ЖАМОЛ ЗОИРОВ
БОТИР АҲМАДХЎЖАЕВ

НАЗАРИЙ МЕХАНИКА
II қисм

Ўзбекистон Республикаси Олий ва Ўрта
махсус таълим вазирлиги
дарслик сифатида тавсия этган

Тошкент
Ўзбекистон Республикаси Фанлар академияси
«Фан» нашриёти
1998

Бу китоб мазкур назарий механика дарслигининг иккинчи қисми бўлиб, динамика бўлимидан иборат. У олий техника ўқув юртлари учун назарий механиканинг 1996 йил чоп этилган янги намунавий дастури (120-136 соат ҳажмида) асосида ёзилган.

Ушбу дарслик олий техника ўқув юртларининг бакалавр талабалари учун мўлжалланган бўлиб, унда динамиканинг асосий тушунчалари ва қонунларини ёритиш билан бирга техникавий мутахассисликларининг турли соҳаларида учрайдиган қатор амалий масалалар батафсил содда ечиб кўрсатилган.

$$З\frac{1603020000-з-291/98}{М355(04)-98}\text{ Рез.98}$$

ИБ № 6898

ISBN 5-648-02579-3

Теришга берилди 10.04.98 й. Бичими 60x84 1/16.
Офсет босма усулида босилди. Шартли босма
табоғи Ўз РФА «Фан» нашриёти: 700047, Тошкент,
акад. Яҳё Ғуломов кўчаси, 70. 20,3. Адади 1000 нусха.
Буюртма № 13
Қўлёзма макети хўжалик ҳисобидаги «матбаа
маркази» корхонасининг компьютерида терилди.
«ФАН» босмахонасида чоп этилди.

СЎЗ БОШИ

Ўзбекистон Республикасининг мустақиллиги унинг нафақат сиёсий, иқтисодий мустақиллигини кўзда тутибгина қолмай, балки унинг маънавий мустақиллигини, шу жумладан, Республика ўқув системаси, айниқса, Олий ва Ўрта махсус таълим тизимининг ўзига хос илғор йўлини танлашни талаб этади. Бу эса Республикамизнинг ривожланиш даражасига мос янги дарсликларнинг яратилишини тақоза қилади.

Ҳозирги замон фани ва техникасининг тез суръатлар билан ривожланиши, айниқса, Республикамиз саноатининг аввал мавжуд бўлмаган янги турлари, жумладан, нефтсаноати, автомобилсозлик, авиациясозлик, тракторсозлик, моторсозлик ва бошқа қатор ишлаб чиқариш жараёнларини истиқлолимиз йўлидаги қайта янгидан механизациялаштирилиши, автоматлаштирилиши ҳамда тез суръатлар билан турли хил янги иншоотларнинг барпо этилиши умуммуҳандислик фанларининг асоси бўлган назарий механиканинг Республикамиздаги аҳамиятини янада оширади. Зеро назарий механика фани бўлажак мутахассиснинг илмий, амалий фаолиятида учрайдиган турли хил техникавий масалаларни ва техникавий янгиликларни еча олиши билан боғлиқ муҳандислик қобилияти даражасини оширади.

Шу билан бирга, ўзбек тилида тўлиқ намунавий дастур асосида бакалаврлар учун ёзилган назарий механика дарсликларининг камлиги ҳамда ишлаб чиқаришдан ажралмаган ҳолда ўқиётган талабаларнинг бу фанни пухта ўзлаштиришларини таъминлаш масаласи мавжуд дарсликларга нисбатан ихчам ва дастурга мос дарслик яратиш эҳтиёжини туғдирди. Шуларни эътиборга олиб муаллифлар бир неча йиллар давомида турли олий техника ўқув юртларида ўқиган маърузаларини умумлаштириб, янги намунавий дастурга асосланган ҳолда, бакалаврлар учун назарий механикадан ушбу дарсликни ёздилар.

Дарсликнинг қўлёзмасини ўқиб чиқиб, унинг сифатини ошириш борасида берган маслаҳатлари учун профессорлар Т.Мавлянов, Ғ.Хожиметов ва Р.Каримовларга муаллифлар ташаккур билдирадилар.

XII боб

ДИНАМИКАГА КИРИШ

48-§.Динамиканинг асосий тушунчалари ва масаласи.

Динамика назарий механиканинг асосий бўлими бўлиб унда жисмларнинг механик ҳаракат қонунлари шу ҳаракатни вужудга келтирувчи кучга боғлаб текширилади.

Механиканинг асосий, бирламчи тушунчаси бўлган кучни статикада ўзгармас ва жисмнинг бирор нуқтасига қўйилган деб қараган эдик. Динамикада эса куч моддий жисмлар ҳаракатини ўзгартирувчи таъсири билан аниқланади. Чунончи, жисмга таъсир этувчи куч вақтга, жисм ҳолатига, тезлигига боғлиқ бўлиши мумкин. Бундай ўзгарувчан кучлар учун ҳам статикада ўрганилган ўзгармас кучларни қўшиш ва содда ҳолга келтириш каби қоидалар ўринли бўлади.

Жисмларнинг моддий миқдор характеристикаси - унинг массаси ёки, туташ муҳитлар ҳолида, зичлиги, яъни массалар тақсимланиши статика ва кинематикада аҳамиятсиз ва шунинг учун у қатнашмаган эди, лекин у динамикада асосий тушунчалардан бири ҳисобланади.

Жисм ҳаракати фақат унга қўйилган кучгагина боғлиқ бўлмай, унинг инертлигига ҳам боғлиқ. Жисмнинг инертлиги деб эса унга қўйилган кучлар таъсирида ўз тезлигини ёки тинч ҳолатини тез ёки секин ўзгартираолиш хусусиятига айтилади. Бир кучнинг бирин-кетин икки жисмга таъсирида биринчисининг тезлиги иккинчисиникига нисбатан секин ўзгарса, биринчи жисм кўпроқ инертликка эга дейилади ва аксинча. Жисмнинг инертлигини миқдор жиҳатдан ифодаловчи физикавий катталик жисмнинг *массаси* дейилади. Биз ўрганаётган механика классик механика дейилиб, бунда жисмнинг тезлиги ёруғлик тезлигидан анча кичик, унинг массаси ўзгармас, скаляр ва мусбат катталик деб қаралади.

Биз динамикада жисмларнинг ҳаракатини ўрганишни дастлаб, уларнинг ўлчамлари ва массаларининг тақсимланишини эътиборга олмаган ҳолда моддий нуқта деб ҳисоблашдан бошлаймиз. Ҳаракатини ўрганишда ўлчамлари аҳамиятга эга бўлмаган, лекин массага эга моддий жисмга *моддий нуқта* дейилади. Моддий нуқта асл маънода, бирор жисмни англаттани учун у шу жисмнинг массасига тенг массага ва шу сабабли, жисм каби таъсирлашаолиш хусусиятга эга бўлади. Моддий нуқта тушунчасига биноан механик система ёки жисм массаси уни ташкил эттан моддий нуқталар массаларининг йиғиндиси билан аниқланади. Умумий ҳолда, жисмнинг ҳаракати фақат ушбу моддий нуқталар йиғиндисигагина эмас, уларнинг жисм бўйлаб тақсимланиши (жисм шакли)га ҳам боғлиқ.

Динамикада ҳам, худди статика ва кинематика бўлимларидагидек моддий нуқта, қаттиқ жисм, механик система каби объектлар мувозанати ва ҳаракати мавзусида сўз юритилади. Лекин бу уч бўлимларнинг масалалари турлича. Жумладан статика бўлимида жимсларнинг (ёки механик системанинг) ўзаро механик таъсирлашувлари уларнинг мувозанат ҳолатларида текширилади. Жисмлар (ёки механик системалар)нинг фазо ва вақтда содир бўладиган механик ҳаракатларини ўрганиш билан биз назарий механиканинг кинематика бўлимида шуғилланган эдик. Бунда жисм ҳаракати унга таъсир этаёттан ва шу ҳаракатни туғдираёттан кучларга боғламасдан фақат геометрик нуқтаи назардан ўрганган эдик.

Динамика масаласи. Динамика масаласи жисмга таъсир этувчи кучлар билан унинг ҳаракатининг кинематик характеристикалари ўртасидаги боғланиш қонунларини аниқлаш ва бу қонунларни ҳаракатнинг хусусий ҳолларига тадбиқ этишдан иборат.

Динамика масаласини динамиканинг асосчиси Ньютон жуда яхши таърифлаган. У айтганки, динамика "ҳаракатнинг юз беришига кўра табиат кучларини билиш, сўнгра бу кучлар билан табиатнинг бошқа ҳодисаларини тушунтириши" зарур.

49-§. Динамиканинг асосий қонунлари. Инерциал саноқ системаси.

Динамиканинг асосида тажриба ва кузатишларда аниқланган ва Галилей-Ньютон қонунлари деб аталувчи қуйидаги қонунлар ётади. Бу қонунларга асосланиб мантиқий йўл билан математика усулларини қўллаш натижасида динамиканинг турли теоремалари ва тенгламалари келтирилиб чиқарилади. Динамиканинг ушбу қонунлари биринчи бор Галилей ва Ньютон томонидан XVII асрда таърифланган. Бу қонунларнинг тўғрилиги инсоннинг амалий фаолиятида, техниканинг ривожланишида ҳамон кузатилиб келмоқда.

1-қонун (инерция қонуни). Ташқи таъсирдан ҳоли бўлган моддий нуқта ўзининг тинч ёки тўғри чизиқли текис ҳаракатини бошқа жисмлар таъсир этмагунча сақлайди.

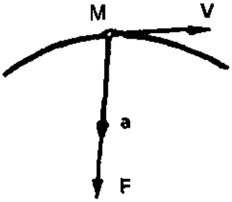
Биринчи қонун мумкин бўлган механик ҳаракатларнинг энг соддаси – жисмнинг ёки нуқтанинг бошқа жисмлардан тўла ажралган шароитдаги ҳаракатини ифодалайди. Қонунга мувофиқ нуқтанинг ўз ҳолатини сақлаш хусусиятига унинг *инертлиги* дейилади. Моддий нуқтанинг бундай ҳолати *инерцион ҳолат*, ҳаракати *инерцион ҳаракат* дейилади. Биринчи қонуннинг ўзини эса *инерция қонуни* деб аталади. Нуқтанинг тинч ҳолати унинг инерцион ҳаракат ҳолатининг хусусий ҳоли бўлади. Галилей - Ньютоннинг бу қонунига мувофиқ ҳамма жисмлар ўзининг инерцион ҳаракат ҳолатини ўзгаришга қаршилик кўрсатиш қобилиятига эга.

2-қонун (динамиканинг асосий қонуни). Эркин моддий нуқтанинг тезланиши унга қўйилган кучга пропорционал ва куч билан бир хил йўналган бўлади (119-расм).

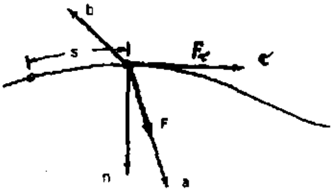
Агар нуқтага қўйилган кучни $\mathbf{F}$, нуқта тезланишини $\mathbf{a}$ деб белгиласак, иккинчи қонун *қуйидагича ифодаланади:*

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}. \qquad (12.1)$$

Бу ерда m *нуқтанинг массаси. Иккинчи қонун нуқта* динамикасининг *асосий қонуни*, ушбу қонунни ифодаловчи (12.1) тенглама динамиканинг *асосий тенгламаси* дейилади.



119-расм



120-расм

(12.1) дан кўрамизки, куч ва нуқта тезланиши бир чизиқ бўйлаб йўналган ва шунинг учун уларнинг модуллари орасида қуйидаги тенглик ўринли бўлади

$$ma = F.$$

Бундан нуқта тезланиши

$$a = \frac{F}{m}$$

га тенг, *яъни* қўйилган куч таъсирида моддий нуқтанинг олган тезланиши шу куч миқдорига тўғри мутаносиб, нуқта массасига тескари мутаносиб бўлади.

Нуқта массаси унга қўйилган маълум куч таъсирида олган тезланишга кўра аниқланади.

Чунончи, ҳар қандай жисм бўшлиқда **Р** оғирлик кучи таъсирида Ерга ўзгармас g тезланиш билан тушиши тажрибалардан яхши маълум. Оғирлик кучининг моддий нуқтага берадиган бу тезланиши унинг *эркин тушиш тезланиши* дейилади, ва g=9,81м/с^2. (12.1) га кўра масса қуйидагича аниқланади:

$$m = \frac{P}{g} \qquad (12.2)$$

Классик механикада ҳаракатдаги жисм массаси шу жисмнинг тинч ҳолатдаги массасига тенг деб қаралади.

Ер сиртидаги ҳар қандай жисмга Ньютоннинг, бизга яхши таниш, бутун Олам тортишиш қонунига кўра

$$F = \gamma \frac{mM}{R^2}, \qquad (12.3)$$

куч таъсир қилади. Бу ерда m- Ер сиртидаги жисмнинг массаси бўлиб уни гравитацион масса дейилади, M, R - Ернинг массаси ва радиуси. Гравитацион (12.3) ва инерцион (12.2) массалар материя хусусиятларининг турли томонларини акс эттирса ҳам улар ўзаро тенг деб ҳисобланади.

Ньютоннинг иккинчи қонуни биринчи-инерция қонунини ҳам ўз ичига олади. Ҳақиқатан ҳам, агар **F**=0 бўлса (12.1) дан **v**=const келиб чиқади. Демак, нуқтага куч таъсир этмаса у тўғри чизиқли текис ҳаракатдаги инерцион ҳолатда бўлади.

Динамиканинг асосий тенгламасидаги нуқта тезланиши унинг абсолют тезланиши деб тушунилади.

Бу иккинчи қонунга биноан жисм массасининг аддитивлик хусусиятини исботлаш мумкин. Бинобарин, икки хил m_1 ва m_2 массали икки моддий нуқта, мос равишда, уларга қўйилган $\mathbf{F}_1$ ва $\mathbf{F}_2$ кучлар таъсирида бир хил $\mathbf{a}$ тезланиш билан ҳаракатланаётган бўлсин, яъни

$$m_1\mathbf{a} = \mathbf{F}_1, \quad m_2\mathbf{a} = \mathbf{F}_2.$$

Ушбу ҳаракатни бузмаган ҳолда бу икки моддий нуқтани бирлаштирамиз. Юқоридаги иккала тенгламани чап ва ўнг қисмларини ҳадма-ҳад қўшсак

$$(m_1 + m_2)\mathbf{a} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

келиб чиқади. Буни динамиканинг асосий тенгламаси билан солиштириб, массалар аддитивлик қонунига келамиз:

$$m = m_1 + m_2.$$

3-*қонуни* (таъсир ва акс таъсирнинг тенглик қонуни).

Жисмларнинг ўзаро механик таъсирлашувида ҳар бир таъсир ўзига тенг ва бир чизиқ бўйлаб қарама-қарши йўналган акс таъсирни вужудга келтиради.

Масалан, А моддий нуқта В моддий нуқтага $\mathbf{F}_A$ куч билан таъсир этса, В нуқта ҳам А нуқтага, $\mathbf{F}_A$ куч ётган АВ чизиқ бўйлаб тескари йўналган миқдори $\mathbf{F}_A$ га тенг $\mathbf{F}_B$ куч билан таъсир қилади. Динамиканинг асосий қонунига мувофиқ А ва В нуқталар учун $\mathbf{F}_B = m_A a_A$, $\mathbf{F}_A = m_B a_B$ формулаларни ёзиш мумкин. Учинчи қонунга кўра $\mathbf{F}_B = \mathbf{F}_A$, яъни $m_A a_A = m_B a_B$. Бундан

$$\frac{a_B}{a_A} = \frac{m_A}{m_B} \qquad (12.4)$$

келиб чиқади, яъни икки моддий А ва В нуқталарнинг бир-бирига таъсири натижасида олган тезланишлари массаларига тескари пропорционал. Ушбу нуқталарнинг тезланиш векторлари эса AB чизиқ бўйлаб қарама - қарши томонга йўналган. (12.4) га кўра иккита ихтиёрий A ва B жисмларнинг бир-бири билан ўзаро механик таъсирлашуви натижасида олган тезланишларининг нисбати ҳардоим айни шу A ва B лар учун ўзгармас бўлиб фақат A ва B ларнинг табиатига боғлиқ.

Шундай қилиб, моддий нуқта (жисм) га таъсир этувчи куч манбаи бирор бошқа жисмда бўлади. Аммо бу таъсир хеч қачон бир томонлама бўлмайди. Иккинчи жисмга биринчи жисм ҳам акс таъсир кўрсатади. Таъсир-акс таъсир ўзаро миқдор бўйича тенг, йўналиш жиҳатдан қарама - қарши. Классик механиканинг биз юқорида танишган учинчи қонуни моддий жисмларнинг бундай ўзаро таъсирлашувини ифодалайди.

Динамиканинг биринчи ва иккинчи қонунлари биргина моддий нуқта учун ёзилган, учинчи қонун эса икки ва ундан ортиқ нуқталар, яъни моддий нуқталар системаси учун ўринли.

4-қонун (кучлар таъсирининг ўзаро боғлиқмаслик қонуни). Бир неча кучлар таъсирида моддий нуқтанинг олган тезланиши ҳар бир кучнинг алоҳида-алоҳида таъсирида нуқта оладиган тезланишларининг геометрик йиғиндисига тенг.

Моддий нуқтага $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots \mathbf{F}_n$ кучлар таъсир этаётган бўлсин. У ҳолда уларнинг тенг таъсир этувчиси

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k$$

га тенг. Бу кучларнинг ҳар бирининг таъсиридан нуқтанинг олган тезланишлари учун иккинчи қонунга кўра

$$F_1 = ma_1$$

$$F_2 = ma_2 \qquad (12.5)$$

$$\dots$$

$$F_n = ma_n$$

тенгламаларни ёзиш мумкин. (12.5) тенгламаларнинг ўнг ва чап томонларини қўшиб

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = m\sum_{k=1}^{n} a_k$$

ҳосил қиламиз. 4- қонунга кўра

$$a = \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Демак, (12.6)

$$ma = \sum_{k=1}^{n} F_k$$

ҳосил бўлади. (12.6) тенглама кучлар системаси таъсиридаги моддий нуқта учун динамиканинг асосий қонунини ифодалайди.

Ушбу қонунга мувофиқ ҳар бир куч моддий нуқтага, *бошқа кучларнинг* таъсирига қарамай, алоҳида тезланиш беради, шу сабабли бу қонун кучлар таъсирининг ўзаро боғлиқмаслик қонуни дейилади.

Тўртинчи қонунни кучларни қўшиш аксиомаси- кучларнинг параллелограмм қоидасидан келтириб чиқариш мумкин, шунинг учун тўртинчи қонунни баъзан мустақил қонун эмас ҳам дейилади.

Интерциал саноқ системаси. Динамиканинг асосий тушунчаларидан яна бири - инерциал саноқ системасига энди батафсил тўхталамиз. Моддий нуқтанинг, умуман ҳар қандай жисмнинг механик ҳаракати одатда уч ўлчовли Евклид фазода бирор қўзғалмас жисм билан бириктирилган саноқ системасига нисбатан кузатилади. Бунда икки нуқталар орасидаги масофанинг ўзгармаслиги, учбурчак ички бурчакларининг йиғиндисини 180^0 га тенглиги, биржинслик, изотроплик, яъни ҳамма йўналишда физик ва геометрик хоссаларнинг бир хиллиги, жумладан, (12.1) даги массанинг ҳаракат йўналишига боғлиқ эмаслиги каби фазовий хусусиятлар фазода ҳаракатланаётган моддий жисмга боғлиқ эмас деб ҳисобланади.

Табиат қонунларининг математик ифодасини ҳар қандай саноқ системасида ёзиш мумкин. Лекин инерциал саноқ системаларидагина табиат қонунлари ягона ва содда кўринишда математик ифодаланади. Инерциал саноқ система деб Евклид фазода тезланишсиз ҳаракатланаётган жисм билан бириктирилган саноқ системага айтилади.

Куч қўйилмаган ҳар қандай моддий нуқта инерциал саноқ системага нисбатан фақат тинч ҳолатда ёки тўғри чизиқли текис ҳаракатда бўлади. Ньютоннинг биринчи қонуни таърифининг мазмуни инерциал саноқ системасининг ҳақиқатдан ҳам мавжуд бўлишини тасдиқлайди. Умуман, Ньютон қонунлари фақат инерциал саноқ системаларидаги кузатишлар учун тўғри.

Ньютон ўзининг қонунларини ёзганда уч ўлчовли, Евклид, қўзғалмас, абсолют фазо ва абсолют вақт, яъни ҳар қандай кузатувчига нисбатан, у қаерда жойлашган бўлишига қарамасдан, бирдай ўтувчи вақтнинг мавжудлигини тахмин қилган.

Агар бирор S система инерциал саноқ системаси бўлса унга нисбатан тезланишсиз ҳаракатланаётган бошқа ҳар қандай S'система ҳам инерциал саноқ системаси дейилади. Моддий нуқтанинг бу S ва S' системаларга нисбатан радиус векторларини $\mathbf{r}$ ва $\mathbf{r}'$ билан белгиласак, улар ўзаро қуйидаги муносабат билан боғланган

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}'_0 + \mathbf{r}'.$$

Бу ерда $\mathbf{r}'_0 = (\mathbf{v}'_0)_0 t + (\mathbf{r}_0')_0$ —S' система координата боши O' нинг S системага *нисбатан радиус* вектори, $(\mathbf{v}'_0)_0$, $(\mathbf{r}'_0)_0$ — $t=0$ да O' нуқтанинг тезлиги ва радиус вектори. Юқоридаги муносабатни вақт бўйича биринчи ва иккинчи тартибли дифференциаллаб

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v}'_0)_0 + \mathbf{v}' \text{ ва } \mathbf{a} = \mathbf{a}'$$

ни ҳосил қиламиз. Демак, бу икки инерциал системаларга нисбатан нуқтанинг тезланиши ўзаро тенг.

Кузатишларга асосланиб, Галилей нисбийликнинг қуйидаги классик принципини таърифлаган: ҳар қандай инерциал саноқ системаларда механика қонунлари бир хилда бўлади. Масалан, иккинчи қонуннинг S системадаги ифодаси

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

S' системадаги

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F}'$$

ифодасига эквивалент. Классик механикада нуқта массаси ўзгармас $(m = m')$ ва юқорида кўрганимиздек $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$ эканлигини эътиборга олсак

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}'$$

ҳосил қиламиз, яъни нуқтага таъсир қилаётган кучлар ҳам бир инерциал системадан иккинчи инерциал системага кўчишда ўзгармас экан. Шундай қилиб, бир инерциал саноқ системани иккинчи инерциал саноқ система билан алмашишда Ньютон тенгламасида қатнашган ҳамма катталиклар ўзгармайди. Бошқача айтганда, Галилей алмаштиришларига нисбатан Ньютон тенгламалари инвариант.

Инерциал саноқ системасига мисол тариқасида Коперникнинг гелиомарказли саноқ системасини келтирамиз. Қуёш системаси доирасидаги жисмлар ҳаракатини текширишда координаталар боши Қуёшда олинган ва ўзаро перпендикуляр равишда ҳардоим чексиз узоқдаги қўзғалмас юлдузларга йўналтирилган координата ўқларининг гелиомарказли системаси, етарлича аниқликда, инерциал саноқ системаси бўлаолади. Чунки Қуёш системаси массалар маркази галактикада тахминан 3 10^5 м/с $\approx 10^6$ км/соат тезлик, 3 10^{-13} м/с^2 ≈ 4 10^{-9} км/соат^2 тезланиш билан ҳаракатланади. Жисм ҳаракатининг кичик тезликлар механикаси учун Ер билан боғланган системани ҳам инерциал деб ҳисоблаш мумкин (Ернинг Қуёш атрофидаги ҳаракат тезланиши эса тахминан 3,4 см/с^2).

XIII боб

МОДДИЙ НУҚТА ДИНАМИКАСИ

50-§. Моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари.

Динамиканинг фундаментал қонуни (12.1) дан фойдаланиб эркин ва боғланишдаги моддий нуқталар ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини келтириб чиқариш мумкин. Бу тенгламаларнинг кўриниши нуқта ҳаракатининг қандай усулларда берилишига боғлиқ бўлади. m массали бирор M эркин моддий нуқтанинг **F** (ёки $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_k$) куч таъсиридаги ҳаракатини текширамиз. Декарт координата ўқларининг Oxyz қўзғалмас саноқ системасига нисбатан нуқтанинг **а** тезланишини унинг радиус вектори **r** орқали қуйидагича аниқлаб

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2},$$

(12.1) га кўра, эркин моддий нуқта *ҳаракати* учун *дифференциал* тенгламанинг ушбу *векторли* ифодасини ёзамиз

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \qquad (13.1)$$

Асосий тенгламанинг (13.1) векторли кўринишидан Декарт координата ўқларига проекцияларидаги аналитик кўринишига ўтиш учун унинг ҳар икки томонини Декарт координата ўқларига проекциялаб, эркин моддий нуқтанинг Декарт координаталаридаги ҳаракат дифференциал тенгламаларини ҳосил қиламиз. Умумий ҳолда, Декарт координаталар системасида (13.1) тенглама

$$ma_x = F_x, \quad ma_y = F_y, \quad ma_z = F_z$$

бўлади. Бу ерда F_x, F_y, F_z кучнинг координата ўқлардаги проекциялари, $a_x = \ddot{x}$, $a_y = \ddot{y}$, $a_z = \ddot{z}$ тезланишнинг проекциялари. У ҳолда эркин моддий нуқтанинг Декарт координаталардаги ҳаракат дифференциал тенгамалари ушбу кўринишни олади:

$$m\ddot{x} = F_x,\quad m\ddot{y} = F_y,\quad m\ddot{z} = F_z\ . \qquad (13.2)$$

(13.2) тенгламалар нуқта координаталарига нисбатан иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар системасини ташкил қилади.

Хусусий ҳоллар. Агар эркин моддий нуқта ҳаракати текисликда содир бўлса, масалан, Оху координаталар текислигида, унинг ҳаракат дифференциал тенгламаси учун қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$m\ddot{x} = F_x,\quad m\ddot{y} = F_y \qquad (13.3)$$

Шунингдек, моддий нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракатида, масалан, Ох ўқи бўйлаб, нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракатининг битта дифференциал тенгламасига келамиз:

$$m\ddot{x} = F_x. \qquad (13.4)$$

Моддий нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламаларини табиий координата ўқларида ҳам ифодалаш мумкин. Бунинг учун нуқта траекториясида координата боши нуқтада жойлашган ва у билан биргаликда ҳаракатланувчи (қўзғалувчи) табиий координаталар системасини ўтказамиз (120-расм). (12.1) нинг ҳар икки томонини бу системанинг уринма, нормаль бинормаллардан ташкил топган координата ўқларига проекциялаймиз:

$$ma_\tau = F_\tau,\ ma_n = F_n,\ ma_b = F_b\ ;$$

бу ерда $a_\tau, a_n, a_b, F_\tau, F_n, F_b$ - мос равишда, тезланиш ва кучнинг уринма, бош нормаль ва бинормал ўқлардаги проекциялари

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = d^2s/dt^2;$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho};$$

$$a_b = 0;$$

(ρ-траекториянинг эгрилик радиуси) эканлигини эътиборга олсак, қуйидагини ёзаоламиз:

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau \ ; \ m\frac{v^2}{\rho} = F_n \ ; \ 0 = F_b \qquad (13.5)$$

(13.5) тенглама *эркин моддий нуқтанинг табиий координата ўқлардаги ҳаракат дифферинциал тенгламаларини* ифодалайди. Бу кўпинча эркин нуқта ҳаракати дифференциал тенгламаларининг Эйлер формуласи дейилади. (13.5) даги $F_b=0$ эканлиги моддий нуқтага таъсир этувчи куч эгрилик текислигида ётишини кўрсатади. (13.5) тенгламанинг иккинчисини тубандагича алмаштириш мумкин:

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi}; \quad \frac{v^2}{\rho} = v\frac{v}{\rho} = v\frac{ds}{dt}\frac{1}{ds/d\varphi} = v\frac{d\varphi}{dt};$$

бу ерда $d\varphi/dt$ - ҳаракатдаги нуқта траекториясига ўтказилган уринманинг айланиш бурчак тезлиги, $d\varphi$-нуқтанинг траекториясидаги бир-бирига жуда яқин икки ҳолатларидан ўтказилган уринмалар орасидаги (қўшнилик) бурчаги. У ҳолда, (13.5) дифференциал тенгламаларни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau; \quad mv\frac{d\varphi}{dt} = F_n; \quad 0 = F_b. \qquad (13.6)$$

Нуқта ҳаракат дифференциал тенгламасининг бу ифодаси снаряд ва ракета учишининг баъзи ҳолларини текширишда, айниқса нуқта траекторияси текисликда бўлганида қулай. У ҳолда, φ траекторияга ўтказилган уринма билан траектория текислигида ётувчи ихтиёрий ўқ орасидаги бурчак бўлади.

Шундай қилиб, биз эркин моддий нуқта ҳаракати дифференциал тенгламаларининг учта ифодасини қарадик: векторли, координата ва табиий.

Моддий нуқта ҳаракат дифференциал тенгламаларини ихтиёрий бошқа координаталар системасида ҳам ифодалаш мумкин. Бунинг учун тезланишнинг бу координата ўқларидаги ифодасини билиш зарур. Бинобарин, моддий нуқта ҳаракат дифференциал тенгламаларининг қутб координаталар системасидаги ифодаларини топамиз. Бунинг учун (12.1) асосий тенгламанинг қутб радиусдаги ва унга тик йўналган ўқдаги проекциясини оламиз:

$$ma_r = F_r, \quad ma_\varphi = F_\varphi .$$

Бу ерда $a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2; \; a_\varphi = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(r^2\varphi).$

Шунинг учун:

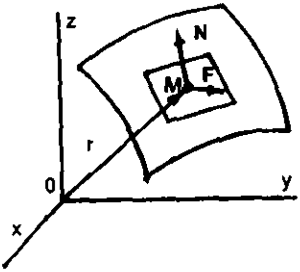
$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r \qquad \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(r^2\varphi) = F_\varphi . \tag{13.7}$$

Боғланишлардан бўшатиш ҳақидаги аксиома ва боғланиш реакция кучларига мувофиқ моддий нуқтага қўйилган барча кучлар қаторига реакция кучларини ҳам қўшиб, эркин нуқта каби боғланишдаги моддий нуқтанинг турли координата системасидаги ҳаракат дифференциал тенгламасини тузиш мумкин. Моддий нуқтанинг ҳаракатида боғланиш реакция кучлари, умумий ҳолда, нуқтага қўйилган боғланишларга ва таъсир этувчи кучларга боғлиқ бўлибгина қолмай, балки унинг ҳаракатининг характерига ҳам боғлиқ. Масалан, нуқтанинг ҳаводаги ёки бирор қаршилик кўрсатадиган муҳит ичидаги ҳаракати тезлигига боғлиқ бўлади. Бу ерда боғланиш реакция кучларининг муҳим томони шундаки, улар масалаларда аввалдан берилмайди, балки динамика масалаларини ечиш натижасида моддий нуқтанинг ҳаракати каби, берилган боғланишларга кўра аниқланади. Динамикада боғланишларни статикадан фарқли равишда динамик боғланишлар ёки динамик боғланиш реакциялари деб аташади.

Эркинмас нуқта дифференциал тенгламалари ҳақида юқорида айтилган умумий мулоҳазаларни аниқ мисолларда кўрайлик.

Нуқтанинг силлиқ сиртдаги ҳаракат дифференциал тенгламалари.

Моддий М нуқта қўзғалмас силлиқ сирт устида **F** куч таъсирида ҳаракатланаётган бўлсин. Ушбу П сирт моддий М нуқта учун боғланиш вазифасини ўтайди (121-расм).



121-расм.

Унинг М нуқтага таъсири, яъни реакция кучи **N** шу М нуқтада сиртга ўтказилган нормаль бўйлаб йўналган. Энди, агар, биз нуқтани боғланишдан озод қилиб, боғланишни реакцияси билан алмаштирсак, М нуқта **F** ва **N** кучлар қўйилган эркин нуқта ҳолатига ўтади. У учун Ньютоннинг иккинчи қонунини ёзамиз:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{N}.$$

Ушбу тенглама силлиқ сиртдан иборат *боғланишдаги нуқтанинг ҳакаркат дифференциал тенгламасининг векторли ифодаласи* дейилади. Бу вектор тенгламани Декарт координата ўқларига проекциялаб, нуқта ҳаракат дифференциал тенгламасининг аналитик ифодасини ҳосил қиламиз:

$$m\ddot{x} = F_x + N_x,$$
$$m\ddot{y} = F_y + N_y,$$
$$m\ddot{z} = F_z + N_z.$$

Бу ерда N_x, N_y, N_z - реакция кучининг координата ўқлардаги проекциялари.

Агар моддий М нуқта силлиқ бўлмаган сиртда ҳаракатланса, ҳаракат дифференциал тенгламасининг ўнг томонига, нормаль реакция кучидан ташқари, сиртга уринма йўналган ва Кулон қонунига кўра аниқланувчи ишқаланиш кучини ҳам қўшиш керак.

Агар моддий М нуқта **F** куч таъсирида қўзғалмас силлиқ эгри чизиқ бўйича ҳаракатланса (масалан, найча ичидаги шарчанинг ҳаракати), бу чизиқнинг нормаль реакция кучини **N** билан белгиласак, нуқтанинг табиий координата ўқлардаги ҳаракат дифференциал тенгламаларини қуйидагича ёзамиз:

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau,$$
$$m\frac{v^2}{\rho} = F_n + N_n,$$
$$0 = F_b + N_b.$$

Агар ушбу эгри чизиқ бир текисликда ётса бу текислик траекториянинг ёпишма текислиги бўлади ва дифференциал тенгламалар

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau,$$
$$m\frac{v^2}{\rho} = F_n + N,$$

ёки

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = F_\tau,$$

$$m\frac{v^2}{\rho} = F_n + N,$$

кўринишни олади. Охирги тенгламаларнинг биринчисида боғланиш реакция кучи қатнашмаганлиги сабабли бу тенглама нуқтанинг берилган эгри чизиқ бўйлаб ҳаракат қонунини аниқлашга имкон беради. Иккинчисидан эса боғланиш кучи N топилади.

51-§. Моддий нуқта динамикасининг икки асосий масаласи.

Моддий нуқтага таъсир этувчи куч билан унинг тезланиши орасидаги муносабат динамиканинг асосий тенгламаси (12.1) орқали ифодаланади. Моддий нуқтанинг у ёки бу координаталар системасидаги айни шу муносабатга асосланган ҳаракат дифференциал тенгламаларидан фойдаланиб, нуқта динамикасининг икки асосий масаласини ечиш мумкин.

Биринчи масала. Нуқтанинг массаси ва ҳаракат қонунига кўра, нуқтага таъсир этувчи кучни берилган вақт учун топиш. Ушбу масалани ечишда, яъни нуқтага таъсир этувчи кучни топишда, унинг ҳаракат қонунини қандай усулда берилишига қараб, ҳаракат дифференциал тенгламаларининг векторли, Декарт координата ўқларидаги ёки табиий ўқлардаги ва ҳоказо ифодаларнинг биридан фойдаланилади. Ҳар қайси усулда ҳам, масалани ечиш, нуқтанинг ҳаракат қонунидан унинг тезланишини топишга келтирилади. Бинобарин, m массали моддий нуқтанинг ҳаракат тенгламалари Декарт координаталарда берилган бўлсин:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t).$$

Кучнинг координата ўқларидаги проекциялари нуқта ҳаракат дифференциал тенгламалари (13.2) дан аниқланади, яъни

$$F_x = m\ddot{x} = m\ddot{f}_1(t);\ F_y = m\ddot{y} = m\ddot{f}_2(t);\ F_z = m\ddot{z} = m\ddot{f}_3(t). \qquad (13.8)$$

У ҳолда кучнинг модули

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = m\sqrt{\ddot{f}_1^2(t) + \ddot{f}_2^2(t) + \ddot{f}_3^2(t)} \qquad (13.9)$$

йўналиши эса йўналтирувчи косинусларга кўра

$$\cos(\mathbf{F}\,\hat{,}\,x) = \frac{F_x}{F};\ \cos(\mathbf{F}\,\hat{,}\,y) = \frac{F_y}{F};\ \cos(\mathbf{F}\,\hat{,}\,z) = \frac{F_z}{F}, \qquad (3.10)$$

формулалардан аниқланади.

26-*Масала.* Массаси m га тенг M моддий нуқта биргина куч таъсирида ушбу тенгламага мувофиқ ҳаракатлансин:

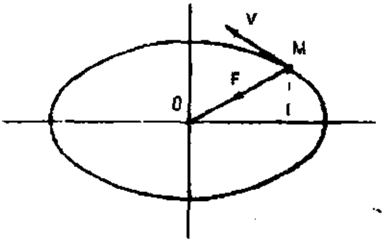
$$x = a\cos(\omega t);\ y = b\sin(\omega t);\ z = 0 \qquad (a)$$

Нуқтага таъсир этувчи куч аниқлансин.

Ечиш. M моддий нуқта (a) тенгламадан вақт t ни йўқатиб топиладиган траектория бўйлаб Oxy текисликда ҳаракатда бўлади:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Демак, M нуқта эллипс бўйлаб ҳаракатланади (122-расм). **F** кучнинг проекциялари (13.8) формуладан аниқланади:



122-расм

$$F_x = m\ddot{x} = -m\omega^2 x,$$
$$F_y = m\ddot{y} = -m\omega^2 y,$$
$$F_z = m\ddot{z} = 0.$$

(13.9) ва (13.10) формулаларга кўра **F** кучнинг (13.10) модулини ва йўналишини аниқлаймиз:

$$F = m\omega^2\sqrt{x^2 + y^2} = m\omega^2 r, \quad \cos(\mathbf{F}\,\hat{,}\,x) = -\frac{x}{r}, \quad \cos(\mathbf{F}\,\hat{,}\,y) = -\frac{y}{r}.$$

Бу ерда **r**=**OM** - нуқтанинг радиус вектори. Булардан кўрамизки, кучнинг модули нуқтанинг радиус векторига пропорционал бўлиб, унга қарама-қарши йўналган бўлади, яъни нуқта

$$\mathbf{F} = -m\omega^2\,\mathbf{r}$$

куч таъсирида ҳаракатланади. Жумладан, планеталар Қуёш атрофида эллипс бўйлаб ҳаракатланади, аммо Қуёш эллипс марказида бўлмай, балки унинг бирор фокусида жойлашади (Кеплернинг биринчи қонуни) ва тортишиш кучи планетанинг узоқлигига пропорционал бўлмай, унинг квадратига тескари пропорционал (Ньютоннинг бутун олам тортишиш қонуни) бўлишини аниқлаймиз. Бунда планетанинг ҳаракат тенгламаси (а) га қараганда бирмунча мураккабдир.

Нуқта динамикасининг биринчи массасидан кўрамизки, нуқта массаси ва ҳаракат қонуни берилганда унга таъсир этувчи кучнинг сон қиймати ва йўналиши ҳаракат қонунларини дифференциаллаш билан аниқланади.

Иккинчи масала. Нуқта массаси ва унга таъсир этувчи куч берилганда, нуқтанинг ҳаракат қонунини аниқлаш динамиканинг иккинчи *асосий массаласи* дейлади. Бу массаланинг ечилишини ҳам Декарт координаталар системасида қараймиз. Нуқтага таъсир этувчи куч, умумий ҳолда, бирданига бирқанча факторларга боғлиқ бўлиши мумкин. $\mathbf{F}=\mathbf{F}(t,\mathbf{r},\mathbf{v})$. У ҳолда, (13.2) қуйидаги кўринишни олади:

$$\begin{aligned}\ddot{x}&=\frac{1}{m}F_x(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})\\ \ddot{y}&=\frac{1}{m}F_y(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})\\ \ddot{z}&=\frac{1}{m}F_z(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})\end{aligned}\qquad(13.11)$$

Нуқтанинг Декарт координаталардаги ҳаракат тенгламаларини аниқлаш учун x, y, z ларга нисбатан учта иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар системаси (13.11) ни биргаликда интеграллаш зарур. Математиканинг бирор методи билан (13.11)ни ечиб дифференциал тенгламалар системасининг биринчи интегралига эришайлик:

$$\begin{aligned}\dot{x}&=\varphi_1(t,x,y,z,C_1,C_2,C_3)\\ \dot{y}&=\varphi_2(t,x,y,z,C_1,C_2,C_3)\\ \dot{z}&=\varphi_3(t,x,y,z,C_1,C_2,C_3)\end{aligned}$$

ёки

$$\varphi_k(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},C_1,C_2,C_3)=0;\qquad к=1,2,3.\qquad(13.12)$$

Бу ерда C_1, C_2, C_3 дифференциал тенгламалар системасини бир марта интеграллаш натижасида пайдо бўлган ихтиёрий ўзгармаслар.

(13.12) тенгламаларни ҳам интеграллаш имконига эга бўлсак, у ҳолда, координаталарнинг ҳосилаларидан бутунлай қутиламиз. Бу интеграллаш натижасида яна учта ихтиёрий ўзгармаслар: C_4, C_5 ва C_6 пайдо бўлади. Яна илгаригидек, бу ихтиёрий ўзгармаслар, уч муносабатга киради. Натижада, юқоридаги (13.11) дифференциал тенгламаларнинг интеграллари, умумий ҳолда, қуйидагича ёзилади:

$$f_k(t,x,y,z,\ C_1\ ,C_2\ ,C_3\ ,C_4\ ,C_5\ ,C_6) = 0, \qquad к = 1,2,3. \quad (13.13)$$

Бу муносабатларга координаталарнинг ҳосилалари кирмайди; фақат координаталар билан вақт ўзаро боғланган.

Топилган (13.13) ҳаракат тенгламаларни динамиканинг асосий масаласининг аниқ бир хусусий ечими деб бўлмайди, чунки тенгламада олтита ихтиёрий ўзгармас сон бор. Шундай қилиб, масаланинг ечими бир эмас, бир неча кўринишда топилган, яъни нуқта берилган куч таъсирида бирор аниқ йўналишда ҳаракатланмайди, унинг ҳаракати ихтиёрий ўзгармасларнинг ҳар хил қийматларига мос келувчи ҳаракатлар тўпламидан иборат бўлади. Муайян ҳаракатнинг қандай содир бўлиши бошланғич шартларга боғлиқ бўлади. Масалан, оғирлик кучи таъсирида ҳаракатланаётган нуқтанинг траекторияси бошланғич тезликнинг йўналишига қараб, тўғри ёки эгри чизиқли бўлиши мумкин. Моддий нуқтанинг бошланғич пайтдаги ҳолати: ўрни ва тезлигини ифодаловчи шартлар бошланғич шартлар дейилади.

Масалан, бошланғич шартлар қуйидагича бўлсин: $t = 0$ да

$$\begin{aligned} x &= x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0; \\ \dot{x} &= \dot{x}_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0, \quad \dot{z} = \dot{z}_0. \end{aligned} \qquad (13.14)$$

Бу шартни (13.12) ва (13.13) тенгламаларга қўйиб, $C_1,C_2,\ C_3\ ,C_4\ ,C_5\ ,C_6$ ихтиёрий ўзгармасларни аниқлаш учун олтита тенгламага келамиз. Бу тенгламаларни ечиб, олтита ихтиёрий ўзгармасларни топамиз, натижада, моддий нуқтанинг координаталари қуйидагича ифодаланади:

$$x = f(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0),$$
$$y = f(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \qquad (13.15)$$
$$z = f(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0).$$

Демак, динамиканинг иккинчи масаласини (ягона) хусусий ечимини аниқлаш учун моддий нуқтага таъсир этувчи кучнинг хусусиятларини билиш билан бирга, моддий нуқта ҳаракатининг бошланғич шартини ҳам билиш зарур. Бошланғич шарт берилмаса динамиканинг иккинчи масаласининг ечими нуқтанинг бирор муайян ҳаракатини тасвирламайди. Нуқтанинг (13.15) ҳаракат қонунидан кинематика методи асосида траекторияси, тезлиги ва тезланиши аниқланади. Баъзан, (13.11) дифференциал тенгламалар системасини умумий ҳолда интеграллаб бўлмаслиги мумкин. Бу ҳолда электрон ҳисоблаш машинасини қўллаш билан сонли интеграллаш методи асосида тақрибий ечилади. Нуқта динамикасининг иккинчи асосий масаласи фақат хусусий ҳоллар учунгина аниқ ечилади. Нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини унга таъсир этувчи куч:

1) миқдор ва йўналиш жиҳатидан ўзгармаганда (масалан, нуқта оғирлиги ёки ишқаланиш кучи);

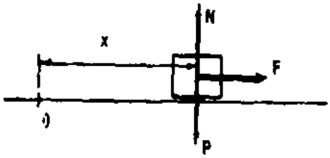
2) фақат вақтга боғлиқ бўлган (масалан, уйғотувчи куч, даврли куч ёки зарбали куч);

3) нуқтанинг фазодаги ҳолатига боғлиқ бўлган; (масалан, эластиклик кучи, Ньютоннинг бутун олам тортишиш кучи);

4) Нуқтанинг тезлигига боғлиқ бўлган (масалан, муҳитнинг қаршилик кучи) ҳолларда интеграллаш мумкин бўлади.

27-*массала.* Автомобиль ҳайдовчи йўлнинг тўғри чизиқли қисмида тинч ҳолатдан аста секин ҳаракатлана бошлаб, моторнинг тортиш кучини қаршилик кучидан ҳар секундига 1кН дан вақтга пропорционал равишда ошириб борди.

Автомобилнинг оғирлик кучи 70 кН га тенг. Автомобилнинг ҳаракат тенгламаси топилсин.



123-расм.

Ечиш. Автомобилнинг ҳаракати бўйича Ох ўқни йўналтирамиз, автомобилнинг қўзғолиш вазиятини Ох ўқининг ҳисоб боши учун қабул қиламиз. Автомобилнинг бошланғич ҳолатидан фарқли ихтиёрий вазиятини, масалан, х>0 ҳолатда унга ҳаракатлантирувчи **F**, оғирлик **P**, реакция **N** кучларни қўйиб ҳаракат дифференциал тенгламасини тузамиз:

$$m\ddot{x} = F_x, \quad \text{ёки} \quad \frac{P}{g}\cdot\ddot{x} = F_x$$

Бунда $F = 1t$, $g = 10$ м/с^2, $P = 70$ кН деб олиб, дифференциал тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\ddot{x} = \frac{t}{7} \tag{1}$$

ёки $\ddot{x} = \dfrac{dv}{dt}$ эканлигини эътиборга олиб,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{7}t$$

га келамиз. Бунда ўзгарувчиларни ажратиб ва интеграллаб, тезлик учун

$$v = \frac{1}{7}\frac{t^2}{2} + C_1 \tag{2}$$

ифодага эга бўламиз. (2) га масаланинг бошлангич шартларини ($t = 0$ да $\dot{x} = \dot{x}_0 = v = 0$) қўямиз ва C_1 ни топамиз:

$$C_1 = 0.$$

C_1 нинг топилган қийматини (2) тенгламага қўйиб, $v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$ эканлигини назарга олиб, ҳаракат тенгламасини аниқлаш учун қуйидаги дифференциал тенгламага эга бўламиз:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{14}t^2. \tag{3}$$

(3) тенгламада ўзгарувчиларни ажратиб ва уни интеграллаcак:

$$x = \frac{1}{14}\frac{t^3}{3} + C_2. \tag{4}$$

(4) муносабатга бошлангич шартларни ($t = 0$ да $x(0) = x_0 = 0$) қўйиб, интеграллаш доимийси C_2 ни топамиз: $C_2 = 0$.

Бинобарин, автомобилнинг изланаётган ҳаракат тенгламаси:

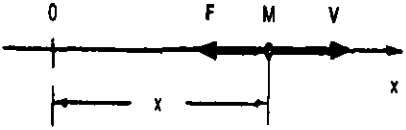
$$x = \frac{t^3}{42} \text{ м} \tag{5}$$

52-§. Моддий нуқтанинг эркин тебранма ҳаракати.

Динамиканинг иккинчи масаласига мисол тариқасида моддий нуқтанинг тўғри чизиқли тебранма ҳаракатини кўрамиз. Шу билан бирга, тебранма ҳаракатни ўрганиш муҳим аҳамиятга эга, чунки тебранма ҳаракат табиатда энг кўп тарқалган ҳаракатдир. Бинобарин, ҳаракат борлиқни мавжуд бўлиш усулидан бири бўлса, табиатнинг ягоналиги ва унинг қонунларининг *универсаллиги тебранма ва тўлқин* ҳодисаларда, умуман, даврий жараёнларда жуда яққол намаён бўлган. Атомларнинг тебраниши, иншоот, қурилма ва машиналарнинг вибрацияси, симсиз телеграф, узоқдаги юлдузларнинг нурланиши, ҳатто денгизларда сув кўтарилиши ва *қайтиши каби* турли - тумон ҳодисалар тебранма ҳаракат табиатига хос даврийликка эга ва ҳаммаси тебранма ҳаракат *назарияси билан тавсифланади*. Тебранма ҳаракат назариясига биноан турли - тумон даврий ҳодисалар соф гармоник тебранишлар тўпламининг бирор йиғиндисидан иборат бўлади.

Жумладан, моддий нуқтанинг тебранма ҳаракатини техниканинг турли соҳаларида учратамиз. Ҳар қандай иншоот ёки машиналарнинг таркибий қисмлари маълум даражада эластик бўлгани учун *тебраниш* қобилиятига эга. Бу тебраниш маълум чегарага етганда иншоотнинг мустаҳкамлиги учун хавф туғилади; шунингдек, машинанинг ишига зарар етади. Иншоот ва машина қисмларида албатта мавжуд бўладиган бундай зарарли тебранма ҳаракатни қандай йўл билан йўқотиш ёки йўл қўйилган чегарада сақлаш масаласи тебранма ҳаракат умумий назариясининг хусусий масаласидир. Гарчи, *машина ва иншоот* қисмларининг тебраниши моддий нуқталар системасига доир бўлса ҳам ҳодисанинг асосий сифатлари моддий нуқтанинг тебраниши орқали тасвирланади. Шунинг учун, моддий нуқтанинг тебранма ҳаракати устида етарли даражада тўхталиб ўтамиз. Моддий нуқтанинг ҳар бир тебранма ҳаракати унга қўйилган ташқи таъсир натижасида рўй беради ва *шу таъсирнинг* берилишига қараб унинг тебранма ҳаракати турлича бўлиши мумкин.

Дастлаб, моддий нуқтанинг *эркин тебранма* ҳаракатини ўрганишдан бошлаймиз. Фараз қилайлик, массаси m бўлган M моддий нуқта O мувозанат ҳолатдан x масофагача силжитиб қўйиб юборилганда, у ҳамма вақт мувозанат ҳолати O га қараб йўналган ва нуқтадан мувозанат ҳолаттача бўлган x масофага пропорционал $F = c|x|$ куч таъсирида тўғри чизиқли ҳаракатда бўлсин. (124-расм). Моддий нуқта ана шундай куч таъсирида ҳамма вақт ўзининг мувозанат



124-расм

ҳолатига интилиб, шу O нуқта атрофида тебранма ҳаракат қилади. Бундай куч таъсиридаги моддий нуқтанинг тебраниши *гармоник* ёки *эркин* тебранма ҳаракат дейилиб, **F** куч эса *қайтарувчи* (тикловчи) куч деб аталади. Бу ерда с эластик жисмнинг Н/м билан ўлчанадиган бикирлик коэффициенти бўлиб, у нуқтани бирлик масофага кўчириш учун зарур бўлган кучга тенг. Бундай кучларга мисол сифатида эластик кучни келтириш мумкин.

Эркин тебранма ҳаракатни текшириш учун моддий нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгласини интеграллаш усулини тадбиқ этамиз. M нуқтанинг тўғри чизиқли траекториясини x ўқи деб қабул қилиб, координатани O мувозанат ҳолатдан ҳисоблаймиз. Қайтарувчи куч ҳамма вақт мувозанат марказга йўналиб, M нуқтанинг ихтиёрий ҳолати учун, юқоридаги мулоҳазага кўра, қуйидагича ифодаланади:

$$F_x = -cx. \qquad (13.16)$$

У ҳолда, M нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламаси:

$$m\ddot{x} = -cx, \qquad (13.17)$$

кўринишда ёзилади. (13.17) нинг иккала томонини m га бўлиб,

$$k^2 = \frac{c}{m}, \qquad (13.18)$$

белгилаш киритсак, дифференциал тенглама қуйидагича кўринишга эга бўлади:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \qquad (13.19)$$

Бу тенглама эркин тебранма ҳаракатнинг *дифференциал* тенгламасини ифодалайди. У коэфиентлари ўзгармас бўлган бир жинсли иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламадир. Бундай тенгламани ечиш учун дифференциал тенгламалар назариясида характеристик тенглама тузиш талаб этилади. У

$$\lambda^2 + k^2 = 0.$$

бўлганлигидан, (13.19) тенгламанинг умумий ечими, дифференциал тенгламалар назариясидан маълумки, ушбу кўринишни олади:

$$x = A\cos(kt) + B\sin(kt). \qquad (13.20)$$

Бундаги А ва В лар нуқтанинг бошлангич ҳолатига боғлиқ бўлган ихтиёрий ўзгармаслар. Буларнинг ўрнига бошқа иккита ихтиёрий ўзгармаслар оламиз.

$$A = a\sin\alpha, \qquad B = a\cos\alpha. \qquad (13.21)$$

У ҳолда, (13.20) ечим қуйидаги қўринишни олади:

$$x = a\sin(kt + \alpha). \qquad (13.22)$$

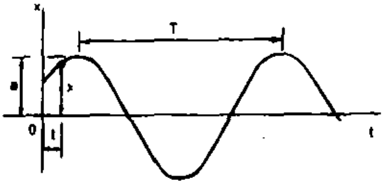
Бу (13.19) тенгламанинг бошқача кўринишдаги ечими бўлиб, ихтиёрий ўзгармаслар эса a ва α бўлади. Бундан ҳаракатни тўлиқ текшириш учун фойдаланиш қулай. Ҳаракати кузатилаётган нуқтанинг тезлиги

$$v_x = \dot{x} = ak\cos(kt+\alpha),$$

га тенг бўлади. (13.22) ечим *гармоник* тебранма ҳаракатни ифодалайди.

Демак, моддий нуқта қайтарувчи куч таъсирида *гармоник* тебранма ҳаракатда бўлади.

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ га тенг бўлганда унинг графиги 125-расмда тасвирланган. Бу ҳаракатни характерловчи ҳамма механик катталикларни оддий кинематик образ воситаси билан ойдинлаштириш мумкин. М нуқтанинг О тебраниш марказидан энг катта четланишига тенг бўлган а миқдорга тебраниш



125-расм.

амплитудаси дейилади. $\varphi = kt + \alpha$ катталикка *тебраниш фазаси* деб аталади. Тебраниш фазаси φ нуқта координатасидан фарқланиб, унинг берилган вақтдаги ҳолатини аниқлабгина қолмай, балки сўнги ҳолатининг йўналишини ҳам аниқлайди. α катталик *бошланғич фаза* деб аталади. k катталик тебранишнинг *доиравий такрорлиги*ни билдиради. Нуқтанинг тўла бир марта тебраниши учун кетган вақт T га тебраниш *даври* дейилади.

Энди, тебранма ҳаракатнинг даврини топамиз. Бунинг учун (13.22) формулани қуйидагича ёзамиз:

$$\sin[k(t+T)+\alpha] = \sin(kt+\alpha).$$

Келтирилган айниятдан:

$$kT = 2\pi,$$

яъни давр сарфлангунча тебраниш фазаси 2π га ўзгаради, бундан

$$T = \frac{2\pi}{k} \qquad (13.23)$$

келиб чиқади. k - *тебраниш частотаси* дейилади. (13.22) даги *ихтиёрий ўзгармасларни* ҳаракатнинг бошланғич шартидан топамиз. Бинобарин, $t = 0$ бўлганда $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0 = v_0$ бўлсин, у ҳолда, (13.20) тенгламадан: $A = x_0$, $B = \frac{v_0}{k}$ келиб чиқади. Буларни кўзда тутиб (13.21) тенгламадан a амплитуда билан α бошланғич фазани аниқлаш учун

$$a = \sqrt{x_0^2 + v_0^2 / k^2}, \qquad (13.24)$$
$$tg\alpha = \frac{kx_0}{v_0},$$

формулага эга бўламиз.

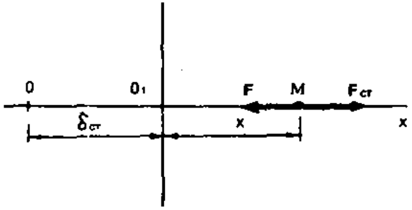
Келтирилган натижаларга биноан моддий нуқтанинг эркин тебранма ҳаракатининг қуйидаги хоссаларини таъкидлаб ўтамиз:

а) тебранишнинг амплитудаси ва бошланғич фазаси бошланғич шартларга бевосита боғлиқ бўлади;

б) тебраниш частотаси ва даври бошланғич шартларга боғлиқ бўлмай, улар берилган тебранувчи системанинг ўзгармас характеистикаси дейилади.

Агар масалада T ёки k катталикни ҳисоблашга тўғри келса, кузатилаётган нуқта тебранишини дифференциал тенгламаси тузилиб, уни (13.19) кўринишга келтирилади. Сўнгра эса уни интеграллаб ўтирмасдан даври T (ёки k) ни (13.23) формуладан топилади.

Моддий нуқтанинг эркин ҳаракатига ўзгармас кучнинг таъсир. Фараз қилайлик, M моддий нуқтага мувозанат ҳолати O га қараб йўналган қайтарувчи **F** кучдан ташқари, миқдор ва йўналиши ўзгармас бўлган $\mathbf{F}_{ст}$ куч ҳам таъсир этаётган бўлсин .



126-расм

F кучнинг миқдори аввалгидек нуқтадан мувозанат ҳолатгача бўлган масофага пропорционал, яъни $F = c \cdot OM$ бўлади. Бу ҳол учун M нуқтанинг мувозанат ҳолати 0_1 нуқта бўлиб, у 0 нуқтада $c\,\delta_{ст} = F_{ст}$ ёки

$$\delta_{ст} = \frac{F_{ст}}{c},$$

тенгликлардан аниқланувчи $00_1 = \delta_{ст}$ масофада бўлишини кўриш мумкин. Бу ерда $\delta_{ст}$ катталикка нуқтанинг *статик четланиши* дейилади.

Координата ўқининг боши учун нуқтанинг статик мувозанат ҳолати 0_1 нуқтани олиб, $\mathbf{F}_{ст}$ кучнинг таъсир йўналиши бўйлаб 0_1x ўқини йўналтирамиз. У ҳолда M моддий нуқтага қўйилган кучларнинг тенг таъсир этувчиси

$$F_x = -c(x + \delta_{ст}) + F_{ст} = -cx$$

бўлади. Бу ҳол учун ҳаракат дифференциал тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$m\ddot{x} = - cx,$$

ёки

$$\ddot{x} + k^2x = 0.$$

Келтириб чиқарилган тенглама (13.19) тенгламанинг ўзи бўлиб, бу ерда k (13.18) тенгликдан топилади. Бундан ушбу хулосага келамиз: ўзгармас куч қайтарувчи кучнинг таъсирида юзага келган тебранишнинг характерини ўзгартирмасдан, балки бу тебранишнинг мувозанат ҳолатини $F_{ст}$ йўналишида $\delta_{ст}$ га кўчиради. Тебраниш даврини $\delta_{ст}$ орқали ифодалаймиз:

$$k^2 = \frac{F_{ст}}{m\delta_{ст}},$$

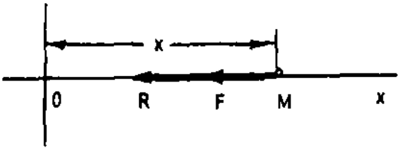
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{F_{ст}}\delta_{ст}}$$

Ўзгармас куч оғирлик кучига тенг бўлган хусусий ҳолда, чунончи, вертикал пружинага осилган юкнинг ҳаракатида $F_{ст} = P = mg$ бўлиб,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\delta_{ст}}{g}}.$$

53-§. Моддий нуқтанинг сўнувчи тебранма ҳаракати.

Моддий нуқта ҳаракати қаршилик кўрсатувчи муҳитда (ҳавода, суюқликда) содир бўлса, унинг ҳаракатига таъсир қилувчи қаршилик кучи пайдо бўлади. Бу қаршилик кучи нуқтанинг тезлигига пропорционал бўлади. Биз қаршилик кучини тезликнинг биринчи даражасига пропорционал, яъни $\mathbf{R} = -\mu\mathbf{v}$ деб олиб, (бунда μ-пропорционаллик ўзгармас коэффициент) моддий нуқтанинг эркин тебранма ҳаракатига унинг кўрсатадиган таъсирини текширамиз. У ҳолда моддий нуқта қўзалмас 0 марказга тортувчи $F_x = -cx$ қайтарувчи куч билан тезликнинг биринчи даражасига пропорционал бўлган $R_x = -\mu v_x = -\mu\dot{x}$ муҳит қаршилик кучи таъсирида ҳаракат қилади.



127-расм.

М моддий нуқтанинг дифференциал тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x} \qquad (13.25)$$

Тенгламанинг иккала томонини m га бўлиб:

$$\frac{c}{m} = k^2, \quad \frac{\mu}{m} = 2n \qquad (13.26)$$

деб олсак (бунда k ва n миқдорларни бир хил $\frac{1}{c}$ ўлчамга эга эканлигини осонлик билан текшириш мумкин; бу уларни бир-бирлари билан таққослашга имкон беради), ҳаракат дифференциал тенгламаси қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0 \qquad (13.27)$$

Тегишли характеристик тенгламанинг илдизлари комплекс бўлиб, моддий нуқта ҳаракат дифференциал тенгламасининг умумий ечими (13.19) тенгламанинг умумий ечимидан e^{-nt} кўпайтувчи билангина фарқ қилади, яъни қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$x = e^{-nt}\ (A\cos(k_1t) + B\sin(k_1t), \qquad (13.28)$$

ёки (13.22) тенглик сингари,

$$x = ae^{-nt}\sin(k_1t + \beta), \qquad (13.29)$$

деб ёзиш мумкин. Бу ерда

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}. \qquad (13.30)$$

Дастлаб, $k>n$, яъни қаршилик кучи қайтарувчи кучдан кичик бўлган ҳолни кўриб чиқамиз. (13.29) ечимдаги a ва β ихтёрий ўзгармасларни нуқта ҳаракатининг бошлангич шартларидан топилади. Нуқтанинг (13.29) қонунга *муфовиқ содир бўладиган* тебранишини *сўнувчи табраниш* деб аталади, чунки бунда тебраниш амплитудаси e^{-nt} га кўпайгани туфайли, у вақтга қараб камайиб, нолга яқинлашиб боради, яъни у оз фурсат ўтмай *кичрайгани* учун, тебраниш тезда сўнади. Бу ҳол учун тебраниш частотаси (13.30) тенглик билан ифодаланган k_1 механик катталик бўлади. Шунга кўра, тебраниш даври қуйидагича ёзилади:

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}. \tag{13.31}$$

Энди, эркин тебраниш даври билан сўнувчи тебраниш даврини солиштирамиз:.

$$T = \frac{2\pi}{k} \text{ ва } T_1 = \frac{2\pi}{k_1}.$$

Бунда $k_1<k$ бўлганидан $T_1>T$ келиб чиқади. Бундан шундай хулосага *келамиз*: муҳит қаршилиги тебраниш даврини эркин тебраниш даврига қараганда бирмунча оширади. Аммо, қаршилик жуда ҳам кичик бўлганида ($n<<k$), $k_1 \approx k$ дейилса ҳам унчалик ҳатоликка йўл қўйилмаган бўлади ва $T_1 \approx T$ деб *оламиз*. Шунинг учун муҳит қаршилигининг тебраниш даврига таъсирини сезилмас даражада кичик дейиш мумкин.

Энди, сўнувчи тебраниш амплитудасининг вақт ўтиши билан қандай *ўзгариши* устида тўхталамиз. Сўнувчи тебраниш амплитудаси

$$A = a\,e^{-nt} \tag{13.32}$$

га тенг.

Вақт ўтиши билан сўнувчи тебраниш амплитудасининг ўзгариш қийматини ифодалайдиган жадвални тузамиз:

t	0	$\frac{T_1}{2}$	$2\frac{T_1}{2}$	. . .	$m\frac{T_1}{2}$, $(m>0)$
A	a	$ae^{-\frac{nT_1}{2}}$	$ae^{-2\frac{nT_1}{2}}$	. . .	$ae^{-m\frac{nT_1}{2}}$

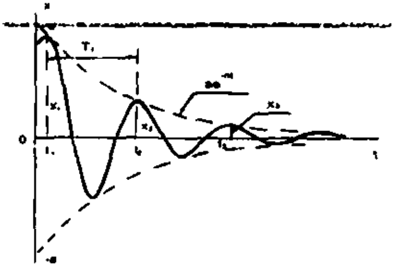
Бу жадвалдан кўрамизки, сўнувчи тебраниш амплитудаси ҳар ярим даврда камаючи геометрик прогрессия қонуни бўйича ўзгариб боради. Бу прогрессиянинг махражи:

$$q = \frac{A_m}{A_{m-1}} = \frac{e^{-m\frac{nT_1}{2}}}{e^{-(m-1)\frac{nT_1}{2}}} = e^{-n\frac{T_1}{2}}, \qquad (13.33)$$

га сўниш *декременти* деб аталади. Бундан кўрамизки, ҳар ярим даврда, қаршилик туфайли, тебранма ҳаракат амплитудаси q қадар камайиб боради. Сўниш декрементининг натурал логарифмини сўнувчи тебранишнинг *логарифмик декременти* дейилади, яъни:

$$\ln(q) = -\frac{nT_1}{2} \qquad (13.34)$$

Энди, (13.29) ифодага асосланиб, сўнувчи тебраниш графигини қурамиз. Сўнувчи тебранма ҳаракат графиги тенгламалари $x = \pm ae^{-nt}$ бўлган иккита



128-расм

эгри чизиқ орасида бўлиб, бу эгри чизиқларга уриниб ўтади, чунки $\sin(k_1 t+\beta)$ нинг миқдори бирдан катта бўлаолмайди (128-расмга қаранг).

Энди $n>k$ (катта қаршиликли) ҳолни текширамиз. Бу ҳолда қаршилик кучи қайтарувчи кучга қараганда етарли даражада катта бўлади. Бу ҳол учун характеристик тенгламанинг илдизлари қуйидагича ёзилади:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2},$$

бундан

$$n^2 - k^2 = r^2$$

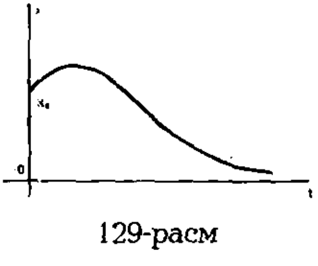
десак,

$$\lambda_{1,2} = -n \pm r$$

келиб чиқади. $r<n$ бўлганидан характеристик тенгламанинг иккала илдизлари ҳақиқий ва манфийдир. У ҳолда, ҳаракат дифференциал тенгламасининг ечими:

$$x = C_1 e^{-(n+r)t} + C_2 e^{-(n-r)t}, \qquad (13.35)$$

кўринишда ёзилади. e^{-bt} функция, бу ерда $b>0$, вақт ўтиши билан монотон камайиб нолга яқинлашиб борувчи бўлганлигидан, нуқта ҳаракати тебранма ҳаракат бўлмайди, нуқта қайтарувчи куч таъсирида мувозанат ҳолатига асимптотик равишда яқинлашиб боради, $t=0$ бўлганда $x=x_0$, $v_0>0$ бўлган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ҳол учун ҳаракат графиги 129-расмда тасвирланган.



129-расм

Қаршилик катта бўлса, эркин тебранма ҳаракатнинг монотон ҳаракатга айланиб сўнишини расмдан кўрамиз. Демак, катта қаршилик эркин тебранишни тез сўндиради.

Энди $n = k$ ҳолни текшириб ўтамиз. Бу ҳол учун характеристик тенгламанинг илдизлари ҳақиқий, манфий ва бир-бирларига тенг бўлади:

$$\lambda_{1,2} = -n.$$

ҳаракат дифференциал тенгламанинг умумий ечими:

$$x = e^{-nt}(C_1 t + C_2), \tag{13.36}$$

кўринишда ёзилади. Бу ерда C_1 ва C_2 ихтиёрий ўзгармаслар (13.36) тенглама ва унинг ҳосилалари орқали $t = 0$ бўлганда $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0 = v_0$ бошланғич шартлардан топилади.

Моддий нуқта ҳаракатининг бу ҳоли ҳам тебранма ҳаракат бўлмайди. Кейинги ҳар икки ҳолда нуқта *апериодик* ҳаракат қилади. Бу ҳаракатнинг характери шундайки, t вақт ўтиши билан $OM = x$ асимптотик равишда нолга яқинлашади.

Шундай қилиб, тебранувчи системанинг ва тебраниш юз бераётган муҳит характеристикаларининг бир-бирига нисбатан катта ёки кичиклиги туфайли сўнувчи тебранма ҳаракат турлича ўтар экан. Бунда ҳаракат тенгламалари ҳам тубдан ўзгаради. Жумладан, (13.28) ечимдаги доимийларни бошланғич шартлардан аниқлаймиз.

Айтайлик, $t = 0$ да $x(0) = x_0$ ва $\dot{x}(0) = v_0$ бўлсин. У ҳолда, $x_0 = A$. (13.28) дан вақт бўйича ҳосила олиб:

$$\dot{x} = -ne^{-nt} \cdot [(A\cos(k_1 t) + B\sin(k_1 t)] + e^{-nt}[(-Ak_1\sin(k_1 t) +$$
$$+ Bk_1\cos(k_1 t))]$$

t вақтни нолга тенглаймиз. У ҳолда, $v_0 = -nx_0 + Bk_1$. Демак,

$$A = x_0, \qquad B = \frac{v_0 + nx_0}{k_1},$$

$$x = e^{-nt}\left[x_0\cos(k_1 t) + \frac{v_0 + nx_0}{k_1}\sin(k_1 t)\right].$$

Бу ечим масаланинг бошлангич шартларига бўйсунади. Агар бу ечимда $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = 0$ десак, яъни $k = n$ бўлса, иккинчи ҳад 0/0 ноаниқликка айланади. Иккинчи ҳаддаги ноаниқлик туғдирувчи катталикларнинг нисбатини уларнинг n бўйича ҳосилаларининг нисбати билан алмаштирамиз, яъни

$$\frac{\sin k_1 t}{k_1} = \frac{\frac{d\sin k_1 t}{dn}}{\frac{dk_1}{dn}} = \frac{\cos k_1 t \cdot t \cdot \frac{dk_1}{dn}}{\frac{dk_1}{dn}} = t \cdot \cos k_1 t .$$

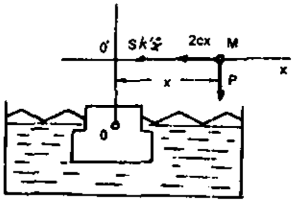
Бу алмаштиришдан сўнг $k = n$ ни қўйиб, юқоридаги ечимни қуйидагича ёзамиз:

$$x = e^{-nt}\left[x_0 + (v_0 + nx_0)t\right]$$

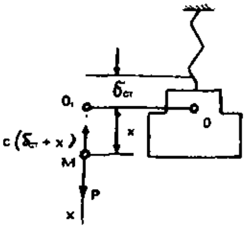
$k = n$ даги ҳаракатнинг ушбу тенгламаси (13.28) ечимга мутлақо ўхшамайди. Бу монотон ўзгарувчи функция. Худди шундай хулосага (13.28) да $n > k$ ҳолда ҳам келамиз. Агар $n > k$ бўлса, $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = ir$ соф мавҳум катталикка айланади. Биз биламизки, агар $\sin k_1 t$ ва $\cos k_1 t$ функцияларнинг аргументлари мавҳум бўлса, улар экспоненциал функцияларга ўтади ва демак, бу ҳолда нуқтанинг ҳаракати ўзининг тебранма ҳаракат характерини ўзгартириб монотон ҳаракатга айланади.

28-*масала* Суюқликнинг ёпишқоқлигини аниқлаш учун қуйидаги тажриба ўтказилади: *аввал, бикирлик коэффициенти* с бўлган иккита бир хил пружинага юпқа А пластинкани махкамлаб, ёпишқоқлигини аниқлаш керак бўлган суюқлик ичида тўғри чизиқли тебранма ҳаракатга келтирилади. Бунда пластинканинг суюқликдаги тебраниш даври T_2 топилади.

Сўнгра, бу юпқа пластинка бикрлик коэффициенти с бўлган пружинага осилиб, ҳавода тебранма ҳаракатга келтирилади ва ҳаводаги тебраниш даври T_1 топилади (131-расм). Пластинка билан суюқлик орасидаги ишқаланиш кучини Sk'v формула билан ифодалаш мумкин, бу ерда S пластинканинг юзаси, v унинг тезлиги, k' ёпишқоқлик коэффициенти. Пластинка билан ҳаво орасидаги ишқаланишни ҳисобга олмай, тажрибада топилган T_1 ва T_2 миқдорлардан фойдаланиб, k' коэффициент аниқлансин. Пластинканинг оғирлиги P.



130-расм



131-расм

Ечиш. Пластинканинг икки ҳол: ҳаводаги ва суюқлик ичидаги тебранишларининг ҳаракат дифференциал тенгламаларини тузамиз.

Биринчи ҳолда дифференциал тенглама

$$m\ddot{x} = P - c(\delta_{ст} + x) = P - c\delta_{ст} - cx,$$

ёки

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0 \qquad (1)$$

кўринишда ёзилади. Бу ерда $\delta_{ст}$ пружинанинг статик мувозанат ҳолатидаги чўзилиши.

Иккинчи ҳолда, пластинкани тўғри чизиқли тебранма ҳаракатда десак,

$$m\ddot{x} = -2cx - Sk'\dot{x},$$

ёки

$$\ddot{x} + \frac{Sk'}{m}\dot{x} + \frac{2c}{m}x = 0. \qquad (2)$$

келиб чиқади.

(1) ва (2) тенгламаларни (13.19) ва (13.27) тенгламалар билан солиштириб, пластинканинг ҳаводаги тебраниши эркин, суюқликдагиси эса, сўнувчи тебраниш эканлигини кўрамиз. Булардан пластинканинг ҳаводаги ва суюқликдаги тебраниши учун, тебраниш даврлари (13.23) ва (13.31) формулаларга биноан аниқланади:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi\sqrt{\frac{P}{gc}}, \qquad (3)$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2cg}{P} - \left(\frac{Sk'g}{2P}\right)^2}} \qquad (4)$$

бу ерда

$$k = \sqrt{\frac{2c}{m}} = \sqrt{\frac{2cg}{P}}; \qquad n = \frac{Sk'}{2m} = \frac{Sk'g}{2P}.$$

k' коэффициентни (3) ва (4) тенгламалардан топамиз. Дастлаб (3) тенгламани c га нисбатан ечиб:

$$c = \frac{4\pi^2 P}{T^2 g}.$$

c нинг қийматини (4) тенгламага қўйиб ва уни k' га нисбатан ечсак,

$$k' = \frac{4\pi P}{gST_1T_2}\sqrt{2T_2^2 - T_1^2},$$

келиб чиқади.

54-§. Моддий нуқтанинг мажбурий тебранма ҳаракати.

Бизга маълумки, қайтарувчи куч таъсиридаги моддий нуқта мувозанат ҳолатидан қўзғатилиб ўз ҳолича ташлаб қўйилса, у шу мувозанат ҳолат яқинида эркин гармоник тебранма ҳаракатда бўлар эди. Агар, бу кучдан ташқари моддий нуқтанинг мувозанатини бузувчи яна бирор даврий куч таъсир қилса ва бу куч ўзининг даврий таъсирини тўхтатмаса, моддий нуқта мажбурий тебранма ҳаракатда бўлади. Бу ҳаракатнинг икки ҳоли билан танишамиз:

а) *Қаршилик бўлмаганда моддий нуқтанинг мажбурий тебрама ҳаракати.*

Икки куч таъсирида тўғри чизиқли ҳаракат қилаётган М нуқтанинг ҳаракатини текширамиз (132-расм). Бу кучлардан бири қайтарувчи **F** куч

132-расм

бўлиб, у, ҳамма вақт М нуқтани О мувозанат ҳолатига қайтаришга интилади. Иккинчиси $\mathbf{F}_м$ куч эса моддий нуқтанинг тўғри чизиқли траекторияси бўйлаб йўналиб, ўзининг миқдори ва йўналишини даврий равишда ўзгартириб ва М нуқтани ҳамма вақт бир томондан иккинчи томонга кўчириб турадиган куч бўлсин. Моддий нуқтанинг ҳамма вақт мувозанатини бузувчи бу $\mathbf{F}_м$ куч "уйғотувчи" (мажбурий) куч дейилади.

Қайтарувчи **F** кучнинг миқдори ва йўналиши моддий нуқтанинг ҳолатига боғлиқдир. Уйғотувчи $\mathbf{F}_м$ куч эса вақтнинг ўтиши билан ўз йўналишини ва миқдорини маълум қонун бўйича ўзгартириб туради. Биз бу ерда энг оддий ҳолни текшириш билан чегараланиб, уйғотувчи $\mathbf{F}_м$ кучни гармоник қонун билан ўзгарувчан қилиб оламиз, яъни:

$$\mathbf{F}_м = H\sin(pt), \qquad (13.37)$$

бўлсин. Бунда H - уйғотувчи кучнинг энг катта қиймати (куч амплитудаси), p - уйғотувчи кучнинг доиравий такрорлик сони - частотаси, pt-уйғотувчи куч фазаси. H – Ньютонда, p – $\frac{1}{c}$ да ўлчанади. Уйғотувчи кучнинг даври

$$\tau = \frac{2}{p}\pi$$

маълум миқдордир.

Қаршилик кучи бўлмаганда моддий нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламасини тузамиз:

$$m\ddot{x} = - cx + H \sin(pt).$$

Бу тенгламанинг ҳар икки томонини m га бўлиб,

$$\frac{c}{m} = k^2, \quad \frac{H}{m} = h \tag{13.38}$$

деб олсак, у:

$$\ddot{x} + k^2x = h \sin(pt) \tag{13.39}$$

кўринишда ёзилади. Бунга моддий нуқтанинг қаршилик бўлмаганда қайтарувчи ва уйғотувчи кучлар таъсиридаги тебранма ҳаракатнинг дифференциал тенгламаси дейилади. Унинг умумий ечимини топамиз. Тенглама чизиқли лекин биржинслимас бўлганидан, унинг ечими икки қисмдан иборат бўлади: биринчиси ушбу тенгламага тегишли биржинсли тенгламанинг умумий ечими, иккинчиси - шу тенгламанинг қандайдир хусусий ечими. Уларни x_1 ва x_2, умумий ечимни эса, x десак,

$$x = x_1 + x_2,$$

келиб чиқади. (13.39) га *тегишли бир жинсли* тенгламанинг умумий ечими:

$$x_1 = a \cdot \sin(kt + \alpha) \tag{13.22}$$

кўринишда ифодаланиши бизга маълум. Энди, (13.39) тенгламанинг бирор хусусий ечимини топамиз. $k \neq p$ бўлган ҳол учун бу хусусий ечимни:

$$x_2 = B \sin(pt) + D \cos(pt),$$

кўринишда оламиз. B ва D ихтиёрий ўзгармасларни (13.39) тенгламанинг қаноатлантирилиш шартидан аниқлаймиз. Ушбу хусусий ечимни (13.39) га қўйганимизда, у айниятга айланади, яъни:

$$-Bp^2 \sin(pt) - Dp^2 \cos(pt) + k^2 B\sin(pt) + k^2 D\cos(pt) = h\sin(pt),$$

ёки

$$B(k^2 - p^2)\sin(pt) + (k^2 - p^2)D\cos(pt) = h\sin(pt),$$

келиб чиқади. Бу айниятдан B ва D ўзгармасларнинг қийматини топамиз:

$$B = \frac{h}{k^2 - p^2}, \quad D = 0.$$

Натижада, хусусий ечим қуйидагича ифодаланади:

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt) \qquad (13.40)$$

Демак, (13.39) тенгламанинг умумий ечими:

$$x = x_1 + x_2 = a \sin(kt + \alpha) + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt), \qquad (13.41)$$

кўринишда ёзилади.

Бу тенгламадан, M нуқта мураккаб тебранма ҳаракат қилади деган фикр туғилади. Мураккаб тебранишнинг биринчи қисми моддий нуқтанинг эркин тебраниши бўлиб, амплитудаси a (бошланғич шартларга боғлиқ бўлади) ва доиравий такрорлиги k, иккинчи қисми нуқтанинг мажбурий тебраниши бўлиб, амплитудаси A (бошланғич шартларга боғлиқ бўлмайди) ва доиравий такрорлиги p бўлади. Амалий томондан у ёки бу қаршиликнинг муқаррарлиги туфайли нуқтанинг эркин тебраниши тез фурсатда сўниб кетиши мумкин. Шунинг учун ҳаракати кузатилаётган нуқтанинг (13.40) тенгламага мувофиқ содир бўлаётган мажбурий тебранишинигина текшириш аҳамиятлидир. Бу тебранишнинг частотаси уйғотувчи куч частотаси (p) га тенг.

Шунга кўра, уларнинг даврлари ҳам бир хилда бўлади. Қаршилик бўлмаганда нуқтанинг мажбурий тебраниш амплитудаси:

$$A = \frac{h}{k^2 - p^2}, \qquad (13.42)$$

бўлади. $p<k$ бўлса, амплитуда мусбат бўлиб, (13.37) ва (13.40) тенгламаларни солиштириб, мажбурий тебраниш фазаси уйғотувчи куч фазаси билан ҳамма вақт бир хилда бўлишини (яъни ҳар иккаласи pt га тенг) сезиш мумкин.

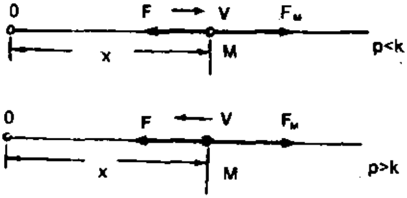
$p>k$ бўлса, (13.40) тенгламани қуйидагича ёзишга тўғри келади:

$$x_2 = -\frac{h}{p^2 - k^2}\sin(pt) = \frac{h}{p^2 - k^2}\sin(pt - \pi) \qquad (13.43)$$

Амплитуда яна мусбат бўлиб, у $\frac{h}{p^2 - k^2}$ га тенг.

Бироқ, энди мажбурий тебраниш фазаси (pt-π) га тенг бўлади.

Демак, $p>k$ бўлганда, мажбурий тебраниш фазаси уйғотувчи куч фазасидан π катталикка фарқ қилар экан. Бинобарин, $p<k$ бўлса, уйғотувчи $F_м$ куч билан нуқтанинг мажбурий тебраниши бир йўналишда, $p>k$ бўлганда қарама - қарши йўналишда бўлади ($F_м$ куч максимал қийматга эришиб, ўнга йўналади, тебранувчи нуқта эса,



133-расм

чапга максимал четланади ва ҳоказо (133-расм).

Бу мулоҳазаларга эътибор қилинса, амплитуда қуйидагича ифодаланади:

$$p<k \text{ бўлганда, } \quad A=\frac{h}{k^2-p^2}, \qquad (13.44)$$

$$p>k \text{ бўлганда, } \quad A=\frac{h}{\left|k^2-p^2\right|}$$

Яъни, мажбурий тебраниш амплитудаси $F_м$ уйғотувчи куч амплитудасигагина боғлиқ бўлмай, унинг p частотасига ҳам боғлиқ бўлади. Энди, уйғотувчи куч частотаси p нинг ўзгариши билан A амплитуданинг ўзгаришини текширамиз. Умуман эркин тебранма ҳаракат билан мажбурий тебранма ҳаракатнинг частоталари (k ва p) ҳар хил бўлади, чунки улар бир-бирига боғлиқсиз равишда ўзгаради. Бироқ, уйғотувчи куч частотаси 0 билан ∞ чегаралар орасида ўзгарганидан $(0<p<\infty)$, унинг бирор қиймати эркин тебраниш такрорлигининг k қийматига тенг бўлиб қолиши мумкин. Бу ҳолда мажбурий тебраниш амплитудаси чексиз катта қийматга эга бўлади, яъни $p=k$ бўлганда, $A=\infty$ бўлади. Тебранувчи система (иншоот ёки машина қисмлари) қандай мустаҳкам бўлмасин, бу ҳолга бардош бераолмай, ишдан чиқади. Мажбурий тебраниш частотаси билан эркин тебраниш частотаси ўзаро тенг бўлган ҳол *резонанс* ҳодисаси дейилади. Резонанс ҳодисаси бўлиши олдида мажбурий тебранма ҳаракат тенгламасининг қандай кўринишда бўлишини кўриб ўтамиз. $p=k$ бўлганда

$$x_2 = B\sin(pt) + D\cos(pt)$$

ифода (13.39) тенгламанинг хусусий ечими бўлаолмайди, шунинг учун бу хусусий ечимни:

$$x_2 = B\ t\ \cos(pt) + D\ t\ \sin(pt)$$

кўринишда оламиз. Масалага худди аввалгидек ёндошиб B ва D ўзгармасларни топамиз:

$$B = -\frac{h}{2p}, \qquad D=0.$$

У ҳолда хусусий ечим:

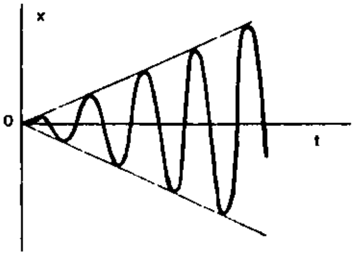
$$x_2 = -\frac{h}{2p} t\cos(pt),$$

ёки

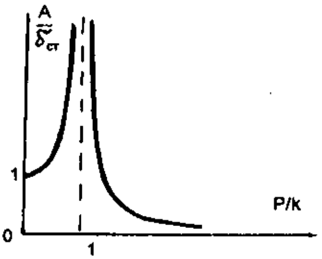
$$x_2 = \frac{ht}{2p}\sin(pt - \frac{\pi}{2}) \qquad (13.45)$$

кўринишда ёзилади. Демак, резонанс ҳодисасида мажбурий тебранма ҳаракатнинг амплитудаси вақтга пропорционал равишда ўсар экан.

Энди, бу тебранишнинг графигини қурамиз. Унинг графиги, тенгламаси $x = \pm\frac{ht}{2p}$ бўлган икки тўғри чизиқ орасидаги синусоида бўлади. Бундан кўрамизки, тебранувчи нуқта ҳаракатига ҳеч қандай қаршиликнинг таъсири бўлмаса, резонанс ҳодисасида унинг мажбурий тебранишининг



134-расм



135-расм

амплитудаси тез ўсиб кетади. Резонанс ҳодисасида фазалар силжиши $\frac{\pi}{2}$ га тенг бўлади.

Энди, амплитуда билан мажбурий тебраниш частотаси орасидаги боғланишни тасвирловчи графикни қурамиз. Бунинг учун амплитуда (динамик силжиш) ни ифодалайдиган формулани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$A = \frac{h}{\left|k^2 - p^2\right|} = \frac{h}{k^2}\frac{1}{\left|1-(p/k)^2\right|}.$$

Уйғотувчи кучнинг максимал қиймати бўлган **H** қайтарувчи куч билан бирор миқдорда мувозанатлашса, $F_{ст} = c \cdot \delta_{ст} = H$ бўлади. Нуқтанинг бу ҳолатини аниқловчи координатани $\delta_{ст}$ билан белгиласак, $F_{ст} = c \cdot \delta_{ст} = H$ бўлади.

У ҳолда, моддий нуқтанинг H куч таъсирида статик силжиши:

$$\delta_{ст} = \frac{H}{c}$$

Мажбурий тебраниш амплитудаси A нинг статик силжиш $\delta_{ст}$ га нисбати λ, яъни

$$\lambda = \frac{A}{\delta_{ст}} \qquad (13.46)$$

динамик коэффициент деб аталади. Юқоридан маълумки:

$$\frac{c}{m} = k^2, \quad \frac{H}{m} = h$$

эди. Бундан:

$$\delta_{ст} = \frac{H}{c} = \frac{h}{k^2}$$

келиб чиқади. У ҳолда юқоридаги формулани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{A}{\delta_{ст}} = \frac{1}{\left|1 - (\frac{p}{k})^2\right|}. \qquad (13.47)$$

135-расмда бу муносабатнинг графиги тасвирланган. $\frac{p}{k} = 0$ бўлганда, $\frac{A}{\delta_{ст}} = 1$ бўлади. $\frac{p}{k} = 1$ бўлганда резонанс ҳодисаси бошланиб, $\frac{A}{\delta_{ст}} = \infty$ га айланади.

Ҳақиқатан ҳам, муҳит қаршилигининг мавжуд бўлиши натижасида резонанс вақтида мажбурий тебраниш амплитудаси бу қадар чексиз катталикка *ўсмайди: p частота* эркин тебранишнинг k частотасига яқинлашиши билан мажбурий тебраниш етарли даражада катта амплитуда билан юз беради. Бу амплитуданинг катталиги қаршилик қонунига боғлиқдир.

б)*Қаршилик бўлганда моддий нуқтанинг мажбурий тебранма ҳаракати.*

Муҳит қаршилиги эркин тебранма ҳаракатни сўндиришини кўриб ўтдик. Энди, муҳит қаршилигининг мажбурий тебранишга кўрсатадиган таъсирини текширамиз. Бу ҳолда моддий M нуқта қайтарувчи куч **F**, тезликнинг биринчи даражасига пропорционал бўлган муҳитнинг қаршилик кучи **R** ва уйғотувчи куч **$F_м$** таъсирида ҳаракат қилади. Унинг ҳаракат дифференциал тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = h\sin(pt), \qquad (13.48)$$

бунда

$$2n = \frac{\mu}{m}, \quad k^2 = \frac{c}{m}, \quad h = \frac{H}{m}.$$

Бу тенгламанинг умумий ечимини ҳам икки қисмга ажратамиз, яъни:

$$x = x_1 + x_2$$

деб оламиз.

Бу ерда x_1 тенгламанинг биржинсли қисмининг умумий ечими, x_2 тенгламанинг хусусий ечими. $n<k$ ҳол учун биржинсли тенгламанинг ечими қуйидагича бўлар эди:

$$x_1 = ae^{-nt}\sin(k_1 t + \beta) \qquad (13.29)$$

Бунда $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$. x_2 ечимни:

$$x_2 = A\sin(pt\text{-}\delta),$$

кўринишда оламиз.

Бу ерда A ва δ ўзгармасларни шундай танлаймизки, улар (13.48) тенгламани қаноатлантирсин. Ҳосилаларни ҳисобласак:

$$\dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt} = Ap\cos(pt - \delta), \quad \ddot{x}_2 = \frac{d^2x_2}{dt^2} = -Ap^2\sin(pt - \delta),$$

келиб чиқади. Бу ҳосилалар ва x_2 нинг қийматини (13.48) тенгламага қўйиб, ҳамда $pt\text{-}\delta = \varphi$ ёки $pt = \varphi + \delta$

десак, $A(-p^2+к^2)\sin\varphi+2npA\cos\varphi=h(\cos\delta\sin\varphi+\sin\delta\cos\varphi)$, айниятга эга бўламиз.

Бу тенглик айният бўлганидан $\sin\varphi$ ва $\cos\varphi$ олдидаги коэффициентлар қуйидаги шартни қаноатлантириши керак:

$$A(к^2-p^2) = h\cos\delta,$$

$$2npA = h\sin\delta.$$

Ушбу тенгламани чап ва ўнг қисмларини квадратга кўтариб, ҳадма-ҳад қўшиб A ни ва нисбатларини олиб δ ни топиш мумкин:

$$A=\frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}},\quad tg\delta=\frac{2np}{k^2-p^2} \qquad (13.49)$$

Булар эътиборга олинса, (13.48) тенгламанинг хусусий ечими қуйидагича ёзилади:

$$x_2 = A\sin(pt-\delta). \qquad (13.50)$$

У ҳолда, моддий нуқта ҳаракат дифференциал тенгламасининг умумий ечими

$$x = ae^{-nt}\sin(k_1t+\beta)+A\sin(pt-\delta),$$

кўринишда ёзилади. Бу ерда a ва β ўзгармаслар *бошланғич шартларга боғлиқ* бўлиб, A ва δ бошланғич шартларга боғлиқ бўлмайди.

Бундан кўрамизки, тебранувчи нуқтанинг ҳаракати икки қисмдан иборат:

1) сўнувчи тебраниш,

2) ўзгармас амплитудали мажбурий тебраниш. Иккинчи тебранишнинг частотаси уйғотувчи кучнинг частотасига тенг, фазаси эса уйғотувчи кучнинг фазасидан δ га фарқ қилади. Бирмунча вақт ўтганда сўнувчи тебраниш йўқолиб, ҳаракат стационарлашади, яъни ҳаракат фақат мажбурий тебранишдан иборат бўлади:

$$x = A\sin(pt-\delta). \qquad (13.51)$$

Бу ҳолат учун тебраниш частотаси уйғотувчи куч частотасига тенг бўлади. Шунинг учун мажбурий тебраниш даврига муҳит қаршилигининг ҳеч қандай таъсири бўлмайди. Амплитудаси А эса бир вақтда p ва n га боғлиқ бўлади. Бундан муҳит қаршилиги мажбурий тебранма ҳаракатнинг амплитудасини камайтиради деган хулосага келамиз. Муҳит қаршилигининг амплитудага таъсири резонанс вақтида жуда ҳам сезиларли, яъни $к=p$ бўлганда $A = \frac{h}{2np}$ бўлади. Муҳит қаршилиги мавжуд бўлганда резонанс вақтида амплитуда чексиз қийматга эга бўлмайди. А амплитуданинг максимал қийматини дифференциал ҳисобида кўрсатилган усул билан топамиз. Бунинг учун к ва n берилган деб қаралса, (13.49) формулада илдиз остидаги ифода p частотанинг функцияси бўлади, уни f(p) деб белгилаймиз, яъни

$$f(p) = (к^2-p^2)^2 + 4n^2p^2.$$

Бу тенгликни p га нисбатан икки марта дифференциалласак:

$$f'(p) = -2(к^2-p^2)2p + 8n^2p,$$
$$f''(p) = -4(к^2-p^2) + 8p^2 + 8n^2, \qquad (13.52)$$

келиб чиқади.

Охирги муносабатда биринчисини нолга тенглаштириб, ечимларни топамиз. Улар

$$p_1 = 0, \quad p_{2,3} = \pm\sqrt{k^2-2n^2}, \qquad (13.53)$$

га тенг бўлади. Бу қийматларда f(p) функциянинг, дарҳақиқат А амплитуданинг максимал ва минимал бўлишини аниқлаймиз. Бунинг учун f''(p) нинг қийматидан фойдаланамиз, яъни ечимларда унинг мусбат ва манфий бўлишини текширамиз. (13.53) ни (13.52) тенгликнинг иккинчи қисмига қўямиз:

$$f''(p_1) = -4к^2 + 8n^2 = 4(2n^2 - к^2) < 0$$

бўлиб, $f(p_1)$ функция максимум ва амплитуда А минимум қийматга эришади.

$$f''(p_{2,3}) = -4к^2 + 12к^2 - 24n^2 + 8n^2 = 8(к^2 - 2n^2) > 0$$

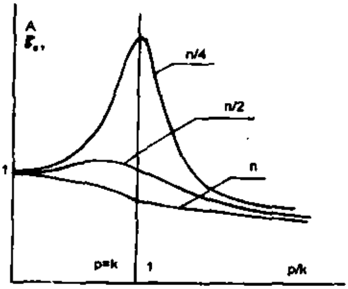
бўлиб, $f(p)$ функция минимум ва амплитуда А максимум қийматга эришади. Энди, амплитуда А нинг максимум қийматини ҳисоблаймиз. Бунинг учун $p_{2,3}$ нинг қийматини (13.49) формулага қўямиз:

$$A_{max} = \frac{h}{2n\sqrt{k^2 - n^2}} \qquad (13.54)$$

ҳосил бўлади. (13.49) формулани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$A = \frac{\frac{h}{k^2}}{\sqrt{[1 - (\frac{p}{k})^2]^2 + 4(\frac{n}{k})^2(\frac{p}{k})^2}} \qquad (13.55)$$

Бунда $\frac{h}{k^2} = \delta_{СТ}$ $p = p_1$ бўлгандаги амплитуда, резонанс ҳодисаси мутлоқа бўлмайди. 136-расмда уч ҳол учун (13.55) формула графиги (турли қаршилик коэффициентлари учун) қурилган.



136-расм

Динамик коэффициент $\frac{A}{\delta_{ст}}$ ордината ўқи, $\frac{p}{k}$ - абцисса ўқи бўйлаб қўйилган. Энг пастки эгри чизиқ учун қаршилик коэффициенти n, ўртадагиси $\frac{n}{2}$ ва устидагиси учун $\frac{n}{4}$ олинган. Бу эгри чизиқларни солиштириб, қаршилик коэффициенти n қанча кичик бўлса, амплитуданинг қиймати резонанс ҳолатидаги $\frac{p}{k} = 1$ қийматига шунча яқин бўлишини кўрамиз.

Мажрубий тебранишнинг умумий хоссалари. Юқорида топилган натижалардан, нуқтанинг эркин тебранишидан мутлоқа фарқ қилувчи мажбурий тебранишнинг қуйидаги муҳим хоссаларини келтириш мумкин:

1)Мажбурий тебраниш амплитудаси бошланғич шартларга боғлиқ бўлмайди.

2)Қаршилик бўлганда мажбурий тебраниш сўнмайди.

3)Мажбурий тебраниш частотаси уйғотувчи куч частотасига тенг бўлади ва тебранувчи система характеристикасига боғлиқ бўлмайди.

4)Агар қаршилик кичик бўлиб, бироқ p частота k га яқин бўлса, уйғотувчи кучнинг ҳатто кичик қийматида ҳам, интенсив мажбурий тебраниш (резонанс) ҳосил бўлиши мумкин.

5) Агар p частота k дан бирмунча катта бўлса, ҳатто уйғотувчи кучнинг катта қийматларида ҳам, мажбурий тебранишни исталганича кичрайтириш мумкин.

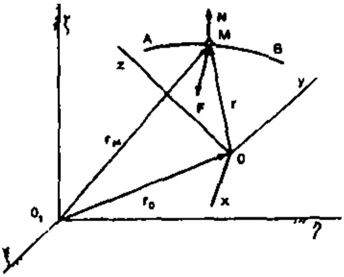
Мажбурий тебраниш, хусусан резонанс, физика ва техниканинг кўпгина тармоқларида катта роль ўйнайди. Масалан, машина ва двигателларнинг ишлашида одатда даврий кучлар пайдо бўлиб (вужудга келиб), улар машина қисмларининг ёки пойдеворнинг мажбурий тебранишини ҳосил қилиши мумкин. Кўпгина муҳандислик иншоотларида резонанс ҳодисаси мақсадга номувофиқ бўлиб, уни йўқотиш чоралари кўрилади, бунинг учун p ва k частоталар орасидаги муносабатлар шундай танланадики, амалда мажбурий тебраниш амплитудаси нолга тенг бўлиб қолсин (p>>k). Аксинча, бир мисол олайлик, радиотехникада резонанас ҳодисаси жуда ҳам фойдали бўлиб, бир радиостанция сигналларини бошқаларнинг ҳамма сигналларидан ажратиб туриш учун қўлланилади.

Бир қатор асбобларни лойиҳалаш масаласи ҳам мажбурий тебраниш назариясига асосланади. Масалан, вибрографлар - тебранувчи жисм (пойдевор, машина қисмлари ва бошқалар) нинг силжишини ўлчайдиган, ва хусусан, сейсмографлар - Ер қатламларининг тебранишини ва шунга ўхшашларни ёзувчи асбоблар.

55-§. Моддий нуқтанинг нисбий ҳаракати.

Шу пайттача динамика қонунлари ва улар асосида олинган ҳамма тенгламаларни моддий нуқтанинг абсолют ҳаракати учун, яъни унинг инерциал саноқ системасига нисбатан ҳаракати учун ўринли эканлигини исботлаб келдик. Лекин, динамиканинг кўпгина масалаларида ҳаракатни инерциал бўлмаган у ёки бу саноқ системасига нисбатан ўрганишга тўғри келади. Жумладан, Ер билан боғлиқ ва шу сабабли биз кўпроқ одатланган саноқ системаси кичик даражада инерциал эмас. Ер билан боғлиқ саноқ системасининг инерциал эмаслигини аниқ кузатишлар орқали сезиш мумкин. Шунинг учун, кўпинча Ер билан маҳкам боғланган саноқ системасини кичик хатолик билан инерциал деб ҳисобласа бўлади. Аммо, техниканинг кўпчилик масалаларида ҳаракатни тезланишдаги жисмга, яъни инерциалмас саноқ системасига нисбатан кузатишга тўғри келади. Бунда, динамиканинг асосий тенгламаси ва ундан келиб чиқадиган кўп хулосалар ҳаракатни нотўғри ифодалайди. Қуйида инерциалмас саноқ системаларида ҳаракатни тўғри ифодалаш учун динамиканинг асосий тенгламасини қандай ўзгартириш масаласи билан шуғулланамиз.

Моддий нуқта динамикасининг бу параграфида биз m массали M моддий нуқтанинг бирор Oxyz қўзғалувчи (инерциалмас) саноқ системасига нисбатан ҳаракатини текширамиз. Қўзғалувчи саноқ системаси ўз навбатида қўзғалмас $O_1\xi\eta\zeta$ саноқ системасига нисбатан маълум қонун бўйича ҳаракатланаётган бўлсин (137-расм). Моддий нуқтанинг бундай ҳаракати динамиканинг кўпчилик масалаларида қаралади. Бу ерда масала моддий нуқтага таъсир этувчи берилган кучлар (актив ва пассив) га кўра унинг нисбий ҳаракатини аниқлашдан иборат. Бундай масалани қуйидагича ечиш мумкин: нуқтага таъсир этувчи берилган кучларга кўра аввал унинг абсолют ҳаракатини аниқлаш, яъни динамиканинг иккинчи масаласини ечиш, сўнгра эса, нуқтанинг абсолют ва кўчирма ҳаракатларини билиб, кинематиканинг қоидасига



137- расм

биноан нуқтанинг изланаётган нисбий ҳаракатини аниқлаш. Аммо, берилган масалани осонроқ ечишга имкон берадиган усул ҳам мавжуд. Бу усул гарчи юзаки аҳамиятга эга бўлсада, кўпинча масалани ечишда унинг катта қулайлиги бор. Қуйида ушбу усулни нуқтанинг қўзғалмас системага нисбатан ҳаракати учун қўллаймиз. Нуқтанинг абсолют ҳаракати учун динамиканинг асосий тенгламасига мувофиқ қуйидагини ёзамиз:

$$ma = \mathbf{F} + \mathbf{N}. \qquad (13.56)$$

Бу ерда **F** - моддий нуқтага қўйилган актив кучларнинг тенг таъсир этувчиси, N - боғланиш реакцияларининг тенг таъсир этувчиси, **а** - нуқтанинг инерциал саноқ системасига нисбатан тезланиши. Тезланишларни қўшиш теоремасига кўра

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_k \ ,$$

эканлиги кинематикадан бизга маълум, бу ерда $\mathbf{a}_e$, $\mathbf{a}_r$, $\mathbf{a}_k$ - мос равишда, нуқтанинг кўчирма, нисбий ва Кориолис тезланишлари. Абсолют тезланишнинг ушбу ифодасини динамиканинг асосий тенгламаси (13.56) га қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$m\mathbf{a}_e + m\mathbf{a}_r + m\mathbf{a}_k = \mathbf{F} + N$$

ёки

$$m\mathbf{a}_r = \mathbf{F} + N + (-m\mathbf{a}_e) + (-m\mathbf{a}_k)$$

Охирги тенгламанинг ўнг томонида турган ($-m\mathbf{a}_e$) ва ($-m\mathbf{a}_k$) векторларнинг куч ўлчамларга эга эканлиги кўриниб турибди. Уларни, мос равишда, $\mathbf{F}_e^и = -m\mathbf{a}_e$, $\mathbf{F}_k^и = -m\mathbf{a}_k$ билан белгиласак, юқоридаги тенглама бундай кўринишда ёзилади:

$$m\mathbf{a}_r = \mathbf{F} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_e^и + \mathbf{F}_k^и \ . \qquad (13.57)$$

$\mathbf{F}_e^и$, $\mathbf{F}_k^и$ - векторлар тегишлича *кўчирма ва Кориолис инерция кучлари дейилади.*

Юқоридаги (13.57) тенглама моддий нуқта *нисбий ҳаракат* дифференциал тенгламасининг *векторли ифодаси ёки нисбий ҳаракат динамикасининг асосий тенгламаси дейилади.*

Моддий нуқта нисбий ҳаракатининг дифференциал тенгламаси унга таъсир этувчи актив кучлар ва реакция кучлар қаторига мазкур нуқтанинг кўчирма ва Кориолис инерция кучларини қўшиб, унинг абсолют ҳаракатининг дифференциал тенгламалари каби тузилади. Актив кучлар ва боғланиш реакциялари қаторига кўчирма ва Кориолис инерция кучларини қўшиш билан қўзғалувчи (инерциал бўлмаган) саноқ системаси кўчиши туфайли нуқтанинг нисбий ҳаракатига кўрсатиладиган таъсир эътиборга олинади.

Қўзғалмас саноқ системаси учун бу кучлар нолга тенг, чунки бу ҳолда нуқтанинг нисбий ва абсолют ҳаракати устма-уст тушади. Кўчирма ва Кориолис инерция кучлари нисбий тезланишни ҳосил қилиб, худди моддий жисмлар томонидан қўйилган кучлар каби қатнашади. Бироқ , таърифга кўра, бу инерция кучлари нуқтага қўйилган кучлар бўлсада, улар нуқтанинг қўзғалмас саноқ системасига нибатан тезланишини ҳосил қилишда қатнашмайди ва инерциал системаларга нисбатан ҳаракатланаётган моддий нуқтага қўйилмайди.

Агар Oxyz қўзғалувчи координаталар системасига нисбатан ҳаракатланаётган моддий нуқтанинг координаталарини вақтнинг t пайтида x,y,z десак, (13.57) тенгламанинг қўзғалувчи координата ўқларига проекциялари ушбу кўринишни олади:

$$m\ddot{x} = F_x + N_x + F^{и}_{ex} + F^{и}_{kx}$$

$$m\ddot{y} = F_y + N_y + F^{и}_{ey} + F^{и}_{ky} \qquad (13.58)$$

$$m\ddot{z} = F_z + N_z + F^{и}_{ez} + F^{и}_{kz}$$

Хусусий ҳоллар

1. Oxyz қўзғалувчи саноқ системаси илгариланма ҳаракатлансин. Бу ҳол учун $\omega_e = 0$ бўлганлиги сабабли $F^{и}_{к} = 0$ бўлади, бунда ω_e Oxyz саноқ системаси айланишининг бурчак тезлиги. Моддий нуқта нисбий ҳаракатининг векторли тенгламаси (13.57) ушбу кўринишни олади:

$$m\mathbf{a}_r = \mathbf{F} + \mathbf{N} + \mathbf{F}^{и}_{e}. \qquad (13.59)$$

2.Oxyz қўзғалувчи саноқ системаси илгариланма ва тўғри чизиқли текис ҳаракатлансин. У ҳолда $v = const$, $F^{и}_{к} = 0$, $F^{и}_{e} = 0$ бўлади, ва моддий нуқта нисбий ҳаракатининг векторли тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$m\mathbf{a}_r = \mathbf{F} + \mathbf{N}. \qquad (13.60)$$

Берилган ҳолда моддий нуқта нисбий ҳаракатининг дифференциал тенгламаси (13.60) унинг абсолют ҳаракати учун тузилган тенгламадан ҳеч фарқ қилмайди, бошқача қилиб айтганда, қаралаётган Oxyz қўзғалувчи саноқ системаси инерциал система бўлади. Нуқтага таъсир этувчи куч билан нуқтанинг бундай (қўзғалувчи) системага нисбатан ҳаракати орасидаги муносабат бу системанинг "қўзғалмас"га нисбатан тинч туришига ёки унга нисбатан илгариланма ва тўғри чизиқли текис ҳаракатда бўлишига боғлиқ бўлмайди, яъни бир хил бўлади. Бундан классик механиканинг Галилей томонидан аниқланган *нисбийлик принципи* келиб чиқади: *ҳеч қандай механик тажриба ёрдамида қўзғалувчи саноқ системасининг бундай илгариланма тўғри чизиқли текис ҳаракатини сезиш мумкин эмас.*

Эйнштейннинг *махсус нисбийлик* назариясида ушбу ҳолатни тасдиқлайдиган *нисбийлик принципи* ўринли: *ҳамма физикавий ҳодисалар барча инерциал саноқ системаларида бир хилда рўй беради.*

3. Моддий нуқта қўзғалувчи Oxyz саноқ системасига нисбатан тўғри чизиқли ва текис ҳаракатлансин, нуқтанинг бундай ҳаракатига *инерцияси бўйича нисбий ҳаракати дейилади.* У ҳолда нуқтанинг нисбий тезлиги $\mathbf{v}_r$ миқдор ва йўналиш жиҳатдан ўзгармайди. Шу сабабли унинг нисбий тезланиши $\mathbf{a}_r = 0$ бўлиб, (13.57) тенглик қуйидагича ёзилади:

$$\mathbf{F} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_e^и + \mathbf{F}_к^и = 0. \qquad (13.61)$$

Бу шарт инерция бўйича нисбий ҳаракатдаги нуқтага таъсир этувчи кучлар учун бўлиб, *актив кучлар ва реакция кучлари вақтнинг ҳар бир пайтида шу нуқтанинг кўчирма ва Кориолис инерция кучлари билан мувозанатлашади.*

4.Моддий нуқта қўзғалувчи Oxyz саноқ системасига нисбатан ҳаракатланмасин, яъни тинч ҳолатда бўлсин. Бу ҳолда $\mathbf{v}_r = 0$, $\mathbf{a}_r = 0$, $\mathbf{F}_к^и = 0$ бўлиб, (13.57) дан моддий нуқта *нисбий мувозанат* тенгламасининг векторли ифодаси қуйидаги кўринишни олади:

$$\mathbf{F} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_e^и = 0. \qquad (13.62)$$

Моддий нуқтанинг инерция бўйича абсолют ҳаракатида ёки унинг қўзғалмас саноқ системасига нисбатан абсолют мувозанатида унга таъсир этувчи кучлар учун бир хил шартга эга бўламиз: $\mathbf{F}+\mathbf{N}=0$. (13.62) ни (13.61) билан таққослаб шундай хулосага келиш мумкин: *нуқтага таъсир этувчи кучлар учун нисбий мувозанат шарт инерция бўйича ҳаракат шартидан фарқланади.*

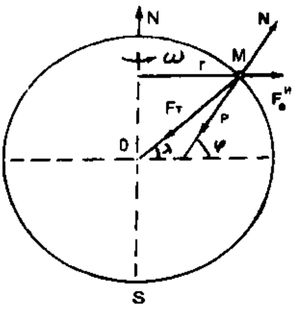
Шундай қилиб, *нисбий мувозанатдаги* нуқтага таъсир этувчи барча *актив ва реакция кучларнинг тенг таъсир этувчиси вақтнинг ҳар бир пайтида шу нуқтанинг кўчирма инерция кучи билан мувозанатлашади.*

Динамиканинг техникада учрайдиган кўпгина масалаларини ечишда, қўзғалмас (инерциал) саноқ системаси сифатида одатда Ер билан боғланган саноқ системаси қабул қилиниб, бунда Ернинг суткалик ва Қуёш атрофида орбита бўйлаб ҳаракати эътиборга олинмайди. Лекин, бу ҳаракатлардан иккинчисига тегишли ва (13.57) тенгламага кирадиган кўчирма инерция кучи амалда Қуёшнинг тортиш кучи билан мувозанатлашади. Натижада, Ер сирти билан боғланган саноқ системасини *инерциал система* деб ҳисоблаш билан унинг Ер билан биргаликда юлдузларга нисбатан суткалик айланишинигина эътиборга олмадик. Бу айланиш:

$$\omega = 2\pi\ /86400 \approx\ 0{,}0000729\ \text{с}^{-1},$$

бурчак тезлик билан содир бўлади. Қуйида бундай секин айланиш жисмнинг мувозанатига ва ҳаракатига қандай таъсир этишини текширамиз.

Ер сиртидаги нисбий мувозанат. Оғирлик кучи. Ерга нисбатан қўзғалмас бўлган силлиқ горизонтал текисликда ётувчи нуқтани оламиз (138-расм). Унинг Ерга нисбатан мувозанат шарти (13.62) тенгликка мувофиқ $\mathbf{F}_т+\mathbf{F}_e^и+\mathbf{N}=0$ кўринишда ёзилади.



138-расм

Бунда $\mathbf{F}_{\text{т}}$ - ернинг тортиш кучи, N - текисликнинг реакцияси, $F_e^и$ -нуқтанинг кўчирма инерция кучи. λ - геоцентрик кенглик, φ астрономик кенглик. $\omega = \text{const}$ бўлганидан $F_e^и$ куч фақат Ернинг айланиш ўқига перпендикуляр йўналган нормаль ташкил этувчидан иборат бўлади. $\mathbf{F}_{\text{т}}$ ва $F_e^и$ кучларни қўшиб, уларнинг тенг таъсир этувчисини **P** билан белгилайлик:

$$\mathbf{F}_{\text{т}} + F_e^и = \mathbf{P}. \qquad (13.63)$$

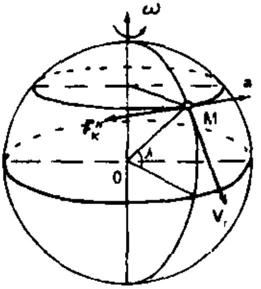
У ҳолда, М моддий нуқтага ўзаро мувозанатлашувчи **P** ва **N** иккита куч таъсир этади. **P** куч М нуқтанинг огирлик кучи дейилади. Р кучнинг йўналиши Ернинг берилган нуқтасида вертикал йўналган бўлиб, унга перпендикуляр бўлган текислик горизонтал текисликдир. Шундай қилиб, кўчирма ҳаракатнинг инерция кучи

$$F_e^и = mr\,\omega^2, \qquad (13.64)$$

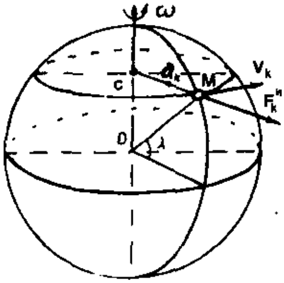
бўлиб, бунда m- нуқтанинг массаси, r- нуқтадан Ернинг айланиш ўқигача бўлган масофа, ω - Ернинг ўз ўқи атрофидаги айланиш бурчак тезлиги. ω^2 жуда кичик, шунинг учун $F_e^и << \mathbf{F}_{\text{т}}$ бўлиб, **P** нинг йўналиши $\mathbf{F}_{\text{т}}$ нинг йўналишидан жуда оз фарқ қилади. Жисмларни тарозида тортганда **P** куч аниқланади, яъни жисм Р билан тарози палласини босади. Демак, мувозанат тенгламасига оғирлик кучини киритиш билан $F^и$ кучини ҳам киритган бўламиз, яъни Ернинг айланиш таъсирини ҳам эътиборга олган бўламиз.

Натижада, Ерга нисбатан жисмнинг мувозанат шарти абсолют деб қаралса бўлади. Энди, Ер сирти бўйлаб ҳаракатланувчи жисмга Ер айланишининг таъсирини текширамиз.

Дарёлар қирғоқларини ювилиши. Бэра қонуни. Ер сиртида меридиан чизиги бўйлаб шимолий (кенгликда) ярим шарида



139-а

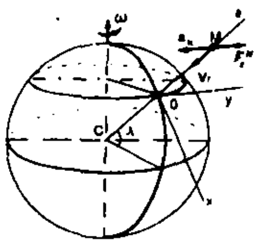


139-б

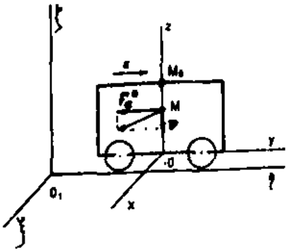
шимолдан жанубга v_r тезлик билан ҳаракатланаётган M нуқтанинг Кориолис тезланиши $a_к$ (139-расм) да кўрсатилгандек, параллелга M нуқтада ўтказилган уринма бўйича шарққа йўналади; Кориолис инерция кучи $F_k^и$ эса, унга тескари йўналишда, яъни ғарбга йўналади. M нуқта жанубдан шимолга томон ҳаракатланса, Кориолис инерция кучининг шарққа йўналишини кузатиш мумкин. Ҳар икки ҳолда ҳам бу куч нуқтани ҳаракат йўналишидан ўнг томонга четлантиришини кўрамиз. Агар нуқта параллел чизиқ бўйлаб шарққа томон ҳаракатланса унинг Кориолис тезланиши $a_к$ MC радиус бўйлаб йўналиб, $F_k^и$ куч эса, унга тескари йўналган бўлади (139б-расм). Бу кучнинг вертикал тузувчиси (OM бўйлаб) жисм оғирлигини бироз ўзгартиради, горизонтал тузувчиси эса, жануб томон йўналиб, нуқтани ҳаракат йўналишидан ўнг томонга оғдиради. Нуқта параллел бўйлаб ғарбга томон ҳаракатланса ҳам шундай натижага келиш мумкин. Булардан қуйидаги хулосага келамиз: Ер сиртида меридиан бўйлаб исталган йўналишда ҳаракатланаётган жисм Ернинг айланиши туфайли шимолий ярим шар (кенглиги) да ҳаракат йўналишидан ўнг томонга, жанубий ярим шар (кенглиги) да эса чап томонга четлашади. Ернинг шимолий ярим шарида оқаётган дарё ўнг қирғоқни ювуб кетиши (*Бэра қонуни*) шу ҳолатларга асосланади. Яна шу сабабларга кўра денгиз оқимларининг ва шамол оқимларининг четланишлари (пассатлар) пайдо бўлади.

Жисминг вертикал тушиши. Ер сиртига унча катта бўлмаган (Ернинг радиусига нисбатан жуда кичик масофага тенг) баландликдан оғирлик кучи таъсирида эркин тушаётган моддий нуқтанинг ҳаракатини текширамиз. Эркин вертикал тушаётган нуқтага таъсир этувчи Кориолис инерция кучи $F_k^и$ нинг йўналишини аниқлаш учун, нуқтанинг нисбий ҳаракат тезлиги v_r нинг йўналишшини билишга тўғри келади. $F_k^и$ Кориолис инерция кучи оғирлик кучига қараганда жуда кичик бўлганлигидан, биринчи тартибли аниқликда v_r ни вертикал бўйлаб, яъни МО чизиғи бўйлаб йўналган деб олиш мумкин (140-расм). У ҳолда, a_k векторининг ғарбга ва $F_k^и$ кучнинг шарққа томон йўналган бўлишини осонлик билан кузатиш мумкин.

Демак, биринчи аниқликда вертикал эркин тушаётган нуқта (жисм) Ернинг айланиши туфайли вертикалдан шарққа четланади. Шунингдек, юқорига тик отилган нуқта (жисм) ҳавонинг қаршилиги ҳисобга олинмаса, вертикалдан ғарбга томон четланади. Бироқ, бу четланишлар ниҳоятда кичик бўлганлигидан, уларни жисмнинг катта



140-расм



141-расм

баландликдан тушишида ёки кўтарилишидагина сезиш мумкин.

29-*масала*. Горизонтал тўғри чизиқли йўлда вагон ўзгармас **a** тезланиш билан ўнг томонга қараб ҳаракатланади. Бунда М нуқта вагон билан ҳаракатланиб, бироздан сўнг вертикал пастга эркин тушади. М нуқтанинг вагонга нисбатан ҳаракат траекторияси топилсин (141-расм).

Ечиш. 141-расмда кўрсатилгандек $O\xi\eta\zeta$ инерциал ва Oxyz инерциал бўлмаган *координаталар системасини танлаймиз*, *бунда* M_0 нуқтанинг бошланғич вазияти. Нуқтанинг тушиш пайтдаги баландлигини z=h деб белгилаймиз. Бироқ , масала *шартига мувофиқ нуқтанинг* бошланғич нисбий тезлиги нолга тенг. Кўчирма инерция кучи $\mathbf{F}_e^и$ нинг модули ma га тенг бўлиб, горизонтал чапга йўналган. Кўчирма ҳаракат илгариланма бўлганлигидан, Кориолис инерция кучи $\mathbf{F}_к^и$ нолга тенг бўлади, бундан ташқари нуқта эркин ҳаракатланганидан боғланиш реакция кучи **N** ҳам ноль бўлади.

Шунинг учун нуқтанинг нисбий ҳаракат дифференциал тенгламаси (13.57) қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$m\mathbf{a}_r = \mathbf{F} + \mathbf{F}_e^и,$$

ёки проекцияларда

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = -ma, \quad m\ddot{z} = -mg.$$

Ёки

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -a, \quad \ddot{z} = -g \tag{1}$$

Бу тенгламаларни бир марта интегралласак:

$$\dot{x} = C_1, \quad \dot{y} = -at + C_2, \quad \dot{z} = -gt + C_3., \tag{2}$$

келиб чиқади. Бошланғич пайтда, яъни $t=0$ бўлганда нуқтанинг нисбий тезлиги нолга тенг. Бу шартни (2) га қўйиб, $C_1 = C_2 = C_3 = 0$.

(2) тенгламани яна бир марта интеграллаб топамиз:

$$x = C_4, \; y = -at^2/2+C_5, \; z = -gt^2/2+C_6. \tag{3}$$

Бундан ҳаракат бошида $x=x_0=0$, $y=y_0=0$, $z=z_0=h$, эканлигини эътиборга олсак:

$$C_4 = C_5 = 0, \; C_6 = h,$$

келиб чиқади. Натижада:

$$x = 0, \; y = -at^2/2, \; z = h\text{-}gt^2/2, \tag{4}$$

ҳосил қиламиз.

Бу тенгламаларнинг биринчисидан нуқтанинг нисбий ҳаракати Oyz вертикал текисликдагина содир бўлади деган хулосага келиш мумкин. Тенгламаларнинг иккинчи ва учинчиларидан вақт t ни йўқотиб, нуқтанинг нисбий ҳаракати траекториясининг тенгламасини топамиз:

$$az\text{-}gy = ah,$$

ёки

$$\frac{z}{h} - \frac{gy}{ah} = 1$$

Бу Oy ва Oz ўқларидан, мос равишда, $\frac{ah}{g}$ ва h кесмалар кесувчи тўғри чизиқ тенгламасидир.

Вазнсизлик. Агар Ер сиртига яқин бирор горизонтал текислик устидаги нуқта тинч ҳолатда бўлса, унга таъсир этувчи Ернинг тортиш кучи, текисликнинг нормаль реакция кучи билан мувозанатлашади. Бу ташқи кучларнинг таъсири остида жисмда, унинг зарраларининг ўзаро босими шаклида ички зўриқишлар пайдо бўлади. Бундай ички зўриқишлар содир бўладиган жисмни вазнли ҳолатдаги жисм деб аталади. Бунда жисмнинг вертикал тушишига тўсқинлик қиладиган горизонтал текисликка кўрсатадиган босимини ифодаловчи куч миқдорини жисмнинг *оғирлиги дейилади.* Масалан, юкнинг тарози палласига кўрсатадиган босими юкнинг оғирлигини ифодалайди. Агар жисмда мана шундай ички зўриқишлар пайдо бўлмаса жисм вазнсизлик ҳолатда деб аталади. Агар нуқта (жисм) берилган саноқ системасида, бу системага нисбатан мувозанатда турган жисмга босим кўрсатмаса, нуқта *(жисм)* нинг бундай ҳолати *вазнсизлик* ҳолати дейилади. Ернинг тортиш кучи таъсирида ҳаракатланаётган нуқтанинг эркин қаттиқ жисмга маҳкам бириктирилган инерциал бўлмаган саноқ системасига нисбатан вазнсизлик ҳолатини текширамиз. Ер атмосферасидан ташқарида ҳаракатланаётган Ернинг сунъий йўлдоши бундай жисмга мисол бўлади. Сунъий йўлдошга нисбатан нисбий мувозанатдаги нуқтанинг вазнсизлик ҳолатини текширамиз. Бундай нуқтанинг нисбий тезлиги ва нисбий тезланиши нолга тенг бўлади. Шу сабабли нисбий мувозанат тенгламаси (13.62) орқали ифодаланади

$$\mathbf{F}+\mathbf{N}+\mathbf{F}_e^{и} = 0.$$

Бу ерда $\mathbf{F} = mg$ - Ернинг нуқтага таъсир этувчи тортиш кучи, $\mathbf{N}$ - сунъий йўлдош ичидаги нуқтага қўйилган реакция кучи, $\mathbf{F}_e^{и} = -ma_e$ - кўчирма инерция кучи. Вазнсизлик ҳолатида N=0 бўлиб, нисбий мувозанат тенгламаси қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$F + F_e^и = 0.$$

Шундай қилиб, вазнсизлик ҳолати

$$F = F_e^и = ma_e \quad ёки \quad a_e = g$$

бўлганда, яъни кўчирма ҳаракат тезланиши эркин тушиш тезланишига тенг бўлганда вужудга келади. Нуқта сунъий йўлдошнинг массалар марказида жойлашган ҳолда бу шарт ўринли бўлади, чунки массалар маркази фақат Ернинг тортиш кучидан иборат ташқи куч таъсирида ҳаракатланади ва унинг тезланиши g га тенг бўлади.

Бу тезланиш бир вақтда нуқтанинг кўчирма тезланишини ҳам ифодалайди. Агар моддий нуқта сунъий йўлдошнинг массалар марказида жойлашмаса, йўлдош айланма ҳаракатда бўлгани учун, нуқтанинг кўчирма ҳаракат тезланиши массалар марказининг тезланишидан фарқ қилади. Шу сабабли нуқта вазнсизлик ҳолатида бўлмайди. Агар йўлдош илгариланма ҳаракатда бўлса, йўлдош ичидаги ихтиёрий нуқта вазнсизлик ҳолатида бўлади. Худди шунингдек, g тезланиш билан вертикал пастга тушаётган лифт кабинасида ҳам вазнсизлик ҳодиса кузатилади. Гарчи, вазинсизлик кўпчилик асбоб ва ускуналарнинг ишлаш шароитларини ўзгартирсада, космонавтика ривожланган сари уни ўрганиш муҳим аҳамиятга эга бўлмоқда. Вазнсизлик киши танасининг турли организмининг ишлашига ҳам таъсир этади (масалан, сезиш органларига), шунинг сабабли вазнсизлик ҳолатга мослашиш учун тегишли тайёргарлик олиб борилади. Кишининг узоқ муддатли учишига тайёргарлик кўришида тўгинида кабина ўрнатилган айланувчи гилдираксимон конструкция (қурилма) ясалади. Бу кабина ичида жойлашган жисм зарралари бир-бирларига маълум куч билан таъсир этади, бу билан улар учун сунъий вазинли ҳолат яратилади.

XIV боб

МЕХАНИК СИСТЕМА. МАССАЛАР ГЕОМЕТРИЯСИ

56-§. Механик система ва унга таъсир этувчи кучлар. Ички кучларнинг хоссалари.

Шу вақтга қадар биз моддий нуқта ҳаракатининг динамикасини ўргандик. Биргина моддий нуқта ҳаракати ҳоли учун баён этилган ҳамма қоида-қонунлар илгариланма ҳаракатланаётган қаттиқ жисмга ёки масала шартига мувофиқ ўлчамини ҳисобга олмаслик мумкин бўлган ва моддий нуқта деб қараладиган жисмга тўлиқ қўлланилади. Агар моддий нуқталар системаси фазода ихтиёрий кўчаолса, у ҳолда система ҳаракатини ўрганиш учун унинг ҳар қайси нуқтасининг ҳаракатини алоҳида ўрганиш зарур. Шунинг учун бу ерда моддий нуқта динамикасидаги тушунчаларни моддий нуқталар системаси динамикаси учун умумлаштирамиз. Механикада, механик система деганда, бир-бирлари билан ўзаро таъсирлашувчи моддий нуқта (ёки жисм) лар тўплами тушунилади. Бошқача қилиб айтганда, механик системанинг ҳар бир нуқтаси (ёки жисми) нинг ҳолати ва ҳаракати қолган ҳамма нуқта (ёки жисм) ларининг ҳолати ва ҳаракатига боғлиқ бўлади, яъни система нуқта (ёки жисм) лари бир-бири билан маълум муносабатда боғланган бўлади. Жумладан, ҳарқандай қаттиқ жисмни ҳам уни ташкил қилган зарралари (нуқталари) нинг системаси деб қарай қоламиз. Шунингдек, Қуёш системаси, механик системага классик мисол бўлаолади, чунки унинг ҳамма жисмлари (Қуёш ва планеталар) ўзаро бутун олам тортишиш кучи таъсирида бўлади. Механик системага бошқа мисол сифатида исталган машина ёки механизмни олиш мумкин, чунки унинг ҳамма қисмлари бир-бирлари билан геометрик турли боғланишлар: масалан, шарнирлар, стерженлар, арқонлар, тасмалар ёки тишли ғилдираклар воситасида боғланган бўлади. Бу ҳолда система жисмларига (звеноларига) боғланишлар орқали бериладиган таранглик ёки ўзаро босим кучлари таъсир этади. Бир-бирлари билан ҳеч қандай ўзаро таъсир кучига эга бўлмаган жисмлар тўплами механик система бўлаолмайди, масалан, ҳавода учаётган бир гуруҳ самолётлар.

Агар системанинг ҳаракатда, унинг ихтиёрий икки нуқтаси орасидаги масофа ҳамма вақт ўзгармай қолса (ҳар қандай шароитда), ўзгармас механик система дейилади. Масалан, *абсолют* қаттиқ жисм. Аксинча, бу масофа ўзгариб борса, ўзгарувчан механик система деб аталади. Масалан, деформацияланувчи жисм. Шунингдек, механик система *боғланишли ва боғланишсиз* (эркин) бўлиши мумкин. Агар система нуқта (ёки жисм) лари фазода *исталган йўналишда* ҳаракатланаолса бундай система *эркин система* деб аталади. Масалан, Ер ва Қуёш системаси эркин ҳаракатланади, газ тўлғазилган ҳаво шари ҳавода эркин парвоз қилади. Агар система нуқталарининг ҳаракатига бирор чек қўйилган бўлса, бундай системани *боғланишдаги (эркинмас) система* дейилади. Масалан, кривошип-ползунли механизм.

Шуни қайд қилиб ўтамизки, эркин механик система нуқта (ёки жисм) ларининг ҳаракати фақат уларга таъсир этувчи кучлар билан аниқланади, боғланишдаги механик система нуқта (ёки жисм) лари эса, уларга қўйилган кучлар таъсирида боғланишга зид бўлмаган маълум ҳаракатда бўлади. Бундан буён биз, фақат механик система ёки қисқача система ҳаракатини ўрганамиз.

Берилган системага таъсир этувчи ҳамма кучларни ички ва ташқи кучларга ажратиш мумкин. *Берилган системадаги нуқта (ёки жисм) ларнинг ўзаро таъсир кучлари ички кучлар дейилади.* Бундан кейин системанинг ички кучларини F^{i} билан белгилаймиз. *Берилган система нуқтаси (ёки жисми) га бу системага кирмайдиган бошқа нуқта (ёки жисм) ларнинг кўрсатадиган таъсир кучлари ташқи кучлар* дейилади. Системага таъсир этувчи ташқи кучни бундан кейин F^e билан белгилаймиз.

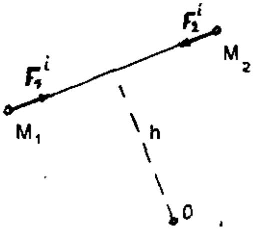
Кучларни ташқи ва ички кучларга ажратиш шартли бўлиб, қаралаётган система таркибига нима киритилганлигига боғлиқдир. Масалан, автомобиль двигателининг кривошип-поршенли механизмини система деб қабул қилсак, унинг звенолари орасидаги ўзаро таъсир кучлари ички кучларга киради. Айни шу кривошип-поршенли механизмга нисбатан ёқилғи газининг двигатель поршенига босими ташқи куч бўлади. Агар автомобилни двигатель билан биргаликда бир система деб қабул қилсак, бунда газларнинг двигатель поршенига таъсири ички куч бўлади. Бундай система учун: автомобиль оғирлиги, йўлнинг нормаль реакцияси, автомобиль ғилдираги билан йўл сирти орасидаги ишқаланиш кучи, ҳавонинг қаршилик кучи ташқи кучлар бўлади.

Система нуқта (ёки жисм) ларига таъсир этувчи кучларни бошқа жиҳатдан ҳам яна икки гуруҳга ажратиш мумкин: актив кучлар (система нуқталарига бевосита қўйилган кучлар) ва пассив кучлар (боғланиш реакциялари).

Боғланиш системанинг ҳаракатини чеклайди; боғланиш бўлмаганда эди, система қўйилган актив кучлар таъсиридан маълум ҳаракатда бўлар эди. Бироқ, боғланиш, бу ҳаракатнинг ўрнига бошқа ҳаракатнинг вужудга келишига сабаб бўлади. Демак, боғланиш таъсири ҳам қўйилган куч таъсири каби бўлади. Шунинг учун динамика масалаларини ечишда боғланиш таъсирини реакция билан алмаштириб, у ташқи кучлар қаторига қўшилади.

Актив кучлар ва боғланиш реакциялари ўз навбатида ички ёки ташқи кучлар бўлиши мумкин.

Нуқта (ёки система) нинг ҳаракатида, уларга қўйилган боғланишларнинг реакциялари фақат уларга таъсир этувчи актив кучларга ва боғланишларнинг турига боғлиқ бўлибгина қолмай, балки берилган нуқта (ёки система) ҳаракатининг характерига ҳам боғлиқ бўлади. Масалан, ипга боғланган юкнинг ҳаракати ҳолида ипнинг реакцияси юкнинг бошланғич тезлигига ва вақтга боғлиқ бўлиши.



Таъсир ва акс таъсирнинг тенглик қонунига кўра системанинг ҳар қандай икки нуқтаси (масалан, M_1 ва M_2 нуқталари) миқдор жиҳатидан тенг ва бир чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонларга йўналган F_1^i ва F_2^i кучлар билан бир-бирига таъсир этади (142-расм). Шунинг учун

$$F_1^i + F_2^i = 0.$$

Система n-та нуқталардан ташкил топса, системанинг ҳамма нуқталари орасидаги ўзаро таъсир кучларини (системанинг ички кучларини) турли ўрин алмаштиришлар билан жуфт-жуфт қилиб қўшиб, қуйидаги хулосага келамиз; исталган системада ҳамма ички кучларнинг геометрик йиғиндиси, яъни бош вектори нолга тенг:

$$R^i = \sum_{k=1}^{n} F_k^i \qquad (14.1)$$

Бу тенгликдан кўрамизки, системадаги ҳамма ички кучларнинг исталган ўқдаги проекцияларининг алгебраик йиғиндиси ҳам нолга тенг:

$$\sum_{k=1}^{n} F^{i}_{xk} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} F^{i}_{yk} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} F^{i}_{zk} = 0. \qquad (14.2)$$

Худди шу мулоҳаза асосида система ички кучларининг бирор O марказга нисбатан моментларининг йиғиндиси (бош моменти) учун ҳам қуйидаги тенгламаларни ёзаоламиз:

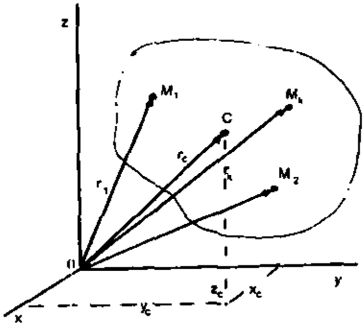
$$\mathbf{M}^{i}_{o} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{m}_{0}\left(\mathbf{F}^{i}_{k}\right) = 0, \qquad (14.3)$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_{x}\left(\mathbf{F}^{i}_{k}\right) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_{y}\left(\mathbf{F}^{i}_{k}\right) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_{z}\left(\mathbf{F}^{i}_{k}\right) = 0 \qquad (14.4)$$

(14.1) ва (14.2) тенгликлар система нуқталарининг ички кучларининг биринчи хоссасини, (14.3) ва (14.4) . тенгликлар эса, уларнинг иккинчи хоссасини ифодалайди. (14.1) ва (14.3) тенгликлар биргаликда ва шунингдек, (14.2) ва (14.4) биргаликда фазода ихтиёрий жойлашган кучлар системасининг мувозанат тенгламалари кабидир. Аммо, келтирилган хоссалардан ички кучлар ўзаро мувозанатлашган бўлади ва система ҳаракатига ҳеч қандай таъсири бўлмайди деган хулоса келиб чиқмайди, аксинча, бу ички кучлар механик системасининг турли нуқта (ёки жисм) ларига қўйилганлиги сабабли ушбу нуқта (ёки жисм) ларни бир-бирига нисбатан ҳаракатлантираолиши мумкин. Қаралаётган система абсолют қаттиқ жисм бўлса, ички кучлар мувозанатлашган бўлади. Бу юқорида келтирилган хулосалар қатор ҳолларда система динамикасига (ва унинг хусусий ҳоли қаттиқ жисмга ҳам) оид масалаларни текширишни анча осонлаштиради, чунки булар айрим ҳолларда ички кучларни мутлақо ҳисобга олмасликка ҳам имкон беради.

57-§. Механик система массалар маркази ва унинг координаталари.

Қаттиқ жисм ва бошқа механик системанинг ҳаракати унга таъсир этувчи кучларга ва ҳаракатланаётган система (ёки жисм) нинг массалар йиғиндисигагина боғлиқ бўлибгина қолмай, балки массаларнинг тақсимланишига ҳам боғлиқ бўлади. Система массаларининг тақсимланиши унинг массалар (инерция) марказининг ҳолати ва инерция моменти деб аталган механик катталиклар билан характерланади. Бу катталиклар ҳақидаги таълимот массалар геометрияси дейилади. Биз, бу ерда ва келгусида механик система динамикасини ўрганишда муҳим аҳамиятга эга бўлган мана шу тушунчалар устида тўхталамиз. Система n моддий нуқтадан иборат бўлсин. Бу нуқталарнинг ҳолатини Oxyz координаталар системасига нисбатан текширамиз. Бунда M_k системанинг ихтиёрий k-нчи нуқтаси, r_k $(k = \overline{1,n})$ унинг радиус вектори, x_k ,y_k ,z_k - координаталари бўлсин.



143-расм

Системанинг массалар маркази деб, уни ташкил этган зарраларнинг массалари тўпланган геометрик нуқта С га айтилиб, ҳолати ушбу формуладан аниқланади:

$$r_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k r_k}{m} \qquad (14.5)$$

Бу формулада m_k - системада олинган ихтиёрий M_k нуқтанинг массаси, r_k - шу нуқтанинг радиус вектори, $m = \Sigma m_k$ - бутун система массаси. Шундай қилиб, системанинг массалар маркази деб массаси система массасига тенг ва ҳолати (14.5) билан аниқланадиган (фаразий) нуқтага айтилади. (14.5) тенгликни Декарт координата ўқларига проекциялаб, система массалар маркази координаталарининг ифодаси топилади:

$$x_c = \frac{\sum m_k x_k}{m}, \quad y_c = \frac{\sum m_k x_k}{m}, \quad z_c = \frac{\sum m_k z_k}{m} \qquad (14.6)$$

Гарчи, система массалар марказининг ҳолати бир жинсли оғирлик майдонида жойлашган қаттиқ жисмнинг оғирлик маркази билан устма-уст тушсада, бу тушунчалар ҳар доим айни бир тушунча бўлаолмайди, яъни улар бир-бирларидан фарқланади. Оғирлик маркази тушунчаси, жисмдаги ҳамма моддий нуқталар оғирлик кучларининг тенг таъсир этувчиси ўтадиган нуқта бўлиб, амалда фақат оғирлик майдонида жойлашган қаттиқ жисмлар учунгина маънога эга бўлади. Массалар маркази тушунчаси эса, системадаги массаларнинг тақсимланишини характерловчи катталик бўлиб, ҳар қандай ихтиёрий механик система учун ҳам маънога эга. Бу тушунча берилган система бирор куч таъсиридами ёки йўқми бунга боғлиқ бўлмаган ҳолда ўз маъносини сақлайди.

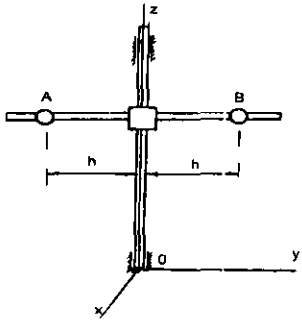
Буларга кўра ва масса ҳар қандай системанинг ажралмас хоссаси бўлганлиги сабабли, массалар маркази тушунчаси оғирлик маркази тушунчасига қараганда кенгроқ маънога эга. Унинг исботи сифатида массалар маркази тушунчаси билан боғлиқ қуйидаги хоссаларни кўриб чиқамиз. Массалар марказининг радиус вектори (14.5) дан ёки унинг координаталари (14.6) дан вақт бўйича биринчи ва иккинчи тартибли ҳосила олиб система массалар марказининг тезлик ва тезланиш векторларини ёки уларнинг координата ўқларидаги проекцияларини аниқлашимиз мумкин. Чунончи, система массалар марказининг тезлиги ва тезланиши

$$\mathbf{v}_C = \frac{\sum m_k \mathbf{v}_k}{m}; \quad \mathbf{a}_C = \frac{\sum m_k \mathbf{a}_k}{m}$$

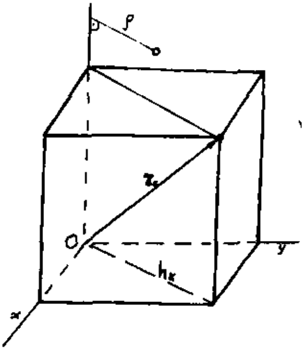
га тенг бўлади. Система массалар маркази, тезлиги ва тезланишларининг юқоридаги ифодаларидан уларнинг қуйидаги баъзи хоссалари келиб чиқади. Масалан, системанинг фақат k-нчи нуқтаси ҳаракати туфайли система массалар марказининг оладиган тезлиги ва тезланиши, мос равишда, $m_к\mathbf{v}_к$ /m га ва $m_к\mathbf{a}_к$ /m га тенг бўлади. Шундай қилиб, системанинг фақат k-нчи нуқтасининг ҳаракати туфайли система массалар марказининг оладиган тезлиги ва тезланиши, мос равишда, шу k-нчи нуқта тезлиги ва тезланишига параллел йўналган бўлиб, миқдор жиҳатдан улардан $m_к/m$ марта кичик экан.

58-§. Механик система ва қаттиқ жисмнинг қутбга, ўққа ва текисликка нисбатан инерция моментлари.

Массалар марказининг ҳолати система массаларининг тақсимланишини тўла характерлай олмайди. Масалан, бир хил массали ва катталикдаги А ва В шарларни Oz дан тенг h масофага силжитишда системанинг массалар марказининг ҳолати ўзгаришсиз қолсада унинг массалар тақсимланиши бошқача бўлади; бу эса, системанинг ҳаракатини ўзгартиради, яъни Oz ўқи атрофида айланиш секинлашади (144-расм). Шунинг учун механикада, система динамикасида муҳим аҳамиятга эга бўлган, системанинг массалар тақсимланишини характерловчи яна бир катталик -*инерция моменти* киритилган. Система (ёки жисм) нинг инерция моменти марказга, ўққа ёки текисликка нисбатан аниқланади. n-та



144-расм



145-расм

нуқталардан ташкил топган механик система (ёки жисм) нинг бирор z ўққа (145-расм) нисбатан инерция моменти деб, унинг нуқталарининг массаларини ўққача бўлган масофалар квадратига кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг бўлган скаляр катталикка айтилади. Уни I_z деб белгиласак, таърифга кўра

$$I_z = \sum_{k=1}^{n} m_k h_k^2 \qquad (14,7)$$

бўлади. Бу ерда h_k - берилган ўқдан $m_к$ массали нуқтагача бўлган масофа. Хусусий ҳолда туташ жисмлар учун йиғиндини интеграл билан алмаштириш мумкин:

$$I_z = \int h^2 dm \qquad (14.8)$$

Бу ерда dm - жисмнинг нуқта ўрнида қаралган элементар заррасининг массаси.

Шунингдек, қаралаётган системанинг O (нуқта) қутбга нисбатан инерция моменти, унинг нуқталарининг массаларини қутбгача бўлган масофалар квадратига кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг катталикка айтилади ва одатда I_0 билан белгиланади:

$$I = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2 \qquad (14.9)$$

Бунда $r_к$ - О нуқтадан системанинг ихтиёрий $M_к$ нуқтасигача бўлган масофа. Туташ муҳитлар учун йиғиндидан интегралга ўтиб, (нуқта) қутбга нисбатан инерция моменти учун қуйидагига эга бўламиз:

$$I_0 = \int r^2 dm \qquad (14.10)$$

Инерция моменти тушунчаси биринчи марта Эйлер томонидан киритилган. Бир хил шаклдаги ҳар хил материаллардан тайёрланган бир жинсли жисмларнинг инерция моментлари турлича бўлади, яъни инерция моменти фақат жисмнинг шаклига ва моддасининг зичлигига боғлиқдир.

Баъзан, жисмнинг ўққа нисбатан инерция моменти жисмнинг m массасини берилган ўққа нисбатан инерция радиуси деб аталувчи бирор $\rho_и$ кесма узунлиги (145-расм) квадратига кўпайтмаси сифатида ёзилади:

$$I_z = m\rho_и^2 \qquad (14.11)$$

Бундан инерция радиуси

$$\rho_и = \sqrt{I_z / m} \qquad (14.12)$$

орқали аниқланади. Жисмнинг берилган ўққа нисбатан инерция радиуси деганда, инерция моменти жисмнинг инерция моментига тенг бўлиши учун унинг барча m массаси тўпланган нуқтадан шу ўққача масофога тенг кесма узунлиги тушунилади. Инерция радиуси жисм массасига боғлиқ бўлмаган характеристикасидир. СИ системада инерция моменти кг. $м^2$, бирликларнинг техник системасида эса, кг.м.$сек^2$ да ўлчанади.

Системанинг бирор $M_к$ нуқтасининг координаталарини $x_к$,$y_к$,$z_к$ деб белгиласак, унинг x,y,z қўзғалмас ўқларга нисбатан инерция моментлари тегишлича (145-расм):

$$I_x = \sum m_k(y_k^2 + z_k^2);\ I_y = \sum m_k(z_k^2 + x_k^2);\ I_z = \sum m_k = (x_k^2 + y_k^2)\ (14.13)$$

ифодаланади. У холда системанинг координаталар боши О га нисбатан инерция моменти:

$$I_0 = \sum m_k r_k^2 = \sum m_k\left(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2\right) \qquad (14.14)$$

кўринишда аниқланади. Бу характеристикалар орасидаги муносабатларни келтирамиз. Бунинг учун (14.13) даги тенгликарни ҳадма- ҳад ўшиб ва (14.14) ни эътиборга олсак:

$$I_x + I_z + I_y = 2I_0 \qquad (14.15)$$

келиб чиқади. Агар қаралаётган система текис шаклдан иборат бўлса, x ва y ўқларини шакл текислигида олсак, $I_z = I_0$, бўлиб, (14.15) дан ёзаоламиз:

$$I_x + I_y = I_0 \qquad (14.16)$$

Механикада марказ (қутб) га ва ўққа нисбатан инерция моментларидан ташқари текисликка нисбатан ва марказдан қочма инерция моментларидан ҳам фойдаланилади. Масалан, системанинг yOz, xOz, xOy координата текисликларига нисбатан инерция моментлари (145-расм) мос равишда, қуйидагича ифодаланади:

$$I_{yOz} = \sum m_k x_k^2;\ I_{xOz} = \sum m_k y_k^2;\ I_{xOy} = \sum m_k z_k^2 \qquad (14.17)$$

Охирида, системанинг бирор икки ўзаро перпендикуляр бўлган ўқларга нисбатан марказдан қочма инерция моменти деб, унинг ҳамма нуқталарининг массаларини бу ўқларгача бўлган масофаларига кўпайтмаларининг йиғиндисига айтилади. Системанинг ҳар қайси x ва y, y ва z, z ва x жуфт-жуфт координата ўқларига нисбатан марказдан қочма инерция моментлари тегишлича қуйидагича ифодаланади:

$$I_{xy} = \sum m_k x_k y_k; \; I_{yz} = \sum m_k y_k z_k; \; I_{zx} = \sum m_k z_k x_k \quad (14.18)$$

Марказдан қочма инерция моменти ўққа нисбатан инерция моментидан фарқланиб, у мусбат, манфий ва координата ўқларининг танланишига қараб нолга тенг ҳам бўлиши мумкин. Бунга, марказдан қочма инерция моменти ифодасига масофа квадрати эмас, балки координаталар кўпайтмаси кирганлигидан деб тушунилади. Координаталар эса, турли ишораларда олиниши бизга маълум. Марказдан қочма инерция моменти қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракатида подшипникларга кўрсатадиган босимини аниқлашда ва бошқа ҳолларда муҳим аҳамиятга эгадир. Бу дастлабки маълумотлардан сўнг, инерция моменти ҳақидаги теоремаларни исботлашга ўтамиз.

59-§. Параллел ўқларга нисбатан жисмнинг инерция моментлари ҳақида теорема.

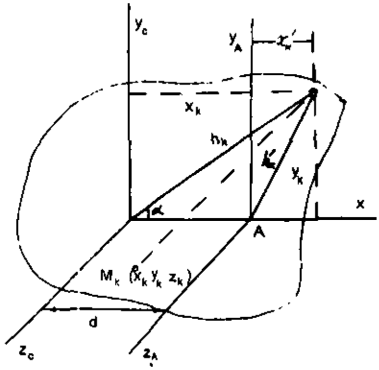
Теорема. Механик система (жисм) нинг ихтиёрий ўққа нисбатан инерция моменти, берилган ўққа параллел равишда шу системанинг массалар марказидан ўтувчи ўққа нисбатан инерция моменти билан система массасини бу ўқлар орасидаги масофа квадратига кўпайтмасининг йиғиндисига тенг.

Айтайлик, z_c марказий ўқ ва ихтиёрий z_A ўқ ўзаро параллел ҳолда бир-биридан d масофада шакл текислигига перпендикуляр равишда C ва A нуқталардан ўтсин (146-расм). Механик системанинг $M_к$ нуқтаси учун қуйидагини ёзаоламиз:

$$h_k'^2 = d^2 + h_k^2 - 2dh_k \cos\alpha = d^2 + h_k^2 - 2dx_k$$

(14.7) формулага биноан z_A ўққа нисбатан инерция моменти қуйидагига тенг:

$$I_{z_A} = \sum m_k h_k'^2 = d^2 \sum m_k + \sum m_k h_k^2 - 2d \sum m_k x_k$$



146-расм

аммо, $\Sigma m_к x_к = mx_c = 0$ бўлганлигидан, қуйидаги келиб чиқади

$$I_{z_A} = I_c + md^2. \qquad (14.19)$$

Бу (14.19) формула инерция моментлари ҳақидаги 1-теорема (*Гюгенс-Штейнер теоремаси)* ни ифодалайди.

Оддий шаклли жисмларнинг инерция моментлари интеграл ҳисобидан фойдаланиб топилади. Жисм оддий шаклда бўлмаган ҳолларда, инерция моментлари тажриба йўли билан ёки тақрибий равишда аниқланади. Қуйида мисоллар тариқасида баъзи оддий шаклли бир жинсли жисмларнинг инерция моментларини ҳисоблашни қараймиз.

60-§. Оддий шаклдаги бир жинсли жисмларнинг ўқларга нисбатан инерция моментлари.

30-*масала.* Бир жинсли доиравий ҳалқанинг марказидан ўтувчи ва ҳалқа текислигига перпендикуляр бўлган Oz ўққа нисбатан инерция моменти топилсин. Ҳалқанинг массаси m ва унинг радиуси R га тенг.

Ечиш. Бутун ҳалқани ҳар қайсисининг массаси $m_к$ га тенг бўлган бир қанча ёй кесмаларга ажратамиз (147-расм). Уларнинг ҳамма нуқталари Oz ўқдан бир хил $h_к=R$ масофада жойлашганидан ва ҳалқанинг массаси унинг гардиши бўйлаб текис тақсимланганлиги сабабли, инерция моменти (14.7) формулага мувофиқ аниқланади:

$$I_z = \sum m_k h_k^2 = \sum m_k R^2 = mR^2 \tag{14.20}$$

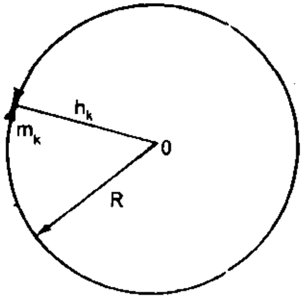
31-*масала.* Массаси m ва радиуси R га тенг бўлган бир жинсли дисканинг, диска текислигига перпендикуляр бўлган марказий ўққа нисбатан инерция моменти топилсин (148- расм).

Ечиш. Дисканинг ўзгармас зичлиги γ қуйидагига тенг:

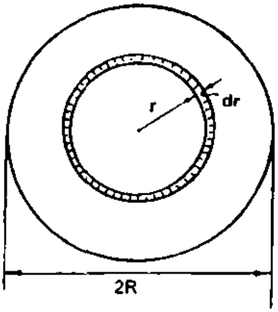
$$\gamma = m / \pi R^2 \tag{14.21}$$

Бутун дискани радиуслари R ва $R+dR$ айланалар орасидаги бирқанча элементар ҳалқаларга ажратамиз, у ҳолда бундай ҳалқанинг массаси $dm=2\gamma\pi RdR$ га тенг. (14.8) формулага биноан $h=R$ деб, қуйидагини ёзаоламиз:

$$I_z = \int R^2 2\pi R \gamma dR = 2\gamma\pi \int R^3 dR = 2\gamma\pi \frac{R^4}{4} = \frac{\gamma\pi R^4}{2} = \frac{mR^2}{2}$$



147-расм



148-расм

Шундай қилиб,

$$I_z = \frac{mR^2}{2}. \qquad (14.22)$$

Шу формулага кўра бир жинсли цилиндрнинг геометрик ўқига нисбатан инерция моменти ҳам ҳисобланади.

32-*масала.* Ўқ инерция моменти аниқланиши керак бўлган дискнинг диаметри билан устма-уст тушади деб фараз қилиб олдинги масала ечилсин.

Ечиш. Дискни n-та бўлакларга ажратамиз (149-расм), у ҳолда диск текислигига перпендикуляр бўлган z ўққа нисбатан унинг инерция моменти (14.9) формулага мувофиқ

$$I_z = \sum m_k R_k^2 = \sum m_k \left(x_k^2 + y_k^2\right) = \sum m_k x_k^2 + \sum m_k y_k^2$$

га тенг, бироқ диск учун $I_x = I_y$ бўлганлигидан, (14.16) га кўра $I_z = 2I_y$ бўлади. Бундан

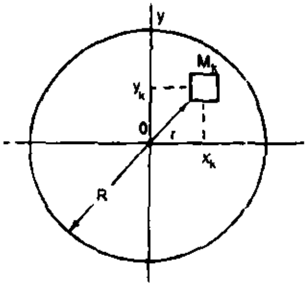
$$I_y = I_x = \frac{I_z}{2} = \frac{mR^2}{4} \qquad (14.23)$$

келиб чиқади.

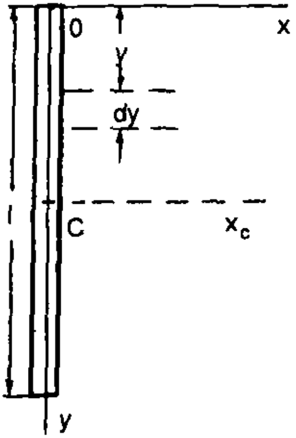
33-*масала.* Бир жинсли ва кўндаланг қирқими ўзгармас бўлган стерженнинг учидан унинг ўқига перпендикуляр ўтган x ўққа нисбатан инерция моменти топилсин. Стерженнинг массаси m ва узунлиги l га тенг.

Ечиш. Стерженнинг ўзгармас зичлиги $\gamma = m/l =$ const га тенг. Массаси γdy га тенг стержен бўлагини ажратамиз (150-расм), у ҳолда бутун стерженнинг x ўқига нисбатан инерция моменти (14.8) га мувофиқ қуйидагига тенг:

$$I_x = \int h_k^2 dm = \int y^2 \gamma\, dy = \frac{\gamma l^3}{3} = \frac{ml^2}{3} \qquad (14.24)$$



149-расм



150-расм

34-*масала.* x_c ўқи стерженнинг оғирлик марказидан ўтган ҳол учун олдинги масала ечилсин (150-расм).

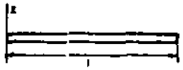
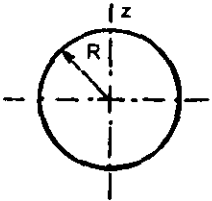
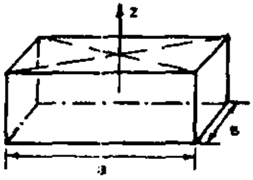
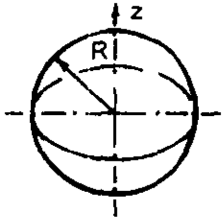
Ечиш. Икки параллел ўқларга нисбатан жисмнинг инерция моментлари орасидаги муносабатни ифодалайдиган Гюгенс-Штейнер теоремасини қўллаймиз (14.19):

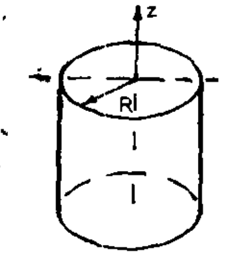
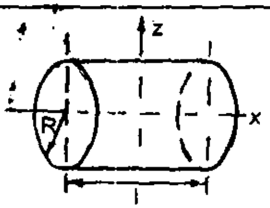
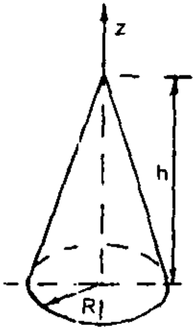
$$I_x = I_{x_c} + md^2,$$

бундан

$$I_{x_c} = I_x - md^2 = ml^2/3 - m(l/2)^2 = \frac{ml^2}{12} \quad (14.25)$$

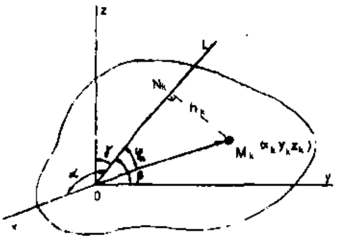
Мана шу тартибда бошқа шаклдаги жисмларнинг ҳам инерция моментларини топишимиз мумкин. Механика масалаларини ечишда кўпроқ учрайдиган шаклдаги жисмларнинг инерция моменти ва инерция радиуслари техникавий жадвалларда берилади.

Жисм хили	Жисм шакли	Инерция моменти	Инерция радиуси
Ингичка стержен		$\frac{ml^2}{3}$	$\frac{l}{\sqrt{3}} = 0{,}577l$
Доиравий юпка пластинка (диск)		$\frac{mR^2}{4}$	0,5R
Тугри бурчакли параллелепипед		$m\frac{a^2+b^2}{12}$	$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2\sqrt{3}} =$ $= 0{,}289\sqrt{a^2+b^2}$
Юпка деворли шар		$\frac{2}{3}mR^2$	$\sqrt{\frac{2}{3}}R = 0{,}816 \cdot R$

Диск ёки доиравий цилиндр (айланиш ўқига нисбатан)		$\frac{mR^2}{2}$	$\frac{R}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707R$
Доиравий цилиндр (кўндаланг ўқига нисбатан)		$\frac{m}{12}(l^2+3R^2)$	$\sqrt{\frac{l^2+3R^2}{12}}$
Доиравий конус (айланиш ўқига нисбатан)		$\frac{3}{10}mR^2$	0,547R

61-§. Берилган нуқтадан ўтувчи ихтиёрий ўққа нисбатан жисмнинг инерция моменти.

Жисмнинг ихтиёрий О нуқтасига Oxyz координата ўқлари системасини жойлаштириб, шу О нуқтадан ихтиёрий ўтган OL ўққа нисбатан мазкур жисмнинг инерция моментини аниқлаймиз.



151-расм

Бўнда биз мазкур жисмнинг I_x, I_y, I_z инерция моментлари ва I_{xy}, I_{yz} I_{zx}марказдан қочма инерция моментларини маълум деб ҳисоблаймиз. OL нинг Ox, Oy, Oz координата ўқлари билан ташкил этган бурчакларини, мос равишда, α, β, γ орқали белгилаймиз. (151-расм).

У ҳолда, таърифга кўра, OL ўққа нисбатан жисмнинг инерция моменти қуйидагича бўлади:

$$I_L = \sum m_k h_k^2. \qquad (14.26)$$

Бу ерда h_k - m_k массали M_k нуқтадан OL ўққача бўлган қисқа масофа. Агар $\mathbf{r}_k$ билан OL орасидаги бурчакни φ_k деб белгиласак:

$$ON_k = r_k \cdot \cos(\varphi'_k) = \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{l}_0$$

га тенг. Бу ерда l_0 - OL нинг бирлик вектори, у Декарт координата ўқларининг бирлик векторлари билан

$$\mathbf{l}_0 = \mathbf{i}\cos\alpha \ + \mathbf{j}\cos\beta \ + \mathbf{k}\cos\gamma$$

каби боғланган. У ҳолда,

$$\mathbf{r}_k = x_k\mathbf{i} + y_k\mathbf{j} + z_k\mathbf{k}$$

радиус векторни $\mathbf{l}_0$ бирлик вектор билан скаляр кўпайтмаси қуйидагига тенг бўлади:

$$\mathbf{r}_k\mathbf{l}_0 = x_k\cos\alpha + y_k\cos\beta + z_k\cos\gamma .$$

Бундан

$$ON_k = r_k\cos\varphi_k = x_k\cos\alpha + y_k\cos\beta + z_k\cos\gamma$$

ифодага келамиз. 151-расмдан $h_k = r_k \sin\varphi_k$ ва

$$h_k^2 = r_k^2 \sin^2\varphi_k = r_k^2 - (r_k \cos\varphi_k)^2 =$$

$$x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 - (x_k \cos\alpha + y_k \cos\beta + z_k \cos\gamma)^2 =$$

$$(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) -$$

$$(x_k \cos\alpha + y_k \cos\beta + z_k \cos\gamma)^2 =$$

$$(y_k^2 + z_k^2)\cos^2\alpha + (z_k^2 + x_k^2)\cos^2\beta + (x_k^2 + y_k^2)\cos^2\gamma -$$

$$2y_k z_k \cos\beta\cos\gamma - 2z_k x_k \cos\gamma\cos\alpha - 2x_k y_k \cos\alpha\cos\beta.$$

Биз бу ерда $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ формуладан фойдаландик. Ҳосил бўлган ушбу ифодани (14.26) га қўйиб, қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\begin{aligned} A &= I_x = \sum m_k\left(y_k^2 + z_k^2\right), \\ B &= I_y = \sum m_k\left(z_k^2 + x_k^2\right), \\ C &= I_z = \sum m_k\left(x_k^2 + y_k^2\right), \end{aligned} \qquad (14.27)$$

$$\begin{aligned} D &= I_{yz} = \sum m_k y_k z_k \\ E &= I_{zx} = \sum m_k z_k x_k \\ F &= I_{xy} = \sum m_k x_k y_k \end{aligned} \qquad (14.28)$$

Бу ерда A, B, C (бизга маълум) x, y, z ўқларга нисбатан жисмнинг инерция моментлари. D, E, F катталиклар жисмнинг *марказдан қочма инерция моментлари* дейилади. Марказдан қочма инерция моментлари, ўқ моментларидан фарқли равишда, мусбат, манфий катталиклар, баъзан эса ҳатто нолга тенг ҳам бўлиши мумкин.

Шундай қилиб, ихтиёрий OL ўққа нисбатан жисмнинг инерция моменти қуйидагича бўлади:

$$I_L = I_x\cos^2\alpha + I_y\cos^2\beta + I_z\cos^2\gamma - 2I_{yz}\cos\beta\cos\gamma -$$
$$2I_{zx}\cos\gamma\cos\alpha - 2I_{xy}\cos\alpha\cos\beta \qquad (14.29)$$

Бу формула ёрдамида жисмнинг берилган x, y, z координата ўқларига нисбатан I_x, I_y, I_z инерция моментлари ҳамда I_{yz}, I_{zx}, I_{xy}, марказдан қочма инерция моментлари ва шунингдек OL ўқнинг Декарт координата ўқлари билан ташкил этган α, β, γ бурчаклари маълум бўлганда, координата бошидан ихтиёрий йўналишда ўтувчи ҳар қандай OL ўққа нисбатан инерция моменти аниқланади. Агар координата ўқлари шу О нуқтага нисбатан бош ўқлар бўлса, бу ўқларга нисбатан марказдан қочма барча инерция моментлари нолга айланади ва (14.29)

$$I_L = I_x \cos^2\alpha \quad + I_y \cos^2\beta \quad + I_z \cos^2\gamma$$

кўринишга келади.

62-§. **Инерция эллипсоиди.**

Жисмда бирор О нуқтани танлаб, Декарт координаталар бошини шу нуқтада жойлаштирамиз. Шу нуқта орқали OL ўқ ўтказамиз. OL нинг йўналишини ўзгаришида жисмнинг OL га нисбатан инерция моменти ҳам ўзгаради. Буни (14.29) даги α, β, γ ларнинг ҳар хил қийматларига мос келадиган турлича йўналишдаги OL ўқларга нисбатан жисмнинг инерция моментини айни шу (14.29) дан ҳисоблаб кўрамиз.

Жисмнинг О нуқтасидан ўтувчи ўқлар дастасига нисбатан унинг инерция моментларининг тақсимланишини геомтрик тасвирлаш учун шу OL ўқда ихтиёрий $OH = R$ масофадаги H нуқтани оламиз (152-расм). У ҳолда H нуқтанинг координаталари $x_1 = R\cos\alpha$, $y_1 = R\cos\beta$, $z_1 = R\cos\gamma$ тенгликлардан топилади.

α, β, γ бурчакларнинг ўзгаришида OL ўққа нисбатан мазкур жисмнинг инерция моментининг ўзгаришини яққол тасаввур этиш мақсадида $OH = R$ кесма узунлигини

$$OH = R = \frac{1}{\sqrt{I_L}} \qquad (14.30)$$

га тенг қилиб танлаймиз.

У ҳолда,

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{R} = x_1\sqrt{I_L}$$

$$\cos\beta = \frac{y_1}{R} = y_1\sqrt{I_L}$$

$$\cos\gamma = \frac{z_1}{R} = z_1\sqrt{I_L}$$

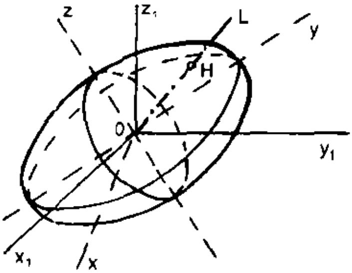
$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ларнинг ушбу қийматларини (14.29) га қўйиб ва ҳосил бўлган тенгламаларнинг икки томонини I_L га қисқартириб қуйидаги тенгламага келамиз:

$$\begin{aligned} &I_{x_1} \cdot x_1^2 + I_{y_1} \cdot y_1^2 + I_{z_1} \cdot z_1^2 - 2I_{y_1 z_1} \cdot y_1 z_1 - \\ &2I_{z_1 x_1} \cdot z_1 x_1 - 2I_{x_1 y_1} \cdot x_1 y_1 = 1 \end{aligned} \qquad 14.31)$$

OL ўқдаги нуқтанинг (x_1, y_1, z_1) координаталари ушбу иккинчи тартибли тенгламани қаноатлантиради. Аниқроқ айтсак, $OH = 1/\sqrt{I_L}$ шарт билан OL ўқнинг йўналишини ўзгаришида, ундаги H нуқта ушбу (14.31) тенглама ифодалаган сирт бўйлаб кўчади. (14.31) сиртга тааллуқли H нуқтадан координаталар боши O гача бўлган масофа (14.30) тенглик билан аниқланади. Ҳар қандай ўққа нисбатан жисмнинг инерция моменти I_L ҳар доим мусбат ва нолдан фарқли катталик бўлганлиги сабабли ушбу (14.31) сиртнинг ҳамма нуқталари координата боши O дан чекли масофада бўлади. Бошқача айтганда, ушбу сиртнинг чексиз узоқдаги нуқтаси бўлмайди, яъни бу сирт O нуқтани ўз ичига қамраган ёпиқ сирт бўлади. Иккинчи тартибли тенгламали сиртлардан фақат эллипсоидгина бундай шартни қониқтиради. (14.31) эллипсоид тенгламасидаги x, y, z ўзгарувчилар олдидаги коэффициентлар жисмнинг инерция моментлари бўлганлиги сабабли бу сирт *инерция эллипсоиди* дейилади.

Аналитик геометриядан маълумки, агар координата ўқлари эллипсоид сиртининг ўзаро перпендикуляр уч йўналишидаги бош диаметрлари бўйича олинса мазкур эллипсоид тенгламаси содда кўринишга келади. Бундай ўқлар системаси (x,y,z) га нисбатан аниқланган эллипсоид (152-расм) тенгламасида координаталарнинг кўпайтмаси бор ҳадлар қатнашмайди.

$$I_x \cdot x^2 + I_y \cdot y^2 + I_z \cdot z^2 = 1 \qquad (14.32)$$



152-расм

152-расмда O нуқта учун аниқланган инерция эллипсоиди ва шу инерция эллипсоиднинг тенгламаси, мос равишда, (14.31) ва (14.32) кўринишни оладиган $Ox_1y_1z_1$ ва $Oxyz$ координата ўқлари системаси тасвирланган. Инерция эллипсоиднинг $Oxyz$ ўқларга нисбатан ёзилган (14.32) тенгламасидан кўрамизки, бу ўқларга нисбатан ҳамма марказдан қочма инерция моментлари нолга тенг. Шундай қилиб, ҳар қандай O нуқта учун, ҳар доим, инерция эллипсоидининг учта шундай симметрия ўқлари мавжудки, улар жисмнинг O нуқтасидаги *инерция бош ўқлари* дейилади. Ушбу инерция бош ўқларига нисбатан жисмнинг инерция моментлари *инерция бош моментлари* дейилади. Жумладан, I_x, I_y, I_z.

Координата ўқлари жисмнинг О нуқтасидаги инерция бош ўқлари билан мос тушган ҳолда ихтиёрий OL ўққа нисбатан қаттиқ жисмнинг инерция моменти қуйидагича аниқланади.

$$I_L = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma .$$

(14.32) тенгламани эллипсоиднинг каноник тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

билан солиштириб, эллипсоид ўқлари учун қуйидаги ифодани топамиз:

$$a = \frac{1}{\sqrt{I_x}},\ b = \frac{1}{\sqrt{I_y}},\ c = \frac{1}{\sqrt{I_z}}.$$

Яъни инерция бош моментларининг каттасига инерция эллипсоидининг кичик ўқи ва аксинча, тўғри келади.

Умумий ҳолда, берилган О нуқтадаги *бош* ўқларга нисбатан жисмнинг инерция бош моментлари ичида ўзаро тенглари бўлмайди ва инерция эллипсоиди уч ўқли бўлади. Агар инерция бош моментларининг иккитаси ўзаро тенг бўлса (масалан, $I_x = I_y$) уч ўқли инерция эллипсоиди айланиш эллипсоидига, яъни икки ўқли эллипсоидга ўзгаради. Агар $I_x = I_y = I_z$ бўлса, инерция эллипсоиди сферага ўтади.

Агар Oxyz координаталар системасининг Oz ўқи маркази О нуқтада бўлган инерция эллипсоидининг Oz бош ўқи бўлса, қолган x ва y координата ўқлари инерция эллипсоидининг О нуқтадаги тегишли ўқлари билан мос тушмаса,

$$I_{xz} = I_{yz} = 0,\quad I_{xy} \neq 0$$

бўлади. Албатта, x ва y ўқлари O нуқтадан ўтиб, ўзаро перпендикуляр Oxyz ўқлар системасини ҳосил қилади.

Шундай қилиб, жисмнинг ҳар бир нуқтасига маълум инерция эллипсоиди тўғри келади ва бу инерция эллипсоиди айни шу нуқтадан ўтувчи ҳамма ўқларга нисбатан жисмнинг инерция моментларини характерлайди. Дарҳақиқат, O нуқтада инерция эллипсоидига эга бўлсак, шу O нуқтадан ўтувчи OL ўққа нисбатан жисмнинг инерция моменти

$$I_L = \frac{1}{(OH)^2}$$

га тенг бўлади. Бу ерда OH OL ўқнинг инерция эллипсоиди билан кесишган нуқтаси H дан координаталар боши O гача бўлган масофа.

Маркази жисмнинг массалар маркази C да олинган инерция эллипсоиди *инерция марказий эллипсоиди* ва бундай эллипсоиднинг бош ўқлари *инерция бош марказий ўқлари* дейилади. Шундай қилиб, қаттиқ жисмнинг массалар маркази C орқали ўтувчи инерция бош ўқи инерция бош марказий ўқ бўлади.

63-§. Инерция бош ва марказий бош ўқларининг хусусиятлари.

Бирор O нуқтадаги Oz инерция бош ўқининг хусусиятини таъкидлаймиз. Агар Oz инерция бош ўқи бўлса, у инерция эллипсоидининг симметрия ўқларидан бири бўлади (x ва y ихтиёрий ўқлар). Инерция эллипсоидининг ҳар бир (x, y, z) нуқтасига Oz га нисбатан симметрик бошқа (x, y,z) нуқта тўғри келади.

Бу иккала нуқтанинг координаталари бир вақтда (14.31) тенгламани қаноатлантиради:

$$Ax^2+By^2+Cz^2-2Dyz-2Ezx-2Fxy=1$$

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx-2Fxy=1$$

Буларни бир-биридан айириб:

$$4Dyz + 4Ezx = 0,$$

ёки

$$z(Dy+Ex) = 0$$

тенгликка келамиз. Бу тенгламани бажарилиши учун D ва E алоҳида- алоҳида нолга тенг бўлиши керак, чунки x, y, z координаталар нолдан фарқли. Демак, *берилган O нуқтадан ўтказилган координата ўқлардан бирортаси жисмнинг инерция бош ўқи бўлса (Oz), унинг бу ўққа тегишли координата билан аниқланган марказдан қочма инерция моментлари нолга тенг.*

$$I_{yz}=D=\Sigma m_k y_k z_k=0, \qquad I_{zx}=E=\Sigma m_k z_k x_k=0.$$

Берилган O нуқтадаги инерция бош ўқи (масалан, Oz) бу ўқда ётувчи бошқа ҳар қандай нуқталар учун жисмнинг инерция бош ўқи бўлаолмайди. Бундан фарқли ўларо, инерция бош марказий ўқи шу ўқ устида ётувчи бошқа ҳамма нуқталар учун жисмнинг инерция бош ўқи бўлади.

Инерция бош ва бош марказий ўқларнинг бу фарқини қараб чиқайлик. Фараз қиламизки, Oz инерция бош ўқи, Cz эса бош марказий бўлсин, яъни:

$$I_{yz}=D=\Sigma m_k y_k z_k=0, \qquad I_{zx}=E=\Sigma m_k z_k x_k=0,$$

тенгликлар ўринли бўлсин. Cz ва Oz ўқларда ихтиёрий O_1 нуқтани олиб, у орқали O_1x_1 ва O_1y_1 ўқлари, мос равишда, Cx, Ox, Cy, Oy ўқларга параллел $O_1x_1y_1z_1$ координаталар системасини ўтказамиз. Ушбу координаталар системасининг x_1,z_1

ва y_1, z_1 ўқларига нисбатан жисмнинг марказдан қочма инерция моментларини аниқлаймиз. Бунда $x_1 = x$, $y_1 = y$, $z_1 = z\text{-}d$ эканлигини ҳисобга оламиз (153-расм).

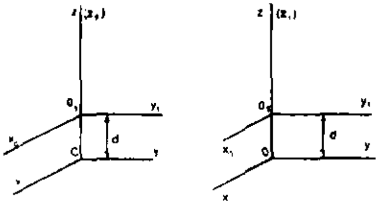
$$I_{y_1z_1} = \Sigma m_k y_k (z_k\text{-}d) = \Sigma m_k y_k z_k\text{-}d\Sigma m_k y_k = I_{yz}\text{-}dmy_c = \text{-}dmy_c$$

$$I_{z_1x_1} = \Sigma m_k x_k (z_k\text{-}d) = \Sigma m_k z_k x_k\text{-}d\Sigma m_k x_k = I_{zx}\text{-}\ dmx_c = \text{-}dmx_c.$$

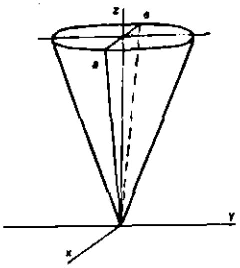
Шундай қилиб,

$$D_1 = I_{y_1z_1} = \text{-}\ dmy_c, \quad E_1 = I_{z_1x_1} = \text{-}\ dmx_c.$$

Бу ерда $m = \Sigma m_k$ - жисм массаси, x_C ва y_C - жисмнинг Cxyz ёки Oxyz координаталар системасига нисбатан массалар маркази координаталари. O_1 нуқтада O_1z_1 ўқ жисмнинг инерция бош ўқи бўлиши учун марказдан қочма иккала инерция моментлар $I_{y_1z_1}$ ва $I_{z_1x_1}$ нолга тенг бўлиши зарур ва етарли. Бунинг учун, юқоридаги ифодаларга кўра, $x_c = y_c = 0$ бўлиши талаб қилинади (чунки $m \neq 0$, $d \neq 0$), яъни жисмнинг массалар маркази z ўқида жойлашган ва демак z ўқи инерция бош марказий ўқ бўлиши керак. Oz учун $x_c \neq 0$, $y_c \neq 0$, массалар маркази Oz устида эмас. Шундай қилиб, инерция бош марказий ўқ (Cz) ўзининг устидаги бошқа барча нуқталар учун



153-расм.



154-расм.

инерция бош ўқи бўлади, инерция бош (марказиймас) ўқ (Oz) эса фақат ўзининг шу битта (O) нуқтаси учунгина инерция бош ўқи бўлади. Инерция бош марказий ва бош ўқларни аниқлашда жисмнинг симметрияларини билиш ниҳоятда осонлик туғдиради. Жисмнинг симметриялари билан боғлиқ қуйидаги иккита қоидани таъкидлаймиз.

1. Агар бир жинсли жисм моддий симметрия ўқига эга бўлса, бу симметрия ўқи унинг инерция бош марказий ўқи ёки ўзининг ҳар бир нуқтаси учун инерция бош ўқи бўлади. Буни ҳисботлаш учун, Oxyz координаталар системасининг Oz ўқини жисмнинг симметрия ўқида оламиз. Симметрия ўқининг боши, албатта, массалар маркази C да жойлашган, яъни O нуқта C билан устма-уст. У ҳолда, симметрияга кўра, жисмнинг m_k массали ва x_k, y_k, z_k координатали ҳар M_k нуқтасига худди шундай m_k массали ва $-x_k$, $-y_k$, z_k координатали бошқа M_k' нуқтаси мос келади. Чунки, моддий симметрия ўқига нисбатан жисмнинг массаси симметрик жойлашган бўлади. Шунинг учун жисмнинг марказдан қочма инерция моментлари I_{yz}, I_{zx} лари ва унинг оғирлик маркази C нуқтанинг x_C, y_C координаталари учун қуйидаги муносабатлар ўринли бўлади:

$$I_{yz} = \Sigma m_k y_k z_k - \Sigma m_k y_k z_k = 0 \qquad I_{zx} = \Sigma m_k x_k z_k - \Sigma m_k x_k z_k$$

$$x_C = \frac{\sum m_k x_k - \sum m_k x_k}{\sum (m_k + m_k)} = 0, \qquad y_C = \frac{\sum m_k y_k - \sum m_k y_k}{\sum (m_k + m_k)} = 0$$

Бу билан, симметрия ўқи, яъни Cz ўқ жисмнинг инерция бош марказий ўқи бўлишлиги исботланди. Шундай қилиб, z ўқига нисбатан жисм массаларининг тақсимланишидаги симметрия шу ўққа мос координата (z) қатнашган I_{yz}, I_{zx} марказдан қочма инерция моментларини нолга айланиши билан характерланади.

Шуни таъкидлаш керакки, *инерция бош ўқи ҳар доим жисмнинг симметрия ўқи бўлавермайди.* Ҳақиқатан ҳам, Oz симметрия ўқига эга бўлган жисмда шу ўқ ётган текислик xOz (ёки yOz) симметрия текислиги бўлади. У ҳолда, симметрияга биноан, жисмнинг $m_к$ массали ва $x_к$, $y_к$, $z_к$ координатали ҳар бир M_k нуқтасига худди шундай m_k массали ва $x_к$, $-y_к$, $z_к$ (ёки $-x_к$,$y_к$,$z_к$) координатали бошқа $M'_к$ нуқтаси мос келади. Натижада, юқоридаги каби, $I_{xy}=0$, $I_{yz}=0$, (ёки $I_{xy}=0$, $I_{zx}=0$,) ҳосил бўлади. Бундан қуйидаги иккинчи қоида исботланади.

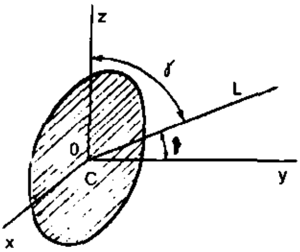
2. Агар бир жинсли жисм моддий симметрия текислигига эга бўлса, бу текисликка перпендикуляр бўлган ҳар қандай ўқ симметрия текислиги билан кесишган нуқтасига нисбатан инерция бош ўқи бўлади.

Юқоридаги 154-расмда, Oxyz координаталар системасининг барча уч ўқлари O нуқта учун инерция бош ўқлари бўлади: Oz ўқи жисмнинг симметрия ўқи бўлганлиги, Ox ва Oy ўқлари эса жисмнинг симметрия текисликларига перпендикуляр бўлганликлари сабабли. Бундан ташқари, жисмнинг массалар маркази C симметрия ўқида ётгани учун унда жисмнинг инерция бош марказий ўқи Cz ҳам жойлашган. Жисмнинг массалар марказини симметрия текислигида жойлашганлигидан эса, C орқали бу текисликка перпендикуляр ўтган Cx ёки Cy ўқлари ҳам жисмнинг инерция бош марказий ўқи бўлади.

35-*масала.* m массали, R радиусли бир жинсли доиравий дискнинг C марказидан ўтувчи ва диск текислиги билан 60^0 бурчак ташкил этган CL ўққа нисбатан инерция моменти топилсин (155-расм).

Ечиш. Координаталар боши O ни дискнинг маркази C, диск текислигини эса xOz текислиги билан устма-уст оламиз. Oxyz ўқларини шундай йўналтирамизки L ўқ yOz текислигида бўлсин. У ҳолда, $\alpha=90^0$, $\beta=30^0$, $\gamma=60^0$ га ва демак, $\cos\alpha=0$, $\cos\beta=\sqrt{3}/2$, $\cos\gamma=1/2$ га тенг бўлади. Белгиланган координата ўқлари x, y, z га нисбатан дискнинг инерция моментини ҳисоблаймиз. Cy ўқи ушбу диск учун айланиш симметрия ўқи, шунинг учун у жисмнинг инерция бош марказий ўқи бўлади. Cx, Cz ўқлари ҳам симметрия ўқларидир. Демак, Cxyz ўқларини дискнинг инерция бош марказий ўқларида танлаймиз. Айни ҳолда, барча марказдан қочма инерция моментлари $I_{xy}=I_{yz}=I_{xz}=0$, ўқларга нисбатан инерция моментлари:

$$I_x=I_z=\frac{mR^2}{4}, \quad I_y=\frac{mR^2}{2}$$



155-расм.

га тенг. Энди CL ўққа нисбатан дискнинг инерция моментини ҳисоблаймиз:

$$I_L=\frac{mR^2}{2}\cdot\frac{3}{4}+\frac{mR^2}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{7}{16}mR^2.$$

XV боб

МЕХАНИК СИСТЕМА МАССАЛАР МАРКАЗИ ҲАРАКАТИ ҲАҚИДА ТЕОРЕМА

64-§. Динамиканинг умумий теоремалари.

Моддий нуқта динамикасининг иккинчи асосий масаласини қараганимизда, унинг ечими, моддий нуқта ҳаракати дифференциал тенгламаларини, умуман айтганда, етарлича математик қийинчиликлар орқали, интеграллаш методи билан боғлиқ эканлиги ва айниқса, нуқтага таъсир этувчи куч бир вақтда бир қанча ўзгарувчилар: нуқтанинг ҳаракат вақти, координаталари ва тезлигининг функцияси бўлганда ҳатто биргина нуқта учун ҳам, умумий ҳолда, (ягона) ечимга эришиш мумкин эмаслиги қайд қилиб ўтилган эди. Жумладан, бутун олам тортишиш қонуни бўйича ўзаро таъсирлашувчи кучлар таъсирида ҳаракатланувчи иккита моддий нуқта (икки жисм ҳақидаги масала) ҳоли учун мазкур интеграллаш методи ёрдамида динамиканинг иккинчи асосий масаласини ечиш ниҳоятда қийин ва уч нуқта (уч жисм ҳақидаги масала) ҳолида бутунлай ечиб бўлмайди. Тенгламаларида бирталай номаълумлар қатнашадиган механик системанинг ҳаракати учун бу методни қўллашда яна ҳам катта қийинчиликлар пайдо бўлади.

Бироқ, динамиканинг кўпгина амалий масалаларида қаралаётган ҳаракат тўла (ҳар томонлама) ўрганилмасдан, балки, фақат, уни у ёки бу томонларинигина аниқлаш талаб этилади. Шунинг учун ҳам, динамиканинг қатор масалаларини ечишда, айниқса система динамикасида ҳаракатнинг дифференциал тенгламаларини интеграллаш методи ўрнига, *динамиканинг умумий (асосий) теоремалари* деб аталган ва динамиканинг асосий қонунининг натижаси бўлган теоремалардан фойдаланиш жуда қулай.

Динамиканинг умумий теоремалари механик система ҳаракатини тўла характерловчи бир неча асосий динамик характеристикалар орасидаги муносабатларни ифодалайди ва шу билан техникада кенг қўлланиладиган механик система ҳаракатини текширишнинг янги имконини яратиб беради. Бу теоремаларнинг муҳим аҳамияти ана шундан иборат. Бундан ташқари динамиканинг умумий теоремалари қаралаётган ҳодисани тўла ўрганмасдан балки амалий аҳамиятга эга бўлган муҳим томонларини алоҳида ўрганишга имкон беради.

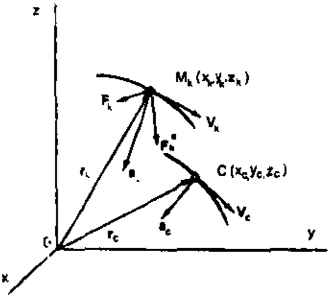
Шунингдек, ҳар бир масалани ечишда бу теоремаларни тадбиқ этиш ҳар гал у ёки бу умумий теоремаларни келтириб чиқариш билан боғлиқ математик амалларни бажаришдан халос этади ва шу билан динамика масалаларини ечиш жараёнини бирмунча соддалаштиради. Бундан ташқари, баъзан динамиканинг умумий теоремалари ёрдамида механик система ҳаракати дифференциал тенгламаларининг биринчи интегралига, яъни координаталарнинг вақт бўйича иккинчи ҳосиласи қатнашмайдиган муносабатларга эга бўламиз. Гарчи, алоҳида биринчи интеграллар системанинг барча нуқталари ҳаракатини тўлиқ аниқлай олмаса-да, аммо баъзан улар бутун система ҳаракатининг муҳим томонларини характерлайди. Агар биринчи интеграллар маълум бўлса, механик система ҳаракат қонунини келтириш ва демак, системанинг ҳаракатини текшириш осонлашади.

65-§. Механик система ҳаракатининг дифференциал тенгламалари.

Айтайлик, n-та нуқталардан ташкил топган система ва унга таъсир этувчи ички ва ташқи кучлар берилган бўлсин. Агар системанинг ихтиёрий к-нуқтасига ташқи кучларнинг $\mathbf{F}_k^e$ тенг таъсир этувчиси ва ички кучларнинг $\mathbf{F}_k^i$ тенг таъсир этувчиси қўйилган бўлса (156-расм). У ҳолда системанинг ушбу нуқтасининг ҳаракат дифференциал тенгламасини динамиканинг асосий тенгламасига кўра тузиш мумкин, масалан, у вектор кўринишда қуйидагича ёзилади:

$$m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = \mathbf{F}_k^e + \mathbf{F}_k^i \qquad (15.1)$$

Бу ерда $k = \overline{1, n}$ бўлганлигидан (15.1) n-та тенгламалар системасини ҳосил қилади. (15.1) га *механик система ҳаракатининг дифференциал тенгламаларининг вектори ифодаси* дейилади.



156-расм

Ушбу векторли дифференциал тенгламаларни Декарт координата ўқларига проекциялаб, механик система нуқталари ҳаракатининг 3-n та дифференциал тенгламалар системасини ҳосил қиламиз.

$$\begin{aligned} m_k \ddot{x}_k &= F_{xk}^e + F_{xk}^i, \\ m_k \ddot{y}_k &= F_{yk}^e + F_{yk}^i, \qquad \left(k = \overline{1, n}\right) \quad (15.1') \\ m_k \ddot{z}_k &= F_{zk}^e + F_{zk}^i. \end{aligned}$$

Берилган кучларга ва бошланғич шартларга кўра, механик системанинг ҳар бир нуқтасининг ҳаракатини аниқлаш учун иккинчи тартибли 3-n та дифференциал тенгламалар системасини интеграллаш керак бўлади. Умумий ҳолда, тенгламаларнинг сони катта бўлганлаги ва бошқа сабабларга кўра бу масаланинг аниқ ечими топилмаган.

Механик система ҳаракатнинг ушбу 3-n та дифференциал тенгламалар системасини аналитик ечиб бўлмасликнинг бошқа сабаби тенгламанинг чап қисмига кирувчи ички кучларнинг функционал кўринишининг номаълумлиги бўлса, яна бир сабаби, бу ички кучларни механик система n нуқталарининг ҳали аниқланиши керак координаталарига боғлиқлиги. 3-n дифференциал тенгламаларни интеграллашдаги яна бир қийинчилик механик системанинг барча n нуқталари учун, умумий ҳолда, бошлангич шартларни тўла ҳисобга олиб бўлмаслик билан боғлиқдир. Шунинг учун ҳам, механик системанинг ҳаракатини унинг дифференциал тенгламаларини аналитик ечиш билан тавсифлаш мумкин эмас. Бу масалани электрон ҳисоблаш машиналарини қўллаб етарлича аниқлик билан тақрибий ечиш мумкин.

Бироқ, динамиканинг кўпгина амалий масалаларида система нуқталарининг ҳар бирининг ҳаракати ўрганилмасдан бутун система ҳаракатининг баъзи йиғинди ўлчовлари ўзгаришини кучлар таъсирининг йиғинди ўлчовларига боғлиқ равишда аниқлаш талаб этилади халос. Шунинг учун, механик система динамикасида дифференциал тенгламаларни интеграллаш методи ўрнига умумий теоремалар қўлланилади.

66-§. Механик система массалар марказининг ҳаракати ҳақида теорема.

Механик система массалар маркази унинг ҳаракатини характерловчи асосий динамик характеристикаларидан ҳисобланади. Баъзи ҳолларда система ҳаракатининг характерини билиш учун мазкур система массалар марказининг ҳаракат қонунини аниқлашнинг ўзи кифоя. Механик системанинг ҳаракатида унинг массалар маркази ҳам фазода кўчади. Энди, массалар марказининг ҳаракати қандай содир бўлишини қараймиз. Бунинг учун (15.1) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 r_1}{dt^2} &= F_1^e + F_1^i \\ m_2 \frac{d^2 r_2}{dt^2} &= F_2^e + F_2^i \\ &\cdots\cdots \\ m_n \frac{d^2 r_n}{dt^2} &= F_n^e + F_n^i \end{aligned} \qquad (15.2)$$

(15.2) тенгламанинг чап ва ўнг томонларини ҳадлаб қўшамиз:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d^2 r_k}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} F_k^e + \sum_{k=1}^{n} F_k^i \qquad (15.3)$$

(14.5) тенгламанинг иккала томонини m га кўпайтириб ҳамда t бўйича икки марта ҳосила олиб топамиз:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d^2 r_k}{dt^2} = m \frac{d^2 r_c}{dt^2} \qquad (15.4)$$

(15.3) ва (15.4) тengликларга биноан қуйидагига эга бўламиз:

$$m \frac{d^2 r_c}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} F_k^e + \sum_{k=1}^{n} F_k^i \qquad (15.5)$$

тенгламанинг ўнг томонидаги биринчи йиғинди ҳад система нуқталарига қўйилган барча ташқи кучларнинг бош векторини ифодалайди

$\sum F_k^e = R^e$. Иккинчи йиғинди ҳад $\sum F_k^i = R^i$ эса, *ҳамма ички кучларнинг бош векторини ифодалаб*, ички кучларнинг хоссасига кўра нолга тенг бўлади. Шунинг учун , натижада

$$m\frac{d^2 r_c}{dt^2} = R^e \qquad (15.6)$$

келиб чиқади. Охирги вектор тенгламанинг иккала томонини координата ўқларига проекциялаб ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_c &= R_x^e, \\ m\ddot{y}_c &= R_y^e, \qquad (15.7) \\ m\ddot{z}_c &= R_z^e. \end{aligned}$$

(15.6) тенглама система массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремани векторли ифодасини, (15.7) эса, ана шу теореманинг координата ўқларига проекциялардаги аналитик ифодасини англатади. Бошқача қилиб айтганда, бу (15.7) дифференциал тенгламалар массаси m бўлган ва ташқи кучлар таъсиридаги массалар маркази С моддий нуқтанинг ҳаракатини ифодалайди.

Шундай қилиб, системанинг ҳар қандай (илгариланма) ҳаракатланиш имкони бўлса, у ҳолда унинг *массалар маркази массаси бутун система массасига тенг бўлган ва система нуқталарига таъсир этувчи барча ташқи кучларнинг бош вектори таъсиридаги моддий нуқта каби ҳаракатда бўлади.*

Бу теорема кўп ҳолларда механик системанинг ҳаракатини текширишни массалар марказининг (моддий нуқта) ҳаракатини текшириш билан алмаштиришга ва системадаги номаълум бўлган барча ички кучлардан озод бўлишга имкон беради. Бундан ташқари, унинг асосида системанинг илгариланма ҳаракати ҳам аниқланади. Механик система массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теореманинг амалий моҳияти ҳам ана шундан иборат. Система массалар марказининг ҳолатини ва ҳаракатининг характерини фақат ташқи кучларгина ўзгартириши мумкин. Механик система массалар марказининг ҳаракати ички кучларга боғлиқ эмас.

Система массалар марказининг ҳаракати ички кучларнинг таъсирига боғлиқ эмаслиги Ньютон томонидан ифодаланган. Биринчи қарашда баъзан система массалар марказининг ҳаракати (кўчиши) унинг ички кучлари таъсирида вужудга келаётгандек туюлиши мумкин. Масалан, автомобилнинг тезлигини оширишда газнинг босим кучи оширилади, яъни системанинг ички кучлари орттирилади. Оёқ мускуллари ривожланган одам ночар одамни осон қувиб ўтади ва бошқалар. Аммо, булардан системаларнинг массалар маркази уларнинг ички кучлари туфайли ҳаракатда бўлади деган хулоса келиб чиқмайди. Келтирилган мисолларда ички кучлар (мускул кучлари) берилган система нуқталарини фақат уни ўраб олган моддий жисмларга таъсир эттиришга мажбур қилади, бундан берилган система массалар марказининг ҳаракатини вужудга келтирувчи ташқи кучлар пайдо бўлади. Ҳақиқатан, одам ўзининг мускул кучлари (ички кучлари) ёрдамида ерга оёғи билан тиралади, бундан оёқ билан ернинг тегишган нуқтасида, унинг ҳаракати томонига йўналган ва бутун система (одам)ни силжий олишига имкон берувчи ишқаланиш кучи (одам учун ташқи) пайдо бўлади. Бу куч одамнинг ички кучларига боғлиқ албатта, аммо у ташқи куч бўлади ва ишқаланиш бўлмаганда эса, одам силлиқ сирт (йўл) бўйлаб юраолмаган бўлар эди, яъни ички кучлар система массалар марказининг ҳолатини ўзгартира олмайди.

Автомобиль массалар марказининг силжишини ҳам худди юқоридагидек талқин қилиш мумкин. Газнинг поршенга кўрсатадиган босим кучи автомобиль учун ички куч бўлганлигидан унинг массалар марказини силжита олмайди, у фақат етакловчи ғилдиракка айлантирувчи момент (ички куч) бериши мумкин, натижада етакловчи ғилдирак айланади ва ғилдирак билан йўл текислиги тегишиб турган нуқтада ишқаланиш кучи пайдо бўлади. Бу куч ташқи куч бўлиб, автомобиль массалар марказининг силжишига имкон беради. Бундай мисолларни кўплаб келтириш мумкин.

67-§. Қаттиқ жисмнинг илгариланма ҳаракат дифференциал тенгламалари.

Кинематикадан бизга маълумки, қаттиқ жисмнинг илгариланма ҳаракати унинг бирор нуқтасининг, жумладан, массалар марказининг ҳаракати билан аниқланади. Демак, жисмнинг массалар маркази ҳаракатини массаси жисм массасига тенг нуқта ҳаракати каби ечиб қаттиқ жисмнинг илгариланма ҳаракатини ҳам аниқлаш мумкин. Шунинг учун, жисм массалар маркази ҳаракатининг дифференциал тенгламалари (15.6), (15.7) қаттиқ жисмнинг илгариланма ҳаракат дифференциал тенгламалари ҳам бўлади. Бошқача қилиб айтганда, қаттиқ жисмнинг илгариланма ҳаракати унинг массалар маркази С нинг ҳаракати билан тўла аниқланади. Шунинг учун унинг ҳаракати битта векторли тенглама билан ифодаланади:

$$M\mathbf{a}_c = \mathbf{R}^e$$

ёки

$$M\ddot{\mathbf{r}}_c = \mathbf{R}^e$$

Бу ерда $\mathbf{R}^e$ - жисмга таъсир этувчи ташқи кучларнинг бош вектори. Қаттиқ жисмнинг илгариланма ҳаракат дифференциал тенгламасини Декарт координата ўқларига нисбатан қуйидаги учта скаляр тенгламалар ифодалайди:

$$M\ddot{x}_c = R_x^e,$$

$$M\ddot{y}_c = R_y^e,$$

$$M\ddot{z}_c = R_z^e.$$

Шундай қилиб, қаттиқ жисмнинг илгариланма ҳаракати массаси шу жисм массасига тенг битта нуқтанинг - массалар марказининг ҳаракатини ўрганишга келтирилади.

Қаттиқ жисмнинг илгариланма ҳаракат дифференциал тенгламалари билан қуйидаги икки асосий масалаларни ечиш мумкин:

1)қаттиқ жисмнинг берилган ҳаракат тенгламасига кўра унга қўйилган кучларнинг бош векторини аниқлаш ва

2)ташқи кучлар ва бошланғич маълумотларга кўра илгариланма ҳаракатланаёттан жисмнинг ҳаракат тенгламаларини аниқлаш.

68-§. Система массалар маркази ҳаракатининг сақланиш қонуни.

Биринчи интеграллар. Нуқта ёки система ҳаракатининг биринчи интеграли деб, ҳаракат вақти, нуқта координаталари, унинг тезлигининг проекциялари ҳамда бирор ихтиёрий ўзгармаслар орасидаги боғланишларни ифодалайдиган муносабатга айтилади ва у шундай хусусиятга эгаки, унда қатнашадиган ихтиёрий ўзгармасларнинг исталган қийматларида ҳаракат дифференциал тенгламаларни каноатлантирувчи нуқта координаталари ва тезлигининг проекциялари қийматлари бу муносабатга қўйилганида, у айниятга айланади. Юқорида динамиканинг умумий теоремалари ёрдамида система ҳаракатининг биринчи интегралига эришиш мумкин эканлиги қайд қилиб ўтилган эди. Энди, айни ушбу теорема қачон биринчи интегралга олиб келишини тушунтирамиз.

1. Айтайлик, қаралаётган системага ташқи кучлар таъсир этмасин ёки уларнинг бош вектори нолга тенг бўлсин. У ҳолда (15.6) га кўра $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a}_c = 0$ келиб чиқади, яъни

$$\mathbf{v}_c = \text{const.} \qquad (15.8)$$

2. Механик системага таъсир қилаётган ташқи кучларнинг бош вектори нолга тенг эмас, аммо бирор ўққа унинг проекцияси (масалан, x ўққа) нолга тенг, яъни $F_x^e = 0$. У ҳолда $\ddot{x}_c = a_{cx} = 0$, ёки бундан қуйидагига келамиз:

$$\dot{x}_c = v_{cx} = \text{const.} \qquad (15.8')$$

Шундай қилиб, механик системага таъсир қилаётган ташқи кучларнинг (ёки уларнинг бирор ўққа проекцияларининг) йиғиндиси нолга тенг бўлса, бундай механик системанинг массалар маркази йўналиши ва қиймати ўзгармас (ёки бирор ўқ бўйлаб ўзгармас) тезлик билан ҳаракатланади. (15.8), (15.8′) тенгликлар система массалар маркази ҳаракатининг биринчи интеграллари дейилади.

Демак, механик системага қўйилган барча ташқи кучларнинг бош вектори нолга тенг бўлса, бундай системанинг массалар маркази, агар бошланғич ҳолатда ҳаракатсиз бўлса, тинч ҳолатда ёки тўғри чизиқли текис ҳаракатда бўлади. Бу механик система массалар маркази ҳаракатининг сақланиши ҳақидаги теоремани ёки қонунни ифодалайди.

Агар механик система ҳаракатида унинг массалар маркази бошланғич пайтда тинч ҳолатда бўлса $\mathbf{v}_c = 0$ бўлиб, натижада

$$\mathbf{r}_c = \text{const}, \qquad (15.9)$$

бўлади. Шунингдек, (15.8′) тенглик қуйидаги кўринишга келади:

$$\dot{x}_c = 0,$$

бундан

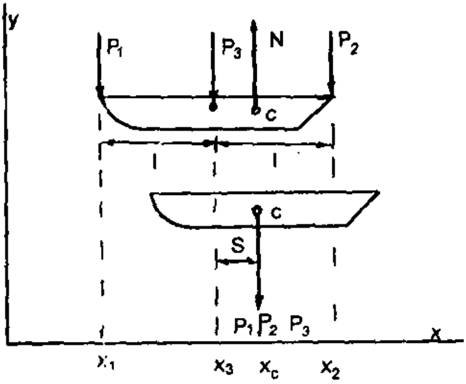
$$x_c = \text{const}, \qquad (15.10)$$

келиб чиқади.

Масалалар ечишда система массалар маркази ҳаракатининг сақланиш қонуни деб аталган (15.9) ва (15.10) натижалардан фойдаланиш қулай. Механик система массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теорема [(15.6) ва (15.7)] дан фойдаланиб нуқта динамикасининг икки асосий масаласини ечиш мумкин. Жумладан, (15.7) тенгламаларни маълум бошланғич шартларда интеграллаб, жисм массалар марказининг ҳаракат тенгламалари $x_c = x_c(t)$, $y_c = y_c(t)$, $z_c = z_c(t)$ аниқланади.

36-*масала*. Оғирлиги P_3 га тенг қайиқнинг қуйриғида оғирлиги P_1 га, тумшиғида эса оғирлиги P_2 га тенг иккита одам ўтирибди. Бу иккала одам орасидаги масофа, яъни қайиқ узунлиги 2l га тенг. Қайиқ кўлдаги турғун сувда ҳаракатсиз турибди. Сувнинг қайиқ ҳаракатига қаршилигини ҳисобга олмасдан, қайиқ ўртаси- оғирлик марказга одамларнинг кўчишида қайиқнинг қандай S-масофага силжиши аниқлансин. $P_3 > P_2 > P_1$ деб ҳисоблансин. Қайиқнинг оғирлик маркази унинг ўртасида олинсин 157-расм.

Ечиш. Икки одам ва қайиқдан иборат механик система одамларнинг оғирликлари P_1, P_2, қайиқнинг оғирлиги P_3 ва сувнинг реакцияси N каби тўртта ташқи вертикал кучлар таъсирида ҳаракат сиз турибди. Сувнинг реакцияси N системанинг оғирлик (бизнинг ҳолда, ҳам массалар) марказидан ўтиб вертикал юқорига йўналган, қиймати эса $N = P_1 + P_2 + P_3$ га тенг.



расм-157

Қўзғалмас ихтиёрий О марказдан горизонтал ва вертикал ху координата ўқларини ўтказамиз. У ҳолда, барча ташқи кучларнинг х ўқига проекциялари ва демак, ташқи кучлар бош векторининг х ўқига проекцияси нолга тенг бўлади. Шунинг учун $\dot{x}_C = v_{Cx}$ const. Механик система бошланғич пайтда тинч турганлигидан унинг оғирлик (массалар) маркази ҳаракатсиз қолади, яъни $\dot{x}_C = v_{Cx} = 0$ бўлиб, x_C = const.

Механик система нуқталарининг бошланғич ва охирги ҳолат координаталарини, мос равишда, x_C, x_1, x_2, x_3, x'_C, x'_1, x'_2, x'_3 билан белгиласак, масаланинг шартига кўра $x_C = x'_C$, бу ерда:

$$x_C = \frac{P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3}{P_1 + P_2 + P_3}$$

$$x'_C = \frac{P_1x'_1 + P_2x'_2 + P_3x'_3}{P_1 + P_2 + P_3}.$$

Механик системанинг охирги ҳолат координаталари билан бошланғич ҳолат координаталари қуйидагича боғланган:

$$x'_1 = x_1 + l + S; \quad x'_2 = x_2 - l + S; \quad x'_3 = x_3 + S.$$

Бундан $P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 = P_1 (x_1 + l + S) +$
$$+ P_2 (x_2 - l + S) + P_3 (x_3 + S)$$

ёки

$$S = \frac{P_2 - P_1}{P_1 + P_2 + P_3} l,$$

ҳосил бўлади. Натижага кўра, одамларнинг қайта жойлашиши қайиқни қуйидаги уч ҳолда S масофага силжишига олиб келмайди.

1) $l = 0$ - тривиал ҳол - бошланғич пайтдаёқ одамлар қайиқ ўртасида;

2) $P_1 = P_2$ - одамларнинг оғирликлари бир-бирига тенг;

1) $P_3 >> P_1 + P_2$ - қайиқнинг оғирлиги ҳаддан ташқари катта, яъни қайиқмас параход бўлса.

XVI боб

МОДДИЙ НУҚТА ВА МЕХАНИК СИСТЕМА ҲАРАКАТ МИҚДОРИНИНГ ЎЗГАРИШИ ҲАҚИДА ТЕОРЕМА

69-§. Куч импульси. Моддий нуқта ва система ҳаракат миқдори.

Механикада ҳаракат миқдори тушунчаси билан кучнинг импульси деб аталган тушунча чамбарчас боғланган. Дастлаб нуқтага ёки системага таъсир этаётган куч миқдор ва йўналиш жиҳатидан ўзгармас бўлган ҳолини қараймиз. Ўзгармас кучнинг бирор вақт ичидаги *импульси* деб, **F** кучни берилган вақт оралиғи t га кўпайтмасига тенг векторга айтилади. Кучнинг импульсини **S** орқали белгиласак, қуйидагини ёзаоламиз:

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}t \qquad (16.1)$$

Вақт скаляр катталик бўлганлигидан, **S** вектори **F** куч вектори билан бир йўналишда бўлади.

Демак, **F** кучнинг моддий нуқтага t вақт ичида кўрсатадиган таъсири куч импульси билан характерланади. Куч импульсининг бирлиги $H \cdot c$да ўлчанади. Унинг бирлиги ҳаракат миқдори бирлиги билан ўлчанишини кўрамиз.

Ўзгарувчан кучнинг бирор чекли t вақт ичидаги импульсини аниқлаш учун бу вақт оралиғини чексиз кўп чексиз кичик элементар вақтларга ажратамиз. Ҳар қайси бундай чексиз кичик вақт оралиғида таъсир этувчи кучни миқдор ва йўналиш жиҳатидан ўзгармас деб ҳисоблаш мумкин. Кучнинг чексиз кичик вақт оралиғидаги таъсирини характерлайдиган куч импульсига *элементар импульс* дейилади. Элементар импульсни dS билан белгиласак қуйидагига эга бўламиз:

$$dS = \mathbf{F} \cdot dt. \tag{16.2}$$

F кучнинг t вақт ичидаги тўла импульси ёки куч импульси **S** қуйидаги формулага кўра аниқланади:

$$\mathbf{S} = \int_0^t \mathbf{F} \cdot dt \tag{16.3}$$

Куч импульсининг Декарт координата ўқлардаги проекциялари ушбу формулалар билан ифодаланади:

$$S_x = \int_0^t F_x dt;\ S_y = \int_0^t F_y dt;\ S_z = \int_0^t F_z dt. \tag{16.4}$$

Куч ўзгармас бўлган ҳолда унинг импульсининг координата ўқларидаги проекциялари:

$$S_x = F_x t;\ S_y = F_y t;\ S_z = F_z t. \tag{16.5}$$

Шундай қилиб, куч импульси шу куч томонидан у қўйилган нуқта (жисм ёки механик система) га механик ҳаракатни маълум вақт давомида узатилишини характерлайди, яъни механик ҳаракатни узатилишидаги куч таъсирининг вектор ўлчовидир. *Кучнинг таъсир натижасини кучнинг макдор ва йўналишига, ҳамда таъсир маддатига боғлаб характерловчи вектор катталикка куч импульси* дейилади.

Юқоридаги (16.1) ёки (16.3) ифодаларга мувофиқ кўрамизки, *кучларнинг вектор йиғиндисининг импульси кучлар импульсларининг вектор йиғиндисига, яъни бош векторнинг импульси кучлар импульсларининг бош векторига тенг бўлади.*

Моддий нуқта ёки система ҳаракатининг ўлчовларидан яна бири сифатида унинг ҳаракат миқдори қаралади. Механик ҳаракат бир жисмдан бошқасига механик ҳаракат кўринишида узатилса механик ҳаракатнинг ўлчови сифатида ҳар гал ҳаракат миқдори қўлланилади.

Массаси m *ва тезлиги* $\mathbf{v}$ бўлган моддий нуқтанинг ҳаракат миқдори, нуқта массасини унинг тезлигига кўпайтмасига тенг ва тезлик бўйлаб йўналган $\mathbf{q}$ вектор билан ифодаланади:

$$\mathbf{q} = m\mathbf{v}. \qquad (16.6)$$

Моддий нуқта ҳаракат миқдорининг Декарт координата ўқларидаги проекциялари:

$$q_x = mv_x = m\dot{x}, \quad q_y = mv_y = m\dot{y}, \quad q_z = mv_z = m\dot{z}. \qquad (16.7)$$

га тенг. СИ системасида ҳаракат миқдори кгм/с ёки Н·с билан ўлчанади.

Механик системанинг ҳаракат *миқдори* деб, унинг нуқталари ҳаракат миқдорларининг геометрик йиғиндисига тенг бўлган $\mathbf{Q}$ векторига айтилади:

$$\mathbf{Q} = \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{v}_k \qquad (16.8)$$

ва демак, система ҳаракат миқдорининг Декарт координата ўқларидаги проекциялари:

$$Q_x = \sum m_k v_{kx}, \quad Q_y = \sum m_k v_{ky}, \quad Q_z = \sum m_k v_{kz} \qquad (16.9)$$

га тенг бўлади.

Механик система ҳаракат миқдори вектори $\mathbf{Q}$, нуқта ҳаракат миқдори $\mathbf{q}$ дан фарқланиб, қўйилган нуқтаси бўлмайди. Моддий нуқта ҳаракат миқдори вектори ҳаракатланаётган нуқтага қўйилади; $\mathbf{Q}$ вектор эса, эркин вектор бўлади.

Механик система ҳаракат миқдорини системанинг массаси ва унинг массалар марказининг тезлиги орқали ифодалаш мумкин. Механик системанинг ҳаракатида унинг нуқталарининг координаталари M_k (x_k, y_k, z_k) ва система массалар марказининг координаталари
C (x_C, y_C, z_C) *каби* ўзгариб боради (156-расм).(14.5) формуладан қуйидагини ёзаоламиз:

$$\sum m_k \mathbf{r}_k = m\mathbf{r}_c$$

Тенгликнинг ҳар икки томонидан вақт бўйича ҳосила олиб қуйидагига эга бўламиз:

$$\sum m_k \dot{\mathbf{r}}_k = m\dot{\mathbf{r}}_c$$

ёки

$$\sum m_k \mathbf{v}_k = m\mathbf{v}_c$$

Таърифга кўра ва юқоридагини эътиборга олсак:

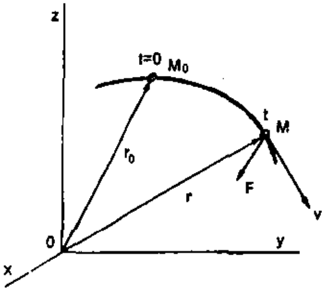
$$\mathbf{Q} = \sum m_k \mathbf{v}_k = m\mathbf{v}_c \qquad (16.10)$$

келиб чиқади.

Шундай қилиб, системанинг ҳаракат миқдори унинг массасини массалар марказининг тезлигига кўпайтмасига тенг ва шу тезлик бўйлаб йўналади. Ҳаракат миқдори системанинг (массалар маркази билан биргаликдаги) ҳаракатининг фақат илгариланма исминигина характерлай олиши (15.14) дан равшан. Масалан, ўз ўқи атрофида бурчак тезлик билан айланаётган бир жинсли цилиндрнинг ҳаракат миқдори нолга тенг. Чунки, цилиндрнинг массалар маркази унинг айланиш ўқида ётади ва қўзғалмас бўлади, яъни $\mathbf{v}_C = 0$, демак, ҳаракат миқдори жисм ҳаракатининг илгариланма ҳаракат қисмини ифодалайди.

70-§. Моддий нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақида теорема.

Механик ҳаракатнинг вектор ўлчовларидан бири нуқта ҳаракат миқдори билан унга таъсир этувчи куч ва унинг импульси орасидаги муносабатларни аниқлаймиз. Бу муносабатни келтириш учун M нуқтанинг бирор Oxyz саноқ системасига нисбатан **F** куч таъсиридаги ҳаракатини текширамиз (158-расм). Динамиканинг асосий қонуни (13.1) га кўра бу моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасини ушбу кўринишда оламиз



158-расм.

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$$

Масса ўзгармас деб ҳисобланиши сабабли уни дифференциал ишораси остига киритиш мумкин. У ҳолда

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}. \qquad (16.11)$$

Моддий нуқта ҳаракат миқдоридан вақт бўйича олинган биринчи тартибли векторли ҳосила нуқтага таъсир этувчи кучга тенг. (16.11) муносабат моддий нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теореманинг дифференциал ифодасидир. (16.11) тенгламада ўзгарувчиларни ажратсак ва унинг иккала томонини тегишли чегараларда интеграллаcак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int_{v_0}^{v} d(m\mathbf{v}) = \int_{0}^{t} \mathbf{F}dt$$

бундан

$$m\mathbf{v} - m\mathbf{v}_0 = \mathbf{S} \qquad (16.12)$$

Моддий нуқта ҳаракат миқдорининг бирор чекли вақт оралиғидаги ўзгариши унга таъсир этувчи кучнинг шу вақт ичидаги импульсига тенг. (16.12) муносабат моддий нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теореманинг чекли векторли ифодасидир. Уни кўпинча *импульслар теоремаси* деб ҳам аташади. (16.12) тенгламани проекциялар кўринишида ифодалаймиз:

$$mv_x - mv_{0x} = S_y;\ mv_y - mv_{0y} = S_y;\ mv_y - mv_{0y} = S_y. \quad (16.13)$$

Бу ерда

$$S_y = \int_0^t F_y dt,\quad S_y = \int_0^t F_y dt,\quad S_z = \int_0^t F_z dt,$$

нуқтага қўйилган куч импульсининг координата ўқларидаги проекциялари. (16.13) муносабат нуқта ҳаракат миқдори проекциясининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди. Демак, *моддий нуқта ҳаракат миқдорининг бирор координата ўқи бўйича чекли вақт ичида ўзгариши шу нуқтага таъсир этувчи кучнинг шу вақт оралиғидаги импульсининг мазкур ўқдаги проекциясига тенг.*

Моддий нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремаларнинг исталган ифодаси аслида нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасидан фарқ қилмайди.

Боғланишдаги моддий нуқта учун теоремаларни ифодаловчи (16.11) ва (16.12) тенгламаларнинг ўнг томонига боғланиш реакциялари ва уларнинг импульсларини ҳам киритиш зарур.

71-§. Механик система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақида теорема.

Моддий нуқта ҳаракат миқдори теоремасини система учун умумлаштириб, система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теореманинг турли ифодасини келтирамиз. Механик системага таъсир этувчи барча кучларни ташқи ва ички гуруҳларга ажратамиз. У ҳолда, системанинг ҳар қайси нуқтасига нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани қўллаш мумкин, масалан, (16.11) ифодани қўллаб, ёзаоламиз:

$$\frac{d}{dt}\left(m_k \mathbf{v}_k\right) = \mathbf{F}_k^e + \mathbf{F}_k^i, \quad (k = \overline{1,n}) \qquad (16.14)$$

Бу муносабатларнинг чап ва ўнг томонларини системанинг ҳамма нуқталари бўйича ўшиб ва ҳосиланинг йиғиндиси йиғиндининг ҳосиласига тенглигини эътиборга олиб, ҳосил қиламиз:

$$\frac{d}{dt}\sum m_k \mathbf{v}_k = \sum \mathbf{F}_k^e + \sum \mathbf{F}_k^i$$

Ички кучларнинг хоссаси ва система ҳаракат миқдорининг таърифига биноан:

$$\sum \mathbf{F}_k^i = 0, \quad \sum m_k \mathbf{v}_k = \mathbf{Q}, \quad \sum \mathbf{F}_k^e = \mathbf{R}^e$$

У ҳолда, келтирилган муносабатларни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{R}^e \qquad (16.15)$$

Шундай қилиб, *система ҳаракат миқдори векторининг вақт бўйича биринчи тартибли ҳосиласи ҳар онда системага таъсир этувчи ташқи кучларнинг бош векторига тенг.* Бу система ҳаракат миқдори ҳақидаги теореманинг дифференциал ифодасидир.

(16.15) ифоданинг координата ўқларидаги проекциялари:

$$\frac{dQ_x}{dt} = R_x^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = R_y^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = R_z^e \qquad (16.16)$$

бўлади. Шундай қилиб, *система ҳаракат миқдори проекциясидан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосила ҳар онда системага қўйилган ташқи кучлар бош векторининг шу ўқдаги проекциясига тенг.*

(16.15) тенгламанинг ҳар иккала томонини тегишли чегараларда интеграллаб, бу теореманинг чекли ифодаси топилади:

$$\mathbf{Q} - \mathbf{Q}_0 = \mathbf{S}. \qquad (16.17)$$

Бу ерда $\mathbf{Q}_0$ - бошланғич $t=0$ пайтдаги, $\mathbf{Q}$ - ихтиёрий t вақтдаги системанинг ҳаракат миқдори,

$$S = \int_0^t R^e \cdot dt$$

эса, t вақт ичида системага таъсир этувчи ташқи кучлар бош векторининг импульси. Демак, *система ҳаракат миқдорининг чекли вақт ичида геометрик ўзгариши шу вақт ичида таъсир этувчи ташқи кучлар импульсининг йиғиндисига тенг.*

(16.10) ни (16.15) га қўллаб, ҳосил қилинган тенглама система массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теорема (15.6) ни ифодалашини аниқлаймиз, яъни бундан ҳаракат миқдори теоремаси ва массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремалар бир теореманинг икки кўриниши эканлигини кўрамиз. Шунинг учун қаттиқ жисмлар ҳаракатини текширишда уларнинг исталган биридан фойдаланилса бўлади. Бундай ҳолда, айниқса система массалар марказининг ҳаракати теоремасидан фойдаланилади. Аммо, туташ муҳит (суюқлик ва газ) лар ҳаракатини текширишда охирги теорема ўз маъносини йўқотади ва бу ҳолда ҳаракат миқдори теоремаси қўлланилади. Шунинг учун ҳам, ҳозирги замон техникасида туташ системаларнинг, ракеталарнинг ҳаракатини ўрганишда ҳамда зарба назариясида ҳаракат миқдори теоремасидан изчиллик билан фойдаланилмоқда

72-§. Нуқта ва система ҳаракат миқдорининг сақланиш қонуни.

Ташқи кучларнинг баъзи ҳолларида ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема ёрдамида нуқта ва система ҳаракат дифференциал тенгламаларининг биринчи интегралларини топиш мумкин. Бу биринчи интеграллар ҳаракат миқдорининг ёки унинг ўқлардаги проекцияларини сақланиш қонунини ифодалайди ва *сақланиш* *қонунлари* деб аталади. Бунда иккита хусусий ҳоллар бўлиши мумкин:

1. Механик системага қўйилган барча ташқи кучларнинг геометрик йиғиндиси ёки бош вектори нолга тенг, яъни $\sum \mathbf{F}_k^e = \mathbf{R}^e = 0$ бўлсин, у ҳолда (16.15) теоремадан

$$\mathbf{Q} = \text{const}, \qquad (16.18)$$

келиб чиқади. Бу қонун (аниқроғи, теореманинг хусусий ҳоли) шундай таърифланади: *агар системага қўйилган барча ташқи кучларнинг бош вектори нолга тенг бўлча, у ҳолда система ҳаракат миқдор. вектори миқдор ва йўналиш жиҳатдан ўзгармайди.* (16.18) муносабатда координаталарнинг вақт бўйича биринчи ҳосиласи қатнашган. Бинобарин, бу муносабатлар система ҳаракати дифференциал тенгламалари (15.1) нинг биринчи интеграллари бўлади ва система ҳаракат миқдори сақланиш қонунининг векторли ифодаси дейилади.

2. Механик системага қўйилган барча ташқи кучлар бош векторининг бирор Ох ўқдаги проекцияси нолга тенг, яъни $\mathbf{R}_k^e = \sum \mathbf{F}_{kx}^e = 0$ бўлсин, у ҳолда (16.16) нинг биринчисидан қуйидагини ёзамиз:

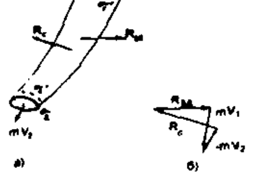
$$Q_x = \text{const}. \qquad (16.19)$$

(16.19) тенглик система ҳаракат миқдорининг бирор (Ох) ўқдаги проекциясининг сақланиш қонунини ифодалайди:*механик системага қўйилган барча ташқи кучлар бош векторнинг бирор ўқдаги проекцияси ўзгармайди*. Шуни таъкидлаб ўтиш муҳимки, ташқи кучлар бўлмаганда механик системанинг ички кучлари система массалар марказининг ҳаракатини ўзгартира олмаганидек, улар системанинг умумий ҳаракат миқдорини ҳам ўзгартира олмайди. Масалан, абсолют силлиқ текисликда эркин силжий оладиган платформа устида одам олдинга юрса, у ҳолда платформа орқага кетади; бунда одам ва платформа ҳаракатининг тезликлари қарама - қарши томонга йўналади ва системанинг ҳаракат миқдори доимо ўзгармасдан олганлиги сабабли бу тезликларнинг нисбатлари одам ва платформа массаларига тескари пропорционал бўлади. Бу ҳолда платформа текислигида системанинг массалар марказининг ҳолати ҳам ўзгармасдан олиши бизга маълум. Қуроллардан отищда содир бўладиган тепиш ёки орқага айтиш одисалари ва реактив ҳаракатнинг принциплари ҳам ҳаракат миқдорининг сақланиш қонунига асосланган. ҳаракат миқдори теоремаси, айниқса, туташ муҳитлар механикасида кенг қўлланилади. Қуйида бу теоремани суюқликнинг стационар оқимига қўллаймиз.

73-§. Система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани суюқликнинг стационар оқимига татбиқ этиш. Эйлер теоремаси.

Берилган онда труба деворларига перпендикуляр олинган иккита σ_1 ва σ_2 кесимлар ҳамда кесимлари ўзгарувчан труба ён сиртлари билан чегараланган ҳажмдаги сиқилмаган суюқлик ҳаракатини текширамиз (159-расм).

Айтайлик, суюқликнинг бу кесмлардаги зичликлари ρ_1 ва ρ_2, ана шу кесмларга перпендикуляр ўрта тезликлари $\mathbf{v}_1$ ва $\mathbf{v}_2$ бўлсин. Стационар ҳаракатланганда трубанинг ихтиёрий кесими



159-расм

орқали вақт бирлиги ичида оқиб ўтувчи суюқлик массаси ўзгармади:

$$\dot{m} = \rho_1\sigma_1 v_1 = \rho_2\sigma_2 v_2$$

Бу бир секунддаги массаси деб аталади. Юқори ва пастки кесмлардаги суюқликнинг вақт бирлигидаги ҳаракат миқдориларини $\dot{m}\mathbf{v}_1$ ва $\dot{m}\mathbf{v}_2$ векторлар билан белгилаймиз. Туташ муҳитлар механикасида бирор ҳажмни ишғол қилган суюқликка таъсир этувчи кучларни суюқликнинг ҳар бир заррасига таъсир этувчи ҳажм кучларига (масалан, оғирлик кучи) ва берилган ҳажмнинг сиртидаги суюқлик зарраларига таъсир этувчи сирт кучларига (масалан, суюқлик ҳаракатланганда труба деворида ҳосил бўладиган ишқаланиш кучига) ажратилади, ҳамда ҳаракат миқдори теоремаси қуйидагича ёзилади:

$$\frac{dQ}{dt} = \mathbf{R}_m + \mathbf{R}_c = \mathbf{R}^e \qquad (16.20)$$

Бу ерда $\mathbf{R}^e$ - ташқи кучларнинг бош вектори, $\mathbf{R}_m$ ва $\mathbf{R}_c$ *мос равишда*, ҳажм (масса) ва сирт кучларининг бош вектори. dt вақт ичида ажралган ҳажм ҳаракат миқдорининг ўзгариши dQ ни ҳисоблаймиз. Қаралаётган суюқлик ҳажмининг зарралари dt вақт ичида труба бўйлаб силжийди ва пунктир чизиқ билан кўрсатилган янги вазиятни эгаллайди. Суюқлик бошқа кесмларга ўтиши билан унинг зарраларининг тезликлари ҳам ўзгаради.

Қаралаётган суюқлик ҳаракати стационар бўлганлигидан dt вақт ичида σ_1 ва σ_2 кесмлар орасидаги зарралар ҳажми ўзгармайди ва ҳажмнинг бу қисмидаги янги ҳаракат миқдори аввалгидек қолади. dt вақт ичида ҳаракат миқдорининг ўзгариши σ_1 ва σ_1' кесмлар орасидаги ҳажмда ҳаракат миқдорининг сарф бўлиши ва σ_2 ва σ_2' кесмлар орасидаги ҳажмда ҳаракат миқдорининг қўшилиши ҳисобига пайдо бўлади:

$$dQ = \rho_2\sigma_2 v_2 dt\mathbf{v}_2 - \rho_1\sigma_1 v_1 dt\mathbf{v}_1$$

ёки

$$d\mathbf{Q} = \dot{m}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)dt \qquad (16.21)$$

У ҳолда, ажратилган ҳажмда ҳаракат миқдорининг вақт бирлигидаги ўзгариши

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \dot{m}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \qquad (16.22)$$

бўлади, яъни бу ўзгариш ажратилган ҳажмни чегараловчи труба кесмлари орқали ўтадиган суюқлик ҳаракат миқдорининг вақт бирлигидаги айирмасига тенг. (16.20) ва (16.22) га кўра:

$$\dot{m}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = \mathbf{R}_M + \mathbf{R}_C \qquad (16.23)$$

ёки

$$\dot{m}\mathbf{v}_1 - \dot{m}\mathbf{v}_2 + \mathbf{R}_M + \mathbf{R}_C = 0 \qquad (16.24)$$

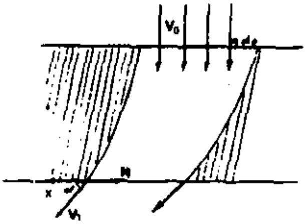
Бу геометрик тенглик қаралаётган векторлар кўпбурчагининг ёпиқ бўлишини кўрсатади ва туташ муҳитлар ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги *Эйлер теоремасини* ифодалайди ҳамда у, қуйидагича таърифланади: *трубанинг иккита ихтиёрий кесими орқали оқиб ўтувчи суюқликнинг вақт бирлигида шу кесмлар орасидаги ҳажмнинг ички томонига йўналган секунддаги ҳаракат миқдорилари вектори ҳамда ҳажм ва сирт кучлари бош векторларининг геометрик йиғиндиси нолга тенг* (159 б-расм). Бошқача қилиб айтганда, агар қувурнинг икки кўндаланг кесими орқали оқиб ўтувчи суюликнинг секунддаги ҳаракат миқдор векторлари шу кесимлар орасидаги ҳажм ичига томон йўналтирилса, уларнинг ҳажм ва сирт кучлари бош векторлари билан геометрик йиғиндиси нолга тенг бўлади. (16.24) нинг Декарт координата ўқларидаги проекциялари:

$$\begin{aligned} \dot{m}\mathbf{v}_{1x} - \dot{m}\mathbf{v}_{2x} + \mathbf{R}_{Mx} + \mathbf{R}_{Cx} &= 0, \\ \dot{m}\mathbf{v}_{1y} - \dot{m}\mathbf{v}_{2y} + \mathbf{R}_{My} + \mathbf{R}_{Cy} &= 0, \qquad (16.25) \\ \dot{m}\mathbf{v}_{1z} - \dot{m}\mathbf{v}_{2z} + \mathbf{R}_{Mz} + \mathbf{R}_{Cz} &= 0, \end{aligned}$$

37-масала. Вертикал текисликка нисбатан симметрик жойлашган ўзгарувчан кесимли қўзғалмас каналга сув горизонтга $\alpha_0 = 90$ бурчак остида $v_0 = 2$ м/с тезлик билан киради. Каналнинг киришдаги кесими $\sigma_0 = 0{,}02$ м. Сув каналдан горизонтга $\alpha_1 = 30$ бурчак остида $v_1 = 4$ м/с тезлик билан чиқади (160-расм).

Сувнинг канал кесимига кўрсатадиган босимининг горизонтал ташкил этувчиси аниқлансин.

Ечиш. Канал девори реакциясининг горизонтал ташкил этувчисини ёки сувнинг каналга кўрсатадиган сирт босимининг ташкил этувчисини N деб белгилаб, сувнинг стационар оқимига (ҳаракатига) ҳаракат миқдори теоремасининг x ўқидаги проекциясини қўллаб:



160-расм

$$\dot{m}(v_2 - v_{1x}) = -N.$$

Бу ҳолда $v_{2x} = v_1\cos\alpha_1$; $v_{1x} = v_0\cos\alpha_0 = 0$. Вақтнинг ҳар бир пайтида каналга тушаётган ва ундан чиқаётган сувнинг миқдори ўзгармасдан қолганлиги сабабли, вақт бирлигидаги ҳаракат миқдори ҳам ўзгармасдан қолади. Шунинг учун

$$\dot{m} = \rho_0\sigma_0 v_0 .$$

тенглик ўринли. Бу ерда σ_0 - каналнинг сув киришидаги кесими, ρ_0 - сувнинг зичлиги, v - сувнинг бошлан ғич тезлиги. У ҳолда, юқоридаги ифода қуйидаги кўринишни олади

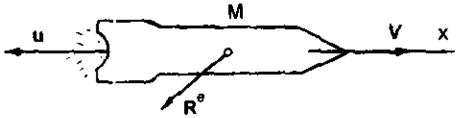
$$N = \rho_0 \sigma_0 v_0 v_1 \cos\alpha_1 = 1 т / м^3 \ 0{,}02 \ м^2 \ 2 м / с \ 4 \ м / с \sqrt{\frac{3}{2}} \approx$$

$$141 \ кгс / с^2 = 141 Н$$

74-§. Массаси ўзгарувчан жисм ҳаракати ҳақида тушунча. М.В.Мешчерский тенгламаси.

Ўрганилаётган назарий механика курси Галилей-Ньютон томонидан ёритилган қонунларга асосланган бўлиб *классик механика* деб юритилади. Классик механикада, одатда ҳаракатланаётган жисм массасини ўзгармас, скаляр, мусбат катталик деб қаралади. Аммо, ҳозирги замон техникасида нуқта ва механик системанинг ҳаракат жараёнида уларнинг массалари ўзгармасдан олмай, балки вақт ўтиши билан ўзгариш ҳоллари пайдо бўлади. Масалан, космик ракеталарнинг учишида ёнил ёнганда ракетадан ажралувчи маҳсулот ва ракетанинг баъзи кераксиз қисмларининг ажралиб чиқиши натижасида массасининг ўзгариши, унинг умумий бошланғич массаси миқдорининг 90-95 фоизини ташкил қилади. Ҳозирги замон реактив самолётларнинг учишида двигателларининг ишлаш жараёнида ва бошқа қатор ҳолларда ёнилғининг сарф бўлиши натижасида массалари ниҳоят даражада ўзгаради, яъни массалари ортиб ёки камайиб бориши мумкин. Шунингдек, тўқимачилик ишлаб чиқариш корхоналарида машина ва станокларнинг маълум тезлик билан ишлаши жараёнида ғалтакларга ипнинг ўралиши ёки чувалиши ҳисобига ўрамлар массасининг ўзгариши содир бўлади.

Шундай қилиб, ҳаракатланаётган жисм массаси вақтга боғлиқ равишда унга қўшилаётган ёки ажралаётган зарралар ҳисобига узлуксиз ўзгариб борса, *массаси ўзгарувчан жисм* дейилади. Ҳаракатида давомида ўтган масофасига нисбатан унинг ўлчамини эътиборга олмаслик мумкин бўлса ёки у илгариланма ҳаракатланса, массаси ўзгарувчан моддий нуқта деб қаралади. Массаси ўзгарувчан нуқтага массаси ўзгармас нуқта динамикасининг асосий қонунларини бевосита қўллаб бўлмайди. Массаси ўзгарувчан нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламаси кучлар таъсирининг мустақиллик қонуни ва ҳаракат миқдори теоремасини қўллаш билан келтирилади. Маълумки, нуқтага таъсир этувчи куч унга шундай тезланиш берадики, у бошқа кучларнинг таъсирига боғлиқ бўлмайди. Массаси ўзгарувчан нуқта олида эса, нуқтага қўйилган **F** кучдан ташқари нуқтадан dM массали зарранинг ажралиб чиқишида ёки қўшилишида пайдо бўладиган кучлар ҳам таъсир этади. Энди, юқоридаги теоремаларни



161-расм.

ракета ҳаракатига қўллаймиз Бунинг учун қуйидагича белгилашлар киритамиз: $\mathbf{R}^e$ - массаси камайиб борувчи ракетага таъсир этувчи ташқи кучларнинг бош вектори; M ва **v** - бирор t вақт ичидаги ракетанинг массаси ва абсолют тезлиги, бунда $M = M(t)$; dM - dt вақт ичида ажралувчи зарраларнинг массаси; **u**-ракетадан ажралиб чиқаётган зарраларнинг абсолют тезлиги. У ҳолда, механик система (ракета ҳамда dt вақт ичида ундан ажралаётган зарралар) нинг t вақт ичидаги ҳаракат миқдори

$$\mathbf{Q}_0 = M\mathbf{v}$$

га тенг. Механик системанинг $t + dt$ вақтдаги ҳаракат миқдори эса:

$$\mathbf{Q} = (M + dM)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) - dM\mathbf{u},$$

бўлади. Бунда $dM < 0$ ва $M = M(t)$ - камаювчи функция эканлигини эътиборга олсак, механик системанинг dt вақт ичидаги ҳаракат миқдорининг ўзгариши:

$$d\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\text{-}\mathbf{Q}_0 = (M+dM)(\mathbf{v}+d\mathbf{v})\text{-}\mathbf{u}dM\text{-}M\mathbf{v},$$

ёки

$$d\mathbf{Q}=M\mathbf{v}+\mathbf{v}dM+Md\mathbf{v}\text{-}dMd\mathbf{v}\text{-}\mathbf{u}dM\text{-}M\mathbf{v}=Md\mathbf{v}\text{-}(\mathbf{u}\text{-}\mathbf{v})dM,$$

бўлади, бунда $dMd\mathbf{v}$ ҳисобга олинмайди. Охирги тенгликнинг dt вақт ичидаги ўзгариши (16.15) га кўра қуйидагича ифодага тенг бўлади:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt}=M\frac{d\mathbf{v}}{dt}-(\mathbf{u}-\mathbf{v})\frac{dM}{dt}=\mathbf{R}^e$$

Бу ерда u-v = u - ажралувчи зарраларнинг ракета корпусига нисбатан нисбий тезлиги эканлигини назарда тутсак, қуйидаги тенгламага эга бўламиз:

$$M\frac{d\mathbf{V}}{dt}=\mathbf{R}^e+\mathbf{u}_r\frac{dM}{dt} \qquad (16.26)$$

(16.26) тенглама массаси ўзгарувчан моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасини ифодалаб, *Мешчирский тенгламаси* деб юритилади. Бунда

$$\mathbf{u}_r\frac{dM}{dt}=\mathbf{u}_r\dot{M}=\mathbf{\Phi}_r \qquad (16.27)$$

реактив куч деб аталади ва куч бирлигида ўлчанади, $\dot{M}$ - ажралувчи зарралар массасининг секунддаги сарфланиши, у ҳолда

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{R}^e+\mathbf{\Phi}_r \qquad (16.28)$$

келиб чиқади.

$\dot{M}<0$ (ракета массаси вақт ўтиши билан камайади) бўлгани учун (16.27) дан реактив куч йўналиши ёнганда ажралаётган маҳсулотнинг нисбий тезлигига қарама- қарши йўналган бўлади деган хулоса келиб чиқади. Агар ракетадан ажралаётган зарраларнинг нисбий тезлиги $\mathbf{u}_r$ нолга тенг бўлса, у ҳолда реактив куч $\mathbf{\Phi}_r$ нолга айланиб, массаси ўзгарувчан моддий нуқта тенгламаси (16.27) Ньютоннинг асосий қонунидан келтириладиган одатдаги ўзгармас массали моддий нуқта ҳаракати тенгламаси (15.6) кўринишини олади.

75-§. Циолковский формуласи.

Юқоридаги (16.26) тенгламани фақат реактив куч таъсирдаги ракета ҳаракатига тадбиқ этамиз. Бу ҳолда ракета ҳаракатининг дифференциал тенгламаси ушбу кўринишни олади:

$$M\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{u}_r\frac{dM}{dt} \qquad (16.29)$$

x ўқини ракетанинг ҳаракат тезлиги **v** бўйича йўналтирамиз ва ракетадан ажралувчи зарраларнинг тезлиги u (ёнилғининг ёниши натижасида ҳосил бўладиган газларнинг ракетадан ажралиш тезлиги) ни ўзгармас ва **v** га қарама-қарши йўналган деб қараймиз. У ҳолда (16.29) нинг x ўқдаги проекцияси

$$M\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -u_r\frac{dM}{dt} \qquad (16.30)$$

бўлади. Бунда u = const деб, ўзгарувчиларни ажратиб, ҳар икки томонни интегралласак:

$$\int_{v_0}^{v} dv = -u_r\int_{M_0}^{M}\frac{dM}{M} \qquad (16.31)$$

келиб чиқади. Бу ерда M_0 - ракетанинг бошланғич массаси, v_0 ракетанинг бошланғич тезлиги бўлиб, реактив куч бўйлаб йўналган. (16.31) дан

$$v = v_0 + u_r\ln\frac{M_0}{M} \qquad (16.32)$$

Бу формула ракета массасининг камайиши натижасида ракета тезлигининг ортиш қонунини ифодалайди.

Ракета корпусининг массасини $M_к$, ёнилғининг бошланғич массасини $M_ё$ десак, ракетанинг бошлангич массаси $M_0=M_к+M_ё$ ва ёнилғи ёниб тугагандан кейинги массаси $M = M_к$ бўлади, (16.32) дан ракетанинг ёнилғи ёниб тугаган пайтдаги тезлиги v ни топамиз:

$$v = v_0 + u_r \ln(1+\frac{M_ё}{M_к}) \qquad (16.33)$$

Бу формулани биринчи бўлиб К.Э.Циолковский келтириб чиқарган, шунинг учун уни дейилади. Ёнилғининг нисбий ғамланганлиги $z = M_ё/M_к$ га *Циалковский сони* дейилади. Бу формуладан ракетанинг ёнилғи ёниб тугаган пайтдаги энг катта тезлиги ёнилғининг ёниш қонунига, яъни массасининг ўзгариш қонунига (ёнилғининг қанчалик тез ёки секин ёнишига)боғлиқ эмаслиги кўринади ($v_к \rightarrow v_{мах}$) ва $v_{мах}$ ажралувчи зарраларнинг нисбий тезлигига тўғри пропорционал равишда ўзгариб, Циолковский сони ортган сари яна ҳам ортади. Ҳисоблашлар шуни кўрсатадики, $z = M_ё/M_к = 4$ ва $v_0 = 0$ бўлганда ракета биринчи космик 7,9 км/с тезлик олиши учун, яъни ракета Ернинг Сунъий йўлдоши бўлиб олиши учун у 6 км/с тезлик билан отилиши керак. Бундай катта тезликни тўп орқали бериш қийин. Шу сабабли ҳозирги вақтда бундай тезликка кўп поғонали ракеталар орқали эришилади. Ракетанинг бундай поғонаси ўзидан ёнилғи ёниб тугаши билан ракетадан автоматик равишда ажралади. Бундай ажралиб чиқиш натижасида ракета яна қўшимча тезлик олади. Шундай кўп поғонали ракеталар ёрдамида дунёда биринчи бўлиб собиқ Совет Иттифоқида Ернинг Сунъий йўлдоши (4 октябрь ва 3 ноябрь 1957 йили ва бошқа бир қанча космик кемалар) учирилди.

XVII боб

МОДДИЙ НУҚТА ВА МЕХАНИК СИСТЕМА ҲАРАКАТ МИҚДОРИ МОМЕНТИНИНГ ЎЗГАРИШИ ҲАҚИДА ТЕОРЕМА

76-§. Моддий нуқта ва механик система ҳаракат миқдори моменти.

Механик ҳаракатнинг вектор ўлчови сифатида ҳаракат миқдори билан бир қаторда ҳаракат миқдорининг моменти ёки *кинетик* момент деб аталадиган механик катталикдан ҳам фойдаланиш мумкин. Моддий нуқта ҳаракат миқдорининг бирор марказга (ёки ўққа) нисбатан моменти худди кучнинг моменти сингари аниқланади. m массали M моддий нуқта танланган $Oxyz$ саноқ системасига нисбатан **F** куч таъсирида эгри чизиқли траектория бўйлаб ҳаракатлансин (162-расм), бунда mv нуқта ҳаракат миқдори вектори.

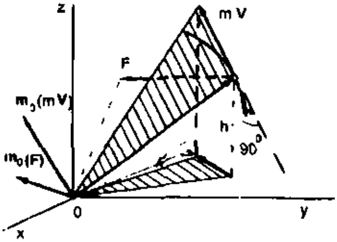
Курсимизнинг статика бўлимидан **F** кучнинг о марказга нисбатан момент вектори

$$\mathbf{m}_0(\mathbf{F}) = \mathbf{r}\mathrm{x}\mathbf{F}, \qquad (17.1)$$

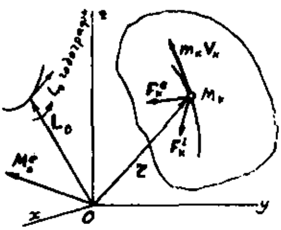
кўринишда ифодаланиши бизга маълум. Бу ерда **r**- ҳаракатланаётган нуқтанинг о марказга нисбатан радиус вектори. Момент вектори $\mathbf{m}_0(\mathbf{F})$ куч вектори ва момент маркази о орқали ўтувчи текисликка перпендикуляр равишда шундай йўналтириладики, унинг мусбат учидан қараганда о марказ атрофида **F** куч вектори йўналишидаги айланиш соат стрелкаси айланишига тескари кўринишда бўлади ва бу вектор о марказга қўйилади.

Айнан шундай, моддий нуқтанинг о марказга нисбатан ҳаракат миқдори моментини ёки кинетик моментини $\mathbf{m}_0(mv) = \mathbf{l}_0$ деб белгилаб, қуйидагини ёзиш мумкин:

$$l_0 = r \times mv. \qquad (17.2)$$



162-расм



163-расм

Моддий нуқта ҳаракат миқдорининг о марказга нисбатан моменти деб *нуқтанинг ўрнини аниқловчи радиус векторини нуқта ҳаракат миқдори векторига векторли кўпайтмасига тенг бўлган механик катталикка айтилади.* Бу вектор момент маркази ва mv вектор орқали ўтувчи текисликка перпендикуляр йўналади ҳамда о марказга қўйилган деб қаралади. Мусбат йўналиш эса, куч моменти вектори каби олинади. $\mathbf{l_0}$ векторнинг модули

$$l_0 = m\,v\,h \qquad (17.3)$$

формуладан аниқланади, бу ерда h-момент марказидан mv вектор ётган чизиққача бўлган энг яқин масофа. Моддий нуқта ҳаракат миқдори моменти учун статиканинг тегишли тушунчалари, яъни ушбу тенгликлар ўринли бўлади:

$$\left|l_0\right|_z = l_z = m_z(mv) \qquad (17.4)$$

$$l_z = m_z(mv) = m_0(mv_{xy}) = \pm mv_{xy} \cdot h'.$$

СИ бирликлар системасида ҳаракат миқдори моменти кг $м^2/с$ билан ўлчанади. Ҳаракатланаётган нуқтанинг координаталарини x,y,z ва координата ўқларининг бирлик векторларини **i,j,k** орқали белгиласак, (17.2) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\mathbf{l}_0 = m\cdot\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} \qquad (17.5)$$

$\mathbf{l}_0$ векторнинг координата ўқлардаги ташкил этувчилари орқали ифодаси $\mathbf{l}_0 = l_x\,\mathbf{i} + l_y\,\mathbf{j} + l_z\,\mathbf{k}$ ни назарда тутиб, (17.5) детерминантни биринчи қаторига нисбатан ёйиб ёзамиз:

$$l_x\,\mathbf{i} + l_y\,\mathbf{j} + l_z\,\mathbf{k} = m(y\dot{z} - z\dot{y})\mathbf{i} + m(z\dot{x} - x\dot{z})\mathbf{j} + m(x\dot{y} - y\dot{x})\mathbf{k}$$

Бу ифодадаги $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ лар олдидаги мос коэффициентларни тенглаштириб, тегишли ўқларга нисбатан нуқта ҳаракат миқдори моменти аниқланади:

$$l_x = m(y\dot{z} - z\dot{y}), \quad l_y = m(z\dot{x} - x\dot{z}), \quad l_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Механик системанинг бирор қўзғалмас о марказга нисбатан (ҳаракат миқдори моменти) кинетик моменти деб, шу марказга нисбатан система ҳаракат миқдорининг бош моментига, яъни мазкур марказга нисбатан системанинг барча нуқталари ҳаракат миқдори $(m_k\mathbf{v}_k)$ момент $(\mathbf{l}_{ok})$ векторларининг геометрик йиғиндисига тенг $\mathbf{L}_0$ векторга айтилади (163-расм):

$$\mathbf{L}_0 = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{l}_{ok} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{m}_0(m_k\mathbf{v}_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k x m_k \mathbf{v}_k \qquad (17.6)$$

Механик системанинг бирор ўққа нисбатан кинетик моменти деб, система барча нуқталари ҳаракат миқдорлари $m_k\mathbf{v}_k$ нинг шу ўққа нисбатан моментлари l_{zk} нинг алгебраик йиғиндисига тенг, яъни мазкур ўққа нисбатан система ҳаракат миқдорларининг бош моменти L_z га айтилади:

$$L_z = \sum l_{zk} = \sum m_z(m_k\mathbf{v}_k)$$

Кучларнинг марказга ва шу марказдан ўтувчи ўққа нисбатан бош моментлари каби системанинг бирор о марказга нисбатан кинетик моменти $\mathbf{L}_0$ ва шу марказдан ўтувчи ўққа нисбатан кинетик моменти $\mathbf{L}_z$ ўзаро қуйидаги муносабат билан боғланган:

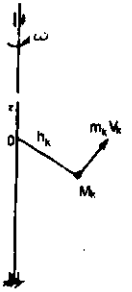
$$L_z = L_0 \cos(\mathbf{L}_0 \hat{\ } , \mathbf{z}).$$

Шунингдек, (17.6) ни координата ўқларига проекциялаб механик системанинг координата ўқларига нисбатан кинетик моменти аниқланади:

$$L_x = \sum m_k (y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y}_k); \quad L_y = \sum m_k (z_k \dot{x}_k - x_k \dot{z}_k);$$

$$L_z = \sum m_k (x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k); \qquad (17.7)$$

Энди қаттиқ жисм ҳаракатини ўрганишдаги амалий масалаларда муҳим аҳамиятга эга бўлган кинетик моментни жисмнинг турли ҳаракатлари ҳоли учун ҳисоблаш формулаларини келтирамиз. Фараз қилайлик, қаттиқ жисм z ўқи атрофида ω бурчак тезлиги билан айланма ҳаракатлансин (164-расм). Бу жисмни бир қанча нуқталардан иборат қотган система деб қараймиз.



(164-расм)

Бу системанинг айланиш ўқи z га нисбатан кинетик моментини ҳисоблаймиз. Юқоридагига биноан:

$$L_z = \Sigma l_{zk} = \Sigma m_z(m_k \mathbf{v}_k) = \Sigma m_k v_k h_k = \Sigma m_k \omega h_k^2 = \omega \Sigma m_k h_k^2,$$

бу ерда h_k-системанинг бирор M_k нуқтасининг айланиш ўқидан узоқлик масофаси, m_k - шу нуқта массаси, $\Sigma m_k h_k^2 = I_z$ - жисмнинг z ўққа нисбатан инерция моменти.

Жисм бир қўзғалмас нуқта атрофида сферик ҳаракатлансин. У ҳолда жисмнинг ҳар қандай нуқтасининг тезлиги

$$\mathbf{v}_k = \omega \mathrm{x} \mathbf{r}_k$$

га тенг, бўлади. Бу ерда ω - бурчак тезлик, $\mathbf{r}_k$ - к-нчи нуқтанинг (қўзғалмас нуқта) қутбга нисбатан радиус вектори. Ушбу формуладан тезлик проекцияларни ҳисоблаб

$$\dot{x}_k = \omega_y z_k - \omega_z y_k ; \quad \dot{y}_k = \omega_z x_k - \omega_x z_k ; \quad \dot{z}_k = \omega_x y_k - \omega_y x_k$$

(17.6) га қўйиб, сферик ҳаракатланаётган қаттиқ жисм кинетик моменти проекцияларини аниқлаймиз:

$$\begin{aligned} L_x &= I_x\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ L_y &= -I_{xy}\omega_x + I_y\omega_y - I_{yz}\omega_z \\ L_z &= -I_{xz}\omega_x - I_{yz}\omega_y + I_z\omega_z \end{aligned} \qquad (17.8)$$

Агар сферик ҳаракатланаётган жисмнинг инерция бош ўқлари шу жисмнинг қўзғалмас нуқтасига боши қўйилган координата ўқлари бўлса, $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ га айланади ва (17.8) формула

$$L_x = I_x\omega_x , \quad L_y = I_y\omega_y , \quad L_z = I_z\omega_z$$

кўринишга келади. Бу формулалар битта нуқтаси қўзғалмас абсолют қаттиқ жисм кинетик моментининг жисм билан бириктирилган ва боши қўзғалмас нуқтага қўйилган координата ўқларига проекцияларини аниқлайди.

Жисм қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракати ҳолида, z ўқни айланиш ўқи билан бир хил йўналган деб олинса, $\omega_x = \omega_y = 0$ ва жисмнинг кинетик моменти учун

$$L_x = -I_{xz}\omega_z = -I_{xz}\dot{\varphi} , \quad L_y = -I_{yz}\omega_z = -I_{yz}\dot{\varphi} ,$$

$$L_z = I_z\omega_z = I_z\dot{\varphi} , \qquad (17.9)$$

келиб чиқади. Агар қўзғалмас айланиш ўқи z жисмнинг инерция бош ўқи бўлса $I_{xz} = I_{yz} = 0$ га ва $L_x = L_y = 0$ га тенг бўлиб,

$$L_z = I_z\omega = I_z\dot{\varphi}, \qquad (17.10)$$

келиб чиқади.

Айланувчи қаттиқ жисмнинг айланиш ўқига нисбатан кинетик моменти жисмнинг мазкур ўққа нисбатан инерция моментини бурчак тезлигига кўпайтмасига тенг. Агар жисм бир қанча жисмлардан иборат бўлса ва битта ўқ атрофида айланса унинг кинетик моментини ушбу формулага мувофиқ ҳисоблаш мумкин:

$$L_z = I_{1z}\omega_1 + I_{2z}\omega_2 + \ldots + I_{nz}\omega_n . \qquad (17.11)$$

77-§. Моддий нуқта ҳаракат миқдори моментининг ўзгариши ҳақида теорема.

Бу теоремада механик ҳаракатнинг вектор ўлчовларидан бири кинетик момент билан ўзаро механик таъсир ўлчовларидан ҳисобланган куч моменти орасидаги муносабатлар ифодаланади. Умумий ҳолда, нуқтанинг ҳаракати пайтида $\mathbf{r}$ ва $\mathbf{mv}$ векторлар ўзгарувчан векторлар бўлганлиги сабабли (17.2) ни вақт бўйича дифференциаллаб қуйидагини ёзаоламиз:

$$\frac{dl_0}{dt} = \frac{dr}{dt} x\mathbf{mv} + \mathbf{r}x\frac{d\mathbf{mv}}{dt} \qquad (17.12)$$

Бироқ, $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$ ва, демак,

$$\frac{dr}{dt} x\mathbf{mv} = \mathbf{v}x\mathbf{mv} = 0$$

чунки $(\mathbf{v},\hat{}\,\mathbf{mv}) = 0$ бўлганлигидан векторлар кўпайтмасининг модули

$$|\mathbf{v}x\mathbf{mv}| = vm \cdot v \cdot \sin(\mathbf{v},\hat{}\,\mathbf{mv}) = 0$$

Моддий нуқта ҳаракат миқдори ҳақидаги теорема (16.11) га кўра ҳаракат миқдоридан ҳосила $d(\mathbf{mv})/dt = \mathbf{F}$ га тенг. Топилган қийматларни (17.12) тенгликка қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$dl_0/dt = \mathbf{r}x\mathbf{F}$$

ёки (17.1) га биноан охирги тенгликни қуйидагича ёзамиз:

$$\frac{dl_0}{dt} = \frac{d}{dt}\left[m_0(mv)\right] = m_0(F) \qquad (17.13)$$

Бу формула нуқта ҳаракат миқдори моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди.

*Теорема: нуқта ҳаракат миқдорининг бирор қўзғалмас марказга нисбатан момент вектордан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосиласи нуқтага таъсир этувчи **F** кучнинг шу марказга нисбатан моментига тенг.*

Энди моддий нуқта ҳаракат миқдори моменти теоремасининг аналитик ифодасини келтирамиз, бунинг учун (17.13) вектор тенгламани ох , оу , oz координата ўқларига проекциялаймиз:

$$\frac{dl_x}{dt} = m_x(F); \quad \frac{dl_y}{dt} = m_y(F); \quad \frac{dl_z}{dt} = m_z(F); \qquad (17.14)$$

Бу муносабатлар нуқта ҳаракат миқдорининг координата ўқларига нисбатан моментларининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди. Яъни нуқта ҳаракат миқдорининг бирор ўққа нисбатан моментидан вақт бўйича олинган ҳосиласи нуқтага таъсир этувчи кучнинг шу ўққа нисбатан моментига тенг.

78-§. Марказий куч таъсиридаги нуқтанинг ҳаракат миқдори моментини сақланиши. Юзалар қонуни.

Юқоридаги теоремадан шундай натижаларга келамиз:

1) Агар нуқтага таъсир этувчи **F** куч доимо қўзғалмас марказ орқали ўтса, у *марказий куч* дейилади ва унинг шу марказга нисбатан моменти нолга тенг бўлади, яъни $\mathbf{m}_0(\mathbf{F}) = 0$, у ҳолда (17.13) га кўра:

$$\frac{d\mathbf{l}_0}{dt} = 0 \quad \text{ёки} \quad \mathbf{l}_0 = \text{const} \quad \text{ёки} \quad \mathbf{l}_0(t) = \mathbf{l}_0\ (0), \qquad (17.15)$$

яъни таъсир чизиги доимо 0 марказдан ўтувчи куч таъсиридаги нуқта ҳаракат миқдорининг шу о марказга нисбатан момент вектори модули ва йўналиши жиҳатидан ўзгармасдан қолади; масса $m = \text{const}$ бўлганидан эса:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \text{const}. \qquad (17.16)$$

2) Агар нуқтага таъсир этувчи **F** кучнинг бирор қўзғалмас ўққа, масалан, z ўққа нисбатан моменти нолга тенг бўлса, нуқта ҳаракат миқдорининг шу ўққа нисбатан моменти ўзгармас қолади, яъни $m_z(\mathbf{F}) = 0$ бўлса, (17.14) дан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{dl_z}{dt} = 0 \quad \text{ёки} \quad l_z = \text{const}, \; l_z(t) = l_z(0) \qquad (17.17)$$

(17.16) нинг координата ўқлардаги проекциялари

$$y\dot{z} - z\dot{y} = C_1; \quad z\dot{x} - x\dot{z} = C_2; \quad x\dot{y} - y\dot{x} = C_3, \qquad (17.18)$$

дан иборат бўлади. Бу тенгламаларнинг ҳар қайсисини x,y,z га кўпайтириб, чиққан натижани қўшсак:

$$C_1\, x + C_2\, y + C_3\, z = 0, \qquad (17.19)$$

келиб чиқади. Бу тенглама координаталар бошидан ўтувчи текислик тенгламасидир.

1) ва 2) натижалар ёйилмаси, яъни марказий куч таъсиридаги моддий нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани қўллаш билан аниқланган (17.15) ва (17.17) интеграллар моддий нуқта ҳаракат дифференциал тенгламалари (13.11) нинг биринчи интегралини беради ва *нуқта*

ҳаракат миқдори моменти сақланиш қонунининг векторли ҳамда координата кўринишдаги ифодалари дейилади. Шундай қилиб, марказий куч таъсиридаги моддий нуқтанинг шу куч таъсир чизиғидаги бирор марказга нисбатан ҳаракат миқдори моменти доимо ўзгармасдан қолади. Кучларнинг бундай турларига осмон механикасининг (Қуёш таъсиридаги планеталар ёки Ернинг тортиш майдонидаги сунъий йўлдошнинг ҳаракатларини) масалаларини ечишда ва электронлар ҳаракатини ўрганишда дуч келамиз.

Энди, *марказий куч* таъсиридаги нуқта ҳаракатларининг геометрик ва физик маъносини аниқлаймиз. Бундай нуқта ҳаракат миқдори моментининг модули биринчи натижага кўра

$$l_0 = mvh = \text{const},$$

ёки

$$vh = \text{const},$$

бўлади. Охирги натижани геометрик томондан характерлаш мумкин. Айтайлик, M нуқта **F** марказий куч таъсирида dt вақт ичида элементар $MM' = v\,dt$ ёйни ўтсин (165-расм), унинг радиус вектори **r = OM** расмдаги штрихланган секторни чизсин. Бу секторнинг юзи

$$d\sigma = \frac{1}{2} MM' \cdot h = \frac{1}{2} v \cdot h \cdot dt$$

га тенг. Бундан

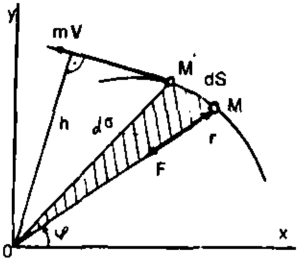
$$vh = 2\frac{d\sigma}{dt} = \text{const}, \ \textit{ёки} \ \ \sigma = \frac{c}{2} t + C_1 \qquad (17.20)$$

келиб чиқади.

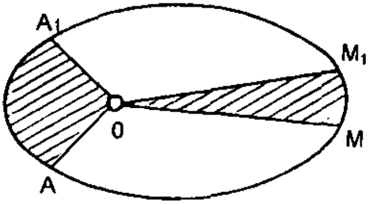
Ҳаракатланаётган моддий нуқта радиус вектори **r = OM** нинг чизган юзасини вақтга қараб ўзгариш жадаллигини характерловчи $\frac{d\sigma}{dt}$ катталикка шу *нуқтанинг секториал тезлиги* дейилади. (17.20) га биноан секториал тезликнинг вектор ифодаси

$$\mathbf{v}_c = \frac{1}{2}(\mathbf{r}\mathrm{x}\mathbf{v}) \quad \text{ёки} \quad 2\mathbf{v}_c = \mathbf{r}\mathrm{x}\mathbf{v} = \mathbf{m}_0(\mathbf{v}) \qquad (17.21)$$

га тенг. Айтилганлардан қуйидаги хулосага келамиз: *марказий куч таъсиридаги моддий нуқта ўзгармас секториал тезлик билан текис эгри чизиқ бўйлаб ҳаракатланади ва, демак, тенг вақтлар ичида бу нуқтанинг радиус вектори тенг юзалар*



165-расм

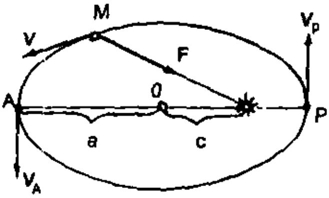


166-расм

чизади. Бу қонун Кеплер томонидан яратилган ва *юзалар қонуни (теоремаси)* деб аталади. Масалан, 166-расмдан кўрамизки, траекторияси эллипсдан иборат бўлган планета шу эллипс фокусларидан бири о да жойлашган Қуёш атрофида орбита бўйлаб ҳаракатланганда планета радиус векторининг тенг вақтлар ичида чизган АОА$_1$ ва МОМ$_1$ сектор юзалари ўзаро тенг. Демак, АА$_1$≠ММ$_1$, яъни планета Куёшга қанча яқин турса, у ўз орбитаси бўйлаб шунча тезроқ ҳаракатланади.

38-*масала.* Планета фокусларидан бирида Қуёш жойлашган эллипс бўйлаб Қуёшга тортувчи куч таъсирида ҳаракатланади. Планетанинг Қуёшга энг яқин ҳолатдаги (перигейдаги) $\mathbf{v}_p$ тезлиги берилган бўлса, унинг Қуёшдан энг узоқ ҳолатидаги (апогейдаги) v_A тезлиги топилсин. Эллипснинг катта ярим ўқи а ва эллипс марказидан Қуёшгача бўлган масофа с берилган (167-расм).

Ечиш. Планетага Қуёшга тортувчи марказий куч таъсир этади. Планетани М билан, Қуёшни эса S билан белгилаймиз. У ҳолда, $\mathbf{m}_s(\mathbf{F}) = 0$ бўлиб,



167-расм.

нуқта ҳаракат миқдорининг S марказга нисбатан моменти сақланиш қонуни $m_s(mv_A) = m_s(mv_p)$ кўринишда ёзилади. Ёки $mv_A(a+c) = mv_p(a-c)$. Бундан изланаётган тезлик аниқланади:

$$v_A = \frac{a-c}{a+c}v_P = \frac{1-e}{1+e}v_P$$

бу ерда $e = \frac{c}{a} < 1$ эллипснинг эксцентриситетини ифодалайди.

79-§. Механик система кинетик моментининг ўзгариши ҳақида теорема.

Энди юқорида келтирилган нуқта ҳаракат миқдори моменти теоремасини n-та нуқталардан иборат механик система учун умумлаштирамиз (163-расм). (17.13) га кўра системанинг к-нчи нуқтаси учун кинетик момент теоремасини ушбу кўринишда олиш мумкин:

$$\frac{dl_{ok}}{dt} = m_0(F_k^e) + m_0(F_k^i), \qquad (k = \overline{1,n}) \qquad (17.22)$$

Бу ерда $m_0(F_k^e)$ системанинг қаралаётган к-нчи нуқтасига таъсир этувчи ташқи кучларнинг танланган о марказга нисбатан моменти, $m_0(F_k^i)$ системанинг қолган нуқталарининг шу к-нчи нуқтага кўрсатадиган таъсир кучларининг мазкур марказга нисбатан моменти, l_{ok} эса, системанинг к-нчи нуқтасининг кинетик моменти.(17.22) тенгликни

www.ziyouz.com kutubxonasi

системанинг ҳар қайси нуқтаси учун ёзиш мумкин.

Ҳамма нуқталар учун бундай тенгликларни ёзиб ва ҳадма-ҳад қўшиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\sum \frac{dl_{ok}}{dt} = \sum \mathbf{m}_0(\mathbf{F}_k^e) + \sum \mathbf{m}_0(\mathbf{F}_k^i) \qquad (17.23)$$

Юқорида келтирилган (14.3) тенгликка кўра системанинг барча ички кучларининг ихтиёрий марказга нисбатан бош моменти доимо нолга тенг:

$$\mathbf{M}_0^i = \sum \mathbf{m}_0(\mathbf{F}_k^i) = 0$$

Бу ерда $\Sigma\, \mathbf{m}_0\,(F_k^e) = M_0^e$ системага қўйилган барча ташқи кучларнинг бош моменти, $\Sigma \mathbf{l}_{ok} = \mathbf{L}_0$ системанинг O марказга нисбатан кинетик моменти эканлигини эътиборга олсак, (17.23) дан

$$\frac{d\mathbf{L}_0}{dt} = \mathbf{M}_0^e \qquad (17.24)$$

келиб чиқади. Бу тенглик система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди ва қуйидагича таърифланади: *системасининг ихтиёрий о қўзғалмас марказга нисбатан кинетик моменти векторидан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосиласи барча ташқи кучларнинг мазкур марказга нисбатан бош моментига тенг.* (17.24) дан ташқи кучларнинг бирор марказга нисбатан бош моментини система кинетик момент вектори учининг тезлиги деб қараш мумкин деган хулоса бевосита келиб чиқади (163-расм), яъни

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{M}_0^e. \qquad (17.25)$$

Бу хулосага *Резаль теоремаси* дейилади.

(17.24) вектор тенгликни Декарт ўқларига проекциялаб, моментлар теоремасининг координата ифодаси аниқланади:

$$\dot{L}_x = M^e_x, \quad \dot{L}_y = M^e_y, \quad \dot{L}_z = M^e_z. \qquad (17.26)$$

Демак, *механик системанинг бирор қўзғалмас ўққа нисбатан кинетик моментидан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосила система нуқталарига таъсир этувчи ташқи кучларнинг мазкур ўққа нисбатан моментларининг йиғиндисига тенг.*

Система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги ушбу теоремалардан қаттиқ жисмнинг айланма ҳаракатларини ўрганишда, гироскоплар назариясида ва ҳоказо, кенг фойдаланилади. Система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теореманинг афзаллиги шундан иборатки, система ҳаракат миқдорининг ўзгаришига оид теорема каби, ушбу ҳолда ҳам олдиндан номаълум бўлган ички кучлар теоремага қатнашмайди.

80-§.Система кинетик моментининг сақланиш қонуни.

Механик система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремадан масалалар ечишда муҳим бўлган шундай натижаларга келиш мумкин:

1) Агар ташқи кучларнинг бирор қўзғалмас O марказга нисбатан бош моменти $\mathbf{M}^e_0 = 0$ бўлса, у ҳолда системанинг кинетик моменти миқдор ва йўналиш жиҳатидан ўзгармасдан қолади, яъни (17.24) дан

$$\frac{d\mathbf{L}_0}{dt} = 0,$$

ёки

$$\mathbf{L}_0 = \text{const}, \quad \mathbf{L}_0(t) = \mathbf{L}_0(0) \qquad (17.27)$$

(17.27) формула системанинг О қўзғалмас марказга нисбатан кинетик моментининг *сақланиш қонунини* ифодалайди: агар системага таъсир этувчи ташқи кучларнинг бирор қўзғалмас О марказга нисбатан бош моменти нолга тенг бўлса, шу марказга нисбатан системанинг кинетик моменти миқдор ва йўналиш жиҳатдан ўзгармас бўлади. $\mathbf{M}_0^e = 0$ шарт қўзғалмас О марказга нисбатан система кинетик моментининг сақланиш шарти бўлади;

2) Агар система нуқталарига таъсир этувчи ташқи кучларнинг бирор қўзғалмас (масалан, Oz) ўққа нисбатан бош моменти нолга тенг($\mathbf{M}_z^e = 0$) бўлса, у ҳолда системанинг мазкур ўққа нисбатан кинетик моменти ўзгармайди, яъни (17.26) дан

$$\frac{dL_z}{dt} = 0,$$

ёки

$$L_z = \mathrm{const}, \quad L_z(t) = L_z(0) \qquad (17.28)$$

формула системанинг oz ўққа нисбатан кинетик моментининг сақланиш қонунини ифодалайди ва *юзалар интеграли* дейилади. Система нуқталарига таъсир этувчи ташқи кучларнинг бирор қўзғалмас ўққа нисбатан моментларининг алгебраик йиғиндиси нолга тенг бўлса, системанинг шу ўққа нисбатан кинетик моменти ўзгармас бўлади. (17.28) шарт системанинг қўзғалмас ўққа нисбатан кинетик моментининг сақланиш шарти бўлади. Шундай қилиб, бу теорема ҳам олдинги теоремалар каби системанинг ички кучларидан ҳалос бўлишга ва унинг ҳаракатининг биринчи интегралига эришишга имкон беради. Ҳақиқатан, (17.26) тенгламаларнинг биринчи интегралларини аналитик ифодасига эришиш унча қийин эмас. (17.26) да $L_z = \sum m_k(x_k\dot{y}_k - y_k\dot{x}_k)$ га тенг. (17.28) га мувофиқ

$$\sum m_k(x_k\dot{y}_k - y_k\dot{x}_k) = C$$

деб ёзаоламиз. Бироқ, (17.20) га кўра $x_k\dot{y}_k - y_k\dot{x}_k$ ифода система к-нчи нуқтасининг оху текисликдаги секториал тезлигининг иккиланган қийматини ифодалайди. Шунинг учун уни 2 v_{cz}^k билан алмаштирамиз. У ҳолда системанинг z ўққа нисбатан кинетик моменти ифодаси

$$\sum m_k v_{cz}^k = \frac{C}{2}$$

га тенг бўлади. Шунингдек, система к-нчи нуқтасининг yoz, zox текисликлардаги секториал тезликларини, мос равишда, v_{cx}^k, v_{cy}^k орқали белгиласак ва (17.26) тенгламаларнинг ўнг томонларини нолга тенг деб олсак, бу тенгламаларнинг биринчи интегралларини аналитик ифодасини ҳосил қиламиз:

$$\sum m_k(x_k\dot{z}_k - z_k\dot{x}_k) = 2\sum m_k v_{cx}^k = A$$

$$\sum m_k(z_k\dot{x}_k - x_k\dot{z}_k) = 2\sum m_k v_{cy}^k = B$$

$$\sum m_k(x_k\dot{y}_k - y_k\dot{x}_k) = 2\sum m_k v_{cz}^k = C$$

Бу ерда A, B, C мос равишда, системанинг x, y, z ларга нисбатан кинетик моментлари. (17.28) дан ички кучлар системанинг кинетик моментини ўзгартираолмайди деган хулосага келиш мумкин. Кинетик моментнинг сақланиш қонунини қўзғалмас oz ўқи атрофида (ёки массалар марказидан ўтувчи ўқ) айланувчи система (қаттиқ жисм) учун қўллаймиз.

81-§. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракат дифференциал тенгламаси.

Механик системанинг бирор қўзғалмас oz ўққа нисбатан кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги (17.26) теоремадан, яъни

$$\dot{L}_z = M_z^e = \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e)$$

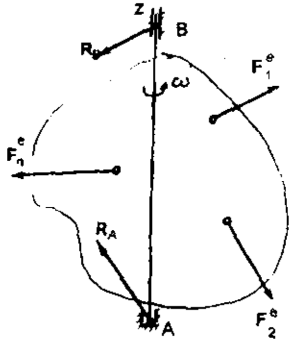
дан қаттиқ жисмнинг қўзғалмас oz ўқ атрофидаги *айланма ҳаракат дифференциал тенглимаси* келиб чиқади (168-расм). Бу ерда $L_z = I_z\omega$ бўлиб, I_z - қаттиқ жисмнинг айланиш ўқига нисбатан инерция моменти, ω - қаттиқ жисмнинг бурчак тезлиги. У ҳолда юқоридаги тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$I_z \cdot \frac{d\omega}{dt} = M_z^e = \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e)$$

ёки (17.29)

$$I_z \cdot \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e)$$

келиб чиқади. (17.29) тенглама қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ *атрофида айланма ҳаракат дифференциал тенгламаси* дейилади. Энди ушбу тенглама ёрдамида кинетик моментнинг сақланиш қонунини айланувчи система ҳоли учун текширамиз. Қўзғалмас oz ўқ (ёки массалар марказидан ўтувчи ўқ) атрофда айланувчи



168-расм.

системани қараймиз. У ҳолда (17.10) формулага биноан

$$L_z = I_z\omega$$

деб ёзаоламиз. Агар бу ҳол учун $M_z^e = \sum m_z(\mathbf{F}_k^e) = 0$ бўлса, юқоридаги (17.26) формулага кўра

$$I_z\,\omega = \text{const}$$

бўлади. Бундан қуйидаги натижаларга келамиз:

а) агар система (абсолют) қаттиқ жисм бўлса, у учун I_z = const ва демак, ω = const бўлади, яъни қаттиқ жисм z ўқи атрофида ўзгармас бурчак тезлик билан айланади;

б) агар системанинг массалар тақсимланиши ўзгарувчан бўлса, ички кучлар туфайли системанинг айрим нуқталари ўқдан узоқлашса I_z ошади, ўққа яқинлашса I_z камаяди. Бироқ, $I_z\,\omega =$ const бўлганлиги сабабли I_z ошса ω камаяди ва аксинча, токи, $L_z = L_z$ ω ўзгармасдан қолади.

Шундай қилиб, ички кучларнинг таъсири система айланишининг бурчак тезлигини ўзгартириши мумкин, чунки, L_z нинг ўзгармасдан қолиши, умуман, ω нинг ўзгармас бўлишини ифодалай олмайди.

Система кинетик моментининг сақланиш қонунини Н.Е.Жуковский скамейкаси билан олиб бориладиган тажрибада аниқ кузатиш мумкин. У, шарикли подшипникларда ишқаланишсиз (ишқаланиши камайтирилган) вертикал z ўқи атрофида айланадиган горизонтал платформадан иборат. Агар қўлларига тош ушлаган бирор одам платформада турган булса, у ҳолда система (платформа ва одам) га таъсир этувчи ташқи кучлар: z ўқига параллел одамнинг, тошларнинг, платформанинг оғирлик кучлари ва текисликнинг нормаль реакция кучлари ҳамда таянч подшипникларнинг бу ўқни кесувчи реакция кучлари бўлади. Шундай қилиб, берилган системага таъсир этувчи барча ташқи кучларнинг системанинг айланиш ўқига нисбатан моментларининг алгебраик йиғиндиси нолга тенг бўлади. Демак, бу ҳолда, сақланиш қонунига мувофиқ, айланаётган системанинг ушбу айланиш ўқига нисбатан кинетик моменти $L_z = I_z\omega$ ўзгармасдан қолиши керак. Агар одам ушлаб турган тошлари билан қўлларини кўкрагига яқинлаштирса, системанинг айланиши тезлашади ва аксинча, у тошларни айланиш ўқидан узоқлаштирса - секинлашади. Аммо, системанинг кинетик моменти айланиш ўқига нисбатан ўзгармасдан қолади.

Жисмнинг айланиш ўқига нисбатан инерция моментини камайтириш йўли билан, унинг бурчак тезлигини мана шундай ошириш усули балетда, акробатикада, ҳавода сакрашда ва ҳоказоларда кенг қўлланилади. Демак, айланма ҳаракатдаги жисмнинг ҳаракат ўлчовини унинг кинетик моменти ифодалайди.

82-§. Механик система кинетик моментининг массалар марказига нисбатан ўзгариши ҳақида теорема.

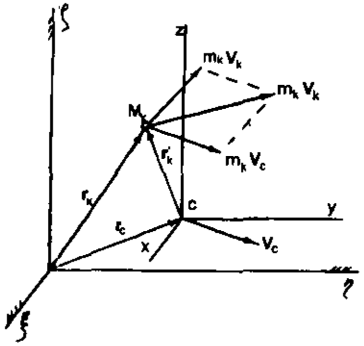
Биз олдинда қўзғалмас координата ўқларига нисбатан система ҳаракат миқдори моменти (кинетик моменти) теоремаси (17.24) ни исботлаган эдик. Энди, координата боши механик система массалар маркази билан сферик шарнирли бириктирилган ва механик системанинг ҳар қандай ҳаракатида у билан биргаликда фақат илгариланма ҳаракатланаётган . Cxyz координата ўқларига нисбатан бу теореманинг тадбиқ этилишини кўрамиз. Айтайлик, қўзғалмас ξ , η , ζ ўқларига нисбатан система массалар марказининг ҳолати $\mathbf{r}_C$ радиус вектор, *унинг к-нчи нуқтасининг* ҳолати эса $\mathbf{r}_к$ радиус вектор билан аниқлансин (169-расм). Шунингдек, система массалар маркази билан биргаликда илгариланма ҳаракатланаётган x,y,z ўқларига нисбатан системанинг к-нчи нуқтасининг ҳолати $\mathbf{r}'_k$ радиус вектор билан аниқлансин. У ҳолда қўзғалмас ξ, η, ζ ўқларга нисбатан система кинетик моменти теоремаси

$$\frac{d}{dt}\sum(\mathbf{r}_k x m_k \mathbf{v}_k)=\sum(\mathbf{r}_k x \mathbf{F}_k^e)$$

кўринишда ифодаланади. Расмдан $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_C + \mathbf{r}'_k$ деб ёзаоламиз. Бу тенгламани t бўйича дифференциалласак:

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}'_k$$

келиб чиқади. Бу ерда $\mathbf{v}'_k$ к-нчи нуқтанинг С массалар марказига нисбатан тезлиги. Юқорида



169-расм.

ёзилган тенгламадаги $\mathbf{r}_k$ ва $\mathbf{v}_k$ лар ўрнига уларнинг топилган қийматларини қўйиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{d}{dt}\sum m_k(\mathbf{r}_c+\mathbf{r}'_k)x(\mathbf{v}_c+\mathbf{v}'_k)=\sum(\mathbf{r}_k+\mathbf{r}'_k)x\mathbf{F}_k^e$$

ёки ўзаро кўпайтиришлардан сўнг

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{r}_c\times\mathbf{v}_c\sum m_k+\mathbf{v}_c\times\sum m_k\mathbf{r}'_k+\mathbf{r}_c\times\sum m_k\mathbf{v}'_k+\sum m_k\mathbf{r}'_k\times\mathbf{v}'_k\right)=$$

$$=\mathbf{r}_c\times\sum\mathbf{F}_k^e+\sum\left(\mathbf{r}'_k\times\mathbf{F}_k^e\right)$$

Бу ерда

1) $\Sigma\, m_k \mathbf{r}'_k = 0$, чунки $\mathbf{r}'_k = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_C$, бундан эса,

$$\Sigma\, m_k r'_k = \sum m_k r_k - r_C \sum m_k = \sum m_k r_k - r_C \cdot m = 0$$

2) $\Sigma\, m_k \mathbf{v}'_k = 0$, чунки $\Sigma\, m_k \mathbf{r}'_k = 0$, демак, $\Sigma m_k \mathbf{r}'_k = \Sigma m_k \mathbf{v}'_k = 0$;

3) $\mathbf{r}_C\, x\mathbf{v}_C\, \Sigma\, m_k = \mathbf{r}_C\, x\mathbf{v}_C\, m = \mathbf{r}_C\, x\, m\mathbf{v}_C = \mathbf{L}_C$;

4) $\Sigma\, m_k\, \mathbf{r}'_k\, x\, \mathbf{v}'_k = \Sigma\, (\mathbf{r}'_k\, x\, m_k \mathbf{v}'_k) = \mathbf{L}'_C$;

5) $\mathbf{r}_C\, x\, \Sigma\, \mathbf{F}_k^e = \mathbf{r}_C\, x\, \mathbf{R}^e = \mathbf{M}_0^e$;

б) $\sum \mathbf{r}'_k x \mathbf{F}_k^e = \mathbf{M}_C^e$.

$\mathbf{L}_C$ ва $\mathbf{M}_C^e$ векторлар, мос равищда, массалар марказига нисбатан система кинетик моментини ва барча ташқи кучларнинг бош моментини ифодалайди. Бажарилган ўзгартиришлардан кейин тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_C x\, m\mathbf{v}_C) + \frac{d\mathbf{L}'_C}{dt} = \mathbf{r}_C x \mathbf{R}^e + \mathbf{M}_C^e.$$

Аммо,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_C x\, m\, \mathbf{v}_C) = \mathbf{v}_C x m \mathbf{v}_C + \mathbf{r}_C x m \mathbf{a}_C = \mathbf{r}_C x \mathbf{R}^e = \mathbf{M}_o^e,$$

бўлганлиги сабабли

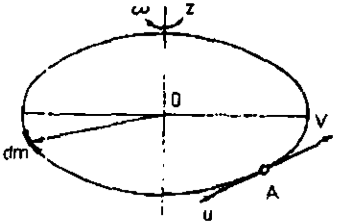
$$\frac{d\mathbf{L}'_C}{dt} = \mathbf{M}_C^e \quad \mathbf{L}_o = \mathbf{L}_C + \mathbf{L}'_C, \qquad (17.30)$$

тенглик ўринли бўлади. Бу ерда $\mathbf{L}_C$ - массаси система массасига тенг деб олинган нуқта - массалар марказининг қўзғалмас О марказга нисбатан кинетик моменти, $\mathbf{L}'_C$ - массалар марказига нисбатан системанинг нисбий ҳаракат кинетик моменти, $\mathbf{L}_o$ - қўзғалмас О марказга нисбатан системанинг кинетик моменти.

Демак, *массалар марказига нисбатан системанинг нисбий ҳаракат кинетик момент векторидан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосила системага қўйилган барча ташқи кучларнинг система массалар марказига нисбатан бош моментига тенг.*

(17.30) формула қўзғалмас О марказга нисбатан механик системанинг кинетик моменти билан унинг массалар маркази С га нисбатан нисбий ҳаракат кинетик моментлари орасидаги боғланишни ифодалайди: *механик системанинг қўзғалмас о марказга нисбатан абсолют ҳаракатининг кинетик моменти массаси бутун* *система массасига тенг деб олинган массалар марказининг шу қўзғалмас о марказга нисбатан кинетик моменти билан системанинг илгариланма нисбий ҳаракатининг массалар марказига нисбатан кинетик моментининг геометрик йиғиндисига тенг.*

39-*масала.* Массаси гардишига таралган ва огирлиги Q_2 = 4200 Н, радиуси R = 1м бўлган ҳалқанинг A нуқтасида огирлиги Q_1 = 600 Н га тенг одам турибди. Горизонтал жойлашган ҳалқа вертикал z ўқи атрофида айланиши мумкин



(170-расм).

Бироздан сўнг одам ҳалқа бўйлаб ўзгармас нисбий тезлик $v = 2\frac{м}{с}$ - билан юра бошлайди. Бунда ҳалқа ўз ўқи атрофида қандай ω бурчак тезлик билан айланади. Бошланғич пайтда ҳалқа ва одамнинг тезлиги 0 тенг.

Ечиш. Механик система (ҳалқа ва одам) га қўйилган барча ташқи кучлар z ўқига параллел, шунинг учун $M_z^e = 0$ ва $L_z = const$ бўлади. Бошланғич пайтда система мувозанатда бўлганлиги учун $L_{z0} = 0$. Одам ҳалқа бўйлаб соат стрелкаси айланиши йўналишига тескари йўналишда (z ўққа нисбатан) юрганда ҳалқа соат стрелкаси юриши йўналишида айлана бошлайди. Шунинг учун одамнинг абсолют тезлигининг модули v-u айирмага тенг, бу ерда u ҳалқанинг айланиш тезлиги. Одамнинг z ўққа нисбатан кинетик моменти қуйидагига тенг:

$$L_{1z} = -\frac{Q_1}{g}(v - u)R = -\frac{Q_1}{g}(v - \omega R) \cdot R$$

Ҳалқанинг ана шу z ўққа нисбатан кинетик моментини ҳисоблаш учун ундан dm массали элементар бўлагини ажратамиз, у ҳолда ҳалқа элементининг кинетик моменти $dm\ u\ R = dm\ R^2\ \omega$ га тенг бўлади, бутун ҳалқаники эса,

$$L_{2z} = \sum dmR^2\omega = R^2\omega\sum dm = mR^2\omega = \frac{Q_2}{g}R^2\omega.$$

Одам ҳалқа бўйлаб ҳаракатланганда системанинг кинетик моменти бошланғич пайтда нолга тенг қийматидан ўзгармай қолади, шунинг учун

$$L_z = L_{1z} + L_{2z} = -\frac{Q_1}{g}(v - R\omega)R + \frac{Q_2}{g}R^2\omega = 0.$$

Бундан

$$\omega = \frac{1}{R} \cdot \frac{Q_2 v}{Q_1 + Q_2} = \frac{4200 \cdot 2}{4800} = 1{,}75\ c^{-1}.$$

XVIII боб

МОДДИЙ НУҚТА ВА МЕХАНИК СИСТЕМА КИНЕТИК ЭНЕРГИЯСИНИНГ ЎЗГАРИШИ ҲАҚИДА ТЕОРЕМА

83-§. Кучнинг элементар иши ва унинг аналитик ифодаси. Кучнинг чекли иши. Қувват.

Кучнинг моддий нуқтага кўрсатадиган таъсир эффекти иш тушунчаси билан ҳам аниқланади. *Иш* куч қўйилган нуқтанинг *ўтган масофасига нисбатан кучнинг таъсир ўлчовини характерлайди* Аниқроқ айтганда, иш ҳаракатланувчи нуқтага қўйилган кучнинг нуқта тезлиги модулини ўзгартирадиган таъсирини ифодалайди. Нуқта (ёки жисм) га қўйилган кучнинг берилишига қараб, кучнинг маълум масофадаги иши турли кўринишда бўлиши мумкин. Куч иши тушунчасининг баъзи ҳоллари устида тўхталамиз.

Фараз қилайлик, миқдор ва йўналиш жиҳатдан ўзгармас бўлган куч қўйилган нуқта тўғри чизиқ бўйича ҳаракатланиб, S йўлни ўтсин ҳамда кучнинг йўналиши тўғри чизиқли траектория билан устма-уст тушсин. У ҳолда, **F** кучнинг S йўл билан мусбат ёки манфий кўпайтмаси *иш* дейилади. Агар ишни A билан белгиласак, ушбу ҳолда иш қуйидагича ифодаланади:

$$A = \pm F \cdot S$$

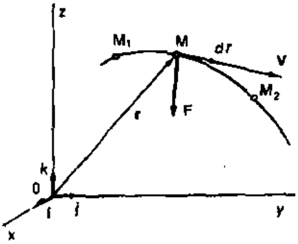
F кучнинг йўналиши нуқта ҳаракат йўналиши билан бир хил бўлса, бу тенгликда мусбат ишора, акс ҳолда манфий ишора олинади.

Агар **F** кучнинг йўналиши нуқтанинг ҳаракат йўналиши билан α бурчакни ташкил қилса, иш учун

$$A = F \cdot S \cdot \cos\alpha$$

формула ўринли бўлади. Ушбу ифодага кўра, α ўткир ёки ўтмас бурчак бўлишига қараб, иш, мос равишда, мусбат ёки манфий қийматга эга бўлади. $\alpha=\pi/2$ да эса **F** кучнинг иши нолга тенг бўлади.

Агар кучнинг миқдори ва йўналиши ўзгарувчан бўлса, ёки куч қўйилган нуқта эгри чизиқ бўйлаб ҳаракатланса, юқоридаги формулалар ёрдамида ишни ҳисоблаш мумкин эмас. Қуйида ушбу ҳолга тўхталамиз. Айтайлик, миқдор ва йўналиш жиҳатидан ўзгарувчан **F** куч таъсирида M нуқта эгри чизиқли траектория бўйича M_1 вазиятдан M_2 вазиятга кўчсин (171-расм). Бу ерда $M_1M_2 = S$ куч қўйилган нуқтанинг ўтган йўли деса бўлади. Ўзгарувчан кучнинг бу йўлдаги ишини ҳисоблаш учун, дастлаб, берилган куч қўйилган нуқтанинг чексиз кичик dS элементар кўчишидаги ишини ҳисоблашга тўғри келади, шу маънода механикага кучнинг *элементар иши* тушунчаси киритилади.



171-расм

M нуқтанинг чексиз кичик вақт оралигидаги элементар кўчиш векторини $d\mathbf{r}$ орқали белгилаймиз. M нуқтанинг тезлик вектори $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ эди, у ҳолда $d\mathbf{r}=\mathbf{v}\cdot dt = \mathbf{i}\,dx+\mathbf{j}\,dy + \mathbf{k}\,dz$, яъни унинг элементар кўчиши тезлик йўналиши бўйлаб содир бўлади.

Элементар кўчиш векторининг Декарт координата ўқларидаги проекциялари dx, dy, dz M нуқта координаталарининг чексиз кичик вақт оралиғи dt даги орттирмалари деса ҳам бўлади. Бунда элементар кўчишнинг модули

$$|d\mathbf{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = dS.$$

бу ерда dS - траекториянинг М нуқтадаги ёй дифференциали. **F** кучнинг элементар иши δA деб, **F** куч вектори билан элементар кўчиш вектори **dr** нинг скаляр кўпайтмасига айтилади:

$$\delta A = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \qquad (18.1)$$

Бу ерда δA символи чексиз кичик катталикни белгилайди, аммо, у, умуман айтганда, ишнинг дифференциали эмас. Кучнинг элементар иши фақат хусусий ҳоллардагина бирор координата функциясининг тўла дифференциали бўлаолади. Икки векторлар скаляр кўпайтмасининг таърифига биноан кучнинг элементар иши ифодасини ушбу кўринишда олиш мумкин:

$$\delta A = F \cdot dS\cos(\mathbf{F} \,\hat{,}\, \mathbf{v}) = F_\tau\, dS,\ (dS = |d\mathbf{r}|); F_\tau = F\cos(\mathbf{F} \,\hat{,}\, \mathbf{v}) \qquad (18.2)$$

Ва

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \qquad (18.3)$$

(18.2) *формула, элементар ишнинг геометрик ифодаси* (18.3) эса *элементар ишнинг аналитик ифодаси* бўлади. Охирги формулада F_x, F_y, F_z лар кучнинг Декарт ўқларидаги проекциялари. $dS \neq 0$ бўлганда $0 < (\mathbf{F} \hat{\ } \mathbf{v}) < 90$ бўлса, $\delta A > 0$, $90 < (\mathbf{F} \hat{\ } \mathbf{v}) < 180$ бўлса, $\delta A < 0$ ва $\mathbf{F} \perp \mathbf{v}$ да эса $\delta A = 0$ бўлиши (18.2) формуладан келиб чиқади. Кучнинг M_1 M_2 чекли йўлидаги иши (171-расм) деб, элементар иш δA дан траекториянинг M_1M_2 ёйи бўйича олинган эгри чизиқли интегралга айтилади:

$$A = \int\limits_{M_1M_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int\limits_{M_1M_2} F\cos\left(\mathbf{F} \hat{\ } \mathbf{v}\right) \cdot dS = \int\limits_{M_1M_2} F_\tau \cdot dS \qquad (18.4)$$

ёки

$$A = \int\limits_{M_1M_2} \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right) \qquad (18.5)$$

(18.4) формула кучнинг тўла ишининг геометрик ифодаси, (18.5) формула эса, аналитик ифодасидир.

Халқаро СИ бирликлар системасида иш бирлиги *Жоул*да ўлчанади. 1Ж = 1 Н м.

Кучнинг *қуввати* деб, кучнинг элементар иши δA ни, бу ишни бажарилиши учун кетган вақт оралиғи δt га нисбатига айтилади:

$$N = \frac{\delta A}{\delta t} \tag{18.6}$$

(18.2) формулага кўра берилган пайтдаги қувват N, **F** кучни, бу куч таъсирида M нуқтанинг олган тезлиги **v** га скаляр кўпайтмасига тенг:

$$N = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_z\dot{z}. \tag{18.7}$$

Қувват халқаро СИ бирликлар системасида *Ватт* билан ўлчанади, бу бир секундда бир Жоул иш бажарадиган кучнинг қувватидир, яъни 1 Вт = 1 Ж/с, бундан ташқари қувват техникада от кучида ҳам ўлчанади: 1 (о.к.) = 75 кгк м/с = 736 Вт.

Моддий нуқтага $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2,\ldots,\mathbf{F}_n$ кучлар системаси таъсир эттан ҳолда тенг таъсир этувчи куч билан кучлар системаси иши учун ушбу лемма ўринли бўлади.

Лемма. Ҳаракатланаётган нуқтага қўйилган тенг таъсир этувчи кучнинг бирор M_1 M_2 йўлдаги иши, ташкил этувчи кучларнинг шу йўлдаги ишларининг алгебраик йиғиндисига тенг.

Исботи. (15.69) формулага мувофиқ эга бўламиз:

$$\begin{aligned} A &= \int_{M_1M_2} \mathbf{R} \cdot d\mathbf{r} = \int_{M_1M_2} \left(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n\right) = \\ &= \int_{M_1M_2} \left(\mathbf{F}_1 d\mathbf{r}\right) + \int_{M_1M_2} \left(\mathbf{F}_2 d\mathbf{r}\right) + \ldots + \int_{M_1M_2} \left(\mathbf{F}_n d\mathbf{r}\right) \end{aligned} \tag{18.8}$$

Яъни, функцияларнинг алгебраик йиғиндисидан эгри чизиқли интеграл уларнинг ҳар бирини эгри чизиқли интегралининг алгебраик йиғиндисига тенг, шундай қилиб лемма исботланди.

84-§. Қаттиқ жисмга таъсир этувчи кучларнинг элементар иши.

У ёки бу ҳаракатда бўлган қаттиқ жисм нуқталарига қўйилган кучларнинг элементар ишини ҳисоблаш формулаларини келтирамиз.

Жисм *илгариланма* ҳаракатланганда унга таъсир этаётган, F_1, F_2,...,F_n кучлар қўйилган M_1,M_2,...,M_n нуқталарнинг элементар кўчишлари, илгариланма ҳаракатнинг таърифига кўра, $d\mathbf{r}_1 = d\mathbf{r}_2 = ... = d\mathbf{r}_C$ бўлади. У ҳолда, кучларнинг ушбу элементар кўчишдаги элементар иши жисмга қўйилган мазкур кучларнинг бош вектори **R** ни жисм массалар марказининг элементар кўчишидаги элементар иши билан аниқланади, яъни

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k d\mathbf{r} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k d\mathbf{r}_C = \mathbf{R} \cdot d\mathbf{r}_C \qquad (18.9)$$

Айни ҳолда бош вектор **R** жисмнинг ҳар қандай нуқтасига қўйилган бўлиши мумкин.

Жисм *қўзғалмас ўқ атрофида айланма* ҳаракатланаётганда унинг нуқталари траекторияси айланиш ўқига перпендикуляр текисликлардаги айланалардан иборат бўлади. Жисм нуқталарига қўйилган кучларнинг ушбу айланаларга уринма ташкил этувчи $F_{\tau k}$ ларигина иш бажаради. Қаттиқ жисмнинг элементар айланма кўчишида унинг айланиш бурчаги φ эса $d\varphi$ га ўзгаради. У ҳолда ташқи кучнинг бу кўчишдаги иши

$$\delta A_k = F_{\tau k} dS_k = F_{\tau k} h_k d\varphi = m_z(\mathbf{F}_k) \cdot d\varphi$$

га тенг бўлади. Жисмга қўйилган барча ташқи кучларнинг ушбу элементар кўчишдаги бажарган элементар иши ҳар бир кучнинг юқоридаги элементар ишининг алгебраик йиғиндисидан иборатдир, яъни

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} \delta A_k = \sum_{k=1}^{n} m_z(\mathbf{F}_k) \cdot d\varphi = M_z \cdot d\varphi \qquad (18.10)$$

Қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатланаётган қаттиқ жисмга қўйилган ташқи кучларнинг бажарган элементар иши ушбу кучларнинг айланиш ўқига нисбатан бош моментининг айланиш бурчаги орттирмасига кўпайтирилганига тенг.

Эркин қаттиқ жисм ҳаракатининг *умумий ҳолида* элементар кўчишни бирор О қутб билан илгариланма элементар $d\mathbf{r}_0$ ва шу қутб орқали ўтган оний айланиш ўқи Ω атрофидаги айланма элементар $d\varphi_0$ кўчишларга ажратиш мумкин:

$$\delta A = \mathbf{R} \cdot d\mathbf{r}_0 + M_\Omega \delta\varphi \qquad (18.11)$$

Эркин қаттиқ жисм ҳаракатининг умумий ҳолида унга қўйилган ташқи кучларнинг элементар иши уларнинг бош вектори қўйилган нуқта - қутб кўчишидаги элементар иш билан бу қутб орқали ўтган оний ўққа нисбатан бош моментининг ушбу оний ўқ атрофида жисм айланиши туфайли кўчишидаги элементар ишининг алгебраик йиғиндисига тенг.

Бинобарин, текис параллел ҳаракатдаги жисм нуқталарига таъсир этувчи кучларнинг элементар иши шу кучлар бош векторининг жисм массалар марказ - қутбнинг элементар $d\mathbf{r}_c$ кўчишидаги иши билан кучларнинг массалар марказига нисбатан бош моментининг жисмнинг массалар маркази атрофида *айланишининг* элементар $d\varphi$ кўчишидаги иши йиғиндисига тенг:

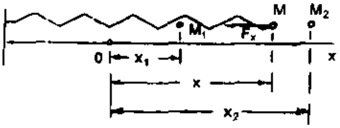
$$\delta A = \mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{r}_C + M_{Cz} \cdot d\varphi$$

Бу ерда **R** - қўйилган кучларнинг бош вектори, M_{Cz} - кучларнинг жисм массалар марказига, яъни массалар марказидан текис шакл текислигига перпендикуляр ўтган ўққа нисбатан бош моменти, $\delta\mathbf{r}_C$ - массалар марказининг элементар кўчиши, $\delta\varphi$ - массалар маркази орқали текис шаклга перпендикуляр ўтган ўқ атрофида элементар айланма кўчиш.

40-*масала.* Эластиклик кучнинг иши ҳисоблансин (172-расм).

Ечиш. Моддий нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракатида (18.3) формула қуйидаги кўринишни

олади: $$A = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx$$



172-расм.

Бу ерда x_1 ва x_2 моддий нуқтанинг бошланғич ва охирги вазиятларининг абциссалари. Пружинанинг эластиклик кучи $F_x = -cx$ учун M_1 вазиятдан M_2 вазиятга нуқтанинг кўчиришдаги ишни ҳисоблаймиз, бу ерда с-пружинанинг бикрлик коэффициенти. У пружинани бирлик узунликка чўзувчи (ёки сиқувчи) кучга тенг ва халқаро бирликлар системасида Н/м бирликда ўлчанади, чунки Гук қонунига кўра пружинанинг эластиклик кучи унинг чўзилиши (ёки сиқилиши) га пропорционал бўлади. Юқорида келтирилган формулага мувофиқ қуйидагига эга бўламиз:

$$A = -\int_{x_1}^{x_2} cx \cdot dx = \frac{1}{2} c\left(x_1^2 - x_2^2\right) \qquad (а)$$

Топилган формулада x пружинанинг бошланғич узайиши Δl_1 ни, x_2 эса, пружинанинг охирги узайиши Δl_2 ни ифодалайди. У ҳолда (а)

$$A = \frac{c}{2}\left(\Delta l_1^2 - \Delta l_2^2\right) \qquad (б)$$

кўринишни олади.

$|\Delta l_1| > |\Delta l_2|$ бўлса, иш мусбат бўлади, яъни пружина учи мувозанат (чўзилмаган) ҳолатга томон кўчади, $|\Delta l_1| > |\Delta l_2|$ бўлса, иш манфий бўлади, яъни пружина учи мувозанат ҳолатдан узоқлашади.

Агар нуқтанинг М вазияти мувозанат (деформацияланмаган) ҳолатта мос келса, эластиклик кучнинг иши нуқтанинг М вазияти учун

$$A = -c\frac{\Delta l^2}{2} \qquad (в)$$

билан ҳисобланади, бу ерда $x = \Delta l$ деб олинади. (а) ва (б) формулалар нуқтанинг траекторияси ҳар қандай бўлганда ҳам ўринли. Шундай қилиб, эластиклик кучнинг иши нуқтанинг кўчиш қонунига (траекториясининг шаклига) боғлиқ бўлмай, балки унинг бошланғич M_1 ва охирги M_2 вазиятларининг координаталарига боғлиқ бўлади. Бундай хусусиятга эга бўлган механик кучларга *потенциалли кучлар* дейилади; масалан, оғирлик кучи, эластиклик кучи, бутун олам тортишиш кучи ва ҳоказолар.

85-§. Потенциалли куч майдони. Потенциал энергия.

Нуқтанинг (жисмнинг) бирор кўчишида унга таъсир этаётган кучнинг иши умумий ҳолда нуқтанинг шу кўчиш ҳаракат қонунига боғлиқ бўлади. Аммо, юқоридаги масалада кўрганимиздек, нуқтанинг бирор кўчишида унга қўйилган эластиклик кучининг, оғирлик кучининг ёки марказий кучларнинг бажарган ишлари шу нуқтанинг ҳаракат қонунига боғлиқ бўлмайди. Бундай *потенциали кучлар* устида алоҳида тўхталамиз. Фараз қилайлик, нуқтага таъсир этувчи куч фақат нуқтанинг вазияти (координаталари) га боғлиқ бўлсин. Кучнинг координата ўқлардаги проекциялари

$$F_x = F_x(x,y,z), \quad F_y = F_y(x,y,z), \quad F_z = F_z(x,y,z)$$

яъни F_x, F_y, F_z функцияларнинг аниқланиш соҳасига *кучнинг майдони* дейилади. Моддий нуқта куч майдонида ҳаракатланса ва майдон кучининг иши нуқтанинг кўчиб ўтган йўлига (кўчиш қонунига) боғлиқ бўлмай, балки фақат нуқтанинг бошланғич M_1 ва охирги M_2 вазиятларига боғлиқ бўлса, бундай куч майдонига *потенциалли куч майдони* дейилади. Потенциалли майдон кучининг ихтиёрий ёпиқ контур бўйича иши нолга тенг бўлади. Бу шарт эгри чизиқли интеграллар назариясида исботланганидек, кучнинг элементар иши бирор U(x,y,z) функциянинг тўла дифференциали бўлаолиши билан айни тенг, яъни

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz = dU = -d\Pi. \qquad (18.12)$$

Бу ерда П - *потенциал энергия*. U(x,y,z) функцияга *куч* (ёки *потенциал*) функцияси дейилади. Гарчи,

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz, \qquad (18.13)$$

га тенг, у ҳолда охирги икки тенгликлардан ва dx,dy,dz дифференциалларнинг мустақиллигидан қуйидагига эга бўламиз:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x},\ F_y = \frac{\partial U}{\partial y},\ F_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \qquad (18.14)$$

Бу тенглама куч майдонининг потенциалли бўлишининг зарурий ва етарли шартларини ифодалайди.

Бинобарин, юқоридаги шартларни қаноатлантирувчи x, y, z координаталарнинг бир қийматли, чекли ва дифференциалланадиган U функцияси мавжуд бўлса, яъни майдон кучининг координата ўқларидаги проекциялари шу U функциядан мос координаталар бўйича олинган хусусий ҳосилаларга тенг бўлса, бундай куч майдони потенциалли куч майдонидан иборат бўлади.

Шундай қилиб, *U* функция *куч функцияси*, *U* майдон кучи *потенциалли куч* ёки *консерватив куч* дейилади. Шунинг учун ҳам, потенциалли кучни қуйидагича аниқласа бўлади:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial U}{\partial x}\cdot \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot \mathbf{k}.$$

ёки

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad} U = \nabla U,$$

яъни, потенциалли **F** куч майдон U функциянинг градиентига тенг бўлади.

Майдоннинг потенциалли бўлиш шартини майдон кучининг координата ўқлардаги проекциялари орқали аниқлаш мумкин. Бунинг учун (18.14) дан қуйидагича хусусий ҳосилалар оламиз:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z},$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z},$$

Бу ифодаларнинг чап томонидаги аралаш ҳосилаларга эътибор берсак потенциалли куч проекцияларининг координаталар бўйича хусусий ҳосилалари орасидаги қуйидаги муносабатларга эга бўламиз:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}$$

Бу муносабатлар куч майдонининг *потенциалли бўлишининг зарурий ва етарли шартлари* дейилади.

Агар куч функцияси ўзгармас миқдорга тенг ($U(x,y,z) = \text{const}$) бўлса, потенциалли майдоннинг бундай аниқланган сирти *тенг потенциалли сирт* дейилади. Тенг потенциалли сиртда $dU = 0$ бўлади. Бундан тенг потенциалли сирт бўйлаб ҳар қандай элементар кўчишдаги майдон кучининг иши нолга тенг, яъни $\delta A = dU = \mathbf{F}d\mathbf{r} = 0$, ёки $Fdr\cos(\mathbf{F}\hat{}d\mathbf{r}) = 0$ келиб чиқади. Бу ерда $F \neq 0$, $dr \neq 0$ бўлганидан $\cos(\mathbf{F}\hat{}d\mathbf{r}) = 0$, яъни $(\mathbf{F}\hat{}d\mathbf{r}) = \pi/2$ бўлади. Демак, потенциалли **F** куч тенг потенциалли сиртда нормаль бўйлаб йўналган бўлади.

Потенциалли куч майдонидаги иш. Потенциал энергия.

Куч функцияси $U(x,y,z)$ куч майдонида M нуқтани M_0 (x_0, y_0, z_0) вазиятдан ихтиёрий танланган $M(x,y,z)$ вазиятга кўчишида майдон кучининг иши каби аниқланади:

$$A = \int_{M_0}^{M}\left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right) = \int_{M_0}^{M} dU = U(x,y,z) - U_0(x_0, y_0, z_0). \quad (18.15)$$

Шундай қилиб, потенциалли кучнинг иши нуқтанинг охирги ва бошлангич вазиятларига мос келувчи куч функцияларининг айирмасига тенг ва нуқтанинг траекториясининг шаклига боғлиқ эмас. (18.15) дан кўрамизки, потенциалли куч майдонида нуқтанинг ёпиқ эгри чизиқ бўйича кўчишидаги майдон кучининг иши нолга тенг, чунки бунда $U = U_0$. (18.15) га кўра, потенциал функция ўзгармас сонгача аниқликда топилади: $U = A + U_0$. Агар координата боши учун нуқтанинг бошлангич M_0 вазияти танланса, бунда $U_0 = 0$ деб ҳисоблаш мумкин. У ҳолда, бундай потенциалли куч майдонида нуқтанинг бирор кўчиши учун майдон кучининг иши охирги вазиятнинг куч функцияси қиймати билан аниқланади: $A = U(x,y,z)$. Ушбу ҳол учун куч функциянинг яна бир таърифини келтириш мумкин: моддий нуқтанинг координаталар бошидан майдоннинг берилган вазиятигача кўчишидаги майдон кучининг иши билан ўлчанадиган катталикка *куч функцияси* дейилади.

Потенциалли куч майдони ҳолида майдондаги нуқта вазиятигагина боғлиқ бўлган куч функцияси U билан бир қаторда *потенциал энергия* деб аталувчи бошқа П функция ҳам қаралади. Потенциал энергия майдоннинг берилган нуқтасидаги энергия миқдорини ифодалайди. Шунинг учун ҳам, куч майдонининг берилган нуқтасидаги потенциал энергияси П деб, майдоннинг берилган ушбу M нуқтаси вазиятидан бошланғич M_0 вазиятига моддий нуқтанинг кўчишида унга таъсир этаётган майдон кучининг иши билан аниқланадиган катталикка айтилади:

$$\Pi = A = \int_{M}^{M_0} dU = U_0 - U. \qquad (18.16)$$

Агар координата боши моддий нуқтанинг бошланғич вазиятида олинса, $U_0=0$ бўлиб, потенциал энергия $\Pi=-U$ га тенг бўлади. Демак, *потенциалли куч майдонининг берилган нуқтаси (вазияти)даги потенциал энергияси куч функциясининг ана шу нуқтадаги қийматининг тескари ишорасига тенг.*

Потенциалли куч майдонига доир иккита масала келтирамиз.

41-масала. Бир жинсли оғирлик майдони. Оғирлик кучининг иши куч қўйилган нуқтанинг кўчиш траекториясининг шаклига (кўчиш қонунига) боғлиқ бўлмай, балки фақат унинг бошланғич ва охирги вазиятларигагина боғлиқ бўлиши аниқлансин.

Ечиш. Айтайлик, M моддий нуқтага оғирлик кучи P таъсир этсин ва куч қўйилган нуқтанинг кўчиши содир бўлгандаги вазиятлари $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ва $M(x,y,z)$ берилган бўлсин (174-расм). Агар координата ўқлари расмда кўрсатилгандек танланса, у ҳолда оғирлик кучи $\mathbf{P} = -mg\mathbf{k}$ ($\mathbf{k}$-z ўқининг бирлик вектори-орти), яъни $F_x = 0$, $F_y = 0$, $F_z = -mg$. (18.12) формулага кўра куч функцияси учун қуйидагига эга бўламиз:

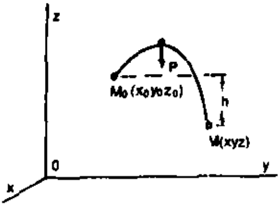
$$U(x,y,z) - U(x_0, y_0, z_0) = \int\limits_{M_0M} F_z dz = -mg \int\limits_{z_0}^{z} dz = -mgz + mgz_0.$$

Бундан $U = -mgz$ бўлиб, (18.14) шартни қаноатлантиради. Оғирлик куч майдонидаги иш учун охирги формулани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

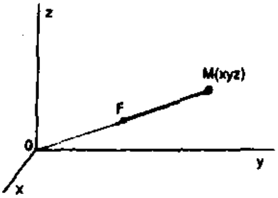
$$A = -mgh, \qquad (a)$$

бу ерда $h = z - z_0$ нуқтанинг охирги ва бошланғич вазиятларининг (баландликлари) айирмаси.

Шундай қилиб, оғирлик кучининг майдони потенциалли,чунки оғирлик кучининг иши қўйилган нуқтанинг кўчиш траекториясининг шаклига боғлиқ бўлмайди ва (а) формулага кўра аниқланади. Бунда нуқта траектория бўйлаб кўтарилса ($h>0$) иш манфий $A<0$, ва нуқта траектория бўйлаб пастга тушса ($h<0$), иш мусбат $A>0$ бўлади.



173-расм.



174-расм.

42-*масала*. Тортишиш майдони потенциалли эканлиги текширилсин.

Ечиш. Декарт ўқлари системасининг координата боши O ни тортиш марказида оламиз (174-расм). У ҳолда, Ньютон тортишиш кучи

$(\mathbf{F}=\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -F(r)\cdot\frac{\mathbf{r}}{r})$ нинг проекциялари учун қуйидагига эга бўламиз:

$$F_x = -\frac{\gamma mx}{r^3}, \quad F_y = -\frac{\gamma my}{r^3}, \quad F_z = -\frac{\gamma mz}{r^3} \qquad (r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}),$$

бу ерда m- тортилаётган нуқта массаси, γ-тортишиш доимийлиги, x,y,z- нуқта координаталари, r-унинг радиус вектори. Юқоридаги формулага мувофиқ қуйидагини ёзамиз:

$$dU = -\frac{\gamma m}{r^3}(xdx + ydy + zdz) = -\frac{\gamma m}{r^3} rdr = -\frac{\gamma m}{r^2} d\mathbf{r}$$

Буни интеграллаб ушбуни топамиз:

$$U = \frac{\gamma m}{r} + C_1$$

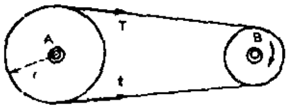
Бу Ньютон тортишиш майдонининг куч функцияси бўлади.

Майдоннинг куч функцияси тортишиш маркази O гача бўлган r масофага тескари мутаносиб боғлиқ. Агар $r \to \infty$ да $U=0$ деб олсак, юқоридаги ифодада $C_1 = 0$ га тенг бўлади, у ҳолда куч функцияси $U = \gamma m/r$ билан аниқланади.

Тенг потенциалли (*эквипотенциал*) сирт тенгламаси юқоридаги таърифга кўра $U = \gamma m/r =$ const ифода орқали аниқланади. Ушбу шартдан $r =$ const шарт келиб чиқади, яъни тортишиш кучи майдонининг тенг потенциалли сирти маркази O да *жойлашган* сферик сиртлардан иборат бўлади.

Тортишиш кучи P тенг потенциалли сиртдаги моддий нуқтага қўйилган бўлиб, у шу сиртга перпендикуляр ҳолда потенциал функциянинг ошиш томонига йўналган.

43-*масала.* A шкивни етакловчи B шкив тасма орқали айлантиради. Тасманинг етакловчи тармоғи $T=2000$ Н куч билан, етакланувчи тармоғи эса $t=1200$ Н куч билан тортилган. A шкив диаметри $2r=600$ мм, бурчак тезлиги 120 айл/мин, A шкив 10 марта айланганда бу кучларнинг иши Нм да ва тасма узатаётган қувват кучида аниқлансин (175-расм).



(175-расм)

Ечиш. A шкивга қўйилган айлантирувчи M_a момент:

$$M_a = T{\cdot}r - t{\cdot}r = (T-t)r = (2000-1200)\ 0{,}3 = 240 \text{ Нм}.$$

Шкивнинг бурилиш бурчаги $\varphi=2\pi{\cdot}10=62{,}8$ радиан, (18.10) формулага кўра шкивга қўйилган кучларнинг иши:

$$A = M_a{\cdot}\varphi = 140{\cdot}62{,}8 = 15070 \text{ Нм}.$$

Тасма узатаётган қувватни (18.6) ва (18.10) формулаларга мувофиқ қуйидагича аниқлаймиз:

$$N = \frac{M_a\omega}{75} = \frac{M_a\cdot\pi n/30}{75} = \frac{M_a\cdot n}{716{,}2}\text{o.k} = \frac{240\cdot120}{716{,}2} = 4\,\text{o.k}.$$

36-§. Моддий нуқта ва механик система кинетик энергияси. Кёниг теоремаси. Қаттиқ жисм кинетик энергиясини ҳисоблаш.

Кинетик энергия моддий нуқта ва механик система ҳаракатининг асосий динамик характеристикаларидан (ўлчовидан) биридир.

Моддий нуқта кинетик энергияси (ёки, дастлабки номи, тирик куч) деб унинг массасини тезлиги квадратига кўпайтмасининг ярмига тенг механик катталикка айтилади:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) \qquad (18.17)$$

$v^2 = v^2$ бўлганлигидан кинетик энергия тезлик йўналишига боғлиқ бўлмаган скаляр ва доимо мусбат катталик бўлиб, танланган координаталар системасига нисбатан ҳаракатланаётган нуқтанинг тезлиги нолга тенг бўлгандагина у нолга айланади. Кинетик энергия СИ системада 1кг м /сек = 1Ж билан ўлчанади. *Механик система кинетик энергияси деб системани ташкил қилган нуқталар кинетик энергияларнинг йиғиндисига айтилади.* Агар механик система кинетик энергиясини T орқали белгиласак, у қуйидагича аниқланади:

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_k^2}{2} \qquad (18.18)$$

Моддий нуқта кинетик энергияси сингари механик система кинетик энергияси ҳам тезликларнинг йўналишига боғлиқ бўлмаган скаляр мусбат катталикдир. Механик системанинг кинетик энергияси унинг барча нуқталари тинч ҳолатда бўлгандагина нолга тенг бўлади. Кинетик энергия моддий нуқтанинг ёки механик системанинг бирданига ҳам илгариланма, ҳам айланма ҳаракатларини характерловчи ўлчовдир.

Яна бир муҳим ҳол шундан иборатки, ички кучлар механик системанинг қисмларига ўзаро қарама- қарши йўналишда таъсир кўрсатишлиги туфайли улар механик ҳаракатнинг вектор ўлчовлари (ҳаракат миқдори ва ҳаракат миқдори моментлари) ни ўзгартирмас эди. Лекин ички кучлар таъсиридан механик система нуқталари тезликларининг модули ўзгарса системанинг кинетик энергияси ўзгаради. Демак, ҳаракат миқдори ва ҳаракат миқдори моментидан кинетик энергиянинг фарқи кинетик энергияни ҳам ташқи кучлар, ҳам ички кучлар таъсирида ўзгаришидир.

Агар механик система бир неча жисмлардан ташкил топган бўлса унинг кинетик энергияси мазкур жисмларнинг кинетик энергиялари йиғиндисига тенг бўлади.

Қуйида механик система ҳаракатининг умумий ҳолида унинг кинетик энергиясини аниқловчи *Кёниг теоремасини* исботлаймиз.

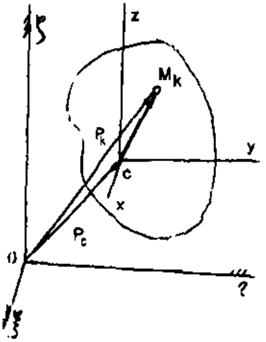
Механик система ҳаракатини унинг массалар маркази билан биргаликдаги кўчирма илгариланма ҳаракатга ва массалар маркази билан биргаликда илгариланма ҳаракатланаётган координаталар системасига нисбатан нисбий ҳаракатларга ажратамиз. У ҳолда, системанинг ихтиёрий $M_к$ нуқтаси учун 176-расмдан қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$\boldsymbol{\rho}_k = \boldsymbol{\rho}_c + \mathbf{r}_k$$

ва мос равишда

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_{kr}$$

га тенг, бу ерда $\mathbf{v}_{kr} = \dot{\mathbf{r}}_k$. Кўзғалувчи координаталар системаси илгариланма ҳаракатланганлиги сабабли ($\omega=0$), нуқтанинг нисбий тезлиги ва, демак, $\dot{\mathbf{r}}_k$ дан вақт бўйича олинган тўла ҳосила нуқтанинг нисбий тезлигига тенг локал ҳосиласи билан айнан бўлади. $\mathbf{v}_k$ тезликнинг қийматини системанинг абсолют ҳаракатидаги, яъни $O\xi\eta\zeta$ координаталар системасига нисбатан ҳаракатининг кинетик энергияси ифодасига қўямиз ва баъзи ўзгартиришлардан сўнг қуйидагига эга бўламиз:



176-расм

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{v_C^2}{2} \sum m_k + \sum \frac{m_k v_{kr}^2}{2} + \mathbf{v}_c \sum m_k \mathbf{v}_{kr}$$

Бироқ,

$$\mathbf{v}_C \sum m_k \mathbf{v}_{kr} = \mathbf{v}_C \sum m_k \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} = \mathbf{v}_C \frac{d}{dt}\left(\sum m_k \mathbf{r}_k\right) = 0 .$$

чунки

$$\sum m_k \mathbf{r}_k = m\mathbf{r}_C = 0$$

Бу ерда $\Sigma m_k = m$ - жисмнинг тўла массаси эканлигини назарда тутсак ва иккинчи йиғиндини $T^{(r)}$ орқали белгиласак кинетик энергиянинг қуйидаги ифодаси

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + T_C^{(r)}, \qquad (18.19)$$

келиб чиқади, бу ерда $T_C^{(r)} = \sum m_k v_{kr}^2 / 2$ катталик массалар маркази билан биргаликда ҳаракатланаётган координаталар системасига нисбатан механик системанинг нисбий ҳаракат кинетик энергияси ёки механик системанинг массалар марказига нисбатан кинетик энергияси. (18.19) формула Кёниг теоремасини ифодалайди:

механик системанинг кинетик энергияси массаси система массасига тенг деб олинадиган массалар марказининг кинетик энергияси ҳамда массалар *маркази билан биргаликда илгариланма ҳаракатланувчи координаталар системасига нисбатан механик системанинг нисбий ҳаракат кинетик энергияларнинг йиғиндисига тенг.*

Энди қаттиқ жисмнинг турли ҳаракатларида кинетик энергиясини ҳисоблаймиз.

Илгариланма ҳаракатланаётган қаттиқ жисмнинг кинетик энергияси қуйидаги формуладан аниқланади:

$$T=\sum\frac{m_k v_k^2}{2}=\frac{v_C^2}{2}\sum m_k=\frac{mv_C^2}{2}, \qquad (18.20)$$

чунки, жисмнинг илгариланма ҳаракатида унинг барча нуқталарининг тезликлари бир хил, яъни $\mathbf{v}_k=\mathbf{v}_C$ - жисм масса марказининг тезлиги.

Демак, илгариланма ҳаракатдаги жисмнинг кинетик энергияси массаси жисм массасига тенг бўлган массалар марказининг кинетик энергиясига тенг. Қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган жисмнинг кинетик энергиясини, унинг бирор M_k нуқтасининг тезлигини $v_k=\omega h_k$ билан ифодаланишини эътиборга олиб ҳисоблаш мумкин, бу ерда h_k - жисмнинг M_k нуқтасидан айланиш ўқигача бўлган энг қисқа масофа, ω - жисмнинг бурчак тезлиги. У ҳолда

$$T=\sum\frac{m_k v_k^2}{2}=\frac{\omega^2}{2}\sum m_k h_k^2=\frac{\omega^2}{2}I_z$$

ёки

$$T=\frac{I_z\cdot\omega^2}{2} \qquad (18.21)$$

бунда I_z - жисмнинг айланиш z ўқига нисбатан инерция моменти. Яъни қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган жисмнинг кинетик энергияси жисмнинг айланиш ўқига нисбатан инерция моменти билан унинг бурчак тезлиги квадратига кўпайтмасининг яримига тенг.

Текис параллел ҳаракатлаётган жисмнинг кинетик энергиясини Кёниг теоремаси бўйича ҳисоблаш мумкин. Бу ҳолда жисмнинг ҳаракатини массалар маркази билан биргаликдаги илгариланма ҳаракат ва унинг атрофидаги айланма ҳаракатлардан ташкил топган деб қараш мумкин. У ҳолда жисмнинг нисбий ҳаракатидаги кинетик энергияси $T_C^{(r)}$ ушбу формуладан аниқланади:

$$T_C^{(r)} = \frac{I_{Cz} \cdot \omega^2}{2}$$

бунда I_{Cz} - жисмнинг массалар маркази орқали ҳаракат текислигига перпендикуляр равишда ўтувчи ўққа нисбатан инерция моменти.

Бинобарин, текис параллел ҳаракатланаётган жисм учун (18.19) га мувофиқ қуйидагига эга бўламиз:

$$T = \frac{m \cdot v_C^2}{2} + I_{Cz} \cdot \frac{\omega^2}{2} \qquad (18.22)$$

Шундай қилиб, текис параллел ҳаракатланаётган жисмнинг кинетик энергияси жисмнинг массалар маркази билан биргаликдаги илгариланма ҳаракат кинетик энергияси ва жисмнинг массалар маркази орқали ҳаракат текислигига перпендикуляр ўтувчи ўқ атрофида айланма ҳаракат кинетик энергияларининг йиғиндисига тенг.

Сферик ҳаракатдаги жисмнинг кинетик энергиясини ҳисоблашда унинг ҳаракатини ҳар ондаги қўзғалмас О нуқтадан ўтувчи бирор оний ўқ атрофидаги айланма ҳаракатдан иборат деб қараймиз. Бу ҳолда жисмнинг кинетик энергиясини (18.21) формулага кўра ҳисоблаш мумкин:

$$T = I_L \cdot \frac{\omega^2}{2} \qquad (18.23)$$

бунда I_L - жисмнинг оний айланиш ўққа нисбатан инерция моменти бўлиб, (14.13) формуладан аниқланади.

Демак, *сферик ҳаракатдаги жисмнинг кинетик энергияси, жисмнинг оний айланиш ўқига нисбатан инерция моменти I_L нинг оний бурчак тезлиги ω квадратига кўпайтмасининг ярмига тенг.*

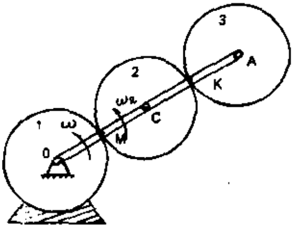
Эркин қаттиқ жисм ҳаракатининг умумий ҳолида, жисм ҳаракатини массалар маркази билан биргаликдаги илгариланма ҳаракат ва унинг атрофидаги айланма ҳаракатдан иборат деб қарасақ, эркин жисмнинг кинетик энергияси (18.20) ва (18.23) га мувофиқ қуйидаги формула ёрдамида ҳисобланади:

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_L \cdot \omega^2}{2} \qquad (18.24)$$

яъни эркин *қаттиқ жисмнинг кинетик энергияси жисмнинг массалар маркази билан биргаликдаги илгариланма ҳаракат кинетик энергияси ва массалар маркази орқали ўтувчи оний айланиш ўқи атрофида айланма ҳаракат кинетик энергияларнинг йиғиндисига* тенг.

Механик система бирнеча жисмдан ташкил топган бўлса, у ҳолда ҳар қайси жисмнинг кинетик энергияси айрим-айрим ҳисобланади ва топилган натижаларнинг йиғиндиси олинади. Жисмлар системасининг кинетик энергияси шу йўсинда ҳисобланади.

44-*масала*. Горизонтал текисликда жойлашган планетар механизмни бир хилдаги учта 1,2,3 ғилдиракларнинг ўқларини туташтирувчи ОА кривошип ҳаракатга келтиради. 1-нчи ғилдирак қўзғалмас; кривошип ω бурчак тезлик билан айланади. Ҳар қайси ғилдиракнинг массаси M_1 га, радиуси r га тенг, кривошип массаси M_2 га



177-расм

тенг. Ғилдиракларни бир жинсли диск ва кривошипни бир жинсли стержен деб ҳисоблаб, механизмнинг кинетик энергияси ҳисоблансин (177-расм).

Ечиш. Механик система учта ғилдирак ва кривошипдан иборат. Системанинг кинетик энергияси ана шу жисмларнинг кинетик энергиялари йиғиндисига тенг. 1- ғилдирак қўзғалмас бўлганлиги сабабли унинг кинетик энергияси нолга тенг. Демак, системанинг кинетик энергияси:

$$T = T_2 + T_3 + T_{kp} \qquad (a)$$

га тенг.

ОА кривошип О дан ўтган қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракат қилади. Унинг кинетик энергияси қаттиқ жисм айланма ҳаракат кинетик энергиясидан иборат:

$$T_{kp} = \frac{I_k \cdot \omega_2^2}{2} = \frac{8}{3} M_2 r^2 \omega^2$$

Бу ерда $I_k = M_2 (4r)^2 / 3$ кривошипнинг О ўққа нисбатан инерция моменти.

2- ғилдирак текис параллел ҳаракатланади, унинг кинетик энергияси қуйидагича аниқланади:

$$T_2 = \frac{M_1 v_2^2}{2} + \frac{I_{2C} \cdot \omega_2^2}{2} \qquad (в)$$

2- ғилдиракнинг С нуқтаси - массалар маркази тезлиги кривошипнинг худди шу С нуқтаси тезлиги

$$v_C = v_2 = 2r\omega$$

га тенг. Унинг бурчак тезлиги   ни 2-гилдирак маркази С дан тезликлар оний маркази - 1-гилдирак билан тегишган М нуқтагача бўлган масофага v_2 тезликни бўлиб аниқлаймиз:

$$\omega_2 = v_2/r = 2r\omega/r = 2\omega \ .$$

I_{2C} - 2- гилдиракнинг массалар марказидан расмга тик ўтган ўққа нисбатан инерция моменти, у яхлит диск ҳисобланганлиги сабабли

$$I_{2C} = \frac{M_1 r^2}{2}$$

га тенг. Ушбуларни юқоридаги (в) ифодага қўйиб 2-гилдирак кинетик энергияси учун қуйидагини топамиз:

$$T_2 = \frac{3}{2} M_1 r^2 \cdot \frac{(2\omega)^2}{2} = 3M_1 r^2 \omega^2$$

2- гилдиракнинг кинетик энергиясини у, тезликлар оний маркази атрофида оний айланма ҳаракат қилаяпти деб ҳам аниқлаш мумкин $T_2 = \frac{I_{2M} \cdot \omega_2^2}{2}$ Бу ерда I_{2M} - 2-гилдиракнинг массалар маркази С орқали расм текислигига тик ўтган ўқ билан параллел ҳолда тезликларнинг оний маркази М дан расмга тик ўтган ўққа нисбатан инерция моменти. У Гюйгенс- Штейнер теоремасига кўра

$$I_{2M} = I_{2C} + M_1 r^2 = \frac{M_1 r^2}{2} + M_1 r^2 = \frac{3}{2} M_1 r^2$$

а тенг. Энди кинетик энергияни

$$T_2 = \frac{3}{2} M_1 r^2 \cdot \frac{(2\omega)^2}{2} = 3M_1 r^2 \omega^2$$

исоблаб яна юқоридаги қийматни оламиз.

3-гилдиракнинг иккита нуқтасининг эзлигини аниқлаб у қандай ҳаракатланаётганини иламиз. Унинг марказий А нуқтасининг тезлигини ривошипнинг А нуқтаси тезлигидан аниқлаймиз, унки А нуқта бир вақтда ҳам гилдиракка ва м кривошипга тегишлидир:

$$v_A = 4r\omega \,.$$

Энди унинг 2-ғилдирак билан тегишган К нуқтаси тезлигини 2-ғилдиракнинг ушбу сирт нуқтаси тезлигига тенглигидан (ғилдираклар сирпанмасдан айланади) аниқлаймиз. 2-ғилдиракнинг бу тегишган нуқтаси тезлиги унинг бурчак тезлиги ω_2 ни нуқтадан тезликлар оний маркази М гача бўлган масофага кўпайтирилганига тенг, яъни

$$v_k = \omega_2 2r = 4r\omega \,.$$

Шундай қилиб, 3 -ғилдиракнинг А ва К нуқталарининг тезлиги ўзаро тенг экан, демак, у илгариланма ҳаракатланади. Шунинг учун унинг кинетик энергияси

$$T_3 = \frac{M_1 v^2}{2} = \frac{M_1 (4r\omega)^2}{2} = 8M_1 r^2 \omega^2$$

га тенг.

Механик система жисмлари учун юқорида аниқланган кинетик энергиялар қийматини (а) га қўйсак, бу механик система кинетик энергияси учун қуйидаги ифодага келамиз:

$$T = 11M_1 r^2\omega^2 + \frac{8}{3}M_2 r^2\omega^2 = r^2\omega^2\left(33M_1 + 8M_2\right)/3$$

87-§. Моддий нуқта ва механик система кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақида теорема.

Моддий нуқтанинг кинетик энергияси (тирик кучи) деб унинг массасини тезлиги квадратига кўпайтмасининг яримига тенг механик катталикка айтилади. Кинетик энергия скаляр ва доимо мусбат катталик бўлиб, у танланган координаталар системасига нисбатан ҳаракатланаётган нуқтанинг тезлиги нолга тенг бўлгандагина нолга айланади. Аммо, нуқтанинг ҳаракатида унинг тезлиги v ни миқдор жиҳатидан ўзгариб бориши, унинг кинетик энергиясининг ўзгаришига олиб келади. Бу ўзгаришни ифодалаш учун эркин М нуқтанинг бирор Oxyz координаталар системасига нисбатан ҳаракатини қараймиз (171-расм). Моддий нуқта массасини m деб, динамиканинг асосий тенгламасини ушбу кўринишда оламиз:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{F}$$

Бу муносабатнинг иккала томонини нуқта радиус векторининг дифференциали $d\mathbf{r}$ га скаляр кўпайтириб, қуйидагини ёзамиз:

$$m\cdot d\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

бу ерда $\mathbf{v}=d\mathbf{r}/dt$ нуқта тезлиги ва $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\delta A$ элементар ишга тенг эканлигини эътиборга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$m\mathbf{v}\cdot d\mathbf{v}=\delta A$$

$m\mathbf{v}\cdot d\mathbf{v}=d(mv^2/2)$ бўлганлиги сабабли

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=\delta A \qquad (18.25)$$

келиб чиқади. Ушбу (18.25) формула нуқта кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теореманинг дифференциалли ифодасидир: *нуқта кинетик энергиясининг дифференциал унга таъсир этувчи кучнинг элементар ишига* тенг.

(18.25) ни иккала томонини dt га бўлиб, $\frac{dA}{dt}=N$ - кучнинг қуввати эканлигини эътиборга олсак, у ҳолда теоремани ушбу кўринишда олиш мумкин:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right)=N \qquad (18.26)$$

Демак, моддий нуқта кинетик энергиясидан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосила унга таъсир этувчи кучнинг қувватига тенг.

(18.25) тенгликнинг иккала томонини мос чегараларда интеграллаб ва траекториянинг M_0

вазиятидаги нуқтанинг бошланғич тезлигининг модулини v_0, M вазиятидаги тезлигининг модулини эса v билан белгилаб қуйидагини топамиз:

$$\int_{v_0}^{v} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_{M_0}^{M} \delta A$$

ёки

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A \qquad (18.27)$$

бунда

$$A = \int_{M_0}^{M} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int_{M_0}^{M} F \cdot \cos\alpha \cdot dS$$

кучнинг M_0M кўчишдаги тўла ишини ифодалайди. (18.27) нуқта кинетик энергияси ҳақидаги теореманинг чекли ифодасидир: *нуқтанинг бирор чекли кўчишида кинетик энергиясининг ўзгариши унга таъсир этувчи кучларнинг ана шу кўчишдаги ишига* тенг.

Агар ҳаракатланаётган нуқта силлиқ сиртдан иборат боғланишда бўлса, нормаль реакция сиртга перпендикуляр бўлганлиги сабабли кинетик энергия теоремаси эркин нуқта каби олинади. Сирт силлиқ бўлмаса кинетик энергия теоремаси (18.25), (18.27) ифодасида ишқаланиш кучининг иши ҳам қатнашади.

Энди моддий нуқта кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги ушбу теоремани n-та ана шундай нуқталардан ташкил топган система учун умумлаштирамиз. Механик системанинг бирор $M_к$ нуқтасига қўйилган ташқи ва ички кучларнинг тенг таъсир этувчиларини, мос равишда, F_k^e ва F_k^i десак (18.25) га кўра системанинг бу нуқтаси учун теорема қуйидагича ёзилади:

$$d\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \delta A_k^e + \delta A_k^i, \quad (k = \overline{1, n})$$

бу ерда A_k ва A_k тегишлича, системанинг M_k нуқтасига қўйилган ташқи ва ички кучларнинг элементар ишлари. Бундай муносабатларни системанинг барча нуқталари учун ёзиб, уларнинг чап ва ўнг томонларини ҳадма - ҳад қўшиб ва дифференциал ишорасини йиғиндидан ташқарига чиқариб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$d\sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum F_k^e \cdot dr_k + \sum F_k^i \cdot dr_k$$

ёки

$$dT = \sum \delta A_k^e + \sum \delta A_k^i \qquad (18.28)$$

бунда

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2}$$

ифода системанинг кинетик энергияси. (18.28) формула система кинетик энергияси ҳақидаги теореманинг дифференциал ифодасидир: *система кинетик энергиясининг дифференциали унга қўйилган ташқи ва ички кучларнинг элементар ишларнинг йиғиндисига* тенг.

(8.28) ни иккала томонини системанинг кинетик энергиялари T_0 ва T га мос бошланғич ва охирги ҳолатлар орасида интеграллаб ҳамда йиғинди ва интеграллаш тартибларини ўзгартириб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$T - T_0 = \sum \int_{M_0}^{M} \delta A_k^e + \sum \int_{M_0}^{M} \delta A_k^i$$

ёки

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i \qquad (18.29)$$

бу ерда $A_k^e = \int \delta A_k^e$ системанинг $M_к$ нуқтасини бошланғич $M_{к0}$ ҳолатдан охирги $M_к$ ҳолатга кўчишида ташқи кучларнинг иши, $A_k^i = \int \delta A_k^i$ $M_к$ га қўйилган тегишли ички кучларнинг иши.

(18.29) формула система кинетик энергияси ҳақидаги теореманинг чекли ёки интеграл ифодасидир: *системанинг бирор ҳолатдан бошқа ҳолатга чекли кўчишида кинетик энергиясининг ўзгариши система нуқталарига қўйилган барча ташқи ва ички кучларнинг шу кўчишдаги ишларнинг йиғиндисига* тенг.

Шундай қилиб, система динамикасининг бошқа умумий теоремаларидан фарқли ўқларо, система кинетик энергияси ҳақидаги теоремада ички кучлар иши ҳам қатнашади (18.28), (18.29). Механик система абсолют қаттиқ жисм (ёки ўзгармас) бўлган ҳолдагина бу кучларнинг иши нолга айланиб теорема ифодасида қатнашмайди, яъни

$$T-T_0=\sum A_k^e \qquad (18.30)$$

Демак, ўзгармас системанинг чекли кўчишда кинетик энергиясининг ўзгариши берилган система нуқталарига қўйилган барча ташқи кучларнинг мазкур кўчишдаги ишларнинг йиғиндисига тенг.

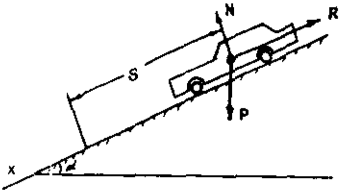
Механик система кинетик энергияси ҳақидаги теоремадан қаралаётган масалада берилган ва номаълум катталиклар таркибига: системага таъсир этувчи кучлар, жисмнинг кўчиши (чизиқли ва бурчакли) ва жисми нуқталарнинг тезликлари (чизиқли ёки бурчакли) қатнашган ҳолларда фойдаланиш қулай. Бу теорема ёрдамида ҳаракатланаётган система жисмларининг ёки нуқталарининг тезланишларини ҳам аниқлаш мумкин. Бунинг учун системанинг ихтиёрий кўчишида (18.30) тенглама тузилади ва топилган тенгликни ҳар икки томонини вақт бўйича дифференциалланади.

43-*масала.* Автомобиль $\alpha=10^0$ қияликда пастга қараб 54 км/соат тезлик билан ҳаракат қилади. Тормозлашдан ҳосил бўлган **R** қаршилик кучини автомобиль оғирлигининг 0,3 қисмига тенг деб ва унинг ҳаракатидаги бошқа ҳамма қаршилик кучларни ҳисобга олмасдан, тормозлаш бошлангандан у тўхтагунча кетган t вақт ва шу вақт оралиғида ўтган S йўл аниқлансин (178-расм).

Ечиш. Автомобилни моддий нуқта деб қараймиз. Унга қуйидаги кучлар таъсир этади: **P**-автомобиль оғирлиги, **N**- йўлнинг нормаль реакцияси, **R**- тормозлашдан ҳосил бўлган қаршилик куч. S тормозлаш йўлини аниқлаш учун нуқта кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремани қўллаймиз:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=A$$

Автомобилнинг $v_0=54$ км/соат$=15$ м/сек бошланғич тезлиги ва унинг $v=0$ охирги тезлиги бизга маълум.



178-расм.

Автомобилга қўйилган кучларнинг тенг таъсир этувчисининг A иши, ташкил этувчи кучлар ишларининг алгебраик йиғиндисига тенг. Оғирлик кучининг иши $A(P)= P\cdot h = mgS\cdot\sin\alpha$, **N** нормаль реакциянинг иши $A(N)=0$ га тенг, чунки у автомобилнинг ҳаракат йўналишига перпендикуляр; тормозлаш **R** кучининг иши:

$$A(\mathbf{R}) = -R\cdot S = -0{,}3mgS,$$

чунки бу куч автомобилнинг ҳаракат йўналишга қарама- қарши томонга йўналган.

Шундай қилиб, тенг таъсир этувчи кучнинг иши:

$$A = A(\mathbf{P}) + A(\mathbf{N}) + A(\mathbf{R}) = mgS\cdot\sin\alpha - 0{,}3mgS =$$
$$= mgS(\sin\alpha\ -0{,}3).$$

Бундай ҳолда кинетик энергиянинг ўзгариш тенгламаси қуйидаги кўринишни олади:

$$-\frac{mv_0^2}{2} = mgS(\sin\alpha - 0{,}3).$$

Бундан

$$S = \frac{-v_0^2}{2g(\sin\alpha - 0{,}3)} = \frac{-15^2}{2\cdot 9{,}81(0{,}174 - 0{,}3)} = 91\text{м}.$$

Тормозлаш t вақтини топиш учун нуқта ҳаракат миқдори ҳақидаги теоремадан фойдаланиш мумкин. Автомобилнинг ҳаракат йўналишини x ўқи йўналиши деб қабул қилиб (16.13) формуланинг биринчисини ёзамиз:

$$mv_x - mv_{ox} = S_x .$$

Берилган ҳолда $v_x = 0$, $v_{ox} = v_0 = 15$ м/с. Автомобилга қўйилган кучлар ўзгармас бўлгани учун бу кучлар импульсининг x ўқидаги проекцияси қуйидагича бўлади:

$S_x = F_x\cdot t = (P\cdot\ \sin\alpha\ -R)t = (mg\sin\alpha\ -0{,}3mg)t = mgt(\sin\alpha\ -0{,}3)$.

Шундай қилиб, бу ҳолда нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариш тенгламаси қуйидаги кўринишни олади:

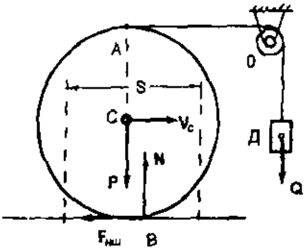
$$t = -\frac{v_0}{g(\sin\alpha - 0{,}3)} = -\frac{15}{9{,}81(0{,}174 - 03)} = 12\text{с}.$$

46-*масала*. Радиуси R ва оғирлиги **P** бўлган цилиндрик катокка О блок орқали ўралиб ўтказилган ип учида **Q** оғирликдаги Д юк осилган. Каток S йўлни ўтганда унинг С марказининг $\mathbf{v}_C$ тезлиги ва $\mathbf{a}_C$ тезланиши *аниқлансин*. Бунда $v_{C0} = 0$, катокнинг думалашдаги ишқаланиш коэффициенти к, унинг айланиш ўқига нисбатан инерция радиуси $\rho_и$ берилган деб қаралсин, ҳамда ип ва блок массаси ҳисобга олинмасин.

Ечиш. 1) Каток масса марказининг тезлиги $\mathbf{v}_C$ ни аниқлаш учун ушбу тенгламадан фойдаланамиз:

$$T - T_0 = \sum A_k^e \qquad (a)$$

Берилган ҳолда $T_0 = 0$, T эса, $T = T_к + T_д$ га тенг. (18.20) ва



179-расм.

(18.22) формулаларга кўра қуйидагига эга бўламиз:

$$T_д = \frac{1}{2}\cdot\frac{Q}{g}\cdot v_д^2, \quad T_k = \frac{1}{2}\cdot\frac{P}{g}\cdot v_C^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{P}{g}\cdot\rho_и^2\right)\omega^2$$

B нуқта каток учун тезликларнинг оний маркази бўлади, у ҳолда $\omega = v_C / R$ ва $v_д = v_A = 2v_C$ тенг. Натижада

$$T = \frac{1}{2g}\left[4Q + P\left(1 + \frac{\rho_и^2}{R^2}\right)\right]v_C^2$$

келиб чиқади.

Энди катокка қўйилган кучларнинг S кўчишидаги ишларини ҳисоблаймиз. Бу ерда **Q** куч ва (**P**,**N**) жуфт иш бажаради. $v_д = 2v_C$ эди, у ҳолда Д юкнинг кўчиши $h = 2S$ бўлади, бунда S катокнинг C марказининг кўчиши ва $A(Q) = Q\ 2S$. $N = P = const$ бўлганлиги сабабли, думаланишдаги ишқаланиш (қаршилик) кучининг иши $A(\mathbf{N},\mathbf{P}) = M_к\varphi$ формулага кўра аниқланиши статикадан маълум, бу ерда $M_к$ думалашдаги ишқаланиш (қаршилик) моменти ёки (**N**,**P**) жуфтнинг моменти модули бўйича $M_к = kN$ га тенг, бунда к- думаланишдаги ишқаланиш коэффициенти, φ - эса, катокнинг думаланишдаги бурилиш бурчаги бўлиб, $\varphi=S/R$ дан аниқланади. Демак, думаланишдаги ишқаланиш кучининг иши

$$A(N,P)=-\frac{к}{R}PS$$

га тенг, у ҳолда

$$\sum A_k^e=2QS-\frac{к}{R}PS$$

Топилган қийматларни (а) га қўйиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{1}{2g}\left[4Q+P\left(1+\frac{\rho_и^2}{R^2}\right)\right]v_C^2=\left(2Q-\frac{к}{R}P\right)S \qquad (б)$$

бундан

$$v_C=\sqrt{\frac{2g(2QR-kP)RS}{4QR^2+P\left(R^2+\rho_и^2\right)}}$$

2) a_C ни аниқлаш учун (б) тенгликнинг иккала томонини t вақт бўйича дифференциаллаймиз ва $\frac{dS}{dt}=v_C$ эканлигини назарда тутиб, охирида қуйидагини топамиз:

$$a_C=\frac{(2QR-kP)R}{4QR^2+P\left(R^2+\rho_и^2\right)}g.$$

88-§. Механик энергиянинг сақланиш қонуни.

Моддий нуқта потенциалли (консерватив) куч майдонида ҳаракатланса, (18.12) га мувофиқ (18.25) ушбу ринишни олади:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=dU \qquad (18.31)$$

Буни интеграллаб ушбу муносабатни ёзамиз:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=U-U_0 \qquad (18.32)$$

бу ерда U_0 ва U нуқтанинг бошлангич ва охирги ҳолатларига мос келувчи куч функциясининг қийматлари. Куч функциясининг тескари ишораси билан олинган қиймати потенциал энергия эканлиги бизга маълум, яъни (18.12) га кўра ($\Pi = A_{MM_0}, U = A_{M_0M}$ тенгликлар ўринли)

$$-U = \Pi$$

эди. У ҳолда (18.32) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \Pi_0 - \Pi.$$

Ёки

$$\frac{mv^2}{2} + \Pi = \frac{mv_0^2}{2} + \Pi_0 = h,$$

бунда h - ўзгармас катталик.

Моддий нуқтанинг кинетик ва потенциал энергияларининг йиғиндиси унинг тўлиқ *механик энергияси* ва уни E орқали белгиласак

$$E = \frac{mv^2}{2} + \Pi = h \qquad (18.33)$$

келиб чиқади.

Шундай қилиб, потенциалли куч майдонида ҳаракатланаётган нуқтанинг механик энергияси доимо ўзгармасдан қолади, *бу нуқта механик энергиясининг сақланиш қонуни ифодалайди ва нуқта ҳаракати дифференциал тенгламасининг биринчи интеграли бўлиб, энергия интеграли деб аталади.*

Агар механик система потенциалли (консерватив) кучлар майдонида ҳаракатланса, (18.29) ни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i = \sum A_k$$

ва

$$\Sigma A = \Pi_0 - \Pi,$$

тенглик ўринли бўлади. Бу ерда Π_0 ва Π лар мос равишда система нуқталарига қўйилган ташқи ва ички кучларнинг бошланғич ва охирги пайтга тўғри келувчи потенциал энергиялари. Бундай ҳолда юқоридаги тенглик ушбу кўринишни олади:

$$T\text{-}T_0 = П_0 \text{-} П$$

ёки

$$T + П = T_0 + П_0 = h,$$

бунда h- ўзгармас катталик, $E = T + П$ системанинг тўли механик энергияси. Натижада қуйидаги

$$E = T + П = h \qquad (18.34)$$

формуласига эга бўламиз ва бу системанинг кинетик энергиясининг: *сақланиш қонуни* ифодалайди: *потенциалли (консерватив) куч майдонида системанинг механик энергияси доимо ўзгармасдан қолади.* Бу қонунни қаноатлантирувчи система *консерватив система* деб аталади. Агар система ўзгармас бўлса, ички кучлар ишларининг йиғиндиси $\sum A_k^i = 0$ бўлиб, $A_k = \sum A_k^e$ бўлади ва ички кучларнинг потенциал энергияси ўзгармас бўлиб, уни нолга тенг деб олиш мумкин. Бундай ҳолда (18.34) муносабатда потенциал энергия фақат ташқи кучларнинг потенцал энергиясидан иборат бўлади, ҳамда унинг система кинетик энергияси билан йиғиндиси ўзгармас қолади. Механик система (ёки моддий нуқта) потенциалли бўлмаган куч майдонида ҳаракатланса, механик энергия ўзгаради, масалан, турли қаршиликларни енгишда система механик энергиясининг бир қисми иссиқлик, электр ёки бошқа хил энергияларга айланиб сарф бўлиши мумкин. Бу ҳолатга система ички кучлари ишларининг йиғиндиси, умуман айтганда, нолга тенг бўлмаслигидан деб тушунилади. Механик системанинг икки нуқтаси орасидаги ўзаро таъсир кучларнинг миқдорлари тенг ва қарама - қарши томонларга йўналган бўлади ва шунинг учун бу кучларнинг геометрик йиғиндиси нолга тенг. Аммо, дастлаб тинч ҳолатда турган нуқталар бу кучлар таъсирида кўчса, у ҳолда уларнинг кўчиш йўналишлари кучлар йўналиши билан устма-уст тушади ва иккала кучларнинг ишлари мусбат бўлади. Демак, уларнинг ишларининг йиғиндиси нолга тенг бўлмайди. Механик системанинг барча ички кучларини унинг жуфт-жуфт олинган нуқталарининг ўзаро таъсир кучлари деб қараш мумкин бўлганлиги сабабли юқорида айтилганлар бутун система учун ҳам ўринли бўлади.

XIX боб

ДАЛАМБЕР ПРИНЦИПИ

89-§. Механиканинг принциплари.

Биз юқорида динамиканинг умумий теоремалари билан танишдик. Уларнинг ҳаммаси динамиканинг асосий тенгламасидан, яъни

$$m_k\mathbf{a} = \mathbf{F}_k^e + \mathbf{F}_k^i, \qquad (k = \overline{1,n})$$

механик система (ёки моддий нуқта) ҳаракатининг дифференциал тенгламаларидан келтириб чиқарилган эди. Лекин, механик система дифференциал тенгламаларини умумий ҳолда аналитик ечиб (интеграллаб) бўлмайди. Айни пайтда худди шу дифференциал тенгламалар асосида келтириб чиқарилган умумий теоремалар эса механик системанинг айрим нуқталарининг у ёки бу кинематик ҳамда динамик характеристикаларининг ташқи кучлар ва реакцияларга боғлиқ ҳолда ўзгаришини аниқлашга имкон беради. Бундан ташқари берилган кучлар ва реакцияларнинг хусусий ҳолларида ҳар бир теорема бевосита ҳаракат дифференциал тенгламаларнинг биринчи интеграллари - сақланиш қонунларини беради. Лекин, шундай бўлсада, ҳеч бир теорема системанинг ҳаракат дифференциал тенгламалари тўпламининг ўрнини босмайди.

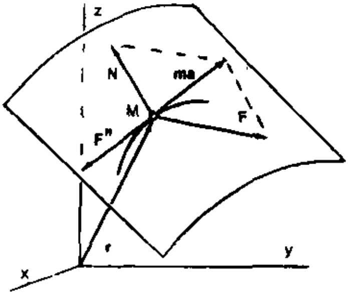
Аксинча, механиканинг принциплари деб аталувчи шундай умумий фаразиялар мавжудки, уларнинг ҳар бири, умумий теоремалардан фарқли ўлароқ, системанинг тўлиқ (ҳар бир нуқтаси) ҳолатини характерлай олади ва система ҳаракатининг дифференциал тенгламаларига эквивалент. Механиканинг *принциплари* деб *механик система мувозанати ёки ҳаракати тўғрисида тўла маълумот берувчи умумий фаразияларга айтилади.* Ушбу таърифга кўра, механиканинг принципларига, Галилей-Ньютон классик қонунлари ҳам мисол бўла олади. Шу пайтга қадар айни шу қонунларга асосланиб, динамика масалаларини ечишнинг у ёки бу услубини ўргандик.

Механик система учун классик қонунлар ўрнида механиканинг қуйидаги принципларига асосланиш кўпинча динамиканинг баъзи масалаларини ечишда қулай усул топишга имкон беради.

90-§. Моддий нуқта учун Даламбер принципи.

Принципларни ўрганишни *Даламбер принципидан* бошлаймиз. *Динамика тенгламаларини, расман, статика тенгламалари шаклига келтирувчи услубдан иборат бу принципга Герман-Эйлер-Даламбер принципи* деб аталади.

Айтайлик, m массали M моддий нуқта (180расм) унга қўйилган актив **F** куч ва боғланиш (агар у боғланишда бўлса) реакция кучи **N** таъсирида бирор **a** тезланиш билан ҳаракат қилаётган бўлсин. Бу моддий нуқта учун динамиканинг асосий тенгламасини ёзамиз:



180-расм

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{N} \qquad (19.1)$$

Бу тенгламага қуйидагича кўриниш бериш мумкин:

$$\mathbf{F}+\mathbf{N}+(-m\mathbf{a})=0$$

Энди ҳаракатдаги М моддий нуқтага модули шу онда $m\mathbf{a}$ га тенг бўлган ва $\mathbf{a}$ тезланиш йўналишига қарама-қарши йўналган яна битта куч қўйдик деб тасаввур қиламиз. Модул жиҳатдан нуқта массаси билан тезланишининг кўпайтмасига тенг бўлган ва тезланиш йўналишига қарама-қарши томонга йўналган бу куч нуқтанинг *инерция кучи* деб аталади. Инерция кучини $\mathbf{F}^{и}$ ҳарфи билан белгиласак, унинг таърифига асосан:

$$\mathbf{F}^{и}=-m\mathbf{a} \qquad (19.2)$$

тенгликни ёзаоламиз. Моддий нуқта инерция кучи, таърифга кўра, *нуқтанинг тезлигини ўзгартирилишига унинг кўрсатадиган акс таъсиридан иборат* бўлиб, аслида тезлатувчи таъсир кўрсатаётган жисмга қўйилгандир.

Модуллари жиҳатдан тенг ва бир чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонларга йўналган $\mathbf{F}+\mathbf{N}$ ва $\mathbf{F}^{и}$ кучларнинг ўзаро мувозанатланиши бизга равшан, яъни моддий нуқта бу кучлар таъсирида шу онда мувозанатда бўлади. Шунга кўра, мувозанат шартини қуйидагича ёзаоламиз:

$$\mathbf{F}+\mathbf{N}+\mathbf{F}^{и}=0 \qquad (19.3)$$

Демак, *моддий нуқта ҳаракатининг ҳар бир пайтида унга ҳақиқатда қўйилган актив кучлар ҳамда боғланишлар реакциялари нуқтанинг инерция кучи (нуқтанинг ўзига шартли қўйилган) билан ўзаро мувозанатда бўлади.* Бу қоида нуқта учун Даламбер принципи дейилади ва (19.3) тенглик эса, ана шу принципни ифодалайдиган вектор тенгламадир.

Шундай қилиб, кучлар таъсирида ҳаракатланаётган моддий нуқтага унинг инерция кучини ҳам қўйсак нуқтага қўйилган кучлар мувозанатлашади ва нуқта бундан кейин, *шарли* ҳолда тўғри чизиқли текис ҳаракат қилади. Ҳақиқатда эса инерция кучи $\mathbf{F}^{и}$ ҳаракатдаги М нуқтага қўйилмаган, балки механиканинг учинчи қонунига мувофиқ, бу нуқтага тезланиш бераётган жисмларга қўйилган бўлади. Инерция кучини ҳаракатдаги моддий нуқтага қўйиш сунъий усул бўлиб, у динамика масалаларини ечишда статиканинг бизга маълум бўлган усуллари (мувозанат тенгламалари) ни тадбиқ этиш имконини беради. Шундай қилиб, бу принцип моддий нуқтага ёки моддий нуқталар системасига бевосита қўйилган кучларга инерция кучларини қўшиш билан динамика масалаларини шаклан статика масалаларига айлантиришга имкон берадиган ажойиб бир усулдир. Бу усулни механикада *кинетостатика принципи* деб ҳам юритилади.

Боғланишларнинг номаълум реакцияларини аниқлашда Даламбер принципини қўллаш айниқса қулай ва самаралидир. (19.3) вектор тенгламани координаталар системасининг турли ўқларига проекциялаб нуқта учун Даламбер принципини ифодаловчи скаляр кўринишдаги мувозанат тенгламаларини ҳосил қилиш мумкин. (19.3) дан кўринадики, Даламбер принципи динамиканинг асосий тенгламасидан бевосита келиб чиқади ва аксинча. Ҳақиқатан ҳам, боғланишли нуқта учун динамиканинг асосий тенгламаси (19.1) да $m\mathbf{a}$ ҳадни ўнг томонга ўтказиб (19.2) белгилашни назарда тутилса (19.3) тенгликка, яъни Даламбер принципига эга бўламиз. Аксинча, бу тенгликдаги $\mathbf{F}^{и}$ куч ифодасини (19.2) билан алмаштириб, $-m\mathbf{a}$ ҳадни тенгликнинг бошқа томонига ўтказсак, яна (19.1) келиб чиқади, яъни Даламбер принципидан динамиканинг асосий тенгламасига эга бўламиз.

Эгри чизиқли траектория бўйлаб нотекис ҳаракатдаги нуқтанинг инерция кучини уринма ва нормаль ташкил этувчиларга ажратиш мумкин:

$$\mathbf{F}^{и} = \mathbf{F}^{и}_{\tau} + \mathbf{F}^{и}_{n}.$$

Бу ерда, $F_\tau^и$, $F_n^и$ - мос равишда, уринма ва нормаль инерция кучлари бўлиб, улар, мос равишда, уринма ва нормаль тезланишларга тескари йўналган:

$$F_\tau^и = -ma_\tau, \quad F_n^и = -ma_n$$

Уринма ва нормаль тезланишларнинг ифодасини эътиборга олиб, уринма ва нормаль инерция кучларининг модули учун қуйидаги муносабатларни ёзаоламиз:

$$F_\tau^и = m\frac{dv}{dt}, \quad F_n^и = \frac{mv^2}{\rho}$$

Агар нуқта эгри чизиқ бўйлаб текис ҳаракатланса, $a_\tau = 0$ ва шунинг учун, $F_\tau^и = 0$ га тенг бўлиб, нуқтанинг инерция $F^и$ кучи фақат нормаль ташкил этувчидан иборат бўлади.

Нуқта тўғри чизиқ бўйлаб нотекис ҳаракатда бўлса, $a_n = 0$ ва $F_n^и = 0$, унинг инерция кучи фақат уринма ташкил этувчидан иборат бўлади.

Нуқта тўғри чизиқли текис ҳаракатланганда $a = 0$ ва $F^и = 0$.

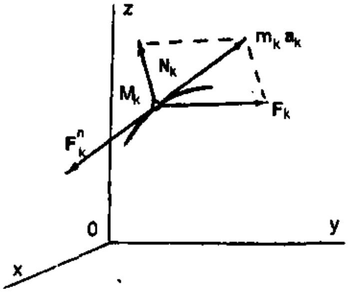
Қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатдаги қаттиқ жисм нуқталарининг тезланишлари айланма ва марказга интилма ташкил этувчилардан иборат бўлади. Шунинг учун, қаттиқ жисм нуқталарининг инерция кучи, тезланишига мос равишда, айланма ва марказдан қочирма инерция кучларидан иборат бўлади:

$$F_{\tau_k}^и = m_k R_k|\varepsilon|, \quad F_{n_k}^и = m_k R_k \omega^2.$$

Бу ерда R_k - M_k нуқтанинг айланиш ўққача бўлган масофаси, ω ва ε - жисмнинг бурчак тезлиги ва бурчак тезланиши.

91- §. Механик система учун Даламбер принципи.

Кинетостатика методини механик системага ҳам тадбиқ этиш мумкин. Фараз қилайлик, n та моддий нуқталардан иборат бўлган боғланишли механик система берилган бўлсин (181-расм). Механик системанинг бирор M_k нуқтасини оламиз. Бу нуқтага қўйилган актив кучларнинг тенг таъсир этувчисини $\mathbf{F}_k$,боғланиш реакция кучларининг тенг таъсир этувчисини $\mathbf{N}_k$ ва шу нуқтанинг инерция кучини $\mathbf{F}_k^{и}$ билан белгилаймиз.



181-расм

У ҳолда механик системанинг ҳаракати кузатилаётган M_k нуқтаси учун Даламбер принципини ифодаловчи тенглама қуйидагича ёзилади:

$$\mathbf{F}_k + \mathbf{N}_k + \mathbf{F}_k^{и} = 0 \tag{19.4}$$

бу ерда

$$\mathbf{F}_k^{и} = -m_k \mathbf{a}_k, \quad \left(k = \overline{1, n}\right). \tag{19.5}$$

Бу мулоҳаза системанинг ҳар бир нуқтаси учун такрорланса система учун Даламбер принципини ифодаловчи қуйидаги натижага келамиз: *система ҳаракатининг ҳар қандай пайтида унга қўйилган актив кучлар, боғланиш реакциялари ва системанинг ҳар бир нуқтасига шартли қўйилган шу нуқталарнинг инерция кучлари ўзаро мувозанатлашади.*

Бу қоидани тегишли математик тенгламалар билан ифодалаймиз. Бунинг учун (19.4) тенгликда k нинг қийматларини 1 дан n гача ўзгартириш билан қуйидаги муносабатларни топамиз:

$$\begin{array}{l} \mathbf{F}_1 + \mathbf{N}_1 + \mathbf{F}_1^{и} = 0, \\ \mathbf{F}_2 + \mathbf{N}_2 + \mathbf{F}_2^{и} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{F}_n + \mathbf{N}_n + \mathbf{F}_n^{и} = 0. \end{array} \qquad (19.6)$$

(19.6) тенгламалар механик система учун Даламбер принципининг математик кўринишини ифодалайди. Механик система учун Даламбер принципи математик томондан система ҳаракатининг дифференциал тенгламаларига эквивалент бўлган ва юқорида келтирилган (19.6) кўринишдаги n-та векторли тенгламалар системаси билан ифодаланади. Демак, динамиканинг асосий тенгламаларига Даламбер принципини эквивалентлигидан, динамиканинг ҳамма умумий теоремаларини Даламбер принципидан ҳам келтириб чиқариш мумкин.

Даламбер принципига оид масалалар ечишда кўпинча (19.6) тенгламаларнинг натижаси бўлган ва ички кучлар қатнашмайдиган бошқа тенгламалардан фойдаланилади. (19.6) тенгламалар $\mathbf{F}_k$, $\mathbf{N}_k$, $\mathbf{F}_k^{и}$ кучлар системаси мувозанатининг зарурий ва етарли шартини ифодалайди. Статикадан маълумки, жисмга қўйилган $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$,...,$\mathbf{F}_n$ ихтиёрий жойлашган куч (текис ва фазовий) лар системасининг мувозанатда бўлиши учун бу системанинг бош вектори $\mathbf{R}'$ ҳам, унинг ихтиёрий танлаб олинган марказга нисбатан бош моменти $\mathbf{M}_0$ ҳам нолга тенг бўлиши, яъни:

$$\mathbf{R}' = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k = 0, \qquad \mathbf{M}_0 = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{m}_0(\mathbf{F}_k') = 0 \qquad (19.7)$$

бўлиши керак эди. Бу ерда O - келтириш маркази. Бунда, қотиш принципига кўра бу қоида фақат қаттиқ жисмларга таъсир қилувчи кучлар системасигагина тегишли бўлмай, балки исталган ўзгарувчи система учун ҳам ўринлидир. Ихтиёрий O нуқтани келтириш маркази деб ҳисоблаб ва юқоридаги шартларни эътиборга олиб, берилган механик система нуқталарига қўйилган кучлар системаси учун Даламбер принципига биноан:

$$\sum_{k=1}^{n}(\mathbf{F}_k + \mathbf{N}_k + \mathbf{F}_k^{и}) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n}[\mathbf{m}_0(\mathbf{F}_k) + \mathbf{m}_0(\mathbf{N}_k) + \mathbf{m}_0(\mathbf{F}_k^{и})] = 0 \qquad (19.8)$$

бўлиши керак. Ушбу белгилашларни киритамиз:

$\Sigma \mathbf{F}_k = \mathbf{R}'$ - берилган кучларнинг бош вектори,

$\Sigma \mathbf{N}_k = \mathbf{N}'$ - боғланиш реакция кучларининг бош вектори,

$\Sigma \mathbf{F}_k^{и} = \mathbf{R}'^{и}$ -система нуқталари инерция кучларининг бош вектори,

$\Sigma \mathbf{m}_0(\mathbf{F}_k) = \mathbf{M}_0$ - берилган кучларнинг O марказга нисбатан бош моменти,

$\Sigma \mathbf{m}_0(\mathbf{N}_k) = \mathbf{M}_0^{N}$ - боғланиш реакция кучларининг O марказга нисбатан бош моменти,

$\Sigma \mathbf{m}_0(\mathbf{F}_k^{и}) = \mathbf{M}_0^{и}$ - инерция кучларининг O марказга нисбатан бош моменти.

У ҳолда (19.8) тенгламалар системаси қуйидаги кўринишни олади:

$$\mathbf{R}' + \mathbf{N}' + \mathbf{R}'^{и} = 0, \qquad (19.9)$$

$$\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_0^{N} + \mathbf{M}_0^{и} = 0.$$

(19.9) тенгламаларни координата ўқларидаги проекциялари худди статиканинг мувозанат тенгламаларига ўхшаш тенгламаларни беради. Ҳақиқатан ҳам, (19.9) тенгликларни координата ўқларига проекциялаб, боғланишли механик система нуқталарига қўйилган кучларнинг олтита мувозанат шартларини (тенгламаларини) ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{R}'_x + \mathbf{N}'_x + \mathbf{R}'^{\text{и}}_x = 0,\\
&\mathbf{R}'_y + \mathbf{N}'_y + \mathbf{R}'^{\text{и}}_y = 0,\\
&\mathbf{R}'_z + \mathbf{N}'_z + \mathbf{R}'^{\text{и}}_z = 0,\\
&\mathbf{M}_x + \mathbf{M}^N_x + \mathbf{M}^{\text{и}}_x = 0,\\
&\mathbf{M}_y + \mathbf{M}^N_y + \mathbf{M}^{\text{и}}_y = 0,\\
&\mathbf{M}_z + \mathbf{M}^N_z + \mathbf{M}^{\text{и}}_z = 0.
\end{aligned} \qquad (19.10)$$

(19.9) ва (19.10) тенгликлар, мос равишда, механик система учун Даламбер принципини ифодаловчи вектор ва скаляр тенгламаларидир. Бу усул, айниқса, масалада динамик боғланиш реакциясини, яъни системанинг ҳаракатидан вужудга келган реакцияларни топишда қулайдир.

Энди системанинг ҳар қайси нуқтасига қўйилган кучларнинг тенг таъсир этувчилари *ташқи* ва *ички* кучлардан иборат бўлган кучлар деб қарайлик, яъни

$$\mathbf{F}_k + \mathbf{N}_k = \mathbf{F}^{\text{е}}_k + \mathbf{F}^{i}_k, \qquad (19.11)$$

бўлсин. У ҳолда (19.6) дан (19.9) тенгламалар сингари ташқи ва инерция кучларининг қуйидаги мувозанат шартларини ҳосил қилишимиз мумкин:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{R}^{\text{е}} + \mathbf{R}'^{\text{и}} = 0\\
&\mathbf{M}^{\text{е}}_0 + \mathbf{M}'^{\text{и}}_0 = 0
\end{aligned} \qquad (19.12)$$

Чунки, системанинг ички кучлари, уларнинг хусусиятларига кўра:

$$\mathbf{R}^{i} = \sum \mathbf{F}^{i}_k = 0, \qquad \mathbf{M}^{i}_0 = \sum m_0(\mathbf{F}^{i}_k) = 0,$$

шартларни қаноатлантиради. (19.12) ни координата ўқларига проекциялаб, (19.10) га ўхшаш олтита мувозанат шартларни ҳосил қила оламиз.

Даламбер принципидан келтириб чиқарилган (19.12) тенгламаларни қўллаш, бу тенгламаларда ички кучлар қатнашмаганлигидан, масалалар ечишни осонлаштиради. Масалалар ечишда (19.9), (19.10) ва (19.12) тенгламалардан фойдаланиш учун инерция кучларининг бош вектори ва бош моменти ифодаларини ҳисоблай билиш керак бўлади.

92-§. **Инерция кучларининг бош вектори ва бош моменти.**

Юқорида, қаттиқ жисм инерция кучларини ихтиёрий танлаб олинган О марказга қўйилган битта $\mathbf{R}'^{и}$ куч ва моменти $\mathbf{M}_0^{и}$ га тенг бўлган битта жуфт билан алмаштириш мумкинлигини кўрган эдик. Маълумки кучлар системасининг бош вектори келтириш марказига боғлиқ бўлмайди ва у аввалда ҳисобланган ҳам бўлиши мумкин. Динамикада инерция кучларининг келтириш маркази сифатида, одатда, жисмнинг массалар маркази бўлган С нуқтаси олинади. $\mathbf{F}_k^{и} = -m_k\mathbf{a}_k$ бўлганлигидан, система массалар марказининг радиус векторини аниқловчи тенгликни эътиборга олган ҳолда қуйидагига эга бўламиз:

$$\mathbf{R}' = \sum \mathbf{F}_k^{и} = -\sum m_k\mathbf{a}_k = -m\mathbf{a}_c \qquad (19.13)$$

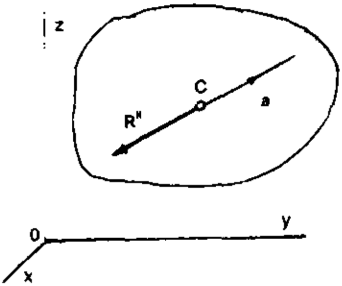
Бу ерда m жисм массаси, $\mathbf{a}_c$ жисмнинг массалар марказининг тезланиши. Демак, ихтиёрий ҳаракат қилаётган жисм инерция кучларининг бош вектори модули жиҳатдан жисм массасини унинг массалар маркази тезланишига кўпайтирилганига тенг ва бу тезланишга қарама - қарши томонга йўналган бўлади.

Инерция кучларининг бош моментини қаттиқ жисм ҳаракатларининг баъзи хусусий ҳолларида ҳисоблаймиз.

1.*Жисм илгариланма ҳаракат қилади.* Агар жисм илгариланма ҳаракатланаётган бўлса, унинг барча нуқталарининг берилган пайтдаги тезланишлари ўзаро тенг бўлади, яъни:

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = \ldots = \mathbf{a}_к = \mathbf{a}_c$$

ва, демак, жисм нуқталарининг инерция кучлари ўзаро параллел, бир йўналишда ва тенг бўлади. Бу ҳолда инерция кучлар системаси тенг таъсир этувчига келади ва у, жисм массалар марказига қўйилган бўлади (182-расм). Бу натижага осон ишонч ҳосил қилиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, жисм илгариланма ҳаракат қилаётганидан С атрофида айланма ҳаракат рўй бермайди. Шунинг учун С нуқтадан ўтувчи ўққа



182-расм.

нисбатан ташқи кучларнинг бош моменти нолга тенг бўлади, яъни:

$$\mathbf{M}_c^e = 0.$$

У ҳолда (19.12) тенгликларнинг иккинчисидан қуйидагини ёзаоламиз:

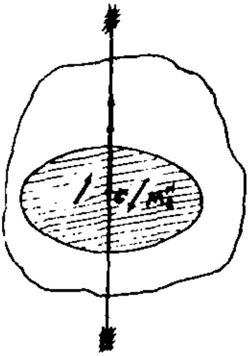
$$\mathbf{M}_c^и = - \mathbf{M}_c^e = 0.$$

шунингдек, ана шу тенгликларнинг биринчисидан эса:

$$\mathbf{R}'^и = -\mathbf{R}^e = -\sum \mathbf{F}_k^e = -m\mathbf{a}_c = \mathbf{R}^и$$

келиб чиқади. Бу ерда $\mathbf{R}^{\text{и}}$ - инерция кучларининг тенг таъсир этувчиси.

2.*Жисм қўзғалмас ўқ атрофида айланади.* Жисмнинг симметрия текислиги бўлиб, у С нуқтадан шу текисликка перпендикуляр ўтувчи қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатда бўлсин.



183-расм

Бу ҳолда $\mathbf{a}_c = 0$ бўлади ва, демак, инерция кучларининг бош вектори $\mathbf{R}'^{\text{и}} = -\mathbf{R}^{e} = -m\mathbf{a}_c = 0$. Инерция кучларининг бош моментини ҳисоблаймиз. (19.12) тенгликларнинг иккинчисидан қуйидаги муносабатни ёзаоламиз:

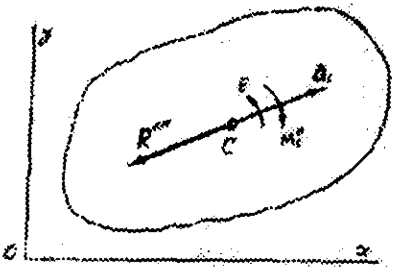
$$\mathbf{M}_c^{\text{и}} = -\mathbf{M}_c^{e}, \quad \text{ёки} \quad M_z^{\text{и}} = -M_z^{e}$$

Жисмнинг айланма ҳаракат дифференциал тенгламасини кўзда тутиб қуйидаги натижага келамиз:

$$M_c^{\text{и}} = -M_c^{e} = -I_c \cdot \varepsilon \qquad (19.14)$$

Шундай қилиб, бу ҳолда инерция кучлар системаси моменти $M_c^{\text{и}}$ га тенг ва айланиш ўқига перпендикуляр бўлган текисликда ётувчи жуфт кучга келади. Формуладаги минус ишора $M_c^{\text{и}}$ момент йўналишини жисмнинг бурчак тезланиш йўналишига қарама- қарши йўналганлигини кўрсатади.

3.*Жисм текис параллел ҳаракат қилади.* Жисмнинг симметрия текислиги бўлиб ва унинг ҳамма нуқталари бу текисликка параллел текисликларда ҳаракат қилаётган бўлсин (184-расм). Жисмнинг бундай ҳаракатини унинг қутб деб аталган нуқтасининг илгариланма ҳаракати билан бу нуқтадан ўтувчи ўқ атрофида айланма ҳаракатларга ажратиш мумкинлигини курсимизнинг кинематика бўлимида кўрсатганмиз.



184-расм

Бироқ, қутб сифатида, динамикада жисм массалар маркази C нуқта олинади. У ҳолда аввалги ҳолларни эътиборга олинса, инерция кучларининг ҳам бош вектори, ҳам бош моменти бўлади, яъни:

$$R'^{и} = -ma_C, \qquad M_C^{и} = -I_C \cdot \varepsilon \qquad (19.15)$$

Бошқача айтганда, қаралаётган ҳолда инерция кучлар системаси битта куч ва битта жуфт билан алмашилади. (19.13) ва (19.14) формулаларга асосан масалалар ечишда тегишли катталикларнинг миқдорлари ҳисобланади, уларнинг йўналишлари эса, расмда кўрсатилади холос.

4.*Жисм ҳаракатининг умумий ҳоли.* Қаттиқ жисмнинг бундай ҳаракати қутб деб олинган бирор нуқтаси билан илгариланма ва шу қутбдан ўтувчи бирор ўқ атрофида айланма ҳаракатлардан ташкил топганлигини юқорида исботлаган эдик. Қутб сифатида аввалгидек яна массалар марказини танлаймиз.

Инерция кучларининг бош вектори ҳар доимгидек (19.13) формула билан аниқланади, яъни қаттиқ жисм инерция кучларининг бош вектори массаси гўё жисм массаси m га тенг массалар маркази инерция кучига тенг:

$$\mathbf{R}'^{и} = -m\mathbf{a}_C, \quad \text{ёки} \quad R_x'^{и} = -m\ddot{x}_C, R_y'^{и} = -m\ddot{y}_C, R_z'^{и} = -m\ddot{z}_C$$

Энди жисм ҳаракатининг умумий ҳолида инерция кучларининг бош моментини аниқлаймиз:

$$\mathbf{M}_C^{и} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k x \mathbf{F}_k^{и} = -\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k x m_k \mathbf{a}_k = -\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k x m_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt} =$$

$$= -\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k x m_k \mathbf{v}_k = -\frac{d\mathbf{L}_C}{dt}.$$

Бу ерда $\mathbf{L}_C$ - массалар марказига нисбатан жисм ҳаракат миқдори *кинетик моменти,* (17.6) га кўра аниқланади. Демак, жисм инерция кучларининг С *марказига нисбатан бош моменти жисм (система) нинг шу марказга нисбатан кинетик моментидан вақт бўйича олинган биринчи тартибли (абсолют) ҳосилага тенг ва тескари йўналган,* яъни

$$\mathbf{M}_c^{и} = -\frac{d\mathbf{L}_c}{dt}.$$

Координата ўқларининг боши мазкур массалар марказига қўйилган ва жисм билан маҳкам боғланаган Cxyz координаталар системасини ўтказамиз. Ушбу қўзғалувчи координаталар системасига нисбатан жисм қўзғалмас қолади ва шунинг учун унинг ҳамма инерция моментлари ўзгармас миқдор бўлади. Жисмнинг инерция моментлари қўзғалмас координаталар системасига нисбатан ўзгарувчи миқдордир, чунки жисм унга нисбатан ҳаракатланади. Ана шуни эътиборга олиб, жисм билан маҳкам боғланган ҳолда ҳаракатланувчи Cxyz координаталар системасига нисбатан жисмнинг кинетик моменти аниқ деб вақт бўйича абсолют ҳосилани қўзғалувчи Cxyz системага нисбатан ҳосила орқали ифодалаймиз:

$$\mathbf{M}_C^{\text{и}} = -\frac{d\mathbf{L}_C}{dt} = -\frac{\tilde{d}\mathbf{L}_C}{dt} - \omega \times \mathbf{L}_C$$

Бу ерда ω - массалар марказидан ўтган оний ўқ атрофида жисмнинг айланма ҳаракат бурчак тезлиги. Ушбу тенгламани қўзғалувчан ўқларга проекциялаб қуйидаги муносабатларни ҳосил қиламиз:

$$M_{Cx}^{\text{и}} = -\frac{dL_{Cx}}{dt} - \left(\omega_y L_{Cz} - \omega_z L_{Cy}\right),$$

$$M_{Cy}^{\text{и}} = -\frac{dL_{Cy}}{dt} - \left(\omega_z L_{Cx} - \omega_x L_{Cz}\right),$$

$$M_{Cz}^{\text{и}} = -\frac{dL_{Cz}}{dt} - \left(\omega_x L_{Cy} - \omega_y L_{Cx}\right).$$

(Скаляр катталик учун абсолют ва нисбий ҳосилалар фарқ қилинмайди). Кинетик момент проекциялари учун (17.8) тенгламаларни қўлласак, С марказга нисбатан жисм инерция кучларининг бош моменти проекциялари ифодасини ҳосил қиламиз:

$$M_{Cx}^{\text{и}} = -I_x\varepsilon_x + I_{xy}\left(\varepsilon_y - \omega_x\omega_z\right) + I_{xz}\left(\varepsilon_z + \omega_x\omega_y\right) - I_{yz}\left(\omega_z^2 - \omega_y^2\right) - \left(I_z - I_y\right)\omega_y\omega_z,$$

$$M_{Cy}^{\text{и}} = -I_y\varepsilon_y + I_{yz}\left(\varepsilon_z - \omega_y\omega_x\right) + I_{yx}\left(\varepsilon_x + \omega_y\omega_z\right) - I_{xz}\left(\omega_x^2 - \omega_z^2\right) - \left(I_x - I_z\right)\omega_z\omega_x,$$

$$M_{Cz}^{\text{и}} = -I_z\varepsilon_z + I_{zx}\left(\varepsilon_x - \omega_y\omega_z\right) + I_{yz}\left(\varepsilon_y + \omega_x\omega_z\right) - I_{xy}\left(\omega_y^2 - \omega_x^2\right) - \left(I_y - I_x\right)\omega_x\omega_y.$$

Ушбу формула жисм ҳаракатининг умумий ҳолида унинг инерция кучлари бош моментини проекцияларини аниқлайди. Бундан қаттиқ жисм ҳаракатининг хусусий ҳоллари учун инерция кучлари бош моментини аниқловчи формулалар осон келиб чиқади.

Симметрия текислигига эга жисмнинг текис параллел ҳаракати. Координата ўқлари системасининг z-ўқи симметрия текислигига перпендикуляр, жисмнинг ҳаракат текислиги эса симметрия текислиги билан устма-уст қилиб олинган бўлсин. У ҳолда, текис параллел ҳаракат xy текислигида юз беради, z ўқи инерция бош ўқи бўлади ва шунинг учун қуйидагилар

$$I_{xy} = I_{yz} = 0, \ \varepsilon_x = \varepsilon_y = 0, \ \omega_x = \omega_y = 0, \quad \varepsilon_z = \varepsilon, \quad \omega_z = \omega$$

га тенг. Буларни эътиборга олсак, инерция кучлари бош моменти қуйидагича содда ифодага келади:

$$M^{и}_{Cx} = 0, \quad M^{и}_{Cy} = 0, \quad M^{и}_{Cz} = -I_{Cz} \cdot \varepsilon. \qquad (19.15')$$

Ушбу натижани (19.15) да ҳосил қилган эдик.

Қўзғалмас ўқ атрофида жисмнинг айланма ҳаракати. Айланиш ўқида ихтиёрий нуқтани қутб сифатида танлаб, z ўқини айланиш ўқи билан устма-уст жойлаштириб, x ва y ўқларни эса айланаётган жисм билан бириктириб оламиз. ε ва ω векторлар айланиш ўқи билан устма-уст йўналган, демак уларнинг проекциялари:

$$\omega_x = \omega_y = 0, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = 0, \quad \omega_z = \pm\omega, \quad \varepsilon_z = \pm\varepsilon$$

га тенг. У ҳолда, юқоридагига мувофиқ, қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган ихтиёрий жисмнинг инерция кучлари бош моментининг проекциялари қуйидагича аниқланади:

$$M^{и}_{x} = I_{xz}\varepsilon - I_{yz}\omega^2, \quad M^{и}_{y} = I_{yz}\varepsilon + I_{xz}\omega^2, \quad M^{и}_{z} = -I_z\varepsilon.$$

Агар жисмнинг қўзғалмас айланиш ўқи z унинг инерция бош ўқи бўлса, $I_{xz} = I_{yz} = 0$ га айланади ва яна $M^{и}_{x} = M^{и}_{y} = 0$, $M^{и}_{z} = -I_z \cdot \varepsilon$ келиб чиқади. Ушбу ҳолда, албатта, бу бош ўққа ва демак, айланиш ўққа ҳам перпендикуляр симметрия текислиги мавжуд. Инерция кучларининг бош вектори шу симметрия текислигида ётади ва шу текисликдаги массалар марказига қўйилган бўлади.

Агар атрофида жисм айланаётган қўзғалмас ўқ жисмнинг инерция бош марказий ўқи бўлса, жисмнинг массалар маркази қўзғалмас (чунки у шу ўқда ётади) бўлиб, инерция кучларининг бош вектори нолга айланади ва фақат инерция кучлари бош моментининг айланиш ўқидаги проекцияси нолдан фарқли бўлади. Яна бир бор (19.14) натижага келдик.

93-§. Даламбер принципига кўра боғланишдаги нуқта ва системанинг эркинмас ҳаракат динамик реакцияларини аниқлаш.

Эркинмас ҳар қандай моддий нуқта ёки механик система ҳаракатини ўрганиш учун Даламбер принципини қўллаш уларнинг ҳаракат тенгламаларини тузишнинг бирдан-бир қулай усулидир. Айниқса, моддий нуқта ёки механик система ҳаракати маълум ёки у номаълум реакциялар қатнашмаган тенгламалар орқали аниқланиши мумкин бўлган ҳолларда Даламбер принципини боғланиш реакцияларини аниқлаш учун қўллаш ғоят даражада осонлик туғдиради. Бундай масалаларни ечишда, кўпинча олдиндан номаълум бўладиган ички кучлар ҳисобга олинмайди. Ички боғланишнинг реакцияларини аниқлаш зарур бўлган ҳолларда эса механик системани ушбу ички реакция кучлар ташқи реакция куч бўладиган қисмларга ажратиб ўрганиш керак бўлади.

Боғланишли моддий нуқта ҳаракатида (19.3) (ёки механик система учун эса (19.9)) Даламбер принципи ёрдамида аниқланган реакция кучлари, шу мувозанат тенгламалардан аёнки, бир томондан қўйилган кучларнинг характерига боғлиқ бўлса, иккинчидан, инерция кучлари (бош вектори ва бош моменти) орқали, нуқта ёки жисм (механик система нуқталари) ҳаракат қонунига, массалар маркази ва айланиш ўқининг жойлашишларига ниҳоят боғлиқ. Шунинг учун (19.3) ёки (19.9) даги реакция кучларини таъсир этаётган ташқи актив кучларга боғлиқ ва массалар марказининг, айланиш ўқининг жойлашишларига ҳамда (нуқтанинг ёки системанинг) ҳаракат қонунига боғлиқ реакцияларга ажратиб аниқлашга тўғри келади. Шуни эсда тутиш керакки, таъсир кўрсатувчи ташқи кучлар ҳам ҳаракат қонунига (жумладан, қаршилик кучлари тезликка) боғлиқ бўлиши мумкин.

Шундай қилиб, боғланишли эркинмас жисмнинг ҳаракатида боғланиш реакциялари иккита: актив кучларнинг таъсири билан аниқланувчи статик реакциялар $\mathbf{N}^c$ дан ва масса тақсимланиши ҳамда ҳаракат қонуни характерлари билан аниқланувчи қўшимча динамик реакциялар $\mathbf{N}^d$ дан иборат бўлади. Жумладан, моддий нуқтанинг эркинмас ҳаракатида реакция (ёки, умумий ҳолда, боғланишлар реакцияларининг тенг таъсир этувчиси) $\mathbf{N}$ статик $\mathbf{N}^c$ ва қўшимча динамик $\mathbf{N}^d$ реакциялардан йиғилади:

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}^c + \mathbf{N}^d \qquad (19.16)$$

Боғланиш реакциясининг ушбу икки реакциядан иборат ифодасини ҳаракатдаги нуқта учун Даламбер принципининг (19.3) мувозанат тенгламасига қўйиб ҳаракатдаги нуқта мувозанатининг

$$\mathbf{R} + \mathbf{N}^c + \mathbf{N}^d + \mathbf{F}^и = 0 \qquad (19.17)$$

тенгламасига келамиз. Бу (19.17) тенгламадан нуқтанинг статик мувозанатини ифодаловчи

$$\mathbf{R} + \mathbf{N}^c = 0 \qquad (19.18)$$

тенгламани ажратиб нуқтанинг эркинмас ҳаракатидаги қўшимча динамик реакцияларни аниқловчи

$$N^d + N^и = 0 \qquad (19.19)$$

дан иборат динамик мувозанат тенгламани ҳосил қиламиз.

Механик системанинг эркинмас ҳаракатидаги боғланишлар реакцияларининг бош вектори ва бош моменти ҳам, худди нуқтадаги каби, иккита: статик ва динамик реакциялардан йиғилади

$$N' = N'^c + N'^d, \qquad M_0^N = M_0^{Nc} + M_0^{Nd} \qquad (19.20)$$

Ушбу ўзгаришларни ҳисобга олган ҳолда (19.9) қуйидаги кўринишга келади:

$$R' + N'^c + N'^d + R'^и = 0, \qquad M_0 + M_0^{Nc} + M_0^{Nd} + M_0^и = 0. \qquad (19.21)$$

Ҳаракатдаги боғланишли механик система мувозанатининг ушбу кўринищдаги Даламбер принципи тенгламасидан системанинг статик мувозанат тенгламалари

$$R' + N'^c = 0, \qquad M_0 + M_0^{Nc} = 0 \qquad (19.22)$$

ни ажратиб ҳаракатдаги эркинмас механик система учун Даламбер принципидан келиб чиқадиган қўшимча динамик реакцияларни аниқловчи қуйидаги

$$N'^d + R'^и = 0, \qquad M_0^{Nd} + M_0^и = 0 \qquad (19.23)$$

мувозанат тенгламаларни ҳосил қиламиз.

(19.19) ва (19.23) тенгликлардан кўрамизки, қўшимча динамик реакцияларни аниқлаш учун ёзилган мувозанат тенгламаларда актив кучлар ҳисобга олинмайди. Моддий нуқта учун (19.19), механик система учун (19.23) вектор тенгламаларнинг ҳар бири, координата ўқларига проекциялар тарзидаги учтадан скаляр мувозанат тенгламаларга эквивалент, чунончи, (19.23) учун қўшимча динамик реакцияларни аниқловчи олтита скаляр тенгламаларга эга бўламиз

$$N'^{d}_{x} + R'^{и}_{x} = 0$$
$$N'^{d}_{y} + R'^{и}_{y} = 0 \qquad (19.24)$$
$$N'^{d}_{z} + R'^{и}_{z} = 0$$

$$M^{Nd}_{x} + M^{и}_{x} = 0$$
$$M^{Nd}_{y} + M^{и}_{y} = 0 \qquad (19.25)$$
$$M^{Nd}_{z} + M^{и}_{z} = 0$$

(19.24) ва (19.25) мувозанат тенгламалардан шу қўшимча динамик реакцияларни аниқлаш жисм (ёки, умумий ҳолда, механик система) инерция кучларининг бош вектори ва бош моментларини аниқлаш масаласига келар экан. Инерция кучларининг бош вектори ҳар доим (19.13) билан осон аниқланади. У ҳолда, (19.24) га кўра қўшимча динамик реакциялар бош векторининг координаталардаги проекциялари:

$$N'^{d}_{x} = m\ddot{x}_C, \quad N'^{d}_{y} = m\ddot{y}_C, \quad N'^{d}_{z} = m\ddot{z}_C,$$

га тенг.

Жисм инерция кучлари бош моменти жисм ҳаракатининг умумий ҳолида юқорида аниқланган эди. Ушбу ифодаларни юқоридаги (19.25) га қўйиб қўшимча динамик реакциялар бош моментининг координата ўқлардаги проекцияларини ва улар орқали модулини ва йўналишини аниқлаш мумкин. Қуйида қаттиқ жисм ҳаракатининг хусусий ҳоллари учун айни шу масалани қараймиз.

Симетрия текислигига эга жисмнинг текис параллел ҳаракати. Юқорида аниқланганидек, бу ҳаракат ҳолида инерция кучлари бош моментининг z-ўқдаги проекциясигина нолдан фарқли ва у

$$M^{и}_{Cz} = -I_{Cz}\varepsilon$$

га тенг. z-ўқи симметрия текислигига перпендикуляр. Симметрия текислиги жисмнинг ҳаракат текислиги ҳам. Демак, z-ўқи жисмнинг инерция бош ўқи бўлади. (19.24), (19.25) тенгламалардан биринчи иккитаси (чунки, $\ddot{z}_c = 0$ га тенглигидан $R_z'^{и} \equiv 0$) ва охирги тенгламагина қолади.

Қўзғалмас ўқ атрофида жисмнинг айланма ҳаракати. Координата ўқлари системасининг z-ўқи жисмнинг айланиш ўқи билан устма-уст жойлашган бўлсин. Жисмнинг айланма ҳаракатига А ва В нуқталардаги подшипниклардан иборат боғланишлар таъсир қилади. Шунинг учун жисмнинг мазкур ҳаракати унга бўшатиш принципини қўллаб ўрганилади. Боғланишларни А ва В нуқталарда қўйилган N_A ва N_B реакциялар (бунда ишқаланиш ҳисобга олинмайди) билан алмаштириб жисмни эркин ҳолатга келтирамиз.

Жисмнинг оғирлик маркази орқали айланиш ўқига перпендикуляр ўтган текисликни шу ўқ билан кесишган нуқтасига координаталар боши қўйилган иккита: қўзғалмас ва қўзғалувчи системалар оламиз. Булар учун айланиш ўқи умумий ва А, В подшипникларнинг координаталари бир хил; жумладан, А(0,0,-*а*), В(0,0,*в*) бўлсин. Қўзғалувчи координаталар системаси жисмга бириктирилган ва у жисм билан z ўқи атрофида айланма ҳаракатланади. Шунинг учун қўзғалувчи системада жисмнинг оғирлик маркази координаталари x_c, y_c ($z_c = 0$) ва марказдан қочма I_{xz} ва I_{yz} инерция моментлари ўзгармас миқдорлардир. Подшипникларнинг реакция кучларининг моментларини аниқлаймиз:

$$\mathbf{M}_0(\mathbf{R}_A) = \mathbf{r}_A x \mathbf{N}_A = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & -a \\ N_{Ax} & N_{Ay} & N_{Az} \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{M}_0(\mathbf{R}_B) = \mathbf{r}_B x \mathbf{N}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & b \\ N_{Bx} & N_{By} & N_{Bz} \end{vmatrix}$$

Реакция кучлари бош моментининг проекцияларини юқоридаги ифодаларни ҳисоблаб аниқлаймиз:

$$M_x^N = a N_{Ay} - b N_{By}, \quad M_y^N = -a N_{Ax} + b N_{Bx}, \quad M_z^N = 0 \ (M_z^{Nd} = 0)$$

Реакция кучларининг бош вектори эса қуйидагича аниқланади:

$$N'_x = N_{Ax} + N_{Bx}, \quad N'_y = N_{Ay} + N_{By}, \quad N'_z = N_{Az}.$$

Инерция кучларининг бош вектори (ёки динамик реакция) проекцияларини ҳисоблаш учун, юқорида келтириб чиқарганимиздек, массалар маркази тезланишининг координата ўқларидаги проекцияларини аниқлашимиз керак. Жисмнинг айланма ҳаракатида нуқтасининг тезланиши айланма ва марказга интилма тезланишлардан ташкил топади, яъни:

$$a = a^{\varepsilon} + a^{\omega}, \quad a^{\varepsilon} = OC \cdot \varepsilon, \quad a^{\omega} = OC \cdot \omega^2, \quad OC = \sqrt{x_C^2 + y_C^2}$$

У ҳолда

$$\ddot{x}_C = a_x^{\varepsilon} + a_x^{\omega} = -OC \cdot \varepsilon \frac{y_C}{OC} - OC \cdot \omega^2 \frac{x_C}{OC} = -y_C \cdot \varepsilon - x_C \cdot \omega^2,$$

$$\ddot{y}_C = a_y^{\varepsilon} + a_y^{\omega} = OC \cdot \varepsilon \frac{x_C}{OC} - OC \cdot \omega^2 \frac{y_C}{OC} = x_C \cdot \varepsilon - y_C \omega^2,$$

$$\ddot{z}_C = 0.$$

Демак,

$$N'^d_x = N^d_{Ax} + N^d_{Bx} = -my_C\varepsilon - mx_C\omega^2,$$
$$N'^d_y = N^d_{Ay} + N^d_{By} = mx_C\varepsilon - my_C\omega^2,$$
$$N'^d_z = 0.$$

Жисм инерция кучлари бош моментини унинг С марказга нисбатан бош моменти проекциялари ифодасидан ҳисоблаймиз. Бу формулаларда бурчак тезлик ва бурчак тезланишнинг қўзғалувчи координата системаси ўқларидаги проекциялари қатнашган. Бизнинг ҳолимизда $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$, $\omega_x = \omega_y = 0$, $\varepsilon_z = \varepsilon$, $\omega_z = \omega$. Демак,

$$M^и_x = I_{xz}\varepsilon - I_{yz}\omega^2, \quad M^и_y = I_{yz}\varepsilon + I_{xz}\omega^2, \quad M^и_z = -I_z\varepsilon.$$

Аниқланган катталикларни (19.25) га қўйиб, динамик реакциялар учун қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} &-my_C\varepsilon - mx_C\omega^2 = N^d_{Ax} + N^d_{Bx}, \\ &mx_C\varepsilon - my_C\omega^2 = N^d_{Ay} + N^d_{By}, \\ &-I_{xz}\varepsilon + I_{yz}\omega^2 = aN^d_{Ay} - bN^d_{By}, \\ &-I_{yz}\varepsilon - I_{xz}\omega^2 = -aN^d_{Ax} + bN^d_{Bx}. \end{aligned} \qquad (19.26)$$

Ушбу тенгламалардан А ва В боғланишларнинг динамик реакцияларини қуйидагича

$$N^d_A = \sqrt{\left(N^d_{Ax}\right)^2 + \left(N^d_{Ay}\right)^2}, \quad N^d_B = \sqrt{\left(N^d_{Bx}\right)^2 + \left(N^d_{By}\right)^2}$$

аниқлаймиз. Бу ерда

$$N^d_{Ax} = -\frac{1}{a+b}\left\{\left(mby_C - I_{zy}\right)\varepsilon + \left(mbx_C - I_{xz}\right)\omega^2\right\},$$

$$N^d_{Ay} = \frac{1}{a+b}\left\{\left(mbx_C - I_{xz}\right)\varepsilon - \left(mby_C - I_{yz}\right)\omega^2\right\},$$

$$N^d_{Bx} = -\frac{1}{a+b}\left\{\left(may_C + I_{yz}\right)\varepsilon + \left(max_C + I_{xz}\right)\omega^2\right\},$$

$$N^d_{By} = \frac{1}{a+b}\left\{\left(max_C + I_{xz}\right)\varepsilon - \left(may_C + I_{yz}\right)\omega^2\right\}.$$

га тенг. Шундай қилиб, қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатдаги жисм учун қўшимча динамик реакцияларнинг миқдорлари қуйидаги ифодалар билан аниқланади:

$$N^d_A = \frac{1}{a+b}\sqrt{\left[\left(mby_C - I_{yz}\right)^2 + \left(mbx_C - I_{xz}\right)^2\right]\left(\varepsilon^2 + \omega^4\right)}, \qquad (19.27)$$

$$N^d_B = \frac{1}{a+b}\sqrt{\left[\left(may_C - I_{yz}\right)^2 + \left(max_C - I_{xz}\right)^2\right]\left(\varepsilon^2 + \omega^4\right)}. \qquad (19.28)$$

1. Жисмнинг айланиш ўқи инерция бош ўқи бўлмасин ва оғирлик маркази шу ўқда ётсин, яъни $x_C = y_C = 0$, $I_{xz} \neq 0$, $I_{yz} \neq 0$. У ҳолда

$$N^d_A = N^d_B = \frac{1}{a+b}\sqrt{\left(I^2_{yz} + I^2_{xz}\right)\left(\varepsilon^2 + \omega^4\right)}$$

Ушбу ҳолда боғланишларнинг динамик реакциялари миқдор жиҳатдан ўзаро тенг, лекин йўналиш жиҳатдан эса қарама- қарши экан.

2. Жисм $\omega = \text{const}$ бурчак тезлик билан текис айланма ҳаракатлансин. У ҳолда $\varepsilon = 0$. (Оғирлик маркази ушбу ҳолда ҳам айланиш ўқида бўлсин). Ҳисоблашлардан кўрамизки боғланишларнинг динамик реакциялари

$$N^d_A = N^d_B = \frac{\omega^2}{a+b}\sqrt{\left(I^2_{yz} + I^2_{xz}\right)}$$

ушбу ҳолда ҳам миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши эса қарама-қарши кучларга келтирилади.

3. Жисмнинг айланиш ўқи жисмнинг инерция бош ўқи бўлиб, А боғланиш координаталар боши билан устма-уст жойлаштирилсин, яъни

$$I_{yz} = 0, \quad I_{xz} = 0, \quad \alpha = 0$$

бўлсин. У ҳолда (19.28) дан $N_B^d = 0$ келиб чиқади, яъни В да динамик реакция кучи бўлмайди. А дан ўтувчи инерция бош ўқи эркин айланиш ўқи дейилади.

4. Агар $x_C = 0$, $y_C = 0$, $I_{yz} = 0$, $I_{xz} = 0$ бўлса, айланиш қонуни ва демак ε ҳамда ω қандай бўлишидан қатъий назар (19.27), (19.28) га кўра $N_A^d = 0$, $N_B^d = 0$ бўлади. Демак, айланиш ўқи инерция марказий бош ўқи билан устма-уст бўлса динамик реакциялар ҳосил бўлмас экан. Ушбу ҳолни вужудга келтирадиган зарурий шартларни аниқлаймиз. Бунинг учун инерция кучларга боғлиқ ҳадлардан тузилган (19.26) тенгламада барча инерция кучларни нолга тенглаб,

$$m y_C \varepsilon + m x_C \omega^2 = 0, \quad m x_C \varepsilon - m y_C \omega^2 = 0 \qquad (19.29)$$

$$I_{xz} \varepsilon - I_{yz} \omega^2 = 0, \quad I_{yz} \varepsilon + I_{xz} \omega^2 = 0 \qquad (19.30)$$

шартларни келтириб чиқарамиз. (19.29) тенгламани x_C ва y_C га, (19.30) тенгламани эса I_{xz} ва I_{yz} га нисбатан ечиб,

$$x_C = 0, \quad y_C = 0, \quad I_{xz} = 0, \quad I_{yz} = 0 \qquad (19.31)$$

ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатланаётган жисм таянч нуқталарга динамик босим кўрсатмаслиги учун унинг айланиш ўқи унинг инерция бош марказий ўқи бўлиши зарур ва етарлидир. Ушбу ҳолда, айланаётган жисм мувозанатлашган, айланиш ўқи эса эркин дейилади.

Бурчак тезликнинг катта қийматларида мувозанатсизликдан подшипникларга таъсир кўрсатувчи катта динамик босим (реакция кучи) пайдо бўлиши мумкин. Бу кераксиз босимни пайдо қилувчи мувозанатсизликдан қутилиш учун айланиш ўқига перпендикуляр иккита текисликларда иккита нуқтавий массани қўшиб ёки айириб эришилади. $z=z_1$ ва $z=z_2$ текисликлардаги танланган m_1 ва m_2 массаларнинг ва уларнинг (x_1, y_1) ҳамда (x_2, y_2) координаталарининг қийматлари қуйидаги тенгламалар орқали аниқланади:

$$mx_C + m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0,\quad my_C + m_1 y_1 + m_2 y_2 = 0,$$
$$I_{zx} + m_1 x_1 z_1 + m_2 x_2 z_2 = 0,\quad I_{yz} + m_1 y_1 z_1 + m_2 y_2 z_2 = 0.$$

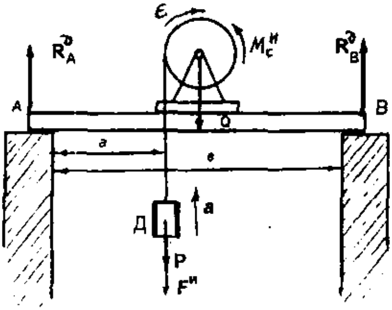
m_1 ва m_2 массалар қўшилган жисмнинг оғирлик маркази айланиш ўқида ётиши учун унинг янги оғирлик маркази координаталари $x'_C = 0$, $y'_C = 0$ ва айланиш ўқи унинг инерция бош марказий ўқи бўлиши учун янги қочма моментлар $I'_{xz} = I'_{yz} = 0$ бўлиши зарур ва етарли. Бунинг учун,

$$m_1 x_1 = \frac{I_{zx} - mx_C z_2}{z_2 - z_1},\quad m_2 x_2 = \frac{I_{zx} - mx_C z_1}{z_1 - z_2},$$
$$m_1 y_1 = \frac{I_{yz} - my_C z_2}{z_2 - z_1},\quad m_2 y_2 = \frac{I_{yz} - my_C z_1}{z_1 - z_2}.$$

га тенг бўлиши керак.

47-*масала.* Оғирлиги Р бўлган Д юк лебёдка (чиғириқ) ёрдамида а га тенг текис тезланиш билан кўтарилади. Лебёдка горизонтал АВ балкага ўрнатилган, балка эса А ва В таянчларга эркин қўйилган (185-расм). Лебёдка барабанининг радиуси r га тенг ва унинг айланиш ўқига нисбатан инерция радиуси $\rho_и$ ҳамда оғирлиги Q бўлса, А ва В таянчларда Д юкнинг ҳамда айланувчи барабан моддий зарраларининг инерция кучларидан ҳосил бўладиган қўшимча босимлар (динамик реакциялар) топилсин. Ўлчовлар расмда кўрсатилган. Балканинг оғирлиги ҳисобга олинмасин.

Ечиш. Даламбер принципи ёрдамида таянчлардаги динамик реакцияларни топиш учун система нуқталарига таъсир этувчи кучлар қаторига уларнинг инерция кучлари шартли равишда қўшилади ва бўшатиш принципига кўра системани боғланишлардан бўшатиб, инерция кучларининг таъсирларидан вужудга келган қўшимча босим (динамик реакция) лари система нуқталарига қўйилади. Ҳосил бўлган кучлар системасининг турига қараб худди, статикадагидек мувозанат тенгламалар тузилади. Қаралаётган масалада қўшимча динамик реакцияларнинг пайдо бўлиши кўтарилаётган юкнинг инерция кучи ва айланувчи барабан моддий зарраларининг инерция кучларига боғлиқ бўлади.



185-расм

Д юкнинг инерция кучи $F^и$ ҳар доим **а** тезланиш йўналишига қарама- қарши йўналади ва қиймат жиҳатдан $F^и = ma = \frac{P}{g}a$ га тенг. Лебёдка барабани расм текислигига мос бўлган симметрик текисликка эга бўлиб, унинг массалар маркази С айланиш ўқида ётади деб қарайлик. У ҳолда, барабан моддий зарраларининг инерция кучлари моменти $M_C^и$ га тенг бўлган жуфт кучга келади. Унинг қиймати:

$$M_C^и = I_C \varepsilon \qquad (1)$$

га тенг. Бу ерда

$$I_C = \frac{Q}{g}\cdot\rho_и^2$$

барабаннинг айланиш ўққа нисбатан инерция моменти. ε- барабаннинг бурчак тезланиши. Жумладан, юкнинг тезланиши ҳар онда барабан гардиши нуқталарининг айланма тезланишига тенглигини кўзда тутган ҳолда ε нинг қийматини қуйидаги ифодадан топишимиз мумкин:

$$\varepsilon = \frac{a_M^\tau}{r} = \frac{a}{r} \qquad (2)$$

Бу топилган қийматни юқорига қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$M_C^и = \frac{I_C\cdot a}{r} = \frac{Q}{rg}\cdot\rho_и^2\cdot a \qquad (3)$$

Балка, лебёдка ва юкдан иборат бўлган бу системага Даламбер принципини қўллаймиз. Бу системага таъсир этаётган кучлар қаторига юкнинг инерция кучи $\mathbf{F}^и$ ни ва барабан нуқталарининг инерция кучларидан тузилган, моменти $M_C^и$ га тенг бўлган жуфтни шартли равишда қўшамиз, бунда бу жуфт моменти бурчак тезланиш вектори $\boldsymbol{\varepsilon}$ га тескари йўналтирилади.

Системанинг боғланишларини боғланиш реакциялари $\mathbf{R}_A^d$ ва $\mathbf{R}_B^d$ билан алмаштирамиз. Улар берилган ҳол учун вертикалдир. Ҳосил бўлган кучлар бир текисликда жойлашган параллел кучлар системасини ташкил этади. Шунинг учун уларнинг мувозанат тенгламаларини тузамиз:

$$\begin{aligned} &\sum M_A = 0; \quad R_B^d\cdot b + I_C\varepsilon - F^и\cdot a = 0, \\ &\sum M_B = 0; \quad -R_A^d\cdot b + I_C\varepsilon + F^и\cdot(b - d) = 0. \end{aligned} \qquad (4)$$

(4) тенгликларнинг иккинчисидан $\mathbf{R}_A^d$ қўшимча босимни топамиз:

$$R_A^d=\frac{I_C\cdot\varepsilon+F^и(b-d)}{b}=\frac{I_C\cdot\frac{a}{r}+\frac{P}{g}a(b-d}{b}=\frac{a}{rgb}\left[I_C\cdot g+rP(b-d)\right]=$$

$$=\frac{a}{rgb}\left[Q\rho_и^2+rP(b-d)\right]$$

Шунингдек, биринчисидан $\mathbf{R}_B^d$ топилади:

$$R_B^d=\frac{F^и\cdot d-I_C\cdot\varepsilon}{b}=\frac{\frac{P}{g}a\cdot a-I_C\cdot\frac{a}{r}}{b}=\frac{a}{rgb}\left(Par-I_Cg\right)=\frac{a}{rgb}\left(Par-Q\rho_и^2\right).$$

Динамик қўшимча босим миқдор жиҳатдан ушбу аниқланган динамик реакция $\left(R_A^d+R_B^d\right)$ кучига тенг, йўналиш жиҳатдан эса унга қарама- қарши бўлади. Агар ипнинг таранглик кучини ҳам топиш сўралса, кинетостатика методини қўллаб, юкнин мувозанат шартидан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$T-P-F^и=0,\quad T=P+\frac{P}{g}a.$$

XX-боб

АНАЛИТИК МЕХАНИКАДАН ТУШУНЧАЛАР

Статика бўлимида қўйилган кучлар
аъсиридаги абсолют қаттиқ жисм мувозанатининг
арурий ва етарли шартлари - алгебраик олтита
енгламалари чиқарилган эди. Исталган механик
истеманинг мувозанат ҳолида булар, қотиш
ринципига асосан, фақат зарурий шартларни
фодалайди. Бунда мувозанатнинг етарли шартини
аноатлантириш масаласи системанинг ҳар бир
уқтаси (жисм) учун мувозанат тенгламаларини
узиш билан ҳал қилинар эди. Умумий ҳолда, n-
а қаттиқ жисмдан ташкил топган механик система
увозанатини текшириш 6n-та алгебраик
енгламалар масаласига келтирилади. Бунда
ниқланиши зарур бўлмаган бир қанча, номаълум
чки реакцияларни ҳам ҳисоблашга тўғри келади.
еханик система мувозанати масаласини статика
етоди билан ечишнинг ноқулайлиги системани
шкил қилувчи жисмлар сонини орттани сари
нгламалар сонини ҳам ортишида.

Аналитик механика бобида биз барча
еханик системалар мувозанатини текширишнинг
атикадагидан бошқа қулайроқ ва универсал
лган методи билан танишамиз. Бу *мумкин бўлган*
чишлар принципи дейилиб, француз олими
гранжнинг "Аналитик механика" номли машҳур
арида биринчи бор баён этилган. Умуман,
алитик механикада системаларнинг ҳаракати ва
возанати ҳамма системалар учун умумий бўлган
инциплар асосида уларнинг аналитик
фференциал тенгламалари ёки аналитик
возанат тенгламалари орқали аниқланади. Ҳозир
з аналитик механикани ўрганиш учун зарур
лган дастлабки тушунчалар билан танишамиз.

94-§. Боғланишлар, уларнинг тенгламалари ва классификацияси.

Координаталарининг ва тезликларининг қийматлари ихтиёрий ўзгарадиган моддий нуқталарнинг механик системасига *эркин*, акс ҳолда, *эркинмас механик система* дейилади. Эркинмас системанинг айрим нуқталарининг координата ва тезликларига бевосита қолганлариникига эса билвосита· чек қўйилган бўлади. Механик система нуқталарининг ҳаракатига қўйиладиган бундай чекларни биз боғланишлар деб атаймиз. Шундай қилиб, системага қўйилган боғланишлар деб унинг баъзи нуқталари координата ва тезликларининг ўзгаришини, ҳаракат тенгламалари ва таъсир этаётган кучлардан қатъий назар, чекловчи ҳар қандай шартларга айтилади.

Механик система нуқталарининг бу каби кинематик характеристикаларини чекловчи бундай шартлар (яъни боғланишлар) математик ифодалар ёрдамида тавсифланади ва бундай ифодаларга *боғланиш тенгламалари* дейилади. Боғланиш тенгламалари, умумий ҳолда, система нуқталарининг координаталари ($x_к$, $y_к$, $z_к$; $к = \overline{1,n}$), вақт бўйича уларнинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалари (тезликлари ва тезланишлари) ўртасидаги муносабатлар (дифференциал тенгламалар) билан ифодаланади. Қўйилган боғланишлар эркинмас система нуқталарининг актив кучлар таъсиридаги ҳаракатини шу система нуқталарининг худди шу кучлар таъсиридаги эркин ҳаракатига нисбатан маълум даражада чеклайди. Бундай чеклашлардан техниканинг турли соҳаларида, жумладан, амалиёт учун зарур бўлган бирор йўналиш бўйича ҳаракатни таъминлаш мақсадида фойдаланилади. Чунончи, двигатель цилиндри ичида поршень ҳаракати. Бунда цилиндр айни шу боғланиш вазифасини ўтайди ва бизга поршень ҳаракатини маълум йўналишда юз беришини таъминлайди. Шундай қилиб, боғланишлар қўйилган система нуқталарининг эркинмас ҳаракати уларга таъсир этувчи актив кучлар ва бошланғич шартларгагина боғлиқ бўлиб қолмасдан, балки айни шу қўйилган боғланишларга ҳам боғлиқдир. Бошланғич шартлар эса, боғланишлар туфайли, шу боғланиш тенгламалари билан аниқланган муносабатда ўзаро бир-бирига боғлиқ бўлади.

Умуман, боғланиш турига қараб система нуқталарининг эркинмас ҳаракати турлича бўлади. Биз қуйида боғланишларнинг амалда кўп учрайдиган турлари билан танишамиз.

Агар системага қўйилган боғланишлар система нуқталарининг фақат координаталаригагина чек қўйса у *геометрик боғланишлар* дейилади. Масалан, моддий нуқта бирор сирт бўйлаб ажралмасдан ҳаракатланаётганида бу нуқтанинг координаталари шу сирт (тенгламаси) билан чекланган (боғланган) бўлади, яъни

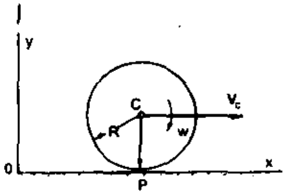
$$f(x,y,z) = 0. \qquad (20.1)$$

(20.1) сирт тенгламаси нуқта координаталарининг эркин ўзгаришига қўйилган чек бўлганлиги учун у боғланиш тенгламаси бўлади.

Механик система нуқталарининг координаталаридан ташқари уларнинг тезликларини ҳам чекловчи боғланишларга *кинематик ёки дифференциал боғланишлар* дейилади. Жумладан, горизонтал текисликда ғилдирак сирпанмасдан текис параллел ҳаракатланганида унинг текислик билан тегишган нуқтаси тезлигига нолга тенг бўлишдан иборат чек қўйилади, чунки вақтнинг ҳар бир моментида текислик билан ғилдиракнинг тегишган нуқтаси тезликларнинг оний маркази бўлиб, унинг тезлиги нолга тенг (186-расм):

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 0.$$

Агар қутб - массалар маркази тезлиги $\mathbf{v}_C$ ни, қутб атрофида айланма ҳаракат бурчак тезлиги ω ни, тезликлар оний марказининг қутбга нисбатан радиус вектори **r** ни, мос равишда, $\mathbf{v}_C(\dot{x}_C, 0, 0)$, $\boldsymbol{\omega}(0, 0, \dot{\varphi}_C)$, $\mathbf{r}(0, R, 0)$ га тенг эканлигини эътиборга олсак, боғланишни ифодаловчи, юқоридаги вектор тенглама қуйидаги скаляр тенгламалар кўринишига келади:



186-расм

$$\dot{x}_C - R\dot{\varphi} = 0, \qquad \dot{y}_C = 0. \tag{20.2}$$

Кинематик (дифференциал) боғланишнинг ушбу тенгламалари интегралланади:

$$x_C - R\varphi = 0, \qquad y_C = \text{const} = R,$$

яъни думалашда *сирпанишнинг йўқлигини* ва ғилдирак марказидан текисликкача бўлган R масофанинг сақланишини ифодаловчи *(боланиш* тенгламалар) шартлар ҳосил бўлади. Боғланишнинг ҳосил бўлган ушбу тенгламасидан кўрамизки бу кинематик боғланиш бир вақтда геометрик боғланиш ҳам экан.

Геометрик (20.1) ва тенгламалари интегралланадиган дифференциал (20.2) боғланишлар *голоном боғланишлар* дейилади. Шундай қилиб, голоном боғланишлар система нуқталарининг координаталаригагина (ёки интегралланиши мумкин бўлганидан тезлигига ҳам) чек қўяди. Улар система нуқталарининг координаталари ўртасидаги (20.1) каби муносабатлар ёки (20.2) каби интегралланувчи дифференциал тенгламалар билан ифодаланади.

Интеграллланмайдиган дифференциал тенгламалар билан ифодаланувчи боғланишлар *ноголоном боғланишлар* дейилади. Ноголоном боғланишлар ҳолида система нуқталарининг координаталари ўртасида чекли муносабатлар мавжуд бўлмайди.

Тенгламаларида вақт ошкор равишда қатнашмаган боғланишларга, масалан, (20.1), (20.2) *стационар боғланишлар* дейилади, акс ҳолда, яъни боғланиш тенгламаларида вақт ошкор равишда қатнашса, *ностационар боғланиш* дейилади. Демак, стационар боғланиш характери вақт бўйича ўзгармайди ва аксинча, ностационар боғланиш характери вақт ўтиши билан ўзгаради.

Боғланиш тенгламаси тенглик билан ифодаланса, бундай боғланиш *бўшатмайдиган ёки иккитомонлама боғланиш* деб аталади. Бунга юқоридаги боғланишлар (нуқта ёки ғилдирак сиртдан ажралмасдан ҳаракатланган ҳолда) мисол бўлаолади. Бир учи сферик шарнир ёрдамида бир нуқтага маҳкамланган стерженнинг иккинчи учига бириктирилган оғир шарчанинг сферик тебрангич каби ҳаракати бўшатмайдиган боғланишга яхши мисол бўлади. Бунда шарча моддий нуқта ҳаракати стержендан иборат бўшатмайдиган боғланиш билан чекланган, яъни шарча радиуси стержень узунлиги l га тенг сфера сиртидан ташқарида ёки ичкарида бўлаолмайди. Шарчанинг координаталари боғланиш тенгламаси орқали боғланган:

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2 .$$

Тенгламаси тенгсизлик билан ифодаланадиган боғланиш *бўшатадиган ёки биртомонлама боғланиш* дейилади. Масалан, юқоридаги оғир шарча стержень орқали эмас арқон (ип) ёрдамида бир марказ га маҳкамланган бўлсин. Бундай боғланишдаги оғир шарча (сферик тебрангич) нинг координаталари ўртасидаги муносабат тенгсизлик билан ифодаланади:

$$x^2 + y^2 + z^2 \le l^2 ,$$

чунки,энди боғланиш шарчани l радиусли сфера сиртидагина эмас, балки боғланиш (ип) дан бўшаб, сферанинг ички соҳасида ҳам бўлишига имкон беради. Тенгсизлик белгиси боғланиш қайси томонга жисмни бўшатишини билдиради.

Агар ипнинг узунлиги бирор v тезлик билан ўзгариб борса боғланиш тенгламаси

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq (l_0 \pm vt)^2$$

кўринишга келади, боғланиш эса, тенгламага кўра, ностационар боғланишга айланади.

Голоном, стационар, бўшатмайдиган боғланишга яна бир мисол тариқасида кривошип-шатун механизмини келтирамиз (187-расм). Бу мисолда боғланишлар O нуқтадаги қўзғалмас цилиндрсимон шарнир, B нуқтадаги ползун ва кривошип билан шатунни ўзаро бирлаштирувчи A даги цилиндрсимон шарнирлардан иборат. Механизмни xOy координата системасига нисбатан ўргансак, боғланишларнинг тенгламалари қуйидагича ифодаланади:

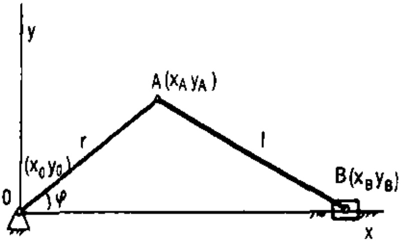
$$x_0 = 0, \; y_0 = 0, \; y_B = 0, \; x_A^2 + y_A^2 = r^2, \; (x_A - x_B)^2 + y_A^2 = l^2 \qquad (20.3)$$

Агар механизмни уч ўлчовли Oxyz Декарт координаталар системасига нисбатан ўргансак (20.3) тенгламаларга яна учта тенглама қўшилади:

$$z_0 = 0, \; z_A = 0, \; z_B = 0.$$

Шуни эсда тутиш жоизки, голоном боғланишлар стационар ва ностационар бўлиши мумкин. Агар қаралаётган механик система n та нуқталардан иборат бўлса ва унга m та боғланиш қўйилса стационар (голоном) боғланиш тенгламасининг умумий кўриниши қуйидагича бўлади

$$f_k(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0, \; (k = \overline{1, m}). \qquad (20.4)$$



187-расм.

Шунингдек, ностационар (голоном) боғланиш тенгламасининг умумий кўринишини:

$$f_k(t,x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,\ldots,x_n,y_n,z_n)=0,\ (k=\overline{1,m}).\quad (20.5)$$

каби ёзаоламиз. Агар (20.4) ва (20.5) тенгламаларда система нуқталарининг тезликлари ҳам ошкор қатнашса, улар ноголоном боғланиш тенгламасининг умумий кўринишини ифодалайди.

Бўшатмайдиган ёки иккитомонлама боғланиш тенгламаси умумий ҳолда қуйидагича ифодаланади:

$$f_k(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,\ldots,x_n,y_n,z_n)=0,\ (k=\overline{1,m}).\quad (20.6)$$

Бунда боғланиш система нуқталарининг бирор йўналишдаги ҳаракатини чеклаш билан бир вақтда унга тескари йўналишдаги ҳаракатига ҳам чек қўяди, яъни системанинг нуқталари боғланишни ташлаб кетаолмайди.

Бўшатадиган ёки биртомонлама боғланиш бунга қарама- қарши характерга эга ва унинг тенгламаси умумий ҳолда қуйидагича ифодаланади:

$$f_k(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,\ldots,x_n,y_n,z_n)\neq 0,\ (k=\overline{1,m}).\quad (20.7)$$

Булардан кўрамизки, боғланиш ихтиёридаги эркинмас система (боғланишли система) исталган йўналишда ҳаракат қилиш ҳолатига эга бўлаолмайди. Унинг ҳаракати боғланишларнинг турига ва характерига боғлиқ бўлади. Агар система нуқталарига боғланишлар қўйилмаган бўлса, у ҳолда 3n та координаталар ўзаро боғлиқмас ва уларнинг қийматлари фақат таъсир этувчи ташқи кучларгагина боғлиқ бўлади. Бундан кўринадики, система нуқталарига боғланишлар қўйилганда, система нуқталарини боғланишни қаноатлантирган ҳолда ҳаракатлантиришга мажбур этадиган қўшимча кучлар ҳосил бўлади. Бу кучлар боғланиш реакция кучларини ифодалайди.

95-§. Мумкин бўлган кўчиш. Системанинг эркинлик даражаси. Умумлашган координаталар.

Механик система нуқталарининг унга қўйилган боғланишларни қаноатлантирувчи ҳар қандай чексиз кичик (хаёлий) кўчишларига механик системанинг мумкин бўлган кўчиши ёки виртуал кўчиши дейилади.

Мумкин бўлган кўчиш тушунчаси аналитик механикадаги марказий тушунчалардан бири ҳисобланади. Мумкин бўлган кўчишнинг таърифига биноан системанинг мумкин бўлган кўчишида унга қўйилган боғланишлар бузилмайди, яъни мумкин бўлган кўчиш боғланишлар билан мувофиқ равишда бажарилади. Бошқача айтганда, эркинмас системанинг ёки эркинмас моддий нуқтанинг мумкин бўлган кўчиши унинг ҳолатини белгиловчи соф геометрик усул бўлиб, вақтга боғлиқ эмас. Механик система ёки нуқтанинг мумкин бўлган кўчиши қўйилган кучларга ҳам боғлиқ эмас.

Бунинг аксича, система нуқталарининг (ёки нуқтанинг) ҳақиқий элементар кўчиши системага қўйилган кучларнинг таъсирида ва вақтнинг чекли dt оралиғида бирдан-бир маълум йўналишда содир бўлади. Нуқтанинг координаталари ва, демак, радиус вектори **r** t вақтнинг функцияси эканлигини эътиборга олсак, dt вақт оралиғида нуқтанинг чексиз кичик ҳақиқий кўчиши t аргументнинг dt га ўзгариши туфайли **r** функциянинг чексиз кичик d**r** ўзгариши эканлигини исботлайди. Шу боисдан, бундан буён, нуқта (система нуқталари) нинг мумкин бўлган кўчишини вариация - δ, ҳақиқий элементар кўчишини эса дифференциал-d белгиси орқали бир-биридан фарқ қиламиз. Агар **r** нуқтанинг радиус вектори бўлса, у ҳолда δ**r** нуқтанинг мумкин бўлган кўчиши, d**r** нуқтанинг ҳақиқий элементар кўчиши бўлади. Нуқтанинг d**r** ва δ**r** кўчишлари орасидаги асосий фарқ шундан иборатки, нуқтанинг ҳақиқий кўчиши берилган ўриндан бирор dt вақт оралиғида содир бўладиган бирдан-бир кўчиши бўлса, мумкин бўлган кўчиши берилган ўриндан dt=0 вақтда, яъни шу онда юз берувчи чексиз кўп хил кўчиши бўлади, ҳақиқатда эса, нуқта булардан бирортасини ҳам ўтмайди. Мумкин бўлган кўчиш миқдор жиҳатдан биринчи тартибли чексиз кичик қиймат деб ҳисобланади ва юқори тартибли чексиз кичик қийматлар эътиборга олинмайди. Чунончи, механик система нуқталари (ёки моддий нуқта) нинг мумкин бўлган кўчишида уларнинг эгри чизиқли чексиз кичик кўчишларини тўғри чизиқли чексиз кичик кўчишлар билан алмаштириб қаралади, ва шу боисдан, эгри чизиқли ёй координатасига векторли белги қўйилади ва эгри чизиқли чексиз кичик кўчиш δS каби белгиланади.

Мумкин бўлган кўчиш тушунчасини бирор моддий нуқтага қўйилган сиртдан иборат боғланиш мисолида яққол кўриб чиқайлик. Айтайлик, нуқта сиртдан ажралмасдан ҳаракатлансин. У ҳолда боғланиш бўшатмайдиган, голоном боғланиш бўлади. Агар у вақт ўтиши билан ўзгармайдиган бўлса (20.1) тенглама билан ифодаланади ва шу боисдан, стационар ҳам ҳисобланади. Дастлаб бўшатмайдиган, голоном, лекин ностационар боғланиш ҳолини кўрайлик. Бошқача айтганда, моддий нуқтанинг ҳаракати

$$f(x,y,z,t) = 0 \qquad (20.8)$$

боғланиш билан чекланган. Вақтнинг t га тенг пайтида нуқта $\mathbf{r}_0$ радиус вектор билан аниқланадиган M_0 (x_0, y_0, z_0) жойда турган бўлсин. Мумкин бўлган кўчишдан кейин унинг ўрни $\mathbf{r}_0 + \delta\mathbf{r}$ радиус вектор билан аниқланади. Боғланиш тенгламаси қуйидаги кўринишни олади:

$$f(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, z_0 + \delta z, t) = 0.$$

Охирги функцияни $\delta x, \delta y, \delta z$ ларнинг даражалари бўйича қаторга ёйиб

$$f(x_0, y_0, z_0, t) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \delta z + \ldots = 0$$

тенгламага келамиз. Бу ерда, M_0 даги нуқтанинг координаталари x_0, y_0, z_0 катталиклар боғланиш тенгламасини қаноатлантиришлиги туфайли биринчи ҳад нолга тенг. Демак, биринчи тартибли кичик ҳадларгача аниқлик билан қуйидаги

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \delta z = 0 \qquad (20.9)$$

ҳосил бўлади. Бу ерда $\delta\mathbf{r} = \delta x\mathbf{i} + \delta y\mathbf{j} + \delta z\mathbf{k}$ ва

$$(\mathrm{grad}\, f)_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \mathbf{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \mathbf{k}$$

га тенглигини эътиборга олсак, юқоридаги (20.9) тенглама $\delta\mathbf{r}$ ва $(\mathrm{grad}\, f)_0$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси эканлигини кўрамиз, яъни

$$(\mathrm{grad}\, f)_0 \cdot \delta\mathbf{r} = 0. \qquad (20.10)$$

Шундай қилиб, мумкин бўлган кўчишлар (20.9) ёки (20.10) муносабатларни қанатлантиради. (20.10) тенгламадан мумкин бўлган $\delta\mathbf{r}$ кўчишнинг геометрик маъносини осон аниқлаш мумкин. Вақтнинг ўзгармас t қиймати учун (20.8) тенглама фазода бирор сиртни ифодалайди. (20.8) функциянинг градиенти эса шу функция ифодалаган сиртга айни M_0 нуқтада ўтказилган нормал вектордан иборат бўлади.

(20.10) дан $\delta\mathbf{r}$ векторни градиентга, яъни нормаль векторга перпендикуляр эканлиги келиб чиқади. Демак, ўзгармас t вақтда (20.8) боғланиш қўйилган нуқтанинг мумкин бўлган кўчиши айни шу (20.8) сиртга M_0 нуқтаси орқали ўтказилган уринма текисликда ётади. (20.8) бўшатмайдиган боғланиш бўлганлиги сабабли моддий нуқтанинг ҳақиқий кўчиши $d\mathbf{r}$ ҳам (20.8) сиртга уринма текисликда бўлади, чунки, $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$. ҳақиқий кўчиш қўйилган кучлар таъсирида dt вақт оралиғида юз беради ва ҳаракат дифференциал тенгламасини қаноатлантиради. Мумкин бўлган кўчиш эса фақат боғланиш тенгламасини қаноатлантиради.

Боғланиш стационар бўлса, у (20.8) билан эмас (20.1) билан ифодаланади. (20.1) дан тўла дифференциал олсак:

$$df(x,y,z)_{M_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) dz = (\text{grad } f)_{M_0} \cdot d\mathbf{r} \quad = 0$$

Бу ерда $dx = \delta x$, $dy = \delta y$, $dz = \delta z$ деб ҳисобласак охирги тенглама (20.9) ёки (20.10) билан бир хил кўринишга келади. Демак, стационар боғланишларда ҳақиқий $d\mathbf{r}$ кўчиш мумкин бўлган кўчишларнинг бири $\delta\mathbf{r}$ билан (мос) бир хил бўлади.

Ностационар боғланиш (20.8) ҳолида тўла дифференциал

$$df(x,y,z,t)_{M_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 dz + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0 dt =$$

$$(\text{grad})_0 \cdot d\mathbf{r} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0 dt = 0$$

га келади. $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0 \neq 0$. Энди, $dx = \delta x$, $dy = \delta y$, $dz = \delta z$ бўлганда ҳам охирги тенглама (20.9) шарт билан мос келмайди. Демак, ностационар боғланишларда нуқта (система) нинг ҳақиқий кўчиши унинг мумкин бўлган кўчишларидан бирортаси билан ҳам мос тушмайди.

Умумий ҳолда механик система (моддий нуқта) қўйилган боғланишларга зид келмайдиган чексиз кўп мумкин бўлган кўчишларга имкони бор бўлади. Аммо, ҳар қандай механик система (нуқта) учун унинг исталган мумкин бўлган кўчишини бирдан-бир муносабатда ифодаловчи ўзаро боғлиқ бўлмаган (эркин) бир нечагина элементар кўчишлар орқали топиш мумкин. Масалан, юқорида биз кўрган мисолда t вақтнинг ўзгармас қийматида $f(x,y,z)=0$ *сиртнинг* M_0 (x_0,y_0,z_0) нуқтасида жойлашган боғланишли моддий нуқта айни шу M_0 (x_0, y_0, z_0) дан ўтказилган уринма текислик бўйлаб чексиз кўп кўчиши мумкин. Лекин, шу текислик бўйлаб ҳар қандай исталган кўчиши шу текисликда ўзаро перпендикуляр иккита dr_1 ва dr_2 ўзаро эркин кўчишлар орқали $\alpha \cdot dr_1 + \beta \cdot dr_2$ (α, β - ихтиёрий қийматлар) каби муносабатда ифодаланади.

Механик системанинг ўзаро боғлиқмас кўчишлари сони ушбу системанинг эркинлик даражаси сони дейлади.

Демак, сиртдан иборат боғланишдаги нуқтанинг эркинлик даражаси иккига тенг. Бинобарин, xOy текисликда жойлашган нуқтанинг ҳар қандай ўрни ўзаро мустақил иккита (масалан, x ва y) координаталар билан аниқланиши мумкин. Маълумки, эркин нуқта (демак, y фазода) учта эркинлик даражасига эга, булар ўзаро перпендикуляр (мустақил) учта йўналиш бўйича фазодаги кўчишлардир. Моддий нуқтанинг фазодаги ҳар қандай ўрни учта ўзаро мустақил масалан, x,y,z координаталар билан аниқланади. Демак, эркинлик даражаси (мустақил кўчишлар) сони ва фазодаги ёки текисликдаги ўрнини аниқловчи ўзаро мустақил координаталар сони бир-бирига тенг.

Голоном, стационар, бўшатмайдиган боғланишлар қўйилган ҳар қандай механик система учун бу натижа тўғри бўлади. Шундай қилиб, бўшатмайдиган геометрик боғланиш қўйилган механик системанинг ўрнини аниқловчи мустақил координаталар сони унинг эркинлик даражаси сонига тенг. Шунинг учун, бундай системанинг эркинлик даражасини ўзаро мустақил мумкин бўлган кўчишлар сони ёки ўзаро мустақил координаталар сони бўйича аниқлаш мумкин.

Ҳар қандай механик системанинг исталган пайтдаги ўрни унинг ҳар бир нуқтасининг координаталари билан аниқланади. Агар у n та нуқтадан ташкил топган бўлса унинг ўрни, яъни ҳамма n та нуқталарининг ўрни 3n та Декарт координаталар билан аниқланади. Бордию механик системага h та бўшатмайдиган геометрик боғланишлар қўйилган бўлса, 3n та координаталар h та боғланиш тенгламаларини қаноатлантиради ва энди улар ўзаро боғланган. Шубҳасиз, системанинг ўрнини аниқловчи ўзаро мустақил координаталар сони энди

$$s = 3n - h$$

га тенг.Бинобарин, механик системанинг ўрнини аниқлаш учун мустақил координаталар сифатида 3n та Декарт координаталардан s-тасини танлаш мумкин. Бунда, қолган координаталар h та боғланиш тенгламалари орқали аниқланади. Аммо, мустақил координаталарни бундай танлаш кўпинча мураккаб ифодаларга олиб келадиган қийинчиликлар туғдиради. Шунинг учун, механик системанинг ҳар қандай ўрнини бир қийматли аниқловчи мустақил катталиклардан иборат бўлган умумлашган координаталар билан иш кўриш қулай бўлади.

Биз юқорида баъзи масалаларни ўрганишда, ҳали таъриф бермасдан, умумлашган координаталардан фойдаландик. Жумладан, математик тебрангич (маятник) вазиятини унинг вертикалдан оғиш бурчаги φ , бир нуқтаси қўзғалмас қаттиқ жисмнинг сферик ҳаракатини Эйлернинги 3 та бурчак (ψ, θ, φ)лари, текис параллел ҳаракатланаётган қаттиқ жисмнинг ҳолатини эса, унинг қутбининг иккита координаталари (x_C , y_C) ва шу қутб атрофида жисмнинг айланма ҳаракати бурчак координатаси φ орқали аниқланар эди. Шундай қилиб, механик системанинг ўрнини бир қийматли равишда аниқловчи ва сони системанинг эркинлик даражаси сонига тенг бўлган ўзаро мустақил, баъзан одатдагидан ўзгача ўлчамли катталикларга *умумлашган координаталар дейилади.*

Умумлашаган координаталарни q ҳарфи орқали белгилаш қабул қилинган. Бинобарин, эркинлик даражаси s га тенг механик система ҳолатини q_1, q_2, ... , q_S та умумлашган координаталар бир қийматли аниқлайди. Механик системанинг ҳар бир нуқтаси ўзининг радиус вектори (ёки Декарт координаталари) билан аниқланади, демак бу катталиклар ҳам умумлашган координаталарнинг бир қийматли функцияси бўлади:

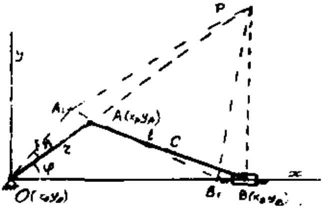
$$\begin{aligned} x_k &= x_k(q_1, q_2, \ldots, q_s, t), \\ y_k &= y_k(q_1, q_2, \ldots, q_s, t), \qquad (k = \overline{1, n}). \qquad (20.11) \\ z_k &= z_k(q_1, q_2, \ldots, q_s, t), \end{aligned}$$

Агар, боғланишлар стационар бўлса умумлашган координаталарни тегишлича танлаш йўли билан (20.11) даги вақтнинг ошкор қатнашишидан халос бўлиш мумкин, яъни стационар боғланишлар ҳолида Декарт координаталар фақат умумлашган координаталарнинг бир қийматли функцияси кўринишида ифодаланади. Механиканинг масалаларини ўрганишда умумлашган координаталардан фойдаланиш боғланиш тенгламаларини ҳисобга олишдан халос қилади. Умумлашан координаталарда боғланиш тенгламалари айниятга айланади.

Ниҳоят шуни такидлаймизки, голономли системанинг ҳолати s-та умумлашган координаталар орқали аниқланса, системанинг ўзаро боғлиқмас (мустақил) мумкин бўлган кўчишларининг сони худди шу координаталарнинг мустақил вариациялари сони, яъни s- тага тенг бўлади ($\delta q_1, \delta q_2, ..., \delta q_s$).

Умумий ҳолда, умумлашган координаталарнинг геометрик ва механик маънолари турлича бўлиши мумкин. Жумладан, умумлашган координаталар узунлик, бурчак ўлчови бирликлари билан аниқланиши, баъзан эса юза, ҳажм ўлчови ёки бошқа физикавий характеристикаларни ифодаловчи параметрлар ҳам бўлиши мумкин.

Ушбу параграфни якунлар эканмиз кривошип-шатун механизмини мисол тариқасида яна бир бор оламиз ва юқоридаги мулоҳазаларни шу мисолда таҳлил қилиб чиқамиз. Механизмнинг мумкин бўлган кўчиши кривошипни О марказ атрофида кичик $\delta\varphi$ бурчакка бурилишидан иборатдир. Боғланишлар стационар, голоном, бўшатмайдиган боғланишлар эди. Юқорида биз (20.3) тенгламалар орқали буларнинг ифодасини келтирган эдик. Бу мисолда мумкин бўлган кўчиш ҳақиқий элементар кўчиш билан мос тушиши мумкин. А нуқтанинг мумкин бўлган кўчиши радиуси r га тенг айлананинг AA_1 ёйи бўлиб, мумкин бўлган кўчиш таърифига кўра уни AA_1 чизиқ билан алмаштириб қарашимиз мумкин. Ушбу мисолда механизмнинг ҳар қандай нуқтасининг Декарт координатасини φ бурчак орқали аниқлашимиз мумкин. φ - умумлашган координата. У ҳолда (188-расм),



188-расм.

$$x_A = r\cos\varphi, \quad y_A = r\sin\varphi, \quad x_B = r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi} \quad (20.12)$$

Механизм нуқталарининг мумкин бўлган кўчишини умумлашган координата вариацияси $\delta\varphi$ орқали ифодаланишини кўрайлик:

$$AA_1 = \delta S_A = OA\delta\varphi = r\delta\varphi,$$

$$BB_1 = \delta S_B = BP\cdot\delta\varphi_p = BP\frac{AA_1}{AP} = BP\frac{r\delta\varphi}{x_B/\cos\varphi - r} = BP\frac{r\cos\varphi\delta\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}} =$$

$$= x_B\frac{r\sin\varphi\cdot\delta\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}$$

Шатун маркази - С нуқтанинг мумкин бўлган кўчиши

$$CC_1 = \delta S_C = CP\cdot\delta\varphi_p = \sqrt{2 + 2\frac{x_B^2\sin^2\varphi}{l^2 - r^2\sin^2\varphi} - \frac{l^2\cos^2\varphi}{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}\frac{r\delta\varphi}{2}$$

га тенг.

Шундай қилиб, мумкин бўлган кўчишлар механик системага таъсир қилувчи кучларга боғлиқ бўлмасдан, системага қўйилган боғланишларнинг характерига боғлиқдир. Мумкин бўлган кўчишлар чексиз кичик бўлади, акс ҳолда, яъни чекли кўчишларда механик система шундай бошқа ҳолатга ўтиши мумкинки, бу ҳолатда унинг мувозанат шартлари бошқача бўлиши мумкин. Мумкин бўлган кўчишлар боғланишларни бузмайдиган ва айни шу боғланишлар йўл қўйган элементар кўчишлардир, акс ҳолда системанинг ҳолати бузилиши мумкин.

Механик системанинг чексиз кичик кўчишларига боғланишларнинг қўйган чеклари (тенгламалари) қанча кўп бўлса системанинг мумкин бўлган кўчишлари учун шунча кам эркинлик мавжуд бўлади. Кривошип-шатун механизми мисолида текисликда унинг нуқталари ҳолатига тааллуқли 5 та (20.3) шартни кўрдик. Агар механизм хОу текислигида эркин бўлганида унинг эркинлик даражаси ва демак ўзаро боғлиқ бўлмаган (эркин) кўчишлар сони 6 тага тенг бўлар эди. 188-расм. xOy текислигида кривошип-шатун механизмининг ҳолати олтита координаталар билан аниқланади. Булар O, A, B нуқталарнинг x ва y координаталаридир. Эркин механизмнинг бу олтита координаталарига мос олтита вариациялар (ўзаро боғлиқмас элементар кўчишлар) мавжуд. Текисликдаги бу механизмга (20.3) тенгламалар ифодаловчи боғланишлар қўйилганлиги натижасида мавжуд олтита вариациялардан битта вариация (координата-эркинлик даража) қолади. Зеро, x_0 ,y_0 ,y_B координаталарнинг вариацияси нолга айланади, x_A ,y_A ,x_B координаталарнинг вариациялари бурчак вариацияси $\delta\varphi$ орқали ифодаланади. Мустақил битта вариация $\delta\varphi$ қолади. Шу сабабли бу механизм битта эркинлик даражасига эга ва битта умумлашган координата орқали аниқланади.

96-§. Идеал боғланишлар.

Боғланишларнинг яна бир муҳим класси (таснифи) билан танишамиз. Аввалом бор, аналитик механиканинг муҳим тушунчаси бўлган кучнинг мумкин бўлган кўчишдаги иши тушунчаси устида тўхталамиз, чунки бундан буён у ҳақида тез-тез сўз юритилади. Механик системанинг муайян нуқтаси (ёки бирор моддий нуқта) га **F** куч қўйилган бўлсин. Бу нуқтанинг мумкин бўлган $\delta\mathbf{r}$ кўчишида унга қўйилган **F** кучнинг элементар иши:

$$\delta A = \mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{r} = F\cdot\delta r\cdot\cos(\mathbf{F}\,\hat{,}\,\delta\mathbf{r}) \qquad (20.13)$$

га тенг ва у шу кучнинг мумкин бўлган кўчишдаги иши дейилади. Агар механик системага битта эмас бир неча: $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2,...,\mathbf{F}_n$ -кучлар қўйилган бўлса, у ҳолда унинг мумкин бўлган кўчишида унга қўйилган ушбу кучларнинг элементар ишларининг йиғиндиси

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = \sum_{k=1}^{n} F_k \delta r_k \cos(\mathbf{F}_k \hat{,} \delta \mathbf{r}_k) \qquad (20.14)$$

га тенг бўлади. Бу ерда $\delta \mathbf{r}_к$- механик системанинг куч қўйилган к- нчи нуқтасининг мумкин бўлган кўчиш радиус вектори. Мумкин бўлган кўчишдаги (элементар) иш (20.13) ёки (20.14) да куч ёки кучлар системаси ўзгармайди деб ҳисобланади.

Боғланишли механик система ҳолида реакция кучларининг мумкин бўлган кўчишдаги ишини ҳам аниқлашга тўғри келади. Айтайлик, эркинмас механик система n- та нуқтадан иборат бўлсин. Боғланиш реакция кучларининг система нуқталарига қўйилган тенг таъсир этувчиларини $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$,...,$\mathbf{N}_n$, система нуқталарининг мумкин бўлган кўчишларини эса $\delta \mathbf{r}_1$, $\delta \mathbf{r}_2$,..., $\delta \mathbf{r}_n$ орқали белгилайлик. Механик системанинг бирор ихтиёрий мумкин бўлган кўчишида $\mathbf{N}_к$ реакция кучининг элементар иши

$$\delta A_k^N = \mathbf{N}_k \delta \mathbf{r}_k = N_k \delta r_k \cos(\mathbf{N}_k, \delta \mathbf{r}) \quad (k = \overline{1, n})$$

га тенг бўлади. Механик система нуқталарининг ҳар қандай мумкин бўлган кўчишида барча реакция кучларининг иши эса қуйидагича аниқланади:

$$\delta A^N = \sum_{k=1}^{n} N_k \delta r_k \cos(\mathbf{N}_k \hat{,} \delta \mathbf{r})$$

Баъзи боғланишлар учун ушбу элементар иш нолга тенг бўлади, яъни

$$\sum_{k=}^{n} N_k \delta r_k \cos(\mathbf{N}_k \hat{,} \delta \mathbf{r}) = 0 \qquad (20.15)$$

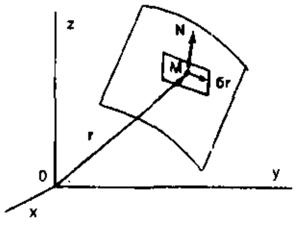
Боғланишдаги механик системанинг ҳар қандай мумкин бўлган кўчишида унинг нуқталарига қўйилган боғланиш реакция кучларининг элементар ишлари йиғиндиси нолга тенг бўлса, яъни (20.15) бажарилса бундай боғланишга *идеал боғланиш дейилади.*

Идеал боғланишнинг маъносини чуқурроқ тушуниш мақсадида техникада кўп учрайдиган боғланишларнинг баъзиларини мисол тариқасида қуйида қараб чиқамиз.

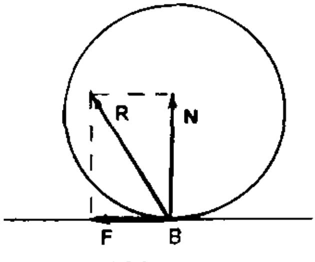
1. *Силлиқ сирт.* Бирор М моддий нуқта силлиқ сирт устида ажралмасдан ҳаракатланганида боғланиш реакцияси сиртга ана шу М нуқтада ўтказилган нормаль бўйича йўналган битта **N** кучдан иборат бўлишини юқорида кўрган эдик. М нуқтанинг мумкин бўлган кўчиши $\delta\mathbf{r}$ эса ҳар доим шу М нуқтада сиртга ўтказилган уринма текисликда ётар эди. Шу боисдан силлиқ сиртнинг реакция кучи ҳар қандай мумкин бўлган кўчишга перпендикуляр равишда йўналган бўлади (189-расм). Демак, силлиқ сирт реакциясининг ҳар қандай мумкин бўлган кўчишдаги иши нолга тенг бўлади:

$$\delta A^N = \mathbf{N} \cdot \delta \mathbf{r} = 0,$$

чунки, юқорида айтганимиздек, $\mathbf{N} \perp \delta\mathbf{r}$. Шундай қилиб, агар сирт бўйлаб М нуқта ҳаракатланганида (мумкин бўлган кўчишида) ишқаланиш нолга тенг,



189-расм.



190-расм.

яъни сирт силлиқ бўлса бу сирт идеал боғланиш ҳисобланар экан. Агар сирт силлиқ бўлмаса, яъни ишқаланиш нолга тенг бўлмаса, ишқаланиш реакция кучи мумкин бўлган кўчиш радиус вектори билан бир чизиқда қарама- қарши йўналган бўлади ва ушбу кўчишдаги унинг иши нолдан фарқли бўлади. Энди боғланишни яна идеал боғланишга келтириш учун ишқаланиш реакция кучини боғланиш реакция кучлари системасидан чиқариб берилган кучлар системасига қўшиб қараш кифоя. Бунда боғланишнинг реакция кучи яна нормаль **N** реакция кучдангина иборат бўлади, боғланиш (ушбу шарт билан) идеал боғланишга айланади.

2. *Сирпанмасдан думалашдаги боғланиш.* Бир абсолют қаттиқ жисм иккинчи абсолют қаттиқ жисм сирти (боғланиш) *бўйлаб сирпанмасдан* думалашда бўлсин. Жисмлар силлиқ бўлмасада ва демак, ишқаланиш кучи нолдан фарқли бўлсада жисмнинг ҳар қандай мумкин бўлган кўчишида (думалашида) реакция кучларининг иши нолга тенг, яъни боғланиш идеал боғланиш бўлади. Чунки думалаётган жисмнинг боғланиш сирти билан тегишган B нуқтаси ҳаракатсиз қолади, яъни $\delta\mathbf{r}_B = 0$, шу билан бирга боғланиш сиртининг мазкур жисмга реакция кучи **R** *ҳам худди шу* тегишган B нуқтага қўйилган ва у ишқаланиш кучи ҳамда нормаль реакция каби ташкил этувчилардангина *иборат бўлади* (190-расм). Бундан, реакция кучи **R** нинг ҳар қандай мумкин бўлган кўчиш (думалаш) даги иши нолга тенглиги келиб чиқади:

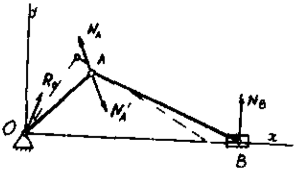
$$\delta A^R = \mathbf{R}\cdot\delta\mathbf{r}_B = (\mathbf{N} + \mathbf{F}_{\text{иш}})\cdot\delta\mathbf{r}_B = 0.$$

Демак, абсолют қаттиқ жисмнинг бошқа абсолют қаттиқ жисм сирти бўйлаб сирпанмасдан думалашида бу сирт идеал боғланиш бўлади.

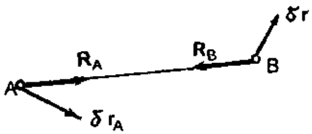
3. *Кривошип- шатунли механизм.* О қўзғалмас, А қўзғалувчан цилиндрсимон шарнир ўқларидаги ҳамда B ползун йўналтирувчиларидаги ишқаланишларни эътиборга олмасак, *кривошип-шатунли* механизмга қўйилган боғланишларни идеал боғланишлар деб ҳисоблаш мумкин.

Ҳақиқатан ҳам, *ушбу механизмнинг* ҳар қандай мумкин бўлган кўчишида О нуқта қўзғалмас бўлгани сабабли $\delta\mathbf{r}_0 = 0$ га тенг ва нуқтадаги боғланиш реакцияси $\mathbf{N}_0$ нинг иши нолга тенг. В ползунни йўналтирувчи сирт (боғланиш) нинг таъсири - $\mathbf{N}_B$ реакция кучи ползуннинг мумкин бўлган кўчиш радиус вектори $\delta\mathbf{r}_B$ га перпендикуляр. Шу туфайли, $\mathbf{N}_B$ реакция кучининг мумкин бўлган кўчишдаги иши ҳам нолга тенг (191-расм).

А нуқтадаги қўзғалувчан цилиндрсиман шарнир ички боғланиш бўлиб унинг реакцияси ОА кривошипнинг АВ шатунга таъсир кучи $\mathbf{N}_A$ ва аксинча шатунни кривошипга акс таъсир кучи $\mathbf{N}'_A$ дан иборат бўлиб, таъсир-акс таъсирларнинг ўзаро тенглигига биноан $\mathbf{N}'_A = -\mathbf{N}_A$ Шунинг учун, А нуқтанинг мумкин бўлган кўчишида реакциянинг иши нолга тенг бўлади:



191-расм.



192-расм.

$$\mathbf{N}_A\delta\mathbf{r}_A + \mathbf{N}'_A\delta\mathbf{r}_A = (\mathbf{N}_A - \mathbf{N}_A)\delta\mathbf{r}_A = 0$$

Бу ерда $\delta\mathbf{r}_A$ - А нуқтанинг мумкин бўлган кўчиш вектори.

Худди шундай, В нуқтада ползунни шатун билан боғловчи цилиндрли шарнир реакция кучи таъсир-акс таъсирдан иборат бўлиб, унинг В шарнирни мумкин бўлган кўчишидаги иши ҳам, А шарнир каби нолга тенг.

4. *Қаттиқ ўзгармас система.* Бунда боғланиш абсолют қаттиқ жисм, деформацияланмайдиган бикир стерженлар орқали амалга оширилади. Бинобарин, абсолют қаттиқ жисм нуқталари ўзаро бир бирлари билан деформацияланмайдиган стерженлар ёрдамида боғланган ва уни шу

сабабдан ўзгармас система деб ҳисоблаш мумкин. Мисол учун ўзаро *бир-бирлари билан* вазнсиз ва деформацияланмайдиган стержень орқали боғланган иккита моддий нуқтани олайлик. Нуқталарнинг бундай *боғланиши* идеал *боғланиш* бўлади (192-расм).

Стерженнинг нуқталарга таъсири - реакцияси стержень бўйлаб йўналган ва тегишли равишда $\mathbf{R}_A$, $\mathbf{R}_B$ га тенг бўлсин. Бунда, таъсир-акс таъсир аксиомасига кўра $\mathbf{R}_B = -\mathbf{R}_A$. Нуқталарнинг мумкин бўлган кўчишлари $\delta \mathbf{r}_A$, $\delta \mathbf{r}_B$ га тенг бўлсин. Серженнинг деформацияланмаслиги шарти

$$(r_A - r_B)^2 = (AB)^2 = \text{const}$$

ни вариациялаб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$(r_A - r_B)\cdot(\delta r_A - \delta r_B) = 0,$$

яъни $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$ вектор билан *унинг вариацияси* ўзаро перпендикуляр йўналган. Умумий ҳолда, $\mathbf{R}_A$, $\mathbf{R}_B$ реакциялар қўйилган А ва В нуқталарнинг мумкин бўлган кўчишлари $\delta \mathbf{r}_A$, $\delta \mathbf{r}_B$ нолга тенг эмас ва реакциялар йўналишига перпендикуляр эмас. Шунинг учун, $\mathbf{R}_A$, $\mathbf{R}_B$ реакцияларнинг мумкин бўлган кўчишдаги ишлари алоҳида-алоҳида нолга тенг эмас. Шундай бўлишига қарамасдан реакция *ишларининг йиғиндиси* ҳар қандай мумкин бўлган кўчишда нолга тенг. $\mathbf{R}_A$ ва $\mathbf{R}_B$ реакцияларнинг $\delta \mathbf{r}_A$, $\delta \mathbf{r}_B$ мумкин бўлган кўчишдаги ишларининг йиғиндисини ҳисоблаймиз:

$$\mathbf{R}_A\cdot\delta \mathbf{r}_A + \mathbf{R}_B\cdot\delta\, \mathbf{r}_B = \mathbf{R}_A\cdot\delta \mathbf{r}_A - \mathbf{R}_A\delta \mathbf{r}_B = \mathbf{R}_A(\delta \mathbf{r}_A - \delta \mathbf{r}_B) = 0,$$

чунки, $\mathbf{R}_A$ вектор йўналиши бўйича $(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B)$ билан бир чизиқда ётади ва шунинг учун $\delta \mathbf{r}_A - \delta \mathbf{r}_B$ векторга перпендикуляр йўналган.

Шундай қилиб, стержень ва демак абсолют *қаттиқ жисм* (ёки механик система) ички боғланишлари идеал боғланишни ташкил қилар экан.

Боғланиш реакция кучларининг мумкин бўлган кўчишдаги ишларининг йиғиндиси фақат юқорида айтиб ўтилган ҳоллардагина нолга тенг бўлиб қолмасдан кўпгина машина, механизм ва конструкцияларда қўлланилган боғланишларда ҳам бажарилади. Чунки, машина, механизм, конструкцияларнинг мукаммаллик даражаси зарарли қаршиликлар (машина қисмларининг ўзаро ишқаланиш кучлари) ни енгиш учун сарфланадиган исроф қувватнинг (ишнинг) кичик бўлиши билан баҳоланади. Ушбу исроф қувватнинг машинани ҳаракатга келтирувчи мотор қувватидан ниҳоят кичик бўлиш шарти машина, механизм, конструкцияларни лойиҳалашдаги асосий талаб ҳисобланади.

Машина, механизм ва конструкцияларнинг такомиллигини баҳоловчи исроф қувват боғланишлар реакция кучлари иши туфайли мавжуддир. Шунинг учун машина, механизм ва конструкция қисмларини бир-бири билан идеал боғланишлар ёрдамида бириктириш талабга мувофиқ бўлади.

97-§ . Мумкин бўлган кўчиш принципи.

Мумкин бўлган кўчиш принципи берилган кучлар таъсиридаги боғланишли механик системанинг мувозанатда бўлишининг энг умумий шартларини ифодалайди. Механик системанинг мувозанат ҳолати деганда, умумий ҳолда, унинг тўғри чизиқли текис ҳаракат ҳолати ҳам тушунилади. Динамикада система мувозанат тинч ҳолатда бўлиши учун қўйилган кучларнинг геометрик йиғиндисини нолга тенглиги шартига система нуқталарининг бошланғич тезликларини нолга тенглигидан иборат талабни ҳам қўшиб қараш зарур. Яъни моддий нуқталарнинг мувозанати учун системанинг ҳар бир нуқтасига таъсир этаётган кучларнинг геометрик йиғиндиси ва ҳамма нуқталарнинг бошланғич пайтдаги тезликлари нолга тенг бўлиши зарур ва етарли.

Статикада қаттиқ жисмнинг мувозанатда бўлиш шарти жисмга қўйилган кучларнинг координата ўқларига проекциялари йиғиндисини ва бу кучларнинг шу координата ўқларига нисбатан моментлари йиғиндисини нолга тенг бўлишидан иборат эди. Бунда, боғланишдан бўшатиш принципига биноан жисм эркин деб қараларди ва қўйилган кучлар қаторига номаълум реакция кучлари ҳам киритилар эди. Лекин, бир неча жисмлардан ташкил топган боғланишли мураккаб системанинг мувозанатини ўрганиш учун статиканинг юқорида қайд қилинган методи деярли яроқсизга айланади. Шу боисдан, эркинмас мураккаб системанинг мувозанатини ўрганиш системанинг мумкин бўлган кўчиши ҳақидаги тушунчадан фойдаланиш билан боғлиқ принципга асосланган. Мумкин бўлган кўчиш принципи қуйидагича таърифланади: *идеал, бўшатмайдиган, стационар боғланишлар қўйилган механик система берилган актив кучлар таъсирида мувозанатда бўлиши учун барча актив кучларнинг система нуқталарининг ҳар қандай мумкин бўлган кўчишидаги элементлар ишлари йиғиндиси ҳамда система барча нуқталарининг бошланғич тезликлари нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.*

Системанинг бирор $M_к$ нуқтасига қўйилган актив кучларнинг тенг таъсир этувчиси $\mathbf{F}_к$, шу нуқтанинг мумкин бўлган кўчиш вектори $\delta\mathbf{r}_к$ бўлсин. У ҳолда, мумкин бўлган кўчиш принципи ушбу векторларнинг скаляр кўпайтмалари йиғиндиси каби қуйидагича математик ифодаланади:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \cdot \delta\mathbf{r}_k = 0 \qquad (20.16)$$

Зарурлиги. Моддий нуқталар системасининг мувозанати учун (20.16) шартнинг зарурлигини исботлаймиз. Идеал, бўшатмайдиган, стационар боғланишлар қўйилган n та моддий нуқталар системаси мувозанат ҳолатда тинч турган бўлсин. У ҳолда, унинг ҳар бир нуқтаси мувозанат ҳолатда тинч туради. Жумладан, $M_к$ нуқтага актив кучларнинг тенг таъсир этувчиси $\mathbf{F}_к$ ва боғланишдан бўшатиш принципига асосан унга қўйилган реакция кучларининг тенг таъсир этувчиси $\mathbf{N}_к$ таъсир этади. Мувозанатлик талабга кўра ҳар бир нуқта учун қуйидаги шарт бажарилиши керак:

$$\mathbf{F}_k + \mathbf{N}_k = 0, \quad \mathbf{v}_k(0) = 0, \quad (к = 1, n).$$

Системанинг ушбу мувозанатдаги тинч ҳолатдан бирор мумкин бўлган кўчишида унинг нуқталари $\delta\mathbf{r}_1$, $\delta\mathbf{r}_2$,..., $\delta\mathbf{r}_n$ мумкин бўлган кўчишлар олсин. Юқоридаги мувозанат тенгламаларнинг ҳар бирини $\delta\mathbf{r}_к$ га скаляр кўпайтириб,

$$(\mathbf{F}_k + \mathbf{N}_k)\cdot\delta\mathbf{r} = 0, \quad (k = \overline{1, n}),$$

ушбу ҳосил бўлган n та тенгламани ҳадма-ҳад қўшамиз. У ҳолда қуйидаги ифодани оламиз:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \cdot \delta\mathbf{r}_k + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{N}_k \cdot \delta\mathbf{r}_k = 0$$

Механик системага қўйилган боғланишлар идеал боғланишлар бўлгани учун

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{N}_k \cdot \delta\mathbf{r}_k = 0$$

Демак,система мувозанатда бўлиши учун (20.16) шарт бажарилишининг зарурлиги келиб чиқади.

Етарлилиги. Механик системанинг мувозанати учун (20.16) шарт етарли эканлигини исботлаймиз. Бунинг учун (20.16) шарт бажарилганда система мувозанатда бўлишини кўрсатиш кифоя. Фараз қилайлик, (20.16) шарт бажарилган, лекин бунга қарамасдан, система мувозанатда бўлмасин. Бошқача айтганда, (20.16) шартнинг бажарилишига қарамасдан система қўйилган кучлар таъсирида ўзининг бошланғич тинч ҳолатидан ҳаракатта келсин. Таърифга кўра, *системага* қўйилган боғланишлар стационар ва шунинг учун системанинг ҳақиқий кўчиши унинг бирор мумкин бўлган кўчиши билан мос келади. Механик система нуқталарининг тинч ҳолатдан кўчиши $\mathbf{F}_к$ ва $\mathbf{N}_к$ кучларнинг тенг таъсир этувчиси бўйлаб юз беради ва шу сабабдан мусбат иш бажарилади:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\mathbf{F}_k+\mathbf{N}_k\right)\cdot\delta\mathbf{r}_k>0$$

ёки

$$\sum_{k=1}^{n}\mathbf{F}_k\cdot\delta\mathbf{r}_k+\sum_{k=1}^{n}\mathbf{N}_k\cdot\delta\mathbf{r}_k>0$$

Таърифга кўра системага идеал боғланишлар қўйилганлиги сабабли

$$\sum_{k=1}^{n}\mathbf{N}_k\cdot\delta\mathbf{r}_k=0$$

Демак, система мувозанатда бўлмаса

$$\sum_{k=1}^{n}\mathbf{F}_k\cdot\delta\mathbf{r}_k>0$$

келиб чиқади. Бу натижа эса, юқорида қабул қилинган (20.16) шартга зиддир. Механик системанинг мувозанатда бўлиши учун (20.16) нинг бажарилиши етарли. Шундай қилиб, мумкин бўлган кўчиш принципининг (20.16) ифодаси ҳақиқатан ҳам механик система мувозанатининг зарур ва етарли шартини ифодалар экан.

Мумкин бўлган кўчиш принципининг (20.16) ифодасини баъзан *Лагранжнинг мумкин бўлган кўчиш принципи*, баъзан *мумкин бўлган ишлар тенгламаси* ҳам дейилади. (20.16) шартни қуйидаги ифодалар кўринишида ёзиш мумкин:

$$\sum_{k=1}^{n}(F_{kx}\delta x_k+F_{ky}\delta y+F_{kz}\delta z)=0$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_k \delta r_k \cos(\mathbf{F}_k \,\hat{,}\, \delta \mathbf{r}_k) = 0$$

Мумкин бўлган кўчиш принципи механик системанинг айрим қисмлари мувозанатини аниқламасдан туриб унинг мувозанатининг умумий шартларини ифодалайди. Бу принципнинг афзаллиги ҳам шундан иборатки, унинг ифодасида, олдиндан номаълум бўлувчи реакциялар қатнашмайди. Унинг ёрдами билан текис кучлар ёки фазовий кучлар системасининг таъсиридаги жисмнинг ёки механик системанинг мувозанати масалалари осон ечилади.

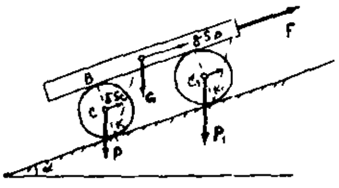
Агар системага қўйилган боғланишларнинг ҳаммаси ҳам идеал бўлмаса, масалан, силлиқ бўлмаган текислик ёки сиртлар ҳолида, актив кучлар қаторига ушбу идеалмас боғланиш реакциялари қўшилади ва қўйилган актив кучлар ва идеалмас боғланиш реакция кучларининг мумкин бўлган кўчишдаги ишларининг йиғиндиси нолга тенглаштирилиб қаралади. Шу йўл билан тузиган тенгламалардан берилган актив кучлар билан идеалмас боғланиш реакция кучлари орасидаги муносабат аниқланади.

Худди шу йўсинда, идеал боғланиш реакция кучларини ҳам аниқлаш мумкин, агар у масаланинг шартига кўра талаб қилинган бўлса. Идеал боғланишнинг шу талаб қилинган реакциясини аниқлаш учун механик системани ушбу идеал боғланишдан бўшатиб, унинг системага таъсирини шу реакция билан алмаштирилади ва бу реакция кучини актив кучлар қаторига қўшиб, ҳосил бўлган кучларнинг ҳаммасига мумкин бўлган кўчиш принципи қўлланилади. Мувозанат шартининг шу йўл билан ҳосил бўлган тенгламасидан бу реакция кучи аниқланади.

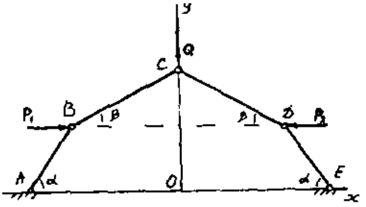
Энди мумкин бўлган кўчиш принципини механик системанинг мувозанатини текширишга қандай тадбиқ этилишини қараб чиқамиз. Масалалар ечишда қуйидаги тартибга риоя қилиш тавсия этилади.

1. Механик системани ва унга қўйилган ҳамма актив кучларни тасвирлаб олиш керак.
2. Механик системага мумкин бўлган кўчиш берамиз ва актив кучлар қўйилган нуқталарнинг мумкин бўлган кўчишларини ёки бу кучлар қўйилган жисмнинг элементар бурилиш бурчакларини расмда кўрсатамиз.
3. Актив кучларнинг ҳар қандай мумкин бўлган кўчишдаги элементар ишларини ҳисоблаймиз ва (20.16) кўринишдаги тенгламани тузамиз.
4. Механик системанинг эркинлик даражаси битта бўлса, у ҳолда системанинг бир нуқтасига кўчиш имконини бериб, қолган кучларнинг кўчишини шу нуқтанинг кўчиши орқали ифодалаймиз.
5. Тузилган мувозанат тенгламаларни ечиб, изланаётган номаълум миқдорларни ёки номаълум нисбатларни топамиз.

48-масала. Ҳар қайсисининг оғирлиги P бўлган иккита цилиндрик каток устига оғирлиги G бўлган рейка ўрнатилган. Қиялик бурчаги α бўлган текисликда катокларни мувозанатда ушлаб туриш учун рейканинг юқори учига қандай **F** куч қўйиш керак (193-расм). Катокнинг текислик ва рейка билан ишқаланиши ҳисобга олинмасин.



193-расм.



194-расм.

Ечиш. Агар думаланишдаги ишқаланиш эътиборга олинмаса, қия текислик каток учун идеал боғланиш бўлади. Ушбу механик системага мумкин бўлган кўчиш берамиз ва элементар ишларни ҳисоблаймиз, у ҳолда (20.16) шартга кўра қуйидагига эга бўламиз:

$$\delta A = F \cdot \delta S_B - G \cdot \sin\alpha \cdot \delta S_B - 2 \cdot P \cdot \sin\alpha \cdot \delta S_C = 0$$

Бу ерда δS_B - рейканинг каток билан тегишган В нуқтасининг мумкин бўлган кўчиши. К нуқта каток учун тезликларнинг оний айланиш марказидир. Демак, $\delta S_B = 2 \cdot \delta S_C$, чунки $v_B = 2v_C$ эди.

δS_B нинг бу қийматини юқоридаги тенгламага қўйиб топамиз:

$$\delta A = 2[F - (G + P) \cdot \sin\alpha] \cdot \delta S_C = 0$$

Бундан **F** кучнинг қийматини қуйидагича аниқлаймиз:

$$F = (G + P) \cdot \sin\alpha$$

Энди иш тенгламасининг аналитик кўриниши (координата усули) ни қўллашга доир масала қараймиз.

49-*масала.*Шарнирли АВСДЕ кўпбурчакнинг мувозанат ҳолатида стерженларининг қиялик бурчаклари $\alpha = 60^0$ ва $\beta = 30^0$ бўлиши учун унинг учларига қўйилган горизонтал Р ва вертикал Q кучлар орасидаги муносабат қандай шартни қаноатлантириши топилсин. Стержень оғирлиги ҳисобга олинмасин ва узунликлари АВ=ВС=СД=ДЕ=а бир хил (194-расм).

Ечиш. α ва β бурчакларни ўзгарувчи деб ҳисоблаб иш тенгламасининг координата кўринишини қўллаймиз:

$$\delta A = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0$$

яъни

$$\delta A = P_{1x}\delta x_1 + P_{2x}\delta x_2 + Q\delta y_3 = 0$$

Бунда $P_1 = P_2 = P$.

$\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3$ ларни ҳисоблаш учун кучлар қўйилган нуқта координаталарини α ва β лар орқали ифодалаймиз:

$x_1 = -a\cdot\cos\beta, x_2 = a\cdot\cos\beta, y_3 = a\cdot\sin\beta + a\cdot\sin\alpha = a(\sin\alpha + \sin\beta).$

Бу ифодаларни вариациялаймиз:

$\delta x_1 = a\cdot\sin\beta\cdot\delta\beta, \delta x_2 = -a\cdot\sin\beta\cdot\delta\beta, \delta y_3 = a(\cos\alpha\cdot\delta\alpha + \cos\beta\cdot\delta\beta).$

Ушбу аниқланганларни ишнинг юқоридаги ифодасига қўйиб

$\delta A = P\cdot a\cdot\sin\beta\cdot\delta\beta + P\cdot a\cdot\sin\beta\cdot\delta\beta - Q\cdot a(\cos\alpha\cdot\delta\alpha + \cos\beta\cdot\delta\beta) = 0$

тенгламага келамиз. Охирги тенгликни $a\delta\beta \neq 0$ га бўламиз:

$$2\cdot P\cdot\sin\beta - Q\cdot\cos\beta - Q\cdot\cos\alpha\frac{\delta\alpha}{\delta\beta} = 0$$

Номаълум $\delta\alpha/\delta\beta$ нисбатни топиш учун системанинг ҳар қандай мумкин бўлган кўчишида АВ, ВС, СД, ДЕ кесмаларнинг Ох ўққа *проекциялари ўзгармас қолиш шартига асосланиб* қўшимча тенглама тузамиз:

$$2a\cos\alpha + 2a\cos\beta = \text{const}.$$

Бундан

$$\frac{\delta\alpha}{\delta\beta} = -\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

Натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$P = \frac{Q(\mathrm{ctg}\beta - \mathrm{ctg}\alpha)}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}Q.$$

Топилган ифодадан β бурчаги α нинг қийматига яқинлашиб борган сари, босим ошиб боришини сезиш мумкин.

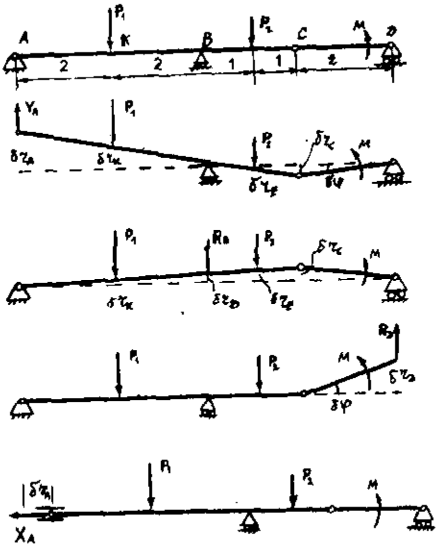
Мумкин бўлган кўчиш принципининг статика методидан афзаллиги шундаки, бунда боғланиш реакцияларини мутлоқа эътибордан ҳоли деб қараймиз. Бироқ, мумкин бўлган кўчиш принципидан фойдаланиб боғланиш реакцияларини ҳам аниқлаш мумкин, бунинг учун боғланишларни бўшатиш (озод қилиш) принципидан фойдаланилади. Бундай усулда боғланиш реакция кучларини актив кучлар қаторида қаралиб, масала одатдаги усулда ечилади. Қуйида биз мумкин бўлган кўчиш принципи асосида боғланиш реакцияларини аниқлашга доир масала кўрамиз.

50-*масала*. А, В, Д таянчларда ётган АС, CD тўсин С нуқтада шарнир билан бирлаштирилган икки қисмдан иборат. Тўсининг АС қисмига P_1 = 8000 Н, P_2 = 6000 Н·га тенг вертикал кучлар қўйилган; СД қисмига эса моменти М = 4000 Н·м га тенг ва соат милининг айланишига тескари йўналишда жуфт кучлар қўйилган. (195-расм, а). Ўлчамлар расмда кўрсатилган. А, В, Д лардаги таянч реакциялари аниқлансин (195-расм).

Ечиш. АД тўсин мувозанатдаги АС ва СД тўсинлардан иборат иккита жисмлардан ташкил топган.

Бу масалани статика усулида ечиш учун тўсиннинг АС қисмини фикран ажратиб олиб, СД қисмининг унга таъсирини куч билан алмаштириб, АС учун статиканинг мувозанат тенгламасини тузиш керак. Худди шунингдек, тўсиннинг СД қисми учун ҳам мувозанат тенгламаларни тузиб, ҳосил бўлган тенгламаларни биргаликда ечиш керак. Бу усул анча машақатли бўлиб, таянч реакцияларини фақат барча мувозанат тенгламаларини тузгандан кейин уларни биргаликда ечиш билан аниқлаш мумкин. Мумкин бўлган кўчиш принципини қўллаш натижасида эса мувозанат шартни тегишлича тузиш билан битта тенгламадан керакли реакция кучини аниқлаш мумкин. Бу усул номаълум реакция кучларини аниқлаш масаласини анча осонлаштиради.

Мумкин бўлган кўчиш принципини қўллаб А, В, Д таянчлардаги реакция кучларин аниқлаймиз. R_A реакция кучини аниқлаш учун А таянчни фикран вертикал бўшатиб, унинг тўсинга таъсирини Y_A куч билан алмаштирамиз. Механик системага шундай мумкин бўлган кўчиш берамизки, бунда А нуқта вертикал юқорига йўналган $\delta \mathbf{r}_A$ кўчиш олсин. (195-расм, б). $\mathbf{P}_1$ ва $\mathbf{P}_2$ вертикал кучлар қўйилган К ва Е нуқталарнинг ва С нуқтанинг мумкин бўлган кўчишларини, мос равишда, $\delta \mathbf{r}_K$, $\delta \mathbf{r}_E$ ва $\delta \mathbf{r}_C$ билан белгилаймиз; $\delta\varphi$ - АС ёки СД тўсиннинг бурчак кўчиши.



195-расм.

$$4\cdot\delta\varphi = \delta r_A = 2\cdot\delta r_K = 4\cdot\delta r_E = 2\cdot\delta r_C \qquad (1)$$

Мумкин бўлган кўчиш принципини (195-расм,б) га қўллаб берилган кучлар ва Y_A реакция кучининг ушбу мумкин бўлган кўчишдаги ишларининг йиғиндисини нолга тенглаймиз:

$$Y_A\cdot\delta r_A - P_1\cdot\delta r_k + P_2\cdot\delta r_E + M\cdot\delta\varphi = 0. \qquad (2)$$

Ёки, (1) ни эътиборга олсак ва (2) нинг ҳадларини δr_A га қисқартирсак қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$Y_A - \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{4}P_2 + \frac{1}{4}M = 0 .$$

Бундан $Y_A = 1500$ Н бўлишини аниқлаймиз.

R_B таянч реакция кучини аниқлаш учун В таянчни фикран олиб ташлаб, унинг тўсинга таъсирини R_B куч билан алмаштирамиз. Механик системага унинг С нуқтаси вертикал тарзда юқорига йўналган $\delta \mathbf{r}_C$ мумкин бўлган кўчиш оладиган қилиб мумкин бўлган кўчиш берамиз. (195-расм,в).

$\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ ва $\mathbf{R}_B$ кучлар қўйилган К, Е ва В, ҳамда куч қўйилмаган С нуқталарнинг мумкин бўлган кўчишини, мос равишда, $\delta \mathbf{r}_K$, $\delta \mathbf{r}_E$, $\delta \mathbf{r}_B$, δr_C билан белгилаймиз; $\delta\varphi$ - аввалгидек, СД тўсиннинг бурчак кўчиши. Ушбу мумкин бўлган кўчишлар (195-расм, в) га кўра, қуйидагича боғланганлар:

$$2\cdot\delta\varphi = \delta r_C = 6\cdot\delta r_E/5 = 3\cdot\delta r_B/2 = 3\cdot\delta r_k .$$

Энди механик системага мумкин бўлган кўчиш принципини қўллаймиз:

$$-P_1\cdot\delta r_k + R_B\cdot\delta r_B - P_2\cdot\delta r_E - M\cdot\delta\varphi = 0.$$

Бундан $\mathbf{R}_B = 14500$ Н эканлигини аниқлаймиз.

$\mathbf{R}_Д$ реакция кучини аниқлаш учун Д таянчни унинг тўсинга таъсири - $\mathbf{R}_Д$ куч билан алмаштирамиз. Механик системага Д нуқтаси вертикал юқорига йўналишда $\delta r_Д$ кўчиш оладиган мумкин бўлган кўчиш берамиз. Тўсиннинг АС қисмида мумкин бўлган кўчиш бўлмайди. СД қисмида соат милининг айланишига тескари йўналишдаги бурчакка бурилиш содир бўлади:

$$2\cdot\delta\varphi = \delta r_Д.$$

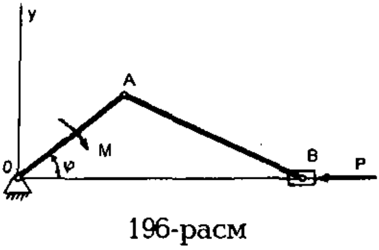
Энди системага мумкин бўлган кўчиш принципини қўллаб қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$R_Д\cdot\delta r_Д + M\cdot\delta\varphi = 0.$$

Бундан $R_Д$= -2000 Н. $R_Д$ реакциянинг ишорасини манфийлиги $\mathbf{R}_Д$ таянч реакция кучини аслида вертикал пастга йўналганлигини билдиради.

А таянчнинг горизонтал ташкил этувчисини аниқлаш учун системанинг 195-расм,д кўрсатилгандек унинг горизонтал ташкил этувчисидан озод қиламиз. Системага унинг А нуқтаси горизонтал йўналишда $\delta \mathbf{r}_{Ax}$ мумкин бўлган кўчиш оладиган қилиб мумкин бўлган кўчиш берамиз. P_1, P_2 , X_A кўчлар ва М моментнинг ишларини ҳисоблаймиз. Бунда $\delta r_k \perp \mathbf{P}_1$, $\delta r_E \perp \mathbf{P}_2$, $\delta\varphi = 0$ эканлигини эътиборга олсак, $\mathbf{x}_A \cdot \delta \mathbf{r}_{Ax} = 0$ ва демак $X_A = 0$ келиб чиқади.

51-*масала.* Кривошип-шатун механизми (196-расм) ОА кривошип, АВ-шатун ва В поршендан ташкил топган. В поршенга расмда кўрсатилгандек **Р** куч қўйилган. Кривошипнинг узунлиги r га, шатуннинг узунлиги l га, кривошипни цилиндр ўқи билан ҳосил қилган бурчаги φ га тенг бўлса ва шарнирлардаги ишқаланишларни ҳамда поршень, шатун, кривошипларнинг оғирликларини ҳисобга олмасдан механизмни мувозанатловчи кривошипдаги М момент аниқлансин.



196-расм

Ечиш. Бу масалани ечиш учун мумкин бўлган кўчиш принципини қўллаймиз. Механизмга 188-расмда кўрсатилгандек мумкин бўлган кўчиш берамиз. М ва Р кучларнинг ушбу кўчишдаги ишларининг йиғиндисини ҳисоблаймиз:

$$\mathbf{P}\cdot\delta \mathbf{r}_B - M\cdot\delta\varphi = 0. \tag{1}$$

P кучнинг ва $\delta \mathbf{r}_B$ нинг йўналиши бир хил бўлгани учун

$$\mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{r}_B = P \cdot \delta r_B$$

га тенг. Поршеннинг мумкин бўлган кўчиши δr_B билан кривошипнинг мумкин бўлган бурчак кўчиши орасидаги муносабатни биз юқорида 95-§ да келтириб чиқарган эдик:

$$\delta r_B = x_B \frac{r \sin\varphi \delta\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2\varphi}}$$

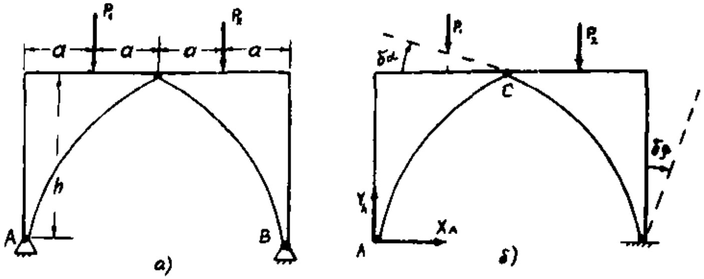
$$x_B = r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2\varphi}$$

Ушбу аниқланганларни (1) асосий тенгламага қўйиб ва уни $\delta\varphi$ га қисқартириб, изланаётган момент учун қуйидаги ифодага келамиз:

$$M = r \cdot \sin\varphi \cdot \left(\frac{r \cdot \cos\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2\varphi}} + 1 \right) \cdot P$$

52-масала. Текис учшарнирли аркага $\mathbf{P}_1$ ва $\mathbf{P}_2$ кучлар қўйилган (197-расм). А таянчдаги реакция аниқлансин.

Ечиш. А таянчни олиб ташлаймиз ва унинг таъсирини $\mathbf{X}_A$ ва $\mathbf{У}_A$ реакциялар билан алмаштирамиз. А таянчдан озод қилингандан сўнг система иккита эркинлик даражага эга бўлади, чунки энди



197-расм

бу система учун иккита ўзаро боғлиқ бўлмаган *кўчиш мумкин*. Арканинг чап қисмининг C шарнир атрофида бурилишини $\delta\alpha$ ва бутун арканинг B шарнир атрофида бурилишини $\delta\beta$ билан белгилаймиз. Дастлаб, системага фақат α бурчак *ўзгаргандаги (β = const) мумкин бўлган кўчиш* берамиз. Кучларнинг бу кўчишдаги элементар ишларини ҳисоблаб (ишни C нуқтага нисбатан куч моментини бурилиш бурчаги $\delta\alpha$ га кўпайтмаси тарзида ҳисоблаймиз) ва уни нолга тенглаб, қуйидагини топамиз:

$$\delta A_1 = (2aУ_A - hX_A - aP_1)\,\delta\alpha = 0. \qquad (1)$$

Энди, системага фақат β бурчак ўзгарадиган (α = const), мумкин бўлган кўчиш берамиз. Бу кўчишда кучларнинг элементар ишларини ҳисоблаб топсак, у

$$\delta A_2 = (4aУ_A - 3aP - aP_2).\,\delta\beta = 0 \qquad (2)$$

га тенг бўлиши керак.

Бу мувозанат шартлардан қуйидаги икки тенгламани ҳосил қиламиз:

$$2aУ_A - hX_A - aP_1 = 0, \qquad (3)$$

$$(4У_A - 3P_1 - P_2)a = 0. \qquad (4)$$

Уларни ечиб қуйидагини топамиз:

$$X_A = \frac{a}{2h}(P_1 + P_2), \quad Y_A = \frac{3P_1 + P_2}{4}$$

Берилган ҳолда системанинг умумлашган координаталари деб α ва β бурчакларни ҳисоблаш мумкин.

98-§ . Динамиканинг умумий тенгламаси

Лагранж мумкин бўлган кўчиш принципидан фойдаланиб боғланишли системанинг Даламбер принципидан келиб чиқадиган мувозанат шартни аналитик кўринишда ифодалаган эди. Ҳақиқатан ҳам, биламизки, мумкин бўлган кўчиш принципи статика масалаларини ечишнинг энг умумий методи бўлса, Даламбер принципи эса динамика масалаларини ечиш учун статика методларини қўллашга имкон беради. Демак, бу икки принципни биргаликда қўллаб динамика масалаларини ечишнинг энг умумий йўлини топамиз.

Ҳаракати идеал, голоном боғланишлар билан чекланган n моддий нуқталарнинг механик системаси берилган бўлсин. Механик системанинг бирор M_k нуқтасига қўйилган актив кучлар ва боғланишлар реакция кучларининг тенг таъсир этувчиларини $\mathbf{F}_k$ ва $\mathbf{N}_k$ орқали белгилаймиз. Даламбер принципига кўра механик системанинг ҳар бир M_k нуқтаси учун вақтнинг ҳар бир пайтида берилган кучларнинг, реакция кучларининг тенг таъсир этувчилари билан инерция кучининг геометрик йиғиндиси нолга тенг, яъни (19.4) ўринли

$$\mathbf{F}_k + \mathbf{N}_k + \mathbf{F}_k^{и} = 0$$

Вақтни ўзгармас ҳисоблаб, механик системага мумкин бўлган кўчиш берамиз. У ҳолда, унинг ҳар бир $M_к$ нуқтаси $\delta\mathbf{r}_k\,(k=\overline{1,n})$ мумкин бўлган кўчиш олади. Юқоридаги тенгламани ҳар бир нуқта учун ёзиб ҳамда уларни тегишли $\delta\mathbf{r}_k$ мумкин бўлган кўчишга скаляр кўпайтириб ва бир-бири билан ҳадма-ҳад қўшиб ушбу кучлар ишининг йиғиндисини аниқлаймиз:

$$\sum_{k=1}^{n}\mathbf{F}_k\cdot\delta\mathbf{r}_k + \sum_{k=1}^{n}\mathbf{N}_k\cdot\delta\mathbf{r}_k + \sum_{k=1}^{n}\mathbf{F}_k^{и}\cdot\delta\mathbf{r}_k = 0.$$

Механик системага қўйилган боғланишлар идеал бўлгани учун ўртадаги ҳад, яъни реакция кучларининг иши нолга тенг. Демак,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\mathbf{F}_k + \mathbf{F}_k^{и}\right)\cdot\delta\mathbf{r}_k = 0 \qquad (20.17)$$

ёки,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\mathbf{F}_k - m_k\mathbf{a}_k\right)\cdot\delta\mathbf{r}_k = 0 \qquad (a)$$

(20.18)

ёки

$$\sum_{k=1}^{n}\left[F_k \cdot \cos\left(\mathbf{F}_k \,\hat{,}\, \delta\mathbf{r}_k\right) - m_k a_k \cos\left(\mathbf{a}_k \,\hat{,}\, \delta\mathbf{r}_k\right)\right]\cdot\delta r_k = 0 \qquad (б)$$

Юқоридаги (20.17) тенглама (ёки унинг бошқа *кўринишлари* (20.18)) *динамиканинг умумий тенгламаси* дейилади. У қуйидагича таърифланади: *идеал, голоном боғланишли ҳаракатдаги механик система нуқталарининг ҳар қандай мумкин бўлган кўчишда уларга таъсир этувчи актив кучларнинг ва шу нуқталарнинг инерция кучларнинг элементар ишлари йиғиндиси ҳар онда нолга тенг бўлади .*

Актив кучлар $\mathbf{F}_k$ нинг Декарт координата ўқлардаги проекцияларини F_{kx}, F_{ky}, F_{kz}, система нуқталарининг инерция кучлари $F_k^{и}$ нинг ва мумкин бўлган кўчишлари δr_k нинг ушбу ўқлардаги проекцияларини

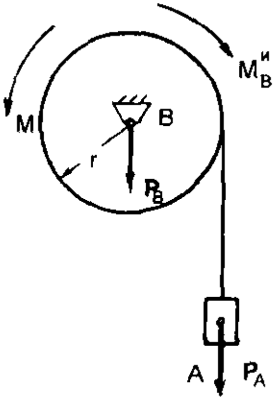
$F_{kx}^{и} = -m_k\ddot{x}_k$, $F_{ky}^{и} = -m_k\ddot{y}_k$, $F_{kz}^{и} = -m_k\ddot{z}_k$ ҳамда δx_K, δy_K, δz_K орқали белгилаб ва элементар ишнинг аналитик ифодасидан фойдаланиб (20.17) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\left(F_{kx} - m_k\ddot{x}_k\right)\cdot\delta x_k + \left(F_{ky} - m_k\ddot{y}_k\right)\cdot\delta y_k + \left(F_{kz} - m_k\ddot{z}_k\right)\cdot\delta z_k\right] = 0 \qquad (20.19)$$

Динамиканинг (20.19) кўринишдаги умумий тенгламаси, биринчи бор, 1788 йилда Лагранж томонидан унинг "Аналитик механика" асарида келтирилган. У Даламбер принципи билан Лагранжнинг мумкин бўлган кўчиш принципининг мажмуаси бўлгани учун *Даламбер-Лангранж принципи ҳам дейилади.*

Динамиканинг умумий тенгламаси ҳар қандай механик система ҳаракатининг дифференциал тенгламасини ёзишга имкон беради ва шунинг учун уни динамиканинг турли масалаларини ечиш учун бевосита қўллаш мумкин. Агар механик система қаттиқ жисмлардан иборат бўлса, системанинг дифференциал тенгламасини ёзиш учун ҳар бир жисмга таъсир этувчи актив кучларга унинг инерция кучлари бош вектори ва бош моменти шартли қўшилади ва сўнгра мумкин бўлган кўчиш принципини қўллаб актив кучлар ва келтирилган инерция кучлари учун (20.17) ёки (20.19) тенглама ёзилади.

53-масала. Оғирлиги P_A га тенг бўлган А юк чўзилмайдиган ип билан осиб қўйилган, ипнинг иккинчи учи қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи r радиусли ва оғирлиги P_B га тенг В барабанга ўралган. Агар барабанга айлантирувчи М момент қўйилган бўлса, А юкнинг чизиқли тезланиши a_A аниқлансин.(198-расм).



198-расм.

Ечиш. Ушбу механик система жисмларига таъсир этаётган берилган кучларни ҳамда инерция кучлари ва инерция моментларини расмда тасвирлаймиз.

Механик система жисмлари А юк ва В барабанга мумкин бўлган кўчишлар δS_A ва унга мос $\delta\varphi$ берамиз, сўнгра система учун динамиканинг умумий тенгламасини тузамиз:

$$\delta A = \sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^и = 0$$

яъни

$$\delta A = -P \cdot \delta S_A - F_A^и \cdot \delta S_A + M \cdot \delta\varphi - M_B^и \cdot \delta\varphi = 0$$

$$F_A^и = m_A a_A = \frac{P_A}{g} a_A, \; M_B^и = I_B \cdot \varepsilon_B, \; a_A = \varepsilon r.$$

Бу ерда

$$\varepsilon = \frac{a_A}{r}, \; \delta S_A = r \cdot \delta\varphi, \; I_B = \frac{m_B \cdot r^2}{2}$$

Буларни юқоридаги тенгламага қўйиб:

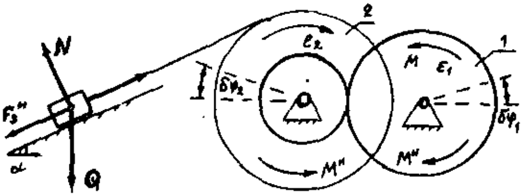
$$-P_A \delta S_A - \frac{P_A}{g} a_A \delta S_A + M \frac{\delta S_A}{r} - \frac{P_B r^2}{2g} \frac{a_A}{r} \frac{\delta S_A}{r} = 0$$

Бундан

$$a_A \left(\frac{P_A}{g} + \frac{P_B}{2g} \right) = \frac{M}{r} - P_A$$

ёки

$$a_A = \frac{M - P_A r}{2P_A + P_B} \frac{2g}{r}$$



199-расм.

54-*масала.* Оғирлиги P_1 га, инерция радиуси ρ_1 га тенг биринчи тишли ғилдиракка айлантирувчи M момент қўйилган ва у оғирлиги P_2 га, инерция радиуси ρ_2 га тенг иккинчи барабаннинг тишли ғилдиракчаси билан тишлашган. Барабанга ўралаётган арқон оғирлиги Q га тенг юкни қия текисликда юқорига кўтаради. Арқоннинг оғирлигини, ўқлардаги ишқаланишни ҳисобга олмасдан юкнинг тезланиши аниқлансин. Юкнинг қия текисликда сирпанишидаги ишқаланиш коэффициенти f га, барабаннинг радиуси r га, тишли ғилдиракларнинг радиуси r_1, r_2 га тенг. 199-расм.

Ечиш. Ушбу механик системага таъсир қилаётган актив куч **Q** ни ва айлантирувчи М моментни (1-тишли ғилдиракнинг ва барабан билан унинг тишли ғилдиракчасининг оғирлик кучлари $\mathbf{P}_1$ ва $\mathbf{P}_2$ иш бажармайди, чунки улар қўзғалмас) тасвирлаймиз. Уларга $\mathbf{F}_{тр}$, **N** - реакция кучларини, юкнинг инерция кучи $F_3^и$ ни ва 1, 2 жисмларнинг инерция моментлари $M_1^и$ ва $M_2^и$ ни қўшамиз (3-жисм илгариланма ҳаракатлангани учун унинг инерция кучлари фақат бош векторга, яъни массалар марказига қўйилган тенг таъсир этувчига, 1, 2 жисмлар айланма ҳаракатлангани учун уларнинг инерция кучлари моменти бош моментга тенг бир жуфтга келтирилади). Улар миқдор жиҳатдан қуйидагича аниқланади:

$$F_{тр}=f\cdot N,\ N=Q\cdot\cos\alpha,\ F_3^и=\frac{Q}{g}a_3,\ M_1^и=\frac{P_1}{g}\cdot\rho_1^2\cdot\varepsilon_1,\ M_2^и=\frac{P_2}{g}\cdot\rho_2^2\cdot\varepsilon_2$$

Ҳамма кучларнинг йўналиши расмда кўрсатилган. Механик системага М нинг таъсирига мос мумкин бўлган кўчиш берамиз ва динамиканинг умумий тенгламасини тузамиз:

$$-\left(Q\cdot\sin\alpha+F_3^и+F_{тр}\right)\delta S_3-M_2^и\cdot\delta\varphi_2+\left(M-M_1^и\right)\delta\varphi_1=0$$

Мумкин бўлган кўчишларни $\delta\varphi_2$ орқали ифодалаймиз,

$$\delta S_3=r\cdot\delta\varphi_2,\ \delta\varphi_1\cdot r_1=\delta\varphi_2\cdot r_2,\ \delta\varphi_1=r_2\cdot\delta\varphi_2/r_1$$

У ҳолда динамиканинг умумий тенгламаси қуйидаги кўринишга келади:

$$-Q\left(\sin\alpha+\frac{a_3}{g}+f\cdot\cos\alpha\right)r-\frac{P_2}{g}\cdot\rho_2^2\cdot\varepsilon_2-\frac{P_1}{g}\cdot\rho_1^2\cdot\varepsilon_1\frac{r_2}{r_1}+M\frac{r_2}{r_1}=0$$

Бу ифодадаги ε_1 ва ε_2 катталикларни изланаётган a_3 тезланиш орқали ифодалаймиз:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_3}{r}, \quad \varepsilon_1 = \frac{r_2}{r_1} \cdot \varepsilon_2 = \frac{r_2 \cdot a_3}{r_1 \cdot r}.$$

Пиравардида

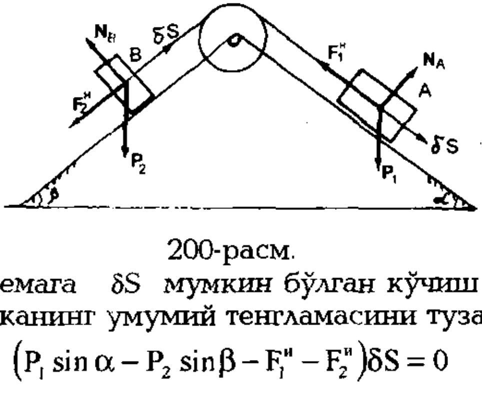
$$a_3 = \frac{(rr_2 / r)M - r^2(\sin\alpha + f \cdot \cos\alpha)Q}{r^2 \cdot Q + \rho_2^2 \cdot P_2 + (\rho_1^2 \cdot r_2^2 / r_1^2)P_1} \cdot g.$$

55-*масала*. Оғирликлари $\mathbf{P}_1$ ва $\mathbf{P}_2$ бўлган А ва В юкларнинг горизонт билан α ва β бурчак ташкил этувчи қия текисликлар бўйлаб қандай тезланиш билан ҳаракатланиши топилсин (200-расм).

Ечиш. Механик системага қўйилган актив $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ кучларни тасвирлаймиз ва уларга модуллари

$$F_1^{\text{и}} = \frac{P_1}{g}a, \quad F_2^{\text{и}} = \frac{P_2}{g}a,$$

га тенг бўлган инерция кучларини қўшамиз, бу ерда а-юкларнинг изланаётган тезланиши



200-расм.

Энди *системага* δS *мумкин* бўлган кўчиш берамиз ва динамиканинг умумий тенгламасини тузамиз:

$$\left(P_1 \sin\alpha - P_2 \sin\beta - F_1^{\text{и}} - F_2^{\text{и}}\right)\delta S = 0$$

δS олдидаги коэффициентни нолга тенглаб ва $F_1^{\text{и}}, F_2^{\text{и}}$ *ларни қийматлари орқали ифодалаб*, қуйидагига эга бўламиз:

$$a = \frac{P_1 \sin\alpha - P_2 \sin\beta}{P_1 + P_2} \cdot g.$$

Охирида шуни эслатиб ўтамизки, мураккаб механик системалар учун динамиканинг умумий тенгламасини тузишда система нуқталари инерция кучларининг ишларини ҳисоблаш масаласи анча қийинчиликка олиб келади. Бундай ҳолларда система ҳаракатининг умумлашган координаталардаги тенгламасига ёки Лагранж тенгламасига ўтиш масалалар ечиш жараёнини бир мунча соддалаштиради, булар устида биз кейинги лекцияларимизда тўхталиб ўтамиз.

99-§. Умумлашган кучлар ва уларни аниқлаш.

Биз юқорида умумлашган координаталар тушунчасини баён этган эдик. Уларга қўйилган иккита асосий талабни яна бир бор таъкидлаб ўтайлик.

Биринчидан, механик система нуқталарининг радиус векторлари ва демак, Декарт координаталари умумлашган координаталарнинг бир қийматли функцияси бўлиши керак. Чунончи, стационар боғланиш қўйилган механик система n та нуқтадан иборат бўлиб s та эркинлик даражасига эга бўлса, ихтиёрий к-нчи нуқтанинг радиус вектори умумлашган координаталар орқали қуйидагича аниқланади:

$$r_k = r_k(q_1, q_2, \ldots q_s), \left(k = \overline{1, n}\right) \qquad (20.20)$$

Иккинчидан, умумлашган координаталар боғланиш тенгламалари билан мувофиқ танланади, яъни (20.20) ни, ёки унинг проекциялари x_k, y_k, z_k ни боғланиш тенгламаларига келтириб қўйганимизда боғаниш тенгламалари айниятларга айланиши керак.

Механик система нуқталарининг мумкин бўлган кўчиши (20.20)га кўра қуйидагича аниқанади:

$$\delta r_k = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial r_k}{\partial q_j} \delta q_j, \quad \left(k = \overline{1, n}\right) \qquad (20.21)$$

Механик системага қўйилган боғланишлар стационар бўлгани учун унинг ҳақиқий кўчиши (20.21) нинг биттаси бўлади:

$$d\mathbf{r}_k = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} dq_j, \qquad \left(k = \overline{1,n}\right) \qquad (20.22)$$

Қўйилган боғланишлар ностационар ҳоли учун системанинг ҳақиқий кўчишини аниқлашда $\mathbf{r}_k$ радиус вектор вақтнинг функцияси эканлигини эътиборга олиш керак ва (20.22) га қуйидаги ҳад қўшилади

$$\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} dt.$$

Жумладан, система нуқталарининг тезлиги умумлашган координаталар орқали қуйидагича аниқланади:

$$\mathbf{v}_k = \dot{\mathbf{r}}_k = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} \qquad \left(k = \overline{1,n}\right) \qquad (20.23)$$

Бу ерда

$$\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt}, \qquad (20.24)$$

умумлашган тезлик дейилади. Стационар боғланиш қўйилган ҳолда (20.23) да охирги ҳад нолга айланади.

Юқорида аниқланган ифодалардаги $\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q}$ векторнинг қўзғалмас Декарт координата ўқларига проекциялари к-нчи нуқтанинг тегишли координаталаридан умумлашган координата бўйича олинган ҳосиласига тенг:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial y_k}{\partial q_j} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \cdot \mathbf{k} \qquad (20.25)$$

Бу ерда **i, j, к** - қўзғалмас ўқлардаги бирлик векторлар-ортлар.

Энди динамиканинг марказий тушунчаларидан бири кучни умумлашган координаталар орқали аниқлашга ва умумлашган куч тушунчасини таърифлашга, ифодасини келтириб чиқаришга ўтамиз. Бунинг учун механик системага унинг умумлашган координаталаридан, масалан, фақат q_1 чексиз кичик орттирма δq_1 оладиган қилиб мумкин бўлган кўчиш берамиз. У ҳолда системанинг барча n нуқталари чексиз кичик (мумкин бўлган) кўчишлар $(\delta q_1)_1$, $(\delta q_2)_1$ $(\delta q_3)_1$..., $(\delta q_n)_1$ олади. Ушбу кўчишлар системага қўйилган голоном, стационар боғланишларга мувофиқ бўлганлиги сабабли у системанинг мумкин бўлган кўчишларидан бири бўлади.

Умумлашган координаталардан фақат q_1 гина ушбу кўчишда ўзгариши (қолган умумлашган координаталар ўзгармаслиги) сабабли $(\delta \mathbf{r}_k)_1$ хусусий дифференциал каби ҳисобланади:

$$\left(\delta \mathbf{r}_k\right)_1 = \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_1} \delta q_1$$

Энди механик системага қўйилган кучларнинг мазкур мумкин бўлган кўчишдаги элементар ишлари йиғиндисини аниқлаймиз:

$$\delta A_1 = \mathbf{F}_1\left(\delta \mathbf{r}_1\right)_1 + \mathbf{F}_2\left(\delta \mathbf{r}_2\right)_1 + \ldots + \mathbf{F}_n\left(\delta \mathbf{r}_n\right)_1 = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_1} \delta q_1 = Q_1 \delta q_1$$

Бу ерда

$$Q_1 = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_1}$$

Q_1 *умумлашган кучни* ифодалайди.

Механик системага, энди, q_2 умумлашган координата орттирма оладиган қилиб мумкин бўлган кўчиш бериб, бунда кучларнинг элементар ишини ҳам юқоридаги каби аниқлаймиз:

$$\delta A_2 = Q_2 \delta q_2, \quad Q_2 = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_2}.$$

Умуман, боғланишли системанинг ҳамма мумкин бўлган кўчишларида. унга қўйилган кучларнинг элементар иши . худди шу йўсинда аниқланади:

$$\delta A = \sum_{j=1}^{s} \delta A_j = \sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_1 \qquad (20.26)$$

Бу ерда

$$Q_j = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}, \qquad \left(j = \overline{1, s}\right) \qquad (20.27)$$

Q_j *умумлашган кучни* ифодалайди.

Элементар ишнинг бу ифодасидаги Q_j умумлашган кучлар (20.27) билан ифодаланса ҳам унинг (20.26) табиатига кўра қуйидагича таърифланади: *Берилган механик система нуқталарига таъсир этувчи актив кучларнинг система мумкин бўлган кўчишларидаги тўла элементар иш ифодасида умумлашган координатлар орттирмаси олдидаги коэффициентга тенг катталикка айтилади.*

Умумий ҳолда, умумлашган куч Q_j биз билган оддий маънодаги куч эмас. Бинобарин, умумлашган кучнинг ўлчови $[Q_j]$ унга мос умумлашган координатанинг $[q_j]$ ўлчовига боғлиқ бўлади.

$$\left[Q_j\right] = \frac{[A]}{\left[q_j\right]}.$$

бу ерда [A] - ишнинг ўлчови.

Агар умумлашган координата узунлик ўлчамида бўлса, умумлашган кучнинг ўлчам бирлиги куч ўлчам бирлиги билан бир хил бўлади, яъни у *Ньютонда* ўлчанади; агар умумлашган координата бурчак катталикдан иборат бўлса, умумлашган кучнинг ўлчамлиги момент ўлчамлиги билан бир хил бўлади, яъни у (Н·м) да ўлчанади. Агар у - ҳажм бўлса (цилиндр ичидаги поршеннинг ҳолати поршень орқасидаги ҳажм билан аниқланиши мумкин), умумлашган куч Н/м^2 бирилигида, яъни босим ўлчамлигида ўлчанади.

Демак, умумлашган куч тушунчаси ҳам моддий жисмларнинг ўзаро механик таъсирлашувини характерловчи турли катталиклар (куч,куч моменти, босим) дан иборат бўлади.

Шундай қилиб, механик системага қўйилган умумлашган кучларнинг умумий сони умумлашган координаталар сонига тенг ва шу билан бирга, хар бир умумлашган кучнинг ўлчам бирлиги тегишли умумлашган координата ўлчам бирлиги билан мослашган бўлади.

Одатдаги кучлар каби умумлашган кучлар ҳам умумлашган ташқи, умумлашган ички кучлар ёки умумлашган актив кучлар, умумлашган реакциялар каби гуруҳларга ажратиш мумкин. Жумладан, стационар боғланишлар ҳолида идеал боғланишларнинг умумлашган реакциялари нолга тенг бўлади. Ҳақиқатан ҳам, q_j умумлашган координатага тегишли умумлашган реакция $\left(Q_j^R\right)$ механик системанинг фақат q_j координатаси орттирма оладиган мумкин бўлган кўчишида боғланиш реакцияларининг элементар ишларини ҳисоблаб аниқланади:

$$Q_j^R = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{R}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k}{\delta q_j} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{R}_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}.$$

Идеал боғланишларнинг таърифига кўра ҳар қандай мумкин бўлган кўчишда реакцияларнинг элементар ишларининг йиғиндиси нолга тенг:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{R}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{R}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \cdot \delta q_j = Q_j^R \cdot \delta q_j = 0$$

Бу ерда $\delta q_j \neq 0$ сабабли, умумий ҳолда

$$Q_j^R = 0, \quad (j = \overline{1,s})$$

Демак, механик системага қўйилган боғланишлар идеал бўлса, у ҳолда унинг мумкин бўлган кўчишида фақат актив кучларгина иш бажаради ва Q_1, $Q_2,\ldots,Q_s$ умумлашган актив кучлардангина иборат бўлади.

Умумлашган кучларни ҳисоблаш усулларини кўрамиз.

1.Умумлашган кучларни (20.26) формулага кўра, мумкин бўлган кўчишлардаги элементар ишларнинг йиғиндисини ҳисоблаш билан аниқлаш мумкин. Бунинг учун, аввал, механик системага фақат q_1 орттирма оладиган қилиб мумкин бўлган кўчиш берамиз ва бунда барча актив кучларнинг элементар ишини аниқлаймиз:

$$\delta A_1 = Q_1\delta q_1,$$

δq_1 нинг олдидаги коэффициент бирлиги умумлашган кучга тенг. Худди шу йўл билан қолган умумлашган кучлар бирин-кетин аниқланади.

2. Умумлашган куч (20.27) ни қўллаб аниқланади. Бунинг учун икки векторнинг скаляр кўпайтмаси ифодасига асосан (20.27) ни қуйидагича ёзамиз:

$$Q_j = \sum_{k=1}^{n}\left(F_{kx}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial q_j} + F_{ky}\cdot\frac{\partial y_k}{\partial q_j} + F_{kz}\cdot\frac{\partial z_k}{\partial q_j}\right) \qquad (20.28)$$

Бу ерда F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} системанинг к-нчи нуқтасига қўйилган актив кучлар тенг таъсир этувчисининг Декарт координата ўқларидаги проекциялари, x_k, y_k, z_k - к-нчи нуқтанинг координаталари, (20.20) га мувофиқ улар умумлашган координаталарнинг бир қийматли функцияси. Демак, умумлашган кучларни аниқлаш учун, система нуқталари Декарт координаталарининг умумлашган координаталар орқали ифодаси ва бу нуқталарга қўйилган актив кучларнинг Декарт координата ўқларидаги проекциялари талаб қилинади.

3. Агар механик система нуқталарига потенциалли, яъни консерватив кучлар қўйилган бўлса, бу кучларнинг Декарт координата ўқларидаги проекциялари қуйидагича ифодаланади:

$$F_{kx} = -\frac{\partial П}{\partial x_k}, \quad F_{ky} = -\frac{\partial П}{\partial y_k}, \quad F_{kz} = -\frac{\partial П}{\partial z_k},$$

бу ерда П - системанинг потенциал энергияси. Кучнинг ушбу ифодаларини (20.28) га қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$Q_i = -\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial П}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial q_j} + \frac{\partial П}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial q_j} + \frac{\partial П}{\partial z_k}\frac{\partial z_k}{\partial q_j}\right)$$

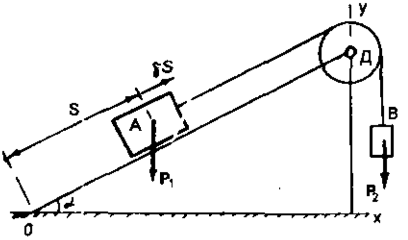
Агар потенциал энергияни Декарт координаталарнинг функцияси, Декарт координаталарнинг эса умумлашган координаталар функцияси эканлигини эътиборга олсак қуйидаги:

$$Q_j = -\frac{\partial П}{\partial q_j}, \quad \left(j = \overline{1,s}\right) \qquad (20.29)$$

ифодага келамиз. Демак, механик система нуқталарига потенциалли кучлар қўйилган бўлса, бундай потенциалли кучлар системасининг умумлашган кучи Q_j механик системанинг потенциал энергиясидан тегишли умумлашган координата бўйича тескари ишора билан олинган хусусий ҳосилага тенг.

Қуйида, ушбу усулларни қўллаб, умумлашган кучларни ҳисоблашга оид бир неча мисоллар кўрамиз.

56-*масала.* Механик система ўзаро иплар билан боғланган иккита A ва B юклардан иборат. Юкларнинг оғирликлари P_1 ва P_2 га тенг (201-расм).



201-расм

А юк қия силлиқ текислик бўйлаб силжийди, В юк эса вертикал бўйлаб кўчади. Ушбу система учун умумлашган куч аниқлансин. Ипнинг оғирлиги ва Д ўқдаги ишқаланиш кучи ҳисобга олинмасин.

Ечиш. Механик система битта эркинлик даражага эга ва унинг ҳолати битта умумлашган координата $q_1 = S$ орқали аниқланади. Д блок ўқидаги ишқаланишни ва ип массасини ҳисобга олмасдан ушбу координатага мос келувчи умумлашган кучни топамиз. Бунинг учун $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ актив кучларни тасвирлаймиз ва системага 1) S мумкин бўлган кўчиш берамиз, бунда S координата мусбат орттирма олади. Актив кучларнинг бу кўчишда бажарган элементар ишлари қуйидагига тенг бўлади:

$$\delta A = \left(P_2 - P_1 \sin\alpha\right)\delta S.$$

Айнан δS олдидаги коэффициент умумлашган куч бўлади, бинобарин

$$Q_S = P_2 - P_1 \sin\alpha$$

2) Энди (20.28) дан фойдаланиб умумлашган кучни аниқлайлик. Механик системага қўйилган кучларнинг координата ўқлардаги проекциялари қуйидагига тенг:

$$P_{1x} = P_{2x} = 0,\quad P_{1y} = -P_1,\quad P_{2y} = -P_2,\quad P_{1z} = P_{2z} = 0$$

Расмдан кўрамизки,

$$\frac{dy_1}{dS} = \sin\alpha,\quad \frac{dy_2}{dS} = -1$$

Ушбу масала учун (20.28) ни ёзамиз,

$$Q_S = P_{1y}\frac{\partial y_1}{\partial S} + P_{2y}\frac{\partial y_2}{\partial S} = -P_1 \sin\alpha + P_2$$

3) Энди ушбу механик система учун потенциал энергияни ҳисоблаймиз. АВ ип чўзилмаслиги сабабли А ва В юкларнинг горизонтдан баландлиги бир - бирига қатъий боғлиқ бўлади. Айтайлик, А юк 0 да горизонтда турганида В юк $h = ОД\,\sin\alpha$ баландликдаги Д да жойлашсин. У ҳолда, А юк қия текислик бўйлаб S- масофага силжиганида у $h_1 = S\cdot\sin\alpha$ баландликка кўтарилади. В юк эса $ОД\cdot\sin\alpha$ баландликдан вертикал пастга S масофага тушади. Шунинг учун расмдаги ҳолат учун системанинг кинетик энергиясини қуйидагича ёзамиз:

$$П = P_1\cdot\sin\alpha\cdot S + P_2(ОД\cdot\sin\alpha - S).$$

Бу ерда α, ОД - ўзгармас миқдорлар. Энди ушбу потенциал энергиядан умумлашган координата S бўйича хусусий ҳосила олиб, (20.29) га кўра умумлашган кучни ҳисоблаймиз:

$$Q_S = -\frac{\partial П}{\partial S} = -P_1\sin\alpha + P_2$$

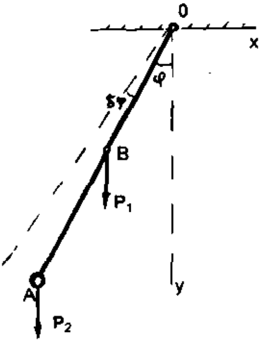
Шундай қилиб, умумлашган кучни ҳисоблашнинг бу уч усули бир хил натижага олиб келди. Умумлашган координата S нинг ўлчам бирлиги узунлик бирлиги бўлгани учун умумлашган кучнинг ўлчам бирлиги Н (*Ньютон*).

57-масала. О нуқта атрофида расм текислигида айланаоладиган бир жинсли стерженнинг А учига P_2 оғирликдаги юк боғланган. Стерженнинг оғирлиги P_1 га ва узунлиги l га тенг. Умумлашган координата сифатида стерженнинг оғиш бурчаги φ ни олиб, бу бурчакка мос келган умумлашган куч топилсин (202-расм).

Ечиш. Стерженга жуда кичик $\delta\varphi$ бурилиш берамиз. У ҳолда $\mathbf{P}_1$ ва $\mathbf{P}_2$ кучлар қўйилган нуқталар

$$\delta S_1 = \frac{l}{2}\cdot\delta\varphi, \quad \delta S_2 = l\cdot\delta\varphi$$

миқдорларга тенг мумкин бўлган кўчиш олади. δS_1 ва δS_2 мумкин бўлган кўчишлар стерженга перпендикуляр бўлади. *Q_1 умумлашган кучни* $\delta A = Q_1\cdot\delta q_1$ тенглик асосида топамиз. P_1 ва P_2 кучларнинг стерженга перпендикуляр δS_1 ва δS_2 кўчиш йўналишлардаги проекциялари, мос равишда,



202-расм

$-P_1 \sin\varphi$, $-P_2 \sin\varphi$ га тенг. У ҳолда ушбу мумкин бўлган кўчишда буларнинг бажарган ишларининг йиғиндиси:

$$\delta A(P_1) + \delta A(P_2) = -l\cdot(P_1/2 + P_2)\cdot\sin\varphi\cdot\delta\varphi$$

га тенг. Бундан умумлашган куч учун қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$Q_\varphi = -l\cdot\frac{P_1 + 2P_2}{2}\sin\varphi = -l\cdot\left(\frac{P_1}{2} + P_2\right)\cdot\sin\varphi \quad (\text{Н}\cdot\text{м})$$

2) Энди проекция усулини қўллаб умумлашган *кучни аниқлаймиз.* Декарт *координата ўқларини* расмда кўрсатилгандек танлаймиз. У ҳолда қўйилган кучларнинг Декарт координата ўқларига проекциялари

$P_{1x} = P_{2x} = P_{1z} = P_{2z} = 0;\ P_{1y} = P_1,\ P_{2y} = P_2$ га тенг бўлади. Куч қўйилган нуқталарнинг Декарт координаталарини умумлашган координата орқали ифодалаймиз. Қўйилган кучларнинг x, z - ўқларга проекциялари нолга тенглиги сабабли (20.28) га кўра фақат y_B ва y_A ларнигина аниқлаймиз:

$$y_B = \frac{l}{2}\cos\varphi; \quad y_A = l\cos\varphi$$

У ҳолда,

$$\frac{\partial y_B}{\partial\varphi} = -\frac{l}{2}\sin\varphi; \quad \frac{\partial y_A}{\partial\varphi} = -l\sin\varphi.$$

Энди (20.28) га биноан

$$Q_\varphi = P_1\frac{\partial y_B}{\partial\varphi} + P_2\frac{\partial y_A}{\partial\varphi} = -l\cdot\left(\frac{P_1}{2} + P_2\right)\cdot\sin\varphi$$

3) Қўйилган кучлар потенциалли кучлар бўлганлиги сабабли умумлашган кучни системанинг потенциал энергияси орқали ҳам аниқлаш мумкин. Ушбу механик системанинг потенциал энергиясини $\varphi = 0$ да минимал, $\varphi = \pi/2$ да максимал қийматларга эга бўлади деб танласак потенциал энергиянинг қуйидаги

$$\Pi = P_1 l\left(1 - \frac{\cos\varphi}{2}\right) + P_2 l(1 - \cos\varphi)$$

ифодасига келамиз. Бундан

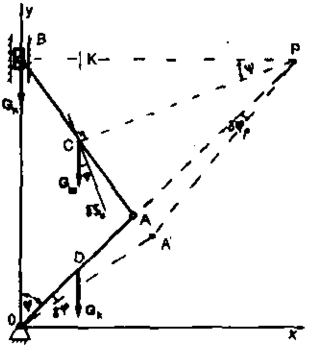
$$\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} = \frac{l}{2}P_1\sin\varphi + lP_2\sin\varphi$$

Демак, (20.29) га кўра умумлашган куч яна юқоридагига тенг:

$$Q_\varphi = -l\left(\frac{P_1}{2} + P_2\right)\sin\varphi.$$

58-*масала.* Кривошип-шатун механизми G_k - кривошип, $G_ш$ - шатун, $G_п$ - ползунларнинг оғирлик кучлари таъсирида 203-расмда кўрсатилгандек ҳаракатланади. Ишқаланиш кучларини ҳисобга олмасдан механизмнинг умумлашган кучларини аниқланг. OA=r, AB=l, $m_п = m_k = m_ш = m$ деб ҳисоблансин.

Ечиш. Механизмнинг эркинлик даражаси бирга тенглигини биз юқорида аниқлаган эдик. Шунинг учун механизмнинг ҳолатини битта умумлашган координата - кривошипни Оу ўқи билан ташкил қилган φ бурчак орқали аниқлаш мумкин бўлади. Умумлашган кучларни аниқлашга ўтамиз.



203-расм

1.Механизмга мумкин бўлган кўчиш берамиз. Бунда *φ* бурчак *δφ* орттирма олсин. Ушбу мумкин бўлган кўчишдаги актив кучларнинг элементар ишларининг йиғиндисини аниқлаймиз. $\delta A(\mathbf{G}_k)$ иш механизмни О марказга нисбатан δφ бурилишида $\mathbf{G}_k$ куч моментининг иши каби аниқланади. О марказга нисбатан $\mathbf{G}_k$ куч моменти

$$m_0(\mathbf{G}_k) = -G_k \cdot \frac{r}{2} \cdot \sin\varphi = -\frac{mgr}{2} \cdot \sin\varphi$$

га тенг. Шунинг учун қидирилаётган ишнинг қиймати қуйидагича аниқланади:

$$\delta A(\mathbf{G}_k) = \frac{mgr}{2} \cdot \sin\varphi \cdot \delta\varphi$$

Шатун маркази С нуқтанинг мумкин бўлган кўчиши:

$$\delta S_c = CP\cdot\delta\varphi_P = CP\cdot\frac{r}{AP}\cdot\delta\varphi = CP\cdot\frac{r\,\delta\varphi}{OP-r} = CP\cdot\frac{r\cdot\cos\varphi\cdot\delta\varphi}{y_B - r\cdot\cos\varphi} =$$

$$= CP\cdot\frac{r\cdot\cos\varphi\cdot\delta\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}$$

га тенг. У ҳолда $G_ш$ кучнинг бу мумкин бўлган кўчишдаги иши

$$\delta A\left(G_ш\right) = mg\cdot\delta S_C\cdot\cos\psi$$

билан ифодаланади. Бундаги $\cos\psi$ ни тўғри бурчакли KCP учбурчак дан аниқлаймиз:

$$\cos\psi = \frac{KP}{CP} = \frac{BP - \frac{r}{2}\cdot\sin\varphi}{CP} = \frac{2y_B\mathrm{tg}\varphi - r\sin\varphi}{2CP} =$$

$$= \frac{2\cdot y_B - r\cdot\cos\varphi}{2\cdot CP}\cdot\mathrm{tg}\varphi$$

Демак, $G_ш$ кучнинг иши

$$\delta A\left(G_ш\right) = mg\cdot CP\cdot\frac{r\cdot\cos\varphi\cdot\delta\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}\cdot\frac{2y_B - r\cdot\cos\varphi}{2\cdot CP}\mathrm{tg}\varphi =$$

$$= \frac{mg}{2}\frac{2y_B - r\cdot\cos\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}\cdot r\cdot\sin\varphi\cdot\delta\varphi$$

га тенг. Бу ерда

$$y_B = r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}$$

B нуқтанинг ординатаси.

$G_п$ кучнинг ишини ҳисоблаш учун ползуннинг ушбу мумкин бўлган кўчишдаги силжишини аниқлашимиз керак. Буни биз юқорида (20.12) дан кейин келтирган эдик:

$$\delta S_B = y_B\cdot\frac{r\cdot\sin\varphi\cdot\delta\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}$$

У ҳолда $G_п$ нинг элементар иши қуйидагига тенг бўлади:

$$\delta A(G_п) = G_п \cdot \delta S_B = mgy_B \cdot \frac{r \cdot \sin\varphi \cdot \delta\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2\varphi}}$$

Демак, ушбу мумкин бўлган кўчишда актив кучлар элементар ишларининг йиғиндиси

$$\delta A = \delta A(G_k) + \delta A(G_ш) + \delta A(G_п)$$

учун қуйидаги миқдорга келамиз, яъни

$$\delta A = \frac{m}{2} \cdot g \cdot r \cdot \sin\varphi \cdot \frac{3r\cos\varphi + 5\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}} \cdot \delta\varphi.$$

Бундан, кривошип - шатун механизми учун умумлашган куч ифодасини қуйидагича аниқлаймиз:

$$Q_\varphi = \frac{m}{2} \cdot g \cdot r \cdot \sin\varphi \cdot \frac{3r\cos\varphi + 5\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}$$

2. Энди умумлашган кучни иккинчи усул билан аниқлаймиз. Бунинг учун (20.28) формуладаги катталикларни ҳисоблаш керак бўлади. Кучларнинг координата ўқларига проекциялари қуйидагига тенг:

$$G_{kx} = G_{шx} = G_{пx} = 0, \quad G_{ky} = G_{шy} = G_{пy} = -mg, \quad G_{kz} = G_{шz} = G_{пz} = 0$$

Бу кучлар қўйилган Д, С, В нуқталар Декарт координаталарининг умумлашган координата бўйича хусусий ҳосиласини топиш учун аввал уларни ўзаро муносабатини ифодалаймиз:

$$z_A = z_c = z_B = 0, \qquad x_A = \frac{r}{2}\sin\varphi, \qquad y_A = \frac{r}{2}\cos\varphi$$

$$x_C = \frac{1}{2} r\sin\varphi, \quad y_C = r\cos\varphi + \frac{1}{2}\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}.$$

$$x_B = 0, \quad y_B = r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}.$$

Актив кучларнинг фақат 0у ўқига проекциялари нолдан фарқли бўлгани сабабли нуқталарнинг у координатасидангина умумлашган координата бўйича хусусий ҳосиласини ҳисоблаймиз халос:

$$\frac{\partial y_Д}{\partial\varphi}=-\frac{r}{2}\cdot\sin\varphi,\quad \frac{\partial y_C}{\partial\varphi}=-r\cdot\sin\varphi-\frac{1}{2}\frac{r^2\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}}$$

$$\frac{\partial y_B}{\partial\varphi}=-r\cdot\sin\varphi-\frac{r^2\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}}$$

Демак, (20.28) га биноан

$$Q_\varphi=mg\left(\frac{r}{2}\sin\varphi+r\sin\varphi+\frac{1}{2}\frac{r^2\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}}+r\sin\varphi+\frac{r^2\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}}\right)=$$

$$=\frac{m}{2}gr\sin\varphi\left(5+\frac{3r\cos\varphi}{\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}}\right)=\frac{m}{2}gr\sin\varphi\cdot\frac{5\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}+3r\cos\varphi}{\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}}$$

3. Энди умумлашган кучни учинчи усул билан аниқлаймиз. Механик системанинг потенциал энергияси

$$\Pi=mg\left(\frac{r}{2}\cdot\cos\varphi+r\cos\varphi+\frac{1}{2}\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}+r\cos\varphi+\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}\right)=$$

$$=\frac{m}{2}g\left(5r\cos\varphi+3\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}\right)$$

га тенг. (20.29) формулани қўллаб умумлашган кучни аниқлаймиз:

$$Q_\varphi=-\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi}=+\frac{m}{2}\cdot g\cdot r\cdot\sin\varphi\cdot\left(5+3\frac{r\cos\varphi}{\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}}\right)=$$

$$=\frac{m}{2}\cdot g\cdot r\cdot\sin\varphi\cdot\frac{5\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}+3r\cos\varphi}{\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}}$$

XXI боб

МЕХАНИК СИСТЕМАНИНГ УМУМЛАШГАН КООРДИНАТАЛАРДАГИ МУВОЗАНАТ ВА ҲАРАКАТ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМЛАРИ

100-§. Механик системанинг *умумлашган* координаталардаги мувозанат шартлари.

Умумлашган координата ва умумлашган куч тушунчаларини ўзлаштирганимиздан сўнг бу катталиклар орқали динамиканинг умумий тенгламаси ва мумкин бўлган кўчиш принципи қандай ифодаланишини кўрамиз. Ҳаракати идеал, голоном, бўшатмайдиган боғланишлар билан чекланган n-та нуқталардан ташкил топган механик система s-та эркинлик даражасига эга бўлсин, яъни унинг ҳолати $q_1, q_2, \ldots, q_s$ умумлашган координаталар билан ифодалансин. У ҳолда, системанинг ҳар бир нуқтасининг ҳолати (20.20) га мувофиқ умумлашган координаталарнинг бир қийматли функциясидир. Нуқталарнинг мумкин бўлган кўчишлари эса (20.21) қаби аниқланади. (20.21) ни динамиканинг умумий тенгламаси (20.17) га қўйиб, қуйидаги

$$\sum_{k=1}^{n}(\mathbf{F}_k+\mathbf{F}_k^{и})\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}\delta q_j = 0$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламада k-индекс ва j-индекс билан ҳисобланаётган йиғиндиларнинг тартибини алмаштирсак динамиканинг умумий тенгламаси учун

$$\sum_{j=1}^{s}\{\sum_{k=1}^{n}\mathbf{F}_k\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}+\sum_{k=1}^{n}\mathbf{F}_k^{и}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}\}\delta q_j = 0.$$

ифодани ҳосил қиламиз. Бу ерда қавс ичидаги ҳадларнинг ўлчов бирлиги энергия ўлчовини умумлашган координата q_j -нинг ўлчовига нисбатига тенг. Умумлашган кучнинг (20.27) ифодасига биноан қавс ичидаги бу икки ҳад q_j умумлашган координатага тегишли умумлашган Q_j актив куч ва умумлашган $Q_j^и$ инерция кучидир, яъни

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} = Q_j, \quad \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k^и \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} = Q_j^и. \qquad (21.1)$$

Ушбу белгилашларни қўллаб, динамиканинг умумий тенгламаси учун қуйидаги муносабатга келамиз:

$$\sum_{j=1}^{s} (Q_j + Q_j^и) \cdot \delta q_j = 0 \qquad (21.2)$$

Механик системага қўйилган боғланишлар голоном бўлганлигидан унинг эркинлик даражаси умумлашган координаталар вариациалар сони, яъни мумкин бўлган кўчишлар δq_j сони s га тенг. Умумлашган координаталар эса, таърифга кўра, мустақил, бир-бирига боғлиқ бўлмаган катталиклардир. Шу сабабдан, охирги алгебраик тенгламанинг бажарилиши учун мустақил $\delta q_j\,(j=\overline{1,s})$ катталиклар олдидаги ҳамма коэффициентлар алоҳида-алоҳида нолга тенг бўлиши талаб қилинади, яъни:

$$Q_j + Q_j^и = 0, \quad (j = \overline{1,s}) \qquad (21.3)$$

(21.3) тенглама *динамиканинг умумий тенгламасининг умумлашган кучлардаги ифодаси.* У s-та алгебраик тенгламадан иборат.

Агар механик система бошланғич пайтда мувозанатда, яъни тинч ҳолатда ёки унинг нуқталари тўғри чизиқли текис ҳаракатда ва унга таъсир қилувчи актив кучлар мувозанатлашган бўлса, унинг нуқталарининг инерция кучлари ва демак, умумлашган инерция кучлари ҳам нолга тенг бўлади:

$$Q_j^и = 0, \quad (j = \overline{1,s})$$

У ҳолда (21.3) дан қуйидаги

$$Q_j = 0, \quad (j = \overline{1,s}) \qquad (21.4)$$

мувозанат тенглама келиб чиқади. (21.4) мумкин бўлган кўчиш принципининг умумлашган кучлардаги ифодасидир. Демак, нуқталарининг бошланғич тезликлари нолга тенг ва уларга идеал, стационар, голоном боғланишлар қўйилган механик системанинг мувозанати учун унинг умумлашган координаталарига тегишли ҳамма умумлашган кучлари нолга тенг бўлиши зарур ва етарли.

(21.4) мувозанат шартларнинг сони умумлашган координаталар сонига тенг. Умумлашган координаталар орттирмалари δq_1, $\delta q_2, \ldots, \delta q_s$ ларнинг ўзаро мустақиллигига мувофиқ механик системанинг мувозанатида ҳамма актив умумлашган кучларнинг алоҳида-алоҳида нолга тенглиги зарур. Айтайлик, $Q_k \neq 0$ бўлсин. У ҳолда, механик системага унинг умумлашган координаталари $\delta q_k \neq 0$, $\delta q_1 = \delta q_2 = \ldots = \delta q_{k-1} = \delta q_{k+1} = \ldots = \delta q_s = 0$ каби орттирма оладиган мумкин бўлган кўчиш бериб,

$$\sum_{j=1}^{s} Q_j \cdot \delta q_j = 0$$

дан

$$Q_k \cdot \delta q_k = 0$$

қарама- қаршилик келиб чиқади. Чунки, мазкур мумкин бўлган кўчишда $\delta q_k \neq 0$. Демак, муқаррар равишда $Q_k = 0$ бўлиши керак. Агар голоном, идеал боғланишлар қўйилган механик системага таъсир этаётган актив кучлар консерватив, яъни потенциалли бўлса, (20.29) муносабатдан механик системанинг мувозанати учун

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0, \quad (j = \overline{1, s}) \qquad (21.5)$$

мувозанат шарт келиб чиқади.

101-§. Лагранжнинг иккинчи тур тенгламалари.

Идеал, голоном, ва бўшатмайдиган боғланишлар қўйилган механик система ҳаракатининг умумлашган координаталардаги дифференциал тенгламасини ўрганишга ўтамиз. Мустақил умумлашган координаталардаги тенгламалар *Лагражнинг иккинчи тур тенгламалари*, баъзан, шундайгина, Лагранж тенгламалари (чунки унинг биринчи тур тенгламалари деярли ишлатилмайди) дейилади. Шундай қилиб, Лагранжнинг иккинчи тур тенгламалари эркинмас механик система ҳаракатининг дифференциал тенгламаларидан иборат.

Эркинлик даражаси s-га тенг механик система n-та нуқтадан ташкил топиб, унга идеал, голоном, ва бўшатмайдиган боғланишлар қўйилган бўлсин. У ҳолда, системанинг фазодаги ҳолати s-та умумлашган координаталар $q_1, q_2, ..., q_s$ билан бир қийматли равишда аниқланади. Механик системанинг ҳар қандай k-нчи нуқтасининг радиус вектори r_k (Декарт координаталари x_k, y_k, z_k) умумлашган координаталарнинг бир қийматли функцияси бўлади. $r_k = r_k (t, q_1, ... q_s)$; $(k = \overline{1, n})$. Масалан, боғланишлар стационар бўлганда (20.20). Ушбу нуқтанинг мумкин бўлган кўчиши нуқтанинг радиус векторининг вариацияси (20.21) каби аниқланади. Нуқталарнинг тезликлари

$$\mathbf{v}_k = \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j, \quad (k = \overline{1, n}) \qquad (21.6)$$

Бу ерда $\dot{q}_j$ - умумлашган тезлик. Агар боғланишлар стационар бўлса биринчи ҳад нолга айланади. Нуқталарнинг тезликлари умумлашган тезликларнинг чизиқли функцияси экан, чунончи, к-нчи нуқтанинг тезлигидан $\dot{q}_j$ бўйича хусусий ҳосила:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \tag{21.7}$$

га тенг.

Вақт бўйича тўла дифференциал олиш ва умумлашган координата бўйича хусусий дифференциал олиш амалларининг ўрнини ўзаро алмаштириш мумкин бўлганлиги сабабли

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{d\mathbf{r}_k}{dt}\right) = \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial q_j} \ . \tag{21.8}$$

Механик система ҳаракати билан боғлиқ масалаларни динамиканинг умумий тенгламасини бевосита қўллаш билан ечиш мумкинлигини юқорида кўриб чиққан эдик. Аммо, (21.3) даги умумлашган инерция кучни системанинг кинетик энергияси орқали ифодаласак, системанинг ҳаракат тенгламасини тузиш анча осонлашади.

Механик системанинг ихтиёрий нуқтасининг инерция кучи

$$\mathbf{F}_k^{и} = -m_k \mathbf{a}_k = -m_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt}$$

га тенг ва q_j умумлашган координатага тегишли $Q_j^{и}$ умумлашган инерция кучи (21.1) га кўра ва (21.7),(21.8) ифодаларни қўллаш билан қуйидагича аниқланади:

$$-Q''_j = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \frac{d\mathbf{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q} = \sum_{k=1}^{n} m_k [\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}) - \mathbf{v}_k \cdot \frac{d}{dt}(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j})] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} m_k [\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \dot{q}_j} - \mathbf{v}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial q_j}) = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(\sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_k^2}{2}) - \frac{\partial}{\partial q_j}(\sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_k^2}{2}) =$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

Бу ерда

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_k^2}{2}$$

механик системанинг кинетик энергияси. Демак, умумлашган инерция кучи

$$-Q_j^и = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

ифода билан аниқланади. Умумлашган инерция кучининг ушбу ифодасини динамиканинг умумий тенгламаси (21.3) га қўйиб ва умумлашган актив кучни тенгламанинг ўнг томонига кўчириб,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j = \overline{1, s}) \qquad (21.9)$$

тенгламага келамиз. (21.9) *Лангражнинг иккинчи тур тенгмалари дейилади*. (21.9) дан кўрамизки бу тенгламалар идеал, голоном ва бўшатмайдиган боғланишлар қўйилган механик системанинг умумлашган координаталардаги тенгламасидир. Ушбу тенгламалар сони механик система эркинлик даражаси (умумлашган координаталар) сонига тенг. Математик нуқтаи назардан, (21.9) вақтнинг функцияси каби изланаётган s-та мустақил умумлашган координаталарнинг иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламалари системасидан иборат.

Шундай қилиб, мустақил координаталардаги Лагранж тенгламалари одатда номаълум миқдор сифатида изланадиган боғланиш реакциялардан ҳоли. Аммо, шундай бўлишига қарамасдан боғланишларнинг механик система ҳаракатига таъсирини тўла ҳисобга олади. Умумлашган координаталар q_1, q_2,..., q_s га нисбатан s-та иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар системаси (21.9) ни интеграллаб ва бошланғич шартларга кўра интеграллаш доимийларни аниқлаб, механик системанинг умумлашган координаталардаги s-та ҳаракат тенгламалари

$$q_j = q_j(t), \quad (j = \overline{1,s}) \qquad (21.10)$$

ни аниқлаймиз. Механик система нуқталарининг Декарт координаталари (радиус вектори) (21.10) нинг бир қийматли функцияси каби ифодаланишини юқорида бир неча бор такрорлаган эдик. Ана шундай қилиб, Лагранж тенгламасини ечиш билан биз (эркинмас) механик система ҳаракати ҳақида тўла маълумотга эга бўламиз.

Механик система динамикасининг ривожланишида Лагранжнинг иккинчи тур тенгламалари ҳал қилувчи роль ўйнади ва ҳозир ҳам механиканинг кўпгина масалаларини ечишда самарали қўлланилиб келади.

Агар масаланинг шартига кўра механик системага қўйилган боғланишларнинг реакцияларини аниқлаш лозим бўлса, (21.10) аниқлангандан сўнг системага Даламбер принципи қўлланилади. Бунинг учун (21.10) орқали система нуқталарининг радиус вектори аниқланади, масалан,

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(t, q_1, \dots, q_s) = \mathbf{r}_k(t), \quad (k = \overline{1,n})$$

Бу билан биз система нуқталарининг ҳаракат қонунини (21.10) ёрдамида вектор усулда аниқлаган бўламиз. Вектор усулда ҳаракат қонуни маълум бўлгандан сўнг инерция кучларини таърифга мувофиқ аниқлаймиз:

$$F_k^u = -m_k \ddot{r}_k, \quad (k = \overline{1,n})$$

Сўнгра, Даламбер принципига асосан, номаълум реакция кучларини аниқлаймиз:

$$\mathbf{N}_k = -\mathbf{F}_k - \mathbf{F}_k^u, \quad (k = \overline{1,n})$$

Бу ерда $\mathbf{F}_k$ - системанинг к-нчи нуқтасига қўйилган актив кучларнинг тенг таъсир этувчиси.

Шундай қилиб, голоном, идеал боғланишлар қўйилган механик системанинг берилган актив кучлар $\mathbf{F}_k$ таъсиридаги ҳаракатини аниқлашда:

1. Лагранж тенгламалари (21.9) ни интеграллаб, ва масаланинг бошланғич шартларидан фойдаланиб, (21.10) ҳаракат тенгламалари, ва ҳаракат тенгламаларининг векторли ифодалари аниқланади.
2. Даламбер принципи асосида боғланишларнинг номаълум реакция кучлари топилади.

Лагранж тенгламаларини ечиш учун аввал уни (тузиш) ёзиш керак бўлади. Умумий ҳолда, Лагранж тенгламалари қуйидаги тартибда тузилади:

1) ечилаётган масалага оид расмда системага таъсир этаётган идеал боғланишлар реакцияларидан ташқари ҳамма актив кучлар, ва агар ишқаланиш кучлари бўлса, улар ҳам актив кучлар каби тасвирланади;

2) системанинг эркинлик даражаси аниқланиб, умумлашган координаталар танланади;

3) системанинг кинетик энергияси унинг умумлашган координаталари ва тезликлари орқали аниқланади;

4) системанинг умумлашган кучлари топилади;

5) Лагранжнинг иккинчи тур тенгламаси (21.9) даги амаллар бажарилади, натижада биз умумлашган координаталарга нисбатан иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламалар системасига келамиз.

Масалалар ечиш Лангранж тенгмаласини тадбиқ этиш .

Геометрик (аниқроқ, голоном) боғланишли исталган механик системанинг ҳаракатини ўрганишда Лагранж тенгламасидан фойдаланиш энг қулай йўл. Бунда тузилаётган тенгламаларнинг шакли ва сони системага қанча нуқталар ва жисмлар қатнашишига, жисмнинг қандай ҳаракат қилишига ва қайси ҳаракат (нисбий ёки абсолют) лар қаралаётганлигига боғлиқ бўлмайди. Лагранжнинг иккинчи тур тенгламасини қўллаш билан масалалар ечишда қуйидаги тартибга риоя қилиш тавсия этилади:

1. Системанинг эркинлик даражасини аниқлаш керак.

2. Координата ўқларини танлаб олиш керак.

3. Сони системанинг эркинлик даражасига тенг бўлган, бир-бирига боғлиқ бўлмаган умумлашган координаталарни танлаб олиш керак.

4. Механик системага таъсир қилувчи актив кучлар (боғланишлар идеал бўлмаса, боғланиш реакция кучлари ҳам) тасвирланади.

5. Танлаб олинган умумлашган координаталарга тегишли Q_j умумлашган кучларни топиш керак. Бу ишнинг ифодасидан топилади.

6. Кинетик энергия T ни ва потенциал энергия П ни умумлашган координаталарда ифодалаш керак.

7. Хусусий ҳосилалар:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}, \quad \frac{\partial T}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial П}{\partial q_j}, \qquad (j = \overline{1, s})$$

ни топиб, Лагранжнинг иккичи тур тенгламасига қўйиш керак.

8. Масаланинг бошланғич шартларини кўрсатиш керак.

9. Дифференциал тенгламалар системасини интеграллаб, бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимни топиш керак.

10. Системанинг ҳаракатини кинематик текшириш керак.

59-масала. 58-масаладаги кривошип-шатун механизми ҳаракатининг дифференциал тенгламаси тузилсин ва масаладаги берилган шартларга асосан кривошипнинг текис айланма ҳаракат шарти топилсин.

Ечиш. Механизм битта эркинлик даражасига эга, унинг ҳаракати битта умумлашган координата ёрдамида ифодаланади. Умумлашган координата сифатида ползун (сирпангич) нинг ҳаракат тўғри чизиғидан кривошипнинг оғиш бурчаги φ ни қабул қиламиз (203-расм).

Механизмга таъсир қилаётган актив кучлар $G_к$, $G_ш$, $G_п$ расмда кўрсатилгандек йўналган. Масаланинг шартига кўра ишқаланиш кучлари йўқ, ползунга таъсир қилаётган ён таянчларнинг реакциялари Лагранж тенгламасида қатнашмайди, чунки боғланишлар идеал деб олинган. Механизмнинг кинетик энергиясини ҳисоблаймиз. У кривошипнинг $T_к$, шатуннинг $T_ш$, ползуннинг $T_п$ кинетик энергиялари йиғиндисидан иборат бўлади:

$$T = T_к + T_ш + T_п .$$

Кривошип - ОА қўзғалмас О ўқ атрофида айланма ҳаракат қилгани учун унинг кинетик энергияси

$$T_к = \frac{1}{2} I_k \cdot \omega^2$$

га тенг бўлади. Бу ерда $I_k = m_k r^2 /3$ - қўзғалмас О ўққа нисбатан кривошипнинг инерция моменти, $\omega = \dot{\varphi}$ шу ўқ атрофида айланма ҳаракатланаётган кривошипнинг бурчак тезлиги. Умумлашган $\dot{\varphi}$ бурчак тезлик орқали кривошипнинг кинетик энергияси қуйидагига тенг

$$T_k = \frac{m}{6} r^2 \dot{\varphi}^2$$

АВ шатун текис параллел ҳаракатланади. Унинг кинетик энергиясини Кёниг теоремасига биноан аниқлаймиз:

$$T_{ш} = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I_{ш} \omega_{ш}^2$$

Бу ерда v_c *- шатун массалар маркази С нинг* тезлиги, у мумкин бўлган кўчиш чизиғи бўйлаб (СР га перпендикуляр) йўналган. С нуқтадан шатун ҳаракат текислигига перпендикуляр ўтган ўққа нисбатан шатун инерция моменти:

$$I_{ш} = \frac{1}{12} m l^2$$

га тенг. $\omega_{ш}$ - шатуннинг тезликлар оний маркази атрофида айланма ҳаракат бурчак тезлиги

$$\omega_{ш} = \frac{r\dot{\varphi}}{AP} = \frac{r\dot{\varphi} \cdot \cos\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}}$$

Шатун массалар маркази С нинг тезлигини қуйидагича ҳисобласа бўлади:

$$v_c^2 = \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2$$

Бу ерда x_c ва y_c катталиклар С нуқтанинг координаталари бўлиб, расмга кўра

$$x_c = \frac{1}{2} r \sin\varphi, \qquad y_c = r\cos\varphi + \frac{1}{2}\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}$$

га тенг. Бундан

$$\dot{x}_c = \frac{r}{2} \cos\varphi\, \dot{\varphi}, \qquad \dot{y}_c = -r\sin\varphi \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}}\right) \cdot \dot{\varphi}$$

У ҳолда С нуқтанинг тезлиги қуйидагига тенг бўлади:

$$v_c^2 = \frac{r^2 \cdot \dot{\varphi}^2}{4(l^2 - r^2 \sin^2 \varphi)}[l^2 + 3l^2 \sin^2 \varphi -$$

$$4 \sin^2 \varphi (r^2 \sin^2 \varphi - r \cos\varphi \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi})]$$

Ушбу топилган катталиклар орқали шатуннинг кинетик энергиясини аниқлаймиз:

$$T_ш = \frac{mr^2 \dot{\varphi}^2}{24(l^2 - r^2 \sin^2 \varphi)}[4l^2 + 8l^2 \sin^2 \varphi +$$

$$12 \sin^2 \varphi (r \cos\varphi \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi} - r^2 \sin^2 \varphi)]$$

Ползун B илгариланма ҳаракатланади. Шунинг учун унинг кинетик энергияси:

$$T_п = \frac{mv_п^2}{2}$$

га тенг бўлади. Бу ерда $v_п$ - ползун B нинг тезлиги, у Оу бўйлаб йўналган бўлиб, қиймати $v_п = \dot{y}_B$ га тенг, яъни:

$$v_B = |\dot{y}_B| = r \cdot \sin\varphi \left(1 + \frac{r \cdot \cos\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}} \right) \dot{\varphi} =$$

$$\frac{r \cdot \sin\varphi \, \dot{\varphi}}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}} \left(r \cdot \cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi} \right).$$

Демак, ползуннинг кинетик энергияси қуйидаги ифода орқали аниқланади:

$$T_п = \frac{mr^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi}{2(l^2 - r^2 \sin^2 \varphi)} \left(r \cdot \cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi} \right)^2.$$

Юқорида аниқланган кинетик энергияларни қўшиб, кривошип-шатун механизми учун қуйидаги кинетик энергия ифодасини топамиз:

$$T=\frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{6\left(l^2-r^2\sin^2\varphi\right)}[2l^2+2r^2\sin^2\varphi\cdot\cos2\varphi+$$

$$9r\sin^2\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}+5\sin^2\varphi\left(l^2-r^2\sin^2\varphi\right)].$$

Ёки

$$T=\frac{1}{2}I_{кл}\cdot\dot{\varphi}^2 \qquad (1)$$

Яъни кривошип-шатун механизмининг кинетик энергияси ушбу системанинг умумлашган тезлиги $\dot{\varphi}$ га тенг бурчак тезлик билан қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракат қилаётган қаттиқ жисм кинетик энергияси кўринишига келади. (1) даги коэффициент $I_{кл}$ - системанинг келтирилган инерция моменти дейилади. У бизнинг ҳолда қуйидаги ифода билан аниқланади:

$$I_{кл}=\frac{mr^2}{3(l^2-r^2\sin^2\varphi)}[2l^2+2r^2\sin^2\varphi\cdot\cos2\varphi+9r\sin^2\varphi\cdot\cos\varphi$$

$$\cdot\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}+5\sin^2\varphi(l^2-r^2\sin^2\varphi)]$$

Қаралаётган кривошип-шатун механизми учун Лагранж тенгламасини ёзишга ўтамиз. Бунинг учун, аввал, кинетик энергия T дан умумлашган тезлик бўйича хусусий ҳосилани аниқлаймиз, бунда

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=I_{кл}\cdot\dot{\varphi}$$

келиб чиқади. Ушбу хусусий ҳосиладан вақт бўйича тўла ҳосила оламиз. Бунда, системанинг келтирилган инерция моменти умумлашган координата φ нинг функцияси эканлигини эътиборга олиш керак бўлади, яъни $I_{кл}=I_{кл}(\varphi)$.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{dI_{кл}}{d\varphi}\cdot\dot{\varphi}^2 + I_{кл}\cdot\ddot{\varphi} \qquad (2)$$

Энди, кинетик энергиядан умумлашган координата бўйича хусусий ҳосила оламиз:

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi} = \frac{1}{2}\frac{dI_{кл}}{d\varphi}\dot{\varphi}^2 \qquad (3)$$

Ушбу механизм учун умумлашган кучни биз юқоридаги масалада аниқлаган эдик:

$$Q_{\varphi} = \frac{m}{2}gr\sin\varphi\frac{3r\cos\varphi + 5\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}$$

Аниқланган миқдорлар ёрдамида Лагранж тенгламасини ёзамиз:

$$I_{кл}\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}\frac{dI_{кл}}{dt}\cdot\dot{\varphi}^2 = mgr\sin\varphi\frac{3r\cos\varphi + 5\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}{2\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}} \qquad (4)$$

Ушбу (4) тенглама кривошип-шатун механизмининг ҳаракат дифференциал тенгламасидир.

Кривошип текис айланма ҳаракатланиши учун у бурчак тезланишсиз ҳаракатланиши керак, яъни $\ddot{\varphi} = 0$. У ҳолда

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{mgr\sin\varphi(3r\cos\varphi + 5\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}{3\cdot\frac{dI_{кл}}{d\varphi}\cdot\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}} = const$$

Демак, кривошип текис айланма ҳаракатланиши учун

$$\frac{mgr\sin\varphi(3r\cos\varphi+5\sqrt{l^2-r^2\varphi}}{\frac{dl_{кл}}{d\varphi}\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}}=\text{const}$$

шарт бажарилиши керак.

102-§. **Потенциалли кучлар таъсиридаги механик система учун Лагранжнинг иккинчи тур тенгламалари.**

Агар идеал, голоном, бўшатмайдиган, стационар боғланишлар қўйилган механик система нуқталарига фақат консерватив, яъни потенциалли кучлар таъсир этса системанинг умумлашган кучлари (20.29) билан аниқланади. У ҳолда, Лагранжнинг иккинчи тур тенгламалари (21.9) қуйидагича қайта ёзилади:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=-\frac{\partial П}{\partial q_j},\quad (j=\overline{1,s}) \qquad (21.11)$$

Потенциал энергия П фақат координаталарнинг функцияси бўлади ва шу сабабли у умумлашган координаталар орқали $П=П(q_1,q_2,...,q_s)$ каби ифодаланади. Потенциал энергия умумлашган тезлик $\dot{q}_j$ нинг функцияси бўлмаганлиги сабабли

$$\frac{\partial П}{\partial \dot{q}_j}=0$$

ва шунинг учун

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}=\frac{\partial(T-П)}{\partial \dot{q}_j}$$

ни ёзиш мумкин. Бу натижадан (21.11) қуйидагича кўринишга келади:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(T-П)}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial(T-П)}{\partial q_j}=0,\quad (j=\overline{1,s}) \qquad (21.12)$$

Бу ерда (Т-П) - умумлашган координаталар ва умумлашган тезликларнинг функцияси бўлиб, *Ланграж функцияси ёки кинетик потенциал* дейилади ва қуйидагича белгиланади:

$$L(q_1,q_2,\ldots,q_s;\dot{q}_1,\dot{q}_2,\ldots,\dot{q}_s)=T-\Pi$$

Ушбу белгилашга кўра (21.12) қуйидагича ёзилади:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0, \quad (j=\overline{1,s}) \qquad (21.13)$$

кўринишга келади. (21.13) тенгламалар системаси *потенциалли кучлар таъсиридаги механик система учун Лангражнинг иккинчи тур тенгламалари* дейилади.

Шуни алоҳида таъкидлаб ўтиш жоизки, Лагранжнинг (21.9) ёки (21.13) тенгламалари турли хил механик система ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини осон ёзишда кенг қўлланилади. Уни қўллашда қўшимча координаталарни ва идеал боғланишлар реакцияларини киритиш талаб қилинмайди. У ҳамма масалаларда бир хил (юқорида келтирилган) тартибда ишлатилади.

Лагранж методи, аслини айтганда, энергиявий метод бўлиб, у нафақат назарий механикада қўлланиб қолмасдан назарий физикада ҳам турли физикавий система (атом, ядро, элементар зарралар) жараёнларини математик талқин қилишда кенг қўлланилади.

103-§. Циклик координаталар ва интеграллар. Энергия интеграли.

Механик системанинг кинетик потенциали L (яъни кинетик ва потенциал энергиялар) ифодасида ошкор равишда қатнашмайдиган умумлашган координаталарга *циклик координаталар* дейилади. Масалан, m массали моддий нуқтанинг фазодаги ҳаракатида мухитнинг қаршилигини ҳисобга олмасак, кинетик, потенциал энергияси ва Лагранж функцияси (умумлашган) Декарт координаталар орқали қуйидагича ифодаланади:

$$T = \frac{1}{2} \cdot m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),\ \Pi = mgz,\ L = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

Бу ерда Oz ўқ вертикал юқорига йўналган. Лагранж функцияси ифодасида кўрамизки, унда x ва y қатнашмайди, демак, ушбу ҳол учун x ва y циклик координаталар ҳисобланади.

Агар s та умумлашган координаталарнинг k таси $q_1, q_2, \ldots, q_k$ (k<s) циклик координаталарни ташкил қилса, таърифга кўра

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0,\quad (j = \overline{1,k}) \qquad (21.14)$$

бўлади. Ушбу ҳолда (21.13) тенгламанинг k таси

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0,\quad (j = \overline{1,k}) \qquad (21.15)$$

каби тенгламага айланади. Бу тенгламаларни вақт бўйича бир марта интеграллаб, бир йўла k та биринчи интегралларга эга бўламиз:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = C_j,\quad (j = \overline{1,k}). \qquad (21.16)$$

Бу тенгликлар Лагранж тенгламаларининг биринчи интеграллари бўлиб, улар умумлашган тезликлар, умумлашган координаталар, вақт ва интеграллаш доимийларини ўзаро боғлаб туради ва *циклик интеграллар* дейилади. Юқоридаги мисолга кўра

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m\dot{x} = const \text{ ёки } \dot{x} = const,\quad \frac{\partial L}{\partial y} = m\dot{y} = const \text{ ёки } \dot{y} = const$$

Яъни нуқта ҳаракатининг горизонтал текисликдаги проекцияси текис ҳаракат бўлади. Агар $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$ бўлса, нуқта горизонтал текисликда ҳаракатсиз ҳолатда бўлади.

Умуман, $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = P_j$ - умумлашган q_j координатага тегишли *умумлашган импульс* дейилади. Циклик координаталарга тегишли умумлашган импульслар биз қараётган боғланишлар ҳолида ўзгармас бўлади. (21.16) га кўра $P_j = C_j$.

Механик системага қўйилган боғланишлар стационар бўлганлиги сабабли системанинг кинетик потенциали L ифодасида вақт ошкор равишда қатнашмайди, лекин у умумлашган тезликлар ва умумлашган координаталар орқали вақтга боғлиқ бўлади. Ана шуни эътиборга олган ҳолда кинетик потенциалдан вақт бўйича тўла ҳосила оламиз:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right)$$

Лагранж функцияси учун ёзилган Лагранж тенгламаси (21.13) дан фойдаланиб, қуйидаги алмаштириш

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

ни юқоридаги ифодага қўллаймиз:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^{s}\left(\dot{q}_j\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \ddot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{s}\dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}.$$

Ҳадларни тенгламанинг бир томонига кўчириб ва иккаласи учун вақт бўйича ҳосилани умумлаштириб,

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{s}\dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L\right) = 0$$

тенгламага келамиз. Демак, қавс ичидаги ифода доимий (ўзгармас) миқдорга тенг. Бу доимий мазкур Лагранж тенгламасининг биринчи интеграли бўлиб, *энергия интеграли* дейилади ва уни h билан белгилаймиз:

$$h = \sum_{j=1}^{s} \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L. \qquad (21.17)$$

Ҳақиқатан ҳам, биз кўраётган боғланишларнинг стационарли ҳолида (21.17) тенглама механик энергиянинг сақланиш қонунини ифодалайди. Стационар боғланишлар қўйилган механик системанинг кинетик энергиясини умумлашган тезликларнинг квадратик формаси тарзида ифодалаш мумкин ва шунинг учун:

$$\sum_{j=1}^{s} \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{j=1}^{s} \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 2T$$

ўринли бўлади. Буни эътиборга олиб (21.17) тенгликни қуйидагича ҳисоблаш мумкин

$$h = 2T\text{-}L = 2T\text{-}(T\text{-}П) = T + П$$

$$h = T + N, \qquad (21.18)$$

механик энергиянинг сақланиш қонунинг ифодасига келамиз. Демак, доимий h механик системасининг тўла механик энергиясидан иборат ва у, жумладан, механик системасининг бошланғич пайтдаги кинетик ва потенциал энергиялари йиғиндисига тенг.

XXII боб

УСТУВОР МУВОЗАНАТ ҲАҚИДА ДАСТЛАБКИ ТУШУНЧАЛАР

104-§. Устувор мувозанат.

Механик системанинг мувозанат ҳолатини унинг нуқталарига бошланғич кичик кўчиш ва бошланғич кичик тезлик бериш билан мувозанатдан чиқарилганида юз бериши мумкин бўлган ҳаракатлар ҳам характерлайди. Шунинг учун ҳам, табиийки, системанинг мувозанат шартларини аниқлашни бу мувозанатни амалга оширилиши ёки оширилмаслиги, яъни система мувозанатдан чиқарилгандан кейинги ҳаракатида яна мувозанат ҳолат яқинида қолиши ёки ундан узоқлашиши билан боғлиқ бўлган мувозанатнинг устувор ёки эмаслиги масаласи билан боғлаш мумкин. Жумладан, техниканинг кўпгина масалалари системанинг мувозанат ҳолати яқинида кичик амплитудада тебраниш ва бу кичик тебранишларнинг пайдо бўлиш сабаблари масаласи билан узвий боғланган. Бундай тебранишларга машина ва механизмларнинг, самолётларнинг, қурилмалар пойдеворининг титрашлари, ер силкинишларини ўлчовчи сейсмометр асбобнинг тебранишлари ва ҳоказо, мисол бўлаолади.

Умуман, системанинг хусусий чизиқли (кичик) тебранишлар назариясининг туб маъноси устувор мувозанат ҳолат яқинида Лагранж тенгламасини чизиқли кўринишда бўлишидан иборат. Шу сабабли, мувозанат ҳолат яқинида системанинг кичик тебранишларини ўрганиш учун, даставвал, у мувозанатда бўладиган ана шундай ҳолатларни аниқлаш керак. (Мувозанат ҳолатнинг устуворлик масаласи аслида ҳаракатнинг устуворлиги ҳақидаги масаланинг хусусий ҳолидир).

Фараз қилайлик, идеал, стационар ва голоном боғланишлар қўйилган механик системанинг ҳолати $q_1, q_2, ..., q_s$ дан иборат s-та умумлашган координаталар билан аниқлансин. Агар s-та эркинлик даражасига эга бу система қўйилган кучлар таъсирида мувозанатда бўлса, у ҳолда барча умумлашган кучлар нолга тенг:

$$Q_j = 0, \qquad (j = \overline{1, s}) \qquad (22.1)$$

Консерватив система учун бу шартлар системанинг потенциал энергиясидан умумлашган координаталар бўйича олинган хусусий ҳосилаларнинг нолга тенглигидан иборат муносабатларга айланади:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0, \quad (j = \overline{1, s}) \qquad (22.2)$$

Умумлашган кучлар фақат умумлашган координаталаргагина боғлиқ ҳолларда юқоридаги ёки пастдаги тенгламалар системасини умумлашган координаталарга нисбатан ечиб, система мувозанатда бўладиган ҳолатларнинг координаталарини аниқлаймиз. Агар умумлашган кучлар умумлашган тезликларга боғлиқ бўлса, мувозанат ҳолатнинг координаталарини аниқлашда барча умумлашган тезликлар нолга тенг деб олинади.

Механик системанинг мувозанат ҳолатлари аниқлангандан сўнг энди улардан қайси бирлари амалга *оширилиши*, *яъни* қайси мувозанат ҳолатлар системанинг устувор мувозанат ҳолатлари, қайси бирлари устувор эмас эканлигини аниқлаш керак бўлади. Масалан, горизонтал ўққа ўрнатилган физикавий маятник (тебрангич) учун иккита мувозанат ҳолат мумкин. Булар вертикал юқори ва вертикал пастки вазиятлар. Агар вертикал пастки мувозанат вазият устувор мувозанат ҳолат бўлса ва у осон амалга ошса, вертикал юқориги мувозанат ҳолат деярли амалга ошмайди, амалга ошса ҳам жуда *қийин амалга ошади*.

Умумлашган координаталарни аниқлашда айни ажратилган мувозанат ҳолатдан бошлаб ҳисоблашни қабул қилсак, яъни мувозанат ҳолатни умумлашган координаталар (q_1 ,q_2 ,...,q_s) саноқ боши деб белгиласак, мувозанат ҳолатда барча умумлашган координаталар ҳам, худди умумлашган кучлар каби, нолга тенг бўлади. Хуллас, механик системанинг мувозанат ҳолатида $q_j = 0$, $(j=\overline{1,s})$. Бирор бошланғич $t=t_0$ пайтда системага унинг барча умумлашган координаталарини ва умумлашган тезликларини қиймат жиҳатдан кичик миқдорларга ўзгартирувчи кўчиш берамиз. Системанинг шу $t=t_0$ пайтдаги бошланғич ҳолатининг умумлашган координаталари ва умумлашган тезликларини q_{j0} ва $\dot{q}_{j0}$ $(j=\overline{1,s})$ деб белгилаймиз. Энди ихтиёрий, исталганча кичик 2s та мусбат сонлар танлаймиз:

$$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_s \qquad \varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\dots,\varepsilon'_s.$$

Агар бу сонлар асосида бошқа шундай 2s-та мусбат

$$\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_s \qquad \eta'_1,\eta'_2,\dots,\eta'_s.$$

кичик сонлар танлаш мумкин бўлсаки, $t=t_0$ пайтдаги бошланғич умумлашган координаталар ва умумлашган тезликларнинг қийматлари қуйидаги

$$\left|q_{j0}\right| \le \eta_j;\ \left|\dot{q}_{j0}\right| \le \eta'_j,\ \left(j=\overline{1,s}\right) \qquad (22.3)$$

каби шартларга бўйсинувчи ҳамма кичик қўзғалишлар учун вақтнинг кейинги ҳамма $t \ge t_0$ пайтларида

$$\left|q_j(t)\right| < \varepsilon_j;\ \left|\dot{q}_j(t)\right| < \varepsilon'_j,\ \left(j=\overline{1,s}\right) \qquad (22.4)$$

шартлар бажарилса мазкур мувозанат ҳолат *устивор мувозанат ҳолат*, акс ҳолда *ноуствувор мувозанат ҳолат* дейилади.

Агар, шу билан бирга, устувор мувозанат ҳолатда барча умумлашган координаталар ва умумлашган тезликлар вақт ўтиши билан нолга интилса, яъни :

$$\lim_{t\to\infty} q_j(t) = 0; \quad \lim_{t\to\infty} \dot{q}_j(t) = 0, \ \left(j = \overline{1,s}\right)$$

у ҳолда ушбу устувор мувозанат ҳолат *асимптотик устувор* дейилади. Устувор мувозанатнинг ушбу таърифи А.М.Ляпуновнинг устувор ҳаракатга берган умумий таърифидан келиб чиқадиган хусусий ҳол каби натижадир.

105-§. Механик системанинг мувозанати ҳақида Лагранж-Дирихле теоремаси.

Идеал, стационар ва голоном боғланишли механик системанинг консерватив кучлар таъсири натижасидаги устувор мувозанат ҳолатининг белгиловчи етарли шартлар қуйидаги Лагранж-Дирихле теоремаси ёрдамида аниқланади.

Идеал, стационар голоном боғланишлар қўйилган консерватив системанинг потенциал энергияси минимумга эришадиган ажратилган мувозанат ҳолати унинг устувор мувозанат ҳолати бўлади.

Лагранж-Дирихленинг ушбу теоремасига биноан, агар потенциал энергиянинг (22.2) экстремуми унинг минимумидан иборат бўлса, у ҳолда системанинг ушбу мувозанат ҳолати устувор бўлади. Масалан, математик маятникнинг ҳамма ҳолатлари ичида вертикал энг пасткиси унинг минимал потенциал энергияга эга ҳолат ва шунинг учун унинг устувор мувозанат ҳолати бўлади. Демак,

Лагранж-Дирихле теоремасига мувофиқ консерватив система мувозанатининг устуворлигини ҳисоблаш учун айни мувозанат ҳолатда потенциал энергия минимумда эканлигига ишонч ҳосил қилиш кифоя.

Эркинлик даражаси бирга тенг система учун ушбу минимумни аниқлаш осон. Ҳақиқатан ҳам, координата боши системанинг мувозанат ҳолатида олинса, яъни мувозанат ҳолатда умумлашган координата нолга тенг бўлса ва ушбу мувозанат ҳолатда потенциал энергияни ҳам нолга тенг деб қабул қилсак (чунки, потенциал энергия ихтиёрий ўзгармасгача аниқлик билан ҳисобланади):

$$П(0) = 0,$$

ва потенциал энергиянинг минимуми унинг экстремуми эканлигидан яъни:

$$\left(\frac{\partial П}{\partial q}\right)_{q=0} = 0$$

консерватив система потенциал энергиясининг ушбу экстремумига тааллуқли мувозанат ҳолат устувор эканлигини аниқлаш учун потенциал энергиянинг минимумини ифодаловчи

$$\left(\frac{\partial^2 П}{\partial q^2}\right)_{q=0} > 0$$

шарт бажарилиши кифоя, яъни устувор мувозанат ҳолатда потенциал энергиядан умумлашган координата бўйича олинган иккинчи тартибли ҳосиласи албатта мусбат бўлиши шарт.

Бордию, $(\partial^2 П/\partial q^2)_{q=0} = 0$ бўлса, яъни иккинчи тартибли ҳосила ҳам нолга тенг ва шу сабабли у потенциал энергия минимумининг белгиси бўлаолмаса потенциал энергиянинг учинчи, тўртинчи ва ҳоказо юқори тартибли ҳосилаларини кетма-кет ҳисоблаб минимум аниқланади.

Агар юқори тартибли ҳосилаларнинг нолга тенг бўлмаган биринчиси жуфт тартибга эга ва шу билан мусбат қийматга тенг бўлса, $q=0$ да потенциал энергия минимумга эга ва системанинг ушбу $q=0$ даги мувозанат ҳолати устувор бўлади.

Агар юқори тартибли ҳосилаларнинг нолга тенг бўлмаган биринчиси тоқ тартибда бўлса, $q=0$ да максимум ҳам минимум ҳам йўқ .

Эркинлик даражаси s га тенг механик система учун Лагранж-Дирихле теоремасини қуйидаги мулоҳазалар билан исботлаймиз.

Юқоридагидек, потенциалли куч майдонидаги системанинг мувозанат ҳолатида унинг умумлашган координаталарини ва ҳамда потенциал энергиясини нолга тенг деб қабул қиламиз.

$$П(0, 0, ...,0) = 0, \quad q_i = 0, \left(i = \overline{1,s}\right)$$

Системанинг мувозанат ҳолатининг асосий белгиси эса, аввалгидек, (22.2) шарт билан ифодаланади, яъни потенциал энергиянинг экстремуми мавжуд.

Экстремумларга эга функция хусусиятига кўра умумлашган координаталар орттирмаларининг *потенциал энергия минимум соҳасига тўғри* келадиган шундай етарлича кичик ўзгариш чегараси мавжудки, бунда потенциал энергия ҳар доим мусбат бўлади. Потенциал энергиянинг минимум соҳаси

$$\left|q_i\right| \leq \varepsilon_i, \; \left(i = \overline{1,s}\right)$$

шарт билан аниқланади. Тенглик минимум соҳанинг чегарасига тўғри келади. Албатта, минимум соҳа чегарасида потенциал энергия мусбат қийматга эга бўлади. *Минимум* соҳа чегарасида потенциал энергиянинг қийматларидан энг кичигини A деб белгилайлик. Фараз қилайлик, потенциал энергия мувозанат ҳолатга яқин нуқтада аниқланган ва бунда

$$П < A$$

бажарилсин. У ҳолда, албатта, бу нуқта потенциал энергиянинг минимум соҳасида ётади. Энди системани мувозанат ҳолатдан қўзғатайлик (чиқарайлик). Вақтнинг $t>t_0$ ихтиёрий пайтида (22.4) даги ε ва ε' ларни системанинг кинетик ва потенциал энергиялари учун

$$T < \Delta(\varepsilon'), \quad П < \delta(\varepsilon)$$

шартлар бажариладиган қилиб танлаймиз. Бу ерда Δ ва δ катталиклар ε ва ε' ларнинг функцияси бўлиб, (22.4) даги ε ва ε' лар учун

$$\Delta(\varepsilon') + \delta(\varepsilon) < A$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган мусбат қийматлар. Идеал, голоном ва стационар боғланишли система учун тўла энергиянинг сақланишига кўра

$$T + П = T_0 + П_0$$

тенглик ўринли. Бу ерда, T_0, $П_0$ - система мувозанатдан чиқарилиш олди $t = t_0$ пайтдаги унинг бошланғич кинетик ва потенциал энергиялари.

(22.3) тенгсизликдаги η_i ва η_i' ларни танлаш йўли билан ҳар доим бошланғич кинетик энергияни А дан кичик бўлиши

$$T_0 = T_0\left(q_{10}, q_{20}, \ldots, q_{s0}; \dot{q}_{10}, \dot{q}_{20}, \ldots, \dot{q}_{s0}\right) < A \quad (22.5)$$

бошланғич потенциал энергияни эса

$$П_0 = П_0\left(q_{10}, q_{20}, \ldots, q_{s0}\right) < A - T_0 \qquad (22.6)$$

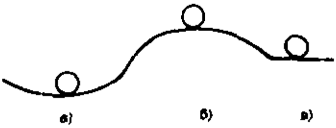
бўлишини таъминлашимиз мумкин. Бунда ҳар доим бошланғич ҳолат q_i $\left(i = \overline{1, s}\right)$ минимум соҳада ётади. Шундай қилиб, системанинг мувозанатида потенциал энергияси минимумга эга бўлса, унинг устувор мувозанат ҳолат белгилари (22.3), (22.4) шартлар амалга оширилиши мумкин экан. Бу эса мувозанат ҳолатда потенциал энергия минимумининг мавжудлик шарти устувор мувозанат ҳолатнинг етарли, белгиси эканлигини исботлайди.

Бошқача қилиб айтганда, механик система потенциал энергиясининг минимуми мавжуд бўлганда унинг координата ва тезликлари, вақтнинг $t>t_0$ даги ҳаракати пайтида, миқдор жиҳатдан, (22.4) ·каби чегараланган бошланғич шартларнинг (22.5) ва (22.6) ни қаноатлантирувчи маълум (22.3) тўпламини топиш мумкин. Бу билан консерватив система потенциал энергияси минимумга эга мувозанат ҳолатнинг устуворлиги исботланади. Демак, консерватив система потенциал энергиясининг минимумлик шарти потенциалли куч майдонидаги механик системанинг устувор мувозанатининг етарли шарти бўлади.

Лагранж-Дирихле теоремаси консерватив система устувор мувозанатининг етарли шартини аниқлайди. Лекин, потенциал энергия минимумга эга бўлмаган мувозанат ҳолат $(\partial \Pi/\partial q_i = 0)$ устувор ёки устувор эмаслиги ҳақида ҳеч қандай аниқ таъриф бермайди. Бу муҳим муаммога Ляпунов теоремалари етарлича тўла жавоб беради. Биз бу ерда Ляпунов теоремаларининг баъзиларини келтириш билан чегараланамиз.

1. *Агар умумлашган координата q_k даражаси бўйича потенциал энергия қаторининг иккинчи тартибли ҳади унинг минимумининг йўқлигини кўрсатса консерватив система мувозанати ноустувор бўлади.*

2. *Агар потенциал энергия максимумга эга бўлса ва бу максимумнинг мавжудлигини потенциал энергиянинг умумлашган координата даражаси бўйича қаторидаги юқори тартибли ҳадларнинг энг кичиги ёрдамида кўрсатиш мумкин бўлса, у ҳолда, консерватив система мувозанати ноустувор бўлади.*



204-расм

Сферик силлиқ сиртнинг ботиқ соҳасида шарчанинг мувозанати устувор мувозанатга мисол бўлади (204-расм,а). Агар шарча ушбу мувозанатдан чиқарилса у шу мувозанат ҳолатдан узоқлашмайдиган (мувозанатга яқинлашадиган) ҳаракат қилади. Потенциал энергия минимумга эга. Сферик силлиқ сиртнинг қабариқ (гумбаз) қисмида (204-расм,б) ҳам шарча мувозанат ҳолатда бўлиши мумкин (унинг оғирлиги ва сиртнинг реакция кучи ўзаро мувозанатлашган ҳолатда).

Лекин бу мувозанат ҳолат ноустувор мувозанатдир. Чунки, агар энди шарчани бу мувозанатдан чиқарсак у мувозанатдан узоқлашувчи ҳаракатланади. Бу ҳолатда потенциал энергия максимумга эга.

Силлиқ сиртнинг в) соҳасида жойлашган шарча ҳолати бефарқ ҳолатдир. Бу горизонтал текисликнинг ҳар қандай нуқтасида потенциал энергия на минимумга ва на максимумга эга бўлади.

106-§. Эркинлик даражаси битта бўлган механик системанинг устувор мувозанати яқинидаги эркин тебраниши.

Айтайлик, n та моддий нуқталардан ташкил топган, голоном ва стационар боғланишли, ҳамда битта эркинлик даражасига эга механик система берилган консерватив кучлар таъсирида ҳаракатлансин. Унинг бундай ҳаракати, маълумки, битта умумлашган координата q билан аниқланади. Одатдагидек, умумлашган координатанинг саноқ бошини системанинг устувор мувозанат ҳолатида оламиз, яъни $q=0$ да система устувор мувозанат ҳолатда бўлади.

Системанинг дифференциал тенгламасини юқорида таъкидлаган тартибда ёзамиз. Бунинг учун системанинг кинетик энергиясини умумлашган координата ва умумлашган тезлик орқали ифодалаймиз. Системага қўйилган боғланишлар голоном, стационар бўлганидан унинг нуқталарининг координаталари ёки радиус векторлари умумлашган координата q нинг бир қийматли функцияси бўлади; $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k\ (q)$. Бундан система нуқталарининг тезликлари ҳам

$$\mathbf{v}_k = \dot{\mathbf{r}}_k = \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q} \partial \dot{q}$$

каби умумлашган координата ва умумлашган тезликнинг бир қийматли функцияси эканлигини аниқлаймиз.

Энди кинетик энергия ифодасига тезликнинг ушбу ифодасини қўйиб кинетик энергиянинг қуйидаги

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k v_k^2=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} m_k\left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q}\right)^2\right]\dot{q}^2=\frac{1}{2}A(q)\dot{q}^2$$

ифодасини ҳосил қиламиз. Бу ерда

$$A=\sum_{k=1}^{n} m_k\left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q}\right)^2$$

фақат умумлашган координатанинг функцияси. У ҳар доим мусбат миқдор. $A(0) > 0$. Чунки, (мувозанат ҳолатда) .умумлашган тезлик нолга тенг бўлсагина кинетик энергия нолга тенг бўлади.

Системанинг ҳаракат дифференциал тенгламаларини аниқлаш учун ушбу масалага Лагранжнинг иккинчи тур тенгламаларини қўллаймиз. Айни ҳолда, системанинг ҳаракати иккинчи тартибли, чизиқли бўлмаган битта дифференциал тенглама билан ифодаланади. Агар системанинг устувор мувозанат ҳолати яқинидаги ҳаракати масаласини қарасак, ҳаракат дифференциал тенглама чизиқли тенглама кўринишига келади. Бунинг учун механик системага кичик қўзғолиш бериб, уни мувозанат ҳолатидан чиқарамиз ва шу бир вақтда, унга бошлангич тезлик ҳам берамиз. Механик система устувор мувозанат ҳолатда бўлганлиги сабабли у ушбу устувор мувозанат ҳолати яқинида ҳаракатланади, яъни унинг умумлашган координатаси q ва умумлашган тезлиги $\dot{q}$, модул жиҳатдан, ҳар доим кичик қийматлар бўлиб қолади. Бу ҳол системанинг ҳаракат дифференциал тенгламасини, катта аниқликда, чизиқли кўринишга келишини таъминлайди.

Юқорида айтилганларни амалга ошириш учун системанинг кинетик ва потенциал энергиясини q ва $\dot{q}$ ларнинг даражалари бўйича $q=0$

яқинида Тэйлор қаторларига ёямиз ва қаторларни иккинчи тартибли кичик миқдорларгача аниқликда оламиз. Бунинг учун, аввал, A(q) ни q=0 яқинида қаторга ёямиз:

$$A(q) = A(0) + \left(\frac{\partial A}{\partial q}\right)_0 \cdot q + \ldots$$

Системанинг кинетик энергияси T ни q гача аниқлик билан аниқлашимиз учун A(q) нинг қаторида фақат биринчи ҳадгина қолдирилади, қолганлари юқори тартибли кичик миқдорларга тўғри келади ва улар, албатта, ташланиб юборилади. Шундай қилиб, системанинг иккинчи тартибгача кичик миқдордаги кинетик энергияси учун қуйидаги ифодага келамиз:

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2, \quad a = A(0) \qquad (22.7)$$

Кинетик энергия қатъий мусбат катталик бўлганлигидан (22.7) даги коэффициент ўзгармас мусбат миқдордир. У *инерцион коэффициент* дейилади. Унинг ўлчов бирлиги $\dot{q}$ нинг бирлигига боғлиқ, жумладан, умумлашган координата $\dot{q}$ узунлик бирлигида бўлса, коэффициент масса бирлигида, агар $\dot{q}$ нинг ўлчов бирлиги радианларда бўлса, α инерция момент бирлигида ўлчанади.

Системани устувор мувозанат ҳолати q=0 атрофида унинг потенциал энергиясини қаторга ёзамиз:

$$\Pi = \Pi(0) + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right)_0 \cdot q + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_0 q^2 + \ldots$$

Потенциал энергиянинг ва унинг умумлашган координата бўйича ҳосилаларининг устувор мувозанат ҳолатдаги қийматлари 0 (индекс) билан белгиланган. Маълумки, системанинг мувозанат ҳолатида ($\partial\Pi/\partial q)_0 = 0$ бўлади. Агар, системанинг потенциал энергиясини ихтиёрий ўзгармасгача аниқлик билан аниқланишини эътиборга олиб, мувозанат ҳолатда $\Pi(0)=0$ десак ва қаторни кичик q миқдорнинг иккинчи тартибигача аниқликда олсак, системанинг устувор мувозанат ҳолати яқинида потенциал энергиясини қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$\Pi(q)=\frac{1}{2}cq^2. \qquad (22.8)$$

Бу ерда

$$c=\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q^2}\right)_{q=0},$$

квазиэластик доимий дейилади. Масаланинг шартига кўра, $q=0$ да устувор мувозанат ҳолат бўлганлиги сабабли квазиэластик доимий мусбат катталикдир.

Лагранж-Дирихле теоремасига кўра, механик системанинг потенциал энергиясининг минимум соҳасидаги ҳаракати пайтида q ва $\dot{q}$ ларининг қийматлари, агар бошланғич қийматлари тегишлича танланган бўлса, олдиндан белгиланган ва етарлича кичик бўлган соҳадан ҳеч қачон чиқмайди. Шунинг учун ҳам, агар, бошланғич пайтда $|q_0|<\eta$, $|\dot{q}_0|<\eta'$ қаноатлантирса, вақтнинг ҳар қандай кейинги пайтларида q ва $\dot{q}$ ларни кичик соҳада қолиши потенциал ва кинетик энергияларнинг чекли соҳада ўзгаришини, жумладан, катта аниқликда (22.7), (22.8) билан ифодаланишининг имконини беради.

(22.7) ва (22.8) ифодаларга эга бўлганимиздан кейин, энди Лагранжнинг иккинчи тур тенгламалари орқали система ҳаракатининг дифференциал тенгламасини ёзамиз. Бизнинг ҳол учун:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}=a\dot{q},\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}=a\ddot{q},\quad \frac{\partial T}{\partial q}=0,\quad \frac{\partial \Pi}{\partial q}=cq$$

Демак, механик системанинг ҳаракат дифференциал тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$a\ddot{q} + cq = 0 \qquad (22.9)$$

Бу тенгламани нуқтанинг, бизга яхши таниш, тўғри чизиқли эркин кичик тебранма ҳаракат тенгламаси

$$m\ddot{x} + cx = 0$$

билан солиштириб, а коэффициент, физик моҳияти бўйича, ҳақиқатан ҳам, механик системанинг инертлик хусусиятини ифодалашини, с коэффициент эса эластиклик коэффициенти эканлигини кўрамиз. $k^2 = c/a$ белгилаш киритиб, (22.9) тенгламани қуйидаги бизга яхши таниш тенглама кўринишига келтирамиз:

$$\ddot{q} + k^2 q = 0 \qquad (22.10)$$

Бу ерда, a>0 ва c>0 сабабли, к ҳақиқий сон. У системанинг частотаси деб аталади.

(22.10) тенглама механик системанинг устувор мувозанат ҳолат яқинида кичик тебранишларининг дифференциал тенгламаси дейилади. Биз юқорида, қайтарувчи (тикловчи) чизиқли куч таъсири остида моддий нуқтанинг тўғри чизиқли тебранишларини ўрганганимизда (22.10) тенглама билан танишган эдик. Унинг умумий ечимини қуйидаги икки эквивалент кўринишда ёзишимиз мумкин:

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

ёки

$$q = A \sin(kt + \alpha). \qquad (22.11)$$

Бу ечимлардаги интеграллаш ихтиёрий доимийлар C_1 ва C_2 ёки A ва α лар ҳаракатинг бошлангич шартларидан аниқланади. Агар $t=0$ да $q(0) = q_0$, $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$ га тенг бўлса улар қуйидагича аниқланади:

$$C_1 = q_0, \; C_2 = \frac{\dot{q}_0}{k}, \; A = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0}{k}\right)^2}, \; \operatorname{tg}\alpha = \frac{kq_0}{\dot{q}_0} \qquad (22.12)$$

(22.7) ва (22.8) формулаларни эътиборга олсак, тебранма ҳаракатнинг амплитудаси А ни (бошланғич пайтдаги) тўла механик энергияга пропорционал эканлигига ишонч ҳосил қилишимиз мумкин:

$$A = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0}{k}\right)^2} = \sqrt{q_0^2 + \frac{a\dot{q}_0}{c}} = \sqrt{cq_0 + a\dot{q}_0^2} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2}cq_0^2 + \frac{1}{2}a\dot{q}_0^2} =$$

$$\sqrt{2}\sqrt{T_0 + \Pi_0} = \sqrt{2}\sqrt{T + \Pi} = \sqrt{2}\sqrt{E}$$

(22.11) тенглама ҳаракат частотаси k га, даври эса

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{c}} \qquad (22.13)$$

га тенг бўлган гармоник тебранма ҳаракат тенгламасидир.

Шундай қилиб, битта эркинлик даражасига эга консерватив механик системанинг устувор мувозанат ҳолати яқинида кичик тебранма ҳаракати моддий нуқтанинг эркин тебранма ҳаракатига келар экан.

Механик системанинг эркин тебраниш частотаси ва даври ҳаракатнинг бошланғич шартларига, умумлашган координатанинг табиатига боғлиқ эмас. Частота ва давр механик системанинг асосий доимийси бўлиб, у кинетик ва потенциал энергия ифодалари таркибидан, аниқроғи, системанинг инертлик хусусиятлари ва тебранма ҳаракат содир бўлаётган консерватив куч майдони характери билан аниқланади. (22.12) га кўра, механик система тебранма ҳаракатининг амплитудаси А ва фазаси тебранма ҳаракатнинг бошланғич шартларига боғлиқ.

Энди ушбу механик система нуқталарининг қандай ҳаракатланишини қараб чиқайлик. Системанинг бирор k-нчи нуқтаси радиус вектори $\mathbf{r}_k$ (q) ни мувозанат ҳолат q=0 яқинида Тэйлор қаторига ёямиз:

$$\mathbf{r}_k(q)=\mathbf{r}_k(0)+\left(\frac{\partial\mathbf{r}_k}{\partial q}\right)_0 q+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\mathbf{r}_k}{\partial q^2}\right)_0 q^2+\ldots$$

Бу ифодадаги q ни (22.11) билан алмаштириб, биринчи тартибли кичик катталиккача аниқликда, вақтнинг ихтиёрий пайтида нуқта радиус векторининг устувор мувозанат ҳолатдаги қийматидан фарқини қуйидагича ифодалаймиз:

$$\left|\mathbf{r}_k(q)-\mathbf{r}_k(0)\right|=\left|\left(\frac{\partial\mathbf{r}_k}{\partial q}\right)_0\right| A\sin(kt+\alpha) \qquad (22.14)$$

Демак, механик системанинг нуқталари ҳам k частота ва

$$\left|\left(\frac{\partial\mathbf{r}_k}{\partial q}\right)_0\right|\cdot A$$

амплитуда билан кичик тебранма ҳаракатланади. Система нуқталарининг тебраниш амплитудаси $A\left|\left(\partial\mathbf{r}_k/\partial q\right)_0\right|$, бошлангич фазаси ҳаракатнинг бошлангич шартларига боғлиқ. Система нуқталари тебраниш амплитудасининг функционал кўринишидан ҳар хил нуқталар тебраниш амплитудаларининг нисбатлари ҳаракатнинг бошлангич шартларига боғлиқ бўлмайди. Система нуқталарининг ҳаракати вақтнинг ҳар қандай пайтида, битта $(kt+\alpha)$ фазада ва демак, ҳамма нуқталар бир вақтда мувозанат ҳолатни ўтади, бир вақтда мувозанат ҳолатдан максимал узоқликда бўлади.

Мундарижа

XII боб

Динамикага кириш

XIII боб

Моддий нуқта динамикаси

XIV боб

Механик система. Массалар геометрияси

XV боб

Механик система массалар маркази ҳаракати ҳақида теорема

XVI боб

Моддий нуқта ва механик система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақида теорема

XVII боб

Моддий нуқта ва механик система ҳаракат миқдори моментининг ўзгариши ҳақида теорема

XVIII боб

Моддий нуқта ва механик система кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақида теорема

XIX боб

Даламбер принципи

XX боб

Аналитик механикадан тушунчалар

XXI боб

Механик системанинг умумлашган координаталардаги мувозанат ва ҳаракат дифференциал тенгламалари

XXII боб

Устувор мувозанат ҳақида дастлабки тушунчалар