П.С.Курбонов, Ш.Ч.Мисиров, Ч.С.Саидов. Назарий механикадан саволлар ва масалалар ечиш. Т., «Fan va texnologiya» нашриёти, 2004 й., 308 б.

Ушбу қўлланмада назарий механика курсининг барча бобларига оид 500 дан ортиқ саволлар ва мустақил ишлар учун топшириқлар берилган. Назарий механиканинг барча бўлимларига оид назарий метариаллар ва 120 дан ортиқ амалий масалалар ечиб таҳлил қилинган. Охирги бўлим чизиқсиз механик тебранишлар назариясида асимптотик методларнинг қўлланишига бағишланган бўлиб, параметрик тебранишларнинг содир бўлиш шартлари ва бундай тебранишлар пайдо бўлишининг олдини олиш усуллари математик маятник мисолида ўрганилган.

Давлат университети физика, механика ва математика, амалий математика, муҳандислик йўналишлари факультетлари талабалари ва назарий механика бўйича ўз билимларини кенгайтиришни истаган мутахассисларга мўлжалланган.

Тақризчилар:

Термиз Давлат университети физика-математика факультети декани, физика-математика фанлари доктори, профессор **Э.Ю.Тўраев.**

Дифференциал тенгламалар ва геометрия кафедарасининг мудири, физика-математика фанлари доктори, профессор **М.Мирсобиров.**

Тошкент Давлат техника университети «Назарий механика ва машина деталлари» кафедраси доценти **Ф.Д.Файзуллаева.**

ҲОЗИРГИ ЗАМОН ТЕХНИКА ФАНЛАРИНИНГ РИВОЖЛАНИШИДА НАЗАРИЙ МЕХАНИКАНИНГ АҲАМИЯТИ

Ўзбекистон Республикаси мустақиллик даврининг ўн учинчи йилига дадил қадам қўйди. Якунланган йиллар жумҳуриятимиз ижтимоий-сиёсий ҳаётида муҳим воқеаларга бой бўлди. Жонажон Ўзбекистонимиз мустақиллигининг ўн икки йиллиги нишонланди. Истиқболимиз кафолати бўлмиш бош қонун –Ўзбекистон Конститутцияси қабул қилинди. Ўзбекистон Республикасининг Президенти И.А.Каримовнинг "Ўзбекистоннинг ўз истиқбол ва тараққиёт йўли", "Ўзбекистон буюк келажак сари" номли китоблари ва бошқа асарлари чоп этилди. Бу асарларда давлатимиз ва жамиятимизнинг равнақи йўлидаги маънавий бойлигимизнинг ўрни ва роли аниқ ҳамда батафсил белгилаб берилди. Китобларда илмий билимнинг ривожланиш ва унинг амалиётга татбиқи, илмий ва амалий йўналишлар ва уларнинг ўзаро уйгунлашиб кетиши тўғрисида фикр юритилади. Турли соҳалар бўйича мустақил республиканинг фан ва техникасини ҳозирги замон талабига мувофиқ қайта кўриш ва уларни ривожлантириш концепциясини ишлаб чиқиш муаммолари ҳақида ҳам фикрлар айтилган.Мустақил республикамиз ўзининг мустақил фан ва техникасига эга бўлиши керак. Ҳозирги замон техникаси ривожланиши асосий йўналишларининг илмий асосини яратишда назарий механика ҳал қилувчи рол ўйнайди. Шундай экан, олий илмгоҳларда умумтехника фанларининг илмий асоси бўлиб хизмат қиладиган назарий механика фанини ўқитиш ишларини тубдан яхшилаш масаласи кун тартибидаги муҳим масала эканлигини унутмаслигимиз керак.

Фан ва техниканинг янги масалалари, уларнинг янги татбиқлари ўқитувчи орқалигина талабаларга етказилади. Айниқса, фаннинг ишлаб чиқаришдаги роли ва аҳамиятини олий муҳандислик маълумотни шакллантиришда ўқитувчининг шахсий илмий иши муҳим восита ҳисобланади. Афсуски, бизда ўқитувчилик фаолияти кўп йиллар давомида миллий анъаналар ва табиат фанлари эришган ютуқлар заминидан узилган ҳолда юритилиб келинди. Бунинг оқибатини фарзандларимизнинг ўтмишда яратилган нодир дурдоналаримиздан бехабарлигида, миллий қадриятларга нисбатан бепарволигида, миллий ифтихор туйғуларининг пасайиб кетганлигида ва бошқаларда кўриш мумкин.

Ўзбекистон мустақиллик даврининг ва ривожланишининг навбатдаги босқичига дадил қадамини қўймоқда. Мустақил Ўзбекистонимизга эркин ва ижодий фикрлай оладиган, маънавий билимдон, баркамол кадрлар керак. Юртимизни билимдон кадрлар билан таъминлаб туриш масаласини ҳам ўқитувчиларсиз амалга ошириб бўлмайди. Ўқитувчи шахсини камолга етказиш эса оғир ва мураккаб жараён. Бу жараённинг узвий қисмларидан бири Шарқнинг машҳур мутафаккирлари ҳаёти ва ижодини, улар қолдирган бой илмий-маданий меросини атрофлича ўрганиш, уни ташвиқ ва тарғиб қилиш ўқитувчи иш фаолиятининг ажралмас қисмидир.

Мустақил Республикамизда турли техникавий жараёнларнинг ривожланиб бориши механик ҳаракатнинг янги-янги муаммоларини ечиш ва ҳал қилишга чорламоқда.

Назарий механика қонунлари ва усуллари ҳозирги замон фан ва техникасининг амалий ва назарий масалаларини ҳал қилишнинг асосий текшириш воситалари бўлиб қолди. Шундай экан, назарий механика ва унинг қўлланишига доир муаммоларни ҳал қилишда бу фанга тегишли бўлган масалаларни турли усуллар билан ечиш муҳим аҳамиятга эга. Кейинги вақтларда мутахассислар назарий механика бўйича ечиладиган масалаларни қисмларга, яъни гуруҳларга бўлмоқдалар:

1. Қисқа мазмунли масалалар гуруҳи.
2. Ўртача мазмунли масалалар гуруҳи.
3. Умумлашган масалалар гуруҳи.

Бу учала гуруҳ масалалар тўпламини ҳозирги пайтда фан ва техника соҳасида пайдо бўлган ва бўлаётган масалалар билан узлуксиз тўлдириб туриш мутахассисларнинг асосий вазифаларидан бири ҳисобланади.

Ҳозирги пайтда бизнинг кўпчилик олий мактабларимизнинг ўқув режа дастурларида юқорида келтирилган учала гуруҳ масалалари етарлича мазмунда акс этганлиги сезилиб туради. Лекин педагог кадрлар тайёрлайдиган олийгоҳларнинг дастурларида бу масалани тўлиқ мазмунда ҳал қилинган деб бўлмайди. Кўпчилик машғулот олиб борувчилар эски, мавжуд иш усулларидан фойдаланиб, оллинги вақтда яратилган масалалар тўплами доирасидан чиқмайдилар. Бундан ташқари ҳозирги фан, техника ҳаётида фақатгина чекли шаклда /интегралланувчи/ масалаларни ечиш билан чегараланиб қолиш мумкин бўлмай қолди. Балки олий мактабнинг ҳаёти назарий механика ва бошқа фанлар бўйича ҳам аналитик усул билан ечиб бўлмайдиган /чекли кўринишда интеграллашмайдиган/ механик ҳаракат масалаларини ечишни кун тартибига келтириб қўйди.

Ҳозирги вақтда амалий ва лаборатория ишларига ЭҲМ ва персонал компьютерни олиб кириш илмий меҳнатнинг ишлаб чиқарувчи куч эканлик даражасини янада кўтариш имкониятини бермоқда. Шундай экан, мутахассислар аллақачон IV гуруҳ масалаларини амалий ишлаб чиқаришга қўллаб, бундай масалалар гуруҳи назарий механика бўйича амалий ва лаборатория ишларининг асосий мазмунини ташкил қилмоқда. Ҳозирги пайтда ҳар бир ижодкор ўқитувчи ўз иш фаолиятида ўқитаётган предмети бўйича кундалик ҳаётда амалий масалаларни

ЭҲМ кучи билан ечишни ўқувчилар, талабалар ҳаёти билан боғлаши унинг муҳим вазифаларидан биридир.

I. НАЗАРИЙ МЕХАНИКАДАН САВОЛЛАР ВА ТОПШИРИҚЛАР

I. Умумий саволлар.

1. Назарий механиканинг предмети, методлари ва вазифалари.
2. Назарий механиканинг асосий тушунчалари (материал нуқта, абсолют қаттиқ жисм, куч ва масса, фазо ва вақт, саноқ тизими).
3. Назарий механика – ҳозирги замон техникаси тараққиётининг илмий асоси эканлиги.
4. Назарий механика ривожланишининг тарихий босқичлари.

II. СТАТИКА

1-§. Статиканинг асосий тушунчалари ва аксиомалари. Боғланишлар ва уларнинг турлари. Боғланишларнинг реакцияси

1. Статиканинг предмети, асосий тушунчалари ва вазифасини изоҳланг ва тушунтиринг.
2. Механиканинг муҳим тушунчаси бўлган кучнинг табиатини ва унинг учта элементини тушунтиринг.
3. Статика аксиомаларини шакллантиринг ва тушунтиринг.
4. Параллелограмм аксиомаси ва унинг амалий аҳамиятини тушунтиринг.
5. Боғланиш деб нимага айтилади? Боғланишдан озод бўлиш принципининг мазмунини тушунтиринг.
6. Реакцияларининг таъсир чизиқлари олдиндан маълум бўлган асосий таянчларни изоҳланг ва улар реакция кучларининг йўналишини ва қўйилиш нуқтасини тушунтиринг. Мисоллар келтиринг.

МУСТАҚИЛ ТОПШИРИҚЛАР

1. 2-§. "Таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишувчи кучлар" мавзусига оид қуйидаги масалаларни ечинг [6]: 2.4; 2.5; 2.7; 2.9; 2.11; 2.19; 2.25; 2.29
2. "Ясси ферманинг таянч реакциялари ва стерженларининг зўриқишларини аниқлаш" мавзусидаги С2 график-ҳисоб ишини бажаринг [7].

2-§. Яқинлашувчи кучлар тизими

1. Кучлар тизимига қандай шартда яқинлашувчи кучлар тизими дейилади?

2. Яқинлашувчи кучларнинг тенг таъсир этувчисини куч кўп бурчагини қуриш билан топинг ва йўналишини аниқланг.

3. Кучнинг ўқдаги ва текисликдаги проекцияларини аниқланг ва уларнинг фарқини тушунтиринг.

4. Текисликда ва фазода жойлашган яқинлашувчи кучлар тизими мувозанатда бўлишининг вектор (геометрик) шартини шакллантиринг ва тушунтиринг.

5. Текисликда ва фазода жойлашган яқинлашувчи кучлар тизими мувозанатда бўлишининг аналитик (алгебраик) шартларини ўрнатинг ва тушунтиринг.

6. Қаттиқ жисмга қўйилган, параллел бўлмаган учта куч қандай шартда тенг ўлчанувчи бўлади?

7. Параллел бўлмаган учта куч ҳақидаги теоремани келтиринг ва исботланг.

8. Кучларнинг мувозанатига оид статик масалаларни ечишнинг тартибини изоҳланг.

9. Ферма деб қандай қурилмага (конструкцияга) айтилади?

10. Тугунларни кесиш усулининг мазмунини тушунтиринг ва уни ясси ферма стерженларининг зўриқишини аниқлашга қўлланг.

11. Зўриқиши нолга тенг бўлган стержен ҳақидаги леммаларни шакллантиринг ва тушунтиринг.

12. Нимага асосланиб, ташқи кучлар қўйилган ферма стерженларининг зўриқишини ҳисобламасдан, унинг зўриқиши нолга тенглигини аниқлаш мумкин?

МУСТАҚИЛ ТОПШИРИҚЛАР

1. [6] дан қуйидаги масалаларни ечиш тавсия қилинади: 2.32; 2.37; 2.39; 2.41; 2.43; 2.45; 2.47; 2.51

2. "Риттер усули билан ясси ферма стерженларининг зўриқишларини аниқлаш" мавзусида С3 график-ҳисоб ишини бажаринг [7].

3-§. Кучнинг нуқтага ва ўққа нисбатан моментлари

1. Нуқтага нисбатан куч моменти тушунчасини таърифланг.

2. Нуқтага нисбатан куч моментининг вектори қандай йўналган ва унинг модули (миқдори) қандай аниқланади?

3. Нуқтага нисбатан куч моментининг геометрик мазмунини тушунтиринг. Унинг сон қиймати нимани ифодалайди?

4. Кучни ўз таъсир чизиғи бўйлаб кўчирганда унинг берилган нуқтага нисбатан моменти ўзгарадими?

5. Қандай ҳолларда берилган нуқтага нисбатан куч моменти нолга тенг бўлади?

6. Ўққа нисбатан куч моментининг сон қиймати ва ишораси қандай аниқланади?

7. Қандай ҳолларда ўққа нисбатан куч моменти нолга тенг бўлади?

8. Нуқтага қўйилган кучнинг қандай йўналишида унинг берилган ўққа нисбатан моменти энг катта бўлади?

9. Кучнинг нуқтага нисбатан моменти билан шу нуқта орқали ўтган ўққа нисбатан моменти орасидаги богланишни ўрнатинг.

10. Қандай шартда нуқтага нисбатан куч моментининг модули, ўша кучнинг берилган нуқтадан ўтувчи ўққа нисбатан моментига тенг бўлади?

11. Ўққа нисбатан куч моментини хисоблашнинг тартибини изоҳланг.

12. Нуқтага (ўққа) нисбатан куч моментининг вектор миқдор эканлигини тушунтиринг.

13. Куч моменти векторининг кордината ўқларига нисбатан аналитик ифодаларини келтириб чиқаринг.

14. Нуқтага нисбатан куч моменти векторининг модулини ва йўналишини аниқловчи формулаларни келтириб чиқаринг.

МУСТАҚИЛ ТОПШИРИҚЛАР

1. 3-§. “Параллел кучлар” мавзусига доир қуйидаги масалаларни ечинг [6]: 3.3; 3.5; 3.7; 3.9; 3.15; 3.17; 3.21

4-§. Жуфт кучлар назарияси

1. Қандай кучлар тизимига жуфт кучлар дейилади?

2. Нима учун жуфт кучлар тенг таъсир этувчига эга бўлмайди?

3. Жуфтнинг қаттиқ жисмга кўрсатадиган таъсири қандай миқдор билан характерланади?

4. Жуфт кучлар таъсиридаги жисм қандай ҳаракат қилади?

5. Жуфт куч моментининг вектори қандай йўналган бўлади?

6. Жуфт кучлар моментининг вектор модули /сон қиймати/ геометрик нуқтаи назардан нимани ифодалайди?

7. Бир текисликда ётувчи жуфт кучларнинг моменти қандай аниқланади?

8. Қандай жуфтларга эквивалент /тенг кучли/ жуфтлар дейилади?

9. Эквивалент жуфтлар ҳақидаги теоремаларни шакллантиринг ва исботланг.

10. Кесишувчи текисликларда жойлашган иккита жуфтга эквивалент бўлган жуфтнинг моменти нимага тенг?

11. Фазода ва бир текисликда жойлашган жуфт кучлар тизимига эквивалент бўлган жуфтнинг моменти нимага тенг?

12. Жисмга таъсир этувчи жуфт кучлар тизимининг мувозанатлик шартларини вектор ва аналитик шаклларда ўрнатинг.

МУСТАҚИЛ ТОПШИРИҚЛАР

1. Қуйидаги масалаларни ечиш тавсия қилинади [6]: 3.22; 3.24; 3.28; 3.33; 3.36; 3.37; 4.7; 4.29; 4.30; 4.32

2. “Қаттиқ жисмнинг таянч реакцияларини аниқлаш мавзусидаги С1 график-ҳисоб ишини бажаринг [7].

5-§. Ихтиёрий жойлашган кучлар тизими

Текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар тизими

1. Кучни параллел кўчириш ҳақидаги теоремани шакллантиринг ва исботланг.

2. Ихтиёрий кучлар тизимини берилган марказга келтириш ҳақидаги статиканинг асосий теоремасини шакллантиринг ва исботланг.

3. Берилган кучлар тизимининг бош вектори ва бош моменти деб нимага айтилади?

4. Берилган кучлар тизимининг бош вектори ва бош моменти келтириш марказининг танланишига боғлиқ бўладими?

5. Текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар тизимини содда кўринишга келтиришнинг мумкин бўлган ҳолларини изоҳланг.

6. Текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар тизими бош векторининг модули ва йўналиши қандай аниқланади?

7. Текисликдаги параллел кучлар тизими бош векторининг модули ва йўналиши қандай аниқланади?

8. Текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар тизими бош моментининг модули ва йўналиши қандай аниқланади?

9. Қандай шартда ясси кучлар тизимининг бош вектори бу тизим кучларининг тенг таъсир этувчисини ифодалайди?

10. Ясси кучлар тизими мувозанатда бўлишининг вектор (геометрик) шартлари нималардан иборат бўлади?

11. Ясси кучлар тизимининг мувозанатда бўлишлигининг аналитик (алгебрик) шартларини (мувозанат тенгламаларининг уч кўриниши) шакллантиринг ва тушунтиринг.

12. Ясси параллел кучлар тизимининг мувозанатлик шартларини ўрнатинг. Бу шартлар қандай тенгламалар билан ифодаланади?

13. Марказга нисбатан тенг таъсир этувчининг моменти ҳақидаги Варинъон теоремаларини шакллантиринг ва исботланг.

14. Статиканинг қандай масалаларига статик аниқ ва қандай масалаларига статик аниқмас масалалар дейилади? Мисоллар келтиринг.

15. Қандай қаттиқ жисмга ричаг дейилади? Ричагнинг мувозанатлик шартини ўрнатинг ва тушунтиринг.

16. Тўпланма куч деб қандай кучга айтилади?

17. Тўғри чизиқнинг кесмаси бўйлаб чизиқли қонун бўйича тақсимланган кучларнинг тенг таъсир этувчиси қандай топилади ва бу тенг таъсир этувчининг қўйилиш нуқтаси қандай аниқланади?

18. Тўғри чизиқ кесмаси бўйлаб чизиқли қонун бўйича тақсимланган кучларнинг тенг таъсир этувчиси қандай топилади?

19. Айлана ёйи бўйлаб текис тақсимланган кучларнинг тенг таъсир этувчиси қандай топилади ва бу тенг таъсир этувчининг қўйилиш нуқтаси қандай аниқланади?

20. Техникада учрайдиган таянчларнинг асосий турларини изоҳланг ва тушунтиринг. Асосий таянчларнинг (маҳкамланган, қўзғалмас шанирли ва қўзғалувчан шарнирли) реакциялари миқдорини ва йўналишини аниқланг.

21. Консул балканинг таянч реакцияси ва қаршилик кўрсатувчи (реактив) моменти қандай аниқланади?

22. Асосий таянчлардан фойдаланиб, статик аниқмас масалаларни статик аниқ масалаларга айлантиришни мисолларда тушунтиринг.

23. Ишқаланиш қонунларини шакллантиринг.

24. Ишқаланиш коэффициенти деб нимага айтилади?

25. Ишқалиниш турларини изоҳланг. Қандай хил ишқаланишда ишқаланиш кучи энг катта бўлади?

26. Ишқаланиш бурчаги ва конуси деб нимага айтилади?

27. α ишқаланиш бурчаги, k эса ишқаланиш коэффициенти бўлса, $\mathrm{tg}\alpha = k$, $\mathrm{tg}\alpha > k$ ва $\mathrm{tg}\alpha < k$ муносабатларнинг мазмунини изоҳланг.

28. Ишқаланиш кучининг лимитик қиймати деб нимага айтилади?

29. Ишқаланиш кучини ҳисобга олиб, жисмга таъсир этувчи кучларнинг мувозанатлик шартларини ўрнатинг.

30. Ғадир-будир сиртда жисм мувозанатда бўлишининг зарурий ва етарли шартини ўрнатинг ва тушунтиринг.

31. Думаланиб ишқаланаётган ғилдиракнинг (катокнинг) мувозанатлик шартини ўрнатинг.

32. Думаланиб ишқаланишга қаршилик кўрсатувчи жуфт кучлар моментининг энг катта лимитик қиймати қандай аниқланади?

МУСТАҚИЛ ТОПШИРИҚЛАР

4-§. "Ихтиёрий ясси кучлар тизими" мавзусига оид 4.1; 4.3; 4.7; 4.9; 4.11; 4.15; 4.19; 4.21 [6]. Масалалар ечилади.

1. "Мураккаб конструкциянинг таянч реакцияларини аниқлаш" мавзусидаги С 4 график-ҳисоб ишини бажаринг (икки жисм тизими) [7].

2. “Мураккаб конструкциянинг таянч реакцияларини аниқлаш” мавзусидаги С5 график-ҳисоб ишини бажаринг (учта жисм тизими) [7].

Фазода ихтиёрий жойлашган кучлар тизими

1. Фазода ихтиёрий жойлашган кучлар тизими қандай усуллар билан содда кўринишга келтирилади?

2. Фазода ихтиёрий жойлашган кучлар тизими бош вектори ва бош моментининг модули ва йўналиши қандай аниқланади?

3. Фазода ихтиёрий жойлашган кучлар тизимини содда кўринишга келтиришнинг мумкин бўлган барча ҳолларини изоҳланг ва тушунтиринг.

4. Фазода ихтиёрий жойлашган кучлар тизими бош моментининг координата ўқларига нисбатан аналитик ифодаларини ёзинг.

5. Фазовий кучлар тизимининг нуқтага нисбатан ва шу нуқта орқали ўтган ўққа нисбатан бош моментлари қандай топилади? Улар орасидаги боғланишни ўрнатинг.

6. Ихтиёрий кучлар тизими мувозанатда бўлишининг вектор шартлари қандай бўлади?

7. Ихтиёрий фазовий кучлар тизими мувозанатда бўлишининг аналитик шартларини шакллантиринг ва изоҳланг.

8. Фазовий параллел кучлар тизимининг бош вектори ва бош моментининг модули ҳамда йўналиши қандай топилади?

9. Фазовий параллел кучлар тизими мувозанатда бўлишининг вектор ва аналитик шартларини ўрнатинг ва тушунтиринг.

10. Фазовий кучлар тизими тенг таъсир этувчисининг ўққа нисбатан моменти ҳақидаги Варинъон теоремасини шакллантиринг.

11. Тизим кучларининг инвариантлари қандай бўлади?

12.Тизим кучларининг иккита ҳар хил келтириш марказларга нисбатан бош моментлари орасидаги боғланишни ўрнатинг.

13. Тизим кучларини уларнинг инвариантларига кўра классификация қилинг:

1) Қандай шартларда тизим кучлари динамик винтга келтирилади? 2) Қандай шартларда тизим кучлари тенг таъсир этувчига келтирилади? 3) Қандай шартларда тизим кучлари ягона жуфтга келтирилади? 4) Қандай шартларда тизим кучлари мувозанат ҳолатда бўлади?

14. Битта нуқтаси билан маҳкамланган қаттиқ жисмнинг мувозанатлик шартларини ўрнатинг.

15. Иккита қўзғалмас нуқтага ёки қўзғалмас ўққа эга бўлган қаттиқ жисмнинг мувозанатлик шартларини ўрнатинг.

МУСТАҚИЛ ТОПШИРИҚЛАР

1. [6] дан қуйидаги масалалар ечиш тавсия қилинади: 6.4; 6.6; 6.8; 7.1; 7.3; 7.8; 7.10

2. “Кучлар тизимини содда кўринишга келтириш” мавзусидаги С6 график-ҳисоб ишини бажаринг.

3. “Қаттиқ жисмнинг таянч реакцияларини аниқлаш” мавзусидаги С7 график-ҳисоб ишини бажаринг [7].

4. “Фазовий ферма стерженларининг зўриқишини аниқлаш” мавзусидаги С8 график-ҳисоб ишини бажаринг [7].

6-§. Параллел кучлар тизими ва жисмнинг оғирлик маркази

1. Параллел кучлар тизимининг бош вектори ва бош моменти қандай аниқланади?

2. Параллел кучлар тизимининг мувозанатда бўлиш шартларини ўрнатинг ва ихтиёрий кучлар тизими мувозанатлик шартлари билан таққосланг.

3. Параллел кучлар тизимининг маркази (параллел кучлар тизимининг тенг таъсир этувчиси қўйилган нуқта) қандай топилади?

4 Бир жинсли жисм, ясси фигура ва чизиқнинг оғирлик маркази координаталари қандай топилади?

5 Бир жинсли жисм оғирлик марказининг координаталарини топишнинг қандай усулларини биласиз?

6. Манфий массалар усулининг мазмунини тушунтиринг.

7. Жисмни бўлакларга бўлиш усули билан интеграллаш усулининг бир-биридан фарқини изоҳланг.

8 Параллел кучларнинг текисликка нисбатан статик моментини тушунтиринг. Кучлар тизимининг статик моментини аниқлашнинг усулларини изоҳланг.

9. Ясси фигура юзининг ўққа нисбатан статик моменти деб нимага айтилади ва қандай ҳисобланади?

10. Учбурчак юзининг ва айлана ёйининг оғирлик маркази қандай топилади?

11. Тўғри пирамида ва тўғри доиравий конуснинг оғирлик маркази қандай топилади?

12. Доиравий сектор юзининг оғирлик маркази қандай аниқланади?

13. Ярим айлана узунлигининг ва ярим доира юзининг оғирлик марказини топинг.

14. Шарнинг, шар сегменти сиртининг ва шар секторининг оғирлик марказини топинг.

15. Трапеция юзининг оғирлик маркази координаталарини топинг.

16. Юз бўлакларининг оғирлик маркази маълум бўлса, бутун юзнинг оғирлик маркази қандай топилади? Борди-ю бўлакларнинг оғирлик маркази маълум бўлмаса-чи?

17. Жисмлар оғирлик марказининг координаталарини аниқлашда қандай ёрдамчи теоремалардан фойдаланилади?

МУСТАҚИЛ ТОПШИРИҚЛАР

1. [6] дан қуйидаги масалаларини ечиш тавсия қилинади: 9.1; 9.3; 9.9; 9.11; 9.17; 9.20

2. “Жисмларнинг оғирлик марказининг координаталарини аниқлаш” мавзусидаги С12 график-ҳисоб ишини бажаринг [7].

III. К И Н Е М А Т И К А

1-§. Нуқта кинематикаси

1. Кинематиканинг предмети, асосий тушунчалари ва вазифасини тушунтиринг.

2. Кинематиканинг фан сифатида шаклланишига нималар туртки бўлди?

3. Нуқтанинг ҳаракати қандай усуллар билан берилади? Нуқта ҳаракатининг берилиш усуллари орасидаги боғланишларни аниқланг.

4. Нуқтанинг эгри чизиқли координатаси ва унинг йўли тушунчаларини изоҳланг ва уларнинг фарқини тушунтиринг. Қандай ҳолатда нуқтанинг эгри чизиқли координатаси унинг ўтган йўлига тенг бўлади?

5. Нуқтанинг траекторияси деб нимага айтилади? Нуқта ҳаракати вектор шаклда берилган бўлса, нуқта траекторияси нима билан ифодаланади?

6. Агар нуқта ҳаракати координата шаклида берилган бўлса, унинг траекторияси қандай топилади? Мисоллар келтиринг.

7. Агар нуқтанинг ҳаракати вектор шаклида берилган бўлса, нуқта тезлигининг модули ва йўналиши қандай аниқланади?

8. Агар нуқта ҳаракати координата (параметрик) шаклида берилган бўлса, нуқта тезлигининг модули ва йўналиши қандай топилади?

9. Нуқта тезлигининг годографи деб нимага айтилади ва унинг параметрик тенгламалари қандай бўлади?

10. Агар нуқтанинг ҳаракати вектор шаклида берилган бўлса, унинг тезланишининг модули ва йўналиши қандай топилади?

11. Агар нуқтанинг ҳаракати координата шаклида берилган бўлса, унинг тезланишининг модули ва йўналиши қандай аниқланади?

12. Эгри чизиқнинг қаралаётган нуқтасида табиий уч ёқли ва унинг табиий ўқларининг йўналишлари қандай аниқланади?

13. Нуқта ҳаракати табиий усулда берилганда унинг тезлиги қандай аниқланади?

14. Қаралаётган нуқтада эгри чизиқ эгрилик векторининг модули ва йўналиши қандай бўлади?

15. Нуқта траекториясининг эгрилик радиуси деб нимага айтилади ва қандай формулалар билан топилади?

16. Нуқтанинг тезланиш вектори табиий учёқлининг қандай текислигида жойлашган? Унинг табиий учёқлининг ўқларидаги проекциялари қандай аниқланади?

17. Нуқтанинг уринма ва нормал тезланишлари бўйича нуқта тезланишининг модули ва йўналиши қандай топилади?

18. Нуқтанинг қандай ҳаракатида уринма тезланиш ва унинг қандай ҳаракатида нормал тезланиш нолга тенг бўлади?

19. Нуқтанинг ҳаракатини унинг тезланиши бўйича классификация қилинг.

20. Нуқта ҳаракатининг графиги йўл графигидан нима билан фарқ қилади?

21. Нуқтанинг гармоник тебранма ҳаракати деб унинг қандай ҳаракатига айтилади? Бу ҳаракат қандай миқдорлар (катталиклар) билан тавсифланади?

22. Гармоник тебранма ҳаракат қилаётган нуқтанинг тезлиги ва тезланиши қандай аниқланади? Бундай ҳаракатда нуқтанинг тезлиги ва тезланиши қандай йўналган бўлади?

23. Гармоник тебранма ҳаракат қилаётган нуқта вақтнинг қандай оралиқларида тезланувчан, қандай оралиқларда секинланувчи ҳаракат қилади?

МУСТАҚИЛ ТОПШИРИҚЛАР

1. [6] дан қуйидаги масалаларни ечиш тавсия қилинади: 10-§. 10.1; 10.4; 10.10; 10.15; 11-§. 11.2; 11.6; 11.11; 11.13; 12-§. 12.4; 12.6; 12.15; 12,12.23; 12.24

2. "Нуқта ҳаракатининг берилган тенгламалари бўйича унинг тезлиги ва тезланишни аниқлаш" мавзусидаги К1 график-ҳисоб ишини бажаринг [7].

2-§. Қаттиқ жисмлар кинематикаси

Қаттиқ жисмнинг қандай ҳаракатлари фарқланади ва ўрганилади?

Қаттиқ жисмнинг илгариланма ва айланма ҳаракатлари

1. Қаттиқ жисмнинг қандай ҳаракатига унинг илгариланма ҳаракати дейилади?

2. Қаттиқ жисмнинг илгариланма ҳаракати ҳақидаги асосий теоремани шакллантиринг ва исботланг.

3. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракати деб, унинг қандай ҳаракатига айтилади?

4. Қаттиқ жисм айланма ҳаракатининг асосий тенгламаси қандай бўлади? Айланувчи қаттиқ жисм нуқтасининг бурчак тезлиги ва бурчак тезланишининг модули қандай аниқланади?

5. Қаттиқ жисм қўзғалмас ўқ атрофида айланаётганда бурчак тезлик ва бурчак тезланиш векторлари қандай йўналган бўлади? Қандай ҳолда айланиш тезланувчан ва қандай ҳолда айланиш секинлашувчан бўлади?

6. Қўзғалмас ўқ атрофида ҳаракат қилаётган қаттиқ жисм нуқтаси чизиқли тезлиги ва тезланишининг модулини ҳисоблаш учун формулалар чиқаринг.

7. Айлантирувчи тезлик, айлантирувчи ва марказга интилма тезланишлар учун вектор ифодалар қандай бўлади?

8. Нуқта айлантирувчи тезлигининг координата ўқларидаги проекциялари учун Эйлер формулаларини чиқаринг.

9. Қўзғалмас ўқ атрофида текис айланаётган жисмнинг айланиш қонуниятини ўрнатинг. Бундай айланишнинг ўзига хос муҳим хусусияти нимадан иборат?

10. Қўзғалмас ўқ атрофида текис ўзгарувчан айланаётган жисм айланма ҳаракатининг қонуниятини топинг. Бундай айланишнинг ўзига хос муҳим хусусияти нимадан иборат?

11. $\omega \frac{1}{\text{сек}}$ ва $n \frac{\text{айл}}{\text{мин}}$ миқдорлар орасидаги боғланишни ўрнатинг.

12. Қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракат қилаётган тишли ғилдиракларнинг (узатиш механизмининг) узатиш сони нима билан ифодаланади? Мураккаб узатишларда узатиш сони қандай аниқланади?

МУСАТАҚИЛ ТОПШИРИҚЛАР

1. [6] дан қуйидаги масалаларни ечиш тавсия қилинади:

13-§. 13.1; 13.3; 13.8; 13.11; 13.15; 13.17; 13.18

2. "Илгариланма ва айланма ҳаракат қилаётган қаттиқ жисм нуқталарининг тезлиги ва тезланишини аниқлаш" мавзусидаги К2 график-ҳисоб ишини бажаринг [7].

Қаттиқ жисмнинг ясси параллел ҳаракати

1. Қаттиқ жисмнинг қандай ҳаракатига унинг ясси параллел ҳаракати дейилади?

2. Ясси параллел ҳаракат қилаётган жисмнинг ҳаракат тенгламалари қандай бўлади?

3. Қаттиқ жисмнинг ясси параллел ҳаракатини илгариланма ва айланма ҳаракатларга ёйиш ҳақидаги теоремани шакллантиринг ва исботланг.

4. Қаттиқ жисмнинг ясси параллел ҳаракатининг асосий кинематик катталикларини изоҳланг ва тушунтиринг.

5. Қаттиқ жисм ясси параллел ҳаракатининг айланма қисми қутб нуқтанинг танланилишига боғлиқ бўлмаслигини, илгариланма қисми эса қутб нуқтанинг танланишига боғлиқ бўлишлигини тушунтиринг.

6. Қаттиқ жисмнинг ясси параллел ҳаракатида унинг исталган нуқтаси траекториясининг тенгламаларини параметрик шаклда тузинг.

7. Ясси шакл исталган нуқтасининг тезлиги қандай аниқланади?

8. Ясси шакл нуқтасининг тезлигини қутб усули билан қандай аниқлаш мумкин?

9. Ясси шакл исталган нуқтасининг тезлигини аниқлашнинг проекция усулини изоҳланг ва бу ҳақдаги теоремани исботланг.

10. Тезликларнинг оний маркази деб нимага айтилади? Тезликларнинг оний марказини (ТОМни) топишнинг барча ҳолларини қаранг.

11. Тезликларнинг оний маркази ёрдамида ясси параллел ҳаракат қилаётган жисм нуқталарининг тезликлари қандай топилади? Мумкин бўлган барча хусусий ҳолларни ҳам изоҳланг.

12. Центроидалар ҳақида тушунча беринг. Қўзғалмас ва қўзғалувчан центроидалар деб нимага айтилади? Уларнинг амалий аҳамиятини тушунтиринг. Қўзғалувчан центроидалар қўзғалмас центроидага нисбатан қандай ҳаракатланади?

13. Оний айланиш ўқи деб қандай ўққа айтилади? Каттиқ жисмнинг ясси параллел ҳаракати жисмнинг оний айланиш ўқи атрофида кетма-кет элементар бурилишларнинг йиғиндиси эканлиги ҳақидаги теоремани шакллантиринг ва исботланг.

14. Ясси шакл исталган нуқтасининг тезланиши қандай аниқланади?

15. Ясси шаклнинг қандай нуқтасига тезланишларнинг оний маркази дейилади? Тезланишларнинг оний маркази тезликларнинг оний маркази билан устма-уст тушиши мумкинми?

16. Тезланишларнинг оний марказини аниқлашнинг барча маълум бўлган усулларини изоҳланг ва у усулларни таққосланг.

17. 1) $\omega \neq 0$ $\varepsilon \neq 0$ 2) $\omega \neq 0$, $\varepsilon = 0$ 3) $\omega = 0$, $\varepsilon \neq 0$ бўлган ҳоллар учун ясси шакл нуқталарининг тезлиги қандай аниқланади?

8. Ясси механизм қисмлари нуқталарининг тезланиши ва бурчак тезланишлари қандай аниқланади?

МУСТАҚИЛ ТОПШИРИҚЛАР

1. [6] дан қуйидаги масалаларни ечиш тавсия қилинади: 15-§. 15.1; 15.4; 15.7; 16-§. 16.6; 16.12

2. Қаттиқ жисмнинг ясси параллел ҳаракатига оид бўлган К3 ва К4 график-ҳисоб ишларини бажаринг [7].

Қаттиқ жисмнинг сферик ҳаракати

1. Қаттиқ жисмнинг қандай ҳаракатига унинг сферик ҳаракати дейилади?

2. Ҳамма вақт битта нуқтаси қўзғалмасдан қоладиган жисмнинг ҳаракати қандай параметрлар билан аниқланади? Бундай жисмнинг эркинлик даражаси нечта?

3. Эйлер бурчаклари ва уларнинг номи қандай аталади?

4. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофидаги айланма ҳаракатининг тенгламалари қандай бўлади? Улар нечта?

5. Битта қўзғалмас нуқтага эга бўлган қаттиқ жисмнинг кўчиши ҳақидаги Эйлер-Даламбер теоремасини шакллантиринг ва исботланг.

6. Битта қўзғалмас нуқтага эга бўлган қаттиқ жисмнинг оний айланиш ўқи деб нимага айтилади? Оний айланиш ўқининг қўзғал-

мас ва кўзғалувчан координаталар тизимлари ўқларига нисбатан тенгламалари қандай бўлади?

7. Сферик ҳаракатдаги жисмнинг оний бурчак тезлиги ва оний бурчак тезланиши қандай аниқланади?

8. Нима учун қаттиқ жисмнинг сферик ҳаракатида бурчак тезланиш ва бурчак тезлик векторларининг йўналишлари устма-уст тушмайди?

9. Қўзғалмас нуқта атрофида айланувчи жисм нуқтасининг тезлиги қандай аниқланади?

10. Қўзғалмас нуқта атрофида айланувчи жисм нуқтасининг тезланиши қандай аниқланади?

11. Нима учун жисмнинг сферик ҳаракатида айлантирувчи тезлик ва айлантирувчи тезланиш векторлари устма-уст тушмайди?

Қаттиқ жисм ҳаракатининг умумий ҳоли

1. Ихтиёрий ҳаракатланаётган қаттиқ жисмнинг ҳолатини тўлиқ ва бир қийматли аниқлайдиган чизиқли боғланмаган параметрлар сони нечта бўлади?

2. Эркин қаттиқ жисмнинг ҳаракатини илгариланма ва айланма ҳаракатларга ёйиш ҳақидаги Шаль теоремасини шакллантиринг ва исботланг.

3. Жисмнинг эркин ҳаракатидаги қутбнинг ҳаракат тенгламаларини ва қутб атрофида жисмнинг сферик ҳаракатини ифодаловчи тенгламаларини келтиринг ва уларнинг сони нечта?

4. Эркин қаттиқ жисм нуқталарининг тезлиги қандай аниқланади?

5. Эркин қаттиқ жисм нуқталарининг тезланиши қандай аниқланади?

6. Жисмнинг эркин ҳаракатида унинг бурчак тезлик ва бурчак тезланиш векторлари қутбнинг танлашига боглиқ бўлмаслигини кўрсатинг.

МУСТАҚИЛ ТОПШИРИҚЛАР

1. "Эркин жисм ҳаракатида унинг нуқталарининг кинематик катталикларини Эйлер тенгламалари бўйича аниқлаш" мавзусидаги К5 график-ҳисоб ишини бажаринг [7].

3-§. Нуқта ва қаттиқ жисмнинг мураккаб ҳаракатлари

Нуқтанинг мураккаб ҳаракати

1. Нуқтанинг нисбий, кўчирма ва абсолют ҳаракатларининг, шунингдек, бу ҳаракатлар тезлик ва тезланишларининг таърифини беринг.

2. Нуқтанинг нисбий, кўчирма ва абсолют ҳаракатларини боғловчи вектор тенгламани келтириб чиқаринг.

3. Нуқтанинг нисбий ҳаракат тенгламалари қандай бўлади?

4. Нуқтанинг абсолют ҳаракат тенгламаларини тузинг.

5. Нуқтанинг мураккаб ҳаракатида унинг абсолют тезлиги қандай аниқланади?

6. Нуқтанинг кўчирма ҳаракати илгариланма бўлган ва унинг кўчирма ҳаракати илгариланма бўлмаган ҳолларда нуқтанинг абсолют тезлиги қандай бўлади?

7. Кўчирма ҳаракати илгариланма бўлган мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг абсолют тезланиши қандай аниқланади?

8. Кўчирма ҳаракати илгариланма бўлмаган мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг абсолют тезланиши ҳақидаги Кориолис теоремасини шакллантиринг ва унинг исботини келтиринг.

9. Бурилиш (Кориолис) тезланишининг пайдо бўлиш сабабини тушунтиринг.

10. Бурилиш (Кориолис) тезланишининг модули ва йўналиши қандай топилади? Қандай шартларда нуқтанинг бурилиш тезланиши нолга тенг бўлади?

11. Нисбий, кўчирма ва Кориолис тезланишларини ҳисоблаш усулларини изоҳланг.

Қаттиқ жисмнинг мураккаб ҳаракати

1. Жисмнинг абсолют ҳаракати қандай ҳаракатлардан ташкил топишини изоҳлаб беринг.

2. Қаттиқ жисмнинг бурчак тезлиги унинг сферик ҳаракат тенгламалари бўйича қандай топилади?

3. Сферик ҳаракатда жисмнинг бурчак тезланишининг қўзғалмас ва қўзғалувчан координаталари ўқларидаги проекциялари қандай аниқланади?

4. Бир томонга ва қарама-қарши томонларга йўналган параллел ўқлар атрофида айланувчи қаттиқ жисмнинг бурчак тезлиги қандай аниқланади?

5. Ўзаро кесишувчи ўқлар атрофида айланувчи жисмнинг бурчак тезлиги қандай аниқланади?

6. Бурчак тезликларининг жуфти деб нимага айтилади? Қандай шартда бурчак тезликларининг жуфти (жуфт айланиш) илгариланма ҳаракатга эквивалент бўлади? Бундай илгариланма ҳаракатнинг тезлиги нимага тенг бўлади?

7. Бурчак тезлигининг векторини берилган марказга келтириш қоидасини тушунтиринг.

8. Бурчак тезлик ва илгариланма ҳаракат тезлигининг векторларини берилган марказга келтиришнинг мумкин бўлган барча ҳолларини статикадаги кучлар тизимини берилган марказга келтириш ҳоллари билан таққосланг.

9. Қаттиқ жисмнинг оний винт айланиш ўқи деб нимага айтилади ва унинг тенгламаси қандай бўлади?

10. Эркин қаттиқ жисм нуқталари тезликларининг тақсимланишини тушунтиринг.

11. Эркин қаттиқ жисм қандай нуқталарининг тезликлари энг кичик бўлади?

12. Қаттиқ жисм қандай нуқталарининг тезликлари модул бўйича ўзаро тенг булади?

13. Эркин қаттиқ жисм ҳаракатининг қандай катталиклари келтириш марказининг танланишига боғлиқ бўлмайди?

14. Жисм винт ҳаракатининг асосий хоссасини изоҳланг. Винт ҳаракатининг тенгламалари қандай бўлади?

15. Кинематик винтнинг параметри деб нимага айтилади?

16. Эйлернинг кинематик тенгламалари қандай булади? Бу тенгламаларни қандай усуллар билан олиш мумкин?

МУСТАҚИЛ ТОПШИРИҚЛАР

1. "Нуқтанинг абсолют тезлиги ва тезланишини аниқлаш" мавзусидаги К7 график-ҳисоб ишини бажаринг [7].

2. "Қаттиқ жисмнинг мураккаб ҳаракати параллел ва кесишувчи ўқлар атрофидаги айланишларни қўшиш" мавзусидаги К8 график-ҳисоб ишини бажаринг [7].

IV. ДИНАМИКА

1-§. Динамикага кириш. Динамика қонунлари

1. Динамиканинг асосий тушунчаларини изоҳланг ва тушунтиринг.

2. Саноқнинг қандай тизимларини биласиз?

3. Инерциал саноқ тизимининг мазмунини тушунтиринг.

4. Саноқнинг инерциал тизимидаги динамика қонунларини шакллантиринг ва тушунтиринг.

5. Динамиканинг асосий тенгламаси қандай куринишга эга? Тенгламада қатнашаётган куч ва тезланиш векторлари қандай векторлар тизимини ташкил қилади?

6. Моддий нуқтанинг инерция кучи қандай жисмга қуйилган булади ва унинг модули ва йўналиши қандай?

7. Агар моддий нуқтага бир қанча кучлар таъсир қилаётган бўлса, қандай шартда нуқта тўғри чизиқли ва текис ҳаракат қилади?

8. Динамикада ҳам кучнинг хоссалари ўрганилганлиги туфайли, унинг табиатини яна бир бор таҳлил қилинг /$F=const$: $F=F(t)$, $F=F(x)$, $F=F(\dot{x})$, $F=F(t,x)$, $F=F(t,\dot{x})$, $F=F(x,\dot{x})$, $F=F(t,x,\dot{x})$/.

9. Моддий нуқта битта куч таъсирида қандай ҳаракат қилади: тўғри чизиқлими ёки эгри чизиқлими, текисми ёки нотекисми?

10. Жисмнинг оғирлиги унинг ер сиртида жойлашувига боғлиқ бўладими?

11. Қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган жисмга тегишли бўлган нуқтанинг айлантирувчи ва марказдан қочма инерция кучларининг модули қандай формулалар билан ҳисобланади?

12. Моддий нуқта уринма ва нормал инерция кучларининг модули ва йўналиши қандай аниқланади?

13. Моддий нуқтанинг қандай ҳаракатида унинг уринма инерция кучи ва қандай ҳаракатида нормал инерция кучи нолга тенг бўлади?

14. Нима учун кўпчиллик ҳолларда ботиқ кўприкларга нисбатан қавариқ кўприклар кўпроқ қурилади?

2-§. Динамиканинг биринчи ва иккинчи масалалари

1. Эркин моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасини вектор шаклда тузинг.

2. Эркин моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини Декарт координаталари тизимида тузинг.

3. Моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари табиий координата ўқларида қандай кўринишга эга бўлади?

4. Моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини қутб, цилиндирик ва сферик координаталари тизимида чиқаринг.

5. Динамиканинг биринчи масаласини шакллантиринг ва уни ечинг.

6. Динамиканинг иккинчи масаласини шакллантиринг ва бу масала моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари билан қандай ечилади?

7. Моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини интеграллаш доимийлари қандай аниқланади?

8. Эркин тушаётган жисмнинг ҳаракат қонунлари қандай бўлади?

9. Бўшлиқда горизонтга бурчак остида отилган жисмнинг горизонтал ва вертикал кўчишлари қандай қонунлар билан рўй беради? Жисм ҳаракатининг траекторияси қандай чизиқ бўлади? Қандай бурчак остида отилганда жисм энг узоқ масофага учади?

МУСТАҚИЛ ТОПШИРИҚЛАР

1. [6] дан қуйидаги масалаларни ечинг: 26.1; 26.5; 26.9; 26.10; 26.16; 26.17; 26.25

2. "Ўзгармас куч таъсирида бўлган нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини интеграллаш" мавзусидаги Д1 график-ҳисоб ишини бажаринг [7].

3-§. Эркин бўлмаган нуқта динамикаси

1. Қандай ҳолларда моддий нуқта эркинмас дейилади ва бундай нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари қандай бўлади?

2. Эркин бўлмаган нуқта учун динамиканинг биринчи ва иккинчи масалаларини шакллантиринг ва уларнинг ечилишини изоҳланг.

3. Қўзғалмас сирт бўйича ҳаракатланаётган нуқтанинг дифференциал тенгламалари қандай бўлади?

4. Берилган силлиқ эгри чизиқ бўйлаб ҳаракатланаётган нуқтанинг дифференциал тенгламалари қандай кўринишга эга бўлади? Борди-ю қаралаётган нуқта учун координата ўқлари сифатида табиий ўқларни қабул қилсак, ҳаракатнинг дифференциал тенгламалари қандай кўринишни олади?

5. Эркин бўлмаган нуқта ҳаракатида ишқаланиш кучининг модули ва йўналиши қандай аниқланади?

6. Стационар ва стационар бўлмаган, голоном ва беголономли боғланишларнинг таърифларини беринг.

7. Қандай боғланишларга бир томонлама ва икки томонлама боғланиш дейилади?

8. Боғланишдан озод бўлиш принципининг мазмуни нимадан иборат?

9. Лагранж кўпайтувчиси ва унинг аҳамияти нимадан иборат?

МУСТАҚИЛ ТОПШИРИҚЛАР

1. [6] дан қуйидаги масалаларни ечиш тавсия қилинади: 27.1; 27.3; 27.5; 27.23; 27.49-27.51

2. "Ўзгарувчан куч таъсиридаги моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини интеграллаш" мавзусидаги Д2 график-ҳисоб ишини бажаринг [7].

4-§. Моддий нуқта нисбий ҳаракатининг динамикаси

1. Моддий нуқта нисбий ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини тузинг.

2. Моддий нуқта нисбий ва абсолют ҳаракатлари дифференциал тенгламалари орасидаги фарқ қандай?

3. Кориолиснинг динамик теоремасини шакллантиринг ва исботланг.

4. Кўчирма ва Кориолис инерция кучларининг модули ва йўналиши қандай аниқланади?

5. Кўчирма ҳаракатнинг турли ҳолларида кўчирма ва кориолис инерция кучлари қандай аниқланади?

6. Классик механика нисбийлик принципининг моҳияти нимадан иборат?

7. Моддий нуқта нисбий тинчлигининг шарти қандай?

8. Саноқнинг қандай тизимига инерциал саноқ тизими дейилади?

9. Ернинг сиртида қайси нуқталарда оғирлик кучи энг катта ва энг кичик қийматларга эга бўлади?

10. Юқорига вертикал отилган жисм қандай йўналишда оғади?

11. Юқоридан тушаётган жисм нима учун шарққа оғади?

МУСТАҚИЛ ТОПШИРИҚЛАР

1. [6] дан қуйидаги масалаларни ечиш тавсия қилинади: 33.2; 33.6; 33.7; 33.11; 33.21; 33.22

2. "Моддий нуқтанинг нисбий ҳаракатини текшириш" мавзусидаги Д4 график-ҳисоб ишини бажаринг [7].

5-§. Моддий нуқтанинг тўғри чизиқли тебранишлари

1. Моддий нуқтанинг эркин тебранишлари қандай куч таъсирида вужудга келади?

2. Моддий нуқта эркин тебранишларининг дифференциал тенгламаси қандай кўринишга эга?

3. Моддий нуқта эркин тебранишларининг частотаси, даври, амплитудаси ва бошланғич фазаси қандай катталикларга (бошланғич қийматларга) боғлиқ бўлади?

4. Моддий нуқтанинг сўнувчи тебранишлари қандай кучлар таъсирида вужудга келади?

5. Сўниш коэффициентининг тебраниш даврига таъсирини қандай тушунтириш мумкин?

6. Эркин ва сўнувчи тебранишларнинг графиги қандай кўринишга эга бўлади? Шунингдек, моддий нуқтанинг даврий бўлмаган сўнувчи тебранишларининг барча ҳолларини (қаршилик кичик, катта ва критик ҳоллар) графикда тасвирланг.

7. Тебранишларнинг сўниш декременти қандай аниқланади ва қандай параметрга боғлиқ бўлади?

8. Тебранишларнинг логарифмик декременти деб нимага айтилади?

9. Моддий нуқта мажбурий тебранишларининг дифференциал тенгламаси қандай кўринишга эга?

10. Моддий нуқта мажбурий тебранишлари дифференциал тенгламасининг умумий ечими қандай топилади?

11. Қайтарувчи (эластик) ва ташқи кучлар таъсиридаги нуқтанинг ҳаракати қандай тебранишларнинг йиғиндисидан ташкил топади?

12. Мажбурий тебранишларнинг амплитудаси, частотаси ва даври қандай топилади?

13. Қаршилик кучи тезликка пропорционал бўлганда у мажбурий тебранишларнинг амплитудасига, фазасига, частотаси ва даврига қандай таъсир кўрсатади?

14. Сўниш коэффициентининг қиймати берилган бўлса, мажбурий тебранишлар амплитудасининг максимал қиймати қандай аниқланади?

15. Сўниш коэффициентининг қандай қийматида мажбурий тебранишлар амплитудасининг максимал қиймати мавжуд бўлмайди?

16. Тебранишлар фазасининг силжиши ташқи куч частотасининг ўзгаришига ва сўниш коэффициентига боғлиқлиги қандай бўлади?

17. Қандай мажбурий тебранишларга кичик частотали тебранишлар, қандай мажбурий тебранишларга катта частотали тебранишлар дейилади? Бундай тебранишларнинг кўриниши қандай бўлади?

18. Мажбурий тебранишларнинг амплитудаси қандай катталикларга (параметрларга) боғлиқ бўлади?

19. Динамик коэффициент деб нимага айтилади ва унинг графиги $\beta = \frac{h}{\omega}$ нисбатга қандай боғлиқ бўлади?

20. Қандай шартда **"тепиш"** ҳодисаси юз беради ва **«тепиш»** ҳодисасининг графиги қандай бўлади?

21. Қандай шартларда резонанс ҳодисаси юз беради? Резонанс вақтида моддий нуқта мажбурий тебранишлари графигининг тенгламаси қандай бўлади?

МУСТАҚИЛ ТОПШИРИҚЛАР

1. [6] дан қуйидаги масалаларни ечиш тавсия қилинади: 32.24; 32.26; 32.29; 32.59; 32.67; 32.78; 32.82; 32.97; 32.100

2. "Моддий нуқтанинг тебранма ҳаракатларини текшириш" мавзусидаги Д3 график-ҳисоб ишини бажаринг [7].

6-§. Механик тизим динамикасига кириш

1. Механик тизим деб нимага айтилади? Мисоллар келтиринг.

2. Механик тизим нуқтасига таъсир қилувчи кучлар динамикада қандай классификация қилинади?

3. Ички кучларнинг иккита асосий хоссасини шакллантиринг ва тушунтиринг.

4. Механик тизимнинг массаси қандай аниқланади?

5. Механик тизимнинг масса маркази деб нимага айтилади ва масса марказининг координаталари қандай аниқланади?

6. Қаттиқ жисмнинг ўққа, нуқтага ва текисликка нисбатан инерция моментлари деб нимага айтилади?

7. Қаттиқ жисмнинг ўққа, нуқтага нисбатан инерция моментлари орасидаги боғланишни ўрнатинг.

8. Тизим массасининг нуқтага ва текисликка нисбатан статик моментлари деб, қандай миқдорга айтилади?

9. Қандай нуқтага нисбатан жисм массасининг статик моменти нолга тенг бўлади?

10. Қандай миқдорга ўққа нисбатан жисмнинг инерция радиуси дейилади?

11. Параллел ўқларга нисбатан жисмнинг инерция моментлари орасидаги боғланишни ўрнатинг.

12. Қандай нуқтага нисбатан жисм инерция моментининг қиймати энг кичик бўлади?

13. Жисм инерция моментини ҳисоблашнинг қандай усулларини биласиз?

14. Нуқтага нисбатан стерженнинг, доиравий халқанинг, тўғри доиравий конуснинг, шарнинг ва бошқа бир жинсли жисмларнинг инерция моментларини ҳисобланг.

15. Берилган нуқтадан ўтиб, берилган йўналишдаги ўққа нисбатан жисмнинг инерция моменти қандай аниқланади?

16. Қандай миқдорга жисмнинг марказдан қочма инерция моменти дейилади?

17. Қаттиқ жисмнинг инерция эллипсоиди қандай қурилади?

18. Қаттиқ жисмнинг бош инерция ўқлари ва бош марказий инерция ўқлари қандай хоссаларга эга?

19. Қандай шартларда қаралаётган нуқтада жисмнинг баъзи бир инерция ўқлари бош инерция ўқи бўла олади?

20. Инерция эллипсоиди бўйича берилган нуқтадан ўтувчи ўқлардан қайси бирига нисбатан қаттиқ жисмнинг инерция моменти энг катта қийматга эга бўлади?

21. Жисмнинг оғирлик маркази орқали ўтадиган ёки ўтмайдиган ихтиёрий ўққа нисбатан унинг инерция моменти қандай ҳисобланади?

МУСТАҚИЛ ТОПШИРИҚЛАР

1. [6] дан қуйидаги масалаларни ечиш тавсия қилинади: 34.2; 34.5; 34.10; 34.11; 34.17; 34.18; 34.20

7-§. Механик тизим масса марказининг ҳаракати ҳақидаги теорема

1. Механик тизим ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини вектор ва декарт координаталари тизимида тузинг.

2. Механик тизим масса марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремани шакллантиринг ва исботланг.

3. Тизим масса марказининг ҳаракати сақланиш қонунини шакллантиринг. Турмуш ва техникадан бу қонун амал қиладиган мисоллар келтиринг ва уларни таҳлил қилинг.

4. Қандай қаттиқ жисм ҳаракатини массаси шу жисм массасига тенг бўлган моддий нуқтанинг ҳаракати деб қараш мумкин?

5. Қандай шартларда тизим масса марказининг ҳаракати ҳолати тинч холда ва қандай шартларда тизим масса маркази тўғри чизиқли ва текис ҳаракат қилади?

6. Қандай шартларда тизимнинг масса маркази бирор ўқ бўйлаб кўчмайди?

7. Қаттиқ жисмга қўйилган жуфт куч унинг оғирлик марказини ҳаракатга келтира оладими?

8. Борди-ю жисм жуфт куч таъсирида ҳаракатга келса, у қандай ҳаракат қилади?

МУСТАҚИЛ ТОПШИРИҚЛАР

1. [6] дан қуйидаги масалаларни ечиш тавсия қилинади: 35.3; 35.5; 35.13; 35.19; 35.21

2. "Масса марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремани механик тизим ҳаракатини текширишга қўллаш" мавзусидаги Д7 график-ҳисоб ишини бажаринг [7].

8-§. Ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема

1. Ҳаракатдаги нуқтанинг динамик вектор ва скаляр катталикларини таърифланг.

2. Нуқтага таъсир қилаётган кучнинг вектор ва скаляр динамик катталикларини таърифланг. Мисоллар келтиринг.

3. Чекли вақт оралиғидаги ўзгарувчан кучнинг импульси қандай аниқланади? Куч импулси нимани ифодалайди?

4. Ўзгармас ва ўзгарувчан кучлар импульсларининг декарт координата ўқларидаги проекциялари қандай топилади?

5. Тенг таъсир этувчининг импульси нимага тенг?

6. Айлана бўйлаб текис ҳаракатланаётган нуқтанинг ҳаракат миқдори қандай ўзгаради?

7. Механик тизимнинг ҳаракат миқдори деб нимага айтилади?

8. Оғирлик маркази орқали ўтган қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган ғилдиракнинг ҳаракат миқдори нимага тенг?

9. Қаттиқ жисмнинг ҳаракат миқдори унинг қандай ҳаракатини ифодалайди?

10. Моддий нуқта ва механик тизим ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремаларни дифференциал ва интеграл /чекли/ шаклда шакллантиринг. Ҳар бир теоремани ифодалайдиган вектор тенгламаларни Декарт координаталари ўқларидаги проекциялари бўйича ифодаланган скаляр тенгламалар кўринишида ифодаланг.

11. Механик тизим ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема билан тизим масса марказининг ҳаракати ҳақидаги теорема орасидаги боғланишни ўрнатинг. Ҳар иккала теоремани механик тизимларнинг ҳаракатини ўрганишдаги қўлланилишини тушунтиринг. Теоремаларнинг амалий аҳамиятини изоҳланг.

12. Қандай шартларда механик тизимнинг ҳаракат миқдори ўзгармайди? Қандай шартларда тизим ҳаракат миқдори векторининг координата ўқларидаги проекцияси ўзгармайди?

13. Турмуш ва техникадан механик тизим ҳаракат миқдорининг сақланиш қонуни бажариладиган мисоллар келтиринг.

14. Отиш вақтида нима учун акс ҳаракат вужудга келади? Мисоллар келтиринг.

15. Ички кучлар таъсирида тизим ёки тизим қисмининг ҳаракат миқдорини ўзгартириб бўладими?

16. Қандай жисмга ўзгарувчан массали жисм дейилади?

17. Ўзгарувчан массали жисм механикасининг асосини ким яратган?

18. Ўзгарувчан массали нуқта /жисм/ динамикасининг асосий тенгламаси қандай кўринишга эга?

19. Ньютоннинг қуйидаги фикридан қандай хулоса чиқариш мумкин? “Қўлимдан келганини қилдим, яхшироғини одамлар қилсин”.

20. Қандай ҳолда ўзгарувчан массали нуқта динамикасининг тенгламаси одатдаги динамика тенгламасини /Ньютон механикасининг асосий тенгламасини/ ифодалайди?

21. Циолковскийнинг биринчи масаласини шакллантиринг ва уни масса $m(t) = m_o(1 - \alpha t)(\alpha = const,\ \alpha > 0)$ ва $m(t) = Moe^{-kt}$ $(k = const,\ k > 0)$ қонун бўйича ўзгарганда ечинг.

22. Циолковскийнинг иккинчи масаласини шакллантиринг ва уни масса $m(t) = m_0 e^{-kt}(k = const, k > 0)$ қонун бўйича ўзгарганда ечинг.

23. Ракетанинг эркин ҳаракати қандай факторларга /жараёнларга, параметрларга/ боғлиқ бўлади?

24. Ракетанинг тезлиги ёнилғининг ёниш вақтига боғлиқ бўладими?

МУСТАҚИЛ ТОПШИРИҚЛАР

1. [6] дан қуйидаги масалаларни ечиш тавсия қилинади: 28.1; 29.3; 28.7; 28.8; 28.12; 28.16; 28.21; 36.4; 36.6; 36.7; 36.9; 36.12; 36.14; 45.1; 45.3; 45.5; 45.10; 45.31; 45.41

2. “Моддий нуқтанинг тезлигини аниқлашга ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани қўллаш” мавзусидаги Д5 график-ҳисоб ишини бажаринг [7].

3. “Механик тизимнинг ҳаракатини текширишга ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани қўллаш” мавзусидаги Д8 график-ҳисоб ишини бажаринг [7].

9-§. Ҳаракат миқдори моментининг ўзгариши ҳақидаги теорема

1. Нуқта ва ўққа нисбатан моддий нуқта ҳаракат миқдорининг моментлари қандай аниқланади. Улар орасидаги боғланиш қандай?

2. Нуқта ҳаракат миқдорининг вектори қандай жойлашганда унинг ўққа нисбатан моменти нолга тенг бўлади?

3. Марказга ва ўққа нисбатан моддий нуқта ҳаракат миқдори моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани шакллантиринг ва исботланг.

4. Марказий куч деб қандай кучга айтилади?

5. Нуқта ва ўққа нисбатан механик тизим ҳаракат миқдорининг бош моменти қандай аниқланади?

6. Қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган қаттиқ жисм ҳаракат миқдорининг моменти /кинетик моменти/ қандай аниқланади? Агар механик тизим бир қанча жисмлардан иборат бўлса, бундай тизиминнг кинетик моменти қандай топилади?

7. Қаттиқ жисмнинг кинетик моменти унинг қандай ҳаракатини тавсифлайди?

8. Марказга ва ўққа нисбатан механик тизим ҳаракат миқдори бош моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани шакллантиринг ва исботланг.

9. Қандай шартларда марказга инсбатан механик тизимнинг кинетик моменти ўзгармайди? Қандай шартларда эса ўққа нисбатан жисмнинг кинетик моменти ўзгармасдан сақланади?

10. Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм учун ҳаракат миқдори бош моментининг сақланиш қонуни қандай бўлади?

11. Мураккаб ҳаракатда қатнашаётган механик тизимнинг марказга ва ўққа нисбатан ҳаракат миқдорининг бош моменти қандай аниқланади?

12. Механик тизимнинг нисбий ҳаракатида ҳаракат миқдори моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани шакллантиринг. Бу теорема қўлланиладиган мисол ва масалалар келтириб, таҳлил қилинг.

МУСТАҚИЛ ТОПШИРИҚЛАР

1. [6] дан қуйидаги масалаларни ечиш тавсия қилинади: 37.1; 37.2; 37.9; 37.14; 37.18; 37.20; 37.23

2. “Динамиканинг асосий теоремаларини моддий нуқта ҳаракатини текширишга қўллаш” мавзусидаги Д8 график-ҳисоб ишини бажаринг.

3. “Кинетик моментнинг ўзгариши ҳақидаги теоремани қаттиқ жисмнинг бурчак тезлигини аниқлашга қўллаш” мавзусидаги Д9 график-ҳисоб ишини бажаринг [7].

10-§. Иш. Кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теорема

1. Ҳаракатдаги нуқта ва кучнинг асосий динамик скаляр ва вектор катталиклари нималардан иборат?

2. Тўғри чизиқли кўчишда модул ва йўналиш бўйича ўзгармас кучнинг иши қандай аниқланади?

3. Агар ишқаланиш кучининг модули ва йўналиши ўзгармас бўлса, унинг бажарган иши нимага тенг?

4. Модул ва йўналиш бўйича доимий бўлган кучнинг эгри чизиқли кўчишда бажарган ишини қандай содда усул билан ҳисоблаш мумкин?

5. Тенг таъсир этувчи кучнинг бажарган иши нимага тенг?

6. Элементар ишнинг вектор ифодаси қандай бўлади?

7. Элементар ишни кучнинг координата ўқларидаги проекциялари бўйича ифодаланг.

8. Эгри чизиқли кўчишда ўзгарувчан кучнинг бажарган ишини график усулда қандай аниқлаш мумкин?

9. Оғирлик ва эластиклик кучларининг бажарган ишлари қандай аниқланади?

10. Қандай кўчишда оғирлик кучининг бажарган иши: а/ мусбат; б/ манфий; в/ нолга тенг бўлади?

11. Қандай ҳолда эластиклик кучининг бажарган иши мусбат ва қандай ҳолда манфий бўлади?

12. Моддий нуқта кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремани шакллантиринг.

13. Исталган кўчишда қаттиқ жисм ички кучларининг бажарган ишлари нимага тенг?

14. Қаттиқ жисмга қўйилган ташқи кучларнинг бажарган ишларининг йиғиндиси қандай ҳисобланади: а) қаттиқ жисмнинг илгариланма ҳаракатида; б) жисм қўзғалмас ўқ атрофида айланаётганда; в) қаттиқ жисмнинг умумий ҳаракатида.

15. Қўзғалмас ўқ атрофида ω бурчак тезлик билан айланаётган қаттиқ жисмга қўйилган кучнинг қуввати қандай ҳисобланади?

16. Қаттиқ жисм ҳаракатининг умумий ҳолида механик тизимнинг кинетик энергияси ҳақидаги Кёниг теоремасини шакллантиринг.

17. Қаттиқ жисм ҳаракатининг барча тур ҳаракатларида унинг кинетик энергияси қандай ҳисобланади: а) қаттиқ жисмнинг илгариланма ҳаракатида; б) қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракатида; в) қаттиқ жисмнинг ясси параллел ҳаракатида; г) қаттиқ жисм ҳаракатининг умумий ҳолида.

18. Механик тизим кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремани шакллантиринг ва исботланг.

19. Қандай куч майдонига потенциалли куч майдони дейилади? Куч функцияси деб нимага айтилади?

20. Агар майдоннинг куч функцияси маълум бўлса, бу потенциалли майдонда кучнинг элементлар иши ва механик тизимнинг чекли кўчишида бу кучнинг бажарган иши қандай аниқланади?

21. Механик тизимнинг исталган ҳолатида унинг потенциал энергияси нимага тенг? Механик тизим бир ҳолатдан иккинчи ҳолатга ўтганда унинг потенциал энергиясининг ўзгариши нимага тенг?

22. Потенциал майдон куч функцияси билан шу майдонда жойлашган механик тизим потенциал энергияси орасида қандай боғланиш мавжуд?

23. Потенциалли куч майдонида тизимининг исталган нуқтасига таъсир қилувчи кучнинг координата ўқларидаги проекцияси қандай аниқланади?

24. Қандай сиртларга эквипотенциал сиртлар дейилади ва уларнинг тенгламалари қандай бўлади?

25. Потенциалли майдонда моддий нуқтага таъсир этувчи куч, шу нуқтадан ўтувчи эквипотенциал сиртга нисбатан қандай йўналган бўлади?

26. Оғирлик кучи таъсиридаги моддий нуқта ва механик тизимнинг потенциал энергияси қандай ҳисобланади?

27. Оғирлик кучи ва Ньютон тортишиш кучи майдонларининг эквипотенциал сиртлари қандай кўринишга эга?

28. Механик энергиянинг сақланиш ва айланиш қонунининг мазмуни нимадан иборат?

29. Механик энергиянинг сақланиш ва айланиш қонунини эркин тушаётган жисм мисолида тушунтиринг.

30. Нима учун марказий куч таъсиридаги моддий нуқта ясси шакл чизади?

31. Сектор тезлик деб нимага айтилади ва унинг модули қутб координаталарида қандай ифодаланади?

32. Юзалар қонунининг моҳияти нимадан иборат?

33. Марказий куч таъсиридаги нуқтанинг траекториясини аниқловчи дифференциал тенгламанинг Бине шаклида кўриниши қандай бўлади?

34. Ньютон тортишиш кучининг модули қандай формула билан топилади?

35. Ньютон тортишиш кучи майдонида ҳаракатланаётган жисм траекторияси эксцентриситетининг қандай қийматларида коник кесим тенгламалари каноник кўринишдаги эгри чизиқларни ифодалайди:

а) айлана; б) эллипс; в) парабола; д) гипербола.

36. Кеплер томонидан очилган планеталар ҳаракатларининг қонунларини шакллантиринг ва тушунтиринг.

37. Қандай бошланғич шартларда жисм Ернинг йўлдоши бўлиб қолади ва қандай бошланғич шартларда жисм ернинг тортишиш кучини енга олади?

38. Биринчи ва иккинчи космик тезликлар қандай бўлади?

МУСТАҚИЛ ТОПШИРИҚЛАР

1. [6] дан қуйидаги масалаларни ечишни тавсия қиламиз 29.1; 29.3; 29.5; 29.7; 29.14; 29.16; 30.1; 30.3; 30.5; 30.7; 30.11; 30.13; 30.19; 30.30; 38.1; 38.4; 38.5; 38.12

2. "Механик тизимининг ҳаракатини текширишга кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теоремани қўллаш" мавзусидаги Д10 график-ҳисоб ишини бажаринг [7].

11-§. Қаттиқ жисм динамикаси

1. Қаттиқ жисм илгариланма ҳаракатининг дифференциал тенгламалари қандай бўлади?

2. Қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган қаттиқ жисмнинг шу қўзғалмас ўққа нисбатан кинетик моменти қандай формула билан ҳисобланади?

3. Қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган қаттиқ жисм ҳаракатининг дифференциал тенгламаси қандай кўринишда бўлади?

4. Қандай шартларда ўқ атрофида айланаётган жисмнинг айланиши: а) тезланувчан, б) текис, в) секинланувчан бўлади?

5. Қандай нуқтага /моделга/ математик маятник дейилади?

6. Қандай жисмга /моделга/ физик маятник дейилади?

7. Физик маятникнинг келтирилган узунлиги, тебраниш маркази ва ўқи деб нимага айтилади?

8. Физик маятникнинг келтирилган узунлиги қандай формула билан ҳисобланади?

9. Физик маятникнинг келтирилган ўқи ва тебранишлар ўқи қандай хоссаларга эга? Бу ҳақдаги Гюйгенс теоремасининг мазмунини тушунтиринг.

10. Физик маятник кичик тебранишларининг даври қандай формула билан ҳисобланади?

11. Механик тизимнинг қўзғалмас марказга ва тизим масса марказига нисбатан кинетик моментлари орасидаги боғланишни ўрнатувчи теоремани вектор шаклда ва координата ўқларидаги проекциялари бўйича шакллантиринг ва исботланг.

12. Механик тизимнинг нисбий ҳаракатида тизимнинг масса марказига нисбатан кинетик моментларининг ўзгариши ҳақидаги теоремаларни вектор шаклда ва координата ўқларидаги проекциялари бўйича шакллантиринг ва исботланг.

13. Нима учун масса маркази ва масса маркази орқали ўтган исталган ўққа нисбатан механик тизим кинетик моментининг ўзгаришига оғирлик кучи таъсир кўрсата олмайди?

14. Нима учун Қуёш тизимининг кинетик моменти унинг масса марказига нисбатан ўзгармайди?

15. Қаттиқ жисм ясси параллел ҳаракатининг дифференциал тенгламалари қандай кўринишга эга ва улар қандай теоремага асосланиб олинади?

16. Агар жисм масса марказининг траекторияси берилган бўлса, қаттиқ жисм ясси параллел ҳаракатининг дифференциал тенгламаларининг қандай кўринишидан фойдаланиш қулайроқ бўлади?

17. Жисмнинг сферик ҳаракатида қўзғалмас нуқтага нисбатан ва координата ўқларига нисбатан унинг кинетик моментлари қандай формулалар билан ҳисобланади?

18. Жисмнинг сферик ҳаракатида қўзғалмас нуқта орқали ўтган бош инерция ўқларига нисбатан унинг кинетик моментлари нимага тенг?

19. Эйлернинг динамик тенгламалари қандай кўринишга эга?

20. Қандай қаттиқ жисмга /моделга/ гироскоп дейилади?

21. Тез айланувчи гироскопнинг унинг қўзғалмас нуқтасига нисбатан кинетик моменти нимага тенг ва қандай йўналган?

22. Эркинлик даражаси учга тенг бўлган тез айланувчи гироскоп қандай физик хоссаларга эга?

23. Эркинлик даражаси учга тенг бўлган тез айланувчи гироскопнинг қўзғалмас ўқига қўйилган куч таъсири қандай эффект вужудга келтиради?

24. Эркин қаттиқ жисм ҳаракатининг дифференциал тенгламалари қандай бўлади?

25. Қандай шартларда эркин қаттиқ жисмнинг ҳаракати илгарилама бўлади?

МУСТАҚИЛ ТОПШИРИҚЛАР

1. [6] дан қуйидаги масалаларни ечишни тавсия қиламиз: 39.2; 39.3; 39.8; 39.16; 39.17; 39.18; 39.19; 39.22

2. "Қаттиқ жисмнинг илгариланма ва айланма ҳаракатларини текшириш" мавзусидаги Д11 график-ҳисоб ишини бажаринг [7].

3. "Қаттиқ жисмнинг ясси параллел ҳаракатини текшириш" мавзусидаги Д12 график-ҳисоб ишини бажаринг [7].

12-§. Зарба назарияси

1. Қандай ҳодисага зарба дейилади? Зарба кучи нима билан тавсифланади?

2. Зарба кучининг фойдали ва зарарли томонларини изоҳланг.

3. Зарба вақтида механик тизим ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани вектор ва координата ўқларидаги проекциялари бўйича шакллантиринг ва тушунтиринг.

4. Механик тизимнинг ҳаракат миқдорини ички зарба импулслари ўзгартира оладими?

5. Зарба вақтида тиклаш коэффициенти деб нимага айтилади ва тиклаш коэффиценти тажриба йўли билан қандай аниқланади? Унинг қийматлари қандай оралиқда (чегараларда) ётади?

6. Эластик зарбанинг биринчи ва иккинчи фазалари нима билан фарқланади? Абсолют эластик зарбанинг ўзига хос бўлган муҳим хусусияти нимадан иборат?

7. Зарба вақтида механик тизим кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани вектор шаклда ва координата ўқларидаги проекцияларга кўра шакллантиринг.

8. Тўғри марказий зарба ҳар бир фазанинг охирида иккита шарларнинг тезликлари қандай аниқланади?

9. Абсолют эластик зарба вақтида иккинчи ва биринчи фазалар импулсли зарбалари орасидаги боғланиш қандай бўлади?

10. Эластик бўлмаган, эластик ва абсолют эластик зарбалар вақтида иккита тўқнашувчи жисмлар кинетик энергиясининг йўқолиши қандай содир бўлади?

11. Карно теоремасини шакллантиринг ва қўлланилишини изоҳланг.

12. Қандай шартларда айланувчи қаттиқ жисмнинг таянчи жисмга қўйилган ташқи зарбали импулсларнинг таъсирини сезмайди?

13. Зарба маркази деб нимага айтилади ва унинг координаталари қандай бўлади?

14. Зарба маркази билан маятник марказининг муносабати қандай бўлади?

15. Қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган қаттиқ жисмнинг зарба маркази қандай аниқланади? Агар айланувчи жисмга ташқи зарбали импулс қўйилган бўлса, қандай шартларда жисм маҳкамланган таянч зарбали кучнинг таъсирини сезмайди?

МУСТАҚИЛ ТОПШИРИҚЛАР

1. [6] дан қуйидаги масалаларни ечинг: 44.1; 44.2; 44.5; 44.9; 44.11; 44.16; 44.22; 44.27; 44.28

2. "Қаттиқ жисмларнинг тўқнашувини текшириш" мавзусидаги Д13 график-ҳисоб ишини бажаринг [7].

Аналитик механика

1. Аналитик механиканинг предмети, асосий тушунчалари ва вазифасини изоҳланг.

2. Боғланишлар деб нимага айтилади? Боғланишларни классификация қилинг, голономли ва голономсиз (геометрик ва кинематик ёки интегралланувчи ва интегралланувчи бўлмаган), стационар ва стацио-

нар бўлмаган, бўшатадиган ва бўшатмайдиган боғланишлар қандай бўлади? Мисоллар келтиринг.

3. Даламбер тамойиллари моҳияти нимадан иборат? а) моддий нуқта учун; б) механик тизим учун; в) эркин бўлмаган механик тизим учун.

4. Механик тизим инерция кучлари бош векторининг модули ва йўналиши қандай аниқланади?

5. Қаттиқ жисм нуқталарининг инерция кучларини қандай қилиб содда кўринишга келтириш мумкин? а) жисмнинг илгариланма ҳаракатида; б) симметрик текисликка эга бўлиб, бу текисликка перпендикуляр бўлмаган қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган жисм нуқталарининг; в) симметрик текисликка эга бўлиб, ясси параллел ҳаракат қилаётган жисм нуқталарининг ҳаракатида.

6. Қандай шартларда айланувчи жисмнинг таянчга берадиган динамик босими нолга тенг бўлади?

7. Агар берилган ташқи кучлар, боғланиш реакция кучлари ва қаттиқ жисм нуқталарининг инерция кучлари: а) ясси параллел кучлар тизимини; б) текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар тизимини; в) фазовий параллел кучлар тизимини ва г) фазодаги ихтиёрий кучлар тизимини ташкил қилса, эркин бўлмаган тизим учун Даламбер тамойилларини ифодаловчи тенгламаларнинг координаталар ўқларидаги проекциялари бўйича кўринишлари қандай бўлади ва тенгламаларнинг сони қанча?

8. Механик тизимнинг умумлашган координаталари деб нимага айтилади?

9. Механик тизимнинг эркинлик даражаси дейилганда нима тушунилади?

10. Қандай ҳолда тизим нуқталарининг декарт координаталари умумлашган координаталарга боғлиқ бўлиши билан бир қаторда, вақтга ҳам боғлиқ бўлади?

11. Механик тизимнинг мумкин бўлган кўчиши деб нимага айтилади?

12. Мумкин бўлган кўчиш тизимга таъсир этувчи кучларга боғлиқ бўладими?

13. Қандай боғланишларга идеал боғланишлар дейилади?

14. Нима учун ишқаланиш билан содир бўладиган боғланишни идеал боғланиш дея олмаймиз?

15. Мумкин бўлган кўчиш тамойилини қандай шакллантириш мумкин?

16. Иш тенгламаси қандай кўринишга эга бўлади?

17. Нима учун мумкин бўлган кўчиш тамойили бир қанча жисмлардан ташкил топган эркин бўлмаган тизимга қўйилган кучлар тизимининг мувозанатлик шартларини ўрнатишга ва мувозанат тенгламаларни олишга жуда қулай?

18. Бир қанча эркинлик даражага эга бўлган механик тизимга таъсир қилувчи кучлар учун иш тенгламалари қандай тузилади?

19. Содда машиналарда ҳаракатланувчи куч ва қаршилик кучи орасидаги боғланиш қандай бўлади?

20. Механиканинг олтин қоидасини шакллантиринг.

21. Мумкин бўлган кўчиш тамойили ёрдамида боғланишларнинг реакцияси қандай аниқланади?

22. Даламбер-Лагранжнинг дифференциал-вариацион тамоилининг моҳиятини изоҳлаб беринг. Динамиканинг умумий тенгламаси қандай кўринишга эга?

23. Умумлашган координаталар ва умумлашган тезликлар деб нимага айтилади? Мисоллар келтиринг.

24. Умумлашган кучлар нима ва улар қандай хисобланади?

25. Тизимнинг мувозанатлик шартларини умумлашган координаталарда ўрнатинг.

26. Динамиканинг умумий тенгламасини умумлашган кучларда чиқаринг. Ҳар бир механик тизим учун бундай тенгламаларнинг сони нечта бўлади?

27. Умумлашган кучлар бўйича динамиканинг умумий тенгламасидан олинадиган, механик тизимга қўйилган кучлар мувозанат шартларининг кўринишлари қандай бўлади?

28. Потенциалли кучлар учун динамиканинг умумий тенгламасини чиқаринг.

29. Лагранжнинг 2-тур тенгламаларини чиқаринг. Ҳар бир механик тизим учун бундай тенгламаларнинг сони қанча бўлади?

30. Агар механик тизимга бир вақтда консерватив ва консерватив бўлмаган кучлар таъсир қилса, Лагранжнинг 2-тур тенгламалари қандай куринишни олади?

31. Консерватив тизимлар учун Лагранжнинг 2-тур тенгламалари қандай куринишга эга?

32. Эластиклик кучи таъсиридаги механик тизимининг потенциал энергияси қандай аниқланади?

33. Қандай умумлашган координаталарга циклик координаталар дейилади?

34.Лагранж функцияси ва унинг хоссаларини изоҳланг.

35. Лагранжнинг 2-тур тенгламаларидан фойдаланиб, математик ва физик маятник тебранишларининг дифференциал тенгламаларини тузинг.

36. Математик ва физик маятник учун Лагранж функциясини тузинг.

37. Потенциалга эга бўлган кучларнинг мувозанатлик шартлари қандаи кўринишга эга?

38. Лагранж-Дирихле теоремасига кўра мувозанат ҳолатининг турғунлик критерияси қандай бўлади?

39. Ляпунов маъносидаги ҳаракатнинг турғунлиги ҳақидаги асосий таърифларни изоҳланг ва асосий таърифларга геометрик мазмун беринг.

40. Механик тизим мувозанат ҳолатининг турғунлигини текширишнинг тартибини изоҳланг.

41. Квадратик шакл ҳақидаги Сильвестр теоремасини шакллантиринг ва унинг амалий аҳамиятини изоҳланг.

42. Биринчи яқинлашиш бўйича ҳаракатнинг турғунлиги ҳақидаги теоремани шакллантиринг.

43. Механик тизимнинг кинетик ва потенциал энергияларининг умумлашган координаталар ва умумлашган тезликлар орқали ифодаланган каноник ифодаларини топинг.

44. Эркинлик даражаси битта бўлган механик тизим мувозанат ҳолатининг турғунлигини текшириш тартибини изоҳланг.

45. Эркинлик даражаси битта бўлган тизим кичик ўз тебранишларига кичик чизиқли қаршиликнинг қандай таъсир қилишини кўрсатинг.

46. Тизим ўз тебранишларининг даврига кичик чизиқли қаршилик қандай таъсир қилишини кўрсатинг.

47. Эркинлик даражаси битта бўлган тизимнинг мажбурий тебранишлари турғунлигини, қаршиликни эътиборга олмасдан ва қаршиликни эътиборга олиб текширинг.

48. Тебраниш декрементининг ва тебраниш логарифмик декрементининг моҳиятини тушунтиринг.

49. Динамиклик коэффициенти қандай параметрларга боғлиқ бўлишини изоҳланг ва тушунтиринг.

50. Мувозанат ҳолатининг турғунлиги атрофида ва тизимнинг кичик тебранишларида унинг кинетик ва потенциал энергиялари учун икки ўзгарувчан квадратик шаклдаги каноник ифодаларни олишнинг усулларини изоҳланг ва тушунтиринг.

51. Эркинлик даражаси иккита бўлган механик тизим мувозанат ҳолатининг турғунлигини текширишнинг тартибини изоҳланг. Умумий ҳолнинг натижалари қандай бўлади?

МУСТАҚИЛ ТОПШИРИҚЛАР

1. [6] дан қуйидаги масалаларни ечинг: 48.12; 48.13; 48.17; 48.35; 53.4; 53.6; 53.15; 54.10; 54.22; 54.47

2. “Битта эркинлик даражага эга бўлган механик тизимнинг ҳаракатини текширишга динамиканинг умумий тенгламасини қўллаш” мавзусидаги Д19 график-ҳисоб ишини бажаринг [7].

Назарий механикадан масалалар ечишга доир методик тавсияномалар

1. Назарий механиканинг қоида ва қонунларини ўрганиш ва унинг масалаларини ечиш учун тегишли математик билимга эга бўлиш зарур. Курснинг барча бўлимларида статикадан бошлаб векторлар алгебраси

кенг қўлланилади. Векторларнинг координата ўқларидаги проекцияларини, уларнинг йиғиндисини геометрик ва аналитик усулларда топишни, иккита векторнинг скаляр ва вектор кўпайтмаларини ҳисоблай билишни ва бу кўпайтмаларнинг хоссаларини билиш, кинематика ва динамикада эса векторларни дифференциаллашни билиш жуда зарур. Шунингдек, текислик ва фазода тўғри бурчакли декарт координаталари тизимидан эркин фойдалана билиш ҳам керак.

Кинематикани ўрганиш учун эса бир ўзгарувчили функцияни дифференциаллаш, элементар функцияларнинг графикларини ясай билиш, табиий уч ёқли, эгри чизиқнинг эгрилиги радиуси тушунчалари билан, иккинчи тартибли эгри чизиқлар назариясининг асослари ҳақида тушунчага эга бўлиш зарурдир.

Динамикани ўрганиш учун эса энг содда функцияларнинг аниқмас ва аниқ интегралларини топа олиш, бир қанча ўзгарувчили функциянинг хусусий ҳосилаларини ва тўлиқ дифференциалини ҳисоблай билиш, шунингдек, 1-тартибли ўзгарувчилари ажраладиган ва 2-тартибли бир жинсли ва бир жинсли бўлмаган чизиқли дифференциал тенгламаларни интеграллаш масалаларини ҳал қила билиш зарур.

2 Бирор дарслик бўйича курсни ўрганишда бош масала ҳар бир мавзудаги материалнинг мазмунини ёдламасдан тушуниб олишдан иборатдир. Ўрганишни мавзулар ёки боблар бўйича олиб бориш мумкин.

Ҳар бир мавзуни охиригача ўқиб чиқиб ўрганиш ва ўзлаштириш, қийин бўлган жойларни қайтиб ўрганиш, қийин бўлган жойларни диққат билан муҳокама қилиш зарур. Такрор ўқишда асосий диққатни қоидаларга формулаларга ва теоремаларнинг шарт ҳамда хулосаларига қаратиш керак. Формула ва теоремаларни ёдлаб олишга интилмасдан уларнинг мазмунини ўрганиб, ўз сўзларингиз билан изоҳлаб беришга ҳаракат қилиш жуда зарур. Теоремаларни мустақил исботлашни ўрганиш керак. Исботлашнинг мазмунини тушуниш зарур. Исботлаш усулларини ёдлаб олиш ҳеч қандай фойда келтирмайди.

Мавзуни ўрганиб бўлгандан кейин ўрганилган материални дарсликка қарамасдан қисқача конспектлаштириш жуда муҳим аҳамиятга эга. Курсни ўрганиш процессида асосий диққатни дарсликдаги ўрганилган мавзуда ечилган масалаларнинг ечилиш усулига қаратиш керак.

Шундай қилиб, аввало, дарслик ва қўлланмалардаги ечилган масалаларни етарлича муҳокама қилиб, кейингина И.В.Мешчерский масалалар тўпламидан мавзуга тегишли масалаларни мустақил ечиш керак.

Шу фикрни ҳам эслатиб ўтишни лозим топдикки, талаба назарий механикадан етарлича зарурий билимга эга бўла туриб, масалалар ечишдан қийналиши мумкин. Бундай ҳолатдан эса курсни яна мустақил ўрганишни давом этиб, турли мазмундаги масалалар ечишнинг бир неча усулларини ўрганиб, яна кўпроқ мустақил равишда масалалар ечиш билан чиқиш мумкин.

Назарий механика курсида талабалар унинг учта қисмини ўрганадилар: статика, кинематика, динамика. Курсни ўрганишда статика билан кинематиканинг ўрнини алмаштириш мумкин, яъни ўрганишнинг иккита йўли бор: Статика- кинематика-динамика, кинематика-статика-динамика. Назарий механика курсининг динамика қисмини ижодий ўрганиш учун, албатта, олдинги иккита бўлимни ўрганиш зарур.

I ҚИСМ. СТАТИКА

Статика масалаларини ечишга доир методик кўрсатмалар

1. Эркин бўлмаган қаттиқ жисмнинг мувозанати ҳақидаги масалаларни ечишда қўйилган боғланишларнинг реакция кучлари олдиндан номаълум бўлади. Бу номаълум кучларнинг сони қўйилган боғланишларнинг сонига ва хусусиятига боғлиқ номаълум боғланиш реакция кучларининг сони билан номаълум кучларни ўз таркибига олган мувозанат тенгламалари сонидан ошмаса, фақат шундай бўлгандагина бундай статик масалаларни ечиш имконияти бўлади. Бундай масалаларни статик аниқ масалалар, боғланишлар қўйилган жисмлар тизимини эса статик аниқ тизим дейилади.

Агар боғланишлар номаълум реакция кучларининг сони бу номаълум реакция кучларини ўз таркибига олган мувозанат тенгламалари сонидан ортиқ бўлса, бундай мазмундаги масалаларни статик аниқмас масалалар, боғланишлар қўйилган жисмлар тизимини эса статик аниқмас тизим дейилади.

Кўпчилик ҳолларда боғланишларнинг турини ўзгартириш (алмаштириш) билан статик аниқмас масалаларни статик аниқ масалаларга айлантириш мумкин.

2. Статика методлари билан ечиладиган масалалар қуйидаги иккита турнинг бирига тегишли бўлиши мумкин:

1) жисмга таъсир қилаётган кучлар маълум бўлиб, бу жисм қандай ҳолда ёки таъсир қилувчи кучларнинг қандай муносабатларида жисм мувозанатда бўлишлигини аниқловчи масалалар.

2) жисм кучлар таъсирида мувозанатда турган бўлиб, таъсир қилувчи кучларнинг миқдор ва йўналишини аниқлаш ҳақидаги масалалар. Статиканинг барча масалаларида боғланишларнинг реакция кучлари олдиндан номаълум бўлади. Агар боғланиш жисмнинг абсолют силлиқ сиртидан иборат бўлса, бундай ҳолда боғланишнинг реакция кучи сиртларнинг уриниш нуқтасига ўтказилган уринма нормали бўйича йўналган бўлади, яъни боғланиш реакция кучининг йўналиши боғланиш жисмга кўчиш бермайдиган томонга йўналган бўлади. Агар боғланиш цилиндрик шарнирдан иборат бўлиб, жисм унинг ўқи атрофида айланса, бундай ҳолда шарнирнинг ўққа перпендикуляр текисликда ётган реакция кучини олдиндан номаълум бўлган ва координата ўқларининг мусбат йўналишлари бўйича йўналган иккита ташкил этувчи-

га ёйиб излаш лозим. Агар бу ташкил этувчиларни мувозанат тенгламаларидан фойдаланиб аниқлаганимизда, уларнинг ишоралари манфий бўлиб қолса, бундай ҳолда реакцияларнинг йўналиши ўқларнинг мусбат йўналишига қарама-қарши йўналган бўлади.

Барча эгилувчан боғланишлар (арқонлар,қайишлар ва ҳ.к) берилган нуқтада эгилувчан боғланишга ўтказилган уринма бўйича йўналган боғланиш реакция кучларини вужудга келтиради. Жисмга ёки жисмлар тизимига таъсир қилаётган кучларнинг характерини аниқлаш, ҳар хил боғланишларни уларнинг реакция кучларига тўғри алмаштириш ва боғланиш реакция кучларининг йўналишини тўғри аниқлаш статик масалаларни ечишнинг муҳим босқичи ҳисобланади.

Қаттиқ жисмга қўйилган барча кучларнинг мувозанати ҳақидаги масалаларни ечишда қуйидаги иш тартибига амал қилиш кутилган мақсадга тезроқ эришишга имкон беради:

1.Ўзаро тенг ўлчанувчи кучлар тизими қўйилган жисмни (нуқтани) ажратиш. Масалаларни ечиш учун берилган ва изланаётган кучлар ёки изланаётган кучларга тенг бўлган кучлар таъсиридаги жисмнинг мувозанат ҳолатини қараш керак. Бордию берилган кучлар бирор жисмга, изланаётган кучлар эса бошқа бир жисмга қўйилган бўлса, бундай ҳолда жисмларнинг мувозанатини кетма-кет алоҳида қарашга, баъзан эса оралиқ жисмнинг мувозанатини ҳам қарашга тўғри келади.

2. Боғланишдан озод бўлиш тамоилига кўра жисмга қўйилган боғланишларни уларнинг боғланиш реакция кучларига алмаштириш керак.

3. Мувозанатликнинг шартларини (тенгламаларини) тузиш керак. Бу шартларнинг кўриниши жисмга қандай кучлар тизими таъсир қилаётганига боғлиқ бўлади. Боғланишлардан озод бўлгандан кейин, ечиш усуллари танланиб, бу усул масалани ечишга қўлланилади.

4. Изланаётган миқдорлар топилгандан кейин, шу асосида ечимнинг тўғрилиги текширилади.

Масалани ечиш процессида масала мазмунига мос келувчи яхшигина чизма чизиш ва барча шакл алмаштириш ва ҳисоблашларни тизимли ва тушунарли бажариш муҳим аҳамиятга эга. Яқинлашувчи кучлар таъсиридаги жисмнинг мувозанатлик шартига доир масалаларни ечишда геометрик ва аналитик методлардан фойдаланиш мумкин:

а) Геометрик усул. Жисмга таъсир қилаётган кучлар (берилган ва изланган кучлар)нинг сони учтага тенг бўлган ҳолларда геометрик усулни қўллаш жуда қулай бўлади. Жисмнинг мувозанат ҳолатида унга таъсир қилаётган кучлар ёпиқ усбурчак ҳосил қилиш керак. Бу учбурчакни ечиб изланаётган миқдорлар топилади.

б) жисмга таъсир қилаётган кучлар сони исталганча бўлганда аналитик усулни қўллаш мақсадга мувофиқ бўлади. Ясси яқинлашувчи кучлар учун мувозанатлик тенгламалари иккита, фазовий яқинлашувчи кучлар тизими учун эса учта бўлади. Бу ерда координата ўқларнинг йўналишини танлаш муҳим аҳамиятга эга. Ўқларнинг йўналишини турлича танлаш мумкин. Бордию координата ўқларидан бирортасининг йўналишини номаълум кучлардан бирортасининг йўналишига перпендикуляр қилиб танлаш мувозанат тенгламаларини ечишни енгиллаштиради, мувозанат тенгламаларини тузишдан олдин жисмга таъсир қилаётган барча кучларнинг танланган координата ўқларидаги проекцияларини хисоблаш зарур.

Бир текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар таъсиридаги жисмнинг мувозанатлик тенгламаларини тузишда: айниқса, моментлар тенгламасини тузиш момент олинадиган нуқтани (марказни) танлаш билан жуда енгиллашади. Момент маркази қилиб кўпчилик номаълум кучлар таъсир чизиқларининг кесишиш нуқтасини танлаш лозим.

1-МАШҒУЛОТ

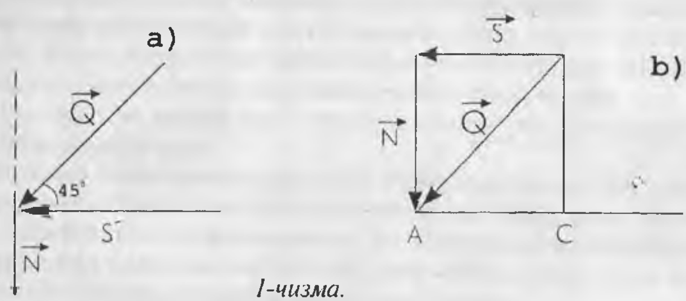
Бу машғулотда бир текисликда жойлашган яқинлашувчи кучларнинг мувозанатлик тенгламаларидан (шартларидан) фойдаланиб, қаттиқ жисмнинг таянч (боғланиш) реакция кучларини топишга доир масалалар ечилади.

1-масала. Горизонтга нисбатан $\alpha = 45^\circ$ бурчак ташкил қиладиган стропило бўйича $\bar{Q}$ =250 кг куч таъсир қилмоқда. Горизонтал йўналиш бўйича зўриқиш кучини ва вертикал ўрнатилган деворга бериладиган босимни топинг.

Ечиш. $\bar{Q}$ кучни шундай иккита $\vec{S}$ ва $\vec{N}$ ташкил тувчиларга ёйиш керакки, улардан бири изланаётган зўриқиш кучига иккинчиси эса вертикал ўрнатилган деворга бериладиган босим кучига тенг бўлсин. (1-чизма)

а) ва б) чизмаларда берилган ва изланаётган кучларнинг йўналишлари тасвирланган. Уларнинг миқдорини эса тўғри бурчакли учбурчак АВС ни ечиш билан топилади.

$$N = S = QSin45^\circ \frac{250\sqrt{2}}{2} кг = 12{,}5 \cdot 1{,}41 кг = 177 кг.$$



1-чизма.

2-масала. АС ва ВС стерженлар ўзаро ва вертикал деворга шарнирлар воситаси билан маҳкамланган. С шарнирли болтга вертикал равишда йўналган Р = 1000 КГ куч таъсир қилмоқда. Агар стерженлар девор билан $\alpha = 30^\circ$ ва $\beta = 60^\circ$ бурчаклар ташкил қилса, бу стерженларнинг шарнирга кўрсатадиган реакцияларини аниқланг.

Ечиш. Р куч таъсирида стерженларда бўладиган зўриқишлар, яъни зўриқиш реакция кучлари стерженлар бўйлаб йўналган бўлади. Зўриқиш кучларининг йўналиши 2-чизманинг а) қисмида тасвирланган.

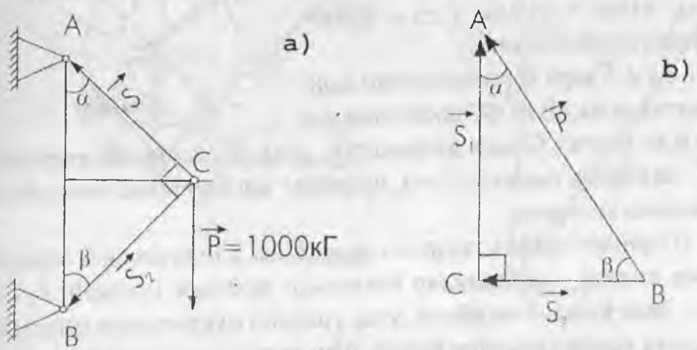
Зўриқиш кучларининг миқдори $\vec{P}, \vec{S}_1$ ва $\vec{S}_2$ кучларга қурилган тўғри бурчакли учбурчак АВСни ечиш билан топилади (2-чизма, б)

1) $\frac{S_2}{P} \Rightarrow Sin\alpha = S_2 = PSin\alpha = 1000 \cdot Sin30^\circ = 1000 \cdot \frac{1}{2} кГ = 500кГ$

2) $\frac{S_1}{P} = Sin\beta \Rightarrow S_1 = PSin\beta = 1000 \cdot Sin60^\circ =$

$= 1000 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} кГ = 500 \cdot \sqrt{3} кГ = 500 \cdot 1{,}731 кГ = 866кГ$

3-м а с а л а. Кўча фонуси бир хил баландликда А ва С нуқталарда крюклар билан маҳкамланган АВС арқоннинг ўртасидаги В нуқтага осилган. Агар фонус оғирлиги 15 кг, АВС арқоннинг узунлиги 20 м бўлиб,



2-чизма.

горизонтдан ВД =0,1м оғишган бўлса, арқоннинг АВ ва ВС қисмларидаги T_1 ва T_2 таранглик кучларини топинг.

Арқоннинг оғирлигини ҳисобга олманг.

Ечиш. Масала шартига кўра: АВ = ВС = 10м; ВД = 0,1м

Тўғри бурчакли Δ АВД дан (3-чизма)

$$Sin\alpha = \frac{ВД}{АВ} = \frac{ВД}{ВС} = \frac{0{,}1}{10} = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

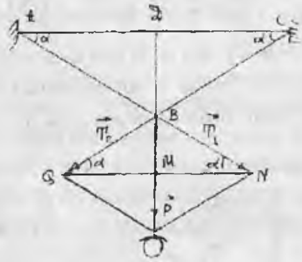
Арқоннинг оғирлик кучини В нуқтага қўйиб, уни арқон йўналиши бўйлаб ташкил этувчиларга ёямиз.

Қаралаётган ҳолда кучлар параллелограми ромб бўлади. Унинг диагоналлари ўзаро перпендикуляр бўлиб, кесишиш нуқтасида бир-бирини тенг иккига бўлади.

QBM ва NBM учбурчаклардан

$$\frac{P}{2} = T_1 \operatorname{Sin}\alpha; \; T_1 = T_2 = \frac{P}{2\operatorname{Sin}\alpha} = \frac{15}{2.0{,}01} \text{кГ} = 750\text{кГ}$$

Олинган формуладан равшанки, α бурчак камайиб бориши билан арқоннинг таранглик кучи ортиб боради.



3-чизма.

Масалан, $\operatorname{Sin}\alpha = 0{,}005$ бўлса, $T = T_1 = T_2 = 1500$ кГ бўлади. Агар арқонни горизонтал ҳолатни эгаллагунча тарангластирсак, яъни $\alpha \Rightarrow 0$ да $T \Rightarrow \infty$ бўлиб, арқон узулиши турган гап.

4-м а с а л а. Ўзаро перпендукуляр жойлашган силлиқ оғма АВ ва ВС текисликларда оғирлиги 6 кг бўлган О шар жойлашган. Агар ВС текислик горизонт билан 60^0 ли бурчак ташкил қилса, шарнинг ҳар бир текисликка берадиган босимини аниқланг.

Ечиш. Шарнинг силлиқ текисликнинг Е ва Д нуқталарига берадиган босими силлиқ текисликлар боғланиш реакция кучлари $\bar{R}_E$ ва $\bar{R}_D$ билан тенг ўлчанувчи бўлиб, улар уриниш нуқталарига қўйилган ва текисликка перпендикуляр бўлиб, шар текисликларга кўчиш бермайдиган томонга йўналгандир. Боғланиш реакция кучларини яқинлашувчи ясси кучларнинг мувозанатлик шартларидан фойдаланиб топамиз: $\sum_K F_{KX} = O$; $\sum_K F_{KY} = O$

Энди берилган ва изланаётган кучларнинг ўқлардаги проекцияларини топамиз:

$$P_x = 0; \qquad P_y = -P;$$

$$R_{Ex} = -R_E \cos 30^\circ; \qquad R_{Ey} = R_F \sin 30^\circ;$$

$$R_{Dx} = R_D \cos 60^\circ; \qquad R_D = R_{Dy} \sin 60^\circ;$$

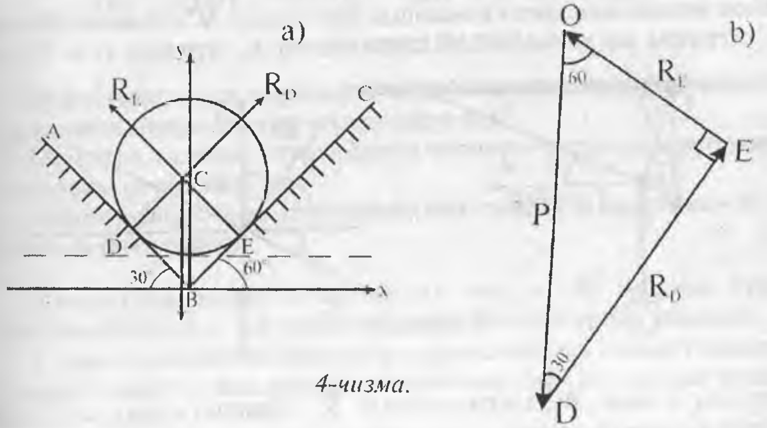
Натижада R_E ва R_D номаълум миқдорларга нисбатан қуйидаги тенгламалар тизимини оламиз (4-чизма, а, б):

$$\begin{cases} -R_E \cos 30^\circ + R_D \cos 60^\circ = 0 \\ R_E \sin 30^\circ + R_D \sin 60^\circ = P \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_D = R_E\sqrt{3} \\ R_E + R_D\sqrt{3} = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} R_E + 3R_E = 12 \\ 4R_E = 4\cdot 3 \Rightarrow R_E = 3\,кГ;\ R_D = R_E\sqrt{3} = 3\sqrt{3}\,кГ = 5.196\,кГ = 5.2\,кГ. \end{array}$$

$\bar{R}_E$ ва $\bar{R}_D$ ни $\bar{P}$, $\bar{R}_E$ ва $\bar{R}_D$ кучларга қурилган куч учбурчагини қуриб ҳам енгилгина топиш мумкин (4-чизма, б)).

Тўғри бурчакли учбурчак ОЕД дан:



4-чизма.

$$\frac{R_D}{D} = \sin 60 \Rightarrow R_D = P\sin 60 = 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}кГ = 3\sqrt{3}кГ$$

$$\frac{R_E}{P} = \cos 60 \Rightarrow R_E = P\cos 60 = 6\cdot\frac{1}{2}кГ = 3ккГ$$

Агар тўғри бурчакли учбурчакнинг 30° ўткир бурчагини қарасак, у ҳолда:

$$\frac{R_E}{P} = \sin 30^\circ \Rightarrow R_E = 3кГ,$$

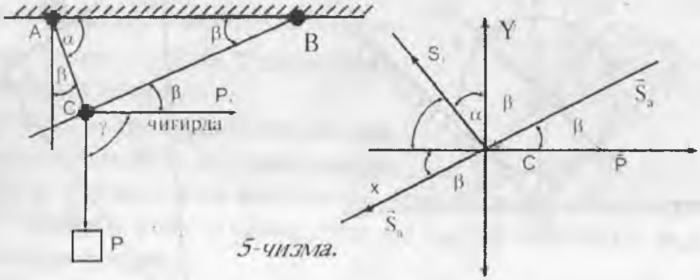
$$\frac{R_D}{P} = \cos 30^\circ \Rightarrow R_D = 3\sqrt{3}кГ.$$

5-м а с а л а. Стерженлардан тузилган АСВ шарнир-қурилмага маҳкамланган С блок орқали ўтган арқоннинг бир учига осилган Р юк ўзгармас тезлик билан кўтарилмоқда. Агар

$P = 100kH$, $\alpha = 60^0$, $\beta = 30^0$, $\gamma = 90^0$ бўлса, блокнинг ўлчамини ва ундаги ишқаланишни эътиборга олмасдан АС ва ВС стерженларнинг зўриқишларини аниқланг (5-чизма).

Ечиш. Берилган қурилманинг С тугун нуқтасининг мувозанатини қараймиз. Бу тугун нуқтадан арқон вертикал пастга йўналгандир. Иккинчи бир P_1 куч эса арқон горизонтал қисмининг зўриқиши бўлиб, унинг миқдори ҳам блокдаги ишқаланишни эътиборга олинмаганлиги туфайли арқон вертикал қисми зўриқишининг миқдорига тенг бўлади: $P_1 = P = 100kH$.

С блок чиғирга горизонтал йўналишда тортилганда АС стержень чўзилади, ВС стержень эса ҳисилади. АС стерженнинг S_1 зўриқиш кучи С тугун



5-чизма.

нуқтадан чиқади, ВС стерженганинг S_2 зўриқиш кучи эса С тугун нуқтага киради (5-чизма).

Координаталар тизимининг боши қилиб, С тугун нуқтани танлаймиз. Абсцисса ўқини $\overline{P_1}$ куч йўналишда ордината ўқини эса вертикал юқорига, яъни $\vec{P}$ кучга қарши йўналтирамиз. S_1 ва S_2 зўриқишларни эса бир текисликда ётган яқинлашувчи кучларнинг мувозанат шартларини ифодаловчи тенгламалардан топамиз:

$$\sum_k F_{kx} = 0, \qquad \sum_k F_{ky} = 0$$

Бизнинг ҳолда:

$$F_{1x} = -S_1 \cos\alpha,\ F_{2x} = -S_2 \cos\beta,\ F_{3x} = P_1;$$
$$F_{1y} = S_1 \sin\alpha,\ F_{2y} = -S_2 \cos\beta,\ F_{3y} = -P_1.$$

Натижада S_1 ва S_2 зўриқишларнинг миқдорларини аниқлаш учун

$$\begin{cases} -S_1 \cos\alpha - S_2 \cos\beta + P_1 = 0, \\ S_1 \sin\alpha - S_2 \sin\beta - P = 0 \end{cases}$$

тенгламалар тизимини оламиз. Бу ерга берилганларни қўйиб, оламиз

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}S_1 - \frac{1}{2}S_2 = 100 \\ \frac{1}{2}S_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}S_2 = 100 \end{cases}$$

Бу тизимни S_1 ва S_2 га нисбатан ечиб, уларнинг миқдорини топамиз

$$S_1 = 50\left(1+\sqrt{3}\right)kH = 50(1+1{,}732)\,kH = 50\cdot 2{,}732\ kH = 136{,}6\ kH$$

$$S_2 = 50\left(\sqrt{3}-1\right)kH = 50(1{,}732-1)\,kH = 50\cdot 0{,}732\ kH = 36{,}6\ kH.$$

2 - МАШҒУЛОТ

Бу машғулотда ясси ферманинг таянч реакциялари ва стерженларининг зўриқишини аниқлашга доир масалалар ечилади.

Геометрик жиҳатдан ўзгармайдиган шарнирли стержень конструкцияга (қурилмага) ферма дейилади.

Агар ферманинг барча стерженлари бир текисликда ётса, бундай фермага ясси ферма дейилади.

1-масала. Шаклда ферма чизмаси ва Р=5кН, $\alpha = 60^0$ берилган А таянчнинг реакциясини ва 1-8 стерженларнинг зўриқишларини аниқланг.

1. В ва А таянчларнинг реакция кучларини топамиз. Бунинг учун фермага таъсир қилаётган ясси кучларнинг мувозанатлик шартларидан фойдаланамиз (6-чизма).

$$\sum_i M_{iA} = 0, \ -R_B\cdot 4a + P\cdot h = 0 \qquad (1)$$

бунда, $h = a\,\mathrm{tg}\alpha.$ бўлиб, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{h}{a}$ бўлади.

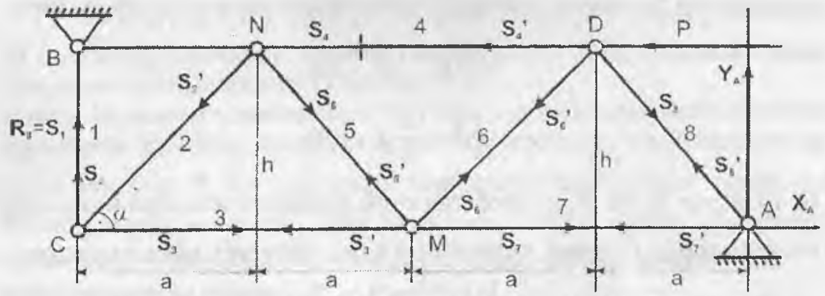
$$\sum_i X_i = O, \qquad X_A - P = O; \qquad (2)$$

$$\sum_i y_i = O, \qquad R_B + У_A = O. \qquad (3)$$

(1) тенгламадан R_B ни топамиз.

$$R_B = \frac{P}{4}\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

$$R_B = \frac{5}{4}\,\mathrm{tg}\,60^\circ\ КН = 1{,}25\cdot 1{,}732\ кГ = 2{,}165\ КН$$



6-чизма.

(2) тенгламадан x_A ни (3) дан эса $У_A$ ни топамиз.

II. Энди фермага таъсир қилаётган ясси кучларнинг мувозанатлик шартларини уларнинг А, С, D нуқталарга нисбатан олинган моментларига нисбатан қўллаймиз.

$$\sum_i M_{iA} = O, \quad \sum_i M_{iA} = O, \quad \sum_i M_{iD} = O$$

$$-R_B \cdot 4a + p \cdot atg\alpha = 0; \tag{4}$$

$$-Y_A \cdot 4a - p \cdot a \cdot tg\alpha = 0 ; \tag{5}$$

$$-R_B \cdot 3 \cdot a + Y_A \cdot a + X_A atg\alpha = 0 \tag{6}$$

(4)тенгламадан $R_B = \frac{P}{4} tg\alpha = \frac{5}{4} tg60^\circ кГ = 2{,}165кН.$

(5) тенгламадан $Y_A = -\frac{P}{4} tg\alpha = -\frac{5}{4} tg60^\circ кГ = -2{,}165кН.$

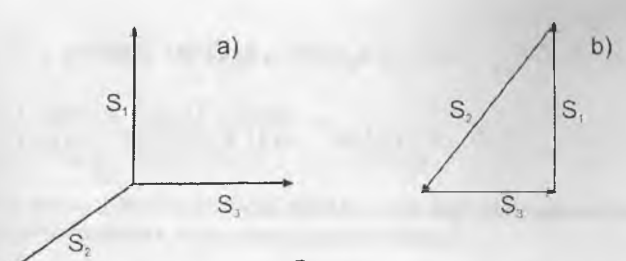
(6) тенгламадан $-\frac{3P}{4} atg\alpha - \frac{P}{4} a \cdot tg\alpha + X_A atg\alpha = 0 \quad X_A = \frac{3P + P}{4} = P - 5кН$

Бизнинг ҳолда 1-стерженни таянч стержен десак, бундай ҳолда бизнинг фермамиз учун юқоридаги тенглик ўринли бўлади.

$(K = 7; \quad n = 5; \quad 7 = (2 \cdot 5 - 3)$

I. Ҳисоблашни С тугун нуқтадан бошлаймиз. Бу тугунда таъсир чизиқлари кесишадиган кучлар учун мувозанатликнинг иккита тенгламасини тузамиз. 1-стержендаги зўриқишни олдиндан топиб қўйган эдик, яъни $S_1 = R_B = 2{,}165кГ.$ (7-расм, а))

$$\underset{k}{Z} F_{kx} = 0; \quad S_3 + S_2 COS\alpha = O \tag{7}$$



7-чизма.

$$\sum_{K} F_{KY} = O; \qquad S_1 + S_2 \mathrm{Sin}\alpha = O \Rightarrow 2{,}165 + S_2 \mathrm{Sin}\, 60^0 = O$$

$$2{,}165 + 0{,}866S_2 = O \Rightarrow S_2 = -\frac{2{,}165}{0{,}866} = -2{,}5KH$$

(7) тенгламадан S_3 ни топамиз.

$$S_3 = -S_2 \cdot \mathrm{COS}\alpha = -(-2{,}5)\mathrm{COS}60^\circ = 2{,}5 \cdot 0{,}5кГ = 1{,}25кГ$$

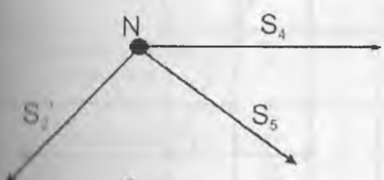
Шундай қилиб, S_2 нинг ишораси манфий, S_3 нинг ишораси эса мусбат, яъни 3-стержен чўзилади, 2-стержен эса қисилади.

Ҳисоблашнинг тўғрилигини текшириш учун S_1, S_2 ва S_3 кучларнинг учбурчагини қурамиз (7-чизма, б).

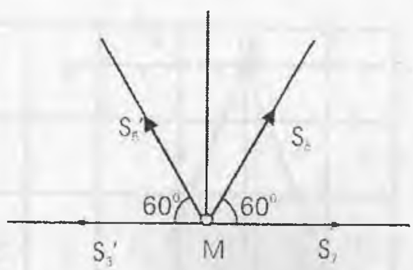
Бунда S_2 нинг йўналиши шаклда кўрасатилган йўналишга қарама-қарши йўналган бўлади.

Демак, кучларга қурилган куч учбурчаги ёпиқ, яъни S_2 ва S_3 реакциялар тўғри топилган.

2.N тугунни қараймиз (8-чизма).



8-чизма.



9-чизма.

$$\sum_{K} F_{KX} = O; S_4 + S_5 COS\alpha - S_5^{I} COS\alpha = O \tag{8}$$

$$\sum_{K} F_{KY} = O; -S_2^{I} COS\left(90^\circ - \alpha\right) - S_5 COS\left(90^\circ - \alpha\right) = O$$

Бу тенгламаларга $S_2^{I} = S_2 = -2.5KH$ ни

қуйиб, S_5 ва S_4 ни топамиз.

$$S_5 = -S_2^{I} = -\left(-25\right)K\Gamma = 2{,}5кH$$

$$S_4 = \left(S_2^{I} - S_5\right)COS\alpha = \left(-2{,}5 - 2{,}5\right)COS60^\circ = -5\,0{,}5 = -2{,}5кH \tag{9}$$

3. M тугунни қараймиз. M нуқтада яқинлашувчи кучлар учун мувозанат тенгламасини тузамиз (9-чизма).

$$\sum_{k} F_{кx} = 0; S_7 - S_3 + S_6 \cdot \cos\alpha - S_5 \cdot \cos\alpha = 0 \tag{10}$$

$$\sum_{k} F_{кy} = 0;\ S_6 \cos(90^\circ - \alpha) + S_5^{1} \cos(90^\circ - \alpha) = 0 \tag{11}$$

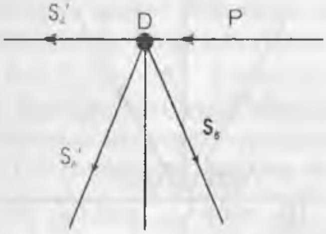
Бу тенгламалар таркибида олдиндан топилган кучлар ҳам бор.

$S_3 = S_3^{I} = 1.25кH;\quad S_5 = S_5^{I} = 2{,}5кH$

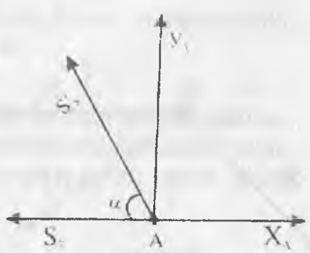
(11) тенгламадан S_6 ни топамиз.

$S_6 = -S_5^{I} = -2.5кH$

(10) тенгламадан S_7 ни аниқлаймиз.



10-чизма.



11-чизма.

$$S_7 = S_3^1 + S_5^1 COS\alpha - S_6 COS\alpha = 1,25 +$$

$$+ 2,5 \cdot COS60^\circ - (-2,5) \cdot COS60^\circ =$$

$$= 1,25 + 2,5.0,5 + 2,5.0,5 = 1,25 + 2,5 = 3,75кН$$

4 D тугун нуқтани қараймиз. Бу нуқтада яқинлашувчи кучлар (10-чизма) учун мувозанат тенгламаларини тузамиз.

$$\sum_K F_{KX} = O; -P - S_4^1 - S_6^1 COS\alpha + S_8 COS\alpha = O \qquad (12)$$

$$\sum_k F_{ky} = 0; \ -S_6^1 \cos(90^\circ - \alpha) - S_6 \cos(90^\circ - \alpha) = 0 \qquad (13)$$

Бу ерда, $S_6 = S_6^1 = -2,5KH$;

$S_4 = S_4^1 = -2.5KH$ (13) тенгламадан S_8 ни топамиз.

$$S_8 = -S_6^1 = -(-2,5) = 2,5KH;$$

(12) тенгламадан ҳам S_8 ни топамиз.

$$S_8 = \frac{5 - 2,5 - 2,5.0,5}{0,5} = \frac{5 - 3,75}{0,5} = \frac{1,25}{0,5} = \frac{12,5}{5} = 2,5KH$$

5. А тугунни қараймиз. Бу тугун орқали X_A, $У_A$, S_8^1 ва S_7 кучларнинг таъсир чизиқлари ўтади. Бу тугун учун мувозанат тенгламалари қуйидагича бўлади: (11-чизма)

Стерженларнинг тартиби	1	2	3	4	5	6	7	8
Зўриқишларнинг ишораси	+	-	+	-	+	-	+	+
Зўриқишлар (кН)	2,165	2,5	2,25	2,5	2,5	2,5	3,75	2,5

$$\sum_{K} F_{KX} = O; \quad X_A - S_7^I - COS\alpha = O$$

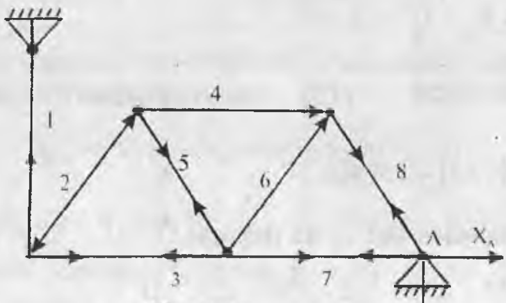
Бу ерда,

$$S_7^I = S_7 = 3{,}75KH; \quad S_8^I = S_8 = 2{,}5KH$$

$$X_A = S_7^I + S_8^I COS\alpha = 3{,}75 + 2{,}5.0{,}5 = 3{,}75 + 1{,}25 = 5KH$$

$$У_A = -S_8^I Sin\alpha = -2{,}5.0{,}866 = -2{,}165кН$$

Энди чизмада стерженъ зўриқишларининг ҳақиқий йўналишини тасвирлаймиз (12-чизма).



12-чизма.

3-МАШҒУЛОТ

Бу машғулотда текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар таъсиридаги жисмнинг мувозанатлик шартларидан фойдаланиб, қаттиқ жисмнинг боғланиш реакцияларини аниқлашга доир масалалар ечилади (механик тизим иккита, учта жисмдан иборат бўлиши мумкин).

Масала. Қаттиқ рама А нуқтада шарнир билан, В нуқтада эса аравачага ўрнатилган қўзғалувчан шарнирга маҳкамланган, С нуқтада рамага блок орқали ўтадиган арқон маҳкамланиб, арқоннинг иккинчи учига P=25кН оғирликдаги юк богланган. Рамага M=60 кнм моментли жуфт, миқдори ва йўналиши чизмада кўрсатилган иккита F_1 ва F_2 кучлар ҳам таъсир қилади. Сонли ҳисоблашларда a=0,5 м деб олинсин.

А ва В нуқталарда боғланиш реакциялари аниқлансин.

Масала шартини қуйидагича қисқача ёзамиз.

Берилганлар: $P = 25kH$, $M=60kHм$

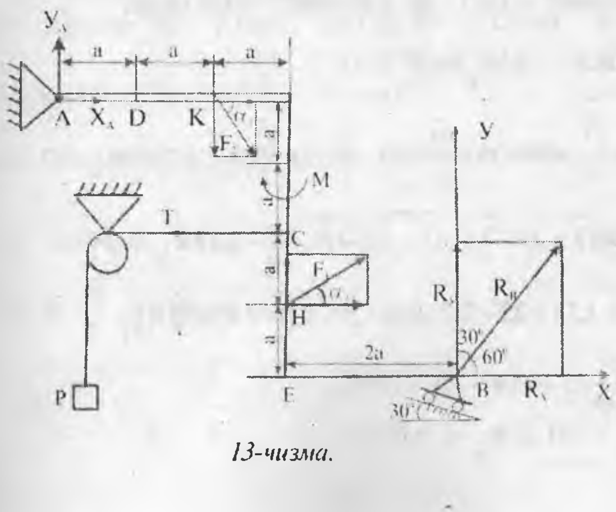
$F_1 = 10kH$, $\alpha_1 = 30^0$, $F_2 = 40kH$,

$\alpha_2 = 60^\circ$, a= 0,5 м

Таъсирлар туфайли А ва В таянчларда вужудга келадиган боғланиш реакция кучлари аниқлансин.

Ечиш. Аравачага ўрнатилган В қўзғалувчан шарнирнинг $\bar{R}_B$ реакцияси таянч текислигига перпендикуляр бўлган йўналиш, яъни нормал буйича йўналган бўлади.

Қўзғалмас А шарнирнинг $\bar{R}_A$ реакцияси М шарнир ўқи орқали ўтиб, текисликда исталган томонга йўналган бўлиши мумкин.



13-чизма.

Масалани ечишда $\bar{R}_A$ реакцияни координата ўқлари бўйлаб йўналган $\bar{X}_A$ ва $\bar{Y}_A$ ташкил этувчиларига ёйиб излаймиз. Маълумки, вектор кучнинг координата ўқларидаги проекциялари маълум бўлса, у кучнинг модули ва йўналишини аниқлаш мумкин (13-чизма).

Арқоннинг $\bar{T}$ таранглик кучи миқдор жиҳатидан P кучнинг модулига тенг бўлади T=P.

Масалани ечиш учун текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар мувозанатлик шартларининг бирор шаклини қўллаймиз. Ихтиёрий ясси кучлар тизими мувозанатда бўлишлиги учун барча кучлар координата ўқлардаги проекцияларининг йиғиндиси алоҳида-алоҳида ва уларнинг кучлар таъсир текислигида ётган исталган марказга нисбатан моментларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарли.

Кўпчилик ҳолларда моментни ҳисоблашда берилган кучни ташкил этувчиларга ёйиб, Варинъон теоремасидан фойдаланиб, кучнинг моментини унинг ташкил этувчилари моментларининг йиғиндиси сифатида ҳам топиш мумкин.

$$mom_o(\bar{F}) = mom_o(\bar{F}_X) + mom_o(\bar{F}_Y).$$

I. Марказга нисбатан моментлар тенгламасини тузамиз.

$$-M + F_2 \sin\alpha_2 \cdot 2a + P \cdot 2a - F_1 \cos\alpha_1 \cdot 3a - F_1 \sin\alpha_1 \cdot 3a -$$

$$-R_B \cos 30^\circ \cdot 4a - R_B \sin 30^\circ \cdot 5a = O$$

$$-60 + 40\sin 60^\circ + 25 \cdot 1 - 10 \cdot 1{,}5\cos 30^\circ - 10 \cdot 1{,}5\sin 30^\circ -$$

$$-2R_B \cos 30^\circ - 2{,}5R_B \sin 30^\circ = O$$

$$-60 + 40\frac{\sqrt{3}}{2} + 25 - 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 15 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} R_B - 2{,}5\frac{1}{2} R_B = O$$

$$-60 + 20\sqrt{3} + 25 - 7{,}5 \sqrt{3 - 7{,}5 - \sqrt{3}}\, R_B - 1{,}25 R_B = O$$

$$-60 + 20 \cdot 1{,}72 + 25 - 7{,}5 \cdot 1{,}72 - 7{,}5 = (1{,}72 + 1{,}25) R_B,$$

$$60 + 34{,}4 + 25 - 12{,}9 - 7{,}5 = 2{,}97R_B$$

$$2{,}97 R_B = -21 \Rightarrow R_B = -7{,}07\text{кН}.$$

2. Кучларнинг проекциялари бўйича мувозанат тенгламаларини тузамиз:

$$1)\quad X_A + F_2 COS\alpha_2 + F_1 COS\alpha_1 - T + R_B COS30^\circ = O$$

$$X_A + 40\,COS\,60^\circ + 10\,COS\,30^\circ - 25 + 7{,}1\,COS\,30^\circ = O$$

$$X_A = -40 \cdot \frac{1}{2} - 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 25 - 7{,}1\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= -20 - 5\sqrt{3} + 25 - 3{,}55\sqrt{3} = 5 - 8{,}55\sqrt{3} =$$

$$= 5 - 8{,}55.1{,}72 = 5 - 14{,}7 = -9{,}7 KкН;$$

$$2)\quad У_A - F_2 Sin\alpha_2 + F_1 Sin\alpha_1 + R_B Sin30^\circ = O$$

$$У_A = 40Sin60^\circ - 10\,Sin30^\circ - 7{,}1\,Sin30^\circ =$$

$$= 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 10\frac{1}{2} - 7{,}1 \cdot \frac{1}{2} = 20\sqrt{3} - 5 - 3{,}55 =$$

$$= 20 \cdot 1{,}72 - 8{,}55 = 34{,}4 - 8{,}55 = 25{,}85кН$$

Энди топилган натижаларни текширамиз. Бунинг учун В марказга нисбатан моментлар тенгламасини тузамиз:

$$-M - F_1 COS\alpha_1 \cdot a - F_1 Sin\alpha_1 \cdot 2a + p \cdot 2a + F_2 COS\alpha_2 \cdot 4a +$$

$$+ F_2 Sin\alpha.3a - X_A \cdot 4a - У_A \cdot 5a = O;$$

$$-60 - 10\,COS\,30^\circ \cdot 0{,}5 - 10 \cdot Sin\,30^\circ + 25 + 40 \cdot COS\,60^\circ \cdot 2 +$$

$$+ 40 \cdot Sin\,60^\circ \cdot 1{,}5 - 2X_A - 2{,}5У_A = O;$$

$$-60 - 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 5 + 25 + 40 - 40\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{2} = 2X_A + 2{,}5У_A;$$

$$2X_A + 2{,}5У_A = \frac{\sqrt{3}}{2}.55;$$

$$2X_A + 2,5 \cdot У_A = 47,3.$$

Юқорида олинган натижаларни, яъни $У_A = 25,85$ кН ва $X_A = -9,68$ кН ни охирги тенгламага қўйсак, уни қаноатлантиради (қисман тақрибий ҳисоблашлар туфайли тақрибий тенглик олинади). Тақрибий ҳисоблаш туфайли $X_A = -9,68$кН бўлганда $У_A = 26,65$кН бўлиб, олдинги натижадан қисман фарқ қилади.

Жавоб: $X_A = -9,68$кН; $У_A = 25,65$кН, $R_B = -7,07$кН. олинган натижалар кўрсатадики, X_A ва R_B реакцияларнинг йўналиши чизмада кўрсатилган йўналишга қарама-қарши йўналган, "плюс" ишораси эса $У_A$ реакция йўналиши ҳақидаги фаразимизнинг тўғрилигини кўрсатади.

4-МАШҒУЛОТ

Бу машғулотда иккита ёки учта жисмдан ташкил топган қурилманинг таянч реакцияларини аниқлашга доир масалалар ечилади.

Масала. Қурилма С нуқтада шарнир ёрдамида бириктирилган бурчак шаклдаги қаттиқ буюм ва стержендан иборат. Қурилма ташқи томондан (ташқи боғланиш) А нуқтада шарнир, В нуқтада оғирликсиз стержен, шунингдек, D нуқтада ҳам DD^1 оғирликсиз стержен билан маҳкамланган.

Қурилмага (конструкцияга) М=60КНМ моментли жуфт, интенсивлиги $q = 20$кН / М текис тақсимланган куч (чизмада текис тақсимланган куч қўйилган участка кўрсатилган) ва яъни

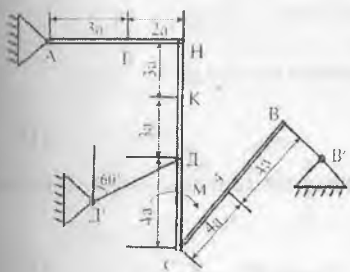
$F_1 = 10$кН ва $F_2 = 30$кН кучлар ҳам таъсир қилади. (Бу кучлар қўйилган нуқталар ва уларнинг йўналишлари чизмада кўрсатилган).

Қурилмага берилган таъсирлар туфайли А, В, С ва D нуқталарда вужудга келадиган боғланиш реакция кучлари аниқлансин. Барча ҳисоблашларда а=0,2м деб олинсин.

Масала шарти ва талабини қисқача қуйидагича изоҳлаш мумкин:

Берилганлар: М=60кнм; $q = 20\,\frac{kн}{м}$ (CL кесма бўйлаб текис тақсимланган): $a = 0,2$М; $F_1 = 10$КН (қўйилиш нуқтаси К); $\alpha_1 = 60^\circ$; $F_2 = 30$кН (қўйилиш нуқтаси Н); $\alpha_2 = 30$.

A, B, C ва D нуқталардаги богланиш реакция кучларини топинг (14-чизма).



14-чизма.

Ечиш. Бу масала ясси кучлар таъсиридаги жисмлар тизимининг мувозанати ҳақида бўлиб, уни ечишда жисмлар тизимининг бутунлай мувозанатини, кейин эса жисмлардан бирининг мувозанатини алоҳида қараш мумкин ёки бўлмаса, дарҳол тизимни қисмларга бўлиб, тўғри ва акс таъсирнинг тенглиги ҳақидаги қонунни эътиборга олиб, қисмларнинг мувозанатини алоҳида-алоҳида қараш лозим.

Бизнинг масалада A ва C таянчлар қўзғалмас шарнирлар бўлиб, уларнинг реакциялари шарнир маркази орқали ўтади, йўналиши эса таъсир текислигида турли томонга йўналган бўлиши мумкин. Шунинг учун уларнинг координата ўқларидаги X_A ва $У_A$ X_C ва $У_C$ проекцияларини аниқлаймиз. DD^1 ва BB^1 стерженларнинг реакцияларини N_D ва N_B орқали белгилаймиз. Шундай қилиб, бизда номаълум миқдорлар олтита, мувозанат тенгламалари эса учта. Бундай ҳолда берилган қурилмани қисмларга бўлишга тўғри келади. C шарнирнинг реакциясини аниқлаш мақсадида берилган қурилмани AHC ва CB қисмларга ажратиб, уларнинг ҳар бирига мувозанат тенгламаларини (шартларини) қўллаймиз. Берилган кучларнинг моментларини ҳисоблаш учун уларни ташкил этувчиларга ёямиз. Варинъон теоремасини қўллаб, кучларнинг моментини улар ташкил этувчилари моментларининг йиғиндиси сифатида аниқлаймиз.

Интенсивлиги $q = 20\,\dfrac{kH}{M}$ бўлган текис тақсимланган кучларнинг тенг таъсир этувчисини топамиз.

$$Q = qs = 20\,\frac{kH}{M}.4\,aM = 20\,\frac{kH}{M}\cdot 4\cdot 0{,}2M = 2\cdot 4\cdot 2KH = 16KH$$

Бу куч CL кесманинг ўртасига қўйилган C тугундаги X_C ва $У_C$ реакциялар AHC қисмга акс таъсир этувчилар ҳисобланиб, AHC қисм реакцияларига қарши йўналган деб ҳисоблаймиз.

I. AHC қисм. 1) A марказга нисбатан моментлар тенгламасини тузамиз.

$$\Sigma mom_A(F_X) = o;$$

$$-M + F_2 Sin\alpha_2 .5 \cdot a - F_1 COS\alpha_1 \cdot 3a -$$

$$-F_1 Sin\alpha_1 \cdot 5a + X_C \cdot 10a - У_C .5a -$$

$$-N_D COS30^\circ - 6a - N_D Sin30^\circ .5a = O \quad (1)$$

Проекциялар буйича яна иккита мувозанат тенгламаларини тузамиз (15-чизма).

$$\sum_K F_{KX} = O; \quad X_A - F_2 \cos\alpha_2 + F_1 \cos\alpha_1 + N_D \cos 30^\circ - X_C = 0 \quad (2)$$

$$\sum_k F_{Ky} = 0; \quad У_A - F_2 \sin\alpha_2 + F_1 \sin\alpha_1 + N_D \sin 30^\circ - У_C = 0 \quad (3)$$

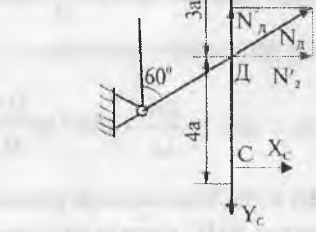
2. CB қисм.

$\sum_K mom_B(F_K) = o; У_C \cdot \ell_1 - X_C \cdot \ell_2 - Q \cdot 6a = O$, бунда,

$$\ell_1 = 8.a \cdot COS30^\circ = 8a\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \cdot a;$$

$$\ell_2 = 8 \cdot aSin30^\circ - 8 \cdot a\frac{1}{2} = 4 \cdot a;$$

$$У_C \cdot 4a - X_C 4\sqrt{3}.a - Q \cdot 6a = O \quad (4)$$



15-чизма.
1. Курилманинг АНС қисми.

Яна берилган кучларнинг ОХ ва ОУ ўқлардаги проекциялари йиғиндисидан иборат иккита мувозанат тенгламаларини тузамиз (16-чизма).

$$\sum_{K} F_{KX} = O, X_C + QCOS30^\circ - N_C COS30^\circ = O \qquad (5)$$

$$\sum_{K} F_{KX} = O; У_C - QSin30^\circ + N_B Sin30^\circ = O \qquad (6)$$

(5) ва (6) тенгламалардан

$$\left.\begin{array}{l} X_C - \frac{\sqrt{3}}{2} N_B = -8\sqrt{3} \\ У_C + \frac{1}{2} N_B = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow X_C + \sqrt{3}У_C = O \qquad (7)$$

(4) тенгламадан эса

$$-0{,}8X_C + 0{,}8\sqrt{3}У_C = 19{,}2 \qquad (8)$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз.
(7) ва (8) тенгламаларни биргаликда ечамиз

$$\left.\begin{array}{l} X_C + \sqrt{3}У_C = O \\ -0{,}8X_C + 0{,}8\sqrt{3}У_C = 19{,}2 \end{array}\right\} \Rightarrow X_C = -12kH; У_C = 6{,}9кH.$$

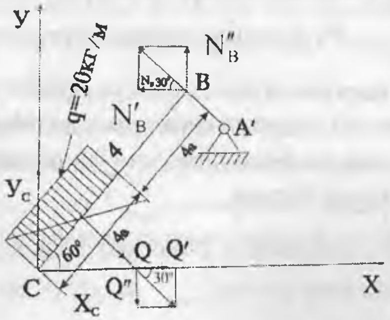
(5) ёки (6) тенгламадан N_B реакцияни аниқлаймиз

$$N_B = Q - 2У_C = 16 - 6{,}9 \cdot 2 = 16 - 13{,}8 = 2{,}2кH$$

(2) тенгламадан X_A ни топамиз:

$$X_A = 15\sqrt{3} - 5 - 1{,}1\sqrt{3} - 12 = 25{,}98 - 5 - 1{,}9 - 12 = 7{,}08 \text{ кH}.$$

(3) тенгламадан $У_A$ ни излаймиз:



16-чизма.
2. Қурилманинг СВ қисми.

$$У_A = 15 - 5\sqrt{3} - 1{,}1 + 6{,}9 = 15 - 8{,}66 -$$

$$- 1{,}1 + 6{,}9 = 21{,}9 - 9{,}76 = 12{,}14 \text{ кН}$$

(1) тенгламадан N_D ни ҳисоблаймиз.

$$- 60 + 30 \cdot \frac{1}{2} - 6 \cdot \frac{1}{2} - 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2X_C -$$

$$- У_C - 1{,}2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot N_D - \frac{1}{2} N_D = 0$$

$$- 48 - 8{,}66 - 24 - 6{,}9 = 1{,}54N_D$$

$$-87{,}56 = 1{,}54N_D,$$

$$N_D = -57\text{кН}$$

Жавоб: $X_A = 7{,}08$кН; $У_A = 12{,}1$кН;

$X_C = -12$kН; $У_C = 6{,}9$кН;

$N_B = 2{,}2$кН; $N_D = -5{,}7$кН.

X_C ва N_D реакциялар чизмада кўрсатилган йўналишга қарама-қарши томонга йўналгандир.

5-МАШҒУЛОТ

Бу машғулотда жисмнинг ясси кучлар таъсиридаги мувозанатлик шартларини ўрнатаётганда ишқалиш кучининг таъсири эътиборга олинади.

Масалани ечаётганда $F_{ишқ} = fN$ бўлганда мувозанатнинг лимитик ҳолати қаралади. Агар момент марказини номаълум кучларнинг кесишган нуқтасида олсак, мувозанат тенгламалари енгил ечилади. Мувозанат тенгламаларини номаълум кучлардан бири проекция ўқига перпендикуляр бўлган ҳол учун тузиш қулай бўлади.

$f_1 = 0$ (ёки $f_2 = 0$) шарт 1-ползун (ёки 2-ползун) силлиқ эканлигини билдиради.

Масала. Бир жинсли оғирлиги P=24кН бўлган стержень 1ва 2 ползунларга шарнирли махкамланган. Ползунлар ўзларининг ҳаракат йўналиши атрофида силжиши мумкин. Ползунларнинг ишқалиш коэффициентлари мос равишда $f_1 = O$ ва $f_2 = 0.2$ га тенг. 1-ползунга Q=60Н куч таъсир қилса, 2-ползунга таъсир қиладиган Q_2 кучнинг энг кичик Q_2^1 қийматини топинг.

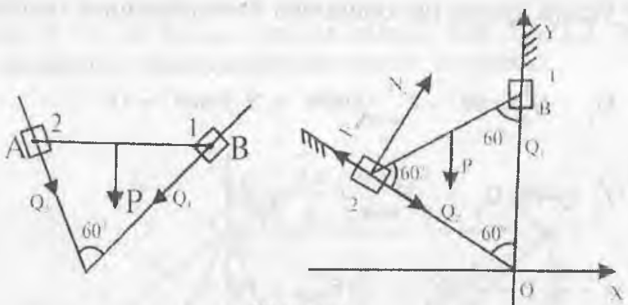
Берилганлар: $P = 24Н,\ Q_1 = 60Н,\ f_1 = O,\ f_2 = 0.2$

Q_2 кучнинг энг кичик Q_2^1 қиймати топилсин.

Ечиш. Масала шартини акс эттирувчи шакл чизамиз.

Масала шартига кўра стержен бир жинсли, шунинг учун стерженнинг оғирлиги унинг ўртасига қўйилган бўлади. AB=a дейлик (17-чизма).

OAB учбурчак тенг томонли, яъни OA=OB=AB= a. Масалада берилишича $f_1 = O$ 1-ползун силлиқ бўлиб, унинг нормал реакцияси $N_1 = O$ бўлади.



17-чизма.

Демак, нормал реакция билан ифодаланувчи ишқалаш кучи фақат 2-ползунга таъсир қилади. Мувозанат тенгламаларида N_1 қатнашмайди.

Ползунларга таъсир қилувчи P, Q_1, нормал реакция N_2 ва 2-ползунга қўйилган $F_{ишк}$ ишқалиш кучларини чизмада тасвирлаймиз.

1) Q_1, Q_2, ва $F_{ишқ}$ кучларнинг таъсир чизиқлари O нуқтада кесишади. Агар мувозанат тенгламасини шу O марказга нисбатан тузсак, бу тенгламага Q_1, Q_2 ва $F_{ишқ}$ кучлар кирмайди.

$$\sum_k mom_o(F_k) = 0, -N_2 a + p \cdot EM = 0,$$

бунда, $EM = \frac{a}{2} Sin60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

У ҳолда $-N_2 a + P\frac{a\sqrt{3}}{4} = O$.

Бу тенгламадан N_2 ни топамиз:

$$N_2 = P \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} H = 6\sqrt{3} H = 6 \cdot 1{,}72H = 10{,}32H.$$

2) $Q_2^I \left(Q_2 = Q_2^I \right)$ ни аниқлаш учун мувозанатнинг лимитик ҳолатида $F_{ишқ}$ ва N_2 кучлар орасидаги боғланишдан фойдаланамиз.

$$/F_{ишқ}/ = f_2 / N_2 / = 0{,}2.10{,}32H = 2{,}064H.$$

3) ОУ ўқдаги кучлар проекциялари йигиндисининг тенгламасини тузамиз:

$$-P - Q_1 - Q_2^I Sin60^\circ + F_{ишқ} Sin30^\circ + N_2 Sin60^\circ = O$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} Q_2^I = -P - Q_1 + \frac{1}{2} F_{ишқ} + \frac{\sqrt{3}}{2} N_2;$$

$$Q_2^1 = -\frac{2}{\sqrt{3}} P - \frac{2}{\sqrt{3}} Q_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} F_{ишқ}^{II} + N_2 =$$

$$= -\frac{2}{1{,}72} \cdot 24 - \frac{2}{1{,}72} \cdot 60 + \frac{1}{1{,}72} \cdot 2{,}064 + 10{,}32 =$$

$$= -\frac{84}{20{,}86} + 1{,}2 + 10{,}32 = -97{,}7 + 11{,}52 = -86{,}18H$$

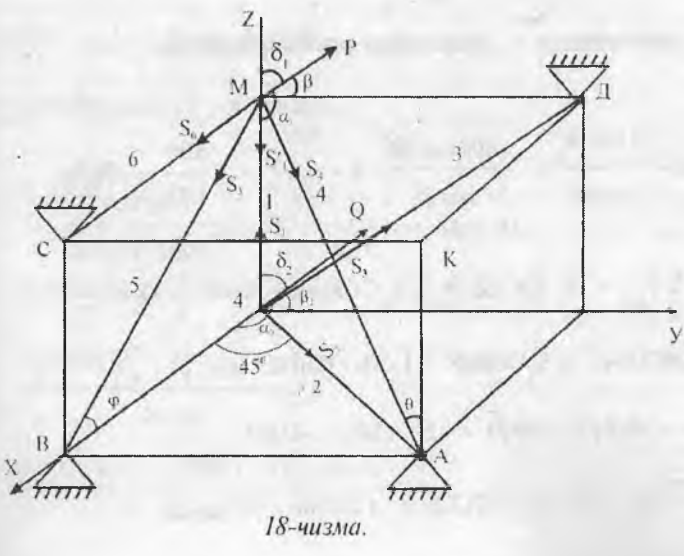
$$Q_2^I = -86{,}18H$$

6-МАШҒУЛОТ

Бу машғулотда фазовий яқинлашувчи кучлар таъсиридаги жисмнинг мувозанатига доир масалалар ечилади. Масалани ечишда стерженлар ва қўйилган кучлар яқинлашадиган тугун нуқталарнинг мувозанати алоҳида-алоҳида қаралади, акс ва тўғри таъсирнинг тенглиги эътиборга олинади.

Масала. Оғирлиги эътиборга олинмайдиган стерженнинг охирги нуқталари ўзаро бир-бирига икки тугун нуқтада шарнирли бириктирилган, қолган A,B,C ва D тугун нуқталарда эса шарнирли қўзғалмас таянчларга маҳкамланган. M тугун нуқтада тизимга $P = 200H$. L тугун нуқтада эса $Q = 100H$ куч қўйилган. P куч координата ўқларининг мусбат йўналиши билан $\alpha_1 = 45^\circ$ $\beta_1 = 60^\circ$, $\delta_2 = 60^\circ$ бурчаклар, Q куч эса $\alpha_2 = 60^0$, $\beta_2 = 45^\circ$, $\delta_2 = 60^\circ$ ли бурчаклар ташкил қилади.

Параллелепипеднинг OXУ текисликка параллел бўлган томонлари квадратлар бўлиб, бошқа ён ўқларининг диагоналлари OXУ текислик билан $\varphi = 60^\circ$ ли бурчак, параллелепипеднинг диагонали эса бу текислик билан $\theta = 51^\circ$ ли бурчак ташкил қилади. LM, LA, LД, MA, MB, MC стерженларнинг зўриқишларини топинг (18-чизма).



18-чизма.

Ечиш. Барча берилган ва изланаётган кучларни чизмада тасвирлаймиз. Масалани ечишда барча стерженлар чўзилади деб қараймиз, яъни стерженларнинг реакциялари тугун нуқтадан чиқади. Ҳисоблаш пайтида стерженнинг реакциялари манфий ишорали бўлиб қоладиган бўлса, бундай ҳолда стержен қисилади, яъни унинг реакцияси тугун нуқтага йўналган бўлади.

1. Барча изланаётган кучлар чизмада тасвирланган. LM стерженнинг реакцияларини S_1 ва S_1^{I} орқали белгилаймиз. Тўғри ва акс таъсирнинг тенглиги ҳақидаги қонунга кўра S_1 реакция S_1^{I} реакцияга қарама-қарши йўналган бўлади, модул бўйича улар тенг $/S_1/ = /S_1^{I}/$.

2. Масалани ечишда фазовий яқинлашувчи кучлар тизимининг учта мувозанатлик шартидан фойдаланамиз:

$$\sum_K F_{KX} = O; \quad \sum_K F_{KY} = O; \quad \sum_K F_{KZ} = O.$$

Ҳисоблашни L тугундан бошлаймиз. Бу тугун нуқтага учта номаълум реакциялар ва берилган Q куч яқинлашади, яъни уларнинг таъсир чизиқлари L тугун орқали ўтади.

L тугун нуқтада якунлашувчи кучлар учун учта мувозанатлик тенгламаларини тузамиз.

1) $\sum_K F_{KX} = O; \quad QCOS\alpha_2 + S_2 COS\ 45^\circ = O$

Бу тенгламадан S_2 реакцияни аниқлаш мумкин.

$$S_2 = -\frac{a\cos\alpha_2}{\cos 45^\circ} = -\frac{800\cos 60^\circ}{\cos 45^\circ} = -\frac{800\frac{3}{3}}{\sqrt{2}/2} = -\frac{100}{1{,}71} = -70{,}7н$$

2) $\sum_K F_{KY} = O; \quad QCOS\ B_2 + S_3 COS\varphi + S_2 Sin45^\circ = O;$

$$100COS45^\circ + S_3 COS60^\circ + (-70{,}7)Sin45^\circ = a$$

$$S_3 = 70{,}7\sqrt{2} - 100\sqrt{2} = -29{,}3\sqrt{2}H = -41{,}9H$$

3) $\sum_K F_{KZ} = O; \quad S_1 + QCOS\ \partial_2 + S_3 Sin\varphi = O$

$$S_1 = -100COS60^\circ - (-41{,}9)Sin60^\circ = -50 + 41{,}9.\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= -50 + 20{,}95.1{,}72 = -50 + 36{,}03 = -13{,}97H$$

M тугуннинг мувозанатлик шартини қараймиз. Бу тугунга Р куч ва $S_4^1; S_4; S_5; S_6$ стержен реакциялари таъсир қилади. Тўғри ва акс таъсирнинг тенглиги ҳақидаги қонунга кўра S_1 реакция $S_1{}^1$ реакцияга қарама-қарши йўналган бўлиб, улар сон жиҳатидан тенг: $S^1{}_1 = S_1$.

S_4 реакциянинг ОХ ва Оу ўқлардаги проекциясини топишда олдин бу кучнинг ОХу текисликдаги проекциясини ҳисоблаш қулай, у миқдор жиҳатдан $S_{4XY} = S_4 \cdot COS\theta$ га тенг. Кейин эса топилган проекцияни ўқларга проекциялаш керак:

$$S_{4X} = S_4 COS\,\theta \cdot COS45^\circ;\ S_{4Y} = S_4 \cdot COS\theta \cdot Sin45^\circ$$

Энди М тугун учун мувозанат тенгламаларини тузамиз ва S_4, S_5 ва S_6 реакцияларни топамиз.

$$PCOS\,\alpha_1 + S_6 + S_5 COS\,\varphi + S_4 COS\,\theta \cdot COS\,45^\circ = O \qquad (1)$$

$$PCOS\,\beta_1 + S_4 COS\,\theta \cdot Sin45^\circ = O \qquad (2)$$

$$PCOS\,\partial_1 - S_1^1 - S_5 Sin\varphi - S_4 Sin\theta = O \qquad (3)$$

(2) тенгламадан S_4 ни топамиз.

$$S_4 = -\frac{PCOS60^\circ}{COS51^\circ Sin45^0} = -\frac{200.\frac{1}{2}}{0{,}63.0{,}71}H = -227{,}3H$$

(3) тенгламадан S_5 ни топамиз.

$$S_5 = \frac{PCOS^\circ\partial_1 - S^1{}_1 - S_4 Sin\theta}{Sin\,\varphi} =$$

$$= \frac{200 \cdot COS60^\circ + 13{,}97 + 227{,}3 \cdot Sin51^\circ}{Sin60^\circ} =$$

$$= \frac{100 + 13{,}97 + 227{,}3 \cdot 0{,}78}{0{,}866} H = \frac{113{,}97 + 177{,}2}{0{,}866} H = \frac{291{,}17}{0{,}866} H = 336{,}2H$$

(4) тенглама ёрдамида S_6 ни ҳисоблаймиз.

$$S_6 = -PCOS\alpha_1 - S_6 COS\varphi - S_4 COS\theta \, COS\, 45^\circ =$$

$$= -200 \cdot COS\,45^\circ - 336{,}2COS\,60^\circ + 227{,}3\,COS\,51^\circ \cdot COS\,45^\circ =$$

$$= \left(- 200 \cdot 0{,}71 - 336{,}2 \cdot \frac{1}{2} + 227{,}3 \cdot 0{,}63 \cdot 0{,}71 \right) H =$$

$$= (-142 - 168{,}1 + 102{,}3) H = (-142 - 65{,}8) H =$$
$$= (-142 - 65{,}8) H = -207{,}8H$$

Жавоб: $S_1 = -13{,}97H$, $S_2 = -70{,}7H$, $S_3 = -41{,}9H$

$S_4 = -227{,}3H$, $S_5 = 336{,}2H$; $S_6 = -207{,}8H$

S_5 стержен чўзилади, қолган стерженлар эса қисилади.

7-МАШҒУЛОТ

Бу машғулотда фазода ихтиёрий жойлашган кучлар таъсиридаги қаттиқ жисмнинг мувозанатига доир масалалар ечилади.

Масала. Иккита бир жинсли тўғри бурчакли тўртбурчак шаклдаги плиталар тўғри бурчак остида бириктирилиб, А нуқтада сферик шарнирга, В нуқтада эсацилиндрик шарнирга ва оғирлиги эътиборга олинмайдиган 1-стерженга маҳкамланган.

Плиталарнинг ўлчовлари чизмада кўрсатилган. Катта плитанинг оғирлиги $P_1 = 5KH$, кичик плитанинг оғирлиги эса $P_2 = 3KH$ га тенг. Плиталарнинг ҳар бири координата текисликларидан бирига параллел бўлиб, ОХУ текислик эса горизонтал жойлашган. Плиталарга улардан бирининг текислигида ётган $M = 4KHM$ моментли жуфт, ОХУ текисликка параллел текисликда ётган ва Е нуқтага қўйилган $F_1 = 6KH$ куч OXZ текисликка параллел текисликда ётган ва Н нуқтага қўйилган $F_2 = 8KH$ куч таъсир қилади (кучлар қўйилган Е ва Н нуқталар плита томонларининг ўрталарида жойлашган). F_1 куч ОХ ўқнинг мусбат йўналиши билан

$\alpha_1 = 60°$, F_2 куч эса OZ ўқнинг мусбат йўналиши билан $\alpha_2 = 30$ ли бурчак ташкил қилиб йўналгандир. А ва В нуқталардаги боғланишларнинг реакциялари ва стерженнинг зўриқиши топилсин.

Ҳисоблашларда $a = 0.6м$ деб қабул қилинг.

ЕЧИШ. Масала шарти ва талабини қуйидагича қисқача ёзайлик:

$P_1 = 5кН$, $P_2 = 3кН$, $F_1 = 6кН$ (Е нуқтага қўйилган).

$\alpha_1 = 60°$, $F_2 = 8КН$ (Н нуқтага қуйилган).

$\alpha_2 = 30°$, $M = 4kHM$, $a = 0{,}6M$. А ва В таянчларнинг реакцияларини ва 1-стерженнинг зўриқишини топинг.

Берилганлар ва изланаётган миқдорларни шаклда тасвирлаймиз (19-чизма).

1. Плиталарнинг мувозанатини қараймиз. Плитага $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ кучлар ва М моментли жуфт таъсир қилади. Бундан ташқари боғланишларнинг реакцияси ҳам таъсир қилади. А сферик шарнирнинг реакциясини учта X_A, Y_A, Z_A ташкил этувчиларга ёйиб, цилиндрик шарнир реакциясининг эса Y_B ва Z_B ташкил этувчиларини, стерженнинг R_1 реакциясини унинг ўқи бўйлаб йўналган деб қараб, излаймиз (стержен чўзилаётган деб қараймиз).

2. 6 та номаълум миқдорни топиш учун плитага таъсир қилаётган фазовий кучларнинг 6 та мувозанат тенгламасини тузамиз. Маълумки, фазовий кучлар таъсиридаги жисм мувозанатда бўлиш учун барча кучларнинг учала координата ўқларидаги проекцияларининг йиғиндиси ва координата ўқларга нисбатан бу кучлар моментларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарли.

$$\sum_K F_{KX} = O,\ \sum_K F_{KY} = O,\ \sum_K F_{KZ} = O,$$

$$\sum_K mom_X(F_K) = O \quad \sum_K mom_Y(F_K) = O \quad \sum_K mom_Z(F_K) = O \qquad (1)$$

Агар жисмга бевосита қўйилган кучлардан ташқари қандайдир М моментли жуфт ҳам таъсир қилса, у ҳолда (1) тенгламаларнинг олдинги учтаси ўзгаришсиз қолади, кейинги учтаси эса қуйидагича бўлади:

$$\sum_K mom_X(F_K) + M_X = O, \quad \sum_K mom_y(F_K) + M_y = O,$$

$$\sum_K mom_Z(F_K) + M_Z = O.$$

3. Кучлар проекцияларининг тенгламасини тузамиз.

$$1) \quad \sum_K F_{KX} = O, \quad X_A + F_1 COS\alpha_1 - F_2 Sin\alpha_2 = O$$

Бу тенгламадан X_A ни аниқлаймиз.

$$X_A = F_2 Sin\alpha_2 - F_1 COS\alpha_1 = 8\,Sin30^\circ -$$

$$-6\,COS\,60^\circ = 8 \cdot \frac{1}{2} - 6 \cdot \frac{1}{2} = 4 - 3 = 1кН$$

$$2) \quad \sum_K F_{Ky} = O, \quad y_A + y_B + F_1 Sin\alpha_1 = O \qquad (2)$$

$$3) \quad \sum_K F_{KZ} = O, \quad R_1 + Z_A + Z_B + F_2 COS\alpha_2 - P_1 - P_2 = O \qquad (3)$$

4. Энди моментлар тенгламасини тузамиз.

$$1) \quad \sum_K M_X(F_K) = O; \; P_1 \cdot \frac{3a}{2} - R_1 \cdot 3a -$$

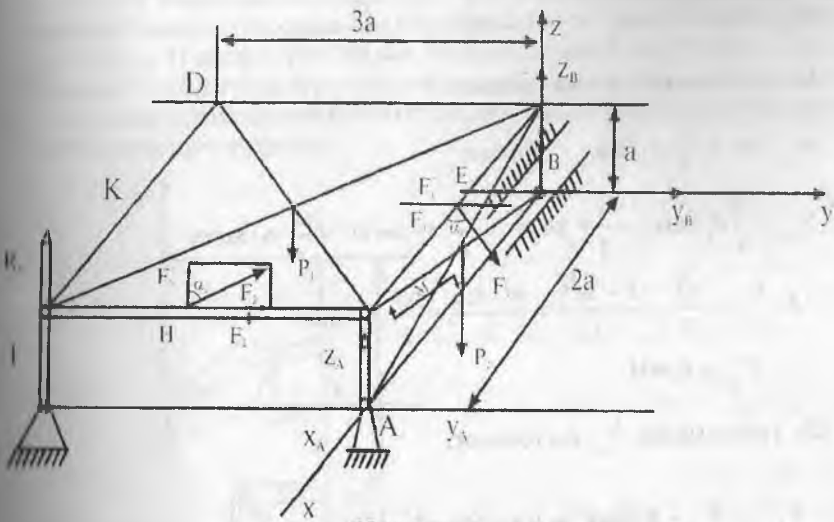
$$-F_2 COS\alpha_2 \cdot \frac{3a}{2} - F_1 Sin\alpha_2 \cdot a = O$$

$$R_1 = \frac{\frac{3}{2} P_1 - F_2 COS\alpha_2 \cdot \frac{3}{2} - F_1 Sin\alpha_1}{3} =$$

$$= \frac{\frac{3}{2} \cdot 5 - 8COS30^\circ \cdot \frac{3}{2} - 6Sin60^\circ}{3} =$$

$$= \frac{5}{2} - 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{3 \cdot 2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2{,}5 - 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2{,}5 - 5{,}2 = -2{,}7FH$$

$$2) \quad \sum_K m_y(F_K) = O:$$



19-чизма.

$$-M - Z_A \cdot 2a - R_1 \cdot 2a + P_1 a + P_2 a - F_2 COS\alpha_2 \cdot 2a -$$

$$- F_2 Sin\alpha_2 \cdot a + F_1 COS\alpha_1 \cdot a = O$$

Бу тенгламадан Z_A ни топамиз.

$$Z_A = -\frac{M}{2a} - R_1 + \frac{1}{2}\left[P_1 + P_2 - F_2 COS \cdot \alpha_2\right] - \frac{1}{2} F_2 Sin\alpha_2 +$$

$$+ \frac{1}{2} F_1 COS\alpha_1 = -\frac{4}{2.0,6} - (-2,7) + \frac{1}{2}(5+3) - 8COS30^\circ -$$

$$- \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot Sin30^\circ + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot COS60^\circ = -\frac{10}{3} + 2,7 + 4 - 4\sqrt{3} -$$

$$- 2 + 1,5 = -3,3 + 2,7 + 4 - 4\sqrt{3} - 2 + 1,5 =$$

$$= 2,9 - 4\sqrt{3} = 2,9 - 4.1,73 = 2,9 - 6,92 = -4KH$$

3) $\sum\limits_K M_z(F_K) = O;$

$$У_A \cdot 2a + F_1 Sin\alpha_1 \cdot a - F_2 COS\left(\alpha_2 \frac{\pi}{2}\right)\frac{3a}{2} = O$$

Бу тенгламадан $У_A$ ни топамиз.

$$У_A \cdot 2a = \frac{3a}{2} F_2 Sin\alpha_2 - F_1 aSin\alpha_1;$$

$$У_A = \frac{3}{4} F_2 Sin\alpha_2 - \frac{1}{2} F_1 Sin\alpha_1 = \frac{3}{4} \cdot 8 \cdot Sin30^\circ - \frac{1}{2} \cdot 6 \quad Sin60 =$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{2} - 3.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6 - 3\sqrt{3}}{2} = \frac{6 - 5,2}{2} = \frac{0,8}{2} = 0,4KH$$

$$У_A = 0,4кH$$

(2) тенгламадан $У_B$ ни топамиз.

$$-У_B = -У_A - F_1 Sin\alpha_1 = 0,4 - 6Sin60^\circ = -0,4 - 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= 0,4 - 3\sqrt{3} = -0,4 - 5,2 = -5,6кH$$

(3) тенгламадан Z_B ни аниқлаймиз.

$$Z_B = -R_1 - F_2 COS\,\alpha_2 + P_1 + P_2 = -(-2,7) - 8\,COS30^\circ +$$

$$+ 5 + 3 = 10,7 - 4\sqrt{3} = 10,7 - 6,9 = 3,8KH$$

Жавоб: $X_A = 1KH;\ У_A = 0,4KH;\ Z_A = -4KH$

$У_B = -5,6KH;\quad Z_B = 3,8KH;\ R_1 = -2,7KH$

Z_A, $У_B$ ва R_1 реакциялар чизмада кўрсатилган йўналишга қарама-қарши томонга йўналган бўлади.

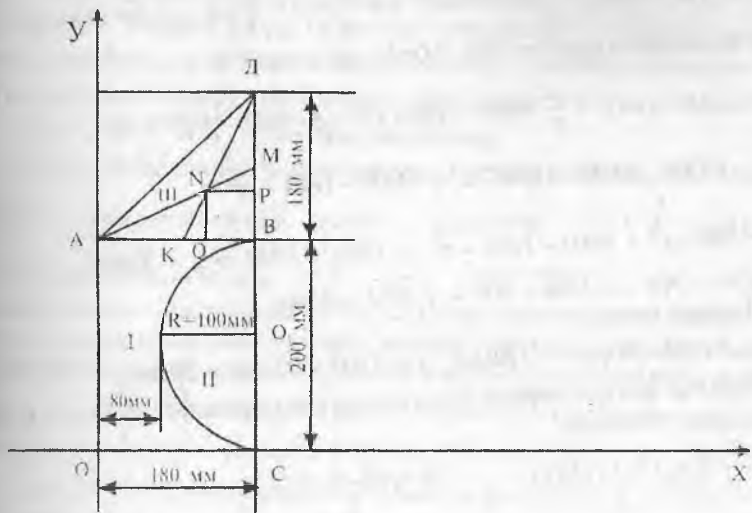
8-МАШҒУЛОТ

Бу машғулотда қаттиқ бир жинсли жисмнинг оғарлик марказини топишга доир масалалар ечилади.

Масала. Бир жинсли юпқа пластинканинг оғирлик маркази координаталари топилсин. Пластинканинг шакли ва ўлчовлари миллиметрларда чизмада кўрсатилган ва берилган.

ЕЧИШ. Масалани ечишга манфий массалар усулини қўллаймиз. Фигуранинг юзини учта содда қисмга ажаратамиз: I қисм – ОАВС тўғри тўртбурчак, II қисм – R =100 мм. ли ярим доирага (манфий юзали) ва III қисм – АВД тўғри бурчакли учбурчак (20-чизма).

Координата боши сифатида О нуқтани танлаб координата ўқларини одатдагидек йўналтирамиз.



20-чизма.

Энди барча фигураларнинг оғирлик марказининг координаталарини ва юзларини ҳисоблаймиз.

I. ОАВС тўғри тўртбурчак учун;

$x_1 = 100$ мм; $y_1 = 90$ мм; $S_1 = 200$ мм $\cdot$ 180 мм $= 36000$ мм^2.

II. Ярим доира учун:

$$x_2 = 180 - \frac{2}{3}\cdot 100 \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = 180 - \frac{400}{3\pi} = 180 - 42.5 = 137.5\text{мм};$$

$$y_2 = 100\text{мм}; \quad S_2 = -0.5\cdot\pi\cdot 100^2 = -0.5\cdot 3.14\cdot 10000\text{мм} = 15700 \text{ мм}^2.$$

III. АВД тўғри бурчакли учбурчак учун:

$$x_3 = (180 - NP)\text{мм}; \quad y_3 = (200 + QN)\text{мм}; \quad S_3 = \frac{1}{2}\cdot 180\cdot 180\text{мм}^2 = 16200\text{мм}^2.$$

NQ ва NP (NQ=NP) кесмаларнинг узунликларини ҳисоблаймиз. Бунинг учун тўғри бурчакли ΔАВД ни қараймиз ва унинг ДК ва АМ меридианларини ўтказамиз. Масала шартига кўра:

АВ=ВД=180 мм ва АК =КВ=ВМ =МД=90 мм.

Меридианларнинг узунликларини ҳисоблаймиз.

$$KD = MA = \sqrt{BD^2 + KB^2} = \sqrt{32400 + 8100} = \sqrt{40500}\text{мм:}$$

$$NK = NM = \frac{1}{3}KD = \frac{1}{3}\sqrt{40500}\text{мм;} \quad AN = ND = \frac{2}{3}KD = \frac{2}{3}\sqrt{40500}\text{мм.}$$

Белгилашларни киритайлик: KQ=X; $AQ = 90 + X$

$$QN^2 = AN^2 - AQ^2 = \frac{4}{9}\cdot 40500 - (90 + x)^2 = 4\cdot 4500 - \left(8100 + 180x + x^2\right) =$$

$$= 18000 - 8100 - 180x - x^2 = 9900 - 180x - x^2$$

$$4500 - x^2 = 9900 - 180x - x^2 \Rightarrow 180x = 5400 \Rightarrow x = 30\text{мм.}$$

$$QN = NP = \sqrt{4500 - 900} = \sqrt{3600} = 60\text{мм.}$$

Шундай қилиб,

$$x_3 = (180 - 60)\text{мм} = 120\text{мм;} \quad y_3 = (200 + 60)\text{мм} = 260\text{мм.}$$

Берилган фигура оғирлик марказининг координаталари қуйидаги формулалардан топилади.

$$x_c = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3}{S_0}, \quad y_c = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3}{S_0},$$

бунда, $S_0 = S_1 + (-S_2) + S^3$.

Қирқиб олинган ярим доиранинг юзи манфий ҳисобланади.

$$S_0 = (3600 - 15700 + 16200)\text{мм}^2 = 36500\text{мм}^2;$$

$$S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3 = 3600\cdot 100 - 15700\cdot 137{,}5 + 16200\cdot 12\delta =$$

$$= 3600000 - 2158750 + 1944000 = 3385250(\text{мм})^2;$$

$$S_1 y_1 + S_2 y_2 + S_3 y_3 = 36000\cdot 90 - 15700\cdot 100 + 16200\cdot 260 =$$

$$3240000 - 1570000 + 4212000 = 5882000(\text{мм}^3):$$

$$x_c = \frac{3385250}{36500}\text{ мм} = \frac{13541}{146}\text{ мм} = 93\text{мм,}$$

$$y_c = \frac{5882000}{36500}\text{ мм} = 190\text{мм.}$$

II ҚИСМ. КИНЕМАТИКА

9-МАШҒУЛОТ

Бу машғулотда моддий нуқтанинг босиб ўтадиган йўлини, ҳаракат қонунларининг тенгламасини тузишга доир ва асосий кинематик хусусиятларни аниқлашга доир масалалар ечилади.

1-масала. Моддий нуқта траектория атрофида $S = 10\sin\pi t$ қонун буйича ҳаракат қилади. 5 сония вақт оралиғида нуқтанинг саноқ бошидан охирги ҳолатгача бўлган S масофасини ва кўрсатилган вақт оралиғида σ йўлини ҳисобланг.

ЕЧИШ: 1.Моддий нуқтанинг охирги ҳолати координатасини унинг ҳаракат тенгламасидан топиш мумкин $t_1 - t_0 = 5$ сек;

$S = 10\sin\pi 5 = 10\sin 5\pi = 0.$

Агар моддий нуқта тезлигининг миқдори вақтнинг функцияси сифатида маълум бўлса, йиғиндининг лимити сифатида унинг босиб ўтадиган йўлини топиш мумкин. Кўпинча вақтда нуқтанинг босиб ўтган σ йули $t_1 - t_0$ вақт оралиғида интеграллаш билан ҳам топилади.

$$d\sigma = /ds/ = /\vartheta/\,dt \qquad (1)$$

бунда, σ – нуқтанинг йўли; S эса унинг эгри чизиқли координатаси; $/\vartheta/$ тезликнинг модули.

Агар (1) ни t_0 дан t_1 гача интегралласак,

$$\sigma = \int^{t_1} /\vartheta/dt \qquad (2)$$

Моддий нуқтанинг тезлиги учун ифода топиш мумкин:

$$\vartheta = \frac{ds}{dt} = 10\pi\cos\pi t\ ,$$

$$d\sigma = /\vartheta/dt = 10\pi/\cos\pi t/dt$$

Нуқтанинг йўли учун ифода қуйидагича бўлади:

$$\sigma = \int_0^5 10\pi/\cos\pi t/\,dt = 10\pi\int_0^5 /\cos\pi t/\,dt$$

$\left(0;\frac{1}{2}\right),\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right),\left(\frac{7}{2};\frac{5}{9}\right)$ интервалларда $\cos\pi t > O$ бўлиб,

$\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right),\left(\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right),\left(\frac{9}{2};5\right)$ интервалларда cos<0 бўлади.

Буларни эътиборга олсак, моддий нуқтанинг босиб ўтган йўли қуйидагича ҳисобланади:

$$\sigma = 10\pi\Big[\int_0^{5/2} COS\pi tdt + \int_{3/2}^{5/2} COS\pi tdt + \int_{7/2}^{9/2} COS\pi tdt -$$

$$- \int_{1/2}^{3/2} COS\pi tdt - \int_{5/2}^{7/2} COS\pi tdt - \int_{9/5} COS\pi tdt\ \Big] =$$

$$= 10\pi\left[\frac{1}{\pi}\left(1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1\right)\right] = 100см\ .$$

2-масала. Моддий нуқтанинг траектория атрофидаги ҳаракати

$s = 5 - 4t + t^2 \quad o \le t \le 5$ тенглама билан ифодаланади. Бу нуқтанинг $t_0 = O$ дақиқадан бошлаб охирги ҳолатигача бўлган S масофасини, кўрсатилган оралиқда унинг босиб утган σ йўлини топинг.

ЕЧИШ. $t_0 = 0;\ t_1 = 5сек,\quad \Delta t = t_1 - t_0 = 5сек$

$$S = S\big|_{t=5сек} = (5 - 4\cdot 5 + 25)см = (30 - 20)см = 10см$$

Моддий нуқтанинг босиб ўтган σ йўлини ҳисоблаймиз.

$$\frac{d\sigma}{dt} = /\vartheta/, \vartheta = \frac{ds}{dt} = -4 + 2t$$

$$\sigma = \int^5 / - 4 + 2t/dt = /\int_0^1 (- 4 + 2t)dt/ + /\int_1^2 (- 4 + 2)dt/ +$$

$$+ /\int_2^3 (- 4 + 2t)dt/ + /\int_3^4 (- 4 + 2t)dt/ + /\int_4^5 (- 5 + 2t)dt/ =$$

$$= /- 4 + 1/ + /- 8 + 4 + 4 - 1/ +$$

$$+ /2 + 9 + 8 - 4/ + /- 16 + 16 + 12 - 9/ +$$

$$+ /- 20 + 25 + 16 - 16/ = (3 + / + / + 3 + 5)см = 13\ см$$

3-масала. Моддий нуқтанинг ҳаракати

$$X = \frac{1}{2}\left(e^{t} + e^{-t}\right),\ \ У = \frac{1}{2}\left(e^{t} - e^{-t}\right) \qquad (3)$$

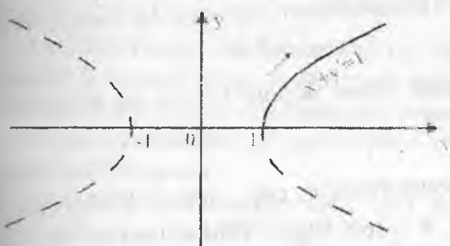
тенгламалар билан ифодаланади.

Моддий нуқтанинг координата шаклидаги траектория тенгламасини ва ҳаракатнинг йўналишини кўрсатинг.

ЕЧИШ. Моддий нуқтанинг координата шаклидаги траектория тенгламасини топиш учун (1) тенгламалар таркибидан t вақтни чиқариб ташлаймиз.Бунинг учун берилган параметрик тенгламаларни ҳадлаб квадратга кўтарамиз ва айирамиз, натижада $x^2 - y^2 = 1$ тенгламани топамиз. Бу тенглама учлари $(-1;0)$ ва $(1;0)$ нуқталарда ётган тенг ёнли гиперболани аниқлайди.

Энди бу гиперболадан нуқта учун траектория бўладиган қисмини ажратамиз. $t = O$ бўлганда $x = 1$, $y = o$ булади.

Нуқта ҳаракати (1;0) нуқтадан бошланади (21-чизма).



21-чизма.

(1) параметрик тенгламалардан t>o бўлганда x>0; y>0 бўлишини кўриш қийин эмас. Шунинг учун нуқта ҳаракатининг траекторияси, гиперболанинг I - чоракдаги тармоғидан иборат бўлади.

Шаклда нуқтанинг траекторияси яхлит чизиқ билан тасвирланган ҳаракатнинг йўналиши эса стрелка билан кўрсатилган.

4-масала. ОА кривошип $\omega = 10сек^{-1}$ доимий бурчак тезлик билан айланади. $OA = AB = 80CM$. АВ шатун М нуқтаси траекториясининг ва ҳаракатининг тенгламаларини топинг.

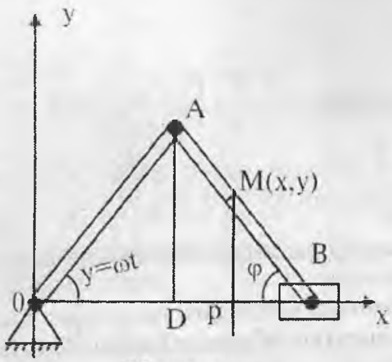
Агар бошланган дақиқада В ползун ўнг ҳолатда турган бўлса, унинг ҳаракат тенгламасини ҳам топинг.

ЕЧИШ. АВ шатуннинг ўрта нуқтаси М $(X, У)$ бўлсин (22-чизма).

М нуқта траекториясининг тенгламасини тузиш учун унинг ҳаракат тенгламаларини билиш керак.

Масала шартига кура ОА кривошип О нуқта атрофида текис айланади. φ бурилиш бурчагини топамиз.

$$\omega = \frac{\vartheta}{t} \Rightarrow \varphi = \omega t \Rightarrow \varphi = 10t\ .$$



22-чизма.

Тўғри бурчакли ΔBMP ни қараймиз. Бу учбурчакдан фойдаланиб, М нуқта координаталарининг ўзгариш қонунини топиш мумкин.

$$\frac{PM}{BM} = \mathrm{Sin}\varphi \text{, бунда } PM = У;$$

$$BM = \frac{AB}{2} = 40 \text{ см бўлгани учун}$$

$У = 40\mathrm{Sin}10t$ бўлади.

$$\frac{PB}{MB} = \cos\omega t \Rightarrow PB = 40\cos\omega t$$

$$X = OP = 3PB = 120\mathrm{COS}10t$$

Шундай қилиб, М нуқтанинг ҳаракат қонунини параметрик шаклда топдик.

$$X = 120\mathrm{COS}10t\,, \quad У = 40\mathrm{Sin}10t\,.$$

Агар бу тенгламалардан t вақтни бирор қоидага кўра чиқариб тенгласак, М нуқтанинг траектория тенгламасини оламиз. Бу тенглама

$\frac{X^2}{120^2} + \frac{У^2}{40^2} = 1$ кўринишга эга бўлиб, ярим ўқлари 120 см ва 40 смга тенг бўлган эллипсни ифодалайди.

В ползуннинг ҳаракат тенгламасини тузамиз. $OB = 4PB$ бўлгани учун ползуннинг ҳаракат тенгламасини $X = 160\mathrm{COS}10t$ кўринишда оламиз.

5-масала. Моддий нуқта бир вақтда ўзаро перпендикуляр сўнувчи тебранишларда қатнашади ва унинг ҳаракати

$$X = AC^{-ht}\mathrm{COS}\,(kt + \varepsilon\,); \quad У = Ae^{-ht}\mathrm{Sin}(kt + \varepsilon)$$

тенгламалар билан ёзилади. Бунда, A>O; n>o; к>O ва ε -доимий сон. Нуқтанинг ҳаракат тенгламаларини қутб координаталарида ифодаланг ва нуқтанинг траекториясини топинг.

ЕЧИШ. Нуқтанинг тўғри бурчакли ва қутб координаталари орасидаги боғланишдан фойдаланамиз.

$$X = \rho\cos\varphi; \;\; y = \rho\sin\varphi; \;\; \varphi = kt + \varepsilon$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Ҳаракат тенгламаларини квадратга кўтариб, ҳадлаб қўшамиз, натижада нуқтанинг қутб координаталаридаги тенгламаларини оламиз

$$P = Ae^{-hr}; \quad \varphi = \kappa t + \varepsilon \tag{4}$$

Қутб координаталарида нуқтанинг траектория тенгламасини олиш учун (4) тенгламалар таркибидаги t вақтни чиқариб ташлаймиз

$$\varphi = kt + \varepsilon \Rightarrow t = \frac{1}{k}(\varphi - \varepsilon)$$

$$\rho = Ae^{-\frac{h}{k}(\varphi-\varepsilon)}$$

Шундай қилиб, нуқтанинг траекторияси логарифмик спиралдан иборат экан.

10-МАШҒУЛОТ

Бу машғулотда комбинацион масалалар, яъни моддий нуқтанинг ҳаракат қонунига кўра, унинг траектория тенгламаси, берилган дақиқада моддий нуқтанинг тезлиги ва тезланиши, шунингдек, унинг уринма ва нормал тезланиши ва траекториянинг берилган нуқтадаги эгрилик радиуси аниқланади.

Масала. В моддий нуқтанинг QXY текисликдаги ҳаракати

$$x = 2 - 3\cos\frac{\pi}{6}t; \quad y = 12\sin\frac{\pi}{6}t; \tag{1}$$

тенгламалар билан ифодаланади. Бунда x ва y сантиметрларда, t эса сонияда ифодаланган.

Нуқтанинг траекторияси топилсин. t = 1сек дақиқа учун нуқтанинг тезлиги ва тезланиши, шунингдек, унинг уринма ва нормал тезланишлари ва шу нуқтага мос келувчи траекториянинг эгрилик радиуси топилсин.

ЕЧИШ. Моддий нуқтанинг ҳаракати параметрик шаклда берилган.

Нуқтанинг траекториясини, яъни унинг координата шаклдаги тенгламасини топиш учун (1) ҳаракат тенгламалари таркибидаги t вақтни чиқариб ташлаш керак. Бунинг учун (1) тенгламаларни қуйидагича ифодалаймиз:

$$\mathrm{COS}\frac{\pi}{6}t = \frac{2-x}{3}; \quad \mathrm{Sin}\frac{\pi}{6}t = \frac{y}{12}$$

Бу тенгликларни квадратга кўтариб, кейин ҳадлаб қўшиб оламиз.

$$\frac{(2-x)^2}{9}+\frac{y^2}{144}=1$$

Шундай қилиб, В нуқтанинг траекторияси ярим ўқлари 3 ва 12 га тенг бўлган эллипсдан иборат бўлиши мумкин, яъни эллипснинг барча нуқталари нуқтанинг траекторияси бўлмаслиги мумкин.

Исталган t дақиқа учун

$$/\operatorname{Sin}\frac{\pi}{6}t/\leq 1 \text{ ва } /\operatorname{COS}\frac{\pi}{6}t/\leq 1$$

тенгсизликлар ўринли, бундай ҳолда ҳаракат тенгламаларидан нуқталарнинг координаталари учун (23-чизма)

$$-1\leq x\leq 5;\ /y/\leq 12$$

чегараланишларни оламиз. Шундай қилиб, траекториянинг нуқталари

$$\frac{(2-x)^2}{3}+\frac{y^2}{12}=1;\ -1\leq X\leq 5\ /У/\leq 12$$

шартларни қаноатлантириш керак.

2. $t_1=1сек$ дақиқага мос келувчи траекториянинг нуқтасини топамиз (ҳисоблашни 0,1 аниқликда бажарамиз)

$$y_B=12\sin\frac{\pi}{6}t_1=12\sin\frac{\pi}{6}=12\cdot\frac{1}{2}=6$$

$$X_1=-2+X=3\operatorname{COS}\frac{\pi}{6}t_1=3\operatorname{COS}\frac{\pi}{6}=\cdot 3\frac{\sqrt{3}}{2}=1{,}5.1{,}73=2{,}58=2{,}6$$

В нуқтанинг янги ва аввалги координаталар тизимидаги ўринларини топдик:

$$B(2{,}6:6)\quad B(4{,}6:6)$$

Шундай қилиб, аввалги координата тизимидаги эллипсни янги координата тизимида ясаш учун уни (2:0) нуқтага параллел кўчириш керак экан.

3. $t=1сек$ дақиқага мос келувчи В нуқтанинг тезлигини топамиз:

$$\vartheta_x=\dot{x}=(-3)\left(-\operatorname{Sin}\frac{\pi}{6}\cdot t\right)\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{6}\cdot t$$

$$\vartheta_y=\dot{y}=12\cdot\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}t=2\pi\cos\frac{\pi}{6}t$$

$$\vartheta=\sqrt{\vartheta_x^2+\vartheta_y^2}=\pi\sqrt{\frac{1}{4}\operatorname{Sin}^2\frac{\pi}{6}t+4\operatorname{COS}^2\frac{\pi}{6}t}$$

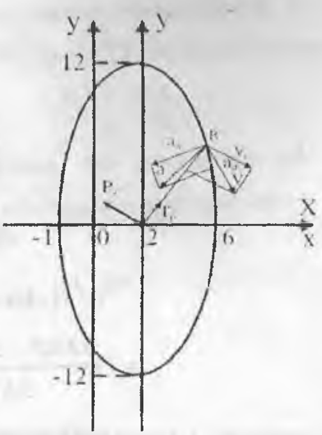
$t = t_1 = 1$ сек бўлганда,

$$\vartheta_x = \frac{\pi}{6} \cdot \operatorname{Sin}\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}8 \text{см / сек},$$

$$\vartheta_y = 2\pi \operatorname{COS}\frac{\pi}{6} = 2\pi\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi\sqrt{3} \approx 5{,}4 \ \frac{\text{см}}{\text{сек}}$$

$$\vartheta = \sqrt{\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2} = \sqrt{\frac{\pi^2}{16} + 3\pi^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{49}{16}\pi^2} = \frac{7}{4}\pi = \frac{7}{4} \cdot 3{,}14 \frac{\text{см}}{\text{сек}} = 5{,}5 \frac{\text{см}}{\text{сек}}$$



23-чизма.

4. Исталган t дақиқадаги B нуқтанинг тезланишини ҳисоблаймиз

$$a_x = \ddot{x} = \frac{\pi^2}{12}\cos\frac{\pi}{6}t; \ \alpha_y = -\frac{\pi^2}{3}\sin\frac{\pi}{6}t$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\frac{1}{144}\operatorname{COS}^2\frac{\pi}{6}t + \frac{1}{9}\operatorname{Sin}^2\frac{\pi}{6}t \cdot \pi}$$

$t = t_1 = 1$ сек бўлган дақиқада,

$$a_x = \frac{\pi^2}{12}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \cdot 14^2 1 + 73}{24} \approx 0{,}71 \text{см / сек}$$

$$a_y = -\frac{\pi^2}{3} \cdot \operatorname{Sin}\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= -\frac{3{,}14^2}{6} = -\frac{9{,}86}{6}\frac{\text{см}}{\text{сек}^2} 1{,}64\frac{\text{см}}{\text{сек}^2} = 1{,}6 \text{см / сек}^2$$

$$a = \pi^2\sqrt{\frac{1}{144} \cdot \operatorname{COS}^2\frac{\pi}{6} + \frac{1}{9}\operatorname{Sin}^2\frac{P}{6}} = \pi^2\sqrt{\frac{1}{144} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{4}} =$$

$$= 3{,}14^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12}\sqrt{19} = \frac{9{,}86 \cdot 4{,}36}{24} = \frac{42{,}98}{24} = 1{,}8 \text{см / сек}^2$$

5. В нуқтанинг уринма тезланишини топиш учун $\vartheta_2 = \vartheta_x^2 + \vartheta_y^2$ тенгликни t вақт бўйича дифференциаллаймиз ва топамиз

$$\alpha_\tau = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\vartheta_x a_x + \vartheta_y a_y}{\vartheta}$$

Бу ифоданинг чап қисмига барча топилган қийматларни қўйиб $t_1 = 1$сек дақиқага мос келувчи уринма тезланишнинг миқдорини топамиз

$$/a_\tau/_{t1=1сек} = /\frac{d\vartheta}{dt}/_{t_1=1сек} =$$

$$= /\frac{0,8.0,7 - 5,4.1,6}{5,5}/_{t_1 = 1сек} =$$

$$= /\frac{0,56 - 8,64}{5,5}/ = /\frac{-8,08}{5,5}/ = 1,47см/сек^2.$$

6. $t_1 = 1$сек дақиқада нормал тезланишнинг қийматини топамиз

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{1,8^2 - 1,5^2} = \sqrt{3,24 - 2,25} = \sqrt{0,99} = 1\,\frac{см}{сек^2}.$$

7. $t_1 = 1$сек дақиқага мос келувчи траекториянинг эгрилик радиусини ҳисоблаймиз

$$\rho = \frac{\vartheta^2}{a_n} = \frac{5,5^2}{1}см = 30,3\ см.$$

8. В нуқта тезлигининг радиал ва трансверсал ташкил этувчиларини топиш мақсадида В нуқтанинг радиус-векторини аниқлаймиз

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4 - 12COS\frac{\pi}{6}t + 9COS^2\frac{\pi}{6}t + 144Sin^2\frac{\pi}{6}t}$$

$\dot r = \vartheta_r$ радиал тезлик учун ифода топамиз

$$\vartheta_r = \frac{2\pi Sin\frac{\pi}{6}t + (-3\pi COS\frac{\pi}{6}t) + Sin\frac{\pi}{6} + 48\pi COS\frac{\pi}{6}tSin\frac{\pi}{6}t}{2\sqrt{4 - 12COS\frac{\pi}{6}t + 9COS^2\frac{\pi}{6}t + 144Sin^2\frac{\pi}{6}t}}$$

$t = t_1 = 1$ сек га мос келадиган қийматини топамиз

$$\vartheta_r = \dot{r}/_{ts=1сек} = \frac{2\pi\cdot\frac{1}{2}+45\pi.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{4-6\sqrt{3}+\frac{27}{4}+36}} = \frac{\pi\cdot\frac{4+45\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{187-24\sqrt{3}}} \approx$$

$$\approx \frac{64{,}32}{12{,}1} = 5{,}3см\ /\,сек.$$

ϑ_r нинг ишораси мусбат бўлгани учун унинг йўналиши r° бирлик векторИ йўналишига мос тушади.

9. Тезликнинг трансверсал ташкил этувчисини ҳам топиш мумкин, унинг миқдорини аниқлаймиз

$$/\,\vartheta_\rho\,/ = \sqrt{\vartheta^2-\vartheta^2} = \sqrt{5{,}5^2-5{,}3^2} = \sqrt{2{,}16} \approx 1{,}5см./\,сек$$

Биз ϑ_ρ ташкил этувчининг фақат миқдорини аниқладик унинг ишорасини ҳам аниқлаш мумкин. Бунинг учун

$$r_\rho = r\dot{\varphi},\quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x},\ r = \sqrt{x^2+y^2}$$

формуладан фойдаланамиз.

Бу ҳолда $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{12\sin\frac{\pi}{6}t}{2-3\cos\frac{\pi}{6}t}$

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{1+\left(\frac{12\sin\frac{\pi}{6}t}{2-3\cos\frac{\pi}{6}t}\right)^2}\cdot\frac{2\pi\cos\frac{\pi}{6}t\left(2-3\cos\frac{\pi}{6}t\right)-6\pi\sin^2\frac{\pi}{6}t}{\left(2-3\cos\frac{\pi}{6}t\right)^2} =$$

$$= \frac{4\pi COS\frac{\pi}{6}t - 6\pi}{\sqrt{\left(2 - 3COS\frac{\pi}{6}t\right)^2 + \left(12Sin\frac{\pi}{6}t\right)^2}};$$

$$\vartheta_p = r\dot{\varphi} = \frac{4\pi COS\frac{\pi}{6}t - 2\pi}{\sqrt{4 - 12COS\frac{\pi}{6}t + 9COS^2\frac{\pi}{6} + 144Sin^2\frac{\pi}{6}t}}$$

$$\vartheta p = r\dot{\varphi}\Big/_{t = 1сек} = \frac{4\pi\frac{\sqrt{3}}{2} - 6\pi}{\sqrt{4 - 6\sqrt{3} + \frac{27}{4} + 36}} =$$

$$= \frac{\pi\left(2\sqrt{3} - 6\right)}{\sqrt{187 - 24\sqrt{3}}} \approx -0{,}7\, см\Big/сек^2$$

Шундай қилиб, ϑ_P нинг йўналиши P^0 бирлик векторнинг йўналишига қарама-қаршидир. P^0 бирлик векторнинг йўналиши эса r^0 бирлик векторни соат стрелкаси (миллари) ҳаракатига қарши йўналишда 90^0 га буришдан ҳосил қилинади. a_n нормал тезланиш эса траекториянинг ботиқ томонига йўналган бўлади. a_τ уринма тезланишнинг йўналишини a ва a_n бўйича аниқлаймиз. a_τ тезланиш- ϑ вектор тезлик йўналишида бўлиб, нуқта $t = 1сек$ дақиқада тезланувчан ҳаракат қилади. Агар уринманинг мусбат йўналишини вектор тезликнинг йўналишидек қабул қилсак, тезланишнинг уринма ташкил этувчисининг ишорасини "плюс" билан олиш керак, яъни $a_\tau = 1{,}5см / сек^2$. Энди топилган натижаларни чизмада тасвирлаймиз.

11 - МАШҒУЛОТ

Бу машғулотда қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракатига доир масалалар ечилади.

1-масала. АВ вертикал ўқ атрофида айланувчи марказдан қочма регуляторнинг маятниги минутига 120 марта айланади.

Бошланғич дақиқада айланиш бурчаги $\frac{\pi}{6}$ радианга тенг $t = \frac{1}{2}$ сек ичида маятникнинг бурилиш бурчагини ва бурчак кўчишини топинг.

ЕЧИШ. Марказдан қочма регулятор маятниги

$$\varphi = \omega t + \varphi_0$$

қонун бўйича айланади. Бунда $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ га тенг. Текис айланишнинг бурчак тезлигини топамиз.

$$\omega = \frac{\pi . n}{30} = \frac{\pi}{30} \cdot 120 рад = 4\pi рад$$

$$\varphi = \Big/_{t = \frac{1}{2} сек} = 4\pi . \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{13}{6} \pi \text{ рад}$$

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 = \omega t = 4\pi \cdot \frac{1}{2} = 2\pi \text{ рад}.$$

2-масала. Ғилдирак тинч ҳолатдан чиқиб, текис тезланувчан айлана бошлади. Ҳаракат бошланганда 10 минутдан кейин у $120 \frac{айл}{мин}$ бурчак тезлик билан айланади. Ғилдирак ана шу 10 минут ичида нечта айланиш қилди?

ЕЧИШ. Масала мазмунига кўра бурилиш бурчаги тақрибан айланишлар сонига тенг

$$Z = \frac{120 \frac{айл}{мин} . 10 \text{ мин}}{2} = 600 \text{ айл}$$

Бу натижани бошқа усул билан ҳам олиш мумкин.

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{120\ \frac{\text{айл}}{\text{мин}}}{10\text{мин}} = \frac{2\ \frac{\text{айл}}{\text{сек}}}{600\ \text{сек}} = \frac{1}{300}\ \text{сек}^{-2};$$

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{1/300\ \text{сек}^{-2} \cdot 600^2 \cdot \text{сек}^2}{2} = 600\ \text{айл}$$

3-масала. Маятник вертикал текисликда қўзғалмас горизонтал ўқ атрофида тебранма ҳаракат қилади. Бошланғич дақиқада мувозанат вазиятдан чиқиб $\frac{2}{3}$ секунддан кейин ўзининг $\alpha = \frac{\pi}{16}$ рад энг катта оғиш бурчагига эришди.

1) маятникнинг тебраниш қонунини топинг;

2) қандай ҳолатда маятник ўзининг энг катта тезлигига эришади ва у нимага тенг?

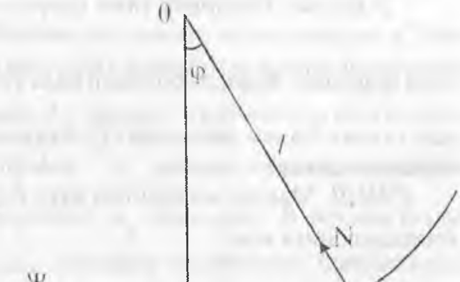
ЕЧИШ. М нуқтанинг ўзгарувчан координатасини, яъни маятникнинг мувозанат вазиятдан оғиш бурчагини $\varphi = \varphi(t)$ орқали белгилайлик. Асосий мақсад ана шу φ нинг ўзгариш қонунини топишдан иборатдир.

М нуқта фақатгина $P = mg$ оғирлик кучи таъсирида бўлади.

Бу кучнинг бир ташкил этувчиси P_n нормал бўйича йўналган бўлиб, у маятник ипининг $\vec{N}$ боғланиш реакцияси кучи билан тенг ўлчанувчи бўлади. (24-чизма)

(Бу ерда ҳосил бўладиган боғланиш реакция кучи нуқтани К айлана бўйлаб ҳаракат қилишга мажбур этади). Иккинчи ташкил этувчиси эса, яъни $-mg\sin\varphi$ куч М нуқтани мувозанат вазиятга қайтаришга мажбур қилади. Бундан ташқари маятникка $F = ma$ инерция кучи ҳам таъсир қилади. Бу ерда $S = \ell\varphi$, $\ddot{S} = a$, $a = \ell\ddot{\varphi}$ бўлгани учун $F = m\ell\ddot{\varphi}$ бўлади.

Маятникнинг мувозанатлик шартидан фойдаланиб, унинг ҳаракат тенгламасини топамиз.



24-чизма.

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi \Rightarrow l\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0$$

φ оғиш бурчаги кичкина бўлганда $\sin\varphi \approx \varphi$ булишлигини эъти-борга олсак ва $k^2 = \frac{g}{l}$ белгилашни киритсак маятник ҳаракатининг тенгламасини қуйидагича оламиз.

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0$$

Бу тенгламанинг ечимини

$$\varphi = A\sin kt + B\cos kt \qquad (1)$$

кўринишда излаймиз.

(1) дан

$$\dot{\varphi} = AK\cos kt - BK\sin kt \qquad \ddot{\varphi} = -AK^2\sin kt - BK^2\cos kt \qquad (2)$$

муносабатларни топамиз.

Ҳаракат бошланиб, $t = \frac{2}{3}$ сек вақт ўтгандан кейин

$\dot{\varphi} = 0$ бўлиб, $\varphi/_{\dot{\varphi}=0} = \alpha = \frac{\pi}{16}$ бўлади.

Тебранишнинг даври ва частотасини топамиз.

$$T = 4t = 4\cdot\frac{2}{3}\text{ сек} = \frac{8}{3}\text{ сек}; \quad KT = 2\pi \text{ дан } K = \frac{3}{4}\pi \text{ бўлади.}$$

(1) ва (2) дан қуйидаги тизимни топамиз:

$$\begin{cases} A\sin\frac{2k}{3} + B\cos\frac{2k}{3} = \frac{\pi}{16} \\ A\cos\frac{2k}{3} - B\sin\frac{2k}{3} = 0 \end{cases}$$

Бу ердан A ва B ни $k = \frac{3}{4}\pi$ бўлганда топамиз.

$$A = \frac{\pi}{16}\sin\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\pi = \frac{\pi}{16}, \quad B = \frac{\pi}{16}\cos\frac{2k}{3} = \frac{\pi}{16}\cos\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\pi = \frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Шундай қилиб, маятник гармоник тебранма ҳаракат қилар экан.

$$\varphi = \frac{\pi}{16}\,\mathrm{Sin}\,\frac{3}{4}\pi t \qquad (3)$$

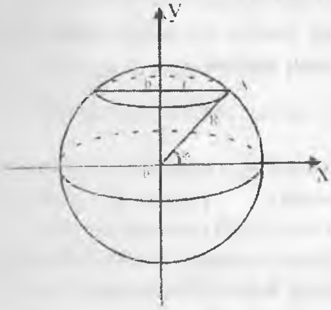
Энди маятник қандай ҳолатда бўлганда унинг бурчак тезлиги энг катта қийматга эришганлигини аниқлаймиз ва шу энг катта қийматни топамиз.

$\omega = \omega_{max}$ бўлиши учун $\ddot{\varphi} = \varepsilon = 0$ бўлиши керак. (3) дан

$$\ddot{\varphi} = -\frac{\pi}{16}\left(\frac{3}{4}\pi\right)^2 \mathrm{Sin}\,\frac{3\pi}{4}t = 0 \Rightarrow \mathrm{Sin}\,\frac{3\pi}{4}t = 0 \Rightarrow t = 0$$

Маятник вертикал ҳолатда бўлганда унинг бурчак тезлиги энг катта қийматга эга бўлади.

$$\omega_{max} = \dot{\varphi} = \dot{\varphi}/_{t=0} = AK = \frac{\pi}{16}\cdot\frac{3}{4}\pi = \frac{3}{64}\pi\ \text{сек}^{-1}$$



25-чизма.

4-масала. Ер сиртининг Термизда жойлашган нуқтасининг кенглиги 37^0. Ер радиуси эса 6370 км ва ер фақат ўз ўқи атрофида айланади деб, Термизда жойлашган нуқтанинг ϑ тезлиги ва w тезланишини аниқланг.

ЕЧИШ. Агар ер ўз ўқи атрофида текис айланади десак қуйидаги муносабатлар ўринли (25-изма)

$$\vartheta = \omega r,\quad w = \omega^2 r.$$

Бу ерда,

$$r = R\cos\varphi;\quad \varphi = 37^0$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1сутка} = \frac{2\pi}{24.3600сек};$$

$$\vartheta = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6370 \cdot 0{,}7986}{24 \cdot 3600} \frac{км}{сек} = \frac{31947{,}1}{86400} \frac{км}{сек} = 0{,}37 \frac{км}{сек} = 370 \frac{м}{сек}.$$

$$w = \frac{4 \cdot 3.14^2 \cdot 6370 \cdot 0.7986}{24^2 \cdot 3600^2} \frac{км}{сек^2} =$$

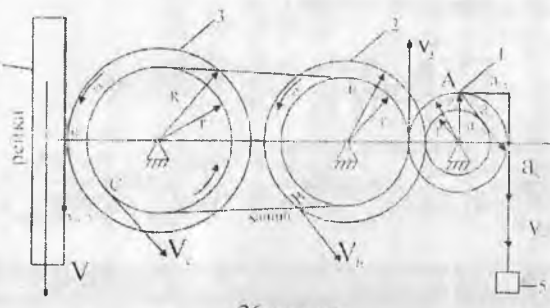
$$= \frac{200627.8\ км}{7464960000\ сек^2} = 0.0027 \frac{км}{сек^2} = 2.7 \frac{м}{сек^2}.$$

12-МАШҒУЛОТ

Бу машғулотда қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракатига доир конбинацион масала ечилади.

Масала: Механизм бир-бири билан қайиш ёки тишлашиб боғланган учта 1-3 ғилдиракларидан, 4 тишли рейкадан ва ғилдиракларидан бирига арқон билан боғланган 5 юкдан иборат. Ғилдиракларнинг ички ва ташқи радиуслари мос равишда r_1=2 см, R_1=4 см, r_2=6 см, R_2=8 см, ва r_3=12 см, R_3=16 см га тенг. Ғилдиракларнинг гардишларида А, В ва С нуқталар жойлашган. Агар 4 рейка $S_4 = 4\left(7t - t^2\right)$ см қонун бўйича ҳаракатланса, t_1 = 2 сек дақиқада В ва С нуқталарнинг ϑ_B ва ϑ_C чизиқ тенгликларини А нуқтанинг a_A чизиқ тезланишини, 2 ғилдиракнинг ε_2 бурчак тезланишини ва 5 юкнинг чизиқ тезланишини аниқланг.

Бунда ϑ ва ω нинг мусбат йўналиши соат стрелкаси йўналишига қарама-қарши йўналган, S_4 ва ϑ_5 пастга йўналган деб қаралади.



26-чизма.

Ечиш. Масала шартини ва изланганларни акс эттирувчи чизма чизамиз (26-чизма).

Масала шартига кўра φ ва ω нинг мусбат йўналиши соат стрелкаси йўналишига қарши.

Тишлашган нуқталарда чизиқли тезлик миқдор ва йўналиш бўйича бир хил бўлади. Битта ўққа маҳкамланган ғилдиракларнинг бурчак тезлиги бир хил бўлади. Қайишнинг ва қайиш билан боғланган шкивларнинг ҳам чизиқ тезликлари бир хил бўлади.

1) $t_1 = 2сек$ дақиқада рейканинг ϑ_4 тезлигининг йўналиши ва миқдорини топамиз.

$$\vartheta_4 = (S_4)^{\cdot}_t = 4(7-2t);\quad \vartheta_4 = 4(7-4t_1) = 4(7-2\cdot 2) = 12\,{}^{см}/_{сек}$$

Бу тезликнинг ишораси мусбат, у пастга йўналган ва $\vartheta_м = \vartheta_4$. Энди чизмада ғилдиракларнинг айланиш йўналишларини, яъни бурчак тезликларнинг йўналишларини кўрсатамиз.

2) $\vartheta = \omega r$ формуладан фойдаланиб, ω_3 ни топамиз.

$$\omega_3 = \frac{\vartheta_м}{R_3} = \frac{\vartheta_4}{R_3}$$, шунингдек, ϑ_c ни ҳам аниқлаш мумкин:

$$\vartheta_C = \omega_3 r_3 = \frac{\vartheta 4}{R4}\cdot r_3 = \frac{12}{16}.12\,{}^{см}/_{сек} = 9\,{}^{см}/_{сек}.$$

3) Навбатдаги ғилдиракларни қараймиз.

$$\omega_2 = \frac{\vartheta_2}{r_2} = \frac{\vartheta_C}{\tau_2},$$ бунда $\vartheta_C = \frac{\vartheta_4}{R_3}\tau_3$

ω_2 учун қуйидаги ифодани топамиз:

$$\omega_2 = \frac{\vartheta_C}{r_2} = \frac{\vartheta_1}{r_2}\cdot\frac{r_3}{R_3} = \frac{r_3}{r_2 R_3}4(7-2t)_{см}^{-1}. \quad (1)$$

4) В нуқтанинг тезлигини топамиз.

$$\vartheta_B = \omega_2 R_2 = \frac{r_3 R_3}{r_3 R_3}4(7-2t) = \frac{12.8}{6.16}.4(7-2\cdot 2)\,{}^{см}/_{сек} = 4.3\,{}^{см}/_{сек} = 12см/сек.$$

5) (1) формула ёрдамида иккинчи ғилдиракнинг бурчак тезланишини топиш мумкин. Бурчак тезланиш бу бурчак тезликдан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилага тенг.

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{r_3}{r_2 R_3} 4(7-2t)\right] = \frac{4 r_3}{r_2 R_3}\cdot\frac{d}{dt}(7-2t) =$$

$$\frac{4r_3}{r_2 R_3}(-2)\text{сек}^{-2} = 4(-2)\cdot\frac{12}{6.16} = -1\ \text{сек}^{-2}.$$

6) ϑ_C чизиқли тезлик қайиш бўйича шкивга узатилади. Иккинчи ғилдиракнинг бурчак тезлиги

$\omega_2 = \dfrac{\vartheta_2}{r_2} = \dfrac{\vartheta_C}{r_2}$, бунда, $\vartheta_C = \dfrac{\vartheta_4}{R_3} r_3$

формула бўйича топилади. Бощқа томондан эса ω_2

$\omega_2 = \dfrac{\vartheta_2}{r_2}$ ва $\omega_2 = \dfrac{\vartheta_3}{R_2}$ формулалар билан ифодаланиб, улардан

$\vartheta_2 = \dfrac{r_2}{R_2}\vartheta_B$ формулани оламиз.

Энди ω_1 учинчи ғилдиракнинг бурчак тезлигини ҳисоблаймиз.

$$\omega_3 = \frac{\vartheta_3}{R_3} = \frac{\vartheta_4}{R_3} = \frac{12\ см/сек}{16\ см} = 0.75\ сек^{-1}$$

7) А нуқтанинг чизиқли тезлиги ва тезланишини топамиз.

$$\vartheta_A = \frac{R_1}{r_1}\vartheta_B = \frac{R_1}{r_1}\omega_2 R_2 = \frac{R_1 R_2 r_3}{r_1 r_2 R_3}4(7-2\cdot 2t)\text{см/сек} = 24\text{см/сек}$$

$$a_A = \sqrt{a_{\tau A}^2 + a_{nA}^2}$$

$$a\tau_A = \frac{d\vartheta_A}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{R_1 R_2 r_3}{r_1 r_2 R_3}4(7-2t)\right] =$$

$$= \frac{R_1 R_2 r_3}{r_1 r_2 R_3}(-8)\frac{см}{сек^2} = \frac{4\cdot 8\cdot 12}{2\cdot 6\cdot 16}(-8)\frac{см}{сек^2} = -16\frac{см}{сек^2}$$

Нормал тезланишни эса $a_{nA} = \dfrac{\vartheta_A^2}{R_1}$ формула бўйича топамиз.

$$a_{nA} = \frac{576}{4}\frac{см}{сек^2} = 144\frac{см}{сек^2}.$$

a_A ни топамиз. Унинг йўналиши чизмада тасвирланган .

$$a_A = \sqrt{(-16)^2 + 144^2} = \sqrt{16^2 + 16^2 9^2} = \sqrt{16^2 \cdot 82} =$$

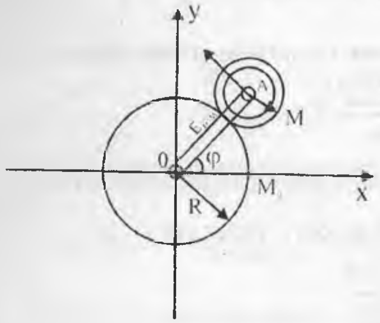
$$= 16\sqrt{82} = 16 \cdot 9.05\frac{см}{сек^2} 145\frac{см}{сек^2}$$

Уринма тезланиш ишораси манфий бўлганлиги учун унинг йўналиши чизмада кўрсатилган йўналиш билан мос тушмайди.

8) Энди a_5 тезланишни излаймиз. Бу тезланиш 5 юкнинг тўғри чизиқли тезланишидир. А нуқтанинг тезлиги маълум. А нуқтанинг тезлиги соат стелкаси бўйича уринма бўйлаб йўналган. Шундай экан ϑ_4 ни ϑ_A нинг модули бўйича излаймиз. $\vartheta_5 = \vartheta_A$ бўлиб, ϑ_5 пастга йўналгандир.

$$a_5 = \left|\frac{d\vartheta_5}{dt}\right| = \left|\left[\frac{R_1 R_3 r_2}{r_1 r_4 R}4(7-2t)\right]\right| = \left|\frac{R_1 R_3 r_2}{r_1 r_4 R}\cdot 4\cdot 2\right|\frac{см}{сек^2} =$$

$$= \left|-\frac{4\cdot 8\cdot 12}{2\cdot 6\cdot 16}\cdot 8\right|\frac{см}{сек^2}\left|-16\right|\frac{см}{сек^2}16\frac{см}{сек^2}$$



27-чизма.

13-МАШҒУЛОТ

Бу машғулотда ясси параллел ҳаракат қилаётган нуқтанинг (жисмнинг) ҳаракат тенгламаларини тузишга, бундай ҳаракат қилаётган жисмнинг тезлиги ва тезланишини ҳисоблашга доир масалалар ечилади.

1-масала. r_1 радиусли шестерна R-радиусли кўзғалмас шестерна сиртида о кўзгалмас шестерна ўқи атрофида ε_0 бурчак тезланиш билан текис тезланувчан айланаётган ОА кривошип билан ҳаракатга келади. (27-чизма). Кўзғалувчан шестерна А марказини қутб деб қабул қилиб, унинг ҳаракат тенгламаларини тузинг. t=0 пайтда кривошипнинг бурчак тезлиги ва бурилиш бурчаги нолга тенг, яъни $\omega|_{t=0} = \omega_0 = 0,\ \varphi|_{t=0} = \varphi_0 = 0.$

Ечиш. Шестерна ясси параллел ҳаракат қилади. Унинг ясси параллел ҳаракати А нуқтанинг кўчирма доиравий илгариланма ва А нуқта атрофидаги айланма ҳаракатидан ташкил топади. Агар нуқтани қутб деб қабул қилсак, у нуқта бир вақтда r радиусли шестерна ва ОА кривошипда ётади (27 чизма). ОА кривошип ω_o ўзгармас бурчак тезлик билан айланиб, у t вақт ичида ωt бурчакка бурилади. Шунингдек, бу бурилиш бурчак ε доиравий ўзгармас бурчак тезланиш билан ҳам содир бўлади, яъни $\varphi = \varphi_o + \omega_o t + \dfrac{\varepsilon_o t^2}{2}$.

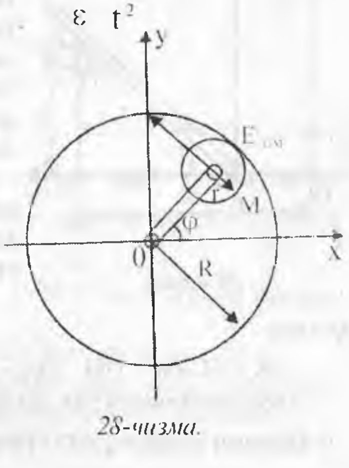
Шартга кўра $\varphi_o = O$ ва $\omega_o = 0$.

Бундай ҳолда бурилиш бурчаги учун $\varphi = \dfrac{\varepsilon_o t^2}{2}$ ифодани топамиз.

А нуқта координаталарининг ўзгариш қонунини топиш мумкин.

$X_A = OA \quad COS\,\varphi = (R + r)COS\dfrac{\varepsilon_o t^2}{2};$

$Y_A = OASin\varphi = (R +$ $\varepsilon \quad t^2$



28-чизма.

Энди ҳаракатдаги шестернанинг бурилиш бурчагини топамиз. Бу шестернанинг А қутб нуқта атрофидаги айланма ҳаракати қандайдир ω_1 бурчак тезлик билан содир бўлади. Шестерналар ташқи томондан тишлашган. Қаралаётган ҳолда кривошип мусбат йўналишда айланади десак, шестерна ҳам мусбат йўналишда ҳаракат қилади. Шартга кўра шестерна силжимасдан думалайди десак, ҳаракатларни узатишнинг асосий кинематик хусусияти узатиш нисбати бўлади. Бизнинг ҳолда i-узатиш нисбати қуйидагича:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_o} = \frac{R + r}{r} \quad \text{бундан} \quad \omega_1 = \frac{R + r}{r}\,\omega_o$$

Агар $\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt}$ ва $\omega_0 = \varepsilon_0 t$ муносабатларни эътиборга олсак φ_1 бурилиш бурчак учун

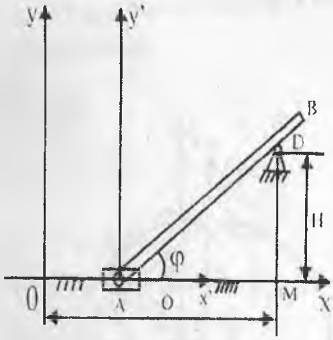
$$\varphi_1 = \left(\frac{R}{r}+1\right)\frac{\varepsilon_0 t^2}{2}$$

ифодани топамиз.

Агар шестерналар ички томондан тишлашган бўлса, у ҳолда ҳаракатдаги шестернанинг ҳаракат тенгламалари қуйидагича бўлади (28-чизма).

$$X_A = (R-r)\cos\frac{\varepsilon_0 t}{2}; \quad Y_A = (R-r)\sin\frac{\varepsilon_0 t}{2}; \; \varphi_1 = \left(\frac{R}{r}-1\right)\frac{\varepsilon_0 t}{2}$$

2-масала. Д устунга таянган АВ стерженнинг А учи тўгри чизиқли йўналишда ϑ ўзгармас тезлик билан силжийди. Стерженнинг узунлиги l. Д таянч нуқта тўғри чизиқли йўналишдан Н баландликда жойлашган. Бошда стержен А учининг ҳаракати қўзғалмас координата тизимининг боши О нуқта билан устма-уст тушади: ОМ= а. А нуқтани қутб деб, стержен ва унинг В учининг ҳаракат тенгламаларини топинг.



29-чизма.

Ечиш. Қўзғалмас координата тизимининг боши қилиб О нуқтани, қўзғалувчан координата системасининг боши қилиб стерженнинг учини оламиз (29-чизма).

А нуқта тўгри чизиқли текис ҳаракат қилади.

$OA = \vartheta t. AM = OM - OA = a - \vartheta t$

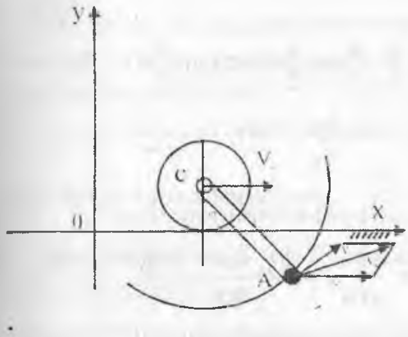
А нуқта абсцисса ўқи устида ётади.

Шунинг учун $У_A = О$. Тўғри бурчакли учбурчак АДМ дан

$$tg\varphi = \frac{ДМ}{АМ} \Rightarrow tg\varphi = \frac{H}{a-\vartheta t} \Rightarrow \varphi = arctg\frac{H}{a-\vartheta t}$$

АВ стерженнинг ҳаракат тенгламаларини топдик.

$$X_A = \vartheta t, У_A = О, \varphi = arctg\frac{H}{a-\vartheta t}$$



30-*чизма.*

Стержен В нуқтасининг ҳаракат тенгламаларини топиш учун эса эски ва янги координаталар тизими орасида боғланишдан фойдаланамиз.

$X_B = X_A + l\cos\alpha$;

$У_B = У_A + l\sin\alpha$

Б у

$$\cos\alpha = \frac{a - \vartheta t}{\sqrt{H^2 + (a - \vartheta t)^2}};$$

$$\sin\alpha = \frac{H}{\sqrt{H^2 + (a - \vartheta t)^2}}$$

Натижада стержен В нуқтаси ҳаракатининг тенгламаларини қуйидагича оламиз:

$$X_B = \vartheta \cdot t + l\frac{a - \vartheta t}{\sqrt{H^2 + (a - \vartheta t)^2}}; \quad У_3 = \frac{Hl}{\sqrt{H^2 + (a - \vartheta \cdot t)^2}}$$

3-масала. Тўғри чизиқли горизантал рельс устида думалаб ҳаракатланаётган ғилдиракнинг маркази $X_c = 2t^2$см қонун бўйича ҳаракатланади. Узунлиги $l = 12$см бўлган АС стержен чизма текислигига перпендукляр бўлган С ўқ атрофида $\varphi = \frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{2}t$ рад қонун бўйича тебранади. t=0 пайтда АС стержен А учининг тезлигини аниқланг.

Ечиш. Масала шартидан равшанки, ғилдирак айланма ва илгарилама ҳаракат қилади, яъни стержен ясси параллел ҳаракат қилади.

Ғилдирак С марказининг тезлиги исталган t дақиқада

$\vartheta_c = X_c = (2t^2)^1 = 4t$см га тенг бўлиб, горизонт бўйича ўнгга йўналган бўлади.

А нуқтанинг тезлиги, агар С нуқтани қутб деб олсак (30-чизма),

$\bar{\vartheta}_A = \bar{\vartheta}_c + \bar{\vartheta}_{AC}$

кўринишда ифодалаш мумкин.

Бунда,

$\vartheta_{AC} = \omega \cdot AC(\vartheta_{AC} \perp AC)$

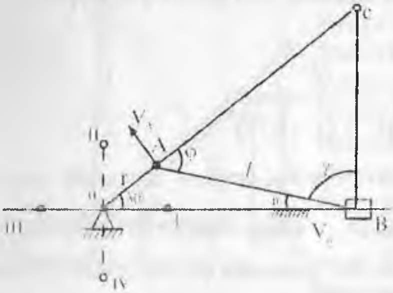
$$\vartheta_{AC} = \ell\omega = \ell\dot{\varphi} = c\left(\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{2}t\right)^{\cdot} = 12\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}t = \pi^2\cos\frac{\pi}{2}t$$

$$\vartheta_A = \left(4t + \pi^2\cos\frac{\pi}{2}t\right)\text{см /сек}$$

стержен A учининг $t = 0$ дақиқадаги тезлигини топамиз.

$$\vartheta_A = \left(4\cdot 0 + \pi^2\cdot\cos\frac{\pi}{2}\cdot 0\right)\frac{\text{см}}{\text{сек}^2} = \pi^2\frac{\text{см}}{\text{сек}} = 9{,}86\frac{\text{см}}{\text{сек}}$$

4-масала. Шатун-кривошип механизмида кривошипнинг узунлиги $r = OA = 40\text{см}$ шатуннинг узунлиги $\ell = AB = 2\text{м}$, кривошип эса $180 = \frac{\text{айл}}{\text{мин}}$ бурчак тезлик билан текис айланади. Кривошип горизонт билан $0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \pi; 3\frac{\pi}{2}$ бурчаклар ташкил қилганда, шатуннинг ω бурчак тезлигини ва B ползуннинг тезлигини аниқланг.



31-чизма.

Ечиш: Кривошип горизонт билан $\alpha = 30°$ бурчак ташкил қилган ҳол учун масалани ечамиз ва чизмада тасвирлаймиз. OA кривошип айланма ҳаракат қилади. B ползун эса илгариланма, AB шатун эса ясси параллел ҳаракат қилади (31-чизма).

1. Аввало минутдаги айланишлар сонини сек^{-1} да ифодалаймиз. $\omega_o = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi}{30}\cdot 180\text{сек}^{-1} = 6\pi\text{сек}^{-1}$ 2. OA кривошип учининг ϑ_A тезлигини аниқлаймиз. Бу тезлик A нуқта чизадиган уринма буйлаб айланиш томонга йуналгандир, унинг сон қийматини топамиз $\vartheta_A = \omega_o \cdot r = 6\pi\cdot 40\frac{\text{см}}{\text{сек}} = 240\pi\frac{\text{см}}{\text{сек}}$.

3. B ползуннинг ϑ_B тезлиги тўғри чизиқ буйлаб йўналгандир.

ϑ_A ва ϑ_B тезликларининг таъсир чизиқларига перпендикулярлар ўтказиб, бу перпендикулярларнинг кесишган нуқтаси С-тезликларнинг оний маркази бўлади.

Тезликларнинг оний маркази ёрдамида ϑ_A ва ϑ_B тезликлар ораси-

даги боғланишни ўрнатамиз. $\dfrac{\vartheta_A}{CA} = \dfrac{\vartheta_B}{CB} = \omega$

Бу муносабатдан ϑ_B ни ϑ_A орқали ифодалаш мумкин:

$$\vartheta_B = \vartheta_A \cdot \frac{CB}{CA}$$

$\dfrac{CB}{CA}$ нисбатни топишимиз керак. Синуслар теоремасини ΔOCB га қўлласак, у нисбат томонлар қаршисидаги бурчак синусларининг нисбатига тенг бўлади.

$$\frac{CB}{CA} = \frac{\sin\varphi}{\sin\gamma}$$

Бу ердаги φ ва γ бурчакларни топамиз. Шаклдан $\gamma = \dfrac{\pi}{2} - \beta$

бўлишлигини кўриш қийин эмас. Δ OAB га яна синуслар теоремасини қўлласак,

$$\frac{OA}{AB} = \frac{r}{l} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \sin\beta = -\frac{r}{l}\sin\alpha = \frac{40}{200}\sin 30 = 0{,}1$$

$$\beta = 5^\circ 44^I$$

Натижада $\gamma = 90^\circ - 5^\circ 44^I = 84^\circ 16^I$.

Учбурчак ташқи бурчагининг хоссасига кўра

$$\varphi^I = \gamma + \beta = 30^\circ + 5^\circ 44^I = 35^\circ 44^I$$

Энди B нуқта тезлигининг сон қийматини топиш мумкин.

$$\vartheta_B = \vartheta_A \cdot \frac{CB}{CA} = \vartheta_E \cdot \frac{\sin\varphi}{\sin\gamma} = 240\pi \cdot \frac{\sin 35^\circ 44^I}{\sin 84^\circ 16^\circ} \frac{cm}{cek} =$$

$$= 240\pi \cdot \frac{0{,}584\ cm}{0{,}995\ cek} = 48\pi \cdot \frac{584\ cm}{199\ cek} = 4{,}4\text{м}/cek$$

$\alpha = 0$ бўлганда C тезликларнинг оний маркази B нуқта билан устма-уст тушади. Кривошипнинг A учи соат стралкасига қарши айланади.

Шунинг учун унинг бурчак тезлиги манфий бўлади:

$$\omega = -\frac{\vartheta_A}{l} = -\frac{240\pi}{200}\text{cek}^{-1} = -\frac{6}{5}\pi\text{cek}^{-1}.$$

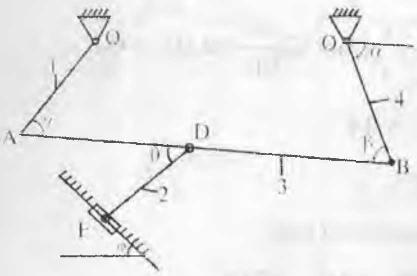
B ползун тезлиги A шатун учи тезлигидек бўлади:

$$\vartheta_B = 24\pi\frac{\text{cm}}{\text{cek}} = 75{,}4\frac{\text{cm}}{\text{cek}}.$$

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ бўлганда A ва B нуқта тезликлари параллел бўлиб, бир томонга йўналади, тезликларнинг оний маркази чексизликда ётади. Шунинг учун кривошипнинг бурчак тезлиги $\omega = 0$ бўлади. B ползун тезлиги A нуқта тезлигидек бўлади. $\vartheta_B = \vartheta_A = 75{,}4\frac{\text{cm}}{\text{cek}}$.

$\alpha = \pi$ бўлганда ҳам C ва B нуқталар устма-уст тушади. Кривошип эса соат стрелкасига қарама-қарши йўналишида айланади. Шунинг учун бурчак тезлиги мусбат бўлади.

$$\omega = \frac{6}{5}\pi\text{cek}^{-1}$$



32-чизма.

B ползун тезлиги A нуқта тезлигидек бўлади.

$$\vartheta_B = \vartheta_A = 75{,}4\frac{\text{cm}}{\text{cek}}.$$

$\alpha = \frac{3\pi}{2}$ бўлганда A ва B нуқталарнинг тезлиги параллел тўғри чизиқларда ётади. Тезликларнинг оний маркази эса чексиз узоқда бўлади

$$\omega = 0,\ \vartheta_B = \vartheta_A = 75{,}4\frac{\text{cm}}{\text{cek}}$$

14 - МАШҒУЛОТ

Бу машғулотда қаттиқ жисмнинг ясси параллел ҳаракатига доир комбинацияион масалалар ечилади.

Масала. Ясси механизм бир-бири билан бириктирилган 1,2,3,4-стерженлар ва E ползундан иборат бўлиб, O_1 ва O_2 кўзғалмас шарнирли таянчларга ҳам эга. Д нуқта AB стерженнинг ўртасида жойлашган. Стерженларнинг узунликлари мос равишда

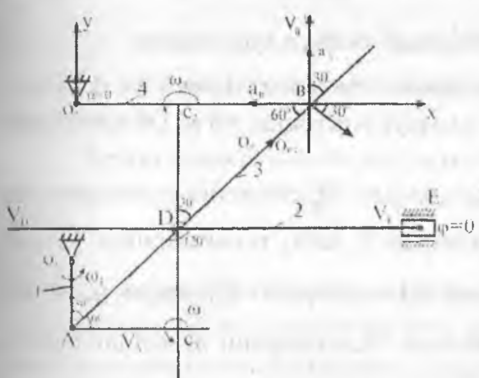
$$\ell_1 = 0{,}4\ м;\ \ell_2 = 1{,}4 м;\ \ell_3 = 1{,}4 м;\ \ell_4 = 0{,}6 м\ .$$

Механизмнинг ҳолати $\alpha = 0,\ \beta = 60^\circ,\ \gamma = 30^\circ,\ \varphi = 0,\ \theta = 120^\circ$ бурчак-л а р б ин лиА қисми, яъни 1-стержен $\omega_1 = 6 сек^{-1}$ бурчак тезлик билан айланма ҳаракат ҳам қилади. Механизм В ва Е нуқталарининг ϑ_B ва ϑ_E тезликларини, DE звеносининг, яъни 2-стерженнинг ω_2 бурчак тезлигини, В нуқтанинг a_B тезланишини ва АВ звенонинг, яъни 3-стерженнинг ε_3 бурчак тезланишини аниқланг (32-чизма). Масала шартини қискача ҳам ёзиш мумкин.

Берилганлар: $\alpha = 0,\ \beta = 60^\circ,\ \gamma = 30^\circ,\ \varphi = 0,\ \theta = 120^\circ$

$AD = DB : \ell_1 = 0{,}4 m, \ell_2 = 1{,}2 м : \ell_3 = 1{,}4 м$

$\ell_4 = 0{,}6 м : \omega_1 = 6 сек^{-1}$



33-чизма.

Топиш к рак: ϑ_B ва $\vartheta_1, \omega_2, a_B, \varepsilon_3$.

Механизмнинг тахминий шакли 32-чизмада берилган.

Ечиш: 1. Аввало механизмни масалада берилганлар бўйича чизамиз, яъни чизмани бурчакларн и

$\alpha = 0,\ \beta = 60,\ \gamma = 30,\ \varphi = 0,\ \theta = 120$

қийматлари учун бажарамиз (33-чизма).

2. ϑ_B ни аниқлаймиз. В нуқта АВ стерженда ётади. ϑ_B ни аниқлаш учун унинг йўналишини ва АВ стерженнинг бошқа бир нуқтасининг тезлигини билиш керак. 1 стерженнинг маълум ω_1 бурчак тезлиги бўйича А нуқтанинг тезлигини топиш мумкин.

$$\vartheta_A = \omega_1 \ell_1 = 0{,}4 \cdot 6 м / сек = 2{,}4 м / сек \qquad (1)$$

В нуқтанинг ϑ_B тезлиги бу O_2B айлантирувчи звенонинг тезлигидир. ϑ_B тезлик O_2B стерженга перпендикуляр йўналган бўлади.

Шунингдек, ϑ_A тезлик ҳам O_1A қисмга (стерженга) перпендикуляр, яъни $\vartheta_A \perp O_1A$.

Бундан ташқари ϑ_A вектори айланиш томонга йўналган бўлади. Масала шарти бўйича ω_1 бурчак тезлик соат стрелкаси йўналишига қарама-қарши йўналгандир.

Жисмнинг бир тўгри чизиқда ётган икки нуқтаси тезликларининг проекциялари ҳақидаги теоремадан фойдаланамиз. Бу теоремадан фойдаланиб, ϑ_B векторнинг қайси томонга йўналганлигини билиб олиш мумкин. Тезликларнинг проекциялари бир хил ишорага эга бўлиши керак, яъни тезликларнинг AB йўналишдаги проекциялари тенг бўлиш керак.

$$\vartheta_A \cos 60^\circ = \vartheta_B \cos 30^\circ \Rightarrow \vartheta_A = \sqrt{3}\vartheta_B \Rightarrow$$

$$\vartheta_B = \frac{\vartheta A}{\sqrt{3}} = \frac{2.4}{1.73}\ м/сек \quad = 1{,}4\ м/сек \qquad (2)$$

ϑ_A ва ϑ_B векторларнинг йўналиши чизмада кўрсатилган.

3. ϑ_E ни аниқлаймиз. Е нуқтанинг тезлигини топиш учун Д нуқтанинг тезлигини билиш керак. D нуқта бир вақтда AB ва DE қисмларда (стерженларда) ётади.

ϑ_D ни аниқлаш учун D нуқта орқали DE стерженга перпендикуляр ўтказамиз. Бу тўғри чизиқ бир вақтда ϑ_A ва ϑ_B тезликларнинг таъсир чизиқларига перпендикулярдир. Шунинг учун C_2 нуқта ϑ_B ва ϑ_D тезликларнинг оний маркази бўлади. ϑ_B векторнинг йўналиши бўйича AB стерженнинг C_2 тезликларнинг оний маркази атрофидаги бурилиш йўналишини аниқлаймиз. ϑ_D вектори Д ва C_2 нуқталарни туташтирувчи $ДC_2$ кесмага перпендикуляр бўлиб, бурилиш томонга йўналгандир. ϑ_D нинг миқдори эса

$$\frac{\vartheta_D}{C_2D} = \frac{\vartheta_B}{C_2B} \qquad (3)$$

пропорциядан топилади.

$C_2Д$ ва C_2B ларни ҳисоблаш учун DC_2B тўғри бурчакли учбурчакни қараймиз.

Бу учбурчакдан C_2D ва C_2B кесмаларнинг узунликларини топамиз.

$$CB = \frac{\ell_3}{2}\sin 30^\circ = \frac{1,4}{2}\frac{1}{2}м = \frac{1,4}{2}м = 0,35м$$

$$C_2D = \frac{\ell_3}{2}\cos 30^\circ = \frac{1,4}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}м = 0,35 \cdot 1.73м = 0,6м$$

(2) ва (3) ни эътиборга олсак, ϑ_D ни топамиз

$$\vartheta_D = \frac{C_2D}{C_2B}\vartheta_B = \frac{0,0}{0,35} \cdot 1,4м/сек = 0,6 \cdot 4м/сек = 2,4м/сек \quad (\vartheta_D \perp C_2D)$$

Е нуқта ползунга тегишли бўлиб, йўналиш атрофида илгариланма ҳаракат қилади. Е нуқта ҳам Д нуқтадек ҳаракат қилади, яъни уларнинг тезликлари миқдор ва йўналиш бўйича бир хил бўлади.

$$\vartheta_E = \vartheta_D = 2,4м/сек.$$

4. ω_2 ни, яъни DE звенонинг (2 стерженнинг) бурчак коэффициентини топамиз.

Тезликларнинг оний маркази маълум. (C_2 нуқта ёки C_3 нуқта)

$$\omega_2 = \frac{\vartheta_D}{DC_2} = \frac{\vartheta_E}{DC_2} = \frac{2,4}{0,6}сек^{-1} = 4\,сек^{-1} \tag{4}$$

5. a_B ни, яъни В нуқтанинг чизиқ тезланишини аниқлаймиз. В нуқта АВ стерженда ётади. a_B ни топиш учун АВ стержен бошқа бир нуқтасининг тезланишини ва В нуқтанинг траекториясини билиш керак. a_B ни аниқлаш учун $\overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{a^\tau_{BA}} + \overline{a^n_{AB}} = \overline{a^\tau_A} + \overline{a^n_A} + \overline{a^\tau_{BA}} + \overline{a^n_{BA}}$ тенгликдан фойдаланамиз.

А нуқтанинг $\overline{a_A}$ тезланиш $\overline{a_A} = \overline{a^\tau_A} + \overline{a^n_A}$ формула бўйича аниқланади. Бу ердаги a^n_A ни миқдор жиҳатидан топамиз.

$$a^n_A = \omega_1^2\ell_1 = 36 \cdot 0,4м/сек^2 = 14,4м/сек^2 \tag{5}$$

a^n_A нормал тезланиш ℓ_1 стержен бўйлаб, А нуқтадан O_1 марказга йўналган.

Бизнинг ҳолда 1 стерженнинг бурчак тезлиги доимий, яъни $\omega_1 = \text{const}$. Бундай ҳолда $\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = 0$ бўлади ва

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 l_1 = 0 \cdot 0{,}4 \frac{м}{сек^2} = 0 \qquad (6)$$

a_{BA}^n нисбий нормал тезланиш А нуқтага йўналган бўлиб, унинг сон қиймати $a_{BA}^n = \omega_2^2 \ell_3$ формула бўйича топилади. ω_2 бурчак тезлик эса C_2 ёки C_3 тезликларнинг оний маркази бўйича топилади.

$$\omega_2 = \frac{\vartheta_Д}{C_2 D} = \frac{\vartheta_Д}{\frac{l_3}{2}\cos 30^\circ} = \frac{2{,}4}{\frac{1{,}4}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} сек^{-1} =$$

$$= \frac{12}{+0{,}43} сек^{-1} = \frac{12}{3{,}01} сек^{-1} = 4 сек^{-1}$$

Демак, $\omega_2 = \omega_3 = 4 сек^{-1}$

Натижада $a_{BA}^n = \omega_3^2 \ell_1 = 36 \cdot 0{,}4 м/сек^2 = 14{,}4 м/сек^2$ (7)

a_{BA}^n -ВА стержен бўйлаб В дан А га йўналган.

a_{BA}^τ эса ВА га перпендикуляр бўлиб исталган томонга йўналган. Ўз навбатида O_2B қисм O_2 марказ атрофида ёки O_2B қисм орқали ўтган тўғри чизиқ атрофида тебранади. В нуқтанинг ҳам тезланишини нормал ва уринма тезланиш орқали ифодалаш мумкин $\overline{a_B} = \overline{a_B^n} + \overline{a_B^\tau}$

Нормал тезланишни ҳисоблаймиз.

$$a_B^n = \frac{\vartheta_A^2}{l_4} = \frac{1{,}96}{0{,}6} \frac{м}{сек^2} = 3{,}3 \frac{м}{сек^2}$$

Бу тезланиш BO_2 қисм бўйлаб В дан O_2 га йўналган бўлади. Юқорида олинган натижаларни эътиборга олиб, В ва А нуқталарининг тезланишларини боғлаш мумкин. $\overline{a_B^n} + \overline{a_B^\tau} = \overline{a_A^n} + \overline{a_A^\tau} + \overline{a_{BA}^n} + \overline{a_{BA}^\tau}$ бунда, (6) кучида $a_A^\tau = 0$. Натижада

$$a_B = \bar{a}_B^n + \bar{a}_B^\tau = \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau \qquad (8)$$

(8) тенгликка кирган a_B^τ ва a_{BA}^τ миқдорларнинг фақат сон қиймат-лари номаълум. Уларни топиш учун (8) тенгликнинг иккала қисмини қандайдир иккита ўққа проекциялаш керак.

a_{BA}^τ ни топиш учун (8) тенгликнинг иккала қисмини O_2X ўққа проекциялаймиз.

$$-a_B^n = a_{BA}^\tau \cos 30^\circ - a_{BA}^n \cos 60^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} a_{BA}^\tau = \frac{1}{2} a_{BA}^n - a_B^n = 22{,}4 \cdot \frac{1}{2} - 3{,}3 = 11{,}2 - 3{,}3 = 7{,}9 \Rightarrow a_{BA}^\tau =$$

$$\frac{7{,}9 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{15{,}3}{1{,}73} = 9{,}3м / сек^2$$

$$a_{BA}^\tau = 9{,}3м / сек^2 \qquad (9)$$

a_B^τ ни топиш учун (8) тенгликни o_2y ўққа проекциялаймиз ва топамиз

$$a_B^\tau = a_A^n - a_{BA}^n \cos 30^\circ - a_{BA}^\tau \cos 60^\circ \qquad (10)$$

(10) га (5), (7) ва (9)ни қўйиб, a_B^τ нинг сон қийматини топамиз.

$$a_B^\tau = \left(14{,}4 - 22{,}4\frac{\sqrt{3}}{2} - 9{,}3 \cdot \frac{1}{2}\right) м / сек = (14{,}4 - 19{,}3 - 4{,}6) м / сек^2 = -9{,}5 \ \frac{м}{сек^2}$$

Бу ердаги минус ишора a_B^τ нинг чизмада кўрсатилган йўналишига қарама-қарши томонга йўналганлигини билдиради.

Энди a_B тезланишнинг модулини ҳисоблаймиз.

$$a_B = \sqrt{\left(a_B^n\right)^2 + \left(a_B^\tau\right)^2} = \sqrt{3{,}3^2 + (9{,}5)^2} = \sqrt{10{,}89 + 90{,}25} =$$

$$= \sqrt{101{,}14} = 10{,}05м / сек^2$$

a_B тезланиш йўналиши a_B^n ва a_B^τ векторларга қурилган параллелог-раммнинг диагонали йўналишида, яъни ВА қисм атрофида В нуқтадан А нуқтага қараб йўналган бўлади.

6. ε_3 ни аниқлаймиз. ε_3 ни топиш учун a^{τ}_{BA} ни билиш керак. Бу миқдорни биз аниқладик. (9) ни эътиборга олиб $a^{\tau}_{BA} = \varepsilon_3 \ell_3$ тенгликдан ε_3 ни аниқлаймиз.

$$\varepsilon_3 = \frac{a^{\tau}_{BA}}{\ell_3} = \frac{9,3}{1,4} сек^{-2} = 6,8 сек^{-2}$$

Шундай қилиб, барча изланган миқдорларни аниқладик.

1) $\vartheta_B = 1,4 м / сек$ — В нуқтанинг тезлиги;

2) $\vartheta_E = 2,4 м / сек$ — Е нуқтанинг тезлиги;

3) $\omega_2 = 4 \frac{рад}{сек}$ — DE қисмнинг бурчак тезлиги;

4) $a_B = 10,05 м / сек^2$ — В нуқтанинг тезланиши;

5) $\varepsilon_3 = 6,8 \frac{рад}{сек^2}$ — АВ қисмнинг бурчак тезланиши.

15 - МАШҒУЛОТ

Бу машғулотда нуқтанинг турли йўналишлар бўйича ҳаракатларини қўшишга, ҳаракат тенгламаларини тузишга, нуқтанинг тезлик ва тезланишларини қўшишга доир масалалар ечилади.

1-масала. Нуқтанинг $x_1 = 2\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$, $x_2 = 3\cos(\pi t + \pi)$ гармоник тебранишларини қўшишда ҳосил бўладиган тўғри чизиқли ҳаракатининг тенгламасини топинг.

Ечиш. Натижаловчи гармоник тебранма ҳаракатнинг ампилатудаси ва бошлангич фазасини топамиз:

$$x = x_1 + x_2 = 2COS\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + 3\cos(\pi t + \pi) =$$

$$= -2\left(\cos\pi o \cdot \cos\frac{\pi}{2} - \sin\pi i \cdot \sin\frac{\pi}{2}\right) + 3(\cos\pi o \cdot \cos\pi - \sin\pi i \cdot \sin\pi) =$$

$$= -2\sin\pi t - 3\cos\pi t = \sqrt{13}\left(\frac{-2}{\sqrt{13}}\sin\pi t +\right.$$

$$+\frac{-3}{\sqrt{13}}\cos\pi t\ \Big)=\sqrt{13}\left(\cos\pi t\cos\alpha+\sin\pi t.\sin\alpha\right)=$$

$$=\sqrt{13}\cos(\pi t-\alpha),$$

бунда, $\sin\alpha=-\frac{2}{\sqrt{3}},\ \cos\alpha=-\frac{3}{\sqrt{13}},\ \alpha=\mathrm{arctg}\,\frac{2}{3}=33^\circ 40'$

Шундай қилиб, бир хил частотали иккита гармоник тебранма ҳаракатни қўшиш натижасида шундай частотали, лекин амплитуда ва бошлангич фазаси фарқ қилувчи гармоник тебранма ҳаракат ҳосил булар экан, яьни

$$X=\sqrt{13}\cos(\pi t-\alpha).$$

2-масала. Нуқта бир вақтда ўзаро перпендикуляр ўқларда бир хил частотали, лекин ҳар хил аплитудали ва бошланғич фазали $X=a\sin(kt+\alpha),\ \ У=b\sin(kt+\beta)$ гармоник тебранишларда қатнашади. Нуқта траекториясининг тенгламасини аниқланг.

Ечиш. Нуқта ҳаракатининг тенгламаларидан

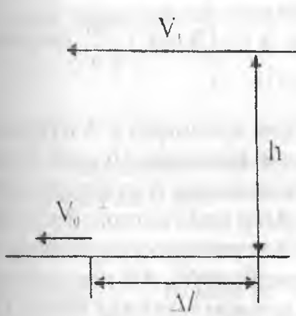
$$\frac{X}{a}=\sin(kt+\alpha)=\sin kt\cdot\cos\alpha+\cos kt\sin\alpha \qquad (1)$$

$$\frac{y}{b}=\sin(kt+\beta)=\sin kt\cdot\cos\beta+\cos kt\sin\beta \qquad (2)$$

муносабатларни топамиз.

(1) тенгликни $\cos\beta$ га (2)тенгликни $\cos\alpha$ га кўпайтириб, ҳадлаб айириб, қуйидагини топамиз.

$$\frac{x}{a}\cos\beta-\frac{y}{b}\cos\alpha=\cos kt\sin(\alpha-\beta) \qquad (3)$$



34-чизма.

(1) тенгликни $\mathrm{Sin}\beta$ га (2) тенгликни $\mathrm{Sin}\alpha$ га кўпайтириб, уларни айириб, қуйидагини топамиз.

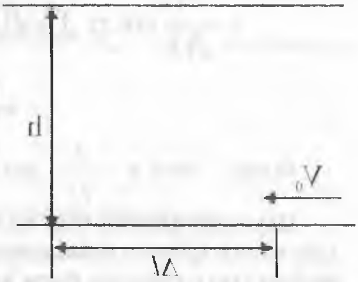
$$\frac{x}{a}\sin\beta-\frac{y}{в}\sin\alpha=-\sin kt+\sin(\alpha-\beta) \qquad (4)$$

(3)ва (4) тенгликларни олдин квадратга кўтариб, кейин эса ҳадлаб қўшиб нуқта траекториясининг тенгламасини координата шаклида оламиз.

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\cos^2\beta + \sin^2\beta\right) - \frac{2xy}{ab}\left(\cos\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\sin\alpha\right) + \frac{y^2}{B^2}x$$

$$x\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) = \mathrm{Sin}^2(\alpha-\beta)\left(\cos^2 kt + \sin^2 kt\right)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos(a-\beta) = \sin^2(a-\beta)$$



35-чизма.

Шундай қилиб, нуқтанинг координата шаклидаги траектория тенгламаси унинг параметрик тенгламалари таркибидаги t вақтни чиқариб ташлашдан ҳосил қилинади.

3-масала. Денгизда кема ϑ_o тезлик билан тўгри чизиқли ҳаракат қилади. Денгиз сатҳидан h баландликда ϑ_1 тезлик билан кема йўналишида самолёт ҳам ҳаракатланмоқда Самолётдан кемага вимпелни тушириш учун улар орасидаги горизонтал масофа қандай бўлиши керак?

Ечиш. 1) Вимпел эркин тушади деб қаралади. Эркин тушиш вақтини аниқлаймиз (34-чизма).

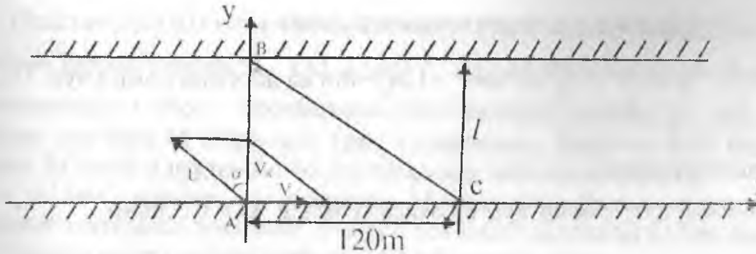
$$h = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{5}$$

2) кема ва самолёт текис ҳаракат қилади. Уларнинг юрган йўллари:

$$\Delta\ell = \ell_1 - \ell = (\vartheta_1 - \vartheta)\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Борди-ю кема ва самолётнинг ҳаракат йўналишлари қарама-қарши бўлса, бундай ҳолда улар орасидаги масофа $\Delta\ell = \left(\vartheta_1 + \vartheta\right)\sqrt{\frac{2h}{g}}$ формула бўйича топилади (35-чизма).

4-масала. Дарё қирғоқлари параллел: кема қирғоқдаги А нуқтадан қирғоққа перпендикуляр йўналишда иккинчи қирғоққа 10 мин. ичида бориб етди. Лекин кема А нуқта жойлашган қирғоқда А нуқтадан 120 м пастдаги (оқим бўйича) С нуқтада турибди. Агар кема илгаригидек нисбий тезлик билан ҳаракатланиб, қирғоқларга перпендикуляр бўлган АВ тўгри чизиқдаги А нуқтадан В нуқтага бориши учун, АВ кесма билан маълум бир бурчак остида оқимга қарши ҳаракатланганда йўлга 12,5



36-чизма.

мин. вақт сарфлайди. ℓ дарёнинг кенглигини, кеманинг $\vartheta_r = u$ нисбий тезлигини ва $\vartheta_l = \vartheta$ дарёнинг тезлигини топинг.

Ечиш: $\overline{\vartheta_r} = \overline{U}$ – кеманинг нисбий тезлиги;

$\overline{\vartheta_e} = \overline{\vartheta}$ – кеманинг кўчирма тезлиги (оқим тезлиги);

$\overline{\vartheta_a}$ – кеманинг абсолют тезлиги бўлсин. Кеманинг абсолют тезлиги учун қуйидаги вектор тенгликни оламиз (36-чизма).

$$\bar{\vartheta}_a = \bar{\vartheta}_r + \bar{\vartheta}_e$$

Кема абсолют тезлигининг координата ўқларидаги проекцияларини топамиз:

$$\vartheta_{ax_1} = -u\sin\alpha + \vartheta; \quad \vartheta_{ay_1} = u\cos\alpha$$

Абсолют тезликнинг проекциялари ўзгармас эканлиги равшан. Кеманинг ўқлар бўйлаб силжишини топамиз.

$$X_1 = (U\sin\alpha + \vartheta)t; \quad У_1 = (U\cos\alpha)t \qquad (6)$$

Агар кемани қирғоққа перпендикуляр қилиб бошқарсак, $\alpha = 0$ бўлади, (1) қуйидаги кўринишни олади:

$$\chi_1 = \vartheta t_1, \ \ell = y_1 = Ut_1,$$

бунда, $t_1 = 10$ мин ва $x_1 = 120$м

Дарё оқимининг тезлигини аниқлаймиз.

$$\vartheta_1 = \frac{x_1}{t_1} = \frac{120}{10}\ \text{м / мин} = 12\text{м / мин}$$ ва дарёнинг эни учун $\ell = Ut_1$ (7)

ифодани топамиз.

Агар $\alpha \neq 0$ бўлса, у ҳолда $x_1 = 0$, яъни

$$(-U\sin\alpha + \vartheta)t_2 = 0 \qquad (8)$$

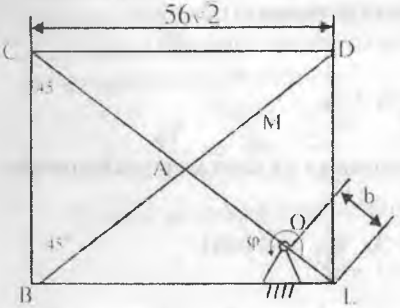
бўлиб, $\ell = (u\cos\alpha)\cdot t_2$ бунда, $t_2 = 12{,}5$ мин. ℓ учун топилган ифодаларни тенглаштириб, α бурчакнинг косинусини ёки синусини аниқлаш мумкин.

$$Ut_1 = U\cos\alpha\cdot t_2$$

$$\cos\alpha = \frac{t_1}{t_2} = \frac{10}{12{,}5} = \frac{4}{5};\quad \sin a = \frac{3}{5}$$

Энди кеманинг нисбий тезлигини топамиз.

$$(-U\sin\alpha + \vartheta)t_2 = 0 \Rightarrow U\cdot\frac{3}{5} + 12 = 0$$



37-чизма.

U=20 м/мин

Дарёнинг кенглиги учун (2) ва (3) ифодалар бир хил натижа беради.

$$\ell = U\cdot t_1 = 20\cdot 10\text{м} = 200\text{м}$$

ёки

$$\ell = U\cos a\cdot t_2 = 20\cdot\frac{4}{5}\cdot 12{,}5\text{м} = 200\text{м}.$$

16-МАШҒУЛОТ

Бу машғулотда нуқтанинг (қаттиқ жисмнинг) мураккаб ҳаракатига доир масалалар ечилади. Масалаларни ечишда тезлик ва тезланишларни қўшиш ҳақидаги теоремалардан фойдаланилади.

Масала. Тўғри бурчакли пластинка қўзғалмас ўқ атрофида $\varphi = 4(t^2 - t)$ қонун бўйича айланади (φ бурчакнинг мусбат йўналиши чизмада ёйсимон стрелка билан кўрсатилган. Айланиш ўқи пластинка текислигига перпендикуляр бўлиб, О нуқта орқали ўтади, пластинка эса ўз текислигида айланади).

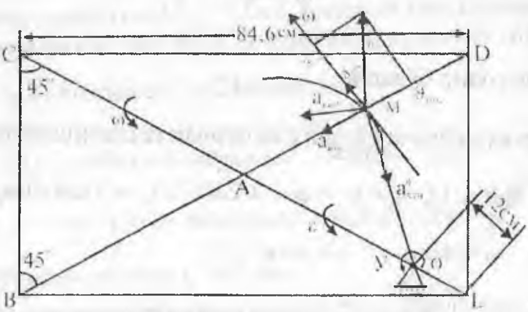
Пластинкада BD тўғри чизиқ бўйлаб M нуқта ҳаракатланади: унинг нисбий ҳаракат қонуни $S = AM = 50\left(3t - t^2\right) - 64$ кўринишга эга (S сантиметрларда, t вақт – секундларда ҳисобланади) чизмада $S = AM > O$ бўлган ҳол учун M нуқтанинг ўрни кўрсатилган. Борди-ю S<O бўлиб қолса, M нуқта A нуқтанинг бошқа томонида жойлашган бўлади.

$t_1 = 1$ сек дақиқага мос келадиган M нуқтанинг абсолют тезлиги ва абсолют тезланиши топилсин. в=12 см деб қабул қилинсин (*37-чизма*).

Масала шарти ва талабини қисқача ифодалаб ёзамиз.

Берилганлар: $в = 12;\ \ \varphi = 4\left(t^2 - t\right)$

$$S = 50\left(3t - t^2\right) - 64$$



38-чизма.

(в ва S сантиметрларда, φ радианларда, t эса секундларда ифодаланган) $t_1 = 1$ сек дақиқада M нуқтанинг ϑ_{abs} абсолют тезлиги ва a_{abs} абсолют тезланиши аниқлансин.

Ечиш: 1. $t_1 = 1$ сек дақиқада M нуқтанинг ўрнини аниқлаймиз.

$$AM = S_1 = 50\left(3t_1 - t_1^2\right) - 64 = 50\left(3 \cdot 1 - 1\right) - 64 = 36 \text{ см}$$

AM нинг ишораси мусбат. M нуқга BD тўғри чизиқда A нуқтадан юқорида жойлашган бўлади. (*38-чизма*).

2. O нуқтадан, яъни айланиш марказидан M нуқтагача бўлган r=OM масофани аниқлаймиз. Масала шартига кўра тўғри тўртбурчак шаклдаги пластинканинг кўндаланг кесими квадратдир.

$CD = CB = DL = BL = 5в\sqrt{2}\ ;\ AC = \dfrac{CL}{2}$ бунда,

$$CL^2 = 2CD^2 = 2 \cdot 2 \cdot 25в^2 = 100в^2$$

$$CL = 10в = 120 \text{ см}; \quad AL = \frac{CL}{2} = \frac{120}{2} \text{ см} = 60 \text{ см}$$

$$OA = AL - OL = (60 - 12) \text{ см} = 48 \text{ см}$$

$$r = OM = \sqrt{OA^2 + AM^2} = \sqrt{1296 + 2304} = \sqrt{3600} = 60\text{см} \qquad (1)$$

3. Кўчирма айланишнинг ω бурчак тезлигини ε бурчак тезланишини топамиз. Бу айланиш эса

$$\varphi = 4\left(t^2 - t\right)$$

қонун бўйича содир бўлади.

Таърифга кўра бурчак тезлик ва бурчак тезланишни топамиз:

$\omega = \dot{\varphi} = 4(4t - 1), \ \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} = 8 \text{ сек}^{-2}; \ t_1 = 1 \text{ сек}$ дақиқада

$$\omega = 4\text{сек}^{-1}, \varepsilon = 8\text{сек}^{-2} \qquad (2)$$

Бурчак тезлик ва бурчак тезланиш мусбат бўлгани учун уларнинг йўналиши чизмада соат стрелкаси йўналишига қарама-қарши кўрсатилган.

Энди нисбий ва кўчирма ҳаракатнинг барча хусусиятларини аниқлаймиз. Нисбий ҳаракат.

4. Бу ҳаракат $S = AM = 50\left(3t - t^2\right) - 64$ (3)
қонун бўйича содир бўлади.

Ҳаракат қонунидан t вақт бўйича олинган биринчи ҳосила нуқтанинг нисбий тезлигини беради.

$$\vartheta_{нис} = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}\left[50\left(3t - t^2\right) - 64\right] = 50\left(3 - 2t\right)$$

$t_1 = 1$ сек бўлганда $\vartheta_{нис}$ ни топамиз.

$$\vartheta_{нис} = 50\left(3 - 2 \cdot 1\right) = 50 \text{см} / \text{сек}$$

Мусбат йўналиш A нуқтадан M нуқтага томон бўлгани учун $\vartheta_{нис}$ вектор ҳам BD тўғри чизиқ бўйича бўлиб, M нуқтадан юқорига йўналган бўлади.

5. $a^{\tau}_{нис}$ ва $a^{n}_{нис}$ тезланишларнинг сон қийматларини аниқлаймиз.

$$a^{\tau}_{нис} = \dot{\vartheta}_{нис} = \frac{d}{dt}\left[50(3-2t)\right] = 50(-2) = -100 см/сек^{2} \quad (4)$$

Бу тезланиш манфий бўлганлиги учун унинг йўналиши BD тўғри чизиқ бўйлаб M нуқтадан пастга йўналгандир. Қаралаётган ҳолда M нуқтанинг ҳаракат траекторияси тўғри чизиқ бўлгани учун $\rho = \infty$ бўлиб,

$$a^{n}_{нис} = \frac{\vartheta^{2}_{нис}}{\rho} = 0 \quad (5)$$

Кўчирма ҳаракат.

Бу ҳаракат (айланиш) $\varphi = (4t^{2} - t)$ қонун бўйича содир бўлади.

6. Кўчирма ҳаракатнинг t_1=1 сек. дақиқага мос келувчи хусусиятларини аниқлаймиз. (1) ва (2) тенгликларни эътиборга олс... ...ак,

$\vartheta_{куч} = \omega \cdot r = 4 \cdot 60$ см/сек^{2} = 240 см/сек^{2}

$$a^{\tau}_{куч} = \varepsilon r = 8 \cdot 60 см/сек^{2} = 480 см/сек^{2} \quad (6)$$

$$a^{n}_{куч} = \omega^{2} \cdot r = 16 \cdot 60 см/сек^{2} = 960 см/сек^{2} \quad (7)$$

$\vartheta_{куч}$ кўчирма тезлик r =60 см.

Радиусли айланага ўтказилган уринма бўйлаб а... ...йланиш томонга йўналган $\bar{a}^{n}_{куч}$ кўчирма тезланиш ҳам ўша айланаг... ...а ўтказилган уринма бўйича $\vartheta_{куч}$ вектор йўналган томонга йўналга... ...ндир.

$\bar{a}^{n}_{куч}$ вектор эса O марказга йўнал... ...гандир.

7. Энди Кориолис тезланишини ... ...аниқлаймиз. Бу тезланиш $\omega x \upsilon_{нис}$ векториал кўпайтманинг икки бара... ...аварига тенг $\vec{a}_{к} = 2(\vec{\omega} x \vec{\vartheta}_{нис})$

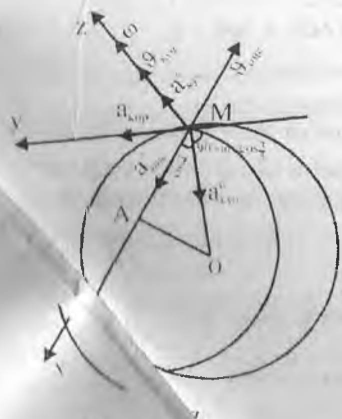
ω бурчак тезлик вектори ... шундай йўналган бўладики, унинг охиридан қараганда жисм соат стр... ...елкаси йўналишига қарама-қарши йўналишда айланаётган бўлади.

$\vartheta_{нис}$ вектори билан ... айланиш ўқи орасидаги ($\overline{\omega}$) вектори орасидаги) бурчак 90° га тенг.

Бундай ҳолда $t_1=1$ сек дақиқага мос келувчи Кориолис тезланишининг сон қийматини топиш мумкин.

$$a'_{кор} = 2\left|\vartheta_{нис}\right|\left|\overline{\omega}\right|\sin 90^\circ = 2\cdot 50\cdot 4 = 400 см/сек^2 \quad (8)$$

$\overline{a}_{кор}$ векторининг йўналиши $\overline{\omega \times \vartheta_{нис}}$ векторининг йўналишидек бўлади, яъни $\vec{\omega}$ ва $\overline{\vartheta_{нис}}$ векторлар ётган текисликка перпендикуляр



19-чизма.

йўналган бўлади. Бизнинг ҳолда $\alpha = 90^\circ$, яъни $\vec{\omega} \perp \vartheta_{нис}$.

Бундай ҳолда $a_{кор}$ векторнинг йўналишини $\vartheta_{нис}$ вектор тезликни кўчирма айланиш томонга 90° га буриш билан олиш мумкин.

(Бунда айланиш йўналишга қараб соат стрелкаси йўналиши бўйича ёки бу йўналишга қарама-қарши йўналишга бурилади). Бизнинг ҳолда эса соат стрелкаси йўналишига қарама-қарши йўналишга бурилади.

8. $\overline{\vartheta}_{абс}$ ни аниқлаймиз. $\overline{\vartheta_{абс}} = \overline{\vartheta_{нис}} + \overline{\vartheta_{куч}}$ бўлиб, $\overline{\vartheta}_{куч}$ ва $\overline{\vartheta_{нис}}$ векторлар перпендикуляр ва BD тўғри чизиқ орқали ўтган текисликда ётади. $t_1 = 1$ сек дақиқага мос келадиган $\overline{\vartheta}_{абс}$ нинг сон қийматини топамиз.

$$\vartheta_{абс} = \sqrt{\vartheta^2_{нис} + \vartheta^2_{куч}} = \sqrt{50^2 + 240^2} = \sqrt{10^2(5^2 + 24^2)} =$$

$$\sqrt{10^2(25+576)} = 10\sqrt{601} = 2{,}45\cdot 100 = 245 см/сек \quad (8)$$

9. $\overline{a_{абс}}$ ни аниқлаймиз. Тезланишларни қўшиш теоремасига кўра

$$\overline{a}_{абс} = \overline{a}^{\tau}_{нис} + \overline{a}^{n}_{нис} + \overline{a}^{\tau}_{куч} + \overline{a}^{n}_{куч} + \overline{a}_{кор} \quad (9)$$

III ҚИСМ

17-МАШҒУЛОТ

1-§ Эркин моддий нуқта учун динамиканинг иккита асосий масаласи

1. Нуқта динамикасининг дифференциал тенгламалари. Динамиканинг асосий тушунчалари ва қонунлари билан мактаб физика ва умумий физика курсларида танишиб ўтганмиз.

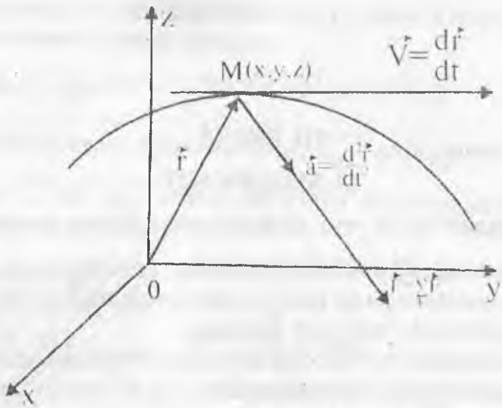
Нуқта динамикасининг асосий қонунидан фойдаланиб, нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини турли координаталар тизимида чиқариш мумкин. Агар M(x,y,z) моддий нуқтага таъсир қилаётган барча кучларнинг тенг таъсир этувчисини $\vec{F} = \sum_k \vec{F}_k$ орқали, масса ва тезланишини мос равишда m ва $\vec{a}$ орқали белгиласак, динамиканинг асосий тенгламаси (40-чизма)

$$m\vec{a} = \vec{F} \qquad (1)$$

кўринишда бўлади. M(x,y,z) нуқтанинг ҳолати саноқнинг инерциал тизимида унинг $\vec{r}$ радиус вектори билан тўлиғича аниқланади. Моддий нуқтага таъсир қилувчи $\vec{F}$ куч нуқтанинг ҳолатига, яъни $\vec{r}$ радиус-векторга нуқтанинг $\vec{\vartheta} = \frac{dr}{dt} = \dot{\vec{r}}$ тезлигига ва вақтга боғлиқ бўлиши мумкин. Умумий ҳолда $\vec{F}$ куч $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ кўринишга эга бўлади. Нуқта кинематикасидан маълумки, нуқтанинг $\bar{a}$ тезланишини унинг $\bar{r}$ радиус-вектори орқали ифодалаш мумкин: $\bar{a} = \frac{d^2\vec{r}}{\alpha t^2} = \ddot{\vec{r}}$. Бундай ҳолда нуқта динамикасининг (1) асосий тенгламаси қуйидаги кўринишга эга бўлади.

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}\left(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t\right). \qquad (2)$$

(2) тенгламага моддий нуқта ҳаракатининг вектор шаклдаги асосий дифференциал тенгламаси дейилади. (2) тенгламанинг ўнг қисмидан кўриниб турибдики, моддий нуқтага таъсир қилаётган кучнинг хусусияти



40-чизма.

жуда мураккаб. (2) тенгламани интеграллаб, моддий нуқтанинг ҳаракат қонунини топиш, кўп жиҳатдан $\vec{F}$ вектор кучнинг берилишига боғлиқ булади. Масалалар ечишда $\vec{F}$ куч қуйидагича берилиши мумкин:

1) $\vec{F} = \vec{F}$ -нуқтага таъсир қилаётган куч миқдор ва йўналиш жиҳатидан ўзгармас (статик куч) бўлиши мумкин;

2) $\vec{F} = \vec{F}(t)$-нуқтага таъсир қилаётган куч фақат вақтнинг функцияси бўлиши мумкин;

3) $\vec{F} = \vec{F}(\bar{r})$ -таъсир қилаётган куч нуқтанинг ҳолатига боғлиқ булиши мумкин;

4) $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ -материал нуқтага таъсир қилаётган куч фақат унинг тезлигига боғлиқ булиши мумкин;

5) нуқтага таъсир қилаётган куч t вақт ва $\vec{r}$ нуқтанинг ҳолатини аниқловчи радиус-векторга боғлиқ бўлади;

6) нуқтага таъсир қилаётган куч t вақт ва $\vec{r}$ нуқта тезлигининг функцияси бўлиши мумкин;

7) моддий нуқтага таъсир қилаётган куч $\vec{r}$ радиус-векторга ва нуқтанинг $\vec{r}$ вектор тезлигига боғлиқ булиши мумкин.

Шундан қилиб, моддий нуқтага таъсир қилаётган куч ўзгармас миқдор, битта, иккита ва учта ўзгарувчининг функцияси булар экан.

Агар (2) тенгламанинг иккала қисмини тўғри бурчакли қўзғалмас координата ўқларига проекциялаб, битта вектор шаклдаги дифференциал тенгламага тенг кучли бўлган учта скаляр тенглама оламиз:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z \tag{3}$$

бу ерда, $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ -нуқта тезланиши векторининг координата ўқларидаги проекциялари; F_x, F_y, F_z эса нуқтага таъсир қилувчи вектор кучнинг ўша ўқлардаги проекциялари.

Агар моддий нуқта ҳаракати битта текисликда содир бўлса, бундай ҳолда z=0, шунингдек, $F_z = 0$ бўлиб, унинг ҳаракат тенгламалари

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y \tag{4}$$

кўринишга эга бўлади.

Агар нуқта тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракатланаётган бўлса, бу тўғри чизиқни ох координата ўқи бўйлаб йўналтириб, нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракати учун

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x \tag{5}$$

кўринишдаги битта оддий иккинчи тартибли дифференциал тенгламага эга бўламиз. (5) битта скаляр тенгламанинг ўнг қисмидаги Fx кучнинг кўринишлари ҳам қуйидагича бўлиши мумкин:

$$1)\ F_x = F_0 = const;\ 2)\ F_x = F(t);\ 3)\ F_x = F(x);$$

$$4)\ F_x = F(\dot{x});\ 5)\ F_x = F(t, x);\ 6)\ F_x = F(t, \dot{x});\ 7)\ F_x = F(x, \dot{x});$$

$$8)\ F_x = F(t, x, \dot{x}).$$

Агар (1) тенгламанинг иккала қисмини табиий қўзғалувчан координата ўқларига проекциялаcак, моддий нуқтанинг ҳаракат тенгламаларини қуйидагича оламиз (41-чизма):

$$ma_\tau = F_\tau, \quad ma_n = F_n, \quad ma_в = F_в \tag{6}$$

бу ерда a_τ, a_n, $a_в$ ва F_τ, F_n, $F_в$ мос равишда тезланиш ва тенг таъсир этувчининг нуқта траекториясининг қаралаётган нуқтасига ўтказилган уринма, бош нормал ва бинормалдаги проекциялари.

Агар $a_\tau = \dfrac{d^2S}{dt^2} = \ddot{S}$, $a_n = \dfrac{\vartheta^2}{\rho}$, $a_b = 0$ эканлигини эътиборга олсак, табиий ўқлар бўйича нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари

$$m\frac{d^2S}{dt^2} = F_\tau, \quad m\frac{\vartheta^2}{\rho} = F_n, \quad F_b = 0 \qquad (7)$$

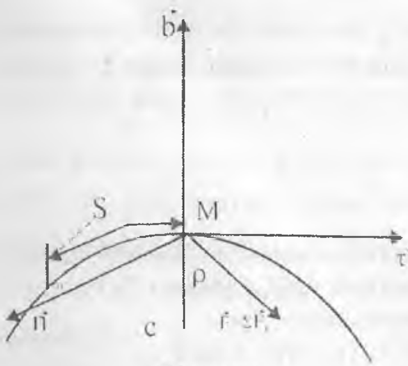
кўринишга эга бўлади.

Нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини бошқа исталган координата тизимларида (қутб, цилиндрик, сферик ва ҳ.к) ифодалаш мумкин. Бунинг учун нуқта тезланиш векторининг координата ўқларидаги проекцияларининг ифодаларини билиш керак.

Қутб координатларида нуқта ясси ҳаракатининг дифференциал тенгламалари

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r, \quad \frac{m}{r}\cdot\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = F_\varphi \qquad (8)$$

кўринишда бўлади.



41-чизма.

2. Динамиканинг биринчи масаласи. Моддий нуқтанинг массаси ва унинг ҳаракат

$x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$

тенгламаларини билган ҳолда, бу нуқтага қўйилган кучнинг модули ва йўналишини аниқлашдан иборатдир. Бу масала қуйидагича ечилади. Моддий нуқта ҳаракат тенгламалари бўйича дифференциаллаш йўли билан нуқта тезланишининг проекциялари аниқланиб, (3) тенгламалар ёрдамида кучнинг проекциялари топилади:

$$F_x = m\ddot{x}, \quad F_y = m\ddot{y}, \quad F_z = m\ddot{z}.$$

Кучнинг топилган проекциялари бўйича унинг миқдори ва куч вектори координата ўқларининг мусбат йўналишлари билан ташкил қилган бурчакларининг косинуслари топилади.

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = m\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}; \qquad (9)$$

$$\cos(\bar{i}, \hat{\ } \bar{F}) = \frac{F_x}{F}, \cos(\bar{j}, \hat{\ } \bar{F}) = \frac{F_y}{F}, \cos(\bar{k}, \hat{\ } \bar{F}) = \frac{F_z}{F} \qquad (10)$$

1-масала. m массали моддий нуқта (xy) текисликда ҳаракат қилмоқда. Унинг ҳаракат тенгламалари қуйидагича:

x=a coskt, y=в sinkt, бунда a, в, k – доимий сонлар; t–вақт. Нуқтанинг ҳаракатини вужудга келтирувчи кучни топинг.

Ечиш. Нуқтанинг ҳаракати параметрик шаклда берилган. Унинг траектория тенгламасини топамиз. Бунинг учун берилган тенгламалардан t вақтни чиқариб ташлаймиз.

$$x^2/a^2+y^2/в^2=1$$

Нуқтанинг праекторияси ярим ўқлари a ва в дан иборат бўлган эллипсдан иборатдир (42-чизма). (4) дифференциал тенгламалар кучида нуқтага таъсир қилаётган кучнинг проекцияларини топамиз:

$$F_x = m\ddot{x} = -mak^2\cos kt = -mk^2x; \quad F_y = m\ddot{y} = -mk^2в\ \sin кt = -mk^2y.$$

Кучнинг модули ва йўналишини аниқлайиз.

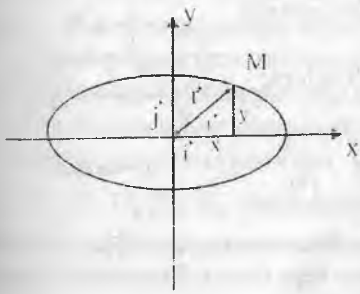
$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = mk^2\sqrt{x^2+y^2} = mk^2r$, бунда $r = \sqrt{x^2+y^2}$ ҳаракатдаги нуқта $\bar{r}$ радиус-векторининг модули; $\bar{F}$ куч вектори координата ўқларининг мусбат йўналиши билан ташкил қилган бурчакларининг косинусларини топамиз:

$$\cos(\bar{i},\bar{r}) = \frac{x}{r}, \cos(\bar{j},\bar{r}) = \frac{y}{r}; \cos(\bar{i},\bar{F}) = \frac{F_x}{F} = -\frac{x}{r}; \cos(\bar{j},\bar{F}) = -\frac{y}{r}$$

Энди, $\bar{r}$ радиус-векторнинг йўналтирувчи косинусларини топамиз:

$$\cos(\bar{i},\bar{r}) = \frac{r_x}{r} = \frac{x}{r}; \quad \cos(\bar{j},\bar{r}) = \frac{r_y}{r} = \frac{y}{r}$$

Демак, $\bar{F}$ куч вектори $\bar{r}$ нуқта радиус-вектори йўналишига қарама-қарши йўналган экан. Шундай экан, изланаётган вектор куч $\bar{F} = -mk^2\bar{r}$ кўринишга эга бўлади. Шундай қилиб, моддий нуқта координата бошидан нуқтагача бўлган масофага пропорционал бўлган, марказга йўналган тортишиш кучи таъсирида ҳаракат қилар экан. Таъсир чизиқлари ҳамма вақт берилган O марказдан ўтувчи кучга марказий куч дейилади. Бундай кучга планеталар ва ер суъний йўлдошларининг қуёшга тортишиш кучи мисол бўла олади. Ана шундай биз сезмайдиган улкан марказий куч таъсирида планеталар қуёш атрофида, Ой эса ер атрофида айланма ҳаракат қилади.



42-чизма.

2-масала. m=1,53 кг массали шарча боғланган 80 см узунликдаги ип 50 Н дан ошмайдиган реакция (таранглик) кучига бардош бера олади. Агар шарча ипига 25 Н дан ошмайдиган таранглик кучи таъсир қилса, у конус сирт ташкил қилиб, горизонтал текисликда қандай тезлик билан ҳаракатланади? Шарча қандай тезликка эга бўлганда унинг ипида узилиш хавфи туғилади? Ип вертикал билан қандай α_1 ва α_2 бурчаклар ташкил қилади?

Ечиш. 1) Шарчанинг оғирлигини топамиз

$$P = mq = 1,53\ кг \cdot 9,8\ \frac{м}{сек^2} = 15\ Н.$$

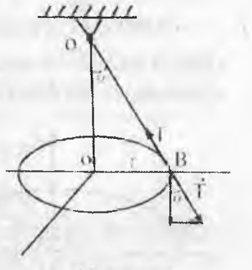
2) OO_1B тўғри бурчакли учбурчакдан α бурчакни аниқлаймиз (43-чизма).

$$\cos\alpha = \frac{P}{T} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{P}{T}.$$

T=25 н бўлганда $\cos\alpha_1 = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} = 0,6.$ $\quad \alpha_1 = 53^0;$

T=50 н бўлганда эса $\cos\alpha_2 = \frac{15}{50} = \frac{3}{10} = 0,3.$ $\quad \alpha_2 = 72^0.$

3) шарчанинг горизонтал текисликда айлана бўйлаб ҳаракатланаётган тезлиги $F = m\frac{\vartheta^2}{r}$ формуладан топилади. Бунда $r = \ell\sin\alpha_1 = 0,8\sin 53^\circ = 0,8.0,8 = 0,64$ м.



43-чизма.

4) $\overline{F}$ кучнинг модулини топамиз.

$F = Ptq\alpha_1 = 15tq53^\circ\ Н = 15 \cdot 1,33Н = 20\ Н.$

5) $\overline{\vartheta}$ тезликнинг сон қийматини аниқлаймиз.

$$\vartheta = \sqrt{\frac{F \cdot r}{m}} = \sqrt{\frac{20 \cdot 0,64}{1,53}}\ м/сек = 2,9\ м/сек$$

Шарнинг тезлигини $\vartheta = \sqrt{\frac{P\ell\sin^2\alpha_1}{m\cos\alpha_1}}$ (*)

формула бўйича ҳам топиш мумкин. Масала шартига кўра ип 50Н дан ошмайдиган таранглик кучига бардош бера олади. Таранглик кучининг бу қийматига 72° бурчак мос келади.

(*) формуладан кўриниб турибдики, қачонки $\alpha_1 \Rightarrow 90°$ да $\vartheta \Rightarrow \infty$ бўлади. Шундай қилиб, шарча етарлича катта тезликка (бундай катта тезликка $\alpha_1 \Rightarrow 90°$ бўлганда эришади) эга бўлганда ипнинг узилиш хавфи туғилади.

Динамиканинг иккинчи масаласи

Моддий нуқтанинг массаси ва унга қўйилган кучни билган ҳолда нуқтанинг ҳаракатини аниқлаш муҳим амалий аҳамиятга эга бўлиб, бу қўйилган масала динамиканинг иккинчи масаласини ифодалайди. Иккинчи масала динамиканинг биринчи масаласига нисбатан мураккаб бўлиб, динамиканинг асосий масаласини ташкил қилади. Бу масала кўпинча қуйидагича ҳам қўйилади: Нуқтага қўйилган куч, нуқтанинг бошланғич ҳолати ва бошланғич тезлигини билган ҳолда вақтнинг исталган дақиқасида нуқтанинг ҳолатини аниқлаш зарур.

Юқорида эслатганимиздек материал нуқтага таъсир қилаётган куч умумий ҳолда ўзгарувчан миқдор бўлиб, — $t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ ўзгарувчиларнинг функцияси бўлиши мумкин. Умумий ҳолда динамиканинг иккинчи масаласи

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{y} &= F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{z} &= F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \end{aligned} \tag{11}$$

кўринишдаги учта дифференциал тенгламалар тизимини ечишга келтирилади.

Декарт координаталар тизимида нуқта ҳаракатининг тенгламаларини топиш учун (11) учта иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламалар тизимини интеграллаш керак экан.

Дифференциал тенгламалар назариясидан маълумки, битта иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламанинг умумий ечими ихтиёрий иккита ўзгармас сонга боғлиқ бўлади. Шундай экан (11) оддий дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимлари ихтиёрий 6 та $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ ўзгармас сонларга боғлиқ бўлади. Фараз қилайлик, (11) тенгламалар тизимини бирор усул билан интеграллаб, ў тизимнинг умумий ечимларини

$$x = x(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6),$$

$$y = y(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6),$$

$$z = z\,(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \qquad (12)$$

куринишда топган булайлик.

Бу ердаги $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ ўзгармас сонларни бир қийматли аниқлаш учун яна бизга учта боғланиш керак. Бу боғланишларни топиш мақсадида (12) умумий ечимларни t вақт бўйича дифференциаллаб, нуқта тезлигининг декарт координата ўқларидаги проекцияларини топамиз:

$$\vartheta_x = \dot{x} = x^1\,(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6),$$

$$\vartheta_y = \dot{y} = y^1\,(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \qquad (13)$$

$$\vartheta_z = \dot{z} = z^1\,(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)\,.$$

6 та ўзгармас сонларни ўзида сақлаган (12) ва (13) тизимлар бир-бирига боғлиқ бўлмаган тенгламалардан ташкил топгандир. Агар (12) муносабатлардаги интеграллаш доимийларига турли сонли қийматлар бериб, турли хил ечимлар тўпламини ҳосил қиламиз. Шундай экан, моддий нуқтага биттагина табиатли куч таъсир қилганда, у нуқта турли хил ҳаракатлар қилар экан. Масалан, бошланғич тезликсиз тушаётган жисм оғирлик кучи таъсирида тўғри чизиқ бўйлаб вертикал пастга тушади. Энди ўша жисмни горизонтга нисбатан маълум бир бурчак остида отсак, жисм оғирлик кучи таъсирида қандайдир эгри чизиқ бўйлаб ҳаракат қилади. Шундай қилиб, нуқтага қўйилган куч нуқтанинг аниқ бир маълум ҳаракатини аниқламайди, балки 6 та ихтиёрий доимий сонларга боғлиқ бўлган бутун бир синф ҳаракатлар оиласини аниқлар экан. Бу ҳаракатлар оиласидан моддий нуқтанинг аниқ бир ҳаракатини ажратиб олиш учун, яъни 6 та доимий ўзгармасни бир қийматли аниқлайдиган тўлдирувчи шартлар зарур экан.

Бундай тўлдирувчи шартлар бошланғич шартлар номи билан юритилиб, маълум бир аниқ дақиқа, масалан, t=o дақиқада ҳаракатланувчи нуқтанинг x_0, y_0, z_0 координаталари ва унинг тезлиги проекциялари $\vartheta_{0x} = \dot{x}_0$, $\vartheta_{0y} = \dot{y}_0$, $\vartheta_{0z} = \dot{z}_0$ берилган бўлиши керак. Бу шартлар қуйидагича ифодаланиб ёзилади:

$$x/_{t=0} = x_0, \quad y/_{t=0} = y_0, \quad z/_{t=0} = z_0; \qquad (14)$$

$$\dot{x}/_{t=0} = \dot{x}_0, \quad \dot{y}/_{t=0} = \dot{y}_0, \quad \dot{z}/_{t=0} = \dot{z}_0$$

Бу бошланғич шартлардан, (12) ва (13) формуладан фойдаланиб, 6 та ихтиёрий доимийни бир қийматли аниқлашга имкон берадиган қуйидаги 6 та тенгламани оламиз:

$$x_0 = x\,(o, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6);$$

$$y_0 = y\,(o, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6);$$

$$z_0 = z\,(o, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6);$$

$$\dot{x}_0 = \dot{x}\,(O, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6);$$

$$\dot{y}_0 = \dot{y}\,(o, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6);$$

$$\dot{z}_0 = \dot{z}\,(o, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \qquad (15)$$

Агар (15) тизим ечилишлик шартларини қаноатлантирса, уни бирор усул билан ечиб, барча 6 та доимий сонни аниқлаб, уларнинг топилган қийматларини (12) умумий ечимга қўйиб, изланаётган нуқтанинг ҳаракат тенгламаларини (қонунини)

$$\begin{aligned} x &= x(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) = x(t), \\ y &= y(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) = y(t), \\ z &= z(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) = z(t). \end{aligned} \qquad (16)$$

кўринишда топамиз.

3-масала. Оғирлиги P га тенг бўлган жисм ϑ_0 бошланғич тезлик билан горизонтга нисбатан α бурчак остида отилди. Шу жисмнинг ҳавонинг қаршилигини эътиборга олмасдан унинг фақат оғирлик кучи таъсирида бўладиган ҳаракат тенгламаларини, жисмнинг траекториясини, горизонтал босиб ўтган масофасини, траекториясининг баландлигини ва учиш вақтини топинг.

Э с л а т м а. Бу масалани ҳал қилишда қуйидаги фаразлар қилинади: 1) Моддий жисм ҳаракатига муҳитнинг таъсири эътиборга олинмайди.

2) Оғирлик кучи майдони бир жинсли, яъни P=const ёки g=const деб қаралади;

3) Жисм учишининг ва траекториясининг баландлигини ернинг радиусига ёки координата ўқларига нисбатан кичкина деб қаралади.

Ечиш. O координата бошини жисмнинг бошланғич ҳолати деб қабул қиламиз. M нуқтага фақат P оғирлик кучи таъсир қилади.

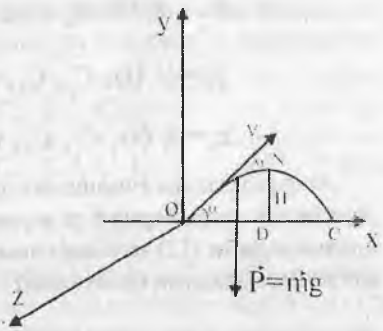
Бу кучнинг координата ўқларидаги проекцияларини ҳисоблаймиз (44-чизма).

$P_x = O$, $P_y = -P$, $P_z = O$, бу ердаги (-) ишора P_y ташкил этувчи кучнинг йўналиши оу ўқнинг мусбат йўналишига қарши эканлигини билдиради. Кучнинг бу проекцияларини (3) га қўйиб,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d\vartheta x}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d\vartheta y}{dt},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{d\vartheta z}{dt}$$



эканлигини эътиборга олиб, m га бўлгандан кейин M нуқтанинг ҳаракат тенгламаларини қуйидагича оламиз:

$$\frac{d\vartheta_x}{dt} = 0, \quad \frac{d\vartheta_y}{dt} = -g, \quad \frac{d\vartheta_z}{dt} = 0.$$

44-чизма.

Бу тенгламаларни интеграллаб, M нуқта тезлигининг проекцияларини топамиз:

$$\vartheta_x = C_1, \ \vartheta_y = -gt + C_2, \ \vartheta_z = C_3. \qquad (17)$$

Қаралаётган масала учун бошланғич шартлар қуйидагича:

$$x/_{t=0} = 0, \quad y/_{t=0} = 0, \quad z/_{t=0} = 0,$$

$$\vartheta_x/_{t=0} = \vartheta_0 \cos\alpha, \quad \vartheta_y/_{t=0} = \vartheta_0 \sin\alpha, \quad \vartheta_z/_{t=0} = 0 \qquad (18)$$

(17) тенгламалар ва (18) нинг иккинчи сатри шартларидан фойдаланиб, C_1, C_2, C_3, доимийларни аниқлаш мумкин:

$$C_1 = \vartheta_0 \cos\alpha, \quad C_2 = \vartheta_0 \sin\alpha, \quad C_3 = 0 \qquad (19)$$

(19) ни (17) га қўйиб, $\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z$ ларни $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ га алмаштириб, нуқта ҳаракатининг тенгламаларини

$$\frac{dx}{dt} = \vartheta_0 \cos\alpha, \quad \frac{dy}{dt} = \vartheta_0 \sin\alpha - gt, \quad \frac{dz}{dt} = 0$$

кўринишда оламиз. Бу тенгламаларни такрор интеграллаймиз ва топамиз:

$$x(t) = \vartheta_0 t\cos\alpha + C_4, \quad y(t) = \vartheta_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2} + C_5, \quad z(t) = C_6$$

Бу топилган тенгламалар ва (18) шартлар кучида C_4, C_5, C_6 ни аниқлаймиз:

$$C_4 = C_5 = C_6 = 0.$$

Натижада М нуқтанинг ҳаракат тенгламаларини

$$x(t) = \vartheta_0 t\cos\alpha, \quad y(t) = \vartheta_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}, \quad z(t) = 0$$

кўринишда топамиз. Бу олинган тенгламалардан кўринадики, нуқтанинг ҳаракати (x y) текисликда содир бўлар экан. (19) тенгламалар ёрдамида нуқта ҳаракатининг барча хусусиятларини аниқлаш мумкин.

1. Нуқтанинг траектория тенгламасини аниқлаймиз. Бунинг учун (19) тенгламаларнинг дастлабки иккитасидан t вақтни чиқариб ташласак, нуқта ҳаракатининг

$$y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2\vartheta_0^2\cos^2\alpha} \tag{20}$$

кўринишдаги траектория тенгламасини топамиз. Бу тенглама ўқи оу ўқ билан параллел бўлган, координата бошидан ўтувчи параболани аниқлайди. Шундай қилиб, горизонтга нисбатан бурчак остида отилган оғир нуқта ҳавосиз фазода парабола бўйича ҳаракатланар экан.

2. Нуқтанинг горизонтал босиб ўтган масофаси, ох ўқ атрофидаги ос=х масофани аниқлаймиз. ох ўқ устида ётган нуқталар учун у=о бўлиши керак. Бундай ҳолда (20) да у=о деб, ох ўқ билан кесишиш нуқталарини аниқлаймиз.

$$x(\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx}{2\vartheta_0^2\cos^2\alpha}) = 0.$$

Бу тенглама иккита тенгламага тарқалади, уларнинг ечимларини топамиз:

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{\vartheta^2}{g}\sin 2\alpha$$

$x_1 = 0$ ечим координата бошига, X_2 ечим эса С нуқтага мос келади. Агар

$$X = Xc \text{ десак, } oc = x = \frac{\vartheta_0^2}{g}\sin 2\alpha \tag{21}$$

Олинган натижадан равшанки, юк ϑ_0 бошланғич тезлик билан отилганда ҳавосиз фазода энг максимал узунликка $\sin 2\alpha = 1$, яъни $\alpha = 45^0$ бўлгандагина эришади.

3. Траекториянинг баландлиги. Парабола ўқи абсцисса ўқини

$x_n = \frac{1}{2}x = \frac{\vartheta_0^2}{2g}\sin\alpha\cos\alpha$ нуқтада кесиб ўтади.

Ана шу нуқтага мос келувчи нуқтанинг кординатаси траекториянинг максимал баландлиги бўлади.

$$H = y_n = \frac{\vartheta_0^2}{2g}\sin\alpha\cos\alpha \qquad (22)$$

Эслатма. Бу натижани (20) функциянинг экстремумини текшириб ҳам аниқлаш мумкин.

4. Учиш вақти. Т учиш вақти (19) тенгламаларнинг биринчисидан топилади: $X = \vartheta_0 T\cos\alpha$. Бу тенгликка Х нинг (21) ифодасини қўямиз ва Т учиш вақтини топамиз.

$$T = \frac{2\vartheta_0}{g}\sin\alpha i \qquad (23)$$

Агар $\alpha = 45$ бўлса, у ҳолда (21)-(23) формулалардан қуйидагиларни топамиз:

$$X^* = \frac{\vartheta_0^2}{g};\quad H^* = \frac{\vartheta_0^2}{4g} = \frac{1}{4}X^*;\quad T = \frac{\vartheta_0}{g}\sqrt{2}.$$

4-масала. 3-масалани ҳавонинг қаршилик кучини эътиборга олиб ҳал қиламиз. Моддий жисмга оғирлик кучидан ташқари нуқта тезлигининг биринчи даражасига пропорциал бўлган, яъни $R = kmg\,\vartheta$ куринишдаги қаршилик кучи таъсир қилади деб ҳисоблаб, нуқтанинг ҳаракат тенгламаларини, траекториянинг бошлангич ҳолатдан h баландлигини, горизонт бўйлаб қандай S масофада моддий нуқта энг баланд ҳолатда бўлади?

Масалада топилган натижалар билан олдинги масала натижаларини таққосланг ва боғланишларини ўрнатинг.

Ечиш. I. $\vec{P}$ оғирлик кучига нуқта траекториясининг қаралаётган нуқтасига ўтказилган уринма бўйлаб тезликка қарама-қарши йўналган $\vec{R}$ қаршилик кучи ҳам қўшилади.

Динамиканинг асосий қонуни ва кучлар таъсирининг мустақиллик қонунини қўллаб (45-чизма),

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} \tag{24}$$

тенгламага эга бўламиз.

Бунда, $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$ ва $\vec{R} = -kp\vec{\vartheta} = -kmg\dot{\vec{r}}$ эканлигини эътиборга олсак

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{P} - kmg\dot{\vec{r}} \tag{25}$$

вектор тенгламага эга бўламиз.

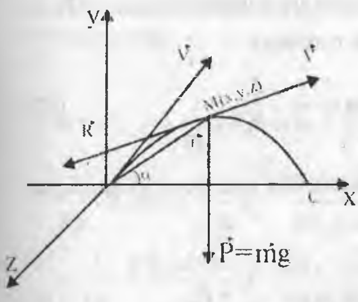
(25) вектор тенгламанинг иккала қисмини координата ўқларига проекциялаб, $\vec{r}$ радиус-векторининг oz ўқдаги проекцияси 0 га тенг, чунки $0z \perp \vec{r}$, m га бўлиб, нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини

$$\ddot{x} = -kg\dot{x}, \quad \ddot{y} = -g - kg\dot{y} \tag{26}$$

кўринишда оламиз.

Қаралаётган масала учун бошланғич шартлар

$x/_{t=0} = 0, \quad y/_{t=0} = 0, \quad \dot{x}/_{t=0} = \vartheta_0 \cos\alpha, \quad \dot{y}/_{t=0} = \vartheta_0 \sin\alpha$ (26) кўринишда бўлади.



45-*чизма.*

(26) нинг биринчи ифодасини интеграллаш учун $\ddot{x}$ ни $\frac{d\dot{x}}{dt}$ га алмаштириб ўзгарувчиларни ажратамиз

$$\frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -kgdt \Rightarrow \ell n\dot{x} = -kgt + C_1 \tag{27}$$

(27) га t=0, $\dot{x}_0 = \vartheta_0 \cos\alpha$ бошланғич қийматларни қўйиб, $C_1 = \ell n \vartheta_0 \cos\alpha$ ни топамиз. C_1 нинг бу ифодасини (27) га қўямиз ва топамиз

$$\ln \dot{x} = -kgt + \ln \vartheta_0 \cos\alpha \Rightarrow \dot{x} = \vartheta_0 \cos\alpha\, e^{-kgt} \tag{28}$$

(28) да $\dot{x}$ ни $\frac{dx}{dt}$ га алмаштириб, олинган дифференциал тенгламани интеграллаб, (26) биринчи тенгламасининг иккинчи интегралини топамиз

$$x(t) = -\frac{\vartheta_0}{kg} e^{-kgt} \cos\alpha + C_2 \qquad (29)$$

(29) тенгламага t=0, x=0 бошланғич қийматларни қўйиб, C_2 интеграл доимийни аниқлаймиз: $C_2 = \frac{\vartheta_0}{kg}\cos\alpha$. C_2 нинг бу топилган ифодасини (29) га қўйиб жисм ҳаракат тенгламасининг ох ўқдаги проекциясини аниқлаймиз

$$x(t) = \frac{\vartheta_0}{kg}(1 - e^{-kgt})\cos\alpha \qquad (30)$$

Энди $\ddot{y}$ ни $\frac{d\dot{y}}{dt}$ га алмаштириб, (26) нинг иккинчи тенгламасини интеграллаймиз

$$\begin{aligned} &\frac{d\dot{y}}{dt} = -g - kq\dot{y} \Rightarrow \frac{d\dot{y}}{1 + k\dot{y}} = -gdt \Rightarrow \\ &\ell n(1 + k\dot{y}) = -kdt + C_3 \end{aligned} \qquad (31)$$

(31) га t=0, $\dot{y}_0=\vartheta_0\sin\alpha$. бошланғич қийматларни қўйиб, C_3 ни топамиз: $C_3 = \ell n(1 + k\vartheta_0\sin\alpha)$. C_3 нинг топилган ифодасини (31) га қўйиб, тенгламанинг биринчи интегралини топамиз

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{k}(1 + k\vartheta_0\sin\alpha)e^{-kgt} - \frac{1}{k}. \qquad (32)$$

(32) да $\dot{y}$ ни $\frac{dy}{dt}$ га алмаштириб, тенгламанинг иккинчи интегралини топамиз

$$y = \frac{1}{gk^2}(1 + k\vartheta_0\sin\alpha)e^{-kgt} - \frac{t}{k} + C_4 \qquad (33)$$

(33) 20 t=0 ва y=0 бошланғич қийматларни қўйиб, C_4 интеграл доимийни топамиз

$$C_4 = \frac{1}{gk^2}(1 + k\vartheta_0\sin\alpha)$$

C_4 нинг бу ифодасини (33) га қўйиб, жисм ҳаракат тенгламасининг оу ўқдаги проекциясини топамиз

$$y(t) = \frac{1}{kg}(\vartheta_0 \sin\alpha + \frac{1}{k})(1 - e^{-kgt}) - \frac{t}{k}. \qquad (34)$$

2. Траекториянинг бошланғич ҳолатдан h баландлигини топиш учун (34) функциянинг максимумга эришиш шартини текширамиз. Бунинг учун y(t) нинг биринчи тартибли ҳосиласини топамиз

$$y'(t) = (\vartheta_0 \sin\alpha + \frac{1}{k})e^{-kgt} - \frac{1}{k}.$$

Бу ҳосиланинг қийматини нолга айлантирадиган t нинг қийматини аниқлаймиз

$$(\vartheta_0 \sin\alpha + \frac{1}{k})e^{-kgt} - \frac{1}{k} = 0,$$

$$1 + k\vartheta_0 \sin\alpha = e^{kgt},$$

$$t = \frac{\ln(1 + k\vartheta_0 \sin\alpha)}{kg}$$

y(t) функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топамиз ва унинг ишорасини аниқлаймиз

$$\ddot{y} = -kg(\vartheta_0 \sin\alpha + \frac{1}{k})e^{-kgt} < 0.$$

Демак, y(t) функция t нинг топилган критик қийматида максимумга эришади

$$h = y_{max} = \frac{1}{kg}(\vartheta_0 \sin\alpha + \frac{1}{k})(1 - e^{-\ln(1+k\vartheta_0 \sin\alpha)}) - \frac{\ln(1+k\vartheta_0 \sin\alpha)}{gk^2} =$$

$$\frac{1}{kg}(\vartheta_0 \sin\alpha + \frac{1}{k})(1 - \frac{1}{k\vartheta_0 \sin\alpha + 1}) - \frac{\ln(1+k\vartheta_0 \sin\alpha)}{gk^2} =$$

$$= \frac{1}{kg} \cdot \frac{k\vartheta_0 \sin\alpha + 1}{k} \cdot \frac{k\vartheta_0 \sin\alpha + 1 - 1}{k\vartheta_0 \sin\alpha + 1} - \frac{1}{gk^2}\ln(1 + \vartheta_0 \sin\alpha) =$$

$$= \frac{\vartheta_0 \sin\alpha}{kg} - \frac{1}{gk^2}\ln(1 + k\vartheta_0 \sin\alpha).$$

3. Маълумки, моддий жисм $t = \dfrac{\ln(1 + k\vartheta_0 \sin\alpha)}{kg}$ дақиқада энг баланд нуқтада бўлади. t нинг бу критик қийматига мос келадиган x нинг қиймати S масофадан иборат бўлади.

$$S = x_{max} = \frac{\vartheta_0 \cos \alpha}{kg}(1 - e^{-\ell n(1+k\vartheta_0 \sin \alpha)}) =$$

$$= \frac{\vartheta_0 \cos \alpha}{kq}(1 - \frac{1}{1 + k\vartheta_0 \sin \alpha}) = \frac{\vartheta_0 \cos \alpha}{kg} \frac{1 + k\vartheta_0 \sin \alpha - 1}{1 + k\vartheta_0 \sin \alpha} =$$

$$= \frac{2k\vartheta_0 \sin \alpha \cos \alpha}{2kg(1 + k\vartheta_0 \sin \alpha)} = \frac{\vartheta_0^2 \sin 2\alpha}{2g(1 + k\vartheta_0 \sin \alpha)}.$$

4. Энди (19) ва (30), (34) нуқта ҳаракатининг тенгламалари орасидаги боғланишларни ўрнатамиз. Бунинг учун (30) ва (34) тенгламаларда k ни ўзгаришда қараб $k \to 0$ да (қаршилик кучи камайиб борганда) ноаниқ муносабатларни Лопитал қоидаси бўйича очамиз

$$\lim_{k\to 0} x(t) = \vartheta_0 \cos\alpha \lim_{k\to 0} \frac{1 - e^{-kgt}}{kg} = \vartheta_0 \cos\alpha \lim_{k\to 0} \frac{\frac{d}{dk}(1 - e^{-kgt})}{g\frac{dk}{dk}} =$$

$$= \vartheta_0 \lim_{k\to 0} \cos\alpha \frac{tge^{-kgt}}{g} = t\vartheta_0 \cos\alpha \lim_{k\to 0} \frac{1}{kgt} = \vartheta_0 t \cos\alpha.$$

y(t) функциянинг лимитини ҳисоблашдан олдин унинг ифодасини бироз ўзгартирамиз, кейин унинг $k \to 0$ даги лимитини топамиз

$$y(t) = \frac{\vartheta_0 \sin\alpha(1 - e^{-kgt})}{kg} + \frac{1 - e^{-kgt} - kgt}{gk^2};$$

$$\lim_{k\to 0} y(t) = \lim_{k\to 0} \left[\frac{\vartheta_0 \sin\alpha(1 - e^{-kgt})}{kg} + \frac{1 - e^{-kgt} - kgt}{gk^2} \right] =$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{\frac{d}{dk}[\vartheta_0 \sin\alpha(1 - e^{-kgt})]}{g\frac{dk}{dk}} + \lim_{k\to 0} \frac{\frac{d^2}{dk^2}(1 - e^{-kgt} - kgt)}{\frac{dk}{dk}(gk^2)} =$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{\vartheta_0 \sin\alpha gte^{-kgt}}{g} + \lim_{k\to 0} \frac{-t^2 ge^{-kgt}}{2} = \vartheta_0 \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$$

Шундай қилиб, муҳитнинг қаршилигини эътиборга олганда ечилган масаланинг натижалари олдинги масала натижаларини берар экан.

Энди динамиканинг иккинчи масаласига доир яна бир амалий аҳамиятга эга бўлган мураккаброқ масалани ҳал қиламиз.

5-масала. Массаси m=2 кг бўлган D юк A нуқтада $\vartheta_0 = 20\,\dfrac{м}{сек}$ бошланғич тезлик олиб, вертикал текисликда жойлашган ABC эгилган трубада ҳаракатланади. Трубанинг AB оғма қисмида юкка оғирлик кучидан ташқари $\vec{Q} = 6H$ ўзгармас куч (бу кучнинг йўналиши чизмада кўрсатилган) ва юкнинг тезлигига боғлиқ бўлган $\vec{R} = 0{,}4\,\vec{\vartheta}$ муҳитнинг қаршилик кучи (бу куч йўналиши юкнинг ҳаракат йўналишига қарма-қарши) таъсир қилади. AB қисмда юк билан труба орасида бўладиган ишқаланиш эътиборга олинмайди. B нуқтада юк ўз тезлигини ўзгартирмасдан трубанинг BC қисмига ўтади. Трубанинг бу қисмида юкка оғирлик кучидан ташқари юк билан труба орасида бўладиган ишқаланиш коэффициенти f=0,2 га тенг бўлган ишқаланиш кучи ва ох ўқдаги проекцияси $F_x = 2\sin 4t$ га тенг бўлган $\vec{F}$ ўзгарувчан куч таъсир қилади.

Юкни моддий нуқта деб ҳисоблаб ва A нуқтадан B нуқтагача бўлган $t_1 = 2{,}5$ сек ҳаракат вақтини билган ҳолда, юкнинг трубанинг BC қисмидаги ҳаракат қонунини топинг:

Масаланинг шарти ва талабини қисқача қуйидагича ифодалаб ёзиш мумкин.

Берилганлар: m=2 кг (юкнинг массаси); $\vartheta_0 = 20\,\dfrac{м}{сек}$

$Q = 6H$; $R = 0{,}4\vartheta$; $t_1 = 2{,}5$ сек; $f_{AB} = 0$

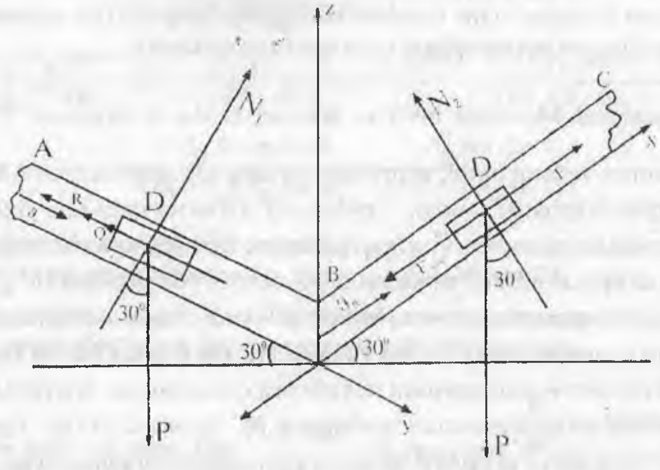
$f_{AB} = 0{,}2$; $F_x = 2\sin 4t$; $g = 10\,\dfrac{м}{сек^2}$; $\alpha = 30$.

Трубанинг BC қисмида юкнинг x=f(t) ҳаракат қонунини топиш керак.

Ечиш: Аввало масалага доир чизма чизамиз. Берилганларни чизмада тасвирлаймиз (46-чизма).

1. D юкнинг трубанинг AB қисмидаги ҳаракатини текширамиз. Юкни моддий нуқта деб, труба AB қисмининг охирида унинг тезлигини топамиз. AУ ўқни ўтказиб, юк ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини шу ўқдаги проекцияси бўйича тузамиз:

$$m\frac{d\vartheta_B}{dt} = P_y + P_y + Q_y . \qquad (35)$$



46-чизма.

Юкка таъсир қилувчи кучларнинг АУ ўқдаги проекцияларини ҳисоблаймиз

$$P_y = P\sin\alpha = mg\sin 30^\circ;\quad P_v = -0{,}4\vartheta;\quad Q_y = -Q = -6H.$$

$\vartheta_y = \vartheta$ эканлигини эътиборга олиб, юк ҳаракатининг дифференциал тенгламасини

$$m\frac{d\vartheta}{dt} = 0{,}5mg - 6 - 0{,}4\vartheta \Rightarrow \frac{d\vartheta}{dt} = 2 - 0{,}2\vartheta$$

кўринишда оламиз. Бу тенгламанинг ўзгарувчиларини ажратиб, чап қисмини ϑ_0 дан ϑ_B гача, ўнг қисмини о дан t гача интеграллаймиз

$$\frac{d\vartheta}{2-0{,}2\vartheta} = dt,\quad -\frac{1}{0{,}2}\frac{d(2-0{,}2\vartheta)}{2-0{,}2\vartheta} = dt,\quad \ln\frac{2-0{,}2\vartheta_B}{2-0{,}2\vartheta_0} = -0{,}2t,\quad \frac{2-0{,}2\vartheta_B}{2-0{,}2\vartheta_0} = e^{-0{,}2t}+10,$$

$$\vartheta_B = (\vartheta_0 - 10)e^{-0{,}2t} + 10.$$

ϑ_0 ва t нинг берилган қийматларини топилган ифодага қўйиб, ϑ_B нинг сон қийматини топамиз:

$$\vartheta_B = (20-10)e^{-0{,}2\cdot 2{,}5} + 10 = 10(e^{-0{,}5} + 1) =$$

$$= 10(1 - 0,5 + \frac{0,5^2}{2!} - \frac{0,5^3}{3!} + \frac{0,5^4}{4!} - \frac{0,5^5}{5!} + ... + 1) =$$

$$= 10(1 - 0,5 + 0,125 - 0,0208 + 0,0026 - 0,0002 + ... + 1) =$$

$$= 10(2,1276 - 0,521) = 10.1,6066 \approx 16 \frac{м}{сек}.$$

Энди юкнинг ҳаракатини трубанинг ВС қисмида қараймиз. Топилган ϑ_B тезлик трубанинг ВС қисмида юк учун бошлангич ($\vartheta_0 = \vartheta_B$) тезлик бўлади. Юкка таъсир қилувчи кучларни чизмада тасвирлаймиз. Трубанинг ВС қисмида юкка $\vec{F} = m\vec{g}$, $\vec{N}_2$, $\vec{F}_{ишк}$ ва $\vec{F}$ кучлар таъсир қилади. В нуқта орқали Bx ва Bz ўқларни ўтказиб, юкнинг Bx ўқдаги ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини тузамиз.

$$m\frac{d\vartheta_x}{dt} = P_x + N_{zx} + F_{ишкx} + F_x \qquad (36)$$

Бунда барча кучларни Bx ўққа проекциялаймиз

$$N_2 - P\cos 30^0 = 0 \rightarrow /N_2/ = P\cos 30^0;$$

$$F_{ишкx} = fmg\cos 30^0; \quad P_x = -mg\sin 30^0.$$

(36) тенглама қуйидаги кўринишни олади

$$m\frac{d\vartheta_x}{dt} = 2\sin 4t - mg(\sin 30^0 + f\cos 30^0).$$

Бу тенгламанинг иккала қисмини m га бўлиб, $g(\sin 30^0 + f\cos 30^0) = 10(0,5 + 0,2.866) = 10(0,5 + 0,1732) = 10.0,6732 \approx 6,7. \frac{2}{m} = 1$ бўлишлигини топамиз. Юкнинг Bx ўқ бўйлаб қиладиган ҳаракатининг дифференциал тенгламаси

$$\frac{d\vartheta_x}{dt} = \sin 4t - 6,7$$

кўринишни олади. Унинг биринчи интегралини топамиз

$$\vartheta_x = -\frac{1}{4}\cos 4t - 6.7t + C_1. \qquad (37)$$

Бошланғич шартдан фойдаланиб, C_1 доимийни аниқлаймиз.

Масала шартига кўра вақтнинг бошланғич дақиқаси деб юкнинг В нуқтада бўлган дақиқасини қабул қилсак, бу дақиқада, яъни t=о да $\vartheta_0 = \vartheta_x = \vartheta_B$ бўлади. C_1 ни ҳисоблаймиз

$$C_1 = \vartheta_0 + \frac{1}{4}\cos 4t = 16 + 0.25 \cdot \cos 0 = 16.25$$

С нинг топилган қийматини (37) га қуямиз ва оламиз.

$$\vartheta_x = -\frac{1}{4}\cos 4t - 6.7t + 16.25$$

ϑ_x ни $\frac{dx}{dt}$ га алмаштириб, тенгликнинг иккала қисмини dt га кўпайтириб, яна интеграллаб топамиз.

$$x(t) = -\frac{1}{16}\sin 4t - 3.85\, t^2 + 16.25t + C_2,$$

$x/_{t=0} = 0$ шартдан $C_2 = 0$ бўлишлигини топамиз.

Натижада юкнинг изланаётган ҳаракат қонунини аниқлаймиз

$$x(t) = -\frac{1}{16}\sin 4t - 3{,}85\, t^2 + 16{,}25t,$$

бунда, x – метрларда, t эса секундларда ифодаланган.

18- МАШҒУЛОТ

2-§ Нуқтанинг эркин бўлмаган ҳаракати учун динамикадан масалалар

1. Эркин нуқта учун динамика масалаларини атрофлича қараб, старлича масалалар ҳал қилдик.

Турмушда кўпинча эркин бўлмаган нуқтанинг ҳаракатини ўрганишга тўғри келади.

Нуқтанинг ҳаракатига тўсқинлик қиладиган сабаб нуқтага қўйилган боғланиш дейилади. Нуқга қўйилган боғланишлар туфайли берилган ҳаракатсиз сирт ёки эгри чизиқ бўйлаб ҳаракат қилишга мажбур бўлади.

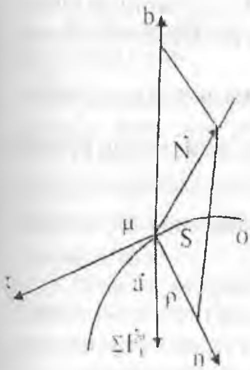
Боғланиш қўйилган нуқтага (жисмга) доир масалалар ечаётганда статикадаги боғланишдан озод бўлиш аксиомасига кўра ҳар қандай эркин бўлмаган нуқтани унга қўйилган боғланишни унинг $\vec{N}$ таъсир реакциясига алмаштириб, уни эркин деб қараймиз. Бундан ҳолда эркин бўлмаган нуқтанинг ҳаракати учун динамиканинг асосий қонуни

$$m\vec{a} = \sum_k \vec{F}_k^a + \vec{N} \qquad (1)$$

тенглама билан ифодаланади. Бу ердаги $\vec{F}_k^a$ нуқтага таъсир қилаётган актив кучлар. Эркин бўлмаган нуқтанинг ҳаракати учун динамиканинг биринчи масаласи: нуқтанинг ҳаракат қонунини ва унга таъсир қилаётган актив кучларни билган ҳолда боғланишнинг реакция кучини топишдан иборат. Эркин бўлмаган жисм учун динамиканинг иккинчи (асосий) масаласи иккита қисмдан иборат. Нуқтага таъсир қилаётган актив кучларни билган ҳолда: а) нуқтанинг ҳаракат қонунини аниқлаш б) нуқтага қўйилган боғланишнинг реакция кучини топишдан иборатдир.

2. Нуқта учун Даламбар принципи. Қуйидаги масалани қараймиз. Бу масала бир вақтда нуқтанинг ҳаракат қонунини ва боғланишларнинг реакция кучини топишга имкон беради.

Фараз қилайлик, моддий нуқта $\overline{F}_1^a$, $\overline{F}_2^a$, $\overline{F}_n^a$ актив кучлар таъсирида берилган силлиқ қўзғалмас эгри чизиқ бўйлаб ҳаракат қилсин. Эгри чизиқда 0 саноқ бошини танлаймиз ва ҳаракатланувчи нуқтанинг ҳолатини аниқловчи S - ом эгри чизиқли координатани аниқлаймиз. Агар боғланишни ташлаб, уни $\overline{N}$ таъсир реакциясига алмаштирсак, у ҳолда нуқтанинг ҳаракати (1) тенглама билан ифодаланади.



47-чизма.

М нуқта орқали $M\tau$ уринмани Мп бош нормални ва унга перпендикуляр бўлган Мв бинормал ўқни ўтказиб, (1) тенгликнинг иккала қисмини бу ўқларга проекциялаймиз. Эгри чизиқ силлиқ бўлганлиги туфайли $\vec{N}$ реакция бу эгри чизиқ ётган $MB\tau$ текисликка перпендикуляр бўлгани учун унинг $M\tau$ ўқидаги проекцияси нолга тенг бўлади, яъни $\vec{N}_\tau = 0$.

Бундай ҳолда қуйидаги тенгламаларга эга бўламиз (47-чизма).

$$ma_\tau = \sum_k F_{k\tau}^a, \quad ma_n = \sum_k F_{kn}^a + N_n,$$

$$ma_B = \sum_k F_{kB}^a + N_B.$$

Бу ерда, $a_\tau = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}$, $a_n = \frac{\vartheta^2}{\rho}$ ва $\vec{a}$ тезланиш вектори $M\tau n$ уринма текисликда ётганлиги учун $a_B = 0$ бўлишлигини эътиборга олсак, нуқта берилган эгри чизиқ бўйлаб қилаётган ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини

$$\frac{d^2S}{dt^2} = \sum_k F^a_{k\tau}, \tag{2}$$

$$\frac{m\vartheta^2}{\rho} = \sum_k F^a_{kn} + N_n, \quad \sum_k F^a_{kв} + N_в = 0 \tag{3}$$

кўринишда оламиз.

Юқорида олинган тенгламалар эркин бўлмагаи нуқта ҳаракати ҳақидаги иккита масалани тўлигича ҳал қилишга имкон беради.

(2) тенглама $\vec{N}$ номаълум реакция кучини ўзида сақламайди ва нуқтанинг ҳаракат қонунини эгри чизиқ атрофида S=f(t) кўринишда аниқлашга имкон беради. (3) тенгламалар эса боғланиш реакциясини аниқлашга хизмат қилади.

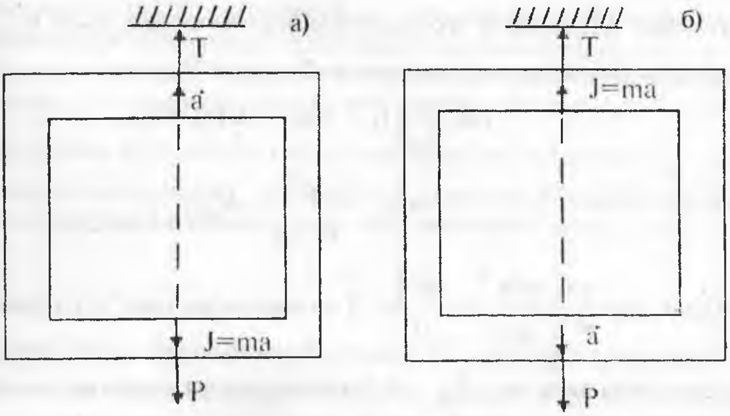
(2) ва (3) тенгламалардан эгри чизиқ силлиқ бўлмаганда ҳам фойдаланиш мумкин. Бундай ҳолларда $\vec{F}^a_k$ кучлар таркибига ишқаланиш кучини қўшиб олиш керак.

(2) ва (3) тенгламалардан нуқтанинг эркин ҳаракатлари учун, яъни $\vec{N} = 0$ бўлганда ҳам фойдаланиш мумкин.

Бундай ҳолда биз эркин моддий нуқтанинг асосий тенгламаларини табиий шаклда, яъни табиий кўзғалувчан координата ўқлари учун оламиз.

6-масал. Р оғирликдаги лифт а тезланиш билан кўтарилмоқда.

Лифт маҳкамланган тросниг Т таранглик (зўриқиш) кучини топинг (48-чизма, а).



48-чизма.

а) Ўша огирликдаги лифт a тезланиш билан пастга тушаётганда троснинг таранглик кучи нимага тенг? (48-чизма, б).

Ечиш: Боғланишнинг таъсирини унинг T реакция кучи билан алмаштирамиз ва лифт ҳаракатининг вертикалдаги проекция тенгламасини тузамиз

$$\frac{P}{g}a = -P + T \Rightarrow T = P(1 + \frac{a}{g}).$$

Агар лифт a тезланиш билан тушадиган бўлса, унинг боғланиш реакция кучи $\frac{P}{g}a = P - T \Rightarrow T = P(1 - \frac{a}{g})$ формула билан топилади.

Шундай қилиб, лифт кўтарилаётганда троснинг зўриқиши кучли бўлар экан.

7-масала. Оғирлиги 1 Н бўлган М юк қўзғалмас 0 нуқтага маҳкамланган, узунлиги 30 см бўлган ипга осилган, коник маятникни ифодалаб, горизонтал текисликда айлана чизади. Агар ип вертикал билан 60° бурчак ташкил қилса, юкнинг ϑ тезлигини ва ипнинг таранглик кучини топинг.

Ечиш: М юк ҳаракатининг табиий тенгламаларини тузамиз (49-чизма).

$$m\frac{d\vartheta}{dt} = P_\tau, \quad m\frac{\vartheta^2}{\rho} = P_n, \quad P_B = 0$$

а вектор тезланиш $M\tau n$ текисликда ётгани учун унинг бинормал проекцияси нолга тенг бўлади, яъни $a_B = 0$.

М юкка унинг оғирлиги P ва N ипнинг боғланиш реакция кучи таъсир қилади.

М юкка таъсир қиладиган кучларни табиий ўқларга проекциялаб, қуйидаги тенгламаларга эга бўламиз:

$$P_\tau = 0, P_n = N\sin\alpha, \quad P_B = N\cos\alpha - P.$$

Траекториянинг эгрилик радиусини топамиз: $\rho = CM = \ell\sin\alpha$.

Натижада М нуқта ҳаракатининг тенгламалари қуйидагича бўлади:

$$m\frac{d\vartheta}{dt} = 0, \quad \frac{P\vartheta^2}{g\ell\sin\alpha} = N\sin\alpha, \quad 0 = N\cos\alpha - P.$$

Охирги тенгламадан ипнинг N таранглик кучини топамиз

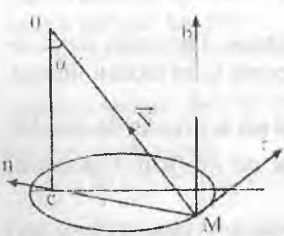
$$N = \frac{P}{\cos\alpha} = \frac{1H}{\cos 60^0} = \frac{1H}{\frac{1}{2}} = 2H.$$

Биринчи тенгламадан $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$ бўлишлигидан $\vartheta = \text{const}$ эканлиги келиб чиқади. Иккинчи тенгламадан эса

$$\vartheta = \sin\alpha\sqrt{\frac{Ng\ell}{P}}.$$

ϑ нинг сон қийматини топамиз.

$$\vartheta = \sin 60^0\sqrt{\frac{2\cdot 980\cdot 30}{1}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\cdot 10\sqrt{600}\ \frac{см}{сек} = 50\sqrt{18}\ \frac{см}{сек} = 212\ \frac{см}{сек}.$$



49-чизма.

Шундай қилиб, юк осилган ипнинг реакция кучи, ҳаракатни вужудга келтираётган оғирлик кучидан қарийиб икки марта ортиқ. Нуқтанинг (жисмнинг) динамик реакцияси унинг статик реакциясига қараганда жуда катта фарқ қилар экан.

8-масала. Оғирлиги 10 Н бўлган М юк узунлиги $\ell = 2м$ бўлган арқонга осилган ва арқон билан биргаликда $\varphi = \frac{\pi}{6}\sin 2\pi t$ тенгламага мувофиқ тебранишлар қилади. Бунда φ −арқоннинг вертикалдан оғиш бурчаги бўлиб, радианларда, t−вақт эса секундларда ифодалангандир. Юк энг пастки ва энг юқори ҳолатда бўлганда арқоннинг T_1 ва T_2 таранглик кучларини топинг.

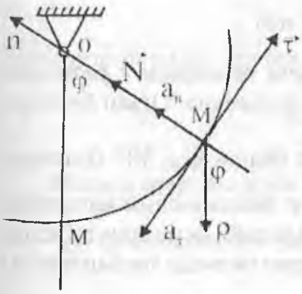
Ечиш. Аввало юкнинг исталган ҳолатида арқоннинг (математик маятник ипининг) реакция кучи модулини аниқлаймиз.

Бунинг учун юкнинг оралиқ ҳолатини, қачонки, у боғланган арқон вертикал билан φ бурчак ташкил қилган ҳолатини тасвирлаймиз.

−n нормал ўқни арқон бўйлаб, τ уринма ўқни эса φ бурчакнинг ўсиши томонига йўналтирамиз (50-чизма).

Юкка P оғирлик кучи ва N арқоннинг реакция кучи таъсир қилади.

Чизмада бу кучларни ва юкнинг a_τ ва a_n тезланишларини тасвирлаймиз. Арқоннинг N реакциясини аниқлаш учун юк ҳаракатининг n бош нормалдаги проекциялари бўйича дифференциал тенгламасини тузамиз



50-чизма.

$$ma_n = \sum_k F_{kn}.$$

Қаралаётган ҳолда $a_n = \ell\dot{\varphi}^2$ эканлигини эътиборга олсак, N реакцияни аниқлайдиган тенгламани оламиз

$$m\ell\dot{\varphi}^2 = N - P\cos\varphi.$$

Бундан

$$N = P\cos\varphi + m\ell\dot{\varphi}^2 \qquad (4)$$

Масала шартига кўра $\vartheta = \varphi_0 \sin kt$ бўлганлигидан

$$\dot{\varphi} = \varphi_0 k \cos kt$$

бўлади. φ ва $\dot{\varphi}$ нинг ифодаларини (4) га қўйиб,

$$N = P\left[\cos(\varphi_0 \sin kt) + \frac{k^2 \ell \varphi_0^2}{g}\cos^2 kt\right]$$

Арқон реакцияси энг катта қийматга вертикал ҳолатда $kt = n\pi$ бўлганда эришади

$$N_{max} = P\left(1 + \frac{\ell k^2}{g}\varphi_0^2\right)$$

Бизнинг ҳолда Р=10Н; $\ell = 2$м; $k = 2\pi$, $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

Юкнинг энг пастки ҳолатида ипнинг T_1 таранглик кучини топамиз

$$N_{max} = T_{1\,max} = 10(1 + \frac{2.4\pi^2}{9{,}81}\cdot\frac{\pi^2}{36}) = 10(1 + \frac{2\pi^4}{9{,}81\cdot 9}) =$$

$$= 10(1 + \frac{2.3{,}14^4}{88{,}29}) = 10(1 + \frac{9{,}86^2}{44{,}15}) = 10(1 + \frac{97{,}22}{44{,}15}) =$$

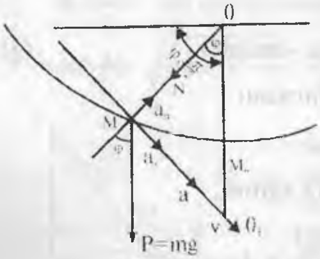
$$= 10(1 + 2{,}22) = 10.3{,}22 = 32{,}2\text{Н}.$$

Арқон горизонтал ҳолатда жойлашганда унинг реакцияси энг кичик қийматига эришади, яъни $kt = \dfrac{\pi}{2}(2n - 1)$ бўлганда

$$N_{min} = T_{2\,min} = P\cos\frac{\pi}{2} = 10\cdot 0{,}886H = 8{,}86H\ .$$

9-масала. m массали M нуқта оғирлик кучи таъсирида r радиусли цилиндрнинг ички силлиқ сиртида ҳаракат қилмоқда. Оғиш бурчаги $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ бўлганда нуқтанинг тезлиги нолга тенг бўлди. $\varphi = 30°$ бўлганда M нуқтанинг тезлигини ва цилиндр сиртининг реакциясини аниқланг.

Ечиш: Аввало масала шартига доир чизма чизиб, берилган ва изланаётган миқдорларни чизмада тасвирлаймиз (51-чизма).



51-чизма.

(2) ва (3) тенгламалардан фойдаланиб M нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини оламиз

$$m\,\frac{d^2S}{dt^2} = -mg\sin\varphi\,,$$

$$\frac{m\vartheta^2}{\rho} = -mg\cos\varphi + N$$

S ёйсимон координатанинг бошланғич нуқтаси сифатида M нуқтанинг O_1 ҳолатини қабул қиламиз.

$S = O_1M = \ell\varphi = r\varphi$ бўлгани учун

$\frac{d^2S}{dt^2} = r\,\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ бўлиб, нуқта тенгламалари қуйидагича кўриниш олади:

$$\frac{d^2S}{dt^2} + \frac{g}{r}\sin\varphi = 0\,, \tag{5}$$

$$N = \frac{mv^2}{r} + mg\cos\varphi\,. \tag{6}$$

N нинг миқдорини топиш учун M нуқта ϑ тезлигининг қийматини билиш керак. ϑ аниқлаш учун (5) тенгламада алмаштиришлар бажарамиз

$$\frac{d^2t}{dt^2} = \frac{d\omega}{dy}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \omega\,\frac{\alpha\omega}{\alpha\varphi}\,,\quad \omega = \frac{\alpha\varphi}{\alpha t}\,.$$ (5) тенглама

$$\omega d\omega = -\frac{g}{r}\sin\varphi d\varphi$$

кўринишни олади. Бу тенгламанинг биринчи интегралини топамиз

$$\frac{\omega^2}{2} = \frac{g}{r}\cos\varphi = C \qquad (7)$$

Масала шартига кўра t=о дақиқада нуқтанинг тезлиги нолга тенг ва $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$. Бу бошланғич қийматларни (7) га қўйиб, с доимийни топамиз $C = -2\frac{g}{r}\cos\varphi$ Натижада ω бурчак тезлик учун

$$\omega^2 = 2\frac{g}{r}(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$$

ифодани топамиз. Олинган тенгликнинг иккала қисмини r^2 га кўпайтириб, $\vartheta^2 = (\omega r)^2$ эканлигини эътиборга олсак $\vartheta^2 = 2gr(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$ формулага эга бўламиз. $\varphi = \frac{\pi}{6}$ ва $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ бўлганда ϑ ни топамиз

$$\vartheta = \sqrt{2gr\cos\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2gr\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{gr\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3}\sqrt{gr}.$$

N реакциянинг модулини эса (6) формула ёрдамида топамиз

$$N = \frac{m\vartheta^2}{r} + mg\cos\varphi = \frac{mgr\sqrt{3}}{r} + mg\frac{\sqrt{3}}{2} = mg\sqrt{3} + mg\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}mg.$$

3. Юқорида барча масалаларни динамика қонунлари ва бу қонунларнинг натижалари бўлган умумий теоремаларга асосланиб ҳал қилдик. Бу усул ягона йўл эмас. Нуқта ва тизимнинг ҳаракат тенгламаларини, шунингдек, механик тизимнинг мувозанатлик шартларини механиканинг принципларидан фойдаланиб ҳам олиш мумкин. Бу принципларни қўллаш натижасида масалаларни ечишнинг янги усулларини топамиз. Бундай принципларнинг бири Даламбер принципи номи билан аталади. Бу принцип ёрдамида нуқтанинг қонунини ва бу нуқтага таъсир қилаётган актив кучларни билган ҳолда боғланиш реакция кучини аниқлаш жуда қулай. Нуқта учун Даламбер принципининг мазмунини изоҳлаймиз. Нуқтага $\overline{F}$ актив куч ва $\overline{R}$ боғланиш реакция кучи таъсир қилаётган бўлсин. Бундай нуқта учун динамиканинг асосий тенгламаси $m\overline{a} = \overline{F} + \overline{R}$ кўри-

нишга эга бўлади. $\bar{J} = -m\bar{a}$ белгилашни киритиб у тенгламани $\bar{F} + \bar{R} + \bar{J} = 0$ кўринишга келтирамиз. Шундай қилиб, вақтнинг ҳар бир дақиқасида актив, боғланиш реакция кучлари билан инерция кучи биргаликда мувозанатлашувчи кучлар системасини ташкил қилади, яъни ҳар бир дақиқада уларнинг йиғиндиси нолга тенг. Нуқта массасининг унинг тезланишига бўлган кўпайтмаси миқдор жиҳатдан инерция кучига тенг бўлиб, бу инерция кучининг йўналиши нуқта тезланиши йўналишига қарама-қарши йўналгандир.

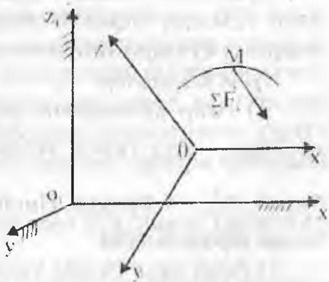
19-МАШҒУЛОТ

3-§. Нуқтанинг нисбий ва тўғри чизиқли тебранма ҳаракатлари

Кўпчилик назарий ва амалий масалаларни ҳал қилишда моддий нуқтанинг ноинерциал тизимга нисбатан (ихтиёрича ҳаракатланаётган тизимга нисбатан) ҳаракатини ўрганишга тўғри келади.

$\overline{F}_1, \overline{F}_2 ..., \overline{F}_n$ кучлар таъсиридаги М нуқтанинг ҳаракатини ҳаракатдаги OXYZ тизимнинг ўқларига нисбатан қарайлик. Бу ерда, O X У Z тизими O_1, X_1, $У_1$, Z_1 қўзғалмас тизимга нисбатан бизга маълум қонун бўйича ҳаракатланади деб қаралади (52-чизма).

Маълумки, нуқтанинг нисбий ҳаракати бу текширилаётган нуқта (жисм)нинг ҳаракатланувчи координата тизимига нисбатан ҳаракатидир. Нисбий ҳаракатнинг асосий кинематик факторлари унинг $\overline{\vartheta}_{нис}$ тезлиги ва $a_{нис}$ тезланишидир. М нуқтага таъсир қилувчи барча кучларнинг тенг таъсир этувчисини $\overline{F}$ орқали белгилайлик. $\overline{F} = \sum\limits_k \overline{F}_k$, $\overline{a}_{нис}$ тезланиш билан $\overline{F}$ куч орасидаги боғланишни ўрнатамиз. $\overline{F}$ куч эса ҳаракатсиз координата тизимида нуқтанинг



52-чизма.

$a_{абс}$ тезланишини вужудга келтиради. Абсолют ҳаракат учун динамика қонуни

$$m\overline{a}_{абс} = \overline{F} \quad (1)$$

тенглама билан ифодаланади.

Бу ердаги $a_{абс}$ тезланиш вектори нисбий, кўчирма ва кориолис тезланиш векторларининг геометрик йиғиндисига тенг

$$\overline{a}_{абс} = \overline{a}_{нис} + \overline{a}_{куч} + \overline{a}_{к} \quad (2)$$

(2) ни (1) га қўйиб, $\overline{a}_{нис} = \overline{a}$ деб

$$m\overline{a} = \overline{F} + \left(-m\overline{a}_{куч}\right) + \left(-m\overline{a}_{к}\right)$$

тенгламани оламиз. Белгилашлар киритамиз:

$$\overline{F}^{и}_{куч} = -m\overline{a}_{куч}, \quad \overline{F}^{и}_{к} = -m\overline{a}_{к}.$$

Бу ерда, $\overline{F}^{u}_{кўч}$ ва $\overline{F}^{u}_{к}$ миқдорлар ўлчов бўйича кучлар бўлиб, уларни кўчирма ва кориолис инерция кучлари деб атаймиз. Бундай ҳолда нуқтанинг нисбий ҳаракати учун динамиканинг асосий қонуни

$$m\overline{a} = \overline{F} + \overline{F}^{u}_{кўч} + \overline{F}^{u}_{к} \qquad (3)$$

тенглама билан ифодаланади.

(1) ва (3) тенгламаларни солиштириб қуйидаги хулосага келамиз: Нуқтанинг нисбий ҳаракатида қўзғалувчи ўқлар силжишининг таъсири туфайли $\overline{F}_{кўч}^{u}$ ва $\overline{F}^{u}_{к}$ кучлар вужудга келар экан.

(3) тенглама кориолиснинг динамик теоремасини ифодалайди.

Нуқтанинг нисбий ҳаракати фақатгина нуқтага қўйилган $\overline{F}$ кучнинг таъсири туфайли содир бўлмасдан, балки кўчирма ва кориолис инерция кучларининг таъсири туфайли ҳам вужудга келади.

Хусусий ҳоллар:

1) Агар қўзғалувчи ўқлар илгариланма ҳаракат қилса, у ҳолда $\omega = 0$(ω – oxyz тизим ўқлари айланма ҳаракатининг бурчак тезлиги) бўлиб, $F^{u}_{кўч} = 0$ бўлади. Нисбий ҳаракат қонуни $m\overline{a} = \overline{F} + \overline{F}^{u}_{к}$ тенглама билан ифодаланади.

2) Агар oxyz тизим ўқлари текис, тўғри чизиқли ва илгариланма ҳаракат қилса, у ҳолда $\overline{F}^{u}_{кч} = 0$ ва $\overline{F}^{u}_{к} = 0$ бўлиб, нисбий ҳаракат қонуни қўзғалмас ўқларга нисбатан олинган ҳаракат қонунларидек бўлади.

3) Агар нуқта қўзғалувчан ўқларга нисбатан тинч ҳолатда бўлса, у ҳолда бундай нуқта учун $\overline{a}_{нис} = \overline{a} = 0$ ва $\overline{\vartheta}_{нис} = \overline{\vartheta} = 0$ бўлиб, шунингдек, $\overline{F}^{u}_{к} = 0$ бўлади. Маълумки, кориолис тезланиши $a_{к} = 2\omega\vartheta_{нис} \cdot \sin\alpha$ формула бўйича ҳисобланади.

Бундай ҳол учун (3) тенглама

$$\overline{F} + \overline{F}_{u} = 0 \qquad (4)$$

кўринишни олади. (4) тенглама эса нуқтанинг нисбий мувозанатини (тинчлигини) ифодалайди. Бундан қуйидаги хулоса келиб чиқади: нисбий мувозанат тенгламалари ҳам қўзғалмас ўқлардаги мувозанат тенгламаларидек тузилади. Бунда нуқтага таъсир қилувчи кучлар тизимига бошқа бир нуқтанинг ўзаро таъсирини ифодаловчи кўчирма инерция кучини қўшиш керак экан.

Табиат ва техникада тебранма ҳаракатлар кенг тарқалган. Исталган механизмнинг барча қисмлари эластиклик ва титраш хусусиятига эга. Титрашлар машина ва механизмларнинг иш процессида содир бўли туради. Баъзи бир ҳолларда титрашлар (тебранишлар) шу даражада кучли бўладики, механизм ва машиналарнинг ишлаш режимларини бузади ва ҳатто уларни ишга яроқсиз ҳолга келтириб ташлайди. Бошқа бир томондан эса тебранишлар фойдали ҳодиса бўлиб, халқ хўжалигида кенг фойдаланилади. Масалан, тупроқ қатламларини зичлаштиришда, сочилувчан материалларни навларга ажратишда, баъзи бир қурилмаларнинг иш режимларини тартиблаштиришда, радиотехника ва электро техникада кенг қўлланилади.

Шундай қилиб, тебраниш ҳодисаси ҳозирги замон техникасида икки ёқлама рол ўйнайди.

Физик мазмунлари билан фарқ қилувчи турли тебраниш ҳодисалари бир хил дифференциал тенгламалар билан ифодаланади. Шунинг учун бирор соҳада тебранма ҳаракатларни ўрганишда олинган тенгламалар ва чиқарилган хулосалардан бошқа соҳаларда фойдаланиш мумкин. Шунинг учун ҳам ҳозирги вақтда тебраниш ҳодисаларини ўрганиш умумий назария бўлиб шаклланган, механиканинг мустақил, кенг ва мураккаб соҳаси ҳисобланади. Моддий нуқта тебранма ҳаракатининг тўртта тури фарқланади. Чизиқли тебранишларнинг асосий турлари қуйидаги жадвалда берилган.

Мактаб курсида энг содда тебраниш—моддий нуқтанинг гармоник тебраниши ўрганилган эди.

Гармоник тебранишларнинг энг муҳим хусусияти шундан иборатки, бундай тебранишларнинг амплитуда ва частотаси ўзгармас бўлади.

Гармоник тебранишларнинг тенгламаси $x = a\cos(\omega t + \varphi)$ кўринишга эга.

Бу ерда, a—амплитуда; ω—частота; $\omega t + \varphi$ — фаза, φ—бошланғич фаза.

Тебранишлар—уларни характерловчи асосий миқдорлар a амплитуда ва ω частотанинг хусусиятларига қараб ҳам турларга бўлинади:

1) a=const ва $\omega = \text{const}$ (гармоник тебранишлар);

2) a=a(t) ва $\omega = \text{const}$;

3) a=const ва $\omega = \omega(t)$;

4) a=a(t) ва $\omega = \omega(t)$;

5) a даврий ўзгаради, $\omega = \text{const}$ (тепкили тебраниш).

Бу ерда, t—вақт.

10-масала. $Q_x = -cx$ эластиклик ва F_0 доимий куч таъсирида m массали нуқта тўғри чизиқли ҳаракатининг тенгламаси топилсин. t=o бўлганда $x_0 = 0$ ва $\dot{x}_0 = 0$

Шунингдек, тебранишларнинг даври ҳам топилсин.

Ечиш: Моддий нуқтага иккита куч таъсир қилади.

$Q_x = -cx$ қайтарувчи ва $F_x = F_0$ доимий куч.

Нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасини тузамиз

$$m\ddot{x} = -cx + F_0,$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \qquad (5)$$

бунда $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$.

Таъсир этувчи кучлар	Дефференциал тенгламанинг кўриниши	Тебранишларнинг номи
1. $\overline{F}(x)$ - қайтарувчи эластиклик кучи: $F_x = -cx$	$m\ddot{x} + cx = 0$	Эркин тебранишлар
2. [illegible] - эластиклик кучи, $\overline{R}(x)$ - қаршилик кучи: $F_x = -cx$, $R_x = -в\dot{x}$	$m\ddot{x} + в\dot{x} + cx = 0$	Сўнувчи тебранишлар (ишқаланиш кучини ҳисобга олгандаги эркин тебранишлар)
3. $\overline{F}(x)$ - эластиклик кучи, $\overline{Q}(t)$ - қўзғатувчи куч: $F_x = -cx$, $Q_x = Q_x(t)$	$m\ddot{x} + cx = Q_x(t)$	Мажбурий тебранишлар
4. $\overline{F}$ [illegible] эластиклик ку[illegible], $\overline{R}(x)$ - қаршилик кучи, $Q(t)$ - қўзғатувчи куч: $F_x = -cx$, $R_x = в\dot{x}$, $Q_x = Q_x(t)$	$m\ddot{x} + в\dot{x}$ [illegible] $= Q(t)$	Ишқаланиш кучини ҳисобга олгандаги мажбурий тебранишлар

Нуқта тебранишларининг даври $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$.

(5) тенгламани $x/_{t=0} = 0$, $\dot{x}/_{t=0} = 0$ бошлангич шартларда ечиб, моддий нуқтанинг ҳаракат қонунини топамиз. (5) бир жинсли бўлмаган чизиқли дифференциал тенгламанинг умумий ечими, ўзининг қандайдир хусусий ечими билан

$$\ddot{x}_1 + \omega_2 x_1 = 0 \qquad (6)$$

бир жинсли тенглама умумий ечимининг йиғиндисига тенг. (6) тенгламанинг ечимини $x_1 = \ell^{\lambda t}$ кўринишда излаймиз. $x_1 = \ell^{\lambda t}$ ва $\ddot{x}_1 = \lambda^2 \ell^{\lambda t}$ ни (6)га қўйиб, λ ни аниқлаш учун $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ хусусиятли тенгламани топамиз. Бу тенгламанинг илдизлари соф мавҳум $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ Дифференциал тенгламалар назариясидан маълумки, (6) тенгламанинг умумий ечими

$$x_1(t) = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t$$

кўринишга эга.

(5) тенгламанинг хусусий ечимини $x_2 = A$ кўринишда излаймиз.

$\ddot{x} = \ddot{x}_2 = 0$ ва $x = x_2 = A$ ни (5) га қўйиб, A ни аниқлаймиз.

$$\omega^2 A = \frac{F_0}{m} \Rightarrow A = \frac{F_0}{m\omega^2} = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{m}{C} = \frac{F_0}{C}.$$

Энди (5) тенгламанинг умумий ечимини топамиз

$$x(t) = x_1 + x_2 = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t + \frac{F_0}{C}.$$

Бу ечимнинг ҳосиласини топамиз

$$\dot{x}(t) = \omega(C_1 \cos\omega t - C_2 \sin\omega t)$$

t=o, $x = x_0 = 0$ бўлганда, $C_2 + \frac{F_0}{C} = 0$ бўлиб, $C_2 = -\frac{F}{C}$.

t=o, $\dot{x} = \dot{x}_0 = 0$ бўлганда эса $C_1 = 0$ бўлади.

Изланаётган хусусий ечим

$$x(t) = \frac{F_0}{C}(1 - \cos\omega t)$$

кўринишга эга бўлиб, нуқта ҳаракатининг қонунини ифодалайди.

11-масала. $Q_x = -cx$ эластиклик ва $F = \alpha t$ кучлар таъсирида бўлган m массали нуқта тўғри чизиқли ҳаракатининг тенгламасини аниқланг. Бошланғич дақиқада нуқта статик мувозанат ҳолатда туради ва тезлиги нолга тенг деб қаралсин.

Ечиш. Нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасини тузамиз.

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{\alpha}{m} t, \qquad \omega^2 = \frac{c}{m}.$$

Бу тенгламани $x/_{t=0} = 0$ ва $\dot{x}/_{t=0} = 0$ бошланғич шартларда интеграллаймиз. Аввало $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини топамиз

$$x_1 = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t.$$

Хусусий ечимни $x_2 = At + B$ кўринишда излаймиз.

x_2 ни тузилган тенгламага қўйиб, A ва B коэффицентларни топамиз.

$$A = \frac{\alpha}{m\omega^2}, \quad B = 0.$$

Изланаётган умумий ечимни қурамиз ва унинг ҳосиласини (нуқтанинг тезлигини) топамиз

$$x(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t + \frac{\alpha}{m\omega^2} t,$$

$$\dot{x}(t) = \omega - (C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t) + \frac{\alpha}{m\omega^2}.$$

Бу ерда, t=o бўлганда, C_1 ва C_2 ни аниқлаймиз

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{\alpha}{m\omega^3}.$$

Изланаётган хусусий ечимни, яъни нуқта ҳаракатининг қонунини

$$x(t) = \frac{\alpha}{m\omega^3}(\omega t - \sin\omega t)$$

кўринишда топамиз.

12-масала. Агар P оғирликдаги нуқта бошланғич пайтда статик мувозанат ҳолатда тинч турган бўлса, унга Q=-cx қайтарувчи (эластиклик) кучи ва $F = F_0 e^{-\alpha t}$ куч таъсир қилганда, унинг тўғри чизиқли ҳаракатининг дифференциал тенгламасини топинг.

Ечиш: Моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасини тузамиз

$$\ddot{x}+\omega^2 x=\frac{qF_0}{m}e^{-\alpha t},\qquad \omega=\sqrt{\frac{cg}{p}}.$$

Бу тенгламага мос келувчи бир жинсли тенгламанинг умумий ечими олдинги масалалардагидек топилади. Унинг хусусий ечимини $x_2=Ae^{-\alpha t}$ кўринишда излаймиз. x_2 ва унинг иккинчи тартибли $\ddot{x}_2=\alpha^2Ae^{-\alpha t}$ ҳосиласини юқоридаги тенгламага қўйиб, А ни топамиз

$$A=\frac{F_0}{m(\omega^2+\alpha^2)}.$$

Изланаётган хусусий ечим

$$x_2=\frac{F_0}{m(\omega^2+\alpha^2)}e^{-\alpha t}$$

кўринишга эга бўлади. Тенгламанинг умумий ечимини ва унинг ҳосиласини топамиз

$$x(t)=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t+\frac{F_0}{m(\omega^2+\alpha^2)}e^{-\alpha t},$$

$$\dot{x}(t)=\omega(-C_1\sin\omega t+c_2\cos\omega t)-\frac{\alpha F_0}{m(\omega^2+\alpha^2)}e^{-\alpha t}$$

t=О бўлганда, C_1 ва C_2 доимийларни топамиз

$$C_1=-\frac{F_0}{m\left(\omega^2+\alpha^2\right)},\qquad C_2=\frac{\alpha F_0}{m\omega\left(\omega^2+\alpha^2\right)}.$$

Изланаётган хусусий ечим, яъни нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракат тенгламаси

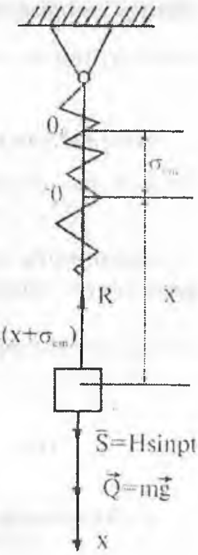
$$x(t)=\frac{F_0}{m(\omega^2+\alpha^2)}(e^{-\alpha t}-\cos\omega t+\frac{\alpha}{\omega}\sin\omega t),\quad \omega=\sqrt{\frac{cg}{p}}$$

кўринишга эга бўлади.

13-масала. Оғирлиги Q=392г бўлган жисмга қаттиқлик коэффициенти $c=4\frac{кг}{см}$ га тенг пружина маҳкамланган бўлиб, унга $S=H\sin pt$, бунда, $H=4$ кг, $P=50$ сек$^{-1}$, $R=\alpha\vartheta$ қаршилик кучи таъсир қилади. Бунда, $\alpha=25\frac{г\cdot сек}{см}$, ϑ -жисмнинг тезлиги. Бошланғич дақиқада жисм статик мувозанат ҳолатда тинч туради. Бу юк ҳаракатининг тенгламасини ва мажбурий тебранишларнинг амплитудаси максимал қийматга эришганда p доиравий частотанинг қийматини аниқланг.

Ечиш. Мувозанат вазиятда турган жисм учун $Q = c \cdot \delta_{ст} = 0$ шартнинг бажарилишини эътиборга олиб, унинг ҳаракатининг дифференциал тенгламасини тузамиз (53-чизма)

$$\frac{Q}{g}\ddot{x} = -\alpha\vartheta + Q + H\sin pt - C(x + \delta_{ст})$$



53-чизма.

$$\ddot{x} + \frac{\alpha g}{Q}\dot{x} + \frac{cg}{Q}x = \frac{gH}{Q}\sin pt\ .$$

$$h = \frac{gH}{Q},\ \omega^2 = \frac{cg}{Q},\ n = \frac{\alpha g}{Q}$$

белгиларни киритиб, тенгламани

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = h\sin pt$$

кўринишга олиб келамиз. (6) тенгламага мос келувчи бир жинсли тенгламанинг, яъни $\ddot{x}_1 + 2n\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = 0$ тенгламанинг хусусий ечимини $x_1 = e^{\lambda t}$ кўринишда излаб, $\lambda^2 + 2n\lambda + \omega^2 = 0$ хусусиятли тенгламани оламиз. Унинг илдизларини топамиз

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega^2},$$

бунда,

$$n = \frac{\alpha \cdot g}{2Q} = \frac{25\frac{г \cdot сек}{см} \cdot 980\frac{см}{сек^2}}{2 \cdot 392\ г} = 31{,}25 сек^{-1},$$

$$\omega = \sqrt{\frac{cg}{Q}} = \sqrt{\frac{4\frac{кг}{см} \cdot 980\frac{см}{сек^2}}{0{,}392\ кг}} = \sqrt{\frac{980000}{98}} сек^{-1} = 100 сек^{-1}.$$

Шундай қилиб, $n < \omega$ бўлгани учун хусусиятли тенглама комплекс (жамлама) илдизга эга бўлади.

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega^2} = -n \pm i\sqrt{\omega^2 - n^2} = -n \pm ki,$$

$$K = \sqrt{\omega^2 - n^2} = \sqrt{100^2 - 31{,}25^2} = \sqrt{10^4 - 976{,}5625} = \sqrt{9023{,}4375} = 95 сек^{-1}.$$

Чизиқли оддий дифференциал тенгламалар назариясидан маълумки, қўшма комплекс илдиз янги чизиқли боғланмаган хусусий ечимларни вужудга келтирмайди, шундай экан, бир жинсли чизиқли тенгламанинг умумий ечими $x_2(t) = e^{-nt}(c_1 \cos kt + c_2 \sin kt)$
кўринишга эга бўлади. (6) тенгламанинг хусусий ечимини

$x_2(t) = A\sin(pt - \varepsilon)$, $\varphi = pt - \varepsilon$

кўринишда излаймиз. Бу хусусий ечимнинг ҳосилаларини топамиз

$\dot{x}_2 = pA\cos(pt - s)$, $\ddot{x}_2 = -p^2 A\sin(pt - \varepsilon)$. $x_2(t), \dot{x}_2(t)$ ва $\ddot{x}_2(t)$ нинг ифодаларини (6) га қўйиб, A ва ε ни топиш учун $A\left(\omega^2 - p^2\right)\sin\varphi + 2npA\cos\varphi = h\sin\varepsilon \cdot \cos\varphi$ тенгликни оламиз. Бу тенгликнинг ҳар иккала қисмидаги $\sin\varphi$ ва $\cos\varphi$ олдидаги коэффициентларни тенглаштириб, A ва ε ни топамиз

$$A = \frac{h}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}, \varepsilon = \operatorname{arctg}\frac{2np}{\omega^2 - p^2}. \qquad (7)$$

Энди (6) нинг умумий ечимини қурамиз

$x(t) = x_1 + x_c = e^{-nt}(c_1 \cos kt + c_2 \sin kt) + A\sin(pt - \varepsilon)$.

Бу ечимнинг ҳосиласини топамиз

$\dot{x}(t) = -ne^{-nt}(c_1 \cos kt + c_2 \sin kt) + ke^{-nt} \cdot (-c_1 \sin kt + c_2 \cos kt) + PA\cos(Pt - \varepsilon)$.

$x|_{t=0} = O$ ва $\dot{x}|_{t=0} = O$ бошлангич шартлардан фойдаланиб, C_2 ва C_1 доимийларни топамиз

$C_1 = A\sin\varepsilon$, $C_2 = \dfrac{nA\sin\varepsilon - PA\cos E}{K}$ бунда,

$$\sin\varepsilon = \frac{2np}{\sqrt{(\omega^2 - g^2)^2 + 4n^2p^2}}, \quad \cos\varepsilon = \frac{\omega^2 - p^2}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}$$

C_1 ва C_2 доимийлар учун ифодалар топамиз

$$C_1 = \frac{2nph}{\left(\omega^2 - p^2\right)^2 + 4n^2p^2},$$

$$C_2 = \frac{h}{k} \cdot \frac{2n^2p - p\omega^2 + p^B}{\left(\omega^2 - p^2\right)^2 + 4n^2p^2}.$$

Изланаётган хусусий ечимни қурамиз

$$x(t)=\frac{2nph}{\left(\omega^2-p^2\right)^2+4n^2p^2}\cos kt+\frac{hp}{k}\cdot\frac{2n^2-\omega^2+p^2}{\left(\omega^2-p^2\right)^2+4n^2p^2}\sin kt+A\sin(Pt-\varepsilon).$$

Бу ечимнинг кўринишини ўзгартирамиз

$$\sin\beta=\frac{2nph}{\left(\omega^2-p^2\right)^2+4n^2p^2},\quad \cos\beta=\frac{hp}{k}\cdot\frac{2n^2+p^2-\omega^2}{\left(\omega^2-p^2\right)+4n^2p^2}.$$

$$a=\sqrt{\frac{4n^2p^2h^2}{[(\omega^2-p^2)^2+4^2p^2]}+\frac{h^2}{\omega^2n^2}\cdot\frac{p^2(2n^2+p^2-\omega^2)}{[(\omega^2-p^2)^2+4n^2p^2]^2}},$$

$$a=\frac{ph}{(\omega^2-p^2)^2+4n^2p^2}\cdot\sqrt{4n^2+\frac{(2n^2+p^2-\omega^2)}{\omega^2-n^2}},\quad \beta=\operatorname{arctg}\frac{2n\sqrt{\omega^2-n^2}}{2n^2+p^2-\omega^2}.$$

Нуқтанинг ҳаракат тенгламаси

$$x(t)=ae^{-nt}(\sin kt\cos\beta+\cos kt\sin\beta)+A\sin(Pt-\varepsilon)=$$

$$=ae^{-nt}\sin(\sqrt{\omega^2-n^2}\,t+\beta)+A\sin(Pt-\varepsilon) \tag{8}$$

кўринишга эга бўлади.

Энди олинган натижаларни текширамиз.

(8) даги A учун ифоданинг сурат ва махражини ω^2 га бўлиб, $\frac{p}{\omega}=\nu$ деб қуйидагини оламиз:

$$A=\frac{\frac{h}{\omega^2}}{\sqrt{(1-\nu^2)^2+4n^2\nu^2\omega^{-2}}}.$$

Бу формуладан равшанки, $A=A_{max}$ бўлишлиги учун $f(\xi)=(1-\xi)^2+4n^2\xi\omega^{-2}$ ифода минимум қийматга эга бўлиши керак.

Бунда, $\xi=\nu^2$ $f(\xi)=-2(1-\xi-2n^2\omega^{-2})=0$ тенгламани ечиб, A нинг максимумга эришадиган ξ нинг қийматини топамиз $\xi=1-2n^2\omega^{-2}$.

ξ ни масаладаги параметрлар билан ифодалаймиз

$$\nu = \sqrt{1 - 2n^2\omega^{-2}} \Rightarrow \frac{P}{\omega} = \frac{\sqrt{\omega^2 - 2n^2}}{\omega} \Rightarrow P = \sqrt{\omega^2 - 2n^2}$$

14-масала. Массаси m=1кг бўлган юк қаттиқлик коэффициентлари $C_1 = 300\frac{н}{м}$ ва $C_2 = 150\frac{н}{м}$ бўлган лифт пружиналарига осилган. Лифт вертикал йўналишда $\xi(t) = 0{,}1\sin 15t$ қонун бўйича ҳаракатланади (ξ ўқ вертикал равишда юқорига йўналган). Лифтга $R = \mu\vartheta$ муҳитнинг қаршилик кучи таъсир қилади $(\mu = 0)$, бунда, ϑ –лифтга нисбатан юкнинг тезлиги. Юкнинг лифтга нисбатан $x = f(t)$ ҳаракат қонунини топинг. Координата боши сифатида лифт тинч турганда юкнинг статик мувозанат ҳолатини қабул қилинг. Ҳисоблашларда $g \approx 10\frac{м}{сек^2}$ деб, пружиналарнинг ва уларни бириктирувчи пленканинг массаларини эътиборга олманг.

Масала шартини қисқача қуйидагича ёзиш мумкин:

$$m = 1кг\ ,\ C_1 = 300\frac{Н}{М},\ C_2 = 150\frac{Н}{М},\ \omega = 15^{-1}\ ;$$

$$\mu = 0, t = 0.\lambda = 0, \vartheta_o = 0, \xi(t) = 0{,}1\sin 15t$$

(ξ метрларда, t эса секундларда ҳисобланган).

Юкнинг лифтга нисбатан $x = \oint(t)$ ҳаракат қонунини аниқлаш керак.

Ечиш. Масалада берилганларни чизмада тасвирлаймиз (54-чизма).

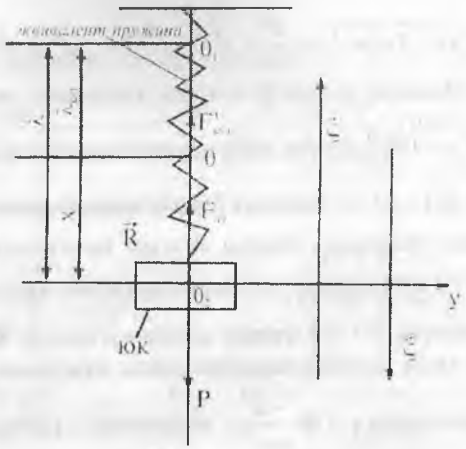
1. Эквивалент пружинанинг қаттиқлик коэффициентини топамиз. Иккала пружинага ҳам бир хил куч таъсир қилганлиги туфайли эквивалент пружининг λ чўзилиши берилган пружиналарнинг λ_1 ва λ_2 чўзилишлари-нинг йиғиндисига тенг бўлади $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Эластиклик кучи учун $C_1\lambda_1 = \lambda_2 \cdot \lambda_2 = C \cdot \lambda = F_{эл}$ тенгликлар ўринли.

Бундан $\lambda_1 = \frac{F_{эл}}{C_1}$, $\lambda_2 = F$, $\lambda_2 = \frac{F_{эл}}{C_2}$, $\lambda = \frac{F_{эл}}{C}$

$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ бўлгани учун $\frac{F_{эл}}{C} = \frac{F_{эл}}{C_1} + \frac{F_{эл}}{C_2}$ бўлади.

Эквивалент пружинанинг С қаттиқлигини ҳисоблаймиз

$$C = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2} = \frac{300 \cdot 150}{300 + 150}\frac{н}{м} = 100\frac{н}{м}$$



54-чизма.

2. Эквивалент пружинанинг статик чўзилишини ҳисоблаймиз. Лифт тинч турганда юкнинг статик мувозанат ҳолатида эквивалент пружина P оғирлик кучи таъсирида λ_{cm} миқдорга чўзилади (қисилади). Мувозанатлик шартидан $P = c\delta_{cm}$ дан $\lambda_{cm} = \dfrac{P}{c} = \dfrac{mg}{c} = \dfrac{1 \cdot 10}{100} = 0{,}1$ м.

3. Юкка $P = mg$ оғирлик кучи, пружинанинг $F^и_{куч} = ma_{куч}$ кўчирма инерция кучи таъсир қилади. Кориолис инерция кучи таъсир қилмайди, чунки лифтнинг кўчирма ҳаракати илгариланма ҳаракатдан иборат. $F^и_{куч}$ кучнинг йўналишини аниқлаш учун ξ ўққа нисбатан $\ddot{\xi} = a^и_{куч}$ тезланишнинг йўналишини аниқлаш керак. Шартга кўра

$$\xi = 0{,}1 \sin 15t \Rightarrow \ddot{\xi} = -22{,}5 \sin 15t$$

$\ddot{\xi} < 0$ бўлгани учун бу тезланиш ξ ўқнинг йўналишига қарама-қарши йўналган бўлади.

$a^и_{куч} = \ddot{\xi}$ тезланиш пастга, $F^и_{куч}$ кучи эса юқорига йўналган бўлиб, унинг модули $F^и_{куч} = m\ddot{\xi} = 22{,}5 \sin 15t$ формула бўйича топилади.

4. Юк нисбий ҳаракатининг дифференциал тенгламасини вектор шаклида ёзамиз

$$m\overline{a}_{нис} = \overline{P} + \overline{F}^и_{ку} + \overline{F}_{эл} + \overline{R}$$

Бу вектор тенгламанинг иккала қисмини Ox ўққа проекциялаймиз

$$m\ddot{x} = P - F_{эл} - F^{и}_{куч} \qquad (9)$$

Масала шартида $\mu = 0$ бўлганлиги учун $\overline{R}$ қаршилик кучи ҳаракат тенгламасида қатнашмайди.

$F_{эл}$ кучининг миқдорини топамиз.Чизмадан кўринадики, эквивалент пружинанинг чўзилиши $\lambda = x + \lambda_{cm}$ га тенг, у ҳолда,

$$F_{эл} = C\lambda = C(x + \lambda_{CM}).$$

Барча кучлар учун топилган ифодаларни (9) га қўйиб, қуйидаги тенгламани оламиз:

$$m\ddot{x} = P - C(x + \lambda_{cm}) - 22{,}5\sin 15t.$$

Мувозанат ҳолатда $P = c\lambda_{cm}$ бўлганлиги учун, тенгликнинг ўнг қисмидаги P ва $- c\lambda_{cm}$ ҳадларнинг йиғиндиси нолга тенг. Юкнинг нисбий ҳаракат тенгламаси

$$\ddot{x} + k^2x = A\sin 15t \qquad (10)$$

кўринишни олади. Бунда,

$$k^2 = \frac{c}{м} = 100сек^{-2}; \quad A = -22{,}5\frac{м}{сек^2} \qquad (11)$$

5. Юкнинг ҳаракат қонунини топиш учун (10) тенгламани интеграллаш керак. (10) нинг умумий ечими

$$x = x_1 + x_2 \qquad (12)$$

$x_1 - \ddot{x}_1 + k^2x_1 = o$ бир жинсли тенгламанинг умумий ечими, яъни

$$x_1 = C_1\cos kt + C_2\sin kt. \qquad (13)$$

x_2 эса $\ddot{x}_2 + k^2x_2 = A\sin 15t$ тенгламанинг хусусий ечимидир. Бу тенгламанинг ўнг қисмига эътибор бериб, у хусусий ечимни

$$x_2 = B\sin 15t \qquad (14)$$

кўринишда излаймиз. B ни аниқлаш учун $\ddot{x}_2 = -225\sin 15t$ ни топамиз, x_2 ва $\ddot{x}_2$ нинг ифодаларини (9) тенгламага қўйиб, ҳосил бўлган тенгликнинг иккала қисмидаги $\sin 15t$ нинг олдида турган коэффициентларни тенглаштириб, (10) белгилашларни эътиборга олиб, B нинг сон қийматини топамиз

$$B = \frac{A}{k^2 - 225} = \frac{-22{,}5}{100 - 225} = \frac{22{,}5}{125} = 0{,}18м.$$

(12)-(14) тенгликлардан $K = 10сек^{-1}$ эканлигини эътиборга олиб, (10) тенгламанинг умумий ечимини топамиз

$$x(t) = c_1 \cos 10\, t + c_2 \sin 10\, t + 0{,}18 \sin 15\, t\,. \qquad (15)$$

Энди C_1 ва C_2 доимийларни аниқлаймиз. Бунинг учун $\dot{x} = \vartheta_x$ ни топамиз.

$$\vartheta_x = \dot{x} = -10(C_1 \sin 10\, t - C_2 \cos 10\, t) + 2{,}7 \cos 15\, t\,. \qquad (16)$$

Масала шартига кўра t=0 бўлганда $\vartheta_x = \vartheta_o = o$ ва $\lambda = \lambda_o = o$ бўлади $x_o = \lambda_o - \lambda_{cm} = -0{,}1м$.

Демак t=o бўлганда $x_o = -0{,}1м$ Бу бошланғич қийматларни (15) ва (16) тенгликларга қўйиб, улардан C_1 ва C_2 ни топамиз $C_1 = -0{,}1$; $C_2 = -0{,}27$.

Натижада (15) умумий қонундан юкнинг лифтга нисбатан ҳаракат қонунини ифодаловчи тенгламани ажратиб оламиз

$$x(t) = 0{,}18 \sin 15t - 0{,}1 \cos 10t - 0{,}27 \sin 10t\,.$$

Бу машғулотларга доир ечиб таҳлил қилинган ва ечиш учун берилган масалаларни муаллиф П. Қурбоновнинг «Математик маятник ва параметрик тебранишлар» номли илмий методик қўлланмасидан топиш мумкин.

20-МАШҒУЛОТ

4-§. Нуқта динамикасининг умумий теоремалари

1. Умумий ҳолда моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини чекли кўринишда интеграллаш имконияти бўлмай қолади. Бошқача айтганда, нуқтанинг ҳаракат қонунини унинг барча динамик факторларини (характеристикаларини) бир вақтда эътиборга олиб ўрганиб бўлмайди. Хусусий ҳолларда эса мумкинлигини кўрдик. Бу хусусий ҳоллар ҳам нуқтага таъсир этувчи кучнинг хусусиятига боғлиқ эди.

Динамиканинг кўпгина масалаларини ечишда ҳаракатнинг дифференциал тенгламаларини интеграллаш ўрнига, динамика асосий қонунларининг натижаси бўлиб хизмат қиладиган умумий теоремалардан фойдаланишга тўғри келади. Умумий теоремаларнинг аҳамияти шундаки, моддий нуқта ҳаракатининг асосий динамик хусусиятларини боғлайди, механик тизим ҳаракатини текширишнинг янги имкониятларини очади.

Моддий нуқтанинг ҳаракатини ўрганишда моддий нуқта ҳаракатининг асосий ўлчовлари билан шу нуқтага таъсир этувчи кучнинг маълум вақт ичидаги ўлчовлари теоремалар ёрдамида боғланади. У теоремаларни нуқта динамикасининг асосий теоремалар номи билан юритилади.

Нуқта (жисм) ва кучнинг асосий динамик хусусиятларини келтирамиз:

1) Моддий нуқта ҳаракатининг вектор ўлчови унинг ҳаракат миқдоридир. Нуқтанинг ҳаракат миқдори вектор миқдор бўлиб, нуқта массасининг унинг тезлик векторига бўлган кўпайтмасига тенг $(m\vec{\vartheta})$.

Ҳаракат миқдори векторининг йўналиши ҳам $\vec{\vartheta}$ тезлиги вектори йўналишида бўлиб, траекторияга уринма йўналгандир.

Ҳаракат миқдори бу моддий нуқтанинг (жисмнинг) импульсидир.

2) Моддий нуқта ҳаракатининг скаляр ўлчови нуқтанинг кинетик энергиясидир. Нуқтанинг кинетик энергияси унинг массаси билан тезлиги квадрати кўпайтмасининг ярмига тенг $(\frac{m\vartheta^2}{2})$.

3) Маълум вақт ичида материал нуқтага таъсир этувчи кучнинг вектор ўлчови–куч импульсидир. dt чексиз кичик вақт оралиғидаги элементар импульс тушунчасини киритамиз.

$d\overline{S}$ элементар импульс вектор миқдор бўлиб, $\overline{F}$ вектор кучининг таъсири давомидаги чексиз кичик dt вақтга бўлган кўпайтмасига айтилади.

$$d\overline{S} = \overline{F}dt \text{ ёки } \overline{S} = \int_0^t \overline{F}dt \qquad (1)$$

Шундай қилиб, кучнинг импульси чекли кўринишда ифодаланишлиги $\overline{F}$ вектор кучнинг берилишига боғлиқ экан. Хусусий ҳолда, агар $\overline{F}$ куч миқдор ва йўналиш жиҳатидан доимий бўлса, куч импульс $\overline{S} = \overline{F}t$ формула бўйича ҳисобланади.

Умумий ҳолда эса S куч импульсининг модули ва йўналиши унинг

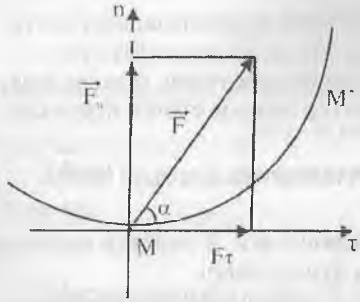
$$S_x = \int_0^t F_x dt,\ S_y = \int_0^t F_y dt,\ S_z = \int_0^t F_z dt \qquad (2)$$

проекциялари бўйича топилади. Элементар импульс ҳам кучнинг таъсир чизиғи бўйича йўналган бўлади.

4) Маълум вақт ичида моддий нуқтага таъсир этувчи кучнинг скаляр ўлчови–нуқтага таъсир этувчи кучнинг бажарган элементар ишидир.

Чексиз кичик $d\overline{\ell}$ элементар кўчишдаги dA элементар иш деб, $\overline{F}$ кучнинг унинг таъсири туфайли нуқтанинг босиб ўтган $d\ell$ йўлига бўлган кўпайтмасига айтилади.

$$dA = (\overline{F}_\tau, d\overline{\ell}) = \overline{F}_\tau d\ell \qquad (3)$$



55-чизма.

Бу ерда, $\overline{F}_\tau - \overline{F}$ вектор кучнинг M нуқтада траектория ўтказилган уринмадаги (55-чизма) проекцияси.

$\overline{F}$ кучнинг скаляр ўлчови бўлган элементар иш нуқта тезлигининг модулини ўзгартириш фактори ҳисобланади. Тезлик модулини $\overline{F}$ кучининг фақат нуқтага уринма тезланиш берувчи $\overline{F}_\tau$ ташкил этувчиси ўзгартиради. Нуқта тезлик модулини $\overline{F}$ кучнинг $\overline{F}_n$ этувчиси ўзгартиролмайди, яъни $\overline{F}_n$ куч иш бажармайди. Кучнинг табиий ўқлардаги проекцияларини топамиз.

$$F_\tau = F\cos\alpha\,, \quad F_\tau = F\sin\alpha \qquad (4)$$

Натижада (3) $dA = F \cdot d\ell \cos\alpha$ (4) кўринишни олади.

Шундай қилиб, куч ихтиёрий йўналишга эга бўлганда кучнинг бажарган элементар иши $\overline{F}$ куч модули у қўйилган нуқтанинг элементар кўчиши ва куч йўналиши билан кўчиш йўналиши орасидаги бурчакнинг косинусидан тузилган кўпайтмага сон жиҳатдан тенг бўлади.

(4) формуладан қуйидаги хусусий ҳолларни оламиз:

1) агар $\alpha < 90^\circ$ бўлса, у ҳолда иш мусбат бўлади. Агар $\alpha = o$ бўлса, элементар иш $dA = F \cdot d\ell$ формула бўйича ҳисобланади;

2) агар $\alpha > 90^\circ$ бўлса, у ҳолда элементар иш манфий бўлади.

Агар $\alpha = 180^\circ$ бўлса, у ҳолда иш $dA = -Fd\ell$ формула бўйича топилади.

3) агар $\alpha = 90^\circ$ бўлса, бундай ҳолда элементар иш нолга тенг бўлади, чунки $\cos 90^\circ = O$.

Ишнинг мусбат ва манфийлиги қуйидаги маънога эга: иш мусбат бўлганда кучнинг уринма ташкил этувчиси ҳаракат йўналишида бўлиб, куч ҳаракатни тезлантиради.

Иш манфий бўлганда кучнинг уринма ташкил этувчиси ҳаракат йўналишига қарама-қарши йўналган бўлиб, куч ҳаракатни секинлаштиради.

Элементар ишни ҳисоблаш учун аналитик ифодалар топиш мумкин. Бунинг учун $\overline{F}$ кучини координата ўқлари бўйича $\overline{F}_x, \overline{F}_y, \overline{F}_z$ ташкил этувчиларга ёйямиз (56-чизма).

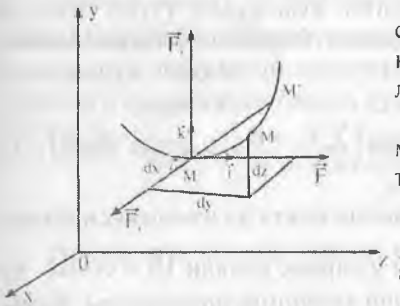
$\overrightarrow{M_oM_1} = d\overline{\ell}$ элементар кўчиш эса dx ; dy, dz координата ўқлари атрофидаги кўчишлардан ташкил топади.

Қаралаётган ҳол учун (3) формулага кўра

$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz$

M_0M_1 кўчишдаги кучнинг бажарган иши, элементлар ишларга мос келувчи интеграл йиғиндидек ҳисобланади

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} \bar{F}_\tau d\bar{r} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right) \qquad (5)$$



56-чизма.

(5) формула ёрдамида оғирлик, эластиклик, ишқаланиш ва тортишиш кучларининг бажарган ишларини ҳисоблаш мумкин.

Энди материал нуқта учун динамиканинг асосий теоремаларини келтирамиз.

1. Нуқта ўзгармас m массага ва $\bar{a} = \dfrac{d\bar{\vartheta}}{dt}$ тезланишга эга бўлсин. Бундай ҳолда динамиканинг асосий қонунини ифодаловчи тенгламани

$$\frac{d\left(m\bar{\vartheta}\right)}{dt} = \sum_k \bar{F}_k \qquad (6)$$

кўринишда олиш мумкин. Бу тенглама нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани дифференциал шаклда ифодалайди. Нуқтанинг ҳаракат миқдоридан вақт бўйича олинган ҳосила нуқтага таъсир қилувчи кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг. (6) тенгламани интеграллаш ҳам мумкин. m массали нуқта $\bar{F} = \sum_k \bar{F}$ куч таъсирида ҳаракатланиб, $t = 0$ дақиқада $\bar{\vartheta}_0$, $t = t_1$ дақиқада эса $\bar{\vartheta}_1$ тезликка эга бўлсин. (6) тенгликнинг иккала қисмини dt га кўпайтириб, тенгликнинг ўнг қисмини вақт бўйича 0 дан t_1 гача, чап қисмини эса тезлик бўйича ϑ_0 дан ϑ_1 гача интеграллаймиз

$$d\left(m\bar{\vartheta}\right) = \sum_k \bar{F}_k dt \qquad m\bar{\vartheta}_1 - m\bar{\vartheta}_0 = \sum_k \int_0^{t_1} \bar{F}_k dt \qquad (7)$$

Ўнгда турувчи интеграл нуқтага таъсир қилувчи кучларнинг импульсини ифодалайди (57-чизма)

$$m\bar{\vartheta}_1 - m\bar{\vartheta}_0 = \sum_k \bar{S}_k$$

(7) тенглама нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани интеграл шаклда ифодалайди. Чекли вақт оралиғида нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши, шу вақт давомида нуқтага таъсир этувчи кучлар импульсларининг геометрик йиғиндисига тенг бўлади. Масалалар ечишда битта (7) дан иборат вектор тенглама ўрнига унинг иккала қисмини ўқларга проекциялашдан ҳосил бўладиган учта

$$m\vartheta_{1x} - m\vartheta_{ox} = \sum_k \bar{S}_{kx},\quad m\vartheta_{1y} - m\vartheta_{oy} = \sum_k S_{ky},\quad m\vartheta_{1z} - m\vartheta_{oz} = \sum_k S_{kz} \qquad (8)$$

скаляр тенгламалардан фойдаланиш жуда қулай. Тўғри чизиқли ҳаракатда теорема (8) тенгламаларнинг биринчиси билан ифода қилинади. Хусусий ҳолда, яъни нуқтага таъсир қилувчи кучларнинг

тенг таъсир этувчиси нолга тенг бўлса $\left(\sum_{i} F_k = O\right)$, у ҳолда $d(m\bar{\vartheta}) = O$

бўлиб, $m\bar{\vartheta} = const$ бўлади. Бундай ҳолда нуқта ўз инерцияси билан ҳаракат қилади. Нуқтанинг тезлиги ўзгармас бўлади $(\bar{\vartheta} = const)$. Бу олинган натижа Ньютоннинг биринчи қонунини ифодалайди. Қаралаётган ҳолда (8) тенгламаларнинг биринчи интегралини қуйидагича оламиз:

$$\frac{dx}{dt} = C_1,\quad \frac{dy}{dt} = C_2,\quad \frac{dz}{dt} = C_3$$

Бу тенгламаларни $x|_{t=0} = x_o,\ y|_{t=0} = y_o,\ z|_{t=0} = z_o;$

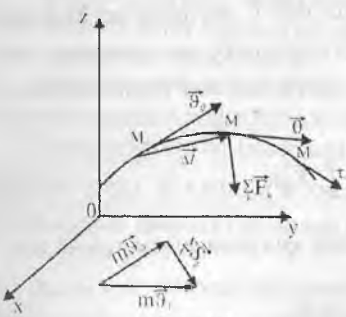
$\dot{x}|_{t=0} = \dot{x}_o,\ \dot{y}|_{t=0} = \dot{y}_o,\ \dot{z}|_{t=0} = \dot{z}_o$ бошланғич шартларда интеграллаб, нуқта ҳаракатининг тенгламаларини

$x(t) = x_o + \dot{x}_o t,\quad y(t) = y_o + \dot{y}_o t,\quad z(t) = z_o + \dot{z}_o t$ кўринишда оламиз. Вектор шаклда эса

$\bar{r}(t) = (x_o + \dot{x}_o t)\bar{i} + (y_o + \dot{y}_o t)\bar{j} + (z_o + \dot{z}_o t)\bar{k}$

кўринишда оламиз.

Шундай қилиб, нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема бир хусусий ҳолда, нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасини чекли кўринишда интеграллашга имконият яратар экан.



57-чизма.

2. m массали нуқта $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, ..., $\overline{F}_n$ кучлар таъсирида эгри чизиқли ҳаракат қилиб, M_o ҳолатда $\overline{\vartheta}_o$, M_1 ҳолатда эса $\overline{\vartheta}_1$ тезликка эга бўлсин. Изланаётган боғланишни олиш мақсадида динамиканинг асосий қонунини ифодаловчи

$$m\overline{a} = \sum_k \overline{F}_k \qquad (9)$$

тенгламани оламиз. Бу тенгликнинг иккала қисмини ҳам траекториянинг М нуқтасига ўтказилган уринмага проекциялаймиз $m\overline{a}_\tau = \sum_k \overline{F}_{k\tau}$.

Бу ердаги уринма тезланишни қуйидагича ўзгартирамиз

$$\overline{a}_\tau = \frac{d\overline{\vartheta}}{d\ell}\cdot\frac{d\ell}{dt} = \overline{\vartheta}\frac{d\overline{\vartheta}}{d\ell}.$$

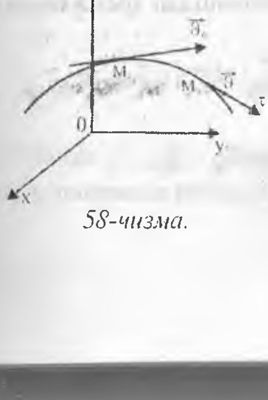
Натижада нуқтанинг ҳаракат тенгламаси (58-чизма) $m\overline{\vartheta}\dfrac{d\overline{\vartheta}}{d\ell} = \sum_k \overline{F}_{k\tau}$

кўринишни олади. Бу тенгликнинг иккала қисмини $d\ell$ га кўпайтириб, $\overline{F}_{k\tau}d\ell = dA_k$ эканлигини билиб, нуқта кинетик энергиясининг ўзгаришини дифференциал шаклда қуйидагича оламиз:

$$d\left(\frac{m\vartheta^2}{2}\right) = \sum_k dA_k \Rightarrow \int^{\vartheta_1} d\left(\frac{m\vartheta^2}{2}\right) = \int_{(M_o)}^{(M_1)} \sum_k \overline{F}_{k\tau} d\ell \Rightarrow \frac{m\vartheta_1^2}{2} - \frac{m\vartheta^2}{2} = \sum A_k$$

тенглик нуқта кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди. Нуқтанинг кўчишида унинг кинетик энергиясининг ўзгариши нуқтага таъсир қилувчи кучлар бажарган элементар ишларнинг алгебраик йиғиндисига тенг бўлади.

3. Маълумки, нуқтанинг ҳаракат миқдори $(m\overline{\vartheta})$ асосий динамик хусусияти бўлиб, вектор миқдордир. Нуқтанинг ҳаракатини ўрганишда $(m\overline{\vartheta})$ векторнинг ўзгариши ўрнига унинг моменти ўзгаришини эътиборга олиш зарурияти ҳам туғилади. $(m\overline{\vartheta})$ векторнинг берилган О марказга нисбатан моментини $mom_0(m\overline{\vartheta})$ белгилайлик. Ҳаракат миқдорининг моменти ҳам куч моментидек ҳисобланади. Бунда $m\overline{\vartheta}$ вектор ҳаракатланаётган нуқтага қўйилган деб ҳисобланади. Нуқтага нисбатан ҳаракат миқдори моментининг мо-



58-чизма.

дули $M = |mom_o(m\vec{\vartheta})| = m\vartheta h$ формула бўйича топилади. Бу ердаги h– момент марказидан $m\vec{\vartheta}$ вектор йўналишига туширилган перпендикулярнинг узунлиги.

А. Ўққа нисбатан моментлар теоремаси. $\vec{F}$ куч таъсиридаги m массали нуқтани қарайлик. Бирор қўзғалмас oz ўққа нисбатан $\vec{F}$ ва $m\vec{\vartheta}$ векторларнинг моментларини олдиндан маълум формула бўйича ҳисоблаш мумкин

$$mom_z(\overline{F}) = xF_y - yF_x \qquad (10)$$

$$mom_z(m\overline{\vartheta}) = m(x\vartheta_y - y\vartheta_x) \qquad (11)$$

(11) тенгликнинг иккала қисмидан вақт бўйича ҳосила оламиз

$$\frac{d}{dt}\left[mom_z(m\overline{\vartheta})\right] = m\left(\frac{dx}{dt}\vartheta_y - \frac{dy}{dt}\vartheta_x\right) + m\left(x\frac{d\vartheta_y}{dt} - y\frac{d\vartheta_x}{dt}\right)$$

Маълумки, $\frac{dx}{dt} = \vartheta_x$ ва $\frac{dy}{dt} = \vartheta_y$ бўлганлиги учун ўнг томондаги биринчи қавс ичидаги ифода нолга тенг бўлади. Агар $m\frac{d\vartheta_y}{dt} = F_y$ ва $m\frac{d\vartheta_x}{dt} = F_x$ эканлигини эътиборга олсак, 2-қавс (10) тенгликнинг ўнг қисмини ифодалайди. Бундай ҳолда қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{d}{dt}\left[mom_z(m\overline{\vartheta})\right] = mom_z(\overline{F}) \qquad (12)$$

Олинган тенглик ўққа нисбатан момент теоремасини ифодалайди. Бирор ўққа нисбатан олинган нуқта ҳаракат миқдори моментидан вақт бўйича олинган ҳосила нуқтага таъсир қилувчи кучнинг шу ўққа нисбатан олинган моментига тенг бўлади.

Масалалар ечишда (12) дан иборат битта вектор тенглама ўрнига (12) нинг иккала қисмини ўқларга проекциялашдан ҳосил бўлган учта скаляр

$$\frac{d}{dt}\left[m(y\dot{z} - z\dot{y})\right] = yF_z - zF_y \ ,$$

$$\frac{d}{dt}\left[m(z\dot{x} - x\dot{z})\right] = zF_x - xF_z \ ,$$

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right)\right] = xF_y - yF_x$$

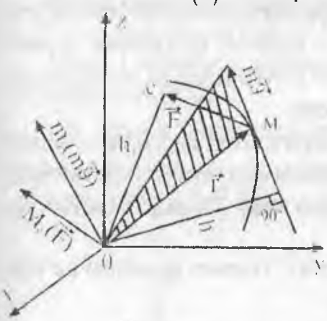
тенгламалар ишлатилади.

(12) тенгликдан қуйидаги хулосани ҳам олиш мумкин. Агар $mom_z\left(\overline{F}\right) = O$ бўлса, у ҳолда $mom_z\left(m\overline{\vartheta}\right) = const$ бўлади, яъни агар нуқтага таъсир қилувчи кучнинг ўққа нисбатан моменти нолга тенг бўлса, у ҳолда ўша ўққа нисбатан нуқта ҳаракат миқдорининг моменти ўзгармас миқдор бўлар экан.

Б. Марказга нисбатан моментлар теоремаси. $\overline{F}$ куч таъсирида ҳаракатланувчи нуқта учун $m\overline{\vartheta}$ ва $\overline{F}$ векторлардан бирор қўзғалмас нуқтага нисбатан олинган моментлари орасидаги боғланишни урнатамиз. Статикадан маълумки, $\vec{r}$ -радиус-вектор билан $\overline{F}$ вектор кучнинг векторли кўпаймаси кучнинг марказга нисбатан вектор моментига тенг бўлишлиги

$$mom\left(\overline{F}\right) = \overline{r} \times \overline{F} \tag{13}$$

Бунда $mom\left(\overline{F}\right)$ вектор О марказ ва $\overline{F}$ куч орқали ўтувчи текисликка перпендикуляр йўналган бўлади (59-чизма).



59-чизма.

Кучнинг вектор моментини топиш қоидасини $m\overline{\vartheta}$ веторга қўллаймиз

$$mom\left(m\overline{\vartheta}\right) = \overline{r} \times m\overline{\vartheta}\,. \tag{14}$$

Бу ердаги $mom\left(m\overline{\vartheta}\right)$ вектор эса О марказ ва $m\overline{\vartheta}$ вектор орқали ўтадиган текисликка перпендикуляр йўналган бўлади.

$mom_o(m\overline{\vartheta})$ векторининг ифодасини вақт бўйича дифференциаллаймиз

$$\frac{d}{dt}\left(\overline{r} \times m\overline{\vartheta}\right) = \left(\frac{d\overline{r}}{dt} \times m\overline{\vartheta}\right) + \left(\overline{r} \times m\frac{d\vec{\vartheta}}{dt}\right) = \left(\overline{\vartheta} \times m\overline{\vartheta}\right) + \left(\overline{r} \times m\overline{a}\right)$$

Бунда $\overline{\vartheta} \times m\overline{\vartheta} = O$ бўлади, яъни иккита параллел векторларнинг вектор кўпайтмаси бўлгани учун бу векторли кўпайтма нолга тенг.

$m\bar{a} = \bar{F}$ эканлигини эътиборга олсак, юқоридаги тенглик

$$\frac{d}{dt}\left[mom_o\left(m\bar{\vartheta}\right)\right] = mom_o\left(\bar{F}\right) \qquad (15)$$

кўринишни қабул қилади. (15) тенглик марказга нисбатан моментлар теоремасини ифодалайди. Бирор қўзғалмас нуқтага нисбатан нуқта ҳаракат миқдори моментидан вақт бўйича олинган ҳосила нуқтага таъсир қилувчи кучнинг шу қўзғалмас нуқтага нисбатан олинган моментига тенг бўлади.

Агар $mom_o\left(\bar{F}\right) = O$ бўлса, у ҳолда (15) формуладан $mom_o(m\vartheta) = const$ бўлишлиги келиб чиқади. $mom_o\left(\bar{F}\right) = O$ бўлганда h_1 куч елкаси нолга тенг бўлиши керак, яъни кучнинг таъсир чизиғи ҳамма вақт момент марказидан ўтиши керак.

Ҳамма вақт кучнинг таъсир чизиғи берилган марказдан ўтадиган бўлса, бундай кучга марказий куч дейилади. Бундай кучлар учун

$$\bar{r} \times m\bar{\vartheta} = const \qquad (16)$$

бўлади, яъни нуқта марказий куч таъсирида бўлса, ҳаракат миқдорининг моменти ўзгармас бўлади. Бундай ҳолда ҳаракат миқдори моменти векторининг йўналиши бир хил бўлиб, тезлик ва радиус-вектор орқали ўтган текисликка тик йўналган бўлади.

(16) муносабат марказга нисбатан нуқта ҳаракат миқдори моментининг сақланиш қонунини ифодалайди. Юқорида шакллантирилган теоремалар ёрдамида математик маятникнинг ҳаракат қонунини ернинг тортириш майдонида жисмларнинг (сунъий йўлдошлар ва планеталарнинг) ҳаракат қонунларини ўрганиш мумкин.

15-масала. Темир йўл поезди йўлнинг горизонтал ва тўғри чизиқли қисмида ҳаракат қилмоқда. Тормозлаш вақтида вужудга келадиган қаршилик кучи поезд оғирлигининг 0,1 қисмига тенг. Поезд тезлиги тормозлаш бошланган дақиқада $72\frac{км}{соат}$ га тенг. Тормоз вақтини ва тормозлаш йўлини топинг.

Ечиш. Тормозлаш вақтидаги вужудга келадиган қаршилик кучининг импульси поезд ҳаракат миқдорининг ўзгаришига тенг

$$m\vartheta_{1x} - m\vartheta_{ox} = \int_0^t R dt, \quad R = -0{,}1P$$

$$\vartheta_{1x} - \vartheta_{ox} = -0{,}1gt$$

Масала шартига кўра $\vartheta_{1x} = 0$ бўлади. У ҳолда тормозлаш вақтини топиш мумкин.

$$t = \frac{\vartheta_{ox}}{0,1g} = \frac{20\,\dfrac{м}{сек}}{0,1\cdot 9,81\,\dfrac{м}{сек^2}} = \frac{20}{0,981}\,сек = 20,4сек$$

Энди поезднинг тормозлаш йўлини топамиз. Бунинг учун ϑ_{1x} ни $\frac{dx}{dt}$ га алмаштирамиз ва оламиз

$$\frac{dx}{dt} = \vartheta_{ox} - 0,1gt \Rightarrow r = x = \vartheta_{ox}\cdot t - 0,05gt^2 + C_2 .$$

Агар $x/_{t=0} = 0$ бошланғич шартни эътиборга олсак, $C_2 = 0$ бўлади. r тормоз масофани ҳисоблаймиз

$$r = x = \vartheta_{ox}t - 0,05gt^2 = (20\cdot 20,4 - 0,05\cdot 9,81\cdot 20,4^2)м = (408 - 204,048)м = 204м\cdot$$

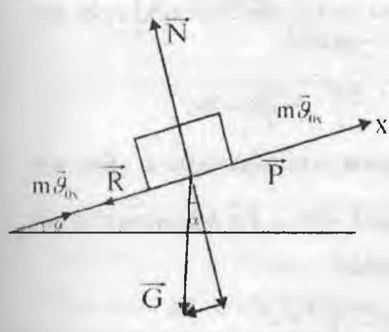
16-масала. Оғирлиги 400т бўлган поезд кўтарилиш бурчаги $i = tg\alpha = 0,006$ бўлган баландликка $54\,\frac{км}{соат}$ тезлик билан чиқиб бормоқда. Поезднинг ҳаракати давомида ишқаланиш коэффициенти 0,005 га тенг.

Поезд баландликка чиқиб 50 сек. вақт ўтгандан кейин унинг тезлиги 45 км/соат бўлиб қолди. Поезднинг тортиш кучини топинг.

Ечиш. Поезднинг илгариланма ҳаракатини моддий нуқтанинг ҳаракати деб қараймиз.

OX ўқини поезд ҳаракатининг траекторияси бўйлаб йўналтириб, унинг ҳаракатига импульслар ҳақидаги теоремани қўллаймиз

$m\vartheta_{1x} - m\vartheta_{ox} = \sum_k S_{kx}$ $m\bar{\vartheta}_0$ ва $m\bar{\vartheta}_1$ ҳаракат миқдори векторлари Ox ўқ томонига йўналгани учун $m\vartheta_{1x} = m\vartheta_1$ ва $m\vartheta_{ox} = m\vartheta_o$ бўлади.



60-чизма.

Поездга унинг тортиш кучи $\bar{P}$, оғирлиги $\bar{G}$, йўлнинг $\bar{N}$ нормал реакцияси ва $\bar{R}$ қаршилик кучи таъсир қилади. Модул жиҳатдан қаршилик кучи $fG\cdot\cos\alpha$ га тенг.

$\bar{P}, \bar{G}, \bar{R}$ ва $\bar{N}$ кучларнинг импульсларини ўққа проекциялясак, улар мос равишда (60-чизма).

$Pt_{,} - G \cdot \sin\alpha \cdot t_{,} - Rt_{,}$ О га тенг.

Бу ифодаларни ҳаракат тенгламасига қўйиб, қуйидаги тенгламани оламиз;

$$m\vartheta_1 - m\vartheta_0 = Pt - G\sin\alpha \cdot t - Rt$$

α кичкина бурчак учун $\cos\alpha \approx 1$, $\sin\alpha = tg\alpha \approx i$ бўлади, у ҳолда

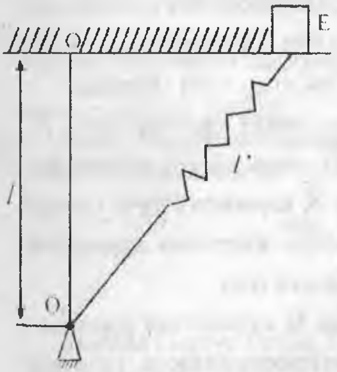
$\frac{G}{g}(\vartheta_1 - \vartheta_0) = Pt - G \cdot i \cdot t - fG \cdot t$ тенгламага эга бўламиз. Бундан P ни топамиз:

$$P = \frac{G(\vartheta_1 - \vartheta_0)}{gt} + iG + fG = \left(\frac{400\left(\frac{50}{4} - \frac{30}{2}\right)}{9{,}81 \cdot 50} + 0{,}006 \cdot 400 + 0{,}005 \cdot 400\right)T =$$

$$= \left(2{,}4 + 2 - \frac{8 \cdot 2{,}5}{9{,}81}\right)T = \left(4{,}4 - \frac{20}{9{,}81}\right)T = (4{,}4 - 2{,}04) = 2{,}36T.$$

17-масала. Массаси m га тенг бўлган E жисм силлиқ горизонтал текисликда жойлашган. Жисмга қаттиқлиги C га тенг бўлган пружина маҳкамланган, пружинанинг иккинчи учи эса O_1 шарнирга маҳкамланган. Деформацияланмаган пружинанинг узунлиги ℓ га тенг, $OO_1 = \ell$. Бошлангич дақиқада E жисм O мувозанат ҳолатдан OE =a масофага огиштириб, бошланғич тезликсиз қўйиб юборилган. Жисмнинг мувозанат ҳолатдан ўтиш дақиқасидаги тезлиги топилсин.

Ечиш. Нуқта кинетик энергиясининг ўзгариш ҳақидаги теоремадан фойдаланамиз. Бу ерда фақат эластиклик кучи иш бажаради (61-чизма).



61-чизма.

$$\frac{m\vartheta^2}{2} - \frac{m\vartheta_0^2}{2} = A_{эл}$$

$A_{эл}$ ишни ҳисоблаймиз. Бу иш

$A_{эл} = \frac{c}{2}\left[(\nabla\ell_{бош})^2 - (\nabla\ell_{охир})^2\right]$ формула бўйича топилади. Бунда

$$\nabla\ell_{бош} = \ell_o - \sqrt{\ell^2 + \alpha^2},$$

$\nabla\ell_{охир} = \ell - \ell_o$ у ҳолда

$$A_{\text{эл}} = \frac{c}{2}\left[\left(\ell_0 - \sqrt{\ell^2 + {}^2}\right)^2 - (\ell - \ell_0)^2\right] = \frac{C}{2}\left[\ell^2 - 2\ell_0\sqrt{\ell^2} + a^2 - \ell^2 - 2\ell\ell_0 - \ell^2\right] =$$

$$= \frac{c}{2}\left[a^2 - 2\ell_0\left(\ell - \sqrt{\ell^2 + a^2}\right)\right] = C\left[\frac{a^2}{2} + \ell_0\left(\ell - \sqrt{\ell^2 + a^2}\right)\right]$$

Масала шартига кўра $\vartheta_0 = O$. Натижада юкнинг тезлигини топиш формуласини қуйидагича олади:

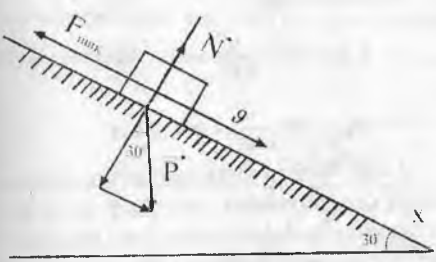
$$\vartheta = \sqrt{\frac{2c}{m}\left[\frac{a^2}{2} + \ell_0\left(\ell - \sqrt{\ell^2 + a^2}\right)\right]}$$

18-масала. Горизонт билан $30°$ ли бурчак ташкил қиладиган оғма текисликда оғир жисм бошланғич тезликсиз тушмоқда: ишқаланиш коэффициенти 0,1 га тенг. Ҳаракат бошланиб, 2 м йўл ўтгандан кейин жисм қандай тезликка эга бўлади?

Ечиш. Жисмга $\overline{P}$ оғирлик кучи, $\overline{N}$ текислик реакцияси ва $\overline{F}_{ишк}$ кучи таъсир қилади.

Ох ўқини қия текислик бўйича йўналтириб, кучларнинг Ох ўқдаги проекцияларини топамиз (62-чизма).

$F_{ишк} = -fp\cos\alpha$, $P_x = P\sin\alpha$. Бу ерда ҳам нуқта кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремадан фойдаланамиз.



62-чизма.

$$\frac{m\vartheta_1^2}{2} - \frac{m\vartheta_0^2}{2} = \sum_k A_k$$

Масала шартига кўра $\vartheta_0 = 0, P = mg$ эканлигини эътиборга олсак, юқоридаги тенгликдан қуйидагини оламиз:

$$\vartheta_1^2 = 2\ell g(\sin\alpha - f\cos\alpha).$$

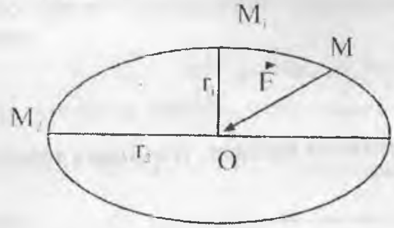
Бу ердан ϑ_1 ни топиб, унинг сон қийматини ҳисоблаймиз

$$\vartheta_1 = \sqrt{2\ell g(\sin\alpha - f\cos\alpha)} = \sqrt{2\cdot 2\cdot 9{,}81(0{,}5 - 0{,}0866)}\,м\big|_{сек} = 2\sqrt{9{,}81\cdot 0{,}4134}\,м\big|_{сек}$$

$$= 2\sqrt{4{,}055}\,м\big|_{сек} = 2\cdot 2{,}01\,м\big|_{сек} = 4{,}02\,м\big|_{сек}$$

19-масала. M нуқта қўғалмас марказ атрофида таъсир чизиғи шу марказ орқали ўтувчи тортишиш кучи таъсирида ҳаракатланади.

Агар марказга энг яқин нуқтанинг тезлиги $\vartheta_1 = 30\dfrac{см}{сек}$ бўлса, марказдан энг узоқлашган нуқтанинг тезлигини топинг, бунда r_2 масофа r_1 масофадан беш марта ортиқ.



63-чизма.

Ечиш. Марказга нисбатан моментлар теоремасидан фойдаланамиз. Ҳаммавақт кучнинг таъсир чизиғи берилган марказдан ўтса, бундай кучлар учун шу марказга нисбатан ҳаракат миқдорининг моменти ўзгармас миқдор бўлади (63-чизма).

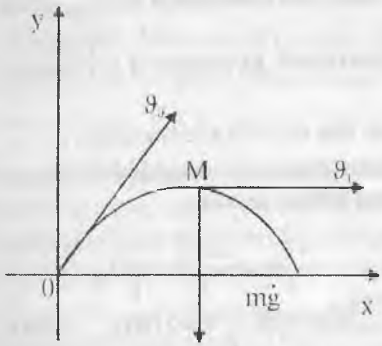
$$\bar{r} \times m\bar{\vartheta} = const$$

Бундан $mr_1\vartheta_1 = mr_2\vartheta_2$ ни оламиз.

Шартга кўра $r_2 = 5r_1$

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 \cdot \frac{r_1}{r_2} = \vartheta_1 \cdot \frac{r_1}{5r_1} = \frac{\vartheta_1}{5} = \frac{30\frac{см}{сек}}{5} = 6\frac{см}{сек}.$$

20-масала. Агар снаряд ўзининг О бошланғич ҳолатидан энг юқори М ҳолатига ўтган бўлса, шу вақт ичида снарядга таъсир қилувчи барча кучлар тенг таъсир этувчисининг импульсини топинг.



64-чизма.

Берилганлар:

$$\vartheta_0 = 500\frac{м}{сек}, \alpha_0 = 60^\circ,$$

$$\vartheta_1 = 200\frac{м}{сек}, P = 100кГ$$

Ечиш. Чекли вақт оралиғида нуқта фақат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги тенгламадан фойдаланамиз. Нуқта О ва М нуқталарда бўлгандаги ҳаракат миқдорини топамиз (64-чизма),

$$m\vartheta_{0x} = m\vartheta_0 \cos\alpha, \; m\vartheta_{1x} = m\vartheta_1 \quad (\vartheta_{1x} \parallel \vartheta_1).$$

Ҳаракат миқдорининг ўзгаришини топамиз

$m(\vartheta_{1x} - \vartheta_{0x}) = (\vartheta_1 - \vartheta_0\cos\alpha)m$. Маълумки, ҳаракат миқдорининг ўзгариши нуқтага таъсир қилувчи кучлар импульсларининг йиғиндисига тенг бўлади. Тенг таъсир этувчи куч импульсининг координата ўқларидаги проекцияларини топамиз

$$S_x = S_{x1} - S_{x0} = \frac{P}{g}\left(\vartheta_1 - \vartheta_0 \cos\alpha\right) = \frac{100}{9.81}\left(200 - 500 \cdot \frac{1}{2}\right)\text{кГсек} =$$

$$= \frac{100}{9.81}(-50)\text{кГсек} \quad = -10{,}2 \cdot 50\text{кГсек} \quad = -510\text{кГ сек}$$

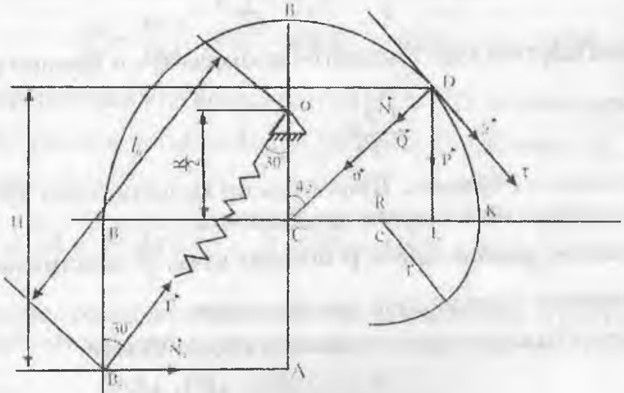
М нуқтада снаряд ҳаракат миқдорининг вектори Оу ўққа перпендикуляр йўналгандир. Шунинг учун куч импульсининг Оу ўқдан проекцияси миқдор жиҳатдан снаряднинг О нуқтадаги ҳаракат миқдорининг Ох ўқдаги проекциясига тенг бўлади

$$S_{y1} = 0, \quad S_{y0} = m\vartheta_0 \sin\alpha_0$$

$$S_y = S_{y1} - S_{y0} = -m\vartheta_0 \sin\alpha_0 = -\frac{P}{g}\vartheta_0 \sin\alpha_0 = -\frac{100}{9.81} \cdot 500 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\text{кГ сек} =$$

$$= -10{,}2 \cdot 500 \cdot \frac{1{,}73}{2}\,\text{кГ сек} = -1{,}73 \cdot 2550\,\text{кГ сек} = -4410\text{кг сек}.$$

21-масала. Вертикал текисликда жойлашган ингичка силлиқ стержен шундай эгилганки, у тўғри чизиқли ва К нуқтада бирикувчи R=0.5 м ва r =0,6 RM радиусли айланалар ёйларидан иборатдир. Стерженга Р оғирликдаги шар кийгазилган ва бу шар қаттиқлик коэффициенти $C = \frac{kp}{R}$ $(k = 8)$ га тенг бўлган пружинага қистирилган. Пружинанинг иккинчи учи эса О нуқтага маҳкамланган. Деформацияланмаган пружинанинг узунлиги $\ell_0 = 0{,}8$ R га тенг.



65-чизма.

Шар $\alpha = 30°$ ли бурчак билан аниқланадиган бошланғич тезликсиз B_0 нуқтадан ҳаракат қила бошлайди. Шар B_1 ҳолатни эгаллаганда пружинадан ажралиб, ундан кейин фақат оғирлик кучи таъсирида ҳаракат қилади. Шарни материал нуқта деб ҳисоблаб, у D нуқтадан ўтаётганда қандай тезликка эга бўлишлигини ва стерженга қандай куч билан таъсир қилишлигини аниқланг. Таъсир кучни P оғирлик кучи орқали ифодаланг. D нуқтанинг ҳолати у R радиусли айланада жойлашганда $\beta = 45°$ бурчак билан, r радиусли айланада жойлашганда эса γ бурчак билан аниқланади (65-чизма).

Масала шартини ва талабини қисқача қуйидагича ёзиш мумкин: P– шар оғирлиги.

$$R = 0{,}5 \text{ м}, \quad r = 0{,}6R, \quad e_0 = 0{,}8R, \quad c = \frac{kp}{R}, \quad K = 8,$$

$$\alpha = 30^\circ, \quad \beta = 45^\circ, \quad g = 10 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}, \quad \vartheta_0 = 0.$$

B_1 нуқтада шар пружинадан ажралади. Топиш керак: шарнинг D нуқтадаги ϑ_D тезлигини ва шу D нуқтада шарнинг стерженга берадиган Q босим кучини.

Ечиш. Аввало масалага доир чизма чизамиз. Бу чизмада берилганлар ва изланганларни тасвирлаймиз (65-чизма).

Шарнинг D нуқтадаги тезлигини топиш учун материал нуқта кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремадан фойдаланмиз

$$\frac{m\vartheta_D^2}{2} - \frac{m\vartheta_0^2}{2} = \sum_k A_k.$$

Масала шартига кўра бошланғич дақиқада $\vartheta_0 = 0$ бўлгани учун

$$\frac{m\vartheta_D^2}{2} = \sum_k A_k \tag{17}$$

тенгликка эга бўламиз. Шарга таъсир қилувчи барча кучларнинг бажарган ишлари йиғиндисини ҳисоблаймиз.

Бошланғич ҳолатда шарга $\overline{P}$ оғирлик кучи, $\overline{F}$ эластиклик кучи ва $\overline{N}$ стерженнинг реакция кучи таъсир қилади.

Шарнинг бажарган иши уч қисмдан иборат бўлади

$$\sum_K A_K = A(\overline{P}) + A(\overline{F}) + A(\overline{N}). \tag{18}$$

Ҳар бир кучнинг бажарган ишини алоҳида-алоҳида ҳисоблаймиз.

1. $A(\overline{N}) = 0$ бўлади. Чунки реакция кучи ҳамма вақт кўчишга перпендикуляр бўлади.

2. оғирлик кучининг бажарган иши $A(\overline{P}) = -PH$ (бу ердаги ишораси "-" бошланғич нуқта охирги нуқтадан пастда жойлашганлигини билдиради). Бунда

$$H = |AO| + |OM| = |AO| + |LD| - |OC|$$

$$|AO| = \ell\cos\alpha = 0{,}8\ R\cos 30^\circ = 0{,}8\ R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}4\ R\sqrt{3} = 0{,}4\cdot 1{,}73\ R = 0{,}69\ R\ ;$$

$$|LD| = R\cos\beta = R\cos 45^\circ = R\frac{\sqrt{2}}{2} = R\cdot\frac{1{,}414}{2} = 0{,}707\ R\ ;\ |OC| = 0{,}5\ R$$

$$H = 0{,}69\ R + 0{,}707\ R - 0{,}5\ R = 0{,}9\ R$$

оғирлик кучининг бажарган иши $A(\overline{P}) = -0{,}9\ PR$. Эластиклик кучининг бажарган иши

$A(\overline{F}) = \frac{c}{2}\left(\lambda_o^2 - \lambda_1^2\right) = \frac{kp}{2R}\left(\lambda_o^2 - \lambda_1^2\right)$ бунда λ_o ва λ_1 пружинанинг бошланғич ва охирги дақиқалардаги чўзилиши, яъни

$$\lambda_o = OB_o - \ell_o\ ,\quad \lambda_1 = OB_1 - \ell_o\ .$$

Тўғри бурчакли учбурчак B_oOA дан $OB_o = \frac{R}{\sin 30^\circ} = \frac{R}{0{,}5} = 2\ R$.

Шундай қилиб, $\lambda_o = 2\ R - 0{,}8\ R = 1{,}2\ R\ ;\quad \lambda_1 = 0{,}5\ R - 0{,}8\ R = -0{,}3\ R$

Эластиклик кучининг бажарган ишини топамиз:

$$A(\overline{F}) = \frac{8P}{2R}\left(1{,}44\ R^2 - 0{,}09\ R^2\right) = 4\ PR\cdot 1{,}35 = 5{,}4\ PR\ .$$

Ишларнинг топилган ифодаларини (17) ва (18) тенгламаларга қўйиб, $m = \frac{P}{g}$ эканлигини эътиборга олиб, шарнинг D нуқтадаги ϑ_D тезлигини аниқлаймиз.

$$\vartheta_D = \sqrt{9\ gR} = \sqrt{9\cdot 9{,}81\cdot 0{,}5} = \sqrt{9\cdot 4{,}905} = \sqrt{44{,}14} = 6{,}65\frac{м}{сек}$$

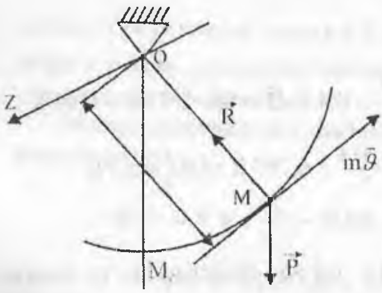
$\overline{N}$ нормал реакцияни аниқлаш учун нормал ўқни D нуқтадан марказга қараб йўналтириб, барча кучларни ана шу ўққа проекциялаймиз

$$Q = \frac{m\vartheta_D^2}{R} - mg\cos 45^\circ\ .$$

ϑ_D^2 ни 9 gR га алмаштириб, Q ни топамиз

$$Q = \frac{m}{R} \cdot 9gR - 0{,}707\ mg = 9\ mg = 8{,}3\ P\ .$$

22-масала (математик маятник ҳақидаги масала). Узунлиги ℓ бўлган ипга осилган m массали шарчадан иборат бўлган тизимни қараймиз. Бундай модел математик маятникни ифодалайди. Шарча доимо вертикал текисликда ётувчи айлана ёйи бўйлаб тебранма ҳаракат қилади деб, унинг тебраниш қонунини ва даврини топинг.



66-чизма.

Ечиш: Маятникнинг ҳолати исталган дақиқада битта катталик билан, яъни унинг ипининг вертикалдан оғиш бурчаги φ билан тўлиғича аниқланади (66-чизма).

Шундай экан шарчанинг исталган дақиқада ҳолатини билиш учун φ бурчакнинг вақт билан боғланишли қонуниятини ўрганиш кифоя. Бунинг учун маятник қўйилиш нуқтаси орқали ўтган ва вертикал текисликка перпендикуляр бўлган oz ўққа нисбатан нуқта ҳаракат миқдори моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремадан фойдаланамиз

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_z(\overline{F}_k) \tag{19}$$

Шарчага иккита куч: вертикал равишда пастки йўналган $P = mg$ оғирлик кучи ва R ипнинг реакция кучи таъсир қилади. R реакция кучининг oz ўққа нисбатан моменти нолга тенг, чунки бу кучнинг таъсир чизиғи oz ўқни кесиб ўтади. P оғирлик кучининг oz ўққа нисбатан моменти эса $-Ph = -mg\ell \sin\varphi$ бўлади. Бу ердаги «-» ишора моментининг йўналиши φ бурчакнинг ортиб бориш йўналишига қарама-қарши йўналганлигини билдиради. Маятникка таъсир қилувчи кучлар моментларининг йиғиндисини топамиз

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(\overline{F}_k) = -mg\ell \sin\varphi \tag{20}$$

oz ўққа нисбатан маятник ҳаракат миқдорининг моменти $K_z = m\ell$

га тенг. Бу ерда $\vartheta_\tau = \ell\dot{\varphi}$ бўлганлиги учун $K_z = m\ell^2\dot{\varphi}$ бўлиб, $\frac{dK_z}{dt} = m\ell^2\ddot{\varphi}$ бўлади. Бу топилган натижани ва (2) ни (1)га қўйиб, маятник ҳаракатининг дифференциал тенгламасини $\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\sin\varphi = 0$ кўринишда , агар $\sin\varphi \approx \varphi$ тақрибий формулани эътиборга олсак у тенгламани $\ddot{\varphi} + \omega_o^2\varphi = 0$ (3) кўринишга келтирамиз. Бунда $\omega_o = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$. Дифференциал тенгламалар назариясидан маълумки, (3) тенгламанинг хусусий ечимлари $\varphi = e^{kt}$ кўринишда изланади. $\varphi = e^{kt}$ ва $\ddot{\varphi} = k^2e^{kt}$ ни (3) тенгламага қўйиб , К ни топиш учун $K^2 + \omega_o^2 = 0$ хусусиятли тенгламани оламиз. Бу тенгламанинг илдизлари соф мавҳум сонлардан иборат : $K_{1,2} = \pm i\omega$ Бундай ҳолда (3) тенгламанинг умумий ечимини $\varphi(t) = C_1\sin\omega_o t + C_2\cos\omega_o t$ (4) кўринишда олиш мумкин. Қулайлик учун C_1 ва C_1 интеграллаш доимийлари ўрнига $C_1 = A\cos\alpha$ ва $C_1 = A\sin\alpha$ формулалар билан A ва α доимий сонларни киритсак, (4) умумий ечим, яъни маятникнинг ҳаракат қонуни $\varphi(t) = A\sin(\omega_o t + \alpha)$ кўринишни олади. Бу ерда A ва α ихтиёрий ўзгармас сонлар бўлиб, тайинланган бошланғич шартлардан фойдаланиб топилади. Шундай қилиб, маятникнинг эркин тебранишлари гармоник тебранишларни ифодалар экан. Унинг тебраниш даврини топиш учун маятникнинг ҳаракат тенгламасини тузиб, уни (3) кўринишга келтириш керак. Сўнгра унинг частотаси ва тебраниш даври $\omega_o = \sqrt{\frac{g}{\ell}}, T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ формулалар билан аниқланади.

IV ҚИСМ. МЕХАНИК ТИЗИМ ДИНАМИКАСИ

21-МАШҒУЛОТ

5-§. Механик тизим ва қаттиқ жисм динамикасининг асосий тушунчалари

1. Ҳаракатлари ўзаро бир-бири билан боғлиқ бўлган моддий нуқталар тўпламига механик тизим дейилади. Механик тизимга қаттиқ жисм, исталган механизм (қурилма), қуёш тизими ва ҳ.к. мисол бўла олади.

Моддий нуқталар тизими эркин ва эркин бўлмаган тизимларга булинади. Моддий нуқталар тизимининг ҳаракати бирор боғланиш билан чегаралланмаган бўлиб, тизим нуқталарининг ҳаракати фақат уларга таъсир қилаётган кучлар билан аниқланса, бундай тизимга эркин нуқталар тизими дейилади. Эркин материал нуқталар тизимига Куёш тизими мисол бўла олади. Астрономияда планеталарга моддий нуқта сифатида қарайди. Планеталар уларга таъсир қилаётган кучларга боғлиқ бўлиб, арбита бўйлаб эркин ҳаракатланади.

Моддий нуқталар тизимининг ҳаракатига унинг нуқталарига қўйилган боғланишлар тўсқинлик қилса, бундай нуқталар тўпламига эркин булмаган моддий тизим дейилади. Эркин бўлмаган нуқталар тизимига исталган механизм ёки айрим қисмларининг ҳаракатлари боғланишлар билан чегаралланган машина мисол бўла олади.

Маълумки, тизим нуқталарига қўйилган боғланишларнинг механик таъсири боғланиш реакция кучи билан ифодаланади. Шундай экан, эркин бўлмаган нуқталар тизимига таъсир қилувчи кучларни берилган (бевосита қўйилган) ва боғланиш реакция кучларига бўлиш мумкин.

Кўпчилик ҳолларда исталган ва эркин бўлмаган механик тизимга қўйилган кучларни ташқи ва ички кучларга ажратамиз.

Моддий тизим нуқталарига бу тизим таркибига кирмаган моддий нуқталарнинг кўрсатган таъсирини ташқи кучлар дейилади. Механик тизимни ташкил қилувчи нуқталарнинг ўзаро таъсири туфайли ҳосил бўладиган кучларга ички кучлар дейилади.

Кейинчалик ички кучларни $\overline{F}_k^i\left(k = \overline{1,n}\right)$ ва уларнинг проекцияларини эса X_k^i, O_k^i, Z_k^i орқали белгилаймиз, ташқи кучларни $\overline{F}_k^e\left(k = \overline{1,n}\right)$ ва уларнинг проекцияларини эса, $X_k^e, У_k^e, F_k^e\left(k = \overline{1,n}\right)$ орқали белгилаймиз.

Шундай қилиб, механик тизим нуқталарининг ҳаракатлари ташқи ва ички кучларга боғлиқ бўлар экан.

Тўғри ва акс таъсирнинг тенглик қонунига кўра, ҳар бир ички кучга бошқа бир модули тенг йўналиши эса бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши йўналган ички куч мос келади. Бу хулосадан ички кучларининг қуйидаги иккита хоссаси келиб чиқади:

1) Тизим барча ички кучларининг бош вектори ва уларнинг координата ўқларидаги проекцияларининг йиғиндиси нолга тенг

$$\overline{R}^i = \sum_k \overline{F}_k^i = 0; \tag{1}$$

$$\sum_k X_k^i = 0, \quad \sum_k Y_k^i = 0, \quad \sum_k Z_k^i = 0. \tag{2}$$

2) Тизим барча ички кучларининг бирор исталган марказга ёки ўққа нисбатан моментларининг йиғиндиси (бош моменти) нолга тенг.

Ички кучларнинг бу иккала хоссасидан ички кучлар ўзаро тенг ўлчанувчи кучлар бўлиб, улар бир-бирини компенсациялайди, яъни улар ўз-ўзидан йўқолиб кетади, улар тизимнинг ҳаракатига таъсир кўрсата олмайди деган хулосани чиқариш мумкин эмас. Ички кучлар тизимнинг ҳар хил нуқталарига (қисмларига) қўйилган бўлиб, бу кучлар қўйилган нуқталарнинг (қисмларнинг) ўзаро кўчишини вужудга келтириши мумкин.

2. Моддий тизимнинг ҳаракати унга таъсир қилаётган кучдан ташқари, тизимнинг массасига ва массанинг тақсимланиши усулига ҳам боғлиқ бўлади.

Моддий тизимнинг (қаттиқ жисмнинг) массаси аддитив хоссага эга бўлиб, унинг массаси тизимни (қаттиқ жисмни) ташкил қилувчи нуқталар (қисмлари) массаларининг арифметик йиғиндисига тенг

$$M = \sum_k m_k \tag{3}$$

$g = const$ бўлган бир жинсли оғирлик кучи майдонида исталган жисмнинг оғирлиги унинг массасига пропорционал бўлади. Шундай экан жисмда массанинг тақсимотини унинг оғирлик марказининг ҳолати бўйича аниқлаш мумкин. Агар параллел кучлар марказининг координаталарини аниқлаш формулаларида $P_k = m_k g$, $M \cdot g = P$ деб, кейин g га қисқартириб, жисм масса марказининг координаталарини топиш формулаларини оламиз

$$x_c = \frac{\sum\limits_k m_k x_k}{M}, \quad y_c = \frac{\sum\limits_k m_k y_k}{M}, \quad z_c = \frac{\sum\limits_k m_k z_k}{M} \tag{4}$$

Бу ерда x_k, y_k, z_k – m_k массали тизим нуқтасининг координаталари, $C(x_c, y_c, z_c)$ эса тизим (жисм) масса маркази. (4) формулалар билан аниқланадиган С геометрик нуқта механик тизимнинг масса маркази ёки инерция маркази деб аталади.

Агар механик тизим масса марказининг ҳолати унинг $\bar{r}_c$ радиус-вектори билан аниқланадиган бўлса, у ҳолда (4) тенгликлардан $\bar{r}_c$ учун

$$\bar{r}_c = \frac{\sum\limits_k m_k \bar{r}_k}{M} \tag{5}$$

формулани оламиз. Бунда $\bar{r}_c = x_c\bar{i} + y_c\bar{y} + z_c\bar{k}$ ва $\bar{r}_k = x_k\bar{i} + y_k \cdot \bar{j} + z_k\bar{k}$ тизим m_k массали нуқтасининг радиус-вектори.

Юқорида айтилганлардан бир жинсли оғирлик кучи майдонида жойлашган тизим масса марказининг ҳолати оғирлик марказининг ҳолати билан устма-уст тушар экан деган хулосани чиқаришга имкон беради. Тизимнинг масса ва оғирлик маркази тушунчалари айни бир хил тушунчалар эмас. Бир жинсли бўлмаган куч майдонида улар устма-уст тушмаслиги ҳам мумкин.

Масса маркази ҳақидаги тушунча оғирлик кучи майдонида жойлашган қаттиқ жисмга тегишли бўлиб, оғирлик кучлари тенг таъсир этувчисининг таъсир чизиғи ўтадиган нуқта ҳақидаги тушунча бўлса, масса маркази ҳақидаги тушунча эса тизимда массанинг тақсимотини ифодалаб, материал нуқталарнинг исталган тизими учун маънога эга бўлади.

3. Ўққа нисбатан жисмнинг инерция моменти тушунчасини киритамиз.

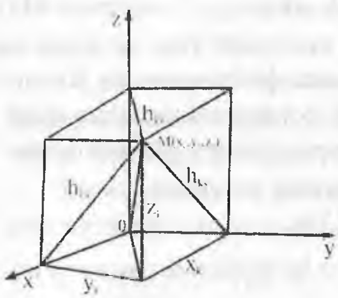
Жисм масса марказининг ҳолати унинг тақсимланган массасини тўлигича аниқлай олмайди. Масалан, oz ўқдан бир хил h масофада турган иккита бир хил А ва В шарларнинг массасини бир хил оширганимизда тизимнинг масса маркази қўзғалмасдан қолади. Лекин тақсимланган масса ҳар хил бўлади. Бунга болалар "карусели" ҳам мисол бўла олади. Шундай экан, механикада массанинг тақсимотини аниқлашга ёрдам берадиган жисмнинг ўққа, марказга, текисликка нисбатан инерция моментлари тушунчасини киритиш зарурияти туғилади.

Берилган ox (oy, oz) ўққа нисбатан жисмнинг инерция моменти деб, шундай скаляр миқдорга айтиладики, бу скаляр миқдор жисмни ташкил қилувчи барча нуқталар массалари билан у нуқталардан ўққача бўлган масофалар квадратига бўлган кўпайтмалар йиғиндисига тенг

$$J_x = \sum_k \nabla m_k h_{kx}^2 \quad \left(J_z = \sum_k \nabla m_k h_{kz}^2, \qquad J_y = \sum_k \nabla m_k h_{ky}^2 \right) \tag{6}$$

бунда, ∇m_k жисм нуқтасининг, массаси h_{kx}, h_{ky}, h_{kz} – жисм нуқталаридан ox, oy, oz ўқларгача бўлган масофалар.

Келтирилган таърифдан равшанки, жисмнинг инерция моменти исталган ўққа нисбатан мусбат миқдор бўлиб, у нолга тенг эмас. Бундан ташқари жисмнинг илгариланма ҳаракатида масса қандай рол ўйнаса, жисмнинг ўқ атрофида айлана ҳаракатида инерция моменти шундай рол ўйнайди. Шундай қилиб, жисмнинг ўққа нисбатан инерция моменти унинг айланма ҳаракатида жисм инертлигининг ўлчови бўлиб хизмат қилади.



67-чизма.

Юқоридаги таърифдек танланган нуқтага нисбатан жисмнинг инерция моменти тушунчаси ҳам киритилади. О нуқтага нисбатан жисмнинг инерция моменти

$$J_o = \sum_k \nabla m_k \cdot r_k^2 \tag{7}$$

тенглик билан топилади. Бу ерда ∇m_k ҳам тизим нуқтасининг массаси, $\overline{r}_k$ эса бу нуқтанинг радиус-вектори.

oxy(oxz, oyz) координата текислигига нисбатан ҳам инерция ўққа (нуқтага) нисбатандек топилади

$$J_{oxy} = \sum_k \nabla m_k Z_k^2, \quad J_{oxz} = \sum_k \nabla m_k y_k^2, \quad J_{oyz} = \sum_k \nabla m_k x_k^2 \tag{8}$$

Инерция моментларини ҳисоблаш учун бошқа аналитик ифодалар топамиз. Чизилган шаклдан фойдаланиб (67-чизма),

$$\left. \begin{aligned} h_{kz}^2 &= x_k^2 + y_k^2, \\ h_{ky}^2 &= x_k^2 + z_k^2, \\ h_{kx}^2 &= y_k^2 + z_k^2. \end{aligned} \right| \tag{9}$$

$$r_k^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 \tag{10}$$

муносабатларни оламиз.

(9) ни (6) га қўйиб, ўққа нисбатан моментлар учун ифодалар оламиз

$$J_x = \sum_k \nabla m_k (y_k^2 + z_k^2),$$

$$J_y = \sum_k \nabla m_k (x_k^2 + y_k^2), \qquad (11)$$

$$J_z = \sum_k \nabla m_k (x_k^2 + y_k^2).$$

(10) ни (7) га қўйиб, нуқтага нисбатан инерция моменти учун ифода оламиз

$$J_o = \sum_k \nabla m_k \left(x_k^2 + y_k^2 + Z_k^2 \right) \qquad (12)$$

Ўқ ва марказга нисбатан моментлар орасида боғланишни ўрнатиш учун (11) тенгликларни ҳадлаб қўшсак, (12) тенглик ўнг қисмининг икки баравари, ҳосил бўлади

$$J_x + J_y + J_z = 2 J_o \qquad (13)$$

4. (6) ва (13) формулалардан қаттиқ жисмнинг ўққа ва марказга нисбатан инерция моментларини ҳисоблашда фойдаланилади. Кўпчилик ҳолларда қаттиқ жисмнинг бирор ўққа ёки нуқтага нисбатан инерция моментлари $\nabla m_k \Rightarrow 0$ да (нуқтанинг массаси етарлича кичкина бўлганда) (6) ёки (7) йиғиндининг лимити сифатида топилади

$$J_z = \lim_{\nabla m_k \to 0} \sum_k r_{kz}^2 \nabla m_k .$$

Масса текис тақсимланганда интеграл йиғиндининг лимити интегралга ўтади

$$J_z = \int_{(M)} r^2 dm \qquad (14)$$

Бу ерда интеграллаш жисмнинг массаси тақсимланган ҳажм, сирт ва узунлик бўйича бажарилади.

Энди жисмнинг ∇m массали $\nabla \gamma$ ҳажмини қараймиз. Танланган нуқта бу ҳажмнинг ички нуқтаси бўлсин. Жисмнинг ажратилган ҳажмига мос келадиган массаси $dm = \gamma dv$ бўлади. Бунда γ жисмнинг қаралаётган нуқтадаги зичлиги, яъни жисмнинг ҳажм бирлигидаги массаси.

Агар жисм бир жинсли бўлмаса, у ҳолда зичлик жисм нуқталарининг координаталарига боғлиқ бўлади. Бир жинсли бўлмаган жисмнинг массаси

$M = \int \gamma dv = \iiint_{(v)} \gamma(x, y, z) dxdyz$ формула бўйича ҳисобланади. Бир жинсли жисмда масса зичлиги барча нуқталарда бир хил бўлади, унинг массаси $M = \gamma V (\gamma = const)$ формула билан топилади. Бир жинсли жисм учун унинг ўққа нисбатан инерция моменти

$$J_z = \iiint r^2 dm = \iiint r^2 \gamma dV = \gamma \iiint r^2 dV \qquad (15)$$

формула бўйича ҳисобланади. Агар масса бирор сирт бўйича текис тақсимланган бўлса, бундай жисмнинг ўққа нисбатан инерция моменти

$$J_z = \gamma_1 \iint_{(\tau)} r^2 d\tau \qquad (16)$$

формула бўйича аниқланади. Бунда γ_1 сирт юзасига мос келадиган масса бирлиги, $d\tau$ сирт элементар бўлакчасининг юзи.

Агар масса бирор L чизиқ бўйича текис тақсимланган бўлса, бундай жисмнинг ўққа нисбатан инерция моменти

$$J_z = \gamma_2 \int_{(L)} r^2 dl \qquad (17)$$

формула бўйича топилади. Бунда γ_2 узунлик бирлигига мос келадиган масса. Интеграл эса бутун L чизиқ бўйича ҳисобланади.

Кўпчилик амалий масалаларни ечишда жисмнинг координата ўқларига нисбатан моментларини

$$J_x = \gamma \iiint_{(v)} \left(y^2 + z^2\right) dV, \quad J_y = \gamma \iiint_{(v)} \left(x^2 + z^2\right) dV, \quad J_z = \gamma \iiint_{(v)} \left(x^2 + y^2\right) dV$$

формулалар билан ҳисоблаш мумкин.

5. Инерция радиуси. Жисмнинг инерция моменти (6) формулалар билан ҳисоблаш учун жуда кўп вақт сарфланади. Масалан, oz ўққа нисбатан жисмнинг инерция моментини топиш учун:

1) жисм ҳар бир қисмининг массасини, яъни $\nabla m_1, \nabla m_k, ..., \nabla m_n$ ни билиш керак;

2) ҳар бир нуқтадан oz ўққача бўлган $h_{1z}, h_{2z}, ... h_{nz}$ масофаларни ўлчаш лозим;

3) бу масофаларнинг $h_{1z}^2, h_{2z}^2, ..., h_{nz}^2$ квадратларини ҳисоблаш керак;

4) $\nabla m_1 h_{1z}^2, \nabla m_2 h_{1z}^2, ..., \nabla m_n h_{nz}^2$ кўпайтмаларни ҳисоблаш зарур;

5) $\sum_k \nabla m_k h_{kz}^2 = \nabla m_1 h_{1z}^2 + \nabla m_2 \cdot h_{2z}^2 + ... + \nabla m_n h_{nz}^2$.

Йиғиндини ҳисоблаш керак. Шундай қилиб, жисмнинг инерция моментини аниқлаш биздан узоқ ҳисоблашни талаб қилади. Жисм инерция моментини ҳисоблашнинг қулайроқ усулларини излаш заруриятi туғилади. Шундай усуллардан бири–жисмнинг инерция радиуси тушунчасига асосланган усул.

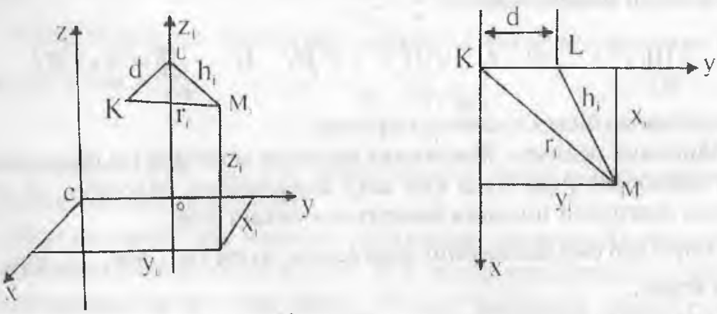
oz ўққа нисбатан инерция радиуси чизиқли миқдор бўлиб,

$$J_z = M\rho_u^2 \tag{18}$$

тенглик билан топилади. Бунда M жисмнинг массаси ρ_u инерция радиуси, яъни ρ_u ўқдан жисмнинг ҳамма массаси тўпланган нуқтагача бўлган масофадир.

Шундай қилиб, бирор ўққа нисбатан жисм массаси тўпланган нуқтанинг инерция моменти бутун жисмнинг инерция моментига тенг бўлар экан.

6. Параллел ўқларга нисбатан инерция моментлари ҳақидаги теоремани келтирамиз. Жисмнинг ҳар хил ўқларга нисбатан инерция моментлари ҳар хил бўлади. Биз қандайдир ўққа нисбатан жисмнинг инерция моментини билган ҳолда бошқа бир ўша ўққа параллел бўлган ўққа нисбатан инерция моментини ҳисоблаш масаласини ҳал қиламиз. Фараз қилайлик oz_1 ўқ берилган бўлсин. Қўйилган масаласини ечиш учун жисм-



68-чизма.

нинг C оғирлик маркази орқали ўзаро перпендикуляр бўлган координата ўқларини ўтказамиз. Бунда cz ўқ берилган oz_1 ўққа параллел бўлиб cx ва cy ўқларга перпендикуляр бўлган текисликда ётади. cz ва oz_1 ўқлар орасидаги масофани d орқали белгилайлик. cz ва oz_1 ўқларга нисбатан жисмнинг инерция моментини ҳисоблаш учун ҳар бир M_i нуқтадан cz ва oz_1 ўқларга r_i ва h_i перпендикулярни туширамиз. Бу перпендикулярларнинг узунликларини нуқталарнинг координаталари орқали ифодалаймиз (68-чизма).

$$
\begin{aligned}
r_i^2 &= x_i^2 + y_i^2 \\
h_i^2 &= x_i^2 + (y_i - d)^2 = \\
&= r_i^2 + d^2 - 2y_i d
\end{aligned}
\qquad (19)
$$

cz ва oz_1 ўқларга нисбатан жисмнинг инерция моментларини аниқлаймиз

$$J_z = \sum_i m_i r_i^2, \quad J_{z_1} = \sum_i m_i h_i^2.$$

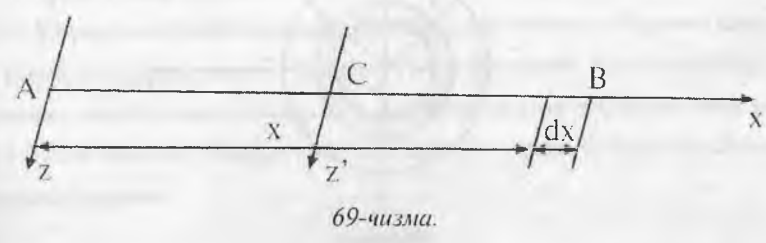
(19) боғланишни эътиборга олсак,

$$J_z = \sum_i m_i r_i^2 + \sum_i m_i d^2 - 2\sum_i m_i y_i d$$

$$J_{z_1} = J_z + d^2 \sum_i m_i - 2d \sum_i m_i y_i,$$

бу ерда, $\sum_i m_i = m$ – жисмнинг массаси. Масса марказининг координаталарини топиш формуласига кўра $\sum_i m_i y_i = m y_c$ боғланишга эга бўламиз. Бизнинг ҳолда С нуқта координата бошидан иборат бўлгани учун $y_c = 0$ бўлиб, $\sum_i m_i y_i = 0$ бўлади. Натижада $J_{oz_1} = J_{cz} + md^2$ (20) боғланишини топамиз. Бу боғланиш қуйидаги Гюйгенс теоремасини ифодалайди: бирор ўққа нисбатан тизимнинг инерция моменти шу ўққа параллел бўлган ва масса маркази орқали ўтган ўққа нисбатан инерция моменти билан тизим массасини бу параллел ўқлар орасидаги масофа квадратига бўлган кўпайтмасининг йиғиндисига тенг. (20) формуладан равшанки, параллел ўқларга нисбатан жисмнинг инерция моменти масса маркази орқали ўтган ўққа нисбатан энг кам бўлар экан.

Энди бир жинсли жисмларнинг инерция моментларини ҳисоблашга ўтамиз.



69-чизма.

7.1. Стержен. Бизга узунлиги ℓ га ва массаси M га тенг бўлган бир жинсли ингичка стержен берилган бўлсин. Стерженга унинг А учи ва С ўрта нуқтаси орқали перпендикуляр қилиб ўтказилган AZ ва cz^1 параллел ўқларга нисбатан унинг инерция моментларини ҳисоблаймиз (69-чизма).

$dx = d\ell$ элементар кесманинг узунлигига $dm = \gamma_1 dx$ масса мос келади.

Бунда $\gamma_1 = \frac{M}{\ell}$ бўлиб, узунлик бирлигига мос келувчи масса ва $r = x$ бўлсин. Натижада (17) формулага кўра қуйидагиларни оламиз:

$$J_{AZ} = \int_0^{\ell} x^2 dm = \gamma_1 \int_0^{\ell} x^2 dx = \gamma_1 \frac{\ell^3}{3} = \frac{1}{3} M\ell;$$

$$J_{cz} = \gamma_1 \int_0^{\ell} \frac{x^2}{4} dx = \gamma_1 \cdot \frac{x^3}{12} = \frac{1}{12} M\ell^2 .$$

Охирги натижани Гюйгенс теоремасига кўра ҳам олиш мумкин

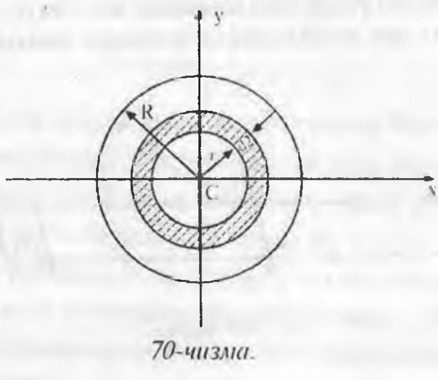
$$J_{AZ} = J_{oz} + Md^2; \; J_{AZ} = \frac{1}{3} M\ell^2; \; d = \frac{\ell}{2}$$

$$J_{cz} = J_{AZ} - Md^2 = \frac{1}{3} M\ell^2 - \frac{1}{4} M\ell^2 = \frac{1}{12} M\ell^2.$$

7.2. Доиравий пластинка. Бизга R радиусли М массага эга бўлган бир жинсли доиравий пластинка берилган бўлсин (70-чизма).

Доиравий пластинканинг инерция моментини унга перпендикуляр бўлиб, марказидан ўтган cz ўққа нисбатан ҳисоблаймиз. Бунинг учун кенглиги dr бўлган r радиусли элементар ҳалқани ажратамиз (70-чизма).

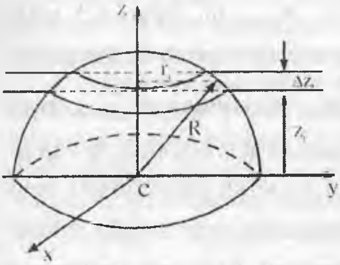
Бу ҳалқанинг юзи $2\pi r dr$ га, массаси эса $dm = 2\pi\gamma_2 \, rdr$ га тенг. Бунда



70-чизма.

$\gamma_2 = \frac{M}{\pi R^2}\cdot$ (6) формулаларнинг охиргисига кўра $dJ_{cz} = 2\pi\gamma_2 r^3 dr$ бўлиб,

бутун пластинка учун $J_{cz} = 2\pi\gamma_2 \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\pi\gamma_2 R^4 = \frac{1}{2}MR^2$ натижани оламиз.



71-чизма

7.3. Зичлиги ρ га тенг бўлган R радиусли шар шаклидаги жисмнинг масса маркази орқали ўтган cz ўққа нисбатан инерция моменти ҳисоблансин (71-чизма).

Шарнинг массасини ҳисоблаймиз:

$$m = \frac{4}{3}\rho\pi R^3 \qquad (21)$$

Шарнинг марказий *cz* ўққа нисбатан моментини аниқлаш учун шарни қалинлиги Δz_i га тенг ва *xcy* текисликка параллел бўлган қисмларга ажратамиз. r_i радиусли қатламининг массасини топамиз $m_i = \rho\pi r_i^3 \Delta z_i$ бунда $r_i^2 = R^2 - Z_i^2$. Элементар қатламнинг *cz* ўққа нисбатан инерция моментини олдиндан маълум формула бўйича топамиз

$$\Delta J_{cz} = \frac{1}{2} m_i r_i^2 = \frac{1}{2}\rho\pi r_i^4 \Delta z_i = \frac{1}{2}\rho\pi (R^2 - Z_i^2)^2 \Delta z_i\,.$$

Шарнинг cz ўққа нисбатан инерция моменти шу ўққа нисбатан элементар қатламлар моментлари йиғиндисининг лимити сифатида топилади

$$J_{cz} = \int_R^R \rho\pi\,(R^2 - z^2)dz = \frac{1}{2}\rho\pi R^4 \int_R^R dz - \rho\pi R^2 \int_R^R z^2 dz + \frac{1}{2}\rho\pi \int_R^R z^4 dz =$$

$$= \frac{1}{2}\rho\pi R^4 \cdot 2R - \rho\pi R^2 \cdot \frac{2}{3}R^3 + \frac{1}{2}\rho\pi \cdot \frac{2}{5}R^5 = \frac{8}{15}\rho\pi R^5 \qquad J = \frac{2}{5}mk^2$$

(21) формулани эътиборга олсак, изланаётган формулани оламиз.

7.4. Юқоридаги формулалардан фойдаланиб, тўғри тўртбурчак, квадрат, ромб, учбурчак, доира, эллипс, тўғри бурчакли праллелепипед, пирамида, конус, ички қисми бўш цилиндр, яхлит цилиндр, шар ва унинг бўлакларининг инерция моментларини марказ ва ўққа нисбатан ҳисоблаш мумкин.

22-МАШҒУЛОТ

6-§. Тизим масса марказининг ҳаракати ва ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема

1. Механик тизим ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини чиқарамиз. Бизга n та $M_1, M_2, ..., M_n$, моддий нуқталар тизими берилган бўлсин. Тизим нуқталарининг массалари $m_1, m_2, ..., m_n$ бўлсин. У моддий нуқталарнинг ҳолатлари $\bar{r}_1, \bar{r}_2, ..., \bar{r}_n$ радиус-векторлар билан аниқлансин. k - моддий нуқтанинг массасини m_k, тезланишини $\overline{a_k}$, унинг ҳолатини аниқловчи радиус-векторни $\bar{r}_k$ орқали белгилайлик. k - моддий нуқтага таъсир қилувчи барча ташқи ва ички кучларнинг тенг таъсир этувчиларини $\overline{R}_k^e$ ва $\overline{R}_k^i$ орқали белгилайлик.

Тизимнинг ҳар бир нуқтасига Ньютоннинг иккинчи қонунини қўллаймиз.

$$m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \overline{R}_k^e + \overline{R}_k^i, \quad \overline{\overline{K = 1, n}} \qquad (1)$$

(1) вектор тенгламанинг иккала қисмини ox, oy, oz ўқларга проекциялаб, қуйидаги учта скаляр тенгламаларни оламиз:

$$m_k \ddot{x}_k = R_{kx}^e, \; m_k \ddot{y}_k = R_{ky}^e + R_{ky}^i, \; m_k \ddot{z}_k = R_{kz}^e + R_{kz}^i \qquad (2)$$

Ички кучлар тизимининг хоссасига кўра $\overline{R}_k^i = \sum_k F_k^i = 0$ бўлади, яъни ички кучлар тизимининг бош вектори нолга тенг. Натижада (2) тенгламалар

$$m_k \ddot{x}_k = R_{kx}, \; m_k \ddot{y}_k = R_{ky}, \; m_k \ddot{z}_k = R_{kz} \qquad (3)$$

кўринишни олади. Бунда

$$R_{kx}^e = \sum_k F_{kx}^e, \; R_{ky}^e = \sum_k F_{ky}^e, \; R_{kz}^e = \sum_k F_{kz}^e.$$

Юқорида олинган (1) ва унга тенг кучли бўлган (3) тенгламалар механик тизим ҳаракатининг вектор ва скаляр шаклдаги дифференциал тенгламаларини ифодалайди. Дифференциал тенгламаларнинг вектор шаклдагисининг сони *n* га, координата шаклдагиларининг сони эса *3n* га тенг.

Баъзи бир хусусий ҳолларда берилган кучларни билган ҳолда тизим дифференциал тенгламаларини ҳар бир нуқта учун алоҳида интеграллаб, нуқталарнинг қонунларини топиш мумкин. Лекин умумий ҳолда бундай масалани айрим олинган нуқталар учун тўлиқ ҳал қилиб бўлмайди.

Бу масала айниқса, бутун олам тортишиш қонуни бўйича ўзаро таъсирланувчи кучлар таъсиридаги иккита нуқта учун (икки жисм масаласи) мураккабдир. Ҳатто бу масалани ўзаро таъсирланувчи учта нуқта учун (учта жисм масаласи) ечиб ҳам бўлмайди.

Агар механик тизимни боғланиш билан биргаликда қарасак, яъни тизимнинг ҳаракат тенгламалари таркибида олдиндан номаълум бўлган реакция кучлари қатнашса, тизим ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини интеграллаш янада қийинлашади.

2. Кўпчилик амалий масалаларни ҳал қилишда механик тизим ҳаракатини аниқлаш учун, тизим масса марказининг ҳаракат қонунини аниқлаш етарли бўлади. Бу қонунни топиш учун диққатимизни тизимнинг (1) кўринишдаги ҳаракат тенгламаларига қаратамиз. (1) кўринишдаги тенгламани тизимнинг ҳар бир нуқтаси учун тузиб, уларни ҳадлаб қўшиб, тенгламалар тизимини оламиз.

$$\sum_k m_k \frac{d^2\bar{r}_k}{dt^2} = \sum_k \bar{F}_k^e + \sum_k \bar{F}_k^i \qquad (4)$$

Бу тенгламалар чап қисмининг кўринишини ўзгартирамиз. Бунинг учун тизим масса марказининг ҳолатини радиус-вектор ёрдамида аниқлаш формуласидан фойдаланамиз.

$$M\bar{r}_c = \sum_k m_k \bar{r}_k, \quad M = \sum_k m_k.$$

Йиғиндининг ҳосиласи ҳар бир қўшилувчи ҳосилаларининг йиғиндисига тенглигини эътиборга олиб, юқоридаги тенгликнинг иккала қисмидан вақт бўйича иккинчи тартибли ҳосиласини топамиз.

$$\sum_k m_k \frac{d^2\bar{r}_k}{dt^2} = M\frac{d^2\bar{r}_c}{dt^2} \Rightarrow \sum_k m_k \bar{a}_k = M\bar{a}_c,$$

бунда, a_c — тизим масса марказининг тезланиши.

Агар тизим ички кучларининг хоссасини эътиборга олсак, $\sum_k \bar{F}_k^i = 0$ бўлади. Натижада (4) тенгламалар тизими

$$M\bar{a}_c = \sum_k \bar{F}_k^e \qquad (5)$$

кўринишни олади.

(5) тенглама тизим масса марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремани ифодалайди: тизим массасининг унинг масса маркази тезланишига бўлган кўпайтмаси тизимга таъсир қилувчи ташқи кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг бўлади. (5) тенгламани нуқта ҳаракатининг тенгламаси билан солиштириб, теоремани бошқача ҳам шакллантириш мумкин: тизимнинг масса маркази худди массаси тизим массасига тенг

бўлган ва тизимга таъсир қилувчи барча ташқи кучлар қўйилган моддий нуқтадек ҳаракатланади. (5) тенгламанинг иккала қисмини координаталар ўқларига проекциялаб, *n* та вектор тенглама ўрнига, қуйидаги *3n* та скаляр тенгламаларни оламиз:

$$M\ddot{x}_c = \sum_k F_{kx}^e, \quad M\ddot{y}_c = \sum_k {}_{ky}, \quad M\ddot{Z}_c = \sum_k {}_{kz}^e \tag{6}$$

Исботланган теоремалардан қуйидаги хулосаларни чиқариш мумкин:

1) Теорема нуқта динамикасининг усулини тўлиқ асослашга имкон беради. (6) тенгламалардан равшанки, берилган жисмга материал нуқта деб қараб, чиқарадиган хулосамизни бу жисм масса марказининг ҳаракати тўлиғича аниқлайди. Хусусий ҳолда, жисм илгариланма ҳаракат қилса, унинг ҳаракатини масса марказининг ҳаракати тўлиғича аниқлайди. Шундай экан, илгариланма ҳаракат қилаётган ҳар қандай жисмни ҳаммавақт массаси жисмнинг массасига тенг бўлган моддий нуқта деб қараш мумкин экан.

2) Исботланган теорема исталган тизимнинг масса маркази ҳаракатининг қонунини аниқлашда олдидан номаълум бўлган барча ички кучларни қарашдан озод қилади. Бу эса теореманинг практик аҳамиятидир.

3) Масса марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремадан унинг натижаси сифатида тизим ҳаракатининг сақланиш қонунини оламиз: 1. борди-ю тизимга таъсир қилувчи барча ташқи кучларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлса, $\sum_k \overline{F}_k^e = 0$, Бундай ҳолда (5) тенгламадан $M\overline{a}_c = 0 \Rightarrow \overline{a}_c = 0 \Rightarrow \vartheta_c = \text{const}$ бўлишлиги келиб чиқади. Демак, агар тизимга таъсир қилувчи барча ташқи кучларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлса, у ҳолда тизим масса маркази модул ва йўналиш бўйича ўзгармас тезлик билан текис ва тўғри чизиқли ҳаракат қилади. Хусусий ҳолда, агар тизимнинг масса маркази бошланғич дақиқада тинч турган бўлса, у тинч турганича қолади. Ички кучларнинг таъсири тизимининг масса марказини ҳаракатга келтира олмайди. 2. Тизимга таъсир қилувчи ташқи кучларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлмасдан, балки бу кучлар тизимининг бирор ўқдаги проекцияларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши мумкин. Масалан, ох ўқдаги проекцияларининг йиғиндиси нолга тенг бўлсин, $\sum_k F_x^e = 0$. Бундай ҳолда (6) тенгламаларнинг биринчисидан $M\ddot{x}_c = 0 \to \ddot{x}_c = 0 \Rightarrow \dot{x} = \vartheta_{cx} = \text{const}$ бўлишлиги келиб чиқади. Демак, тизимга таъсир қилувчи ташқи кучлар тизимининг бирор ўқдаги проекцияларининг йиғиндиси нолга тенг бўлса, у ҳолда тизим масса маркази тезлигининг шу ўқдаги проекцияси ўзгармас миқдор бўлади. Чи-

қарилган барча хулосалар тизим масса маркази ҳаракатининг сақланиш қонунини ифодалайди.

3. Тизимнинг ҳаракат миқдори $\overline{Q}$, вектор миқдор булиб, бу миқдор тизим нуқталари ҳаракат миқдорларининг геометрик йиғиндисига тенг

$$\overline{Q} = \sum_k m_k \overline{\vartheta}_k \tag{7}$$

Таърифдан равшанки, тизимнинг ҳаракат миқдори вектори тизим нуқталари ҳаракат миқдорлари векторларининг геометрик йиғиндисидек аниқланар экан. Агар $m_k \overline{\vartheta}_k$ векторларга қурилган кўпбурчак ёпиқ бўлса, Q миқдор нолга тенг бўлади. Шундай экан, Q миқдор тизимининг ҳаракатини тўлиқ аниқлай олмайди.

(7) формула билан Q миқдорни ҳисоблаш жуда мураккаб. Бунинг учун тизим таркибига кирган ҳар бир нуқтанинг массасини ва тезликларини билиш керак. Кейин $m_1\overline{\vartheta}_1, m_2\overline{\vartheta}_2, ... m_n\overline{\vartheta}_n$ кўпайтмалар топилиб, ундан кейин эса бу кўпайтмаларнинг йиғиндиси топилади. Q ни ҳисоблаш учун қулайроқ ифода топамиз. Бунинг учун Q нинг ифодасини ўзгартирамиз.

$$\overline{Q} = \sum_k m_k \overline{\vartheta}_k = \sum_k m_k \frac{d\overline{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_k m_k \overline{r}_k\right).$$

Масса марказининг радиус-векторини аниқлаш формуласидан $\sum_k m_k \overline{r}_k = M\overline{r}_c$ тенгликка эга бўламиз. Натижада Q учун

$$\overline{Q} = \frac{d}{dt}(M\overline{r}_c) = M\frac{d\overline{r}_c}{dt} = M\overline{\vartheta}_c \tag{8}$$

ифодани топамиз. Шундай қилиб, тизимнинг ҳаракат миқдори тизим массаси билан унинг масса маркази тезлигига бўлган кўпайтмасига тенг экан. Бу усул билан айниқса, қаттиқ жисмнинг ҳаракат миқдорини ҳисоблаш жуда қулай бўлади.

(8) формуладан равшанки, агар жисм ҳаракатланиб, унинг масса маркази ҳаракатсиз қолса, бундай ҳолда жисмнинг ҳаракат миқдори нолга тенг бўлади. Масалан, жисм ўзининг масса маркази орқали ўтган қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракат қилса, унинг ҳаракат миқдори нолга тенг бўлади. Бунга болаларнинг вертикал ёки горизонтал ўрнатилган "карусели" мисол бўла олади.

Шундай қилиб, агар жисм мураккаб ҳаракат қилаётган бўлса, бундай ҳолда $\overline{Q}$ миқдор жисм ҳаракатининг айланма қисмини ҳарактерлай олмайди. Бу миқдор мураккаб ҳаракат қилаётган жисмнинг фақат масса маркази билан биргаликда қилаётган илгариланма ҳаракатини тавчифлай олади.

4. n та моддий нуқтадан иборат бўлган тизим берилган бўлсин. Тизимнинг ҳар бир нуқтаси учун унинг ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини тузамиз

$$m_1\frac{d\overline{\vartheta}}{dt} = \overline{F}_1^e + \overline{F}_1^i, \dots, m_n\frac{d\overline{\vartheta}_n}{dt} = \overline{F}_n^e + \overline{F}_n^i.$$

ва уларни ҳадлаб қўшиб, тизим ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини оламиз

$$\sum_k m_k\frac{d^2\overline{r}_k}{dt^2} = \sum_k \overline{F}_k^e + \sum_k \overline{F}_k^i.$$

Тенгликнинг ўнг қисмидаги биринчи қўшилувчи барча ташқи кучларнинг бош векторига тенг бўлса, иккинчи қўшилувчи эса ички кучларнинг хоссасига кўра нолга тенг бўлади. Натижада тизим ҳаракатининг дифференциал тенгламаси

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_k m_k\overline{\vartheta}_k\right) = \overline{R}^e \Rightarrow \frac{d\overline{Q}}{dt} = \overline{R}^e \qquad (9)$$

кўринишни олади. (9) тенгламалар тизими ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани дифференциал шаклда ифодалайди: тизимнинг ҳаракат миқдоридан вақт бўйича олинган ҳосила тизимга таъсир қилувчи ташқи кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг бўлади. (9)нинг иккала қисмини координата ўқларига проекциялаcак, қуйидаги скаляр тенгламаларни оламиз:

$$\frac{dQ_x}{dt} = R_x^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = R_y^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = R_z^e \qquad (10)$$

Энди теореманинг мазмунини бошқача ифодалаймиз. Фараз қилайлик $t = 0$ дақиқада тизимнинг ҳаракат миқдори $\overline{Q}_0$, $t = t_1$ дақиқада эса $\overline{Q}_1$ бўлсин. (9) нинг иккала қисмини dt га кўпайтириб интеграллаб, қуйидагини оламиз:

$$\overline{Q}_1 - \overline{Q}_0 = \int_0^{t_1}\overline{R}^e dt \Rightarrow \overline{Q}_1 - \overline{Q}_0 = \overline{S}^e \qquad (11)$$

Ўнг томонда турган интеграл ташқи кучларнинг импульсини ифодалайди. (11) тенглама тизим ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани интеграл шаклда ифодалайди: маълум вақт оралиғида тизим ҳаракат миқдори векторининг ўзгариши шу вақт оралиғида тизимга таъсир қилувчи ташқи кучлар импульсларининг йиғиндисига тенг. Масалалар ечишда (11) вектор тенглама ўрнига

$$Q_{1x} - Q_{0x} = S_x, \; Q_{1y} - Q_{0y}, \; Q_{1z} - Q_{0z} = S_z \qquad (12)$$

скаляр тенгламалардан фойдаланиш мумкин.

Исботланган теоремани масса марказининг ҳаракати ҳақидаги теорема билан боғлаймиз. Маълумки, Q миқдор $\overline{Q}_{1z} = m\overline{\vartheta}_c$ формула бўйича топилади. Бу ифодани (9) га қўйиб, $\frac{d\overline{\vartheta}_c}{dt} = \overline{a}_c$ эканлигини эътиборга олсак, тизим масса маркази ҳаракатининг тенгламасини оламиз

$$M\overline{a}_c = \sum_k \overline{F}_k.$$

Шундай қилиб, тизим масса марказининг ҳаракати ҳақидаги теорема ва тизим ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема битта теорема мазмунининг турли шаклда ифодаланиши экан. Қаттиқ жисмнинг ҳаракатини ўрганишда бу теоремалардан тенг фойдаланиш мумкин. Кўпчилик ҳолларда $M\overline{a}_c = \sum_k \overline{F}_k$ тенгламадан фойдаланиш қулайроқдир. Лекин баъзи бир узлуксиз муҳитлар (суюқлик, газ) учун практик жиҳатдан тизим масса маркази тушунчаси мазмунини йўқотади. Бундан узлуксиз муҳитлар ҳақидаги масалаларни ечишда тизим ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремадан фойдаланилади. Бундан ташқари бу теорема зарба ва реактив ҳаракат қонунларини ўрганишда муҳим рол ўйнайди. Бу теоремаларнинг ҳам практик аҳамиятлари шундан иборатки, жисмнинг ҳаракатини ўрганишда олдиндан номаълум бўлган ички кучларни қарашдан озод қилади.

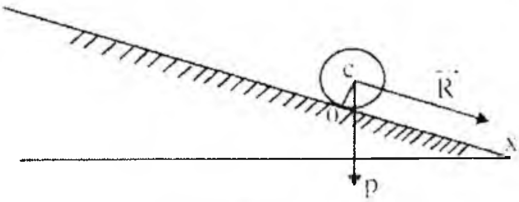
Тизим ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремадан қуйидаги муҳим хулосаларни чиқариш мумкин: 1) тизимга таъсир қилувчи барча ташқи кучларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлсин, $\sum_k \overline{F}_k = 0$.

Бундай ҳолда (9) тенгламадан $\overline{Q} = const$ бўлишлиги келиб чиқади.

Шундан қилиб, тизимга таъсир қилувчи ташқи кучларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлса, у ҳолда тизим ҳаракат миқдорининг вектори модуль ва йўналиши бўйича ўзгармас бўлади. 2) Тизимга таъсир қилувчи ташқи кучлар шундай хусусиятга эга бўлсинки, уларнинг бирорта координата ўқига нисбатан проекцияларининг йиғиндиси, масалан, ох ўққа нисбатан нолга тенг бўлсин:

$$\sum_k F_{kx} = 0.$$

Бундай ҳолда (10) тенгламаларнинг биринчисидан $Q_x = const$ бўлишлиги келиб чиқади. Демак, агар тизимга таъсир қилувчи кучларнинг бирорта координата ўқларидаги проекцияларининг йиғиндиси нолга тенг бўлса, у ҳолда тизим ҳаракат миқдорининг шу ўқдаги проекцияси ўзгармас миқдор бўлади. Бу чиқарилган хулосалар ва олинган натижалар тизим ҳаракат миқдорининг сақланиш қонунини ифодалайди. Тизимнинг ички кучлари унинг ҳаракат миқдорининг ўзгаришига таъсир қилмас экан.



72-чизма.

22-масала. P оғирликдаги ғилдиракнинг масса маркази $x_c = \frac{at^2}{2}$ қонун бўйича ҳаракатланиб, қия текисликдан думалаб тушмоқда. Ғилдиракка таъсир қилувчи ташқи кучларнинг бош векторини топинг (72-чизма).

Ечиш. Ғилдирак масса марказининг ҳаракатидек ҳаракат қилади. Шунинг учун қаттиқ жисм масса маркази ҳаракатининг тенгламасидан фойдаланамиз

$$M\overline{a}_c = \sum_k \overline{F}_k^e, \text{ бунда, } M = \frac{P}{g} \text{ ғилдирак массаси, } a_c \text{ – ғилдирак}$$

масса марказининг тезланиши. Бу тезланишни ғилдирак масса марказининг ҳаракат қонуни бўйича аниқлаймиз $\vartheta_{\tilde{n}} = \dot{x}_c = at$, $a_c = \ddot{x}_c = a$.

Ташқи кучларнинг бош вектори миқдор жиҳатидан $\sum_k F_k^e = \frac{Pa}{g}$ га тенг бўлиб, ox ўқига параллел ва ҳаракат йўналган томонга йўналгандир.

23-масала. Автомашинанинг эргашувчи ғилдираги горизонтал йўлда шаклда тасвирланган $\overline{F}$ куч таъсирида сирпаниб ҳаракатланмоқда. Агар ишқаланиш коэффициенти f га тенг бўлиб, $F = 5fP$ бўлса, ғилдирак масса марказининг ҳаракат қонунини топинг. P–ғилдирак оғирлиги. Ғилдирак бошланғич дақиқада тинч туради (73-чизма).

Ечиш. Ғилдирак илгариланма ҳаракат қилади. Унга $F = 5fP$ ва $F_{ишқ} = fP$ кучлар таъсир этади. Масса маркази ҳаракатининг

$$\frac{P}{g}\ddot{x} = 5fP - fP$$

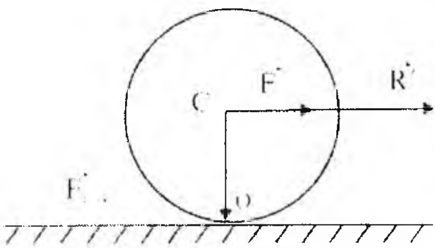
дифференциал тенгламасини $x_c|_{t=0}=0$ ва $\dot{x}_c|_{t=0}=0$ бошланғич шартлар билан интеграллаймиз

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx_c}{dt}\right)=4fg,\qquad \frac{dx_c}{dt}=4fgt+c_1$$

$$dx_c=4fgtdt+c_1dt\qquad x_c=2fgt^2+c_1t+c_2$$

Агар $t=0$ бўлганда $x_c=0$ ва $\dot{x}_c=0$ бўлишлигини эътиборга олсак, $C_1=C_2=0$ бўлади. Ғилдиракнинг масса маркази $x_c=2fgt^2$ қонун бўйича ҳаракатланади.

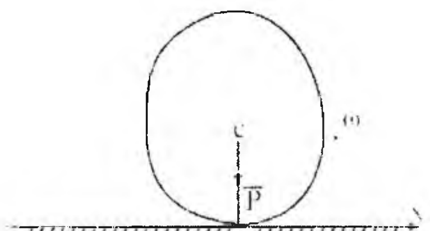
24-масала. P оғирликдаги автомашинанинг эргаштирувчи ғилдираги горизонтал сирпаниб, йўлда айлантирувчи момент таъсирида ғилдирайди. Агар сирпаниш ишқаланиш коэффициенти f га тенг бўлса, ғилдирак C масса марказининг ҳаракат қонунини топинг. Ғилдирак бошланғич дақиқада тинч туради (74-чизма).



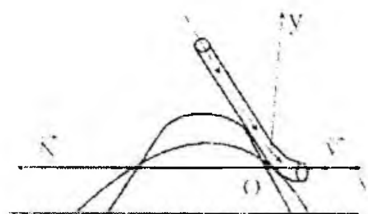
73-чизма.

Ечиш. Айлантирувчи момент ғилдирак масса марказининг ҳаракатини ўзгартира олмайди. Ғилдирак илгариланма ҳаракат қилади. Ғилдирак масса марказининг ҳаракат қонунини ифодаловчи $\frac{P}{g}\ddot{x}_c=f_{\ldots}$ тенгламани $x_c|_{t=0}=0$ ва $\dot{x}_c|_{t=0}=0$ бошланғич шартларда интеграллаймиз

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx_c}{dt}\right)=fg,\quad \frac{dx_c}{dt}=fgt+c_1,\quad dx_c=fgtdt+c_1dt,\quad x_c=\frac{fgt^2}{2}+c_1t+c_2$$



74-чизма.



75-чизма.

Қуйилган бошланғич шартларни эътиборга олсак, $C_1=C_2=0$ бўлади. Ғилдирак масса марказининг ҳаракати $x_c = \frac{fgt^2}{2}$ тенглама билан аниқланади.

25-масала. Диаметри $d = 300$ *мм* га тенг бўлган трубада ҳаракатланаётган сув оқими трубанинг пастки таянч қисмига берадиган босимининг $\overline{N}$ горизонтал ташкил этувчисини аниқланг (75-чизма). Сув $\vartheta = 2\ ^{м}/_{сек}$ тезлик билан оқади.

Ечиш. Суюқлик заррачалари орасидаги ўзаро таъсир туфайли пайдо бўладиган ички кучларни, ички босимни қарашдан озод бўлиш мақсадида (12) тенгламаларнинг биринчисидан фойдаланамиз

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum_k S_{kx} \qquad (13)$$

Бирор вақт оралигида $Q_{1x} - Q_{0x}$ айирмани ҳисоблаймиз. Трубанинг оғма қисмида Q_x миқдор $m\vartheta$ миқдорга ортиб боради. Трубанинг горизонтал қисмида, яъни суюқлик ўқ бўйлаб оққанда эса Q_x миқдор ўзгартирмасдан қолади. Шундай экан, қаралаётган масса учун (13) тенглама $Q_{1x} - Q_{0x} = m\vartheta$ кўринишни олади. Ажраладиган суюқлик ҳажмига таъсир қиладиган ташқи куч фақат деворлар реакциясининг Ох ўқидаги $\overline{N}$ проекциясидан иборат бўлади. N ни доимий десак, натижада ташқи кучларнинг импульси учун $\sum_k S_{kx} = -Nt$ тенгликни оламиз. (13) тенглама

$$m\vartheta = Nt \qquad (14)$$

кўринишни олади.

Суюқликнинг труба ичидаги m массасини ҳисоблаймиз. Суюқлик оқимининг кўчиш йўли $\Delta l = \vartheta t$ бўлиб, m масса эса

$$m = \frac{\rho}{g} \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot \vartheta t, \qquad (15)$$

бунда, $\rho = 1000\ \frac{кг}{м^3}$, $g = 9{,}81\ \frac{м}{сек^2}$

(15) ни (14) га қўямиз ва N ни ҳисоблаймиз

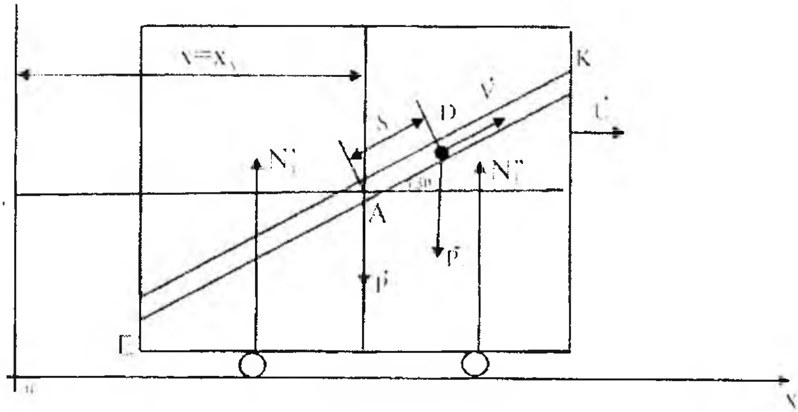
$$N = \frac{\rho}{g}\frac{\pi d^2}{4}\vartheta^2 = \frac{1000}{9{,}81}\frac{кг}{м^3}\cdot\frac{сек^2}{м}\cdot\frac{3{,}14\cdot 0{,}3^2}{4}м^2\cdot 4\frac{м^2}{сек^2} =$$

$$= \frac{1000}{9{,}81}\cdot 3{,}14\cdot 0{,}09\,кГ = \frac{282{,}5}{9{,}81}кГ = 28{,}6\,кГ$$

26-масала. Механик тизим горизонтал ҳаракат қилувчи $m_1 = 18$ кГ массали вертикал плитадан ва плитадаги тарновда ички кучлар таъсирида $t_0 = 0$ дақиқада $U_0 = 2\frac{м}{сек}$ тезлик билан ҳаракатланадиган $m_2 = 6$кг массали D юкдан иборат. KE тарнов тўғри чизиқли бўлиб, юк $S = AD$ масофа $S = 0{,}4\left(zt^2 - 1\right)$ қонун бўйича ҳаракатланади. S метрларда, t эса секундларда ҳисобланган деб қаралади. Юкни моддий нуқта деб ҳисоблаб ва барча бўладиган қаршиликларни эътиборга олмасдан қуйидаги миқдорларни аниқланг: $t_0 = 0$ сек дақиқадан $t_1 = 1$ сек дақиқагача бўлган вақт ичида плитанинг x_1 кўчишини, $t_1 = 1$ сек дақиқага мос келувчи U_1 плитанинг тезлигини, a_1 тезланишини ва унинг тўлиқ инерция реакциясини топинг (76-чизма).

Масала шарти ва талабини қуйидагича қисқача ёзиш ҳам мумкин:

$m_1 = 18$кг, $m_2 = 6$кг, $\dot{x} = U|_{t=0} = U_0 = 2м/сек$;



76-чизма.

$x|_{t=t_1} = x_0 = 0;\ S = 0.4\left(2t^2 - 1\right).$

$t_1 = 1$ сек дақиқада:

1) x_1 – плитанинг кўчиши;

2) U_1 – плитанинг тезлиги;

3) a_1 – плитанинг тезланиши;

4) N_1 – текисликнинг плитага кўрсатадиган нормал реакцияси аниқлансин.

Ечиш. Юкнинг $t_1=1$ сек дақиқага мос келувчи S эгри чизиқли координатасини топамиз

$S_1 = AD = 0.4(2 \cdot 1 - 1) = 0.4 \cdot 1 = 0.4$ м

$S_1 > 0$ бўлгани учун D юк A нуқтадан юқорида жойлашган бўлади.

Масалада берилган ва изланган миқдорларни чизмада тасвирлаймиз.

1. Плитанинг x_1 кўчишини аниқлаймиз. x_1 ни аниқлаш учун тизим масса марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремадан фойдаланамиз. Тизим масса маркази ҳаракатининг дифференциал тенгламасини Ox ўқдаги проекциялари бўйича тузамиз

$$M\ddot{x}_c = \sum_k F_{kx}$$

Тизимга таъсир қилувчи барча кучлар вертикал йўналган, шунинг учун $\sum_k F_{kx} = 0$ бўлади. Натижада тизим масса марказининг ҳаракат тенгламаси

$$M\ddot{x}_c = 0 \tag{16}$$

кўринишини олади. Бу тенгламани кетма-кет икки марта интеграллаб, қуйидагиларни оламиз:

$$M\dot{x}_c = C_1, \quad Mx_c = C_1 t + C_2. \tag{17}$$

бунда, C_1 ва C_2 интеграллаш доимийлари.

Mx_C ни аниқлаймиз. Чизмадан равшанки, вақтнинг исталган дақиқасида плитанинг масса маркази жойлашган нуқтасининг ва юкнинг абсциссалари учун $x_A=x$, $x_D=x+S\cos 30^0=x+0,4(2t^2-1)\cdot 0,866=x+$ $+0.3464(2t^2-1)$ ифодаларни топамиз.

Тизим масса марказининг x_c координатаси $Mx_c = M_п X_A + M_ш X$ формуладан аниқланади. Бунда $M_п = m_1$, $M_ш = m_2$ бўлганлигидан

$$MX_c = m_1 x + 0{,}3464 m_2 \left(2t^2 - 1\right) \qquad (18)$$

тенгликка эга бўламиз. (17) нинг иккинчи тенглиги билан (18)ни таққослаб

$$m_1 x + 0{,}3464 m_2 (2t^2 - 2) = c_1 t + c_2 \qquad (19)$$

тенгликка эга бўламиз. C_1 ва C_2 доимийларни аниқлаш учун яна бир муносабат керак. Шу мақсадда (19) нинг иккала қисмини t вақт бўйича дифференциаллаймиз

$$m_1 \dot{x} + 1{,}3856 m_2 t = C_1 \qquad (20)$$

$\dot{x} = u|_{t=0} = u$ бошланғич шартни эътиборга олсак (20) дан C_1 ни топамиз: $C_1 = m_1 u$. Агар $x = x|_{t=0} = 0$ бошланғич шартни эътиборга олсак, (19) дан C_2 ни топамиз $C_2 = 0{,}3464 m_2 - C_1$. C_1 ва C_2 учун топилган ифодаларни (19) га қуямиз:

$$m_1 x + 0{,}3464 m_2 \left(2t^2 - 1\right) = m_1 u t - 0{,}3464\, m_2 .$$

Плитанинг ҳаракат тенгламаси қуйидагича бўлади

$$x(t) = u t - 0{,}6928\, t^2 \cdot \frac{m_2}{m_1} .$$

Бу топилган формулага унинг таркибига кирган миқдорларнинг сон қийматларини қўйиб, x_1 плитанинг кўчишини ҳисоблаймиз

$$x_1 = 2\frac{м}{сек} \cdot 1\,сек - \frac{0{,}6928 \cdot 6}{18} м = \left(2 - \frac{0{,}6928}{3}\right) м = (2 - 0{,}2309) м = 1{,}7691\, м$$

2. Плитанинг тезланишини аниқлаймиз. Олдинги пунктдаги мулоҳазани юритиб, (16) ва (18) формулани топамиз. a_1 тезланишни топиш учун (18) тенгликнинг иккала қисмини вақт бўйича икки марта дифференциаллаймиз

$$M\dot{x}_c = m_1 \dot{x} + 1{,}3856\, m_2 t \qquad M\ddot{x}_c = m_1 \ddot{x} + 1{,}3856 m_2 ,$$

бунда, $\ddot{x} = a$ плитанинг тезланиши.

(16) тенгликка кўра $M\ddot{x} = 0$. Натижада a тезланиш учун $a = -1{,}3856 \dfrac{m_2}{m_1}$ ифодани топамиз. Бунда $t = 1$ сек десак, a_1 ни топамиз

$$a_1 = -1{,}3856 \cdot \frac{6}{18} м/сек^2 = -0{,}4619 \frac{м}{сек^2} ,$$

(бу ердаги " – " ишораси плитанинг тезлигини чап томонга йўналганлигини билдиради).

3. Плитанинг u_1 тезлигини аниқлаймиз. u_1 ни аниқлаш учун тизим ҳаракат миқдорининг *Ox* ўқ бўйича ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодаловчи $\frac{dQ_x}{dt} = \sum_k F_{kx}^e$ тенгламадан фойдаланамиз. Тизимга таъсир қилувчи барча ташқи кучлар ох ўққа перпендикуляр, шунинг учун $\sum F_{kx}^e = 0$ бўлади. Бундай ҳолда тизимга ҳаракат миқдорининг *Ox* ўқдаги проекцияси ўзгармас миқдор бўлишлигини оламиз

$$\frac{dQ_x}{dt} = 0 \Rightarrow C_1 = Q_x = \text{const} \qquad (21)$$

Q_x ҳаракат миқдори эса плита ва D юк ҳаракат миқдорининг йиғиндисига тенг: $\bar{Q} = \bar{Q}_u + \bar{Q}_D$, бунда, $\bar{Q}_u = m_1\bar{u}$, $\bar{Q}_D = m_2\bar{\vartheta}_D$. Бу ердаги u – плитанинг тезлиги бўлиб, у юкнинг координата тизимига нисбатан аниқланади. Бундай ҳолда (21) тенгликдан

$$Q_x^u + Q_x^D = C_1 \Rightarrow m_1 u_x + m_2 \vartheta_{Dx} = c_1 \qquad (22)$$

тенгликни оламиз. ϑ_{DX} ни аниқлаш учун D юкни мураккаб ҳаракат қилади деб қараймиз. Юк плитага нисбатан нисбий ҳаракат қилади, плита эса кўчирма ҳаракат қилади

$$\bar{\vartheta}_D = \bar{\vartheta}_D^{\text{кўчир}} + \bar{\vartheta}_D^{\text{нис}} \Rightarrow \vartheta_{DX} = \vartheta_{DX}^{\text{кўчир}} + \vartheta_{DX}^{\text{нис}} \qquad (23)$$

юкнинг кўчирма тезлиги плитанинг тезлигига тенг, яъни

$$\bar{\vartheta}_D^{\text{кўчир}} = \bar{u} \Rightarrow \vartheta_{DX}^{\text{кўчир}} = U_X.$$

Юкнинг нисбий тезлигини топамиз

$$\vartheta_D^{\text{нис}} = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}\left[0.4\left(2t^2 - 1\right)\right] = 0.4 \cdot 4t = 1.6\,t$$

$t_1 = 1$ сек бўлганда $\vartheta_D^{\text{нис}} > 0$ бўлишлигини кўриш қийин эмас. Демак, юқорига йўналган. Унинг проекциясини ҳисоблаймиз:

$$\vartheta_{\text{нис}} = \vartheta_D^{\text{нис}} \cos 30^\circ = 1.3856\,t \qquad (24)$$

тенгликдан фойдаланиб, ϑ_{DX} учун ифода топамиз

$$\vartheta_{DX} = U_X + \vartheta_D^{\text{нис}} \cos 30^\circ = U_X + 1.3856\,t \qquad (25)$$

Агар $u_x = u$ эканлигини эътиборга олиб, ϑ_{Dx} нинг топилган ифодасини (22) га қўйсак, у тенглик $m_1u + m_2u + 1.3856m_2t = C_1$ (25) кўринишни олади. $t = 0$ бўлганда $U = U_0$ бўлишлигидан C_1 доимийни топамиз: $C_1 = (m + m_2)U_0$. Бундай ҳолда (25) қуйидаги кўринишни олади:

$$(m_1 + m_2)u + 1.3856\, m_2t = (m_1 + m_2)u$$

Бу тенгликдан плитанинг u тезлигини топамиз

$$u = u_0 - \frac{1.3856m_2}{m_1 + m_2}t.$$

Бу тенгликда $t_1 = 1$ сек десак, плитанинг изланаётган тезлигини топамиз

$$U_1 = (2 - \frac{1.3856 \cdot 6}{24})\frac{м}{сек} = (2 - 0.3464)\, м/сек = 1.6536\, м/сек.$$

4. Энди N_1 реакцияни аниқлаймиз. N_1 реакция аниқлаш учун тизим масса марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремадан фойдаланамиз. Масса маркази ҳаракатининг дифферециал тенгламасини oy ўқдаги проекциялари бўйича тузамиз

$$M\ddot{У}_c = \sum_k F^e_{ky}$$

ёки

$$M\ddot{У}_c = N'_1 + N''_1 - P_1 - P_2$$

Бу ерда $N'_1 + N''_1 = N_1$ деб, N_1 реакция учун

$$N_1 = M\ddot{У}_c + P_1 + P_2 \qquad (26)$$

ифодани топамиз. Тизим масса маркази $У_c$ ординатаси учун $Mу_c = m_1у_A + m_2У_D$ ифодани оламиз. Бу ердаги $У_A$ ва $У_D$ мос равишда плита ва D юк оғирлик марказларининг ординаталари. Бизнинг ҳолда

$$У_A = A_1O = const;\; У_D = A_1O + S\cos 30^\circ =$$

$$A_1O + 0.4 \cdot 0.866\left(2t^2 - 1\right) = A_1O + 0.3464\left(2t^2 - 1\right).$$

Натижада тизим масса марказининг ординатаси учун $Mу_c = (m_1 + m_2)A_1O + 0.3464\, m_2\left(2t^2 - 1\right)$ тенгламани оламиз. Бу тенгликнинг иккала қисмини вақт бўйича икки марта дифференциаллаймиз ва топамиз. $M\dot{у}_c = 1.3856\; m_2t$, $M\ddot{у}_c = 1.3856\; m_2$

$M\ddot{y}_c$ учун топилган ифодани (26)га қўйиб, N_t учун t вақтга боғланган ифода топамиз

$$N_t = 1,3856 m_2 + (m_1 + m_2)\, g.$$

N_t нинг $t=1$ сек бўлгандаги сон қийматини топамиз

$N_t = (1,3856 \cdot 6 + 24 \cdot 9,81)$н $= (8,3136 + 235,44)$н $= 243,7536$н.

23-МАШҒУЛОТ

7-§. Тизим ҳаракат миқдори моментининг ўзгариши ҳақидаги теорема

1. Моддий нуқта ҳаракат миқдорининг моменти ҳақида тушунчага эгамиз. Бирор О марказга нисбатан моддий нуқта ҳаракат миқдорининг моменти $\overline{K} = \bar{r} \times m\bar{\vartheta}$ вектор тенглик билан аниқланади. Бу ерда, $\bar{r}_k$ — нуқтанинг О марказга нисбатан ҳолатини аниқловчи радиус-вектори, m_k — массаси, $\bar{\vartheta}_k$ эса унинг тезлиги. Берилган О марказга нисбатан тизим ҳаракат миқдорининг $\overline{K}$ моменти деб (ёки кинетик моменти), тизим таркабига кирувчи нуқталарнинг ўша марказга нисбатан ҳаракат миқдорлари моментларининг йиғиндисига (бош моментига) айтилади. Моддий тизимнинг кинетик моменти

$$\overline{K} = \sum_k \overline{K}_{ok} = \sum_k \bar{r}_k \times m_k \bar{\vartheta}_k \qquad (1)$$

формула бўйича топилади. Агар материал тизим массаси узлуксиз тақсимланган моддий муҳитдан иборат бўлса, бундай ҳолда (1) йиғиндини интегралга алмаштириш мумкин.

Ҳар қандай вектор каби $\overline{K}$ ҳаракат миқдори моментининг вектори ҳам ўзининг проекциялари билан тўлиқ аниқланади

$$\overline{K} = K_x \bar{i} + K_y \bar{j} + K_z \bar{k}, \quad \overline{K} = \sum_k \bar{r}_k \times m_k \bar{\vartheta}_k = \sum_k \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_k & y_k & z_k \\ m_k\vartheta_{kx} & m_k\vartheta_{ky} & m_k\vartheta_{kz} \end{vmatrix} =$$

$$\sum_k m_k(y_k\vartheta_{kz} - z_k\vartheta_{ky})\bar{i} + \sum_k m_k(z_k\vartheta_{kx} - x_k\vartheta_{kz})\bar{j} + \sum_k m_k(x_k\vartheta_{ky} - y_k\vartheta_{kx})\bar{k}$$

Иккита векторнинг тенглигига эътибор қилсак K_x, K_y, K_z проекцияларни ҳисоблаш учун ифодалар оламиз

$$K_x = \sum_k m_k(y_k\vartheta_{kz} - z_k\vartheta_{ky})$$

$$K_y = \sum_k m_k(z_k\vartheta_{kx} - x_k\vartheta_{kz}) \qquad (2)$$

$$K_z = \sum_k m_k(x_k\vartheta_{ky} - y_k\vartheta_{kx})$$

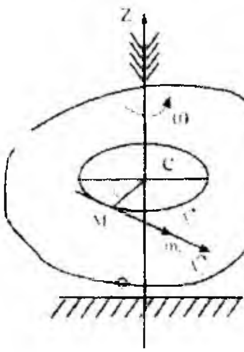
2. Тажриба кўрсатадики, тизимнинг ҳаракат миқдори унинг илгариланма ҳаракатини аниқловчи катталикдир. Тизим ҳаракат миқдорининг бош моменти эса тизимнинг айланма ҳаракатини аниқлайдиган катталикдир.

$\overline{K}_z$ миқдорининг механик мазмунини тушунмоқ учун қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракат қилаётган жисмнинг кинетик моментини ҳисоблаш масаласини ҳал қиламиз.

Фараз қилайлик қаттиқ жисм қўзғалмас OZ ўқ атрофида ω бурчак тезлик билан айлансин (77-чизма). Айланиш ўқидан h_k масофада турган исталган M_k нуқта $\vartheta_k = \omega h_k$ тезликка эга бўлиб, унинг OZ ўққа нисбатан ҳаракат миқдорининг моменти $mom_z(m_k) = m_k \vartheta_k h_k = \omega m_k h_k^2$ тенглик билан аниқланади. Жисмники эса

$$K_z = \sum_k mom_z(m_k \bar{\vartheta}_k) = \left(\sum_k m_k \vartheta_k \cdot h_k\right) = \left(\sum_k m_k h_k^2\right)\omega$$

формула билан топилади. Қавс ичида турган миқдор эса OZ ўққа нисбатан жисмнинг инерция моментини ифодалайди. Натижада жисмнинг кинетик моменти учун



77-чизма.

$$K_z = J_z \omega \tag{3}$$

формулани оламиз. Бунда, $J_z = \sum_k m_k h_k^2$.

Шундай қилиб, айланиш ўқига нисбатан айланувчи жисмнинг кинетик моменти жисмнинг шу ўққа нисбатан инерция моменти билан унинг бурчак тезлиги кўпайтмасига тенг бўлар экан.

Агар битта ўқ атрофида айланаётган тизим бир қанча жисмдан иборат бўлса, у ҳолда жисмнинг кинетик моменти учун

$$K_z = J_{1z}\omega_1 + J_{2z}\cdot\omega_2 + \ldots + J_{nz}\omega_k \tag{4}$$

формулага эга бўламиз.

Агар $\bar{Q} = M\bar{\vartheta}_c$ формулани (3) формула билан таққосласак, жисмнинг ҳаракат миқдорини (илгариланма ҳаракатда жисмнинг инертлигини аниқлайдиган миқдор) жисмнинг массаси билан унинг тезлиги кўпайтмасига тенг. Жисмнинг кинетик моменти эса унинг инерция моменти (айланма ҳаракатда жисмнинг инертлигини аниқлайдиган катталик) билан унинг бурчак тезлиги кўпайтмасига тенг бўлар экан.

3. Биз илгари битта нуқта учун моментлар теоремасини шакллантириб исботлаган эдик. Бу теорема тизимининг ҳар бир нуқтаси учун ўринли. Агар биз тизимнинг m_k массали $\bar{\vartheta}_k$ тезликка эга бўлган нуқ-

тасини қарасак, бу нуқта учун $\frac{d}{dt}\left[mom_z\left(m_k\bar{\vartheta}_k\right)\right] = mom\left(\bar{F}_k^e\right) + mom\left(\bar{F}_k^i\right)$

тенгликни оламиз. Бу ердаги $\bar{F}_k^e$ ва $\bar{F}_k^i$ – k нуқтасига таъсир қиладиган барча ташқи ва ички кучларнинг тенг таъсир этувчисидир. Бундай тенгламаларни ҳар бир нуқта учун тузиб, уларни ҳадлаб қўшиб, тизимнинг ҳаракатини ифодаловчи тенгламани оламиз:

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_k\left(\bar{r}_k x m_k \bar{\vartheta}_k\right)\right] = \sum_k mom_z\left(\bar{F}_k^e\right) + \sum_k mom\left(\bar{F}_k^i\right).$$

Бу ердаги охирги йиғинди ички кучларнинг хоссасига кўра нолга тенг. (1) тенгликни эътиборга олсак,

$$\frac{d\bar{K}_z}{dt} = \sum_k mom_z\left(\bar{F}_k^e\right) \qquad (5)$$

тенгламага эга бўламиз. Бу тенглама тизим учун қуйидаги моментлар теоремасини ифодалайди: бирор танланган қўзғалмас марказга нисбатан тизим ҳаракат миқдори бош моментидан вақт бўйича олинган ҳосиласи тизимга таъсир қилувчи барча ташқи кучларнинг ўша марказга нисбатан моментларининг йиғиндисига тенг. (5) тенгламанинг иккала қисмини қўзғалмас координаталар ўқларига проекциялаб, қуйидаги скаляр тенгламаларга эга бўламиз: $\frac{dK_x}{dt} = \sum_k mom_x\left(\bar{F}_k^e\right)$,

$$\frac{dK_y}{dt} = \sum_k mom_y\left(\bar{F}_k^e\right), \quad \frac{dK_z}{dt} = \sum_k mom_z\left(\bar{F}_k^e\right). \qquad (6)$$

(6)тенгламалар исталган қўзғалмас ўққа нисбатан моментлар теоремасини ифодалайди.

Исботланган теоремадан жисмнинг айланма ҳаракатини ўрганишда, гироскоплар ва зарбалар назариясида кенг фойдаланилади. Теореманинг аҳамияти бу билан чегараланмайди. Кинематикадан маълумки, умумий ҳолда қаттиқ жисмнинг ҳаракати илгариланма ва қутб нуқта атрофидаги айланма ҳаракатлардан ташкил топади. Агар қутб деб, масса марказини қабул қилсак, жисм ҳаракатининг илгариланма қисмини масса марказининг ҳаракати ҳақидаги теорема ёрдами билан, айланма қисмини эса моментлар теоремаси ёрдамида ўрганиш мумкин. Бу эса эркин қаттиқ жисм (учаётган самолёт , снаряд, ракета) ҳаракатини ўрганишда теореманинг янада муҳим рол ўйнашлигини кўрсатади.

Моментлар теоремасининг яна бир практик қиймати шундан иборатки, бу теоремалар ҳам ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремага ўхшаш тизимнинг айланма ҳаракатини ўрганишда номаълум ички кучларни қарашдан озод қилади. Юқоридагидек мулоҳаза юритиб, масса марказига нисбатан моментлар теоремасини шакллантириш мумкин. Қаралаётган ҳолда координаталар ўқлари тизимнинг масса маркази билан биргаликда илгариланма ҳаракат қилиши мумкин. Тизим масса марказига нисбатан моментлар теоремаси ҳам худди қўзғалмас марказга нисбатандек кўринишга эга бўлади: $\frac{d\,\overline{k}_c}{dt} = \sum_k mom_c(\overline{F}^{\,e}_k)$.

Исботланган теоремалардан қуйидаги муҳим хулосаларни чиқариш мумкин:

1) Агар марказга нисбатан тизимга таъсир қилувчи барча ташқи кучларнинг моментлари йиғиндиси нолга тенг, яъни $\sum_k mom_c(\overline{F}^{\,e}_k) = 0$ бўлса, у ҳолда (5) тенгламадан $\frac{d\overline{K}}{dt} = 0 \Rightarrow \overline{K} = const$ бўлишлиги келиб чиқади. Шундай қилиб, берилган марказга нисбатан тизимга қўйилган барча ташқи кучлар моментларининг йиғиндиси нолга тенг бўлса, у ҳолда тизим ҳаракат миқдорининг бош моменти ўша марказга нисбатан сон ва йўналиш жиҳатидан ўзгармас миқдор бўлади.

2) Агар тизимга таъсир қилувчи ташқи кучларнинг бирорта қўзғалмас ўққа нисбатан моментларининг йиғиндиси (OZ ўққа нисбатан) нолга тенг, яъни $\sum_k mom_Z\left(\overline{F}^{\,e}_k\right) = 0$ бўлса, у ҳолда (6) тенгламаларнинг охиргисидан $\frac{dK_Z}{dt} = 0 \Rightarrow \overline{K}_Z = const$ бўлишлиги келиб чиқади. Демак, агар тизимга таъсир қилувчи барча ташқи кучларнинг бирорта ўққа нисбатан мометларининг йиғиндиси нолга тенг бўлса, у ҳолда тизим ҳаракат миқдори моменти шу ўққа нисбатан ўзгармас миқдор бўлади. Бу чиқарилган хулосалар тизим ҳаракат миқдори бош моментининг сақланиш қонунини ифодалайди. Демак, ички кучлар тизим ҳаракат миқдори бош моментини ўзгартира олмас экан.

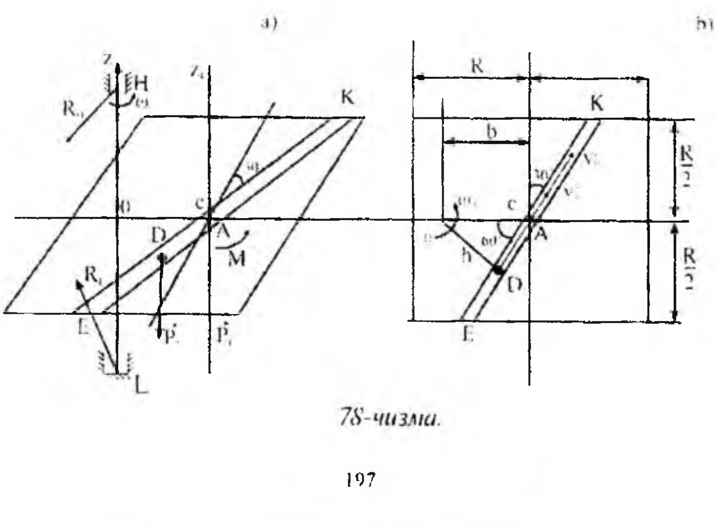
3) Энди бирор қўзғалмас OZ ўқ (тизимнинг масса маркази орқали ўтиши ҳам мумкин) атрофида айланаётган тизимни қараймиз. Агар қаралаётган ҳолда $\sum_k mom_Z\left(\overline{F}^{\,e}_k\right) = 0$ бўлса, у ҳолда (3) формуладан $J_Z \cdot \omega = const$ бўлишлиги келиб чиқади. Бундан қуйидаги хулосаларни чиқариш мумкин: а) агар тизим ўзгармас бўлса (абсолют қаттиқ жисм), у ҳолда $J_Z \cdot \omega = const$ бўлиб, ўққа маҳкамланган жисм ўзгармас бурчак тезлик билан айланади. б) агар тизим ўзгарувчан бўлса (жисм абсолют

қаттиқ эмас), у ҳолда тизимга ички кучлар таъсир қилиб, унинг айрим нуқталарини ўқдан узоқлаштириб, J_z миқдорни ошириши ёки айрим нуқталарини ўққа яқинлаштириб, J_z миқдорни камайтириши мумкин. Лекин қаралаётган ҳолда $J_z \cdot \omega = \mathrm{const}$ бўлганлиги учун тизим инерция моментини ошириш билан унинг ω бурчак тезлиги камаяди, J_z миқдорнинг камайиши билан эса ω бурчак тезлик ортиши мумкин. Шундай қилиб, ички кучларнинг таъсири натижасида айланувчи тизимнинг бурчак тезлигини ўзгартириш мумкин, K_z миқдорнинг доимий бўлишлиги ω бурчак тезликнинг ўзгармас миқдор бўлиши деган сўз эмас экан.

Шакллантирилган ва исботланган теоремалардан кейинчалик қаттиқ жисмнинг илгариланма ва айланма, ясси параллел, сферик ва эркин жисм ҳаракатларига доир, шунингдек, зарба ва гиреоскоплар назариясига доир масала ечиш билан чегараланамиз.

27-масала. Томонлари R ва $2R$ бўлган , бунда $R=1{,}2$ м ва массаси $m_1=24$ кг бўлган тўғри бурчакли бир жинсли горизонтал платформа C масса марказидан $OC=b=R$ масофада турган OZ вертикал ўқ атрофида $\omega_0 = 10$ сек$^{-1}$ бурчак тезлик билан айланади. $t_0=0$ дақиқада платформадаги тарновда ички кучлар таъсирида $m_2=8$ кг массали D юк $S = AD = 0.6\cos 2t$ қонун бўйича ҳаракатланмоқда, бунда S метрларда, t эса секунларда ифодаланган. Платформага $M = 8$ Н $\cdot$ м моментли жуфт ҳам таъсир қилади. Платформанинг бурчак тезлигини t вақтнинг функцияси сифатида аниқланг.

Масала шарти ва талабини қуйидагича қисқача ёзиш ҳам мумкин, берилганлар:



78-чизма.

$$R = 1{,}2;\ m_2 = 24\ кг;\ \omega_0 = 10\ сек^{-1};$$

$$m_1 = 8\ кг;\ в = R,\ S = 0{,}6\cos 2t;\ M = 8н\cdot M.$$

Платформанинг бурчак тезлигини $\omega = f(t)$ кўринишда аниқлаш керак.

Ечиш. $t_0 = 0$ дақиқага мос келувчи D юкнинг жойлашган ўрнини аниқлаймиз:

$S = AD = 0{,}6\cos 0 = 0{,}6\cdot 1\ m = 0{,}6\ m > 0$ бўлгани учун D юк *A* нуқтага нисбатан пастда жойланган бўлади. Тизимга таъсир қилувчи барча ташқи : $\overline{P_1}$ ва $\overline{P_2}$ оғирлик кучларини, $\overline{R_1}$ ва $\overline{R_{11}}$ боғланиш реакция кучларини ва *M* айлантирувчи моментни ҳам чизмада тасвирлаймиз (78 -чизма, а). ω ни аниқлаш учун платформа ва юкдан ташкил топган тизимга *OZ* ўққа нисбатан унинг кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани қўллаймиз. Бунинг учун (6) тенгламаларнинг охиргисидан фойдаланамиз. Бизнинг ҳолда $\overline{P_1}$ ва $\overline{P_2}$ кучлар *OZ* ўққа параллел, $\overline{R_1}$ ва $\overline{R_{11}}$ реакция кучлари эса бу ўқни кесади. Шунинг учун бу кучларнинг *OZ* ўққа нисбатан моментлари нолга тенг. Моментни ω бурчак тезликнинг мусбат йуналишида деб ҳисоблаб, $\sum\limits_k mom_Z\left(\overline{F_k}\right) = 8$ тенгламани топамиз. (6) тенгламанинг кўриниши қуйидагича бўлади: $\frac{dK_Z}{dt} = 8$. Бу тенгламанинг ўзгарувчиларини ажратиб, интеграллаб топамиз:

$$K_Z = 8t + C_1 \tag{7}$$

Қаралаётган масалада механик тизим иккита жисмдан иборат: платформа ва юк. Шунинг учун тизимнинг кинетик моменти платформа ва юкнинг кинетик моментларидан ташкил топади: $K_Z = K_Z^{n.l} + K_Z^{D}$.

Платформа *OZ* ўқ атрофида айланади. Шундай экан унинг кинетик моменти

$$K_Z^{n.l} = J_Z\cdot\omega \tag{8}$$

формула бўйича топилади. Бунда J_Z платформанинг *OZ* ўққа нисбатан инерция моменти бўлиб, уни Гюйгенс формуласи бўйича топамиз: $J_Z = J_{cZ_1} + m_1 в$, бу ердаги J_{cZ_1} – платформанинг *OZ* ўққа параллел қилиб, унинг масса маркази орқали ўтган ўққа нисбатан инерция моменти

$$J_{cZ_1} = \frac{1}{12}m_1\left(a^2 + в^2\right) = \frac{1}{12}\left(4R^2 + R^2\right)m_1 = \frac{5}{12}m_1R^2 \tag{9}$$

$$J_z = \frac{5}{12} m_1 R^2 + m_1 R^2 = \frac{17}{12} m_1 R^2 .$$

Шундай қилиб, OZ ўққа нисбатан платформанинг кинетик моментини топдик

$$K_Z^{пл} = \frac{17}{12} m_1 R^2 \omega \qquad (10)$$

Энди D юкнинг ҳаракат миқдори моментини топамиз: $K_z^D = mom_z(m_2 \bar{\vartheta}_D)$. Юкнинг абсолют тезлигини аниқлаймиз.

У $\bar{\vartheta}_D = \bar{\vartheta}_D^{куч} + \bar{\vartheta}_D^{нис}$ формула бўйича топилади. K_z^D ни ҳисоблашга Вариньон теоремасини қўллаймиз.

$$K_z^D = mom_z\left(m_1 \bar{\vartheta}_D^{куч}\right) + mom_z\left(m_2 \bar{\vartheta}_D^{нис}\right) \qquad (11)$$

Тезликларнинг модули ва йўналишини ва уларнинг OZ ўққа нисбатан ҳаракат миқдори моментларини аниқлаймиз

$$\vartheta_D^{нис} = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}[0{,}6\cos 2t] = -0{,}6 \cdot 2 \cdot \sin 2t = -1{,}2\sin 2t$$

D жисм $S = 0{,}6\cos 2t$ қонун бўйича ҳаракатланади. $\vartheta_D^{нис}$ векторни S нинг ишорасига қараб тасвирлаймиз. $\vartheta_D^{нис} < 0$ бўлгани учун шартга кўра у юқорига йўналган. Юкнинг OZ ўққа нисбатан ҳаракат миқдорининг моментини топамиз (78-чизма, б).

$$mom_z\left(m_2 \vartheta_D^{нис}\right) = m_2 \vartheta_D^{нис} \cdot h, \text{ бунда } h = в \sin 60^\circ = R \sin 60^\circ$$

Натижада

$$mom_z\left(m_2 \vartheta_D^{нис}\right) = -m_2 \cdot 1{,}2\sin 2t \cdot R\sin 60^\circ = -1{,}0392 m_2 \sin 2t \qquad (12)$$

Энди $mom_z(m_2 \vartheta_D^{куч})$ ни топамиз. Бунда $\vartheta_D^{куч} = \omega \cdot OD = \omega h$. ω нинг йўналишини эътиборга олиб, $\bar{\vartheta}_D^{куч}$ векторини тасвирлаймиз

$$\left(\bar{\vartheta}_D^{куч} \perp OD\right).$$

Шундай қилиб, изланаётган миқдор учун

$$mom_z(m_2 \vartheta_D^{куч}) = m_2 \omega \cdot OD^2 =$$

$$= m_2 \omega h^2 = m_2 \omega R^2 \sin^2 60^\circ = 0{,}75 m_2 R^2 \omega \qquad (13)$$

натижани оламиз, K_z^{I} ва K_z^{II} нинг топилган (10) ва (11) ифодаларини (8) тенгликка қўйиб K_z учун ифода топамиз. (7) тенглама

$$57,6\omega - 10\sin 2t = 8t + C_1 \qquad (14)$$

кўринишни олади.

C_1 интеграллаш доимийни $\omega|_{t=0} = \omega_0$ бошланғич шартдан фойдаланиб топамиз: $C_1 = 57,6\omega_0 = 57,6 \cdot 10 = 576$

C_1 нинг топилган қийматини (14) га қўйиб ω бурчак тезлик аниқланадиган тенгламани оламиз $57,6\omega - 10\sin 2t = 8t + 576$.

Бу тенгламадан ω ни топамиз

$$\omega = f(t) = \left(\frac{5}{36}t + 10 + 0,17\sin 2t\right)\text{сек}^{-1}$$

24-МАШҒУЛОТ

8-§. Тизим кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теорема

1. Моддий нуқтанинг кинетик энергиясини ҳисоблашни биламиз. Битта нуқтанинг кинетик энергияси унинг массасининг тезлиги квадратига бўлган кўпайтмасининг ярмига тенг $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$.

Тизимнинг T кинетик энергияси скаляр миқдор бўлиб, тизим барча нуқталари кинетик энергияларининг арифметик йиғиндисига тенг

$$T = \sum_k \frac{m_k \vartheta_k^2}{2} \qquad (1)$$

Агар тизим бир қанча жисмдан иборат бўлса, унинг кинетик энергияси тизим жисмлари кинетик энергияларининг йиғиндисига тенг

$$T = \sum_k T_k$$

Тизимнинг кинетик энергияси унинг барча турдаги ҳаракатлар-нинг хусусиятларини ифодалайди. Шунинг учун тизим кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремадан кўпгина амалий мазмундаги масалаларни ечишда фойдланиш мумкин. T миқдор олдин киритилган $\overline{Q}$ ва $\overline{K}$ миқдорлардан тубдан фарқ қилиб, кинетик энергия мусбат скаляр миқдордир. Шунинг учун бу миқдор тизимнинг ва унинг қисмлари ҳаракатларининг йўналишига боғлиқ эмас ва бу йўналишни ўзгартира олмайди ҳам.

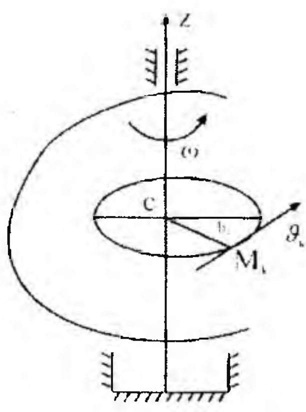
Маълумки, жисмга ўзаро қарама-қарши томонларга йуналган ички кучлар таъсир қилади. Шунинг учун ички кучлар $\overline{Q}$ ва $\overline{K}$ вектор миқдорларнинг ўзгаришига таъсир қилмайди. Лекин ички кучлар таъсири туфайли тизим нуқталари тезликларининг модули ўзгаради. Шундай экан, ички кучлар ҳисобидан T миқдор ҳам ўзгаради. Демак, T миқдор $\overline{Q}$ ва $\overline{K}$ миқдорлардан фарқ қилиб, унинг ўзгаришига ташқи ва ички кучлар ҳам таъсир қилади.

2. Илгариланма ҳаракат қилаётган қаттиқ жисмнинг барча нуқталари бир хил тезлик билан, яъни тизим масса маркази ҳаракатининг тезлигидек тезлик билан ҳаракат қилади. Жисмнинг исталган нуқтаси учун $\overline{\vartheta}_k = \overline{\vartheta}_c$ бўлиб, (1) формула қуйидаги кўринишни олади:

$$T_{илг} = \sum_k \frac{m_n \vartheta_c^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_k m_k\right)\vartheta_c^2 = \frac{1}{2} M \vartheta_c^2 \qquad (2)$$

Шундай қилиб, илгариланма ҳаракат қилаётган қаттиқ жисмнинг кинетик энергияси жисм массасининг унинг масса маркази тезлиги квадратига бўлган кўпайтмасининг ярмига тенг бўлиб, T нинг қиймати ҳаракатнинг йўналишига боглиқ бўлмайди.

3. Қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган қаттиқ жисмнинг кинетик энергиясини ҳисоблаш учун формула топамиз. Агар қаттиқ жисм бирор қўзғалмас OZ ўқ атрофида айланма ҳаракат қилаётган бўлса, унинг исталган нуқтаси $\vartheta_k = \omega h_k$ тезлик билан ҳаракатланади. Бунда h_k жисмнинг исталган нуқтасидан ўққача бўлган масофа, ω жисмнинг бурчак тезлиги (79-чизма). Тезликнинг бу ифодасини (1) га қўямиз



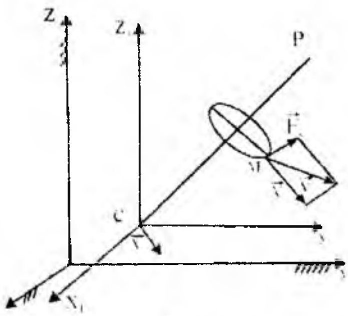
79-чизма.

$$T_{айл} = \sum_k \frac{m_n \vartheta_c^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_k m_k h_k^2\right)\omega^2 .$$

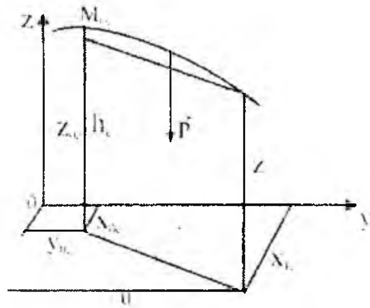
Қавс ичидаги миқдор OZ ўққа нисбатан жисмнинг J_z инерция моментини ифодалайди. Натижада айланувчи жисмнинг кинетик энергияси учун

$$T_{айл} = \frac{1}{2} J_z \cdot \omega^2 \qquad (3)$$

формулани топамиз. Айланма ҳаракат қилаётган қаттиқ жисмнинг кинетик энергияси жисмнинг айланиш ўқига нисбатан инерция моментининг унинг бурчак тезлиги



80-чизма.



81-чизма.

квадратига бўлган кўпайтмасининг ярмига тенг. T нинг қиймати айланишнинг йўналишига боғлиқ эмас.

4. Ясси параллел ҳаракат қилаётган қаттиқ жисмнинг кинетик энергиясини ҳисоблаймиз. Жисмнинг ясси параллел ҳаракатида унинг $\overline{\omega}$ вектор бурчак тезлиги жисм ҳаракат тезлигига перпендикуляр бўлиб, илгариланма ҳаракат қилувчи cz - координата ўқи билан устма-уст тушади. Жисм ҳаракат текислигига перпендикуляр бўлган ва тезликларнинг ρ оний маркази орқали ўтган ўқ атрофида айланма ҳаракат қилади. (3) формулага кўра ясси параллел ҳаракат қилаётган жисмнинг кинетик энергияси учун

$$T_{яс} = \frac{1}{2} J_{\rho} \cdot \omega^2 \qquad (4)$$

формулани топамиз. Буердаги J_ρ жисмнинг тезликнинг ρ оний маркази орқали ўтган ўққа нисбатан инерция моменти. Жисмнинг ҳаракати туфайли ρ тезликларнинг оний маркази ўзгариб туради (81-чизма). Шунинг учун J_P миқдор ҳам ўзгариб туради, J_P миқдор ўрнига бошқа бир J_C миқдорни, яъни жисмнинг c масса маркази орқали ўтган ўққа нисбатан доимий инерция моментини киритамиз. Гюйгенс теоремасига кўра $J_P=J_C+Md^2$ (бунда $\alpha=\rho c$) боғланишни топамиз. $\omega\alpha = \vartheta_c$ эканлигини эътиборга олиб, топилган ифодани (4) га қўямиз ва қуйидагини оламиз:

$$T_{яс} = \frac{1}{2}\left(J_c + Md^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}J_c\omega^2 + \frac{1}{2}M(d\omega)^2 = \frac{1}{2}M\vartheta_c^2 + \frac{1}{2}J_c\omega^2 \qquad (5)$$

бунда, ϑ_c жисм C масса марказининг тезлиги.

Шундай қилиб, жисмнинг ясси параллел ҳаракатида унинг кинетик энергияси масса марказининг тезлигидек тезлик билан қиладиган илгариланма ҳаракати кинетик энергияси билан масса маркази атрофидаги айланма ҳаракати кинетик энергияси йиғиндисига тенг экан.

5. Ихтиёри ҳаракатланаётган жисмнинг кинетик энергиясини ҳисоблаш учун ифода топамиз. Умумий ҳолда жисмнинг кинетик энергияси масса маркази тезлиги билан қиладиган илгариланма ҳаракати кинетик энергияси билан масса маркази орқали ўтган ўқ атрофидаги айланма ҳаракати кинетик энергияси йиғиндисига тенг

$$T = \frac{1}{2}M\vartheta_c^2 + \frac{1}{2}J_{cp}\omega^2 \qquad (6)$$

Агар қутб сифатида жисмнинг C масса марказини олсак, у ҳолда жисмнинг ҳаракати ϑ_c қутб тезлигидек илгариланма ҳаракати билан бу қутб орқали ўтадиган CP оний ўқ атрофидаги айланма ҳаракати йиғиндисидан иборат бўлади. Бундай ҳолда жисм исталган нуқтасининг ϑ_k тезлиги $\bar{\vartheta}_c$ қутб тезлиги билан нуқтанинг жисм билан биргаликда CP ўқ атрофида айланганда олган $\bar{\vartheta}_k^{\prime}$ тезлигининг геометрик йиғиндисига тенг:

$\bar{\vartheta}_k = \bar{\vartheta}_c + \bar{\vartheta}_k^{\prime}$. Бу ерда $\bar{\vartheta}_k^{\prime}$ модул бўйича $\bar{\vartheta}_k^{\prime} = \omega h_k$ формула бўйича ҳисобланади, бунда, h_k нуқтадан CP ўққача бўлган масофа, ω эса жисмнинг CP ўқ атрофида айлангандаги мураккаб бурчак тезлиги. Натижада

$\bar{\vartheta}_k^2$ учун қуйидаги: $\bar{\vartheta}_k^2 = \vartheta_k^2 = \left(\bar{\vartheta}_c + \bar{\vartheta}_k^{\prime}\right)^2 = \vartheta_c^2 + \vartheta_k^{\prime 2} + 2\bar{\vartheta}_c \cdot \bar{\vartheta}_k^{\prime}$ ифодани оламиз (80-чизма).

ϑ_k^2 нинг бу ифодасини (1) га қўямиз

$$T = \frac{1}{2}\left(\sum_k m_k\right)\vartheta_c^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_k m_k h_k^2\right)\omega^2 + \bar{\vartheta}_c \sum_k m_k \bar{\vartheta}_k^{\prime}.$$

Бу олинган тенгликда биринчи қавс ичи жисм массасини, иккинчи қавс ичи эса CP оний ўққа нисбатан жисмнинг J_{cp} инерция моментини ифодалайди. Жисм масса маркази орқали ўтган CP ўқ атрофида айланганда вужудга келадиган ҳаракат миқдори нолга тенг: $\sum_k m_k \bar{\vartheta}_k^{\prime} = 0$.

Натижада (6) формулага эга бўламиз.

Нуқта динамикасидагидек тизим динамикасида ҳам кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теорема материал тизимнинг скаляр ўлчови билан тизимга таъсир қилаётган кучларнинг скаляр ўлчовини боғлайди. Шунингдек, бу теорема тизим кинетик энергияси билан тизимга таъсир қилувчи ички ва ташқи кучлар бажарган ишлар орасидаги боғланишни ҳам урнатади. Шундай экан, тизимга таъсир қиладиган ҳар хил кучларнинг бажарган ишларини ҳам ҳисоблашга тўғри келади.

Фараз қилайлик материал тизим ҳаракат қилиб, t_0 дақиқада бирор ҳолатда бўлса t дақиқада эса бошқа бир ҳолатда бўлсин. Жисмга таъсир қилаётган барча кучларнинг унинг кўчишида бажарган тўлиқ ишини A дейлик. Бу бажарилган тўлиқ иш жисмга таъсир қилувчи барча ташқи ва ички кучлар бажарган A^e ва A^i ишларнинг йиғиндисига тенг бўлади: $A = A^e + A^i$. Тизимнинг K нуқтасига таъсир қиладиган ташқи ва ички кучларнинг бажарган ишларини мос равишда A_k^e ва A_k^i орқали белгиласак, тизимнинг барча нуқталарига таъсир қилаётган ташқи ва ички кучларнинг бажарган ишларини алоҳида-алоҳида ҳисоблаб, уларни қўшиб чиқсак, натижада жисмга таъсир қилаётган ташқи ва ички кучларнинг бажарган ишларини топган бўламиз: $A^e = \sum_k A_k^e$, $A^i = \sum_k A_k^i$.

1. Тизимга таъсир қилувчи оғирлик кучининг бажарган ишини ҳисоблаймиз. Агар механик тизим бир жинсли оғирлик кучи майдонида жойлашган бўлса, унинг ҳар бир m_k массали M_k нуқтасига $\overline{F}_k^e = m_k \overline{g}$ ташқи куч таъсир қилади. Бу кучнинг бажарган dA_k^e элементар иши $m_k g d\overline{r}_k$ га тенг. OZ ўқни вертикал юқорига йўналтириб, $\overline{F}_k$ кучнинг координата ўқларидаги проекцияларини топамиз

$$F_{kx}^e = 0,\ F_{ky}^e = 0,\ F_{kz}^e = -m_k g.$$

Бундай ҳолда элементар иш $dA_k^e = m_k g d\overline{r}_k = -m_k g dz_k$ формула бўйича ҳисобланади. Энди тизимга таъсир қилувчи барча оғирлик кучлари бажарган элементар ишларнинг йиғиндисини топамиз (81-чизма).

$$\sum_k d\overline{A}_k^e = -\sum_k m_k g dz_k = -gd\left(\sum_k m_k z_k\right)$$

бунда, $\sum_k m_k z_k = Mz_c$. Натижада бажарилган иш учун

$\sum_k dA_k = -gMdz_c$ ифодани оламиз. Бу ерда, M – тизимнинг массаси, Z_c эса тизим оғирлик марказининг аппликатаси.

Тизим бир ҳолатдан бошқа бир ҳолатга утганда огирлик кучининг тулиқ бажарган иши $A^c = -Mg\int_{z_{0c}}^{z_{1c}} dz_c = -Mg(z_{1c} - z_{0c}) = P(z_{0c} - z_{1c})$ формула билан топилади. Агар M_{0c} нуқта M_{1c} нуқтага нисбатан юқорида жойлашган булса, у ҳолда $Z_{0c} - Z_{1c} = h_c$, агар M_{0c} нуқта M_{1c} нуқтага нисбатан пастда жойлашган булса, у ҳолда $Z_{0c} - Z_{1c} = -h_c$ булади. Бу ерда h_c жисм огирлик марказининг вертикал кучиши. Қаралаётган ҳолда жисм огирлик кучининг бажарган иши учун

$$A = \pm Ph_c \tag{7}$$

формулани оламиз. Тизим бажарган тулиқ иш тизим огирлигини унинг огирлик маркази вертикал кучишига булган купайтмасига тенг. Агар бошланғич нуқта охирги нуқтадан юқорида жойлашган булса, бажарилган иш мусбат, агар бошланғич нуқта охирги нуқтадан пастда жойлашган булса, у ҳолда бажарилган иш манфий булади.

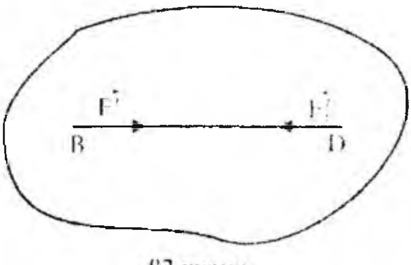
2. Қаттиқ жисм ички кучларининг бажарган ишини ҳисоблаймиз. Абсолют қаттиқ жисмнинг исталган кучишида ички кучлар бажарган ишларнинг йиғиндиси нолга тенг булишлигини исботлаймиз. Қаттиқ жисмнинг узаро таъсирланувчи иккита B ва D нуқталарига таъсир қилувчи ички кучлар $\bar{F}_1^i$ ва $\bar{F}_2^i$ булсин. Бу ички кучлар Ньютоннинг учинчи қонунига кура модул жиҳатидан тенг ва бир туғри чизиқ буйлаб қарама-қарши томонга йуналгандир (82-чизма), яъни

$$\bar{F}_2^i = -\bar{F}_1^i \tag{8}$$

Бу кучлар қувватларининг йиғиндисини тузамиз

$$N^i = F_1^i\vartheta_B + F_2^i\vartheta_D = F_1^i\vartheta_B - F_1^i\vartheta_D = F_1^i(\vartheta_B - \vartheta_D) \tag{9}$$

Бу ерда $\bar{\vartheta}_B$ ва $\bar{\vartheta}_D$ мос равишда B ва D нуқталарнинг тезликларидир.



82-чизма.

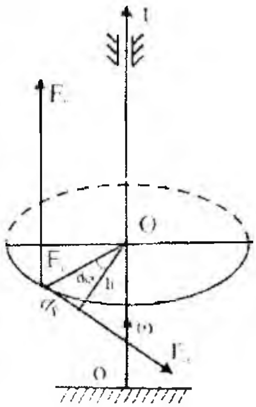
Агар қутб сифатида D нуқтани қабул қилсак, бу тезликлар орасидаги боғланиш $\vartheta_B = \vartheta_D + \overline{\omega} x \overline{DB}$ формула билан ўрнатилади. Бу ердаги ω - жисмнинг бурчак тезлиги. B нуқта тезлигининг бу ифодасини (9) га қўйиб, $N^i = F_j^i(\omega \chi DB)$ тенгликни оламиз.

$\overline{F_j^i}$ ва $\omega x DB$ ўзаро перпендикуляр векторларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг ($\overline{F_j^i}$ вектор билан коллинеар бўлган DB векторга $\overline{\omega} \overline{x} DB$ вектор перпендикуляр бўлади).

Шунинг учун $N^i = \sum\limits_{j=1}^{n} N_j^i = 0$ бўлади. Чунки модуллари тенг ва қарама-қарши йўналган ички кучларнинг сонлари тенг бўлади. Қаттиқ жисм ички кучлари қувватларининг йиғиндиси нолга тенг бўлганлиги туфайли бу ички кучлар бажарган ишларнинг йиғиндиси ҳам нолга

тенг бўлади $A^i = \sum\limits_{j} A_j^i = 0$

3. Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисмга қўйилган кучнинг бажарган ишини ҳисоблаймиз. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас OZ ўқдан h масофада турган нуқтасига $\overline{F}$ ташқи куч таъсир қилаётган бўлсин. Кучнинг қўйилган нуқтаси жисм ўқ атрофида айланганда h радиусли айланма чизади. $\overline{F}$ кучни табиий уч ёқлининг ўқлари бўйича ташкил этувчиларга ёямиз ва бу ташкил этувчиларни $\overline{F_\tau^i}, \overline{F_n^i}$, ва $\overline{F_b^i}$ орқали белгилаймиз (83-чизма). $\overline{F_n^i}$, $\overline{F_b^i}$ ташкил этувчилар нуқтанинг кучиш векторига перпендикуляр бўлганликлари учун уларнинг бажарган ишлари нолга тенг бўлади. Шундай экан, кучнинг бажарган иши унинг $\overline{F_\tau}$ уринма ташкил этувчисининг бажарган ишига тенг бўлади.



83-чизма.

Элементар бажарилган иш учун $dA = F_\tau^i ds = F_\tau h d\varphi$, ифодага эга бўламиз. Бу ердаги $F_\tau^i \cdot h$ кўпайтма жисмнинг айланиш ўқига нисбатан моментини ифодалайди.

Натижада элементар иш учун

$$dA' = M'_z d\varphi \left(M'_z = mom_z\left(F'\right) = F_\tau \cdot h \right) \tag{10}$$

ифодани оламиз. Бу ердаги M'_z қаттиқ жисмнинг OZ қўзғалмас ўқ атрофидаги айлантирувчи моментидир.

Шундай қилиб, қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисмнинг бажарган элементар иши айлантирувчи моментнинг элементар бурчакка бўлган кўпайтмасига тенг экан. Чекли бурилиш бурчаклар учун $\overline{F}$ кучнинг бажарган иши

$$A_z = \int_{\varphi}^{\varphi_1} M_z d\varphi \tag{11}$$

тенглик билан аниқланади. Бу ердаги φ ва φ_1 – φ бурчакнинг бошланғич ва охирги қийматлари. Агар айлантирувчи момент вақт билан ўзгармаса, яъни M'_z = const бўлса, у ҳолда жисмнинг бажарган иши учун

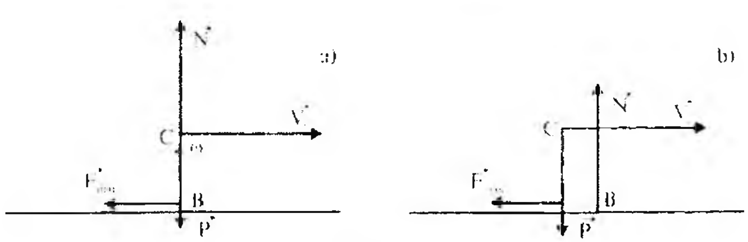
$$A' = M'_z(\varphi_1 - \varphi_0) \tag{12}$$

формулага эга бўламиз.

(10) тенгликнинг иккала қисмини dt га бўлиб, қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи қаттиқ жисмга қўйилган кучнинг қувватини аниқлаш формуласини топамиз $W = \frac{dA}{dt} = M'_z \frac{d\varphi}{dt} = M'_z \omega$.

Бу олинган формуладан равшанки, W қувватга эга бўлган двигателнинг айлантирувчи моменти қанча катта бўлса, унинг бурчак тезлиги шунча кичкина бўлади.

4. Юмалаётган жисмга таъсир қилувчи ишқаланиш кучининг бажарган ишини ҳисоблаймиз. *R* радиусли ғилдирак бирор текисликда сирпанмасдан думалаб ҳаракатланаётган бўлсин. Бундай ҳолда жисм уриниш нуқтаси текислик буйлаб сирпанишга қаршилик қилувчи $F_{ишқ}$



84-чизма.

ишқаланиш кучи таъсир қилади. Бу кучнинг бажарган элементар иши $dA = -F_{ишк} \cdot ds_B$ формула бўйича ҳисобланади. Қаралаётган ҳолда B нуқта тезликларнинг оний маркази бўлади, яъни $\vartheta_B = 0$. $dS_B = \vartheta_B \cdot dt$ бўлгани учун $dS_B = 0$ бўлади (84-чизма а ва б).

Жисмнинг ҳар қандай элементар кўчишида $dA = 0$ бўлади. Шундай қилиб, жисм сирпанмасдан думалаганда жисмнинг исталган кўчишида сирпанишга қаршилик қилувчи ишқаланиш кучининг бажарган иши нолга тенг бўлар экан. Шу сабабли жисмнинг B нуқтасига қўйилган $\overline{N}$ нормал куч таъсирида жисм деформацияланмаса, $\overline{N}$ нормал реакциянинг ҳам бажарган иши нолга тенг бўлади.

Энди тизим кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремани қисқача изоҳлаймиз. Нуқта кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теорема тизимнинг ҳар бир нуқтаси учун ўринли. Агар биз тизимнинг m_k массали $\overline{\vartheta}_k$ тезликка эга бўлган нуқтасини қарасак бу нуқта учун

$d\left(\frac{m_k \vartheta_k^2}{2}\right) = dA_k^e + dA_k^i$ тенглик ўринли. Бу ердаги dA_k^e ва dA_k^i k нуқтага таъсир қилаётган ташқи ва ички кучларнинг бажарган элементар ишлари. Бундай тенгликларни тизимнинг ҳар бир нуқтаси учун тузиб ва уларни ҳадлаб қўшиб $d\left(\sum_k \frac{m_k \vartheta_k^2}{2}\right) = \sum_k dA_k^e + \sum_k dA_k^i$ ёки

$$dT = \sum_k dA_k^e + \sum_k dA_k^i \tag{13}$$

тенгликни топамиз. (13) тенглик тизим кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремани дифференциал шаклда ифодалайди: тизим кинетик энергиясидан вақт бўйича олган ҳосила тизимга таъсир қилувчи ташқи ва ички кучлар бажарган элементар ишларнинг йиғиндисига тенг. Агар (13) тенгликнинг иккала қисмини жисмнинг кўчишида кинетик энергиянинг қиймати T бўлган ҳолатдан кинетик энергиянинг қиймати T_1 бўлган ҳолатгача интеграллаcак қуйидаги тенгликни оламиз

$$T_1 - T = \sum_k A_k^e + \sum_k A_k^i \tag{14}$$

Бу тенглама тизим кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремани чекли кўринишда ифодалайди: жисмнинг кўчишида унинг кинетик энергиясининг ўзгариши шу кўчиш давомида жисмга таъсир қилувчи барча ташқи ва ички кучлар бажарган ишларнинг йиғиндисига тенг бўлади.

Агар тизим ўзгармас бўлса, барча ички кучлар бажарган ишларининг йиғиндиси нолга тенг бўлади. Бундай ҳолда (13) ва (14) тенгламалар

$$dT = \sum_k dA_k \quad \text{ва} \quad T_1 - T_0 = \sum_k A_k \tag{15}$$

кўринишни олади.

Юқорида турли ҳоллар учун тизимнинг кинетик энергиясини ва тизимга таъсир этувчи кучларнинг бажарган элементар ишларини ҳисобладик. Ҳар бир ҳолни алоҳида-алоҳида масала деб қараса бўлади. Энди тизим кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теореманинг қўлланилишига доир комбинацион масала ечамиз.

28-масала. Механик тизим (2) юкдан, айланиш ўқига нисбатан инерция радиуси $\rho_3 = 0.2$ м бўлган $R = 0.3$ м ва $r_3 = 0.1$ м радиусли (3) шкивдан ва (5) ҳаракатланувчи блокдан иборат бўлиб, блок эса яхлит бир жинсли цилиндрдан иборат. (2) юк билан текислик орасидаги ишқаланиш коэффициенти $f = 0.1$ га тенг. Тизимнинг қисмлари бир-бири билан блок орқали ўтган арқон иплар билан (3) шкивга бирлаштирилган. Ипнинг жисмлар орасидаги қисми текисликларга параллел бўлиб, (5) жисмга эластиклик коэффициенти $c = 200 \frac{Н}{м}$ бўлган пружина маҳкамланган.

Тизим унинг S кўчишига боғлиқ бўлган $F = f(S) = 80(4 + 5S)$ куч таъсирида тинч ҳолатдан чиқиб ҳаракат қилади. Ҳаракатнинг бошида пружинада деформациянинг катталиги нолга тенг. Ҳаракат давомида (3) шкивга қаршилик кучларининг $M = 1.2$ н · м доимий моменти таъсир қилади.

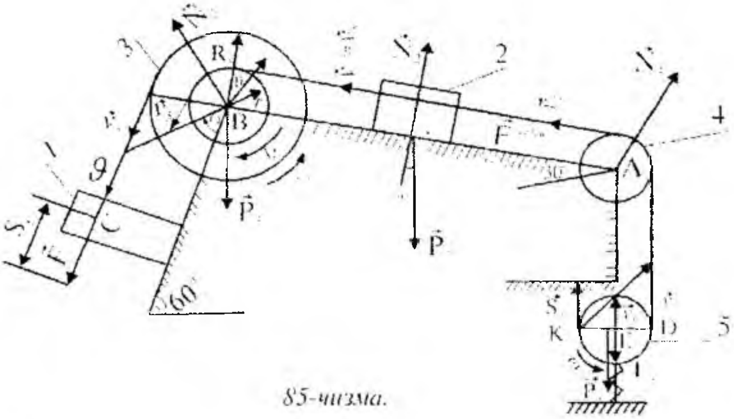
$S = S_1 = 0.1$м бўлган дақиқага мос келувчи (3) шкивнинг бурчак тезлигини аниқланг. Масала шарти ва талабни қуйидагича қисқача ёзиш ҳам мумкин. Механик тизим (2) юкдан , (3) шкивдан ва (5) ҳаракатланувчи блокдан иборат бўлиб, ҳаракатланувчи блокка пружина маҳкамланган.

$$R_3 = 0.3\text{м}, \quad r_3 = 0.1\text{м}, \rho_3 = 0.2\text{м}, f = 0.1, S_1 = 0.2\text{м}, m_1 = 0, m_2 = 6 \text{ кг}$$

$$m_3 = 4 \text{ кг}, m_4 = 0, m_5 = 5\text{кг}, c = 200 \frac{н}{м}, M = 1.2 \text{ н} \cdot \text{м}; F = f(S) = 80(4 + 5s) \omega_3$$

(3) шкивнинг бурчак тезлигини аниқлаш керак.

Ечиш. 1. Оғирликларга эга бўлган (2), (3), (5) жисмларга оғирликларга эга бўлмаган (1) ва (4) жисмлардан ташкил топган, иплар билан бирлаштирилган ўзгармас механик тизимни қараймиз. Тизимга таъсир қилувчи барча ташқи кучларни 85-чизмада тасвирлаймиз.



85-чизма.

1) $\bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_5$ — оғирлик кучлари;

2) $\bar{N}_2, \bar{N}_3, \bar{N}_4$ — реакция кучлари ($m_4 = 0$ бўлгани учун $\bar{N}_4 = 0$);

3) $\bar{S}_5$ — ипнинг таранглик кучи;

4) $\bar{F}_1^{ишқ}$, $\bar{F}_2^{ишқ}$ ишқаланиш кучлари ($m_1 = 0$ бўлгани учун $\bar{F}_1^{ишқ} = 0$);

5) M — қаршилик кўрсатувчи момент;

6) F — таъсир қилувчи куч;

7) $\bar{F}_э$ — пружинанинг эластиклик кучи.

2. ω_3 ни аниқлаш учун тизим кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремадан фойдаланамиз

$$T - T_0 = \sum_k A_k \qquad (16)$$

T_0 ва T миқдорларни аниқлаймиз. Бошланғич дақиқада тизим тинч турганлиги туфайли $T_0 = 0$ бўлади. T миқдор эса тизим барча жисмлари кинетик энергияларининг йиғиндисига тенг $T = T_2 + T_3 + T_5$.

(5) жисм ясси параллел ҳаракат, (2) жисм эса илгарилама, (3) жисм қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракат қиладилар. Ҳар бир жисмнинг кинетик энергиясини алоҳида- алоҳида ҳисоблаймиз:

а) (2) юкнинг кинетик энергияси

$$T_2 = \frac{m_2 \vartheta_2^2}{2} \qquad (17)$$

формула билан топилади. ϑ_1 ни ω_3 орқали ифодалаймиз. Бунинг учун жисмлар тезликлари орасидаги ўзаро муносабатларни ўрнатамиз. Чизмадан равшанки $\vartheta_3 = \omega_3 R_3$ ва $\vartheta_1 = \vartheta_3 = \omega_3 r_3$ бўлиб, (2) жисмнинг кинетик

энергияси учун $T_2 = \frac{1}{2} m_2 \omega_3^2 r_3^2$ (18)

ифодани топамиз.

б) (3) шкивнинг кинетик энергиясини $T_3 = \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2$ формула бўйича ҳисоблаймиз. Бунда

$$J_3 = m_3 \rho_3^2$$

(3) шкивнинг инерция моменти. T_3 ни ρ_3 инерция радиуси орқали ифодалаймиз.

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \rho_3^2 \omega_3^2 \tag{19}$$

в) (5) блок ясси параллел ҳаракат қилади. Унинг кинетик энергия-

си $T_5 = \frac{m_5 \vartheta_5^2}{2} + \frac{1}{2} J_{c_5} \omega_5^2$ формула бўйича топилади. Бу ердаги J_{c_5} – блокнинг оғирлик маркази орқали ўтадиган ўққа нисбатан инерция моменти. Шартга кўра (5) блок яхлит бир жинсли цилиндрдан иборат. Унинг инерция моменти $J_{c_5} = \frac{1}{2} m_5 R_5^2$ формула бўйича аниқланади. Қаралаётган жисм учун $\vartheta_5 = \omega_3 r_3$, $\omega_5 = \frac{\vartheta_5}{R_5} = \frac{\omega_3 r_3}{r_3} = \omega_3$, $R_5 = r_3 = 0.1$м

Натижада T_5 энергия учун қуйидаги формулани топамиз:

$$T_5 = \frac{1}{2} m_5 \omega_3^2 r_3^2 + \frac{1}{2} m_5 r_3^2 \omega_3^2 = m_5 r_3^2 \omega_3^2 \tag{20}$$

(18),(19) ва (20) ни (17) га қўйиб , тизимнинг кинетик энергияси учун ифодани топамиз

$$T = \left(\frac{1}{2} m_2 r_3^2 + \frac{1}{2} m_3 \rho_3^2 + m_5 r_3^2 \right) \omega_3^2 \tag{21}$$

3. $S = S_1 = 0.2$м бўлган ҳолат учун тизимга таъсир қилувчи барча ташқи кучларнинг бажарган ишларининг йиғиндисини топамиз

$$\sum_k A_k^e = A(\overline{P}_2) + A(\overline{P}_3) + A(\overline{P}_5) + A(\overline{N}_2) + A(\overline{N}_4) + A\left(\overline{F}_1^{\text{ишқ}}\right) + A\left(\overline{F}_2^{\text{ишқ}}\right) +$$

$$+A(\overline{S}_5)+A(\overline{F}_{el})+A(M)+A(\overline{F}) \qquad (22)$$

$\overline{P}_3$, $\overline{N}_3$ ва $\overline{N}_4$ кучлар қўйилган нуқталар қўзғалмас бўлганлиги учун $A(\overline{P})=0$ ва $A(\overline{N}_3)=A(\overline{N}_4)=0$ бўлади: $\overline{N}_2$ реакция кўчишга перпендикуляр бўлгани учун $A(\overline{N}_2)=0$ бўлади; $\overline{P}_1=0$ бўлганлиги учун $A\left(\overline{F}_1^{ишк}\right)=0$ бўлади; $\overline{S}_5$ куч тезликларнинг оний марказига қўйилгани учун унинг ҳам бажарган иши нолга тенг, яъни $A(\overline{S}_5)=0$.

а) огирлик кучларининг бажарган ишларини ҳисоблаймиз

$$A(P_2)=\overline{P}_2S_2\sin 30^\circ=0.5m_2gs_2;$$

$$A(\overline{P}_5)=-\overline{P}_5\cdot S_5z=-5m_2gs_E;$$

б) ишқалиш кучининг бажарган иши

$$A\left(\overline{F}_2^{ишк}\right)=-F_2^{ишк}\cdot S_2=-f N_2S_2=-f P_2S_2\cos 30=-f m_2gS_2\cos 30;$$

в) таъсир қилувчи кучнинг бажарган иши

$$A(\overline{F})=\int_0^S 60(4+5S)ds=80\left(4s+2.5S^2\right)\Big|_0^S=80\left(4S_1+2.5S_1^2\right);$$

г) эластиклик кучининг бажарган иши $A(\overline{F}_{el})=\frac{c}{2}\left(\lambda_0^2-\lambda^2\right)$;

д) қаршилик қилувчи моментнинг бажарган иши $A(M)=-M\varphi_3$.

Энди тезликлар ва кўчишлар орасидаги муносабатларни ўрнатамиз.

Чизмадан равшанки $\quad \frac{\vartheta_3}{R_3}=\frac{\vartheta_5}{r_3}\Rightarrow\vartheta_3=\frac{R_3}{r_3}\vartheta_5=\frac{0.3}{0.1}\vartheta_5=3\vartheta_5;$

$$\frac{\vartheta_E}{r_3}=\frac{\vartheta_5}{2r_3}\Rightarrow\vartheta_E=\frac{r_3}{2r_3}\vartheta_5=0.5\vartheta_5;$$

Тезликлар орасидаги муносабатлар сингари кўчишлар орасидаги муносабатларни ўрнатамиз

$S_3=S_4=S_2;\ S_3=S_1;\ S_3=3S_5;\ S_E=0.5S_5;$

$$S_5=\frac{1}{2}S_1;\ S_4=S_2=\frac{1}{2}S_1;\ S_E=\frac{1}{6}S_1.$$

Масала шартига кўра $\lambda_0=0$ бўлади. $\lambda=S_E=\frac{1}{6}S_1;$

$$\omega_3 = \frac{S_3}{\rho_3} = \frac{S_2}{r_3} = \frac{S_1}{R_3} = \frac{1}{3}\frac{S_1}{r_3}.$$

Натижада $A(\overline{P}_2)$, $A(\overline{P}_5)$, $A\left(\overline{F}_2^{\text{ишк}}\right)$, $A(\overline{F}_{\dots})$, $A(\overline{M})$ ишлар учун қуйидаги ифодаларни топамиз:

$$A(\overline{P}_2) = \frac{1}{6} m_2 g s_1;\ A(\overline{P}_2) = \frac{1}{6} m_5 g s_1;\ A\left(\overline{F}_2^{\text{ишк}}\right) = \frac{1}{3} f m_2 g s_1 \cos 30^\circ;\ A(\overline{F}_{\dots}) =$$

$$= \frac{c}{72} S_1^2;\ A(M) = -M\frac{S_1}{R_3} \qquad (23)$$

ҳисобланган ишларнинг йиғиндисини топамиз;

$$\sum_k A^? = \frac{1}{6}(m_2 - m_5) g s_1 - \frac{1}{3} f m_2 g s_1 \cos 30^\circ - \frac{c}{72} S_1^2 - M\frac{S_1}{R_3} + 80\left(4S_1 + 2{,}5S_1^2\right) \qquad (24)$$

(21) ва (24) ни (16) га қўйиб изланаётган миқдорни топишга имкон берадиган формулани оламиз

$$\left(\frac{1}{2} m_2 r_3^2 + \frac{1}{2} m_3 \rho_3^2 + m_5 r_3^2\right)\omega_3^2 = \frac{1}{6}(m_2 - m_5) g s_1 +$$

$$+\left(-\frac{1}{3} f m_2 g s_1 \cos 30^\circ\right) - \frac{c}{72} S_1^2 - M\frac{S_1}{R_1}$$

Бу тенгламадан ω_3 ни топамиз ва ҳисоблаймиз

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{80\left(4S_1 - 2{,}5S_1^2\right) + \frac{1}{6}(m_2 - m_5) g S_1 - f m_2 g S_1 \cos 30^\circ - \frac{c}{72} S_1^2 - M\frac{S_1}{R_3}}{\frac{1}{2} m_c r_3^2 + \frac{1}{2} m_3 \rho_3^2 + m_5 r_3^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{80(4\cdot 0{,}2 + 2{,}5\cdot 0{,}04) + \frac{1}{6}(6-5)9{,}8\cdot 0{,}2 - \frac{1}{3}\cdot 0{,}1\cdot 6\cdot 9{,}8\cdot 0{,}2\cdot 0{,}866 - \frac{807}{72}\cdot 0{,}04 - 1{,}2\cdot\frac{0{,}2}{0{,}2}}{0{,}5\cdot 6\cdot 0{,}01 + 0{,}5\cdot 4\cdot 0{,}04 + 5\cdot 0{,}01}}$$

$$= \sqrt{\frac{80\cdot 0{,}9 + 0{,}33 - 0{,}24 - 0{,}11 - 0{,}8}{0{,}33 + 0{,}88 + 0{,}05}} = \sqrt{\frac{71{,}18}{0{,}16}} = \sqrt{444{,}9} = \sqrt{4{,}449\cdot 100} =$$

$$= 10\sqrt{4{,}449} = 10\cdot 2{,}1 = 21\,\text{сек}^{-1}. \qquad \omega_3 = 21\,\text{сек}^{-1}$$

25-МАШҒУЛОТ

9-§. Умумий теоремаларни қаттиқ жисм динамикасига қўллаш

1. Кинематикадан маълумки, илгариланма ҳаракат қилаётган жисмнинг барча нуқталари бир хил траектория чизади, вақтнинг ҳар бир дақиқасида жисм нуқталарининг тезлик ва тезланиш векторлари модул ва йўналиш жиҳатидан бир хил бўлади. Қаралаётган ҳаракатда қаттиқ жисм ва унинг барча нуқталари қаттиқ жисмнинг масса марказидек ҳаракат қилади. Шундай экан, қаттиқ жисмнинг илгариланма ҳаракатига тизим масса марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремани қўллаш мумкин.

Илгариланма ҳаракат қилаётган қаттиқ жисм масса марказининг ҳаракати

$$M\bar{a}_c = \sum_k \bar{F}_k^e \qquad (1)$$

кўринишдаги вектор дифференциал тенглама билан ифодаланади. Бу ердаги M жисмнинг массаси, $\bar{a}_c$ жисм масса марказининг вектор тезланиши, $\sum\limits_k \bar{F}_k^e$ жисмга таъсир қилувчи барча ташқи кучларнинг бош вектори.

Юқорида эслатганимизд илгариланма ҳаракат қилаётган жисмнинг барча нуқталари жисм масса марказининг тезланишидек тезланиш билан ҳаракат қилади. Агар жисм исталган нуқтасининг тезланишини $\bar{a}$ десак, $\bar{a}_c = \bar{a}$ бўлиб, бундай ҳолда жисм масса марказининг ҳаракати $M\bar{a} = \sum\limits_k \bar{F}_k^e$ кўринишдаги вектор дифференциал тенглама билан ёзилади.

(1) вектор тенгламанинг иккала қисмини координата ўқларига проекциялаб, битта вектор тенглама ўрнига учта скаляр тенглама оламиз

$$M\ddot{x} = \sum_k F_{kx}^e,\quad M\ddot{y} = \sum_k F_{ky}^e,\quad M\ddot{z} = \sum_k F_{kz}^e. \qquad (2)$$

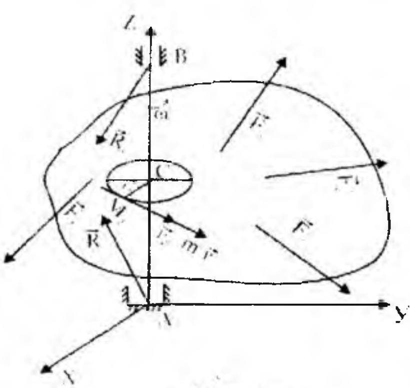
Бу тенгламаларда қатнашаётган x, y, z ўзгарувчилар қаттиқ жисм исталган нуқтасининг координаталари бўлиб, хусусий ҳолда, жисм масса марказининг ҳам координаталари бўлиши мумкин.

Жисм илгариланма ҳаракатининг дифференциал тенгламалари бўйича жисмнинг илгариланма ҳаракати ҳақидаги икки гуруҳ масалаларни ечиш мумкин: 1) қаттиқ жисмнинг берилган ҳаракат қонуни бўйича унга таъсир қилувчи барча ташқи кучларнинг бош векторини топиш; 2) илгариланма ҳаракат қилаётганда жисмга таъсир этувчи ташқи кучлар ва ҳаракатнинг бошлангич шартлари берилганда жисм ҳаракатининг кинематик тенгламаларини топиш.

2. OZ қўзғалмас ўқ атрофида ω бурчак тезлик билан айланма ҳаракат қилаётган қаттиқ жисмни қараймиз. Қаттиқ жисмга $\overline{F}_1^e, \overline{F}_2^e, \dots, \overline{F}_n^e$ ташқи кучлар ва вертикал ўқ маҳкамланган А ва В нуқталарнинг $\overline{R}_A$ ва $\overline{R}_B$ таянч реакциялари ҳам таъсир қилаётган бўлсин. Агар биз OZ ўққа нисбатан моментлар теоремасидан фойдалансак, олдиндан номаълум бўлган таянч реакциялари жисмнинг ҳаракат тенгламаларида қатнашмайди, яъни момент маркази OZ ўқда ётганлиги туфайли $\overline{R}_A$ ва $\overline{R}_B$ кучларнинг моментлари нолга тенг бўлади. Жисмнинг ҳаракати эса $\frac{d\overline{K}_z}{dt} = \overline{M}_z$ вектор тенглама билан ёзилади. Бунда $\overline{M}_z = \sum_k mom_z\left(\overline{F}_k^e\right)$. Бундан кейин M_z миқдорни айлантирувчи моменти деб атаймиз.

Қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган қаттиқ жисм учун (86-чизма) $K_z = J_z\omega$ формула ўринли, бу ердаги J_z қўзғалмас айланиш ўқига нисбатан жисмнинг инерция моменти бўлиб, бу миқдор жисм учун ўзгармас бўлади. Агар φ бурилиш бурчагини эътиборга олиб, $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$ эканлигини ҳисобга олсак, жисмнинг ҳаракати

$$J_z\frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z \qquad (3)$$



86-чизма.

тенглама билан ифодаланади. (3) қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофида айланишини тасвирловчи дифференциал тенгламадир. (3) тенглик шу мулоҳазани тасдиқлайдики, M_z айлантирувчи моменти берилганда жисмнинг инерциал моменти қанча катта бўлса, унинг бурчак тезланиши шунча кичик бўлади ва аксинча. (3) тенгликдан шу хулосани чиқариш мумкинки, жисмнинг массаси унинг илгариланма ҳаракатида қандай рол ўйнаса, жисмнинг инерция моменти ҳам унинг айланма ҳаракатида шундай рол ўйнайди, яъни инерция моменти жисмнинг айланма ҳаракатида инертлик вазифасини ўйнайди.

Жисм айланма ҳаракати учун олинган дифференциал тенгламалардан фойдаланиб, жисмнинг айланма ҳаракатига доир икки гуруҳ масалаларни ечиш мумкин: 1) M_z^e айлантирувчи моментни билган ҳолда, жисмнинг $\varphi = f(t)$ айланиш қонунини ёки унинг ω бурчак тезлигини топиш; 2) жисмнинг $\varphi = f(t)$ айланиш қонунини билган ҳолда, M_z^e айлантирувчи моментни топиш масалаларини ечиш мумкин. Биринчи гуруҳ масалаларини ечишда M_z миқдор ўзгарувчан бўлиб, умумий ҳолда у t вақтнинг φ бурилиш бурчагининг, ω бурчак тезликнинг функцияси бўлиши мумкин. (3) тенглама ўрнига жисмнинг айланма ҳаракатини ўрганиш учун жисм кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодаловчи $T - T_0 = A^e$ тенгламадан ҳам фойдаланиш мумкин. Бунда $T = \frac{1}{2} J_z \omega^2$, $A^e = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M_z d\varphi$

Қуйидаги хусусий ҳоллар ҳам муҳим аҳамиятга эга: 1) агар $M_z = 0$ бўлса, у ҳолда $\omega = const$ бўлади, яъни жисм текис айланади; 2) агар $M_z^e = const$ бўлса, у ҳолда $\varepsilon = const$ бўлади, яъни жисм текис ўзгарувчан айланма ҳаракат қилади.

(3) тенглама кўриниши жиҳатидан нуқта тўғри чизиқли ҳаракатининг тенгламасига ўхшайди. Шунинг учун (3) тенгламани интеграллаш усуллари ҳам ўхшаш бўлади.

$$M_z^e = const,\ M_z^e = M(t),\ M_z^e = M(\varphi)$$

$M_z = M(\omega), M_z = M(t,\varphi), M_z = M(t,\omega), M_z = (\varphi,\omega), M_z(t,\varphi,\omega)$ бўлган ҳоллар алоҳида-алоҳида қаралиб, жисм айланиш қонунларини топиш мумкин.

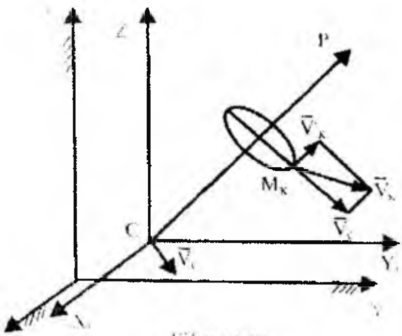
3.Кинематикадан маълумки, исталган дақиқада ясси параллел ҳаракат қилаётган жисмнинг ҳолати қутб нуқтанинг ҳолати ва бу қутб нуқта атрофида жисмнинг бурилиш бурчаги билан тўлигича аниқланади.

Агар қутб нуқта сифатида жисмнинг масса марказини олсак, динамика масалалари енгилроқ ечилади. Бу ердаги асосий масала жисмнинг ҳолатини аниқловчи x_c ва y_c координаталарни ва φ бурилиш бурчагини топишдан иборатдир (87-чизма).

Ясси параллел ҳаракат қилаётган жисмни унинг ҳаракат текислигига параллел бўлган ва C масса маркази орқали ўтган текисликдаги кесим билан тасвирлаш мумкин. Фараз қилайлик жисмга кесим текисли гида ётган $\bar{F}_1, \bar{F}_2 ... \bar{F}_n$ ташқи кучлар таъсир қилаётган бўлсин. Бундай ҳолда С нуқтанинг ҳаракат тенгламасини жисм масса марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремадан фойдаланиб аниқлаш мумкин

$$Ma_c = \sum_k \bar{F}_k^e \qquad (4)$$

Жисмнинг С қутб нуқта атрофидаги айланма ҳаракати эса (3) тенглама билан ёзилади.



87-чизма

Шундай қилиб, (4) вектор тенгламанинг иккала қисмини координата ўқларига проекциялаб, олинган ва (3) тенглама биргаликда қаттиқ жисм ясси параллел ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини ташкил қилади

$$M\ddot{x}_c = R_x^e,\ M\ddot{y}_c = R_y^e,\ J_c\ddot{\varphi} = M_z^e \qquad (5)$$

Бу тенгламалар ёрдамида берилган кучлар бўйича жисмнинг ҳаракат қонунини ёки жисмнинг ҳаракат қонуни бўйича таъсир этувчи кучларининг бош векторини ва бош моментини топиш мумкин. Агар жисм эркин бўлмаган ҳаракат қилаётган бўлса, у ҳолда таъсир қилувчи кучлар таркибига боғланиш реакция кучларини ҳам қўшиб олиш керак. Бундан ҳол учун жисм ҳаракатининг дифференциал тенгламалари қуйидагича бўлади:

$$M\ddot{x}_c = R_x^e + R_x,\ M\ddot{y}_c = R_y^e + R_y,\ J_c\ddot{\varphi} = M_z^e + M_z^R$$

бунда

$$R_x = \sum_k F_{kx},\ R_y = \sum_k F_{ky},\ R_x = \sum_k R_{kx},\ R_y = \sum_k R_{ky},\ M_z^R = \sum_k mom_z(R_k) \qquad (6)$$

(6) тенгламаларга яна боғланишларнинг ҳам тенгламалари қўшилади.

Агар жисмнинг эркин бўлмаган ҳаракатида жисм масса марказининг траекторияси маълум бўлса, С нуқтанинг ҳаракати тенгламаларини траекториянинг шу С нуқтасига ўтказилган уринма ва бош нормалдаги проекциялари бўйича тузиш жуда қулай. Бундай ҳолда (5) тенгламалар қуйидаги кўринишни олади:

$$M\frac{dv}{dt} = \sum_k F_{k\tau},\ M\frac{v^2}{\rho_c} = \sum_k F_{kn},\ J_c\frac{d^2\varphi}{dt^2} = M \qquad (7)$$

Бу ердаги ρ_c – масса маркази траекториясининг эгрилик радиуси.

Бу машғулотларга доир масалаларни муаллиф П. Қурбоновнинг «Математик маятник ва параметрик тебранишлар» номли илмий методик қўлланмасидан ҳам топиш мумкин. Бу қўлланмада математик маятник ва унинг турли хил тебранишларига доир амалий масалалар ечиб таҳлил қилинган ва ечиш учун масалалар берилган.

29-масала (физик маятник). Огирлик кучи таъсири остида қўзгалмас горизонтал ўқ атрофида тебранма ҳаракат қилувчи қаттиқ жисмга физик маятник дейилади.

Физика маятникни унинг айланиш ўқи ва *с* масса маркази орқали ўтган текисликдаги кесими билан тасвирлаймиз. Бу текисликнинг айланиш ўқи билан кесишиш нуқтаси физик маятникнинг қўйилиш нуқтаси дейилади.

Бу нуқтани координата боши деб қабул қилиб, *OZ* ўқни айланиш ўқи бўйича йўналтирамиз (88-чизма, а ва б). *Ox* ва *Oy* ўқларни эса маятникнинг огирлик маркази, қўйилиш нуқтаси орқали ўтган ва айланиш ўқига перпендикуляр бўлган текисликда жойлаштирамиз. *Oz* ўқ атрофида айланаётган жисмнинг ҳаракати $J_z\ddot{\varphi} = M_z$ дифференциал тенглами билан ёзилади. Бу ердаги $M_z = M = -Gd\sin\varphi$ маятникнинг *OZ* ўққа нисбатан айлантирувчи моменти. Бундай ҳолда маятникнинг ҳаракат тенгламаси

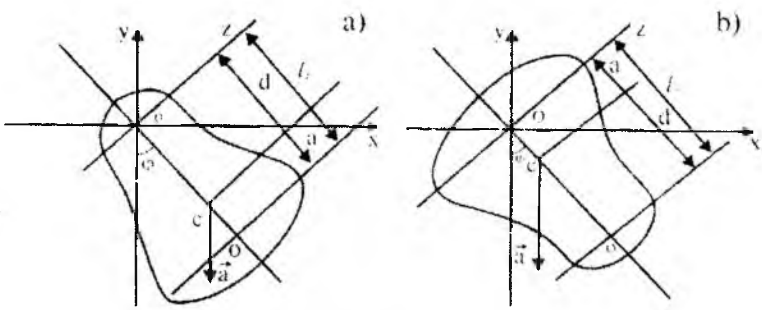
$$J_z\ddot{\varphi} = -Gd\sin\varphi \qquad (8)$$

кўринишни олади. Бу ердаги минус ишораси шунинг учун ҳам олиндики, $\varphi > 0$ бўлганда момент манфий, $\varphi < 0$ бўлганда эса мусбат бўлади. Бизнинг ҳолда $\varphi > 0$ $J_z = J$ маятникнинг қўйилиш ўқига нисбатан инерция моменти.

Физик маятник тенгламасининг шаклини ўзгартириб, уни

$$\ddot{\varphi} + \frac{Gd}{J_z}\sin\varphi = 0 \qquad (9)$$

кўринишга келтирайлик. (9) тенглама физик маятник ҳаракатини ифодалайди. Бу тенглама математик маятникнинг ҳаракат тенгламасидан фақат $\sin\varphi$ олдидаги коэффициентлар билан фарқ қилади. Математик маятник ҳаракатининг дифференциал тенгламаси



88-чизма.

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\sin\varphi = 0 \qquad (10)$$

кўринишга эга. Математик маятникнинг тебраниш даври физик маятникнинг тебраниш даврига тенг бўлганда, унинг ипининг узунлигини аниқлаймиз. Бунинг учун (9) ва (10) тенгламаларда $\sin\varphi$ олдидаги коэффициентларни тенглаштириб, ℓ ни топамиз

$$\ell = \frac{J_Z}{md} \qquad (11)$$

формула тебраниш даври физик маятникнинг тебраниш даврига тенг бўлган математик маятникнинг узунлигини аниқлайди. Бундай усул билан аниқланган узунлик физик маятникнинг келтирилган узунлиги дейилади.

OZ ва CZ параллел ўқларга нисбатан инерция моментлари орасидаги богланишдан фойдаланамиз: $J_Z = J_c + md^2 = m\rho_c^2 + md^2$ бунда ρ_c – cz ўққа нисбатан маятникнинг инерция радиуси J_Z нинг бу ифодасини (11) га қўйиб, физик маятникнинг келтирилган узунлиги учун бошқа бир ифода топамиз

$$\ell_1 = \frac{\rho_c^2}{d} + d \qquad (12)$$

Бу масофани қўйилиш нуқтадан огирлик маркази йўналишида ётказиб, O_1 нуқтани топамиз. Бу нуқтани маятникнинг тебраниш маркази дейилади. Маятникнинг огирлик марказидан тебраниш марказигача бўлган масофа $a = \frac{\rho_c^2}{d}$ га тенг бўлади. Бундай ҳолда маятникнинг келтирилган узунлиги учун бошқа ифода оламиз: $\ell_1 = a + d$, бунда d – oc, $a = co_1$, o_1 – тебраниш маркази, O_1Z тебраниш ўқи бўлади.

Физик маятникнинг қўйилиш нуқтаси ва тебраниш маркази ўзаро ўрин алмаштириш хоссасига бўйин синади. Бунинг учун O_1Z тебраниш ўқини қўйилиш ўқи деб қараймиз. Бундай ҳолда маятникнинг огирлик марказидан бу ўққача бўлган масофа a га тенг бўлиб, унинг келтирилган узунлиги (12) формулага кўра $\ell_2 = \frac{\rho_c^2}{a} + a$ ёки $\ell_2 = d + a$ га тенг бўлади. Бундан қуйидаги хулоса келиб чиқади: маятникнинг тебраниш ўқи олдинги OZ қўйилиш ўқидан иборат бўлади. Иккала маятникнинг (тўғри ва тескари) келтирилган узунликлари тенг бўлади $\ell_1 = \ell_2$. Шунингдек, иккала маятникнинг тебраниш даври ҳам бир хил ва тенг бўлади.

Шундай қилиб, агар физик маятникнинг тебраниш ўқини унинг қўйилиш ўқи деб ҳисобласак, у ҳолда илгари қўйилиш ўқ тебраниш ўқи бўлиб қолади.

Математик таҳлил ва мактаб курсида $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ лимитик ўтишни асослаб, $\sin x \approx x$ тақрибий формулани ўрганган эдик. Агар бу тақрибий формулани эътиборга олсак, маятникнинг кичик тебранишлари

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgd}{J_z}\varphi = 0 \tag{13}$$

чизиқли оддий дифференциал тенглама билан тавсифланади. Агар бу тенгламада $k^2 = \frac{mgd}{J_z}$ белгилашни киритсак, у тенглама кўринишни

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0 \tag{14}$$

олади. Унинг умумий ечимини эса $\varphi = c_1 \sin kt + c_2 \cos kt$ кўринишда излаймиз. Агар $t = 0$ бошланғич дақиқада маятник $\varphi = \varphi_0$ кичик бурчакка бурилган деб, бошланғич тезликсиз $(\dot{\varphi}_0 = 0)$қўйиб юборилган десак, доимий миқдорларни $C_1 = 0$, $C_2 = \varphi_0$ кўринишда баҳолаш мумкин. Демак, берилган бошланғич шартларда маятникнинг кичик тебранишлари $\varphi = \varphi_0 \cos kt$ кўринишдаги гармоник тебранишлардан иборат бўлар экан.

Бу тебранишларнинг даври $T_\varphi = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{J_z}{mgd}}$ формула билан топилади.

Равшанки, кичик тебранишларда давр бурилиш бурчагининг φ_0 бошланғич қийматига боғлиқ бўлмайди. Бу тақрибий натижадир. Агар физик маятник тенгламасини $\sin\varphi \approx \varphi$ тақрибий формуладан фойдаланмасдан интеграллаcак, T_φ миқдор φ_0 га боғлиқ бўлиб, у тақрибан $T_\varphi \approx 2\pi\sqrt{\frac{J_z}{mgd}}\left(1 + \frac{\varphi_0^2}{16}\right)$ формула билан аниқланади. Шундай қилиб, физик маятникнинг кичик тебранишлари ҳам чизиқли гармоник осциллятор моделига келтирилиб ўрганилар экан.

30-масала. Оғирлиги P га тенг бўлган барабаннинг радиуслари R ва $r = 0{,}6R$ га тенг. Барабанга ўралган ипнинг бир учига $F = 0{,}4\,P$ доимий куч таъсир қилади. Бу кучнинг йўналиши $\beta = 60$ бурчак билан аниқланади. Агар барабан тинч ҳолатдан чиқиб, $\alpha = 30^\circ$ ли қия текислик бўйлаб сирпанмасдан думалаб ҳаракат қила бошлаган бўлса, 1) $x_c = f(t)$ барабан масса марказининг ҳаракат қонунини топинг. 2) барабан сирпанмасдан тебранма ҳаракат қилганда f_{min} -ишқаланиш коэффициентининг энг кичик қийматини топинг. Барабанга эса R радиусли яхлит цилиндр деб қаранг.

Масала шарти ва талабини қуйидагича қисқача ёзиш ҳам мумкин, берилганлар:

$R, P, F = 0.4P$; $M = 0$; $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$;

$x|_{t=0} = x_0 = 0$; $\dot{x}|_{t=0} = \dot{x}_0 = 0$; $r = 0.6R$, аниқлансин:

1) $x_c = f(t)$ – барабан масса маркази ҳаракатининг қонуни;

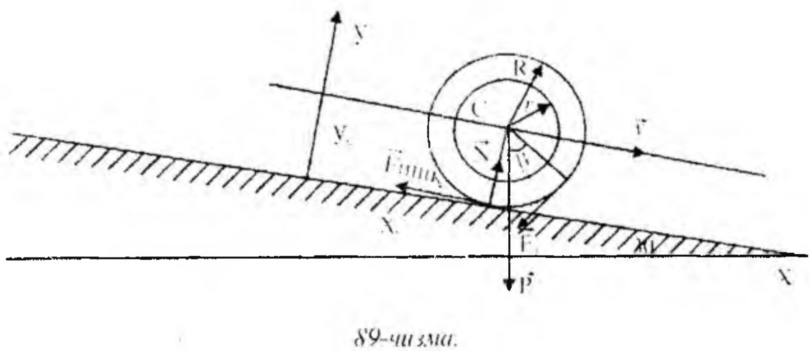
2) f_{min} – ишқаланиш коэффициентининг энг кичик қиймати.

Ечиш. Барабан $P, F, N, F_{ишк}$ кучлар таъсирида ясси параллел ҳаракат қилади. Oxy тўғри бурчакли координаталар тизимининг ўқларини чизмадагидек йўналтириб, барабан ясси параллел ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини тузамиз (89-чизма)

$$m\ddot{x}_c = \sum_k F_{kx}; \quad m\ddot{x}_c = P\sin\alpha - F\cos\beta - F_{ишк}; \qquad (*)$$

$$m\ddot{y}_c = \sum_k F_{ky}; \quad m\ddot{y}_c = -P\cos\alpha - F\sin\beta + N \qquad (a)$$

$$J_{cz}\ddot{\varphi} = \sum_k mom_{cz}(\bar{F}_k)$$



89-чизма.

бунда, $J_{CZ} = \frac{1}{2} mR^2$ – барабаннинг огма текисликка перпендикуляр ва C огирлик маркази орқали ўтган CZ ўққа нисбатан инерция моменти. Моментлар учун мусбат йўналиш қилиб, барабаннинг C масса маркази ОУ ўқдан қайси томонга қараб айланиш йўналишини қабул қиламиз.

Бундай ҳол учун юқоридаги охирги тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{1}{2} mr^2\varepsilon = Fr + F_{ишк}R \Rightarrow \frac{1}{2} mR\varepsilon = 0.6F + F_{ишк} \qquad (15)$$

2. $x_c = f(t)$ ни аниқлаймиз. Қаралаётган масалада $y_c = R = const$ бўлиб, $\ddot{y}_c = 0$ бўлишлиги равшан. Учта тенгламада тўртта $x_c, \varepsilon, N, F_{ишк}$ номаълум миқдорлар қатнашади. $\ddot{x}_c$ ва ε миқдорлар орасидаги богланишни ўрнатамиз. Агар барабан сирпанмаса, бундай ҳолда K нуқта тезликларнинг оний маркази бўлади. Бундай ҳол учун $\ddot{x}_c = \varepsilon R$ (4) муносабат ўринли. (4) ни (15) га қўйиб $\frac{1}{2} m\ddot{x}_c = 0.6F + F_{ишк}$ (5) тенгламани оламиз. Энди (1) ва (5) тенгламаларни ҳадлаб қўшиб, улардан $F_{ишк}$ ни чиқариб ташлаймиз. Натижада x_c ни аниқлаш учун тенглама оламиз

$$\frac{3}{2} m\ddot{x}_c = 0.54P \Rightarrow \ddot{x}_c = 0.36g \qquad (16)$$

(16) тенгламани интеграллаймиз

$$\dot{x}_c = 0.36gt + c_1, \quad x_c = 0.18gt^2 + c_1t + c_2 \qquad (17)$$

C_1 ва C_2 доимий сонларни бошлангич шартлардан аниқлаймиз. $t = 0$ бўлганда $\vartheta_0 = 0$ бўлишлигини эътиборга олсак (17) тенгламанинг биринчисидан $c_1 = 0$ бўлишлиги ва $t = 0$ бўлганда $x = 0$ бўлишлигини эътиборга олсак иккинчи тенгламадан $C_2 = 0$ бўлишлиги келиб чиқади. Натижада барабан C масса марказининг ҳаракат тенгламаларини $x_c = 0.18gt^2$, $y_c = R$ кўринишда топамиз.

3. f_{min} ни топамиз. Барабан сирпанмасдан тебранма ҳаракат қилишлиги учун

$$|F|_{ишк} < fN \Rightarrow f > \frac{|F_{ишк}|}{N} \qquad (18)$$

тенгсизлик бажарилиши керак. $y_c = R = const$ бўлганлиги учун $\ddot{y}_c = 0$ бўлади. Буни эътиборга олсак N миқдор (а) тенгламадан аниқланади:

$$N = P\cos\alpha + F\sin\beta = P\cos 30^\circ + 0{,}4\,P\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}P + 0{,}4\,P\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1{,}4\,P = 0{,}7\cdot 1{,}732\,P = 1{,}2124\,P$$

Энди $F_{ишк}$ ни топамиз. (5) тенгламада $\ddot{x}_c$ ни унинг топилган ифодаси билан алмаштирамиз. Натижада $F_{ишк}$ ни аниқлаш учун $\frac{1}{2}m\cdot 0{,}36g = 0{,}6\cdot 0{,}4\,P + F_{ишк}$ $(P = mg)$ тенгликни топамиз. Бу тенгликдан $F_{ишк}$ ни топамиз:

$$F_{ишк} = 0{,}18\,gm - 0{,}24\,P = 0{,}18\,P - 0{,}24\,P = -0{,}06\,P$$

Бу ердаги минус ишораси $F_{ишк}$ кучи шаклда тасвирланган йўналишига қарама-қарши йўналганлигини билдиради.

N ва $F_{ишк}$ нинг топилган ифодаларини (18) тенгсизликка қўйиб, f нинг барабан сирпанмасдан тебранма ҳаракат қилишидаги энг кичик қийматини топамиз

$$f \geq \frac{|0{,}06\,P|}{1{,}212N_p} = \frac{6}{121{,}24} \approx 0{,}05\,.$$

Шундай қилиб, барабаннинг текширилган ҳаракатида ишқаланиш коэффициентининг энг кичик қиймати 0,05 га тенг, яъни $f_{min} = 0{,}05$.

26-МАШҒУЛОТ

10-§. Ўзгарувчан массали нуқта ва тизим динамикаси (космик ҳаракатлар назарияси элементлари)

1. Нуқта ва тизим динамикасининг барча масалаларини ҳал қилишда динамиканинг қуйидаги асосий қонуни фундаментал аҳамиятга эга бўлди. Бу қонунга мувофиқ, материал нуқта қўйилган куч таъсирида у тезланиш олса, бу тезланиш саноқнинг инерциал тизимида қўйилган кучга пропорционал бўлади ва йўналиши эса куч йўналишида бўлади. Бошқача айтганда нуқта массасининг унинг куч таъсирида олган тезланишига бўлган кўпайтмаси модули бўйича қўйилган кучга тенг бўлиб, тезланишининг йўналиши куч йўналиши билан мос тушади. Саноқнинг инерциал тизимида бу қонун

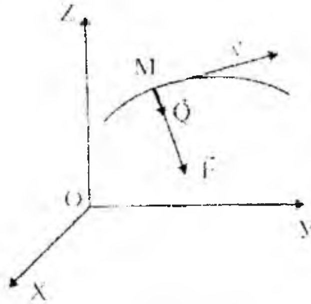
$$m\bar{a} = \bar{F} \qquad (1)$$

вектор тенглама билан ифодаланади. (1) тенглама нуқтага таъсир қилувчи $\bar{F}$ кучни, бу куч таъсирида нуқтанинг олган $\bar{a}$ тезланишини ва унинг m массасини боғлайди ва классик механикада динамиканинг асосий тенгламаси номи билан аталади.

Агар нуқта m ўзгармас массага ва $\bar{a} = \frac{d\bar{\vartheta}}{dt}$ тезланишга эга бўлса, динамиканинг асосий қонунини ифодаловчи тенгламага

$$\frac{d(m\bar{\vartheta})}{dt} = \bar{F} \qquad (2)$$

кўриниш бериш мумкин (90-чизма).



90-чизма.

(2) тенглама динамиканинг умумий қонунини ифодалайди. Классик механикада ҳар бир нуқтанинг (заррачанинг) массаси унинг ҳаракати давомида ўзгармас деб ҳисобланади. Лекин ҳаракат қилаётган нуқтанинг (жисмнинг) массаси ўзгарувчан ҳам бўлиши мумкин. Жисм ҳаракат қилаётганда унинг массаси ортиб ва камайиб туриши мумкин. Жисмнинг массаси t вақтнинг узлуксиз, хатто дифференциалланувчан функцияси ҳам бўлиши мумкин. Бундай материал жисмнинг ҳаракатини ўрганишга Ньютоннинг иккинчи қонунини қўллаб бўлмайди. Массаси ўзгарувчан жисмларга ракеталар ва реактив самолётлар мисол бўла олади. Реактив самолётнинг массаси унинг ҳаракати туфайли ортиб ва камайиб туради. Самолёт ҳаракатланганда унинг двигатели ҳавони ўз ичига тортиши натижаси массаси ортади, ёнилғининг сарфланиши натижасида унинг массаси камаяди.

Нурланиш туфайли Қуёш массаси камайиб туради, нурларни ютиши натижасида унинг массаси ортади.

Массаси ўзгарувчан жисмлар механикасининг илмий асосларини буюк рус олими И.В. Мешчерский ишлаб чиқди. К.Э. Циолковский эса унинг назариясини амалиётга қўллади.

2. Ўзгарувчан массали жисмлар учун динамиканинг (И.В. Мешчерскийнинг) асосий тенгламасини чиқарамиз. Фараз қилайлик t дақиқада m массали нуқта (жисм) $\bar{\vartheta}$ тезликка эга бўлсин. Δt вақтдан кейин эса унинг массасига $\bar{u}$ абсолют тезлик билан ҳаракатланаётган заррачанинг

Δm массаси қўшилсин дейлик. Бундай ҳолда нуқта $t+\Delta t$ лаҳзада $m+\Delta m$ массага ва $\bar{\vartheta}+\Delta\bar{\vartheta}$ тезликка эга бўлади. t лаҳзада тизимнинг ҳаракат миқдори $\bar{Q}=m\bar{\vartheta}+\bar{u}\Delta m$ бўлиб, $t+\Delta t$ лаҳзада эса $\bar{Q}+\Delta\bar{Q}=(m+\Delta m)(\bar{\vartheta}+\Delta\bar{\vartheta})$га тенг бўлади. Қаралаётган масалада жисм массасини вақтнинг дифференциалланувчан функцияси деб қараймиз. Тизим ҳаракат миқдорининг Δt вақт ичида ўзгаришини ҳисоблаймиз:

$$\Delta\bar{Q}=m\Delta\bar{\vartheta}+(\bar{\vartheta}-\bar{u})\Delta m+\Delta m\cdot\Delta\bar{\vartheta}$$

Бу тенгликнинг иккала қисмини Δt га бўлиб, $\Delta t\Rightarrow 0$ да иккала қисмининг лимитини ҳисоблаётганда $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta m\cdot\Delta\bar{\vartheta}}{\Delta t}=0(\Delta m\Delta\bar{\vartheta})$ кўпайтмани Δt га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдор десак) бўлишлигини эътиборга олсак, $\dfrac{dQ}{dt}=m\dfrac{d\bar{\vartheta}}{dt}+(\bar{\vartheta}-\bar{u})\dfrac{dm}{dt}$ тенгламага эга бўламиз. Агар ўзгарувчан массали нуқтага (жисмга) таъсир қилувчи барча ташқи кучларнинг тенг таъсир этувчисини $\bar{F}$ десак, у ҳолда нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремага кўра $\dfrac{dQ}{dt}=\bar{F}'$ тенгламага эга бўламиз. Натижада ўзгарувчан массали жисм ҳаракатининг дифференциал тенгламасини

$$m\frac{d\bar{\vartheta}}{dt}=(\bar{u}-\bar{\vartheta})\frac{dm}{dt}+\bar{F}' \tag{3}$$

кўринишда оламиз. Бу ердаги $\dfrac{dm}{dt}$ миқдорга нисбатан қуйидаги хулосаларни чиқариш мумкин: 1) агар $\dfrac{dm}{dt}>0$ бўлса, жисм массаси ортади; 2) агар $\dfrac{dm}{dt}<0$ бўлса, у ҳолда жисм массаси камаяди; 3) агар $\dfrac{dm}{dt}=0$ бўлса, у ҳолда жисм массаси ўзгармас бўлиб, (3) Мешчерский тенгламаси Ньютоннинг иккинчи қонунини ифодаловчи (2) тенгламани беради.

(3) Мешчерский тенгламасига бошқа кўриниш берамиз:

$$\frac{d(m\bar{\vartheta})}{dt}=\bar{F}'+\bar{U}\frac{dm}{dt} \tag{4}$$

Хусусий ҳолда, $\bar{u}=0$ бўлса , (4)тенглама (2) тенгламага айланади.

Агар $\overline{u} - \overline{\vartheta} = \overline{u}_r$ десак, яъни ўзгарувчан массали жисм ҳаракатига нисбатан қўшилувчи заррачанинг нисбий тезлигини киритсак И.В.Мешчерский тенгламаси

$$m\frac{d\overline{\vartheta}}{dt} = \overline{F}^e + \overline{u}_r\frac{dm}{dt} \qquad (5)$$

кўринишни олади. Агар $\overline{u}_r = 0$ бўлса, (5) тенгламадан (2) тенгламани оламиз. (5) тенгламанинг ўнг қисмидаги $\overline{u}_r\frac{dm}{dt}$ қўшилувчи миқдор жиҳатидан кучни ифодалайди. Бу кучни реактив куч деб атаймиз ва уни $\overline{R}$ орқали белгиласак, И.В.Мешчерский тенгламаси

$$m\frac{d\overline{\vartheta}}{dt} = \overline{F}^e + \overline{R} \qquad (6)$$

кўринишни олади. Шундай қилиб, ўзгарувчан массали нуқтага (жисмга) ташқи кучлар таъсир қилмаганда ҳам маълум тезланиш билан ҳаракатланар экан. Борди-ю $\overline{F}^e = 0$ бўлса, (6) дан

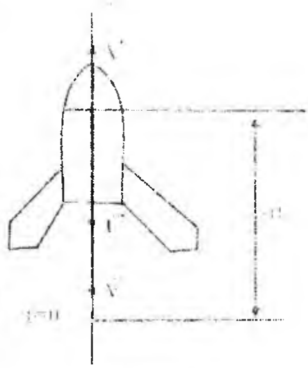
$$m\frac{d\vartheta}{dt} = R \qquad (7)$$

тенгламага эга бўламиз. Реактив кучнинг миқдорини топамиз

$$R = |u_r|\left|\frac{dm}{dt}\right|$$

Массанинг ўзгариши туфайли вужудга келадиган реактив куч нуқта (жисм) массасининг секундлаги $\frac{dm}{dt}$ ўзгариши билан қўшилаётган (ажралаётган) заррачанинг $\overline{u}_r$ нисбий тезлиги кўпайтмасига тенг экан.

31-масала. (ракетанинг тўғри чизиқли ҳаракати ҳақидаги К.Э.Циолковскийнинг биринчи масаласи). К.Э. Циолковскийнинг биринчи масаласи Ернинг тортиш кучи (оғирлик кучи) ва ҳавонинг қаршилигини эътиборга олмаганда бўшлиқда ракетанинг тўғри чизиқли ҳаракати ҳақида.



91-чизма.

Ракета M_0 бошланғич массага эга бўлиб, соплодан чиқаётган ёнилғи оқимининг таъсирида тўғри чизиқли ҳаракат қилсин. Ракетага нисбатан $\overline{U}$ оқим тезлиги миқдор ва йўналиш жиҳатидан доимий бўлиб, ракета бошланғич тезлиги йўналишига қарама-қарши томонга йўналган бўлсин. Ернинг тортиш кучини ва ҳавонинг қаршилигини эътиборга олмаган ҳолда ракетанинг ҳаракат қонуни топилсин (91-чизма).

Қаралаётган масала учун (5) тенглама, яъни ракета ҳаракатининг дифференциал тенгламаси (Ox ўқни ϑ_0 бошланғич тезлик йўналишида олсак) қуйидагича бўлади:

$$M\frac{d\vartheta}{dt} = -u\,\frac{dM}{dt} \qquad (8)$$

бу ердаги $\frac{dM}{dt} = \dot{M}$ «секунд масса», яъни ёнилғининг секунддаги сарфланиши. Стационар процесслар учун ёқилғининг ёнишида «секунд масса» ўзгармас бўлади; $M = M(t)$ – ракетанинг ўзгарувчан массаси. (8) тенгламанинг ўзгарувчиларини ажратиб, дифференциалласак, ракетанинг ϑ тезлиги учун $\vartheta = -u\ln M + c$ ифодани топамиз. Бу ердаги C интеграл доимий бошланғич шартлардан фойдаланилиб топилади. Агар $t=0$ дақиқада $\vartheta = \vartheta_0$ ва $M = M_0$ десак, $c = u\ln M_0 + \vartheta_0$ бўлади. Ракетанинг тезлиги учун

$$\vartheta = \vartheta_0 + u\ln\frac{M_0}{M} \qquad (9)$$

ифодани топамиз. (9) формулани биринчи бўлиб К.Э.Циолковский текширган. Шунинг учун бу формула унинг номи билан аталади.

Ракетанинг ҳаракат қонуни топиш учун (9) тенгликда ϑ ни $\frac{dx}{dt}$ га алмаштириб, олинган тенгламани $x|_{t=0} = 0$ бошланғич шарт билан интеграллаймиз. Натижада ракетанинг ҳаракат қонунини

$$x(t) = \vartheta_0 t + u\int_0^t \ln\frac{M_0}{M}\,d\tau \qquad (10)$$

кўринишда оламиз. Агар ҳаракат бошланиб, $t=t_k$ дақиқада тезлик, Охирги масса ва ўтилган йўлни мос равишда $\vartheta = \vartheta_k$, $M = M_k$, $x = x_k$ десак, (9) ва (10) формулалар

$$\vartheta_k = \vartheta_0 + u\ln\frac{M_0}{M_k} \qquad (11)$$

$$x_k = \vartheta_0 t_k + u\int_0^{t_k} \ln\frac{M_0}{M_k}\,d\tau \qquad (12)$$

кўринишни олади.

Агар ракета корпусининг ўзгармас массасини M_k, ёнилгининг массасини $M_ё$ орқали белгиласак, унинг ўзгарувчан массаси $M_0 = M_k + M_ё$ бўлиб, ҳамма ёнилги ёниб бўлганидан кейин $M = M_k$ бўлиб қолади. Бу муносабатлар кучида (11) ва (12) формулалар

$$\vartheta_k = \vartheta_0 + u_0 \ln\left(1 + \frac{Мё}{Мк}\right), \tag{13}$$

$$x_k = \vartheta t + u \int_0^{t_k} \ln\left(1 + \frac{Мё}{Мк}\right) d\tau \tag{14}$$

кўринишларни олади. Бу ердаги $Z = \frac{Мё}{Мк}$ нисбатга Циолковский сони дейилади. (9)-(14) формулаларни таҳлил қилиб, қуйидаги муҳим хулосаларни чиқариш мумкин. Ракетанинг лимитик тезлиги: 1) ракетанинг ϑ_0 бошлангич тезлигига боғлиқ; 2) ёнилги ёнганда отилиб чиқадиган газларнинг u_0 нисбий тезлигига боғлиқ; 3) ракетанинг бошлангич ва охирги массасига, яъни z Циолковский сонига (ёнилгининг нисбий захирасига) боғлиқ; 4) ракетанинг критик тезлиги массанинг ўзгариш қонунига ва ёнилгининг секин ёки тез ёнишига, яъни ёниш вақтига боғлиқ эмас; 5) ракетанинг x_k босиб ўтадиган йўли массанинг ўзгариш қонунига ва ёнилги ёнганда ҳосил бўладиган оқим тезлигига боғлиқ бўлади.

32-масала. Ракета массаси t вақт билан

$$M = M_0(1 - \alpha t), \quad \alpha = \text{const} \tag{15}$$

M_0 — ракетанинг бошлангич пайтдаги массаси чизиқли қонун бўйича ўзгарганда ракетанинг ҳаракат қонунини ва реактив кучни топинг.

Ечиш. (15) ни (10) га қўйиб, интеграллашни бажарсак, ракета ҳаракатининг тенгламасини оламиз:

$$x(t) = \vartheta_0 t + \frac{U}{\alpha}\left[(1 - \alpha t)\ln(1 - \alpha t) + \alpha t\right] \tag{16}$$

Агар масса (15) чизиқли қонун бўйича ўзгарганда, $u_0 = \text{const}$ бўлса, массанинг секунд сарфланиши ўзгармас бўлиб, шунингдек, реактив куч ҳам $R = \left(-\frac{dM}{dt}\right)U_0 = \alpha M_0 U_0 = \text{const}$ бўлади.

33-масала. Ракета массаси

$$M = M_0 e^{-\lambda t}, \quad \lambda = \text{const} \tag{17}$$

кўрсаткичли қонун бўйича ўзгарганда ракетанинг ҳаракат қонунини ва реактив кучнинг модули топилсин.

Ечиш. (17) ни (10) га қўйиб, тегишли ҳисоблашларни бажарсак, ракетанинг ҳаракат қонунини топамиз $x(t) = \vartheta_0 t + \frac{\lambda u_0 t^2}{2}$

Масса кўрсаткичли қонун бўйича ўзгарганда массанинг секунд сарфланиши ва реактив куч ўзгарувчан бўлиб, лекин R реактив куч таъсирида вужудга келадиган ўзгарувчан массали нуқтанинг (заррачанинг) a_0 тезланиши ўзгармас бўлади, яъни

$$a_0 = \frac{R}{M} = \lambda U_0 = \text{const}$$

34-масала. (К.Э.Циолковскийнинг иккинчи масаласи). Иккинчи масала биринчи масаладан фарқ қилиб, бу масалада Ернинг тортиш кучини (оғирлик кучини) эътиборга олиб, ҳавонинг қаршилигини эътиборга олмасдан ракетанинг тўғри чизиқли ҳаракат қонунини топишдан иборатдир.

Муҳитнинг қаршилик кучини эътиборга олмаганда Ернинг бир жинсли тортишиш майдонида нуқтанинг (ракетанинг) ҳаракати

$$M\frac{d\vartheta}{dt} = -Mg - \frac{dM}{dt}U \qquad (18)$$

кўринишдаги дифференциал тенглама билан ёзилади. Бу ердаги g оғирлик кучининг тезланиши. (18) тенгламани $\vartheta|_{t=0} = \vartheta_0$ ва $M|_{t=0} = M_0$ бошланғич шартлар билан интегралласак, ракетанинг тезлиги учун ифода топамиз

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 - gt + u\ln\frac{M_0}{M} \qquad (19)$$

Агар (19) да ϑ ни $\frac{dx}{dt}$ га алмаштириб, уни $x|_{t=0} = 0$ бошланғич шартда интегралласак, ракетанинг ҳаракат қонунини топамиз

$$x(t) = \vartheta_0 t - \frac{gt^2}{2} + u\int_0^t \ln\frac{M_0}{M}d\tau \qquad (20)$$

27-МАШҒУЛОТ

11-§. Ернинг тортишиш майдонида жисмнинг ҳаракати

1. Ернинг торитишиш майдонида жисмнинг ҳаракати ҳақидаги масалалар ракета ва Ер сунъий йўлдошларининг ҳаракатини, шунингдек, космик учишлар проблемалари масалаларини ўрганишда вужудга келади. Бундай масалаларни қараётганда траекториянинг узоқлиги ва баландлигини Ернинг радиуси билан солиштириш керак. Тортишиш кучи-

нинг ўзгаришини масофа билан боғлиқлигини ҳисобга олиш зарур. Илгари бир жинсли тортишиш майдонида ($g = const$) ϑ_0 бошланғич тезлик билан горизонтга бурчак остида отилган жисм ҳаракати траекториясининг баландлиги ва учишнинг узоқлигини Ернинг радиусига нисбатан кичик деб фараз қилиб, баъзи бир масалаларни ҳал қилган эдик.

2. Агар Ерни бир жинсли шар деб қарасак, у ҳолда шардан ташқарида ёки унинг сиртида ётган m массали M нуқтага шар марказига йўналган $\overline{F}$ тортишиш кучи (марказий куч) таъсир қилади.(Бу масалани бир хусусий ҳолда 1-масалада ҳам қараган эдик). Бу куч қўзғалмас Ер марказига нисбатан M нуқтанинг ҳолатини аниқловчи $\overline{r}$ радиус-вектор узунлиги квадратига тескари пропорционал бўлади, яъни $F = k\frac{m}{r^2}$, бу ердаги k пропорционаллик коэффициентини аниқлаймиз. Агар нуқта Ер сиртида ётганда $r = R$ ва $F = mg$ бўлади ва $mg = k\frac{m}{R^2}$ тенгликка эга бўламиз. Бу тенгликдан k ни топамиз: $k = gR^2$. Натижада $\overline{F}$ марказий куч учун

$$F = mg\frac{R^2}{r^2} \tag{1}$$

формулани оламиз.

Энди F кучнинг элементар бажарган ишини ҳисоблаймиз. Бунинг учун M нуқтанинг $\overline{MM'}$ элементар кўчишини 2 та $\overline{M\alpha}$ ва $\overline{M\theta}$ элементар кўчишларга ёямиз. Бу кўчишлардан $\overline{M\alpha}$ кўчиш сон жиҳатидан dr га тенг $\overline{OM} = r$ ва $\overline{MB}$ кўчиш эса $\overline{OM}$ га перпендикулярдир. Бу кўчишда $\overline{F}$ кучнинг бажарган иши нолга тенг бўлади. $\overline{F}$ куч $d\overline{r}$ радиал кўчишда иш бажаради. $\overline{M\alpha}$ кўчиш эса $\overline{F}$ куч йўналишига қарама қарши йўналгани учун $\overline{F}$ кучнинг бажараган иши манфий бўлади

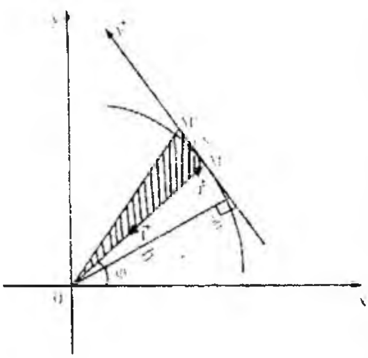
$$dA = -\overline{F}d\overline{r} = -mgR^2\frac{dr}{r^2} \tag{2}$$

3. Энди нуқтанинг марказий куч таъсиридаги ҳаракатини текширамиз. Ҳаммавақт таъсир чизиқлари берилган о марказдан ўтувчи куч марказий куч деб аталади. Бундай кучга мисол қилиб, планеталарнинг Қуёшга тортилиш кучи ёки сунъий йўлдошларнинг Ерга тортилиш кучини олиш мумкин.

$\overline{F}$ марказий куч таъсиридаги M нуқтанинг қандай ҳаракат қилишини текширамиз. Марказий кучлар учун $mom(\overline{F})=0$ ва $mom(m\overline{\vartheta})=\overline{r}\times m\overline{\vartheta}=const$ бўлади. Нуқтанинг m массаси ўзгармас бўлганлиги туфайли $mom(m\overline{\vartheta})=\overline{r}\times\overline{\vartheta}=const$ бўлади, яъни $mom(\vartheta)$ вектор модул ва йўналиш бўйича доимий бўлади ва $\overline{r}$, $\overline{\vartheta}$ векторлар орқали ўтган текисликка перпендикуляр бўлади.

Агар $\overline{r}\times\overline{\vartheta}$ вектори ҳаммавақт доимий йўналишга эга бўлса, бундай ҳолда M нуқтанинг $\overline{r}=\overline{OM}$ радиус-вектори ва унинг $\overline{\vartheta}$ тезлик вектори ҳаммавақт бир текисликда ётади. Бундай ҳол эса M нуқтанинг траекторияси ясси эгри чизиқдан иборат бўлишлигидан дарак беради. Бундан ташқари марказий куч майдонида $|mom(\vartheta)|=\vartheta h=const$ бўлади. Шундай қилиб, марказий куч таъсиридаги нуқта ясси эгри чизиқ бўйича ҳаракатланар экан. Унинг $\overline{\vartheta}$ тезлиги шундай ўзгарадики, марказга нисбатан $\overline{\vartheta}$ векторнинг моменти ўзгармасдан сақланади. Бу хулоса кўргазмали геометрик мазмунга эга: $\vartheta h=\frac{dS}{dt}h$, бунда, $dS\cdot h=2d\sigma$ бўлгани учун $\vartheta h=2\frac{d\sigma}{dt}$ бўлади. Бу ердаги $\frac{d\sigma}{dt}$ миқдор $\overline{r}=\overline{OM}$ радиус-векторнинг чизадиган юзасининг усишини аниқлайди ва M нуқтанинг секториал тезлиги деб аталади. Қаралаётган ҳол учун бу тезлик доимийдир:

$$\frac{d\sigma}{dt}=\frac{1}{2}\left|mom(\overline{\vartheta})\right|=const \tag{3}$$

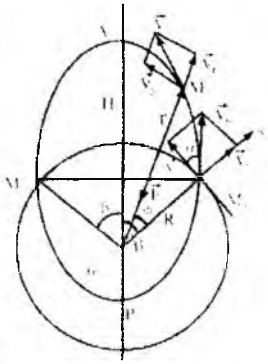


92-чизма.

Шундай қилиб, марказий куч таъсиридаги нуқта ясси эгри чизиқ бўйича доимий секториал тезлик билан ҳаракатланар экан, яъни нуқтанинг радиус вектори тенг вақтлар оралиғида тенг юзалар чизади. Бу қонун юлдуз ва планеталар ҳаракатида мазмунга эга бўлиб, Кеплер қонунларидан бирини ифодалайди (92-чизма).

4. Энди Ернинг тортишиш майдонида горизонтга бурчак остида отилган материал нуқтанинг (жисмнинг) ҳаракатини қараймиз. Ерни ҳаракатсиз деб ҳисоблаб, ҳаракатланаётган жисмни эса

m массали материал нуқта деб қараймиз. Фараз қилайлик, бошланғич дақиқада моддий нуқта Ер сиртидаги M_0 ҳолатда булиб, горизонтга нисбатан α бурчак остида йўналган $\overline{\vartheta}_0$ бошланғич тезликка эга бўлсин. Агар ҳавонинг қаршилигини эътиборга олмасак, у ҳолда нуқтага унинг ҳаракати давомида фақат Ернинг марказига йўналган $\overline{F}$ тортишиш кучи таъсир қилади. Бутун олам тортишиш қонунига кўра бу куч (1) формулага кўра ҳисобланади. Бунда $\overline{r} = \overline{OM}$ Ер марказидан M нуқтагача бўлган масофа, $R = OM_0 - r$ нинг M_0 нуқтадаги қиймати, g эса Ер тортишиш кучининг M нуқтадаги тезланиши, $\overline{F}$ - марказий куч. M нуқтанинг ҳаракати траекторияси ясси эгри чизиқдан иборат. Нуқтанинг ҳаракатини координаталари $\overline{r} = \overline{OM}$ ва φ бўлган қутб координаталари тизимида ўрганамиз. Бунда қутб маркази қилиб Ер марказини, қутб йўналиши эса Ох ўқ йўналишида деб, M нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасини тузамиз (93-чизма).



93-чизма.

Юзалар қонунига кура марказий куч таъсиридаги M нуқта $\overline{\vartheta}$ тезлик векторининг О марказга нисбатан моменти ёки нуқтанинг иккиланган секториал тезлиги ўзгармас миқдор бўлади $mom_0(\overline{\vartheta}) = const$.

Агар ϑ векторни $\overline{\vartheta}_r$ радиаль ва $\overline{\vartheta}_\varphi$ кўндаланг ташкил этувчиларга ажратсак, у ҳолда $mom_0(\overline{\vartheta}) = mom_0(\overline{\vartheta}_\varphi) = \overline{r}u_\varphi$ бўлади. Агар $\vartheta_r = \overline{r}\dfrac{d\varphi}{dt}$ эканлигини эътиборга олсак, биринчи тенгламани

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = c \tag{4}$$

кўринишда оламиз. С ўзгармасни топиш учун учиш бошланадиган M_0 нуқтага нисбатан қўйилган бошланғич шартлардан фойдаланамиз

$$mom_0(\overline{\vartheta}) = R\vartheta_{0\varphi} = R\vartheta_0 \cos\alpha .$$

Натижада С ўзгармас учун

$$c = R\vartheta_0 \cos\alpha \tag{5}$$

ифодани топамиз.

Иккинчи тенгламани эса нуқта кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремадан фойдаланиб тузамиз. Бунинг учун $d\left(\frac{m\vartheta^2}{2}\right) = dA$

тенгламадан фойдаланамиз. (2) формулани эътиборга олсак бу тенглама

$$d\left(\frac{\vartheta^2}{2}\right) = gR^2 d\left(\frac{1}{r}\right) \tag{6}$$

кўринишни қабул қилади. Вектор тезликни унинг ташкил этувчилари орқали ифодалаймиз

$$\vartheta^2 = \vartheta_r^2 + \vartheta_\varphi^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \tag{7}$$

(4) ва (6) тенгламаларни интеграллаб, r ва φ ни вақтнинг функцияси сифатида топиш мумкин, яъни нуқтанинг ҳаракат қонунини аниқлаш мумкин. Биз нуқтанинг ҳаракат қонунини топиш ўрнига унинг траекториясини топамиз. Ҳисоблашни соддалаштириш мақсадида u янги ўзгарувчи киритамиз. Агар $u = \frac{1}{r}$ десак, у ҳолда

$$\frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} \tag{8}$$

муносабатни оламиз. (4) ва (8) ни эътиборга олсак, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = -r^2\frac{du}{d\varphi}\cdot\frac{c}{r^2} = -c\frac{du}{d\varphi}, \quad r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{c}{r} = cu$$

Бу топилган ифодаларни (7) га қўямиз ва оламиз

$$\vartheta^2 = c^2\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2\right].$$

Натижада (6) тенглама $C^2\left[u\frac{du}{d\varphi} + \frac{du}{d\varphi}\cdot\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right] = gR^2\frac{du}{d\varphi}$ кўринишни олади. С нинг (5) ифодасини бу ерга қўйиб , тенгликнинг иккала қисмини $\frac{du}{d\varphi}$ га бўлсак, нуқта траекториясининг тенгламасини

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{p} \tag{9}$$

кўринишда оламиз [illegible]

$$P = \frac{\vartheta^2\cos^2\alpha}{g} \qquad (10)$$

(9) иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли бир жинсли бўлмаган чизиқли оддий дифференциал тенглама. Бундай тенгламанинг умумий ечими унга мос келувчи бир жинсли тенгламанинг умумий ечими билан ўзининг қандайдир хусусий ечими йиғиндисига тенг бўлади. $u_1'' + u_1 = 0$ бир жинсли тенглама $u_1 = c_1\sin(\varphi + c_2)$ кўринишдаги умумий ечимга $u_2'' + u_2 = \frac{1}{P}$ бир жинсли бўлмаган тенглама эса $u_2 = \frac{1}{P}$ кўринишдаги хусусий ечимга эга. (9) тенгламанинг умумий ечимини қурамиз

$$u = \frac{1 + c_1 P\sin(\varphi + c_2)}{P}$$

Бу ердаги C_1 ва C_2 интеграллаш доимийлар. Агар $C_1P = -e$, $C_2 = -\frac{\pi}{2} - \beta$ (e ва β янги доимийлар) десак ва $u = \frac{1}{r}$ алмаштиришни эътиборга олсак, траектория тенгламасини қуйидагича оламиз:

$$r = \frac{P}{1 - e\cos(\varphi - \beta)} \qquad (11)$$

Геометриядан маълумки, (11) тенглама коник кесимлар (эллипс, парабола, гипербола) тенгламаларини ифодалайди. Бу тенгламадаги P – фокаль параметр, e – эксцентриситет бўлиб, улар қутби фокуслардан бирида жойлашган қутб координаталари билан ифодалангандир. Агар (11) да $\varphi = \beta$ бўлса, унинг махражи минимумга эришиб, $r = \overline{OM}$ миқдор эса максимумга эришади. Бу ердаги β бурчак траекториянинг OM чизиққа ёки M учиш нуқтасига нисбатан симметриклигини аниқлайди. Энди e ва β интеграл доимийларини аниқлаймиз. Бошланғич ҳолатда, яъни M нуқтада $\varphi = 0$ бўлади. Бундан ташқари r ни ва r дан φ бўйича ҳосилани билиш керак. Маълумки $\vartheta_r = \frac{dr}{dt}$, $\vartheta_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt}$. Бундай ҳолда $\frac{\vartheta_r}{\vartheta_\varphi} = \frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{d\varphi}$ бўлишлигини ва (8) тенгликни эътиборга олсак, $\frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r}\cdot\frac{\vartheta_r}{d\varphi}$ тенгликка эга бўламиз. M нуқтада эса $r = R$ ва $\frac{\vartheta_r}{\vartheta_\varphi} = \mathrm{tg}\alpha = u$

функция учун бошланғич шартлар $\varphi = 0$ бўлганда $u = \frac{1}{r}$, $\frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{R}\operatorname{tg}\alpha$

бўлади. (11) тенгламада r дан u га ўтсак, у $u = \frac{1}{p}\left[1 - \varepsilon\cos(\varphi - \beta)\right]$ кўри-

нишни олади ва $\frac{du}{d\varphi} = \frac{\varepsilon}{p}\sin(\varphi - \beta)$.

Бу тенгликларга топилган бошланғич қийматларни қўйсак, улар $\frac{p}{R} = 1 - \varepsilon\cos\beta$, $-\frac{p}{R}\operatorname{tg}\alpha = -\varepsilon\sin\beta$ кўринишни олади. Бу ердаги P нинг ўрнига унинг (10) ифодасини қўйсак қуйидаги боғланишларни оламиз:

$$\varepsilon\cos\beta = 1 - \frac{\vartheta^2\cos^2\alpha}{gR}; \quad \varepsilon\sin\beta = \frac{\vartheta^2\sin 2\alpha}{2gR} \tag{12}$$

Бу тенгликларни олдин ҳадлаб бўлиб, кейин уларнинг иккала қисмларини квадратга кўтариб, ҳадлаб қўшсак β ва ε доимийларни аниқлайдиган ифодаларни оламиз

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\vartheta^2\sin 2\alpha}{2(gR - \vartheta^2\cos^2\alpha)}, \tag{13}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{\vartheta^2\cos^2\alpha}{g^2R^2}(\vartheta^2 - 2gR)} \tag{14}$$

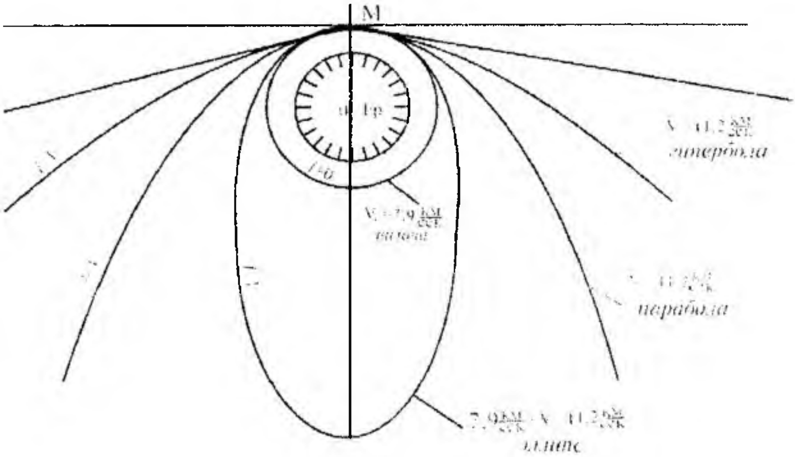
(13) тенгликдан β бурчакни, яъни M учиш нуқтага нисбатан траекториянинг симметриклик ҳолатини аниқлаймиз. (14) формула эса траекториянинг эксцентриситетини, яъни траекториянинг шаклини аниқлайди:

а) агар $\vartheta_0 < \sqrt{2gR}$ $(\varepsilon < 1)$ бўлса, траектория эллипс бўлади;

б) агар $\vartheta_0 = \sqrt{2gR}$ $(\varepsilon = 1)$ бўлса, траектория парабола бўлади;

в) агар $\vartheta_0 > \sqrt{2gR}$ $(\varepsilon > 1)$ бўлса, траектория гипербола бўлади (94-чизма).

$\vartheta_п = \sqrt{2gR}$ -параболик ёки иккинчи космик тезлик деб аталади. Жисмга (ракетага, йўлдошга) $\vartheta_п$ -тезликка тенг бошланғич тезлик берилсагина у Ернинг тортиш майдонидан чиқа олади. Агар $R = R_{ер} \approx 6378$км, $g = 9{,}81$ м/сек^2 эканлигини эътиборга олсак, у ҳолда параболик тезликнинг сон қийматини аниқлаш мумкин $\vartheta_п \approx 11{,}2$км/сек.



94-чизма.

Шундан қилиб, $\vartheta_0 > 11,2км/сек$ бошлангич тезлик билан Ер сиртидан горизонтга α бурчак остида отилган жисмни парабола ёки гипербола бўйлаб ($\alpha = 90^\circ$ бўлганда эса тўғри чизиқ бўйлаб) ҳаракатланиб ердан чексиз узоқлашади. Бундай тартибдаги тезликка эришиш планеталар аро алоқа учун зарур. $\vartheta < 11,2км/сек$ тезликка эга бўлган жисм ерга қайтиб тушади ёки ернинг сунъий йўлдоши бўлиб қолади.

Нуқтанинг траектория атрофидаги ҳаракат қонунини, яъни вақтнинг исталган дақиқасида унинг ҳолатини билиш учун r нинг (11) ифодасини (4) га қўйиб, олинган тенгламани танланган бошлангич шартларда интеграллаш керак.

5. Агар жисмга (ракетага, йўлдошга) бериладиган бошлангич тезлик $\vartheta < \sqrt{2gR}$ тенгсизликни қаноатлантирса, у ҳолда ер сиртидан отилган жисмнинг ҳаракат траекторияси эллипс бўлиб, ох ўқ билан β бурчак ташкил этувчи *PA* ўқ симметрия ўқини ифодалайди.

Агар нуқтада бошлангич шартлар шундай танлансаки, $\beta \neq \pi$ бўлса, у ҳолда траектория *PA* ўққа симметрик бўлиб, жисм (ракета, йўлдош) M_1 нуқтада ер сиртини кесади, яъни жисм ерга қулайди. Агар шундай бошлангич шартлар танланиб $\beta = \pi$ тенглик бажариладиган бўлса, бундай ҳолда отилган жисм ернинг йўлдоши бўлиб қолади. (12) формулалар кўрсатдики, $\alpha = 0$ (ёки $\alpha = \pi$) ва $\vartheta^2 \geq gR$ бўлгандагина $\beta = \pi$ бўлади, лекин $\beta=\pi$ ва $\vartheta^2 < gR$ бўлганда (12)нинг биринчи тенглигидан $e<0$ бўлишлиги келиб чиқади, бундан бўлиши мумкин эмас, чунки e мусбат сондир. Шундай қилиб, ер сиртидан отилган жисм унинг йўлдоши бўлиб қолиши учун $\alpha=0$, $\sqrt{2gR} > \vartheta > \sqrt{gR}$ (16) шартларнинг бажарилиши зарур экан. $\alpha=0$ ва $\beta=\pi$ бўлганда йўлдош орбитасининг эксцентриситетини топиш мумкин: $e=\frac{\vartheta^2}{gR}-1$

$e=0$ бўлганда $\vartheta_I=\sqrt{gR}$ тезлик биринчи космик тезлик ёки доиравий тезлик деб аталади. Бундай ҳолда йўлдош R радиусли доиравий орбита бўйлаб ҳаракатланади. Агар жисмни ер сиртидан отсак, $R=R_0=6378$ км $g=g_0=9{,}81$ м/сек^2 дейиш мумкин, бундай ҳолда биринчи космик тезлик учун $\vartheta_I=7910$ м/сек натижани оламиз. $\vartheta>\vartheta_I$ бўлганда йўлдош траекторияси эллипс бўлиб, ϑ қанча катта, e эксцентриситет ҳам шунча катта бўлади. Агар $\alpha\neq 0$ бўлса, ϑ бошланғич тезлик қандай бўлмасин ер сиртидан отилган жисм (ҳавонинг қаршилигини эътиборга олмаганда ҳам) ернинг йўлдоши бўлиб қола олмайди. Бундай ҳолда ер сиртидан қурол ёрдамида отиб, сунъий йўлдош яратишнинг имконияти йўқ. Бундай ҳолда бошқарувчи ракета керак, унинг ёрдамида приборлар билан йўлдошни кўтариб белгиланган баландликка чиқариш ва горизонтга нисбатан бурчак остида йўлдошга бошланғич тезлик бериш керак. Шундай йўл билан биринчи сунъий йўлдошлар ичида одами билан космик кемалар учирилди.

$g=\frac{g_0R_0^2}{R^2}$ $(R=H+R_0)$ миқдор H масофа ортиб бориши билан камайиб борганлиги туфайли, $\vartheta_I=\sqrt{gR}$ тезлик ҳам H ортиши билан камайиб боради. Шундай экан, отилган жисм ер сиртидан H баландликда бўлганда унинг тезлиги $\vartheta_I=\sqrt{gR}=\sqrt{\frac{g_0R_0^2}{R^2}}=\sqrt{g_0R_0}\cdot\sqrt{\frac{R_0}{R_0+H}}$ формула бўйича топилади. Масалан,

H=0 бўлганда $\vartheta_I=7910$м/сек;

H=500 км бўлганда $\vartheta_I=7620$м/сек;

H=1000 км бўлганда $\vartheta_I=7360$м/сек.

Лекин йўлдошни учиришга сарфланадиган тўлиқ энергия H ортиб бориши билан ошиб боради. Бу ўсиб боришини кўрсатиш учун жисм M ҳолатдан A ҳолатга ўтганда тортишиш кучининг бажарган ишини ва жисм кинетик энергиясининг ўзгаришини билиш зарур. Жисмнинг бажарган иши

$$A(M,A) = \int_{(M)}^{(A)} dA = \int_{(M)}^{(A)} F\,dr = km\int_{r}^{r_1}\frac{dr}{r^2} = km\int_{r}^{r_1} d\left(\frac{1}{r}\right) =$$

$$= km\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right) = mgR^2\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)$$

формула бўйича топилади. Агар бу ерда $r = R$, $r_1 = R + H$ десак, бажарган иш учун

$$A_{(M,A)} = mgR^2\left(\frac{1}{R+H}-\frac{1}{R}\right) =$$

$$= mgR^2\,\frac{R-R-H}{R(R+H)} = -mgR\,\frac{H}{R+H}$$

ифодани топамиз. Энг юқори A нуқтада $\vartheta_1 = 0$ бўлганлиги учун $\frac{m\vartheta_1^2}{2} - \frac{m\vartheta^2}{2} = A_{(M,A)}$ тенгликдан ϑ нинг H билан боғланган ифодасини оламиз $\vartheta = \sqrt{\frac{2gRH}{R+H}}$.

Жисмнинг масса бирлигига мос келадиган энергиясини $\tilde{T}$ орқали белгилайлик. Жисм M нуқтадан $\tilde{T} = 0{,}5\vartheta^2 = 0{,}5\frac{2gRH}{R+H}$ энергияга эга бўлади. Орбитавий тезлик олиш учун эса $\tilde{T} = 0{,}5\vartheta_1^2$ энергия сарфланди. Жисмнинг масса бирлигига мос келувчи тўлиқ энергиясини ҳисоблаймиз

$$\tilde{T} = \tilde{T}_1 + \tilde{T}_4 = 0{,}5\left(\frac{gR^2}{R+H} + \frac{2gRH}{R+H}\right) =$$

$$= 0{,}5gR\left(\frac{R+H+H}{R+H}\right) = 0{,}5gR\left(1+\frac{1}{1+\frac{R}{H}}\right)$$

Бу топилган натижадан равшанки, H қанча катта бўлса, $\tilde{T}$ тўлиқ энергия ҳам шунча катта бўлади.

6. Космик тезликларни механиканинг бошқа қонунларидан фойдаланиб ҳам топиш мумкин. Айтайлик ракета ер атрофини доиравий орбита бўйлаб айланаётган бўлсин. Доиравий орбитага мос келувчи биринчи космик тезликни аниқлайлик. Қаралаётган ҳолда марказга интилма куч ернинг тортиш кучига тенг бўлиши керак. Шундай экан

$m_p \frac{\vartheta_I^2}{r} = m_p g$ тенгликка эга бўламиз. Бу ердаги r—орбитанинг радиуси, яъни ернинг марказидан орбитада ҳаракатланувчи йўлдошгача бўлган масофа, g—оғирлик кучининг тезланиши. Агар r-нинг қийматини тақрибан ернинг R радиусига тенг деб олсак, у ҳолда $\vartheta_I = \sqrt{gr} = \sqrt{gR} \approx \sqrt{10 \cdot 6400000} = 8 км/сек$ натижага эга бўламиз. Ракета ернинг тортишиш майдонидан чиқиб кетишлиги учун ϑ_I га нисбатан катта тезликка эга бўлиши керак. Бундай тезликни қуйидагича мулоҳаза юритиб ҳисоблаш мумкин. Бунинг учун ернинг марказидан r масофада турган ракетанинг потенциал энергияси $E_n = mg_r \cdot r$ ракетага ϑ_{II} тезлик берадиган унинг $E_k = \frac{m\vartheta_{II}^2}{2}$ кинетик энергиясига тенг бўлиши керак. Натижада $m\frac{m\vartheta_{II}^2}{2} = mg_r r$ тенгликка эга бўламиз; r ернинг R радиусига тенг бўлганда $g_r = g$ бўлишлигини эътиборга олсак ϑ_{II} учун қуйидаги натижани оламиз: $\vartheta_{II} = \sqrt{2g_r r} \approx \sqrt{2gR} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{gR} = \sqrt{2} \cdot \vartheta_I$

Шундай қилиб, иккинчи космик тезлик биринчи космик тезликдан $\sqrt{2} \approx 1{,}4$ марта ортиқ экан.

Биз бу машғулотда назарий материалларни масалалар ечиш билан изоҳлаб, И.В.Мешчерский масалалар тўпламидаги 50-§ нинг 50.1, 50.10, 50.12, 50.13, 50.13, 50.14, 50.20, 50.21 масалаларини ҳам умумий ҳолда ечиб таҳлил қилдик.

28-МАШҒУЛОТ

12-§. Потенциалли куч майдони ва потенциал энергия

1. Нуқтанинг бирор кўчишида унинг бажарган ишини ҳисоблаш учун бу кўчишда нуқтанинг ҳаракат қонунини билиш зарур. Шундай хусусиятга эга бўлган кучлар синфи борки, бундай кучларнинг бажарган иши қаралаётган кўчишда нуқта ҳаракатининг хусусиятига боғлиқ бўлмайди.

Бундай синф кучларини потенциалли кучлар дейилади ва улар механика ва физиканинг турли соҳаларида муҳим аҳамиятга эга.

Бирор $\overline{F}$ куч ўз таъсирини нуқтага (жисмга) ўз куч майдони орқали беради. Бошқача айтганда нуқтага $\overline{F}$ кучнинг майдони таъсир қилади. Нуқта фазонинг ёки сиртнинг қаерида бўлмасин, унга таъсир қилувчи куч шу нуқта координаталарига боғлиқ бўлса, бундай фазонинг ёки сиртнинг қисмига куч майдони дейилади. Агар вақт ўзгариши билан таъсир қилувчи куч ўзгармаса, бундай куч майдонига стационар куч майдони дейилади. Агар куч вақтга боғлиқ бўлса, бундан куч майдонига стационар бўлмаган куч майдони дейилади (95-чизма).

Илгари F кучнинг элиментар кўчишда бажарган ишини

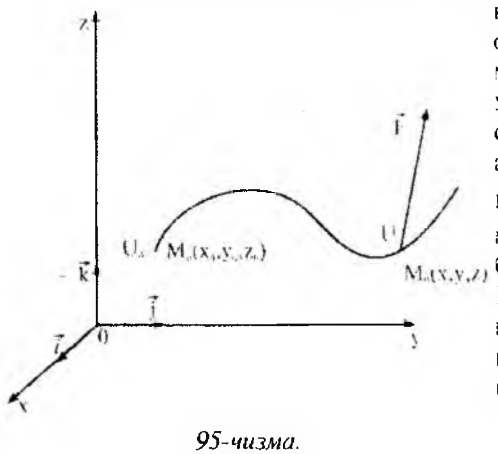
$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz \qquad (1)$$

$$A = A_{(M_0 M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} dA = \int_{(M_0)}^{(M_1)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$ формулалар бўйича ҳисоблаган эдик. Бу ердаги F_x, F_y, F_z куч проекциялари нуқта ҳолатига боғлиқли бўлиб, улар куч майдонининг тенгламаларини ифодалайди.

Умумий ҳолда куч майдони ҳосил қилган кучнинг бажарган иши куч қўйилган нуқтанинг кўчиши содир бўлаётган траекториянинг шаклига боғлиқ бўлади. Лекин шундай ҳоллар ҳам юз бериши мумкинки, (1) тенгликнинг ўнг қисми, яъни $\overline{F}$ кучнинг бажарган элементар иши қандайдир $u(x, y, z)$ функциянинг тўлиқ дифференциали бўлиб қолиши ҳам мумкин, яъни

$$dA = du(x, y, z) \text{ ёки } F_x dx + F_y dy + F_z dz = du(x, y, z) \qquad (2)$$

Дифференциали элементар ишга тенг бўлган $u(x, y, z)$ функцияга куч функцияси дейилади. Куч функцияси мавжуд бўлган куч майдони потенциалли куч майдони ва бу майдонда таъсир қилувчи кучга потенциалли куч деб аталади. Потенциал куч майдонида dA элементар ишни траекторияни билмасдан ҳисоблаш мумкин. Бунинг учун $u(x,y,z)$ куч функциясининг тўлиқ дифференциалини ҳисоблаймиз ва уни (2)га қўямиз, натижада



95-чизма.

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{Du}{Dx}dx + \frac{Du}{Dy}dy + \frac{Du}{Dz}dz.$$

тенгликни оламиз. Бу тенглик бир қийматли бажарилишлиги учун унинг унг ва чап томонда турган dx, dy, dz эркли миқдорлар олдидаги коэффициентлар тенг бўлишлиги зарур ва кифоя

$$F_x = \frac{Du}{Dx},\ F_y = \frac{Du}{Dy},\ F_z = \frac{Du}{Dz}dz \tag{3}$$

Шундай қилиб, кучнинг проекциялари куч функциясининг нуқта координаталари бўйича олинган хусусий ҳосилаларга тенг бўлса, бундай ҳолда кучнинг бажарган элементар иши бу потенциал куч функциясининг тўлиқ дифференциалига тенг бўлар экан.

$\bar{F}$ кучнинг M_0M кўчишда бажарган тўлиқ иши қуйидагича аниқланади:

$$A = \int_{(M_0)}^{(M)} dA = \int_{(M_0)}^{(M)} du = u(x,y,z) - u(x_0,y_0,z_0) = u - u_0 \tag{4}$$

Демак, потенциал кучнинг бажарган иши траекториянинг шаклига боғлиқ бўлмасдан куч функциясининг бошланғич ва охирги нуқталаридаги қийматларининг фарқига тенг. Агар траектория ёпиқ бўлса, $u = u_0$ бўлиб, потенциалли кучнинг бажарган иши нолга тенг бўлади.

Потенциал куч майдоннинг ўзига хос бўлган хусусияти шундан иборатки, нуқтанинг куч майдонида бажарган иши нуқтанинг бошланғич ва охирги ҳолатига боғлиқ бўлиб, траекториянинг шаклига ва траектория бўйлаб нуқтанинг ҳаракат қонунига боғлиқ эмас. Потенциал куч майдонининг бундай хусусиятига унинг консервативлик хусусияти дейилади. Агар кучнинг бажарган иши траекторияга, шунингдек, нуқтанинг траектория атрофидаги ҳаракат қонунига ҳам боғлиқ бўлса, бундай кучга потенциалли бўлмаган куч ва унинг майдонига эса потенциалли (консерватив) бўлмаган куч майдони дейилади. Потенциалли кучларга оғирлик, эластиклик ва тортишиш кучлари, потенциалли бўлмаган кучларга қаршилик ва ишқаланиш кучлар мисол бўлади. Оғирлик, эластиклик ва тортишиш кучлари майдонлари потенциалли майдон, қаршилик ва ишқаланиш кучлари майдони эса потенциалли бўлмаган майдон ташкил қилади.

Агар куч функцияси маълум бўлса, нуқтага таъсир қилаётган кучнинг модули ва йўналишини (3) тенгликлар ёрдамида аниқлаш мумкин.

2. Купгина амалий ва назарий масалаларни потенциалли куч майдонининг дифференциал геометрик хоссаларидан фойдаланиб ҳал қилиш мумкин.

(3) тенгликларнинг ўнг қисмлари бир вақтда u скаляр функция вектор-градиентининг проекцияларини ҳам ифодалайдилар.

u скаляр вектор функциянинг вектор-градиенти

$$qzadu = \frac{Du}{Dx}\cdot\bar{i} + \frac{Du}{Dy}\cdot\bar{j} + \frac{Du}{Dz}\cdot\bar{k}$$

кўринишга эга. Бу ерда $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ тўғри бурчакли координата ўқлари бўйлаб йўналган бирлик векторларидир. Шундай экан нуқтага таъсир қилаётган $\bar{F}$ кучни u скаляр функциянинг градиенти дейиш мумкин

$$\bar{F} = qzadu.$$

Энди куч майдони потенциалли бўлишининг бир зарурий ва етарли шартини ўрнатамиз. Агар u куч функцияси мавжуд бўлиб, у қаралаётган нуқта атрофида иккинчи тартибли узлуксиз аралаш хусусий ҳосилалар-га эга бўлса, у ҳолда $\frac{DF_x}{Dy} = \frac{D^2u}{DxDy}$, $\frac{DF_y}{Dx} = \frac{D^2u}{DyDx}$ эканлиги-дан $\frac{DFx}{Dy} - \frac{DFy}{Dx} = 0$ бўлишлиги келиб чиқади. Юқоридагига ўхшаш $\frac{DFz}{Dy} - \frac{DFy}{Dz} = 0$, $\frac{DFx}{Dz} - \frac{DFz}{Dx} = 0$ бўлишлигини ҳам кўрсатиш мумкин. Шундай қилиб, изланаётган шартларни

$$\frac{DFz}{Dy} - \frac{DFy}{Dz} = 0;\quad \frac{DFx}{Dz} - \frac{DFz}{Dx} = 0;\quad \frac{DFy}{Dx} - \frac{DFx}{Dy} = 0 \qquad (5)$$

кўринишда ўрнатдик. Вектор анализда эса (5) тенгликларнинг чап қисмлари $\bar{F}$ вектор куч $rot\bar{F}$ вектор уюрмасининг координата ўқларидаги проекцияларини ифода қилади. Натижада

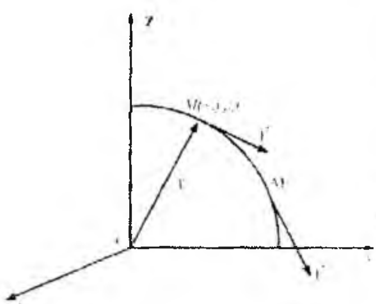
$$\left(\frac{DFz}{Dy} - \frac{DFy}{Dz}\right)\bar{i} + \left(\frac{DFx}{Dz} - \frac{DFz}{Dx}\right)\bar{j} + \left(\frac{DFy}{Dx} - \frac{DFx}{Dy}\right)\bar{k}$$

векторга эга бўламиз. Бундай ҳолда (5) шартлар биттагина $rot\bar{F} = 0$ (5') вектор тенглик билан ифодаланади.

Шундай қилиб, куч майдони потенциалли бўлишлиги учун, у уюрмасиз майдон бўлишлиги зарур ва етарлидир.

Потенциал куч майдонининг геометрик хоссалари бу майдоннинг юксаклик сиртлари ва куч чизиқлари тушунчалари билан боғланган дир. Потенциалли куч майдоннинг қаралаётган нуқталарида куч функцияси бир хил қийматни қабул қилса, яъни қаралаётган барча нуқталарнинг координаталари учун $u(x, y, z)=c$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда бундай нуқталар битта сиртда жойлашади, бу юксаклик сирти дейилади.

Юксаклик сирти $u(x, y, z)=c$ тенглама билан аниқланади. Юксаклик сиртининг хоссаларини эслатиб ўтамиз: 1) агар кучишнинг бошлангич ва охирги нуқталари битта юксаклик сиртда ётса, кучнинг бажарган иши нолга тенг бўлади; 2) потенциал куч майдонида ҳаммавақт куч юксаклик сиртига, аниқроги юксаклик сиртининг уринма текислигига перпендикуляр бўлади; 3) потенциал куч майдонида куч ҳаммавақт куч функцияси қийматларининг усиши томонига йўналган бўлади; 4) потенциал майдонга қаерда юксаклик сиртлари қуюқроқ бўлса, ўша ерда кучнинг миқдори катта бўлади.



96-чизма.

3. Потенциал майдоннинг юксаклик сиртлари билан бир қаторда куч чизиқлари тушунчаси ҳам киритилади.

Куч майдонининг куч чизиқлари, шундай чизиқларки, унинг ҳар бир нуқтасида куч шу нуқтада чизиққа ўтказилган уринма бўйича йўналган бўлади. Шунингдек, ўқлардаги проекциялари dx, dy, dz бўлган $d\bar{r}$ вектор ҳам эгри чизиққа қаралаётган нуқтада ўтказилган уринма бўйича йўналган бўлади (96-чизма).

Агар $d\bar{r}$ ва $\bar{F}$ векторларнинг параллеллик шартидан фойдалансак

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z} \tag{6}$$

дифференциал тенгламага эга бўламиз. Бу дифференциал тенгламалар x, y, z координаталарга нисбатан куч чизиқларининг дифференциал тенгламаларни ифодалайди.

4. Юқорида айтганимиздек, огирлик, эластиклик ва тортишиш кучлари потенциалли кучлар бўлишлигини айтган эдик. Энди бу кучларнинг куч функцияларини топамиз.

1) Агар oz ўқни вертикал равишда юқорига йўналтирсак, огирлик кучининг координата ўқларидаги проекциялари қуйидагича бўлади:

$$P_x = 0, \quad P_y = 0, \quad P_z = -mg$$

$\bar{P} = mg$ кучнинг бажарган элементар ишини ҳисоблаймиз

$$dA = P_x dx + P_y dy + P_z dz = -mgdz = d(-mgz).$$

Бу элементар иш тўлиқ дифференциал ташкил қилади, у куч потенциал майдон ташкил қилади. Бу майдоннинг куч функцияси

$$u = -mgz + c \tag{7}$$

формула билан аниқланади. Бу майдоннинг юксаклик сиртлари oz ўққа перпендикуляр бўлган текисликлардан иборат бўлади.

2) Материал нуқтага таъсир қилаётган $\bar{F} = -c\bar{r}$ чизиқли эластиклик кучининг куч функциясини топамиз. Бу кучнинг координата ўқларидаги проекцияларини ҳисоблаймиз. $F_x = -cx$, $F_y = -cy$, $F_z = -cz$.

Кучнинг бажарган элементар ишини топамиз

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -c(xdx + ydy + zdz) = -crdr = d\left(\frac{-cr^2}{2}\right)$$

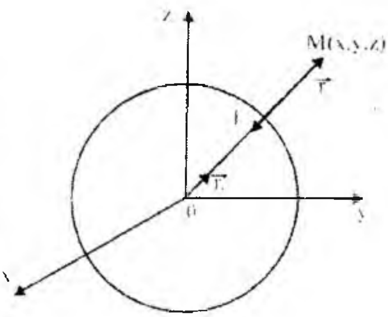
бунда, $xdx + ydy + zdz = rdr$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Эластиклик кучининг куч функцияси

$$u = -\frac{cr^2}{2} + c = -\frac{c}{2}(x^2+y^2+x^2) + c. \qquad (8)$$

кўринишга эга. Юксаклик сиртлари $x^2+y^2+z^2 = c$ сфералардан иборат.

3). Ер тортишиш майдонининг куч функциясини топамиз. Координата боши сифатида ернинг марказини қабул қилсак, материал нуқта ер марказига $F = \frac{k}{r^2}$ куч билан тортилади. Ер марказидан М нуқтага йўналган $\bar{r}$ радиус-векторнинг бирлик векторини $\bar{r}^0$ орқали белгиласак, $\bar{F}$ марказий куч векторини $\bar{r}^0 = \frac{\bar{r}}{r}$,



97-чизма.

$$\bar{F} = -\frac{k}{r^2}\bar{r}^0 = -\frac{k}{r^2}\cdot\frac{\bar{r}}{r} = -\frac{k}{r^3}\bar{r}$$ кўринишда ифодалаган бўламиз (97-чизма).

$\bar{F}$ кучни координата ўқларига проекциялаймиз

$$F_x = -\frac{k}{r^3}x; \quad F_y = -\frac{k}{r^3}y; \quad F_z = -\frac{k}{r^3}z.$$

Куч бажарган ишнинг тўлиқ дифференциалини топамиз

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\frac{k}{r^3}(xdx + ydy + zdz)$$

$$= -\frac{k}{r^3} r dr = d\left(\frac{k}{r}\right), xdx + ydy + zdz = rdr$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Шундай қилиб, Ньютон қонуни бўйича топиладиган тортишиш кучининг куч функцияси қуйидагича бўлади:

$$u = \frac{k}{r} + cx \quad \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + c$$

5). Потенциалли кучлар учун кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теоремани шакллантирамиз. Моддий нуқта учун кинетик энергиянинг ўзгариши

$$\frac{m\vartheta_1^2}{2} - \frac{m\vartheta_0^2}{2} = A \qquad (9)$$

тенглик билан ифодаланади. Потенциалли кучнинг консервативлик хоссасига кўра, потенциалли кучнинг куч майдонида бажарган иши нуқтанинг босиб ўтган йўлига боғлиқ бўлмай, балки унинг охирги ва бошланғич ҳолатидаги потенциаллар фарқига тенг

$$A = u_1 - u_0 \qquad (10)$$

тенгликка А нинг ифодасини қўямиз

$$\frac{m\vartheta_1^2}{2} - \frac{m\vartheta_0^2}{2} = u_1 - u_0 \text{ ёки } \frac{m\vartheta_1^2}{2} + (-u_1) = \frac{m\vartheta^2}{2} + (-u_0). \qquad (11)$$

Нуқтанинг бирор ҳолатидаги П потенциал энергияси скаляр миқдор бўлиб, нуқтанинг М ҳолатдан M_0 ҳолатга кўчгандаги куч майдонининг бажарган ишига тенг. Бу ердаги M_0 нуқтани "О" нуқта деб қабул қилсак, бу нуқтада П(x,y,z) ва u (x,y,z), функциялар тенг қийматлар қабул қиладилар. Шундай экан $п = A(M_0)$ бўлиб, "О" нуқтада $u_0 = 0$ десак, $A(M_0) = u - u_0 = -u$ бўлади. Куч функциясининг қарама-қарши ишора билан олинган қийматига потенциал энергия дейилади, яъни

$$\Pi(x, y, z) = -u(x, y, z).$$

Агар куч майдонининг М нуқтадаги потенциал энергиясини $\Pi_1 = -u_1$, M_0 нуқтадаги потенциал энергиясини эса $\Pi = -u$ десак, у ҳолда (11) тенглик

$$\frac{m\vartheta_1^2}{2}+\Pi_2=\frac{m\vartheta_0^2}{2}+\Pi_1 \qquad (12)$$

кўринишни олади. Потенциалли кучлар таъсиридаги нуқта кинетик ва потенциал энергияларининг йиғиндиси ҳар бир ҳолат учун ўзгармас миқдор бўлади

$$E_1+\Pi_1=E_0+\Pi_0=\text{const} \qquad (13)$$

(12) формула энергиянинг сақланиш қонунини ифодалайди. Энергиянинг сақланиш қонунини вертикал эркин тушаётган жисм ҳаракати мисолида қараймиз. Жисм oz вертикал ўқ бўйлаб оғирлик кучи майдонида ҳаракатланганда унинг потенциал энергияси $\Pi=Pz$ бўлади. Жисм ҳаракатининг дифференциал тенгламаси эса

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=-mg \Rightarrow \frac{d}{dt}\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}=-mg\frac{dz}{dt}$$

кўринишда бўлади. Бу тенгламани интеграллаймиз ва қуйидагини оламиз оламиз:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dz}{dt}\right)^2+mgz=\text{const} \qquad (14)$$

Жисм $t=0$ дақиқада h баландликда турган бўлсин. Бу ҳолатда унинг кинетик энергияси нолга тенг, потенциал энергияси эса $\Pi=mgh$ га тенг. (14) га кўра $mgh=\text{const}$ бўлади. Демак, тушаётган жисмнинг тўлиқ энергияси mgh га тенг. Энергиянинг сақланиш қонуни эса

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dz}{dt}\right)^2+mgz=mgh \qquad (15)$$

тенглик билан ифодаланади. (15) формула кинетик энергиясининг потенциал энергияга айланишини ифодалайди. $z=h$ бўлса, нуқта энг юқори ҳолатда бўлиб, $\frac{dz}{dt}=0$ бўлади, яъни нуқтанинг кинетик энергияси нолга тенг. Нуқта пасайган сари унинг кинетик энергияси ортиб боради. $z=0$ бўлгандан эса $\Pi=0$ бўлиб, кинетик энергия mgh га тенг бўлади.

35-масала. Оғирлиги P га ва узунлиги l га тенг бўлган A математик маятник Px/l горизонтал куч таъсирида у баландликка кўтарилади. Маятникнинг потенциал энергиясини икки усул билан ҳисобланг:

1) оғирлик кучининг бажарган ишидек; 2) $\frac{Px}{l}$ кучнинг бажарган ишидек ва қандай шартларда икки усул билан ҳисобланган иш бир хил натижа беради?

Ечиш. 1) $\frac{Px}{\ell}$ куч таъсирида маятник A ҳолатни олсин, демак, у вертикал йўналишда y масофага кўтарилади. Унинг бажарган иш A=Py бўлади (98-чизма).

2) энди $\frac{Px}{\ell}$ чизиқли эластиклик кучининг бажарган ишини ҳисоблаймиз

$$A_2 = \int_{(O_1)}^{A} F_x dx = \int^{x} \frac{Px}{\ell} dx = \frac{Px^2}{2\ell}$$

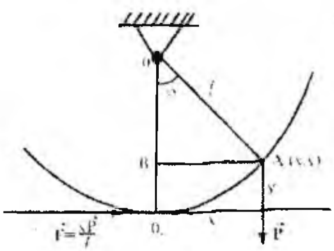
Чизмадаги тўғри бурчакли учбурчакдан қуйидагиларни топамиз:

$$x = BA = \ell \sin\varphi \Rightarrow \ \sin\varphi = \frac{x}{\ell}; \quad OB = \ell\cos\varphi; \quad y = OO_1 - OB = \ell(1-\cos\varphi)$$

y учун бошқа ифода топамиз

$$y = \ell\left(1-\sqrt{1-\sin^2\varphi}\right);\ y = \ell\left(1-\sqrt{1-\frac{x^2}{\ell^2}}\right);\ y = \ell - \sqrt{\ell^2 - x^2}$$

$$(y-\ell)^2 = \left(-\sqrt{\ell^2-x^2}\right)^2;\ y^2 - 2y\ell + \ell^2 = \ell^2 - x^2;\ y = \frac{x^2}{2e} + \frac{y^2}{2e}$$



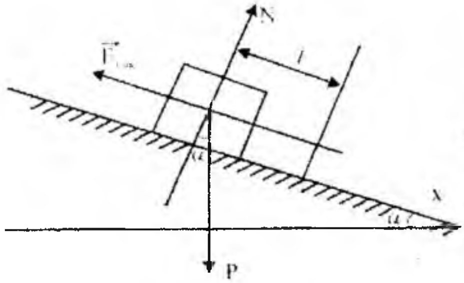
98-чизма.

y учун топилган ифодада y^2 қатнашган ҳадни эътиборга олмасак, у ҳолда иккала кучнинг бажарган иши бир хил бўлади, яъни $A_1 = A_2$.

36-масала. К жисм ғадир-будир қия текисликда тинч турибди.

Текислик горизонтга нисбатан α бурчак остида қияланган ва $f_0 > tg\alpha$, бунда f_0 – тинч ҳолатдаги ишқаланиш коэффициенти. Жисмга қия текислик бўйлаб пастга йўналган ϑ_0 бошланғич тезлик берилган. Агар жисмнинг ҳаракати давомида ишқаланиш коэффициенти f га тенг бўлса, жисм тўхтагунча ўтган йўлини аниқланг.

Ечиш. Жисмга P оғирлик, N текисликнинг реакцияси ва $F_{ишқ}$ ишқаланиш кучлари таъсир қилади. Жисмнинг тўхтагунча босиб ўтган йўлини топиш учун нуқта кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремадан фойдаланамиз. Текисликнинг N нормал реакцияси иш бажармайди (99-чизма).



99-чизма.

Чунки у кўчишга тик йўналган. $F_{ишк} = fN = fP\cos\varphi$ ишқаланиш кучи иш бажаради $A_{ишк} = -fP\cos\alpha\cdot l$.

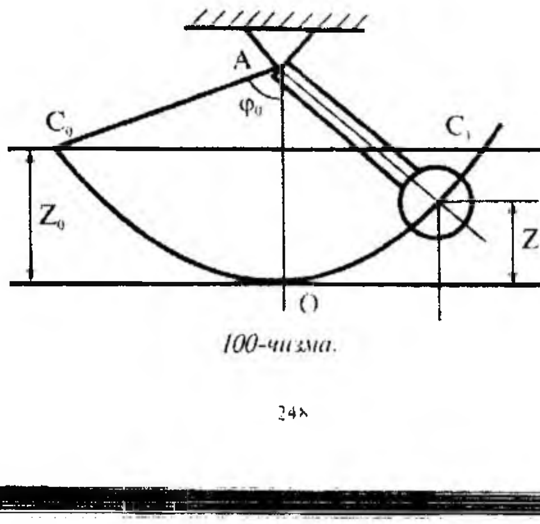
P оғирлик кучининг $P_x = P\sin\alpha$ ташкил этувчиси иш бажаради $A_{оғир} = P\sin\alpha\cdot l$. Шундай қилиб, жисм тўхтаган пайтда $\vartheta = 0$ бўлишлигини эътиборга олсак, жисмнинг тўхтагунча босиб ўтган йўли учун қуйидаги тенгламани оламиз: $-\frac{m\vartheta_0^2}{2} = (P\sin\alpha - fP\cos\alpha)l$.

Бу тенгламадан l ни аниқлаймиз $l = \frac{\vartheta_0^2}{2g(f\cos\alpha - \sin\alpha)}$.

37-масала. Маятникни вертикалдан φ_0 бурчакка оғиштириб, бошланғич тезликсиз қўйиб юборилди: $П_0 = Pz_0$ ва $T_0 = 0$, бунда, P—маятникнинг оғирлиги; z эса унинг оғирлик марказининг координатаси. Маятникнинг ω бурчак тезлиги аниқлансин.

Ечиш. Агар барча қаршиликларни эътиборга олмасак, исталган дақиқада $П + T = П_0$ тенглик ва қаралаётган масала параметрлари бўйича эса (100-чизма),

$$Pz + \frac{1}{2}J_x\omega^2 = Pz_0$$



100-чизма.

тенглик ўринли. Бу ерда J_A - A нуқта орқали ўтган горизонтал ўққа нисбатан маятникнинг инерция моменти. Охирги тенглик шундан далолат берадики, маятник эгаллаган ҳолатдан юқорига кўтарила олмайди. Чунки маятникни қўйиб юборганда унинг потенциал энергияси камаяди, кинетик энергияси эса ошади. Маятник кўтарилганда эса унинг потенциал энергияси ўсади, кинетик энергияси камаяди. Охирги тенгламадан ω ни топамиз

$$\omega^2 = \frac{2P}{J_A}(z_0 - z) \text{ ёки } \omega = \sqrt{\frac{2P}{J_A}(z_0 - z)}$$

Шундай қилиб, исталган дақиқада маятникнинг бурчак тезлиги маятник оғирлик марказининг ҳолатига боғлиқ бўлади. Бундай боғланиш фақат потенциалли кучлар таъсирида бўладиган ҳаракатлар учун мазмунга эга бўлади.

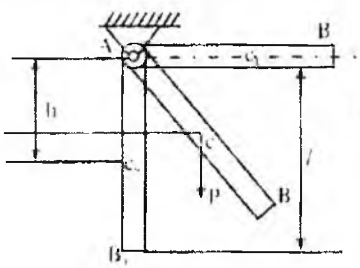
38-масала. Узунлиги l га тенг бўлган AB стержень A нуқтада шарнирга маҳкамланади. Шарнирдаги ишқаланишни ҳисобга олмасдан стерженни горизонтал ҳолатга буриш учун қандай энг кичик ω_0 бурчак тезлик бериш керак.

Ечиш. Масалада берилган ва изланган миқдорларда ω_0, $\omega_1 = 0$ ва B_0AB_1 бурчак билан аниқланувчи кучни катнашади (101-чизма).

Масалани ечиш учун кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теоремадан фойдаланиш қулай. Тизимни ўзгармас деб

$$T_1 - T_0 = \Sigma A_k^e \qquad (16)$$

тенгламани тузамиз. Стерженнинг массасини m орқали белгилаб, бу тенгламага кирувчи миқдорларни ҳисоблаймиз. Қўзғалмас A нуқта орқали ўтган горизонтал ўқ атрофида айланма ҳаракат қилаётган стерженнинг кинетик энергиясини топамиз



101-чизма.

$$T_0 = T_{айл} = \frac{1}{2} J_A \omega^2, \quad \text{бунда}$$

$$J_A = \frac{1}{3} M l^2, \quad T_0 = \frac{1}{6} M l^2 \omega^2$$

охирги ҳолатда стерженнинг тезлиги нолга тенг бўлгани учун $T_1 = 0$ бўлади. Масала шартига кўра идиал боғланиш қаралаяпти, яъни ишқаланиш кучини эътиборга олмаяпмиз.

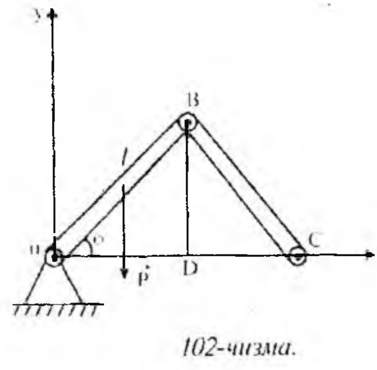
Шунинг учун бу ерда фақат $P = Mg$ актив куч иш бажаради $A^e = \Sigma A_k^e = -Ph = -Mg\frac{l}{2}$. Топилган ифодаларни (16) га қўйиб, ω_o ни топамиз

$$-\frac{1}{6}Ml^2\omega_o^2 = -Mg\frac{l}{2} \Rightarrow \omega_o = \sqrt{\frac{3g}{l}}.$$

39-масала. Шатун-кривошип механизми вертикал текисликда жойлашган. Кривошипнинг ўнг горизонтал ҳолатини вертикал ҳолатга келтириш учун кривошипга қандай бурчак тезлик бериш керак? Шатун ва кривошипга бир жинсли стержень деб қаралади, ползуннинг массаси ва ишқаланиши эътиборга олинмасин. Кривошипнинг узунлиги r га тенг.

Ечиш. Шатун-кривошип механизмини ўзгармас тизим деб қараб, тизим кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремадан фойдаланамиз. Масала шартига кўра кривошип қўзғалмас O нуқта орқали ўтган горизонтал ўқ атрофида айланади ва $0 \le \varphi \le 90$. Кривошипни бир жинсли стержень деб ҳисоблаб, унинг бошланғич дақиқалаги кинетик энергиясини ҳисоблаймиз.

$T = \frac{1}{2}J_o\omega_0^2$, бунда, $J_o = \frac{1}{3}Mr^2$, M–кривошипнинг массаси. Натижада кинетик энергия учун $T_o = \frac{1}{6}Mr^2\omega^2$ ифодани топамиз. Кривошип охирги ҳолатни эгаллаганда унинг тезлиги нолга тенг бўлади. Шунинг учун $T_1 = 0$ бўлади. Ползуннинг массасини ва ишқаланишини ҳисобга олмаганимиз учун бу ерда фақат кривошипнинг бошланғич ҳолати охирги ҳолатига нисбатан юқорида жойлашганлигини эътиборга олиб, унинг бажарган ишини ҳисоблаймиз

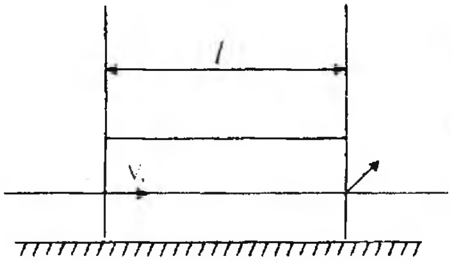


102-чизма.

$$A^e = \sum_k A_k^e = -p l = -p\frac{r}{2} = -\frac{1}{2}Mgr$$

$\varphi \to 90^\circ$ эканлигини эътиборга олиб, ω_o бурчак тезлик учун (102-чизма)

$$-\frac{1}{6}Mr^2\omega^2 \le -\frac{1}{2}Mgr$$



103-*чизма.*

муносабатни оламиз. Бу тенгликни ω га нисбатан ечамиз

$$\omega_0 > \sqrt{\frac{3g}{r}}.$$

40-масала. ϑ тезлик билан ҳаракат қилувчи трактор гусеницасининг кинетик энергияси ҳисоблансин. Ғилдирак ўқлари орасидаги масофа ℓ га, ғилдираклар радиуслари r га тенг, гусеница занжири ҳар метрининг массаси γ га тенг (103-чизма).

Ечиш. Гусеницанинг массасини ҳисоблаймиз. $M = 2(\ell + \pi r)\gamma$. Трактор гусеницаси ясси параллел ҳаракат қилди. Шунинг учун унинг кинетик энергияси илгариланма ва айланма ҳаракатларнинг кинетик энергиялари йиғиндисига тенг $T = T_{ил} + 2T_{айл}$, бунда,

$$T_{илг} = \frac{1}{2}M\vartheta_C^2 = (\ell + \pi r)\gamma\vartheta_0^2$$

$$J_Z = \frac{1}{2}Mr^2; \quad \vartheta_0 = \omega r$$

$$T_{айл} = \frac{1}{2}J_Z\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}Mr^2\cdot\frac{\vartheta_0^2}{r^2} = \frac{1}{4}M\vartheta_0^2 = \frac{1}{2}(\ell + \pi z)\gamma\vartheta_0^2.$$

Натижада трактор гусеницасининг кинетик энергияси учун $T = 2(\ell + \pi r)\gamma\vartheta_0^2$ ифодани топамиз.

V ҚИСМ

ЧИЗИҚЛИ БЎЛМАГАН МЕХАНИК ТЕБРАНИШЛАР

1-§. Кичик параметр методи ва унинг маятник квази-чизиқли тебранишларида қўлланиши

Ҳозирги вақтда ҳар хил амалий масалаларни ҳал қилишда, айниқса, физика ва механикада чизиқсиз масалаларни ечиш ва текширишда А.Пуанкаре ва А.М.Ляпунов томонидан ишлаб чиқилган кичик параметр методи кенг қўлланилиб амалий ва назарий аҳамиятга эга бўлган муҳим натижаларга эришилди.

Кичик параметр методининг туб моҳияти шундан иборатки, ўрганилаётган процессни ифодаловчи чизиқсиз дифференциал тенгламага кирувчи /процессни тавсифловчи параметрлар/ барча функциялар, ҳатто тизимга /маятникка/ таъсир этувчи ташқи кучлар ҳам кичик параметр деб аталувчи параметрнинг даражалари бўйича қаторга ёйилиб, кичик параметрнинг бир хил даражалари олдидаги коэффицентларни тенглаштириб, қаторларнинг коэффициентларига нисбатан чизиқли дифференциал тенгламалар кетма-кетлиги олинади. Бу чизиқли дифференциал тенгламалар кетма-кетлиги берилган бошлангич ва чегаравий шартларга мувофиқ ечилади. Параметрнинг паст даражасига мос келувчи дифференциал тенгламаларнинг ечимлари изланаётган ечимнинг бош қисмини, қолган дифференциал тенгламаларнинг ечимлари эса чизиқсиз ҳадларнинг эффекти, ечим бош қисмнинг тузатмаси бўлади [12-15]. Шу нарсани эслатиш зарурки, дифференциал тенгламада қатнашаётган кичик параметрни ўзимизча кичрайтира олмаймиз, шунингдек, катталаштира олмаймиз ҳам. Кичик параметр дифференциал тенглама ёзувчи процессни тавсифловчи параметрларга боғлиқли бўлиб, ҳар бир процесс учун конкрет параметрлар орасидаги муносабатдан вужудга келади.

Кичик параметр методи соф математик тавсифдаги назарий масалаларни ўрганишда, масалан, ҳар хил турдаги даврий ечимларнинг мавжудлиги ва ҳ.к. кенг қўлланилади.

Кичик параметр бўйича ёйиш методининг камчиликларидан бири шундан иборатки, бу метод билан жуда узундан-узоқ ҳисоблашлар паралел боради. Чунки изланаётган миқдорни олиш учун ёйилманинг битта ёки иккита ҳади етарли бўлмайди. Бундай ҳолларда юқори яқинлашишларни қуришга тўғри келади. Кўпчилик ҳолларда изланаётган ечимнинг хусусияти ҳақида тасаввур олиш мақсадида олинган чизиқли дифференциал тенгламалар кетма-кетлигига бошқа тақрибий методларни қўллаш тақозо қилинади.

Параметрлар бўйича ёйиш методи, айниқса, квази чизиқли дифференциал тенгламаларнинг даврий ечимларини излашда кенг қўлланилади. Даврий ечимларни қуриш қуйидаги иккита ҳолга асосланади [13,15]: 1) вужудга келтирувчи тизим, яъни берилган тизимдан кичик ε параметр нолга тенг бўлганда олинадиган тизим қандайдир даврли даврий ечимга эга бўлиши керак; 2) изланаётган даврий ечимни топиш мақсадида тизимга кирувчи барча номаълум функциялар /миқдорлар/ учун бошлангич ва чегаравий қийматларни танлаш масаласи.

Иккинчи ҳол кичик параметр методининг асосий ғоясини ташкил қилади.

Ўрганилаётган масалада берилган параметрлар кичик бўлиши шарт эмас. Биринчи ҳолга мувофиқ $\varepsilon = 0$ бўлганда тизимнинг даврий ечимини топиш зарур. Агар параметрнинг $\varepsilon = \varepsilon_0 \neq 0$ қийматида тизимнинг даврий ечими маълум бўлса, у ҳолда ε ни $\varepsilon^* = \varepsilon - \varepsilon_0$ алмаштириб, параметрнинг ε_0 га яқин қийматларига мос келувчи даврий ечимларини қуриш масаласини ҳал қилиш мумкин.

Энди параметр бўйича ёйиш методини маятник эркин ва мажбурий тебранишларини ёзувчи дифференциал тенгламаларнинг даврий ечимларини тақрибий топишга қўллаймиз. [12-15].

1. Муҳитнинг қаршилигини ҳисобга олмасдан маятникнинг

$$\ddot{\varphi} + \sin\varphi = 0 \tag{1.1}$$

кўринишдаги тенгламасининг 2π даврли ечимларини тақрибий қурамиз. Маятникнинг катта оғиш бурчаклари учун, унинг ҳаракатини

$$\ddot{\varphi} + \varphi = 0$$

тенглама ёрдамида ўрганиш катта хатоликни вужудга келтиради. Агар маятникнинг оғиш бурчаги катта бўлмаса, бундай ҳолда $\sin\varphi$ функциясининг ёйилмасининг дастлабки иккита ҳадини олиш, яъни

$$\mathrm{Sin}\varphi \approx \varphi - \varepsilon\varphi^3 \left(\varepsilon < 1, \varepsilon = \frac{1}{6}\right)$$

тақрибий формуладан фойдаланиш маятник ҳаракатини етарлича аниқликда ўрганиш имкониятини беради. Бундай ҳолда (1.1.) тенглама

$$\ddot{\varphi} + \varphi - \varepsilon\varphi^3 = 0 \tag{1.2}$$

кўринишни олади. Бу ерда ε кичик параметр.

(1.2) тенгламанинг ечимини

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \ldots \tag{1.3}$$

кўринишда излаймиз.

Маълумки, даврий ечимларни тавсифлайдиган параметрлар: амплитуда, частота, давр. Шундай экан биз излаётган даврий ечимнинг асосий тавсифлари бўлган амплитуда ва частотани топиш етарли. Бизнинг ҳолда эса даврий ечимнинг амлитудаси, частотаси (даври) ҳам номаълум. Номаълум даврли функциядан қутулиш мақсадида, (1.2) тенгламада $\tau = \omega t$ алмаштиришни бажарамиз.

Бу ерда ω даврий ечимнинг номаълум частотаси. Агар

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega\frac{d\varphi}{d\tau}, \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \omega^2\frac{d^2\varphi}{d\tau^2}$$

эканлигини эътиборга олсак, (1.2) тенглама

$$\omega^2\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \varphi - \varepsilon\varphi^3 = 0 \tag{1.4}$$

кўринишни олади. (1.4) даги $\varphi(\tau)$ функция

$$\varphi(\tau + 2\pi) = \varphi(\tau), \tag{1.5}$$

$$\varphi(0) = A, \tag{1.6}$$

$$\dot{\varphi}(0) = 0 \tag{1.7}$$

шартларни қаноатлантирсин деб талаб қиламиз. (1.5) шарт функциянинг 2π даврга эга эканлигини билдиради, (1.6) ва (1.7) шартлар эса тебранишларнинг амплитуда ва фазасини аниқлаш имкониятини беради.

φ функциядан ташқари ω частотани ҳам ε параметрнинг даражалари бўйича қатор кўринишда тасвирлаш зарур. Натижада φ ва ω миқдорларни

$$\varphi(\tau) = \varphi_0(\tau) + \varepsilon\varphi_1(\tau) + \varepsilon^2\varphi_2(\tau) + \ldots; \tag{1.8}$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \ldots \tag{1.9}$$

даражали қаторлар кўринишда тасвирлаш мумкин деган фараз қилишга келамиз.

(1.8) ва (1.9) ни (1.4) га қўйиб, ε параметрнинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни нолга тенглаштириб, φ_i функциялар учун иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар кетма-кетлигини оламиз. Бу тенгламалар ω_i доимийларни ҳам ўзларида сақлайди. φ_i функцияларни ва ω_i доимийларни аниқлаш учун (1.5)-(1.7) шартлардан фойдаланиш керак. У шартлар эса қуйидаги қатор шартларга тенг кучлидир:

$$\varphi_i(\tau + 2\pi) = \varphi_i(\tau); \tag{1.10}$$

$$\varphi_0(0) = A, \quad \varphi_1(0) = 0 \qquad (1.11)$$

$$\dot\varphi_0(0) = 0, \quad \dot\varphi_0(0) = 0, \qquad (1.12)$$

(1.10) шартлар (1.9) ёйилмадаги ω_i доимийларни аниқлаш имконини беради. (1.8) ва (1.9) ёйилмаларни (1.4) га қўйиб, қуйидагиларни оламиз:

$$(\omega_0^2 + 2\omega_0\omega_1\varepsilon + \ldots)(\ddot\varphi_0 + \varepsilon\ddot\varphi_1 + \varepsilon^2\ddot\varphi_2 + \ldots) + \qquad (1.13)$$

$$+ (\varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \ldots) - \varepsilon(\varphi_0^3 + 3\varphi_0^2\varphi_1\varepsilon + \ldots) = 0.$$

(1.13) айниятнинг озод ҳадини нолга тенглаштириб,

$$\omega_0^2\ddot\varphi_0 + \varphi_0 = 0 \qquad (1.14)$$

тенгламани оламиз. (1.14) нинг ечимлари

$$\varphi_0(\tau) = \varphi_0(\tau + 2\pi), \quad \varphi_0(0) = A, \quad \dot\varphi(0) = 0 \qquad (1.15)$$

шартларни қаноатлантиришлари шарт. (1.14) нинг умумий ечимини топамиз

$$\varphi_0 = A_0\cos\frac{\tau}{\omega_0} + B_0\sin\frac{\tau}{\omega_0}.$$

(1.15) шартлардан фойдаланиб, қуйидагиларни топамиз:

$$\omega_0 = 1, \quad A_0 = A, \quad B_0 = 0.$$

Натижада φ_0 ва ω_0 миқдорлар учун

$$\varphi_0 = A\cos\tau, \quad \omega_0 = 1 \qquad (1.16)$$

қийматларни топамиз. Амплитудани навбатдаги яқинлашишни кўришда конкрет топамиз. Энди нав-батдаги яқинлашишни кўришга ўтамиз. Бунинг учун (1.13) айниятда ε нинг биринчи даражаси олдидаги коэффициентни нолга тенглаштириб, φ_1 функция учун

$$\omega_0^2\ddot\varphi_1 + \varphi_1 + 2\omega_0\omega_1\ddot\varphi_0 - \varphi_0^3 = 0$$

ёки

$$\ddot\varphi_1 + \varphi_1 = (2\omega_1 A + \frac{3}{4}A^3)\cos\tau + \frac{A^3}{4}\cos 3\tau \qquad (1.17)$$

дифференциал тенгламани топамиз. φ_1 функция даври бўлиши учун $\cos\tau$ олдидаги коэффициентни нолга тенг бўлиши керак, акс ҳолда (1.17) тенгламанинг умумий ечими $\tau\sin\tau$ кўринишдаги ҳадни сақлайди. Ана шундай ҳаддан (резонансдан озод бўлиш учун) қутилиш учун

$$2\omega_1 A + \frac{3}{4}A^3 = 0$$

тенглик бажарилиши керак. Бу тенгламадан ω_1 нинг қийматини топамиз

$$\omega_1 = -\frac{3}{8}A^2. \qquad (1.18)$$

Шундай қилиб, (1.9) ёйилманинг дастлабки иккита ҳадини топдик, яъни изланаётган даврий ечимнинг частотасини ε^2 қатнашган ҳадгача аниқликда ҳисоблаш имкониятига эга бўлдик

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \ldots = 1 - \frac{3}{8}\varepsilon A^2 + \ldots;$$

$$\tau = \omega t = t(1 - \frac{A^2}{16} + 0(A^4)) + \varepsilon.$$

(1.17) тенглама (1.18) ни эътиборга олсак,

$$\ddot{\varphi}_1 + \varphi_1 = \frac{1}{4}A^3 \cos\tau \qquad (1.19)$$

кўриниш олади.

(1.19) тенгламанинг умумий ечимини топамиз

$$\varphi_1 = A_1 \cos\tau + B_1 \sin\tau - \frac{A^3}{32}\cos 3\tau \qquad (1.20)$$

(1.1) ва (1.12) бошланғич шартлардан фойдаланиб, A_1 ва B_1 ни топамиз

$$A_1 = \frac{A^3}{32}, \quad B_1 = 0 \qquad (1.21)$$

(1.21) ни (1.20) га қўйиб, φ_1 функцияни топамиз

$$\varphi_1 = \frac{A^3}{32}(\cos\tau - \cos 3\tau). \qquad (1.22)$$

Шундай қилиб, (1.4) тенгламанинг изланаётган тақрибий даврий ечимини ε^2 қатнашган ҳадгача аниқлик билан

$$\varphi(\tau) = A\cos\tau + \frac{A^3}{192}(\cos\tau - \cos 3\tau) + 0(A^5), \qquad (1.23)$$

$$\tau = t(1 - \frac{A^2}{16} + 0(A^4)) + \varepsilon.$$

кўринишда оламиз.

Агар қаралаётган ҳолда маятникнинг ҳаракат тенгламасини

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi - \frac{g}{6l}\varphi^3$$

кўринишда олсак, у ҳолда (1.16), (1.18) ва (1.22) формулалар қуйидаги кўринишни олади:

$$\varphi_0 = A\cos\omega_0 t, \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}, \quad \omega_1 = -\frac{3}{4}A^2;$$

$$\varphi_1 = M_1\cos\omega_0 t - \frac{A^3}{32\omega_0^2}\cos 3\omega_0 t,$$

бу ерда, M_1 доимий сон φ_1 функциянинг даврийлик шартидан фойдаланиб топилади. Биринчи яқинлашишда частота ва тебранишларнинг даври

$$\omega^2 = \frac{g}{l} - \frac{3}{4}\cdot\frac{g}{6l}A^2 = \frac{g}{l}\left(1 - \frac{A^2}{8}\right),$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{A^2}{16}\right) = T_0\left(1 + \frac{A^2}{16}\right).$$

формулалар бўйича ҳисобланади. Бу кейинги олинган натижа илгари ҳам олинган эдик. Бу формулага жуда мураккаб ҳисоблашлардан кейин эришган эдик.

2. Энди маятникка амплитудаси ε параметрга пропорционал бўлган $\varepsilon F\cos\omega t$ кўринишдаги даврий қўзғатувчи куч таъсир қилаётган бўлсин. Бундай ҳолда маятник ҳаракати

$$\omega^2\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \varphi - \varepsilon\varphi^3 = \varepsilon F_0\cos\tau \qquad (1.24)$$

кўринишдаги дифференциал тенглама билан ёзилади. (1.24) тенгламадаги φ функцияга ҳам олдин қўйилган (1.5-1.7) шартларни қаноатлантиради деб қараймиз. (1.24) тенгламадаги φ функцияни ва ω доимий миқдорни мос равишда (1.8-1.9) ёйилмалар кўринишида излаймиз. (1.8) ёйилмадаги φ_i функцияларни (1.10-1.12) шартлардан фойдаланиб топамиз.

(1.8) ва (1.9) ёйилмаларни (1.24) тенгламага қўйиб

$$(\omega_0^2 + 2\omega_0\omega_1\varepsilon + \ldots)(\ddot{\varphi}_0 + \varepsilon\ddot{\varphi}_1 + \varepsilon^2\ddot{\varphi}_2 + \ldots) +$$

$$+(\varphi_0+\varepsilon\varphi_1+\varepsilon^2\varphi_2+\ldots)-\varepsilon(\varphi_0^3+3\varphi_0^2\varphi_1\varepsilon+\ldots)=\varepsilon F_0\cos\tau \qquad (1.25)$$

тенгликка эга бўламиз. ε нинг о-даражаси қатнашган ҳад олдидаги коэффициентни нолга тенглаштириб,

$$\omega_0^2\ddot{\varphi}_0+\varphi_0=0$$

тенгламани оламиз. Бу тенгламанинг умумий ечимини топамиз

$$\varphi_0=A_0\cos\frac{\tau}{\omega_0}+B_0\sin\frac{\tau}{\omega_0}$$

(1.11, 1.12) шартлардан фойдаланиб, A_0, B_0 ва ω_0 ни топамиз

$$A_0=A,\quad B_0=0,\quad \omega_0=1.$$

Шундай қилиб, (1.8) ва (1.9) ёйилмаларнинг дастлабки ҳадларини топдик

$$\varphi_0=A\cos\tau,\qquad \omega_0=1. \qquad (1.26)$$

Энди навбатдаги яқинлашишни кўрамиз. Бунинг учун (1.25) айниятда ε нинг биринчи даражаси олдидаги коэффициентни нолга тенглаштириб, φ_1 функция учун

$$\omega_0^2\ddot{\varphi}_1+\varphi_1=-2\omega_0\omega_1\ddot{\varphi}_0+\varphi_0^3+F_0\cos\tau \qquad (1.27)$$

дифференциал тенгламани оламиз. φ_0 ва ω_0 нинг ўрнига улар нинг (1.26) ифодаларини қўйиб, бир оз шакл алмаштирсак, (1.27) тенглама

$$\ddot{\varphi}_1+\varphi_1=(2\omega_1A+\frac{3}{4}A^3+F_0)\cos\tau+\frac{A^3}{4}\cos\tau \qquad (1.28)$$

кўринишни олади.

Агар $2\omega_1A+\frac{3}{4}A^3+F_0=0$

бўлса, бундай ҳолда резонанс юз беришдан қутилган бўламиз. Охирги тенгликдан ω_1 ни топамиз.

$$\omega_1=-\frac{3}{8}A^2-\frac{F_0}{2A}.$$

ω_1 нинг бу топилган ифодасини эътиборга олсак, (1.28) тенглама

$$\ddot{\varphi}_1+\varphi_1=\frac{1}{4}A^3\cos3\tau \qquad (1.29)$$

кўринишни олади. Бу тенгламанинг умумий ечими (1.20) кўринишга эга бўлади. (1.11) ва (1.12) бошланғич шартлар бўйича топиладиган A_1 ва B_1 ўзгармас сонлар (1.21) формулалар бўйича ҳисобланади. φ_1 функция эса (1.22) кўринишга эга бўлади.

Шундай қилиб, (1.24) тенгламанинг изланаётган даврий ечимини ε^1 қатнашган ҳадгача аниқлик билан қуйидагича оламиз:

$$\varphi(\tau) = A\cos\tau + \frac{\varepsilon A^3}{32}(\cos\tau - \cos 3\tau) + 0(\varepsilon^2),$$

$$\tau = t[1 - (\frac{3A^2}{8} + \frac{F_0}{2A})\varepsilon] + 0(\varepsilon^2).$$

3. Агар маятникка курсатилаётган қаршилик кучи,

$$\varepsilon F(\dot\varphi) = \varepsilon(-\dot\varphi + \frac{1}{3}\dot\varphi^3)$$

қонун бўйича ўзгарса, бундан ҳолда маятникнинг эркин ҳаракати

$$\ddot\varphi + \varepsilon(-\dot\varphi + \frac{1}{3}\dot\varphi^3) + \sin\varphi = 0$$

дифференциал тенглама билан ёзилади [13]. Агар огиш бурчак кичик бўлса, маятник тенгламасини

$$\ddot\varphi + \varepsilon(-\dot\varphi + \frac{1}{3}\dot\varphi^3) + \varphi = 0$$

кўринишда олиш мумкин. Бу тенгламанинг ҳам даврий ечимларини юқорида ўрганилган кичик параметр методидан фойдаланиб қуриш мумкин.

2-§. Ван-дер-Полнинг ўрталаштириш усули ва унинг квази-чизиқли тебранишларда қўлланилиши

Физика, механика ва тебраниш назариясининг қуйгина амалий масалаларини ўрганиш процессида вужудга келадиган чизиқсиз дифференциал тенгламаларни интеграллашнинг аниқ методи мавжуд эмас. Ҳозирги даврда мураккаб дифференциал тенгламаларнинг ечимларини атрофлича текширишда Крилов-Боголюбовнинг асимптотик методи, хусусий ҳолда, ўрталаштириш методи кенг қўлланилмоқда.

Талантли рус олимлари Н.М.Крилов, Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский ва бошқалар томонидан чуқур математик асослаб берилган асимптотик /ўрталаштириш/ методининг туб мазмуни шундан иборатки, ўрганиладиган дифференциал тенгламалар тизими /автоном бўлмаган тизим/ соддароқ /ўрталашган/ дифференциал тенгламалар тизимига /автоном тизимга/ алмаштириладики, бир томондан янги тизим қандайдир маънода берилган тизимдан соддароқ бўлсин, бошқа бир томонлан эса янги тизимнинг ечими берилган тизимнинг ечимини етарлича аниқликда аппороксимация қилиш имкониятига эга бўлайлик, яъни солда тизимнинг /ўрталашган тизимнинг/ ечимини ўрганиш билан берилган тизим ечимининг хусусиятларини ўрганиш мумкин бўлсин. Улар асимпотик /ўрталаштириш/ методини илмий асослаш билан бир қаторда бу метод баъзи бир мавжуд ўзгарувчиларни алмаштиришлар билан органик боғлиқлигини ҳам кўрсатли, қайсики, бу алмаштиришлар берилган стандарт тизим тенгламаларининг ўнг қисмидан t вақтни чиқариб ташлашга имкон беради. Қуйида бу методни конкрет масалалар ечишга қўллаймиз:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon\{(\alpha^2 - x^2)\dot{x} - \gamma x^3\} \qquad (2.1)$$

тенглама билан ёзилувчи тизим [13] тебранишларининг a амплитудасини ва T тебраниш даврини ўрталаштириш /Ван-дер-Пол/ методи ёрдамида аниқлайлик. Бу ердаги ω_0 тебранишларнинг ўз частотаси; ε кичик параметр ($\varepsilon << 1$); α ва γ эса тизимнинг ҳолатига боғлиқли бўлган баъзи бир доимийлар [14].

(2.1) тизим билан бир қаторда $\varepsilon = 0$ бўлганда вужудга келадиган бир жинсли чизиқли

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (2.2)$$

кўринишдаги тенгламани ҳам қараймиз. (2.2) тенгламанинг умумий ечимини

$$x(t) = a\cos(\omega_0 t + \varphi) \qquad (2.3)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу ердаги a ва φ ихтиёрий доимий сонлар бўлиб, улар бошланғич шартлардан фойдаланиб топилади. (2.3) ечимнинг t вақт бўйича ҳосиласини ҳам ҳисоблайлик

$$y(t) = \dot{x}(t) = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \qquad (2.4)$$

Энди a ва φ ни янги ўзгарувчилар сифатида қабул қилиб, уларни шундай танлаймиз, (2.2) тенгламанинг (2.3) ечими (2.1) тенгламани ҳам қаноатлантирсин. Бунинг учун (2.3) га (2.1) тенгламанинг $\varepsilon = 0$ бўлгандаги ечими деб эмас, балки эски x ва y ўзгарувчиларни янги a ва φ ўзгарувчиларга алмаштириш формулалари сифатида қараймиз.

(2.1) дан унга эквивалент бўлган иккита биринчи тартибли дифференциал тенгламага ўтамиз

$$\dot{x} = y,\ \dot{y} = -\omega_0^2 x + \varepsilon\{(\alpha^2 - x^2)\dot{x} - \gamma x^3\}. \qquad (2.5)$$

Энди (2.3) ва (2.4) функцияларнинг ҳосилаларини топамиз

$$\frac{dx}{dt} = \frac{da}{dt}\cos(\omega t + \varphi) - \omega_0 a \sin(\omega_0 t + \varphi) - a\frac{d\varphi}{dt}\sin(\omega_0 t + \varphi); \qquad (2.6)$$

$$\frac{dy}{dt} = \omega_0\left[-\frac{da}{dt}\sin(\omega_0 t + \varphi) - a\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi) - a\frac{d\varphi}{dt}\cos(\omega_0 t + \varphi)\right].$$

(2.3), (2.4) ва (2.6) ни (2.5) га қўйиб, қуйидаги тизимни оламиз:

$$\frac{da}{dt}\cos(\omega_0 t + \varphi) - a\frac{d\varphi}{dt}\sin(\omega_0 t + \varphi) = 0,$$

$$\omega_0\left[-\frac{da}{dt}\sin(\omega_0 t + \varphi) - a\frac{d\varphi}{dt}\cos(\omega_0 t + \varphi)\right] =$$

$$= \varepsilon\{[\alpha^2 - a^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi)][-a\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi)] - \gamma a^3\cos^3(\omega_0 t + \varphi)\}.$$

Бу олинган тизимни $\dot{a}$ ва $\dot{\varphi}$ га нисбатан ечамиз

$$\begin{cases} \dot{a} = -\dfrac{\varepsilon}{\omega_0}\{-\alpha^2 a\omega_0\sin\Psi + a^3\omega_0\cos^2\Psi\sin\Psi - \gamma a^3\cos^3\Psi\}\sin\Psi, \\ \dot{\varphi} = -\dfrac{\varepsilon}{a\omega_0}\{-\alpha^2 a\omega_0\sin\Psi + a^3\omega_0\cos^2\Psi\sin\Psi - \gamma a^3\cos^3\Psi\}\cos\Psi. \end{cases} \quad (2.7)$$

$$(\Psi = \omega_0 t + \varphi).$$

Ҳосил қилинган (2.7) тенгламалар тизими тўлиғича (2.1) тенгламага эквивалентдир. (2.7) тизим стандарт шаклдаги дифференциал тенгламалар тизими деб аталади /номаълум функциянинг ҳосилалари кичик параметрга пропорционал бўлган дифференциал тенгламалар тизими стандарт шаклдаги дифференциал тенгламалар тизими деб аталади/. (2.7) тизимнинг ечимини ўрталаштириш методи ёрдамида излаймиз.

Исталган ω_0 учун қуйидаги муносабатлар ўринли:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\cos\omega_0 t\,dt = 0, \quad \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\cos^2\omega_0 t\,dt = \frac{1}{2}; \quad (2.8)$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\sin\omega_0 t\,dt = 0, \quad \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\sin^2\omega_0 t\,dt = \frac{1}{2}.$$

(2.8) муносабатлардан фойдаланиб, a ва φ миқдорларни доимий деб ҳисоблаб, (2.7) тизимни ўрталаштирамиз. Натижада (2.7) тизимга

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dt} = \dfrac{\varepsilon\alpha^2}{2}a - \dfrac{\varepsilon}{8}a^3, \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{3\varepsilon\gamma}{8\omega_0}a^2 \end{cases} \quad (2.9)$$

ўрталашган тизимни мос қўямиз. (2.9) ўрталашган тизимни текшириш (2.1) тизимни текширишга нисбатан анча енгил, ҳатто (2.9) тизимнинг биринчи тенгламаси иккинчи тенгласига боғлиқсиз интегралланади. (2.9) нинг биринчи тенгламасини интеграллаб топамиз

$$a = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{4\alpha^2} + \frac{c}{e^{\varepsilon\alpha^2 t}}}} \tag{2.10}$$

Бу ердаги c ихтиёрий ўзгармас ҳақиқий сон. (2.10) формуладан равшанки, $t \to \infty$, $a(t) \to 2\alpha$ бошқача айтганда, (2.1) тизим билан аниқланадиган исталган тебраниш t ортиши билан стационар /доимий амплитуда ва частотали/ тебранишга яқинлашади.

(2.9) нинг иккинчи тенгламасини интеграллаб, тебранишларнинг фазасини топамиз

$$\varphi = \frac{3\varepsilon\gamma\alpha^2}{2\omega_0} t + \varphi_0, \tag{2.11}$$

бу ерда, $a = 2\alpha$; φ_0 – интеграллаш доимийси.

a ва φ учун топилган ифодаларни (2.3) га қўйиб, $x(t)$ функциянинг тақрибий қийматлари учун

$$x(t) \approx 2\alpha \cos[(\omega_0 + \frac{3\varepsilon\gamma\alpha^2}{2\omega_0})t + \varphi_0] \tag{2.12}$$

ифодани топамиз.

Энди тебранишларнинг даврини ҳисоблаймиз. Умумий курсдан маълумки, тебранишларнинг даври $T = \frac{2\pi}{\nu_1}$ формула бўйича топилади. Бу ердаги ν_1 миқдор эса $\nu_1 = \omega_0 + \frac{3\varepsilon\gamma\alpha^2 2}{2\omega_0} = \omega_0(1 + \frac{3\varepsilon\gamma\alpha^2}{2\omega_0^2})$

формула бўйича ҳисобланади. У ҳолда тебраниш даври учун

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0(1 + \frac{3\varepsilon\gamma\alpha^2}{2\omega_0^2})}$$ ифодани топамиз.

Маълумки, $/x/<1$ бўлганда

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^{n-1} x^{n-1} + ...$$

ёйилма яқинлашувчи бўлади. Шундай экан,

$$\frac{1}{1+\frac{3\varepsilon\gamma\alpha^2}{2\omega_0^2}} = 1 - \frac{3\varepsilon\gamma\alpha^2}{2\omega_0^2} + \left(\frac{3\varepsilon\gamma\alpha^2}{2\omega_0^2}\right)^2 - ...$$

ёйилма ҳам $\left|\frac{3\varepsilon\gamma\alpha^2}{2\omega_0^2}\right| < 1$ шартда яқинлашувчи сонли қатор бўлади. Бундай ҳолда тебранишларнинг даври учун

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}\left(1 - \frac{3\varepsilon\gamma\alpha^2}{2\omega_0^2}\right) + 0(\varepsilon^2) \qquad (2.13)$$

формулани оламиз. Маълумки, (2.3) формула билан оддидаги гармоник тебранма ҳаракатлар ёзилади. Гармоник тебранма ҳаракатнинг тебраниш даври эса

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

формула бўйича ҳисобланади.

Шундай қилиб, (2.1) чизиқсиз тизим билан аниқланувчи тебранишларнинг даври (2.2) чизиқли тизим билан аниқланувчи тебранишларнинг даври билан

$$T = T_0\left(1 - \frac{3\varepsilon\gamma\alpha^2}{2\omega_0^2}\right) + 0(\varepsilon^2)$$

формула орқали боғланар экан.

Энди $a(0) = a_0$ шартдан фойдаланиб, (2.10) даги c ни аниқлаб, x нинг тақрибий қиймати учун

$$x(t) = \frac{2\alpha}{\sqrt{1 + \frac{4\alpha^2}{a_0^2 e^{\varepsilon\alpha^2 t}} - \frac{1}{e^{\varepsilon\alpha^2 t}}}}\cos(\omega_0 t + \varphi) \qquad (2.14)$$

ифодани топамиз. Олинган ифодадан $t \to \infty$ да $a(t) \to 2\alpha$ бўлишини кўриш қийин эмас. Бу ечим

$$x = 2\alpha\cos(\omega_0 t + \varphi) \qquad (2.15)$$

стационар динамик режимга мос келади.

Текширилган автотебранишда $a_1 = 0$ ва $a_2 = 2\alpha$ радиусли лимитик цикллар мавжуд. Стационар динамик режимнинг статик (a=0) режимга нисбатан кучли турғун эканлигини, ҳатто бу режимнинг асимптотик турғун эканлигини курсатиш мумкин. Ҳақиқатан, (2.14) ва $a_0 \neq 0$ бўлганда ва $t \to \infty$ да $a(t) \to 2\alpha$ бўлади, яъни исталган тебраниш t ортиши билан (2.15) стационар тебранишга яқинлашади. Бунинг учун вариация тенгламасини тузамиз

$$\frac{\alpha\delta a}{dt} = \varepsilon A^{1}(a_i)\delta a \qquad (i=1,2) \tag{2.16}$$

Бу ерда, $\delta a = a - a_i$; $A(a) = \frac{a}{2}(\alpha^2 - \frac{a^2}{4})$.

A(a) функциянинг a бўйича ҳосиласини топайлик

$$A^{1}(a) = \frac{\alpha^2}{2} - \frac{3}{8}a^2.$$

$a_1 = 0$ ва $a_2 = 2\alpha$ стационар нуқталар учун мос равишда

$$A^{1}(0) = \frac{\alpha^2}{2} > 0, \quad A^{1}(2\alpha) = -\alpha^2 < 0.$$

Шундай қилиб, a=0 турғун бўлмаган мувозанат ҳолатга, $a = 2\alpha$ эса асимптотик турғун лимитик циклга мос келади.

3-§. Крилов-Боголобов усули

Бу усулни

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}) \tag{3.1}$$

кўринишдаги тенгламага қуллаш билан унинг қисқача мазмунини

б а ё н $\varepsilon = 0$ бўлса, тебраниш

$$x = a\cos\Psi \quad (\Psi = \omega_0 t + \alpha) \tag{3.2}$$

кўринишдаги гармоник тебранишдан иборат бўлади. (3.1) тенгламанинг (2.2) тенглама (3.2) ечимига яқин бўлган ечимларини курамиз. (3.1) тенгламанинг ечимини

$$x(t) = a\cos\Psi + \varepsilon U_1(a,\Psi) + \varepsilon^2 U_2(a,\Psi) + \ldots \tag{3.3}$$

қатор кўринишида излаймиз. Бу ердаги $U_i(a,\Psi)$ ҳозирча номаълум функциялар бўлиб, уларни кейинчалик аниқлаймиз, лекин улар ψ аргументнинг 2π даврли функцияларидир. Бу ердаги a ва ψ аргументлар

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \ldots, \\ \dfrac{d\Psi}{dt} = \omega + \varepsilon\omega_1(a) + \varepsilon^2\omega_2(a) + \ldots \end{cases} \tag{3.4}$$

тенгламаларни қаноатлантириши керак.

Масалани бир қийматли ечиш учун $U_i(a,\Psi)$ функцияларнинг

$$\int_0^{2\pi} U_i(a,\Psi)\cos\Psi\, d\Psi = 0, \quad \int_0^{2\pi} U_i(a,\Psi)\sin\Psi\, d\Psi = 0. \tag{3.5}$$

$(i=1, 2, 3, \ldots)$

қўшимча шартларни қаноатлантириши ҳам талаб қилинади. Шундай қилиб, масала $U_1, U_2 \ldots; A_1, A_2 \ldots; \omega_1, \omega_2 \ldots$ функцияларни топишга келтирилади.

Н.М.Крилов ва Н.Н.Боголюбов методининг бир афзаллиги шундан иборатки, (3.3) ва (3.4) ёйилмалар ёрдамида изланаётган $x(t)$, $a(t)$, $\Psi(t)$, функцияларнинг қийматларини ε кичик параметрнинг исталган даражаси қатнашган ҳадгача аниқлик билан ҳисоблаш мумкин. (3.1) тенгламанинг биринчи яқинлашиш тақрибий ечимини қурамиз. (3.1) тенгламанинг ўнг қисмидаги $f(x, \dot{x})$ функцияни ўз аргументларининг аналитик функцияси ва Ψ аргумент бўйича Фурье қаторига ёйилади деб фараз ҳам қиламиз. (3.3) қаторни (3.1) тенгламага қўйишдан олдин, $\dot{x}$ ва $\ddot{x}$ миқдорларни a ва Ψ нинг функцияси сифатида ε га қадар аниқликда ифодалаймиз. (3.3) қаторнинг биринчи иккита ҳадини вақт бўйича дифференциаллаб топамиз

$$\dot{x} = \dot{a}\cos\Psi - a\sin\Psi\dot{\Psi} + \varepsilon\left\{\frac{DU_1}{Da}\dot{a} + \frac{DU_1}{D\Psi}\dot{\Psi}\right\} \tag{3.6}$$

Агар (3.4) ни эътиборга олсак (ε га қадар аниқликда), (3.6) қуйидаги кўринишни олади:

$$\dot{x} = -a\omega\sin\Psi + \varepsilon\left\{A_1\cos\Psi - \omega_1 a\sin\Psi + \omega\frac{DU_1}{D\Psi}\right\}.$$

Бу тенгликни вақт бўйича дифференциаллаймиз

$$\ddot{x} = -\omega\dot{a}\sin\Psi - \omega a\cos\Psi\dot{\Psi} + \varepsilon\left\{\frac{dA_1}{da}\dot{a}\cos\Psi - A_1\sin\Psi\dot{\Psi} -\right.$$

$$\left. - \frac{d\omega_1}{da}\dot{a}a\sin\Psi - \omega_1\dot{a}\sin\Psi - \omega_1 a\cos\Psi\dot{\Psi} + \omega\frac{D^2U_1}{DaD\Psi}\dot{a} + \omega\frac{D^2U_1}{D\Psi^2}\dot{\Psi}\right\}.$$

Агар (3.4) ни эътиборга олсак, кейинги ифода ε га қадар аниқликда қуйидагича ёзилади:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 a \cos\Psi + \varepsilon(-2\omega_0 a\omega_1 \cos\Psi - 2\omega_0 A_1 \sin\Psi + \omega_0^2 \frac{D^2 U_1}{D\Psi^2}) \qquad (3.7)$$

(3.1) тенгламанинг ўнг қисмидаги $f(x,\dot{x})$ ни ҳам a ва ψ нинг функцияси сифатида ифодалаймиз

$$f(x,\dot{x}) = f(a\cos\Psi, -a\omega_0 \sin\Psi). \qquad (3.8)$$

(3.3), (3.7) ва (3.8) ни (3.1) га қўйиб, ҳосил бўлган тенгликнинг иккала қисмидаги ε нинг биринчи даражаси олдидаги коэффициентларни тенглаштириб қуйидагини оламиз:

$$\omega_0^2\left(\frac{D^2 U_1}{D\Psi^2} + U_1\right) = 2\omega_0 a\omega_1 \cos\Psi + 2\omega_0 A_1 \sin\Psi + f_0(a,\Psi) \quad (3.9)$$

Бу ерда, $f_0(a,\Psi) = f(a\cos\Psi - a\omega_0 \sin\Psi)$. (3.9) муносабат f_0 функция берилганда U_1, A_1 ва ω_1 номаълум функцияларни аниқлашга имкон беради. (3.9) тенгламадан $A_1(a), \omega_1(a), U_1(a,\Psi)$ функцияларни аниқлаш мақсадида берилган $f_0(a,\Psi)$ ва номаълум $U_1(a,\Psi)$ функцияларни фурье қатори кўринишида ифодалаймиз

$$f_0(a,\Psi) = g_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty}\{g_n(a)\cos n\Psi + h_n(a)\sin n\Psi\},$$

$$U_1(a,\Psi) = \vartheta_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty}\{\vartheta_n(a)\cos n\Psi + w_n(a)\sin n\Psi\}, \qquad (3.10)$$

бу ердаги $g_n(a)$ ва $h_n(a)$ фурьенинг маълум коэффициентлари, $\vartheta_n(a)$ ва $w_1(a)$ унинг номаълум коэффициентларидир. $\vartheta_1(a)$ ва $w_1(a)$ коэффициентлар (3.5) тўлдирувчи шартлардан топилади, улар 0 га тенг

$$\vartheta_1(a) = 0, \quad w_1(a) = 0.$$

(3.10) ёйилмаларни (3.9) га қўйиб, қуйидаги ифодани топамиз:

$$\omega_0^2 \vartheta_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \omega_0^2 (1-n^2)\{\vartheta_n(a)\cos n\Psi + W_n(a)\sin n\Psi\} =$$

$$= g_0(a) + \{g_1(a) + 2\omega_0 a\omega_1\}\cos\Psi + \{h_1(a) + 2\omega_0 A_1\}\sin\Psi +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty}\{g_n(a)\cos n\Psi + h_n(a)\sin n\Psi\}.$$

Олинган тенгликнинг иккала қисмидаги бир хил гармоникалар олдидаги коэффициентларни тенглаштириб, топамиз

$$A_1(a) = -\frac{h_1(a)}{2\omega_0}, \quad \omega_1 = -\frac{g_1(a)}{2a\omega_0}, \quad \vartheta_0(a) = \frac{g_0(a)}{\omega_0^2} \tag{3.11}$$

$$\vartheta_n(a) = \frac{g_n(a)}{\omega_0^2(1-n^2)}, \quad W_n(a) = \frac{h_n(a)}{\omega_0^2(1-n^2)}, \quad (n=2,\ 3,\ \ldots)$$

Топилган натижалардан фойдаланиб, (3.4) дан амплитуда ва фаза учун

$$\dot{a} = -\frac{\epsilon h_1(a)}{2\omega_0}, \quad \dot{\psi} = \omega_0 - \frac{\epsilon g_1(a)}{2a\omega_0} \tag{3.12}$$

тенгламаларни оламиз.

Шундай қилиб, биринчи яқинлашишда амплитуда ва фазанинг вақт бўйича ҳосиласини берилган $f_0(a,\Psi)$ функция учун фурье қаторининг коэффициентлари орқали ифодаланик.

Топилган (3.11) коэффициентларнинг охирги 3 тасини (3.10) нинг иккинчи тенглигига қўйиб, $U_1(a,\Psi)$ функциялар учун ифода топамиз

$$U_1(a,\psi) = \frac{g(a)}{\omega_0^2} + \frac{1}{\omega_0^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{1-n^2}\{g_n(a)\cos n\psi + h_n(a)\sin n\psi\} \tag{3.13}$$

(3.12) тенгламаларни интеграллаб, a ва ψ ни вақтнинг ва a_0, Ψ_0 бошланғич қийматларнинг функцияси сифатида топамиз.

Бу функциялар ва (3.3) ва (3.13) формулалар ёрдамида (3.1) тенгламанинг биринчи яқинлашишдаги ечимини топамиз

$$x(t) = a(t)\cos\Psi(t) + \varepsilon U_1(a(t), \Psi(t)).$$

Юқоридагига ухшаш ҳисоблашларни бажариб, ε^2 аниқликгача (3.1) тенгламанин иккинчи яқинлашишдаги тақрибий ечимини ҳам куриш мумкин. Вақтнинг етарлича катта интерваллари учун (3.1) тенгламанинг биринчи ва иккинчи яқинлашишдаги тақрибий ечимлари учун ифодалар қуйидагича булади:

$$x = a\cos\Psi, \quad \dot{a} = \varepsilon A_1(a), \quad \dot{\psi} = \omega + \varepsilon\omega_1(a); \tag{3.14}$$

$$x = a\cos\psi + \varepsilon U_1(a,\psi), \quad \dot{a} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a);$$

$$\dot{\Psi} = \omega_0 + \varepsilon\omega_1(a) + \varepsilon^2\omega_2(a). \tag{3.15}$$

Энди юқорида олинган натижаларни маятникнинг чизиқли бўлмаган тебранишларига қўллаймиз. Маятник тезлигига пропорционал бўлган куч таъсирида сўнувчи ҳаракат қилсин.

Маятник учун кинетик, потенциал ва диссипатив функция ифодалари қуйидагича:

$$T = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2, \quad \Pi = mgl\left(\frac{\varphi^2}{2!} - \frac{\varphi^4}{4!}\right), \quad D = \frac{kl^2}{2}\dot{\varphi}^2.$$

Бу ифодаларни

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{DL}{D\dot{\varphi}}\right) - \frac{DL}{D\varphi} = -\frac{DД}{D\dot{\varphi}}$$

$\left(L = T - \Pi = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}mgl\left(\varphi^2 - \frac{\varphi^4}{12}\right)\right.$ - Лагранж функцияси).

Лагранж тенгламасига қўйиб, маятник ҳаракатини ёзувчи дифференциал тенгламани

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \frac{\omega_0^2}{3!}\varphi^3 - 2\mu\dot{\varphi},$$

$$2\mu = \frac{k}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l} \qquad (3.16)$$

кўринишда оламиз. Қаралаётган ҳолда $f(\varphi,\dot{\varphi})$ функция

$$f(\varphi,\dot{\varphi}) = \frac{\omega_0^2}{3!}\varphi^3 - 2\mu\dot{\varphi}$$

кўринишга эга.

Биринчи яқинлашишда (3.16) тенгламанинг ўнг қисмини a ва ψ нинг функцияси сифатида аниқлаймиз ($\varphi = a\cos\Psi$)

$$f(\varphi,\dot{\varphi}) = \frac{\omega_0^2 a^3}{8}\cos\Psi + 2\mu\omega_0 a\sin\Psi + \frac{\omega_0^2 a^3}{4!}\cos 3\Psi.$$

Бу ердан фурье коэффициентларини топамиз

$$g_1(a) = \frac{\omega_0^2 a^3}{8}, \quad h_1(a) = 2\mu\omega_0 a.$$

Бу топилган коэффициентларни (3.12) га қўйиб, амплитуда ва фаза учун $\dot{a} = -\mu a, \quad \dot{\Psi} = \omega_0\left(1 - \frac{a^2}{16}\right)$

дифференциал тенгламаларни топамиз. Биринчи тенгламани $a(0) = a_0$ бошланғич шартда интеграллаб топамиз: $a = a_0 e^{-\mu t}$. Иккинчи тенгламадан ψ фазани топамиз

$$\psi = \omega_0 \left(t + \frac{a_0^2}{32\,\mu}\left(e^{2\mu t} - 1\right)\right) + \psi_0. \qquad (3.17)$$

Бу ердаги Ψ_0 фазанинг бошланғич қиймати. Шундай қилиб, биринчи яқинлашишда маятникнинг φ оғиш бурчагини вақтнинг функцияси сифатида

$$\varphi(t) = a_0 e^{-\mu t} \cos\left(\omega_0 \left(t + \frac{a_0^2}{32\,\mu}\left(e^{2\mu t} - 1\right)\right) + \psi_0\right)$$

кўринишда ифодалаш мумкин.

Олинган натижадан равшанки, биринчи яқинлашишда маятник сўнувчи тебранма ҳаракат қилиб, унинг частотаси a амплитудага боғлиқ бўлади. t вақт ортиб бориши билан секин-аста сўниш туфайли оний частотаси ҳам ошиб боради. $t \to \infty$ да эса оний частотанинг қиймати чизиқли ҳолдаги $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ доимий миқдорга интилади. Иккинчи яқинлашишда маятникнинг φ оғиш бурчаги учун

$$\varphi(t) = a\cos(\omega t + \nu) - \frac{a^3}{192}\cos 3(\omega t + \nu)$$

тақрибий ифодани оламиз. $\varphi(0) = \frac{191}{192}$, $\dot\varphi(0) = 0$ бошланғич шартлардан фойдалансак, $a = 1$, $\nu = 0$ бўлишини топамиз. Иккинчи яқинлашишда маятникнинг чизиқсиз тебраниш қонунини

$$\varphi(t) = \cos\omega t - \frac{1}{192}\cos 3\omega t, \quad \omega = \frac{15}{16}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

кўринишда оламиз.

4-§. Параметрлари секин ўзгарадиган чизиқсиз тебранувчи тизимлар

Кўпчилик ҳолларда тебранувчи тизимни характерловчи параметрлар вақт билан секин ўзгариб туради. Бундай параметрларга тизимнинг массаси, пружинанинг эластиклик коэффициенти, муҳитнинг қаршилик коэффициенти ва ҳ.к. мисол бўла олади. Бундай ҳолда

$$\frac{d}{\alpha t}\left[m(\tau)\frac{dx}{\alpha t}\right] + k(\tau)x = \varepsilon f\left(\tau, x, \frac{\alpha x}{\alpha t}\right) \qquad (4.1)$$

кўринишдаги коэффициентлари секин ўзгарадиган чизиқсиз дифференциал тенгламани ўрганишга тўғри келади. Бу ердаги $\varepsilon > 0$ -кичик параметр; $\tau = \varepsilon t$ секин ўзгарувчи вақт (4.1) тенгламанинг тақрибий ечимларини қуриш учун ҳам олдинги параграфдагидек асимптотик методни қўллаймиз. Асимптотик қаторни қуриш учун (4.1) тенгламанинг $m(\tau)$, $k(\tau)$ коэффициентлари ва $f(\tau, x, \dot{x})$ функциядан τ бўйича унинг барча чекли қийматлари учун етарли тартибдаги ҳосилаларга эга бўлиши зарур ва τ нинг $0 \le \tau \le L$ кесмадаги исталган қийматлари учун $m(\tau)$ ва $k(\tau)$ коэффициентлар 0 дан фарқли ва мусбат бўлсин деб талаб қуямиз.

(4.1) тенгламанинг умумий ечимини

$$x = a\cos\Psi + \varepsilon U_1(\tau, a, \Psi) + \varepsilon^2 U_2(\tau, a, \Psi) + \ldots \qquad (4.2)$$

ёйилма кўринишда излаймиз. Бу ердаги $U_i(\tau, a, \Psi)(i = 1,2,3\ldots)$ функциялар ҳозирча номаълум бўлиб, улар Ψ бурчакнинг 2π даврли функцияларидир.

a ва Ψ миқдорлар вақтнинг функциялари бўлиб, улар

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(\tau, a) + \varepsilon^2 A_2(\tau, a) + \ldots$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = \omega(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a) + \varepsilon^2 B_2(\tau, a) + \ldots \qquad (4.3)$$

дифференциал тенгламалардан аниқланади. Бу ердаги $\omega(\tau) = \sqrt{\frac{k(\tau)}{m(\tau)}}$ қаралаётган тебранувчи тизимнинг ўз частотаси.

Шундай қилиб, (4.1) тенгламанинг асимптотик тақрибий ечимларини қуриш масаласи

$$U_1(\tau, a, \Psi),\ U_2(\tau, a, \Psi), \ldots;\ A_1(\tau, a),\ A_2(\tau, a), \ldots;$$

$$B_1(\tau, a),\ B_2(\tau, a), \ldots \qquad (4.4)$$

функциялар учун ифодалар топишга келтирилади. Кейин эса тебранишларнинг амплитудаси ва тўла фазасини аниқлайдиган (4.3) тенгламалар тизимини интеграллаш керак экан.

Қаралаётган ҳолда ҳам (4.3) тенгламаларнинг ўнг қисмида турувчи функцияларни бир қийматли аниқлаш учун $U_i(\tau, a, \Psi)$, $(i=1,2,3...)$ функцияларга олдинги параграфдагидек τ нинг $0 < \tau \leq L$ кесмадаги исталган қийматлари учун (3.5) қўшимча шартларнинг бажарилишини талаб қиламиз. Бу қилинган фаразлардан кейин (4.4) функцияларни аниқлашга киришамиз. Бунинг учун (4.2) ифоданинг ўнг қисми (4.3) ни ҳисобга олган ҳолда дифференциаллаб, уни (4.1) тенгламага қийиб, (4.1) нинг ўнг қисмини эса Тейлор қаторига ёйгандан кейин ҳосил бўлган тенгликнинг иккала қисмидаги ε нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаштириб, қуйидаги тенгламаларни оламиз:

$$k(\tau)\left[\frac{D^2U_1}{D\Psi^2}+U_1\right] = \oint_0(\tau,a,\Psi) + 2m(\tau)\omega(\tau)A_1\sin\Psi +$$

$$+ 2m(\tau)\omega(\tau)aB_1\cos\Psi + \frac{d(m(\tau)\omega(\tau))}{d\tau}a\sin\Psi. \qquad (4.5)$$

$$k(\tau)\left[\frac{D^2U_2}{D\Psi^2}+U_2\right] = \oint_1(\tau,a,\Psi) + m(\tau)\Big[2\omega(\tau)aB_2 - \frac{DA_1}{Da}A_1 +$$

$$+ aB_1^2 - \frac{DA_1}{D\tau} - \frac{dm(\tau)}{d\tau}\cdot\frac{A_1}{m(\tau)}\Big]\cos\Psi + m(\tau)\Big[2\omega(\tau)A_2 + 2A_1B_1 +$$

$$+ a\frac{DB_1}{Da}A_1 + a\frac{DB_1}{D\tau} + \frac{d(\tau)}{d\tau}\cdot\frac{aB_1}{m(\tau)}\Big]\sin\Psi \qquad (4.6)$$

Бу ерда қуйидаги белгилашлар киритилган:

$$\oint_0(\tau,a,\Psi) = \oint(\tau, a\cos\Psi, -a\omega\sin\Psi), \qquad (4.7)$$

$$\oint_1(\tau,a,\Psi) = \oint_x^1(\tau, a\cos\Psi_1, -a\omega\sin\Psi)U_1 +$$

$$+ \oint_{x}^{1}(\tau, a\cos\Psi, a\omega\sin\Psi)\left[A_1\cos\Psi - aB_1\sin\Psi + \frac{DU_1}{D\Psi}\omega(\tau)\right] - \qquad (4.8)$$

$$-\omega(\tau)\Big[2\frac{D^2U_1}{D\tau D}\omega(\tau) + 2\frac{D^2U_1}{DaD\psi}A_1\omega(\tau) + 2\frac{D^2U_1}{D\psi^2}\omega(\tau)B_1 +$$

$$+\frac{DU_1}{D\Psi}\cdot\frac{d\omega\omega(\tau}{d\tau} + \frac{DU_1}{D\Psi}\cdot\frac{\omega(\tau)}{m(\tau(}\cdot\frac{dm(\tau m}{d\tau}\Big].$$

(4.5) тенгламадан $A_1(\tau,a)$, $B_1(\tau,a)$, $U_1(\tau,a,\Psi)$, функцияларни аниқлаш учун, ундаги $\oint_0(\tau,a,\Psi)$ ва $U_1(\tau,a,\Psi)$ функцияларни фурье қаторига ёйиб, $U_1(\tau,a,\Psi)$ функцияда биринчи гармониканинг қатнашмаслик шартини ҳисобга олсак,

$$U_1(\tau,a,\Psi)=\frac{1}{2\pi k(\tau)}\sum_{n\neq\pm1}\frac{e^{in\Psi}}{1-n^2}\int_0^{2\pi}f_0(\tau,a,\Psi)e^{-in\Psi}d\Psi \qquad (4.9)$$

ифодага эга буламиз. Агар (4.9) да биринчи гармониканинг қатнашмаслик шартини эътиборга олсак, $A_1(\tau,a,)$, $B_1(\tau,a,)$ функциялар учун қуйидаги ифодаларни топамиз

$$A_1(\tau,a)=-\frac{a}{2m(\tau)\omega(\tau)}\cdot\frac{d[m(\tau)\omega(\tau)]}{d\tau}-\frac{1}{2\pi m(\tau)\omega(\tau)}\int_0^{2\pi}f_0(\tau,a,\Psi)\sin\Psi d\Psi,$$

$$B_1(\tau,a)=-\frac{1}{2\pi am(\tau)\omega(\tau)}\int_0^{2\pi}f_0(\tau,a,\psi)\cos\psi d\psi. \qquad (4.10)$$

Шундай қилиб, биринчи яқинлашишда (4.1) тенгламанинг асимптотик ечимини

$$x=a\cos\Psi \qquad (4.11)$$

шаклда излар эканмиз a ва Ψ миқдорлар биринчи яқинлашиш тенгламаларидан аниқланади

$$\frac{da}{dt}=-\frac{\varepsilon a}{2m(\tau)\omega(\tau)}\cdot\frac{d[m(\tau)\omega(\tau)]}{d\tau}-$$

$$-\frac{E}{2\pi am(\tau)\omega(\tau)}\int_0^{2\pi}f_0(\tau,a,\Psi)\sin\Psi d\Psi, \qquad (4.12)$$

$$\frac{d\Psi}{dt}=\omega(\tau)-\frac{E}{2\pi am(\tau)\omega(\tau)}\int_0^{2\pi}f_0(\tau,a,\Psi)\cos\Psi d\Psi.$$

Иккинчи яқинлашишни қуриш учун $U_2(\tau,a,\Psi)$да $A_1(\tau,a)$ ва $B_1(\tau,a)$ функцияларнинг ифодаларида биринчи гармониканинг қатнашмаслик шартидан фойдаланиш зарур. (4.6) тенгламадан $A_2(\tau,a,)$ ва $B_2(\tau,a,)$ функциялар учун ифодалар топамиз

$$A_2(\tau,a)=-\frac{1}{2\omega(\tau)}[a\frac{DB_1}{Da}A_1+a\frac{DB_1}{D\tau}+2A_1B_1+\frac{a}{m(\tau)}\cdot\frac{dm(\tau)}{d\tau}B_1]-$$

$$-\frac{1}{2\pi\omega(\tau)\omega(\tau)}\int_0^{2\pi}f_1(\tau,a,\Psi)\sin\Psi d\Psi, \qquad (4.13)$$

$$B_2(\tau,a)=\frac{1}{2a\omega(\tau)}[A_1\frac{DA_1}{Da}+\frac{DA_1}{D\tau}-aB_1^2+\frac{1}{m(\tau)}\cdot\frac{dm(\tau)}{d\tau}A_1]-$$

$$\frac{1}{2\pi a m(\tau)\omega(\tau)}\int_0^{2\pi} f_1(\tau,a,\Psi)\cos\Psi d\Psi.$$

Иккинчи яқинлашишдаги (4.1) тенгламанинг асимптотик ечими қуйидагича бўлади:

$$x = a\cos\Psi + \varepsilon U_1(\tau,a,\Psi), \tag{4.14}$$

бу ерда, a ва ψ миқдорлар

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dt} = \varepsilon A_1(\tau,a) + \varepsilon^2 A_2(\tau,a) \\ \dfrac{d\Psi}{dt} = \omega(\tau) + \varepsilon B_1(\tau,a) + \varepsilon^2 B_2(\tau,a). \end{cases} \tag{4.15}$$

Иккинчи яқинлашиш тенгламаларидан аниқланади. $A_1(\tau,a)$ ва $B_1(\tau,a)$ функциялар (4.10) ифодалар билан, $A_2(\tau,a)$, $B_2(\tau,a)$ функциялар (4.13) ифодалар билан, $U_1(\tau,a,\Psi)$ функция эса (4.9) формула бўйича аниқланади. Барча олинган формулаларни ψ бўйича интеграллашда a ва τ ни доимий параметрлар деб ҳисоблаймиз.

Мисол сифатида ўзгармас массали /масса ўзгарувчан бўлган ҳолда ҳам қўшимча қийинчилик вужудга келмайди/, тезликнинг биринчи даражасига пропорционал бўлган кичик сунувчи қаршилик таъсиридаги ва узунлиги секин ўзгарадиган маятникнинг тебранишларини қараймиз. Қаралаётган ҳолда маятникнинг ҳаракати қуйидаги дифференциал тенглама билан ёзилади:

$$\frac{d}{dt}\left[m\ell^2(\tau)\frac{d\theta}{dt}\right] + 2n\frac{d}{dt}[\ell(\tau)\theta] + mg\ell(\tau)\sin\theta = 0 \tag{4.16}$$

бу ерда, θ – маятник ипининг вертикал ҳолатдан оғиш бурчаги;

g – оғирлик кучининг тезланиши; m – маятникнинг массаси;

$\ell = \ell(\tau)$ – маятникнинг секин ўзгарувчи ипининг узунлиги; n – ишқаланиш коэффициенти. Унча катта бўлмаган оғиш бурчаги учун

$$\sin\theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{6}$$

тақрибий формуладан фойдаланиш мумкин. Бундай ҳолда (4.16) тенглама янги кўринишни қабул қилади.

$$\frac{d}{dt}\left[m\ell^2(\tau)\frac{d\theta}{dt}\right] + mg\ell(\tau)\theta = \varepsilon f\left(\tau,\theta,\frac{d\theta}{dt}\right), \tag{4.17}$$

бу ерда,

$$\varepsilon f\left(\tau,\theta,\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{mg\ell(\tau)}{6}\theta^3 - 2n\ell(\tau)\frac{d\theta}{dt} - 2\varepsilon n\frac{d\ell(\tau)}{d\tau}\theta. \tag{4.18}$$

(4.11) ва (4.12) формулаларга мувофиқ (4.17) тенгламанинг биринчи яқинлашишдаги ечими

$$\theta = a\cos\Psi \tag{4.19}$$

кўринишда бўлади. Бу ердаги a ва ψ миқдорлар

$$\frac{da}{dt} = -\frac{na}{m\ell(\tau)} - \frac{3\varepsilon\ell'(\tau)}{4\ell(\tau)}a,$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = \omega(\tau) - \frac{\omega(\tau)}{16}a^2 \quad \left(\omega(\tau) = \sqrt{\frac{g}{\ell(\tau)}}\right) \tag{4.20}$$

биринчи яқинлашиш тенгламалар тизимидан аниқланади.

(4.20) тизимнинг биринчи тенгламасини $t=0$, $a=a_0$ бошланғич қийматларда интаграллаб, a учун

$$a = a_0 e^{-\frac{n}{m}\int_0^t \frac{dt}{\ell(\tau)}}\left(\frac{\ell(0)}{\ell(\tau)}\right)^{3/4} \tag{4.21}$$

ифодани топамиз. a нинг бу қийматини (4.20) тизимнинг иккинчи тенгламасига қўйиб, ψ ни топамиз

$$\Psi = \int_0^t \omega(\tau)\left(1 - \frac{a_0^2 e^{-\frac{2n}{m}\int_0^t \frac{dt}{\ell(\tau)}}\left(\frac{\ell(0)}{\ell(\tau)}\right)^{3/2}}{16}\right)dt \tag{4.22}$$

Агар олинган формулаларда ℓ =const бўлса, у ҳолда

$$a = a_0 e^{-\frac{\lambda}{2}t}, \quad \Psi = \omega\left(t + \frac{a_0^2\left(e^{-\lambda t} - 1\right)}{16\lambda}\right) + \varphi. \tag{4.23}$$

бу ерда, $\lambda = \dfrac{2n}{m\ell}$, φ –фазанинг бошланғич қиймати. Кейинги формула олдин топилган (3.17) ифода билан устма-уст тушади.

Энди маятник ипининг узунлиги $\ell(\tau) = \ell_0 + \ell_1\tau$ чизиқли қонун бўйича ўзгарсин; ℓ_0 –маятник ипининг $t=0$ бўлгандаги қиймати; $\varepsilon\ell_1$ –маятник ипининг ўзгариш тезлиги. Қаралаётган ҳолда маятник тебранишининг амплитуда ва фазаси учун

$$a = a_0 \left(\frac{\ell_0}{\ell_0 + \ell_1 \tau} \right)^{\frac{3}{4} + \frac{n}{m \ell_1 \varepsilon}} \qquad (4.24)$$

$$\Psi = \int_0^t \sqrt{\frac{g}{\ell_0 + \ell_1 \tau}} \left[1 - \frac{a_0^2}{16} \left(\frac{\ell_0}{\ell_0 + \ell_1 \tau} \right)^{\frac{3}{2} + \frac{2n}{m \ell_1 \varepsilon}} \right] dt \qquad (4.25)$$

ифодаларни топамиз.

(4.24) формулага кўра маятник ипининг узунлиги секин ўзгарганда тебранишларнинг амплитудаси одатдагидек чизиқли қаршилик таъсиридагидек экспонециал қонун бўйича ўзгармасдан, балки вақтнинг даражали функциясига тескари пропорционал бўлади. Агар $n<0$, $\ell_1 > 0$ бўлса,

ва $\left| \frac{n}{m \ell_1 \varepsilon} \right| < \frac{3}{4}$ бўлса, шунингдек, $n<0$, $\ell_1 > 0$ бўлганда ҳам тебранишлар сўнади.

Шундай қилиб, маятник ипининг узунлиги секин ошиб борганда, тебранишларнинг сўнишини кузатиш мумкин. Агар $\ell_1 < 0$, $n>0$,

$\left| \frac{n}{m \ell_1 \varepsilon} \right| < \frac{3}{4}$ бўлса, амплитуда ўсади, $\left| \frac{n}{m \ell_1 \varepsilon} \right| > \frac{3}{4}$ бўлганда эса амплитуда камаяди. Агар кичик қаршилик эътиборга олинмаса ($n=0$) маятник ипининг узунлиги камайиши билан тебранишларнинг амплитудаси ўсади, маятник ипи узунлигининг ошиши билан эса тебранишларнинг амплитудаси камаяди. Юқоридагидек таҳлилни тебранишларнинг частотаси учун ҳам бажариш мумкин.

Масалан, чизиқли қаршиликни эътиборга олмаганда, маятник ипининг узунлиги ошиши билан оний частота /сўнади/ камаяди, маятник ипининг узунлиги камайиши билан эса ошади.

Қаралаётган ҳолда узунлиги секин ўзгарадиган маятник тебранишлари учун иккинчи яқинлашишни ҳисоблаймиз. (4.14), (4.9) ва (4.15) формулаларга кўра баъзи бир шакл алмаштиришлардан кейин маятникнинг оғиш бурчаги учун қуйидаги ифодани топамиз:

$$\theta = a \cos \Psi - \frac{a^3}{192} \cos 3\Psi, \qquad (4.26)$$

бу ерда, a ва ψ миқдорлар

$$\frac{da}{dt} = -\left(\frac{3l^{1}(\tau)}{4l(\tau)}E + \frac{n}{ml(\tau)}\right)\left(a + \frac{a^3}{16}\right).$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = \omega(\tau) - \frac{\omega(\tau)a^2}{16} + \frac{1}{2\omega(\tau)}\left\{-\frac{n^2}{m^2 l^2(\tau)} + \frac{\varepsilon l^{1}(\tau)n}{ml^2(\tau)} + \right. \tag{4.27}$$

$$\left. + \frac{5\varepsilon^2 l^{11}(\tau)}{4l(\tau)} + \frac{5\omega^2(\tau)a^4}{2^9 \cdot 3} - \frac{3\varepsilon^2 l^2(\tau)}{16l^2(\tau)}\right\}.$$

Иккинчи яқинлашиш тенгламалар тизимидан аниқланади. (4.27) тизимнинг биринчи тенгламасини интеграллаб, а ва t орасидаги боғланишни

$$\frac{a}{\sqrt{16+a^2}} = \frac{a_0}{\sqrt{16+a_0^2}}\, e^{-\frac{n}{m}\int_0^t \frac{d\tau}{l(\tau)}} \left(\frac{l(0)}{l(\tau)}\right)^{3/4}$$

кўринишда оламиз. Бундан кейин эса (4.27) тизимнинг иккинчи тенгламасини ҳам интеграллашимиз мумкин.

Юқоридаги текшириш ишларини /ишқаланиш бўлмаганда/

$$\frac{d}{dt}\left[ml^2(\tau)\frac{d\theta}{dt}\right] + mgl(\tau)\sin\theta = 0$$

кўринишдаги маятник ҳаракати тенгламасини текширишга ҳам қўллаш мумкин.

5-§ Ечимнинг турғунлиги масаласи

Биз маятник эркин ва мажбурий тебранишларини ифодаловчи дифференциал тенгламаларнинг ечимларини турли усуллардан фойдаланиб топиш имкониятига эга бўлдик. Кейинчалик эса бундай дифференциал тенгламаларнинг маълум бир режимга бўйсинувчи стационар ечимларини /стационар амплитуда ва частотани/ топиш ва улар билан иш кўришга тўғри келади. Топилган ечимларнинг хусусиятини ўрганиш кўп жиҳатдан уларнинг турғун ва турғунмаслигига боғлиқ бўлади. Биз қуйида иккинчи тартибли квази чизиқли дифференциал тенгламалар учун улар ечимларининг турғунлик ва турғунмаслик шартларини ўрнатамиз.

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = \varepsilon f(\varphi, \dot\varphi) \tag{5.1}$$

кўринишдаги иккинчи тартибли квази чизиқли дифференциал тенгламани қараймиз. (5.1) тенгламани

$$\varphi(t) = a(t)\cos\omega t + в(t)\sin\omega t,$$

$$\dot\varphi(t) = \omega[-a(t)\sin\omega t + в(t)\cos\omega t],$$

алмаштиришлар ёрдамида стандарт куринишга келтирамиз

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon P(a,в), \quad \frac{dв}{dt} = \varepsilon Q(a,в), \qquad (5.2)$$

бу ерда, P(a,в) ва Q(a,в) функцияларнинг куриниши қуйидагича:

$$P(a,в) = \frac{F(a,в)\sin\omega t}{\omega}, \quad Q(a,в) = \frac{F(a,в)\cos\omega t}{\omega},$$

$$F(a,в) = \oint(a\cos\omega t + в\sin\omega t, -\omega a\sin\omega t + \omega в\cos\omega t).$$

(5.2) тизим тулиғича (5.1) дифференциал тенгламага эквивалентдир. (5.2) тизим қандайдир a_0 ва $в_0$ ечимларга эга булсин. Бундан ташқари (5.2) тизимнинг a_0 ва $в_0$ ечимларига чексиз яқин булган $a_0+\delta a$ ва $в_0+\delta в$ ечимларини ҳам қараймиз. Натижада қуйидаги айниятлар тизимларига эга буламиз:

$$\frac{da_0}{dt} = \varepsilon P(a_0,в_0), \quad \frac{dв_0}{dt} = \varepsilon Q(a_0 в_0) \qquad (5.3)$$

ва

$$\frac{da_0}{dt} + \frac{d\delta a}{dt} = \varepsilon P(a_0+\delta a, в_0+\delta в), \qquad (5.4)$$

$$\frac{dв_0}{dt} + \frac{d\delta в}{dt} = \varepsilon Q(a_0+\delta a, в_0+\delta в).$$

(5.4) тизим тенгламаларининг ўнг қисмидаги P ва Q функцияларни $(a_0,в_0)$ нуқта атрофида Тейлор қаторига ёйиб, олинган ёйилмалардаги δa ва $\delta в$ чексиз кичик миқдорларнинг биринчи даражаси қатнашган ҳадлар билан чегараланиб, (5.3) ни эътиборга олсак, вариация тенгламалари тизимини

$$\frac{d\delta a}{dt} = \varepsilon P_a^I(a_0+в_0)\delta a + \varepsilon P_в^I(a_0+в_0)\delta в, \qquad (5.5)$$

$$\frac{d\delta в}{dt} = \varepsilon Q_a^I(a_0+в_0)\delta a + \varepsilon Q_в^I(a_0+в_0)\delta в,$$

куринишда оламиз.

(5.5) тизимнинг тавсифий тенгламаси

$$\begin{vmatrix} \varepsilon P_a^I - \lambda & \varepsilon P_в^I \\ \varepsilon Q_a^I & \varepsilon Q_в^I - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ёки

$$\lambda^2-\varepsilon(P_a^1+Q_в^1)\lambda+\varepsilon^2(P_a^1Q_в^1-Q_a^1P_в^1)=0 \qquad (5.6)$$

кўринишга эга булади.

(5.6) дан текширалаётган стационар тебранишларнинг турғун булиш-лик шартларни олиш мумкин. Бу шартлар қуйидагича (Гурвиц критерийси):

$$P_a^1(a_0,в_0)+Q_в^1(a_0в_0)<0. \qquad (5.7)$$

$$P_a^1(a_0,в_0)Q_в^1(a_0в_0)-Q_a^1(a_0в_0)P_в^1(a_0,в_0)>0.$$

Агар (5.5) вариация тенгламасига мос келувчи (5.6) тавсифий тенгламанинг иккала илдизи ҳам манфий ҳақиқий қисмга эга булса, у ҳолда $a=a_0$, $в=в_0$. стационар (даврий) ечимлар $t\to\infty$ да асимптотик турғун булади.

Мисол тариқасида маятникнинг қаршилик кўрсатувчи муҳитдаги чизиқсиз тебранишларини ёзувчи [12-14] $\ddot\varphi+\varepsilon(\alpha\dot\varphi+\beta\dot\varphi^3)+\varphi-\varepsilon\gamma\varphi^3=0$ дифференциал тенгламани қараймиз. Бу ерда α,β,γ ўзгармас сонлар, $\varepsilon>0$ кичик параметр. Бу тенгламани

$$\ddot\varphi+\varphi=-\varepsilon\left(\alpha\dot\varphi+\beta\dot\varphi^3\right)+\varepsilon\gamma\varphi^3 \qquad (5.8)$$

кўринишда ёзиб, ундан $\varepsilon=0$ да пайдо буладиган

$$\ddot\varphi+\varphi=0$$

тенгламани ҳам қараймиз. (5.8) тизимни

$$\varphi(t)=a\cos t+в\sin t,\quad \dot\varphi(t)=-a\sin t+в\cos t.$$

алмаштиришлар ёрдамида стандарт кўринишга келтирамиз. Натижада у қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{da}{dt}=\varepsilon P(a,в),\qquad \frac{dв}{dt}=\varepsilon Q(a,в), \qquad (5.9)$$

бу ерда,

$$P(a,в)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[-\alpha(-a\sin t+в\cos t)-\beta(-a\sin t+в\cos t)^3+$$

$$+\gamma(a\cos t+в\sin t)^3\Big]dt$$

$$Q(a,в)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[-\alpha(-a\sin t+в\cos t)-\beta(-a\sin t+в\cos t)^3+$$

$$+\gamma(a\cos t+в\sin t)^3\Big]dt$$

(5.9) тизимни ўрталаштириб, унга қуйидаги ўрталашган тизимни мос қуямиз:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon\alpha}{2}a - \frac{3\varepsilon\beta}{8}(a^2+в^2)a - \frac{3\varepsilon\gamma}{8}(a^2+в^2)в$$

$$\frac{dв}{dt} = -\frac{\varepsilon\alpha}{2}в - \frac{3\varepsilon\beta}{8}(a^2+в^2)в + \frac{3\varepsilon\gamma}{8}(a^2+в^2)a. \qquad (5.10)$$

ёки

$$\frac{1}{2}\alpha(a^2+в^2) = -\frac{3\varepsilon\beta}{8}(a^2+в^2)^2 - \frac{\varepsilon\alpha}{2}(a^2+в^2),$$

$$d\left(\frac{a}{в}\right) = -\frac{3\varepsilon\beta}{8}\cdot\frac{(a^2+в^2)^2}{в^2}$$

(5.10) тизим $a = a_0$, $в = в_0$ стационар ечимга эга бўлсин. (5.10) тизимнинг $(a_0, в_0)$ стационар ечимларига чексиз яқин бўлган $a_0+\delta a$ ва $в_0+\delta a$ ечимни ҳам қараймиз. Агар δa ва $\delta в$ миқдорларнинг биринчи даражаси қатнашган ҳадлар билан чегаралансак, вариация тенгламаларини қуйидагича оламиз:

$$\frac{d\delta a}{dt} = -\left(\frac{9}{8}ева_0^2 + \frac{3}{4}ега_0в_0 + \frac{3}{8}евв_0^2 + \frac{еб}{2}\right)\delta a$$

$$+\left(-\frac{3}{8}ега_0^2 - \frac{3}{4}ева_0в_0 - \frac{3}{8}егв_0^2\right)\delta в$$

$$\frac{d\delta в}{dt} = \left(\frac{9}{8}ега_0^2 - \frac{3}{4}ева_0в_0 + \frac{3}{8}егв_0^2\right)\delta a +$$

$$+\left(-\frac{3}{8}ева_0^2 + \frac{3}{4}ега_0в_0 - \frac{9}{8}евв_0^2 - \frac{еб}{2}\right)\delta в$$

Агар $A+D<0$ ва $AD-BC>0$ муносабатлар бажарилса, у ҳолда a ва $в$ стационар ечимлар асимптотик турғун бўлади. Бу ерда,

$$A = -\left(\frac{9}{8}\varepsilon\beta\alpha^2 + \frac{3}{4}\varepsilon\gamma\alpha\, в + \frac{3}{8}\varepsilon\beta в^2 + \frac{\varepsilon\alpha}{2}\right),$$

$$B = -\left(\frac{3}{8}\varepsilon\gamma\alpha^2 + \frac{3}{4}\varepsilon\beta\alpha\, в + \frac{3}{8}\varepsilon\gamma в^2\right),$$

$$C = \frac{9}{8}\varepsilon\gamma\alpha^2 - \frac{3}{4}\varepsilon\beta\alpha\, в + \frac{3}{8}\varepsilon\gamma в^2,$$

$$D = \frac{9}{8}\varepsilon\beta\alpha_r^2 - \frac{3}{4}\varepsilon\gamma\alpha\ в + \frac{9}{8}\varepsilon\beta в^2 + \frac{\varepsilon\alpha}{2}.$$

(5.1) тенгламани (5.2) кўринишга келтирмасдан ҳам унинг ечимларининг тургун ва турғунмаслигини аниқлаш мумкин.

Олдинги параграфда даврий ечимлари кичик параметр методи бўйича изланган маятникнинг

$$\ddot{\varphi} + \varphi - \varepsilon\varphi^3 = F\cos\omega t \qquad (5.11)$$

тенгламасини олайлик.

Фараз қилайлик, (5.11) тенглама иккита $\varphi_0(t)$ ва $\varphi_0(t) + \delta\varphi(t)$ ҳар хил ечимларга эга бўлсин. Бу ечимлар учун $t = o$ да бошланғич қийматлар бир-биридан жуда кам фарқ қилсин. Агар $\varphi_0 + \delta\varphi$ ечимни (5.11) тенгламага қўйиб, $\delta\varphi$ нинг биринчи даражаси қатнашган ҳадлар билан чегараланиб,

$$\ddot{\varphi}_0 + \varphi_0 - \varepsilon\varphi^3 = F\cos\omega t$$

айниятни эътиборга олсак, у ҳолда $\delta\varphi$ га нисбатан

$$\delta\ddot{\varphi} + \left(1 - 3\varepsilon\varphi_0^2\right)\delta\varphi = o \qquad (5.12)$$

бир жинсли чизиқли тенгламани оламиз. Бу ердаги φ_0 турғунлиги текшириладиган (5.11) тенгламанинг ечими. Қаралаётган ҳолда φ_0 даврий функциядир. Бундай ҳолда (5.12) Хилл тенгламасини ифодалайди. Ҳар бир φ_0 функцияга ёки $(/A/,\omega)$ параметрлар текислигидаги ҳар бир нуқтага ўзининг (5.12) кўринишдаги вариация тенгламаси мос келади [13]. Параметрларнинг шундай жуфт қийматлари тўплами мавжудки, (5.12) тенгламанинг $\delta\varphi$ ечими даврий бўлади. Параметрларнинг бундай қийматлари тўплами (5.12) тенглама турғун ва турғун бўлмаган ечимларининг чегарасига мос келади.

Агар $\varphi_0 = ACOS\nu t$ бўлса, яъни (5.11) тенгламанинг биринчи яқинлашиш бўйича қурилган даврий ечимини олсак, у ҳолда (5.12) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\delta\ddot{\varphi} + \left(\mu - \lambda\cos 2\nu t\right)\delta\varphi = o, \qquad (5.13)$$

бу ерда, $\mu = 1 - \frac{3}{2}\varepsilon A^2$, $\lambda = \frac{3}{2}\varepsilon A^2$.

Кейинги қиладиган ишларимизга қулай бўлиши учун (5.13) тенгламада $Z = 2\lambda t$ алмаштиришни бажариб, уни

$$\delta\ddot{\varphi} + (\delta - \varepsilon\cos z)\delta\varphi = 0, \qquad (5.14)$$

куринишга келтирамиз. Бу ерда $\delta = \dfrac{\mu}{4\nu^2}$, $\varepsilon = \dfrac{\lambda}{4\nu^2}$.

(5.12) тенгламанинг хусусий ҳоли бўлган (5.14) тенглама математик физикада Матье тенгламаси номи билан юритилади.

(5.8) тизим учун $\delta\varphi$ га нисбатан (5.12) ва (5.14) вариация тенгламалари мос равишда

$$\delta\ddot{\varphi} + \varepsilon\alpha\delta\dot{\varphi} + (1 - 3\varepsilon\beta\dot{\varphi}_0^2 + 3\varepsilon\beta\gamma\varphi_0^2)\delta\varphi = 0, \qquad (5.15)$$

$$\delta\ddot{\varphi} + \varepsilon\alpha\delta\dot{\varphi} + (\delta - \varepsilon\lambda\cos z)\delta\varphi = 0 \qquad (5.16)$$

куринишларга эга булади.

Бу ердаги δ, λ коэффициентлар

$$\delta = \frac{1}{4\nu^2}\left(1 - \frac{3}{2}\varepsilon\beta A^2\nu^2 + \frac{3}{2}\varepsilon\gamma A^2\right), \quad \lambda = \frac{1}{4\nu^2}\left(\frac{3}{2}\varepsilon\gamma A^2 + \frac{3}{2}\beta\nu^2 A^2\right)$$

формулалар орқали топилади.

(5.12), (5.14), (5.15) ва (5.16) тенгламаларни кейинги бобда мукаммал текширамиз.

6-§. Маятникнинг параметрик тебранишлари кенглиги ва чегарасини ҳисоблаш. Масалалар

Тизим (маятник) параметрик тебранишларини текширишнинг бир эффектив методини келтирамиз. Бу метод кўпинча Ван-дер-Поля номи билан юритилиб, секин ўзгарувчили коэффициентлар методи деб ҳам аталади.

Чизиқли ўзгарувчан коэффициентли бир жинсли оддий дифференциал тенгламани қараймиз [16].

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2(t)x = 0 \qquad (6.1)$$

(6.1) куринишдаги тенгламага кўпгина назарий ва амалий аҳамиятга эга бўлган масалалар келтирилиб ҳал қилинади. Масалан, (6.1) тенгламага инерция коэффициенти m ва эластиклик коэффициенти k га тенг бўлган бир ўлчовли тизимнинг кичик тебранишлари ҳақидаги масалалар келтирилиб текширилади.

Бундай тизимнинг ҳаракати $\dfrac{d}{dt}(m\dot{x}) + kx = 0$ тенглама билан ёзилади. Бу ерда, m=const, k=k(t) десак ва $\omega^2(t) = \dfrac{k(t)}{m}$ белгилашни киритсак, кейинги тенглама (6.1) кўринишни қабул қилади. (6.1) даги $\omega(t)$ функция γ частотали, $T = \frac{2\pi}{\gamma}$ даврли даврий функция бўлсин, яъни $\omega(t + T) = \omega(t)$. $\omega(t)$ функция ω_0 доимий миқдордан жуда оз фарқ қиладиган ҳол учун параметрик тебранишларнинг вужудга келиш шартларини ва турғун ҳамда турғун бўлмаган соҳаларни ажратувчи эгри чизиқлар учун асимптотик ифодалар топамиз. $\omega(t)$ функция

$$\omega^2(t) = \omega_0^2(1 + h\cos\gamma t) \qquad (6.2)$$

кўринишдаги содда даврий функциядан иборат бўлсин. Бу ердаги h мусбат ҳақиқий сон ($h << 1$). Биз қуйида кўрамизки, $\omega(t)$ частота ω_0 частотанинг икки бараварига яқин бўлганда параметрик тебранишнинг вужудга келиши энг интесив бўлади. Бу яқинликни қуйидагича боғлаб оламиз:

$$\gamma = 2\omega_0 + \varepsilon, \quad \varepsilon << \omega_0$$

Ҳаракатнинг дифференциал тенгламаси эса

$$\ddot{x} + \omega_0^2[1 + h\cos(2\omega_0 + \varepsilon)t]x = 0 \qquad (6.3)$$

кўринишга эга бўлади. (3.6.3) тенгламанинг ечимини

$$x(t) = \alpha(t)\cos\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + b(t)\sin\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t \qquad (6.4)$$

кўринишда излаймиз. Бу ерда a(t) ва b(t) вақтнинг секин ўзгарувчили функцияларидир. Бошқача айтганда ҳаракатни асосан, ω_0 частотали амплитуда ва фазаси секин ўзгарувчан тебранма ҳаракатдан иборат деб фараз қиламиз. Бу кейинги қилинган фараз эса $\dot{a}$ ва $\dot{b}$, $\ddot{a}$ ва $\ddot{b}$ миқдорлар ε га нисбатан биринчи ва иккинчи тартибли кичик миқдорлар бўлишини билдиради.

(6.4) кўринишдаги функция (6.3) тенгламанинг аниқ ечими бўла олмайди. Ҳақиқатан x(t) функция ўз таркибида $\omega_0 \pm \frac{\varepsilon}{2}$ частотадан фарқ қилувчи $2\omega_0 + \varepsilon$ частотага бутун каррали бўлган частотали ҳадларни сақлайди. Лекин бу ҳадлар h кичик миқдорга нисбатан юқори тартибли кичик миқдорлар бўлгани учун уларни биринчи яқинлашишдаёқ эътиборга олмаймиз. (6.4) функциянинг ҳосилаларини топамиз

$$\dot{x}(t) = \dot{a}(t)\cos\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t - \alpha(t)\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) +$$

$$+\dot{в}(t)\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+в(t)\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t;$$

$$\ddot{x}(t)=\varepsilon\dot{a}(t)\cos\left(\omega+\frac{3}{2}\right)t-\dot{a}(t)\left(\omega+\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t-$$

$$-a\left(\omega_0+\frac{3}{2}\right)\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t-a\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+$$

$$+\varepsilon в\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+в\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+$$

$$+\dot{в}\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t-в\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t \qquad (6.5)$$

(буерда $\ddot{a}\approx\varepsilon\dot{a}$, $\ddot{в}\approx\varepsilon\dot{в}$ муносабатларни эътиборга олдик).

$$\omega_0^2[1+h\cos(2\omega_0+\varepsilon)t]\left[a\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+в\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t\right]=$$

$$=a\omega^2\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+в\omega^2\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+\frac{ah\omega_0^2}{2}\left[\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+\cos\left(3\omega_0+\frac{3\varepsilon}{2}\right)t\right]+$$

$$+\frac{вh\omega^2}{2}\left[-\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+\sin\left(3\omega_0+\frac{3\varepsilon}{2}\right)t\right] \qquad (6.6)$$

(6.5) ва (6.6)ни (6.3) га қўйиб ε қатнашган ҳадларни сақлаган ҳолда $\dot{a}\approx\varepsilon a$, $\dot{в}\approx\varepsilon в$ ва $\varepsilon\dot{a}\approx\varepsilon^2 a$, $\varepsilon\dot{в}\approx\varepsilon^2 в$ эквивалентликларни эътиборга олиб (бундай эквивалентликларнинг тўғрилигини резонанс шароитлардаги натижалар тасдиқлайди), шунингдек, $3\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ частотали ҳадларни ҳам тушириб қолдириб, натижада қуйидагини оламиз:

$$-\left(2\dot{a}-в\varepsilon+\frac{h\omega}{2}в\right)\omega\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+\left(2\dot{в}-a\varepsilon+\frac{h\omega}{2}a\right)\omega\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t=0$$

Бу тенгликнинг бажарилишлиги бир вақтнинг ўзида sin ва cos кўпайтувчилар олдидаги коэффициентларнинг О га айланишини талаб қилади. Натижада a(t) ва в(t) функциялар учун иккита чизиқли дифференциал тенгламалар оламиз

$$2\frac{da}{dt}+\varepsilon в+\frac{h\omega}{2}в=0, \qquad 2\frac{dв}{dt}-\varepsilon a+\frac{h\omega}{2}a=0$$

Умумий қоидага мувофиқ бу тизимнинг ечимларини e^{st} га пропорционал кўринишда излаймиз

$$a(t) = a_0 e^{st}, \quad в(t) = в_0 e^{st}$$

a_0 ва $в_0$ га нисбатан қуйидаги бир жинсли алгебраик тизимни оламиз

$$Sa_0 + \frac{1}{2}\left(\varepsilon + \frac{h\omega}{2}\right)в_0 = 0, \quad \frac{1}{2}\left(\varepsilon - \frac{h\omega}{2}\right)a_0 - Sв_0 = 0.$$

Бу тизим тривиал бўлмаган ечимга эга бўлиши учун

$$\begin{vmatrix} S & \frac{1}{2}\left(\varepsilon + \frac{h\omega}{2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\varepsilon - \frac{h\omega}{2}\right) & -S \end{vmatrix} = 0 \tag{6.7}$$

тенглик бажарилиши керак. Бундан $S^2 = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{h\omega}{2}\right)^2 - \varepsilon^2\right]$ муносабатни

оламиз. S миқдорнинг мусбат ҳақиқий бўлиши, яъни $S^2 > 0$ тенгсизликнинг бажарилиши, тизимда параметрик резонанснинг вужудга келиш шартини ифодалайди. Демак,

$$\left(\frac{h\omega}{2}\right)^2 > \varepsilon^2 \tag{6.8}$$

тенгсизлик бажарилиши керак. Бу тенгсизликни ечиб, 2ω частота атрофидаги параметрик резонанснинг кенглик интервалини топамиз

$$-\frac{h\omega}{2} < \varepsilon < \frac{h\omega}{2} \tag{6.9}$$

Бу интервалнинг кенглиги h га пропорционал эканлиги (6.9) тенгсизликдан равшан. Резонанс чегаралари эса $\varepsilon = \pm\frac{h\omega}{2}$ тенгламалар

билан аниқланади. Тизимда параметрик резонанслар γ частота $\frac{2\omega}{n}$ частота қийматларига яқин бўлганда ҳам содир бўлиши мумкин. Бу ерда n исталган бутун сон. Лекин n нинг ошиб бориши билан параметрик резонанснинг кенглиги h^n миқдорга камайиб боради (h<<1).

Олдин эслатганимиздек, параметрик резонанс тизимда кичик қаршиликни ҳисобга олганда ҳам содир бўлишини айтган эдик. Қаршилик туфайли тургун бўлмаган соҳалар кенглиги торайди. Олдинги иккита бобдан маълумки, қаршилик туфайли тебранишнинг амплитудаси $e^{-\lambda t}$ қонун бўйича сўнади. Параметрик резонанс вақтида тебранишнинг кучайиши $e^{(\delta-\lambda)t}$ қонун бўйича содир бўлади. Тургун бўлмаган соҳаларнинг чегаралари $\delta-\lambda=0$ тенглик билан аниқланади. Кичик қаршиликни ҳисобга олган ҳол учун параметрик резонанснинг кенглик интервалини топамиз.

Қаралаётган ҳол учун (6.7) детерминант қуйидаги кўринишни олади:

$$\begin{vmatrix} S-\lambda & \frac{1}{2}\left(\varepsilon+\frac{h\omega}{2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\varepsilon-\frac{h\omega}{2}\right) & -(S-\lambda) \end{vmatrix}=0$$

Олдинги ҳолдаги мулоҳазани юритиб, $\left(\frac{h\omega}{2}\right)^2 > 4\lambda^2+\varepsilon^2$ тенгсизликка эга бўламиз. Бу олинган тенгсизлик эса

$$-\sqrt{\left(\frac{h\omega}{2}\right)^2-4\lambda^2}<\varepsilon<\sqrt{\left(\frac{h\omega}{2}\right)^2-4\lambda^2} \qquad (6.10)$$

тенгсизликка эквивалентдир. (6.10) тенгсизликдан шундай хулосани чиқариш мумкинки, резонанс ҳодисаси h амплитуда (қўзғатувчи коэффициент) етарлича кичик бўлганда содир бўлмаслан, балки h нинг аниқ бир h_k "бусоға" қийматида содир бўлар экан. Бу қийматни (6.10) дан олиш мумкин $h_k=\frac{4\lambda}{\omega_0}$.

$\frac{2\omega}{n}$ частотага яқин резонанслар учун h_1 бусоға қиймат $\frac{1}{\lambda^n}$ га пропорционал бўлади, яъни n ошиши билан бу миқдор ҳам ўсиб боради.

1-масала (бош параметрик резонанс ҳол). $\gamma=2\omega$ га яқин параметрик тебранишлар учун тургун бўлмаган соҳанинг чегараларини h^2 миқдор қатнашган ҳадга қадар аниқликда ҳисобланг.

Қўйилган масалани ҳал қилиш учун (6.3) тенгламанинг ечимини

$$x(t)=a\cos\left(\omega+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+в\sin\left(\omega+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+a_1\cos3\left(\omega+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+в_1\sin3\left(\omega+\frac{\varepsilon}{2}\right)t \qquad (6.11)$$

кўринишда излаймиз. Қаралаётган ҳолда a, $в$, a_1, $в_1$ коэффициентларини ўзгармас деб ҳисоблаймиз. (6.11) нинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз

$$\dot{x}(t) = -a_o\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + в_o\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)\cos\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)t$$

$$-3a_1\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)\sin 3\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + 3в_1\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)\cos 3\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)t\,; \qquad (6.12)$$

$$\ddot{x}(t) = -a_o\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2\cos\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)t - в_o\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2\sin\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)t -$$

$$-9a_1\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2\cos 3\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)t - 9в_1\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)\sin 3\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)t\,;$$

(6.11) ва (6.12) ни (6.3) га қуйиб,

$$\cos\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)\cos(2\omega_o + \varepsilon)t = \frac{1}{2}\cos 3\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + \frac{1}{2}\cos\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)t$$

$$\cos 3\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)\cos(2\omega_o + \varepsilon)t = \frac{1}{2}\cos 5\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + \frac{1}{2}\cos\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)t$$

$$\sin\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)t\cdot\cos(2\omega_o + \varepsilon)t = \frac{1}{2}sis3\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + \frac{1}{2}\sin\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)t$$

$$\sin 3\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)t\cdot\cos(2\omega_o + \varepsilon)t = \frac{1}{2}sis5\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + \frac{1}{2}\sin\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)t$$

формуллалардан фойдаланиб, қуйидагига эга буламиз:

$$-a_o\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)\cos\left(2\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)t - в_o\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2\sin\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)t -$$

$$-9a_1\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2\cos 3\left(2\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)t - 9в_o\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2\sin 3\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)t +$$

$$+\omega_o^2\Big[a_o\cos\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + в_o\sin\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + a_1\cos 3\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)t +$$

$$+в_1\sin 3\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)t\Big] + \frac{\omega_o^2 h}{2}\Big[a_o\cos 3\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + a_o\cos\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)t +$$

$$+a_1\cos 5\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + a_1\cos\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + в_o\sin 3\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)t$$

$$-в_o\sin\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + в_1\sin 5\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + в_1\sin\left(\omega_o + \frac{\varepsilon}{2}\right)t\Big] = 0$$

Бу тенгликдаги юқори яқинлашишларда керак бўладиган $5\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ частотали ҳадларни тушириб қолдириб, қуйидагини оламиз:

$$\left[a_0\left(\omega_0\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{4}\right)+\frac{h\omega^2}{2}a_0+\frac{h\omega^2}{2}a_1\right]\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+$$

$$+\left[-в_0\left(\omega_0\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{4}\right)-\frac{h\omega_0^2}{2}в_0+\frac{h\omega_0^2}{2}в_1\right]\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+$$

$$+\left[\frac{h\omega^2}{2}a_0-8a_1\omega_0^2\right]\cos 3\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+$$

$$+\left[\frac{h\omega_0^2}{2}в_0-8в_1\omega_0^2\right]\sin 3\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t=0$$

Бу тенгликда $\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}$ частотали ҳадларда h миқдорнинг биринчи ва иккинчи даражалари $3\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ частотали ҳадларда эса биринчи даражаси сақланган. Юқоридаги тенглик бажарилиши учун ҳар бир ўрта қавснинг ичи алоҳида-алоҳида нолга тенг бўлиши керак. Охирги иккита ҳаддан a_1 ва $в_1$ни топиш мумкин

$a_1=\frac{h}{16}a_0$, $в_1=\frac{h}{16}в_0$ олдинги иккита ҳаддан эса қуйидагини оламиз:

$$a_0\omega_0\varepsilon+\frac{a_0\varepsilon^2}{4}+\frac{h\omega^2}{2}a_0+\frac{h\omega^2}{2}a_1=0 \qquad (*)$$

$$-в_0\omega_0\varepsilon-\frac{в_0\varepsilon^2}{4}-\frac{h\omega_0^2}{2}в_0+\frac{h\omega^2}{2}в_1=0.$$

a_1 ва $в_1$нинг топилган қийматларини (*)га қўйиб, топамиз

$$\omega_0\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{4}-\frac{h\omega_0^2}{2}+\frac{h^2\omega_0^2}{32}=0, \qquad +\omega_0\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{4}+\frac{h\omega^2}{2}-\frac{h^2\omega^2}{32}=0.$$

Иккала тенгликни бириктириб ёзамиз:

$$\varepsilon^2 + 4\omega_0\varepsilon + 2h\omega_0^2 - \frac{h^2\omega_0^2}{8} = 0$$

Агар $\varepsilon^2 = 0(\varepsilon)$ эканлигини эътиборга олсак, изланаётган чегаравий эгри чизиқларнинг тенгламасини $\varepsilon = \pm\frac{h\omega_0}{2} + \frac{1}{32}\omega_0 h^2$ кўринишда оламиз.

2-масала. (одатдаги резонанс ҳол). γ частотанинг ω_0 га яқин қийматлари учун параметрик тебранишларнинг турғун бўлмаган соҳасининг чегараларини h нинг иккинчи даражасига қадар аниқликда ҳисобланг. $\gamma = \omega_0 + \varepsilon$ бўлсин дейлик. Ҳаракатнинг дифференциал тенгламаси

$$\ddot{x} + \omega_0^2\left[1 + h\cos(\omega_0 + \varepsilon)t\right]x = 0 \qquad (6.13)$$

кўринишда бўлади. Изланаётган чегаравий қийматлар учун $\varepsilon \approx h^2$ муносабат ўринли бўлиши керак. (6.13) тенгламанинг ечимини

$$x(t) = a_0\cos(\omega_0 + \varepsilon)t + в_0\sin(\omega_0 + \varepsilon)t + a_1\cos 2(\omega_0 + \varepsilon)t + в_1\sin 2(\omega_0 + \varepsilon)t + C_1 \quad (6.14)$$

кўринишда излаймиз. Турғун бўлмаган соҳанинг чегараларини аниқлаш учун a_0, $в_0$, a_1, $в_1$ ва C_1 коэффициентларни доимий деб фараз қиламиз. (6.14)нинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = &-a_0(\omega_0 + \varepsilon)\sin(\omega_0 + \varepsilon)t + в_0(\omega_0 + \varepsilon)\cos(\omega_0 + \varepsilon) - \\ &-2a_1(\omega_0 + \varepsilon)\sin 2(\omega_0 + \varepsilon)t + 2в_1(\omega_0 + \varepsilon)\cos 2(\omega_0 + \varepsilon)t\end{aligned} \qquad (6.15)$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) = &-a_0(\omega_0 + \varepsilon)^2\cos(\omega_0 + \varepsilon)t + в_0(\omega_0 + \varepsilon)^2\sin(\omega_0 + \varepsilon)t - \\ &-4a_1(\omega_0 + \varepsilon)^2\cos 2(\omega_0 + \varepsilon)t + 4в_1(\omega_0 + \varepsilon)^2\sin(\omega_0 + \varepsilon)t.\end{aligned}$$

(6.14) ва (6.15) ни (6.13) га қўйиб, тригонометрик функцияларнинг кўпайтмасини йиғиндига алмаштириб, юқори яқинлашишда керак бўладиган $3(\omega_0 + \varepsilon)$ частотали ҳадларни тушириб қолдириб, қуйидагини оламиз:

$$\left[-2\omega_0 a_0\varepsilon + \frac{h\omega_0^2}{2}a_1 + hc_1\omega_0^2\right]\cos(\omega_0 + \varepsilon)t + \left[-2\omega_0 в_0\varepsilon + \frac{h\omega_0^2}{2}в_1\right]\sin(\omega_0 + \varepsilon)t +$$

$$+\left[-3\omega_0^2 a_1 + \frac{h\omega_0^2}{2}a_0\right]\cos 2(\omega_0 + \varepsilon)t + \left[-3\omega_0^2 в_1 + \frac{h\omega_0^2}{2}в_0\right]\sin 2(\omega_0 + \varepsilon)t + \left[c_1\omega_0^2 + \frac{h\omega_0^2}{2}a_0\right] = 0.$$

Олдинги масалалаги мулоҳазани юритиб, олдин a_1, $в_1$, ва c_1 коэффициентларни топамиз

$$a_1 = \frac{h}{6}a, \quad b_1 = \frac{h}{6}b, \quad c = -\frac{h}{2}a .$$

Кейин эса одатдаги резонанс атрофидаги турғун бўлмаган зонани чегаралайдиган чизиқларнинг тенгламаларини топамиз

$$\varepsilon = -\frac{5}{24}\omega h^2, \quad \varepsilon = \frac{1}{24}\omega h^2 .$$

3-масала. Қўйилиш нуқтаси вертикал йўналишда тебранувчи ясси маятникнинг кичик тебранишлари учун параметрик резонанснинг юз бериш шарти аниқлансин.

Ясси маятникнинг қўйилиш нуқтаси $a\cos\gamma t$ қонун бўйича вертикал тебранма ҳаракат қилсин. Маятник ҳаракатининг дифференциал тенгламасини тузиш учун Лагранж функциясини тузамиз. M нуқтанинг координаталарини ҳисоблаймиз

$x = l\sin\varphi$, $y = a\cos\gamma t + l\cos\varphi$ (агар маятникнинг қўйилиш нуқтаси $a\cos\gamma t$ қонун бўйича горизонтал тебранма ҳаракат қилса, у ҳолда M нуқтанинг координаталари $x = a\cos\gamma t + l\sin\varphi$, $y = l\cos\varphi$ формулалар билан ҳисобланади). Қаралаётган тизим учун L Лагранж функцияси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$L = \frac{m}{2}\left(\dot x^2 + \dot y^2\right) - u(x,y)$. Бизнинг ҳол учун эса

$$L = \frac{ml^2}{2}\dot\varphi^2 + mla\gamma^2\cos\gamma t\cos\varphi + mgl\cos\varphi.$$

Потенциал куч майдонида Лагранж тенгламасини оламиз

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Маятник ҳаракатининг дифференциал тенгламасини тузамиз

$$ml^2\ddot\varphi + \left[mgl + mal\gamma^2\cos\gamma t\right]\sin\varphi = 0 .$$

Агар $\sin\varphi \approx \varphi$ ва $\gamma^2 \approx 4\omega^2$ тақрибий формулалардан фойдалансак, юқоридаги маятник ҳаракатининг тенгламаси

$$\ddot\varphi + \omega^2\left[1 + \frac{4a}{l}\cos(2\omega + \varepsilon)t\right]\varphi = 0 \qquad (6.16)$$

кўринишни олади. Равшанки, h параметр ролини $\frac{4a}{l}$ миқдор ўйнайди.

(6.16) тенгламанинг ечимини (6.11) кўринишда излаймиз. Текширилаётган масала учун (6.9) тенгсизлик $-\frac{2a\sqrt{g}}{l^{3/2}} < \varepsilon < \frac{2a\sqrt{g}}{l^{3/2}}$ кўринишни олади.

Шундай қилиб, қўйилиш нуқтаси вертикал даврий ҳаракат қилганда маятник ҳаракати турғун бўлиши учун ҳаракатни тавсифловчи параметрларнинг қийматлари охирги тенгсизликни қаноатлантириши керак экан.

7. §. Маятник параметрик тебранишларида резонанс режимларининг классификацияси ва турғунлиги

Маятник ҳаракатининг

$$\ddot{x} + Cx - Hx^3 + \left(\omega^2 - G\cos\mu t\right)x = F\cos\nu t \qquad (7.1)$$

кўринишдаги умумий тенгламасини текширамиз. Бу ерда, $C, H, \omega, G, \mu, F, \nu$ — доимий сонлар; t—вақт; $x(t)$—маятникинг номаълум оғиш бурчаги. (7.1) тенглама $G=0$ да Дюффинг, $H = F = 0$ да эса Матье тенгламасига айланади. (7.1) тенгламани текшириш ишларида C, H, G, F доимий миқдорларни кичик параметр деб аталувчи ε доимий миқдорга пропорционал бўлсин деб қараймиз $C = \varepsilon c, H = \varepsilon h, G = \varepsilon g, F = \varepsilon f$.

Энди (7.1) тенгламанинг баъзи бир хусусий ҳолларини текширамиз.

$$\text{I.}\quad \ddot{x} + \left(\omega^2 - \varepsilon g\cos\mu t\right)x = 0 \qquad (7.2)$$

кўринишдаги тенгламани қараймиз. Агар маятникнинг маҳкамланган нуқтаси гармоник қонун бўйича вертикал йўналишда тебранма ҳаракат қилса, a тебраниш амплитудаси l маятник узунлигига нисбатан жуда кичик бўлса, у ҳолда бундай маятникнинг ҳаракати (7.2) кўринишдаги тенглама билан ёзилишини олдинги параграфларда кўрган эдик. (7.2) тенгламани қуйидаги кўринишда ёзамиз.

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon g\cos\mu t\cdot x \qquad (7.3)$$

(7.3) тизим билан бир қаторда $\varepsilon = 0$ да вужудга келадиган бир жинсли чизиқли $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ (7.4)

тенгламани ҳам қараймиз.

(7.4) тенгламанинг умумий ечимини қуйидагича оламиз:

$$x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t;$$

$$y(t) = \dot{x}(t) = \omega(-a\cos\omega t + b\sin\omega t), \qquad (7.5)$$

бу ерда, a ва b ихтиёрий доимийлар, улар бошланғич қийматдан фойдаланиб топилади.

Энди (7.3) дан унга эквивалент булган иккита биринчи тартибли дифференциал тенгламага ўтамиз [13]

$$\dot x = y, \quad \dot y = -\omega^2 x + \varepsilon g \cos Mt \cdot x \tag{7.6}$$

(7.5) функцияларнинг ҳосилаларини топамиз

$$\frac{dx}{dt} = \frac{da}{dt}\cos\omega t - a\omega\sin\omega t + \frac{dв}{dt}\sin\omega t + \omega в\cos\omega t,$$

$$\frac{dy}{dt} = \omega\left(-\frac{da}{dt}\sin\omega t - a\omega\cos\omega t + \frac{dв}{dt}\sin\omega t - \omega в\sin\omega t\right). \tag{7.7}$$

(7.5) ва (7.7) ни (7.6) га қуйиб, қуйидаги тизимни оламиз:

$$\frac{da}{dt}\cos\omega t + \frac{dв}{dt}\sin\omega t = 0$$

$$\omega\left[-\frac{da}{dt}\sin\omega t + \frac{dв}{dt}\cos\omega t\right] = \varepsilon g\cos\mu t\left[a\cos\omega t + в\sin\omega t\right]$$

Бу тизимни $\dot a$ ва $\dot в$ га нисбатан ечамиз

$$\dot a = -\frac{\varepsilon g}{\omega}\cos\mu t\left(a\cos\omega t + в\sin\omega t\right)\sin\omega t,$$

$$\dot в = -\frac{\varepsilon g}{\omega}\cos\mu t\left(a\cos\omega t + в\sin\omega t\right)\cos\omega t, \tag{7.8}$$

Олинган (7.8) тизим стандарт шаклдаги тизим булиб, у тўлигича (7.3) тенгламага эквивалентдир. Бу тизимнинг ечимини ўрталаштириш методидан фойдаланиб излаймиз. Бунинг учун (7.8) тизимнинг кўринишини бироз ўзгартириб ёзамиз

$$\dot a = -\frac{\varepsilon g}{2\omega}\left\{a\left[\frac{1}{2}\sin(\mu + 2\omega)t - \frac{1}{2}\sin(\mu - 2\omega)t\right] + \right.$$

$$\left. + в\left[\cos\mu t - \frac{1}{2}\cos(\mu - 2\omega)t - \frac{1}{2}\cos(\mu + 2\omega)t\right]\right\} \tag{7.9}$$

$$\dot в = -\frac{\varepsilon g}{\omega}\left\{a\left[\cos\mu t + \frac{1}{2}\cos(\mu - 2\omega)t + \frac{1}{2}\cos(\mu + 2\omega)t\right] + \right.$$

$$\left. + в\left[\frac{1}{2}\sin(\mu + 2\omega)t - \frac{1}{2}\sin(\mu - 2\omega)t\right]\right\}$$

$\mu = 2\omega$ да (7.9) тизимга мос келадиган ўрталашган тизим қуйидаги кўринишга эга булади:

$$\dot{a} = \frac{\varepsilon g}{4\omega} в, \quad \dot{в} = -\frac{\varepsilon g}{4\omega} a. \qquad (7.10)$$

Олинган тизим енгилгина ечилади. (7.10) тизимни интеграллаб, a ва $в$ ни топамиз:

$$a(t) = a_1 \cos \frac{\varepsilon g}{4\omega} t + a_2 \sin \frac{\varepsilon g}{4\omega} t,$$

$$в(t) = -a_1 \sin \frac{\varepsilon g}{4\omega} t + a_2 \cos \frac{\varepsilon g}{4\omega} t.$$

бу ерда, a_0^{I} ва $в_1^{II}$ ихтиёрий ҳақиқий сонлар. Шундай қилиб, (7.2) тенгламанинг тақрибий даврий ечимини қуйидагича оламиз:

$$x(t) \approx A \sin\left[\left(\frac{\varepsilon g}{4\omega} + \omega\right)t + \varphi\right],$$

$$\text{бу ерда } A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \quad tg\varphi = \frac{a_1}{a_2}.$$

II. Энди умумий кўринишдаги (7.1) тенгламани текширишга ўтамиз. Иккита ҳолни алоҳида-алоҳида қараймиз.

1. F ташқи қўзғатувчи куч амплирудаси ε кичик параметрга пропорционал, яъни $F = \varepsilon f$ бўлсин. Бундай ҳол учун (7.11) тенглама

$$\ddot{x} + \varepsilon c\dot{x} + \varepsilon hx^3 + \left(\omega^2 - \varepsilon g \cos \mu t\right)x = \varepsilon f \cos \nu t \qquad (7.11)$$

кўринишда бўлади. (7.11) тизимда юз берадиган резонанс ҳолларни текшириш учун [12,13]

$$\omega^2 = S^2\nu^2 + 0(\varepsilon), \quad \mu = p\nu + 0(\varepsilon) \qquad (7.12)$$

муносабатлар билан аниқланувчи S ва p миқдорларни киритамиз. (7.11) тизим ёзувчи тебранишлар ω, μ, ν частоталар билан тавсифланади. Тизимда юз берадиган резонанс ҳоллар ана шу частоталарнинг маълум бир рационал муносабатларида содир бўлади. $S^2\nu^2 - \omega^2 = 0(\varepsilon)$ эканлигини эътиборга олсак, (7.11) тенгламани қуйидагича ёзамиз:
бу ерда,

$$\ddot{x} + S^2\nu^2 x = \varepsilon P(x, \dot{x}, \varepsilon) + 0\left(\varepsilon^2\right)$$

$$P(x, \dot{x}, t) = \left[\left(S^2\nu^2 - \omega^2\right)\varepsilon^{-1}x + f \cos \nu t + gx \cos p\nu t - c\dot{x} - hx^3\right] \qquad (7.13)$$

S ва p ихтиёрий рационал сонларни ифодалайди.

(7.13) тизимнинг квазистационар ечимини қуйидагича, $x(t) = A\cos vst + B\sin vst$ квазигармоник тебранишлар кўринишида излаймиз. Бу ердаги А ва В вақтнинг секин ўзгарувчи функцияларидир.

$$x(t) = A\cos vst + B\sin vst$$

$$\dot{x}(t) = vs\cdot(-A\sin vst + B\cos vst)$$

алмаштиришлар ёрдамида (7.13) тизимни стандарт кўринишга келтирамиз

$$\dot{A} = -\frac{\varepsilon}{sv}P[x(A,B,t),\ \dot{x}(A,B,t),t]\ \sin vst\ ,$$

$$\dot{B} = \frac{\varepsilon}{sv}P[x(A,B,t),\ \dot{x}(A,B,t),t]\ \sin vst \qquad (7.14)$$

(7.14) тизимда ε нинг иккинчи ва ундан юқори даражалари қатнашган ҳадларни ташлаб, уни қуйидаги кўринишда оламиз:

$$\dot{A} = \varepsilon U(A,B,t),$$

$$\dot{B} = \varepsilon U(A,B,t). \qquad (7.15)$$

(7.15) тизимдан ўрталашган тизимга ўтиш учун (7.15) тенгламаларда

$$A = a + \varepsilon\tilde{u}(a,в,t),$$

$$B = в + \varepsilon\tilde{u}(a,в,t) \qquad (7.16)$$

формулалар ёрдамида алмаштириш бажарамиз, бу ердаги а ва в

$$\dot{a} = \varepsilon \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int^{T} U(a,в,t)dt,$$

$$\dot{в} = \varepsilon \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int^{T} U(a,в,t)dt$$

ўрталаштирилган тенгламаларни қаноатлантирадиган ечимлардир.

(7.16) ни (7.14) га қўйиб, $P(x,\dot{x},t)$нинг ифодасини эътиборга олиб қуйидагиларни топамиз:

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon}{sv}\Big\{\left(S^2v^2-\omega^2\right)\varepsilon^{-1}[a\cos vst + в\sin vst] + f\cos vt + g(a\cos vst + в\sin vst)\cdot\cos\rho t -$$

$$- cvs(-a\sin vst + в\cos vst) + h[3a^2в\cos^2 vst\cdot\sin vst + в^3\sin^3 vst + 3aв^2\cos vst\sin^2 vst +$$

$$a^3\cos^3 vst]\Big\}\sin vst,$$

$$\dot{в} = \frac{\varepsilon}{sv}\{(S^2v^2-\omega^2)\varepsilon^{-1}[a\cos vst + в\sin vst] + f\cos vt + g[a\cos vst + в\sin vst]\times$$

$$\cos vt - cvs[-a\sin vst + в\cos vst] + h[3aв^2\cos vst\sin^2 vst + в^3\sin^3 vst +$$
$$+ 3a^2в\cos^2 vst\sin vst + a^3\cos^3 vst]\}\cos vst$$

Олинган тизимни ўрталаштирамиз. Натижада, ушбу

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon}{sv}\left\{\frac{\left(s^2v^2 - \omega^2\right)}{2\varepsilon}в + \frac{3h}{8}\left(a^2 + в^2\right)в + \frac{1}{2}cvsa - \frac{g}{4}в\delta_{p2s}\right\}$$

$$\dot{в} = -\frac{\varepsilon}{sv}\left\{\frac{\left(s^2v^2 - \omega^2\right)}{2\varepsilon}a + \frac{3h}{8}\left(a^2 + в^2\right)a - \frac{1}{2}cvsв - \frac{g}{4}a\delta_{p2s} + \frac{\oint}{2}\delta_{p1}\right\}$$

соддароқ тизимни оламиз. Энди $\gamma = \frac{\omega^2 - s^2v^2}{2\varepsilon s^2v^2}$, $\alpha = \frac{3h}{8s^2v^2}$, $\delta = \frac{c}{2Sv}$,

$\eta = \frac{\oint}{2S^2v^2}$, $\sigma = \frac{g}{4s^2v^2}$ белгилашларни киритиб, ўрталанган тизимни

$$\dot{a} = -\varepsilon sv\left[-\gamma в + \alpha\left(a^2 + в^2\right)в + \delta a - \sigma в\delta_{p2s}\right],$$

$$\dot{в} = \varepsilon sv\left[-\gamma a + \alpha\left(a^2 + в^2\right)a - \delta в + \sigma a\delta_{p2s} + \eta\delta_{p1}\right] \qquad (7.17)$$

кўринишга келтирамиз. Бу ерда δ_{pq} кронекер символидир, яъни

$$\delta_{pq} = \begin{cases} 1, \text{ агар системада резонанс ҳодисаси юз берса } (P = q), \\ 0, \text{ агар системада резонанс ҳодисаси юз бермаса } (P \neq q) \end{cases}$$

$F = \varepsilon\oint$ ташқи куч амплитудаси ε параметрга пропорционал бўлганда тизимда содир бўладиган резонанслар классификацияси қуйидагича:

1) агар $S \neq 1$, $p \neq 2S$ бўлса, бундай ҳолда тизимда резонанс ҳодисаси юз бермайди;

2) агар $S \neq 1$, $p = 2S$ бўлса, бундай ҳолда тизимда бош параметрик резонанс ҳодисаси вужудга келади;

3) агар $S = 1$, $p \neq 2S$ бўлса, тизимда гармоник резонанс содир бўлади;

4) агар $S = 1$, $p = 2S$ бўлса, бундай ҳолда тизимда гармоник ва бош параметрик резонанслар содир бўлади.

2. F ташқи қўзғатувчи куч амплитудаси кичик бўлмасин. Бошқача айтганда F чекли миқдор бўлиб, ε кичик параметрга пропорционал бўлмасин. Бундай ҳол учун (7.1) тенглама қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\ddot{x} + s^2\nu^2 x = F\cos\nu t + \varepsilon Q(x,\dot{x},t) + 0\left(\varepsilon^2\right) \tag{7.18}$$

бу ерда $Q(x,\dot{x},t) = \left[\left(S^2 V^2 - \omega^2\right)\varepsilon^{-1} x + g\cos p\lambda t - c\dot{x} + hx^3\right]$.

(7.18) тенгламанинг таркибий ечимини [12]

$$x(t) = A(t)\cos\lambda st + B(t)\sin\lambda st + \frac{F}{\left(s^2 - 1\right)\gamma^2}\cos\lambda t \tag{7.19}$$

куринишда излаймиз. Иккинчи ҳолнинг барча вариантларида $S \neq \pm 1$ деб фараз қилинади. (7.18) тизимни

$$x(t) = A\cos\lambda st + B\sin\lambda st + \frac{F}{\left(s^2 - 1\right)\gamma^2}\cos\nu t, \tag{7.20}$$

$$x(t) = \nu s(-A\sin\nu st + B\cos\nu st) + \frac{F}{\left(1 - S^2\right)\nu z}\sin\nu t$$

алмаштиришлар ёрдамида стандарт куринишга келтириб, олинган тизимни 1-ҳолдагидек ўрталаштириб, (7.18) тизимга қуйидаги ўрталанган тизимни мос қуямиз:

$$\dot{\alpha} = \varepsilon\nu s\left[-\gamma в + a\left(a^2 + в^2\right)в + \delta a - \sigma a в\delta_{p2s} - 2\lambda a в\delta_{s1}\right] \tag{7.21}$$

$$\dot{в} = \varepsilon\nu s\left[-\gamma в + \alpha\left(\alpha^2 + в^2\right)\gamma - \delta в + \sigma a\delta_{p2s} + \lambda\left(\alpha^2 - в^2\right)\delta_{s1} + \eta_1\delta_{s3} + \eta_2 \delta\left(\delta_{(s-p)1} + \delta_{(p-s)1} - \delta_{(p+s)1}\right)\right],$$

бу ерда қуйидаги белгилашлар киритилган:

$$\gamma = \gamma - \frac{3h\phi^2}{4S^2\nu^2},\quad \lambda = \frac{3h\phi}{8S^2\nu^2},\quad \eta_1 = \frac{h\phi^3}{8S^2\nu^2},\quad \eta_2 = \frac{g\phi}{4S^2\nu^2},\quad \phi = \frac{F}{\left(S^2 - 1\right)\nu^2};$$

γ, α, δ ва σ эса 1-ҳолда киритилган миқдорлардир.

Қаралаётган ҳолда тизимда вужудга келиши мумкин бўладиган резонанслар классификацияси қуйидагича [12]:

1) агар $S \neq \frac{1}{3}, 3$; $p \neq 2S$; $p \neq |S \pm 1|$ бўлса, бундай ҳолда тизимда резонанс ҳодисаси содир бўлмайди. Шунинг учун бу ҳолга резонанс юз бермайдиган ҳол деб аталади;

2) агар $S = \frac{1}{3}$; $p \neq \frac{2}{3}, \frac{4}{3}$ бўлса, бундай ҳолда тизимда резонанс ҳодисаси юз беради, бундай резонанс субгармоник резонанс деб аталади;

3) агар $S = 3$; $p \neq 2,4,6$ бўлса, у, ҳолда тизимда резонанс ҳодисаси содир бўлади, бундай резонансни ультрагармоник резонанс деб аталади;

4) агар $S \neq \frac{1}{3}$; $p = 2S$ бўлса, у ҳолда тизимда бош параметрик резонанс вужудга келади;

5) агар $S \neq \frac{1}{3}, 3$; $p = |S \pm 1|$ бўлса, бундай ҳолда тизимда резонанс ҳодисаси юз беради, бундай резонанс комбинацион резонанс деб аталади;

6) $S = \frac{1}{3}$; $p = \frac{2}{3}$, бўлса, бундай ҳолда тизимда субгармоник, параметрик ва комбинацион резонанслар содир бўлади;

7) агар $S = \frac{1}{3}$; $p = \frac{4}{3}$ бўлса, у ҳолда тизимда субгармоник ва комбинацион резонанслар вужудга келиши мумкин;

8) агар $S = 3$; $p = 6$ бўлса, тизимда ультрагармоник ва параметрик резонанс содир бўлади;

9) агар $s = 3$; $p = 2$ ёки $p = 4$ бўлса, тизимда ультрагармоник ва комбинацион резонанслар юз бериши мумкин.

Энди (7.17) тизимга нисбатан умумийроқ бўлган (7.21) ситемани текширамиз. Резонанс ҳодисаси юз бермаганда бу иккала ситема устма-уст тушади.

1. Резонанс ҳодисаси юз бермайдиган ҳол. Бундай ҳол учун (7.21) ўрталанган тизим

$$\begin{cases} a' = -\varepsilon s v \left[\beta в - \alpha \left(a^2 + в^2 \right) в - \delta a \right] \\ в' = -\varepsilon s v \left[\beta a - \alpha \left(a^2 + в^2 \right) a + \delta в \right] \end{cases} \tag{7.22}$$

кўринишга эга бўлади. Бу тизимда янги $\tau = \varepsilon s v t$ ўзгарувчини киритамиз ва баъзи бир алмаштиришлардан кейин у,

$$\begin{cases} \frac{1}{2} d \left(a^2 + в^2 \right) = \ldots \delta \left(a^2 + в^2 \right) \\ d \left(\frac{a}{в} \right) = \frac{\gamma \left(a^2 + в^2 \right) \ldots \alpha \left(\ldots + в^2 \right)}{в^2} \end{cases}$$

кўринишини олади. Бу тизимда

$$a = r \cos \varphi, в = r \sin \varphi \tag{7.23}$$

алмаштиришларни бажариб, натижада янги r ва φ ўзгарувчиларга нисбатан

$$\dot r = -\delta r, \quad \dot\varphi = \alpha r^2 - \gamma \tag{7.24}$$

тизимни оламиз. (7.24) тизимни интеграллаб, r ва φ ни топамиз

$$r = r_0 e^{-\delta t}, \quad \varphi = \frac{\alpha r_0^2}{2\delta} e^{-2\delta t} - \gamma t + \varphi_0,$$

бу ерда, r_0 ва φ_0 интеграллаш доимийларидир. r ва φ учун топилган ифодаларни (7.23) га қўйиб, (7.22) тизимнинг ечимларини топамиз

$$\begin{Bmatrix} a(t) \\ в(t) \end{Bmatrix} = r_0 e^{-\delta t} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \left[\frac{\alpha r_0^2}{2\delta} e^{-2\delta t} - \gamma t + \varphi_0 \right].$$

Натижада (7.1) тенгламанинг тақрибий ечимини

$$x(t) \approx a(t)\cos \nu s t + в(t)\sin \nu s t + \frac{F}{\left(S^2-1\right)\nu^2}\cos \nu t =$$

$$= r_0 e^{-\varepsilon\delta t} \cos\left[(\nu + \varepsilon\gamma\mu)t + \frac{\alpha r_0^2}{\delta} e^{-2\varepsilon\delta t} - \varphi_0\right] + \frac{F}{\left(S^2-1\right)\nu^2}\cos \nu t \tag{7.25}$$

кўринишда оламиз. (7.25) топилган ечимдан равшанки, агар $\varepsilon\delta > 0$ бўлса, тебранишларнинг амплитудаси экспоненциал қонун бўйича сўнади. $t \to \infty$ да эса қурилган тақрибий ечим асимптотик равишда гармоник тебранишларни тавсифловчи $x_\infty(t) = \frac{F}{\left(S^2-1\right)\nu^2}\cos \nu t$ ифодага интилади.

2. Тизимда бош параметрик резонанс юз берган ҳол. Бундай ҳолда ўрганилаётган тизим

$$\begin{cases} \dot a = \gamma в - \alpha\left(a^2 + в^2\right)в - \delta a + \sigma в, \\ \dot в = \gamma a - \alpha\left(a^2 + в^2\right)a - \delta в + \sigma a. \end{cases} \tag{7.26}$$

кўринишга эга бўлади. Бу тизим квадратураларда интегралланмайди. (0;0) нуқта атрофидаги тебранишларнинг тавсифини ўрганамиз. Бунинг учун (7.26) тизим тенгламаларининг ўнг қисмларини нолга тенглаштириб,

$$(\dot a = 0; \ \dot в = 0)$$

$$\gamma в - \alpha\left(a^2 + в^2\right)в - \delta a + \sigma в = 0,$$

$$\gamma a + \alpha\left(a^2 + в^2\right)a - \delta в + \sigma a = 0$$

тизимни оламиз. Бу тизимда (7.23) алмаштиришларни бажариб, r ва φ нисбатан қуйидаги тизимни оламиз:

$$
\begin{cases}
\alpha^2 r^4 - 2\alpha\gamma r^2 + (\delta^2 + \gamma^2 - \sigma^2) = 0 \\
\varphi = \alpha rctg\dfrac{-\alpha r^2 - \gamma + \sigma}{\delta}.
\end{cases}
\tag{7.27}
$$

(7.27) тизимнинг биринчи тенгламаси r^2 га нисбатан квадрат тенглама бўлиб, агар $\Delta = \alpha^2\left(\sigma^2 - \delta^2\right) > 0(/\sigma/ > /\delta/)$ бўлса, у тўртта ҳақиқий илдизга эга бўлади; агар $\Delta = 0$ $(/\sigma/ = /\delta/)$ ва $\alpha\gamma > 0$ бўлса, у тенглама иккита ҳақиқий илдизга эга бўлади. $\nabla > 0(/\sigma/ > /\delta/)$ бўлганда (7.27) тизим ечимларини r_i ва $\varphi_i\left(i = \overline{1,4}\right)$ орқали белгиласак, бундай ҳолда (7.26) тизимнинг мувозанат ҳолатлари

$$
\alpha_i = r_i \cos\varphi_i, \text{в}_i = r_i \sin\varphi_i, \ i = \overline{1,4}
\tag{7.28}
$$

муносабатлар билан аниқланадилар.

Энди бу стационар ечимларнинг турғунлиги масаласини қараймиз. Бунинг учун тизимнинг вариация тенгламаларини тузамиз. (7.26) тизимда $a = a_1 + \delta a$, $\text{в} = \text{в}_1 + \delta\text{в}$ алмаштиришни бажариб, δa ва $\delta\text{в}$ миқдорларнинг иккинчи ва ундан юқори даражалари қатнашган қўшилувчиларни ташлаб, қуйидагини оламиз:

$$
\frac{d\delta a}{dt} = -\left(2\alpha a_1 \text{в}_1 + \delta\right)\delta\alpha + \left(3\alpha \text{в}_1^2 - \alpha a_1^2 + \gamma + \sigma\right)\delta\text{в},
$$

$$
\frac{d\delta\text{в}}{dt} = \left(3\alpha a_1^2 + \alpha\text{в}_1^2 - \gamma + \sigma\right)\delta\alpha + \left(2\alpha a_1 \text{в}_1 - \delta\right)\delta\text{в}.
$$

Бу ерда, $A = -\left(2\alpha a_1 \text{в}_1 + \delta\right)$; $D = \left(2\alpha a_1 \text{в} - \delta\right)$;

$B = 3\alpha\text{в}_1^2 - \alpha a_1^2 + \gamma + \sigma$; $C = 3\alpha a_1^2 + \alpha\text{в}_1^2 - \gamma + \sigma$ белгилашларни киритамиз.

Агар $A + D < 0$, $AD - BC > 0$ бўлса, у ҳолда a_1 ва в_1 стационар ечимлар асимптотик турғун бўлади. (7.26) тизимнинг қолган учта мувозанат ҳолатининг турғун бўлиш шартлари ҳам юқоридагидек текширилади.

3. Тизимда гармоник, ультрагармоник, комбинацион, ультрагармоник ва комбинацион резонанслар содир бўлган ҳоллар. Бу учала ҳолда ўрталашган тизим

$$\begin{cases} \dot{a} = \gamma в - \alpha\left(a^2 + в^2\right)в - \delta a, \\ \dot{в} = -\gamma a + \alpha\left(a^2 + в^2\right)a - \delta в + \eta, \end{cases} \qquad (7.29)$$

кўринишга эга бўлади.

(7.29) тизим ҳам квадратурада интегралланмайди. Лекин стационар ечимларнинг турғун бўлиш шартларини ўрнатиш мумкин. (7.29) тизимнинг стационар ечимларини топамиз. Улар

$$\begin{cases} \gamma в - \alpha\left(a^2 + в^2\right)в - \delta a = 0, \\ -\gamma a + \alpha\left(a^2 + в^2\right)a - \delta в + \eta = 0 \end{cases} \qquad (7.30)$$

тизимдан аниқланади.

(7.30) тизимда (7.23) алмаштиришларни бажариб r ва θ нисбатан қуйидагиларни топамиз:

$$\alpha^2 r^6 - 2\alpha\gamma r^4 + \left(\delta^2 + \gamma^2\right)r^2 - \eta^2 = 0, \quad \theta = \arcsin\frac{\delta r}{\eta} \qquad (7.31)$$

Бу тизимнинг биринчи тенгламаси r^2 нисбатан кубик тенгламадир. Маълумки, бундан тенглама таркибидаги коэффициентларнинг маълум бир муносабатида учта ҳақиқий илдизга ёки битта ҳақиқий, иккита ўзаро қўшма комплекс илдизларга эга бўлади. Стационар ечимларнинг турғунлигини текшириш эса 2-ҳолдагидек бажарилади.

4. Тизимда параметрик ва ультрагармоник резонанслар содир бўлган ҳол. Бу иккала ҳолда ўрталашган тизим

$$\begin{cases} \dot{a} = \gamma в - \alpha\left(a^2 + в^2\right)в - \delta a + \sigma в, \\ \dot{в} = -\gamma a + \alpha\left(a^2 + в^2\right)a - \delta в + \sigma a + \eta \end{cases}$$

кўринишга эга бўлади. Стационар тебранишларнинг амплитудаси ва фазолари

$$\alpha^2\left(4\delta^2 - \eta^2\right)r^4 - \left(8\alpha\gamma\delta^2 - 2\alpha\gamma\eta^2 - 2\alpha\sigma\eta^2\right)r^2 +$$

$$+\left(4\gamma^2\delta^2 - \eta^2\delta^2 - \eta^2\sigma^2 - \eta^2\gamma^2 - 2\sigma\gamma\eta^2\right) = 0. \qquad (7.32)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\gamma - \alpha r^2 + \sigma}{\delta}$$

тенгламалар ёрдамида аниқланади. (7.32) тизимнинг биринчи тенгламаси (7.27) тизим 1-тенгламасидан фақатгина коэффициентлари билан фарқ қилади. Шунинг учун стационар ечимларнинг тургунлик шартларини ўрнатиш 2-ҳолдагидек бажарилади.

5. Тизимда фақат субгармоник резонанс содир бўлган ҳол. Бу ҳолда ўрталанган тизимнинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} \dot a = \gamma \text{в} - \alpha\left(a^2 + \text{в}^2\right)\text{в} - \delta a + 2\lambda a\text{в}, \\ \dot{\text{в}} = -\gamma a + \alpha\left(a^2 + \text{в}^2\right)a - \delta \text{в} + \lambda\left(a^2 - \text{в}^2\right). \end{cases}$$

Бу тизимнинг стационар ечимлари

$$\begin{cases} \gamma \text{в} - \alpha\left(a^2 + \text{в}^2\right)\text{в} - \delta a + 2\lambda a\text{в} = 0, \\ -\gamma a + \alpha\left(a^2 + \text{в}^2\right)a - \delta \text{в} + \lambda\left(a^2 - \text{в}^2\right) = 0 \end{cases} \tag{7.33}$$

тизим ёрдамида топилади. Стационар тебранишларнинг амплитуда ва фазаларини аниқлаш учун (7.33) да (7.23) алмаштиришларни бажариб, r ва φ ни аниқловчи тенгламаларни топамиз:

$$\begin{cases} \gamma \sin\varphi - \alpha r^2 \sin\varphi - \delta\cos\varphi + 2\lambda r\sin\varphi\cos\varphi = 0, \\ -\gamma\cos\varphi + \alpha r^2\cos\varphi - \delta\sin\varphi + \lambda r(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 0 \end{cases}$$

ёки

$$\begin{cases} \alpha r^2 + \lambda\left(4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\right)r - \gamma = 0, \\ 4\lambda r\sin^3\varphi - 3\lambda r\sin\varphi + \delta = 0 \end{cases} \tag{7.34}$$

(7.34) тизимнинг 2-тенгламаси Sinφ га нисбатан кубик тенгламадир. Қулайлик учун уни [12]

$$y^3 + 3my + 2n = 0 \tag{7.35}$$

кўринишда ёзайлик. Бу ерда $m = -\frac{\lambda r}{4\lambda r} = -\frac{1}{4}$, $n = \frac{\delta}{8\lambda r}$, $\sin\varphi = y$ белгилашларни киритдик. Агар $D = m^3 + n^2 > 0$ бўлса, у ҳолда (7.35) тенгла ма ягона $y = \sqrt[3]{-n+\sqrt{D}} + \sqrt[3]{-n-\sqrt{D}}$ ҳақиқий илдизга эга бўлади. Натижада $\cos\varphi$ нинг r орқали ифодаланган ифодасини (7.34) тизимнинг 1-тенгламасига қўйиб, r га нисбатан квадрат тенглама оламиз. Агар (7.34) тизим ечимларини r_j ва $\varphi_j (j=1,2)$ орқали белгиласак, олинган ўрталашган тизимнинг мувозанат ҳолатлари $a_j = r_j\cos\varphi_j, \text{в}_j = r_j\sin\varphi_j, j=1,2$ муносабатлар билан аниқланади. Бу мувозанат ҳолатларнинг турғунлик шартларини ўрнатиш эса 2-ҳолдагидек бажарилади.

6. Тизимда параметрик ва субгармоник резонанслар содир бўлган ҳол. Бу иккала ҳолда ўрталашган тизим

$$\dot{a} = \gamma \text{в} - \alpha\left(a^2 + \text{в}^2\right)\text{в} - \delta a + \sigma \text{в} + 2\lambda a \text{в},$$

$$\dot{\text{в}} = -\gamma a + \alpha\left(a^2 + \text{в}^2\right)a - \delta \text{в} - \sigma a + \lambda\left(a^2 - \text{в}^2\right) \quad (7.36)$$

кўринишига эга бўлади.

(7.36) тизимнинг стационар ечимлари

$$\begin{cases} \gamma \text{в} - \alpha\left(a^2 + \text{в}^2\right)\text{в} - \delta a + \sigma \text{в} + 2\lambda a \text{в} = 0, \\ -\gamma a + \alpha\left(a^2 + \text{в}^2\right)a - \delta \text{в} - \sigma a + \lambda\left(a^2 - \text{в}^2\right) = 0 \end{cases}$$

тенгламаларни ечиб топилади. (7.37) тизимда (7.23) алмаштиришларни бажариб, r ва φ ни аниқловчи қуйидаги тенгламаларни топамиз:

$$\begin{cases} \alpha r^3 + \lambda\left(4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\right)r^2 - \gamma = 0, \\ \lambda(3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi)r + 2\sin\cos\varphi - \delta = 0 \end{cases}$$

Стационар ечимларнинг турғунлиги эса 5-ҳолдагидек текширилади.

V қисмга доир машқ ва саволлар

1. Агар маятникка $P(t) = P_0 e^{\alpha t} \cos \gamma t$ кўринишдаги ташқи қўзғатувчи куч таъсир қилаётган бўлса, унинг мажбурий тебранишларини аниқланг /чизиқли қаршилик ҳисобга олинган ва олинмаган ҳоллар алоҳида қаралсин/.

Жавоб: 1) $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \dfrac{P_0}{m} e^{\alpha t + i\gamma t}$;

$$2) \quad \ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{P_0}{m} e^{\alpha t + i\gamma t}$$

тенглама интегралланади.

2. Агар маятникка $P(t) = P_0 e^{-\alpha t}$ кўринишдаги ташқи куч таъсир қилса, унинг мажбурий тебранишини топинг /чизиқли қаршилик эътиборга олинган ва олинмаган ҳоллар алоҳида қаралсин/.

Жавоб: 1) $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \dfrac{P_0}{m} e^{-\alpha t}$;

$$2) \ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{P_0}{m} e^{-\alpha t}$$

тенгламалар интегралланади.

3. Агар маятникка $P(t) = P_0 e^{-\alpha t} \cos\beta t$ кўринишдаги қўзғатувчи куч таъсир қилаётган бўлса, унинг мажбурий тебранишларини топинг.

Жавоб: 1) $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \dfrac{P_0}{m} e^{(-\alpha + i\beta)t}$;

$$2) \quad \ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{P_0}{m} e^{(-\alpha + i\beta)t}$$

тенгламалар интегралланади.

4. Маятник мажбурий тебранишларининг дифференциал тенгламаси ва унинг умумий ечими қандай кўринишга эга бўлади? Чизиқли қаршилик ҳисобга олинган ва олинмаган ҳолларни таққосланг.

5. Маятник мажбурий тебранишларини ёзувчи дифференциал тенглама умумий ечимининг ҳар бир қўшилувчиси қандай тебранишларни ифодалашини таҳлил қилинг.

6. Чизиқли қаршилик маятник мажбурий тебранишларининг амплитудасига, фазасига, частотаси ва даврига қандай таъсир қилишини таҳлил қилинг.

7. Қандай шартларда і-тартибли резонанс содир бўлади? Қандай частоталар критик частоталар деб аталади?

8. Чизиқли қаршилик таъсири давомида содир бўлган резонанс ҳолда мажбурий тебранишларнинг тенгламаси қандай кўринишга эга бўлади?

9. Маятник мажбурий тебранишлари амплитудасининг максимал қиймати қандай формула бўйича ҳисобланади?

10. Сўниш коэффициентининг қандай қийматида маятник мажбурий тебранишлари амплитудасининг максимал қиймати мавжуд бўлмайди?

11. Муҳит қаршилигини ҳисобга олмагандаги содир бўладиган резонанс ҳолда маятник мажбурий тебранишларининг амплитудаси қандай қонун бўйича ўзгаради?

12. Қандай шартда «тепкили тебраниш» ҳодисаси содир бўлади?

13. Чизиқли қаршилик "тепкили тебранишга" қандай таъсир кўрсатади? Бундай тебранишларнинг графиги қандай бўлади?

14. Резонансга яқин соҳаларда маятник мажбурий стационар тебранишларининг амплитудаси, частотаси, фаза ва даври қандай аниқланади? Бундай тебранишларнинг тенгламаси қандай бўлади?

15. Маятникка импульсли оний куч таъсир қилганда унинг мажбурий тебранишларининг тенгламаси қандай бўлади?

16. Маятникка тўсатдан қўйилган доимий кучнинг динамик таъсири қандай содир бўлади?

17. Маятникнинг елкаси l узунликдаги чўзилмайдиган ипдан иборат. Агар маятникнинг маҳкамланган нуқтаси горизонтал тўғри чизиқ бўйича $\xi = \xi(t)$ қонун билан ҳаракатланса, унинг ҳаракатини ифодаловчи дифференциал тенгламани тузинг.

Жавоб:

$$\varphi = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt - \frac{\xi(t)}{l} + \frac{k}{l}\int_0^t \xi(\tau)\sin k(t-\tau)d\tau, \quad k = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

18. Кичик параметр методи ёрдамида қуйидаги чизиқли бўлмаган дифференциал тенгламаларнинг даврий ечимларини тақрибий топинг [12]:

1. $\ddot{x} + x - x^2 = 0;$
2. $\ddot{x} + x + x^3 = 0;$
3. $\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x};$
4. $\ddot{x} + x = \varepsilon(\dot{x} - \dot{x}^3);$
5. $\ddot{x} + 3x = 2\sin t + \varepsilon x^2;$
6. $\ddot{x} + 3x + x^3 = 2\varepsilon \cos t;$
7. $\ddot{x} + 5x = \cos 2t + \varepsilon x^2;$
8. $\ddot{x} + x^3 = 1 + \varepsilon \sin t;$
9. $\ddot{x} + \sin x = \varepsilon \sin 2t;$
10. $\ddot{x} + x = \sin 3t - \sin 2t + \varepsilon x^3;$
11. $\ddot{x} + x = 6\varepsilon \sin t - x^3.$

АДАБИЁТЛАР

1. К.В. Бутенин и другие. Курс теоретической механики. Т.I и II. Москва, «Наука», 1988 г.

2. С.М. Тарг. Краткий курс теоретической механики. Москва, «Наука», 1970 г.

3. В.В.Добронравов и другие. Курс теоретической механики. Москва, «Высшая школа»,1974 г.

4. А.А. Яблонский, В.М.Никифорова. Курс теоретической маханики. Ч.1. Москва, «Высшая школа», 1971 г.

5. А.А. Яблонской. Курс теоретической механики, Ч. II. Москва, «Высшая школа», 1971 г.

6. И.В. Мещерский. Сборник задач по теоретической механике. Москва, «Наука», 1986 г.

7. Сборник задач для курсовых работ по теоретической механике, учебное пособие для вузов (под. ред. проф. А.А.Аблонского). Москва, «Высшая школа», 1978 г.

8. Сборник задач для курсовых работ по теоретической механике, учебное пособие для вузов (под. ред проф. А.А.Аблонского). Москва, «Высшая школа», 1985 г.

9. Н. Шоҳайдарова ва бошқалар. Назарий механика. Тошкент, «Ўқитувчи», 1991 й.

10. Н.Н.Никитин. Курс теоретической механики. Москва, «Высшая школа», 1990 г.

11. М.И.Бать и другие. Теоретическая механика в примерах и задачах. I и II. Москва, «Наука», 1990-1991 г.г.

12. П. Қурбонов. Математик маятник ва параметрик тебранишлар. Тошкент «Ўқитувчи», 1990 й.

13. Н.Н. Боголюбов, Ю.А.Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва, «Физматгиз», 1974 г.

14. А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. Теория колебания. М., Гостехиздат, 1956 г.

15. Л.Э. Эльсгольц. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., «Наука», 1965 г.

16. Л.Д.Ландау, Е.И. Лифшиц. Механика. М., «Наука», 1978 г.

17. Ж. Зоиров, Б.Аҳмадхўжаев. Назарий механика. Тошкент «Фан» 1998й.

18. М.Яхёев, Ў.Мўминов. Назарий механика. Тошкент «Фан», 1990 й.

МУНДАРИЖА

ПАРДА ҚУРБОНОВ, ШЕРОЗИ МИСИРОВ, ЧОРИ САИДОВ

НАЗАРИЙ МЕХАНИКАДАН САВОЛЛАР ВА МАСАЛАЛАР ЕЧИШ

«Fan va texnologiya» нашриёти – Тошкент – 2004

Муҳаррир Ж. Тўрахонов
Техник муҳаррир А. Мойдинов
Мусаҳҳиҳа Н. Мадиёрова

Босишга рухсат этилди 02.04.2004 й., Бичими 60x84 1/16.
Times гарнитураси. Босма табоғи 19,5. Шартли босма табоғи 18,52.
Нусхаси 1000. Нархи шартнома асосида. Буюртма 44.

«Fan va texnologiya» нашриёти. Тошкент, Олмазор кўчаси, 171. № 10-04.

«Фан ва технологиялар маркази»нинг босмахонасида чоп этилди.
Тошкент, Олмазор кўчаси, 171.

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА
МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ТЕРМИЗ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

П.С.ҚУРБОНОВ, Ш.Ч.МИСИРОВ, Ч.С.САИДОВ

НАЗАРИЙ МЕХАНИКАДАН САВОЛЛАР ВА МАСАЛАЛАР ЕЧИШ

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги томонидан ўқув қўлланма сифатида тавсия этилган

ТОШКЕНТ – «FAN VA TEXNOLOGIYA» – 2004