

92.21.07
K-34

NAZARIY MEXANIKA
MISOL VA MASALALARDA

1-QISM

STATIKA



da, alyu +
K-24

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI
TOSHKENT ARHITEKTURA QURILISH INSTITUTI

K. KENJAYEV

NAZARIY MEXANIKA

Misol va masalalarda

I qism

STATIKA

*Cho'pon nomidagi nashriyot-matbaa ijodiy uyi
Toshkent – 2018*

UDK 531.1(075)

BBK 22.21ya7

K 37

O'quv qo'llanma O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining 2017-yil 24-avgustdagi 603-sonli buyrug'iga asosan 5340200 «Bino va inshootlar qurilishi (sanoat va fuqaro binolari) ta'lim yo'nalishining talabalari uchun o'quv qo'llanma sifatida tavsiya etilgan.

Taqrizchilar:

A.T. Mamadalimov — O'zFA akademigi, Abu Rayhon Beruniy nomidagi O'zbekiston Davlat mukofoti sovrindori, f.m.f.d.,
Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti professori;
D. Matrasulov — f.m.f.d., Toshkent shahridagi Turin politexnika universiteti professori

Mas'ul muharrir: Sh.A. Rahimova

Kenjayev, K.

K 37 Nazariy mexanika misol va masalalarda. I qism. Statika [Matn] o'quv qo'llanma K. Kenjayev/Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi. — T.: Cho'pon nomidagi NMIU, 2018. — 304 b.
ISBN 978-9943-5379-9-6

O'quv qo'llanmada «Nazariy mexanika» fani «Statika» bo'limining kesishuvchi kuchlar, kuchning momenti va juft kuchlar nazariyasi, tekislikda va fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar tizimi, parallel kuchlar tizimi, og'irlik markazi mavzulari bo'yicha nazariy ma'lumotlar, masalalar yechish tartibi, namunalari va mustaqil ishlash uchun keyslari, muammolar, ko'p variantli masalalar taqdim etilgan.

O'quv qo'llanmani tuzishda: J.L. Meriam, L.G. Kraige «Engineering mechanics statics» (2007), R.C. Hibbeler «Statics and Dynamics» (2013), Vasile Szolga «Theoretical mechanics» (2010), R.S. Khurmim, «Engineering mechanics» (2011) kabi xorijiy adabiyotlardan foydalanildi.

O'quv qo'llanma TAQI o'quv ishlari bo'yicha prorektori tomonidan 2015-yil 26-iyulda tasdiqlangan «Nazariy mexanika» fani bo'yicha ishchi o'quv dasturi asosida tuzilgan.

UDK 531.1(075)

BBK 22.21ya7

*Padari buzrukvorim
Oxunjonov Kenjaning
yorqin xotirasiga bag'ishlayman*

SO‘Z BOSHI

«Nazariy mexanika» fundamental fan bo‘lib, uning qonun-qoidalari ko‘p sohalar bo‘yicha muhandislik masalalarini yechishda keng qo‘llanilib kelinadi.

«Nazariy mexanika» fanining «Statika» bo‘limi «Bino va inshootlar qurilishi» yo‘nalishi bo‘yicha ta‘lim oluvchi talabalar uchun «Materiallar qarshiligi», «Qurilish mexanikasi» va boshqa qator maxsus fanlarni o‘rganishda nazariy va amaliy asos bo‘lib xizmat qiladi.

Mazkur fanni chuqurroq o‘rganish bo‘lajak mutaxassislarning kasbiy faoliyatda hal etishi lozim bo‘lgan masalalarni har tomonlama texnik-iqtisodiy va konstruktiv tahlil qilish yo‘li bilan yechish, loyiha-lash, qurish hamda undan foydalanishga safarbar eta olish malakalariga ega bo‘lishini ta‘minlashda muhim ahamiyat kasb etadi.

Ushbu o‘quv qo‘llanma talabalarda «Nazariy mexanika» fanini chuqurroq o‘rganishga qiziqish uyg‘otish maqsadida tuzilgan bo‘lib, uni yozishda rivojlangan xorijiy mamlakatlar ta‘lim texnologiyasidan, darslik va o‘quv qo‘llanmalaridan keng foydalanilgan. O‘quv qo‘llanmada mavzular bo‘yicha qisqa nazariy ma‘lumotlar, masalalar yechish tartibi, namunalari va mustaqil ishlash uchun keyslar, muammolar, hisob chizma ishlari mavzulari bo‘yicha ko‘p variantli masalalar taqdim etilgan.

O‘quv qo‘llanma o‘zining tuzilishi va mazmuniga ko‘ra, talabalarining o‘z bilimlarini mustaqil ravishda mustahkamlashlarida, amaliy mashg‘ulotlar jarayonida qisqa vaqt ichida reyting nazoratlarini o‘tkazishda qo‘shimcha vosita bo‘lib xizmat qilishga qaratilgan.

Qo‘llanma qo‘lyozmasini o‘qib chiqib, undagi kamchiliklarni tuzatishdagi qimmatli maslahatlari uchun texnika fanlari doktori prof. T.M. Mavlonovga, prof. Q.S. Abdurashidovga, Toshkent Arxitek-

tura qurilish instituti «Qurilish mexanikasi va inshootlar zilzilabardoshligi» kafedrası mudiri, texnika fanlari nomzodi Z.S. Shadmanovaga, fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent S.A. Abduqodirovga hamda qo'llanma qo'lyozmasini tayyorlashda beg'araz yordamini ayamagani uchun muhandis-quruvchi Nurbek Xatamovga muallif o'zining chuqur tashakkurini izhor etadi.

O'quv qo'llanmani mazmunan boyitish, foydalanish samaradorligini oshirish, kamchiliklarni bartaraf etish bo'yicha bildirilgan taklif va mulohazalar uchun muallif kitobxonlarga o'z minnatdorchiligini bildiradi.

KIRISH

Moddiy jismlarning o'zaro ta'siri va mexanik harakati o'rganiladigan bir qator fanlar mexanika nomi bilan bog'liqdir. «Mexanika» fanlari turkumiga kiruvchi «Nazariy mexanika» fani texnika oliy o'quv yurtlarida boshqa ta'lim sohalari qatorida «Arxitektura va qurilish» ta'lim sohasiga tegishli deyarli barcha ta'lim yo'nalishlarida o'qitiladigan mutaxassislik fanlarining nazariy va amaliy asosi bo'lib xizmat qiladi. Bunday fanlar qatoriga materiallar qarshiligi, qurilish mexanikasi va boshqa qator fanlar kiradi.

Nazariy mexanika moddiy jismlarning bir-biriga mexanik ta'siri va mexanik harakatning umumiy qonunlari haqidagi fandır. Vaqt o'tishi bilan moddiy jismlarning bir-birlariga nisbatan ko'chishiga *mexanik harakat* deyiladi.

Mexanikada moddiy jismlar o'zaro ta'sirining miqdoriy o'lchoviga kuch deyiladi. Yaqin vaqtgacha nazariy mexanikada, asosan, sayyoralarning o'zaro tortilish kuchi, muhit (tuproq, havo yoki suv)ning qarshilik kuchi, suyuqlik yoki gazning bosimi, jismlarning bir-biriga tegib turadigan sirtida hosil bo'ladigan kuchlar kabi mexanik tabiatga ega bo'lgan kuchlar ta'siridagi harakatlar tekshiriladi.

Hozir yadro energetikasi, kosmonavtika va elektronikaning rivojlanishi natijasida mexanikada turlicha fizik tabiatga xos: elektromagnit, issiqlik, yorug'lik va kimyoviy xususiyatlarga ega bo'lgan kuchlar ta'siridagi sistemalarning harakatini o'rganishda oid masalalar qo'yilmoqda.

Mexanikada mazkur kuchlarning miqdoriy o'zgarishigina asosiy ahamiyatga ega bo'lib, ularning fizik tabiati o'rganilmaydi.

Jismning barcha xossalarni hisobga olgan holda sodir bo'ladigan mexanik hodisalarni nazariy va amaliy jihatdan tekshirish ancha murakkabdır. Shu sababli masalaning qanday qo'yilishiga

qarab, mexanikada jismning ayrim xususiyatlari e'tiborga olinmaydi. Masalan, jism deformatsiyalanishini e'tiborga olmay, absolut qattiq jism tushunchasi kiritiladi. Xuddi shuningdek, moddiy nuqta, ideal suyuqlik kabi tushunchalar ham soddalashtirilgan modelga taalluqlidir. Mexanikada bunday abstrakt usuldan keng foydalaniladi.

Nazariy mexanikaning asosiy qonunlari ham kuzatish va amaliyot natijalariga asoslanadi va u hayotiy zaruriyat tufayli yuzaga kelgan.

Biz o'rganadigan nazariy mexanika Galiley-Nyuton qonunlariga asoslangan bo'lib, odatda, *klassik mexanika* deb ataladi. Klassik mexanikada vaqt va fazo jismlarning harakatiga bog'liq emas deb qaraladi. Shuningdek, jismning massasi uning tezligiga bog'liq bo'lmagan o'zgarmas miqdor deb qaraladi.

Mexanikaga doir dastlabki ilmiy asarlarni qadimgi yunon olimlari yozganlar. Jumladan, miloddan avvalgi 287–212-yillarda yashagan Arximed jismlarning muvozanati va og'irlik markazini aniqlagan, shuningdek, suvda suzadigan jismlarning muvozanatiga oid nazariyalarni ishlab chiqqan.

Mexanikaning rivojlanishida Sharq olimlari olib borgan ilmiy ishlar alohida o'rinni egallaydi. Abu Rayhon Beruniy (973–1048), Abu Ali ibn Sino (980–1037), Muhammad Tarag'ay Ulug'bek (1394–1449) kabi mutafakkirlar ana shular jumlasidandir. Ular matematika va astronomiya bo'yicha qator ilmiy ishlarning mualliflari bo'lishlari bilan birga, mexanikaga ham munosib hissalarini qo'shganlar.

Beruniy va Ibn Sino asarlarida, umuman, harakat (shu jumladan, mexanik harakat) hamda sayyoralarning harakati haqida ajoyib fikrlar bayon etilgan. Ibn Sino ta'rifiga ko'ra, jism holatining o'zgarib borishi harakatni ifodalaydi; jismlarning fazodagi harakati (mexanik harakat) esa bu harakatning xususiy holdir. Ulug'bek sayyoralar harakatini, jumladan, Quyosh va Oyning harakatini katta aniqlikda hisoblay olgan.

Italiyalik olim Galileo Galiley (1564–1642) inersiya qonunini kashf etgan. Bundan tashqari, Galiley o'zi o'tkazgan tajribalar asosida jismning og'ma tekislikdagi harakati, gorizontga ma'lum burchak

otida otilgan jismning harakati, erkin tushish haqidagi qonunlarni kashf qilgan.

Mexanikaning asosiy qonunlarini 1687-yilda mashhur ingliz olimi Isaac Nyuton (1643–1727) kashf etgan. Nyutonning «Butun olam tortilish qonuni» mexanikada alohida o‘rin egallaydi. Nyuton qonunlari hozirgi kunda ham o‘z aktualligini yo‘qotmagan.

Mexanika fanining rivojlanishiga katta hissa qo‘shgan rus olimlaridan M.V. Ostrogradskiy (1801–1862) analitik mexanika sohasidagi ilmiy ishlari bilan shuhrat qozongan; P.L. Chebishev (1821–1891) mashina va mexanizmlar nazariyasiga asos solgan; S.V. Kovalevskaya (1850–1891) qo‘zg‘almas nuqta atrofida aylanuvchi qattiq jism tenglamalarini integrallash sohasidagi ilmiy ishlari bilan nom chiqargan; N.Y. Jukovskiy (1847–1921) aerodinamikaning rivojlanishida muhim ahamiyatga ega bo‘lgan qator asarlarining muallifi, «rus aviatsiyasining otasidir»; K.E. Siolkovskiy (1857–1935) raketa nazariyasi va suyuq yonilg‘ida ishlaydigan raketa dvigateli nazariyasiga asos solgan; I.V. Meshcherskiy (1859–1935) asarlari o‘zgaruvchan massali jismlarning harakati, reaktiv texnika va osmon mexanikasining qator muammolarini hal qilishda ilmiy asos bo‘ldi; S.A. Chaplignin (1869–1942) aerodinamika hamda bog‘lanishdagi mexanik sistemalarning harakatini tekshirish sohasidagi ilmiy ishlari bilan mashhurdir; A.N. Krilov (1863–1945) kemalarning ustivor harakati va tashqi ballistikaga oid muhim ilmiy ishlari bilan tanilgan; S.P. Korolev (1906–1966) rahbarligida ballistik va geofizik raketalar, Yerning sun‘iy yo‘ldoshlari, «Vostok», «Vosxod» kosmik kemalar yaratilgan; M.B. Keldishning (1911–1978) aerogidrodinamika, tebranishlar nazariyasi va kosmonavtika sohalaridagi tadqiqotlari alohida ahamiyatga ega.

Mexanika fanining rivojlanishiga ulkan hissa qo‘shgan o‘zbek olimlaridan M.T. O‘rozboyev (1906–1972) ip mexanikasi va inshootlarning seysmik mustahkamligi nazariyasiga oid qator ilmiy ishlarning muallifidir; X.A. Raxmatullin (1909–1988) inshootlar zaminini hisoblashda va ularni loyihalashda qator tadqiqotlar olib borgan bo‘lsa, V.Q. Qobulovning tutash muhitlar mexanikasi masalalarini algoritmash, avtomatik boshqarish sistemalarini yaratish sohasidagi ilmiy ishlari muhim amaliy ahamiyatga ega.

«Nazariy mexanika» fani uch qisimdan iborat: *statika*, *kinematika* va *dinamika*.

Statika moddiy jismlar muvozanatiga oid qonunlarni o'rganadi. Statikada kuchlarni qo'shish, ayirish, boshqa ekvivalent kuchlar bilan almashtirish masalalari keng yoritiladi. Kesuvchi, tekislik va fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanati, jismlarning og'irlik markazini aniqlash masalalari keng o'rganiladi.

Kinematika jism harakati qonunlarini ana shu harakatni vujudga keltiruvchi yoki o'zgartiruvchi sababga bog'lamay tekshiradi. Bundan ko'rinadiki, kinematika jism harakatini faqat geometrik nuqtayi nazardan tekshiradi, ya'ni u harakatni vujudga keltiruvchi sababga e'tibor bermaydi.

Shuning uchun kinematikani to'rt o'lchovli geometriya deb atash mumkin. Bunda uchta fazoviy o'zgaruvchilarga *vaqt* ham qo'shiladi.

Dinamika jismlar harakatini bu harakatni vujudga keltiruvchi, o'zgartiruvchi sababga bog'lab tekshiradi.

Dinamikada uning asosiy tushunchalari, qonunlari, ikki asosiy masalalari, nuqtaning tebranma harakati bayon etiladi. Moddiy nuqta, mexanik sistema uchun dinamikaning umumiy teoremlari, analitik mexanika asoslari va boshqa qator masalalar batafsil o'rganiladi.

QATTIQ JISM STATIKASINING ASOSIY TUSHUNCHALARI VA AKSIOMALARI

1-§. Statikaning asosiy tushunchalari

Qadimgi yunon olimi Arximed statikaning asoschilaridan biri hisoblanadi. U parallel kuchlar ta'siridagi richagning muvozanati, jismlarning og'irlik markazini aniqlash nazariyasini yaratish bilan birga, gidrostatikaga ham asos solgan. Geometrik statikaning rivojlanishiga fransuz olimlari P. Varinyon (1654–1722) va L. Puanso (1777–1859) katta hissa qo'shdilar.

Analitik statikaning asoschisi J. Lagranj hisoblanadi. Statikaning aksiomatik metodlarini rivojlantirishda rus olimlari N.Y. Jukovskiy va S.A. Chaplignlarning roli kattadir.

Nazariy mexanikaning statika bo'limida moddiy jismlarning muvozanati, ularga qo'yilgan kuchlarni qo'shish, ayirish va kuchlarni ta'sir jihatdan teng bo'lgan boshqa ekvivalent kuchlar sistemasi bilan almashtirish masalalari o'rganiladi.

Statikaning asosiy tushunchalari quyidagilardan iborat:

1. Moddiy nuqta. Harakati yoki muvozanati o'rganilayotgan jismning o'lchamlari va shaklini e'tiborga olmaslik, massasini bir nuqtada joylashgan deb tasavvur qilish mumkin bo'lgan jism moddiy nuqta deyiladi.

2. Absolut qattiq jism. Agar jismning ixtiyoriy ikki nuqtasi orasidagi masofa doimo o'zgarmas holda qolsa, bunday jism absolut qattiq jism deyiladi.

Nazariy mexanikada barcha jismlar absolut qattiq deb qabul qilinadi, ya'ni jismlar harakat davomida yoki muvozanat holatida o'zining geometrik shaklini o'zgartirmaydi deb faraz qilinadi.

Aslida esa tabiatdagi barcha qattiq jismlar ularga ko'rsatilgan tashqi ta'sirlar (kuchlar) natijasida o'zlarining geometrik shakllarini ma'lum miqdorda o'zgartiradilar. Bunday o'zgarishlar jismning egilishi, siqilishi, buralishi, cho'zilishi, qiyshayishi bo'lishi mumkin va

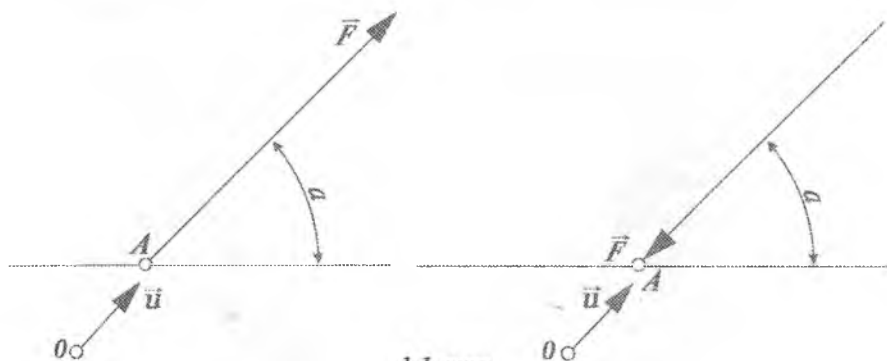
ular jismning deformatsiyalanishi deyiladi. Jismning deformatsiyalanishi uning qaysi moddadan tarkib topganiga, shakliga temperaturasiga va ularga ta'sir etayotgan kuchlarga bog'liq bo'ladi. Inshootlarni qurishda, mashina va mexanizmlarni konstruksiyalashda ularning mustahkamligini ta'minlash maqsadida bunday deformatsiyalar iloji boricha sezilarli bo'lmagan miqdorda bo'lishini ko'zda tutish zarur hisoblanadi.

Shu sababli qattiq jismlarning harakati yoki muvozanatini o'rganishga, sezilarli bo'lmagan miqdordagi deformatsiyalarni e'tiborga olmaslik qoida sifatida qabul qilinib, ular deformatsiyalanmaydigan yoki absolut qattiq jism deb hisoblanadi. Statika masalalarini yechishda barcha jismlarni absolut qattiq deb qarash uning harakati o'rganilishini soddalashtiradi.

3. Kuch. Bir jismning ikkinchi jismga ko'rsatadigan mexanik ta'sirini ifodalovchi kattalik kuch deb ataladi. Kuch vektor kattalik bo'lib, moduli (son qiymati), yo'nalishi va quyilish nuqtasi bilan xarakterlanadi.

Kuchning moduli, birlik sifatida qabul qilingan (etalon) qiymatga solishtirish orqali aniqlanadi.

Texnik birliklar sistemasi deb ataluvchi MKGSS birliklar sistemasida kuch birligi uchun 1 kilogramm-kuch (1 kgk), xalqaro (SI) birliklari sistemasida. 1 Nyuton (1 N) qabul qilingan; bunda $1 \text{ kgk} = 9,81 \text{ N}$, $1 \text{ N} = 0,102 \text{ kgk}$. Kuchlarni statik o'lchashda dinamometr (kuch o'lchagich) nomli fizik o'lchov asbobidan foydalaniladi.

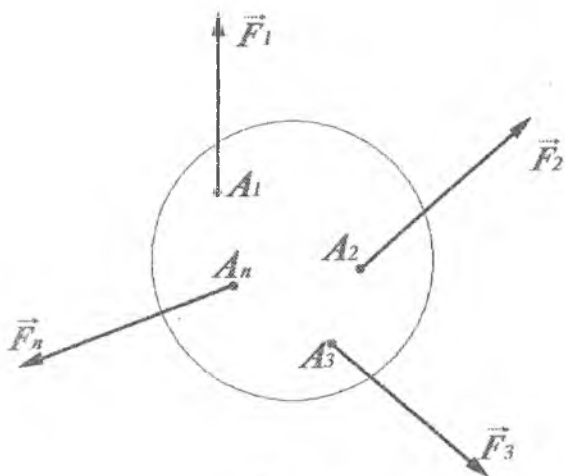


1.1-rasm

1.1-rasmida \vec{F} orqali kuch vektori tasvirlangan, A nuqta — kuchning jismga qo'yilgan nuqtasi, F kuchning ta'sir chizig'i, \vec{u} kuchning birlik vektori. Kuch quyidagicha ifodalanadi:

$$\vec{F} = \pm \vec{u}F.$$

4. Agar bir vaqtda jismga bir nechta kuch ta'sir etsa, ular kuchlar sistemasi deb ataladi. Agar barcha ($\vec{F}_1 + \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) kuchlarning ta'sir chiziqlari bir nuqtadan o'tsa, ular kesishuvchi kuchlar sistemasi deyiladi. Agarda kuchlarning ta'sir chiziqlari bir tekislikda yotsa, bunday kuchlar tekislikda yotgan kuchlar sistemasi deyiladi. Agarda barcha kuchlarning ta'sir chiziqlari bir tekislikda yotmasa, bunday kuchlar fazoviy kuchlar sistemasi deb ataladi. Agar kuchlarning ta'sir chiziqlari o'zaro parallel bo'lsa, bunday kuchlar parallel kuchlar sistemasi deb ataladi. Kuchlar sistemasi shaklda quyidagicha belgilanadi (1.2-rasm).



1.2-rasm

5. **Teng ta'sir etuvchi kuch.** Kuchlar sistemasining jismga ta'sirini yolg'iz bir kuch bera olsa, bunday kuchga mazkur kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi deyiladi. Jismga qo'yilgan

$(\vec{F}_1 + \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisini \vec{R} bilan belgilasak, u quyidagicha yoziladi:

$$(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) \Leftrightarrow \vec{R}.$$

6. Ekvivalent kuchlar sistemasi. Jismga qo'yilgan $(\vec{F}_1 + \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$

kuchlar sistemasining ta'sirini boshqa $(\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2, \dots, \vec{Q}_n)$ kuchlar sistemasi bera olsa, bunday kuchlar sistemasi ekvivalent sistema deb ataladi va quyidagicha ifodalanadi:

$$(\vec{F}_1 + \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \Leftrightarrow (\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2, \dots, \vec{Q}_n).$$

7. Muvozanatlashgan kuchlar sistemasi. Muvozanat holati deb biror jismning boshqa jismga nisbatan tinch holatiga, masalan, yerga nisbatan harakatsiz holatiga aytiladi.

Tinch holatda bo'lgan jism unga qo'yilgan $(\vec{F}_1 + \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ kuchlar sistemasi ta'sirida ham tinch holatda qolsa, bunday kuchlar sistemasi muvozanatlashgan kuchlar sistemasi deyiladi. Muvozanatlashgan kuchlar sistemasi nolga ekvivalent bo'ladi va quyidagicha ifodalanadi:

$$(\vec{F}_1 + \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \Leftrightarrow 0.$$

8. Erkin jism. Boshqa jismlar bilan birlashtirilmagan yoki fazoda istalgan tomonga harakatlana oladigan, ixtiyoriy vaziyatni egallashi mumkin bo'lgan jism erkin jism deyiladi (masalan, ichiga yengil gaz to'ldirilgan sharning havodagi harakati).

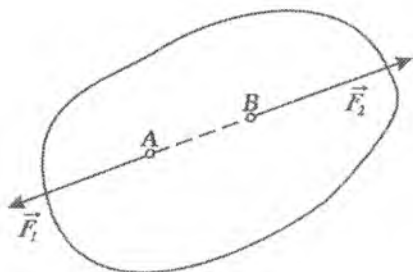
9. Sanoq sistemasi. Berilgan jismning vaziyati (o'rni) boshqa biror jism bilan bog'langan koordinata o'qlari sistemasiga nisbatan aniqlanadi. Bunday koordinatalar sistemasi sanoq sistemasi deyiladi. Bunda vaqt o'tishi ham e'tiborga olinadi. Statikada jismning harakati yoki muvozanati Yer bilan bog'langan sanoq sistemasiga nisbatan o'rganiladi.

2-§. Statikaning asosiy aksiomalari

Statikada jismga yoki o'zaro ta'sirda bo'lgan jismlarga ta'sir etuvchi kuchlar haqidagi umumiy qonunlar insoniyat tarixida tajriba va kuzatishlar yordamida aniqlangan quyidagi aksiomalar tarzida ifodalanadi.

Birinchi aksioma — Ikki kuchning o'zaro muvozanatlashishi aksiomasi.

Erkin absolut qattiq jismga qo'yilgan ikki kuch muvozanatlashishi uchun bu kuchlar miqdor jihatdan teng bo'lib, kuchlar qo'yilgan nuqtalarni birlashtiruvchi to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonlarga yo'nalgan bo'lishi zarur va yetarlidir (2.1-rasm).



2.1-rasm

Bunday ikki kuch nollik sistemani tashkil etadi:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \Leftrightarrow 0.$$

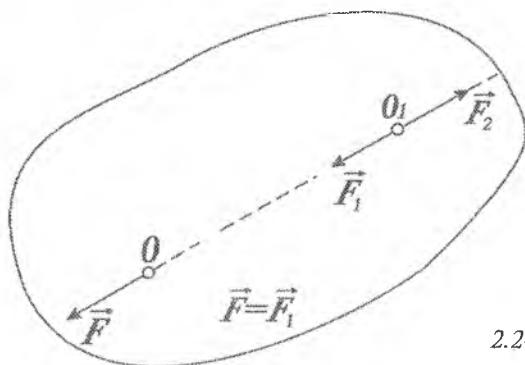
1-aksioma eng sodda muvozanatlashgan kuchlar sistemasini ifodalaydi, chunki erkin jism, tajribalarning ko'rsatishicha, bitta kuch ta'sirida muvozanatda bo'la olmaydi.

Ikkinchi aksioma — Muvozanatlashuvchi kuchlarni qo'shish yoki ayirish aksiomasi

Absolut qattiq jismga ta'sir etuvchi kuchlar sistemasini qatoriga o'zaro muvozanatlashuvchi kuchlar sistemasini qo'shsak yoki undan ayirsak, kuchlar sistemasining jismga ta'siri o'zgarmaydi.

Faraz qilaylik, jismning O nuqtasiga \vec{F} kuch qo'yilgan bo'lsin. Bu kuch jismga ma'lum ta'sir ko'rsatadi. Jismning O nuqtasidan o'tuvchi \vec{F} kuchning ta'sir chizig'ida O_1 nuqtani olib, shu nuqtaga

miqdorlari $F = F_1 = F_2$ bo'lgan hamda mazkur chiziqda yotuvchi $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \in O$ sistemasini qo'shamiz (2.2-rasm). Birinchi aksiomaga ko'ra $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \Leftrightarrow O$ bo'lganidan ularni tashlab yuborsak, O_1 nuqtada faqat \vec{F}_1 kuch qoladi. Natijada, jismning O nuqtasiga qo'yilgan \vec{F} kuch o'rniga, O_1 nuqtasiga qo'yilgan xuddi shunday $\vec{F} = \vec{F}_1$ kuchga ega bo'lamiz. Bu kuchning jismga ta'siri O nuqtaga qo'yilgan \vec{F} kuch ta'siri bilan bir xil bo'ladi.



2.2-rasm

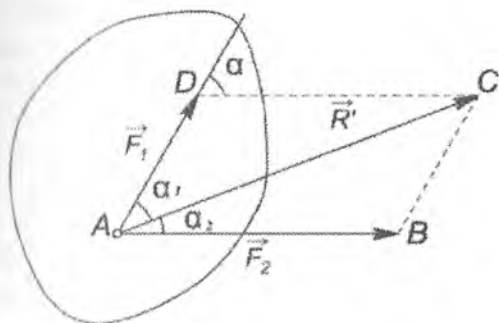
Birinchi va ikkinchi aksiomalardan quyidagi natija kelib chiqadi: kuch o'z ta'sir chizig'i bo'ylab bir nuqtadan ikkinchi nuqtaga miqdori va yo'nalishi o'zgartirilmay ko'chirilsa, uning jismga ta'siri o'zgar-maydi.

Uchinchi aksioma — Parallelogramm aksiomasi

Jismning biror nuqtasiga qo'yilgan turli yo'nalishdagi ikki kuchning teng ta'sir etuvchisi miqdor va yo'nalish jihatdan shu kuchlarga qurilgan parallelogrammning kuchlar qo'yilgan nuqtasidan o'tuvchi diagonal bilan ifodalanadi (2.3-rasm):

$$\vec{R} = \vec{F} + \vec{F}_2.$$

Jismning A nuqtasiga qo'yilgan \vec{F}_1 va \vec{F}_2 kuchlarga qurilgan parallelogramm kuchlar parallelogrammi deyiladi, kuchlarni bu usulda qo'yish esa parallelogramm usuli deb ataladi.



2.3-rasm

Teng ta'sir etuvchi kuchning moduli kosinuslar teoremasiga asosan aniqlanadi:

$$R' = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(180 - \alpha)}$$

yoki

$$R' = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}.$$

Bunda $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$.

Agar a) $\alpha = 0$ bo'lsa,

$$R' = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2} = \sqrt{(F_1 + F_2)^2} = F_1 + F_2; \quad (2.1)$$

b) $\alpha = 180^\circ$ bo'lsa,

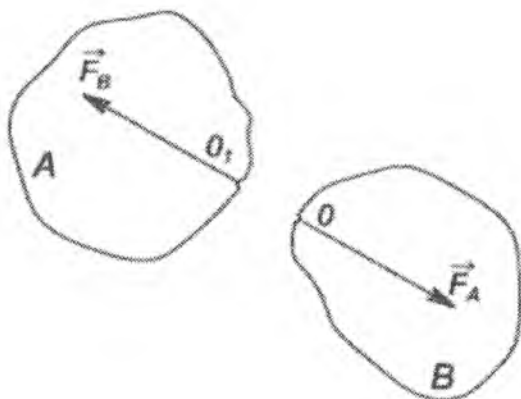
$$R' = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2} = \sqrt{(F_1 - F_2)^2} = F_1 - F_2; \quad (2.2)$$

c) $\alpha = 90^\circ$ bo'lsa,

$$R' = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \text{ bo'ladi.} \quad (2.3)$$

(2.1) va (2.2)dan ko'rinib turibdiki, bir to'g'ri chiziq bo'ylab yo'nalgan kuchlarning teng ta'sir etuvchisi ularning algebraik yig'indisiga teng bo'lar ekan.

Teng ta'sir etuvchi kuch \vec{R}' ning \vec{F}_1 va \vec{F}_2 kuchlar bilan tashkil qilgan α_1 va α_2 burchaklari sinuslar teoremasidan aniqlanadi (2.3-rasm):



2.4-rasm

$$\frac{F_1}{\sin \alpha_2} = \frac{F_2}{\sin \alpha_1} = \frac{R'}{\sin(180 - \alpha)} \quad (2.4)$$

To'rtinchi aksioma – Ta'sir va aks ta'sirning tengligi haqidagi aksioma

Ikkita jism bir-biriga miqdor jihatdan teng va bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan kuchlar bilan o'zaro ta'sir ko'rsatadi (2.4-rasm).

Masalan, A va B jismlar o'zaro ta'sirda bo'lsin (Quyosh va Yer). A jismning B jismga ko'rsatadigan \vec{F}_A ta'sir kuchi B jismning O nuqtasiga, B jismning A jismga ta'sir kuchi \vec{F}_B A jismning O_1 nuqtasiga qo'yiladi. \vec{F}_A va \vec{F}_B kuchlar miqdor jihatdan bir-biriga teng bo'lib, bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'naladi:

$$F_A = F_B, \quad \vec{F}_A = -\vec{F}_B.$$

Bu aksioma Nyutonning uchinchi qonunini ifodalaydi va tabiatda kuchlarning bir tomonlama ta'siri mavjud bo'lmashligini ta'kidlaydi. \vec{F}_A va \vec{F}_B kuchlar turli jismlarga qo'yilgan kuchlar bo'lganligi uchun o'zaro muvozanatda bo'lgan kuchlar sistemasini tashkil etmaydi.

Heshinchi aksioma — Qattiq bo‘lmagan jismlar muvozanatining saqlanishi qonuni

Ilorilgan kuchlar ta'sirida deformatsiyalanadigan jism muvozanat holatida absolut qattiq jismga aylansa, uning muvozanati o'zgarmaydi.

Bu aksiomaning mohiyati absolut qattiq jismga qo'yilgan kuchlarning muvozanat sharti deformatsiyalanadigan jismga qo'yiladigan kuchlar uchun ham o'rinli bo'lishidan iborat. Shuning uchun deformatsiyalanadigan jismlarning muvozanatiga oid (ip, zanjir, qayish, sterjen) masalalarni yechishda yuqoridagi aksiomadan foydalaniladi.

3-§. Bog'lanish va bog'lanish reaksiyalari

Qattiq jism unga ta'sir etayotgan kuchlar ta'sirida fazoning ixtiyoriy tomoniga harakat qila olsa, bunday jism erkin jism deb ataladi.

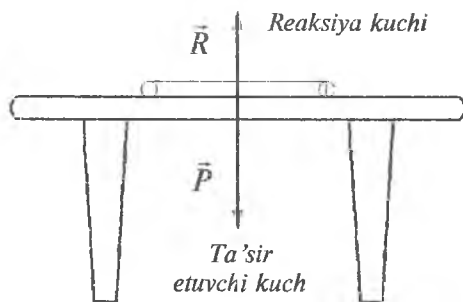
Agar jismning holati yoki harakati biror sabab bilan cheklangan bo'lsa, bunday jism bog'lanishdagi jism deyiladi. Jismning holati yoki harakatini cheklovchi sabab esa bog'lanish deyiladi. Bog'lanishning jismga ko'rsatadigan ta'siriga bog'lanish reaksiya kuchi deyiladi. Bog'lanish reaksiya kuchi bog'lanishdagi jismning harakati cheklangan tomonga teskari yo'naladi.

Bog'lanishdagi jismlarning bog'lanish reaksiya kuchlarini aniqlash statikaning asosiy masalalaridan hisoblanadi. Bu masalani yechishda bog'lanishdagi jismning harakatini yoki muvozanatini erkin jismning harakati yoki muvozanatiga keltirib tekshirish lozim bo'ladi. Bu hol quyidagi aksioma bilan ifodalanadi.

Oltinchi aksioma — Bog'lanishdagi jismni erkin jism shakliga keltirish aksiomasi

Bog'lanishdagi jismni erkin jism shakliga keltirish uchun jismga ta'sir etuvchi kuchlar qatoriga bog'lanish reaksiya kuchini ham qo'shish kerak. Bu aksioma jismni bog'lanishdan bo'shatish aksiomasi deyiladi.

Bog'lanish reaksiyasi ham vektor-kuch bo'lib, ushbu kuch faqat aks ta'sir sifatidagina mavjud bo'ladi. Agar bog'lanish olib tashlansa, uning reaksiyasi nolga teng bo'ladi (3.1-rasm).



3.1-rasm

Shuning uchun reaksiya kuchlari ko'p hollarda passiv kuchlar deb ataladi.

Bog'lanishlarning turlari juda ko'p, shunga ko'ra ularning reaksiyalari ham turlicha bo'ladi. Reaksiya kuchlarining son qiymatlari har bir masalada jismga ta'sir etayotgan kuchlar sistemasiga bog'liq ravishda aniqlanadi.

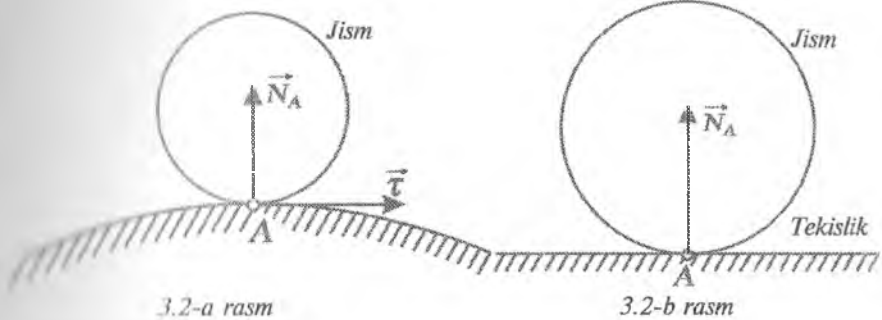
Shuning uchun bog'lanishlarning reaksiya kuchlari yo'nalishlarini aniqlash yo'llari bilan tanishib o'taylik.

Bog'lanishlarning asosiy turlari va ularning reaksiya kuchlari

I. Silliq yassi yuzadan iborat bog'lanish:

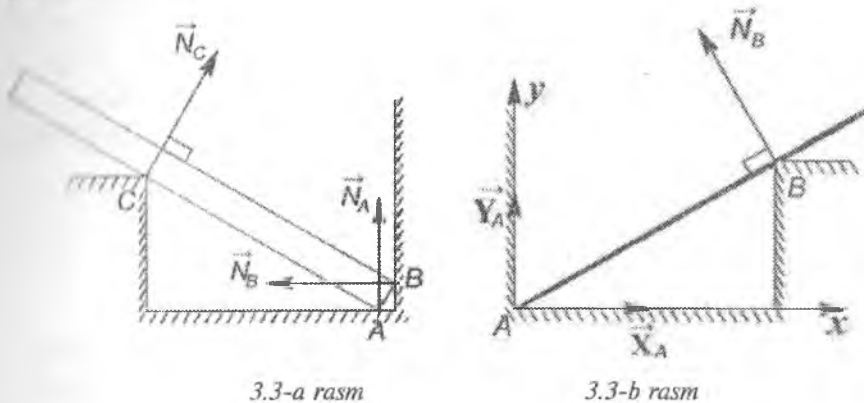
a) jism qo'zg'almas silliq sirtga A nuqtada tayanadi. Silliq sirt jismning shu sirtga o'tkazilgan normal chiziq bo'yicha harakatini cheklaydi. Bu holda sirtning reaksiya kuchi \vec{N}_A jismning A nuqtasiga qo'yilgan bo'lib, shu nuqtada sirtga yoki tekislikka o'tkazilgan urinmaga perpendikular holda yo'nalgan bo'ladi (3.2-a, b rasmlar);

b) jism tayanch tekisligiga bitta nuqtasi bilan tayangan bo'lsin. Masalan, jism (balka — tayanchlarga qo'yilgan jism) A nuqtada polga, B nuqtada vertikal devorga, C nuqtada ikki yoqli burchak qitrasiga tayanadi (3.3-a rasm). Pol va devorning reaksiya kuchlari \vec{N}_A va \vec{N}_B , A va B nuqtalarda mos ravishda pol va devorga o'tkazilgan

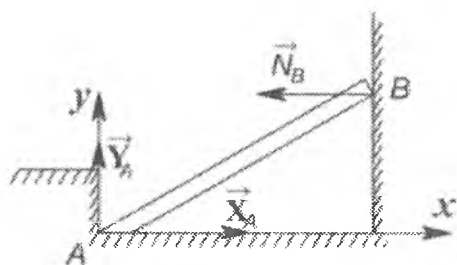


perpendikular bo'yicha yo'naladi. Ikki yoqli burchakdan tashkil topgan qirraning reaksiya kuchi \vec{N}_C C nuqtada balka sirtiga o'tkazilgan perpendikular bo'yicha yo'naladi.

Yuqoridagi misolda balkaning ko'ndalang o'lchamlari hisobga olinmasa, uni bitta A nuqtaga tayangan deb qarash mumkin (3.3-b rasm). Bunday holda reaksiya kuchi A nuqtadan o'tadi, lekin uning yo'nalishi ma'lum emas.

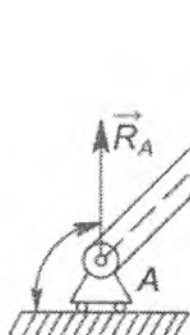


Masalani yechishda A nuqtadagi reaksiya kuchini tanlab olingan koordinata o'qlari bo'ylab yo'nalgan \vec{X}_A, \vec{Y}_A tashkil etuvchilarga ajratib, ularning qiymatlarini jismning muvozanat tenglamalaridan aniqlash lozim bo'ladi. A to'siqning reaksiya kuchlari ham xuddi shu usulda aniqlanadi (3.3-c rasm);

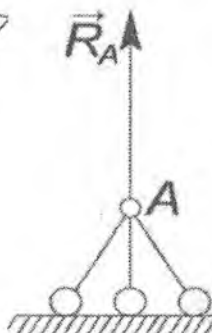


3.3-c rasm

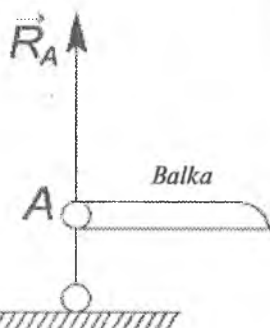
c) jism qo'zg'almas silliq sirtga g'altaklar (qo'zg'aluvchan sharnirlar) vositasida tayanib tursa, reaksiya kuchi tayanch harakatlanishi mumkin bo'lgan tekislikka o'tkazilgan perpendikular bo'yicha yo'naladi. Darsliklarda qo'zg'aluvchan sharnir uch ko'rinishda ifodalanadi (3.4-a, b, c rasmlar).



3.4-a rasm



3.4-b rasm

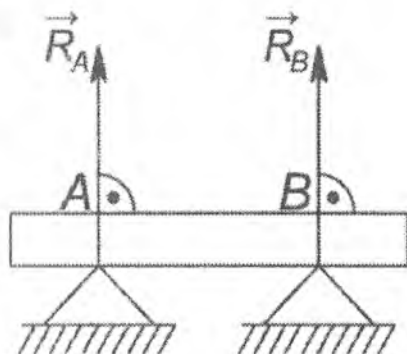


3.4-c rasm

3.5-rasmda balka A va B nuqtalarda tekislikka o'rnatilgan sharnirsiz qo'zg'almas tayanchlarga tayanib turibdi. Bunday tayanchlar reaksiya kuchlari balka yoki tayanchlar sirtiga o'tkazilgan perpendikular bo'ylab yo'naladi (3.5-rasm).

II. Sharnirli bog'lanishlar.

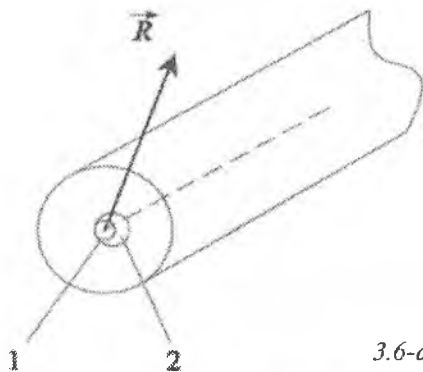
Umumiy o'q yoki nuqta atrofida aylana oladigan ikki jism orasidagi bog'lanish sharnir (zoldirli g'ildirak-podshipnik) deyiladi. Silindrik sharnir bolt (1) va kiygizilgan vtulka (2) dan iborat bo'ladi. Uning diametri jism bilan mahkam birlashtirilgan vtulkaning ichki diametri



3.5-rasm

Ulan barobar bo'ladi. Jism shakli tekisligiga perpendikular bo'lgan sharnir o'qi atrofida aylanishi mumkin (3.6-a rasm).

a) **silindrik sharnir.** Qo'zg'almas asosga o'rnatilgan silindrik sharnirning reaksiya kuchi \vec{R}_A aylanish o'qiga perpendikular bo'ladi, lekin uning miqdori va yo'nalishi oldindan ma'lum bo'lmaydi. Bunday holda reaksiya kuchi R_A koordinata o'qlari bo'ylab yo'nalgan X_A va Y_A tashkil etuvchilarga ajratiladi. Ular jismning muvozanat shartlarini ifodalovchi tenglamalardan aniqlangandan so'ng, sharnir reaksiyasining moduli



3.6-a rasm

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} \quad (3.1)$$

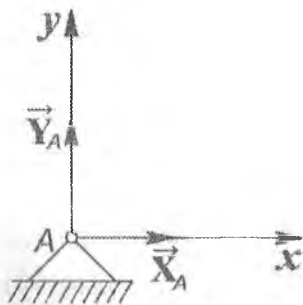
formula asosida aniqlanadi.

Sharnir reaksiyasining yoʻnalishi esa yoʻnalturuvchi kosinuslari orqali quyidagicha aniqlanadi:

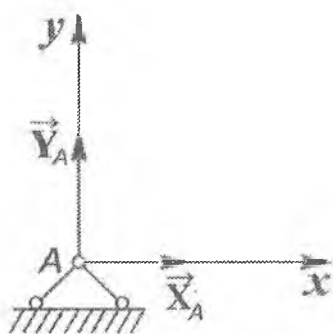
$$\cos(\vec{R}_A \hat{i}) = \frac{R_x}{R} = \frac{X_A}{R}; \quad \cos(\vec{R}_A \hat{j}) = \frac{R_y}{R} = \frac{Y_A}{R}. \quad (3.2)$$

Bunda \hat{i}, \hat{j} – koordinata oʻqlarining birlik vektorlari.

Darsliklarda koʻzgʻalmas sharnir ikki koʻrinishida ifodalanadi (3.6-b, c rasmlar);

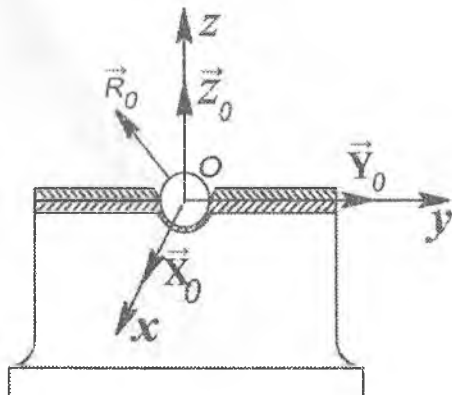


3.6-b rasm



3.6-c rasm

b) sferik sharnir. Jism sferik sharnir vositasida bogʻlangan boʻlsa (3.7-a rasm), bunday sharnir jismni oʻz markazi O nuqtadan oʻtuvchi har qanday oʻq atrofida aylanishiga imkon beradi. Sferik



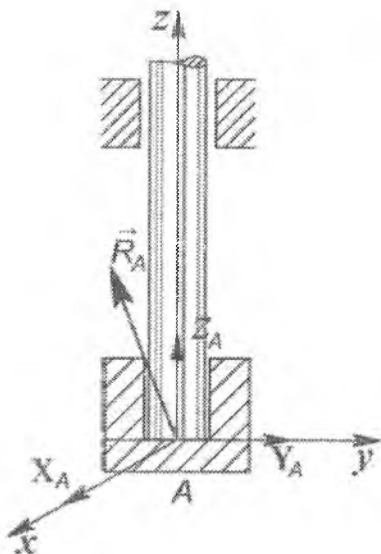
3.7-a rasm

sharnir reaksiyasi O nuqtadan o'tadi, lekin uning miqdori va yo'nalishi oldindan ma'lum bo'lmaydi.

Masalani yechishda sferik sharnir reaksiyasi \vec{R}_0 tanlab olingan koordinata o'qlari bo'ylab yo'nalgan $\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0$ tashkil etuvchilarga ajratiladi.

Ularning qiymatlari muvozanat shartini ifodalovchi muvozanat tenglamalaridan aniqlanadi. Aniqlangan $\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0$ tashkil etuvchilar qiymatlari orqali R_0 ning miqdori va yo'nalishi topiladi (3.7-a rasm).

Podpyatnik (tagtavon – tirilib turgan podshipnik) reaksiya kuchi ham xuddi shu usulda aniqlanadi (3.7-b rasm).



3.7-b rasm

$$\vec{R}_A = \vec{i}X_A + \vec{j}Y_A + \vec{k}Z_A \quad (3.2)$$

($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – lar koordinata o'qlarining birlik vektorlari).

Sferik (zoldirli) sharnirga fotoapparatlarning shtatividagi zuxbirli tutgich, inson va hayvonlarning ko'pgina suyaklarining birlashgan joylari misol bo'la oladi.

III. Vaznsiz sterjenlar vositasidagi sharnirli bog'lanish.

Uchlaridan boshqa nuqtalariga kuch qo'yilmagan, o'z og'irligi hisobga olinmaydigan sterjen vaznsiz sterjen deyiladi. Odatda, sterjenlar to'g'ri chiziqli bo'ladi.

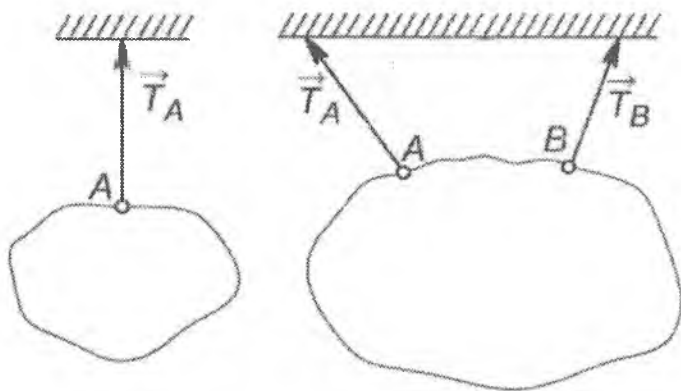
Agar jism bunday sterjenlar vositasida bog'langan bo'lsa, sterjenlarning reaksiyalari sterjenlar uchlaridagi sharnirlar o'qlari orqali o'tuvchi to'g'ri chiziqlar — sterjenlar bo'ylab ular bog'langan nuqta tomon yo'naladilar.

Agar sterjenjismga qo'yilgan kuchlar ta'sirida cho'zilsa, sterjen reaksiyasi sterjen o'qi bo'ylab jismdan sterjen mahkamlangan nuqta tomon yo'naladi.

Agar sterjen siqilsa, reaksiya kuchi sterjen o'qi bo'ylab sterjendan jism tomon yo'naladi.

IV. Ip, zanjir va qayishlar vositasidagi bog'lanishlar.

Agar jism ip, zanjir va qayishlar vositasida bog'langan bo'lsa, ularda hosil bo'ladigan \vec{T}_A , \vec{T}_B reaksiya kuchlariga taranglik kuchlari deyiladi. Taranglik kuchlari ip, zanjir, qayish bo'ylab, ular osilgan nuqta tomon yo'naladi (3.8-rasm).



3.8-rasm

Takrorlash uchun savollar:

1. Statikaning asosiy tushunchalarini ta'riflang.
2. Kuch deb nimaga aytiladi?

3. Kuchni xarakterlovchi elementlarni nomlang.
4. Kuch vektorini o'z ta'sir chizig'i bo'ylab bir nuqtadan ikkinchi nuqtaga ko'chirish mumkinmi?
5. Kuchlar sistemasi, ekvivalent kuchlar sistemasi nima?
6. Teng ta'sir etuvchi kuch, muvozanatlashgan kuchlar sistemasi nima?
7. Qanday jism erkin jism deb ataladi?
8. Kran qismlariga qo'yilgan kuchlar haqida mulohazangizni bildiring.
9. Statikaning asosiy aksiomalarini ta'riflang.
10. Bog'lanish deb nimaga aytiladi?
11. Silliqliq gorizontali tekislikdan iborat bog'lanishning reaksiyasi qanday yo'naladi?
12. Egiluvchan bog'lanishlarning (arqon, tros, ip kabilar) reaksiyalari qanday yo'naladi?
13. Silindrik sharnirdan iborat qo'zg'almas va qo'zg'aluvchan bog'lanishlarning reaksiyalari qanday yo'naladi?
14. Sferik sharnirdan iborat bog'lanishlarning reaksiyalari qanday yo'naladi?
15. Ingichka vaznsiz sterjenlardan iborat bog'lanishlarning reaksiyalari qanday yo'naladi?
16. Bog'lanishlar aksiomasi nimadan iborat?

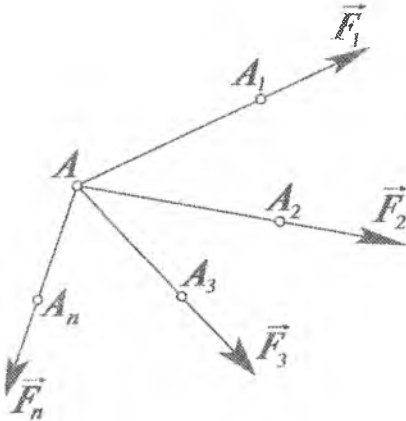
KESISHUVCHI KUHLAR SISTEMASI

4-§. Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasining ta'ri

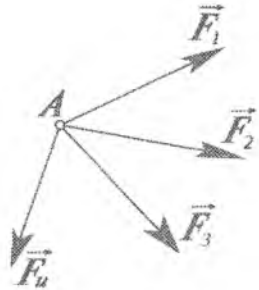
Ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishadigan kuchlar sistemasi bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi deyiladi (4.1-rasm).

Jismga qo'yilgan kuchlarni ta'sir chiziqlari bo'ylab ko'chirish mumkinligi tufayli, bir nuqtada kesishuvchi kuchlarni doimo bir nuqtaga qo'yilgan kuchlar sistemasi bilan almashtirish mumkin (4.2-rasm).

Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar, odatda, kesishuvchi kuchlar ham deyiladi.



4.1-rasm

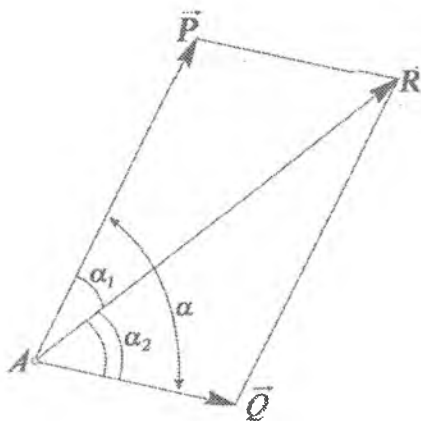


4.2-rasm

Bir nuqtada kesishuvchi kuchlarni geometrik yoki analitik usulda qo'shish mumkin.

5.1. Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisini geometrik usulda aniqlash

Ushbu nuqtaning A nuqtasiga o'zaro α burchak tashkil etuvchi \vec{P} va \vec{Q} kuchlar qo'yilgan bo'lsin. Kuchlar parallelogrammi aksiomasiga ko'ra, kuchlarning teng ta'sir etuvchisi shu kuchlarga qurilgan parallelogramning kuchlar qo'yilgan A nuqtasidan o'tuvchi diagonalini ifodalaydi (5.1-rasm). Demak, bir nuqtada qo'yilgan ikkita kuchning teng ta'sir etuvchisi shu kuchlarning geometrik yig'indisiga teng bo'lar ekan.

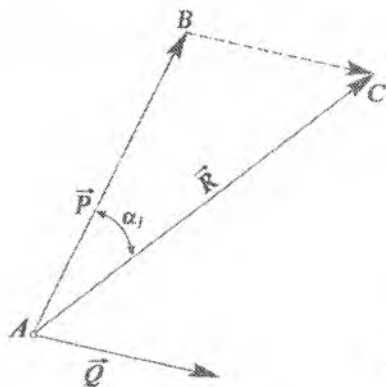


5.1-rasm

Bir nuqtada qo'yilgan ikkita kuchning teng ta'sir etuvchisini kuchlar uchburchagi usulida ham aniqlash mumkin (5.2-a rasm).

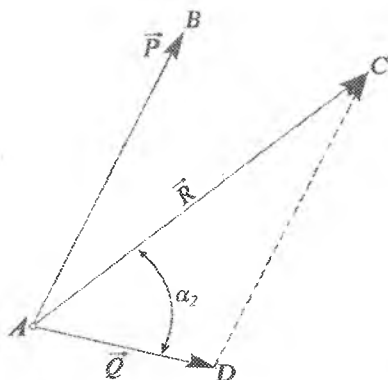
Bunda A nuqtada \vec{P} kuchni qo'yib, uning uchi B_1 nuqtada \vec{Q} kuchni o'ziga parallel holda ko'chiramiz. Birinchi kuchning boshi A va ikkinchi kuchning uchi C_1 nuqtalarni birlashtiruvchi \vec{R} vektor A nuqtada qo'yilgan ikki kuchning teng ta'sir etuvchisini ifodalaydi (5.2-a rasm). Kesishuvchi kuchlarni bu usulda qo'shish kuchlar uchburchagi usuli deyiladi.

Teng ta'sir etuvchi kuchning moduli kosinuslar teoremasiga asosan aniqlanadi.



5.2-a rasm

Xuddi shunday natijaga A nuqtaga qo'yilgan Q kuchning uchi D nuqtaga \vec{P} kuchni o'ziga parallel holda ko'chirish orqali ham erishish mumkin (5.2-b rasm).



5.2-b rasm

Bunday holda:

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}. \quad (5.1)$$

Teng ta'sir etuvchi \vec{R} kuchning moduli quyidagi formula asosida aniqlanadi:

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ \cos(180^\circ - \alpha)} \quad (5.2)$$

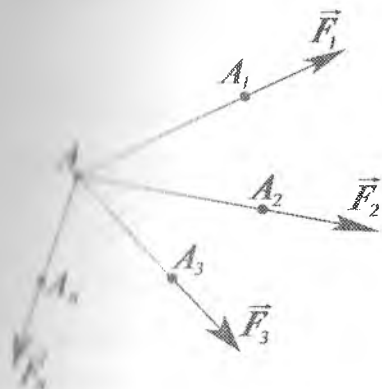
yoki

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos a}. \quad (5.3)$$

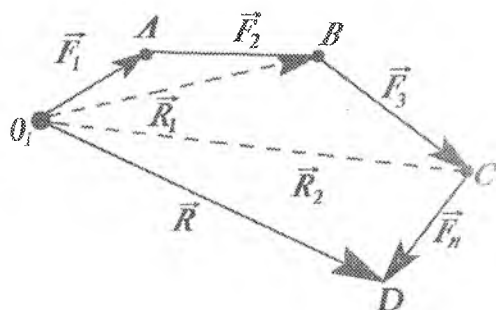
Teng ta'sir etuvchi kuchning \vec{Q} va \vec{P} kuchlar bilan hosil qilgan α va α_1 burchaklari esa sinuslar teoremasiga ko'ra aniqlanadi ($\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$):

$$\frac{P}{\sin \alpha_2} = \frac{Q}{\sin \alpha_1} = \frac{R}{\sin(180^\circ - a)}. \quad (5.4)$$

Hammang A_1, A_2, \dots, A_n nuqtalariga qo'yilgan $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlarining (5.3-rasm) teng ta'sir etuvchisini aniqlash uchun ketma-ket kuchlar uchburchagi usulidan foydalaniladi. Natijada, O_1ABCD kuchlar ko'pburchagi hosil bo'ladi (5.4-rasm).



5.3-rasm



5.4-rasm

Hosil bo'lgan kuchlar ko'pburchagida \vec{F}_1 kuchning boshi bilan \vec{F}_n kuchning uchini birlashtiruvchi \vec{R} vektor berilgan — $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlarning teng ta'sir etuvchisini ifodalaydi:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n \quad (5.5)$$

yoki

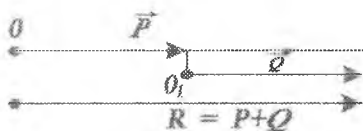
$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

Ya'ni, bir nuqtada kesishuvchi kuchlarning teng ta'sir etuvchisi \vec{R} shu kuchlarning geometrik yig'indisiga teng bo'lib, kuchlar ta'sir chiziqlarining kesishgan nuqtasiga qo'yiladi (5.4-rasm).

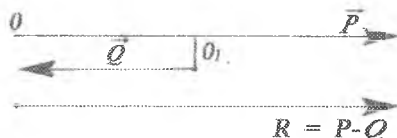
Xususiyl holda qo'shiluvchi kuchlar kollinlar bo'lib, bir tomonga (5.5-a rasm) yoki qarama-qarshi tomonlarga (5.6-rasm) yo'nalgan bo'lsa, yuqorida keltirilgan qoidaga ko'ra, kuchlarning teng ta'sir etuvchisi quyidagicha aniqlanadi:

$$R = P + Q, \quad (5.6)$$

$$R = P - Q. \quad (5.7)$$



5.5-rasm



5.6-rasm

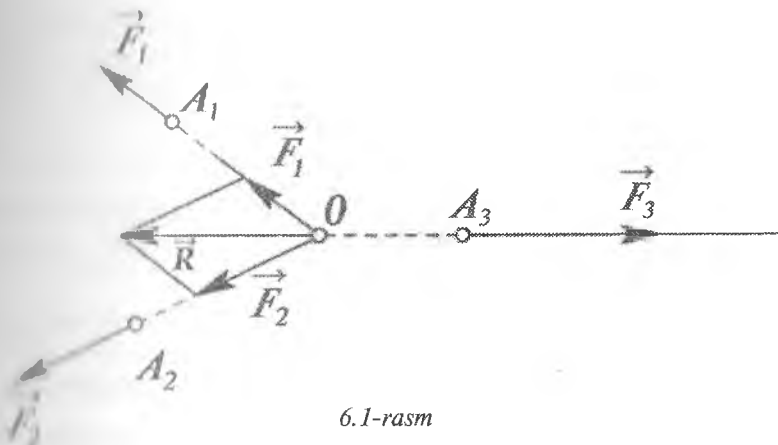
6-§. Uch kuchning muvozanatiga oid teorema

Teorema: bir tekislikda yotuvchi va o'zaro parallel bo'lmagan uchta kuch muvozanatlashsa, ularning ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishadi.

Isboti. Jismning A_1, A_2, A_3 nuqtalariga bir tekislikda yotuvchi, o'zaro parallel bo'lmagan $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ kuchlar qo'yilgan bo'lsin (6.1-rasm).

Teoremaga ko'ra: $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) \Leftrightarrow 0$.

Kuchlar parallel bo'lmagani uchun ulardan ixtiyoriy ikkitasining (masalan, \vec{F}_1 va \vec{F}_2) ta'sir chiziqlari kesishgan O nuqtani aniqlab, kuchlarni ta'sir chiziqlari bo'ylab, shu nuqtaga keltiramiz.



6.1-rasm

Parallelogramm qoidasiga ko‘ra, bu kuchlarni qo‘shib, ularning umumiy ta‘sir etuvchisi \vec{R} ni aniqlaymiz:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (6.1)$$

Natijada, $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$ kuchlar sistemasi o‘rniga, unga ekvivalent (\vec{R}, \vec{F}_3) kuchlar sistemasiga ega bo‘lamiz:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) \Leftrightarrow (\vec{R}, \vec{F}_3). \quad (6.2)$$

1-aksiomaga ko‘ra, \vec{R} va \vec{F}_3 kuchlar miqdor jihatdan teng bo‘lib, bir to‘g‘ri chiziq bo‘ylab, qarama-qarshi tomonga yo‘nalgandagina o‘zaro muvozanatlashadi. Binobarin, \vec{F}_3 kuchning ta‘sir chizig‘i ham O nuqtadan o‘tadi.

7-§. Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatining geometrik sharti

Bir nuqtada kesishuvchi $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlar sistemasining teng ta‘sir etuvchisi nolga teng bo‘lsa, bunday kuchlar sistemasi muvozanatda bo‘ladi, aksincha, kuchlar sistemasi muvozanatda bo‘lsa, kuchlar sistemasining teng ta‘sir etuvchisi nolga teng bo‘ladi:

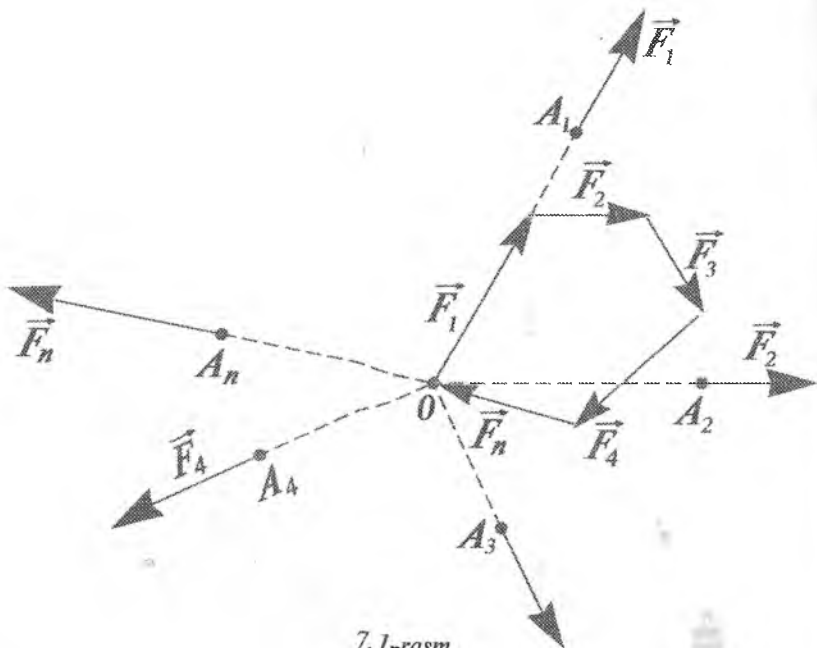
yoki

$$\vec{R}=0 \quad (7.1)$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0. \quad (7.2)$$

(7.1) yoki (7.2) tenglamalar kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatining vektor ko‘rinishdagi zaruriy va yetarli shartlarini ifodalaydi.

Binobarin, kesishuvchi kuchlar sistemasi ta’siridagi erkin jism muvozanatda bo‘lishi uchun mazkur sistemani tashkil qiluvchi kuchlarning geometrik yig‘indisi nolga teng bo‘lishi zarur va yetarli ekan. (7.2) tenglamaning geometrik ma’nosi quyidagicha: $R = 0$ shart bajarilishi uchun kesishuvchi $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlardan qurilgan kuchlar ko‘pburchagi yopiq bo‘lishi kerak, ya’ni mazkur ko‘pburchakda birinchi kuchning boshi bilan oxirgi kuchning uchi ustma-ust tushishi kerak (7.1-rasm).



7.1-rasm

Damak, bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun bu kuchlardan qurilgan kuchlar ko'pburchagi yopiq bo'lishi zarur va yetarli ekan.

Mazkur shart bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatning geometrik shartini ifodalaydi.

Ushbu sababli (7.1), (7.2) tenglamalarda berilgan kuchlar bilan bir nuqtada bog'lanishlar reaksiya kuchlari ham qatnashadi.

8.4. Kesishuvchi kuchlar sistemasining geometrik muvozanat shartiga oid masalalarni yechish uchun uslubiy ko'rsatmalar

Umuman, statikada jismning muvozanatiga oid masalalar, jismga ta'sir etayotgan kuchlarning o'zaro qanday joylashishidan qat'iy nazar, quyidagi tartibda yechiladi:

- 1) muvozanati o'rganilayotgan jism (yoki nuqta) aniqlanadi;
- 2) koordinatalar sistemasi tanlab olinadi;
- 3) jismga ta'sir etayotgan berilgan kuchlar ko'rsatiladi;
- 4) jismni bog'lanishlardan bo'shatib, ularning ta'sirlari bog'lanish reaksiya kuchlari bilan almashtiriladi;
- 5) muvozanati o'rganilayotgan jism berilgan kuchlar va bog'lanishlar reaksiya kuchlari ta'siridagi erkin jism deb qaraladi;
- 6) jismga ta'sir etayotgan kuchlar qanday kuchlar sistemasini tashkil etishiga qarab, ularga xos muvozanat tenglamalari tuziladi;
- 7) tuzilgan muvozanat tenglamalarini yechib, aniqlanishi lozim bo'lgan noma'lum kattaliklar topiladi.

Agar jismga ta'sir etuvchi kuchlar bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasini tashkil etsa, mavzuga doir masalalar quyidagi usullarda yechiladi:

Geometrik usul.

Masalada berilgan va noma'lum kuchlar soni ikkitaga teng bo'lsa, bunda bu usuldan foydalanish qulay bo'ladi. Bunda yuqorida bayon qilingan masalalar yechish tartibidagi 1–5-amallar bajariladi. Keyin:

- 1) bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatining geometrik shartidan foydalaniladi, ya'ni kuchlardan yopiq kuchlar ko'pburchagi chiziladi. Kuchlar ko'pburchagini chizishni miqdori va

yoʻnalishi maʼlum boʻlgan kuchdan boshlash maqsadga muvofiq boʻladi;

2) chizilgan kuchlar uchburchagini yechib, aniqlanishi lozim boʻlgan nomaʼlumlar topiladi.

Bunda quyidagi ikki yoʻldan foydalanish mumkin:

a) *grafik yoʻl*. Bu yoʻlda kuchlar uchburchagi masshtabda chiziladi. Uchburchakning nomaʼlum kuchni ifodalovchi tomoni, tanlangan masshtab birligida, nomaʼlum kuch modulini ifodalaydi;

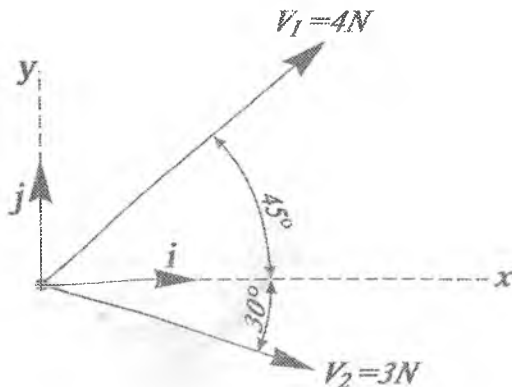
b) *trigonometrik yoʻl*. Bu yoʻlda kuchlar uchburchagining burchaklari aniqlanadi va trigonometrik formulalar (sinuslar, kosinuslar teoremlari) yordamida nomaʼlum kuch moduli aniqlanadi.

9-§. Kesishuvchi kuchlar sistemasining geometrik muvozanat shartiga oid masalalar

1-masala: $V_1 = 4N$, $V_2 = 3N$ kuchlar berilgan (9.1-rasm).

Quyidagilar aniqlansin:

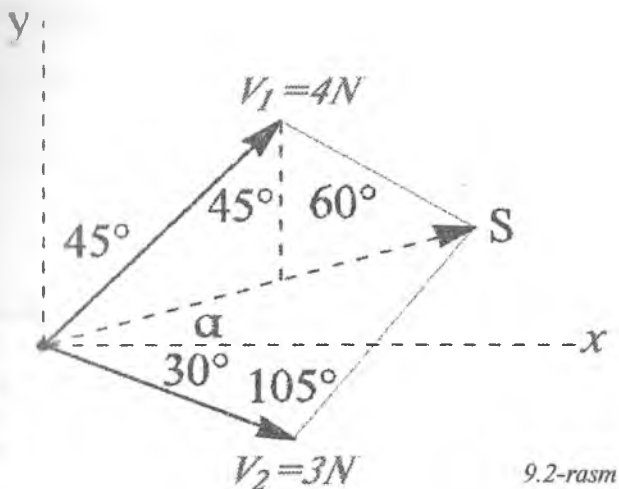
- kuchlarning teng taʼsir etuvchisining moduli;
- kuchlarning teng taʼsir etuvchisining x oʻqi bilan hosil qilgan burchagi;
- kuchlarni teng taʼsir etuvchisining vektor koʻrinishida yozing;
- vektorlarning ayirmasini toping.



9.1-rasm

Yechimi

Uch V_1 va V_2 kuchlardan parallelogramm chizamiz (9.2-rasm), kosinuslar teoremasiga ko'ra, kuchlarning teng ta'sir etuvchining aniqshu quyidagicha aniqlanadi:



9.2-rasm

$$S = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2 \cos 105^\circ} = 5,59 N;$$

b) pastdagi uchburchakdan sinuslar teoremasiga ko'ra,

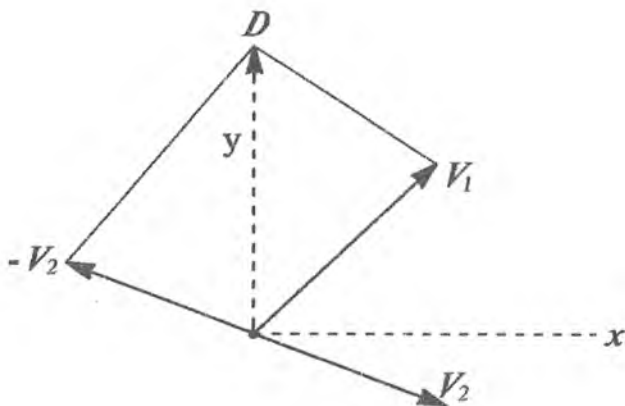
$$\frac{\sin(a+30)^\circ}{V_1} = \frac{\sin 105^\circ}{S},$$

$$\sin(a+30)^\circ = \frac{V_1 \cdot \sin 105^\circ}{S}; \quad (a+30)^\circ = 43,76^\circ, \quad a = 13,76^\circ;$$

c) $\vec{S} = \vec{i}X + \vec{j}Y = (5,43\vec{i} + 1,328\vec{j}),$

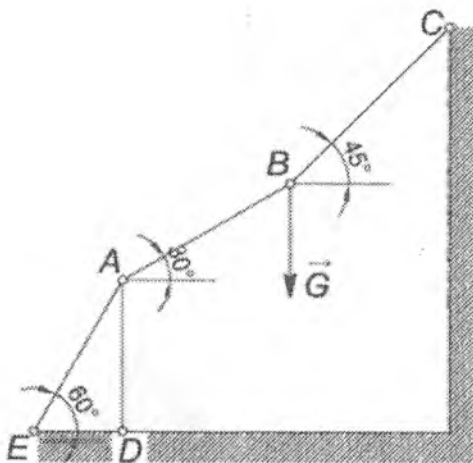
$$\vec{D} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 = 4(\vec{i} \cos 45^\circ + \vec{j} \sin 45^\circ) - 3(\vec{i} \cos 30^\circ + \vec{j} \sin 30^\circ) = 0,230\vec{i} + 4,33\vec{j};$$

d) $\vec{D} = \vec{V}_1 + (-\vec{V}_2).$



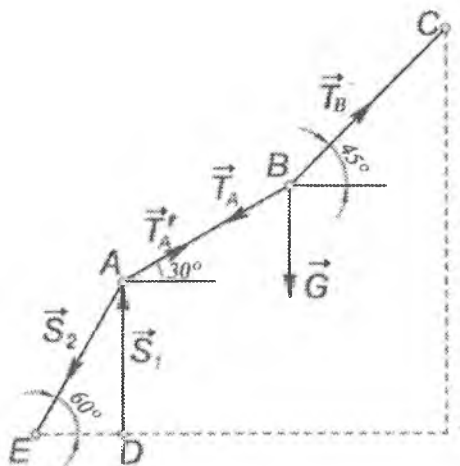
9.3-rasm

2-masala: og'irligi $G = 518 \text{ N}$ bo'lgan yuk ABC kanatning B nuqtasiga qo'yilgan. Kanatning AB uchastkasi gorizont bilan 30° burchak, BC qismi esa 45° burchak hosil qiladi. Kanat A nuqtada vertikal AD ustunga bog'langan va gorizont bilan 60° burchak hosil qiluvchi tirgak yordamida ushlab turiladi. Kanatning AB , BC qismlaridagi taranglik kuchlari hamda ustun va tirgaklardagi zo'riqishlar aniqlansin (9.4-a rasm).



9.4-a rasm

Yechish: masalada B va A nuqtalarning muvozanati alohida-alohida o'rganiladi. B nuqtaga qo'yilgan yuk og'irligi \vec{G} hamda B nuqta uchun bog'lanishlar bo'lmish CB va BA kanat qismlarining reaksiya kuchlari \vec{T}_B va \vec{T}_A lar ta'sir etadi. A tugunga esa BA kanat qismining reaksiyasi \vec{T}_A hamda AD ustun, AE tirgakdagi zo'riqishlar \vec{S}_1 , \vec{S}_2 lar ta'sir etadi (9.4-b rasm).



9.4-b rasm

B nuqta muvozanatda bo'lishi uchun tugunga qo'yilgan \vec{G} , \vec{T}_B , \vec{T}_A kuchlarning geometrik yig'indisi 0 ga teng bo'lishi kerak:

$$\vec{G} + \vec{T}_B + \vec{T}_A = 0,$$

ya'ni, \vec{G} , \vec{T}_B , \vec{T}_A kuchlardan chizilgan kuchlar uchburchagi yopiq bo'lishi lozim.

Kuchlar uchburchagini chizish uchun masshtab tanlab, miqdori va yo'nalishi ma'lum bo'lgan \vec{G} kuchni B' nuqtaga o'ziga parallel ravishda ko'chiramiz, (9.4-c rasm). \vec{G} kuchning boshi B' va uchi A' nuqtalardan kanatning BA , BC qismlariga parallel chiziqlar

o'tkazamiz. Bu chiziqning kesishgan nuqtasini C' bilan belgilasak, hosil bo'lgan $A'B'C'$ uchburchak izlanayotgan yopiq kuchlar uchburchagini ifodalaydi. Bunda $\overline{A'C'}$ va $\overline{B'C'}$ vektorlar \vec{T}_C va \vec{T}_A taranglik kuchlarini ifodalaydi. Taranglik kuchlarining modullarini aniqlash uchun quyidagi ikki yo'ldan foydalanamiz:

a) grafik yo'l.

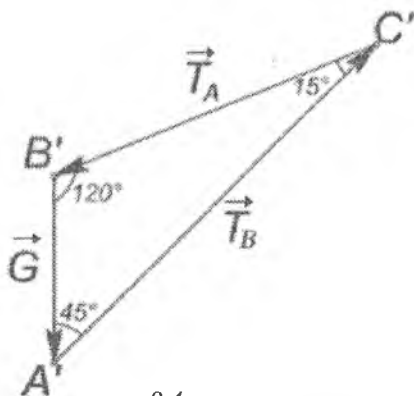
Bunda $A'B'C'$ kuchlar uchburchagining $A'C'$ va $B'C'$ tomonlarini tanlangan masshtab birligida o'lchab, \vec{T}_B va \vec{T}_A larning modullari aniqlanadi (1 sm – 200 N):

$$A'C''=8,66 \text{ sm}, T_B=1732 \text{ N},$$

$$B'C''=7,07 \text{ sm}, T_A=1414 \text{ N};$$

b) trigonometrik yo'l.

Bunda, hosil bo'lgan kuchlar uchburchagining burchaklarini bilgan holda, reaksiya kuchlarining modullarini trigonometrik formulalar asosida aniqlash mumkin. 9.4-c rasm va $A'B'C'$ uchburchaklardan foydalansak, $AB//B'C'$, $BC//A'C'$ bo'lganligi uchun $\sphericalangle B'A'C'=45^\circ$, $\sphericalangle A'B'C'=120^\circ$, $\sphericalangle A'C'B'=15^\circ$ ekanligi ma'lum bo'ladi.



9.4-c rasm

Sinuslar teoremasidan:

$$\frac{G}{\sin 15^\circ} = \frac{T_A}{\sin 45^\circ} = \frac{T_B}{\sin 120^\circ}$$

Bundan:

$$T_A = \frac{G \cdot \sin 45^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{518 \cdot 0,707}{0,259} = 1414 \text{ N},$$

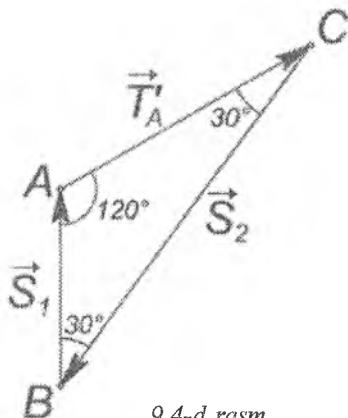
$$T_B = \frac{G \cdot \sin 120^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{518 \cdot 0,866}{0,259} = 1732 \text{ N}.$$

A nuqtaning muvozanatini o'rganamiz. A nuqtaga kanat AB qismining taranglik kuchi \vec{T}'_A hamda ustun va tirgakdagi \vec{S}_1 , \vec{S}_2 zo'riqishlar ta'sir etadi. A tugun muvozanatda bo'lishi uchun \vec{T}'_A , \vec{S}_1 , \vec{S}_2 kuchlarning geometrik yig'indisi 0 ga teng bo'lishi kerak:

$$\vec{T}'_A + \vec{S}_1 + \vec{S}_2 = 0,$$

ya'ni, \vec{T}'_A , \vec{S}_1 , \vec{S}_2 kuchlar uchburchagi yopiq bo'lishi lozim.

Kuchlar uchburchagini chizish uchun mashtab tanlab, A nuqtaga miqdori va yo'nalishi ma'lum bo'lgan \vec{T}'_A kuchni ko'chiramiz. Kuchning boshi A va uchi C nuqtalardan ustun va tirgakka parallel chiziqlar o'tkazamiz. Bu chiziqlar B nuqtada kesishadi. Hosil bo'lgan ABC uchburchak izlanayotgan yopiq kuchlar uchburchagini tashkil etadi (9.4-d rasm). Bunda uchburchakning AB va BC tomonlari ustun va tirgakda hosil bo'ladigan \vec{S}_1 va \vec{S}_2 zo'riqishlarni ifodalaydi.



9.4-d rasm

Zo'riqishlarning modullarini aniqlash uchun B tugundagidek quyidagi ikki yo'ldan foydalanamiz:

a) grafik yo'l.

Bunda ABC kuchlar uchburchagining AB va BC tomonlarini tanlangan masshtab birligida o'lchab, \vec{S}_1 va \vec{S}_2 zo'riqishlar modullari aniqlanadi:

$$AB = 7,07 \text{ sm}; S_1 = 1414 \text{ N},$$

$$BC = 12,24 \text{ sm}; S_2 = 2449 \text{ N};$$

b) trigonometrik yo'l.

Bunda hosil bo'lgan kuchlar uchburchagining burchaklarini aniqlash lozim. Kuchlar uchburchagida AB , BC tomonlar ustun va tirtgakka parallel holda chizilganligini e'tiborga olsak, $\angle ACB=30^\circ$, $\angle BAC=120^\circ$, $\angle ABC=30^\circ$ ekanligi ma'lum bo'ladi. Burchaklarning qiymatlaridan ABC kuchlar uchburchagi teng yonli uchburchak ekanligi ma'lum bo'ladi.

Shuning uchun $S_1 = T'_A = T_A = 1414 \text{ N}$.

Sinuslar teoremasidan:

$$\frac{S_2}{\sin 120^\circ} = \frac{T'_A}{\sin 30^\circ} = \frac{S_1}{\sin 30^\circ}$$

Bundan:

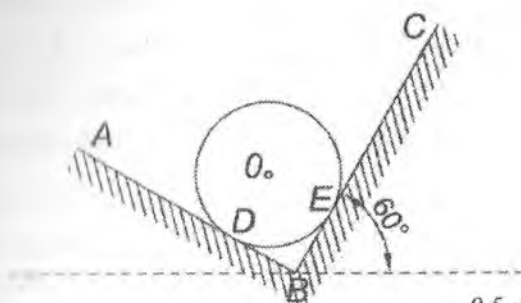
$$S_2 = \frac{T'_A \cdot \sin 120^\circ}{\sin 30^\circ} = 1414 \cdot \frac{0,866}{0,5} = 2494 \text{ N}.$$

9.4-d rasmdan ko'rinib turibdiki, haqiqatan ham, qo'yilgan kuchlar ta'sirida ustun siqilib, tirtgach cho'zilar ekan.

3-masala.

Bir-biriga tik bo'lgan ikkita silliq AB va BC og'ma tekisliklarda og'irligi 60 N bo'lgan bir jinsli O shar turibdi. BC tekislik bilan gorizont orasidagi burchak 60° . Sharning har qaysi tekislikka ko'rsatadigan bosimi aniqlansin (9.5-a rasm).

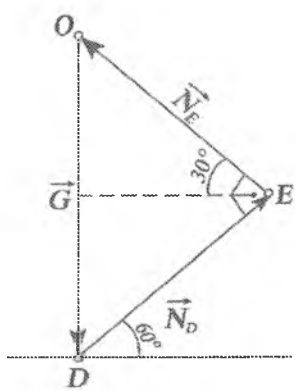
Yechish: sharning og'irlik markazi O nuqtasining muvozanatini o'rganamiz. O nuqtaga sharning og'irlik kuchi \vec{G} ta'sir etadi. Bir-



9.5-a rasm

biriga tik bo'lgan ikkita silliq AB va BC tekisliklar shar uchun bog'lanishlar hisoblanadi. Bog'lanishlardan bo'shatish prinsipiga asosan, ularning sharga ta'sirini bog'lanishlar reaksiya kuchlari \vec{N}_D va \vec{N}_E lar bilan almashtiramiz. Bu kuchlar silliq AB va BC tekisliklarga perpendikular holda yo'naladi va ta'sir chiziqlari sharning og'irlik markazi O nuqtadan o'tadi. Natijada, O nuqtada kesishuvchi (G , \vec{N}_D , \vec{N}_E) kuchlar sistemasiga ega bo'lamiz (9.5-b rasm).

Koordinata boshi sifatida B nuqtani tanlab, x o'qini \vec{N}_D reaksiya kuchiga parallel holda yo'naltiramiz. Hosil bo'lgan bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi uchun muvozanatning geometrik shartidan foydalanamiz. Buning uchun miqdori va yo'nalishi ma'lum



9.5-b rasm

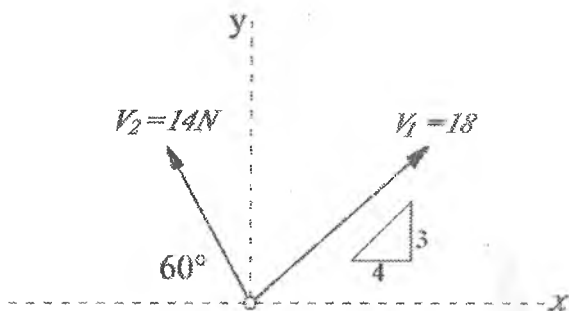
bo'lgan og'irlik kuchini O nuqtaga qo'yib, kuchning boshi O nuqtadan \vec{N}_E kuchning, uchi d nuqtadan, \vec{N}_D kuchning ta'sir chizig'iga parallel chiziqlar o'tkazamiz. Mazkur chiziqlar e nuqtada kesishadi. Bunday holda uchburchakning OE tomoni \vec{N}_E kuchni, DE tomoni \vec{N}_D kuchni ifodalaydi. Natijada, ODE yopiq uchburchak hosil bo'ladi. Reaksiya kuchlarining miqdorlarini ODE uchburchakning noma'lumlarini yechish yo'li bilan aniqlaymiz:

$$\frac{N_E}{G} = \sin 30^\circ, \quad N_E = G \cdot \sin 30^\circ = 60 \cdot 0,5 = 30 \text{ N},$$

$$\frac{N_D}{G} = \sin 60^\circ, \quad N_D = G \cdot \sin 60^\circ = 60 \cdot 0,86 = 51,6 \text{ N}.$$

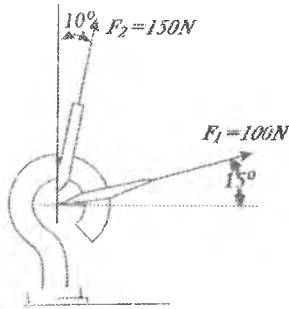
10-§. Mustaqil o'rganish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar

Muammo № 1. 10.1-rasmda ko'rsatilgan $V_1 = 18 \text{ N}$, $V_2 = 148 \text{ N}$ kuchlarning teng ta'sir etuvchisi hamda uning x o'qi bilan hosil qilgan burchagi aniqlansin.



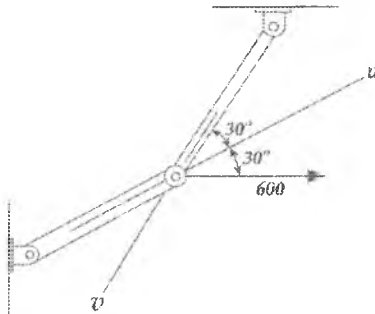
10.1-rasm

Muammo № 2. 10.2-rasmda ko'rsatilgan \vec{F}_1 va \vec{F}_2 kuchlarning teng ta'sir etuvchisi va uning yo'nalishi aniqlansin.



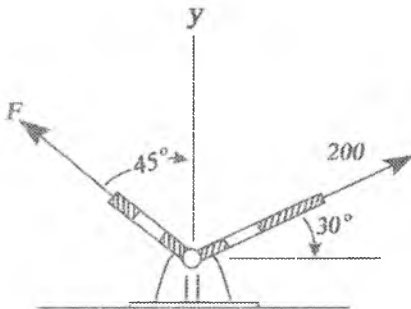
10.2-rasm

Muammo № 3. Gorizontol holda miqdori $F = 600\text{ N}$ bo'lgan kuchning u va v o'qlardagi tashkil etuvchilari aniqlansin.



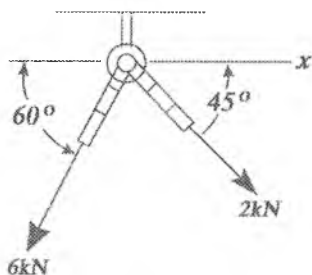
10.3-rasm

Muammo № 4. 10.4-rasmda ko'rsatilgan \vec{F} tashkil etuvchi kuchning miqdori, hamda kuchlarning F_R teng ta'sir etuvchisi aniqlansin. \vec{F}_R y o'qida yotib, uning musbat yo'nalishi bo'yicha yo'nalgan bo'ladi.



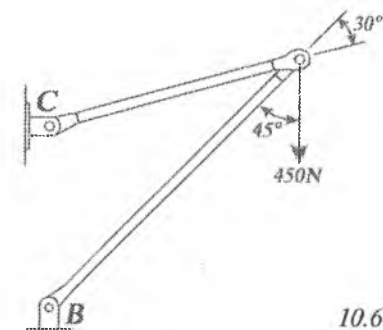
10.4-rasm

Muammo № 5. 10.5-rasmda ko'rsatilgan kuchlarning teng ta'vuvchisi aniqlansin.



10.5-rasm

Muammo № 6. $F = 450 \text{ N}$ kuch qurilmaning A nuqtasiga qo'yilgan. AB va AC sterjenlardagi zo'riqishlar aniqlansin.



10.6-rasm

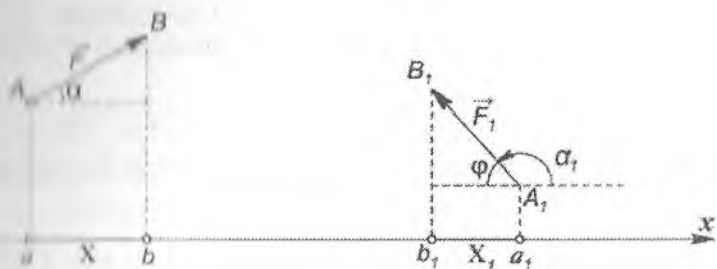
11-§. Kuchning o'qdagi va tekislikdagi proyeksiyasi

Kuchning biror o'qdagi proyeksiyasi skalyar miqdor bo'lib, kuch moduli hamda kuchning shu o'q musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagi kosinusining ko'paytmasiga teng bo'ladi (11.1-rasm):

$$X = ab = F \cos \alpha \quad (11.1)$$

$$X_1 = a_1 b_1 = F_1 \cos a_1 = \vec{F}_1 \cos(180^\circ - j) = -F_1 \cos j.$$

Kuchning o'qdagi proyeksiyasi ta'rifidan quyidagi natijalar kelib chiqadi:



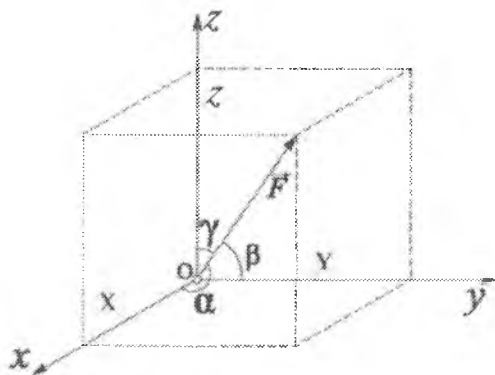
11.1-rasm

a) kuchning parallel va bir xil yo'nalgan o'qlardagi proyeksiyalari F ga teng bo'ladi;

b) kuchning kuch yo'nalishiga perpendikular bo'lgan o'qdagi proyeksiyasi nolga teng bo'ladi ($\cos 90^\circ = 0$, $X = 0$);

c) kuchning kuch yo'nalishiga parallel bo'lgan o'qdagi proyeksiyasi kuch moduliga teng bo'ladi ($\cos 0^\circ = 1$, $X = F$).

\vec{F} kuchning $Oxyz$ Dekart koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini topish uchun koordinatalar boshi sifatida \vec{F} kuch qo'yilgan O nuqtani olamiz. (11.2-rasm). Agar \vec{F} kuchning Ox , Oy , Oz o'qlar bilan hosil qilgan burchaklarini α , β , γ bilan belgilasak, diagonali berilgan \vec{F} kuchga teng bo'lgan parallelepiped tomonlarining mo-



11.2-rasm

ishoralar bilan olingan uzunligi (11.1)ga asosan, \vec{F} kuchning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini ifodalaydi (11.2-rasm):

$$X=F \cos\alpha, Y=F \cos\beta, Z=F \cos\gamma. \quad (11.2)$$

Koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari orqali kuchning miqdori:

$$F=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2} \quad (11.3)$$

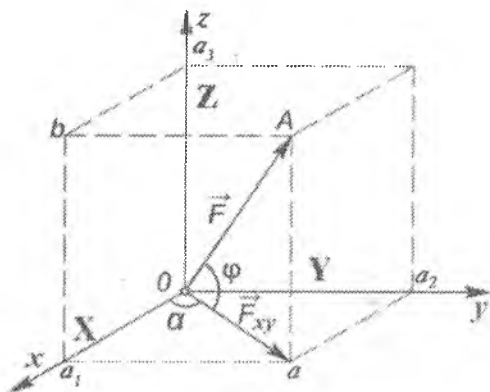
formula asosida, yo'nalishi esa

$$\cos a=\frac{X}{F}, \cos b=\frac{Y}{F}, \cos g=\frac{Z}{F} \quad (11.4)$$

formulalar yordamida aniqlanadi.

Kuch miqdori va yo'nalishini uning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari orqali aniqlash, uni analitik usulda aniqlash deyiladi.

Agar kuch bilan o'q bir tekislikda yotmasa va ular orasidagi burchak ham berilmagan bo'lsa (11.3-rasm), kuchning o'qdagi proyeksiyasini aniqlash uchun koordinatalar boshini F kuch qo'yilgan O nuqtada olib, kuchning uchi A nuqtadan xoy tekislikka perpendikular Aa chiziqni o'tkazamiz.



11.3-rasm

Bunday holda:

$$\vec{F}_{xy}=\vec{oa}.$$

Ma'lum vektor \vec{F} kuchning xoy tekisligidagi proyeksiyasini ifodalaydi.

F_{xy} vektorining Ox va Oy o'qlardagi proyeksiyalarini aniqlash uchun a nuqtadan Ox va Oy o'qlarga mos ravishda aa_1 va aa_2 perpendikular chiziqlarni o'tkazamiz. U paytda oa_1 va oa_2 kesmalar mos ravishda \vec{F} kuchning Ox va Oy o'qlardagi proyeksiyalarini ifodalaydi.

$$X = oa_1 = F_{xy} \cos \alpha = F \cos \varphi \cos \alpha,$$

$$Y = oa_2 = F_{xy} \cos(90 - \alpha) = F \cos \varphi \sin \alpha.$$

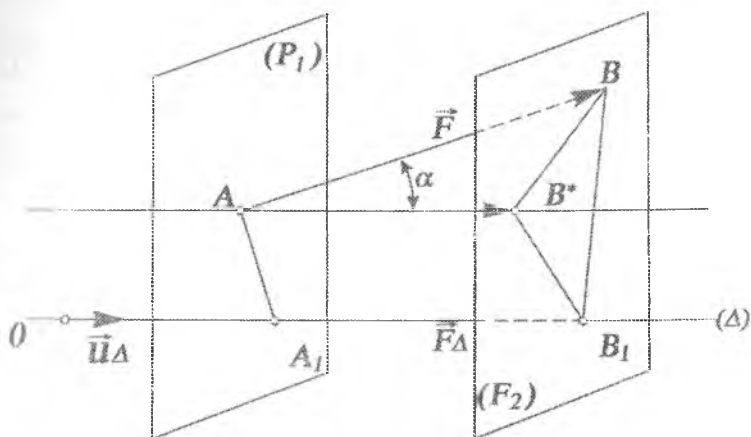
11.4-rasmda A nuqtaga qo'yilgan \vec{F}_A kuch ko'rsatilgan yo'naliqdagi \vec{F} kuchning proyeksiyasini ifodalaydi:

$$A_1B_1 = \text{pro}_{\Delta} \vec{F} = F_{\Delta},$$

$$A_1B_1 = AB^*.$$

bundan

$$F_D = F \cdot \cos a.$$



11.4-rasm

Agar Δ o'qning birlik vektorini U_{Δ} orqali belgilasak, \vec{F} kuchning Δ o'qdagi proyeksiyasi kuch vektori \vec{F} va o'qning birlik vektorini skalyar ko'paytmasi shaklida ifodalanadi.

$$F_{\Delta} = \vec{F} \cdot \vec{U}_{\Delta}.$$

12-§. Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisini analitik usulda aniqlash

Bir nuqtada kesishuvchi $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlarning teng ta'sir etuvchisi shu kuchlarning geometrik yig'indisiga teng bo'ladi:

$$\vec{R}' = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (12.1)$$

Bu vektorli tenglikni koordinata o'qlariga proyeksiyalab, teng ta'sir etuvchi kuchning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari aniqlanadi:

$$R'_x = \sum_{i=1}^n X_i, \quad R'_y = \sum_{i=1}^n Y_i, \quad R'_z = \sum_{i=1}^n Z_i. \quad (12.2)$$

Teng ta'sir etuvchining moduli uning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari orqali quyidagicha aniqlanadi:

$$R' = \sqrt{(R'_x)^2 + (R'_y)^2 + (R'_z)^2}, \quad (12.3)$$

yo'nalishi esa quyidagicha topiladi:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\vec{R}' \cdot \vec{i}) &= \frac{R'_x}{R'} \\ \cos(\vec{R}' \cdot \vec{j}) &= \frac{R'_y}{R'} \\ \cos(\vec{R}' \cdot \vec{k}) &= \frac{R'_z}{R'} \end{aligned} \right\} \quad (12.4)$$

Mazkur usul bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisini analitik usulda aniqlash hisoblanadi.

13-§. Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatining analitik sharti

Ma'lumki, bir nuqtada kesishuvchi $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi \vec{R} nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Agar bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchi $\vec{R} = 0$ bo'lsa, (12.3)ga asosan:

$$R'_x=0, R'_y=0, R'_z=0 \quad (13.1)$$

bo'lishi lozim.

Buning uchun bir vaqtda

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n X_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^n Y_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^n Z_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.2)$$

bo'lishi dardkor.

(13.2) tenglamalar kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanat shartining analitik ifodasidir.

Demak, kesishuvchi kuchlar sistemasi ta'siridagi erkin jism muvozanatda bo'lishi uchun kuchlarning har bir koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarining yig'indisi alohida-alohida nolga teng bo'lishi zarur va yetarli ekan.

Kesishuvchi kuchlar bir tekislikda, masalan, *oxy* tekisligida yotsa, mazkur tekislikda yotgan kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanat shartining analitik ifodasi quyidagicha bo'ladi:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n Y_i = 0. \quad (13.3)$$

Agar muvozanatdagi jism erkin bo'lmasa, bog'lanishlardan bo'shatish prinsipiga ko'ra, bog'lanishlarning jismga ko'rsatadigan

ta'sirini bog'lanishlar reaksiya kuchlari bilan almashtirish lozim. Natijada, bunday jism berilgan kuchlar va bog'lanishlar reaksiya kuchlari ta'siridagi erkin jism deb qaraladi. Shu sababli (13.2), (13.3) tenglamalarda berilgan kuchlar bilan bir qatorda bog'lanishlar reaksiya kuchlari ham qatnashadi.

14-§. Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatining analitik shartiga oid masalalarni yechish uchun uslubiy ko'rsatmalar

Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatining analitik shartiga oid masalalar, jismga ta'sir etayotgan kuchlarning o'zaro qanday joylashishidan qat'iy nazar, quyidagi tartibda yechiladi:

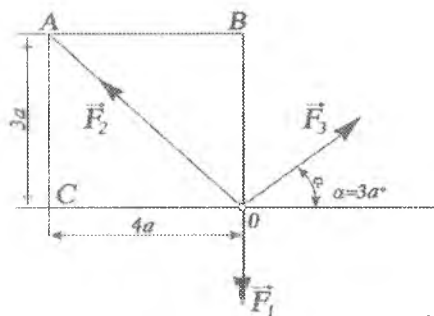
1. Muvozanati o'rganilayotgan jism (yoki nuqta) aniqlanadi.
2. Koordinatalar sistemasi tanlab olinadi.
3. Jismga ta'sir etayotgan berilgan kuchlar ko'rsatiladi.
4. Jismni bog'lanishlardan bo'shatib, ularning ta'sirlari bog'lanishlar reaksiya kuchlari bilan almashtiriladi.
5. Muvozanati o'rganilayotgan jism berilgan kuchlar va bog'lanishlar reaksiya kuchlari ta'siridagi erkin jism deb qaraladi.
6. Jismga ta'sir etayotgan kuchlar qanday kuchlar sistemasini tashkil etishiga qarab, ularga xos muvozanat tenglamalari tuziladi.
7. Tuzilgan muvozanat tenglamalarini yechib, aniqlanishi lozim bo'lgan noma'lum kattaliklar topiladi.

15-§. Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatining analitik shartiga oid masalalar

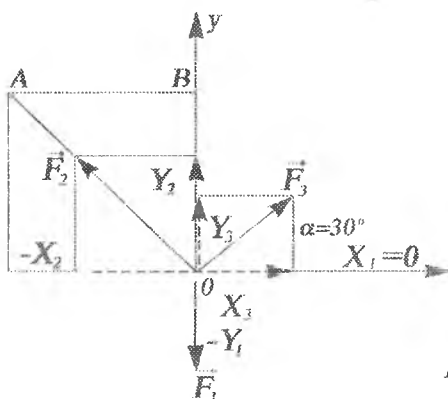
1-masala: 15.1-a rasmda ko'rsatilgan kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisining miqdori va yo'nalishi aniqlansin. Masofalar chizmada ko'rsatilgan.

Berilgan: $\vec{F}_1=10N$, $\vec{F}_2=20N$, $\vec{F}_3=17,3N$.

Yechimi: kuchlar qo'yilgan O nuqtaning muvozanatini o'rnamiz. Koordinata boshi sifatida O nuqtani tanlab, koordinata o'qlari O_x va O_y larni o'tkazamiz (15.1-b rasm).



15.1-a rasm



15.1-b rasm

1. O nuqtaga qo'yilgan kuchlarning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini aniqlaymiz:

$$X_1 = 0; Y_1 = -F_1 = -10N,$$

$$X_2 = F_2 \frac{OC}{OA} = 20 \frac{4a}{5a} = 16N; Y_2 = F_2 \frac{OB}{OA} = 20 \frac{3a}{5a} = 12N,$$

$$X_3 = F_3 \cos \alpha = 17,3 \frac{\sqrt{3}}{2} = 15N; Y_3 = F_3 \sin \alpha = F_3 \frac{1}{2} = 8,65N.$$

2. Berilgan kuchlar teng ta'sir etuvchisining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini aniqlaymiz:

$$X = \sum X_i = -X_2 + X_3 = -16 + 15 = -1N,$$

$$Y = \sum Y_i = -Y_1 + Y_2 + Y_3 = -10 + 12 + 8,65 = 10,65N.$$

Demak, berilgan kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi quyidagicha izohlanadi:

$$\vec{R} = -\vec{i} + 10,65\vec{j}.$$

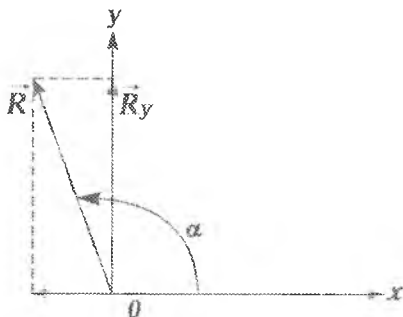
Uning moduli quyidagiga teng bo'ladi:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{1^2 + 10,65^2} = 10,75N.$$

3. Berilgan kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisining yo'nalishini aniqlaymiz (15.1-c rasm):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Y}{X} = \frac{10,65}{-1} = -10,65.$$

$$\alpha = 96^\circ.$$



15.1-c rasm

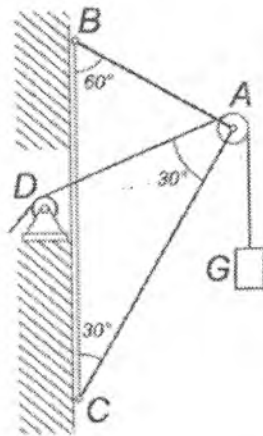
2-masala:

og'irligi $G=20N$ bo'lgan yuk A va D bloklar orqali o'tkazilgan zanjir vositasida BAC magazinli kran bilan ko'tariladi. D blok devorga shunday mahkamlanadiki, burchak $CAD=30^\circ$. Kranning sterjenlari orasidagi burchaklar:

$$\angle ABC=60^\circ, \quad \angle ACB=30^\circ.$$

AB va AC sterjenlardagi \vec{S}_1 va \vec{S}_2 zo'riqishlar aniqlansin (15.2-a rasm).

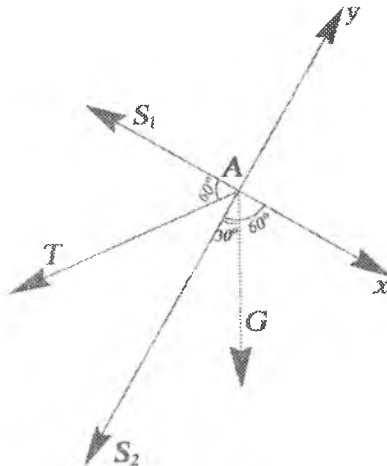
Yechish: A blok va u orqali o'tkazilgan zanjir qismini bir butun deb qarab, ularning muvozanatini o'rganamiz. A blok va u orqali



15.2-a rasm

o'tkazilgan zanjir qismiga yuk og'irligi \bar{G} va AD zanjir taranglik kuchi \bar{T} ta'sir etadi. A blok uchun AB va AC sterjenlar — bog'lanishlar hisoblanadi.

Ularning A blokka ta'sirini bog'lanishlar — sterjenlar reaksiya kuchlari \bar{S}_1 va \bar{S}_2 bilan almashtiramiz (15.2-b rasm).



15.2-b rasm

Natijada, A blok yuk og'irligi \bar{G} , zanjir AD qismidagi taranglik kuchi \bar{T} ($T = G$), sterjenlar reaksiyalari \bar{S}_1 va \bar{S}_2 lar ta'sirida bo'ladi.

Sterjenlar reaksiya kuchlari sterjenlar bo'ylab yo'naladi. Mazkur kuchlar sistemasi A nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasini tashkil etadi (A blok o'lchamlari hisobga olinmadi) (15.2-b rasm).

bo'ylab, A o'qida A_x o'qini AB sterjen holda yo'naladi. Kuchlarni vo'naltiramiz. A_x o'qi unga perpendikular tuzamiz:

$$\sum X_i = 0, \quad -S_1 + G \cos 60^\circ - T \cos 60^\circ = 0,$$

$$\sum Y_i = 0, \quad -S_2 - G \cos 30^\circ - T \cos 30^\circ = 0. \quad (15.2)$$

Tenglamalarni yechib, noma'lum zo'riqishlarni aniqlaymiz:

(15.1) tenglamadan:

$$S_1 = G(\cos 60^\circ - \cos 60^\circ) = 0,$$

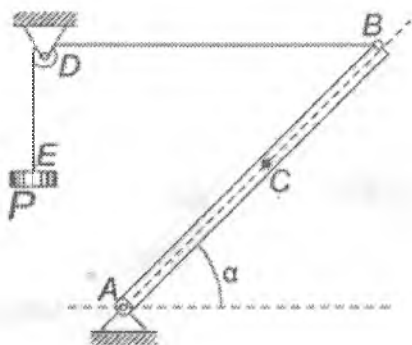
(15.2) tenglamadan:

$$S_2 = -G(\cos 30^\circ + T \cos 30^\circ) = -20 \cdot \sqrt{3} = -34,6N.$$

Hisoblashlardan ko'rinib turibdiki, mazkur masalada AB sterjen yuklanmas ekan. Binobarin $S_1 = 0$, AC sterjen esa siqilar ekan.

3-masala:

og'irligi $G = 1,5 N$ bo'lgan AB balka A sharnir o'qi atrofida aylanishi mumkin. Balkaning og'irlik markazi C nuqta, bunda $AC=2CB$. Balka BDE arqon yordamida gorizont bilan $\alpha=45^\circ$ burchak tashkil etgan holda ushlab turiladi. Arqonning E uchiga P yuk osilgan. Arqonning BD qismi gorizont. P yuk og'irligi va A sharnir reaksiyasi aniqlansin. Blokdaqi ishqalanish hisobga olinmasin (15.3-a rasm).

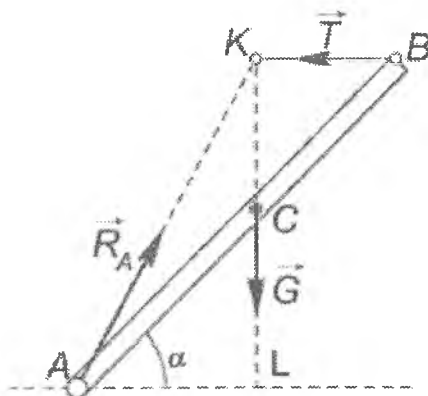


15.3-a rasm

Yechish: AB balkaning muvozanatini o‘rganamiz. Balkaga uning og‘irlik kuchi \vec{G} ta’sir etadi. Bu kuch vertikal pastga yo‘nalgan bo‘lib, balkaning og‘irlik markazi C nuqtaga qo‘yiladi. Balka uchun bog‘lanishlar A sharnir va BDE arqon hisoblanadi. Bog‘lanishlardan bo‘shatish prinsipiga asosan, ularning balkaga ta’sirini bog‘lanishlar reaksiya kuchlari bilan almashtiramiz. Bunda arqon reaksiyasi L nuqtaga qo‘yiladi va BD arqon bo‘ylab yo‘naladi.

A sharnir reaksiyasi A nuqtaga qo‘yilgan, lekin uning yo‘nalishi noma’lum. A sharnir reaksiyasining yo‘nalishini aniqlash uchun uch kuch muvozanatiga oid teoremdan foydalanamiz. Teoremda ko‘ra, o‘zaro parallel bo‘lmagan, bir tekislikda yotuvchi uch kuch muvozanatlashsa, ularning ta’sir chiziqlari bir nuqtada kesishadi.

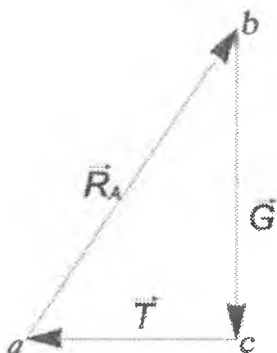
Shuning uchun dastlab, balka og‘irligi \vec{G} va arqon taranglik kuchi \vec{T} larning ta’sir chiziqlari kesishgan K nuqtani aniqlaymiz (15.2-b rasm).



15.3-b rasm

U paytda sharnir reaksiya kuchining ta’sir chizig‘i shu nuqtadan o‘tishi ma’lum bo‘ladi. K nuqtada kesishuvchi uchta kuch yopiq kuchlar uchburchagini chizamiz (15.3-c rasm).

Hosil bo‘lgan kuchlar uchburchagini yechib, masala shartida talab etilgan noma’lum kattaliklarni aniqlaymiz.



15.3-c rasm

Dastlab ALK uchburchak tomonlarini aniqlaymiz. Buning uchun $\triangle CKB \sim \triangle CAL$ ekanligini e'tiborga olamiz. Agar $CL = AL = \ell$, $\alpha = 45^\circ$ bo'lsa, uchburchaklarning o'xshashligidan:

$$\frac{KC}{CL} = \frac{CB}{AC}; \quad \frac{KC}{CL} = \frac{CB}{2CB}; \quad KC = \frac{1}{2} CL = \frac{1}{2} \ell = 0,5\ell,$$

$$KL = KC + CL = \frac{1}{2} \ell + \ell = \frac{3}{2} \ell = 1,5\ell,$$

$$AK = \sqrt{(AL)^2 + (KL)^2} = \sqrt{\ell^2 + \frac{9}{4} \ell^2} = \frac{\sqrt{13}}{2} \ell = 1,8\ell.$$

abc kuchlar uchburchagi AKL uchburchakka o'xshash:
 $Dabc \sim DAKL$.

Shuning uchun

$$\frac{T}{AL} = \frac{G}{KL} = \frac{R_A}{AK}$$

yoki

$$\frac{T}{\ell} = \frac{G}{1,5\ell} = \frac{R_A}{1,8\ell}.$$

Bu ifodalardan noma'lum kattaliklarni aniqlaymiz:

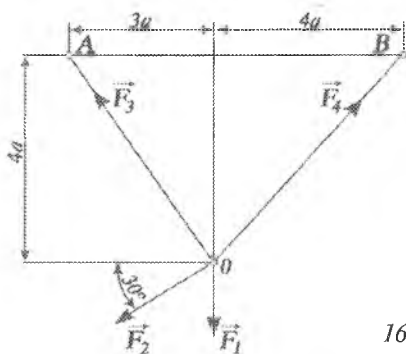
$$T = \frac{G}{1,5} = 1 \text{ kN}, \quad R_A = \frac{1,8 G}{1,5} = 1,8 \text{ kN}.$$

D blokda ishqalanish kuchi hisobga olinmasa, $P = T = 1 \text{ kN}$ bo'ladi.

16-§. Mustaqil o'rganish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar

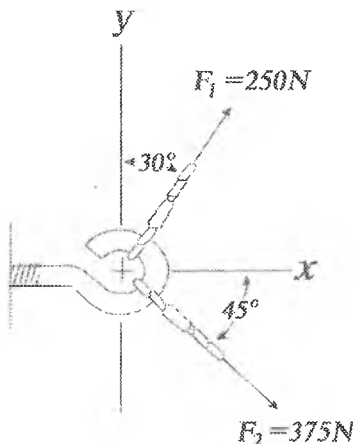
Muammo № 1. 16.1-rasmda ko'rsatilgan kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisining miqdori va yo'nalishi aniqlansin.

Berilgan: $F_1=3F$; $F_2=5F$; $F_3=5F$; $F_4=5\sqrt{2}F$.



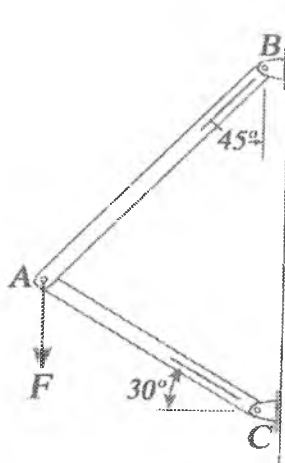
16.1-rasm

Muammo № 2. 16.2-rasmda ko'rsatilgan kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisining miqdori va yo'nalishi aniqlansin.



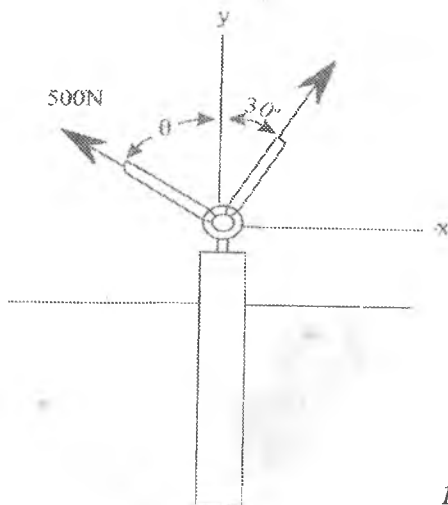
16.2-rasm

Muammo № 3. Qurilmaning A nuqtasiga vertikal pastga yoʻnalgan \vec{F} kuch qoʻyilgan. AC va AB sterjenlardagi zoʻriqishlar aniqlansin (16.3-rasm).



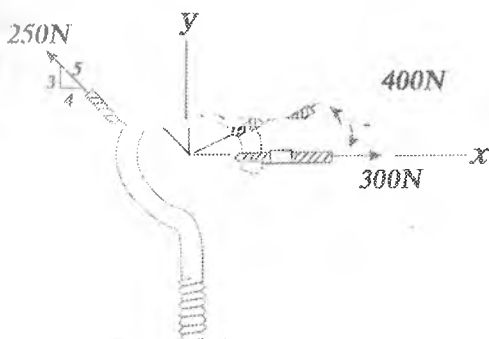
16.3-rasm

Muammo № 4. 16.4-rasmda vintga qoʻyilgan kuchlar koʻrsatilgan. Agar $F=600N$ boʻlsa, kuchlar teng taʼsir etuvchisining miqdori va uning vertikal bilan hosil qilgan burchagi topilsin.



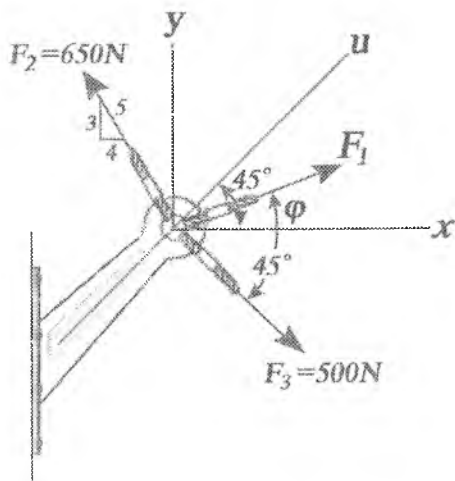
16.4-rasm

Muammo № 5. 16.5-rasmda ko'rsatilgan mexanizmga ta'sir etayotgan kuchlarning teng ta'sir etuvchisi va uning yo'nalishi aniqlansin.



16.5-rasm

Muammo № 6. 16.6-rasmda ko'rsatilgan kronshteynga ta'sir etayotgan kuchlarning teng ta'sir etuvchisi aniqlansin. $\varphi = 30^\circ$ deb qabul qilinsin.



16.6-rasm

Takrorlash uchun savollar:

1. Kesishuvchi kuchlar sistemasi deb qanday kuchlarga aytiladi?
2. Kesishuvchi kuchlarning teng ta'sir etuvchisining yo'nalishi qanday aniqlanadi?
3. Kesishuvchi kuchlarning teng ta'sir etuvchisining moduli qanday aniqlanadi?
4. Kuch ko'pburchagi qanday chiziladi?
5. Oxirgi kuchdan boshlab kuch ko'pburchagini qurish mumkinmi?
6. Qaysi hollarda sinuslar teoremasidan foydalanib masala yechiladi?
7. Qaysi hollarda kosinuslar teoremasidan foydalanib masalalar yechiladi?
8. Kesishuvchi kuchlar sistemasining geometrik muvozanat shartini ko'rsating.
9. Uch kuch teoremasi qanday ta'riflanadi?
10. Kuchning o'qqa proyeksiyasi qanday aniqlanadi?
11. Qaysi holda kuchning o'qqa proyeksiyasi nolga teng bo'ladi?
12. Kesishuvchi kuchlar sistemasining analitik muvozanat shartini ta'riflang.
13. Kuchning tekislikdagi proyeksiyasi qanday aniqlanadi?

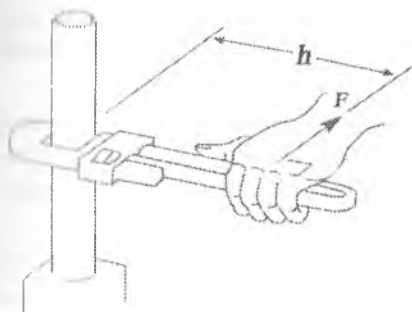
MOMENTLAR VA TEKISLIKDAGI JUFT KUCHLAR NAZARIYASI

17-§. Kuchning nuqtaga nisbatan algebraik momenti

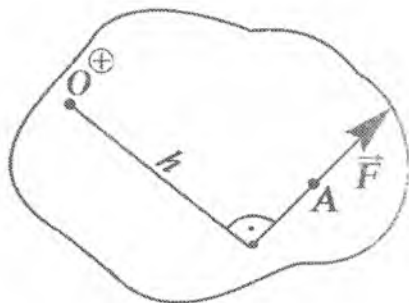
Jismlarning qo'zg'almas nuqta yoki o'q atrofida aylanishi unga qo'yilgan kuchning momentiga bog'liq bo'ladi. Bunda jisimga qo'yilgan kuchning momenti hisoblanadigan nuqta moment markazi, kuchning bu nuqtaga nisbatan momenti — moment markaziga nisbatan kuch momenti deyiladi.

Taraz qilaylik, shakl tekisligiga perpendikular o'q atrofida aylana shaklidagi jismlarning A nuqtasiga \vec{F} kuch qo'yilgan bo'lsin. O'qning shakl tekisligi bilan kesishgan nuqtasini O bilan belgilaymiz. Bunday holda, jismlarning A nuqtasiga qo'yilgan \vec{F} kuchning O nuqtaga nisbatan momenti deb, mos ishora bilan olingan kuch moduli F ni kuch yelkasi h ga ko'paytmasiga teng kattalikka aytiladi (17.1-a, b, c rasmlar).

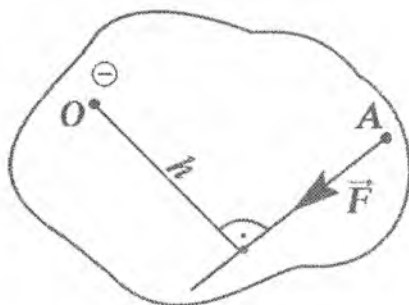
Bunda O nuqtadan \vec{F} kuchning ta'sir chizig'iga tushirilgan perpendikullarning uzunligi \vec{F} kuchning O nuqtaga nisbatan yelkasi deyiladi.



17.1-a rasm



17.1-b rasm



17.1-c rasm

Kuch momentining algebraik qiymati $M_0(\vec{F})$ bilan belgilanadi va u quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$M_0(\vec{F}) = \pm F \cdot h. \quad (17.1)$$

Agar \vec{F} kuch jismni moment markazi atrofida soat strelkasi yo'nalishida aylantirsa, kuch momenti manfiy, aks holda, musbat hisoblanadi (17.1-c, 17.1-b rasmlar):

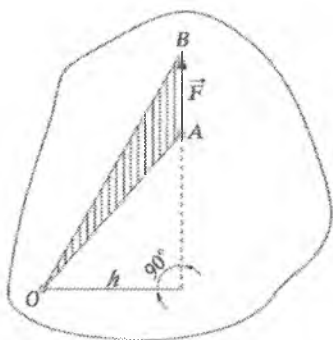
Kuchning nuqtaga nisbatan momenti quyidagi xossalarga ega:

1. Kuchning miqdori va yo'nalishini o'zgartirmay, ta'sir chizig'i bo'ylab ixtiyoriy nuqtaga ko'chirishdan, kuch yelkasi o'zgarmay qolishi tufayli, kuch momenti o'zgarmaydi.

2. Kuchning ta'sir chizig'i moment markazidan o'tsa, uning shu nuqtaga nisbatan momenti, kuch yelkasi nolga teng bo'lganligi uchun nolga teng bo'ladi.

3. 17.2-rasmga ko'ra, kuchning nuqtaga nisbatan momentining absolut qiymati kuchning boshi va uchini moment markazi bilan tutashtirishdan hosil bo'lgan OAB uchburchak yuzasining ikkilanganiga teng bo'ladi.

$$|M_0(\vec{F})| = 2S_{\Delta OAB} = |F \cdot h| \quad (17.2)$$

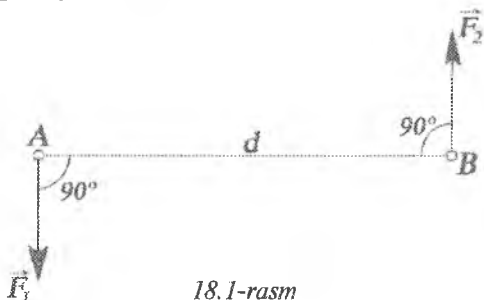


17.2-rasm

18-§. Juft kuch. Juft kuch momenti

Juft kuch deb miqdor jihatdan teng, bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan, parallel va qarama-qarshi yo'nalgan ikki kuchdan iborat sistemaga aytiladi. Juft kuch (\vec{F}_1 , \vec{F}_2) bilan belgilanadi (18.1-rasm).

Juft kuchni tashkil etgan kuchlar orasidagi eng qisqa masofa juft kuch yelkasi deyiladi va u d bilan belgilanadi. Juft kuch yotgan tekislik juft kuch tekisligi deyiladi.



18.1-rasm

Juft kuchni tashkil etuvchi kuchlar teng ta'sir etuvchiga ega emas. Juft kuchni bitta kuch bilan almashtirib bo'lmaydi. Shu sababli faqat juft kuch ta'sirida bo'lgan jism ilgariylanma harakat qila olmaydi. Juft kuch statikaning mustaqil elementi hisoblanadi.

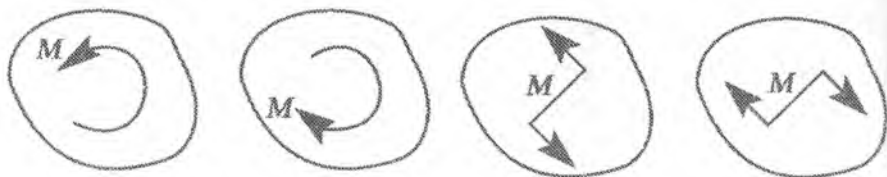
Juft kuch momenti. Juft kuch ta'sirida jism juft tekisligida aylanna harakatda bo'ladi. Juft kuchning aylantirish effekti:

- 1) juft kuchni tashkil etuvchi kuchlarning moduli $|\vec{F}_1|$, $|\vec{F}_2|$ va juft yelkasining uzunligi d ga;
- 2) juft kuch tekisligining egallagan holatiga;
- 3) juft kuch ta'siridagi jismning aylanish yo'nalishiga bog'liq bo'ladi.

Juft kuchning aylantirish effektini aniqlash va baholash uchun juft kuch momenti tushunchasi kiritiladi. **Juft kuchning momenti** deb, *mos ishora bilan olingan juft kuchni tashkil qilgan kuchlardan birining miqdorining juft kuch yelkasining uzunligiga ko'paytmasiga teng bo'lgan kattalikka aytiladi*. Juft kuch momenti M bilan belgilanadi:

$$M = \pm F_1 d = \pm F_2 d. \quad (18.1)$$

Juft kuch jismni soat milining aylanishiga teskari yo'nalishda aylantirishga intilsa, uning momenti musbat, aks holda manfiy hisoblanadi (18.2-rasm). Shartli ravishda juft kuchlar yoysimon strelkalar orqali tasvirlanadi. Bunda juft kuch momentining kattaligi M orqali, uning ishorasi esa strelka yo'nalishi orqali ifodalanadi.



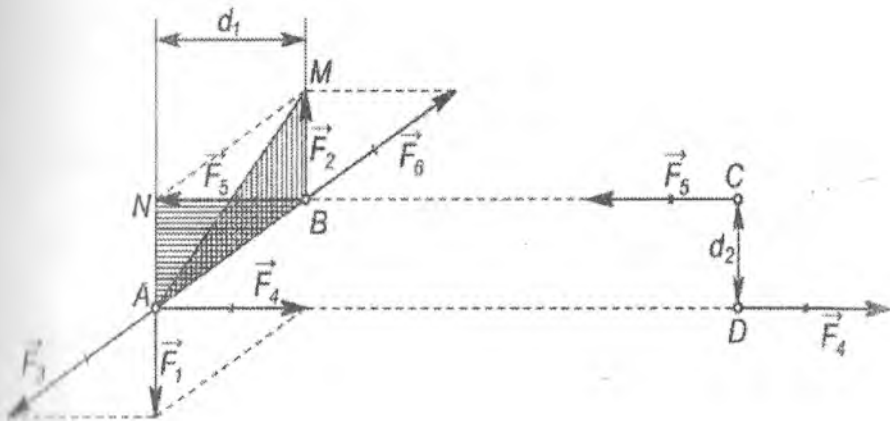
18.2-rasm

19-§. Bir tekislikda yotuvchi juft kuchlarning ekvivalentligi haqida teorema

Berilgan juft kuchning jismga ko'rsatadigan ta'sirini boshqa juft kuch bera olsa, bunday juft kuchlar ekvivalent juft kuchlar deyiladi.

Juft kuchning asosiy xossalari quyidagi teoremada ifodalangan:

Teorema. Agar juft kuch, shu juft kuch tekisligida yotuvchi va momenti berilgan juft kuchning momentiga teng bo'lgan juft kuch bilan almashtirilsa, juft kuchning jismga ta'siri o'zgarmaydi.



19.1-rasm

Isboti. Jismga yelkasi d_1 va momenti M_1 ga teng bo'lgan (\vec{F}_1 , \vec{F}_2) juft kuch qo'yilgan bo'lsin (19.1-rasm). \vec{F}_1 va \vec{F}_2 kuchlar qo'yilgan A va B nuqtalardan o'zaro parallel AD va BC chiziqlarni o'tkazamiz. Bu chiziqlar orasidagi eng qisqa masofani d_2 bilan belgilaymiz. \vec{F}_1 kuchni AB va AD chiziqlar bo'ylab yo'nalgan \vec{F}_3 , \vec{F}_4 tashkil etuvchilarga, \vec{F}_2 kuchni BC va BA chiziqlar bo'ylab yo'nalgan \vec{F}_5 va \vec{F}_6 tashkil etuvchilarga ajratamiz:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_3 + \vec{F}_4, \quad \vec{F}_2 = \vec{F}_5 + \vec{F}_6. \quad (19.1)$$

Natijada, (\vec{F}_1 , \vec{F}_2) kuchlar sistemasi o'rniga, unga ekvivalent (\vec{F}_3 , \vec{F}_4 , \vec{F}_5 , \vec{F}_6) kuchlar sistemasiga ega bo'lamiz. Kuchlarning qo'yilishiga ko'ra:

$$\vec{F}_3 = -\vec{F}_6, \quad \vec{F}_4 = -\vec{F}_5. \quad (19.2)$$

Bunda \vec{F}_3 va \vec{F}_6 kuchlar miqdor jihatdan teng va bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonlarga yo'nalganligi uchun:

$$(\vec{F}_3, \vec{F}_6) \Leftrightarrow 0$$

bo'ladi.

\vec{F}_4 va \vec{F}_5 kuchlar esa yelkasi d_2 ga teng bo'lgan juft kuchni tashkil etadi. \vec{F}_4 va \vec{F}_5 kuchlarni ta'sir chiziqlari bo'ylab O nuqtalariga ko'chirsak, (\vec{F}_1, \vec{F}_2) juft kuch o'rniga, (\vec{F}_4, \vec{F}_5) juft kuchga ega bo'lamiz:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \Leftrightarrow (\vec{F}_4, \vec{F}_5). \quad (19.3)$$

Bu juft kuchlar jismni bir tomonga aylantiradi, ya'ni momentlarining ishoralari bir xil. (\vec{F}_1, \vec{F}_2) juft kuch momentini M_1 , (\vec{F}_4, \vec{F}_5) juft kuch momentini M_2 bilan belgilasak, shakldan:

$$\begin{aligned} M_1 &= F_2 \cdot d_1 = 2S_{\triangle ABM}, \\ M_2 &= F_4 \cdot d_2 = 2S_{\triangle ABN}. \end{aligned} \quad (19.4)$$

Lekin, ABM va ABN uchburchaklarda AB tomon umumiy, $MN \parallel BA$ bo'lgani uchun ular bir xil balandlikka ega. Demak, bu uchburchaklarning yuzalari ham bir xil.

Binobarin,

$$M_1 = M_2.$$

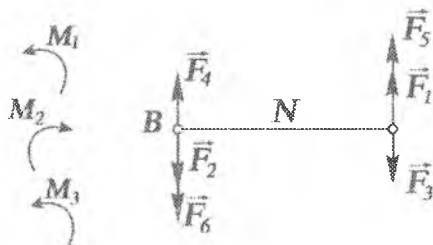
Shunday qilib, teorema isbotlandi.

Isbotlangan teoremadan quyidagi natijalar kelib chiqadi:

- 1) juft kuch momentini o'zgartirmay, o'z ta'sir tekisligida ixtiyoriy joyga ko'chirilsa, uning jismga ta'siri o'zgarmaydi;
- 2) juftning momenti va aylanish yo'nalishini o'zgartirmay, uning tashkil etuvchilari va yelkasi o'zgartirilsa, juft kuchning jismga ta'siri o'zgarmaydi.

20-§. Bir tekislikda yotuvchi juft kuchlarni qo'shish

Jismga bir tekislikda yotuvchi va momentlari M_1, M_2, M_3 bo'lgan juft kuchlar ta'sir etsin. Juft kuchlarni shartli ravishda yoysimon strelkalar bilan almashtiramiz (20.1-rasm).



20.1-rasm

Ekvivalent juftlar haqidagi teoremaga asosan, jismga ta'sir etayotgan uchta juftni momentlarini o'zgartirmay, umumiy d yelkaga ega bo'lgan, tashkil etuvchilari $AB=d$ kesmaning A va B nuqtalariga, juft kuch momentlarining ishoralarini e'tiborga olingan holda qo'yilgan (\vec{F}_1, \vec{F}_2) , (\vec{F}_3, \vec{F}_4) , (\vec{F}_5, \vec{F}_6) juftlarga keltiramiz.

Bunda juft kuchlarni tuzuvchi kuchlarning miqdorlari quyidagicha aniqlanadi:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{M_1}{d}, \\ F_3 &= \frac{M_2}{d}, \\ F_5 &= \frac{M_3}{d}. \end{aligned} \quad (20.1)$$

A va B nuqtalarga qo'yilgan kuchlarni alohida-alohida qo'shib, A nuqtada \vec{R}_1 , B nuqtada \vec{R}_2 kuchlarga ega bo'lamiz.

Bunda:

$$\begin{aligned} R_1 &= F_1 - F_3 + F_5, \\ R_2 &= F_2 - F_4 + F_6. \end{aligned} \quad (20.2)$$

Bu kuchlar berilgan juft kuchlarga ekvivalent bo'lgan (\vec{R}_1, \vec{R}_2) juft kuchni tashkil etadi. Uning momenti:

$$M = R_1 d = M_1 - M_2 + M_3 = F_1 \cdot d - F_3 \cdot d + F_5 \cdot d \quad (20.3)$$

formuladan aniqlanadi. Xuddi shuningdek, bir tekislikda yotuvchi va momentlari M_1, M_2, \dots, M_n bo'lgan juftlar sistemasini qo'shib, ularga ekvivalent bo'lgan juft kuchga ega bo'lish mumkin.

Uning momenti:

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_n = \sum_{i=0}^n M_i \quad (20.4)$$

formuladan aniqlanadi.

21-§. Bir tekislikda yotuvchi juft kuchlar sistemasining muvozanat sharti

Bir tekislikda yotuvchi juft kuchlarni qo'shib, ularni momenti M bo'lgan ekvivalent juftga keltirish mumkin ekanligini yuqorida bayon etdik. Binobarin, *tekislikdagi juftlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun berilgan juftlar momentlarining algebraik yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir:*

$$\sum_{i=0}^n M_i = 0. \quad (21.1)$$

(21.1) ifoda bir tekislikda yotuvchi juft kuchlar sistemasining muvozanat shartini ifodalaydi.

22-§. Bir tekislikda yotuvchi juft kuchlar sistemasining muvozanatiga doir masalalar yechish uchun uslubiy ko'rsatmalalar

Bir tekislikda yotuvchi juft kuchlar sistemasining muvozanatiga doir masalalarni quyidagi tartibda yechish tavsiya etiladi:

1. Muvozanati o'rganiladigan jism aniqlab olinadi.
2. Jismga ta'sir etuvchi juft kuchlar ko'rsatiladi.
3. Bog'langan jismni erkin jism shakliga keltirishi uchun bog'lanishlarning jismga ko'rsatadigan ta'sirini bog'lanishlar reaksiyalari bilan almashtirish lozim.
4. Jism muvozanatda bo'lganligi uchun bog'lanishlar reaksiya kuchlari, jismga qo'yilgan juft kuchlarni muvozanatiga keltirishi

lozim bo'lgan juft kuchlarni tashkil qilishi kerakligini e'tiborga olish dardkor.

5. Hosil bo'lgan bir tekislikda yotuvchi juft kuchlar sistemasi uchun muvozanat tenglamasini tuzish lozim.

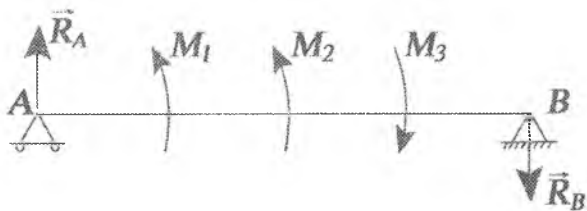
6. Tuzilgan tenglamadan noma'lumlarni aniqlash lozim.

23-§. Bir tekislikda yotuvchi juft kuchlar sistemasining muvozanatiga doir masalalar

1-masala. Uzunligi 2 m bo'lgan AB brus chap tomondan qo'zg'aluvchan sharnirli, o'ng tomondan qo'zg'almas sharnirli tayanchlarga tayanadi.

AB brusga momentlari $M_1=24\text{ km}$, $M_2=36\text{ km}$, $M_3=50\text{ km}$ bo'lgan juft kuchlar ta'sir etadi. AB brusning tayanch reaksiyalari aniqlansin.

Yechimi: AB brusning muvozanatini o'rganamiz. AB brusga momentlari $M_1 = 24\text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_2 = 36\text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_3 = -50\text{ kN} \cdot \text{m}$ bo'lgan juft kuchlar ta'sir etadi. AB brusga chap tomondagi qo'zg'aluvchan, o'ng tomondagi qo'zg'almas sharnirli tayanchlar bog'lanishlar hisoblanadi. Qo'zg'aluvchan sharnirli tayanch reaksiyasi \vec{R}_A brus harakatlanadigan tekislikka perpendikular holda yoqoriga yo'naladi. AB brus muvozanatda bo'lishi uchun qo'zg'almas tayanch reaksiyasi \vec{R}_B ham B nuqtada brusga perpendikular holda pastga qarab yo'naladi. Natijada, (\vec{R}_A, \vec{R}_B) , juft kuch hosil bo'ladi (23.1-rasm).



23.1-rasm

Uning momenti quyidagicha aniqlanadi:

$$M = -R_A \cdot AB = -R_B \cdot B_A.$$

Shunday qilib, AB brus momentlari M_1, M_2, M_3 va M bo'lgan juft kuchlar ta'sirida muvozanatda bo'lishi aniqlanadi. Juft kuchlar sistemasining muvozanat tenglamasini tuzamiz:

$\sum M_i = 0$. $M_1 + M_2 - M_3 - M = 0$. Muvozanat tenglamasiga juft kuchlar momentlarining qiymatlarini qo'yajak:

$$24 + 36 - 50 - R_A \cdot 2 = 0$$

ifoda hosil bo'ladi, tenglamadan $R_A = 5kN$. R_B va $R_A = 5kN$.

2-masala. Muvozanatlashgan uchta juft bir tekislikda yotadi. Bu juftlarni tashkil etuvchi kuchlarning miqdori mos ravishda $2N$, $3N$, va $5N$, yelkalari $3m$, xm va $6m$. Birinchi va uchinchi juftlarning momentlari musbat qiymatga ega. Ikkinchi juft yelkasi x topilsin.

Yechimi: juftlarning momentlari quyidagiga teng:

$$M_1 = 2 \cdot 3 = 6 N \cdot m, M_2 = -3x N \cdot m, M_3 = 5 \cdot 6 = 30 N \cdot m.$$

Juft kuchlar muvozanatda bo'lgani uchun

$$M_1 + M_2 + M_3 = 0$$

yoki

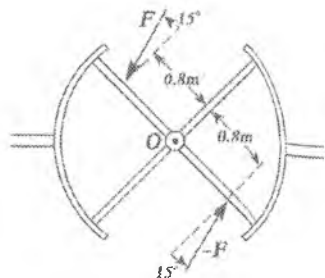
$$6 - 3x + 30 = 0$$

Bundan

$$x = \frac{36}{3} = 12 m.$$

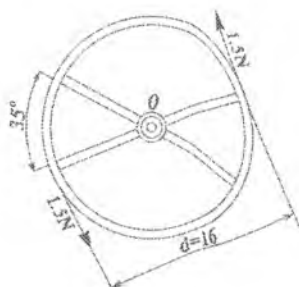
24-§. Mustaqil o'rganish uchun talabalarga tavsiya qilinadigan muammolar

Muammo № 1. Rasmda aylanma kirish eshigining tepadan ko'rinishi tasvirlangan. Ikki kishi eshikka bir vaqtda miqdorlari bir xil bo'lgan kuchlar bilan ta'sir ko'rsatadi. Agar mazkur kuchlardan eshik o'qida yotuvchi O nuqtaga nisbatan hisoblangan natijaviy moment $25 Nm$ bo'lsa, eshikka qo'yilgan F kuchning miqdori aniqlansin (24.1-rasm).



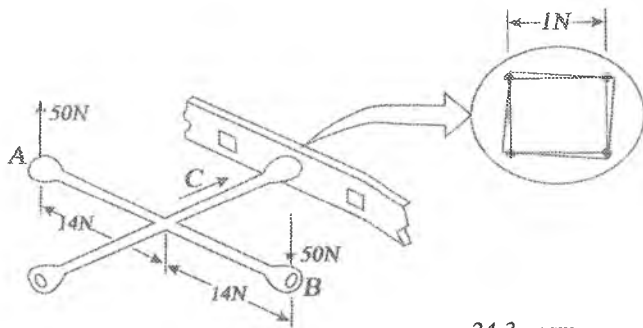
24.1-rasm

Muammo № 2. Haydovchi mashina rulini chap tomonga burish uchun miqdorlari $1,5 N$ bo'lgan ikki kuch bilan rulni aylantiradi. Rulga qo'yilgan kuchlardan hosil bo'lgan natijaviy moment aniqlansin. Rul diametri o'zgarishining rulni aylantirishga ta'sirini izohlang (24.2-rasm).



24.2-rasm

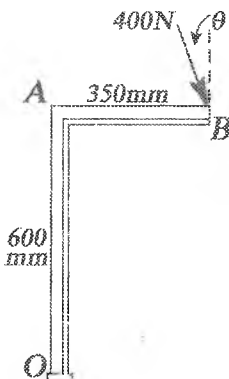
Muammo № 3. Rasmda ko'rsatilgan gaykali kalit kvadrat boshli boltlarni qotirish uchun ishlatiladi. Agar gaykali kalit dastasiga rasmda ko'rsatilgandek miqdori $50 N$ bo'lgan kuchlar ta'sir etsa, bolt



24.3-rasm

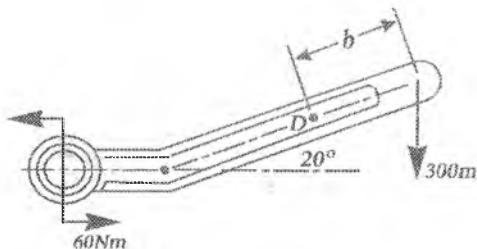
boshining to'rt nuqtasiga mazkur kuchlar tufayli ta'sir etuvchi kuchlar aniqlansin. Bu kuchlarning aylantiruvchi ta'sirlari kalit dastasiga qo'yilgan miqdorlari 50 N bo'lgan kuchlar ta'siriga ekvivalent bo'ladi. Kuchlar bolt boshi tekisliklariga perpendikular holda yo'naladi (24.3-rasm).

Muammo № 4. Miqdori 400 N bo'lgan kuch AB sterjenga $\theta = 20^\circ$ burchak ostida ta'sir etadi. Mazkur kuchning ta'siriga ekvivalent bo'lgan va konstruksiyaning O va A nuqtalariga ta'sir ko'rsatuvchi juft kuch sistemasi aniqlansin. Burchak θ ning qanday qiymatida konstruksiyaning O va A nuqtalariga qo'yiladigan ta'sirlar o'zaro teng bo'ladi (24.4-rasm).



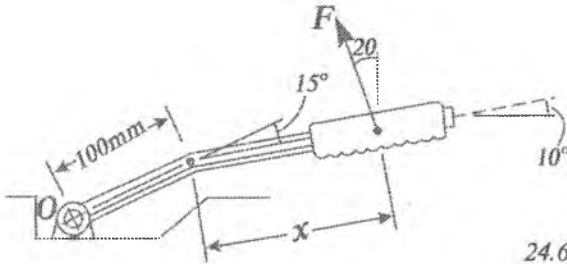
24.4-rasm

Muammo № 5. Rasmda ko'rsatilgan konstruksiyaga ta'sir etuvchi juft kuch va kuch konstruksiyasining D nuqtasiga qo'yilgan F kuchga keltirilsin. V masofa aniqlangach, D nuqtaning o'rni aniqlansin (24.5-rasm).



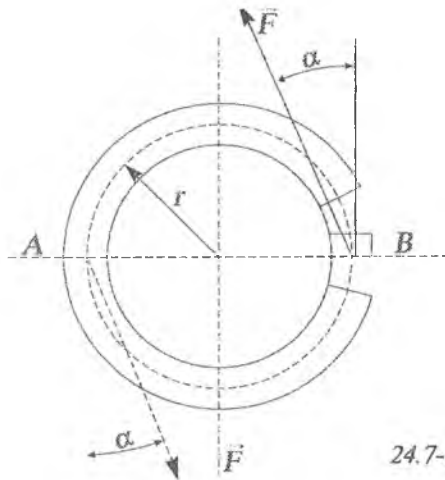
24.5-rasm

Muammo № 6. Avtomobil tormozi dastasiga $x = 250 \text{ mm}$ bo'lganda $F = 50 \text{ N}$ kuch ta'sir etadi. Mazkur kuchni tormoz dastasining O aylanish nuqtasiga qo'yilgan kuch – juft kuch sistemasi bilan almashtirilsin (24.6-rasm).



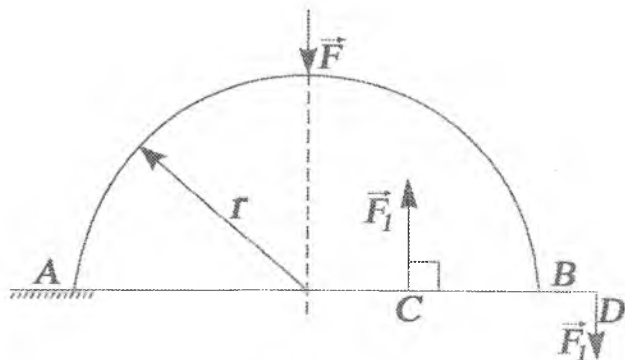
24.6-rasm

Muammo № 7. Radiusi $r=0,04 \text{ m}$ bo'lgan tishli g'ildirakka $\alpha=20^\circ$ burchak ostida $F=F=100 \text{ N}$ juft kuchlar ta'sir etadi. Juft kuchning momentini toping (24.7-rasm).



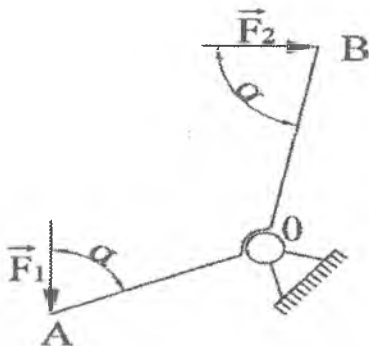
24.7-rasm

Muammo № 8. AB arkaga (\vec{F}_1, \vec{F}_1') juft kuch va \vec{F} kuchi ta'sir etadi. Agar kuchlarning miqdori $F=4 \text{ N}$, $F_1=2 \text{ N}$, arka radiusi $r=2 \text{ m}$, juft kuch yelkasi $CD=1,5 \text{ m}$ bo'lsa, ularning A nuqtaga nisbatan momentlarining yig'indisini aniqlang (24.8-rasm).



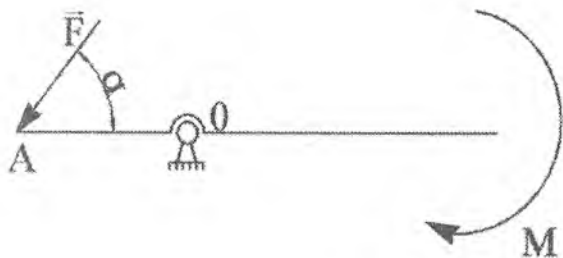
24.8-rasm

Muammo № 9. *O* nuqtada sharnir yordamida mahkamlangan richagga $\alpha=70^\circ$ burchak ostida $F_1=6N$ va F_2 kuchlar ta'sir etadi. Agar masofalar $OA=0,3m$ va $OB=0,4 m$ bo'lib, richag muvozanatda bo'lsa, kuchning qiymatini toping (24.9-rasm).



24.9-rasm

Muammo № 10. *O* nuqtada sharnir yordamida mahkamlangan richagga $\alpha=45^\circ$ burchak ostida \vec{F} kuch va momenti $M=3N m$ bo'lgan juft kuch ta'sir etadi. Agar richag muvozanatda bo'lib, masofa $OA=0,3 m$ bo'lsa, F kuchining miqdorini aniqlang (24.10-rasm).



24.10-rasm

Muammo № 11. ABC arkaga (\vec{F}_1, \vec{F}_1') juft kuch va \vec{F} kuchi qo'yilgan. Agar juft kuchning yelkasi $DE=1,2$ m, $\alpha=45^\circ$ bo'lsa, B nuqtaga nisbatan ularning momentlari yig'indisining miqdorini aniqlang (24.8-rasm).

Takrorlash uchun savollar:

1. Kuchning nuqtaga nisbatan momenti deb nimaga aytiladi?
2. Kuch yelkasi deb nimaga aytiladi?
3. Kuch momenti qanday nolga teng bo'ladi?
4. Kuch momentining ishorasi qanday aniqlanadi?
5. Juft kuch deb nimaga aytiladi?
6. Juft kuch teng ta'sir etuvchiga ega bo'ladimi?
7. Juft momenti qanday aniqlanadi?
8. Juft yelkasi deb nimaga aytiladi?
9. Tekislikdagi juftlar qanday qo'shiladi?
10. Tekislikdagi juftlarning muvozanat shartini ta'riflang?

TEKISLIKDAGI KUHLAR SISTEMASI

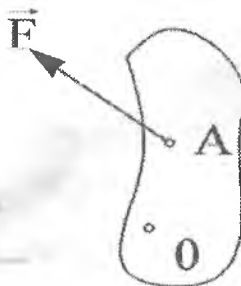
25-§. Kuchni o'ziga parallel ko'chirishga oid lemma

Jismning biror nuqtasiga qo'yilgan kuchni uning ta'sir chizig'i bo'ylab boshqa nuqtaga ko'chirganda, uning jismga ta'siri o'zgar-maydi. Ammo, o'ziga parallel holda ta'sir chizig'ida yotmaydigan boshqa biror nuqtaga ko'chirilsa, kuchning jismga ta'siri o'zgaradi. Kuch o'ziga parallel ravishda jismning qaysi nuqtasiga keltirilsa, shu nuqta keltirish markazi deyiladi.

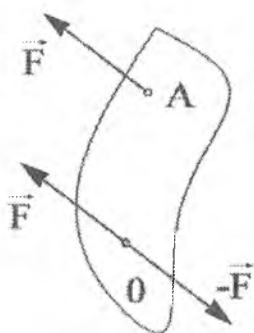
Kuchning jismga ta'sirini o'zgartirmay, o'ziga parallel ravishda, bir nuqtadan ikkinchi nuqtaga ko'chirish masalasi, 1804-yilda fransuz olimi Lui Puanso (1777–1859) tomonidan o'rganilgan va quyidagi lemmada ifodalangan.

Lemma. *Jismning biror nuqtasiga qo'yilgan kuch jismda olingan ixtiyoriy keltirish markaziga qo'yilgan xuddi shunday kuchga va momenti berilgan kuchning keltirish markaziga nisbatan momentiga teng bo'lgan juft kuchga ekvivalent bo'ladi.*

Isboti. Jismning A nuqtasiga \vec{F} kuch qo'yilgan bo'lsin (25.1-a rasm), uning jismga ta'sirini o'zgartirmay, parallel ravishda ixtiyoriy O nuqtaga ko'chirish talab etilsin. Buning uchun O nuqtaga ta'sir chizig'i \vec{F} ga parallel (\vec{F}' , \vec{F}'') $\Leftrightarrow 0$ kuchlar sistemasini qo'ya-miz (25.1-b rasm).



25.1-a rasm

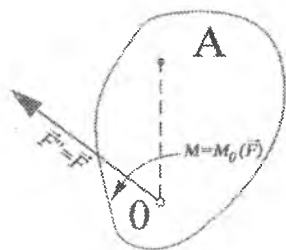


25.1-b rasm

Bu nollik sistemani tashkil etuvchi kuchlar $|\vec{F}'| = |\vec{F}''| = |\vec{F}|$ bo'lsin. Natijada, A nuqtaga qo'yilgan \vec{F} kuch (\vec{F} , \vec{F}' , \vec{F}'') kuchlar sistemasiga ekvivalent bo'ladi. Lekin (\vec{F} , \vec{F}' , \vec{F}'') kuchlar sistemasi o'z navbatida, O nuqtaga qo'yilgan $\vec{F}'' = \vec{F}$ kuchga va (\vec{F} , \vec{F}') juftga ekvivalent bo'ladi. (\vec{F} , \vec{F}') juftning momenti \vec{F} kuchning O nuqtaga nisbatan momentiga teng ekanligi juft kuchlar nazariyasidan ma'lum:

$$M = M_0(\vec{F}). \quad (25.1)$$

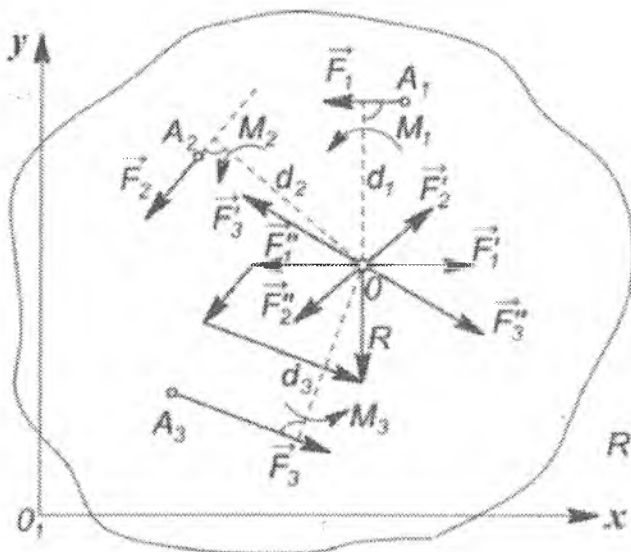
Binobarin, A nuqtaga qo'yilgan \vec{F} kuch, keltirish markazi O ga qo'yilgan $\vec{F}'' = \vec{F}$ kuchga va momenti $M = M_0(\vec{F})$ bo'lgan juft kuchga ekvivalent bo'lar ekan (25.1-c rasm), bu juft qo'shilgan juft kuch deyiladi. Shu bilan lemma isbotlandi.



25.1-c rasm

26-§. Tekislikdagi kuchlar sistemasini bir markazga keltirish. Tekislikdagi kuchlar sistemasining bosh vektori va bosh momenti

Jismning A_1, A_2, \dots, A_n nuqtalariga bir tekislikda yotuvchi $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlar ta'sir etsin (26.1-rasm).



26.1-rasm

Bu kuchlarni Puanso lemmasiga ko'ra keltirish markazi O ga keltirishda, berilgan kuchlar O nuqtaga qo'yilgan $\vec{F}_1'' = \vec{F}_1$, $\vec{F}_2'' = \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n'' = \vec{F}_n$ kuchlar va momentlari:

$$M_1 = M_0(\vec{F}_1), M_2 = M_0(\vec{F}_2), \dots, M_n = M_0(\vec{F}_n)$$

bo'lgan qo'shilgan

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_1'), (\vec{F}_2, \vec{F}_2'), \dots, (\vec{F}_n, \vec{F}_n')$$

juftlarga ekvivalent bo'ladi.

O markazga qo'yilgan \vec{F}_1'' , \vec{F}_2'' , ..., \vec{F}_n'' kuchlarni geometrik qo'shib, kuchlar sistemasining bosh vektori deb ataladigan bitta \vec{R} kuchga ega bo'lamiz:

$$\vec{R} = \vec{F}_1'' + \vec{F}_2'' + \dots + \vec{F}_n'' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_i. \quad (26.1)$$

Binobarin, kuchlar sistemasining bosh vektori berilgan kuchlarning geometrik yig'indisiga teng bo'ladi.

Bir tekislikda yotuvchi juftlarni qo'shib, momenti $M = M_0$ ga teng bo'lgan bitta juftga ega bo'lamiz.

Bu juftning momenti mazkur juftlar momentlarining algebraik yig'indisiga teng bo'ladi:

$$M = M_0 = \sum M_0(\vec{F}_i). \quad (26.2)$$

M_0 kattalik tekislikdagi kuchlar sistemasining bosh momenti deyiladi. Demak, tekislikdagi kuchlar sistemasining biror markazga nisbatan bosh momenti berilgan kuchlarning shu markazga nisbatan momentlarining algebraik yig'indisiga teng bo'lar ekan.

Shunday qilib, tekislikdagi kuchlar sistemasini bir markazga keltirish natijasida bu kuchlar keltirish markaziga qo'yilgan bosh vektor \vec{R} ga teng bitta kuch hamda momenti bosh moment M_0 ga teng bo'lgan bitta juftga ekvivalent bo'lar ekan.

Bunday usul bilan kuchlar sistemasini bir markazga keltirish Puanso usuli bilan kuchlarni berilgan markazga keltirish deyiladi.

Bosh vektor berilgan kuchlarning geometrik yig'indisiga teng bo'lishi tufayli keltirish markazining tanlanishiga bog'liq bo'lmaydi. Bosh moment esa keltirish markazini o'zgartirish natijasida kuch yelkasi o'zgarishi tufayli keltirish markazining tanlanishiga bog'liq bo'ladi.

Bosh vektor \vec{R} ning miqdor va yo'nalishini analitik usulda aniqlash uchun keltirish markazi O nuqtadan kuchlar yotgan tekislikda Ox va Oy o'qlarini o'tkazamiz. Agar \vec{F}_i kuchning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini X_i , Y_i va \vec{R} bosh vektorning koordinata

o'qlaridagi proyeksiyalarini R_x , R_y bilan belgilasak, bosh vektorning miqdori quyidagi formula asosida hisoblanadi:

$$R_x = \sum X_i, \quad R_y = \sum Y_i, \quad (26.3)$$

$$R = \sqrt{(\sum X_i)^2 + (\sum Y_i)^2}.$$

Tekislikdagi kuchlar sistemasi bosh vektorining yo'nalishi esa quyidagicha aniqlanadi:

$$\cos(\vec{R}, \hat{i}) = \frac{R_x}{R},$$

$$\cos(\vec{R}, \hat{j}) = \frac{R_y}{R}, \quad (26.4)$$

bunda \vec{i} , \vec{j} lar Ox va Oy o'qlarining birlik vektorlari.

27-§. Tekislikdagi kuchlar sistemasini sodda ko'rinishga keltirish

Tekislikdagi kuchlar sistemasining bosh vektori va bosh momentning qiymatlariga bog'liq holda, kuchlar sistemasini quyidagi sodda ko'rinishlarga keltirish mumkin:

1) Agar berilgan tekislikdagi kuchlar sistemasi uchun:

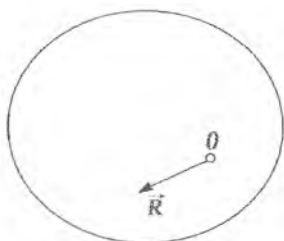
$$\vec{R} = 0, \quad M_0 = \sum M_0(\vec{F}_i) \neq 0$$

bo'lsa, kuchlar sistemasi momenti M_0 bo'lgan juft kuchga keltiriladi. Bunda, M_0 qiymati keltirish markazi O ning vaziyatiga (tanlanishiga) bog'liq bo'lmaydi.

2) Agar berilgan tekislikdagi kuchlar sistemasi uchun:

$$\vec{R} \neq 0, \quad M_0 = \sum M_0(\vec{F}_i) = 0$$

bo'lsa, kuchlar sistemasi bitta kuchga, ya'ni teng ta'sir etuvchiga keltiriladi. Teng ta'sir etuvchining ta'sir chizig'i keltirish markazi O nuqtadan o'tadi (27-a rasm).



27-a rasm

3) Agar berilgan kuchlar sistemasi uchun:

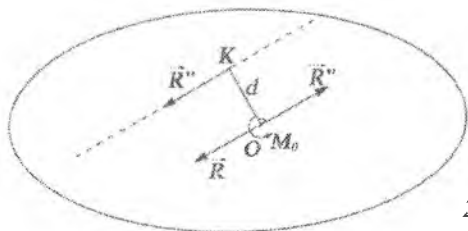
$\vec{R} \neq 0$, $M_0 = \sum M_0(\vec{F}_i) \neq 0$ bo'lsa, momenti M_0 bo'lgan juft kuchni \vec{R}' va \vec{R}'' kuchlardan tashkil topgan deb faraz qilamiz.
Bunda:

$$|\vec{R}'| = |\vec{R}|, \quad \vec{R}' = -\vec{R}$$

bo'lgani uchun, juft yelkasi:

$$OK = d = \frac{M_0}{R}$$

bo'ladi (27-b rasm).



27-b rasm

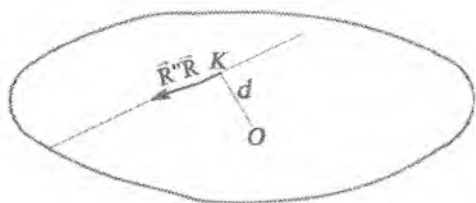
Natijada, O nuqtadagi \vec{R} va \vec{R}' kuchlarni o'zaro muvozanatda bo'lgan kuchlar sifatida tashlab yuborsak, tekislikdagi kuchlar sistemasi keltirish markazi O dan

$$OK = d = \frac{|M_0|}{R}$$

masofa uzoqlikda yotuvchi K nuqtaga qo'yilgan

$$\vec{R}'' = \vec{R}$$

teng ta'sir etuvchi kuchga keltiriladi (27-c rasm).



27-c rasm

Shunday qilib, muvozanatda bo'lmagan tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi $\vec{R} \neq 0$ bo'lganda bitta teng ta'sir etuvchi kuchga, $M_0 \neq 0$ va $\vec{R} \neq 0$, $M_0 \pm 0$ bo'lganda bitta juftga keltirilalar ekan.

28-§. Tekislikdagi kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisining momenti haqida Varinyon teoremasi

Teorema. Tekislikdagi kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisining shu tekislikdagi ixtiyoriy nuqtaga nisbatan momenti tashkil etuvchi kuchlardan mazkur nuqtaga nisbatan hisoblangan momentlarning algebraik yig'indisiga teng:

$$M_0(\vec{R}) = \sum M_0(\vec{F}_i). \quad (28.1)$$

Isbot. 27-c rasmdan ko'ramizki, R teng ta'sir etuvchining O nuqtaga nisbatan momenti quyidagicha yoziladi:

$$M_0(\vec{R}) = R \cdot d. \quad (28.2)$$

(28.2)ni e'tiborga olsak:

$$M_0(\vec{R}) = \frac{R \cdot M_0}{R} = M_0.$$

O'z navbatida, tekislikdagi kuchlar sistemasining bosh momenti quyidagicha aniqlanadi:

$$M_0(\vec{R}) = \sum M_0(\vec{F}_i).$$

Oxirgi ikkita tenglikni solishtirib, (28.1) o'rinli ekanligini ko'ramiz.

29-§. Tekislikdagi kuchlar sistemasining muvozanat shartlari

Yuqorida, tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bir markazga keltirishda, kuchlar sistemasi bosh vektorga teng bo'lgan bitta kuchga va momenti bosh momentga teng bitta juftga keltirilishini ko'rib o'tdik. Bunday kuchlar sistemasi $\vec{R} \neq 0$ bo'lsa, teng ta'sir etuvchi kuchga, $\vec{R} = 0$, $M_0 \neq 0$ bo'lganda bitta juftga ekvivalent bo'ladi.

Lekin, tekislikdagi kuchlar sistemasini shu tekislikdagi ixtiyoriy O nuqtaga keltirish natijasida, bir vaqtning o'zida bosh vektor \vec{R} , bosh moment M_0 ham nolga teng bo'lishi mumkin:

$$\vec{R} = 0, \quad M_0 = 0, \quad (29.1)$$

yoki

$$\sum \vec{F}_i = 0, \quad \sum M_O(\vec{F}_i) = 0. \quad (29.2)$$

(29.1) va (29.2) tenglamalar tekislikdagi kuchlar sistemasini muvozanatining zarur va yetarli shartlarini ifodalaydi.

Shartlarning zarurligi shundan iboratki, ularning birortasi bajarilmasa, kuchlar sistemasi muvozanatda bo'la olmaydi. Shartlarning yetarliligi shundan iboratki, $\vec{R} = 0$ bo'lsa, tekislikdagi kuchlar sistemasi momenti M_0 ga teng bo'lgan juftga keltiriladi, lekin $M_0 = 0$ bo'lgani uchun bu kuchlar sistemasi muvozanatda bo'ladi.

Bosh vektorning moduli $R = \sqrt{(2X_i)^2 + (\sum Y_i)^2}$ formula asosida aniqlanishini e'tiborga olsak, (29.1) yoki (29.2) tenglamalar o'rniga, tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanati shartlarining analitik ifodasi uchun quyidagi tenglamalarga ega bo'lamiz:

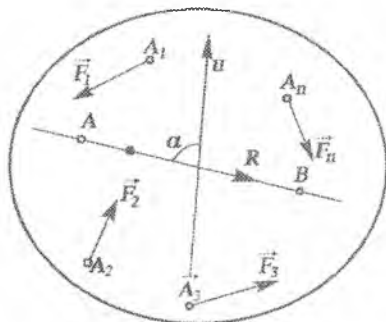
$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum M_O(\vec{F}_i) = 0. \quad (29.3)$$

Demak, *tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun bir vaqtda kuchlarning shu tekislikda yotuvchi ikkita koordinata o'qlariga proyeksiyalarining algebraik yig'indilari alohida-alohida*

holga teng bo'lishi va shu tekislikdagi ixtiyoriy nuqtaga nisbatan momentlarining algebraik yig'indisining ham holga teng bo'lishi zarur va yetarli bo'lar ekan.

Tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatining yana quyidagi ikki sharti ham mavjud:

1) tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun kuchlarning shu tekislikda yotuvchi ixtiyoriy ikki nuqtaning har biriga nisbatan momentlarining algebraik yig'indisi alohida-alohida holga teng bo'lishi va mazkur nuqtalarni birlashtiruvchi to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lmagan u o'qdagi proyeksiyalarining algebraik yig'indisi ham holga teng bo'lishi zarur va yetarlidir (29-rasm):



29-rasm

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum M_B(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum U_i = 0. \quad (29.4)$$

Tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun bu shartlarning zarurligi shundaki, (29.4)dagi shartlardan birortasi bajarilmasa, bunday kuchlar sistemasi muvozanatlashmaydi.

(29.4)dagi shartlarning tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun yetarililigini isbotlaylik. (29.4)dagi shartlardan birinchi tenglikning bajarilishi A nuqtaga nisbatan bosh momentning holga tengligini ifodalaydi: $M_A = 0$. Bunday holda, tekislikdagi kuchlar sistemasi A nuqtadan o'tuvchi teng ta'sir etuvchiga keltirilishi mumkin.

(29.4)ning ikkinchi ifodasi va teng ta'sir etuvchi kuchning momenti haqida Varinyon teoremasiga asosan:

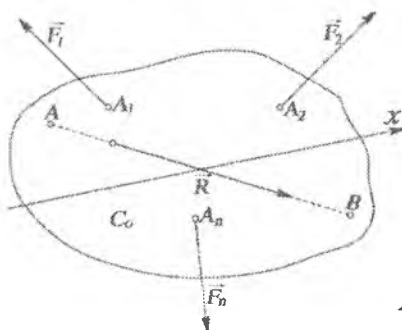
$$M_B(\vec{R}) = \sum M_B(\vec{F}_i) = 0,$$

tenglik bajariladi. Binobarin, \vec{R} ning ta'sir chizig'i B nuqtadan o'tadi, ya'ni AB da yotadi. (29.4)ning uchinchi shartiga ko'ra, $R_u = \sum U_i = 0$.

U o'q AB ga perpendikular bo'lmagani uchun bu tenglik faqat $\vec{R}_u = 0$ bo'lgandagina bajariladi. Demak, (29.4) shart bajarilganda tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lar ekan;

2) tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun barcha kuchlarning shu tekislikdagi bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan uchta nuqtaning har biriga nisbatan hisoblangan momentlarining yig'indilari alohida-alohida nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir:

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum M_B(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum M_C(\vec{F}_i) = 0. \quad (29.5)$$



29.2-rasm

Kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun bu shartlarning zarurligi bevosita (29.5)dan kelib chiqadi. Chunki bu shartlarning birortasi bajarilmasa, kuchlar sistemasi muvozanatlashmaydi. (29.5) shartning tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun yetarli ekanligi, teskarisini faraz qilish bilan isbotlanadi. (29.5) shartlarning bajarilishiga qaramay, tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lmisligi uchun berilgan kuchlar sistemasi bu vaqtning o'zida A, B, C nuqtalardan o'tuvchi teng ta'sir etuvchiga keltirilishi kerak.

Bunday hol bo'lishi mumkin emas, chunki A, B, C nuqtalar bir to'g'ri chiziqda yotmaydi. Shuning uchun (29.4) shartlar bajarilsa, tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'ladi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Kuch vektorini o'ziga parallel ko'chirish uchun nima qilish zarur?
2. Tekislikdagi kuchlar sistemasining bosh momenti qanday aniqlanadi?
3. Agar bosh moment nolga teng bo'lsa bu nimani anglatadi?
4. Tekislikdagi kuchlar sistemasining bosh vektori qanday aniqlanadi?
5. Agar bosh vektor nolga teng bo'lsa bu nimani anglatadi?
6. Varinyon teoremasi nimani ifodalaydi?
7. Tekislikdagi kuchlar sistemasining muvozanat shartlarini ayting.
8. Tekislikdagi kuchlar sistemasining muvozanat tenglamalarini yozib bering.

30-§. Tekislikdagi kuchlar sistemasining muvozanatiga oid masalalarni yechish uchun uslubiy ko'rsatmalar

Tekislikdagi kuchlar sistemasining muvozanatiga doir masalalarni quyidagi tartibda yechish tavsiya etiladi.

1. Muvozanati o'rganilayotgan jism (yoki nuqta) aniqlanadi.
2. Koordinatalar sistemasini tanlab olinadi.
3. Jismga ta'sir etayotgan, kuchlar ko'rsatiladi.
4. Jismni bog'lanishlardan bo'shatib, ularning ta'sirlari bog'lanish reaksiya kuchlari bilan almashtiriladi.
5. Muvozanati o'rganilayotgan jism berilgan kuchlar va bog'lanishlar reaksiya kuchlari ta'siridagi erkin jism deb qaraladi.
6. Berilgan masala statik aniq masala ekanligi tekshiriladi, ya'ni masaladagi algebraik noma'lum kattaliklar soni uchtadan oshmasligi aniqlanadi.
7. Koordinata o'qlarining boshi, yo'nalishi va moment hisoblanadigan nuqta (yoki nuqtalar) tanlanadi.
8. Qattiq jismga qo'yilgan tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini uchun muvozanat tenglamalari tuziladi.
9. Tuzilgan muvozanat tenglamalari yechiladi va noma'lum kattaliklar aniqlanadi.

Muvozanat tenglamalarini tuzishda har bir tenglamada faqat bittadan noma'lum kattalik qatnashishiga e'tibor berish lozim. Chunki bunda har bir noma'lum kattalik bevosita shu noma'lum kattalik qatnashgan tenglamani yechish orqali aniqlanadi. Bunday hol masalani yechishni soddalashtiradi. Buning uchun koordinata o'qlarini shunday o'tkazish lozimki, bunda ba'zi noma'lum kuchlar o'qqa

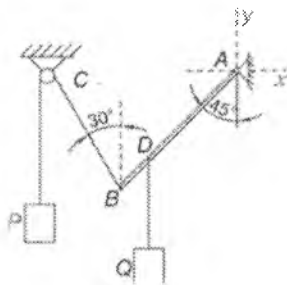
perpendikular holda yoʻnalgan boʻlsin. Bunday holda ularning mazkur oʻqdagı proyeksiyalari nolga teng boʻladi.

Moment hisoblanadigan nuqta sifatida, odatda, ikki nomaʼlum kuchning taʼsir chiziqlari kesishadigan nuqtani olish maqsadga muvofiq boʻladi. Bu hol tuziladigan momentlar tenglamasidan bevosita uchinchi nomaʼlum kuchni aniqlashga imkon beradi. Agar masalada bogʻlanish reaksiyasining yoʻnalishi aniq boʻlmasa, uni koordinata oʻqlarining musbat yoʻnalish boʻylab yoʻnalgan tashkil etuvchilarga ajratish maqsadga muvofiq boʻladi. Hisoblash natijasida kuchning miqdori manfiy ishorali chiqsa, bu hol mazkur kuchning yoʻnalishi dastlab chizmada koʻrsatilgan yoʻnalishiga teskari ekanligidan darak beradi.

31-§. Tekislikdagi kuchlar sistemasining muvozanatiga oid masalalar

1-masala. Ogʻirligi $G=100\text{ N}$ boʻlgan A sharnir bilan devorga mahkamlangan bir jinsli AB balkani blokdan oʻtkazilgan va bir uchiga P yuk osilgan tros vertikalga nisbatan 45° burchak ostida ushlab turadi. Trosning BC qismi vertikal bilan 30° burchak hosil qiladi. D nuqtada balkaga ogʻirligi 200 N boʻlgan

Q yuk osiladi. Agar $BD=\frac{1}{4}AB$ boʻlsa, P yuk ogʻirligi va A sharnirning reaksiyasi topilsin. Blokdağı ishqalanish hisobga olinmasin (31.1-a rasm).

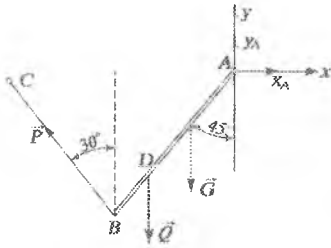


31.1-a rasm

Yechish: AB balkaning muvozanatini

oʻrganamiz. AB balkaga uning ogʻirligi \vec{G} va D nuqtaga qoʻyilgan

\vec{Q} kuchlar taʼsir etadi. A sharnir va BC tros balka uchun bogʻlanishlar hisoblanadi. Bogʻlanishlardan boʻshatish prinsipiga koʻra, bogʻlanishlarning balkaga taʼsirini ularning reaksiya kuchlari bilan almash-tiramiz: A sharnir reaksiyasining yoʻnalishi oldindan nomaʼlum boʻlganligi uchun uni koordinata oʻqlarining musbat yoʻnalishi



31.1-b rasm

bo'ylab yo'nalgan \vec{X}_A, \vec{Y}_A tashkil etuvchilariga ajratamiz. Tros BC qismidagi taranglik kuchi balkaning B nuqtasiga qo'yiladi va tros bo'ylab C blok tomon yo'naladi (C blok P kuchning ta'sir chizig'ini o'zgartiradi). Natijada, balkaga

ta'sir etuvchi ($\vec{G}, \vec{Q}, \vec{P}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A$) kuchlardan iborat tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasiga ega bo'lamiz (31.1-b rasm).

Hosil bo'lgan kuchlar sistemasi uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

Hosil bo'lgan kuchlar sistemasi uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\sum X_i = 0, \quad X_A - P \cos 60^\circ = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0, \quad Y_A - G - Q + P \cos 30^\circ = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0, \quad G \cdot \frac{AB}{2} \cos 45^\circ + Q \cdot \frac{3}{4} AB \cos 45^\circ - P \cos 30^\circ AB \sin 45^\circ - P \cos 60^\circ AB \cos 45^\circ = 0. \quad (3)$$

Tenglamalarni yechib noma'lum kattaliklarni aniqlaymiz:

(3) tenglamadan:

$$P = \frac{\frac{G}{2} \cos 45^\circ + Q \cdot \frac{3}{4} \cos 45^\circ}{\cos 30^\circ \cdot \sin 45^\circ + \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ} = \frac{50 \cdot 0,71 + 150 \cdot 0,71}{0,17 \cdot 0,71 + 0,5 \cdot 0,71} = \frac{200 \cdot 0,71}{0,71 \cdot 1,37} = \frac{142}{0,97} = 146,4 \text{ N.}$$

(1) tenglamadan:

$$X_A = P \cdot \cos 60^\circ = \frac{P}{2} = 73 \text{ N.}$$

(2) tenglamadan:

$$Y_A = G + Q - P \cos 30^\circ = 100 + 200 - 146 \cdot 0,87 = 300 - 127 = 173 \text{ N.}$$

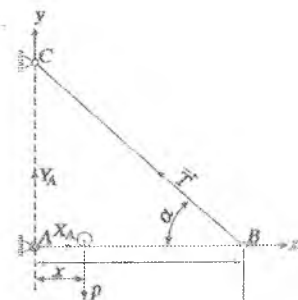
2-masala. Kran gorizontaal balkasining uzunligi l ga teng, uning bir uchi sharnir yordamida mahkamlangan, ikkinchi B uchi gorizont

bilan α burchak hosil qiluvchi BC tortqich vositasida devorga tortilib turadi. Balka ustida og'irligi P bo'lgan yuk siljiy oladi. Yukning holati A sharnirgacha bo'lgan o'zgaruvchi x masofaga qarab aniqlanadi. BC tortqichning tortilish kuchi T yuk holatining o'zgarishiga qarab aniqlansin. Balka og'irligi hisobga olinmasin.

Yechimi: AB balkaning muvozanatini o'rganamiz. AB balka bo'ylab P yuk harakatlanadi. Yukning balkadagi holati A sharnirdan hisoblanadigan o'zgaruvchan x masofa orqali aniqlanadi.

A sharnir va BC arqon AB balka uchun bog'lanishlar hisoblanadi. Bo'g'lanishlardan bo'shatish prinsipiga ko'ra bog'lanishlarning AB balkaga ta'sirini ularning reaksiya kuchlari bilan almashtiramiz: A sharnir reaksiyasi oldindan noma'lum bo'lganligi uchun uni koordinata o'qlarining musbat yo'nalishi bo'ylab yo'nalgan X_A, Y_A tashkil etuvchilarga ajratamiz.

BC arqon reaksiyasi T balkaning B nuqtasiga qo'yiladi va arqon bo'ylab C nuqta tomon yo'naladi. Natijada, balkaga ta'sir etuvchi (R, X_A, Y_A, T) kuchlar sistemasiga ega bo'lamiz (31.2-rasm).



31.2-rasm

Koordinata o'qlarini rasmdagidek o'tkazib, hosil bo'lgan tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\sum X_i = 0, X_A - T \cos \alpha = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0, Y_A + T \sin \alpha - P = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0 - Px + Tl \sin \alpha = 0. \quad (3)$$

Tenglamalarni yechib, arqondagi taranglik kuchini yuk holatiga bog'liqligini ifodalovchi munosabatni aniqlaymiz:

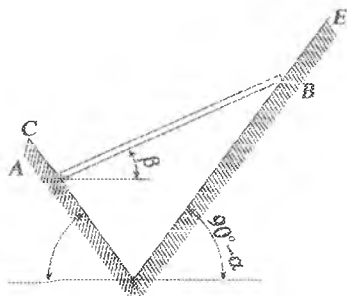
(3) tenglamadan

$$T = \frac{Px}{l \sin \alpha}.$$

Taranglik kuchini bilgan holda, (1) va (2) tenglamalardan, A sharnir reaksiyasining koordinata o'qlari bo'ylab yo'nalgan tashkil etuvchilari X_A, Y_A aniqlanadi:

$$X_A = T \cos \alpha,$$

$$Y_A = P - T \sin \alpha.$$



31.3-a rasm

3-masala. Og'irligi P bo'lgan bir jinsli AB balka vertikal joylashgan silliq CD va DE og'ma to'g'ri chiziqlarga tiralib turadi. Bu to'g'ri chiziqlardan birinchisi gorizont bilan α burchak, ikkinchi $90^\circ - \alpha$ burchak hosil qiladi. Muvozanat holatida balkaning gorizont bilan tashkil qilgan burchagi β hamda tayanch chiziqlarga ko'rsatgan bosimi topilsin (31.3-a rasm).

Yechish: bir jinsli AB balkaning muvozanatini o'rganamiz. Balkaga uning og'irligi \vec{P} ta'sir etadi. Balka uchun CD va DE tayanch chiziqlari bog'lanishlar hisoblanadi. Tayanch chiziqlarining reaksiya kuchlari \vec{N}_A va \vec{N}_B lar tayanch chiziqlarga perpendikular holda yo'naladi. Natijada, tekislikda ixtiyoriy joylashgan $\vec{P}, \vec{N}_A, \vec{N}_B$ kuchlar sistemasiga ega bo'lamiz (31.3-b rasm).

Koordinata o'qlarini rasmdagidek o'tkazib, hosil bo'lgan kuchlar sistemasining muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\sum X_i = 0, \quad = 0, \quad N_A \sin \alpha - N_B \sin(90^\circ - \alpha) = 0,$$

$$\sum Y_i = 0, \quad N_A \cos \alpha - P + N_B \cos(90^\circ - \alpha) = 0,$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0, \quad -P \frac{l}{2} \cos \beta + N_B \sin(90^\circ - \alpha) \cdot l \sin \beta + N_B \sin \alpha \cdot l \cos \alpha = 0.$$

Tenglamalarni o'zgartirib yozamiz:

$$\sum X_i = 0, \quad N_A \sin \alpha - N_B \cos \alpha = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0, \quad N_A \cos \alpha - P + N_B \sin \alpha = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_A(F_i) = 0, -P \frac{l}{2} \cos \beta + N_B \cos \alpha \cdot l \cdot \sin \beta + N_B \sin \alpha \cdot l \cdot \cos \alpha = 0. \quad (3)$$

Tenglamalarni yechib, noma'lum kattaliklarni aniqlaymiz.

(1) tenglamadan:

$$N_A = \frac{N_B \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

N_A uchun topilgan ifodani (2)ga qo'ysak,

$$\frac{N_B \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} - P + N_B \sin \alpha = 0$$

yoki

$$N_B (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = P \sin \alpha.$$

Bundan

$$N_B = P \sin \alpha.$$

N_B topilgan ifodani (2)ga qo'ysak,

$$N_A \cos \alpha - P + P \sin^2 \alpha = 0$$

yoki

$$N_A \cos \alpha = P(1 - \sin^2 \alpha).$$

Bundan

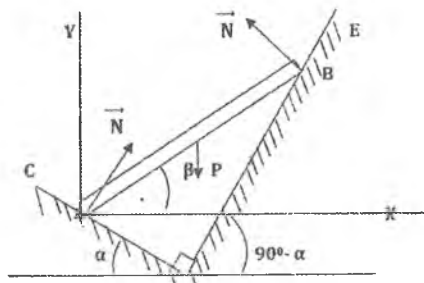
$$N_A = P \cos \alpha.$$

(3) tenglamadan:

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{ctg} 2\alpha$$

yoki

$$\beta = 90^\circ - 2\alpha.$$



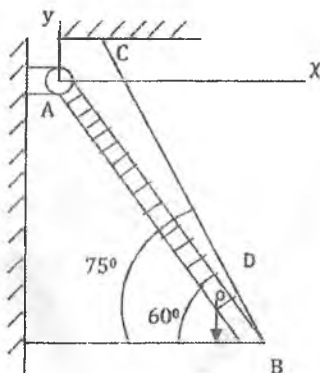
31.4-b rasm

4-masala. *A* yuk atrofida aylana oladigan, gorizont bilan 60° burchak tashkil etuvchi bir jinsli narvonning og'irligi $2,4 \text{ kN}$, uzunligi 6 m . Narvonning *B* uchidan 2 m masofadagi *D* nuqtada og'irligi $0,8 \text{ kN}$ bo'lgan odam turadi. Gorizont bilan 75° burchak tashkil qiluvchi *BC* arqon narvonning *B* uchini tutib turadi. Arqondagi tortilish kuchi *T* va *A* o'qining reaksiyasi topilsin (31.4-a rasm).

Yechish: *AB* bir jinsli narvonning muvozanatini o'rganamiz.

Narvonga uning og'irligi \vec{G} , narvonning *D* nuqtasida turgan odam og'irligi \vec{P} ta'sir etadi. Narvon uchun uni ushlab turuvchi *BC* arqon va *A* qo'zg'almas sharnir bog'lanishlar hisoblanadi. Bog'lanishlardan bo'shatish prinsipidan foydalanib, bog'lanishlarning narvonga ta'sirini bog'lanishlar reaksiya kuchlari bilan almashtiramiz. Arqon reaksiyasi taranglik kuchi \vec{T} narvonning *B* nuqtasiga qo'yiladi va arqon bo'ylab *C* nuqtaga yo'naladi. *A* sharnir reaksiyasi oldindan noma'lum bo'lganligi uchun uning reaksiyasini koordinata o'qlarining musbat yo'nalishi bo'ylab yo'nalgan \vec{X}_A, \vec{Y}_A tashkil etuvchilarga ajratamiz.

Natijada, narvonga tekislikda ixtiyoriy joylashgan $(\vec{G}, \vec{P}, \vec{T}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A)$ kuchlar sistemasi (31.4-b rasm) ta'sir etadi. O'qlarini rasm-dagidek o'tkazib, hosil bo'lgan kuchlar sistemasi uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz.



31.4-a rasm

$$\sum X_i = 0, X_A - T \cos 75^\circ = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0, Y_A - G - P + T \cos 15^\circ = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0, T \cos 15^\circ \cdot AB \cdot \cos 60^\circ - T \cos 75^\circ \cdot AB \cdot \cos 30^\circ - \\ -P(AB - BD) \cos 60^\circ - G \cdot \frac{AB}{2} \cos 60^\circ = 0. \quad (3)$$

Muvozanat tenglamalarini yechib, noma'lum kattaliklarni aniqlaymiz.

$$X_A - 0,26 \cdot T = 0, \quad (1)$$

$$Y_A - 3,2 + 0,97 \cdot T = 0, \quad (2)$$

$$1,55 \cdot T - 5,2 = 0. \quad (3)$$

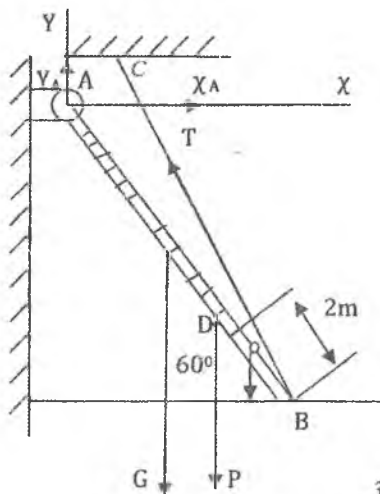
(3) tenglamadan:

$$T = \frac{5,2}{1,55} = 3,35 \text{ kN},$$

$$X_A = 0,26 \cdot T = 0,26 \cdot 3,35 = 0,867 \text{ kN}.$$

(2) tenglamadan:

$$Y_A = 3,2 - 0,97 \cdot T = 3,2 - 0,97 \cdot 3,35 = 0,0344 \text{ kN}.$$



31.4-b rasm

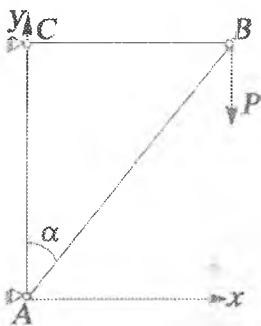
5-masala. Yuk ko'taradigan kran AB balkadan iborat. Balkaning pastgi A uchi sharnir yordamida devorga biriktirilganda yuqorigi uchini BC gorizontaal tros ushlab turadi. Yukning og'irligi $P=2$ kN; AB balkaning og'irligi 1 kN bo'lib, balkaning o'rtasiga qo'yilgan, burchak $\alpha=45^\circ$. BC trosning tortilish kuchi T va A tayanchga tushadigan bosim aniqlansin (31.5-a rasm).

Yechish: AB balkaning muvozanatini o'rganamiz. AB balkaga uning og'irligi \vec{Q} ko'tarilayotgan yuk og'irligi P ta'sir etadi.

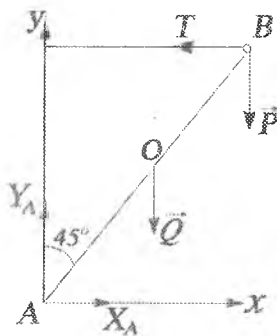
A qo'zg'almas sharnir va BC gorizontaal arqon AB balka uchun bog'lanishlar hisoblanadi. Bog'lanishlardan bo'shatish prinsipiga ko'ra, bog'lanishlarning balkaga ta'sirini bog'lanishlar reaksiyalari bilan almashtiramiz: A sharnir reaksiyasini koordinata o'qlarining musbat yo'nalishi bo'ylab yo'nalgan \vec{X}_A, \vec{Y}_A tashkil etuvchilarga ajratamiz; BC gorizontaal arqon reaksiyasi balkaning B nuqtasiga qo'yilgan bo'lib, arqon bo'ylab C nuqta tomon yo'naladi. Natijada, AB balkaga ta'sir etuvchi tekislikda ixtiyoriy joylashgan ($\vec{Q}, \vec{P}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{T}$) kuchlar sistemasi hosil bo'ladi (31.5-b rasm).

Koordinata o'qlarini rasmdagidek o'tkazib, hosil bo'lgan tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz.

$$\sum X_i = 0, X_A - T = 0, \quad (1)$$



31.5-a rasm



31.5-b rasm

$$\sum Y_i = 0, Y_A - Q - P = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_A(P_0) = 0, T \cdot AB \cdot \cos 45^\circ - P \cdot AB \cdot \sin 45^\circ - Q \cdot \frac{AB}{2} \sin 45^\circ = 0. \quad (3)$$

Hosil bo'lgan muvozanat tenglamalarini yechib, noma'lum kattaliklarni aniqlaymiz.

(3) tenglamadan:

$$T = P + \frac{Q}{2} = 2 + \frac{1}{2} = 2,5 \text{ kN}.$$

(1) tenglamadan:

$$X_A = T = 2,5 \text{ kN}.$$

(2) tenglamadan:

$$Y_A = P + Q = 2 + 1 = 3 \text{ kN}.$$

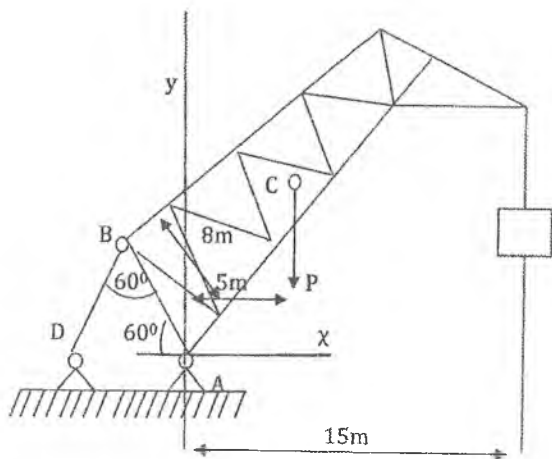
Masala shartida kran tomonidan A tayanchga ko'rsatiladigan boshini aniqlash talab etilgan. Ko'rsatiladigan bosim kuchlari A sharnir reaksiyasiga teng bo'lib, unga qarama-qarshi yo'nalgan bo'ladi. Shuning uchun

$$X'_A = -X_A = -2,5 \text{ kN},$$

$$Y'_A = -Y_A = -3 \text{ kN}.$$

6-masala. Kran A , B va D nuqtalarida sharnirlarga ega bo'lib, $AB = AD = BD = 8 \text{ m}$. Fermaning og'irlik markazi A nuqta orqali o'tadigan vertikal dan 5 m masofada. Kranning qulochi esa A nuqtadan hisoblanganda 15 m ga teng. Kranning ko'rsatilgan vaziyatda A tayanch reaksiyalari va BD sterjenning zo'riqishi aniqlansin (31.6-rasm).

Yechish: kran fermasining muvozanatini o'rganamiz. Kran fermasiga uning og'irligi \vec{P} , ko'tarilayotgan Q yuk og'irligi Q lar ta'sir etadi. Kran fermasi uchun A qo'zg'almas sharnir va BD sterjenlar bog'lanishlar hisoblanadi. A qo'zg'almas sharnir reaksiyasini koordinata o'qlarining musbat yo'nalishi bo'ylab yo'nalgan \vec{X}_A, \vec{Y}_A tashkil etuvchilarga ajratamiz. BD sterjen reaksiyasi T (uni cho'ziladi deb faraz qilamiz). Kran fermasining B nuqtasiga qo'yilgan bo'lib, sterjen

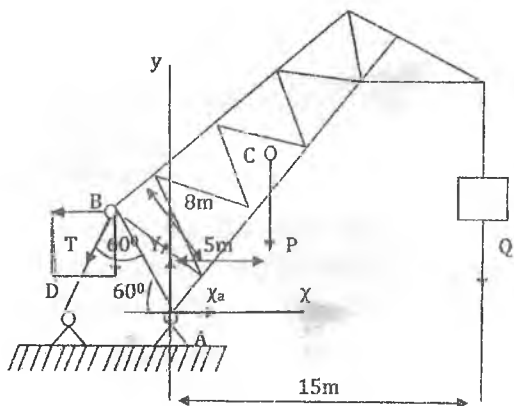


31.6-a rasm

bo'ylab D nuqta tomon yo'naladi. Natijada, kran fermasiga ta'sir qiluvchi tekislikda ixtiyoriy joylashgan $(\vec{P}, \vec{Q}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{T})$ kuchlar sistemasiga ega bo'lamiz (31.6-b rasm).

Hosil bo'lgan kuchlar sistemasini uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz.

$$\sum X_i = 0, X_A - T \cos 60^\circ = 0, \quad (1)$$



31.6-b rasm

$$\sum Y_i = 0, Y_A - P - Q - T \cos 30^\circ = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0, T \cdot \cos 30^\circ \cdot 8 \cdot \sin 30^\circ + T \cos 60^\circ \cdot 8 \cdot \cos 30^\circ - 5P - 15Q = 0. \quad (3)$$

Hosil bo'lgan muvozanat tenglamalaridan noma'lum kattaliklarni aniqlaymiz.

(3) tenglamadan:

$$T = \frac{5 \cdot P + 15 \cdot Q}{8(\cos 30^\circ \cdot \sin 30^\circ + \cos 60^\circ \cdot \cos 30^\circ)} = 520 \text{ kN}.$$

(1) tenglamadan:

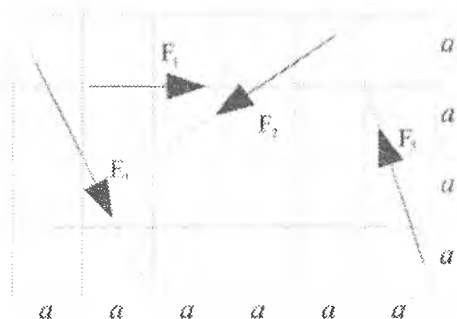
$$X_A = T \cdot \cos 60^\circ = 520 \cdot 0,5 = 260 \text{ kN}.$$

(2) tenglamadan:

$$Y_A = P + Q + T \cdot \cos 30^\circ = 120 + 200 + 520 \sqrt{\frac{3}{2}} = 770 \text{ kN}.$$

32-§. Mustaqil o'rganish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar

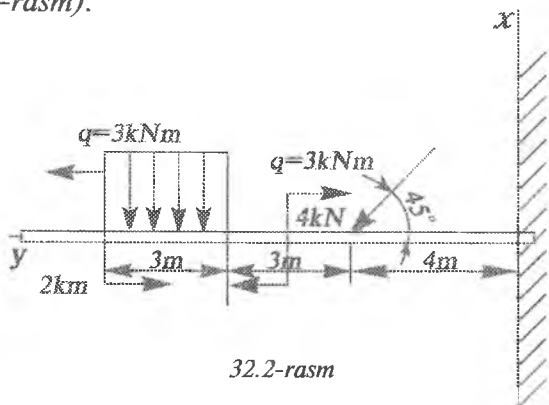
Muammo № 1. 32.1-rasmda ko'rsatilgan tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini sodda ko'rinishga keltiring.



32.1-rasm

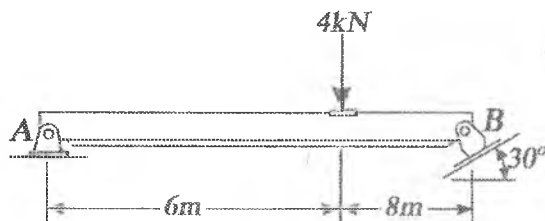
Muammo № 2. Zichligi (intensivligi) $q = 3 \text{ kN/m}$ bo'lgan tekis taqsimlangan kuch, $P = 4 \text{ kN}$ bo'lgan kuch va momentlari

$M_1 = +2 \text{ kNm}$, $M_2 = -3 \text{ kNm}$ bo'lgan juft kuchlar ta'siridagi konsol balkingning qisqirib mahkamlangan uchidagi reaksiya kuchlari aniqlansin (32.2-rasm).



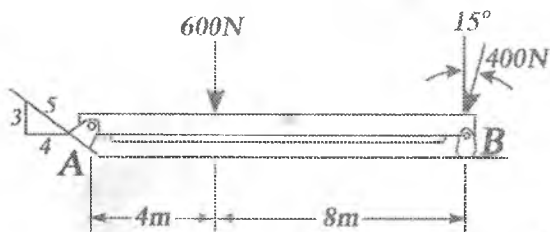
32.2-rasm

Muammo № 3. Balkaning tayanch reaksiyalari aniqlansin. Qo'yilgan kuchlar va o'lchamlar rasmda ko'rsatilgan (32.3-rasm).



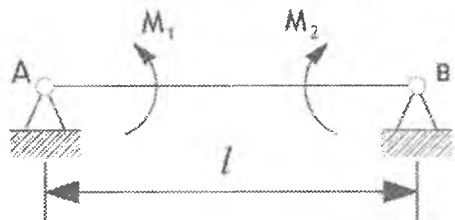
32.3-rasm

Muammo № 4. Balkaning tayanch reaksiyalari aniqlansin. Balkaga qo'yilgan kuchlar va uning o'lchamlari rasmda ko'rsatilgan (32.4-rasm).



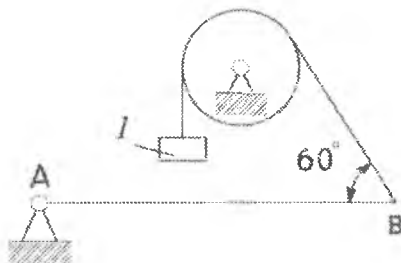
32.4-rasm

Muammo № 5. Uzunligi $l=3\text{ m}$ bo'lgan AB to'singa momentlari $M_1=2\text{ kN}\cdot\text{m}$ va $M_2=8\text{ kN}\cdot\text{m}$ bo'lgan juft kuchlar ta'sir etsa, B tayanchda hovil bo'ladigan reaksiya kuchini kN larda hisoblang (3.25-rasm).



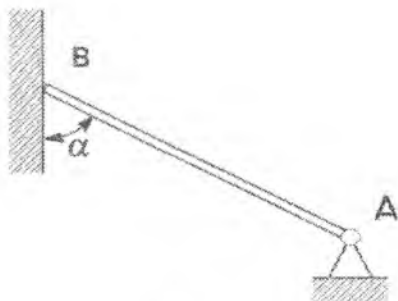
32.5-rasm

Muammo № 6. Og'irligi 346 N bo'lgan bir jinsli AB to'sinni gorizontal holatda muvozanatda ushlab turish uchun 1 yukning miqdori qancha bo'lishi lozim? (3.26-rasm).



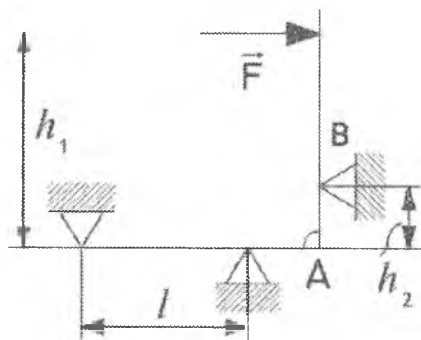
32.6-rasm

Muammo № 7. Og'irligi 100 kN bo'lgan bir jinsli brus bir uchi bilan A qozg'almas sharnirga mahkamlangan bo'lib, ikkinchi uchi bilan $\alpha=60^\circ$ burchak ostida vertikal silliq devorga tiralgan. Brusning devorga bosim kuchini kN da hisoblang (32.7-rasm).



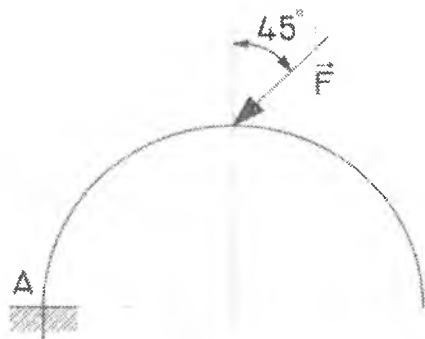
32.7-rasm

Muammo № 8. O'lchamlari $l=0,3 \text{ m}$ va $h_1=0,4 \text{ m}$ bo'lgan to'g'ri burchak shaklidagi rama \vec{F} gorizonttal kuch ta'sirida muvozanatda turibdi. A va B tayanchlarning reaksiya kuchlari miqdor jihatdan teng bo'lishi uchun B tayanchini qanday h_2 masofaga joylashtirish lozim? (32.8-rasm).



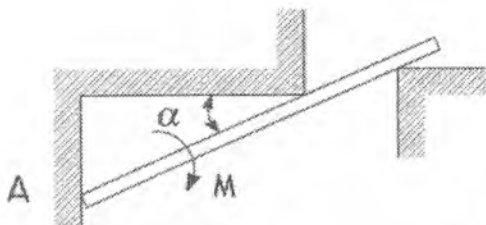
32.8-rasm

Muammo № 9. Yarim aylana shaklidagi arka A nuqtasi bilan qistirib mahkamlangan bo'lib, unga $F=100 \text{ N}$ kuch ta'sir etsa, tayanchdagi reaktiv momentni toping (32.9-rasm).



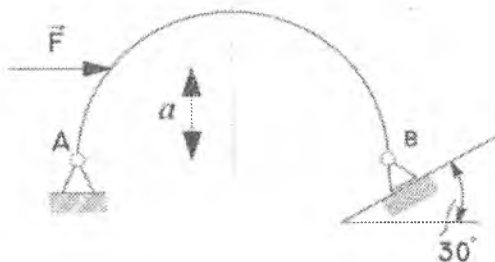
32.9-rasm

Muammo № 10. Gorizontdan $\alpha=30^\circ$ burchak qiyalikda joylashgan sterjen momenti $M=25 \text{ kN}\cdot\text{m}$ juft kuch ta'sirida muvozanatda ushlab turilgan bo'lsa, A tayanch reaksiya kuchini $k\text{N}$ da hisoblang (32.10-rasm).



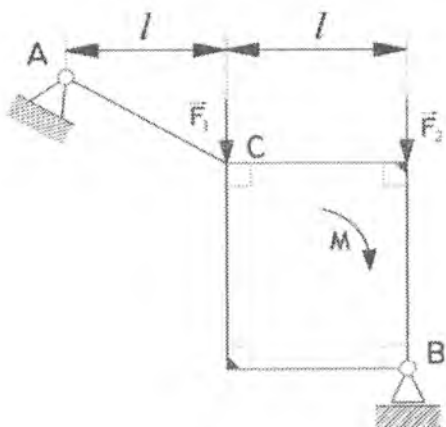
32.10-rasm

Muammo № 11. AB arkaga qanday miqdordagi gorizontal F kuchi ta'sir etsa, B tayanchdagi reaksiya kuchi 200 N ga teng bo'ldi? Bunda masofalar $a=1\text{ m}$, $B=4\text{ M}$ (32.11-rasm).



32.11-rasm

Muammo № 12. AC sterjen to'rtburchak shakldagi ramaga biki mahkamlangan. Agar unga $F_1=F_2=20\text{ kN}$ kuchlar va momenti $M=80\text{ kN}\cdot\text{m}$ juft kuch ta'sir etib, muvozanatda tursa, B tayanchning reaksiya kuchini toping. Bunda $l=2\text{ m}$ (32.12-rasm).



32.12-rasm

33-§. Taqsimlangan kuchlar

Texnikada turli inshootlarning muvozanatini o'rganishda ularning ayrim nuqtalariga qo'yilgan kuchlar bilan bir qatorda, hajm, sirt yoki chiziq kesmalari bo'yicha ma'lum qonun asosida taqsimlangan kuchlarni ham hisobga olish zarur bo'ladi. Taqsimlangan kuchlar hajm, sirt yoki chiziq birligiga to'g'ri keluvchi taqsimlangan kuchlarning intensivligi bilan xarakterlanadi. Taqsimlangan kuchlarning intensivligi N/m da o'lchanadi.

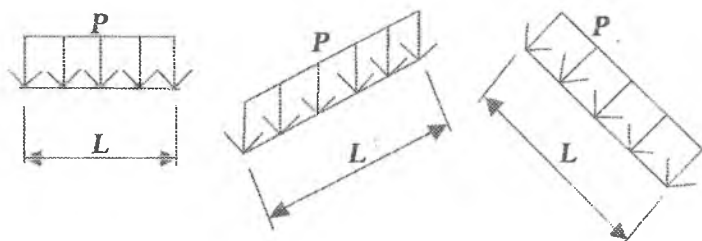
Taqsimlangan kuchlarning ayrim turlari bilan tanishib chiqamiz.

1. To'g'ri chiziq kesmasi bo'yicha tekis taqsimlangan kuchlar (33.1-a, b rasmlar).

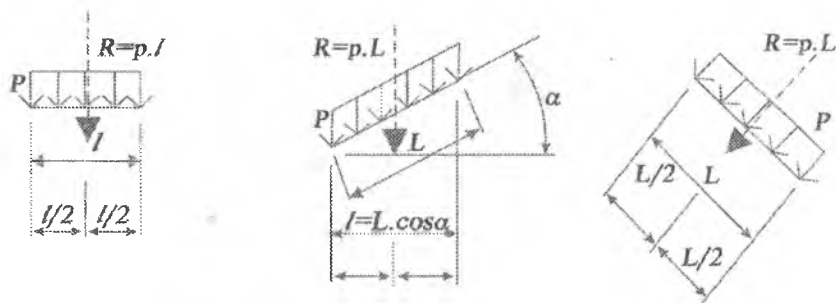
Bunday kuchlarning intensivligi q o'zgarmas kattalik bo'ladi. Ularning teng ta'sir etuvchisi:

$$R = P \cdot l$$

ga teng bo'lib, to'g'ri chiziq kesmasining o'rtasiga qo'yiladi.



33.1-a rasm



33.1-b rasm

2. To'g'ri chiziq kesmasi bo'yicha chiziqli qonun asosida taqsimlangan kuchlar (33.2-rasm).

Bunday kuchlarga suv omborlarida suv bosim kuchining to'g'on balandligi bo'yicha taqsimlanishini misol tariqasida ko'rsatish mumkin.

Bunday kuchlarning intensivligi q o'zgaruvchan bo'lib, noldan maksimal qiymati q_{\max} gacha o'zgaradi.

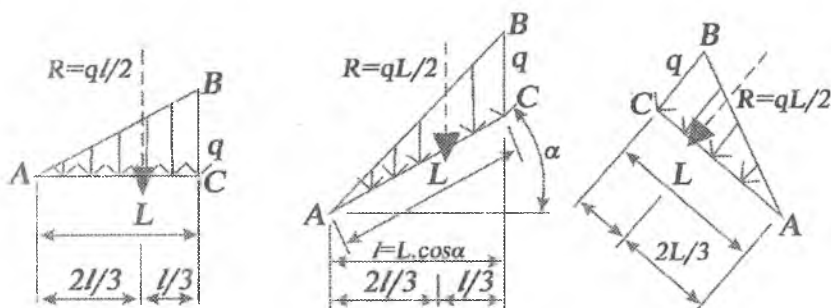
Ularning teng ta'sir etuvchisi:

$$Q = \frac{q_{\max} \cdot \alpha}{2}$$

yoki (1)

$$R = q \cdot \frac{L}{2}$$

U teng bo'ladi va ABC uchburchakning BC tomonidan $\alpha/3$ masofa uzoqlikdagi nuqtasiga qo'yiladi.

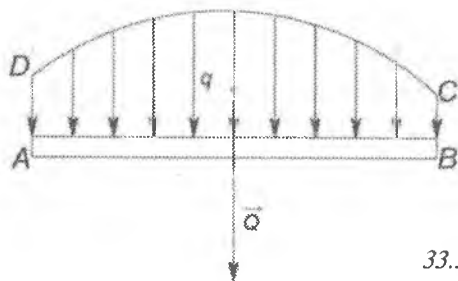


33.2-rasm

Bunday kuchlarga tunellar va boshqa yer osti inshootlariga nisbatan tuproqning bosim kuchini ham misol tariqasida ko'rsatish mumkin.

3. To'g'ri chiziq kesmasi bo'yicha ixtiyoriy qonun asosida taqsimlangan kuchlar (33.3-rasm).

Bunday holda kuchlarning teng ta'sir etuvchisi Q miqdor jihatdan mos masshtabda o'lgangan $ABCD$ taqsimlangan kuchlar yuzasiga teng bo'lib, yuzaning og'irlik markaziga qo'yiladi.



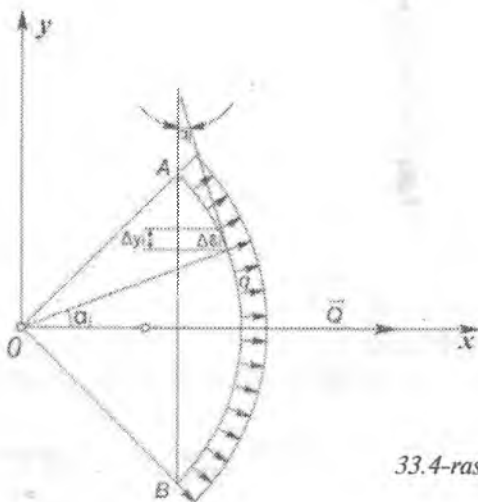
33.3-rasm

4. Aylana yoyi bo'yicha tekis taqsimlangan radial kuchlar (33.4-rasm).

Radial kuchlarga silindrik idish yon devorlariga gidrostatik bosim kuchlarining ta'sirini misol tariqasida ko'rsatish mumkin.

Ox o'qini aylana yoyi AB ning simmetriya o'qi bo'ylab yo'naltirsak, radial kuchlarning Oy o'qidagi proyeksiyalarining yig'indisi nolga teng bo'ladi.

Shuning uchun bunday kuchlarning teng ta'sir etuvchisi Q Ox o'qi bo'ylab yo'naladi va uning miqdori mazkur kuchlarning Ox o'qidagi proyeksiyalarining algebraik yig'indisiga teng bo'ladi:



33.4-rasm

$$Q = |Q_x| = \sum q \cdot l_i \cos \alpha_i. \quad (2)$$

Bunda, $q\Delta l_i$ — uzunligi Δl_i ga teng yoy bo‘lakchasiga ta‘sir etuvchi kuch, α_i — kuch bilan Ox o‘q orasidagi burchak.

33.4-rasmdan

$$\Delta l_i \cos \alpha_i = \Delta Y_i. \quad (3)$$

Shuning uchun

$$Q = \sum q \cdot \Delta Y_i = q \cdot AB. \quad (4)$$

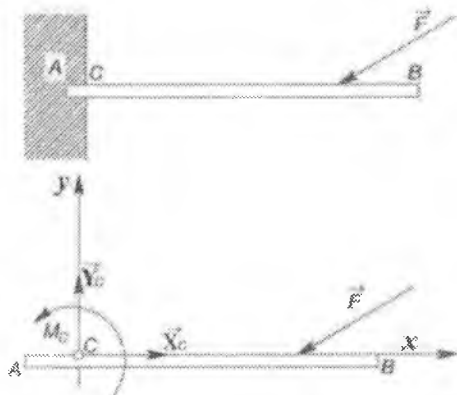
Bunda, AB bilan AB yoini tortib turuvchi vatar uzunligi belgilangan.

Demak, aylana yoyi bo‘yicha tekis taqsimlangan radial kuchlarning teng ta‘sir etuvchisi Q AB yoini tortib turuvchi AB vatar uzunligining tekis taqsimlangan kuchlar intensivligi q ga ko‘paytmasiga teng bo‘lar ekan.

5. Devorga qistirib mahkamlangan balkaga ta‘sir etuvchi taqsimlangan kuchlar (33.5-rasm).

Bino balkonlarining asosi devorga xuddi shunday mahkamlanadi.

AB balkaning AC qismi devorga qistirib mahkamlangan bo‘lsin. AC qismni bog‘lanishdan bo‘shatsak, devorning unga ta‘sirini taqsimlangan kuchlar bilan almashtirish zarur.



33.5-rasm

Bu kuchlarni C nuqtaga keltirish natijasida taqsimlangan kuchlarning bosh vektoriga teng bo‘lgan \vec{R}_C kuchga va momenti taqsim-

langan kuchlarning bosh momenti M_C ga teng bo'lgan juftga ega bo'lamiz. M_C reaksiya juftining momenti deyiladi. \vec{R}_C ning yo'nalishi aniq bo'lmagani uchun uni qo'zg'almas sharnir reaksiyasi kabi, x va y o'qlarining musbat yo'nalishlari bo'yicha yo'nalgan tashkil etuvchilardan iborat deb qaraymiz.

Natijada, devorga qistirib mahkamlangan balkaning devorga qisilgan qismidagi reaksiya kuchi balkaning C nuqtasiga qo'yilgan, yo'nalishi noma'lum \vec{R}_C reaksiya kuchining koordinata o'qlaridagi tashkil etuvchilari \vec{X}_C, \vec{Y}_C va momenti noma'lum reaktiv juftining momenti M_C ga teng bo'lgan juftga ekvivalent bo'lishi aniqlanadi.

X_C, Y_C, M_C lar balkaning muvozanat tenglamalaridan aniqlanadi.

34-§. Taqsimlangan kuchlar qatnashgan tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanatiga doir masalalar

1-masala. Stropilaning ABC simmetrik fermasining bir uchi qo'zg'almas A nuqtaga sharnir vositasida birlashtirilgan, boshqa B uchi esa g'altaklar bilan gorizontaal silliq tekislikka tayanib turadi. Ferma og'irligi 100 kN . AC tomonga shamol bosimining kuchi ta'sir qiladi. Shamol bosimi kuchi AC tomonga tik va tekis tarqalgan bo'lib, teng ta'sir etuvchisi 8 kN . AB uzunligi 6 m , burchak $CAB = 30^\circ$. Tayanchlardagi reaksiyalar topilsin (34-a rasm).

Yechish: stropilaning muvozanatini o'rganamiz. Stropilaga og'irlik kuchi \vec{G} va shamol bosimi kuchi Q ta'sir etadi. A qo'zg'almas va B qo'zg'aluvchan sharnirlar stropila uchun bog'lanishlar hisoblanadi. Bog'lanishlardan bo'shatish prinsipiga ko'ra, ularning stropilaga ta'sirini, bog'lanishlar reaksiya kuchlari bilan almashtiramiz. B qo'zg'aluvchan sharnir reaksiyasi \vec{R}_B sharnir harakatlanadigan tekislikka perpendikular yo'naladi.

Qo'zg'almas A sharnir reaksiyasini koordinata o'qlarining musbat yo'nalishi bo'ylab yo'nalgan \vec{X}_A, \vec{Y}_A tashkil etuvchilarga ajratamiz.

Natijada, stropilaga ta'sir etuvchi tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasiga ega bo'lamiz (34-b rasm).

Hosil bo'lgan tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\sum X_i = 0, \quad X_A + Q \sin 30^\circ = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0, \quad Y_A - Q \cos 30^\circ - G + R_B = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0, \quad -Q \cdot \frac{AC}{2} - G \cdot 3 + R_B \cdot AB = 0. \quad (3)$$

Chizmadan $\frac{AC}{2} \cos 30^\circ = \frac{AB}{4}$.

Bundan: $\frac{AC}{2} = \frac{AB}{4 \cdot \cos 30^\circ} = \frac{6}{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{3}}$.

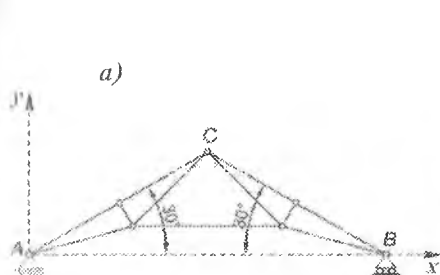
Tenglamalarni yechib, noma'lumlarni aniqlaymiz.

(1) tenglamadan:

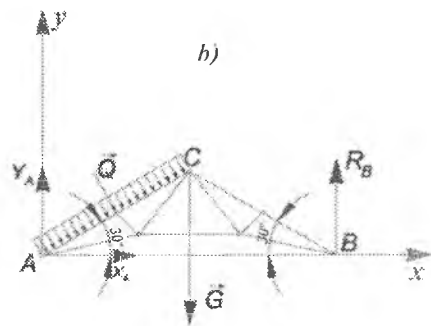
$$X_A = -Q \cdot \sin 30^\circ = -4 \text{ kN}.$$

(3) tenglamadan:

$$R_B = \frac{Q \cdot \frac{AC}{2} + G \cdot 3}{6} = \frac{8 \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} + 100 \cdot 3}{6} = 52,3 \text{ kN}.$$



34-a rasm



34-b rasm

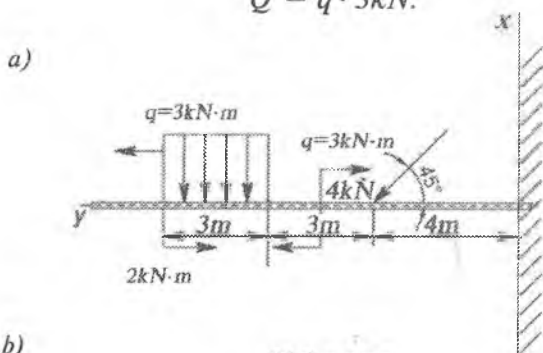
(2) tenglamadan:

$$Y_A = Q \cdot \cos 30^\circ - R_B + G = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 52,3 + 100 = 54,5 \text{ kN}.$$

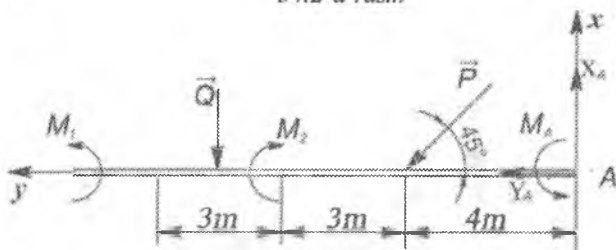
2-masala. Zichligi (intensivligi) $q = 3 \text{ kN/m}$ bo'lgan tekis taqsimlangan kuch, $P = 4 \text{ kN}$ bo'lgan kuch va momentlari $M_1 = +2 \text{ kNm}$, $M_2 = -3 \text{ kNm}$ bo'lgan juft kuchlar ta'siridagi konsol balkaning qistirib mahkamlangan uchidagi reaksiya kuchlari aniqlansin (34.2-a rasm).

Yechish: konsol balkaning muvozanatini o'rganamiz. Konsol balkaga ta'sir etuvchi tekis taqsimlangan kuch, \bar{P} kuch va momentlari M_1 , M_2 bo'lgan juft kuchlarni ko'rsatamiz. Tekis taqsimlangan kuchning teng ta'sir etuvchisi Q bilan belgilanadi:

$$Q = q \cdot 3 \text{ kN}.$$



34.2-a rasm



34.2-b rasm

Bu kuch tekis taqsimlangan kuch ta'sir etuvchi konsol balka qismining o'rtasiga qo'yiladi.

Konsol balkaning uchi qistirib mahkamlangan. Devor balka uchun bog'lanish hisoblanadi. Bog'lanishlardan bo'shatish prinsipiga ko'ra,

qoʻlning konsol balkaga taʼsirini bogʻlanish reaksiya kuchlari X_A , Y_A va reaktiv moment M_A bilan almashtiramiz. Natijada, konsol balkaga taʼsir etuvchi tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasiga ega boʻlamiz (34.2-b rasm).

Hisil boʻlgan kuchlar sistemasining muvozanat tenglamalari quyidagicha yoziladi:

$$\sum X_i = 0, \quad X_A - P \sin 45^\circ - Q = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0, \quad Y_A + P \cos 45^\circ = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_A(P_i) = 0, \quad M_A + P \sin 45^\circ \cdot 4 + Q \cdot 8,5 - M_2 + M_1 = 0. \quad (3)$$

Tenglamalarni yechib, nomaʼlumlarni aniqlaymiz.

(1) tenglamadan

$$X_A = P \cdot \sin 45^\circ + Q = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 3 \cdot 3 = 11,8 \text{ kN}.$$

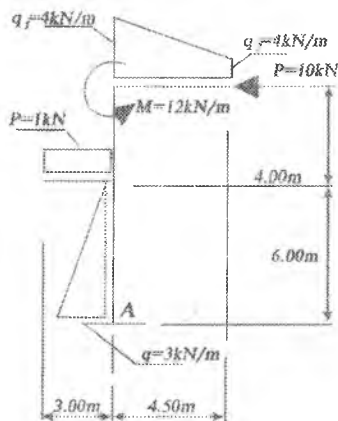
(2) tenglamadan: $Y_A = -P \cos 45^\circ = -4 \cdot 0,71 = -2,8 \text{ kN}$,

$$M_A = M_2 - M_1 - P \sin 45^\circ \cdot 4 = Q \cdot 8,5 = 0.$$

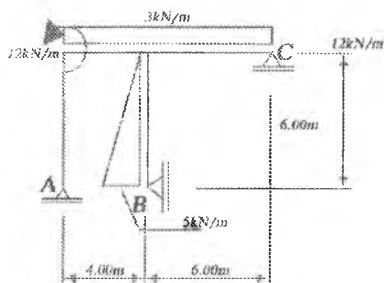
(3) tenglamadan: $-4 \cdot 0,71 \cdot 4 - 9 \cdot 9,85 = -86,9 \text{ kN} \cdot \text{m}$.

35-§. Tafabalarga mustaqil yechish uchun tavsiya etiladigan muammolar

Muammo № 1. Qistirib mahkamlangan balkaning reaksiyalarini aniqlang (35.1-rasm).

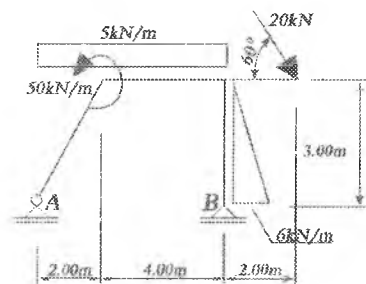


35.1-rasm



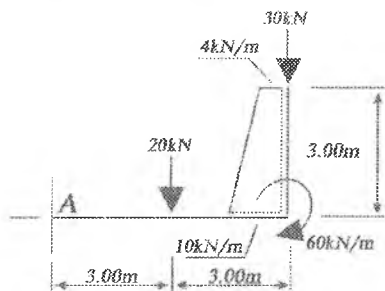
35.2-rasm

Muammo № 2. Berilgan konstruksiyaning tayanch reaksiyalarini aniqlang (35.2-rasm).



35.3-rasm

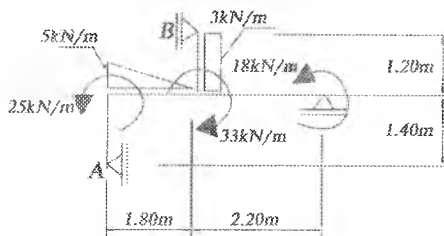
Muammo № 3. Berilgan konstruksiyaning tayanch reaksiyalarini aniqlang (35.3-rasm).



35.4-rasm

Muammo № 4. Devorga qistirib mahkamlangan konstruksiyaning tayanch reaksiyalarini aniqlang (35.4-rasm).

Muammo № 5. Berilgan konstruksiyaning tayanch reaksiyalarini aniqlang (35.5-rasm).



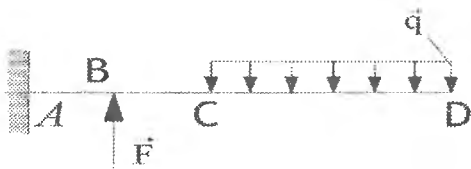
35.5-rasm

Muammo № 6. O'lchamlari $AB=2\text{ m}$, $BC=4\text{ m}$ bo'lgan devorga qistirib mahkamlangan konsol to'singa intensivligi qancha miqdorli \bar{q} taqsimlangan kuchlar ta'sir etsa, nA tayanchning reaktiv momenti 400 N/m bo'ladi? (35.6-rasm).



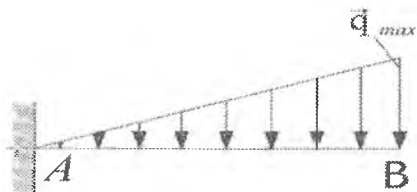
35.6-rasm

Muammo № 7. O'lchamlari $DS=3\text{ m}$, $AB=BC=1\text{ m}$ bo'lgan devorga qistirib mahkamlangan konsol to'singa F kuchi va intensivligi $\bar{q}=40\text{ N/m}$ li taqsimlangan kuchlar ta'sir etib, A tayanch reaktiv momenti 240 N/m bo'lishi uchun \vec{F} kuchining qiymati qancha bo'lishi lozim? (35.7-rasm).



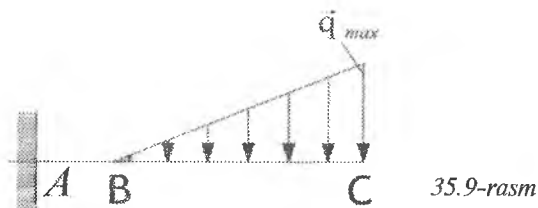
35.7-rasm

Muammo № 8. Uzunligi 3 m bo'lgan AB to'sin devorga qistirib, konsol holatda mahkamlangan bo'lib, unga intensivligi $\bar{q}_{max}=100\text{ N/m}$ li taqsimlangan kuchlar ta'sir etsa, A tayanchdagi reaktiv momentning qiymatini toping (35.8-rasm).

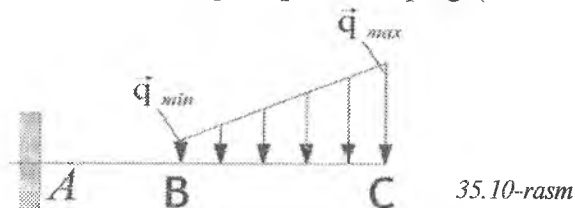


35.8-rasm

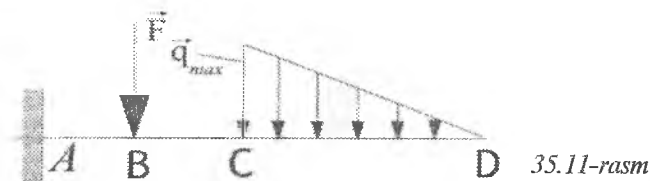
Muammo № 9. O'lchamlari $AB=1\text{ m}$, $AC=4\text{ m}$ bo'lgan to'sin devorga qistirib mahkamlangan bo'lib, unga intensivligi \bar{q}_{max} qanday miqdordagi taqsimlangan kuchlar ta'sir etsa, A tayanchdagi reaktiv momentning miqdori 270 N/m bo'ladi? (35.9-rasm).



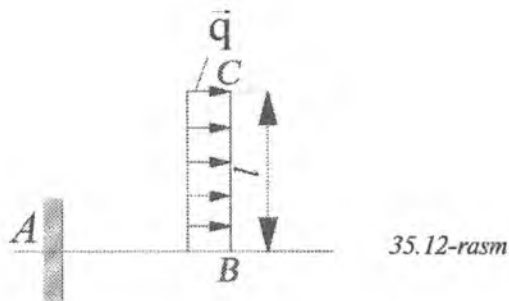
Muammo № 10. O'lchamlari $AB=2\text{ m}$, $BC=6\text{ m}$ bo'lgan to'sin devorga qistirib mahkamlangan bo'lib, unga intensivliklari $\vec{q}_{\max}=30\text{ N/m}$ va $\vec{q}_{\min}=10\text{ N/m}$ bo'lgan taqsimlangan kuchlar ta'sir etsa, A tayanchdagi reaktiv momentning miqdorini toping (35.10-rasm).



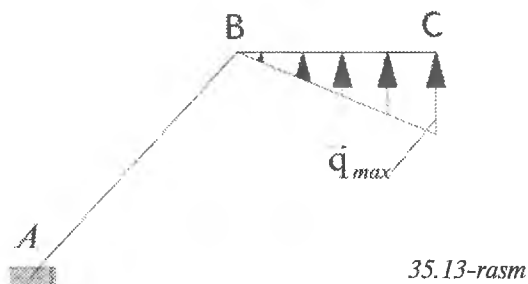
Muammo № 11. O'lchamlari $AB=1\text{ m}$, $BC=2\text{ m}$, $CD=3\text{ m}$ bo'lgan to'sin devorga qistirib mahkamlangan bo'lib, unga \vec{F} kuchi va intensivligi $\vec{q}_{\max}=20\text{ N/m}$ bo'lgan taqsimlangan kuchlar ta'sir etib, A tayanchdagi reaktiv moment 300 N/m ga teng bo'lishi uchun F kuchining miqdori qancha bo'lishi lozim? (35.11-rasm).



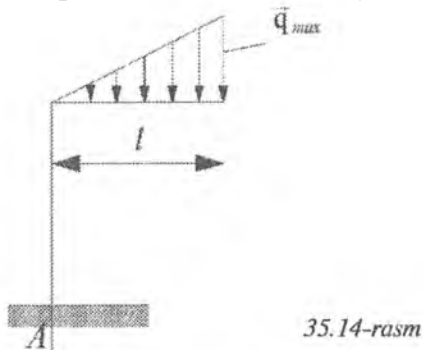
Muammo № 12. Qistirib mahkamlangan ABC ramkaning $BC=l=3\text{ m}$ qismiga intensivligi qancha miqdorli taqsimlangan kuchlar ta'sir etsa, A tayanchning vertikal reaksiya kuchi 60 N bo'ladi? (35.12-rasm).



Muammo № 13. Qistirib mahkamlangan ramaning $l = 1 \text{ m}$ li qismiga intensivligi \vec{q} qancha bo'lgan taqsimlangan kuchlar ta'sir etsa, A tayanchning reaktiv momenti $M_A = 200 \text{ N/m}$ ga teng bo'ladi? (35.13-rasm).

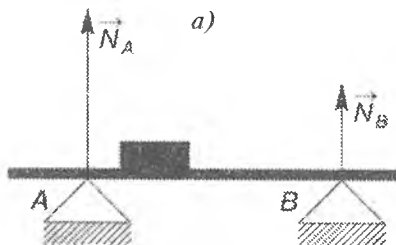


Muammo № 14. Qistirib mahkamlangan kronshteynda intensivligi $\vec{q}_{\max} = 1 \text{ N/m}$ li taqsimlangan kuchlar ta'sir etsa, qistirib mahkamlangan joydagi reaktiv momentning qiymati $M_A = 3 \text{ N/m}$ bo'lishi uchun kronshteynning uzunligi l qancha bo'lishi shart? (35.14-rasm).

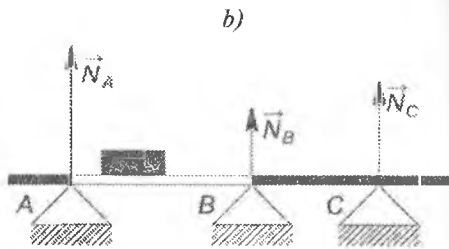


36-§. Statik aniq va aniqmas masalalar

Berilgan masalada noma'lumlar soni muvozanat tenglamalari sonidan kam yoki ularga teng bo'lsa, bunday masala statik aniq masala deyiladi (36.1-a, 36.2-a rasmlar).

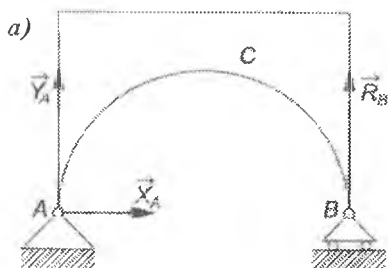


36.1-a rasm

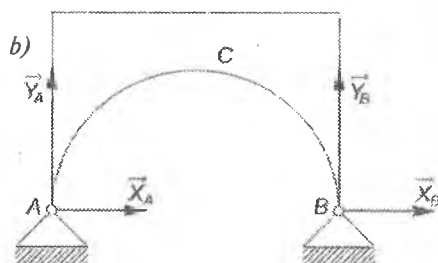


36.1-b rasm

Agar masalada noma'lumlar soni muvozanat tenglamalari sonidan ortiq bo'lsa, bunday masala statik aniqmas masala deyiladi.



36.2-a rasm



36.2-b rasm

Haqiqatan ham, 36.1-a rasmda ko'rsatilgan AB balka, A va B tayanchlarga qo'yilgan. Tayanchlarning reaksiyalari \vec{N}_A va \vec{N}_B lar balkaga ta'sir etuvchi parallel kuchlar sistemasining ikkita muvozanat tenglamalarida noma'lum kattaliklar sifatida qatnashadi. Ularning qiymatlari shu tenglamalardan aniqlanadi. Shuning uchun ko'rilgan masala statik aniq masala hisoblanadi.

36.1-b rasmda AB balka A, C, B nuqtalarda tayanchlarga qo'yilgan. Ularning reaksiyalari \vec{N}_A , \vec{N}_B , \vec{N}_C lar soni uchta. Lekin,

hosil bo'lgan parallel kuchlar sistemasi uchun ikkita muvozanat tenglamalari tuziladi. Shuning uchun bu masalada noma'lumlar soni muvozanat tenglamalari sonidan ortiq va u statik aniqmas masala hisoblanadi.

Xuddi shunday mulohazalar asosida, 36.2-a rasmda ko'rsatilgan arkaning muvozanatini o'rganishda, masala statik aniq (bog'lanishlar reaksiyalari soni uchta: $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{R}_B$ tuziladigan tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat tenglamalari soni ham uchta).

36.2-b rasmda ko'rsatilgan masala esa statik aniqmas ekanligi ma'lum bo'ladi (bog'lanishlar reaksiyalari soni to'rtta $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$ tuziladigan tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat tenglamalari soni uchta).

Nazariy mexanikada statik aniq masalalar yechiladi. Statik noaniq masalalarni yechish usullari materiallar qarshiligi va qurilish mexanikasi fanlarida o'rganiladi.

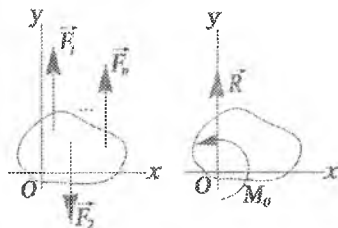
37-§. Tekislikdagi parallel kuchlar sistemasining muvozanat shartlari

Tekislikdagi parallel kuchlar sistemasi deb ta'sir chiziqlari parallel bo'lgan va bir tekislikda yotgan kuchlar sistemasiga aytiladi.

Tekislikdagi parallel kuchlar sistemasi ham bir markazga keltirishda kuchlar sistemasining bosh vektoriga teng bo'lgan \vec{R} kuch va momenti, kuchlar sistemasining keltirish markaziga nisbatan bosh momentiga teng bo'lgan juft kuchga keltiriladi (37.1-rasm).

Tekislikda joylashgan parallel kuchlar sistemasining bosh vektori va bosh momenti analitik usulda quyidagicha aniqlanadi:

$$R = \sum Y_k,$$



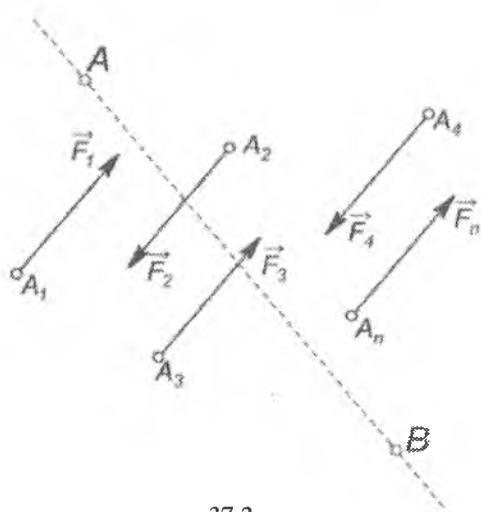
37.1-rasm

$$M = M_0 = \sum M_0(\vec{F}_k). \quad (37.1)$$

Oy o'qini kuchlarning ta'sir chizig'iga parallel ravishda yo'naltiramiz (37.1-rasm). Bunday holda har bir kuchning Ox o'qidagi proyeksiyasi nolga teng bo'ladi. Shuning uchun (29.3)ning birinchi tenglamasi ayniyatga aylanadi.

Natijada, tekislikdagi parallel kuchlarning muvozanat shartlari quyidagicha yoziladi:

$$\sum Y_i = 0, \quad \sum M_0(\vec{F}_i) = 0. \quad (37.2)$$



37.2-rasm

Demak, tekislikdagi parallel kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun kuchlarning ularga parallel bo'lgan o'qdagi proyeksiyalarining algebraik yig'indisi va shu tekislikdagi ixtiyoriy nuqtaga nisbatan hisoblangan momentlarining algebraik yig'indisi alohida-alohida bir vaqtda nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Tekislikdagi parallel kuchlar sistemasi muvozanatining 37.2-rasm-dan kelib chiqadigan quyidagi shartlari ham mavjud:

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum M_B(\vec{F}_i) = 0. \quad (37.3)$$

Bunda A va B nuqtalar kuchlar ta'sir chiziqlariga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqda yotmasligi kerak.

18-§. Tekislikdagi parallel kuchlar sistemasining muvozanatiga oid masalalarni yechish uchun uslubiy ko'rsatmalar

Tekislikdagi parallel kuchlar sistemasining muvozanatiga doir masalalarni quyidagi tartibda yechish tavsiya etiladi:

1. Muvozanati o'rganilayotgan jism (yoki nuqta) aniqlanadi.
2. Koordinatalar sistemasi tanlab olinadi.
3. Jismga ta'sir etuvchi kuchlar ko'rsatiladi.
4. Jismni bog'lanishlardan bo'shatib, ularning ta'sirlari bog'lanish reaksiya kuchlari bilan almashtiriladi.
5. Muvozanati o'rganilayotgan jism berilgan kuchlar va bog'lanishlar reaksiya kuchlari ta'siridagi erkin jism deb qaraladi.
6. Berilgan masala statik aniq masala ekanligi tekshiriladi, ya'ni masaladagi algebraik noma'lum kattaliklar soni uchtdan oshmasligi aniqlanadi.
7. Koordinata o'qlarining boshi, yo'nalishi va moment hisoblanadigan nuqta (yoki nuqtalar) tanlanadi.
8. Qattiq jismga qo'yilgan tekislikdagi parallel kuchlar sistemasi uchun muvozanat tenglamalari tuziladi.
9. Tuzilgan muvozanat tenglamalari yechiladi va noma'lum kattaliklar aniqlanadi.

Muvozanat tenglamalarini tuzishda har bir tenglamada faqat bittadan noma'lum kattalik qatnashishiga e'tibor berish lozim. Chunki bunda har bir noma'lum kattalik bevosita shu noma'lum kattalik qatnashgan tenglamani yechish orqali aniqlanadi. Bunday hol masalani yechishni soddalashtiradi. Buning uchun koordinata o'qlarini shunday o'tkazish lozimki, bunda ba'zi noma'lum kuchlar o'qqa perpendikular holda yo'nalgan bo'lsin. Bunday holda ularning mazkur o'qdagi proyeksiyalari nolga teng bo'ladi.

Moment hisoblanadigan nuqta sifatida, odatda, ikki noma'lum kuchning ta'sir chiziqlari kesishadigan nuqtani olish maqsadga muvofiq bo'ladi. Bu hol tuziladigan momentlar tenglamasidan bevosita uchinchi noma'lum kuchni aniqlashga imkon beradi.

Agar masalada bog'lanish reaksiyasining yo'nalishi aniq bo'lmasa, uni koordinata o'qlarining musbat yo'nalish bo'ylab yo'nalgan tashkil etuvchilarga ajratish maqsadga muvofiq bo'ladi. Hisoblash natijasida kuchning miqdori manfiy ishorali chiqsa, bu hol mazkur kuchning yo'nalishi dastlab chizmada ko'rsatilgan yo'nalishiga teskari ekanligidan darak beradi.

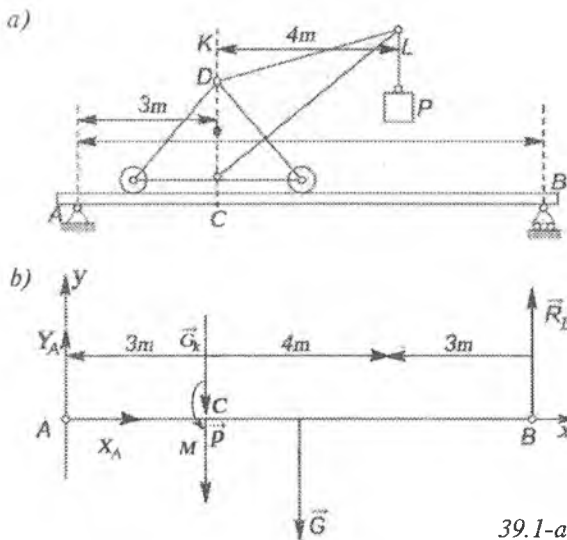
39-§. Tekislikdagi parallel kuchlar sistemasining muvozanatiga oid masalalar

1-masala. Uzunligi 10 m bo'lgan AB balka ustiga yuk ko'taradigan kran uchun yo'l solingan. Kranning og'irligi $G_K = 50\text{ kN}$ bo'lib, uning og'irlik markazi CD o'qda yotadi. R yukning og'irligi 10 kN ; AB balkaning og'irligi $G = 30\text{ kN}$; kranning KL qulochi uzunligi 4 m , $AC = 3\text{ m}$. Kranning DL strelkasi balka bilan bir vertikal tekislikda bo'lgan hol uchun A va B nuqtalardagi tayanchlar reaksiyalari topilsin. (39.1-a rasm).

Yechish: AB balkaning muvozanatini o'rganamiz. Balkaga kran og'irligi \vec{G}_K , balka og'irligi \vec{G} , yuk og'irligi \vec{P} ta'sir etadi. A va B nuqtalardagi tayanchlar balka uchun bog'lanishlar hisoblanadi. Bog'lanishlardan bo'shatish prinsipiga ko'ra tayanchlarning balkaga ta'sirini tayanchlar reaksiya kuchlari bilan almashtiramiz. Tayanchlar reaksiya kuchlari A va B nuqtalarga qo'yilgan bo'lib, qo'zg'almas A sharnir reaksiyasini \vec{Y}_A, \vec{X}_A tashkil etuvchilarga ajratamiz B qo'zg'aluvchan sharnir reaksiyasini R_B kuch bilan ifodalaymiz.

Kranning og'irligi CD o'qda yotishi tufayli kranga osilgan \vec{P} yukni ham My o'qqa kiritamiz. Buning uchun \vec{P} kuchni CD o'qqa ko'chirib, momenti $M = P \cdot 4$ bo'lgan juftni qo'shamiz. Natijada, $\vec{Y}_B, \vec{X}_C, \vec{G}_K, \vec{P}, G_k, R_B$ (39.1-b rasm).

Hosil bo'lgan kuchlar sistemasining muvozanat tenglamalarini tuzamiz. Buning uchun koordinata boshi sifatida A nuqtani tanlab, Ax o'qini balka bo'ylab, Ay o'qini unga perpendikular holda vertikal yuqoriga yo'naltiramiz.



39.1-a, b rasm

Bunday holda:

$$\begin{cases} \sum X_i = 0, & X_A = 0, \\ \sum Y_i = 0, & Y_A - G_K - P - G + R_B = 0, \\ \sum M_A(\vec{F}_i) = 0 & -G_K \cdot 3 - P \cdot 3 + M - G \cdot 5 + R_B \cdot 10 = 0. \end{cases}$$

Muvozanat tenglamalarni yechib, noma'lum kattaliklarni aniqlaymiz.

(1) tenglamadan:

$$X_A = 0.$$

(3) tenglamadan:

$$R_B = \frac{P \cdot 3 - M + G \cdot 5 + G_K \cdot 3}{10} = \frac{10 \cdot 3 - 40 + 30 \cdot 5 + 50 \cdot 3}{10} = \frac{30 - 40 + 150 + 150}{10} = \frac{290}{10} = 29 \text{ kN}.$$

(2) tenglamadan:

$$Y_A = G_K + P + G - R_B = 30 + 10 + 50 - 29 = 90 - 29 = 61 \text{ kN}.$$

2-masala. AC gorizontal balkaning B va C tayanchlar oralig'ida q N/m intensivlikdagi yuk tekis taqsimlangan; AB uchastkada yukning intensivligi chiziqli qonun bilan nolgacha kamayadi. Balkaning og'irligini hisobga olmay, B va C tayanchlar reaksiyalari aniqlansin (39.2-a rasm).

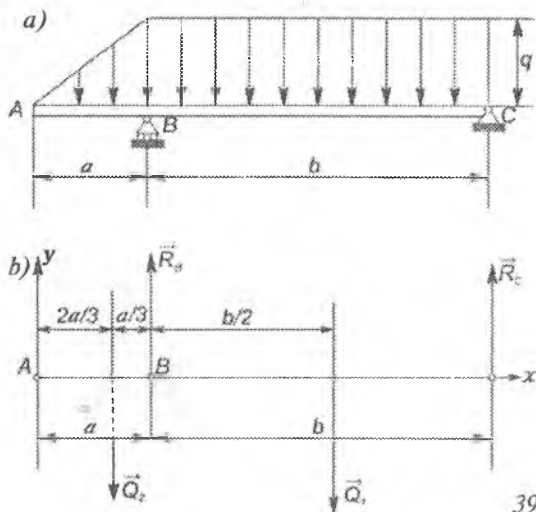
Yechish: AC balkaning muvozanatini o'rganamiz. Balkaning BC qismiga ta'sir etuvchi tekis taqsimlangan yukning teng ta'sir etuvchisini aniqlaymiz:

$$Q_1 = q \cdot b.$$

Balkaning AB qismiga ta'sir etuvchi taqsimlangan yukning teng ta'sir etuvchisi quyidagicha aniqlanadi:

$$Q_2 = \frac{a \cdot q}{2}.$$

\vec{Q}_1 kuch BC qismning o'rtasiga, \vec{Q}_2 kuch esa B nuqtadan A nuqta tomon $\frac{a}{3}$ masofa uzoqlikda yotuvchi D nuqtaga quyiladi. B va C tayanchlar balka uchun bog'lanishlar hisoblanadi. Bog'lanishlardan bo'shatish prinsipiga ko'ra ularning balkaga ta'sirini bog'lanishlar — tayanchlar reaksiya kuchlari bilan almashtiramiz.



39.2-a, b rasmlar

Tayanchlarning reaksiya kuchlari \vec{R}_B, \vec{R}_C balkaning B va C nuqtalariga qo'yiladi va balkaga perpendikular holda yo'naladi.

Natijada, balkaga ta'sir etuvchi parallel ($\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \vec{R}_B, \vec{R}_C$) kuchlar sistemasiga ega bo'lamiz (39.2-b rasm).

Hosil bo'lgan kuchlar sistemasi uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz. Buning uchun koordinata boshi sifatida A nuqtani tanlab, A_x o'qini AC balka bo'ylab gorizontal, A_y o'qini unga perpendikular holda yo'naltiramiz. Bunday holda:

$$\sum Y_i = 0, \quad -Q_2 + R_B - Q_1 + R_C = 0, \quad (1)$$

$$\sum M_B(\vec{F}_i) = 0, \quad Q_2 \cdot \frac{a}{3} - Q_1 \cdot \frac{b}{2} + R_C \cdot B = 0. \quad (2)$$

Tenglamalarni yechib, noma'lum kattaliklarni aniqlaymiz.

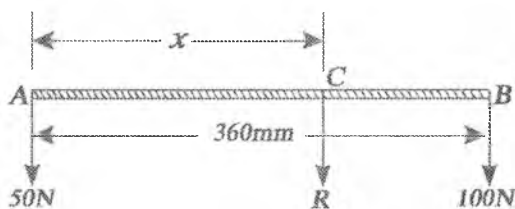
(2) tenglamadan:

$$R_C = \frac{Q_1 \cdot \frac{b}{2} - Q_2 \cdot \frac{a}{3}}{b} = q \frac{(3b^2 - a^2)}{6b}.$$

(1) tenglamadan:

$$R_B = Q_2 + Q_1 - R_C = \frac{q \cdot a}{2} + qb - \frac{q}{6b} (3b^2 - a^2).$$

3-masala. Uzunligi 360 mm bo'lgan sterjenning A va B nuqtalariga miqdori 50 N va 100 N bo'lgan parallel kuchlar qo'yilgan. Kuchlarning teng ta'sir etuvchisini va uning qo'yilgan nuqtasini aniqlang (39.3-rasm).



39.3-rasm

Yechish: sterjenga qo'yilgan kuchlarning teng ta'sir etuvchisi ularning arifmetik yig'indisiga teng bo'ladi:

$$R=50+100=150 \text{ N.}$$

Agar teng ta'sir etuvchi kuchning qo'yilgan nuqtasini sterjenning A uchidan $x \text{ mm}$ masofa orqali aniqlanishini e'tiborga olsak, sterjenga qo'yilgan kuchlarning muvozanat shartini ifodalovchi tenglamadan teng ta'sir etuvchi kuchning qo'yilgan nuqtasi quyidagicha aniqlanadi:

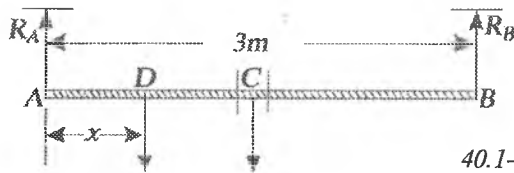
$$\sum M_C(\vec{F}_C) = 0, \quad 50 \cdot x - 100(360 - x) = 0$$

$$150x=36000$$

$$x=\frac{36000}{150}=240 \text{ mm.}$$

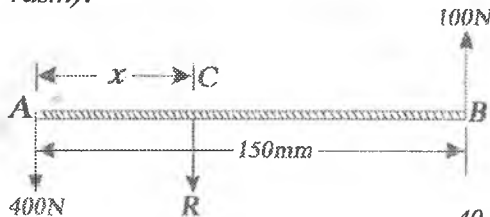
40-§. Mustaqil o'rganish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar

Muammo № 1. Og'irligi 400 N va uzunligi 3 m bo'lgan balka gorizontal holatda 2 arqon yordamida ushlab turiladi. Arqonlar uzilmasligi uchun og'irligi $D=200 \text{ N}$ bo'lgan jism balkaning qaysi nuqtasiga qo'yilishi kerak? Arqonlarda yuzaga kelishi mumkin bo'lgan maksimal taranglik kuchi 350 N ga teng (40.1-rasm).



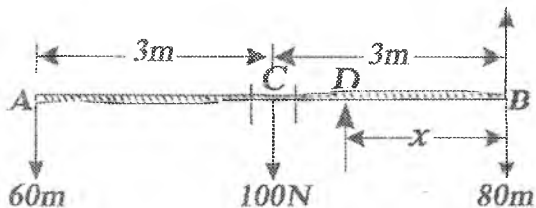
40.1-rasm

Muammo № 2. Jismning A va B nuqtalariga o'zaro parallel va qarama-qarshi qo'yilgan kuchlar mos ravishda 400 N va 100 N ga teng. Kuchlarning teng ta'sir etuvchisi va uning qo'yilgan nuqtasini aniqlang (40.2-rasm).



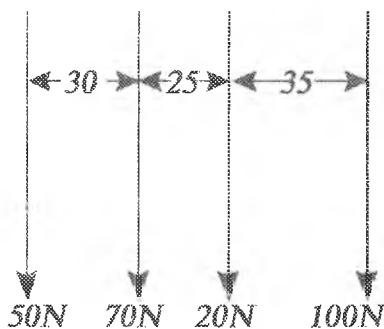
40.2-rasm

Muammo № 3. Uzunligi 6 m va og'irligi 100 N bo'lgan bir jinsli balkaning A va B nuqtaqlariga 60 N va 80 N kuchlar qo'yilgan. Balkaning C nuqtasiga 100 N kuch qo'yilgan. Balka gorizontol holatda bo'lishi uchun D nuqtaga qo'yiladigan tayanch o'rni aniqlansin (*40.3-rasm*).



40.3-rasm

Muammo № 4. *40.4-rasmda* ko'rsatilgan parallel kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi va uning qo'yilish nuqtasini grafik usulda aniqlang.



40.4-rasm

Muammo № 5. Uzunligi 200 mm bo'lgan sterjenning uchlariga kattaligi 10 N va 30 N bo'lgan kuchlar ta'sir etadi. Teng ta'sir etuvchi kuchning miqdori va qo'yilish nuqtasi aniqlansin.

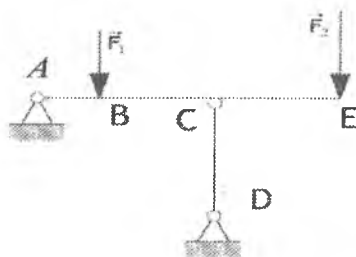
Muammo № 6. Teng ta'sir etuvchisi 200 N bo'lgan 2 ta parallel va miqdori bir xil bo'lgan kuchlardan biri teng ta'sir etuvchi kuchdan 60 mm masofa uzoqlikka qo'yilgan. Kuchlar qo'yilgan nuqtalar orasidagi masofa 240 mm . Parallel kuchlar miqdori aniqlansin.

Muammo № 7. A sharnir yordamida mahkamlangan BC brusga $\vec{F}_1 = 4kN$ va \vec{F}_2 kuchlar ta'sir etib, u muvozanatda bo'lsa, masofalarni $AC = 2 m$, $AB = 6 m$ hisoblab, \vec{F}_2 kuchning miqdorini kN larda aniqlang (40.5-rasm).



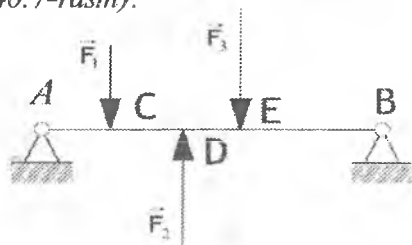
40.5-rasm

Muammo № 8. A E to'sin qo'zg'almas A sharnir va vertikal CD sterjen yordamida mahkamlangan bo'lib, unga $\vec{F}_1 = 2kN$ va $\vec{F}_2 = 4 kN$ kuchlar ta'sir etadi. Agar to'sinning o'lchamlari $AC = 2 m$, $BC = CE = 1 m$ bo'lsa, CD sterjenda hosil bo'layotgan zo'riqishni kN larda aniqlang (40.6-rasm).



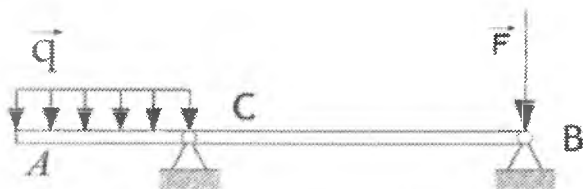
40.6-rasm

Muammo № 9. AB to'singa vertikal $\vec{F}_1 = 1 kN$, $\vec{F}_2 = 2kN$ va $\vec{F}_3 = 3kN$ kuchlar ta'sir etadi. Agar uning o'lchamlari $AC = CD = DE = 1 m$, $BE = 2 m$ bo'lsa, B tayanchning reaksiya kuchini kN larda aniqlang (40.7-rasm).



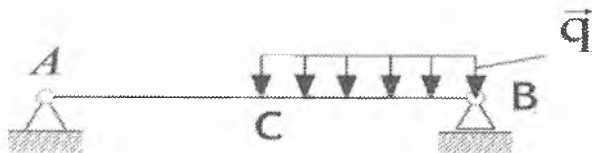
40.7-rasm

10-muammo. AB to'singa vertikal $\bar{F} = 5 \text{ kN}$ kuch va intensivligi $\bar{q} = 4 \text{ kN/m}$ bo'lgan taqsimlangan kuchlar ta'sir etadi. Agar uning o'lchamlari $AC = 3 \text{ m}$ va $BC = 6 \text{ m}$ bo'lsa, B tayanchdagi reaksiya kuchini kN da toping (40.8-rasm).



40.8-rasm

11-muammo. Og'irligi $G = 20 \text{ kN}$ bo'lgan bir jinsli AB to'singa intensivligi $\bar{q} = 0,5 \text{ kN/m}$ bo'lgan taqsimlangan kuchlar ta'sir etadi. Agar uning o'lchamlari $AB = 36 \text{ m}$ va $AC = BC$ bo'lsa, A tayanch reaksiyasini kN da toping (40.9-rasm).



40.9-rasm

41-§. Bir tekislikda yotuvchi bir necha jismdan tashkil topgan sistemaning muvozanatiga oid masalalar

1-masala. Bir xil uzunlikdagi ikkita bir jinsli brus o'zaro C sharnir bilan, shuningdek, A va B nuqtada ham sharnir vositasida tayanchlarga biriktirilgan. Har qaysi brusning og'irligi P ga teng. C nuqtada Q yuk osilgan. Masofa $AB = d$. C nuqtadan AB gorizontal to'g'ri chiziqchaga bo'lgan masofa b ga teng. A , B va C sharnirlarning reaksiyalari aniqlansin (41.1-a rasm).

Yechish: bir xil uzunlikdagi ikki jismdan iborat butun sistemaning muvozanatini o'rganamiz. Sistemaga har qaysi brusning og'irligi

P ga teng kuchlar va C nuqtaga qo'yilgan \vec{Q} kuch ta'sir etadi. Har qaysi brusning og'irlik kuchi brus markaziga qo'yiladi. A va B sharnirli tayanchlar sistema uchun bog'lanishlar hisoblanadi. Ularning sistemaga ta'sirini bog'lanishlar reaksiya kuchlari bilan almashtiramiz. A va B sharnirli tayanchlar reaksiyalarining yo'nalishi oldindan ma'lum bo'lmaganligi uchun ularning koordinata o'qlarini musbat yo'nalishi bo'ylab yo'nalgan $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$ tashkil etuvchilarga ajratamiz.

Natijada, sistemaga ta'sir etuvchi bir tekislikda ixtiyoriy joylashgan ($\vec{P}, \vec{P}, \vec{Q}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$) kuchlar sistemasiga ega bo'lamiz (41.1-b rasm).

Hosil bo'lgan kuchlar sistemasining muvozanat tenglamalarini tuzamiz. Buning uchun koordinata boshi sifatida A nuqtani tanlab, A_x o'qni gorizontal, A_y o'qni vertikal yo'naltiramiz. Momentlar tenglamasini tuzish uchun momentlar markazi sifatida A nuqtani olamiz. Bunday holda:

$$\sum X_i = 0, \quad X_A + X_B = 0, \quad (1)$$

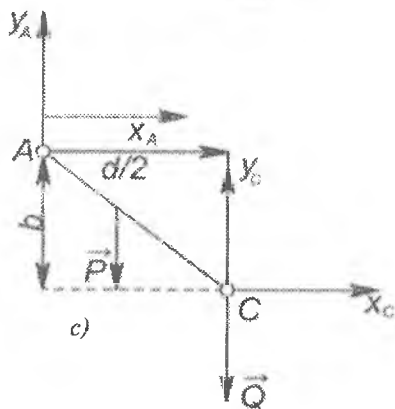
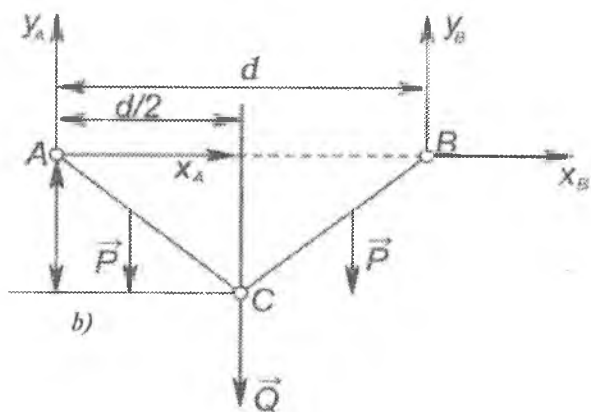
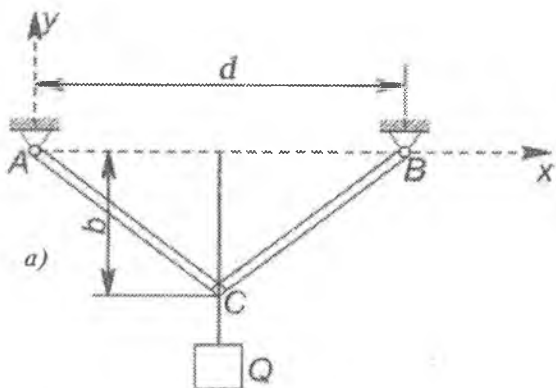
$$\sum Y_i = 0, \quad Y_A + Y_B - P - P - Q = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i), \quad Y_B \cdot d - P \cdot \frac{d}{4} - P \cdot \frac{3}{4}d - Q \frac{d}{2} = 0. \quad (3)$$

Aniqlanishi lozim bo'lgan, tuzilgan muvozanat tenglamalarida qatnashayotgan noma'lumlar soni to'rtta. Masalani yechish uchun to'rtinchi muvozanat tenglamasi ham kerak. Bu tenglamani tuzish uchun sistema qismlaridan biri (AC qism)ning muvozanatini ham o'rganamiz.

Bunda C ichki sharnir reaksiya kuchlari \vec{X}_C va \vec{Y}_C ni ajratib olingan qism uchun tashqi kuchlar qatoriga kiritamiz (41.1-c rasm).

To'rtinchi muvozanat tenglamasini tuzish uchun C nuqtaga nisbatan momentlar tenglamasini tuzamiz (tenglamada \vec{X}_C, \vec{Y}_C



41.1-a, b, c rasmlar

kuchlar momentlari qatnashmaydi, masala shartida C sharnir reaksiyasini topish talab etilmagan):

$$\sum M_C(\vec{F}_i) = 0, \quad -Y_A \cdot \frac{d}{2} - X_A \cdot b + P \frac{d}{4} = 0. \quad (4)$$

Tenglamalarni yechib, noma'lum kattaliklarni aniqlaymiz.

(1) tenglamadan:

$$X_A = -X_B \text{ yoki } X_B = -X_A.$$

(3) tenglamadan:

$$Y_B = \frac{P \cdot \frac{d}{4} + \frac{3pd}{4} + Qd}{d} = \frac{Pd + \frac{Qd}{2}}{d} = P + \frac{Q}{2}.$$

(2) tenglamadan:

$$Y_A = -Y_B + 2P + Q = -\left(P + \frac{Q}{2}\right) + 2P + Q = P + \frac{Q}{2}.$$

(4) tenglamadan:

$$X_A = \frac{-Y_A \cdot \frac{d}{2} + P \frac{d}{4}}{b} = \frac{-(P + \frac{Q}{2}) \frac{d}{2} + P \frac{d}{4}}{b} = -\frac{d}{4b} (2P + Q).$$

$$X_B = \frac{d}{4b} (2P + Q).$$

2-masala. Ikki qismdan iborat konstruksiyaning tayanch reaksiyalari aniqlansin (*41.2-a rasm*).

Berilgan: $P_1=10 \text{ kN}$, $P_2=8 \text{ kN}$, $M=25 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $q=1,8 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$.

Yechish: konstruksiya har bir qismining muvozanatini o'rganamiz. Konstruksiyaning AC qismiga intensivligi q bo'lgan tekis taqsimlangan kuch va \vec{P}_1 kuch ta'sir etadi. Konstruksiyaning A uchi qistirib mahkamlangan C nuqtada ichki sharnirga tayanadi. Bog'lanishlardan bo'shatish prinsipiga ko'ra, devorning unga qistirib mahkamlangan balkaning A uchiga ta'siri bog'lanishlar reaksiyalari

bilan almashtiriladi: \bar{X}_A , \bar{Y}_A reaksiya kuchlari va moment M_A bo'lgan reaktiv moment (41.2-b rasm).

C ichki sharnir reaksiya kuchlari \bar{X}_C , \bar{Y}_C kuchlar orqali ifodalanadi (41.2-c rasm).

Koordinata boshi sifatida A nuqtani tanlab, A_x o'qini gorizontal, A_y o'qini vertikal yuqoriga yo'naltiramiz. Konstruksiyaning mazkur qismi uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\sum X_i = 0, \quad X_A + X_C - P_1 \cos 45^\circ = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0, \quad Y_A - Q - P_1 \cos 45^\circ + Y_C = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_A(\bar{F}_i) = 0, \quad M_A + Q \cdot 1 + P_1 \cdot \cos 45^\circ \cdot 2 + Y_C \cdot 2 - X_C \cdot 3 = 0. \quad (3)$$

Konstruksiya CB qismining muvozanatini o'rganamiz. Konstruksiyaning bu qismiga P_2 kuch va momenti M bo'lgan juft kuch ta'sir etadi. U A nuqtada qo'zg'aluvchan sharnirga, C nuqtada ichki sharnirga tayanadi. Bog'lanishlardan bo'shatish prinsipiga ko'ra, bog'lanishlarning jismga ta'siri bog'lanishlar reaksiya kuchlari bilan

almashtiriladi: A qo'zg'aluvchan sharnir reaksiyasi \bar{R}_A sharnir harakatlanadigan tekislikka perpendikular holda yo'naladi, C ichki sharnir reaksiyasi \bar{X}_C , \bar{Y}_C tashkil etuvchi kuchlar orqali ifodalanadi (41.2-d rasm).

Koordinata boshi sifatida C nuqtani olib, koordinata o'qlarini 41.2-d rasmdagidek o'tkazamiz.

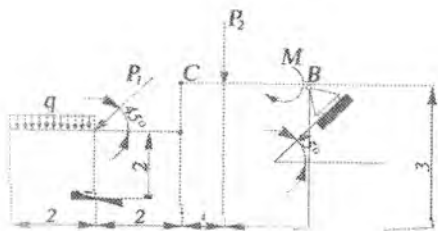
Konstruksiyaning mazkur qismi uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\sum X_i = 0, \quad -X''_C - R_B \cos 45^\circ = 0, \quad (4)$$

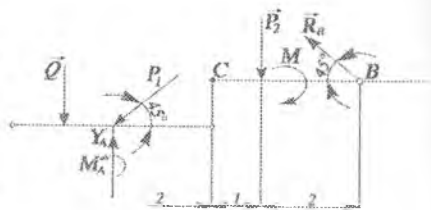
$$\sum Y_i = 0, \quad -Y''_C + R_B \sin 45^\circ - P_2 = 0, \quad (5)$$

$$\sum M_C(\bar{F}_i) = 0, \quad -M - P_2 \cdot 1 + R_B \sin 45^\circ \cdot 3 = 0. \quad (6)$$

Tenglamalarni yechib, noma'lum kattaliklarni aniqlaymiz.



41.2-a rasm



41.2-b rasm

6) tenglamadan:

$$R_B = \frac{M + P_2 \cdot 1}{3 \sin 45^\circ} = \frac{25 + 8 \cdot 1}{3 \cdot 0,71} = 15,5 \text{ kN.}$$

(5) tenglamadan:

$$Y''_C = R_B \cdot \sin 45^\circ - P_2 = 11 - 8 = 3 \text{ kN.}$$

(4) tenglamadan:

$$X''_C = -R_B \cdot \cos 45^\circ = -15,5 \cdot 0,71 = -11 \text{ kN.}$$

(1) tenglamadan:

$$X_A = -X_C + P \cdot \cos 45^\circ = 11 + 10 \cdot 0,71 = 18,1 \text{ kN.}$$

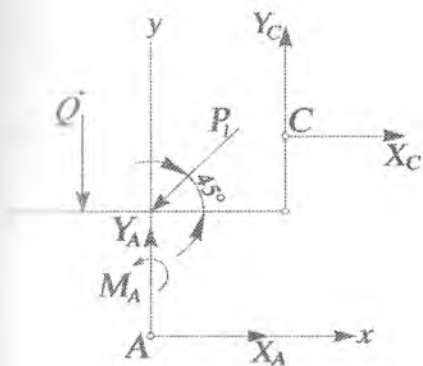
(2) tenglamadan:

$$Y_A = Q + P_1 \cdot \cos 45^\circ - Y_C = 3,6 + 10 \cdot 0,71 - 3 = 7,7 \text{ kN.}$$

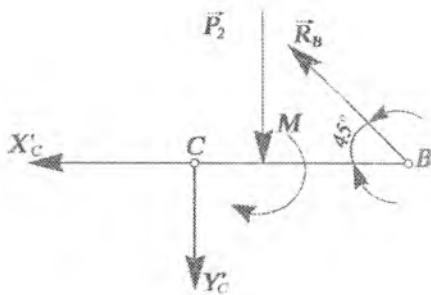
(3) tenglamadan:

$$\begin{aligned} M_A &= -Q \cdot 1 - P_1 \cdot \cos 45^\circ \cdot 2 - Y_C \cdot 2 + X_C \cdot 3 = \\ &= -3,6 - 10 \cdot 0,71 \cdot 2 - 6 - 33 = -56,8 \text{ kN.} \end{aligned}$$

Bajarilgan hisoblashlarning to'g'riligiga ishonch hosil qilish uchun konstruksiyani bir butun deb qarab, muvozanat tenglamalarini tuza-miz (41.2-b rasm). Noma'lumlarning aniqlangan qiymatlari tuzi-ladigan tenglamalarni qanoatlantirishi lozim.



41.2-c rasm



41.2-d rasm

$$\begin{aligned} \sum X_i = 0, \quad X_A - P_1 \cos 45^\circ - R_B \cos 45^\circ &= 0, \\ 18,1 - 10 \cdot 0,71 - 15,5 \cdot 0,71 &= 0, \\ 18,1 - 18,1 &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum Y_i = 0, \quad Y_A - Q - P_1 \cos 45^\circ - P_2 + R_B \cos 45^\circ &= 0, \\ 7,7 - 3,6 - 10 \cdot 0,71 - 8 + 15,5 \cdot 0,71 &= 0, \\ 18,7 - 18,7 &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_A(\bar{F}_i) = 0, \quad Q \cdot 1 + P_1 \cos 45^\circ \cdot 2 - P_2 \cdot 3 + R_B \cos 45^\circ \cdot 5 + R_B \cos 45^\circ \cdot 3 + M_A - M &= 0, \\ 3,6 + 14,2 - 24 + 55 + 33 - 56,8 - 25 &= 0, \\ 105,5 - 105,8 &= 0. \end{aligned}$$

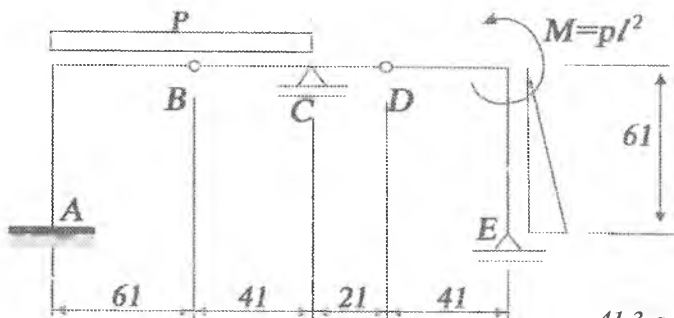
Hisoblashlar tayanch reaksiyalarining to'g'ri aniqlanganidan darak beradi.

3-masala. Rasmda ko'rsatilgan murakkab konstruksiyaning tayanch reaksiyalarini va uni tashkil qiluvchi jismlarning bir-birlariga ko'rsatadigan ta'sir kuchlari — ichki kuchlar aniqlansin (41.3-a rasm)

Yechish:

1. Konstruksiyaning statik aniqlangan ekanligini tekshiramiz.

Konstruksiya AB, BD va DE qismlardan iborat. Konstruksiya A nuqtada yerga qistirib mahkamlangan. C va E nuqtalarda qo'zg'aluvchan sharnirlarga tayanadi. B va D sharnirlar ichki sharnirlar bo'lib, ular vositasida konstruksiya qismlari o'zaro ta'sir etadi.



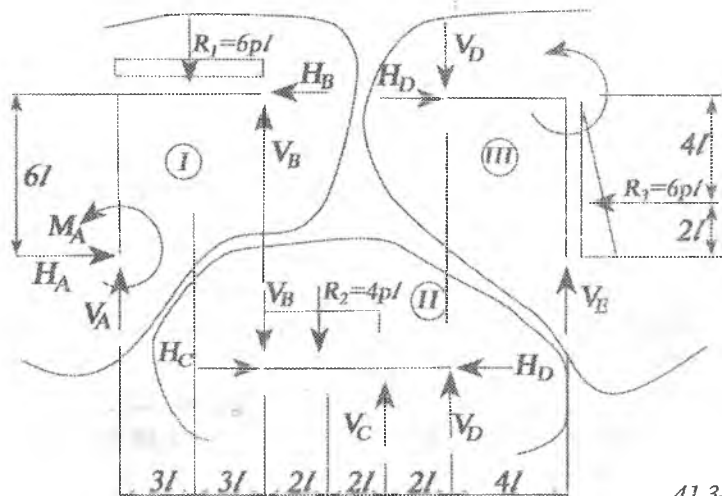
41.3-a rasm

Konstruksiyadagi noma'lum tashqi va ichki kuchlar soni 9 ta, muvozanat tenglamalari soni ham $3 \cdot 3 = 9$ ta.

Demak, berilgan murakkab konstruksiya statik aniqlangan ekan.

2. Konstruksiyaga qo'yilgan tashqi kuchlarni ko'rsatamiz.

Konstruksiyani bog'lanishlardan ozod etib, ularning ta'sirlarini bog'lanishlar reaksiya kuchlari bilan almashtiramiz. Konstruksiyani B va D nuqtalarda qismlarga ajratamiz. Ichki sharnirlar reaksiya kuchlari juft-juft holda miqdor jihatdan teng bo'lib, bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan bo'ladi. Konstruksiyaga qo'yilgan tashqi kuchlar, bog'lanishlar reaksiya kuchlari va ichki sharnirlar reaksiya kuchlari rasmda ko'rsatilgan (41.3-b rasm).



41.3-b rasm

3. Konstruksiya har bir qismining muvozanatini o'rganamiz.

Konstruksiya AB qismi uchun muvozanat tenglamalari quyidagicha yoziladi:

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0, & H_A - H_B &= 0, \\ \sum Y_i &= 0, & V_A - 6pl + V_B &= 0, \\ \sum M_{A_i} &= 0, & M_A - 6pl \cdot 3l - V_B \cdot 6l + H_B \cdot 6l &= 0.\end{aligned}$$

Konstruksiyaning BD qismi uchun muvozanat tenglamalari quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0, & H_B - H_D &= 0, \\ \sum M_{B_i} &= 0, & -4pl \cdot 2l + V_C \cdot 4l + V_D \cdot 6l &= 0, \\ \sum M_{C_i} &= 0, & V_B \cdot 4l + 4pl \cdot 2l + V_D \cdot 2l &= 0.\end{aligned}$$

Konstruksiyaning DE qismi uchun muvozanat tenglamalari quyidagicha yoziladi:

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0, & H_D - 6pl &= 0, \\ \sum M_{D_i} &= 0, & 8pl^2 - 6pl \cdot 4l + V_E \cdot 4l &= 0, \\ \sum M_{E_i} &= 0, & V_D \cdot 4l + H_D \cdot 6l + 8pl^2 + 6pl \cdot 2l &= 0.\end{aligned}$$

4. Muvozanat tenglamalarini yechib, barcha noma'lum kuchlarni aniqlaymiz:

$$\begin{aligned}H_D &= 6pl, \\ V_E &= 4pl, \\ V_D &= 4pl, \\ H_B &= 6pl, \\ V_C &= -4pl, \\ V_B &= -4pl, \\ H_A &= 6pl, \\ V_A &= 10pl, \\ M_A &= 6pl^2.\end{aligned}$$

Bajarilgan hisoblashlarning tog'riligiga ishonch hosil qilish uchun konstruksiyaning har bir qismi uchun uning muvozanatini o'rganishda foydalanmagan muvozanat tenglamalarini tuzamiz. Tenglamada qatnashayotgan kuchlar qiymatlari tenglamani qanoatlantirishi lozim. Shunda tenglamada qatnashayotgan kuchlarning qiymatlari to'g'ri aniqlangan bo'ladi.

Masalan, konstruksiyaning AB qismi uchun:

$$\sum M_{B_i} = 0, \quad M_A + H_A \cdot 6l - V_A \cdot 6l + 6pl \cdot 3l = 0,$$

konstruksiyaning BD qismi uchun:

$$\sum Y_i = 0, \quad -V_B - 4pl + V_C + V_D = 0,$$

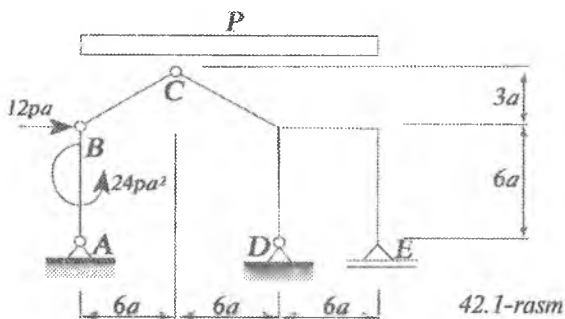
konstruksiyaning DE qismi uchun:

$$\sum Y_i = 0, \quad -V_D + V_E = 0$$

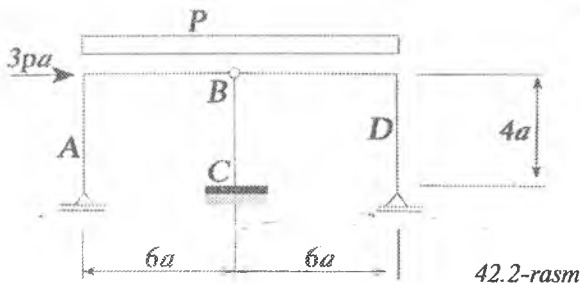
hisoblashlar tenglamalarda qatnashayotgan noma'lum kuchlar qiymatlari to'g'ri topilganligini ko'rsatadi.

42-§. Mustaqil yechish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar

Muammo № 1. Rasmda ko'rsatilgan konstruksiyaning tayanch reaksiyalarini aniqlang. Konstruksiyaga ta'sir etuvchi kuchlar va masofalar rasmda ko'rsatilgan (42.1-rasm).

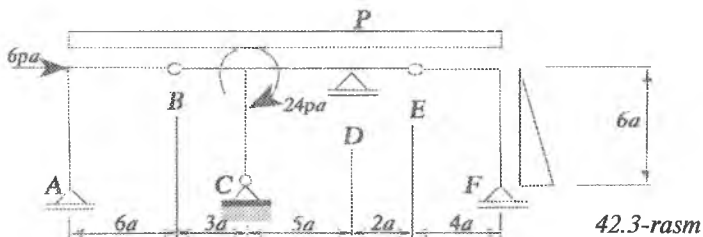


Muammo № 2. Rasmda ko'rsatilgan qo'shma konstruksiyaning tayanch reaksiya kuchini aniqlang. Konstruksiyaga ta'sir etuvchi kuchlar va masofalar rasmda ko'rsatilgan (42.2-rasm).



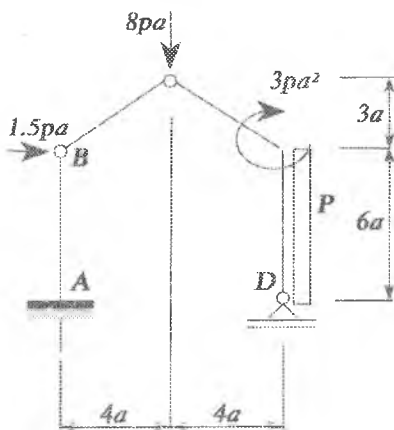
42.2-rasm

Muammo № 3. Rasmda ko'rsatilgan qo'shma konstruksiyaning tayanch reaksiya kuchini aniqlang. Konstruksiyaga ta'sir etuvchi kuchlar va masofalar rasmda ko'rsatilgan (42.3-rasm).



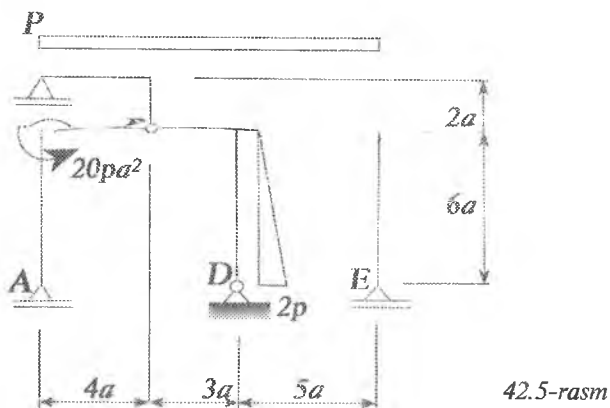
42.3-rasm

Muammo № 4. 42.4-rasmda ko'rsatilgan qo'shma konstruksiyaning tayanch reaksiya kuchini aniqlang. Konstruksiyaga ta'sir etuvchi kuchlar va masofalar rasmda ko'rsatilgan (42.4-rasm).



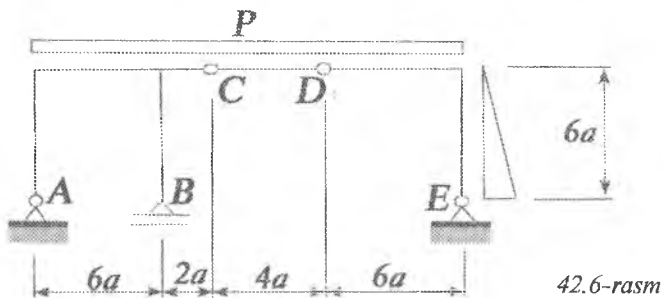
42.4-rasm

Muammo № 5. 42.5-rasmda ko'rsatilgan qo'shma konstruksiyaning tayanch reaksiya kuchini aniqlang. Konstruksiyaga ta'sir etuvchi kuchlar va masofalar rasmda ko'rsatilgan (42.5-rasm).



42.5-rasm

Muammo № 6. 42.6-rasmda ko'rsatilgan qo'shma konstruksiyaning tayanch reaksiya kuchini aniqlang. Konstruksiyaga ta'sir etuvchi kuchlar va masofalar rasmda ko'rsatilgan.



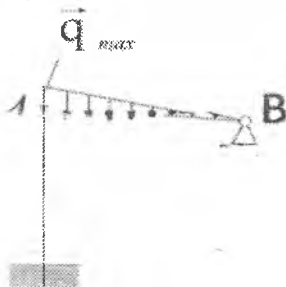
42.6-rasm

Muammo № 7. O'lchamlari $AB = 2 \text{ m}$ va $BC = 0,5 \text{ m}$ bo'lgan sterjenlardan iborat sistemaga momenti $M = 800 \text{ N}\cdot\text{m}$ li juft kuch ta'sir etsa, C tayanchdagi reaksiya momentini aniqlang (42.7-rasm).



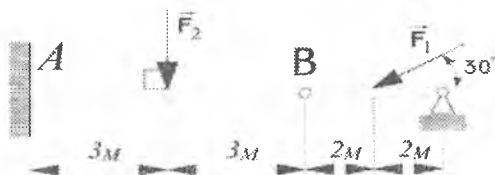
42.7-rasm

Muammo № 8. Uzunligi $AB = 2 \text{ m}$ bo'lgan to'singa intensivligi $q_{\text{max}} = 3 \text{ kN/m}$ li taqsimlangan kuch ta'sir etsa, B tayanch reaksiyasini kN da aniqlang (42.8-rasm).



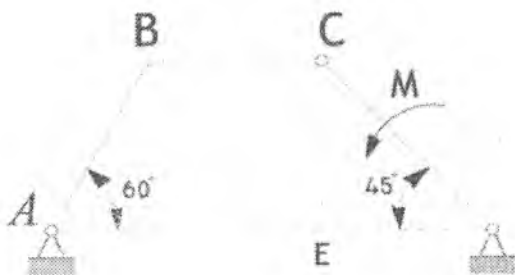
42.8-rasm

Muammo № 9. B sharnir orqali bog'langan sterjenlarga $F_1 = 60 \text{ N}$ va $F_2 = 50 \text{ N}$ li kuchlar ta'sir etsa, A tayanchdagi moment miqdorini aniqlang (42.9-rasm).



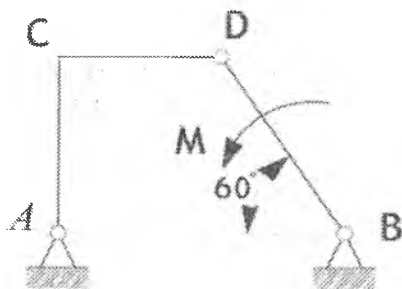
42.9-rasm

Muammo № 10. O'lchamlari $BC = CE = 1 \text{ m}$ bo'lgan sistemaga momenti M juft kuch ta'sir etib, A tayanch reaksiyasining vertikal tashkil etuvchisi 10 kN bo'lsa, juft kuch momentining miqdori $\text{kN}\cdot\text{m}$ da qancha bo'lishi lozim? (42.10-rasm).



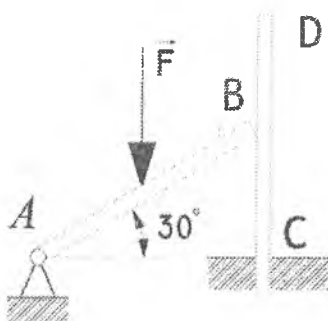
42.10-rasm

Muammo № 11. O'lchamlari $AB=BD=1\text{ m}$ bo'lgan sterjenlarga F kuchi va momenti $M=6\text{ kNm}$ li juft kuch ta'sir etadi. A sharnirdagi reaksiya kuchining vertikal tashkil etuvchisi 9 kN bo'lishi uchun F kuchning qiymati kN da qanchaga teng bo'ladi? (42.11-rasm).



42.11-rasm

Muammo № 12. Yerga qistirib mahkamlangan vertikal CD sterjenga AB sterjen erkin tiralgan bo'lib, uning o'rtasiga $\vec{F}_1=2\text{ kN}$ kuch ta'sir etsa, B nuqtadagi reaksiya kuchini kN da hisoblang (42.12-rasm).



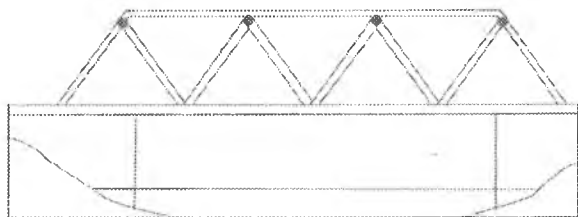
42.12-rasm

43-§. Ferma haqida tushuncha

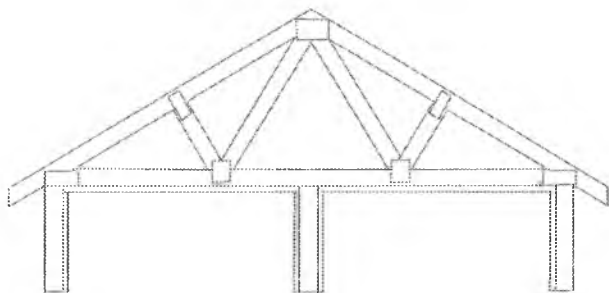
Sharnirlar vositasida geometrik o'zgarimas qilib tutashtirilgan sterjenlardan tashkil topgan qurilma ferma deb ataladi. Fermada sterjenlarning uchlari tutashgan nuqtalar tugunlar, tayanchlarga o'rnatilgan nuqtalar esa tayanch tugunlari deyiladi.

Barcha sterjenlari bir tekislikda yotuvchi ferma yassi ferma hisoblanadi.

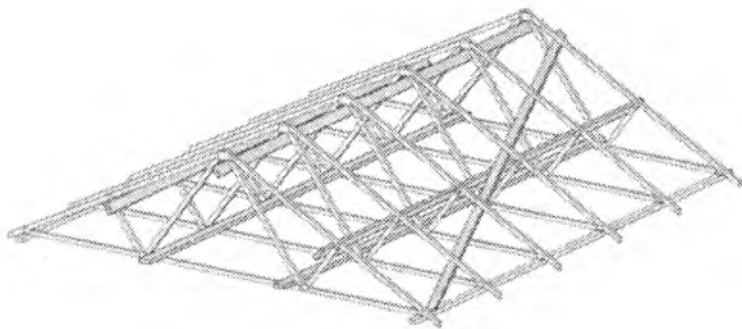
Fermalar qanday inshootlarda qoʻllanilishiga qarab turlicha nomlanishi mumkin: koʻprik fermalari (43.1-rasm), inshootlarning tomini ushlab turuvchi stropila fermalari (43.2-a, b rasmlar), koʻtarish qurilmalarida foydalanadigan kran fermalari (43.3-a, b rasmlar) va hokazo.



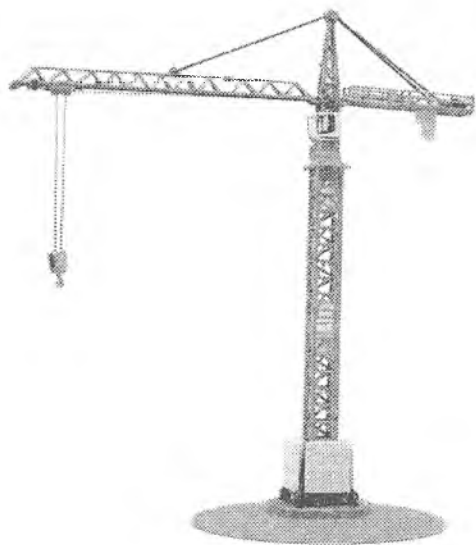
43.1-rasm



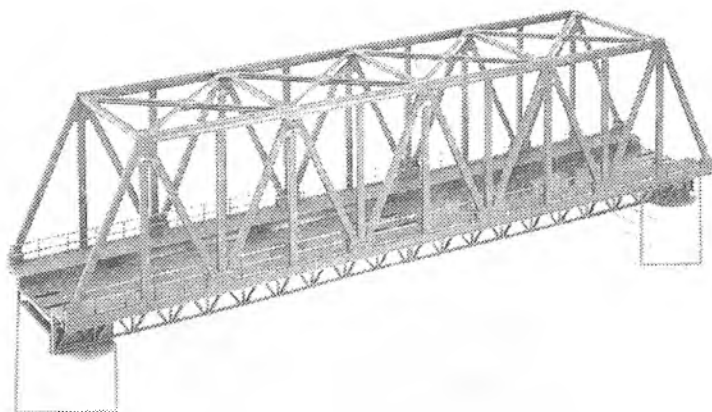
43.2-a rasm



43.2-b rasm



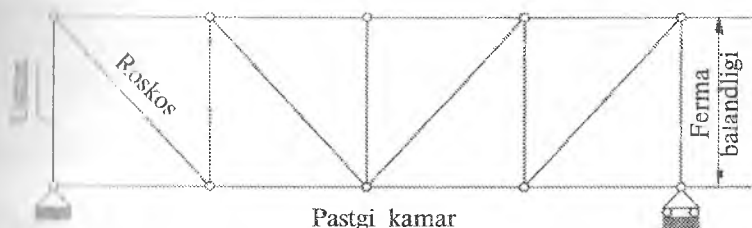
43.3-a rasm



43.3-b rasm

Yassi fermaning tepa konturi bo‘ylab joylashgan sterjenlar tepa, pastki konturi bo‘ylab joylashgan sterjenlar esa pastki kamarlarni tashkil etadi (43.4-a rasm).

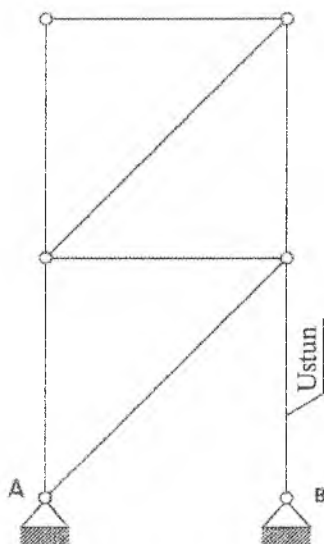
Tepa kamar



43.4-a rasm

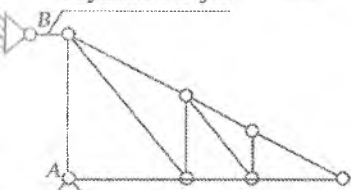
Fermanın vertikal sterjenlari ustunlar, og'ma sterjenlari roskoslar deyiladi (43.4-a, b rasmlar).

Agar ferma tayanchlarga sterjenlar yordamida tayansa, bunday sterjenlar tayanch sterjenlari deyiladi (43.5-a, b rasmlar).

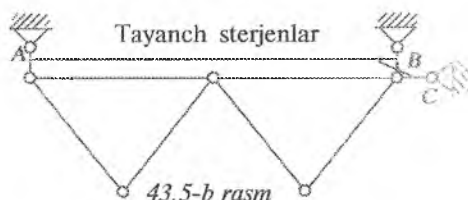


43.4-b rasm

Tayanch sterjen



43.5-a rasm



43.5-b rasm

Fermalarga qo'yilgan kuchlar ta'sirida ularning tayanch sterjenlari va fermani tashkil qiluvchi sterjenlarida hosil bo'ladigan ichki kuchlar zo'riqishlar deyiladi. Zo'riqishlar sterjenlar o'qlari bo'ylab yo'naladi.

Yassi fermalarni hisoblash uning tayanch reaksiyalari va sterjenlaridagi zo'riqishlarni aniqlashdan iborat. Ferma sterjenlaridagi zo'riqishlarni aniqlashda:

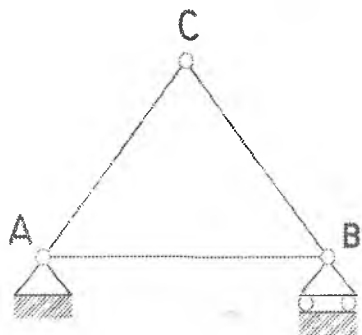
1. Ferma sterjenlari absolut qattiq, to'g'ri chiziqli deb qaraladi va ularning og'irligi e'tiborga olinmaydi.

2. Ferma sharnirlaridagi ishqalanish kuchlari hisobga olinmaydi.

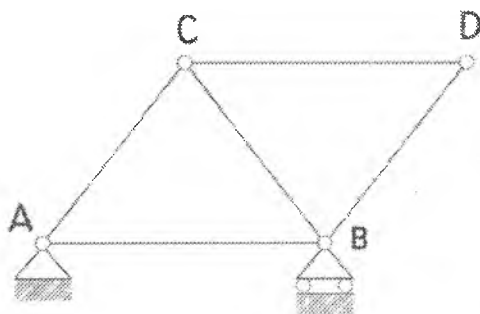
3. Yassi fermaga ta'sir etuvchi kuchlar faqat uning tugunlariga qo'yiladi va ferma tekisligida yotadi deb faraz qilinadi.

Bunday holda ferma sterjenlariga faqat bo'ylama (cho'zuvchi yoki siquvchi) kuchlar ta'sir etadi.

Real fermalarda sterjenlar sharnirlar yordamida emas, balki payvandlash yoki parchin mixlar vositasida birlashtiriladi. Shu sababli, ferma sterjenlariga bo'ylama kuchlardan tashqari, eguvchi kuchlar ham ta'sir etadi. Lekin, akademik E.O. Paton olib borgan tadqiqotlarga ko'ra, egilishda hosil bo'ladigan zo'riqish uncha katta bo'lmaydi va fermalarni hisoblashda uni e'tiborga olmaslik mumkin bo'ladi. N ta tugundan tashkil topgan fermaning geometrik o'zgarmas bo'lishi sharti bilan tanishib chiqamiz. Birinchi uchta A , B va C tugunlarni geometrik o'zgarmas qilib tutashtirish uchun uchta sterjen kerak bo'ladi (43.4-a rasm). Bunday fermaga yana bitta D tugun qo'shilishi uchun D tugunni A , B , C tugunlarda kamida ikkita sterjen vositasida birlashtirish lozim (43.4-b rasm).



43.4-a rasm



43.4-b rasm

Shu tarzda, ABC uchburchakli fermaga qolgan $n-3$ tugunlarning har birini ikkitadan sterjenlar vositasida biriktirish natijasida, n ta tugundan tashkil topadigan ferma geometrik o'zgarmas bo'lishi uchun zarur bo'ladigan sterjenlar soni quyidagicha aniqlanadi:

$$N = 2(n - 3) + 3 = 2n - 3. \quad (43.1)$$

Bunday ferma ortiqcha sterjenga ega bo'lmagan yassi ferma deyiladi (43.4-b rasm).

Agar fermada

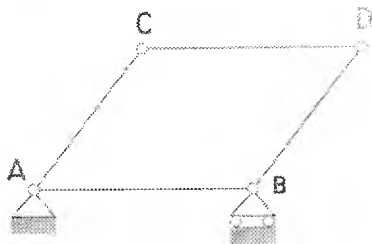
$$N > (2n - 3) \quad (43.2)$$

deyiladi.

Agar $N < (2n - 3)$

bo'lsa, bunday qurilma geometrik o'zgaruvchan bo'ladi va fermani ifodalamaydi (43.4-rasm).

Ferma sterjenlaridagi zo'riqishlarni aniqlashdan oldin fermani tayanch reaksiyalarini aniqlash maqsadga muvofiq bo'ladi. Buning uchun fermani bog'lanishlardan bo'shatib, hosil bo'ladigan bir tekislikda yotuvchi kuchlar sistemasi uchun uchta muvozanat tenglamalari tuziladi. Bu tenglamalardan tayanch nuqtalaridagi uchta noma'lum reaksiya kuchlari aniqlanadi.



43.4-rasm

44-§. Ferma sterjenlaridagi zo'riqishlarni tugunlarni kesish usuli bilan aniqlash

Tugunlarni kesish usulida ferma tugunlarini bog'lanishlardan bo'shatib, fikran ketma-ket kesaveramiz va tugunlarga ta'sir etuvchi kuchlar muvozanatini o'rganamiz. Tugunlarga ta'sir etuvchi kuchlarga sterjenlarning reaksiya kuchlari, tugunlarga qo'yilgan tashqi kuchlar va tayanch reaksiya kuchlari kiradi. Bu kuchlar bir tekislikda yotuvchi kesishuvchi kuchlar sistemasini tashkil etadi. Tugunlarning har biri uchun ikkitadan muvozanat tenglamalarini tuzamiz va bu tenglamalardan tugunlardagi noma'lum reaksiya kuchlari aniqlanadi.

Tugunlarni shunday ketma-ketlikda kesish lozimki, bunda tugunlardagi aniqlanishi lozim bo'lgan noma'lum reaksiya kuchlari ikkitadan oshmasligi kerak. Chunki, bir tekislikda yotuvchi kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanat shartlaridan faqat ikkita noma'lum kattalikni aniqlash mumkin bo'ladi.

Ferma tugunlari uchun muvozanat tenglamalarini tuzishda i nomerli sterjendagi kuchni \vec{S}_i bilan, sterjenning M tugunga qo'yiladigan reaksiyasini S_{iM} bilan belgilaymiz. M va N tugunlarni birlashtiruvchi sterjen uchun (44.1-rasm):



44.1-rasm

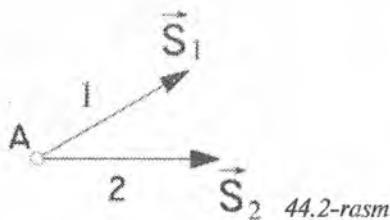
$$S_{iM} = -S_{iN}, S_{iM} = S_{iN} = S_i.$$

Barcha sterjenlarning reaksiyalarida sterjenlar cho'ziladi, deb faraz qilinib, tugunlardan sterjenlar bo'ylab, ularning ichiga qarab yo'naltiriladi. Hisoblash natijasida sterjenning reaksiyasi manfiy ishora bilan chiqsa, bu sterjenni tugunga qo'yilgan kuchlar ta'sirida cho'zilmasdan, siqilgan ekanligidan darak beradi.

Bajarilgan hisoblashlarning to'g'riligini tekshirish uchun har bir tugunga tanlangan masshtabga tegishli kuchlar ko'pburchagini chizish maqsadga muvofiq bo'ladi.

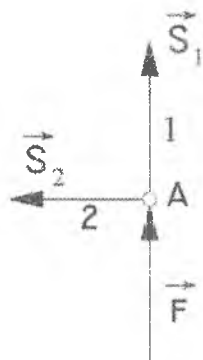
Fermalarni hisoblashda quyidagi xususiy hollar bo'lishi mumkin.

1. Agar fermaning ikki sterjenli tuguniga kuch ta'sir etmasa (44.2-rasm), har ikki sterjenlardagi zo'riqishlar nolga teng bo'ladi.



2. Agar fermaning ikki sterjenli tuguniga ikki sterjenlardan birining o'qi bo'ylab yo'nalgan \vec{F} kuch ta'sir etsa (44.3-rasm), bu sterjenning reaksiya kuchi miqdor jihatdan ta'sir etuvchi kuchga teng bo'lib, unga qarama-qarshi yo'nalgan bo'ladi:

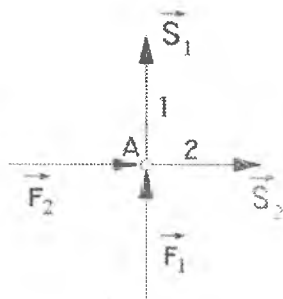
$$\vec{S}_1 = -\vec{F}, \quad S_2 = 0.$$



44.3-rasm

3. Agar fermaning ikki sterjenli tuguniga sterjen o'qlari bo'ylab yo'nalgan \vec{F}_1, \vec{F}_2 kuchlar ta'sir etsa (44.4-rasm), har bir sterjenning reaksiya kuchi miqdor jihatdan mos ravishda shu kuchga teng, yo'nalishi unga qarama-qarshi bo'ladi:

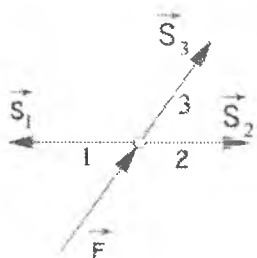
$$\vec{S}_1 = -\vec{F}_1, \quad \vec{S}_2 = -\vec{F}_2.$$



44.4-rasm

4. Agar fermaning uch sterjenli tugunida ikki sterjenning o'qi bir to'g'ri chiziqda yotsa va tugunga uchinchi sterjenning o'qi boylab kuch ta'sir etsa (44.5-rasm), uchinchi sterjen reaksiya kuchi miqdor jihatdan ta'sir etuvchi kuchga teng bo'lib, yo'nalishi unga qarama-qarshi bo'ladi.

$$\vec{S}_3 = -\vec{F}.$$



44.5-rasm

Qolgan ikki sterjenning reaksiya kuchi miqdor jihatdan teng bo'ladi (nolga teng bo'lishi ham mumkin).

45-§. Ferma sterjenlaridagi zo'riqishlarni Ritter usulida aniqlash

Fermani hisoblashda uning ayrim sterjenlaridagi zo'riqishlarni aniqlash talab etilsa, Ritter tomonidan kashf etilgan va uning nomi bilan ataladigan analitik usuldan foydalanish qulay bo'ladi. Bu usulda ham dastlab fermaning tayanch reaksiyalari aniqlanadi.

Ritter usulida ferma biror α - α kontur bilan fikran kesilib, ikki qismga ajratiladi va masala shartiga qarab, ajratilgan qismlardan birining muvozanati o'rganiladi. Fermaning qismlariga ta'sir etuvchi kuchlar tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini tashkil etadi. Ularning muvozanat tenglamalaridan uchta noma'lum kattalikni aniqlash mumkin. Shuning uchun fermani shunday kesim bilan kesish kerakki, reaksiya kuchlari noma'lum bo'lgan sterjenlar soni uchtdan oshmasligi va bir nuqtada kesishadigan zo'riqishi noma'lum bo'lgan sterjenlar soni ikkitadan oshmasligi lozim. Fermaning qismlaridan birining muvozanatini o'rganishda tashlab yuborilgan qismining ta'siri, sterjenlar bo'ylab tashlab yuborilgan tomonga yo'nalgan kuchlar bilan almashtiriladi, ya'ni barcha kesilgan sterjenlar cho'zilgan deb faraz qilinadi.

Hisoblash natijasida sterjenning reaksiya kuchi manfiy ishorali chiqsa, uning yo'nalishi qabul qilingan yo'nalishga qarama-qarshi ekanligi, binobarin, mazkur sterjen aslida siqilgan ekanligi ma'lum bo'ladi. Muvozanat tenglamalarida, imkoni bo'lsa, noma'lumlar soni bittadan oshmasligi lozim. Shu nuqtayi nazardan qaraganda quyidagi ko'rinishdagi

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum M_B(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum U_i = 0 \quad (45.1)$$

yoki

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum M_B(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum M_C(\vec{F}_i) = 0 \quad (45.2)$$

muvozanat tenglamalaridan foydalanish maqsadga muvofiq bo'ladi. (45.2) tenglamalarni tuzishda, moment markazi sifatida ikkita noma'lum reaksiya kuchlarining ta'sir chiziqlari kesishadigan nuqtani olish qulay bo'ladi. Bunday nuqtalar Ritter nuqtalari deyiladi.

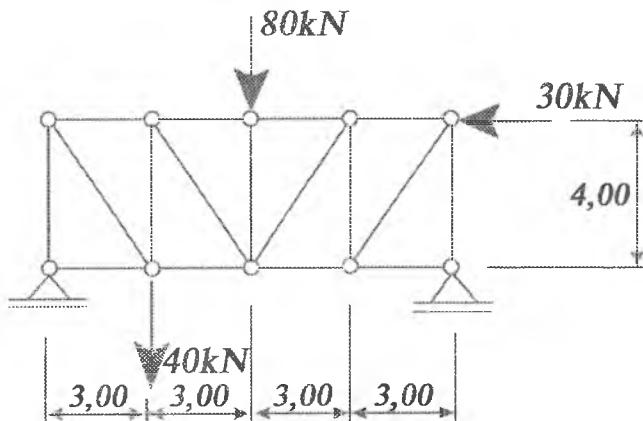
Agar fermaning muvozanati o'rganilayotgan qismida reaksiya kuchlari noma'lum bo'lgan sterjenlardan ikkitasi o'zaro parallel bo'lsa, (45.1) tenglamalardan foydalanish maqsadga muvofiq bo'ladi. Bunda moment markazlari uchun Ritter nuqtalari, kuchlar proyeksiyalanadigan y o'qi sifatida, sterjenlarga perpendikular bo'lgan o'q olinadi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Tekis ferma deb nimaga aytiladi?
2. Ferma sterjenlaridagi zo'riqishlarni tugunlarni kesish usuli bilan aniqlash tartibini aytib bering.
3. Ferma sterjenlaridagi zo'riqishlarni Ritter usulida aniqlash tartibini aytib bering.
4. Fermaning tepa kamari deb nimaga aytiladi?
5. Fermaning pastki kamari deb nimaga aytiladi?
6. Ferma sterjeni deb nimaga aytiladi?
7. «Tugun» deganda nimani tushunasiz?
8. Statik aniq ferma qanday ferma?
9. Statik aniqmas ferma qanday ferma?

46-§. Tekis fermani hisoblashga oid masalalar

1-masala. Tekis ferma sterjenlaridagi zo'riqishlarni aniqlang (46.1-rasm).



46.1-rasm

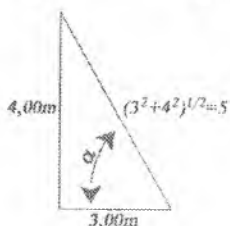
Yechish:

1. Fermaning statik aniqlangan ekanligini tekshiramiz.

Fermada tugunlar soni $n = 10$ ta. Sterjenlar soni, ferma statik aniqlangan bo'lgani uchun, $N=2n-3 = 17$ ta bo'lishi lozim. Berilgan fermada sterjenlar soni haqiqatan ham 17 ta. Demak, ferma statik aniqlangan ferma ekan.

2. Ferma sterjenlarining og'ish burchagini aniqlaymiz (46.2-rasm):

$$\cos a = \frac{3}{5} = 0,6, \quad \sin a = \frac{4}{5} = 0,8.$$

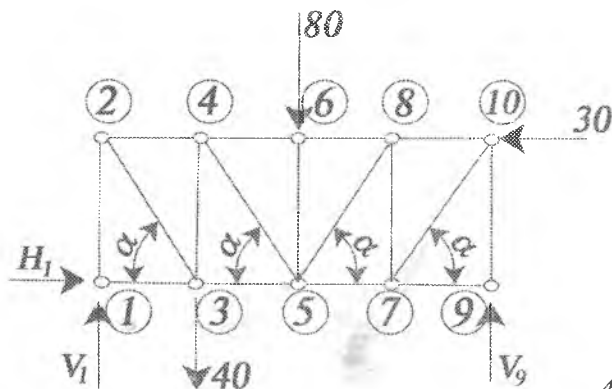


46.2-rasm

3. Fermaning tayanch reaksiyalarini aniqlaymiz.

Ferma tugunlariga miqdorlari 30 kN, 40 kN, 80 kN bo'lgan kuchlar ta'sir etadi.

Ferma A nuqtada qo'zg'almas, B nuqtada qo'zg'aluvchan shar-nirga tayangan. Ularning fermaga ta'sirini bog'lanishlar reaksiyalari bilan almashtiramiz (46.3-rasm).



46.3-rasm

Fermaga ta'sir etuvchi kuchlarning muvozanat tenglamalarini tuzamiz.

(Momentlar tenglamasini tuzishda, kuch jismni nuqta atrofida soat mili bo'yicha aylantirishga intilsa, kuch momenti ishorasini manfiy deb qabul qiling).

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0, & H_1 - 30 &= 0, & H_1 &= 30 \text{ kN}, \\ \sum M_{V_1} &= 0, & -40 \cdot 3 - 80 \cdot 6 + 30 \cdot 4 + V_9 \cdot 12 &= 0, & V_9 &= 40 \text{ kN}, \\ \sum M_{9_i} &= 0, & -V_1 \cdot 12 + 40 \cdot 9 + 80 \cdot 6 + 30 \cdot 4 &= 0, & V_1 &= 80 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Bajarilgan hisoblashlarning to'g'riligini tekshiramiz.

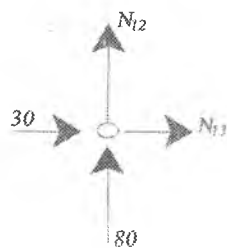
$$\sum Y_i = 0, \quad V_1 - 40 - 80 + V_9 = 0.$$

Demak, hisoblashlar to'g'ri bajarilgan.

4. Ferma tugunlaridagi zo'riqishlarni aniqlaymiz. Barcha sterjenlarni cho'zilgan deb faraz qilamiz.

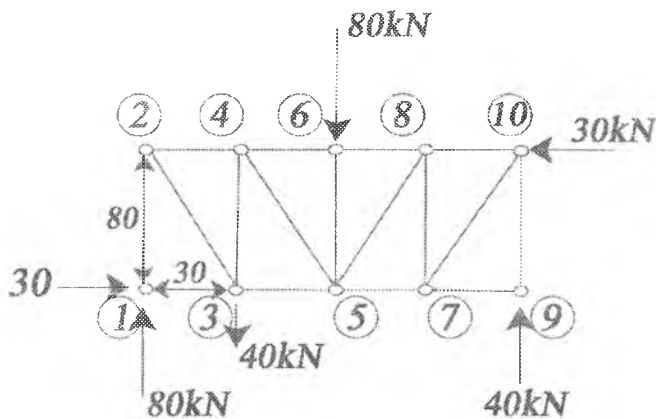
1-tugun (46.4-rasm).

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0, & 30 + N_{13} &= 0, & N_{13} &= -30 \text{ kN}, \\ \sum Y_i &= 0, & 80 + N_{12} &= 0, & N_{12} &= -80 \text{ kN} \end{aligned}$$



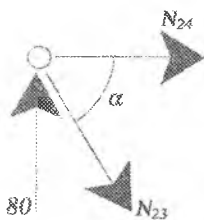
46.4-rasm

zo'riqishlar ishoralarining manfiyligi 12, 13 sterjenlarni siqilgan sterjenlar ekanligidan darak beradi (46.5-rasm).



46.5-rasm

2-tugun (46.6-rasm).



48.6-rasm

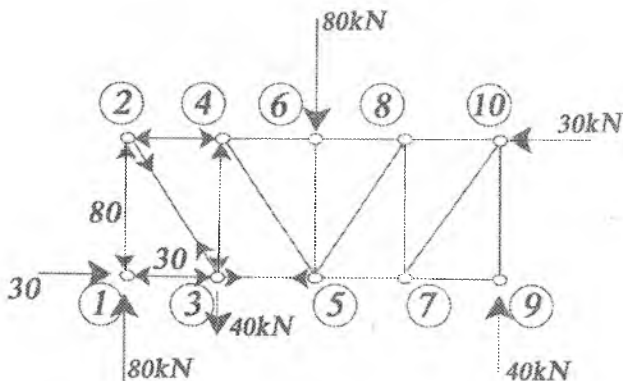
Tugunga qo'yilgan kuchlar uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0, & N_{24} + N_{23} \cos a &= 0, \\ \sum Y_i &= 0, & 80 - N_{23} \sin a &= 0. \end{aligned}$$

Tenglamalarni yechib, N_{23} va N_{24} larning qiymatlarini aniqlaymiz:

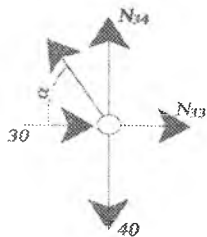
$$N_{23} = 100 \text{ kN}, \quad N_{24} = -60 \text{ kN}.$$

N_{24} qiymatining manfiy ishorasi mazkur sterjenning tugunga qo'yilgan kuchlar ta'sirida cho'zilmasdan siqilgan ekanligidan darak beradi (46.7-rasm).



46.7-rasm

3-tugun (46.8-rasm).



46.8-rasm

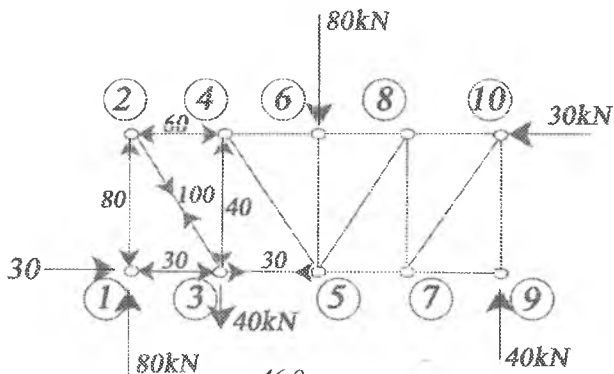
Tugunga qo'yilgan kuchlar uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0, & 30 - 100 \cos a + N_{35} &= 0, \\ \sum Y_i &= 0, & N_{34} - 40 + 100 \sin a &= 0. \end{aligned}$$

Tenglamalarni yechib, noma'lum zo'riqishlarni aniqlaymiz:

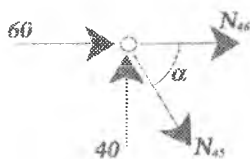
$$N_{35} = 30 \text{ kN}, \quad N_{34} = -40 \text{ kN}.$$

Demak, 34 sterjen tugunga qo'yilgan kuchlar ta'sirida cho'zilmasdan siqilgan ekan (46.9-rasm).



46.9-rasm

4-tugun (46.10-rasm).



46.10-rasm

Tugunga qo'yilgan kuchlar uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

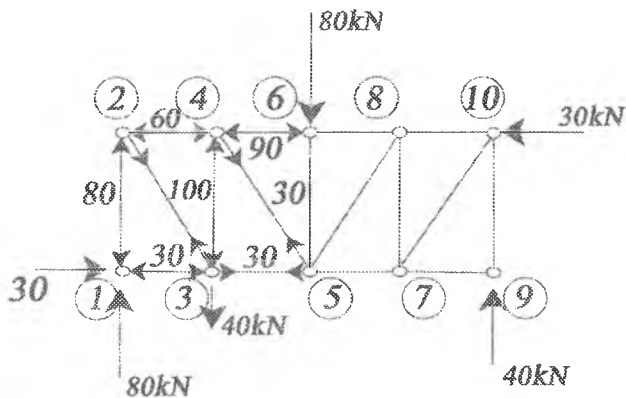
$$\sum X_i = 0, \quad 60 + N_{46} + N_{45} \cos a = 0,$$

$$\sum Y_i = 0, \quad 40 - N_{45} \sin a = 0.$$

Tenglamalarni yechib, noma'lum zo'riqishlarni aniqlaymiz:

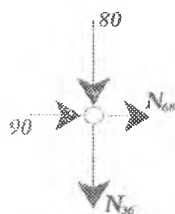
$$N_{45} = 50 \text{ kN}, \quad N_{46} = -90 \text{ kN}.$$

Demak, 46 sterjen tugunga qo'yilgan kuchlar ta'sirida cho'zilmasdan siqilgan ekan (46.11-rasm).



46.11-rasm

5-tugun (46.12-rasm).



46.12-rasm

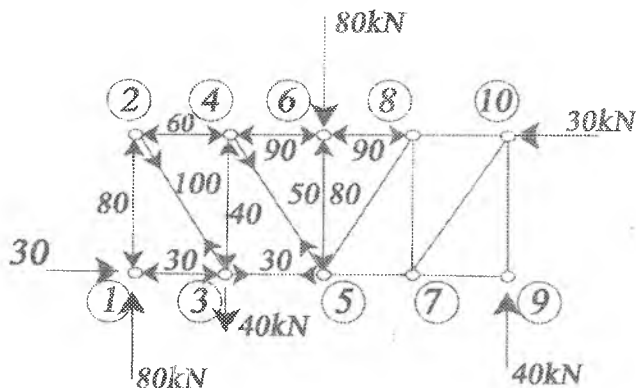
Tugunga qo'yilgan kuchlar uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0, & 90 + N_{68} &= 0, \\ \sum Y_i &= 0, & -80 - N_{36} &= 0. \end{aligned}$$

Tenglamalarni yechib, N_{68} va N_{36} larning qiymatlarini aniqlaymiz:

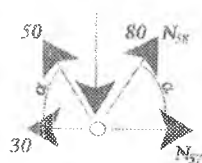
$$N_{68} = -90 \text{ kN}, \quad N_{36} = -80 \text{ kN}.$$

Hisoblashlar 68 va 36 sterjenlarni qo'yilgan kuchlar ta'sirida cho'zilmasdan, siqilgan ekanligidan darak beradi (48.13-rasm).



46.13-rasm

6-tugun (46.14-rasm).



46.14-rasm

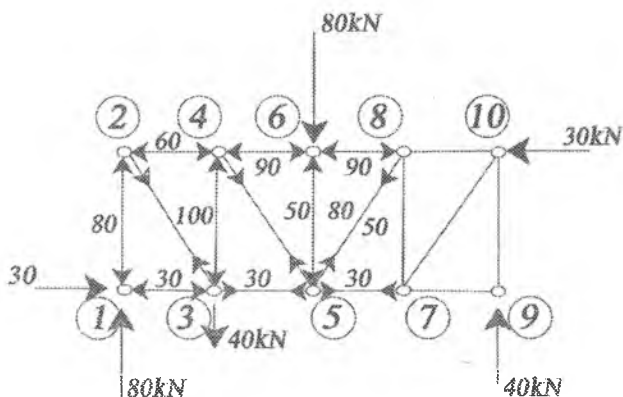
Tugunga qo'yilgan kuchlar uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0, & -30 - 50 \cos a + N_{57} + N_{58} \cos a &= 0 \\ \sum Y_i &= 0, & 50 \sin a - 80 + N_{58} \sin a &= 0. \end{aligned}$$

Tenglamalarni yechib, noma'lum zo'riqishlarni aniqlaymiz:

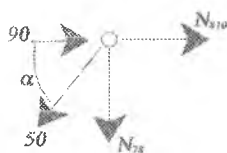
$$N_{58} = 50 \text{ kN}, \quad N_{57} = 30 \text{ kN}.$$

Hisoblashlar mazkur sterjenlarni qo'yilgan kuchlar ta'sirida haqiqatan ham cho'zilgan ekanligidan darak beradi. (46.15-rasm)



46.15-rasm

7-tugun (46.16-rasm).



46.16-rasm

Tugunga qo'yilgan kuchlar uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

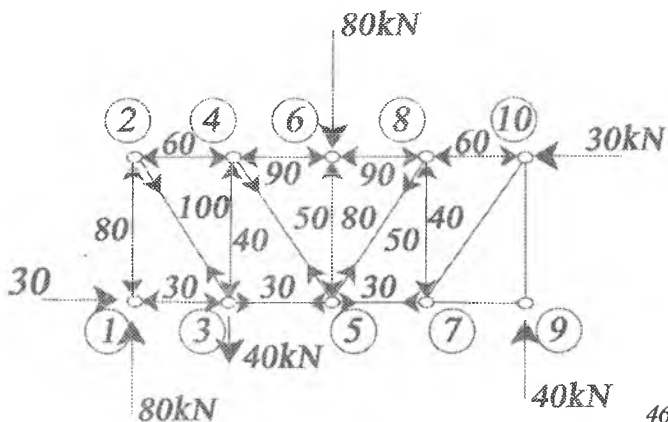
$$\sum X_i = 0, \quad 90 - 50 \cos a + N_{810} = 0,$$

$$\sum Y_i = 0, \quad -50 \sin a - N_{78} = 0.$$

Tenglamalarni yechib, noma'lum zo'ri qishlarni aniqlaymiz:

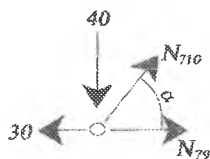
$$N_{78} = -40 \text{ kN}, \quad N_{810} = -60 \text{ kN}.$$

Demak, qo'yilgan kuchlar ta'sirida mazkur sterjenlar siqilgan ekan (46.17-rasm).



46.17-rasm

8-tugun (46.18-rasm).



46.18-rasm

Tugunga qo'yilgan kuchlar uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

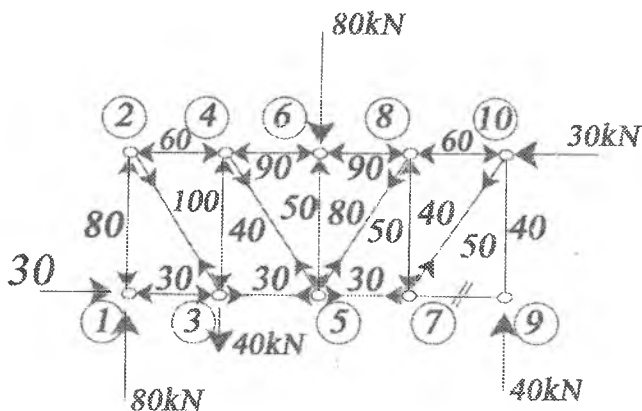
$$\sum X_i = 0, \quad -30 + N_{710} \cos a + N_{79} = 0,$$

$$\sum Y_i = 0, \quad -40 + N_{710} \sin a = 0.$$

Tenglamalarni yechib, noma'lum zo'riqishlarni aniqlaymiz:

$$N_{710} = 50 \text{ kN}, \quad N_{79} = 0.$$

Demak, 79 sterjen siqilmagan ekan, 710 sterjen esa cho'zilgan (46.19-rasm).



46.19-rasm

9-tugun (46.20-rasm).



46.20-rasm

Tugunga qo'yilgan kuchlar uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

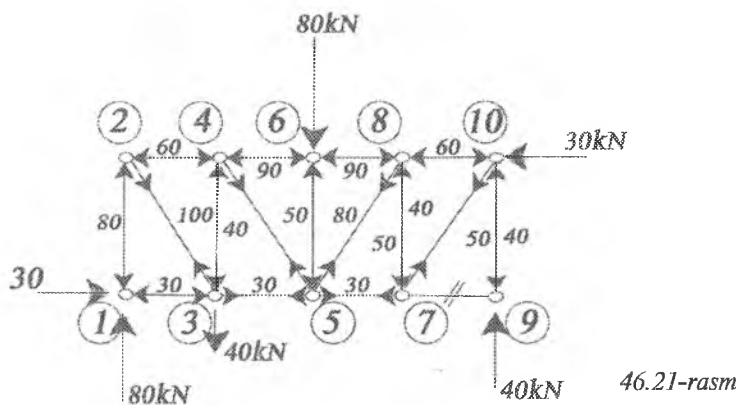
$$\sum X_i = 0, \quad 0 = 0,$$

$$\sum Y_i = 0, \quad 40 + N_{910} = 0.$$

Tenglamalarni yechib, noma'lum zo'riqishlarni aniqlaymiz:

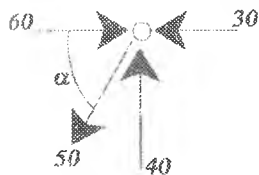
$$N_{910} = -40 \text{ kN}$$

Demak, 910 sterjen tugunga qo'yilgan kuch ta'sirida siqilar ekan (46.21-rasm).



46.21-rasm

10-tugun (46.22-rasm).



46.22-rasm

Tugunga qo'yilgan kuchlar uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\sum X_i = 0, \quad 60 - 50 \cos a - 30 = 0,$$

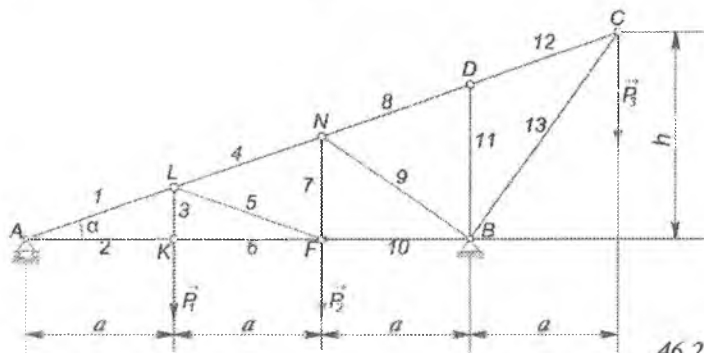
$$\sum Y_i = 0, \quad - 50 \sin a + 40 = 0.$$

Tenglamalar 60, 30, 50, 40 sterjenlardagi zo'riqishlarning to'g'ri ekanligidan darak beradi.

2-masala. Fermaning berilgan yuklanishidagi tayanch reaksiyalari hamda uning uchta sterjenidagi (4, 7, 8) zo'riqishlar Ritter usuli bilan aniqlansin (46.23-a rasm).

Berilgan:

$$P_1 = 4 \text{ kN}, \quad P_2 = 4 \text{ kN}, \quad P_3 = 10 \text{ kN}, \quad a = 4 \text{ m}, \quad h = 6 \text{ m}.$$

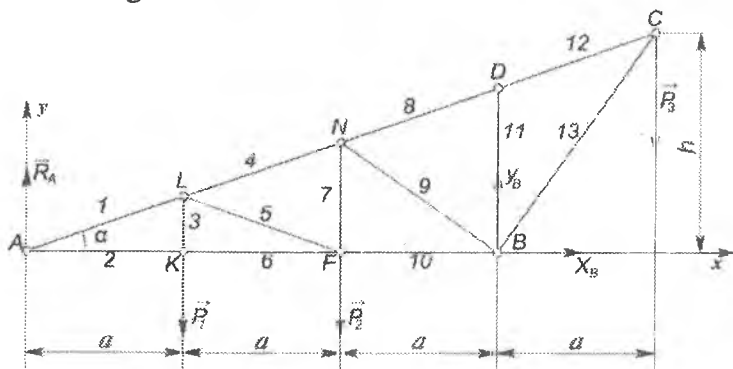


46.23-a rasm

Yechish:

1. Fermaning tayanch reaksiyalarini aniqlash.

Fermaga $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ tashqi kuchlar ta'sir etadi. A va B tayanchlar ferma uchun bog'lanishlar hisoblanadi. Bog'lanishlardan bo'shatish prinsipiga asosan, ularning fermaga ta'siri bog'lanishlar reaksiya kuchlari bilan almashtiriladi. A tayanch qo'zg'aluvchan sharnir, uning reaksiyasi sharnir harakatlanadigan tekislikka perpendikular yo'naladi. B tayanch — qo'zg'almas silindrik sharnir reaksiyasining yo'nalishi oldindan noma'lum. Shuning uchun uning reaksiyasini koordinata o'qlarining musbat yo'nalishi bo'yicha yo'nalgan X_B, Y_B tashkil etuvchilarga ajratamiz. Natijada, fermaga ta'sir etuvchi tekislikda ixtiyoriy joylashgan $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{R}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B)$ kuchlar sistemasiga ega bo'lamiz. (46.23-b rasm). Hosil bo'lgan kuchlar sistemasining muvozanat tenglamalarini tuzamiz:



46.23-b rasm

$$\sum X_i = 0, \quad X_B = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0, \quad R_A + Y_B - P_1 - P_2 - P_3 = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_B(\vec{F}_i) = 0, \quad P_1 \cdot 2a + P_2 \cdot a - R_A \cdot 3a - P_3 \cdot a = 0. \quad (3)$$

Tenglamalarni yechib, fermaning tayanch reaksiyalarini aniqlaymiz.

(3) tenglamadan:

$$R_A = \frac{P_1 \cdot 2 + P_2 - P_3}{3} = \frac{4 \cdot 2 + 4 - 10}{3} = 0,666 \text{ kN.}$$

(2) tenglamadan:

$$Y_B = P_1 + P_2 + P_3 - R_A = 4 + 4 + 10 - 0,666 = 17,334 \text{ kN.}$$

(1) tenglamadan:

$$X_B = 0.$$

B sharnir reaksiya kuchining moduli:

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = 17,334 \text{ kN.}$$

2. Fermaning 4, 7, 8-sterjenlaridagi zo'riqishlarni Ritter usulida aniqlash.

To'rtinchi sterjendagi zo'riqishni aniqlash uchun fermanni I—I kesim bilan ikki qismga bo'lib, chap qismining muvozanatini o'rganamiz.

Olib tashlangan o'ng qismning chap qismga ta'sirini \bar{S}_4 , \bar{S}_5 , \bar{S}_6 kuchlar orqali ifodalaymiz. Ritter usuliga binoan har bir zo'riqish alohida tenglamadan topilishi va u boshqa sterjenlardagi zo'riqishlar orqali ifodalanmasligi lozim.

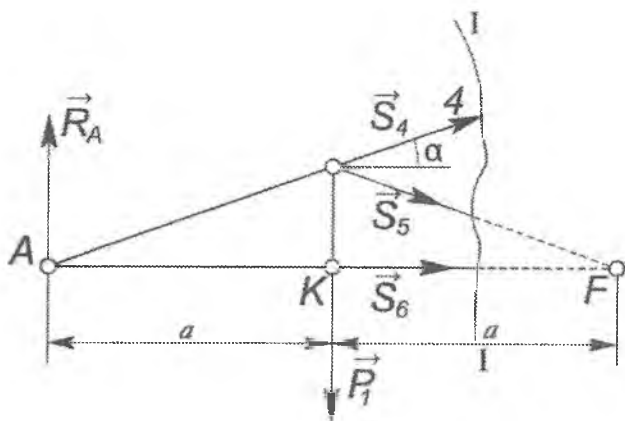
Avvalgidek, bu usulda ham shartli ravishda, barcha sterjenlar cho'ziladi, deb faraz qilinadi. S_4 ni aniqlash uchun \bar{S}_5 va \bar{S}_6 kuchlarning ta'sir chiziqlari kesishgan F nuqtani Ritter nuqtasi deb qabul qilib, shu nuqtaga nisbatan momentlar tenglamasini tuzamiz (46.24-rasm):

$$\sum M_{iF}(\bar{Q}) = 0, \quad P_1 \cdot a - R_A \cdot 2a - S_4 \cdot \sin a - S_4 \cdot \cos a \cdot \frac{h}{4} = 0.$$

Bundan:

$$S_4 = \frac{-R_A \cdot 2a + P_1 \cdot a}{a \sin \alpha + \frac{h}{4} \cos \alpha} = 3,8 \text{ kN.}$$

S_7 ni aniqlash uchun fermanni II—II kesim bilan ikki qismga bo'lib, o'ng qismining muvozanatini o'rganamiz. Qolgan chap qismning o'ng



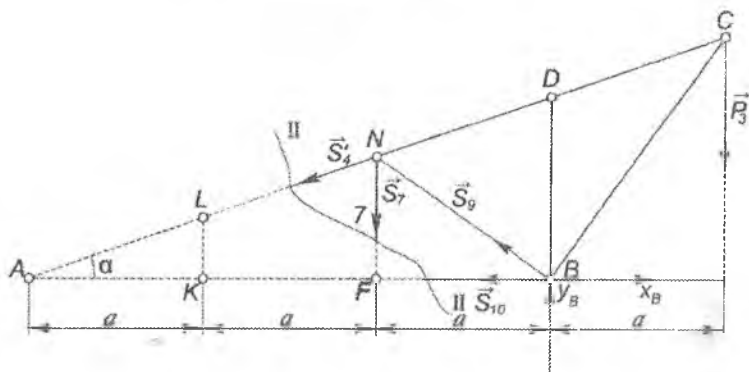
46.24-rasm

qismga ta'sirini \vec{S}_4 , \vec{S}_7 , \vec{S}_{10} kuchlar orqali ifodalaymiz. S_7 zo'riqishni aniqlash uchun Ritter nuqtasi sifatida A nuqta olinadi va unga nisbatan momentlar tenglamasi tuziladi (46.25-rasm):

$$\sum M_{iB}(\vec{F}_i) = 0, \quad -P_3 \cdot 4a + Y_B \cdot 3a - S_7 \cdot 2a = 0.$$

Bundan:

$$S_7 = \frac{-P_3 \cdot 4a + Y_B \cdot 3a}{2a} \approx 6 \text{ kN}.$$



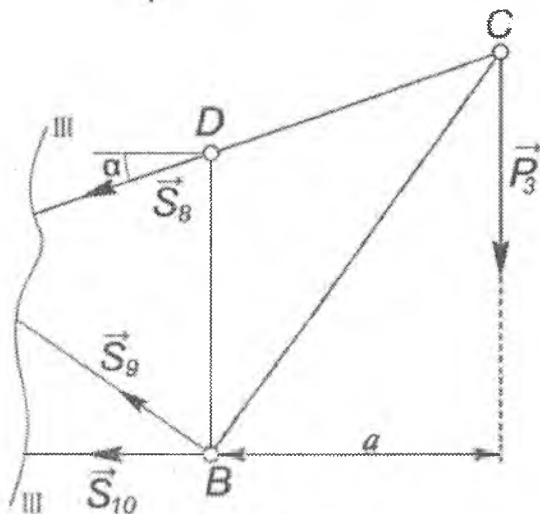
46.25-rasm

S_8 ni aniqlash uchun fermani III–III kesim bilan ikki qismga bo‘lib, o‘ng qismining muvozanatini o‘rganamiz. Qolgan chap qismning o‘ng qismga ta’siri \vec{S}_8 , \vec{S}_9 , \vec{S}_{10} kuchlar orqali ifodalanadi. S_8 ni aniqlash uchun Ritter nuqtasi sifatida B nuqtani tanlab, unga nisbatan momentlar tenglamasini tuzamiz (46.26-rasm):

$$\sum M_{iB}(\vec{S}_i) = 0, \quad -P_3 \cdot a + S'_8 \cdot \cos a \cdot \frac{3}{4}h = 0.$$

Bundan:

$$S'_8 = \frac{P_3 \cdot a}{\cos a \cdot \frac{3h}{4}} = \frac{10 \cdot 4}{0,93 \cdot 18} = \frac{40}{16,74} \approx 9,59 \text{ kN}.$$

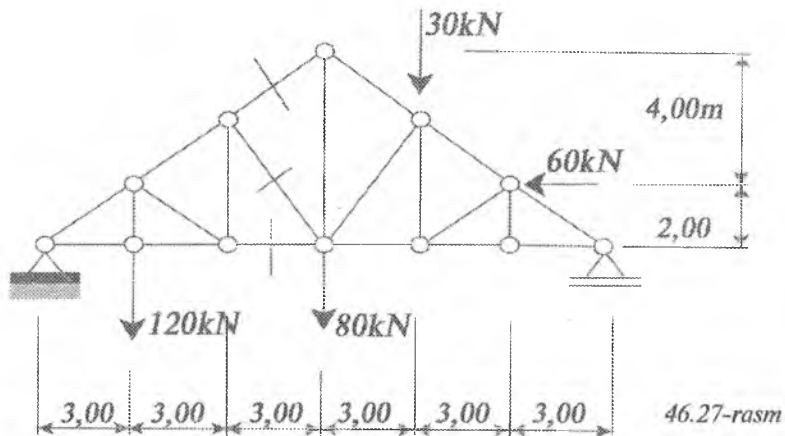


46.26-rasm

3-masala. Chizmada ko‘rsatilgan sterjenlardagi zo‘riqishlarni fermani qismlarga ajratish (Ritter) usuli bilan aniqlang. Fermaga ta’sir etuvchi kuchlar va masofalar rasmda ko‘rsatilgan (46.27-rasm).

Yechimi:

1. Berilgan ferma 12 ta tugun va 21 ta sterjendan iborat. Ferma statik aniqlangan.

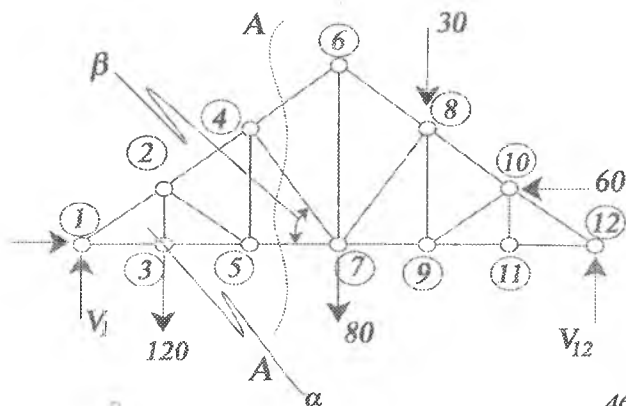


$$N = 2n - 3,$$

$$21 = 2 \cdot 12 - 3,$$

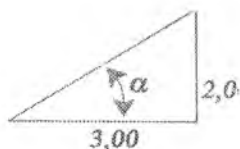
$$21 = 21.$$

2. Fermaning tayanch reaksiyalarini aniqlaymiz. Buning uchun ferma uchun qo'zgalmas sharnir va qo'zgaluvchan sharnirlar bog'lanishlar hisoblanadi. Ularning ta'sirlarini bog'lanishlar reaksiya kuchlari bilan almash-tiramiz (46.28-rasm).

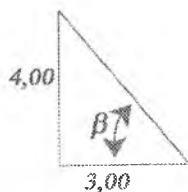


46.28-rasm

3. Berilgan ferma simmetrik ferma. Sterjenlarning og'ish bur-chaklari α va β burchaklar orqali aniqlanadi (46.29-rasm).



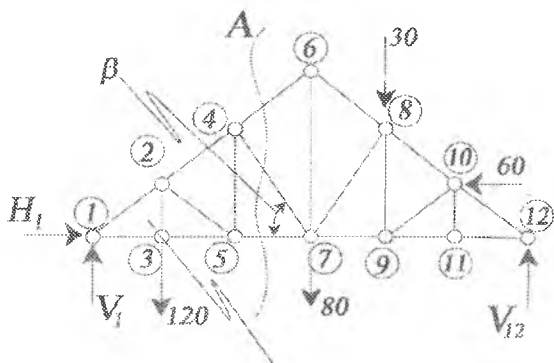
46.29-rasm



$$\cos a = \frac{3}{\sqrt{13}} = 0,832, \quad \sin a = \frac{2}{\sqrt{13}} = 0,554,$$

$$\cos b = \frac{3}{5} = 0,6, \quad \sin b = \frac{4}{5} = 0,8.$$

4. Fermaning tayanch reaksiyalarini aniqlaymiz. Fermaga ta'sir etuvchi kuchlar tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini tashkil etadi. Fermaga ta'sir etuvchi kuchlarning muvozanat tenglamalarini tuzamiz (46.28-rasm).



46.30-rasm

$$\sum X_i = 0, \quad H_1 - 60 = 0, \quad H_1 = 60 \text{ kN},$$

$$\sum M_{1i} = 0, \quad 120 \cdot 3 + 80 \cdot 9 + 30 \cdot 12 - 60 \cdot 2 - V_{12} \cdot 18 = 0, \quad V_{12} = 73,33 \text{ kN},$$

$$\sum M_{12i} = 0, \quad V_1 \cdot 18 - 120 \cdot 15 - 80 \cdot 9 - 30 \cdot 6 - 60 \cdot 2 = 0, \quad V_1 = 156,66 \text{ kN}.$$

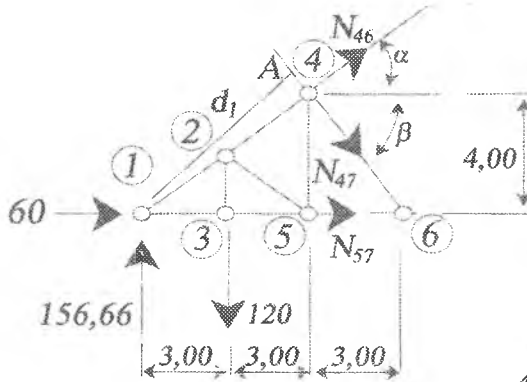
Momentlar tenglamasini tuzishda kuch jismi moment nuqtasi atrofida soat harakati yo'nalishda aylantirishga intilsa, kuch momenti ishorasi musbat deb qabul qilingan.

Hisoblashlarning to'g'riligiga ishonch hosil qilish uchun quyidagi tekshirishlarni o'tkazamiz.

$$\sum Y_i = 0, \quad V_1 - 120 - 80 - 30 + V_{12} = 0.$$

V_1 va V_{12} larning qiymatlari tenglamani qanoatlantirdi. Demak, V_1 va V_{12} lar to'g'ri hisoblangan.

5. Ritter usulidan foydalanib, N_{46} , N_{47} , N_{57} zo'riqishlarning qiymatlarini aniqlaymiz. Buning uchun berilgan tekis fermani AA kesma orqali ikki qismga ajratamiz (46.31-rasm).



46.31-rasm

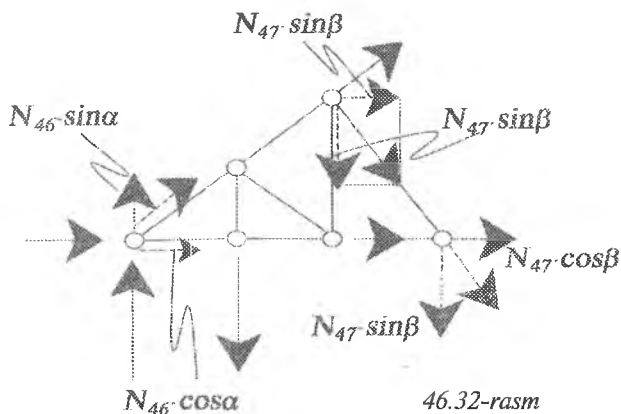
Fermanni AA kesim orqali kesishdan hosil bo'lgan qismlaridan biri — chap tomondagi qismining muvozanatini o'rganamiz. 46, 47, 48-sterjenlarni qo'yilgan kuchlar ta'sirida cho'zilgan deb faraz qilib, zo'riqishlarni N_{46} , N_{47} , N_{57} orqali belgilaymiz. Dastlab N_{57} ning qiymatini aniqlaymiz. Buning uchun Ritter nuqtasi sifatida 4-tugunni tanlab, shu tugun nuqtasiga nisbatan ferma chap tomoniga qo'yilgan kuchlarning momentlarini hisoblaymiz (46.31-rasm):

$$\sum M_{4i} = 0, \quad 156,66 \cdot 6 - 60 \cdot 4 - 120 \cdot 3 - N_{57} \cdot 4 = 0.$$

Tenglamadan:

$$N_{57} = 85 \text{ kN}.$$

N_{47} ning qiymatini aniqlash uchun Ritter nuqtasi sifatida 1-tugunni tanlaymiz va ferma chap qismiga ta'sir etuvchi kuchlarning shu tugun-nuqtaga nisbatan momentlarini hisoblaymiz (46.32-rasm).



Tugun muvozanatda bo'lgani uchun:

$$\sum M_{li} = 0,$$

Shuning uchun:

$$\sum M_{li} = 0, \quad 120 \cdot 3 + N_{47} \cdot d_1 = 0$$

46.31-rasmdan:

$$d_1 = 9 \cdot \sin \beta = 72$$

Natijada:

$$N_{47} = -50 \text{ kN}.$$

Shuni ta'kidlash lozimki, N_{47} ning qiymatini Varinyon teoremasidan foydalangan holda ham aniqlash mumkin bo'ladi. Bunday holda 1-tugunning muvozanat tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$\sum M_{li} = 0, \quad 120 \cdot 3 + N_{47} \cdot \cos b \cdot 4 + N_{47} \cdot \sin b \cdot 6 = 0.$$

Bu tenglamaning yechimi N_{47} ning qiymatini to'g'ri ekanligini bildiradi. Fermaning 46-sterjenidagi zo'riqishni aniqlaymiz.

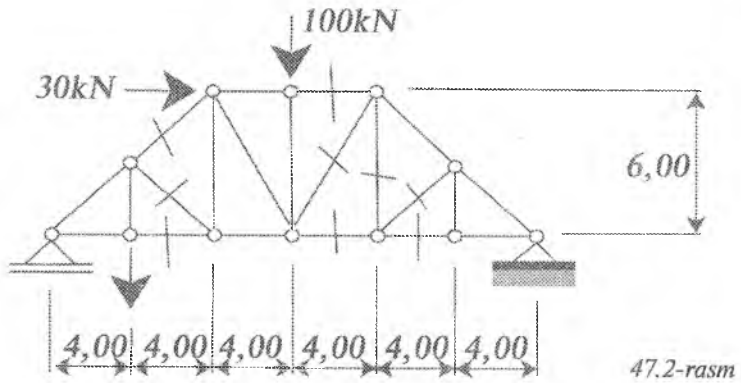
Ritter nuqtasi sifatida 7-tugunni tanlaymiz. Tugun muvozanatda bo'lganligi uchun:

$$\sum M_{7i} = 0, \quad 156,66 \cdot 9 + N_{46} \cdot \sin a \cdot 9 - 120 \cdot 6 = 0.$$

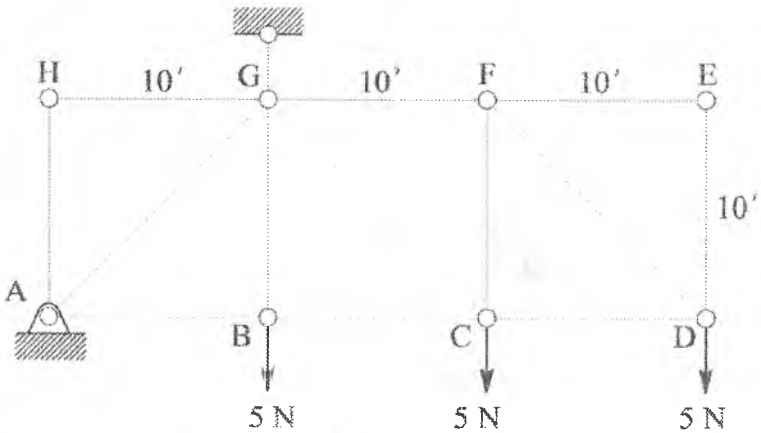
Tenglamadan: $N_{46} = -138,37 \text{ kN}$.

47-§. Mustaqil o‘rganish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar

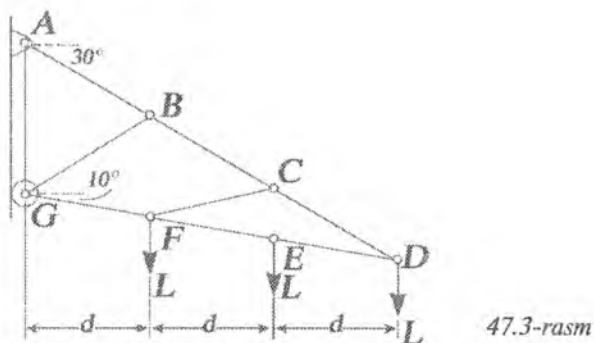
1-muammo. Rasmda ko‘rsatilgan sterjenlardagi zo‘riqishlarni Ritter usulida aniqlang (47.1-rasm).



2-muammo. Fermaning CG sterjenidagi zo‘riqishni Ritter usulida aniqlang (47.2-rasm).

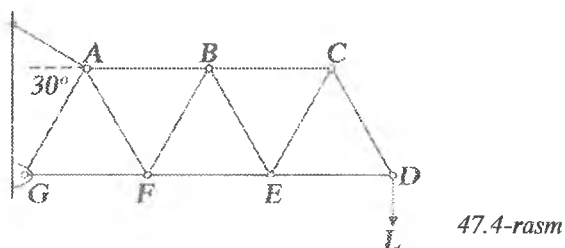


3-muammo. Rasmda ko‘rsatilgan fermaning BC, CF va EF sterjenlaridagi zo‘riqishlarni Ritter usulida aniqlang (47.3-rasm).



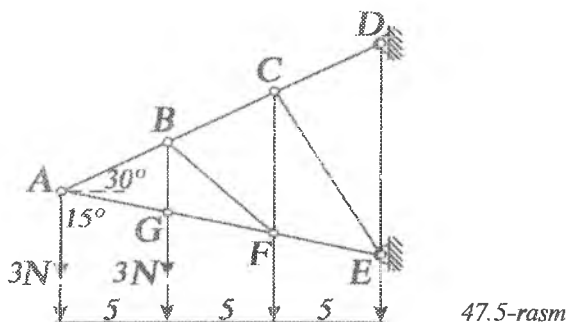
47.3-rasm

4-muammo. Rasmda ko'rsatilgan feraning BC, BE va BF sterjenlaridagi zo'riqishlarni Ritter usulida aniqlang (47.4-rasm).



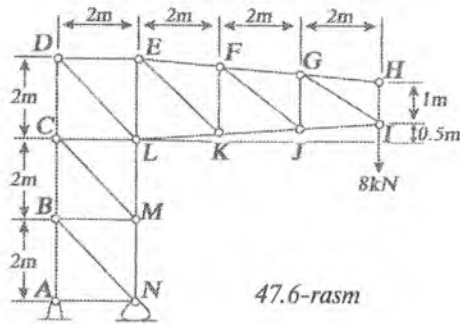
47.4-rasm

5-muammo. Feraning BF sterjenidagi zo'riqishni aniqlang (47.5-rasm).



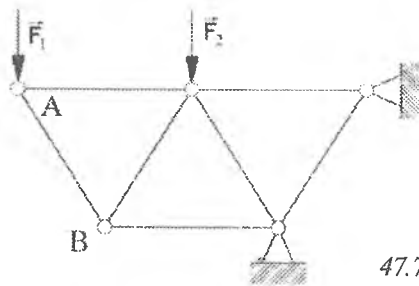
47.5-rasm

6-muammo. Feraning DE va DL sterjenlaridagi zo'riqishlarni Ritter usulida aniqlang (47.6-rasm).



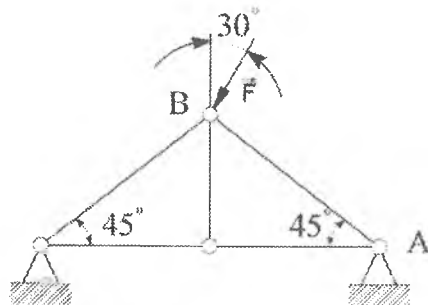
47.6-rasm

7-muammo. Bir xil uzunlikdagi sterjenlardan iborat fermaga $\vec{F}_1 = 100 \text{ N}$ va $\vec{F}_2 = 200 \text{ N}$ kuchlar ta'sir etsa, AB sterjendagi zo'riqishni toping (47.7-rasm).



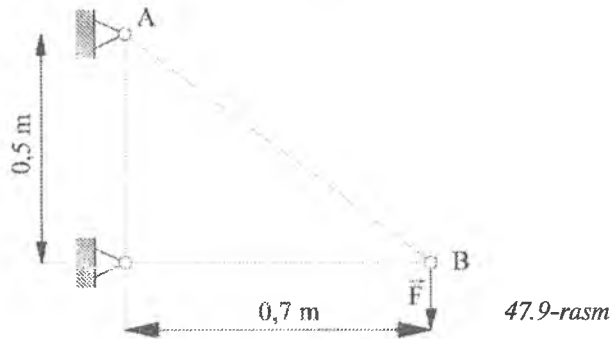
47.7-rasm

8-muammo. Fermaga $\vec{F} = AO \text{ N}$ kuch ta'sir etsa, AB sterjendagi zo'riqishni toping (47.8-rasm).

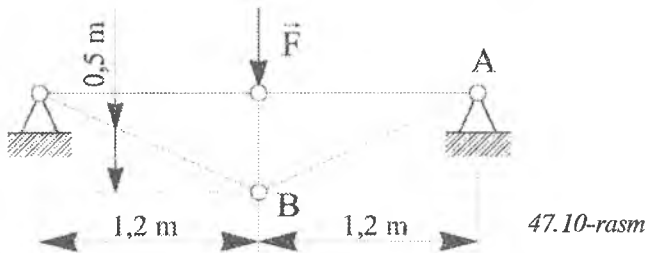


47.8-rasm

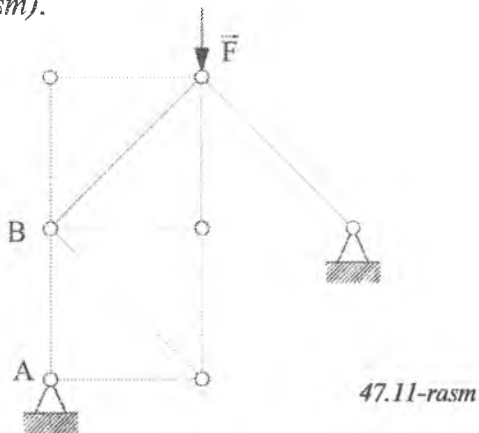
9-muammo. Fermaga $\vec{F} = 580 \text{ N}$ kuch ta'sir etsa, AB sterjendagi zo'riqishni aniqlang (47.8-rasm).



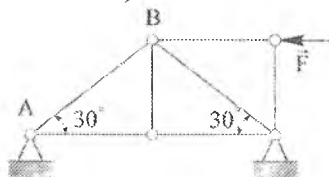
10-muammo. Fermaga $\vec{F} = 60 \text{ N}$ kuch ta'sir etsa, AB sterjendagi zo'riqishni toping (47.10-rasm).



11-muammo. Vertikal va gorizontal sterjenlari o'zaro teng bo'lgan fermaga $\vec{F} = 600 \text{ N}$ kuch ta'sir etsa, AB sterjendagi zo'riqishni aniqlang (47.11-rasm).



12-muammo. Fermaga $\vec{F} = 346 \text{ N}$ kuch ta'sir etsa, AB sterjendagi zo'riqishni toping (47.12-rasm).



47.12-rasm

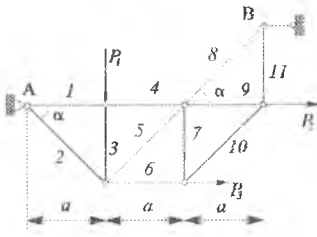
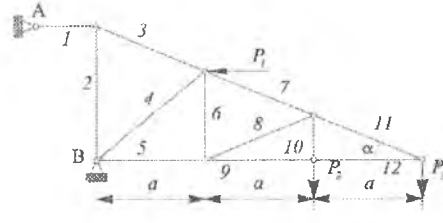
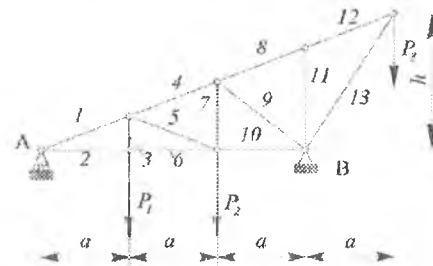
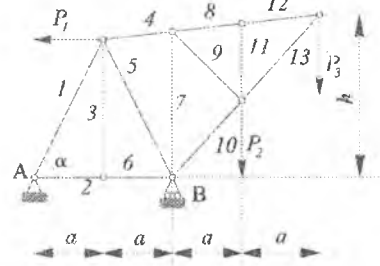
48-§. Talabalar tomonidan mustaqil bajariladigan hisob chizma ishlari variantlari

I. Tekis fermaning tayanch reaksiyalarini va sterjenlaridagi zo'riqishlarni aniqlash.

Fermaning berilgan yuklanishidagi tayanch reaksiyolari hamda uning barcha sterjenlaridagi zo'riqishlar tugunlarni kesish usuli bilan aniqlansin. Fermaning sxemalari va hisoblash uchun zarur bo'lgan ma'lumotlar 1-jadvalda keltirilgan, qo'shimcha ravishda xuddi shu yuklanishida uning uchta sterjenlaridagi zo'riqishlar Ritter usuli bilan aniqlansin. Sterjenlarning raqamlari ham 1-jadvalda ko'rsatilgan.

1-jadval

Variant raqamlari	Ferma sxemasi	Hisoblash uchun zarur bo'lgan ma'lumotlar
1	2	3
1.		$P_1 = 3 \text{ kN}$, $P_2 = 6 \text{ kN}$, $P_3 = 5 \text{ kN}$, $a = 3 \text{ m}$, $\alpha = 60^\circ$, Ritter: 5, 6, 8.
2.		$P_1 = 2 \text{ kN}$, $P_2 = 12 \text{ kN}$, $P_3 = 6 \text{ kN}$, $a = 3 \text{ m}$, $\alpha = 60^\circ$, Ritter: 4, 5, 10.

1	2	3
3.		<p> $P_1=60 \text{ kN}$, $P_2=10 \text{ kN}$, $P_3=2 \text{ kN}$, $a=4 \text{ m}$, $\alpha=45^\circ$, Ritter: 4, 5, 10. </p>
4.		<p> $P_1=4 \text{ kN}$, $P_2=9 \text{ kN}$, $P_3=2 \text{ kN}$, $a=2 \text{ m}$, $\alpha=30^\circ$, Ritter: 3, 8, 9. </p>
5.		<p> $P_1=4 \text{ kN}$, $P_2=4 \text{ kN}$, $P_3=10 \text{ kN}$, $a=4 \text{ m}$, $h=6 \text{ m}$, Ritter: 4, 7, 8. </p>
6.		<p> $P_1=8 \text{ kN}$, $P_2=4 \text{ kN}$, $P_3=10 \text{ kN}$, $a=5 \text{ m}$, $\alpha=60^\circ$, Ritter: 4, 5, 7. </p>

1	2	3
7.		<p> $P_1=3 \text{ kN}$, $P_2=2 \text{ kN}$, $P_3=1 \text{ kN}$, $a=6 \text{ m}$, $\alpha=45^\circ$, Ritter: 5, 8, 9. </p>
8.		<p> $P_1=4 \text{ kN}$, $P_2=2 \text{ kN}$, $P_3=9 \text{ kN}$, $a=4 \text{ m}$, $\alpha=45^\circ$, Ritter: 2, 6, 8. </p>
9.		<p> $P_1=2 \text{ kN}$, $P_2=4 \text{ kN}$, $P_3=2 \text{ kN}$, $h=2 \text{ m}$, $\alpha=60^\circ$, Ritter: 4, 5, 10. </p>
10.		<p> $P_1=5 \text{ kN}$, $P_2=8 \text{ kN}$, $P_3=8 \text{ kN}$, $a=4 \text{ m}$, $h=9 \text{ m}$, $\alpha=30^\circ$, Ritter: 4, 7, 9. </p>

1	2	3
11.		<p> $P_1=3 \text{ kN}$, $P_2=7 \text{ kN}$, $P_3=5 \text{ kN}$, $a=4 \text{ m}$, $h=3 \text{ m}$, Ritter: 8, 9, 11. </p>
12.		<p> $P_1=10 \text{ kN}$, $P_2=5 \text{ kN}$, $P_3=3 \text{ kN}$, $a=4 \text{ m}$, $\alpha=60^\circ$, Ritter: 4, 5, 9. </p>
13.		<p> $P_1=10 \text{ kN}$, $P_2=5 \text{ kN}$, $P_3=3 \text{ kN}$, $a=5 \text{ m}$, $\alpha=60^\circ$, Ritter: 3, 5, 6. </p>
14.		<p> $P_1=10 \text{ kN}$, $P_2=10 \text{ kN}$, $P_3=5 \text{ kN}$, $a=4 \text{ m}$, $\alpha=60^\circ$, Ritter: 5, 6, 11. </p>

1	2	3
15.		<p> $P_1=10 \text{ kN}$, $P_2=3 \text{ kN}$, $P_3=4 \text{ kN}$, $a=2,5 \text{ m}$, $\alpha=60^\circ$, Ritter: 2, 5, 7. </p>
16.		<p> $P_1=3 \text{ kN}$, $P_2=4 \text{ kN}$, $P_3=5 \text{ kN}$, $a=4 \text{ m}$, $h=3 \text{ m}$, Ritter: 3, 5, 7. </p>
17.		<p> $P_1=5 \text{ kN}$, $P_2=7 \text{ kN}$, $P_3=7 \text{ kN}$, $a=3 \text{ m}$, $\alpha=45^\circ$, Ritter: 3, 8, 9. </p>
18.		<p> $P_1=4 \text{ kN}$, $P_2=6 \text{ kN}$, $P_3=3 \text{ kN}$, $a=4 \text{ m}$, $\alpha=60^\circ$, Ritter: 3, 8, 9. </p>

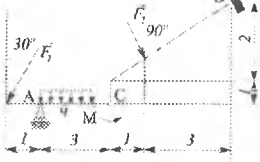
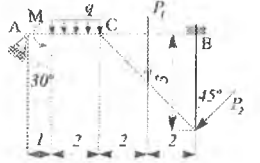


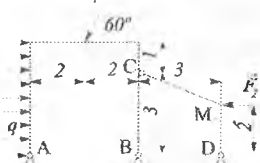
1	2	3
19.		<p> $P_1=5 \text{ kN}$, $P_2=2 \text{ kN}$, $P_3=8 \text{ kN}$, $a=5 \text{ m}$, $\alpha=60^\circ$, Ritter: 1, 8, 9. </p>
20.		<p> $P_1=10 \text{ kN}$, $P_2=8 \text{ kN}$, $P_3=2 \text{ kN}$, $a=5 \text{ m}$, $\alpha=60^\circ$, Ritter: 3, 8, 9. </p>
21.		<p> $P_1=5 \text{ kN}$, $P_2=7 \text{ kN}$, $P_3=2 \text{ kN}$, $a=4 \text{ m}$, $\alpha=60^\circ$, Ritter: 3, 8, 9. </p>
22.		<p> $P_1=2 \text{ kN}$, $P_2=6 \text{ kN}$, $P_3=8 \text{ kN}$, $a=2,5 \text{ m}$, $h=4 \text{ m}$, Ritter: 3, 8, 9. </p>

1	2	3
23.		<p> $P_1=2 \text{ kN}$, $P_2=3 \text{ kN}$, $P_3=5 \text{ kN}$, $a=4 \text{ m}$, $h=6 \text{ m}$, Ritter: 3, 8, 9. </p>
24.		<p> $P_1=5 \text{ kN}$, $P_2=6 \text{ kN}$, $P_3=2 \text{ kN}$, $a=5 \text{ m}$, $\alpha=60^\circ$, Ritter: 3, 8, 9. </p>
25.		<p> $P_1=2 \text{ kN}$, $P_2=8 \text{ kN}$, $P_3=2 \text{ kN}$, $a=6 \text{ m}$, $h=3,6 \text{ m}$, $\alpha=45^\circ$, Ritter: 3, 8, 9. </p>
26.		<p> $P_1=4 \text{ kN}$, $P_2=6 \text{ kN}$, $P_3=2 \text{ kN}$, $a=4,8 \text{ m}$, $h=3,6 \text{ m}$, Ritter: 3, 8, 9. </p>

1	2	3
27.		<p> $P_1=7 \text{ kN}$, $P_2=10 \text{ kN}$, $P_3=5 \text{ kN}$, $P_4=4,4 \text{ m}$, Ritter: 3, 8, 9, $h=3,3 \text{ m}$. </p>
28.		<p> $P_1=5 \text{ kN}$, $P_2=10 \text{ kN}$, $P_3=4 \text{ kN}$, $a=4 \text{ m}$, $h=2 \text{ m}$, Ritter: 3, 8, 9. </p>
29.		<p> $P_1=9 \text{ kN}$, $P_2=4 \text{ kN}$, $P_3=4 \text{ kN}$, $a=4 \text{ m}$, $h=3 \text{ m}$, Ritter: 3, 8, 9. </p>
30.		<p> $P_1=4 \text{ kN}$, $P_2=3 \text{ kN}$, $P_3=8 \text{ kN}$, $a=4 \text{ m}$, $\alpha=45^\circ$, Ritter: 3, 8, 9. </p>

II. Qo'shma konstruksiyaning tayanch reaksiyalarini aniqlash (ikkita jismdan iborat sistema) mavzuyi bo'yicha talabalar tomonidan mustaqil bajariladigan hisob-chizma ishlari variantlari.

C nuqtada birlashtiriladigan ikkita jismdan iborat qo'shma konstruksiyaning tayanch reaksiyolari aniqlansin. Qo'shma konstruksiyaning sxemalari va hisoblash uchun zarur kattaliklar 2-jadvalda ko'rsatiladi.

Variant raqamlari	Konstruksiyaning sxemalari	Hisoblash uchun kerakli ma'lumotlar
1	2	3
1.		$\vec{F}_1 = 7 \text{ kN},$ $\vec{F}_2 = 10 \text{ kN},$ $M = 14 \text{ kNm},$ $q = 3,8 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$
2.		$\vec{F}_1 = 5 \text{ kN},$ $\vec{F}_2 = 8 \text{ kN},$ $M = 22 \text{ kNm},$ $q = 3,6 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$
3.		$\vec{F}_1 = 6 \text{ kN},$ $M = 20 \text{ kNm},$ $q = 3,4 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$
4.		$\vec{F}_1 = 9 \text{ kN},$ $\vec{F}_2 = 6 \text{ kN},$ $M = 18 \text{ kNm},$ $q = 3,2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$
5.		$\vec{F}_1 = 12 \text{ kN},$ $\vec{F}_2 = 4 \text{ kN},$ $M = 16 \text{ kNm},$ $q = 3 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$

1	2	3
6.		$\vec{F}_1=15 \text{ kN},$ $\vec{F}_2=5 \text{ kN},$ $M=14 \text{ kNm},$ $q=2,8 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$
7.		$\vec{F}_1=14 \text{ kN},$ $M=12 \text{ kNm},$ $q=2,6 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$
8.		$\vec{F}_1=13 \text{ kN},$ $M=10 \text{ kNm},$ $q=2,4 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$
9.		$\vec{F}_1=12 \text{ kN},$ $\vec{F}_2=6 \text{ kN},$ $M=15 \text{ kNm},$ $q=2,2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$
10.		$\vec{F}_1=11 \text{ kN},$ $\vec{F}_2=7 \text{ kN},$ $M=20 \text{ kNm},$ $q=2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$

1	2	3
11.		$\vec{F}_1=10 \text{ kN},$ $\vec{F}_2=8 \text{ kN},$ $M=25 \text{ kNm},$ $q=1,8 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$
12.		$\vec{F}_1=9 \text{ kN},$ $M=16 \text{ kNm},$ $q=1,6 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$
13.		$\vec{F}_1=8 \text{ kN},$ $M=18 \text{ kNm},$ $q=1,4 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$
14.		$\vec{F}_1=7 \text{ kN},$ $\vec{F}_2=9 \text{ kN},$ $M=20 \text{ kNm},$ $q=1,2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$
15.		$\vec{F}_1=6 \text{ kN},$ $\vec{F}_2=10 \text{ kN},$ $M=22 \text{ kNm},$ $q=1 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$

1	2	3
16.		$\vec{F}_1 = 5 \text{ kN},$ $M = 24 \text{ kNm},$ $q = 0,8 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$
17.		$F_1 = 10 \text{ kN},$ $F_2 = 12 \text{ kN},$ $M = 17 \text{ kNm},$ $q = 1,6 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$
18.		$\vec{F}_1 = 6 \text{ kN},$ $\vec{F}_2 = 10 \text{ kN},$ $M = 15 \text{ kNm},$ $q = 1,4 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$
19.		$\vec{F}_1 = 8 \text{ kN},$ $\vec{F}_2 = 9 \text{ kN},$ $M = 13 \text{ kNm},$ $q = 1,2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$
20.		$\vec{F}_1 = 10 \text{ kN},$ $\vec{F}_2 = 7 \text{ kN},$ $M = 11 \text{ kNm},$ $q = 1 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$

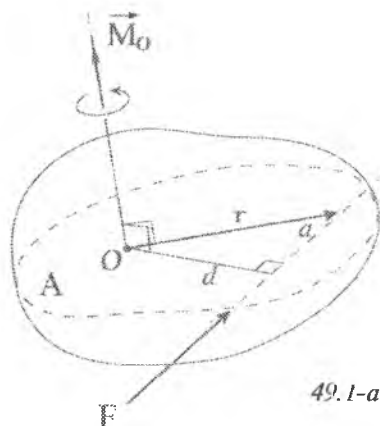
1	2	3
21.		$\vec{F}_1 = 12 \text{ kN},$ $\vec{F}_2 = 8 \text{ kN},$ $M = 9 \text{ kNm},$ $q = 1,1 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$
22.		$\vec{F}_1 = 14 \text{ kN},$ $\vec{F}_2 = 6 \text{ kN},$ $M = 7 \text{ kNm},$ $q = 1,2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$
23.		$\vec{F}_1 = 11 \text{ kN},$ $\vec{F}_2 = 4 \text{ kN},$ $M = 5 \text{ kNm},$ $q = 1,3 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$
24.		$\vec{F}_1 = 8 \text{ kN},$ $\vec{F}_2 = 5 \text{ kN},$ $M = 10 \text{ kNm},$ $q = 1,4 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$
25.		$\vec{F}_1 = 5 \text{ kN},$ $\vec{F}_2 = 6 \text{ kN},$ $M = 15 \text{ kNm},$ $q = 1,5 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$

1	2	3
26.		$\vec{F}_1 = 10 \text{ kN},$ $\vec{F}_2 = 7 \text{ kN},$ $M = 20 \text{ kNm},$ $q = 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$
27.		$\vec{F}_1 = 15 \text{ kN},$ $\vec{F}_2 = 8 \text{ kN},$ $M = 25 \text{ kNm},$ $q = 2,5 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$
28.		$F_1 = 13 \text{ kN},$ $\vec{F}_2 = 9 \text{ kN},$ $M = 30 \text{ kNm},$ $q = 3 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$
29.		$\vec{F}_1 = 11 \text{ kN},$ $\vec{F}_2 = 10 \text{ kN},$ $M = 18 \text{ kNm},$ $q = 3,5 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$
30.		$\vec{F}_1 = 9 \text{ kN},$ $\vec{F}_2 = 12 \text{ kN},$ $M = 26 \text{ kNm},$ $q = 4 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$

FAZODAGI KUHLAR SISTEMASI

49-§. Kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektori

Kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektor kattalik bo'lib, u moment markaziga qo'yiladi va moment markazi hamda kuchning ta'sir chizig'i orqali o'tgan tekislikka perpendikular holda shunday yo'naladiki, uning uchidan qaraganda, kuch jismni soat mili harakat yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalishda aylantiradi (51.1-a rasm).



49.1-a rasm

Agar, kuch qo'yilgan A nuqtaga, moment markazi O nuqtadan o'tkazilgan radius vektorni \vec{r} desak, nuqtaga nisbatan kuch momentining vektori quyidagicha ifodalanadi:

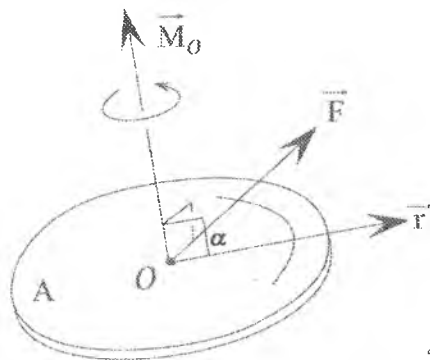
$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (49.1)$$

Chunki, bu vektor ko'paytmaning moduli:

$$|\vec{r} \times \vec{F}| = rF \sin(\vec{r} \wedge \vec{F}) = rd \quad (49.2)$$

ga teng bo'lib, yo'nalishi, vektorlar algebrasidan, \vec{r} va \vec{F} vektorlar yotgan tekislikka perpendikular bo'lib (51.1-b rasm), uning uchidan

qaraganda \vec{r} ni \vec{F} vektor ustiga, kichik burchak orqali tushirish uchun soat milining aylanishiga teskari yo'nalishda burish kerak.



49.1-b rasm

Demak, $\vec{r} \times \vec{F}$ ko'paytmaning moduli nuqtaga nisbatan kuchning momentiga teng bo'lib, yo'nalishi $\vec{M}_0(\vec{F})$ yo'nalishi bilan ustma-ust tushadi.

Binobarin, kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektor moment markaziga nisbatan kuch qo'yilgan nuqta radius vektorining kuch vektoriga vektorli ko'paytmasiga teng bo'lar ekan.

50-§. Kuchning o'qqa nisbatan momenti

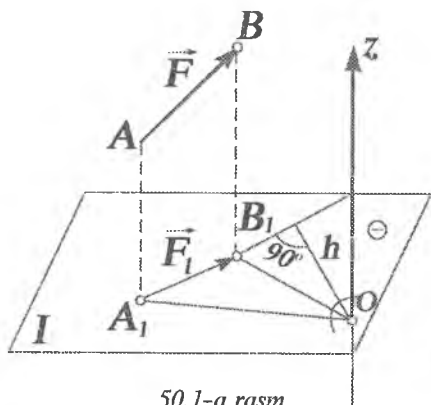
\vec{F} kuchning z o'qqa nisbatan momentini hisoblaymiz. Buning uchun z o'qqa perpendikular tekislik o'tkazamiz va bu tekislikka \vec{F} kuchni proyeksiyalaymiz. \vec{F} kuchning mazkur tekislikdagi proyeksiyasi \vec{F}_1 bilan belgilanadi (50.1-a rasm).

O'q va tekislikning aniqlangan kesishish nuqtasi kuchning tekislikdagi proyeksiyasidan aniqlangan nuqtaga nisbatan moment hisoblanadi. Hisoblangan moment \vec{F} kuchning z o'qqa nisbatan momentini ifodalaydi. Agar, \vec{F} kuchning z o'qiga nisbatan momentini $\vec{M}_z(\vec{F})$ bilan belgilasak, u quyidagicha ifodalanadi:

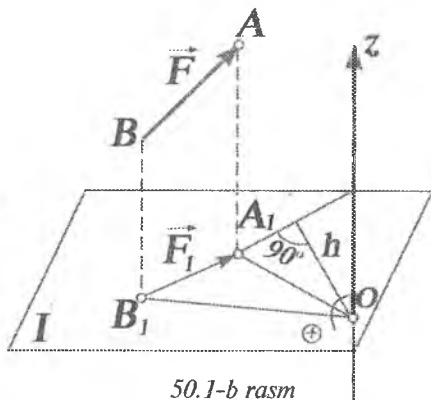
$$M_z(\vec{F}) = M_0(\vec{F}_1) = \pm F_1 h. \quad (50.1)$$

Demak, kuchning biror o'qqa nisbatan momenti deb, kuchning shu o'qqa perpendikular tekislikdagi proyeksiyasining o'q bilan tekislik kesishgan nuqtaga nisbatan hisoblangan momentiga aytilar ekan.

O'qqa nisbatan kuch momenti skalyar miqdordir. Agarda z o'qining musbat yo'nalishidan qaraganda, kuchning tekislikdagi proyeksiyasi jismni soat milining aylanishiga teskari yo'nalishda aylantirishga intilsa, u musbat ishoraga ega bo'ladi, aks holda o'qqa nisbatan kuch momenti manfiy ishoraga ega bo'ladi (50.1-a, b rasmlar).



50.1-a rasm



50.1-b rasm

Kuchning o'qqa nisbatan momenti quyidagi hollarda nolga teng bo'ladi:

- 1) $F_1 = 0$ bo'lsa, ya'ni kuch o'qqa parallel bo'lsa;
- 2) $h = 0$ bo'lsa, ya'ni kuchning ta'sir chizig'i o'qni kesib o'tsa — yelka nolga teng bo'lsa. 50.1-a, b rasmdan

$$M_z(\vec{F}) = 2S_{\Delta OA_1 B_1} \quad (50.2)$$

ekanligi ma'lum bo'ladi.

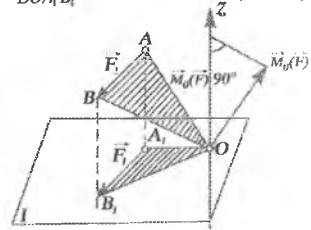
51-§. Kuchning o'qqa nisbatan momenti bilan shu o'qdagi nuqtaga nisbatan momenti orasidagi bog'lanish

Jismning A nuqtasiga qo'yilgan F kuchning biror Oz o'qqa va shu o'qda yotuvchi nuqtaga nisbatan momentlarini hisoblaymiz.

51.1-rasmdan:

$$M_0(\vec{F}) = 2S_{DOAB}, \quad M_z(\vec{F}) = 2S_{DO_1A_1B_1}. \quad (51.1)$$

OA_1B_1 va OAB uchburchaklar orasidagi burchak, ularning tekisliklariga o'tkazilgan perpendikular chiziqlar orasidagi burchakka teng ekanligini e'tiborga olsak,



51.1-rasm

$$M_z(\vec{F}) = 2S_{\Delta OAB} \cos \gamma = M_0(\vec{F}) \cos \gamma \quad (51.2)$$

yoki

$$M_z(\vec{F}) = [\vec{M}_0(\vec{F})]_z \quad (51.3)$$

ifodalarga ega bo'lamiz.

Demak, kuchning biror o'qqa nisbatan momenti uning shu o'qda olingan ixtiyoriy nuqtaga nisbatan momenti vektorining mazkur o'qdagi proyeksiyasiga teng bo'lar ekan. Agar, O nuqtadan x, y, z o'qlarini o'tkazsak, (51.3)ga ko'ra, \vec{F} kuchning bu o'qlarga nisbatan momentlari quyidagicha hisoblanadi:

$$\begin{cases} M_x(\vec{F}) = M_0(\vec{F}) \cos \alpha, \\ M_y(\vec{F}) = M_0(\vec{F}) \cos \beta, \\ M_z(\vec{F}) = M_0(\vec{F}) \cos \gamma. \end{cases} \quad (51.4)$$

Bu formulalarda α, β, γ lar $\vec{M}_0(\vec{F})$ vektorning koordinata o'qlari bilan tashkil etgan burchaklarini ifodalaydi.

(51.4) tengliklarni kvadratga oshirib, qo'shib,
 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$
 ekanligini e'tiborga olsak,

$$M_0(\vec{F}) = \sqrt{[M_x(\vec{F})]^2 + [M_y(\vec{F})]^2 + [M_z(\vec{F})]^2} \quad (51.5)$$

bo'ladi.

(51.5) formula yordamida \vec{F} kuchning koordinata o'qlariga nisbatan momentlarini bilgan holda, uning koordinata boshi O nuqtaga nisbatan momentining modulini aniqlash mumkin bo'ladi.

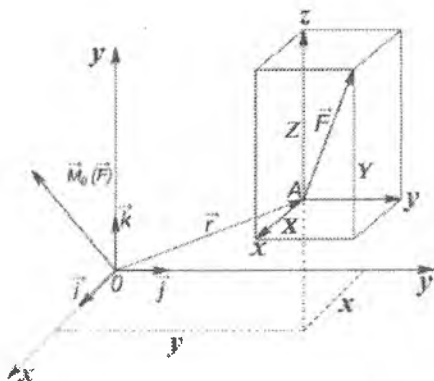
(51.5) dan \vec{F} kuchning nuqtaga nisbatan momentining yo'naltiruvchi kosinuslari uchun quyidagi ifodalarga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{M_x(\vec{F})}{M_0(\vec{F})}, \\ \cos\beta = \frac{M_y(\vec{F})}{M_0(\vec{F})}, \\ \cos\gamma = \frac{M_z(\vec{F})}{M_0(\vec{F})}. \end{cases} \quad (51.6)$$

52-§. Kuchning koordinata o'qlariga nisbatan momentlarini analitik usulda aniqlash

Jismning A nuqtasiga \vec{F} kuch qo'yilgan bo'lsin. Koordinatalar boshini O nuqtada olib, O_x , O_y , O_z o'qlarining birlik vektorlarini \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} lar orqali belgilaymiz (52.1-rasm). \vec{F} kuchning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini X , Y , Z orqali A nuqta radius vektori \vec{r} ning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini x , y , z bilan belgilasak,

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (52.1)$$



52.1-rasm

$\vec{M}_0(\vec{F})$ vektorining koordinata o'qlaridagi tashkil etuvchilari orqali ifodasi

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = M_x(\vec{F})\vec{i} + M_y(\vec{F})\vec{j} + M_z(\vec{F})\vec{k} \quad (52.2)$$

ko'rinishda bo'lib, koordinata o'qlari bilan tashkil qilgan burchaklari quyidagicha aniqlanadi:

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{M_x(\vec{F})}{M_0(\vec{F})}, \\ \cos\beta = \frac{M_y(\vec{F})}{M_0(\vec{F})}, \\ \cos\gamma = \frac{M_z(\vec{F})}{M_0(\vec{F})}. \end{cases} \quad (52.3)$$

(52.1)ni e'tiborga olsak, $\vec{M}_0(\vec{F})$ ning koordinata o'qlaridagi tashkil etuvchilarni quyidagida ifodalash mumkin:

$$M_x(\vec{F})\vec{i} + M_y(\vec{F})\vec{j} + M_z(\vec{F})\vec{k} = (yZ - zY)\vec{i} + (zX - xZ)\vec{j} + (xY - yX)\vec{k}. \quad (52.4)$$

(52.2) va (52.4)larda \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} lar oldidagi mos koeffitsiyentlarni tenglashtirsak, \vec{F} kuchning koordinata o'qlariga nisbatan momentlarining analitik ifodalari quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\begin{aligned}
 M_x(\vec{F}) &= (yZ - zY), \\
 M_y(\vec{F}) &= (zX - xZ), \\
 M_z(\vec{F}) &= (xY - yX).
 \end{aligned}
 \tag{52.5}$$

Agar kuchning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari va kuch qo'yilgan nuqtaning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari ma'lum bo'lsa, kuchning koordinata o'qlariga nisbatan momentlarini (52.5) formuladan aniqlash qulay bo'ladi.

53-§. Juft kuch momentining vektori

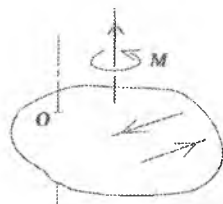
Juft kuchning jismga ta'siri:

- juft kuch momentining moduli;
- juft kuchning ta'sir tekisligi;
- juft kuchning shu tekislikda aylanish yo'nalishi bilan xarakterlanadi.

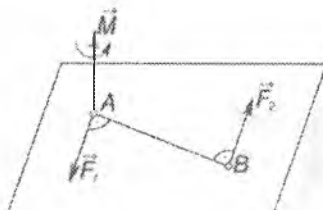
Fazoda joylashgan juft kuchlarning jismga ta'sirini aniqlash uchun mazkur uchta omilning har birini bilish zarur. Buning uchun juft kuch momentini vektor tarzda ifodalash kerak.

Juft kuch momentining vektori \vec{M} orqali belgilanadi.

Juft kuch momentining vektori \vec{M} kuchning ta'sir tekisligiga perpendikular holda yo'nalgan bo'lib, uning uchidan qaralganda, juft kuch jismni soat milining aylanishiga teskari yo'nalishda aylantirishga intiladi (53.1-a, b rasmlar).



53.1-a rasm



53.1-b rasm

Mazkur vektorning moduli juft kuchni tashkil etuvchi kuchlardan birining juft yelkasi uzunligiga ko'paytmasiga teng bo'ladi (53.1-a rasm):

$$\vec{M} = \vec{M}_B(\vec{F}_1) = \vec{M}_A(\vec{F}_2). \quad (53.1)$$

Agar juft kuchni tuzuvchi kuchlarning ixtiyoriy

O nuqtaga nisbatan radius vektorlarini \vec{r}_A va \vec{r}_B orqali belgilasak, juft kuch momentining vektori quyidagicha ifodalanishi mumkin (53.1-c rasm):

$$\vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F} \quad (53.2)$$

Juft kuchni o'zining ta'sir tekisligida yoki unga parallel tekislikda ixtiyoriy joyga ko'chirishdan, jismga ta'siri o'zgarmasligi ma'lum. Shuning uchun juft kuch momentining vektori jismning ixtiyoriy nuqtasiga qo'yilishi mumkin.

Binobarin, juft kuch momentining vektori erkin vektor hisoblanadi.

Agar, juft kuch momentining vektori ma'lum bo'lsa, juft kuchning jismga ta'sirini aniqlash mumkin:

- \vec{M} ga perpendikular o'tkazib, juft kuchning ta'sir tekisligi aniqlanadi;
- \vec{M} ning yo'nalishiga qarab, juft kuchning aylanish yo'nalishi belgilanadi;
- \vec{M} ning moduli juft kuch momentini ifodalaydi.

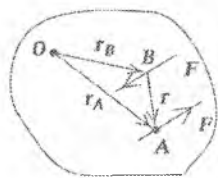
54-§. Juft kuchni parallel tekislikka ko'chirish haqida teorema

Teorema.

Berilgan juft kuch o'zining ta'sir tekisligiga parallel bo'lgan tekislikka ko'chirilsa, uning jismga ta'siri o'zgarmaydi.

Isboti. Jismga Π tekislikda yotuvchi yelkasi $d = AB$ bo'lgan (\vec{F}_1, \vec{F}_2) juft kuch ta'sir etsin (54.1-rasm).

Π tekislikka parallel bo'lgan Π_1 tekislikda $A_1B_1 \neq AB$ kesmani olib, uning A_1 va B_1 nuqtalariga, $(\vec{F}_3, \vec{F}_4) \Leftrightarrow 0$ va $(\vec{F}_5, \vec{F}_6) \Leftrightarrow 0$ kuchlar sistemasini joylashtiramiz.



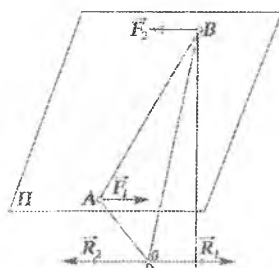
53.1-c rasm

Bunda kuchlar

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F_6 \quad (54.1)$$

holatda tanlab olinadi va nollik sistemani tashkil qiluvchi kuchlarning ta'sir chiziqlari \vec{F}_1 va \vec{F}_2 kuchlarning ta'sir chiziqlariga parallel holda yo'naltiriladi. U holda:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \Leftrightarrow (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5, \vec{F}_6) \quad (54.2)$$



bo'ladi. AB va A_1B_1 kesmalarga parallelogram qurib, AB_1 va A_1B diagonalalarini o'tkazamiz, ular O nuqtada kesishadi.

\vec{F}_1 va \vec{F}_5 parallel kuchlarni qo'shib, ularning O nuqtaga qo'yilgan R ga teng ta'sir etuvchisini aniqlaymiz:

$$R_1 = F_1 + F_5 = 2F_1. \quad (54.3)$$

Xuddi shunday holda, \vec{F}_2 va \vec{F}_4 parallel kuchlarni qo'shib, ularning ham O nuqtaga qo'yilgan R_2 teng ta'sir etuvchisini aniqlaymiz:

$$R_2 = F_2 + F_4 = 2F_2 = 2F_1. \quad (54.4)$$

54.1-rasm

Hosil bo'lgan \vec{R}_1 va \vec{R}_2 kuchlardan iborat sistema miqdor jihatdan teng va bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonlarga yo'nalgan bo'lganligi uchun:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_4, \vec{F}_5) \Leftrightarrow (\vec{R}_1, \vec{R}_2) \Leftrightarrow 0. \quad (54.5)$$

Binobarin,

$$(\vec{F}_3, \vec{F}_6) \infty (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5, \vec{F}_6) \quad (54.6)$$

(54.2) va (54.6) munosabatlarni solishtirsak,

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \Leftrightarrow (\vec{F}_3, \vec{F}_6) \quad (54.7)$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Shunday qilib, juft kuch o'zining ta'sir tekisligiga parallel tekislikka ko'chirilsa, uning jismga ta'siri o'zgarmas ekan.

Yuqorida isbotlangan teoremadan quyidagi natijalar kelib chiqadi:

1. Juft kuch momentini o'zgartirmay, o'z ta'sir tekisligi bo'ylab ixtiyoriy joyga ko'chirilsa, uning jismga ta'siri o'zgarmaydi.

2. Juft kuch momentini o'zgartirmay, uni tashkil etuvchi kuchlarning miqdori va juft yelkasi o'zgartirilsa, juft kuchning jismga ta'siri o'zgarmaydi.

3. Bir tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotuvchi momentlarining kattaligi va ishorasi bir xil bo'lgan ikki juft kuch o'zaro ekvivalent bo'ladi.

Shunday qilib, bir tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotuvchi, momentlarning kattaligi va ishorasi bir xil bo'lgan ikki juft o'zaro ekvivalent bo'lar ekan.

55-§. Fazodagi juft kuchlarni qo'shish va juft kuchlarning muvozanat sharti

Teorema. Kesishuvchi tekisliklarda yotuvchi ikkita juft kuch momenti berilgan juftlar momentlarining geometrik yig'indisiga teng bo'lgan bitta juftga ekvivalentdir.

Isbot. Kesishuvchi Π_1 va Π_2 tekisliklarining kesishgan chizig'ida $AB = d$ kesmani olib, berilgan juft kuchlarni o'z tekisligida umumiy d yelkaga keltiramiz. Natijada, Π_1 tekislikda mometning moduli M_1 bo'lgan (\vec{F}_1, \vec{F}_2) va Π_2 tekislikda mometning moduli M_2 bo'lgan (\vec{F}_3, \vec{F}_4) juft kuchlarga ega bo'lamiz. A nuqtaga qo'yilgan \vec{F}_1, \vec{F}_3 va B nuqtaga qo'yilgan \vec{F}_2, \vec{F}_4 kuchlarni geometrik qo'shib, ularning teng ta'sir etuvchilari \vec{R}_1 va \vec{R}_2 larni aniqlaymiz (55.1-rasm):

$$\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_3, \quad \vec{R}_2 = \vec{F}_2 + \vec{F}_4.$$

Natijada, $(\vec{F}_1, \vec{F}_2), (\vec{F}_3, \vec{F}_4)$ juft kuchlar o'rniga, ularga ekvivalent bo'lgan (\vec{R}_1, \vec{R}_2) juft kuchga ega bo'lamiz. Bu juft kuch momentining vektori \vec{M} quyidagicha aniqlanadi:

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{M}_A(\vec{R}_2) = \vec{AB} \times (\vec{F}_2 + \vec{F}_4) = \vec{AB} \times \vec{F}_2 + \vec{AB} \times \vec{F}_4 = \\ &= \vec{M}_A(\vec{F}_2) + \vec{M}_A(\vec{F}_4) = \vec{M}_1 + \vec{M}_2.\end{aligned}$$



55.1-rasm

Shunday qilib,

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2.$$

Bunda, \vec{M}_1 , \vec{M}_2 vektorlariga qurilgan parallelogramning B nuqtasidan o'tuvchi diagonali miqdor va yo'nalish jihatdan (\vec{F}_1, \vec{F}_2) , va (\vec{F}_3, \vec{F}_4) juft kuchlarni qo'shish natijasida olingan (\vec{R}_1, \vec{R}_2) juft kuchning momentini ifodalaydi.

\vec{M}_1 , \vec{M}_2 vektorlariga qurilgan parallelogram momentlar parallelogrammi deyiladi. Momentlar parallelogramning diagonali (\vec{R}_1, \vec{R}_2) teng ta'sir etuvchi juft kuch tekisligiga perpendikular yo'naladi, uning moduli

$$M = R \cdot d$$

ga teng bo'ladi.

Isbotlangan teoremaga asosanib, fazoda parallel bo'lmagan tekisliklarda yotuvchi, momentlarining vektorlari $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_n$ bo'lgan juft kuchlarni ketma-ket qo'shib, bitta teng ta'sir etuvchi juft kuchga ega bo'lamiz. Bu juft kuchning momenti berilgan juft kuchlar momentlarining geometrik yig'indisiga teng bo'ladi:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \sum \vec{M}_i. \quad (1)$$

Teng ta'sir etuvchi juft kuchning momenti berilgan juftlar momentlarning vektorlariga qurilgan ko'pburchakning yopuvchi tomoni

orqali ifodalanadi. Agar juft kuchlar parallel tekisliklarda yotsa, juft kuchni parallel tekislikka ko'chirish haqidagi teorema asosan, ularni bitta tekislikka ko'chirish mumkin. Hosil bo'lgan juft kuchlar sistemasi, momenti berilgan juft kuchlar momentlarining algebraik yig'indisiga teng bo'lgan, bitta juft kuchga ekvivalent bo'ladi.

Fazodagi juft kuchlar sistemasi momentining vektori

$$\vec{M} = \sum \vec{M}_i$$

bo'lganligi uchun,

$$\vec{M} = \sum \vec{M}_i = 0$$

shart bajarilganda, juft kuchlar sistemasi muvozanatda bo'ladi.

Binobarin, fazodagi juft kuchlar momentlari vektorlarining geometrik yig'indisi nolga teng bo'lsa, juft kuchlar sistemasi muvozanatda bo'ladi. Bu shart fazodagi juft kuchlar sistemasi muvozanatning geometrik shartini ifodalaydi.

Agar,

$$M = \sqrt{(\sum M_{ix})^2 + (\sum M_{iy})^2 + (\sum M_{iz})^2}$$

ekanligini e'tiborga olsak, juft kuchlar sistemasi muvozanatning analitik shartlari quyidagicha yoziladi:

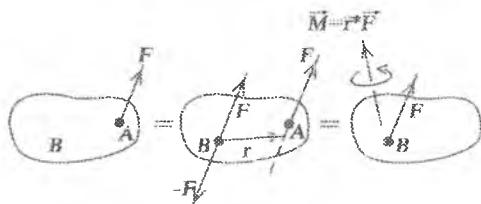
$$\sum M_{ix} = 0; \sum M_{iy} = 0; \sum M_{iz} = 0.$$

Shunday qilib, jismga ta'sir etuvchi juft kuchlar momentlari vektorlarining har bir koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarining yig'indisi alohida-alohida nolga teng bo'lsa, bunday juft kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lar ekan. Bu shart juft kuchlar muvozanatning analitik shartini ifodalaydi.

56-§. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bir markazga keltirish

Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bir nuqtaga keltirish uchun kuchning jismga ta'sirini o'zgartirmay, uni o'ziga parallel ravishda bir nuqtadan ikkinchi nuqtaga ko'chirish haqidagi Puanso lemmasidan foydalanishimiz zarur.

Lemma. Jismning biror A nuqtasiga qo'yilgan \vec{F} kuch jismda olingan ixtiyoriy keltirish markazi B nuqtaga qo'yilgan xuddi shunday kuchga va momenti berilgan kuchning keltirish markaziga nisbatan momentiga teng juft kuchga ekvivalent bo'ladi (56.1-a rasm).



56.1-a rasm

Jismning A_1, A_2, \dots, A_n nuqtalariga qo'yilgan fazoda ixtiyoriy joylashgan $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlarni L. Puanso usulidan foydalanib, ixtiyoriy tanlab olingan keltirish markazi O nuqtaga keltiramiz (56.1-b rasm).

Keltirish natijasida, O nuqtaga qo'yilgan

$$\vec{F}_1'' = \vec{F}_1, \vec{F}_2'' = \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n'' = \vec{F}_n \quad (56.1)$$

kuchlarga va momentlarining vektorlari

$$\vec{M}_1 = \vec{M}_0(\vec{F}_1), \vec{M}_2 = \vec{M}_0(\vec{F}_2), \dots, \vec{M}_n = \vec{M}_0(\vec{F}_n) \quad (56.2)$$

bo'lgan qo'shilgan juft kuchlarga ega bo'lamiz.

$\vec{M}_0(\vec{F}_1), \vec{M}_0(\vec{F}_2), \dots, \vec{M}_0(\vec{F}_n)$ vektorlar mos ravishda

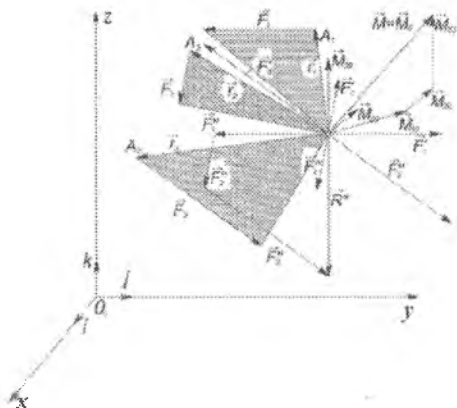
$(\vec{F}_1 \vec{F}_1'), (\vec{F}_2 \vec{F}_2'), \dots, (\vec{F}_n \vec{F}_n')$ qo'shilgan juftlar tekisliklariga perpendikular holda shunday yo'naladiki, ularning uchidan qaraganda, qo'shilgan juft kuchlar jismni soat milining aylanish yo'nalishiga teskari yo'nalishda aylantirishga intiladi.

Qo'shilgan juft kuchlar momentlarining vektorlari ham keltirish markazi O nuqtaga qo'yiladi.

O markazga qo'yilgan $\vec{F}_1'', \vec{F}_2'', \dots, \vec{F}_n''$ kuchlarni geometrik qo'shib, bitta \vec{R}^* kuchga ega bo'lamiz: $\vec{R}^* = \sum \vec{F}_i''$

yoki:

$$\vec{R}^* = \sum \vec{F}_i.$$



56.1-b rasm

\vec{R}^* kuch fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining bosh vektori deyiladi va u mazkur kuchlarning geometrik yig'indisiga teng bo'ladi.

Momentlarining vektorlari

$$\vec{M}_1 = \vec{M}_O(\vec{F}_1), \vec{M}_2 = \vec{M}_O(\vec{F}_2), \dots, \vec{M}_n = \vec{M}_O(\vec{F}_n) \quad (59.3)$$

bo'lgan fazoviy qo'shilgan juft kuchlarni qo'shib, momenti

$\vec{M}_1 = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i)$ ga teng bo'lgan bitta juft kuchga ega bo'lamiz. Bu juft kuchning momenti mazkur juft kuchlar momentlarining geometrik yig'indisiga teng bo'ladi:

$$\vec{M}_1 = \vec{M}_O = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i). \quad (59.4)$$

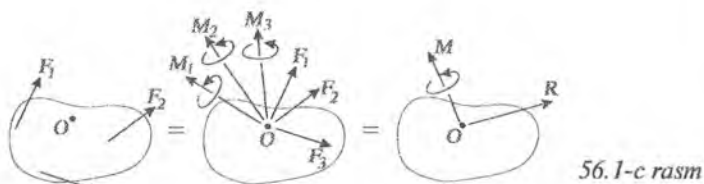
\vec{M}_O kuchlar sistemasining keltirish markazi O nuqtaga nisbatan bosh momenti deyiladi. Binobarin, fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining biror markazga nisbatan bosh momenti tashkil etuvchi kuchlarning shu markazga nisbatan momentlarining geometrik yig'indisiga teng bo'lar ekan.

Shunday qilib, fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini biror O markazga keltirish natijasida, mazkur kuchlar sistemi, keltirish markaziga qo'yilgan kuchlar sistemasining bosh vektori

\vec{R}^* ga teng bo'lgan bitta kuch va momenti kuchlar sistemasining keltirish markaziga nisbatan bosh momenti \vec{M}_O ga teng bo'lgan

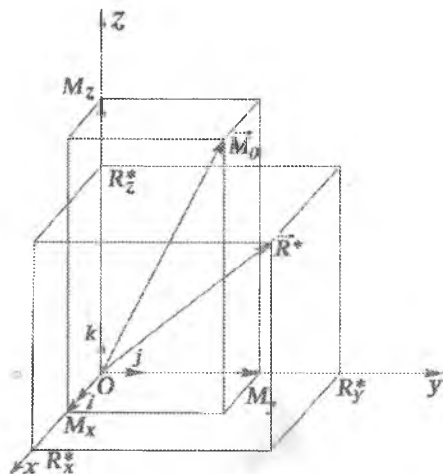
bitta juftga ekvivalent bo'lar ekan. Bunda, bosh vektorning moduli va yo'nalishi keltirish markazining tanlanishiga bog'liq bo'lmaydi, lekin bosh moment moduli va yo'nalishi keltirish markazining tanlanishiga bog'liq bo'ladi. Ko'rib o'tilgan usul bilan kuchlar sistemasini bir markazga keltirish, kuchlar sistemasini sodda holga keltirish deyiladi.

Yuqorida bayon etilgan mulohazalarni sodda ko'rinishda 56.1-c rasmda ko'rsatish mumkin.



57-§. Fazodagi kuchlar sistemasining bosh vektori va bosh momentini analitik usulda aniqlash

Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi bosh vektori va bosh momentining miqdor va yo'nalishini analitik usulda aniqlash uchun koordinatalar boshini keltirish markazi O nuqtada olamiz (57.1-rasm). \vec{F}_i kuchning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari-



57.1-rasm

ni X_i, Y_i, Z_i orqali belgilasak, fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining bosh vektori \vec{R}^* ning Ox, Oy, Oz o'qlardagi proyeksiyalari uchun quyidagi ifodalarga ega bo'lamiz:

$$R_x^* = \sum X_i, R_y^* = \sum Y_i, R_z^* = \sum Z_i. \quad (57.1)$$

Bular orqali bosh vektorning moduli va koordinata o'qlari bilan hosil qilgan burchaklar kosinuslarini quyidagi formulalar asosida aniqlanadi:

$$R^* = \sqrt{\sum X_i^2 + \sum Y_i^2 + \sum Z_i^2}, \quad (57.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(\vec{R}^* \wedge \vec{x}) &= \frac{R_x^*}{R}, \\ \cos(\vec{R}^* \wedge \vec{y}) &= \frac{R_y^*}{R}, \\ \cos(\vec{R}^* \wedge \vec{z}) &= \frac{R_z^*}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (57.3)$$

Bosh moment \vec{M}_O ning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini M_x, M_y, M_z bilan belgilasak, vektorlar yig'indisining o'qdagi proyeksiyasi haqidagi teorema asosan:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \sum (\vec{r} \times \vec{F})_x \text{ yoki } M_x = \sum M_x(\vec{F}_i), \\ M_y &= \sum (\vec{r} \times \vec{F})_y \text{ yoki } M_y = \sum M_y(\vec{F}_i), \\ M_z &= \sum (\vec{r} \times \vec{F})_z \text{ yoki } M_z = \sum M_z(\vec{F}_i). \end{aligned} \right\} \quad (57.4)$$

Bular orqali, bosh momentning miqdori va yo'nalishi quyidagi formulalar asosida aniqlanadi:

$$M_O = \sqrt{\left[\sum M_x(\vec{F}_i)\right]^2 + \left[\sum M_y(\vec{F}_i)\right]^2 + \left[\sum M_z(\vec{F}_i)\right]^2}, \quad (57.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(\vec{M}_O \wedge \vec{x}) &= \frac{M_x}{M_O}, \\ \cos(\vec{M}_O \wedge \vec{y}) &= \frac{M_y}{M_O}, \\ \cos(\vec{M}_O \wedge \vec{z}) &= \frac{M_z}{M_O}. \end{aligned} \right\} \quad (57.6)$$

Bosh moment \vec{M}_O ning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini quyidagicha aniqlash ham mumkin:

$$\begin{aligned} M_x &= \sum (y_i Z_i - z_i Y_i), \quad M_y = \sum (z_i X_i - x_i Z_i), \\ M_z &= \sum (x_i Y_i - y_i X_i). \end{aligned} \quad (57.7)$$

58-§. Fazodagi kuchlar sistemasini juft kuch yoki teng ta'sir etuvchi kuchga keltirish

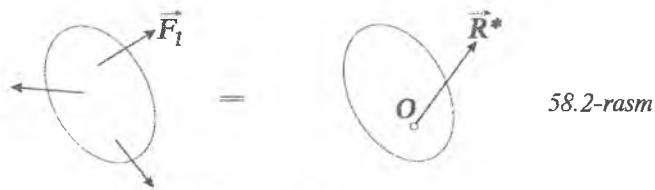
Fazoda ixtiyoriy joylashgan $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlar sistemasini bir markazga keltirishda, bu kuchlar sistemi, bosh vektor \vec{R}^* ga teng bitta kuch bilan momenti bosh moment \vec{M}_O ga teng bo'lgan bitta juftga ekvivalent bo'lishi yuqorida ko'rib o'tildi. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemi muvozanatda bo'lmasa, ularni qanday sodda holga keltirish mumkinligini aniqlaylik. Natija kuchlar sistemasining bosh vektori \vec{R}^* va bosh momenti \vec{M}_O larning qiymatlariga bog'liq bo'ladi.

1. Agar, berilgan fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemi uchun $\vec{R}^* = 0$, lekin $\vec{M}_O \neq 0$ bo'lsa, bunday kuchlar sistemi momenti kuchlar sistemasining bosh momentiga teng bo'lgan teng ta'sir etuvchi juftga keltiriladi. Bunday holda, \vec{M}_O ning qiymati moment markazining tanlanishiga bog'liq bo'lmaydi va u jismning ixtiyoriy nuqtasiga qo'yilishi mumkin ($\vec{M}_A = \vec{M}_O$) (58.1-rasm).



58.1-rasm

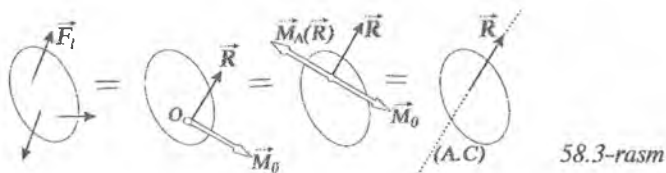
2. Agar, berilgan fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi uchun $\vec{R}^* \neq 0$, lekin $\vec{M}_O = 0$ bo'lsa, bunday kuchlar sistemasi berilgan kuchlarning bosh vektoriga teng va keltirish markaziga qo'yilgan bitta kuchga, ya'ni teng ta'sir etuvchi \vec{R}^* ga keltiriladi: (58.2-rasm)



58.2-rasm

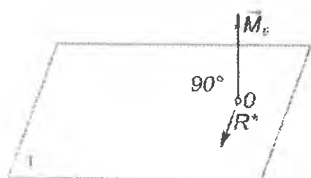
$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \Leftrightarrow \vec{R}^*. \quad (58.1)$$

3. Agar, berilgan fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi uchun $\vec{R}^* \neq 0$, $\vec{M}_O = 0$ hamda \vec{R}^* bosh vektor \vec{M}_O bosh momentga perpendikular yo'nalgan bo'lsa, bunday kuchlar sistemasi bosh vektor \vec{R}^* ga parallel yo'nalgan va keltirish markazi O nuqtadan $OA = d = \frac{M_0}{R^*}$ masofa uzoqlikda joylashgan (\vec{M}_O yo'nalishiga mos ravishda) A nuqtaga qo'yilgan teng ta'sir etuvchi \vec{R}^* kuchga keltiriladi (58.3-rasm).

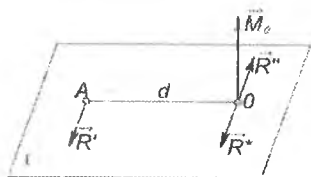


58.3-rasm

Bunday holni isbotlash uchun bosh vektor \vec{R}^* orqali bosh momentga perpendikular I tekislikni o'tkazamiz (58.4-rasm).



58.4-rasm



58.5-rasm

Bu tekislikda momenti bosh moment \vec{M}_O ga teng bo'lgan juft kuchni joylashtiramiz. Uning aylanish yo'nalishini \vec{M}_O vektorga moslab, tashkil etuvchilarini:

$$|\vec{R}'| = |\vec{R}''| = |\vec{R}^*|$$

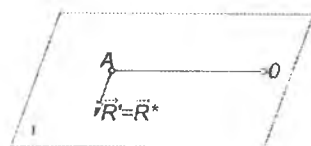
holda tanlaymiz. Juft kuchni tashkil etuvchilaridan biri \vec{R}'' ni keltirish markazi O nuqtaga, \vec{R}^* yo'nalishiga qarama-qarshi holda qo'yamiz (58.5-rasm).

($\vec{R}'\vec{R}''$) juftning momenti

$$M_O = R'd = R^* \cdot d, \quad (58.2)$$

shuning uchun uning yelkasi: $d = \frac{M_O}{R^*}$.

(58.3)



58.6-rasm

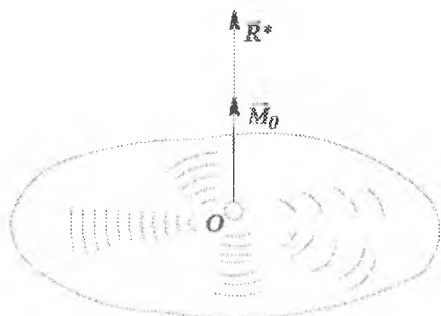
Bunda, O nuqtaga qo'yilgan \vec{R}^* va \vec{R}'' kuchlar muvozanatlashgan kuchlar sistemasini tashkil etadi. Shu sababli, berilgan

kuchlar sistemasi O nuqtadan $d = \frac{M_O}{R^*}$ masofa uzoqlikda yotuvchi A nuqtaga

qo'yilgan birgina $\vec{R}' = \vec{R}^*$ kuchga ekvivalent bo'ladi (58.6-rasm).

59-§. Fazodagi kuchlar sistemasini dinamik vintga keltirish

Fazodagi ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi uchun $\vec{R}^* \neq 0$, $\vec{M}_O \neq 0$ bo'lib, bosh vektor \vec{R} bilan bosh moment \vec{M}_O bir chiziq bo'ylab ($\alpha = 0^\circ$) yo'nalgan bo'lsin (59.1-rasm). Bunday holda fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi dinamik vintga



59.1-a rasm

keltiriladi. Bosh momentning bosh vektorga nisbati *vint parametri* deyiladi.

Vint parametri p bilan belgilanadi:

$$p = \frac{M_0}{R^*}.$$

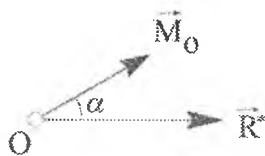
\vec{R}^* bilan \vec{M}_0 yoʻnalgan chiziq *vint oʻqi* deyiladi.

Berilgan kuchlar sistemasi O markazga keltirish natijasida \vec{R}^* bosh vektor bilan \vec{M}_0 bosh moment orasidagi burchak $\alpha \neq 90^\circ$ boʻladigan holni tekshiramiz. Aniqlik uchun α burchakni oʻtkir deb olamiz (59.2-a rasm). Bu holda \vec{M}_0 bosh momentni \vec{R}^* bosh vektor boʻylab yoʻnalgan \vec{M}_1 va unga perpendikular yoʻnalgan \vec{M}_2 tashkil etuvchilarga ajratamiz. (59.2-b rasm).

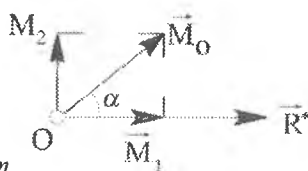
U holda

$$M_1 = M_0 \cos \alpha = \frac{RM_0 \cos \alpha}{R} = \frac{(\vec{R}^* \cdot \vec{M}_0)}{R},$$

$$M_2 = M_0 \sin \alpha. \quad (59.1)$$

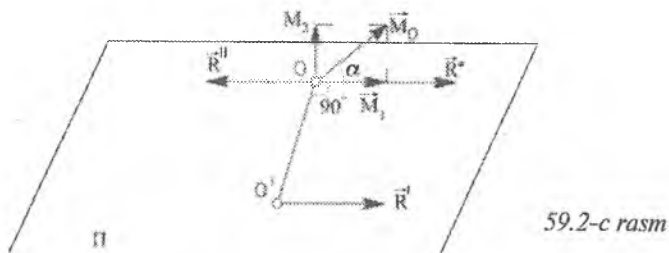


59.2-a rasm



59.2-b rasm

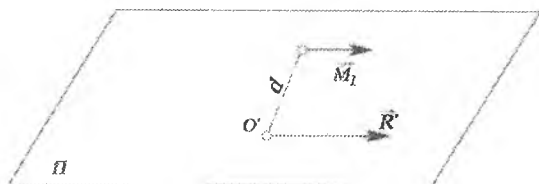
Momenti \vec{M}_2 ga teng juft kuchni O nuqtaga qo'yilgan \vec{R}^* kuch ($\vec{M}_2 \perp \vec{R}^*$) va O nuqtadan \vec{M}_2 ga perpendikular o'tkazilgan Π tekislikda (59.2-c rasm). O nuqtadan



59.2-c rasm

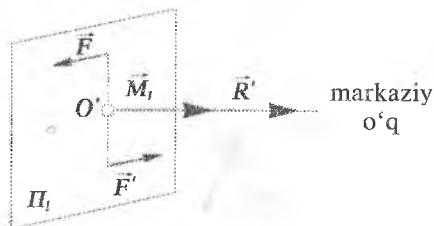
$$OO'' = \frac{M_2}{R^*} = \frac{M_0 \sin \alpha}{R^*} = d \quad (59.2)$$

masofa uzoqlikda yotuvchi O nuqtaga qo'yilgan $\vec{R}^* = \vec{R}'$ kuch bilan almashtirish mumkin (59.2-d rasm).



59.2-d rasm

\vec{M}_1 moment vektori erkin bo'lgani uchun uni o'ziga parallel ravishda O' nuqtaga keltiramiz (59.2-d rasm).



61.2-d rasm

Natijada, berilgan kuchlar sistemasi O nuqtaga qo'yilgan $\vec{R}^* = \vec{R}'$ kuchga va shu kuch bo'ylab yo'nalgan momenti \vec{M}_1 bo'lgan (\vec{F}, \vec{F}') juft kuchga keltiriladi. (\vec{F}, \vec{F}') juft kuch \vec{M}_1 vektorga perpendikular Π_1 tekislikda yotadi.

Shunday qilib, kuchlar sistemasi O keltirish markazidan $OO' = d$ masofadagi O' nuqtada parametri $p = \frac{M_1}{R^*} = \frac{M_0 \cos a}{R^*}$ bo'lgan dinamik vintga keltiriladi.

60-§. Markaziy o'q tenglamasi

Fazoda shunday O' nuqtani tanlab olaylikki, berilgan kuchlar sistemasi shu nuqtada dinamik vintni tashkil etsin, ya'ni \vec{R}^* bosh vektor bilan \vec{M}_{0*} bosh moment bir to'g'ri chiziq bo'ylab yo'nalsin.

U holda \vec{R}^* bilan \vec{M}_{0*} yo'nalgan chiziq *dinamik vint o'qi yoki markaziy o'q* deyiladi. Markaziy o'q tenglamasi aniqlash uchun $\vec{M}_0 \parallel \vec{R}^*$ shartdan foydalanamiz, ya'ni

$$p = \frac{\vec{M}_0 \cdot \vec{R}^*}{(R^*)^2} \quad (60.1)$$

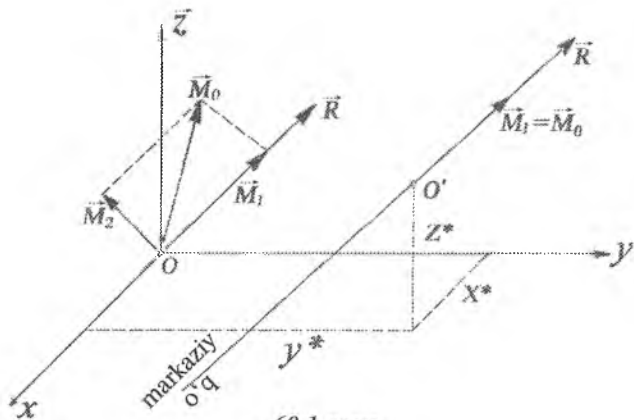
Bunda p o'zgarmas miqdor bo'lib, vint parametridir:

$$p = \frac{\vec{M}_0 - \overline{OO'} \times \vec{R}^*}{R^*} \quad (60.2)$$

Bu tenglama *vektor ko'rinishidagi markaziy o'q tenglamasidir*.

Markaziy o'qning analitik tenglamasini yozish uchun ixtiyoriy O nuqtadan x, y, z koordinata o'qlarini o'tkazamiz (60.1-rasm).

Markaziy o'qning analitik tenglamasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:



60.1-rasm

$$\frac{M_x - (y^* R_z^* - z^* R_y^*)}{R_x^*} = \frac{M_y - (z^* R_x^* - x^* R_z^*)}{R_y^*} = \frac{M_z - (x^* R_y^* - y^* R_x^*)}{R_z^*} = p \quad (60.3)$$

Bunda M_x, M_y, M_z lar \vec{M}_0 bosh momentining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalaridir.

61-§. Fazodagi kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisining momenti haqida Varinyon teoremasi

Agar fazodagi kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchi kuchga keltirilsa, bu teng ta'sir etuvchi kuchning ixtiyoriy nuqtaga nisbatan momenti, barcha kuchlarning mazkur nuqtaga nisbatan momentlarining geometrik yig'indisiga teng bo'ladi.

Faraz qilaylik, fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi ta'sir chizig'i A nuqtadan o'tadigan, \vec{R}' teng ta'sir etuvchiga keltirilgan bo'lsin. Teng ta'sir etuvchining ixtiyoriy O nuqtaga nisbatan momentini hisoblaymiz. Buning uchun \vec{R}' kuch va O nuqtadan o'tuvchi l tekislikni o'tkazib (61.1-a rasm), \vec{R}' kuchni Puanso lemmasiga asosan O nuqtaga keltiramiz. Keltirish natijasida O nuqtada $\vec{R}' = \vec{R}''$ kuchga va momenti \vec{R}' kuchning O nuqtaga nisbatan momenti

$\vec{M}_O = \vec{M}_O(\vec{R}')$ ga teng bo'lgan (\vec{R}' , \vec{R}'') juftga ega bo'lamiz (61.1-b rasm).

(\vec{R}' , \vec{R}'') juft kuchning momenti bosh moment \vec{M}_O ga teng bo'ladi:

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O(\vec{R}') = \vec{M}_O(\vec{R}''). \quad (61.1)$$

Lekin, $\vec{R}^* = \vec{R}' = \sum \vec{F}_i$ tenglikni e'tiborga olsak,

$$\vec{M}_O = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i). \quad (61.2)$$

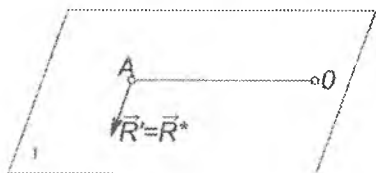
Shuning uchun:

$$\vec{M}_O(\vec{R}') = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i). \quad (61.3)$$

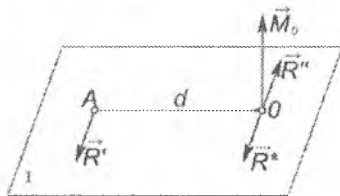
Demak, fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisining shu tekislikdagi biror nuqtaga nisbatan momenti barcha kuchlarning mazkur nuqtaga nisbatan momentlarining geometrik yig'indisiga teng bo'lar ekan.

(61.2) tenglikni O nuqtadan o'tuvchi biror Oz o'qqa proyeksiyalasak:

$$[\vec{M}_O(\vec{R}')]_z = \sum [\vec{M}_O(\vec{F}_i)]_z. \quad (61.4)$$



61.1-a rasm



61.1-b rasm

Bunday holda, quyidagi

$$M_z(\vec{F}) = [\vec{M}_O(\vec{F})]_z$$

tenglikka asosan quyidagicha yoziladi:

$$M_z(\vec{R}^*) = \sum M_z(\vec{F}_i). \quad (61.5)$$

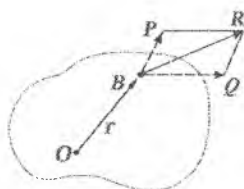
Demak, teng ta'sir etuvchining biror o'qqa nisbatan momenti barcha kuchlarning mazkur o'qqa nisbatan momentlarining algebraik yig'indisiga teng bo'lar ekan.

Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisining momenti haqida Varinyon teoremasini quyidagicha izohlash ham mumkin.

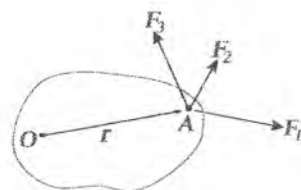
Bir tekislikda joylashgan kuchlar sistemasi uchun Varinyon teoremasi quyidagicha yoziladi:

$$\vec{M}_0 = \vec{r} * \vec{R} = (\vec{r} * \vec{P}) + (\vec{r} * \vec{Q}) = \vec{r} * (\vec{P} + \vec{Q}). \quad (61.6)$$

Fazoda joylashgan kuchlar sistemasi uchun esa Varinyon teoremasi quyidagicha yoziladi:



61.2-rasm



61.3-rasm

$$\begin{aligned} \vec{M}_0 = \vec{r} * \vec{R} &= (\vec{r} * \vec{F}_1) + (\vec{r} * \vec{F}_2) + (\vec{r} * \vec{F}_3) + \dots = \\ &= \vec{r} * (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots) = \vec{r} * \sum \vec{F}_i \end{aligned}$$

Demak,

$$\vec{M}_0 = \vec{r} * \sum \vec{F}_i (\vec{r} * R). \quad (61.7)$$

62-§. Fazodagi kuchlar sistemasining muvozanat shartlari

Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun kuchlar sistemasining bosh vektori va ixtiyoriy olingan keltirish markaziga nisbatan bosh momenti bir vaqtda nolga teng bo'lishi zarur va yetarli:

$$\vec{R}^* = 0, \quad \vec{M}_0 = \sum \vec{M}_0(\vec{F}_i) = 0. \quad (62.1)$$

(62.1) tengliklar fazodagi kuchlar sistemasi muvozanatining geometrik shartlarini ifodalaydi.

Bu shartlarning zarurligi shundaki, agar \vec{R}^* va \vec{M}_O noldan farqli bo'lsa, bunday kuchlar sistemasi muvozanatda bo'la olmaydi, chunki juft kuch bitta kuch bilan muvozanatlashmaydi. Agar, $\vec{R}^* = 0$, $\vec{M}_O \neq 0$ bo'lsa, kuchlar sistemasi bitta juft kuchga, $\vec{R}^* \neq 0$, $\vec{M}_O = 0$ bo'lgan holda esa kuchlar sistemasi keltirish markaziga qo'yilgan bitta teng ta'sir etuvchi kuchga ekvivalent bo'ladi. O'rganilgan har ikkala holda ham kuchlar sistemasi muvozanatda bo'la olmaydi. Shuning uchun fazoviy kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun $\vec{R}^* = 0$, $\vec{M}_O = 0$ bo'lishi zaruriy shart hisoblanadi.

Shartlar fazoviy kuchlar sistemasi muvozanatining yetarli shartini ham ifodalaydi. Chunki, bu shartlar bajarilsa, keltirish markaziga ko'chirilgan barcha kuchlar va qo'shilgan juft kuchlar sistemasi muvozanatda bo'ladi.

Agar fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining bosh vektori va bosh momentining analitik ifodalari

$$R^* = \sqrt{(\sum X_i)^2 + (\sum Y_i)^2 + (\sum Z_i)^2} \cos(\vec{R} \wedge \vec{x}) = \frac{R_x^*}{R} \cos(\vec{R} \wedge \vec{y}) = \frac{R_y^*}{R},$$

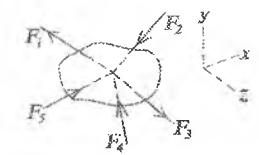
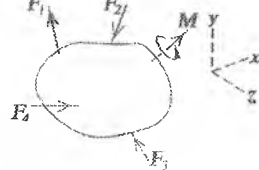

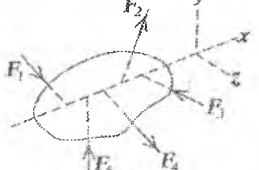
$\cos(\vec{R} \wedge \vec{z}) = \frac{R_z^*}{R}$ larni e'tiborga olsak, fazodagi kuchlar sistemasi muvozanatining analitik shartlarini ifodalovchi quyidagi tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum Z_i = 0,$$

$$\sum M_x(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum M_y(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum M_z(\vec{F}_i) = 0. \quad (62.2)$$

Demak, fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun barcha kuchlarning uchta koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarining va koordinata o'qlarining har biriga nisbatan momentlarining algebraik yig'indilari alohida-alohida nolga teng bo'lishi zarur va yetarli ekan.

Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi muvozanatining quyidagi xususiy hollarini ham ko'rib chiqamiz:

Kuchlar sistemasi	Ta'sir etuvchi kuchlar sistemasining ko'riinishi	Muvozanat tenglamalari
1. Bir nuqtaga qo'yilgan kuchlar sistemasi		$\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$ $\sum F_z = 0$
1. Chiziqqa qo'yilgan kuchlar sistemasi		$\sum F_x = 0 \quad \sum M_y = 0$ $\sum F_y = 0 \quad \sum M_z = 0$ $\sum F_z = 0$
2. Parallel kuchlar sistemasi		$\sum F_x = 0 \quad \sum M_y = 0$ $\sum M_z = 0$
3. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi		$\sum F_x = 0 \quad \sum M_x = 0$ $\sum F_y = 0 \quad \sum M_y = 0$ $\sum F_z = 0 \quad \sum M_z = 0$

63-§. Fazoda bir nuqtada kesishadigan kuchlar sistemasining muvozanatiga doir masalalarni yechish uchun uslubiy ko'rsatmalar

Fazoda bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi kuchlarning ta'sir chiziqlari kesishadigan nuqtaga qo'yiladi va kuchlardan qurilgan fazoviy ko'pburchakning yopuvchi tomoni orqali ifodalaniladi:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_k.$$

Teng ta'sir etuvchi kuchning o'qlardagi proyeksiyalari qo'shiluvchi kuchlarning mazkur o'qdagi proyeksiyalarining algebraviy yig'indisiga teng bo'ladi:

$$\vec{R}_x = \sum \vec{F}_{k_x},$$

$$\vec{R}_y = \sum \vec{F}_{k_y},$$

$$\vec{R}_z = \sum \vec{F}_{k_z}.$$

Fazoda bir nuqtada kesuvchi kuchlar teng ta'sir etuvchisining miqdori va yo'nalishi quyidagi formulalar asosida aniqlanadi:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2},$$

$$\cos(\vec{R} \wedge \vec{i}) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(\vec{R} \wedge \vec{j}) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(\vec{R} \wedge \vec{k}) = \frac{R_z}{R}.$$

Fazoda bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun ulardan ko'rilgan kuchlar ko'pburchagi yopiq bo'lishi lozim. Fazoda bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanat tenglamalari quyidagi kuchlarda bo'ladi:

$$\sum F_{k_x} = 0, \quad \sum F_{k_y} = 0, \quad \sum F_{k_z} = 0.$$

Fazoda bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanatiga doir masalalar statik aniqlangan bo'lishi uchun masalasidagi noma'lum kattaliklar (kuchlar) soni muvozanat tenglamalari sonidan oshmasligi lozim.

Fazoda bir nuqtada kesishadigan kuchlar sistemasining muvozanatiga doir masalalar quyidagi tartibda yechiladi:

1. Muvozanati o'rganilayotgan jismga qo'yilgan kuchlarining ta'sir chiziqlari kesishadigan nuqtasi aniqlab olinadi.

2. Qo'yilgan tashqi kuchlar ko'rsatiladi.

3. Jismga bog'lanishlar qo'shilgan bo'lsa, ularning jismga ta'siri bog'lanishlar reaksiya kuchlari bilan almashtiriladi.

4. Jismning qo'shilgan tashqi kuchlar va bog'lanishlar reaksiya kuchlari ta'siridagi muvozanati o'rnatiladi.

5. Masala statik aniqlangan ekanligi tekshiriladi.

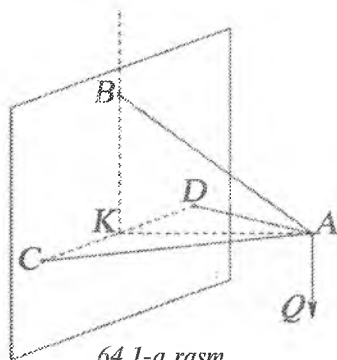
6. Koordinata o'qlari o'tkaziladi.

7. Jismning ta'sir etuvchi kuchlarining muvozanat tenglamalari tuziladi.

8. Tuzilgan muvozanat tenglamalaridan, noma'lum kattaliklar (kuchlar) aniqlanadi.

64-§. Fazoda bir nuqtada kesishadigan kuchlar sistemasining muvozanatiga doir masalalar

1-masala. Og'irligi 180 N bo'lgan Q yukni ushlab turuvchi AB trosdagi hamda AC va AD sterjenlardagi zo'riqishlar aniqlansin; $AB=170\text{ sm}$, $AC=AD=100\text{ sm}$, $CD=120\text{ sm}$, $KC=KD$ va CDA uchburchak tekisligi gorizontaal. Sterjenlar A , C va D nuqtalarda sharnir bilan biriktirilgan (64.1-a rasm).

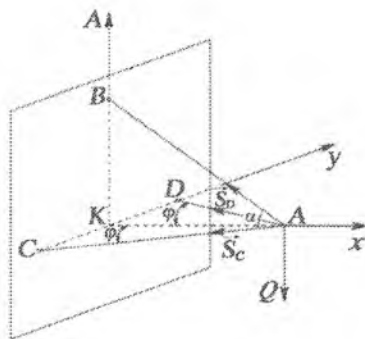


64.1-a rasm

Yechish: A nuqtaning muvozanatini o'rganamiz. A nuqtaga tashqi Q yukning og'irlik kuchi ta'sir etadi. A nuqta uchun AB tros va AC , AD sterjenlar bog'lanishlar hisoblanadi. Bog'lanishlardan bo'shatish prinsipiga ko'ra ularning ta'sirini A nuqtaga qo'yilgan bog'lanishlar reaksiya kuchlari bilan almashtiramiz. Q yuk ta'sirida AB tros va AC , AD sterjenlar cho'zilgan deb faraz qilib, ularning reaksiya kuchlarini A nuqtadan tros va sterjenlar bo'ylab yo'naltiramiz (64.1-b rasm).

Burchaklarni aniqlaymiz:

$$\varphi = \arcsin \frac{CD}{2AC} = \arcsin \frac{120}{R \cdot 100} = 36,86^\circ,$$



64.1-b rasm

$$\alpha = \arccos \frac{AK}{AB} = \arccos \frac{80}{170} = 61,92^\circ,$$

chunki $AK = AC \cos \varphi = 80 \text{ sm}$. Hosil bo'lgan, fazoda ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishadigan kuchlar sistemasining muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\sum X_i = 0, \quad -T_B \cos \alpha - S_C \cos \varphi - S_D \cos \varphi = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0, \quad S_D \sin \varphi - S_C \sin \varphi = 0, \quad (2)$$

$$\sum Z_i = 0, \quad -Q + T_B \sin \alpha = 0. \quad (3)$$

Tenglamalarni yechib, noma'lum kattaliklarni aniqlaymiz.

(3) tenglamadan:

$$T_B = \frac{Q}{\sin \alpha} = \frac{180}{\sin 61,92^\circ} = 204 \text{ N}.$$

(2) tenglamadan:

$$S_D = S_C = S.$$

(1) tenglamadan:

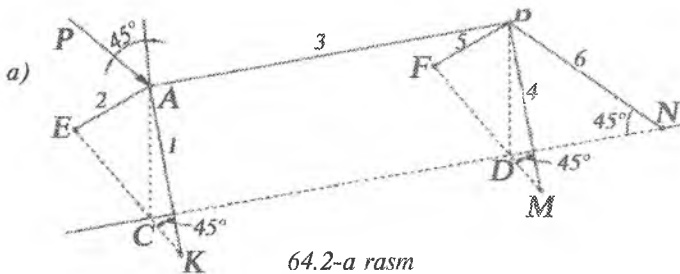
$$2S \cos \varphi = -T_B \cos \alpha,$$

$$S = S_D = S_C = -\frac{T_B \cos \alpha}{2 \cos \varphi} = -\frac{204 \cos 61,92^\circ}{2 \cdot \cos 36,86^\circ} = -60 \text{ N}.$$

Hisoblashlar natijalari Q yuk ta'sirida AC va AD stenjenlar cho'zilmasdan siqilgan ekanligidan darak beradi.

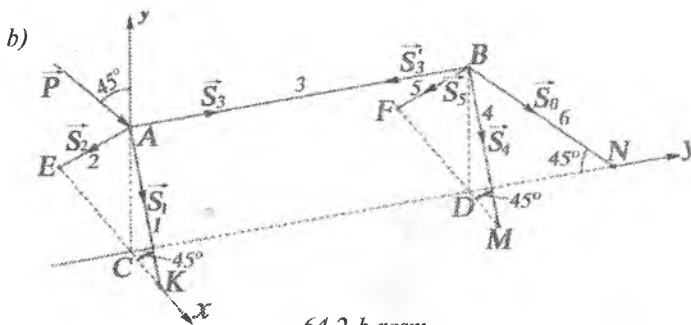
Javoblar: $T_B = 204 \text{ N}$, $S_B = S_C = -60 \text{ N}$.

2-masala. Fazoviy ferma 1, 2, 3, 4, 5, 6 sterjenlardan tuzilgan. P kuch $ABCD$ to'g'ri to'rtburchak tekisligidagi A tugunga ta'sir qiladi; bunda uning ta'sir chizig'i CA vertikal bilan 45° burchak tashkil etladi. $\triangle EAK = \triangle FBM$. Teng yonli EAK , FBM va NDB uchburchaklarning A , B va D uchlaridagi burchaklar to'g'ri burchak. Agar $P = 1 \text{ kN}$ bo'lsa, sterjenlardagi zo'riqishlarning qiymatlari topilsin (64.2-a rasm).



Yechish: masalani yechishda A va B tugunlarning muvozanatini o'rganamiz.

1. A tugun. A tugunga vertikal bilan 45° burchak tashkil qiluvchi kuch qo'yilgan. Tugun uchun bog'lanishlar 1, 2, 3 sterjenlar hisoblanadi. Ularning ta'sirini bog'lanishlar reaksiyalari bilan almash-tiramiz; bunda barcha sterjenlarni quyilgan P kuch ta'sirida cho'zilgan deb faraz qilamiz. Koordinata o'qlarini rasmdagidek yo'naltirib, muvozanat tenglamalarini tuzamiz (64.2-b rasm).



$$\sum X_i = 0, \quad S_1 \cos 45^\circ - S_2 \cos 45^\circ = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0, \quad S_3 + P \sin 45^\circ = 0, \quad (2)$$

$$\sum Z_i = 0, \quad -S_1 \sin 45^\circ - S_2 \sin 45^\circ - P \cos 45^\circ = 0 \quad (3)$$

tenglamalarni yechib, noma'lum kattaliklarni aniqlaymiz.

(2) tenglamadan:

$$S_3 = -P \sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -0,707kN.$$

(1) tenglamadan:

$$S_1 = \frac{S_2 \cos 45^\circ}{\cos 45^\circ} = S_2.$$

(3) tenglamadan $-S_2 \sin 45^\circ - S_2 \sin 45^\circ - P \cos 45^\circ = 0$,
buni e'tiborga olsak,

$$-2S_2 \sin 45^\circ = +P \cos 45^\circ.$$

(3) tenglamadan:

$$S_2 = -\frac{P \cos 45^\circ}{2 \sin 45^\circ} = -\frac{1,0707}{2 \cdot 0,707} = -0,5kN, \quad S_1 = -0,5kN.$$

2. *B* tugun. *B* tugun uchun ham sterjenlarni cho'zilgan deb faraz qilamiz va muvozanat tenglamalarini tuzamiz (64.2-b rasm).

$$\sum X_i = 0, \quad S_4 \cos 45^\circ - S_5 \cos 45^\circ = 0, \quad (4)$$

$$\sum Y_0 = 0, \quad -S_3 + S_6 \cos 45^\circ = 0, \quad (5)$$

$$\sum Z_i = 0, \quad -S_5 \sin 45^\circ - S_4 \sin 45^\circ - S_6 \sin 45^\circ = 0 \quad (6)$$

tenglamalarni yechib, noma'lum kattaliklarni aniqlaymiz; bunda $S_3 = S'$ ekanligini e'tiborga olamiz.

$$(5) \text{ tenglamadan: } S_6 = \frac{S'_3}{\cos 45^\circ} = -\frac{707}{707} = -1kN.$$

$$(4) \text{ tenglamadan: } S_4 = \frac{S_5 \cos 45^\circ}{\cos 45^\circ} = S_5.$$

Buni e'tiborga olsak, (6) tenglamadan:

$$-S_6 = 2S_4,$$

$$S_4 = -\frac{S_6}{2} = -\frac{-1}{2} = 0,5kN.$$

Javoblar:

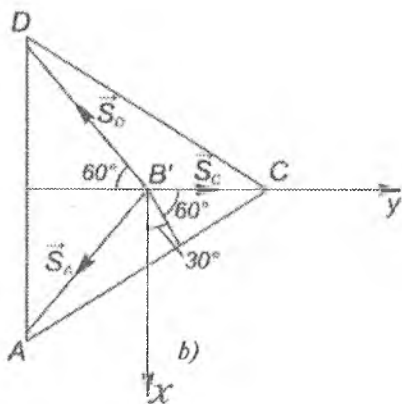
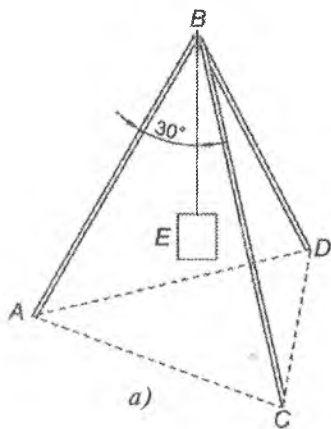
$$S_1 = -0,5kN, S_2 = -0,5kN, S_3 = -0,707kN,$$

$$S_4 = -0,5kN, S_5 = -0,5kN, S_6 = -1kN.$$

3-masala. *ABCD* uchoyoqning *B* uchiga og'irligi $G = 100 N$ bo'lgan *E* yuk osilgan. Oyoqlarning uzunligi bir-biriga teng bo'lib, ular gorizontol polga mahkamlangan va o'zaro teng burchaklar tashkil qiladi. Agar oyoqlarning *BE* arqon bilan 30° burchak hosil qilishi ma'lum bo'lsa, har qaysi oyoqdagi zo'riqishning qancha bo'lishi topilsin (64.3-a rasm).

Yechish: *B* nuqtaning muvozanatini o'rganamiz. *B* nuqtaga *E* yuk og'irligi G kuch ta'sir etadi. *B* nuqta uchun uchoyoq oyoqlari bog'lanishlar hisoblanadi. Bog'lanishlardan bo'shatish prinsipiga ko'ra, ularning *B* nuqtaga ta'sirini bog'lanishlar — oyoqlar reaksiya kuchlari bilan almashtiramiz. Oyoqlar G kuch ta'sirida cho'ziladi, deb faraz qilib, reaksiya kuchlarini oyoqlar bo'ylab *B* nuqtadan oyoqlar ichiga yo'naltiramiz (64.3-b rasm).

Hosil bo'lgan, fazoda ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishadigan kuchlar sistemasining muvozanat tenglamalarini tuzamiz:



64.3-a, b rasm

$$\sum X_i = 0, \quad -S_D \cos 60^\circ \cos 30^\circ + S_A \cos 60^\circ \cos 30^\circ = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0, \quad -S_D \cos 60^\circ \cos 60^\circ - S_A \cos 60^\circ \cos 60^\circ + S_C \cos 60^\circ = 0, \quad (2)$$

$$\sum Z_i = 0, \quad -S_C \cos 30^\circ - S_A \cos 30^\circ - S_D \cos 30^\circ - G = 0 \quad (3)$$

tenglamalarni yechib, noma'lum kattaliklarni aniqlaymiz.

(1) tenglamadan:

$$S_D = S_A.$$

(2) tenglamadan:

$$2S_A \cos 60^\circ = S_C,$$

bundan $S_A = S_C = S_D = S$.

(1) Bunday holda (3) tenglamadan:

$$3S \cos 30^\circ = -G,$$

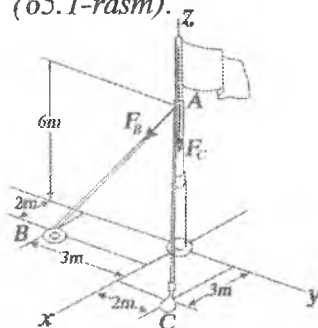
$$3S \frac{\sqrt{3}}{2} = -G.$$

Bundan

$$S = \frac{2G}{3\sqrt{3}} = \frac{200}{5.19} = 38,5 \text{ N}.$$

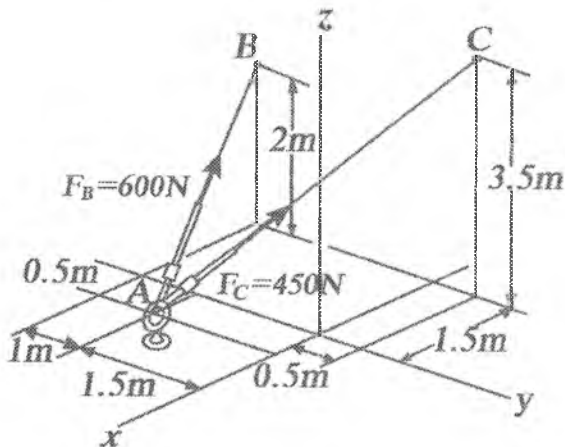
65-§. Mustaqil o'rganish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar

Muammo № 1. Flakshtukning muvozanatini ta'minlovchi katanlardagi zo'riqishlar teng ta'sir etuvchi kuchning miqdori va uning yo'nalishi aniqlansin (65.1-rasm).



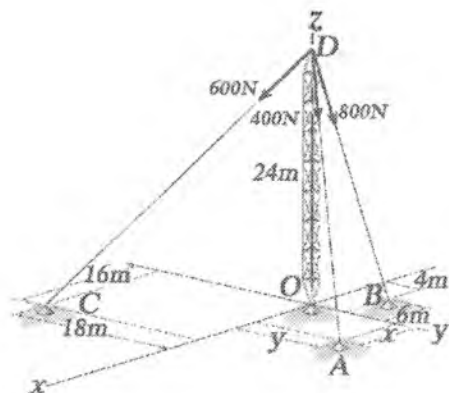
65.1-rasm

Muammo № 2. Rasmda ko‘rsatilgan kranshteynga ta’sir etuvchi kuchlarning teng ta’sir etuvchanligi miqdori va yo‘nalishi aniqlansin (65.2-rasm).



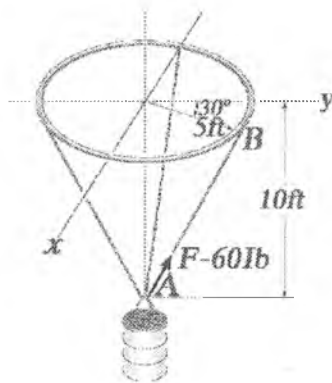
65.2-rasm

Muammo № 3. Bashnya 3 kanat yordamida muvozanatda ushlab turiladi. Agar kanatlardagi zo‘riqish kuchlarining miqdori berilgan bo‘lsa (rasmga qarang), teng ta’sir etuvchi kuchning miqdori va yo‘nalishi aniqlansin (65.3-rasm).



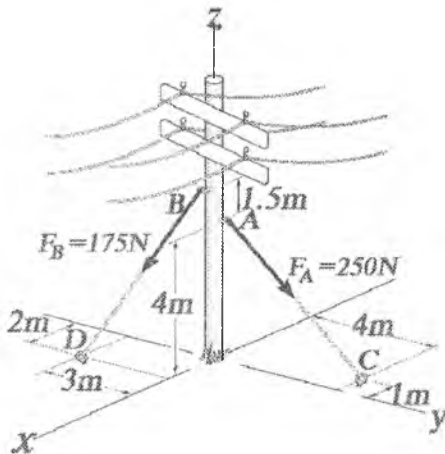
65.3-rasm

Muammo № 4. A nuqtaga qo‘yilgan yukning og‘irligi ta’sirida AB arqonda 60 funt taranglik kuchi yuzaga keladi. F kuchining Dekart koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalari aniqlansin. F kuch A nuqtadan B nuqta tomon yo‘nalgan (65.4-rasm).



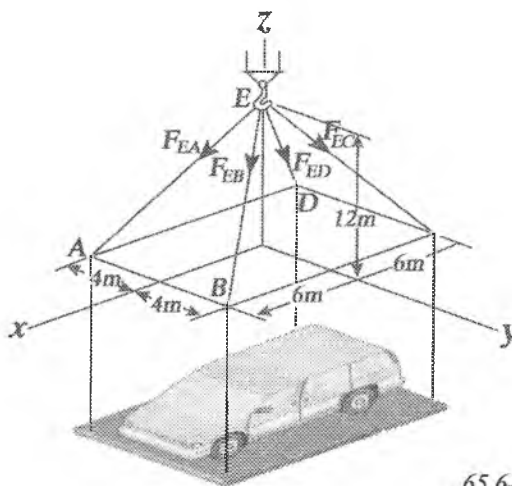
65.4-rasm

Muammo № 5. Telefon stolbi muvozanat holatida AC va BD arqonlar yordamida ushlab turiladi. Arqondagi zo‘riqish kuchlarining teng ta‘sir etuvchanligining Dekart o‘qlaridagi tashkil etuvchilari aniqlansin. B va C nuqtalarining koordinatalari rasmda ko‘rsatilgan (65.5-rasm).



65.5-rasm

Muammo № 6. Rasmda ko‘rsatilgan mexanizm to‘rt arqon yordamida muvozanat holatida ushlab turiladi. Har bir arqondagi taranglik kuchi 28 kN . Arqondagi taranglik kuchlarining Dekart o‘qlaridagi proyeksiyalari hamda ularning teng ta‘sir etuvchisi aniqlansin (65.6-rasm).



65.6-rasm

66-§. Fazodagi kuchlar sistemasini sodda ko‘rinishga keltirishga oid masalalarni yechish uchun uslubiy ko‘rsatmalar

Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini sodda ko‘rinishga keltirishga doir masalalarni quyidagi tartibda yechish tavsiya etiladi:

1. Dekart koordinata o‘qlari o‘tkaziladi.
2. Keltirish markazi sifatida koordinata o‘qlari boshi sifatida tanlangan nuqta olinadi.
3. Quyidagi formulalar asosida kuchlar sistemasi bosh vektorining o‘qlardagi proyeksiyalari aniqlanadi:

$$R_x = \sum F_{kx}, \quad R_y = \sum F_{ky}, \quad R_z = \sum F_{kz}.$$

4. Quyidagi formulalar asosida kuchlar sistemasi bosh vektorining moduli va uning yo‘nalishi aniqlanadi:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2},$$

$$\cos(\vec{R} \cdot \vec{i}) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(\vec{R} \cdot \vec{j}) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(\vec{R} \cdot \vec{k}) = \frac{R_z}{R},$$

bunda

$$\vec{R} = R_x \cdot \vec{i} + R_y \cdot \vec{j} + R_z \cdot \vec{k}.$$

5. Quyidagi formulalar asosida kuchlar sistemasi bosh momentining o'qlardagi proyeksiyalari aniqlanadi:

$$M_x = \sum M_x(\vec{F}_k), M_y = \sum M_y(\vec{F}_k), M_z = \sum M_z(\vec{F}_k)$$

yoki

$$M_x = \sum(Y_k \cdot F_{kz} - Z_k \cdot F_{ky}), M_z = \sum(X_k \cdot F_{ky} - Y_k \cdot F_{kx}).$$

6. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi bosh momentining moduli va yo'nalishi quyidagi formulalar asosida aniqlanadi:

$$|\vec{M}_0| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2},$$

$$\cos(\vec{M}_0 \hat{=} i) = \frac{M_x}{M_0}; \quad \cos(\vec{M}_0 \hat{=} j) = \frac{M_y}{M_0}; \quad \cos(\vec{M}_0 \hat{=} k) = \frac{M_z}{M_0}.$$

7. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi qanday sodda ko'rinishga kelishi mumkinligi aniqlab olinadi:

a) agar $\vec{R} = 0$, $\vec{M}_0 = 0$ bo'lsa, fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar ta'siridagi jism muvozanat holatida bo'ladi;

b) agar $\vec{R} = 0$ bo'lib, $\vec{M}_0 \neq 0$ bo'lsa, fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi moment \vec{M}_0 bo'lgan juft kuchga keltiriladi;

d) agar $R \neq 0$ bo'lib, $M_0 = 0$ bo'lsa, fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi $\vec{R} = \sum \vec{F}_k$ teng ta'sir etuvchi kuchga keltiriladi. Teng ta'sir etuvchi kuchning ta'sir chizig'ining tenglamasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\frac{x}{R_x} = \frac{y}{R_y} = \frac{z}{R_z},$$

bu ifodada R_x, R_y, R_z lar teng ta'sir etuvchi kuchlar koordinata o'qlaridagi proyeksiyalar, x, y, z — teng ta'sir etuvchi kuch ta'sir chizig'ining koordinatalari;

e) agar $R \neq 0$, $\vec{M}_0 \neq 0$ bo'lib, bosh vektor \vec{R} va bosh moment \vec{M}_0 o'zaro perpendikular vektorlar bo'lsa, ularning skalyar ko'payt-

mali θ ga teng bo'ladi: $R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z = 0$. Agar yuqoridagi shart bajarilsa, fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi \vec{R} teng ta'sir etuvchi kuchga keltiriladi.

Bunday holda teng ta'sir etuvchi kuchning chizig'ining tenglamasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

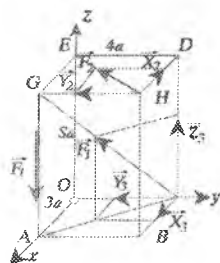
$$\frac{M_x - yR_z + zR_y}{R_x} = \frac{M_y - zR_x + xR_z}{R_y} = \frac{M_z - xR_y - yR_x}{R_z}.$$

Agar

$$R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z = 0$$

shart bajarilmasa, kuchlar sistemasining bosh vektori \vec{R} va bosh momenti \vec{M}_0 o'zaro perpendikular bo'lmaydi va fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi kuch vintiga keltiriladi. Bunday holda ham markaziy o'q tenglamasi yuqoridagi ko'rinishda yoziladi.

67-§. Fazodagi kuchlar sistemasini sodda ko'rinishga keltirishga oid masalalar

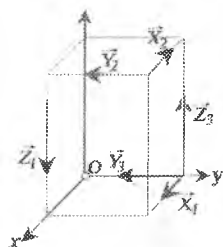


67.1-rasm

1-masala. Rasmda ko'rsatilgan parallelo-pipedga ta'sir ko'rsatuvchi fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining O nuqtaga nisbatan hisoblangan bosh momenti aniqlansin (67.1-rasm).

Berilgan: $F_1=9F$, $F_2=5F$, $F_3=10\sqrt{2}F$.

Yechimi: 1. \vec{F}_2 kuchni parallelopipedning ikki qirralari, \vec{F}_3 kuchni esa uch qirralari bo'yicha yo'nalgan tashkil etuvchilarga ajratamiz (67.2-rasm).



67.2-rasm

$$X_2 = F_2 \frac{HD}{HE} = 5F \frac{3a}{5a} = 3F,$$

$$Y_2 = F_2 \frac{HG}{HE} = 5F \cdot \frac{4a}{5a} = 4F,$$

$$X_3 = F_3 \frac{CB}{CG} = 10\sqrt{2}F \frac{3a}{5\sqrt{2}a} = 6F,$$

$$Y_3 = F_3 \frac{CO}{CG} = 10\sqrt{2}F \frac{4a}{5\sqrt{2}a} = 8F,$$

$$Z_3 = F_3 \frac{CD}{CG} = 10\sqrt{2}F \frac{5a}{5\sqrt{2}a} = 10F.$$

2. Hosil bo'lgan fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi bosh momentining koordinata o'qlaridagi tashkil etuvchilarini aniqlaymiz:

$$M_x = Y_2 \cdot l_z + Z_3 \cdot l_y = 4F \cdot 5a + 10F \cdot 4a = 60Fa,$$

$$M_y = Z_1 \cdot l_x - X_2 \cdot l_z = 9F \cdot 3a - 5a = -12Fa,$$

$$M_z = X_3 \cdot l_y = -6F \cdot 4a = -24Fa.$$

Bosh moment moduli va uning yo'nalishi quyidagicha aniqlanadi:

$$M_0 = \sqrt{(M_x)^2 + (M_y)^2 + (M_z)^2} = 69.7Fa,$$

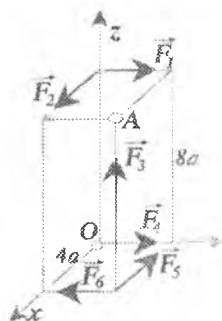
$$\cos(\vec{M}_0 \cdot \vec{i}) = \frac{M_x}{M_0} = 0.87, \quad \cos(\vec{M}_0 \cdot \vec{j}) = \frac{M_y}{M_0} = 0.17,$$

$$\cos(\vec{M}_0 \cdot \vec{k}) = \frac{M_z}{M_0} = 0.34.$$

2-masala. Parallelepiped qirralariga qo'yilgan fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini sodda ko'rinishga keltiring (67.3-rasm).

Berilgan: $F_1 = 3F$, $F_2 = F$, $F_3 = 5F$, $F_4 = 3F$, $F_5 = 4F$, $F_6 = 2F$.

Yechimi: teng ta'sir etuvchi kuchning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini aniqlaymiz:



67.3-rasm

$$R_x = \sum X_i = F_2 - F_5 = -3F,$$

$$R_y = \sum Y_i = F_1 + F_4 - F_6 = 4F,$$

$$R_z = \sum Z_i = F_3 = 5F.$$

Berilgan kuchlar sistemasining O nuqtaga nisbatan bosh vektori (moduli) ham quyidagicha ifodalanadi:

$$R = F\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = 7.07F.$$

Berilgan fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining koordinata o'qlariga nisbatan momentlarining yig'indisini aniqlaymiz:

$$M_x = \sum M_{xi} = -F_1 \cdot 8a + F_3 \cdot 2a = -14Fa,$$

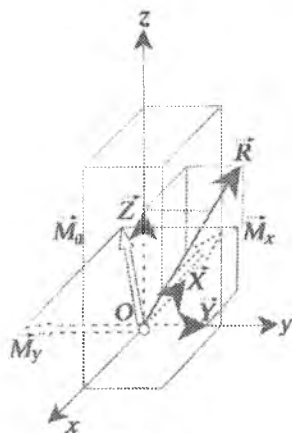
$$M_y = \sum M_{yi} = F_2 \cdot 8a - F_3 \cdot 4a = -12Fa,$$

$$M_z = \sum M_{zi} = F_5 \cdot 2a - F_6 \cdot 4a = 0.$$

Berilgan kuchlar sistemasining O nuqtaga nisbatan bosh momenti quyidagicha ifodalanadi:

$$\vec{M}_0 = -14F_a \cdot \vec{i} - 12F_a \cdot \vec{j}.$$

Masala shartida berilgan fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini O nuqtaga keltirganda 67.4-rasmdagi sodda ko'rinishga keladi.



67.4-rasm

Masala shartida berilgan kuchlar sistemasini A nuqtaga keltirganda kuchlar sistemasining bosh momenti quyidagi formulalar asosida aniqlanadi:

$$\vec{M}_A = \vec{M}_0 + \vec{AO} \times \vec{R} = -14F_a \vec{i} - 12F_a \vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4a & -2a & -8a \\ -3F & 4F & 5F \end{vmatrix} =$$

$$= 6F_a \vec{i} + 32F_a \vec{j} + 22F_a \vec{k}.$$

Kuchlar sistemasini A nuqtaga keltirganda qanday sodda ko‘rinishga kelishi 67.5-rasm^{da} ko‘rsatilgan.

3-masala. Qirralarining uzunligi $a = 5$ sm bo‘lgan kubning uchlariga har qaysisi 2 N bo‘lgan oltita o‘zaro teng kuchlar rasm^{da} ko‘rsatilganidek qilib qo‘yilgan. Shu sistema soddalashtirilsin (67.6-a rasm).

Yechish: kuchlar sistemasini sodda ko‘rinishga keltirish uchun koordinata o‘qlarini rasm^{dagidek} o‘tkazib, bosh vektor \vec{R} va bosh moment \vec{M}_0 ning koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalarini aniqlaymiz:

$$R_x = \sum F_{ix} = F_2 - F_5 = 0,$$

$$R_y = \sum F_{iy} = F_3 - F_6 = 0,$$

$$R_z = \sum F_{iz} = -F_1 + F_4 = 0,$$

$$M_{0x} = \sum M_x(\vec{F}_i) = aF_4 + a \cdot F_6 = 20 \text{ N} \cdot \text{sm},$$

$$M_{0y} = \sum M_y(\vec{F}_i) = -a \cdot F_4 - a \cdot F_5 = -20 \text{ N} \cdot \text{sm},$$

$$M_{0z} = \sum M_z(\vec{F}_i) = aF_3 - aF_5 = 20 \text{ N} \cdot \text{sm}.$$

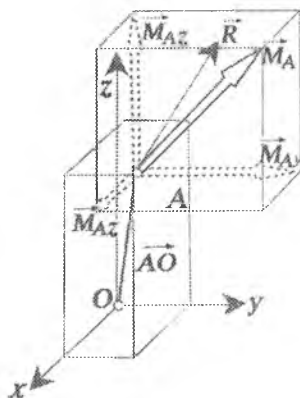
Bosh vektor va bosh moment modulini aniqlaymiz:

$$R = 0,$$

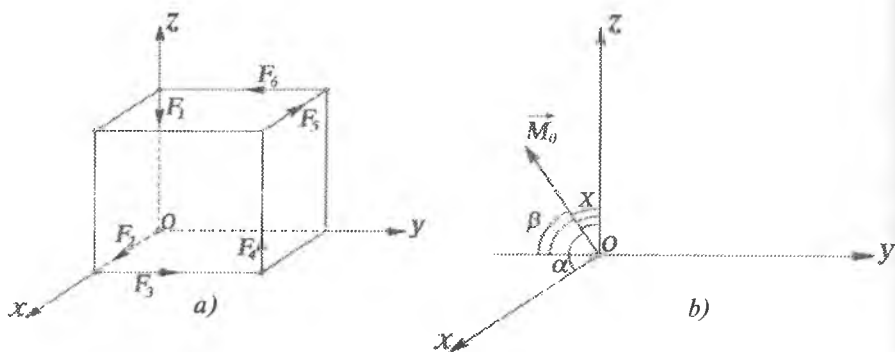
$$M_0 = \sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2 + M_{0z}^2} = 20\sqrt{3} \text{ N} \cdot \text{sm}.$$

Demak, berilgan kuchlar sistemasini momentining vektori \vec{M}_0 bo‘lgan juft kuchga keltirilgan ekan. Juft kuch momentining vektori \vec{M}_0 koordinata o‘qlari bilan α, β, γ burchaklarni hosil qiladi (67.6-b rasm).

Burchaklarning kosinuslari quyidagicha aniqlanadi:



67.5-rasm



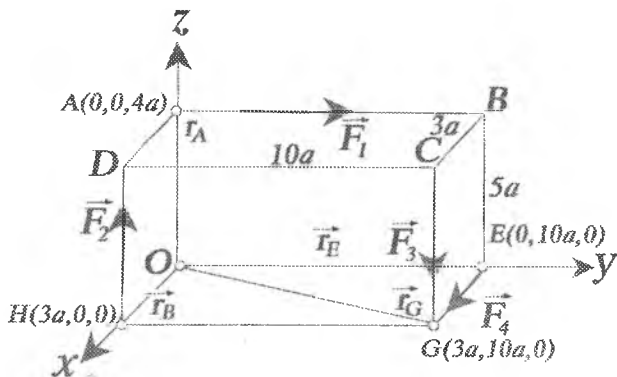
67.6-a, b rasmlar

$$\cos \alpha = \frac{M_{Ox}}{M_O} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \cos \beta = \frac{M_{Oy}}{M_O} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \cos \gamma = \frac{M_{Oz}}{M_O} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Bu burchaklar orqali bosh moment yo'nalishi aniqlanadi.

68-§. Mustaqil o'rganish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar

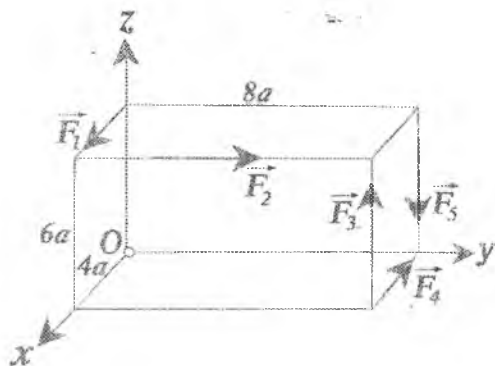
Muammo № 1. Rasmda ko'rsatilgan fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining O nuqtaga nisbatan bosh momenti hisoblansin (68.1-rasm).



68.1-rasm

$$F_1 = 2F, \quad F_2 = 4F, \quad F_3 = F, \quad F_4 = 3F.$$

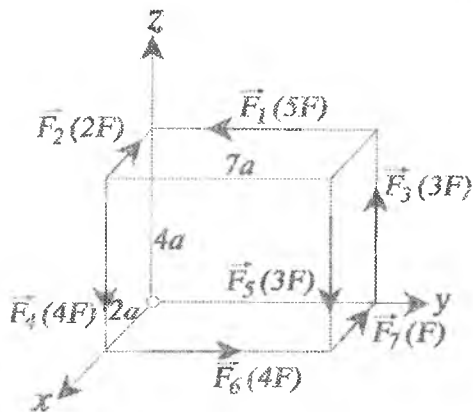
Muammo № 2. Rasmda ko'rsatilgan fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining koordinatalar sistemasining boshi O nuqtaga nisbatan bosh momenti aniqlansin (68.2-rasm).



68.2-rasm

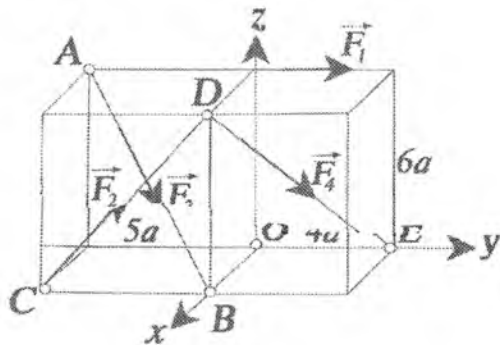
$$F_1=5F, F_2=3F, F_3=6F, F_4=F, F_5=2F.$$

Muammo № 3. Rasmda ko'rsatilgan fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining koordinatalar sistemasining boshi O nuqtaga nisbatan bosh momenti aniqlansin (68.3-rasm).



68.3-rasm

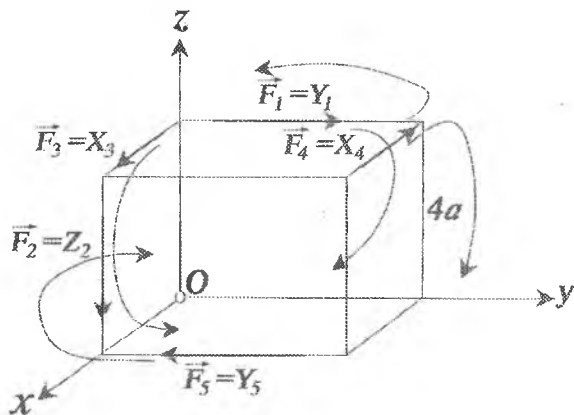
Muammo № 4. Rasmda ko'rsatilgan fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining O nuqtaga nisbatan bosh momenti hisoblansin (68.4-rasm).



68.4-rasm

$$F_1=4F, F_2=2\sqrt{61}F, F_3=3\sqrt{70}F, F_4=3\sqrt{61}F.$$

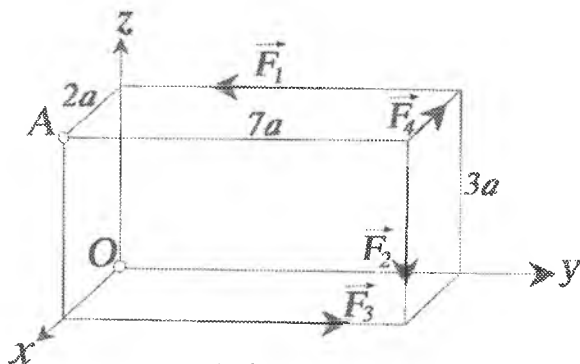
Muammo № 5. Rasmda ko'rsatilgan fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining O nuqtaga nisbatan bosh momenti hisoblansin (68.5-rasm).



68.5-rasm

$$F_1=2F, F_2=F, F_3=3F, F_4=2F, F_5=4F.$$

Muammo № 6. Rasmda ko'rsatilgan fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini O va A nuqtalarga kiriting (68.6-rasm).



68.6-rasm

$$F_1=4F, F_2=3F, F_3=5F, F_4=F.$$

69-§. Fazodagi kuchlar sistemasining muvozanatiga oid masalalarni yechish uchun uslubiy ko'rsatmalar

Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanatiga doir masalalarni quyidagi tartibda yechish tavsiya etiladi:

1. Muvozanati o'rganilayotgan jism (yoki nuqta) aniqlanadi.
2. Koordinatalar sistemasi tanlab olinadi.
3. Jismga ta'sir etayotgan berilgan kuchlar ko'rsatiladi.
4. Jismni bog'lanishlardan bo'shatib, ularning ta'sirlari bog'lanish reaksiya kuchlari bilan almashtiriladi.

5. Muvozanati o'rganilayotgan jism berilgan kuchlar va bog'lanishlar reaksiya kuchlari ta'siridagi erkin jism deb qaraladi.

6. Berilgan masala statik aniq masala ekanligi tekshiriladi, ya'ni masaladagi algebraik noma'lum kattaliklar soni oltitadan oshmasligi lozim.

Izoh: agar qattiq jismga ta'sir etuvchi kuchlar fazoda kesishuvchi yoki fazodagi parallel kuchlar sistemasini tashkil etsa, masaladagi noma'lum algebraik kattaliklar soni uchtadan oshmasligi lozim.

7. Koordinata o'qlarining yo'nalishlari tanlab olinadi.

8. Qattiq jismga qo'yilgan fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi uchun oltita muvozanat tenglamalari tuziladi. Bunda tenglamalarning birinchi uchtasi proyeksiyalar, oxirgi uchtasi mo-

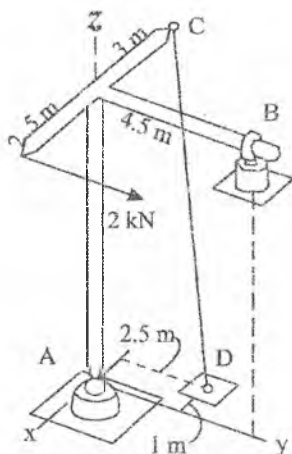
mentlar tenglamalari deyiladi. Proyeksiyalar tenglamalari kuchlar sistemasi bosh vektorining momentlar tenglamalari esa kuchlar sistemasi bosh momentining nolga teng bo'lishini ta'minlaydi.

Izoh: agar qattiq jismga ta'sir etuvchi kuchlar fazoda kesishuvchi yoki fazodagi parallel kuchlar sistemasini tashkil etsa, ularning muvozanatini ifodalovchi uchtadan tenglamalar tuziladi.

9. Tuzilgan muvozanat tenglamalarini yechib, noma'lum kattaliklar aniqlanadi.

70-§. Fazodagi kuchlar sistemasining muvozanatiga oid masalalar

1-masala. Trubadan payvandlash yo'li bilan yasalgan rama A nuqtada sferik sharnirga tayangan. $F=2\text{ kN}$ kuch ramani o'z o'qi atrofida aylanma harakatga keltirishga intiladi. CD arqon bu harakatni yuzaga keltirishga imkon bermaydi va rama muvozanat holatida bo'ladi. Rama og'irligini hisobga olmay, uning tayanch reaksiyalari va CD arqondagi taranglik kuchi aniqlansin (70.1-rasm).



70.1-rasm

Yechimi:

ramaga qo'yilgan 2 kN kuchni ko'rsatamiz. Ramani bog'lanishlardan ozod etib, ularning ta'sirlarini bog'lanishlar reaksiyalari

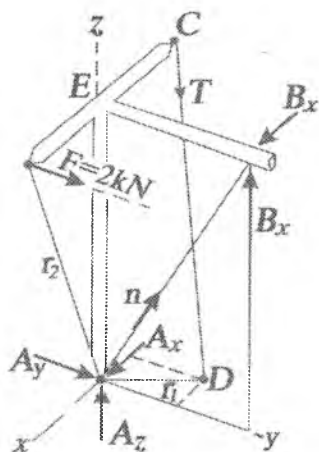
bilan almashtiramiz. Ramaga A nuqtadagi sferik sharnir, B nuqtadagi silindrik sharnir va CD arqon bog'lanishlar hisoblanadi.

Sferik sharnir reaksiyalari: A_x, A_y, A_z .

Silindrik sharnir reaksiyalari: B_x, B_z .

CD arqon reaksiyasi: T .

Ramaga qo'yilgan 2 kN kuch va bog'lanishlar reaksiyalarini chizmada ko'rsatamiz 70.1-rasm.



70.2-a rasm

Koordinata boshi sifatida A nuqtani tanlab, koordinata o'qlarini chizmadagidek o'tkazamiz.

AB yo'nalishi \vec{n} birlik vektor yo'nalishi orqali aniqlanadi:

$$\vec{n} = \frac{4.5\vec{j} + 6\vec{k}}{\sqrt{6.5^2 + 4.5^2}} = \frac{1}{5}(3\vec{j} + 4\vec{k}).$$

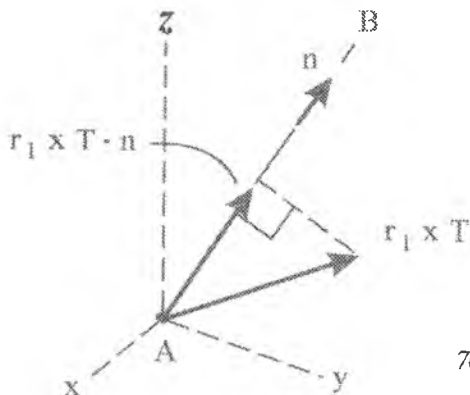
\vec{T} kuchning A nuqtaga nisbatan momenti vektori:

$$\vec{M}_A(\vec{T}) = \vec{r}_1 \cdot T\vec{n}.$$

\vec{F} kuchning A nuqtaga nisbatan momenti vektori:

$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{r}_1 \cdot F\vec{n}.$$

Agar $CD = \sqrt{46.2} \text{ m}$ ekanligini e'tiborga olsak, \vec{T} , \vec{F} , \vec{r}_1 , \vec{r}_2 vektorlar quyidagicha ifodalanadi:



70.2-b rasm

$$\vec{T} = \frac{T}{\sqrt{46.2}} (2\vec{i} + 2.5\vec{j} - 6\vec{k}),$$

$$\vec{F} = 2jkN,$$

$$\vec{r}_1 = -\vec{i} + 2.5\vec{j} \text{ (m)},$$

$$\vec{r}_2 = 2.5\vec{i} + 6\vec{k} \text{ (m)}.$$

\vec{T} va \vec{F} kuchlarning momentlarini AB o'qqa nisbatan hisoblaymiz:

$$\sum M_{AB} = 0,$$

$$\begin{aligned} & (-\vec{i} + 2.5\vec{j}) \cdot \frac{T}{\sqrt{46.2}} (2\vec{i} - 2.5\vec{j} - 6\vec{k}) \cdot \frac{1}{5} (3\vec{j} - 4\vec{k}) + \\ & + (2.5\vec{i} + 6\vec{k}) \cdot (2\vec{j}) \cdot \frac{1}{5} (3\vec{j} + 4\vec{k}) = 0. \end{aligned}$$

Yozilganlarni e'tiborga olsak, quyidagi ifodaga ega bo'lamiz:

$$\frac{-48T}{\sqrt{46.2}} + 20 = 0.$$

Bu tenglamadan:

$$T=2.83 \text{ kN.}$$

CD arqondagi taranglik kuchini koordinata o'qlari bo'ylab yo'nalgan tashkil etuvchilari quyidagilarga teng bo'ladi:

$$T_x = 0.833 \text{ kN}, \quad T_y = 1.042 \text{ kN}, \quad T_z = -2.5 \text{ kN.}$$

Qolgan barcha noma'lum reaksiya kuchlari quyidagi muvozanat tenglamalaridan aniqlanadi:

$$\sum M_z = 0, \quad 2 \cdot (2.5) - 4.5 B_x - 1.042 \cdot (3) = 0 \quad B_x = 0.417 \text{ kN},$$

$$\sum M_x = 0, \quad 4.5 B_x - 2 \cdot (6) - 1.042(6) = 0 \quad B_z = 4.06 \text{ kN},$$

$$\sum F_x = 0, \quad A_x + 0.417 - 0.833 = 0 \quad A_x = -1.250 \text{ kN},$$

$$\sum F_y = 0, \quad A_y + 2 - 1.042 = 0 \quad A_y = -3.04 \text{ kN},$$

$$\sum F_z = 0, \quad A_z + 4.06 - 2.5 = 0 \quad A_z = -1.556 \text{ kN.}$$

2-masala. AB aylanish o'qi vertikal bo'lgan to'g'ri burchakli eshik $CAD = 60^\circ$ burchakka ochilgan. Uni shu vaziyatda ikki arqon ushlab turadi: ulardan biri — CD arqon blokdan o'tkazilgan bo'lib, uni $P = 320 \text{ N}$ yuk tortib turadi, ikkinchisi EF arqon polning F nuqtasiga bog'langan. Eshikning og'irligi 640 N ; uning eni $AD = AC = 1,8 \text{ m}$; balandligi $AB = 2,4 \text{ m}$. Blokda ishqalanishni hisobga olmay, EF arqonning tortilish kuchi hamda A nuqtadagi silindrik sharnirning va B nuqtadagi podpyatnikning reaksiyalari aniqlansin (*70.3-a rasm*).

Yechish:

eshikning muvozanatini o'rganamiz. Unga $P = 320 \text{ N}$ bo'lgan yuk hamda eshik og'irlik kuchi \vec{G} ta'sir etadi. Eshik uchun CD , EF arqonlar, A nuqtadagi silindrik sharnir va B nuqtadagi podpyatnik bog'lanishlar hisoblanadi. Bog'lanishlardan bo'shatish prinsipiga ko'ra, bog'lanishlarning eshikka ta'sirini bog'lanishlar reaksiya kuchlari bilan almashtiramiz:

— SD arqondagi taranglik kuchi $T_D = P$ bo'lib, u eshikning C nuqtasiga qo'yiladi va CD arqon bo'ylab yo'naladi;

– EF arqon taranglik kuchi \vec{T}_F eshik E nuqtasiga qo‘yiladi va EF arqon bo‘ylab yo‘naladi;

– A silindrik sharnir reaksiyasining yo‘nalishi oldindan noma‘lum bo‘lganligi uchun uni koordinata o‘qlarining musbat yo‘nalishi bo‘ylab yo‘nalgan \vec{X}_A, \vec{Y}_A tashkil etuvchilarga ajratamiz;

– B podpyatnik reaksiyasining yo‘nalishi ham oldindan noma‘lum bo‘lganligi uchun uni koordinata o‘qlarining musbat yo‘nalishi bo‘ylab yo‘nalgan $\vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{Z}_B$ tashkil etuvchilarga ajratamiz.

Natijada, eshikka ta‘sir etuvchi fazoda ixtiyoriy joylashgan $(\vec{P}, \vec{G}, \vec{T}_F, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, X_B, Y_B, Y_B)$ kuchlar sistemasiga ega bo‘lamiz.

Koordinata o‘qlarini rasmdagidek o‘tkazib, hosil bo‘lgan kuchlar sistemasining muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\sum X_i = 0, \quad X_A + X_B - P \cdot \cos 30^\circ = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0, \quad Y_A + Y_B - T_F + P \cdot \cos 60^\circ = 0, \quad (2)$$

$$\sum Z_i = 0, \quad Z_B - G = 0. \quad (3)$$

$$\sum M_X(\vec{F}_i) = 0, \quad -Y_A \cdot AB - P \cdot \cos 60^\circ \cdot AB - G \cdot BK = 0, \quad (4)$$

$$\sum M_Y(\vec{F}_i) = 0, \quad X_A \cdot AB - P \cdot \cos 30^\circ \cdot AB + G \cdot KL = 0, \quad (5)$$

$$\sum M_Z(\vec{F}_i) = 0, \quad -T_F \cdot BF + P \cdot AN = 0. \quad (6)$$

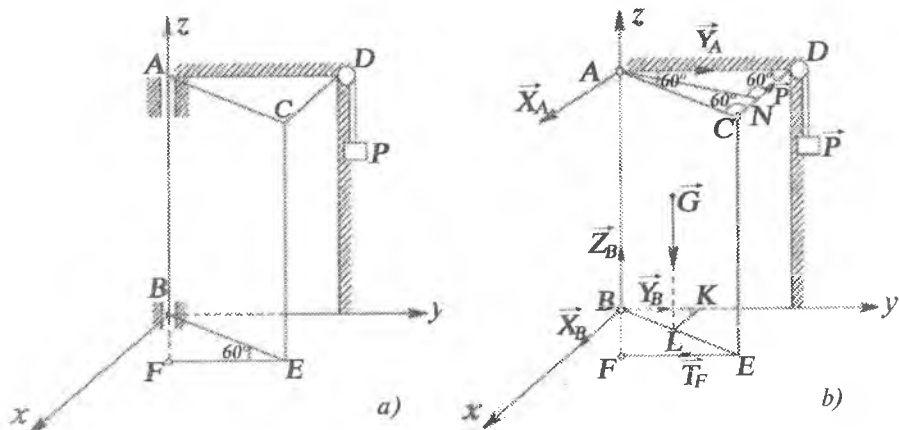
Tenglamalardagi noma‘lum masofalarni aniqlaymiz:

$$\triangle BEF \text{ dan } BF = BE \cdot \sin 60^\circ = 1,8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1,8 \cdot 0,86 = 1,56 \text{ m,}$$

$$\triangle BKL \text{ dan } BK = BL \cdot \cos 60^\circ = 0,9 \cdot \frac{1}{2} = 0,45 \text{ m,}$$

$$KL = BL \cdot \sin 60^\circ = 0,9 \cdot 0,86 = 0,77 \text{ m,}$$

$$\triangle ADN \text{ dan } AN = AD \cdot \sin 60^\circ = 1,8 \cdot 0,86 = 1,56 \text{ m.}$$



70.3-a, b-rasm

Topilgan noma'lum masofalardan foydalanib, tenglamalardagi noma'lum kattaliklarni aniqlaymiz:

(3) tenglamadan:

$$Z_B = G = 640 \text{ N.}$$

(4) tenglamadan:

$$Y_A = \frac{-P \cdot \cos 60^\circ \cdot AB - G \cdot BK}{AB} = \frac{-320 \cdot 1,2 - 640 \cdot 0,45}{2,4} = -280 \text{ N.}$$

(1) tenglamadan:

$$X_A = \frac{P \cdot \cos 30^\circ \cdot AB - G \cdot KL}{AB} = \frac{320 \cdot 0,86 \cdot 2,4 - 640 \cdot 0,77}{2,4} = 69,9 \text{ N.}$$

(2) tenglamadan:

$$X_B = P \cdot \cos 30^\circ - X_A = 320 \cdot 0,86 - 69 = 208 \text{ N.}$$

(3) tenglamadan:

$$T_F = \frac{P \cdot AN}{BF} = \frac{320 \cdot 1,56}{1,56} = 320 \text{ N.}$$

(4) tenglamadan:

$$Y_B = T_F - P \cdot \cos 60^\circ - Y_A = 320 - 320 \cdot \frac{1}{2} + 280 = 440 \text{ N.}$$

Javoblar:

$$X_A=69,9, X_B=208 \text{ N}, Y_A=-280 \text{ N},$$

$$Y_B=440 \text{ N}, T_F=320 \text{ N}, Z_B=640 \text{ N}.$$

3-masala. Rasmda ko'rsatilgan konstruksiyaning tayanch reaksiyalari aniqlansin (70.4-a rasm).

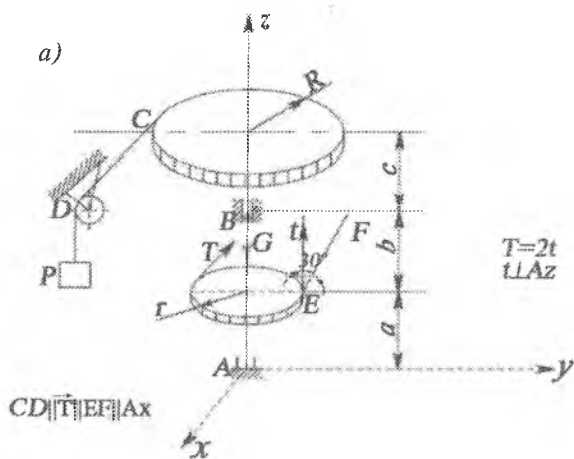
Berilgan:

$$T = 2t, T = 4 \text{ kN}, G = 3 \text{ kN}, a = c = 0,1 \text{ m}, b = 0,2 \text{ m}, R = 0,15 \text{ m}, r = 0,1 \text{ m}.$$

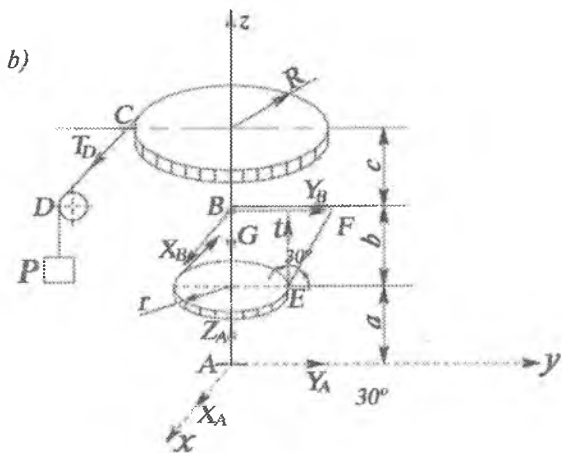
Yechish: konstruksiyaning muvozanatini o'rganamiz.

Konstruksiyaga \vec{G} og'irlik kuchi hamda $\vec{T}, \vec{t}, \vec{P}$ kuchlar ta'sir etadi. Konstruksiya A nuqtada podpyatnikka (sferik sharnirga) tayanadi, B nuqtada podshipnik yordamida ushlab turiladi. Podpyatnik va podshipnik konstruksiya uchun bog'lanishlar hisoblanadi. Ularing konstruksiyaga ta'sirini, bog'lanishlardan bo'shatish prinsipiga asosan, bog'lanishlar reaksiya kuchlari X_A, Y_A, Z_A, X_B, Y_B bilan almashtiramiz. \vec{P} kuch tufayli D blokdan o'tkazilgan ipdagi taranglik kuchini T_D bilan belgilaymiz.

Natijada, konstruksiyaga ta'sir etuvchi fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasiga ega bo'lamiz (70.4-b rasm).



70.4-a rasm



70.4-b rasm

Hosil bo'lgan kuchlar sistemasi uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz.

Kuchlarning koordinata o'qlariga proyeksiyalari tenglamalari:

$$\sum X_i = 0, \quad X_A + X_B + T_D - T - t \cdot \cos 30^\circ = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0, \quad Y_A + Y_B - t \cdot \sin 30^\circ = 0, \quad (2)$$

$$\sum Z_i = 0, \quad Z_A - G = 0. \quad (3)$$

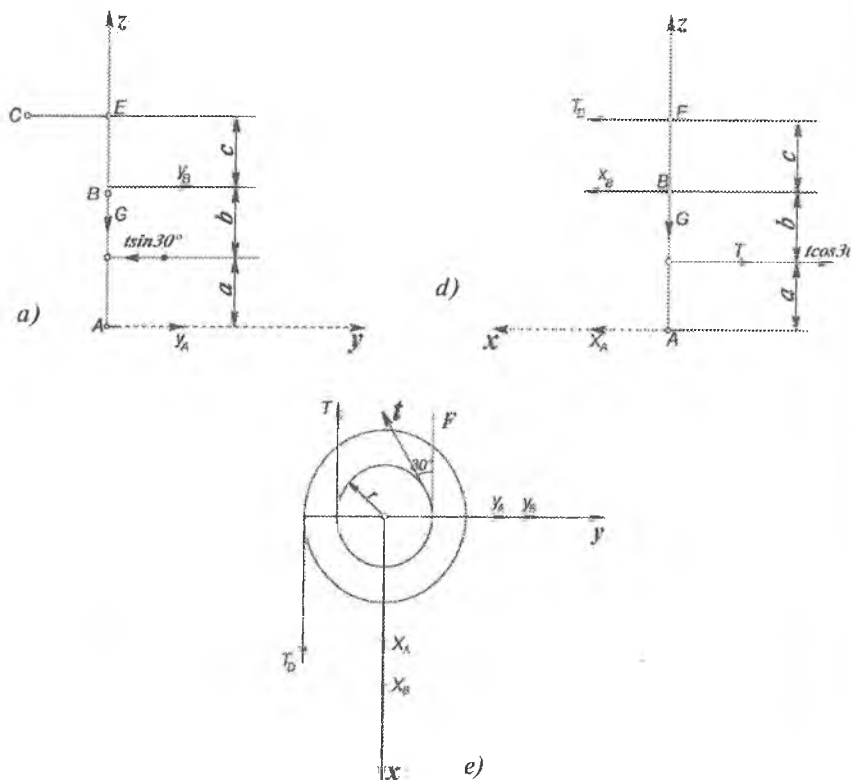
Kuchlarning koordinata o'qlariga nisbatan momentlari tenglamalarini tuzamiz. Natijada, koordinata o'qlariga nisbatan momentlar tenglamalarini tuzishni osonlashtiradigan quyidagi 70.4-c, d, e rasmlarga ega bo'lamiz.

Kuchlarning koordinata o'qlariga nisbatan momentlari tenglamalari quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\sum M_x(\vec{F}_i) = 0, \quad -Y_B(a+b) + t \cdot \sin 30^\circ \cdot a = 0, \quad (4)$$

$$\sum M_y(\vec{F}_i) = 0, \quad X_B(a+b) - t \cdot \cos 30^\circ \cdot a - T \cdot a + T_D(a+b+c) = 0, \quad (5)$$

$$\sum M_z(\vec{F}_i) = 0, \quad -T \cdot \cos 30^\circ \cdot r + T_D \cdot R = 0. \quad (6)$$



70.4-c, d, e rasm

Muvozanat tenglamalarini yechib, noma'lum kattaliklarni aniqlaymiz.

(6) tenglamadan:

$$T_D = \frac{T \cdot r - t \cdot r \cdot \cos 30^\circ}{R} = \frac{4 \cdot 0,1 - 2 \cdot 0,1 \cdot 0,866}{0,15} = 1,51 \text{ kN.}$$

(5) tenglamadan:

$$X_B = \frac{t \cos 30^\circ \cdot a + T \cdot a - T_D \cdot (a+b+c)}{a+b} = \frac{2 \cdot 0,866 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,1 - 1,51 \cdot 0,4}{0,3} = 0,88 \text{ kN.}$$

(4) tenglamadan:

$$Y_B = \frac{t \cdot \sin 30^\circ \cdot a}{a+b} = \frac{2 \cdot 0,5 \cdot 0,1}{0,3} = \frac{0,1}{0,3} = 0,33 \text{ kN}.$$

(3) tenglamadan:

$$Z_A = G = 3 \text{ kN}.$$

(2) tenglamadan:

$$Y_A = t \cdot \sin 30^\circ - Y_B = 2 \cdot 0,5 - 0,33 = 0,67 \text{ kN}.$$

(1) tenglamadan:

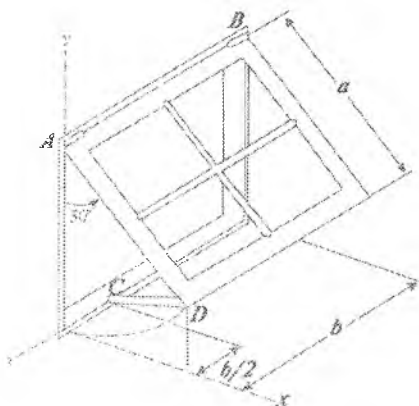
$$X_A = T + t \cos 30^\circ - T_D - X_B = 4 + 2 \cdot 0,86 - 1,51 + 0,1 = 4,1 \text{ kN}.$$

Javoblar:

$$X_A = 4,1 \text{ kN}, \quad X_B = -0,1 \text{ kN}, \quad Y_A = 0,67 \text{ kN}, \quad Y_B = 0,33 \text{ kN}, \\ Z_A = 3 \text{ kN}, \quad T_D = 1,51 \text{ kN}.$$

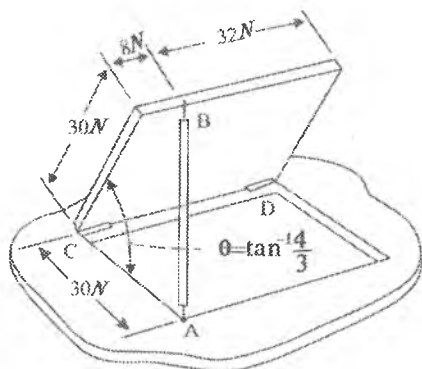
71-§. Mustaqil o'rganish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar

Muammo № 1. *A* va *B* sharnirlarga o'rnatilgan rom rasmda ko'rsatilgan holatda *CD* tirgak orqali ushlab turiladi. Rom va devor orasidagi burchak 50° , rom og'irligi 50 kg bo'lib, u rom massa markaziga qo'yilgan. Agar $a=0.8 \text{ m}$, $b=1.2 \text{ m}$ bo'lsa, tirgaktagi zo'riqish va *A*, *B* tayanchlar reaksiyalari aniqlansin (71.1-rasm)



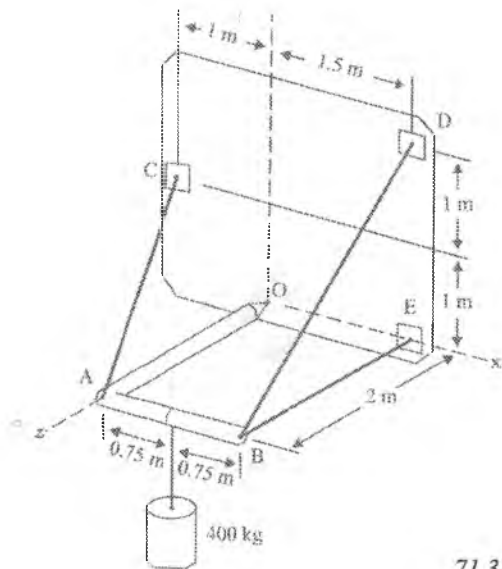
71.1-rasm

Muammo № 2. Rasmda ko'rsatilgan qurilmada AB tirgakdagi zo'riqish va D, C silindrik sharnirdagi reaksiya kuchlari aniqlansin. Qurilma qopqog'ining og'irligi 20 N (71.2-rasm).



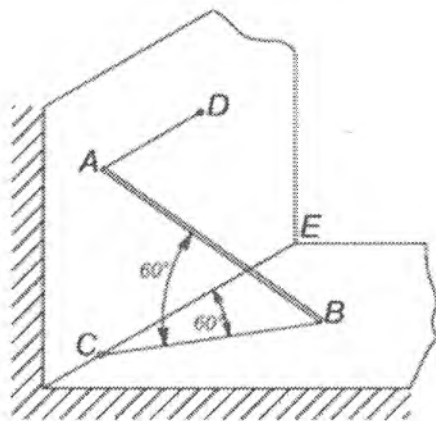
71.2-rasm

Muammo № 3. Rasmda ko'rsatilgan mexanizmدا og'irligi 400 kg bo'lgan yuk AC, BD, BE troslar yordamida muvozanat holatida turibdi. Troslardagi zo'riqishlar va O nuqtadagi reaksiya kuchlari aniqlansin. O'lchamlar rasmda ko'rsatilgan (71.3-rasm).



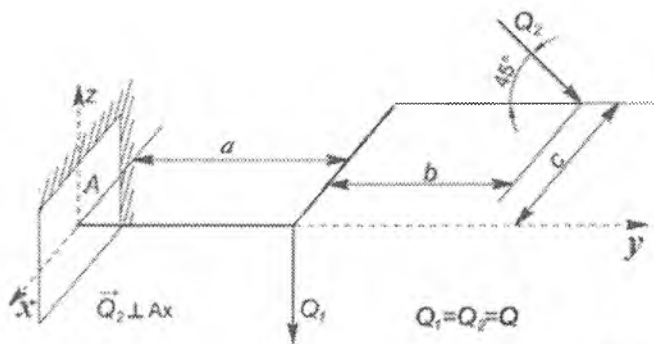
71.3-rasm

Muammo № 4. AB sterjenni ikkita gorizontal AD va BC arqonlar qiya holda ushlab turadi. Bunda sterjen A nuqtada vertikal devorga, B nuqtada esa gorizontal polga tiralgan. D nuqta ham vertikal devorda yotadi. A va C nuqtalar bir vertikal chiziqda yotadi. Sterjenning og'irligi 8 N . A va B nuqtalardagi ishqalanish hisobga olinmasin. Sterjenning muvozanat holatda qolishi mumkinligi tekshirilsin va arqonlarning T_A va T_B tortilish kuchlari hamda tayanch tekisliklarning reaksiyalari aniqlansin; $\angle ABC = \angle BCE = 60^\circ$ (71.4-rasm).



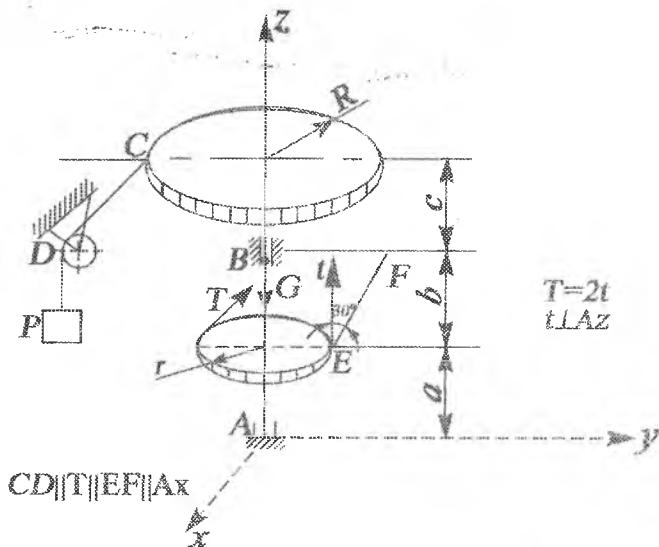
71.4-rasm

Muammo № 5. Rasmda ko'rsatilgan konstruksiyaning tayanch reaksiyalari aniqlansin (71.5-rasm).



71.5-rasm

Muammo № 6. Rasmda ko'rsatilgan konstruksiyaning tayanch reaksiyalari aniqlansin (71.6-rasm).



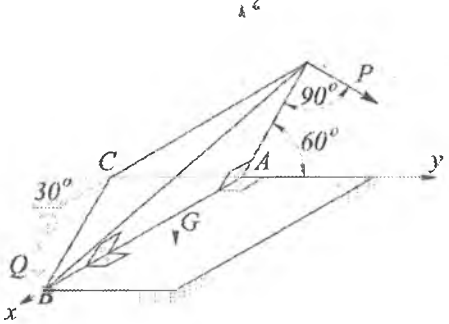
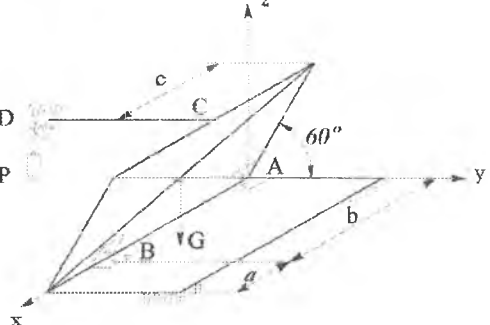
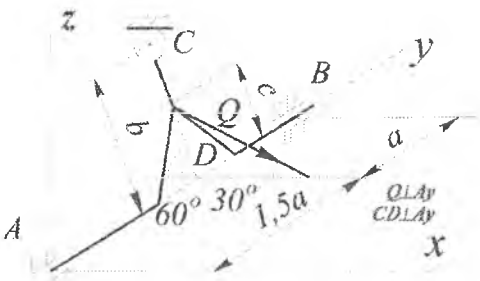
71.6-rasm

Takrorlash uchun savollar:

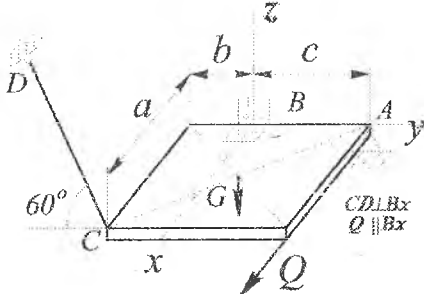
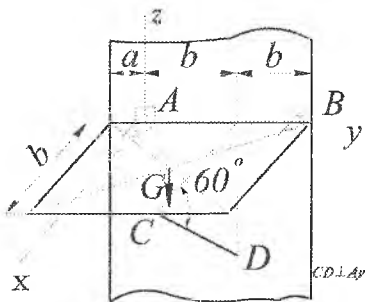
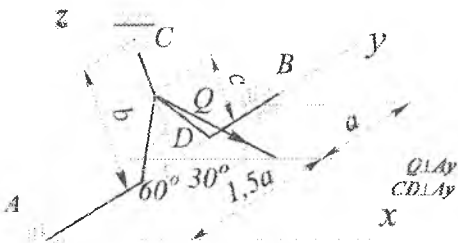
1. Fazoviy kuchlar sistemasi uchun Varinyon teoremasini ta'riflang.
2. Fazoviy kuchlar sistemasining bosh vektori qanday aniqlanadi?
3. Fazoviy kuchlar sistemasining bosh momenti qanday aniqlanadi?
4. Fazoviy kuchlar sistemasining muvozanat sharti nimadan iborat?
5. Fazoviy kuchlar sistemasining muvozanat tenglamalari qanday tuziladi?
6. Fazoviy kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanat shartini yozing.
7. Fazoviy parallel kuchlar sistemasining muvoznat shartini yozing.

72-§. Talabalar tomonidan mustaqil bajariladigan hisob chizma ishlari variantlari

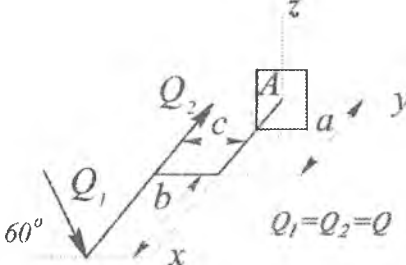
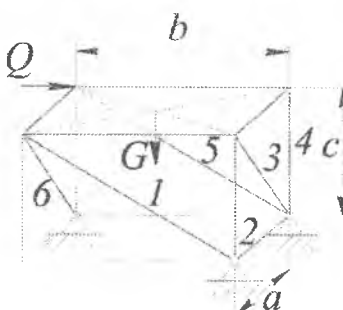
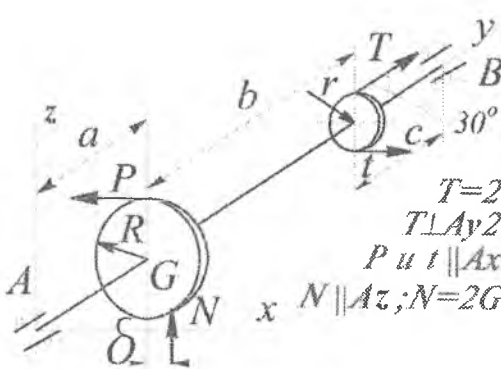
Chizmalarda berilgan fazoviy kuchlar ta'siridagi konstruksiyaning tayanch reaksiyalari aniqlansin. Hisoblash uchun kerakli ma'lumotlar variantlar chizmalarida ko'rsatilgan.


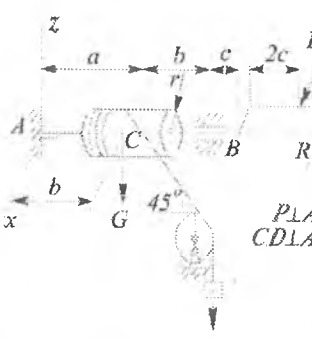
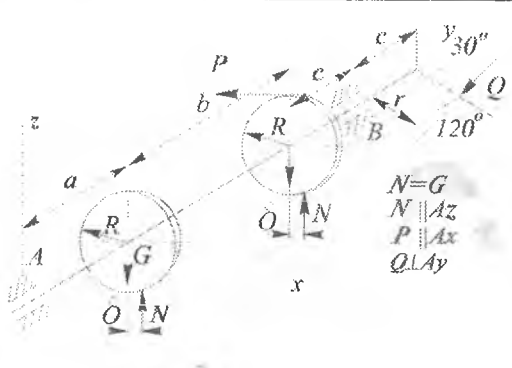
Variant raqamlari	Konstruksiyaning sxemalari	Hisoblash uchun zarur bo'lgan ma'lumotlar
1	2	3
1.		<p> $Q = 5 \text{ kN}$, $G = 2 \text{ kN}$, $CD \perp Ax$, $P \perp Ax$. </p>
2.		<p> $G = 1 \text{ kN}$, $a = 20 \text{ sm}$, $b = 60 \text{ sm}$, $c = 40 \text{ sm}$, $CD \parallel Ay$. </p>
3.		<p> $Q = 2 \text{ kN}$, $a = 40 \text{ sm}$, $b = 60 \text{ sm}$, $c = 30 \text{ sm}$. </p>

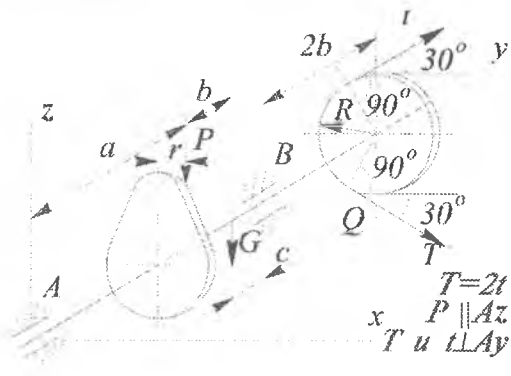
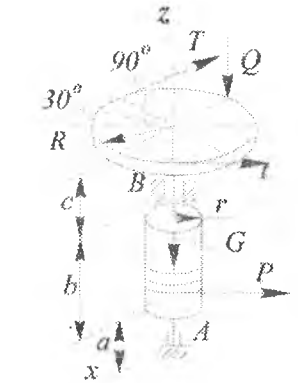
1	2	3
4.		$Q = 1 \text{ kN},$ $T = 4 \text{ kN},$ $G = 2 \text{ kN},$ $a = 40 \text{ sm},$ $b = 30 \text{ sm},$ $c = 20 \text{ sm},$ $R = 20 \text{ sm},$ $r = 10 \text{ sm}.$
5.		$Q = 20 \text{ kN},$ $G = 18 \text{ kN},$ $a = 200 \text{ sm},$ $b = 400 \text{ sm},$ $c = 450 \text{ sm}.$
6.		$Q = 3 \text{ kN},$ $G = 2 \text{ kN},$ $a = 60 \text{ sm},$ $b = 20 \text{ sm},$ $c = 40 \text{ sm},$ $R = 20 \text{ sm},$ $r = 5 \text{ sm},$ $\vec{Q} \perp Ay,$ $CD \perp Ay.$

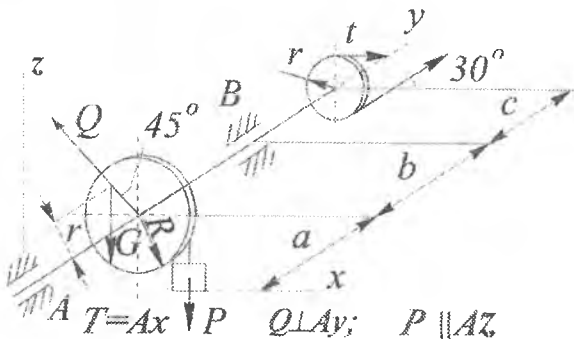
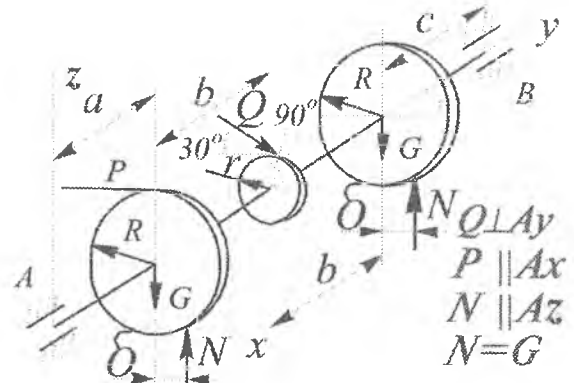
1	2	3
7.		$Q = 6 \text{ kN},$ $G = 2 \text{ kN},$ $a = 60 \text{ sm},$ $b = 40 \text{ sm},$ $c = 60 \text{ sm},$ $CD \perp Bx,$ $Q \parallel Bx.$
8.		$G = 5 \text{ kN},$ $a = 20 \text{ sm},$ $b = 50 \text{ sm},$ $c = 30 \text{ sm},$ $CD \perp Ay.$
9.		$G = 4 \text{ kN},$ $a = 40 \text{ sm},$ $b = 60 \text{ sm},$ $c = 30 \text{ sm},$ $Q \parallel Ay,$ $CD \perp Ay.$

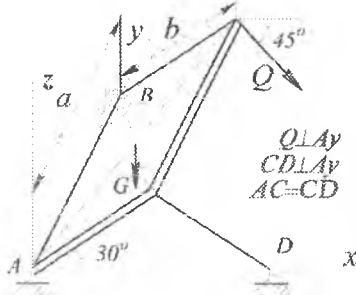
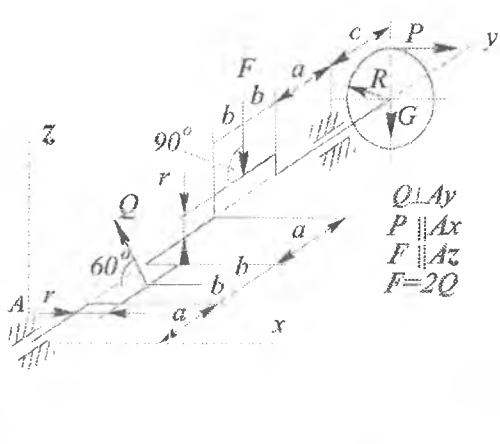
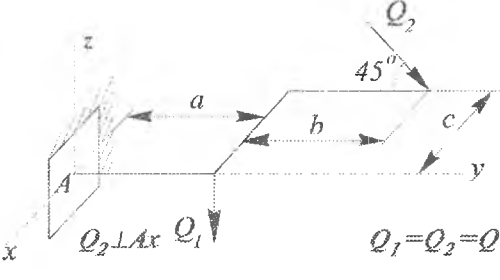
1	2	3
10.		$G = 4 \text{ kN}$, $a = 60 \text{ sm}$, $b = 40 \text{ sm}$, $c = 20 \text{ sm}$, $\vec{Q} \perp Ay$, $CD \perp Ay$.
11.		$Q = 2 \text{ kN}$, $G = 20 \text{ kN}$, $a = 20 \text{ sm}$, $b = 30 \text{ sm}$, $c = 10 \text{ sm}$, $R = 15 \text{ sm}$, $r = 5 \text{ sm}$, $\vec{P} \parallel Ax$, $CD \perp Ay$.
12.		$G = 3 \text{ kN}$, $a = 50 \text{ sm}$, $b = 50 \text{ sm}$, $c = 60 \text{ sm}$, $CD \parallel Ax$.

1	2	3
13.	 <p style="text-align: center;">$Q_1 = Q_2 = Q$</p>	<p> $Q = 10 \text{ kN},$ $a = 50 \text{ sm},$ $b = 30 \text{ sm},$ $c = 50 \text{ sm},$ $\vec{Q} \perp Ax,$ $Q_1 = Q_2 = Q.$ </p>
14.		<p> $Q = 35 \text{ kN},$ $G = 32 \text{ kN},$ $a = 400 \text{ sm},$ $b = 200 \text{ sm},$ $c = 200 \text{ sm}.$ </p>
15.	 <p style="text-align: center;"> $T = 2$ $T \perp Ay^2$ $P \parallel Ax$ $N \parallel Az; N = 2G$ </p>	<p> $T = 2 \text{ kN},$ $G = 1 \text{ kN},$ $a = 20 \text{ sm},$ $b = 30 \text{ sm},$ $c = 15 \text{ sm},$ $R = 15 \text{ sm},$ $r = 10 \text{ sm},$ $e = 5 \cdot 10^{-3} R,$ $T = 2t, \vec{T} \perp Ay,$ $\vec{P}, \vec{t} \parallel Ax,$ $\vec{N} \parallel Az, N = 2G.$ </p>

1	2	3
16.	 <p> $T = 2r$ $T \parallel t$ $CD \perp Az$ $T \parallel Ax$ 30° </p>	<p> $T = 2 \text{ kN}$, $G = 1 \text{ kN}$, $a = 30 \text{ sm}$, $b = 90 \text{ sm}$, $c = 20 \text{ sm}$, $R = 30 \text{ sm}$, $r = 10 \text{ sm}$. </p>
17.	 <p> $P \perp Ax$ $CD \perp Ax$ 60° 45° </p>	<p> $Q = 4 \text{ kN}$, $G = 1 \text{ kN}$, $a = 25 \text{ sm}$, $b = 20 \text{ sm}$, $c = 8 \text{ sm}$, $R = 15 \text{ sm}$, $r = 10 \text{ sm}$. </p> <p> $\vec{P} \perp Ax$, $CD \perp Ax$. </p>
18.	 <p> $N = G$ $N \parallel Az$ $P \parallel Ax$ $Q \perp Ay$ 30° 120° </p>	<p> $Q = 5 \text{ kN}$, $G = 3 \text{ kN}$, $a = 30 \text{ sm}$, $b = 40 \text{ sm}$, $c = 20 \text{ sm}$, $R = 20 \text{ sm}$, $r = 15 \text{ sm}$, $d = 5 \cdot 10^{-3} R$, $N = G$, $\vec{N} \parallel Az$, $\vec{P} \parallel Ax$, $\vec{Q} \perp Ay$. </p>

1	2	3
19.	 <p> $T = 2t$ $P \parallel Az$ $T \perp Ay$ </p>	$Q = 3 \text{ kN},$ $G = 1 \text{ kN},$ $a = 30 \text{ sm},$ $b = 10 \text{ sm},$ $c = 5 \text{ sm},$ $R = 18 \text{ sm},$ $r = 6 \text{ sm},$ $d = 5 \cdot 10^{-3} R,$ $N = G,$ $\vec{N} \parallel Az,$ $\vec{P} \parallel Ax,$ $\vec{Q} \perp Ay.$
20.	 <p> $T = 2t$ $T \parallel Ay$ $T \perp Az$ $P \parallel Ay$ </p>	$Q = 4 \text{ kN},$ $T = 6 \text{ kN},$ $G = 3 \text{ kN},$ $a = 20 \text{ sm},$ $b = 40 \text{ sm},$ $c = 15 \text{ sm},$ $R = 20 \text{ sm},$ $r = 10 \text{ sm},$ $T = 2 t,$ $\vec{t} \parallel Ay, \vec{P} \parallel Ay,$ $\vec{T} \perp Az.$

1	2	3
21.	 <p> $T \parallel Ax$, $Q \perp Ay$; $P \parallel Az$ </p>	<p> $Q = 1 \text{ kN}$, $T = 4 \text{ kN}$, $G = 2 \text{ kN}$, $a = 30 \text{ sm}$, $b = 40 \text{ sm}$, $c = 20 \text{ sm}$, $R = 20 \text{ sm}$, $r = 10 \text{ sm}$, $T = 2t$, $\vec{T} \perp Ay$, $\vec{t} \parallel Ax$, $\vec{Q} \perp Ay$, $\vec{P} \parallel Az$. </p>
22.	 <p> $Q \perp Ay$, $P \parallel Ax$, $N \parallel Az$, $N = G$ </p>	<p> $Q = 10 \text{ kN}$, $G = 5 \text{ kN}$, $a = 40 \text{ sm}$, $b = 30 \text{ sm}$, $c = 20 \text{ sm}$, $R = 25 \text{ sm}$, $r = 15 \text{ sm}$, $d = 5 \cdot 10^{-3} R$, $Q \perp Ay$, $N = G$, $\vec{P} \parallel Ax$, $\vec{N} \parallel Az$. </p>

1	2	3
23.	 <p style="text-align: center;"> $Q \perp Ay$ $CD \perp Ay$ $AC = CD$ </p>	<p> $Q = 4 \text{ kN}$, $G = 2 \text{ kN}$, $a = 50 \text{ sm}$, $b = 30 \text{ sm}$, $\bar{Q} \perp Ay$, $CD \perp Ay$, $Ac = CD$. </p>
24.	 <p style="text-align: center;"> $Q \perp Ay$ $P \parallel Ax$ $F \parallel Az$ $F = 2Q$ </p>	<p> $Q = 2 \text{ kN}$, $G = 1 \text{ kN}$, $a = 15 \text{ sm}$, $b = 10 \text{ sm}$, $c = 20 \text{ sm}$, $R = 20 \text{ sm}$, $r = 5 \text{ sm}$, $\bar{Q} \perp Ay$, $\bar{P} \parallel Az$, $\bar{F} \parallel Az$, $\bar{F} = 2Q$. </p>
25.	 <p style="text-align: center;"> $Q_2 \perp Ax$ Q_1 $Q_1 = Q_2 = Q$ </p>	<p> $Q = 5 \text{ kN}$, $a = 40 \text{ sm}$, $b = 40 \text{ sm}$, $c = 10 \text{ sm}$, $\bar{Q}_1 = \bar{Q}_2$, $\bar{Q}_2 \perp Ax$. </p>

1	2	3
26.	<p>$Q \perp Ay; CD \perp Ax; P \parallel Ax$</p>	$Q = 4 \text{ kN},$ $G = 2 \text{ kN},$ $a = 20 \text{ sm},$ $b = 10 \text{ sm},$ $c = 30 \text{ sm},$ $R = 10 \text{ sm},$ $r = 10 \text{ sm},$ $\bar{Q} \perp Ay,$ $CD \perp Ax,$ $\bar{P} \parallel Ax.$
27.	<p>$Q \perp Ay; P \parallel Ax; CD \perp Ax$</p>	$Q = 5 \text{ kN},$ $G = 3 \text{ kN},$ $a = 20 \text{ sm},$ $b = 15 \text{ sm},$ $c = 10 \text{ sm},$ $R = 30 \text{ sm},$ $r = 40 \text{ sm},$ $\bar{Q} \perp Ay,$ $\bar{P} \parallel Ax,$ $CD \perp Ax.$

1	2	3
28.		<p> $Q = 3 \text{ kN}$, $G = 2 \text{ kN}$, $a = 30 \text{ sm}$, $b = 20 \text{ sm}$, $c = 40 \text{ sm}$, $R = 15 \text{ sm}$, $r = 10 \text{ sm}$, $\vec{P} \perp Ay, Q \perp Ay$. </p>
29.		<p> $T = 8 \text{ kN}$, $G = 2 \text{ kN}$, $a = 20 \text{ sm}$, $b = 30 \text{ sm}$, $c = 40 \text{ sm}$, $R = 20 \text{ sm}$, $r = 15 \text{ sm}$, $\vec{T}, \vec{i} \perp Az$, $\vec{P} \parallel Ax, CD \perp Ax$, $T = 2 t$. </p>
30.		<p> $T = 4 \text{ kN}$, $G = 3 \text{ kN}$, $a = 15 \text{ sm}$, $b = 20 \text{ sm}$, $c = 15 \text{ sm}$, $R = 15 \text{ sm}$, $r = 10 \text{ sm}$, $T = 2 t, \vec{i} \perp Az$, $CD \perp \vec{T}, Ax$. </p>

PARALLEL KUCHLAR MARKAZI VA OG'IRLIK MARKAZI

73-§. Parallel kuchlar markazi, uning radius-vektori hamda koordinatalarini aniqlash

Parallel kuchlar markazi tushunchasidan mexanikada qattiq jismning og'irlik markazini aniqlashda foydalaniladi. Har qanday qattiq jism juda kichik zarrachalardan tashkil topgan bo'lib, ularga vertikal pastga yo'nalgan Yerga tortish kuchi ta'sir etadi.

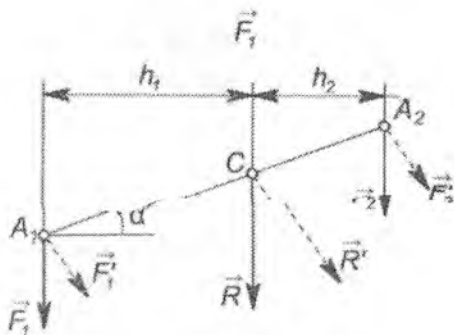
Statika bo'limida o'rganiladigan jismlarning o'lchamlari Yerning radiusiga nisbatan juda kichik bo'lgani uchun jismning zarralariga ta'sir etadigan og'irlik kuchini parallel kuchlar deb qarash mumkin. Shuning uchun bu bobda bir tomonga yo'nalgan parallel kuchlar markazini aniqlaymiz.

Buning uchun parallel kuchlarni ketma-ket qo'shish usulidan foydalanamiz.

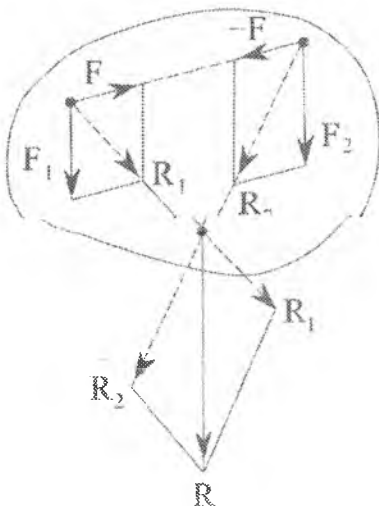
Dastavval qattiq jismning A_1 va A_2 nuqtalariga qo'yilgan parallel \vec{F}_1 va \vec{F}_2 kuchlarning teng ta'sir etuvchisini aniqlaymiz. Ma'lumki, tekislikda joylashgan bunday kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ ga teng bo'lib, kuchlar qo'yilgan nuqtalarni bir-lashtiruvchi A_1A_2 kesmaning C nuqtasiga qo'yilgan bo'ladi. C nuqta A_1A_2 kesmani kuchlar miqdoriga teskari mutanosib qismlarga ajratadi (73.1-a rasm).

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{A_2C}{A_1C}. \quad (73.1)$$

(73.1) ifodada kuchlar miqdorlari qatnashadi. Shuning uchun agar \vec{F}_1 va \vec{F}_2 kuchlarni A_1 va A_2 nuqtalar atrofida, bir yo'nalishda biror α burchakka bursak, kuchlarning teng ta'sir etuvchisi ham mos ravishda α burchakka buriladi, kuch qo'yilgan nuqtaning holati esa o'zgarmaydi.



73.1-a rasm

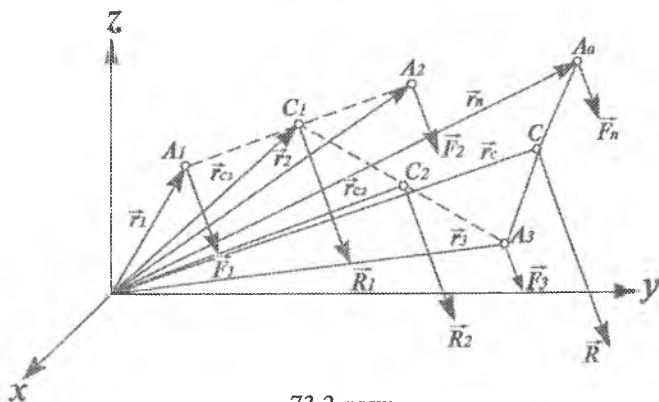


73.1-b rasm

Bunday holda ham, (73.1) ifoda o‘rinli bo‘ladi C nuqta \vec{F}_1 va \vec{F}_2 kuchlarning markazi deyiladi.

Parallel kuchlarni qo‘shishning sodda ko‘rinishi 73.1-b rasmda ko‘rsatilgan. Bu usulda parallel kuchlarni qo‘shish bir nuqtada kesishuvchi kuchlarni qo‘shishga keltiriladi:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$



73.2-rasm

Endi qattiq jismning A_1, A_2, \dots, A_n nuqtalariga qo'yilgan, parallel va bir tomonga yo'nalgan $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlarning teng ta'sir etuvchisini aniqlaymiz (73.2-rasm). Bunday kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisining moduli

$$R = \sum_{i=1}^n F_i \quad (73.2)$$

ga teng bo'lib, kuchlarga parallel yo'naladi. Uning qo'yilgan nuqtasi C ning koordinatalarini aniqlaymiz. Buning uchun $Oxyz$ koordinatalar sistemasida A_1, A_2, \dots, A_n nuqtalarning radius-vektorlarini $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ bilan belgilaymiz. Dastavval \vec{F}_1 va \vec{F}_2 kuchlarni qo'shamiz:

$$R_1 = F_1 + F_2. \quad (73.3)$$

R_1 qo'yilgan C_1 nuqtaning radius vektori \vec{r}_{C_1} ni aniqlashda (73.1)dan foydalanamiz:

$$\frac{F_1}{C_1 A_2} = \frac{F_2}{C_1 A_1}. \quad (73.4)$$

Rasmdan:

$$\overline{A_1 C_1} = \vec{r}_{C_1} - \vec{r}_1, \quad (73.5)$$

$$\overline{A_2 C_1} = \vec{r}_2 - \vec{r}_{C_1}.$$

(73.5)ni (73.4)ga qo'ysak, \vec{R}_1 kuch qo'yilgan C_1 nuqtaning radius-vektori quyidagicha aniqlanadi:

$$\vec{r}_{C_1} = \frac{F_1 \vec{r}_1 + F_2 \vec{r}_2}{F_1 + F_2}. \quad (73.6)$$

\vec{R}_1 kuch \vec{F}_1 va \vec{F}_2 kuchlarga parallel yo'naladi.

Shu usul bilan n ta parallel kuchlarni qo'shsak, ularning teng ta'sir etuvchisini qo'yilish nuqtasining radius vektori \vec{r}_C quyidagicha aniqlanadi:

$$\vec{r}_C = \frac{F_1\vec{r}_1 + F_2\vec{r}_2 + \dots + F_n\vec{r}_n}{F_1 + F_2 + \dots + F_n} = \frac{\sum F_i\vec{r}_i}{\sum F_i}. \quad (73.7)$$

C nuqta berilgan parallel kuchlar markazini ifodalaydi.

\vec{r}_C va \vec{r}_i vektorlarning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini mos ravishda $x_C, y_C, z_C, x_i, y_i, z_i$ orqali belgilasak, parallel kuchlar markazining koordinatalarini aniqlaydigan quyidagi ifodalarga ega bo'lamiz:

$$\left. \begin{aligned} X_C &= \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i}{\sum_{i=1}^n F_i}, \\ Y_C &= \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_i}{\sum_{i=1}^n F_i}, \\ Z_C &= \frac{\sum_{i=1}^n F_i z_i}{\sum_{i=1}^n F_i}. \end{aligned} \right\} \quad (73.8)$$

(73.7) va (73.8) ifodalardan ko'rinib turibdiki, *parallel kuchlar teng ta'sir etuvchisi qo'yilgan C nuqta — parallel kuchlar markazining holati kuchlarning yo'nalishiga bog'liq bo'lmay, faqat ularning miqdoriga va qo'yilgan nuqtalarining koordinatalariga bog'liq bo'lar ekan.* Agar kuchlar qo'yilgan nuqtalarni o'zgartirmay, kuchlar uchlarini biror α burchakka bursak, kuchlarning teng ta'sir etuvchisi ham shu burchakka burilib, uning qo'yilish nuqtasining holati esa o'zgarmas bo'lar ekan.

74-§. Qattiq jismning og'irlik markazi

Qattiq jismning har bir zarrachasiga ta'sir etuvchi Yerning markaziga yo'nalgan tortish kuchini parallel kuchlar deb qarash mumkinligi tufayli, bu kuchlarning markazi — C nuqta jismning og'irlik markazini ifodalaydi. Shuning uchun jismning og'irlik markazining koordinatalarini aniqlashda (73.8)da F_i kuchlarning o'rniga G_i kuchlarni qo'yish lozim:

$$x_c = \frac{\sum G_i x_i}{\sum G_i}, \quad y_c = \frac{\sum G_i y_i}{\sum G_i}, \quad z_c = \frac{\sum G_i z_i}{\sum G_i}. \quad (74.1)$$

Bu formulada $G = \sum G_i$ jismning og'irligini ifodalaydi.

Jism bir jinsli bo'lsa, og'irlik markazi uning qanday materialdan tashkil topganiga bog'liq bo'lmay, faqat geometrik shakliga bog'liq bo'ladi. Mazkur bobda bir jinsli jismlarning og'irlik markazini aniqlash masalalari o'rganiladi.

Jismning og'irliq markazi geometrik aniq nuqtadan iborat bo'lib, bu nuqta jismga taalluqli bo'lmashligi ham mumkin. Masalan, R_1 va R_2 radiusli aylanalar bilan chegaralangan sirt og'irlik markazi aylanalar markazida yotadi va sirtga taalluqli bo'lmaydi. (74.1) formuladan foydalanib, hajmga ega bo'lgan bir jinsli jismning og'irlik markazining koordinatalarini aniqlaymiz. Bunda og'irligi G bo'lgan jism V hajmga ega deb qaraladi. Og'irligi ΔG_i bo'lgan bo'lakcha hajmi ΔV_i ga teng bo'ladi. Agar jismning solishtirma (hajm birligiga to'g'ri keladigan) og'irligini γ bilan belgilasak,

$$G_i = \gamma \Delta V_i \quad (74.2)$$

bo'ladi. Buni e'tiborga olsak, (74.1)ga asosan, hajmga ega bo'lgan bir jinsli jism og'irlik markazining koordinatalari uchun quyidagi ifodalarga ega bo'lamiz:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta V_i \cdot x_i}{V}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta V_i \cdot y_i}{V}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta V_i \cdot z_i}{V}. \quad (74.3)$$

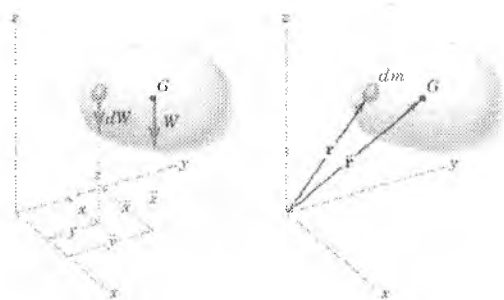
(74.3)dan cheksizlikka intilsa, ΔV_i nolga intiladi.

U holda yig'indilarning limiti hajm bo'yicha olingan aniq integralni ifodalaydi:

$$x_c = \frac{\int_{(V)} x dV}{V}, \quad y_c = \frac{\int_{(V)} y dV}{V}, \quad z_c = \frac{\int_{(V)} z dV}{V}. \quad (74.4)$$

Bu formulada $V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i$ butun jism hajmini ifodalaydi.

74.1-rasmda hajmga ega bo'lgan bir jinsli jism og'irlik markazining koordinatalari ko'rsatilgan. Rasmda dw jism elementar zarrachasining hajmi, w — jism hajmi.



74.1-rasm

Sirt og'irlik markazining koordinatalari ham yuqoridagidek aniqlanadi:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta S_i \cdot x_i}{S}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta S_i \cdot y_i}{S}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta S_i \cdot z_i}{S} \quad (74.5)$$

yoki

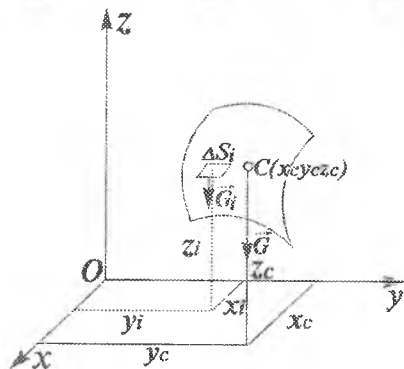
$$x_c = \frac{\int_{(S)} x ds}{S}, \quad y_c = \frac{\int_{(S)} y ds}{S}, \quad z_c = \frac{\int_{(S)} z ds}{S}. \quad (74.5)$$

Bunda, $S = \sum \Delta S_i$ butun sirt yuzasini, ΔS_i sirt biror bo'lagining yuzasini, x_i, y_i, z_i lar esa sirt bo'laklari og'irlik markazining koordinatalarini ifodalaydi (74.2-rasm). *Chiziqning og'irlik markazi quyidagicha aniqlanadi:*

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta L_i \cdot x_i}{L}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta L_i \cdot y_i}{L}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta L_i \cdot z_i}{L} \quad (74.7)$$

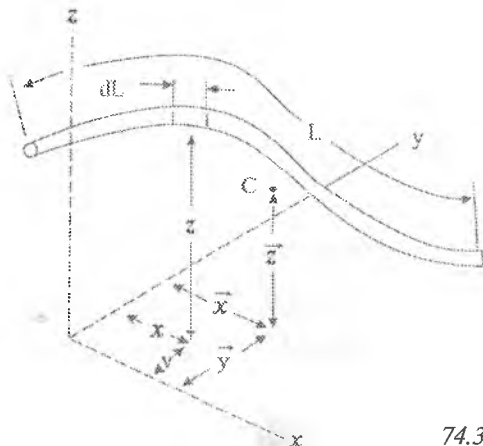
yoki

$$x_c = \frac{\int_{(L)} x dL}{L}, \quad y_c = \frac{\int_{(L)} y dL}{L}, \quad z_c = \frac{\int_{(L)} z dL}{L}. \quad (74.8)$$



74.2-rasm

Bunda, $L = \sum \Delta L_i$ butun chiziqning uzunligini, ΔL_i chiziq biror bo'lagining uzunligini, x_i, y_i, z_i lar esa shu bo'lak og'irlik markazining koordinatalarini ifodalaydi (74.3-rasm).



74.3-rasm

75-§. Qattiq jismning og'irlik markazini aniqlash usullari

Qattiq jismning og'irlik markazini aniqlashning quyidagi usullari mavjud:

1. Simmetriya usuli.

Bu usul quyidagi teoremda o'z ifodasini topgan.

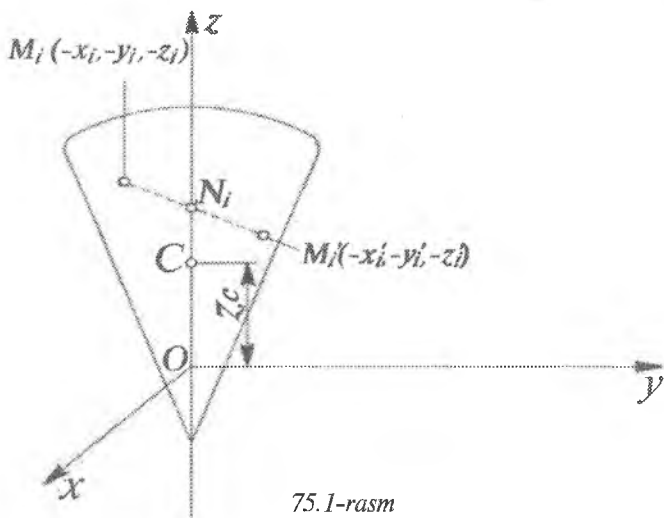
Teorema: simmetriya o'qiga ega bo'lgan bir jinsli jismning og'irlik markazi simmetriya o'qida yotadi.

Isboti: simmetriya o'qiga ega bo'lgan bir jinsli jism berilgan bo'lsin (75.1-rasm). Oz o'qini jismning simmetriya o'qi bilan ustma-ust tushiramiz va jism og'irlik markazining koordinatalari x_c , y_c va

z_c larni $x_c = \frac{\sum \Delta V_i \cdot x_i}{V}$, $y_c = \frac{\sum \Delta V_i \cdot y_i}{V}$, $z_c = \frac{\sum \Delta V_i \cdot z_i}{V}$ formulalar yordamida aniqlaymiz.

Jismda simmetriya o'qi Oz ga nisbatan simmetrik joylashgan M_i va M'_i nuqtalarni tanlab, bu nuqtalar atrofida bir xil elementar hajmga ega bo'lgan bo'lakchalarni olamiz. M_i va M'_i nuqtalar simmetriya o'qiga perpendikular bo'lgan chiziqda simmetriya o'qidan bir xil masofada joylashadi (75.1-rasm):

$$M_i N_i = M'_i N_i.$$



75.1-rasm

Shuning uchun bu nuqtalarning x_i, y_i koordinatalari miqdor jihatdan teng bo'lib, qarama-qarshi ishoralarga ega bo'ladi.

Agar jismni o'zaro teng va simmetrik joylashgan bo'laklarga bo'lib, $\Delta V_i \cdot x_i$ ko'paytmani tuzsak, bir juft nuqtalarga taalluqli ko'paytmalarning yig'indisi, yuqorida keltirilgan xulosaga asosan, nolga teng bo'ladi:

$$\Delta V_i \cdot x_i + \Delta V'_i \cdot x'_i = 0 \quad (75.1)$$

yoki

$$\sum \Delta V_i \cdot x_i = 0.$$

Xuddi shunday mulohazalar asosida quyidagi ifodani ham yozish mumkin:

$$\Delta V_i \cdot y_i + \Delta V''_i \cdot y''_i = 0 \quad (75.2)$$

yoki

$$\sum \Delta V_i \cdot y_i = 0.$$

Hosil bo'lgan ifodalarni $x_c = \frac{\sum \Delta V_i \cdot x_i}{V}$, $y_c = \frac{\sum \Delta V_i \cdot y_i}{V}$, $z_c = \frac{\sum \Delta V_i \cdot z_i}{V}$ ga qo'ysak,

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta V_i \cdot x_i}{V} = 0, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta V_i \cdot y_i}{V} = 0, \quad z_c = \frac{\sum \Delta V_i \cdot z_i}{V} = 0 \quad (75.3)$$

ifodalar kelib chiqadi.

Modomiki, $x_c=0$, $y_c=0$ ekan, jismning og'irlik markazi simmetriya o'qi bo'lgan o'z o'qida yotar ekan va uning o'rni yagona

$$z_c = \frac{\sum \Delta V_i \cdot z_i}{V} \quad (75.4)$$

koordinata orqali aniqlanar ekan.

Binobarin, *simmetriya o'qiga ega bo'lgan bir jinsli jismning og'irlik markazi simmetriya o'qida yotadi*. Bu teoremani simmetriya o'qiga ega bo'lgan bir jinsli yassi sirt yoki chiziqqa tatbiq etsak, ularning og'irlik markazi ham simmetriya o'qida yotishi isbotlanadi.

Isbotlangan teorema asosida quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin:

a) to'g'ri chiziq kesmasining og'irlik markazi uning o'rtasida yotadi;

b) aylana, doira yuzasi, shar sirti va hajmining og'irlik markazi uning simmetriya nuqtasi — geometrik markazi bilan ustma-ust tushadi;

d) parallelogramm, romb, to'rtburchak, kvadrat perimetri va sirtining og'irlik markazi ularning diagonallarining kesishgan nuqtasida yotadi;

e) teng tomonli ko'pburchak perimetri va sirtining og'irlik markazi ko'pburchak tashqarisi va yoki ichkarisida chizilgan aylananing markazida yotadi.

2. Bo'laklarga ajratish usuli.

Agar jismni og'irlik markazi aniq yoki uni oson aniqlash mumkin bo'lgan bir necha (chekli) bo'laklarga ajratish mumkin bo'lsa, bunday jismning og'irlik markazini aniqlashda, bo'laklarga ajratish usulidan foydalanish qulay bo'ladi.

Bu usulda hajmga ega bo'lgan jism, yassi jism va chiziqning og'irlik markazi $x_c = \frac{\sum \Delta V_i \cdot x_i}{V}$, $y_c = \frac{\sum \Delta V_i \cdot y_i}{V}$, $z_c = \frac{\sum \Delta V_i \cdot z_i}{V}$;

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta S_i \cdot x_i}{S}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta S_i \cdot y_i}{S}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta S_i \cdot z_i}{S}; \quad x_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta l_i \cdot x_i}{L},$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta l_i \cdot y_i}{L}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta l_i \cdot z_i}{L}$$

formulalar asosida aniqlanadi. Bunda formulalardagi qo'shiluvchilar soni ajratilgan bo'laklar soniga teng bo'ladi.

3. Manfiy yuza usuli.

Bu usul bo'laklarga ajratish usulining xususiy holi bo'lib, jismning ma'lum qismlari qirqib olinganda jismning og'irlik markazini aniqlash usuli hisoblanadi. Bu usulda jismni qirqilmagan yaxlit jism va qirqib

olingan jismlardan iborat deb qarash mumkin. Bunda qirqib olingan bo'laklarning hajmi, yuzasi shartli ravishda manfiy deb olinadi hamda og'irlik markazini aniqlashda

$$x_C = \frac{\sum \Delta V_i \cdot x_i}{V}, \quad y_C = \frac{\sum \Delta V_i \cdot y_i}{V}, \quad z_C = \frac{\sum \Delta V_i \cdot z_i}{V};$$

$$x_C = \frac{\sum \Delta S_i \cdot x_i}{V}, \quad y_C = \frac{\sum \Delta S_i \cdot y_i}{V}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta S_i \cdot z_i}{S}$$

formulalardan foydalaniladi.

4. Tajriba usuli.

Agar og'irlik markazini aniqlash lozim bo'lgan jism bir jinsli bo'lmasa, yoki murakkab shaklli bo'lsa, jismning og'irlik markazini aniqlashda quyidagi tajriba usullaridan foydalaniladi:

a) ipga osish usuli.

Bu usulda jism turli nuqtalaridan ipga osiladi. Jism ipning reaksiyasi \vec{N} va og'irlik kuchi \vec{G} ta'sirida muvozanatda bo'ladi. Og'irlik kuchi \vec{G} vertikal pastga yo'nalgani tufayli, ipning reaksiyasi vertikal yuqoriga yo'naladi. Ipning yo'nalishini davom ettirib, og'irlik kuchining ta'sir chizig'i belgilab olinadi. Shu tarzda ketma-ket turli nuqtalaridan ipga osish yo'li bilan aniqlab olingan og'irlik kuchini ta'sir chiziqlarining kesishgan nuqtasi C , berilgan jism og'irlik markazini ifodalaydi;

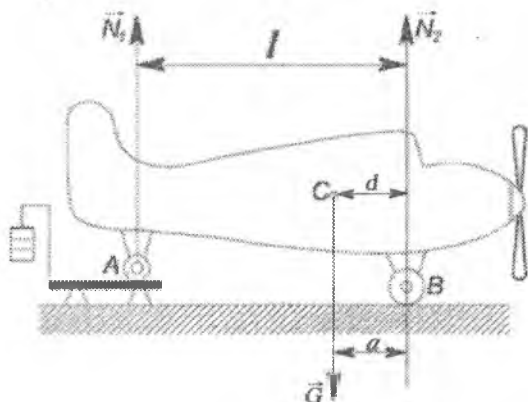
b) tarozida tortish usuli.

Bu usulda jism (samolyot, parovoz) xayolan ikki qismga bo'linadi va qismlaridan biridagi g'ildiraklar tarozi platformasiga qo'yiladi. Tortish yo'li bilan g'ildiraklarning tarozi platformasiga bosimi aniqlanadi. Aniqlangan bosim kuchi tarozi platformasining reaksiyasini ifodalaydi. Xuddi shu usul bilan ikkinchi qismdagi g'ildiraklarning tarozi platformasiga bosimi – tarozi platformasining reaksiyasi aniqlanadi.

Ma'lumki, bu reaksiya kuchlarining yig'indisi jism og'irligini ifodalaydi. Shuning uchun jism og'irligi aniq bo'lgan hollarda, tarozi platformasida ikkinchi tortishga zaruriyat bo'lmaydi. Jism og'irlik

markazini C nuqta orqali belgilab, barcha kuchlarning C nuqtaga nisbatan momentlarini nolga tenglashtiramiz. Hosil bo'lgan muvozanat tenglamasidan jism og'irlik markazining koordinatalaridan biri aniqlanadi.

Misol: samolyot og'irlik markazining koordinatalaridan biri aniqlansin (75.2-rasm) ($AB=l$).



75.2-rasm

Yechimi: samolyot A va B nuqtalarda g'ildiraklarga tayanadi. A g'ildirakni tarozi platformasiga qo'yib, tortish yo'li bilan, samolyot orqa qismining tarozi platformasiga bosimini aniqlaymiz. Bu bosim kuchi tarozi platformasining A nuqtadagi reaksiya kuchi \vec{N}_1 ni ifodalaydi.

Xuddi shu usul bilan samolyot old qismining tarozi platformasiga bosim kuchi — tarozi platformasining B nuqtadagi reaksiya kuchi \vec{N}_2 ham aniqlanadi. Samolyot og'irlik markazini C nuqta orqali belgilab, kuchlarning C nuqtaga nisbatan momentlarining yig'indisini nolga tenglashtiramiz (muvozanat tenglamalaridan biri tuziladi)

$$-N_1 \cdot (l-a) + N_2 a = 0.$$

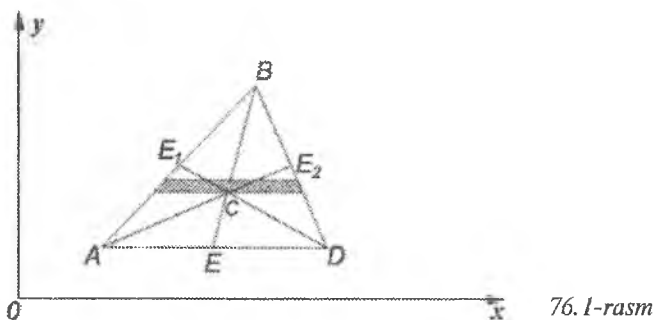
Bundan:

$$a = \frac{lN_1}{N_1 + N_2}.$$

76-§. Ba'zi bir jismlarning og'irlik markazi

1. Uchburchak yuzasining og'irlik markazi.

ABD uchburchak yuzasining og'irlik markazini aniqlash uchun uchburchakni AD tomoniga parallel bo'lgan kichik bo'laklarga ajratamiz (76.1-rasm). Bu bo'laklar har birining og'irlik markazi ularning o'rtasida yotadi. Bu nuqtalarning geometrik o'rni BE medianani tashkil etadi. Demak, bu bo'laklarning og'irlik markazi BE medianada yotadi.



Shu tarzda uchburchak yuzasini AB va BD tomonga parallel bo'laklarga ajratsak, ularning og'irlik markazi DE_1 va AE_2 medianalarda yotishi aniqlanadi. Binobarin, *uchburchak yuzasining og'irlik markazi uning medianalari kesishgan C nuqtada yotadi.*

Uchburchak yotgan tekislikda xoy tekislikni o'tkazib, uchburchak uchlarining koordinatalarini (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) orqali belgilasak, C nuqtaning koordinatalari quyidagi formulalar asosida aniqlanadi:

$$\begin{aligned}x_C &= \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \\ y_C &= \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3).\end{aligned}\quad (76.1)$$

Geometriyadan ma'lumki, medianalarning kesishgan nuqtasi asosdan mediananing $\frac{1}{3}$ qismida yotadi.

Shuning uchun:

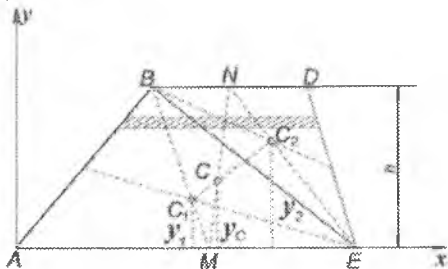
$$EC = \frac{1}{3} EB,$$

$$E_1C = \frac{1}{3} E_1D,$$

$$E_2C = \frac{1}{3} E_2A.$$

2. Trapetsiyaning og'irlik markazi.

Asoslari $AE = a$ va $BD = b$, balandligi h bo'lgan $ABDE$ trapetsiyaning og'irlik markazini aniqlash uchun trapetsiyani AE asosga parallel bo'laklarga ajratamiz (76.2-rasm). Bu bo'laklarning og'irlik markazi AE va BD asoslarning o'rtalarini tutashtiruvchi MN chiziqda yotadi.



76.2-rasm

Binobarin, trapetsiyaning og'irlik markazi ham shu chiziqda yotadi. Trapetsiya og'irlik markazining koordinatasi y_C ni aniqlash uchun trapetsiyani ABE va BED uchburchaklarga ajratamiz. Ularning yuzalarini S_1 va S_2 , og'irlik markazlarining AE asosdan masofalarini y_1 va y_2 orqali belgilasak, trapetsiya og'irlik markazining koordinatasi quyidagi formula asosida aniqlanadi:

$$y_C = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2}{S_1 + S_2}. \quad (76.2)$$

Bunda:

$$s_1 = \frac{ah}{2}, \quad s_2 = \frac{bh}{2},$$

$$y_1 = \frac{h}{3}, \quad y_2 = \frac{2h}{3}.$$

Natijada:

$$y_c = \frac{\frac{ah^2}{6} + \frac{2bh^2}{6}}{\frac{ah}{2} + \frac{bh}{2}} = \frac{h(a+2b)}{3(a+b)}. \quad (76.3)$$

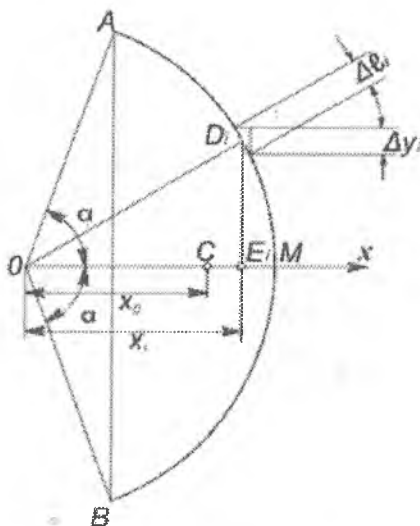
Shuni ta'kidlash lozimki, trapetsiyaning og'irlik markazini analitik usulda aniqlash uchun C nuqtaning bitta koordinatasini, masalan y_c ni aniqlash yetarli bo'ladi.

3. Aylana yoyining og'irlik markazi.

Radiusi R bo'lgan aylana AB yoyining og'irlik markazini aniqlash talab etilsin.

Aylana yoyining markazidan o'tuvchi OM radius AB yoyning simmetriya o'qi hisoblanadi. Shuning uchun AB yoyning og'irlik markazi shu radiusda yotadi. AB yoy markazidan og'irlik markazigacha bo'lgan OC masofani hisoblaymiz.

Buning uchun AB yoyini cheksiz ko'p elementar Δl_i bo'laklarga ajratamiz (76.3-rasm).



76.3-rasm

Koordinata boshi sifatida AB yoy markazini tanlab, x o'qini OM radius bo'ylab yo'naltiramiz. Δl_i elementar bo'lakcha markazining absissasini x_i orqali belgilab, $x_c = OC$ masofa uchun quyidagi ifodaga ega bo'lamiz:

$$x_c = \frac{\sum x_i \cdot \Delta l_i}{L}. \quad (76.4)$$

Bunda L — AB yoyning uzunligi.

Formula suratidagi ko'paytmani aniqlash uchun Δl_i elementar bo'lakchanning markazini D_i orqali va bu nuqtadan Ox o'qiga tushirilgan perpendikularning o'q bilan kesishgan nuqtasini E_i orqali belgilaymiz. Bunda $OE_i = x_i$.

Δl_i elementar bo'lakchanning boshi va oxiridan AB xordaga parallel va unga perpendikular bo'lgan ikki chiziq o'tkazamiz.

Natijada, tomonlaridan biri Δl_i bo'lgan kichik uchburchak hosil bo'ladi (Δl_i uzunligi cheksiz kichik bo'lganligi uchun uni to'g'ri chiziq bilan almashtiramiz).

Hosil bo'lgan uchburchak va OD_iE_i uchburchak tomonlari o'zaro perpendikular bo'lganligi uchun mazkur uchburchaklar o'xshash bo'ladi. Kichik uchburchakning AB vatarga parallel bo'lgan tomonini Δy_i orqali belgilasak, uchburchaklarning o'xshashligidan quyidagi ifoda kelib chiqadi:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta l_i} = \frac{OE_i}{OD_i} = \frac{x_i}{R}. \quad (76.5)$$

Bundan:

$$x_i \cdot \Delta l_i = R \cdot \Delta y_i. \quad (76.6)$$

Kichik uchburchaklarni AB aylana yoyi bo'yicha chizib, aylana yoyining og'irlik markazi quyidagi formula asosida aniqlanadi:

$$x_c = \frac{R}{L} \sum \Delta y_i. \quad (76.7)$$

Δy_i kesmalarning yig'indisi AB vatarining uzunligiga teng. Agar bu xordaning uzunligini S orqali belgilasak, aylana yoyi og'irlik markazining koordinatasi uchun quyidagi ifodaga ega bo'lamiz:

$$x_c = \frac{R}{L} s. \quad (76.8)$$

Agar rasmdagi $\angle AOB = 2\alpha$ desak,

$$L = 2R\alpha, \quad S = 2R \sin\alpha$$

bo'ladi.

Natijada:

$$x_c = \frac{R \sin\alpha}{\alpha}. \quad (76.9)$$

Agar bu formulani yarim aylana yoyiga tatbiq etsak, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ga teng bo'ladi. Shuning uchun yarim aylana og'irlik markazining koordinatasi uchun

$$x_c = \frac{R \sin\alpha}{\alpha} = \frac{2R}{\pi} \quad (76.10)$$

ifodaga ega bo'lamiz.

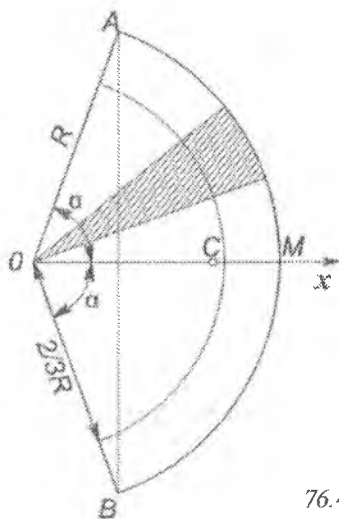
4. Doira sektorining og'irlik markazi.

Radiusi R ga, markaziy burchagi 2α ga teng doiraviy sektorning og'irlik markazini aniqlash talab etilsin (76.4-rasm). Buning uchun x o'qni sektor yuzining simmetriya o'qi bo'ylab yo'naltiramiz va sektor yuzasini bir qancha elementar sektorlar yuzalaridan tashkil topgan deb qaraymiz.

Agar har bir elementar sektorni balandligi R ga teng uchburchak deb qarasaq, uning og'irlik markazi O nuqtadan $\frac{2}{3}R$ masofada yotadi.

Binobarin, doira sektorining og'irlik markazi, radiusi $\frac{2}{3}R$ bo'lgan aylana yoyining og'irlik markazi bilan ustma-ust tushadi.

Shuning uchun:



76.4-rasm

$$x_c = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}. \quad (76.11)$$

Bu natijani yarim doira uchun tatbiq etsak, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ga teng bo'ladi.

Yarim doira sektori og'irlik markazining koordinatasi esa quyidagi formula asosida aniqlanadi:

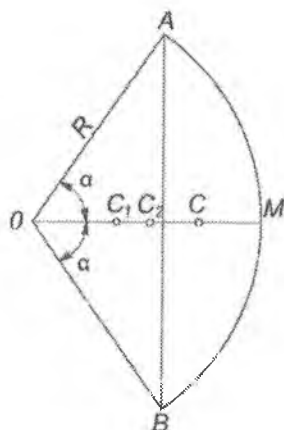
$$x_c = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{4R}{3\pi}. \quad (76.12)$$

5. Doiraviy segment yuzasining og'irlik markazi.

Radiusi R bo'lgan aylananing AMB yoyi va AB xorda bilan chegaralangan doiraviy segment yuzasining og'irlik markazini topish talab etilsin (76.5-rasm).

Aylana markazi O nuqtadan OA va OB radiuslarni o'tkazib, OAB doiraviy sektorni hosil qilamiz. AB xorda bu sektorni ikki qismga: yuzasining og'irlik markazini aniqlash lozim bo'lgan berilgan doiraviy segmentga va OAB uchburchakka ajratadi.

Segment og'irlik markazi C , uchburchak og'irlik markazi C_1 va sektor og'irlik markazi C_2 nuqtalar AB xordaga perpendikular bo'lgan OM radiusda yotadi. Aylana markazidan bu nuqtalargacha bo'lgan



77.5-rasm

masofalarni x, x_1, x_2 orqali belgilaymiz. U paytda sektor yuzasining og'irlik markazi geometrik figuralar og'irlik markazini aniqlashning bo'laklarga ajratish usuliga asosan quyidagicha aniqlanadi:

$$x_2 = \frac{S \cdot x + S_1 \cdot x_1}{S_2}. \quad (76.13)$$

Bunda: S – segment yuzasi, S_1 – uchburchak yuzasi, S_2 – sektor yuzasi. Bu ifodadan berilgan doiraviy segment yuzasi og'irlik markazining koordinatasi x uchun quyidagi ifoda kelib chiqadi:

$$x = \frac{S_2 \cdot x_2 - S_1 \cdot x_1}{S} = \frac{S_2 \cdot x_2 - S_1 \cdot x_1}{S_2 - S_1}. \quad (76.14)$$

Agar,

$$S_1 = R^2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad x_1 = \frac{2}{3} R \cos \alpha,$$

$$S_2 = R^2 \alpha, \quad x_2 = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad \text{bunda } \angle AOB = 2\alpha$$

ekanligini e'tiborga olsak, doiraviy segment og'irlik markazining koordinatasi uchun quyidagi ifodaga ega bo'lamiz:

$$x = \frac{\frac{2}{3} R^2 \sin \alpha - \frac{2}{3} R^2 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{R^2 \alpha - R^2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2}{3} R \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}. \quad (76.15)$$

77-§. Qattiq jismlarning og'irlik markazini aniqlash usullariga oid masalalarni yechish uchun uslubiy ko'rsatmalar

1. Bo'laklarga ajratish usuli.

Qattiq jismning og'irlik markazini aniqlashga doir masalalarni yechishda quyidagi sodda geometrik formaga ega bo'lgan qattiq jismlar og'irlik markazining koordinatalariga e'tibor berish lozim:

a) bir jinsli to'g'ri burchakli to'rtburchakning og'irlik markazi uning diagonallarining kesishish nuqtasida yotadi;

b) bir jinsli uchburchakning og'irlik markazi uning medianalarining kesishish nuqtasida yotadi;

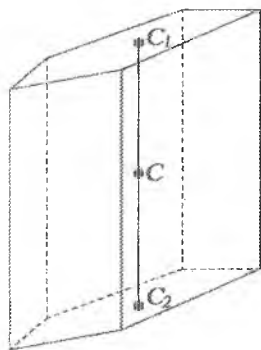
d) bir jinsli aylana yoyining og'irlik markazi uning simmetriya o'qida yotadi va quyidagi koordinatalarga ega bo'ladi:

$$x_c = R \frac{\sin a}{a}, \quad y_c = 0;$$

e) bir jinsli doiraviy sektor og'irlik markazi uning simmetriya o'qida yotadi va quyidagi koordinatalarga ega bo'ladi:

$$x_c = \frac{2}{3} R \frac{\sin a}{a}, \quad y_c = 0;$$

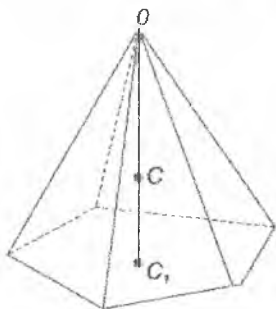
f) bir jinsli prizmaning og'irlik markazi pastki va ustki asoslari og'irlik markazini tutashtiruvchi to'g'ri chiziq o'rtasida yotadi (77.1-rasm);



77.1-rasm

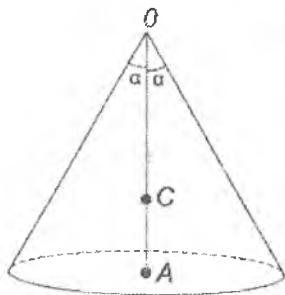
g) bir jinsli piramidaning og'irlik markazi piramida uchi va asosining og'irlik markazini birlashtiruvchi to'g'ri chiziq kesmasida,

piramida asosining og'irlik markazidan $C_1C = \frac{1}{4} C_1O$ masofa uzoqlikda yotadi (77.2-rasm).



77.2-rasm

h) bir jinsli doiraviy konus og'irlik markazi konus uchi va asosining og'irlik markazini birlashtiruvchi to'g'ri chiziq kesmasida, konus asosining og'irlik markazidan $AC = \frac{1}{4} AO$ masofa uzoqlikda yotadi (77.3-rasm).



77.3-rasm

Qattiq jismning og'irlik markazini aniqlashga doir masalalarni yechishda koordinata o'qlarini to'g'ri o'tkazish muhim ahamiyatga ega bo'ladi. Agar jism simmetriya tekisligiga ega bo'lsa, koordinata o'qlaridan birini, masalan, z o'qini, mazkur tekislikka perpendikular holda o'tkazish maqsadga muvofiq bo'ladi. Chunki bunda $z_c = 0$ bo'lib, faqat x_c va y_c larni aniqlash lozim bo'ladi. Agar jism simmetriya o'qiga ega bo'lsa, koordinata o'qlaridan birini, masalan x o'qini, mazkur o'q bo'ylab yo'naltirish maqsadga muvofiq bo'ladi. Chunki bunda $y_c = 0$ bo'lib, faqat x_c ni aniqlash lozim bo'ladi.

Mazkur qo‘llanmada, qattiq jismning og‘irlik markazini aniqlashda bo‘laklarga ajratish va manfiy yuzani qo‘shish usullaridan foydalanishga e‘tibor berilgan.

78-§. Qattiq jismning og‘irlik markazini aniqlashga doir masalalar

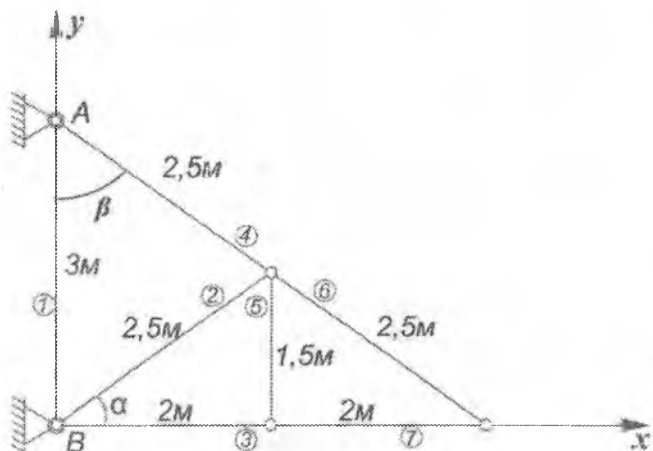
1-masala. Tekis ferma og‘irlik markazining koordinatalari topilsin: ferma yettita sterjendan tuzilgan bo‘lib, ularning uzunliklari rasmda ko‘rsatilgan. Hamma sterjenlar har bir metrining og‘irligi bir xil (78.1-rasm).

Yechish: tekis ferma og‘irlik markazining koordinatalari quyidagi formulalar asosida aniqlanadi:

$$x_C = \frac{\sum \ell_i \cdot x_i}{\sum \ell_i}, \quad (78.1)$$

$$y_C = \frac{\sum \ell_i \cdot y_i}{\sum \ell_i}. \quad (78.2)$$

bunda ℓ_i ferma i sterjenining uzunligi, x_i, y_i lar esa uning og‘irlik markazining koordinatalari.



78.1-rasm

Koordinata o'qlarini rasmdagidek o'tkazib, ferma sterjenlarining og'irlik markazining koordinatalarini aniqlaymiz va quyidagi jadvalni to'ldiramiz:

T.ř.	Sterjenlar uzunligi l_i (m)	x_i (m)	y_i (m)	$l_i x_i$	$l_i y_i$
1	3,0	0	1,5	0	4,5
2	2,5	$1,25 \cos \alpha = 1$	$1,25 \sin \alpha = 0,75$	2,5	1,88
3	2,0	1	0	2,0	0
4	2,5	$1,25 \sin \beta = 1$	$3 - 1,25 \cos \beta = 2,25$	2,5	5,63
5	1,5	2,0	0,75	3	1,13
6	2,5	$4 - 1,25 \cos \alpha = 3$	$1,25 \sin \alpha = 0,75$	7,5	1,88
7	2,0	3	0	6	0
	16			23,5	15,02

Jadvaldan foydalanib, tekis ferma og'irlik markazining koordinatalarini aniqlaymiz:

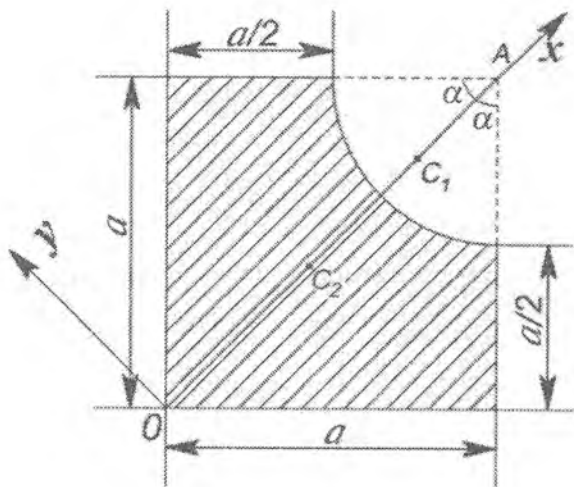
$$x_c = \frac{\sum l_i \cdot x_i}{\sum l_i} = \frac{23,5}{16} = 1,47 \text{ m}, \quad y_c = \frac{\sum l_i \cdot y_i}{\sum l_i} = \frac{15,02}{16} = 0,94 \text{ m}.$$

2-masala. Rasmda tasvirlangan jism yuzasining og'irlik markazining koordinatalari topilsin (78.2-rasm).

Yechish: masalada jism yuzasining bir qismi qirqib tashlangan. Bunday jism yuzasining og'irlik markazi manfiy yuzani qo'shish usuli bilan aniqlanadi. Jismni qirqilmagan to'g'ri burchakli to'rt-burchak va undan qirqib olingan doira sektoridan iborat deb qarash lozim. Bunda qirqilgan bo'lak yuzasi shartli ravishda manfiy ishora bilan olinadi.

O_x o'qini doira sektori yuzining simmetriya o'qi bo'ylab yo'naltirsak, doira sektorining og'irlik markazi shu o'qda yotadi va quyidagi formula asosida aniqlanadi:

$$x_{c1} = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$



78.2-rasm

Buni e'tiborga olsak,

$$x_1 = OA - x_{c_1} = a\sqrt{2} - \frac{2}{3}R \frac{\sin a}{a} = a\sqrt{2} \left(1 - \frac{2}{3p}\right).$$

Bu ifodada: R – doiraviy sektor radiusi, 2α – markaziy burchak, $\alpha = \pi/4 = 45^\circ$.

To'g'ri burchakli to'rtburchak og'irlik markazining koordinatasi quyidagiga teng bo'ladi:

$$x_{c_2} = \frac{OA}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Ox o'qi doiraviy sektor va to'g'ri burchakli to'rtburchak simmetriya o'qi bo'lganligi uchun $y_1 = 0$, $y_2 = 0$.

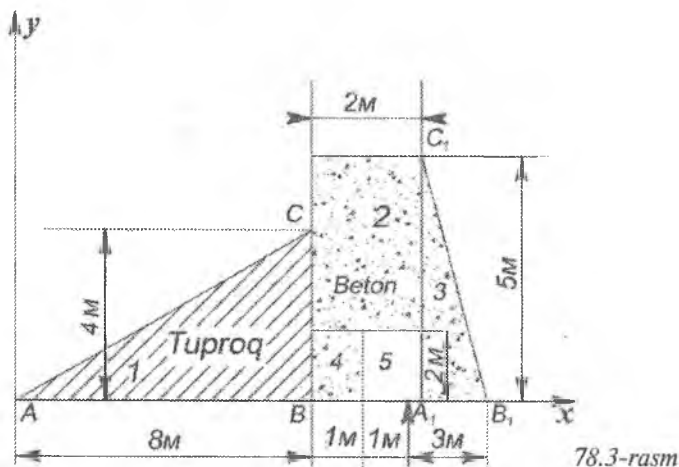
Shuning uchun jism yuzasi og'irlik markazining koordinatasi quyidagi formula asosida aniqlanadi:

$$x_2 = \frac{S_2 x_2 - S_1 x_1}{S_2 - S_1}.$$

Agar $S_2 = a^2$, $S_1 = \frac{\pi a^2}{16}$ ekanligini e'tiborga olsak,

$$\frac{a^3 \sqrt{2} - \pi a^3 \sqrt{2} \left(1 - \frac{2}{3\pi}\right) / 16}{-\pi a^2 / 16 + a^2} = 0,61a.$$

3-masala. Betonning solishtirma og'irligini $\rho_1 = 24 \text{ kN/m}^3$, tuproqnikini esa $\rho_2 = 16 \text{ kN/m}^3$ deb qabul qilib, rasmda ko'rsatilgan platina ko'ndalang kesim yuzasining og'irlik markazi topilsin (78.3-rasm).



Yechish: platina ko'ndalang kesim yuzasining og'irlik markazini aniqlash uchun manfiy yuzani qo'shish usulidan foydalanamiz. Platina ko'ndalang kesim yuzasini og'irlik markazi oson aniqlanadigan besh bo'lakka bo'lamiz, bularning yuzalari, og'irlik markazining koordinatalarini aniqlaymiz.

1. Uchburchak (tuproq):

$$S_1 = 8 \cdot 2 = 16 \text{ m}^2,$$

$$x_{c_1} = 8 \cdot \frac{8}{3} = 5,3 \text{ m},$$

$$Y_{c_1} = \frac{4}{3} = 1,33 \text{ m}.$$

2. To'rtburchak (beton):

$$S_2 = 2 \cdot 3 = 6 \text{ m}^2, \quad x_{c_2} = 8 + 1 = 9 \text{ m}, \quad y_{c_2} = 2 + 1,5 = 3,5 \text{ m}.$$

3. Uchburchak (beton):

$$S_3 = 3 \cdot 2,5 = 7,5 \text{ m}^2,$$

$$x_{c_3} = 10 + \frac{3}{3} = 11 \text{ m},$$

$$y_{c_3} = \frac{5}{3} = 1,7 \text{ m}.$$

4. To'rtburchak (beton):

$$S_4 = 1 \cdot 2 = 2 \text{ m}^2,$$

$$x_{c_4} = 8 + 0,5 = 8,5 \text{ m},$$

$$y_{c_4} = \frac{2}{2} = 1 \text{ m}.$$

5. To'rtburchak (qirqib olingan):

$$S_5 = (1 \cdot 2) = -2 \text{ m}^2,$$

$$x_{c_5} = 9 + 0,5 = 9,5 \text{ m},$$

$$y_{c_4} = \frac{2}{2} = 1 \text{ m}.$$

Platina qalinligi bir xil (birlik qalinlikka ega deb olindi).

Shuning uchun platina ko'ndalang kesim yuzasining og'irlik markazini aniqlashda x_c va y_c ifodalari qalinlik qisqaradi. Natijada, platina ko'ndalang kesim yuzasining og'irlik markazining koordinatalari uchun quyidagi formulalarga ega bo'lamiz (tuproq va beton solishtirma og'irliki e'tiborga olindi):

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\rho_1 s_1 \cdot 1 \cdot 5,3 + \rho_2 s_2 \cdot 1 x_{c_2} + \rho_2 s_3 \cdot 1 \cdot x_{c_3} + \rho_2 s_4 \cdot x_{c_4} \cdot 1 - s_5 \cdot 1 \cdot 9,5}{\rho_1 s_1 \cdot 1 + \rho_2 s_2 \cdot 1 + \rho_2 s_3 \cdot 1 + \rho_2 s_4 \cdot 1 - s_5 \cdot 1} = \\ &= \frac{16 \cdot 16 \cdot 5 \cdot 3 + 24 \cdot 6 \cdot 9 + 24 \cdot 7,5 \cdot 11 + 24 \cdot 2 \cdot 8,5 - 24 \cdot 2 \cdot 9,5}{16 \cdot 16 + 24 \cdot 6 + 24 \cdot 7,5 + 24 \cdot 2 - 24 \cdot 2} = \\ &= \frac{4593}{580} = 7,92 \text{ m}. \end{aligned}$$

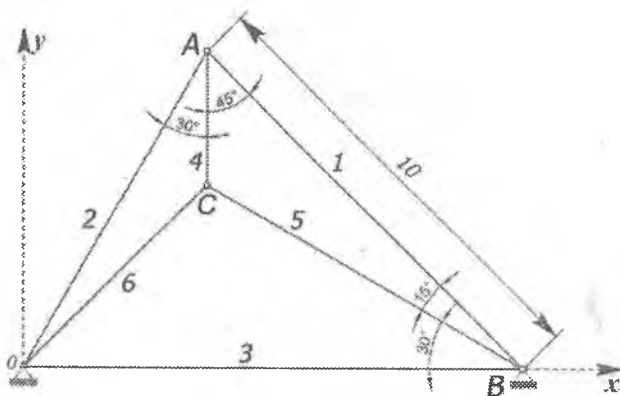
$$y_c = \frac{\rho_1 s_1 \cdot l \cdot 1,33 + \rho_2 s_2 \cdot l \cdot 3,5 + \rho_2 \cdot s_3 \cdot l \cdot 1,7 + \rho_2 s_4 \cdot l \cdot 1}{\rho_1 s_1 \cdot l + \rho_2 s_2 \cdot l + \rho_2 s_3 \cdot l + \rho_2 s_4 \cdot l - s_5 \cdot l \cdot 1}$$

$$= \frac{16 \cdot 16 \cdot 1,3 + 24 \cdot 6 \cdot 3,5 + 24 \cdot 7,5 \cdot 1,7 + 24 \cdot 2 \cdot 1 - 24 \cdot 2 \cdot 1}{16 \cdot 16 + 24 \cdot 6 + 24 \cdot 7,5 + 24 \cdot 2 - 24 \cdot 2}$$

$$= \frac{1142,8}{580} = 1,97 \text{ m.}$$

Izoh: g'ovak qism solishtirma og'irligini shartli ravishda $1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ deb oldik.

4-masala. Tekis ferma og'irlik markazining koordinatalari topilsin. Ferma sterjenlarining har bir metrining og'irligi bir xil (78.4-rasm).



78.4-rasm

Yechish: tekis ferma og'irlik markazining koordinatalari quyidagi formulalar asosida aniqlanadi:

$$x_c = \frac{\sum l_i \cdot x_i}{\sum l_i},$$

$$y_c = \frac{\sum l_i \cdot y_i}{\sum l_i}.$$

Bu formulalarda ℓ_i — sterjen uzunligi, $\sum \ell_i$ — ferma sterjenlarining umumiy uzunligi, x_i, y_i lar i — sterjen og'irlik markazining koordinatalari.

Ferma sterjenlari uzunligini aniqlash uchun ABO va ABC uchburchak burchaklarini aniqlaymiz:

$$\angle AOB = 180 - (30 + 45) - (15 + 30) = 60^\circ,$$

$$\angle ACB = 180 - (45 + 15) = 120^\circ.$$

Uchburchak ABO dan sinuslar teoremasiga ko'ra:

$$\frac{\sin 60^\circ}{AB} = \frac{\sin 45^\circ}{AO} = \frac{\sin 75^\circ}{BO}.$$

Uchburchak ABC dan sinuslar teoremasiga ko'ra:

$$\frac{\sin 120^\circ}{AB} = \frac{\sin 15^\circ}{AC} = \frac{\sin 45^\circ}{BC}.$$

Yuqoridagi ifodalardan tekis ferma sterjenlarining uzuligini aniqlaymiz:

$$\ell_1 = AB = 10 \text{ m},$$

$$\ell_2 = AO = \ell_1 \frac{\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = 10 \sqrt{\frac{2}{3}} = 8,165 \text{ m},$$

$$\ell_3 = BO = \ell_1 \frac{\sin 75^\circ}{\sin 60^\circ} = 11,154 \text{ m},$$

$$\ell_4 = AC = \ell_1 \frac{\sin 15^\circ}{\sin 120^\circ} = 2,989 \text{ m},$$

$$\ell_5 = BC = \ell_1 \frac{\sin 45^\circ}{\sin 120^\circ} = 10 \sqrt{\frac{2}{3}} = 8,165 \text{ m}.$$

ℓ_6 ni aniqlash uchun BCO uchburchakdan kosinuslar teoremasiga ko'ra:

$$\begin{aligned} \ell_6 = CO &= \sqrt{(BO)^2 + (BC)^2 - 2(BO)(BC)\cos 30^\circ} = \\ &= \sqrt{\ell_3^2 + \ell_5^2 - 2 \ell_3 \ell_5 \cos 30^\circ} = 5,774 \text{ m}. \end{aligned}$$

A, B, C , nuqtalarning koordinatalarini aniqlaymiz:

$$x_A = \ell_2 \cdot \cos 60^\circ = 8,165 \cdot 0,5 = 4,082 \text{ m},$$

$$y_A = \ell_2 \cdot \sin 60^\circ = 8,165 \cdot \sqrt{3} \cdot 0,5 = 7,071 \text{ m},$$

$$x_B = \ell_3 \approx 11,154 \text{ m},$$

$$y_B = 0,$$

$$x_C = \ell_3 - \ell_5 \cos 30^\circ = 11,154 - 8,165 \cdot 0,5\sqrt{3} = 4,082 \text{ m},$$

$$y_C = \ell_5 \sin 30^\circ = 8,165 \cdot 0,5 = 4,082 \text{ m}.$$

Tekis ferma sterjenlari markazining (o'rtasining) koordinatalarini aniqlaymiz:

$$x_1 = 0,5(X_A + X_B) = 0,5(4,082 + 11,154) = 7,618 \text{ m},$$

$$y_1 = 0,5(Y_A + Y_B) = 0,5(7,071 + 0) = 3,536 \text{ m},$$

$$x_2 = 0,5(X_O + X_A) = 0,5(0 + 4,082) = 2,041 \text{ m},$$

$$y_2 = 0,5(Y_O + Y_A) = 0,5(0 + 7,071) = 3,536 \text{ m},$$

$$x_3 = 0,5(X_O + X_B) = 0,5(0 + 11,154) = 5,577 \text{ m},$$

$$y_3 = 0,5(Y_O + Y_B) = 0,5(0 + 0) = 0 \text{ m},$$

$$x_4 = 0,5(X_A + X_C) = 0,5(4,082 + 4,082) = 4,082 \text{ m},$$

$$y_4 = 0,5(Y_A + Y_C) = 0,5(7,071 + 4,082) = 5,577 \text{ m},$$

$$x_5 = 0,5(X_B + X_C) = 0,5(11,154 + 4,082) = 7,618 \text{ m},$$

$$y_5 = 0,5(Y_B + Y_C) = 0,5(0 + 4,082) = 2,041 \text{ m},$$

$$x_6 = 0,5(X_O + X_C) = 0,5(0 + 4,082) = 2,041 \text{ m},$$

$$y_6 = 0,5(Y_O + Y_C) = 0,5(0 + 4,082) = 2,041 \text{ m}.$$

Bajarilgan hisoblashlarni jadvalga kiritamiz.

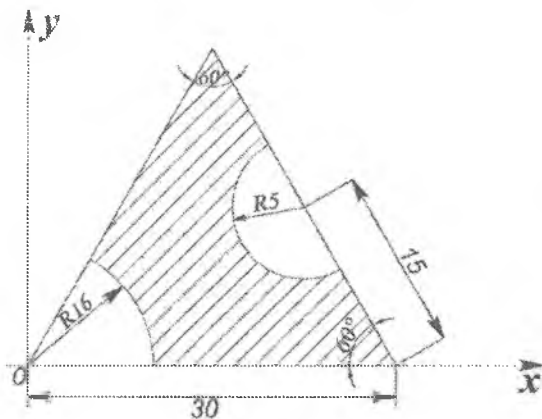
Jadvaldan foydalanib, tekis ferma og'irlik markazining koordinatalarini topamiz:

$$x_c = \frac{\sum x_i \ell_i}{\sum \ell_i} = \frac{241,234}{46,246} = 5,216 \text{ m},$$

$$y_c = \frac{\sum y_i \ell_i}{\sum \ell_i} = \frac{109,341}{46,246} = 2,364 \text{ m}.$$

Tr	$x_i(m^2)$	$y_i(m^2)$	$l_i(m^2)$	$x_i l_i(m^2)$	$y_i l_i(m^2)$
1	7,618	3,536	10	76,180	35,355
2	2,041	3,536	8,165	16,667	28,868
3	5,577	0	11,154	62,201	0
4	4,082	5,577	2,989	12,201	16,667
5	7,618	2,041	8,165	62,201	16,667
6	2,041	2,041	5,774	11,78	11,785
Jami			$\sum l_i = 46,246$	$\sum x_i l_i = 241,234$	$\sum y_i l_i = 109,341$

5-masala. Chizmada ko'rsatilgan (78.5-a rasm) tekis shaklning og'irlik markazining koordinatalari topilsin. O'lchamlar santimetrlarda berilgan.



78.5-a rasm

Yechish:

berilgan tekis shaklning og'irlik markazining koordinatalari quyidagi formulalar asosida aniqlanadi:

$$x_c = \frac{\sum S_i x_i}{\sum S_i},$$

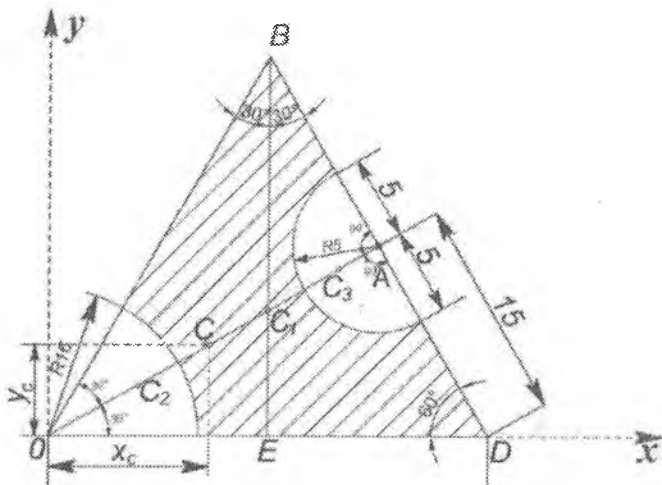
$$y_c = \frac{\sum S_i y_i}{\sum S_i}$$

Bu formulalarda S_i tekis shakl bo'laklarining yuzalari (sathlari), x_i, y_i lar tekis shakl i bo'lagining (S_i) og'irlik markazining koordinatalari.

Tekis shaklni bo'laklarga ajratamiz (79.5-b rasm):

- 1) OBD — uchburchak;
- 2) doiraviy sektor;
- 3) doira yarimi.

Doiraviy sektor va doira yarmining yuzalari manfiy ishora bilan olinadi, chunki ular tekis shakldan qirqib olingan.



79.5-b rasm

Bo'laklar sathlari va og'irlik markazining koordinatalarini aniqlaymiz.

1. OBD uchburchak.

Uchburchakning yuzasi:

$$S_1 = \frac{OD \cdot BE}{2} = \frac{OD \cdot OD \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{30 \cdot 30 \cdot 0,866}{2} = 389,7 \text{ sm}^2.$$

OBD uchburchakda

$$OC_1 = \frac{2}{3} OA = \frac{2}{3} OD \sin 60^\circ = \frac{2}{3} \cdot 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 17,32 \text{ sm.}$$

Shuning uchun

$$x_1 = OC_1 \cos 30^\circ = 17,32 \cdot 0,866 = 15 \text{ sm,}$$

$$y_1 = OC_1 \sin 30^\circ = 17,32 \cdot 0,5 = 8,66 \text{ sm.}$$

2. Doiraviy sektor.

Doiraviy sektor yuzasi:

$$S_2 = -\alpha R^2 = -\frac{\pi}{6} 16^2 = -134,0 \text{ sm}^2.$$

Doiraviy sektorda:

$$OC_2 = \frac{2 R \sin \alpha}{3 \alpha} = \frac{2 \cdot 16 \cdot \sin 30^\circ}{3 \cdot \frac{\pi}{6}} = \frac{32}{\pi} = 10,186 \text{ sm.}$$

Shuning uchun:

$$x_2 = OC_2 \cos 30^\circ = 10,186 \cdot 0,866 = 8,82 \text{ sm,}$$

$$y_2 = OC_2 \sin 30^\circ = 10,186 \cdot 0,5 = 5,09 \text{ sm.}$$

3. Doira yarmi.

Doira yarmining yuzasi:

$$S_3 = -a R^2 = -\frac{p}{2} R^2 = -39,27 \text{ sm}^2.$$

Doira yarmida:

$$AC_3 = \frac{4R}{3\pi} = 2,12 \text{ sm,}$$

$$OC_3 = OA - AC_3 = OD \sin 60^\circ - AC_3 = 30 \cdot 0,866 - 2,12 = 23,86 \text{ sm.}$$

Shuning uchun:

$$x_3 = OC_3 \cos 30^\circ = 23,86 \cdot 0,866 = 20,66 \text{ sm,}$$

$$y_3 = OC_3 \sin 30^\circ = 23,86 \cdot 0,5 = 11,93 \text{ sm.}$$

Bajarilgan hisoblashlarni jadvalga kiritamiz:

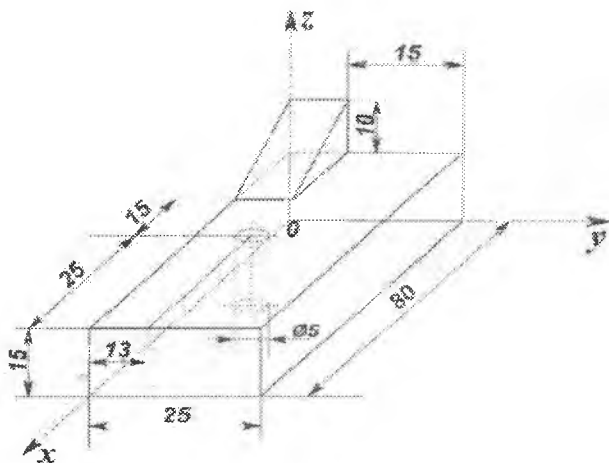
T.r.	$S_i(\text{sm}^2)$	$x_i S_i(\text{sm}^3)$	$y_i S_i(\text{sm}^3)$	$x_i(\text{sm}^3)$	$y_i(\text{sm}^3)$
1	389,7	15	8,66	5845,5	3374,8
2	-134	8,82	5,09	-1181,9	-682,1
3	-39	20,66	11,93	-811,3	-468,5
Jami	216,4	—	—	3852,3	2224,3

Jadvaldan foydalanib, tekis shakl og'irlik markazining koordinatalarini topamiz:

$$x_c = \frac{\sum S_i x_i}{\sum S_i} = \frac{3852,3}{216,4} = 17,80 \text{ sm},$$

$$y_c = \frac{\sum S_i y_i}{\sum S_i} = \frac{2224,3}{216,4} = 10,28 \text{ sm}.$$

6-masala. Chizmada ko'rsatilgan jism hajmining og'irlik markazining koordinatalari topilsin. O'lchamlar santimetrlarda berilgan (79.6-rasm).



79.6-rasm

Yechish: berilgan jism hajmining og'irlik markazining koordinatalari quyidagi formulalar asosida aniqlanadi:

$$x_c = \frac{\sum V_i x_i}{\sum V_i}, \quad y_c = \frac{\sum V_i y_i}{\sum V_i}, \quad z_c = \frac{\sum V_i z_i}{\sum V_i}.$$

Bu formulalarda V_i – berilgan jism i bo'lagining hajmi, $\sum V_i$ – berilgan jism hajmi, x_i, y_i, z_i lar jism bo'laklarining og'irlik markazining koordinatalari.

Berilgan jismni bo'laklarga ajratamiz:

- 1) to'g'ri burchakli parallelopiped;
- 2) prizma;
- 3) silindr.

Masalada silindr hajmi manfiy ishora bilan olinadi, chunki u jismdan qirqib olingan.

Bo'laklar hajmlari va og'irlik markazining koordinatalarini aniqlaymiz.

1. To'g'ri burchakli parallelepiped.

To'g'ri burchakli parallelopipedning hajmi:

$$V_1 = 80 \cdot 25 \cdot 15 = 30000 \text{ sm}^3.$$

To'g'ri burchakli parallelepiped og'irlik markazining koordinatalari:

$$x_1 = \frac{80}{2} = 40 \text{ sm},$$

$$y_1 = \frac{25}{2} = 12,5 \text{ sm},$$

$$z_1 = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ sm}.$$

2. Prizma.

Prizmaning hajmi:

$$V_2 = \frac{40 \cdot 10 \cdot 10}{2} = 2000 \text{ sm}^3.$$

Prizma og'irlik markazining koordinatalari:

$$x_2 = \frac{1}{3}(40+0+0) = \frac{40}{3} = 13,3 \text{ sm},$$

$$y_2 = \frac{10}{2} = 5 \text{ sm},$$

$$z_2 = 15 + \frac{10}{3} = 18,3 \text{ sm}.$$

3. Silindr...

Silindrning hajmi:

$$V_3 = -p \cdot R^2 \cdot h = -3,14 \cdot (2,5)^2 \cdot 15 = -294,4 \text{ sm}^3.$$

Silindr og'irlik markazining koordinatalari:

$$x_3 = 55 \text{ sm},$$

$$y_3 = 13 \text{ sm},$$

$$z_3 = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ sm}.$$

Bajarilgan hisoblashlarni quyidagi jadvalga kiritamiz:

T.r.	$V_i(\text{sm}^3)$	$x_i(\text{sm})$	$y_i(\text{sm})$	$z_i(\text{sm})$	$V_i x_i(\text{sm}^4)$	$V_i y_i(\text{sm}^4)$	$V_i z_i(\text{sm}^4)$
1	30000	40	12,5	7,5	1200000	375000	225000
2	2000	13,3	5	18,3	26600	10000	36600
3	-294,4	55	13	7,5	-16192	-3827,2	-2208
Jami	31706				1210408	381172,8	259392

Jadvaldan foydalanib, berilgan jism og'irlik markazining koordinatalarini aniqlaymiz.

$$x_c = \frac{\sum V_i x_i}{\sum V_i} = \frac{1210408}{31706} = 38,18 \text{ sm},$$

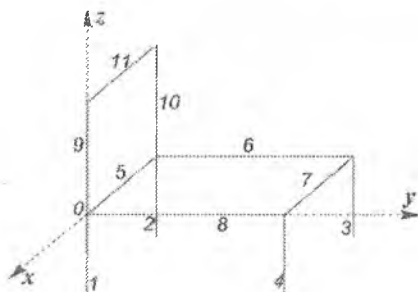
$$y_c = \frac{\sum V_i y_i}{\sum V_i} = \frac{381172,8}{31706} = 12,02 \text{ sm},$$

$$z_c = \frac{\sum V_i z_i}{\sum V_i} = \frac{259392}{31706} = 8,18 \text{ sm.}$$

79-§. Mustaqil o'rganish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar

Muammo №1. Jismning og'irlik markazi koordinatalari aniqlansin.

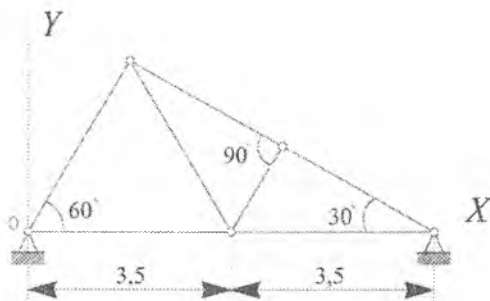
Stul ko'rinishidagi jism og'irlik markazining koordinatalari tuzilgan. Sterjenlarning uzunligi 44 sm (79.1-rasm).



79.1-rasm

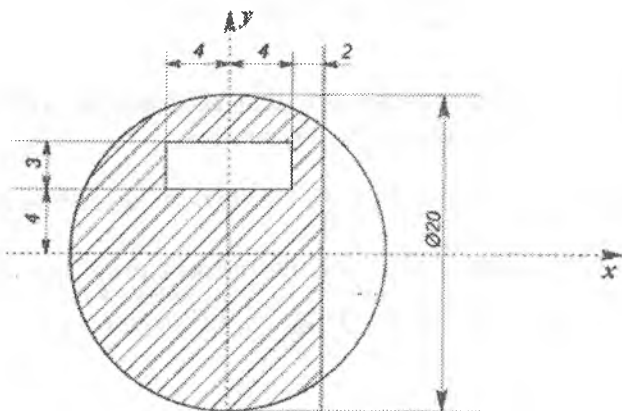
Muammo № 2. Jismning og'irlik markazi koordinatalari aniqlansin.

Tekis ferma og'irlik markazining koordinatalari topilsin: hamma sterjenlar har bir metrining og'irligi bir xil (79.2-rasm).



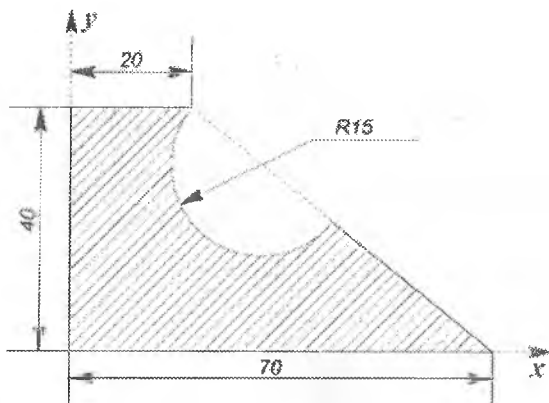
79.2-rasm

Muammo № 3. Tekis shakl og'irlik markazi koordinatalari aniqlansin (79.3-rasm).



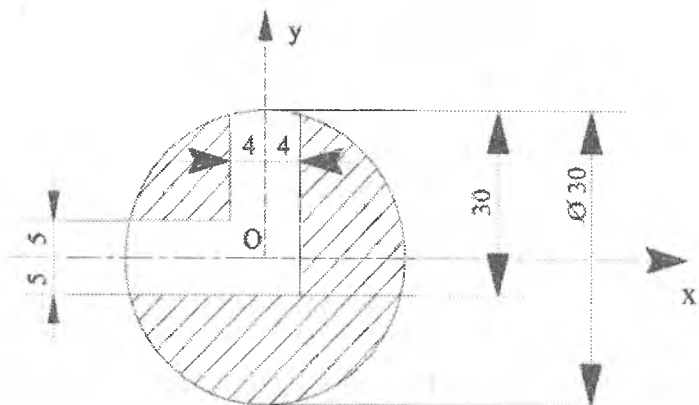
79.3-rasm

Muammo № 4. Tekis shakl og'irlik markazi koordinatalari aniqlansin (79.4-rasm).



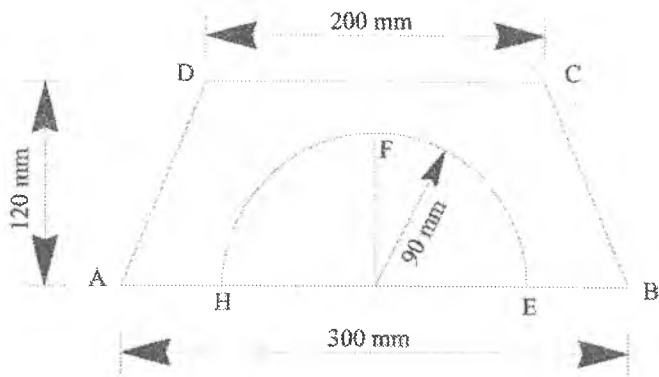
79.4-rasm

Muammo № 5. Rasmda ko'rastilgan tekis shakl og'irlik markazi koordinatalari aniqlansin (79.5-rasm).



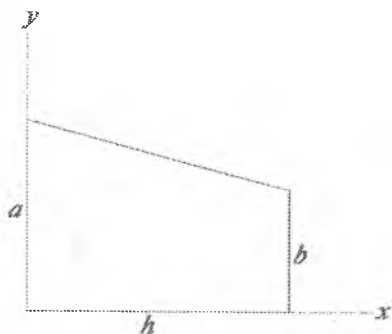
79.5-rasm

Muammo № 6. Rasmda ko‘rastilgan figura og‘irlik markazining koordinatalari topilsin. Doira radiusi $R = 90 \text{ mm}$. Trapetsiya o‘lchamlari rasmda ko‘rsatilgan (79.6-rasm).



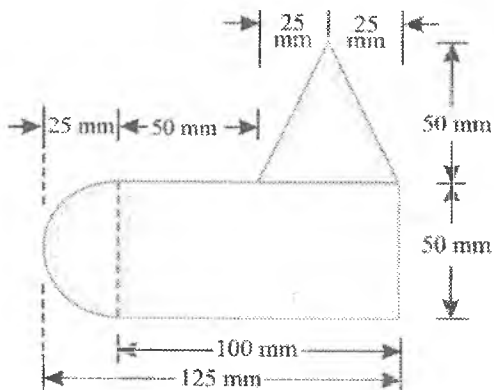
79.6-rasm

Muammo № 7. Rasmda ko‘rsatilgan shakl og‘irlik markazining koordinatalari aniqlansin (79.7-rasm).



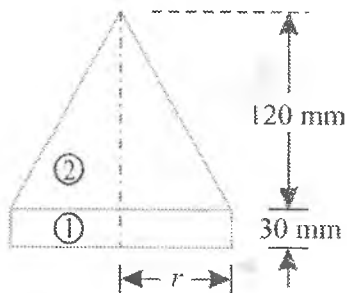
79.7-rasm

Muammo № 8. Rasmda ko'rsatilgan shakl og'irlik markazining koordinatalari topilsin (79.8-rasm).



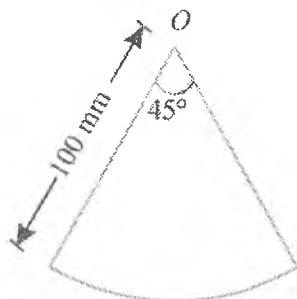
79.8-rasm

Muammo № 9. Rasmda ko'rsatilgan shakl og'irlik markazining koordinatalari topilsin (79.9-rasm).



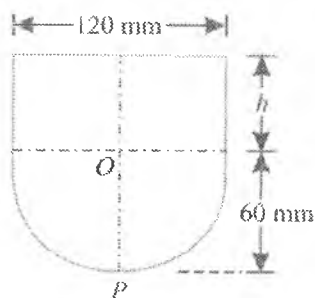
79.9-rasm

Muammo № 10. Rasmda ko'rsatilgan shakl og'irlik markazining koordinatalari topilsin (79.10-rasm).



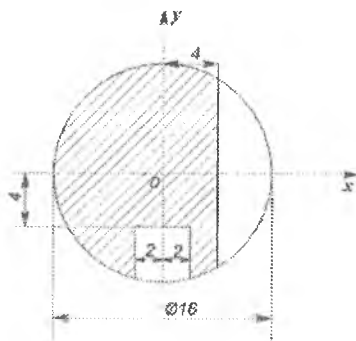
79.10-rasm

Muammo № 11. Rasmda ko'rsatilgan shakl og'irlik markazining koordinatalari topilsin (79.11-rasm).



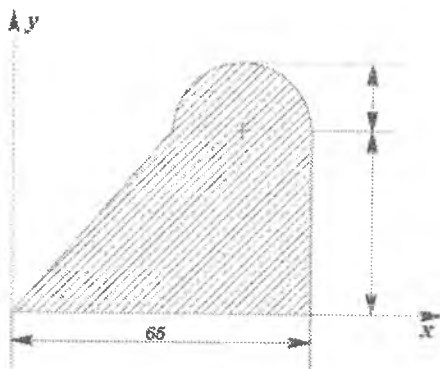
79.11-rasm

Muammo №12. Rasmda ko'rsatilgan tekis shakl og'irlik markazining koordinatalari aniqlansin (79.12-rasm).



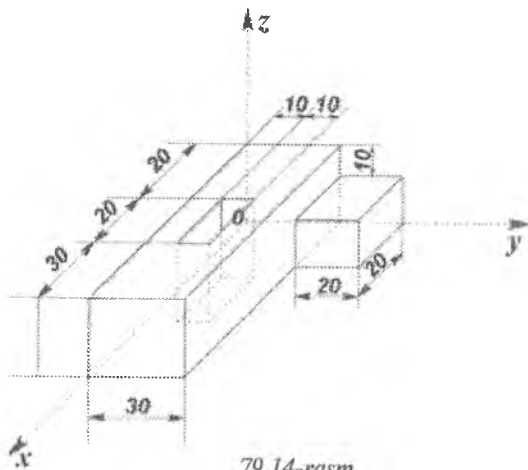
79.12-rasm

Muammo № 13. Rasmda ko'rsatilgan tekis shakl og'irlik markazining koordinatalari aniqlansin (79.13-rasm).



79.13-rasm

Muammo № 14. Rasmda ko'rsatilgan jism og'irlik markazining koordinatalari aniqlansin (79.14-rasm).



79.14-rasm

Takrorlash uchun savollar:

1. Parallel kuchlar markazi qanday aniqlanadi?
2. Parallel kuchlar markazi koordinatalarini aniqlash formulalarini ko'rsating.

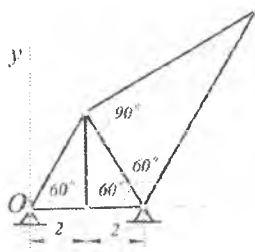
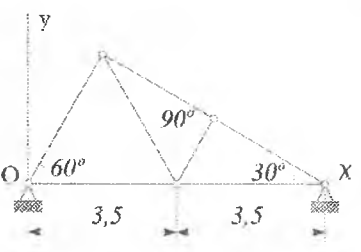
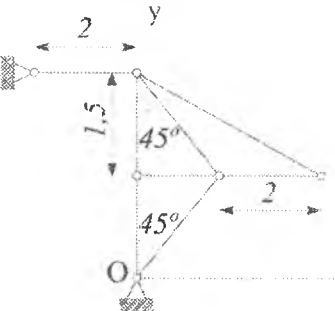
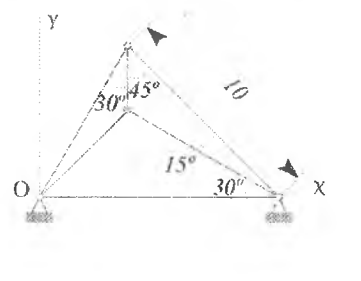
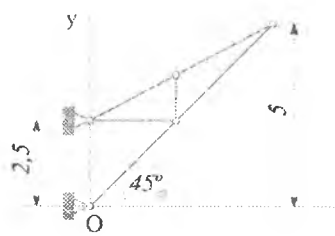
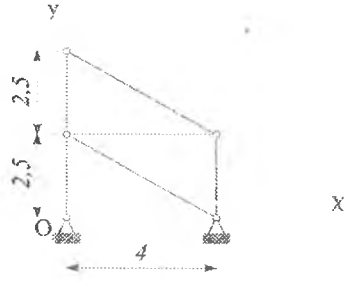
3. *Bir jinsli jism, yassi sirt va chiziq og'irlik markazini aniqlash formulalarini yozing.*
4. *Qattiq jism og'irlik markazini aniqlash usullari haqida ma'lumot bering.*
5. *Tekis shakl og'irlik markazini bo'laklarga ajratish usuli bilan tanishtiring. Manfiy yuza deb qanday yuzaga aytiladi?*
6. *Ba'zi bir bir jinsli jismlar og'irlik markazining koordinatalarini keltiring.*

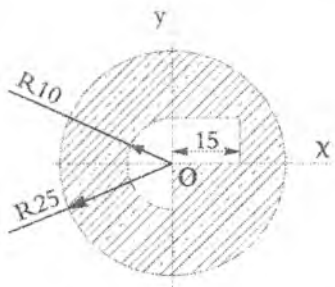
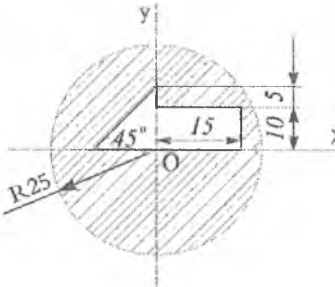
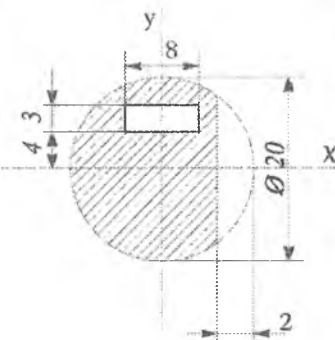
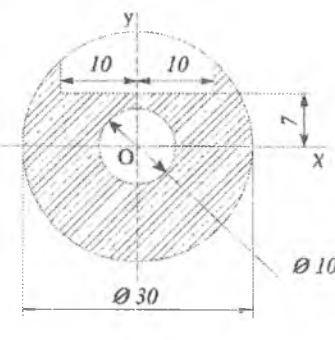
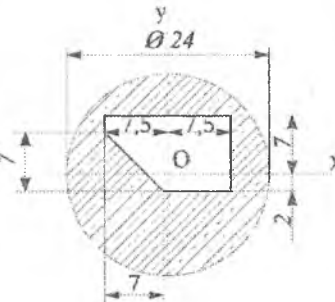
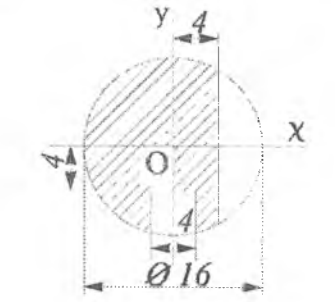
**80-§. «Jism og'irlik markazining vaziyatini aniqlash»
mavzusi bo'yicha talabalar tomonidan mustaqil
bajariladigan hisob chizma ishlari variantlari**

**JISM OG'IRLIK MARKAZINING
KOORDINATALARINI ANIQLASH**

Chizmalarda ko'rsatilgan bir jinsli ingichka bir xil pogon og'ir-
ligidagi sterjenalardan tuzilgan tekis fermaning (1–6-variantlar), tekis
shaklning (7–25-variantlar) yoki hajmga ega jismlarning (26–30-
variantlar) og'irlik markazining koordinatlari aniqlansin.

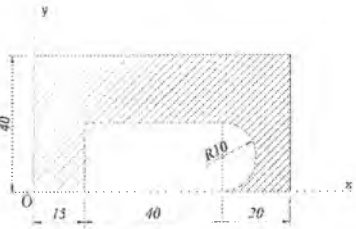
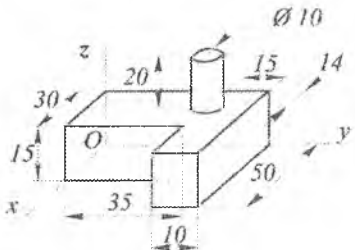
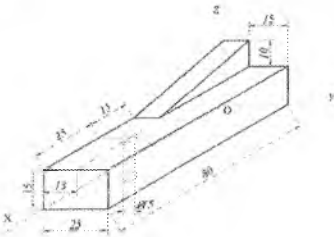
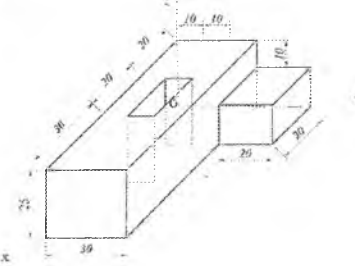
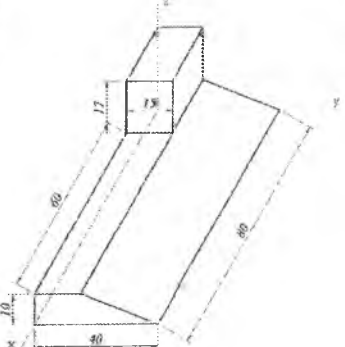
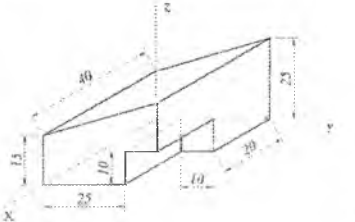
O'lchamlar barcha variantlarda metrlarda keltirilgan. Variantlar
chizmalari 4-jadvalda ko'rsatilgan.

Variant raqamlari	Konstruksiyaning sxemalari	Variant raqamlari	Konstruksiyaning sxemalari
1.	2	3	4
1.		2.	
3.		4.	
5.		6.	

1	2	3	4
7.		8.	
9.		10.	
11.		12.	

1	2	3	4
13.		14.	
15.		16.	
17.		18.	

1	2	3	4
19.		20.	
21.		22.	
23.		24.	

1	2	3	4
25.		26.	
27.		28.	
29.		30.	

ADABIYOTLAR

1. *Szolga Vasile*. Theoretical mechanics. 2010.
2. *Meriam J.L., Kraige L.G.* Engineering mechanics statics. 2007.
3. *Rashidov T.* va b. Nazariy mexanika asoslari. — T.: «O'qituvchi», 1990.
4. *Shohaydarova P.* va b. Nazariy mexanika. — T.: «O'qituvchi», 1991.
5. *Mirsaidov M.M., Voymurodova A.U., Ilyosova N.T.* Nazariy mexanika. — T.: «Cho'lpon», 2009.
6. *Hibbeler R.C.* Statics and Dynamics. 2013.
7. *Khurmi R.S.* Engineering mechanics. 2011.
8. *Shoobidov Sh.M., Xabibullayeva X.N., Fayzullayeva F.D.* Nazariy mexanika (statika, kinematika), o'quv qo'llanma. — T.: «Yangi asr avlodi», 2008.
9. *Targ S.M.* Kratkiy kurs teoreticheskoy mexaniki. — M.: «Visshaya shkola». 1986.
10. *Yablonski A.A.* Nazariy mexanikadan kurs ishlari uchun topshiriqlar to'plami. — T.: «O'qituvchi», 2002.
11. *Meshcherskiy I.V.* Nazariy mexanikadan masalalar to'plami. — T.: «O'qituvchi», 1989.
12. *Kepe O.E., Viba Ya.A., Grapis O.P.* Nazariy mexanika fanidan qisqa masalalar to'plami, (lotin alifbosida). — T.: «Yangi asr avlodi», 2008.

MUNDARIJA

Soʻz boshi	3
Kirish.....	5

I BOB. QATTIQ JISM STATIKASINING ASOSIY TUSHUNCHALARI VA AKSIOMALARI

1-§. Statikaning asosiy tushunchalari	9
2-§. Statikaning asosiy aksiomalari	13
3-§. Bogʻlanish va bogʻlanish reaksiyalari	17

II BOB. KESISHUVCHI KUHLAR SISTEMASI

4-§. Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasining taʼrifi	26
5-§. Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasining teng taʼsir etuvchisini geometrik usulda aniqlash	27
6-§. Uch kuchning muvozanatiga oid teorema	30
7-§. Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatining geometrik sharti	31
8-§. Kesishuvchi kuchlar sistemasining geometrik muvozanat shartiga oid masalalarni yechish uchun uslubiy koʻrsatmalar.....	33
9-§. Kesishuvchi kuchlar sistemasining geometrik muvozanat shartiga oid masalalar	34
10-§. Mustaqil oʻrganish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar.....	42
11-§. Kuchning oʻqdag va tekislikdagi proyeksiyasi	44
12-§. Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasining teng taʼsir etuvchisini analitik usulda aniqlash	48
13-§. Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatining analitik sharti.....	49
14-§. Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatining analitik shartiga oid masalalarni yechish uchun uslubiy koʻrsatmalar..	50
15-§. Bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatining analitik shartiga oid masalalar	50
16-§. Mustaqil oʻrganish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar..	57

III BOB. MOMENTLAR VA TEKISLIKDAGI JUFT KUCHLAR NAZARIYASI

17-§. Kuchning nuqtaga nisbatan algebraik momenti	61
18-§. Juft kuch. Juft kuch momenti	63
19-§. Bir tekislikda yotuvchi juft kuchlarning ekvivalentligi haqida teorema	64
20-§. Bir tekislikda yotuvchi juft kuchlarni qo'shish	66
21-§. Bir tekislikda yotuvchi juft kuchlar sistemasining muvozanat sharti	68
22-§. Bir tekislikda yotuvchi juft kuchlar sistemasining muvozanatiga doir masalalar yechish uchun uslubiy ko'rsatmalalar	68
23-§. Bir tekislikda yotuvchi juft kuchlar sistemasining muvozanatiga doir masalalar	69
24-§. Mustaqil o'rganish uchun talabalarga tavsiya qilinadigan muammolar	70

IV BOB. TEKISLIKDAGI KUCHLAR SISTEMASI

25-§. Kuchni o'ziga parallel ko'chirishga oid lemma	76
26-§. Tekislikdagi kuchlar sistemasini bir markazga keltirish. Tekislikdagi kuchlar sistemasining bosh vektori va bosh momenti ..	78
27-§. Tekislikdagi kuchlar sistemasini sodda ko'rinishga keltirish	80
28-§. Tekislikdagi kuchlar sistemasini teng ta'sir etuvchisining momenti haqida Varinyon teoremasi	82
29-§. Tekislikdagi kuchlar sistemasining muvozanat shartlari	83
30-§. Tekislikdagi kuchlar sistemasining muvozanatiga oid masalalarni yechish uchun uslubiy ko'rsatmalar	86
31-§. Tekislikdagi kuchlar sistemasining muvozanatiga oid masalalar	87
32-§. Mustaqil o'rganish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar	97
33-§. Taqsimlangan kuchlar	102
34-§. Taqsimlangan kuchlar qatnashgan tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanatiga doir masalalar	106
35-§. Talabalarga mustaqil yechish uchun tavsiya etiladigan muammolar ..	109
36-§. Statik aniq va aniqmas masalalar	114
37-§. Tekislikdagi parallel kuchlar sistemasining muvozanat shartlari	115

38-§. Tekislikdagi parallel kuchlar sistemasining muvozanatiga oid masalalarni yechish uchun uslubiy ko'rsatmalar	117
39-§. Tekislikdagi parallel kuchlar sistemasining muvozanatiga oid masalalar.....	118
40-§. Mustaqil o'rganish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar.....	122
41-§. Bir tekislikda yotuvchi bir necha jismdan tashkil topgan sistemaning muvozanatiga oid masalalar	125
42-§. Mustaqil yechish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar	134
43-§. Ferma haqida tushuncha	138
44-§. Ferma sterjenlaridagi zo'riqishlarni tugunlarni kesish usuli bilan aniqlash	143
45-§. Ferma sterjenlaridagi zo'riqishlarni Ritter usulida aniqlash	146
46-§. Tekis fermani hisoblashga oid masalalar	147
47-§. Mustaqil o'rganish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar	164
48-§. Talabalar tomonidan mustaqil bajariladigan hisob chizma ishlari variantlari	168

V BOB. FAZODAGI KUHLAR SISTEMASI

49-§. Kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektori	182
50-§. Kuchning o'qqa nisbatan momenti.....	183
51-§. Kuchning o'qqa nisbatan momenti bilan shu o'qdagi nuqtaga nisbatan momenti orasidagi bog'lanish	185
52-§. Kuchning koordinata o'qlariga nisbatan momentlarini analitik usulda aniqlash	186
53-§. Juft kuch momentining vektori	188
54-§. Juft kuchni parallel tekislikka ko'chirish haqida teorema	189
55-§. Fazodagi juft kuchlarni qo'shish va juft kuchlarning muvozanat sharti	191
56-§. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bir markazga keltirish	193
57-§. Fazodagi kuchlar sistemasining bosh vektori va bosh momentini analitik usulda aniqlash	196
58-§. Fazodagi kuchlar sistemasini juft kuch yoki teng ta'sir etuvchi kuchga keltirish	198
59-§. Fazodagi kuchlar sistemasini dinamik vintga keltirish.....	200
60-§. Markaziy o'q tenglamasi	203

61-§. Fazodagi kuchlar sistemasini teng ta'sir etuvchisining momenti haqida Varinyon teoremasi	204
62-§. Fazodagi kuchlar sistemasining muvozanat shartlari	206
63-§. Fazoda bir nuqtada kesishadigan kuchlar sistemasining muvozanatiga doir masalalarni yechish uchun uslubiy ko'rsatmalar	208
64-§. Fazoda bir nuqtada kesishadigan kuchlar sistemasining muvozanatiga doir masalalarni yechish uchun uslubiy ko'rsatmalar	210
65-§. Mustaqil o'rganish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar	215
66-§. Fazodagi kuchlar sistemasini sodda ko'rinishga keltirishga oid masalalarni yechish uchun uslubiy ko'rsatmalar	218
67-§. Fazodagi kuchlar sistemasini sodda ko'rinishga keltirishga oid masalalar	220
68-§. Mustaqil o'rganish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar	224
69-§. Fazodagi kuchlar sistemasining muvozanatiga oid masalalarni yechish uchun uslubiy ko'rsatmalar	227
70-§. Fazodagi kuchlar sistemasining muvozanatiga oid masalalar	228
71-§. Mustaqil o'rganish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar	237
72-§. Talabalar tomonidan mustaqil bajariladigan hisob chizma ishlari variantlari	240

VII BOB. PARALLEL KUCHLAR MARKAZI VA OG'IRLIK MARKAZI

73-§. Parallel kuchlar markazi, uning radius-vektori hamda koordinatalarini aniqlash	252
74-§. Qattiq jismning og'irlik markazi	256
75-§. Qattiq jismning og'irlik markazini aniqlash usullari	259
76-§. Ba'zi bir jismlarning og'irlik markazi	264
77-§. Qattiq jismlarning og'irlik markazini aniqlash usullariga oid masalalarni yechish uchun uslubiy ko'rsatmalar	271
78-§. Qattiq jismning og'irlik markazini aniqlashga doir masalalar	273
79-§. Mustaqil o'rganish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar	287
80-§. «Jism og'irlik markazining vaziyatini aniqlash» mavzusi bo'yicha talabalar tomonidan mustaqil bajariladigan hisob chizma ishlari variantlari	293
Adabiyotlar	299

KO'CHARBOY KENJAYEV

NAZARIY MEXANIKA

Misol va masalalarda

I qism

STATIKA

Muharrir Dildora Abduraimova
Badiiy muharrir Maftuna Vaxxobova
Texnik muharrir Yelena Tolochko
Musahhah Dildora Abduraimova
Sahifalovchi Gulchehra Azizova

Litsenziya raqami AI № 163. 09.11.2009. Bosishga 2018-yil 3-dekabrda ruxsat etildi. Bichimi 60×84¹/₁₆. Ofset qog'oz. Tayms TAD garnituras. Shartli bosma tabog'i 17,67. Nashr tabog'i 19,15. Shartnoma № 96–2018. Adadi 400 nusxada. Buyurtma № 67.

O'zbekiston Matbuot va axborot agentligining Cho'lpon nomidagi nashriyot-matbaa ijodiy uyi tezkor matbaa bo'limida chop etildi. 100011, Toshkent, Navoiy ko'chasi, 30.
Telefon: +998-71244-10-45. Faks: +998-71244-58-55.



***Cho'lpon nomidagi
nashriyot-matbaa ijodiy uyi***

ISBN 978-9943-5379-9-6

