0i} - \frac{h^{0i}}{h^{00}}\nabla_j h^{0j}\right) = \tag{7.48}$$

$$= \nabla_i\left(h^{0j}\nabla_j\frac{h^{0i}}{h^{00}}\right) - \nabla_j\left(h^{0j}\nabla_i\frac{h^{0i}}{h^{00}}\right) - \frac{h^{0i}h^{0j}}{h^{00}}R^{(3)}_{ij},$$

bu yerda biz (7.30)-ni ishlatdik. Bu yerdagi birinchi ikki hadlar ustida quyidagi almashtirish bajaraylik:

$$\nabla_i\left(h^{0j}\nabla_j\frac{h^{0i}}{h^{00}}\right)-\nabla_j\left(h^{0j}\nabla_i\frac{h^{0i}}{h^{00}}\right)=$$

$$=\partial_i\left[h^{0j}\partial_j\frac{h^{0i}}{h^{00}}-h^{0i}\partial_j\frac{h^{0j}}{h^{00}}+\gamma^i_{jl}h^{jl}-\gamma^l_{jl}h^{il}\right]+$$

$$+\partial_i\left(\frac{\gamma^i_{jl}q^{jl}-\gamma^j_{jl}q^{il}}{h^{00}}\right)\Rightarrow\partial_i\left(\frac{\gamma^i_{jl}q^{jl}-\gamma^j_{jl}q^{il}}{h^{00}}\right)=$$

$$=\partial_i\left(\frac{1}{h^{00}}\partial_j q^{ij}\right)=-\partial_i\left(\left(\frac{1}{h^{00}}+1\right)\partial_j q^{ij}\right)+\partial_i\partial_j q^{ij}\Rightarrow\partial_i\partial_j q^{ij}. \tag{7.49}$$

Ushbu ketma-ketlikda biz ikki marta to'liq divergensiyalik hadlarni tashlab yubordik (strelka bilan belgilangan joylarda). Qoldirilgan oxirgi had ham divergensiya ko'rinishiga ega-ku, deyish mumkin. Gap shundaki, bu had $r\to\infty$ da $1/r^3$ ko'rinishga ega, demak, undan olingan integral nolga teng emas.

Yakuniy ifoda:

$$\sqrt{-g}\mathcal{L}=\Pi_{ij}\partial_0 q^{ij}-\frac{1}{h^{00}}q^{ij}q^{kl}\left(\Pi_{ij}\Pi_{kl}-\Pi_{ik}\Pi_{jl}\right)+\partial_i\partial_j q^{ij}-$$

$$-2\frac{h^{0l}}{h^{00}}\nabla_l\left(q^{jk}\Pi_{jk}\right)+2\frac{h^{0i}}{h^{00}}\nabla_j\left(q^{jk}\Pi_{ki}\right)-\frac{1}{h^{00}}q^{ij}R^{(3)}_{ij}. \tag{7.50}$$

Ko'rinib turibdiki, Π_{ij} va q^{ij} lar o'zaro qo'shma kanonik o'zgaruvchilar ekan: Π_{ij} - umumlashgan impuls, q^{ij} esa umumlashgan koordinata. Ammo ulardan tashqari yana boshqa o'zgaruvchilarni ham ko'rishimiz mumkin - $\frac{1}{h^{00}}$ va $\frac{h^{0i}}{h^{00}}$. Ularga mos keladigan umumlashgan impulslar va tezliklar bo'lmagani uchun ularni Lagranj ko'paytuvchilari sifatida qarashimiz kerak. Bundan keyin Lagranj ko'paytuvchisi sifatida $\frac{1}{h^{00}}$ ning o'rniga $\lambda^0 = 1 + \frac{1}{h^{00}}$ ni qaraganimiz qulayroqdir.

Natijada gravitatsion maydon Lagranj funksiyasini quyidagi ko'rinishga keltirib olamiz:

$$L = \int d^3x \left(\Pi_{ij}\partial_0 q^{ij} - \lambda^0 C_0 - \lambda^i C_i - \mathcal{H}\right). \tag{7.51}$$

Bu yerga kirgan kattaliklar: Gamilton funksiyasi –

$$\mathcal{H} = -C_0 - \partial_i\partial_j q^{ij};$$

shartlar (bog'lanishlar) –

$$C_0 = q^{ij}q^{kl}\left(\Pi_{ij}\Pi_{kl} - \Pi_{il}\Pi_{kj}\right) + \gamma R_3, \quad \gamma R_3 = q^{ij}R^{(3)}_{ij};$$

$$C_i = 2\nabla_i\left(q^{jk}\Pi_{jk}\right) - 2\nabla_j\left(q^{jk}\Pi_{ki}\right),$$

va Lagranj ko'paytuvchilari –

$$\lambda^0 = 1 + \frac{1}{h^{00}}, \qquad \lambda^i = \frac{h^{0i}}{h^{00}}.$$

Bu formulalarda paydo bo'lgan $R^{(3)}_{ij}$ uch o'lchamli fazoning Richchi tenzori va $R^{(3)}$- uning Richchi skalyari. C_0- va C_i-larning shartlar ekanligi shundan ko'rinib turibdiki λ^0- va λ^i-larga mos keladigan umumlashgan tezliklar (7.51)-da yo'qdir, Lagranj ko'paytuvchilari bo'yicha variatsiyalash

$$C_0 = 0, \qquad C_i = 0$$

tenglamalarga (shartlarga) olib keladi. Fizik kattaliklarni (shu jumladan Gamilton funksiyasini) (hamma Puasson qavslari hisoblab bo'lingandan keyin) mana shu shartlar aniqlaydigan sirt ustida hisoblashimiz kerak.

Gravitatsion maydon energiyasi uchun

$$E = \int d^3x\mathcal{H} = \int dS_i(-\partial_k q^{ki})$$

formulani olamiz. Integral cheksizlikka intilayotgan sirt bo'yicha olinadi. Bu integral nolga teng emas, agar q^{ki}-ning ta'rifini va (7.14)-formulalarni eslasak, $\partial_k q^{ki}$ ifodaga $r \to \infty$ da $1/r^2$ ko'rinishli hadlar kirishini ko'ramiz. Yana bir bor elektrodinamikani eslasak, unda to'liq zaryad yuqoridagi formulaga o'xshash asimptotik formula orqali aniqlanishini ko'rishimiz mumkin:

$$Q = \int d^3x\,\rho = \frac{1}{4\pi}\int d^3x\,\mathrm{div}\,\mathbf{E} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int dS_k E^k = \frac{1}{4\pi}\int dS_k(-\partial_k\varphi).$$

Oxirgi tenglikka o'tganda elektr maydonning vaqt bo'yicha hosilali qismini hisobga olmadik. Elektr zaryad bilan tortishish maydonining energiyasini nima uchun solishtiryapmiz? Tortishish maydoni energiyasi uning gravitatsion massasi bilan bog'langan, u esa – uning gravitatsion zaryadidir. Bu tushunchalar orasida jiddiy farq ham bor albatta. Elektr zaryadining ishorasi ikki xil bo'lgani uchun to'liq elektr zaryad maydon nolga teng bo'lmagan holda ham nolga teng bo'lishi mumkin. Gravitatsion energiya-massa haqida biz bunday deya olmaymiz, uning ishorasi hamma vaqt musbatdir.

Avvalgi paragrafda keltirilgan nazariya bo'yicha (7.51)-formula sistemaning erkinlik darajalarining bir qismi ma'lum shartlarga bo'ysingan holda o'rinli bo'ladi. Dirakning terminologiyasi bo'yicha

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H} + \lambda^0 C_0 + \lambda^i C_i$$

to'liq Gamiltonianni tashkil qiladi. Shu to'liq Gamiltonian vaqt bo'yicha siljish generatori rolini o'ynaydi, ya'ni, xuddi shu $\mathcal{H}_T$ harakat tenglamalarini beradi. Buni ko'rish uchun umumlashgan impulslar va umumlashgan koordinatalar orasidagi (7.51)-

dan kelib chiqadigan Puasson qavslarini yozib olaylik:

$$\left\{\Pi_{ik}(t,\mathbf{x}), q^{jl}(t,\mathbf{y})\right\} = \frac{1}{2}\left(\delta_i^j\delta_k^l + \delta_k^j\delta_i^l\right)\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

Bu yerda Kronekker-deltalarining paydo bo'lishiga sabab shuki ifodamizning chap tomoni (i,k) va (j,l) indekslar bo'yicha simmetrikdir, uning o'ng tomonini ham xuddi shunday xossali qilib olishimiz kerak. Endi harakat tenglamalarini keltirib chiqarishimiz mumkin. Umumiy qoida bo'yicha

$$\dot{\Pi}_{ij}(x) = \int d^3y\left\{\mathcal{H}_T(y), \Pi_{ij}(x)\right\}$$

va

$$\dot{q}^{ij}(x) = \int d^3y\left\{\mathcal{H}_T(y), q^{ij}(x)\right\}$$

bo'lishi kerak. Bu Puasson qavslarini hisoblab chiqaylik. Hisobga kirgan qismlarni alohida yozib olaylik:

$$\left\{q^{kl}(y)q^{st}(y), \Pi_{ij}(x)\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[q^{kl}\left(\delta_i^s\delta_j^t + \delta_j^s\delta_i^t\right) + q^{st}\left(\delta_i^k\delta_j^l + \delta_j^k\delta_i^l\right)\right]\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y});$$

$$2\int d^3y\,\frac{h^{0l}}{h^{00}}\left\{\nabla_l^y\left(q^{pk}\Pi_{pk}\right) - \nabla_k^y\left(q^{kp}\Pi_{pl}\right), \Pi_{ij}(x)\right\} =$$

$$= -2\int d^3y\left\{\nabla_l^y\left(\frac{h^{0l}}{h^{00}}\right)q^{pk}\Pi_{pk} - \nabla_k^y\left(\frac{h^{0l}}{h^{00}}\right)q^{kp}\Pi_{pl}, \Pi_{ij}(x)\right\} =$$

$$= 2\nabla_l\left(\frac{h^{0l}}{h^{00}}\right)\Pi_{ij} - \nabla_i\left(\frac{h^{0l}}{h^{00}}\right)\Pi_{lj} - \nabla_j\left(\frac{h^{0l}}{h^{00}}\right)\Pi_{lj}.$$

Kovariant hosila qaysi argument bo'yicha ta'sir qilayapti degan savol ravshan bo'lishi uchun biz o'sha argumentni hosilaning yuqori indeksi sifatida ko'rsatdik. Ikkinchi qatorga o'tganda biz integralni bo'laklab integralladik, chunki Puasson qavsi shu hosila ostidagi funksiyaga ta'sir qilishi kerak, buning uchun uni boshqa operatorlarning ta'siridan ozod qilishimiz kerak. Oxirgi qatordagi hamma funksiyalarning argumenti x. Qolgan hadlar:

$$\int d^3y \left\{ \gamma R^{(3)}, \Pi_{ij}(x) \right\} = -R^{(3)}_{ij};$$

$$\int d^3y \left\{ \partial_k \partial_l q^{kl}(y), \Pi_{ij}(x) \right\} = 0.$$

Hamma hadlarni yig'ib chiqsak quyidagi harakat tenglamasini olamiz:

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}_{ij} = &-\frac{2}{h^{00}} q^{kl} \left(\Pi_{kl}\Pi_{ij} - \Pi_{ik}\Pi_{jl} \right) - \frac{1}{h^{00}} R^{(3)}_{ij} + \\ &+ 2\nabla_l \left(\frac{h^{0l}}{h^{00}} \right) \Pi_{ij} - \nabla_i \left(\frac{h^{0l}}{h^{00}} \right) \Pi_{lj} - \nabla_j \left(\frac{h^{0l}}{h^{00}} \right) \Pi_{li}. \end{aligned} \tag{7.52}$$

Agar (7.51)-formula orqali aniqlangan Lagranj funksiyasini Eyler-Lagranj tenglamalari sistemasiga qoysak (q^{ij}-larni umumlashgan koordinata sifatida qarab), xuddi shu tenglamalarning o'zini olamiz.

Koordinatalarning vaqt bo'yicha hosilasini ham Puasson qavslari orqali yuqorida yoritilgan yo'l bilan topishimiz mumkin:

$$\begin{aligned} \dot{q}^{ij} = &\frac{2}{h^{00}} \left(q^{ij}q^{kl} - q^{ik}q^{jl} \right) \Pi_{kl} - 2\nabla_l \left(\frac{h^{0l}}{h^{00}} \right) q^{ij} + \\ &+ \nabla_k \left(\frac{h^{0j}}{h^{00}} \right) q^{ki} + \nabla_k \left(\frac{h^{0i}}{h^{00}} \right) q^{kj}. \end{aligned} \tag{7.53}$$

Bu tenglamani ham (7.51)-Lagranj funksiyasidan keltirib chiqarishimiz mumkin.

Endi olingan kanonik tenglamalar Einshtein tenglamalari bilan bir xil bo'lishini tekshiraylik. Buning uchun Einshtein tenglamalarining fazoviy qisminigina kanonik o'zgaruvchilar tiliga o'tkazishimiz yetarlidir (chunki ularning faqat mana shu qismidagina vaqt bo'yicha ikkinchi tartibli hosilali hadlar kiradi):

$$R_{ij} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{ij} - \partial_j \Gamma^\lambda_{i\lambda} + \Gamma^\sigma_{ij}\Gamma^\rho_{\sigma\rho} - \Gamma^\rho_{j\sigma}\Gamma^\sigma_{i\rho} = 0. \tag{7.54}$$

Ba'zi-bir hisoblardan keyin

$$\begin{aligned} &\partial_\lambda \Gamma^\lambda_{ij} = \partial_0(h^{00}\Pi_{ij}) + \partial_k \gamma^k_{ij} + \partial_k(h^{0k}\Pi_{ij}), \\ &-\partial_j \Gamma^\lambda_{i\lambda} = \partial_j \frac{\nabla_i h^{00}}{h^{00}} - \partial_j \gamma^k_{ik} \end{aligned} \tag{7.55}$$

ekanligini ko'ramiz. (7.54)-dagi oxirgi ikki hadni ko'raylik:

$$\begin{aligned} &\Gamma^\sigma_{ij}\Gamma^\rho_{\sigma\rho} = h^{00}\Pi_{ij}\Gamma^\rho_{0\rho} + \Gamma^l_{ij}\left(\gamma^k_{lk} - \frac{\nabla_l h^{00}}{h^{00}}\right); \\ &\Gamma^\rho_{j\sigma}\Gamma^\sigma_{i\rho} = \Gamma^0_{j0}\Gamma^0_{i0} + \Gamma^l_{0j}\Gamma^0_{il} + \Gamma^0_{jl}\Gamma^l_{i0} + \Gamma^k_{jl}\Gamma^l_{ik}. \end{aligned} \tag{7.56}$$

(7.18)-tenglamaning hamma indekslari nolga teng holini olaylik:

$$\partial_0 h^{00} = -h^{00}\Gamma^0_{00} + h^{00}\Gamma^l_{0l} - 2h^{0l}\Gamma_{0l}. \tag{7.57}$$

Hamma hadlarni joyiga qo'yib chiqqanimizdan keyin

$$\begin{aligned} 0 = R_{ij} = h^{00}\dot{\Pi}_{ij} + 2q^{kl}\left(\Pi_{ij}\Pi_{kl} - \Pi_{ik}\Pi_{jl}\right) + R^{(3)}_{ij} - \\ -2\Pi_{ij}h^{00}\nabla_l\left(\frac{h^{0l}}{h^{00}}\right) + \Pi_{il}h^{00}\nabla_j\left(\frac{h^{0l}}{h^{00}}\right) + \Pi_{jl}h^{00}\nabla_i\left(\frac{h^{0l}}{h^{00}}\right). \end{aligned} \tag{7.58}$$

tenglamaga kelamiz, bu esa (7.52)-ning o'zidir.

8

Relativistik kosmologiya

8.1 Katta Portlash

Yuqorida aytganimizdek, tajriba shuni ko'rsatadiki, Koinotimiz bir jinsli va izotropdir. Kichik masshtablarda biz buni ko'ra olmaymiz - bizni modda taqsimoti o'ta notekis bo'lgan Quyosh sistemasi qurshagan, Galaktikamizning ichida ham modda taqsimoti notekis (Galaktika yulduzlardan iborat), galaktikalar to'plamlari ichida ham, Ammo, tomonlari 100 Megaparsek ($= 100 \cdot 10^6 ps = 3.27 \cdot 10^8$ yorug'lik yili) bo'lgan kubning ichidagi modda miqdori shu kubni Koinotning qanday nuqtasida tanlab olishimizdan qat'iy nazar bir xil bo'ladi. Ya'ni, Koinotda modda taqsimoti (galaktikalar turkumlarining taqsimoti) fazo bo'yicha bir tekisdir va Koinotning markazi yo'qdir. Bunday tasdiq ***kosmologik prinsip*** deyiladi. U ko'p yillik kuzatuvlar natijasidir.

Zamonaviy kosmologiyaning asosida ***Katta Portlash*** g'oyasi yotadi. G'oya shundan iboratki, $t = 0$ vaqt momentida Katta Portlash natijasida Koinotimiz paydo bo'lgan. Undan oldin nima bo'lgan degan savolning ma'nosi yoq, chunki vaqtning o'zi shu daqiqada paydo bo'lgan, ungacha na vaqt va na fazo bo'lgan. Ma'lum bir darajada g'alati bo'lib ko'rinishiga qaramasdan bu fikr zamonaviy fandan kelib chiqadigan va tajribaviy asosga ega bo'lgan fikrdir. Tajribaviy asoslarning ichida eng muhim bo'lganlari ikkitadir - ***Koinotning kengayishi*** va ***mikroto'lqin nurlanish foni*** (relikt nurlanish).

Galaktikalarning bir biridan uzoqlashayotganligini birinchi marta 1917 yil amerikalik astronom Slaifer kuzatgan, 1929 yilda esa amerikalik boshqa astronom Xabbl galaktikalarning o'zaro qochishi umumiy bir qonun ekanligini va ushbu fakt Koinotimizning kengaya borayotganini bildirishini anglagan. Haqiqatan, bir-biridan galaktik to'plamlar uzoqlashmoqda [1] va ularning o'zaro uzoqlashish tezligi v o'zaro masofa r ga to'g'ri proporsionaldir:

$$v = Hr.$$

Proporsionallik koeffitsienti H Xabbl doimiysi deyiladi. Hozirgi ma'lumotlar bo'yicha $H = 72\ km/(s \cdot Mps)$, ya'ni, masofa bir megaparsekka oshganda uzoqlashish tezligi 72 km/s ga oshadi.[2]

Kuzatuvlarni bir joyga yig'sak Koinotimiz bir jinsli va galaktik to'plamlarning hammasi bir-biridan faqat o'zaro masofaga proportsional bo'lgan tezliklar bilan qochmoqda. Bu holatni quyidagi misolda ko'z oldiga keltirish mumkin: sharni puflaylik, uning ustidagi hamma nuqtalar bir-biridan uzoqlasha boshlaydi, ikki nuqta orasidagi masofa qancha katta bo'lsa, shu nuqtalarning o'zaro uzoqlashish tezliga ham shuncha katta bo'ladi. Bir-biriga yaqinlashayotgan galaktik to'plamlar shu paytgacha kuzatilgan emas. Bu fakt kuzatish nuqtasini qaysi yerda tanlab olishimizga bog'liq emas.

Oxirgi kuzatuvlar shuni ko'rsatadiki, Koinotimizning kengayish tezligi borgan sari oshib borayapti, ya'ni, Koinotimiz

[1] Galaktik to'plamlar ichida galaktikalar bir-biriga yaqinlashishi ham mumkin, masalan, Mahalliy to'plam deb ataladigan va bizning Galaktikamizni o'z ichiga olgan to'plamning ichida bir-necha galaktikalar bir-biriga yaqinlashmoqda, hatto, Kichik Magellan Buluti galaktikasi bizning Galaktikamiz bilan bir necha million yildan keyin to'qnashadi ham.

[2] $1 Mps = 10^6 ps$, $1 ps = 1 parsek = 3.26$ yorug'lik yili.

tezlanish bilan kengayayapti.

Ikkinchi muhim fakt - mikroto'lqin nurlanishi foni. Koinot bir necha santimetrli to'lqin uzunligidagi uzunlikka ega bo'lgan nurlanishga to'lgan ekan, bu nurlanish Yerga hamma tomondan bir xil intensivlik bilan kelib tushadi. 1946 yilda G.Gamov Katta Portlash fikrini olg'a surganda uning natijalaridan biri sifatida butun fazoni to'ldirgan mikroto'lqin nurlanishi bo'lishi kerakligini ko'rsatgan edi. Katta Portlash natijasida hosil bo'lgan fotonlardan iborat gaz ilk paytda juda katta temperaturaga ega bo'ladi, vaqt o'tib, (muhit asosan neytral atomlardan iborat holatga o'tganda, keyin ko'rsatamizki, $t = 300000$ yildan keyin) bu qaynoq gaz muhit bilan deyarli o'zaro ta'sir qilmay qo'yadi va uning temperaturasi koinotning hajmi oshgan sari termodinamika qonunlari bo'yicha kamaya boradi (biror hajmli idishda turgan ixtiyoriy gaz temperaturasi shu hajm oshishi bilan pasaya boradi). Hozirga kelib uning temperaturasi $2.7K^0$ ga teng. Ushbu mikroto'lqin nurlanish foni (MNF) yuqori darajada bir jinsli bo'lib (tajriba ko'rsatadiki, uning bir jinslilikdan chetlanishi 10^{-5} dan oshmaydi) Koinotimizning bir jinsliligini tasdiqlaydi. MNF ni Katta Portlashdan boshqa hech qanday yo'l bilan tushuntirib bo'lmaydi. Koinotda galaktikalar, yulduzlar, yulduzlararo chang va gazlar, SuperNovae (o'ta Yangi) yulduzlar, kvazarlar va h.k.lar juda ko'p, ularning hammasi o'zidan har xil nur chiqaradi va, birinchi qarashda, ushbu MNF ham shular tomondan hosil qilingan bo'lib ko'rinishi mumkin. Ammo, shu yo'l bilan hosil qilingan nurlanishning spektri juda bir notekis taqsimlangan to'lqin uzunliklaridan iborat bo'lishi kerak, MNF ning spektri esa qora jism nurlanishi spektriga mos keladi. Ya'ni, MNF - muvozanat holatidagi fotonlar gazi ekan, yulduzlar, galaktikalar va h.k. hosil qilgan nurlanish haqida biz bunday deya olmaymiz. Ikkinchidan, MNF ning zichligi hamma galaktika va yulduzlarning hosil qilishi mumkin bo'lgan nurlanish zichligidan taxminan 10^2 marta kattadir (1 cm^3 da 400 foton, energiya zichligi $\varepsilon = 4 \cdot 10^{-13}\, erg/cm^3$). Shu sabablarga ko'ra MNF ning mavjudligi Katta Portlash g'oyasining eng muhim tasdig'i sifatida qaraladi.

Katta Portlash stsenariysini ko'rib chiqaylik. Avvalam bor, dunyoviy konstantalardan vaqt o'lchamligiga ega bo'lgan kattalikni tuzaylik (uni ***Plank vaqti*** deyiladi): $t_P = \hbar^{1/2} G^{1/2} c^{-5/2} \simeq 5.4 \cdot 10^{-44}$ sek. Mavjud bo'lgan fanimiz mana shu sondan kichik bo'lgan vaqt intervali haqida hech narsa deya olmaydi. Shuning uchun Koinot tarixini $t = t_P$ dan boshlashimiz kerak.

Agarda boshlang'ich momentdan oldin modda bo'lmagan bo'lsa, keyin u qayerdan paydo bo'lgan? Axir energiyaning saqlanish qonuni (ixtiyoriy massaning energiyasi bor) buzilishi mumkin emas-ku? Bu savolga massa defecti (tanqisligi) tushunchasi orqali javob berish mumkin. Oddiy misol sifatida deytronni olib qaraylik. Deytronning massasi M_d unga kirgan proton va neytronlarning massalarining yig'indisidan kam:

$$M_d = M_p + M_n - \Delta E_d / c^2.$$

Bu yerda $\Delta E_d = 2.2$ Mev - deytronning massa defekti. Ushbu massa defekti yadroviy o'zaro ta'sir natijasida paydo bo'ladi. Deytronni parchalash uchun unga hech bo'lmaganda mana shu ΔE energiyani berishimiz kerak.

Endi o'zaro bog'langan ikkita massiv yulduzlarni olib ko'raylik, ular orasida tortishish kuchi ta'sir qilsin. Sistemaning massasi

$$M_{2s} = M_1 + M_2 - \frac{G M_1 M_2}{c^2 r}$$

ko'rinishga ega bo'ladi (maqsadimiz faqat prinsipial tushuntirish bo'lgani uchun masalani Nyuton yaqinlashuvida qaraylik). Ko'rinib turibdiki, sistemaning massasi gravitatsion defektga ega. Bu hol (5.8)-formulaning xususiy holidir, o'sha formulada norelativistik yaqinlashuvga o'tsak

$$m = \int_0^a \rho(r)\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}dV$$

ga kelamiz. Kuchsiz maydon yaqinlashuviga o'taylik. Bu holda

$$\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} = \sqrt{1 + \frac{2\varphi}{c^2}} \simeq 1 + \frac{\varphi}{c^2}$$

bo'ladi. Bir jinsli Koinotni ko'zda tutib ρ o'zgarmas holni ko'ramiz va borliq massasini M deb olib u uchun

$$M = \rho V + \int_0^a \rho\varphi\, dV$$

formulaga kelamiz. Ikkinchi had - massa defektini ifodalovchi haddir ($\varphi < 0$). $\rho = const$ bo'lgani uchun

$$\varphi = -\frac{Gm}{r} = -\frac{4\pi G\rho r^2}{3}$$

deb olamiz va

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho a^3 - \frac{16\pi^2 G\rho^2}{15}a^5$$

ga kelamiz. Bu mulohazalarda zichlikning o'zgarmasligi muhim bo'ldi. Eng ajoyibi shundaki, ikkinchi xad birinchi xadga nisbatan radius o'sishi bilan tezroq o'sa boshlaydi va radiusning

$$a = \sqrt{\frac{15}{4\pi G\rho}}$$

ga teng qiymatida sistemaning to'liq massasi nolga teng bo'ladi. Ya'ni, Koinotimizning to'liq massasi massaning gravitatsion defekti hisobiga nolga teng bo'lishi mumkin, vaholangki, butun

Koinot moddaga to'lgan bo'ladi. Bu, albatta, bir soddalashtirilgan misol, undan maqsad Koinotda massa qayerdan paydo bo'ldi degan savolga javob berish mumkinligini ko'rsatish.

Koinotimizning Katta Portlash ssenariysiga asoslangan tarixi quyidagichadir. Birinchi navbatda temperatura va vaqt orasidagi bog'lanishdan boshlaylik:

$$T(\text{Mev}) \simeq t^{-1/2}(\text{sek}). \tag{8.1}$$

Bu formula o'ta qaynoq relativistik modda uchun to'g'ridir, uning kelib chiqishini [9]-dan topish mumkin (187-betda ham shunday bog'lanish keltirib chiqarilgan). Chap tomonda temperatura megaelektronvoltlarda berilgan, 1 ev = 11600°K ekanligini hisobga olsak 1 Mev $\approx 10^{10}$°K gradusga to'g'ri keladi. Demak, $t = 10^{-10}$ sekundda $T \approx 10^{15}$ gradus bo'lgan, $t = 0.1$ sekundda esa $T \approx 30000°$ gradus bo'lgan. Koinot tez kengayib (va sovub) borgan.

Shu joyda bir narsaga to'xtalib o'tishimiz kerak. Zamonaviy qarashlar bo'yicha temperaturaning o'zgarishi bilan sistemaning simmetriyasi o'zgarishi mumkin, ma'lum bir temperaturalarda sistemada ikkinchi tur fazaviy o'tishlar ro'y beradi. Masalan, Kyuri temperaturasidan yuqorida temir bo'lagining magnit momenti bo'lmaydi, temperatura Kyuri nuqtasidan pastga o'tsa bu moment (o'zining yo'nalishi bilan birga) spontan ravishda paydo bo'ladi. Xuddi shunday ravishda zamonaviy nazariyalar elementar zarrachalarning massalarining paydo bo'lishini ham tushuntiradi. Bu sodda misollar haqiqatan juda chuqur fizik va matematik nazariyalarga asoslangandir va hozirgi tezlatkichlarda kuzatiladigan elementar zarrachalar sohasidagi hodisalarni yuqori aniqlikda tushuntirib beradi.

Hozirgi qarashlar bo'yicha taxminan $t \sim 10^{-40}$ – sekundda kvant jarayonlari natijasida modda paydo bo'lgan, ungacha faqat inflanton degan maydongina bo'lgan. $t = 10^{-10}$ sekundda standart modelga kiruvchi massali Z va $W^{\pm}$ bozonlar paydo bo'lgan, bu paytda kvarklar va gluonlar (adronlarning tashkil qiluvchilari) ozod holatda bo'lgan. $t \sim 10^{-4}$ sekundda esa ($T \approx 100$Mev) ular adronlarni hosil qilgan. $t \sim 1$ sekunddan $t \sim 100$ sekundgacha vaqt nukleosintez davri deyiladi, bu davrda geliy, deyteri va litiy yadrolari paydo bo'ladi. Temperatura 3000°K gacha tushganda (Koinotning yoshi ~ 300000 yil bo'lganda) atomlar paydo bo'la boshlaydi, modda birlamchi fotonlar uchun musaffo bo'lib qoladi. Shu momentdan boshlab fotonlar gazi (birlamchi nurlanish) modda bilan deyarli o'zaro ta'sir qilmaydi va mustaqil ravishda Koinot bilan birga kengayib boradi va o'zining hozirgi 2.7°K temperaturasiga keladi.

Yuqoridagi qarashlarning mufassal bayonini maxsus adabiyotlarda topish mumkin (masalan, [9]).

8.2 Metrika

Koinotimiz kosmologik masshtablarda (fazoviy) bir jinsli va izotropligi metrik tenzorga shunday shartlar qo'yilishiga olib keladiki, unga kirgan faqat bitta kattalikkina noaniqligicha qoladi. Fazoning izotroplik sharti

$$g_{0i} = 0$$

ga olib keladi, aks holda, uchta kattalik g_{0i} ni bir vektorning komponentalari sifatida qarab fazodagi qandaydir bir yo'nalishga bog'lashimiz mumkin bo'lar edi. Demak,

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 - dl^2$$

ekan. Fazoning bir jinsliligi g_{00} ning faqat vaqt koordinatasi x^0 gagina bog'liq bo'lishi mumkinligini bildiradi. Bunday holda hamma vaqt $g_{00} = 1$ deb tanlab olishimiz mumkin. Demak,

$$ds^2 = c^2dt^2 - dl^2$$

ekan. $g_{0i} = 0$ bo'lgan sistemalarni sinxron sistemalar degan edik, bu sistemalarda t o'zgaruvchi sinxron xususiy vaqt bo'ladi (115-betdagi (33)-mashqga qarang).

Koinotimizning fazoviy bir jinsli va izotropliligi intervalning fazoviy qismi uchun

$$dl^2 = a^2\left(f^2(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2\right)$$

ifodani olishimiz kerakligini bildiradi. Bu bir jinsli va sferik simmetrik fazo uchun eng umumiy ifoda. Noma'lum funksiya $f(r)$ ni quyidagicha mulohazadan topamiz. Agar uch o'lchamli fazo o'zining har bir nuqtasida bir jinsli bo'lsa, uning skalar egriligi R o'zgarmas son bo'lishi kerak. Shu shartdan $f(r)$ ni topamiz. Bizning holimizda metrika g_{ik} ning faqat diagonal elementlarigina noldan farqli ekanligini ishlatib

$$g_{rr} = a^2 f^2, \qquad g_{\theta\theta} = a^2 r^2, \qquad g_{\varphi\varphi} = a^2 r^2 \sin^2\theta,$$

kontravariant metrika uchun

$$g^{rr} = (a^2 f^2)^{-1}, \qquad g^{\theta\theta} = (a^2 r^2)^{-1}, \qquad g^{\varphi\varphi} = (a^2 r^2 \sin^2\theta)^{-1}$$

larni darhol topish mumkin. Metrikaning diagonalligi Kristoffel simvollarini ham osongina topishga imkon beradi. Ularning ichida noldan farqlilari:

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -rf^{-2}, \quad \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \operatorname{ctg}\theta = \Gamma^\varphi_{\varphi\theta}, \quad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -rf^{-2}\sin^2\theta,$$

$$\Gamma^r_{rr} = (\ln f)', \quad \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{2}\sin 2\theta, \quad \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{r} = \Gamma^\varphi_{\varphi r},$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r} = \Gamma^\theta_{\theta r}.$$

Shu ifodalardan foydalanib, Richchi tenzorining hamma komponentalarini topamiz:

$$R_{rr} = -\frac{2f'}{rf}, \quad R_{\theta\theta} = -1 + f^{-2} - rf'f^{-3}, \quad R_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta R_{\theta\theta}. \tag{8.2}$$

Richchi skalyari:

$$R = g^{rr}R_{rr} + g^{\theta\theta}R_{\theta\theta} + g^{\varphi\varphi}R_{\varphi\varphi} = \frac{2}{a^2r^2}\frac{d}{dr}\left[r(1-f^{-2})\right] = A, \tag{8.3}$$

bu yerda A - ixtiyoriy konstanta. R-ning o′zgarmas sonligi fazoning bir jinsliligidan kelib chiqadi. Shu tenglamani integrallasak

$$r(1-f^{-2}) = Cr^3 + C_2$$

ga kelamiz. Koordinat boshida $f(r) \to 1$ bo′lishi kerak, demak, $C_2 = 0$. Demak,

$$f^2(r) = \frac{1}{1-Cr^2} \tag{8.4}$$

ekan, masshtabni tanlash o′z qo′limizda bo′lgani uchun yangi $r' = |C|^{1/2}r$ radius kiritamiz va metrikamizni

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right) \tag{8.5}$$

ko′rinishga keltirib olamiz. Bu yerda biz bir koeffitsient kiritdik: $k = (+1, 0, -1)$ ((8.4)-formuladagi C ning ishorasini va nolga teng bo′lishi mumkinligini hisobga olish uchun) va avvalgi formulalardagi (fazoviy koordinatlarga nisbatan) o′zgarmas bo′lgan son a ni $a(t)$ deb belgiladik.

Topilgan metrika (8.5) ***Robertson-Uoker metrikasi*** deyiladi.

Yechish jarayonida paydo bo′lgan koeffitsient k egrilik skalari R ning ishorasi bilan bo′g′liq. (8.4)-ni (8.3)-ga oborib qo′ysak

$$R = \frac{6C}{a^2} \to \frac{6k}{a^2}$$

ni topamiz. $|C|^{1/2}$ ni radiusning ta'rifiga kiritib yuborganimiz uchun C ning ishorasi k egrilikning ishorasini va a - fazoning radiusini bildiradi. $k = +1$ o′zgarmas musbat egrilikli fazoga, $k = 0$ - egriligi nolga teng bo′lgan fazoga va $k = -1$ - ergiligi o'zgarmas manfiy bo'lgan fazoga to'g'ri keladi. (8.5)-dagi $a(t)$ - radius o'lchamligiga ega, r esa o'lchamliksiz kattalikdir.

Topilgan metrikani muhokama qilish uchun uning ustida quyidagi almashtirish bajaraylik:

$$r = \begin{cases} \sin\chi, & k = +1, \\ \chi, & k = 0, \\ \sinh\chi, & k = -1. \end{cases} \tag{8.6}$$

Uchchala holda ham

$$\frac{dr^2}{1 - kr^2} = d\chi^2$$

bo'ladi va metrikamizning fazoviy qismi

$$a^2\left[d\chi^2 + \Sigma^2(\chi)d\Omega^2\right]$$

ko'rinishni oladi, bu yerda

$$\Sigma^2(\chi) = \begin{cases} \sin^2\chi, & k = +1, \\ \chi^2, & k = 0, \\ \sinh^2\chi, & k = -1. \end{cases}$$

Endi biz har bir holni alohida ko'rib chiqamiz.

1) $\mathbf{k = +1}$ ***bo'lsin (yopiq model).***
Bu holda

$$ds^2 = c^2dt^2 - dl^2,\ \ dl^2 = a^2(t)\left[d\chi^2 + \sin^2\chi\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right] \tag{8.7}$$

bo'ladi. Aylananing radiusga nisbatini topaylik. $2\pi r$ uzunlikdagi aylanaga

$$\int\limits_0^r \frac{adr}{\sqrt{1-r^2}} = a \arcsin r > ar$$

radius mos keladi, demak, aylananing uning radiusiga nisbati 2π dan kichik bo'ladi.

Ushbu metrikaning fazoviy qismi to'rt o'lchamli Evklid fazosidagi uch o'lchamli gipersferaning o'zidir. Buni osongina ko'rish mumkin. To'rt o'lchamli (to'rt o'lchamli fazo-vaqtimizga hech qanday aloqasi yoq!) Evklid fazosi (x_1, x_2, x_3, x_4) da sferik koordinat sistemasiga o'tamiz:

$$x_1 = a\,\sin\chi\sin\theta\cos\varphi, \quad x_2 = a\,\sin\chi\sin\theta\sin\varphi,$$

$$x_3 = a\,\sin\chi\cos\theta, \quad x_4 = a\,\cos\chi.$$

Ko'rinib turibdiki

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2,$$

bu esa - shu to'rt o'lchamli fazodagi uch o'lchamli gipersferaning formulasi. Ushbu gipersferaning ustidagi uzunlik elementi

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 = a^2\left[d\chi^2 + \sin^2\chi\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]$$

ko'rinishga ega bo'ladi, bu esa (8.7)-ning fazoviy qismining o'zidir. Shu gipersferaning hajmi

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} a^3\sin^2\chi\sin\theta d\chi d\theta d\varphi = 2\pi^2 a^3,$$

ya'ni, cheklangandir. Buni radial masofa $ar = a\sin\chi$ dunyomizning radiusi a dan katta qiymat qabul qila olmasligidan ham ko'rishimiz mumkin edi. Ya'ni, musbat egrilikka ega $k = +1$ bo'lgan fazo cheklangan bo'ladi, Ammo, uning chegarasi bo'lmaydi. Uch o'lchamli gipersferani ko'z oldiga keltirish qiyin, ammo ikki o'lchamli sfera misolida yuqoridagi gap tushunarli bo'ladi - uning chegarasi yoq, Ammo, sirti cheklangan. Masalan, bir nuqtadan nur tarqala boshlasa, u cheksiz vaqt Koinotda harakat qilib yuraveradi - Koinotning chegarasi yo'q, hajmi esa cheklangan. Bunday model Koinotning ***yopiq modeli*** deyiladi.

2) **k** $= -1$ ***bo'lsin (ochiq model).***
Bu holda

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]$$

bo'ladi. Fazoning radiusini bildiruvchi ar kattalik 0 dan ∞ gacha hamma qiymatlarni qabul qila oladi. Radial parametr 0 dan r gacha o'zgarsa unga

$$\int_0^r \frac{adr}{\sqrt{1+r^2}} = a \operatorname{arcsinh} r < ar$$

radius to'g'ri keladi, ya'ni, aylana uzunligining radiusga nisbati $2\pi ar$ dan katta bo'ladi. Koinotimizning hajmi cheksiz bo'ladi, bu holni ***ochiq model*** deyiladi. (8.6)-almashtirish bo'yicha metrikamiz

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\left[d\chi^2 + \sinh^2\chi\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]$$

holga keltiriladi.

3) **k** $= 0$ ***bo'lsin.***
Bu hol tekis fazoga to'g'ri keladi: $R = 0$. Metrikaning ko'rinishi

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\left[dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]$$

bunga isbot. Darhaqiqat, tekis uch o'lchamli Evklid fazosida

$$x = ar\sin\theta\cos\varphi, \ y = ar\sin\theta\sin\varphi, \ z = ar\cos\theta$$

almashtirish bajarsak

$$a^2\left[dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right] = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

ekanligini ko'ramiz. Bu hol cheksiz fazoga to'g'ri keladi.

8.3 Fridman tenglamalari

Einshtein tenglamalarining yechimlariga o'taylik. Tenglamalarni yozib olishdan oldin ikkita masalani hal qilishimiz kerak. Fazoni to'ldirgan moddaning energiya-impuls tenzori qay ko'rinishda olinishi kerak? Odatda, bu tenzor modda fazoni tekis to'ldirgani uchun ideal suyuqlik uchun yozilgan holda olinadi. Faqat unga kirgan impulslar nolga tenglashtirilishi kerak (modda fazoni bir jinsli va izotrop ravishda to'ldirgan ekan u yerda hech qanday ajralib turgan yo'nalish bo'lmaydi):

$$T_0^0 = \rho c^2, \qquad T_i^i = -p\,\delta_i^i. \tag{8.8}$$

Tenglamalarning chap tomoniga o'taylik. Metrika diagonal bo'lgan holdagi Kristoffel simvollari uchun formulalardan foydalanib Richchi tenzorining diagonal elementlari uchun (nodiagonal elementlar nolga teng) quyidagilarni topishimiz mumkin:

$$R_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{a}; \qquad R_{0i} = 0; \qquad R_{ii} = R_{ii}^{(3)} - \left(\ddot{a}a + 2\dot{a}^2\right)\frac{g_{ii}}{a^2}.$$

Bu yerda paydo bo'lgan $R_{ii}^{(3)}$ uch o'lchamli fazo Richchi tenzorining diagonal elementlaridir. Biz ularni avval hisoblab bo'lganmiz - (8.2)-bo'yicha

$$R_{ii}^{(3)} = -2k\frac{g_{ii}}{a^2}$$

deb yozishimiz mumkin (isbot qiling). Demak,

$$R_{ii} = -\left(\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2k\right)\frac{g_{ii}}{a^2}.$$

Einshtein tenglamalarining

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)$$

ko'rinishidan foydalanamiz. $T=\rho c^2-3p$ ni hisobga olib

$$
\begin{aligned}
-\frac{3\ddot{a}}{a} &= \frac{4\pi G}{c^4}(\rho c^2+3p); \\
\ddot{a}a+2\dot{a}^2+2k &= \frac{4\pi G}{c^4}(\rho c^2-p)a^2,
\end{aligned}
\tag{8.9}
$$

tenglamalarga kelamiz. Agar birinchi tenglamadagi $\ddot{a}$ ni ikkinchi tenglamaga oborib qo'ysak, Koinot radiusi uchun birinchi tartibli tenglama olamiz:

$$\left(\frac{da}{cdt}\right)^2+k=\frac{8\pi G}{3c^2}\rho a^2. \tag{8.10}$$

Bu tenglamaga ikkita noma'lum kirgan - a va ρ. Ularni bog'laydigan yana bir tenglamani energiya saqlanish qonunidan olamiz:

$$T^{\mu}_{\nu;\mu}=\partial_\mu T^{\mu}_{\nu}+\Gamma^{\mu}_{\sigma\mu}T^{\sigma}_{\nu}-\Gamma^{\sigma}_{\nu\mu}T^{\mu}_{\sigma}=0. \tag{8.11}$$

Bu tenglamaning 0-nchi komponentasi

$$\dot{\rho}c^2+3(\rho c^2+p)\frac{\dot{a}}{a}=0, \tag{8.12}$$

yoki,

$$\frac{d}{da}\left(\rho a^3\right)=-3p\,a^2/c^2 \tag{8.13}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

40-Mashq:
(8.12)-tenglamani (8.13)-ko'rinishga keltiring.

(8.11)-ning fazoviy komponentalari yangi tenglama bermaydi.

Uchta no'malum uchun - a, ρ, p - ikkita tenglama topdik. Uchinchi tenglama moddaning holat tenglamasi bo'lishi kerak:

$$p=p(\rho).$$

Ravshanlik maqsadida topilgan tenglamalar sistemasini yana bir yozib olaylik:

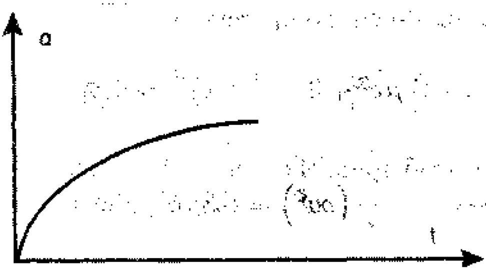
$$\left(\frac{da}{cdt}\right)^2 + k = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho a^2, \quad \frac{d}{da}\left(\rho a^3\right) = -3p\, a^2/c^2, \quad p = p\,(\rho). \tag{8.14}$$

Bu tenglamalar sistemasi ***F r i d m a n n tenglamalari*** deyiladi.

41-Mashq:

(8.14)-tenglamalarning yechimlari (8.9)-tenglamalarni avtomatik ravishda qanoatlantirishini ko'rsating.

(8.9)-ning birinchisidan toki $\rho c^2 + 3p > 0$ bo'lganda $\ddot{a} < 0$ bo'lishi va $\dot{a} > 0$ ekanligidan (eksperimantal fakt) kelib chiqadiki, $a(t)$ funksiya yuqoriga qarab bo'rttirilgan bo'lib (8.1)-rasmda ko'rsatilgan ko'rinishga ega bo'lishi kerak. Qandaydir vaqt momentida albatta $a = 0$ bo'lishi kerak, tabi-



Rasm 8.1: $a(t)$-ning vaqtga bog'liqlik grafigi

iyki, bu vaqt momentini $t = 0$ vaqt momenti deb qabul qilamiz va hozirgi vaqt $t = t_0$ ga Koinotning yoshi ma'nosini beramiz. Agar $\ddot{a} = 0$ bo'lsa, $\dot{a} = const = c_1$ boladi, va demak,

$$a(t) = c_1 \cdot t, \quad c_1 = \frac{a(t)}{t}$$

bo'ladi. Bundan o'z navbatida

$$a(t) = a(t_0)\frac{t}{t_0}$$

kelib chiqadi. Agar hozirgi vaqtdagi Xabbl doimiysini

$$H(t_0) = \dot{a}(t_0)/a(t_0)$$

deb belgilasak yuqoridagi formulalardan Koinotning yoshi uchun

$$t_0 = H^{-1}(t_0)$$

formulani olamiz. Hozirgi paytda $H = 72\ km/(s \cdot Mps)$ deb hisoblanadi, bu Koinotimizning yoshi $t_0 \simeq 13.5$ milliard yil degani. Agar tezlanish $\ddot{a} < 0$ bo'lsa, Koinotimiznig yoshi Xabbl yoshi t_0 dan kichik bo'ladi. Bu mulohazalar Λ-had yo'q degan farazga to'g'ri keladi, Λ-had mavjud bo'lgan hol oxirgi paragrafda ko'rilgan.

8.4 Fridman tenglamalarining yechimlari

8.4.1 Radiatsiya asosiy bo'lgan davr

Katta Portlash nazariyasi bo'yicha Koinot endi paydo bo'lganda undagi modda temperaturasi juda yuqori bo'lgan, bu degani, hamma zarralar relativistik tezliklarga ega bo'lgan. Relativistik (ideal) gazning holat tenglamasi

$$p = \rho c^2/3. \tag{8.15}$$

Bunday davr nurlanish asosiy bo'lgan davr deyiladi, sababi - haqiqatan, (8.15)-tenglama massasiz zarralar uchungina, ya'ni, fotonlardan iborat gaz – nurlanish – uchungina aniq tenglamadir. Katta Portlashdan keyin hamma zarrachalarning tezliklari shu darajada katta bo'ladiki, impulsning energiyaga qoshgan hissasi ularning massalarining hissasidan ko'p marta katta bo'ladi va bunday zarrachalarni massasiz deb qarashimiz haqiqatan deyarli farq qilmaydi. Bu tenglamani Fridman tenglamalari sistemasi (8.14)-ga olib borib qo'ysak ularning ikkinchisi

$$\frac{d}{da}\left(\rho a^3\right) = -\rho a^2$$

ko'rinishga keladi. Osongina integrallash natijasida

$$\rho a^4 = const$$

ekanligini topamiz. Konstantani $\rho a^4 = \rho_0 a_0^4$ deb belgilab zichlikni radius orqali

$$\rho = \rho_0 \frac{a_0^4}{a^4} \qquad (8.16)$$

ko'rinishda topib olamiz. (8.14)-sistemaning birinchi tenglamasi esa quyidagi ko'rinishga keltiriladi:

$$\left(\frac{da}{cdt}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho_0 a_0^4}{3c^2}\frac{1}{a^2} - k. \qquad (8.17)$$

Bunday keyingi yechim k-ning ishorasiga bog'liq bo'ladi.

$$\frac{8\pi G\rho_0 a_0^4}{3c^2} = L^2$$

belgilash kiritaylik (chap tomon sm^2 o'lchamlikka ega bo'lgani uchun). Bu holda (8.17)-dan

$$\int_0^a \frac{ada}{\sqrt{L^2 - ka^2}} = ct + const \qquad (8.18)$$

ni olamiz. Integrallash doimiysi $a(0) = 0$ shartidan tanlab olinadi.

k = +1 ***bo'lsin (yopiq model).***

Integral ostida $a = L\sin\eta$ almashtirish bajarib, quyidagilarni topamiz (η faqat musbat bo'ladi)

$$ct = L(1 - \cos\eta), \qquad a(t) = L\sin\eta. \qquad (8.19)$$

Modda relativistik va uning zichligi (8.15)-qonunga bo'ysunadigan davr faqat kichik t lar uchun o'rinli deb qaralishi mumkin. Shunga yarasha η ham kichik bo'lishi kerak va ko'rilyapgan davr uchun

$$a^2 \simeq cLt \tag{8.20}$$

formulaga kelamiz. Shu joyda temperatura va vaqt orasidagi munosabatni olishimiz mumkin:

$$T \sim \varepsilon \sim \rho a^3 \sim \frac{1}{a} \sim t^{-1/2}. \tag{8.21}$$

Bu formula 175-betdagi (8.1)-formulani eslatadi.

k = −1 ***bo'lsin (ochiq model).***
Bu holda $a = L\,\mathrm{sh}\,\eta$ almashtirish natijasida

$$ct = L(\mathrm{ch}\,\eta - 1), \qquad a = L\,\mathrm{sh}\,\eta \tag{8.22}$$

tenglamalarni olamiz. Kichik vaqt momentlari uchun yana o'sha (8.21)-formulani oldik.

k = 0 ***bo'lsin*** .
Bu holda

$$a^2 = 2cLt \tag{8.23}$$

formulaga kelamiz. Y'ani, Koinot radiusi vaqt o'tishi bilan

$$a(t) \sim t^{1/2}$$

qonun bo'yicha o'sadi.

8.4.2 Modda asosiy bo'lgan davr

Modda asosiy bo'lgan deganda biz sovugan Koinotni tushunamiz, bu holda nurlanish zichligi diskret taqsimlangan modda zichligidan juda kam bo'ladi. Shunga yarasha $p \approx 0$ deb qaraymiz. Fridman tenglamalarining ikkinchisidan darhol

$$\rho a^3 = const = \rho_0 a_0^3 \tag{8.24}$$

munosabatni topamiz va, demak,

$$\left(\frac{da}{cdt}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho_0 a_0^3}{3c^2}\frac{1}{a} - k. \tag{8.25}$$

tenglamaga kelamiz.

$$L_1 = \frac{8\pi G\rho_0 a_0^3}{3c^2}$$

belgilash kiritib

$$\int_0^a \frac{\sqrt{a}da}{\sqrt{L_1 - ka}} = ct + const \tag{8.26}$$

yechimga kelamiz. Bu holda ham integrallash doimiysi $a(0) = 0$ shartidan topiladi. Yana uch holni ko'ramiz.

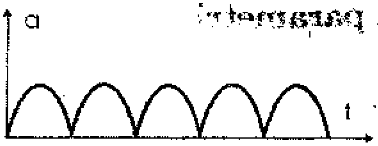
k = +1 ***bo'lsin (yopiq model).***
$a = L_1 \sin^2\eta$ almashtirish natijasida

$$a = L_1 \sin^2\eta, \qquad ct = L_1(\eta - \frac{1}{2}\sin 2\eta)$$

formulalarni olamiz. Bularning birinchisi juda ajoyib natijaga olib keldi: Koinotning radiusi $t = 0$ da nolga teng bo'lib $t_1 = \pi L_1/(2c)$ vaqtga kelib o'zining maksimal qiymati L_1 ga teng bo'ladi. Shundan keyin Koinotning radiusi yana kamaya boradi. Koinotning radiusining vaqtga bog'liqligi (8.2)-rasmda ko'rsatilgan.

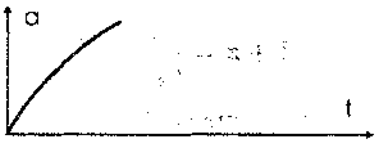
k = −1 ***bo'lsin (ochiq model).***
Bu holda $a = L_1 \,\mathrm{sh}^2\eta$ almashtirish bajarib

$$a = L_1 \,\mathrm{sh}^2\eta, \qquad ct = L_1(\frac{1}{2}\mathrm{sh}\, 2\eta - \eta)$$



Rasm 8.2: Yopiq model uchun radiusning vaqtga bog'liqlik grafigi

formulalarni olamiz. Ko'rinib turibdiki, Koinotning radiusi $t \to \infty$ da cheksizlikka intiladi. Bu hol (8.3)-rasmda



Rasm 8.3: Ochiq model uchun radiusning vaqtga bog'liqlik grafigi

ko'rsatilgan.

k = 0 ***bo'lsin*** .
Bu holda

$$a = \left(\frac{3}{2}L_1^{1/2}ct\right)^{2/3}$$

formulaga kelamiz. Koinotning radiusi yana uzliksiz oshib borishi kerak (ochiq holdan sekinroq ravishda).

Agar radiatsiya asosiy bo'lgan davrga taalluqli formulalar faqat kichik vaqtlar uchungina qo'llanishi mumkin bo'lsa, modda zichligi yuqori bo'lgan holdagi formulalar katta vaqt davrlariga qo'llanilishi kerak.

8.5 Masofa parametri

Bobning boshida galaktikalar bir-biridan o'zaro masofasiga proporsional bo'lgan tezlik bilan yzoqlashyapti deyilgan edi. Bu uzoqlashish spektral metodlar bilan aniqlangan edi. Galaktikalardan kelayotgan yorug'lik nuri spektrning qizil tomoniga siljigan bo'lib chiqqan, bu ***qizil siljish*** Doppler effekti deb talqin qilinadi. Agar nurning galaktika sistemasidagi chastotasini ν_{nurl} va bizda kuzatilayapgan chastotasini ν_{kuzat} deb belgilasak $\nu_{kuzat} < \nu_{nurl}$ bo'ladi. Odatda

$$1 + z = \frac{\nu_{nurl}}{\nu_{kuzat}}$$

formula orqali yangi z parametri kiritiladi. Doppler qonuni bo'yicha nurlanuvchi obyekt bizdan qancha katta tezlik bilan uzoqlashayapgan bo'lsa, uning kuzatilayotgan chastotasi shuncha kamayadi. Bunga Xabbl qonunini qo'llasak kiritilgan parametr z galaktikagacha bo'lgan masofani ifodalovchi kattalik ekanligi kelib chiqadi.

Doppler effekti nazariyasi bo'yicha

$$\nu_{nurl} - \nu_{kuzat} = \nu_{nurl}\frac{v}{c}, \qquad (8.27)$$

bu yerda v - o'zaro tezlik (bu formula norelativistik tezliklar uchun aniq formuladir, relativistik tezliklarda unga $(v/c)^2$ ga proporsional hadlarni kiritishimiz kerak). Xabbl qonuni bo'yicha $v = Hl$, l – o'zaro masofa. Agar nurlanish va kuzatish nuqtalarini yaqin deb olsak, Doppler qonuni (8.27) aniq qonun bo'ladi va uni quyidagi ko'rinishda olamiz:

$$\frac{\nu_{nurl} - \nu_{kuzat}}{\nu_{nurl}} = \frac{1}{c}Hl.$$

Demak,

$$\frac{z}{1+z} = \frac{1}{c}Hl,$$

yoki,

$$z = \frac{Hl}{c - Hl} = \frac{v}{c - v}.$$

Kuzatilyapgan galaktika bizdan qancha uzoq bo'lsa, uning tezligi yorug'lik tezligiga shuncha yaqin bo'ladi va z-faktor shuncha katta bo'ladi. Masalan, biror galaktika uchun $z = 0.1$ bo'lsin. Bunday galaktika bizdan $v = c/11 \simeq 0.09\,c$ tezlik bilan uzoqlashyapgan bo'ladi. Ungacha masofa esa $l = zc/H \simeq 400$ megaparsekka teng bo'ladi. $z = 1$ bo'lgan galaktikaning bizga nisbatan tezligi va bizgacha masofasi yuqoridagi formulalar bo'yicha $v = 0.5\,c$ va $l \simeq 4$ gigaparsek bo'ladi.

8.6 Kritik zichlik

Koinotning ochiq yoki yopiq bo'lishi undagi modda zichligi bilan bevosita bog'langandir. Buni ko'rish uchun yangi

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

kattalik kiritamiz va (8.10) tenglamani

$$\rho - \rho_c = \frac{3k}{8\pi G a^2}$$

ko'rinishga keltirib olamiz. Kiritilgan yangi kattaligimiz ρ_c ***kritik zichlik*** deyiladi. Xabbl sonining qiymatini qo'ysak $\rho_c \simeq 10^{-29} g/cm^3$ ekanligini topamiz. Ko'rinib turibdiki, agar $\rho > \rho_c$ bo'lsa, chap tomon musbatdir, va, demak, $k > 0$. Agar $\rho < \rho_c$ bo'lsa, unda $k < 0$ bo'lishi kerak. Demak, Koinotdagi modda zichligi ρ_c dan katta bo'lganda Koinotimiz yopiq bo'lishi kerak, modda zichligi ρ_c dan kichik bo'lganda esa Koinotimiz ochiq va cheklanmagan bo'lishi kerak. $\rho = \rho_c$ hol esa $k = 0$ ga to'g'ri keladi, bu - tekis va cheklanmagan fazoga mos keladi.

8.7 Kosmologik doimiy

Kosmologik doimiy Λ (4.3)-paragrafda ma'lum mulohazalar asosida kiritilgan edi. O'sha yerda bu doimiyning son qiymati zamonaviy kuzatishlar asosida juda kichik bo'lib chiqayotgani ham gapirilgan edi. Shu sababdan ko'pgina manbalarda $\Lambda = 0$ deb olinadi. Ammo, XX-asrning oxiriga kelib vaziyat keskin o'zgardi. Ma'lum bo'lishicha, Koinotni hosil qiluvchi modda quyidagicha taqsimlangan ekan:

- bizga ko'rinadigan modda (yulduzlar, galaktikalar, yulduzlar aro chang va gaz, nurlanish) – 4%;
- ko'rinmaydigan shakldagi modda (inglizchasi - dark matter-qorong'i modda) – 21% – 23%;
- ko'rinmaydigan energiya (dark energy - qorong'i energiya) – 71% – 73%.

Ko'rinmaydigan modda degani nima? XX-asrning 30-yillarida Zwicki (Tsvikki) degan astronom ba'zi-bir galaktikalardagi yulduzlarning tezliklarini o'lchaganda ularning son qiymati shu galaktikadagi ko'rinayotgan modda miqdoriga to'g'ri kelmasligini aniqlangan. Agar galaktikaning massasini M harfi bilan belgilasak, Nyuton qonuni bo'yicha shu galaktika atrofida v tezlik bilan R radiusda aylanayotgan m massali yulduz uchun

$$\frac{GM}{R^2} = \frac{mv^2}{R}$$

deb yozib olishimiz mumkin. Shu formuladan aniqlangan tezliklar galaktikaning kuzatilayotgan massasi M ga to'g'ri kelmagan, bu tezliklarni tushuntirish uchun shu yulduzga ta'sir qilayotgan massa kuzatilayotgan massadan bir-muncha katta bo'lishi kerakligi kelib chiqqan. Bunday ko'rinmaydigan massani ***qorong'i massa*** deb atashgan. Qorong'i massa muAmmo,si ko'p o'n yillar davomida muhokama qilinib oxirida uning Koinot massasiga qo'shgan qissasi yuqorida keltirilgan 21% – 23% ni tashkil qilishi aniqlandi. Bu ishda kosmosga chiqarilgan teleskoplar hal qiluvchi rol o'ynadi. Masalan, ko'pgina galaktikalar ikki xil to'lqin diapazonida rasmga olindi - optik va rentgen diapazonida. Optik diapazonda biz o'rgangan oddiy galaktika rasmi olingan bo'lsa,, rentgen diapazonida shu galaktikani qurshab olgan va o'zidan kuchli rentgen nurlanishi chiqarayotgan va shu galaktikadan bir necha marta katta bo'lgan gaz buluti ko'rinadi. Bunday intensiv rentgen nuri chiqarish uchun ushbu bulutning temperaturasi 6-7 million gradusga teng bo'lishi kerak. Shunday yuqori temperaturali va hajmli gaz massasini nima ushlab turadi? Galaktikaning ko'rinayotgan massasi bunga yetarli emas. Galaktikalarning tarkibiga kirgan va qandaydir sabablar bo'yicha elektromagnit maydon bilan ta'sirlashmaydigan (aks holda biz uni ko'rar edik) modda borligini tan olishga majburmiz.

Kuzatishlar shuni ham ko'rsatadiki, Koinotimiz nafaqat kengayayapti, balki tezlanish bilan kengayayotgan ekan. Koinotning kengayishiga bunday tezlanish bera olish uchun qo'shimcha ko'rinmaydigan energiyani kiritishga to'g'ri keldi. Uning zichligi borliq massa-energiya zichligining 71% – 73% qismini tashkil qilar ekan.

Bu fundamental faktlar bizni chuqur o'ylanishga majbur qiladi. Ko'rinmayotgan modda nimadan iborat? Bu savolga hozircha aniq javob yo'q. Hozirgi taxminlar bo'yicha bu modda supersimmetrik nazariyalarda uchraydigan yangi va hozircha tajribada kuzatilmagan (massasining juda kattaligi sababli) zarrachalar orqali tushuntirilishi mumkin.

Ko'rinmaydigan energiya esa vakuumning xossasi bilan bog'lanishi kerak. Vakuum faqat klassik fizikada bo'shliqqa to'g'ri keladi. Kvantlangan maydonlar nazariyasida vakuum o'ta murakkab nochiziqli kvant muhitga aylanadi, dunyoning hamma fundamental xossalari (yorug'lik tezligining son qiymati, elementar zarrachalar massalarining kelib chiqishi va son qiymati, elementar zaryadning qiymati va h.k.) shu kvant muhitning xossalari orqali tushuntirilishi kerak.

Ko'rinmaydigan energiya zichligini Λ - had orqali tushuntirish mumkin. Λ-xad bo'lganda tenglamalarning ko'rinishi (4.20)-formulada berilgan. Uni biz uchun shu paytda qulayroq bo'lgan ko'rinishda olaylik:

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) - \Lambda g_{\mu\nu}.$$

(8.9)-tenglamalar sistemasining o'rniga

$$\begin{aligned} \ddot{a} &= -\frac{4\pi G}{3c^4}(\rho c^2 + 3p)a + \frac{1}{3}\Lambda a; \\ \dot{a}^2 + k &= \frac{8\pi G}{c^2}\rho + \frac{1}{3}\Lambda a^2 \end{aligned} \tag{8.28}$$

sistemani olamiz. Bu tenglamalarning birinchisi Λ - hadning fizik ma'nosini beradi. Ko'z oldimizga a radiusli sharni tasavvur qilaylik va uning to'liq massasini $M c^2 = 4\pi(\rho c^2 + 3p)/3$ deb belgilaylik (sharning zichligi bir jinsli bo'lsin) va bu sharning ustida turgan zarraning gravitatsion tezlanishini (8.28)-tenglamaning birinchisi orqali ifodalaylik:

$$\ddot{a} = -\frac{GM}{a^2} + \frac{1}{3}\Lambda a.$$

Birinchi had zarrachani markazga tortuvchi oddiy Nyuton tortish kuchi bo'lsa, ikkinchi had ham gravitatsion tabiatga ega bo'lgan kuchdir. U sharning massasiga bog'liq emas, bir jinsli va masofa oshgan sari chiziqli ravishda oshadigan kuchdir. Λ-ning juda kichikligini hisobga olsak bu kuch faqat kosmologik masshtablardagina sezilarli bo'lishi kerak. Λ-ning ishorasi muhim ahamiyatga ega – $\Lambda > 0$ holda bu qo'shimcha kuch itaruvchi kuch bo'ladi, $\Lambda < 0$ holda esa tortishish kuchi bo'ladi. Agar biz Koinotning tezlanish bilan kengayayotganini Λ had bilan bog'lamoqchi bo'lsak, $\Lambda > 0$ deb olishimiz kerak. Bu holda ko'rinmaydigan energiya deb atalgan substansiyamiz mana shu Λ - hadning namoyon bo'lishining o'zidir. Ammo, bu holda (yuqorida ko'rsatganimiz bo'yicha – §(4.3)-ni qarang) koinotimiz manfiy bosimli muhitga to'g'ri keladi. Butun Koinotni chulg'ab olgan tabiati noma'lum bo'lgan manfiy bosimli muhit – bunday reallikni tushuntiradigan nazariya hozircha mavjud emas.

Λ manfiy bo'lgan holda Koinotning kengayishi bir kunmas bir kun albatta siqilish bilan almashinadi. $\Lambda > 0$ holda tenglamalarning yechimlari xilma-xil ko'rinishlarga ega bo'ladi, bunga qiziqqan o'quvchini maxsus adabiyotga yo'llaymiz.

Adabiyotlar

[1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля, М., Наука (1973). (L.Landau, E.Lifshitz. Teoriya polya, Moskva, Nauka.)

[2] Вайнберг С. Гравитация и космология, М., Мир (1975).(Weinberg S., Gravitatsiya i kosmologiya, Moskva, Mir.)

[3] Мизнер Ч., К.Торн, Дж.А.Уилер. Гравитация, тт.1,2,3. М., Мир (1975).(Misner Ch., K.Torn K, A.Uiler, Gravitatsiya, Moskva, Mir.)

[4] Эйнштейн А., О гравитационных волнах, Собр. научн. трудов., т.1, стр.631, М., Наука (1965).(Einshtein A., O gravitatsionnyh volnah, Sobranie nauchnyh trudov, t.1. 631 bet.)

[5] Лайтман А., Пресс В., Прайс Р.,Тюкольский С. Сборник задач по теории относительности и гравитации.М., Мир (1979).(Lightman, Press, Price, Teukolsky. Sbronik zadach po teorii otnositelnosti i gravitatsii.Moskva, Mir.)

[6] Фаддеев Л.Д., Проблема энергии в теории тяготения Эйнштейна, УФН, т.136, 435 (1982).(Faddeev L.D., Problema energii v teorii tyagoteniya Einshteina, UFN,t.136,435 (1982))

[7] Dirac P.A.M., Lectures on Quantum Mechanics (NY)1966

[8] Henneaux M. and Teitelboim C. Quantization of Gauge Systems, Princeton Univ.Press., Princeton, New Jersey (1994).

[9] Долгов А.Д., Зельдович Я.Б., Сажин М.В. Космология ранней вселенной. М., Издательство МГУ (1988).(Dolgov, Zeldovich, Sazhin. Kosmologiya ranney vselennoy. Izdatelstvo MGU.)

Mundarija

Босишга рухсат этилди 03.06.2010. Ҳажми 12,5 босма табоқ.
Бичими 60×84 1/16. Адади 100 нусха. Буюртма 189.
М.Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий Университети
босмахонасида чоп этилди.