BOTIR AHMADXO'JAYEV

NAZARIY MEXANIKA

Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan (531/534 UDK) — bakalavriat ta'lim yo'nalishi talabalari uchun nazariy mexanika fanidan o'quv qo'llanma sifatida tavsiya etilgan

Toshkent
«Yangi asr avlodi»
2006

Ushbu darslik 1996-yil nazariy mexanika kursidan maxsus dastur asosida yozilgan. Unda nazariy mexanikaning nugta dinamikasining, mexanik sistema dinamikasining differensial tenglamalari, asosiy teoremalari, prinsiplari batafsil yoritilgan. Kitob oliy texnik o'quv yurtlari talabalari, magistrlari uchun o'quv qo'llanma sifatida tavsiya etiladi.

ISBN 5-633-01879-6

DINAMIKAGA KIRISH

Asosiy tushunchalar va ta'riflar. Asosiy qonunlar. Inersial sanoq sistemasi. O'lchov birliklar

1. Dinamika nimani o'rgatadi?
2. Kuch qanday kattalik?
3. Inertlik nima va uni qanday kattalik ifodalaydi?
4. Inersiya qonuni nima haqida?
5. Kuch va tezlanishning mutanosiblik qonuni qanday ifodalanadi va ta'riflanadi?
6. Mexanik sistema uchun o'rinli qonun qanday ta'riflanadi?
7. Bir necha kuch ta'siridan nuqta qanday tezlanadi?
8. Qanday sanoq sistema inersial deyiladi?
9. Inersial sanoq sistema qaysi qonunlarda aniqlanadi?
10. Mexanik o'lchov birliklar sistemasi qanday tanlanadi?

Tayanch so'zlar va iboralar

Dinamika. O'zgarmas, o'zgaruvchan kuch. Inersiya va massa. Og'irlik va gravitatsion massa. Inersial sanoq sistema. Kuch va tezlanish mutanosibligi. Ta'sir va aks ta'sir. Kuchlar ta'sirining o'zaro bog'liqmasligi. SI o'lchov birliklar sistemasi. Texnik birliklar. Dinamika masalasi.

1-§ Dinamikaning asosiy tushunchalari, ta'riflari va masalasi

Dinamika nazariy mexanikaning asosiy bo'limi bo'lib, unda jismlarning mexanik harakat qonunlari shu harakatni vujudga keltiruvchi kuchlarga bog'liq holda o'rganiladi.

Mexanikaning asosiy, birlamchi tushunchasi bo'lgan **kuch** dinamikada moddiy jismlar harakatini o'zgartiruvchi ta'siri bilan aniqlanadi. Dinamikada jismlarga **o'zgarmas kuchlardan** tashqari miqdori va yo'nalishi **o'zgaruvchan kuchlar** ham ta'sir ko'rsatishi mumkin deb qaraladi. Kuchlar aktiv, faol yoki passiv, chunonchi, bog'lanish reaksiya kuchlari bo'lishi mumkin.

Massa jismlarning moddiy miqdor o'lchovi bo'lib, dinamikaning asosiy tushunchalaridan biri hisoblanadi. Jismning harakati faqat unga qo'yilgan kuchgagina bog'liq bo'lmay, uning inertligiga ham bog'liq. Jismning **inertligini** miqdor jihatdan ifodalovchi fizikaviy kattalik jismning **massasi** deyiladi. Biz o'rganayotgan mexanika klassik mexanika bo'lib, bunda jismning tezligi yorug'lik tezligidan ancha kichik, uning massasi o'zgarmas, skalyar va musbat kattalik deb qaraladi.

Harakatini o'rganishda o'lchamlari ahamiyatga ega bo'lmagan, lekin massaga ega moddiy jismga **moddiy nuqta** deyiladi. Moddiy nuqta asl ma'noda, biror jismni anglatgani uchun u shu jismning massasiga teng massaga va shu sababli, jism kabi ta'sirlasha olish xususiyatiga ega bo'ladi. Moddiy nuqta tushunchasiga binoan, mexanik sistema yoki jism massasi uni tashkil etgan moddiy nuqtalar massalarining yig'indisi bilan aniqlanadi. Umumiy holda, jismning harakati faqat ushbu moddiy nuqtalar yig'indisigagina emas, ularning jism bo'ylab taqsimlanishi (jism shakli)ga ham bog'liq.

Dinamikaning masalasi. Dinamikaning masalasi jismga ta'sir etuvchi kuchlar bilan uning harakatining kinematik xarakteristikalari o'rtasidagi bog'lanish qonunlarini aniqlash va bu qonunlarni harakatning xususiy hollariga tatbiq etishdan iborat. Dinamika masalasini dinamikaning asoschisi Nyuton juda yaxshi ta'riflagan. U aytganki, dinamika «harakatning yuz berishiga ko'ra tabiat kuchlarini bilish, so'ngra bu kuchlar bilan tabiatning boshqa hodisalarini tushuntirishi» zarur.

2-§. Dinamikaning asosiy qonunlari

Dinamikaning asosida tajriba va kuzatishlarda aniqlangan va **Galiley-Nyuton qonunlari** deb ataluvchi quyidagi qonunlar yotadi. Bu qonunlarga asoslanib mantiqiy yo'l bilan matematika usullarini qo'llash natijasida dinamikaning turli teoremalari va tenglamalari keltirilib chiqariladi. Dinamikaning ushbu qonunlari birinchi bor Galiley va Nyuton tomonidan XVII asrda ta'riflangan. Bu qonunlarning to'g'riligi insonning amaliy faoliyatida, texnikaning rivojlanishida hamon kuzatilib kelinmoqda.

1 - qonun (inersiya qonuni). Har qanday kuch ta'siridan xoli etilgan moddiy nuqta tinch holatda yoki to'g'ri chiziqli tekis harakatda bo'ladi.

Birinchi qonunda qayd etilgan holatda moddiy nuqtaga boshqa jismlar yoki nuqtalar ta'sir etmaydi, ya'ni nuqtaga hech qanday ta'sir kuchlari qo'yilmagan yoki qo'yilgan kuchlar o'zaro muvozanatlashgan bo'ladi. Bu qonun mexanik harakatlarning eng soddasi — jismning yoki nuqtaning boshqa jismlardan to'la ajralgan sharoitdagi harakatini ifodalaydi. Qonunga muvofiq nuqtaning o'z holatini saqlash xususiyatiga uning **inertligi** deyiladi. Moddiy nuqtaning bunday holati **inersion holat**, harakati **inersion harakat** deyiladi. Birinchi qonunning o'zini esa inersiya qonuni deb ataladi.

Nuqtaning tinch holati uning inersion harakat holatining xususiy holi bo'ladi. Galiley - Nyutonning bu qonuniga muvofiq hamma jismlar o'zining inersion harakat holatini o'zgarishiga qarshilik ko'rsatish qobiliyatiga ega.

2-qonun (dinamikaning asosiy qonuni). Kuch ta'siridagi moddiy nuqta shu kuchga proporsional va kuch bilan bir xil yo'nalgan tezlanishda bo'ladi.

Agar nuqtaga qo'yilgan kuchni $\overline{F}$, nuqta tezlanishini $\overline{w}$ deb belgilasak, ikkinchi qonun quyidagicha ifodalanadi:

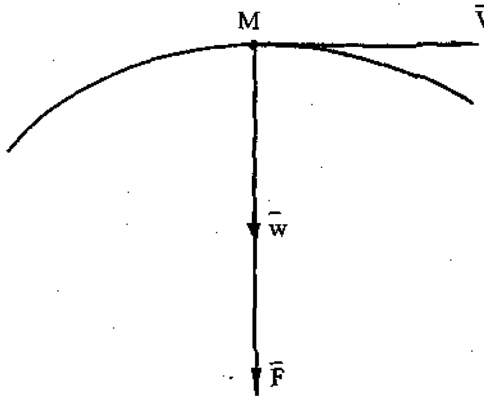
$$m\,\overline{w} = \overline{F} \qquad (1.1)$$

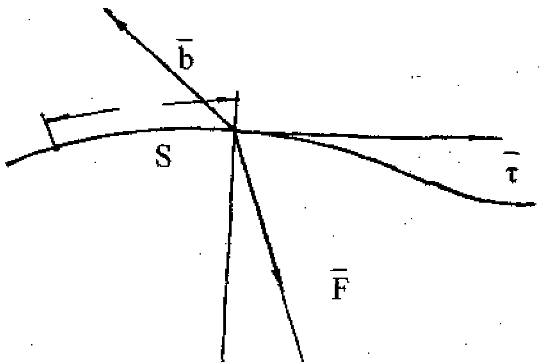
Bu yerda m nuqtaning massasi. Ikkinchi qonun nuqta **dinamikasining asosiy qonuni**, ushbu qonunni ifodalovchi (1.1) tenglama **dinamikaning asosiy tenglamasi** deyiladi.

Qo'yilgan ma'lum kuch ta'sirida olgan tezlanishga ko'ra nuqtaning massasini aniqlash mumkin. Chunonchi, og'irlik kuchi P ta'sirida moddiy nuqtaning olgan tezlanishi uning erkin tushish tezlanishi (g) ga teng, demak (1.1) ga ko'ra

$$m = \frac{P}{g} \qquad (1.2)$$

Klassik mexanikada harakatdagi jism massasi shu jismning tinch holatdagi massasiga teng deb qaraladi.





Yer sirtidagi har qanday jismga Nyutonning, bizga yaxshi tanish, butun Olam tortishish qonuniga ko‘ra

$$F = \gamma \frac{mM}{R^2} \qquad (1.3)$$

kuch ta’sir qiladi. Bu yerda m — Yep sirtidagi jismning massasi bo‘lib, uni gravitatsion massa deyiladi, M,R — Yerning massasi va radiusi. Gravitatsion (1.3) va inersion (1.2) massalar materiya xususiyatlarining turli tomonlarini aks ettirsa ham ular o'zaro teng deb hisoblanadi.

Nyutonning ikkinchi qonuni birinchi — inersiya qonunini ham o'z ichiga oladi. Haqiqatan ham, agar $F=0$ bo'lsa, (1.1) dan $v=const$ kelib chiqadi. Demak, nuqtaga kuch ta'sir etmasa, u to'g'ri chiziqli tekis harakatdagi inersion holatda bo'ladi.

Dinamikaning asosiy tenglamasidagi tezlanish nuqtaning absolyut tezlanishi deb tushuniladi.

3-qonun (ta'sir va aks ta'sirning tenglik qonuni). Ikki moddiy nuqta miqdorlari teng va ularni tutashtiruvchi to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi yo'nalgan kuchlar bilan o'zaro ta'sirlashadi.

Masalan, A moddiy nuqta B moddiy nuqtaga F_A kuch bilan ta'sir etsa, B nuqta ham A nuqtaga, F_A kuch yotgan AB chiziq bo'ylab teskari yo'nalgan, miqdori F_A ga teng F_B kuch bilan ta'sir qiladi. Dinamikaning asosiy qonuniga muvofiq A va B nuqtalar uchun $F_B=m_Aw_A$, $F_A=m_Bw_B$ formulalarni yozish mumkin. Uchinchi qonunga ko'ra $F_B=F_A$, ya'ni $m_Aw_A = m_Bw_B$. Bundan

$$\frac{w_B}{w_A}=\frac{m_A}{m_B} \tag{1.4}$$

kelib chiqadi, ya'ni ikki moddiy A va B nuqtalarning bir- biriga ta'siri natijasida olgan tezlanishlari massalariga teskari proporsional. Ushbu nuqtalarning tezlanish vektorlari esa AB chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan. (1.4) ga ko'ra ikkita ixtiyoriy A va B jismlarning bir-biri bilan o'zaro mexanik ta'sirlashuvi natijasida olgan tezlanishlarining nisbati har doim ayni shu A va B lar uchun o'zgarmas bo'lib, faqat A va B larning tabiatiga bog'liq.

Dinamikaning birinchi va ikkinchi qonunlari birgina moddiy nuqta uchun yozilgan, uchinchi qonun esa ikki va undan ortiq nuqtalar, ya'ni moddiy nuqtalar sistemasi uchun o'rinli.

4-qonun (kuchlar ta'sirining o'zaro bog'liqmaslik qonuni). Bir necha kuch ta'siridagi moddiy nuqtaning tezlanishi uning har bir kuch ta'siridan oladigan tezlanishlarning vektorli yig'indisiga teng.

To'rtinchi qonunga ko'ra nuqtaga ta'sir etayotgan kuchlar sistemasini har doim teng ta'sir etuvchi kuch bilan almashtirish mumkin.

Moddiy nuqtaga $F_1, F_2, ..., F_n$ kuchlar ta'sir etayotgan bo'lsin. U holda ularning teng ta'sir etuvchisi

$$\overline{F} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k$$

ga teng. Bu kuchlarning har birining ta'siridan nuqtaning olgan tezlanishlari uchun ikkinchi qonunga ko'ra

$$\overline{F}_1 = m\overline{w}_1$$
$$\overline{F}_2 = m\overline{w}_2$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\overline{F}_n = m\overline{w}_n$$

tenglamalarni yozish mumkin. Tenglamalarning o'ng va chap tomonlarini qo'shib

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k = m\sum_{k=1}^{n} \overline{w}_k$$

hosil qilamiz. 4-qonunga ko'ra

$$\overline{w} = \sum_{k=1}^{n} \overline{w}_k$$

Demak,

$$m\overline{w} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \qquad (1.5)$$

hosil bo'ladi, (1.5) tenglama kuchlar sistemasi ta'siridagi moddiy nuqta uchun dinamikaning asosiy qonunini ifodalaydi.

Ushbu qonunga muvofiq har bir kuch moddiy nuqtaga boshqa kuchlarning ta'siriga bog'liq bo'lmagan holda alohida tezlanish beradi, shu sababli, bu qonun *kuchlar ta'sirining o'zaro bog'liqmaslik qonuni* deyiladi. To'rtinchi qonunni kuchlarni qo'shish aksiomasi —

kuchlarning parallelogramm qoidasidan keltirib chiqarish mumkin, shuning uchun to'rtinchi qonunni ba'zan mustaqil qonun emas ham deyiladi.

3-§. Inersial sanoq sistemasi

Moddiy nuqtaning, umuman, har qanday jismning mexanik harakati odatda uch o'lchovli Yevklid fazoda biror qo'zg'almas jism bilan biriktirilgan sanoq sistemaga nisbatan kuzatiladi.

Bunda ikki nuqtalar orasidagi masofaning o'zgarmasligi, uchburchak ichki burchaklarining yig'indisini 180° ga tengligi, bir jinslik, izotroplik, ya'ni hamma yo'nalishda fizik va geometrik xossalarning bir xilligi, jumladan, (1.1) dagi massaning harakat yo'nalishiga bog'liq emasligi kabi xususiyatlar fazoda harakatlanayotgan moddiy jismga bog'liq emas deb hisoblanadi.

Tabiat qonunlarining matematik ifodasini har qanday sanoq sistemada yozish mumkin. Lekin inersial sanoq sistemalardagina tabiat qonunlari yagona va sodda ko'rinishda matematik ifodalanadi. **Inersial sanoq sistema** deb, Yevklid fazoda tezlanishsiz harakatlanayotgan jism bilan biriktirilgan sanoq sistemaga aytiladi.

Kuch qo'yilmagan har qanday moddiy nuqta inertsial sanoq sistemaga nisbatan faqat tinch holda yoki to'g'ri chiziqli tekis harakatda bo'ladi. Nyutonning birinchi qonuni ta'rifining mazmuni inersial sanoq sistemasining haqiqatdan ham mavjud bo'lishini tasdiqlaydi. Umuman, Nyuton qonunlari faqat inertsial sanoq sistemalardagi kuzatishlar uchun to'g'ri.

Bir inertsial sanoq sistemani ikkinchi inersial sanoq sistema bilan almashishda Nyuton tenglamasida qatnashgan hamma kattaliklar o'zgarmaydi. Boshqacha aytganda, Galiley almashtirishlariga nisabatan Nyuton tenglamalari invariant.

Inertsial sanoq sistemasiga misol tariqasida Kopernikning geliomarkazli sanoq sistemasini keltiramiz. Planetalar harakatini tekshirishda koordinatalar boshi Quyoshda (Quyoshning tezlanishi taxminan $3\cdot10^{-11}$sm/s^2=$3\cdot10^{-16}$km/s^2=$4\cdot10^{-9}$km/soat^2) va o'zaro perpendikulyar ravishda har doim cheksiz uzoqdagi qo'zg'almas yulduzlarga yo'naltirilgan koordinata o'qlarining geliomarkazli sistemasi, yetarlicha aniqlikda, inersial sanoq sistemasi bo'la oladi. Jism harakatining kichik tezliklar mexanikasi uchun Yer bilan bog'langan sistemani ham inertsial deb hisoblash mumkin.

4-§. Mexanik o'lchov birliklari sistemasi

Kuch va tezlanish modullari orasidagi F=mw chiziqli bog'lanishga asoslangan holda, mexanik kattaliklarni o'lchash uchun ikki tur birliklar sistemasi kiritiladi. Buning uchun har gal uchta asosiy o'lchov birliklari olinadi.

Birinchi tur birliklar sistemasi. Xalqaro birliklar sistemasi SI. Bu sistemada uzunlik va vaqt birliklari 1 m. va 1 s. deb olinadi. Uchinchi o'lchov birligi sifatida massa olinadi. Uning etalon birlik massasi deb 1 kg olinadi. U holda kuch o'lchov birligi ushbu uch asosiy birliklardan hosilaviy birlik bo'lib, asosiy qonunning yuqoridagi ifodasiga muvofiq aniqlanadi va 1N deb

$$1N = 1\frac{kг \cdot m}{s^2}$$

ataladi: ya'ni 1 kg massaga 1 m/s^2 tezlanish beradigan kuch 1 N ga teng. Aynan shunday, qolgan mexanik kattaliklarning birligi asosiy birliklardan hosilaviy birlik kabi aniqlanadi.

Ikkinchi tur birliklar sistemasi. Birliklarning texnik sistemasi. Bu sistemada asosiy o'lchov birliklari sifatida uzunlik birligi 1 m, vaqt birligi 1 s va kuch birligi 1 kgk (kilogramm-kuch) olinadi. Bu sistemada massa hosilaviy birlik kabi asosiy tenglamadan quyidagicha aniqlanadi:

$$[m] = [F] / [W]$$

va bir massa birligi uchun bir texnik birlik massa qabul qilingan (1 t.b.m.). Dinamikaning asosiy tenglamasiga muvofiq 1 kgk ta'siridan 1 m/s^2 tezlanish oladigan nuqtaning massa 1 t.b.m. ga teng bo'ladi, yoki 1 kg massaga 1 kgk g=9,81 m/s^2 tezlanish yoki xuddi shu 1 kg massaga 1 N kuch 1 m/s^2 tezlanish beradi, ya'ni 1 kgk=9,81 N, 1N=0,102 kgk.

2 - LEKSIYA

MODDIY NUQTA DINAMIKASI

Moddiy nuqta harakatining differensial tenglamalari. Dekart koordinatalarda harakat differensial tenglamalar. Nuqta harakatining tabiiy o'qlardagi differensial tenglamalari. Dinamikaning ikki asosiy masalasi.

1. Erkin nuqtaning harakat differensial tenglamalari Dekart koordinatalarida qanday ifodalanadi?
2. Qanday differensial tenglamalar nuqta harakatining tabiiy tenglamalari deyiladi?
3. Differensial tenglamalarga ko'ra qanday masalalar qo'yilgan?
4. Dinamikaning birinchi masalasi qanday qo'yiladi va yechiladi?
5. Dinamikaning ikkinchi masalasi qanday qo'yiladi va yechiladi?
6. Integrallash doimiylari nima?
7. Nuqta harakatining boshlang'ich shartlari nima?
8. Differensial tenglamaning umumiy va xususiy yechimlari.
9. Nuqtaning to'g'ri chiziqli harakat differensial tenglamalari qanday yoziladi va yechiladi?
10. Gorizontga burchak ostida otilgan jism (nuqta) harakati qanday bo'ladi?

Tayanch so'zlar va iboralar

Nuqta harakatining vektorli differensial tenglamasi. Nuqta harakatining Dekart koordinatalarda differensial tenglamalari. Nuqta harakatining tabiiy tenglamalari. Nuqta dinamikasining ikki masalasi. Dinamikaning ikkinchi masalasi. Harakatning boshlang'ich shartlari. Differensial tenglamaning umumiy va xususiy yechimi. O'zgarmas kuch. Vaqtga bog'liq kuch. Nuqtaning holatiga bog'liq kuch.

5-§. Moddiy nuqta harakatining differensial tenglamalari

Dinamikaning fundamental qonuni (1.1) dan foydalanib, erkin va bog'lanishdagi moddiy nuqtalar harakatining differensial tenglamalarini keltirib chiqarish mumkin.

Bu tenglamalarning ko'rinishi nuqta harakatining qanday usullarda berilishiga bog'liq bo'ladi. m massali biror M erkin moddiy nuqtaning $\overline{F}$ (ёки $\overline{F} = \sum \overline{F_K}$) kuch ta'siridagi harakatini tekshiramiz. Nuqtaning W tezlanishini uning radius vektori r orqali aniqlab, (1.1) ga ko'ra, erkin moddiy nuqta harakati uchun differensial tenglamaning quyidagi vektorli ifodasini yozamiz.

$$m\frac{d^2\overline{r}}{dt^2} = \overline{F} \tag{2.1}$$

Asosiy tenglamaning (2.1) vektorli ko'rinishidan Dekart koordinata o'qlariga proyeksiyalaridagi analitik ko'rinishiga o'tish uchun uning har ikki tomonini Dekart koordinata o'qlariga proyeksiyalab, erkin moddiy nuqtaning Dekart koordinatalaridagi harakat differensial tenglamalarini hosil qilamiz.

$$m\ddot{x} = F_X, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z \tag{2.2}$$

(2.2) tenglamalar nuqta koordinatalariga nisbatan ikkinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasini tashkil qiladi.

Bu yerda $W_x = \ddot{x}, \quad W_y = \ddot{y}, \; W_z = \ddot{z}$

Xususiy hollar. Agar erkin moddiy nuqta harakati tekislikda sodir bo'lsa, masalan, *Oxy* koordinatalar tekisligida, uning harakat differensial tenglamasi uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$m\ddot{x} = F_x, \qquad m\ddot{y} = F_y \tag{2.3}$$

Shuningdek, moddiy nuqtaning to‘g‘ri chiziqli harakatida, masalan, *Ox* o‘qi bo‘ylab, nuqtaning to‘g‘ri chiziqli harakatining bitta differensial tenglamasiga kelamiz:

$$m\ddot{x} = F_x, \qquad (2.4)$$

Moddiy nuqtaning harakat differensial tenglamalarini tabiiy koordinata o‘qlarida ham ifodalash mumkin. Buning uchun nuqta trayektoriyasida u bilan birgalikda harakatlanuvchi (qo‘zg‘aluvchi) tabiiy koordinatalar sistemasini o‘tkazamiz. (1.1) ning har ikki tomonini bu sistema o‘qlariga proyeksiyalaymiz:

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau, \quad m\frac{v^2}{\rho} = F_n, \quad 0 = F_b \qquad (2.5)$$

(2.5) tenglama erkin moddiy nuqtaning tabiiy koordinata o‘qlardagi harakat differensial tenglamalarini ifodalaydi. Buni ko‘pincha erkin nuqta harakati differensial tenglamalarining Eyler formulasi deyiladi. (2.5) dagi $F_b = 0$ ekanligi moddiy nuqtaga ta’sir etuvchi kuch egrilik tekisligida yotishini ko‘rsatadi.

Bog‘lanishdagi nuqtaning harakat differensial tenglamalari

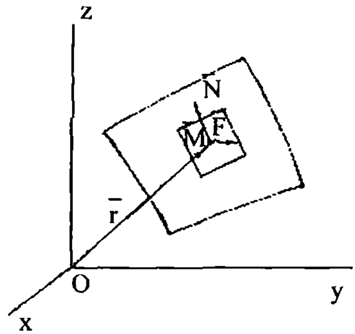
Bog‘lanishdagi moddiy nuqta uchun bog‘lanishlardan bo‘shatish haqidagi aksioma va bog‘lanish reaksiya kuchlariga asoslanib moddiy nuqtaga qo‘yilgan barcha kuchlar qatoriga reaksiya N kuchlarini ham qo‘shib, erkin nuqta kabi (1.1) tenglamani yozish mumkin.

$$m\overline{w} = \overline{F} + \overline{N} \qquad (2.6)$$

Koordinata sistemasidagi harakat differensial tenglamalarni quyidagicha ifodalash mumkin.

$$m\ddot{x} = F_x + N_x, \quad m\ddot{y} = F_y + N_y, \quad m\ddot{z} = F_z + N_z \qquad (2.7)$$

Moddiy nuqtaning harakatida bog‘lanish reaksiya kuchlari, umumiy holda, nuqtaga qo‘yilgan bog‘lanishlarga va ta’sir etuvchi kuchlarga bog'liq bo'libgina qolmay, balki uning harakatining xarakteriga ham bog'liq. Masalan, nuqtaning havodagi yoki biror qarshilik ko'rsatadigan muhit ichidagi harakati tezligiga bog'liq bo'ladi.



Reaksiya kuchlarining muhim tomoni shundaki, ular masalalarda avvaldan berilmaydi, balki dinamika masalalarini yechish natijasida moddiy nuqtaning harakati kabi, berilgan bog'lanishlarga ko'ra aniqlanadi. Dinamikada bog'lanishlarni, statikadan farqli ravishda, dinamik bog'lanishlar yoki dinamik bog'lanish reaksiyalari deb atashadi.

6-§.Moddiy nuqta dinamikasining ikki asosiy masalasi

Moddiy nuqtaning u yoki bu koordinatalar sistemasidagi harakat differensial tenglamalaridan foydalanib, nuqta dinamikasining ikki asosiy masalasini yechish mumkin.

Birinchi masala. Nuqtaning massasi va harakat qonuniga ko'ra nuqtaga ta'sir etuvchi kuchni topish. Haqiqatan, m massali moddiy nuqtaning harakat tenglamalari Dekart koordinatalarda berilgan bo'lsin:

$$x=f_1(x),\ y=f_2(x),\ z=f_3(x)$$

Kuchning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari nuqta harakat differensial tenglamalari (2.2) dan aniqlanadi, ya'ni

$$F_x = m\ddot{x} = m\ddot{f}_1(t);\quad F_y = m\ddot{y} = m\ddot{f}_2(t),\quad F_z = m\ddot{z} = m\ddot{f}_3(t), \qquad (2.8)$$

U holda kuchning moduli

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}=m\sqrt{\ddot{f}_1^2(t)+\ddot{f}_2^2(t)+\ddot{f}_3^2(t)}, \qquad (2.9)$$

yo'nalishi esa yo'naltiruvchi kosinuslarga ko'ra

$$\cos(\overline{F}^\wedge,x)=\frac{F_x}{F};\ \cos(\overline{F}^\wedge,y)=\frac{F_y}{F};\ \cos(\overline{F}^\wedge,z)=\frac{F_z}{F} \qquad (2.10)$$

formulalardan aniqlanadi.

1-masala. Massasi m ga teng M moddiy nuqta birgina $\overline{F}$ kuch ta'sirida ushbu tenglamaga muvofiq harakatlansin:

$$x=a\cos(\omega t);\ y=b\sin(\omega t);\ z=0 \qquad (a)$$

Nuqtaga ta'sir etuvchi kuch aniqlansin.

Y*echish.* (a) dan vaqt t ni yo'qotib topiladigan trayektoriya bo'ylab M moddiy nuqta *xoy* tekislikda harakatda bo'ladi:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Demak, M nuqta ellips bo'ylab harakatlanadi. $\overline{F}$ kuchning proyeksiyalari (2.8) formuladan aniqlanadi;

$$F_x=m\ddot{x}=-m\omega^2x;\ F_y=m\ddot{y}=-m\omega^2y;\ F_z=m\ddot{z}=0$$

(2.9) va (2.10) formulalarga ko'ra $\overline{F}$ kuchning modulini va yo'nalishini aniqlaymiz;

$$F=m\omega^2\sqrt{x^2+y^2}=m\omega^2r,\ \cos(\overline{F}^\wedge,x)=-\frac{x}{r},\ \cos(\overline{F}^\wedge,y)=-\frac{y}{r}$$

Bu yerda $\bar{r}=\overline{OM}$ — nuqtaning radius vektori. Bulardan ko'ramizki, kuchning moduli nuqtaning radius vektoriga proporsional bo'lib, unga qarama-qarshi yo'nalgan bo'ladi, ya'ni nuqta

$$\overline{F}=-m\omega^2\bar{r}$$

kuch ta'sirida harakatlanadi. Jumladan, planetalar Quyosh atrofida ellips bo'ylab harakatlanadi, ammo Quyosh ellips markazida bo'lmay, balki uning biror fokusida joylashadi (Keplerning birinchi qonuni) va tortishish kuchi planetaning uzoqligiga proporsional bo'lmay, uning kvadratiga teskari proporsional (Nyutonning butun olam tortishish qonuni) bo'lishini aniqlaymiz. Bunda planetaning harakat tenglamasi (a) ga qaraganda birmuncha murakkabdir.

Nuqta dinamikasining birinchi masalasidan ko'ramizki, nuqta massasi va harakat qonuni berilganda unga ta'sir etuvchi kuchning son qiymati va yo'nalishi harakat qonunlarini differensialash bilan aniqlanadi.

Ikkinchi masala. Nuqta massasi va unga ta'sir etuvchi kuch berilganda, nuqtaning harakat qonunini aniqlash. Bu masalaning yechilishini ham Dekart koordinatalar sistemasida qaraymiz. Nuqtaga ta'sir etuvchi kuch, umumiy holda, birdaniga bir qancha faktorlarga bog'liq bo'lishi mumkin. $\overline{F} = \overline{F}(t, \overline{r}, \overline{v})$.

U holda, (2.2) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{1}{m} F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ \ddot{y} &= \frac{1}{m} F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ \ddot{z} &= \frac{1}{m} F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \end{aligned} \tag{2.11}$$

Nuqtaning Dekart koordinatalardagi harakat tenglamalarini aniqlash uchun x,y,z larga nisbatan uchta ikkinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasi (2.11) ni birgalikda integrallash zarur. Matematikaning biror metodi bilan (2.11) ni yechib differensial tenglamalar sistemasining birinchi integraliga erishaylik:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(t, x, y, z, C_1, C_2, C_3) \\ \dot{y} &= f_2(t, x, y, z, C_1, C_2, C_3) \\ \dot{z} &= f_3(t, x, y, z, C_1, C_2, C_3) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Bu yerda C_1, C_2,C_3 differensial tenglamalar sistemasini bir marta integrallash natijasida paydo bo'lgan ixtiyoriy o'zgarmaslar.

(2.12) tenglamalarni ham integrallash imkoniga ega bo'lsak, u holda, koordinatalarning hosilalaridan butunlay qutilamiz. Bu integrallash natijasida yana uchta ixtiyoriy o'zgarmaslar; C_4, C_5, va C_6 paydo bo'ladi. Yana ilgarigidek, bu ixtiyoriy o'zgarmaslar, uch munosabatga kiradi. Natijada, yuqoridagi (2.11) differensial tenglamalarning integrallari, umumiy holda, quyidagicha yoziladi;

$$\begin{aligned} &f_1(t,x,y,z,C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6)=0\\ &f_2(t,x,y,z,C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6)=0\\ &f_3(t,x,y,z,C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6)=0 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Bu munosabatlarga koordinatalarning hosilalari kirmaydi; faqat koordinatalar bilan vaqt o'zaro bog'langan.

Topilgan (2.13) harakat tenglamalarni dinamikaning asosiy masalasining aniq bir yechimi deb bo'lmaydi, chunki tenglamada oltita ixtiyoriy o'zgarmas son bor. Shunday qilib, masalaning yechimi bir emas, bir necha ko'rinishda topilgan, ya'ni, nuqta berilgan kuch ta'sirida biror aniq yo'nalishda harakatlanmaydi, uning harakati ixtiyoriy o'zgarmaslarning har xil qiymatlariga mos keluvchi harakatlar to'plamidan iborat bo'ladi. Muayyan harakatning qanday sodir bo'lishi boshlang'ich shartlarga bog'liq bo'ladi. Masalan, og'irlik kuchi ta'sirida harakatlanayotgan nuqtaning trayektoriyasi boshlang'ich tezlikning yo'nalishiga qarab, to'g'ri yoki egri chiziqli bo'lishi mumkin. Moddiy nuqtaning boshlang'ich paytdagi holati va tezligini ifodalovchi shartlar **boshlang'ich shartlar** deyiladi.

Masalan, boshlang'ich shartlar quyidagicha bo'lsin: t=0 da

$$\begin{aligned} &x=x_0,\ y=y_0,\ z=z_0;\\ &\dot{x}=\dot{x}_0,\ \dot{y}=\dot{y}_0,\ \dot{z}=\dot{z}_0 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Bu shartni (2.12) va (2.13) tenglamalarga qo'yib, C_1, C_2,C_3 C_4, C_5,C_6 ixtiyoriy o'zgarmaslarni aniqlash uchun oltita tenglamaga kelamiz. Bu tenglamalarni yechib, oltita ixtiyoriy o'zgarmaslarni topamiz, natijada, moddiy nuqtaning koordinatalari quyidagicha ifodalanadi:

$$x = f(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$$
$$y = f(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \qquad (2.15)$$
$$z = f(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$$

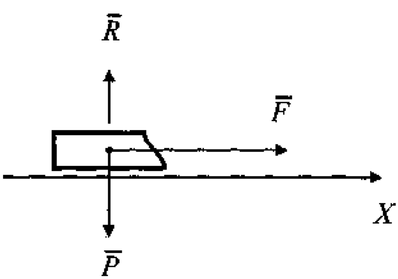
Demak, dinamikaning ikkinchi masalasining (yagona) xususiy yechimini aniqlash uchun moddiy nuqtaga ta'sir etuvchi kuchning xususiyatlarini bilish bilan birga, moddiy nuqta harakatining boshlang'ich shartini ham bilish zarur. Boshlang'ich shart berilmasa, dinamikaning ikkinchi masalasining yechimi nuqtaning biror muayyan harakatini tasvirlamaydi.

Nuqtaning (2.15) harakat qonunidan kinematika metodi asosida trayektoriyasi, tezligi va tezlanishi aniqlanadi. Ba'zan, (2.11) differensial tenglamalar sistemasini aniq yechib bo'lmaydi. Bu holda elektron hisoblash mashinasini qo'llash bilan sonli integrallash metodi asosida taqribiy yechiladi. Nuqta dinamikasining ikkinchi asosiy masalasi faqat xususiy hollar uchungina aniq yechiladi.

2-masala. Avtomobil haydovchi yo'lning to'g'ri chiziqli qismida tinch holatdan asta-sekin harakatlana boshlab, motorning tortish kuchini qarshilik kuchidan har sekundiga 1kN dan vaqtga proporsional ravishda oshirib bordi. Avtomobilning og'irlik kuchi 70 kNga teng.

Avtomobilning harakat tenglamasi topilsin.

Yechish. Avtomobilning harakati bo'yicha ox o'qni yo'naltiramiz, Avtomobilning qo'zg'alish paytdagi o'rnini ox o'qining hisob boshi uchun qabul qilamiz. x>0 da unga



harakatlantiruvchi $\overline{F}$, og'irlik $\overline{P}$, reaksiya $\overline{N}$ kuchlarni qo'yib harakat differensial tenglamasini tuzamiz:

$$m\ddot{x} = F_X$$

yoki

$$\frac{P}{g}\ddot{x} = F_X$$

Bunda F=1t, g=10m/c^2, P=70kN deb olib, differensial tenglamani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\ddot{x} = t/7, \qquad (1)$$

yoki $\ddot{x} = dv/dt$ ekanligini e'tiborga olib,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{7}t$$

ga kelamiz. Bunda o'zgaruvchilarni ajratib va integrallab, tezlik uchun

$$v = \frac{1}{7}\frac{t^2}{2} + C_1 \qquad (2)$$

ifodaga ega bo'lamiz. (2) ga masalaning boshlang'ich shartlarini ($t=0$ da $\dot{x}=\dot{x}_0=v_0=0$) qo'yamiz va C_1 ni topamiz: $C_1=0$. C_1 ning topilgan qiymatini (2) tenglamaga qo'yib, $v=dx/dt=\dot{x}$, ekanligini nazarga olib, harakat tenglamasini aniqlash uchun quyidagi differensial tenglamaga ega bo'lamiz:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{14}t^2 \qquad (3)$$

(3) tenglamada o'zgaruvchilarni ajratib va uni integrallasak:

$$x = \frac{1}{14}\frac{t^3}{3} + C_2 \qquad (4)$$

(4) munosabatga boshlang'ich shartlarni ($t=0$ da $x(0)=x_0=0$) qo'yib, integrallash doimiysi C_2 ni topamiz:

$$C_2 = 0.$$

Binobarin, avtomobilning izlanayotgan harakat tenglamasi:

$$x = \frac{t^3}{42}\ m.$$

3 - LEKSIYA

NUQTANING ERKIN TEBRANMA HARAKATI

Erkin tebranma harakatga o'zgarmas kuchning ta'siri. So'nuvchi tebranma harakat

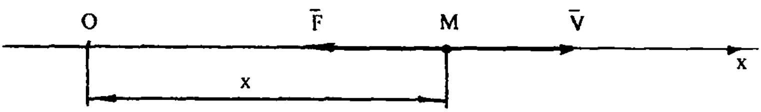
1. Qanday kuchga qaytaruvchi kuch deyiladi?
2. Elastiklik koeffitsienti nima?
3. Nuqtaning chiziqli erkin tebranma harakat differensial tenglamasi qanday ifodalanadi?
4. Nuqtaning garmonik tebranma harakati nima?
5. Erkin tebranma harakat chastotasi va davri qanday aniqlanadi?
6. Erkin tebranma harakatning amplitudasi va fazasi qanday aniqlanadi?
7. Erkin tebranma harakatning qaysi xarakteristikalari boshlang'ich shartlariga bog'liq?
8. Erkin tebranma harakatga o'zgarmas kuchning ta'siri qanday bo'ladi?
9. Nuqtaning so'nuvchi tebranma harakati qanday kuchlar ta'sirida sodir bo'ladi?
10. So'nuvchi tebranma harakat qanday differensial tenglama bilan ifodalanadi?
11. So'nuvchi tebranma harakat chastotasi va davri nimaga bog'liq?
12. So'nuvchi tebranma harakat differensial tenglamasining yechimi qaytaruvchi va qarshilik kuchlari nisbatiga qanday uch xil bog'liq?
13. So'nuvchi tebranma harakat amplitudasi va fazasi qanday aniqlanadi?
14. So'nuvchi tebranma harakat dekrementi nimani ifodalaydi?

Tayanch so'zlar va iboralar

Tebranma harakat. Qaytaruvchi kuch. Elastiklik koeffitsienti. Erkin tebranma harakat. Erkin tebranma harakat differensial tenglamasi. Garmonik harakat. Erkin tebranma harakat chastotasi. Erkin tebranma harakat davri. Erkin tebranma harakat amplitudasi va fazasi. Statik cho'zilish. Muhitning qarshilik kuchi. So'nuvchi tebranma harakat differensial tenglamasi. So'nuvchi tebranma harakat dekrementi. Aperiodik harakat.

7-§. Moddiy nuqtaning erkin tebranma harakati

Dinamikaning ikkinchi masalasiga misol tariqasida moddiy nuqtaning to'g'ri chiziqli tebranma harakatini ko'ramiz. Dastlab, moddiy nuqtaning erkin tebranma harakatini o'rganishdan boshlaymiz. Faraz qilaylik, massasi m bo'lgan M moddiy nuqta O muvozanat holatdan x masofaga siljitib, qo'yib yuborilganda, u hamma vaqt muvozanat holati O ga qarab yo'nalgan va nuqtadan muvozanat holatgacha bo'lgan x masofaga proporsional $F=c|x|$ kuch ta'sirida to'g'ri chiziqli harakatda bo'lsin. Moddiy nuqta ana shunday kuch ta'sirida hamma vaqt o'zining muvozanat



holatiga intilib, shu o nuqta atrofida tebranma harakat qiladi. Bunday kuch ta'siridagi moddiy nuqtaning tebranishi **(bir maromli) garmonik** yoki **erkin tebranma harakat** deyilib, F kuch esa **qaytaruvchi (tiklovchi kuch)** deb ataladi. Bu yerda C elastik jismning N/m bilan o'lchanadigan bikirlik koeffitsienti bo'lib, u nuqtani birlik masofaga ko'chirish uchun zarur bo'lgan kuchga teng. Bunday kuchlarga misol sifatida elastik kuchni keltirish mumkin.

Erkin tebranma harakatni tekshirish uchun moddiy nuqtaning harakat differensial tenglamasini integrallash usulini tatbiq etamiz. M nuqtaning to'g'ri chiziqli trayektoriyasini x o'qi deb qabul qilib, koordinatani O muvozanat holatdan hisoblaymiz. Qaytaruvchi kuch hamma vaqt muvozanat markazga yo'nalib, M nuqtaning ixtiyoriy holati uchun, yuqoridagi mulohazaga ko'ra, quyidagicha ifodalanadi:

$$F_x = -cx \qquad (3.1)$$

U holda, M nuqtaning harakat differensial tenglamasi:

$$m\ddot{x}=-cx \qquad (3.2)$$

ko'rinishda yoziladi. (3.2) ning ikkala tomonini m ga bo'lib, va

$$k^2=\frac{c}{m} \qquad (3.3)$$

belgilash kiritsak, differensial tenglama quyidagicha ko'rinishga keladi.

$$\ddot{x}+k^2x=0. \qquad (3.4)$$

Bu tenglama nuqtaning erkin tebranma harakatining differensial tenglamasini ifodalaydi. U koeffitsiyentlari o'zgarmas bo'lgan bir jinsli, ikkinchi tartibli, chiziqli differensial tenglamadir. Bunday tenglamani yechish uchun, differensial tenglamalar nazariyasida, quyidagicha xarakteristik tenglama tuzish talab etiladi:

$$\lambda^2+k^2=0$$

$\lambda_{1,2}=\pm ik$ bo'lganligidan, (3.4) tenglamaning umumiy yechimi differensial tenglamalar nazariyasidan ma'lumki, ushbu ko'rinishni oladi:

$$x=A\cos(kt)+B\sin(kt) \qquad (3.5)$$

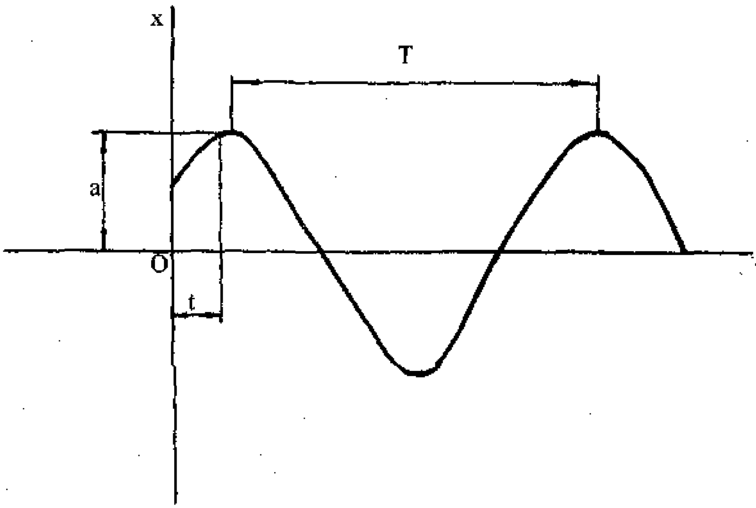
Bundagi A va B lar nuqtaning boshlang'ich holatiga bog'liq bo'lgan ixtiyoriy o'zgarmaslar. Bularning o'rniga boshqa ikkita ixtiyoriy a va α o'zgarmaslar olamiz.

$$A=a\sin\alpha,$$
$$B=a\cos\alpha. \qquad (3.6)$$

U holda, (3.5) yechim quyidagi ko'rinishni oladi:

$$x=a\sin(kt+\alpha) \qquad (3.7)$$

Bu (3.4) tenglamaning boshqacha ko'rinishdagi yechimi bo'lib, a va α



ixtiyoriy o'zgarmaslar, (3.7) **yechim garmonik tebranma harakatni** ifodalaydi. Bunday harakatni to'liq tekshirish uchun (3.7) dan foydalanish qulay. Chunonchi, harakati kuzatilayotgan nuqtaning tezligi

$$v_x = \dot{x} = a \cdot k \cdot \cos(kt + \alpha),$$

ga teng bo'ladi.

Demak, moddiy nuqta qaytaruvchi kuch ta'sirida garmonik tebranma harakatda bo'ladi. $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ga teng bo'lganda uning grafigi rasmda tasvirlangan. Bu harakatni xarakterlovchi hamma mexanik kattaliklarni oddiy kinematik obraz vositasi bilan oydinlashtirish mumkin. M nuqtaning 0 tebranish markazidan eng katta chetlanishiga teng bo'lgan a miqdorga **tebranish amplitudasi** deyiladi. **Tebranish fazasi** f, nuqta koordinatasidan farqlanib, uning berilgan vaqtdagi holatini aniqlabgina qolmay, balki so'ngi holatining yo'nalishini ham aniqlaydi. **α** kattalik **boshlang'ich faza** deb ataladi. Nuqtaning to'la bir marta tebranishi uchun ketgan vaqt T ga **tebranish davri** deyiladi. Endi, tebranma harakatning davrini topamiz. Buning uchun (3.7) formulani quyidagicha yozamiz:

$$\sin[k(t+T)+\alpha] = \sin(kt+\alpha)$$

Keltirilgan ayniyatdan:

$$kT = 2\pi,$$

ya'ni davr sarflanguncha tebranish fazasi 2π ga o'zgaradi, bundan

$$T = \frac{2\pi}{k} \tag{3.8}$$

kelib chiqadi. k- **tebranish chastotasi** deyiladi. (3.7) dagi ixtiyoriy o'zgarmaslarni harakatning boshlang'ich shartidan topamiz, ya'ni $t=0$ bo'lganda $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0 = v_0$ bo'lsin, u holda, (3.5) tenglamadan: $A = x_0$, $B = v_0/k$ kelib chiqadi. Bularni ko'zda tutib (3.6) tenglamadan a amplituda bilan α boshlang'ich fazani aniqlash uchun:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}$$
$$tg\alpha = \frac{x_0 \cdot k}{v_0} \tag{3.9}$$

formulaga ega bo'lamiz.

Keltirilgan natijalarga binoan, moddiy nuqtaning erkin tebranma harakatining quyidagi xossalarini ta'kidlab o'tamiz:

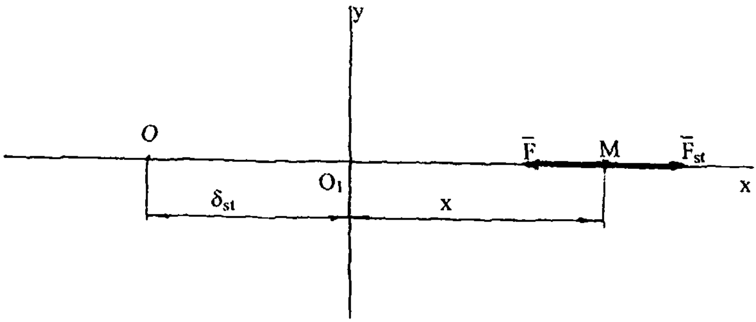
1) tebranishning amplitudasi va boshlang'ich fazasi, (3.9) ga ko'ra boshlang'ich shartlarga bog'liq bo'ladi;

2) tebranish chastotasi (3.3), davri (3.8) boshlang'ich shartlarga bog'liq bo'lmaydi, ular berilgan tebranuvchi sistemaning o'zgarmas xarakteristikasi deyiladi.

Agar masalada *T* yoki *k* kattalikni hisoblashga to'g'ri kelsa, kuzatilayotgan nuqta tebranishining differensial tenglamasi tuzilib, uni (3.4) ko'rinishga keltiriladi. So'ngra esa uni integrallab o'tirmasdan davri *T* (yoki *k*) (3.8) formuladan topiladi.

Moddiy nuqtaning erkin tebranma harakatiga o'zgarmas kuchning ta'siri. Faraz qilaylik, M moddiy nuqtaga muvozanat holati

O ga qarab yo'nalgan qaytaruvchi $\overline{F}$ kuchdan tashqari, miqdor va yo'nalishi o'zgarmas bo'lgan $\overline{F}_{st}$ kuch ham ta'sir etayotgan bo'lsin.



$\overline{F}$ kuchning miqdori avvalgidek nuqtadan muvozanat holatgacha bo'lgan masofaga proporsional, ya'ni F=c • OM bo'ladi. Bu hol uchun M nuqtaning muvozanat holati 0_1 nuqta bo'lib, u O nuqtadan

$$c\delta_{st} = F_{st} \text{ yoki } \delta_{st} = \frac{F_{st}}{c}$$

tengliklardan aniqlanuvchi $OO_1=\delta_{st}$ masofada bo'lishini ko'rish mumkin. Bu yerda δ_{st} kattalikka nuqtaning statik chetlanishi deyiladi.

Koordinata o'qining boshi uchun nuqtaning statik muvozanat holati 0_1 nuqtani olib, $\overline{F}_{st}$ kuchning ta'sir yo'nalishi bo'ylab 0_1x o'qini yo'naltiramiz. U holda M moddiy nuqtaga qo'yilgan kuchlarning teng ta'sir etuvchisi

$$F_x=-c(x+\delta_{st})+F_{st}=-cx,$$

bo'ladi. Bu hol uchun harakat differensial tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$m\ddot{x}=-cx$$

yoki

$$\ddot{x}+k^2x=0$$

Keltirib chiqarilgan tenglama (3.4) tenglamaga mos bo'lib, bu yerda k (3.3) tenglikdan topiladi. Bundan ushbu xulosaga kelamiz: o'zgarmas kuch qaytaruvchi kuchning ta'sirida yuzaga kelgan tebranishning xarakterini o'zgartirmasdan, balki bu tebranishning muvozanat holatini $\overline{F}_{st}$ yo'nalishida δ_{st} ga ko'chiradi. Tebranish davrini δ_{st} orqali ifodalaymiz:

$$k^2 = \frac{F_{st}}{m\delta_{st}}$$

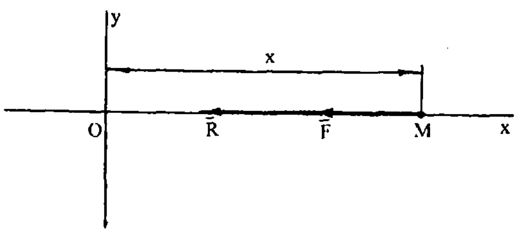
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{F_{st}}\delta_{st}}$$

O'zgarmas kuch og'irlik kuchiga teng bo'lgan xususiy holda, chunonchi, vertikal prujinaga osilgan yukning harakatida F_{st} = P =mg bo'lib,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}}$$

8-§. Moddiy nuqtaning so'nuvchi tebranma harakati

Moddiy nuqta harakati qarshilik ko'rsatuvchi muhitda (havoda, suyuqlikda) sodir bo'lsa, uning harakatiga ta'sir qiluvchi qarshilik kuchi paydo bo'ladi. Bu qarshilik kuchi nuqtaning tezligiga proporsional bo'ladi. Biz qarshilik kuchini tezlikning birinchi darajasiga proporsional, ya'ni $\overline{R} = -\mu\overline{v}$ deb olib, (bunda μ - proporsionallik o'zgarmas koeffitsiyent) moddiy nuqtaning erkin tebranma harakatiga uning ko'rsatadagan ta'sirini tekshiramiz. U holda moddiy nuqta qo'zg'almas 0 markazga tortuvchi F_x=-cx qaytaruvchi kuch bilan tezlikning birinchi darajasiga proporsional bo'lgan $R_x = -\mu v_x = -\mu\dot{x}$ muhit qarshilik kuchi ta'sirida harakat qiladi.



Moddiy nuqtaning differensial tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x} \qquad (3.10)$$

Tenglamaning ikkala tomonini m ga bo'lib:

$$\frac{c}{m}=k^2, \quad \frac{\mu}{m}=2n \qquad (3.11)$$

deb olsak (bunda k va n miqdorlarni bir xil 1/s o'lchamga ega ekanligini osonlik bilan tekshirish mumkin; bu ularni bir-birlari bilan taqqoslashga imkon beradi), harakat differensial tenglamasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+k^2x=0 \qquad (3.12)$$

Tegishli xarakteristik tenglamaning ildizlari kompleks bo'lib, moddiy nuqta harakat differensial tenglamasining umumiy yechimi (3.4) tenglamaning umumiy yechimidan e^{-nt} ko'paytuvchi bilangina farq qiladi, ya'ni quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$x=e^{-nt}(A\cos(k_1t)+B\sin(k_1t)) \qquad (3.13)$$

yoki (3.7) tenglik singari,

$$x=ae^{-nt}\sin(k_1t+\beta) \qquad (3.14)$$

deb yozish mumkin. Bu yerda

$$k_1=\sqrt{k^2-n^2} \qquad (3.15)$$

Dastlab, $k>n$, ya'ni qarshilik kuchi qaytaruvchi kuchdan kichik bo'lgan holni ko'rib chiqamiz. (3.14) yechimdagi a va β ixtiyoriy o'zgarmaslar nuqta harakatining boshlang'ich shartlaridan topiladi. Nuqtaning (3.14) qonunga muvofiq sodir bo'ladigan tebranishini **so'nuvchi tebranish** deb ataladi. Chunki bunda tebranish amplitudasi e^{-nt} ga ko'paygani tufayli vaqtga qarab kamayib, nolga yaqinlashib boradi. Ya'ni u oz fursat o'tmay kichraygani uchun tebranish tezda so'nadi. Bu hol uchun tebranish chastotasi (3.15) tenglik bilan ifodalangan k_1 mexanik kattalik bo'ladi. Shunga ko'ra, tebranish davri quyidagicha yoziladi:

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} \qquad (3.16)$$

Endi erkin tebranish davri bilan so'nuvchi tebranish davrini solishtiramiz:

$$T = \frac{2\pi}{k} \quad va \quad T_1 = \frac{2\pi}{k_1}$$

Bunda $k_1<k$ bo'lganidan $T_1>T$ kelib chiqadi. Bundan shunday xulosaga kelamiz: muhit qarshiligi tebranish davrini erkin tebranish davriga qaraganda bir muncha oshiradi. Ammo qarshilik juda ham kichik bo'lganida ($n<<k$), $k_1 \approx k$ deyilsa ham unchalik xatolikka yo'l qo'yilmagan bo'ladi va $T_1 \approx T$ deb olamiz. Shuning uchun muhit qarshiligining tebranish davriga ta'sirini sezilmas darajada kichik deyish mumkin.

Endi so'nuvchi tebranish amplitudasining vaqt o'tishi bilan qanday o'zgarishi ustida to'xtalamiz. So'nuvchi tebranish amplitudasi

$$A = a\, e^{-nt} \qquad (3.17)$$

ga teng.

Vaqt o'tishi bilan so'nuvchi tebranish amplitudasining o'zgarish qiymatini ifodalaydigan jadvalni tuzamiz:

t	0	$\frac{T_1}{2}$	$2\frac{T_1}{2}$	...	$m\frac{T_1}{2}$, $(m \succ 0)$
A	a	$ae^{-\frac{nT_1}{2}}$	$ae^{-2\frac{nT_1}{2}}$	...	$ae^{-m\frac{nT_1}{2}}$

Bu jadvaldan ko'ramizki, so'nuvchi tebranish amplitudasi yarim davrda kamayuvchi geometrik progressiya qonuni bo'yicha o'zgarib boradi. Bu progressiyaning maxraji:

$$q=\frac{A_m}{A_{m+1}}=\frac{ae^{-m\frac{nT_1}{2}}}{ae^{-(m-1)\frac{nT_1}{2}}}=e^{n\frac{T_1}{2}} \qquad (3.18)$$

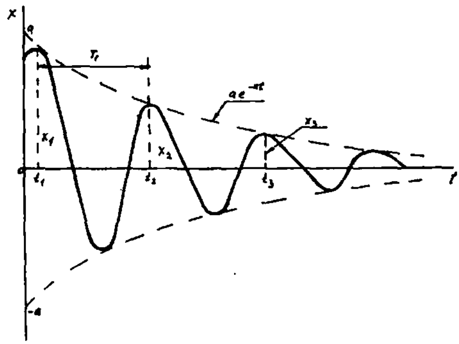
ga teng bo'lib, u *so'nish dekrementi* deb ataladi. Bundan ko'ramizki, har yarim davrda, qarshilik tufayli, tebranma harakat amplitudasi q qadar kamayib boradi. So'nish dekrementining natural logarifmini so'nuvchi tebranishning *logarifmik dekrementi* deyiladi, ya'ni:

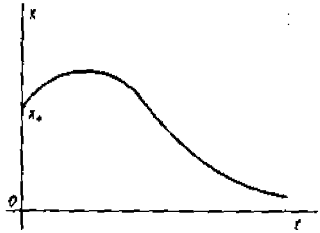
$$\ln(q)=-\frac{nT_1}{2} \qquad (3.19)$$

Endi (3.14) ifodaga asoslanib, so'nuvchi tebranish grafigini quramiz. So'nuvchi tebranma harakat grafigi tenglamalari $x=\pm ae^{-nt}$ bo'lgan ikki egri chiziq orasida bo'lib, bu egri chiziqlarga urinib o'tadi, chunki $\sin(k_1t+\beta)$ ning miqdori bundan katta bo'la olmaydi.

Endi n>k (katta qarshilik) holni tekshiramiz. Bu holda qarshilik kuchi qaytaruvchi kuchga qaraganda yetarli darajada katta bo'ladi. Bu hol uchun xarakteristik tenglamaning ildizlari quyidagicha yoziladi:

$$\lambda_{1,2}=-n\pm\sqrt{n^2-k^2}$$





bundan

$$n^2-k^2=r^2$$

desak,

$$\lambda_{1,2}=-n\pm r$$

kelib chiqadi. k<n bo'lganidan xarakteristik tenglamaning ikkala ildizlari haqiqiy va manfiydir. U holda harakat differensial tenglamasining yechimi:

$$x=C_1e^{-(n+r)}+C_2e^{-(n-r)t} \qquad (3.20)$$

ko'rinishda yoziladi.

e^{-bt} funksiya, bu yerda $b>0$, vaqt o'tishi bilan monoton kamayib nolga yaqinlashib boruvchi bo'lganligidan, nuqta harakati tebranma harakat bo'lmaydi, nuqta qaytaruvchi kuch ta'sirida muvozanat holatiga asimptotik ravishda yaqinlashib boradi. $t=0$ bo'lganda $x=x_0$, $v_0>0$ bo'lgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi hol uchun harakat grafigi tasvirlangan. Qarshilik katta bo'lsa erkin tebranma harakatning monoton harakatga aylanib so'nishini rasmdan ko'ramiz. Demak, katta qarshilik erkin tebranishni darhol so'ndiradi.

Endi $n=k$ holni tekshirib o'tamiz. Bu hol uchun xarakteristik tenglamaning ildizlari haqiqiy, manfiy va bir-birlariga teng bo'ladi:

$$\lambda_{1,2}=-n$$

harakat differensial tenglamaning umumiy yechimi:

$$x=e^{-nt}(C_1t+C_2) \qquad (3.21)$$

ko'rinishda yoziladi. Bu yerda C_1 va C_1 ixtiyoriy o'zgarmaslar (3.21) tenglama va uning hosilalari asosida $t=0$ bo'lganda $x=x_0$, $\dot{x}=\dot{x}_0=v_0$ boshlang'ich shartlardan topiladi.

Moddiy nuqta harakatining bu holi ham tebranma harakat bo'lmaydi. Keyingi har ikki holda nuqta *aperiodik* harakat qiladi. Bu harakatning xarakteri shundayki, t vaqt o'tishi bilan $OM=x$ asimptotik ravishda nolga yaqinlashadi.

4 - LEKSIYA

NUQTANING MAJBURIY TEBRANMA HARAKATI

Muhitning qarshiligi bo'lmaganda majburiy tebranma harakat. Rezonans. Majburiy tebranma harakatga qarshilikning ta'siri

1. Qanday kuchga uyg'otuvchi kuch deyiladi?
2. Qachon majburiy tebranma harakat sodir bo'ladi?
3. Majburiy tebranma harakatni qanday differensial tenglama ifodalaydi?
4. Nuqtaning majburiy tebranma harakati qanday ifodalanadi?
5. Majburiy tebranma harakat chastotasi, davri, amplitudasi va fazasi uyg'otuvchi kuchga qanday bog'liq?
6. Rezonans nima va u qachon ro'y beradi?
7. Muhitning qarshiligida majburiy tebranma harakat differensial tenglamasi qanday ifodalanadi?
8. Muhitning qarshiligi hisobga olinganda majburiy tebranma harakatning amplitudasi va fazasi qanday o'zgaradi?
9. Nosozlik, qarshilik va dinamik koeffitsientlar o'zaro qanday bog'langan?

Tayanch so'zlar va iboralar

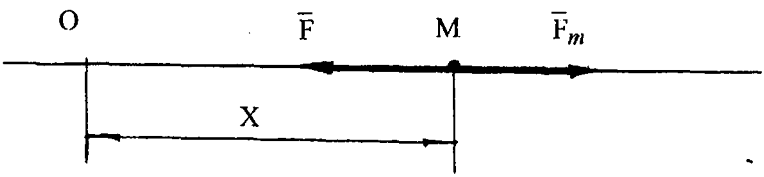
Uyg'otuvchi kuch. Majburiy tebranma harakat. Uyg'otuvchi kuch amplitudasi. Majburiy tebranma harakat chastotasi, davri, amplitudasi, fazasi. Rezonans. Nosozlik, qarshilik, dinamik koeffitsientlar.

9-§. Moddiy nuqtaning majburiy tebranma harakati

Moddiy nuqta muvozanat holatidan qo'zg'atilib, o'z holicha tashlab qo'yilsa, qaytaruvchi kuch ta'siri natijasida erkin garmonik tebranma harakatda bo'lishini ko'rdik. Agar moddiy nuqtaning muvozanatini buzuvchi kuch o'zining davriy ta'sirini to'xtatmasa, moddiy nuqta majburiy tebranma harakatda bo'ladi. Bu harakatning ikki holi bilan tanishamiz.

Qarshilik bo'lmaganda moddiy nuqtaning majburiy tebranma harakati.

Ikki kuch ta'sirida to'g'ri chiziqli harakat qilayotgan M nuqtaning harakatini tekshiramiz



Bu kuchlardan biri $\overline{F}$ qaytaruvchi kuch bo'lib, u hamma vaqt M nuqtani O muvozanat holatiga qaytarishga intiladi. Ikkinchisi $\overline{F}_m$ kuch esa, moddiy nuqtaning to'g'ri chiziqli trayektoriyasi bo'ylab yo'nalib, o'zining miqdori va yo'nalishini davriy ravishda o'zgartirib va M nuqtani hamma vaqt bir tomondan ikkinchi tomonga ko'chirib turadigan kuch bo'lsin. Moddiy nuqtaning hamma vaqt muvozanatini buzuvchi bu $\overline{F}_m$ kuch **«uyg'otuvchi» (majburiy)** kuch deyiladi.

Qaytaruvchi $\overline{F}$ kuchning miqdori va yo'nalishi moddiy nuqtaning holatiga bog'liqdir. Uyg'otuvchi $\overline{F}_m$ kuch esa vaqtning o'tishi bilan o'z yo'nalishini va miqdorini ma'lum qonun bo'yicha o'zgartirib turadi. Biz bu yerda eng oddiy holni tekshirish bilan chegaralanib, uyg'otuvchi $\overline{F}_m$ kuchni garmonik qonun bilan o'zgaruvchan qilib olamiz, ya'ni:

$$F_m = H_0 \sin(pt) \qquad (4.1)$$

bo'lsin. Bunda H_0 — uyg'otuvchi kuchning eng katta qiymati (kuch amplitudasi), p — uyg'otuvchi kuchning doiraviy takrorlik soni chastotasi, pt — uyg'otuvchi kuch fazasi. H_0 — Nyutonda, p — 1/s da o'lchanadi. Uyg'otuvchi kuchning davri

$$\tau = \frac{2\pi}{p}$$

ma'lum miqdordir.

Qarshilik kuchi bo'lmaganda moddiy nuqtaning harakat differensial tenglamasini tuzamiz:

$$m\ddot{x}=-cx+H_0 \sin(pt)$$

Bu tenglamaning har ikki tomonini m ga bo'lib,

$$c/m=k^2,\ H_0/m=h \qquad (4.2)$$

deb olsak, u

$$\ddot{x}+k^2x=h\sin(pt) \qquad (4.3)$$

ko'rinishda yoziladi. Bu moddiy nuqtaning qarshilik bo'lmaganda qaytaruvchi va uyg'otuvchi kuchlar ta'siridagi tebranma harakatning differensial tenglamasi deyiladi. Uning umumiy yechimini topamiz. Tenglama chiziqli va bir jinsli emas bo'lganidan uning yechimini ikki qismga ajratamiz: birinchisi ushbu tenglamaga tegishli bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi, ikkinchisi shu tenglamaning qandaydir xususiy yechimi bo'lsin. Ularni x_1 va x_2, umumiy yechimni esa, x desak,

$$x=x_1+x_2$$

kelib chiqadi.

(4.3) ga tegishli bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi:

$$x_1=a\sin(kt+a)$$

ko'rinishda ifodalanishi bizga ma'lum. Endi (4.3) tenglamaning qandaydir xususiy yechimini topamiz. $k\neq p$ bo'lgan hol uchun bu xususiy yechimni:

$$x_2=B\sin(pt)+D\cos(pt),$$

ko'rinishda olamiz. B va D ixtiyoriy o'zgarmaslarni (4.3) tenglamaning qanoatlantirilish shartidan aniqlaymiz. Ushbu xususiy yechimni (4.3) ga qo'yganimizda u ayniyatga aylanadi, ya'ni:

$$-Bp^2 sin(pt) - Dp^2 cos(pt) + k^2 B sin(pt) + k^2 D cos(pt) = h sin(pt),$$

yoki

$$B(k^2 - p^2) sin(pt) + (k^2 - p^2) D cos(pt) = h sin(pt)$$

kelib chiqadi. Bu ayniyatdan B va D o'zgarmaslarning qiymatini topamiz:

$$B = \frac{h}{p^2 - k^2}, \quad D = 0.$$

Natijada, xususiy yechim quyidagicha ifodalanadi:

$$x_2 = \frac{h}{p^2 - k^2} sin(pt) \qquad (4.4)$$

Demak, (4.3) tenglamaning umumiy yechimi:

$$x = x_1 + x_2 = \alpha\, sin(kt + \alpha) + \frac{h}{p^2 - k^2} sin(pt) \qquad (4.5)$$

ko'rinishda yoziladi.

Bu tenglamadan M nuqta murakkab tebranma harakat qiladi, degan fikr tug'iladi. Murakkab tebranishning birinchi qismi moddiy nuqtaning erkin tebranishi bo'lib, amplitudasi a (boshlang'ich shartlarga bog'liq bo'ladi) va doiraviy takrorligi k, ikkinchi qismi nuqtaning majburiy tebranishi bo'lib, amplitudasi A (boshlang'ich shartlarga bog'liq bo'lmaydi) va doiraviy takrorligi p bo'ladi. Amaliy tomondan, u yoki bu qarshilikning muqarrarligi tufayli nuqtaning erkin tebranishi tez fursatda sunib ketishi mumkin. Shuning uchun harakati kuzatilayotgan nuqtaning (4.4) tenglamaga muvofiq sodir bo'layotgan majburiy tebranishinigina tekshirish ahamiyatlidir. Bu tebranishning chastotasi uyg'otuvchi kuch chastotasi (p) ga teng.

Shunga ko‘ra, ularning davrlari ham bir xilda bo‘ladi. Qarshilik bo‘lmaganda nuqtaning majburiy tebranish amplitudasi:

$$A=\frac{h}{p^2-k^2} \tag{4.6}$$

bo‘ladi. $p<k$ bo‘lsa, amplituda musbat bo‘lib, (4.1) va (4.4) tenglamalarni solishtirib, majburiy tebranish fazasi uyg‘otuvchi kuch fazasi bilan hamma vaqt bir xilda bo‘lishini (ya’ni har ikkalasi pt ga teng)ko‘ramiz.

$p>k$ bo‘lsa, (4.4) tenglamani quyidagicha yozishga to‘g‘ri keladi:

$$x_2=-\frac{h}{p^2-k^2}\sin(pt)=\frac{h}{p^2-k^2}\sin(pt-\pi) \tag{4.7}$$

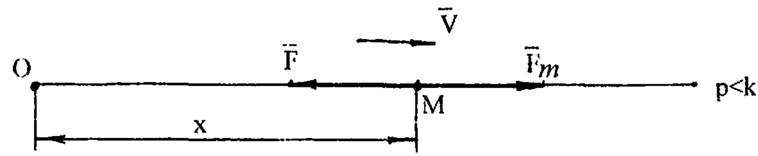
Amplituda yana musbat bo‘lib, u $\frac{h}{p^2-k^2}$ ga teng.

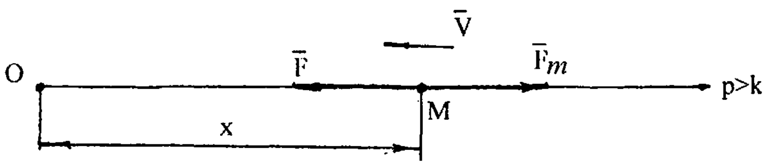
Biroq endi majburiy tebranish fazasi (pt-π) ga teng bo‘ladi. Demak, $p>k$ bo‘lganda, majburiy tebranish fazasi uyg‘otuvchi kuch fazasidan π kattalikka farq qilar ekan. Binobarin, $p<k$ bo‘lsa, uyg‘otuvchi $\overline{F}_m$ kuch bilan nuqtaning majburiy tebranishi bir yo‘nalishda, $p>k$ bo‘lganda qarama-qarshi yo‘nalishda bo‘ladi $\overline{F}_m$ kuch maksimal qiymatga erishib, o‘nga yo‘naladi, tebranuvchi nuqta esa chapga maksimal chetlanadi va hokazo.

Bu mulohazalarga e’tibor qilinsa, amplituda quyidagicha ifodalanadi:

$p<k$ bo‘lganda $$A=\frac{h}{p^2-k^2}$$

$p<k$ bo‘lganda $$A=\frac{h}{\left|k^2-p^2\right|} \tag{4.8}$$





Ya'ni majburiy tebranish amplitudasi $\overline{F}_m$ uyg'otuvchi kuch amplitudasigagina bog'liq bo'lmay, uning p chastotasiga ham bog'liq bo'ladi. Uyg'otuvchi kuch chastotasi (p) ning o'zgarishi bilan A amplitudaning o'zgarishini tekshiramiz. Umuman erkin tebranma harakat bilan majburiy tebranma harakatning chastotalari (k va p) har xil bo'ladi, chunki ular bir-biriga bog'liq bo'lmagan holda o'zgaradi. Biroq uyg'otuvchi kuch chastotasi 0 bilan ∞ chegaralar orasida o'zgarganidan ($0 \le p \le \infty$) uning biror qiymati erkin tebranish takrorligining k qiymatiga teng bo'lib qolishi mumkin. Bu holda majburiy tebranish amplitudasi cheksiz katta qiymatga ega bo'ladi, ya'ni $p=k$ bo'lganda, $A=\infty$ bo'ladi. Tebranuvchi sistema (inshoot yoki mashina qismlari) qanday mustahkam bo'lmasin, bu holga bardosh bera olmay ishdan chiqadi. Majburiy tebranish chastotasi bilan erkin tebranish chastotasi o'zaro teng bo'lgan hol *rezonans hodisasi* deyiladi. Rezonans hodisasi bo'lishini ko'rib o'tamiz: p=k bo'lganda $x_2=B\sin(pt)+D\cos(pt)$ ifoda (4.3) tenglamaning xususiy yechimi bo'la olmaydi, shuning uchun bu xususiy yechimni

$$x_2=Bt\cos(pt)+Dt\sin(pt)$$

ko'rinishda olamiz. Masalaga xuddi avvalgidek yondoshib, B va D o'zgarmaslarni topamiz:

$$B = -\frac{h}{2p}, \quad D = 0.$$

U holda xususiy yechim:

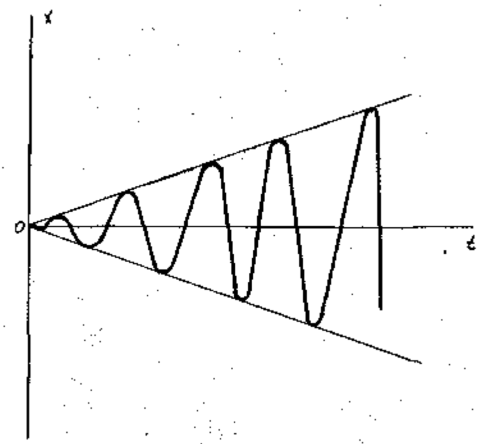
$$x_2 = -\frac{h}{2p} t\cos(pt),$$

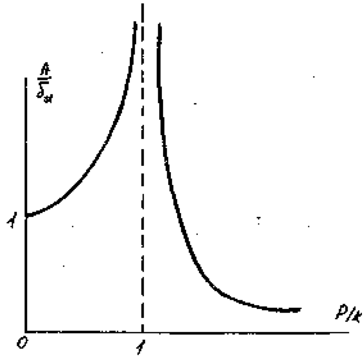
yoki

$$x_2 = \frac{ht}{2p} \sin\left(pt - \frac{\pi}{2}\right), \qquad (4.9)$$

ko'rinishda yoziladi. Demak, rezonans hodisasida majburiy tebranma harakatning amplitudasi vaqtga proporsional ravishda o'sar ekan.

Endi bu tebranishning grafigini quramiz. Uning grafigi tenglamasi $X_2 = \pm\frac{h}{2p}$ bo'lgan ikki to'g'ri chiziq orasidagi sinusoida bo'ladi. Bundan ko'ramizki, tebranuvchi nuqta harakatiga hech qanday qarshilikning ta'siri bo'lmasa, rezonans hodisasida uning majburiy tebranishining amplitudasi tez o'sib ketadi.





Rezonans hodisasida fazalar siljishi $\frac{\pi}{2}$ ga teng bo'ladi. Endi amplituda bilan majburiy tebranish chastotasi orasidagi bog'lanishni tasvirlovchi grafikni quramiz. Buning uchun amplituda (dinamik siljish) ni ifodalaydigan formulani quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$A = \frac{h}{|k^2 - p^2|} = \frac{h}{k^2} \cdot \frac{1}{\left|1 - \left(\frac{p}{k}\right)^2\right|} = \frac{\frac{H_0}{m}}{\frac{c}{m}} \cdot \frac{1}{\left|1 - \left(\frac{p}{k}\right)^2\right|} = \frac{H_0}{c} \cdot \frac{1}{\left|1 - \left(\frac{p}{k}\right)^2\right|}$$

Moddiy nuqtaning H_0 kuch ta'sirida oladigan statik siljishini δ_{st} orqali belgilasak, u ta'rifga ko'ra

$$\delta_{st} = \frac{H_0}{c}$$

ga teng bo'ladi. Majburiy tebranish amplitudasi A ni statik siljish δ_{st} ga nisbati

$$\lambda=\frac{A}{\delta_{st}}=\frac{1}{\left|1-\left(\frac{p}{k}\right)^2\right|} \qquad (4.10)$$

dinamik koeffitsient deb ataladi. λ o'lchovsiz kattalik. U majburiy tebranish amplitudasi, ya'ni A, statik siljish δ_{st} dan necha marta katta ekanligini ko'rsatadi va p/k nisbatga bog'liq o'zgaradi.

Rasmda bu munosabatning grafigi tasvirlangan. $\frac{p}{K}=0$ bo'lganda $\frac{A}{\delta_{st}}=1$ bo'ladi. $\frac{p}{K}=1$ bo'lganda rezonans hodisasi boshlanib, $\frac{A}{\delta_{st}}=\infty$ ga aylanadi.

Qarshilik bo'lganda moddiy nuqtaning majburiy tebranma harakati

Muhit qarshiligi erkin tebranma harakatni so'ndirishini ko'rib o'tdik. Endi, muhit qarshiligining majburiy tebranishga ko'rsatadigan ta'sirini tekshiramiz. Bu holda moddiy M nuqta qaytaruvchi $\overline{F}$ kuch, tezlikning birinchi darajasiga proporsional bo'lgan muhitning qarshilik $\overline{R}$ kuchi va uyg'otuvchi $\overline{F}$m kuch ta'sirida harakat qiladi. Uning harakat differensial tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+k^2x=h\sin(pt), \qquad (4.11)$$

bunda

$$2n=\frac{\mu}{m}, \quad k^2=\frac{c}{m}, \quad h=\frac{H_0}{m}$$

Bu tenglamaning umumiy yechimini ham ikki qismga ajratamiz, ya'ni:

$$x = x_1 + x_2$$

deb olamiz.

Bu yerda x_1 tenglamaning bir jinsli qismining umumiy yechimi, x_2 tenglamaning xususiy yechimi. $n<k$ hol uchun bir jinsli tenglamaning yechimi quyidagicha bo'lar edi:

$$x_1 = ae^{-nt}\sin(k_1 t+\beta). \tag{3.14}$$

Bunda $k_1=\sqrt{k^2-2n^2}$. x_2 yechimni:

$$x_2 = A\sin(pt-\delta),$$

ko'rinishda olamiz.

Bu yerda A va δ o'zgarmaslarni shunday tanlaymizki, ular (4.11) tenglamani qanoatlantirsin. Hosilalarni hisoblasak:

$$\dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt} = Ap\cos(pt-\delta), \quad \ddot{x}_2 = \frac{d^2x_2}{dt^2} = -Ap^2\sin(pt-\delta),$$

kelib chiqadi.

Bu hosilalar va $x_2$ning qiymatini (4.11) tenglamaga qo'yib hamda

$pt-\delta = \varphi$ yoki $pt = \varphi+\delta$ desak,

$$A(-p^2+k^2)\sin\varphi+2npA\cos\varphi = h(\cos\delta\ \sin\varphi+\sin\delta\ \cos\varphi),$$

ayniyatga ega bo'lamiz.

Bu tenglik ayniyat bo'lganidan $\sin\varphi$ va $\cos\varphi$ oldidagi koeffitsientlar quyidagi shartni qanoatlantirishi kerak:

$$A(k^2-p^2)=h\cos\delta,$$
$$2npA=h\sin\delta.$$

Ushbu tenglamani chap va o'ng qismlarini kvadratga ko'tarib, hadma-had qo'shib A ni va nisbatlarini olib φ ni topish mumkin:

$$A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}, \quad tg\delta = \frac{2np}{k^2 - p^2}. \quad (4.12)$$

Bular e'tiborga olinsa, (4.11) tenglamaning xususiy yechimi quyidagicha yoziladi:

$$x_2 = A\sin(pt-\delta). \qquad (4.13)$$

U holda moddiy nuqta harakat differensial tenglamasining umumiy yechimi

$$x_1 = ae^{-nt}\sin(k_1t+\beta)+A\sin(pt-\delta),$$

ko'rinishda yoziladi. Bu yerda a va β o'zgarmaslar boshlang'ich shartlarga bog'liq bo'lib, A va δ boshlang'ich shartlarga bog'liq bo'lmaydi.

Bundan ko'ramizki, tebranuvchi nuqtaning harakati ikki qismdan iborat: 1) so'nuvchi tebranish, 2) o'zgarmas amplitudali majburiy tebranish. Majburiy tebranishning chastotasi uyg'otuvchi kuchning chastotasiga teng, fazasi esa uyg'otuvchi kuchning fazasidan δ ga farq qiladi. Bir muncha vaqt o'tgandan keyin so'nuvchi tebranish yo'qolib, harakat statsionarlashadi, ya'ni harakat faqat majburiy tebranishdan iborat bo'ladi:

$$x = A\sin(pt-\delta). \qquad (4.14)$$

Bu holat uchun tebranish chastotasi uyg'otuvchi kuch chastotasiga teng bo'ladi. Shuning uchun majburiy tebranish davriga muhit qarshiligining hech qanday ta'siri bo'lmaydi. Amplitudasi A esa bir vaqtda p va n ga bog'liq bo'ladi. Bundan muhit qarshiligi majburiy tebranma harakatning amplitudasini kamaytiradi degan xulosaga kelamiz. Muhit qarshiligining amplitudaga ta'siri rezonans vaqtida juda ham sezilarli, ya'ni k=p bo'lganda $A=\frac{h}{2np}$ bo'ladi. Muhit qarshiligi mavjud bo'lganda, rezonans vaqtida, amplituda cheksiz qiymatga ega bo'lmaydi. A amplitudaning maksimal qiymatini differensial hisobida ko'rsatilgan usul bilan topamiz. Buning uchun k va n berilgan deb qaralsa, (4.12) formulada ildiz ostidagi ifoda p chastotaning funksiyasi bo'ladi, uni f(p) deb belgilaymiz, ya'ni

$$f(p)=(k^2-p^2)^2+4n^2p^2.$$

Bu tenglikni p ga nisbatan ikki marta differensiallasak:

$$f'(p)=-2(k^2-p^2)2p+8n^2p \tag{4.15}$$

$$f''(p)=-4(k^2-p^2)+8p^2+8n^2$$

kelib chiqadi.

Oxirgi munosabatlarning birinchisini nolga tenglashtirib, yechimlarni topamiz. Ular

$$p_1=0,\ p_{2,3}=\pm\sqrt{k^2-2n^2}, \tag{4.16}$$

ga teng bo'ladi. Bu qiymatlarda f(p) funksiyaning, darhaqiqat, A amplitudaning maksimal va minimal bo'lishini aniqlaymiz. Buning uchun $f''(p)$ ning qiymatidan foydalanamiz, ya'ni, yechimlarda uning musbat va manfiy bo'lishini tekshiramiz. (4.16) ni (4.15) tenglikning ikkinchi qismiga qo'yamiz:

$$f''(p_1)=-4k^2+8n^2=4(2n^2-k^2)<0$$

bo'lib, $f(p)$ funksiya maksimal va amplituda A minimum qiymatga erishadi. Bunda

$$f''(p_{2,3})=-4k^2+12k^2-24n^2+8n^2=8(k^2-2n^2)>0$$

bo'lib, $f(p)$ funksiya minimum va amplituda A maksimum qiymatga erishadi. Endi amplituda A ning maksimum qiymatini hisoblaymiz. Buning uchun $P_{2,3}$ ning qiymatini (4.12) formulaga qo'yamiz:

$$A_{max}=\frac{h}{2n\sqrt{k^2-n^2}} \tag{4.17}$$

hosil bo'ladi. (4.12) formulani quyidagicha yozish mumkin:

$$A=\frac{\frac{h}{k^2}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{p}{k}\right)^2\right]^2+4\left(\frac{n}{k}\right)^2\left(\frac{p}{k}\right)^2}} \qquad (4.18)$$

Bundan $\frac{h}{k^2}=\delta_{st}$ $P=P_1$ bo'lgandagi amplituda, rezonans hodisasi mutlaqo bo'lmaydi. Rasmda uch hol uchun (4.18) formula grafigi (turli qarshilik koeffitsientlari uchun) qurilgan. Dinamik koeffitsiyent $\frac{A}{\delta_{st}}$ ordinata o'qi, $\frac{p}{\kappa}$ absissa o'qi bo'ylab qo'yilgan. Eng pastki egri chiziq uchun qarshilik koeffitsienti n, o'rtadagisi $\frac{n}{2}$ va ustidagisi uchun $\frac{n}{4}$ olingan. Bu egri chiziqlarni solishtirib, qarshilik koeffitsienti n qancha kichik bo'lsa, amplitudaning qiymati rezonans holatidagi $\frac{p}{\kappa}=1$ qiymatiga shuncha yaqin bo'lishini ko'ramiz.

Majburiy tebranishning umumiy xossalari. Yuqorida topilgan natijalardan, nuqtaning erkin tebranishidan mutlaqo farq qiluvchi majburiy tebranishning quyidagi muhim xossalarini keltirish mumkin:

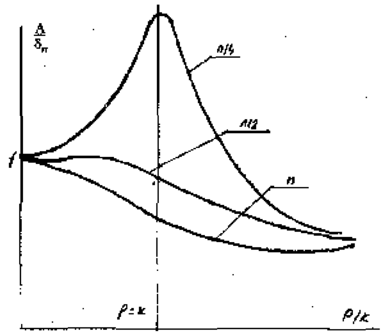
1. Majburiy tebranish amplitudasi A boshlang'ich shartlarga bog'liq bo'lmaydi.

2.Qarshilik bo'lganda majburiy tebranish so'nmaydi.

3.Majburiy tebranish chastotasi uyg'otuvchi kuch chastotasiga teng bo'ladi va tebranuvchi sistema xarakteristikasiga bog'liq bo'lmaydi.

4.Agar qarshilik kichik bo'lib, biroq p k ga yaqin bo'lsa, uyg'otuvchi kuchning hatto kichik qiymatida ham intensiv majburiy tebranish (rezonans) hosil bo'lishi mumkin.

5. Agar p chastota k dan birmuncha katta bo'lsa, hatto uyg'otuvchi kuchning katta qiymatlarida ham, majburiy tebranishni istalganicha kichraytirish mumkin.



Majburiy tebranish, xususan rezonans, fizika va texnikaning ko'pgina tarmoqlarida katta rol o'ynaydi. Masalan, mashina va dvigatellarning ishlashida, odatda davriy kuchlar paydo bo'lib (vujudga kelib), ular mashina qismlarining yoki poydevorning majburiy tebranishini hosil qilishi mumkin. Ko'pgina muhandislik inshootlarida rezonans hodisasi maqsadga nomuvofiq bo'lib, uni yo'qotish choralari ko'riladi, buning uchun p va k chastotalar orasidagi munosabatlar shunday tanlanadiki, amalda majburiy tebranish amplitudasi nolga teng bo'lib qolsin (p>>k). Aksincha, bir misol olaylik: radiotexnikada rezonans hodisasi juda ham foydali bo'lib, bir radio stansiya signallarini boshqalarning hamma signallaridan ajratib turish uchun qo'llaniladi.

Bir qator asboblarni loyihalash masalasi ham majburiy tebranish nazariyasiga asoslanadi. Masalan, vibrograflar — tebranuvchi jism (poydevor, *mashina qismlari va boshqalar) ning silkinishini* o'lchaydigan va xususan, seysmograflar — Yer qatlamlarining tebranishini va shunga o'xshashlarni yozuvchi asboblar.

5 - LEKSIYA

MEXANIK SISTEMA

Mexanik sistemaga ta'sir etuvchi kuchlar
Mexanik sistema massalar markazi. Mexanik sistema harakatining differensial tenglamasi

1. Mexanik sistema nima?
2. Mexanik sistema qachon erkin, qachon erkinmas deyiladi?
3. Mexanik sistemaga ta'sir etuvchi kuchlarni necha turga ajratish mumkin?
4. Qanday kuchlarga tashqi kuchlar deyiladi?
5. Ichki kuchlar deb nimaga aytiladi?
6. Ichki kuchlar qanday muhim xossaga ega?
7. Mexanik sistema massalar markazi nima?
8. Massalar markazi radius vektori va koordinatalari qanday aniqlanadi?
9. Mexanik sistema harakatining differensial tenglamasi qanday ifodalanadi?
10. Sistema harakat differensial tenglamalarini yechishdagi qiyinchiliklar nimadan iborat?

Tayanch so'zlar va iboralar

Mexanik sistema. Tashqi kuchlar. Aktiv tashqi kuchlar. Passiv tashqi kuchlar. Massalar markazi. Massalar markazi radius vektori koordinatalari. Mexanik sistema harakatining differensial tenglamalari.

10-§. Mexanik sistema va unga ta'sir etuvchi kuchlar. Ichki kuchlarning xossalari

Ilgarilanma harakatlanayotgan qattiq jismga yoki masala shartiga muvofiq o'lchamini hisobga olmasada bo'ladigan va moddiy nuqta deb qaraladigan jismga moddiy nuqta harakat dinamikasini to'liq qo'llash mumkin. Moddiy nuqtalar mexanik sistemasi harakatini o'rganish uchun esa uning har qaysi nuqtasining harakatini alohida o'rganish zarur. Mexanikada, moddiy nuqtalarning **mexanik**

sistemasi deganda, bir-birlari bilan o'zaro ta'sirlashuvchi moddiy nuqta (yoki jism) lar to'plamini tushuniladi. Boshqacha qilib aytganda, mexanik sistemaning har bir nuqtasi (yoki jismi) ning holati va harakati qolgan hamma nuqta (yoki jism) larining holati va harakatiga bog'liq bo'ladi, ya'ni sistema nuqta (yoki jism) lari bir-biri bilan ma'lum munosabatda bog'langan holda harakatda bo'ladi. Jumladan, har qanday qattiq jismni ham uni tashkil qilgan zarralari (nuqtalari) ning sistemasi deb qaray olamiz. Ta'rifga muvofiq, Quyosh sistemasi ham mexanik sistemaga klassik misol bo'la oladi, chunki uning hamma jismlari (Quyosh va planetalar) o'zaro butun olam tortishish kuchi ta'sirida bo'ladi. Mexanik sistemaga boshqa misol sifatida istalgan mashina yoki mexanizmni olish mumkin, chunki uning hamma qismlari bir-birlari bilan geometrik turli bog'lanishlar: masalan, sharnirlar, sterjenlar, arqonlar, tasmalar yoki tishli g'ildiraklar vositasida bog'langan bo'ladi. Bu holda sistema jismlariga (zvenolariga) bog'lanishlar orqali beriladigan taranglik yoki o'zaro bosim kuchlari ta'sir etadi.

Agar sistemaning harakatida uning ixtiyoriy ikki nuqtasi orasidagi masofa hamma vaqt o'zgarmay qolsa (har qanday sharoitda), o'zgarmas mexanik sistema deyiladi. Masalan, absolyut qattiq jism. Aksincha, bu masofa o'zgarib borsa, o'zgaruvchan mexanik sistema deb ataladi. Masalan, deformatsiyalanuvchi jism. Shuningdek, mexanik sistema bog'lanishli va bog'lanishsiz (erkin) bo'lishi mumkin. Agar sistema nuqta (yoki jism) lari fazoda istalgan yo'nalishda harakatlana olsa bunday sistema erkin sistema deb ataladi. Masalan, Yer va Quyosh sistemasi erkin harakatlanadi, yoki gaz to'lg'azilgan havo shari. Agar sistema nuqtalarining harakatiga biror chek qo'yilgan bo'lsa, bunday sistemani bog'lanishdagi (erkinmas) sistema deyiladi. Masalan, krivoship-polzunli mexanizm.

Mexanik sistemaga ta'sir etuvchi hamma kuchlarni ichki va tashqi kuchlarga ajratish mumkin. Berilgan sistema nuqtasi (yoki jism) ga bu sistemaga kirmaydigan boshqa nuqta (yoki jism) larning ko'rsatadigan ta'sir kuchlari **tashqi kuchlar** deyiladi. Sistemaga ta'sir etuvchi tashqi kuchni bundan keyin $\overline{F}^{e}$ bilan belgilaymiz.

Berilgan sistemadagi nuqta (yoki jism) larning o'zaro ta'sir kuchlari **ichki kuchlar** deyiladi. Bundan keyin sistemaning ichki kuchlarini $\overline{F}^{i}$ bilan belgilaymiz.

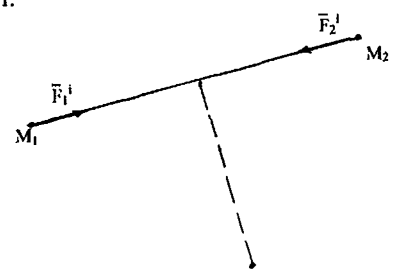
Sistema nuqtalariga ta'sir etayotgan kuchlarni tashqi va ichki kuchlarga ajratish shartli bo'lib, qaralayotgan sistema tarkibiga nima kiritilganligiga bog'liqdir. Masalan, avtomobil dvigatelining krivoship-porshenli mexanizmini sistema deb qabul qilsak, uning zvenolari orasidagi o'zaro ta'sir kuchlari ichki kuchlarga kiradi. Krivoship-porshenli mexanizmga nisbatan gazlarning dvigatel porsheniga bosimi tashqi kuch bo'ladi. Agar avtomobilni dvigatel bilan birgalikda bir sistema deb qabul qilsak, bunda gazlarning dvigatel porsheniga ta'siri ichki kuch bo'ladi. Bunday sistema uchun: avtomobil og'irligi, yo'lning normal reaksiyasi, avtomobil g'ildiragi bilan yo'l sirti orasidagi ishqalanish kuchi, havoning qarshilik kuchi tashqi kuchlar bo'ladi.

Sistema nuqta (yoki jism) lariga ta'sir etuvchi kuchlarni boshqa jihatdan ham yana ikki guruhga ajratish mumkin: aktiv kuchlar (sistema nuqtalariga bevosita qo'yilgan kuchlar) va passiv kuchlar (bog'lanish reaksiyalari).

Qo'yilgan aktiv kuchlar ta'siridan sistema ma'lum harakatda *bo'ladi. Biroq sistemaga qo'yilgan bog'lanish* bu harakatni ma'lum yo'nalishlarda cheklab o'rniga boshqa harakatning vujudga kelishiga sabab bo'ladi. Shuning uchun dinamika masalalarini yechishda bog'lanish ta'sirini reaksiya bilan almashtirib, u tashqi kuchlar qatoriga qo'shiladi.

Aktiv kuchlar va bog'lanish reaksiyalari o'z navbatida ichki yoki tashqi kuchlar bo'lishi mumkin.

Nuqta (yoki sistema) ning harakatida, ularga qo'yilgan bog'lanishlarning reaksiyalari faqat ularga ta'sir etuvchi aktiv kuchlarga va bog'lanishlarning turiga bog'liq bo'libgina qolmay, balki berilgan nuqta (yoki sistema) harakatining xarakteriga ham bog'liq bo'ladi. Masalan, ipga bog'langan yukning harakati holida ipning reaksiyasi yukning boshlang'ich tezligiga va vaqtga bog'liq bo'lishi mumkin.



Ta'sir va aks ta'sirning tenglik qonuniga ko'ra sistemaning har qanday ikki nuqtasi (masalan, M_1 va M_2 nuqtalari) miqdor jihatdan teng va bir chiziq bo'ylab qarama – qarshi tomonlarga yo'nalgan $\overline{F}_1^i$ va $\overline{F}_2^i$ kuchlar bilan bir-biriga ta'sir etadi. Shuning uchun

$$\overline{F}_1^i + \overline{F}_2^i = 0.$$

Sistema n-ta nuqtalardan tashkil topsa, sistemaning hamma nuqtalari orasidagi o'zaro ta'sir kuchlarini (sistemaning ichki kuchlarini) turli o'rin almashtirishlar bilan juft-juft qilib olib quyidagi xulosaga kelamiz; istalgan sistemada hamma ichki kuchlarning geometrik yig'indisi, ya'ni bosh vektori nolga teng:

$$\overline{R}^i = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^i = 0 \qquad (5.1)$$

Bundan ko'ramizki, sistemadagi hamma ichki kuchlarning istalgan o'qdagi proyeksiyalarining algebraik yig'indisi ham nolga teng:

$$\sum_{k=1}^{n} X_k^i = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} Y_k^i = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} Z_k^i = 0 \qquad (5.2)$$

Qayd etilgan qonun asosida sistema ichki kuchlarining biror 0 markazga nisbatan momentlarining yig'indisi (bosh momenti) uchun ham quyidagi tenglamalarni yozamiz:

$$\overline{M}_0^i = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_0 (\overline{F}_k^i) = 0, \qquad (5.3)$$

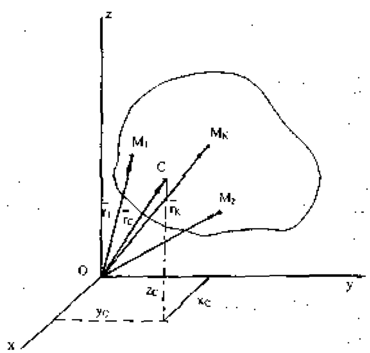
$$\sum_{k=1}^{n} m_x (\overline{F}_k^i) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_y (\overline{F}_k^i) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_z (\overline{F}_k^i) = 0. \qquad (5.4)$$

(5.1) va (5.2) tengliklar sistema nuqtalari ichki kuchlarining birinchi xossasini, (5.3) va (5.4) tengliklar esa, ularning ikkinchi xossasini ifodalaydi. (5.1) va (5.3) tengliklar birgalikda va shuningdek, (5.2) va (5.4) birgalikda fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat tenglamalariga o'xshashdir.

Ammo, keltirilgan xossalardan ichki kuchlar o‘zaro muvozanatlashgan bo‘ladi va sistema harakatiga hech qanday ta’siri bo‘lmaydi degan xulosa kelib chiqmaydi, aksincha, bu ichki kuchlar mexanik sistemasining turli nuqta (yoki jism) lariga qo‘yilganligi sababli ushbu nuqta (yoki jism) larni bir-biriga nisbatan harakatlantira olishi mumkin. Qaralayotgan sistema absolyut qattiq jism bo‘lsa, ichki kuchlar muvozanatlashgan bo‘ladi.

11-§. Mexanik sistema massalar markazi va uning koordinatalari

Qattiq jism va boshqa mexanik sistemaning ilgarilanma harakati unga ta’sir etuvchi kuchlarga va harakatlanayotgan sistema (yoki jism) ning massalar yig‘indisiga bog‘liq. Sistema nuqtalari massalarining yig‘indisi sistemaning m massasi deyiladi. Sistema n moddiy nuqtadan iborat bo‘lsin. Bu nuqtalarning holatini Oxyz koordinatalar sistemasiga nisbatan tekshiramiz. Bunda M_k sistemaning ixtiyoriy k-nchi nuqtasi, $\bar{r}_k$ $(k=\overline{1,n})$ uning radius vektori, x_k, y_k, z_k–koordinatalari bo‘lsin.



Sistemaning massalar markazi deb uni tashkil etgan zarralarning massalari to‘plangan geometrik nuqta C ga aytilib, holati ushbu formuladan aniqlanadi:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \bar{r}_k}{m} \qquad (5.5)$$

Bu formulada m_k – sistemada olingan ixtiyoriy M_k nuqtaning massasi, $\bar{r}_k$ – shu nuqtaning radius vektori, $m = \Sigma m_k$ – butun sistema massasi. Shunday qilib, sistemaning massalar markazi deb massasi sistema massasiga teng va o'rni (5.5) bilan aniqlanadigan (faraziy) nuqtaga aytiladi.

(5.5) tenglikni Dekart koordinata o'qlariga proyeksiyalab, sistema massalar markazi koordinatalarining ifodasi topiladi:

$$x_C = \frac{\sum m_k x_k}{m}, \quad y_C = \frac{\sum m_k y_k}{m}, \quad z_C = \frac{\sum m_k z_k}{m}, \quad (5.6)$$

Garchi, sistema massalar markazining holati bir jinsli og'irlik maydonida joylashgan qattiq jismning og'irlik markazi bilan ustma – ust tushsada, bu tushunchalar har doim ayni bir tushuncha bo'la olmaydi, ya'ni ular bir – birlaridan farqlanadi. Og'irlik markazi tushunchasi jismdagi hamma moddiy nuqtalar og'irlik kuchlarining teng ta'sir etuvchisi o'tadigan nuqta bo'lib, amalda faqat og'irlik maydonida joylashgan qattiq jismlar uchungina ma'noga ega bo'ladi. Massalar markazi tushunchasi esa, sistemadagi massalarning taqsimlanishini xarakterlovchi kattalik bo'lib, har qanday ixtiyoriy mexanik sistema uchun ma'noga ega. Massalar markazi tushunchasi berilgan sistema biror kuch ta'siridami yoki yo'qmi bunga bog'liq bo'lmagan holda o'z ma'nosini saqlaydi. Bularga ko'ra va massa har qanday sistemaning ajralmas xossasi bo'lganligi sababli, massalar markazi tushunchasi og'irlik markazi tushunchasiga qaraganda kengroq ma'noga ega.

12-§. Mexanik sistema harakatining differensial tenglamalari

Agar n-ta nuqtalardan tashkil topgan sistemaning ixtiyoriy k-nuqtasiga tashqi F_k^e kuchlarning teng ta'sir etuvchisi va ichki F_k^i kuchlarning teng ta'sir etuvchisi qo'yilgan bo'lsa, u holda sistemaning ushbu nuqtasining harakat differensial tenglamasini dinamikaning asosiy tenglamasiga ko'ra tuzish mumkin. Masalan, u vektor ko'rinishda quyidagicha yoziladi:

$$m_k \ddot{\bar{r}}_k = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i, \quad k=\overline{1,n} \qquad (5.7)$$

Bu yerda $k=\overline{1,n}$ bo'lganligidan (5.7) n-ta tenglamalar sistemasini hosil qiladi. (5.7) ga mexanik sistema harakatining vektorli differensial tenglamalari deyiladi. Ushbu vektorli differensial tenglamalarni Dekart koordinata o'qlariga proyeksiyalab, mexanik sistema nuqtalari harakatining 3-n ta differensial tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

$$m_k\ddot{x}_k = F^e_{kx} + F^i_{kx}$$

$$m_k\ddot{y}_k = F^e_{ky} + F^i_{ky} \quad (k=\overline{1,n})$$

$$m_k\ddot{z}_k = F^e_{kz} + F^i_{kz}$$

Berilgan kuchlarga va boshlang'ich shartlarga ko'ra, mexanik sistemaning harakatini aniqlash uchun uning n ta nuqtasining 3n ta ikkinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasini integrallash kerak bo'ladi. Umumiy holda, tenglamalarning soni katta bo'lganligi va boshqa sabablarga ko'ra bu masalaning aniq yechimi topilmagan.

Mexanik sistema harakatining ushbu 3n ta differensial tenglamalar sistemasini analitik yechib bo'lmaslikning boshqa sababi tenglamaning chap qismiga kiruvchi ichki kuchlarning funktsional ko'rinishining noma'lumligi bo'lsa, yana bir sababi, bu ichki kuchlarni mexanik sistema n nuqtalarning hali aniqlanishi kerak bo'lgan koordinatalariga bog'liqligi. 3n differensial tenglamalarni integrallashdagi yana bir qiyinchilik mexanik sistemaning barcha n nuqtalari uchun umumiy holda, boshlang'ich shartlarni to'la hisobga olib bo'lmaslik bilan bog'liqdir. Shuning uchun ham mexanik sistemaning harakatini uning differensial tenglamalarini analitik yechish bilan tavsiflash mumkin emas. Bu masalani elektron hisoblash mashinalarini qo'llab yetarlicha aniqlik bilan taqribiy yechish mumkin.

Biroq dinamikaning ko'pgina amaliy masalalarida sistema nuqtalarining har birining harakati o'rganilmasdan butun sistema harakatining ba'zi yig'indi o'lchovlari o'zgarishini kuchlar ta'sirining yig'indi o'lchovlariga bog'liq ravishda aniqlash talab etiladi. Shuning uchun mexanik sistema dinamikasida differensial tenglamalarni integrallash metodi o'rniga ko'pincha dinamikaning umumiy teoremalari qo'llaniladi.

6 - LEKSIYA

MASSALAR GEOMETRIYASI

Qattiq jismning inersiya momenti. Inersiya radiusi. Parallel o'qlarga nisbatan inersiya momenti haqida teorema. Inersiya ellipsoidi. Inersiya bosh o'qi va markaziy bosh o'qi.

1. Nuqtaga, o'qqa va tekislikka nisbatan qattiq jismning inersiya momenti deb qanday kattalikka aytiladi?
2. Nimani qattiq jismning inersiya radiusi deyiladi?
3. Parallel o'qlarga nisbatan inersiya momentlari o'zaro qanday bog'liq?
4. Markazdan qochma inersiya momenti deb nimaga aytiladi?
5. Bir jinsli sterjenning inersiya momenti qanday aniqlanadi?
6. Doiraviy ingichka halqaning inersiya momenti qanday aniqlanadi?
7. Bir jinsli doiraviy plastinaning inersiya momenti qanday aniqlanadi?
8. Bir jinsli doiraviy silindrning inersiya momenti nimaga teng?
9. Inersiya elipsoidi deb nimaga aytiladi?
10. Inersiya bosh o'qi va markaziy bosh o'qi qanday ta'riflanadi?

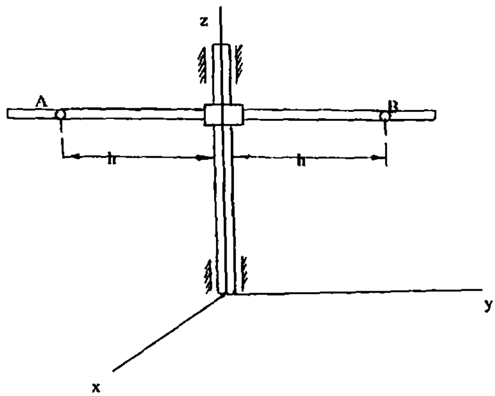
Tayanch so'zlar va iboralar

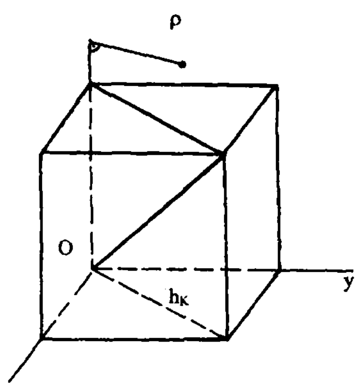
Inersiya momenti. Inersiya radiusi. Markazdan qochma inersiya momenti. O'qqa, markazga, tekislikka nisbatan inersiya momentlari. Parallel o'qlarga nisbatan inersiya momentlari. Inersiya elipsoidi. Inersiya bosh o'qi. Inersiya markaziy bosh o'qi.

13-§. Mexanik sistema va qattiq jisming qutbga, o'qqa va tekislikka nisbatan inersiya momentlari

Mexanik sistema yoki qattiq jismlar harakati, umumiy holda, ta'sir etuvchi kuchlarga va harakatlanayotgan sistema (jism)ning massalar yig'indisigagina bog'liq bo'libgina qolmay, balki massalarning taqsimlanishiga ham bog'liq bo'ladi. Massalar markazining holati esa sistema massalarining taqsimlanishini to'la xarakterlay olmaydi. Masalan, bir xil massali va kattalikdagi A va

B sharlarni Oz o'qdan teng h masofaga siljitishda sistemaning massalar markazining holati o'zgarishsiz qolsada, uning massalar taqsimlanishi boshqacha bo'ladi, bu esa, sistemaning harakatini o'zgartiradi, ya'ni Oz o'qi atrofida aylanish sekinlashadi. Shuning uchun mexanikada, sistema dinamikasida muhim ahamiyatga ega bo'lgan, sistemaning massalar taqsimlanishini xarakterlovchi yana bir kattalik — inersiya momenti kiritilgan. Inersiya momenti tushunchasi birinchi marta Eyler tomonidan kiritilgan. Bir xil shakldagi har xil materiallardan tayyorlangan jismlarning inersiya momentlari turlicha bo'ladi, ya'ni inersiya





momenti jism shakliga va moddasining zichligiga bog'liq. Sistema (yoki jism) ning inersiya momenti markazga, o'qqa yoki tekislikka nisbatan aniqlanadi. n-ta nuqtalardan tashkil topgan mexanik sistema (yoki jism) ning biror O (nuqta) qutbga nisbatan inersiya momenti, uning nuqtalarning massalarini qutbgacha bo'lgan masofalar kvadratiga ko'paytmalarining yig'indisiga teng skalyar kattalikka aytiladi va odatda I_O bilan belgilanadi:

$$I_o = \sum_{k=1}^{n} m_k \, r_k^2 \qquad (6.1)$$

Bunda r_k-0 nuqtadan sistemaning ixtiyoriy M_K nuqtasigacha bo'lgan masofa. Tutash muhitlar uchun yig'indidan integralga o'tib, (nuqta) qutbga nisbatan inersiya momenti uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$$I_o = \int\limits_{(M)} r^2 \, dm \qquad (6.2)$$

Sistemaning biror z o'qqa nisbatan inersiya momenti deb uning nuqtalarining massalarini o'qqacha bo'lgan masofalar kvadratiga ko'paytmalarining yig'indisiga teng bo'lgan skalyar kattalikka aytiladi. Uni I_Z deb belgilasak, ta'rifga ko'ra

$$I_Z = \sum_{k=1}^{n} m_k \, h_k{}^2 \qquad (6.3)$$

bo'ladi. Bu yerda h_k — berilgan o'qdan m_k— massali nuqtagacha bo'lgan masofa. Xususiy holda, tutash jismlar uchun yig'indini integral bilan almashtirish mumkin:

$$I_Z = \int\limits_{(M)} h^2 \, dm \qquad (6.4)$$

Bu yerda dm – jismning nuqta o'rnida qaralgan elementar zarrasining massasi.

Ba'zan, jismning o'qqa nisbatan inersiya momenti jismning m massasini berilgan o'qqa nisbatan *inersiya radiusi* deb ataluvchi biror ρ_i kesma uzunligi kvadratiga ko'paytmasi sifatida yoziladi:

$$I_z = m\rho_i^2 \tag{6.5}$$

Bundan inersiya radiusi quyidagicha aniqlanadi:

$$\rho_i = \sqrt{\frac{I_z}{m}} \tag{6.6}$$

Jismning berilgan o'qqa nisbatan inersiya radiusi deganda, inersiya momenti jismning inersiya momentiga teng bo'lishi uchun uning barcha m massasi to'plangan nuqtadan shu o'qqacha masofaga teng kesma uzunligi tushuniladi. Inersiya radiusi jism massasiga bog'liq bo'lmagan xarakteristikasidir. SI sistemada inersiya momenti $kg.m^2$, birliklarning texnik sisitemasida esa $kg.m.sek^2$da o'lchanadi.

Sistemaning biror m_k nuqtasining koordinatalarini x_k, y_k, z_k deb belgilasak, uning x, y, z qo'zg'almas o'qlarga nisbatan inersiya momentlari tegishlicha:

$$I_x = \sum m_k(y_k^2 + z_k^2); \quad I_y = \sum m_k(z_k^2 + x_k^2); \quad I_z = \sum m_k(x_k^2 + y_k^2), \tag{6.7}$$

ifodalanadi. U holda sistemaning O koordinatalar boshiga nisbatan inersiya momenti:

$$I_O = \sum m_k r_k^2 = \sum m_k(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2); \tag{6.8}$$

ko'rinishda aniqlanadi. Bu xarakteristikalar orasidagi munosabatlarni keltiramiz. Buning uchun (6.7) dagi tengliklarni hadma-had qo'shib va (6.8) ni e'tiborga olsak:

$$I_X + I_Y + I_Z = 2\,I_O \tag{6.9}$$

kelib chiqadi. Agar qaralayotgan sistema tekis shakldan iborat bo'lsa, x va y o'qlarini shakl tekisligida olsak, $I_Z = I_O$ bo'lib, (6.9) dan yoza olamiz:

$$I_X + I_Y = I_O \tag{6.10}$$

Mexanikada markaz (qutb) ga va o'qqa nisbatan inersiya momentlaridan tashqari tekislikka nisbatan va markazdan qochma inersiya momentlaridan ham foydalaniladi. Masalan, sistemaning yOz, xOz, xOy koordinata tekisliklariga nisbatan inersiya momentlari mos ravishda quyidagicha ifodalanadi:

$$I_{yoz} = \sum m_k x_k^2 ; I_{xoz} = \sum m_k y_k^2 ; I_{xoy} = \sum m_k z_k^2 \qquad (6.11)$$

Oxirida, sistemaning biror ikki o'zaro perpendikulyar bo'lgan o'qlarga nisbatan markazdan qochma inersiya momenti deb, uning hamma nuqtalarining massalarini bu o'qlargacha bo'lgan masofalariga ko'paytmalarining yig'indisiga aytiladi. Sistemaning har qaysi X va Y, Y va Z, Z va X juft-juft koordinata o'qlariga nisbatan markazdan qochma inersiya momentlari tegishlicha quyidagicha ifodalanadi:

$$I_{xy} = \Sigma m_k x_k y_k , I_{yz} = \Sigma m_k y_k z_k , I_{zx} = \Sigma m_k z_k x_k \qquad (6.12)$$

Markazdan qochma inersiya momenti o'qqa nisbatan inersiya momentidan farqlanib, u musbat, manfiy va koordinata o'qlarining tanlanishiga qarab nol ham bo'lishi mumkin. Bunda, markazdan qochma inersiya momenti ifodasiga masofa kvadrati emas, balki koordinatalar ko'paytmasi kirganligidan deb tushuniladi. Koordinatalar esa turli ishoralarda olinishi bizga ma'lum. Markazdan qochma inersiya momenti qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakatida podshipniklarga ko'rsatadigan bosimini aniqlashda va boshqa hollarda muhim ahamiyatga egadir. Bu dastlabki ma'lumotlardan so'ng inersiya momenti haqidagi teoremalarni isbotlashga o'tamiz.

14-§. Parallel o'qlarga nisbatan jismning inersiya momentlari haqida teorema

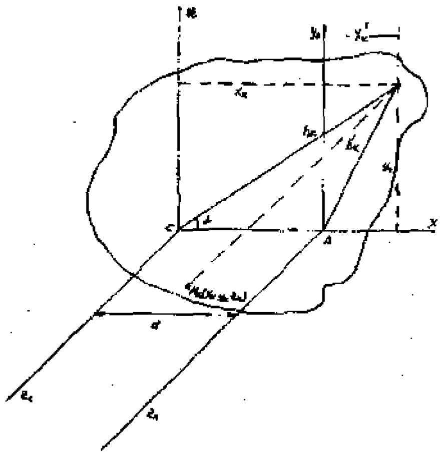
Teorema: *mexanik sistema (yoki jism) ning ixtiyoriy o'qqa nisbatan inersiya momenti berilgan o'qqa parallel ravishda shu sistemaning massalar markazidan o'tuvchi o'qqa nisbatan inersiya momenti bilan sistema massasi va o'qlar orasidagi masofa kvadrati ko'paytmasining qo'shilganiga teng.*

Aytalik, z_c markaziy o'q va ixtiyoriy z_A o'q o'zaro parallel holda bir-biridan d masofada shakl tekisligiga perpendikulyar ravishda C va A nuqtalardan o'tsin. Mexanik sistemaning M_k nuqtasi uchun quyidagini yoza olamiz:

$$h_k'^2 = d^2 + h_k^2 - 2d\, h_k \cos\alpha = d^2 + h_k^2 - 2dx_k$$

(6.1) formulaga binoan z_A o'qqa nisbatdan inersiya momenti quyidagiga teng:

$$I_{z_A} = \Sigma m_k h_k'^2 = d^2 \Sigma m_k + \Sigma m_k h_k^2 - 2d \Sigma m_k x_k$$



ammo, $\Sigma m_k x_k = m x_C = 0$ bo'lganligidan

$$I_{z_A} = I_C + md^2, \quad (6.13)$$

kelib chiqadi.

Bu (6.13) formula inersiya momentlari haqidagi 1-teorema (Gyuygens-Shteyner teoremasi) ni ifodalaydi.

Ushbu formuladan quyidagi muhim natijarlarga kelamiz: har qanday jism o'zining massalar markazi orqali o'tuvchi o'qqa nisbatan eng kichik inersiya momentiga ega bo'ladi. Massalar markaziga nisbatdan qattiq jism inersiya momenti ta'rifga binoan

$$I_C = \frac{1}{2}\left(I_{Cx} + I_{Cy} + I_{Cz}\right)$$

I_{Cx}, I_{Cy}, I_{Cz} shu o‘qlarga nisbatan eng kichik inersiya momentlari bo‘lganidan qattiq jismning massalar markaziga nisbatan qutb inersiya momenti o‘zining mumkin bo‘lgan eng kichik inersiya momenti qiymatiga erishadi.

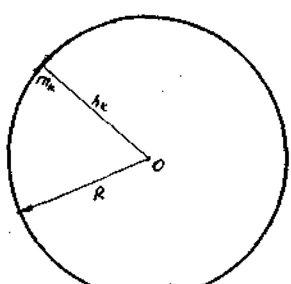
Oddiy shaklli jismlarning inersiya momentlari integral hisobidan foydalanib topiladi. Jism to‘g‘ri (oddiy) shaklda bo‘lmagan hollarda inersiya momentlari tajriba yo‘li bilan yoki taqribiy ravishda aniqlanadi. Quyida misollar tariqasida ba’zi oddiy shaklli bir jinsli jismlarning inersiya momentlarini hisoblashni qaraymiz.

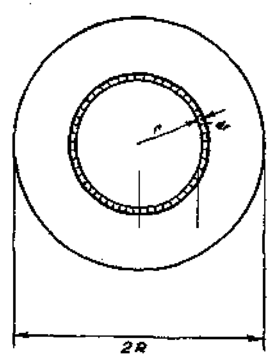
15-§. Ba’zi bir jinsli oddiy shakldagi jismlarning o‘qlarga nisbatan inersiya momentlari

3-masala. Bir jinsli doiraviy halqaning markazidan o‘tuvchi va halqa tekisligiga perpendikulyar bo‘lgan O_z o‘qqa nisbatan inersiya momenti topilsin. Halqaning massasi M va uning radiusi R ga teng.

Yechish. Butun halqani har qaysisining massasi M_k bo‘lgan bir qancha yoy kesmalarga ajratamiz. Ularning hamma nuqtalari Oz o‘qdan h_k=R masofada joylashganligidan va halqaning massasi uning gardishi bo‘ylab tekis taqsimlanganligidan, inersiya momenti (6.1) formulaga muvofiq aniqlanadi:

$$I_Z = \sum m_k h_k^2 = \sum m_k R^2 = MR^2 \qquad (14.20)$$





4-masala. Massasi M va radiusi R ga teng bo'lgan bir jinsli diskning disk tekisligiga perpendikulyar bo'lgan markaziy o'qqa nisbatdan inersiya momenti topilsin.

Yechish. Diskning o'zgarmas zichligi γ quyidagiga teng:

$$\gamma = \frac{M}{\pi R^2} \qquad (6.15)$$

Butun diskni radiuslari r va r+dr aylanalar orasidagi bir qancha elementar halqalarga ajratamiz, u holda bunday halqaning massasi dm=2$\gamma\pi$rdr ga teng (6.2) formulaga binoan h_k=r deb quyidagini yoza olamiz:

$$I_z = \int r^2 2\pi r\gamma\, dr = 2\gamma\pi \int r^3 dr = \frac{\gamma\pi R^4}{2} = \frac{MR^2}{2}$$

Shunday qilib,

$$I_z = \frac{MR^2}{2} \qquad (6.16)$$

Shu formulaga ko'ra bir jinsli silindrning geometrik o'qiga nisbatan inersiya momenti ham hisoblanadi.

5-masala. Oldingi masaladagi diskning inersiya momenti uning diametri bilan ustma-ust tushadigan o'qqa nisbatan aniqlansin.

Yechish. Disk yuzasini n-ta yuzachalarga ajratamiz, u holda uning disk tekisligiga perpendikulyar bo'lgan z o'qqa nisbatan inersiya momenti (6.3) formulaga muvofiq

$$I_z = \sum m_k r_k^2 = \sum m_k \left(x_k^2 + y_k^2\right) = \sum m_k x_k^2 + \sum m_k y_k^2 = I_Y + I_X$$

ga teng. Biroq disk uchun $I_x=I_y$ bo'lganligidan (6.10) ga ko'ra

$$I_z=2I_y$$

bo'ladi.

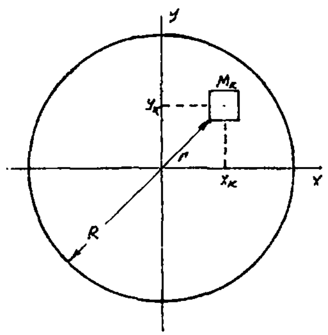
$$I_y=I_x=I_z/2=MR^2/4$$

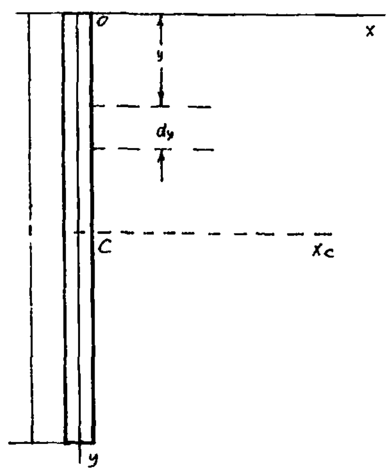
kelib chiqadi.

6-masala. Bir jinsli va ko'ndalang qirqimi o'zgarmas bo'lgan sterjenning uchidan unga perpendikulyar o'tgan x o'qqa nisbatdan inersiya momenti topilsin. Sterjenning massasi M va uzunligi l ga teng.

Yechish. Sterjenning zichligi $\gamma = M/l = const$ ga teng. Massasi γdy ga teng sterjen bo'lagini ajratamiz, u holda butun sterjenning x o'qiga nisbatan inersiya momenti formulaga muvofiq quyidagiga teng:

$$I_x = \int_0^l y_k^2 dm = \int_0^l y^2 \gamma dy = \gamma y^3/3 = Ml^2/3$$





7-masala. Oldingi masala x_c o'qi sterjenning og'irlik markazidan o'tgan hol uchun yechilsin.

Yechish. Ikki parallel o'qlarga nisbatan jismning inersiya momentlari orasidagi munosabatni ifodalaydigan Gyuygens-Shteyner teoremasini qo'llaymiz: $I_x = I_{xc} + Md^2$, bundan

$$I_{xc} = I_x - Md^2 = Ml^2/3 - M(l/2)^2 = Ml^2/12$$

Mana shu tartibda boshqa shakldagi jismlarning ham inersiya momentlarini topishimiz mumkin. Mexanika masalalarini yechishda ko'proq uchraydigan shakldagi jismlarning inersiya momenti va inersiya radiuslari texnikaviy jadvallarda beriladi.

7 - LEKSIYA

DINAMIKANING UMUMIY TEOREMALARI

Sistema massalar markazi harakati haqida teorema. Massalar markazi harakatining saqlanish qonunlari

1. Dinamikaning umumiy teoremalari qanday masalalarga bag'ishlanadi?
2. Sistema massalar markazi harakati haqidagi teorema qanday ta'riflanadi?
3. Massalar markazi harakati matematik qanday ifodalanadi?
4. Qattiq jismning qanday harakati massalar markazi harakati bilan aniqlanadi?
5. Nega ichki kuchlar massalar markazini harakatlantirmaydi?
6. Sistemaga qo'yilgan tashqi kuchlar bosh vektori nolga teng bo'lsa, massalar markazi qanday harakatlanadi?
7. Tashqi kuchlar bosh vektorining biror o'qqa nisbatan proyeksiyasi nolga teng holida massalar markazi qanday harakatlanadi?

Tayanch so'zlar va iboralar

Mexanik sistema massalar markazi. Massalar markazi harakat tenglamasi. Massalar markazi harakatining differensial tenglamalarining birinchi integrallari. Massalar markazi harakatining saqlanishi.

16-§. Mexanik sistema massalar markazining harakati haqida teorema

Mexanik sistema massalar markazining harakati uning harakatini harakterlovchi asosiy dinamik xarakteristikalaridan hisoblanadi. Ba'zi hollarda sistema harakatining xarakterini bilish uchun mazkur sistema massalar markazining harakat qonunini aniqlashning o'zi kifoya. Mexanik sistemaning harakatida uning massalar markazi ham fazoda ko'chadi. Endi massalar markazining harakati qanday sodir bo'lishini qaraymiz. Buning uchun (5.7) ni quyidagicha yozamiz:

$$
\begin{aligned}
m_1 \frac{d^2\bar{r}_1}{dt^2} &= \bar{F}_1^e + \bar{F}_1^i \\
m_2 \frac{d^2\bar{r}_2}{dt^2} &= \bar{F}_2^e + \bar{F}_2^i \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
m_n \frac{d^2\bar{r}_n}{dt^2} &= \bar{F}_n^e + \bar{F}_n^i
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

Tenglamaning chap va o‘ng tomonlarini hadlab qo‘shamiz:

$$\sum_{r=1}^{n} m_k \frac{d^2\bar{r}_k}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^e + \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^i \tag{7.2}$$

(5.5)tenglamaning ikkala tomonini m ga ko‘paytirib hamda t bo‘yicha ikki marta hosila olib topamiz:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d^2\bar{r}_k}{dt^2} = m\frac{d^2\bar{r}_c}{dt^2} = m\bar{w}_c \tag{7.3}$$

(7.2) va (7.3) tengliklarga binoan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$m\frac{d^2\bar{r}_c}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^e + \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^i \tag{7.4}$$

(7.4) tenglamaning o‘ng tomonidagi birinchi yig‘indi had sistema nuqtalariga qo‘yilgan barcha tashqi kuchlarning bosh vektorini ifodalaydi $\sum \bar{F}_k^e = \bar{R}^e$. Ikkinchi yig‘indi had $\sum \bar{F}_k^i = \bar{R}^i$ esa hamma ichki kuchlarning bosh vektorini ifodalab, ichki kuchlarning xossasiga ko‘ra nolga teng bo‘ladi. Shuning uchun natijada

$$m\bar{w}_C = \bar{R}^e \tag{7.5}$$

kelib chiqadi. Oxirgi vektor tenglamaning ikkala tomonini koordinata o‘qlariga proyeksiyalab hosil qilamiz:

$$m\ddot{x}_c = X^e,\ m\ddot{y}_c = Y^e,\ m\ddot{z}_c = Z^e \tag{7.6}$$

(7.5) tenglama sistema massalar markazining harakati haqidagi teoremaning vektorli ifodasini, (7.6) esa ana shu teoremaning koordinata o'qlariga proyeksiyalardagi analitik ifodasini anglatadi. Boshqacha qilib aytganda, bu differensial tenglamalar massasi m bo'lgan va tashqi kuchlar ta'siridagi massalar markazi C moddiy nuqtaning harakatini ifodalaydi.

Shunday qilib, sistemaning *massalar markazi massasi butun sistema massasiga teng bo'lgan va sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi barcha tashqi kuchlarning bosh vektori ta'siridagi moddiy nuqta kabi harakatda bo'ladi.* Bu teorema ko'p hollarda mexanik sistemaning harakatini tekshirishni massalar markazining (moddiy nuqta) harakatini tekshirish bilan almashtirishga va sistemadagi noma'lum bo'lgan barcha ichki kuchlardan xalos bo'lishga imkon beradi. Bundan tashqari, uning asosida sistemaning ilgarilanma harakati ham aniqlanadi. Mexanik sistema massalar markazining harakati haqidagi teoremaning amaliy mohiyati ham ana shundan iborat. Sistema massalar markazining holatini va harakatining harakterini faqat tashqi kuchlargina o'zgartirishi mumkin. Mexanik sistema massalar markazining harakati ichki kuchlarga bog'liq emas.

Masalan, gazning porshenga ko'rsatadigan bosim kuchi avtomobil uchun ichki kuch bo'lganligidan uning massalar markazini siljita olmaydi, u faqat yetaklovchi g'ildirakka aylantiruvchi moment (ichki kuch) berishi mumkin, natijada yetaklovchi g'ildirak aylanadi va g'ildirak bilan yo'l tekisligi tegishib turgan nuqtada ishqalanish kuchi paydo bo'ladi. Bu kuch tashqi kuch bo'lib, avtomobil massalar markazining siljishiga imkon beradi. Bunday misollarni ko'plab keltirish mumkin.

17-§. Mexanik sistema massalar markazi harakatining saqlanish qonunlari

1) Aytaylik, qaralayotgan sistemaga tashqi kuchlar ta'sir etmasin yoki ularning bosh vektori sistemaning harakati davomida doim nolga teng bo'lsin. U holda (7.5) ga ko'ra $\ddot{\bar{r}}_c = \bar{w}_c = 0$ kelib chiqadi, ya'ni

$$\bar{v}_c = \text{const}. \qquad (7.7)$$

2) Mexanik sistemaga ta'sir qilayotgan tashqi kuchlarning bosh vektori nolga teng emas, ammo biror o'qqa uning proyeksiyasi (masalan, x o'qqa) nolga teng, ya'ni $X_x^e = 0$.

U holda,

$$\ddot{x}_c = w_{cx} = 0$$

yoki bundan quyidagiga kelamiz:

$$\dot{x}_c = v_{cx} = \text{const.} \qquad (7.7')$$

Shunday qilib, mexanik sistemaga ta'sir qilayotgan tashqi kuchlarning (yoki ularning biror o'qqa proyeksiyalarining) yig'indisi nolga teng bo'lsa, bunday mexanik sistemaning massalar markazi yo'nalishi va qiymati o'zgarmas (yoki biror o'q bo'ylab o'zgarmas) tezlik bilan harakatlanadi. (7.7), (7.7') tengliklar sistema *massalar markazi harakatining birinchi integrallari* deyiladi.

Demak, mexanik sistemaga qo'yilgan barcha tashqi kuchlarning bosh vektori nolga teng bo'lsa, bunday sistemaning massalar markazi to'g'ri chiziqli tekis harakatda yoki, agar boshlang'ich paytda harakatsiz bo'lsa, tinch holatda bo'ladi. Bu mexanik sistema massalar markazi harakatining saqlanishi haqidagi qonunni ifodalaydi.

Agar mexanik sistema harakatida uning massalar markazi boshlang'ich paytda tinch holatda bo'lsa $\bar{v}_c=0$ bo'lib, natijada

$$\bar{r}_c = \text{const} \qquad (7.8)$$

bo'ladi. Shuningdek, (7.7) tenglik quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\dot{x}_c = 0,$$

bundan

$$x_c = \text{const} \qquad (7.9)$$

kelib chiqadi.

Masalalar yechishda sistema massalar markazi harakatining saqlanish qonuni deb atalgan (7.8) va (7.9) natijalardan foydalanish qulay. Mexanik sistema massalar markazining harakati haqidagi teorema [(7.5) va (7.6)] dan foydalanib nuqta dinamikasining ikki asosiy masalasini yechish mumkin. Jumladan, (7.6) tenglamalarni ma'lum boshlang'ich shartlarda integrallab, jism massalar markazining harakat tenglamalari

$x_c = x_c(t)$, $y_c = y_c(t)$, $z_c = z_c(t)$ aniqlanadi.

8-masala. Og'irligi P_3 ga teng qayiqning quyrug'ida og'irligi P_1 ga, tumshug'ida esa og'irligi P_2 ga teng ikkita odam o'tiribdi. Bu ikkala odam orasidagi masofa, ya'ni qayiq uzunligi 2l ga teng. Qayiq ko'ldagi tinch suvda harakatsiz turibdi. Suvning qayiq harakatiga qarshiligini hisobga olmasdan, qayiq o'rtasi — og'irlik markaziga odamlarning ko'chishida qayiqning qanday S masofaga siljishi aniqlansin. $P_3 > P_2 > P_1$ deb hisoblansin. Qayiqning og'irlik markazi uning o'rtasida olinsin.

Yechish. Ikki odam va qayiqdan iborat mexanik sistema odamlarning og'irliklari P_1, P_2, qayiqning og'irligi P_3 va suvning reaksiyasi N kabi to'rtta tashqi vertikal kuchlar ta'sirida harakatsiz turibdi. Suvning reaksiyasi N sistemaning og'irlik (bizning holda, massalar) markazidan o'tib vertikal yuqoriga yo'nalgan, qiymati esa $N = P_1 + P_2 + P_3$ ga teng.

Qo'zg'almas ixtiyoriy O markazdan gorizontal va vertikal xy koordinata o'qlarini o'tkazamiz. U holda barcha tashqi kuchlarining x o'qiga proyeksiyalari va demak, tashqi kuchlar bosh vektorining x o'qiga proyeksiyasi nolga teng bo'ladi. Shuning uchun $\dot{x}_C = v_{Cx} = const.$ Mexanik sistema boshlang'ich paytda tinch turganligidan uning og'irlik (massalar) markazi harakatsiz qoladi, ya'ni $\dot{x}_C = v_{Cx} = 0$ bo'lib, $x_C = cosnt.$

Mexanik sistema nuqtalarining boshlang'ich va oxirgi holat koordinatalarini, mos ravishda, x_c, x_1, x_2, x_3, x'_c, x'_1, x'_2, x'_3 bilan belgilasak, masalaning shartiga ko'ra $x_c = x'_C$, bu yerda:

$$x_C = \frac{P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3}{P_1 + P_2 + P_3};$$

$$x'_C = \frac{P_1x'_1 + P_2x'_2 + P_3x'_3}{P_1 + P_2 + P_3}$$

Mexanik sistemaning oxirgi holat koordinatalari bilan boshlang'ich holat koordinatalari quyidagicha bog'langan:

$$x'_1 = x_1 + l + S; \quad x'_2 = x_2 - l + S; \; x'_3 = x_3 + S$$

Bundan

$$P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 = P_1(x_1 + l + S) + P_2(x_2 - l + S) + P_3(x_3 + S)$$

yoki

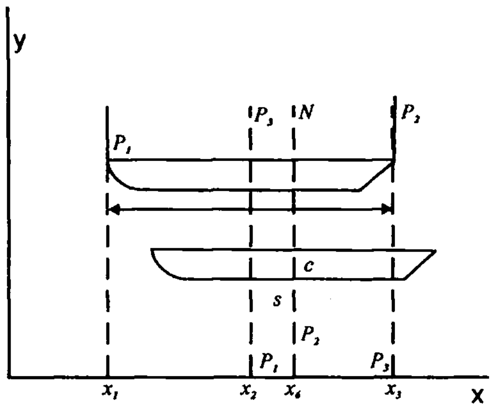
$$S = \frac{P_2 - P_1}{P_1 + P_2 + P_3} l,$$

hosil bo‘ladi. Natijaga ko‘ra, odamlarning qayta joylashishi quyidagi uch holda qayiqni S masofaga siljishiga olib kelmaydi.

1) $l = 0$ - trivial hol — boshlang‘ich paytdayoq odamlar qayiq o‘rtasida;

2) $P_1 = P_2$ — odamlarning og‘irliklari bir-biriga teng;

3) $P_3 >> P_1 + P_2$ — qayiqning og‘irligi haddan tashqari katta, ya’ni qayiqmas paraxod bo‘lsa.



HARAKAT MIQDORINING O'ZGARISHI HAQIDA TEOREMA

Harakat miqdori. Kuch impulsi. Nuqta harakat miqdorining o'zgarishi haqida teorema. Harakat miqdorining saqlanishi. Sistema harakat miqdori o'zgarishi haqida teorema. Sistema harakat miqdorining saqlanishi.

1. Nuqtaning harakat miqdori qanday aniqlanadi?
2. Sistemaning harakat miqdori qanday ifodalanadi?
3. Kuch impulsi qanday kattalik?
4. Kuch impulsi va harakat miqdorining o'lchov birliklari bir xilmi?
5. Nuqta harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremaning differensialli ifodasi va chekli ifodasi qanday ta'riflanadi?
6. Nuqta harakat miqdori qachon saqlanadi?
7. Sistema harakat miqdori o'zgarishi haqidagi teoremaning differensialli ifodasi qanday ta'riflanadi?
8. Sistema harakat miqdorining chekli o'zgarishi haqidagi teorema qanday ta'riflanadi?
9. Harakat miqdori saqlanishining birinchi qonuni qanday ta'riflanadi?
10. Harakat miqdori saqlanishining ikkinchi qonuni qachon o'rinli bo'ladi?

Tayanch so'zlar va iboralar

Nuqta harakat miqdori. Sistema harakat miqdori. Kuch impulsi. Harakat miqdori o'zgarishining differensialli ifodasi, chekli ifodasi. Sistema harakat miqdori o'zgarishining differensialli va chekli ifodasi.

18-§. Kuch impulsi

Mexanikada harakat miqdori tushunchasi bilan kuchning impulsi deb atalgan tushuncha chambarchas bog'langan. Dastlab nuqtaga yoki sistemaga ta'sir etayotgan kuch miqdor va yo'nalish jihatidan o'zgarmas bo'lgan holini qaraymiz. O'zgarmas kuchning biror vaqt ichidagi *impulsi* deb, $\overline{F}$ kuchni berilgan vaqt oralig'i t ga ko'paytmasiga teng vektorga aytiladi. Kuchning impulsini $\overline{S}$ orqali belgilasak, quyidagini yoza olamiz:

$$\overline{S} = \overline{F} \cdot t \tag{8.1}$$

Vaqt skalyar kattalik bo'lganligidan, $\overline{S}$ vektori $\overline{F}$ kuch vektori bilan bir yo'nalishda bo'ladi.

Demak, $\overline{F}$ kuchning moddiy nuqtaga t vaqt ichida ko'rsatadigan ta'siri kuch impulsi bilan xarakterlanadi. Kuch impulsining birligi N•s da o'lchanadi. Uning birligi harakat miqdori birligi bilan o'lchanishini ko'ramiz.

O'zgaruvchan kuchning biror chekli vaqt t ichidagi impulsini aniqlash uchun bu vaqt oralig'ini cheksiz ko'p elementar vaqtlarga ajratamiz. Har qaysi bunday cheksiz kichik vaqt oralig'ida ta'sir etuvchi kuchni miqdor va yo'nalish jihatidan o'zgarmas deb hisoblash mumkin. Kuchning cheksiz kichik vaqt oralig'idagi ta'sirini xarakterlaydigan kuch impulsiga **elementar impuls deyiladi.** Elementar impulqsni $d\overline{S}$ bilan belgilasak quyidagiga ega bo'lamiz:

$$d\overline{S} = \overline{F} \cdot dt \tag{8.2}$$

$\overline{F}$ kuchning t vaqt ichidagi to'la impulsi yoki kuch impulsi $\overline{S}$ quyidagi formulaga ko'ra aniqlanadi:

$$\overline{S} = \int_0^t \overline{F} \cdot dt \tag{8.3}$$

Kuch impulsining Dekart koordinata o'qlardagi proyeksiyalari ushbu formulalar bilan ifodalanadi:

$$S_X = \int_0^t F_X dt; \quad S_Y = \int_0^t F_Y dt; \quad S_Z = \int_0^t F_Z dt. \tag{8.4}$$

Kuch o'zgarmas bo'lgan holda uning impulsining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari:

$$S_x=F_x t\,;\ S_y=F_y t\,;\ S_z=F_z t. \tag{8.5}$$

19-§. Moddiy nuqta va mexanik sistema harakat miqdori

Moddiy nuqta yoki mexanik sistema harakatining o‘lchovlaridan yana biri sifatida uning harakat miqdori qaraladi. Mexanik harakat bir jismdan boshqasiga mexanik harakat ko‘rinishida uzatilsa, mexanik harakatning o‘lchovi sifatida har gal harakat miqdori qo‘llaniladi.

Massasi m va tezligi $\bar{v}$ bo‘lgan moddiy nuqtaning harakat miqdori deb nuqta massasini uning tezligiga ko‘paytmasiga aytiladi va u tezlik bo‘ylab yo‘nalgan $\bar{q}$ vektor bilan ifodalanadi:

$$\bar{q} = m\bar{v} \tag{8.6}$$

Moddiy nuqta harakat miqdorining Dekart koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalari:

$$q_x=mv_x=m\dot{x}\,,\ q_y=mv_y=m\dot{y}\,,\ q_z=mv_z=m\dot{z} \tag{8.7}$$

ga teng. SI sistemasida harakat miqdori N•s bilan o‘lchanadi.

Mexanik sistemaning harakat miqdori deb uning nuqtalari harakat miqdorlarining geometrik yig‘indisiga teng bo‘lgan $\bar{Q}$ vektorga aytiladi:

$$\bar{Q} = \sum_{k=1}^{n} m_k \bar{v}_k, \tag{8.8}$$

va demak, sistema harakat miqdorining Dekart koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalari:

$$Q_x = \sum m_k v_{kx},\quad Q_y = \sum m_k v_{ky},\quad Q_z = \sum m_k v_{kz}, \tag{8.9}$$

ga teng bo‘ladi. Mexanik sistema harakat miqdori vektori $\bar{Q}$, nuqta harakat miqdori $\bar{q}$ dan farqlanib, qo‘yilgan nuqtasi bo‘lmaydi. Moddiy nuqta harakat miqdori vektori harakatlanayotgan nuqtaga qo‘yiladi; $\bar{Q}$ vektor esa, odatda, erkin vektor bo‘ladi.

Mexanik sistema harakat miqdorini sistemaning massasi va uning massalar markazining tezligi orqali ifodalash mumkin. Mexanik sistemaning harakatida uning nuqtalarining koordinatalari $M_k(x_k,y_k,z_k)$ va sistema massalar markazining koordinatalari $C(x_c,y_c,z_c)$ (5.6) kabi o'zgarib boradi. (5.5) formuladan quyidagini yoza olamiz:

$$\sum m_k \bar{r}_k = m\bar{r}_C$$

Tenglikning har ikki tomonidan vaqt bo'yicha hosila olib quyidagiga ega bo'lamiz

$$\sum m_k \dot{\bar{r}}_k = m\dot{\bar{r}}_C$$

yoki

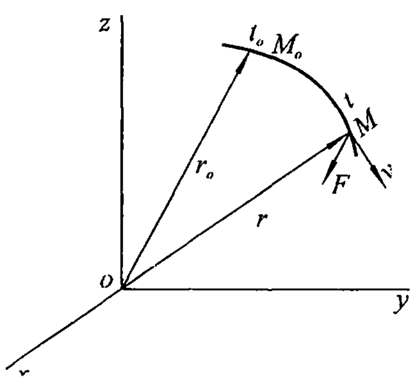
$$\sum m_k \bar{v}_k = m\bar{v}_C$$

Ta'rifga ko'ra va yuqoridagini e'tiborga olsak:

$$\bar{Q} = \sum m_k \bar{v}_k = m\bar{v}_C \qquad (8.10)$$

kelib chiqadi.

Shunday qilib, sistemaning harakat miqdori uning massasini massalar markazining tezligiga ko'paytmasiga teng va shu tezlik bo'ylab yo'naladi. Harakat miqdori sistemaning (massalar markazi bilan birgalikdagi) harakatining faqat ilgarilanma qisminigina xarakterlay olishi



(8.10) dan ravshan. Masalan, o'z o'qi atrofida ω burchak tezlik bilan aylanayotgan bir jinsli silindrning harakat miqdori nolga teng. Chunki silindrning massalar markazi uning aylanish o'qida yotadi va qo'zg'almas bo'ladi, ya'ni $\bar{v}_c = 0$, demak, harakat miqdori jism harakatining ilgarilanma harakat qismini ifodalaydi.

20-§. Moddiy nuqta harakat miqdorining o'zgarishi haqida teorema

Nuqtaning harakat miqdori bilan unga ta'sir etuvchi kuch va uning impulsi orasidagi munosabatlarni aniqlaymiz. Buning uchun M nuqtaning biror Oxyz sanoq sistemasiga nisbatan $\bar{F}$ kuch ta'siridagi harakatini tekshiramiz. Dinamikaning asosiy qonuni (1.1) ga ko'ra bu moddiy nuqta harakatininig differensial tenglamasini ushbu ko'rinishda olamiz:

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}$$

Massa o'zgarmas deb hisoblanishi sababli uni differensial amali ostiga kiritish mumkin. U holda

$$\frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \bar{F} \qquad (8.11)$$

Moddiy nuqta harakat miqdori vektoridan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosila nuqtaga ta'sir etuvchi kuchga teng. (8.11) munosabat moddiy nuqta harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremaning differensial ifodasidir. (8.11) tenglamada o'zgaruvchilarni ajratsak va uning ikkala tomonini tegishli chegaralarda integrallasak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int_{\bar{v}_0}^{\bar{v}} d(m\bar{v}) = \int_0^t \bar{F}dt$$

Bundan

$$m\bar{v} - m\bar{v}_0 = \bar{S} \qquad (8.12)$$

Moddiy nuqta harakat miqdorining biror chekli vaqt oralig'idagi o'zgarishi unga ta'sir etuvchi kuchning shu vaqt ichidagi impulsiga teng. (8.12) munosabat moddiy nuqta harakat miqdorining chekli vaqt oralig'idagi o'zgarishi haqidagi teoremaning vektorli ifodasidir. Uni ko'pincha *impulslar teoremasi* deb ham atashadi. (8.12) tenglamani proyeksiyalar ko'rinishida ifodalaymiz:

$$mv_x - mv_{ox} = S_x; \quad mv_y - mv_{oy} = S_y; \quad mv_z - mv_{oz} = S_z. \qquad (8.13)$$

(8.13) munosabat nuqta harakat miqdori proyeksiyasining o'zgarishi haqidagi teoremani ifodalaydi. *Moddiy nuqta harakat miqdorining biror koordinata o'qi bo'yicha chekli vaqt ichida o'zgarishi shu nuqtaga ta'sir etuvchi kuchning shu vaqt oralig'idagi impulsining mazkur o'qdagi proyeksiyasiga teng.* Moddiy nuqta harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremalarning istalgan ifodasi aslida nuqta harakatining differensial tenglamasidan farq qilmaydi.

Bog'lanishdagi moddiy nuqta uchun teoremalarni ifodalovchi (8.11) va (8.12) tenglamalarning o'ng tomoniga bog'lanish reaksiyalari va ularning impulslarini ham kiritish zarur.

21-§. Mexanik sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqida teorema

Sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremaning turli ifodasini keltiramiz. Mexanik sistemaga ta'sir etuvchi barcha kuchlarni tashqi va ichki guruhlarga ajratamiz. U holda, sistemaning har qaysi nuqtasiga nuqta harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremani qo'llash mumkin, masalan, (8.11) ifodani qo'llab, yoza olamiz:

$$\frac{d}{dt}(m_k \bar{v}_k) = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i, (k = \overline{1,n}) \qquad (8.14)$$

Bu munosabatlarning chap va o'ng tomonlarini sistemaning hamma nuqtalari bo'yicha qo'shib va hosilaning yig'indisi yig'indining hosilasiga tengligini e'tiborga olib hosil qilamiz:

$$\frac{d}{dt}\sum m_k \bar{v}_k = \sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{F}_k^i$$

Ichki kuchlarning xossasi va sistema harakat miqdorining ta'rifiga binoan:

$$\sum \overline{F}_k^i = 0, \quad \sum m_k \overline{v_k} = \overline{Q}, \quad \sum \overline{F}_k^e = \overline{R}^e$$

U holda keltirilgan munosabatni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \overline{R}^e \qquad (8.15)$$

Shunday qilib, sistema harakat miqdori vektorining vaqt bo'yicha birinchi tartibli hosilasi har onda sistemaga ta'sir etuvchi tashqi kuchlar bosh vektoriga teng. Bu sistema harakat miqdori haqidagi teoremaning differensial ifodasidir.

(8.15) ifodaning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari:

$$\frac{dQ_X}{dt} = R_X^e, \quad \frac{dQ_Y}{dt} = R_Y^e, \quad \frac{dQ_Z}{dt} = R_Z^e, \qquad (8.16)$$

bo'ladi, ya'ni *sistema harakat miqdori proyeksiyasidan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosila har onda sistemaga qo'yilgan tashqi kuchlar bosh vektorining shu o'qdagi proyeksiyasiga teng.*

(8.15) tenglamaning har ikkala tomonini tegishli chegaralarda integrallab, bu teoremaning chekli ifodasi topiladi:

$$\overline{Q} - \overline{Q}_0 = \overline{S} \qquad (8.17)$$

Bu yerda $\overline{Q}_0$ boshlang'ich t=0 paytdagi, $\overline{Q}$-ixtiyoriy t vaqtdagi sistemaning harakat miqdori,

$$\overline{S} = \int_0^t \overline{R}^e \cdot dt$$

esa t vaqt ichida sistemaga ta'sir etuvchi tashqi kuchlar bosh vektorining impulsi. Demak, *sistema harakat miqdori vektorining chekli vaqt ichida o'zgarishi shu vaqt ichida ta'sir etuvchi tashqi kuchlar impulsining geometrik yig'indisiga teng.* (8.10) ni (8.15) ga qo'llab hosil qilingan tenglama sistema massalar markazining harakati haqidagi teorema (7.5) ni ifodalashini aniqlaymiz, ya'ni bundan harakat miqdori teoremasi va massalar markazining harakati haqidagi teoremalar bir teoremaning ikki ko'rinishi ekanligini ko'ramiz. Shuning uchun qattiq jismlar harakatini tekshirishda ularning istalgan biridan foydalanilsa bo'ladi. Bunday holda ko'pincha sistema massalar markazining harakati teoremasidan foydalaniladi. Ammo tutash muhit (suyuqlik va gaz) lar harakatini tekshirishda oxirgi teorema o'z ma'nosini yo'qotadi va bu holda harakat miqdori teoremasi qo'llaniladi. Shuning uchun ham hozirgi zamon texnikasida tutash sistemalarning, raketalarning harakatini o'rganishda hamda zarba nazariyasida harakat miqdori teoremasidan izchillik bilan foydalanilmoqda.

22-§. Nuqta va sistema harakat miqdorining saqlanish qonunlari

Harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teorema yordamida nuqta va sistema harakat differensial tenglamalarning birinchi integrallarini topish mumkin. Bu birinchi integrallar harakat miqdorining yoki uning o'qlardagi proyeksiyalarining saqlanish qonuni deb ataladi. Bunda ikkita xususiy hollar bo'lishi mumkin:

1. Mexanik sistemaga qo'yilgan barcha tashqi kuchlarning geometrik yig'indisi, ya'ni bosh vektori nolga teng: $\sum \overline{F}_K^e = \overline{R}^e = 0$ bo'lsin, u holda (8.15) teoremadan

$$\overline{Q} = \text{const} \qquad (8.18)$$

kelib chiqadi. Bu qonun (anig'i, teoremaning xususiy holi) shunday ta'riflanadi: agar *sistemaga qo'yilgan barcha tashqi kuchlarning bosh vektori nolga teng bo'lsa, u holda sistema harakat miqdori miqdor va yo'nalish jihatidan o'zgarmaydi.* (8.18) munosabatda koordinatalarning vaqt bo'yicha birinchi hosilasi qatnashgan. Binobarin, bu munosabatlar sistema harakat miqdorining saqlanish qonunining vektorli ifodasi deyiladi.

2. Mexanik sistemaga qo'yilgan barcha tashqi kuchlar bosh vektorining biror, masalan, *Ox* o'qdagi proyeksiyasi nolga teng, ya'ni $R_X^e = \sum F_{KX}^e = 0$ bo'lsin, u holda (8.16) ning birinchisidan quyidagini yozamiz:

$$Q_x = \text{const.} \qquad (8.19)$$

(8.19) tenglik sistema harakat miqdorining o'qdagi proyeksiyasining saqlanish qonunini ifodalaydi: *mexanik sistemaga qo'yilgan barcha tashqi kuchlar bosh vektorining biror o'qdagi proyeksiyasi nolga teng bo'lsa, u holda sistema harakat miqdorining shu o'qdagi proyeksiyasi o'zgarmaydi.* Shuni ta'kidlab o'tish muhimki, tashqi kuchlar bo'lmaganda mexanik sistemaning ichki kuchlari sistema massalar markazining harakatini o'zgartira olmaganidek, ular sistemaning harakat miqdorini ham o'zgartira olmaydi. Masalan, absolyut silliq tekislikda erkin siljiy oladigan platforma ustida odam oldinga yursa, u holda platforma orqaga ketadi; bunda odam va platforma harakatining tezliklari qarama-qarshi tomonga yo'naladi va sistemaning harakat miqdori doimo o'zgarmasdan qolganligi sababli bu tezliklarning nisbatlari odam va platforma massalariga teskari proporsional bo'ladi. Bu holda platforma tekisligida sistemaning massalar markazining holati ham o'zgarmasdan qolishi bizga ma'lum. Qurollardan otishda sodir bo'ladigan tepki yoki orqaga qaytish hodisalari va reaktiv harakatning prinsiplari ham harakat miqdorining saqlanish qonuniga asoslangan. Harakat miqdori teoremasi, ayniqsa, tutash muhitlar mexanikasida keng qo'llaniladi.

9 - LEKSIYA

HARAKAT MIQDORI MOMENTINING O'ZGARISHI HAQIDA TEOREMA

Nuqta harakat miqdori momenti. Nuqta harakat miqdori momentining o'zgarishi haqida teorema. Nuqta harakat miqdori momentining saqlanish qonuni. Sektorial tezlik. Sistema harakat miqdori momenti. Kinetik moment. Sistema harakat miqdori momentining saqlanish qonuni.

1. Nuqta harakat miqdorining markazga va o'qqa nisbatan momenti qanday ta'riflanadi?
2. Harakat miqdorining markazga va o'qqa nisbatan momentlari o'zaro qanday bog'langan?
3. Nuqtaning harakat miqdori qanday o'qqa nisbatan moment hosil qilmaydi?
4. Nuqta harakat miqdori momentining o'zgarishi haqidagi teorema qanday ta'riflanadi?
5. Nuqta harakat miqdori momentining o'zgarishi matematik qanday ifodalanadi?
6. Nuqta harakat miqdori momenti qachon saqlanadi?
7. Sistema kinetik momentining o'zgarishi haqidagi teorema qanday ta'riflanadi?
8. Sistemaning markazga nisbatan kinetik momenti qanday tashqi ta'sirda saqlanadi?
9. O'qqa nisbatan kinetik moment qachon saqlanadi?

Tayanch so'zlar va iboralar

Nuqta harakat miqdorining markazga va o'qqa nisbatan momenti. Sistema harakat miqdori momenti. Kinetik moment. Markaziy kuch. Sektorial tezlik. Harakat miqdori momenti va kinetik momentlarning saqlanishi.

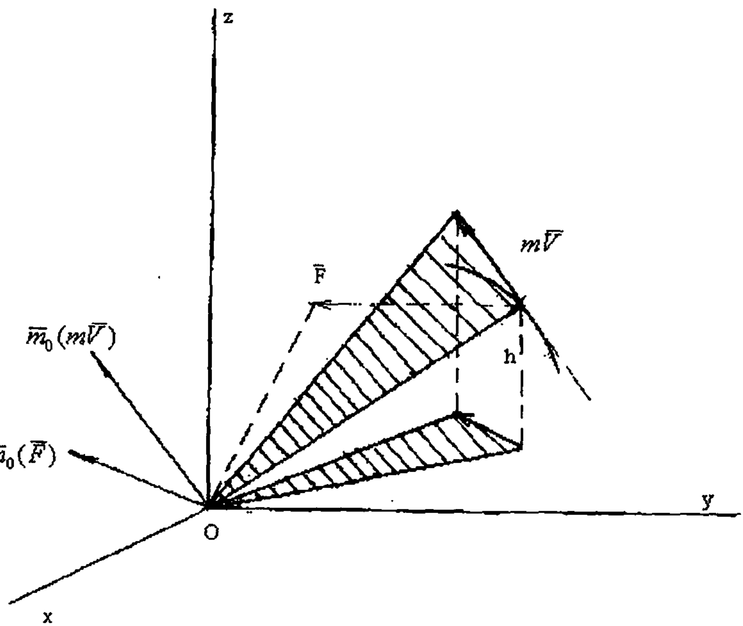
23-§. Moddiy nuqta va mexanik sistema harakat miqdorining momenti

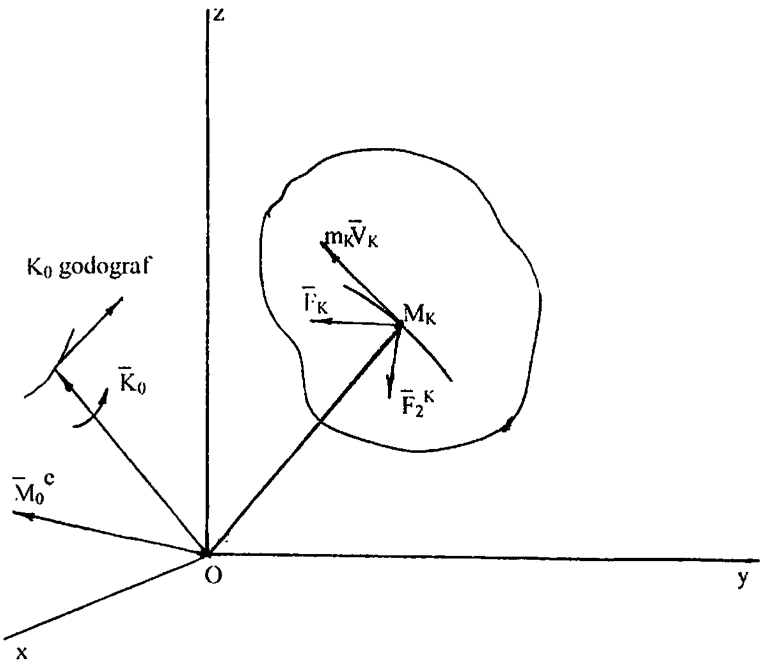
Moddiy nuqta yoki mexanik sistema harakatining vektor o'lchovi sifatida harakat miqdori bilan bir qatorda harakat miqdorning momenti yoki **kinetik moment** deb ataladigan mexanik kattalikdan ham foydalanish mumkin. m massali M moddiy nuqta tanlangan Oxyz sanoq sistemasiga nisbatan $\overline{F}$ kuch ta'sirida egri chiziqli trayektoriya bo'ylab harakatlansin, bunda $m\overline{v}$ nuqta harakat miqdori vektori.

Kursimizning statika bo'limidan $\overline{F}$ kuchning O markazga nisbatan moment vektori

$$\overline{m}_0(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F}, \qquad (9.1)$$

ko'rinishida ifodalanishi bizga ma'lum. Bu yerda $\overline{r}$ harakatlanayotgan nuqtaning O markazga nisbatan radius vektori.





Kuchning moment vektori kabi moddiy nuqtaning O markazga nisbatan harakat miqdori momentini quyidagicha yozish mumkin:

$$\bar{k}_0 = \bar{m}_0(m\bar{v}) = \bar{r} \times m\bar{v}. \qquad (9.2)$$

Moddiy nuqta harakat miqdorning O markazga nisbatan momenti deb nuqtaning o‘rnini aniqlovchi radius vektorni nuqta harakat miqdori vektoriga vektorli ko‘paytmasiga teng bo‘lgan mexanik kattalikka aytiladi. Bu vektor moment markazi O va $m\bar{V}$ vektor orqali o‘tuvchi tekislikka perpendikulyar yo‘naladi hamda O markazga qo‘yilgan deb qaraladi. Musbat yo‘nalish esa kuch momenti vektori kabi olinadi. Bu vektorning moduli

$$k_0 = m \cdot v \cdot h \qquad (9.3)$$

formuladan aniqlanadi, bu yerda h – moment markazidan $m\bar{V}$ vektori yotgan chiziqqacha bo‘lgan eng yaqin masofa. Moddiy nuqta harakat miqdor momenti uchun statikaning tegishli tushunchalari, ya'ni ushbu tengliklar o'rinli bo'ladi:

$$|\bar{k}_0|_z = k_z = m_z(m\bar{v})$$

$$k_z = m_z(m\bar{v}) = m_o(m\bar{v}_{xy}) = \pm m v_{xy} h' \qquad (9.4)$$

SI birliklar sistemasida harakat miqdori momenti kg·m²/s bilan o'lchanadi. Harakatlanayotgan nuqtaning koordinatalarini x, y, z va koordinata o'qlarining birlik vektorlarini $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ orqali belgilasak, (9.2) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\bar{k}_o = m\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} \qquad (9.5)$$

$\bar{k}_o$ vektorning koordinata o'qlardagi tashkil etuvchilari orqali ifodasi $\bar{K}_o = K_x\bar{i} + k_y\bar{j} + k_z\bar{k}$ ni nazarda tutib, (9.5) determinantni birinchi qatoriga nisbatan yoyib yozamiz:

$$K_x\bar{i} + k_y\bar{j} + k_z\bar{k} = m(y\dot{z} - z\dot{y})\bar{i} + m(z\dot{x} - x\dot{z})\bar{j} + m(x\dot{y} - y\dot{x})\bar{k}$$

Bu ifodadagi $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ lar oldidagi mos koeffitsiyentlarni tenglashtirib, tegishli o'qlarga nisbatan nuqta harakat miqdori momenti aniqlanadi:

$$k_x = m(y\dot{z} - z\dot{y});\ k_y = m(z\dot{x} - x\dot{z});\ k_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Mexanik sistemaning biror qo'zg'almas 0 markazga nisbatan (harakat miqdori momenti) kinetik momenti deb shu markazga nisbatan sistema harakat miqdorining bosh momentiga, ya'ni mazkur markazga nisbatan sistemaning barcha nuqtalari harakat miqdori $(m_k\bar{v}_k)$ moment $(\bar{K}_{0k})$ vektorlarining geometrik yig'indisiga teng $\bar{K}_0$ vektorga aytiladi

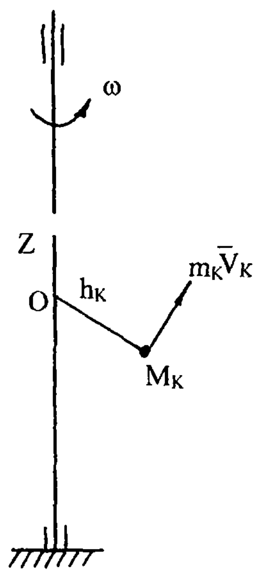
$$\overline{K}_0 = \sum_{k=1}^{n} \overline{k}_{0k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_0(m_k\overline{v}_k) = \sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k \times m_k\overline{v}_k. \qquad (9.6)$$

Mexanik sistemaning biror o'qqa nisbatan kinetik momenti deb sistema barcha nuqtalari harakat miqdorlari $m_k\overline{v}_k$ ning shu o'qqa nisbatan momentlari k_{KZ} ning algebrik yig'indisiga teng, ya'ni mazkur o'qqa nisbatan sistema harakat miqdorlarining bosh momenti K_Z ga aytiladi.

$$K_z = \sum k_{kz} = \sum m_z(m_k\overline{v}_k). \qquad (9.7)$$

Kuchlarning markazga va shu markazdan o'tuvchi o'qqa nisbatan bosh momentlari kabi sistemaning biror O markazga nisbatan kinetik momenti $\overline{K}_0$ va shu markazdan o'tuvchi o'qqa nisbatan kinetik momenti K_Z o'zaro quyidagi munosabat bilan bog'langan:

$$K_z = K_0 \cos(\overline{K}_0, \wedge \overline{z})$$



24-§. Moddiy nuqta harakat miqdori momentining o'zgarishi haqida teorema

Nuqtaning harakat miqdori momenti (9.2) ni vaqt bo'yicha differensiallab quyidagini yoza olamiz

$$\frac{d\bar{k}_0}{dt}=\frac{d\bar{r}}{dt}\times m\bar{v}+\bar{r}\times\frac{dm\bar{v}}{dt}. \tag{9.8}$$

Biroq $\frac{d\bar{r}}{dt}=\bar{v}$ va demak,

$$\frac{d\bar{r}}{dt}\times m\bar{v}=\bar{v}\times m\bar{v}=0,$$

chunki $(\bar{v}^\wedge, m\bar{v})=0$ bolganligidan vektorlar ko'paytmasining moduli

$$|\bar{v}\times m\bar{v}|=v\cdot mv\cdot\sin(\bar{v},^\wedge m\bar{v})=0$$

Moddiy nuqta harakat miqdori haqidagi teoremaga ko'ra harakat miqdoridan hosila $d(m\bar{v})/dt=\bar{F}$ ga teng. Topilgan qiymatlarni (9.8) tenglikka qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{d\bar{k}_0}{dt}=\bar{r}\times\bar{F}$$

yoki (9.1) ga binoan oxirgi tenglikni quyidagicha yozamiz:

$$\frac{d\bar{k}_0}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\bar{m}_0(m\bar{v})\right]=\bar{m}_0(\bar{F}). \tag{9.9}$$

Bu formula nuqta harakat miqdori momentining o'zgarishi haqidagi teoremani ifodalaydi.

Teorema: nuqta harakat miqdorining biror qo'zg'almas markazga nisbatan moment vektoridan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilasi nuqtaga ta'sir etuvchi $\bar{F}$ kuchning shu markazga nisbatan momentiga teng.

Endi moddiy nuqta harakat miqdori momenti teoremasining analitik ifodasini keltiramiz, buning uchun (9.9) vektor tenglamani Ox, Oy, Oz koordinata o'qlariga proyeksiyalaymiz:

$$\frac{dk_x}{dt}=m_x(\overline{F});\quad \frac{dk_y}{dt}=m_y(\overline{F});\quad \frac{dk_z}{dt}=m_z(\overline{F}). \qquad (9.10)$$

Bu munosabatlar nuqta harakat miqdorining koordinata o'qlariga nisbatan momentlari o'zgarishi haqidagi teoremani ifodalaydi:

Ya'ni nuqta harakat miqdorining biror qo'zg'almas o'qqa nisbatan momentidan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosila nuqtaga ta'sir etuvchi kuchning shu o'qqa nisbatan momentiga teng.

25-§. Markaziy kuch ta'siridagi nuqtaning harakat miqdori momentini saqlanishi

Yuqoridagi teoremadan shunday natijalarga kelamiz:

1) Agar nuqtaga ta'sir etuvchi $\overline{F}$ kuch doimo qo'zg'almas markaz orqali o'tsa, u *markaziy kuch* deyiladi va uning shu markazga nisbatan momenti nolga teng bo'ladi, ya'ni $\overline{m_0}(\overline{F})=0$, u holda (9.9) ga ko'ra:

$$\frac{d\overline{K}_0}{dt}=0 \; yoki \; \overline{K}_0=const \; yoki \; \overline{K}_0(t)=\overline{K}_0(0) \qquad (9.11)$$

ya'ni ta'sir chizig'i doimo 0 markazdan o'tuvchi markaziy kuch ta'siridagi nuqta harakat miqdorining shu 0 markazga nisbatan moment vektori moduli va yo'nalishi jihatidan o'zgarmasdan qoladi; massa m=const bo'lganidan:

$$\overline{r}\times\overline{v}=\text{const}. \qquad (9.12)$$

2) Agar nuqtaga ta'sir etuvchi $\overline{F}$ kuchning biror qo'zg'almas o'qqa, masalan, z o'qqa nisbatan momenti nolga teng bo'lsa, nuqta harakat miqdorining shu o'qqa nisbatan momenti o'zgarmas qoladi, ya'ni $m_z(\overline{F})=0$ bo'lsa, (9.10) dan quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{dk_z}{dt}=0 \text{ yoki } k_z=const,\; k_z(t)=k_z(0). \qquad (9.13)$$

(9.12) ning koordinata o'qlardagi proyeksiyalari

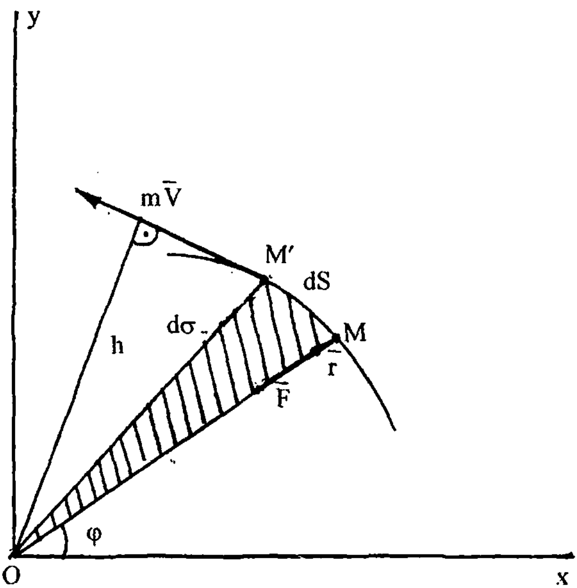
$$y\dot{z} - z\dot{y} = C_1; \quad z\dot{x} - x\dot{z} = C_2; \quad x\dot{y} - y\dot{x} = C_3, \quad (9.14)$$

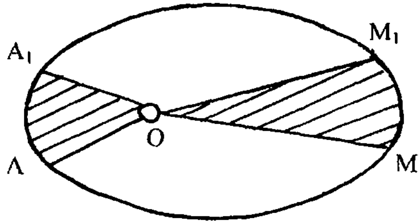
dan iborat bo'ladi. Bu tenglamalarning har qaysisini x, y, z ga ko'paytirib, chiqqan natijani qo'shsak:

$$C_1x + C_2y + C_3z = 0 \qquad (9.15)$$

kelib chiqadi. Bu tenglama koordinatalar boshidan o'tuvchi tekislik tenglamasidir.

1) va 2) natijalar moddiy nuqta harakat differensial tenglamalari (2.11) ning birinchi integralini beradi va nuqta harakat miqdori momenti saqlanish qonunining vektorli hamda koordinatalardagi *ifodalari deyiladi. Shunday qilib, markaziy kuch ta'siridagi moddiy* nuqtaning biror markazga nisbatan harakat miqdori momenti doimo o'zgarmasdan qoladi. Kuchlarning bunday turlariga osmon mexanikasining (Quyosh ta'siridagi planetalar yoki Yerning tortish maydonidagi sun'iy yo'ldoshning harakatlari) masalalarini yechishda va atom elektronlari harakatini o'rganishda duch kelamiz.





26-§. Mexanik sistema kinetik momentining o'zgarishi haqida teorema

Endi yuqorida keltirilgan nuqta harakat miqdori momenti teoremasini n-ta nuqtalardan iborat mexanik sistema uchun umumlashtiramiz. (9.9) ga ko'ra sistemaning k-nchi nuqtasi uchun kinetik moment teoremasini ushbu ko'rinishda olish mumkin:

$$\frac{d\bar{k}_{0k}}{dt} = \bar{m}_0(\bar{F}_k^e) + \bar{m}_0(\bar{F}_k^i), \quad (k=\overline{1,n}). \qquad (9.16)$$

Bu yerda $\bar{m}_0(\bar{F}_k^e)$ — sistemaning qaralayotgan k-nchi nuqtasiga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning tanlangan 0 markazga nisbatan momenti, $\bar{m}_0(\bar{F}_k^i)$ — sistemaning qolgan nuqtalarining shu k-nchi nuqtaga ko'rsatadigan ta'sir kuchlarining mazkur markazga nisbatan momenti, $\bar{k}_{0k}$ — esa sistemaning k-nchi nuqtasining kinetik momenti. (9.16) tenglikni sistemaning har qaysi nuqtasi uchun yozish mumkin. Hamma nuqtalar uchun bunday tengliklarni yozib va hadma-had qo'shib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\sum \frac{d\bar{k}_{0k}}{dt} = \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k^e) + \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k^i). \qquad (9.17)$$

Sistema ichki kuchlarining xossalariga ko'ra sistemaning barcha ichki kuchlarining ixtiyoriy markazga nisbatan bosh momenti doimo nolga teng:

$$\overline{M}_0^i = \sum \overline{m}_0(\overline{F}_k^i) = 0.$$

Bu yerda $\sum \overline{m}_0(\overline{F}_k^e) = \overline{M}_0^e$ sistemaga qo'yilgan barcha tashqi kuchlarning bosh momenti, $\sum \overline{k}_{0k} = \overline{K}_0$ sistemaning O markazga nisbatan kinetik momenti ekanligini e'tiborga olsak, (9.17) dan

$$\frac{d\overline{K}_0}{dt} = \overline{M}_0^e \tag{9.18}$$

kelib chiqadi. Bu tenglik sistema kinetik momentining o'zgarishi haqidagi teoremani ifodalaydi va quyidagicha ta'riflanadi: *ixtiyoriy O markazga nisbatan sistemaning kinetik moment vektoridan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilasi barcha tashqi kuchlarning mazkur markazga nisbatan bosh momentiga teng.* (9.18) dan tashqi kuchlarning biror markazga nisbatan bosh momentini sistema kinetik moment vektori uchining tezligi deb qarash mumkin degan xulosa bevosita kelib chiqadi, ya'ni

$$\overline{v}_A = \overline{M}_o^e. \tag{9.19}$$

Bu xulosaga *Rezal teoremasi* deyiladi.

(9.18) vektor tenglikni Dekart o'qlariga proyeksiyalab, momentlar teoremasining koordinata ifodasi aniqlanadi:

$$\dot{K}_X = M_X^e \quad , \quad \dot{K}_Y = M_Y^e \quad , \quad \dot{K}_Z = M_Z^e \tag{9.20}$$

Biror qo'zg'almas o'qqa nisbatan sistema kinetik momentidan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosila sistemaga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning shu o'qqa nisbatan momentlarining yig'indisiga teng.

27-§. Sistema kinetik momentining saqlanish qonuni

Mexanik sistema kinetik momentining o'zgarishi haqidagi teoremadan masalalar yechishda muhim shunday natijalarga kelish mumkin:

1) agar sistemaga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning biror qo'zg'almas O markazga nisbatan bosh momenti $\overline{M}_0^e = 0$ bo'lsa, u

holda sistemaning kinetik momenti miqdor va yo‘nalish jihatidan o‘zgarmasdan qoladi, ya’ni (9.18) dan

$$\frac{d\overline{K}_0}{dt}=0, \text{ yoki } \overline{K}_0=const, \; K_0(t)=K_0(0) \qquad (9.21)$$

(9.21) formula sistemaning O markazga nisbatan kinetik momentining *saqlanish qonunini* ifodalaydi. $M_z^e=0$ shart O markazga nisbatan sistema kinetik momentining saqlanish sharti bo‘ladi;

2) agar sistema nuqtalariga ta’sir etuvchi tashqi kuchlarning biror qo‘zg‘almas (masalan, Oz) o‘qqa nisbatan bosh momenti nolga teng ($M_z^e=0$) bolsa, u holda sistemaning mazkur o‘qqa nisbatan kinetik momenti o‘zgarmaydi, ya’ni (9.20) dan

$$\frac{dK_z}{dt}=0 \text{ yoki } K_z=const, \; K_z(t)=K_z(0). \qquad (9.22)$$

(9.22) formula sistemaning Oz o‘qqa nisbatan kinetik momentining saqlanish qonunini ifodalaydi va *yuzalar integrali* deyiladi. (9.22) shart sistemaning qo‘zg‘almas o‘qqa nisbatan kinetik momentining saqlanish sharti bo‘ladi. Shunday qilib, bu teorema ham oldingi teoremalar kabi sistemaning ichki kuchlaridan xalos bo‘lishga va uning harakatining birinchi integraliga erishishga imkon beradi.

10-LEKSIYA

MODDIY NUQTA KINETIK ENERGIYASINING O‘ZGARISHI HAQIDA TEOREMA

Ish. Elementar ish. Quvvat. Nuqta kinetik energiyasining o‘zgarishi haqida teorema. Qattiq jismga qo‘yilgan kuchlarning ishi. Potensialli kuch maydoni. Potensial kuch ishi. Potensial energiya

1. Kuchning ishi va quvvati qanday aniqlanadi?
2. Qachon elementar ish tushunchasi qo‘llaniladi?
3. Teng ta’sir etuvchining ishi qanday aniqlanadi?
4. Og‘irlik kuchining ishi nimaga bog‘liq?
5. Elastiklik kuchining ishi qanday aniqlanadi?
6. Nuqtaning kinetik energiyasining o‘zgarishi haqidagi teoremaning differensialli ifodasi qanday ta’riflanadi?
7. Chekli ko‘chishda nuqta kinetik energiyasining o‘zgarishi haqidagi teorema qanday ta’riflanadi?
8. Qattiq jismning ilgarilanma harakatida unga qo‘yilgan kuchlarning ishi qanday aniqlanadi?
9. Qattiq jismning qo‘zg‘almas o‘q atrofida aylanma harakatida unga qo‘yilgan kuchlarning ishi qanday aniqlanadi?
10. Qattiq jismning tekis parallel harakatida unga ta’sir etuvchi kuchlarning ishi qanday aniqlanadi?
11. Potensialli kuch maydoni nima?
12. Potensialli kuchning ishi qanday aniqlanadi?
13. Potensial energiya qanday aniqlanadi?

Tayanch so‘zlar va iboralar

Ish. Elementar ish. Quvvat. Teng ta’sir etuvchining ishi. Og‘irlik kuchining ishi. Elastik kuchning ishi. Nuqtaning kinetik energiyasi. Potensialli kuch. Kuch maydoni. Potensialli kuch maydoni. Potensial energiya.

Moddiy va mexanik sistema kinetik energiyasining o‘zgarishi haqida teorema.

28-§. Kuchning elementar ishi va uning analitik ifodasi. Kuchning chekli ishi. Quvvat.

Kuchning moddiy nuqtaga ko'rsatadigan ta'sir effekti ish tushunchasi bilan ham aniqlanadi. Ish kuch qo'yilgan nuqtaning o'tgan masofasiga nisbatan kuchning ta'sir o'lchovini xarakterlaydi. Nuqta (yoki jism) ga qo'yilgan kuchning berilishiga qarab, kuchning ma'lum masofadagi ishi turli ko'rinishda bo'lishi mumkin. Kuch ishi tushunchasining birmuncha umumiy holi ustida to'xtalamiz.

Aytaylik, miqdor va yo'nalish jihatdan o'zgaruvchan $\bar{F}$ kuch ta'sirida M nuqta egri chiziqli trayektoriya bo'yicha M_1 vaziyatdan M_2 vaziyatga ko'chsin. Bu yerda $M_1 M_2$=S kuch qo'yilgan nuqtaning o'tgan yo'li bo'ladi. O'zgaruvchan chekli S yo'lni n-ta cheksiz kichik ds_k, k =1,..n bo'laklarga ajratamiz va har bir cheksiz kichik bo'laklarda qo'yilgan kuchni o'zgarmas deb hisoblab, har bir cheksiz kichik dS_k elementar ko'chishlarda uning ishini hisoblashga to'g'ri keladi. Shu ma'noda mexanikaga kuchning elementar ishi tushunchasi kiritiladi. M nuqtaning tezlik vektori $\bar{v} = d\bar{r}/dt$ edi, u holda

$$d\bar{r} = \bar{v} \cdot dt = \bar{i}dx + \bar{j}dy + \bar{k}dz$$

ya'ni elementar ko'chish tezlik yo'nalishi bo'ylab sodir bo'ladi. Elementar ko'chish vektorining Dekart koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari dx, dy, dz M nuqta koordinatalarining cheksiz kichik vaqt oralig'i dt dagi orttirmalari desa ham bo'ladi. Bunda elementar ko'chishning moduli

$$|d\bar{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = ds$$

Bu yerda ds — trayektoriyaning M nuqtadagi yoy differensiali. $\bar{F}$ kuchning *elementar ishi* δA deb $\bar{F}$ kuch vektori bilan elementar ko'chish vektori $d\bar{r}$ ning skalyar ko'paytmasiga aytiladi:

$$\delta A = \bar{F} \cdot d\bar{r} \qquad (10.1)$$

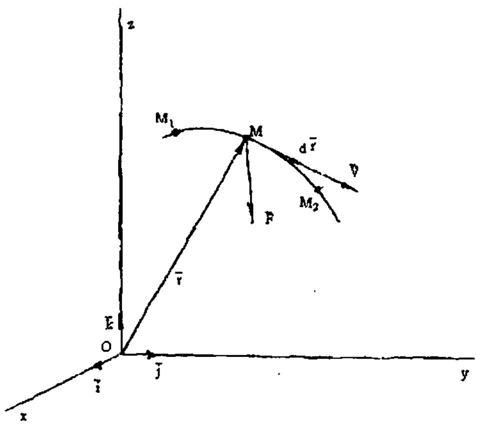
Bu yerda δA simvoli cheksiz kichik kattalikni belgilaydi, ammo u. umuman aytganda, ishning differensiali emas. Kuchning elementar ishi faqat xususiy hollardagina biror koordinata funksiyasining to'la differensiali bo'la oladi. Ikki vektorlar skalyar ko'paytmasining ta'rifiga binoan kuchning elementar ishi ifodasini ushbu ko'rinishda yozish mumkin:

$$\delta A = F \cdot ds \cdot \cos(\overline{F}\wedge,\overline{v}) = F_\tau \cdot ds,$$

$$(ds = |d\overline{r}|);\ F_\tau = F\cos(\overline{F}\wedge,\overline{v}) \qquad (10.2)$$

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz \qquad (10.3)$$

(10.2) formula elementar ishning geometrik ifodasi, (10.3) formula esa elementar ishning analitik ifodasi bo'ladi. Oxirgi formulada F_x, F_y, F_z lar



$\overline{F}$ kuchning Dekart o'qlaridagi proyeksiyalari. ds≠0 bo'lganda $0 < (\overline{F}\wedge,\overline{v}) < 90^0$ bo'lsa, δA>0, $90^0 < (\overline{F}\wedge,\overline{v}) < 180^0$ bo'lsa, δA<0 va $\overline{F} \perp \overline{v}$ da esa δA=0 bo'lishi (10.2) formuladan kelib chiqadi. Kuchning M_1 M_2 chekli yo'lidagi ishi deb elementar ishidan trayektoriyaning M_1 M_2 yoyi bo'yicha olingan egri chiziqli integralga aytiladi:

$$A=\int_{M_1M_2}\overline{F}\cdot d\overline{r}=\int_{M_1M_2}F\cdot\cos(\overline{F}\wedge,\overline{v})\cdot ds=\int_{M_1M_2}F_\tau\cdot ds \qquad (10.4)$$

yoki

$$A=\int_{M_1M_2}(F_x dx+F_y dy+F_z\cdot dz) \qquad (10.5)$$

(10.4) formula kuchning to'la ishining geometrik ifodasi, (10.5) formula esa analitik ifodasidir. Xalqaro SI birliklar sistemasida ish birligi Joulda o'lchanadi.

1J=1 Nm

Kuchning quvvati deb, kuchning elementar ishi δA ni, bu ish bajarilishdagi ketgan vaqt oralig'i dt ga nisbatiga aytiladi:

$$N=\frac{\overline{F}\cdot d\overline{r}}{dt}=\overline{F}\cdot\overline{v} \qquad (10.6)$$

Formulaga ko'ra berilgan paytdagi quvvat N $\overline{F}$ kuchning bu kuch ta'sirida M nuqtaning olgan tezligi $\overline{v}$ ga skalyar ko'paytmasiga teng.

Quvvat xalqaro SI birliklar sistemasida *Vatt* bilan o'lchanadi, bu bir sekundda bir Joul ish bajaradigan kuchning quvvatidir, ya'ni 1Vt=1J/s, bundan tashqari quvvat texnikada ot kuchida ham o'lchanadi: 1 (o.k.)=75 kgk m/s=736 Vt.

Moddiy nuqtaga $\overline{F_1},\overline{F_2},...\overline{F_n}$ kuchlar sistemasi ta'sir etgan holda teng ta'sir etuvchi bilan kuchlar sistemasi ishi uchun ushbu lemma o'rinli bo'ladi.

Lemma. Harakatlanayotgan nuqtaga qo'yilgan teng ta'sir etuvchi kuchning biror M_1 M_2 yo'ldagi ishi, tashkil etuvchi kuchlarning shu yo'ldagi ishlarining algebraik yig'indisiga teng.

Isboti. (10.4) formulaga muvofiq ega bo'lamiz:

$$A=\int_{M_1M_2}\overline{R}\cdot d\overline{r}=\int_{M_1M_2}(\overline{F_1}+\overline{F_2}+...+\overline{F_n})\cdot d\overline{r}=$$
$$\int_{M_1M_2}[(\overline{F_1}d\overline{r})+(\overline{F_2}d\overline{r})+...+(\overline{F_n}d\overline{r})] \qquad (10.7)$$

Ammo algebraik yig'indining egri chiziqli integrali har bir hadning egri chiziqli integralining algebraik yig'indisiga teng, ya'ni

$$A = \int_{M_1M_2} (\overline{F_1}\cdot d\bar{r}) + \int_{M_1M_2} (\overline{F_2}d\bar{r}) + ... + \int_{M_1M_2} (\overline{F_n}d\bar{r}) \qquad (10.8)$$

lemma isbotlandi.

29-§ . Nuqta kinetik energiyasining o'zgarishi haqida teorema

Kinetik energiya mexanik harakatning asosiy dinamik xarakteristikalaridan (o'lchovidan) biridir. *Moddiy nuqta kinetik energiyasi (yoki, dastlabki nomi, tirik kuch) deb uning massasining tezligi kvadratiga ko'paytmasining yarmiga teng mexanik kattalikka aytiladi:*

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \qquad (10.9)$$

Kinetik energiya tezlik yo'nalishiga bog'liq bo'lmagan skalyar va doimo musbat kattalik bo'lib, u tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan harakatlanayotgan nuqtaning tezligi nolga teng bo'lgandagina nolga aylanadi. Kinetik energiya SI sistemada 1kg m^2/sek^2=1J bilan o'lchanadi.

Nuqtaning harakatida uning tezligi v ni miqdor jihatidan o'zgarib borishi, uning kinetik energiyasining o'zgarishiga olib keladi. Bu o'zgarishni ifodalash uchun erkin M nuqtaning biror Oxyz koordinatlari sistemasiga nisbatdan F ta'siridagi harakatini qaraymiz. Moddiy nuqta massasini m deb, dinamikaning asosiy tenglamasini ushbu ko'rishida olamiz:

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}$$

Bu munosabatning ikkala tomonini nuqta radius vektorining differensiali $d\bar{r}$ ga skalyar ko'paytirib, quyidagini yozamiz:

$$m\cdot d\bar{v}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{F}\cdot d\bar{r}$$

Bu yerda $\bar{v}=\frac{d\bar{r}}{dt}$ nuqta tezligi va $\bar{F}\cdot d\bar{r}=\delta A$ elementar ishga teng ekanligini e'tiborga olib, quyidagini hosil qilamiz:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=\delta A \qquad (10.10)$$

Ushbu (10.10) formula nuqta kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teoremaning differensialli ifodasidir: *nuqta kinetik energiyasining differensiali unga ta'sir etuvchi kuchning elementar ishiga teng.*

(10.10) ni ikkala tomonini dt ga bo'lib, $\frac{\delta A}{dt}=N$ kuchning quvvati ekanligini e'tiborga olsak, u holda teoremani ushbu ko'rinishda olish mumkin:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right)=N \qquad (10.11)$$

Demak, moddiy nuqta kinetik energiyasidan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosila unga ta'sir etuvchi kuchning quvvatiga teng.

(10.10) tenglikning ikkala tomonini mos chegaralarda integrallab va trayektoriyaning M_0 vaziyatidagi nuqtaning boshlang'ich tezligining modulini v_0, M vaziyatidagi tezligining modulini esa v bilan belgilab quyidagini topamiz:

$$\int_{V_0}^{V} d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=\int_{M_0}^{M}\delta A$$

yoki

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=A \qquad (10.12)$$

Bunda

$$A = \int_{M_0}^{M} \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int_{M_0}^{M} F \cdot \cos\alpha \cdot dS$$

$\overline{F}$ kuchning M_0M ko'chishdagi to'la ishini ifodalaydi.

(10.12) nuqta kinetik energiyasi o'zgarishi haqidagi teoremaning chekli ifodasidir: *nuqtaning biror chekli ko'chishida kinetik energiyasining o'zgarishi unga ta'sir etuvchi kuchlarning ana shu ko'chishdagi ishiga teng.*

30-§ Qattiq jismga ta'sir etuvchi kuchlarning elementar ishi

Qattiq jismning u yoki bu harakatida uning nuqtalariga qo'yilgan kuchlarning elementar ishini hisoblash formulalarini keltiramiz.

Jism *ilgarilanma* harakatlanganda unga ta'sir etayotgan $\overline{F_1}, \overline{F_2}, ... \overline{F_n}$ kuchlar qo'yilgan M_1, M_2,...M_n nuqtalarning elementar ko'chishlari ilgarilama harakatning ta'rifiga ko'ra $d\overline{r_1} = d\overline{r_2} = ... = d\overline{r_c}$ bo'ladi. U holda kuchlarning ushbu elementar ko'chishdagi elementar ishi jismga qo'yilgan mazkur kuchlarning bosh vektori $\overline{R}$ ning jism massalar markazining elementar ko'chishidagi elementar ishi bilan aniqlanadi, ya'ni

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} \overline{F_k} \cdot d\overline{r_k} = \sum \overline{F}_k d\overline{r_c} = \overline{R} \cdot d\overline{r_c} \qquad (10.13)$$

Ayni holda bosh vektor jismning har qanday nuqtasiga qo'yilgan bo'lishi mumkin.

Jism qo'zg'almas o'q atrofida *aylanma* harakatlanayotganda uning nuqtalari trayektoriyasi aylanish o'qiga perpendikulyar tekisliklardagi aylanalardan iborat bo'ladi. Jism nuqtalariga qo'yilgan kuchlarning ushbu aylanalarga urinma tashkil etuvchi $F_{\tau k}$ larigina ish bajaradi. Qattiq jismning elementar aylanma ko'chishida uning aylanish burchagi φ esa $d\varphi$ ga o'zgaradi. U holda $\overline{F}_k$ tashqi kuchning bu ko'chishdagi ishi

$$\delta A_k = F_{\tau k} ds_k = F_{\tau k} h_k d\varphi = m_z(\overline{F_k}) \cdot d\varphi$$

ga teng bo'ladi. Jismga qo'yilgan barcha tashqi kuchlarning ushbu elementar ko'chishdagi bajargan elementar ishi har bir kuchning yuqoridagi elementar ishining algebraik yig'indisidan iboratdir, ya'ni

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} \delta A_k = \sum_{k=1}^{n} m_z(\overline{F_k}) \cdot d\varphi = M_z \cdot d\varphi \tag{10.14}$$

Qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatlanayotgan qattiq jismga qo'yilgan tashqi kuchlarning bajargan elementar ishi ushbu kuchlarning aylanish o'qiga nisbatan bosh momentining aylanish burchagi orttirmasiga ko'paytirilganiga teng.

Erkin qattiq jism harakatining *umumiy holida* elementar ko'chishni biror 0 qutb bilan ilgarilanma va shu qutb orqali o'tgan oniy aylanish o'qi atrofidagi aylanma elementar ko'chishlarga ajratish mumkin:

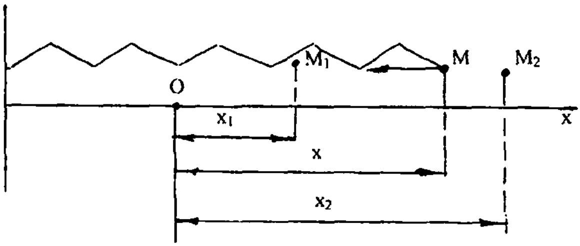
$$\delta A = \overline{R} \cdot d\overline{r_0} + M_\Omega \cdot d\varphi \tag{10.15}$$

Erkin qattiq jism harakatining umumiy holida unga qo'yilgan tashqi kuchlarning elementar ishi ularning bosh vektori qo'yilgan nuqta — qutb ko'chishidagi elementar ish bilan bu qutb orqali o'tgan oniy o'qqa nisbatan bosh momentining ushbu oniy o'q atrofida jism aylanishi tufayli ko'chishidagi elementar ishining algebraik yig'indisiga teng. Jism tekis parallel harakat qilsa, uning nuqtalariga ta'sir etuvchi kuchlarning elementar ishi shu kuchlar bosh vektorining jism massalar markazi — qutbning elementar ko'chishidagi ish bilan jismning massalar markazi atrofida aylanishning elementar ko'chishida kuchlarning massalar markaziga nisbatan bosh momentining ishi yig'indisiga teng.

9-masala. Elastiklik kuchning ishi hisoblansin.

Yechish. Moddiy nuqtaning to'g'ri chiziqli harakatida ish formulasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx$$



Bu yerda x_1 va x_2 moddiy nuqtaning boshlang'ich va oxirgi vaziyatlarining absissalari M_1 vaziyatdan M_2 vaziyatga nuqtaning ko'chirishda prujinaning elastiklik kuchining ishini hisoblaymiz, bu yerda s — prujinaning bikirlik koeffitsienti. U prujinani birlik uzunlikka cho'zuvchi (yoki siquvchi) kuchga teng va xalqaro birliklar sistemasida N/m birlikda o'lchanadi, chunki Guk qonuniga ko'ra prujinaning elastiklik kuchi uning cho'zilishi (yoki siqilishi) ga proporsional bo'ladi. Yuqorida keltirilgan formulaga muvofiq quyidagiga ega bo'lamiz:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} cx \cdot dx = \frac{1}{2} c(x_1^2 - x_2^2) \qquad \text{(a)}$$

Topilgan formulada x_1 prujinaning boshlang'ich cho'zilganligi Δl_1 ni, x_2 esa prujinaning oxirgi cho'zilganligi Δl_2 ni ifodalaydi. U holda (a) tenglik

$$A = \frac{c}{2}\left(\Delta l_1^2 - \Delta l_2^2\right) \qquad \text{(b)}$$

ko'rinishni oladi.

$|\Delta l_1| > |\Delta l_2|$ bo'lsa, ish musbat bo'ladi, ya'ni prujina uchi muvozanat (cho'zilmagan) holatga tomon ko'chadi,

$|\Delta l_1| > |\Delta l_2|$ bo'lsa, ish manfiy bo'ladi, ya'ni prujina uchi muvozanat holatdan uzoqlashadi.

Agar nuqtaning M_1 vaziyati muvozanat (deformatsiyalanmagan) holatga mos kelsa, nuqtaning M vaziyati uchun elastiklik kuchning ishi

$$A = -\frac{c \cdot \Delta l^2}{2} \qquad \text{(v)}$$

31-§. Potensialli kuch maydoni. Potensialli kuch ishi. Potensial energiya

Agar nuqtaga qo'yilgan kuchning ishi nuqtaning ko'chish qonuniga bog'liq bo'lmay, uning boshlang'ich va oxirgi o'rnining koordinatalariga bog'liq bo'lsa, bunday kuchlarga **potensialli kuchlar** deyiladi, masalan, og'irlik, elastiklik kuchlari. Bunday kuch maydoniga **potensialli kuch maydoni** deyiladi. Potensialli kuch maydonida nuqtaga ta'sir ko'rsatadigan kuch nuqtaning koordinatalari funksiyasi bo'ladi. Bunday maydonda bajarilgan elementar ish potensial funksiyaning yoki potentsial energiyaning to'la *differensiyali* kabi aniqlanadi.

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz = dU = -dP \qquad (10.16)$$

Bu yerda P – potensial energiya. U(x, y, z) funksiyaga *kuch* (yoki *potensialli kuch*) funksiyasi deyiladi. Garchi,

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \qquad (10.17)$$

ga teng, u holda oxirgi ikki tengliklardan va dx, dy, dz differensiallarning o'zaro bog'liqmasligidan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z} \qquad (10.18)$$

Bu tenglama kuch maydonining potensialli bo'lishining zaruriy va yetarli shartlarini ifodalaydi.

Kuch funksiyasi U(x,y,z) biror M nuqtani $M_0(x_0, y_0, z_0)$ o'rnidan ixtiyoriy tanlangan M (x,y,z) ga ko'chishida maydon kuchining ishi bilan aniqlanadi:

$$A = \int_{M_0}^{M} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) =$$

$$\int_{M_0}^{M} dU = U(x,y,z) - U_0(x_0, y_0, z_0) \qquad (10.19)$$

Demak, potensialli kuchning ishi nuqtaning oxirgi va boshlang'ich vaziyatlarining kuch funksiyalari ayirmasiga teng va nuqtaning o'tgan yo'lining shakliga bog'liqmas. Potensialli kuch maydonida nuqtaning o'tgan yo'li yopiq egri chiziqni hosil qilsa, maydon kuchning ishi nolga teng.

Potensialli kuch maydonining berilgan nuqtasidagi energiya miqdorini potensial energiya ifodalaydi. Kuch maydonining berilgan M nuqtasining potensial energiyasi P deb maydonning ushbu M nuqtasidan boshlang'ich M_0 ga moddiy nuqtaning ko'chishida unga ta'sir etayotgan maydon kuchining ishi bilan aniqlanadigan kattalikka aytiladi:

$$P = A = \int_{M}^{M_0} dU = U_0 - U \qquad (10.20)$$

Potensialli kuch maydoniga doir masala keltiramiz.

10-masala. Bir jinsli og'irlik maydoni. Og'irlik kuchining ishi kuch qo'yilgan nuqtaning ko'chish trayektoriyasining shakliga (ko'chish qonuniga) bog'liq bo'lmay, balki faqat uning boshlang'ich va oxirgi vaziyatlarigagina bog'liq bo'lishi aniqlansin.

Yechish. Aytaylik, M moddiy nuqtaga og'irlik kuchi G ta'sir etsin va kuch qo'yilgan nuqtaning ko'chishi sodir bo'lgandagi vaziyatlari $M_0(X_0,Y_0,Z_0)$ va M(x,y,z) berilgan bo'lsin. Agar koordinatada o'qlari rasmda ko'rsatilganidek tanlansa, u holda og'irlik kuchi $\overline{G} = -mg\overline{k}$ $\quad \overline{k}$-Z o'qining birlik vektori, ya'ni

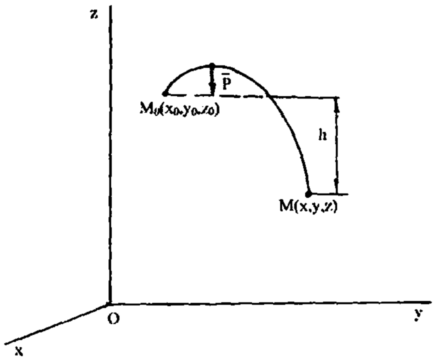
$$F_x=0,\ F_y=0.\ F_z=-mg.$$

Formulaga ko'ra kuch funksiyasi uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$$U(x.y.z)-U(x_0.y_0.z_0)= \int_{M_0}^{M} F_z dz = -mg\int_{z_0}^{z} dz = -mgz + mgz_0$$

Bundan U=-mgz bo'lib, yuqoridagi shartni qanoatlantiradi. Og'irlik kuch maydonidagi ish uchun oxirgi formulani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$A = -mgh, \qquad \text{(a)}$$



Bu yerda $h=z-z_0$ nuqtaning oxirgi va boshlang'ich vaziyatlarining (balandliklari) ayirmasi.

Shunday qilib, og'irlik kuchining maydoni potensialli, chunki og'irlik kuchining ishi u qo'yilgan nuqtaning ko'chish trayektoriyasining shakliga bog'liq bo'lmay va (a) formulaga ko'ra aniqlanadi. Bunda nuqta trayektoriya bo'ylab ko'tarilsa ($h>0$), ish manfiy ($A<0$) va nuqta trayektoriya bo'ylab pastga tushsa ($h<0$), ish musbat ($A>0$) bo'ladi.

11-LEKSIYA

MEXANIK SISTEMA KINETIK ENERGIYASINING O'ZGARISHI HAQIDA TEOREMA

Mexanik sistema kinetik energiyasi. Kyonig teoremasi. Qattiq jismning ba'zi harakatlarida kinetik energiyasi. Mexanik sistema kinetik energiyasining o'zgarishi haqida teorema. Mexanik energiyaning saqlanish qonuni.

1. Mexanik sistema kinetik energiyasi deb nimaga aytamiz?
2. Kyonig teoremasi nima haqida?
3. Kyonig teoremasi matematik qanday ifodalanadi va ta'riflanadi?
4. Ilgarilanma harakatdagi qattiq jism kinetik energiyasi nimaga teng?
5. Aylanma harakatdagi qattiq jism kinetik energiyasi qanday aniqlanadi?
6. Tekis parallel harakatdagi qattiq jism kinetik energiyasi qanday hisoblanadi?
7. Mexanik sistema kinetik energiyasi o'zgarishi haqidagi teoremaning differensialli ifodasi qanday aniqlanadi va ta'riflanadi?
8. Mexanik sistemaning chekli ko'chishida kinetik energiyasining o'zgarishi haqida teorema qanday ifodalanadi va ta'riflanadi?
9. Qattiq jism kinetik energiyasining o'zgarishi qanday ifodalanadi va ta'riflanadi?
10. Mexanik energiyaning saqlanish qonuni matematik qanday ifodalanadi va ta'riflanadi?

Tayanch so'zlar va iboralar

Mexanik sistema kinetik energiyasi. Kyonig teoremasi. Qattiq jismning ilgarilanma, aylanma, tekis parallel harakat kinetik energiyalari. Kinetik energiya differensiali. Ish differensiali, elementar ish. Mexanik energiya. Mexanik energiyaning saqlanish qonuni.

32-§. Mexanik sistema kinetik energiyasi. Kyonig teoremasi. Qattiq jism kinetik energiyasini hisoblash

Mexanik sistema kinetik energiyasi deb sistemani tashkil qilgan nuqtalar kinetik energiyalarining yig'indisiga aytiladi.

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_k^2}{2} \qquad (11.1)$$

Moddiy nuqta kinetik energiyasi singari mexanik sistema kinetik energiyasi ham tezliklarning yo'nalishiga bog'liq bo'lmagan skalyar musbat kattalikdir. Mexanik sistema nuqtalarining tezliklari nolga teng bo'lgan holdagina uning kinetik energiyasi nolga teng bo'ladi. Kinetik energiya moddiy nuqtaning yoki mexanik sistemaning birdaniga ham ilgarilanma, ham aylanma harakatlarini xarakterlovchi o'lchovdir.

Yana bir muhim hol shundan iboratki, ichki kuchlar mexanik sistemaning qismlariga o'zaro qarama-qarshi yo'nalishda ta'sir ko'rsatishligi tufayli ular mexanik harakatning vektor o'lchovlari (harakat miqdori va harakat miqdori momentlari) ni o'zgartirmas edi. Lekin ichki kuchlar ta'siridan mexanik sistema nuqtalari tezliklarining moduli o'zgarsa sistemaning kinetik energiyasi o'zgaradi. Demak, harakat miqdori va harakat miqdori momentidan kinetik energiyaning farqi kinetik energiyani ham tashqi kuchlar, ham ichki kuchlar ta'sirida o'zgarishidir.

Agar mexanik sistema bir necha jismlardan tashkil topgan bo'lsa, uning kinetik energiyasi mazkur jismlarning kinetik energiyalari yig'indisiga teng bo'ladi.

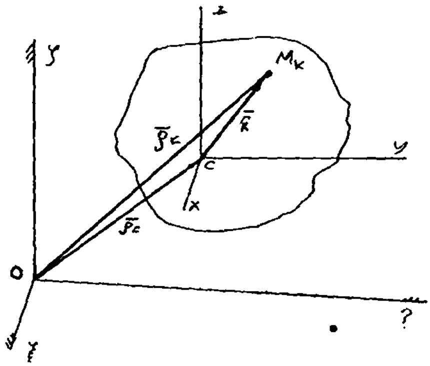
Quyida mexanik sistema harakatining umumiy holida uning kinetik energiyasini aniqlovchi *Kyonig teoremasini* isbotlaymiz.

Mexanik sistema harakatini uning massalar markazi bilan birgalikdagi ko'chirma ilgarilanma harakat va massalar markazi bilan birgalikda ilgarilanma harakatlanayotgan koordinatlar sistemasiga nisbatan nisbiy harakatlariga ajratamiz. U holda sistemaning ixtiyoriy M_k nuqtasi uchun rasmdan quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\overline{\rho_k} = \overline{\rho_c} + \overline{r_k}$$

va mos ravishda

$$\overline{v_k} = \overline{v_c} + \overline{r_{kr}}$$



ga teng. Qo'zg'aluvchi koordinatlar sistemasi ilgarilanma harakatlanganligi sababli nuqtaning nisbiy tezligi va demak, $\bar{r}_k$ dan vaqt bo'yicha olingan to'la hosila nuqtaning nisbiy tezligiga teng lokal hosilasi bilan aynan bo'ladi. $\overline{v}_k$ tezlikning qiymatini sistemaning absolut harakatidagi, ya'ni $O\xi\eta\zeta$ koordinatlar sistemasiga nisbatan harakat kinetik energiyasi ifodasiga qo'yamiz va ba'zi o'zgartirishlardan so'ng quyidagiga ega bo'lamiz:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{v_c^2}{2} \sum m_k + \sum \frac{m_k v_{kr}^2}{2} + \overline{v_c} \sum m_k \overline{v_{kr}}$$

Biroq,

$$\overline{v_c} \sum m_k \overline{v_{kr}} = \overline{v_c} \sum m_k \frac{d\overline{r_k}}{dt} = \overline{v_c} \frac{d}{dt} (\sum m_k \overline{r_k}) = 0$$

chunki

$$\sum m_k \overline{r_k} = M \overline{r_c} = 0$$

Bu yerda $\sum m_k = M$ jismning to'la massasi ekanligini nazarda tutsak va ikkinchi yig'indini $T_c^{(r)}$ orqali belgilasak,

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + T_c^{(r)} \qquad (11.2)$$

kelib chiqadi, bu yerda $T_c^{(r)} = \frac{1}{2}\sum m_k v_{kr}^2$ — massalar markazi bilan birgalikda harakatlanayotgan koordinatlar sistemasiga nisbatan mexanik sistemasining nisbiy harakat kinetik energiyasi yoki mexanik sistemasining massalar markaziga nisbatan kinetik energiyasi. (11.2) formula *Kyonig teoremasini* ifodalaydi: *murakkab harakatdagi mexanik sistemaning kinetik energiyasi massasi sistema massasiga teng deb olinadigan massalar markazining kinetik energiyasi hamda massalar markazi bilan birgalikda ilgarilanma harakatlanuvchi koordinatalar sistemasiga nisbatan mexanik sistemaning nisbiy harakat kinetik energiyalarining yig'indisiga teng.*

Endi qattiq jismning turli harakatlarida kinetik energiyasini hisoblaymiz.

Ilgarilanma harakatlanayotgan qattiq jismning kinetik energiyasi quyidagi formuladan aniqlanadi:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{v_c^2}{2} \sum m_k = \frac{M v_c^2}{2} \qquad (11.3)$$

Qo'zg'almas o'q atrofida **aylanma** harakatlanayotgan jismning kinetik energiyasi:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_k h_k^2 = \frac{I_z \cdot \omega^2}{2} \qquad (11.4)$$

I_z — aylanish o'qi z ga nisbatan jismning inersiya momenti.

Tekis parallel harakatlanayotgan jism kinetik energiyasi uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$$T = \frac{M \cdot v_c^2}{2} + I_{cz} \cdot \frac{\omega^2}{2} \qquad (11.5)$$

Shunday qilib, tekis parallel harakatlanayotgan jismning kinetik energiyasi jismning massalar markazi bilan birgalikdagi ilgarilanma harakat kinetik energiyasi va jismning massalar markazi orqali harakat tekisligiga perpendikulyar o'tuvchi o'q atrofida aylanma harakat kinetik energiyalarining yig'indisiga teng.

Sferik harakatdagi jismning kinetik energiyasini hisoblashda uning harakatini har ondagi qo'zg'almas 0 nuqtadan o'tuvchi biror oniy o'q atrofidagi aylanma harakatdan iborat deb qaraymiz. Bu holda jismning kinetik energiyasini (11.4) formulaga ko'ra hisoblash mumkin:

$$T = I_l \cdot \frac{\omega^2}{2}, \qquad (11.6)$$

bunda I_l jismning oniy aylanish o'qqa nisbatan inersiya momenti bo'lib, (6.7) formuladan aniqlanadi.

Demak, **sferik harakatdagi jismning kinetik energiyasi, jismning oniy aylanish o'qiga nisbatan inersiya momenti I_l ning oniy burchak tezligi ω kvadratiga ko'paytmasining yarmiga teng.**

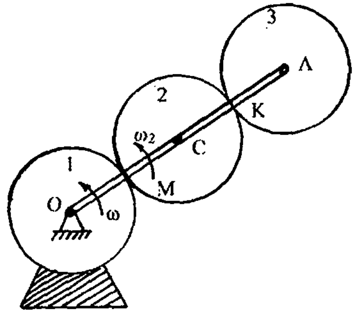
Erkin qattiq jism harakatning umumiy holida, jism harakatini massalar markazi bilan birgalikdagi ilgarilanma harakat va uning atrofidagi aylanma harakatdan iborat deb qarasak, erkin jismning kinetik energiyasi (11.3) va (11.6) ga muvofiq quyidagi formula yordamida hisoblanadi:

$$T = \frac{Mv_c^2}{2} + \frac{I_l \cdot \omega^2}{2} \qquad (11.7)$$

Ya'ni **erkin qattiq jismning kinetik energiyasi jismning massalar markazi bilan birgalikdagi ilgarilanma harakat kinetik energiyasi va massalar markazi orqali o'tuvchi oniy aylanish o'qi atrofida aylanma harakat kinetik energiyasining yig'indisiga teng.**

Mexanik sistema bir necha jismdan tashkil topgan bo'lsa, u holda har qaysi jismning kinetik energiyasi ayrim-ayrim hisoblanadi va topilgan natijalarning yig'indisi olinadi. Jismlar sistemasining kinetik energiyasi shu yo'sinda hisoblanadi.

11-masala. Gorizontal tekislikda joylashgan planetar mexanizmni bir xildagi uchta 1,2,3 g'ildiraklar o'qlarini tutashtiruvchi OA krivoship harakatga keltiradi. Birinchi g'ildirak qo'zg'almas; krivoship ω burchak tezlik bilan aylanadi. Har qaysi g'ildirakning massasi M_1 ga, radiusi r teng, krivoship massasi M_2 ga.



teng. G‘ildiraklarni bir jinsli disk va krivoshipni bir jinsli sterjen deb hisoblab, mexanizmning kinetik energiyasi hisoblansin.

Yechish. Mexanik sistema uchta g‘ildirak va krivoshipdan iborat. Sistemaning kinetik energiyasi ana shu jismlarning kinetik energiyalari yig‘indisiga teng.

1-g‘ildirak qo‘zg‘almas bo‘lganligi sababli uning kinetik energiyasi nolga teng. Demak, sistemaning kinetik energiyasi:

$$T=T_2+T_3+T_{kr} \qquad \text{(a)}$$

ga teng.

OA krivoship O dan o‘tgan qo‘zg‘almas o‘q atrofida aylanma harakat qiladi. Uning kinetik energiyasi qattiq jism aylanma harakat kinetik energiyasidan iborat:

$$T_{kp}=\frac{I_k\cdot\omega^2}{2}=\frac{8}{3}M_2r^2\omega^2$$

Bu yerda $I_k=M_2(4r)^2/3$ krivoshipning O o‘qqa nisbatan inersiya momenti.

2-g‘ildirak tekis parallel harakatlanadi, uning kinetik energiyasi quyidagicha aniqlanadi:

$$T_2=\frac{M_1v_2^2}{2}+\frac{I_{2C}\cdot\omega_2^2}{2} \qquad \text{(v)}$$

2-gildirakning C nuqtasi — massalar markazi tezligi krivoshipning xuddi shu C nuqtasi tezligi

$$v_C = v_2 = 2r\omega$$

ga teng. Uning burchak tezligi $\omega_2$ni 2-g'ildirak markazi C dan tezliklar oniy markazi, ya'ni 1-g'ildirak bilan tegishgan M nuqtagacha bo'lgan masofaga v_2 tezlikni bo'lib aniqlaymiz:

$$\omega_2 = \frac{v_2}{r} = \frac{2r\omega}{r} = 2\omega$$

2-g'ildirakning massalar markazidan o'tgan o'qqa nisbatan inersiya momenti, u yaxlit disk hisoblanganligi sababli

$$I_{2C} = \frac{M_1 r^2}{2}$$

ga teng. Ushbularni yuqoridagi (v) ifodaga qo'yib 2-g'ildirak kinetik energiyasi uchun quyidagini topamiz:

$$T_2 = \frac{M_1 (2r\omega)^2}{2} + \frac{M_1 r^2}{2 \cdot 2}(2\omega)^2 = 3M_1 r^2 \omega^2$$

2-g'ildirakning kinetik energiyasini u tezliklar oniy markazi atrofida oniy aylanma harakat qilayapti deb ham aniqlash mumkin

$$T_2 = \frac{I_{2M} \cdot \omega_2}{2}$$

Bu yerda I_{2M}-2-g'ildirakning massalar markazi C orqali rasm tekisligiga tik o'tgan o'q bilan parallel holda tezliklarni oniy markazi M dan rasmga tik o'tgan o'qqa nisbatan inersiya momenti. U Gyuygens — Shteyner teoremasiga ko'ra

$$I_{2M} = I_C + M_1 r^2 = \frac{M_1 r^2}{2} + M_1 r^2 = \frac{3}{2} M_1 r^2$$

ga teng. Endi kinetik energiyani hisoblab yana yuqoridagi qiymatni olamiz.

$$T_2 = \frac{3}{2}M_1 r^2 \cdot \frac{(2\omega)^2}{2} = 3M_1 r^2 \omega^2$$

3-g'ildirakning ikkita nuqtasining tezligini aniqlab u qanday harakatlanayotganini bilamiz. Uning markaziy A nuqtasining tezligini krivoshipning A nuqtasi tezligidan aniqlaymiz, chunki A nuqta bir vaqtda ham g'ildirakka va ham krivoshipga tegishlidir:

$$v_A = 4r\omega$$

Endi uning 2-g'ildirak bilan tegishgan K nuqtasi tezligini 2-g'ildirakning ushbu sirt nuqtasi tezligiga tengligidan (g'ildiraklar sirpanmasdan aylanadi) aniqlaymiz. 2-g'ildirakning bu tegishgan nuqtasi tezligi uning burchak tezligi ω_2 ni nuqtadan tezliklar oniy markazi M gacha bo'lgan masofaga ko'paytirilganiga teng, ya'ni

$$V_k = \omega_2 2r = 4\omega r$$

Shunday qilib, 3-g'ildirakning A va K nuqtalarining tezligi o'zaro teng ekan, demak, u ilgarilanma harakatlanadi. Shuning uchun uning kinetik energiyasi

$$T_3 = \frac{M_1 v^2}{2} = \frac{M_1 (4r\omega)^2}{2} = 8M_1 r^2 \omega^2$$

ga teng.

Mexanik sistema jismlari uchun yuqorida aniqlangan kinetik energiyalar qiymatini (a) ga qo'ysak, bu mexanik sistema kinetik energiyasi uchun quyidagi ifodaga kelamiz:

$$T = 11M_1 r^2 \omega^2 + \frac{8}{3}M_2 r^2 \omega^2 = r^2 \omega^2 (33M_1 + 8M_2)/3$$

33-§. Mexanik sistema kinetik energiyasining o'zgarishi haqida teorema

Endi moddiy nuqta kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teoremani n-ta ana shunday nuqtalardan tashkil topgan sistema uchun umumlashtiramiz. Mexanik sistemaning biror M_k nuqtasiga qo'yilgan tashqi va ichki kuchlarning teng ta'sir etuvchilarini, mos ravishda, $\overline{F}_k^e$ va $\overline{F}_k^i$ desak sistemaning bu nuqtasi uchun teorema quyidagicha yoziladi:

$$d\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \delta A_k^e + \delta A_k^i, \qquad (k = 1, \overline{n})$$

bu yerda δA_K^e va δA_K^i tegishlicha, sistemaning M_k nuqtasiga qo'yilgan tashqi va ichki kuchlarning elementar ishlari. Bunday munosabatlarni sistemaning barcha nuqtalari uchun yozib, ularning chap va o'ng tomonlarini hadma-had qo'shib va differensial ishorasini yig'indi ishorasi tashqarasiga chiqarib quyidagini hosil qilamiz:

$$dT = \sum \delta A_K^e + \sum \delta A_K^i$$

bundan

$$T - T_0 = \sum A_K^e + \sum A_K^i \qquad (11.8)$$

Sistema absolut qattiq jism (yoki o'zgarmas) bo'lgan holda ichki kuchlarning ishi nolga aylanib teorema ifodasida qatnashmaydi, ya'ni

$$T - T_0 = \sum A_K^e \qquad (11.9)$$

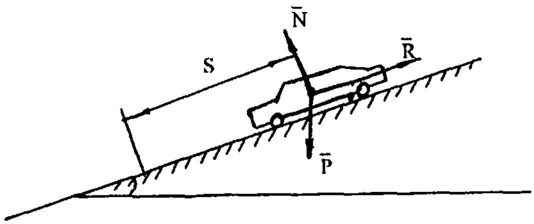
Demak, o'zgarmas sistemaning chekli ko'chishida kinetik energiyasining o'zgarishi berilgan sistema nuqtalariga qo'yilgan barcha tashqi kuchlarning mazkur ko'chishdagi ishlarining yig'indisiga teng.

12-masala. Avtomobil $\alpha=10°$ qiyalikda pastga qarab 54 km/soat tezlik bilan harakat qiladi. Tormozlashda hosil bo'lgan $\overline{R}$ qarshilik kuchini avtomobil og'irligining 0,3 qismiga teng deb va uning harakatidagi boshqa hamma qarshilik kuchlarni hisobga olmasdan, tormozlash boshlangandan u to'xtaguncha ketgan t vaqt va shu vaqt oralig'ida o'tgan L yo'l aniqlansin.

Yechish. Avtomobilni moddiy nuqta deb qaraymiz. Unga quyidagi kuchlar ta'sir etadi: $\overline{P}$ — avtomobil og'irligi, $\overline{N}$ — yo'lning normal reaksiyasi, $\overline{R}$ tormozlashda hosil bo'lgan qarshilik kuchi. L tormozlash yo'lini aniqlash uchun nuqta kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teoremani qo'llaymiz:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A$$

Avtomobilning V_0=54 km/soat =15m/sek boshlang'ich tezligi va uning V=0 oxirgi tezligi bizga ma'lum.



Avtomobilga qo'yilgan kuchlarning teng ta'sir etuvchisining A ishi, tashkil etuvchi kuchlar ishlarining algebraik yig'indisiga teng. Og'irlik kuchining ishi A(P)=P·h=mgL·sinα, $\overline{N}$ normal reaksiyaning ishi A(N)=0 ga teng, chunki u avtomobilning harakat yo'nalishiga perpendikulyar; tormozlash $\overline{R}$ kuchning ishi:

$$A(\overline{R}) = -R \cdot L = -0{,}3\,mgL,$$

chunki bu kuch avtomobilning harakat yo'nalishiga qarama-qarshi tomonga yo'nalgan.

Shunday qilib, teng ta'sir etuvchi kuchning ishi:

$$A = A(\overline{P}) + A(\overline{N}) + A(\overline{R}) = mgL \cdot \sin\alpha - 0{,}3mgL = mgL(\sin\alpha - 0{,}3)$$

Bunday holda kinetik energiyaning o'zgarish tenglamasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$-\frac{mv_0^2}{2}=mgL(\sin\alpha-0{,}3)$$

Bundan

$$L=\frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha-0{,}3)}=-\frac{15^2}{2\cdot 9{,}81(0{,}174-0{,}3)}=91\,м$$

Tormozlash t vaqtini topish uchun nuqta harakat miqdori haqidagi teoremadan foydalanish mumkin. Avtomobilning harakat yo'nalishini x o'qi yo'nalishi deb qabul qilib (8.13) formulaning birinchisini yozamiz:

$$mv_X-mv_{OX}=S_X.$$

Berilgan holda $v_X=0$, $v_{OX}=v_O=15$ m/s. Avtomobilga qo'yilgan kuchlar o'zgarmas bo'lgani uchun bu kuchlar impulsining x o'qidagi proyeksiyasi quyidagicha bo'ladi:

$$S_X=F_X\cdot t=(P\cdot\sin\alpha-R)t=(mg\sin\alpha-0{,}3mg)t=mgt(\sin\alpha-0{,}3)$$

Shunday qilib, bu holda nuqta harakat miqdorning o'zgarish tenglamasi quyidagicha ko'rinishni oladi:

$$t=-\frac{v_0}{g(\sin\alpha-0{,}3)}=-\frac{15}{9{,}81(0{,}174-0{,}3)}=12\,c$$

34-§. Mexanik energiyaning saqlanish qonuni

Moddiy nuqta potensialli (konservativ) kuch maydonida harakatlansa, kinetik energiyaning o'zgarishi ushbu ko'rinishni oladi:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=U-U_0 \qquad (11.10)$$

bu yerda U va U_0 — nuqtaning boshlang'ich va oxirgi holatlariga mos keluvchi kuch funksiyasining qiymatlari. Kuch funksiyasiga teskari P_0 va P_1 — mos ravishda sistema nuqtalariga qo'yilgan tashqi va ichki kuchlarning boshlang'ich va oxirgi paytga to'g'ri keluvchi potensial energiyalari. Bunday holda yuqoridagi tenglik ushbu ko'rinishni oladi:

$$T-T_o=P_o-P$$

yoki

$$T+P=T_o+P_o=h.$$

bunda h — o'zgarmas kattalik, $E=T+P$ — sistemaning to'liq mexanik energiyasi. Natijada quyidagi

$$E=T+P=h \qquad (11.11)$$

energiya integrali formulasiga ega bo'lamiz va u sistema mexanik energiyasining saqlanish qonunini ifodalaydi: **potensialli (konservativ) kuch maydonida sistemaning mexanik energiyasi doimo o'zgarmasdan qoladi.** Bu qonunni qanoatlantiruvchi sistema **konservativ sistema** deb ataladi. Agar sistema o'zgarmas bo'lsa, ichki kuchlar ishlarining yig'indisi $\sum A_K^i=0$ bo'lib, $A_K=\sum A_K^e$ bo'ladi va ichki kuchlarning potensial energiyasi o'zgarmas bo'lib, uni nolga teng deb olish mumkin. Bunday holda (11.11) munosabatda potensial energiya faqat tashqi kuchlarning potensial energiyasidan iborat bo'ladi hamda uning sistema kinetik energiyasi bilan yig'indisi o'zgarmas qoladi. Mexanik sistema (yoki moddiy nuqta) potensialli bo'lmagan kuch maydonida harakatlansa, mexanik energiya o'zgaradi, masalan turli qarshiliklarni yengishda sistema mexanik energiyasining bir qismi issiqlik, elektr yoki boshqa xil energiyalarga aylanib sarf bo'lishi mumkin. Bu holatga sistema ichki kuchlar ishlarining yig'indisi, umuman aytganda, nolga teng bo'lmasligidan deb tushuniladi. Mexanik sistemaning ikki nuqtasi orasidagi o'zaro ta'sir kuchlar miqdorlari teng va qarama-qarshi tomonlariga yo'nalgan bo'ladi va shuning uchun bu kuchlarning geometrik yig'indisi nolga teng. Ammo dastlab tinch holatda turgan nuqtalar bu kuchlar ta'sirida ko'chsa, u holda ularning ko'chish yo'nalishlari kuchlar yo'nalishi bilan ustma-ust tushadi va ikkala kuchlarning ishlari musbat bo'ladi. Demak, ishlarning yig'indisi nolga teng bo'lmaydi. Mexanik sistemaning barcha ichki kuchlarini uning juft-juft olingan nuqtalarning o'zaro ta'sir kuchlari deb qarash mumkin bo'lganligi sababi yuqorida aytilganlar butun sistema uchun ham o'rinli bo'ladi.

12-LEKSİYA

QATTIQ JISM HARAKATINING DIFFERENSIAL TENGLAMALARI

1. Qattiq jismning ilgarilanma harakat differensial tenglamasi qaysi teoremaga asoslangan?
2. Qattiq jism ilgarilanma harakat differensial tenglamasiga ko'ra qanday masalalar yechiladi?
3. Qattiq jismning aylanma harakat differensial tenglamasi qaysi teoremadan keltirib chiqariladi?
4. Qattiq jismning aylanma harakat differensial tenglamasiga ko'ra qanday masalalar yechiladi?

Tayanch so'zlar va iboralar

Qattiq jism ilgarilanma harakat differensial tenglamasi, qattiq jism aylanma harakat differensial tenglamasi, qattiq jism ilgarilanma harakati va aylanma harakatining masalalari.

35-§. Qattiq jismning ilgarilanma harakat differensial tenglamalari

Ilgarilanma harakatning ta'rifiga ko'ra qattiq jismning hamma nuqtalari uning massalar markasi C bilan bir xil harakatlanadi. Shuning uchun ham, biz yuqorida, massalar markazi harakatini o'rganganimizda uning yordamida qattiq jismning ilgarilanma harakatini ham tekshirish mumkin degan edik. Ya'ni, jismning massalar markazi harakatining (7.6) kabi differensial tenglamalari bir vaqtda jismning ilgarilanma harakat differensial tenglamalari hamdir.

Ilgarilanma harakat differensial tenglamalari yordamida qattiq jism dinamikasining ikki asosiy masalalarini:

1) qattiq jism massalar markazi harakati berilganda unga ta'sir qilayotgan tashqi kuchlar bosh vektorini;

2) qattiq jismga qo'yilgan tashqi kuchlarni va harakatning boshlang'ich shartlarini bilgan holda qattiq jism massalar markazining harakat qonunini aniqlash kabi masalalarni yechish mumkin.

36-§. Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakat differensial tenglamasi

Biror qo'zg'almas Oz o'qqa nisbatan mexanik sistema kinetik momenti va uning o'zgarishi haqidagi teoremadan, ya'ni

$$K_Z = \sum m_Z(m_K \bar{v}_K),\ \dot{K}_Z = M_Z^e = \sum_{K=1}^{n} m_Z(\bar{F}_K^e)$$

dan qattiq jismning qo'zg'almas Oz o'q atrofidagi aylanma harakatining kinetik momenti va differensial tenglamasi kelib chiqadi. O'qqa nisbatan sistema kinetik momentining ta'rifiga ko'ra u, masalan z o'qqa nisbatan quyidagicha ifodalanadi:

$$K_Z = \sum m_Z(m_K \bar{v}_K)$$

Jismning aylanish o'qidan h_k masofada joylashgan har qanday k-nchi nuqtasinig tezligi $v_k=\omega \cdot h_k$ (ω-jismnig burchak tezligi) va demak

$$m_Z(m_K \bar{v}_K) = m_K v_K h_K = m_K h_K^2 \cdot \omega$$

U holda

$$K_Z = \sum m_K(m_K \bar{v}_K) = \sum m_K h_K^2 \cdot \omega = \left(\sum m_K h_K^2\right)\omega$$

Qavs ichidagi miqdorni aylanish o'qiga nisbatan jismning inersiya momenti ekanligini eslasak quyidagi ifodaga kelamiz:

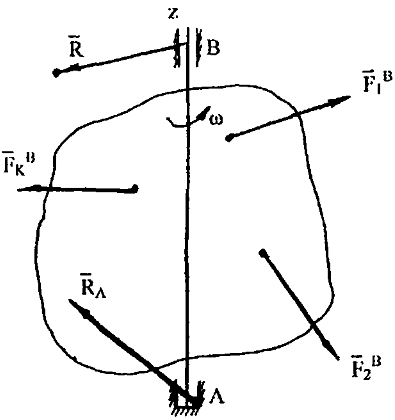
$$K_Z = I_Z \cdot \omega \qquad (12.1)$$

Bu yerda I_Z — qattiq jismning aylanish o'qiga nisbatan inersiya momenti, ω — qattiq jismning burchak tezligi. (12.1) formula qo'zg'almas, masalan, z — o'q atrofida ω burchak tezlik bilan aylanma harakat qilayotgan qattiq jismning shu o'qqa nisbatan **kinetik momentini** ifodalaydi. Kinetik momentning ifodasini kinetik momentning o'zgarishi haqidagi teoremaga qo'llasak u quyidagi ko'rinishni oladi:

$$I_Z \cdot \frac{d\omega}{dt} = M_Z^e = \sum_{K=1}^{n} m_Z\left(\overline{F}_K^e\right)$$

ёки

$$I_Z \cdot \ddot{\varphi} = M_Z^e \qquad (12.2)$$



kelib chiqadi. (12.2) tenglama qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofida *aylanma harakat differensial tenglamasi* deyiladi.

Endi ushbu tenglama yordamida kinetik momentning saqlanish qonunini aylanuvchi sistema holi uchun tekshiramiz. Qo'zg'almas Oz o'q (yoki massalar markazidan o'tuvchi o'q) atrofida aylanuvchi sistemani qaraymiz. U holda formulaga binoan $K_Z=I_Z\omega$ deb yoza olamiz. Agar bu hol uchun

$M_Z^e=\Sigma\, m_Z(\overline{F}_k^e)=0$ bo'lsa, yuqoridagi formulaga ko'ra

$$I_Z \cdot \omega = const$$

bo'ladi. Bundan quyidagi natijalarga kelamiz:

a) agar sistema (absolut) qattiq jism bo'lsa, u uchun I_Z=const va demak, ω=const bo'ladi, ya'ni qattiq jism z o'q atrofida o'zgarmas burchak tezlik bilan aylanadi;

b) agar sistemaning massalar taqsimlanishi o'zgaruvchan bo'lsa (ichki kuchlar tufayli sistemaning ayrim nuqtalari o'qdan uzoqlashsa

I_Z o'zgaradi, oshadi, o'qqa yaqinlashsa I_Z kamayadi), biroq $I_Z \cdot \omega = const$ bo'lganligi sababli I_Z oshsa ω kamayadi va aksincha, toki, $K_Z = I_Z \cdot \omega$ o'zgarmasdan qoladi.

Shunday qilib, ichki kuchlar ta'siri sistema aylanish burchak tezligini o'zgartirishi mumkin, chunki K_Z ning o'zgarmasdan qolishi, umuman, ω ning o'zgarmas bo'lishini ifodalay olmaydi. Sistema kinetik momentining saqlanish qonunini N.E.Jukovskiy skameykasi bilan olib boriladigan tajribada aniq kuzatish mumkin. U sharikli podshipniklarda ishqalanishsiz (ishqalanishi kamaytirilgan) vertikal z o'q atrofida aylanadigan gorizontal platformadan iborat. Agar qo'llariga tosh ushlagan odam platformada turgan bo'lsa, u holda sistema (platforma va odam) ga ta'sir etuvchi tashqi kuchlar: z o'qiga parallel odamning, toshlarning, platformaning og'irlik kuchlari va tekislikning normal reaksiya kuchlari hamda tayanch podshipniklarning bu o'qning kesuvchi reaksiya kuchlari bo'ladi.

Shunday qilib, berilgan sistemaga ta'sir etuvchi barcha tashqi kuchlarning sistemaning aylanish o'qiga nisbatan momentlarining algebraik yig'indisi nolga teng bo'ladi. Demak, bu holda, saqlanish qonuniga muvofiq, aylanayotgan sistemaning ushbu aylanish o'qiga nisbatan kinetik momenti $K_Z = I_Z \cdot \omega$ o'zgarmasdan qolishi kerak. Agar odam ushlab turgan toshlar bilan qo'llarini ko'kragiga yaqinlashtirsa, sistemaning aylanishi tezlashadi va aksincha, u toshlarni aylanish o'qidan uzoqlashtirsa, sekinlashadi. Ammo sistemaning kinetik momenti aylanish o'qiga nisbatan o'zgarmasdan qoladi.

Jismning aylanish o'qiga nisbatan inersiya momentini kamaytirish yo'li bilan uning burchak tezligini mana shunday oshirish usuli baletda, akrobatikada, havoda sakrashda va hokazolarda keng qo'llaniladi. Demak, aylanma harakatdagi jismning harakat o'lchovini uning kinetik momenti ifodalaydi.

13-LEKSIYA

DALAMBER PRINSIPI

Erkin va bog'lanishdagi moddiy nuqta uchun Dalamber prinsipi. Mexanik sistema uchun Dalamber prinsipi. Inersiya kuchlarining bosh vektori va bosh momenti

1. Dalamber prinsipi nima?
2. Erkin va bog'lanishdagi moddiy nuqta uchun Dalamber prinsipi qanday ifodalanadi va ta'riflanadi?
3. Moddiy nuqtaning inersiya kuchi nima?
4. Mexanik sistema uchun Dalamber prinsipi qanday ifodalanadi?
5. Mexanik sistema uchun Dalamber prinsipi qanday ta'riflanadi?
6. Mexanik sistemaning inersiya kuchi nima?
7. Jism inersiya kuchining bosh vektori nima va u qachon noldan farqli?
8. Jism inersiya kuchining bosh momenti qanday aniqlanadi?
9. Jism inersiya kuchining bosh momenti qachon nolga teng bo'ladi?
10. Jism tekis parallel harakatlanganda inersiya kuchi qanday aniqlanadi?

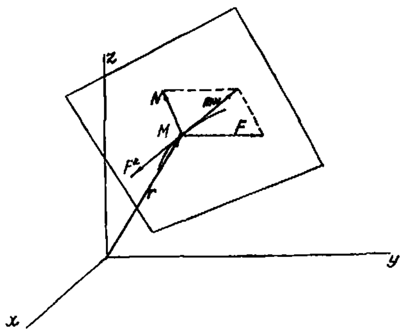
Tayanch so'zlar va iboralar

Prinsip. Dalamber prinsipi. Inersiya kuchi. Qattiq jism inersiya kuchining bosh vektori va bosh momenti.

37-§. Moddiy nuqta uchun Dalamber prinsipi

Prinsiplarni o'rganishni Dalamber prinsipidan boshlaymiz. Dinamika tenglamalarini, shaklan, statika tenglamalari ko'rinishiga keltiruvchi uslubdan iborat prinsip **German-Eylar-Dalamber prinsipi** deb ataladi.

Aytaylik, m massali M moddiy nuqta unga qo'yilgan aktiv kuch $\overline{F}$ va bog'lanish (agar u bog'lanishda bo'lsa) reaksiya kuchi $\overline{N}$ ta'sirida biror $\overline{w}$ tezlanish bilan harakat qilayotgan bo'lsin. Bu moddiy nuqta uchun dinamikaning asosiy tenglamasini yozamiz:



$$m\overline{w} = \overline{F} + \overline{N} \qquad (13.1)$$

Bu tenglamaga quyidagicha ko'rinish berish mumkin:

$$\overline{F} + \overline{N} + (-m\overline{w}) = 0$$

Endi harakatdagi M moddiy nuqtaga moduli shu onda m $\overline{w}$ ga teng bo'lgan va $\overline{w}$ tezlanish yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalgan yana bitta kuch qo'ydik deb tasavvur qilamiz. Modul jihatdan nuqta massasi bilan tezlanishining ko'paytmasiga teng bo'lgan va tezlanishga qarama-qarshi tomonga yo'nalgan bu kuch nuqtaning **inersiya kuchi** deb ataladi. Inersiya kuchini $\overline{F}^i$ harfi bilan belgilasak, uning ta'rifiga asosan:

$$\overline{F}^i = -m\overline{w} \qquad (13.2)$$

tenglikni yoza olamiz. Moddiy nuqtaning inersiya kuchi, ta'rifga ko'ra, nuqtaning tezligini o'zgartirilishiga uning ko'rsatadigan aks ta'siridan iborat bo'lib, aslida tezlatuvchi ta'sir ko'rsatayotgan jismga qo'yilgandir.

Modullari jihatdan teng va bir chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonlarga yo'nalgan $\overline{F}$ + $\overline{N}$ va $\overline{F}^i$ kuchlarning o'zaro muvozanatlanishi bizga ravshan, ya'ni moddiy nuqta kuchlar ta'sirida shu onda muvozanatda bo'ladi. Shunga ko'ra, muvozanat shartini quyidagicha yoza olamiz:

$$\overline{F} + \overline{N} + \overline{F}^{i}=0 \qquad (13.3)$$

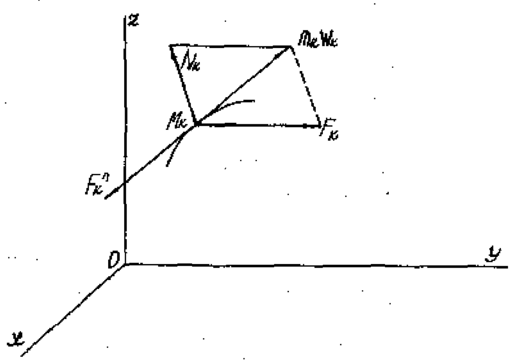
Demak, **moddiy nuqta harakatining har bir paytida unga haqiqatda qo'yilgan aktiv kuchlar hamda bog'lanishlar reaksiyalari nuqtaning inersiya kuchi (nuqtaning o'ziga shartli qo'yilgan) bilan o'zaro muvozanatda** bo'ladi. Bu qoida **nuqta uchun Dalamber prinsipi** deyiladi va (13.3) tenglik esa ana shu prinsipni ifodalaydigan vektor tenglamadir.

Shunday qilib, kuchlar ta'sirida harakatlanayotgan moddiy nuqtaga uning inersiya kuchini ham qo'ysak nuqtaga qo'yilgan kuchlar muvozanatlashadi va nuqta bundan keyin, shartli holda «to'g'ri chiziqli tekis» harakat qiladi. Haqiqatda esa inersiya $\overline{F}^{i}$ harakatdagi M nuqtaga qo'yilmagan, balki mexanikaning uchinchi qonuniga muvofiq, shu nuqtaga tezlanish berayotgan jismlarga qo'yilgan bo'ladi. Inersiya kuchni harakatdagi moddiy nuqtaga qo'yish sun'iy usul bo'lib, u dinamika masalalarini yechishda statikaning bizga ma'lum bo'lgan usullari (muvozanat tenglamalari) ni tatbiq etish imkonini beradi. Bu usulni mexanikada **kinetostatika prinsipi** deb ham yuritiladi.

Bog'lanishlarning noma'lum reaksiyalarini aniqlashda Dalamber prinsipini qo'llash, ayniqsa, qulay va samaralidir. (13.3) vektor tenglamani koordinatalar sistemasining turli o'qlariga proyeksiyalab nuqta uchun Dalamber prinsipini ifodalovchi skalyar ko'rinishdagi muvozanat tenglamalarini hosil qilish mumkin.

38-§. Mexanik sistema uchun Dalamber prinsipi

Kinetostatika metodini n ta moddiy nuqtalardan iborat bo'lgan bog'lanishli mexanik sistemaga tatbiq etamiz. Mexanik sistemaning biror M_k nuqtasini olamiz. Bu nuqtaga qo'yilgan aktiv kuchlarining teng ta'sir etuvchisini $\overline{F}_k$, bog'lanish reaksiya kuchlarining teng ta'sir etuvchisini $\overline{N}_k$ va shu nuqtaning inersiya kuchini $\overline{F}_k^{i}$ bilan belgilaymiz. U holda mexanik sistemaning harakati kuzatilayotgan M_k nuqtasi uchun Dalamber prinsipini ifodalovchi tenglama quyidagicha yoziladi:



$$\overline{F}_k + \overline{N}_k + \overline{F}_k^i = 0 \qquad (13.4)$$

bu yerda

$$\overline{F}_k^i = -m_k \overline{w}_k \quad (k=\overline{1,n}) \qquad (13.5)$$

Bu mulohaza sistemaning har bir nuqtasi uchun takrorlansa, sistema uchun Dalamber prinsipini ifodalovchi quyidagi natijaga kelamiz: **sistema harakatining har qanday paytida unga qo'yilgan aktiv kuchlar, bog'lanish reaksiyalari va *sistemaning har bir nuqtasiga* shartli qo'yilgan shu nuqtalarning inersiya kuchlari o'zaro muvozanatlashadi.**

Bu qoidani tegishli matematik tenglamalar bilan ifodalaymiz. Buning uchun (13.4) tenglikka k ning qiymatlarini 1 dan n gacha o'zgartirib qo'yib, quyidagi munosabatlarni topamiz:

$$\begin{aligned} &F_1+N_2+F_1^i=0 \\ &F_2+N_2+F_2^i=0 \\ &\dots\dots\dots \\ &F_n+N_n+F_n^i=0 \end{aligned} \qquad (13.6)$$

(13.6) tenglamalar mexanik sistema uchun Dalamber prinsipining matematik ko'rinishini ifodalaydi. Mexanik sistema uchun Dalamber prinsipi matematik tomondan sistema harakatining differensial tenglamalariga ekvivalent bo'lgan va yuqorida keltirilgan (13.6) ko'rinishdagi n-ta vektorli tenglamalar sistemasi bilan ifodalanadi.

Demak, dinamikaning asosiy tenglamalarini Dalamber prinsipidan ham keltirib chiqarish mumkin.

Dalamber prinsipiga oid masalalar yechishda ko'pincha (13.6) tenglamalarning natijasi bo'lgan va ichki kuchlar qatnashmaydigan boshqa tenglamalardan foydalaniladi. (13.6) tenglamalar $\overline{F}_k$, $\overline{N}_k$, $\overline{F}_k^i$ kuchlar sistemasi muvozanatining zaruriy va yetarli shartini ifodalaydi. Statikadan ma'lumki, jismga qo'yilgan $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, ... , $\overline{F}_n$, ixtiyoriy joylashgan kuch (tekis va fazoviy) lar sistemaning muvozanatda bo'lishi uchun bu sistemaning bosh vektori R ham, uning ixtiyoriy tanlab olingan markazga nisbatan bosh momenti M_o ham nolga teng bo'lishi, ya'ni:

$$\overline{R}' = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k = 0, \quad \overline{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_O(\overline{F}_k) = 0 \qquad (13.7)$$

bo'lishi kerak edi. Bu yerda 0 —keltirish markazi. Bunda, qotish prinsipiga ko'ra bu qoida faqat qattiq jismlarga ta'sir qiluvchi kuchlar sistemasigagina tegishli bo'lmay, balki istalgan o'zgaruvchi sistema uchun ham o'rinlidir. Ixtiyoriy 0 nuqtani keltirish markazi deb hisoblab va yuqoridagi shartlarni e'tiborga olib, berilgan mexanik sistema nuqtalariga qo'yilgan kuchlar sistemasi uchun Dalamber prinsipiga binoan:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n}\left(\overline{F}_K + \overline{N}_K + \overline{F}_K^i\right) = 0, \\ &\sum_{k=1}^{n}\left[\overline{m}_0(\overline{F}_K) + \overline{m}_0(\overline{N}_K) + \overline{m}_0(\overline{F}_K^i)\right] = 0 \end{aligned} \qquad (13.8)$$

bo'lishi kerak. Ushbu belgilashlarni kiritamiz :

$\Sigma \overline{F}_k = \overline{R}'$ — berilgan kuchlarning bosh vektori;

$\Sigma \overline{N}_k = \overline{N}'$ — bog'lanish reaksiya kuchlarining bosh vektori;

$\Sigma \overline{F}_k^i = \overline{R}'^i$ — sistema nuqtalari inersiya kuchlarining bosh vektori;

$\Sigma \overline{m}_0(\overline{F}_k) = \overline{M}_0$ — berilgan kuchlarning 0 markazga nisbatan bosh momenti;

$\Sigma \overline{m}_0(\overline{N}_k) = \overline{M}_0^N$ — bog'lanish reaksiya kuchlarining 0 markazga nisbatan bosh momenti;

$\Sigma \overline{m}_0(\overline{F}_k^i)=\overline{M}_0^i$ — inersiya kuchlarining 0 markazga nisbatan bosh momenti.

U holda (13.8) tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{gathered}\overline{R}'+\overline{N}'+\overline{R}'^i=0 \\ \overline{M}_0+\overline{M}_0^N+\overline{M}_0^i=0\end{gathered} \qquad (13.9)$$

(13.9) tenglamalarni koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari xuddi statikaning muvozanat tenglamalariga o'xshash tenglamalarni beradi. Haqiqatan ham (13.9) tengliklarni koordinata o'qlariga proyeksiyalab, bog'lanishli mexanik sistema nuqtalariga qo'yilgan kuchlarning oltita muvozanat shartlarini (tenglamalarini) hosil qilamiz:

$$\begin{gathered}R'_x+N'_x+R'^i_x=0, \\ R'_y+N'_y+R'^i_y=0, \\ R'z+N'z+R'^i_z=0, \\ M_x+M_x^N+M_x^i=0, \\ M_y+M_y^N+M_y^i=0, \\ M_z+M_z^N+M_z^i=0.\end{gathered} \qquad (13.10)$$

(13.9) va (13.10) tengliklar, mos ravishda, mexanik sistema uchun Dalamber prinsipini ifodalovchi vektor va koordinata tenglamalaridir. Bu usul, ayniqsa, masalada dinamik bog'lanish reaksiyasini, ya'ni sistemaning harakatidan vujudga kelgan reaksiyalarni topishda qulaydir.

Endi sistemaning har qaysi nuqtasiga qo'yilgan kuchlarning teng ta'sir etuvchilari tashqi va ichki kuchlardan iborat bo'lgan kuchlar deb qaraylik, ya'ni

$$\overline{F}_k+\overline{N}_k+\overline{F}_k^e+\overline{F}_k^i \qquad (13.11)$$

bo'lsin. U holda (13.6) dan (13.9) tenglamalar singari tashqi va inersiya kuchlarining quyidagi muvozanat shartlarini hosil qilishimiz mumkin:

$$\begin{gathered}\overline{R}^e+\overline{R}^i=0 \\ \overline{M}^e_0+\overline{M}^i_0=0\end{gathered} \qquad (13.12)$$

Chunki, sistemaning ichki kuchlari, ularning xususiyatlariga ko'ra:

$$\overline{R}^i = \sum \overline{F}_k^i = 0, \qquad \overline{M}_0^i = \sum \overline{m}_0 (\overline{F}_k^i) = 0$$

shartlarni qanoatlantiradi. (13.12) ni koordinata o'qlariga proyeksiyalab, (13.10) ga o'xshash oltita muvozanat shartlarni hosil qila olamiz.

Dalamber prinsipidan keltirib chiqarilgan (13.12) tenglamalarni qo'llash, bu tenglamalarda ichki kuchlar qatnashmaganligidan, masalalar yechishni osonlashtiradi. Masalalar yechishda (13.9), (13.10) va (13.12) tenglamalardan foydalanish uchun inersiya kuchlarining bosh vektori va bosh momenti ifodalarini hisoblay bilish kerak bo'ladi.

39-§. Inersiya kuchlarining bosh vektori va bosh momenti

Qattiq jism inersiya kuchlarini ixtiyoriy tanlab olingan 0 markazga qo'yilgan bitta $\overline{R}'^i$ kuch va momenti $\overline{M}^i_0$ ga teng bo'lgan bitta juft bilan almashtirish mumkin. Buning uchun kuchni ixtiyoriy markazga keltirish usulidan foydalanamiz. Dinamikada inersiya kuchlarini keltirish markazi sifatida, odatda, jismning massalar markazi C nuqtasi olinadi. $\overline{F}_k = -m_k \overline{w}_k$ bo'lganligidan sistema massalar markazining radius vektorini aniqlovchi tenglikni e'tiborga olgan holda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\overline{R}' = \sum \overline{F}^i_k = -\sum m_k \overline{w}_k = -M \overline{w}_c \qquad (13.13)$$

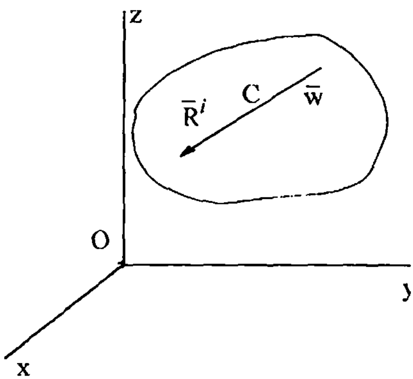
Bu yerda M – jism massasi, $\overline{w}_c$ —jismning massalar markazining tezlanishi. Demak, ixtiyoriy harakat qilayotgan jism inersiya kuchlarining bosh vektori moduli jihatdan jism massasini uning massalar markazi tezlanishiga ko'paytirilganiga teng va bu tezlanishga qarama-qarshi tomonga yo'nalgan bo'ladi.

Inersiya kuchlarining bosh momentini qattiq jism harakatlarining ba'zi xususiy hollarida hisoblaymiz.

1. **Jism ilgarilanma harakat** qiladi. Agar jism ilgarilanma harakatlanayotgan bo'lsa, uning barcha nuqtalarining berilgan paytdagi tezlanishlari o'zaro teng bo'ladi, ya'ni:

$$\overline{w}_1 = \overline{w}_2 = \ldots = \overline{w}_k = \overline{w}_c$$

Demak, jism nuqtalarining inersiya kuchlari o'zaro parallel, bir yo'nalishda bo'ladi. Bu holda inersiya kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchiga keladi va u jism massalar markaziga qo'yilgan bo'ladi. Bu natijaga oson ishonch hosil qilish mumkin. Haqiqatan ham jism ilgarilanma harakat qilayotganidan C atrofida aylanma harakat ro'y bermaydi. Shuning uchun C nuqtadan o'tuvchi o'qqa nisbatan tashqi kuchlarning bosh momenti nolga teng bo'ladi, ya'ni:



$$\overline{M}^{e}_{c}=0.$$

U holda (13.12) tengliklarning ikkinchisidan quyidagini yoza olamiz:

$$\overline{M}^{e}_{c}=-\overline{M}^{e}_{c}=0.$$

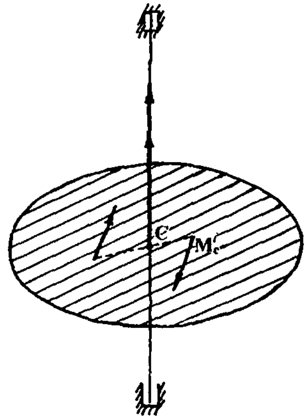
Shuningdek, ana shu tengliklarning birinchisidan esa:

$$\overline{R}^{i}=-\overline{R}^{e}=\sum\overline{F}^{e}_{k}=-M\overline{w}_c=\overline{R}^{i} \qquad (13.13)$$

kelib chiqadi. Bu yerda $\overline{R}^i$ inersiya kuchlarining teng ta'sir etuvchisi.

2. **Jism qo'zg'almas o'q atrofida aylanadi**. Jismning simmetriya tekisligi bo'lib, qo'zg'almas o'q C nuqtadan shu tekislikka

perpendikulyar o‘tsin. Bu holda $\overline{w}_c=0$ boladi, demak, inersiya kuchlarining bosh vektori $\overline{R}^i=-\overline{R}^e=-M\overline{w}_c=0$. Inersiya kuchlarining bosh momentini hisoblaymiz. (13.12) tengliklarning ikkinchisidan quyidagi munosabatni yoza olamiz:



$$\overline{M}_C^i=-\overline{M}_C^e, \text{yoki } M_z^i=-M_z^e,$$

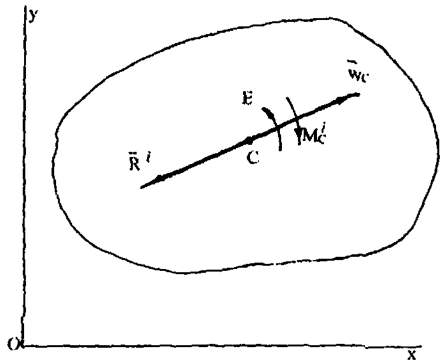
Jismning aylanma harakat differensial tenglamasini ko‘zda tutib quyidagi natijaga kelamiz:

$$M_C^i=-M_C^e=-I_C\cdot E \qquad (13.14)$$

Shunday qilib, bu holda inersiya kuchlar sistemasi momenti M_c^i ga teng va aylanish o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan tekislikda yotuvchi juft kuchga keladi. Formuladagi minus ishora M_c^i moment yo‘nalishini jismning burchak tezlanish yo‘nalishiga qarama-qarshi yo‘nalganligini ko‘rsatadi.

3. **Jism tekis parallel harakat qiladi**. Jismning simmetriya tekisligi bo‘lib va uning hamma nuqtalari bu tekislikka parallel tekisliklarda harakat qilayotgan bo‘lsin . Jismning bunday harakatini uning qutb deb atalgan nuqtasining ilgarilanma harakati bilan bu nuqtadan o‘tuvchi o‘q atrofida aylanma harakatlarga ajratish mumkinligini kursimizning kinematika bo‘limida ko‘rsatganmiz. Biroq qutb sifatida dinamikada jism massalar markazi C nuqta olinadi. U holda

avvalgi hollarni e’tiborga olinsa, inersiya kuchlarining ham bosh vektori, ham bosh momenti bo‘ladi, ya’ni:



$$\overline{R}^{i} = -M\cdot\overline{w}_C, \quad M_C^{i} = -I_C\cdot E \qquad (13.15)$$

Boshqacha aytganda, qaralayotgan holda inersiya kuchlar sistemasi bitta kuch va bitta juft bilan almashiladi. (13.13) va (13.14) formulalarga asosan masalalar yechishda tegishli kattaliklarning miqdorlari hisoblanadi, ularning yo‘nalishlari esa rasmda ko‘rsatiladi, xolos.

14-LEKSIYA

BOG'LANISHDAGI NUQTA YOKI SISTEMANING ERKINMAS HARAKAT DINAMIK REAKSIYALARINI DALAMBER PRINSIPIGA KO'RA ANIQLASH

Nuqta va mexanik sistemaning erkinmas harakat dinamik reaksiyalari. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jismning aylanish o'qiga ko'rsatadigan dinamik bosimi

1. *Nuqtaning erkinmas harakat dinamik reaksiyalari nima?*
2. Mexanik sistema harakati dinamik reaksiyalari qanday aniqlanadi?
3. Dinamik reaksiyalarni aniqlash inersiya kuchlarini aniqlash masalasiga qanday keltiriladi?
4. O'zgarmas burchak tezlik bilan aylanma harakat qilayotgan jismning aylanish o'qiga dinamik reaksiyasi qanday aniqlanadi?
5. Jismning aylanish o'qiga qachon dinamik reaksiyasi bo'lmaydi?
6. Jismning aylanish o'qiga dinamik reaksiyalari bo'lmaslikning qanday zaruriy shartlari bor?

Tayanch so'zlar va iboralar

Dinamik reaksiyalar. Dinamik muvozanat. Dinamik muvozanat tenglamalari. Aylanish o'qiga bosim. Aylanish o'qiga dinamik reaksiyaning bo'lmaslik shartlari.

40-§. Dalamber prinsipiga ko'ra bog'lanishdagi nuqta va sistemaning erkinmas harakat dinamik reaksiyalarini aniqlash

Erkinmas har qanday moddiy nuqta yoki mexanik sistema harakatini o'rganish uchun Dalamber prinsipini qo'llash ularning harakat tenglamalarini tuzishning birdan-bir qulay usulidir. Ayniqsa, moddiy nuqta yoki mexanik sistema harakati ma'lum yoki u noma'lum reaksiyalar qatnashmagan tenglamalar orqali aniqlanishi mumkin bo'lgan hollarda Dalamber prinsipini bog'lanish reaksiyalarini aniqlash uchun qo'llash g'oyat darajada osonlik tug'diradi. Bunday masalalarni yechishda ko'pincha oldindan noma'lum bo'ladigan ichki kuchlar hisobga olinmaydi. Ichki bog'lanishning reaksiyalarini aniqlash zarur bo'lgan hollarda esa mexanik sistemani ushbu ichki kuchlar tashqi kuch bo'ladigan qismlarga ajratib o'rganish kerak bo'ladi.

Bog'lanishli moddiy nuqta harakatida (13.3) (yoki mexanik sistema uchun esa (13.9)) Dalamber prinsipi yordamida aniqlangan reaksiya kuchlari, shu muvozanat tenglamalardan ayonki, bir tomondan qo'yilgan kuchlarning xarakteriga bog'liq bo'lsa, ikkinchidan, inersiya kuchlari (bosh vektori va bosh momenti) orqali, nuqta yoki jism (mexanik sistema nuqtalari) harakat qonuniga, massalar markazi va aylanish o'qining joylashishlariga nihoyatda bog'liq. Shuning uchun (13.3) yoki (13.9) dagi reaksiya kuchlarini ta'sir etayotgan tashqi aktiv kuchlarga bog'liq va massalar markazining hamda aylanish o'qining joylashishlariga va (nuqtaning yoki sistemaning) harakat qonuniga bog'liq reaksiyalarga ajratib aniqlashga to'g'ri keladi. Shuni esda tutish kerakki, ta'sir ko'rsatuvchi tashqi kuchlar ham harakat qonuniga (jumladan, qarshilik kuchlari tezlikka) bog'liq bo'lishi mumkin.

Shunday qilib, bog'lanishli erkinmas jismning harakatida bog'lanish reaksiyalari ikkita: aktiv kuchlarning ta'siri bilan aniqlanuvchi statik reaksiyalar $\overline{N}_0$ dan va massa taqsimlanishi hamda harakat qonuni xarakterlari bilan aniqlanuvchi qo'shimcha dinamik reaksiyalar $\overline{N}_d$ dan iborat bo'ladi. Jumladan, moddiy nuqtaning erkinmas harakatida reaksiya (yoki, umumiy holda, bog'lanishlar reaksiyalarining teng ta'sir etuvchisi) $\overline{N}$ statik $\overline{N}^c$ va qoshimcha dinamik $\overline{N}^d$ reaksiyalardan yig'iladi:

$$\overline{N} = \overline{N}^c + \overline{N}^d \qquad (14.1)$$

Bog'lanish reaksiyasining ushbu ikki reaksiyadan iborat ifodasini harakatdagi nuqta uchun Dalamber prinsipini (13.3) muvozanat tenglamasiga qo'yib harakatdagi nuqta muvozanatining

$$\overline{F} + \overline{N}^c + \overline{N}^d + \overline{F}^i = 0 \qquad (14.2)$$

tenglamasiga kelamiz. Bu (14.2) tenglamadan nuqtaning statik muvozanatini ifodalovchi

$$\overline{F}+\overline{N}^{c}=0 \qquad (14.3)$$

tenglamani ajratib nuqtaning erkinmas harakatidagi qo'shimcha dinamik reaksiyalarni aniqlovchi

$$\overline{N}^{d}+\overline{F}^{i}=0 \qquad (14.4)$$

dan iborat dinamik muvozanat tenglamani hosil qilamiz.

Mexanik sistemaning erkinmas harakatidagi bog'lanishlar reaksiyalarining bosh vektori va bosh momenti ham xuddi nuqtadagi kabi ikkita: statik va dinamik reaksiyalardan yig'iladi

$$\overline{N}'=\overline{N}'^{c}+\overline{N}'^{d}, \qquad \overline{M}_0^{N}=\overline{M}_0^{Nc}+\overline{M}_0^{Nd} \qquad (14.5)$$

Ushbu o'zgarishlarni hisobga olgan holda (13.9) quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\overline{R}'+\overline{N}'^{c}+\overline{N}'^{d}+\overline{R}'^{i}=0, \qquad \overline{M}_0+\overline{M}_0^{Nc}+\overline{M}_0^{Nd}+\overline{M}_0^{i}=0 \qquad (14.6)$$

Harakatdagi bog'lanishli mexanik sistema muvozanatining ushbu ko'rinishdagi Dalamber prinsipi tenglamasidan sistemaning statik muvozanat tenglamalari

$$\overline{R}'+\overline{N}'^{c}=0, \qquad \overline{M}_0+\overline{M}_0^{Nc}=0 \qquad (14.7)$$

ni ajratib harakatdagi erkinmas mexanik sistema uchun Dalamber prinsipidan kelib chiqadigan qo'shimcha dinamik reaksiyalarni aniqlovchi quyidagi

$$\overline{N}'^{d}+\overline{R}'^{i}=0, \qquad \overline{M}_0^{Nd}+\overline{M}_0^{i}=0 \qquad (14.8)$$

muvozanat tenglamalarni hosil qilamiz.

(14.4) va (14.8) tengliklardan ko'ramizki, qo'shimcha dinamik reaksiyalarni aniqlash uchun yozilgan muvozanat tenglamalarda aktiv kuchlar hisobga olinmaydi. Moddiy nuqta uchun (14.4), mexanik sistema uchun (14.8) vektor tenglamalarning har biri, koordinata o'qlariga proyeksiyalar tarzidagi uchtadan skalyar muvozanat tenglamalarga ekvivalent, chunonchi, (14.8) uchun qo'shimcha dinamik reaksiyalarni aniqlovchi oltita skalyar tenglamalarga ega bo'lamiz.

$$\overline{M}_0(\overline{R}_A) = \overline{r}_A \times \overline{N}_A = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 0 & -a \\ N_{Ax} & N_{Ay} & N_{Az} \end{vmatrix}, \quad \overline{M}_0(\overline{R}_B) = \overline{r}_B \times \overline{N}_B = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 0 & b \\ N_{Bx} & N_{By} & N_{Bz} \end{vmatrix}$$

Reaksiya kuchlari bosh momentining proyeksiyalarini yuqoridagi ifodalarni hisoblab aniqlaymiz:

$$M_x^N = a \cdot N_{Ay} - b \cdot N_{By}, \quad M_y^N = -a \cdot N_{Ax} + b \cdot N_{Bx}, \quad M_z^N = 0 \ \left(M_z^{Nd} = 0\right)$$

Reaksiya kuchlarining bosh vektori esa quyidagicha aniqlanadi:

$$N'_X = N_{Ax} + N_{Bx}, \quad N'_y = N_{Ay} + N_{By}, \quad N'_Z = N_{Az}$$

Inersiya kuchlarining bosh vektori (yoki dinamik reaksiya) proyeksiyalarini hisoblash uchun yuqorida keltirib chiqarganimizdek, massalar markazi tezlanishining koordinata o'qlardagi proyeksiyalarini aniqlashimiz kerak. Jismning aylanma harakatida nuqtasining tezlanishi aylanma va markazga intilma tezlanishlardan tashkil topadi, ya'ni:

$$\overline{w} = \overline{w}^{\varepsilon} + \overline{w}^{\omega}, \quad w^{\varepsilon} = OC \cdot \varepsilon, \quad w^{\omega} = OC \cdot \omega^2, \quad OC = \sqrt{x_C^2 + y_C^2}$$

U holda

$$\ddot{x}_C = w_X^{\varepsilon} + w_X^{\omega} = -OC \cdot \varepsilon \frac{YC}{OC} - OC \cdot \omega^2 \frac{x_C}{OC} = -Y_C \cdot \varepsilon - x_C \cdot \omega^2$$

$$\ddot{y}_C = w_Y^{\varepsilon} + w_Y^{\omega} = -OC \cdot \varepsilon \frac{XC}{OC} - OC \cdot \omega^2 \frac{y_C}{OC} = x_C \varepsilon - y_C \cdot \omega^2$$

$$\ddot{z}_C = 0$$

Demak,

$$N_X^{\prime d} = N_{Ax}^d + N_{Bx}^d = -m y_C \varepsilon - m x_C \omega^2,$$
$$N_Y^{\prime d} = N_{Ay}^d + N_{By}^d = m x_C \varepsilon - m y_C \omega^2,$$
$$N_Z^{\prime d} = 0$$

Jism inersiya kuchlari bosh momentini uning C markazga nisbatan bosh momenti proyeksiyalari ifodasidan hisoblaymiz. Bu formulalarda burchak tezlik va burchak tezlanishning qo'zg'aluvchi koordinata sistemasi o'qlaridagi proyeksiyalari qatnashgan. Bizning holimizda $\varepsilon_x=\varepsilon_y=0$, $\omega_x=\omega_y=0$, $\varepsilon_z=\varepsilon$, $\omega_z=\omega$.

Demak,

$$M^i_x=I_{xz}\varepsilon-I_{yz}\omega^2,\ M^i_y=I_{yz}\varepsilon-I_{xz}\omega^2,\ M^i_z=-I_z\varepsilon.$$

Aniqlangan kattaliklarni o'rniga qo'yib, dinamik reaksiyalar uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} &-my_C\varepsilon-mx_C\omega^2=N^d_{Ax}+N^d_{Bx},\\ &mx_C\varepsilon-mx_C\omega^2=N^d_{Ay}+N^d_{By},\\ &-I_{xz}\varepsilon+I_{yz}\omega^2=aN^d_{Ay}-bN^d_{By},\\ &I_{yz}\varepsilon+I_{xz}\omega^2=-aN^d_{Ax}+bN^d_{Bx}. \end{aligned} \qquad (14.9)$$

41-§ Qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jismning aylanish o'qiga dinamik bosimi

Ushbu tenglamalardan A va B bog'lanishlarning dinamik reaksiyalarini quyidagicha aniqlaymiz:

$$N^d{}_A=\sqrt{(N^d_{Ax})^2+(N^d_{Ay})^2},\ N^d{}_B=\sqrt{(N^d_{Bx})^2+(N^d_{By})^2}$$

Bu yerda

$$N^d{}_{Ax}=-\frac{1}{a+b}\{(mby_c-I_{zy})\varepsilon+(mbx_c-I_{xz})\omega^2\},$$
$$N^d{}_{Ay}=\frac{1}{a+b}\{(mbx_c-I_{xz})\varepsilon-(mby_c-I_{yz})\omega^2\},$$
$$N^d{}_{Bx}=-\frac{1}{a+b}\{(may_c-I_{yz})\varepsilon+(max_c+I_{xz})\omega^2\},$$
$$N^d{}_{Bx}=\frac{1}{a+b}\{(max_c+I_{xz})\varepsilon-(may_c+I_{yz})\omega^2\}$$

ga teng. Shunday qilib, qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatdagi jism uchun qo'shimcha dinamik reaksiyalar

$$N^d_A = \frac{1}{a+b}\sqrt{\left[(mby_c - I_{yz})^2 + (mbx_c - I_{xz})^2\right](\varepsilon^2 + \omega^4)}, \quad (14.10)$$

$$N^d_B = \frac{1}{a+b}\sqrt{\left[(may_c - I_{yz})^2 + (max_c - I_{xz})^2\right](\varepsilon^2 + \omega^4)}, \quad (14.11)$$

ga teng.

1. Jismning aylanish o'qi inersiya bosh o'qi bo'lmasin va og'irlik markazi shu o'qda yotsin, ya'ni $x_c = y_c = 0$, $I_{xz} \neq 0$. U holda

$$N^d_A = N^d_B = \frac{1}{a+b}\sqrt{(I^2_{yz} + I^2_{xz})(\varepsilon^2 + \omega^4)}$$

Ushbu holda bog'lanishlarning dinamik reaksiyalari miqdor jihatdan o'zaro teng, lekin yo'nalish jihatdan esa qarama-qarshi ekan.

2. Jism ω=const burchak tezlik bilan tekis aylanma harakatlansin. U holda $\varepsilon = 0$. (Og'irlik markazi ushbu holda ham aylanish o'qida bo'lsin). Hisoblashlardan ko'ramizki bog'lanishlarning dinamik reaksiyalari

$$N^d_A = N^d_B = \frac{1}{a+b}\sqrt{(I^2_{yz} + I^2_{xz})}$$

Ushbu holda ham miqdor jihatdan teng, yo'nalishi esa qarama-qarshi kuchlarga keltiriladi.

3. Jism inersiya bosh o'qida aylansin. A koordinata boshi bo'lsin. $I_{xz} = I_{yz} = 0$, $a=0$. U holda, $N^d_b = 0$, ya'ni dinamik reaksiya bo'lmaydi. A dan o'tgan inersiya bosh o'qi erkin aylanish o'qi deyiladi.

4. Agar $x_c=0$, $y_c=0$, $I_{yz}=0$, $I_{xz}=0$ bo'lsa, aylanish qonuni va demak ε hamda ω qanday bo'lishidan qat'i nazar (14.9), (14.10) ga ko'ra $N^d_A=0$, $N^d_B=0$ bo'ladi. Demak, aylanish o'qi inersiya markaziy bosh o'qi bilan ustma-ust bo'lsa, dinamik reaksiyalar hosil bo'lmas ekan. Ushbu holni vujudga keltiradigan zaruriy shartlarni aniqlaymiz. (14.8) da barcha inersiya kuchlarni nol deb hisoblab

$$m\ y_c\ \varepsilon + m\ x_c\ \omega^2 = 0,\quad m\ x_c\ \varepsilon - m\ y_c\ \omega^2 = 0 \qquad (14.12)$$
$$I_{xz}\ \varepsilon - I_{yz}\ \omega = 0,\quad I_{yz}\ \varepsilon + I_{xz}\ \omega^2 = 0 \qquad (14.13)$$

shartlarga kelamiz. Bulardan: $x_c=0$, $y_c=0$, $I_{xy}=0$, $I_{yz}=0$

Demak, qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatlanayotgan jism tayanch nuqtalarga dinamik bosim ko'rsatmasligi uchun uning aylanish o'qi uning inersiya bosh markaziy o'qi bo'lishi zarur va yetarli. Ushbu holda aylanayotgan jism muvozanatlashgan, aylanish o'qi erkin bo'ladi.

z — koordinata o'qi jismning aylanish o'qi bilan ustama-ust joylashgan bo'lsin. Jismning aylanma harakatiga A va B nuqtalardagi podshipniklardan iborat bog'lanishlar ta'sir qiladi. Bog'lanishlarni A va B lardagi N_A va N_B reaksiyalari (ishqalanish hisobga olinmaydi) bilan almashtirib jismni erkin holatga keltiramiz.

Jismning og'irlik markazi orqali aylanish o'qiga perpendikulyar o'tgan tekislikni shu o'q bilan kesishgan nuqtasida koordinatalar boshi qo'yilgan ikkita: qo'zg'almas va qo'zg'aluvchi sistemalar olamiz. Bular uchun aylanish o'qi umumiy va A, B larning koordinatalari A (0,0,-a), B (0,0,b). Qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasi jismga biriktirilgan va u jism bilan z o'qi atrofida aylanadi. Qo'zg'aluvchi sistemada jismning og'irlik markazi koordinatalari x_c, y_c ($Z_C=0$) va markazdan qochma I_{XZ} va I_{YZ} inersiya momentlari o'zgarmas miqdorlardir.

15-LEKSIYA

MUMKIN BO'LGAN KO'CHISH

Bog'lanishlarning tenglamalari va klassifikatsiyasi. Mexanik sistemaning mumkin bo'lgan ko'chishlari. Ideal bog'lanishlar. Erkinlik darajasi va umumlashgan koordinatalar

1. Dinamikada bog'lanishlar qanday ta'riflanadi?
2. Bog'lanish tenglamalari nima?
3. Qanday bog'lanishlarga statsionar va qanday bog'lanishlarga nostatsionar bog'lanishlar deyiladi?
4. Qanday bog'lanishlar ikki tomonlama va qandaylari bir tomonlama bog'lanishlar deyiladi?
5. Qanday bog'lanishlar geometrik va qanday bog'lanishlar kinematik bog'lanish deyiladi?
6. Qanday bog'lanishlar golonom va qandaylari nogolonom bog'lanishlar deyiladi?
7. Qanday ko'chishga mumkin bo'lgan ko'chish deyiladi?
8. Mumkin bo'lgan ko'chishda qanday shartlar bajariladi?
9. Qanday bog'lanishlarga ideal bog'lanish deyiladi?
10. Erkinlik darajasi nima?
11. Umumlashgan koordinatalar qanday ta'riflanadi va belgilanadi?

Tayanch so'zlar va iboralar

Bog'lanish. Bog'lanish tenglamalari. Statsionar, nostatsionar bog'lanishlar. Bir tomonlama va ikki tomonlama bog'lanishlar. Geometrik bog'lanish. Golonom, nogolonom bog'lanishlar. Mumkin bo'lgan ko'chish. Ideal bog'lanish. Erkinlik darajasi. Umumlashgan koordinatalar.

42-§. Bog'lanishlar, ularning tenglamalari va klassifikatsiyasi

Koordinatalari va tezliklari qiymatlari ixtiyoriy o'zgarmaydigan moddiy nuqtalarning mexanik sistemasiga *erkinmas mexanik sistema* deyiladi. Erkinmas sistemaning ayrim nuqtalarining koordinata va tezliklariga bevosita, qolganlarinikiga esa bilvosita chek qo'yilgan bo'ladi. Mexanik sistema nuqtalarining harakatiga qo'yiladigan bunday cheklarni biz *bog'lanishlar* deb ataymiz. Shunday qilib, sistemaga qo'yilgan bog'lanishlar deb uning ba'zi nuqtalari koordinata va tezliklarining o'zgarishini, harakat tenglamalari va ta'sir etayotgan kuchlardan qat'i nazar, cheklovchi har qanday shartlarga aytiladi.

Mexanik sistema nuqtalarining bu kabi kinematik xarakteristikalarini cheklovchi bunday shartlar (ya'ni bog'lanishlar) matematik ifodalar yordamida tavsiflanadi va bunday ifodalarga **bog'lanish tenglamalari** deyiladi. Bog'lanish tenglamalari, umumiy holda, sistema nuqtalarining koordinatalari (x_k, y_k, z_k; $k=\overline{1,n}$), vaqt bo'yicha ularning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalari (tezliklari va tezlanishlari) o'rtasidagi munosabatlar (differensial tenglamalar) bilan ifodalanadi.

Qo'yilgan bog'lanishlar erkinmas sistema nuqtalarining aktiv kuchlar ta'siridagi harakatini shu sistema nuqtalarining xuddi shu kuchlar ta'siridagi erkin harakatiga nisbatan ma'lum darajada chcklaydi. Bunday cheklashlardan texnikaning turli sohalarida, jumladan, amaliyot uchun zarur bo'lgan biror yo'nalish bo'yicha harakatni ta'minlash maqsadida foydalaniladi. Chunonchi, dvigatel silindri ichida porshen harakati. Bunda silindr ayni shu bog'lanish vazifasini o'taydi va bizga porshen harakatini ma'lum yo'nalishda yuz berishini ta'minlaydi. Shunday qilib, bog'lanishlar qo'yilgan sistema nuqtalarining erkinmas harakati ularga ta'sir etuvchi aktiv kuchlar va boshlang'ich shartlargagina bog'liq bo'lib qolmasdan, balki ayni shu qo'yilgan bog'lanishlarga ham bog'liqdir. Boshlang'ich shartlar esa bog'lanishlar tufayli, shu bog'lanish tenglamalari bilan aniqlangan munosabatda o'zaro bir-biriga bog'liq bo'ladi.

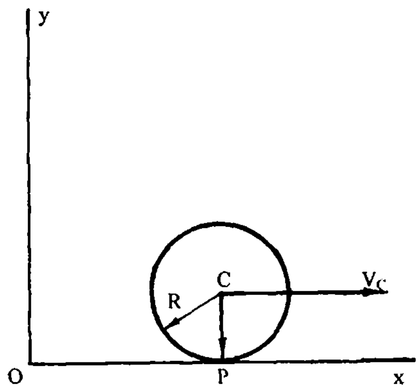
Umuman bog'lanish turiga qarab sistema nuqtalarining erkinmas harakati turlicha bo'ladi. Biz quyida bog'lanishlarning amalda ko'p uchraydigan turlari bilan tanishamiz.

Agar sistemaga qo'yilgan bog'lanishlar sistema nuqtalarining faqat koordinatalarigagina chek qo'ysa, u *geometrik bog'lanishlar* deyiladi. Masalan, moddiy nuqta biror sirt bo'ylab ajralmasdan harakatlanayotganida bu nuqtaning koordinatalari shu sirt (tenglamasi) bilan cheklangan (bog'langan) bo'ladi, ya'ni

$$f(x,y,z)=0 \qquad (15.1)$$

Ushbu (15.1) sirt tenglamasi nuqta koordinatalarining erkin o'zgarishiga qo'yilgan chek bo'lganligi uchun u bog'lanish tenglamasi bo'ladi.

Mexanik sistema nuqtalarining koordinatalaridan tashqari ularning tezliklarini ham cheklovchi bog'lanishlarga *kinematik* yoki *differensial bog'lanishlar* deyiladi. Jumladan, gorizontal tekislikda g'ildirak sirpanmasdan tekis parallel harakatlanganida uning tekislik bilan tegishgan nuqtasining tezligi nolga teng bo'lishi kabi chek qo'yiladi, chunki vaqtning har bir momentida tekislik bilan g'ildirakning tegishgan nuqtasi tezliklarning oniy markazi bo'lib, uning tezligi nolga teng:



$$\bar{V}_p = \bar{V}_c + \bar{\omega} \times \bar{r} = 0$$

Agar qutb — massalar markazi tezligi $\bar{v}_c$ ni, qutb atrofida aylanma harakat burchak tezligi ω ni, tezliklar oniy markazining qutbga nisbatan radius vektori $\bar{r}$ ni, mos ravishda, $\bar{v}_c$ $(\dot{x}_c, 0, 0)$, ω $(0, 0, \dot{\varphi})$, $\bar{r}(0, R, 0)$ ga teng ekanligini e'tiborga olsak, bog'lanishni ifodalovchi yuqoridagi vektor tenglama quyidagi skalyar tenglamalar ko'rinishiga keladi:

$$\dot{x}_c - R\dot{\varphi} = 0\,, \quad \dot{y}_c = 0 \qquad (15.2)$$

Kinematik (differensial) bog'lanishning ushbu tenglamalari integrallanadi:

$$x_c - R\varphi = 0,\ y_c = const$$

Ya'ni dumalashda sirpanishning yo'qligini va g'ildirak markazidan tekislikkacha bo'lgan R masofaning saqlanishini ifodalovchi (bog'lanish tenglamalar) shartlar hosil bo'ladi. Hosil bo'lgan bog'lanishning ushbu tenglamasidan ko'ramizki bu kinematik bog'lanish bir vaqtda geometrik bog'lanish ham ekan.

Geometrik (15.1) va tenglamalari integrallanadigan differensial (15.2) bog'lanishlar *golonom bog'lanishlar* deyiladi. Shunday qilib, golonom bog'lanishlar sistema nuqtalarining koordinatalariga (yoki integrallanishi mumkin bo'lganidan tezligiga ham) chek qo'yadi. Ular sistema nuqtalarining koordinatalari o'rtasidagi (15.1) kabi munosabatlar yoki (15.2) kabi integrallanuvchi differensial tenglamalar bilan ifodalanadi.

Integrallanmaydigan differensial tenglamalar bilan ifodalanuvchi bog'lanishlar *nogolonom bog'lanishlar* deyiladi. Nogolonom bog'lanishlar holida sistema nuqtalarining koordinatalari o'rtasida chekli munosabatlar mavjud bo'lmaydi.

Tenglamalarida oshkor ravishda vaqt qatnashmagan bog'lanishlarga, masalan, (15.1), (15.2) *statsionar bog'lanishlar* deyiladi, aks holda, ya'ni bog'lanish tenglamalarida vaqt oshkor ravishda qatnashsa, *nostatsionar bog'lanishlar* deyiladi. Demak, statsionar bog'lanish vaqt bo'yicha o'zgarmaydi va aksincha, nostatsionar bog'lanish vaqt o'tishi bilan o'zgaradi.

Bog'lanish tenglamasi tenglik bilan ifodalansa, bunday bog'lanish *bo'shatmaydigan* yoki *ikkitomonlama bog'lanish* deb ataladi, bunga yuqoridagi bog'lanishlar (nuqta yoki g'ildirak sirtdan ajralmasdan harakatlangan holda) misol bo'la oladi. Bir uchi sferik sharnir yordamida bir nuqtaga mahkamlangan sterjenning ikkinchi uchiga biriktirilgan og'ir sharchaning sferik tebrangich kabi harakati bo'shatmaydigan bog'lanishga yaxshi misol bo'ladi. Bunda sharcha — moddiy nuqta harakati sterjendan iborat bo'shatmaydigan bog'lanish bilan cheklangan, ya'ni sharcha radiusi sterjen uzunligi l ga teng sfera sirtidan tashqarida yoki ichkarida bo'la olmaydi. Sharchaning koordinatalari bog'lanish tenglamasi orqali bog'langan:

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2$$

Tenglamasi tengsizlik bilan ifodalanadigan bog'lanish *bo'shatadigan* yoki *birtomonlama bog'lanish* deyiladi. Masalan, yuqoridagi og'ir sharcha sterjen orqali emas, arqon (ip) yordamida bir markazga mahkamlangan bo'lsin. Bunday bog'lanishdagi og'ir sharcha (sferik tebrangich) ning koordinatalari o'rtasidagi munosabat tengsizlik bilan ifodalanadi:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq l^2$$

Chunki endi bog'lanish sharchani l radiusli sfera sirtidagina emas, balki bog'lanish (ip) dan bo'shab, sferaning ichki sohasida ham bo'lishiga imkon beradi. Tengsizlik belgisi bog'lanish qaysi tomonga jismni bo'shatishini bildiradi.

Agar ipning uzunligi biror v tezlik bilan o'zgarib borsa, bog'lanish tenglamasi

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq (l_0 \pm vt)^2$$

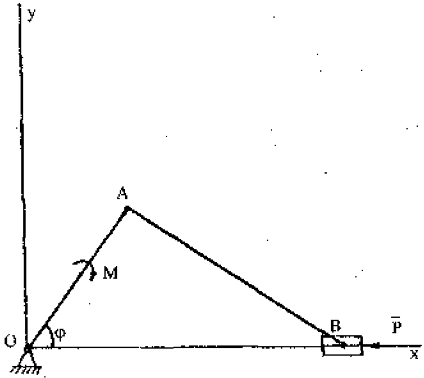
ko'rinishga keladi, bog'lanish esa tenglamaga ko'ra nostatsionar bog'lanishga aylanadi.

Golonom, statsionar, bo'shatmaydigan bog'lanishga yana bir misol tariqasida krivoship-shatun mexanizmini keltiramiz. Bu misolda bog'lanishlar 0 nuqtadagi qo'zg'almas silindrsimon sharnir, B nuqtadagi polzun va krivoship bilan shatunni o'zaro birlashtiruvchi A dagi silindrsimon sharnirlardan iborat. Mexanizmni x0y koordinata sistemasiga nisbatan o'rgansak, bog'lanishlarning tenglamalari quyidagicha ifodalanadi:

$$x_0 = 0,\ y_0 = 0,\ y_B = 0,\ x^2_A + y^2_A = r^2,\ (x_A - x_B)^2 + y^2_A = l^2 \qquad (15.3)$$

Agar mexanizmni uch o'lchovli 0xyz Dekart koordinatalar sistemasiga nisbatan o'rgansak (15.3) tenglamalarga yana uchta tenglama qo'shiladi:

$$z_0 = 0,\ z_A = 0,\ z_B = 0$$



Shuni esda tutish joizki, golonom bog'lanishlar statsionar va *nostatsionar bo'lishi mumkin*. Agar qaralayotgan mexanik sistema n-ta nuqtalardan iborat bo'lsa va unga m-ta bog'lanish qo'yilsa, statsionar (golonom) bog'lanish tenglamasining umumiy ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$f_k(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0, \ (k=\overline{1,m}) \qquad (15.4)$$

Shuningdek, nostatsionar (golonom) bog'lanish tenglamasining umumiy ko'rinishini:

$$f_k(t; x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0, \ (k=\overline{1,m}) \qquad (15.5)$$

kabi yoza olamiz. Agar (15.4) va (15.5) tenglamalarda sistema nuqtalarining tezliklari ham oshkor qatnashsa, ular nogolonom bog'lanish tenglamasining umumiy ko'rinishini ifodalaydi.

Bo'shatmaydigan yoki ikkitomonlama bog'lanish tenglamasi umumiy holda quyidagicha ifodalanadi:

$$f_k(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0, \ (k=\overline{1,m}) \qquad (15.6)$$

Bunda bog'lanish sistema nuqtalarining biror yo'nalishdagi harakatini cheklash bilan bir vaqtda unga teskari yo'nalishdagi harakatiga ham chek qo'yadi, ya'ni sistemaning nuqtalari bog'lanishni tashlab keta olmaydi.

Bo'shatadigan yoki birtomonlama bog'lanish bunga qarama-qarshi xarakterga ega va uning tenglamasi, umumiy holda, quyidagicha ifodalanadi:

$$f_k(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n) \lesseqgtr 0, \quad (k=\overline{1,m}) \qquad (15.7)$$

Bulardan ko'ramizki, bog'lanish ixtiyoridagi erkinmas sistema (bog'lanishli sistema) istalgan yo'nalishda harakat qila olmaydi. Uning harakati bog'lanishlarning turiga va xarakteriga bog'liq bo'ladi. Agar sistema nuqtalariga bog'lanishlar qo'yilmagan bo'lsa, u holda 3n ta koordinatalar o'zaro bog'liqmas bo'lib, ularning qiymatlari faqat ta'sir etuvchi tashqi kuchlargagina bog'liq bo'ladi. Bundan ko'rinadiki, sistema nuqtalariga bog'lanishlar qo'yilganda, sistema nuqtalarini bog'lanishni qanoatlantirgan holda harakatlantirishga majbur etadigan qo'shimcha kuchlar hosil bo'ladi. Bu kuchlar bog'lanish reaksiya kuchlarini ifodalaydi.

43-§. Mumkin bo'lgan ko'chish. Sistemaning erkinlik darajasi. Umumlashgan koordinatlar

Mexanik sistema nuqtalarining unga qo'yilgan bog'lanishlarni qanoatlantiruvchi har qanday cheksiz kichik (hayoliy) ko'chishlari mexanik sistemaning mumkin bo'lgan ko'chishi yoki virtual ko'chishi deyiladi.

Mumkin bo'lgan ko'chish tushunchasi analitik mexanikadagi markaziy tushunchalardan biri hisoblanadi. Mumkin bo'lgan ko'chishning ta'rifga binoan sistemaning mumkin bo'lgan ko'chishida unga qo'yilgan bog'lanishlar buzilmaydi, ya'ni mumkin bo'lgan ko'chish bog'lanishlar bilan muvofiq ravishda bajariladi. Boshqacha aytganda, erkinmas sistemaning yoki moddiy nuqtaning mumkin bo'lgan ko'chishi uning holatini belgilovchi sof geometrik usul bo'lib, vaqtga bog'liq emas. Mexanik sistema yoki nuqtaning mumkin bo'lgan ko'chishi qo'yilgan kuchlarga ham bog'liq emas.

Buning aksicha, bog'lanishdagi sistema nuqtalarining (yoki nuqtaning) bog'lanishga binoan haqiqiy elementlar ko'chishi sistemaga qo'yilgan kuchlarning ta'sirida va vaqtning chekli dt oralig'ida birdan-bir ma'lum yo'nalishida sodir bo'ladi. Nuqtaning koordinatlari va demak, radius vektori r t vaqtning funksiyasi ekanligi e'tiborga olinsa, dt vaqt oralig'ida nuqtaning cheksiz kichik haqiqiy ko'chish t argumentning dt ga o'zgarishi tufayli r funksiyaning cheksiz kichik dr o'zgarishi ekanligini isbotlaydi. Shu boisdan, bundan buyon, nuqta (sistema nuqtalari)ning mumkin bo'lgan ko'chishi variatsiya-δ, haqiqiy elementlar ko'chishini esa differensial-d belgisi orqali bir-biridan farq qilamiz. Agar r nuqtaning radius vektori bo'lsa, u holda δr nuqtaning mumkin bo'lgan ko'chishi, δr nuqtaning haqiqiy elementlar ko'chishi bo'ladi. Nuqtaning δr va dr ko'chishlari orasidagi asosiy farq shundan iboratki, nuqtaning haqiqiy ko'chishi berilgan joydan biror dt vaqt oralig'ida sodir bo'ladigan birdan-bir ko'chishi bo'lsa, mumkin bo'lgan ko'chishi berilgan joydan cheksiz ko'p xil ko'chishi bo'lib, haqiqatda esa nuqta bulardan birortasini ham o'tmaydi. Mumkin bo'lgan ko'chish miqdor jihatdan birinchi tartibli cheksiz kichik qiymat deb hisoblanadi va yuqori tartibli cheksiz kichik qiymatlari e'tiborga olinmaydi. Chunonchi, mexanik sistema nuqtalari (yoki moddiy nuqta) ning mumkin bo'lgan ko'chishida ularning egri chiziqli cheksiz kichik ko'chishlari to'g'ri chiziqli cheksiz kichik ko'chishlari bilan almashtirib qaraladi va shu boisdan egri chiziqli yoy koordinatasiga vektorli belgi qo'yiladi va egri chiziqli cheksiz kichik ko'chish δS kabi belgilanadi.

Mexanik sistemaning o'zaro bog'liqmas ko'chishlari soni ushbu sistemaning erkinlik darajasi soni deyladi.

Sirtdan iborat bog'lanishdagi nuqtaning erkinlik darajasi ikkiga teng. Binobarin, xOy tekislikda joylashgan nuqtaning har qanday o'rni o'zaro mustaqil ikkita (masalan, x va y) koordinatalar bilan aniqlanishi mumkin. Ma'lumki, erkin nuqta (demak, u fazoda) uchta erkinlik darajasiga ega, bular o'zaro perpendikulyar (mustaqil) uchta yo'nalish bo'yicha fazodagi ko'chishlardir. Moddiy nuqtaning fazodagi har qanday o'rni uchta o'zaro mustaqil, masalan, x,y,z koordinatalar bilan aniqlanadi. Demak, erkinlik darajasi (mustaqil ko'chishlar) soni va fazodagi yoki tekislikdagi o'rnini aniqlovchi o'zaro mustaqil koordinatalar soni bir-biriga teng.

Golonom, statsionar, bo'shatmaydigan bog'lanishlar qo'yilgan har qanday mexanik sistema uchun bu natija to'g'ri bo'ladi. Shunday qilib, bo'shatmaydigan geometrik bog'lanish qo'yilgan mexanik sistemaning o'rnini aniqlovchi mustaqil koordinatalar soni uning erkinlik darajasi soniga teng. Shuning uchun bunday sistemaning erkinlik darajasini o'zaro mustaqil mumkin bo'lgan ko'chishlar soni yoki o'zaro mustaqil koordinatalar soni bo'yicha aniqlash mumkin.

Har qanday mexanik sistemaning istalgan paytdagi o'rni uning har bir nuqtasining koordinatalari bilan aniqlanadi. Agar u n ta nuqtadan tashkil topgan bo'lsa, uning o'rni, ya'ni hamma n ta nuqtalarining o'rni 3n ta Dekart koordinatalar bilan aniqlanadi. Bordiyu mexanik sistemaga h ta bog'lanish qo'yilsa, ular h da tenglamalarni qanoatlantiradi va endi ular o'zaro bog'langan. Shubhasiz, sistemaning o'rnini aniqlovchi o'zaro mustaqil koordinatalar soni endi

$$s = 3n - h$$

ga teng. Binobarin, mexanik sistemaning o'rnini aniqlash uchun mustaqil koordinatalar sifatida 3n ta Dekart koordinatalardan s-tasini tanlash mumkin. Bunda qolgan koordinatalar h-ta bog'lanish tenglamalari orqali aniqlanadi. Ammo mustaqil koordinatalarni bunday tanlash ko'pincha murakkab ifodalarga olib keladi va qiyinchiliklar tug'diradi. Shuning uchun mexanik sistemaning har qanday o'rnini bir qiymatli aniqlovchi mustaqil kattaliklardan iborat bo'lgan umumlashgan koordinatalar bilan ish ko'rish qulay bo'ladi.

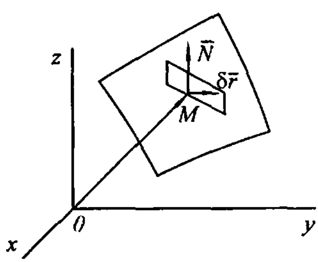
Biz yuqorida ba'zi masalalarni o'rganishda, hali ta'rif bermasdan, umumlashgan koordinatalardan foydalandik. Jumladan, matematik tebrangich (mayatnik) vaziyatini uning vertikaldan og'ish burchagi φ, bir nuqtasi qo'zg'almas qattiq jismning sferik harakatini Eylerning 3 ta burchak (ψ, θ, φ) lari, tekis parallel harakatlanayotgan qattiq jismning holatini esa uning qutbining ikkita koordinalari (x_c, y_c) va shu qutb atrofida jismning aylanma harakat burchak koordinatasi φ orqali aniqlanar edi. Shunday qilib, mexanik sistemaning o'rnini bir qiymatli ravishda aniqlovchi va soni sistemaning erkinlik darajasi soniga teng bo'lgan o'zaro mustaqil, ba'zan odatdagidan o'zgacha o'lchamli kattaliklarga *umumlashgan koordinatalar deyiladi.*

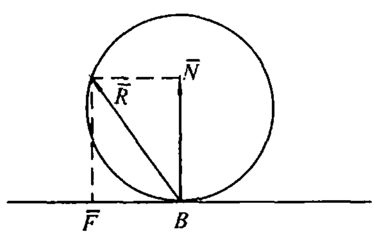
Umumlashgan koordinatalarni q harfi orqali belgilash qabul qilingan. Binobarin, erkinlik darajasi s ga teng mexanik sistema holatini $q_1, q_2, \ldots\ldots, q_S$ ta umumlashgan koordinatalar bir qiymatli aniqlaydi. Mexanik sistemaning har bir nuqtasi o'zining radius vektori (yoki Dekart koordinatalari) bilan aniqlanadi, demak bu kattaliklar ham umumlashgan koordinatalarning bir qiymatli funksiyasi bo'ladi:

$$x_k = x_k(q_1, q_2, \ldots, q_s, t)$$
$$y_k = y_k(q_1, q_2, \ldots, q_s, t) \qquad (k = \overline{1,n}) \quad (15.8)$$
$$z_k = z_k(q_1, q_2, \ldots, q_s, t)$$

Agar bog'lanishlar statsionar bo'lsa, umumlashgan koordinatalarni tegishlicha tanlash yo'li bilan (15.8) dagi vaqtning oshkor qatnashishidan xalos bo'lish mumkin, ya'ni statsionar bog'lanishlar holida Dekart koordinatalar faqat umumlashgan koordinatalarning bir qiymatli funksiyasi ko'rinishida ifodalanadi. Mexanikaning masalalarini o'rganishda umumlashgan koordinatalardan foydalanish bog'lanish tenglamalarini hisobga olishdan xalos qiladi. Umumlashgan koordinatalarda bog'lanish tenglamalari ayniyatga aylanadi.

Nihoyat shuni takidlaymizki, golonomli sistemaning holati s-ta umumlashgan koordinatalar orqali aniqlansa, sistemaning o'zaro bog'liqmas (mustaqil) mumkin bo'lgan ko'chishlarining soni xuddi shu koordinatalar soniga teng. Jumladan, uch qismdan iborat krivoship-shatun mexanizmini bog'lanishlar yoq holda fazodagi ekrin krivoship, shatun, polzunlarning uchtadan koordinatalari (x_{kr}, y_{kr}, z_{kr}; x_{sh}, y_{sh}, z_{sh}; x_{pl}, y_{pl}, z_{pl}) jami 9ta koordinatalar orqali o'rganilsa, yuqorida qayd etilgan bog'lanishlar holida ushbu 9ta erkin o'zgaruvchilar o'zaro bog'lanishlarning 8 ta tenglamalari bilan ifodalanadi va natijada bitta mustaqil koordinata qoladi, erkinlik darajasi ham birga teng bo'ladi.





44-§. Ideal bog'lanishlar

Erkinmas mexanik sistema n-ta nuqtadan iborat bo'lsin. Bog'lanish reaksiya kuchlarini sistema nuqtalariga qo'yilgan teng ta'sir etuvchilarini $N_1, N_2, \dots, N_n$, sistema nuqtalarini mumkin bo'lgan ko'chishlarini esa $\delta r_1, \delta r_2, \dots, \delta r_n$ orqali belgilaymiz. Mexanik sistemaning biror ixtiyoriy mumkin bo'lgan ko'chishida N_k reaksiya kuchining elementar ishi

$$\delta A_k^N = N_k \delta r_k \cos(\widehat{\overline{N_k}, \overline{\delta r_k}}) \qquad (k = \overline{1,n})$$

ga teng bo'ladi. Mexanik sistema nuqtalarining har qanday mumkin bo'lgan ko'chishida barcha reaksiya kuchlarining ishi esa quyidagicha aniqlanadi:

$$\delta A^N = \sum_{k=1}^{n} N_k \delta r_k \cos(\widehat{\overline{N_k}, \overline{\delta r_k}})$$

Ba'zi bog'lanishlar uchun ushbu elementar ish nolga teng bo'ladi, ya'ni

$$\sum_{k=1}^{n} N_k \delta r_k \cos(\widehat{\overline{N_k}, \overline{\delta r_k}}) = 0 \qquad (15.9)$$

Bog'lanishdagi mexanik sistemaning har qanday mumkin bo'lgan ko'chishida uning nuqtalariga qo'yilgan bog'lanish reaksiya kuchlarining elementar ishlari yig'indisi nolga teng bo'lsa, ya'ni (15.9) bajarilsa, bog'lanish ideal bog'lanish deyiladi.

1. **Silliq sirt.** Biror M nuqta silliq sirt ustida ajralmasdan harakatlansa reaksiya kuchi shu M nuqtada o'tkazilgan normal bo'yicha yo'nalgan bo'ladi. M nuqtaning mumkin bo'lgan ko'chishi $\delta\bar{r}$ esa shu sirtga urinma tekislikda yotadi. Demak, silliq sirt reaksiyasining mumkin bo'lgan ko'chishdagi ishi nolga teng bo'ladi:

$$\delta A^N = \overline{N} \cdot \delta \bar{r} = 0,$$

ya'ni sirt silliq bo'lsa, u ideal bog'lanish hisoblanar ekan.

Agar sirt silliq bo'lmasa, ishqalanish kuchi ham bo'ladi va u ko'chish radius vektori bilan bir chiziqda qarama-qarshi yo'nalgan bo'ladi va ushbu ko'chishdagi uning ishi noldan farqli bo'ladi. Endi bog'lanishni yana ideal bog'lanishga keltirish uchun ishqalanish reaksiya kuchini bog'lanish reaksiya kuchlari sistemasidan chiqarib berilgan kuchlar sistemasiga qo'shib qarash kifoya. Bunda bog'lanishning reaksiya kuchi yana normal N reaksiya kuchidangina iborat bo'ladi, bog'lanish ideal bog'lanishga aylandi.

2. **Sirpanmasdan dumalashdagi bog'lanish.** Bir absolyut qattiq jism sirt (bog'lanish) bo'ylab sirpanmasdan dumalashda bo'lsin. Jismlar silliq bo'lmasada va demak, ishqalanish kuchi noldan farqli bo'lsada jismning har qanday mumkin bo'lgan ko'chishda (dumalashida) reaksiya kuchlarning ishi nolga teng, ya'ni bog'lanish ideal bog'lanish bo'ladi. Chunki dumalayotgan jismning sirt bilan tegishgan B nuqtasi harakatsiz qoladi, ya'ni

$$\delta r_B = 0$$

va sirtning jismga reaksiya kuchi ham ish bajarmaydi. Demak, sirpanmasdan dumalashdagi bog'lanish ham ideal bog'lanish ekan.

Ushbu shart ko'pgina mashina, mexanizm va konstruksiyalarda qo'llanilgan bog'lanishlarda ham bajariladi. Chunki mashina, mexanizm, konstruksiyalarning mukammallik darajasi zararli qarshiliklar (mashina qismlarining o'zaro ishqalanish kuchlari)ni yengish uchun sarflanadigan isrof quvvatning (ishning) kichik bo'lishi bilan baholanadi. Ushbu isrof quvvatning mashinani harakatga keltiruvchi motor quvvatidan nihoyat kichik bo'lish sharti mashina, mexanizm, konstruksiyalarni loyihalashdagi asosiy talab hisoblanadi.

Mashina, mexanizm va konstruksiyalarning takomilligini baholovchi isrof quvvat bog'lanishlar reaksiya kuchlari ishi tufayli mavjuddir. Shuning uchun mashina, mexanizm va konstruksiya qismlarini bir-biri bilan ideal bog'lanishlar yordamida biriktirish talabga muvofiq bo'ladi.

16-LEKSIYA

MUMKIN BO‘LGAN KO‘CHISH PRINSIPI. DINAMIKANING UMUMIY TENGLAMASI

Mumkin bo‘lgan ko‘chish prinsipi. Mumkin bo‘lgan ko‘chish prinsipini muvozanat masalalariga qo‘llash. Mumkin bo‘lgan ko‘chish prinsipini qo‘llab bog‘lanish reaksiyalarini aniqlash. Dinamikaning umumiy tenglamasi

1. Mumkin bo‘lgan ko‘chish prinsipi qanday masalalarda qo‘llaniladi?
2. Mumkin bo‘lgan ko‘chish prinsipi qanday ta’riflanadi?
3. Mumkin bo‘lgan ko‘chish prinsipi qanday ifodalanadi?
4. Mumkin bo‘lgan ko‘chish prinsipini qo‘llab qanday muvozanat masalalari yechiladi?
5. Mumkin bo‘lgan ko‘chish prinsipi yordamida bog‘lanish reaksiyalarini aniqlash qanday bajariladi?
6. Mexanik sistema muvozanati masalalarini yechishda mumkin bo‘lgan ko‘chish prinsipini statika tenglamalaridan qanday afzalligi bor?
7. Dinamikaning umumiy tenglamalari qanday aniqlanadi?
8. Dinamikaning umumiy tenglamalari qanday ta’riflanadi?
9. Dinamikaning umumiy tenglamalarini qo‘llab qanday masalalar yechiladi?

Tayanch so‘zlar va iboralar

Mumkin bo‘lgan ko‘chish prinsipi. Mumkin bo‘lgan ko‘chish prinsipi masalasi. Bog‘lanish reaksiyalarini aniqlash masalasi. Dinamikaning umumiy tenglamasi. Aktiv kuchlar. Reaksiya kuchlari. Inersiya kuchlari. Inersiya kuchlarining elementar ishi. Inersiya kuchlari momentining elementar ishi.

45-§. Mumkin bo‘lgan ko‘chish prinsipi

Erkinmas murakkab sistemaning muvozanatini o‘rganish sistemaning mumkin bo‘lgan ko‘chishi haqidagi tushunchadan foydalanish bilan bog‘liq prinsipga asoslangan. Mumkin bo‘lgan ko'chish prinsipi quyidagicha ta'riflanadi: *ideal, bo'shatmaydigan, statsionar, golonom bog'lanishlar qo'yilgan mexanik sistema berilgan aktiv kuchlar ta'sirida muvozanatda bo'lishi uchun sistema nuqtalarining harakatsiz holatdan har qanday mumkin bo'lgan ko'chishida shu aktiv kuchlarning elementar ishlari yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.*

Sistemaning biror M_k nuqtasiga qo'yilgan aktiv kuchlarning teng ta'sir etuvchisi $\overline{F}_k$, shu nuqtaning mumkin bo'lgan ko'chish vektori δr_K bo'lsin. U holda mumkin bo'lgan ko'chish prinsipi ushbu vektorlarning skalyar ko'paytmalari yig'indisi kabi quyidagicha matematik ifodalanadi:

$$\sum_{k=1}^{n} F_k \cdot \delta r_k = 0, \qquad v_k(0) = 0, \qquad (k = 1, n) \tag{16.1}$$

Zarurligi. Moddiy nuqtalar sistemasining muvozanati uchun (16.1) shartning zarurligini isbotlaymiz. Ideal, bo'shatmaydigan, statsionar bog'lanishlar qo'yilgan n-ta moddiy nuqtalar sistemasi muvozanatda va demak, uning har bir nuqtasi muvozanat holatda tinch turgan bo'lsin. Jumladan, M_k nuqtaga aktiv kuchlarning teng ta'sir etuvchisi $\overline{F}_k$ va bog'lanishdan bo'shatish prinsipiga asosan unga qo'yilgan reaksiya kuchlarining teng ta'sir etuvchisi $\overline{N}_k$ ta'sir etadi. Muvozanatlik talabga ko'ra har bir nuqta uchun quyidagi shart bajarilishi kerak:

$$\overline{F}_k + \overline{N}_k = 0, \qquad v_k(0) = 0, \qquad (k = \overline{1,n})$$

Sistemaning ushbu muvozanatdagi tinch holatdan biror mumkin bo'lgan ko'chishida uning nuqtalari $\delta r_1, \delta r_2, ..., \delta r_n$ mumkin bo'lgan ko'chishlar olsin. Yuqoridagi muvozanat tenglamalarning har birini $\delta\, \bar{r}_k$ ga skalyar ko'paytirib:

$$(F_k + N_k) \cdot \delta r_k = 0, \qquad (k = 1, n)$$

ushbu hosil bo'lgan n-ta tenglamani hadma-had qo'shamiz. U holda quyidagi ifodani olamiz:

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_k\cdot\delta\overline{r}_k+\sum_{k=1}^{n}\overline{N}_k\cdot\delta\overline{r}_k=0$$

Mexanik sistemaga qo‘yilgan bog‘lanishlar ideal bog‘lanishlar bo‘lgani uchun

$$\sum\overline{N}_k\cdot\delta\overline{r}_k=0.$$

Demak, sistema muvozanatda bo‘lishi uchun (16.1)ning bajarilishining zarurligi kelib chiqadi.

Yetarligi. Mexanik sistemaning muvozanati uchun (16.1) shart yetarli ekanligini isbotlaymiz. Buning uchun (16.1) shart bajarilganda sistema muvozanatda bo‘lishini ko‘rsatish kifoya. Faraz qilaylik, (16.1) shart bajarilgan, lekin bunga qaramasdan, sistema muvozanatda bo‘lmasin. Boshqacha aytganda, (16.1) shartning bajarilishiga qaramasdan sistema qo‘yilgan kuchlar ta’sirida o‘zining boshlang‘ich tinch holatidan harakatga kelsin. Ta’rifga ko‘ra, sistemaga qo‘yilgan bog‘lanishlar statsionar va shuning uchun sistemaning haqiqiy ko‘chishi uning biror mumkin bo‘lgan ko‘chishi bilan mos keladi. Mexanik sistema nuqtalarining tinch holatdan ko‘chishi $\overline{F}_k$ va $\overline{N}_k$ kuchlarning teng ta’sir etuvchisi bo‘ylab yuz beradi va shu sababdan musbat ish bajariladi:

$$\sum_{k=1}^{n}(\overline{F}_k+\overline{N}_k)\cdot\delta\overline{r}_k>0$$

yoki

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_k\cdot\delta\overline{r}_k+\sum_{k=1}^{n}\overline{N}_k\cdot\delta\overline{r}_k>0.$$

Sistemaga ideal bog‘lanishlar qo‘yilganligi sababli

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{N}_k\cdot\delta\overline{r}_k=0.$$

Demak, sistema muvozanatda bo‘lmasa

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_k\cdot\delta\overline{r}_k>0$$

kelib chiqadi. Bu natija esa yuqorida qabul qilingan (16.1) shartga ziddir. Mexanik sistemaning muvozanatda bo'lishi uchun (16.1) ning bajaralishi yetarli. Shunday qilib, mumkin bo'lgan ko'chish prinsipining (16.1) ifodasi haqiqatan ham mexanik sistema muvozanatining zarur va yetarli shartini ifodalar ekan.

Mumkin bo'lgan ko'chish prinsipining (16.1) ifodasini ba'zan *Lagranjning mumkin bo'lgan ko'chish prinsipi,* ba'zan *mumkin bo'lgan ishlar tenglamasi,* ba'zan *statikaning umumiy tenglamasi* ham deyiladi. (16.1) shartni quyidagi ifodalar ko'rinishida yozish mumkin:

$$\sum_{k=1}^{n}(F_{kx}\delta x_k + F_{ky}\delta y + F_{kz}\delta z) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_k \cdot \delta r_k \cdot \cos(\widehat{\overline{F}_k, \delta \overline{r}_k}) = 0.$$

Mumkin bo'lgan ko'chish prinsipi mexanik sistemaning ayrim qismlari muvozanatini aniqlamasdan turib uning muvozanatining umumiy shartlarini ifodalaydi. Bu prinsipning afzalligi ham shundan iboratki, uning ifodasida oldindan noma'lum bo'luvchi reaksiyalar qatnashmaydi. Uning yordami bilan tekis kuchlar yoki fazoviy kuchlar sistemasining ta'siridagi jismning yoki mexanik sistemaning muvozanat masalalari oson yechiladi.

Agar sistemaga qo'yilgan bog'lanishlarning hammasi ham ideal bo'lmasa, masalan, silliq bo'lmagan tekislik yoki sirtlar holida, aktiv kuchlar qatoriga idealmas bog'lanish reaksiya kuchlarining mumkin bo'lgan ko'chishdagi ishlarining yig'indisi ham nolga tenglashtirilib qaraladi. Shu yo'l bilan tuzilgan tenglamalardan berilgan aktiv kuchlar bilan idealmas bog'lanish reaksiya kuchlari orasidagi munosabat aniqlanadi.

Xuddi shu yo'sinda ideal bog'lanish reaksiya kuchlarini ham aniqlash mumkin, agar u masalaning shartiga ko'ra talab qilingan bo'lsa. Ideal bog'lanishning shu talab qilingan reaksiyasini aniqlash uchun mexanik sistemani ushbu ideal bog'lanishdan bo'shatib, uning sistemaga ta'sirini shu reaksiya bilan almashtiriladi va bu reaksiya kuchini aktiv kuchlar qatoriga qo'shib, hosil bo'lgan kuchlarning hammasiga mumkin bo'lgan ko'chish prinsipi qo'llaniladi. Muvozanat shartining shu yo'l bilan hosil bo'lgan tenglamasidan bu reaksiya kuchi aniqlanadi.

13-masala. A, B, D uchta tayanchda yotgan AD, to'sin C nuqtada sharnir bilan birlashtirilgan ikki qismdan iborat. To'sinning AC qismiga $P_1 = 8000\,H$, $P_2 = 6000\,H$ ga teng kuchlar qo'yilgan; CD qismiga esa momenti $M = 4000\ H \cdot m$ ga teng va soat milining aylanishiga teskari yo'nalishda juft kuchlar qo'yilgan. O'lchamlar rasmda ko'rsatilgan. A, B, D lardagi tayanch reaksiyalari aniqlansin.

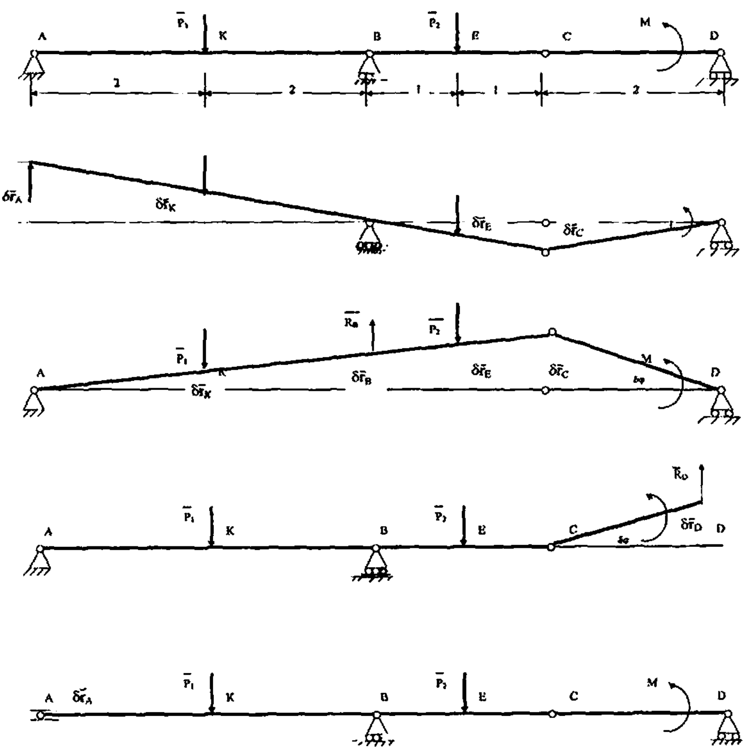
Yechish. AD to'sin muvozanatdagi AC va CD to'sinlardan iborat ikkita jismlardan tashkil topgan.

Bu masalani statika usulida yechish uchun to'sinning AC qismini fikran ajratib olib, CD qismining unga ta'sirini kuch bilan almashtirib, AC uchun statikaning muvozanat tenglamasini tuzish kerak. Xuddi shuningdek, to'sinning CD qismi uchun ham muvozanat tenglamalarini tuzib, hosil bo'lgan tenglamalarni birgalikda yechish kerak. Bu usul ancha mashaqqatli bo'lib, tayanch reaksiyalarini faqat barcha muvozanat tenglamalarini tuzgandan keyin ularni birgalikda yechish bilan aniqlash mumkin. Mumkin bo'lgan ko'chish prinsipini qo'llash natijasida esa muvozanat shartni tegishlicha tuzish bilan bitta tenglamadan kerakli reaksiya kuchini aniqlash mumkin. Bu usul noma'lum reaksiya kuchlarini aniqlash masalasini ancha osonlashtiradi.

Mumkin bo'lgan ko'chish prinsipini qo'llab A, B, D tayanchlardagi reaksiya kuchlarini aniqlaymiz. R_A reaksiya kuchini aniqlash uchun A tayanchni fikran olib tashlab, uning to'singa ta'sirini R_A kuch bilan almashtiramiz. Mexanik sistemaga shunday mumkin bo'lgan ko'chish beramizki, bunda A nuqta vertikal yuqoriga yo'nalgan δr_A ko'chish olsin. $\bar{P}_1$ va P_2 vertikal kuchlar qo'yilgan K va Ye nuqtalarning va C nuqtaning mumkin bo'lgan ko'chishlarini, mos ravishda, $\delta \bar{r}_K, \delta \bar{r}_B$ va δr_c bilan belgilaymiz; $\delta\varphi - AC$ yoki CD to'sinning burchak ko'chishi:

$$4 \cdot \delta\varphi = \delta r_A = 2 \cdot \delta r_K = 4 \cdot \delta r_E = 2 \cdot \delta r_C \quad (1)$$

Mumkin bo'lgan ko'chish prinsipini, qo'llab berilgan kuchlar va R_A reaksiya kuchining ushbu mumkin bo'lgan ko'chishdagi ishlarining yig'indisini nolga tenglaymiz:



$$R_A \cdot \delta r_A - P_1 \cdot \delta r_K + P_2 \cdot \delta r_E + M \cdot \delta r\varphi = 0. \quad (2)$$

Yoki (1) ni e'tiborga olsak va (2) ning hadlarini $\delta\ r_A$ga qisqartirsak quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$R_A - \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{4}P_2 + \frac{1}{4}M = 0.$$

Bundan

R_A =1500 H bo'lishini aniqlaymiz.

$\overline{R}_B \overline{R}_D \overline{R}_{AX}$ reaksialarni ham huddi shunday aniqlash mumkin

$$-P_1 \cdot \delta r_k + R_B \cdot \delta r_B - P_2 \cdot \delta r_E - M \cdot \delta\varphi = 0,$$

$$M \cdot \delta\varphi + R_D \cdot \delta r_D = 0,$$

$$R_{AX}\cdot\delta r_{AX}=0$$

Yuqoridagidek hisoblab topamiz:

$$R_B=\frac{2P_1+5P_2}{4}+M$$

$$R_D=-\frac{M}{2}$$

$$R_{AX}=0$$

46-§. Dinamikaning umumiy tenglamasi

Harakati ideal, golonom bog'lanishlar bilan cheklangan n moddiy nuqtalarning mexanik sistemasi berilgan bo'lsin. Mexanik sistemaning biror M_k nuqtasiga qo'yilgan aktiv kuchlar va bog'lanishlar reaksiya kuchlarining teng ta'sir etuvchilarini F_k va N_k orqali belgilaymiz. Dalamber prinsipiga ko'ra mexanik sistemaning har bir M_k nuqtasi uchun vaqtning har bir paytida berilgan kuchlarining va reaksiya kuchlarining teng ta'sir etuvchilari bilan inersiya kuchining geometrik yig'indisi nolga teng, ya'ni (13.3) o'rinli

$$\overline{F}_k+\overline{N}_k+\overline{F}_k^i=0$$

Vaqtni o'zgarmas hisoblab, mexanik sistemaga mumkin bo'lgan ko'chish beramiz. U holda uning har bir M_k nuqtasi $\delta r_k\,(k=\overline{1,n})$ mumkin bo'lgan ko'chish oladi. Yuqoridagi tenglamani har bir nuqta uchun yozib hamda ularni tegishli δr_k mumkin bo'lgan ko'chishga skalyar ko'paytirib va bir-biri bilan hadma-had qo'shib ushbu kuchlar ishining yig'indisini aniqlaymiz:

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_k\cdot\delta\,\overline{r}_k+\sum_{k=1}^{n}\overline{N}_k\cdot\delta\,\overline{r}_k+\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_k^i\cdot\delta\,\overline{r}_k=0.$$

Mexanik sistemaga qo'yilgan bog'lanishlar ideal bo'lgani uchun o'rtadagi had, ya'ni reaksiya kuchlarining ishi nolga teng. Demak,

$$\sum_{k=1}^{n}(\overline{F}_k+\overline{F}_k^i)\cdot\delta\,\overline{r}_k=0 \qquad (16.2)$$

yoki,

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\overline{F}_k-m_k\overline{w}_k\right)\cdot\delta\,\overline{r}_k=0 \qquad (a)$$

yoki

$$\sum_{k=1}^{n}\left[F_k\cdot\cos(F_k\wedge,\delta r_k)-m_k w_k\cos(w_k\wedge,\delta\,r_k)\right]\cdot\delta\,r_k-0 \quad (16.3)$$

Yuqoridagi (16.2) tenglama (yoki uning boshqa ko'rinishlari (16.3)) *dinamikaning umumiy tenglamasi* deyladi. U quyidagicha ta'riflanadi: *ideal, golonom bog'lanishli harakatdagi mexanik sistema nuqtalarining har qanday mumkin bo'lgan ko'chishda ularga ta'sir etuvchi aktiv kuchlarning va shu nuqtalarning inersiya kuchlarining elementar ishlari yig'indisi har onda nolga teng bo'ladi.*

Aktiv kuchlar F_k ning Dekart koordinata o'qlardagi proyeksiyalarini F_{kx}, F_{ky}, F_{kz}, sistema nuqtalarining inersiya kuchlari F_k^i ning va mumkin bo'lgan ko'chishlari δr_k ning ushbu o'qlardagi proyeksiyalarini $F_{kx}^i=-m_k\ddot{x}_k, F_{ky}^i=-m_k\ddot{y}_k, F_{kz}^i=-m_k\ddot{z}_k$ hamda $\delta x_k,\delta y_k,\delta z_k$ orqali belgilab va elemntar ishning analitik ifodasidan foydalanib (16.2) ni quydagicha yozamiz:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\left(F_{kx}-m_k\ddot{x}_k\right)\cdot\delta x_k+\left(F_{ky}-m_k\ddot{y}_k\right)\cdot\delta y_k+\left(F_{kz}-m_k\ddot{z}_k\right)\cdot\delta z_k\right]=0 \quad (16.4)$$

Dinamikaning (16.4) ko'rinishdagi umumiy tenglamasi, birinchi bor, 1788-yilda Lagranj tomonidan uning «Analitik mexanika tenglamasi» asarida keltirilgan. U Dalamber prinsipi bilan Lagranjning mumkin bo'lgan ko'chish prinsipining majmuasi bo'lgani uchun *Dalamber-Langranj prinsipi* ham deyiladi.

Dinamika umumiy tenglamasi har qanday mexanik sistema harakatining differensial tenglamasini yozishga imkon beradi.

17-LEKSIYA

UMUMLASHGAN KUCHLAR

Umumlashgan koordinata va umumlashgan tezlik. Umumlashgan kuch. Umumlashgan reaksiya kuchi. Umumlashgan kuchlarda muvozanat shartlar

1. Umumlashgan tezlik qanday aniqlanadi?
2. Umumlashgan kuch qanday aniqlanadi?
3. Umumlashgan kuch qanday o'lchov birligi bilan aniqlanadi?
4. Ideal bog'lanishning umumlashgan reaksiya kuchi nimaga teng?
5. Umumlashgan kuchlarda muvozanat shartlari qanday aniqlanadi?
6. Umumlashgan kuchlarda dinamikaning umumiy tenglamasi qanday ifodalanadi?
7. Umumlashgan kuchni aniqlash qanday amalga oshiriladi?

Tayanch so'zlar va iboralar

Umumlashgan tezlik. Umumlashgan kuch. Umumlashgan kuchning o'lchov birligi. Umumlashgan reaksiya kuchi. Umumlashgan inersiya kuchi. Umumlashgan kuchlarda muvozanat.

47-§. Umumlashgan kuchlar va ularni aniqlash

Endi dinamikaning markaziy tushunchalaridan biri kuchni umumlashgan koordinatalar orqali aniqlashga va umumlashgan kuch tushunchasini ta'riflashga, ifodasini keltirib chiqarishga o'tamiz.

Buning uchun mexanik sistemaga uning umumlashgan koordinatalaridan, masalan, faqat q_1 cheksiz kichik orttirma δq_1 oladigan qilib mumkin bo'lgan ko'chish beramiz. U holda sistemaning barcha n nuqtalari cheksiz kichik (mumkin bo'lgan) ko'chishlar $(\delta \bar{r}_1)_1$, $(\delta \bar{r}_2)_1$, $(\delta \bar{r}_3)_1$ .... $(\delta \bar{r}_n)_1$ oladi. Ushbu ko'chishlar sistemaga qo'yilgan golonom, statsionar bog'lanishlarga muvofiq bo'lganligi sababli u sistemaning mumkin bo'lgan ko'chishlaridan biri bo'ladi.

Umumlashgan koordinatalardan faqat q_1 gina ushbu ko'chishda o'zgarishi (qolgan umumlashgan koordinatalar o'zgarmasligi) sababli $(\delta \bar{r}_k)_1$ xususiy differensial kabi hisoblanadi.

$$(\delta \bar{r}_k)_1 = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}\delta q_1$$

Endi mexanik sistemaga qo'yilgan kuchlarning mazkur mumkin bo'lgan ko'chishdagi elementar ishlari yig'indisini aniqlaymiz:

$$\delta A_1 = \bar{F}_1 \cdot (\delta \bar{r}_1)_1 + \bar{F}_2 \cdot (\delta \bar{r}_2)_1 + \cdots + \bar{F}_n \cdot (\delta \bar{r}_n)_1 = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}\delta q_1 = Q_1 \delta q_1$$

Bu yerda

$$Q_1 = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}$$

Q_1 *umumlashgan kuchni* ifodalaydi.

Mexanik sistemaga endi, q_2 umumlashgan koordinata orttirma oladigan qilib mumkin bo'lgan ko'chish berib, bunda kuchlarning elementar ishini ham yuqoridagi kabi aniqlaymiz:

$$\delta A_2 = Q_2 \delta q_2, \qquad Q_2 = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2}$$

Umuman, bog'lanishli sistemaning hamma mumkin bo'lgan ko'chishlarida unga qo'yilgan kuchlarning elementar ishi xuddi shu yo'sinda aniqlanadi:

$$\delta A = \sum_{j=1}^{s} \delta A_j = \sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j \qquad (17.1)$$

Bu yerda

$$Q_j = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}, \quad (j = 1, \bar{s}) \qquad (17.2)$$

Q_j *umumlashgan kuchni* ifodalaydi.

Elementar ishning bu ifodasidagi Q_j umumlashgan kuchlar (17.2) bilan ifodalansa ham uning (17.1) tabiatiga ko'ra quyidagicha ta'riflanadi: *umumlashgan kuchlar berilgan mexanik sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi aktiv kuchlarning sistema mumkin bo'lgan ko'chishlaridagi to'la elementar ish ifodasida umumlashgan koordinatalar orttirmasi oldidagi koeffitsientga teng kattalikka aytiladi.*

Umumiy holda, umumlashgan kuch Q_j biz bilgan oddiy ma'nodagi kuch emas. Binobarin, umumlashgan kuchning o'lchovi $[Q_j]$ unga mos umumlashgan koordinataning $[q_j]$ o'lchoviga bog'liq bo'ladi.

$$[Q_i] = \frac{[A]}{[q_i]}$$

Bu yerda [A] — ishning o'lchovi.

Agar umumlashgan koordinata uzunlik o'lchamida bo'lsa, umumlashgan kuchning o'lcham birligi kuch o'lcham birligi bilan bir xil bo'ladi, ya'ni u Nyutonda o'lchanadi: agar umumlashgan koordinata burchak kattalikdan iborat bo'lsa, umumlashgan kuchning o'lchami moment o'lchami bilan bir bo'ladi, ya'ni u (N·m) da o'lchanadi. Agar u — hajm bo'lsa (silindr ichidagi porshenning holati porshen orqasidagi hajm bilan aniqlanishi mumkin), umumlashgan kuch N/m^2 birligida, ya'ni bosim o'lchamida o'lchanadi.

Demak, umumlashgan kuch tushunchasi moddiy jismlarning o'zaro mexanik ta'sirlashuvini xarakterlovchi turli kattaliklar (kuch, kuch momenti, bosim) dan iborat bo'ladi.

Shunday qilib, mexanik sistemaga qo'yilgan umumlashgan kuchlarning umumiy soni umumlashgan koordinatalar soniga teng va shu bilan birga har bir umumlashgan kuchning o'lcham birligi tegishli umumlashgan koordinata o'lcham birligi bilan moslashgan bo'ladi.

Odatdagi kuchlar kabi umumlashgan kuchlarni ham umumlashgan tashqi, umumlashgan ichki kuchlar yoki umumlashgan aktiv kuchlar, umumlashgan reaksiyalar kabi guruhlarga ajratish mumkin. Jumladan, statsionar bog'lanishlar holida ideal bog'lanishlarning umumlashgan reaksiyalari nolga teng bo'ladi. Haqiqatan ham q_j umumlashgan koordinataga tegishli umumlashgan reaksiya (Q_j^R) mexanik sistemaning faqat q_j koordinatasi orttirma oladigan mumkin bo'lgan ko'chishida bog'lanish reaksiyalarining elementar ishlarini hisoblab aniqlanadi:

$$Q_j^R = \frac{\sum_{k=1}^{n} \overline{R}_k \cdot \delta \overline{r}_k}{\delta q_j} = \sum_{k=1}^{n} \overline{R}_k \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_j}$$

Ideal bog'lanishlarning ta'rifiga ko'ra har qanday mumkin bo'lgan ko'chishda reaksiyalarning elementar ishlarining yig'indisi nolga teng:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{R}_k \cdot \delta \overline{r}_k = \sum_{k=1}^{n} \overline{R}_k \cdot \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_j} \cdot \delta q_j = Q_j^R \cdot \delta q_j = 0$$

Bu yerda $\delta q_j \neq 0$ sababli, umumiy holda

$$Q_j^R = 0, \quad (j = 1, \bar{s})$$

Demak, mexanik sistemaga qo'yilgan bog'lanishlar ideal bo'lsa, u holda uning mumkin bo'lgan ko'chishida faqat aktiv kuchlargina ish bajaradi va Q_1, Q_2, ...Q_S umumlashgan aktiv kuchlardangina iborat bo'ladi.

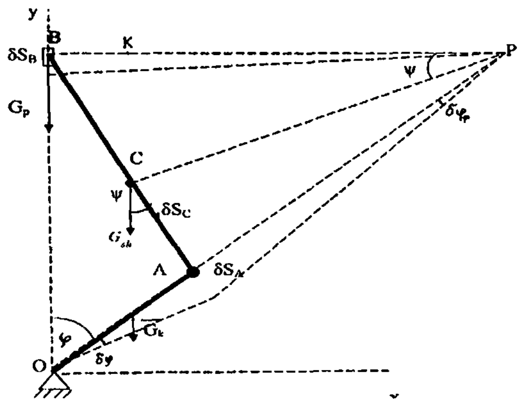
14-masala. Krivoship-shatun mexanizmi $\overline{G}_K$ — krivoship, $\overline{G}_{sh}$ — shatun va $\overline{G}_p$ — polzun og'irlik kuchlari ta'sirida rasmda ko'rsatilgandek harakatlanadi. Ishqalanish kuchlarini hisobga olmasdan mexanizmning umumlashgan kuchlarini aniqlang. OA=r, AB=l, $m_p = m_k = m_{sh} = m$ deb hisoblansin.

Yechish. Mexanizmning erkinlik darajasi birga tengligini biz yuqorida aniqlagan edik. Shuning uchun mexanizmning holatini bitta umumlashgan koordinata – krivoshipni Oy o'qi bilan tashkil qilgan φ burchak orqali aniqlash mumkin bo'ladi. Umumlashgan kuchlarni aniqlashga o'tamiz.

1. Mexanizmga mumkin bo'lgan ko'chish beramiz. Bunda burchak orttirma olsin. Ushbu mumkin bo'lgan ko'chishdagi aktiv kuchlarning elementar ishlarining yig'indisini aniqlaymiz.

$\delta A(\overline{G}_K)$ ish mexanizmni O markazga nisbatan $\delta\varphi$ burilishida $\overline{G}_K$ kuch momentining ishi kabi aniqlanadi. O markazga nisbatan $\overline{G}_K$ kuch momenti

$$m_0(\overline{G}_k) = -G_k \cdot \frac{r}{2} \cdot \sin\varphi = -\frac{mgr}{2} \cdot \sin\varphi$$



ga teng. Shuning uchun qidirilayotgan ishning qiymati quyidagicha aniqlanadi:

$$\delta A(G_k) = \frac{mgr}{2} \quad \sin\varphi \quad \delta\varphi$$

Shatun markazi C nuqtaning mumkin bo'lgan ko'chishi:

$$\delta S_c = CP \cdot \delta\varphi_p = CP \cdot \frac{r}{AP} \cdot \delta\varphi = CP \cdot \frac{r \cdot \delta\varphi}{OP - r} =$$

$$CP \cdot \frac{r \cdot \cos\varphi \cdot \delta\varphi}{y_B - r \cdot \cos\varphi} = CP \cdot \frac{r \cdot \cos\varphi \cdot \delta\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2\varphi}}$$

ga teng. U holda $\overline{G}_{sh}$ kuchning bu mumkin bo'lgan ko'chishdagi ishi

$$\delta A(\overline{G}_{sh}) = mg \cdot \delta S_C \cdot \cos\psi$$

bilan ifodalanadi. Bundagi $\cos\psi$ ni to'g'ri burchakli KCP uchburchakdan aniqlaymiz:

Demak, $\overline{G}_{sh}$ kuchning ishi

$$\cos\psi = \frac{KP}{CP} = \frac{BP - \frac{r}{2}\cdot\sin\varphi}{CP} = \frac{2y_B tg\varphi - r\sin\varphi}{2CP} = \frac{2\cdot y_B - r\cdot\cos\varphi}{2\cdot CP}\cdot tg\varphi$$

Demak, $\overline{G}_{sh}$ kuchning ishi

$$\delta A(\overline{G}_{sh}) = mg\cdot CP\cdot\frac{r\cdot\cos\varphi\cdot\delta\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}\cdot\frac{2y_B - r\cdot\cos\varphi}{2\cdot CP}tg\varphi =$$

$$= \frac{mg}{2}\cdot\frac{r\cdot\cos\varphi + 2\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}\cdot r\cdot\sin\varphi\cdot\delta\varphi$$

ga teng. Bu yerda

$$y_B = r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}$$

B — nuqtaning ordinatasi.

$\overline{G}_p$ kuchning ishini hisoblash uchun polzunning ushbu mumkin bo'lgan ko'chishdagi siljishini $\delta S_B = y_B\cdot\frac{r\cdot\sin\varphi\cdot\delta\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}$ aniqlashimiz kerak. Buni biz yuqorida keltirgan edik:

$$\delta S_B = \frac{dy_B}{d\varphi}\delta\varphi = (r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi})'_\varphi\cdot\delta\varphi = -(r\sin\varphi + \frac{r^2\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}})\delta\varphi =$$

$$= r\cdot\sin\varphi(1 + \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}})\delta\varphi = y_B\frac{r\cdot\sin\varphi\cdot\delta\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}$$

U holda $\overline{G}_p$ ning elementar ishi quyidagiga teng bo'ladi:

$$\delta A(\overline{G}_p) = G_p\cdot\delta S_B = mgy_B\cdot\frac{r\cdot\sin\varphi\cdot\delta\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}$$

Demak, ushbu mumkin bo'lgan ko'chishda aktiv kuchlar elementar ishlarining yig'indisi

$$\delta A = \delta A(\overline{G}_k) + \delta A(\overline{G}_{sh}) + \delta A(\overline{G}_p)$$

uchun quyidagi miqdorga kelamiz, ya'ni

$$\delta A = \frac{m}{2} \cdot g \cdot r \cdot \sin\varphi \cdot \frac{3r\cos\varphi + 5\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}} \cdot \delta\varphi$$

Bundan krivoship-shatun mexanizmi uchun umumlashgan kuch ifodasini quyidagicha aniqlaymiz:

$$Q_\varphi = \frac{m}{2} \cdot g \cdot r \cdot \sin\varphi \cdot \frac{3r\cos\varphi + 5\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}$$

2. Endi umumlashgan kuchni ikkinchi usul bilan aniqlaymiz. Kuchlarning koordinata o'qlariga proyeksiyalari quyidagiga teng:

$$G_{KX} = G_{ShX} = G_{PX} = 0, \quad G_{KY} = G_{ShY} = G_{PY} = -mg, \quad G_{KZ} = G_{ShZ} = G_{PZ} = 0$$

Bu kuchlar qo'yilgan D, C, B nuqtalar Dekart koordinatalarining umumlashgan koordinata bo'yicha xususiy hosilasini topish uchun avval ularni o'zaro munosabatini ifodalaymiz:

$$x_D = \frac{1}{2} r\sin\varphi, \qquad y_D = \frac{1}{2} r\cos\varphi$$

$$x_C = \frac{1}{2} r\sin\varphi, \qquad y_C = r\cos\varphi + \frac{1}{2}\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi};$$

$$x_B = 0, \qquad y_B = r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}$$

Aktiv kuchlarning faqat y o'qiga proyeksiyalari noldan farqli bo'lgani sababli nuqtalarning y koordinatasidangina umumlashgan koordinata bo'yicha xususiy hosilasini hisoblaymiz, xolos:

$$\frac{\partial y_B}{\partial\varphi} = -r \cdot \sin\varphi - \frac{r^2\sin\varphi \cdot \cos\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}$$

$$\frac{\partial y_D}{\partial \varphi}=-\frac{r}{2}\cdot\sin\varphi, \quad \frac{\partial y_C}{\partial \varphi}=-r\cdot\sin\varphi-\frac{1}{2}\frac{r^2\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}}$$

Demak,

$$Q_\varphi=mg(\frac{r}{2}\sin\varphi+r\sin\varphi+\frac{1}{2}\cdot\frac{r^2\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}}+r\sin\varphi+\frac{r^2\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}})=$$

$$=\frac{m}{2}gr\sin\varphi(5+\frac{3r\cos\varphi}{\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}})=\frac{m}{2}gr\sin\varphi\cdot\frac{5\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}+3r\cos\varphi}{\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}}$$

3. Endi umumlashgan kuchni uchinchi usul bilan aniqlaymiz. Mexanik sistemaning potensial energiyasi

$$P=mg(\frac{r}{2}\cdot\cos\varphi+r\cos\varphi+\frac{1}{2}\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}+r\cos\varphi+\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi})=$$

$$=\frac{m}{2}g(5r\cos\varphi+3\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi})$$

ga teng. Formulani qo'llab umumlashgan kuchni aniqlaymiz:

$$Q_\varphi=-\frac{\partial P}{\partial\varphi}=+\frac{m}{2}\cdot g\cdot r\cdot\sin\varphi\cdot(5+3\frac{r\cos\varphi}{\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}})=\frac{m}{2}\cdot g\cdot r\cdot\sin\varphi\cdot\frac{5\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}+3r\cos\varphi}{\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}})$$

48-§. Mexanik sistemaning umumlashgan koordinatalardagi muvozanat shartlari

Umumlashgan koordinata va umumlashgan kuch tushunchalarini o'zlashtirganimizdan so'ng bu kattaliklar orqali dinamikaning umumiy tenglamasi va mumkin bo'lgan ko'chish prinsipi qanday ifodalashini ko'ramiz. Harakati ideal, golonom, bo'shatmaydigan bog'lanishlar bilan cheklangan n-ta nuqtalardan tashkil topgan mexanik sistema holati q_1, q_2 ...., q_s umumlashgan koordinatalar bilan ifodalansin. U holda sistemaning har bir nuqtasining radius vektori umumlashgan koordinatalarning bir qiymatli funksiyasidir.

Dinamikaning umumiy tenglamasidan quyidagi

$$\sum_{k=1}^{n}(\overline{F}_k+\overline{F}_k^i)\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\overline{r}_k}{\partial q_j}\delta q_j=0$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamada k-indeksli va j-indeksli yig'indilarning tartibini almashtirsak dinamikaning umumiy tenglamasi uchun

$$\sum_{j=1}^{s}\{\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_k\cdot\frac{\partial\overline{r}_k}{\partial q_j}+\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_k^i\cdot\frac{\partial r_k}{\partial q_j}\}\cdot\delta q_j=0$$

ifodani hosil qilamiz. Bu yerda qavs ichidagi hadlarning o'lchov birligi energiya o'lchovini umumlashgan koordinata q_j-ning o'lchoviga nisbatiga teng. Umumlashgan kuchning ifodasiga binoan qavs ichidagi bu ikki had q_j umumlashgan koordinataga tegishli umumlashgan Q_j aktiv kuch va umumlashgan Q^i_j inersiya kuchidir, ya'ni

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_k\cdot\frac{\partial\overline{r}_k}{\partial q_j}=Q_j,\quad \sum_{k=1}^{n}\overline{F}_k^i\cdot\frac{\partial\overline{r}_k}{\partial q_j}=Q_j^i \tag{17.3}$$

Ushbu belgilashlarni qo'llab, dinamikaning umumiy tenglamasi uchun quyidagi munosabatga kelamiz:

$$\sum_{j=1}^{s}(Q_j+Q_j^i)\cdot\delta q_j=0 \tag{17.4}$$

Mexanik sistemaga qo'yilgan bog'lanishlar golonom bo'lganligidan uning erkinlik darajasi umumlashgan koordinatalar variatsiyalar soni, ya'ni mumkin bo'lgan ko'chishlar soni s ga teng. Umumlashgan koordinatalar esa, ta'rifga ko'ra, o'zaro bog'liqmas kattaliklardir. Shu sababdan oxirgi algebraik tenglamaning bajarilishi uchun o'zaro bog'liqmas kattaliklar oldidagi hamma koeffitsientlar alohida-alohida nolga teng bo'lishi talab qilinadi, ya'ni:

$$Q_j+Q_j^i=0,\qquad (j=\overline{1,s}) \tag{17.5}$$

(17.5) tenglama dinamikaning umumiy tenglamasining umumlashgan kuchlardagi ifodasi. U s-ta algebraik tenglamadan iborat.

Agar mexanik sistema boshlang'ich paytda muvozanatda, ya'ni tinch holatda yoki uning nuqtalari to'g'ri chiziqli tekis harakatda va unga ta'sir qiluvchi aktiv kuchlar muvozanatlashgan bo'lsa, uning nuqtalarining inersiya kuchlari ham nolga teng bo'ladi.

$$Q_j' = 0, \qquad (j = 1, s)$$

U holda (17.5) dan quyidagi

$$Q_j = 0, \qquad (j = \overline{1,s}) \qquad (17.6)$$

muvozanat tenglama kelib chiqadi. (17.6) mumkin bo'lgan ko'chish prinsipining umumlashgan kuchlardagi ifodasidir. Demak, nuqtalarining boshlang'ich tezliklari nolga teng va ularga ideal, statsionar, golonom bog'lanishlar qo'yilgan mexanik sistemaning muvozanati uchun uning umumlashgan koordinatalariga tegishli hamma umumlashgan kuchlari nolga teng bo'lishi zarur va yetarli.

Muvozanat shartlarning soni umumlashgan koordinatalar soniga teng. Umumlashgan koordinatalar orttirmalarining o'zaro bog'liqmasligiga mufoviq mexanik sistemaning muvozanatida hamma aktiv umumlashgan kuchlarning alohida-alohida nolga tengligi zarur. Aytaylik,

$$Q_k \neq 0$$

bo'lsin. U holda mexanik sistemaga uning umumlashgan koordinatalari orttirma oladigan mumkin bo'lgan ko'chish berib,

$$\sum Q_j \cdot \delta q_j = 0$$

dan

$$Q_j \cdot \delta q_j = 0$$

qarama-qarshilik kelib chiqadi. Chunki mazkur mumkin bo'lgan ko'chishda

$$\delta q_K \neq 0$$

Demak, muqarrar ravishda bo'lishi kerak.

$$Q_K = 0$$

Agar golonom, ideal bog'lanishlar qo'yilgan mexanik sistemaga ta'sir etayotgan aktiv kuchlar konservativ, ya'ni potensialli bo'lsa, mexanik sistemaning muvozanati uchun

$$\frac{\partial P}{\partial q_j} = 0 \qquad (j = \overline{1,s}) \qquad (17.7)$$

muvozanat shart kelib chiqadi.

LAGRANJNING II TUR TENGLAMALARI

Lagranjning II tur tenglamalari. Umumlashgan koordinatalardagi harakat differensial tenglamalari va yechimi. Lagranj funksiyasi yoki kinetik potensial. Siklik koordinatalar va integrallar. Energiya integrali. Ustuvor muvozanat. Lagranj — Dirixle teoremasi

1. Lagranjning II tur tenglamalari qanday aniqlanadi?
2. Lagranjning II tur tenglamalari qanday tenglamalar?
3. Lagranjning II tur tenglamalarining yechimi nimani beradi?
4. Lagranj funksiyasi yoki kinetik potensial nima?
5. Qanday koordinatalarga siklik koordinatalar deyiladi?
6. Siklik integrallar nima?
7. Nimani energiya integrali deyiladi?
8. Qanday muvozanatga ustuvor muvozanat deyiladi?
9. Lagranj — Dirixle teoremasi qanday ta'riflanadi?
10. Potensial energiyaning qanday qiymatlari ustuvor muvozanatni bildiradi?

Tayanch so'zlar va iboralar

Lagranjning II tur tenglamasi. Umumlashgan koordinatalarda harakat differensial tenglamasi va harakat tenglamasi. Energiya integrali. Ustuvor muvozanat. Lagranj — Dirixle teoremasi. Potensial energiya minimumi.

49-§. Lagranjning ikkinchi tur tenglamalari

Erkinlik darajasi s-ga teng mexanik sistema n-ta nuqtadan tashkil topib, unga ideal, golonom, va bo'shatmaydigan bog'lanishlar qo'yilgan bo'lsin. U holda, sistemaning fazoda holati s-ta umumlashgan koordinatalar $q_1, q_2, ..., q_s$ bilan bir qiymatli ravishda aniqlanadi. Mexanik sistemaning har qanday k-nchi nuqtasining radius vektori (Dekart koordinatalari x_k, y_k, z_k) umumlashgan koordinatalarning bir qiymatli funksiyasi bo'ladi.

Ushbu nuqtaning mumkin bo'lgan ko'chishi nuqtaning radius vektorining variatsiasi kabi aniqlanadi. Nuqtalarning tezliklari

$$\overline{v_k} = \dot{\overline{r_k}} = \frac{\partial \overline{r_k}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \overline{r_k}}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j, \quad (k = \overline{1,n}) \qquad (18.1)$$

Bu yerda $\dot{q}_j$ — umumlashgan tezlik. Agar bog'lanishlar statsionar bo'lsa birinchi had nolga aylanadi. Nuqtalarning tezliklari umumlashgan tezliklarning chiziqli funksiyasi ekan, chunonchi, k-nchi nuqtaning tezligidan $\dot{q}_j$ bo'yicha xususiy hosila:

$$\frac{\partial \overline{v_K}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \dot{\overline{r_K}}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \overline{r_K}}{\partial q_j} \qquad (18.2)$$

ga teng.

Vaqt bo'yicha to'la differensial olish va umumlashgan koordinata bo'yicha xususiy differensial olish amallarining o'rnini o'zaro almashtirish mumkin bo'lganligi sababli

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{r_K}}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{d\overline{r_K}}{dt}\right) = \frac{\partial \overline{v_K}}{\partial q_j} \qquad (18.3)$$

Mexanik sistema harakati bilan bog'liq masalalarni dinamikaning umumiy tenglamasini bevosita qo'llash bilan yechish mumkinligini yuqorida ko'rib chiqqan edik. Ammo umumlashgan inersiya kuchni sistemaning kinetik energiyasi orqali ifodalasak, sistemaning harakat tenglamasini tuzish ancha osonlashadi.

Mexanik sistemaning ixtiyoriy nuqtasining inersiya kuchi

$$\overline{F}_k^i = -m_k \overline{w}_k = -m_k \frac{d\overline{v_k}}{dt}$$

ga teng va q_j umumlashgan koordinataga tegishli umumlashgan inersiya kuchi (18.2), (18.3) ifodalarni qo'llash bilan quyidagicha aniqlanadi:

$$-Q_j^i=\sum_{k=1}^{n} m_k\cdot\frac{d\overline{v_k}}{dt}\cdot\frac{\partial\overline{r_k}}{\partial q_j}=\sum_{k=1}^{n} m_k\left[\frac{d}{dt}\left(\overline{v_k}\cdot\frac{\partial\overline{r_k}}{\partial q_j}\right)-\overline{v_k}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\overline{r_k}}{\partial q_j}\right)\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{n} m_k\left[\frac{d}{dt}\left(\overline{v_k}\cdot\frac{\partial\overline{v_k}}{\partial\dot{q}_j}\right)-\overline{v_k}\cdot\frac{\partial\overline{v_k}}{\partial q_j}\right]=$$

$$=\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k v_k^2}{2}\right)-\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k v_k^2}{2}\right)=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}$$

Bu yerda

$$T=\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k v_k^2}{2},$$

mexanik sistemaning kinetik energiyasi. Demak, umumlashgan inersiya kuchi

$$-Q_j^i=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}$$

ifoda bilan aniqlanadi. Umumlashgan inersiya kuchining ushbu ifodasini dinamikaning umumiy tenglamasiga qo'yib va umumlashgan aktiv kuchni tenglamaning o'ng tomoniga ko'chirib,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i,\qquad (j=\overline{1,s})\qquad (18.4)$$

tenglamaga kelamiz. (18.4) **Lagranjning ikkinchi tur tenglamalari** deyiladi. (18.4) dan ko'ramizki, bu tenglamalar ideal, golonom va **bo'shatmaydigan** bog'lanishlar qo'yilgan mexanik sistemaning umumlashgan koordinatalardagi tenglamasidir. Ushbu tenglamalar soni mexanik sistema erkinlik darajasi (umumlashgan koordinatalar) soniga teng. Matematik nuqtai nazardan, (18.4) vatning funksiyasi kabi izlanayotgan s-ta o'zaro bog'liqmas umumlashgan koordinatalarning ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamalari sistemasidan iborat.

Shunday qilib, umumlashgan koordinatalardagi Lagranj tenglamalari odatda noma'lum miqdor sifatida izlanadigan bog'lanish reaksiyalardan xoli. Ammo shunday bo'lishiga qaramasdan bog'lanishlarning mexanik sistema harakatiga ta'sirini to'la hisobga oladi. Umumlashgan koordinatalar $q_1, q_2, \ldots, q_s$ ga nisbatan s-ta ikkinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasi (18.4) ni integrallab va boshlang'ich shartlarga ko'ra integrallash doimiylarni aniqlab, mexanik sistemaning umumlashgan koordinatalardagi s-ta harakat tenglamalarini

$$q_j = q_j(t), \qquad (j = \overline{1,s}) \tag{18.5}$$

aniqlaymiz. Mexanik sistema nuqtalarining Dekart koordinatalari (radius vektori) (18.5) ning bir qiymatli funksiyasi kabi ifodalanishini yuqorida bir necha bor takrorlagan edik. Ana shunday qilib, Lagranj tenglamasini yechish bilan biz (erkinmas) mexanik sistema harakati haqida to'la ma'lumotga ega bo'lamiz.

Mexanik sistema dinamikasining rivojlanishida Lagranjning ikkinchi tur tenglamalari hal qiluvchi ro'l o'ynadi va hozir ham mexanikaning ko'pgina masalalarini yechishda samarali qo'llanilib keladi.

Agar masalaning shartiga ko'ra mexanik sistemaga qo'yilgan bog'lanishlarning reaksiyalarini aniqlash lozim bo'lsa, (18.5) aniqlangandan so'ng sistemaga Dalamber prinsipi qo'llaniladi. Buning uchun (18.5) orqali sistema nuqtalarining radius vektori aniqlanadi, masalan,

$$\overline{r_k} = \overline{r_k}(t, q_1, \ldots\ldots, q_s) = \overline{r_k}(t), \quad (k = \overline{1,n})$$

Bu bilan biz sistema nuqtalarining harakat qonunini (18.5) yordamida vektor usulda aniqlagan bo'lamiz. Vektor usulda harakat qonuni ma'lum bo'lgandan so'ng ta'rifga muvofiq inersiya kuchlarini aniqlaymiz:

$$\overline{F}_k^{\,i} = -m_k \ddot{\overline{r}}_k, \;\; (k = \overline{1,n}).$$

So'ngra, Dalamber prinsipiga asosan, noma'lum reaksiya kuchlarini aniqlaymiz:

$$\overline{N}_k = -\overline{F}_k - \overline{F}_k^i, \qquad (k = \overline{1,n}).$$

Shunday qilib, golonom, ideal bog'lanishlar qo'yilgan mexanik sistemaning berilgan aktiv kuchlar ta'siridagi harakatini aniqlashda:

1. Lagranj tenglamalari (18.4) ni integrallab, va masalaning boshlang'ich shartlaridan foydalanib, (18.5) harakat tenglamalari, va harakat tenglamalarining vektorli ifodalari aniqlanadi.
2. Dalamber prinsipi asosida bog'lanishlarning noma'lum reaksiya kuchlari topiladi.

50-§. Potensialli kuchlar ta'siridagi mexanik sistema uchun Lagranjning ikkinchi tur tenglamalari

Agar ideal, golonom, bo'shatmaydigan, statsionar bog'lanishlar qo'yilgan mexanik sistema nuqtalariga faqat konservativ, ya'ni potensialli kuchlar ta'sir etsa sistemaning umumlashgan kuchlari (17.2) bilan aniqlanadi. U holda, Lagranjning ikkinchi tur tenglamalari (18.4) quyidagicha yoziladi:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial P}{\partial q_j}, \qquad (j = \overline{1,s}) \qquad (18.6)$$

Potensial energiya P faqat koordinatalarning funksiyasi bo'ladi va shu sababli u umumlashgan koordinatalar orqali

$$P = P(q_1, q_2, \ldots, q_S)$$

kabi ifodalanadi. Potensial energiya umumlashgan tezlik $\dot{q}_j$ ning funksiyasi bo'lmaganligi sababli

$$\frac{\partial P}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

va shuning uchun

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (T - P)}{\partial \dot{q}_j}$$

ni yozish mumkin. Bu natijadan (18.6) quyidagicha ko'rinishga keladi:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(T-P)}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial(T-P)}{\partial q_j}=0, \qquad (j=\overline{1,s}) \qquad (18.7)$$

Bu yerda (T-P) – umumlashgan koordinatalar va umumlashgan tezliklarning funksiyasi bo'lib, *Lagranj funksiyasi yoki kinetik potensial* deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$L \quad (q_1,q_2,.....,q_S;\dot{q}_1,\dot{q}_2,.....,\dot{q}_S)=T-P$$

Ushbu belgilashga ko'ra (18.7) quyidagicha:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0, \qquad (j=\overline{1,s}) \qquad (18.8)$$

ko'rinishga keladi. **(18.8) tenglamalar sistemasi potensialli kuchlar ta'siridagi mexanik sistema uchun Lagranjning ikkinchi tur tenglamalari deyiladi.**

Shuni alohida ta'kidlab o'tish joizki, Lagranjning (18.4) yoki (18.8) tenglamalari turli xil mexanik sistema harakatining differensial tenglamalarini oson yozishda keng qo'llaniladi. Uni qo'llashda qo'shimcha koordinatalarni va ideal bog'lanishlar reaksiyalarini kiritish talab qilinmaydi. U hamma masalalarda bir xil (yuqorida keltirilgan) tartibda ishlatiladi.

Lagranj metodi, aslini aytganda, energiyaviy metod bo'lib, u nafaqat nazariy mexanikada qo'llanib qolmasdan nazariy fizikada ham turli fizikaviy sistema (atom, yadro, elementar zarralar) jarayonlarini matematik talqin qilishda keng qo'llaniladi.

51-§. Siklik koordinatalar va integrallar. Energiya integrali

Mexanik sistemaning kinetik potensiali L (ya'ni kinetik va potensial energiyalar) ifodasida oshkor ravishda qatnashmaydigan umumlashgan koordinatalarga *siklik koordinatalar* deyiladi. Masalan, m massali moddiy nuqtaning fazodagi harakatida muhitning qarshiligini hisobga olmasak, kinetik, potensial energiya va Lagranj funksiyasi (umumlashgan) Dekart koordinatalar orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$T=\frac{1}{2}\cdot m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2),\quad P=mgz,\quad L=m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-mgz.$$

Bu yerda Oz o'qi vertikal yuqoriga yo'nalgan. Lagranj funksiyasi ifodasida ko'ramizki, unda x va y qatnashmaydi, demak, ushbu hol uchun x va y siklik koordinatalar hisoblanadi.

Agar s ta umumlashgan koordinatalarning k tasi $q_1, q_2, \ldots\ldots, q_k$ (k<s) siklik koordinatalarni tashkil qilsa, ta'rifga ko'ra

$$\frac{\partial L}{\partial q_j}=0, \qquad (j=\overline{1,k}) \qquad (18.9)$$

bo'ladi. Ushbu holda (18.8) tenglamaning k tasi

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}=0, \qquad (j=\overline{1,k}) \qquad (18.10)$$

kabi tenglamaga aylanadi. Bu tenglamalarni vat bo'yicha bir marta integrallab, bir yo'la k ta birinchi integrallarga ega bo'lamiz:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}=C_j, \qquad (j=\overline{1,k}) \qquad (18.11)$$

Bu tengliklar Lagranj tenglamalarining birinchi integrallari bo'lib, ular umumlashgan tezliklar, umumlashgan koordinatalar, vaqt va integrallash doimiylarini o'zaro bog'lab turadi va *siklik integrallar* deyiladi. Yuqoridagi misolga ko'ra

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}=const \text{ yoki } \dot{x}=const,\quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}=m\dot{y}=const \text{ yoki } \dot{y}=const$$

Ya'ni nuqta harakatining gorizontal tekislikdagi proyeksiyasi to'g'ri chiziqli tekis harakat bo'ladi. Agar $\dot{x}=0$, $\dot{y}=0$ bo'lsa, nuqta gorizontal tekislikda harakatsiz holatda bo'ladi.

Umuman, $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$ umumlashgan q_j koordinataga tegishli *umumlashgan impuls* deyiladi. Siklik koordinatalarga tegishli umumlashgan impulslar biz qarayotgan bog'lanishlar holida o'zgarmas bo'ladi. (18.11) ga ko'ra $P_j = C_j$.

Mexanik sistemaga qo'yilgan bog'lanishlar statsionar bo'lganligi sababli sistemaning kinetik potensiali L ifodasida vaqt oshkor ravishda qatnashmaydi, lekin u umumlashgan tezliklar va umumlashgan koordinatalar orqali vaqtga bog'liq bo'ladi. Ana shuni e'tiborga olgan holda kinetik potensialdan vaqt bo'yicha to'la hosila olamiz:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right).$$

Lagranj funksiyasi uchun yozilgan Lagranj tenglamasidan foydalanib, quyidagi almashtirish

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

ni yuqoridagi ifodaga qo'llaymiz:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^{s} \left(\dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{s} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

Hadlarni tenglamaning bir tomoniga ko'chirib va ikkalasi uchun vaqt bo'yicha hosilani umumlashtirib,

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^{s} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = 0$$

tenglamaga kelamiz. Demak, qavs ichidagi ifoda doimiy (o'zgarmas) miqdorga teng. Bu doimiy mazkur Lagranj tenglamasining birinchi integralli bo'lib, *energiya integrali* deyiladi va uni h bilan belgilaymiz:

$$h=\sum_{j=1}^{s}\dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-L \qquad (18.12)$$

Haqiqatdan ham, biz ko'rayotgan bog'lanishlarning statsionarli holida (18.12) tenglama mexanik energiyaning saqlanish qonunini ifodalaydi. Statsionar bog'lanishlar qo'yilgan mexanik sistemaning kinetik energiyasini umumlashgan tezliklarning kvadratik formasi tarzida ifodalash mumkin va shuning uchun:

$$\sum_{j=1}^{s}\dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}=\sum_{j=1}^{s}\dot{q}_j\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}=2T$$

o'rinli bo'ladi. Buni e'tiborga olib (18.12) tenglikni quyidagicha hisoblash mumkin,

$$h=2T-L=2T-(T-P)=T+P$$

ya'ni

$$h=T+P, \qquad (18.13)$$

mexanik energiyaning saqlanish qonunining ifodasiga kelamiz. Demak, doimiy h mexanik sistemaning to'la mexanik energiyasidan iborat va u jumladan mexanik sistemaning boshlang'ich paytdagi kinetik va potensial energiyalari yig'indisiga teng.

52-§. Ustuvor muvozanat haqida dastlabki tushunchalar

Faraz qilaylik, ideal, statsionar va golonom bog'lanishlar qo'yilgan mexanik sistemaning holati s-ta umumlashgan koordinatalar bilan aniqlansin. Agar s-ta erkinlik darajasiga ega bu sistema qo'yilgan kuchlar ta'sirida muvozanatda bo'lsa, u holda barcha umumlashgan kuchlar nolga teng:

$$Q_j=0, \qquad (j=\overline{1,s}) \qquad (18.13)$$

Konservativ sistema uchun bu shartlar sistemaning potensial energiyasidan umumlashgan koordinatalar bo'yicha olingan xususiy hosilalarning nolga tengligidan iborat munosabatlarga aylanadi:

$$\frac{\partial P}{\partial q_j}=0, \qquad (j=\overline{1,s}) \qquad (18.14)$$

Umumlashgan kuchlar faqat umumlashgan koordinatalargagina bog'liq hollarda yuqoridagi yoki pastdagi tenglamalar sistemasini umumlashgan koordinatalarga nisbatan yechib, sistema muvozanatda bo'ladigan holatlarning koordinatalarini aniqlaymiz. Agar umumlashgan kuchlar umumlashgan tezliklarga bog'liq bo'lsa, muvozanat holatning koordinatalarini aniqlashda barcha umumlashgan tezliklar nolga teng deb olinadi. *Muvozanat holatni umumlashgan* koordinatalar *(q_1, q_2,.....q_S)* sanoq boshi deb belgilasak, muvozanat holatda barcha umumlashgan koordinatalar ham, xuddi umumlashgan kuchlar kabi, nolga teng bo'ladi. Xullas, mexanik sistemaning muvozanat holatida $q_j=0$ $(j=1s)$. Biror boshlang'ich $t=t_0$ paytda sistemaga uning barcha umumlashgan koordinatalarni va umumlashgan tezliklarini qiymat jihatdan kichik miqdorlarga o'zgartiruvchi ko'chish beramiz. Sistemaning shu $t=t_0$ paytdagi boshlang'ich holatining umumlashgan koordinatalari va umumlashgan tezliklarini q_{jc} va $\dot{q}_{jo}$ $(j=\overline{1,s})$ deb belgilaymiz. Endi ixtiyoriy, istalgancha kichik 2 s-ta musbat sonlar tanlaymiz:

$$\varepsilon_1,\varepsilon_2,...\varepsilon_s; \qquad \varepsilon_1',\varepsilon_2',...\varepsilon_s',$$

Agar bu sonlar asosida boshqa shunday 2 s-ta musbat

$$\eta_1,\eta_2,.......,\eta_s; \qquad \eta_1',\eta_2',.....,\eta_s'$$

kichik sonlar tanlash mumkin bo'lsaki, t= paytdagi boshlang'ich umumlashgan koordinatalar va umumlashgan tezliklarning qiymatlari quyidagi

$$|q_{jo}|\le\eta_j; \qquad |\dot{q}_{jo}|\le\eta_j', \qquad (j=\overline{1,s}) \qquad (18.15)$$

kabi shartlarga bo'ysinuvchi hamma kichik qo'zg'alishlar uchun vaqtning keyingi hamma paytlarida

$$|q_j(t)| \leq \varepsilon_j; \qquad |\dot{q}_j(t)| \leq \varepsilon'_j, \qquad (j = \overline{1,s}) \tag{18.16}$$

shartlar bajarilsa mazkur muvozanat holat *ustuvor muvozanat holat*, aks holda *noustuvor muvozanat holat* deyiladi.

Agar, shu bilan birga, ustuvor muvozanat holatda barcha umumlashgan tezliklar vaqt o'tishi bilan nolga intilsa, ya'ni:

$$\lim_{t \to \infty} q_j(t) = 0; \qquad \lim_{t \to \infty} \dot{q}_j(t) = 0, \qquad (j = \overline{1,s})$$

U holda ushbu ustuvor muvozanat holat *asimptotik ustuvor* deyiladi. Ustuvor muvozanatning ushbu ta'rifi A.M. Lyapunovning ustuvor harakatga bergan umumiy ta'rifidan kelib chiadigan xususiy hol kabi natijadir.

53-§. Mexanik sistema muvozanati hamda Lagranj-Dirixle teoremasi

Ideal, statsionar va golonom bog'lanishli mexanik sistemaning konservativ kuchlar ta'sirida bo'lganida ustuvor muvozanat holatini belgilovchi yetarli shartlar quyidagi Lagranj-Dirixle teoremasi yordamida aniqlanadi.

Ideal, statsionar va golonom bog'lanishlar qo'yilgan konservativ sistemaning potensial energiyasi qat'iy minimumga erishadigan muvozanat holati uning ustuvor muvozanat holati bo'ladi.

Lagranj-Dirixlening ushbu teoremasiga binoan, agar potensial energiyaning ekstremumi uning minimumidan iborat bo'lsa, u holda sistemaning ushbu muvozanat holati ustuvor bo'ladi. Masalan, matematik mayatnikning hamma holatlari ichida vertikal eng pastkisi uning minimal potensial energiyaga ega holat va shuning uchun uning ustuvor muvozanat holati bo'ladi. Demak, Lagranj-Dirixle teoremasiga muvofiq konservativ sistema muvozanatining ustuvorligini isbotlash uchun ayni muvozanat holatda potensial energiya minimumda ekanligiga ishonch hosil qilish kifoya.

Erkinlik darajasi birga teng sistema uchun ushbu minimumni aniqlash oson. Haqiqatan ham, koordinata boshi sistemaning muvozanat holatida olinsa, ya'ni muvozanat holatda umumlashgan koordinata nolga teng bo'lsa va ushbu muvozanat holatda potensial energiyani ham nolga teng deb qabul qilsak (chunki, potensial energiya ixtiyoriy o'zgarmasgacha aniqlik bilan hisoblanadi):

$$P(o)=0$$

va potensial energiyaning minimumi uning ekstremumi ekanligidan, ya'ni:

$$(\frac{\partial^2 P}{\partial q^2})_{q=0} = 0,$$

konservativ sistema potensial energiyasining ushbu ekstremumiga taalluqli muvozanat holat ustuvor ekanligini aniqlash uchun potensial energiyaning minimumini ifodalovchi

$$(\frac{\partial^2 P}{\partial q^2})_{q=0} > 0$$

shart bajarilishi kifoya, ya'ni ustuvor muvozanat holatda potensial energiyadan umumlashgan koordinata bo'yicha olingan ikkinchi tartibli hosilasi albatta musbat bo'lishi shart.

Bordiyu, $(\frac{\partial^2 P}{\partial q^2})_{q=0} = 0$ bo'lsa, ya'ni ikkinchi tartibli hosila ham nolga teng va shu sababli u potensial energiya minimumining belgisi bo'la olmasa potensial energiya uchinchi, to'rtinchi va hokazo yuqori tartibli hosilalarini ketma-ket hisoblab minimum aniqlanadi.

Agar yuqori tartibli hosilalarning nolga teng bo'lmagan birinchisi juft tartibga ega va shu bilan musbat qiymatga teng bo'lsa, q=0 da potensial energiya minimumga ega va sistemaning ushbu q=0 dagi muvozanat holati ustuvor bo'ladi.

Agar yuqori tartibli hosilalarning nolga teng bo'lmagan birinchisi toq tartibda bo'lsa, q=0 da maksimum ham, minimum ham yo'q.

19-LEKSIYA

ZARBA

Zarba hodisasi. Asosiy tushunchalar va ta'riflar. Zarb kuchining moddiy nuqtaga ta'siri. Moddiy nuqta zarba nazariyasining umumiy teoremalari. Jismning qo'zg'almas sirtga zarbasi. Ikki jismning to'g'ri markaziy zarbasi. Zarbada kinetik energiyaning yo'qolishi. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatdagi jismga zarb kuchining ta'siri. Zarba markazi.

1. Zarba hodisasi qanday sodir bo'ladi?
2. Zarba qanday ta'riflanadi?
3. Zarb kuchi nima va u nuqtaga qanday ta'sir ko'rsatadi?
4. Zarbada nuqta harakat miqdori qanday bo'ladi?
5. Zarbada nuqta harakat miqdori momenti qanday o'zgaradi?
6. Zarbada mexanik sistema harakat miqdori qanday o'zgaradi?
7. Zarbada mexanik sistema harakat miqdori momenti qanday o'zgaradi?
8. Tiklash koeffitsienti deb nimaga aytiladi?
9. Tiklash koeffitsientining qiymatlariga qarab zarba qanday turlarga ajraladi?
10. Zarba qanday ikki fazadan iborat?
11. To'g'ri zarba, qiya zarba nima?
12. Tiklash koeffitsientini tajribada qanday aniqlash mumkin?
13. Ikki jismning qanday zarbasi to'g'ri markaziy zarba deyiladi?
14. Ikki sharning o'zaro zarbasida qanday hollar yuz beradi?
15. Zarbada kinetik energiyaning o'zgarishi qanday bo'ladi?
16. Karno teoremasi qanday ta'riflanadi?
17. Zarba markazi deb nimaga aytiladi?

Tayanch so'zlar va iboralar

Zarba. Zarba vaqti. Zarb kuchi. Zarb impulsi. Tiklash koeffitsienti. Zarbada ikki faza. To'g'ri zarba, qiya zarba. Elastik zarba, absolyut noelastik zarba, absolyut elastik zarba. To'g'ri markaziy zarba. Kinetik energiyaning yo'qolishi. Karno teoremasi. Zarba markazi.

54-§. Zarba hodisasi. Asosiy tushunchalar va ta'riflar

Ma'lumki, nuqta yoki jism nuqtalari tezligining o'zgarishi tezlanish bilan xarakterlanadi. Shu paytgacha biz tezlikning o'zgarishini vaqt o'zgarishiga proporsional bo'lgan, ya'ni chekli vaqt oralig'ida tezlik chekli miqdorga yoki cheksiz qisqa vaqt oralig'ida esa cheksiz kichik miqdorga o'zgaradigan mexanik harakatlar haqida suhbatlashdik. Tezlikning bunday uzluksiz bir tekis o'zgarishlari chekli tezlanishlar bilan xarakterlanadi va chekli miqdorlardagi kuchlar (masalan, og'irlik kuchi, elastik kuchi va hokazo) ta'sirida yuz beradi. Lekin mexanikada tezlikni chekli miqdorlarga o'zgarishi cheksiz qisqa vaqt oralig'ida sodir bo'ladigan va demak, uzlukli (notekis) xarakterdagi harakatlar ham mavjud. Bunday harakat haddan tashqari katta tezlanish bilan juda katta miqdordagi kuch ta'sirida yuz beradi. Cheksiz qisqa vaqt oralig'ida moddiy nuqtaning yoki qattiq jism nuqtalarining tezliklarini chekli miqdorlarga o'zgarishi bilan bog'liq mexanik hodisaga *zarba* deyiladi.

Cheksiz qisqa vaqt ichida cheksiz katta miqdor bilan jism nuqtalariga ta'sir ko'rsatib zarbani sodir qiladigan kuchga *zarb kuchi* deyiladi. Odatda, zarb kuchi zarba oldida va zarba oxirida nolga yaqin yoki nolga teng bo'ladi, zarba paytida noldan o'zining eng katta qiymatiga bir onda erishib, shu onda yana nolgacha kamayadi. Shuning uchun uning miqdori va funksional ko'rinishi haqida aniq ma'lumot berish qiyin. Zarb kuchi orqali o'tgan chiziqqa *zarba chizig'i* deyiladi.

Zarba ro'y bergan cheksiz qisqa vaqt oralig'i *zarb vaqti* deyiladi. Zarb kuchining miqdori cheksiz katta bo'lganligi, juda qisqa zarb vaqti oralig'ida zarb kuchining katta miqdorga tez o'zgarishi va nihoyat, bunday o'zgarish qonuniyatining noma'lumligi tufayli zarba hodisasini o'rganishda jismlarning o'zaro mexanik ta'sirlashuv o'lchovi sifatida kuch tushunchasidan emas, balki kuch impulsidan foydalanish qulay. Zarb kuchining nuqtaga yoki jism nuqtasiga cheksiz qisqa τ vaqt oralig'idagi ta'siri *zarb impulsi* deyiladi. Zarb impulsi zarb kuchidan farqli o'laroq, chekli miqdordir.

55-§. Zarb kuchining moddiy nuqtaga ta'siri

Massasi m ga teng biror moddiy M nuqta qo'yilgan kuchlar ta'sirida bo'lsin. Vaqtning biror t paytida, qisqa τ vaqt oralig'ida, unga oniy $\overline{F}_z$ zarb kuchi ham ta'sir etsin. Nyutonning ikkinchi qonunini differensial ko'rinishda olib,

$$m\frac{d\overline{v}}{dt}=\overline{F}+\overline{F}_z$$

yoki

$$md\overline{v}=\overline{F}dt+\overline{F}_z\cdot dt$$

va bu tenglamani tegishli chegaralarda integrallab, quyidagini hosil qilamiz:

$$m\cdot(\overline{u}-\overline{v})=\overline{S} \qquad (19.1)$$

Bu yerda $m\cdot(\overline{u}-\overline{v})=\overline{S}=\int_0^{\tau}\overline{F}_z\cdot dt$ — zarb impulsi. $\overline{v}$, $\overline{u}$ — nuqtaning zarba oldida va oxiridagi tezligi.

Bunday qisqa τ vaqt oralig'ida barcha chekli kuchlarning impulslari τ ga teng tartibdagi miqdorlar va zarb kuchining impulsiga nisbatan nolga teng.

(19.1) tenglama **zarba nazariyasining** asosiy tenglamasi deyiladi. Cheksiz qisqa τ vaqt oralig'ida tezlikning o'zgarishi $(\overline{u}-\overline{v})$ ga teng va chekli va demak, (19.1) dan zarb impulsining chekli miqdor ekanligini ayta olamiz. Shunday qilib, cheksiz qisqa τ vaqt oralig'ida nuqtaning tezligini chekli miqdorga o'zgarishi faqat cheksiz katta kuch ta'siridagina sodir bo'lar ekan. Zarbaviy bo'lmagan barcha boshqa chekli kuchlarning impulslari kichik miqdorlar. Zarb impulsi bir lahzada ta'sir etib nuqta tezligini

$$\overline{u}-\overline{v}=\frac{\overline{S}}{m} \qquad (19.2)$$

ga teng chekli miqdorga o'zgartiradi.

Zarbaning davom etish vaqti τ cheksiz kichikligini, nuqtaning tezligini esa chekli miqdor ekanligini e'tiborga olsak, zarba paytida nuqta siljimaydi desak ham bo'ladi.

Shunday qilib, zarba jismlarning o'zaro bir ondagi ta'sirlashuvidan iborat o'zgacha mexanik hodisa bo'lib, quyidagi muhim xususiyatlari bilan ajralib turadi:

1. Zarbaviy bo'lmagan barcha kuchlarning zarba paytidagi ta'siri nolga teng;

2. Zarba paytida zarba ta'siridagi nuqta qo'zg'almas qoladi;

3. Zarb kuchining bir ondagi oniy ta'siridan nuqta tezligining miqdori va yo'nalishi shu bir onda chekli o'zgaradi. Tezlikning o'zgarishi (19.2) yoki zarba nazariyasining asosiy tenglamasi (19.1) bilan aniqlanadi.

56-§. Moddiy nuqta zarba nazariyasining umumiy teoremalari

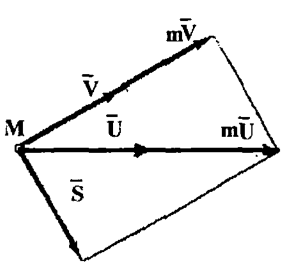
Yuqorida aytilganlarga e'tiboran, zarbada nuqtaga ta'sir etayotgan zarb kuchidan boshqa kuchlarni hisobga olmaymiz. m massali nuqtaning $\bar{v}$ tezligi zarba oxirida $\bar{u}$ ga o'zgarsa, uning harakat miqdorining o'zgarishi zarba nazariyasining asosiy tenglamasi (19.1) bilan ifodalanadi va quyidagicha ta'riflanadi: *moddiy nuqta harakat miqdorining zarba paytidagi o'zgarishi nuqtaga qo'yilgan zarb impulsiga teng.*

$$m\bar{u} - m\bar{v} = \bar{S} \qquad (19.3)$$

Moddiy nuqtaning tezligi zarbada (19.2) ga teng o'zgarsa ham nuqta zarba paytida (qisqa τ vaqt oralig'idagi) siljimaydi.

Agar zarb impulsi nolga teng bo'lsa, ya'ni $\bar{S} = 0$, u holda (19.3) dan $\bar{u} = \bar{v}$, demak, nuqtaning harakat miqdori va tezligi o'zgarmaydi.

Moddiy nuqta harakat miqdori momentining zarbada o'zgarishi haqida teorema



Bu teoremaning matematik ifodasini keltirib chiqarish uchun (19.1) tenglikni chap tomondan nuqta radius vektori $\bar{r}$ ga vektor ko'paytiramiz. U holda tenglikning chap tomonida nuqta harakat miqdorining zarba oldi va zarba oxirida momentlarining farqi va o'ng tomonda esa zarb impulsining momenti hosil bo'ladi, ya'ni

$$[\bar{r}\cdot m\bar{u}]-[\bar{r}\cdot m\bar{v}]=[\bar{r}\cdot\bar{S}]$$

yoki

$$\bar{k}_0(m\bar{u})-\bar{k}_0(m\bar{v})=\overline{M}_0(\bar{S}) \qquad (19.4)$$

Yuqorida, $\bar{r}$ nuqtaning 0 markazga nisbatan radius vektori.

Ushbu tenglama moddiy nuqta harakat miqdorining biror 0 markazga nisbatan momentining zarbada o'zgarishi haqidagi teoremani ifodalaydi.

U quyidagicha ta'riflanadi: *biror 0 markazga nisbatan moddiy nuqta harakat miqdori momentining zarba paytidagi o'zgarishi nuqtaga qo'yilgan zarb impulsining shu markazga nisbatan momentiga teng.*

Teoremaning (19.4) ifodasiga ko'ra zarba paytida $\overline{M}_0(\bar{S})=0$, ya'ni zarb impulsining momenti nolga teng bo'lsa, yoki zarb impulsi vektorining ta'sir chizig'i zarba paytida shu 0 markazdan o'tsa, nuqta harakat miqdori momenti shu markazga nisbatan zarba paytida o'zgarmaydi, ya'ni saqlanadi.

Teoremalarning har bir (19.3) va (19.4) vektorli ifodalarini koordinatalarning x, y, z o'qlariga proyeksiyalash bilan teoremalarning koordinata o'qlaridagi uchtadan algebraik tenglamalariga kelamiz. Har bir muayyan masalalarni yechishda shu algebraik ifodalardan foydalanamiz.

57-§. Jismning qo'zg'almas sirtga zarbasi

Zarba paytida jismlarni absolyut qattiq deb hisoblab bo'lmaydi, chunki haddan tashqari katta zarb kuchlari jismni sezilarli darajada deformatsiyalaydi. Demak, zarbada jismlarning fizik xossalari, albatta, namoyon bo'ladi. Zarba nazariyasida jismlarning fizik xossalari Nyutonning maxsus faraziyasi orqali hisobga olinadi.

Aytaylik, zarb bilan o'zaro to'qnashayotgan m_1 va m_2 massali jismlarning A_1 va A_2 nuqtalari to'qnash kelsin. U holda A_1 nuqtaning A_2 ga nisbatan nisbiy normal tezligi va A_2 nuqtaning A_1 ga nisbatan nisbiy normal tezliklari o'zaro teng va normal bo'ylab qarama-qarshi yo'nalgan. Zarbadan oldingi va zarba oxiridagi ushbu nisbiy normal tezliklarni, tegishli ravishda, $\bar{v}$, va $\bar{u}$ bilan belgilasak, ularning modullarining quyidagi nisbatiga

$$k = \frac{u}{v} \qquad (19.5)$$

zarbadagi tiklash koeffitsienti deyiladi.

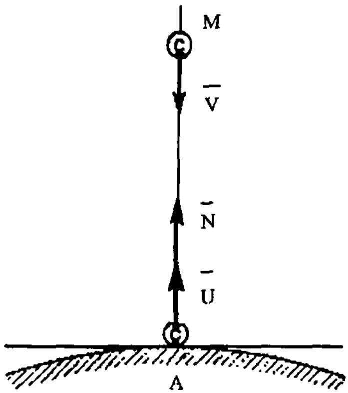
Nyuton faraziyasi (19.5) quyidagicha ta'riflanadi: *zarbadagi jismlarning zarba oxiri va oldi nisbiy normal tezliklari modulining nisbati tiklash koeffitsientiga teng.*

Fizik nuqtai nazardan zarba ikki fazadan iborat bo'ladi. Cheksiz qisqa zarb vaqtining birinchi fazasi o'zaro zarbadagi jismlar tezliklari tenglashgunicha deformatsiyalanadi, ikkinchi faza esa jismlar deformatsiyadan chiqquncha davom etadi.

Tiklash koeffitsientining qiymatlari zarba xarakterini belgilaydi. k=1 **absolyut elastik**, k=0 **absolyut noelastik**, 0<k<1 **elastik zarba** deyiladi.

Zarba hodisasining ikki fazasini tasdiqlash maqsadida sharni (nuqta) silliq qo'zg'almas sirtga zarbasini qaraymiz. m massali shar sirtga normal bo'ylab $\bar{v}$ tezlik bilan vertikal pastga harakatlansin. Sharni sirtga urilishida silliq sirtning sharga ko'rsatadigan reaksiyasi zarb kuchi bo'ladi. Bu zarb kuchining impulsi — zarb impulsi $\bar{S}$ sirtga normal bo'ylab yo'nalgan, chunki sirt silliq. Agar qo'zg'almas sirtga normal urilayotgan jism massa markazidan o'tsa (shar holida bu shart har doim bajariladi), **markaziy zarba** deyiladi. Agar jism massa markazining zarba oldi tezligi $\bar{v}$ sirtga normal bo'ylab yo'nalsa, zarba **to'g'ri markaziy** bo'ladi, aks holda, ya'ni jism massa markazining zarba oldi tezlik vektori $\bar{v}$ sirtga normal bilan α burchak hosil qilsa, qiya zarba deyiladi.

To'g'ri zarba. Zarbaning birinchi va ikkinchi fazalari uchun harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teorema (19.3) dan foydalanamiz. Qo'zg'almas sirtga urilayotgan shar uchun zarbaning birinchi fazasi oxirida va ikkinchi fazasi boshida tezligining nolga tengligini hisobga olib, (19.3) ni sirtga normal o'qqa proyeksiyasini yozamiz.



Zarba to‘g‘ri bo‘lgani uchun $u_n = u$, $v_n = -v$, $S_{1n} = S_1$ $S_{2n} = S_2$ va $S = S_1 + S_2$. Demak, harakat miqdorining o‘zgarishi

$$mu+mv=S$$

kabi bo‘ladi. (19.5) ga ko‘ra u=kv ekanligini e’tiborga olsak, zarb impulsi uchun

$$S=m(1+k)v \qquad (19.6)$$

ifodaga kelamiz.

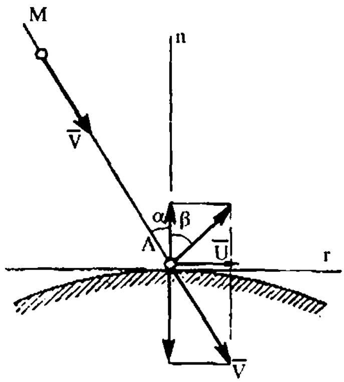
Demak, agar sharning massasi m, zarba oldi tezligi v, tiklash koeffitsienti k berilgan bo‘lsa, zarba oxiri tezligi u=kv, zarb impulsi $S=m(1+k)v$ ga tengligini aniqlaymiz.

Qiya zarba. Ushbu hol uchun (19.3) ni sirtga normal va urinma o‘qlarga proyeksiyalaymiz:

$$mu_n - mv_n = S_n, \quad mu_\tau - mv_\tau = 0$$

Nyuton faraziyasiga ko‘ra:

$$|u_n| = k \cdot |v_n|$$



Zarba oxirida shar markazi tezligining moduli

$$u=\sqrt{u_n^2+u_\tau^2}=\sqrt{k^2\cdot v_n^2+v_\tau^2}=\sqrt{(k\cdot\cos\alpha)^2+(v\cdot\sin\alpha)^2}$$
$$=v\sqrt{k^2\cdot\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}$$

Tushish α va qaytish β burchaklari o‘zaro quyidagicha bog‘langan:

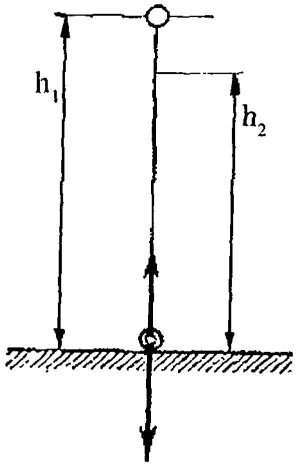
$$tg\alpha=\frac{v_\tau}{|v_n|},\quad tg\beta=\frac{u_\tau}{|u_n|}=\frac{v_\tau}{k\cdot|v_n|}=\frac{1}{k}tg\alpha$$

Absolyut elastik zarbada k=1 va α=β.

Absolyut noelastik zarbada k=0 va tushish α burchakning har qanday qiymatida ham qaytish β burchak 90°, ya’ni shar sirtda qoladi.

Elastik zarbada k<1 va β>α.

Tiklash koeffitsientini tajribada aniqlash. Massasi katta, qo‘zg‘almas plitaga h_l balandlikdan boshlang‘ich tezliksiz shar tashlansin. U holda sharning zarba oldi tezligi $v=\sqrt{2gh_1}$ ga teng bo‘ladi. Zarbadan so‘ng shar h_2 balandlikka ko‘tarilsin. Demak, sharning zarba oxiri tezligi $u=\sqrt{2gh_2}$ ga teng. Tezliklarning ushbu qiymatlari har gal kinetik energiyaning o'zgarishi haqidagi teoremadan aniqlanishi ham mumkin. Masalan, $0-\frac{mu^2}{2}=-mgh_2$. Tiklash koeffitsientini balandliklar h_1, h_2 orqali aniqlaymiz.

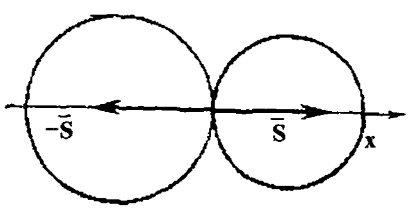


$$k=u/v=\sqrt{h_2/h_1}$$

Agar zarba absolyut noelastik bo'lsa, zarba birinchi fazadayoq tugaydi va $h_2=0$. Absolyut elastik zarbada $h_2=h_1$ va $k=1$; $u=v$.

58-§. Ikki jismning to'g'ri markaziy zarbasi

Massalari m_1, m_2 ga teng va sirtlari absolyut silliq ikki jismning (sharlarning) o'zaro zarb bilan to'qnashuvini tekshiramiz.



Ular to'qnashuvgacha massalar markazini birlashtiruvchi chiziqqa parallel $\bar{v}_1$ va $\bar{v}_2$ tezliklar bilan ilgarilanma harakat qilsin. Zarbada umumiy to'qnashuv nuqtadan o'tkazilgan normal chiziq, ya'ni zarba chizig'i jismlarning massa markazidan o'tsin. Ushbu shartlarni qanoatlantiruvchi to'qnashuvga ikki jismning **to'g'ri markaziy zarbasi deyiladi**. Birinchi jism uchun ikkinchisining to'qnashuvdagi reaksiya kuchi zarb impulsi va aksincha, ikkinchi jism uchun birinchisining reaksiya kuchi zarb impulsi bo'ladi. Shuning uchun, zarbagacha ilgarilanma harakatlangan jismlar zarbadan keyin ham ilgarilanma harakat qiladi. Masala zarbadan keyingi ilgarilanma harakat tezliklari $\bar{u}_1$ va $\bar{u}_2$ ni aniqlashdan iborat bo'ladi.

Ushbu ikki jismning bir mexanik sistema deb qarasak, sistemaga tashqi zarb impulslari qo'yilmagan bo'ladi va zarbada mexanik sistema harakat miqdori saqlanadi, ya'ni

$$m_1\bar{u}_1 + m_2\bar{u}_2 = m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2$$

Barcha tezliklarning zarba chizig'iga proyeksiyasi tezliklarning algebraik miqdoriga teng va yuqoridagi tenglikni vektor belgisiz yozish mumkin

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2 \qquad (19.7)$$

Tiklash koeffitsientini quyidagi mulohazalar bilan aniqlaymiz. Zarbaning birinchi fazasida birinchi jism (soqqa shar) ikkinchisiga urilib, $\bar{v}_1 — \bar{v}_2$ tezlik bilan unga kirib boradi (ezadi). Zarbaning ikkinchi fazasida esa shu soqqa jism ikkinchisidan $\bar{u}_1 — \bar{u}_2$ tezlik bilan orqada qoladi. Shuning uchun ikki jismning o'zaro zarbasida tiklash koeffitsienti

$$k = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2} \qquad (19.8)$$

ga teng bo'ladi.

Oxirgi ikki tenglamadan jismlarning zarbadan keyingi tezliklarini aniqlaymiz

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= v_2 - (1+k)\frac{m_1}{m_1+m_2}(v_1 - v_2) \\ u_2 &= v_2 - (1+k)\frac{m_2}{m_1+m_2}(v_2 - v_1) \end{aligned}\right\} \qquad (19.9)$$

Absolyut noelastik zarba k=0. U holda (19.9) dan

$$u_1 = u_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \qquad (19.10)$$

Demak, absolyut noelastik zarbadan keyin jismlarning tezliklari teng bo'ladi, ya'ni ular bir-birlaridan ajrashmaydi. Buni (19.8) dan ham ko'ramiz. k=0 da $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$ Birinchi jismga ikkinchisi tomondan qo'yilgan zarb impulsi ikkinchisiga qo'yilgan zarb impulsiga teng va qarama-qarshi

$$S_2 = m_2 u_2 - m_2 v_2 = -m_1(u_2 - v_1) = -m_1(u_1 - v_1) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)$$

$$S_1 = -S_2$$

Absolyut elastik zarba k=1. Ushbu holda

$$u_1 = v_1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)$$

$$u_2 = v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)$$

Jismlarga ta'sir etgan zarb impulsi

$$S_2 = -S_1 = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)$$

ga teng bo'ladi, ya'ni absolyut elastik zarbaning zarb impulsi absolyut noelastik zarbaning zarb impulsidan ikki marta katta.

Ikkita bir xil $m_1 = m_2$ sharning zarbasi. Bunda (19.9) quyidagicha o'zgaradi:

$$u_1 = \frac{1}{2}(1-k)v_1 + \frac{1}{2}(1+k)v_2$$

$$u_2 = \frac{1}{2}(1+k)v_1 + \frac{1}{2}(1-k)v_2$$

Absolyut noelastik zarba k=0.

$$u_2 = u_1 = \frac{v_1 + v_2}{2}, \qquad S_2 = -S_1 = \frac{m}{2}(v_1 - v_2)$$

Zarba oxirida sharchalarning tezliklari teng va zarba oldi tezliklari yig'indisining yarmiga teng. Chunonchi, zarba oldida ikkinchi shar tinch tursa, zarbadan keyin birinchi shar bilan birgalikda uning zarba oldi tezligining yarmiga teng tezlik bilan zarba chizig'i bo'ylab harakatlanadi.

Absolyut elastik zarba k=1. U holda

$$u_1 = v_2, \quad u_2 = v_1, \quad S_2 = -S_1 = m(v_1 - v_2),$$

ya'ni sharlar zarbadan so'ng tezliklari bilan almashadi. Agar ikkinchi shar boshlang'ich paytda tinch tursa, zarbadan so'ng birinchi shar harakatsiz qoladi, ikkinchisi esa birinchining tezligi bilan zarb chizig'i bo'ylab harakatlanadi.

59-§. Mexanik sistema uchun zarba nazariyasi

Moddiy nuqta zarba nazariyasining umumiy teoremalarini va ularning natijalarini erkin mexanik sistema holi uchun umumlashtiramiz.

Jumladan, harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teorema va uning (19.3) ifodasi quyidagicha o'zgaradi:

$$\overline{Q} - \overline{Q}_0 = \sum_{K=1}^{n} \overline{S}_K \qquad (19.11)$$

Bu yerda $\overline{Q}$, $\overline{Q}_0$, mos ravishda, mexanik sistemaning zarba oldi va zarba oxiridagi harakat miqdori. Ular ta'rifga ko'ra, $\overline{Q} = m\overline{u}_C$, $\overline{Q}_0 = m\overline{v}_C$ ga teng. $\overline{u}_C$, $\overline{v}_C$ — mexanik sistema massa markazining zarba oxiri va oldi tezligi.

$\sum \bar{S}_K$ — zarb impulslarining bosh vektori, m — sistema massasi.

Teorema quyidagicha ta'riflanadi: **zarba paytida sistema harakat miqdorining o'zgarishi sistemaga ta'sir etuvchi zarb impulslarining vektorli yig'indisiga teng.**

Sistema massalar markazining tezligi zarbadan so'ng quyidagicha o'zgaradi:

$$\bar{u}_C - \bar{v}_C = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}\bar{S}_k \qquad (19.12)$$

Mexanik sistema massa markazi moddiy nuqta kabi zarba paytida *siljimaydi, lekin tezligini uzlukli o'zgartiradi.*

Kinetik momentning zarbada o'zgarishi. Sistemaning kinetik momentining o'zgarishi haqidagi teoremani quyidagicha ifodalaymiz:

$$d\bar{K}_0 = \sum\left[\bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)}\right]\cdot dt$$

Ushbu tenglikning har ikki tomonini zarb vaqti τ oralig'ida integrallaymiz, bunda sistema nuqtalari radius vektori $\bar{r}_k$ zarba paytida o'zgarmaydigan deb hisoblaymiz:

$$\bar{K} - \bar{K}_0^{(0)} = \sum_{k=1}^{n}\overline{m}_0\left(\bar{S}_k^e\right) \qquad (19.13)$$

Mexanik sistemaning biror 0 markazga nisbatan kinetik momentini zarba paytidagi o'zgarishi sistemaga ta'sir etayotgan zarb impulslarining shu markazga nisbatan bosh momentiga vektorli teng.

Ushbu teoremalarning (19.11) va (19.13) ifodalari erkin mexanik sistema zarba nazariyasining asosiy tenglamalari deyiladi.

Agar tashqi zarb impulslari momentining yig'indisi nolga teng bo'lsa (masalan, ichki zarb impulslarining momenti har doim nol), zarba paytida sistemaning kinetik momenti o'zgarmaydi.

60-§. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jismga zarbaning ta'siri. Zarba markazi

Jismning aylanish o'qi bo'ylab Oz ni yo'naltiramiz. Vaqtning biron paytida jismga zarba berilsin. Zarba oldi va oxirida jismning burchak tezligini, mos ravishda, ω_0 va ω bilan belgilab va jism kinetik momentining burchak tezligi orqali ifodasini e'tiborga olib (19.13) ni quyidagicha yozamiz:

$$I_Z \cdot (\omega - \omega_0) = m_Z(\bar{S}) \qquad (19.14)$$

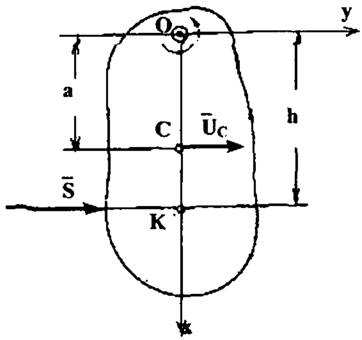
Aylanish o'qi mahkamlangan A va B bog'lanish reaksiyalari zarb impulslari $\bar{S}_A$ va $\bar{S}_B$ ning Oz o'qqa nisbatan momentlari nolga teng:

$$m_Z(\bar{S}_A) = m_Z(\bar{S}_B) = 0$$

Jismning burchak tezligi quyidagicha o'zgaradi:

$$\omega - \omega_0 = \frac{m_Z(\bar{S})}{I_Z} \qquad (19.15)$$

Qo'zg'almas o'q atrofida aylanayotgan jism burchak tezligining jismga berilgan zarbadan o'zgarishi o'qqa nisbatan zarb impulsi momentining shu o'qqa nisbatan jism inersiya momentiga nisbatiga teng. Zarba markazi Enda, A va B podshipniklarga o'rnatilgan qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakat qiladigan jismga zarba qanday berilganda $\bar{S}_A$ va $\bar{S}_B$ -reaksiyalarning zarb impulslari nolga teng bo'lish shartlarini aniqlaymiz. Masalani quyidagicha soddalashtirib o'rganamiz. Oz o'q bo'ylab yo'naltirilgan aylanish o'qi rasm tekisligiga tik bo'lsin. Jismning simmetriya tekisligi bor bo'lib, u rasm tekisligida joylashsin. Jismning massa markazi S aylanish o'qi O dan OS=a masofada yotsin. Boshlang'ich paytda jism harakatsiz tursin $\omega_0 = 0$. Berilgan zarbaning impulsi ham rasm tekisligida ta'sir etsin. Koordinata o'qlarini rasmda ko'rsatilgandek olamiz.



Sistema harakat miqdori o'zgarishining (19.11) ifodasining x,y o'qlardagi proyeksiyasi quyidagicha aniqlanadi:

$$O = S_X + S_{A_X} + S_{B_X}$$

$$mu_C = S_Y + S_{A_Y} + S_{B_Y}$$

Masalaning talabiga ko'ra $S_A = S_B = 0$. Demak,

$$S_X = 0; \; S_Y = S = mu_C = m \cdot a\omega$$

Burchak tezlikning (19.15) ifodasidan foydalanib va zarb impulsining momenti

$$m_Z(S) = m_0(S) = S \cdot h$$

tengligini e'tiborga olsak, quyidagi munosabatga kelamiz:

$$S = m \cdot a \cdot \frac{S \cdot h}{I_Z}$$

Bundan

$$h = \frac{I_Z}{m \cdot a}$$

aniqlaymiz. Zarba chizig'i aylanish o'qidan h masofada o'qqa va o'q bilan massa markazini birlashtiruvchi qisqa kesma chizig'iga tik yo'nalgan bo'lishi kerak. Zarba chizig'ining shu qisqa kesma chiziq bilan kesishgan nuqtaga **zarba markazi** deyiladi.

61-§. Zarbada kinetik energiyaning yo'qolishi

Yuqoridagi *(19.9)* formula zarbada jismlar tezligining o'zgarishini ifodalaydi. U yordamida kinetik energiyaning zarbada o'zgarishini hisoblash mumkin. Tiklash koeffitsienti k ga teng zarbada ikki jismning to'qnashuvi kinetik energiyasining yo'qolishini aniqlaymiz. Sistemaning zarba oldi kinetik energiyasi

$$T_0 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2};$$

va zarba oxiridagi kinetik energiyasi

$$T = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}$$

ga teng bo'lsin. U holda kinetik energiyaning zarbada yo'qolishi

$$T_0 - T = \frac{m_1}{2}\left(v_1^2 - u_1^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(v_2^2 - u_2^2\right)$$

ga teng (19.8) va *(19.9)* formulalarni qo'llab ikki *jismning* to'g'ri markaziy zarbasida kinetik energiyaning yo'qolishi uchun quyidagi ifodaga kelamiz:

$$T_0 - T = \left(1 - k^2\right)\frac{m_1 m_2}{2\left(m_1 + m_2\right)}\left(v_1 - v_2\right)^2 \qquad (19.16)$$

Elastik zarbada $o<k<1$, demak, (19.16) ga ko'ra $T_0>T$, ya'ni har qanday elastik zarbada kinetik energiyaning yo'qolishi yuz beradi. Absolyut elastik zarbada $k=1$ va demak, $T=T_0$, shunday qilib, faqat absolyut elastik zarbadagina kinetik energiya yo'qolmaydi.

Ikki jismning to'g'ri markaziy zarbasida yo'qolgan kinetik energiya ifodasi (19.16) formulani ularning yo'qotgan tezliklari orqali ifodalaymiz. Ko'rdikki, kinetik energiya absolyut noelastik va elastik zarbalarda yo'qoladi. Dastlab absolyut noelastik zarbani qaraymiz. Yuqorida isbotlaganimizdek absolyut noelastik zarba oxirida ikkala jismning tezliklari tenglashadi:

$$u_2 = u_1 = u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \rightarrow$$

Zarbadan keyin kinetik energiya esa

$$2T = (m_1 + m_2)u^2 = (m_1 v_1 + m_2 v_2)u$$

U holda

$$T_0 - T = T_0 - 2T + T = \frac{1}{2}\left(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - 2m_1 v_1 u - 2m_2 v_2 u + m_1 u^2 + m_2 u^2\right)$$

yoki birinchi va ikkinchi jismlarning yo'qotgan kinetik energiyalari orqali yozsak quyidagi ifodaga kelamiz:

$$T_0 - T = \frac{1}{2} m_1 (v_1 - u)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2 - u)^2 = T' \qquad (19.17)$$

(19.17) zarbada yo'qolgan kinetik energiyaning jismlarning yo'qotgan tezliklari (v_1-u) va (v_2-u) orqali ifodasidir. U **Karno teoremasini ifodalaydi.**

Absolyut noelastik zarbada jismlar yo'qotgan kinetik energiya ular yo'qotgan tezliklari kinetik energiyasiga teng.

Jismlarning zarbada yo'qotgan tezliklar kinetik energiyasi, ya'ni jismlarning yo'qotgan tezliklarda harakatlanganida kinetik energiyalari yig'indisini (19.17) da T' bilan belgiladik.

Elastik zarba uchun yuqoridagi amallarni bajarib yo'qolgan kinetik energiyani yo'qolgan tezliklar kinetik energiyasi bilan bog'lovchi Karno teoremasining quyidagi ifodasini keltirib chiqarish mumkin:

$$T_0 - T = \frac{1-k}{1+k} T' \qquad (19.18)$$

Elastik zarbada yo'qolgan kinetik energiya yo'qolgan tezliklar kinetik energiyasining (1-k)/(1+k) qismiga teng.

Agar zarbagacha ikkinchi jism tinch turgan bo'lsa, sistemaning zarbagacha kinetik energiyasi birinchi jismning kinetik energiyasidan $\left(T_0 = \frac{m_1}{2} v_1^2\right)$ iborat bo'ladi.

Kinetik energiyaning yo'qolishi esa

$$T_0 - T = \left(1 - k^2\right)\frac{m_2}{m_1 + m_2} T_0 \qquad (19.19)$$

bilan aniqlanadi.

Absolyut noelastik zarbada k=0 va

$$T_0 - T = \frac{m_2}{m_1 + m_2} T_0$$

Ushbu ifodani quyidagicha yozamiz:

$$T_0 - T = \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} T_0$$

Agar ikkinchi jism qo'zg'almas turgan bo'lsa, absolyut noelastik zarbada kinetik energiyaning yo'qolishi birinchi jism kinetik energiyasining ma'lum qismini tashkil qilar ekan. Bu esa zarba beruvchi soqqa jism massasining qo'zg'almas ikkinchi jism massasiga nisbati m_1/m_2 ga bog'liq bo'ladi. Bu nisbat qancha kichik bo'lsa, kinetik energiyaning noelastik zarbada yo'qolishi shuncha katta bo'ladi. Chunonchi, masalalari teng bo'lsa, ya'ni ikkita bir xil sharning, birinchisi tinch turgan ikkinchiga noelastik zarba bersa, birinchining kinetik energiyasining yarmi yo'qoldi. $m_2 >> m_1$ holda esa birinchi jismning kinetik energiyasiga teng kinetik energiya yo'qoladi. Metallni qizdirib bolg'alashda sandon bilan qizdirilgan metall massasi m_2 ga qaraganda bolg'a massasi m_1 juda kichik bo'ladi va bolg'aning hamma kinetik energiyasi ikkinchi jismning deformatsiyasiga sarflanadi. Lekin bolg'aning massasi juda kichik bo'lsa, uning kinetik energiyasi T_0 juda kichiklashib ketadi va uning foydali ta'sir koeffitsienti $\frac{m_2}{m_1 + m_2} = 1$ maksimal bo'lsada, bolg'a maqsadga teskari holda juda kichik ish bajaradi. Aksincha, mixni bolg'a bilan qoqishda $m_2<<m_1$ va T_0(T, ya'ni kinetik energiyaning yo'qolishi deyarli nolga teng. Bolg'aning kinetik energiyasi zarbadan keyin mixning kinetik energiyasiga o'tadi.

MUNDARIJA

O'quv-uslubiy nashr

BOTIR AHMADXO'JAYEV

NAZARIY MEXANIKA

Muharrir ***Abduvali Qutbiddin, Gavhar Mirzayeva***
Badiiy muharrir ***Bahriddin Bozorov***
Tex. muharrir ***Yelena Demchenko***
Musahhih ***Nilufar Jabborova***
Kompyuterda sahifalovchi ***Nodir Rahimov***

IB № 4178

Bosishga 21.04.2006-y.da ruxsat etildi. Bichimi 84x108 1/32.
Bosma tobog'i 6,125. Shartli bosma tobog'i 10,29.
Adadi 2000 nusxa. Bahosi kelishilgan narxda.
Buyurtma № 91.

«Yangi asr avlodi» nashriyot-matbaa markazida tayyorlandi.
«Yoshlar matbuoti» bosmaxonasida bosildi.
700113 Toshkent, Chilonzor-8, Qatortol ko'chasi, 60.