

С.П. БАУТИН

ТОРНАДО

И

СИЛА КОРИОЛИСА



НОВОСИБИРСК
"НАУКА"
2008

533.6 - Аэродинамика

УДК ~~533.6~~ 517.95
ББК 22.161.6 + 22.253.3
Б 29

Дифференциальные
Уравнения

Баутин С.П. Торнадо и сила Кориолиса / С.П. Баутин. – Новосибирск: Наука, 2008. – 96 с.

ISBN 978-5-02-023266-2.

В монографии рассмотрены восходящие закрученные потоки газа, встречающиеся в смерчах, торнадо и тропических циклонах. Выдвинута гипотеза об одном свойстве подобных течений газа и на основе этой гипотезы предложена схема возникновения и устойчивого функционирования восходящих закрученных потоков. Для этой схемы указан постоянно присутствующий на Земле источник энергии, поддерживающий устойчивое функционирование таких восходящих закрученных потоков. Построены точные и приближенные решения системы уравнений газовой динамики, описывающие течение газа в различных областях рассматриваемых потоков в соответствии с предложенной схемой их функционирования. Указано, какое внешнее воздействие может привести к разрушению смерчей, торнадо и тропических циклонов, используя разумные энергетические затраты.

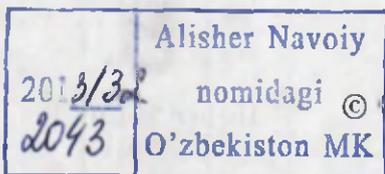
Книга предназначена для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов, интересующихся математическим моделированием течений газа, а также нелинейными уравнениями с частными производными и их приложениями в механике сплошной среды.

Ил. 37. Библиогр.: 20 назв.

Рецензенты

доктор физико-математических наук, профессор *В.В. Башуров*
доктор физико-математических наук, профессор *С.С. Титов*
доктор физико-математических наук, профессор *Л.Б. Чубаров*

Без объявления



ISBN 978-5-02-023266-2

✓
257644

ОГЛАВЛЕНИЕ

СПИСОК ОСНОВНЫХ СОКРАЩЕНИЙ	4
ВВЕДЕНИЕ	5
Глава I. СИЛА КОРИОЛИСА	10
§ 1. Причина возникновения силы Кориолиса.....	10
§ 2. Влияние силы Кориолиса на вертикальное движение материальной точки.....	15
§ 3. Влияние силы Кориолиса на движение материальной точки в горизонтальной плоскости.....	23
Глава II. ВОСХОДЯЩИЙ ЗАКРУЧЕННЫЙ ПОТОК	27
§ 4. Основные наблюдаемые элементы ВЗП.....	27
§ 5. Гипотеза о непроницаемости стенок ВЗП.....	28
§ 6. Структура ВЗП, следующая из гипотезы.....	29
§ 7. Возникновение ВЗП под влиянием силы Кориолиса.....	32
§ 8. Энергия для самоподдержания устойчивого функционирования ВЗП.....	37
§ 9. Об одном визуальном эффекте ВЗП.....	42
§ 10. Исчезновения ВЗП естественным путем.....	45
§ 11. Проверка гипотезы натурными наблюдениями.....	48
§ 12. Теоретическая проверка гипотезы.....	48
§ 13. Уничтожение ВЗП внешним воздействием.....	49
Глава III. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗП	54
§ 14. Система уравнений газовой динамики с учетом силы Кориолиса.....	54
§ 15. Возникновение закрутки в придонной части ВЗП.....	67
§ 16. Стационарное течение в придонной части ВЗП.....	73
§ 17. Стационарное течение в вертикальной части ВЗП.....	78
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	91
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ	96

СПИСОК ОСНОВНЫХ СОКРАЩЕНИЙ

ВЗП – восходящий закрученный поток

СК – сила Кориолиса

СЛАУ – система линейных алгебраических уравнений

СОДУ – система обыкновенных дифференциальных уравнений

СУГД – система уравнений газовой динамики

ВВЕДЕНИЕ

Почти десять лет назад, посмотрев фильм о торнадо, достаточно неожиданно для самого себя вспомнил, что у меня есть статья на близкую тему [1]. В ней описываются течения газа, имеющие некоторые общие детали с течением газа в торнадо. И сразу появились идеи об их математическом моделировании и, главное, о возможных способах уничтожения таких течений (см. статью [2]).

Весной этого года начал изучать течения газа в торнадо и тропических циклонах. Причин этому две. Во-первых, в прошлом году мною совместно с учениками был закончен начатый четырнадцать лет тому назад достаточно большой и продолжительный цикл исследований по математическому моделированию сложных течений газа аналитическими и численными методами [3-7]. Во-вторых, те жертвы и разрушения, что приносят тропические циклоны (например, циклон Катрина, разрушивший Новый Орлеан в 2005 г., или циклоны на восточном побережье Китая в этом году), вызвали желание математическими методами адекватно описать это явление и высказать рекомендации по уничтожению подобных течений газа.

В природе довольно часто встречается интересное явление – восходящие закрученные потоки воздуха. В качестве примеров таких потоков можно привести многочисленные смерчи и торнадо, регулярно наблюдаемые на юге США и в других, достаточно теплых и ровных местностях. К подобным явлениям относятся и периодически возникающие тропические циклоны. Астрономы полагают, что Большое Красное Пятно на Юпитере также представляет собой восходящий закрученный поток (ВЗП) газовой смеси, из которой состоит атмосфера Юпитера.

Для всех этих ВЗП характерны некоторые общие моменты.

1. В атмосфере, которая вращается вместе с планетой вокруг ее оси, имеется движение газа, локальное по масштабам планеты и существующее достаточно продолжительное время. Так, Большое Красное Пятно наблюдается на Юпитере более 300 лет. Тропические циклоны функционируют в течение нескольких суток, торнадо и смерчи – от десятков минут до часов.

2. Движение газа в ВЗП является винтовым, т.е. с одновременным движением частиц газа вверх происходит закрутка – вращательное движение вокруг оси ВЗП. Причем для подобных природных течений, отмечающихся в Северном полушарии, естественная закрутка имеет положительное направление, т.е. против хода часовой стрелки, если смот-

реть на поток сверху.

3. Вокруг основания ВЗП образуются очень сильные ветры (например, в тропических циклонах их скорость порядка 100 км/ч), дующие вдоль поверхности Земли, но не в сторону самого ВЗП. Именно эти ветры, а также самое нижнее восходящее движение воздуха служат причинами многочисленных разрушений, приносимых торнадо и тропическими циклонами.

Несмотря на то что многочисленные исследователи на протяжении десятилетий активно занимаются проблемой ВЗП, к настоящему времени отсутствует полная и достаточно убедительная теория, объясняющая причины возникновения, функционирования и естественного исчезновения таких течений.

В том числе отсутствует (см., например, [8-11]) и ответ на самый главный вопрос: откуда и в какой элемент течения идет постоянное внешнее вложение энергии, обеспечивающее продолжительное существование ВЗП.

Математическая теорема, на которую часто ссылаются, о неистощении вихря в потоке справедлива лишь для идеальной жидкости и идеального газа. В реальных течениях (например, для вращающейся воды в стакане или для вихревого следа за кораблем или самолетом) закрученные движения жидкости или газа исчезают с течением времени, если нет постоянного вложения в них энергии извне. Причем исчезают за обозримое время. Следовательно, реальные ВЗП не могут существовать без постоянного внешнего притока энергии. Заметим, что также отсутствует достаточно обоснованное объяснение природы возникновения энергии на начальную закрутку потока.

На современном этапе изучения течений газа в ВЗП большие усилия прилагаются для определения значений газодинамических параметров у конкретных ВЗП, имеющих место в окружающей среде, в частности у торнадо.

Математическое исследование течений газа в ВЗП ведется в основном с помощью достаточно простых моделей, например, модели "вихревых нитей" [8].

Кроме того, привлекаются различные экзотические идеи и гипотезы. Так, в качестве причины возникновения такого ВЗП, как торнадо, полагается [9], что вращающийся воздушный поток с осью вращения, параллельной поверхности Земли, с помощью восходящих потоков "ставится" в вертикальное положение. Иногда при одном и том же моде-

лировании [10] сначала предполагается наличие внутреннего трения в газе, которое по мнению автора передает закрутку от одних объемов газа другим. А потом для обоснования продолжительного существования течений типа торнадо [10] делается ссылка на уже упомянутую математическую теорему, справедливую для идеальной среды, в которой по определению отсутствует внутреннее трение.

Таким образом, в настоящее время нет теоретических моделей, согласующихся со всеми наблюдаемыми в ВЗП эффектами. Также нет и конкретных предложений по уничтожению торнадо и тропических циклонов.

Основная идея, определившая направление данного исследования, заключается в следующем: в природе должна существовать внешняя сила, которая не дает диссипативным процессам (трению, теплопроводности и т.п.) и малым внешним возмущениям разрушить смерч, торнадо, тропический циклон и другие естественные ВЗП. То есть для продолжительного существования ВЗП обязательно должен иметь место приток внешней энергии, причем в такие два конкретных элемента движения, как разгон газа и осевая закрутка.

Внешняя энергия требуется для достижения большой скорости газа, наблюдаемой в области перехода от закрученного его движения в горизонтальной плоскости к вертикальному винтовому движению. Эта скорость и обеспечивает последующее движение газа в вертикальном направлении, несмотря на действие силы тяжести.

Осевая закрутка газа придает вертикальному движению устойчивость за счет действия центробежной силы, присутствующей при вращении. Центробежная сила играет роль "внешней стенки трубы", которая не позволяет внешнему воздуху проникать в ВЗП в его средней по высоте части. И приток энергии извне также нужен для поддержания "стенок" ВЗП, т.е. для поддержания осевой закрутки воздуха.

Естественно, что на Земле ни сила гравитации, ни энергия Солнца или энергия из недр планеты (как это имеет место на Юпитере) не могут поддерживать закрутку газа. Единственное значительное движение, которое постоянно присутствует, имеет большой запас энергии и, главное, обладает вращательным моментом – собственное вращение планеты и сопутствующая данному явлению сила Кориолиса¹. Далее для обозначения силы Кориолиса будет использоваться сокращение: СК.

¹Гюстав Гаспар Кориолис (1792-1843) – французский ученый, который первым ввел в рассмотрение эту силу

Конечно, при функционировании реальных ВЗП могут присутствовать и влиять на их движение другие силы, например электромагнитные. Однако наблюдение за различными закрученными потоками – в воздухе, воде, на Земле и Юпитере – приводит к мысли, что определяющими для таких течений являются механические и динамические процессы, действующие по законам классической механики и газовой динамики, в том числе при учете СК.

Абсолютное значение СК такое: $|\mathbf{F}_c| = 2\Omega|\mathbf{V}|$. Оно обычно мало из-за малости значения Ω – угловой скорости вращения Земли: $\Omega \approx 7 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{1}{c}$, а также небольших значениях $|\mathbf{V}|$ – модуля вектора скорости движущейся материальной частицы. Возможно, поэтому исследователи и не принимают ее во внимание. Но если какая-то сила отлична от нуля, то в соответствии с законом Ньютона, она определяет ненулевое ускорение. Такое ускорение, пусть и малое, в свою очередь может за продолжительное время сделать скорость очень большой. Интеграл от внешней силы, также достаточно малой, взятый по большому отрезку интегрирования, может дать большие значения энергии, вложенные данной малой силой в исследуемое движение. Поэтому СК проявляется в тех течениях, где движение продолжительно во времени, или где скорости велики, или где имеет место и то и другое.

В монографии выдвинута гипотеза об одном свойстве ВЗП: *существование в средней по высоте части рассматриваемого потока контактной поверхности, отделяющей внешний воздух от течения ВЗП. Другими словами, предполагается, что внешний покоящийся воздух не поступает в ВЗП в его средней по высоте части.*

На основе этой гипотезы предложена описательная схема возникновения ВЗП и его перехода в достаточно устойчивое состояние. В рамках этой схемы указан постоянно присутствующий на Земле источник энергии, поддерживающий функционирование ВЗП: собственное вращение Земли. Кроме этого, определен механизм вложения этой энергии через действие СК в два конкретных элемента движения в придонной части ВЗП: в закрутку и в разгон газа.

Описаны возможные причины естественного исчезновения природных ВЗП.

На основании проведенных исследований указано внешнее воздействие, которое может привести к реальному разрушению встречающихся в природе ВЗП. Представляется, что на реализацию подобного внешнего воздействия потребуются разумные затраты энергии.

Для модели идеального политропного газа построены точные и при-

ближенные решения системы уравнений газовой динамики (СУГД), описывающие течения газа в различных областях в соответствии с предложенной схемой функционирования ВЗП.

Естественно, проведенное в книге исследование только первый шаг к дальнейшему, более детальному математическому моделированию как аналитическими, так и численными методами для установления и уточнения различных параметров течения, а также предложенной схемы функционирования восходящих закрученных потоков, в том числе с учетом и других внешних факторов.

Но, как известно, основной критерий проверки любой теории – практика. Для такой проверки могут быть использованы конкретные параметры течения газа, значения которых по данным наблюдений природных восходящих закрученных потоков подтвердят или оспорят выдвинутую гипотезу.

Однако главной проверкой наших теоретических исследований будет реализация предложений по уничтожению смерчей, торнадо и тропических циклонов, встречающихся на Земле.

Автор выражает глубокую благодарность и искреннюю признательность профессорам Вл.Вит. Башурову, С.С. Титову и Л.Б. Чубарову – за их полезные замечания, рекомендации и обсуждения, а также благодарит профессоров С.Л. Дерябина, А.Л. Казакова, С.А. Румянцева и своего сына П.С. Баутина за многочисленные и содержательные дискуссии.

Глава I

СИЛА КОРИОЛИСА

В главе изложены известные факты о природе силы Кориолиса (СК) и о ее влиянии на движение отдельной материальной точки как в вертикальном направлении, так и в горизонтальной плоскости.

§ 1. Причина возникновения силы Кориолиса

Будем полагать Землю шаром, у которого ось вращения совпадает с земной осью юг–север. На рис. 1.1, *a* это схематично изображено с помощью сферы, имеющей центр в точке *C*, у которой южный и северный полюсы помечены точками *S* и *N* соответственно. Также рассматривается сечение сферы по экватору с диаметрально противоположными точками *W* и *E*.

Пусть на сфере задана точка *O*, лежащая, например, в северном полушарии, но не на полюсе *N*. Сечение сферы плоскостью, проходящей через точки *N*, *O* и *C*, даст на экваторе точку *A*, которая может совпадать с точкой *O*. Полуокружность *NOAS* называется меридианом. Угол $\angle OCA$, обозначаемый далее ψ , называется широтой точки *O*. Сечение сферы плоскостью, перпендикулярной оси *SN* и проходящей через точку *O*, называется параллелью.

Будут рассматриваться такие движения материальной точки, при которых ее широта меняется незначительно и поэтому далее считается, что $\psi = \text{const}$.

Через точку *O* к сфере проводится касательная плоскость. Нормаль к ней, которая проходит через точки *C* и *O*, берется за координатную ось *Oz*, направленную вне сферы. Прямая, проходящая в этой касательной плоскости через точку *O* и касающаяся параллели, берется за другую координатную ось – ось *Ox*, направленную на восток. Перпендикулярная ей прямая, также лежащая в касательной плоскости, проходящая через точку *O* и направленная на север вдоль меридиана, берется за третью координатную ось – ось *Oy*. Введенная система координат *x*, *y*, *z* схематично представлена на рис. 1.1, *a*, *б*.

Поскольку система координат *x*, *y*, *z* вращается вместе с Землей, то ее называют относительной системой координат.

Вращение Земли вокруг оси *SN* (направление этого вращения указано стрелками на экваторе *WAE*, см. рис. 1.1, *a*) описывается с помощью вектора угловой скорости Ω . Если начало вектора Ω поместить

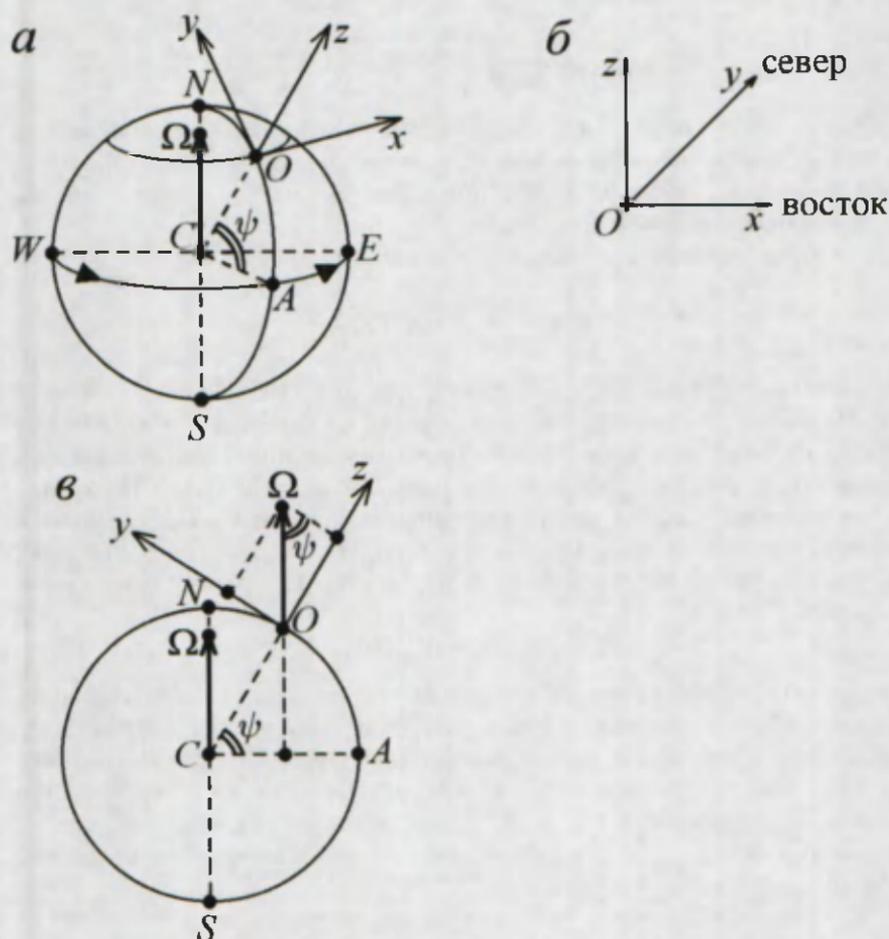


Рис. 1.1.

в центр сферы – в точку C , то сам вектор должен быть направлен в сторону севера, чтобы с его конца вращение Земли наблюдалось в положительном направлении, т.е. против хода часовой стрелки. Модуль вектора Ω

$$|\Omega| = \Omega$$

задает значение угловой скорости, которую для Земли можно принять постоянной и по определению равной величине угла, задаваемого в радианах, на который поворачивается Земля за единицу времени. Если в

качестве единицы времени выбрать одну секунду, то

$$\Omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 60^2} \frac{1}{c} \approx 7.2722 \cdot 10^{-5} \frac{1}{c},$$

поскольку полный оборот с углом 2π Земля делает за 24 ч, каждый из которых содержит по $60^2 = 3600$ с. Заметим, что в учебнике [12] на стр. 211 в качестве числа 0.0000726 приведено не совсем точное значение угловой скорости вращения Земли.

Если за единицу времени выбрать час, то

$$\Omega = \frac{2\pi}{24} \frac{1}{c} \approx 0.26180 \frac{1}{c}.$$

Величина $1/\Omega$ составляет примерно 3 ч 49 мин 11 с.

На рис. 1.1, а показано сечение сферы плоскостью $x = 0$, которая проходит через меридиан $NOAS$. Поскольку вектор Ω лежит в плоскости $x = 0$, то его проекция на ось Ox равна нулю: $\text{пр}_{Ox} \Omega = 0$. Величины проекций вектора Ω на другие координатные оси легко определяются с помощью рис. 1.1, а: $\text{пр}_{Oy} \Omega = \Omega \cos \psi$; $\text{пр}_{Oz} \Omega = \Omega \sin \psi$. Следовательно, во введенной системе координат x, y, z вектор Ω задается следующим образом:

$$\Omega = (0; \Omega \cos \psi; \Omega \sin \psi).$$

Для того чтобы при исследовании движения точки в системе координат x, y, z учесть вращение Земли, необходимо ввести еще одну систему координат x', y', z' . Ее начало находится в точке C (в центре Земли); ось Cz' совпадает с земной осью SN и направлена на север; взаимно перпендикулярные оси Cx' и Cy' лежат в плоскости экватора. Система координат x', y', z' считается неподвижной и поэтому ее называют абсолютной системой координат.

Следовательно, относительная система координат x, y, z вращается с постоянной угловой скоростью Ω вокруг оси Cz' абсолютной системы координат.

В рассматриваемом случае отсутствует поступательное движение системы x, y, z относительно системы x', y', z' . Тогда по теореме сложения скоростей [12] для рассматриваемого случая имеет место равенство

$$\mathbf{V}_a = \Omega \times \mathbf{r} + \mathbf{V}_r,$$

где \mathbf{V}_a – абсолютная скорость движения точки; \mathbf{r} – радиус-вектор точки в абсолютной системе координат x', y', z' ; \mathbf{V}_r – относительная скорость точки, т.е. скорость точки в относительной системе координат x, y, z .

Теорема сложения ускорений [12] в случае постоянства угловой скорости Ω дает следующую формулу:

$$\mathbf{W}_a = \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) + 2\Omega \times \mathbf{V}_r + \mathbf{W}_r,$$

где \mathbf{W}_a – абсолютное ускорение точки; \mathbf{W}_r – относительное ускорение точки в системе координат x, y, z .

Слагаемое

$$\Omega \times (\Omega \times \mathbf{r})$$

есть центростремительное ускорение, а слагаемое

$$2\Omega \times \mathbf{V}_r$$

называется кориолисовым ускорением.

В результате уравнения движения материальной точки в системе координат x, y, z при учете силы тяжести имеют в векторной форме следующий вид [13]

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{g} - \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) - 2\Omega \times \mathbf{V}, \quad (1.1)$$

где у относительной скорости \mathbf{V}_r индекс r опущен, т.е. $\mathbf{V} = \mathbf{V}_r$.

В приведенной системе обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) $m\mathbf{g} = m(0; 0; -g)$ есть постоянный вектор силы тяжести, $g = \text{const} > 0$; вектор $-2\Omega \times \mathbf{V}$ называется центробежной силой; вектор $-\Omega \times (\Omega \times \mathbf{r})$ называется силой Кориолиса (СК).

Поскольку

$$\Omega \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & \Omega \cos \psi & \Omega \sin \psi \\ u & v & w \end{vmatrix} =$$

$$= [(\Omega \cos \psi)w - (\Omega \sin \psi)v] \mathbf{i} + (\Omega \sin \psi)u \mathbf{j} - (\Omega \cos \psi)u \mathbf{k},$$

\mathbf{F}_c – вектор СК – имеет следующий вид:

$$\mathbf{F}_c = -2\Omega \times \mathbf{V} = 2[(\Omega \sin \psi)v - (\Omega \cos \psi)w] \mathbf{i} - 2(\Omega \sin \psi)u \mathbf{j} + 2(\Omega \cos \psi)u \mathbf{k},$$

где u, v, w – проекции вектора скорости \mathbf{V} на координатные оси Ox, Oy и Oz соответственно.

Таким образом, причиной возникновения СК является вращение Земли вокруг своей оси. При этом СК зависит от угловой скорости вращения Земли, от значения широты ψ и от скорости движения точки в системе координат x, y, z . СК действует только на движущуюся точку, когда $\mathbf{V} \neq 0$.

Обычно влиянием центробежной силы пренебрегают в силу следующего обстоятельства.

Модуль вектора центробежной силы задается величиной

$$|-\Omega \times (\Omega \times \mathbf{r})| = \Omega^2 r_0,$$

где r_0 – расстояние от рассматриваемой точки до оси вращения Земли. Поскольку

$$\Omega^2 \approx 5.2885 \cdot 10^{-9} \frac{1}{\text{с}^2},$$

а радиус Земли на экваторе

$$r_0 \approx 6.3782 \cdot 10^6 \text{ м},$$

модуль вектора центробежной силы на поверхности Земли в районе экватора равен

$$|-\Omega \times (\Omega \times \mathbf{r})| \approx 3.3731 \cdot 10^{-2} \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

что составляет примерно 0.3% от $g \approx 9.8 \text{ м/с}^2$ – ускорения свободного падения.

Поэтому далее в данной работе пренебрегается центробежной силой при описании движения как материальной точки, так и газа, т.е. слагаемое

$$\Omega \times (\Omega \times \mathbf{r})$$

отбрасывается и в приведенной СОДУ, и в системе уравнений газовой динамики (СУГД) при учете СК (см. § 14).

Все последующие исследования можно также проводить и для точки O , расположенной в Южном полушарии (см. рис. 1.2), если считать угол ψ отрицательным.

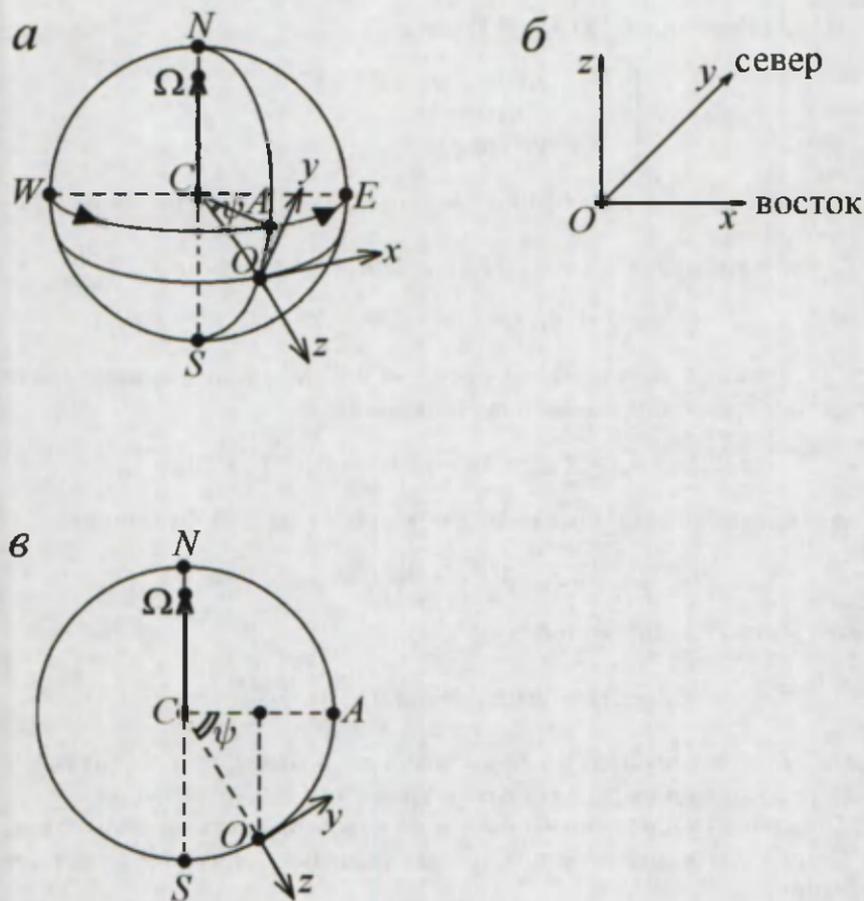


Рис. 1.2.

§ 2. Влияние силы Кориолиса на вертикальное движение материальной точки

С учетом сказанного в § 1 в качестве СОДУ, описывающей движение материальной точки, рассматривается не система уравнений (1.1), а система [13–16]

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}. \quad (2.1)$$

Подробная запись СОДУ (2.1) такая:

$$\begin{cases} \dot{u} = (2\Omega \sin \psi)v - (2\Omega \cos \psi)w, \\ \dot{v} = -(2\Omega \sin \psi)u, \\ \dot{w} = (2\Omega \cos \psi)u - g. \end{cases} \quad (2.2)$$

Построение общего решения системы (2.2) осуществляется следующим образом.

Первое уравнение системы (2.2) дифференцируется по t :

$$\ddot{u} = (2\Omega \sin \psi)\dot{v} - (2\Omega \cos \psi)\dot{w},$$

и в полученный результат вместо \dot{v} , \dot{w} подставляются правые части второго и третьего уравнений системы (2.2):

$$\ddot{u} = (2\Omega \sin \psi)(-2\Omega \sin \psi)u - (2\Omega \cos \psi)[(2\Omega \cos \psi)u - g].$$

В результате запишем уравнение второго порядка для функции u :

$$\ddot{u} = -4\Omega^2 u + 2g\Omega \cos \psi,$$

общее решение которого имеет вид

$$u = A \cos(2\Omega t) + B \sin(2\Omega t) + \frac{g \cos \psi}{2\Omega},$$

где A , B – две произвольные постоянные, появившиеся в результате интегрирования дифференциального уравнения второго порядка.

Подстановка полученного выражения во второе уравнение системы (2.2) приводит к дифференциальному уравнению первого порядка для функции v :

$$\dot{v} = -2\Omega \sin \psi \left[A \cos(2\Omega t) + B \sin(2\Omega t) + \frac{g \cos \psi}{2\Omega} \right],$$

которое имеет следующее общее решение:

$$v = -\sin \psi [A \sin(2\Omega t) - B \cos(2\Omega t)] - (g \sin \psi \cos \psi)t + C_1,$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Подстановка функции u в третье уравнение системы (2.2) приводит к дифференциальному уравнению первого порядка для функции w

$$\dot{w} = 2\Omega \cos \psi \left[A \cos(2\Omega t) + B \sin(2\Omega t) + \frac{g \cos \psi}{2\Omega} \right] - g,$$

которое после частичного раскрытия скобок

$$\dot{w} = \cos \psi [2\Omega A \cos(2\Omega t) + 2\Omega B \sin(2\Omega t)] + g \cos^2 \psi - g$$

и приведения подобных

$$\dot{w} = \cos \psi [2\Omega A \cos(2\Omega t) + 2\Omega B \sin(2\Omega t)] - g \sin^2 \psi$$

имеет общее решение

$$w = \cos \psi [A \sin(2\Omega t) - B \cos(2\Omega t)] - (g \sin^2 \psi)t + C_2,$$

где C_2 – произвольная постоянная.

При заданной функции u способ определения функций v и w говорит о том, что второе и третье уравнения системы (2.2) выполняются тождественно. Осталось подставить все три найденные функции в первое уравнение системы (2.2), чтобы определить, при каких значениях констант C_1 и C_2 это уравнение будет выполняться тождественно.

Дифференцирование функции u дает в качестве левой части первого уравнения системы (2.2) выражение

$$-2\Omega A \sin(2\Omega t) + 2\Omega B \cos(2\Omega t). \quad (2.3)$$

Правая часть первого уравнения системы (2.2), после подстановки в нее найденных функций v и w , имеет следующий вид:

$$2\Omega \sin \psi \left\{ -\sin \psi [A \sin(2\Omega t) - B \cos(2\Omega t)] - (g \sin \psi \cos \psi)t + C_1 \right\} - \\ -2\Omega \cos \psi \left\{ \cos \psi [A \sin(2\Omega t) - B \cos(2\Omega t)] - (g \sin^2 \psi)t + C_2 \right\}.$$

Раскрытие скобок в полученном выражении дает

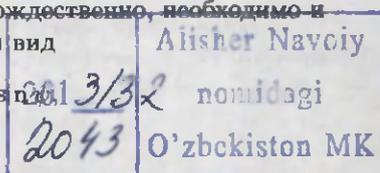
$$-2\Omega \sin^2 \psi [A \sin(2\Omega t) - B \cos(2\Omega t)] - (2\Omega g \sin^2 \psi \cos \psi)t + 2\Omega \sin \psi C_1 - \\ -2\Omega \cos^2 \psi [A \sin(2\Omega t) - B \cos(2\Omega t)] + (2\Omega g \sin^2 \psi \cos \psi)t - 2\Omega \cos \psi C_2.$$

После приведения подобных получается следующее:

$$-2\Omega [A \sin(2\Omega t) - B \cos(2\Omega t)] + 2\Omega (\sin \psi C_1 - \cos \psi C_2). \quad (2.4)$$

Чтобы выражения (2.3) и (2.4) совпадали тождественно, необходимо и достаточно, чтобы константы C_1 и C_2 имели вид

$$C_1 = C \cos \psi, \quad C_2 = C \sin \psi.$$



где C – третья (наряду с A, B) произвольная постоянная, появившаяся в результате интегрирования СОДУ (2.2), состоящей из трех уравнений и содержащей производные только первого порядка.

Таким образом, общее решение СОДУ (2.2) следующее:

$$\begin{aligned} u(t) &= A \cos(2\Omega t) + B \sin(2\Omega t) + \frac{g \cos \psi}{2\Omega}, \\ v(t) &= -\sin \psi [A \sin(2\Omega t) - B \cos(2\Omega t)] - (g \sin \psi \cos \psi)t + C \cos \psi, \\ w(t) &= \cos \psi [A \sin(2\Omega t) - B \cos(2\Omega t)] - (g \sin^2 \psi)t + C \sin \psi. \end{aligned} \quad (2.5)$$

По заданным начальным условиям

$$\mathbf{V}|_{t=0} = (u_0, v_0, w_0)$$

произвольные постоянные A, B и C определяются единственным образом:

$$A = u_0 - \frac{g \cos \psi}{2\Omega}, \quad B = v_0 \sin \psi - w_0 \cos \psi, \quad C = w_0 \sin \psi + v_0 \cos \psi. \quad (2.6)$$

При этом константа A находится из соотношения

$$u_0 = A + \frac{g \cos \psi}{2\Omega},$$

– первого соотношения из (2.5), взятого при $t = 0$.

Второе и третье соотношения из (2.5) при $t = 0$ являются системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для констант B и C :

$$\begin{cases} v_0 = B \sin \psi + C \cos \psi, \\ w_0 = -B \cos \psi + C \sin \psi, \end{cases}$$

с равным единице главным определителем СЛАУ.

Для анализа свойств полученного общего решения рассматривается один частный случай начальных условий

$$u_0 = v_0 = 0, \quad w_0 - \text{любое число}, \quad (2.7)$$

т.е. случай, когда в начальный момент времени движение осуществляется только по вертикали: вверх при $w_0 > 0$, вниз при $w_0 < 0$ или из состояния покоя при $w_0 = 0$.

При этом функция u , определяющая движение материальной точки вдоль оси Ox , имеет следующий вид:

$$u(t) = \frac{g \cos \psi}{2\Omega} [1 - \cos(2\Omega t)] - (w_0 \cos \psi) \sin(2\Omega t) \quad (2.8)$$

или при разложении в ряд по степеням t

$$u(t) = \frac{g \cos \psi}{2\Omega} \left(\frac{2^2 \Omega^2 t^2}{2!} - \frac{2^4 \Omega^4 t^4}{4!} + \dots \right) - w_0 \cos \psi \left(2\Omega t - \frac{2^3 \Omega^3 t^3}{3!} + \frac{2^5 \Omega^5 t^5}{5!} - \dots \right),$$

т.е.

$$u(t) = \cos \psi \left[-2w_0 \Omega t + g \Omega t^2 + \frac{4w_0}{3} \Omega^3 t^3 - \frac{g}{3} \Omega^3 t^4 + \dots \right]. \quad (2.9)$$

Изменение координаты x с течением времени будет такое:

$$x(t) = x_0 + \frac{g \cos \psi}{2\Omega} \left[t - \frac{\sin(2\Omega t)}{2\Omega} \right] + \frac{w_0 \cos \psi}{2\Omega} \cos(2\Omega t) \quad (2.10)$$

или при разложении в ряд по степеням t :

$$x(t) = x_0 - (2w_0 \cos \psi) \Omega \frac{t^2}{2} + (g \cos \psi) \Omega \frac{t^3}{3} + \frac{4w_0 \cos \psi}{3} \Omega^3 \frac{t^4}{4} - \frac{g \cos \psi}{3} \Omega^3 \frac{t^5}{5} + \dots, \quad (2.11)$$

где x_0 — начальное положение точки по оси Ox .

Из формул (2.8)–(2.11) для $u(t)$, $x(t)$ следует

Теорема 2.1. В случае $w_0 > 0$, т.е. когда в начальный момент имеет место движение вверх, то начальное отклонение траектории движения материальной точки происходит в сторону уменьшения значений x , т.е. на запад;

если $w_0 < 0$ или $w_0 = 0$, т.е. когда в начальный момент имеет место движение вниз или имеет место покой, то начальное отклонение траектории движения материальной точки происходит в сторону увеличения значений x , т.е. на восток, причем при $w_0 < 0$ отклонение будет больше, чем при $w_0 = 0$.

В рассматриваемом случае начальных условий (2.7) функция v , определяющая движение материальной точки вдоль оси Oy , запишутся в виде

$$v(t) = -\sin \psi \left[-\frac{g \cos \psi}{2\Omega} \sin(2\Omega t) + w_0 \cos \psi \cos(2\Omega t) \right] - \quad (2.12)$$

$$-(g \sin \psi \cos \psi)t + w_0 \sin \psi \cos \psi$$

или при разложении в ряд по степеням t :

$$v(t) = g \sin \psi \cos \psi \left[\frac{\sin(2\Omega t)}{2\Omega} - t \right] + w_0 \sin \psi \cos \psi [1 - \cos(2\Omega t)] =$$

$$= g \sin \psi \cos \psi \left(-\frac{1}{2\Omega} \frac{2^3 \Omega^3 t^3}{3!} + \frac{1}{2\Omega} \frac{2^5 \Omega^5 t^5}{5!} - \dots \right) +$$

$$+ w_0 \sin \psi \cos \psi \left(\frac{2^2 \Omega^2 t^2}{2} - \frac{2^4 \Omega^4 t^4}{4!} + \dots \right),$$

т.е.

$$v(t) = (2w_0 \sin \psi \cos \psi) \Omega^2 t^2 - \frac{2g \sin \psi \cos \psi}{3} \Omega^2 t^3 - \quad (2.13)$$

$$- \frac{2w_0 \sin \psi \cos \psi}{3} \Omega^4 t^4 + \frac{2g \sin \psi \cos \psi}{15} \Omega^4 t^5 + \dots$$

Тогда изменение координаты y с течением времени будет такое:

$$y(t) = y_0 - \frac{\sin \psi \cos \psi}{2\Omega} \left[\frac{g}{2\Omega} \cos(2\Omega t) + w_0 \sin(2\Omega t) \right] - \quad (2.14)$$

$$- \frac{g \sin \psi \cos \psi}{2} t^2 + (w_0 \sin \psi \cos \psi)t$$

или при разложении в ряд по степеням t

$$y(t) = y_0 + (2w_0 \sin \psi \cos \psi) \Omega^2 \frac{t^3}{3} - \frac{2g \sin \psi \cos \psi}{3} \Omega^2 \frac{t^4}{4} - \quad (2.15)$$

$$- \frac{2w_0 \sin \psi \cos \psi}{3} \Omega^4 \frac{t^5}{5} + \frac{2g \sin \psi \cos \psi}{15} \Omega^4 \frac{t^6}{6} + \dots,$$

где y_0 – начальное положение точки по оси Oy .

Из формул (2.12)–(2.15) для $v(t)$ и $y(t)$ следует

Теорема 2.2. В случае $w_0 > 0$, т.е. когда в начальный момент имеет место движение вверх, то начальное отклонение траектории

движения материальной точки происходит в сторону возрастания значений y , т.е. на север;

если $w_0 < 0$ или $w_0 = 0$, т.е. когда в начальный момент имеет место движение вниз или имеет место покой, то начальное отклонение траектории движения материальной точки происходит в сторону уменьшения значений y , т.е. на юг.

В данном случае начальных условий (2.7) функция w , определяющая движение материальной точки вдоль оси Oz , примет следующий вид:

$$w(t) = \cos \psi \left[-\frac{g \cos \psi}{2\Omega} \sin(2\Omega t) + w_0 \cos \psi \cos(2\Omega t) \right] - (g \sin^2 \psi)t + w_0 \sin^2 \psi,$$

т.е.

$$w(t) = -g \left[\frac{\cos^2 \psi}{2\Omega} \sin(2\Omega t) + (\sin^2 \psi)t \right] + w_0 [(\cos^2 \psi) \cos(2\Omega t) + \sin^2 \psi]. \quad (2.16)$$

или при разложении в ряд по степеням t

$$w(t) = -g \left(t - \frac{\cos^2 \psi}{2\Omega} \frac{2^3 \Omega^3 t^3}{3!} + \frac{\cos^2 \psi}{2\Omega} \frac{2^5 \Omega^5 t^5}{5!} - \dots \right) + w_0 \left(1 - \cos^2 \psi \frac{2^2 \Omega^2 t^2}{2!} + \cos^2 \psi \frac{2^4 \Omega^4 t^4}{4!} - \dots \right),$$

т.е.

$$w(t) = w_0 - gt + \cos^2 \psi \left(-2w_0 \Omega^2 t^2 + \frac{2}{3} \Omega^2 t^3 + 2w_0 \Omega^4 t^4 - \frac{2}{15} \Omega^4 t^5 + \dots \right). \quad (2.17)$$

При этом изменение координаты z с течением времени будет такое:

$$z(t) = z_0 - g \left[-\frac{\cos^2 \psi}{4\Omega^2} \cos(2\Omega t) + \frac{\sin^2 \psi}{2} t^2 \right] + w_0 \left[\frac{\cos^2 \psi}{2\Omega} \sin(2\Omega t) + (\sin^2 \psi)t \right] \quad (2.18)$$

или при разложении в ряд по степеням t

$$z(t) = z_0 + w_0 t - g \frac{t^2}{2} + \quad (2.19)$$

$$+ \cos^2 \psi \left(-2\omega_0 \Omega^2 \frac{t^3}{3} + \frac{2}{3} \Omega^2 \frac{t^4}{4} + 2\omega_0 \Omega^4 \frac{t^5}{5} - \frac{2}{15} \Omega^4 \frac{t^6}{6} + \dots \right),$$

где z_0 – начальное положение точки по оси Oz .

Из формул (2.16)–(2.19) для $w(t)$ и $z(t)$ следует

Теорема 2.3. *В случае $\omega_0 > 0$ движение некоторое время ($t_* \approx \approx \omega_0/g$) будет происходить в сторону увеличения значений z , т.е. вверх, а в случаях $\omega_0 < 0$ и $\omega_0 = 0$ – в сторону уменьшения значений z , т.е. вниз.*

Таким образом, с учетом всех возможных направлений движения установлена

Теорема 2.4. *Из-за влияния СК траектория движения материальной точки в Северном полушарии в начальные моменты времени будет отклоняться при $\omega_0 > 0$ на северо-запад, а при $\omega_0 \leq 0$ – на юго-восток.*

Из-за общего движения газа вверх в тропических циклонах, наблюдаемых в Северном полушарии над акваториями Атлантического и Тихого океанов, их общее движение должно осуществляться в северо-западном направлении, что и наблюдается на практике.

Заметим, что в [13–15] построено приближенное решение рассмотренной задачи и погрешность приведенных там формул для функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ есть соответственно $O(\Omega^3 t^4)$, $O(\Omega^2 t^4)$, $O(\Omega^2 t^4)$. Естественно, что результаты экспериментов (см., например, [12]) по влиянию СК на движение материальных тел лучше сравнивать с расчетами по точным формулам (2.10), (2.14), (2.18), а не по приближенным (2.11), (2.15), (2.19).

В [16] решение задачи построено с помощью функций от матрицы. Но представленный там ответ содержит нераскрытые векторные произведения и не записан в координатной форме, поэтому достаточно трудно напрямую воспользоваться данным ответом для осмысления механической сути полученного решения.

В теоремах 2.1–2.4 выводы сделаны на основе анализа первых коэффициентов рядов по степеням t , в которые разложено решение (2.5) при начальных условиях (2.7). Однако и в общее решение (2.5), и в частное решение, заданное формулами (2.8), (2.12), (2.16), входят немонотонные функции $\sin(2\Omega t)$ и $\cos(2\Omega t)$. Эти функции заведомо сохраняют монотонность на отрезке $0 \leq 2\Omega t \leq \pi/2$, т.е. на отрезке $0 \leq t \leq \pi/(4\Omega)$. С учетом величины $1/\Omega$ получается, что монотонность функций $\sin(2\Omega t)$ и $\cos(2\Omega t)$ сохраняется в течение 3 ч. Очевидно, что для вертикального движения материальной точки в условиях Земли это является большим промежутком времени.

§ 3. Влияние силы Кориолиса на движение материальной точки в горизонтальной плоскости

Далее рассматривается движение материальной точки в плоскости xOy .

Для этого в первых двух уравнениях системы (2.2) полагается $w = 0$, а третье уравнение просто исключается. В механике для обоснования такого действия вводится [12] понятие "тяжелой" материальной точки, т.е. подразумевается, что все силы, действующие на точку вдоль оси Oz , заведомо меньше силы тяжести и ею компенсируются. А действие самой силы тяжести компенсируется реакцией плоскости xOy , по которой движется "тяжелая" материальная точка.

В результате получается следующая СОДУ для двух искомых функций $u(t)$, $v(t)$:

$$\begin{cases} \dot{u} = (2\Omega \sin \psi)v, \\ \dot{v} = -(2\Omega \sin \psi)u. \end{cases} \quad (3.1)$$

В качестве вектора СК при движении точки по плоскости xOy берется вектор

$$\mathbf{F}_c = \left((2\Omega \sin \psi)v; -(2\Omega \sin \psi)u; 0 \right),$$

за которым сохраняется название СК и обозначение \mathbf{F}_c .

Модуль вектора СК задается следующим равенством:

$$|\mathbf{F}_c| = 2\Omega \sin \psi |\mathbf{V}|,$$

где $\mathbf{V} = (u, v)$ – вектор скорости материальной точки в плоскости xOy . Если $\psi = 0$, т.е. материальная точка находится на экваторе, то СК равна нулю. При заданном ненулевом значении $|\mathbf{V}|$ с увеличением ψ , т.е. при перемещении материальной точки в северном направлении, увеличивается значение $|\mathbf{F}_c|$, которое достигает своего максимального значения на Северном полюсе.

Для выяснения взаимного расположения вектора скорости частицы $\mathbf{V} = (u, v, 0)$ и вектора СК, действующей на нее при движении, следует выполнить их скалярное и векторное произведение.

Скалярное произведение

$$\mathbf{F}_c \cdot \mathbf{V} = -(2\Omega \sin \psi)uv + (2\Omega \sin \psi)vu \equiv 0,$$

т.е. векторы \mathbf{V} и \mathbf{F}_c взаимно перпендикулярны. Это естественно, так как $\mathbf{F}_c = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}$ перпендикулярен каждому из сомножителей $\boldsymbol{\Omega}$ и \mathbf{V} .

Результат векторного произведения

$$\mathbf{F}_c \times \mathbf{V} = 2\Omega \sin \psi \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v & -v & 0 \\ u & v & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j} + 2(u^2 + v^2)\Omega \sin \psi \mathbf{k}$$

при $u^2 + v^2 \neq 0$ направлен вдоль оси Oz в сторону положительных значений переменной z , т.е. вверх. Сверху кратчайший поворот от вектора \mathbf{F}_c к вектору \mathbf{V} наблюдается в положительном направлении, т.е. против хода часовой стрелки. Тогда поворот вектора \mathbf{V} к вектору \mathbf{F}_c происходит по ходу часовой стрелки. Тем самым доказана

Теорема 3.1. *Направление действия СК на движущуюся со скоростью \mathbf{V} в плоскости xOy материальную точку получается поворотом вектора \mathbf{V} направо под прямым углом.*

Следствием доказанного в этой теореме факта является известный закон Бэра [12]: *все реки, текущие в Северном полушарии, подмывают правый берег.*

Исключение из этого закона может возникнуть, только если из-за рельефа местности река, текущая в Северном полушарии, вынуждена повернуть направо. Тогда возникающая при повороте центробежная сила направлена влево и противодействует СК [15].

Теорема 3.2. *Если для СОДУ (3.1) задать начальные условия*

$$u(t)|_{t=0} = u_0, \quad v(t)|_{t=0} = v_0, \quad (3.2)$$

то единственное решение задачи (3.1), (3.2) такое:

$$u(t) = u_0 \cos(at) + v_0 \sin(at), \quad v(t) = -u_0 \sin(at) + v_0 \cos(at), \quad (3.3)$$

где

$$a = 2\Omega \sin \psi.$$

Доказательство теоремы осуществляется подстановкой функций (3.3) в СОДУ (3.1) и проверкой выполнимости начальных условий (3.2).

При $u_0 = v_0 = 0$ точка покоится,

а при

$$V_0 = \sqrt{u_0^2 + v_0^2} \neq 0$$

решение (3.3) обладает следующими свойствами:

1) значение модуля вектора скорости движения точки постоянно:

$$|\mathbf{V}| = |\mathbf{V}|_{t=0} = V_0; \quad (3.4)$$

2) траектория движения точки задается формулами

$$\begin{cases} x - x_c = \frac{u_0}{a} \sin(at) - \frac{v_0}{a} \cos(at) \equiv R_c \sin(at - \alpha), \\ y - y_c = \frac{u_0}{a} \cos(at) + \frac{v_0}{a} \sin(at) \equiv R_c \cos(at - \alpha); \end{cases} \quad (3.5)$$

$$x_c = x_0 + \frac{v_0}{a}, \quad y_c = y_0 - \frac{u_0}{a}, \quad R_c = \frac{V_0}{a},$$

где x_0, y_0 определяют положение точки в начальный момент времени $t = 0$, угол α удовлетворяет двум следующим равенствам:

$$\sin \alpha = \frac{v_0}{V_0}, \quad \cos \alpha = \frac{u_0}{V_0};$$

3) движение точки по указанной траектории происходит по ходу часовой стрелки, т.е. в отрицательном направлении.

Справедливость перечисленных свойств решения (3.3) устанавливается с помощью следующих выкладок:

$$|\mathbf{V}|^2 = u^2 + v^2 = u_0^2 \cos^2(at) + 2u_0v_0 \cos(at) \sin(at) + v_0^2 \sin^2(at) +$$

$$+ u_0^2 \sin^2(at) - 2u_0v_0 \sin(at) \cos(at) \sin(at) + v_0^2 \cos^2(at) = u_0^2 + v_0^2.$$

$$\dot{x} = \left[x_c + \frac{u_0}{a} \sin(at) - \frac{v_0}{a} \cos(at) \right]' = u(t);$$

$$\dot{y} = \left[y_c + \frac{u_0}{a} \cos(at) + \frac{v_0}{a} \sin(at) \right]' = v(t).$$

$$\frac{u_0}{a} \sin(at) - \frac{v_0}{a} \cos(at) = \frac{V_0}{a} \left[\frac{u_0}{V_0} \sin(at) - \frac{v_0}{V_0} \cos(at) \right] = \frac{V_0}{a} \sin(at - \alpha);$$

$$\frac{u_0}{a} \cos(at) + \frac{v_0}{a} \sin(at) = \frac{V_0}{a} \left[\frac{u_0}{V_0} \cos(at) + \frac{v_0}{V_0} \sin(at) \right] = \frac{V_0}{a} \cos(at - \alpha).$$

Таким образом, траекторией движения отдельной материальной точки по плоскости xOy является окружность Кориолиса, т.е. окружность радиуса R_c , с центром в точке (x_c, y_c) , по которой точка движется с постоянной по модулю скоростью (с постоянной угловой скоростью).

Направление движения точки по окружности Кориолиса можно определить следующим образом. Берется момент времени $t = \alpha/a$, в который движущаяся точка имеет координаты $x = x_c, y = y_c + R_c$, т.е. находится в верхней точке окружности Кориолиса. При увеличении времени от этого момента значение функции $\sin(at - \alpha)$ начинает увеличиваться,

а значение функции $\cos(at - \alpha)$ — уменьшаться. Следовательно, значение первой координаты будет увеличиваться от значения $x = x_c$, а значение второй координаты уменьшаться от значения $y = y_c + R_c$. Такое изменение соответствует движению от точки $(x_c, y_c + R_c)$ — верхней на окружности Кориолиса — по окружности Кориолиса вправо-вниз по ходу часовой стрелки.

Этого и следовало ожидать, так как движущуюся материальную точку СК отклоняет вправо.

При $V_0 \rightarrow 0$ значение R_c тоже стремится к нулю, а с ростом V_0 радиус окружности Кориолиса неограниченно растет. Но вне зависимости от значения $V_0 \neq 0$ время движения точки по окружности Кориолиса будет одно и то же:

$$t_c = \frac{12}{\sin \psi} \text{ ч.}$$

В самом деле, длина окружности Кориолиса

$$\ell_c = 2\pi R_c = \frac{2\pi V_0}{a} = \frac{2\pi V_0}{2\Omega \sin \psi} = \frac{\pi V_0}{\Omega \sin \psi},$$

а время движения по окружности Кориолиса

$$t_c = \frac{\ell_c}{V_0} = \frac{\pi}{\Omega \sin \psi} = \frac{\pi \cdot 24}{2\pi \sin \psi} \text{ ч} = \frac{12}{\sin \psi} \text{ ч.}$$

Например, при $\psi = \pi/3$ и $\sin \psi \approx 0.8660254$ получается, что $t_c \approx 13.85$ ч. В частности, если взять значение $V_0 = 3$ км/ч, соответствующее скорости движения уставшего пешехода, то получается, что этот пешеход после чуть больше полусуточных блужданий без ориентира в степи благодаря СК замыкает окружность Кориолиса и попадает в исходную точку, пройдя расстояние $\ell_c \approx 41\,569$ м.

В главе II, где приведена описательная схема функционирования ВЗП, особо потребуются факт, установленный в теореме 3.1: *СК действует на движущуюся в плоскости xOy материальную точку вправо от направления вектора скорости материальной точки.*

Глава II

ВОСХОДЯЩИЙ ЗАКРУЧЕННЫЙ ПОТОК

В главе на основании гипотезы об одном свойстве восходящего закрученного потока (ВЗП) предложена схема его функционирования, включающая: возникновение и начальную стадию движения воздуха в восходящем потоке; появление и усиление закрутки воздуха в ВЗП благодаря действию силы Кориолиса (СК); переход в устойчивое самоподдерживающееся состояние. Указаны причина естественного исчезновения ВЗП и внешнее воздействие, которое при разумных энергетических затратах приведет к его уничтожению.

§ 4. Основные наблюдаемые элементы восходящего закрученного потока

Все ВЗП, встречающиеся в природе – смерчи, торнадо, тропические циклоны – имеют общие свойства, отмеченные во Введении и повторенные здесь.

1. В атмосфере, которая вращается вместе с планетой вокруг ее оси, имеется отдельное движение газа, локальное по масштабам планеты и существующее достаточно продолжительное время. Так, Большое Красное Пятно наблюдается на Юпитере более 300 лет. Тропические циклоны функционируют в течение нескольких суток, торнадо и смерчи – от десятков минут до часов. Причем все природные ВЗП возникают в достаточно теплых и ровных местностях.

2. Движение газа в ВЗП является винтовым, т.е. с одновременным движением частиц газа вверх происходит закрутка – вращательное движение вокруг оси ВЗП. Причем для подобных природных течений, встречающихся в Северном полушарии, естественная закрутка имеет положительное направление, т.е. против хода часовой стрелки, если смотреть на поток сверху.

3. Вокруг основания ВЗП образуются очень сильные ветры (например, в тропических циклонах их скорость порядка 100 км/ч), дующие вдоль поверхности Земли, но не в сторону самого ВЗП. Именно эти ветры, а также самое нижнее восходящее движение воздуха становятся причинами многочисленных разрушений, приносимых торнадо и тропическими циклонами.

Воздух, входящий с большой скоростью в вертикальную часть торнадо, увлекает за собой пыль, частицы земли, отдельные предметы. И

когда это всё начинает тоже вращаться, то под действием центробежной силы все примеси (из-за бóльшей чем, у воздуха плотности) выбрасываются из восходящего потока. В результате вокруг основания торнадо наблюдается облако (см. рис. 5.1).

§ 5. Гипотеза о непроницаемости стенок восходящего закрученного потока

На рис. 5.1. и 5.2, взятых соответственно из работ [8,9], приведены фотографии двух конкретных торнадо, типичных для ВЗП. Отчетливо видна граница между ВЗП и внешним воздухом, что позволяет высказать следующую гипотезу:

в средней по высоте части ВЗП существует граница, отделяющая внешний покоящийся воздух от воздуха, движущегося в ВЗП.



Рис. 5.1.

В газовой динамике такая граница называется контактной поверхностью и далее будет обозначаться буквой Г.



Рис. 5.2.

По определению любая контактная поверхность обладает следующими свойствами:

1) значения давлений газа по обе стороны от нее равны, т.е. в случае ВЗП давление во внешнем покоящемся воздухе равно давлению в той области ВЗП, что непосредственно примыкает к контактной поверхности Γ ;

2) через контактную поверхность газ не течет, т.е. если снаружи ВЗП воздух покоится, то тот воздух из ВЗП, что примыкает к Γ , имеет нулевую нормальную к контактной поверхности составляющую вектора скорости газа;

3) касательные к Γ составляющие вектора скорости газа могут быть разными по разные стороны от контактной поверхности. Так, в случае ВЗП внешний воздух покоится, а на Γ воздух из ВЗП движется вверх по винтовой линии, лежащей на Γ .

§ 6. Структура восходящего закрученного потока, следующая из гипотезы

Из сформулированной в предыдущем параграфе гипотезы о том, что в средней части внешний покоящийся воздух не попадает в ВЗП, следует, что воздух попадает в ВЗП снизу и покидает его сверху.

Верхний край таких ВЗП, как торнадо, обычно ограничен достаточно большим облаком, играющим роль непроницаемой поверхности, вдоль которой "растекается" во все стороны в горизонтальном направлении воздух, покидающий ВЗП в его верхней части.

Верхний край тропических циклонов обычно бывает на той высоте, где давление воздуха очень мало и движущийся в ВЗП воздух просто разлетается во все стороны по касательным к векторам скорости газа в этой части ВЗП.

Исходя из указанной структуры ВЗП, движение газа в нем следующее.

В вертикальной части имеет место винтовое движение газа: вверх с одновременным вращением вокруг оси ВЗП в положительном направлении. В придонной и верхней частях ВЗП – почти плоские спиральные течения, закрученные также в положительном направлении, причем в придонной части – входящие в вертикальную часть ВЗП, в верхней части – вылетающие из нее.

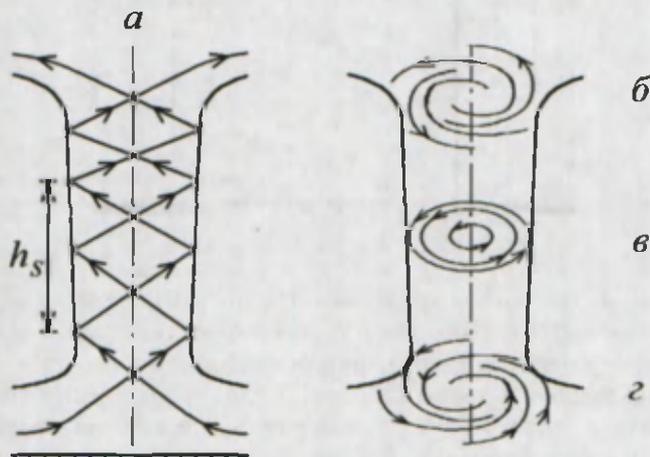


Рис. 6.2.

Движение газа в ВЗП схематично изображено на рис. 6.2, где в предположении стационарности потока даны проекции отдельных линий тока: на плоскость, проходящую через ось ВЗП, – рис. 6.2, а; на горизонтальные плоскости, проходящие в верхней, вертикальной и придонной частях ВЗП, – рис. 6.2, б, в, г соответственно.

На рис. 6.2, а указан h_s – средний шаг винтового² движения в вер-

²screw – винт

тикальной части ВЗП.

§ 7. Возникновение восходящего закрученного потока под влиянием силы Кориолиса

Рассмотрим возможный способ возникновения ВЗП, учитывая при этом, что в природе могут существовать и другие способы, отличные от предлагаемого.

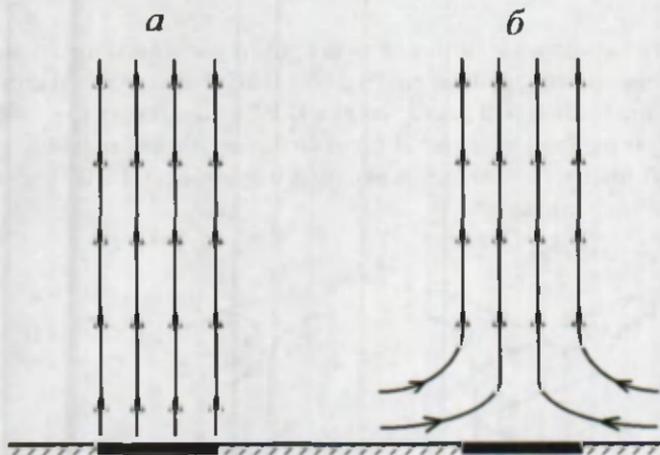


Рис. 7.1.

Начальным движением при возникновении ВЗП является вертикальное движение вверх теплого воздуха, вызванное локальным прогревом солнечной энергией участков суши или водной поверхности и прилегающих к ним воздушных масс. На рис. 7.1, а стрелками показан восходящий поток, а теплая часть поверхности Земли выделена жирно. Как показывают наблюдения, зарождение тропических циклонов и торнадо на Земле происходит там, где имеется сильный прогрев поверхности и прилегающих воздушных масс – в районах, расположенных вблизи экватора для тропических циклонов и на территории южных равнинных штатов США, в которых часто бывают торнадо. И чем больше прогрев поверхности и прилегающих воздушных масс, тем на большую высоту проникают восходящие тепловые потоки.

На смену восходящим объемам воздуха поступают новые. Известно (и это подтверждено многочисленными расчетами восходящих конвективных течений, см., например, [1]), что новые объемы воздуха прихо-

дят в область восходящего потока снизу (см. рис. 7.1, б). Так начинает образовываться придонная часть восходящего потока.

Естественно, что вначале придонное движение в плоскости xOy имеет радиальный характер: от периферийных областей к основанию восходящего теплового потока со всех сторон. На рис. 7.2 начальное радиальное движение в плоскости xOy изображено векторами скорости V отдельных частиц газа, а заштрихованный круг обозначает область восходящего теплового потока.

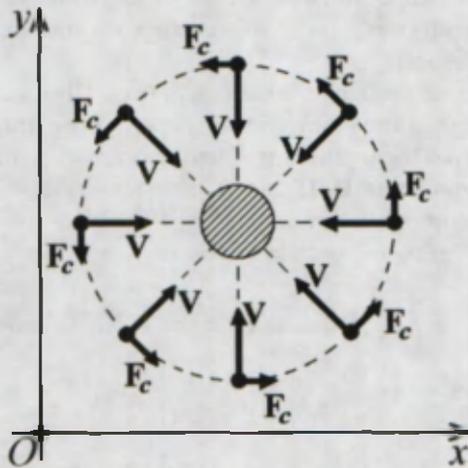


Рис. 7.2.

Из-за радиального движения воздуха в формирующейся придонной части благодаря действию СК возникает также и окружное движение в положительном направлении, т.е. против хода часовой стрелки. Это и будет называться закруткой газа. В § 15 факт возникновения закрутки в придонной части обоснован с помощью построения соответствующего решения СУГД при учете СК. Однако и с помощью более простых соображений можно убедиться в возникновении закрутки воздуха при начале радиального движения газа к основанию восходящего теплового потока.

В самом деле, пусть в горизонтальной плоскости, расположенной в Северном полушарии, много материальных частиц движется к некоторому общему центру (рис. 7.2). Тогда благодаря действию СК движение каждой частицы отклоняется вправо. В результате, помимо движения к указанному центру, возникает общее для всех частиц закрученное движение, причем в положительном направлении. Эту ситуацию иллю-

стрирует рис. 7.2, на котором \mathbf{F}_c – векторы СК, действующие на материальные частицы, движущиеся со скоростями \mathbf{V} к общему центру.

Возникшая в придонной части закрутка газа приводит к тому, что наблюдающееся в плоскости xOy движение частиц к восходящему тепловому потоку будет происходить уже не по прямым, а по спиральям. Движение по спиральям, в свою очередь, увеличит время нахождения частиц газа в начинающей вращаться придонной части. Следовательно, на частицы газа все более продолжительное время будет действовать СК, что увеличит скорость газа, в том числе ее окружную составляющую. Усилится закрутка газа и увеличится время нахождения частиц газа в придонной части.

Тот факт, что за большое время действие СК может существенно увеличить скорость движения частиц газа, иллюстрирует следующий модельный пример. Представляется, что поскольку в данном параграфе схема функционирования ВЗП дается только на описательном уровне, этот модельный пример уместен.

Единственным решением задачи Коши

$$\frac{dV}{dt} = kV, \quad V|_{t=0} = V_0 \neq 0; \quad k, V_0 - \text{const},$$

является функция

$$V(t) = V_0 e^{kt}.$$

К моменту времени $t_1 = 1/k$ значение $V(t)$ примерно в 3 раза превысит начальное значение V_0 и дальше будет нарастать также по экспоненте.

Пусть значение константы k взято таким:

$$k = 2\Omega \sin \psi,$$

где $\Omega = 2\pi/24 \frac{1}{4}$ – угловая скорость вращения Земли, если за единицу времени взят 1 ч; угол ψ – северная широта места ВЗП. Тогда для $\psi = \pi/6$, что соответствует широте Нового Орлеана, значение t_1 составит

$$t_1 = \frac{1}{k} = \frac{1}{2\Omega \cdot \frac{1}{2}} = \frac{12}{\pi} \text{ ч},$$

что равно примерно 3 ч 49 мин. Это время соответствует среднему времени существования сильного торнадо и много меньше времени существования тропических циклонов.

На более строгом математическом уровне, чем этот иллюстрирующий модельный пример, описание влияния СК на течение в придонной

части дано в §§ 15, 16 с помощью построения соответствующих решений СУГД.

Возвращаясь к описанию движения газа на начальной стадии возникновения ВЗП, еще раз подчеркнем, что газ и в придонной, и в вертикальной восходящей частях потока все время движется. Каждая отдельная частица газа в какой-то момент времени попадает в придонную часть и начинает в плоскости xOy движение по спирали благодаря действию СК. После нахождения в придонной части в течение длительного времени частица газа приобретает значительную по величине окружную составляющую вектора скорости ее движения и попадает в восходящую вертикальную часть потока. Через какое-то время, пройдя по винтовой линии вдоль вертикальной части потока, частица покидает его в верхней части.

И такое движение осуществляется непрерывно: в каждый момент времени в каждой фиксированной точке потока (взятой как в придонной, так и вертикальной части) на смену одной частице газа приходит другая, идущая вслед за ней. При этом каждая последующая частица в течение всё большего промежутка времени будет находиться в придонной части и поэтому будет приходить в вертикальную часть со всё большей скоростью и приносить в неё все большую закрутку.

Можно предположить, что через какое-то время эта динамика газового потока выйдет на определенный стационарный режим, т.е. закончится переход от начального движения восходящего теплового потока к достаточно устойчивому восходящему закрученному движению, имеющему придонную часть.

Таким образом, для стационарного режима устойчивого функционирования ВЗП главными являются придонная и вертикальная части ВЗП. Верхняя часть ВЗП значима для всего потока только одним элементом – высотой H .

Придонная часть представляет собой плоский вращающийся диск, который имеет конечную высоту h и угловая скорость вращения которого меняется в зависимости от расстояния до основания вертикальной части ВЗП. При этом на внешней окружной границе придонной части угловая скорость мала и можно считать, что именно здесь внешний газ (почти покоящийся) поступает в придонную часть ВЗП. В придонной части благодаря действию СК газ движется по спиралям довольно долго. При этом за счет действия СК окружная составляющая скорости воздуха увеличивается с уменьшением расстояния до основания вертикальной части.

Попадая в вертикальную часть потока, частицы газа движутся по

восходящим винтовым траекториям, так как воздух за время нахождения в придонной части приобрел вращательный момент. Время нахождения каждой отдельной частицы газа в вертикальной части ВЗП существенно меньше времени ее нахождения в придонной части. Таким образом, влияние СК на этом участке движения газа практически не сказывается.

В подтверждение предложенного механизма возникновения природных ВЗП приведем следующий факт: на экваторе тропические циклоны практически не наблюдаются, а фиксируются севернее (для Северного полушария).

Дело в том, что на экваторе, конечно же, достигается максимум поступления солнечной энергии на единицу площади земной поверхности. И возникновение восходящих тепловых потоков здесь происходит чаще, чем где-либо. Но на экваторе угол ψ равен нулю и, следовательно, равна нулю СК, имеющая в качестве множителя $\sin \psi$. Поэтому на придонную часть восходящих на экваторе тепловых потоков СК не действует и придонная часть не закручивается и не разгоняется. Естественно, что тогда не закручивается и вертикальная часть восходящего теплового потока. Далее приведены рассуждения, показывающие, что именно закрутка вертикальной части делает устойчивым восходящий поток.

Без закрутки восходящие в районе экватора тепловые потоки менее устойчивы и с течением времени пропадают из-за внешних причин: прекращение локального прогрева основания вертикальной части восходящего потока, движение других воздушных масс и т.п.

При переходе в северные широты уменьшается поступление солнечной энергии для возникновения восходящего теплового потока. Но зато увеличивается значение $\sin \psi$, т.е. возникает и увеличивается СК, благодаря действию которой в придонной части может начаться окружное движение – закрутка. С движущимся воздухом в вертикальную часть восходящего потока поступает вращательный импульс – закрутка. В результате получается, что только при достаточно больших значениях $\sin \psi$ наступает устойчивое функционирование всего ВЗП.

Следовательно, природа сама находит место между экватором и Северным полюсом, где поступление солнечной энергии ещё достаточно велико для возникновения восходящего теплового потока, а влияние СК уже достаточно велико для закрутки придонной части восходящего теплового потока. Именно в этом месте и возникают устойчиво функционирующие ВЗП.

Итак, возникновение, начальная стадия функционирования ВЗП и его переход в устойчивую стадию проходит по следующей схеме.

1. Локальный нагрев ровной земной поверхности или поверхности океана и сопутствующий ему нагрев примыкающих к этому месту объемов воздуха обеспечивают начало восхождения теплого потока, несмотря на противодействие силы земного тяготения.

2. Восходящее движение заставляет примыкающие объемы воздуха начать радиальное движение к основанию восходящего потока – образуется радиальное придонное течение.

3. В радиальном придонном течении из-за действия СК возникает окружное движение, которое увеличивает время нахождения частиц воздуха в придонной части. Ввиду этого увеличивается время воздействия СК и усиливается закрутка придонной части за счет роста окружной составляющей скорости движения газа в придонной части.

4. Воздух, поступающий из придонной в вертикальную часть, обладает вращательным импульсом, который способствует приобретению устойчивости восходящего потока.

5. Если восходящий тепловой поток просуществует продолжительное время, то благодаря длительному воздействию СК на течение в придонной части в ней сформируется устойчивое спиральное движение с большим значением окружной скорости в момент прихода частиц газа в основание вертикальной части потока. Это в свою очередь, сделает устойчивым течение в вертикальной части, а затем и независимым от локального нагрева воздуха в основании ВЗП.

§ 8. Энергия для самоподдержания устойчивого функционирования ВЗП

Как уже указывалось, энергию на образование и функционирование восходящего потока дает Солнце, нагревая участки суши или океана в каких-то местах больше, чем в других, а также нагревая прилегающие к этим местам объемы воздуха. Неравномерность нагрева земной поверхности может быть связана с многочисленными факторами и в первую очередь с состоянием облачного покрова, который препятствует достижению солнечной энергии поверхности Земли.

При образовании и функционировании восходящего теплового потока образуется придонная часть, в которой воздух движется к основанию восходящего потока. Благодаря энергии вращения Земли через действие СК, это начальное радиальное движение воздуха в придонной части переходит в спиральное. Таким образом, за счет энергии вращения Земли в придонной части создается закрутка потока и увеличивается скорость

движения газа. Поскольку воздух из придонной части попадает в вертикальную часть потока, с течением времени туда же передается закрутка. Следовательно, закрутка вертикальной части восходящего потока также обеспечивается энергией вращательного движения Земли. При этом из-за более короткого времени пребывания частиц газа в вертикальной части, чем в придонной, влияние СК на вертикальную часть ВЗП существенно меньше, чем влияние СК на течение в придонной части. Основная часть энергии, идущая на продолжительное и устойчивое функционирование всего ВЗП, тратится на закрутку придонной части и разгон газа в ней.

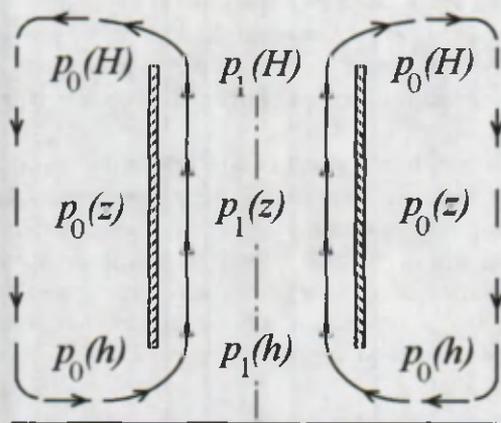


Рис. 8.1.

Дело в том, что после формирования придонной части ВЗП с достаточной закруткой, т.е. с достаточно большим значением окружной составляющей вектора скорости газа в момент его поступления в вертикальную часть ВЗП, функционирование всего ВЗП идет по схеме функционирования трубы (рис. 8.1) с прочными непроницаемыми стенками, имеющей внутри пониженное давление по сравнению с внешним давлением воздуха.

В частности, внешнее давление воздуха в придонной части $p_0(h)$ больше, чем $p_1(h)$ – давление воздуха в середине трубы в ее нижней части:

$$p_0(h) > p_1(h),$$

поэтому внешний воздух вдавливается в трубу через ее нижний край. На это тратится энергия земного тяготения, создавшего в окрестно-

сти поверхности Земли соответствующее давление внешнего воздуха, а также энергия, благодаря которой стало пониженным давление $p_1(h)$. Кроме того, в природных ВЗП поступление воздуха через нижний край также обеспечивается большими значениями скорости газа в этой области.

На рис. 8.1 вертикальные заштрихованные полосы обозначают прочные непроницаемые стенки трубы. Благодаря их наличию, внешний воздух, расположенный в средней по высоте области, не может проникнуть в трубу и помешать движению газа по ней, хотя давление внешнего воздуха больше давления в трубе:

$$p_0(z) > p_1(z).$$

Энергия, создающая силу, которая сдерживает этот перепад давления, вложена в создание прочных непроницаемых стенок трубы.

На верхнем крае трубы внешнее и внутреннее давления воздуха совпадают:

$$p_0(H) = p_1(H).$$

Сила земного тяготения создает в воздухе перепад давления: давление p_0 уменьшается с увеличением z – расстояния до поверхности Земли, т.е. при $h < z < H$ имеем

$$p_0(h) > p_0(z) > p_0(H).$$

Однако перепад давления во внешнем воздухе не превышает влияния силы тяжести, поэтому внешний воздух не движется, если, конечно, нет каких-либо дополнительных воздействий.

Внутри трубы также имеется перепад давления с высотой:

$$p_1(h) > p_1(z) > p_1(H).$$

Тем не менее представляется, что главный вклад в преодоление потоком силы земного тяготения внутри трубы вносит не перепад давления, а большие значения скорости газа, входящего снизу в трубу.

Естественно, в соответствии с законом сохранения массы воздух, поступающий снизу в трубу, заменяется воздухом, поступившим сверху в каком-то другом месте земной поверхности, достаточно удаленном от трубы. На рис. 8.1 это движение воздуха показано штриховыми линиями со стрелками.

Итак, чтобы труба функционировала, помимо существующего в воздухе давления на поверхности Земли нужна энергия, во-первых, на создание прочных непроницаемых стенок трубы, сдерживающих внешний

воздух с большим давлением; во-вторых, на создание пониженного давления в трубе, в том числе на ее нижнем крае, меньшего, чем давление внешнего воздуха на том же нижнем крае трубы; и наконец, на увеличение скорости потока воздуха, входящего снизу в трубу.

Как уже упоминалось, увеличение скорости воздуха в придонной части по мере его приближения к основанию вертикальной части вызвано действием СК.

Осталось пояснить, почему закрутка газа, возникшая в придонной части и продолжающаяся в вертикальной части ВЗП, играет роль непроницаемых и сдерживающих внешнее давление стенок, а также почему эта закрутка, присутствующая в вертикальной части ВЗП, создает пониженное давление внутри вертикальной части.

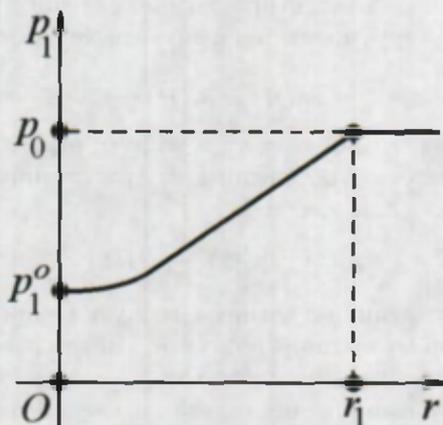


Рис. 8.2.

Объясняет это действие центробежной силы, проявляющейся при любом круговом движении. В газе, вращающемся вокруг некоторой оси (пусть и одновременно движущемся вдоль оси), центробежная сила сдвигает частицы газа дальше от оси. В результате плотность газа растет с ростом расстояния от оси вращения. А с ростом плотности при постоянной энтропии растет и давление в газе. Таким образом, за счет действия центробежной силы давление p_1 во вращающемся газе монотонно увеличивается с ростом расстояния от оси вращения (рис. 8.2), где p_1 – давление во вращающейся области, r – расстояние от оси вращения, r_1 – радиус вращающейся области. То есть давление в окрестности оси

вращения меньше, чем давление на краю вращающейся области, например в точке $r = r_1$, где оно достигает некоторого значения $p_0 = p_1(r_1)$:

$$p_1(0) = p_1^0 < p_0 = p_1(r_1); \quad p_1^0, p_0 - \text{const.}$$

Законы газовой динамики позволяют вращающийся газовый столб состыковать через контактную поверхность с внешним покоящимся газом при условии, что на границе этого столба давление будет равно давлению во внешнем покоящемся воздухе. На рис. 8.2 область такого покоящегося газа, имеющего постоянное давление p_0 , расположена при $r \geq r_1$.

При этом во вращающемся газовом столбе радиальная составляющая скорости должна быть равна нулю при $r = r_1$, чтобы воздух из столба не перемешивался с внешним воздухом. Окружная скорость вращающегося газа на границе столба, т.е. при $r = r_1$, может быть в принципе любой.

Естественно, что значение $r = r_1$, при котором во вращающемся газовом столбе достигается заданное значение p_0 , как и вся зависимость $p_1 = p_1(r)$, определяется угловой скоростью вращения газа: чем больше угловая скорость вращения, тем больше центробежная сила - и тогда при меньших значениях r достигается заданное значение p_0 . Возможно, именно поэтому у большинства торнадо наблюдается увеличение радиуса с увеличением расстояния от Земли. Хотя на эту зависимость радиуса ВЗП от z также влияет уменьшение давления во внешнем воздухе с ростом значений z .

В заключение еще раз подчеркнем, что согласно выдвинутой гипотезе, практически однозначно определяется схема устойчивого функционирования ВЗП. В рамках этой схемы основная внешняя энергия непрерывно поступает и тратится как на разгон газа в придонной части, так и на создание "непроницаемых и достаточно прочных внешних стенок трубы", а также на создание пониженного давления в "трубе".

Эту энергию дает вращение Земли, вкладывается она в придонную часть ВЗП через действие СК на закрутку всё новых объемов газа, поступающих извне сначала в придонную часть, а потом переходящих в вертикальную с уже приобретенным большим значением окружной составляющей вектора скорости газа.

В результате устойчивое функционирование ВЗП обеспечивается практически самоподдерживающимся механизмом, естественно, при наличии вращения планеты.

Этот самоподдерживающийся механизм таков.

А. Закрутка, приобретенная в придонной части очередными объемами газа, обеспечивает большую скорость при его поступлении в вертикальную часть, а также существование "прочных непроницаемых стенок" и пониженное давление вокруг оси ВЗП.

В. "Прочные непроницаемые стенки" не дают внешнему газу захлопнуть вертикальную часть ВЗП, а пониженное давление в вертикальной части и движения газа вверх по ней заставляют всё новые объемы газа поступать в вертикальную часть ВЗП.

С. Это вызывает поступление новых объемов газа в придонную часть через ее внешнюю окружную границу.

Д. Новые объемы газа из-за общего спирального характера течения в придонной части находятся в ней продолжительное время и за счет действия СК приобретают значительную закрутку.

И так далее, начиная снова с действия, помеченного буквой А.

§ 9. Об одном визуальном эффекте восходящего закрученного потока

По многим наблюдениям смерчей и торнадо отмечается следующее явление.

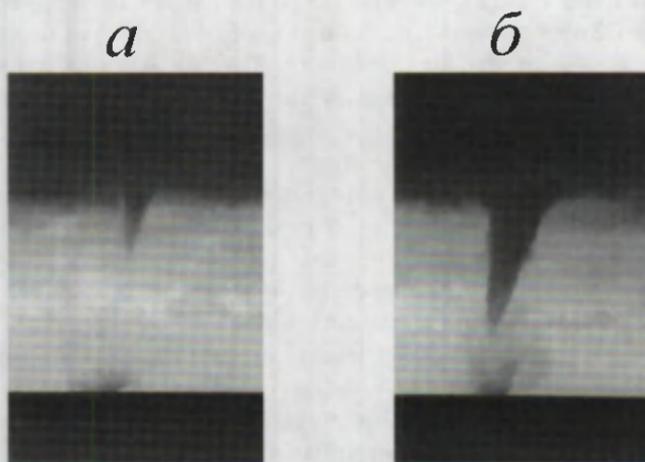


Рис. 9.1.

В самой верхней части восходящего потока – обычно почти на границе с облаком, в которое "упирается" восходящий поток – возникает вращающаяся воронка. С течением времени она начинает расти вниз.

На рис. 9.1, *а, б* приведены фотографии торнадо с такой возникающей (рис. 9.1, *а*) и начинающейся расти вниз (рис. 9.1, *б*) воронкой.

Видимые на обеих фотографиях (рис. 9.1, *а, б*) облака под воронками у горизонтальной поверхности говорят о том, что здесь сформировалась уже вся вращающаяся вертикальная часть торнадо, хотя визуально она фиксируется пока не по всей своей высоте. Закрутка воздуха в торнадо выбрасывает из его нижней части попавшие туда примеси (пыль, влагу, предметы и т.п.), что и наблюдается как облака под воронками.

В тот момент времени, когда воронка достигает поверхности Земли и вся вертикальная часть торнадо становится видимой, в нее начинает активно всасываться воздух. Именно в этот момент зарождается разрушительная сила смерчей и торнадо.

Дадим объяснение этому явлению на основе схемы возникновения восходящего потока и его перехода к устойчивому функционированию как закрученного потока. Кроме того, привлечем описание энергетики ВЗП, данное в § 8.

Пусть вертикальная часть ВЗП упирается в облако, которое играет роль непроницаемой поверхности, вдоль которой растекается воздух, покидающий ВЗП через его верхний край. Пусть также восходящий поток еще поддерживается за счет нагрева нижних объемов воздуха, но уже сформировалась придонная часть с большой закруткой, которая в достаточных масштабах поступает в вертикальную часть ВЗП (см. рис 9.2, *а*).

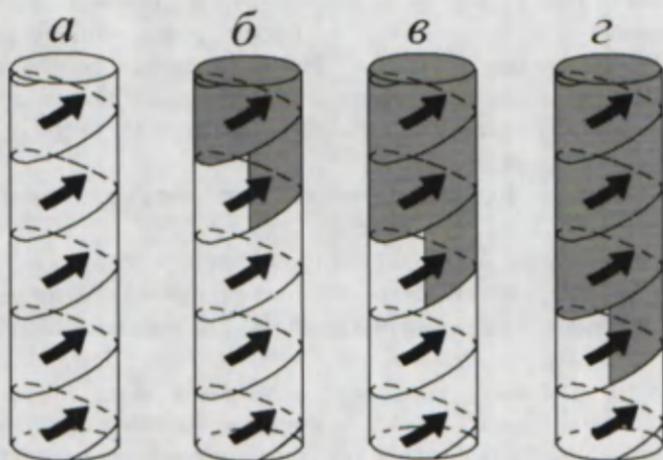


Рис. 9.2.

Спрашивается, в какой части восходящего потока в результате имеющейся закрутки газа начнут образовываться "непроницаемые стенки". Возможный ответ: скорее всего там, где в вертикальной части ВЗП меньше всего значение h_s – шага винтового движения газа.

А значение h_s меньше всего там, где меньше всего w – вертикальная составляющая скорости газа, т.е. в самой верхней части ВЗП, где восходящий поток тормозится больше всего: во-первых, в результате действия силы земного притяжения на частицы газа, прошедшие всю вертикальную часть ВЗП, т.е. поднявшиеся выше всех, а во-вторых, именно здесь восходящий поток тормозится об облако, расположенное в верхней части ВЗП.

К тому же в самой верхней части восходящего потока наименьшее значение по всей вертикальной части имеет $p_0(z)$ – давление внешнего воздуха, что также способствует формированию "непроницаемых стенок" благодаря имеющейся закрутке в вертикальной части ВЗП.

Итак, первое возникновение "непроницаемых стенок" происходит в самой высокой точке вертикальной части потока, где-то ниже края облака. Сопровождается оно одновременным понижением давления возле оси восходящего потока. Оба эти действия воспринимаются как возникновение под облаком в восходящем потоке вращающейся воронки (см. рис 9.2, б).

Благодаря приходу снизу новых объемов воздуха, имеющих еще большую закрутку, "непроницаемые стенки" начнут прирастать и, следовательно, увеличивать свои вертикальные размеры за счет удлинения нижней части. Визуально это воспринимается как движение воздуха в воронке вниз, а на самом деле это просто добавление снизу новых участков "непроницаемых стенок". Такой рост вниз "непроницаемых стенок", естественно, сопровождается образованием на том же уровне (движущемся вниз) области пониженного давления в окрестности оси потока.

Вся эта динамика воспринимается как удлинение вниз вращающейся воронки (см. рис 9.2, в, г).

Наконец наступает момент, когда прирастающие снизу (за счет прихода новых объемов воздуха со всё большей закруткой) "непроницаемые стенки" достигают придонной части ВЗП, т.е. вращающаяся воронка почти касается поверхности Земли.

Именно тогда область пониженного давления достигает придонной части и за счет большого перепада давления (разность $[p_0(h) - p_1(h)]$ резко увеличивается) происходит активное поступление воздуха из придонной части в вертикальную.

Начинается разрушительное действие опустившейся вращающейся воронки.

Таким образом, образование вверху восходящего потока вращающейся воронки и ее последующее опускание вниз как раз и является достаточно быстро протекающей стадией перехода от начального функционирования восходящего потока за счет тепловой энергии к функционированию ВЗП за счет энергии вращения Земли, вкладываемой в закрутку придонной части через действие СК.



Рис. 9.3.

На рис. 9.3 приведена фотография еще одного торнадо, у которого вертикальная часть еще закручена слабо и визуально фиксируется только благодаря сильной запыленности и боковой подсветке Солнцем. В верхней части торнадо под самым облаком уже начала формироваться опускающаяся вниз воронка.

§ 10. Исчезновение ВЗП естественным путем

Внешних причин естественного исчезновения ВЗП может быть несколько, включая большие внешние возмущения, происходящие в атмосфере.

Но поскольку главный энергетический приток идет на создание закрутки придонной части, то нарушение по тем или иным причинам продолжительного вращения воздуха в придонной части или просто ее разрушение является основной причиной естественного исчезновения ВЗП.

Если в придонной части не будет закрутки, то ее не будет и в вертикальной части. А тогда, во-первых, "непроницаемые стенки" не будут

прочными по причине их отсутствия, и внешний воздух просто захлопнет вертикальную часть ВЗП. Во-вторых, из-за отсутствия закрутки давление в окрестности оси ВЗП уже не будет пониженным и всасывание новых объемов газа в вертикальную часть ВЗП будет уже не таким интенсивным, поскольку при отсутствии закрутки будут небольшими значения скорости газа, входящего в вертикальную часть ВЗП.

В целом ВЗП при уменьшении закрутки станет менее устойчивым и может быть разрушен даже небольшим внешним возмущением, например движением других воздушных масс.

Таким образом, перемещение ВЗП в ту местность, рельеф которой препятствует вращательному движению воздушных масс в придонной части становится причиной естественного исчезновения ВЗП, наблюдаемых в природе.

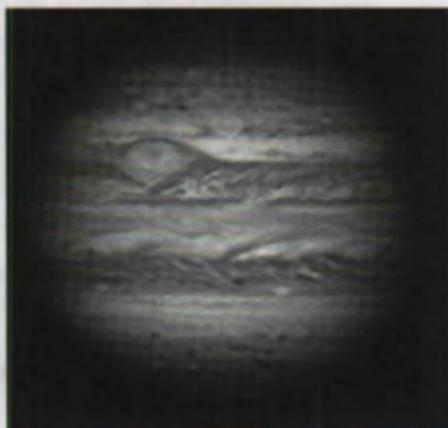


Рис. 10.1

В качестве примера, подтверждающего данное предположение, рассмотрим Большое Красное Пятно на Юпитере (см. рис. 10.1), которое уже более 300 лет устойчиво движется вдоль двенадцатой параллели в Северном полушарии Юпитера, хотя и имеет определенную динамику в изменении размеров и окраски. На Юпитере нет привычной для Земли поверхности и, следовательно, нет рельефа, элементы которого могли бы разрушить закрутку придонной части, что привело бы к исчезновению Большого Красного Пятна. По данным астрономических наблюдений, Юпитер излучает примерно в 2-3 раза больше энергии, чем получает ее от Солнца. Предполагается, что это следствие определенных ядерных реакций, происходящих в глубоких слоях Юпитера. Скорее всего, такое излучение энергии Юпитером и восхождение тепловых

потоков газа послужили началом возникновения Большого Красного Пятна.

Другим примером, свидетельствующим в пользу изложенной причины естественного исчезновения ВЗП, могут быть тропические циклоны, традиционно наблюдаемые в Карибском бассейне и часто заканчивающие свое существование на юге США. Такой циклон после зарождения над ровной поверхностью Атлантического океана движется либо на запад практически вдоль параллели, отставая от вращения Земли, либо на северо-запад, возможно, из-за действия СК на его вертикальную часть (см. § 2). Если при движении тропический циклон проходит над островами Карибского бассейна, то он частично ослабевает. Это, в соответствии с предложенной схемой функционирования ВЗП, происходит за счет воздействия неровностей рельефа островов на придонную часть ВЗП, а точнее, на торможение газа и уменьшение закрутки. Затем при продолжении движения циклона и перехода его снова в достаточно ровную акваторию Мексиканского залива закрутка придонной части восстанавливается и циклон усиливается.

Если циклон сразу достигает южного побережья США, то продвигаясь в глубь суши, имеющей неровную поверхность и многочисленные строения, естественным образом исчезает из-за того, что все отмеченные элементы суши разрушают закрутку придонной части. Но одновременно с этим циклон, к сожалению, приносит большие разрушения.

Если же циклон, двигаясь на запад вдоль Мексиканского залива сначала достигает мексиканского побережья, то он не разрушается о неровную сушу, а как бы "отражается" от гор Восточная Сьерра-Мадре. Вероятно, это "отражение" происходит уже при взаимодействии придонной части ВЗП с горами. "Отраженный" циклон движется снова над ровной гладью Мексиканского залива, усиливается, достигает побережья США и естественным образом исчезает при движении по суше. Ведь энергия разогнавшегося в придонной части газа тратится не на поддержание "непроницаемых стенок", а тратится еще до перехода в вертикальную часть на разрушение строений на Земле или просто на взаимодействие с неровностями земной поверхности.

Подобная ситуация наблюдается и с тропическими циклонами, проходящими из Тихого океана на восточные провинции Китая. Основные разрушения они приносят прибрежным районам, а затем двигаясь, в глубь территории, либо исчезают, либо "отражаются" и начинают движение на север вдоль побережья.

§ 11. Проверка гипотезы натурными наблюдениями

Для проверки как самой гипотезы, так и схемы функционирования ВЗП, следующей из этой гипотезы, необходимо в первую очередь собрать данные о придонной части природных ВЗП.

Основными являются следующие показатели ВЗП: высота h и ее изменение с изменением расстояния до вертикальной части ВЗП; диаметр всей придонной части; диаметр нижнего основания вертикальной части ВЗП, непосредственно примыкающего к центру придонной части, и, главное, распределение скорости и давления газа по всей придонной части.

С помощью этих показателей будет возможно оценить энергию, вкладываемую в закрутку, а знание значений параметров газа в придонной части ВЗП позволит определить параметры потока в вертикальной его части. Как показывает практика, собрать натурные показатели движения газа в вертикальной части ВЗП достаточно трудная задача.

Основные параметры течения в вертикальной части ВЗП: распределение скорости и давления газа в зависимости как от z , так и от r ; h_s – шаг винтовых линий, являющихся траекториями движения частиц газа. Вполне возможно, что h_s зависит от z .

§ 12. Теоретическая проверка гипотезы

Теоретическая проверка выдвинутой гипотезы и следующих из нее выводов будет состоять в описании математическими методами течений как в отдельных областях ВЗП, так и в целом.

Для математического исследования течений газа можно использовать разные модели – от самых простых до самых сложных. Представляется, что даже модель несжимаемой жидкости соответствует течению в придонной части, что подтверждают уже давно известные решения [17].

Можно привлечь полную систему уравнений Навье–Стокса (см. [1]), описывающую течения вязкого сжимаемого теплопроводного газа. Однако те скорости движения и те температуры газа, что сопутствуют природным ВЗП, говорят о том, что в этих течениях эффекты вязкости и теплопроводности не будут определяющими.

В данной работе для моделирования течений в ВЗП используется традиционная СУГД с учетом СК, в которой в качестве искомой функции берется не плотность газа, а конкретная степень плотности [3,5–7]. Далее, в §§ 15–17 параграфах построены достаточно простые решения

СУГД, которые подтверждают некоторые выводы о свойствах течений газа в ВЗП, следующие из выдвинутой гипотезы.

Для более детального и полного описания течений газа в ВЗП нужно проводить глубокие исследования с помощью построения (как аналитическими, так и численными методами) многих других решений СУГД с учетом СК.

§ 13. Уничтожение восходящего закрученного потока внешним воздействием

Известно, что в таких природных ВЗП, как тропические циклоны, с большой скоростью движутся огромные массы воздуха. Предположение, что этот поток можно остановить внешним воздействием, представляется достаточно далеким от реальности.

И все же можно ставить вопрос об уничтожении природных ВЗП внешним воздействием. Обоснуем это на небольшом примере.

Наполненную водой ванну можно освободить, вычерпывая воду ковшиком и совершая при этом определенную работу. А можно просто вытащить пробку, закрывающую нижнее сливное отверстие, и вода вытечет сама под действием силы тяжести. Ясно, что наши энергетические затраты на вытаскивание пробки будут существенно меньше, чем на вычерпывание воды. Надо только знать, где в ванне находится пробка...

В качестве общих соображений по возможному уничтожению ВЗП внешним воздействием можно сформулировать следующее.

СК и ее действие на закрутку придонной части не убрать, поскольку не остановить вращение Земли.

Принудительно сдвинуть тропический циклон, торнадо или другой природный ВЗП на экватор, где СК равна нулю, или в места, обладающие неровным рельефом, практически невозможно.

Поэтому остается одно: разрушить "внешние непроницаемые стенки" вертикальной части ВЗП и тем самым попробовать изменить течение во всем ВЗП.

Кстати, человечество имеет положительный опыт борьбы с природными ВЗП подобным образом. По рассказам некоторых моряков, они частенько уничтожают встречающиеся в море вихри, стреляя из крупнокалиберных пулеметов в их среднюю часть. Подобные факты, но с применением корабельных пушек XIX в. описаны русским писателем И.А. Гончаровым в книге "Фрегат "Паллада".

Но не полагаясь на чьи-то, пусть и достоверные рассказы, далее анализируется (на описательном уровне), что будет происходить с ВЗП,

если разрушить его "внешние непроницаемые стенки", и какая в итоге энергия потребуется для этого разрушения.

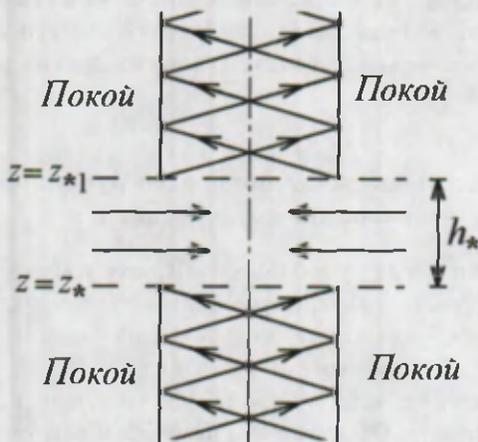


Рис. 13.1.

Естественно, что разрушать "внешние непроницаемые стенки" вертикальной части ВЗП надо на той высоте, где внешний воздух не имеет закрутки, т.е. при

$$z > h,$$

где h – высота закрученной придонной части ВЗП. И чем выше от закрученной придонной части будет происходить разрушение "стенок", тем больше вероятность, что на этой высоте внешний воздух не закручен.

Пусть "внешние непроницаемые стенки" вертикальной части ВЗП разрушены на некотором отрезке

$$z_* \leq z \leq z_{*1}, \quad z_{*1} - z_* = h_* > 0,$$

причем разрушены по всему периметру вертикальной части ВЗП на данной высоте. Подобная ситуация схематично изображена на рис. 13.1, который повторяет среднюю часть рис. 6.2, а, но с разрывом по высоте.

Заранее представляется, что, если высота разрыва $h_* = (z_{*1} - z_*)$ будет больше (например, в 2-3 раза), чем h_s – шаг винтового движения в вертикальной части ВЗП, то результат внешнего воздействия окажется эффективнее. Особенно это важно в тех ситуациях, когда разрушение "внешних непроницаемых стенок" произойдет не по всей внешней окружности вертикальной части ВЗП.

После разрушения "внешних непроницаемых стенок" внешний покоящийся воздух устремится в разрыв "стенки", поскольку внешнее давление $p_0(z)$ больше, чем давление $p_1(z_*)$ и $p_1(z_{*1})$ в центре вертикальной части ВЗП на всем участке, где разрушены "стенки". На рис. 13.1 такое движение обозначено горизонтальными линиями со стрелками. В результате заполнения разорванной части ВЗП внешним воздухом давление в ней станет практически равно внешнему: $p_0(z)$. Тогда если в этой, заполненной извне, части и возникнет движение, то оно не будет обладать ни закруткой, ни вертикальной составляющей вектора скорости газа.

Отдельно рассмотрим, что будет происходить на верхнем крае разрыва при $z = z_{*1}$ и что — на нижнем крае разрыва при $z = z_*$.

Сначала случай верхнего края: $z = z_{*1}$. Поскольку воздух в вертикальной части ВЗП движется вверх, то нижний край неразрушенной "стенки" будет двигаться вверх с вертикальной скоростью газа в этой части ВЗП. Движение вверх нижнего края неразрушенной "стенки" будет освобождать всё больше места для заполнения этой области внешним покоящимся газом. То есть фактически граница $z = z_{*1}$ начнет быстро двигаться вверх. Поэтому вертикальная часть ВЗП, начиная с высоты места первого разрушения "стенки" и до верхнего края ВЗП, очень быстро захлопнется внешним воздухом.

На нижнем крае разрушенной "стенки" при $z = z_*$ будет наблюдаться другая картина. Фактически возникнет ситуация, которая в газовой динамике называется распад разрыва. А именно, по одну сторону от поверхности $z = z_*$ (сверху) будет располагаться газ с одними значениями параметров: $p_0(z_*)$ и $w_0(z_*) = 0$, где w — вертикальная составляющая вектора скорости газа. По другую сторону от поверхности $z = z_*$ (снизу) будет газ с другими значениями параметров: $p_1(z_*, r)$ и $w_1(z_*, r)$. При этом справедливо неравенство

$$p_0(z_*) > p_1(z_*, r).$$

Не вдаваясь в детали известного в газовой динамике решения задачи о распаде разрыва, укажем только на следующий факт. Чем больше значение $p_0(z_*)$ значения $p_1(z_*, r)$, тем вероятнее появление границы раздела, идущей вниз, на которой w близка к нулю. Иначе говоря, чем больше разность $[p_0(z_*) - p_1(z_*, r)]$ на этой границе, тем больше на границе $z = z_*$ будет тормозиться идущий вверх газ и тем быстрее область с заторможенным газом будет распространяться вниз.

Такое движение газа, возникшее на нижнем крае разрушенных "стенок" при $z = z_*$, в итоге закроет выход воздуха вверх из закрученной

придонной части. После этого в центре придонной части образуется так называемое ядро покоя – область, где газ не движется, так как ему просто некуда двигаться.

Ввиду того, что в спиральном движении воздуха в придонной части обязательно есть ненулевая радиальная составляющая вектора скорости газа, да и из-за диссипативных процессов тоже, ядро покоя начнет увеличиваться в диаметре и придонная часть со временем сама перестанет вращаться.

Таким образом, чем больше будет значение $p_0(z_*)$, тем эффективнее будет тормозиться газ ниже разрушенных "стенок".

И как это часто бывает при решении трудных задач, для уничтожения ВЗП придется искать "золотую середину" для места разрушения "стенок". Ведь чем больше будет значение z_* , тем дальше будет отход от вращающейся придонной части и тем меньше будет h_s – шаг винтового движения в вертикальной части ВЗП, и, следовательно, лучше захлопнется верхняя от места разрушения "стенок" часть ВЗП. Но чем меньше будет значение z_* , тем больше будет значение $p_0(z_*)$ – давления внешнего воздуха и тем лучше будет тормозиться нижняя от места разрушения "стенок" часть ВЗП.

В любом случае должно выполняться неравенство

$$z_* > h.$$

И наконец, самый важный вопрос: какую энергию надо вложить, чтобы разрушить ВЗП подобным воздействием.

Представляется, что не очень большую. Во-первых, давление, которое надо преодолеть для разрушения "стенок", есть давление во внешнем воздухе, т.е. порядка всего одной атмосферы.

Во-вторых, после разрушения "стенок" течение газа в верхней части ВЗП будет тормозить энергия, накопленная давлением внешнего покоящегося воздуха, который будет просто захлопывать эту часть ВЗП. Воздух из нее сам уйдет вверх.

Кроме того, именно давление внешнего воздуха в месте разрушения "стенок" будет тормозить ту часть ВЗП, что лежит ниже места разрушения "стенок".

Конечно, если это давление окажется недостаточным для торможения газа ниже места разрушения стенок (что могут показать только детальные расчеты), то одновременно с разрушением "стенок" необходимо будет соответствующим внешним воздействием увеличивать давление сверху от поверхности $z = z_*$. Но тот факт, что давление и плот-

ность газа в окрестности оси ВЗП достаточно малы, позволяет надеяться, что подобное дополнительное воздействие не понадобится.

Отметим, что здесь приведена достаточно упрощенная схема движения газа, которое возникает после разрушения "стенок" в вертикальной части ВЗП. Тем не менее основные моменты этого движения представлены верно.

Следовательно, при указанном способе внешнего воздействия на вертикальную часть ВЗП основная энергия потребуется на разрушение "стенок". Тормозить поток в целом будет давление внешнего воздуха, т.е. работу по уничтожению ВЗП произведет сама природа.

Можно провести небольшую аналогию с пробиванием борта корабля. Если пробивание борта произойдет выше ватерлинии, то корабль от этого одиночного воздействия не затонет. Но если пробивание борта произойдет ниже ватерлинии, то дополнительно к этому одиночному воздействию "поработает" и природа: вода, поступающая извне в трюм, затопит корабль.

В заключении § 13 отметим еще раз, что сформулированные в нем на описательном уровне причины возникновения и свойства ВЗП основаны на конкретной гипотезе.

Последующий в §§ 15-17 математический анализ свойств точных и приближенных решений СУГД, описывающих движения газа в ВЗП, в определенном смысле подтверждает следующие из гипотезы свойства течений в придонной и в вертикальной частях ВЗП.

Однако представляется, что главным для проверки гипотезы будет соответствующий эксперимент с целью прекращения функционирования торнадо и тропических циклонов.

Глава III

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОСХОДЯЩЕГО ЗАКРУЧЕННОГО ПОТОКА

В главе приведена в прямоугольных и в цилиндрических координатах система уравнений газовой динамики (СУГД) при учете СК. Доказана теорема, обосновывающая возникновение закрутки в положительном направлении в придонной части ВЗП благодаря действию СК. Построены точные и приближенные решения СУГД, описывающие стационарные течения в придонной и в вертикальной частях ВЗП. Эти решения соответствуют предложенной схеме функционирования ВЗП.

§ 14. Система уравнений газовой динамики с учетом силы Кориолиса

Так же, как и в § 1 вводится прямоугольная система координат с осями Ox , Oy , Oz , направленными соответственно на восток, север и вверх от поверхности Земли (рис. 14.1, а). Будем полагать, что точка O – начало декартовой системы координат – лежит на поверхности Земли в Северном полушарии на параллели с широтой ψ (см. рис. 14.1, б).

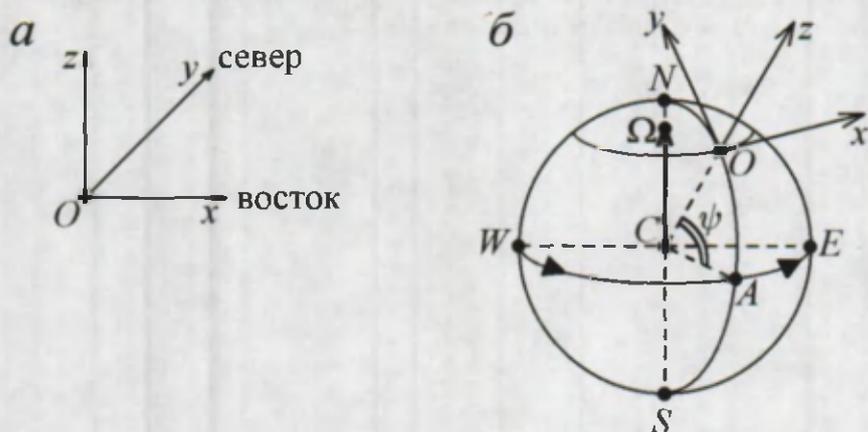


Рис. 14.1.

Тогда в прямоугольной системе координат постоянный вектор Ω – вектор угловой скорости Земли

$$\Omega = (0, \Omega_2, \Omega_3); \quad \Omega_2 = \Omega \cos \psi, \quad \Omega_3 = \Omega \sin \psi,$$

где Ω – модуль вектора Ω : $\Omega = |\Omega|$ определяется по формуле

$$\Omega = \frac{2\pi}{24 \text{ ч}} = \frac{2\pi}{24 \cdot 60^2 \text{ с}}$$

Если в системе координат xyz рассматривать уже не движение отдельной материальной точки, а движение идеальной сплошной среды, то уравнения движения, называемые также уравнениями Эйлера и являющиеся дифференциальной формой закона сохранения импульса, имеют в векторной форме следующий вид, приведенный в [18] и повторенный в [8]:

$$\mathbf{V}_t + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \mathbf{g} - 2\Omega \times \mathbf{V}. \quad (14.1)$$

В векторном уравнении (14.1) t – время; $\mathbf{V} = (u, v, w)$ – вектор скорости газа в декартовой системе координат x, y, z ; ρ – плотность газа; p – давление газа; \mathbf{g} – вектор внешних массовых сил, полагаемый далее

$$\mathbf{g} = (0; 0; -g), \quad g = \text{const} > 0;$$

∇ – оператор градиента по переменным x, y, z .

Как уже отмечалось в § 1, влиянием центробежной силы

$$\mathbf{F} = -\Omega \times (\Omega \times \mathbf{r})$$

в уравнении (14.1) пренебрегается из-за ее малости, но действие силы Кориолиса (СК)

$$\mathbf{F}_c = -2\Omega \times \mathbf{V} = 2(\Omega_3 v - \Omega_2 w)\mathbf{i} - 2\Omega_3 u\mathbf{j} + 2\Omega_2 u\mathbf{k}$$

учитывается и при этом полагается, что $\psi = \text{const}$ в $\Omega_{2,3}$.

Векторное уравнение (14.1) содержит три скалярных уравнения для пяти искомых функций: ρ, u, v, w, p .

Чтобы получить замкнутую систему уравнений, в которой число искомых функций равно числу скалярных уравнений, необходимо, во-первых, учесть закон сохранения массы, который в дифференциальной форме имеет вид

$$\rho_t + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho + \rho \text{div} \mathbf{V} = 0 \quad (14.2)$$

и называется уравнением неразрывности, div – оператор дивергенции по переменным x, y, z .

Во-вторых, кроме закона сохранения массы необходимо также учесть закон сохранения энергии. Однако дифференциальная форма этого закона зависит от того, в каком виде задана зависимость давления от двух других термодинамических параметров газа [16].

Далее в качестве сплошной среды рассматривается идеальный политропный газ.

Если за независимые термодинамические параметры взяты плотность ρ и энтропия S , то давление газа задается соотношением

$$p = \frac{1}{\gamma} A^2(S) \rho^\gamma, \quad (14.3)$$

где $A^2(S)$ – энтропийная функция; $\gamma = \text{const} > 1$ – показатель политропы газа.

В этом случае дифференциальная форма закона сохранения энергии имеет вид

$$S_t + \mathbf{V} \cdot \nabla S = 0, \quad (14.4)$$

т.е. является уравнением, передающим постоянство энтропии вдоль траекторий движения частиц газа при условии, что траектории не пересекают поверхность сильного разрыва.

Итак, в случае уравнения (14.3) получена для пяти искомым функций: ρ, u, v, w, S – система из пяти скалярных уравнений (14.2), (14.1), (14.4), где в трех скалярных уравнениях из (14.1) необходимо учесть вид зависимости (14.3). Система (14.2), (14.1), (14.4) есть СУГД в традиционном виде [19], но уже при учете СК.

При задании давления с помощью соотношения (14.3) в СУГД удобно вместо искомым функций ρ и S ввести другие искомые функции [3,5-7]:

$$\sigma = \rho^{(\gamma-1)/2}, \quad s = A^2(S). \quad (14.5)$$

Тогда СУГД при учете СК приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_t + \mathbf{V} \cdot \nabla \sigma + \frac{(\gamma-1)}{2} \sigma \text{div} \mathbf{V} &= 0, \\ \mathbf{V}_t + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \frac{2}{(\gamma-1)} s^2 \sigma \nabla \sigma + \frac{2}{\gamma} \sigma^2 s \nabla s &= \mathbf{g} + \mathbf{F}_c, \end{aligned} \quad (14.6)$$

$$s_t + \mathbf{V} \cdot \nabla s = 0,$$

в котором присутствуют только целые положительные степени искомых функций σ , u , v , w , s . При замене (14.5) скорость звука газа $c = \sqrt{\partial p(\rho, S)/\partial \rho}$ задается равенством $c = s\sigma$.

СУГД при учете СК в виде (14.6) удобно использовать при исследовании одного частного случая – изэнтропических течений

$$S = \text{const},$$

когда энтропийная функция $s = A^2(S)$ тоже является константой, поэтому последнее уравнение в системе (14.6) выполняется тождественно. В изэнтропическом случае СУГД при учете СК становится системой из четырех скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} \sigma_t + u\sigma_x + v\sigma_y + w\sigma_z + \frac{(\gamma-1)}{2}\sigma(u_x + v_y + w_z) &= 0, \\ u_t + uu_x + vv_y + ww_z + \frac{2}{(\gamma-1)}\sigma\sigma_x &= 2\Omega_3v - 2\Omega_2w, \\ v_t + uv_x + vv_y + wv_z + \frac{2}{(\gamma-1)}\sigma\sigma_y &= -2\Omega_3u, \\ w_t + uw_x + vw_y + ww_z + \frac{2}{(\gamma-1)}\sigma\sigma_z &= 2\Omega_2u - g \end{aligned} \quad (14.7)$$

для четырех искомых функций σ , u , v , w .

Причем если при введении безразмерных переменных будет выполняться равенство $s = 1$, то функция σ совпадает со скоростью звука c .

Тогда можно вместо функции σ ввести в качестве искомой функции квадрат скорости звука $\Theta = c^2$. В этом случае после домножения на 2σ первого уравнения системы (14.6) СУГД при учете СК становится такой:

$$\begin{aligned} \Theta_t + \mathbf{V} \cdot \nabla \Theta + (\gamma-1)\Theta \operatorname{div} \mathbf{V} &= 0, \\ \mathbf{V}_t + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \frac{1}{(\gamma-1)} \nabla \Theta &= \mathbf{g} + \mathbf{F}_c. \end{aligned} \quad (14.8)$$

Если для задания давления p в качестве независимых термодинамических параметров выбрать плотность ρ и температуру T

$$p = R\rho T, \quad R = \text{const} > 0, \quad (14.9)$$

то дифференциальная форма закона сохранения энергии примет следующий вид [7]:

$$T_t + \mathbf{V} \cdot \nabla T + (\gamma-1)T \operatorname{div} \mathbf{V} = 0. \quad (14.10)$$

СУГД при учете СК в данном случае состоит из двух скалярных уравнений (14.2), (14.10) и одного векторного уравнения

$$\mathbf{V}_t + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} + \frac{T}{\gamma\rho}\nabla\rho + \frac{1}{\gamma}\nabla T = \mathbf{g} + \mathbf{F}_c. \quad (14.11)$$

При этом (14.11) получается из уравнения (14.1) с учетом зависимости (14.9).

В СУГД (14.2), (14.11), (14.10) можно избавиться от ρ в знаменателе одного из слагаемых в уравнении (14.11) с помощью введения другой функции

$$\vartheta = \ln \rho$$

и деления уравнения (14.2) на ρ . В результате для искомого функций ϑ , u , v , w , T получается СУГД с учетом СК в виде

$$\begin{aligned} \vartheta_t + \mathbf{V} \cdot \nabla\vartheta + \operatorname{div} \mathbf{V} &= 0, \\ \mathbf{V}_t + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} + \frac{T}{\gamma}\nabla\vartheta + \frac{1}{\gamma}\nabla T &= \mathbf{g} + \mathbf{F}_c, \end{aligned} \quad (14.12)$$

$$T_t + \mathbf{V} \cdot \nabla T + (\gamma - 1)T \operatorname{div} \mathbf{V} = 0.$$

Задание давления газа формулой (14.9) и использование СУГД при учете СК в виде (14.12) удобно при рассмотрении неизэнтропических течений, поскольку температура является таким газодинамическим параметром, прямое измерение значений которого возможно при натуральных исследованиях ВЗП.

В общем случае течение идеального политропного газа в ВЗП необходимо моделировать с помощью нестационарных трехмерных решений системы (14.6) или эквивалентных ей системы (14.2), (14.11), (14.10) или системы (14.12), в изэнтропическом случае – системы (14.7).

Иногда отдельные области ВЗП или даже все течение в ВЗП обладают симметрией, присущей вращению. В таких случаях следует рассматривать течение газа в ВЗП, используя не декартовы, а цилиндрические координаты: r , φ , z . Здесь r и φ – полярные радиус и угол в плоскости xOy .

Естественно, что традиционная СУГД уже неоднократно выписана в произвольных криволинейных координатах, включая частный случай цилиндрических координат (см., например, [17–20]). Но при учете СК СУГД в цилиндрической системе координат в цитированных работах не представлена. Поэтому далее приведен вывод системы, получающейся из (14.7) при введении цилиндрических координат.

Естественно, после этого не представит большого труда выписать системы, получающиеся из (14.6); (14.2), (14.11), (14.10); (14.12) при введении цилиндрических координат.

Пусть в точке $M(x, y)$ задан вектор скорости газа \mathbf{V} (рис. 14.2). Обозначим через \mathbf{r} – радиус-вектор точки M в плоскости xOy , φ – его полярный угол, а через \mathbf{n} – вектор, также лежащий в плоскости xOy , перпендикулярный вектору \mathbf{r} и направленный влево от \mathbf{r} (см. рис. 14.2).

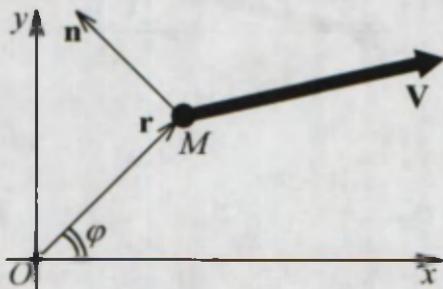


Рис. 14.2.

Проекции вектора \mathbf{V} на \mathbf{r} и \mathbf{n} обозначим соответственно ζ и η :

$$\text{пр}_{\mathbf{r}} \mathbf{V} = \zeta; \quad \text{пр}_{\mathbf{n}} \mathbf{V} = \eta.$$

Таким образом, ζ и η есть соответственно радиальная и окружная составляющие вектора скорости газа. Обычно для этих составляющих используются такие обозначения

$$\zeta = v_r, \quad \eta = v_\varphi,$$

где r и φ – нижние индексы, а не названия переменных, по которым производится дифференцирование. Но в данной работе нижние индексы обозначают частную производную по соответствующей переменной. Именно поэтому для радиальной и окружной составляющих вектора скорости газа и введены нетрадиционные обозначения: ζ и η .

Чтобы выразить u, v – координаты вектора \mathbf{V} в декартовых координатах через ζ, η – координаты вектора \mathbf{V} в полярных координатах, вектор \mathbf{V} откладывается от точки O (см. рис. 14.3). Затем из его конца – точки B опускается перпендикуляр на ось Ox , пересекающий ее в точке A . Этот же перпендикуляр продолжается до пересечения в точке C с продолжением вектора \mathbf{r} . Из точки B на прямую OC опускается перпендикуляр, пересекающий ее в точке D . Из точки B также опускается перпендикуляр на ось Oy до его пересечения с ней в точке E . Из проведенного построения следует, что $\angle DBC = \varphi$ (см. рис. 14.3).

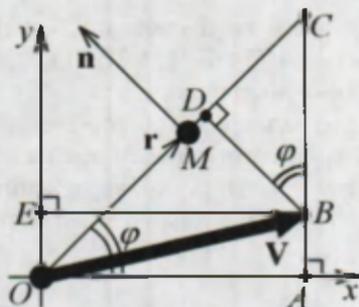


Рис. 14.3.

В результате получается, что

$$OD = \text{пр}_r \mathbf{V} = \zeta, \quad DB = -\text{пр}_n \mathbf{V} = -\eta,$$

$$OA = \text{пр}_{Ox} \mathbf{V} = u; \quad OE = \text{пр}_{Oy} \mathbf{V} = v.$$

В случае, когда $\cos \varphi \neq 0$, формулы, выражающие u, v через ζ и η , запишутся следующим образом:

$$AC = u \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}; \quad BC = AC - v = \frac{u \sin \varphi - v \cos \varphi}{\cos \varphi};$$

$$-\eta = DB = BC \cos \varphi = u \sin \varphi - v \cos \varphi,$$

т.е.

$$\eta = v \cos \varphi - u \sin \varphi; \quad (14.13)$$

$$\begin{aligned} \zeta = OC - DC &= \frac{u}{\cos \varphi} - BC \sin \varphi = \frac{u}{\cos \varphi} - \frac{u \sin^2 \varphi - v \sin \varphi \cos \varphi}{\cos \varphi} = \\ &= \frac{u(1 - \sin^2 \varphi) + v \sin \varphi \cos \varphi}{\cos \varphi} = u \cos \varphi + v \sin \varphi, \end{aligned}$$

т.е.

$$\zeta = u \cos \varphi + v \sin \varphi. \quad (14.14)$$

Формулы (14.13) и (14.14) справедливы и в случае $\varphi = \pm \pi/2$, что проверяется непосредственно с учетом того, что при $\varphi = +\pi/2$ вектор \mathbf{r} сонаправлен с вектором \mathbf{j} , а вектор \mathbf{n} противоположно направлен с \mathbf{i} ; при $\varphi = -\pi/2$ векторы \mathbf{r} и \mathbf{j} противоположно направлены, а \mathbf{n} и \mathbf{i} сонаправлены.

Чтобы получить выражения u , v через ζ и η , необходимо вначале равенство (14.14) умножить на $\cos \varphi$, а (14.13) – на $(-\sin \varphi)$ и полученные выражения сложить:

$$u = \zeta \cos \varphi - \eta \sin \varphi. \quad (14.15)$$

Потом (14.14) умножается на $\sin \varphi$, а (14.13) – на $\cos \varphi$ и выражения складываются:

$$v = \zeta \sin \varphi + \eta \cos \varphi. \quad (14.16)$$

После этого делается стандартный переход от переменных x , y к переменным r , φ :

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi.$$

Производные при такой замене преобразуются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial}{\partial y};$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \varphi \frac{\partial}{\partial y}.$$

Из этих двух соотношений, как из СЛАУ для $\partial/\partial x$ и $\partial/\partial y$, получаются формулы

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi};$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Вначале преобразуются отдельные выражения, входящие в первое уравнение системы (14.7):

$$\begin{aligned} u\sigma_x + v\sigma_y &= (\zeta \cos \varphi - \eta \sin \varphi) \left(\cos \varphi \sigma_r - \frac{\sin \varphi}{r} \sigma_\varphi \right) + \\ &+ (\zeta \sin \varphi + \eta \cos \varphi) \left(\sin \varphi \sigma_r + \frac{\cos \varphi}{r} \sigma_\varphi \right) = \\ &= \zeta \cos^2 \varphi \sigma_r - \zeta \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \sigma_\varphi - \eta \sin \varphi \cos \varphi \sigma_r + \eta \frac{\sin^2 \varphi}{r} \sigma_\varphi + \\ &+ \zeta \sin^2 \varphi \sigma_r + \zeta \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \sigma_\varphi + \eta \sin \varphi \cos \varphi \sigma_r + \eta \frac{\cos^2 \varphi}{r} \sigma_\varphi = \\ &= \zeta \sigma_r + \eta \frac{1}{r} \sigma_\varphi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_x + v_y &= \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (\zeta \cos \varphi - \eta \sin \varphi) + \\
&+ \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (\zeta \sin \varphi + \eta \cos \varphi) = \\
&= \cos^2 \varphi \zeta_r - \cos \varphi \sin \varphi \eta_r - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \zeta_\varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{r} \zeta + \frac{\sin^2 \varphi}{r} \eta_\varphi + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \eta + \\
&+ \sin^2 \varphi \zeta_r + \sin \varphi \cos \varphi \eta_r + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \zeta_\varphi + \frac{\cos^2 \varphi}{r} \zeta + \frac{\cos^2 \varphi}{r} \eta_\varphi - \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r} \eta = \\
&= \zeta_r + \frac{\zeta}{r} + \frac{1}{r} \eta_\varphi.
\end{aligned}$$

С учетом полученных формул первое уравнение системы (14.7) – уравнение неразрывности – имеет вид

$$\sigma_t + \zeta \sigma_r + \frac{\eta}{r} \sigma_\varphi + w \sigma_z + \frac{(\gamma - 1)}{2} \sigma \left(\zeta_r + \frac{\zeta}{r} + \frac{\eta_\varphi}{r} + w_z \right) = 0. \quad (14.17)$$

Для записи второго уравнения системы (14.7) в цилиндрической системе координат будет отдельно преобразовываться каждое слагаемое из него:

$$\begin{aligned}
u_t &= \zeta_t \cos \varphi - \eta_t \sin \varphi; \\
uu_x &= (\zeta \cos \varphi - \eta \sin \varphi) \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (\zeta \cos \varphi - \eta \sin \varphi) = \\
&= (\zeta \cos \varphi - \eta \sin \varphi) \left(\cos^2 \varphi \zeta_r - \cos \varphi \sin \varphi \eta_r - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \zeta_\varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{r} \zeta + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sin^2 \varphi}{r} \eta_\varphi + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \eta \right) = \\
&= \zeta \cos^3 \varphi \zeta_r - \zeta \cos^2 \varphi \sin \varphi \eta_r - \zeta \frac{\sin \varphi \cos^2 \varphi}{r} \zeta_\varphi + \zeta^2 \frac{\cos \varphi \sin^2 \varphi}{r} + \\
&\quad + \zeta \frac{\cos \varphi \sin^2 \varphi}{r} \eta_\varphi + \zeta \eta \frac{\cos^2 \varphi \sin \varphi}{r} - \\
&\quad - \eta \sin \varphi \cos^2 \varphi \zeta_r + \eta \sin^2 \varphi \cos \varphi \eta_r + \eta \frac{\sin^2 \varphi \cos \varphi}{r} \zeta_\varphi - \eta \zeta \frac{\sin^3 \varphi}{r} - \\
&\quad - \eta \frac{\sin^3 \varphi}{r} \eta_\varphi - \eta^2 \frac{\sin^2 \varphi \cos \varphi}{r};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
vu_y &= (\zeta \sin \varphi + \eta \cos \varphi) \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (\zeta \cos \varphi - \eta \sin \varphi) = \\
&= (\zeta \sin \varphi + \eta \cos \varphi) \left(\sin \varphi \cos \varphi \zeta_r - \sin^2 \varphi \eta_r + \frac{\cos^2 \varphi}{r} \zeta_\varphi - \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r} \zeta - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r} \eta_\varphi - \frac{\cos^2 \varphi}{r} \eta \right) = \\
&= \zeta \sin^2 \varphi \cos \varphi \zeta_r - \zeta \sin^3 \varphi \eta_r + \zeta \frac{\sin \varphi \cos^2 \varphi}{r} \zeta_\varphi - \zeta^2 \frac{\sin^2 \varphi \cos \varphi}{r} - \\
&\quad - \zeta \frac{\sin^2 \varphi \cos \varphi}{r} \eta_\varphi - \zeta \eta \frac{\sin \varphi \cos^2 \varphi}{r} + \\
&+ \eta \sin \varphi \cos^2 \varphi \zeta_r - \eta \sin^2 \varphi \cos \varphi \eta_r + \eta \frac{\cos^3 \varphi}{r} \zeta_\varphi - \eta \zeta \frac{\sin \varphi \cos^2 \varphi}{r} - \\
&\quad - \eta \frac{\sin \varphi \cos^2 \varphi}{r} \eta_\varphi - \eta^2 \frac{\cos^3 \varphi}{r};
\end{aligned}$$

два последних слагаемых из левой части второго уравнения системы (14.7)

$$\begin{aligned}
wu_z + \frac{2}{(\gamma - 1)} \sigma \sigma_x &= \\
= w \cos \varphi \zeta_z - w \sin \varphi \eta_z + \frac{2}{(\gamma - 1)} \sigma \left(\cos \varphi \sigma_r - \frac{\sin \varphi}{r} \sigma_\varphi \right);
\end{aligned}$$

и, наконец, правая часть второго уравнения системы (14.7)

$$2\Omega_3 v - 2\Omega_2 w = 2\Omega_3 (\zeta \sin \varphi + \eta \cos \varphi) - 2\Omega_2 w.$$

В итоге второе уравнение системы (14.7) примет вид

$$\begin{aligned}
&\cos \varphi \zeta_t - \sin \varphi \eta_t + \zeta \cos \varphi \zeta_r - \zeta \sin \varphi \eta_r - \zeta \eta \frac{\sin \varphi}{r} + \eta \frac{\cos \varphi}{r} \zeta_\varphi - \\
&- \eta^2 \frac{\cos \varphi}{r} - \eta \frac{\sin \varphi}{r} \eta_\varphi + w \cos \varphi \zeta_z - w \sin \varphi \eta_z + \frac{2}{(\gamma - 1)} \sigma \cos \varphi \sigma_r - \quad (14.18) \\
&- \frac{2}{(\gamma - 1)} \sigma \frac{\sin \varphi}{r} \sigma_\varphi = (2\Omega_3 \sin \varphi) \zeta + (2\Omega_3 \cos \varphi) \eta - 2\Omega_2 w.
\end{aligned}$$

Для записи третьего уравнения системы (14.7) в цилиндрической системе координат также отдельно будет преобразовываться каждое слагаемое из него:

$$v_t = \zeta_t \sin \varphi + \eta_t \cos \varphi;$$

$$\begin{aligned}
uv_x &= (\zeta \cos \varphi - \eta \sin \varphi) \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (\zeta \sin \varphi + \eta \cos \varphi) = \\
&= (\zeta \cos \varphi - \eta \sin \varphi) \left(\cos \varphi \sin \varphi \zeta_r + \cos^2 \varphi \eta_r - \frac{\sin^2 \varphi}{r} \zeta_\varphi - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \zeta + \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \eta_\varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{r} \eta \right) = \\
&= \zeta \cos^2 \varphi \sin \varphi \zeta_r + \zeta \cos^3 \varphi \eta_r - \zeta \frac{\cos \varphi \sin^2 \varphi}{r} \zeta_\varphi - \zeta^2 \frac{\cos^2 \varphi \sin \varphi}{r} - \\
&\quad - \zeta \frac{\cos^2 \varphi \sin \varphi}{r} \eta_\varphi + \zeta \eta \frac{\cos \varphi \sin^2 \varphi}{r} - \\
&\quad - \eta \sin^2 \varphi \cos \varphi \zeta_r - \eta \sin \varphi \cos^2 \varphi \eta_r + \eta \frac{\sin^3 \varphi}{r} \zeta_\varphi + \eta \zeta \frac{\sin^2 \varphi \cos \varphi}{r} + \\
&\quad + \eta \frac{\sin^2 \varphi \cos \varphi}{r} \eta_\varphi - \eta^2 \frac{\sin^3 \varphi}{r}; \\
vv_y &= (\zeta \sin \varphi + \eta \cos \varphi) \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (\zeta \sin \varphi + \eta \cos \varphi) = \\
&= (\zeta \sin \varphi + \eta \cos \varphi) \left(\sin^2 \varphi \zeta_r + \sin \varphi \cos \varphi \eta_r + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \zeta_\varphi + \frac{\cos^2 \varphi}{r} \zeta + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\cos^2 \varphi}{r} \eta_\varphi - \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r} \eta \right) = \\
&= \zeta \sin^3 \varphi \zeta_r + \zeta \sin^2 \varphi \cos \varphi \eta_r + \zeta \frac{\sin^2 \varphi \cos \varphi}{r} \zeta_\varphi + \zeta^2 \frac{\sin \varphi \cos^2 \varphi}{r} + \\
&\quad + \zeta \frac{\sin \varphi \cos^2 \varphi}{r} \eta_\varphi - \zeta \eta \frac{\sin^2 \varphi \cos \varphi}{r} + \\
&\quad + \eta \cos \varphi \sin^2 \varphi \zeta_r + \eta \cos^2 \varphi \sin \varphi \eta_r + \eta \frac{\sin \varphi \cos^2 \varphi}{r} \zeta_\varphi + \eta \zeta \frac{\cos^3 \varphi}{r} + \\
&\quad + \eta \frac{\cos^3 \varphi}{r} \eta_\varphi - \eta^2 \frac{\cos^2 \varphi \sin \varphi}{r};
\end{aligned}$$

два последних слагаемых из левой части третьего уравнения системы (14.7)

$$\begin{aligned}
wv_z + \frac{2}{(\gamma - 1)} \sigma \sigma_y &= \\
= w \sin \varphi \zeta_z + w \cos \varphi \eta_z + \frac{2}{(\gamma - 1)} \sigma \left(\sin \varphi \sigma_r + \frac{\cos \varphi}{r} \sigma_\varphi \right);
\end{aligned}$$

и, наконец, правая часть третьего уравнения системы (14.7)

$$-2\Omega_3 u = -2\Omega_3(\zeta \cos \varphi - \eta \sin \varphi).$$

В итоге третье уравнение системы (14.7) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \sin \varphi \zeta_t + \cos \varphi \eta_t + \zeta \sin \varphi \zeta_r + \zeta \cos \varphi \eta_r + \eta \frac{\sin \varphi}{r} \zeta_\varphi + \zeta \eta \frac{\cos \varphi}{r} + \\ & + \eta \frac{\cos \varphi}{r} \eta_\omega - \eta^2 \frac{\sin \varphi}{r} + w \sin \varphi \zeta_z + w \cos \varphi \eta_z + \frac{2}{(\gamma - 1)} \sigma \sin \varphi \sigma_r + (14.19) \\ & + \frac{2}{(\gamma - 1)} \sigma \frac{\cos \varphi}{r} \sigma_\varphi = -(2\Omega_3 \cos \varphi) \zeta + (2\Omega_3 \sin \varphi) \eta. \end{aligned}$$

Для получения окончательного вида второго и третьего уравнений новой системы производятся такие действия.

Вначале уравнение (14.18) умножается на $\cos \varphi$, уравнение (14.19) на $\sin \varphi$ и полученные выражения складываются. В итоге получается уравнение

$$\zeta_t + \zeta \zeta_r + \frac{\eta}{r} \zeta_\omega - \frac{\eta^2}{r} + w \zeta_z + \frac{2}{(\gamma - 1)} \sigma \sigma_r = 2\Omega_3 \eta - (2\Omega_2 \cos \varphi) w. \quad (14.20)$$

Затем уравнение (14.18) умножается на $(-\sin \varphi)$, уравнение (14.19) на $\cos \varphi$ и также складываются полученные выражения:

$$\eta_t + \zeta \eta_r + \frac{\zeta \eta}{r} + \frac{\eta}{r} \eta_\varphi + w \eta_z + \frac{2}{(\gamma - 1)} \frac{\sigma}{r} \sigma_\varphi = -2\Omega_3 \zeta + (2\Omega_2 \sin \varphi) w. \quad (14.21)$$

Преобразование четвертого уравнения из системы (14.7) проводится достаточно просто:

$$\begin{aligned} & w_t + (\zeta \cos \varphi - \eta \sin \varphi) \left(\cos \varphi w_r - \frac{\sin \varphi}{r} w_\varphi \right) + \\ & + (\zeta \sin \varphi + \eta \cos \varphi) \left(\sin \varphi w_r + \frac{\cos \varphi}{r} w_\varphi \right) + w w_z + \frac{2}{(\gamma - 1)} \sigma \sigma_z = \\ & = 2\Omega_2 (\zeta \cos \varphi - \eta \sin \varphi) - g, \end{aligned}$$

т.е.

$$w_t + \zeta \cos^2 \varphi w_r - \zeta \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r} w_\varphi - \eta \sin \varphi \cos \varphi w_r + \eta \frac{\sin^2 \varphi}{r} w_\varphi +$$

$$\begin{aligned}
 & + \zeta \sin^2 \varphi w_r + \zeta \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} w_\varphi + \eta \cos \varphi \sin \varphi w_r + \eta \frac{\cos^2 \varphi}{r} w_\varphi + \\
 & + w w_z + \frac{2}{(\gamma - 1)} \sigma \sigma_z = (2\Omega_2 \cos \varphi) \zeta - (2\Omega_2 \sin \varphi) \eta - g,
 \end{aligned}$$

или окончательно

$$w_t + \zeta w_r + \frac{\eta}{r} w_\varphi + w w_z + \frac{2}{(\gamma - 1)} \sigma \sigma_z = (2\Omega_2 \cos \varphi) \zeta - (2\Omega_2 \sin \varphi) \eta - g. \quad (14.22)$$

С учетом полученных уравнений (14.17), (14.20), (14.21), (14.22) система (14.7) перешла в систему:

$$\sigma_t + \zeta \sigma_r + \frac{\eta}{r} \sigma_\varphi + w \sigma_z + \frac{(\gamma - 1)}{2} \sigma \left(\zeta_r + \frac{\zeta}{r} + \frac{\eta_\varphi}{r} + w_z \right) = 0,$$

$$\zeta_t + \zeta \zeta_r + \frac{\eta}{r} \zeta_\varphi - \frac{\eta^2}{r} + w \zeta_z + \frac{2}{(\gamma - 1)} \sigma \sigma_r = 2\Omega_3 \eta - (2\Omega_2 \cos \varphi) w,$$

$$\eta_t + \zeta \eta_r + \frac{\zeta \eta}{r} + \frac{\eta}{r} \eta_\varphi + w \eta_z + \frac{2}{(\gamma - 1)} \sigma \sigma_\varphi = -2\Omega_3 \zeta + (2\Omega_2 \sin \varphi) w,$$

$$w_t + \zeta w_r + \frac{\eta}{r} w_\varphi + w w_z + \frac{2}{(\gamma - 1)} \sigma \sigma_z = (2\Omega_2 \cos \varphi) \zeta - (2\Omega_2 \sin \varphi) \eta - g. \quad (14.23)$$

В заключение данного параграфа отметим, что введение безразмерных переменных производится стандартным образом при выборе масштабных значений для всех используемых переменных и, конечно же, при соблюдении соответствующих условий согласования их значений.

В частности подразумевается, что за u_{00} – масштаб скорости – взята скорость звука однородного покоящегося газа

$$u_{00} = c_{00}.$$

Тогда выбор x_{00} – масштабного значения расстояния – автоматически определяет масштабное значение единицы времени:

$$i_{00} = \frac{x_{00}}{u_{00}}.$$

В этом случае получается, что безразмерное значение константы g будет таким:

$$g = g_* \frac{x_{00}}{c_{00}},$$

где g_* – размерное значение ускорения свободного падения. В частности, если $g_* \approx 9.8 \text{ м/с}^2$, то для газа со значением $c_{00} \approx 330 \div 340 \text{ м/с}$ и при $x_{00} = 10^3 \text{ м}$ получается, что безразмерное значение константы g , входящей в СУГД при учете СК, удовлетворяет неравенству

$$g \leq 0.09. \quad (14.24)$$

Безразмерное значение константы Ω , естественно, зависит от значения t_{00} и равно

$$\Omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 60^2} \frac{t_{00}}{c}.$$

§ 15. Возникновение закрутки в придонной части восходящего закрученного потока

Рассматривается СУГД при учете СК в виде (14.23), но при переобозначении двух компонент вектора скорости газа:

$$u = \zeta = \text{пр}_r \mathbf{V}, \quad v = \eta = \text{пр}_n \mathbf{V},$$

т.е. радиальная составляющая вектора скорости будет обозначаться буквой u , а окружная – буквой v .

Кроме этого для простоты изучения будут строиться течения, не зависящие от переменной φ :

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0,$$

у которых окружная составляющая вектора скорости газа не есть тождественный нуль.

Таким образом, здесь и далее исследуются изэнтропические течения идеального политропного газа, описываемые решениями следующей системы квазилинейных уравнений с частными производными:

$$\begin{aligned} \sigma_t + u\sigma_r + w\sigma_z + \frac{(\gamma-1)}{2} \sigma \left(u_r + \frac{u}{r} + w_z \right) &= 0, \\ u_t + uu_r - \frac{v^2}{r} + wu_z + \frac{2}{(\gamma-1)} \sigma\sigma_r &= 2\Omega_3 v - (2\Omega_2 \cos \varphi) w, \\ v_t + uv_r + \frac{uv}{r} + wv_z &= -2\Omega_3 u + (2\Omega_2 \sin \varphi) w, \\ w_t + uw_r + ww_z + \frac{2}{(\gamma-1)} \sigma\sigma_z &= \\ &= (2\Omega_2 \cos \varphi) u - (2\Omega_2 \sin \varphi) v - g. \end{aligned} \quad (15.1)$$

Поскольку в данном параграфе моделируются течения газа в придонной части ВЗП, вместо (15.1) рассматривается система уравнений

$$\begin{aligned} \sigma_t + u\sigma_r + \frac{(\gamma-1)}{2}\sigma\left(u_r + \frac{u}{r}\right) &= 0, \\ u_t + uu_r - \frac{v^2}{r} + \frac{2}{(\gamma-1)}\sigma\sigma_r &= 2(\Omega \sin \psi)v, \\ v_t + uv_r + \frac{uv}{r} &= -2(\Omega \sin \psi)u. \end{aligned} \quad (15.2)$$

Система (15.2) получена (15.1) при отбрасывании ее четвертого уравнения при условиях

$$w \equiv 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} \equiv 0 \quad (15.3)$$

и с учетом того, что

$$\Omega_3 = \Omega \sin \psi.$$

Несмотря на то что при выполнении условий (15.3) четвертое уравнение системы (15.1) не выполняется тождественно, далее полагается, что решения системы (15.2) с определенной долей адекватности описывают течения газа в придонной части ВЗП.

Начальная стадия движения газа при формировании придонной части ВЗП, в том числе начало закрутки газа в этой области течения, моделируется решением следующей задачи о плавном выдвигении поршня из однородного покоящегося газа [3,5,7].

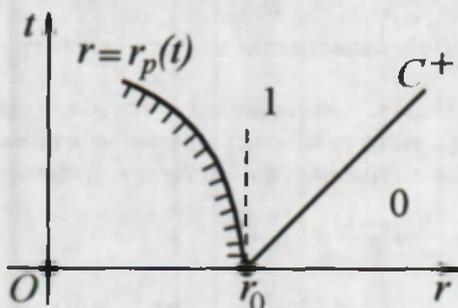


Рис. 15.1.

Пусть в момент времени $t = 0$ правее точки $r = r_0 > 0$ (рис. 15.1) расположен однородный покоящийся газ со скоростью звука, равной единице:

$$\sigma(t, r)|_{t=0} = 1, \quad u(t, r)|_{t=0} = 0, \quad v(t, r)|_{t=0} = 0. \quad (15.4)$$

В момент $t = 0$ из этой точки по заданному закону

$$r = r_p(t), \quad r_p(0) = r_0, \quad r'_p(0) = 0, \quad r''_p(0) < 0 \quad (15.5)$$

с нулевой начальной скоростью ($r'_p(0) = 0$), т.е. плавно, и с ненулевым ускорением ($r''_p(0) \neq 0$) начинает выдвигаться ($r''_p(0) < 0$) непроницаемый поршень, на котором нормальная составляющая вектора скорости газа на поршне равна нормальной составляющей скорости поршня:

$$u(t, r)|_{r=r_p(t)} = r'_p(t). \quad (15.6)$$

Конфигурация течения, возникшего в результате выдвижения поршня, также изображена на рис. 15.1, на котором прямая $r = t + r_0 - C^+$ -характеристика, отделяющая однородный покоящийся газ, расположенный в области 0, от искомого течения газа, расположенного в области 1 между C^+ -характеристикой и траекторией движения поршня $r = r_p(t)$, помеченной черточками.

Тот факт, что в области 0 при $t \geq 0$, $r \geq t + r_0$ (см. рис. 15.1) находится однородный с $\sigma = 1$ покоящийся газ, обеспечивает теорема об единственности решения задачи Коши (15.2), (15.4). Это решение и на C^+ -характеристике имеет те же значения:

$$\sigma(t, r)|_{C^+} = 1, \quad u(t, r)|_{C^+} = 0, \quad v(t, r)|_{C^+} = 0. \quad (15.7)$$

Возникшее в этой задаче при $t > 0$ в области 1 и правее вертикальной прямой $r = r_0$ течение газа моделирует в определенном смысле начало движения газа со всех сторон к основанию восходящего теплового потока.

Теорема 15.1. *Задача (15.2), (15.7), (15.6) является характеристической задачей Коши стандартного вида и при аналитичности функции $r_p(t)$ в некоторой окрестности точки $t = 0$ имеет единственное аналитическое решение в окрестности точки $(t = 0, r = r_0)$, а также при всех $t > 0$ в соответствующей окрестности C^+ -характеристики, т.е. прямой $r = t + r_0$.*

Доказательство теоремы здесь не приводится, поскольку оно практически дословно повторяет доказательство аналогичной теоремы из [5]. Описание характеристической задачи Коши стандартного вида и ее применение в задачах газовой динамики достаточно подробно изложено в работах [3,5,7].

Для выяснения некоторых свойств решения задачи (15.2), (15.7), (15.6) далее приведено построение первых коэффициентов бесконечных

рядов

$$U(\tau, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(\tau) \frac{\xi^k}{k!}; \quad U = \begin{pmatrix} \sigma \\ u \\ v \end{pmatrix}, \quad (15.8)$$

задающих это решение в новых переменных

$$\tau = t, \quad \xi = r - t - r_0. \quad (15.9)$$

Переменные (15.9) введены для того, чтобы звуковая C^+ -характеристика стала координатной осью $\xi = 0$. При замене (15.9) производные преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial \xi}, \end{aligned}$$

поэтому система (15.2) переходит в такую:

$$\begin{aligned} \sigma_\tau - \sigma_\xi + u\sigma_\xi + \frac{(\gamma-1)}{2}\sigma \left[u_\xi + \frac{u}{(\xi + \tau + r_0)} \right] &= 0, \\ u_\tau - u_\xi + uu_\xi - \frac{v^2}{(\xi + \tau + r_0)} + \frac{2}{(\gamma-1)}\sigma\sigma_\xi &= 2(\Omega \sin \psi)v, \\ v_\tau - v_\xi + uv_\xi + \frac{uv}{(\xi + \tau + r_0)} &= -2(\Omega \sin \psi)u. \end{aligned} \quad (15.10)$$

Условия (15.7) при замене (15.9) принимают вид

$$\sigma(\tau, \xi)|_{\xi=0} = 1, \quad u(\tau, \xi)|_{\xi=0} = 0, \quad v(\tau, \xi)|_{\xi=0} = 0 \quad (15.11)$$

и задают нулевые коэффициенты рядов (15.8).

Условие (15.6) – непротекания на поршне – при переходе к переменным τ, ξ записывается следующим образом:

$$u(\tau, \xi)|_{\xi=r_p(\tau)-\tau-r_0} = r'_p(\tau). \quad (15.12)$$

Система (15.10) при $\xi = 0$ и при учете условий (15.11) переходит в соотношения

$$\begin{aligned} -\sigma_1 + \frac{(\gamma-1)}{2}u_1 &= 0, \\ -u_1 + \frac{2}{(\gamma-1)}\sigma_1 &= 0, \\ -v_1 &= 0, \end{aligned}$$

из которых следует, что

$$\sigma_1 = \frac{(\gamma - 1)}{2} u_1, \quad v_1 = 0. \quad (15.13)$$

Если систему (15.10) продифференцировать по ξ и положить $\xi = 0$, то получаются уравнения

$$\sigma_1' - \sigma_2 + u_1 \sigma_1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} \sigma_1 u_1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} \left[u_2 + \frac{u_1}{(\tau + r_0)} \right] = 0,$$

$$u_1' - u_2 + u_1^2 + \frac{2}{(\gamma - 1)} \sigma_1^2 + \frac{2}{(\gamma - 1)} \sigma_2 = 0,$$

$$-v_2 = -2(\Omega \sin \psi) u_1.$$

Из последнего уравнения определяется v_2 через u_1 :

$$v_2 = 2(\Omega \sin \psi) u_1. \quad (15.14)$$

Если первое из полученных уравнений домножить на $2/(\gamma - 1)$ и сложить со вторым, то с учетом связи (15.13) между σ_1 и u_1 получается обыкновенное дифференциальное уравнение для $u_1(\tau)$:

$$u_1' + \frac{(\gamma + 1)}{2} u_1^2 + \frac{u_1}{2(\tau + r_0)} = 0. \quad (15.15)$$

Начальное условие для него определяется из следующей процедуры: обе части соотношения (15.12) дифференцируются по τ , причем левая часть — как сложная функция, и полагается $\tau = 0$. В результате имеем

$$u_1(0) = -r_p''(0) > 0. \quad (15.16)$$

Неравенство в соотношении (15.16) справедливо в силу последнего из условий в (15.5).

Уравнение (15.15) называется транспортным [3,5,7], и его решение при начальном условии (15.16) единственно:

$$u_1(\tau) = \frac{1}{y(\tau)}, \quad (15.17)$$

где

$$y(\tau) = \sqrt{\tau + r_0} \left[(\gamma + 1) \sqrt{r_0} \left(\sqrt{\frac{\tau}{r_0} + 1} - 1 \right) - \frac{1}{\sqrt{r_0} r_p''(0)} \right] > 0. \quad (15.18)$$

Неравенство для $y(\tau)$ справедливо при $\tau \geq 0$, поскольку справедливо неравенство, приведенное в (15.16).

С учетом полученных соотношений (15.13), (15.14), (15.16)–(15.18) качественное поведение газодинамических параметров в левосторонней окрестности звуковой характеристики, т.е. при $\tau_p(t) < r < t + \tau_0$, будет таким (рис. 15.2):

$$\sigma_r|_{C^+} > 0, \quad u_r|_{C^+} > 0, \quad v_r|_{C^+} = 0, \quad v_{rr}|_{C^+} > 0.$$

Значения газодинамических параметров σ и u убывают при уменьшении значения r , а значения v при этом возрастают, причем

$$v > 0$$

левее прямой C^+ -характеристики: $r = t + \tau_0$ (см. рис. 15.1 и 15.2).

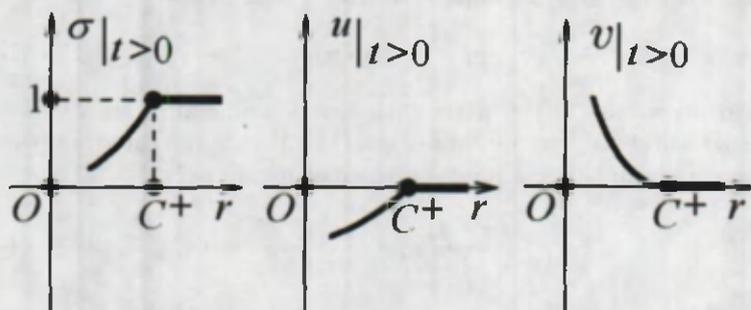


Рис. 15.2.

Таким образом доказано, что при начале формирования придонной части ВЗП возникает закрутка газа в положительном направлении, поскольку у решения задачи (15.2), (15.7), (15.6) при малых значениях $t > 0$ положительно значение окружной компоненты вектора скорости газа.

Построение в аналитическом виде при больших значениях времени нестационарных решений системы (15.2) представляется достаточно трудным. Скорее всего, численное построение решений начально-краевых задач для системы (15.2), описывающих течение в придонной части, также будет достаточно трудоемким. Автором данной книги на момент ее опубликования такие расчеты не проводились.

Итак, в данном параграфе доказано, что при начале формирования придонной части ВЗП газ приобретает закрутку в положительном направлении.

§ 16. Стационарное течение в придонной части восходящего закрученного потока

Можно предположить, что с ростом времени течение в придонной части выйдет в некотором приближении на стационарный режим:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0.$$

Далее будем строить решения следующей СОДУ:

$$\begin{aligned} u\sigma' + \frac{(\gamma-1)}{2}\sigma(u' + \frac{u}{r}) &= 0, \\ uu' - \frac{v^2}{r} + \frac{2}{(\gamma-1)}\sigma\sigma' &= 2(\Omega \sin \psi)v, \\ uw' + \frac{uv}{r} &= -2(\Omega \sin \psi)u, \end{aligned} \quad (16.1)$$

которая получается из системы (15.2) при предположении о стационарности искомых течений: $\sigma = \sigma(r)$, $u = u(r)$, $v = v(r)$.

Для придонных течений в ВЗП содержательным является случай тех решений СОДУ (16.1), у которых

$$u(r) \neq 0.$$

Тогда из третьего уравнения системы (16.1) получается дифференциальное уравнение для функции $v = v(r)$

$$v' + \frac{v}{r} = -2(\Omega \sin \psi), \quad (16.2)$$

общее решение которого

$$v = \frac{v_*}{r} - (\Omega \sin \psi)r, \quad v_* = \text{const.} \quad (16.3)$$

Если константа v_* неположительная:

$$v_* \leq 0,$$

то решение $v = v(r)$, задаваемое формулой (16.3), при всех $r > 0$ строго отрицательное и нигде в нуль не обращается.

Для описания течения в придонной части ВЗП желательно, чтобы $v(r)$ обращалась в нуль при каком-то положительном значении $r = r_0 > 0$. Тогда значение r_0 определяло бы радиус придонной части ВЗП: на

окружности $r = r_0$ закрутка газа нулевая. Поэтому значение произвольной постоянной v_* , появившейся при интегрировании уравнения (16.2), надо брать строго положительным: $v_* > 0$. Тогда по значению v_* однозначно определится константа r_0 :

$$r_0 = \sqrt{\frac{v_*}{\Omega \sin \psi}}. \quad (16.4)$$

При значениях $0 < r < r_0$ — функция $v(r)$ положительна, т.е. закрутка газа при этих значениях r осуществляется в положительном направлении. При $r = r_0$ значение функции $v(r)$ равно нулю:

$$v(r)|_{r=r_0} = 0,$$

а при $r \rightarrow +0$ значение $v(r) \rightarrow +\infty$. Общее поведение зависимости $v = v(r)$ приведено на рис. 16.1. Для описания течения в придонной части ВЗП надо рассматривать значения r из полуинтервала $(0, r_0]$.

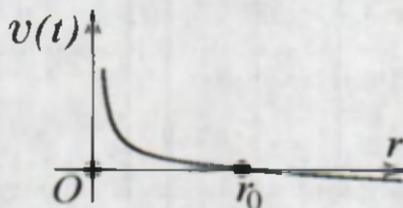


Рис. 16.1.

Если найденную функцию (16.3) подставить в первые два уравнения СОДУ (16.1), то получатся дифференциальные уравнения для двух искомых функций $\sigma = \sigma(r)$ и $u = u(r)$:

$$\begin{aligned} u\sigma' + \frac{(\gamma-1)}{2}\sigma u' &= -\frac{(\gamma-1)}{2}\sigma \frac{u}{r}, \\ \frac{2}{(\gamma-1)}\sigma\sigma' + uu' &= \frac{v_*^2}{r^3} - (\Omega \sin \psi)^2 r. \end{aligned} \quad (16.5)$$

СОДУ (16.5) имеет первый интеграл, следующий из второго уравнения системы

$$\frac{2}{(\gamma-1)}\sigma^2 + u^2 = C_1 - \frac{v_*^2}{r^2} - (\Omega \sin \psi)^2 r^2, \quad (16.6)$$

и определен при тех значениях r , при которых выполняется неравенство

$$C_1 - \frac{v_*^2}{r^2} - (\Omega \sin \psi)^2 r^2 \geq 0.$$

Соотношение (16.6) позволяет из первого уравнения СОДУ (16.5) исключить одну неизвестную функцию, например $u(r)$, и получить дифференциальное уравнение первого порядка для функции $\sigma(r)$. Однако в данном уравнении, как будет видно из дальнейших преобразований, решение не только в явном виде, а даже в квадратурах не выписывается.

Нормальный вид СОДУ (16.5) такой:

$$\begin{aligned} \sigma' &= -\frac{(\gamma-1)}{2} \sigma \frac{\left[u^2 + \frac{v_*^2}{r^2} - (\Omega \sin \psi)^2 r^2 \right]}{r(u^2 - \sigma^2)}, \\ u' &= u \frac{\left[\sigma^2 + \frac{v_*^2}{r^2} - (\Omega \sin \psi)^2 r^2 \right]}{r(u^2 - \sigma^2)}, \end{aligned} \quad (16.7)$$

если соблюдаются условия $r \neq 0$, $u^2 - \sigma^2 \neq 0$. Первое из этих неравенств выполнено там, где определена функция $v(r)$. Второе неравенство означает, что в исследуемом течении газа не должно быть точек, в которых модуль радиальной составляющей вектора скорости газа совпадал бы со скоростью звука в этих точках.

Если подставить выражение для u^2 , определенное из (16.6), в первое уравнение системы (16.7), то в получившемся уравнении переменные не разделяются, а выписать точное решение этого дифференциального уравнения затруднительно.

Численное решение СОДУ (16.7) не составляет большого труда при задании начальных данных, например в точке $r = r_0$:

$$\sigma(r)|_{r=r_0} = 1, \quad u(r)|_{r=r_0} = u_0. \quad (16.8)$$

Дело в том, что в точке $r = r_0$ значение функции $v(r)$ равно нулю, и эту точку можно считать внешней границей придонной части ВЗП.

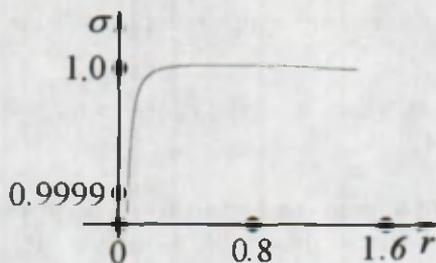


Рис. 16.2.

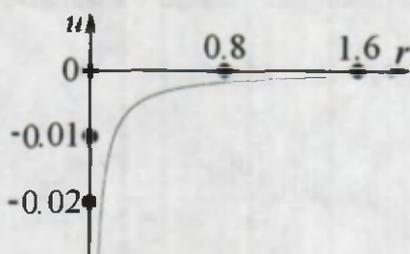


Рис. 16.3.

Начальное значение для функции $\sigma(r)$ в точке $r = r_0$ берется из тех соображений, что на внешней границе придонной области значение скорости звука газа равно заданному масштабному значению скорости.

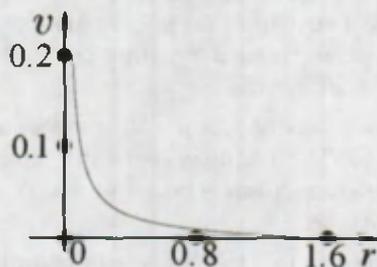


Рис. 16.4.

Если начальное значение для функции $u(r)$ в точке $r = r_0$ положить равным нулю: $u_0 = 0$, то из единственности решения задачи Коши (16.7), (16.8) следует, что $u(r) \equiv 0$. Как уже отмечалось, решение $u(r) \equiv 0$ не подходит для описания течения в придонной части ВЗП. На рис. 16.2, 16.3 и 16.4 приведены функции $\sigma = \sigma(r)$, $u = u(r)$ и $v = v(r)$,

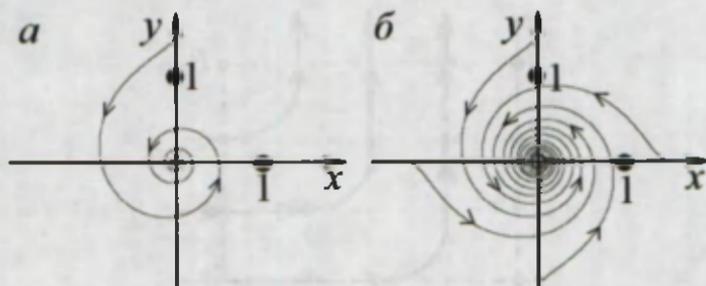


Рис. 16.5.

определенные при численном решении задачи Коши (16.7), (16.8), в которой $u_0 = -0.001$, $\psi = \pi/6$, что соответствует широте Нового Орлеана, $\gamma = 1.4$, $\Omega = 0.01$, $v_* = 0.01$. На рис. 16.5, а показана отдельная линия тока, а на рис. 16.5, б – четыре линии тока данного течения, посчитанные при тех же значениях входных данных.

Итак, в данном параграфе построены стационарные течения, которые полностью согласуются с предложенной в § 6 схемой течения газа в придонной части ВЗП: закрутка газа происходит в положительном направлении; частицы газа движутся по спиральным траекториям; модуль скорости газа неограниченно растет при $r \rightarrow 0$; при этом окружная составляющая на порядок больше радиальной составляющей вектора скорости газа.

Все установленные в § 16 факты качественно совпадают со свойствами течений в придонных частях природных ВЗП.

Для состыковки течений из придонной и вертикальной частей ВЗП необходимо построить некоторое переходное течение, область определения (прямоугольник $OABC$) и линии тока которого схематично изображены на рис. 16.6. Построение такого течения – отдельная трудная задача, хотя некоторые успехи в этом направлении уже имеются (см., например, [10]).

При использовании стационарного течения в придонной части для его состыковки с переходным течением надо будет брать несколько этих течений при изменении r в интервалах $r_*(z) \leq r \leq r_0$. На рис. 16.6 возможные значения r_{*i} помечены при разных значениях z_i , ($i = 1, 2, 3$).

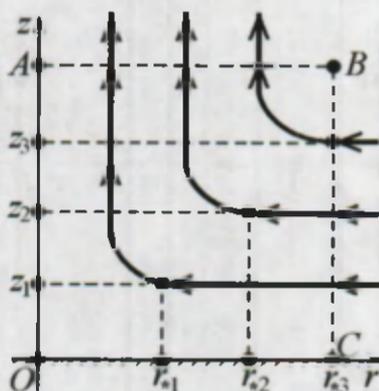


Рис. 16.6.

В качестве небольшого замечания, не относящегося к течению в придонной части ВЗП, укажем, что для СОДУ (16.1) достаточно просто получаются точные решения в случае $u(r) \equiv 0$. Одно из них с функцией $v(r)$, заданной формулой (16.3), и с

$$\sigma(r) = \sqrt{1 + (\gamma - 1)v_* \Omega \sin \psi - \frac{(\gamma - 1)}{2} \left[\frac{v_*^2}{r^2} + (\Omega \sin \psi)^2 r^2 \right]}$$

описывает вращающийся газовый диск, на внешней границе которого при $r = r_0$ скорость газа равна нулю, поэтому такой диск может находиться в однородном покоящемся газе. На некоторой внутренней границе $r = r_1 < r_0$ к этому вращающемуся диску может быть пристыкован либо однородный с конкретным значением $\sigma = \sigma_1$ покоящийся газ, либо зона вакуума.

§ 17. Стационарное течение в вертикальной части восходящего закрученного потока

Здесь приведено достаточно простое моделирование течения газа в вертикальной части ВЗП, фактически описывающее это течение не по всей длине вертикальной части, а только для её небольшого по высоте среднего участка. Это позволяет предположить течение газа стационарным:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

и рассматривать течение газа в цилиндрической системе координат.

Следующее упрощающее предположение состоит в том, что для данного участка не будет учитываться влияние СК. Мотивировка этого предположения следующая.

Во-первых, результаты, представленные в § 2, показывают, что на том расстоянии, которое проходят частицы газа по всей вертикальной части ВЗП, их отклонение от вертикального движения из-за действия СК будет небольшим.

Во-вторых, время нахождения каждой частицы газа в вертикальной части ВЗП также меньше времени ее нахождения в придонной части. Из-за наличия этого временного фактора влияние СК на течение газа в вертикальной части ВЗП будет невелико.

Представляется, что действие СК на течение газа в вертикальной части больше будет сказываться на общем движении всего ВЗП как единого целого в направлении северо-запад.

С учетом сделанных предположений для описания течения газа на небольшом по высоте среднем участке вертикальной части ВЗП будут использоваться решения следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} u\Theta_r + w\Theta_z + (\gamma - 1)\Theta \left(u_r + \frac{u}{r} + w_z \right) &= 0, \\ uu_r - \frac{v^2}{r} + ww_z + \frac{1}{(\gamma - 1)}\Theta_r &= 0, \\ uv_r + \frac{uv}{r} + vw_z &= 0, \\ uw_r + ww_z + \frac{1}{(\gamma - 1)}\Theta_z &= -g, \end{aligned} \tag{17.1}$$

которая получается из системы (14.1), если положить равными нулю значения константы Ω и производных по времени, а также при введении вместо σ новой искомой функции $\Theta = \sigma^2 \geq 0$.

Значение безразмерной константы g , как отмечено в § 14 (см. неравенство (14.24)), не очень большое. Кроме того, влияние силы тяжести будет заметно сказываться на общем торможении потока вдоль оси Oz , т.е. на величинах

$$\Theta(r, z)|_r = \text{const} = \Theta(z), \quad w(r, z)|_r = \text{const} = w(z),$$

и незначительно на величинах

$$\Theta(r, z)|_z = \text{const} = \Theta(r), \quad u(r, z)|_z = \text{const} = u(r), \quad v(r, z)|_z = \text{const} = v(r).$$

Следовательно, течение на небольшом по высоте среднем участке вертикальной части ВЗП можно представить в виде ряда по степеням малого параметра g , например, как это сделано в работе [1] при описании конвективных потоков вязкого газа:

$$U(r, z, g) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(r, z) \frac{g^k}{k!}, \quad U = \begin{pmatrix} \Theta \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix}. \quad (17.2)$$

Нулевые коэффициенты ряда (17.2) должны удовлетворять системе (17.1) при $g = 0$:

$$\begin{aligned} u_0 \Theta_{0r} + w_0 \Theta_{0z} + (\gamma - 1) \Theta_0 (u_{0r} + \frac{u_0}{r} + w_{0z}) &= 0, \\ u_0 u_{0r} - \frac{u_0^2}{r} + w_0 u_{0z} + \frac{1}{(\gamma - 1)} \Theta_{0r} &= 0, \\ u_0 v_{0r} + \frac{u_0 v_0}{r} + w_0 v_{0z} &= 0, \\ u_0 w_{0r} + w_0 w_{0z} + \frac{1}{(\gamma - 1)} \Theta_{0z} &= 0, \end{aligned} \quad (17.3)$$

т.е. являться точным решением традиционной СУГД при отсутствии силы тяжести и без учета действия СК.

Решение системы (17.3) берется в виде

$$\Theta_0 = \Theta_0(r), \quad u_0 = 0, \quad v_0 = \omega r, \quad w_0 = w_{00}, \quad (17.4)$$

где

$$\omega, \quad w_{00} - \text{const} > 0.$$

Выбор функций u_0 , v_0 , w_0 , приведенных в (17.4), связан с тем, что они передают равномерное движение газа вверх, одновременно закрученного в положительную сторону с постоянной угловой скоростью ω . В первом приближении именно таким является течение газа на небольшом по высоте среднем участке вертикальной части ВЗП – винтовое движение.

При указанных в (17.4) функциях Θ_0 , u_0 , v_0 , w_0 первое, третье и четвертое уравнения системы (17.3) выполняются тождественно, а второе переходит в следующее обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $\Theta_0(r)$:

$$\frac{1}{(\gamma - 1)} \Theta_0' = \frac{\omega^2 r^2}{r},$$

общее решение которого

$$\Theta_0(r) = \frac{(\gamma - 1)\omega^2}{2} r^2 + C_0, \quad (17.5)$$

где произвольная постоянная C_0 появилась в результате интегрирования.

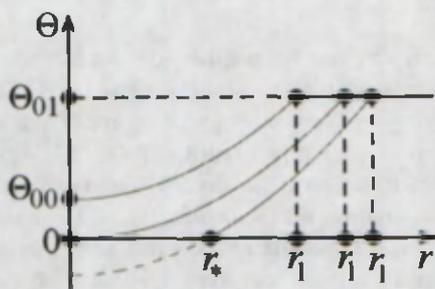


Рис. 17.1.

График полученной функции $\Theta_0(r)$ представляет собой параболу, сдвинутую вдоль оси ординат на величину C_0 (см. рис. 17.1). Если $C_0 > 0$, то значение константы C_0 определяет положительное значение функции $\Theta_0(r)|_{r=0} = \Theta_{00}$ на оси ВЗП. Если $C_0 = 0$, то на оси функция $\Theta_0(r)$ и, следовательно, плотность газа принимают нулевые значения. Если $C_0 < 0$, то в окрестности оси ВЗП при

$$0 \leq r \leq r_* = \sqrt{-\frac{2C_0}{(\gamma - 1)\omega^2}}$$

находится зона вакуума, а при $r \geq r_*$ — рассматриваемое течение газа, у которого $\Theta_0(r_*) = 0$.

Таким образом, в сжимаемом газе, имеющем винтовое движение, из-за наличия центробежной силы в окрестности оси вращения возникает область пониженного давления, вплоть до образования зоны вакуума. Этот факт полностью согласуется с предложенной § 6 схемой течения газа в вертикальной части ВЗП.

Значения констант γ , ω , C_0 однозначно определяют значение $r = r_1$, при котором значение функции $\Theta_0(r_1) = \Theta_{01}$ будет совпадать с квадратом скорости звука воздуха, внешнего по отношению к рассматриваемому небольшому по высоте среднему участку вертикальной части ВЗП.

Именно при этом значении $r = r_1$ построенное без учета силы тяжести и СК течение газа возможно состыковать через цилиндрическую контактную поверхность Γ с внешним однородным покоящимся газом. Объяснение этому простое: через поверхность Γ газ не течет, поскольку при $0 \leq r \leq r_1$ значение радиальной составляющей скорости газа равно нулю: $u_0(r) = 0$. На рис. 17.1 приведена такая стыковка, но в разных точках $r = r_1$ при разных значениях C_0 .

Замечание. Для случая несжимаемой жидкости с $\rho = \text{const} > 0$ известно течение, называемое вихрем Рэнкина [8]. Во внутренней части этого течения при $0 \leq r \leq r_1$ окружная компонента вектора скорости жидкости также, как и $v(r)$ в решении (17.4), (17.5), пропорциональна r . Однако из-за несжимаемости жидкости во внутренней части вихря Рэнкина никогда не возникнет зона вакуума. На границе $r = r_1 > 0$ внутренняя часть вихря Рэнкина стыкуется не с однородным покоем, а с внешней частью этого вихря, которая занимает область $r \geq r_1$ и в которой окружная компонента вектора скорости несжимаемой жидкости обратно пропорциональна r .

Чтобы получить систему уравнений для компонентов коэффициента $U_1(r, z)$ ряда (17.2), надо систему (17.1) продифференцировать по g , положить $g = 0$ и учесть значения компонентов нулевого коэффициента $U_0(r, z)$ ряда (17.2) (см. формулы (17.4) и (17.5)):

$$\begin{aligned} \Theta'_0(r)u_1 + w_{00}\Theta_{1z} + (\gamma - 1)\Theta_0(r) \left(u_{1r} + \frac{u_1}{r} + w_{1z} \right) &= 0, \\ -\frac{2v_0(r)}{r}v_1 + w_{00}u_{1z} + \frac{1}{(\gamma - 1)}\Theta_{1r} &= 0, \\ v'_0(r)u_1 + \frac{v_0(r)}{r}u_1 + w_{00}v_{1z} &= 0, \\ w_{00}w_{1z} + \frac{1}{(\gamma - 1)}\Theta_{1z} &= -1. \end{aligned} \tag{17.6}$$

Систему (17.6) можно записать в нормальном виде, разрешив отно-

сительно производных по переменной z :

$$\Theta_{1z} = \frac{(\gamma - 1)\Theta_0(r) - w_{00} [\Theta_0'(r)u_1 + (\gamma - 1)\Theta_0(r) (u_{1r} + \frac{u_1}{r})]}{[w_{00}^2 - \Theta_0(r)]},$$

$$u_{1z} = \frac{1}{w_{00}} \left[2\omega v_1 - \frac{1}{(\gamma - 1)} \Theta_{1r} \right],$$

$$v_{1z} = -\frac{2\omega}{w_{00}} u_{1z},$$

$$w_{1z} = \frac{\frac{1}{(\gamma - 1)} [\Theta_0'(r)u_1 + (\gamma - 1)\Theta_0(r) (u_{1r} + \frac{u_1}{r})] - w_{00}}{[w_{00}^2 - \Theta_0(r)]},$$
(17.7)

при условии

$$w_{00}^2 - \Theta_0(r) \neq 0.$$

Условие будет выполнено, если в потоке U_0 нет точек, в которых вертикальная составляющая скорости газа совпадает со значением скорости звука в этих точках на рассматриваемом интервале $[0, r_1]$ при $C_0 \geq 0$ или на интервале $[r_*, r_1]$ при $C_0 < 0$.

Для выписанной системы (17.7) можно задать начальные данные при $z = z_0 > 0$:

$$U_1(r, z)|_{z=z_0} = U_{10}(r),$$
(17.8)

при аналитичности которых у системы (17.7) имеется единственное аналитическое решение, если выполнено условие

$$u_{10}(r)|_{r=0} = 0$$

при $C_0 \geq 0$ или условие

$$u_{10}(r)|_{r=r_*} = 0$$

в случае $C_0 < 0$.

В частности, при построении аналитического решения задачи (17.7), (17.8) с учетом указанных условий индукцией по m при анализе значений

$$\frac{\partial^m \Theta_1}{\partial z^m} \Big|_{z=z_0}, \quad \frac{\partial^m u_1}{\partial z^m} \Big|_{z=z_0}, \quad \frac{\partial^m v_1}{\partial z^m} \Big|_{z=z_0}$$

доказывается, что в случае $C_0 \geq 0$ при $r = 0$ будет выполняться равенство

$$u_1(r, z)|_{r=0} = 0,$$

а в случае $C_0 < 0$ равенство

$$u_1(r, z)|_{r=r_*} = 0.$$

Построение последующих коэффициентов ряда (17.2) происходит при решении системы

$$\begin{aligned} \Theta'_0(r)u_k + w_{00}\Theta_{kz} + (\gamma - 1)\Theta_0(r)(u_{kT} + \frac{u_k}{r} + w_{kz}) &= F_{1,k}, \\ -\frac{2i_0(r)}{r}v_k + w_{00}u_{kz} + \frac{1}{(\gamma - 1)}\Theta_{kT} &= F_{2,k}, \\ v'_0(r)u_k + \frac{v_0(r)}{r}u_k + w_{00}v_{kz} &= F_{3,k}, \\ w_{00}w_{kz} + \frac{1}{(\gamma - 1)}\Theta_{kz} &= F_{4,k} \end{aligned} \quad (17.9)$$

при заданных начальных условиях

$$U_k(r, z)|_{z=z_0} = U_{k0}(r), \quad k \geq 2. \quad (17.10)$$

Система (17.9) получается после дифференцирования системы (17.1) k раз по g , подстановки в полученные соотношения $g = 0$ и учет значений предыдущих коэффициентов $U_\ell(r, z)$, $\ell = 0, 1, \dots, k - 1$.

Конкретный вид функций $F_{i,k}$ ($i = 1, 2, 3$) здесь не приводится ввиду их громоздкости, а дается только

$$F_{4,k} = -\sum_{\ell=1}^{k-1} C_k^\ell (u_\ell w_{k-\ell T} + w_\ell w_{k-\ell z}).$$

При аналитичности функций, задающих начальные условия (17.10), и соответствующих дополнительных условиях на функции $u_{k0}(r)$ доказывается сходимость ряда (17.2) с помощью соответствующего аналога теоремы Ковалевской для характеристической задачи Коши стандартного вида [3,5,7].

При желании нетрудно выписать (хотя получается достаточно громоздко) первые слагаемые бесконечных рядов

$$U_k(r, z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} U_{k\ell}(r) \frac{(z - z_0)^\ell}{\ell!}$$

для требуемых значений k .

В данной работе не приводятся детали доказательства сходимости всех встречающихся бесконечных рядов, а также вид их первых коэффициентов.

В заключение рассмотрим другие возможности построения решений системы (17.6) или эквивалентной ей системы (17.7).

Любая из указанных систем дает возможность получить одно уравнение с частными производными второго порядка для искомой функции $u_1(r, z)$. Для этого второе уравнение системы (17.6) (или системы (17.7)) переписывается в виде

$$v_1 = \frac{1}{2\omega} \left[w_{00} u_{1z} + \frac{1}{(\gamma - 1)} \Theta_{1r} \right].$$

После дифференцирования z этого уравнения получается соотношение

$$v_{1z} = \frac{1}{2\omega} \left[w_{00} u_{1zz} + \frac{1}{(\gamma - 1)} \Theta_{1rz} \right].$$

Если данное уравнение подставить в третье уравнение системы (17.6) (или системы (17.7)), то имеем уравнение

$$2\omega u_1 + \frac{w_{00}}{2\omega} \left[w_{00} u_{1zz} + \frac{1}{(\gamma - 1)} \Theta_{1rz} \right].$$

Соответствующая линейная комбинация первого и четвертого уравнений системы (17.6) дает первое уравнение системы (17.7), которое, будучи продифференцированным по r

$$\Theta_{1zr} = \frac{\partial F}{\partial r},$$

позволяет исключить из предыдущего уравнения производную Θ_{1rz} и получить уравнение второго порядка для $u_1(r, z)$:

$$\frac{4\omega^2}{w_{00}^2} u_1 + u_{1zz} + \frac{1}{(\gamma - 1)w_{00}} \frac{\partial F}{\partial r} = 0,$$

где F — правая часть первого уравнения системы (17.7):

$$F = \frac{(\gamma - 1)\Theta_0(r) - w_{00} [\Theta_0'(r)u_1 + (\gamma - 1)\Theta_0(r) (u_{1r} + \frac{u_1}{r})]}{[w_{00}^2 - \Theta_0(r)]}.$$

Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\Theta_0'(r)}{[w_{00}^2 - \Theta_0(r)]^2} \left\{ (\gamma - 1)\Theta_0(r) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -w_{00} \left[\Theta'_0(r) u_1 + (\gamma - 1) \Theta_0(r) \left(u_{1r} + \frac{u_1}{r} \right) \right] \Big\} + \\
& + \frac{1}{[w_{00}^2 - \Theta_0(r)]} \left[(\gamma - 1) \Theta'_0(r) - w_{00} \Theta''_0(r) u_1 - w_{00} \Theta'_0(r) u_{1r} - \right. \\
& \quad \left. - w_{00} (\gamma - 1) \Theta'_0(r) u_{1r} - w_{00} (\gamma - 1) \Theta_0(r) u_{1rr} - \right. \\
& \quad \left. - w_{00} (\gamma - 1) \frac{[r \Theta'_0(r) - \Theta_0(r)]}{r^2} u_1 - w_{00} (\gamma - 1) \frac{\Theta_0(r)}{r} u_{1r} \right] = \\
& \quad = - \frac{w_{00} (\gamma - 1) \Theta_0(r)}{[w_{00}^2 - \Theta_0(r)]} u_{1rr} - \\
& \quad - \left[\frac{\Theta'_0(r) w_{00} (\gamma - 1) \Theta_0(r)}{[w_{00}^2 - \Theta_0(r)]^2} + \frac{w_{00} \gamma \Theta'_0(r)}{[w_{00}^2 - \Theta_0(r)]} + \right. \\
& \quad \quad \left. + \frac{w_{00} (\gamma - 1) \Theta_0(r)}{r [w_{00}^2 - \Theta_0(r)]} \right] u_{1r} - \\
& \quad - \left\{ \frac{[\Theta'_0(r)]^2 w_{00}}{[w_{00}^2 - \Theta_0(r)]^2} + \frac{\Theta'_0(r) \Theta_0(r) w_{00} (\gamma - 1)}{r [w_{00}^2 - \Theta_0(r)]^2} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{w_{00} \Theta''_0(r)}{[w_{00}^2 - \Theta_0(r)]} + \frac{w_{00} (\gamma - 1) [r \Theta'_0(r) - \Theta_0(r)]}{r^2 [w_{00}^2 - \Theta_0(r)]} \right\} u_1 + \\
& \quad + \frac{\Theta'_0(r) (\gamma - 1) \Theta_0(r)}{[w_{00}^2 - \Theta_0(r)]^2} + \frac{(\gamma - 1) \Theta'_0(r)}{[w_{00}^2 - \Theta_0(r)]}.
\end{aligned}$$

Уравнение для $u_1(r, z)$ может быть переписано в виде

$$u_{1zz} + a_2(r) u_{1rr} + a_1(r) u_{1r} + a_0(r) u_1 + b(r) = 0, \quad (17.11)$$

где

$$\begin{aligned}
a_2(r) &= - \frac{\Theta_0(r)}{[w_{00}^2 - \Theta_0(r)]}, \\
a_1(r) &= - \frac{\Theta'_0(r) \Theta_0(r)}{[w_{00}^2 - \Theta_0(r)]^2} - \frac{\gamma \Theta'_0(r)}{(\gamma - 1) [w_{00}^2 - \Theta_0(r)]} - \frac{\Theta_0(r)}{r [w_{00}^2 - \Theta_0(r)]}, \\
a_0(r) &= \frac{4w_{00}^2}{w_{00}^2} - \frac{[\Theta'_0(r)]^2}{(\gamma - 1) [w_{00}^2 - \Theta_0(r)]^2} - \frac{\Theta'_0(r) \Theta_0(r)}{r [w_{00}^2 - \Theta_0(r)]^2} - \\
& \quad - \frac{\Theta''_0(r)}{(\gamma - 1) [w_{00}^2 - \Theta_0(r)]} - \frac{[r \Theta'_0(r) - \Theta_0(r)]}{r^2 [w_{00}^2 - \Theta_0(r)]},
\end{aligned}$$

$$b(r) = \frac{w_{00}\Theta_0'(r)}{[w_{00}^2 - \Theta_0(r)]^2}.$$

Самое простое решение уравнения (17.11) есть функция u_1 , зависящая только от r . В этом случае $u_1 = u_1(r)$ удовлетворяет уже обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$a_2(r)u_1'' + a_1(r)u_1' + a_0(r)u_1 + b(r) = 0. \quad (17.12)$$

С помощью численных расчетов удается построить решение уравнения (17.12), удовлетворяющее двум краевым условиям

$$u_1(r)|_{r=r_2} = u_1(r)|_{r=r_1} = 0, \quad (17.13)$$

где $0 \leq r_2 < r_1$. График решения при $r_2 > 0$ приведен на рис. 17.2.

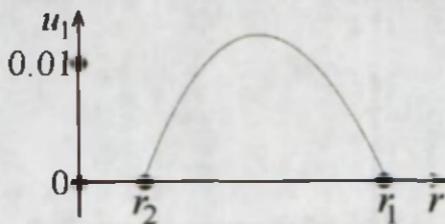


Рис. 17.2.

В этом случае функции $\Theta_1(r, z)$, $v_1(r, z)$ и $w_1(r, z)$ линейно зависят от z , т.е.

$$\Theta_1(r, z) = F(r)(z - z_0) + \Theta_{10}(r), \quad v_1(r, z) = -\frac{2\omega}{w_{00}}u_1(r)(z - z_0) + v_{10}(r),$$

$$w_1(r, z) = G(r)(z - z_0) + w_{10}(r),$$

где функция $G(r, z)$ — правая часть четвертого уравнения системы (17.7):

$$G(r, z) = \frac{\frac{1}{(\gamma - 1)} [\Theta_0'(r)u_1 + (\gamma - 1)\Theta_0(r) (u_{1r} + \frac{u_1}{r})] - w_{00}}{[w_{00}^2 - \Theta_0(r)]},$$

а функции $\Theta_{10}(r)$, $v_{10}(r)$, $w_{10}(r)$ берутся из начальных условий (17.8).

При известной функции $u_1(r)$, являющейся решением уравнения (17.12), с помощью замены

$$u_1(r, z) = U(r, z) + u_1(r)$$

из неоднородного уравнения (17.11) получается для новой искомой функции $U(r, z)$ следующее однородное уравнение:

$$U_{zz} + a_2(r)U_{rr} + a_1(r)U_r + a_0(r)U = 0, \quad (17.14)$$

которое допускает разделение переменных

$$U(r, z) = R(r)Z(z).$$

Также возможно численное построение решения уравнения (17.14) при заданных начально-краевых условиях:

$$\begin{aligned} U(r, z)|_{z=z_0} &= U_0(r), \quad U_z(r, z)|_{z=z_0} = U_1(r), \\ U(r, z)|_{r=r_1} &= U(r, z)|_{r=r_2} = 0, \end{aligned} \quad (17.15)$$

где значения констант r_1, r_2 : $0 \leq r_2 < r_1$ — должны браться такими же, как в задаче (17.12), (17.13).

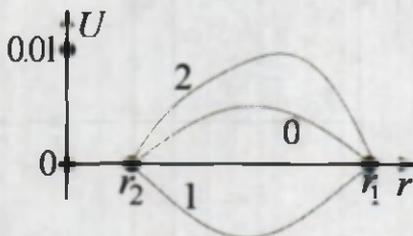


Рис. 17.3.

На рис. 17.3 приведено решение задачи (17.14), (17.15) при разных значениях z : $z = z_0$, $z = z_1$, $z = z_2$ — линии 0, 1, 2 соответственно, причем $z_0 < z_1 < z_2$.

Наличие решений у задач (17.12), (17.13) и (17.14), (17.15) позволяет приближенному решению системы (17.2)

$$\mathbf{U}(r, z, g) = \mathbf{U}_0(r, z) + \mathbf{U}_1(r, z)g \quad (17.16)$$

удовлетворить условию непротекания как на внешней цилиндрической поверхности Γ : $r = r_1$, так и на внутренней Γ_1 : $r = r_2$, поскольку у решения (17.16) при $r = r_{1,2}$ равна нулю радиальная составляющая вектора скорости газа.

Если значение константы r_2 нулевое: $r_2 = 0$, то поверхность Γ_1 есть просто ось симметрии $r = 0$. В этом случае имеет место схема движения газа в ВЗП, приведенная в § 6 и представленная на рис. 6.1.

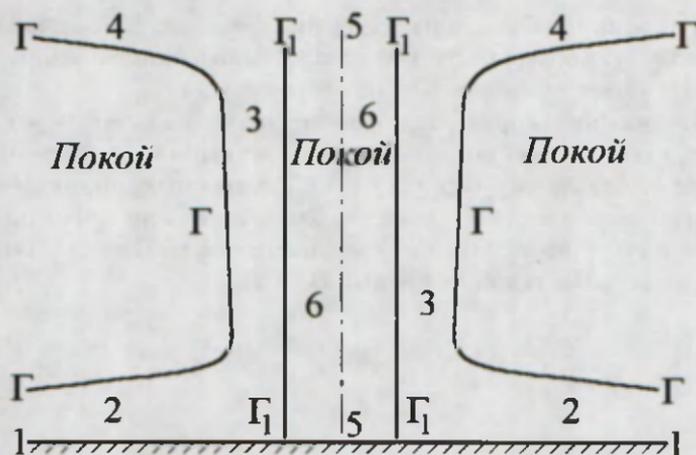


Рис. 17.4.

В случае $r_2 > 0$ (см. рис. 17.2, 17.3) схема течения в ВЗП приведена на рис. 17.4, где буквой Г обозначена внешняя контактная поверхность, разделяющая внешний покоящийся воздух и течение в ВЗП, а Г₁ – внутренняя контактная поверхность, разделяющая внутренний покоящийся воздух и течение в ВЗП.

Цифрами на рис. 17.4 помечены следующие элементы: 1 – поверхность Земли; 2 – придонная область ВЗП; 3 – вертикальная область ВЗП; 4 – верхний край ВЗП; 5 – ось симметрии ВЗП; 6 – область внутреннего однородного покоящегося газа с более низким давлением, чем давление во внешнем покоящемся воздухе.

Именно такую схему течения имеют некоторые циклоны и тайфуны. Для этих природных ВЗП область 6 обычно называется *глаз тайфуна*.

Краткие итоги данного параграфа следующие.

Для сжимаемого газа без учета действия силы тяжести и СК описано винтовое течение, которое в окрестности оси вращения имеет пониженное давление, включая случай области вакуума возле оси.

Предложено построение течения газа при учете силы тяжести в виде бесконечного ряда по степеням g , нулевое слагаемое которого передает винтовое движение газа. Показана возможность построения такого ряда.

Приведены конкретные частные решения, описывающие первое слагаемое ряда и построены приближенные решения СУГД при учете силы тяжести.

Одно из этих приближенных решений возможно состыковать через цилиндрическую поверхность Γ с внешним покоящимся газом, что соответствует схеме течения, представленной в § 6.

Другое решение, кроме возможности состыковать его через цилиндрическую контактную поверхность с внешним покоящимся воздухом допускает его стыковку через другую, внутреннюю цилиндрическую контактную поверхность Γ_1 также с однородным, но имеющим меньшую плотность и покоящимся в окрестности оси ВЗП газом. Такая схема течения встречается в природных ВЗП.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Баутин С.П.** Приближенное решение одной задачи о конвекции вязкого газа в поле тяжести // Численные и аналитические методы моделирования в механике сплошной среды. – Свердловск: УрО РАН, 1989. С. 10–18.
2. **Сердобольский О.М.** Можно ли найти управу на торнадо? // Эхо планеты. – 2000. – № 7(618). – С. 30–31.
3. **Баутин С.П.** Математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа. – Новосибирск: Наука, 1997. – 160 с.
4. **Баутин С.П.** Аналитическая тепловая волна. – М.: Физматлит, 2003. – 88 с.
5. **Баутин С.П., Дерябин С.Л.** Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум. – Новосибирск: Наука, 2005. – 390 с.
6. **Баутин С.П., Казаков А.Л.** Обобщенная задача Коши и ее приложения. – Новосибирск: Наука, 2006. – 399 с.
7. **Баутин С.П.** Математическое моделирование сильного сжатия газа. – Новосибирск: Наука, 2007. – 312 с.
8. **Алексеенко С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л.** Введение в теорию концентрированных вихрей. – Новосибирск: Институт теплофизики СО РАН, 2003. – 504 с.
9. **Сноу Дж.Т.** Торнадо // В мире науки. – 1984. № 6. – С. 44–55.
10. **Политов В.С.** Аналитическая модель смерча (торнадо) // Труды междунар. конф. "V Забабахинские научные чтения". Ч. 1. – Снежинск: РФЯЦ-ВНИИТФ, 1999. – С. 46–54.
11. **Гупта А., Лилли Д., Сайред Н.** Закрученные потоки. – М.: Мир, 1987. – 588 с.
12. **Лойцянский Л.Г., Лурье А.И.** Курс теоретической механики. Т. 1. – М.: Наука, 1982. – 352 с.
13. **Лойцянский Л.Г., Лурье А.И.** Курс теоретической механики. Т. 2. – М.: Наука, 1983. – 640 с.
14. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Теоретическая физика. Т. 1: Механика. – М.: Наука, 1988. – 216 с.
15. **Арнольд В.И.** Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1989. – 472 с.
16. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.
17. **Лойцянский Л.Г.** Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1970. – 904 с.
18. **Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.** Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. – М.: физматгиз, 1963. – 583 с.

19. **Овсянников Л.В.** Лекции по основам газовой динамики. – М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003. – 336 с.
20. **Башуров В.В., Свидинский В.А.** Об уравнениях динамики упругих сред в произвольных системах координат // Численные методы механики сплошной среды. – 1982. Т. 13, № 2. – С. 14–29.

В Сибирской издательской фирме "Наука" РАН, Новосибирск
вышла из печати книга

Баутин С.П., Дерябин С.Л.

**Математическое моделирование
истечения идеального газа в вакуум**

2005

В книге рассмотрены вопросы математического моделирования истечения идеального газа в вакуум. Доказаны теоремы о существовании и единственности решений специальных характеристических задач Коши для системы уравнений газовой динамики – нелинейной системы уравнений с частными производными гиперболического типа. Решения этих задач описывают истечение газа в вакуум в различных ситуациях: распад специального разрыва; непрерывное примыкание к вакууму; учет внешних сил, включая гравитацию по Ньютону; наличие разных особенностей на свободной границе, разделяющей газ и вакуум. Исследованы свойства построенных решений, определены законы движения свободной границы в различных случаях.

Книга предназначена для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов, интересующихся нелинейными уравнениями с частными производными и их приложениями в механике сплошной среды.

С. 390. Ил. 65. Библиогр.: 181 назв.

В Сибирской издательской фирме "Наука" РАН, Новосибирск
вышла из печати книга

Баутин С.П., Казаков А.Л.

**Обобщенная задача Коши
и ее приложения**

2006

В книге проведены исследования по аналитической теории дифференциальных уравнений с частными производными. Рассмотрена обобщенная задача Коши, которая отличается от задачи Коши в традиционной постановке тем, что начальные данные для разных функций ставятся не на одной, а на разных поверхностях. Детально исследован случай, когда начальные данные поставлены на двух и на трех поверхностях. Доказаны теоремы существования и единственности аналитического решения. Также проведено математическое описание течений газа с ударными волнами. С точки зрения общей теории дифференциальных уравнений с частными производными возникающие при этом задачи являются обобщенными задачами Коши. Достаточно подробно обсуждаются ранее полученные результаты по обобщенной задаче Коши.

Монография предназначена для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов, интересующихся нелинейными уравнениями с частными производными и их приложениями в механике сплошной среды.

С. 399. Ил. 34. Табл. 1. Библиогр.: 122 назв.

В Сибирской издательской фирме "Наука" РАН, Новосибирск
вышла из печати книга

Баутин С.П.

**Математическое моделирование
сильного сжатия газа**

2007

В монографии рассмотрены вопросы математического моделирования сильного сжатия газа, необходимого для реализации управляемого термоядерного синтеза. Доказаны теоремы о существовании и единственности решений специальных характеристических задач Коши для нелинейных систем уравнений гиперболического и смешанного типов, а именно – для систем уравнений газовой динамики в случаях нетеплопроводного и теплопроводного невязкого идеального газа. Рассмотрены случаи газов с реальными уравнениями состояния. Исследованы свойства построенных решений. Приведены примеры решения конкретных задач, в том числе с помощью численных расчетов.

Книга предназначена для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов, интересующихся нелинейными уравнениями с частными производными и их приложениями в механике сплошной среды.

С. 312. Ил. 80. Табл. 1. Библиогр.: 304 назв.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

БАУТИН СЕРГЕЙ ПЕТРОВИЧ

Доктор физико-математических наук, профессор, член Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике. В настоящее время заведующий кафедрой "Прикладная математика" Уральского государственного университета путей сообщения в Екатеринбурге.

Научную деятельность начал в аспирантуре исследованием характеристической задачи Коши и ее приложений в газовой динамике. За эти годы доказал теоремы существования и единственности аналитических решений трех нелинейных начально-краевых задач в теории уравнений с частными производными: характеристической задачи Коши, обобщенной задачи Коши (задачи Соболева–Леднёва) и краевой задачи для тепловой волны. С помощью своих теорем конструктивно построил решения многих задач механики сплошной среды: для системы уравнений газовой динамики – системы гиперболического типа, для нелинейного уравнения теплопроводности – уравнения параболического типа, для полной системы уравнений Навье–Стокса – системы смешанного типа.

Полученные результаты представлены в более чем 160 научных публикациях. Автор пяти монографий: Математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа. Новосибирск: Наука, 1997; Аналитическая тепловая волна. Москва: Физматлит, 2003; Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум. Новосибирск: Наука, 2005 (совместно с С.Л. Дерябиным); Обобщенная задача Коши и ее приложения. Новосибирск: Наука, 2006 (совместно с А.Л. Казаковым); Математическое моделирование сильного сжатия газа. Новосибирск: Наука, 2007.

За 37 лет работы в области математического моделирования сформировал свою научную школу. Среди его учеников – три доктора и семь кандидатов наук.

E-mail: SBautin@math.usart.ru

ТРОПИЧЕСКИЙ ЦИКЛОН



Сфотографирован сверху с космического спутника в Северном полушарии Земли. Тропические циклоны устроены как торнадо, но размером гораздо больше. Столб торнадо обычно упирается в ближайшую тучу, циклоны же высотой во всю атмосферу. Пятно в центре циклона (глаз циклона) – это верхнее окончание столба поднимающегося закрученного воздуха. Воздух от глаза циклона разлетается хорошо видимыми спиральными потоками, сохраняя полученную в столбе закрутку против хода часовой стрелки.

ПОЯВЛЕНИЕ И ИСЧЕЗНОВЕНИЕ ЦИКЛОНОВ



Голубые пятна на карте Земли - это места наблюдения циклонов. Тропические циклоны, как и торнадо, возникают из потоков поднимающегося вверх тёплого воздуха, нагретого Солнцем. Нужны время и ровная поверхность равнины или моря, чтобы сила Кориолиса, вызванная вращением Земли,

смогла достаточно сильно закрутить восходящий поток воздуха и превратить его в устойчивый столб. Солнце сильнее всего греет на экваторе, но сила Кориолиса там равна нулю и увеличивается в направлении к земным полюсам. Поэтому циклоны чаще всего возникают в тропических широтах, где Солнце греет почти как на экваторе, а силы Кориолиса уже достаточно, чтобы закрутить восходящий поток в устойчивый столб. Вначале циклоны перемещаются силой Кориолиса строго на северо-запад в Северном полушарии Земли и на юго-запад в Южном полушарии, но со временем они меняют направление своего движения в зависимости от ветра и рельефа суши. Циклоны гуляют по ровной поверхности морей и равнин, дрейфуют вдоль гор и берегов суши, оставляя на своём пути большие разрушения. Со временем неровности рельефа и атмосферные воздействия нарушают закрутку воздуха в циклонах и они исчезают.

Глубокоуважаемому
коллеге

Хабидулле Турановичу
Туранову от автора
на добрую память
о совместной работе
в ЦРГУПС и

с пожеланиями дальнейших
творческих успехов!



20.11.08